Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 15 Décembre 2020

Par : BERGOT Jean
Titre : Modélisation des comportements d'arbitrages: approche dynamique basée sur les performances d'un portefeuille UC

Confidentialité : Oui - (Durée: 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :
Nicolas BOURE
Emmanuel BERTHELE
Signature :

Entreprise :
AXA France
Signature :

Membre présent du jury de l'EURIA :
Brice FRANKE
Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Rafaël HISQUIN
Signature :

Invité :
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

EURIA
EURo Institut d'Actuariat
6, avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3
T +33 (0)2 98 01 66 55
euria@univ-brest.fr

Résumé

Pour démontrer leur solvabilité dans tout contexte économique et financier, les assureurs sont tenus de démontrer aux autorités de contrôle leur capacité à encaisser différents chocs sur leur actif comme leur passif. En particulier, il leur est nécessaire de modéliser le comportement des assurés afin d'anticiper les différents mouvements sur le portefeuille et d'être en mesure d'adapter la stratégie d'investissement à l'actif. Pour cela, les différents flux réalisés par les assurés doivent être estimés, notamment les flux d'arbitrages représentant des transferts de l'épargne des assurés d'un fonds vers un autre.

Dans le modèle actuel d'estimation des taux d'arbitrages chez AXA France, seule une modélisation structurelle basée sur des caractéristiques spécifiques aux contrats et non évolutive dans le temps en fonction de données extérieures est réalisée. Les différents backtestings effectués sur les prédictions de flux d'arbitrages montrent l'incapacité de la méthode actuelle à suivre une tendance à court terme et la nécessité d'intégrer une composante conjoncturelle.

En se basant sur des données mensuelles, cette étude a pour objectif d'améliorer l'estimation des arbitrages à l'aide de paramètres structurels et conjoncturels en s'appuyant sur des séries temporelles. Pour déboucher sur cette finalité, une étude qualitative sur les différentes variables disponibles et leur impact dans la prédiction des flux d'arbitrages est préalablement effectuée, notamment au travers de modèles de *machine learning*.

A la suite de cela, différents modèles de séries temporelles sont étudiés. Celles-ci sont modélisées à l'aide de régressions dynamiques sur des variables conjoncturelles telles que des indices financiers pouvant refléter les performances du portefeuille UC Épargne d'AXA France. Enfin, une modélisation intégrant une composante structurelle et une composante conjoncturelle sera étudiée, et une comparaison de l'efficacité des différents modèles sera réalisée.

Mots clefs: assurance vie, arbitrages, comportement client, fonds Euro, unités de compte, paramètres structurels, variables conjoncturelles, séries temporelles, modèles autorégressifs, retards échelonnés

Abstract

To demonstrate their solvency in any economic and financial context, insurers must prove to the supervisory authorities their ability to withstand shocks on their assets as well as on their liabilities. They especially need to model the behaviour of policyholders in the portfolio in order to anticipate their movements and to be able to adapt the investment strategy to the assets. To reach this goal, the various flows made by policyholders must be estimated, in particular arbitrage flows representing transfers of policyholders' savings from one fund to another.

In AXA France's current model for estimating arbitrage rates, only structural modeling based on contract-specific characteristics and not evolving over time according to external data is carried out. The various backtestings carried out on arbitrage flow predictions show the inability of the current method to follow a short-term trend and the need to integrate a cyclical component.

Based on monthly data, this study aims to improve arbitrage estimations using structural and cyclical parameters using time series. To achieve this goal, a qualitative study of the different available variables and their impact on the prediction of arbitrage flows is previously carried out, especially through machine learning models.

Following this, different models of time series are studied. These series are modeled using dynamic regressions on cyclical variables such as financial indices that can reflect the performance of the UC savings portfolio of AXA France. Finally, a model integrating a structural component and a conjunctural component will be studied, and a comparison of the efficiency of the different models will be carried out.

Keywords: life insurance, arbitrage, customer behaviour, euros funds, units of account, structural parameters, dynamic variables, time series, autoregressive models, distributed lag

Note de synthèse

Contexte et objectif

Dans le contexte prudentiel actuel, les compagnies d'assurance vie sont tenues de mesurer finement leurs engagements actuels et futurs afin de déterminer les capitaux requis pour assurer leur solvabilité. Ces évaluations nécessitent des modélisations à long terme des mouvements effectués sur le portefeuille. Les arbitrages entre supports en euros et en unités de compte doivent alors être estimés au plus proche.

Ce mémoire a pour objectif d'analyser la modélisation des taux d'arbitrages et d'étudier l'intégration d'une composante dynamique, basée notamment sur une estimation des performances des supports UC d'AXA France.

Approche utilisée

Afin d'établir la nécessité d'une évolution dans la modélisation des arbitrages, l'impact de l'ancienneté, seule variable actuellement utilisée dans le modèle, est étudié, puis plus largement l'importance de l'ensemble des variables structurelles disponibles sera analysé, graphiquement puis à l'aide de méthodes numériques. Cela aboutira à une modélisation structurelle, méthode statique basée sur des éléments propres au contrat et ne permettant pas de capter les tendances d'évolution des taux d'arbitrages au cours du temps. Différentes approches dynamiques seront alors envisagées, aboutissant à des combinaisons de modèles s'appuyant sur des paramètres structurels comme conjoncturels.

Base de données d'étude

La base de données exploitée après traitement pour l'étude est composée de tous les contrats de produits d'assurance vie haut de gamme d'AXA France. Cette base comporte tous les contrats de personnes physiques ayant été présents et tous les arbitrages libres effectués entre janvier 2008 et décembre 2019.

Par mois, les taux d'arbitrages UC→Euro du portefeuille sont calculés par le quotient des montants d'arbitrages UC→Euro réalisés sur l'encours total des supports en UC en portefeuille durant cette période. Le calcul est le même pour les arbitrages Euro→UC à la différence près que les encours des supports en euros sont cette fois utilisés.

Les taux d'arbitrages sont des variables généralement très volatiles au cours du temps. Comme l'étude porte sur des contrats haut de gamme, ce phénomène est amplifié par certains arbitrages ponctuellement très élevés sur ce type de produits et un nombre de contrats moins important que sur des produits retail. Une telle volatilité est observable sur les taux d'arbitrages mensuels UC→Euro et Euro→UC représentés graphiquement ci-dessous :

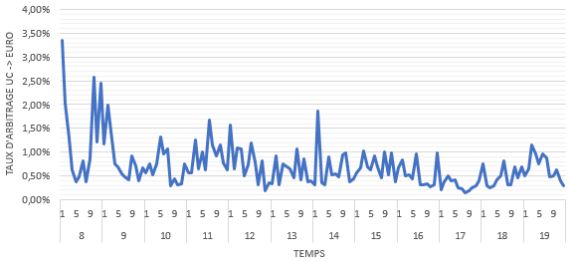

FIGURE 1 – Taux d'arbitrages UC→Euro observés

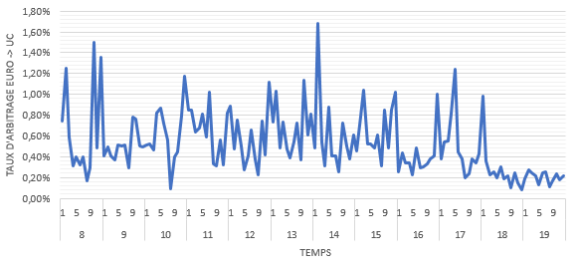

FIGURE 2 – Taux d'arbitrages Euro→UC observés

Un lien semble être existant entre certains pics de taux d'arbitrages et des variations d'indices financiers notamment pour la crise des subprimes en 2008 pour laquelle des taux importants sont observés. Au global, une très forte volatilité des taux est constatée. Pour essayer d'estimer ces taux d'arbitrages, des modèles structurels sont d'abord étudiés.

Mesure de l'importance de la structure des contrats

Afin de mettre en place un modèle structurel, une étude sur l'importance de variables liées au contrats influant sur les comportements d'arbitrages est préalablement menée à l'aide de méthodes de *machine learning*. Pour cela, un focus est fait sur les contrats présents en portefeuille et arbitrages réalisés entre janvier 2016 et décembre 2019. L'étude de cette période sera supposée généralisable à tout l'historique.

Sur cette période, des méthodes de classification sont exploitées afin de mesurer l'importance des variables structurelles sur le fait que pour un mois donné, un contrat réalise ou non au moins un arbitrage. Afin de répondre à la problématique d'une base déséquilibrée, une **pondération** des erreurs sur la

variable cible est réalisée dans le but d'homogénéiser la prédiction.

Initialement, une sélection ascendante par critère AIC des variables à l'aide d'une **régression logistique** permet de mettre en évidence l'importance de la **PM totale** d'un contrat et son **réseau de distribution** pour les deux types de taux. Afin d'appuyer ces résultats, une méthode non paramétrique est explorée : les arbres de décision.

Par un indicateur de l'importance des variables : la *Mean Decrease Gini*, ce sont la **PM totale** et la **part UC** d'un contrat qui s'avèrent être les plus utilisées pour classifier par les modèles, pour les deux types d'arbitrages. Cela peut être notamment expliqué par la récurrence de ces variables sur les nœuds de l'arbre obtenu. De tels résultats doivent cependant être nuancés car dans le cas d'un arbre unique, un échantillon légèrement différent aurait pu être pris en compte et d'autres variables auraient pu être sélectionnées et alors donner des importances plus élevées. Une forêt aléatoire est donc finalement utilisée pour réaliser la sélection des variables structurelles.

Par validation croisée, les paramètres optimaux à utiliser pour la forêt aléatoire sont obtenus. Une forêt aléatoire est alors construite à partir de 500 arbres de décision à des fins de classification. Cette méthode permet d'obtenir des résultats plus stables qu'avec un seul arbre en exploitant les résultats des différents arbres. L'importance des différentes variables qui est croissante avec l'indicateur *Mean Decrease Gini* utilisé est résumée sur les graphes suivants :

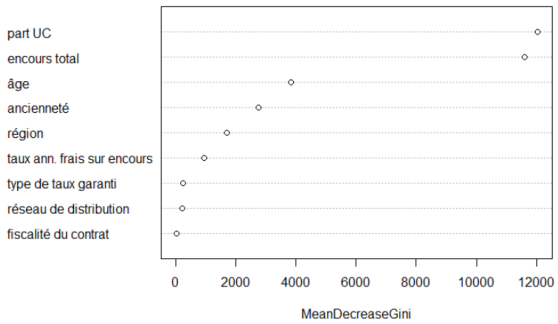

FIGURE 3 – Mean Decrease Gini par variable - Arbitrages UC→Euro

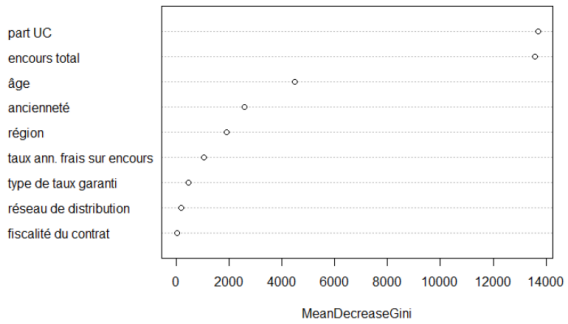

FIGURE 4 – Mean Decrease Gini par variable - Arbitrages Euro→UC

La **part UC**, l'**encours total** et l'**âge** s'avèrent être les variables ayant le plus d'impact sur la réalisation des arbitrages. Un modèle structurel est alors construit à partir de ces dernières en s'appuyant sur différentes périodes de temps pour déterminer l'historique optimal.

Pour sa construction, des regroupements sont effectués par les variables citées à la maille réseau de distribution pour l'obtention de taux d'arbitrages

historiques pour chaque regroupement. Pour obtenir un taux historique global du portefeuille, des agrégations selon la PM en euros de chaque regroupement sont faites pour les arbitrages Euro→UC, et la PM UC pour les UC→Euro. Ce taux d'arbitrages historique est alors utilisé pour la première année de projection.

Pour tester ce modèle entre 2015 et 2019, plusieurs calibrages ont été effectués pour obtenir les différentes projections. Un backtesting est alors réalisé selon 3 historiques, avec une comparaison à des lois calibrées par ancienneté :

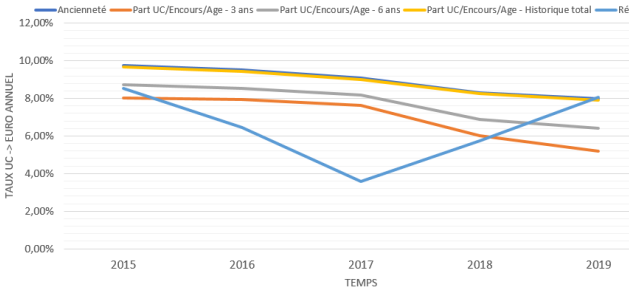

FIGURE 5 – Backtesting - Lois structurelles - Arbitrages UC→Euro

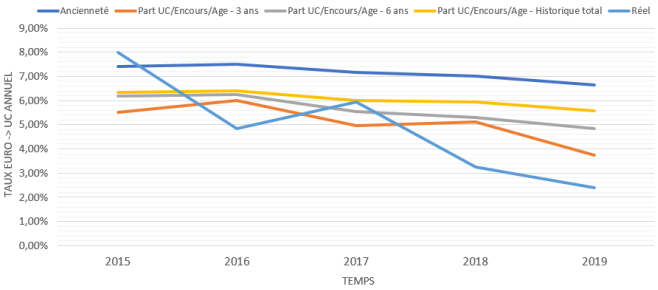

FIGURE 6 – Backtesting - Lois structurelles - Arbitrages Euro→UC

Malgré un backtesting relativement satisfaisant pour certaines années, les tendances d'évolution des arbitrages ne sont pas suivies et des écarts importants peuvent être observés, d'où la nécessité d'intégrer une composante dynamique dans la modélisation des taux d'arbitrages. Une loi basée sur l'ancienneté est également intégrée au backtesting, c'est celle qui présente les écarts les plus importants avec les données réelles, confirmant le choix de ne plus utiliser cette variable.

Etude de modèles d'arbitrages dynamiques

Dans l'objectif de palier à l'impossibilité de suivre la tendance future des arbitrages, une étude conjoncturelle sous forme de séries temporelles et basée sur des variables exogènes est mise en place. Pour mesurer les performances des modèles, des indicateurs d'erreurs sont calculés sur la première année de projection des modèles calibrés sur 3 bases d'apprentissage et de test différentes. Les bases de données d'apprentissage sont les historiques de 2008 à 2016, de 2008 à 2017 et de 2008 à 2018 pour des tests effectués respectivement sur 2017, 2018 et 2019. La MAE et la RMSE sont utilisées pour mesurer des erreurs mensuelles de projection, et l'erreur absolue pondérée par la PM sur 1 an pour évaluer des écarts annuels.

Des modèles dynamiques en séries temporelles calibrés directement sur les taux d'arbitrages sont d'abord considérés.

Dans un premier temps, des modèles ARMA et SARIMA sont calibrés sur les séries étudiées, sans variable exogène. Les indicateurs d'erreurs ne montrant pas d'amélioration probante en comparaison des modèles structurels, des paramètres conjoncturels mensuels sont intégrés : les performances répliquées du portefeuille UC d'AXA France, la moyenne des rendements des 5 supports UC les plus arbitrés, les variations du CAC 40 qui sont trois variables linéairement très corrélées. Les taux OAT 10 ans sont aussi utilisés.

D'abord, pour les taux UC→Euro, des régressions sont appliquées sur le logarithme des taux d'arbitrages, puis des modèles autorégressifs sont calibrés sur les résidus obtenus après régression. Les modèles obtenus démontrent alors un impact des indices financiers sur les arbitrages UC→Euro. Pour les arbitrages Euro→UC, cet impact semble moindre.
Le modèle global obtenu par régression sur les performances des supports UC est le suivant :

$$Y_{1,t} = exp(-5.11 - 4.75X_{1,t} + \epsilon_{1,t})$$

avec $\epsilon_{1,t} = 0.78\epsilon_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} - 1.49\varepsilon_{1,t-1} + 0.51\varepsilon_{1,t-2}$; ε_1 bruit blanc. Y_1 taux d'arbitrages UC→Euro et X_1 performances des supports UC

Pour la suite, seules les performances des supports UC d'AXA sont exploitées. En effet, les modèles ont été testés sur toutes les variables conjoncturelles et les résultats du modèle obtenu par les performances des supports UC donnent de bons résultats en comparaison des autres. Ajouté à cela, certains paramètres conjoncturels présentent une forte corrélation, le choix d'utiliser une seule variable explicative pour la suite est donc fait.

Permettant de prendre en compte un **temps de réaction** après des variations d'indices financiers, des modèles à retards échelonnés et autorégressifs à retards échelonnés sont exploités après vérifications des hypothèses requises. D'importants écarts par rapport au réel sont cependant observés. Notamment, pour les trois années de projection des taux d'arbitrages UC→Euro, avec le modèle à retards échelonnés, une moyenne des MAE de 0.323% est obtenue pour une moyenne de taux observés de 0.485% sur cette même période.

Les séries temporelles des taux d'arbitrages sont alors étudiées par classe de variables structurelles étudiées précédemment afin d'essayer de capter les comportements des assurés sur une maille plus fine. Par exemple, différentes classes d'âge ont été construites, puis des taux d'arbitrages ont été estimés pour chaque classe.

Cette méthode donnant d'importantes erreurs par rapport aux données réelles, une autre approche des taux d'arbitrages est alors envisagée.

Modèles structurels à résidus dynamiques

Pour cette partie, des lois structurelles basées sur un historique de 6 ans sont calibrées à partir des variables les plus influentes sur le comportement d'arbitrage, à savoir âge/encours/part UC. Des projections de taux sur les années 2009 à 2019 sont ainsi obtenues et les taux annuels obtenus sont alors mensualisés.

La composante dynamique de ces modèles sera basée sur la différence entre les taux structurels projetés et les taux réels, appelés "**résidus dynamiques**".

Comme précédemment, différentes méthodes sont exploitées, notamment des modèles autorégressifs et des modèles à retards échelonnés. Les indicateurs de performances des projections sont comparés à celles des lois structurelles. Pour les UC→Euro, des modèles à retards échelonnés et autorégressifs à retards échelonnés, obtenant des indicateurs d'erreurs similaires, permettent d'améliorer les performances des lois structurelles. Un autre modèle est enfin exploité : une étude des résidus dynamiques par réseau. Les taux sont alors agrégés par les PM respectives des réseaux pour obtenir un taux d'arbitrage global du portefeuille.

Ce modèle est un de ceux qui apporte les meilleures performances en termes d'indicateurs d'erreurs. De plus, de par sa composante structurelle, ce modèle est moins volatile et garde une stabilité dans le temps. En revanche, les tendances mensuelles des arbitrages ne sont pas toujours bien captées, comme en 2019. Des performances des supports UC en hausse impliquent une prédiction de taux en baisse alors que les taux réels sont en forte hausse début 2019.

Pour les arbitrages Euro→UC en revanche, l'intégration d'une composante conjoncturelle sur les résidus n'améliore pas les résultats du modèle structurel.

Conclusion

L'exploitation de modèles dynamiques a montré un impact des performances des supports UC d'AXA sur les taux d'arbitrages historiques UC→Euro. L'utilisation d'un modèle intégrant une composante structurelle et une composante dynamique sur les résidus a permis d'obtenir des améliorations de prédiction lors des backtesting effectués, en comparaison de modèles structurels simples utilisés jusqu'alors. Ces modèles ne permettent cependant pas de capter précisément la tendance mensuelle des arbitrages.

En ce qui concerne les arbitrages Euro→UC, l'étude de modèles dynamiques n'a pas permis d'améliorer les performances des modèles structurels.

Cela s'explique par un lien trop faible entre les performances des UC d'AXA et les arbitrages Euro→UC sur la base d'étude.

L'étude d'une base de contrats retail, comportant plus de contrats et avec des encours plus faibles pourrait permettre de mieux capter ces comportements d'arbitrages.

Mots clefs: assurance vie, arbitrages, comportement client, fonds Euro, unités de compte, paramètres structurels, variables conjoncturelles, séries temporelles, modèles autorégressifs, retards échelonnés

Summary

Study context and purpose

In the current prudential context, life insurance companies are required to finely measure their current and future engagements in order to determine the capital required to ensure their solvency. These valuations require long-term modelling of portfolio movements. Arbitrages between euro and units of account assets must then be estimated as closely as possible.

The aim of this paper is to analyse the modelling of arbitrage rates and to study the integration of a dynamic component, based in particular on an estimate of the performance of AXA France's unit-linked products.

Description of the approach

In order to establish the need for an evolution in the modelling of arbitrages, the impact of seniority, which is the only variable currently used in the model is studied, and then more broadly the importance of the set of variables available structures will be analysed, graphically and then with the help of digital methods. This will lead to structural modelling, a static method, based on elements specific to the contract and which do not make it possible to capture the trends in arbitrage rates over time. Different approaches will then be considered, resulting in dynamic combinations models based on structural and cyclical parameters.

Study database

The database used after processing for the study is made up of all AXA France's high-end life insurance contracts. This database includes all contracts of individuals who were present and all free arbitrages carried out between January 2008 and December 2019.

Per month, the UC→Euro arbitrage rates of the portfolio are calculated as the ratio of the UC→Euro arbitrage amounts realised on the total outstanding UC→Euro assets in the portfolio during that period. The calculation is the same for Euro→UC arbitrages with the difference that this time the outstanding amounts of the Euro denominated assets are used.

Arbitrage rates are generally highly volatile variables over time. As the study focuses on high-end contracts, this phenomenon is amplified by certain occasional very high arbitrages on this type of product and a smaller number of contracts than on retail products. Such volatility can be seen in the monthly arbitrage rates for UC→Euro and Euro→UC, which are shown graphically below :

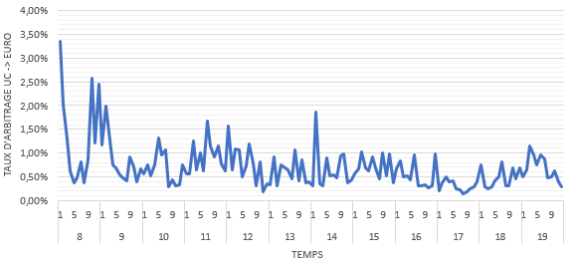

FIGURE 7 – Observed UC→Euro arbitrage rates

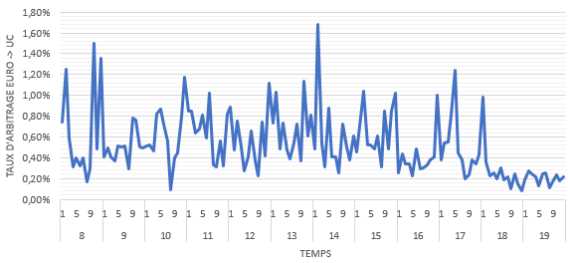

FIGURE 8 – Observed Euro→UC arbitrage rates

There seems to be a link between certain peaks in arbitrage rates and changes in financial indices, particularly for the subprime crisis in 2008, for which high rates were observed. Overall, a very high level of rate volatility has been observed. To try to estimate these arbitrage rates, structural models are firstly studied.

Importance measuring of the contract structure

In order to set up a structural model, a study on the importance of contract-related variables influencing arbitrage behaviour is first conducted using machine learning methods. To this end, a focus is placed on contracts in the portfolio and arbitrages made between January 2016 and December 2019. The study of this period will be assumed to be generalizable to the entire history.

Over this period, classification methods are used to measure the importance of structural variables on whether or not a contract performs at least one arbitrage in a given month. In order to respond to the problem of an unbalanced base, an error weighting on the target variable is carried out in order

to homogenise the prediction.

Initially, an ascending selection by AIC criteria of the variables using a **logistic regression** makes it possible to highlight the importance of the **total MP** of a contract and its **distribution network** for both types of rates. In order to To support these results, a non-parametric method is explored : decision trees.

By means of an indicator of the variables importance : the Mean Decrease Gini, it is the **total outstanding amount** and the **Units of accounts proportion** share of a contract that are the most used to classify by the models, for both types of trade-offs. This can be explained in particular by the recurrence of these variables on the nodes of the tree obtained. However, such results must be qualified because in the case of a single tree, a slightly different sample could have been taken into account and other variables could have been selected and then given higher importance. A random forest is therefore finally used to carry out the selection of structural variables.

By cross validation, the optimal parameters to be used for the random forest are obtained. A random forest is then constructed from 500 classification trees for classification purposes. This method provides more stable results than with a single tree by exploiting the results of the different trees. The importance of the different variables, which is increasing with the Mean Decrease Gini indicator used, is summarised in the following graphs :

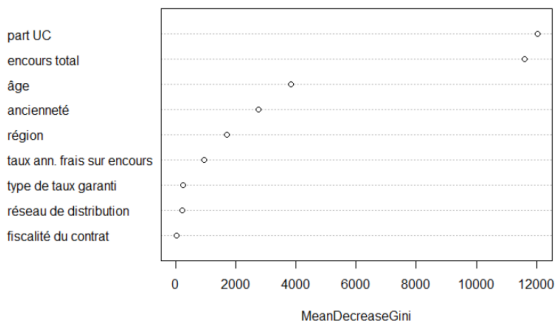

FIGURE 9 – Mean Decrease Gini by variable - UC→Euro Arbitrages

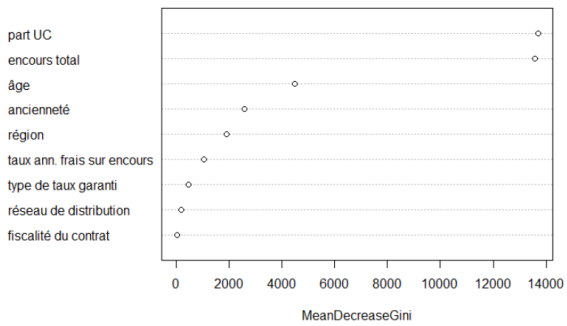

FIGURE 10 – Mean Decrease Gini by variable - Euro→UC Arbitrages

The **units of accounts proportion**, the **total outstanding amount** and **age** proved to be the variables with the greatest impact on the execution of arbitrages. A structural model is then built from these variables, using different time periods to determine the optimal history.

For its construction, groupings are made by the variables cited in the distribution network grid to obtain historical arbitrage rates for each grouping.

In order to obtain an overall historical rate for the portfolio, aggregations are made according to the outstanding amount in euros of each grouping for Euro→UC arbitrages, and the outstanding amount UC for Euro→UC. This historical arbitrage rate is then used for the first year of projection.

To test this model between 2015 and 2019, several calibrations were carried out to obtain the different projections. A backtesting is then carried out according to 3 histories, with a comparison to laws calibrated by seniority. :

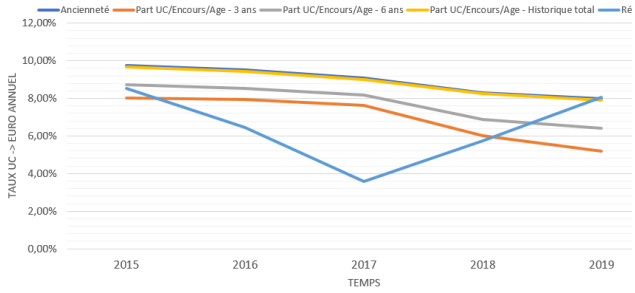

FIGURE 11 – Backtesting - structural UC→Euro arbitrages

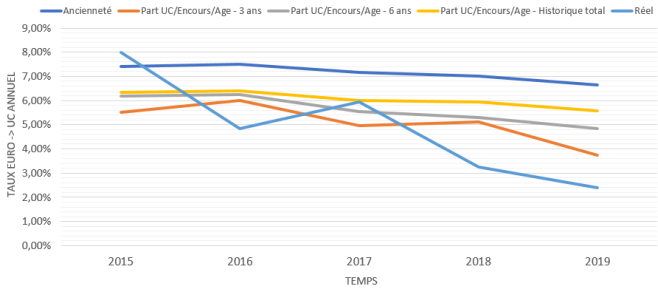

FIGURE 12 – Backtesting - structural Euro→UC arbitrages

Despite relatively satisfactory backtesting in some years, arbitrage trends are not tracked and large discrepancies can be observed, hence the need to integrate a dynamic component in the modelling of arbitrage rates. A law based on seniority is also integrated into backtesting. This is the one that presents the largest discrepancies with actual data, confirming the decision to no longer use this variable.

Study of dynamic arbitrage modelling

In order to compensate for the impossibility of following the future trend of arbitrages, a time-series study based on exogenous variables has been set up. To measure the performance of the models, error indicators are calculated over the first year of projection of the models calibrated on 3 different learning and test bases. The learning databases are the historical ones from 2008 to 2016, from 2008 to 2017 and from 2008 to 2018 for tests carried out respectively on 2017, 2018 and 2019. The MAE and RMSE are used to measure monthly projection errors, and the MP-weighted absolute error over 1 year is used to assess annual variances.

Dynamic time-series models calibrated directly on arbitrage rates are firstly considered.

In a first step, ARMA and SARIMA models are calibrated on the studied series, without exogenous variable. As the error indicators do not show any convincing improvement compared to the structural models, monthly economic parameters are integrated : the replicated performance of AXA France's unit-linked portfolio, the average of the returns of the five most highly arbitrated unit-linked products, and variations in the CAC 40, which are three highly correlated linear variables. 10-year OAT rates are also used.

First, for UC→Euro rates, regressions are applied to the logarithm of the arbitrage rates, then autoregressive models are calibrated on the residuals obtained after regression. The models obtained then show an impact of financial indices on UC→Euro arbitrages. For Euro→UC trades, this impact seems to be less. The global model obtained by regression on the performance of Units of account is as follows :

$$Y_{1,t} = exp(-5.11 - 4.75X_{1,t} + \epsilon_{1,t})$$

with $\epsilon_{1,t} = 0.78\epsilon_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} - 1.49\varepsilon_{1,t-1} + 0.51\varepsilon_{1,t-2}$; ε_1 white noise. Y_1 UC→Euro arbitrage rates and X_1 units of account performance

Thereafter, only the performance of AXA's unit-linked products is used. Indeed, the models have been tested on all economic variables and the results of the model obtained from the performance of unit-linked products give good results in comparison with the others. In addition, certain economic parameters are highly correlated, so the decision was made to use a single explanatory variable for the rest of the study.

Allowing to take into account a **reaction time** after variations of financial indices, staggered delay and autoregressive models to staggered delays are exploited after verification of the required assumptions. However, significant deviations from the actual are observed. In particular, for the three years of the projected UC→Euro arbitrage rates, with the model with staggered delays, an average of 0.323% MAE is obtained for an average observed rate of 0.485% over the same period.

The time series of arbitrage rates are then studied by class of structural variables previously studied in order to try to capture the behaviour of policyholders on a finer grid. For example, different age classes were constructed and then trade-off rates were estimated for each class.

As this method gives significant errors compared to the actual data, an alternative approach to arbitrage rates is then considered.

Structural models with dynamic residuals

For this part, structural laws based on a 6-year history are calibrated from the most influential variables on arbitrage behaviour, i.e. age/outstanding loans/unit share. Rate projections over the years 2009 to 2019 are thus obtained and the annual rates obtained are then monthlyised.

The dynamic component of these models will be based on the difference between projected structural rates and actual rates, called "**dynamic residuals**".

As before, different methods are used, including autoregressive models and distributed-lag models. The performance indicators of the projections are compared with those of the structural laws. For the UC→Euro, distributed-lag and autoregressive distributed-lag models, which obtain similar error indicators, improve the performance of the structural laws. Another model is finally exploited : a study of dynamic residuals per network. The rates are then aggregated by the respective MPs of the networks to obtain an overall portfolio arbitrage rate.

This model is one of the best performing in terms of error indicators. Moreover, due to its structural component, this model is less volatile and remains stable over time. On the other hand, the monthly trends in arbitrages are not always well captured, as in 2019. Rising performance of unit-linked products implies a prediction of falling interest rates, whereas real rates are expected to rise sharply in early 2019.
For Euro→UC arbitrages, on the other hand, the integration of a cyclical component on residuals does not improve the results of the structural model.

Conclusion

The use of dynamic models showed an impact of the performance of AXA's unit-linked products on the historical unit-linked arbitrage rates. The use of a model integrating a structural component and a dynamic component on the residuals enabled improvements in prediction during backtesting compared with the simple structural models used until then. These models do not, however, accurately capture the monthly trend in arbitrages.

As far as Euro→UC arbitrages are concerned, the study of dynamic models has not allowed the performance of structural models to be improved. This can be explained by a too weak link between the performance of AXA's UCs and the Euro→UC arbitrages on the basis of the study.

The study of a base of retail contracts, with more contracts and lower outstandings, could make it possible to better capture this arbitrage behaviour.

Keywords: life insurance, arbitrage, customer behaviour, euros funds, units of account, structural parameters, dynamic variables, time series, autoregressive models, distributed lag

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Jean-Baptiste Peyre pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de la direction technique Epargne d'AXA France et pour m'avoir permis de réaliser mon mémoire dans de bonnes conditions.

Un grand merci à mon tuteur professionnel Rafaël Hisquin pour son suivi régulier, ses précieux conseils et le temps qu'il m'a accordé tout au long de mon mémoire.

Je remercie plus généralement tous les membres de l'équipe pour leur accueil chaleureux et leur sympathie.

Mes remerciements vont aussi à mon tuteur académique Kamal Armel pour son accompagnement et ses conseils dans l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du corps enseignant de l'EURIA pour la formation reçue durant ces 3 années.

Je souhaite également adresser mes remerciements à ma famille et mes amis pour m'avoir soutenu durant mes études et plus particulièrement pour ce mémoire.

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **ii**

Note de synthèse **iii**

Summary **x**

Remerciements **xvii**

Introduction **1**

I Éléments contextuels de l'étude **3**

1 Présentation de l'assurance vie **4**

1.1 Les contrats d'assurance vie 4

1.2 Des mouvements de portefeuille 8

1.3 Focus sur AXA France 9

2 Focus sur l'arbitrage **11**

2.1 Contexte réglementaire 11

2.2 Contexte économique et financier 13

2.3 Focus sur l'arbitrage 15

3 Revue de littérature **19**

II Analyse qualitative et quantitative de la base de données **27**

4 Analyse de la base de données **28**

4.1 Extraction et traitement d'une base de données d'arbitrages 28

4.2 Exploitation et choix de variables 31

4.3 Gestion et retraitement de la base 32

4.4 Analyse globale des données du portefeuille 35

4.5 Analyse descriptive des variables structurelles étudiées 40

III Modélisation des arbitrages **46**

5 Etude des lois d'arbitrages structurelles et sélection de variables **47**

5.1 Modèle actuel 47

5.2 Sélection de variables structurelles 49

5.2.1 Régression logistique 52

5.2.2 Arbres de décision 55

5.2.3 Forêts aléatoires 58

5.3 Modèle structurel avec vieillissement du portefeuille 60

6 Modèles d'arbitrages dynamiques **65**

6.1 Pré-requis théoriques : modèles de séries temporelles 65

6.2 Modèles de séries temporelles sans variable exogène 73

6.3 Modèles captant la tendance par régression sur paramètres dynamiques . . 80

6.4 Modèles dynamiques autorégressifs à retards échelonnés 87

7 Modèles structurels à résidus dynamiques 96

7.1 Calibrage de lois d'arbitrages structurels 96

7.2 Application des modèles de séries temporelles sur les résidus dynamiques . 98

7.3 Modèles structurels à résidus dynamiques, par réseau 101

7.4 Comparaison et interprétation des résultats obtenus 104

Conclusion 110

Bibliographie 113

Annexe A : Introduction aux méthodes de classification exploitées 114

Annexe B : Ordre d'agrégation des variables - Sélection ascendante 122

Annexe C : Indicateurs de pertinence des modèles 123

Annexe D : Graphes des variables temporelles 128

Annexe E : Modèles de résidus dynamiques Euro→UC par réseau 131

Liste des abréviations 132

Table des figures 132

Introduction

En assurance vie, l'investissement du souscripteur d'un contrat est principalement réparti sur deux types de supports distincts : les fonds en euros et les fonds en unités de compte. Ces derniers diffèrent notamment par les risques portés par l'assureur. Les encours placés sur des supports Euro sont garantis par l'assureur, qui investit majoritairement dans des actifs peu risqués tandis que pour les supports UC, fonds plus risqués, la garantie porte sur le nombre de parts détenues par les assurés, pas leur valeur.

Dans le contexte économique actuel de taux bas dans lequel les rendements des actifs obligataires sont très faibles, un enjeu des compagnies d'assurance est de contenir la dilution des rendements des fonds en euros en limitant l'investissement sur ce type de support et en encourageant l'investissement sur les supports en unités de compte, plus risqués mais offrant une espérance de rendement supérieure. La réglementation Solvabilité II impose aux assureurs d'évaluer leurs engagements et les risques attenants afin de prouver leur solvabilité actuelle et future, via notamment une projection à long terme de l'actif et du passif des compagnies. Dans ce cadre, une modélisation des mouvements entre les deux types de supports doit être effectuée. Les arbitrages, représentant un transfert d'un fonds vers un autre, doivent à ce titre être projetés, et leur modélisation fait l'objet de ce mémoire.

La méthode actuelle d'estimation des arbitrages entre supports UC et fonds en euros sur le portefeuille d'assurance vie d'AXA France repose sur une modélisation structurelle du portefeuille basée sur l'ancienneté des contrats uniquement. Une telle méthode a été mise en place par mimétisme par rapport aux lois de rachats structurels qui exploite ce même paramètre, l'impact de l'ancienneté jouant un rôle fiscal important dans le comportement de rachat.
La modélisation des taux d'arbitrages est un enjeu complexe du fait de leur volatilité importante au cours du temps. Ces mouvements sont le résultat de décisions des clients souhaitant notamment optimiser le rendement de leur épargne tout en conservant une part de sécurité. La prise en compte dans la modélisation de paramètres conjoncturels influant sur ces décisions est alors un enjeu.

En se basant sur tous les contrats haut de gamme d'assurance vie d'AXA France ayant été présents sur le portefeuille entre janvier 2008 et décembre 2019, ce mémoire a pour objectif d'affiner la modélisation des taux d'arbitrages et d'étudier l'intégration d'une composante dynamique basée notamment sur les performances des supports UC de la compagnie. Une première partie de l'étude permettra notamment de mettre en exergue la nécessité de changement de méthode de modélisation des taux d'arbitrages par la prise en compte de nouveaux paramètres. Des modèles dynamiques basés sur des séries temporelles seront ensuite étudiés et des méthodes combinant une approche structurelle et des modèles dynamiques seront finalement testés.

Pour aboutir à cette finalité, une analyse préalable du portefeuille est effectuée. Cette dernière permettra d'émettre des hypothèses sur l'évolution des taux d'arbitrages Euro→UC et UC→Euro au cours du temps selon certains paramètres liés aux contrats et d'autres dynamiques ou conjoncturels.

L'analyse rétrospective du portefeuille et la revue de littérature effectuée sur différentes études portant sur les arbitrages permettront d'appuyer les hypothèses émises par l'observation de l'impact des variables structurelles sur ces mouvements. Grâce à des méthodes de *machine learning* pouvant être exploitées pour la classification de variables telles que les arbres de décision, une sélection de variables structurelles sera effectuée. A partir des paramètres retenus, un premier modèle basé sur des variables structurelles sera calibré et permettra de mettre en lumière la nécessité d'intégration de paramètres dynamiques pour capter les tendances d'évolution des arbitrages dans le temps.

Une modélisation des taux d'arbitrages par des séries temporelles permettra d'analyser les effets de paramètres dynamiques sur les mouvements d'arbitrages. Ce type de modèle permettra de prendre en compte les effets du passé récent sur le comportement des assurés, ainsi que la réaction à des évènements extérieurs par l'intégration de variables exogènes telles que des indices boursiers ou les performances des UC AXA France. Enfin, à l'image de ce qui existe sur la modélisation des rachats, une approche reposant sur une composante principale structurelle, et une composante dynamique basée sur des variables conjoncturelles dans le but de capter les écarts de comportement liés à des évènements extérieurs, sera mise en place.

Des comparaisons et interprétations des résultats de backtesting des différents modèles seront finalement réalisés et nous permettront d'analyser l'impact de l'intégration de paramètres conjoncturels pour l'amélioration des projections de taux d'arbitrages.

Première partie

Éléments contextuels de l'étude

Chapitre 1

Présentation de l'assurance vie

1.1 Les contrats d'assurance vie

Généralités sur l'assurance-vie

Un contrat d'assurance-vie fait intervenir plusieurs acteurs que sont l'assureur, le souscripteur, l'assuré, le bénéficiaire et le distributeur :

- L'assureur : c'est celui qui porte les engagements en cas de réalisation d'un risque défini dans le contrat d'assurance. Il reçoit les primes d'assurance.
- L'assuré : la personne sur qui est porté le risque.
- Le souscripteur : il peut aussi être l'assuré. Comme son nom l'indique, il s'agit de la personne qui souscrit le contrat d'assurance-vie et verse les primes d'assurance à l'assureur.
- Le bénéficiaire : c'est celui qui recevra le capital ou la rente en cas de réalisation d'un risque défini dans le contrat d'assurance. Souvent, l'assuré, le souscripteur et le bénéficiaire sont la même personne.
- Le distributeur ou réseau de distribution : il s'agit de celui qui distribue le contrat d'assurance vie. Cela peut être un agent général d'assurance, un courtier, une association d'épargnants ou encore une banque.

Par définition, un contrat d'assurance vie est un contrat dans lequel l'assureur s'engage à verser une rente ou un capital au bénéficiaire à l'échéance du contrat en échange des primes d'assurance payées par l'assuré.

Généralement, un contrat d'assurance vie est viager. Cependant, un contrat peut avoir une durée limitée fixée préalablement.

Selon les risques supportés par l'assuré, deux types de contrats d'assurance vie peuvent être distingués : les contrats d'assurance décès et les contrats d'assurance en cas de vie :

— Pour les contrats d'**assurance décès**, le risque porté par l'assuré est réalisé au moment de son décès. Une rente ou un capital est versé au bénéficiaire, qui est dans ce cas différent de l'assuré.

— Pour les contrats d'**assurance en cas de vie**, par définition, le risque assuré est la vie de l'assuré. Un versement sous forme de capital ou de rente sera remis au bénéficiaire à l'échéance du contrat si l'assuré est toujours en vie à cet instant. Dans ce type de contrat, le bénéficiaire peut être aussi l'assuré. Les contrats d'assurance en cas de vie sont utilisés comme supports d'épargne.

Par la suite, l'évocation de l'assurance vie fera référence à une combinaison d'une assurance en cas de vie et de décès. Selon le support d'investissement, une revalorisation du capital est prévue en cas de vie, et un versement du capital est effectué aux bénéficiaires si le décès de l'assuré survient.

Supports

Deux principaux types de contrats peuvent être distingués en assurance vie : les contrats monosupports et multisupports. Les contrats monosupports constituent un investissement sur un seul type de fonds contrairement aux contrats multisupports qui offrent la possibilité de diversifier l'épargne entre plusieurs types de fonds. Aujourd'hui, la majorité des contrats d'assurance vie commercialisés sont des multisupports.

Les versements du souscripteur peuvent être effectués sur deux types de supports : les **fonds en euros** ou fonds Euro et les **fonds en unités de comptes** usuellement appelés fonds UC ou fonds en UC.

Fonds Euro

Le fonds en euros est un support d'investissement sécurisé sur lequel le capital versé est garanti par l'assureur. Sur ce type de support, les fonds placés à l'actif de l'assureur sont principalement investis sur des placements à faible risque tels que des obligations d'État ou d'entreprise.

Le fonds en euros offre aux assurés certaines garanties :

- **Une garantie en capital** : les encours investis sur des supports en euros sont garantis. En d'autres termes, tout capital placé sur ce type de support permet à l'assuré de récupérer au minimum sa mise initiale, et ce à tout moment.

- **Effet cliquet** : le fonds en euros offre automatiquement aux assurés une garantie de sécurité des plus-values effectuées. Les intérêts générés sur ce type de fonds sont définitivement acquis par l'assuré.

Du fait de la garantie en capital proposée sur ce type de support, un taux minimum garanti annuel de 0% brut de frais sur encours est automatiquement affecté à tout encours placé sur un fonds en euros. Cependant, les conditions générales des contrats d'assurance vie peuvent aussi proposer un engagement de revalorisation par l'assureur. Chaque année, le capital sera revalorisé au minimum à hauteur du taux prévu, il s'agit d'un **taux minimum garanti** (TMG). Si un tel taux n'est pas prévu dans le contrat, un **taux minimum garanti annuel** (TMGA) est fixé par l'assureur chaque année selon les performances du fonds.

Les fonds en Unités de Compte

Contrairement au fonds en euros, le capital investi sur des supports en unités de compte n'est pas garanti par l'assureur. Pour les fonds en UC, l'assureur ne garantit que le nombre de parts investies, pas leur valeur.
Ces fonds peuvent être investis sur plusieurs types de supports tels que des actions, de l'immobilier, ou encore des FCP (Fonds Communs de Placement) et SICAV (Société d'Investissement à CApital Variable). Ils sont plus risqués que les fonds en euros, mais peuvent permettre d'obtenir des rendements historiquement plus élevés à long terme.

Caractéristiques d'un contrat d'assurance vie

Versements

Pour permettre d'accroître le capital investi, le contrat d'assurance vie peut prévoir plusieurs types de versements par le souscripteur :

- **Versements Libres** : Le souscripteur peut verser à tout moment les cotisations qu'il souhaite pour alimenter son assurance vie. Un montant minimum de cotisations peut être fixé dans le contrat.

- **Versements Programmés** : Le souscripteur s'engage à verser un certain montant périodiquement conformément au contrat (mensuellement, annuellement,...). En plus de cela, il est généralement permis au souscripteur d'effectuer des versements libres.

- **Prime Unique** : Le souscripteur verse un capital au moment de la souscription du contrat et ne pourra plus en effectuer par la suite.

Frais

Pour permettre la rémunération de l'assureur, différents types de frais sont appliqués aux contrats d'assurance vie.
Lors de versements, donc dès la souscription, des **frais d'acquisition** sont prélevés par l'assureur sur chaque versement. Il s'agit généralement d'un pourcentage du montant versé, ce taux est préalablement fixé dans le contrat.
Prélevés chaque année, des **frais de gestion** sont aussi appliqués. Il s'agit de frais prélevés périodiquement proportionnellement à l'encours investi sur un support. Le taux de frais de gestion dépend du support où le capital est investi.
Lors de mouvements d'arbitrage définis dans la suite, des frais peuvent être prélevés proportionnellement au montant arbitré, ce sont les **frais d'arbitrage**.

Clause bénéficiaire

Dans un contrat d'assurance vie, le souscripteur est généralement aussi le bénéficiaire du contrat en cas de vie. Cependant, il lui est aussi permis de rédiger une **clause bénéficiaire** permettant de désigner les personnes qui recevront le capital à son décès. Des avantages fiscaux sont proposés en cas de décès.

Fiscalité

L'assurance vie propose des avantages en termes de fiscalité.

En cas de décès, pour les sommes investies après 70 ans, chaque bénéficiaire peut disposer d'un abattement allant jusqu'à 152 500€ sans être redevable de droits. Après abattement, une taxe de 20% est appliquée jusqu'à 700 000€, puis 31,25%. Pour les sommes investies avant 70 ans, chaque bénéficiaire dispose d'un abattement allant jusqu'à 30 500€ sans être redevable de droit, et les intérêts sont exonérés. Si l'épargne acquise dépasse ce montant, les droits de succession ordinaires s'appliquent.

Pour les sorties en cas de vie, ajoutés aux prélèvements sociaux, des prélèvements forfaitaires sont appliqués sur les intérêts obtenus. Ceux-ci évoluent en fonction de l'ancienneté du contrat. Pour les intérêts obtenus par des versements effectués avant le 27/09/2017 :

- Entre 0 et 4 ans, un taux de prélèvement de 35% s'applique.
- Entre 4 et 8 ans, ce taux est de 15%.
- Après 8 ans, le taux est de 7,5% après un abattement de 4600€ pour une personne seule ou 9200€ pour un couple.

Pour les versements effectués après le 27/09/2017, les contrats ayant moins de 8 ans d'ancienneté sont soumis à une "flat tax" ou Prélèvement Forfaitaire Unique (PFU). La "flat tax" comprend l'impôt sur le revenu et les prélèvements sociaux. Ainsi, pour des

prélèvements sociaux de 17.2%, les sommes prélevées s'élèvent à 30% (12.8% +17.2%) des intérêts obtenus. Après 8 ans d'ancienneté, c'est le taux de 7.5% qui s'applique au lieu des 12.8%, avec les mêmes abattements décrits précédemment.
Cependant, pour les encours dépassant 150 000€ même après 8 ans d'ancienneté, la flat tax s'applique aussi.

1.2 Des mouvements de portefeuille

Après la souscription à un contrat d'assurance vie, plusieurs types de mouvements peuvent être effectués afin d'optimiser le rendement du portefeuille ou notamment pour des besoins de liquidité. Des options de rachats et d'arbitrages sont proposées dans chaque contrat.

Options de rachats

Plusieurs options de rachats sont possibles pour chaque contrat d'assurance vie. Un épargnant a deux possibilités en matière de sortie de portefeuille. Soit une sortie totale du portefeuille, il s'agit d'un rachat total du contrat, ou une sortie partielle du portefeuille ou d'un support, il s'agit d'un rachat partiel du contrat. Dans les deux cas, la fiscalité sera appliquée comme décrite précédemment.

Excepté le fait qu'une clause d'indisponibilité temporaire soit rédigée dans le contrat, les deux types de rachats peuvent être effectués à tout moment. Cependant, les conséquences ne sont pas les mêmes :

- Pour le **rachat total**, la totalité de l'épargne placée sur l'assurance vie est récupérée. Le contrat et ses garanties arrivent à termes.
- Pour le **rachat partiel**, seule une partie de l'épargne est récupérée, le contrat et ses garanties ne s'arrêtent pas.

Options d'arbitrages

En plus de l'option de rachat proposée dans tout contrat d'assurance vie, une option d'arbitrage est aussi disponible. Il s'agit d'une possibilité pour l'épargnant de déplacer son épargne d'un support vers un autre tout en ayant la possibilité de garder les garanties et avantages acquis jusque-là, notamment l'ancienneté du contrat. Des mouvements de **supports en euros** vers des **supports en unités de compte** seront possibles, et vice-versa. Les différents arbitrages et leurs caractéristiques seront décrits dans la suite du mémoire.

1.3 Focus sur AXA France

Différents réseaux de distribution

Pour distribuer ses contrats, AXA France utilise plusieurs réseaux, notamment des réseaux propriétaires, et des réseaux tiers avec des partenaires bancaires, des courtiers ou des conseillers en gestion de patrimoine.

— **Réseaux propriétaires** : Il s'agit de conseillers commerciaux ou d'agents généraux chargés de distribuer exclusivement des contrats d'AXA France. Ils sont mandatés pour commercialiser les produits aux clients de la compagnie, et pour les conseiller. La principale différence est que les conseillers commerciaux sont des salariés de la compagnie tandis que les agents généraux sont des indépendants sous mandat exclusif avec la compagnie.

— **Courtiers ou conseillers en gestion de patrimoine** : Il s'agit d'indépendants distribuant les contrats des compagnies d'assurance qu'ils souhaitent. Contrairement aux agents généraux, ils n'ont pas l'obligation de commercialiser des produits d'AXA France.

— **Partenaires bancaires** : Ce sont des banques qui commercialisent à leurs clients des produits à leur nom mais pour lesquels la gestion est déléguée à AXA France.

Exemple d'un produit d'assurance vie

Produit Amadeo Excellence Vie

Le produit Amadeo Excellence Vie est un contrat d'assurance vie multisupport individuel commercialisé et distribué par AXA France à partir de 2008 et jusqu'en 2019. C'est un produit haut de gamme pour lequel le montant minimal à investir à l'entrée est de 300 000€. Il est possible de réaliser des versements à tout moment, à condition qu'il s'agisse de montants supérieurs à 50 000 €. Concernant les versements programmés périodiquement, ceux-ci doivent être au minimum de 300€.

Le produit Amadeo Excellence Vie propose un fonds en euros éponyme et plus de 400 supports d'investissement en Unités de Compte. Le retrait de l'épargne investie sur un tel contrat est possible à tout moment.

Plusieurs types de gestion sont proposées pour ce contrat : la gestion personnelle, la gestion personnalisée et la gestion sous mandat collectif, présentés dans la suite de l'étude. Pour

les arbitrages réalisés par les contrats en gestion personnelle, devant être supérieurs à 70€, ils présentent des frais s'établissant à 0.60% des sommes arbitrées. Concernant les frais de gestion annuels, ceux-ci sont de 0,80% de l'épargne investie sur le fonds euro et de 1% des sommes investies sur les fonds en unités de compte.

Chapitre 2

Focus sur l'arbitrage

Il s'agit dans cette partie de réaliser un large descriptif des arbitrages, dont ce mémoire fait l'objet.

2.1 Contexte réglementaire

Dans le cadre de la directive Solvabilité 2, les compagnies d'assurance sont tenues d'évaluer au plus près les risques actuels et futurs qui pèsent sur leur portefeuille afin de déterminer les capitaux requis pour assurer leur solvabilité. Ces évaluations s'effectuent via une projection à long terme des encours, nécessitant une modélisation des mouvements sur le portefeuille. Dans cette optique, les arbitrages entre supports en euros et en unités de compte doivent être estimés au plus proche.

Solvabilité II

Afin de prouver aux autorités compétentes leur capacité actuelle et future de solvabilité, les assureurs doivent évaluer au plus près leurs engagements et les risques liés notamment suite à la mise en application de la directive européenne 2009/138/CE définissant **Solvabilité II**.

Contexte sous Solvabilité II

Régi par 3 piliers, Solvabilité II précise d'abord les méthodes de valorisation et les exigences de capital fondées sur le risque dans le premier pilier. Ensuite, la gouvernance renforcée

est développée dans un second pilier. Enfin, les exigences de transparence, notamment vis-à-vis du public sont expliquées dans le troisième pilier.

L'estimation des arbitrages est principalement utilisée dans le cadre des exigences quantitatives fixées par Solvabilité II.

Ces exigences fixent la marge de solvabilité que doit détenir l'assureur pour faire face à ses engagements. Pour cela, plusieurs indicateurs sont mesurés.

Les fonds propres détenus par la compagnie d'assurance doivent être supérieurs à des indicateurs que sont le **MCR** et le **SCR**. Ces derniers correspondent respectivement aux montants de fonds propres nécessaires pour faire face à une ruine à 1 an à 75% et 99,5%. Pour cela, les prestations futures de l'assureur doivent être mesurées, notamment en estimant les frais et chargements futurs nécessaires à l'assureur pour la gestion des contrats. Les engagements futurs liés aux assurés doivent aussi être estimés, en mesurant par exemple les rachats et arbitrages qui seront réalisés selon les garanties proposées pour chaque contrat.

Pour calculer les fonds propres minimum à détenir pour être solvable selon la directive Solvabilité II, des chocs sont appliqués sur les flux futurs actualisés précédemment évoqués. Cela étant réalisé selon les différents risques qui sont portés par l'assureur, après agrégation des chocs à l'aide d'une matrice de corrélation. La différence entre les flux futurs actualisés et les flux futurs actualisés après chocs correspond au montant de fonds propres nécessaire pour faire face à une ruine à 1 an, à 99,5% .

Dans le cadre de Solvabilité II, la mesure des exigences en termes de fonds propres pour la solvabilité de la compagnie d'assurance peut aussi se faire à l'aide d'un **Modèle Interne Partiel**, ou d'un **Modèle Interne**. Sous validation du régulateur, l'assureur peut utiliser ses propres indicateurs pour mesurer sa solvabilité, c'est le cas d'AXA France.

Amendements fourgous, DSK/NSK

Amendement fourgous

Mis en place en 2005, l'**amendement fourgous** permet aux assureurs de proposer aux épargnants qui ont un contrat monosupport Euro, de réaliser un arbitrage vers un contrat multisupport avec un minimum de 20% de l'épargne placé sur des fonds en Unités de Compte sans perdre l'antériorité fiscale du contrat. Cela permet à l'assuré de diversifier ses placements tout en espérant un meilleur rendement à long terme, malgré un risque accru. Pour l'assureur, il s'agit de déplacer les risques de garantie du capital placé sur le support Euro ou le versement d'un taux garanti vers des supports en Unités de Compte pour lesquels c'est l'assuré qui porte le risque.

Contrats DSK/NSK

Entre 1998 et 2005, les contrats **DSK** ont été mis en place. Ces derniers permettent l'exonération totale d'impôts sur le revenu après avoir détenu le contrat pendant 8 ans. Pour bénéficier de cet avantage fiscal, l'encours de ce type de contrat devait être placé au minimum à 50% sur des supports en actions européennes, dont 5% sur des actions dites "risquées".

Une variante de ces contrats a ensuite été instaurée en 2005 : les contrats "**NSK**". Ils permettent aussi l'exonération totale d'impôts sur le revenu après 8 ans d'ancienneté. Cependant, il s'applique ici seulement dans le cas où au moins 30% du capital est placé sur des actions européennes, dont 10% sur des actions dites "risquées", dont 5% sur des titres de sociétés non cotées.

Pour ces deux types de contrats, les prélèvements sociaux s'appliquent normalement lors de rachats. De plus, bénéficier de tels avantages fiscaux étaient et sont permis par la souscription de nouveaux contrats, mais aussi par des arbitrages d'un contrat monosupport en euros.

2.2 Contexte économique et financier

Dans un contexte où une finesse d'estimation des engagements de l'assureur est requise dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, le contexte économique et financier actuel impose aux compagnies de garder en réserve un montant de fonds propres de plus en plus important.

Un environnement de taux bas

Afin de faire face aux engagements liés à la garantie en capital sur le fonds en euros, l'investissement des compagnies d'assurance pour ce type de fonds s'effectue majoritairement sur des actifs sans risque, notamment des obligations d'Etat ou d'entreprise. Or, depuis quelques années, les rendements des obligations d'Etat ne cessent de diminuer. Notamment, les taux moyens d'emprunts d'Etat (TME) ont eu un rendement qui est passé de 5,30% en 2000 à 0,20% en 2019. On peut voir cela sur le graphe suivant :

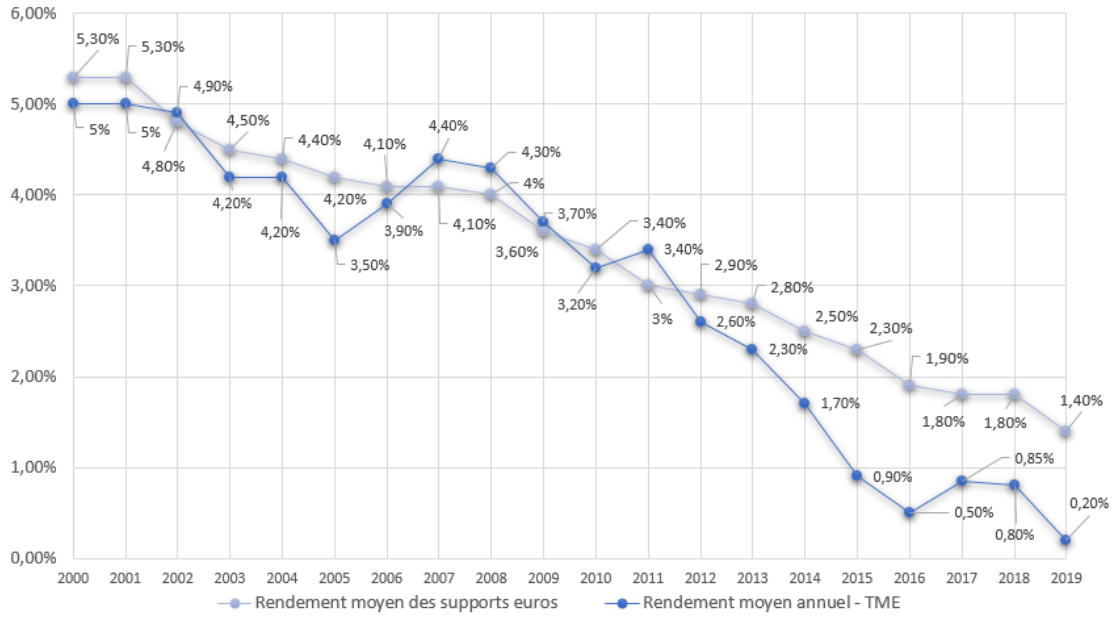

FIGURE 2.1 – Evolution du rendement moyen annuel des TME et des supports euros

Les valeurs des performances des fonds en euros sont nettes de frais de gestion et avant prélèvements sociaux et fiscaux. Les taux TME indiqués sont des moyennes sur l'année. Source : [6]

Sur le graphe, il est remarquable que le rendement moyen des supports euros a suivi la même tendance baissière que les rendements des OAT 10 ans jusqu'en 2012. Après 2012, les rendements des fonds en euros sont supérieurs aux OAT 10 ans principalement du fait que les fonds en euros bénéficient des rendements d'anciennes obligations ayant une rémunération bien supérieure au taux OAT 10 ans.

Forte volatilité des marchés

Ajouté à l'environnement de taux bas, la crise financière et économique des subprimes de 2008 et du Covid-19 en 2020 démontrent le fait que les marchés sont très volatiles. En assurance vie, cela a un impact sur les actifs détenus pour composer les fonds Euros, mais aussi sur les comportements d'investissement des assurés. Les supports en unités de compte pouvant être composés d'actions d'entreprises ou d'ETFs basés sur certains indices financiers, cela peut inciter les épargnants à se diriger vers des supports plus sûrs lors de crises financières, et à opter pour des supports en unités de compte lors de périodes haussières.

2.3 Focus sur l'arbitrage

Dans cette partie, les différentes caractéristiques des arbitrages seront détaillées.

Impact des arbitrages

Les options d'arbitrage sont des mouvements effectués par les assurés pour déplacer leur capital du montant de leur choix, d'un support à un autre, tout en conservant les garanties d'antériorité fiscale du contrat. Des frais peuvent s'appliquer selon les termes du contrat.

L'arbitrage peut être réalisé pour diverses raisons. Généralement, il s'agit d'une manière d'optimiser son portefeuille en espérant obtenir un meilleur ratio rendement/risque en changeant de support. Il peut aussi s'agir d'arbitrer vers des supports plus sûrs afin de sécuriser son épargne tout en conservant un rendement satisfaisant.

Quel que soit le motif justifiant un arbitrage, celui-ci n'aura des conséquences importantes pour l'assureur que s'il s'agit d'un mouvement d'un support Euro vers un support en UC, ou d'un support en UC vers un support Euro. Pour l'assureur, les mouvements entre les supports en Unités de Compte n'auront pas d'impact car le risque reste porté par l'assuré. Le support en euros est généralement unique pour un produit donné, aucun arbitrage d'un support Euro à un autre n'est donc observé.

Bien qu'encouragés par les compagnies d'assurance car permettant de se libérer du risque lié à la garantie en capital, les mouvements d'arbitrages d'un fonds Euro vers des fonds en UC imposent à l'assureur de liquider certains de leurs actifs obligataires. Des moins-values peuvent être réalisées dans des scénarios de hausse de taux notamment lorsque le prix des obligations en portefeuille diminue. En plus de cela, la vente de certains actifs détenus par les compagnies d'assurance peuvent poser des problèmes de liquidités, notamment sur des actifs immobiliers.

Les arbitrages effectués d'un support en UC vers un support Euro ont également des répercussions sur les compagnies d'assurance vie. Ceux-ci peuvent impacter à la baisse les performances des fonds en euros car ces mouvements imposent à l'assureur d'acquérir de nouveaux actifs sécurisés pour lesquels les taux sont actuellement bas, voire négatifs. On parle de dilution du rendement du fonds. Dans une période où la concurrence entre les compagnies d'assurance est importante, la baisse de rendement du fonds Euro engendrée pourra être un frein à l'investissement pour des assurés qui se dirigeront vers d'autres types de placements. Du fait des risques supportés liés aux garanties de capital sur le support Euro, la marge de solvabilité devra être accrue.
De plus, l'investissement massif dans des actifs obligataires à faible rendement entraîne une exposition plus importante à un scénario de remontée brutale des taux, dans lequel le rendement des fonds euros des assureurs ne pourra pas suivre les taux du marché du fait

du nombre important d'obligations à faible rendement en portefeuille.

Modes de gestion

En assurance vie, différents modes de gestion de l'épargne investie sont proposés aux assurés. Ils permettent notamment aux épargnants d'adapter au mieux leurs exigences en termes de ratio rendement/risque, et peuvent aussi leur permettre de réaliser des mouvements de portefeuille automatiquement par exemple lors de fortes variations des valeurs des Unités de Compte.

Deux principaux types de gestion sont disponibles :

— **Gestion Libre** : il s'agit du mode de gestion par défaut, c'est l'épargnant qui choisit sur quels supports il souhaite investir. Malgré un certain accompagnement, il réalise lui-même ses arbitrages.

— **Gestion Pilotée** : un contrat sous mandat de gestion pilotée est différencié selon le type de profil choisi par l'assuré. La part de risque prise diffère selon le type de profil. Les investissements et mouvements de portefeuille pour ces contrats seront directement effectués par l'assureur ou le mandataire du contrat. Ainsi, les frais de gestion sont plus élevés que pour des contrats sans mandat de gestion. Un mode de gestion pilotée personnalisé peut aussi être proposé aux assurés.

Options et garanties contractuelles

En plus de la sélection du type de gestion, il est permis aux assurés d'ajouter des options et garanties à leur(s) contrat(s) afin d'optimiser leur épargne dans diverses circonstances.

Garantie Plancher

Souscriptible lors de l'ouverture d'un contrat multisupports, la garantie Plancher permet que la somme des versements bruts effectués dans la vie du contrat soit versée aux bénéficiaires lorsque l'assuré décède avant ses 70 ans .

Stop-Loss

L'option Stop-Loss permet de réaliser des arbitrages automatiques lorsque la baisse sur un ou des supports en Unités de Compte est trop importante. Un arbitrage vers des fonds en euros est automatiquement effectué. Le seuil de baisse à partir duquel l'option se déclenche est fixé préalablement par l'assuré.

Dynamisation des intérêts annuels

L'option de dynamisation des intérêts annuels permet à un assuré ayant des parts de son épargne sur un fonds en euros d'arbitrer automatiquement chaque année le montant des intérêts obtenus vers des supports en unités de compte.

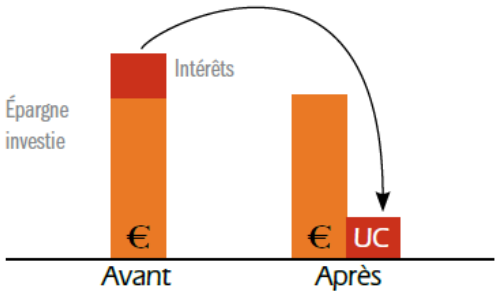

FIGURE 2.2 – La dynamisation des intérêts annuels. Source : [2]

Réajustement automatique gratuit

L'option de réajustement automatique gratuit (RAG) permet à l'assuré de conserver une même part d'UC souhaitée chaque année selon les performances des différents supports. Des arbitrages ou réajustements sont automatiquement effectués chaque année.

Cette option est illustrée par la figure située sur la page suivante.

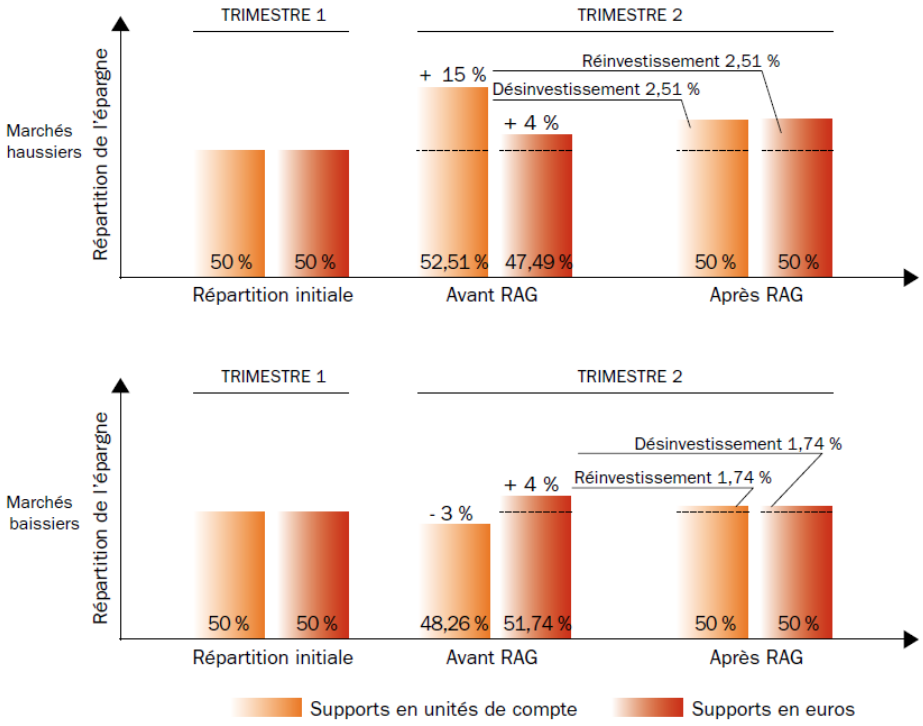

FIGURE 2.3 – Exemple de réajustement trimestriel pour une répartition initiale de 50 % sur les supports en unités de compte et de 50 % sur le support en euros. Source : [2]

Détails des types d'arbitrages

Les mouvements d'arbitrages peuvent être placés dans deux grandes catégories. D'une part les arbitrages libres, d'autres part les arbitrages dits "automatiques".

— Les arbitrages **libres** correspondent aux mouvements réalisés directement par le souscripteur d'un support vers un autre.

— Les arbitrages **automatiques** sont constitués des mouvements réalisés automatiquement. Cela peut être via des options automatiques inscrites dans le contrat comme les Stop-Loss ou les Réajustements Annuels Gratuits (RAG), ou encore effectués par l'assureur ou le mandataire lorsque les contrats sont sous mandat de gestion collective.

Chapitre 3

Revue de littérature

Bien que les options d'arbitrages n'aient pas été au cœur de beaucoup de publications scientifiques, plusieurs mémoires d'actuariat ont fait l'objet de recherches se focalisant sur les comportements d'arbitrages, qu'ils soient structurels ou conjoncturels. Les arbitrages structurels désignent les arbitrages modélisés par un comportement moyen, selon les caractéristiques des contrats comme l'ancienneté, l'âge ou l'encours détenu. La modélisation des arbitrages conjoncturels dépendrait plutôt de l'environnement économique et financier, et donc modifié au cours du temps. Plusieurs motivations peuvent inciter les compagnies d'assurance à mesurer ces mouvements de portefeuille. Comme vu précédemment, cela peut être dû à des contraintes réglementaires, mais aussi à des fins de valorisation du portefeuillle de contrats d'Epargne des compagnies ou encore pour trouver des leviers de rentabilité. Étant difficiles à estimer, des écarts importants sont souvent observés entre les projections effectuées et la réalité, d'où l'enjeu pour les assureurs de réaliser des recherches sur ce sujet.

Cette revue de la littérature a notamment pour but d'exploiter les différents travaux pour identifier les recherches déjà effectuées sur le sujet afin de déterminer plus précisément ce qui reste à étudier et explorer. Les études portant sur les arbitrages traitent du sujet à partir de différentes approches, et de bases de données différentes comme cela sera expliqué par la suite. Cette analyse de la littérature permettra alors de s'appuyer sur des recherches effectuées afin d'élaborer de nouvelles perspectives.

Choix d'exploitation des données

Dans les différents mémoires étudiés, le pré-requis à toute étude sur les d'arbitrages est l'obtention d'une base de donnée exploitable contenant les détails des mouvements et un nombre suffisant de variables explicatives.

Il s'agira également de déterminer la profondeur d'historique optimale, sous des contraintes de disponibilité et de fiabilité de la donnée, mais également par choix pour des raisons d'évolution des comportement dans le temps, suite à des modifications réglementaires par exemple. Notamment, K. ZENNAF [15] se base sur une période allant de 2007 à 2011 en prenant tous les contrats d'épargne et flux d'arbitrages présents durant cette période. Pour son étude, C. FOLGOAS [9] dispose des données des années comprises entre 2004 et 2015.

De son côté, B. AMRANI [1] ne base son étude que sur les arbitrages individuels ayant été réalisés durant les premiers trimestres respectifs de 2006 et de 2008. Ce choix a été fait car ces périodes comporteraient d'importants mouvements d'arbitrages de l'Euro vers l'UC pour 2006, et de l'UC vers l'Euro en 2008. Pour son étude, K. RFIG [13] étudie un échantillon de 57 558 contrats d'épargne multisupports présents entre 2008 et 2015 et ayant réalisé au moins 1 arbitrage durant cette période. La spécificité de son étude est qu'elle se base sur un produit commercialisé sur internet. Comme K. RFIG, O. BERRADA [3] utilise une base de données des contrats ayant réalisé au moins un arbitrage durant la période allant de 2006 à 2015. Il fait le choix de n'utiliser que les arbitrages libres. Un choix que fait également S. FENIZA [8] en utilisant une base des données allant de 2010 à 2018 en se restreignant à tous les arbitrages libres effectués sur 211 000 contrats d'épargne multisupports.

Approche structurelle

Pour la compréhension et la modélisation des comportements d'arbitrages, toutes les études effectuées sur le sujet réalisent dans un premier temps une approche basée sur la structure des arbitrages de leur portefeuille.

Dans son mémoire d'actuariat, K. ZENNAF [15] se base d'abord sur une étude structurelle des arbitrages en analysant l'impact que pourraient avoir certaines variables sur les taux d'arbitrages à l'aide de statistiques descriptives sur son portefeuille. Pour lui, l'âge et l'encours investi d'un assuré impacteraient le fait d'arbitrer ou non, contrairement à l'ancienneté qui ne serait pas influente. Il en conclut que plus un assuré a une épargne importante, plus il va arbitrer vers des supports risqués. Au contraire, lorsque l'âge d'un assuré augmente, celui-ci aurait tendance à se diriger vers des supports plus sûrs.

S. FENIZA [8] se base initialement seulement sur des variables structurelles pour déterminer ce qui influe sur les mouvements d'arbitrages. Une étude de la pertinence du modèle actuel d'estimation des taux d'arbitrage est réalisée. D'après ce modèle, les tables d'arbitrages annuelles sont construites en se basant sur une unique variable structurelle qui est l'ancienneté. Pour lui, l'utilisation de cette variable n'est pas justifiée. A l'aide d'une méthode dite des « Règles d'Association », il s'intéresse alors à des variables structurelles telles que l'âge, la génération de l'assuré et le taux annuel de frais sur encours. Pour des

raisons d'exploitation du modèle, il fait le choix de ne retenir que l'âge et la part d'UC des épargnants comme variables pouvant impacter les arbitrages. Ainsi, il prédit les taux d'arbitrages selon ces différents paramètres à l'aide de taux historiques. Il montre que l'âge et la part UC seraient les variables les plus adaptées pour la modélisation des taux d'arbitrages, contrairement à l'ancienneté. Dans cette étude, S. FENIZA estime également que l'historique à utiliser pour le calibrage de lois d'arbitrages structurelles ne serait pas l'entièreté de la base de données mais seulement un historique de 6 ans.

Les approches structurelles offrent des projections proches des montants moyens historiques mais, ne dépendant pas de facteurs exogènes, ne permettent généralement pas de suivre les tendances observées dans la réalité à court terme. Des variables dynamiques ou conjoncturelles sont alors étudiées.

Approche conjoncturelle des arbitrages

Les arbitrages conjoncturels désignent les arbitrages qui varieraient selon l'environnement économique et financier, ils ne dépendent alors pas des arbitrages passés.

K. ZENNAF [15] s'intéresse aux arbitrages conjoncturels en s'appuyant sur les préconisations données par les résultats de l'étude QIS5 (5ème étude d'impact quantifiée) pour la formule de lois de rachats dynamiques annuels à utiliser. Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, la formule standard recommande de calculer les taux de rachats des contrats comme la somme d'un taux structurel et d'un taux conjoncturel. Le taux structurel ne dépend que des caractéristiques de l'assuré et du contrat, tandis que le taux conjoncturel dépend d'un benchmark qui est la différence entre les taux servis par l'assureur et des taux du marché. Le taux conjoncturel serait modélisé par une « double courbe en S ». K. ZENNAF adapte la formule en proposant de modéliser des comportements d'arbitrages dynamiques par l'utilisation d'une fonction de déviation des taux d'arbitrages structurels. La déviation du taux structurel est calculée à partir de l'aversion au risque des assurés, et dépendrait de l'écart entre le taux de rendement UC et celui de l'euro et de leur volatilité. Dans le modèle utilisé par K.ZENNAF le taux d'arbitrages serait déterminé comme étant la somme d'un taux déterministe et d'un taux déterministe multiplié par la déviation.

Comme K. ZENNAF, B. AMRANI [1] utilisera dans un second temps l'analogie faite entre la méthode de calcul des rachats et des arbitrages. A l'aide d'une Analyse en Composantes Principales, il s'intéresse aux variables pouvant expliquer les choix des assurés de réaliser des arbitrages. Comme paramètres conjoncturels, il utilise notamment les taux moyens TEC 10 ans et les variations du CAC 40 respectivement un mois, deux mois et trois mois avant la date d'un arbitrage et d'autres variables. Il montre que les variables ayant le plus de liens avec les taux d'arbitrages sont les fluctuations du CAC 40 et les rendements des contrats avant un arbitrage.
Dans un second temps, pour estimer les taux d'arbitrages, B. AMRANI essaie d'expliquer

la variation de la part du support en euros dans le contrat. Tout comme pour le mémoire de K. ZENNAF, une analogie est faite entre les rachats conjoncturels et la manière de déterminer la variation de la part du support Euro dans le contrat. A l'aide de modèles linéaires et non linéaires, il essaie de prédire les taux d'arbitrages en utilisant comme variables explicatives des benchmarks qui sont des écarts entre les performances respectives du CAC 40, du TEC 10 ans et des contrats et les taux de rendement des contrats l'année précédant l'arbitrage.

K. RFIG [13] fait le choix de ne pas différencier arbitrages conjoncturels et structurels. La variable cible à déterminer est pour lui la différence entre le taux d'arbitrage du fonds Euro vers l'UC et le taux d'arbitrage UC→Euro. Dans un premier temps, les assurés sont classifiés selon leur appétence à acter un arbitrage grâce à une méthode de scoring, cela étant déterminé à l'aide d'algorithmes de classification supervisée. Dans un second temps, les taux d'arbitrages sont étudiés à l'aide de méthodes de régression non linéaires.
K. RFIG détermine ainsi les variables explicatives les plus impactantes sur le taux d'arbitrages. Il montre que sur son échantillon, la décision d'arbitrer est fortement influencée par des variables conjoncturelles que sont la performance du CAC 40 et les niveaux de taux de PB servis. Ensuite, lorsque la décision pour un client d'arbitrer est prise, ce sont des paramètres structurels : la part d'UC dans le portefeuille et la PM du contrat qui impactent le plus sur le taux de l'arbitrage.
Pour cette étude, le bon calibrage de taux d'arbitrages doit être faite en combinant des paramètres structurels dans un premier temps, puis conjoncturels. Les variables structurelles d'un contrat permettraient de déterminer l'appétence d'un assuré à passer une option d'arbitrage. Les variables conjoncturelles, qui dépendent de paramètres financiers, auraient plutôt un impact sur le montant d'arbitrage réalisé par un épargnant.

A la manière de K. RFIG, O. BERRADA [3] exploite différentes variables structurelles comme conjoncturelles. Comme dans les précédents mémoires, l'âge de l'assuré et la PM investie sur chaque support sont explicatives, mais également des informations commerciales sur les contrats. Concernant les variables conjoncturelles, ce sont des données externes qui sont intégrées à l'étude : le CAC 40, le VStoxx mais aussi des variables plus irrationnelles comme la confiance des ménages dans l'économie.
O. BERRADA s'appuie sur différents algorithmes de *machine learning* pour déterminer au mieux les variables impactant sur les taux d'arbitrages. Certaines hypothèses pour les modèles linéaires n'étant pas vérifiées, il remarque que les taux d'arbitrages prédits par ces modèles ne sont pas pertinents. Cependant, pour les modèles non linéaires, le travail effectué permet de connaître les variables qui ont le plus d'impact sur les arbitrages.

De même, C. FOLGOAS [9] réalise une étude des arbitrages des supports en UC vers l'Euro à l'aide de régressions linéaires multiples sur différentes variables conjoncturelles pour trouver ce qui impacte les taux d'arbitrages. Elle note alors que la performance du CAC 40 et sa volatilité sont des variables significatives.

Enfin, concernant l'utilisation et l'exploitation de variables conjoncturelles, S. FENIZA [8]

utilise également dans son étude l'intégration d'une composante dynamique pour la prédiction des taux d'arbitrages. Pour mesurer les comportements d'arbitrages des épargnants, il utilise une modélisation des mouvements à l'aide de séries temporelles. S. FENIZA effectue une régression dynamique en se basant sur les variations mensuelles du CAC 40 et du Taux Moyen d'Emprunt d'Etat. Le constat fait à la suite de cette étude est que les performances des indices financiers auraient un impact à court terme sur les mouvements d'arbitrages.

Ainsi, par l'étude de l'impact de certaines variables structurelles et conjoncturelles, il est possible d'approcher les flux d'arbitrages observés. Cependant, une autre composante des comportements d'arbitrage peut être prise en compte. Il s'agit de l'aspect rationnel ou non de l'acte d'arbitrage par les assurés.

Prise en compte de la rationalité du comportement client

Certains ont fait le choix de supposer que l'acte d'arbitrage est rationnel. Notamment, pour pallier le fait que les hypothèses d'homoscédasticité et de normalité faites pour appliquer des régressions linéaires soient fausses, C. FOLGOAS construit un modèle d'allocation cible de l'épargne pour déterminer le comportement d'arbitrage des assurés. Sous des hypothèses de rationalité du comportement des assurés, elle s'appuie sur des théories de gestion de portefeuille d'investissement pour expliquer les arbitrages.

L'hypothèse de rationalité étant forte, K. RFIG considère lui que l'irrationalité présente dans la prise de décision pour un assuré d'arbitrer est composée d'un état d'esprit général, commun à tous les assurés, et d'une composante qui diffère d'un assuré à l'autre. Pour remédier à cela, il choisit simplement de réduire au maximum le biais commun aux assurés. Par état d'esprit général, K. RFIG explique qu'il peut s'agir notamment d'un paramètre comme la confiance globale dans les marchés. On peut rapprocher ce paramètre à la variable utilisée dans le mémoire d'O.BERRADA. Dans son étude, malgré l'obtention d'erreurs d'estimation pour les arbitrages relativement élevées avec tous les algorithmes de *machine learning* utilisés, certaines variables ont démontré une certaine influence sur la prédiction des arbitrages de l'Euro vers l'UC et de l'UC vers l'Euro. Notamment pour la première fois, des variables subjectives telles que l'opinion sur l'opportunité d'épargne des ménages et leur confiance montrent un intérêt dans la prédiction du choix pour un assuré de réaliser un arbitrage.

Ainsi, par la difficulté de mesurer le paramètre irrationnel que constitue l'acte d'arbitrage, certains feront le choix de concéder que des erreurs de prédiction sont à relativiser à cause de ce biais pour la prédiction d'arbitrages.

Avantages et inconvénients des méthodes

Les études réalisées ont permis de mettre en valeur des variables structurelles et dynamiques pouvant impacter les comportements d'arbitrages. Il convient cependant de ne pas généraliser l'ensemble des résultats obtenus en raison notamment d'hypothèses prises ou des données bien spécifiques aux études réalisées. En effet, les auteurs des différents mémoires ont notamment pu émettre des réserves concernant les résultats obtenus et leur généralisation.

Concernant l'étude de B. AMRANI, malgré des résultats démontrant un impact de certaines variables financières sur les variations de la part du support en euros d'un contrat, il est à nuancer le fait que l'utilisation d'un faible historique pourrait ne pas refléter les arbitrages futurs de contrats. La seule utilisation des premiers trimestres des années concernées a été fait pour se concentrer sur des périodes de crises financières, avec de fortes variations d'indices financiers.
De plus, la méthode utilisée pour projeter des variations de la part du support en euros dans le contrat se base sur le fait que le nombre d'arbitrages sur un produit est connu. Cela n'est pourtant pas acquis car c'est une variable qui est également très volatile et difficile à déterminer avant de pouvoir réaliser une projection. Cependant, il a pu démontrer qu'en période de crise financière, les assurés ayant une petite épargne ont plus tendance à se diriger vers les fonds euros que les assurés ayant une épargne importante. ces derniers ont souvent la possibilité de se diriger vers des offres alternatives qui leur sont proposées.

Par ailleurs, C. FOLGOAS montre que des évolutions de marché auront un impact sur les décisions pour les épargnants d'arbitrer. Ensuite, en s'appuyant sur des théories de gestion de portefeuille, et en supposant le caractère rationnel du comportement d'arbitrage, il en est déduit que les assurés, à long terme, en cherchant à optimiser l'allocation de leur épargne, choisiront de diversifier leur épargne par l'arbitrage du support Euro vers les supports en UC. Le fait de considérer le comportement des assurés comme étant totalement rationnel est une hypothèse forte qui aura pour conséquence d'obtenir des résultats contenant un biais.

En effet, la modélisation précise des arbitrages est complexe, et généralement mal évaluée à cause d'une grande volatilité due au comportement pas toujours rationnel des assurés.
Certaines erreurs d'estimation trouvées par des études ne sont pas obligatoirement dues à des hypothèses prises pour l'utilisation de certains modèles. Ces biais peuvent également être la conséquence de choix réalisés sur la base de données initiale utilisée pour l'étude.

O. BERRADA effectue son étude dans le but d'augmenter la rentabilité des assureurs en essayant de trouver des leviers permettant d'inciter les assurés à se diriger vers des supports plus rentables. L'étude effectuée se base uniquement sur une base de données de contrats ayant réalisé au moins un arbitrage. Cependant, les arbitrages que pourraient effectuer des épargnants n'ayant jamais réalisé d'arbitrages ne sont pas pris en compte, de

tels résultats seraient alors difficilement généralisables à un portefeuille entier.

K.RFIG soulève une limite similaire de son étude. Son mémoire a été réalisé sur un segment Internet. Sur ce type de segments, beaucoup d'arbitrages sont réalisés et il est pertinent d'étudier un échantillon où beaucoup de mouvements ont eu lieu. Cependant, les frais appliqués à tous les arbitrages de cet échantillon sont nuls et les conclusions obtenues pourraient ne pas se reporter sur de l'assurance-vie classique pour laquelle les frais sont souvent strictement positifs. De plus, comme les arbitrages sont réalisés sur internet, aucun conseiller n'est présent pour aider les assurés à choisir le support où arbitrer, le caractère irrationnel des arbitrages est largement amplifié et n'est pourtant pris en compte que par la part d'unités de compte présente sur un contrat, qui refléterait l'aversion au risque des épargnants.

Enfin, concernant l'étude des comportements d'arbitrages à l'aide de séries temporelles de S. FENIZA, les paramètres structurels des contrats n'ont pas été pris en compte et pourraient probablement permettre d'avoir des prédictions des arbitrages plus fins.

Conclusion

Les comportements des assurés en matière d'arbitrages sont complexes à appréhender. L'étude préalable des éléments structurels et conjoncturels influant sur le comportement est nécessaire avant d'essayer de prédire les comportements d'arbitrages. Malgré des hypothèses différentes, certaines variables discriminantes sont récurrentes : il s'agit de l'âge d'un assuré, de son encours et de sa part d'unités de compte. Il est cependant constaté qu'une variable n'agit pas dans plusieurs études : l'ancienneté.

Il est constaté dans les différents mémoires étudiés que les variables conjoncturelles et notamment les indices financiers tels que le CAC 40 ont un impact non négligeable sur le comportement d'arbitrage. Concernant la prise en compte de l'irrationalité du comportement d'arbitrage, le constat global est que l'aversion au risque est la composante rationnelle ayant le plus d'impact sur les comportements d'arbitrage. De plus, différents modèles de sélections de variables ont été étudiés : par exemple, O. BERRADA a exploité des méthodes de *machine learning* comme les forêts aléatoires, B. AMRANI a lui utilisé une ACP. En s'appuyant sur le modèle préconisé par la réglementation Solvabilité II pour le calcul des lois de rachats, certains ont choisi de mesurer les taux d'arbitrages en séparant une composante structurelle d'une autre conjoncturelle.

Étant donné la diversité des historiques utilisés dans les études, la différence de structure des produits analysés et de modèles utilisés, il est impossible de faire ressortir un modèle à généraliser. On constate notamment que certaines conclusions diffèrent selon les données et hypothèses utilisées, comme sur l'impact du taux servi, qui est considéré comme influent dans le mémoire de K.RFIG, alors qu'il a peu d'impact dans l'étude de C.FOLGOAS.

Finalement, malgré un consensus sur l'utilisation de certaines variables pour expliquer les comportements d'arbitrage, aucune des méthodes utilisées n'a permis d'obtenir des résultats précis concernant la prédiction des taux d'arbitrages. Il reste encore de nombreuses voies à explorer pour perfectionner la prédiction et la compréhension de ce mouvement très volatile qui est l'arbitrage.

Deuxième partie

Analyse qualitative et quantitative de la base de données

Chapitre 4

Analyse de la base de données

4.1 Extraction et traitement d'une base de données d'arbitrages

Présentation de la base de données

Dans le cadre de cette étude, la base de données exploitée est composée des contrats haut de gamme d'assurance vie d'AXA France. Sur ce périmètre, on observe des arbitrages plus volatiles que sur le réseau Retail, en raison du volume plus faible de contrats et des montants plus élevés et plus volatiles.

Pour permettre une analyse plus fine des arbitrages et mieux capter les effets conjoncturels liés notamment aux mouvements de marché, la base de données étudiée est mensuelle et contient plusieurs dizaines de milliers de contrats et flux d'arbitrages sur un historique de 10 ans, entre janvier 2008 et décembre 2019. Cette base ne prend en compte que les supports UC et euros, les supports eurocroissance ne sont pas intégrés à l'étude.

Pour chaque mois, la base de données comporte la somme des arbitrages Euro→UC et UC→Euro réalisés pendant le mois par chaque contrat. Toutes les variables structurelles, liées aux contrats étudiées étant renseignées et mises à jour mensuellement.

Traitement des données

Un travail de ré-extraction des données sur l'historique concerné a été réalisé. Jusqu'ici les lois étaient mises à jour en incrémentant les données d'une année sur l'autre. Pour récupérer de nouvelles variables d'étude et s'assurer de la fiabilité de la base étudiée, un

travail d'exploration des données a été préalablement effectué.
Des statistiques descriptives présentant les données d'étude seront évoquées dans une prochaine section.

Concernant le traitement de cette base, les mouvements d'arbitrages réalisés automatiquement sont identifiés et supprimés. Comme vu précédemment, de nombreuses options permettent aux assurés que des mouvements d'arbitrages automatiques soient réalisés sur leur épargne selon certaines dispositions. Ces derniers n'étant pas directement liés à une décision spécifique du client, ils seront exclus de l'étude.

Certains supports d'investissement sont des fonds d'attente, permettant de faire transiter des fonds lors d'un versement ou d'un arbitrage. Les mouvements en entrée et en sortie de ces supports sont également exclus de l'étude.

Enfin, les mouvements d'annulation de flux sont également à exclure de l'étude. Par exemple, une période de rétractation de 30 jours inclue dans le contrat peut permettre aux assurés d'annuler tout mouvement d'arbitrage dans les 30 jours qui suivent la signature du contrat. Ce type de mouvement est renseigné dans la base de données et doit être traité pour que les arbitrages réalisés puis annulés ne soient pas pris en compte dans le périmètre de l'étude. Notamment, ces annulations peuvent être expliquées par le délai de valorisation du contrat imposé qui est de 3 à 6 jours ouvrés en général. Durant cette période, la valeur des unités de compte peut varier, ce qui peut pousser un assuré à annuler son arbitrage initial si la variation des valeurs des UC est en sa défaveur.

Notations

Certaines notations sont utilisées dans cette partie, pour un contrat donné :

- $Montant^M_{UC \to Euro}$: Montant d'arbitrages mensuel d'un fonds UC vers un fonds Euro pour un mois M.

- $Montant^M_{Euro \to UC}$: Montant d'arbitrages mensuel d'un fonds Euro vers un fonds UC pour un mois M.

- PM^M_{Euro} : Encours ou provision mathématique sur le support Euro pour la fin d'un mois M.

- PM^M_{UC} : Encours ou provision mathématique sur les supports en UC pour la fin d'un mois M.

- $PM^M_{tot} = PM^M_{Euro} + PM^M_{UC}$: Provision mathématique totale pour la fin d'un mois M.

- $r^M_{Euro \to UC} = \dfrac{Montant^M_{Euro \to UC}}{PM^M_{Euro}}$: taux d'arbitrages mensuel Euro $\to$ UC pour un mois

M donné.

- $r^M_{UC\to Euro} = \dfrac{Montant^M_{UC\to Euro}}{PM^M_{UC}}$: taux d'arbitrages mensuel UC $\to$ Euro pour un mois M donné.

Calcul opérationnel des arbitrages

Dans cette étude, comme un produit ne contient théoriquement qu'un fonds en euros, il sera considéré que toute sortie d'un fonds Euro est un arbitrage du fonds Euro vers un fonds en Unités de Compte. De même, toute entrée sur un fonds en euros est considérée comme étant un arbitrage d'un fonds en UC vers un fonds Euro. On considèrera donc que :

$Montant^M_{UC\to Euro}$ =Arbitrages en entrée sur le fonds Euro durant le mois M

$Montant^M_{Euro\to UC}$ =Arbitrages en sortie du fonds Euro durant le mois M

En théorie, l'affirmation précédente n'est pas vérifiée du fait des frais d'arbitrages qui s'appliquent. On a normalement :

$$\text{Arbitrages en entrée} = \text{Arbitrages en sortie} - \text{frais d'arbitrages}$$

En pratique, par simplification opérationnelle, le choix de négliger les frais d'arbitrages est fait, ces derniers ne s'élevent généralement pas à plus de 1% des montants arbitrés.

Ensuite, pour le calcul d'un taux d'arbitrages, la provision mathématique qui doit théoriquement être utilisée est celle effective au moment de l'arbitrage. Seules des bases de données actualisées à la fin de chaque mois des montants de PM sont disponibles. Un choix d'approximation par une PM moyenne est effectué pour chaque mois, pour chaque contrat :

- Si $PM^M_{Euro} = 0$ et $PM^M_{UC} = 0$, alors $\begin{cases} PM^M_{MoyEURO} & = & PM^{M-1}_{Euro} \\ PM^M_{MoyUC} & = & PM^{M-1}_{UC} \end{cases}$
- Si $PM^{M-1}_{Euro} = 0$ et $PM^{M-1}_{UC} = 0$, alors $\begin{cases} PM^M_{MoyEURO} & = & PM^M_{Euro} \\ PM^M_{MoyUC} & = & PM^M_{UC} \end{cases}$

- Sinon : $\begin{cases} PM^{M}_{MoyEURO} & = & \dfrac{PM^{M-1}_{Euro} + PM^{M}_{Euro}}{2} \\ PM^{M}_{MoyUC} & = & \dfrac{PM^{M-1}_{UC} + PM^{M}_{UC}}{2} \end{cases}$

4.2 Exploitation et choix de variables

Dans la suite de l'étude, l'influence de paramètres structurels sur les comportements d'arbitrages va être étudiée. Pour cela, une sélection de variables a préalablement été réalisée, ces variables sont décrites dans cette section.

Description des paramètres structurels étudiés

1. **Ancienneté** : correspond au nombre d'années depuis lequel un contrat a été souscrit.
2. **Age** : l'âge utilisé est celui de l'assuré. A défaut, si l'âge de l'assuré est manquant, c'est l'âge du souscripteur qui est retenu.
3. **Encours** : l'encours d'un contrat correspond à son montant d'épargne disponible à un temps donné.
4. **Part d'Unités de Compte** : la part d'unités de compte d'un contrat est le quotient de l'encours d'unités de comptes sur l'encours total.
5. **Type de taux garanti** : si un contrat possède une partie de son encours sur un support Euro, alors le type de taux garanti correspond soit au Taux Minimum Garanti (TMG) fixé à la souscription, soit au Taux Minimum Garanti Annuel (TMGA) fixé chaque année par l'assureur, sinon, cette variable est vide.
6. **Région** : la région utilisée est déterminée en fonction du code postal renseigné par le souscripteur.
7. **Taux annuel de frais sur encours** : ce taux correspond au pourcentage prélevé chaque année sur l'encours d'un contrat pour financer les coûts de gestion du contrat.
8. **Réseau de distribution** : indique le réseau utilisé pour distribuer le contrat à l'assuré.
9. **Fiscalité du contrat** : ce paramètre correspond au type de fiscalité associé à chaque contrat. Cela peut être fourgous, NSK/DSK ou encore le fait qu'il s'agisse d'un contrat d'assurance vie classique.

4.3 Gestion et retraitement de la base

Des retraitements ont été effectués sur la base de données initiale.

Suppression des contrats détenus par des personnes morales

Une personne morale étant une entité juridique comme une association ou une société type SARL, les variables disponibles pour ce type de contrat sont limitées. Par exemple, l'âge d'une personne morale ne peut pas être exploité.
Le nombre d'arbitrages de ce type de personnes étant trop faibles, avec des montants élevés, et comportements différents d'une personne physique, il a été décidé de les exclure pour ne pas biaiser l'étude.

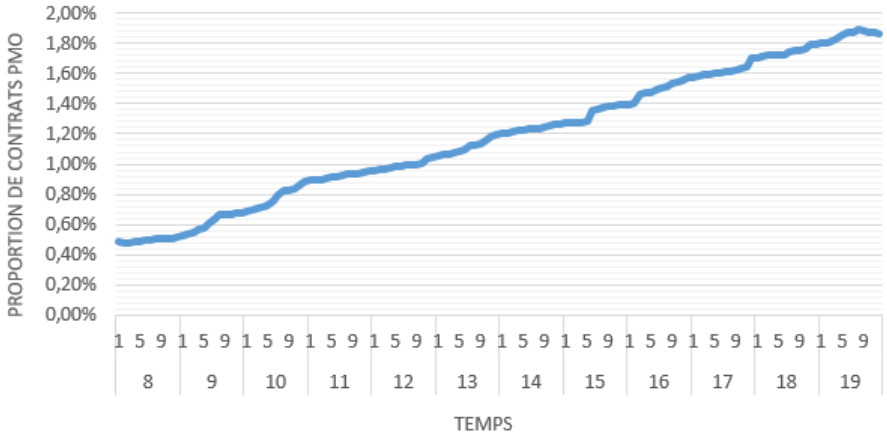

FIGURE 4.1 – Evolution de la proportion de contrats détenus par des personnes morales

Malgré une augmentation relativement constante de la proportion de contrats détenus par des personnes morales entre 2008 et 2019, les pourcentages de contrats des personnes morales restent très faibles par rapport à ceux des personnes physiques.

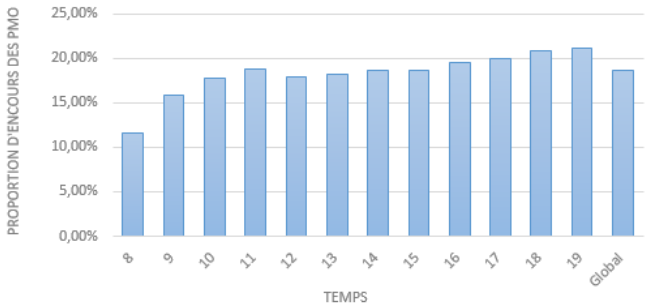

FIGURE 4.2 – Evolution de la proportion d'encours détenue par des personnes morales

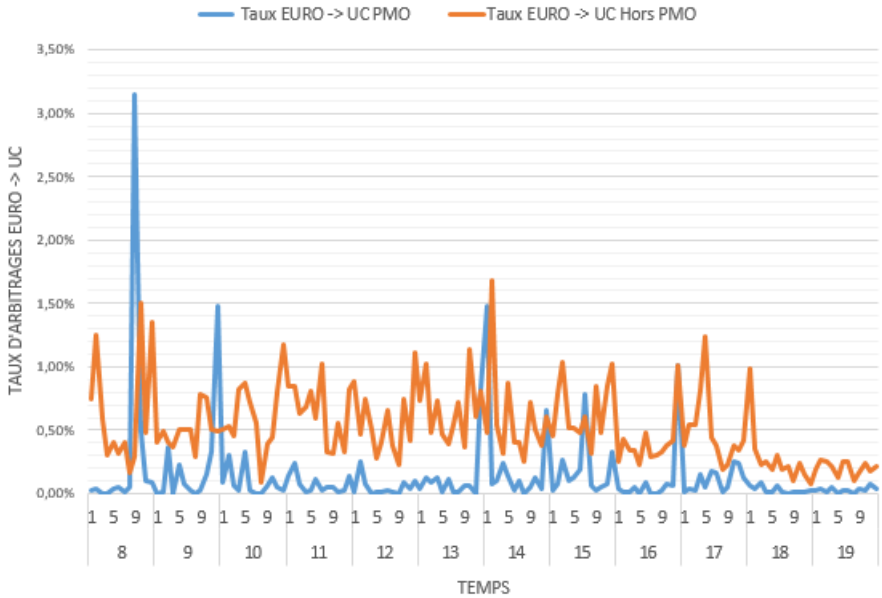

FIGURE 4.3 – Comparaison des taux d'arbitrages Euro→UC par type de personne

La figure représentant la proportion d'encours détenue par des personnes morales montre que le pourcentage d'encours détenu par ces entités n'est pas négligeable. Même si l'encours des personnes morales est important, les arbitrages Euro→UC effectués par des personnes morales sont presque nuls en comparaison de ceux des personnes physiques mais très volatile (cf figure 4.3).

Gestion des valeurs manquantes

Pour certaines des variables structurelles étudiées, des valeurs manquantes sont présentes. Une étude préalable a donc été réalisée afin de palier cela.

Ages manquants

Les âges manquants ont été supprimés. Cela peut se justifier par le fait que les âges manquants ne représentent qu'une faible part des encours et arbitrages réalisés. Les contrats dont les âges sont manquants pourraient être assimilés à des contrats détenus par des personnes morales, donc supprimés.

Il est possible de voir sur le graphe suivant qu'excepté en 2008 où la proportion des arbitrages réalisés par des détenteurs de contrats dont l'âge est manquant est plus élevée, les arbitrages sont très majoritairement réalisés par des contrats pour lesquels l'âge est renseigné. Cela justifie le choix de supprimer ces types de contrats, pour une meilleure exploitabilité et interprétation de la variable "âge".

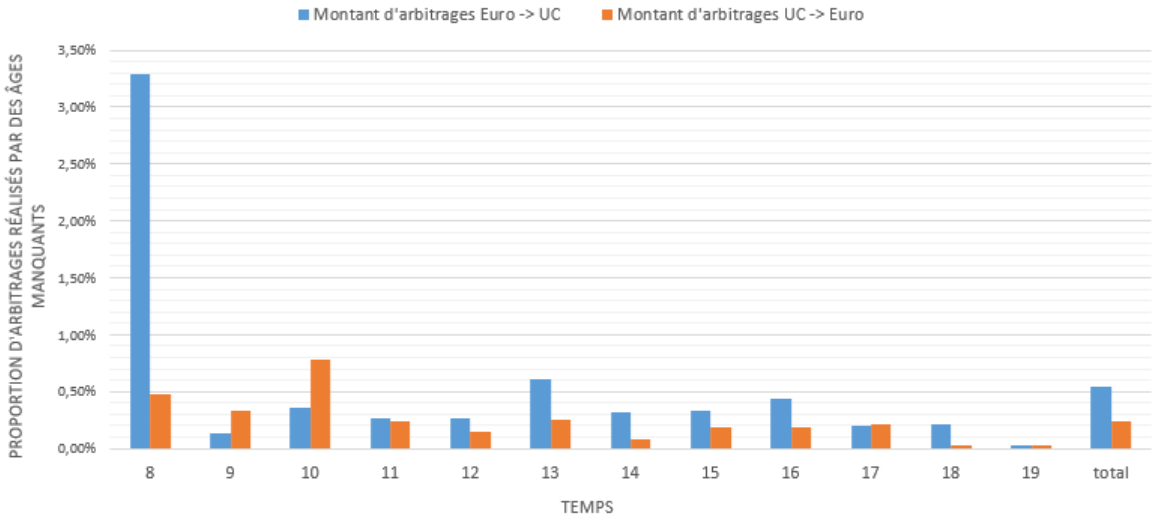

FIGURE 4.4 – Proportion d'arbitrages réalisés par des âges manquants

Réseau

Les valeurs manquantes de la variable "réseau" sont également supprimées. Sur la période étudiée, les réseaux manquants ne représentent qu'une infime partie des contrats et de l'encours global de notre portefeuille.

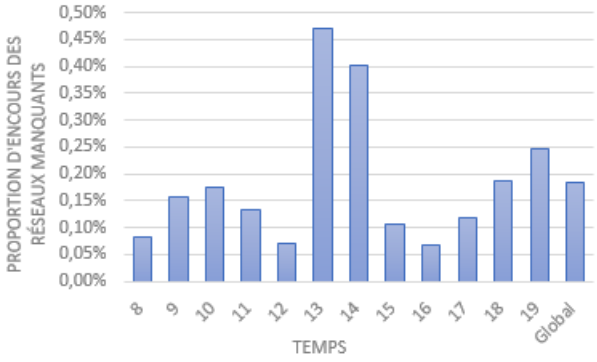

FIGURE 4.5 – Proportions d'encours détenus par des contrats dont le réseau est manquant

Type de taux garanti

Pour cette variable, trois valeurs peuvent être prises : "TMG", "TMGA" et vide. Lorsque cette valeur est vide ou manquante, le choix de remplacer la valeur manquante par "TMGA" est fait pour les supports en euros. Ensuite, pour les supports en UC, la valeur est alors vide, donc remplacée par "TMGA". En effet, pour l'étude, c'est le fait de savoir si un contrat comporte un "TMG" ou non qui est exploité.

Région

Concernant la variable "Région", il y a peu de valeurs manquantes. Cependant, dans ce cas-là, une nouvelle catégorie de région est créée, appelée "Inconnue".

4.4 Analyse globale des données du portefeuille

L'étude réalisée exploite plusieurs variables structurelles décrites précédemment.
Avant d'analyser les impacts des différentes variables structurelles sur les arbitrages, une présentation globale du portefeuille est préalablement réalisée pour comprendre certaines évolutions des taux d'arbitrages.

Analyse de l'encours du portefeuille au cours du temps

D'abord, à l'aide du graphe ci-dessous montrant l'évolution de la PM globale contenue dans le portefeuille, il est notable qu'excepté certaines périodes ponctuelles de baisse, l'encours total est en augmentation durant la période d'étude.

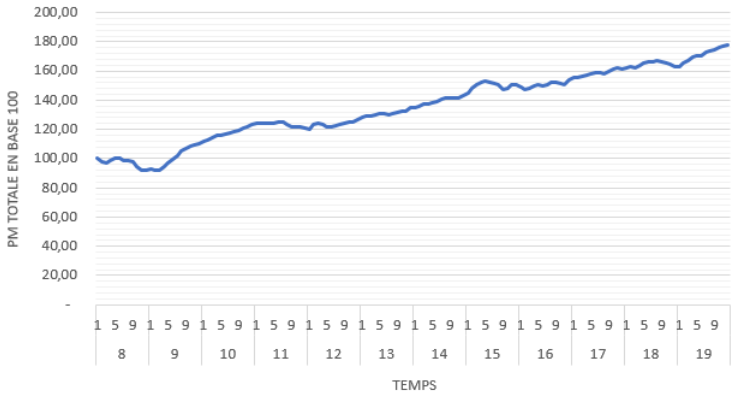

FIGURE 4.6 – Evolution de l'encours total en base 100

Les baisses de l'encours global peuvent s'expliquer notamment par des crises financières qui ont diminué la valeur des parts d'unités de compte détenues par les assurés. Par exemple, la baisse observable en 2008-2009 peut être due à la crise des subprimes, pour laquelle les encours des supports en Unités de Compte a beaucoup diminué comme il sera possible de voir sur le prochain graphe. La légère baisse observable entre 2011 et 2012 peut s'expliquer par la crise de la dette européenne qui a entraîné la baisse des marchés financiers et a fortiori des encours en Unités de Compte du portefeuille.
Enfin, les baisses de l'encours du portefeuille étudié dans la deuxième moitié de l'année 2015 et en 2018 sont également dues à des baisses consécutives des marchés financiers qui ont eu un impact négatif sur l'encours en UC du portefeuille.

Les impacts des différentes baisses d'encours total peuvent particulièrement se voir sur le graphe suivant présentant l'évolution de la part d'Unités de Compte globale du portefeuille :

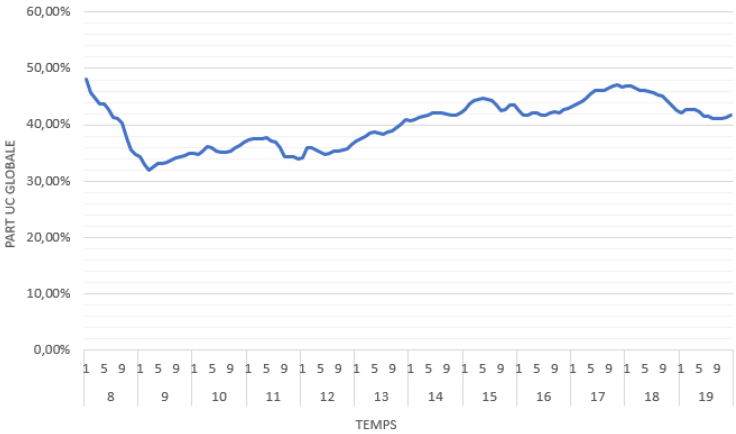

FIGURE 4.7 – Evolution de la part d'UC globale du portefeuille étudié

Sur ce graphe, les impacts des variations des indices financiers sont particulièrement visibles. Par exemple, en 2008-2009, la crise des subprimes a eu pour conséquence la forte baisse des marchés financiers et automatiquement des encours en Unités de Compte investis sur des actions.
La baisse des marchés financiers a pu conduire les épargnants à réaliser des arbitrages vers des fonds en euros pour sécuriser leur épargne ou à réaliser des rachats partiels ou totaux afin de se diriger vers des supports d'investissements plus sécurisés que les fonds en UC en assurance vie. Ceci peut aussi être le cas concernant les autres périodes de baisse de la part d'UC globale du portefeuille.

Analyse des taux d'arbitrages au cours du temps

L'estimation des arbitrages est une problématique importante du fait de la difficulté de prévision, en raison notamment de la volatilité élevée des taux d'arbitrages dans le temps, qu'il s'agisse des taux Euro→UC ou UC→Euro.
Concernant la base de données étudiée dans le cadre de ce mémoire, cette volatilité est bien visible sur les graphes suivants présentant les taux d'arbitrages par mois du portefeuille d'études entre janvier 2008 et décembre 2019 :

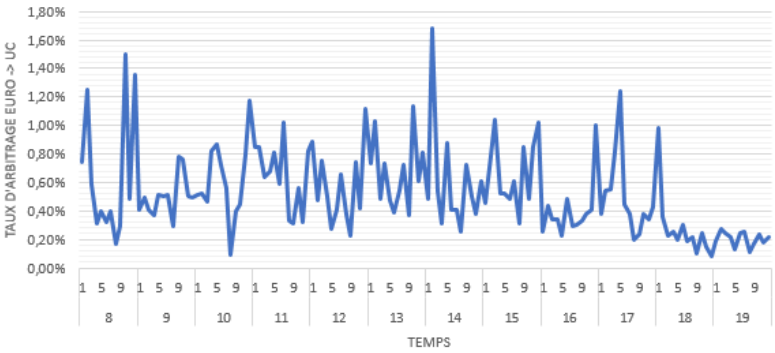

FIGURE 4.8 – Evolution du taux global Euro -> UC du portefeuille

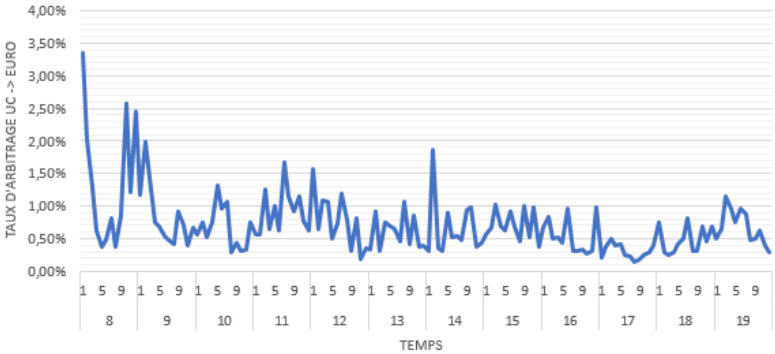

FIGURE 4.9 – Evolution du taux global UC -> Euro du portefeuille

D'une part, la forte volatilité pourrait s'expliquer par le fait que l'étude des arbitrages porte sur une base mensuelle et non annuelle, donc sur un volume d'arbitrages plus faible. D'autre part, comme cette étude est basée sur des contrats haut de gamme, des contrats à très fortes PM peuvent impacter à la hausse les taux d'arbitrages du fait d'arbitrages très importants en comparaison des autres contrats.

Sur les deux graphes, certaines tendances sont remarquables :

∘ **Pour les mouvements des supports en UC vers l'Euro**, il est notable que les arbitrages ont été plus importants au début de l'année 2008 et à la fin 2008/début 2009. Cela pourrait se justifier par la crise des subprimes qui a engendré d'énormes baisses des indices boursiers et donc un souhait pour les épargnants de sécurisation de leur épargne en se dirigeant vers des supports en euros.

En 2017, les arbitrages UC→Euro sont en baisse en comparaison des autres années ce qui pourrait notamment se justifier par des indices financiers en hausse, tels que le CAC 40. Cela pourrait inciter les assurés à profiter de cette période haussière en conservant leur investissement sur ce type de support.

∘ **Pour les mouvements des supports en Euro vers les UC**, des pics d'arbitrages peuvent aussi être observés en 2008-2009, comme pour les pics des taux UC→Euro. Ces mouvements pourraient se justifier par les baisses des indices boursiers et fonds qui peuvent également être perçues comme des opportunités d'investissement si l'épargnant suppose que la cotation est au plus bas et ne pourra que remonter.

En 2018 et 2019, une baisse importante des arbitrages Euro→UC est observée. Cette dernière pourrait se justifier par une campagne de publicité effectuée par AXA France pour inciter les assurés à se diriger vers des contrats avec mandats de gestion collective. Une telle tendance pourrait aussi se justifier par la baisse des marchés financiers à la fin de l'année 2018.

Nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage par mois

Un autre indicateur analysé est le nombre de contrats effectuant des arbitrages réguliers, et en l'occurrence le nombre de contrats effectuant au moins un arbitrage par mois.
Pour illustrer cela, les deux graphes suivants présentent le nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage dans le mois, UC→Euro d'une part et Euro→UC d'autre part. Par soucis de confidentialité, les variables sont représentées en base 100, c'est-à-dire en représentant l'évolution du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage avec pour première valeur 100, pour 01/2008.

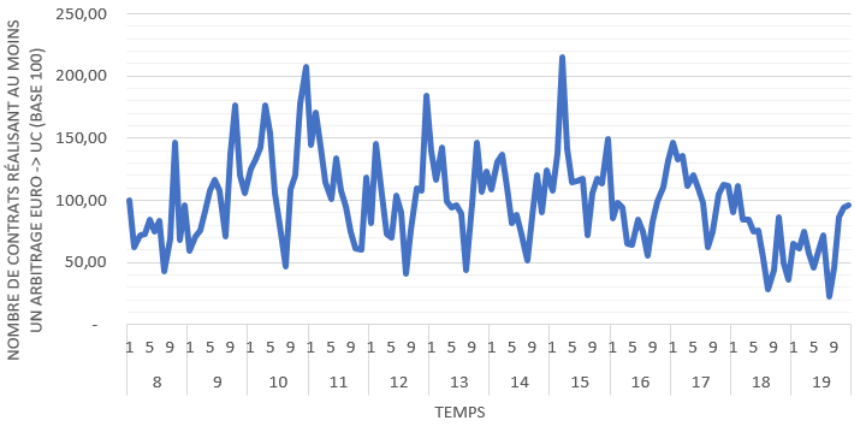

FIGURE 4.10 – Evolution du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage Euro→UC dans le mois (base 100)

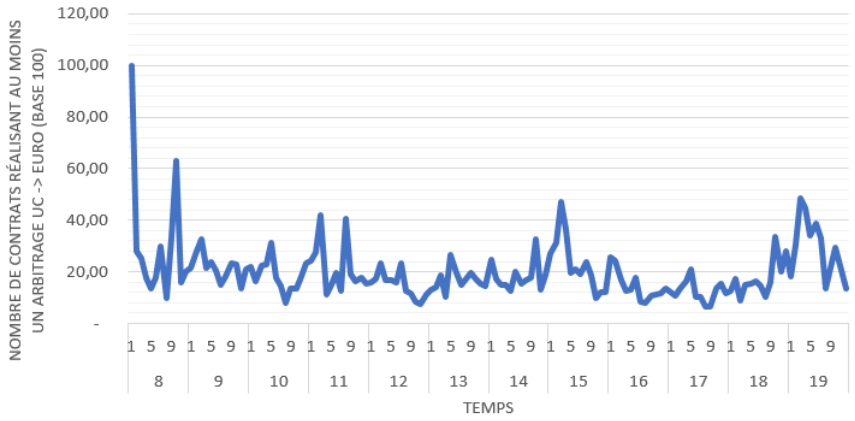

FIGURE 4.11 – Evolution du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage UC→Euro dans le mois (base 100)

Sur les deux graphes ci-dessus, il est observable qu'excepté certaines valeurs, les tendances de nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage dans le mois sont similaires aux tendances de taux d'arbitrages en PM. A l'exception de contrats réalisant beaucoup d'arbitrages et pour des montants très élevés, il est évident que plus il y aura de contrats réalisant des arbitrages durant un mois, plus le taux d'arbitrages de ce mois sera élevé.

Ce qui est notable sur le premier graphe est une relative saisonnalité. Une baisse du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage est observable chaque année au mois d'août. Cela implique qu'une composante temporelle pourrait avoir une influence sur les taux d'arbitrages.

4.5 Analyse descriptive des variables structurelles étudiées

Dans cette section, une analyse rétrospective est faite. Celle-ci permettra d'émettre certaines hypothèses concernant les impacts des variables structurelles sur les comportements d'arbitrages et alors justifier leur utilisation dans la suite étude.

Variable "Réseau"

Concernant la variable "réseau", trois regroupements ont été effectués afin d'obtenir un nombre suffisant de données dans chaque catégorie pour qu'une étude de cette variable puisse être réalisée :

- **Réseau "AXA"** : regroupement de réseaux propriétaires ou captifs AXA France.
- **Réseau "Courtiers"** : regroupement de réseaux tiers non captifs, contrats distribués par des courtiers et des conseillers en gestion de patrimoine.
- **Réseau "Banques"** : regroupement de réseaux tiers non captifs, contrats distribués par des banques.

Cette variable est exploitée car il peut être supposé que les clients ne sont pas conseillés de la même manière selon le distributeur de leur contrat. Cette hypothèse peut être notamment appuyée par le graphe suivant représentant les taux d'arbitrages Euro→UC des contrats dont le réseau est "AXA" et "Courtiers"

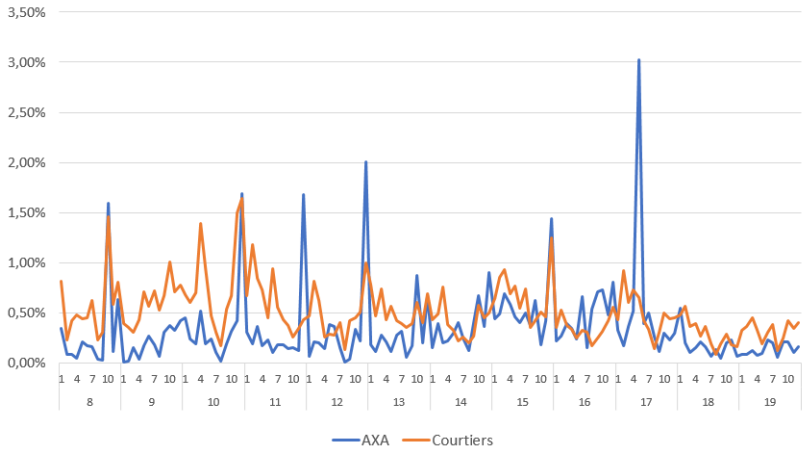

FIGURE 4.12 – Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par Réseau

Les tendances d'arbitrages Euro→UC sont globalement les mêmes, excepté quelques pics. Cependant, surtout sur les premières années d'étude, une translation des taux du réseau

"Courtiers" à la hausse par rapport aux taux du réseau "AXA" est observable. La variable "Réseau" pourrait avoir un impact sur les taux d'arbitrages, qui sera mesuré dans la suite de l'étude.

Variable "Age"

Comme évoqué dans la revue de littérature, la variable "âge" est régulièrement utilisée pour expliquer les arbitrages. Les graphes suivants appuient cette hypothèse en montrant des taux d'arbitrages qui diffèrent au cours du temps entre deux catégories d'âges. Pour une analyse graphique, des regroupements d'âges ont été effectués.

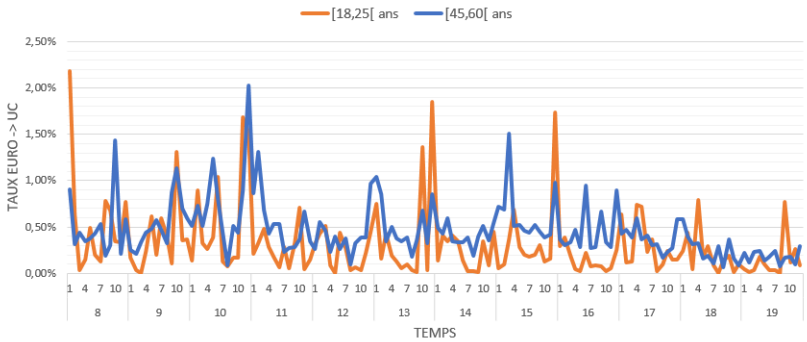

FIGURE 4.13 – Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par âge

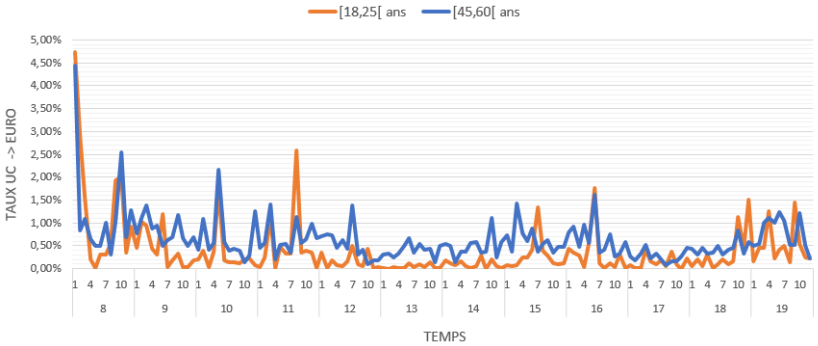

FIGURE 4.14 – Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par âge

Pour les deux types de taux, une différence entre les deux catégories d'âge est observable au cours du temps. La catégorie d'âge plus élevée semble notamment réaliser plus d'arbitrages UC→Euro en taux que l'autre catégorie. Cette différence est plus faible pour les taux Euro→UC.

Variable "Ancienneté"

L'ancienneté est également souvent utilisée dans les mémoires pour essayer d'expliquer les taux d'arbitrages. Cette variable est utilisée dans le modèle actuel de calibrage des lois d'arbitrages d'AXA France, elle va donc être analysée dans cette étude.
D'après le second graphe représentant les taux d'arbitrages UC→Euro par catégorie d'ancienneté, la variable ne semble pas avoir d'effet sur les taux d'arbitrages UC→Euro. Cependant, sur le premier graphe, les taux d'arbitrages Euro→UC semblent croissants avec l'ancienneté. Ces effets seront mesurés dans la suite de l'étude.

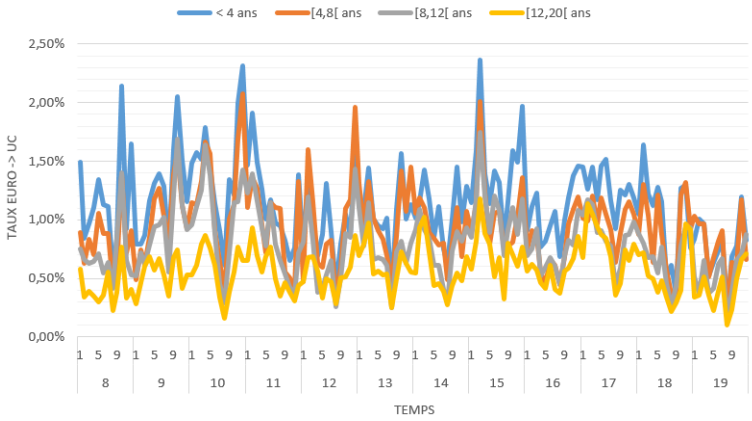

FIGURE 4.15 – Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par ancienneté

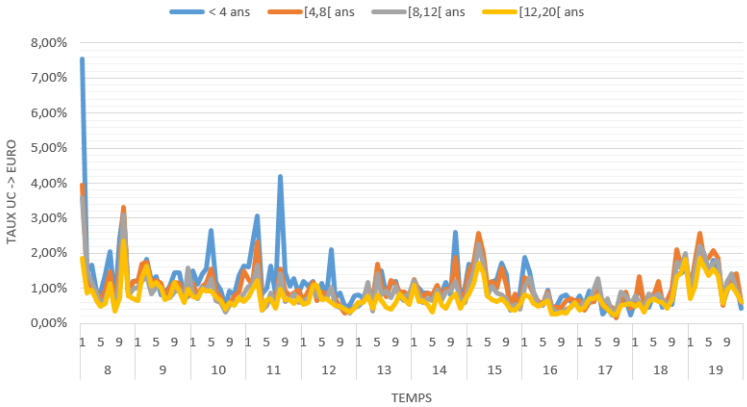

FIGURE 4.16 – Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par ancienneté

Variable "Part UC"

Pouvant être utilisée comme un reflet de l'aversion au risque des assurés, la part UC sera analysée dans cette étude. Sur le graphe ci-dessous, une forte différence de taux d'arbitrages UC→Euro est observable entre les contrats ayant une part d'UC faible contre ceux qui en ont une importante.

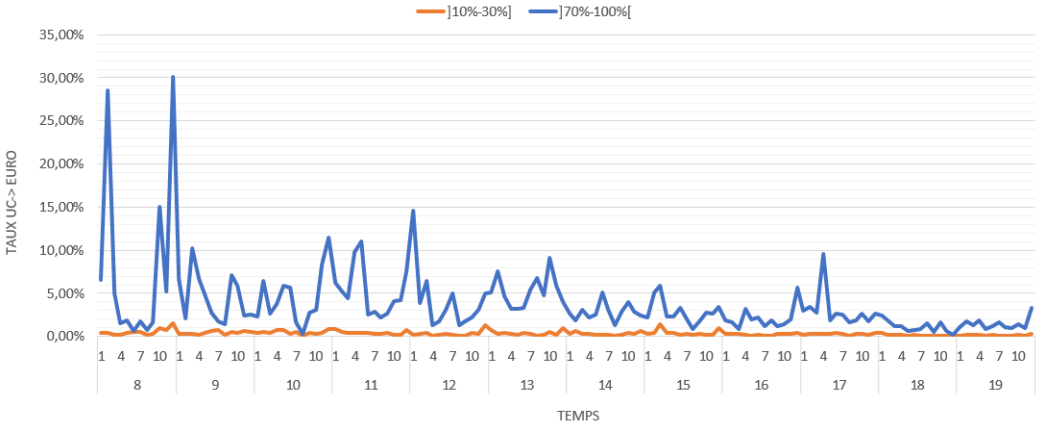

FIGURE 4.17 – Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par part d'UC

Variable "Montant d'encours"

Le montant d'encours d'un contrat est une variable également étudiée.

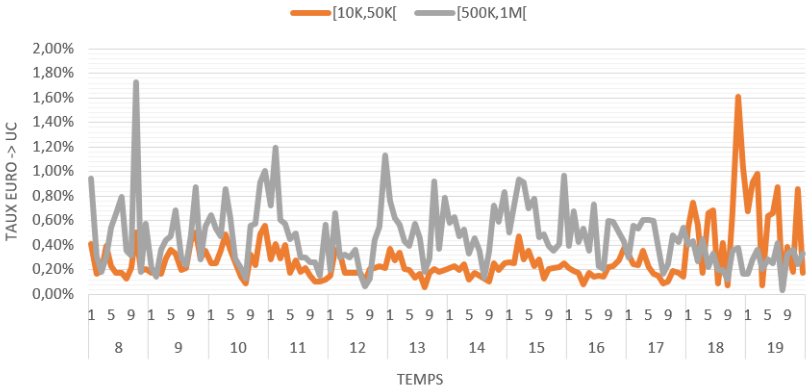

FIGURE 4.18 – Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par montant d'encours détenu par contrat

Comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus, en réalisant des catégories d'encours, il est notamment possible d'observer des différences de taux Euro→UC au cours du temps entre deux catégories d'encours bien distincts. Cette variable pourrait avoir un impact sur les taux. Une saisonnalité annuelle semble prépondérer pour les taux d'arbitrages des encours compris entre 500K et 1M d'euros.

Variable "Taux de frais sur encours annuel"

Le taux de frais sur encours annuel d'un contrat est utilisé dans cette étude. Cette variable peut être utilisée car les frais sur encours sont différents entre les fonds en euros et en UC. Cela pourrait alors influer sur le fait de se diriger vers certains supports pour lesquels les taux de frais sont plus faibles.

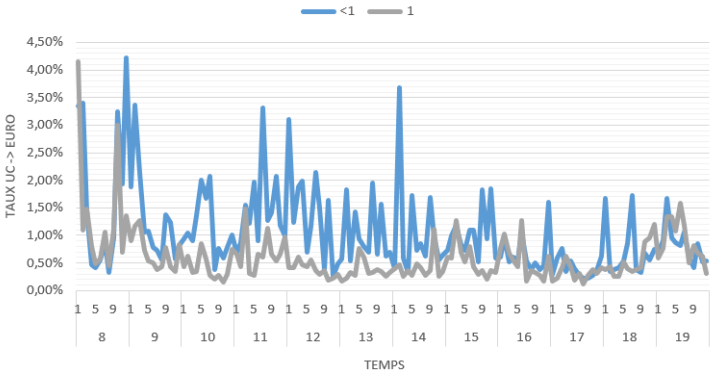

FIGURE 4.19 – Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par ancienneté

Le graphe ci-dessus semble montrer des différences de taux d'arbitrages selon le taux de frais sur encours annuel affecté aux contrats. Une volatilité plus importante est notamment visible pour les taux inférieurs à 1, pour lesquels des pics sont ponctuellement très élevés. L'importance de cette variable dans la modélisation de taux d'arbitrages sera analysée quantitativement dans la suite de l'étude.

Variables "Type de taux garanti" et "Fiscalité"

Concernant ces deux variables, le type de taux garanti est utilisé pour l'étude car il peut être supposé que les contrats ayant un TMG souhaitent le conserver et l'exploiter en ayant un maximum d'encours sur le support Euro. Ces derniers pourraient réaliser moins d'arbitrages Euro→UC que les contrats ayant un TMGA.

Ensuite, pour la fiscalité, par exemple, les contrats DSK/NSK pourraient avoir un taux d'arbitrages Euro→UC plus important que les autres. En effet, détenant des parts d'UC

assez importantes et des encours sur des fonds risqués, les détenteurs de ce type de contrats pourraient être considérés comme peu averses au risques et donc se diriger plus facilement vers des supports en UC.
Cependant, aucune différence n'est graphiquement observable pour ces deux variables. L'étude quantitative déterminera malgré cela si ces dernières ont un impact sur les taux d'arbitrages.

Variable "Région"

Le graphe suivant présente la répartition des encours par région. Il est observable que près de 50% de l'encours total est détenue par des personnes physiques domiciliées en Ile-de-France. Les proportions d'encours détenues respectivement par les autres régions représentent de plus faibles pourcentages. Une étude quantitative par région sera effectuée dans la suite pour déterminer si la localisation du souscripteur peut avoir un impact sur les arbitrages.

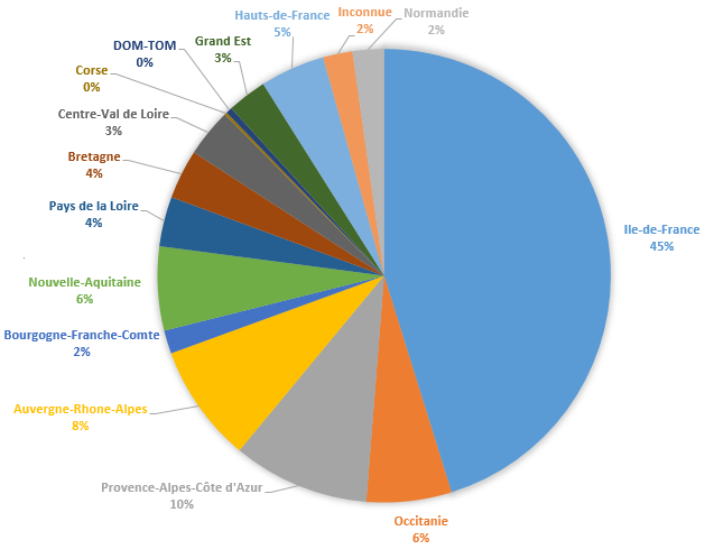

FIGURE 4.20 – Proportion de PM totale détenue par région

Troisième partie

Modélisation des arbitrages

Chapitre 5

Etude des lois d'arbitrages structurelles et sélection de variables

5.1 Modèle actuel

Dans le modèle interne d'AXA France, les lois d'arbitrages sont calculées par une approche structurelle ne prenant en compte que l'ancienneté d'un contrat.
Un tel modèle a été mis en place par mimétisme par rapport aux lois de rachats structurels, pour lesquelles cette variable est utilisée lors du calibrage, ce qui peut notamment se justifier par le fait que la fiscalité tend à s'alléger avec l'ancienneté, et plus particulièrement sur l'encours non soumis à la flat tax.

A partir de ce constat, une première étape consistera à remettre en question la pertinence de l'utilisation de la variable "ancienneté. Ensuite, une étude de l'impact des différentes variables sur le comportement d'arbitrage sera réalisée. Il s'agira alors de déterminer le modèle le plus approprié.

Limites du modèle actuel

Le modèle actuel exploite tous les contrats présents sur les bases de données disponibles. Le calibrage se fait en calculant un taux d'arbitrages pour chaque année d'ancienneté, pour chaque regroupement réseau/produit effectué. Pour un certain regroupement réseau/produit de contrats d'assurance vie d'AXA France, les taux historiques mesurés sur tout l'historique disponible, par ancienneté sont alors :

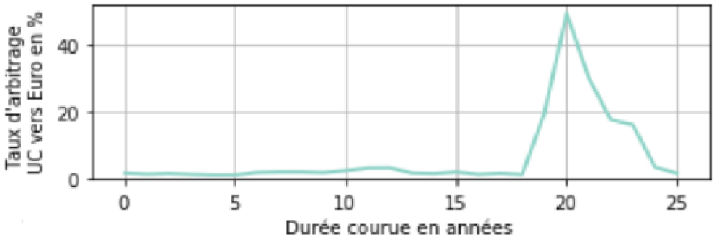

FIGURE 5.1 – Taux d'arbitrage UC→Euro historique par ancienneté pour un produit donné

Ensuite, les lois sont calibrées par réseau/produit par la réalisation d'une régression polynomiale des taux d'arbitrages par ancienneté. Le modèle ne prend en compte que les anciennetés inférieures ou égales à 25, et les degrés de régression sont déterminés graphiquement pour modéliser au mieux les taux historiques par ancienneté. La loi calibrée sur les taux historiques du réseau/produit utilisé donne alors la loi suivante par ancienneté :

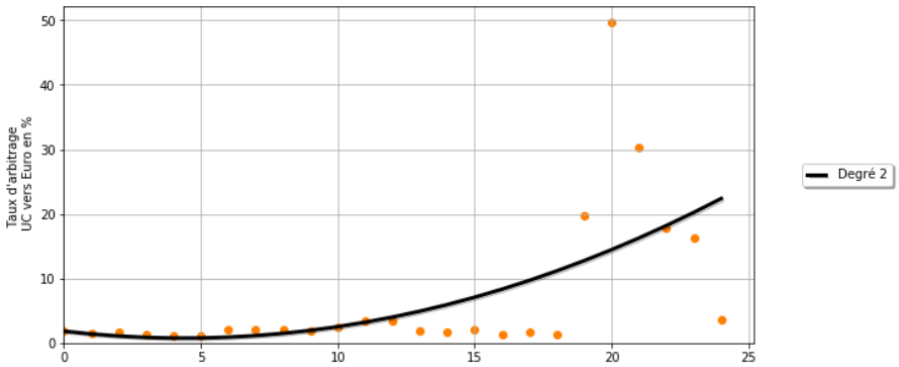

FIGURE 5.2 – Ancienne loi UC→Euro pour un produit donné, par ancienneté

Une des faiblesses du modèle est que le taux d'une ancienneté donnée n'est pas pondéré par la PM. Pour un certain réseau/produit et deux anciennetés données, les taux d'arbitrages mesurés pour ces anciennetés auront autant de poids dans la modélisation alors que la PM respective de ces deux anciennetés est différente.

En effet, pour le graphe ci-dessus, il est remarquable que pour les anciennetés ou durées courues supérieures ou égales à 19 ans, des taux d'arbitrages largement plus importants que ceux passés sont observés, notamment un taux de plus de 40% pour l'ancienneté de 20 ans.
Cela est à nuancer avec les PM affectées à ces anciennetés, qu'il est possible d'observer à l'aide du graphe suivant :

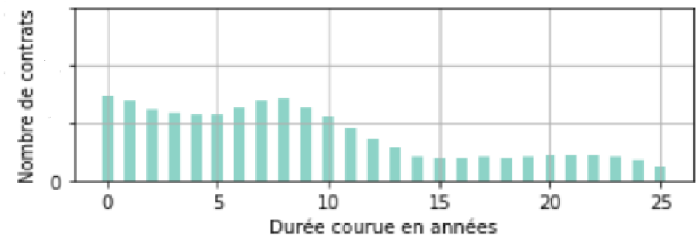

FIGURE 5.3 – Nombre de contrats par ancienneté pour un produit donné

Le graphe ci-dessus représente le nombre de contrats par ancienneté pour un certain produit. Il montre que les anciennetés dont les taux d'arbitrages historiques sont très importants représentent un faible nombre de contrats.

Avec le modèle actuel, le poids de l'ancienneté de 20 ans sera aussi important dans la modélisation que celui de l'ancienneté de 0, ce qui impliquera d'importantes erreurs de prédiction lorsque l'on fera vieillir le portefeuille dans la projection du modèle interne. Ajouté à cela, un mauvais backtesting est remarquable avec de telles lois.

Ainsi, il s'avère nécessaire d'essayer d'améliorer le modèle actuel afin d'obtenir une meilleure estimation et captation de la tendance des taux d'arbitrages.

5.2 Sélection de variables structurelles

Afin d'améliorer le modèle actuel d'estimation des taux d'arbitrages, il va d'abord être question de s'intéresser à des variables structurelles, c'est-à-dire liées aux contrats et indépendantes d'éléments exogènes, pour établir un nouveau modèle.

Plusieurs variables structurelles sont disponibles dans le cadre de cette étude. Toutes n'ont pas un impact important sur les arbitrages. Certains choix devront être faits car conserver un nombre trop important de variables pourrait induire une segmentation trop fine. Les arbitrages historiques seront mesurés selon des regroupements de valeurs de variables, chaque classe devant contenir assez de données d'arbitrages pour permettre le calibrage d'un modèle.

Comme vu dans la revue de littérature, les mémoires d'actuariat qui portent sur les arbitrages utilisent différents modèles de sélection des variables disponibles. Dans cette étude, il a été fait le choix d'utiliser une régression logistique, puis des arbres de décision et enfin des forêts aléatoires. Ces algorithmes sont généralement efficaces dans la sélection de variables. Ces méthodes permettent une bonne interprétabilité.

Notions de *machine learning*

L'apprentissage automatique ou *machine learning* permet d'estimer un modèle à partir d'approches mathématiques et statistiques en exploitant des données d'observations. Pour cela, l'apprentissage se base le plus souvent sur deux étapes : la phase d'apprentissage et la phase de test.

Pour la première étape, une base d'apprentissage composée d'une partie des données de la base d'observation globale est utilisée pour le calibrage des modèles. Ensuite, une base de test composée d'observations différentes de la base d'apprentissage est exploitée pour tester le modèle calibré précédemment sur l'autre base afin d'établir sa pertinence sur de nouvelles observations.
Des méthodes de *machine learning* permettent notamment de continuer la recherche d'un meilleur modèle après un premier calibrage sur la base d'apprentissage.
Lorsqu'un modèle correspond trop aux données de la base d'apprentissage et n'est pas généralisable à de nouvelles observations, on parle de surapprentissage.

Application

Les algorithmes utilisés pour réaliser la sélection de variables sont des méthodes permettant également la prédiction. Cependant, ceux-ci ne sont seront pas exploités à ces fins dans cette étude.

Pour réaliser la sélection de variables, il a été fait le choix de se focaliser sur une base mensuelle des données de tous les contrats présents et arbitrages réalisés sur le portefeuille entre 2016 et 2019. Il est supposé que l'impact des variables structurelles sur les arbitrages est le même sur les dernières années de la période d'étude que sur les autres années de celle-ci. Les années 2016, 2017 et 2018 seront utilisées comme base d'apprentissage et l'année 2019 sera utilisée pour tester les modèles.
La variable cible choisie est le fait qu'un contrat arbitre ou non durant le mois. On prend l'hypothèse que les variables discriminantes pour la variable "a arbitré ou non" seront les mêmes que pour la variable taux d'arbitrage, que l'on cherche à déterminer in fine.

Corrélations entre les variables numériques

Avant l'implémentation d'un modèle de régression logistique, une analyse des corrélations entre les différentes variables numériques est effectuée. Plus la valeur absolue de la corrélation entre deux variables est proche de 1, plus la colinéarité entre celles-ci sera importante. La colinéarité entre deux variables explicatives peut modifier les coefficients qui leur sont affectés. Les statistiques qui seront mesurées dans la prochaine section, notamment le t de

Student, peuvent être diminuées par la colinéarité, impliquant une baisse de la significativité des variables pour le test de nullité, pour un certain seuil (cf Annexe A - 1).

Dans ce cas, pour détecter une relation de colinéarité entre deux variables, c'est la corrélation linéaire de Pearson qui est utilisée. La covariance entre deux variables aléatoires X et Y se note :

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

En pratique, pour n observations, avec $x = (x_1, ..., x_n)$ n réalisations de X, $y = (y_1, ..., y_n)$ n réalisations de Y, on a l'estimateur de la corrélation de Pearson tel que :

$$\hat{r}(x,y) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{k=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \text{avec } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_i$$

En se focalisant sur les variables numériques de notre portefeuille sur les années allant de 2016 à 2019, on obtient la matrice de corrélation linéaire de Pearson ci-dessous. Celle-ci représente les corrélations deux à deux entre les variables.

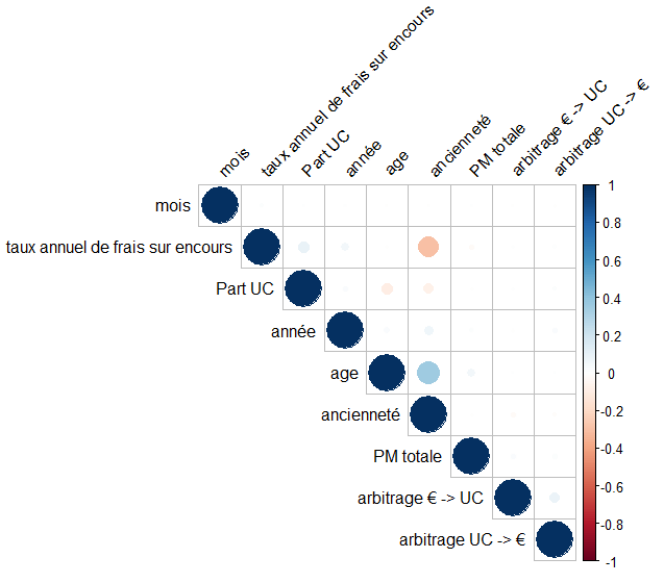

FIGURE 5.4 – Matrice de corrélation - Variables numériques entre 2016 et 2019

Une corrélation linéaire négative est observable entre l'ancienneté et le taux annuel de frais sur encours, elle est de -0.29. On peut supposer que plus l'ancienneté d'un contrat est importante, plus des avantages en termes de frais seront proposés pour l'inciter à rester sur le portefeuille. Il existe également une corrélation linéaire positive entre l'ancienneté et l'âge, celle-ci est égale à 0.36. Cela se justifie trivialement par le vieillissement conjoint de ces variables au cours du temps. D'autres faibles corrélations entre variables peuvent s'observer.

5.2.1 Régression logistique

Cette méthode a été choisie car elle permet notamment d'évaluer si une variable est significative ou non à un certain seuil sur la prédiction d'une variable.

Dans le cadre de la sélection de variables de cette étude, il est possible d'appliquer cette méthode car la variable à expliquer est ici binaire, l'algorithme aura pour objectif de prédire une probabilité pour chaque contrat, de réaliser ou non au moins un arbitrage pour un mois donné, selon ses caractéristiques structurelles.

Introduction à la régression logistique

Voir Annexe A - 1.

Application aux données

Comme vu précédemment dans l'étude des corrélations linéaires, aucune forte colinéarité entre deux variables n'est présente globalement, le modèle de régression logistique peut est appliqué. Cependant, une attention particulière sera portée sur les coefficients affectés aux variables dont la corrélation deux à deux n'est pas proche de 0.

Base deséquilibrée

Afin d'appliquer le modèle de régression logistique à la prédiction pour un contrat d'arbitrer ou non durant un certain mois, un ajustement a été préalablement effectué. Comme la proportion de contrats arbitrant par mois est inférieure à 1%, il y a **hétérogénéité** des proportions. Des poids vont être appliqués pour réduire ce déséquilibre. Ceux-ci vont permettre de surestimer les occurrences du nombre de contrats arbitrant durant un certain mois et diminuer ceux qui n'arbitrent pas pour obtenir un échantillon de calibrage homogène. En notant $y =$ "1" si un contrat arbitre durant un certain mois, et $y =$ "0" s'il

n'arbitre pas, le poids a été défini comme tel :

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} card(\{y_k = "1")\}}{n} \\ \omega_0 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} card(\{y_k = "0")\}}{n} \end{cases}$$ avec n le nombre d'observations dans la base d'apprentissage

Sélection ascendante des variables par le critère AIC

Afin de s'assurer que la colinéarité entre deux variables n'influe pas sur les résultats, une sélection ascendante du meilleur modèle en s'appuyant sur le critère AIC est réalisée. Pour cela, en partant du modèle le plus simple ne prenant aucune variable explicative en argument, des paramètres sont ajoutés un à un pour créer de nouveaux modèles dont la pertinence est mesurée par le critère AIC. Alors, cette sélection permet de connaître le modèle qui minimise l'AIC, et les variables qui apportent le plus d'informations par leur ordre d'agrégation pour arriver au modèle final.

Pour les mouvements UC→Euro, les modèles sont calibrés sur une base d'apprentissage des contrats et arbitrages présents entre janvier 2016 et décembre 2018, en prenant en compte les poids comme décrit précédemment. La sélection ascendante donne le modèle complet comme étant celui qui minimise le critère AIC.
L'agrégation des variables pour arriver au modèle complet à partir du modèle simple a été faite en suivant l'ordre :

∘ Modèle simple → PM totale → Réseau → Région → Taux de frais sur encours →Part UC → Ancienneté → Âge → Type de taux garanti → Fiscalité du contrat (Modèle complet)

Le test de nullité est appliqué sur le modèle complet à chaque variable. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse de nullité est refusée pour chacune des variables.

La même étude est effectuée pour les arbitrages Euro → UC. La sélection ascendante exclue la variable "**Taux de frais sur encours**" du modèle et agrège les variables selon l'ordre suivant :

∘ Modèle simple → PM totale → Réseau → Ancienneté → Région → Type de taux garanti →Part UC → Âge → Fiscalité du contrat (Modèle final)

De même que pour les arbitrages UC → Euro, le test de nullité n'admet qu'aucun coefficient ne peut être considéré comme nul au seuil de 5% pour le modèle final.

Ainsi, chaque variable explicative apporte de l'information aux modèles, excepté le **Taux de frais sur encours** pour les arbitrages Euro → UC . Ce sont la **PM totale** et le **réseau** qui en ont apporté le plus, et la **fiscalité du contrat** qui en apporte le moins dans les deux modèles de régression logistique retenus (cf Annexe B).

Prédiction par régression logistique

Pour s'assurer de la robustesse des modèles calibrés, des prédictions sur la base de test et d'apprentissage sont réalisées. Même si les modèles ne sont pas utilisés dans cette étude à des fins de prédictions, cela permettra de conclure sur les informations fournies par les variables explicatives sur les mouvements d'arbitrages.

Pour la prédiction, il est considéré que les probabilités supérieures à 0.5 impliquent que la variable à expliquer vaut 1 et 0 sinon. Pour résumer les résultats, des matrices de confusion sont utilisées. Celles-ci comparent les prédictions aux valeurs réelles.

D'abord, des prédictions sont réalisées sur la base d'apprentissage, puis sur la base de test. Les valeurs données dans les matrices de confusion sont des proportions du nombre total de contrats présents dans chaque base :

Prédictions sur la base d'apprentissage

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	62.07%	0.13%
	1	37.53%	0.26%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	62.74%	0.14%
	1	36.82%	0.30%

Prédictions sur la base de test

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	61.49%	0.31%
	1	37.73%	0.48%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	64.87%	0.13%
	1	34.80%	0.20%

Pour illustrer les résultats, on peut se focaliser sur la matrice de confusion des prédictions sur la base de test des arbitrages Euro→UC. On rappelle que la variable "0" correspond au fait qu'un contrat n'ait pas arbitré pour un mois donné, et "1" signifie qu'un contrat a arbitré pour un mois donné.
Le nombre réel de "1" sur la base de test représente en proportion $0.13\% + 0.20\% = 0.33\%$ du total et le nombre de "0" : $64.87\% + 34.80\% = 99.67\%$.
La matrice de confusion donne la proportion de bonnes estimations de "0" qui est $\frac{64.87\%}{99.67\%} =$ 65% et celle de "1" : $\frac{0.20\%}{0.33\%} = 60.61\%$.

Qu'il s'agisse des mouvements Euro → UC ou UC → Euro, sur la base de test ou d'apprentissage, les proportions de bonnes prédictions restent à peu près les mêmes : entre 60% et 70%. Les modèles de régression logistique sont bien exploitables pour renseigner sur certaines variables ayant de l'impact sur les arbitrages.
Cependant, ces modèles ne peuvent pas être exploités en termes de prédiction. Suivant les prédictions des modèles, entre 30% et 40% des contrats arbitreraient chaque mois, ce qui

est impossible et largement surestimé. De telles prédictions proviennent de la pondération qui a été effectuée. Sans cette pondération, seules des variables "1" auraient été prédites ou très peu de "0". Or, cette méthode n'est pas exploitée ici pour ses qualités de prédiction mais pour l'obtention des variables les plus significatives.

La régression logistique a permis de donner un ordre d'agrégation des variables par gain d'information, pour en arriver à un modèle final. Cependant, ce dernier n'a pas permis d'exclure de variables afin de réaliser une sélection des paramètres ayant le plus d'impact sur les arbitrages, excepté le **taux de frais sur encours** pour les mouvemets Euro→UC. Cette méthode a malgré tout pu montrer que la **PM totale** et le **Réseau de distribution** d'un contrat sont les variables impactant le plus sur le fait de réaliser un arbitrage. Des méthodes non paramétriques vont donc être exploitées pour améliorer la sélection de variables.

5.2.2 Arbres de décision

Toujours dans l'optique de sélectionner les variables ayant le plus d'impact sur les arbitrages, une méthode non paramétrique est exploitée : les arbres de décision. L'apprentissage par arbre de décision est une méthode de *Machine Learning* pouvant être utilisée à des fins de classification ou de prédiction. Étant une méthode non paramétrique, celle-ci ne nécessite pas d'hypothèse forte en entrée mais permet de réaliser une sélection des variables les plus discriminantes tout en étant facilement interprétable.

Pré-requis théoriques

Voir Annexe A - 2.

Application au portefeuille

De même que pour la régression logistique, la méthode d'apprentissage par arbre de décision va être calibrée sur une base d'apprentissage allant de janvier 2016 à décembre 2018 et testée sur une base des données allant de janvier 2019 à décembre 2019.

Pour bien fonctionner, des partitions homogènes de la variable à expliquer doivent pouvoir être réalisées en classifiant par variables explicatives. Comme vu précédemment, la variable à expliquer dans cette partie de l'étude est composée à plus de 99% de "0" et moins de 1% de "1". Alors, une pondération va être affectée pour le partitionnement, notamment en assignant des poids pour le calcul de l'indice de Gini. Les proportions des valeurs "0" seront fortement sous-évaluées, contrairement à celles des "1". La création de classes "homogènes" par segmentation sera possible.

Le modèle est implémenté pour les arbitrages UC→Euro et Euro→UC d'après la méthode décrite précédemment. Pour la prédiction d'un arbitrage UC→Euro réalisé par un contrat, un certain mois, l'arbre de classification optimal obtenu est le suivant :

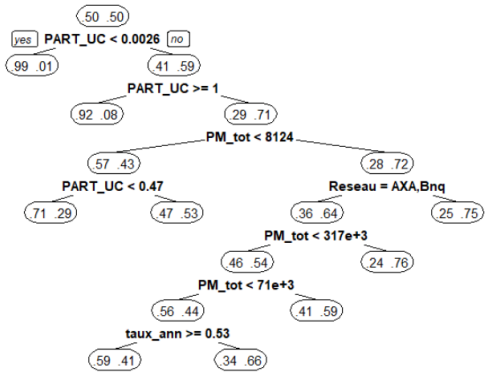

FIGURE 5.5 – Arbre de classification – Arbitrages UC→Euro

Les proportions notées sur chaque nœud prennent en compte le poids qui a été affecté à chacune des variables. Ainsi, on a bien une distribution initiale à la racine de 50% pour chaque variable avec la pondération. Le pourcentage de gauche indiqué notamment sur chaque feuille correspond à la variable "0" et celui de droite à "1".
Il est notable que les variables les plus utilisées comme nœuds sont la **PM totale** et la **Part d'UC** d'un contrat. L'indice de Gini qui est calculé pour chaque variable, à chaque étape de la fabrication de l'arbre, peut être utilisée pour mesurer l'importance d'une variable. Alors, plus un paramètre sera utilisé tôt pour la construction de l'arbre, plus il sera important.

Un indicateur mesurant l'importance d'une variable est utilisé : la *Mean Decrease Gini*. Ce dernier mesure la somme de la diminution du coefficient de Gini par la permutation de chaque variable, à chaque nœud, en pondérant avec la taille des segments réalisés. Ainsi, l'importance peut être mesurée, même pour les variables qui ne sont pas retenues dans le modèle final pour la segmentation.

UC → Euro		**Euro → UC**	
Variable	**Importance**	**Variable**	**Importance**
Part UC	6522	Part UC	7256
PM totale	730	PM totale	796
Ancienneté	139	Ancienneté	234
Réseau	119	Réseau	57
Taux de frais sur encours	86	Taux de frais sur encours	53
Type de taux garanti	4	Age	22
Fiscalité du contrat	3	Région	6
Age	3	Fiscalité du contrat	0.4
Région	1	Type de taux garanti	0

Le tableau ci-dessus permet de mettre en exergue l'importance de la **Part UC** et de la **PM totale** d'un contrat dans le modèle implémenté. Qu'il s'agisse des mouvements Euro→UC ou UC→Euro, ces variables semblent avoir un impact sur le fait de réaliser un arbitrage. Cependant, le **type de taux garanti** et la **région** seraient très peu explicatives des arbitrages pour les modèles d'arbres de décision.

De même que pour la méthode de régression précédemment utilisée, des prédictions à l'aide des arbres implémentés sont réalisées sur la base d'apprentissage et de test. Afin d'estimer la pertinence du modèle, en considérant qu'une probabilité supérieure à 50% correspond à une valeur prédite de "1", les matrices de confusion obtenues sont alors :

Prédictions sur la base d'apprentissage

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	64.82%	0.02%
	1	34.78%	0.37%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	64.96%	0.03%
	1	34.60%	0.42%

Prédictions sur la base de test

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	61.09%	0.04%
	1	38.12%	0.74%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	61.49%	0.019%
	1	38.18%	0.31%

Les prédictions obtenues par les arbres sont similaires à celles données par les régressions logistiques, excepté pour la prévision du fait qu'un contrat réalise un arbitrage durant un mois pour lequel le taux de bonnes prédictions est beaucoup plus élevé : toujours supérieur à 90%. Ainsi, même s'il n'est pas utilisé à des fins de prédictions, le modèle d'arbre de décision permet d'identifier presque tous les contrats qui réalisent les arbitrages, donc les variables impactant le fait d'arbitrer, par un surapprentissage de la base de calibrage. Cela est cependant fait en surestimant énormément le nombre total d'arbitrages prédits.

Cependant, avec un seul arbre de décision, il est difficile de juger les variables qui n'auraient pas d'impact sur les arbitrages. Les variables qui n'ont pas été sélectionnées auraient pu l'être pour un autre arbre si l'échantillon avait été légèrement différent, le calcul de leur importance aurait également été modifié. Pour surmonter ce problème, une autre manière d'utiliser les arbres de décision est exploitée, à travers les forêts aléatoires.

5.2.3 Forêts aléatoires

Afin d'améliorer les performances du modèle d'arbre de décision, toujours dans une optique de sélection des variables, la méthode des forêts aléatoires est exploitée.

Pré-requis théoriques

Voir Annexe A - 3.

Application au portefeuille

Avec une forêt d'arbres décisionnels, l'importance des variables explicatives peut être mesurée. Plus une variable est utilisée tôt dans les arbres de décision créés d'une forêt aléatoire, plus celle-ci est impactante sur la variable cible. Ajouté à cela, l'importance d'une variable peut se voir par sa situation dans les arbres de décision : plus une variable est en haut d'un arbre, plus elle est importante. Dans le cadre de ce mémoire, c'est la raison pour laquelle les méthodes de classification par les arbres de décision sont exploitées.

La méthode des forêts aléatoires est implémentée pour le portefeuille étudié. L'algorithme est calibré sur une base d'apprentissage des données comprises entre janvier 2016 et décembre 2018 et sera testé sur une base des données de 2019.

Pour utiliser des paramètres optimaux à fournir en entrée dans le but d'obtenir un modèle performant, une validation croisée est effectuée. Avant cela, comme pour les deux méthodes exploitées précédemment, une pondération est appliquée aux variables cibles pour palier au déséquilibre de la base.

Validation croisée à 10 blocs

Cette méthode est utilisée ici pour estimer deux paramètres : le nombre minimum de valeurs que doit contenir les nœuds finaux et le nombre de variables sélectionnées pour effectuer les partitions à chaque étape de la construction des arbres. Le nombre d'arbres construit par forêt aléatoire est fixé à 500 pour minimiser le biais d'échantillonnage.
Ici, la méthode de validation croisée consiste à diviser la base de données d'apprentissage

en 10 échantillons tirés aléatoirement. Pour ces derniers, un des échantillons est sélectionné comme base de validation, les 9 autres constituent la base de calibrage d'un modèle de forêts aléatoires. Les performances du modèle sont testées sur la base de validation. Ceci est effectué 10 fois en changeant les bases de test et de validation pour obtenir à la fin les scores de performances des 10 modèles différents implémentés, une moyenne et un écart-type de ces derniers sont calculés.
Alors, une validation croisée est effectuée pour des valeurs différentes des paramètres optimaux à estimer, en calibrant différentes forêts aléatoires. Les paramètres qui minimisent l'erreur moyenne par validation croisée sont retenus.

En appliquant la validation croisée à 10 blocs à des forêts aléatoires sur la base d'apprentissage d'étude, les paramètres optimaux à utiliser sont les suivants : la taille minimum d'un arbre est optimal pour une valeur de 1 et le nombre de variables à utiliser dans la sélection des partitions est de 5. Ces paramètres sont les mêmes pour les modèles d'arbitrages Euro→UC comme UC→Euro.

Forêt aléatoire avec paramètres optimaux

Des forêts aléatoires sont calibrées sur la base d'apprentissage, en utilisant les paramètres définis précédemment pour les arbitrages Euro→UC et UC→Euro.

Les matrices de confusion suivantes présentent les résultats des prédictions obtenues :

Prédictions sur la base d'apprentissage

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	66.74%	0.04%
	1	32.86%	0.35%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	67.57%	0.02%
	1	31.98%	0.43%

Prédictions sur la base de test

Modèle UC→Euro		Réel	
		0	1
Prédiction	0	62.33%	0.08%
	1	36.88%	0.70%

Modèle Euro→UC		Réel	
		0	1
Prédiction	0	62.22 %	0.03%
	1	37.44%	0.32%

Même si les modèles ne sont pas utilisés dans cette partie à des fins de prédiction, le constat pouvant être fait est que les prédictions sur les bases sont globalement les mêmes que pour les arbres de décision en termes de prédiction de la réalisation d'un arbitrage. A partir d'un modèle de forêts aléatoires, plusieurs arbres de décisions sont construits avec des calibrages effectués sur des bases d'apprentissage différentes. Les résultats obtenus précédemment par un seul arbre de classification sont alors confirmés ici par la méthode de forêt aléatoire.

Même si des erreurs importantes ont pu être commises par l'agrégation d'arbres de classification, l'importance des variables sélectionnées a pu être mesurée comme précédemment.

L'importance est mesurée par *Mean Decrease Gini*, coefficient mesurant la contribution d'une variable à améliorer l'homogénéité des nœuds. L'importance des variables est résumée sur les graphes ci-dessous. Plus la mesure *Mean Decrease Gini* pour une variable est grande, plus cette variable est importante dans le modèle.

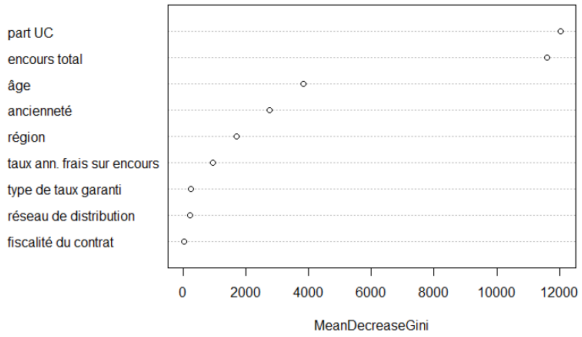

FIGURE 5.6 – *Mean Decrease Gini* par variable - Arbitrages UC→Euro

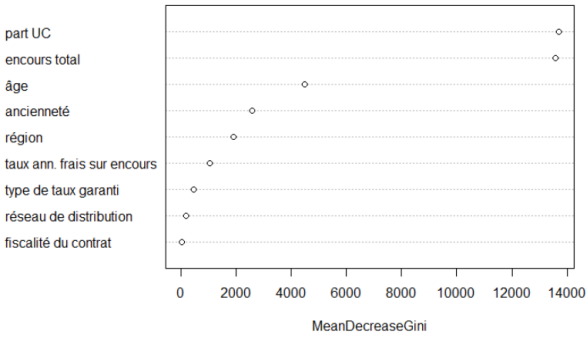

FIGURE 5.7 – *Mean Decrease Gini* par variable - Arbitrages Euro→UC

Ainsi, qu'il s'agisse des arbitrages **UC→Euro** ou **Euro→UC**, les variables démontrant le plus d'importance sont la **Part d'UC**, la **PM totale** d'un contrat et **l'âge** de l'assuré. L'hypothèse initiale de ce chapitre était que : mesurer l'influence des variables structurelles sur les taux d'arbitrages en PM et sur le fait qu'un contrat réalise un arbitrage pour un mois donné est presque équivalent. Ainsi, il sera considéré dans la suite de l'étude que les variables ayant démontré une certaine importance dans cette partie, auraient un impact sur les taux d'arbitrages.

5.3 Modèle structurel avec vieillissement du portefeuille

La sélection de variable précédemment effectuée nous a permis de déterminer que l'âge, la part UC et la PM d'un contrat ont un impact sur les taux d'arbitrages. Nous allons dans cette partie calibrer un modèle structurel avec vieillissement du portefeuille, basé sur ces variables et à une maille réseau de distribution.

Même si l'importance de l'âge est moindre en comparaison des autres, une telle variable est nécessaire dans un modèle de projection avec vieillissement du portefeuille. Les lois d'arbitrages sont calibrées pour permettre une projection à 60 ans des arbitrages. Il faut

pouvoir faire vieillir le portefeuille afin d'estimer les arbitrages futurs, ce qui est possible par vieillissement de l'âge. En ne prenant que la part UC et la PM d'un contrat, le portefeuille n'aurait pas été modifié au cours du temps.

Seules trois variables explicatives sont utilisées ici pour que le volume à la maille choisie reste suffisant. Enfin, une agrégation sera effectuée par réseau. Cette variable a démontré une importance d'après le modèle de régression logistique et le Modèle Interne d'AXA France exploite les lois d'arbitrages en prenant en entrée des taux fournis à la maille réseau.

Calibrage d'un nouveau modèle

Calibré directement sur les taux historiques observés, le modèle structurel est construit comme ceci :

1. Mesure des arbitrages historiques par contrat, par an
2. Somme des arbitrages et PM par réseau, par catégorie d'âges, de PM totale et de parts d'UC sur un historique préalablement choisi.
3. Projection à 60 ans des PM et taux d'arbitrages historiques du portefeuille selon chaque regroupement, par vieillissement de la population.
4. Agrégation par Réseau et obtention de lois calendaires sur 60 ans.

Exemple

◦ Soit un **regroupement 1** de classes de contrats de PM totale/âge/Part UC pour un réseau A tel que : "Encours > 500k€", " 25 ≤ âge < 35 ans", "30% < Part UC ≤ 50% ". Sur la base de données exploitée allant jusqu'au 31/12/N-1, la moyenne d'âge pondérée par la PM du regroupement 1 est de **34,5 ans**, et la PM d'UC totale est de **100M€**, pour un taux d'arbitrages UC→Euro mesuré de **2%** pour ce regroupement 1.

◦ Soit un **regroupement 2** de classes de contrats de PM totale/âge/Part UC pour un réseau A tel que : "Encours > 500k", " 35 ≤ âge < 45 ans", "30% < Part UC ≤ 50% ". Sur la base de données exploitée allant jusqu'au 31/12/N-1, la PM d'UC totale est de **200M€**, pour un taux d'arbitrages UC→Euro mesuré de **3%** pour ce regroupement 2.

Pour chaque regroupement, l'estimation du taux d'arbitrages UC→Euro en N sera alors donnée par le taux historique mesuré sur la base. La PM UC utilisée pour une agrégation par réseau est la PM UC totale du regroupement dans la base de données utilisée.

	Année N		Année N+1		Année N+2		...	
	PM UC totale	Taux UC->Euro	PM UC totale	Taux UC->Euro	PM UC totale	Taux UC->Euro		
Regroupement 1	100M€	2%	200M€	3%	200M€	3%		
Regroupement 2	200M€	3%						

Ainsi, pour estimer le taux d'arbitrages en N+1, l'âge moyen pondéré de chaque regroupement est vieilli d'un an.
Dans l'exemple, l'âge moyen du regroupement 1 est de 34,5 ans en N, donc de 35,5 ans en N+1. La PM du regroupement 1 utilisée pour l'agrégation et le taux d'arbitrages estimé deviennent alors ceux du regroupement 2 par le changement de catégorie d'âges.

Backtesting

Pour réaliser un backtesting du modèle, celui-ci est calibré en se basant sur plusieurs historiques de données. Par exemple, les années 2008 à 2017 sont utilisées pour calibrer le modèle pour une projection des montants d'arbitrages que l'on comparera au réel 2018, ou encore un calibrage sur les années 2008 à 2018 est réalisé pour la projection sur l'année 2019. Enfin, pour tester l'historique optimal à utiliser pour calibrer les lois, celles-ci sont réalisées en utilisant trois historiques différents : 3 ans, 6 ans et tout l'historique disponible.

Afin de démontrer l'efficacité de l'utilisation des variables âges/Part UC/Encours plutôt que la variable ancienneté qui est exploitée actuellement, un modèle basé sur l'ancienneté est également intégré au backtesting. Des projections sont alors effectuées et comparées aux données réelles pour les années 2015 à 2019.

Le tableau suivant représente la RMSE, c'est-à-dire l'écart quadratique moyen, entre les taux annuels projetés et les taux réels entre 2015 et 2019 pour chaque type de taux et chaque méthode utilisée. La RMSE décrite dans la suite, permet de mesurer les écarts en pondérant plus fortement les erreurs importantes.

	RMSE | Taux UC→€	**RMSE | Taux €→UC**
Ancienneté | Base totale	3.08%	2.86%
Age/Enc./Part. | Base totale	3.03%	2.12%
Age/Enc./Part. | 6 ans	2.42%	1.77%
Age/Enc./Part. | 3 ans	2.33%	1.66%

Les résultats du backtesting sont résumés sur les graphes ci-dessous. Les taux d'arbitrages représentés sont annuels.

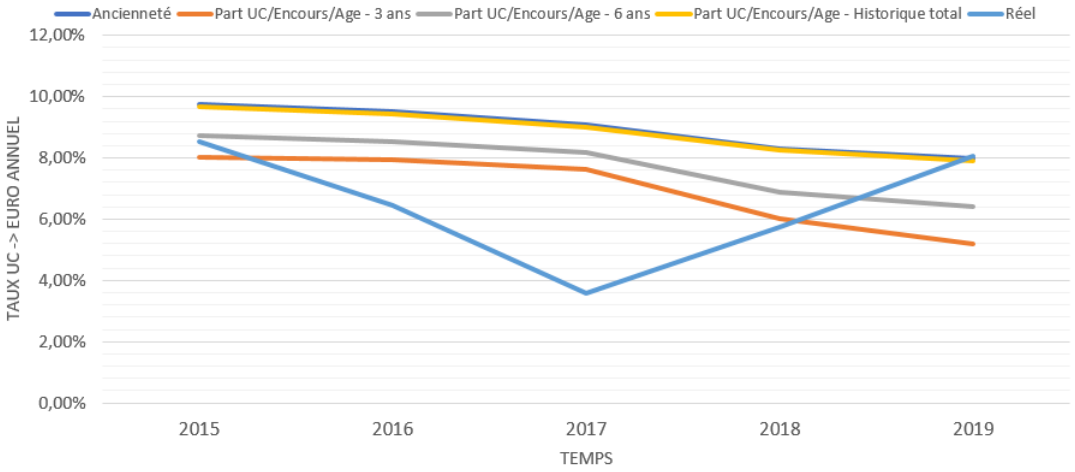

FIGURE 5.8 – Backtesting - Lois UC → Euro

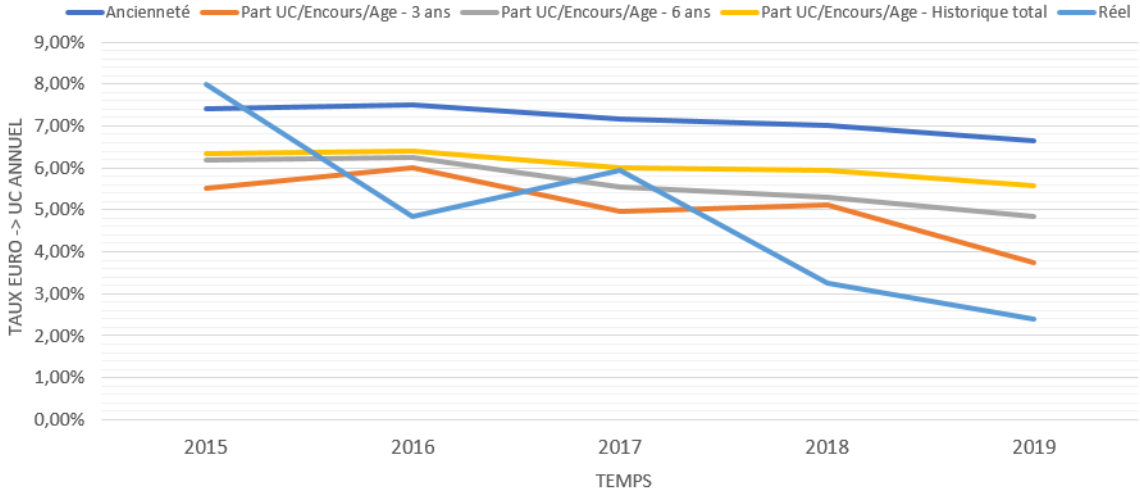

FIGURE 5.9 – Backtesting - Lois Euro → UC

Plusieurs constats sont faits à partir du tableau et des graphes ci-dessus :

— Sur les arbitrages Euro→UC, les lois basées seulement sur l'ancienneté sont celles qui présentent le plus mauvais backtesting pour la mesure d'écart RMSE utilisée dans le tableau.

— En termes de RMSE, les nouveaux modèles prenant 3 et 6 ans d'historiques donnent les meilleures performances d'après le tableau par des mesures d'écarts similaires.

— D'après le premier graphique, les **tendances** à la hausse des arbitrages UC→Euro ne sont captées par aucun modèle pour les années 2018 et 2019.

— Un écart très important entre le taux UC→Euro réel et tous les modèles est observable pour les années 2016 et 2017.

— D'après le second graphe, pour les taux d'arbitrages Euro→UC, des écarts assez importants sont visibles. Excepté pour 2019, les tendances à la baisse ou à la hausse des taux ne sont jamais suivies par les différents modèles.

D'après cette partie de l'étude, il a pu être démontré que le modèle actuel d'estimation des taux d'arbitrages présente des failles par sa méthodologie de calibrage d'une part. D'autre part, les méthodes de sélection de variables utilisées, notamment la forêt aléatoire, ont pu montrer que le fait d'utiliser la variable "ancienneté" n'est pas justifié.
Ce sont en effet l'âge des assurés, la part UC et la PM totale d'un contrat qui influeraient le plus sur les arbitrages. A partir de ces variables, des modèles structurels avec vieillissement du portefeuille ont alors été calibrés. Cependant, d'importantes erreurs et des tendances d'évolution d'arbitrages au cours du temps qui ne sont très souvent pas captées montrent qu'il s'avère nécessaire d'explorer de nouvelles méthodes d'estimations des arbitrages.

De nouveaux modèles vont donc être étudiés afin d'estimer au mieux les tendances des taux d'arbitrages, en prenant en compte de nouvelles variables : **des paramètres dynamiques ou conjoncturels**.

Chapitre 6

Modèles d'arbitrages dynamiques

Afin d'essayer de mieux capter les tendances des arbitrages au cours du temps, on s'intéressera dans ce chapitre à la mise en place d'un modèle dynamique basé sur des variables conjoncturelles.

Comme les taux d'arbitrages sont très volatiles au cours du temps, des modèles d'estimation basés sur des variables temporelles vont être étudiés. Enfin, on étudiera la possibilité d'allier modèles structurels et dynamiques dans l'objectif de garder une stabilité dans le temps tout en captant les tendances à court terme .

6.1 Pré-requis théoriques : modèles de séries temporelles

Afin de construire des modèles dynamiques d'estimation des taux d'arbitrages basés sur des variables temporelles, une introduction à certains modèles de séries temporelles va être réalisée.

Généralités

On se place dans un modèle où le temps prend des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. Les variables à expliquer dans cette étude sont les taux d'arbitrages de l'UC vers l'Euro et de l'Euro vers l'UC mensuels, qui seront souvent notés "UC→Euro" et "Euro→UC".
Comme vu précédemment, les comportements des assurés peuvent être irrationnels et les arbitrages de certains contrats à fortes PM peuvent impacter les taux d'arbitrages au global et donc ajouter un biais à la modélisation, donnant d'importantes erreurs de prédiction.

Pour que cela puisse être pris en compte dans des modèles, les séries temporelles étudiées peuvent être considérés comme étant des processus stochastiques.

On suppose que les variables à expliquer peuvent être modélisées comme telles :

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ série temporelle de carré intégrable.
On note alors : $\forall t \in \mathbb{N}^*, X_t = T_t + S_t + Y_t$ avec :
∘ $(T_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ fonction déterministe représentant la tendance dans le temps de $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$.
∘ $(S_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ la saisonnalité de $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ de période P vérifiant $\frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} S_p = 0$
∘ $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ processus stochastique stationnaire au sens faible, de carré intégrable et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (composante aléatoire)

La condition de stationnarité au sens faible de Y_t est une hypothèse forte et indispensable pour l'application du modèle.

Remarque : Une série est dite stationnaire au sens faible si elle vérifie : [7]

1. $\forall t \in \mathbb{N}^*$, $E[Y_t] = \mu$
2. $\forall t \in \mathbb{N}^*$, $Var[Y_t] = \sigma^2 < +\infty$
3. $\forall t \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}$, $\gamma_Y(k) = cov(Y_t, Y_{t+k}) = \rho_k$

En d'autres termes, l'espérance et la variance de Y_t doivent être constantes au cours du temps, et la variance doit être finie. Les auto-covariances ou auto-corrélations de Y_t ne doivent dépendre que du décalage k, pas de t.

Modèles ARMA(p,q)

Avant une introduction aux modèles ARMA(p,q) qui seront exploités dans l'étude, il convient de définir plusieurs notions, notamment celles de bruit blanc, et de modèles AR(p) et MA(q).

Notion de bruit blanc

Un exemple de série temporelle stationnaire au sens large est le bruit blanc.
$\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc si on a [7] :

1. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $E[\varepsilon_t] = 0$
2. $\forall (t,s) \in \mathbb{Z}^2$, $t \neq s$, $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$
3. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_0) > 0$

Modèle AutoRégressif AR(p)

Le modèle AR (autorégressif) d'ordre p constitue la première partie d'un processus ARMA(p,q). Avec $p \in \mathbb{N}$, $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*} = Y$ processus stationnaire au sens large suit un modèle AR(p) si : $\exists\varepsilon$ bruit blanc, $\exists(\varphi_0 = 1, \varphi_1, \varphi_2, ...) \in \mathbb{R}^p$, $\forall t \in \mathbb{N}^*, t > p$,

$$Y_t + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + ... + \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

∘ Existence d'une solution à l'équation du modèle AR(p)

L'équation AR(p) admet une solution stationnaire au sens large et causale si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1, \varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - ... - \varphi_p z^p \neq 0$.

Le processus Y est causal s'il dépend uniquement des valeurs présentes et passées du bruit blanc qui le régit, pas des valeurs futures. On a alors : $\forall k \geq 1, \forall t \in \mathbb{N}^*, cov(Y_t, \varepsilon_{t+j}) = 0$.

Modèle *Moving-Average* MA(q)

Le modèle MA (*Moving-Average* ou moyenne-mobile) d'ordre q constitue la seconde partie d'un processus ARMA(p,q).
On dit que $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*} = Y$ processus stationnaire au sens large suit un modèle MA(q), avec $q \in \mathbb{N}$ si : $\exists\varepsilon$ bruit blanc, $\exists(\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, ...) \in \mathbb{R}^q$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_t = \psi_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \psi_q \varepsilon_{t-q}$$

Modèle ARMA(p,q)

Le modèle ARMA(p,q) est en fait une généralisation des modèles AR(p) et MA(q). $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}} = Y$ processus stationnaire au sens large suit un modèle ARMA(p,q), avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ si : $\exists\varepsilon$ bruit blanc, $\exists(\varphi_0 = 1, \varphi_1, \varphi_2, ...) \in \mathbb{R}^p, (\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, ...) \in \mathbb{R}^q$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_t + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + ... + \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \psi_q \varepsilon_{t-q}$$

∘ Existence d'une solution à l'équation du modèle ARMA(p,q)

Soit les polynômes caractéristiques des modèles respectifs AR(p) et MA(q) :
$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - ... - \varphi_p z^p$ et $\psi(z) = 1 + \psi_1 z + ... + \psi_q z^q$.
En supposant que φ et ψ n'ont pas de zéros communs, l'équation ARMA admet une solution stationnaire au sens large et causale si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \varphi(z) \neq 0$.

Cette solution unique a pour expression :

$$Y_t = \sum_{p=0}^{+\infty} \theta_p \varepsilon_{t-p} \tag{6.1}$$

Avec $(\theta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ suite des coefficients du développement en série de Laurent de $\left(\frac{\psi_z}{\varphi_z}\right)_{z\in\mathbb{C}}$ au voisinage du cercle unité.

∘ Analyse qualitative des autocorrélations des processus

Pour déterminer si une série temporelle dépend de son passé, une analyse de ses autocorrélations peut être effectuée. A l'aide de la fonction d'autocorrélation totale et d'autocorrélation partielle, il est possible d'analyser si en un temps donné, les valeurs d'une série temporelle dépendent des valeurs passées.

– La fonction d'autocorrélation totale d'ordre h, notée ρ_h, s'exprime comme tel pour un processus stationnaire au sens faible Y donné : $\forall h \in \mathbb{N}, \rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} \in [-1;1]$ avec $\gamma_Y(h) = cov(Y_t, Y_{t+h})$. Cette fonction permet d'estimer les corrélations entre des valeurs d'une série séparée par h intervalles de temps.

– La fonction d'autocorrélation partielle d'ordre h désigne la corrélation entre deux valeurs d'une série séparées par h intervalles, après suppression de l'influence des valeurs des intervalles intermédiaires.

Ainsi, à partir de ces deux fonctions, il est possible de mesurer l'autocorrélation d'une série temporelle stationnaire et d'estimer les ordres p et q d'un modèle ARMA. Pour déterminer quantitativement les coefficients des modèles, des modèles complexes sont utilisés, notamment la méthode de la vraisemblance exacte ou "*Exact Likelihood*" [11].

∘ Prévision par un modèle ARMA(p,q)

La prédiction à l'aide d'un modèle ARMA ne peut se faire que sur des séries stationnaires au sens large.
Avec T observations de Y, série stationnaire au sens large, et les observations : $y_1, y_2, ..., y_T$.
La meilleure prédiction de Y à horizon $T+h$ est $\hat{y}_T(h) = \hat{E}[Y_{T+h}|y_1, y_2, ..., y_T]$, obtenue par une combinaison affine de $y_1, y_2, ..., y_T$.

Modèle ARIMA/SARIMA

Modèle ARIMA(p,d,q)

Soit Δ l'opérateur de différenciation tel que : $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$.
A l'ordre d : $\Delta^d Y_t = \Delta(\Delta^{d-1} Y_t)$.
Soit B l'opérateur de retard défini tel que : $BY_t = Y_{t-1}$ et $B^d Y_t = Y_{t-d}$.

Avec $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que Y suit un modèle ARIMA(p,d,q) si : $\forall d \in \mathbb{N}, \forall t \in [[d; +\infty]], (1-B)^d Y_t$ suit un modèle ARMA(p,q).

Modèle SARIMA(p,d,q,T)

Soit Δ_T l'opérateur vérifiant $\Delta_T Y_t = Y_t - Y_{t-T}$.

Alors, $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ suit un modèle SARIMA(p,d,q,T) si le processus $\Delta_T \circ \Delta^d Y_t$ suit un modèle ARMA(p,q).

Tests de stationnarité

Afin de s'assurer de l'application des différents modèles de séries temporelles aux processus stochastiques étudiés, l'hypothèse de stationnarité doit être vérifiée. Lorsqu'il sera nécessaire de vérifier que l'hypothèse de non stationnarité peut être rejetée, un test dit de "**Dickey-Fuller augmenté**" est généralement appliqué.

Test classique de Dickey-Fuller Le test de Dickey-Fuller (1979), aussi appelé test de racine unitaire, a pour hypothèse nulle que la série temporelle testée a été générée par un processus présentant des racines unitaires.
Ce premier test permet de tester si un processus de type AR(1) présente une racine unitaire ou non. Il est effectué pour trois modèles différents : sans constante ni tendance, avec constante sans tendance et avec constante et tendance. Ainsi, on a notamment pour un modèle sans tendance ni constante, pour $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$, le test classique de Dickey-Fuller estime le paramètre φ tel que :

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon \text{ bruit blanc.}$$

Le test de Dickey-Fuller considère l'hypothèse nulle $(H_0) : \varphi = 1$ contre $(H_1) : \varphi \neq 1$

Si le modèle AR(1) présente une racine unitaire, c'est-à-dire que $\varphi = 1$, alors comme vu

dans la section 7.1.2, on aura : pour $z = 1, |z| = 1$ et $\varphi(z) = 1 - \varphi z = 0$, ce qui implique que le modèle AR(1) n'admet pas de solution stationnaire au sens large.

Test augmenté de Dickey-Fuller ADF Le modèle classique de Dickey-Fuller ne s'appliquant que sur des modèles AR(1), une généralisation à des modèles AR(p) doit être effectuée pour pouvoir appliquer ce test aux processus étudiés.
La condition de stationnarité au sens large étant nécessaire pour le calibrage de modèles ARMA sur des séries, le test augmenté de Dickey-Fuller pourra être notamment utilisé pour rejeter l'hypothèse de non stationnarité de ce type de modèles. En supposant que φ et ψ n'ont pas de zéros communs, les conditions de stationnarité des solutions des équations ARMA peuvent être vérifiées par un test sur le modèle AR(p). La condition d'existence d'une solution stationnaire pour un modèle ARMA(p,q) ne porte en effet que sur la fonction φ.

Ce test est appliqué à un modèle AR(p). Pour rappel, une équation AR(p) admet une solution causale, stationnaire au sens large si et seulement si : $\exists \varepsilon$ bruit blanc, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1, \varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - ... - \varphi_1 z^p \neq 0$. L'hypothèse nulle du test de la racine unitaire de Dickey-Fuller est $(H_0) : \varphi_1 + ... + \varphi_p = 1$ contre $(H_1) : \varphi_1 + ... + \varphi_p \neq 1$.
Pour $\varphi_1 + ... + \varphi_p = 1$ et $z = 1$, on aura : $\varphi(z) = 1 - (\varphi_1 z + ... + \varphi_1 z^p) = 0$ et un processus non stationnaire au sens large.

Pour estimer $\varphi_1 + ... + \varphi_p$, le test de Dickey-Fuller augmenté s'appuie sur une série vérifiant un modèle AR(p), avec des variables retardées telle que :

$\exists \varepsilon$ bruit blanc, $\exists (\varphi'_0 = 1, \varphi'_1 = -\varphi_1, \varphi'_2 = -\varphi_2, ...) \in \mathbb{R}^p$, $\forall t \in \mathbb{N}, t > p$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t = Y_t - \varphi'_1 Y_{t-1} - \varphi'_2 Y_{t-2} - ... - \varphi'_p Y_{t-p} \quad &\iff \quad Y_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{p} \varphi'_k Y_{t-k} \\
&\iff \quad \Delta Y_t = (\varphi'_1 - 1) Y_{t-1} + \sum_{k=2}^{p} \varphi'_k Y_{t-k} + \varepsilon_t \\
&\iff \quad \Delta Y_t = (\varphi'_1 + ... + \varphi'_p - 1) Y_{t-1} + \sum_{k=2}^{p} \varphi'_k \Delta Y_{t-k+1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Par méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO), une estimation de $\varphi'_1 + ... + \varphi'_p$ est effectuée.

Avec ce paramètre, le t de Student est estimé. Enfin, la valeur estimée t par le test de Student est comparée à des valeurs critiques données par un tableau de MacKinnon (1996) selon le seuil de refus des hypothèses. Pour un certain seuil, si la valeur estimée t du test de Student est inférieure à la valeur critique du seuil, alors l'hypothèse nulle est rejetée pour ce seuil, donc ici l'hypothèse de non stationnarité est rejetée pour ce seuil. Pour un seuil de 5%, la valeur critique est $ADF_{5\%} = -1.95$.

La différence avec l'estimation du paramètre du test de Dickey-Fuller classique réside dans le fait que le paramètre φ est directement estimé par MCO sur l'équation de base AR(1) pour le test classique.

Enfin, concernant le test ADF, le nombre de lag ou retards retenu dépend du critère d'Akaike (AIC) défini tel que :

$$AIC = -2log(\frac{l}{T}) + 2\frac{k}{T}$$

avec l la vraisemblance du paramètre, T le nombre d'observations et k le nombre de retards. Ainsi, le nombre de retards retenu est celui qui minimise le critère d'Akaike. L'AIC permet de mesurer la qualité d'un modèle : plus ce critère est faible, plus le modèle est performant au vu de cet indicateur.

Test de Ljung-Box

Pour s'assurer de l'efficacité du calibrage d'un modèle autorégressif, des tests de blancheur peuvent être effectués. Ceux-ci ont notamment pour but de prouver que les résidus sont indépendants, donc qu'aucune autocorrélation n'est présente entre les résidus du modèle calibré.

Le test de Ljung-Box est un exemple de test de blancheur. Il consiste à vérifier que les résidus du modèles forment un bruit blanc fort, c'est-à-dire un bruit blanc centré, dont les composantes sont indépendantes et identiquement distribuées.

L'hypothèse du test de Ljung-Box est (H_0) : le résidu $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.
Sous (H_0), pour $k << N$, la statistique de Ljung-Box :
$Q_{LB}(k) = n(n+2)\sum_{h=1}^{k} \frac{\hat{\rho}_\epsilon^2(k)}{n-k}$ suit approximativement une loi $\chi^2(k)$ pour un nombre n d'observations assez important. Avec $\hat{\rho}$ estimateur sans biais de la fonction d'autocorrélation [7].

(H_0) sera acceptée à un seuil α si $Q_{LB}(k) \leq \chi^2_{k,\alpha}$ avec $\chi^2_{k,\alpha}(k)$ quantile de niveau α de la loi $\chi^2(k)$.

Indicateurs de pertinence du modèle

Afin de mesurer l'erreur de prédiction des taux d'arbitrages, plusieurs indicateurs vont être utilisés et d'autres créés.

∘ Le premier indicateur est la **MAE**, soit la *Mean Absolute Error* ou Erreur absolue moyenne de prédiction. Cet indice permet d'évaluer les erreurs de prédiction et d'être comparé aux données réelles afin d'en déduire un ordre d'erreur. Pour N valeurs estimées $\hat{y} = (\hat{y}_n)_{n\in[[1;N]]}$ et $y = (y_n)_{n\in[[1;N]]}$ les N valeurs réelles, la MAE est définie telle que :

$$MAE(\hat{y}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\hat{y_N} - y_N|$$

∘ Le second indicateur est la **RMSE**, *Root-Mean-Squared-Error* ou erreur quadratique moyenne. Similaire à la MAE, cet indice permet de mesurer l'erreur de prédiction en accordant plus de poids aux erreurs importantes. La RMSE est calculée telle que :

$$RMSE(\hat{y}) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\hat{y_N} - y_N)^2}$$

Ces deux indicateurs permettent d'établir des mesures d'écarts de prévision pour les modèles de séries temporelles exploités.
Dans cette partie de l'étude, ce sont des taux mensuels qui sont prédits. La mesure des performances de prédiction des différents modèles se fera à deux mailles différentes. L'une sera utilisée pour les **erreurs de prédiction mensuelles**, l'autre pour les **erreurs annualisées**.
Le but de cette partie de l'étude est de réaliser des prédictions mensuelles des taux d'arbitrages. Si de telles prédictions doivent être intégrées, notamment dans le modèle interne, cela sera fait annuellement. Une mesure annuelle des erreurs de prédiction est nécessaire.

Les mesures des erreurs de prédictions utilisées sont :

1. La **MAE mensuelle sur 1 an**, notée $MAE_1(M1, A)$ pour un modèle M1 et une prédiction sur l'année A.
2. La **RMSE mensuelle sur 1 an**, notée $RMSE_1(M1, A)$ pour un modèle M1 et une prédiction sur l'année A.
3. L' **erreur annuelle absolue pondérée par la PM sur 1 an**, noté $Err_1(M1, A)$ pour un modèle M1 et une prédiction sur l'année A.

Ces mesures sont définies comme tel :

Soit $y_A = (y_{A,1}, ..., y_{A,12})$ taux d'arbitrages mensuels sur l'année A (UC→Euro ou Euro→UC).
Soit $\hat{y}_A(M1) = (\hat{y}_{A,1}(M1), ..., \hat{y}_{A,12}(M1))$ prédictions des taux d'arbitrages mensuels sur l'année A par le modèle M1.
On a alors :

1. $MAE_1(M1, A) = \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{12} |\hat{y}_{A,n}(M1) - y_{A,n}|$

2. $RMSE_1(M1, A) = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{n=1}^{12} (\hat{y}_{A,n}(M1) - y_{A,n})^2}$

3. $$\begin{cases} Err_1(M1, A) = \dfrac{|\sum_{n=1}^{12} (\hat{y}_{A,n}(M1) - y_{A,n}) PM_{UC}^{n,A}|}{\sum_{n=1}^{12} PM_{UC}^{n,A}} & \text{pour les taux UC}\rightarrow\text{Euro} \\ Err_1(M1, A) = \dfrac{|\sum_{n=1}^{12} (\hat{y}_{A,n}(M1) - y_{A,n}) PM_{Euro}^{n,A}|}{\sum_{n=1}^{12} PM_{Euro}^{n,A}} & \text{pour les taux Euro}\rightarrow\text{UC} \end{cases}$$

Avec :
- $PM_{UC}^{n,A}$ Encours total sur des UC sur le portefeuille pour le mois n et l'année A.
- $PM_{Euro}^{n,A}$ Encours total sur des supports en euros pour le mois n et l'année A.

6.2 Modèles de séries temporelles sans variable exogène

Les taux d'arbitrages étudiés sont issus des données d'observations mensuelles allant de janvier 2008 à décembre 2019. Une analyse qualitative globale de ces derniers est effectuée dans le chapitre 4.

Pour commencer, un modèle ARMA(p,q) simple est calibré directement sur les taux d'arbitrages. Un tel modèle pourrait s'avérer performant dans l'hypothèse que les taux d'arbitrages dépendent d'un aléa et des taux d'arbitrages passés. Ceci peut se justifier notamment par le fait que les arbitrages résultent parfois de décisions irrationnelles des assurés, ce qui serait pris en compte par l'aléa de ce modèle.

Les taux passés pourraient influencer les taux futurs. D'une part, si un assuré a réalisé des arbitrages vers un support en UC durant un certain mois, celui-ci pourrait souhaiter conserver l'épargne placée sur le nouveau support afin d'atteindre l'espérance de rendement atteinte à moyen ou long terme et ne pas réaliser d'autres arbitrages dans les mois suivants. D'autres part, notamment si beaucoup d'arbitrages sortants d'un certain support sont réalisés, alors d'autres assurés pourraient suivre la tendance de sortie de ce support et réaliser le même arbitrage sortant dans le mois ou les mois qui suivent.

Pour qu'un tel modèle puisse être appliqué directement sur les taux d'arbitrages, cela suppose que les taux d'arbitrages UC $\rightarrow$ Euro et Euro $\rightarrow$ UC soient des séries stationnaires, et qu'aucune tendance ni saisonnalité n'existent. Cela va être étudié.

Etude des autocorrélations

Pour s'assurer que les taux d'arbitrages puissent dépendre des valeurs passées, les autocorrélations sont préalablement étudiées graphiquement.

Les fonctions d'autocorrélations simples des taux d'arbitrages sont alors :

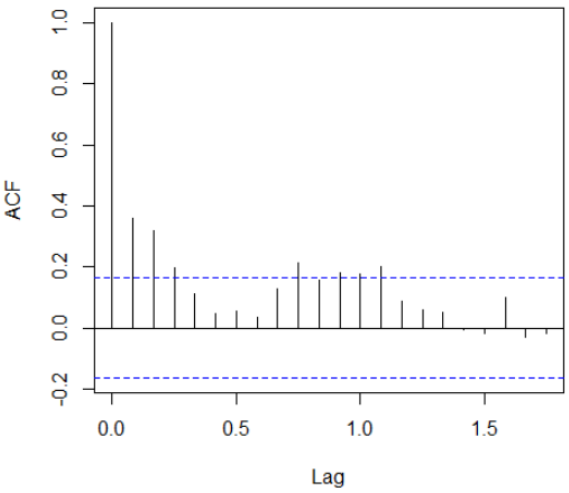

FIGURE 6.1 – Autocorrélation des taux d'arbitrages UC→Euro

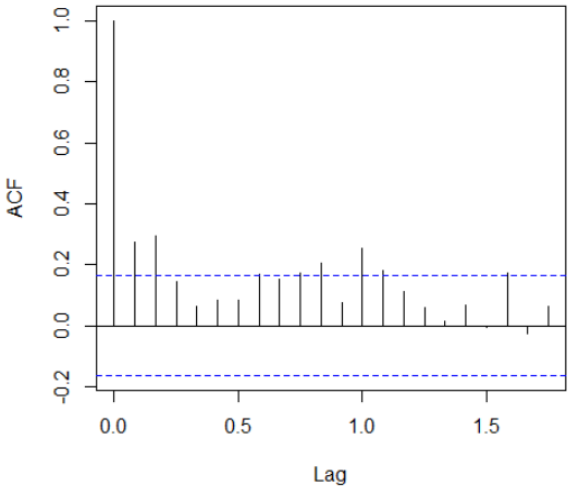

FIGURE 6.2 – Autocorrélation des taux d'arbitrages Euro→UC

Une unité de "lag" correspond au pas de temps qui est ici d'un an, une unité est divisée par 12. Le "*lag*" se traduisant par le retard, un pic signifie qu'une autocorrélation est présente. L'ordre de cette corrélation est observable en regardant le nombre d'unités de temps d'écart à l'origine. Plus un pic est élevé, plus l'autocorrélation d'ordre correspondant à ce retard est importante.
Ainsi, pour les deux types d'arbitrages, une autocorrélation positive significative est notable pour des retards de 1 et 2 mois. Pour les taux Euro→UC un pic est également observable pour un retard de 12 mois, ce qui correspondrait à une certaine saisonnalité annuelle du taux.
Le graphe des autocorrélations partielles est présenté pour les taux Euro→UC pour appuyer cette saisonnalité.

D'après le graphique des **autocorrélations partielles** ci-contre, la saisonnalité observée d'un an se confirme par un pic significatif existant important pour un décalage de 1 an. Cela pourrait alors mettre en doute la saisonnalité des taux d'arbitrages Euro→UC.
En effet, pour ce pic, l'autocorrélation partielle est calculée en ne prenant pas en compte les autres autocorrélations situées entre t et $t-12$. Cette saisonnalité observée pourra notamment être exploitée dans un modèle.

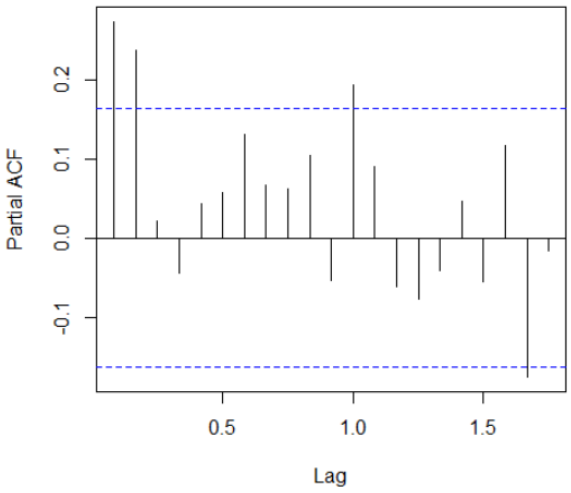

FIGURE 6.3 – Autocorrélation partielle des taux d'arbitrages Euro→UC

Etude de la stationnarité des taux d'arbitrages

Pour évaluer si les taux UC→Euro et Euro→UC sont des séries temporelles stationnaires au sens large, un test augmenté de Dickey-Fuller est appliqué. Pour un certain seuil, ce test permettra d'accepter ou non l'hypothèse nulle de non stationnarité des séries.

Application d'un test augmenté de Dickey-Fuller

Le test de Dickey-Fuller augmenté est appliqué aux deux types de taux d'arbitrages.

On rappelle que la t - statistique est ici la valeur estimée du t de Student associée à la somme des coefficients du test ADF. En appliquant le test, les statistiques suivantes sont obtenues :

ADF - test	**Taux UC→Euro**	**Taux Euro→UC**
t - statistique	-3.36	-2.55

Alors, pour un seuil de 5%, le test augmenté de Dickey-Fuller rejette l'hypothèse nulle de non-stationnarité des deux types de taux d'arbitrages. Les statistiques obtenues sont inférieures à la valeur critique fixée pour un seuil de 5% dont la valeur est $ADF_{5\%} = -1.95$. Les deux types de taux d'arbitrages seront donc considérés comme stationnaires dans cette partie de l'étude. Une réserve concernant la stationnarité des taux d'arbitrages est malgré tout émise du fait de certains pics ponctuels importants observables pour les séries, et de l'observation d'une saisonnalité de période 12 mois notamment pour les arbitrages Euro→UC.

Notations pour la suite de l'étude

Pour la suite de l'étude, on choisit d'utiliser les notations suivantes :

- $Y_1 = (Y_{1,t})_{t\in\mathbb{N}^*}$ série des taux d'arbitrages UC $\rightarrow$ Euro
- $Y_2 = (Y_{2,t})_{t\in\mathbb{N}^*}$ série des taux d'arbitrages Euro $\rightarrow$ UC.
- $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,t})_{t\in\mathbb{N}^*}$ bruit blanc associé à Y_1
- $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,t})_{t\in\mathbb{N}^*}$ bruit blanc associé à Y_2.
- $\varphi_1 = (\varphi_{1,0}, .., \varphi_{1,p_1})$ et $\psi_1 = (\psi_{1,0}, .., \psi_{1,q})$ les coefficients respectifs d'un modèle AR(p_1) et MA(q_1) ou d'un ARMA(p_1,q_1) pour une modélisation des taux UC$\rightarrow$€.
- $\varphi_2 = (\varphi_{2,0}, .., \varphi_{2,p})$ et $\psi_2 = (\psi_{2,0}, .., \psi_{2,q})$ les coefficients respectifs d'un modèle AR(p_2) et MA(q_2) ou d'un ARMA(p_2,q_2) pour une modélisation des taux €$\rightarrow$UC.

Modélisation ARMA - Modèle 1 (M1)

D'après l'étude de la stationnarité des taux d'arbitrages préalablement effectuée, les taux d'arbitrages sont considérés ici stationnaires. Cependant, pour accentuer cette supposée stationnarité, une log-différenciation est appliquée aux taux d'arbitrages dans cette partie. La fonction "logarithme" permet de stabiliser la variance des processus, et la différenciation leur moyenne au cours du temps.
Par application du test de Dickey-Fuller sur les taux log-différenciées, des statistiques respectives de -13.11 et -12.85 (< -1.95) sont obtenues pour les taux UC$\rightarrow$Euro et Euro$\rightarrow$UC. L'hypothèse de non stationnarité est refusée à un seuil de 5%. Alors, les taux d'arbitrages log-différenciés sont considérés stationnaires au sens large.

Ainsi, des modèles ARMA sont calibrés directement sur les taux d'arbitrages log-différenciés, on note ce type de modèles (M1). La saisonnalité et la tendance sont supposés inexistants dans cette section.

Le modèle obtenu au global s'écrit : $\forall t \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1;2\}$, pour Y^i suivant un modèle ARMA(p_i, q_i) :

$$\Delta(log(Y_{i,t}))+\varphi_{i,1}\Delta(log(Y_{i,t-1}))+...+\varphi_{i,p_i}\Delta(log(Y_{i,t-p_i})) = \varepsilon_{i,t}+\psi_{i,1}\varepsilon_{i,t-1}+...+\psi_{i,q_i}\varepsilon_{i,t-q_i}$$

Pour déterminer le modèle optimal à calibrer, différents modèles sont testés sur les données, leur qualité est mesurée à l'aide de l'AIC. Le modèle pour lequel le couple (p, q) minimise le critère AIC est retenu. Pour déterminer les coefficients associés, comme cité précédemment, une méthode dite de "la vraisemblance exacte" est utilisée.

Le choix des modèles se fait en utilisant la base de données contenant l'historique total. Ainsi, un modèle ARMA(2,1) est optimal pour les taux UC$\rightarrow$Euro log-différenciés, et un modèle ARMA(1,1) pour les taux Euro$\rightarrow$UC log-différenciés. Les modèles suivants sont

obtenus :

$$\begin{cases} \Delta(log(Y_{1,t})) = 0.25\Delta(log(Y_{1,t-1})) + 0.23\Delta(log(Y_{1,t-2})) + \varepsilon_{1,t} - 0.95\varepsilon_{1,t-1} & \text{(M1 | UC}\rightarrow\text{€)} \\ \Delta(log(Y_{2,t})) = 0.16\Delta(log(Y_{2,t-1})) + \varepsilon_{2,t} - 0.88\varepsilon_{2,t-1} & \text{(M1 | €}\rightarrow\text{UC)} \end{cases}$$

Soit des modèles multiplicatifs définis tels que :

$$\begin{cases} Y_{1,t} = Y_{1,t-1}^{1.25} Y_{1,t-2}^{-0.02} Y_{1,t-3}^{-0.23} exp(\varepsilon_{1,t} - 0.95\varepsilon_{1,t-1}) & \text{(M1 | UC}\rightarrow\text{€)} \\ Y_{2,t} = Y_{2,t-1}^{1.16} Y_{2,t-2}^{-0.16} exp(\varepsilon_{2,t} - 0.88\varepsilon_{2,t-1}) & \text{(M1 | €}\rightarrow\text{UC)} \end{cases}$$

D'après ces modèles, les taux d'arbitrages en t dépendraient positivement du taux du mois précédent, mais négativement des taux observés 2 mois avant et même 3 mois avant pour les UC→Euro en $t-3$.

Pour s'assurer de l'efficacité des modèles, les résidus obtenus après application des modèles sont testés pour évaluer s'il s'agit bien de bruits blancs forts. Un test de Ljung-Box est appliqué. Généralement un "k" égal au nombre d'observations dans la base divisé par 4 est choisi comme retard à tester par Ljung-Box.
On applique donc le test de Ljung-Box sur les résidus obtenus pour les modèles de taux d'arbitrages pour $k = \frac{144}{4} = 36$:

- Pour le modèle UC→Euro, une p-value de 53.64% (>5%) est obtenue.
- Pour le modèle Euro→UC, une p-value de 8.47% (>5%) est obtenue.

Ainsi, pour un seuil de 5% l'hypothèse nulle du test de Ljung-Box est vérifiée pour les deux modèles. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse vérifiant que les résidus des modèles sont des bruits blancs forts est acceptée pour les deux modèles de taux. Les résidus du modèles sont considérés comme indépendants, et il est admis que ces modèles peuvent être généralisés, malgré une p-value faible pour les Euro→UC.

Backtesting des modèles

Pour tester l'efficacité des modèles de taux, ces derniers vont toujours être calibrés et testés sur **3 bases** différentes :

1. Historique 1 : Base d'apprentissage : mois allant du 01/2008 à 12/2018
   Base de test : de 01/2019 à 12/2019
2. Historique 2 : Base d'apprentissage : mois allant du 01/2008 à 12/2017
   Base de test : de 01/2018 à 12/2019
3. Historique 3 : Base d'apprentissage : mois allant du 01/2008 à 12/2016
   Base de test : de 01/2017 à 12/2019

Ainsi, les modèles de taux d'arbitrages sont calibrés et projetés sur les différents historiques. Sur les 3 historiques différents, les projections respectives sur la **première année de la base de test** sont évaluées.
Pour résumer les résultats obtenus, une **moyenne des indicateurs** est appliquée pour les projections sur les 3 bases de test différentes. Les indicateurs mesurés pour chaque historique et chaque modèle sont disponibles en Annexe C.

Modèle (M1) UC→Euro

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M1)$	0.261%
Moyenne – $RMSE_1(M1)$	0.318%
Moyenne – $Err_1(M_1)$	0.240%

Modèle (M1) Euro→UC

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M1)$	0.382%
Moyenne – $RMSE_1(M1)$	0.434%
Moyenne – $Err_1(M_1)$	0.354%

Ainsi, pour les taux UC→Euro, avec une moyenne des taux mensuels observée de **0.485%** sur les 3 années de projection testées, un écart assez important semble observable.
Avec une moyenne des taux mensuels observée Euro→UC de **0.323%** sur les 3 années testées, les indicateurs semblent refléter un certain écart de prédiction. D'autres méthodes d'estimation des taux d'arbitrages vont alors être exploitées pour permettre une comparaison des résultats obtenus.

Modélisation SARIMA - Modèle I.2 ($M2$)

Un modèle calibré directement sur les taux d'arbitrages est étudié. Comme vu dans l'analyse graphique des autocorrélations simples et partielles, un pic significatif pour un retard de 12 mois est particulièrement visible sur les taux Euro→UC.

Ceci pourrait se justifier par le fait que certains assurés réalisent des arbitrages périodiquement, à une période donnée de chaque année. Certains mois de l'année comme juillet et août étant des périodes de moindre activité économique et de vacances scolaires, alors le nombre d'arbitrages réalisés pourrait être en baisse annuellement pour ces périodes.

Une étude des taux d'arbitrages permettant de prendre en compte une saisonnalité de 12 mois est réalisée. Un modèle SARIMA est donc exploité pour les deux types de taux d'arbitrages.
Pour cela, la série différenciée $X_{i,t}^{12} = Y_{i,t} - Y_{i,t-12}$ est étudiée, pour $i \in 1;2$, $t \in \mathbb{N}^*$, $t > 12$.

Les séries suivantes sont observées pour les données de l'étude :

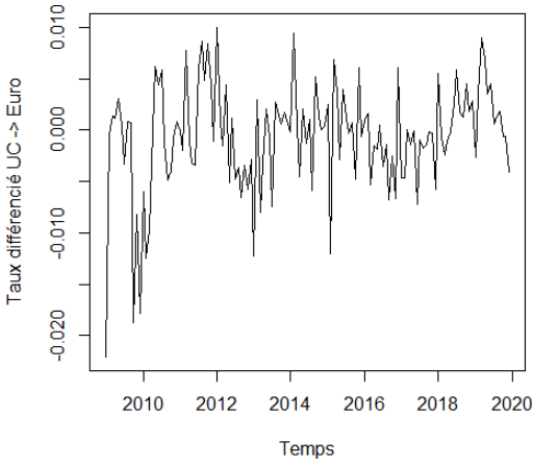

FIGURE 6.4 – Taux UC→Euro différenciés de 12 mois observés : X_1^{12}

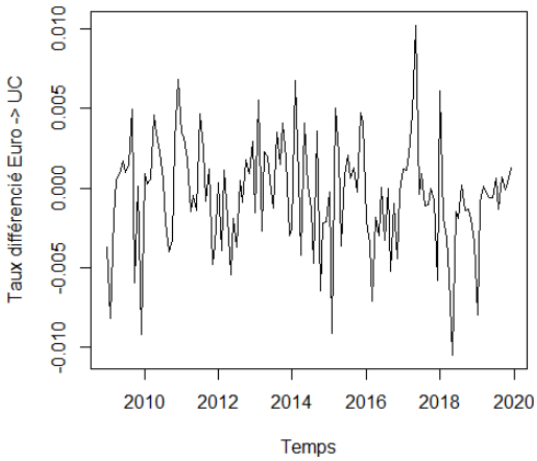

FIGURE 6.5 – Taux Euro→UC différenciés de 12 mois observés : X_2^{12}

Malgré quelques pics ponctuels, ces séries temporelles semblent admettre une certaine stationnarité. Pour vérifier cela, comme précédemment, des tests de Dickey-Fuller augmenté sont appliqués aux séries. Les statistiques obtenues sont :

ADF test	X_1^{12}	X_2^{12}
t - statistique	-5.61	-6.53

Les statistiques étant pour les deux tests inférieures à la valeur critique du test fixée à -1.95 pour un seuil de 5%, l'hypothèse de non-stationnarité est rejetée à un seuil de 5%. Pour calibrer des modèles ARMA sur les séries X_1^{12} et X_2^{12}, ces dernières sont considérées comme stationnaires au sens large.

Comme précédemment, une recherche du modèle ARMA optimal pouvant être calibré sur les séries est réalisée. Le modèle optimal pour X_1^{12} est un ARMA(1,2) et pour X_2^{12} c'est un modèle AR(2). Les modèles obtenus sont alors :

$$\begin{cases} X_{1,t}^{12} = 0.65X_{1,t-1}^{12} + \varepsilon_{1,t} - 0.50\varepsilon_{1,t-1} + 0.21\varepsilon_{1,t-2} & \text{(M2 | UC→€)} \\ X_{2,t}^{12} = 0.15X_{2,t-1}^{12} + 0.16X_{2,t-2}^{12} + \varepsilon_{2,t} & \text{(M2 | €→UC)} \end{cases}$$

Les modèles obtenus impliquent que Y_1 suivraient un SARIMA(1,0,2,12) et Y_2 un modèle SARIMA(2,0,0,12). Ceux-ci s'écrivent $\forall t \in \mathbb{N}, t > 14$:

$$\begin{cases} Y_{1,t} = 0.65Y_{1,t-1} + Y_{1,t-12} + \varepsilon_{1,t} - 0.5\varepsilon_{1,t-1} + 0.21\varepsilon_{1,t-2} - 0.50\varepsilon_{1,t-13} + 0.21\varepsilon_{1,t-14} & \text{(M2 | UC→€)} \\ Y_{2,t} = 0.15Y_{2,t-1} + 0.16Y_{2,t-2} + Y_{2,t-12} + 0.15Y_{2,t-13} + 0.16Y_{2,t-14} + \varepsilon_{2,t} & \text{(M2 | €→UC)} \end{cases}$$

Pour tester que les résidus obtenus après application des modèles sont bien des bruits blancs forts, le test de Ljung-Box est appliqué pour $k = \frac{132}{4} = 33$. En effet, un "k" égal au nombre de données d'observations divisé par 4 est généralement utilisé. Cela donne alors :

— Pour le modèle UC→Euro, une p-value de 21.18% (>5%) est obtenue.
— Pour le modèle Euro→UC, une p-value de 2.35%(<5%) est obtenue.

Selon le test de Ljung-Box, pour un seuil de 5%, l'hypothèse que les résidus des modèles sont des bruits blancs forts est acceptée pour le modèle. Cependant, pour le modèle Euro→UC, la p-value obtenue étant inférieure à 5%, alors l'hypothèse est refusée pour un seuil de 5%. On considère donc que le modèle est applicable pour les taux UC→Euro, mais pas pour les Euro→UC.

Le backtesting du modèle UC→Euro donne les erreurs suivantes :

Modèle UC→Euro

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M2)$	0.275%
Moyenne – $RMSE_1(M2)$	0.339%
Moyenne – $Err_1(M_2)$	0.209%

Le modèle exploitant la saisonnalité des taux d'arbitrages UC→Euro ne semble pas apporter de meilleures performances que le premier modèle au global. Cependant, des améliorations concernant la prévision des taux sur 2017 sont réalisées avec notamment une MAE_1 pour 2017, pour ce modèle de 0.179% contre 0.322% précédemment. De plus, annuellement, une certaine compensation des écarts mensuels semble observable ici avec l'indicateur Err_1 égale à 0.240% dans le premier modèle, et 0.209% ici.

Afin d'améliorer les estimations des taux d'arbitrages UC→Euro et obtenir des modèles pouvant se généraliser aux taux Euro→UC, l'intégration de variables exogènes est étudiée.

6.3 Modèles captant la tendance par régression sur paramètres dynamiques

Des variables exogènes sont intégrées, celles-ci étant utilisées en supposant qu'elles puissent impacter les taux d'arbitrages. Des variables ont alors été construites ou récoltées.

Variables temporelles explicatives des arbitrages

Présentation des paramètres

Plusieurs variables ont été construites ou récoltées pour essayer de prédire les taux d'arbitrages :

Performances du portefeuille global UC d'AXA France

Ce paramètre est choisi comme un indicateur des performances de tous les supports en unités de compte du portefeuille d'AXA France. Sa baisse pourrait impliquer une hausse des mouvements des supports en UC vers l'Euro, et son augmentation pourrait inciter les assurés à se diriger vers des supports en UC pour espérer obtenir un rendement intéressant.

Ces performances ont été répliquées à partir des proportions de classes d'actifs contenues sur le portefeuille global UC d'AXA France. Le portefeuille global est séparé en 6 classes : les Actions Monde et Euro, les Obligations Monde et Euro, l'Immobilier et les actifs monétaires. Une approximation des performances des classes ont été récoltées en ligne à partir d'indices financiers, puis agrégées selon leurs proportions respectives dans le portefeuille pour obtenir l'indicateur répliqué souhaité.

Performances des 5 supports en UC les plus arbitrés

Cet indicateur contient la moyenne des performances mensuelles des 5 supports pour lesquels ont été observés le plus de mouvements entre les supports Euro et UC en 2019. Le choix de se focaliser sur 2019 a été fait car des supports en UC présents dans le passé ont été clôturés. Ce sont les 5 supports les plus arbitrés et qui ont été créés avant 2008 qui ont été retenus, puis une moyenne de leurs performances a été calculée pour chaque mois.

L'utilisation d'une telle variable se justifie par le fait que si ces 5 supports ont beaucoup été arbitrés, cela pourrait être dû au fait que les assurés ont un encours important sur ces fonds et suivent régulièrement les performances de ceux-ci afin d'optimiser leur rendement en réalisant des mouvements sur ces fonds. Les performances de ces 5 supports pourraient impacter directement les taux d'arbitrages au cours du temps.

Variations du CAC 40

Cet indice financier a été utilisé au regard de l'étude réalisée par S.FENIZA [8], qui a notamment pu exploiter cette variable. Une telle variable pourrait impacter les taux d'arbitrages du fait qu'elle peut être consultée par tout public, à tout moment. Les variations de cette variable auraient le même impact que les performances du portefeuille global UC d'AXA France.

Taux OAT 10 ans

De même que les variations du CAC 40, les taux OAT 10 ans ont été exploités par l'étude de S.FENIZA [8] et ont également démontré un impact sur les taux d'arbitrages. Celle-ci a été sélectionnée car elle pourrait refléter les performances des différents supports en euros des produits AXA France. Ainsi, une baisse des OAT 10 ans pourrait impliquer

une diminution du rendement des supports en euros et une augmentation des arbitrages Euro→UC et une diminution des arbitrages UC→Euro.

Analyse des variables

La matrice des corrélations linéaires entre les différentes variables étudiées dans cette partie permet d'observer des liens entre les paramètres :

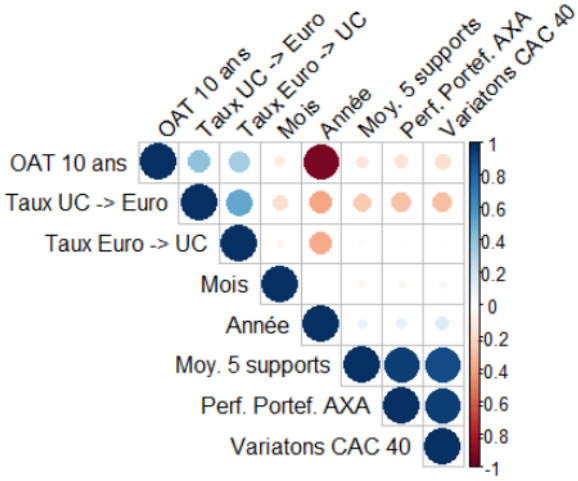

FIGURE 6.6 – Corrélations linéaires entre variables temporelles

A partir de la matrice des corrélations linéaires entre les paramètres temporels, plusieurs constats peuvent être faits :

— Une corrélation positive très importante est notable entre les performances répliquées du portefeuille UC d'AXA France, la moyenne des 5 supports les plus arbitrés et les variations du CAC 40. Celle-ci est visible sur les graphes des différents indices en Annexe D. Leur exploitation simultanée dans un même modèle pourrait être problématique.

— Les taux OAT 10 ans et les années sont fortement négativement corrélés. Depuis 2008, les taux d'intérêts ont été globalement décroissants. L'utilisation de la variable "OAT 10 ans" pourra être problématique du fait de cette importante décroissance au cours du temps. Cette tendance devrait en effet s'atténuer dans le futur du fait de l'atteinte de taux négatifs.

— Les taux UC→Euro présentent des corrélations non nulles avec toutes les variables contrairement aux taux Euro→UC pour lesquels un lien linéaire avec les autres paramètres semble moins évident.

— Une corrélation linéaire positive entre les taux Euro→UC et les taux UC→Euro est observable. Cela pourrait se justifier par des périodes de l'année de sous-

activité économique pour lesquelles les arbitrages seraient moins importantes, notamment au mois d'août.

Applications aux données

Afin d'estimer les taux d'arbitrages au cours du temps, il est supposé que les variables décrites ci-dessus puissent capter les tendances des variables cibles. Des régressions linéaires vont être appliquées aux deux types d'arbitrages. Après calibrage des régressions sur les arbitrages, des modèles autorégressifs seront notamment appliqués aux résidus obtenus, dans l'hypothèse que des autocorrélations soient observées entre les résidus.

Ces modèles pourraient s'avérer performants en supposant que lorsque de fortes variations d'indices financiers sont observées, les assurés soient réactifs et réalisent des arbitrages vers l'Euro notamment lorsque les performances des UC d'AXA sont à la baisse, et vers des supports en UC dans le cas contraire.

Modèles autorégressifs appliqués sur les résidus de la régression

Dans cette partie, des régressions sont appliquées sur les taux d'arbitrages afin d'essayer de capter les tendances des taux d'arbitrages à partir de variables exogènes. Après cela, un modèle autorégressif pourra être appliqué dans l'hypothèse que les résidus soient stationnaires et admettent des autocorrélations.

Dans cette partie de l'étude, une hypothèse est faite : celle que les taux d'arbitrages dépendent directement et linéairement d'indices de performances financiers. Ainsi, à l'aide d'une régression, la tendance et saisonnalité des séries étudiées devraient être captées. La dépendance entre ces variables ne pouvant pas être totale, des modèles autorégressifs calibrés sur les résidus obtenus après régressions sont exploités pour obtenir une meilleure prédiction des taux.

Les variables explicatives des taux sélectionnées n'ayant pas le même impact sur les deux types de taux, alors les modèles retenus pour l'étude diffèrent.

∘ <u>Modèles de taux UC→Euro</u>

Un premier modèle prenant en compte des variables exogènes est réalisé. Celui-ci prend comme argument les performances répliquées du portefeuille UC d'AXA France. Comme vu précédemment, la forte corrélation linéaire, donc colinéarité entre les différents indices de performances financières ne permettrait pas d'obtenir de résultats satisfaisants après régression linéaire sur toutes les variables.
Une régression linéaire du logarithme des taux UC→Euro est alors calibrée sur la variable exogène : performances du portefeuille UC d'AXA. Le passage au logarithme de la variable

cible se justifie ici notamment par l'assurance de prédictions de taux positifs. Le logarithme permet aussi de réduire la variance des résidus obtenus.
Le modèle se note $\forall t \in \mathbb{N}^*$:

$$log(Y_{1,t}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1,t} + \epsilon_t$$

Avec X_1 performances du portefeuille UC d'AXA et ϵ bruit blanc

Ce modèle est donc calibré sur les données d'observation de l'étude. Aux résidus obtenus sont appliqués les tests de Breusch-Pagan et de Shapiro afin de vérifier les hypothèses du modèle de régression linéaires d'homoscédasticité et de normalité des résidus.
Le test de Breusch-Pagan donne une p-value de **9.49%** et le test de Shapiro une p-value de **74.84%**. Ainsi, d'après le test de Breush-Pagan, l'hypothèse nulle d'homoscédasticité des résidus est vérifiée pour un seuil de 5%. D'après le test de Shapiro, l'hypothèse nulle de normalité des résidus est vérifiée pour un seuil de 5%. On considère donc ces deux hypothèses comme vérifiées.
Une des hypothèses du modèle linéaire est que les résidus n'admettent pas d'autocorrélation. L'application d'un test de Dickey-Fuller sur les résidus donne une statistique de **-5.50** ($<$ -1.95). Pour un seuil de 5%, l'hypothèse nulle de non-stationnarité du test est refusée, on admet donc qu'il y a des autocorrélations des résidus. Cette hypothèse du modèle de régression linéaire n'est pas vérifiée.
Pour pallier cela, un modèle ARMA est calibré sur les résidus stationnaires. Le modèle optimal est un ARMA(1,2), pour lequel un test de Ljung-Box sur les résidus donne une p-value de **24.62%**, pour un seuil de 5%, l'hypothèse de bruit blanc fort est acceptée. On considère le modèle généralisable, celui-ci, noté (M3 - 1| UC→Euro) est au global :

$$log(Y_{1,t}) = -5.11 - 4.75 X_{1,t} + \epsilon_{1,t}$$

$$Y_{1,t} = exp(-5.11 - 4.75 X_{1,t} + \epsilon_{1,t})$$

avec $\epsilon_{1,t} = 0.78\epsilon_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} - 1.49\varepsilon_{1,t-1} + 0.51\varepsilon_{1,t-2}$

L'interprétation globale pouvant être faite d'après ce modèle est que les taux d'arbitrages UC→Euro décroîtraient lorsque les performances des supports UC d'AXA augmentent.

Deux modèles similaires sont ensuite réalisés de la même manière. Le premier utilise la moyenne des performances des 5 supports les plus arbitrés comme variable exogène, noté modèle (M3 - 2| UC→Euro). Le second noté modèle (M3 - 3| UC→Euro), exploite les autres variables exogènes que sont les variations du CAC 40 et les taux OAT 10 ans dans un même modèle. Une faible corrélation linéaire est présente entre ces deux variables.
Les différents tests effectués pour le modèle utilisant les performances du portefeuille UC d'AXA sont appliqués de la même manière pour les deux autres modèles. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Test	**(M3 - 2| UC→Euro)**	**(M3 - 3| UC→Euro)**
p-value | Breusch-Pagan	8.52%	38.43%
p-value | Shapiro	74.63%	42.51%
t - stat | ADF test	-5.46	-6.13
p-value | Ljung-Box	28.26%	31.62%

Pour un seuil de 5%, les tests effectués pour les deux modèles donnent les mêmes conclusions que pour ceux du modèle (M3 - 1| UC→Euro). On considère ces modèles comme applicables aux données. Un backtesting de ces derniers sera donc effectué sur les différents historiques pour évaluer leurs performances de prédiction.

∘ Modèles de taux Euro→UC

De la même manière que pour les taux UC→Euro, un modèle de taux Euro→UC est calibré. Cependant, comme observé à l'aide de la matrice des corrélations linéaires entre les variables, le lien entre les taux Euro→UC et les autres paramètres est moins évident que pour l'autre type de taux. Ici, le modèle de régression est appliqué sur le logarithme des taux Euro→UC mais est un **modèle polynomial** se basant sur les années et les performances du portefeuille UC d'AXA, le modèle n'est alors pas linéaire ici. Les performances du portefeuille UC d'AXA ont été utilisées car c'est une des variables présentant un bon backtesting comme cela sera vu dans la suite. Ajouté à cela, une forte corrélation entre les 3 premiers indices de performance impose de faire un choix entre les paramètres.

Comme précédemment, deux tests sont appliqués sur les résidus de la régression, pour lesquels les hypothèses nulles sont acceptées pour un seuil de 5%. Sur les résidus de la régression, considérés comme stationnaires car une statistique de -7.12 est obtenu par un test ADF, un modèle autorégressif est calibré, c'est un AR(1) qui est optimal. L'hypothèse que les résidus de ce dernier sont un bruit blanc fort est acceptée d'après le test de Ljung-Box, pour un seuil de 5% avec une p-value de 8.82%. On admet donc que ce modèle est généralisable. Celui-ci se notant (M3| Euro→UC) tel que :

$$log(Y_{2,t}) = -7.87 + 0.49X_{A,t} - 0.021X_{A,t}^2 + 5.3X_{1,t} - 149X_{1,t}^2 - 1814X_{1,t}^3 + 26640X_{1,t}^4 + \epsilon_t$$

Avec ϵ qui suit un modèle AR(1), avec φ=0.2, on obtient après résolution :

$$Y_{2,t} = exp(-7.87+0.49X_{A,t}-0.021X_{A,t}^2+5.3X_{1,t}-149X_{1,t}^2-1814X_{1,t}^3+26640X_{1,t}^4+\sum_{j=0}^{t}(0.2)^j\varepsilon_{t-j})$$

Avec X_A variable représentant l'année en t, notée 19 pour l'année 2019.

Avec ce modèle, les taux Euro→UC décroissent de plus en plus avec les années et augmenteraient globalement en même temps que les performances du portefeuille UC AXA.

Backtesting des modèles (M3)

(M3 - 1| UC→Euro)

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M3)$	0.228%
Moyenne – $RMSE_1(M3)$	0.287%
Moyenne – $Err_1(M3)$	0.209%

(M3 - 2| UC→Euro)

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M3)$	0.253%
Moyenne – $RMSE_1(M3)$	0.310%
Moyenne – $Err_1(M3)$	0.237%

(M3 - 3| UC→Euro)

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M3)$	0.231%
Moyenne – $RMSE_1(M3)$	0.284%
Moyenne – $Err_1(M3)$	0.182%

(M3| Euro→UC)

Indicateur d'écart	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M3)$	0.132%
Moyenne – $RMSE_1(M3)$	0.192%
Moyenne – $Err_1(M3)$	0.066%

Globalement, le constat pouvant être fait est que les modèles utilisant des variables exogènes donnent des erreurs plus faibles que les précédents excepté pour le modèle utilisant la moyenne des 5 supports les plus arbitrés.
Les indicateurs d'erreurs du modèle Euro→UC s'avèrent particulièrement faibles.

Cependant, avec un tel modèle, comme le coefficient affecté aux carrés des années est négatif et non négligeable, alors les projections dans le futur seront fortement décroissantes. Des taux décroissants sont observés sur les bases de test, ce qui explique le bon backtesting obtenu.
Pour tester la viabilité d'un tel modèle, une projection sur 5 ans des taux d'arbitrages Euro→UC est effectuée en considérant que les performances des supports UC d'AXA qui seront observés dans les 5 prochaines années sont les mêmes que les 5 dernières années. Les taux obtenus sont représentés en bleu sur le graphe suivant :

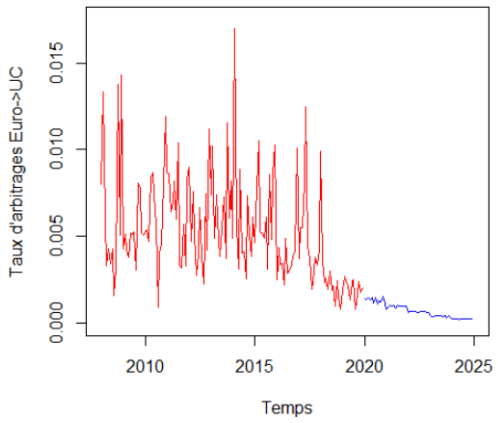

FIGURE 6.7 – Projection de taux Euro→UC à 5 ans avec le modèle (M3)

Le graphe montre que les taux à 5 ans continueraient à décroître fortement avec un tel

modèle, pour atteindre des taux **quasi nuls**. En comparaison aux taux observés depuis 2008, en rouge sur le graphe, bien plus élevés que les taux projetés, un tel modèle ne paraît pas viable.

Afin d'essayer d'améliorer ces modèles, d'autres méthodes d'exploitation des variables exogènes vont être étudiées. Les erreurs commises par les modèles pourraient notamment se justifier par le fait qu'un délai de latence soit nécessaire aux épargnants avant de réagir à des variations d'indices financiers.

6.4 Modèles dynamiques autorégressifs à retards échelonnés

Afin de prendre en compte les valeurs passées des taux d'arbitrages et de variables exogènes, des modèles **autorégressifs à retards échelonnés** sont introduits. Ces derniers permettront notamment d'intégrer des **temps de réaction** pouvant être nécessaires aux assurés pour réagir après des variations d'indices financiers.

Introduction théorique aux modèles ARDL

Les modèles ARDL (*AutoRegressive Distributed-Lag*), pouvant se traduire par modèles "autorégressifs à retards échelonnés" sont des modèles AR généralisés, qui permettent de prendre en compte des variables temporelles exogènes. Ce type de modèle utilise les données passées de la variable à prédire et les données présentes et passées des variables exogènes utilisées.

Introduction au modèle ARDL

Un modèle ARDL est une généralisation des modèles AR(p) et DL(n).

Le modèle *Distributed Lag* DL(n) ou modèle à retards échelonnés est défini comme tel :

Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ processus stochastique à expliquer et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ processus stochastique explicatif. Avec $n \in \mathbb{N}$, on dit que Y suit un modèle DL(n) s'il est solution de l'équation telle que, $\forall t \in \mathbb{N}, t \geq n, \exists(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_2 X_{t-1} + ... + \beta_q X_{t-n} + \varepsilon_t$$

avec ε Bruit Blanc et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le modèle ARDL(p,n) généralise les modèles AR(p) et DL(n) tel que : $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ processus stochastiques à valeurs dans R. On a :

$\forall t \in \mathbb{N}, t \geq max(p+1, n), \exists(\varphi_1, ..., \varphi_p) \in \mathbb{R}^p, \exists(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + ... + \varphi_p Y_{t-p} + \beta_0 X_t + ... + \beta_q X_{t-n} + \varepsilon_t.$$

Avec ε Bruit Blanc et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour être applicable, les variables utilisées dans un tel modèle doivent vérifier une relation de cointégration qui sera définie dans la suite. La cointégration permet notamment de montrer qu'une relation de long terme existe entre les variables.

Notions d'intégration de séries intégrées

∘ Une série $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est dite intégrée d'ordre p si $\Delta^d Y$ est stationnaire au sens large. Une série stationnaire au sens large est intégrée d'ordre 0.

∘ D'après Engle et Granger (1987) [12], deux séries $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont dites cointégrées si $\exists p \in \mathbb{N}^*$:

1. X et Y sont toutes deux intégrées d'ordre p.
2. il existe une combinaison linéaire de X et Y qui soit intégrée d'ordre strictement inférieur à p

La notion de cointégration permet notamment de démontrer une relation à long terme entre X et Y.

∘ Afin de montrer que deux variables X et Y sont cointégrées, avec X et Y intégrées d'ordre 1, Engler et Granger (1987) [12] ont mis en place une méthode. Celle-ci s'articule en 2 étapes :

1. Estimation par MCO de la régression entre X et Y afin d'obtenir une relation linéaire entre les deux variables.
2. Un test de stationnarité est appliqué sur les résidus obtenus à l'étape précédente. Les résidus obtenus sont une combinaison linéaire de X et Y. Si ces derniers peuvent être considérés comme stationnaires, alors, X et Y sont cointégrées.

Détermination des coefficients et décalages optimaux

Si l'application du modèle ARDL est vérifiée, alors il existerait notamment une relation de colinéarité entre les $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et des autocorrélations entre les $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$. Ainsi, la méthode d'estimation des différents coefficients par la méthode des moindres carrés ordinaires ne

paraît pas adéquate. Des méthodes plus complexes sont exploitées pour estimer les coefficients, notamment la méthode polynomiale d'Almon : [10].

Comme pour le test augmenté de Dickey-Fuller, c'est le critère d'Akaike qui est minimisé ici pour estimer au mieux le décalage à utiliser.

Application des modèles à retards échelonnés : DL(n)

Les modèles à retards échelonnés ou *Distributed-Lag* DL(n) sont exploités ici afin d'estimer les taux d'arbitrages à partir d'indices financiers pouvant influencer les comportements des assurés.
Grâce à ce modèle, un retard des variables exogènes est pris en compte, celui-ci pouvant modéliser **le temps de réaction** nécessaire aux épargnants pour réagir après des variations d'indices. Dans un premier temps, la composante autorégressive des taux d'arbitrages n'est pas prise en compte.

Dans la suite de l'étude, seules les performances du portefeuille UC d'AXA France seront utilisées comme variables exogènes. il est supposé pour la suite que c'est l'indice financier qui aurait le plus d'impact sur les comportements des épargnants étant donné que c'est celui qui reflète le mieux au global les variations de tous les supports en UC d'AXA France. Les fortes corrélations linéaires entre les différentes performances financières peuvent aussi laisser penser que leur impact respectif sur les arbitrages serait similaire.
Ensuite le taux OAT 10 ans n'est plus retenu car l'apprentissage d'un modèle sur des données en décroissance quasi continue pourrait biaiser les prédictions de taux d'arbitrages par le fait que les taux OAT 10 ne puissent plus autant décroître dans le futur que sur l'historique étudié.

Application - Cointégration des variables

Pour assurer la bonne application des modèles à retards échelonnés, des tests de cointégration vont être appliqués pour assurer l'existence d'une relation de long terme entre les variables étudiées. Les deux types d'arbitrages ont précédemment été considérés stationnaires. Cependant, des pics ponctuels importants et une certaine tendance d'évolution des taux d'arbitrages peuvent être observés, cela impliquerait alors une espérance et volatilité dépendante du temps (cf Annexe D), un doute est alors émis concernant la stationnarité des séries. La stationnarité des séries différenciées seront alors étudiées.

Il s'agit ici de montrer une relation de cointégration entre les taux UC→Euro et les performances du portefeuille UC d'AXA d'une part et entre cette même variable exogène et les taux Euro→UC d'autre part. On montre d'abord que les variables sont toutes intégrées d'ordre 1.

Concernant la variable exogène exploitée, par analyse graphique, d'importants pics irré-

guliers sont visibles, la variance ne semble pas constante au cours du temps : les performances du portefeuille UC d'AXA sont donc considérées ici comme non-stationnaires. Il s'agit alors de montrer que les variables étudiées différenciées sont stationnaires. Des tests de Dickey-Fuller augmenté sont appliqués aux variables différenciées. Avec Y_1 et Y_2 séries respectives des taux d'arbitrages UC→Euro et Euro→UC, les statistiques obtenues sont les suivantes :

ADF Test	ΔY_1	ΔY_2	ΔX_1
t - statistique	-12.52	-12.64	-15.65

Pour chaque variable, les statistiques obtenues sont bien inférieures à -1.95. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse de non-stationnarité est rejetée pour chacun des tests. De plus, les statistiques obtenues pour les taux d'arbitrages différenciés sont bien inférieures à celles obtenues sans différenciation. Les variables différenciées sont alors considérées stationnaires, et les variables sont considérées **intégrées d'ordre 1**.

Des régressions linéaires sont ensuite effectuées entre les variables pour lesquelles un lien de cointégration doit être prouvé. On obtient les modèles :

$$Y_{1,t} - 0.73\% + 5.87\% X_{1,t} = \epsilon_{1,t}$$

$$Y_{2,t} - 0.53\% + 0.063\% X_{1,t} = \epsilon_{2,t}$$

Des tests de stationnarités sont effectués sur les résidus obtenus. Par le test ADF, des statistiques respectivement de -6.77 et -5.76 ($<$ -1.95) sont obtenues. Les combinaisons linéaires des variables sont considérés comme stationnaires. Les deux types de taux sont considérés **cointégrés** avec les performances des supports UC d'AXA.

Des modèles à retards échelonnés peuvent être appliqués aux variables étudiées.

∘Modèles de taux UC→Euro

Modèle (M4 | UC→Euro) : Modèle à retards échelonnés avec performances du portefeuille UC AXA

Le modèle est calibré sur les données de l'étude et on a :

$$Y_{1,t} = 0.711\% - 0.038 X_{1,t} - 0.034 X_{1,t-1} - 0.036 X_{1,t-2} + \varepsilon_{1,t} \quad \text{(M4 | UC→€)}$$

Suivant ce modèle, pour un mois donné, le taux d'arbitrages UC→Euro dépendrait des performances du portefeuille UC d'AXA allant jusqu'à 2 mois avant. Ce modèle suppose alors qu'un temps de réaction de 2 mois après des variations des performances du portefeuille UC peut être nécessaire pour que des arbitrages soient réalisés.

Un test de bruit blanc fort est appliqué sur les résidus ε_1 obtenus pour évaluer l'efficacité du modèle.

Un test de Ljung-Box est utilisé, avec $k = 36$. En effet, un "k" égale au nombre d'observations exploitées divisé par 4 étant souvent utilisé. Une p-value de 4.95e-4 est obtenue. L'hypothèse nulle que les résidus sont des bruits blancs forts est donc rejetée pour un seuil de 5%. Ainsi, les résidus obtenus avec ce modèle ne sont pas considérés indépendants. Cela pourrait être dû au fait qu'avec ce modèle, les coefficients affectés aux variables exogènes sont assez faibles donc d'importantes variations des taux d'arbitrages ne sont pas prises en compte.

∘Modèles de taux Euro→UC

Le même type de modèle est exploité pour les arbitrages Euro→UC. On a le modèle suivant :

Modèle (M4 | Euro→UC) : Modèle à retards échelonnés avec performances du portefeuille UC AXA

Le modèles obtenu après calibrage sur la base totale est le suivant :

$$Y_{2,t} = 0.528\% - 0.0022X_{1,t} - 0.0045X_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t} \quad (\text{M4} \mid \text{€}\rightarrow\text{UC})$$

Ce modèle indiquerait que les taux d'arbitrages Euro→UC ne varient que très peu autour d'un intercept. L'intercept correspond ici au taux d'arbitrages prédit pour des valeurs des variables exogènes nulles et sans aléa.
De si faibles variations autour de l'intercept ne sont pas réellement observables et cela se confirme après application du test de Ljung-Box sur le modèle, une p-value de 7.97e-9 est obtenue. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse nulle du test est rejetée.

Malgré le rejet de l'hypothèse que les résidus obtenus par les deux modèles sont des bruits blancs forts avec le test de Ljung-Box pour un seuil de 5%, un backtesting est réalisé sur les différents historiques :

Modèle 4 – UC→Euro

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M4)$	0.323%
Moyenne – $RMSE_1(M4)$	0.370%
Moyenne – $Err_1(M4)$	0.257%

Modèle 4 – Euro→UC

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M4)$	0.329%
Moyenne – $RMSE_1(M4)$	0.347%
Moyenne – $Err_1(M4)$	0.259%

Des erreurs importantes selon les différents indicateurs sont réalisées par les modèles, surtout pour les arbitrages Euro→UC. D'autres modèles prenant en compte des variables exogènes avec retards échelonnés mais utilisant cette fois-ci aussi une composante autorégressive de la variable cible vont être exploités.

Application des modèles autorégressifs à retards échelonnés : ARDL(p,n)

Pour permettre d'intégrer dans les modèles à la fois une composante autorégressive des taux d'arbitrages et des retards échelonnés des indices financiers, des modèles ARDL sont exploités.

∘ Modèle de taux UC→Euro

Un modèle ARDL(p,n) est utilisé pour la prédiction des taux d'arbitages UC→Euro. Ce dernier exploite aussi les performances du portefeuille UC d'AXA France comme variable exogène. Ces variables sont considérées comme cointégrées comme vu précédemment. Par calibrage sur les données d'observation, on obtient le modèle suivant :

$$Y_{1,t} = 0.414\% + 0.15Y_{1,t-1} + 0.25Y_{1,t-2} - 0.03X_{1,t} - 0.020X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} \quad \text{(M5 | UC→€)}$$

Après calibrage, un test de Ljung-Box est appliqué sur les résidus pour tester le modèle. Pour k=36, une p-value de 7.11% est obtenue, l'hypothèse nulle du test est acceptée pour un seuil de 5%. On considère les résidus du modèle comme étant un bruit blanc fort et le modèle bien applicable aux taux UC→Euro, avec une certaine réserve du fait d'une p-value assez faible.

∘ Modèle de taux Euro→UC

De la même manière, un modèle Euro→UC est calibré, on obtient le modèle suivant :

$$Y_{2,t} = 0.279\% + 0.20Y_{2,t-1} + 0.25Y_{2,t-2} + 0.0070X_{1,t} + 0.0042X_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t} \quad \text{(M5| €→UC)}$$

Le test de Ljung-Box sur les résidus obtenus donne ici une p-value de $1.96\% < 5\%$ donc l'hypothèse nulle est rejetée. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse nulle affirmant que les résidus sont un bruit blanc fort est rejetée. Le modèle ne devrait donc pas être applicable aux taux Euro→UC du fait de l'existence d'une dépendance entre les résidus. Un backtesting de ce modèle sera malgré cela effectué pour le confirmer.

Les modèles ARDL sont calibrés et testés sur les différents historiques. Ces derniers présentent le backtesting suivant :

Modèle 5 – UC→Euro

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M5)$	0.334%
Moyenne – $RMSE_1(M5)$	0.366%
Moyenne – $Err_1(M5)$	0.261%

Modèle 5 – Euro→UC

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M5)$	0.327%
Moyenne – $RMSE_1(M5)$	0.346%
Moyenne – $Err_1(M5)$	0.259%

Le backtesting des modèles ARDL ne donne pas de bons résultats en comparaison à d'autres modèles testés précédemment. Cela pourrait se justifier par le fait que tous les assurés ne réagissent pas de la même manière aux variations d'indices financiers, dans

le cas où une réaction existe. Pour que cela soit pris en compte, une étude des séries temporelles par classe de variables structurelles pourrait être étudié.

Séries temporelles par classe de variables structurelles

Dans cette partie, afin d'étudier les comportements qui pourraient différer selon des classes d'assurés, les taux d'arbitrages vont être exploités séparément, puis agrégés pour être comparés aux autres méthodes.
Comme vu dans un chapitre précédent, les variables structurelles, liées aux contrats peuvent avoir des impacts sur les arbitrages. En utilisant les variables structurelles qui ont montré le plus d'importance, les taux d'arbitrages vont être étudiés dans le temps, par classe. Ainsi, des comportements et réactions différents selon les classes pourraient être observés.

Différentes segmentations des variables ayant montré le plus d'importance vont donc être étudiées. Les valeurs prises par les variables structurelles ont été regroupées afin d'obtenir des séries temporelles mensuelles contenant assez de données pour être exploitées.

Les différentes variables et regroupements qui vont être étudiées sont présentées ci-dessous :

Age	**Encours**	**Part UC**	**Encours/Part UC**	**Age/Encours/Part UC**
$[0; 35\text{ans}[$	$]0\text{K}; 10\text{K}[$	0%	$< 100\text{K}$ / $< 50\%$	≥ 60 ans/ $< 50\%$ / $< 100\text{K}$
$[35; 45\text{ans}[$	$[10\text{K}; 50\text{K}[$	$]0\%; 30\%]$	$\geq 100\text{K}$ / $< 50\%$	≥ 60 ans/ $\geq 50\%$ / $< 100\text{K}$
$[45; 60\text{ans}[$	$[50\text{K}; 100\text{K}[$	$]30\%; 50\%]$	$< 100\text{K}$ / $\geq 50\%$	≥ 60 ans/ $< 50\%$ / $\geq 100\text{K}$
$[60; 80\text{ans}[$	$[100\text{K}; 500\text{K}[$	$]50\%; 100\%[$	$\geq 100\text{K}$ / $\geq 50\%$	≥ 60 ans/ $\geq 50\%$ / $\geq 100\text{K}$
≥ 80 ans	$\geq 500\text{K}$	100%		< 60 ans/ $< 50\%$ / $< 100\text{K}$
				< 60 ans/ $\geq 50\%$ / $< 100\text{K}$
				< 60 ans/ $< 50\%$ / $\geq 100\text{K}$
				< 60 ans/ $\geq 50\%$ / $\geq 100\text{K}$

Exemple : regroupements par âge

Pour la variable "âge", pour les taux UC→Euro : 5 séries temporelles différentes vont être étudiées. Les taux d'arbitrages de chaque regroupement d'âges seront donc modélisés dans le temps, puis après une agrégation à l'aide de la PM d'UC respective de ces regroupements, des taux d'arbitrages au global pourront être estimés.
Au global, dans ce modèle, les taux d'arbitrages UC→Euro estimés par âge seront agrégés comme tel :

$$Y_{1,t} = Y_{1,t}^{[0;35[}\frac{PM_{UC,t}^{[0;35[}}{PM_{UC,t}^{total}} + Y_{1,t}^{[35;45[}\frac{PM_{UC,t}^{[35;45[}}{PM_{UC,t}^{total}} + Y_{1,t}^{[45;60[}\frac{PM_{UC,t}^{[45;60[}}{PM_{UC,t}^{total}} + Y_{1,t}^{[60;80[}\frac{PM_{UC,t}^{[60;80[}}{PM_{UC,t}^{total}} + Y_{1,t}^{\geq 80}\frac{PM_{UC,t}^{\geq 80}}{PM_{UC,t}^{total}}$$

Pour estimer les taux d'arbitrages par catégorie, ce sont des **modèles à retards échelonnés** DL(n) qui vont être utilisés. Avec ce type de modèles, il peut être supposé que les comportements des assurés seront mieux captés par classe. Par exemple, des assurés de plus de 80 ans pourraient être moins attentifs aux variations des performances des supports AXA que des actifs ayant entre 35 et 45 ans. Les délais de réaction après les variations des indices financiers pour arbitrer pourraient être pris en compte.

Par simplification au vu du nombre de différents modèles calibrés, le détail des paramètres de chacun de ceux-ci ne sera pas présenté, mais leur efficacité sera vérifiée à travers un backtesting sur les différents historiques.

Après calibrage et projection de tous les modèles sur les 3 historiques, on obtient le backtesting suivant :

Modèles M6 – UC→Euro

Indicateur d'écart	**Age**	**Encours**	**Part UC**	**Enc./Part UC**	**Age/Enc./Part.**
Moyenne – $MAE_1(M)$	0.332%	0.360%	0.321%	0.340%	0.348%
Moyenne – $RMSE_1(M)$	0.373%	0.406%	0.359%	0.381%	0.391%
Moyenne – $Err_1(M)$	0.260%	0.279%	0.240%	0.257%	0.262%

Modèles M6 – Euro→UC

Indicateur d'écart	**Age**	**Encours**	**Part UC**	**Enc./Part UC**	**Age/Enc./Part.**
Moyenne – $MAE_1(M)$	0.331%	0.356%	0.388%	0.486%	0.505%
Moyenne – $RMSE_1(M)$	0.350%	0.373%	0.404%	0.504%	0.524%
Moyenne – $Err_1(M)$	0.262%	0.290%	0.330%	0.450%	0.470%

Au global, les indicateurs de pertinence des modèles donnent des erreurs assez importantes en comparaison des autres modèles.
Comme pour les lois d'arbitrages réalisées seulement en se basant sur des variables structurelles, d'importants écarts sont observables pour la projection des modèles UC→Euro en 2017 et pour les projections des Euro→UC en 2018 et surtout en 2019 (cf Annexe C). Une segmentation par catégories de variables structurelles n'a pas permis de mieux capter les comportements d'arbitrages des assurés. Ces modèles se sont avérés être les moins bons.

Ainsi, dans ce chapitre, des modèles dynamiques d'estimation se basant uniquement sur les arbitrages des quelques mois précédents ou sur des variables exogènes ont été étudiés. Ils s'avèrent visiblement insuffisants du fait d'indicateurs toujours assez élevés en comparaison des moyennes de taux observés pendant les périodes de projection. Cela laisse penser qu'une composante structurelle, représentant le comportement moyen des assurés indépendamment de la période et des facteurs exogènes, est tout de même nécessaire.

D'autres modèles permettant d'utiliser les variables structurelles et de faire varier les taux d'arbitrages selon les variations d'indices financiers vont alors être exploités.

Chapitre 7

Modèles structurels à résidus dynamiques

7.1 Calibrage de lois d'arbitrages structurels

Afin d'améliorer les performances des modèles d'estimation des arbitrages précédents, une combinaison de lois structurelles et dynamiques va être étudiée pour la modélisation des arbitrages, comme cela existe pour la modélisation des lois de rachats.

Pour cela, à la lumière de l'analyse effectuée dans le chapitre 5, des lois d'arbitrages structurelles basées sur les variables "Part UC", "Age" et "Encours" vont être exploitées. Ces dernières seront calibrées sur les années allant de 2008 à 2018 en prenant au maximum 6 ans d'historique, la méthode d'obtention des différentes lois structurelles est la même que dans le chapitre 6. Ainsi, plusieurs calibrages seront effectués pour obtenir des projections de lois structurelles entre 2009 et 2019.

Par exemple, pour obtenir des projections de taux pour l'année 2015, les données des années 2009 à 2014 seront utilisées pour le calibrage et une projection sera effectuée à partir de cette base. Cela sera alors effectué pour les autres années. Cependant, cela implique que pour les premières années, peu de données seront prises en compte. Par exemple pour le calibrage de lois pour une projection sur 2009, seule l'année 2008 est utilisée pour le calibrage de la loi.

La différence entre les projections par les différentes lois structurelles et les taux d'arbitrages réels sont appelés ici les **résidus dynamiques**.

Dans cette partie de l'étude, les modèles dynamiques seront calibrés sur la différence entre les taux observés et les taux structurels projetés c'est-à-dire les résidus dynamiques.

Comme pour les rachats, il est supposé dans ce chapitre que les taux d'arbitrages seraient déterminés par une structure dépendant des contrats d'une part, et de paramètres dynamiques d'autres part, c'est-à-dire de variables temporelles telles que des indices financiers.

Obtention d'une loi structurelle entre 2009 et 2019

Des lois d'arbitrages structurels sont calibrées selon différents historiques pour l'obtention de projections entre 2009 et 2019. Les projections des différentes lois obtenues sont présentées dans les graphes ci-dessous :

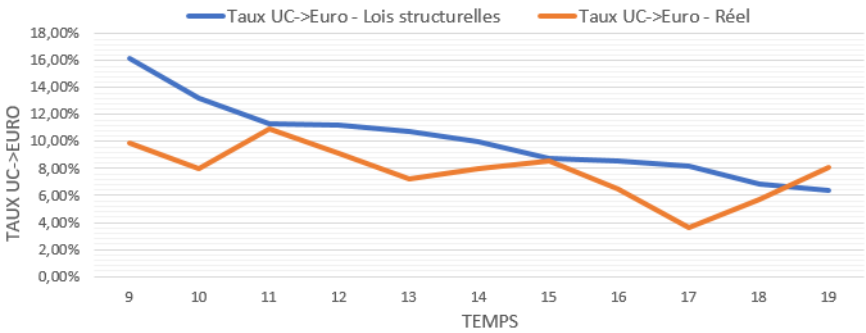

FIGURE 7.1 – Projection - Lois UC → Euro

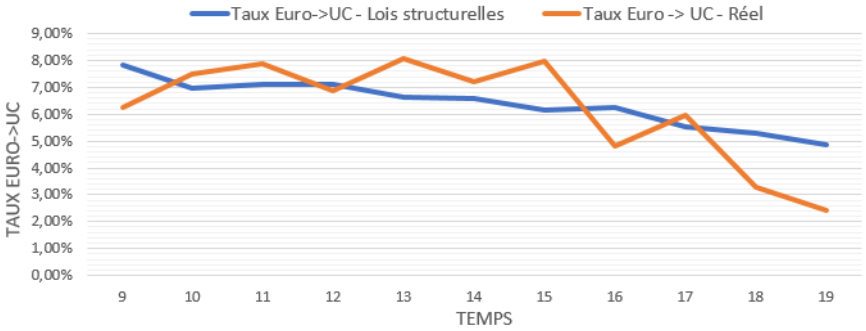

FIGURE 7.2 – Projection - Lois Euro → UC

Globalement, le constat fait est que les taux projetés par les différentes lois structurelles se rapprochent des taux réels. Cependant, des écarts assez importants peuvent être observés notamment en 2017 pour les taux UC→Euro et en 2018 et 2019 pour les lois Euro→UC.

Dans ce chapitre, il sera supposé que les écarts entre les taux projetés par lois structurelles et les taux réels pourraient provenir de facteurs conjoncturels tels que des indices financiers. Ce sera la différence entre les deux taux qui sera exploitée ici, appelée dans la suite "**Résidus dynamiques**".
Les projections par les lois structurelles étant des taux d'arbitrages annuels, alors pour se ramener à la maille d'étude qui est ici mensuelle, il faut utiliser des taux structurels mensuels. Ces derniers seront alors considérés comme constants durant une année.

On notera $Y_{1,t}^{struc}$ le taux UC→Euro projeté par loi structurelle en t et $Y_{2,t}^{struc}$ pour les taux Euro→UC.

Avec $i \in \{1;2\}$, Z_i les résidus dynamiques des taux d'arbitrages, on aura alors l'estimation des taux d'arbitrages dans cette partie telle que $\forall t \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_{i,t} = Y_{i,t}^{struc} + Z_{i,t}$$

7.2 Application des modèles de séries temporelles sur les résidus dynamiques

Dans cette partie, différents modèles étudiés précédemment vont être appliqués cette fois-ci aux résidus dynamiques pour essayer de mieux capter les comportements d'arbitrages.

Modèles ARMA

Pour commencer, avant d'appliquer tout modèle sur les résidus dynamiques, une brève étude de leur stationnarité est effectuée à l'aide de tests de Dickey-Fuller augmenté.
Après application du test sur les résidus dynamiques UC→Euro, une statistiques de -4.30 ($<$ -1.95) est obtenue, et de -5.82 pour les Euro→UC. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse nulle de non-stationnarité est rejetée. On considère donc pour ce modèle que les deux types de résidus dynamiques sont stationnaires au sens large.

Des modèles ARMA sont calibrés sur les données d'observation de 2009 à 2019. Les modèles obtenus sont un ARMA(1,1) pour les UC→Euro et ARMA(2,2) pour les Euro→UC.
Avec $i \in \{1;2\}$, $Z_i = (Y_i - Y_i^{struc})$, les modèles sont :

$$\begin{cases} Z_{1,t} = 0.92Z_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} - 0.67\varepsilon_{1,t-1} & \text{(M7 | UC→€)} \\ Z_{2,t} = 0.84Z_{2,t-1} - 0.69Z_{2,t-2} + \varepsilon_{2,t} - 0.71\varepsilon_{2,t-1} + 0.82\varepsilon_{2,t-2} & \text{(M7 | €→UC)} \end{cases}$$

Ces modèles indiquent que les résidus dynamiques dépendraient fortement des valeurs passées et de bruits blancs autocorrélés.

Pour tester l'efficacité de ces modèles, des tests de Ljung-Box sont appliqués sur les résidus obtenus. Pour $k = \frac{132}{4} = 33$, des p-values respectives de 22.54% et 9.12% sont obtenues pour les modèles. Alors, pour un seuil de 5%, l'hypothèse nulle que les résidus des modèles sont des bruits blancs forts est acceptée. On peut donc considérer que les modèles sont applicables. Des backtestings seront effectués dans la suite.

Modèles DL et ARDL

Comme dans le chapitre précédent, des modèles autorégressifs à retards échelonnés sont exploités. D'une part, ces derniers permettent de prendre en compte des variables exogènes et des retards de réaction après des variations des paramètres. D'autre part, une composante autorégressive de la variable cible est intégrée. Pour les projections de modèles autorégressifs, la prédiction pourrait dépendre trop fortement des dernières valeurs observées. Des modèles DL, sans la composante autorégressive des résidus dynamiques sont également étudiés.
Ce sont de nouveau les performances du portefeuille UC d'AXA France qui sont utilisées comme variable exogène.

Comme explicité dans la partie précédente, les variables utilisées dans les modèles doivent vérifier une **relation de cointégration**. Cela va donc être préalablement étudié.

Une analyse graphique permet notamment d'observer que la variance des résidus ne semble pas constante au cours du temps (cf Annexe D). La stationnarité des résidus dynamiques pourrait alors ne pas être avérée.
La stationnarité des résidus dynamiques différenciés est donc étudiée.

Graphiquement, cette hypothèse est plausible à l'exception de quelques pics ponctuels (cf Annexe D.). Des tests ADF permettent d'obtenir des statistiques respectives de -13.82 ($<$ -1.95) et -12.45 pour les résidus dynamiques différenciés des UC→Euro et Euro→UC. Pour un seuil de 5%, l'hypothèse de non stationnarité est rejetée. Ces séries sont considérées stationnaires.

Comme dans le chapitre précédent, des régressions linéaires sont appliquées aux variables pour lesquelles la cointégration doit être vérifiée. Des tests de non-stationnarité sont effectués sur les résidus obtenus.
Une statistique de -5.63 est obtenue pour les résidus de la combinaison linéaire des résidus dynamiques UC→Euro et des performances des supports UC d'AXA, et de -5.81 pour les Euro→UC. La non-stationnarité est donc rejetée pour un seuil de 5%, on considère les deux résidus obtenus comme stationnaires. Les relations de cointégration entre les variables concernées sont considérées comme étant vérifiées.

Les modèles à retards échelonnés sont calibrés, et des DL(1) sont obtenus :

$$\begin{cases} Z_{1,t} = -0.0017 - 0.0226X_{1,t} - 0.0256X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} & \text{(M8 | UC→€)} \\ Z_{2,t} = -0.000252 + 0.011X_{1,t} + 0.0127X_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t} & \text{(M8 | €→UC)} \end{cases}$$

Puis les modèles autorégressifs à retards échelonnés suivants :

$$\begin{cases} Z_{1,t} = -0.0012 + 0.28Z_{1,t-1} - 0.018X_{1,t} + 0.019X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} & \text{(M9 | UC→€)} \\ Z_{2,t} = -0.00022 + 0.242Z_{2,t-1} + 0.0157X_{1,t} + 0.0093X_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t} & \text{(M9 | €→UC)} \end{cases}$$

Les modèles permettent de faire plusieurs constats :

- Les performances du portefeuille UC d'AXA retardées d'un mois seraient généralement plus impactantes sur les résidus dynamiques que les performances en t.
- Globalement, l'impact de la variable exogène utilisé serait plus important dans les modèles UC→Euro que les Euro→UC.

Des tests de Ljung-Box sont appliqués sur les résidus des 4 modèles. Excepté pour le modèle ARDL des résidus dynamiques Euro→UC pour lequel une p-value de 8.23% est observée, des p-values inférieures à 5% sont données pour les modèles. Pour un seuil de 5 %, l'hypothèse nulle que les résidus des modèles sont des bruits blancs forts est donc rejetée excepté pour le modèle (M9 | €→UC). Une dépendance reste alors présente entre les résidus obtenus par le modèle. Malgré cela, un backtesting de tous les modèles est effectué.

Backtesting des modèles

Un backtesting des modèles exploités dans ce chapitre est réalisé ici pour estimer les erreurs des modèles de taux d'arbitrages étudiés.
On rappelle que l'on a : $\forall t \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1;2\}, Y_{i,t} = Z_{i,t} + Y_{i,t}^{struc}$.

Le backtesting des lois structurelles mensualisées est également effectué et présenté ci-dessous :

Modèles calibrés sur les résidus dynamiques – UC→Euro

Indicateur d'écart	**Modèle structurel**	**M7**	**M8**	**M9**
Moyenne – $MAE_1(M)$	0.272%	0.205%	0.248%	0.249%
Moyenne – $RMSE_1(M)$	0.302%	0.258%	0.303%	0.306%
Moyenne – $Err_1(M)$	0.204%	0.167%	0.216%	0.217%

Modèles calibrés sur les résidus dynamiques – Euro→UC

Indicateur d'écart	**Modèle structurel**	**M7**	**M8**	**M9**
Moyenne – $MAE_1(M)$	0.215%	0.222%	0.223%	0.222%
Moyenne – $RMSE_1(M)$	0.256%	0.268%	0.260%	0.258%
Moyenne – $Err_1(M)$	0.138%	0.132%	0.138%	0.133%

Le backtesting est effectué sur les taux d'arbitrages projetés, c'est-à-dire sur la somme de la projection par lois structurelles et des résidus dynamiques projetés par modèle. Ces taux d'arbitrages sont alors comparés aux données réelles.

D'après le backtesting, les modèles calibrés sur la différence entre les taux d'arbitrages observés et les taux projetés par des lois structurelles offrent de bonnes performances en comparaison des modèles étudiés jusqu'ici pour les arbitrages UC→Euro.

Le modèle ARMA calibré sur les résidus dynamiques (M7) donne le meilleur backtesting. De tels résultats sont à nuancer par le fait que ce modèle n'utilise pas de variable exogène et ses projections dépendent beaucoup, par sa structure, des derniers taux observés sur la base de calibrage.

Ajouté à cela, toujours pour les arbitrages UC→Euro, les modèles (M8) et (M9) améliorent les performances du modèle structurel en termes de MAE_1. Cependant, pour les autres indicateurs exploités, l'amélioration des résultats du modèle structurel est plus mitigée. C'est notamment dû au fait que les projections mensuelles par le modèle structurel sont des moyennes sur l'année.

Cependant, pour les arbitrages Euro→UC, les performances des lois structurelles ne sont globalement pas améliorées par l'intégration de paramètres dynamiques pour lesquels l'impact de l'intégration d'une variable exogène est très faible.

Pour essayer d'améliorer les résultats des modèles UC→Euro et afin de capter les comportements d'arbitrages Euro→UC à partir de variables exogènes, un dernier type de modèle va être étudié.

7.3 Modèles structurels à résidus dynamiques, par réseau

Pour être estimées, les lois structurelles seront dans cette partie calibrées par réseau, puis agrégées par la PM Euro ou UC selon le sens de l'arbitrage afin d'obtenir des taux d'arbitrages au global. On souhaite ainsi tester l'intuition selon laquelle le réseau de distribution et donc la relation au client impacte les arbitrages.

Le modèle étudié ici consiste à estimer les différences entre projections de taux structurels et taux réels par réseau, par des modèles dynamiques. Une agrégation des réseaux permettra d'obtenir des taux d'arbitrages au global.

Un tel modèle pourrait permettre d'avoir une meilleure estimation des comportements d'arbitrages "moyens" par les lois structurelles calibrées par réseau. Ajouté à cela, les modèles dynamiques seront ici calibrées sur la différence entre les taux d'arbitrages projetés et les taux réels par réseau. Les réactions des assurés en termes d'arbitrages après des variations d'indices financiers devraient alors être mieux captés sur cette maille plus fine.

La méthode de calcul des taux d'arbitrages au global est donnée, pour $i \in \{1;2\}, \forall t \in \mathbb{N}^*$ par :

$$Y_{i,t} = Y_{i,t}^{AXA}\frac{PM_{Support,t}^{AXA}}{PM_{Support,t}^{total}} + Y_{i,t}^{Courtiers}\frac{PM_{Support,t}^{Courtiers}}{PM_{Support,t}^{total}} + Y_{i,t}^{Banques}\frac{PM_{Support,t}^{Banques}}{PM_{Support,t}^{total}}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} Support = UC & \text{si } i = 1 \\ Support = Euro & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

Ensuite, pour estimer les taux d'arbitrages par réseau, c'est la différence entre le taux projeté par lois structurelles et le taux réel qui est étudiée pour chacun des réseaux.
Ces "résidus dynamiques" par réseau vont être estimés par des modèles dynamiques à retards échelonnés. Cette méthode a pu montrer de bonnes performances dans l'étude pour les taux UC→Euro. Elle permet l'intégration d'une variable exogène au modèle, sans que les dernières valeurs des taux observés n'impactent trop les prédictions comme pour les modèles ARDL ou ARMA.

Les relations de cointégration avec les performances des supports UC d'AXA nécessaires à l'application des modèles à retards échelonnées sont vérifiées pour chaque réseau et chaque type d'arbitrages.

Les différents modèles sont calibrés sur toutes les données d'observation. Pour les résidus dynamiques des taux UC→Euro, les modèles suivants sont obtenus pour les taux d'arbitrages UC→Euro :

$$\begin{cases} Z_{1,t}^{AXA} = Y_{1,t}^{AXA} - Y_{1,t}^{Struc./AXA} & = -0.08\% - 2.2\%X_{1,t} - 1.3\%X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}^{AXA} \\ Z_{1,t}^{Courtiers} = Y_{1,t}^{Courtiers} - Y_{1,t}^{Struc./Cour.} & = -0.16\% - 5.4\%X_{1,t} - 2.7\%X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}^{Courtiers} \\ Z_{1,t}^{Banques} = Y_{1,t}^{Banques} - Y_{1,t}^{Struc./Ban.} & = -0.19\% - 3.2\%X_{1,t} - 1.1\%X_{1,t-1} - 5.7\%X_{1,t-2} + \varepsilon_{1,t}^{Banques} \end{cases}$$

Les modèles obtenus pour les résidus dynamiques des arbitrages Euro→UC sont en Annexe E.

D'après les modèles UC→Euro obtenus, plusieurs constats peuvent être faits :

— Pour chaque réseau, la hausse des performances des supports UC AXA se traduit par une baisse des taux d'arbitrages.
— Les variations des performances pouvant aller jusqu'à 2 mois avant l'arbitrage pour le réseau de distribution "Banques" auraient de l'impact suivant ces modèles.
— Les variations des performances des supports UC AXA auraient plus d'impact sur les taux d'arbitrages des réseaux "Courtiers" et "Banques" que pour le réseau "AXA".

Après obtention des différents modèles par réseau, ces derniers sont agrégés par leur PM afin d'obtenir un taux global. Cela permettra également de comparer cette méthode aux autres à l'aide d'un backtesting sur la somme des projections par lois structurelles et des résidus dynamiques projetés par le modèle.

Le backtesting suivant est obtenu :

Modèle 10 – UC→Euro

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M10)$	0.236%
Moyenne – $RMSE_1(M10)$	0.294%
Moyenne – $Err_1(M10)$	0.201%

Modèle 10 – Euro→UC

Indicateur	**Valeur**
Moyenne – $MAE_1(M10)$	0.222%
Moyenne – $RMSE_1(M10)$	0.258%
Moyenne – $Err_1(M10)$	0.130%

Pour les taux **Euro→UC**, le même constat que précédemment peut être fait : les performances UC d'AXA France ont une **faible influence** sur les taux d'arbitrages pour ce modèle. Le modèle obtenu est globalement très proche du modèle structurel du fait du faible impact de la variable exogène sur les résidus dynamiques.

Concernant le modèle de taux **UC→Euro**, ce dernier semble assez pertinent. Les comportements d'arbitrages seraient alors mieux captés par une étude par réseau.

Des erreurs similaires à celles obtenues par les modèles de la section précédente sont obtenues, avec des performances du modèle structurel légèrement améliorées par l'introduction d'un modèle sur les résidus dynamiques par réseau.

7.4 Comparaison et interprétation des résultats obtenus

Après une étude de différents modèles d'estimation des taux d'arbitrages au cours du temps, une comparaison des méthodes est effectuée.

Comparaison et interprétations des résultats des modèles de taux UC→Euro

Tableau récapitulatif des moyennes des indicateurs de performance

Modèle (M)	$\mathbf{MAE_1}$	$\mathbf{RMSE_1}$	$\mathbf{Err_1}$
$(M1)$	0.261%	0.318%	0.240%
$(M2)$	0.275%	0.339%	0.209%
$(M3-1)$	0.228%	0.287%	0.209%
$(M3-2)$	0.253%	0.310%	0.237%
$(M3-3)$	0.231%	0.284%	0.182%
$(M4)$	0.323%	0.370%	0.257%
$(M5)$	0.334%	0.366%	0.261%
$(M6-\text{Age})$	0.332%	0.373%	0.260%
$(M6-\text{Encours})$	0.360%	0.406%	0.279%
$(M6-\text{Part UC})$	0.321%	0.359%	0.240%
$(M6-\text{Enc./Part.})$	0.340%	0.381%	0.257%
$(M6-\text{Age/Enc./Part.})$	0.348%	0.391%	0.262%
$(Structurel)$	0.272%	0.302%	0.204%
$(M7)$	0.205%	0.258%	0.167%
$(M8)$	0.248%	0.303%	0.216%
$(M9)$	0.249%	0.306%	0.217%
$(M10)$	0.236%	0.294%	0.201%

Le but de ce mémoire est d'étudier l'intégration de variables conjoncturelles dans la modélisation des lois d'arbitrages afin d'améliorer le modèle structurel existant. Différents indicateurs d'erreurs ont été mesurés sur chacune des projections des modèles étudiés, et les divers résultats vont être analysés ici.

Un paramètre important à intégrer est que les indicateurs d'erreurs permettent de mesurer certaines composantes des écarts de projections des modèles. Une interprétation de ces indicateurs et des projections obtenues permettra cependant de nuancer certains résultats.

Les modèles (M3) peuvent notamment illustrer cela. Ces derniers ont été calibrés par une régression des taux UC→Euro à l'aide d'indices financiers, puis avec l'application de modèles autorégressifs sur les résidus. Ils donnent des valeurs d'indicateurs satisfaisantes

en comparaison des autres modèles. Cependant, avec cette méthode de projection, les taux d'arbitrages oscilleraient selon les performances des indices concernés autour d'une valeur moyenne des taux de tout l'historique de calibrage. C'est illustré par la formule obtenue par calibrage sur toutes les données d'observation du modèle (M3 - 1) :

$$Y_{1,t} = exp(-5.11 - 4.75X_{1,t} + \epsilon_{1,t})$$

Avec un tel modèle, si des changements de "comportements moyens" des assurés sont observés, ils ne pourront pas être pris en compte du fait qu'il est calibré sur tout l'historique disponible. Par exemple, si une baisse durable des taux d'arbitrages est observée dans le futur, un tel modèle ne permettra pas de s'adapter aux nouveaux comportements d'arbitrages, donnant alors toujours des projections éloignées du réel malgré une prise en compte d'indices financiers, et ce, même si une mise à jour du modèle est effectuée chaque année. C'est dû au fait qu'aucune prise en compte des arbitrages passés récents n'est effectuée. Une prise en compte qui est effectuée par d'autres modèles à l'aide de composantes autorégressives des arbitrages ou de lois structurelles basées sur un historique restreint.

Concernant les autres méthodes dynamiques calibrées directement sur les taux d'arbitrages, des erreurs relativement importantes sont constatées. Notamment, des moyennes de $RMSE_1$ comprises entre 0.318% et 0.406% pour ces modèles dynamiques contre 0.302% pour le modèle structurel sont observées, montrant alors des écarts par rapport au réel plus importants. Pour cela, des modèles dynamiques basés sur la différence entre les taux projetés par lois structurelles et les taux réels ont été étudiés. Cette méthode permet de réduire les erreurs effectuées par un modèle structurel en intégrant des paramètres dynamiques.
Une légère amélioration des performances du modèle structurel est observée pour tous les modèles exploitant cette méthode.

En moyenne, c'est le calibrage d'un modèle simple ARMA sur les résidus dynamiques (M7) qui permet d'obtenir les meilleurs résultats. Ce modèle calibré sur la base totale est :

$$Z_{1,t} = 0.92Z_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t} - 0.67\varepsilon_{1,t-1}$$

Cependant, par sa structure, si les dernières observations d'arbitrages sont exceptionnelles, les premiers taux projetés seront automatiquement exceptionnels, cela étant dû au coefficient affecté aux résidus dynamiques du mois précédent qui est proche de 1.
Pour effectuer des projections, seuls des aléas et le taux du mois précédent sont utilisés, aucun autre paramètre ne permettra alors de réduire l'impact de taux précédents exceptionnels.

D'un point de vue métier et donnant de bons indicateurs d'écarts en comparaison des autres méthodes, c'est le modèle prenant en compte des retards échelonnés et calibré sur la différence entre les taux réels et les taux projetés, par réseau (M10), qui est sélectionné. Notamment, en termes de MAE_1, ce modèle donne une moyenne sur les 3 backtestings de 0.236% contre 0.272% pour le modèle structurel.

Pour cette méthode, les modèles sont appliqués sur les résidus dynamiques obtenus par réseau. Les projections de taux d'arbitrages sont ici obtenues par la somme des taux de la composante structurelle, basée sur l'âge, la part UC et l'encours, et de la composante conjoncturelle sur les résidus intégrant les performances du portefeuille UC d'AXA. De plus, le modèle à retards échelonnés permet de prendre en compte un délai de réaction des épargnants après les variations de l'indice.

Malgré l'intégration de cette composante dynamique et l'amélioration globale des résultats, on n'observe pas graphiquement une réelle captation des mouvements à court terme. C'est ce que l'on peut voir sur le graphe obtenu par le backtesting du modèle sélectionné (cf figure 7.3) , pour les années 2018 et 2019. Les tendances des taux de l'année 2018 sont globalement bien captées. Pour l'année 2019, les résultats sont plus mitigés, des taux à la baisse sont prédits par le modèle alors que les taux UC→Euro sont en forte hausse au début de l'année.

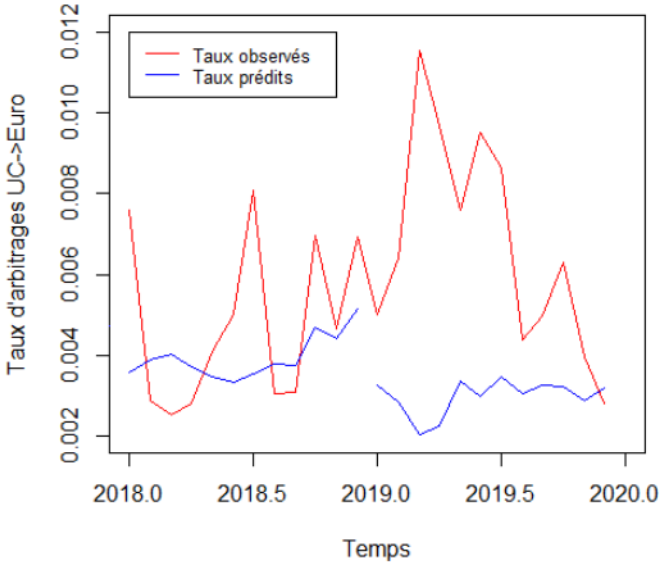

FIGURE 7.3 – Graphe du backtesting du modèle final UC→Euro

D'une part, de telles prédictions sont dues à des taux structurels prédits en baisse du fait de taux historiques assez faibles sur les dernières années de calibrage. D'autre part, la remontée des performances des supports UC d'AXA en début d'année 2019 s'est traduit par une baisse des taux prédits par le modèle. Une importante baisse des marchés financiers ayant été observée fin 2018, alors les clients ont notamment pu garder en mémoire cette baisse importante et sécuriser leur épargne pendant l'année 2019, se traduisant alors par une hausse des taux UC→Euro observés, contredisant totalement les prédictions des modèles.

Les modèles utilisant des variables exogènes conjoncturelles traduisent généralement l'augmentation des performances des supports UC d'AXA France, du CAC 40 ou de la moyenne des 5 supports les plus arbitrés par la diminution des taux d'arbitrages UC→Euro. Cela peut être expliqué par le fait que durant des périodes haussières, les épargnants souhaitent profiter des hausses de rendement en restant sur ce type de support. A contrario, dans des périodes baissières, ces derniers s'orienteront vers des supports en euros plus sécurisés, offrant au moins une garantie de capital.

Même si les évolutions historiques du portefeuille tendent à donner un tel impact des performances d'indices financiers sur les taux d'arbitrages, des tendances notables, comme au début de l'année 2019 donnent des contradictions avec les modèles obtenus. Des erreurs importantes de prédiction sont alors réalisées du fait de comportements clients non observés dans l'historique à disposition ou pouvant résulter de décisions non justifiables par des variables seulement financières.

Les projections de taux d'arbitrages à partir de ces modèles nécessitent des prédictions mensuelles des performances du portefeuille UC d'AXA France, cela ajoute des erreurs de prédiction pouvant être importantes du fait de marchés financiers aussi très volatiles.

Finalement, l'utilisation de tels modèles n'est pas évident en scénario central. En revanche, elle pourrait permettre de tester l'impact de scénarios choqués sur le comportement d'arbitrage, notamment dans le cadre des projections de scénarios stochastiques effectuées par le modèle interne.
La partie dynamique des taux étant calibrée sur la différence de taux projetés par des lois structurelles et des taux réels, une certaine stabilité dans une projection à long terme est tout de même maintenue avec l'utilisation de ce modèle.

Comparaison des modèles de taux Euro→UC

Tableau récapitulatif des moyennes des indicateurs de performance

Modèle (M)	**MAE$_1$**	**RMSE$_1$**	**Err$_1$**
$(M1)$	0.382%	0.434%	0.354%
$(M3)$	0.132%	0.192%	0.066%
$(M4)$	0.329%	0.347%	0.259%
$(M5)$	0.327%	0.346%	0.259%
$(M6 - \text{Age})$	0.331%	0.350%	0.262%
$(M6 - \text{Encours})$	0.356%	0.373%	0.290%
$(M6 - \text{Part UC})$	0.388%	0.404%	0.330%
$(M6 - \text{Enc./Part.})$	0.486%	0.504%	0.450%
$(M6 - \text{Age/Enc./Part.})$	0.505%	0.524%	0.470%
$(Structurel)$	0.215%	0.256%	0.138%
$(M7)$	0.222%	0.268%	0.132%
$(M8)$	0.223%	0.260%	0.138%
$(M9)$	0.222%	0.258%	0.133%
$(M10)$	0.222%	0.258%	0.130%

Pour les modèles dynamiques d'arbitrages Euro→UC calibrés directement sur les taux, les différents backtestings effectués montrent globalement de moins bonnes performances que le modèle structurel.

Un modèle (M3) démontre cependant de très faibles valeurs des différents indicateurs d'erreurs, et ce pour les 3 backtestings effectués. Il est calibré par une régression polynomiale des taux Euro→UC sur les performances des supports UC d'AXA et sur les années, puis avec l'application de modèles autorégressifs sur les résidus. Ce modèle est donné par :

$$Y_{2,t} = exp(-7.87+0.49X_{A,t}-0.021X_{A,t}^2+5.3X_{1,t}-149X_{1,t}^2-1814X_{1,t}^3+26640X_{1,t}^4+\sum_{j=0}^{t}(0.2)^j\varepsilon_{t-j})$$

Avec X_A variable représentant l'année en t.

Les très bonnes prédictions de ce modèle ne permettent pourtant pas de le considérer comme viable pour l'estimation des arbitrages, comme cela a été vu dans le chapitre 6. En effet, par la prise en compte du carré des années de prédiction avec un coefficient négatif non négligeable, les taux prédits dans le futur seront constamment et fortement décroissants jusqu'à atteindre des taux quasi nuls, ce qui n'est pas viable pour un modèle de taux d'arbitrages.

Comme pour les taux UC→Euro, des modèles dynamiques sont ensuite calibrés sur la différence entre des taux structurels projetés et les taux réels. L'utilisation d'une variable temporelle exogène ne permet cependant pas d'améliorer les performances des taux projetés par des lois structurelles. En termes de $RMSE_1$ notamment, la moyenne obtenue sur les trois backtestings est de 0.256% pour le modèle structurel contre des valeurs allant de 0.258% à 0.268% pour les modèles calibrés sur les résidus dynamiques.

Sur la base d'étude, les prédictions des premiers modèles dynamiques donnant de moins bonnes performances que le modèle structurel et l'inefficacité d'améliorer les performances de ce modèle structurel par l'intégration de variables exogènes s'expliqueraient ainsi par un lien trop faible entre les taux d'arbitrages Euro→UC et les performances des supports UC d'AXA.

Un faible impact des performances des supports UC d'AXA pourrait notamment se justifier par le fait que les assurés ne détenant pas ou peu d'encours sur des supports en UC ne s'intéresseraient pas aux variations de ces performances. Des hausses de cet indice de performance ne pourront donc pas inciter ces assurés à arbitrer vers des supports en UC. Cependant, un client qui détient une partie de son encours sur des unités de compte sera plus attentif aux mauvaises performances des supports où son épargne est investie.

L'utilisation de tels modèles dynamiques pour la prédiction de ce type de taux d'arbitrages ne démontrerait alors que très peu d'intérêt étant donné les faibles impacts que peuvent avoir les indices financiers étudiés sur les arbitrages Euro→UC.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier des méthodes permettant d'améliorer les projections de taux d'arbitrages, notamment par l'intégration d'une composante dynamique basée sur des variables telles que les performances des supports UC, en s'appuyant sur le portefeuille des produits d'assurance vie haut de gamme d'AXA France.

Le modèle actuel d'estimation des arbitrages se base uniquement sur l'ancienneté des contrats en portefeuille et présente d'importantes erreurs de prédiction. Une étude sur l'importance sur le comportement d'arbitrage des variables structurelles disponibles dans la base a été réalisée via des méthodes de *machine learning* comme les forêts aléatoires, appliquées sur des données déséquilibrées. Qu'il s'agisse des arbitrages des supports UC vers l'Euro, ou de l'Euro vers les fonds en UC : l'âge, l'encours total et la part d'unités de compte des assurés sur leur contrat s'avèrent prépondérants dans la décision de réalisation d'arbitrages par les assurés.
Des modèles structurels se basant sur les taux d'arbitrages historiques et calibrés à partir de tels paramètres ont alors été testés. Ces derniers démontrent d'importants écarts pour certaines années et les tendances d'évolution des arbitrages d'une année sur l'autre sont rarement suivies, justifiant la nécessité d'explorer de nouvelles méthodes de modélisation.

Dans une deuxième partie, les arbitrages sont modélisés sous forme de séries temporelles. Dans un premier temps, le modèle dynamique s'effectue sur le taux d'arbitrage directement. Des variables exogènes sont intégrées aux modèles afin d'établir si un lien entre des indices de performances des supports en unités de compte et les taux d'arbitrages peut exister. Différents modèles dynamiques ont alors été mis en place afin d'estimer au mieux l'évolution des taux d'arbitrages au cours du temps.
L'hypothèse qu'un temps de réaction est nécessaire aux assurés après des variations d'indices financiers a notamment pu être intégrée par le calibrage de modèles à retards échelonnés. Ces derniers permettent en effet la prise en compte des valeurs passées de variables exogènes pour prédire les taux d'arbitrages. Des composantes autorégressives des taux d'arbitrages ont également pu être intégrées via des modèles de type ARMA, SARIMA, ARDL. Cette modélisation directe des taux d'arbitrages offre des résultats similaires aux modèles structurels classiques.

Par la suite, des variables structurelles ont été intégrées aux modèles dynamiques.

Un modèle d'évolution temporelle des taux d'arbitrages par catégorie de variables structurelles a d'abord été mis en place et n'a pas montré de bonnes performances. Une seconde méthode d'intégration des variables structurelles a alors été explorée via le calibrage de modèles dynamiques **sur la différence entre des taux d'arbitrages projetés par lois structurelles et des taux réels**. Une telle méthode a également été appliquée par réseau de distribution permettant alors de mieux capter les comportements des clients, notamment les temps de réaction pour arbitrer après des variations des performances des supports UC d'AXA.

L'intégration de composantes dynamiques aux modèles d'estimations des arbitrages nous a permis de dresser plusieurs constats.

Les modèles d'estimation du taux Euro → UC basés sur des indices financiers reflétant les performances des supports UC d'AXA et de la conjoncture financière n'apportent pas de réelle amélioration en comparaison des modèles structurels. Les premiers modèles basés intégralement sur des variables dynamiques ont en effet des erreurs supérieures aux modèles structurels classiques lors du backtesting tandis que ceux s'appuyant sur une composante structurelle principale et un modèle dynamique sur les résidus ont montré les mêmes performances que les modèles structurels. Dans le cadre de cette étude, les variables conjoncturelles telles que les performances des supports UC d'AXA n'ont ainsi pas montré de lien important avec les taux d'arbitrages mensuels Euro→UC du portefeuille haut de gamme.
Cela peut s'expliquer par le fait que les assurés qui détiennent une faible part d'unités de compte ne se renseigneraient que très peu sur les variations des performances des supports en UC, qui n'impactent pas ou peu leur épargne. Des hausses des performances des supports UC ne pourraient donc pas les inciter à réaliser des arbitrages vers des supports en UC.

Le constat fait pour les arbitrages UC→Euro est différent. D'après l'historique de données, un lien a pu être démontré entre les taux d'arbitrages et les performances d'indices financiers comme celles des supports UC. En suivant les modèles obtenus, une augmentation de ce type de taux d'arbitrages pourrait être expliquée par la diminution des performances des UC. Ces modèles intégrant une composante dynamique présentent globalement une amélioration des estimations des arbitrages UC→Euro en comparaison des modèles structurels. Le modèle calibré sur les différences entre taux projetés par lois structurelles et taux réels par réseau est celui qui montre le plus d'intérêt par ses résultats de backtesting et sa stabilité au cours du temps.
Cependant, d'après les backtestings effectués, un tel modèle ne capte pas toujours les tendances mensuelles des arbitrages.

Pour améliorer les prédictions des taux d'arbitrages au cours du temps ou établir des liens entre ces derniers et des paramètres conjoncturels, d'autres méthodes pourraient alors être explorées. L'étude effectuée porte en effet sur des produits haut de gamme, ce qui peut induire un accroissement de la volatilité des taux d'arbitrages. L'intégration de contrats des produits retail, comportant alors un plus grand nombre d'assurés et dont l'encours serait plus faible pourrait permettre de mieux capter les comportements d'arbitrages des épargnants après des variations de paramètres conjoncturels.
Ajouté à cela, pour capter une saisonnalité annuelle des taux d'arbitrages, l'exploration de taux structurels calibrés par mois pourrait être intéressante dans l'optique de mieux capter les comportements des clients après des variations d'indices financiers.
Enfin, des campagnes publicitaires réalisées par les compagnies et les différentes évolutions réglementaires pourraient aussi avoir un rôle dans certaines évolutions des taux d'arbitrages. Une intégration de ces dernières pourrait permettre d'améliorer la compréhension de certains mouvements d'arbitrages.

Bibliographie

AMRANI, B. *L'arbitrage dans les contrats d'épargne multisupports*. 2013.

AXA-Prévoyance-Patrimoine. *Epargne - Plaquette AXA Privilège*. URL : http://www.prevoyance-patrimoine.net/Privilege_plaquette.pdf.

BERRADA, O. *Modélisation des arbitrages dynamiques par approche machine learning et étude du comportement client sur un portefeuille d'épargne*. 2016.

BREIMAN, L. *Random Forest*. Wadsworth et Brooks, 2001.

BREIMAN, L. et al. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth et Brooks, 1984.

BRUNET, O. *Assurance : historique des taux de rendements des fonds en euros depuis 2000*. Accessed : 17/06/2020. URL : https://www.toutsurmesfinances.com/placements/assurance-vie-historique-des-taux-de-rendements-des-fonds-en-euros-depuis-2000.html.

BUCKDAHN, R. *Cours de séries temporelles*. 2019.

FENIZA, S. *Modélisation du comportement d'arbitrage en assurance vie*. 2019.

FOLGOAS, C. *Modélisation des arbitrages sur les contrats d'assurance vie*. 2017.

H. MADINIER, M. MOUILLART. « Les méthodes d'estimation des modèles à retards échelonnés en économie ». In : *Revue de Statistique Appliquée* Tome 31 (1983).4 (1983), p53-73.

NEWBOLD, P. « The exact likelihood for a mixed autoregressive moving average process ». In : *Biometrika* 61.3 (1974), p423-426.

R. ENGLE, C. GRANGER. « Co-integration and Error Correction : Representation, Estimation, and Testing ». In : *Econometrica* 55.2 (1987), p251-276.

RFIG, K. *Pilotage des arbitrages en épargne : approche client*. 2017.

ROUVIERE, L. *Régression logistique avec R*. Université Rennes 2, UFR Sciences Sociales. URL : https://perso.univ-rennes2.fr/system/files/users/rouviere_l/poly_logistique_web.pdf.

ZENNAF, K. *Modèles d'arbitrages dynamiques dans le cadre des produits d'assurance-vie multisupports*. 2012.

Annexe A : Introduction aux méthodes de classification exploitées

Annexe A - 1 : Introduction à la régression logistique

On se restreint au cas où la variable à expliquer est binaire car dans cette partie de l'étude, la variable étudiée ne prend que 2 valeurs.

Soit $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variable à expliquer, $\forall n, Y_n \in \{0;1\}$ et $X = (X^1, ..., X^p)$ p variables explicatives qualitatives ou quantitatives de Y.

Le modèle de régression logistique est un modèle **linéaire paramétrique** supposant que la loi de $Y|X = x$ (avec x une réalisation de X) suit une loi de Bernouilli définie telle que :

$$P[Y = 1|X] = \pi(X) \text{ et } P[Y = 0|X] = 1 - \pi(X)$$

Pour déterminer cette probabilité, le modèle logistique utilise une fonction dite de lien : la fonction logit. Celle-ci est définie telle que :

$$logit(x) = log(\frac{x}{1-x})$$

On a avec le modèle logistique :

$$logit(\pi(X)) = \alpha_0 + \alpha_1 X^1 + ... + \alpha_p X^p$$

Les paramètres $\alpha_0, ..., \alpha_p$ sont ensuite calibrés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Empiriquement, $\pi(x)$ est la proportion de valeurs de $\{y = 1\}$ sur l'échantillon de données pour lequel on a $X = x$ et $Y = y$.

Estimation par maximum de vraisemblance

Dans le cas de la régression logistique, la vraisemblance s'écrit pour n observations, avec $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_p)$:

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)^{y_i}(1 - \pi(x_i))^{1-y_i}$$

L'estimation des $\hat{\alpha}$ se fait alors par la méthode du maximum de vraisemblance par la recherche des paramètres qui maximisent le logarithme de la vraisemblance. Pour cela, les paramètres sont alors déterminés en annulant la quantité suivante : $\frac{\partial log(L(\alpha))}{\partial \alpha}$ telle que :

$$log(L(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} y_i log(\pi(x_i)) + (1 - y_i) log(\pi(x_i))$$

Avec $\pi(X) = \frac{exp(\alpha_0 + \alpha_1 X^1 + ... + \alpha_p X^p)}{1 + exp(\alpha_0 + \alpha_1 X^1 + ... + \alpha_p X^p)}$

Une équation est alors obtenue pour chacun des $(\alpha_0, ...\alpha_p)$ ce qui permet d'obtenir les différents paramètres recherchés après résolution.

Test de nullité d'une variable

Afin d'évaluer si les variables estimées $\hat{\alpha}$ ont un impact ou non sur la variable à expliquer, un test de nullité est réalisé pour chacune des variables.

L'hypothèse nulle est pour $\hat{\alpha_j}$: $(H_0) : \alpha_j = 0$ contre $(H_1) : \alpha_j \neq 0$.
Cette hypothèse peut être testée à l'aide d'un test de Student en calculant $T_j = \frac{\alpha_j}{s^2(\alpha_j)}$ (avec $s^2(\alpha_j)$ la variance empirique de l'estimateur α_j) qui suit une loi de Student de paramètre $(n - p - 1)$. Pour un seuil β, la statistique T_j est comparée à $t_{n-p-1,1-\frac{\beta}{2}}$. Si $|T_j| \geq t_{n-p-1,1-\frac{\beta}{2}}$, alors H_0 est rejetée au seuil β.

En pratique, après calibrage et application du modèle, une probabilité est affectée à chaque réalisation de variables explicatives. Généralement, il est préférable d'utiliser des variables homogènes, c'est-à-dire avec des proportions de $y = 1$ et $y = 0$ à peu près équivalentes. Il sera décidé que les probabilités supérieures à 0,5 impliquent une prédiction de y égale à 1 et de 0 si la probabilité est inférieure à 0,5.

Annexe A - 2 : Introduction aux arbres de décision

L'arbre de décision est un outil d'aide à la décision permettant de prédire une variable quantitative ou qualitative par classification ou régression, cela étant conceptualisé par un arbre. Cette méthode consiste en un ensemble de tests effectués sur les valeurs prises par les variables d'un individu donné. Pour chaque individu, cela aboutira à une classification permettant la prévision de la variable cible.
Deux types d'arbres existent. D'une part, les arbres de régression pour lesquels la variable cible est quantitative. D'autre part, les arbres de classification lorsque la variable à prédire est qualitative, pouvant prendre plusieurs valeurs.

Dans le cadre de cette étude, ce sont les arbres de classification qui seront étudiés car la variable cible est le fait de savoir si oui ou non, un contrat va arbitrer durant un mois donné.

Vocabulaire

Exemple simple d'arbre de décision : Prédiction de bouchons sur la route à l'aide de 2 variables : l'heure de la journée qui est une variable numérique prenant des valeurs dans [0 ;24[et la ville qui peut prendre ici 3 valeurs : "Paris", "Brest" et "Lyon".

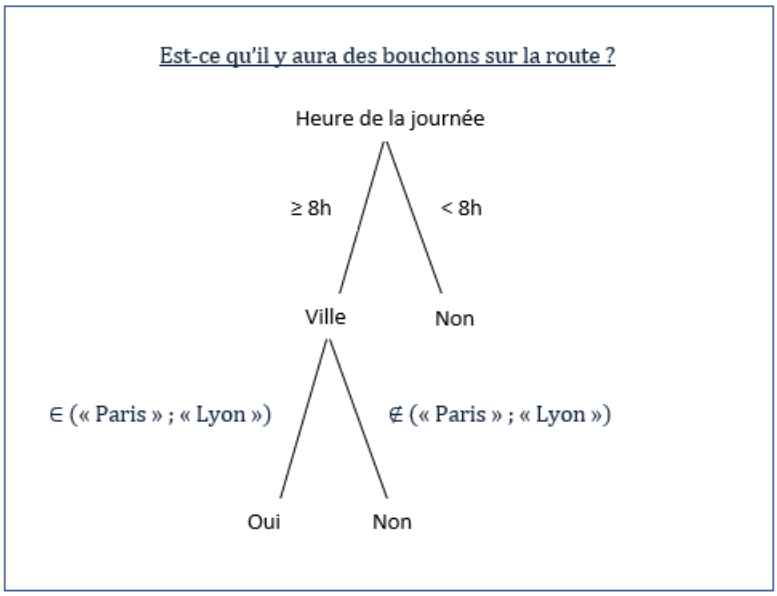

FIGURE 7.4 – Exemple d'arbre de décision pour la prédiction de bouchons à l'aide de deux variables

• Dans un arbre de décision, les noeuds correspondent aux variables qui divisent à chaque

étape les données en plusieurs branches.
• La racine de l'arbre correspond à l'ensemble des observations, à partir desquelles est créé l'arbre de décision.
• La feuille correspond à la pointe d'une branche, c'est-à-dire à l'emplacement dans l'arbre qui donne la prédiction de la variable à déterminer. Dans l'exemple, une des feuilles est atteinte lorsque l'heure de la journée est inférieure à 8h, la variable cible prend la valeur "Non".

Construction d'un arbre de décision

La construction d'un arbre de décision se base sur l'algorithme CART, qui signifie "*Classification And Regression Tree*". Cette méthode de classification a été présentée dans une publication éponyme à l'algorithme, en 1984 par L. BREIMAN, J. FRIEDMAN, C.J. STONE et R.A. OLSHEN [5]. Plusieurs étapes sont nécessaires pour la construction d'un arbre de décision par la méthode CART : la construction de l'arbre maximal, l'élagage et la sélection finale.
La variable cible ne prend ici que des valeurs qualitatives.

1) Construction de l'arbre maximal

Dans la première étape de construction d'un arbre de décision selon l'algorithme CART, un arbre le plus grand possible est construit à partir d'une base d'apprentissage. Pour cela, des nœuds sont créés de façon à partitionner les données à chaque étape en créant des classes le plus homogène possible au sens de la variable à expliquer. Ceci est réalisé selon les valeurs prises par une certaine variable expliquée. Chaque classe créée doit contenir un nombre de données strictement positif.

∘ Dans le cas des arbres de classification, le choix de segmentation est effectué à chaque nœud par mesure de sa "pureté". Dans le cadre de l'algorithme CART, la mesure de la "pureté" se fait à l'aide de l'indice de Gini qui vise à mesurer la répartition d'une variable au sein d'un échantillon. Ainsi, la segmentation se fait à chaque nœud par la recherche dans les divisions possibles de la variable qui permettra de maximiser la décroissance de l'hétérogénéité ou "pureté", c'est-à-dire par minimisation de l'indice de Gini de chaque nœud. Pour cela, on définit alors le critère de Gini.

Coefficient de Gini :

Pour un nœud donné t.
Soit $k \in [1; K]$, avec K le nombre de partitions pouvant être formées pour le nœud t par une variable donnée.
Soit $p_{t,k}$ la proportion de la classe k dans le nœud t.

Alors, le coefficient de Gini s'écrit dans ce cas :

$$I(t) = \sum_{k=1}^{K} p_{t,k}(1 - p_{t,k}) \in [0; 1]$$

A l'aide de ce coefficient de Gini, les différents nœuds seront construits. La création de nouveaux nœuds s'arrête lorsqu'un certain critère est atteint. Par exemple s'il n'y a plus assez de données dans un nœud. Ce nombre oscille généralement entre 1 et 5. Lorsque ce critère d'arrêt est atteint, on obtient alors un arbre qui est généralement appelé "arbre maximal".

2) Élagage et sélection finale

A partir de la première étape de construction d'un arbre de classification, un "arbre maximal" est obtenu.

Ce dernier va cependant induire un certain sur-apprentissage. En effet, après la première étape, l'algorithme ne permet pas de généraliser le modèle à de nouvelles données car les nœuds finaux obtenus contiennent trop peu de valeurs. L'arbre de décision maximal doit être élagué, c'est-à-dire que des nœuds vont être supprimés pour améliorer les performances du modèle sur une base de test.

Pour cette étape dite "d'élagage", une suite de "sous-arbres" de l'arbre maximal emboîtés est construite. Le choix de l'arbre optimal à utiliser est alors effectué dans cette suite de sous-arbres. En effet, même si tous les sous-arbres seraient viables, le nombre de sous-arbres est de croissance exponentielle ce qui implique alors une difficulté notamment en temps de calcul de considérer la totalité des sous-arbres de l'arbre maximal.
Pour cela, une sous-suite d'arbres de classification est construite comme suit :

Soit un arbre A pour lequel on a K_A nœuds terminaux. Plus K_A est élevé, plus la complexité de l'arbre A est importante. A côté de cela, on mesure la qualité d'un arbre A à l'aide de l'indice de Gini tel qu'en prenant D_k indice de Gini de la feuille k de l'arbre A, on a :

$$D(A) = \sum_{k=1}^{K_A} D_k$$

A partir d'une pénalisation par la complexité de la qualité d'un arbre A définie telle que : $C(A) = D(A) + \gamma K_A$, la suite de sous-arbres emboîtés de l'arbre maximal vont être construits. En effet, en prenant $\gamma = 0$, ce sera A_{max} l'arbre maximal qui va minimiser la complexité. On notera alors $A_{max} = A_{K_A}$. Par accroîssement de γ, la mesure de la complexité va impliquer que l'une des divisions de A_{K_A} ait moins d'importance, donc les deux feuilles seront regroupées ou "élaguées" pour que A_{K_A} devienne $A_{K_{A-1}}$. Cela est effectué plusieurs fois pour l'obtention d'une sous-suite d'arbres emboîtés de l'arbre maximal tel que l'on aura : $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_{K_{A-1}} \subset A_{K_A}$

L'arbre dit "optimal" sera celui qui donnera l'erreur minimale et a fortiori le critère γ optimal.
Pour cela, l'arbre optimal permettant d'allier des bonnes performances de prédiction du modèle à un nombre réduit de branches sera retenu par validation croisée comme décrit précédemment dans ce mémoire. Cette méthode permet de mesurer des erreurs de prédiction des différents arbres sur différents échantillons de validation. Par cela, les nœuds des variables ne permettant pas d'améliorer significativement les performances du modèle seront supprimés de l'arbre. Enfin, le sous-arbre de l'arbre maximal obtenu précédemment qui minimise l'erreur de prédiction est alors considéré comme étant l'arbre optimal.

Annexe A - 3 : Introduction à la forêt d'arbres décisionnels

Après avoir introduit dans une publication l'algorithme CART [5], L.BREIMAN a proposé en 2001 dans une publication le concept de forêts aléatoires ou *Random Forests* [4].

L'idée principale d'une forêt aléatoire est de combiner un certain nombre d'arbres de décision en un seul pour obtenir de meilleures performances de prédiction. Ainsi, par l'utilisation de plus d'un arbre de décision, la combinaison de tous les arbres sera en moyenne meilleure que l'utilisation d'un seul arbre de décision. Cela permettra de rassembler les informations retenues dans tous les arbres de décision créés en comparaison des seules informations retenues dans un seul arbre.

Pour cela, la création d'une forêt aléatoire nécessite deux étapes principales pour la construction des différents arbres :

1) **Le Bagging ou *Bootstrap aggregating*.**

L'étape de Bagging consiste en un tirage aléatoire de la base d'apprentissage pour la construction de chacun des différents arbres de décision. Ainsi, chaque arbre est construit à partir d'une base différente et donnera des classifications différentes. On décrit alors cette étape de bagging comme suit :

Soit X une matrice contenant n individus et m variables explicatives et Y variable à expliquer contenant aussi n individus.

L'étape de Bagging consiste à construire les arbres de décision pour une forêt aléatoire en tirant aléatoirement d'une part avec remplacement des échantillons de (X, Y). D'autre part, l'échantillon (X', Y') tiré aléatoirement sera utilisé comme base d'apprentissage pour la construction d'un arbre de décision.
Chaque arbre est alors appliqué à de nouvelles données et pour réaliser un "assemblage" des arbres, la prédiction finale est choisie en comptabilisant la catégorie ayant obtenu au moins la majorité des prédictions pour les différents arbres, c'est une décision dite par "vote majoritaire".

2) **La sélection aléatoire des variables.**

Pour la création d'une forêt aléatoire, la seconde étape consiste à fabriquer chaque arbre de décision en réalisant un tirage aléatoire de certaines variables à partir desquelles la construction sera effectuée. En effet, pour la construction d'un arbre de décision, à chaque nœud est choisie parmi toutes les variables disponibles celle qui sépare le mieux en deux partitions homogènes les données du point de vue de la variable cible. Ici, pour chaque arbre, un tirage de certaines variables permettra d'obtenir des résultats différents, et une

corrélation faible entre les arbres qui permettra d'obtenir une erreur moindre après agrégation des différents arbres en les moyennant. Ainsi, pour la construction de chaque nœud, seulement une partie des variables est utilisée. Pour chaque arbre, et chaque nœud, une partie des variables est tirée aléatoirement et le meilleur découpage du sous-ensemble de variables tiré est alors choisi.
Le nombre de variables optimal à tirer aléatoirement pourra notamment être déterminé par validation croisée, comme effectué dans cette étude.

Comme vu précédemment, étant donné que dans le cadre de cette étude la variable cible est binaire, les prédictions finales se feront par vote majoritaire en se basant sur un certain nombre d'arbres.

Annexe B : Ordre d'agrégation des variables - Sélection ascendante

Tableau présentant la diminution de l'AIC par ordre d'agrégation des modèles de régression logistique exploités par la sélection ascendante pour aboutir au modèle final pour les taux d'arbitrages UC → Euro et Euro→UC.

UC → Euro		Euro → UC	
Modèle	**Diminution AIC**	**Modèle**	**Diminution AIC**
Modèle simple		Modèle simple	
Ajout PM totale	834.03	Ajout PM totale	1014.47
Ajout Réseau	826	Ajout Réseau	1112.05
Ajout Région	206.96	Ajout Ancienneté	452.80
Ajout Taux frais sur encours	90.78	Ajout Région	139.65
Ajout Part UC	111.84	Ajout Type de taux garanti	138.62
Ajout Ancienneté	84.14	Ajout Part UC	49.32
Ajout Age	18.40	Ajout Age	11.37
Ajout Type de taux garanti	10.12	Ajout Fiscalité du contrat	1.81
Ajout Fiscalité du contrat	1.54	(Modèle final)	
(Modèle complet)			

Annexe C : Indicateurs de pertinence des modèles

— "Histo. 1" correspond au premier historique : soit à un calibrage sur les années 2008 à 2018, et des tests de projection sur 2019.
— "Histo. 2" correspond au deuxième historique : soit à un calibrage sur les années 2008 à 2017, et des tests de projection sur 2018.
— "Histo. 3" correspond au troisième historique : soit à un calibrage sur les années 2008 à 2016, et des tests de projection sur 2017.

Lexique des modèles d'arbitrages dynamiques

$(M1)$:	Modèle ARMA sur les taux d'arbitrages log-différenciés
$(M2)$:	Modèle SARIMA sur les taux d'arbitrages
$(M3-1 \mid \text{UC}\rightarrow\text{Euro})$:	Régression des taux d'arbitrages UC→Euro avec les performances des supports UC d'AXA, puis modèle ARMA sur les résidus
$(M3-2 \mid \text{UC}\rightarrow\text{Euro})$:	Régression des taux d'arbitrages UC→Euro avec la moyenne des 5 supports UC les plus arbitrés, puis modèle ARMA sur les résidus
$(M3-3 \mid \text{UC}\rightarrow\text{Euro})$:	Régression des taux d'arbitrages UC→Euro avec les variations du CAC 40 et les taux OAT 10 ans, puis modèle ARMA sur les résidus
$(M3 \mid \text{Euro}\rightarrow\text{UC})$:	Régression polynomiale des taux Euro→UC avec les années et performances des supports UC d'AXA, puis modèle ARMA sur les résidus
$(M4)$:	Modèle à retards échelonnés (DL) sur les taux d'arbitrages
$(M5)$:	Modèle autorégressif à retards échelonnés (ARDL) sur les taux
$(M6)$:	Modèles DL sur les taux segmentés par variables structurelles
$(Structurel)$:	Modèle structurel avec taux mensualisés
$(M7)$:	Modèle ARMA sur les résidus dynamiques
$(M8)$:	Modèle DL sur les résidus dynamiques
$(M9)$:	Modèle ARDL sur les résidus dynamiqus
$(M10)$:	Modèle DL sur les résidus dynamiques par réseau

Résultats des indicateurs de projection – UC→Euro

$MAE_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle $(M1)$	0.261%	0.202%	0.320%
Modèle $(M2)$	0.384%	0.261%	0.179%
Modèle $(M3-1)$	0.281%	0.195%	0.206%
Modèle $(M3-2)$	0.274%	0.194%	0.290%
Modèle $(M3-3)$	0.277%	0.179%	0.237%
Modèle $(M4)$	0.237%	0.324%	0.406%
Modèle $(M5)$	0.255%	0.317%	0.431%
Modèle $(M6-\text{Age})$	0.243%	0.326%	0.428%
Modèle $(M6-\text{Encours})$	0.250%	0.373%	0.457%
Modèle $(M6-\text{Part UC})$	0.251%	0.317%	0.396%
Modèle $(M6-\text{Enc./Part.})$	0.250%	0.342%	0.428%
Modèle $(M6-\text{Age/Enc./Part.})$	0.251%	0.363%	0.430%
Modèle $(Structurel)$	0.233%	0.203%	0.381%
Modèle $(M7)$	0.237%	0.173%	0.207%
Modèle $(M8)$	0.393%	0.174%	0.178%
Modèle $(M9)$	0.387%	0.173%	0.185%
Modèle $(M10)$	0.382%	0.166%	0.160%

$RMSE_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle $(M1)$	0.344%	0.280%	0.330%
Modèle $(M2)$	0.462%	0.305%	0.248%
Modèle $(M3-1)$	0.362%	0.267%	0.234%
Modèle $(M3-2)$	0.351%	0.269%	0.311%
Modèle $(M3-3)$	0.365%	0.256%	0.263%
Modèle $(M4)$	0.309%	0.361%	0.440%
Modèle $(M5)$	0.302%	0.340%	0.457%
Modèle $(M6-\text{Age})$	0.297%	0.366%	0.455%
Modèle $(M6-\text{Encours})$	0.310%	0.417%	0.490%
Modèle $(M6-\text{Part UC})$	0.301%	0.351%	0.425%
Modèle $(M6-\text{Enc./Part.})$	0.302%	0.383%	0.457%
Modèle $(M6-\text{Age/Enc./Part.})$	0.304%	0.406%	0.463%
Modèle $(Structurel)$	0.292%	0.219%	0.396%
Modèle $(M7)$	0.301%	0.239%	0.233%
Modèle $(M8)$	0.480%	0.223%	0.207%
Modèle $(M9)$	0.478%	0.223%	0.217%
Modèle $(M10)$	0.470%	0.211%	0.201%

$Err_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle $(M1)$	0.229%	0.196%	0.320%
Modèle $(M2)$	0.155%	0.226%	0.247%
Modèle $(M3-1)$	0.246%	0.180%	0.202%
Modèle $(M3-2)$	0.236%	0.182%	0.291%
Modèle $(M3-3)$	0.245%	0.065%	0.236%
Modèle $(M4)$	0.059%	0.302%	0.409%
Modèle $(M5)$	0.085%	0.265%	0.433%
Modèle $(M6-\text{Age})$	0.043%	0.307%	0.431%
Modèle $(M6-\text{Encours})$	0.012%	0.366%	0.460%
Modèle $(M6-\text{Part UC})$	0.033%	0.288%	0.398%
Modèle $(M6-\text{Enc./Part.})$	0.014%	0.326%	0.430%
Modèle $(M6-\text{Age/Enc./Part.})$	0.018%	0.352%	0.432%
Modèle $(Structurel)$	0.136%	0.094%	0.383%
Modèle $(M7)$	0.153%	0.140%	0.208%
Modèle $(M8)$	0.390%	0.098%	0.160%
Modèle $(M9)$	0.385%	0.098%	0.168%
Modèle $(M10)$	0.373%	0.085%	0.145%

Résultats des indicateurs de projection – Euro→UC

$MAE_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle ($M1$)	0.106%	0.120%	0.919%
Modèle ($M3$)	0.040%	0.181%	0.175%
Modèle ($M4$)	0.360%	0.379%	0.246%
Modèle ($M5$)	0.352%	0.379%	0.249%
Modèle ($M6$ – Age)	0.337%	0.369%	0.247%
Modèle ($M6$ – Encours)	0.402%	0.404%	0.261%
Modèle ($M6$ – Part UC)	0.420%	0.451%	0.293%
Modèle ($M6$ – Enc./Part.)	0.534%	0.541%	0.384%
Modèle ($M6$ – Age/Enc./Part.)	0.554%	0.569%	0.393%
Modèle (*Structurel*)	0.203%	0.257%	0.186%
Modèle ($M7$)	0.199%	0.258%	0.210%
Modèle ($M8$)	0.222%	0.261%	0.188%
Modèle ($M9$)	0.218%	0.257%	0.190%
Modèle ($M10$)	0.220%	0.252%	0.194%

$RMSE_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle ($M1$)	0.116%	0.228%	0.959%
Modèle ($M3$)	0.052%	0.234%	0.291%
Modèle ($M4$)	0.364%	0.387%	0.293%
Modèle ($M5$)	0.356%	0.387%	0.295%
Modèle ($M6$ – Age)	0.379%	0.381%	0.290%
Modèle ($M6$ – Encours)	0.407%	0.412%	0.299%
Modèle ($M6$ – Part UC)	0.426%	0.459%	0.328%
Modèle ($M6$ – Enc./Part.)	0.536%	0.557%	0.417%
Modèle ($M6$ – Age/Enc./Part.)	0.555%	0.588%	0.428%
Modèle (*Structurel*)	0.210%	0.282%	0.276%
Modèle ($M7$)	0.208%	0.285%	0.310%
Modèle ($M8$)	0.225%	0.282%	0.271%
Modèle ($M9$)	0.223%	0.279%	0.272%
Modèle ($M10$)	0.227%	0.274%	0.273%

$Err_1(M)$

Modèle (M)	Histo. 1	Histo. 2	Histo. 3
Modèle $(M1)$	0.102%	0.045%	0.916%
Modèle $(M3)$	0.007%	0.080%	0.111%
Modèle $(M4)$	0.361%	0.319%	0.096%
Modèle $(M5)$	0.353%	0.316%	0.098%
Modèle $(M6 - \text{Age})$	0.372%	0.312%	0.100%
Modèle $(M6 - \text{Encours})$	0.402%	0.347%	0.122%
Modèle $(M6 - \text{Part UC})$	0.422%	0.403%	0.165%
Modèle $(M6 - \text{Enc./Part.})$	0.534%	0.519%	0.297%
Modèle $(M6 - \text{Age/Enc./Part.})$	0.555%	0.552%	0.306%
Modèle $(Structurel)$	0.204%	0.172%	0.037%
Modèle $(M7)$	0.201%	0.169%	0.023%
Modèle $(M8)$	0.222%	0.179%	0.013%
Modèle $(M9)$	0.219%	0.174%	0.007%
Modèle $(M10)$	0.220%	0.170%	0.00002%

Annexe D : Graphes des variables temporelles

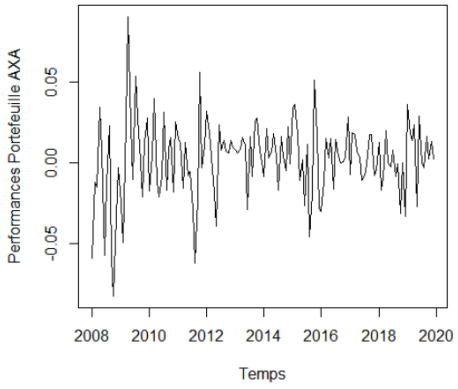

FIGURE 7.5 – Performances répliquées du portefeuille UC AXA France

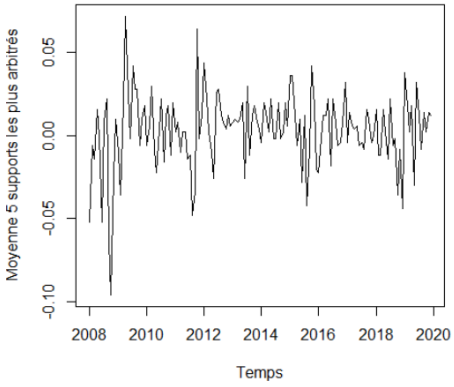

FIGURE 7.6 – Moyenne des performances des 5 supports les plus arbitrés

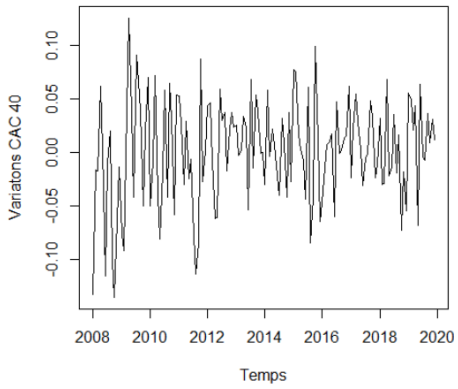

FIGURE 7.7 – Variations du CAC 40

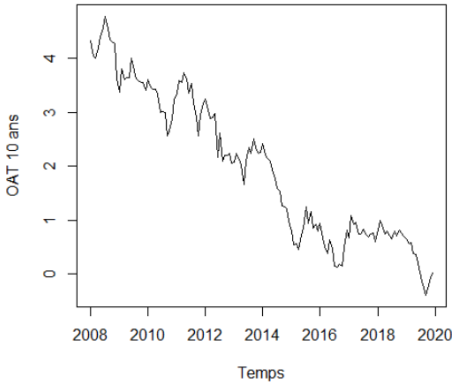

FIGURE 7.8 – Taux OAT 10 ans - (En pourcentage)

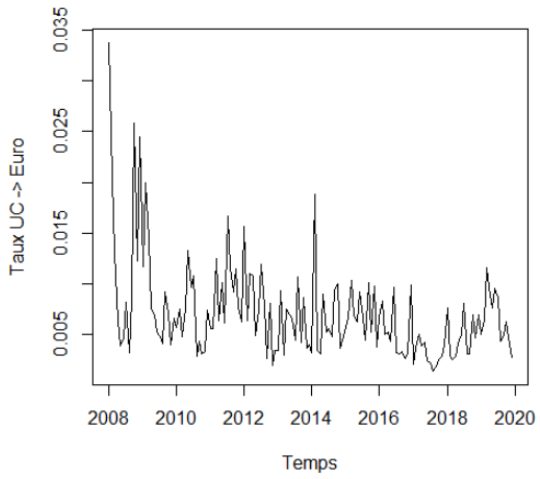

FIGURE 7.9 – Évolution des taux UC→Euro

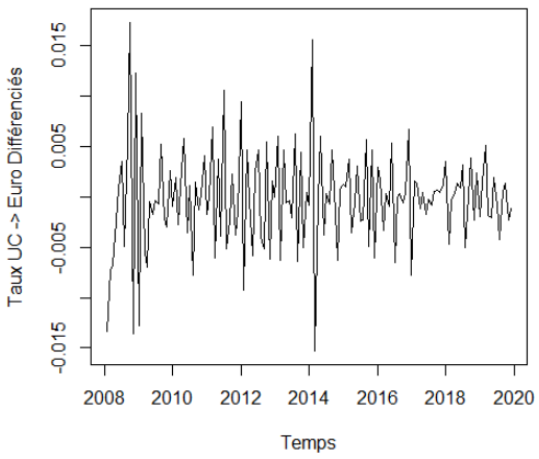

FIGURE 7.10 – Évolution des taux UC→Euro différenciés

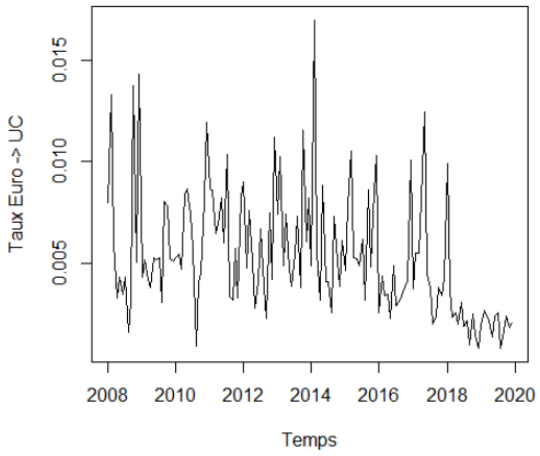

FIGURE 7.11 – Évolution des taux Euro→UC

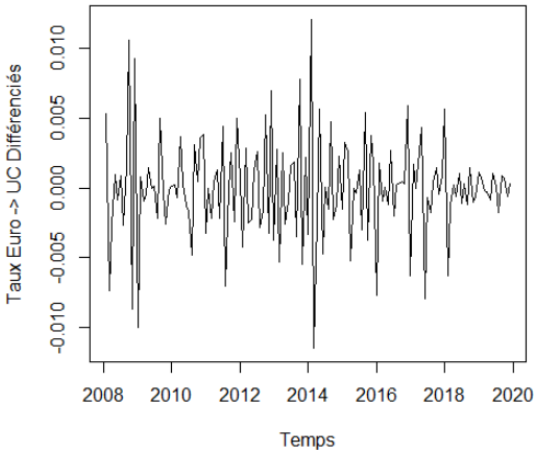

FIGURE 7.12 – Évolution des taux Euro→UC différenciés

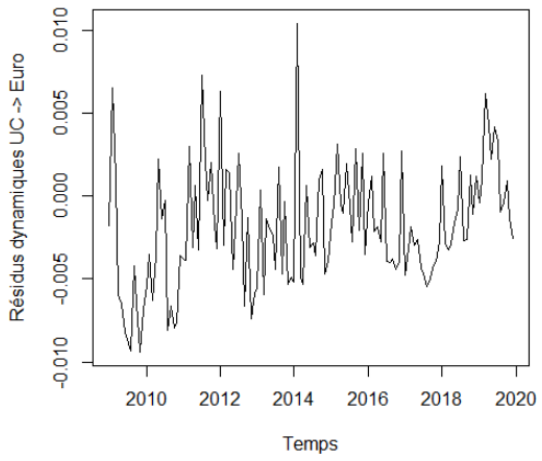

FIGURE 7.13 – Résidus dynamiques - UC→Euro

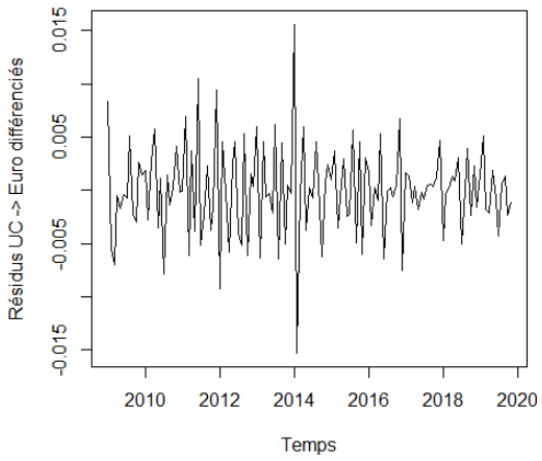

FIGURE 7.14 – Résidus dynamiques - UC→Euro différenciés

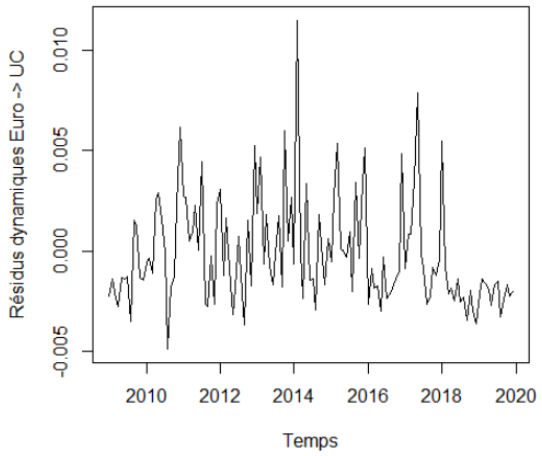

FIGURE 7.15 – Résidus dynamiques - Euro→UC

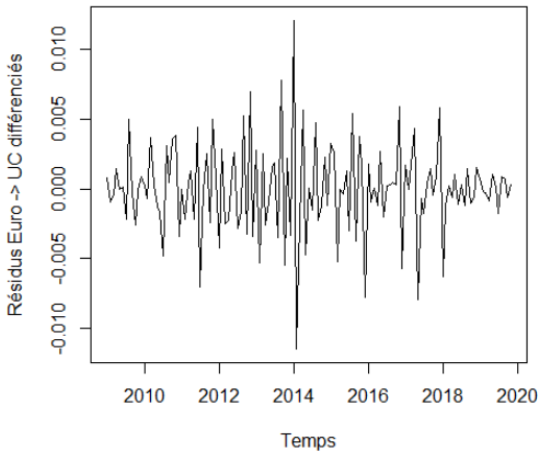

FIGURE 7.16 – Résidus dynamiques - Euro→UC différenciés

Annexe E : Modèles de résidus dynamiques Euro→UC par réseau

Les différents modèles *Distributed-Lag* sont calibrés sur toutes les données d'observation, par réseau de distribution.

Les modèles de résidus dynamiques des arbitrages Euro→UC obtenus par réseau sont les suivants :

$$\begin{cases} Z_{2,t}^{AXA} = & Y_{2,t}^{AXA} - Y_{2,t}^{Struc./AXA} & = 0.02\% + 0.35\% X_{2,t} + 0.70\% X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}^{AXA} \\ Z_{2,t}^{Courtiers} = & Y_{2,t}^{Courtiers} - Y_{2,t}^{Struc./Cour.} & = -0.08\% + 1.4\% X_{2,t} + 2.1\% X_{2,t-1} + 3.9\% X_{2,t-2} + \varepsilon_{2,t}^{Courtiers} \\ Z_{2,t}^{Banques} = & Y_{2,t}^{Banques} - Y_{2,t}^{Struc./Ban.} & = -0.01\% + 2.8\% X_{2,t} - 0.5\% X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}^{Banques} \end{cases}$$

Liste des Abréviations

ADF	*Augmented Dickey-Fuller test* ou Test de Dickey-Fuller Augmenté
AIC	*Akaike Information Criterion* ou Critère d'information d'Akaike
ARDL	*AutoRegressive Distributed-Lag*
ARMA	*AutoRegressive Moving-Average*
CART	*Classification And Regression Tree*
DL	*Distributed-Lag*
FCP	Fonds Communs de Placement
MCO	Moindres Carrés Ordinaires
OAT	Obligation Assimilable du Trésor
PB	Participation aux Bénéfices
PFU	Prélèvement Forfaitaire Unique ou *flat tax*
PM	Provision Mathématique
RAG	Réajustement Annuel Gratuit
RMSE	*Root-Mean-Square-Error*
SICAV	Société d'Investissement à CApital Variable
TME	Taux Moyen d'emprunt d'Etat
TMG	Taux Minimum Garanti
TMGA	Taux Minimum Garanti Annuel
UC	Unités de Compte

Table des figures

1 Taux d'arbitrages UC→Euro observés iv

2 Taux d'arbitrages Euro→UC observés iv

3 Mean Decrease Gini par variable - Arbitrages UC→Euro v

4 Mean Decrease Gini par variable - Arbitrages Euro→UC v

5 Backtesting - Lois structurelles - Arbitrages UC→Euro vi

6 Backtesting - Lois structurelles - Arbitrages Euro→UC vi

7 Observed UC→Euro arbitrage rates xi

8 Observed Euro→UC arbitrage rates xi

9 Mean Decrease Gini by variable - UC→Euro Arbitrages xii

10 Mean Decrease Gini by variable - Euro→UC Arbitrages xii

11 Backtesting - structural UC→Euro arbitrages xiii

12 Backtesting - structural Euro→UC arbitrages xiii

2.1 Evolution du rendement moyen annuel des TME et des supports euros . . 14

2.2 La dynamisation des intérêts annuels. Source : [2] 17

2.3 Exemple de réajustement trimestriel pour une répartition initiale de 50 % sur les supports en unités de compte et de 50 % sur le support en euros. Source : [2] 18

4.1 Evolution de la proportion de contrats détenus par des personnes morales 32

4.2 Evolution de la proportion d'encours détenue par des personnes morales . 33

4.3 Comparaison des taux d'arbitrages Euro→UC par type de personne 33

4.4 Proportion d'arbitrages réalisés par des âges manquants 34

4.5 Proportions d'encours détenus par des contrats dont le réseau est manquant 35

4.6 Evolution de l'encours total en base 100 36

4.7 Evolution de la part d'UC globale du portefeuille étudié 36

4.8 Evolution du taux global Euro -> UC du portefeuille 37

4.9 Evolution du taux global UC -> Euro du portefeuille 37

4.10 Evolution du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage Euro→UC dans le mois (base 100) 39

4.11 Evolution du nombre de contrats réalisant au moins un arbitrage UC→Euro dans le mois (base 100) 39

4.12 Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par Réseau 40

4.13 Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par âge 41

4.14 Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par âge 41

4.15 Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par ancienneté 42

4.16 Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par ancienneté 42

4.17 Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par part d'UC 43

4.18 Evolution du taux d'arbitrages Euro→UC par montant d'encours détenu par contrat 43

4.19 Evolution du taux d'arbitrages UC→Euro par ancienneté 44

4.20 Proportion de PM totale détenue par région 45

5.1 Taux d'arbitrage UC→Euro historique par ancienneté pour un produit donné 48

5.2 Ancienne loi UC→Euro pour un produit donné, par ancienneté 48

5.3 Nombre de contrats par ancienneté pour un produit donné 49

5.4 Matrice de corrélation - Variables numériques entre 2016 et 2019 51

5.5 Arbre de classification – Arbitrages UC→Euro 56

5.6 *Mean Decrease Gini* par variable - Arbitrages UC→Euro 60

5.7 *Mean Decrease Gini* par variable - Arbitrages Euro→UC 60

5.8 Backtesting - Lois UC → Euro 63

5.9 Backtesting - Lois Euro → UC 63

6.1 Autocorrélation des taux d'arbitrages UC→Euro 74

6.2 Autocorrélation des taux d'arbitrages Euro→UC 74

6.3 Autocorrélation partielle des taux d'arbitrages Euro→UC 75

6.4 Taux UC→Euro différenciés de 12 mois observés : X_1^{12} 79

6.5 Taux Euro→UC différenciés de 12 mois observés : X_2^{12} 79

6.6 Corrélations linéaires entre variables temporelles 82

6.7 Projection de taux Euro→UC à 5 ans avec le modèle (M3) 86

7.1 Projection - Lois UC → Euro 97

7.2 Projection - Lois Euro → UC 97

7.3 Graphe du backtesting du modèle final UC→Euro 106

7.4 Exemple d'arbre de décision pour la prédiction de bouchons à l'aide de deux variables 116

7.5 Performances répliquées du portefeuille UC AXA France 128

7.6 Moyenne des performances des 5 supports les plus arbitrés 128

7.7 Variations du CAC 40 128

7.8 Taux OAT 10 ans - (En pourcentage) 128

7.9 Évolution des taux UC→Euro 129

7.10 Évolution des taux UC→Euro différenciés 129

7.11 Évolution des taux Euro→UC 129

7.12 Évolution des taux Euro→UC différenciés 129

7.13 Résidus dynamiques - UC→Euro 130

7.14 Résidus dynamiques - UC→Euro différenciés 130

7.15 Résidus dynamiques - Euro→UC 130

7.16 Résidus dynamiques - Euro→UC différenciés 130