



La corrélation des événements de défaut dans le modèle de la copule gaussienne

Présentation du Mémoire 
27 septembre 2013

Marion STUHLIK

Sommaire

- 1. Le CDPC, un « assureur » pas comme les autres**
- 2. Résultats des recherches menées dans le mémoire**
- 3. La modélisation de la corrélation de défaut dans l'outil CDOROM de MOODY'S**
- 4. ANNEXES**

Problématique du mémoire

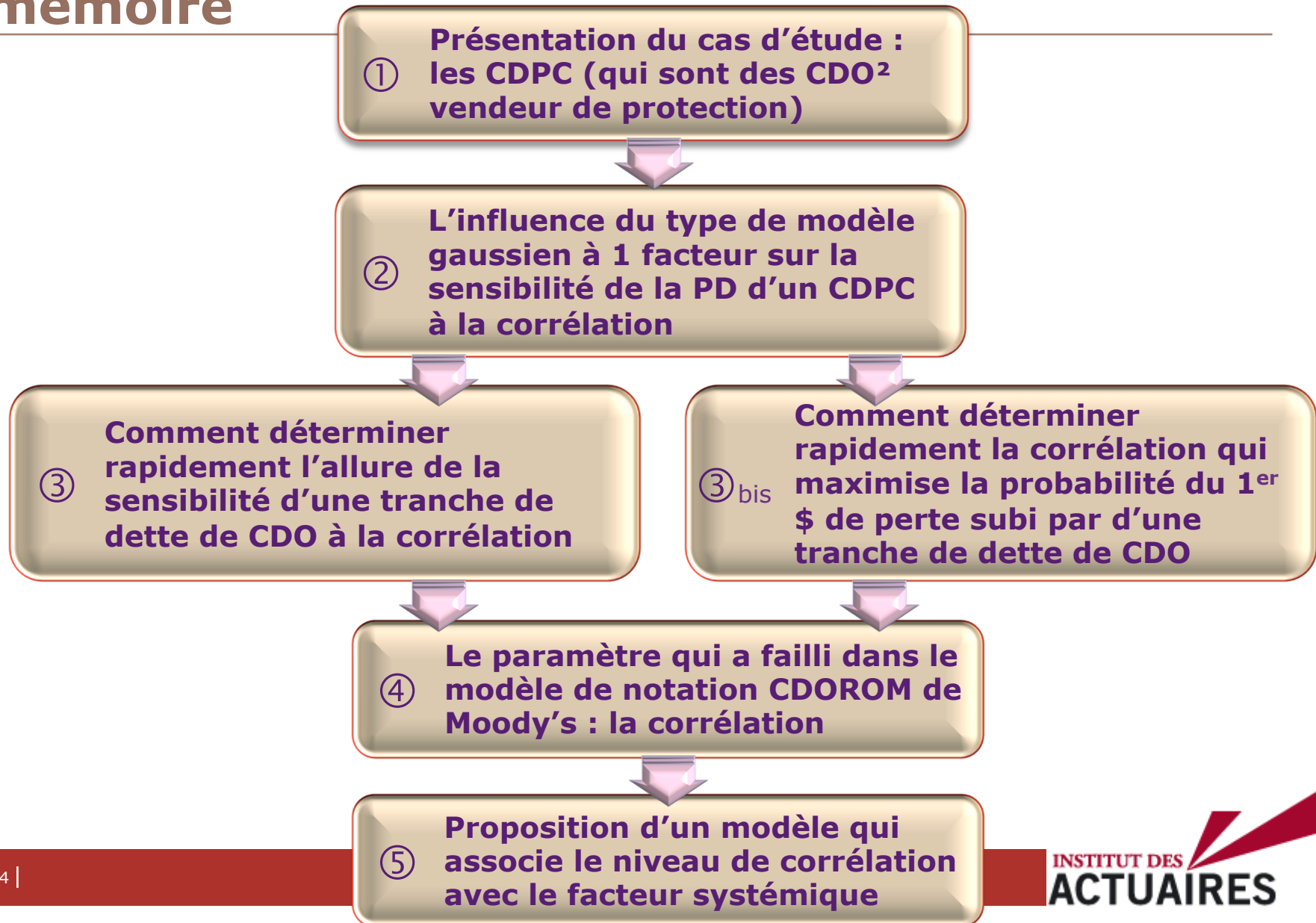
1. La crise des subprimes a révélé la défaillance des Agences de notation à appréhender le risque de crédit des titres de dettes émis par les véhicules de titrisation (CDO ou CDO de CDO).
2. Les modèles utilisés par ces Agences sont conçus à partir du modèle à copule gaussienne avec 2 paramètres d'entrée essentiels :

l'estimation du
risque de défaut de
l'actif du véhicule

la corrélation des
événements de
défaut

3. Quel paramètre influence le plus sur l'estimation du risque des dettes ?
4. Comment mesurer la corrélation qui maximise la probabilité qu'une dette, quelque soit son degré de subordination, commence à perdre son 1^{er} dollar ?

Démarche de la réflexion, structure du mémoire

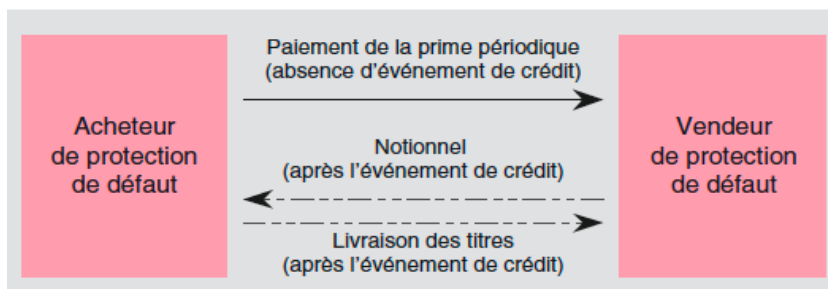


1 Le CDPC, un « assureur » pas comme les autres

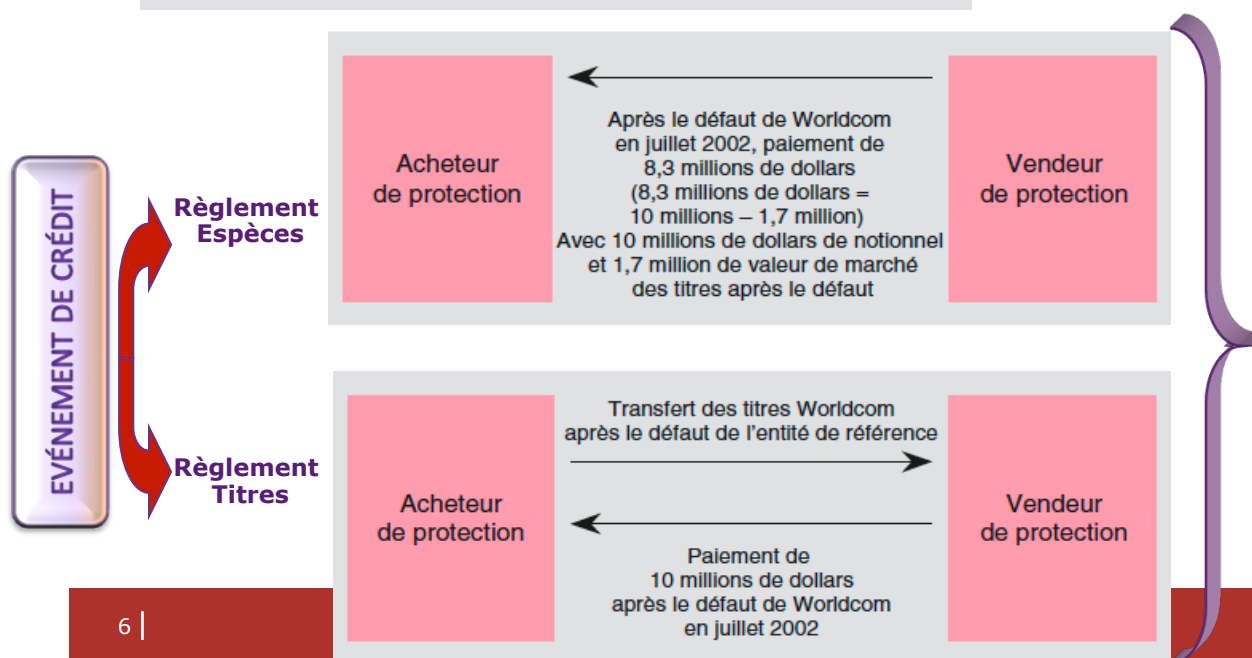
Fonctionnement du CDS

Le Credit-Default Swap est :

- un type d'assurance contre le défaut d'une dette obligataire
- contracté à titre privé où le vendeur du swap joue le rôle d'assureur et l'acheteur, d'assuré.



Pour bénéficier de ce service, l'acheteur du swap verse au vendeur une prime dont le montant est déterminé par le marché en fonction du risque de perte tel qu'il est alors perçu.



Le vendeur remboursera à l'acheteur les pertes que ce dernier viendrait à subir du fait de la défaillance d'un émetteur de dette.

Histoire du CDS

- Créé par JPMorgan en 1994



① En mars 1989, Le naufrage de L' Exxon Valdez sur les côtes de l' Alaska provoquant le déversement de 40 000 tonnes de pétrole brut, sur près de 2000 km de côtes

② La justice de l' Alaska condamne Exxon Mobil au versement d' une indemnité de 5 Mds\$



③ Exxon se tourne vers JP Morgan, afin d' obtenir une ligne de crédit de 4,8 Mds\$.

④ Une telle ligne de crédit n' est pas sans effet sur le bilan de la banque, touche directement sa rentabilité et augmente son coût de refinancement



⑤ Blythe Master crée le CDS, une **transaction non financée**, pour prémunir JPMorgan contre le risque de défaut d' Exxon et la perte d' une partie de cette ligne de crédit

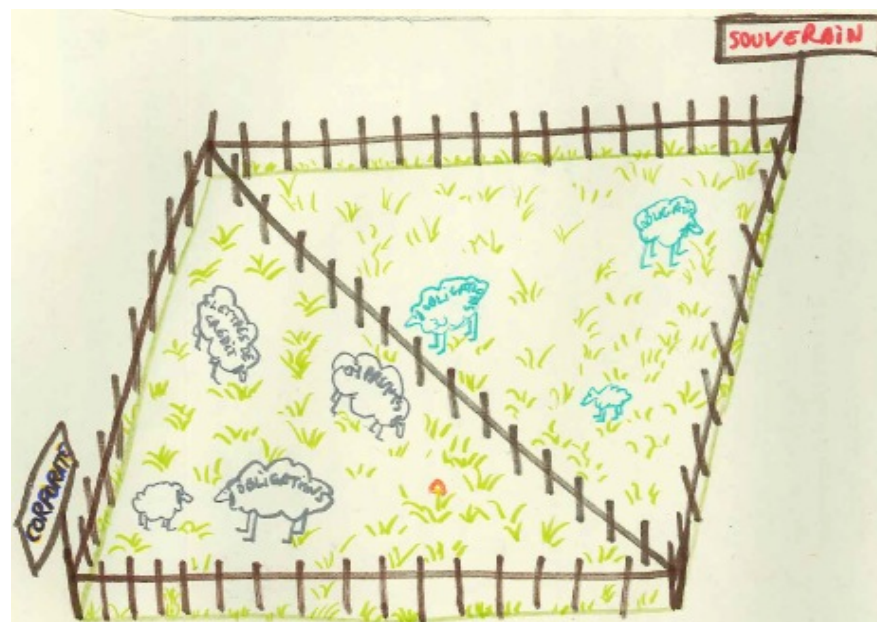
Evénements déclencheurs de la partie contingente du CDS

- Deux éléments essentiels du contrat ont été précisément définis

par l'ISDA :

l'événement déclencheur
de la partie contingente du swap

le périmètre des dettes éligibles
à cet événement déclencheur



Valeur et Comptabilisation du CDS

- Les valorisations en « mark to market » (MtM), sont à l'origine des 15 milliards de dollars de dépréciations passées par AIG au 1^{er} semestre 2008.
- Le MtM est la valeur de marché de l'instrument financier.
- Le MtM du CDS est >0 pour le vendeur de protection si la prime est $>$ l'estimation de perte moyenne (i.e. au risque d'indemnisation).
- Le MtM du CDS est <0 pour le vendeur de protection si la prime est $<$ l'estimation de perte moyenne.

Le CDS est une garantie financière

Le CDS est négocié dans le cadre d'une activité de trading

En French Gaap : les primes sont considérées comme des commissions. Elles ne sont donc pas provisionnées

En French Gaap et IFRS : en juste valeur

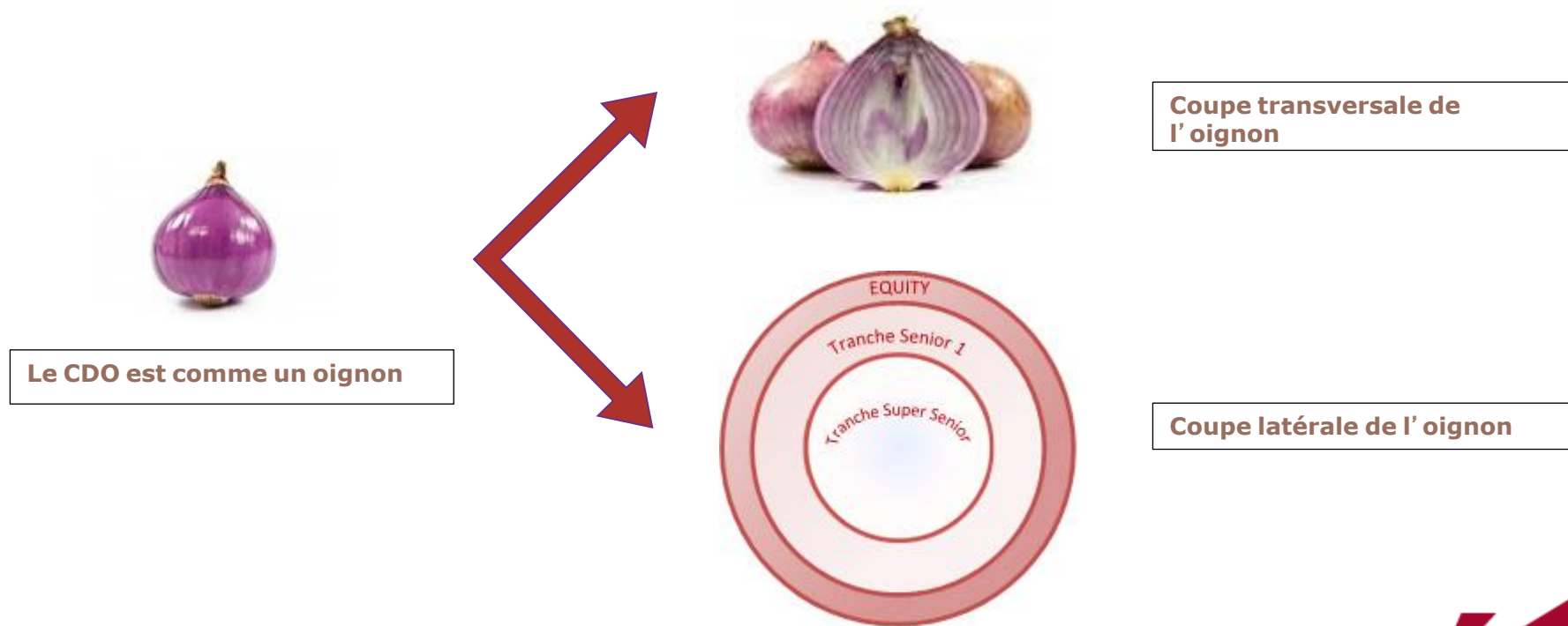
2 Du CDS au CDO synthétique

Qu'est-ce qu'un CDO ?

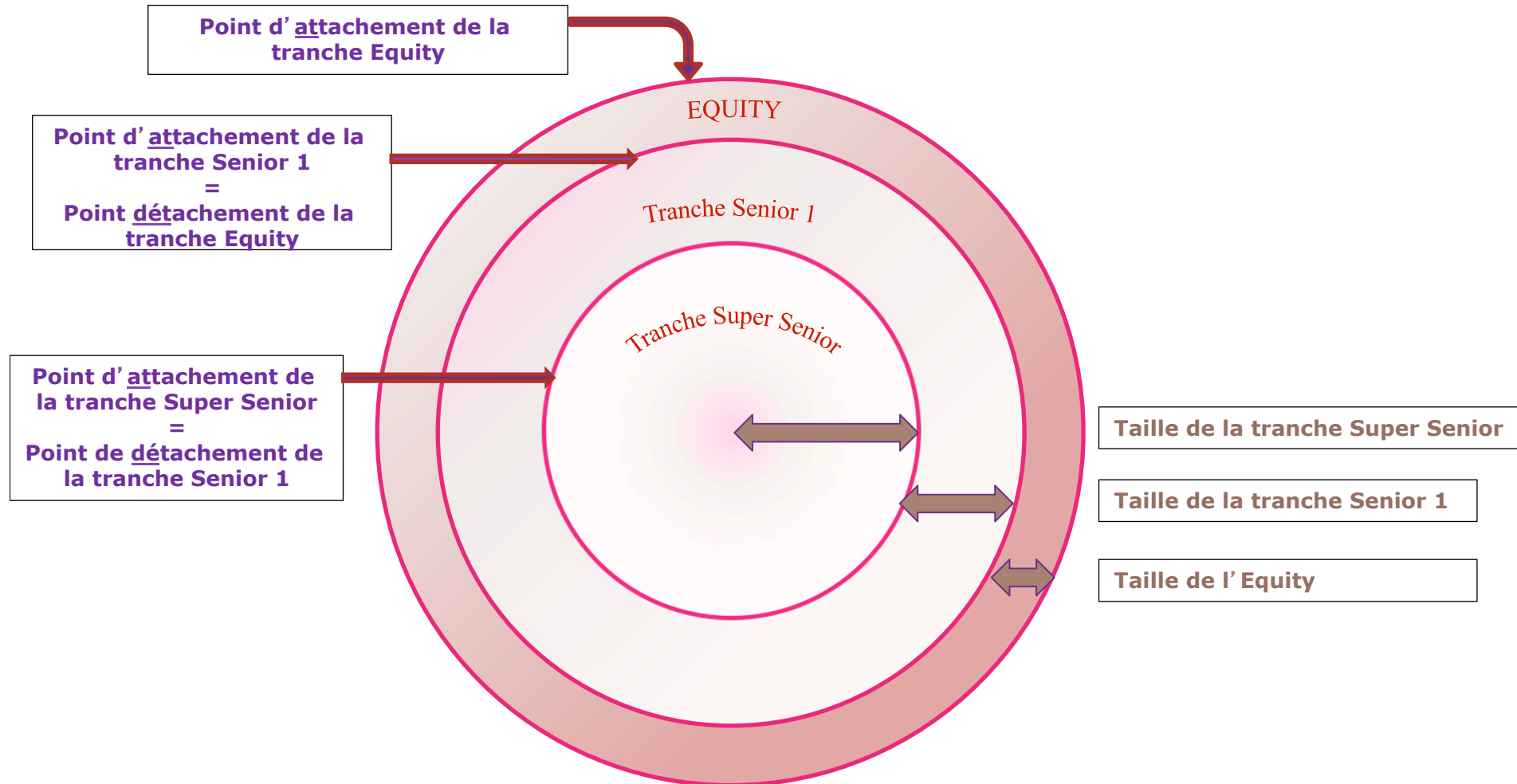
- **Définition :**

- **CDO = Collateralized Debt Obligation**
- **Littéralement Obligation adossée à des dettes**
- **Entité juridique dont**
 - le portefeuille sous-jacent (i.e. l'actif) est composé de titres et/ou de prêts
 - Le financement de ce sous-jacent (i.e. le passif) est composé de titres plus ou moins subordonnés à d'autres

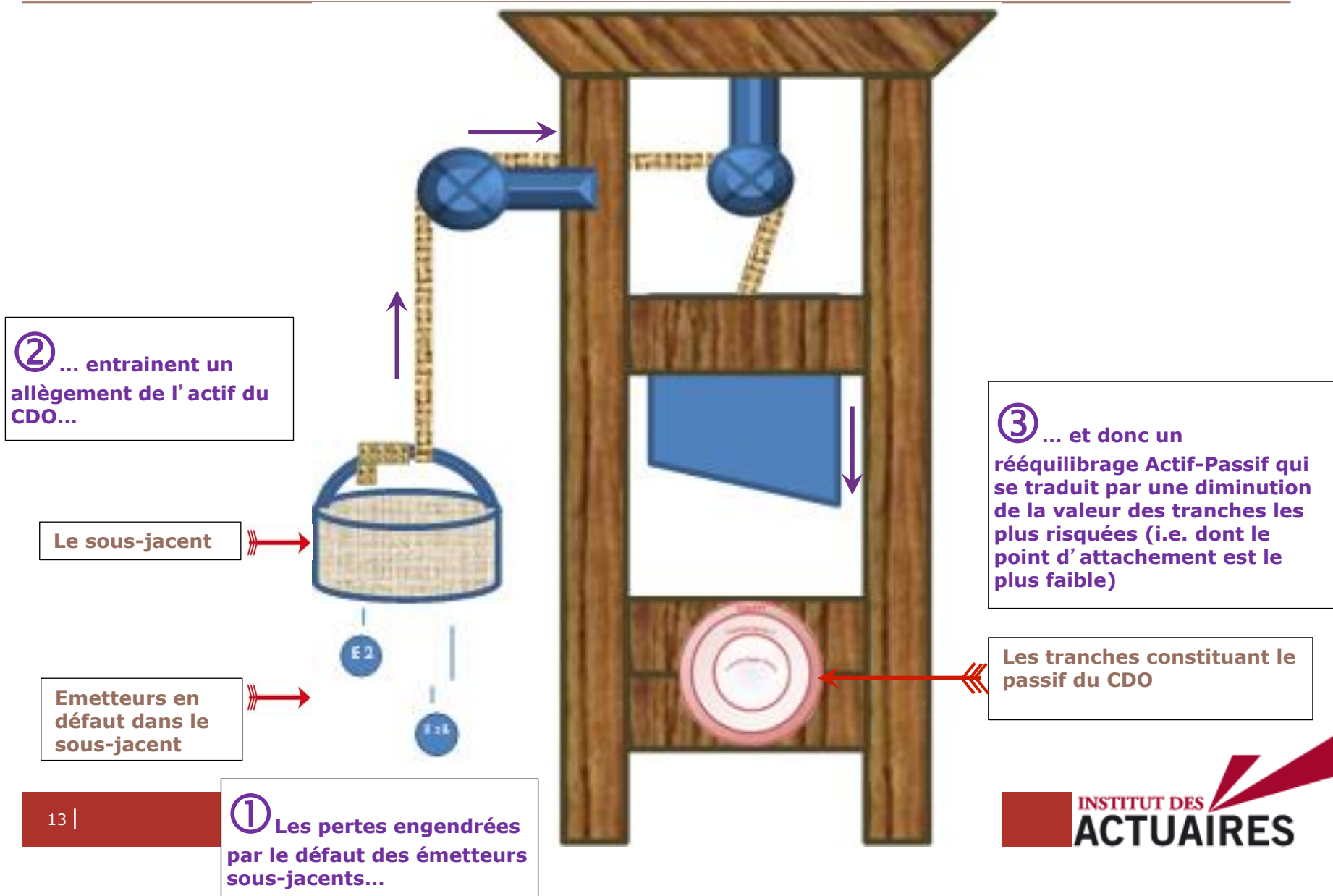
- **Structure du CDO :**



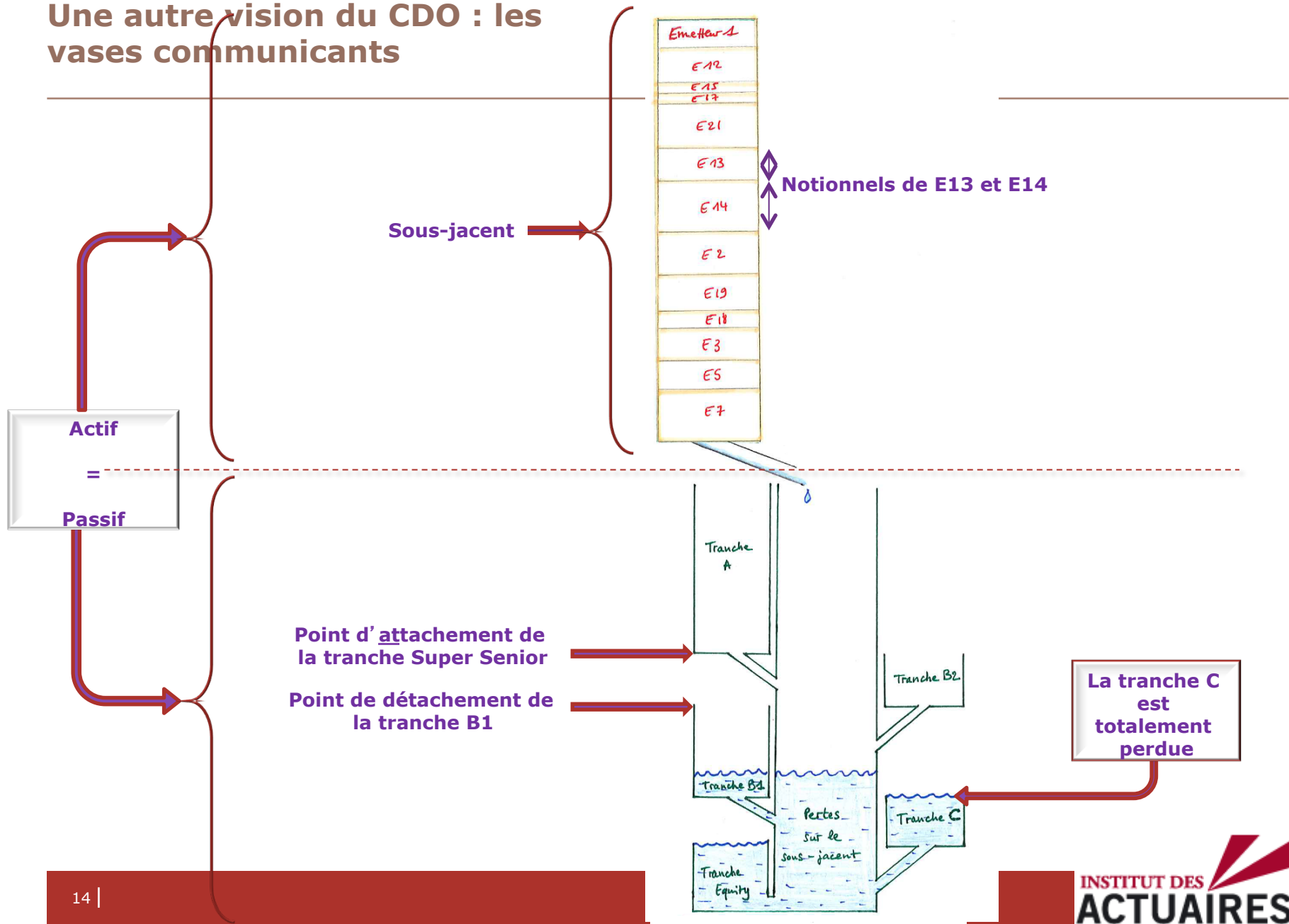
Le tranching d'un CDO



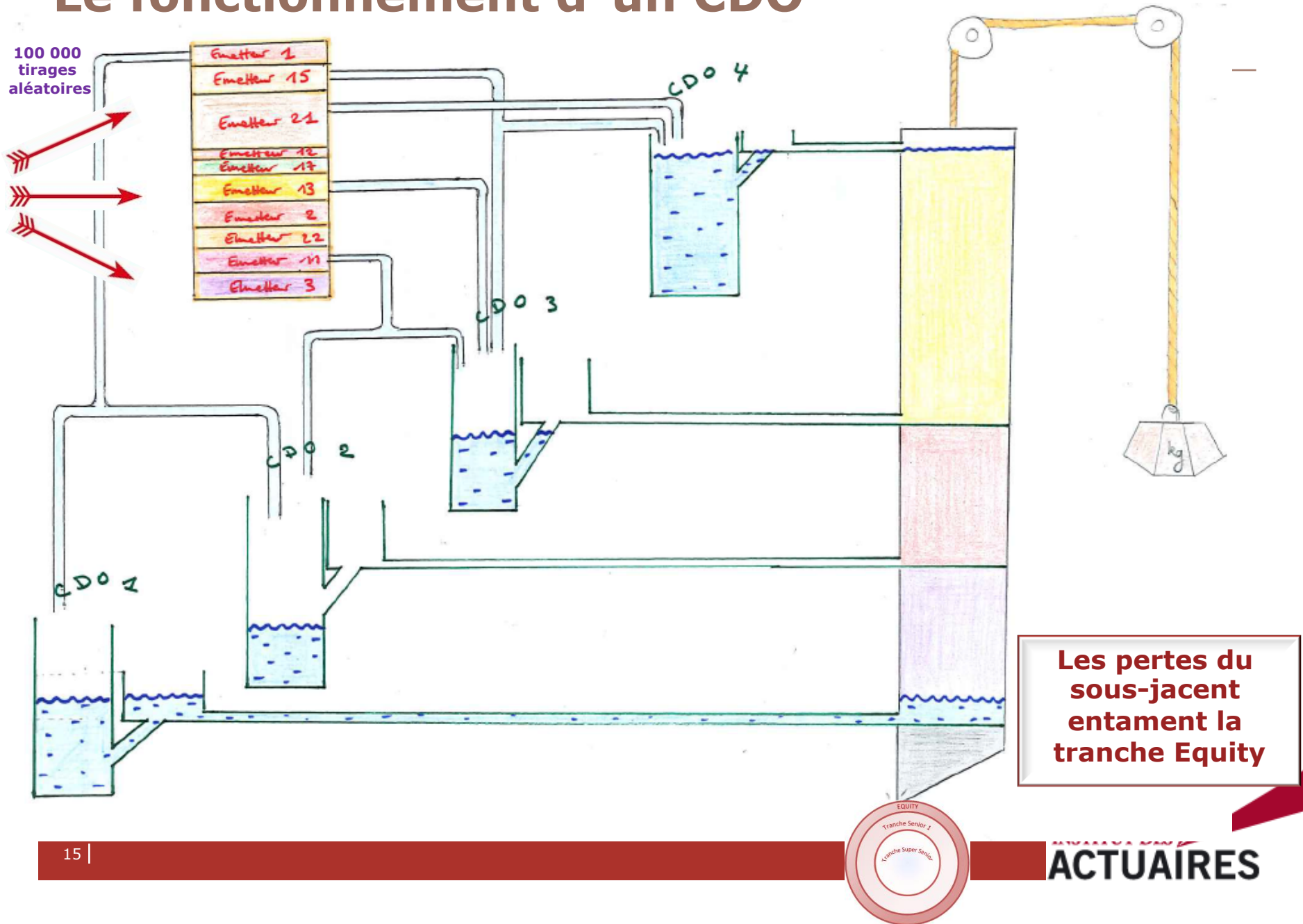
Fonctionnement du CDO



Une autre vision du CDO : les vases communicants



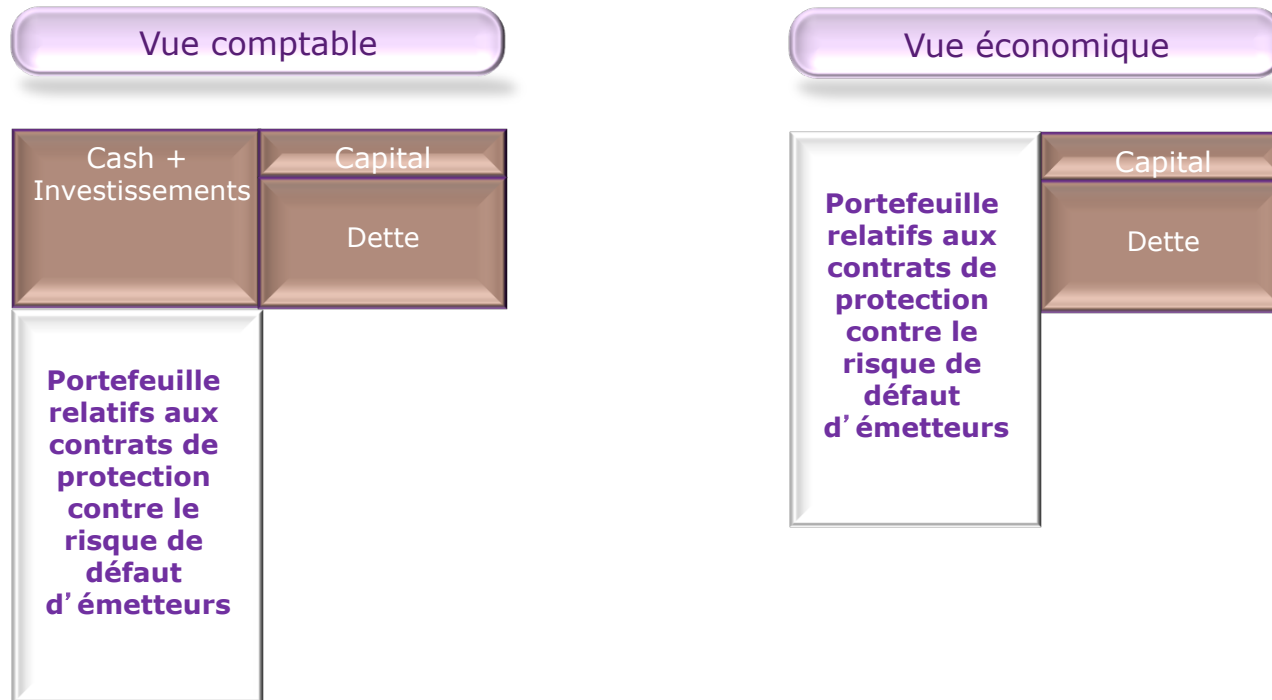
Le fonctionnement d'un CDO²



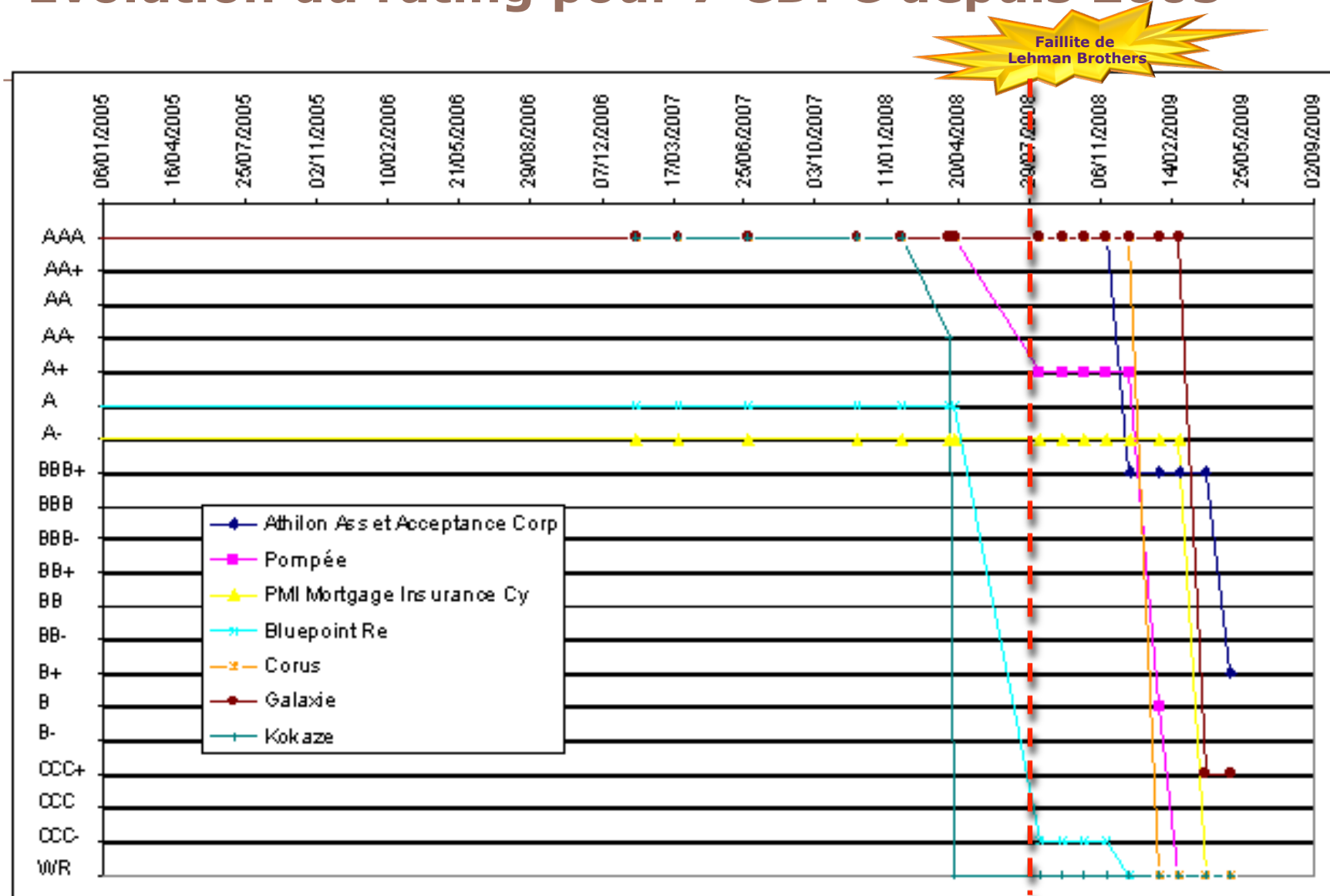
Caractéristiques générales d'un CDPC

- **Vend de la protection** via la mise en place de CDS single name ou sur des tranches bespoke, de CDO, de CDO synthétiques
- Est un CDO²
- N'a pas l'obligation de mettre du collatéral en face de ses investissements et donc n'est pas obligé d'évaluer ses positions ni de les dénouer en cas de crise
- Dispose d'un capital model qui vérifie périodiquement l'adéquation du capital avec le service des dettes en simulant des pertes dans le temps sur le portefeuille de CDS
- Peut émettre des dettes pour faire face aux indemnisations sur CDS ainsi qu'aux pertes projetées
- Est hautement leveragé (jusqu' à 50x)
- Peut distribuer des dividendes
- La liste des CDPC est difficile à déterminer :
 - Des CDPC publiques recensées par les agences (Athilon, Cournot, Ghisallo, Primus...)
 - Des CDPC privées : ACA – Kiawah
 - Des Mortgage Insurers : PMI,...
- Fait défaut lorsque les pertes (indemnisations) dépassent le capital

Structures économique et comptable d'un CDPC



Evolution du rating pour 7 CDPC depuis 2005



Encours CDPC des banques françaises en 2008

<i>Local currency in millions</i>	Gross notional amount insured	Fair value of protection before collective provision	Collective Provision	Fair value of protection after collective provision	Comments/Notes
Credit Suisse	NA	NA	NA	NA	No comment
Deutsche Bank	NA	NA	NA	NA	No comment
UBS	NA	\$500m	NA	NA	3 main exposures
BNP Paribas	NA	NA	NA	NA	Exposure to 5 CDPCs on single names credits, for super senior tranches of corporate CDOs, with less than 5% for mezzanine tranches. BNP Paribas also uses macro hedges.
Credit Agricole	959	121	NA	NA	Protection on CDO with subprime underlyings. Exposures included in the monolines counterparty exposures.
Natixis	9,800	1,300	22	NA	Protection for senior AAA tranches with 100% corporate investment grade underlying assets.
Société Générale	NA	NA	55	NA	Exposure to one CDPC only , Primus, which was recently downgraded to AA. Protection for non-US residential mortgage assets (only 2% of the portfolio)

Source : *European wholesale banks, CDPCs – another 'curve ball' for European Banks structured credit risk?*
J.P. Morgan, 27 November 2008

2 Résultats des recherches menées dans le mémoire

7 types de modélisation de la copule gaussienne implémentés et testés sur 4 CDPC

- Modèles fondés sur la décomposition du temps

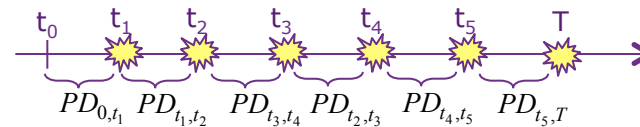
Modèle monopériode

Simulations de 60000 trajectoires sur 1 seule période : on simule le défaut de chaque émetteur avec des PD fonctions de leur rating, à maturité égale à la maturité du CDPC



Modèle multipériodes

Simulations de 60000 trajectoires sur plusieurs sous-périodes : on simule le défaut de chaque émetteur sur la 1ère sous période $[0, t_1]$. Si l'émetteur n'a pas fait défaut, son défaut est simulé pour la seconde période $[0, t_2]$, etc.



Avec des probabilités actuarielles :

$$P(m \leq \tau_i \leq t) = PD_{0,t} - PD_{0,m}$$

Avec des probabilités conditionnelles :

$$P(m \leq \tau_i \leq t | \tau_i > m) = \frac{PD_{0,t} - PD_{0,m}}{1 - PD_{0,m}}$$

Modèle à temps de défaut

On simule le temps de défaut de l'émetteur : le défaut est constaté si le temps de défaut est compris en 0 et T.

7 types de modélisation de la copule gaussienne implémentés et testés sur 4 CDPC

⑤

▷ Modèle fondé sur les corrélations intra et inter CDO

Modèle de Vasicek : on considère que la corrélation inter CDOs est égale au taux d'overlap i.e. taux de concentration des émetteurs dans le CDO² : si le CDPC contient N^* tranches et parmi elles, n_i entités distinctes se trouvent dans 2 tranches ou plus du CDPC,

alors,
$$\rho_{\text{inter}} = \frac{\sum_{i=1}^n tr_i}{x \cdot n}$$
 avec : n_i , le nombre de tranches dans lequel l'entité i est présente.

On simule directement le défaut corrélé des tranches sous-jacentes au CDPC avec :

$$PD_{\text{tranche}P} = N \left(\frac{N^{-1}(PD_P) - \sqrt{\rho_{\text{intra}}} Y_P}{\sqrt{1 - \rho_{\text{intra}}}} \right)$$

Modèles fondés sur le risque systémique

⑥

▷ Modèle avec transitions de rating :

Modèle qui associe, à chaque valeur de Z , une corrélation et une matrice de transition

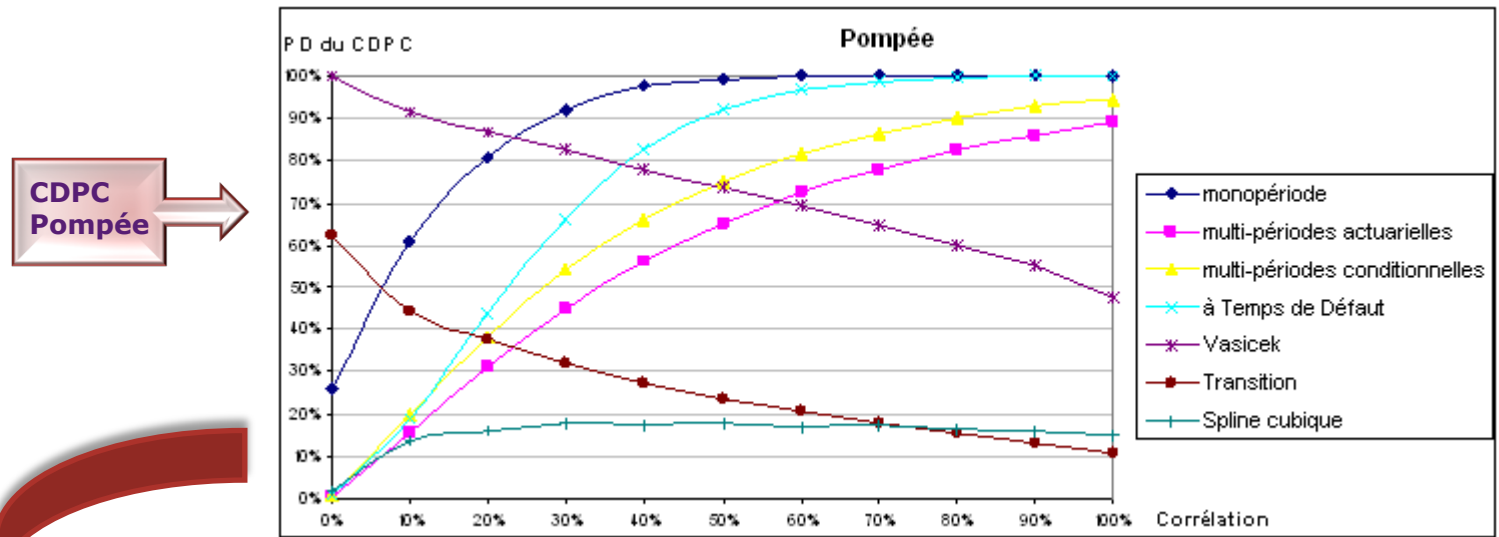
⑦

▷ Modèle qui simule le risque systémique par spline cubique :

On projette aléatoirement les valeurs de Z ainsi que la date de leur survenance, puis on reconstitue les valeurs intermédiaires de Z entre chaque points aléatoires en les liant par une interpolation de type spline cubique

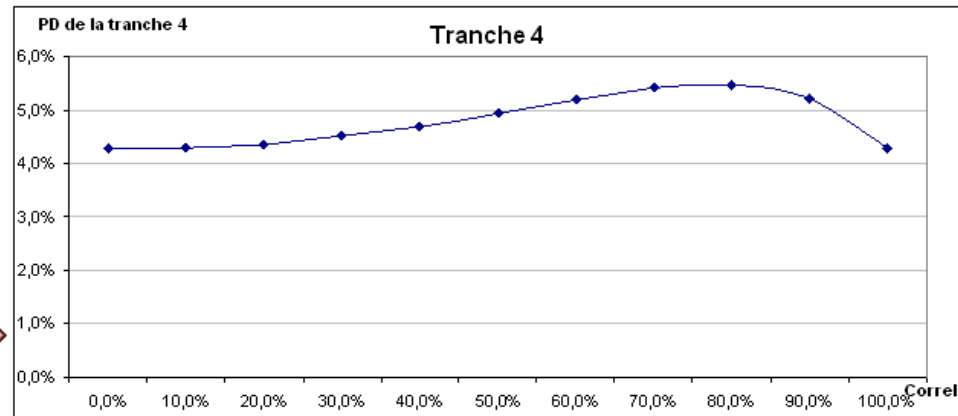
Impact du type de modélisation sur la sensibilité à la corrélation

- La sensibilité de la PD du CDPC et de la tranche CDO à la corrélation diffère en fonction des 7 types de modèle à copule gaussienne :



ce qui pose la question de la sensibilité de la PD d'une tranche CDO à la corrélation :

Tranche de CDO (modèle 1 facteur monopériode) →



Approximation de la PD d'une tranche CDO

- Le point de départ est la probabilité qu'une tranche CDO fasse défaut : on constate que la tranche de dette d'un CDO fait défaut dès le 1er \$ de pertes.
- Il y a pertes dans la tranche lorsque les pertes du sous-jacent dépassent les tailles cumulées des tranches qui lui sont subordonnées.
- On appelle *NbDefmin* le nombre de défauts minimum d'émetteurs dans le sous-jacent qui engendre le 1er \$ de pertes sur la tranche de dette considérée.
- La PD de la tranche s'exprime donc comme :

$$PD_{Tranche_k} = \sum_{i=1}^{NbTraj} p_{Z_i} \cdot P(NbDéfauts \geq NbDef\ min | Z_i)$$

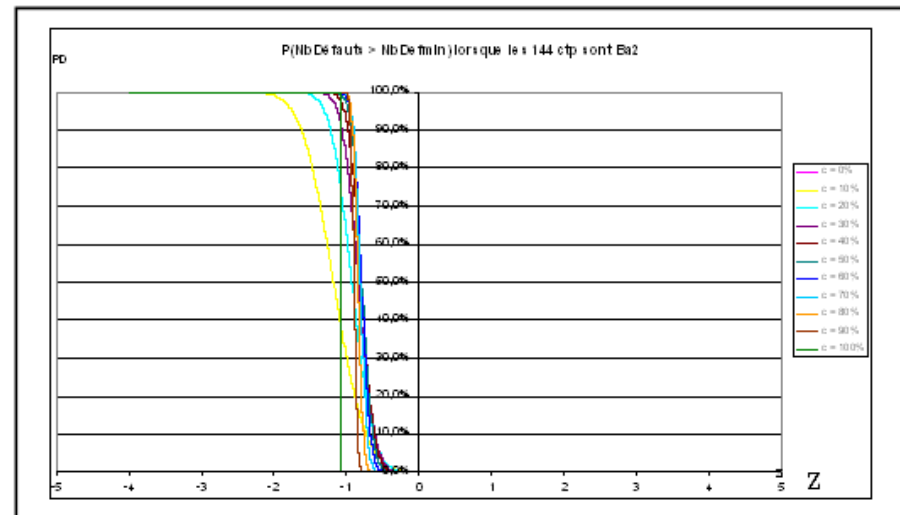
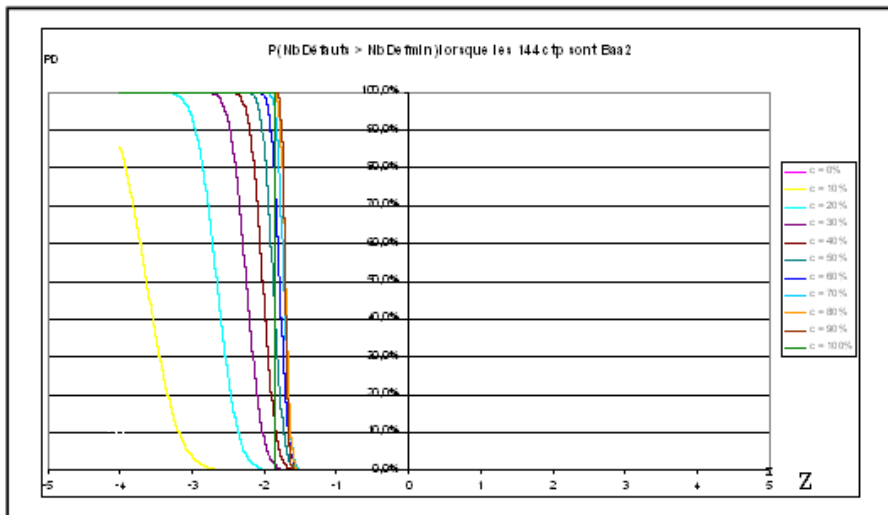
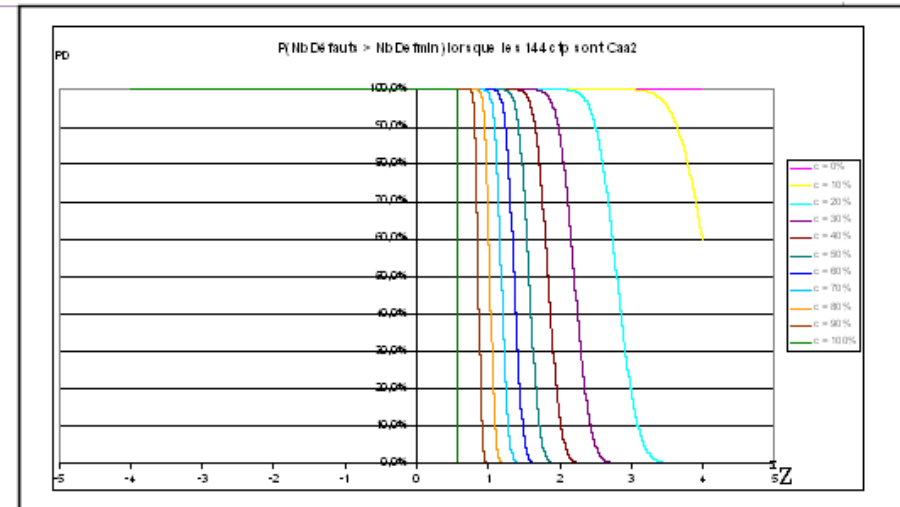
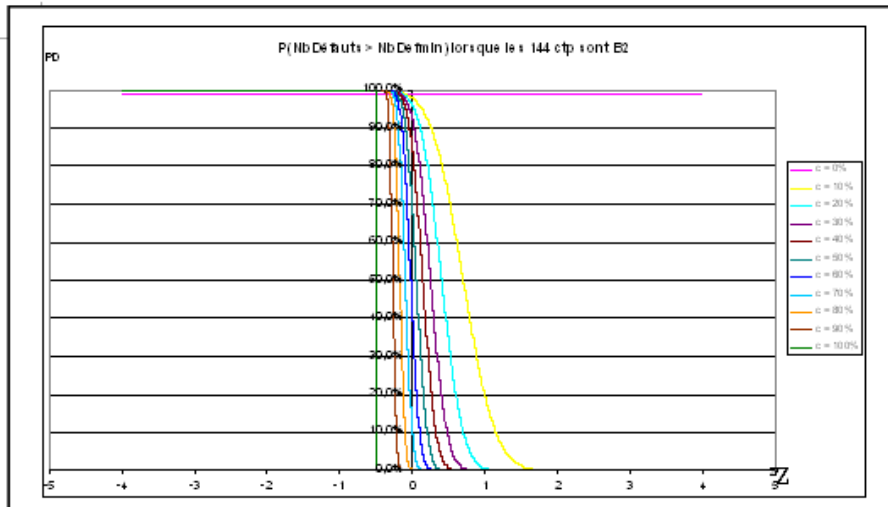
• Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{Z_0} = N(Z_0) \\ p_{Z_i} = N(Z_i) - N(Z_{i-1}) \\ P(NbDéfauts \geq NbDef\ min | Z_i) = \sum_{x=NbDef\ min}^n C_n^x \cdot PD(Z_i)^x \cdot (1 - PD(Z_i))^{n-x} \\ PD(Z_i) = N\left(\frac{N^{-1}(PD_{Cp}) - \sqrt{\rho} \cdot Z_i}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \\ Z_i : \text{La variable aléatoire du risque systémique associée à la trajectoire } i \end{array} \right.$$

← Méthode de calcul paramétrique de la probabilité d'avoir plus de *NbDefmin* défauts dans le sous-jacent

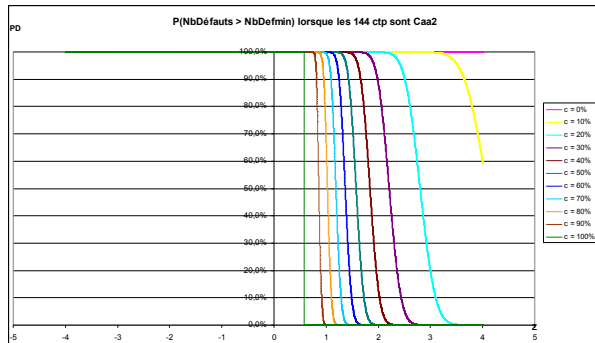
Détermination des bornes de Z

- $P(NbDéfauts \geq NbDef\ min)$ est décroissant de Z
- plus la corrélation est élevée, plus l'intervalle de Z où $P(NbDéfauts \geq NbDef\ min)$ est grand
- plus le rating est bas, plus les valeurs de Z où $P(NbDéfauts \geq NbDef\ min) \in]0;100\%$ augmentent

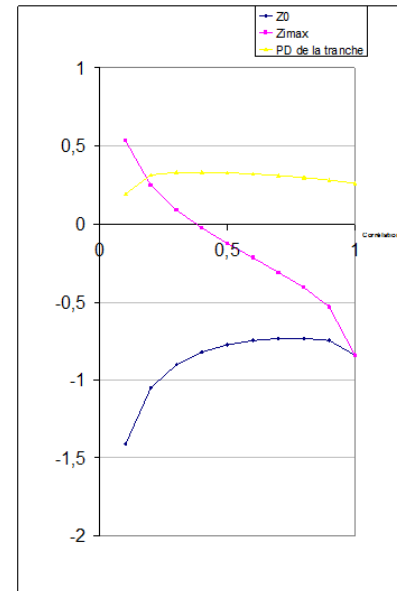


Détermination de la sensibilité d'une tranche à la corrélation

① On détermine les bornes Z_0 et Z_{max}

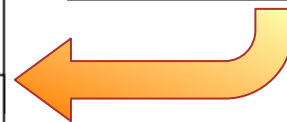


② On s'aperçoit que la sensibilité de la PD d'une tranche CDO à la corrélation est la même que celle de la fonction $\frac{Z_0(\rho) + Z_{max}(\rho)}{2}$



③

Two stacked graphs showing the relationship between correlation and two variables: $(Z_0 + Z_{max})/2$ (orange line with dots) and PD de la tranche (blue line with dots). The top graph's y-axis ranges from -12 to 0. The bottom graph's y-axis ranges from 0.0% to 35.0%. Both graphs show that as correlation increases, the values for both variables increase and then slightly decrease or stabilize.

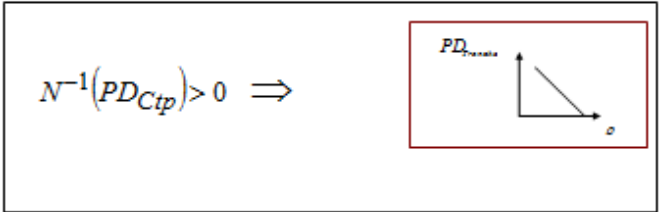
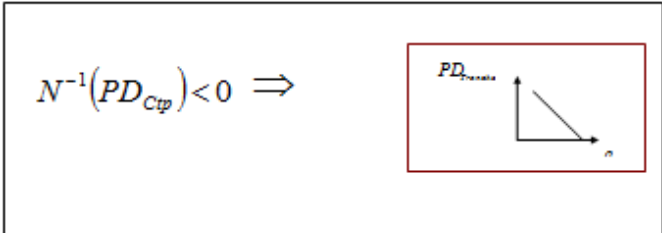


Sensibilité de la tranche Equity à la corrélation

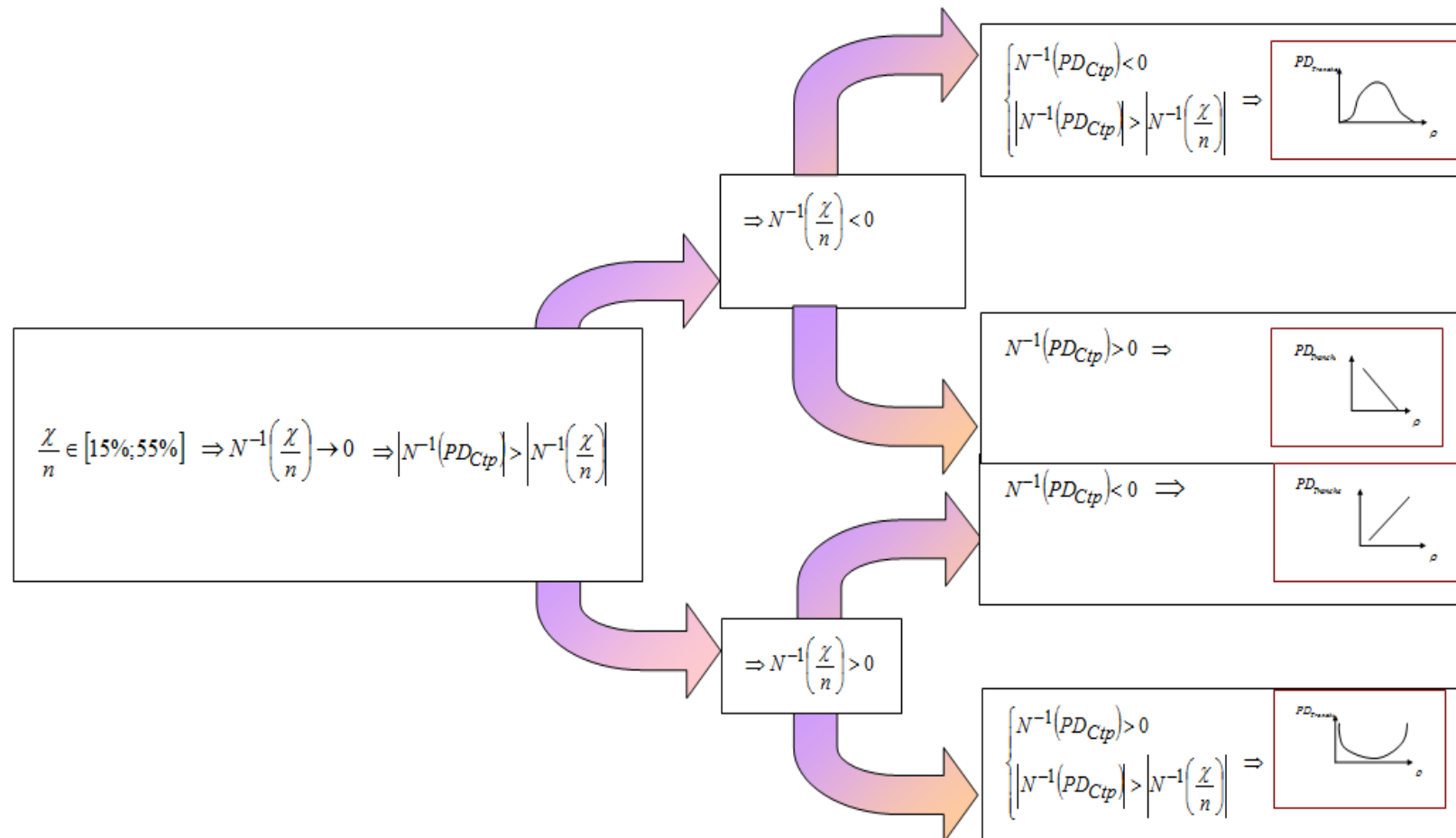
• La sensibilité de la PD d'une tranche quelconque à la corrélation est fonction de 3 paramètres :

- La Probabilité de défaut du portefeuille sous-jacent PD_{Ctp}
- Le nombre de défaut minimum dans le panier pour atteindre le point d'attachement χ
- Le nombre d'émetteurs dans le panier n

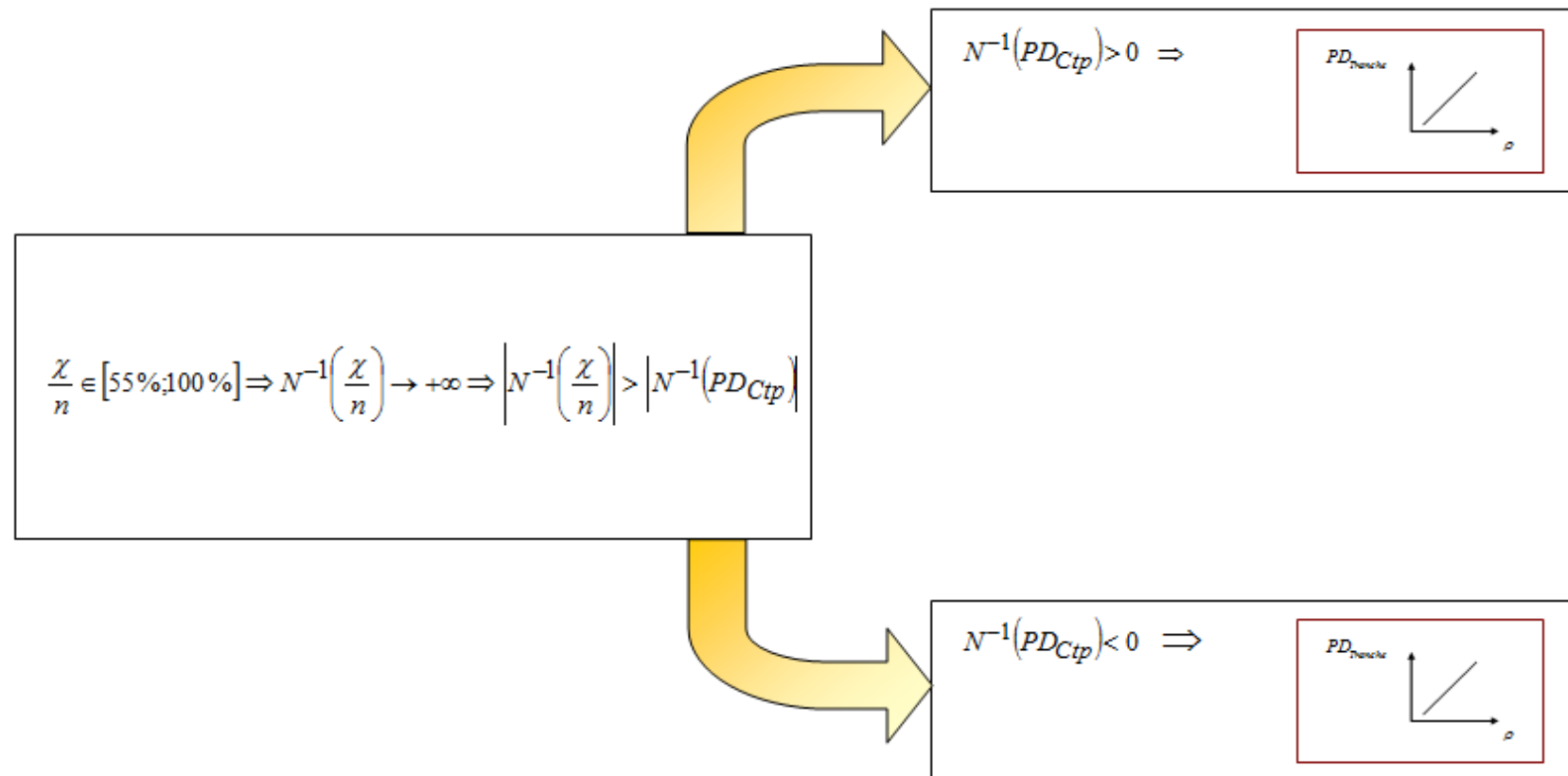
$$\frac{\chi}{n} \approx 0 \Rightarrow N^{-1}\left(\frac{\chi}{n}\right) \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} N^{-1}\left(\frac{\chi}{n}\right) < 0 \\ \left|N^{-1}\left(\frac{\chi}{n}\right)\right| > \left|N^{-1}(PD_{Ctp})\right| \end{cases}$$



Sensibilité à la corrélation d'une tranche qui attache entre 15% et 55%



Sensibilité à la corrélation d'une tranche qui attache à plus de 55%



Calcul de la corrélation qui maximise la PD d'une tranche CDO

- Ces résultats sur la sensibilité de la PD d'une tranche CDO à la corrélation nous permettent d'en déduire la corrélation qui maximise la PD d'une tranche quelconque :

$$\rho = \text{Max} \left\{ 1; \text{Min} \left\{ 0; 1 - \left(\frac{N^{-1} \left(\frac{\mathcal{X}}{n} \right)^2}{\sum_{i=1}^{20} \alpha_i \cdot N^{-1}(PD_i)} \right) \right\} \right\}$$

Avec :

\mathcal{X} : le nombre d'entités minimum pour atteindre le point d'attachement de la tranche (tient compte de l'hypothèse de taux de recouvrement)

n : le nombre d'entités dans le panier

$\sum_{i=1}^{20} \alpha_i \cdot N^{-1}(PD_i)$: la moyenne des lois normales inverses des PD des entités pondérées de leur notional

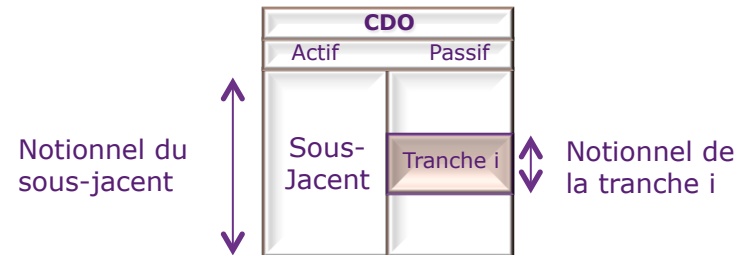
- et si la tranche est composée d'entités ayant le même rating, la corrélation qui maximise la PD d'une tranche quelconque devient :

$$\rho = \text{Max} \left\{ 1; \text{Min} \left\{ 0; 1 - \left(\frac{N^{-1} \left(\frac{\mathcal{X}}{n} \right)^2}{N^{-1}(PD_i)} \right) \right\} \right\}$$

Sensibilité d'un CDO² à la corrélation et corrélation qui maximise la PD d'un CDPC

- On considère la tranche CDO (à l'actif du CDPC) qui a le notionnel le plus élevé

① il s'agit du notionnel de la tranche, i.e. sa taille, et non celui du sous-jacent de la tranche



- On ajoute à ce point d'attachement, le capital du CDPC

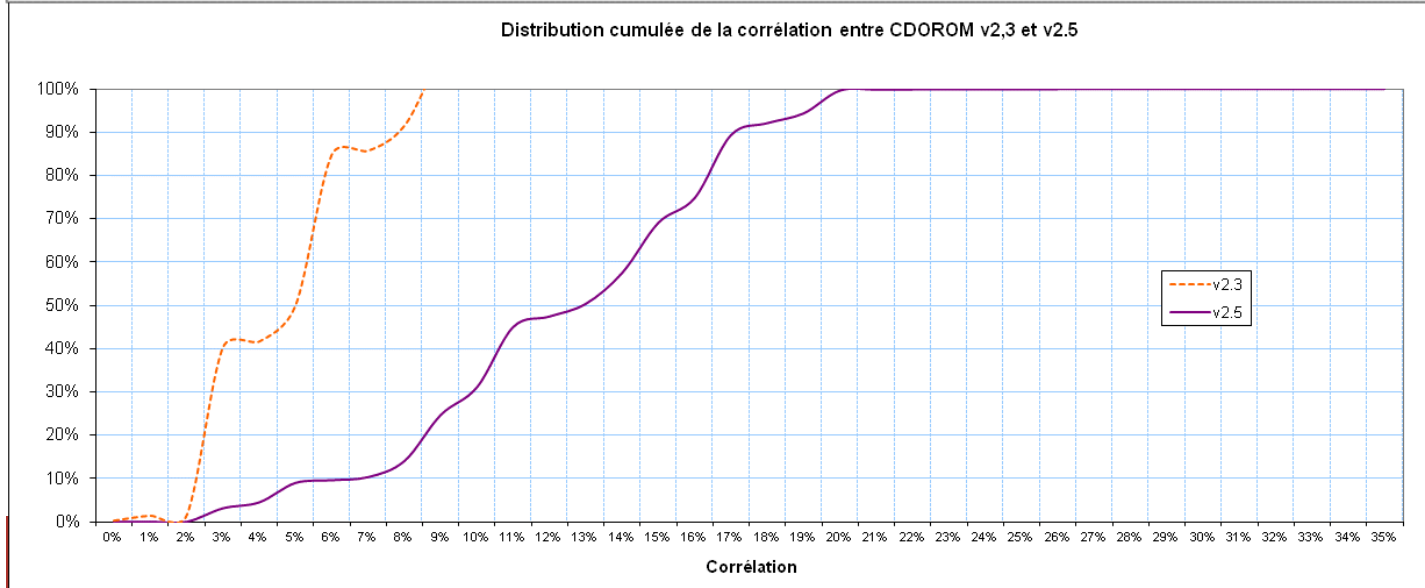
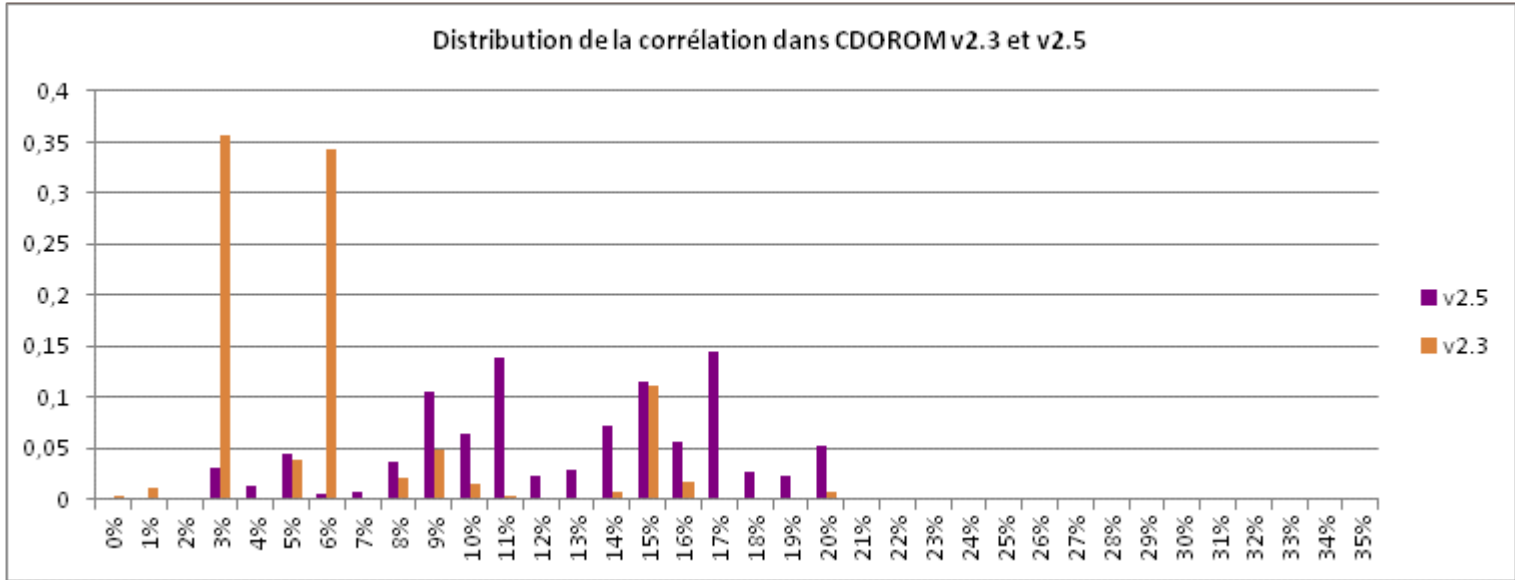
$$NewAP_{Tranche_i} = AP_{Tranche_i} + Capital_{CDPC}$$

$$NewAP_{Tranche_i} (\%) = \frac{AP_{Tranche_i} + Capital_{CDPC}}{Total\ Notionnel\ Sous - Jacent_{Tranche_i}}$$

- La sensibilité d'un CDO² à la corrélation ainsi que la corrélation qui maximise la PD du CDO², sont similaires à celles de cette tranche CDO du collatéral avec ce nouveau point d'attachement.

3 La modélisation de la corrélation de défaut dans l'outil CDOROM de MOODY'S

Distribution de la corrélation dans CDOROM



La crise des subprimes a conduit Moody's à augmenter les corrélations dans son outils CDOROM

Méthode de notation de CDOROM avant la crise : une erreur d'estimation des PD ou des corrélations ?

- Pour voir l'impact de chaque paramètre, on teste les paramétrages PD/Correl avec les versions post & pré-crise de CDOROM

avec

	Paramétrage corrélation	Paramétrage PD des sous-jacents	
Test #1	CDOROM v2.3	Ratings au 30/06/2010	Impact PD
Test #2	CDOROM v2.5	Ratings au 30/06/2010	
Test #3	CDOROM v2.3	Ratings au 31/12/2006	Impact Corrélation
Test #4	CDOROM v2.5	Ratings au 31/12/2006	

- On obtient les résultats suivants:

Test #1

	Rating correspondant
Pompée	Aaa
Galaxie	Aaa
Corus	Aaa
Kokaze	Aaa

Test #2

	Rating correspondant
Pompée	Ba3
Galaxie	B2
Corus	Baa3
Kokaze	Caa3

Test #3

	Rating correspondant
Pompée	Aaa
Galaxie	Aaa
Corus	Aaa
Kokaze	Aaa

Test #4

	Rating correspondant
Pompée	Ba1
Galaxie	Aa3
Corus	Aa3
Kokaze	A3



Conclusion : les corrélations ont plus d'impact que les PD sur le rating des CDPC.

Comparaison de la corrélation CDOROM avec la corrélation qui maximise la PD des tranches sous-jacentes à Pompée

- L'objectif est de pouvoir comparer, pour chaque tranche CDO :

avec

La corrélation unique qui permet de retrouver l'Expected Loss et la distribution de pertes correspondant à celles trouvée avec la corrélation multifacteurs de Moody's

La corrélation qui maximise la PD de la tranche (selon la méthode déterminée plus haut)

- Voici les résultats pour 10 tranches composants le sous-jacent d'un CDPC :

N° tranche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
correl Unique	10,03%	12,20%	12,70%	8,87%	12,45%	22,80%	16,40%	7,00%	13,31%	6,75%
correl qui maximise la PD de la tranche	66,90%	71,15%	74,75%	66,98%	70,10%	0,00%	0,00%	41,46%	60,72%	60,28%
Forme de la sensibilité de la PD tranche à la correl	cloche	cloche	cloche	cloche	cloche	décroissante	décroissante	cloche	cloche	cloche

Conclusions : 1. Les corrélations multifacteurs peuvent être approchées par une corrélation unique.

2. Les corrélations multifacteurs de CDOROM sont nettement inférieures à celles qui maximisent les PD des tranches.

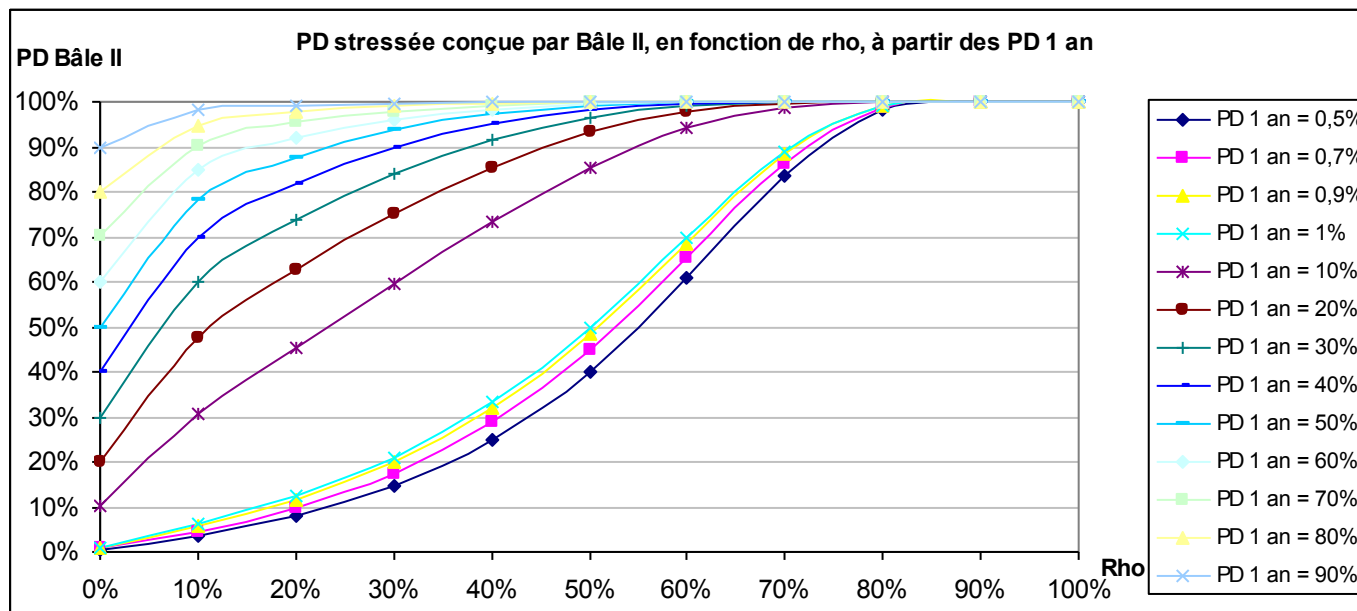
4 ANNEXES

La sensibilité des PD à la corrélation dans le modèle Bâle II

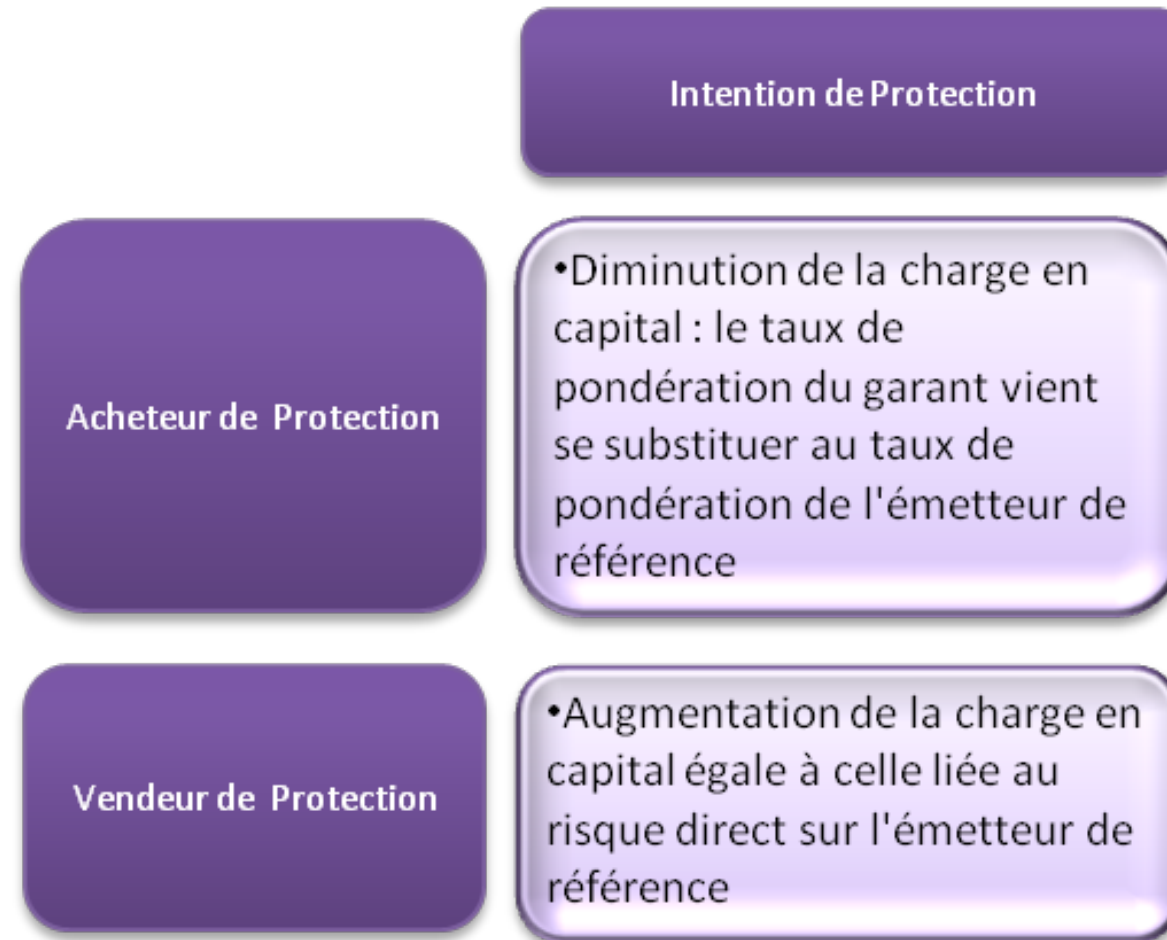
La charge en capital est :

$$K = \sum_{i=1}^N EAD_i \cdot LGD_i \cdot \left[N \left(\frac{N^{-1}(PD_i^{1an}) - \sqrt{\rho} \cdot N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}} \right) - PD_i^{1an} \right]$$

La charge de capital, telle que définie par Bâle II, sera donc d'autant plus élevée que la corrélation de l'entité i au facteur de risque systémique sera forte. En effet, la réglementation se place à un quantile de perte inattendue de 99%, ce qui rend $PD_i^{(Z_\alpha)}$ croissante de ρ :



Traitement réglementaire du CDS



Primus Guaranty LLC

PRSG US \$ C 10.15 - .05 --/-- --x--			
On 23 May d Vol 5,577 0 10.05V H 10.15V L 10.05V Val 56,274.7			
PRSG US Equity		98 Report	99 Feedback
Page 2/4		Description: Issue Info	
1) Profile		2) Issue Info	
3) Ratios		4) Revenue & EPS	
5) Public Offerings (CACS)		8) Institutional Holdings (OWN)	
Initial Public Offering 09/29/04, Common Stock		# of Inst. Owners 18	
Shares Offered 10.34M		Shares Owned 25.95M	
Share Price \$ 13.50		Shares Out/Float 94.7%/101.8%	
Lead Manager Lehman Brothers		# of Buyers/Sellers 1/2	
Shares Bought 15.21M			
6) Issue Information (RELS)		7) Eqty Weights(WGT)	
9) Insider Holdings (OWN)			
Sec Type Common Stock		BESGCOV N.A.	
Pri Exch OTC US PAR USD 0.08		BUSNSHRT 0.010%	
Pri MIC OOTC		BAMNS 0.010%	
Incorp BERMUDA		10) Top Holders (HDS)	
SIC Code 6200 (SEC BROKERS)		as of 5/24/2013	
BBGID BBG000BHMC08		GLOBAL CAPITAL MANAGEM 41.11%	
ISIN BMG724571077		TRANSAMERICA LIFE INSU 20.61%	
CINS G72457107		SECOND CURVE CAPITAL L 13.71%	
SEDOL1 B016DB8 US NAICS 524126		XL GROUP PLC 13.27%	
Common 020280140 WPK # A0B8TY		LEGG MASON INC 4.84%	
Deriv/Mrgn		JASPER THOMAS W 3.03%	
No Options Available		CLAIDEN RICHARD 1.36%	

Top Ownership Type (%)	
54) Ownership Type	05/19
41) Investment Advisor	46.23
42) Insurance Company	33.43
43) Hedge Fund Manager	13.49
44) Individual	6.86

Correspondance entre les terminologies financières et assurantielles

	C D P C	A ssurance / R éassurance
Activité	Vente de protection contre le défaut de titres de dette	Assurance risque
Forme juridique de la protection	C D S	Police
Forme d'indemnisation	Cash	Cash
Fait générateur de l'indemnisation	Défaut d'un émetteur	Sinistre / décès
Soumis à réglementation	NON	OUI
Type de risque assuré	Evénement de crédit	Sinistre / décès
Contrainte capitalistique	OUI Par les Agences de notation et le marché	OUI Par la réglementation Solvabilité II
Forme de paiement de la garantie	Prime	Prime
Comptabilisation des sommes perçues	Commissions = produit distribuable	Primes d'assurance = provisionnées
Montant de l'indemnisation	Notionnel	En fonction du sinistre
Seuil minimal d'indmnsiation	Point d'attachement	Franchise / Seuil
Seuil maximal d'indmnsiation	Point de détachement	Plafond
Contrat avec seuil min et max	Tranche	Contrat avec franchise et plafond
Objet de l'assurance	Panier sous-jacent	Sinistres garantis
Échéance de la garantie	Maturité	Durée de la garantie
Renouvellement de la garantie	Pas de reconduction possible	Reconduction tacite