

**Mémoire présenté devant l'UFR de Mathématique et Informatique  
pour l'obtention du Master Mathématiques et Application,  
spécialité Statistique, parcours Actuariat**

le 09/12/2021

Par : Eléna LE DOZE

Titre: Comparaison de modèles de détermination de scénarii de stress tests de crédit internes

Confidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Signature :

*Membres du jury de l'Unistra :*

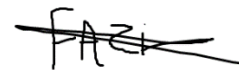
*Entreprise :*

P. ARTZNER  
J. BERARD  
A. COUSIN  
K.-T. EISELE  
M. MAUMY-BERTRAND

*Directeur de mémoire en entreprise:*

Nom : Jean-Baptiste FAZI

Signature :



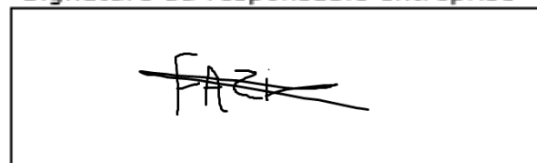
*Invité :*

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents  
actuariels (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)**

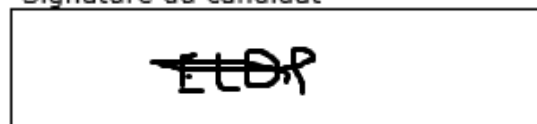
Signature du responsable entreprise



*Secrétariat : Mme Stéphanie Richard*

Signature du candidat

*Bibliothèque : Mme Christine Disdier*



---

**Comparaison de modèles  
de détermination de scénarii  
de *stress tests* de crédit internes**

---

## Résumé

Le risque de crédit constitue une menace majeure pour les organismes bancaires. Les Accords de Bâle imposent aux banques d'adopter un processus de gestion du risque de crédit afin de préserver la stabilité du système financier. Ce processus doit notamment comporter un programme de simulations de crise ; ces simulations sont appelées *stress tests*. Ces scénarii sont adaptés au profil de risque de l'entreprise et doivent lui permettre de minimiser le risque de faillite en cas d'événements extrêmes mais plausibles.

Les scénarii de *stress tests* couramment implémentés au sein des banques, dans le cadre du dispositif de tests de résistance de crédit internes, consistent à valoriser le portefeuille de crédit à partir d'un paramètre stressé correspondant à l'*Expected Shortfall* mesurée sur les distributions historiques des *spreads* du portefeuille. L'objectif de ce mémoire est alors de construire plusieurs modèles alternatifs de détermination de l'*Expected Shortfall* tenant compte de facteurs supplémentaires (queues de distribution épaisses, autocorrélation, dépendance...) afin de sélectionner le modèle s'adaptant le mieux aux conditions réelles des marchés financiers et produisant ainsi les scénarii les plus réalistes.

L'étude des valeurs extrêmes du portefeuille a confirmé la non-normalité des rendements financiers (Mandelbrot, 1960). Les queues de distribution épaisses ont alors été approchées par la loi Pareto généralisée et par un modèle GARCH-GJR(1,1) afin de tenir compte de la présence d'une autocorrélation dans les données. Ces modélisations ont permis d'estimer deux *Expected Shortfalls* paramétriques pour chaque type d'actifs. Cependant, ces mesures ne tiennent pas compte des dépendances entre les actifs. Un dernier modèle a alors été implémenté ayant recours à la théorie des copules afin de considérer l'influence de la variation de chaque catégorie d'actifs sur le portefeuille. Les étapes de simulation et de validation ont démontré une meilleure adéquation de ce dernier modèle pour déterminer les scénarii de *stress tests* du portefeuille d'actifs de crédit.

**Mots Clés :** *Stress test*, risque de crédit, *Expected Shortfall*, *Value at Risk*, indices boursiers, valeurs extrêmes, loi Pareto généralisée, modèle GARCH-GJR(1,1), méthode historique, méthode paramétrique, copule de Gumbel

## Abstract

Credit risk represents a major threat to banking organizations. The Basel Accords require banks to adopt a process to manage credit risk in order to preserve the stability of the financial system. In particular, this process must include a program of stress tests. These scenarios are tailored to the risk profile of the company and should enable it to minimize the risk of bankruptcy in case of extreme, yet plausible, events.

The stress test scenarios commonly implemented in banks, as part of the internal credit stress test device, consist in valuing the credit portfolio based on a stressed parameter corresponding to the Expected Shortfall measured on the historical distributions of portfolio spreads. The aim of this brief is then to construct several alternative models for determining the Expected Shortfall taking into account additional factors (the fat tails of the distribution, autocorrelation, dependence...) in order to select the model which best suits real financial market conditions and thus producing the most realistic scenarios.

The study of the portfolio's extreme values confirmed the non-normality of the financial returns (Mandelbrot, 1960). The fat tails of distribution were then approached by a generalized Pareto law and by a GARCH-GJR(1,1) model in order to consider the presence of autocorrelation in the data. These modelling enabled to estimate two parametric Expected Shortfalls for each type of assets. However, these measures do not take into account dependences between assets. A last model was then implemented using the copula theory in order to consider the influence of the variation of each category of assets on the portfolio. The simulation and validation steps demonstrated a best adequacy of this last model to determine the stress test scenarios of the credit assets portfolio.

<b>Key Words :</b> Stress test, credit risk, Expected Shortfall, Value at Risk, stock index, extreme values, generalized Pareto law, GARCH-GJR(1,1) model, historical method, parametric method, Gumbel copula
--

## Note de synthèse

Le principal risque auquel sont exposées les banques est le risque de crédit. L'ampleur de la crise des *subprimes* en 2008 a mis en exergue les défaillances concernant la maîtrise de ce risque et a également souligné l'impact désastreux d'un événement de crédit extrême sur la stabilité du système financier mondial. Les autorités prudentielles ont alors renforcé les mesures de gestion du risque de crédit à travers les Accords de Bâle à partir de 2010. Les nouvelles obligations imposées aux banques concernent notamment les *stress tests*. Les banques doivent désormais intégrer un programme de *stress tests* interne sur leur portefeuille de crédit dans leur procédure de gestion des risques.

Les tests de résistance, ou *stress tests* en anglais, constituent une exigence réglementaire dont l'objectif est de simuler des conditions de marché extrêmes mais plausibles pour en étudier les conséquences sur les organismes bancaires. Les scénarii de *stress tests* doivent alors permettre de mesurer l'impact d'événements extrêmes sur les fonds propres de l'entreprise, et par conséquent, sur sa santé financière. Les tests de résistance alertent la direction des banques de résultats indésirables et fournissent des indications concernant le capital nécessaire pour absorber les pertes. Les banques peuvent ainsi prévoir en amont un ensemble de mesures afin de réduire les risques identifiés.

Les *stress tests* de crédit internes appartiennent à la famille des *stress tests* micro-économiques : ce sont des tests de résistance réalisés au niveau de l'organisme financier et leurs scénarii sont adaptés au profil de risque de l'établissement. Ils peuvent être :

- Historiques : ils testent le portefeuille actuel dans des situations de crise passées.
- Hypothétiques : ils évaluent la sensibilité du portefeuille à des chocs non constatés dans le passé.

La méthode de détermination des scénarii de *stress tests* de crédit internes hypothétiques n'est pas précisée par les autorités de contrôle. Les banques ont alors la responsabilité de sélectionner des scénarii suffisamment sévères mais néanmoins plausibles pour évaluer la résistance de leur portefeuille. Les scénarii de *stress tests* couramment implémentés consistent à utiliser l'*Expected Shortfall* – c'est-à-dire la moyenne des valeurs supérieures à un quantile donné – des variations des *spreads* de crédit du portefeuille comme paramètre de valorisation stressé. L'écart entre la valeur du portefeuille déterminée avec le paramètre stressé et sa valeur actuelle constitue le résultat du *stress test*. L'*Expected Shortfall* est donc fondamentale dans ce processus. Cette mesure de risque peut être estimée suivant plusieurs méthodes :

- La méthode non-paramétrique : elle consiste en l'observation du comportement historique des rendements de l'actif pour estimer l'*Expected Shortfall*.
- La méthode paramétrique : elle consiste en la modélisation de la loi de distribution des rendements extrêmes et au calcul de l'*Expected Shortfall* à l'aide d'une formule explicite dépendant des paramètres de la loi déterminée ou, à défaut, d'une approche simulateur.

La méthode paramétrique est plus complexe car elle nécessite de déterminer la loi de distribution des rendements financiers, mais elle intègre des facteurs supplémentaires permettant d'être davantage en adéquation avec les variations futures. Cependant, l'approche souvent retenue par les banques est la méthode non-paramétrique car elle présente l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèses préalables et d'être plus simple à implémenter. Mais ce modèle ne tient pas compte des queues de distribution épaisses, de l'autocorrélation ou des dépendances ; il peut, par conséquent, sous-estimer le risque.

L'objectif de cette étude est alors de construire différents modèles de calcul de l'*Expected Shortfall* pour déterminer des scénarii de *stress tests* de crédit tenant compte de facteurs supplémentaires (queues de distribution épaisses, volatilité conditionnelle, dépendance...) afin de sélectionner celui s'adaptant le mieux aux conditions réelles des marchés financiers et affichant ainsi une plus grande prudence.

Dans une première partie, les queues de distribution des données étudiées seront modélisées grâce à la théorie des valeurs extrêmes. Dans une seconde partie, une modélisation des queues de distribution tenant compte de la volatilité conditionnelle sera réalisée. Ces deux modèles permettront ensuite de déterminer des scénarii de *stress tests* suivant deux nouvelles approches, en plus de l'approche historique. Enfin un quatrième modèle sera construit afin de tenir compte de la dépendance entre les actifs, et de nouveaux scénarii de stress tests seront alors calculés.

La base de données considérée dans cette étude est composée des log-rendements quotidiens des indices de crédit *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials* du 01/12/2002 au 01/06/2021. Les valeurs composant ces indices sont les *spreads bids* (c'est-à-dire la prime de risque que demande l'acheteur lors de l'achat de l'actif) à la clôture quotidienne des marchés. Une hausse du *spread* traduit une augmentation du risque de crédit.

## MODELISATION DES QUEUES DE DISTRIBUTION AVEC LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES

La théorie des valeurs extrêmes constitue un outil potentiel pour la construction d'un programme de *stress tests*. Cette théorie propose de créer des scénarii de crise à partir de l'approximation de la loi des extrema d'une ou plusieurs séries financières représentatives du portefeuille étudié.

Une première analyse statistique de la base de données permet d'anticiper la forme des queues de distribution des indices étudiés. Les mesures du *skewness* et du *kurtosis*, ainsi que l'implémentation du test de Jarque-Bera, vérifiant si le *skewness* et le *kurtosis* de la distribution sont égaux à ceux d'une distribution normale, démontrent la non-normalité des distributions des log-rendements quotidiens. Les log-rendements semblent en effet présenter une queue de distribution épaisse.

Ces statistiques descriptives soulignent l'importance d'étudier la distribution du portefeuille de crédit afin de mieux en appréhender le risque. La théorie des valeurs extrêmes va ainsi permettre d'analyser les queues de distribution et donc de mieux modéliser les pertes extrêmes.

La modélisation des queues de distribution peut être réalisée à partir de l'approche par dépassement de seuil, notée POT (*Peak Over Threshold* en anglais), proposée par Pickands (1975). L'objectif de cette méthode est d'approcher la loi des excès au-delà d'un seuil  $u$  par une distribution Pareto généralisée.

La loi Pareto généralisée s'exprime de la manière suivante :

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec  $y \geq 0$  si  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$  pour  $\xi < 0$ .

L'utilisation de cette méthode implique alors la détermination d'un seuil  $u$  et l'estimation des paramètres de queue  $\xi$  et de dispersion  $\beta$  de la loi.

Les estimateurs  $\hat{\xi}$  et  $\hat{\beta}$  des paramètres  $\xi$  et  $\beta$  peuvent être estimés à partir de la méthode du maximum de log-vraisemblance (Dowd, 2005).

Quant au seuil des valeurs extrêmes  $u$ , il est déterminé grâce à la méthode du *mean excess plot* qui est définie à partir de la fonction moyenne des excès empiriques. De plus, Longin (1998) et Gavin (2000) précisent que la valeur du seuil doit impérativement respecter l'équilibre biais/variance pour assurer la convergence de l'estimateur de la loi Pareto généralisée. Ils recommandent alors d'adopter une part de valeurs extrêmes représentant environ 10% des données composant les queues de distribution.

Les estimations ont été réalisées à la date du 01/04/2020 à partir des log-variations quotidiennes des indices du 01/03/2010 au 31/03/2020.

Les résultats obtenus pour la part de valeurs extrêmes sont environ de 10% pour chaque indice ; l'équilibre biais/variance est donc respecté. De plus, l'estimation du paramètre  $\xi$  est positive pour chacun des indices boursiers étudiés. Cela confirme que ces indices ont une distribution à queue lourde à droite. La probabilité d'occurrence des pertes dues à un écartement important des *spreads* de crédit est donc plus élevée que ce que prévoit initialement la distribution gaussienne. L'hypothèse de normalité des distributions supposée dans de nombreux modèles entraîne donc une sous-estimation des pertes potentielles.

Il est possible de contrôler l'adéquation des lois Pareto généralisées estimées avec la distribution des indices de crédit grâce au test d'Anderson-Darling. Les résultats obtenus à l'issue de ce test ont confirmé l'adéquation des lois avec les distributions des indices étudiés.

Cependant, cette modélisation suppose que les variances des indices de crédit sont constantes dans le temps. En pratique, il est rare que ces hypothèses soient vérifiées sur les marchés financiers. Les données sont souvent hétéroscédastiques. Ainsi, ce modèle risque de produire des résultats non-satisfaisants, surtout en période de crise et donc de forte volatilité. C'est pourquoi il est intéressant de considérer la volatilité conditionnelle dans le modèle de détermination des scénarii de *stress tests*.

## **MODELISATION DES QUEUES DE DISTRIBUTION AVEC PRISE EN COMPTE DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE**

Les modèles tenant compte de la volatilité conditionnelle parviennent à capturer des effets sous-jacents aux séries temporelles financières que ne considèrent pas les modèles admettant une hypothèse d'homoscédasticité. Leur utilisation apporte donc davantage de réalisme aux scénarii de *stress tests*.

La présence d'effets de volatilité conditionnelle dans les indices de crédit étudiés est confirmée grâce au test des multiplicateurs de Lagrange. De plus, la mesure des indicateurs AIC et BIC sur plusieurs types de modèles de volatilité conditionnelle appliqués aux données a permis de sélectionner le modèle le plus adéquat. C'est le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) qui s'est avéré être le plus adapté à l'étude.

Le modèle GARCH-GJR(1,1) (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity* – Glosten, Jagannathan, Runkle) tient compte de la dynamique de la volatilité au cours du temps et également

du caractère asymétrique de la distribution de la variable aléatoire. Cependant, le modèle GARCH-GJR n'est que très rarement utilisé pour modéliser un jeu de données. Les données sont généralement modélisées par un modèle ARMA dont l'innovation est elle-même modélisée par un modèle GARCH-GJR. C'est donc le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) qui est considéré dans cette étude, il s'exprime de la manière suivante, avec  $X_t$  une série temporelle vérifiant ce modèle :

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \alpha_2 \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_t &= z_t \sqrt{\sigma_t^2} \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_t$  est l'innovation du modèle ;  $(z_t)_t$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites, et correspond aux résidus standardisés du modèle approchés par une loi Pareto généralisée dans cette étude ;  $\alpha_0, \alpha_1,$  et  $\alpha_2$  sont les paramètres du modèle ARMA(1,1) ;  $\sigma_t^2$  est la volatilité conditionnelle ;  $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$  et  $\rho$  sont les paramètres du modèle GARCH-GJR(1,1).

Les paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) sont déterminés grâce à la méthode du quasi maximum de vraisemblance. Les paramètres estimés le 01/04/2020, à partir des données quotidiennes du 31/03/2010 au 31/03/2020, pour chacun des indices, sont tous non-nuls. Cela confirme l'importance de tenir compte de la volatilité passée et de l'asymétrie de la distribution.

L'estimation des paramètres du modèle permet de déterminer la suite de variables aléatoires  $(z_t)_t$ . Cette dernière correspond aux résidus standardisés obtenus en retranchant aux données la moyenne conditionnelle et en les divisant par la volatilité conditionnelle. Ces résidus standardisés sont ensuite approchés par une loi Pareto généralisée de la même manière que précédemment. Cette procédure est réalisée pour chacune des distributions étudiées.

Les estimations ont été réalisées à la date du 01/04/2020 à partir des log-variations quotidiennes des *spreads* de crédit étudiés du 31/03/2010 au 31/03/2020.

Les paramètres de queue obtenus pour les lois Pareto généralisées estimées à partir des résidus standardisés sont également positifs avec ce modèle. De plus, ils sont légèrement supérieurs à ceux estimés avec le modèle précédent, les queues modélisées seront donc plus épaisses et la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes sera donc plus importante.

L'adéquation des lois avec les résidus standardisés est validée grâce au test d'Anderson-Darling.

Des scénarii de *stress tests* de crédit interne peuvent maintenant être déterminés à partir des deux modélisations réalisées.

## **ESTIMATION DES SCENARII DE STRESS TESTS AVEC LES MESURES DE RISQUE**

Les scénarii de *stress tests* de crédit internes sont souvent élaborés à partir des mesures de risque telles que la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall*. Le modèle le plus courant se base sur le calcul de l'*Expected Shortfall* appliquée aux rendements historiques. La valeur obtenue pour cette *Expected Shortfall* est utilisée comme paramètre stressé pour valoriser le portefeuille de crédit. La différence entre la valorisation avec le *spread* de crédit actuel et la valorisation avec le *spread* de crédit stressé (l'*Expected Shortfall*) constitue le résultat du *stress test*. L'*Expected Shortfall* est donc fondamentale dans ce processus et la bonne qualité de son estimation est primordiale. L'objectif est alors de construire différents modèles de calcul de l'*Expected Shortfall* afin d'identifier le plus adapté au portefeuille de crédit et ainsi d'implémenter des scénarii de *stress tests* davantage réalistes.



Les trois approches suivantes sont comparées afin de sélectionner la plus performante :

- Une approche non-paramétrique à partir de données historiques : La *Value at Risk* est déterminée grâce à la formule  $VaR_\alpha = q(\alpha)$  directement à partir des données historiques. L'*Expected Shortfall* est ensuite estimée en calculant la moyenne des données historiques supérieures à la  $VaR_\alpha$ .
- Une approche paramétrique inconditionnelle basée sur la loi Pareto généralisée : Le calcul de *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* se base sur le quantile de la loi Pareto généralisée. Ces mesures de risque sont donc estimées grâce aux formules :

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u}(\alpha) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1-\widehat{\xi}} + \frac{\widehat{\beta} + \widehat{\xi}u}{1-\widehat{\xi}}$$

où  $N_u$  est le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$ ,  $N$  est le nombre total d'observations et,  $\widehat{\beta}$  et  $\widehat{\xi}$  sont les estimateurs des paramètres de la distribution Pareto généralisée.

- Une approche paramétrique conditionnelle basée sur la loi Pareto généralisée : L'objectif est de tenir compte de la dynamique de la volatilité dans le calcul de la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall*. Les pertes potentielles du portefeuille sont donc estimées grâce aux expressions suivantes :

$$VaR_\alpha^{t+1|t}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{VaR}_\alpha(Z) \quad \text{et} \quad ES_\alpha^{t+1|t}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{ES}_\alpha(Z)$$

où :

- $\widehat{VaR}_\alpha(Z)$  et  $\widehat{ES}_\alpha(Z)$  sont les estimateurs de la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* de la loi Pareto généralisée obtenues à partir des résidus standardisés
- $\widehat{\mu}_{t+1|t}$  est la moyenne conditionnelle estimée grâce au modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)
- $\widehat{\sigma}_{t+1|t}$  est la volatilité conditionnelle estimée à partir du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1).

Les scénarii de *stress tests* sont mis à jour et sont recalculés chaque début de mois à partir de 10 ans de données historiques quotidiennes. La valeur obtenue à l'issue de la procédure est alors conservée pour le mois en cours.

Le modèle tenant compte de la volatilité conditionnelle permet d'estimer des mesures de risques quotidiennes grâce aux formules de récurrence de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall*. Cependant, le choix a été fait de n'utiliser qu'une valeur de paramètre stressée pour le mois, comme pour le modèle historique et le modèle inconditionnelle. C'est alors la mesure la plus prudente obtenue sur le mois qui est conservée.

Dans le tableau ci-dessous, les mesures ont été estimées à la date du 01/04/2020 à partir des données du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes pour chaque indice. Les mesures de risque ont été mesurées lors d'une période de crise (ici la crise générée par la pandémie de Covid-19) afin de mieux observer la réaction des modèles en cas de mouvements importants des marchés.

	<i>Itraxx Europe Main</i>		<i>Itraxx Xover</i>		<i>Itraxx Europe Senior Financials</i>	
	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
<b>Modèle historique</b>	0,05	0,10	0,09	0,11	0,06	0,11
<b>Modèle Pareto généralisé</b>	0,06	0,11	0,13	0,14	0,10	0,15
<b>Modèle GARCH-GJR(1,1)</b>	0,10	0,14	0,15	0,17	0,12	0,17

Tableau 1 – Les mesures de risque obtenues pour les trois indices étudiés à partir des trois modèles

Les mesures de risque du modèle historique sont les plus faibles et risquent donc de manquer de prudence en sous-estimant les pertes possibles. Le modèle le plus prudent en période de crise est celui tenant compte de la volatilité conditionnelle. Cela s'explique par le fait que, lors des crises boursières, la volatilité des indices est plus élevée.

Cependant, pour déterminer le modèle le plus réaliste et donc le plus satisfaisant, il est indispensable de mettre en œuvre une procédure de validation des modèles (*backtesting* en anglais).

Selon Christoffersen (1998), une prévision de la *Value at Risk* est valide si et seulement si la séquence des violations de la *VaR* satisfait l'hypothèse de couverture non-conditionnelle (vérifiée avec le test de Kupiec) et l'hypothèse d'indépendance des violations (contrôlée avec le test de Christoffersen).

Quant au *backtesting* de l'*Expected Shortfall*, il est compliqué à mettre en œuvre ; cela représente un des défauts majeurs de cette mesure. Cependant, Kourouma et al. (2012) sont parvenus à proposer une méthode pour examiner l'efficacité de l'estimateur de l'*Expected Shortfall*. Elle consiste à évaluer la statistique suivante :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (ES_i - X_i) \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}$$

où  $X_i$  est la perte réelle au jour  $i$ ,  $ES_i$  et  $VaR_i$  sont les mesures de risque estimées au jour  $i$ .

L'estimateur de l'*Expected Shortfall* est précis si  $V$  est proche de 0.

Le *backtesting* a été mené sur la période du 01/01/2010 au 01/01/2013, qui est une période de forte agitation des marchés du crédit. Les mesures de risque étant estimées à une fréquence mensuelle, cela représente un total de 36 valeurs pour chaque indice et pour chaque mesure de risque. Chacune de ces 36 valeurs est comparées aux variations quotidiennes du mois sur lequel elle est utilisée.

A l'issue de ces trois procédures de *backtesting*, le modèle le plus fiable et estimant les pertes les plus proches de la réalité s'est avéré être le modèle tenant compte de la volatilité conditionnelle. Le modèle le moins réaliste est le modèle historique.

Cependant, le portefeuille étudié étant composé de plusieurs types d'actifs, il est également important de tenir compte des dépendances entre les indices.

## **PRISE EN COMPTE DE LA DEPENDANCE ENTRE LES INDICES GRACE AUX COPULES**

Pour mesurer le risque d'un portefeuille composé de plusieurs actifs financiers, il est nécessaire d'étudier le comportement de chacun des actifs du portefeuille ainsi que de leurs distributions conjointes. Les copules archimédiennes sont un outil intéressant pour modéliser la dépendance entre les variables aléatoires. Elles ont l'avantage de permettre une grande flexibilité dans la construction de la structure de dépendance. Leur utilisation permet de prendre en compte les effets observés dans les distributions marginales et multivariées des rendements financiers. Les copules archimédiennes les plus répandues sont les copules de Clayton, Gumbel et Frank.

L'étude des copules débute par la transformation des distributions marginales en variables uniformes et l'estimation du paramètre de la copule. Ces étapes sont réalisées grâce à la méthode CML (*Canonical Maximum Likelihood*). Dans cette étude, les variables uniformes sont déterminées à partir des trois lois Pareto généralisées modélisant les log-variations des indices ; et le paramètre  $\theta$  des copules de Clayton, Gumbel et Frank est déterminé avec la formule suivante :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^n \ln [c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_d^t; \theta)]$$

où  $\{(u_1^t, \dots, u_d^t)\}_{t=1, \dots, n}$  sont les variables uniformes obtenues précédemment.

Après ces deux étapes, il s'agit de sélectionner la copule la plus adaptée à la structure de dépendance des données. Genest, Quessy et Rémillard (2008) ont proposé un test d'adéquation basé sur un processus empirique permettant de sélectionner la copule.

Dans le cadre des log-rendements des indices de crédit, c'est la copule de Gumbel qui s'avère décrire le mieux la structure de dépendance. Cette copule est asymétrique et modélise une dépendance plus prononcée dans la queue de distribution supérieure. Cela signifie que les dépendances exhibées dans les données étudiées se caractérisent avant tout par une dépendance dans les queues de distribution supérieures et donc lors d'écartements extrêmes des *spreads* de crédit.

A la date du 01/04/2020, la copule retenue est donc la copule de Gumbel trivariée avec un paramètre égal à 1,91.

L'objectif est maintenant d'obtenir un nouvel échantillon de la distribution de chaque indice étudié à partir de la structure de dépendance déterminée. Pour cela, des simulations utilisant les distributions univariées conditionnelles ont été réalisées. Les simulations sont exécutées un million de fois, permettant ainsi d'obtenir une distribution suffisamment importante des log-variations de chaque indice.

Avant de procéder à l'estimation des mesures de risque, il est nécessaire d'agréger les trois distributions obtenues. Le poids de chacun des indices dans le portefeuille étant connu, le risque que ceux-ci représentent pour l'entreprise est également connu. Ces poids étant considérés constants dans le temps, il est possible d'effectuer la somme des simulations de chaque indice pondéré par leurs poids pour obtenir une seule distribution pour le portefeuille complet.

Comme pour les modèles précédents, les mesures de risques sont déterminées à partir des log-variations quotidiennes des indices. De plus, la copule de Gumbel et les lois Pareto généralisées modélisant les marginales sont recalibrées chaque début de mois à partir de 10 ans d'historique de données. L'*Expected Shortfall* est donc recalculée tous les mois et conservée pour le mois en cours, permettant ainsi de déterminer un scénario de *stress tests* mensuel.

Les estimations présentées dans le tableau ci-dessous ont été réalisées à la même date que celle choisie pour chaque indice considéré individuellement et avec le même historique de données.

	<i>Value at Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>
<b>Copule x Pareto généralisée</b>	0,12	0,17

Tableau 2 - Les mesures de risque obtenues à partir du modèle de copules

Ces résultats montrent que le modèle de copule estime des mesures de risque plus importantes que les modèles historiques ou Pareto généralisée déterminés précédemment sur les indices individuels. Par ailleurs, les valeurs obtenues avec le modèle de copule sont cohérentes avec celles calculées avec le modèle GARCH-GJR(1,1) tenant compte de la volatilité conditionnelle ; les résultats sont du même ordre de grandeur. Les *spreads* de crédit ne semblent donc pas être largement amplifiés lorsque la dépendance entre les indices est prise en compte.

Il est à nouveau indispensable de mettre en place une procédure de *backtesting* pour contrôler la fiabilité du modèle. Le *backtesting* réalisé s'appuie sur la même méthodologie et la même période

que considérées précédemment dans cette étude. Les résultats de l'étape de validation ont permis de conclure sur la fiabilité effective du modèle de copule. Les estimations de ce modèle sont en adéquation avec les valeurs réelles observées du portefeuille étudié.

Le modèle construit à partir de la copule de Gumbel tient compte des dépendances entre les actifs du portefeuille. Il produit ainsi des résultats plus réalistes que les autres modèles pour l'ensemble du portefeuille. Ce modèle est donc conservé pour déterminer les scénarii de *stress tests* de crédit internes.

## **CONCLUSION**

Cette étude est en adéquation avec la littérature (Mandelbrot, 1960) car elle met en évidence la non-normalité des distributions des indices de crédit et l'importance de considérer les valeurs extrêmes pour étudier le risque de crédit. La présence d'autocorrélation au sein des indices et de dépendance entre les actifs a également été soulignée. L'ensemble de ces éléments a alors amené à la conclusion de la défaillance du modèle historique de *Expected Shortfall* pour déterminer les *stress tests* de crédit internes. Ce modèle ne permet pas d'anticiper correctement les événements extrêmes et donc de maîtriser convenablement les pertes.

Le modèle de détermination des scénarii de stress tests de crédit internes construit à partir de la théorie des copules s'avère répondre davantage aux exigences de la réglementation de Bâle que le modèle historique couramment implémenté au sein des banques. En effet, les scénarii estimés reflètent plus fidèlement la réalité. En adoptant cette méthodologie, les processus de stress tests de crédit internes permettront de mieux appréhender les périodes de crise et donc de mieux anticiper les pertes.

## Executive summary

The main risk to which banks are exposed is credit risk. The magnitude of the subprime mortgage crisis in 2008 highlighted the failings in controlling this risk and also emphasized the disastrous impact of an extreme credit event on the stability of the global financial system. The prudential authorities then stepped up credit risk management measures through the Basel Accords from 2010. The new obligations imposed on banks relate in particular to stress tests. Banks must now integrate an internal stress tests program on their credit portfolio into their risk management procedure.

Stress testing is a regulatory requirement whose objective is to simulate extreme but plausible market conditions to study the consequences for banking organizations. The stress test scenarios must then enable to measure the impact of extreme events on the company's equity, and therefore on its financial health. Stress tests alert bank management to undesirable results and provide indications regarding the capital required to absorb losses. Banks can thus plan an upstream set of measures to reduce the risks identified.

Internal credit stress tests belong to the family of microeconomic stress tests : they are stress tests carried out at the level of the financial organization and their scenarios are adapted to the risk profile of the institution. They can be :

- Historical : they test the current portfolio in the light of past crisis situations.
- Hypothetical : they assess the sensitivity of the portfolio to shocks not observed in the past.

The method for determining hypothetical internal credit stress test scenarios is not specified by the supervisory authorities. Banks are then responsible for selecting sufficiently severe but yet plausible scenarios to assess the resilience of their portfolio. Commonly implemented stress test scenarios consist in using the Expected Shortfall - i.e. the average of values greater than a given quantile - of portfolio credit spreads variations as a stressed valuation parameter. The difference between the value of the portfolio determined with the stressed parameter and its current value constitutes the result of the stress test. The Expected Shortfall is therefore fundamental in this process. This risk measure can be estimated using several methods :

- The non-parametric method : it consists in observing the historical behavior of asset returns to estimate the Expected Shortfall.
- The parametric method : it consists in modeling the distribution law of extreme returns and in calculating the Expected Shortfall using an explicit formula depending on the parameters of the determined law or, failing that, using a simulatory approach.

The parametric method is more complex because it requires to determine the distribution law of financial returns, but it incorporates additional factors to be more in line with future variations. However, the approach often adopted by banks is the non-parametric method because it has the advantage of not requiring prior assumptions and of being easier to implement. But this model does not take into account the thick-tailed distributions, the autocorrelation or the dependencies ; it may therefore underestimate the risk.

The objective of this study is then to build different models for calculating the Expected Shortfall to determine credit stress test scenarios taking into account additional factors (thick-tailed distributions, autocorrelation, dependence, etc.) in order to select the one that best suits the real financial market conditions and thus shows a greater prudence.

In the first part, the distribution tails of the studied data will be modeled using the extreme values theory. In a second part, a modeling of the distribution tails considering the conditional volatility will be carried out. These two models will then enable to determine stress test scenarios using two new approaches, in addition to the historical approach. Finally, a fourth model will be built to take into account the dependence between assets, and new stress test scenarios will then be calculated.

The database considered in this study is made up of the daily log returns of the Itraxx Europe Main, Itraxx Xover, and Itraxx Europe Senior Financials credit indices from 12/01/2002 to 06/01/2021. The values composing these indices are the bid spreads (that is the risk premium the buyer requires when buying the asset) at the daily market close. An increase in the spread reflects an increase in credit risk.

## **MODELING OF THE TAILS OF THE DISTRIBUTIONS WITH THE EXTREME VALUES THEORY**

Extreme value theory is a potential tool for building a stress tests program. This theory proposes to create crisis scenarios from the approximation of the extrema law of one or more financial series representative of the portfolio studied.

A first statistical analysis of the database enables to anticipate the shape of the tail distributions of the indexes studied. The measurements of skewness and kurtosis, as well as the implementation of the Jarque-Bera test, verifying whether the skewness and kurtosis of the distribution are equal to those of a normal distribution, confirm the non-normality of the distributions of the daily log returns. Indeed, the log yields seem to show a thick-tailed distribution.

These descriptive statistics underline the importance of studying the distribution of the loan portfolio in order to better understand the risk. The theory of extreme values will thus enable to analyze the tails of the distribution and therefore to better model the extreme losses.

The modeling of the tail distributions can be carried out using the Peak Over Threshold approach, denoted POT, proposed by Pickands (1975). The objective of this method is to approach the law of excesses beyond a threshold  $u$  by a generalized Pareto distribution.

The generalized Pareto law is expressed as follows :

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

with  $y \geq 0$  if  $\xi \geq 0$  and  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$  for  $\xi < 0$ .

The use of this method then involves determining a threshold  $u$  and estimating the tail  $\xi$  and dispersion  $\beta$  parameters of the law.

The estimators  $\hat{\xi}$  and  $\hat{\beta}$  of the parameters  $\xi$  and  $\beta$  can be estimated using the maximum log-likelihood method (Dowd, 2005).

Regarding the threshold of the extreme values  $u$ , it is determined using the mean excess plot method which is defined from the mean function of the empirical excesses. In addition, Longin (1998) and Gavin (2000) specify that the threshold value must imperatively respect the bias/variance balance to ensure the convergence of the estimator of the generalized Pareto law. Therefore, they

recommend adopting a share of extreme values representing about 10% of the data composing the distribution tails.

Estimates were made as of 04/01/2020 based on daily log-variations of the indices from 03/01/2010 to 03/31/2020.

The results obtained for the share of extreme values are approximately 10% for each index ; so the bias/variance balance is respected. In addition, the estimate of the parameter  $\xi$  is positive for each of the indices studied. This confirms that these indices have a heavy right tail of the distribution. The probability of occurrence of losses due to a large widening of credit spreads is therefore higher than initially predicted by the Gaussian distribution. The assumption of normality of the distributions assumed in many models therefore leads to an underestimation of the potential losses.

It is possible to check the adequacy of the estimated generalized Pareto laws with the distribution of credit indexes using the Anderson-Darling test. The results obtained at the end of this test confirmed the adequacy of the laws with the distributions of the indexes studied.

However, this modeling assumes that the variances of the credit indices are constant over time. In practice, it is rare that these assumptions are verified in the financial markets. The data are often heteroscedastic. Thus, this model risks producing unsatisfactory results, especially in times of crisis and therefore of high volatility. This is why it is interesting to consider conditional volatility in the model for determining stress test scenarios.

## **MODELING OF DISTRIBUTION TAILS TAKING INTO ACCOUNT CONDITIONAL VOLATILITY**

Models considering conditional volatility succeed in capturing effects underlying financial time series that are not considered by models using a homoscedasticity assumption. Therefore, their use brings more realism to stress test scenarios.

The presence of conditional volatility effects in the credit indexes studied is confirmed using the Lagrange multiplier test. In addition, the measurement of the AIC and BIC indicators on several types of conditional volatility models applied to the data enabled to select the most suitable model. The ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) model proved to be the most suitable for the study.

The GARCH-GJR (1,1) (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity - Glosten, Jagannathan, Runkle) model considers the dynamics of volatility over time and also the asymmetric nature of the distribution of the random variable. However, the GARCH-GJR model is only very rarely used to model a dataset. The data are generally modeled by an ARMA model, the innovation of which is modeled by a GARCH-GJR model. Therefore, it is the ARMA (1,1)-GARCH-GJR(1,1) model which is considered in this study, it is expressed as follows, with  $X_t$  a time series verifying this model :

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2$$

where  $\varepsilon_t$  is the innovation of the model ;  $(z_t)_t$  is a sequence of independent random variables, identically distributed, centered and reduced, and corresponds to the standardized residuals of the model approximated by a generalized Pareto law in this study ;  $\alpha_0, \alpha_1,$  and  $\alpha_2$  are the parameters of the ARMA(1,1) model ;  $\sigma_t^2$  is the conditional volatility ;  $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$  and  $\rho$  are the parameters of the GARCH-GJR(1,1) model.

The parameters of the ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) model are determined using the quasi-maximum likelihood method. The parameters estimated on 04/01/2020, based on daily data from 03/31/2010 to 03/31/2020, for each of the indexes, are all non-zero. This confirms the importance of taking into account past volatility and distribution skewness.

The estimation of the parameters of the model enables to determine the sequence of random variables  $(z_t)_t$ . The latter correspond to the standardized residuals obtained by subtracting the conditional mean from the data and dividing them by the conditional volatility. These standardized residuals are then approximated by a generalized Pareto law in the same way as before. This procedure is carried out for each of the studied distributions.

Estimates were made as of 04/01/2020 based on daily log-variations in credit spreads studied from 03/31/2010 to 03/31/2020.

The tail parameters obtained for the generalized Pareto distributions estimated from the standardized residuals are also positive with this model. In addition, they are slightly higher than those estimated with the previous model. The modeled tails will therefore be thicker and the probability of occurrence of extreme losses will thus be greater.

The suitability of the distributions with the standardized residuals is validated using the Anderson-Darling test.

Internal credit stress test scenarios can now be determined from the two models carried out.

## ESTIMATE OF STRESS TEST SCENARIOS WITH RISK MEASURES

Internal credit stress test scenarios are often built from risk metrics such as Value at Risk and Expected Shortfall. The most common model is based on the calculation of the Expected Shortfall applied to historical returns. The value obtained for this Expected Shortfall is used as a stressed parameter to value the credit portfolio. The difference between the valuation with the current credit spread and the valuation with the stressed credit spread (the Expected Shortfall) is the result of the stress test. The Expected Shortfall is therefore fundamental in this process and the good quality of its estimate is essential. The objective is then to build different models for calculating the Expected Shortfall in order to identify the most suitable for the credit portfolio and thus to implement more realistic stress test scenarios.

The following three approaches are compared in order to select the most efficient one :

- A non-parametric approach from historical data : The Value at Risk is determined using the formula  $VaR_\alpha = q(\alpha)$  directly from historical data. The Expected Shortfall is then estimated by calculating the average of historical data higher than the  $VaR_\alpha$ .
- An unconditional parametric approach based on the generalized Pareto law : The calculation of Value at Risk and the Expected Shortfall is based on the quantile of the generalized Pareto law. These risk measures are therefore estimated using the formulas :

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad \text{and} \quad \widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}$$

where  $N_u$  is the number of observations above the threshold  $u$ ,  $N$  is the total number of observations and,  $\hat{\beta}$  and  $\hat{\xi}$  are the estimators of the generalized Pareto distribution parameters.

- A conditional parametric approach based on the generalized Pareto law : The objective is to take into account the dynamics of volatility in the calculation of the Value at Risk and the Expected



Shortfall. The potential losses of the portfolio are therefore estimated using the following expressions :

$$VaR_{\alpha}^{\widehat{t+1}|t}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{VaR}_{\alpha}(Z) \quad \text{and} \quad ES_{\alpha}^{\widehat{t+1}|t}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{ES}_{\alpha}(Z)$$

where :

- $\widehat{VaR}_{\alpha}(Z)$  and  $\widehat{ES}_{\alpha}(Z)$  are the estimators of the Value at Risk and the Expected Shortfall of the generalized Pareto law obtained from the standardized residuals
- $\widehat{\mu}_{t+1|t}$  is the conditional mean estimated using the ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) model
- $\widehat{\sigma}_{t+1|t}$  is the conditional volatility estimated from the ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) model

The stress test scenarios are updated and recalculated at the beginning of each month based on 10 years of daily historical data. The value obtained at the end of the procedure is then kept for the current month.

The conditional volatility model enables to estimate daily risk measures using the recurrence formulas of Value at Risk and Expected Shortfall. However, the choice was made to only use a stressed parameter value for the month, as for the historical model and the unconditional model. It is then the most conservative measurement obtained over the month that is kept.

In the table below, the measurements have been estimated as of 04/01/2020 from data from 03/31/2010 to 03/31/2020, thus constituting a history of 2523 daily log-variations for each index. The risk measures were measured during a period of crisis (here the crisis generated by the Covid-19 pandemic) in order to better observe the reaction of models in case of significant market movements.

	<i>Itraxx Europe Main</i>		<i>Itraxx Xover</i>		<i>Itraxx Europe Senior Financials</i>	
	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
<b>Modèle historique</b>	0,05	0,10	0,09	0,11	0,06	0,11
<b>Modèle Pareto généralisé</b>	0,06	0,11	0,13	0,14	0,10	0,15
<b>Modèle GARCH-GJR(1,1)</b>	0,10	0,14	0,15	0,17	0,12	0,17

Table 1 - Risk measures obtained for the three indexes studied from the three models

The risk measures of the historical model are the weakest and may therefore be imprudent by underestimating the possible losses. The most cautious model in times of crisis is the one taking into account conditional volatility. This is because, during stock market crises, indexes volatility is higher.

However, to determine the most realistic and therefore the most satisfactory model, it is essential to implement a procedure of backtesting.

According to Christoffersen (1998), a Value at Risk forecast is valid if and only if the sequence of VaR violations satisfies the unconditional hedging hypothesis (verified with the Kupiec test) and the independence of violations hypothesis (checked with the Christoffersen test).

Regarding the backtesting of the Expected Shortfall, the latter is complicated to implement ; this represents one of the major deficiencies of this measure. However, Kourouma et al. (2012) succeeded in proposing a method to examine the efficiency of the Expected Shortfall estimator. It consists in valuating the following statistic :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (ES_i - X_i) \mathbb{1}_{X_i > VaR_i}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > VaR_i}}$$

where  $X_i$  is the actual loss on day  $i$ ,  $ES_i$  and  $VaR_i$  are the estimated risk measures on day  $i$ .

The Expected Shortfall estimator is accurate if  $V$  is close to 0.

The backtesting was carried out over the period from 01/01/2010 to 01/01/2013, which is a period of strong turmoil in the credit markets. As the risk measures are estimated on a monthly basis, this represents a total of 36 values for each index and for each risk measure. Each of these 36 values is compared to the daily variations of the month during it is used.

At the end of these three backtesting procedures, the most reliable model and the model estimating the closest to reality losses turned out to be the model considering the conditional volatility. The least realistic and riskiest model is the historical model.

However, since the portfolio studied is made up of several types of assets, it is also important to take into account the dependencies between the indices.

### **CONSIDERING DEPENDENCE BETWEEN INDEXES THANKS TO COPULES**

To measure the risk of a portfolio made up of several financial assets, it is necessary to study the behavior of each of the assets in the portfolio as well as their joint distributions. Archimedean copulas are an interesting tool for modeling the dependence between random variables. They have the advantage of allowing great flexibility in the construction of the dependency structure. Their use enables to consider the effects observed in the marginal and multivariate distributions of financial returns. The most common Archimedean copulas are the Clayton, Gumbel and Frank copulas.

The study of copula begins with transforming marginal distributions into uniform variables and estimating the parameter of the copula. These steps are carried out using the CML (Canonical Maximum Likelihood) method. In this study, the uniform variables are determined from the three generalized Pareto laws modeling the log-variations of the indices; and the parameter  $\theta$  of the Clayton, Gumbel and Frank copulas is determined with the following formula :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{t=1}^n \ln [c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_d^t ; \theta)]$$

where  $\{(u_1^t, \dots, u_d^t)\}_{t=1, \dots, n}$  are the uniform variables obtained previously.

After these two steps, the most suitable copula for the data dependency structure must be selected. Genest, Quessy and Rémillard (2008) proposed a fit test based on an empirical process for selecting the copula.

In the frame of log-returns of credit indices, it is the Gumbel's copula that turns out to best describe the dependency structure. This copula is asymmetric and models a more pronounced dependence in the upper distribution queue. This means that the dependencies exposed in the studied data are above all characterized by a dependence in the upper distribution tails and therefore during extreme spreads in credit spreads.

As of 04/01/2020, the copula selected is therefore the trivariate Gumbel copula with a parameter equal to 1.91.

The objective is now to obtain a new sample of the distribution of each index studied from the determined dependency structure. For this, simulations using conditional univariate distributions are carried out. The simulations are run a million times, thus enabling to obtain a sufficiently large distribution of the log-variations of each index.

Before proceeding with the estimation of the risk measures, it is necessary to aggregate the three distributions obtained. Since the weight of each index in the portfolio is known, the risk they

represent for the company is also known. Since these weights are considered constant over time, it is possible to perform the weighted sum of the simulations of each index by their weights to obtain a single distribution for the entire portfolio.

As with the previous models, the risk measures are determined from the daily log-variations of the indices. In addition, Gumbel’s copula and generalized Pareto laws modeling the marginal distributions are recalibrated at the start of each month based on 10 years of data history. The Expected Shortfall is therefore recalculated every month and kept for the current month, thus making it possible to determine a monthly stress test scenario.

The estimates presented in the table below were made on the same date as the one chosen for each index individually considered and with the same data history.

	<i>Value at Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>
<b>Copule x Pareto généralisée</b>	0,12	0,17

Table 2 - Risk measures obtained from the copula model

These results show that the copula model estimates bigger risk measures than the historical or generalized Pareto models previously determined on the individual indices.

Moreover, the values obtained with the copula model are consistent with those calculated with the GARCH-GJR(1,1) model considering the conditional volatility ; the results are of the same order of magnitude. Credit spreads therefore do not seem to be greatly amplified when the dependence between indices is considered.

It is again essential to set up a backtesting procedure to check the reliability of the model. The backtesting carried out is based on the same methodology and the same period as previously considered in this study. The results of the backtesting enable to conclude on the effective reliability of the copula model. The estimates of this model are in adequacy with the real observed values of the studied portfolio.

The model built from Gumbel's copula considers the dependencies between the assets of the portfolio. Therefore, it produces more realistic results than other models for the entire portfolio. This model is thus kept to determine internal credit stress test scenarios.

**CONCLUSION**

This study is in line with the literature (Mandelbrot, 1960) because it highlights the non-normality of the distributions of credit indexes and the importance of considering extreme values to study credit risk. The presence of autocorrelation within indexes and dependence between assets was also highlighted. All this then leads to the conclusion that the historical Expected Shortfall model failed to determine internal credit stress tests. This model does not make it possible to correctly anticipate extreme events and therefore to properly control losses.

The model for determining internal credit stress test scenarios constructed from copula theory proves to meet the requirements of Basel regulations better than the historical model currently implemented by banks. Indeed, the estimated scenarios more faithfully reflect reality. By adopting this methodology, internal credit stress test processes will enable to better understand periods of crisis and therefore to better anticipate and control losses.

## Remerciements

En préambule de ce mémoire, je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont aidée et ont contribué aux excellentes conditions de travail dans lesquelles s'est déroulée mon alternance malgré le contexte de confinement et de télétravail lié à la pandémie de Covid-19.

Je tiens tout particulièrement à remercier :

- Mme. Evelyne LUCKE-BRIAULT pour m'avoir fait confiance et m'avoir permis de réaliser mon alternance au sein de l'Inspection Générale du Crédit Mutuel Alliance Fédérale.
- M. Sidi EL BAHRAOUI pour m'avoir accueillie au sein de son équipe et m'avoir confié une étude valorisante.
- Mon tuteur, M. Jean-Baptiste FAZI, pour sa disponibilité, son écoute, son aide, ses conseils et son soutien tout au long de ma période d'alternance et surtout au cours de la rédaction de mon mémoire.
- L'ensemble du personnel de l'Inspection Générale pour son accueil chaleureux et bienveillant.

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des enseignants et professionnels du DUAS pour le partage de leurs connaissances dans le domaine de l'actuariat. Je suis particulièrement reconnaissante à M. Areski COUSIN, mon référent pédagogique, pour son suivi et ses recommandations.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude à ma famille pour son soutien indéfectible tout au long de mes études dont ce mémoire constitue l'aboutissement.

# Table des matières

<b>RESUME .....</b>	<b>III</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>IV</b>
<b>NOTE DE SYNTHÈSE .....</b>	<b>V</b>
<b>EXECUTIVE SUMMARY .....</b>	<b>XIII</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>XX</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>PARTIE 1 : LES <i>STRESS TESTS</i> DE CREDIT ET LES TEXTES REGLEMENTAIRES .</b>	<b>4</b>
I- Le risque de crédit .....	5
II- Les <i>stress tests</i> .....	6
III- Les textes réglementaires européens .....	9
<b>PARTIE 2 : ETUDE DES QUEUES DE DISTRIBUTION ET DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE AVEC LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES.....</b>	<b>13</b>
I- Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre des <i>stress tests</i> de crédit.....	14
I-1 Présentation de la base de données .....	14
I-2 Analyse de la base de données.....	16
II- Rappels des notions de base de la théorie des valeurs extrêmes .....	18
II-1 Les notions de quantile et de statistiques d'ordre .....	18
II-2 Le théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko .....	18
III- Modélisation de la queue de distribution .....	20
III-1 Modélisation avec l'approche <i>Peak Over Threshold</i> (POT).....	20
III-2 Estimation des quantiles de la loi Pareto généralisée.....	22
III-3 Estimation des paramètres du modèle.....	23
III-4 Détermination du seuil des valeurs extrêmes .....	24
III-4-i Détermination du seuil à partir de l'estimateur de Hill .....	25
III-4-ii Estimation du seuil grâce au Hill <i>plot</i> .....	25
III-4-iii Détermination du seuil avec la méthode de la fonction moyenne des excès .....	27
III-5 Analyse de l'adéquation entre la distribution théorique et la distribution empirique .....	29
III-5-i Le graphique Quantile-Quantile .....	29
III-5-ii Le test d'adéquation d'Anderson-Darling .....	30
III-6 Les résultats de l'ajustement de la loi Pareto généralisée et des tests d'adéquation.....	31

III-6-i Les paramètres estimés .....	31
III-6-ii L'adéquation des modèles estimés .....	32
IV- Modélisation de la volatilité conditionnelle .....	33
IV-1 Analyse de la volatilité conditionnelle dans les données .....	33
IV-2 Prise en compte de la volatilité conditionnelle : le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)..	36
IV-3 Estimation des paramètres du modèle .....	38
IV-4 Estimation de la variance conditionnelle et des résidus standardisés .....	40
IV-5 Estimation des paramètres de la distribution Pareto généralisée.....	41
<b>PARTIE 3 : ESTIMATION DES SCENARII DE STRESS TESTS AVEC LES MESURES</b>	
<b>DE RISQUE.....</b>	<b>43</b>
I- Rappels théoriques sur Les mesures de risque .....	44
I-1 Définition et propriétés de la mesure de risque .....	44
I-2 La <i>Value at Risk</i> .....	44
I-3 L' <i>Expected Shortfall</i> .....	45
I-4 Le temps de retour .....	45
II- Estimations des mesures de risque .....	46
II-1 Les mesures de risque basées sur des données historiques.....	47
II-2 Les mesures de risque pour une loi Pareto généralisée .....	48
II-3 Les mesures de risque avec une volatilité conditionnelle.....	49
II-4 Comparaison des résultats des différents modèles.....	51
II-5 Validation des modèles.....	52
<b>PARTIE 4 : PRISE EN COMPTE DE LA DEPENDANCE DANS LES SCENARII DE</b>	
<b>STRESS TESTS AVEC LA THEORIE DES COPULES .....</b>	<b>58</b>
I- Rappels sur la théorie des copules .....	59
I-1 Les principaux résultats de la théorie des copules.....	59
I-2 Les copules archimédiennes .....	60
II- Utilisation des copules dans le cadre de l'étude .....	63
II-1 Recherche de dépendance.....	63
II-2 Transformation des distributions marginales.....	66
II-3 Estimation des paramètres des copules .....	66
II-4 Choix de la copule .....	68
II-5 Simulation de la copule.....	69
II-6 Estimation de la <i>Value at Risk</i> et de l' <i>Expected Shortfall</i> .....	71

II-7 validation des résultats.....	72
<b>CONCLUSION DE L'ETUDE.....</b>	<b>75</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>77</b>
<b>ANNEXE 1 : LES TESTS DE VERIFICATION DES PROPRIETES DES RESIDUS STANDARDISES .....</b>	<b>A</b>
<b>ANNEXE 2 : LES TESTS D'ADEQUATION DE LA LOI PARETO GENERALISEE ESTIMEE A PARTIR DES RESIDUS STANDARDISES DU MODELE GARCH-GJR(1,1).....</b>	<b>D</b>
<b>ANNEXE 3 : LA PROCEDURE DE CONTROLE EX-POST.....</b>	<b>G</b>
<b>ANNEXE 4 : LE TEST STATISTIQUE DE SPEARMAN .....</b>	<b>J</b>

## Table des figures

<b>Figure 1 - Distribution des spreads de crédit des indices <i>Itraxx Europe Senior Financials</i>, <i>Itraxx Xover</i> et <i>Itraxx Europe Main</i>.....</b>	<b>6</b>
<b>Figure 2 – Procédure de mise en place des <i>stress tests</i> .....</b>	<b>8</b>
<b>Figure 3 – Représentation des log-rendements des trois indices étudiés .....</b>	<b>16</b>
<b>Figure 4 – Représentation des distributions en fonction du domaine d’attraction .....</b>	<b>20</b>
<b>Figure 5 – Représentation des excès <math>Y_i = X_i - u</math>, avec <math>i = 1, \dots, n</math>, au-delà du seuil <math>u</math> .....</b>	<b>21</b>
<b>Figure 6 – Les graphiques de Hill des trois indices étudiés.....</b>	<b>26</b>
<b>Figure 7 – Les <i>mean excess plots</i> des trois indices étudiés .....</b>	<b>28</b>
<b>Figure 8 – Les graphiques Quantile-Quantile des trois indices étudiés .....</b>	<b>32</b>
<b>Figure 9 – Les autocorrélogrammes des trois indices étudiés.....</b>	<b>34</b>
<b>Figure 10 – La distribution des copules archimédiennes de Clayton, Frank et Gumbel....</b>	<b>62</b>
<b>Figure 11 – Les représentations des dépendances des trois couples d’indices étudiés ...</b>	<b>65</b>



## Table des tableaux

Tableau 1 – La composition du portefeuille de crédit étudié.....	14
Tableau 2 – Les statistiques descriptives des trois indices étudiés .....	17
Tableau 3 – Les paramètres de la loi Pareto généralisée $\xi$ et $\beta$ estimés, et les seuils $u$ et la part d’observations extrêmes $p_u$ estimés pour les trois indices étudiés .....	31
Tableau 4 – Les résultats du test statistique d’Anderson-Darling .....	33
Tableau 5 – Les résultats du test statistique des multiplicateurs de Lagrange .....	35
Tableau 6 – Les estimations des paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)....	39
Tableau 7 – Les paramètres de la loi Pareto généralisée estimés à partir des résidus standardisés du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1).....	41
Tableau 8 – Les mesures de risque obtenues pour les trois indices étudiés à partir des trois modèles.....	52
Tableau 9 – Les résultats du <i>backtesting</i> de la <i>Value at Risk</i> et de l’ <i>Expected Shortfall</i> pour l’indice <i>Itraxx Europe Main</i> .....	55
Tableau 10 – Les résultats du <i>backtesting</i> de la <i>Value at Risk</i> et de l’ <i>Expected Shortfall</i> pour l’indice <i>Itraxx Xover</i> .....	55
Tableau 11 – Les résultats du <i>backtesting</i> de la <i>Value at Risk</i> et de l’ <i>Expected Shortfall</i> pour l’indice <i>Itraxx Europe Senior Financials</i> .....	55
Tableau 12 – Les résultats de l’étude de dépendance des trois couples d’indices étudiés .....	64
Tableau 13 – L’estimation du paramètre des copules de Clayton, Gumbel et Frank .....	67
Tableau 14 – Les résultats du test statistique d’adéquation aux copules de Clayton, Gumbel et Frank.....	68
Tableau 15 - Les mesures de risque obtenues à partir du modèle de copules.....	72
Tableau 16 – Les résultats du <i>backtesting</i> du modèle de copules .....	73

## Introduction

L'ampleur de la crise financière de 2008 a conduit de nombreux organismes bancaires et autorités de contrôle à se questionner sur la pertinence et la suffisance des procédures de tests de résistance mises en place au sein des banques. En effet, la crise a été bien plus sévère que les scénarii de stress qui avaient été envisagés. Cela a permis de souligner la faiblesse des programmes de tests de résistance implémentés jusqu'alors et leur incapacité à s'adapter à de nouveaux événements et paramètres. Les autorités prudentielles ont alors imposé de nouvelles directives afin de renforcer leurs *stress tests*. Ces nouvelles dispositions ont été adoptées dans le cadre des Accords de Bâle, en 2010.

Les organismes bancaires sont désormais contraints de mettre en place un test de résistance interne sur leur portefeuille de crédit. Cependant les autorités de contrôle ne précisent pas les modalités de détermination de ce *stress test*. Les experts en gestion des risques au sein des banques ont alors la responsabilité de sélectionner des scénarii suffisamment sévères mais néanmoins plausibles pour évaluer la résistance de leur portefeuille.

Les scénarii de *stress tests* de crédit internes couramment utilisés consistent à intégrer un paramètre stressé dans la valorisation du portefeuille de crédit. Ce paramètre est déterminé à partir d'une mesure de risque qui est généralement l'*Expected Shortfall*. Cette mesure peut être estimée suivant plusieurs méthodes qui ont en commun d'analyser les variations du portefeuille à partir des données passées mais diffèrent selon les points suivants :

- La méthode non-paramétrique : elle consiste en l'observation du comportement historique des rendements de l'actif pour estimer l'*Expected Shortfall*.
- La méthode paramétrique : elle consiste en la modélisation de la loi de distribution des rendements extrêmes et au calcul de l'*Expected Shortfall* à l'aide d'une formule explicite dépendant des paramètres de la loi déterminée, ou, à défaut, d'une approche simulateur.

La méthode paramétrique est plus complexe mais tient compte de facteurs supplémentaires tels que les *clusters* de volatilité ou la non-normalité de la distribution permettant d'être davantage en adéquation avec les variations futures. L'utilisation de cette méthodologie nécessite dans un premier temps de déterminer la loi de distribution des rendements financiers. Pour analyser les séries financières, la théorie classique consiste à considérer que les distributions des actifs financiers suivent des lois normales. Néanmoins, cette hypothèse n'est pas vérifiée au niveau des queues de distribution des actifs (Mandelbrot, 1960), c'est-à-dire pour les valeurs extrêmes. Cela s'explique par le comportement des investisseurs en période de bulles spéculatives et en période de crise financière. Ainsi, les distributions des rendements des séries financières sont davantage approchées par des lois dites à queue épaisse telles que la loi Pareto généralisée proposée par Mandelbrot (1960).

Cependant, l'approche couramment retenue par les organismes bancaires pour déterminer les scénarii de *stress tests* de crédit internes est la méthode non-paramétrique car elle présente l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèses préalables et d'être simple à implémenter (contrairement à la méthode paramétrique). Mais ce modèle ne tient pas compte des queues de distribution épaisses, de l'autocorrélation ou des dépendances entre les actifs ; il peut alors sous-estimer le risque.

Ainsi, l'objectif de ce mémoire est de proposer différents modèles de calcul de l'*Expected Shortfall* pour déterminer des scénarii de *stress tests* de crédit davantage adaptés à l'étude d'événements extrêmes. Cette démarche permettra de confronter plusieurs méthodologies et de conclure quant au choix du modèle le plus proche de la réalité des marchés et permettant ainsi de mieux appréhender les situations de crise.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une mission d'audit interne dont l'objectif était de contrôler la suffisance du programme de *stress tests* de crédit internes. L'entité auditée réalise des *stress tests* sur son portefeuille de crédit en intégrant un *spread* de crédit stressé dans le modèle de valorisation. Ce paramètre est déterminé à partir de l'*Expected Shortfall* avec une approche non-paramétrique. L'étude s'appuiera alors sur le modèle non-paramétrique de l'entité auditée ainsi que sur ses données, ces dernières étant composées d'un portefeuille d'actifs obligataires et de dérivés de crédit. Bien que cette étude ait été réalisée pour une banque clairement identifiée, les résultats et les conclusions de ce mémoire pourront être adaptés à tout organisme bancaire.

Après une introduction, dans la première partie, au risque de crédit et aux tests de résistance ainsi qu'à la réglementation les encadrant, la théorie des valeurs extrêmes sera abordée dans la deuxième partie.

L'analyse des données de l'étude ayant confirmé la présence importante de valeurs extrêmes, les distributions des actifs seront approchées par la loi Pareto généralisée dite « à queue épaisse ». Cela constituera le deuxième modèle traité dans cette étude, le premier étant le modèle historique obtenu avec la méthode non-paramétrique.

Néanmoins ce deuxième modèle suppose l'homoscédasticité des données or, en pratique, il est rare que cette hypothèse soit vérifiée sur les marchés financiers. Les données sont souvent hétéroscédastiques et corrélées. Il est alors intéressant de considérer la volatilité conditionnelle dans le modèle de *stress tests*. Le modèle GARCH (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity*) introduit par Bollerslev (1986) fait partie des outils incontournables pour la modélisation de la volatilité journalière des séries financières mais il considère une symétrie des queues de distribution. Les comportements des investisseurs n'étant pas les mêmes en cas de hausse ou de baisse des marchés financiers, il est pertinent d'intégrer un facteur d'asymétrie dans le modèle implémenté. C'est ce que propose le modèle GARCH-GJR (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity* – Glosten, Jagannathan, Runkle, 1993) qui constituera alors la base du troisième modèle étudié dans ce mémoire. Le succès de ce modèle tient au fait qu'il parvient à capturer certains effets importants des séries temporelles financières.

Les notions de mesure de risque seront abordées dans la troisième partie. Les mesures de risque permettant de déterminer les scénarii de *stress tests* sont l'*Expected Shortfall* et la *Value at Risk* (essentielle au calcul de l'*Expected Shortfall*). A l'origine, seule la *Value at Risk* était utilisée mais en raison de sa non-sous-additivité, elle a été remplacée par l'*Expected Shortfall*. Ces mesures sont alors calculées selon la méthode non-paramétrique et selon la méthode paramétrique à partir des deux lois de distribution établies dans la Partie 2. Une procédure de contrôle ex-post permettra de sélectionner la méthodologie de mesure la plus adéquate.

Le travail précédent ayant été réalisé sur chaque catégorie d'actifs indépendamment, la dernière partie de cette étude consistera en la prise en compte des dépendances entre les différents actifs du portefeuille. Il est essentiel de considérer ces dépendances car la survenance d'un événement extrême impactant un actif peut avoir des répercussions négatives sur les autres composantes du portefeuille et ainsi amplifier les pertes. De par sa flexibilité pour modéliser les structures de dépendance, la théorie des copules fournit un cadre intéressant pour intégrer les dépendances entre actifs. En particulier, c'est la copule archimédienne de Gumbel qui sera utilisée pour tenir compte des dépendances et obtenir de nouvelles mesures de l'*Expected Shortfall*. Ce sera le quatrième modèle étudié.

A l'issue de ces quatre sections et des différentes étapes de *backtesting*, il sera possible de déterminer le modèle le plus réaliste pour estimer des scénarii de *stress tests* de crédit internes et donc le plus adapté au profil de risque de l'organisme bancaire.

# **PARTIE 1 :**

## **LES *STRESS TESTS* DE CREDIT ET LES TEXTES REGLEMENTAIRES**

### **INTRODUCTION**

Depuis la publication de la réglementation Bâle II, les organismes bancaires soumis à des risques de marché sont contraints de compléter leur dispositif de gestion des risques par un programme de simulations de crise afin de mieux appréhender les pertes importantes susceptibles de survenir suite à des événements de probabilité d'occurrence faible.

Le risque de crédit étant un des risques majeurs auxquels sont exposés les banques, ces dernières doivent être en mesure de l'identifier, le quantifier et le maîtriser. La gestion de ce risque intervient notamment à travers l'implémentation de tests de résistance conformément aux exigences réglementaires. Plusieurs types de *stress tests* peuvent être mis en place pour mesurer ce risque : des *stress tests* avec des scénarii hypothétiques ou historiques, des micro ou macro-*stress tests*, etc.

Cette partie définira dans un premier temps le risque de crédit et la manière dont il affecte la stabilité des institutions financières. Elle abordera dans un second temps la notion de *stress tests* et ses différentes caractéristiques. Enfin, elle présentera le cadre réglementaire des tests de résistance bancaires.

## I- LE RISQUE DE CREDIT

La bonne santé des établissements bancaires est indispensable pour protéger le système financier et garantir la stabilité financière. Pour assurer cette bonne santé, la quantification et la gestion des risques auxquels les organismes bancaires sont exposés sont primordiales. Le risque de crédit est le principal risque auquel doit faire face un établissement financier. Il s'agit du risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de fluctuations dans la qualité de crédit des émetteurs de titres, des contreparties ou de n'importe quel autre emprunteur auquel l'organisme est confronté.

Le risque de crédit se manifeste principalement à travers trois sous-risques :

- Le risque de défaut d'une contrepartie : cela correspond au risque de faillite de la contrepartie avant le dénouement de l'opération initiée, la dette ne pourra pas être honorée à échéance (en totalité ou en partie) entraînant ainsi des pertes pour la banque.
- Le risque de hausse du *spread* : les émetteurs n'empruntent pas tous au même taux. Le taux est lié à la qualité de crédit de l'entité. La différence entre le taux émis par une entité risquée et celui émis par une entité non risquée s'appelle le *spread* de crédit. Le *spread* correspond donc à la rémunération attendue par l'investisseur pour la prise de risque supplémentaire. En cas d'augmentation des *spreads*, l'actif perd de la valeur.
- Le risque de changement de notation : il s'agit du risque de dégradation de la valeur d'un actif suite à l'abaissement de la note de crédit de l'émetteur.

Les trois points précédents sont grandement liés. En effet, si l'on considère le cas d'une entreprise cotée, l'anticipation d'un défaut de paiement entraîne un risque plus important, les investisseurs attendent donc une rémunération plus conséquente, ce qui se traduit par une hausse du *spread* de crédit, et enfin, les agences de notation pourront éventuellement décider d'abaisser la note de crédit de l'émetteur ou du titre émis.

Le risque de crédit est au cœur des problématiques rencontrées par les établissements financiers, d'autant plus au vu des événements des dernières années. L'événement récent ayant le plus affecté le risque de crédit en Europe est la crise de la dette souveraine de 2010 à 2012. Cette crise a débuté avec la crise de la dette grecque. La Grèce faisait face à une menace croissante de défaut. Cette crise s'est progressivement répandue sur 17 autres pays européens. Elle a eu d'importantes répercussions sur le marché du crédit avec pour conséquence une hausse des *spreads* de crédit et des dégradations de notation de dette souveraine. La crise sanitaire de la Covid-19, avec une ampleur moins importante, a également impacté le risque de crédit des organismes financiers avec une augmentation du nombre de faillites et de nombreuses dégradations de notes de crédit (Standard & Poor's a abaissé la note de 20% des entreprises et Fitch a déclassé près de 400 entreprises).

Les graphiques des *spreads* mensuels pour les trois indices de crédit étudiés dans la suite de l'étude sont représentés ci-dessous. Ils permettent de visualiser les périodes de tension des marchés financiers des 13 dernières années.

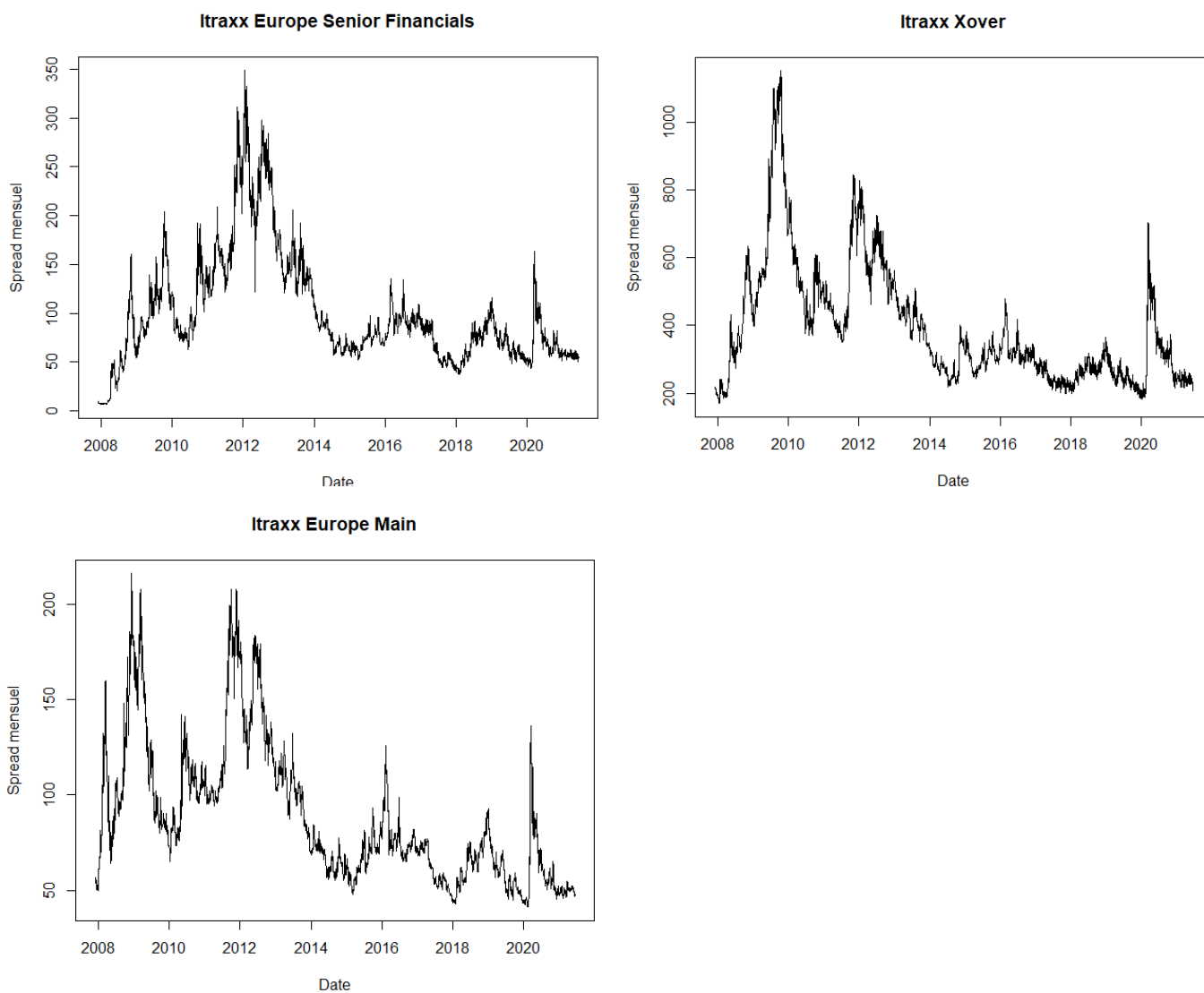


Figure 1 - Distribution des spreads de crédit des indices *Itraxx Europe Senior Financials*, *Itraxx Xover* et *Itraxx Europe Main*

## II- LES STRESS TESTS

Un *stress test*, ou test de résistance, est une exigence qualitative visant à identifier les événements qui pourraient avoir un impact important sur le portefeuille de la banque, et à simuler des conditions économiques et financières extrêmes mais plausibles pour en étudier les conséquences sur les établissements bancaires et mesurer leur capacité de résistance à des situations de crise. Les tests de résistance prennent toute leur importance après de longues périodes de conditions économiques et financières favorables qui peuvent conduire à la complaisance des marchés et à la sous-évaluation du risque.

Les tests de résistance sont très pointus afin de préparer les banques aux pires situations possibles et de les inciter à prévoir des solutions adaptées aux chocs extrêmes. Les banques peuvent ainsi mettre en place en amont des stratégies pour assurer leur stabilité financière et ne pas porter préjudice à l'ensemble du système financier en cas de crise, comme cela avait pu être observé en

2008 suite à la faillite de Lehman Brothers qui a entraîné la chute de la bourse américaine et celle des bourses mondiales quelques semaines plus tard. Les *stress tests* donnent donc une vue d'ensemble des ressources dont disposent les établissements bancaires pour gérer des risques liés à leurs activités.

Les banques ayant une activité de marché significative doivent intégrer dans leur procédure de gestion des risques des *stress tests* couvrant tous les facteurs de risque pouvant entraîner des pertes exceptionnelles. Ces facteurs de risque comprennent des événements dont la probabilité d'occurrence est faible pour chaque type de risque. Les scénarii des tests de résistance à élaborer doivent permettre de mesurer l'impact de ces événements sur la santé financière de l'entreprise. Un ensemble de mesures est ensuite envisagé par la banque afin de réduire les risques identifiés et ainsi de protéger ses fonds propres.

Les *stress tests* constituent donc un outil de gestion interne des risques primordial pour les établissements financiers car ils permettent d'évaluer les conséquences de scénarii extrêmes sur le bilan de l'établissement, et en particulier sur les fonds propres. Aussi sont-ils notamment utilisés dans la détermination du ratio d'adéquation des fonds propres conformément aux Accords de Bâle. Les tests de résistance alertent la Direction des banques de résultats indésirables et inattendus liés à une variété de risques et fournissent des indications concernant le capital nécessaire pour absorber les pertes en cas de chocs importants.

En effet, le capital est entre autres utilisé pour couvrir les pertes non-anticipées par la banque sur ses actifs, comme cela peut être le cas lors d'événements extrêmes. L'impact des *stress tests* est alors étudié en observant la perte en fonds propre, qui se traduit par une baisse du ratio de capital. Ce ratio s'exprime comme la quantité de fonds propres rapportée aux actifs pondérés par les risques<sup>1</sup>. Si le *stress test* fait apparaître un niveau de capital insuffisant pour une institution, signalant qu'elle ne dispose pas d'un niveau de fonds propres lui permettant d'absorber le choc résultant du scénario extrême, les gestionnaires de risque, et dans certains cas les autorités prudentielles, doivent alors mettre en œuvre un certain nombre d'actions correctrices pour assurer la pérennité de l'établissement financier.

Les *stress tests* permettent de compléter d'autres approches de gestion des risques. Ils jouent un rôle particulièrement important dans les points suivants :

- Ils fournissent des évaluations prospectives des risques,
- Ils soutiennent la communication interne et externe,
- Ils donnent des indications concernant la tolérance au risque,
- Ils facilitent le développement de procédures d'urgence en cas de chocs.

La procédure classique de mise en place des *stress tests* au sein des établissements bancaires est présentée dans les grandes lignes dans le schéma ci-dessous.

---

<sup>1</sup> Les actifs pondérés par les risques : Ils sont définis comme le produit de chaque ligne d'exposition d'une banque multipliée par une pondération qui reflète son niveau de risque. Certains actifs sont ainsi considérés sans risque et se voient attribuer une pondération nulle, comme les titres d'État, alors que d'autres, très risqués, peuvent être affectés de pondérations allant jusqu'à 1250% dans le cas des actions par exemple.



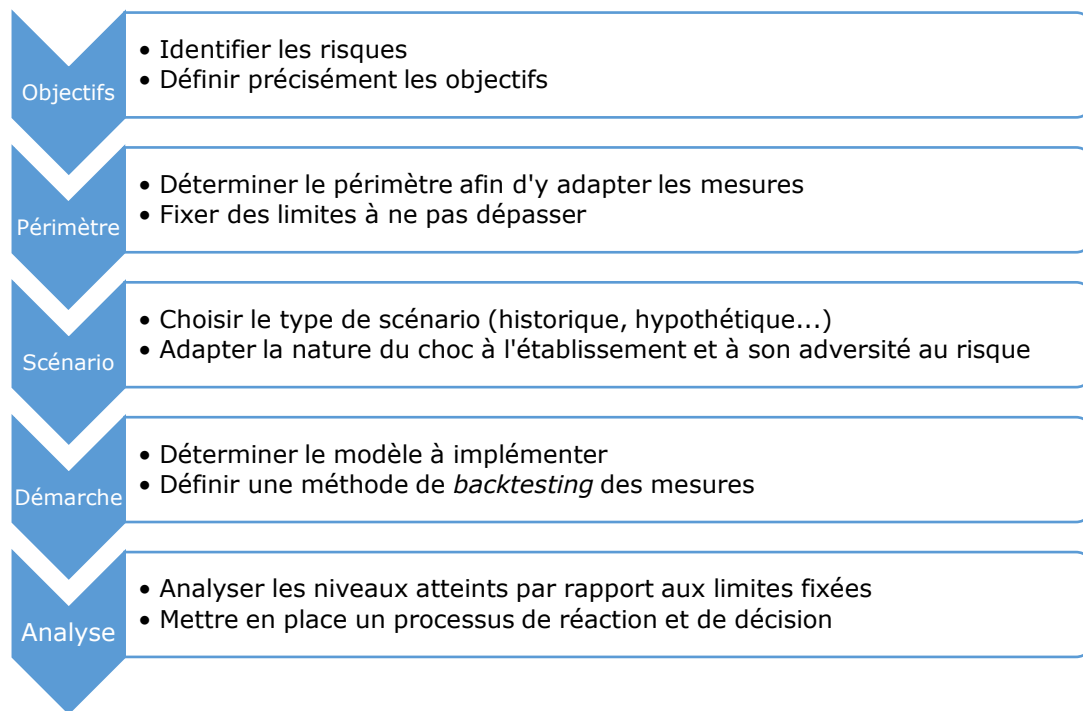


Figure 2 – Procédure de mise en place des *stress tests*

Il existe deux groupes de tests de résistance en fonction de l'objectif suivi :

- Des macro-stress tests qui sont des tests de résistance imposés par l'Autorité Bancaire Européenne ou par la Banque Centrale Européenne pour les pays de la zone euro. Ces tests de résistance sont définis et utilisés par les autorités de tutelle afin d'évaluer la résilience du système financier. Les résultats et les conclusions de ces *stress tests* doivent ensuite être fournis à ces mêmes autorités. Le risque mesuré est le risque systémique. Toutes les banques européennes sont soumises aux mêmes scénarii macro-économiques.
- Des micro-stress tests qui sont des tests de résistance réalisés au niveau de l'organisme financier ou d'un service particulier de ce dernier. Ils sont construits à partir des risques extrêmes auxquels sont exposés les portefeuilles financiers de la banque et également à partir des particularités de ses investissements. Leurs scénarii sont adaptés au profil de risque de l'établissement. Le risque mesuré est donc majoritairement le risque interne.

Concernant les *micro-stress tests*, les banques implémentent deux types de scénario de crise :

- Les scénarii historiques qui consistent à tester le portefeuille actuel dans des situations de crises financières et économiques passées telles que la crise sanitaire liée à la pandémie de Covid-19, la crise des *subprimes*, l'attaque du World Trade Center en 2001, etc. Cette procédure permet de contrôler si la banque pourrait survivre en cas de crises similaires à celles passées et comment elle serait impactée.
- Les scénarii hypothétiques qui ont pour objectif d'évaluer la sensibilité du portefeuille à des chocs sur les données de marché non nécessairement constatés précédemment. Il peut, en effet, y avoir des variations extrêmes et plausibles du marché qui n'ont jamais été

enregistrées dans le passé et qui constituent des scénarii plus graves que ceux déjà observés. Ces scénarii doivent être construits comme étant les plus défavorables (mais néanmoins plausibles) compte tenu des caractéristiques du portefeuille de l'établissement financier.

Enfin, les *stress tests* peuvent être soit univariés, soit multivariés.

Un *stress test* univarié a pour but de mesurer l'influence d'un choc sur un seul facteur de risque du portefeuille comme par exemple un choc de 10% à la hausse des taux d'intérêts. Les autorités bancaires insistent sur l'importance de combiner l'étude des *stress tests* historiques avec celle des *stress tests* univariés car ils permettent de couvrir des événements hypothétiques et de capter un champ plus large de possibilités de chocs. L'horizon de projection de ces tests de résistance est en général très court, voire même instantané. De par leur simplicité, ces tests sont souvent utilisés comme une première analyse de l'impact d'un mouvement important sur un facteur de risque. Les *stress tests* univariés peuvent prendre deux formes :

- Un choc absolu : c'est un choc fixe qui est ajouté au facteur de risque, par exemple une augmentation de 10 *bp*<sup>2</sup>.
- Un choc relatif : il est exprimé comme un pourcentage du facteur de risque, par exemple une baisse de 5% de la valeur d'un titre.

Cependant, ces tests ne tiennent pas compte d'éventuelles corrélations entre les facteurs de risques qui peuvent être à l'origine de pertes significatives.

Les *stress tests* multivariés, quant à eux, étudient l'impact de mouvements simultanés de plusieurs facteurs de risque du portefeuille et par conséquent, ils prennent en considération les dépendances entre facteurs de risque. Cela permet d'examiner un scénario complet impliquant une multitude de facteurs.

### **III- LES TEXTES REGLEMENTAIRES EUROPEENS**

Dans de nombreuses régions du monde, les *stress tests* constituent une exigence réglementaire du système bancaire et des autorités de contrôle. Ainsi, les organismes bancaires sont contraints d'intégrer ces procédures dans leur stratégie de gestion des risques conformément aux réglementations qui, en Europe, sont les suivantes :

- Les Accords de Bâle :

La mise en place des *stress tests* est principalement encadrée par Bâle II. Cette réglementation exige que les banques utilisant un modèle interne pour déterminer le capital minimum requis mettent en place un programme rigoureux de tests de résistance. De même, les banques ayant une approche basée sur une notation interne pour le risque de crédit sont

---

<sup>2</sup> *bp* : un point de base (*basis point* en anglais) désigne un centième de point de pourcentage.

tenues d'effectuer des *stress tests* pour évaluer la robustesse de leurs évaluations. Bâle II exige que les banques soumettent, au minimum, le portefeuille de crédit de leur portefeuille bancaire à des tests de résistance.

Cependant, les *stress tests* effectués avant la crise des *subprimes* en 2008, sous Bâle II, n'avaient pas décelé la gravité de la crise bancaire imminente. Les notes très favorables fournies par les agences de notation, et les risques insensés pris par les banques, à cause de faibles exigences en capital, ont amplifié les retombées de cette crise. Les exigences imposées par Bâle II se sont donc avérées insuffisantes. Des faiblesses ont été identifiées concernant les points suivants :

- l'utilisation et l'intégration des *stress tests* dans la gestion des risques,
- les méthodologies adoptées,
- et la sélection des scénarii de crise.

Un des objectifs de la nouvelle réglementation, Bâle III, entrée en vigueur en 2010, a alors été de reprendre et de développer les *stress tests* déjà existants dans la réglementation Bâle II, avec l'objectif de pallier les insuffisances mentionnées. Un ensemble de recommandations a alors été formulé. Ces révisions ont porté sur l'approfondissement et le renforcement des procédures de tests de résistance des banques et sur la rigueur de leur évaluation par les superviseurs.

Les textes réglementaires préconisent désormais d'effectuer des tests de résistance de manière exhaustive sur l'ensemble des risques auxquels la banque est exposée et de conférer un rôle de premier plan à ces *stress tests* dans les décisions relatives à la gestion des risques en intégrant leurs résultats dans la procédure globale de cette gestion. Ils recommandent également que la Direction et le Conseil d'Administration de la banque tiennent compte des tests de résistance dans leurs stratégies et décisions. Les simulations de situation de crise mises en œuvre dans le cadre des *stress tests* peuvent en effet avoir un impact significatif sur le profil de risque de l'établissement.

Au vu des recommandations des Accords de Bâle, ce mémoire s'intéresse en particulier aux tests de résistance micro-économiques, qui comme vu dans la section II de cette Partie 1, sont de deux ordres :

- Les tests de résistance micro-économiques basés sur des scénarii historiques : ils sont une exigence du Comité de Bâle. La réglementation Bâle recommande aux banques d'inclure des scénarii historiques relatifs aux périodes de crises économiques et financières passées pour tester leurs portefeuilles. Les établissements financiers doivent également prendre en compte les fortes volatilités et la réduction de la liquidité associée à ces événements extrêmes.
- Les tests de résistance micro-économiques basés sur des scénarii hypothétiques : ils constituent eux aussi une exigence de la réglementation Bâle. Mais le Comité de Bâle sur la supervision bancaire ne donne aucune directive sur la méthodologie de sélection des scénarii de crise. Les scénarii de *stress tests* hypothétiques sont donc construits par les banques elles-mêmes sur la base de jugements d'experts.

- EU-wide stress test :

Pour consolider les Accords de Bâle suite aux crises financières de 2008 et 2010, les dirigeants européens se sont accordés sur le lancement d'une nouvelle série de tests de résistance macro-économiques, nommée *EU-wide stress test*, sous le contrôle de l'Autorité Bancaire Européenne (*European Banking Authority, EBA*) en coopération avec le Comité Européen du Risque Systémique (*European Systemic Risk Board, ESRB*), la Banque Centrale Européenne (*European Central Bank, ECB*), la Commission Européenne (*European Commission, EC*) et les Autorités de Supervision Nationales. L'objectif principal d'*EU-wide stress test* est d'évaluer la résilience des grandes banques européennes, et donc du système financier européen, face à des événements économiques extrêmes et ainsi d'assurer le bon fonctionnement des marchés financiers et la stabilité du système financier européen. L'EBA a alors durci les contraintes réglementaires encadrant les *stress tests* tels que préconisés par Bâle en adoptant des hypothèses particulièrement pessimistes concernant la conjoncture économique. Les scénarii de *stress tests* sont construits en appliquant des chocs sévères sur des variables macro-économiques telles que le PIB, le taux de chômage ou l'inflation pour chaque année soumise au *stress test*. Ils sont ensuite transmis aux institutions financières participant à la campagne de *stress tests*. Conduite généralement tous les deux ans depuis 2011, cette campagne englobe environ 70% en termes d'actifs consolidés des banques de la zone euro, des banques de l'Union Européenne n'ayant pas adopté l'euro et de la Norvège.

L'EBA fixe un certain nombre de règles pour la mise en œuvre des *stress tests* et s'assure que ces derniers soient conduits de manière équivalente entre les institutions financières pour que leurs comparaisons soient cohérentes. De manière générale, le principe retenu par l'EBA est de privilégier l'hypothèse la plus conservatrice lorsque plusieurs alternatives sont possibles tout en demandant aux établissements bancaires de justifier leur choix.

Ces *stress tests* macro-économiques permettent à l'EBA d'évaluer individuellement les banques et d'avoir une meilleure compréhension du risque systémique en Europe.

## CONCLUSION

Les organismes bancaires sont tous soumis au même risque majeur : le risque de crédit. Il est essentiel pour eux d'être en mesure de l'évaluer afin de pouvoir l'anticiper et le maîtriser.

A la suite des crises financières dévastatrices passées, les autorités bancaires, au travers des Accords de Bâle, ont exigé que les banques mettent en place un outil de mesure du risque de crédit : les *stress tests* de crédit. Les *stress tests* dits « macro » sont utilisés par les autorités de tutelle pour contrôler la bonne santé générale du système financier. Quant aux micro-*stress tests*, ils constituent un outil de gestion à l'échelle de la banque et lui permet ainsi d'appréhender le risque auquel elle est exposée.

Les modèles d'estimation des scénarii de micro-*stress tests* seront développés dans cette étude. Les autorités bancaires n'imposent pas de méthodologie de calcul pour ces tests de résistance. Les organismes financiers sont alors libres de déterminer le modèle le mieux adapté à leur portefeuille et à leur risque.

Les parties *infra* détaillent la démarche suivie pour identifier les scénarii de *stress tests* les plus pertinents compte tenu des données étudiées.

## **PARTIE 2 :**

# **ETUDE DES QUEUES DE DISTRIBUTION ET DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE AVEC LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES**

### **INTRODUCTION**

La théorie des valeurs extrêmes et l'étude des queues de distribution constituent un outil potentiel pour la construction d'un programme de *stress tests*. L'intérêt de cette théorie en finance, en particulier dans le cadre des tests de résistance, a déjà été prouvé notamment par Embrechts, Klüppelberg et Mikosh (1997) et Longin (1999). Néanmoins, son utilisation demeure peu répandue au sein des banques.

La méthode d'implémentation de *stress tests* basée sur la théorie des valeurs extrêmes propose de créer des scénarii de crise à partir de l'approximation de la loi des extrema d'une ou plusieurs séries financières représentatives du portefeuille étudié.

Cependant, de nombreux modèles de la théorie des valeurs extrêmes considèrent la volatilité des séries financières constante dans le temps. En pratique, cette hypothèse est rarement vérifiée. Les modèles risquent donc d'être peu précis et de manquer de prudence ou, au contraire, de l'être trop. Il est alors pertinent de considérer l'ajout d'un modèle de volatilité conditionnelle dans l'approche des queues de distribution.

Cette partie présentera premièrement les données de l'étude et les résultats importants de la théorie des valeurs extrêmes. Puis, les queues de distribution des séries financières étudiées seront approchées grâce à la loi Pareto généralisée. Les différents paramètres seront estimés et l'adéquation des lois aux données sera testée. Enfin, un travail similaire sera réalisé en intégrant le modèle de volatilité conditionnelle GARCH-GJR(1,1). Ainsi, deux méthodes de modélisation des valeurs extrêmes seront mises en œuvre dans cette partie ; elles permettront la construction de deux nouveaux modèles de détermination des scénarii de *stress tests* de crédit dans la Partie 3.

## I- UTILISATION DE LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES DANS LE CADRE DES STRESS TESTS DE CREDIT

La statistique classique s'intéresse principalement à la partie centrale de la loi. L'objectif de cette étude est d'étudier les valeurs extrêmes, c'est-à-dire la queue de distribution des données. La théorie des valeurs extrêmes offre un cadre théorique solide pour ce type d'étude. La difficulté principale de l'analyse des queues de distribution est l'application concrète de la théorie puisque les événements extrêmes sont très peu observés et le nombre de données est par conséquent très faible.

Les données utilisées ainsi que l'intérêt de l'usage de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre de cette étude sont présentés *infra*.

### I-1 PRESENTATION DE LA BASE DE DONNEES

La base de données étudiée est composée de trois indices de crédit dont les valeurs représentent des *spreads* de crédit ; ces indices sont les suivants :

- L'Itraxx Europe Main : C'est un indice sur produit dérivés tels que les CDS<sup>3</sup> (*Credit Default Swap*). Il est composé des 125 principales valeurs européennes dites les moins risquées « Investment Grade » à cinq ans.
- L'Itraxx Xover : C'est un indice de CDS qui reflète le coût de la protection contre le risque de défaut des 50 valeurs européennes les plus risquées sur cinq ans.
- L'Itraxx Europe Senior Financials : C'est également un indice de CDS référant 25 dettes classées séniors<sup>4</sup> d'entités financières européennes.

Ces indices ont été sélectionnés car ils reflètent le mieux la composition du portefeuille de crédit étudié qui est principalement constitué de CDS européens. Cette composition est détaillée dans le tableau suivant en pourcentage.

	Nombre d'actifs	Encours
<b>Itraxx Europe Main</b>	55%	10%
<b>Itraxx Xover</b>	24%	75%
<b>Itraxx Europe Senior Financials</b>	16%	15%
<b>Autre</b>	5%	>1%

Tableau 1 – La composition du portefeuille de crédit étudié

L'analyse des variations de valeurs des indices *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials*, ainsi que leur modélisation permettra donc d'étudier et d'anticiper les variations de valeurs du portefeuille de crédit considéré.

<sup>3</sup> CDS : Les CDS sont des dérivés de crédit mesurant le coût de l'assurance du risque de défaut d'une entreprise ou d'un Etat sur sa dette. Plus ils sont élevés, plus le risque de faillite est fort.

<sup>4</sup> Dette senior : La dette senior est une dette privilégiée. Elle est remboursée de façon prioritaire quelle que soit la situation financière dans laquelle se trouve l'emprunteur.

Les données sont composées des rendements logarithmiques quotidiens des indices étudiés du 01/12/2002 au 01/06/2021. La fenêtre de temps choisie est suffisamment large afin de capter différentes conditions de marché et de volatilité et ainsi d'obtenir des modèles davantage en adéquation avec la réalité. Elle comprend donc les crises financières de 2008, 2010 et 2020 dues respectivement à la crise des *subprimes*, à la crise de la dette souveraine et à la pandémie de Covid-19. Le choix d'utiliser des données quotidiennes est fréquent pour les études de valeurs extrêmes et de volatilité ; des données à plus haute fréquence risqueraient de comporter des variations soudaines et momentanées (des bruits) sans intérêt pour ce travail.

La théorie des valeurs extrêmes est souvent utilisée en finance pour l'étude des rendements logarithmiques (« *log-return* ») définis par :

$$R_t = \ln\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right)$$

Où  $C_t$  est la cotation en bourse à la date  $t$  d'un titre donné. Dans cette étude, des indices de crédit sont étudiés,  $C_t$  correspond alors au *spread bid*<sup>5</sup> à la clôture quotidienne des marchés.

Les rendements logarithmiques sont plus intéressants à étudier car ils possèdent plusieurs propriétés qui les rendent davantage favorables aux études statistiques telles que la stationnarité ou l'ergodicité comme l'ont montré Quigley et Ramsey (2008).

Les log-rendements étudiés ici sont représentés sur les graphiques suivants :

---

<sup>5</sup> Le *spread* peut être défini comme l'écart entre un taux de référence considéré sans risque et un taux d'intérêt d'un emprunt donné pour la même maturité. Il compense le risque de défaut de l'emprunteur. La fiabilité des emprunteurs est déterminée par des agences de notation. Il existe 3 types de *spread* :

- le *spread bid* qui est la prime de risque que demande un acheteur,
- le *spread ask* qui correspond à la prime proposée par le vendeur,
- le *spread mid* qui est la moyenne des deux précédents.



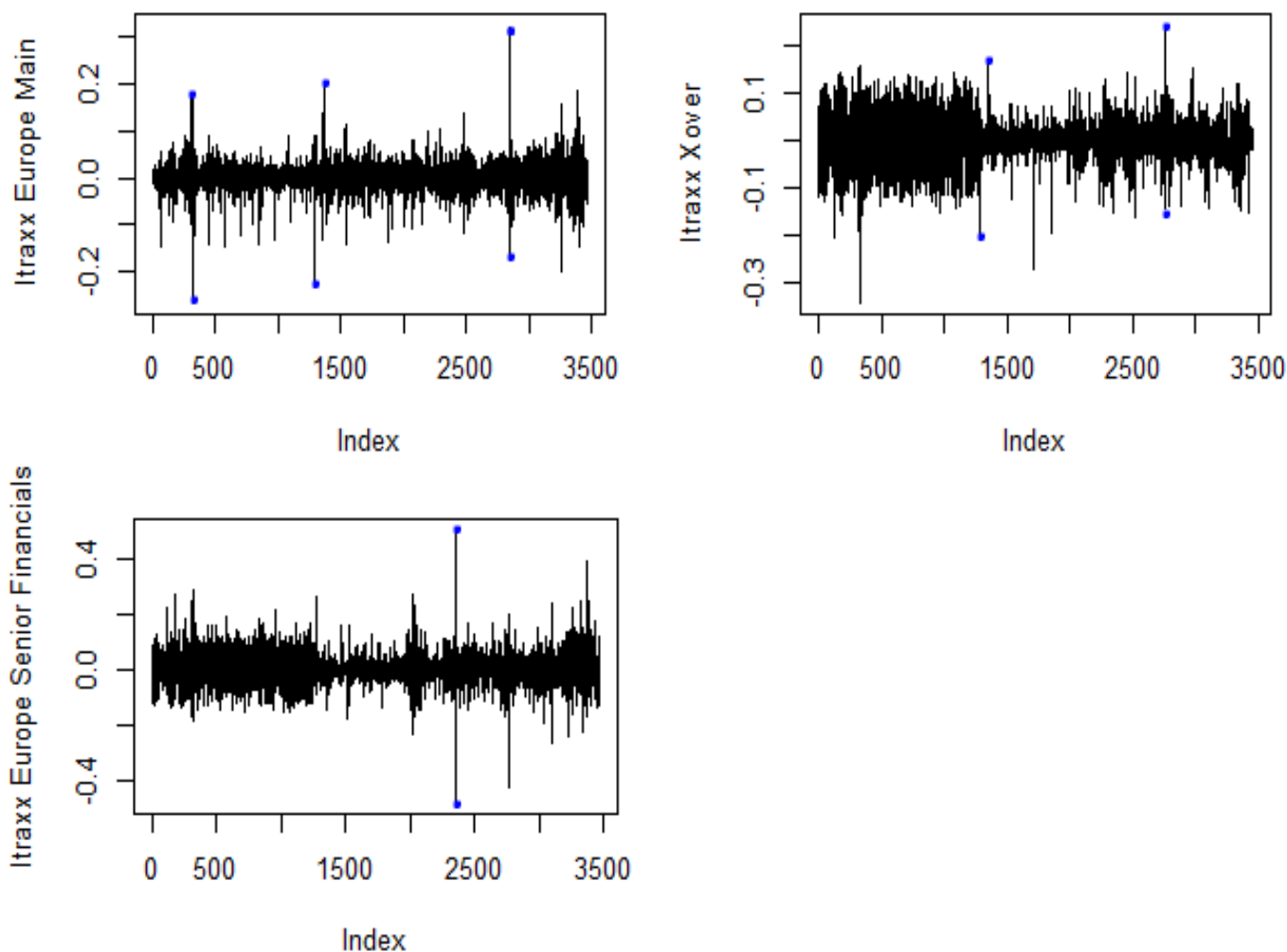


Figure 3 – Représentation des log-rendements des trois indices étudiés

Les graphiques montrent que les rendements logarithmiques sont centrés autour de zéro. Il est quand même possible d’observer d’importantes variations positives et négatives sur des courtes périodes, cela représente des « *clusters* de volatilité ». Ces derniers peuvent être constitués de valeurs élevées ou de valeurs très faibles. Les *clusters* de volatilité sont typiques des distributions de rentabilité financières (Mandelbrot, 1963).

## I-2 ANALYSE DE LA BASE DE DONNEES

L’étude des mesures statistiques de base telles que la moyenne, l’écart-type, le *skewness* ou le *kurtosis* permet d’avoir une première idée sur la forme de la distribution des données étudiées.

Le *skewness* (ou coefficient d’asymétrie en français) est une mesure de l’asymétrie de la distribution d’une variable aléatoire réelle. Si le *skewness* est positif alors la queue de droite est plus lourde que la queue de gauche et inversement si le *skewness* est négatif.

Le *kurtosis* est un coefficient d'aplatissement. Une valeur importante du *kurtosis* signifie que des larges réalisations positives ou négatives sont plus susceptibles de se produire. Plus le *kurtosis* est élevé, plus les queues de distribution sont lourdes.

Le *skewness* d'une distribution normale vaut zéro et le *kurtosis* vaut trois. L'*excess kurtosis*, correspondant au *kurtosis* moins trois, est alors souvent étudié.

Le test de Jarque-Bera permet de tester si le *skewness* et le *kurtosis* de la distribution étudiée sont égaux à ceux d'une distribution normale. Le résultat du test indique donc si la distribution est gaussienne ou non. En notant *S* le *skewness* et *K* le *kurtosis*, les hypothèses du test sont :

$$H_0 : S = 0 \text{ et } K = 3$$

$$H_1 : S \neq 0 \text{ et } K \neq 3$$

et la statistique du test est :

$$J = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

avec *n* le nombre d'observations.

Les statistiques descriptives des indices étudiés sont présentées dans le tableau suivant :

	<b><i>Itraxx Europe Main</i></b>	<b><i>Itraxx Xover</i></b>	<b><i>Itraxx Europe Senior Financials</i></b>
<b>Minimum</b>	-0,27	-0,34	-0,49
<b>Moyenne</b>	4,38e-05	-2,80e-05	5,34e-04
<b>Maximum</b>	0,33	0,24	0,5
<b>Ecart type</b>	0,03	0,05	0,06
<b>Skewness</b>	-0,22	-0,34	-0,24
<b>Kurtosis</b>	10,6	5,4	8,7
<b>Excess Kurtosis</b>	7,6	2,4	5,7
<b>P-valeur test Jarque-Bera</b>	< 2.2e-16	< 2.2e-16	< 2.2e-16

Tableau 2 – Les statistiques descriptives des trois indices étudiés

Les log-rendements de chaque indice ont un *skewness* différent de zéro et un *kurtosis* supérieur à trois. Selon le test de Jarque-Bera, ces résultats sont significatifs au seuil de 5% avec un risque d'erreur de première espèce de 5%, ce qui confirme que les log-rendements ne suivent pas une distribution gaussienne comme le suppose de nombreux résultats financiers. Mandelbrot (1963) a effectivement montré que les distributions des rentabilités financières ne sont pas normales et présentent des phénomènes d'asymétrie, de queue épaisse et de *clustering* de volatilité. Ces statistiques descriptives appuient alors l'importance d'étudier la distribution du portefeuille afin de mieux en appréhender le risque. La théorie des valeurs extrêmes va permettre d'analyser les queues

de distribution et donc de mieux quantifier et modéliser les pertes extrêmes, ce qui est également l'objectif des *stress tests*.

## II- RAPPELS DES NOTIONS DE BASE DE LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES

### II-1 LES NOTIONS DE QUANTILE ET DE STATISTIQUES D'ORDRE

La théorie des valeurs extrêmes repose sur les notions de quantile et de statistique d'ordre. Il est alors essentiel de rappeler leur définition avant de poursuivre.

Dans les définitions ci-dessous,  $(X_n)_{n \geq 1}$  constitue un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition  $F$ .

Définition : Le quantile d'ordre  $\alpha$  de la fonction de répartition  $F$  est défini pour  $\alpha \in [0, 1]$  par

$$F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\}$$

La fonction quantile est donc l'inverse généralisé de la fonction de répartition  $F$  au point  $\alpha$ .

Cependant, par abus de langage et parce que l'on préfère manipuler des quantités proches de 0, le quantile d'ordre  $\alpha$  est en général défini par

$$q(\alpha) = F^{\leftarrow}(1 - \alpha) = \inf\{x \mid \bar{F}(x) \leq \alpha\}$$

Où  $\bar{F} = 1 - F$  est la fonction de survie

Quant aux statistiques d'ordre, elles sont caractérisées de la manière suivante :

Définition : Les statistiques d'ordre de l'échantillon  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont les observations ordonnées dans l'ordre croissant de l'échantillon. On note  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$  les variables aléatoires telles que  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ .

### II-2 LE THÉORÈME DE FISHER-TIPPETT-GNEDENKO

La théorie des valeurs extrêmes est apparue entre 1920 et 1940 grâce notamment à Fisher, Tippett et Gnedenko. Ces chercheurs se sont intéressés au comportement asymptotique des variables aléatoires  $X_{1,n}$  et  $X_{n,n}$ , qui sont respectivement le minimum et le maximum de l'échantillon étudié. Leur objectif était de déterminer la loi vers laquelle  $X_{1,n}$  et  $X_{n,n}$  convergent quand  $n$  tend vers l'infini, afin de remplacer la fonction de répartition  $F$  de la variable parente pour les valeurs de  $n$  les plus importantes. Le théorème de Fisher-Tippet-Gnedenko (1948) permet de définir la loi de la distribution

des valeurs extrêmes sans qu'elle soit conditionnée par la loi de la variable parente. C'est un théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes et par conséquent le point de départ de cette étude.

**Théorème :** Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune  $F$  et  $X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ . S'il existe une fonction de répartition non-dégénérée  $G$  (c'est-à-dire une fonction de répartition qui n'est pas associée à une variable constante presque sûrement) et deux suites réelles  $a_n > 0$  et  $b_n$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \Leftrightarrow \frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \rightarrow Y$$

où  $Y$  est une variable aléatoire admettant  $G$  pour fonction de répartition,

alors  $G$  appartient à l'un des domaines d'attraction ci-dessous :

- Frechet :  $\begin{cases} G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \text{ et } \alpha > 0 \\ G(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- Weibull :  $\begin{cases} G(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x \leq 0 \text{ et } \alpha > 0 \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- Gumbel :  $G(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Le paramètre  $\alpha$  représente le poids des queues de distribution de la distribution parente. Si  $\alpha$  est faible alors la distribution a une queue épaisse.

La fonction  $G$  peut s'écrire de manière plus générale grâce à l'expression suivante :

$$G_{\xi, \mu, \beta}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\beta}\right)\right) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où :

- $\mu$  est un paramètre de localisation, il donne une indication sur la taille moyenne des extrêmes de la distribution parente.
- $\beta$  est un paramètre d'échelle, il caractérise la dispersion.
- $\xi$  est un paramètre de queue, il indique les poids des queues de la distribution. Plus cet indice est élevé, plus la distribution a une queue épaisse. Il est relié au paramètre  $\alpha$  du théorème précédent par :
  - o Frechet :  $\xi = \frac{1}{\alpha} > 0$
  - o Weibull :  $\xi = -\frac{1}{\alpha} < 0$
  - o Gumbel :  $\xi = 0$

La majorité des distributions vérifient le théorème. Il est alors possible de classer les lois usuelles selon leur domaine d'attraction. Les lois appartenant au domaine d'attraction de :

- Gumbel ont une queue de distribution légère,
- Weibull ont un point terminal fini,
- Frechet ont une queue de distribution lourde.

La forme de la distribution des lois des différents domaines d'attraction est montrée sur le graphique ci-dessous :

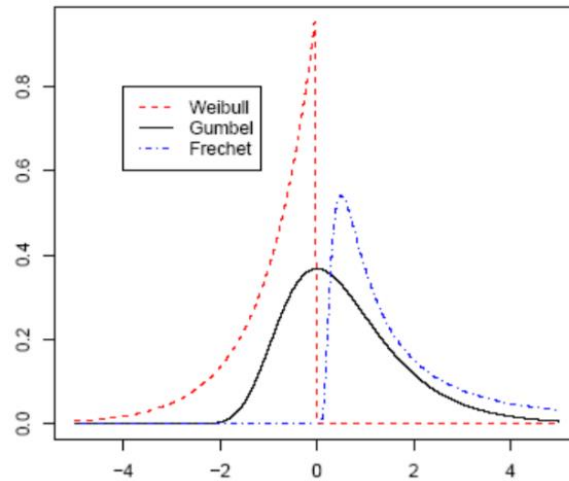


Figure 4 – Représentation des distributions en fonction du domaine d'attraction

Ce sont les lois appartenant au domaine d'attraction de Frechet qui sont intéressantes dans cette étude car ces lois ont des queues de distribution épaisses et par conséquent, un nombre important de valeurs extrêmes. Dans la suite, la modélisation des extrêmes de ces lois est développée.

### III- MODELISATION DE LA QUEUE DE DISTRIBUTION

#### III-1 MODELISATION AVEC L'APPROCHE *PEAK OVER THRESHOLD* (POT)

La théorie des valeurs extrêmes consiste à modéliser les queues de distribution. Pour cela, elle se base notamment sur deux approches : l'approche des blocs de maxima et l'approche par dépassement de seuil, notée POT (*Peak Over Threshold* en anglais). Seule l'approche POT sera développée dans cette étude. En effet, elle nécessite moins de paramètres à estimer que la méthode des blocs de maxima, ce qui est préférable notamment lorsque le nombre de données historiques est faible. De plus, la méthode POT permet de déterminer des estimateurs plus efficaces. En effet, l'approche des blocs de maxima conduit souvent à des pertes d'information lors de la sélection des maxima ou minima par bloc tandis que l'approche POT utilise toutes les observations qui dépassent un certain seuil suffisamment élevé, évitant ainsi les pertes d'informations.

L'approche POT a été proposée par Pickands (1975). Elle repose sur l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur de l'échantillon. L'objectif de cette méthode est d'approcher la loi des excès au-delà d'un seuil par une distribution Pareto généralisée. L'excès au-delà du seuil est défini comme l'écart entre l'observation et le seuil. La convergence des excès vers une loi Pareto généralisée passe par la détermination d'un seuil adéquat et l'estimation des paramètres de la loi.

Plus précisément, considérons  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant  $F$  pour fonction de répartition, et un seuil  $u$  relativement élevé. Notons  $Y_1, \dots, Y_n$  les excès définis par  $Y_i = X_i - u$  avec  $i = 1, \dots, n$  et représentés en rouge sur le graphique suivant :

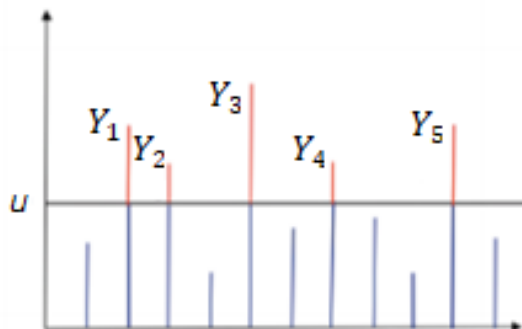


Figure 5 – Représentation des excès  $Y_i = X_i - u$ , avec  $i = 1, \dots, n$ , au-delà du seuil  $u$

La fonction de répartition des excès au-dessus du seuil  $u$ , notée  $F_u$ , est définie par la formule suivante :

$$F_u(y) = P(Y_i \leq y \mid X_i > u) = P(X_i - u \leq y \mid X_i > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

On a alors le résultat suivant énoncé par Balkema et De Haan (1974), et Pickands (1975). Ce théorème permet de caractériser la loi de la distribution des valeurs extrêmes sans qu'elle soit conditionnée par la loi parente dont la distribution est inconnue.

***Théorème de Pickands-Balkema-De Haan*** : Une fonction de répartition  $F$  appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes (Fréchet, Weibull et Gumbel), si et seulement si, il existe un seuil  $u$  et une fonction positive  $\beta(u)$  tels que :

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0$$

où

- $F_u$  est la fonction de répartition conditionnelle des excès pour  $u$  élevé,
- $x_F$  est le point terminal de  $F$ ,  $x_F = \inf\{x \mid F(x) \geq 1\}$
- $G_{\xi, \beta}$  est la fonction de répartition de la loi Pareto généralisée définie par :

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec  $y \geq 0$  si  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq y \leq -\beta/\xi$  pour  $\xi < 0$

Cette expression nécessite donc de déterminer seulement deux paramètres : un indice de queue  $\xi$  et un paramètre de dispersion  $\beta$ .

Selon le signe de  $\xi$ , trois cas sont possibles :

- Si  $\xi > 0$  : la fonction appartient au domaine d'attraction de Fréchet et la distribution est de type Pareto à queue lourde.
- Si  $\xi < 0$  : la fonction appartient au domaine d'attraction de Weibull et la distribution suit la loi Pareto de type II à support borné.
- Si  $\xi = 0$  : la fonction appartient au domaine d'attraction de Gumbel et la distribution est de type exponentiel à queue légère.

En finance, il est plus fréquent de rencontrer le cas où  $\xi > 0$  et donc des distributions à queue épaisse. En effet, l'indice de queue  $\xi$  donne des informations sur la forme de la queue de la distribution parente. Si  $\xi > 0$ , cela signifie que la probabilité d'occurrence des pertes extrêmes est supérieure à ce qui est prévu par la loi normale.

Dans cette étude, l'indice de queue est bien strictement positif puisque la queue de distribution est épaisse. La loi asymptotique est donc une loi Pareto généralisée. Il faut maintenant estimer ses paramètres et déterminer l'expression des quantiles.

### III-2 ESTIMATION DES QUANTILES DE LA LOI PARETO GENERALISEE

Dans un premier temps, avant l'estimation des paramètres, l'objectif est de déterminer l'expression du quantile de la loi Pareto généralisée. Pour cela, il convient de considérer un seuil  $u$  suffisamment grand (cette notion sera développée par la suite). D'après le théorème de Pickands-Balkema-de Haan, il est possible d'approcher  $F_u$ , la fonction de répartition conditionnelle des excès, par la fonction de répartition d'une loi Pareto généralisée  $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$  où  $\hat{\xi}$  et  $\hat{\beta}$  sont estimés par maximum de vraisemblance dans la suite de l'étude.

Soit une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ . L'objectif est de déterminer  $x$  tel que  $F(x) = p$ . En posant  $x = y + u$ , il vient :

$$F_u(x - u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad \text{si } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow F_u(x-u) = 1 - \frac{1-F(x)}{1-F(u)} \text{ si } x \geq u$$

$$\Leftrightarrow \bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u) \text{ si } x \geq u$$

avec  $\bar{F} = 1 - F$

Sachant que :

$$\bar{F}(u) = 1 - P(X \leq u) = P(X > u) = \frac{N_u}{N} \text{ et } \bar{F}_u \approx 1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}$$

où  $N_u$  est le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$  et  $N$  le nombre total d'observations,

l'estimateur de  $\bar{F}$  peut s'écrire :

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{N} \left( 1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}, \quad \forall \hat{\xi} \neq 0$$

Par inversion, l'estimateur obtenu par cette méthode s'écrit sous la forme :

$$\hat{x} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u} (1-p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), \quad \forall \hat{\xi} \neq 0$$

De manière similaire pour  $\hat{\xi} = 0$  :

$$\hat{x} = u - \hat{\beta} \log \left( \frac{N}{N_u} (1-p) \right)$$

Après l'estimation des quantiles, il est possible d'estimer les paramètres de la loi et le seuil des valeurs extrêmes  $u$ .

### III-3 ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

Les paramètres de la loi Pareto généralisée peuvent être estimés à partir de plusieurs méthodes, les plus fréquentes étant les méthodes paramétriques du maximum de vraisemblance, des moments et des moments de probabilités pondérées. Dans ce mémoire, la méthode du maximum de vraisemblance sera détaillée. Cette méthode a été jugée plus fiable comparativement aux autres méthodes par Dowd (2005).

La méthode du maximum de vraisemblance détermine les estimateurs  $\hat{\xi}$  et  $\hat{\beta}$  des paramètres  $\xi$  et  $\beta$  qui maximisent la fonction de vraisemblance. Cette fonction est obtenue de la manière suivante :



$$L(\xi, \beta | y) = \prod_{i=1}^n g_{\xi, \beta}(y_i)$$

où :

- $y = y_1, \dots, y_n$  un n-uplet de réels
- $g_{\xi, \beta}$  la fonction de densité d'une loi Pareto généralisée dont l'expression est la suivante :

$$g_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} \beta^{\frac{1}{\xi}} (1 + \xi y)^{-(1+\frac{1}{\xi})} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

La vraisemblance étant un produit de probabilités ou de densités, elle peut être assez compliquée à dériver. Il est alors préférable de considérer la log-vraisemblance pour se ramener à une somme. La fonction logarithme est croissante, il est donc équivalent de maximiser la log-vraisemblance.

La fonction log-vraisemblance de la loi Pareto généralisée s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \log(L(\xi, \beta | y)) &= \sum_{i=1}^n \log(g_{\xi, \beta}(y_i)) \\ &= \begin{cases} -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \xi \frac{y_i}{\beta}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour obtenir les expressions des estimateurs des paramètres, il faut donc résoudre :

$$L(\hat{\xi}, \hat{\beta} | y) = \max(\log(L(\xi, \beta | y)))$$

En remplaçant  $y$  par  $Y = Y_1, \dots, Y_n$  un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi Pareto généralisée, il est possible d'obtenir les estimateurs des paramètres de la loi.

### III-4 DETERMINATION DU SEUIL DES VALEURS EXTREMES

La détermination du seuil  $u$  est une étape très importante dans l'implémentation de l'approche *Peak Over Threshold* (POT) puisque la qualité du modèle en dépend. Il faut trouver un compromis entre un seuil suffisamment élevé afin d'utiliser les résultats asymptotiques et un seuil pas trop important pour que les estimations soient précises. Un seuil choisi trop faible entraîne des incertitudes sur le nombre de valeurs extrêmes et donc des estimations biaisées et une mauvaise approximation de la loi Pareto généralisée. A l'inverse, un seuil choisi trop grand ne produit pas un échantillon suffisamment important et les estimateurs sont donc trop volatiles.

Il existe plusieurs méthodes de détermination de seuil dont la méthode graphique du Hill *plot* à partir de l'estimateur de Hill (Hill, 1975) et la méthode élaborée à partir de la moyenne des excès ; ces deux méthodes seront présentées dans cette étude.

### III-4-i Détermination du seuil à partir de l'estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est fréquemment utilisé pour estimer l'indice de queue  $\xi$  pour une loi appartenant au domaine d'attraction de Frechet. Cet estimateur est construit à partir des pertes ordonnées dans l'ordre croissant. Il est défini de la manière suivante :

*Définition* : Soient  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$   $n$  variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Frechet avec un indice des valeurs extrêmes  $\xi > 0$ . Ces variables aléatoires sont telles que  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ . L'estimateur de Hill de  $\xi$  s'écrit :

$$\hat{\xi}_{N_u, n}^H = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log X_{n-i+1, n} - \log X_{n-N_u, n}$$

où  $N_u$  est tel que  $1 < N_u < n$ .  $N_u$  est le nombre de valeurs extrêmes dans la queue de distribution, il doit être sélectionné de manière appropriée par l'utilisateur pour déterminer l'estimateur de Hill.

L'estimateur de Hill correspond donc à une moyenne des  $N_u$  valeurs extrêmes observées au-delà du seuil  $u$  marquant le début de la zone des extrêmes moins le  $N_u$ -ième plus grand excès. C'est un estimateur consistant et asymptotiquement normal pour des échantillons suffisamment importants. Il est jugé comme étant un bon estimateur, cependant il est très sensible à la valeur de  $N_u$  et la théorie donne peu d'information pour la déterminer de manière optimale. Si  $N_u$  est trop grand, alors l'approximation par une loi de Pareto généralisée sera mauvaise et l'estimateur de Hill aura un biais important. A l'inverse, si  $N_u$  est trop petit, on disposera de très peu d'observations pour le calcul de l'estimateur qui aura alors une variance importante. Le bon choix de  $N_u$  est donc celui du meilleur compromis biais/variance. En théorie, pour obtenir la consistance de l'estimateur de Hill, il faut prendre pour  $N_u$  une suite intermédiaire telle que :  $N_u \rightarrow \infty$  et  $N_u/n \rightarrow 0$ . Pour choisir cette suite  $N_u$  en pratique, une méthode graphique est souvent utilisée. Elle consiste à tracer le Hill *plot*, c'est-à-dire la représentation de l'indice de queue en fonction de différentes valeurs de  $N_u$ .

### III-4-ii Estimation du seuil grâce au Hill *plot*

Le graphique de Hill (Hill *plot* en anglais) est construit à partir du nombre d'observations et des estimations de l'indice de queue obtenues avec l'estimateur de Hill. Il permet de déterminer le nombre d'observations à partir duquel on peut observer des valeurs extrêmes.

Le graphique de Hill consiste donc à représenter :

$$\{(N_u, \hat{\xi}_{N_u, n}^H), 1 \leq N_u \leq N\}$$

où  $N_u$  est le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$  et  $\hat{\xi}_{N_u, n}^H$  est l'estimateur de Hill de l'indice des valeurs extrêmes de la loi Pareto généralisée.

Le seuil  $u$  est choisi en observant la stabilité de l'indice de queue  $\xi$ . Plus précisément, le nombre d'observations extrêmes  $N_u$  est déterminé à partir de la zone de stabilité du graphique, c'est-à-dire la zone dans laquelle le paramètre des valeurs extrêmes varie peu. La première valeur de cette zone correspond à  $N_u$  et le seuil  $u$  est la valeur de la  $N_u$ -ième observation.

Les graphiques de Hill et les seuils  $u$  obtenus pour chaque indice de l'étude figurent ci-dessous.

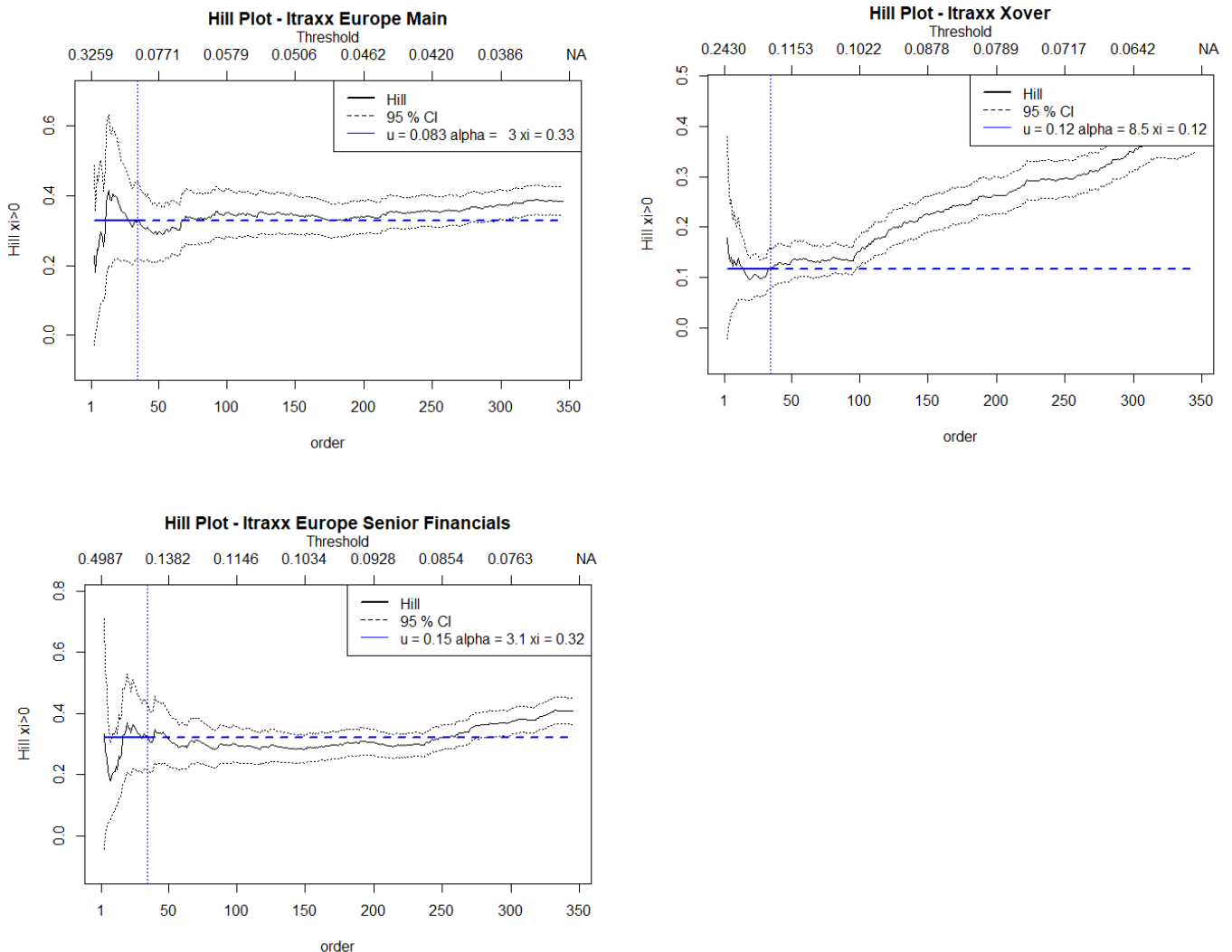


Figure 6 – Les graphiques de Hill des trois indices étudiés

Le seuil des valeurs extrêmes est approximativement  $u = 0.083$  pour l'indice *Itraxx Europe Main*,  $u = 0.12$  pour l'indice *Itraxx Xover* et  $u = 0.15$  pour l'*Itraxx Europe Senior Financials*. Cependant,

la détermination du seuil n'est pas évidente à partir de la représentation du Hill *plot*, surtout pour l'indice *Itraxx Xover* dont la courbe ne se stabilise pas vraiment.

Le Hill *plot* est souvent qualifié de « *Hill horror plot* ». En effet, il n'est pas toujours aisé d'obtenir une zone de stabilité de l'estimateur de Hill en faisant varier le nombre d'observations. Le choix du seuil  $u$  devient alors impossible en utilisant cette méthode. Par conséquent, d'autres procédures sont mises en œuvre pour déterminer le seuil.

### **III-4-iii Détermination du seuil avec la méthode de la fonction moyenne des excès**

La méthode de la fonction moyenne des excès est une autre méthode graphique permettant de déterminer le seuil  $u$ . Elle se base sur la fonction moyenne des excès qui est définie ci-dessous :

Définition : Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  et de point terminal  $x_F$ . Pour tout  $u < x_F$ , la fonction moyenne des excès est définie par :

$$e_n(u) = E(X - u \mid X > u)$$

En pratique, la fonction moyenne des excès empirique est utilisée.

Définition : Soient  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$   $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même fonction de répartition  $F$  telles que  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ . La fonction moyenne des excès empiriques correspond à la somme des valeurs extrêmes dépassant un certain seuil  $u$  suffisamment élevé divisée par le nombre de valeurs dépassant ce seuil.

$$\widehat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^n (X_i - u)^+$$

où :

- $u > 0$  est le seuil au-delà duquel les valeurs sont considérées extrêmes,
- $N_u$  est tel que  $1 < N_u < n$ .  $N_u$  est le nombre d'excès supérieurs à  $u$ .

Pour une variable aléatoire  $X$  suivant une loi Pareto généralisée, la fonction moyenne des excès est donnée par :

$$e_n(u) = E(X - u \mid X > u) = \frac{\xi}{1 - \xi} u + \frac{\sigma}{1 - \xi}$$

où  $u > 0$  et  $\xi < 1$ .

La détermination du seuil  $u$  est faite à partir de l'observation du *Mean Excess Plot*, qui est la représentation graphique de la fonction moyenne des excès. Le graphique est défini comme suit :

$$((u, e_n(u)), X_{1,n} \leq u \leq X_{n,n})$$

Le comportement de la courbe donne des indications sur la valeur du seuil  $u$  à sélectionner. Si la courbe semble linéaire au-dessus d'un certain seuil positif, alors il est possible de conclure, qu'au-delà de ce seuil, les excès suivent une distribution Pareto généralisée. En pratique, il suffit de considérer les valeurs de  $u$  à partir desquelles la courbe est approximativement linéaire ce qui se traduit graphiquement par un changement de pente qui reste globalement stable.

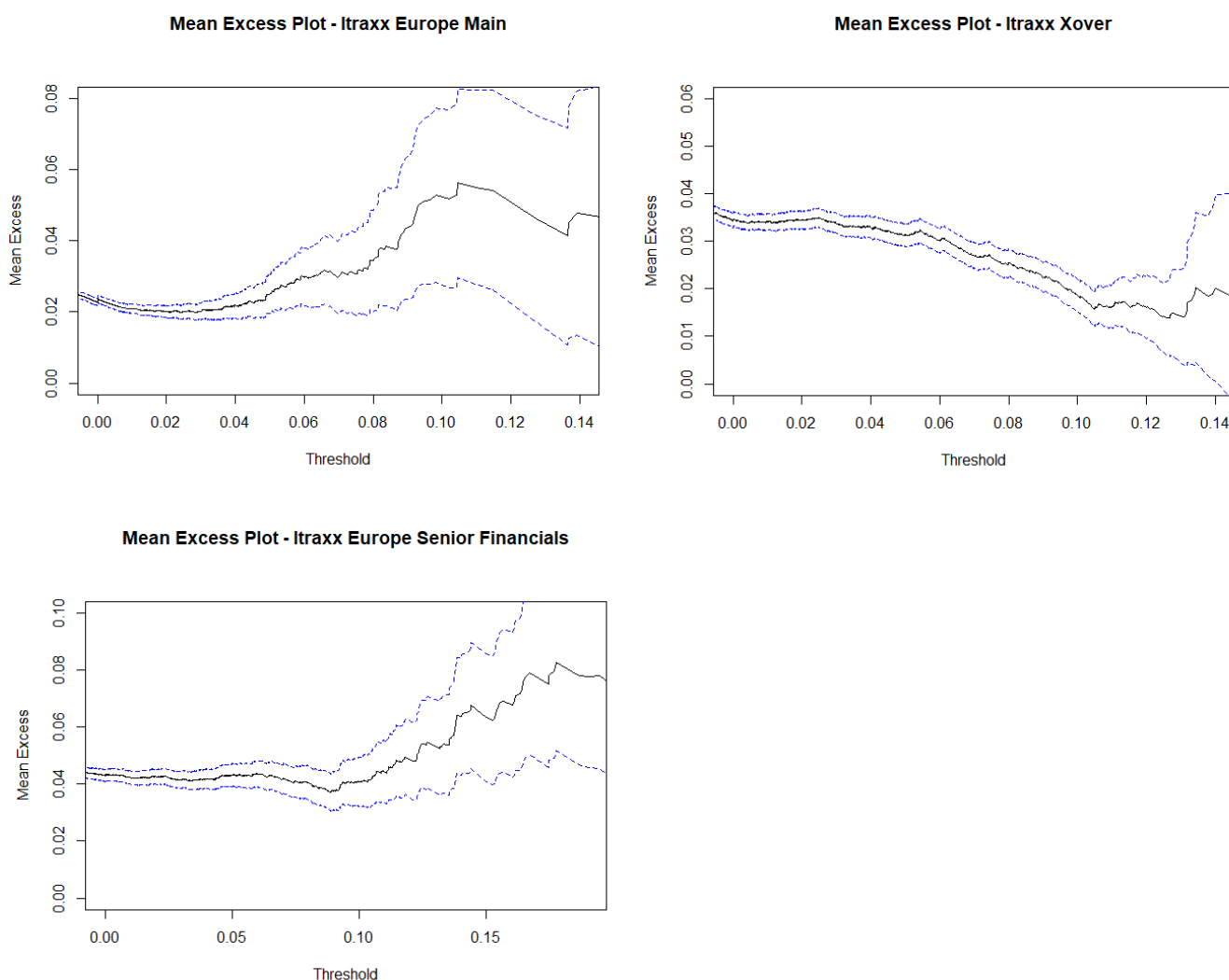


Figure 7 – Les *mean excess plots* des trois indices étudiés

Le *Mean Excess Plot* devient approximativement linéaire à partir de :

- $u = 0.10$  pour l'*Itraxx Europe Main*,
- $u = 0.11$  pour l'*Itraxx Xover*,
- $u = 0.15$  pour l'*Itraxx Europe Senior Financials*.

Les seuils obtenus avec les deux méthodologies mises en œuvre sont proches mais les graphiques ne permettent pas d'obtenir des résultats vraiment précis. Longin (1998) et Gavin (2000) ont précisé que, même si la valeur du seuil  $u$  est choisie subjectivement, elle doit impérativement respecter l'équilibre biais/variance pour assurer la convergence de l'estimateur de la loi Pareto généralisée. Ils recommandent alors d'adopter une part de valeurs extrêmes représentant 10% des données composant les queues de distribution. La part de valeurs extrêmes déterminée avec les seuils précédemment obtenus est bien proche de 10%.

Après avoir estimé les paramètres de la loi et le seuil  $u$ , l'adéquation de la distribution empirique des observations extrêmes avec la distribution théorique est testée dans la suite de l'étude.

### **III-5 ANALYSE DE L'ADEQUATION ENTRE LA DISTRIBUTION THEORIQUE ET LA DISTRIBUTION EMPIRIQUE**

La validité du modèle considéré pour les prédictions doit être analysée afin de s'assurer qu'il décrit bien les données étudiées et qu'il produit de bonnes estimations. Les analyses de conformité vont permettre de valider ou non les paramètres et le seuil déterminés précédemment, et en particulier de contrôler que l'équilibre entre biais et variance est respecté pour le choix du seuil. Pour cela, plusieurs méthodologies sont possibles telles que les graphiques Probabilité-Probabilité (P-P *plot*) et Quantile-Quantile (Q-Q *plot*), et telles que les tests d'adéquation comme celui d'Anderson-Darling.

#### **III-5-i Le graphique Quantile-Quantile**

Les graphiques Probabilité-Probabilité (P-P *plot*) et Quantile-Quantile (Q-Q *plot*) sont souvent employés pour tester l'adéquation des modèles de valeurs extrêmes. Ils permettent de comparer la distribution empirique pour un P-P *plot* ou les quantiles extrêmes pour un Q-Q *plot* d'un échantillon de données à ceux d'un échantillon de réalisation d'une loi théorique telle que la loi Pareto généralisée. Lorsque la loi théorique et la loi observée sont les mêmes, les points des graphiques sont confondus avec la bissectrice.

Dans cette étude, seul le Q-Q *plot* sera présenté. La représentation du P-P *plot* donnant des résultats similaires, elle n'apporte pas d'information supplémentaire pour conclure sur l'adéquation de la distribution.

Le Q-Q *plot* est un graphique permettant de relier les quantiles extrêmes empiriques de l'échantillon aux quantiles extrêmes de la loi théorique. Les points représentés sur le graphique sont :

$$\left\{ \widehat{F}_n^{-1} \left( \frac{n-k+1}{n+1} \right), x_{k,n} \right\}_{k=1, \dots, n}$$

où  $\widehat{F}_n^{-1}$  est l'inverse de la fonction de la distribution empirique estimée et  $x_{k,n}$  est la  $k$ -ième valeur de l'échantillon observé  $(x_1, \dots, x_n)$  ordonné dans l'ordre croissant.

Sur la représentation graphique, plus les points sont situés le long de la première bissectrice dans le plan, plus la loi estimée décrit avec précision les données. Le Q-Q *plot* permet en particulier d'évaluer l'ajustement sur les queues de distribution. Si les points sont convexes, alors la queue de la loi estimée est trop fine et inversement, si les points sont concaves alors la queue est trop épaisse.

Pour que les résultats du Q-Q *plot* soient crédibles, l'échantillon de données doit être suffisamment important car plus l'échantillon est grand, plus la méthode est fiable.

### III-5-ii Le test d'adéquation d'Anderson-Darling

Le test de Anderson-Darling est une variante du test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov, à la différence qu'il donne plus d'importance aux queues de distribution ; ainsi il est particulièrement adapté pour tester l'adéquation des valeurs extrêmes à une loi donnée.

Le test d'Anderson-Darling permet donc d'analyser l'adéquation d'un échantillon de données  $x = (x_1, \dots, x_n)$  avec une loi de probabilité. Il donne une mesure quantitative, et non graphique comme vu précédemment, de la qualité du modèle ajusté. La construction de ce test se base sur des propriétés asymptotiques de la fonction de répartition empirique  $\hat{F}_n$  définie comme suit :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}}$$

Soit une variable aléatoire  $X$  de loi inconnue, l'objectif est de déterminer s'il est raisonnable de supposer que  $X$  suit la loi de probabilité caractérisée par une fonction de répartition  $F$  ; pour cela les hypothèses du test sont :

$$H_0 : X \text{ suit la loi caractérisée par } F$$

$$H_1 : X \text{ suit une autre loi}$$

Soit  $A_n$  la statistique du test :

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\hat{F}_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$$

En pratique, la valeur obtenue pour la statistique  $A_n$  est comparée à une valeur critique fournie par les tables de la distribution théorique pour un seuil  $\alpha$  sélectionné. Il existe différents tableaux de valeurs critiques en fonction de la loi étudiée. Si  $A_n$  est supérieure à la valeur critique, l'hypothèse  $H_0$  est rejetée avec un risque d'erreur de première espèce  $\alpha$ .

L'avantage du test d'Anderson-Darling est de pouvoir quantifier l'adéquation d'un échantillon avec une loi paramétrique définie.

### III-6 LES RESULTATS DE L'AJUSTEMENT DE LA LOI PARETO GENERALISEE ET DES TESTS D'ADEQUATION

Une loi Pareto généralisée a été ajustée sur la queue de distribution de chaque indice étudié. Dans le cas des tests de résistance associés au risque de crédit, seule la queue droite de la distribution est intéressante. En effet, la hausse des *spreads* de crédit entraîne une augmentation de la probabilité de défaut et par conséquent, une augmentation du risque de crédit également. La queue droite représente donc en quelque sorte les pertes que l'organisme bancaire peut subir en cas de crise, alors que la queue gauche est plutôt assimilable à des gains potentiels. Cette partie présente l'ensemble des résultats obtenus suite à la mise en œuvre des méthodologies décrites précédemment.

#### III-6-i Les paramètres estimés

Les paramètres  $\xi$  et  $\beta$  obtenus pour l'ajustement des lois sur les données historiques des indices boursiers sont estimés grâce à la méthode du maximum de vraisemblance ; les estimations figurent dans le tableau *infra*. La valeur du seuil  $u$  et la part d'observations extrêmes  $p_u$  dans les queues de distribution figurent aussi dans les résultats ci-dessous pour chaque indice. Ces derniers sont déterminés à partir de la méthode de la fonction moyenne des excès.

Les estimations présentées dans le tableau ci-dessous ont été réalisées à la date du 01/04/2020 à partir des données disponibles sur la période du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes pour chaque indice.

	<b>Itraxx Europe Main</b>	<b>Itraxx Xover</b>	<b>Itraxx Europe Senior Financials</b>
$\hat{u}$	0,10	0,11	0,15
$p_u$	10%	9%	8,5%
$\hat{\xi}$	0,24	0,14	0,21
$\hat{\beta}$	0,04	0,02	0,05

Tableau 3 – Les paramètres de la loi Pareto généralisée  $\xi$  et  $\beta$  estimés, et les seuils  $u$  et la part d'observations extrêmes  $p_u$  estimés pour les trois indices étudiés

L'estimation du paramètre  $\xi$ , représentant l'indice de queue, est positive pour chacun des indices boursiers étudiés. Cela confirme que ces indices ont une distribution à queue lourde à droite. La probabilité d'occurrence des pertes dues à un écartement important des *spreads* est donc plus élevée que ce que prévoit initialement la distribution gaussienne. L'hypothèse de normalité des distributions supposée dans de nombreux modèles, dont celui audité, entraîne donc une sous-estimation des pertes potentielles. Ces erreurs d'ajustement peuvent avoir un impact désastreux sur la santé financière de l'organisme bancaire mais également sur la stabilité de l'ensemble du système financier.



Ces résultats constituent donc un premier signal pour les gestionnaires de risque qui vont devoir adapter le niveau de fonds propres réglementaires afin de faire face à ce risque de perte élevé.

### III-6-ii L'adéquation des modèles estimés

L'adéquation des données à la loi Pareto généralisée avec les paramètres estimés précédemment est vérifiée grâce à un outil statistique graphique, le Q-Q *plot*, et à un test statistique, le test d'Anderson-Darling.

Les Q-Q *plot* obtenus pour chaque indice sont les suivants :

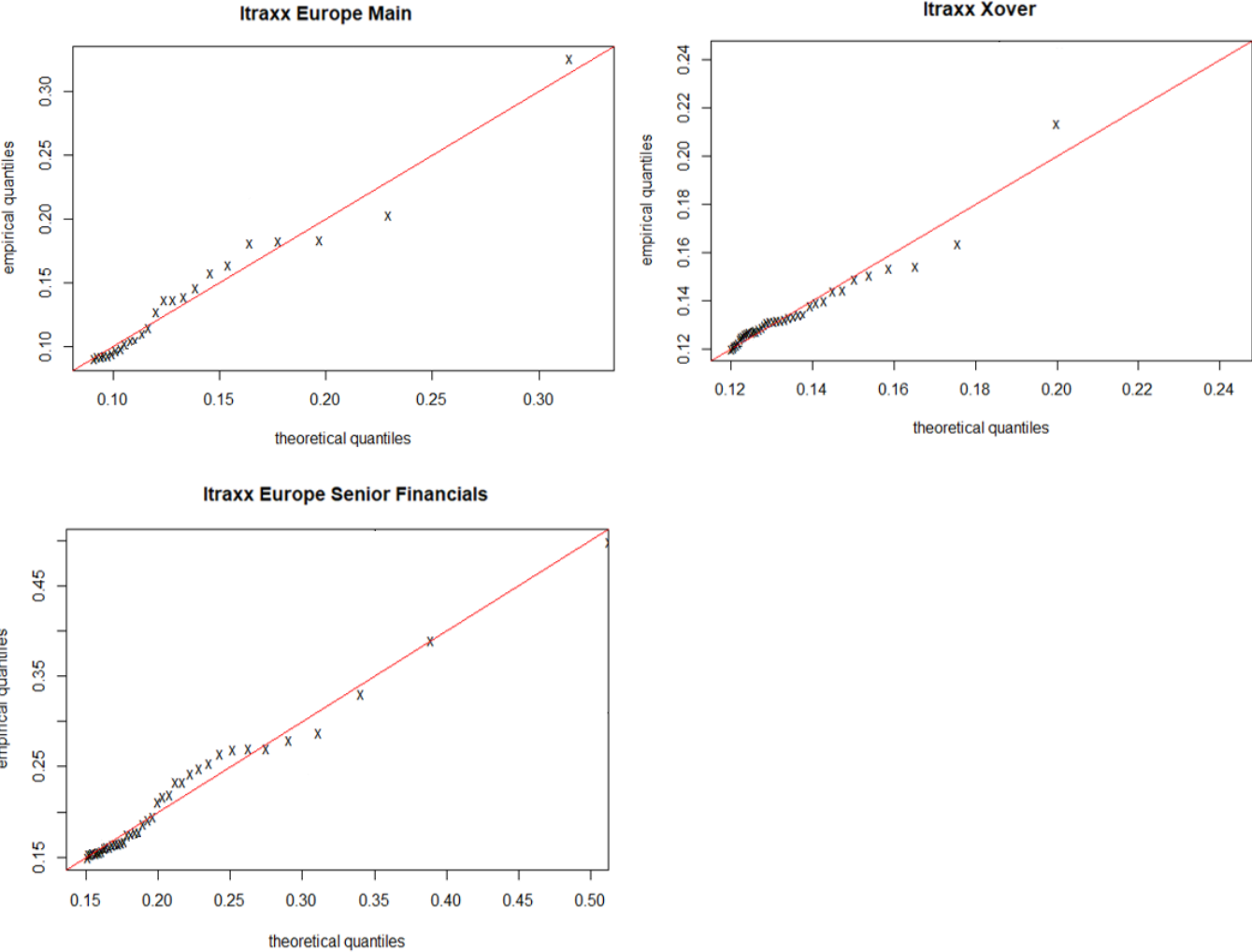


Figure 8 – Les graphiques Quantile-Quantile des trois indices étudiés

Les points étant relativement bien alignés avec la première bissectrice du plan, les lois estimées semblent décrire convenablement les données étudiées. Ces résultats qualitatifs sont contrôlés à l'aide d'un test statistique quantitatif.

Le test d'Anderson-Darling a permis d'obtenir les résultats ci-dessous :

	<i>Itraxx Europe Main</i>	<i>Itraxx Xover</i>	<i>Itraxx Europe Senior Financials</i>
<b>Statistique</b>	0,19	0,14	0,18
<b>P-valeurs</b>	0,36	0,49	0,21

Tableau 4 – Les résultats du test statistique d'Anderson-Darling

Les p-valeurs obtenues entraînent l'acceptation de l'hypothèse nulle au seuil de 5%. Les lois ajustées sont bien en adéquation avec les distributions des indices étudiés.

Cependant, les rentabilités sont considérées indépendantes et identiquement distribuées et leur variance constante dans le temps. En pratique, il est rare que ces hypothèses soient vérifiées sur les marchés financiers. Les données sont souvent hétéroscédastiques et corrélées. Ainsi, la modélisation réalisée pour l'instant ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants en période de crise et donc de forte volatilité. C'est pourquoi il est intéressant de considérer la volatilité conditionnelle dans le modèle de détermination des scénarii de *stress tests*, c'est-à-dire la volatilité tenant compte du passé récent. Cet aspect est développé dans la section suivante.

#### **IV- MODELISATION DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE**

Les modèles tenant compte de la volatilité conditionnelle parviennent à capturer certains effets sous-jacents aux séries temporelles financières que ne considèrent pas les modèles admettant une hypothèse d'homoscédasticité. Les représentations des rendements logarithmiques dans le Paragraphe I-1 ont montré la présence d'importantes variations de volatilité ; ces graphiques remettent donc en cause l'hypothèse de volatilité constante. Ainsi, les estimations réalisées à partir des modèles de volatilité conditionnelle sont en général plus fiables et plus réalistes. C'est pourquoi cette étude présente l'implémentation d'un modèle de volatilité conditionnelle pour l'estimation des scénarii de *stress tests*.

##### **IV-1 ANALYSE DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE DANS LES DONNEES**

Avant d'estimer un modèle de volatilité conditionnelle, il faut s'assurer que des effets de ce type sont présents dans les données étudiées. Il est possible dans un premier temps d'observer ces données dans un autocorrélogramme. L'autocorrélogramme permet de visualiser la corrélation entre les données à une date  $t$  et celles à la date  $t - j$ , avec  $j = 1, \dots, 10$  dans les graphiques représentés ci-dessous. Les autocorrélogrammes suivants sont construits à partir des données élevées au carré car un effet ARCH est un effet sur la variance présentant une corrélation avec les carrés des valeurs passées.

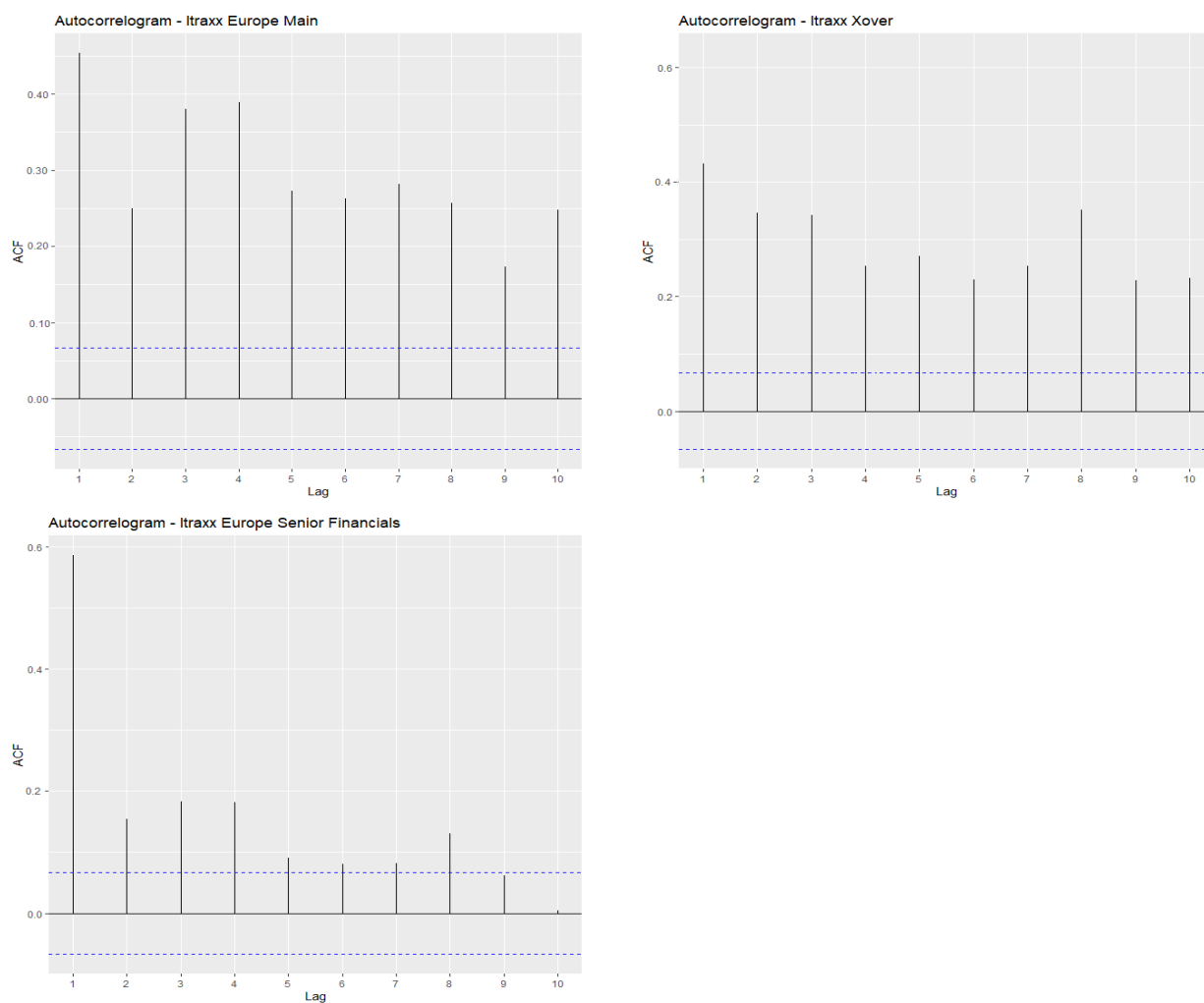


Figure 9 – Les autocorrélogrammes des trois indices étudiés

Il apparaît sur ces autocorrélogrammes que les données étudiées à la date  $t$  sont corrélées positivement en particulier avec les données de la date  $t - 1$ . Ces résultats qualitatifs sont confirmés par un test statistique quantitatif, le test des multiplicateurs de Lagrange.

Le test des multiplicateurs de Lagrange permet de tester la présence d'effets ARCH<sup>6</sup> (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), et donc de volatilité variable, dans les données (Engle, 1982). Le principe de ce test est de réaliser une régression linéaire de la série temporelle par la méthode des moindres carrés avec un retard donné à partir de deux modèles : un sans effet ARCH et un avec. La nullité des paramètres associés au modèle ARCH est ensuite testée.

<sup>6</sup> Effets ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) : Les modèles ARCH sont employés dans la modélisation de séries temporelles financières qui comportent des volatilités variables. Les effets ARCH désignent donc la présence d'une volatilité variable au sein des données.

Le test prend en entrée une série temporelle et un retard de temps (*lag* en anglais) entre les données. Les hypothèses du test sont :

$H_0$  : Il n'y a pas d'effet ARCH dans l'échantillon pour le lag donné

$H_1$  : Il y a un effet ARCH dans l'échantillon pour le lag donné

La p-valeur du test permettra de conclure sur la présence d'hétéroscédasticité ou non.

Ce test a été réalisé pour un *lag* égal à un pour chacun des indices étudiés. Les résultats obtenus pour la p-valeur du test sont présentés ci-dessous :

	<b>Itraxx Europe Main</b>	<b>Itraxx Xover</b>	<b>Itraxx Europe Senior Financials</b>
<b>P-valeurs</b>	< 2.2e-16	< 2.2e-16	< 2.2e-16

Tableau 5 – Les résultats du test statistique des multiplicateurs de Lagrange

Les p-valeurs étant inférieures à 5%, l'hypothèse nulle est rejetée avec un seuil de significativité de 5% et un risque d'erreur de première espèce de 5%. La présence d'hétéroscédasticité dans les données étudiées pour un retard d'une unité est donc confirmée.

Il s'agit maintenant de sélectionner le modèle de volatilité conditionnelle le plus adapté. Pour cela, les indicateurs les plus fréquemment utilisés sont l'AIC (le critère d'information d'Akaike) et le BIC (le critère d'information Bayésien), (Kuha, 2004). Ce sont des mesures de la qualité d'ajustement définies par :

$$AIC = -2\log(\hat{L}) + 2k \quad \text{et} \quad BIC = -2\log(\hat{L}) + k\log(n)$$

où :

- $\hat{L}$  est la vraisemblance maximisée du modèle estimé
- $k$  est le nombre de paramètres à estimer
- $n$  est le nombre d'observations

La différence entre ces deux critères est la manière dont ils pénalisent le nombre de paramètres à estimer et le nombre d'observations. L'AIC tend à être plus flexible que le BIC mais tous les deux s'interprètent de la même manière : plus ils sont faibles, plus le modèle est de bonne qualité.

Ces indicateurs ont été mesurés sur plusieurs types de modèle de volatilité conditionnelle appliqués aux données étudiées. Les valeurs les plus faibles ont été obtenues pour le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) pour l'ensemble des indices. Ce modèle sera donc utilisé pour modéliser la volatilité conditionnelle dans le reste de l'étude.

#### IV-2 PRISE EN COMPTE DE LA VOLATILITE CONDITIONNELLE : LE MODELE ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)

Le modèle GARCH (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity*) introduit par Bollerslev (1986) permet d'estimer la variance conditionnelle au cours du temps et donc de tenir compte de la dynamique de la volatilité. Cette dernière n'est ainsi pas considérée comme constante, cela remet en cause la propriété d'homoscédasticité souvent retenue. Ce modèle découle du modèle ARCH (*Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity*) développé par Engle (1982).

Le modèle utilisé pour cette étude est précisément le modèle GARCH-GJR (*Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity* – Glosten, Jagannathan, Runkle), ou GARCH asymétrique, d'ordre 1. Le modèle GARCH-GJR (1,1) est une extension du modèle GARCH (1,1) introduite par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993). Contrairement au modèle GARCH standard, cette forme du modèle GARCH prend en compte le caractère asymétrique de la distribution de la variable aléatoire considérée.

Le choix de l'utilisation d'un modèle de volatilité conditionnelle est notamment motivé par deux autres raisons :

- Ce modèle est utilisé comme une méthodologie de mesure de risque. Sa mise-en-œuvre va permettre de modéliser la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* définies dans la Partie 3 Paragraphe I.
- Ce modèle permet d'extraire des résidus standardisés, de tenir compte de la dynamique de la volatilité dans le temps et de l'effet d'asymétrie. L'estimation des paramètres de la loi Pareto généralisée n'est alors plus basée sur la rentabilité mais plutôt sur les résidus standardisés.

Tous les modèles GARCH permettent de considérer un changement de volatilité. Ils ont en commun une corrélation positive entre la volatilité à une date  $t$  et celle à la date  $t - 1$ . La volatilité a donc une structure autorégressive.

Le modèle GARCH standard est défini de la manière suivante :

Définition : Un processus  $\varepsilon_t$  satisfait une représentation GARCH(1,1) si

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

où  $(z_t)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites et  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ , et  $\beta_1 > 0$ .

Le principe du modèle GARCH-GJR est d'introduire un nouveau terme dans le modèle GARCH construit comme le produit d'une indicatrice de l'innovation du modèle et de la variable initiale. Ce terme supplémentaire permet de distinguer l'effet des chocs positifs et négatifs sur la variance

conditionnelle. Ce modèle est souvent utilisé pour mesurer les variances conditionnelles des indices boursiers, ces derniers n'ayant en général pas une distribution symétrique (Engle, 1993). Le modèle GARCH-GJR(1,1) est présenté ci-dessous :

Définition : Un processus  $\varepsilon_t$  satisfait une représentation GARCH-GJR(1,1) si

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2$$

Où  $(z_t)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites,  $\beta_0 \geq 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  et  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0}$  désigne la fonction indicatrice telle que  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$ .

Le paramètre  $\rho$  permet donc de considérer un effet asymétrique en fonction du signe de l'innovation passée. Si  $\rho > 0$ , un choc négatif sur l'innovation à la date  $t - 1$  se traduit par une augmentation de la variance conditionnelle  $\sigma_t^2$  à la date  $t$ , et inversement si  $\rho < 0$ . Dans le cadre d'une étude de rendements financiers d'actions,  $\rho$  est en général positif. Ce phénomène est justifié par l'augmentation de ratio d'endettement d'une entreprise à la suite d'une diminution de sa valeur boursière, cela se traduit en général par un accroissement de son risque et donc de sa volatilité. En revanche, pour l'étude des *spreads* de crédit, il est plus fréquent d'avoir un paramètre d'asymétrie négatif puisque le risque est augmenté par l'écartement des *spreads*. Un choc négatif est un choc de resserrement des *spreads*, il va donc avoir tendance à diminuer la volatilité.

Dans ce travail, le modèle GARCH-GJR(1,1) est étendu au processus ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1). Un modèle GARCH-GJR n'est que très rarement utilisé pour modéliser un jeu de données. Les données sont généralement modélisées par un modèle ARMA dont l'innovation est elle-même modélisée par un modèle GARCH-GJR. Ce procédé a été introduit par Weiss (1986) afin de considérer des effets additionnels dans la variance conditionnelle et il est devenu incontournable pour la modélisation de la volatilité journalière des séries financières car il parvient à capturer certains effets importants de ces séries tels que les *clusters* de volatilité.

Considérons  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une série temporelle suivant un modèle ARMA (1,1)-GARCH-GJR (1,1). Il est possible d'écrire  $X_t$  sous la forme d'un modèle ARMA (1,1) :

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}$$

où  $\varepsilon_t$  est l'innovation du modèle,  $\alpha_0, \alpha_1,$  et  $\alpha_2$  sont les paramètres du modèle.

Le modèle GARCH-GJR(1,1) permet d'obtenir l'innovation du modèle et la variance conditionnelle qui sont données par :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2$$

où :

- $(z_t)_t$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites, et correspond, dans cette étude, aux résidus standardisés du modèle, approchés par une loi Pareto généralisée, cette étape est réalisée dans les Paragraphes IV-4 et IV-5,
- $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$  et  $\rho$  sont les paramètres du modèle,
- $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0}$  désigne la fonction indicatrice telle que  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_{t-1} > 0 \end{cases}$

Des contraintes doivent être imposées sur les paramètres  $\beta_1, \beta_2$  et  $\rho$  pour assurer la positivité de la variance conditionnelle. Sous la condition de stationnarité du second ordre<sup>7</sup>, les paramètres doivent alors vérifier :

$$\beta_1 + \beta_2 + \frac{\rho}{2} < 1$$

### IV-3 ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

Les paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) sont estimés grâce à la méthode du quasi maximum de vraisemblance. L'intérêt de cette méthode est d'éviter le recours quasi obligatoire à des restrictions paramétriques et à des complexités calculatoires. L'objectif est de remplacer la vraisemblance par une vraisemblance approchée avec un modèle gaussien mais respectant les moments conditionnels d'ordre un, voire deux.

En fait, pour plus de précision, dans le cadre des modèles de type GARCH, la maximisation de la log-vraisemblance n'a pas de solution analytique. Il faut alors mettre en œuvre une méthode d'optimisation numérique. La condition initiale considérée pour le vecteur de paramètres,  $\theta$ , est l'estimation obtenue dans le cadre d'un modèle GARCH standard sous l'hypothèse de résidus gaussiens, cette hypothèse étant celle de la quasi-vraisemblance. Ce choix peut paraître en contradiction avec l'hypothèse de tenir compte des queues épaisses de la distribution du risque et donc de ne pas supposer la normalité du risque. Cependant, Bollersley et Wooldridge (1992) ont montré que les paramètres déterminés en maximisant la fonction de log-vraisemblance d'une loi normale dans le cadre d'une quasi-vraisemblance étaient asymptotiquement consistants et normaux, même lorsque les résidus de la distribution étudiées sont non-gaussiens. Le choix de cette condition initiale est alors cohérent.

Considérons  $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\rho})$  le vecteur des paramètres. Il s'obtient en maximisant la fonction de log-vraisemblance notée  $\log(L(\theta))$ . Cette fonction pour le modèle ARMA(1,1)-GARCH-

---

<sup>7</sup> Condition de stationnarité du second ordre : un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit stationnaire au second ordre si les trois conditions suivantes sont satisfaites pour tout  $t, h \in \mathbb{Z}$  :

- $E(x_t^2) < \infty$ ,
- $E(x_t) = m$  indépendant de  $t$ ,
- $cov(x_t, x_{t+h}) = E((x_{t+h} - m)(x_t - m)) = \gamma(h)$  indépendant de  $t$ .

GJR(1,1) de variable aléatoire  $X_t$  et sous l'hypothèse de la normalité des résidus de la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant son passé est obtenue avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} \log(L(\theta)) &= \log\left(\prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2(\theta)}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t}{2\sigma_t^2(\theta)}\right)\right) \\ &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^n \left(\log(\sigma_t^2(\theta)) + \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t^2(\theta)}\right) \end{aligned}$$

où :

- $\varepsilon_t$  désigne les innovations obtenues à partir de la différence entre les variables aléatoires  $X_t$  représentant les rentabilités et la moyenne  $\mu_t$ ,
- $\theta$  est le vecteur contenant l'ensemble des paramètres du modèle,
- $\sigma_t^2$  désigne la variance conditionnelle.

La résolution du quasi maximum de vraisemblance est réalisée grâce à la fonction « *ugarchfit* » disponible dans le *package* « *rugarch* » du logiciel *open source* R. Les estimations obtenues à l'issue de cette fonction figurent dans le tableau 6 ci-dessous. Ces résultats sont présentés pour chaque indice de l'étude. Comme précédemment, les mesures sont réalisées le 01/04/2020 à partir des données disponibles sur la période du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes pour chaque indice.

Un test statistique est également réalisé afin de contrôler la nullité des paramètres. Ce test a pour hypothèses :

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda = 0 \\ H_1 &: \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

avec  $\lambda$  le paramètre à estimer.

La statistique de test est :

$$t = \frac{\hat{\lambda}}{\text{standard error}(\hat{\lambda})}$$

		<b>Itraxx Europe Main</b>		<b>Itraxx Xover</b>		<b>Itraxx Europe Senior Financials</b>	
		<b>Valeurs</b>	<b>P-valeurs</b>	<b>Valeurs</b>	<b>P-valeurs</b>	<b>Valeurs</b>	<b>P-valeurs</b>
<b>Paramètres ARMA(1,1)</b>	$\hat{\alpha}_0$	1,50e-03	0,00	5,38e-04	<b>0,15</b>	-5,93e-04	<b>0,28</b>
	$\hat{\alpha}_1$	-0,13	0,04	0,31	0,00	0,5	0,00
	$\hat{\alpha}_2$	0,22	0,02	-0,51	0,00	-0,6	0,00
<b>Paramètres GARCH-GJR(1,1)</b>	$\hat{\beta}_0$	3,40e-03	0,00	4,90e-03	0,00	3,50e-03	0,00
	$\hat{\beta}_1$	0,21	0,00	0,13	0,00	0,14	0,00
	$\hat{\beta}_2$	0,86	0,00	0,87	0,00	0,83	0,00
	$\hat{\rho}$	-0,17	0,00	-0,05	0,00	-0,05	0,00

Tableau 6 – Les estimations des paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)



Pour les p-valeurs du test de nullité inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité des paramètres est rejetée avec un risque d'erreur de première espèce de 5%. Seuls deux paramètres ont une p-valeur supérieure à 5% et ne sont donc pas significativement différents de zéro. Cela concerne le paramètre  $\widehat{\alpha}_0$  du modèle ARMA(1,1) pour l'indice *Itraxx Xover* et pour l'indice *Itraxx Europe Senior Financials*. Les paramètres du modèle de variance conditionnelle GARCH-GJR(1,1) sont tous non-nuls ; cela confirme l'importance de tenir compte de la volatilité passée. Le paramètre d'asymétrie associé au modèle GARCH-GJR(1,1) étant significatif, cela montre que la volatilité réagit différemment aux bonnes et mauvaises nouvelles des marchés. Pour les indices étudiés, ce paramètre est négatif. Les chocs négatifs vont alors diminuer la variance. Ce phénomène est cohérent dans le cas des indices de crédit puisque les chocs négatifs correspondent aux resserrements des *spreads* de crédit, et donc à la réduction du risque de crédit. Dans le cadre de cette étude, ce sont les chocs positifs qui sont problématiques. Ces derniers auront bien un impact plus important sur la volatilité conditionnelle. Enfin, la stationnarité est bien vérifiée pour les trois indices étudiés puisque dans tous les cas :

$$\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + \frac{\widehat{\rho}}{2} < 1.$$

#### IV-4 ESTIMATION DE LA VARIANCE CONDITIONNELLE ET DES RESIDUS STANDARDISES

L'estimation des paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) permet de calculer les moyennes conditionnelles  $(\widehat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \widehat{\mu}_t)$ , et les variances conditionnelles  $(\widehat{\sigma}_{t-n+1}^2, \dots, \widehat{\sigma}_t^2)$  de façon récursive à partir des équations ci-dessous :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_t &= \widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 X_t \\ \widehat{\sigma}_t^2 &= \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \widehat{\sigma}_{t-1}^2 + \widehat{\beta}_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \widehat{\rho} \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{t-1}^2\end{aligned}$$

L'estimation de la variance conditionnelle  $\widehat{\sigma}_t^2$  à la date  $t$  s'obtient donc à partir des paramètres estimés  $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2$ , et  $\widehat{\rho}$ , et de l'innovation  $\varepsilon_{t-1}^2$  et la variance conditionnelle  $\widehat{\sigma}_{t-1}^2$  à la date  $t-1$ .

Des résidus sont également calculés en estimant le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) sur les log-rendements des indices étudiés. En particulier, le modèle ARMA(1,1) fournit la moyenne conditionnelle et les résidus sont obtenus à partir de la différence entre les log-rendements et la moyenne conditionnelle. Pour la suite de l'étude, il est nécessaire de disposer de résidus standardisés. Ceux-ci sont déterminés en divisant les résidus par la variance conditionnelle estimée à partir du modèle GARCH-GJR(1,1). Les variables  $(z_t)_t$  apparaissant dans le modèle GARCH-GJR(1,1) correspondent aux résidus standardisés et s'expriment donc de la manière suivante :

$$z_t = \frac{X_t - \widehat{\mu}_t}{\widehat{\sigma}_t}$$

$(z_t)_t$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites. De plus, les variables  $z_t$  ne sont pas autocorrélées.

Les propriétés de cette suite de variables aléatoires sont vérifiées grâce aux tests de :

- nullité de la moyenne,
- homoscedasticité,
- indépendance,
- absence d'autocorrélation.

Les détails des procédures des quatre tests sont disponibles en Annexe 1.

Pour chacune des trois séries étudiées, les tests statistiques réalisés ont permis de confirmer que les résidus standardisés sont bien indépendants, centrés, réduits et non-autocorrélés.

Ces résidus peuvent être approchés par une loi Pareto généralisée ; ce sera l'objet de la section suivante.

#### IV-5 ESTIMATION DES PARAMETRES DE LA DISTRIBUTION PARETO GENERALISEE

Les paramètres de la distribution de Pareto généralisée sont estimés à partir des résidus standardisés obtenus après l'application du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) sur les log-rendements des indices de crédit étudiés. Pour l'estimation des paramètres, uniquement la queue droite de la distribution est conservée. Les données extrêmes sont déterminées comme dans le Paragraphe III-4, et représentent environ 10% des résidus standardisés de la queue de distribution. Les estimations ont été réalisées, comme précédemment, à la date du 01/04/2020 à partir des données disponibles sur la période du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes pour chaque indice.

	<i>Itraxx Europe Main</i>	<i>Itraxx Xover</i>	<i>Itraxx Europe Senior Financials</i>
$\hat{\xi}$	0,28	0,23	0,35
$\hat{\beta}$	0,60	0,46	0,64

Tableau 7 – Les paramètres de la loi Pareto généralisée estimés à partir des résidus standardisés du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)

Les paramètres de queue estimés,  $\hat{\xi}$ , sont également positifs avec ce modèle. Cela confirme à nouveau la présence de queues épaisses dans la distribution des indices de crédit étudiés. De plus, les paramètres  $\hat{\xi}$  étant légèrement supérieurs à ceux estimés avec le modèle précédent, les queues modélisées avec ce modèle seront plus épaisses et la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes sera donc plus importante. Par conséquent, le modèle tenant compte de la volatilité conditionnelle aura tendance à mener à des conclusions plus prudentes.

L'adéquation des lois estimées à partir des résidus standardisés du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) aux trois indices de crédit étudiés a été contrôlée de la même façon que pour le modèle précédent (section III-5). Cette adéquation a également été validée. Afin d'éviter les redondances d'analyses, les résultats sont présentés en Annexe 2.

## CONCLUSION

Cette partie a permis de souligner la non-normalité de la distribution des log-variations des *spreads* de crédit. En effet, l'étude des variations des indices de crédit et la modélisation de la distribution des extrêmes ont confirmé la présence de queues de distribution épaisses. Les indices de crédit font donc face à des chocs extrêmes qu'il est important de pouvoir anticiper pour limiter le risque de faillite.

Le seuil de formation des valeurs extrêmes a pu être déterminé à partir du *Mean Excess Plot* permettant ensuite de modéliser les queues de distribution grâce à une loi Pareto généralisée puis à un modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1). Ce dernier s'est avéré être le plus adéquat pour cette étude. En effet, il permet de tenir compte de la dynamique de la volatilité, de l'asymétrie de la distribution et des *clusterings* de volatilité. La considération de ces facteurs lui permet de mieux anticiper et modéliser les fortes variations.

La partie suivante abordera les mesures de risque qui serviront de base à la détermination des scénarii de *stress tests* de crédit. Différents modèles seront testés à partir des deux modélisations des valeurs extrêmes construites dans cette partie afin de sélectionner le plus réaliste et le plus adapté au portefeuille étudié.

## **PARTIE 3 :**

# **ESTIMATION DES SCENARII DE *STRESS TESTS* AVEC LES MESURES DE RISQUE**

### **INTRODUCTION**

Le risque étant omniprésent sur les marchés financiers, des instruments mathématiques et statistiques de plus en plus complexes ont été développés enfin de pouvoir le mesurer, l'anticiper et le maîtriser.

Les scénarii de *stress tests* de crédit hypothétiques sont souvent élaborés à partir d'outils statistiques permettant la mesure et l'estimation du risque : les mesures de risque. La plus répandue est la *Value at Risk (VaR)* introduite à la fin des années 1980 sur les marchés financiers par la banque *Bankers Trust* aux Etats-Unis. Cependant, elle est fréquemment remplacée par l'*Expected Shortfall* car cette dernière permet de pallier les limites rencontrées avec la *VaR* ; elle est donc privilégiée par les autorités bancaires pour appréhender les risques.

Le modèle implémenté non seulement par l'entité auditée, mais également par de nombreux organismes bancaires, pour déterminer les scénarii de tests de résistance internes de crédit se base sur le calcul de l'*Expected Shortfall* appliquée aux rendements historiques. La valeur obtenue pour cette *Expected Shortfall* est utilisée comme paramètre de *spread* stressé pour valoriser le portefeuille de crédit. La différence entre la valorisation avec le *spread* de crédit actuel et celle avec l'*Expected Shortfall* constitue le résultat du *stress test*. L'*Expected Shortfall* est donc fondamental dans ce processus et la bonne qualité de son estimation est primordiale. L'objectif de cette partie est alors de construire de nouveaux modèles de calcul de l'*Expected Shortfall* afin d'identifier le plus adapté au portefeuille de crédit étudié et ainsi d'implémenter des scénarii de *stress tests* plus prudents et davantage en adéquation avec la réalité.

Les mesures de risque, en particulier la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall*, seront définies au début de cette partie. Après cela, les différentes méthodes d'estimation de ces mesures seront détaillées et les résultats obtenus pour chaque modèle sur les données de l'étude seront présentés. Enfin, une étape de validation des résultats permettra de conclure sur le modèle le plus pertinent pour établir les scénarii de tests de résistance du portefeuille de crédit considéré.

## I- RAPPELS THEORIQUES SUR LES MESURES DE RISQUE

Les mesures de risque classiques sur lesquelles l'étude s'appuiera sont présentées dans cette section.

### I-1 DEFINITION ET PROPRIETES DE LA MESURE DE RISQUE

La mesure de risque est définie de la manière suivante :

*Définition :* Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et  $G$  un ensemble non vide de variables aléatoires à valeurs réelles  $\mathcal{F}$ -mesurables. La mesure de risque correspond à toute fonction  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ .

En particulier, cette définition permet d'établir que, lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque. En fait, un grand nombre d'applications répondent à la définition d'une mesure de risque, mais pour être jugée satisfaisante, cette mesure doit vérifier plusieurs propriétés.

D'après Artzner et al. (1999), une mesure de risque  $\rho$  est considérée satisfaisante si elle est cohérente c'est-à-dire, lorsqu'elle vérifie les propriétés ci-dessous :

- Invariance par translation :  $\forall X \in G, \forall c \in \mathbb{R}, \rho(X + c) = \rho(X) + c$
- Sous-additivité :  $\forall X, Y \in G, \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- Homogénéité positive :  $\forall X \in G, \forall c \in \mathbb{R}_+, \rho(cX) = c\rho(X)$
- Monotonie :  $\forall X, Y \in G, \text{ si } P(X < Y) = 1, \text{ alors } \rho(X) \leq \rho(Y)$

La cohérence est surtout importante lorsque le gestionnaire détient un portefeuille composé de différentes catégories d'actifs. Dans ce cas, la sous-additivité est au moins nécessaire.

Ce travail se base essentiellement sur l'étude de la *Value at Risk (VaR)* et de l'*Expected Shortfall (ES)*. Ces deux mesures sont présentées ci-après.

### I-2 LA VALUE AT RISK

La notion de *Value at Risk* s'est originellement développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans de nombreux domaines tel que l'assurance par exemple.

*Définition :* Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , la *Value at Risk* de  $X$  au niveau  $\alpha$  notée  $VaR_\alpha$  est donnée par :

$$VaR_\alpha = \text{Inf} \{ x \in \mathbb{R} \mid \bar{F}(x) \leq \alpha \} = q(1 - \alpha)$$

où  $q(\alpha)$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi de  $X$  et  $\bar{F} = 1 - F$ .

La *Value at Risk* repose sur un concept simple et directement interprétable :  $VaR_\alpha(X)$  est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$ . Cependant la *VaR* n'est pas une mesure de risque vraiment satisfaisante car elle n'est pas sous-additive et donc pas cohérente. Elle ne prend pas correctement en compte la diversification du risque. De plus, elle ne permet pas d'étudier la queue de distribution. En effet, lorsqu'on évoque une *VaR* au niveau  $\alpha$  de  $x$  euros, on dit que la probabilité de faire des pertes supérieures à  $x$  euros est de  $\alpha\%$  mais on ne sait pas ce qu'il se passe dans les  $\alpha\%$  restants. L'*Expected Shortfall* est une mesure de risque permettant de surmonter ces critiques.

### I-3 L'EXPECTED SHORTFALL

L'*Expected Shortfall* est déterminée à partir de la valeur de la *VaR*. Elle permet de tenir compte de la queue de distribution puisqu'elle correspond à la perte probable lorsque l'on est dans les  $\alpha\%$  scénarii de la queue de la distribution des pertes. Plus précisément, il s'agit de l'espérance conditionnelle des pertes supérieures à un niveau de  $VaR_\alpha$  considéré.

Définition : Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une distribution continue, et soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'*Expected Shortfall* au niveau  $\alpha$  de  $X$ , notée  $ES_\alpha(X)$  est donnée par :

$$ES_\alpha = E(X | X > VaR_\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^\alpha VaR_{1-\theta}(X) d\theta$$

L'*Expected Shortfall*, à un seuil donné, est toujours supérieure à la *VaR* au même seuil. De plus, c'est une mesure de risque cohérente. Cette mesure permet donc de corriger les deux points faibles de la *VaR* et d'être également plus prudent.

De par ses nombreux avantages, l'*Expected Shortfall* est la mesure de risque privilégiée par les autorités bancaires. Le choix a alors été fait d'utiliser cette mesure pour établir les scénarii de *stress tests*. En effet, le test de résistance de crédit interne généralement implémenté consiste à valoriser le portefeuille de crédit étudié en considérant l'*Expected Shortfall* déterminée sur la distribution des log-variations des *spreads* de crédit comme paramètre stressé. L'évolution de la valeur du portefeuille est ensuite analysée.

### I-4 LE TEMPS DE RETOUR

Les tests de résistance mesurent les risques de perte en cas de crise, c'est-à-dire en cas de réalisation d'un événement rare. Il est alors primordial de pouvoir définir la notion d'événement rare. Un événement rare est défini comme un événement dont la probabilité d'occurrence est faible. Cette définition reste très imprécise. C'est pourquoi une notion plus pertinente est en général utilisée, celle du temps de retour.

Définition : Soit  $X$  une variable aléatoire suivant un processus temporel d'apparition et de fonction de répartition  $F$ , et soit  $D_x$  la probabilité de dépassement d'une valeur  $x$ ,

$$D_x = P(X > x) = 1 - F(x)$$

la période de retour  $T$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$T = \frac{1}{D_x} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Par exemple, le temps de retour d'un événement dépassant la  $VaR$  à 99% est :

$$T(VaR) = \frac{1}{1 - 0.99} = 100$$

donc si l'horizon de détention est d'un jour, le temps de retour est de 100 jours. La  $VaR$  sur une période d'un jour est alors en moyenne dépassée tous les 100 jours.

Plus généralement, le temps de retour  $T$  associé à une  $VaR$  journalière de seuil  $\alpha$  est défini comme le nombre de jours qu'il faut pour dépasser cette dernière sous l'hypothèse de stationnarité du second ordre de la série financière. C'est donc le temps moyen au bout duquel le portefeuille subit une perte extrême. Le temps de retour agit comme un intermédiaire entre le seuil de la  $VaR$  et le seuil du quantile extrême correspondant. Il s'exprime de la manière suivante :

$$T = \frac{1}{1 - \alpha}$$

La construction d'un scénario de crise consiste à déterminer les variations journalières extrêmes associées aux principaux facteurs de risque (tel que le risque de crédit pour cette étude) pour un temps de retour préalablement choisi.

## **II- ESTIMATIONS DES MESURES DE RISQUE**

Il existe différentes méthodologies de calcul des mesures de risque.

Pour la *Value at Risk* et donc l'*Expected Shortfall* qui est déterminée à partir de la  $VaR$ , il est possible de définir deux approches principales :

- L'approche non-paramétrique : cette approche est basée sur les données historiques ; c'est une méthode de simulation historique.
- L'approche paramétrique : cette approche consiste à émettre des hypothèses sur la distribution des rendements ; ces méthodes peuvent ainsi capturer des effets sous-jacents

en fonction de la nature des rendements ; les valeurs des mesures de risque qui en découlent sont souvent plus fiables.

Les approches paramétriques peuvent être divisées en deux catégories :

- Une approche paramétrique inconditionnelle : la volatilité des rendements est invariante dans le temps et ne dépend pas de la période durant laquelle ces rendements sont observés.
- Une approche paramétrique conditionnelle : elle est principalement basée sur les modèles de la famille GARCH ; la volatilité est estimée avec un de ces modèles puis utilisée dans l'estimation de la *Value at Risk*.

Dans ce travail, trois approches sont comparées afin de sélectionner la plus performante. Les approches considérées sont :

- une approche non-paramétrique à partir de données historiques
- une approche paramétrique inconditionnelle basée sur la loi Pareto généralisée
- une approche paramétrique conditionnelle également basée sur la loi Pareto généralisée mais tenant compte de la volatilité conditionnelle.

Les méthodologies et les résultats sont présentés dans la section *infra*.

## II-1 LES MESURES DE RISQUE BASEES SUR DES DONNEES HISTORIQUES

Les mesures de risque se basant sur des données historiques sont fréquemment utilisées au sein des organismes bancaires, comme cela est le cas pour l'entité auditée. Ce sont les modèles les plus simples à mettre en œuvre pour calculer la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall*. Cependant, ils nécessitent un nombre de données suffisamment important pour que les résultats soient fiables.

La *Value at Risk* est déterminée à partir de sa formule de base, c'est-à-dire :

$$VaR_{\alpha} = q(\alpha)$$

avec  $q(\alpha)$  le  $(1 - \alpha)$ -ième quantile de la série étudiée.

Il suffit donc d'ordonner la série de données historiques en ordre croissant et d'en sélectionner la valeur correspondant au  $(1 - \alpha)$ -ième quantile pour obtenir la  $VaR_{\alpha}$ .

L'*Expected Shortfall* est ensuite estimée simplement grâce à la formule :

$$ES_{\alpha} = E(X | X > VaR_{\alpha})$$

Cela revient donc à calculer la moyenne des valeurs supérieures à la  $VaR_{\alpha}$  dans la série ordonnée des données historiques.

Cette méthode est facile à implémenter et intuitive cependant elle ne tient pas compte des effets de la volatilité et se base uniquement sur les données historiques qui ne reflètent pas forcément les mouvements futurs. Les *stress tests* risquent alors de ne pas être suffisamment fiables et de manquer



de prudence. Dans les sections suivantes, d'autres méthodologies sont présentées pour répondre à ces critiques.

## II-2 LES MESURES DE RISQUE POUR UNE LOI PARETO GENERALISEE

Le calcul de *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* pour la loi Pareto généralisée se base sur la notion de quantile. Il a été établi précédemment :

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{N} \left( 1 + \xi \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad \forall \xi \neq 0$$

où :

- $\hat{F}$  est la fonction de survie empirique de la variable aléatoire observée
- $N_u$  est le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$
- $N$  est le nombre total d'observations
- $\hat{\beta}$  et  $\hat{\xi}$  sont les estimateurs des paramètres de la distribution Pareto généralisée

Le quantile de la loi Pareto généralisée correspond à la variable  $x$  de l'équation précédente et donc par inversion :

$$\hat{x} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) = q(1 - p), \quad \forall \hat{\xi} \neq 0$$

or

$$VaR_\alpha = q(\alpha)$$

ainsi

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u} (\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

avec  $\alpha$  le niveau de risque choisi.

Par ailleurs, l'*Expected Shortfall* s'obtient avec l'expression suivante :

$$ES_\alpha = E(X | X > VaR_\alpha) = VaR_\alpha + E(X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha)$$

Cette mesure correspond donc à la somme du seuil  $VaR_\alpha$  et de la moyenne des excès au-delà de ce seuil.

Sous la condition que  $F_u(x) \approx G_{\xi, \beta}(x)$  pour un seuil  $u$  suffisamment élevé, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}
P(X - VaR_\alpha \leq y \mid x > VaR_\alpha) &= P(X - u \leq y + (VaR_\alpha - u) \mid x - u > VaR_\alpha - u) \\
&= \frac{P(X - u \leq y + (VaR_\alpha - u), x - u > VaR_\alpha - u \mid x - u > 0)}{P(x - u > VaR_\alpha - u \mid x - u > 0)} \\
&= \frac{G_{\xi, \beta}(y + VaR_\alpha - u) - G_{\xi, \beta}(VaR_\alpha - u)}{1 - G_{\xi, \beta}(VaR_\alpha - u)} \\
&= 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta + \xi(VaR_\alpha - u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
&\approx G_{\xi, \beta + \xi}(VaR_\alpha - u)
\end{aligned}$$

Ainsi, si la distribution des pertes au-delà d'un seuil  $u$  est supposée suivre une loi Pareto généralisée  $G_{\xi, \beta}$ , alors la loi des pertes au-delà d'un seuil supérieur à  $u$ , par exemple la  $VaR_\alpha$ , suit une même loi mais avec un paramètre d'échelle différent :  $G_{\xi, \beta + \xi}(VaR_\alpha - u)$ . De plus, pour  $\xi < 1$ , l'estimateur de la moyenne des excès au-delà d'un seuil  $u$  d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi Pareto généralisée  $G_{\xi, \beta}$  est donné par :

$$E(X - \widehat{u} \mid X > u) = \frac{\hat{\beta} + \xi u}{1 - \xi}$$

avec  $\beta + \xi u > 0$

L'estimateur de l'*Expected Shortfall* au niveau  $\alpha$  est alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{ES}_\alpha &= \widehat{VaR}_\alpha + \frac{\hat{\beta} + \xi(\widehat{VaR}_\alpha - u)}{1 - \xi} \\
&= \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\hat{\beta} + \xi u}{1 - \xi}
\end{aligned}$$

Cette méthodologie permet de déterminer la  $VaR_\alpha$  et l' $ES_\alpha$  sur le portefeuille sans tenir compte de la variance conditionnelle.

### II-3 LES MESURES DE RISQUE AVEC UNE VOLATILITE CONDITIONNELLE

L'objectif de cette section est de déterminer la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* en considérant la dynamique de la volatilité. Les estimations sont réalisées à partir des résidus standardisés du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) afin de tenir compte de l'autocorrélation. Les pertes potentielles du portefeuille sont donc calculées grâce à la  $VaR$  et l' $ES$  avec les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{VaR}_\alpha^{t+1|t}(Z) &= \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{VaR}_\alpha(Z) \\
\widehat{ES}_\alpha^{t+1|t}(Z) &= \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \widehat{ES}_\alpha(Z)
\end{aligned}$$

où :

- $\widehat{VaR}_\alpha(Z)$  et  $\widehat{ES}_\alpha(Z)$  sont la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* de la loi Pareto généralisée obtenues à partir des résidus standardisés  $Z$
- $\widehat{\mu}_{t+1|t}$  est la moyenne conditionnelle estimée à partir du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)
- $\widehat{\sigma}_{t+1|t}$  est la volatilité conditionnelle estimée à partir du modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1)

Il a été établi précédemment que :

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{N_u}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

où :

- $N_u$  est le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$
- $N$  est le nombre total d'observations
- $\hat{\beta}$  et  $\hat{\xi}$  sont les estimateurs des paramètres de la distribution Pareto généralisée
- $\alpha$  est le niveau choisi pour la  $VaR_\alpha$

En adaptant cette formule aux résidus standardisés, il vient :

$$\widehat{VaR}_\alpha(Z) = Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

où :

- $Z_{k+1}$  est le  $(k+1)$ -ième résidu standardisé correspondant au seuil d'apparition des valeurs extrêmes
- $N$  est le nombre de valeurs dans la queue de distribution
- $k$  est le nombre de résidus standardisés au-delà de  $Z_{k+1}$
- $\hat{\beta}$  et  $\hat{\xi}$  sont les estimateurs des paramètres de la distribution Pareto généralisée estimés sur les excès des résidus standardisés

En remplaçant l'expression de la  $VaR_\alpha(Z)$ , dans la formule de la *Value at Risk* tenant compte de la variance conditionnelle,  $VaR_\alpha^{\widehat{\sigma}_{t+1|t}}(Z)$ , il vient :

$$VaR_\alpha^{\widehat{\sigma}_{t+1|t}}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \left[ Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{N}{k}(\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \right]$$

Par ailleurs, afin d'obtenir l'*Expected Shortfall* prenant en considération la variance conditionnelle,  $ES_\alpha^{\widehat{\sigma}_{t+1|t}}(Z)$ , il faut adapter la formule de l'estimateur de l'*Expected Shortfall* aux résidus standardisés.

Ainsi :

$$\widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}$$

devient :

$$ES_{\alpha}(Z) = \frac{\widehat{VaR}_{\alpha}(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}Z_{k+1}}{1 - \hat{\xi}}$$

où  $Z_{k+1}$ ,  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\xi}$  sont définis comme dans la formule de la  $VaR_{\alpha}(Z)$ .

Par conséquent, l'expression suivante est obtenue :

$$ES_{\alpha}^{\widehat{\sigma}_{t+1|t}}(Z) = \widehat{\mu}_{t+1|t} + \widehat{\sigma}_{t+1|t} \left( \frac{\widehat{VaR}_{\alpha}(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}Z_{k+1}}{1 - \hat{\xi}} \right)$$

La *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* calculées à partir de la modélisation de la volatilité conditionnelle permettent d'estimer les pertes potentielles maximales du portefeuille en tenant compte du changement de volatilité et de l'effet asymétrique des rentabilités.

#### II-4 COMPARAISON DES RESULTATS DES DIFFERENTS MODELES

La *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* ont été estimées sur les données étudiées selon plusieurs modèles :

- un modèle déterminé sur les données historiques
- un modèle établi à partir de la loi Pareto généralisée
- un modèle tenant compte de la volatilité conditionnelle.

Les scénarii de *stress tests* sont mis à jour et recalculés chaque début de mois à partir de 10 ans de données historiques quotidiennes. La valeur obtenue à l'issue de la procédure est donc conservée pour le mois en cours.

Pour le modèle tenant compte de l'autocorrélation, la procédure est particulière. En effet, ce modèle permet d'estimer des mesures de risque quotidiennes grâce aux formules de récurrence de la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall*. Cependant, comme pour les deux autres modèles, le choix a été fait de n'utiliser qu'une valeur de paramètre stressée pour le mois. C'est alors la mesure la plus prudente - c'est-à-dire la plus élevée - obtenue sur le mois qui sera conservée.

Dans le tableau 8 ci-dessous, les mesures de risque ont été estimées à la date du 01/04/2020 à partir des données disponibles sur la période du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes pour chaque indice. Dans un premier temps, la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* ont été mesurées lors d'une période de crise (ici la crise de 2020 due à la pandémie de Covid-19) afin de mieux observer la réaction des modèles en cas de mouvements importants des marchés.

Dans cette étude, seul l'écartement des *spreads* constitue un risque de perte, c'est pourquoi les données utilisées pour la détermination des scénarii de stress sont les log-rendements positifs.

Le temps de retour sélectionné pour réaliser les mesures sur un horizon de détention de un jour est de 20 jours.

Les résultats des mesures de risque obtenus avec les trois modèles sont présentés dans le tableau suivant :

	<b>Itraxx Europe Main</b>		<b>Itraxx Xover</b>		<b>Itraxx Europe Senior Financials</b>	
	<b>VaR</b>	<b>ES</b>	<b>VaR</b>	<b>ES</b>	<b>VaR</b>	<b>ES</b>
<b>Modèle historique</b>	0,05	0,10	0,09	0,11	0,06	0,11
<b>Modèle Pareto généralisé</b>	0,06	0,11	0,13	0,14	0,10	0,15
<b>Modèle GARCH-GJR(1,1)</b>	0,10	0,14	0,15	0,17	0,12	0,17

Tableau 8 – Les mesures de risque obtenues pour les trois indices étudiés à partir des trois modèles

Les mesures de risque du modèle historique sont les plus faibles et risquent donc de manquer de prudence en sous-estimant les pertes possibles.

En période de crise, le modèle le plus prudent paraît être celui tenant compte de la variance conditionnelle. En effet, les *Expected Shortfalls* sont plus importantes qu'avec le modèle historique. Cela s'explique par le fait que, lors des crises boursières, la volatilité des indices est plus élevée ; ce modèle va donc avoir tendance à donner des mesures de risque plus importantes. En revanche, lorsque les marchés sont plus calmes, le modèle avec variance conditionnelle déterminera des mesures généralement plus faibles.

Enfin, les résultats obtenus avec le modèle Pareto généralisé se situent entre ceux des deux autres modèles. En effet, ce modèle tient compte de la distribution à queue épaisse ; il estime alors des mesures de risque plus prudentes qu'avec le modèle historique, mais il ne considère pas la volatilité conditionnelle ; par conséquent, les mesures déterminées en période de crise sont plus faibles qu'avec le modèle de variance conditionnelle.

A ce stade de l'étude, il n'est pas encore possible de déterminer lequel de ces modèles est le plus pertinent et le plus fiable pour élaborer les scénarii de *stress tests*. C'est pour cela qu'il faut mettre en œuvre une procédure de *backtesting* des résultats.

## II-5 VALIDATION DES MODELES

Le *backtesting*, ou la validation du modèle, est un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées sont en adéquation avec les pertes prévues. Cette procédure est très importante pour les gestionnaires de risque puisqu'elle leur permet de valider ou non leur modèle et surtout d'améliorer celui-ci en cas d'écarts significatifs. Sans cette étape, il est probable que les gestionnaires de risque se rendent compte trop tard de l'inadéquation du modèle utilisé et que la banque ait déjà essuyé des pertes considérables.

Pour réaliser cette étape de *backtesting*, il est intéressant d'utiliser un modèle de type *model free*, c'est-à-dire un modèle dont les propriétés ne dépendent pas du modèle qui a permis de générer les prévisions de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall*. Ce type de validation peut être appliqué de la même façon à n'importe quel modèle. Le recours à ces modèles de type *model free* est donc intéressant dans cette étude afin de comparer les résultats des trois modèles implémentés.

La procédure de *backtesting* implique de comparer les prévisions ex-ante de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* avec leurs réalisations ex-post (Jorion, 2007). Or les réalisations ex-post de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* ne sont pas observables ; plusieurs méthodologies statistiques ont alors été développées (Christoffersen, 2004).

Pour la *Value at Risk* :

L'évaluation de la validité est généralement fondée sur des tests statistiques des deux hypothèses que le processus associé aux violations de la *VaR* doit vérifier. La violation correspond à une situation dans laquelle la perte observée excède les valeurs anticipées. Selon Christoffersen (1998), une prévision de la *VaR* est valide si et seulement si la séquence des violations satisfait les deux hypothèses suivantes :

- L'hypothèse de couverture non-conditionnelle :

Cette dernière est vérifiée lorsque la probabilité que se réalise ex-post une perte en excès par rapport à la  $VaR_\alpha$  anticipée est égale au taux  $\alpha$ . Si la probabilité de violation est inférieure à  $\alpha$ , alors la *VaR* surestime les pertes, et inversement.

Le test de Kupiec (1995) permet de contrôler l'hypothèse de couverture non-conditionnelle.

Définition : Pour une *VaR* à  $\alpha\%$ , le test de couverture non-conditionnelle de Kupiec admet pour hypothèse :

$$H_0 : E(I_t) = \alpha$$

$$H_1 : E(I_t) \neq \alpha$$

où  $I_t$  désigne la violation de la *VaR* à la date  $t$ .

- L'hypothèse d'indépendance des violations : elle est satisfaite si les violations de la  $VaR_\alpha$  observées à deux dates différentes sont indépendamment distribuées. Ainsi, il ne doit pas exister de *cluster* de violations. Des violations successives peuvent mener à la faillite de l'institution financière qui ne sera pas en capacité de gérer l'accumulation des pertes, alors que des violations indépendantes et donc dispersées dans le temps sont plus faciles à surmonter.

Christoffersen (1998) a proposé un test pour contrôler l'hypothèse d'indépendance de la série des violations de la  $VaR_\alpha$ . Pour cela, il suppose que le processus des violations  $I_t(\alpha)$  peut être

modélisé par une chaîne de Markov<sup>8</sup> admettant pour matrice de transition, la matrice ci-dessous :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{0,0} & \pi_{0,1} \\ \pi_{1,0} & \pi_{1,1} \end{pmatrix}$$

où  $\pi_{i,j} = P(I_t(\alpha) = j | I_t(\alpha) = i)$

L'hypothèse nulle du test est :

$$H_0 : \Pi = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Quel que soit l'état du système à la date  $t - 1$ , la probabilité d'observer une violation à la date  $t$  est égale au taux de couverture conditionnelle  $\alpha$ .

#### Pour l'Expected Shortfall :

L'un de ses défauts majeurs est la difficulté à effectuer une procédure de *backtesting*. Cependant, Kourouma et al. (2012) sont parvenus à proposer une méthode pour examiner l'efficacité de l'estimateur de l'Expected Shortfall. Ce test consiste à calculer la différence moyenne entre la perte réalisée et l'Expected Shortfall estimée, sous la condition que cette perte dépasse la Value at Risk de même niveau. La statistique du test est définie par :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (ES_i - X_i) \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}$$

où  $X_i$  est la perte réelle au jour  $i$ ,  $ES_i$  et  $VaR_i$  sont l'Expected Shortfall et la Value at Risk estimés au jour  $i$ .

Une valeur négative de  $V$  indique une sous-estimation du risque de perte, et inversement, une valeur positive souligne une surestimation du risque. L'estimateur de l'Expected Shortfall est précis si  $V$  est proche de 0. Mais cette méthode comporte tout de même une limite : elle n'associe aucune probabilité à la statistique calculée pour pouvoir trancher sur la fiabilité du modèle de mesure de l'Expected Shortfall. La qualité des modèles sera donc surtout vérifiée à partir du *backtesting* de la VaR.

Ces trois procédures de *backtesting* sont davantage détaillées en Annexe 3.

Les tests de *backtesting* ont été menés sur la période du 01/01/2010 au 01/01/2013, qui, comme le montre le Figure 1 Partie 1 Paragraphe 1-I, est une période de forte agitation pour les marchés du crédit. La Value at Risk et l'Expected Shortfall étant estimées à une fréquence mensuelle, cela représente un total de 36 valeurs pour chaque indice et pour chaque mesure de risque. Chacune de ces 36 valeurs est comparée aux variations quotidiennes du mois sur lequel elle est utilisée, ce qui

<sup>8</sup> Chaîne de Markov : Une suite de variable aléatoire  $(X_n)$  définie sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans  $(E, P(E))$  est une chaîne de Markov dans  $E$  si pour tout  $n$  et tous points  $x_0, \dots, x_{n+1}$ ,  $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1})$ .

constitue finalement un total de 748 comparaisons pour chaque indice. Les modèles ont été calibrés à partir des données historiques quotidiennes avec un décalage d'un mois pour chaque nouvelle mesure. Les résultats des trois tests (les p-valeurs pour le test de Kupiec et le test d'indépendance, et la valeur de la statistique pour le test de Kourouma et al.) sont présentés dans les tableaux ci-dessous :

	Modèle historique	Modèle Pareto Généralisé	Modèle GARCH-GJR(1,1)
<b>Test de Kupiec</b>	0,05	0,10	0,45
<b>Test d'indépendance</b>	0,96	0,98	0,98
<b>Backtesting Expected Shortfall</b>	-2,06e-3	-8,82e-4	3,17e-4

Tableau 9 – Les résultats du *backtesting* de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* pour l'indice *Itraxx Europe Main*

	Modèle historique	Modèle Pareto Généralisé	Modèle GARCH-GJR(1,1)
<b>Test de Kupiec</b>	0,02	0,13	0,38
<b>Test d'indépendance</b>	0,89	0,88	0,92
<b>Backtesting Expected Shortfall</b>	-9,97e-3	-7,59e-3	2,16e-4

Tableau 10 – Les résultats du *backtesting* de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* pour l'indice *Itraxx Xover*

	Modèle historique	Modèle Pareto Généralisé	Modèle GARCH-GJR(1,1)
<b>Test de Kupiec</b>	0,03	0,11	0,51
<b>Test d'indépendance</b>	0,86	0,90	0,91
<b>Backtesting Expected Shortfall</b>	-1,04e-2	-9,44e-3	8,96e-4

Tableau 11 – Les résultats du *backtesting* de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall* pour l'indice *Itraxx Europe Senior Financials*

L'hypothèse de couverture non-conditionnelle est vérifiée pour le modèle Pareto généralisé et le modèle GARCH-GJR(1,1) pour les trois indices. En effet, les p-valeurs sont supérieures à 5% ; l'hypothèse nulle du test est donc acceptée.

L'hypothèse nulle est en revanche rejetée pour le modèle historique car la p-valeur est inférieure ou égale à 5% ; l'hypothèse de couverture non-conditionnelle n'est donc pas validée pour ce modèle.

Les résultats du test d'indépendance montrent que les violations de la *Value at Risk* sont significativement indépendantes. Les p-valeurs sont supérieures à 5% pour chaque modèle et chaque indice. La propriété d'indépendance est donc considérée vérifiée.



Enfin, l'*Expected Shortfall* semble évaluer correctement le risque moyen au-delà de la *Value at Risk* car les statistiques du test sont toutes proches de zéro. Le modèle GARCH-GJR(1,1) est le seul modèle surestimant légèrement le risque en période de crise ; il paraît donc être plus prudent que les deux autres modèles.

La procédure de *backtesting* confirme que, lors d'une agitation des marchés comme de 2010 à 2013, le modèle le plus fiable et estimant les pertes les plus proches de la réalité est le modèle tenant compte de la variance conditionnelle. Le modèle le moins pertinent et le plus risqué est le modèle historique actuellement utilisé pour déterminer les scénarii de tests de résistance internes.

Lors d'une période plus calme sur les marchés financiers, le modèle de volatilité conditionnelle surestime légèrement les pertes mais il demeure quand même le plus proche de la réalité. Ce modèle semble donc être le plus prudent pour déterminer les scénarii de *stress tests*. En effet, le fait de tenir compte de la volatilité conditionnelle permet de mieux anticiper les pertes et donc de les limiter.

## CONCLUSION

Les scénarii de *stress tests* de crédit internes sont construits à partir de l'*Expected Shortfall* des *spreads* de crédit étudiés. Pour le calcul de cette mesure de risque, les modèles internes se basent généralement sur une distribution historique.

Dans cette partie, deux autres modèles de calcul de l'*Expected Shortfall* ont été confrontés au modèle historique : un modèle se basant sur la distribution Pareto généralisée et un autre s'appuyant sur la distribution Pareto généralisée déterminée à partir des résidus standardisés du modèle GARCH-GJR(1,1) permettant de tenir compte de la variance conditionnelle. Les résultats de cette comparaison ont souligné la sous-estimation du risque - en particulier en période de crise financière - par le modèle historique, pourtant utilisé par de nombreux organismes bancaires dont l'entité audité. C'est le modèle prenant en considération la volatilité conditionnelle qui détermine les résultats les plus prudents et les plus réalistes en temps de crise.

Le *backtesting* a révélé une fiabilité supérieure de la méthodologie basée sur le modèle GARCH-GJR(1,1) par rapport aux deux autres modèles. Il semble donc être effectivement le plus réaliste pour déterminer les scénarii de *stress tests* sur les indices individuels. Cependant, le portefeuille étudié étant composé de plusieurs types d'actifs, il serait également judicieux de construire un modèle de calcul de l'*Expected Shortfall* tenant compte des dépendances entre les indices. Une des solutions est alors d'associer la théorie des copules à l'étude des valeurs extrêmes pour la construction d'un nouveau modèle. Ce point est développé dans la partie suivante.

## **PARTIE 4 :**

# **PRISE EN COMPTE DE LA DEPENDANCE DANS LES SCENARII DE *STRESS TESTS* AVEC LA THEORIE DES COPULES**

### **INTRODUCTION**

Les rendements et le risque d'un portefeuille composé d'un seul actif financier s'expliquent entièrement par l'analyse de la distribution des rendements périodiques de cet actif. Cependant, si un portefeuille est composé de plus d'un actif financier, les rendements et le risque de ce portefeuille seront alors fonction de plusieurs facteurs. Il faudra tenir compte des rendements et du risque de chacun des titres individuellement et de la dépendance entre les rendements des titres composant le portefeuille. Ainsi, pour modéliser le comportement d'un portefeuille composé de plusieurs actifs financiers, ou mesurer son risque, il est nécessaire d'étudier le comportement de chacun des actifs du portefeuille ainsi que de leurs distributions conjointes.

Le portefeuille de crédit de l'entité auditée, comme celui de la majorité des banques, est composé de différents types d'actifs. L'étude des actifs individuels a été réalisée dans les parties précédentes. Ici, la dépendance entre les actifs est prise en compte grâce la théorie des copules. En pratique, la dépendance est souvent mesurée par la corrélation linéaire entre les différentes variables aléatoires, or cela n'est adapté que lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré comme gaussien. Ce cadre d'analyse est rare en finance. La théorie des copules, par sa grande flexibilité, apparaît alors être la meilleure alternative pour étudier la dépendance des indices boursiers. En effet, les copules permettent de caractériser la dépendance entre différentes variables aléatoires sans se préoccuper de ses lois marginales. L'association de la théorie des valeurs extrêmes à la théorie des copules pour mesurer les scenarii de *stress tests* du portefeuille de crédit constitue l'objet de cette partie.

Dans un premier temps, la théorie des copules et en particulier des copules archimédiennes sera exposée. L'étude se basera sur les copules archimédiennes de Clayton, Gumbel, et Frank qui sont notamment adaptées à l'analyse de la dépendance entre les indices boursiers. Ensuite, une copule sera construite sur les données de l'étude afin de modéliser leur structure de dépendance. Enfin, la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* seront calculées à partir de ce nouveau modèle permettant ainsi d'établir de nouveaux scenarii de *stress tests*.

## I- RAPPELS SUR LA THEORIE DES COPULES

Les copules ont été introduites par Sklar (1959) mais leur utilisation dans la gestion des risques financiers est récente. Elles sont surtout utilisées pour modéliser les dépendances entre les rendements journaliers d'actifs, de marchés ou d'indices boursiers. L'objectif des copules est de permettre la construction de distributions multivariées indépendamment des lois marginales qui les composent qui peuvent être quelconques et différentes. Une fois estimées, elles contiennent uniquement l'information portant sur la dépendance entre les variables aléatoires de l'étude.

### I-1 LES PRINCIPAUX RESULTATS DE LA THEORIE DES COPULES

Par définition, une copule  $d$ -dimensionnelle est une fonction de répartition multivariée  $C$  définie sur  $[0,1]^d$  et dont les marges sont uniformes sur  $[0,1]$ . C'est-à-dire que, si l'on considère les variables aléatoires  $U_1, \dots, U_d$  de loi  $U(0,1)$ , alors la fonction  $C$  définie sur  $[0,1]^d$  est une copule si :

$$C(u_1, \dots, u_d) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$$

La fonction de densité  $c$  d'une copule, si elle existe, est définie par :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

Le théorème fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar (1959). Il permet de décomposer la fonction de répartition jointe en une copule et des distributions marginales. Ce théorème s'énonce de la façon suivante :

*Théorème de Sklar* : Si  $F$  est une fonction de répartition conjointe à  $d$  dimensions avec des distributions marginales  $F_1, F_2, \dots, F_d$ , alors il existe une copule  $C$  telle que :

$$\forall x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Si  $F_1, F_2, \dots, F_d$  sont continues alors  $C$  est unique.

Toute copule doit être comprise entre une copule minimale et une copule maximale appelées les bornes de Fréchet. Cela implique qu'une copule est toujours bornée.

La copule minimale est définie par :

$$C^-(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d)$$

où  $(u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$

La copule maximale a pour expression :

$$C^+(u_1, \dots, u_d) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_d - 1, 0)$$

avec  $(u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$

Ainsi, toute copule  $C$  vérifie :

$$C^-(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq C^+(u_1, \dots, u_d)$$

La théorie des copules permet d'utiliser une mesure de dépendance de queue qui, contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman, est locale. En effet, cette mesure évalue la dépendance seulement dans la queue de distribution et non sur l'ensemble de la distribution. Elle est donc très intéressante pour étudier la survenance simultanée d'événements extrêmes.

Définition : Le coefficient de dépendance de queue inférieure de deux variables aléatoires  $U$  et  $V$  de fonctions de répartition respectives  $F_U$  et  $F_V$  est défini par

$$\lambda_l(U, V) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P(U \leq F_U^{-1}(x) \mid V \leq F_V^{-1}(x))$$

et le coefficient de dépendance supérieure a pour expression

$$\lambda_s(U, V) = \lim_{x \rightarrow 1^-} P(U > F_U^{-1}(x) \mid V > F_V^{-1}(x))$$

sous réserve que ces deux limites existent.

Si les variables aléatoires  $U$  et  $V$  ont pour copule  $C$ , alors les coefficients de dépendance de queue peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\lambda_l(U, V) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{C(x, x)}{x} \quad \text{et} \quad \lambda_s(U, V) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2x + C(x, x)}{1 - x}$$

Les variables  $U$  et  $V$  sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si  $\lambda_s \in ]0; 1]$  et elles sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si  $\lambda_s = 0$ . En considérant deux indices boursiers  $U$  et  $V$ , si  $\lambda_s > 0$ , cela signifie que lors de la survenance d'un écartement extrême des *spreads* de crédit de l'indice  $U$ , il existe une probabilité non-nulle qu'un écartement des *spreads* d'importance comparable survienne concomitamment pour l'indice  $V$ .

Ces définitions peuvent être étendues en dimension  $d > 2$  et seront utilisées en dimension  $d = 3$  dans cette étude.

## I-2 LES COPULES ARCHIMÉDIENNES

Les copules archimédiennes offrent une grande flexibilité pour modéliser la structure de dépendance. Elles peuvent en effet s'appliquer à des distributions asymétriques pour lesquelles les coefficients de dépendance de queue inférieure et supérieure diffèrent, contrairement aux copules gaussiennes par exemple qui ne modélisent pas bien les rendements financiers car elles ne reproduisent pas les queues de distribution de façon adéquate. Parmi les copules archimédiennes, les plus courantes sont

les copules de Clayton, de Gumbel et de Frank. Les copules archimédiennes sont définies par la fonction  $\varphi$  qui représente la fonction génératrice de la copule.

Définition : Une copule est dite archimédienne si elle s'exprime sous la forme suivante :

$$C_{\varphi}(u, v) = \varphi^{-1}\{\varphi(u) + \varphi(v)\}, \quad 0 < u, v < 1$$

où  $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction génératrice de la copule ; c'est une fonction convexe et décroissante.

Les fonctions de distribution  $C$  et de densité  $c$  des copules de Clayton, Gumbel et Frank sont présentées ci-dessous :

- La copule de Clayton :

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$c(u, v) = (1 + \theta)(uv)^{-\theta-1}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-\frac{1}{\theta}}$$

avec  $\theta \in [-1, \infty[ \setminus 0$

- La copule de Gumbel :

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$$

$$c(u, v) = \frac{C(u, v)(\log(u) \log(v))^{\theta-1}}{uv((-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta})^{2-\frac{1}{\theta}}} \left\{ \left[ (-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} + \theta - 1 \right\}$$

avec  $\theta \in [1, \infty[$

- La copule de Frank :

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left( \frac{(1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{(1 - e^{-\theta})} \right)$$

$$c(u, v) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{\left( (1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v}) \right)}$$

avec  $\theta \in \mathbb{R}^*$

Le paramètre  $\theta$  mesure le degré de dépendance entre les risques. Plus il est élevé, plus la dépendance est forte.

Les définitions peuvent être étendues en dimension  $d > 2$  et seront utilisées en dimension  $d = 3$  dans cette étude.

Comme le montre les graphiques *infra* :

- La copule de Clayton a une structure de dépendance asymétrique ; elle peut imposer une dépendance plus importante dans la queue inférieure.
- La copule de Frank a une structure symétrique qui a tendance à s'affaiblir dans les extrêmes des queues de distribution.
- La copule de Gumbel est également asymétrique et modélise une dépendance plus prononcée dans la queue de distribution supérieure.

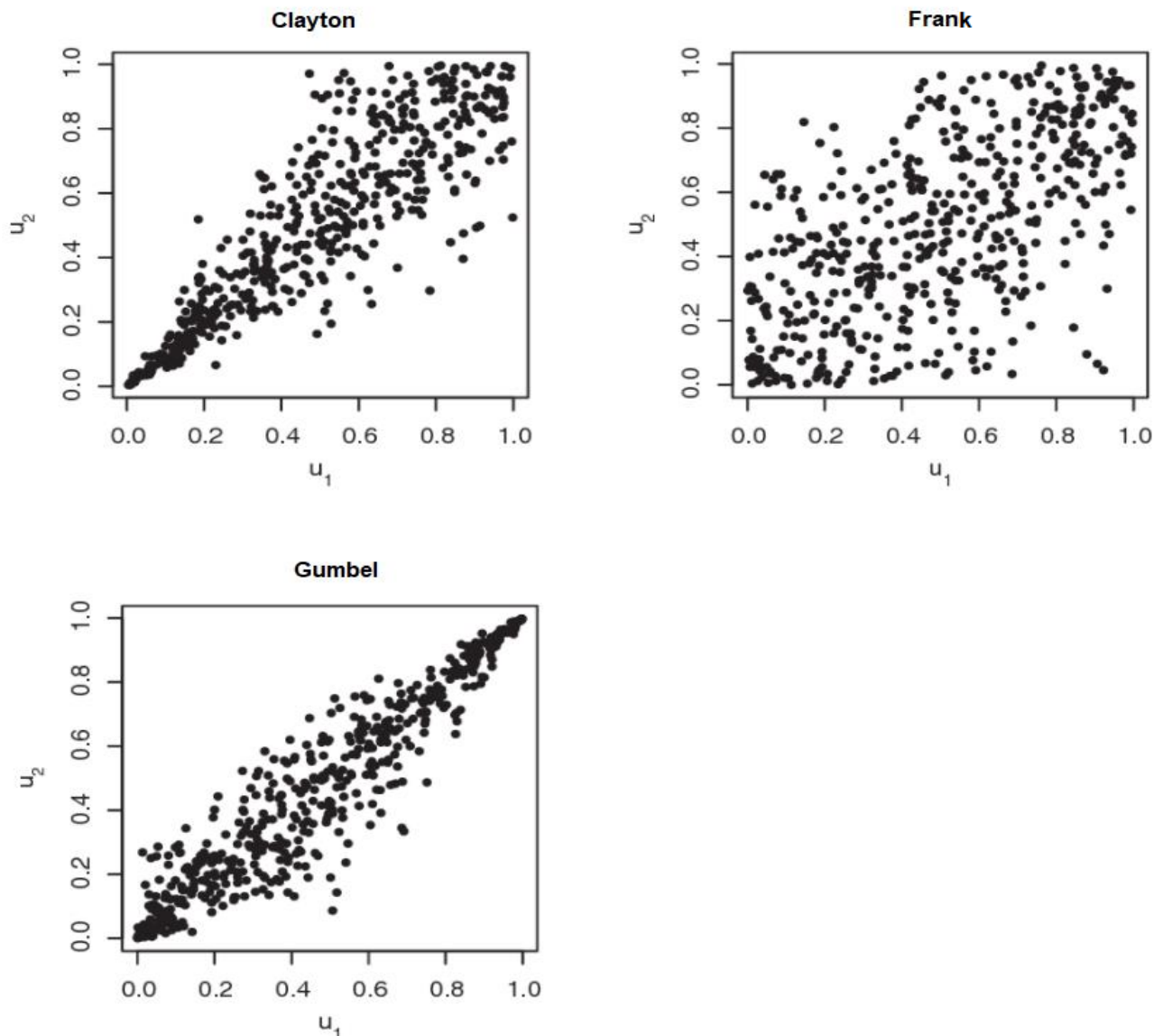


Figure 10 - La distribution des copules archimédiennes de Clayton, Frank et Gumbel

La forme des structures de dépendance de ces trois copules est justifiée quantitativement par la valeur des coefficients de dépendance de queue inférieure et supérieure :

- Pour la copule de Clayton :  $\lambda_l = 2^{-\frac{1}{\theta}}$  et  $\lambda_s = 0$

- Pour la copule de Gumbel :  $\lambda_I = 0$  et  $\lambda_S = 2 - \frac{1}{\theta}$
- Pour la copule de Frank :  $\lambda_I = 0$  et  $\lambda_S = 0$

La copule de Gumbel n'appréhende que des dépendances positives et permet de représenter des risques dont la structure de dépendance est davantage accentuée dans la queue supérieure. A ce titre, cette copule est particulièrement adaptée pour étudier l'impact de la survenance d'écartements de *spreads* de crédit à forte intensité sur des indices de crédit ou des actifs d'un portefeuille de crédit présentant une dépendance.

## II- UTILISATION DES COPULES DANS LE CADRE DE L'ETUDE

Les indices boursiers présentent souvent de l'asymétrie et de l'aplatissement en excès, et s'écartent d'une distribution gaussienne. Une étude menée par Campbell et al (2002) sur le type de dépendance entre les rendements journaliers des indices boursiers S&P 500, FTSE 100, CAC 40 et DAX 100 a montré que cette dépendance avait tendance à être asymétrique : la dépendance est en général plus forte lorsque les marchés sont à la baisse. Aussi l'utilisation des mesures de corrélation classiques n'est pas pertinente pour leur étude. Les copules fourniront des informations plus riches. Les copules, et en particulier les copules archimédiennes, ont l'avantage de permettre une grande flexibilité dans la construction de distributions multivariées et dans la structure de dépendance. Leur utilisation permet donc de prendre en compte les effets observés dans les distributions marginales et multivariées des rendements financiers.

Avant l'utilisation de la théorie des copules, une première analyse de la dépendance entre les indices sera mise en œuvre. Ensuite, la copule modélisant la structure de dépendance présente au sein des données pourra être élaborée. Pour cela, la première étape consiste à transformer les distributions marginales en distributions uniformes et à déterminer le paramètre de la copule. La copule la plus appropriée pour l'étude pourra ensuite être sélectionnée puis simulée. Enfin, la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* seront estimées et une validation des résultats sera réalisée.

### II-1 RECHERCHE DE DEPENDANCE

Une recherche de dépendance est effectuée entre les trois indices étudiés. Cette analyse repose sur le tau de Kendall et le rho de Spearman qui sont des mesures de concordance. Ces éléments sont définis comme suit en dimension 2 :

- Définition de la notion de concordance : Soient  $(u, v)$  et  $(u', v')$  deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu  $(U, V)$ , alors  $(u, v)$  et  $(u', v')$  sont dites concordantes si  $(u, v)(u', v') > 0$  et discordantes si  $(u, v)(u', v') < 0$ .



- Définition du tau de Kendall : Soient  $(U', V')$  et  $(U'', V'')$  deux couples de variables aléatoires de même loi que celle du couple étudié  $(U, V)$ , le tau de Kendall  $\tau(U, V)$  est défini par :

$$\tau(U, V) = P((U'' - U')(V'' - V') > 0) - P((U'' - U')(V'' - V') < 0)$$

Il mesure le degré de concordance si  $\tau(U, V) > 0$  ou le degré de discordance si  $\tau(U, V) < 0$ .

- Définition du rho de Spearman : Soient  $(U', V')$  et  $(U'', V'')$  deux couples de variables aléatoires de même loi que celle du couple étudié  $(U, V)$ , le rho de Spearman est égal à :

$$\rho(U, V) = 3[P((U - U')(V - V') > 0) - P((U - U')(V - V') < 0)]$$

Le processus de recherche de dépendance se déroule en deux étapes afin de ne conserver que les couples de variables aléatoires qui ont une dépendance positive et qui seraient susceptibles d'entraîner des pertes conséquentes lors d'événements extrêmes. La première étape consiste à tester la significativité des dépendances mesurées, pour cela, le test de Spearman<sup>9</sup> est implémenté. La seconde étape a pour objectif de supprimer les couples avec une dépendance significative mais négative.

Cette première étape d'étude de la dépendance a été réalisée par couple d'indices. Dans la suite du travail, la dépendance des trois indices entre eux sera modélisée. Le tableau suivant regroupe l'ensemble des résultats obtenus par couple à l'issue du processus de recherche de dépendance. Ces mesures ont été effectuées le 01/04/2020 à partir des loi Pareto généralisées modélisant les distributions des log-variations des indices de crédit obtenues dans la Partie 1 Paragraphe III.

	<b>Tau de Kendall</b>	<b>Rho de Spearman</b>	<b>P-valeur</b>
<b>Itraxx Europe Main / Itraxx Xover</b>	0,26	0,24	0,00
<b>Itraxx Europe Main / Itraxx Europe Senior Financials</b>	0,30	0,27	0,01
<b>Itraxx Xover / Itraxx Europe Senior Financials</b>	0,19	0,18	0,00

Tableau 12 – Les résultats de l'étude de dépendance des trois couples d'indices étudiés

Chacun des trois couples d'indices boursiers étudiés présente une dépendance positive significative. En effet, les p-valeurs sont inférieures à 5%, l'hypothèse nulle de non-dépendance est donc rejetée avec un seuil de significativité de 5%.

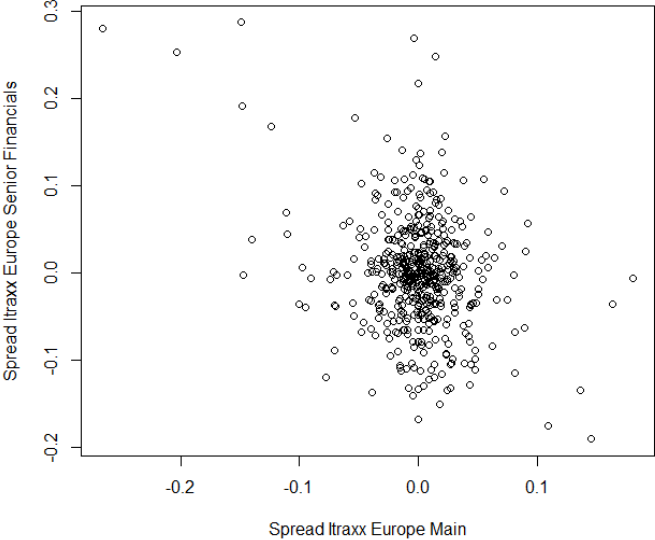
Les valeurs du tau de Kendall et du rho de Spearman ne sont pas très élevées mais il est quand même important de tenir compte de la dépendance entre les indices dans la détermination des scénarii de *stress tests* car lors de la survenance d'un événement extrême touchant un indice, la probabilité que les deux autres indices soient affectés par ce même événement est non-nulle. Ainsi,

<sup>9</sup> Les détails du test de Spearman sont disponibles en Annexe 4.

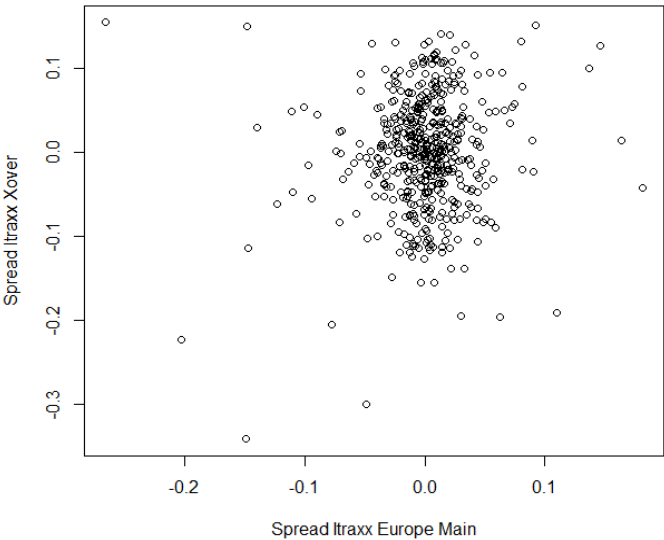
le portefeuille de crédit peut potentiellement subir des pertes bien plus importantes que celles anticipées en étudiant chaque indice de manière isolée. La non-prise en compte des dépendances pourrait donc affecter sérieusement la situation financière de l'organisme bancaire.

Les dépendances entre les indices boursiers sont représentées sur les graphiques ci-dessous par couple d'indices.

**Dépendance Itraxx Europe Main et Itraxx Europe Senior Financials**



**Dépendance Itraxx Europe Main et Itraxx Xover**



**Dépendance Itraxx Europe Senior Financials et Itraxx Xover**

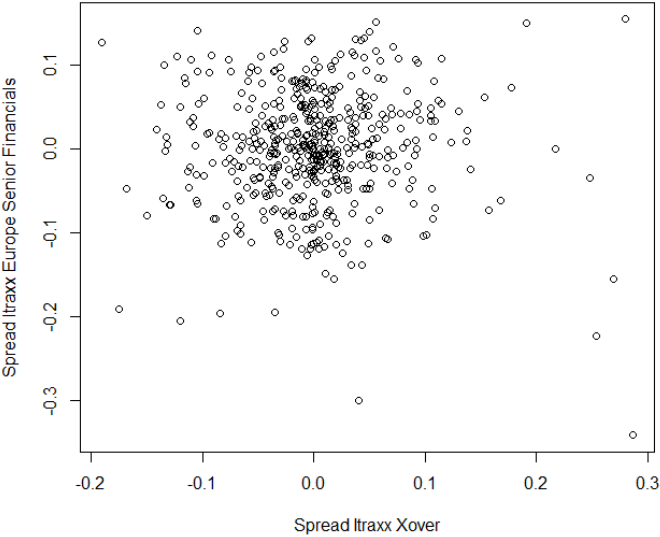


Figure 11 – Les représentations des dépendances des trois couples d'indices étudiés

La dépendance entre les indices ayant été confirmée, l'objectif est maintenant de construire une copule afin de modéliser ces dépendances pour les prendre en compte dans les scénarii de *stress tests* de crédit.

## II-2 TRANSFORMATION DES DISTRIBUTIONS MARGINALES

L'étude des copules débute par le passage des distributions marginales en variables uniformes. Cette étape s'appuie sur la Partie 1 Paragraphe III dans laquelle les distributions marginales ont été modélisées à partir de la loi Pareto généralisée permettant ainsi de tenir compte des queues de distribution épaisses.

Les variables uniformes sont donc déterminées à partir des trois lois Pareto généralisées modélisant les log-variations des indices *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials*. La transformation des données en variables uniformes est réalisée grâce à une modélisation paramétrique ayant recours aux fonctions de distribution empiriques. Cette méthodologie correspond à la méthode *Canonical Maximum Likelihood* (CML) développée par Genest et al. (1995). La méthodologie suivie est présentée ci-dessous.

Soit  $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$  le  $i$ -ème vecteur de données, pour  $i = 1, \dots, d$ , l'estimation de la  $i$ -ième, fonction de répartition empirique est donnée par :

$$\hat{F}_i(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{X_{i,j} \leq x\}}$$

Le vecteur  $U$  de variables uniformes s'obtient grâce à l'expression suivante :

$$U = (U_1, \dots, U_d) = (\hat{F}_1(X_1), \dots, \hat{F}_d(X_d))$$

Il est maintenant possible de déterminer les paramètres des copules.

## II-3 ESTIMATION DES PARAMETRES DES COPULES

Les copules sont estimées suivant des méthodes d'inférence statistique. La méthodologie mise en œuvre dans ce travail est à nouveau le *Canonical Maximum Likelihood* (CML). Cette méthode est recommandée par Bouye et al. (2000) pour déterminer les paramètres des copules. Elle a pour avantage de ne pas nécessiter une estimation préalable des lois marginales des variables étudiées et donc de permettre une estimation paramétrique indépendante de la structure paramétrique des marginales. Ainsi, cela limite la complexité du modèle et surtout les temps de calcul.

Cette méthode d'estimation des copules consiste à transformer les observations  $\{(X_1^t, \dots, X_d^t)\}_{t=1, \dots, n}$  avec  $n$  le nombre d'observations, en variables uniformes  $\{(U_1^t, \dots, U_d^t)\}_{t=1, \dots, n}$  (ce qui a déjà été réalisé dans le Paragraphe II-2), et estimer directement le paramètre  $\theta$  de la copule.

Le paramètre  $\theta$  de la copule peut être estimé grâce à la formule suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \arg \max \sum_{t=1}^n \ln [c(\hat{U}_1^t, \dots, \hat{U}_d^t; \theta)] \\ &= \arg \max \sum_{t=1}^n \ln [c(\widehat{F}_1(X_1^t), \dots, \widehat{F}_d(X_d^t); \theta)]\end{aligned}$$

La valeur initiale utilisée pour la mise en œuvre de la méthode CML est l'estimateur  $\hat{\theta}_{moments}$  obtenu à partir de la méthode des moments. Cette méthode consiste à considérer une mesure de concordance  $k(C)$  et d'estimer le paramètre  $\theta$  de la copule  $C$  qui égalise la valeur théorique  $k(C(\theta))$  à la valeur empirique  $\hat{k}(C)$ . En pratique, c'est l'estimateur du tau de Kendall empirique qui est utilisé comme mesure de concordance ; et plus précisément, dans le cas de copules archimédiennes de dimension supérieure à 2, l'estimateur considéré est le suivant (Nelsen, 2006) :

$$\tau(\theta) = \frac{1}{d(d-1)/2} \sum_{i < j} \hat{\tau}_{i,j}$$

où les  $\hat{\tau}_{i,j}$  sont les taus de Kendall empiriques des paires de variables.

Cependant, la robustesse de l'estimateur n'est pas assurée avec cette méthode, c'est pourquoi cette dernière constitue uniquement le point de départ de la méthode CML.

Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus pour  $\hat{\theta}_{moments}$  et  $\hat{\theta}$  pour les trois copules archimédiennes trivariées de Clayton, Gumbel et Frank construites à partir des résidus standardisés des indices étudiés (*Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials*). Les estimations ont été réalisées le 01/04/2020.

	Clayton	Gumbel	Frank
$\hat{\theta}_{moments}$	3,19	2,14	5,01
$\hat{\theta}$	2,57	1,91	4,36

Tableau 13 – L'estimation du paramètre des copules de Clayton, Gumbel et Frank

Après avoir estimé les paramètres pour les trois copules, il s'agit maintenant de sélectionner celle qui sera la plus adaptée à la structure de dépendance des données de l'étude.

## II-4 CHOIX DE LA COPULE

Le choix de la copule est une étape très importante. La copule doit s'adapter au mieux à la structure de dépendance des données. Genest, Quessy et Rémillard (2008) ont proposé un test d'adéquation basé sur un processus empirique. Le principe et les résultats de ce test sont présentés *infra*.

Soient  $C$  une copule et  $\{C_\theta\}$  une famille de copules paramétriques donnée, les hypothèses du test sont :

$$H_0 : C \in \{C_\theta\}$$

$$H_1 : C \notin \{C_\theta\}$$

Le processus empirique est défini à partir des statistiques suivantes :

$$S_d = \int_0^1 |\mathbb{K}_d(t)|^2 k(\hat{\theta}, t) dt$$

$$T_d = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbb{K}_d(t)|$$

où :

- $\mathbb{K}_d(t)$  correspond au processus de Kendall introduit par Genest et Rivest (1993) et donné par :

$$\mathbb{K}_d(t) = \sqrt{d} (K_d(t) - K(t)) \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

avec  $K$  la transformation intégrale de probabilité multivariée définie par :

$$K(t) = P(C(U_1, \dots, U_d) \leq t)$$

et  $K_d$  est l'estimation empirique de  $K$

- $k$  est la densité associée à  $K$

La statistique  $S_d$  est fondée sur la distance de Cramer Von Mises et la statistique  $T_d$  est basée sur celle de Kolmogorov Smirnov. Ces statistiques présentent plusieurs avantages et notamment celui d'être adaptées aux copules de dimension supérieure à deux.

Les p-valeurs du test sont ensuite déterminées par *bootstrap* paramétrique.

Les valeurs obtenues pour les p-valeurs du test réalisé à partir des copules archimédiennes de Clayton, Gumbel et Frank sont présentées dans le tableau suivant. Elles permettront de déterminer la copule la plus pertinente pour la suite de l'étude.

	Clayton	Gumbel	Frank
P-valeurs	0,01	0,26	0,04

Tableau 14 – Les résultats du test statistique d'adéquation aux copules de Clayton, Gumbel et Frank

Ces résultats montrent que la copule de Gumbel décrit mieux la structure de dépendance présente au sein des données de l'étude (les indices *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials*). Cela signifie que les dépendances exhibées se caractérisent avant tout par une dépendance dans les queues de distribution supérieures et donc lors d'écartements extrêmes des *spreads* de crédit.

La copule retenue est donc la copule de Gumbel trivariée avec un paramètre égal à 1,91. Il est maintenant possible d'intégrer cette copule dans le modèle de détermination des scénarii de *stress tests*.

## II-5 SIMULATION DE LA COPULE

Une fois les distributions marginales et la copule estimées, des simulations sont réalisées. L'objectif est d'obtenir un nouvel échantillon de la distribution de chaque indice étudié à partir de la structure de dépendance déterminée. Ces distributions pourront ensuite être utilisées pour calculer de nouvelles mesures de risque.

Pour cette étape, la méthode des distributions conditionnelles a été implémentée. La méthodologie suivie est détaillée ci-dessous.

Pour simuler des réalisations d'un vecteur  $X = (X_1, \dots, X_d)$  admettant la structure de dépendance donnée, il faut pouvoir simuler des réalisations d'un vecteur  $U = (U_1, \dots, U_d)$  de marginales uniformes et dont la distribution jointe est la copule  $C$ .

Les fonctions de répartition marginales  $F_i, i = 1, \dots, d$ , et la copule  $C$  étant connues, il est possible de construire un modèle multivarié dont la distribution jointe est :

$$F(X_1, \dots, X_d) = C(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$$

Pour simuler le vecteur aléatoire  $X$  dont les fonctions de répartition marginales sont  $F_i, i = 1, \dots, d$ , et dont la structure de dépendance est  $C$ , la démarche consiste à simuler dans un premier temps les trajectoires d'un vecteur aléatoire de variables uniformes  $U = (U_1, \dots, U_d)$  dont la fonction de répartition jointe est la copule  $C$ . Les trajectoires de  $X$  sont ensuite obtenues en s'appuyant sur la propriété selon laquelle le vecteur aléatoire  $(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d))$  admet l'unique fonction de répartition jointe  $F$  ; ainsi :

$$X = (X_1, \dots, X_d) \approx (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d))$$

Avec  $F_i^{-1}, i = 1, \dots, d$ , l'inverse de la fonction de répartition marginale.

La difficulté se résume alors à la simulation de variables uniformes dont la fonction de répartition jointe est  $C$ .

Embrechts et al. (2002) ont proposé une procédure pour réaliser ces simulations. La méthode repose sur des simulations récursives utilisant les distributions univariées conditionnelles. Elle est présentée ci-dessous.

Les notations suivantes sont introduites, soit  $2 \leq i \leq d - 1$  :

$$C_i(u_1, \dots, u_i) = C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)$$

en particulier

$$C_1(u_1) = u_1$$

et

$$C_d(u_1, \dots, u_d) = C(u_1, \dots, u_d).$$

Embrechts et al. (2002) considèrent les distributions conditionnelles pour simuler les trajectoires d'un vecteur de variables aléatoires uniformes  $U = (U_1, \dots, U_d)$ . En effet, si la fonction de répartition jointe de  $U$  est  $C$  alors :

$$\begin{aligned} C_i(u_i | u_1, \dots, u_{i-1}) &= P(U_i \leq u_i | U_1 = u_1, \dots, U_{i-1} = u_{i-1}) \\ &= \frac{\partial^{i-1} C_i(u_1, \dots, u_i)}{\partial u_1 \dots \partial u_{i-1}} / \frac{\partial^{i-1} C_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{i-1}} \end{aligned}$$

La forme paramétrique de la copule étant connue, il est possible de calculer  $C_i(u_i | u_1, \dots, u_{i-1})$  pour tout  $2 \leq i \leq d - 1$ . Pour cela, un algorithme est implémenté pour simuler une trajectoire de  $U$  selon la procédure suivante :

- Simulation d'une valeur  $u_1$  dont la loi est uniforme sur  $[0,1]$ .
- Simulation d'une valeur  $u_2$  dont la loi est  $C_2(u_2 | u_1)$ .
- Poursuite de la même procédure jusqu'à la valeur  $u_d$ .

En pratique, pour simuler une valeur de  $C_i(u_i | u_1, \dots, u_{i-1})$ , une valeur  $u$  de loi uniforme sur  $[0,1]$  est simulée et  $C_i^{-1}(u_i | u_1, \dots, u_{i-1})$  est calculé.

Par exemple, pour  $d = 2$ , un vecteur  $(U_1, U_2)$  de distribution jointe  $C$  est considéré, puis deux valeurs  $v_1$  et  $v_2$  uniformes et indépendantes sont simulées. Cela permet de poser  $u_1 = v_1$ , puis  $u_2 = C_{u_1}^{-1}(v_2)$ , avec  $C_{u_1}(u_2) = C_2(u_2 | u_1)$ . Concernant la copule de Gumbel utilisée dans cette étude, l'expression suivante est obtenue pour  $C_{u_1}(u_2)$  :

$$\begin{aligned} C_{u_1}(u_2) &= C_2(u_2 | u_1) \\ &= \frac{1}{u_1} \left[ 1 + \left( \frac{\ln(u_2)}{\ln(u_1)} \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}-1} \exp \left( - \left[ (-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right) \end{aligned}$$

Cette procédure s'étend en dimension  $d > 2$  et sera implémentée en dimension  $d = 3$  dans cette étude à partir du *package copula* du logiciel open source R.

L'obtention du vecteur  $U = (U_1, \dots, U_d)$  permet donc de déterminer le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_d)$  constituant un nouvel échantillon des distributions de chaque indice.

Dans cette étude, les simulations sont réalisées un million de fois permettant ainsi d'obtenir une distribution suffisamment importante des log-variations des *spreads* de chaque indice. De plus, ces simulations étant réalisées à partir de la copule, elles permettront de tenir compte de la structure de dépendance liant les indices. Ainsi, de nouvelles mesures des risques vont pouvoir être estimées à partir de ces distributions.

## II-6 ESTIMATION DE LA VALUE AT RISK ET DE L'EXPECTED SHORTFALL

Avant de procéder à l'estimation de la *Value at Risk* et de l'*Expected Shortfall*, il est nécessaire d'agrèger les trois distributions obtenues précédemment. Le poids de chacun des indices dans le portefeuille étant connu, le risque que ceux-ci représentent pour la banque est également connu. Ces poids étant considérés constants dans le temps, il est possible d'effectuer la somme des simulations de chaque indice pondéré par leur poids de la manière suivante :

$$X_{j,pf} = \sum_{i=1}^d w_i X_{j,i}$$

où :

- $j = 1, \dots, n$  est le nombre de simulations
- $d$  est le nombre d'indices composant le portefeuille
- $w_i$  est le poids de l'indice  $i$  dans le portefeuille
- $X_{j,i}$  est la  $j$ -ième simulation de la  $i$ -ème distribution obtenue à partir de la copule

Pour rappel, le poids des indices dans le portefeuille de l'entité auditée sont présentés dans le Tableau 1 Partie 1 Paragraphe I-1.

Cette procédure permet ainsi de déterminer une distribution d'un million de log-variations du portefeuille complet.

Il est maintenant possible de mesurer la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* du portefeuille complet en tenant compte des dépendances entre les indices le composant. La *Value at Risk* à  $\alpha\%$  est estimée en déterminant le  $(1 - \alpha)$ -ième quantile de la distribution et l'*Expected Shortfall* est mesurée en calculant la moyenne des  $\alpha\%$  des valeurs les plus importantes.

Comme pour les modèles précédents, la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* sont mesurées à partir des log-variations quotidiennes des indices *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover*, et *Itraxx Europe Senior Financials*. De plus, la copule de Gumbel et les lois Pareto généralisées modélisant les marginales sont recalibrées chaque début de mois à partir de 10 ans d'historique de données. L'*Expected Shortfall* est donc recalculée tous les mois et conservée pour le mois en cours, permettant ainsi de déterminer un scénario de *stress tests* mensuel.

Les estimations présentées dans le Tableau 15 ci-dessous ont été réalisées à la même date que celle choisie pour les indices individuels, c'est-à-dire le 01/04/2020. Les données utilisées pour le calcul



des mesures de risque sont celles de la période du 31/03/2010 au 31/03/2020, constituant ainsi un historique de 2523 log-variations quotidiennes. Pour rappel, le choix a été fait de mesurer, dans un premier temps, la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* lors d'un épisode de crise (ici la crise de 2020 due à la pandémie de Covid-19) afin de mieux observer la réaction du modèle en cas de mouvements importants des marchés.

Le temps de retour sélectionné pour réaliser les mesures sur un horizon de détention de 1 jour est de 20 jours.

Les estimations obtenues pour la *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* avec la procédure détaillée précédemment sont présentées dans le tableau ci-dessous.

	<i>Value at Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>
<b>Copule x Pareto généralisée</b>	0,12	0,17

Tableau 15 - Les mesures de risque obtenues à partir du modèle de copules

Ces résultats montrent que le modèle de copule estime des mesures plus importantes que les modèles historique ou Pareto généralisée déterminés précédemment pour les indices individuels. Par ailleurs, les valeurs obtenues avec le modèle de copule sont cohérentes avec celles calculées avec le modèle GARCH-GJR(1,1) tenant compte de l'autocorrélation ; les résultats sont du même ordre de grandeur. Les *spreads* de crédit ne semblent donc pas être largement amplifiés lorsque la dépendance entre les indices est prise en compte.

Afin de conclure sur la pertinence et le choix du modèle le plus adapté à l'étude, il est essentiel de procéder à une étape de validation des résultats.

## II-7 VALIDATION DES RESULTATS

L'étape de validation des résultats est essentielle afin de vérifier si les résultats estimés par le modèle sont en adéquation avec les valeurs réelles observées. Cette procédure permet donc de contrôler la qualité du modèle.

Le *backtesting* du modèle avec copule est réalisé en suivant la même méthodologie que dans la Partie 3 Paragraphe II-5. Pour le *backtesting* de la *Value at Risk*, dans un premier temps, l'hypothèse de couverture non-conditionnelle est contrôlée grâce au test de Kupiec (1995). Ensuite, le test de Christoffersen (1998) est mis en œuvre afin de vérifier l'hypothèse d'indépendance de la série des violations<sup>10</sup> de la *Value at Risk*. Quant au *backtesting* de l'*Expected Shortfall*, il est effectué grâce à la méthodologie proposée par Kourouma et al. (2012).

<sup>10</sup> La violation correspond à une situation dans laquelle la valeur observée excède les valeurs anticipées.

Comme pour les modèles précédents, les tests de *backtesting* ont été menés sur la période du 01/01/2010 au 01/01/2013, qui est une période de forte agitation des marchés. La *Value at Risk* et l'*Expected Shortfall* étant estimées à une fréquence mensuelle, cela représente un total de 36 valeurs pour chaque mesure de risque. Chacune de ces 36 valeurs est comparées aux variations quotidiennes du mois sur lequel elle est utilisée, ce qui constitue finalement un total de 748 comparaisons pour chaque indice. Le modèle a été calibré à partir des données historiques avec un décalage d'un mois pour chaque nouvelle mesure. Les résultats des trois tests (les p-valeurs pour le test de Kupiec et le test d'indépendance, et la valeur de la statistique pour le test de Kourouma et al.) sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	<b>Copule x Pareto généralisée</b>
<b>Test de Kupiec</b>	0,46
<b>Test de Christoffersen</b>	0,97
<b><i>Backtesting Expected Shortfall</i></b>	1,02e-4

Tableau 16 – Les résultats du *backtesting* du modèle de copules

L'analyse du résultat du test de Kupiec sur le modèle de copule montre une acceptation de l'hypothèse de couverture non-conditionnelle. En effet, la p-valeur associée au test est supérieure au seuil de confiance de 5%.

Le test d'indépendance de Christoffersen confirme que les violations de la *Value at Risk* sont significativement indépendantes. La p-valeur associée à la statistique de test est supérieure à 5%. L'hypothèse d'indépendance est donc vérifiée.

Enfin, l'*Expected Shortfall* semble évaluer correctement le risque moyen au-delà de la *Value at Risk* car la statistique du test est proche de zéro.

Cette étape de *backtesting* permet de conclure sur la fiabilité effective du modèle de copule. Les estimations de ce modèle sont en adéquation avec les valeurs réelles observées du portefeuille étudié.

## CONCLUSION

Les modèles établis dans les parties précédentes étaient en adéquation avec les indices de crédit considérés individuellement, alors que le modèle construit dans cette section permet de mesurer le risque du portefeuille global en tenant compte de la dépendance entre les différents actifs grâce à la théorie des copules.

Le modèle de copule considéré est élaboré à partir de la copule de Gumbel qui est la plus adaptée à l'étude de par sa capacité à tenir compte des dépendances dans les queues de distribution supérieures. Les marges utilisées correspondent aux distributions obtenues à partir des lois Pareto généralisées déterminées dans la Partie 1 Paragraphe III de ce mémoire.

L'*Expected Shortfall* a donc pu être calculée grâce aux simulations du nouveau modèle. A date d'évaluation, le résultat estimé est plus important que les résultats obtenus avec le modèle historique ou le modèle Pareto généralisée pour chaque indice individuel. Par ailleurs, l'*Expected Shortfall* déterminée avec le modèle ARMA(1,1)-GARCH-GJR(1,1) est très proche de celle estimée avec le modèle de copule. Cependant, la validation ex-post des modèles a révélé une fiabilité supérieure du modèle construit à partir de la copule de Gumbel. En effet, les résultats du *backtesting* de l'*Expected Shortfall* de ce modèle sont les plus satisfaisants et témoignent de la bonne adéquation du modèle à la réalité des marchés. Cela confirme l'importance de raisonner sur l'intégralité du portefeuille en tenant compte des dépendances afin d'obtenir des résultats davantage réalistes.

Le modèle construit à partir de la copule de Gumbel est donc conservé pour déterminer les scénarii de *stress tests* de crédit internes. Le modèle non-paramétrique actuellement implémenté par l'entité auditée sera ainsi revu afin d'intégrer les modifications recommandées dans cette partie. De ce fait, son programme de *stress tests* anticipera mieux les variations extrêmes du portefeuille et permettra une meilleure gestion des situations de crise. Ceci est transposable pour tout autre organisme bancaire utilisant un modèle non-paramétrique ou un modèle ne tenant pas compte des dépendances entre les actifs.

## Conclusion de l'étude

Les Accords de Bâle imposent aux organismes bancaires d'instaurer un programme de *stress tests* de crédit internes dans leur processus de gestion des risques afin de mieux anticiper les risques inhérents à leur activité. Ces tests s'appuyant sur des conditions extrêmes mais plausibles sont destinés à faire apparaître l'aptitude des banques à affronter les crises économiques éventuelles.

Afin de s'accorder avec cette réglementation, les banques mettent en place des procédures de *stress tests* sur leur portefeuille de crédit. Aussi, l'objectif de ce mémoire était-il de construire, à partir de l'étude des valeurs extrêmes, différents modèles de détermination des scénarii de *stress tests* de crédit basés sur le calcul de l'*Expected Shortfall* afin de les confronter et de sélectionner le plus adéquat pour les organismes bancaires.

Dans le but de pouvoir implémenter l'*Expected Shortfall* paramétrique, la première étape a consisté à modéliser les queues des distributions épaisses des indices *Itraxx Europe Main*, *Itraxx Xover* et *Itraxx Europe Senior Financials*, qui constituent les données étudiées. La loi la plus communément utilisée dans ce contexte est la loi Pareto généralisée, cependant, elle suppose l'homoscédasticité des données. Or, les données présentant de l'hétéroscédasticité, le modèle GARCH-GJR(1,1) a alors également été considéré.

➔ Après avoir contrôlé l'adéquation des distributions, les modélisations des queues de distribution par la loi Pareto généralisée et le modèle GARCH-GJR(1,1) ont été validées.

Trois *Expected Shortfalls* ont pu ensuite être déterminées pour chaque indice : une avec le modèle historique, une avec le modèle paramétrique à partir de la loi Pareto généralisée, et une avec le modèle paramétrique appliqué à la loi Pareto généralisée estimée sur les résidus standardisés du modèle GARCH-GJR(1,1). La confrontation des résultats a souligné une légère sous-estimation du risque par le modèle historique et une prudence plus importante ainsi qu'une meilleure adéquation avec la réalité des *Expected Shortfalls* calculées à partir des résidus standardisés du modèle GARCH-GJR(1,1).

➔ Ces résultats mettent en évidence l'importance de tenir compte de la volatilité conditionnelle.

Enfin les modèles établis individuellement sur chaque indice avec la loi Pareto généralisée ont été agrégés grâce à la théorie des copules. Le recours à la copule de Gumbel a permis d'intégrer la dépendance entre les indices étudiés dans le modèle de détermination des scénarii de *stress tests*. A l'issue du processus de validation ex-post, l'*Expected Shortfall* obtenue grâce à la copule de Gumbel ayant pour marge les distributions des lois Pareto généralisées estimées à partir de chacun des indices apparaît être davantage adaptée à la réalité.

➔ Ce modèle confirme la nécessité de considérer la dépendance entre les actifs boursiers pour obtenir des scénarii plus réalistes.

Ce mémoire est en adéquation avec la littérature (Mandelbrot, 1960) : il met en évidence la non-normalité des distributions des indices boursiers et par conséquent l'importance de considérer les valeurs extrêmes pour étudier le risque de crédit. La présence d'autocorrélation au sein des indices

et de dépendance entre les actifs a également été soulignée. L'ensemble de ces éléments a alors amené à la conclusion de la défaillance du modèle historique de *Expected Shortfall* pour ce genre de problématique. Ce modèle ne permet pas d'anticiper correctement les événements extrêmes et donc de maîtriser convenablement les pertes.

Le modèle de détermination des scénarii de *stress tests* de crédit construit à partir de la théorie des copules s'avère répondre davantage aux exigences de la réglementation de Bâle que le modèle historique utilisé par l'entité auditée et couramment implémenté au sein des banques. En effet, les scénarii estimés avec le modèle de copules reflètent plus fidèlement la réalité et particulièrement lors de crises financières. En adoptant cette méthodologie, les processus de *stress tests* de crédit internes permettront de mieux appréhender les périodes de crise et donc de mieux anticiper et maîtriser les pertes.

Cependant, ce modèle présente le défaut de difficilement s'adapter à de nouvelles données, ce qui n'est pas le cas avec l'utilisation des distributions historiques. Un changement de la composition du portefeuille pourrait par exemple modifier les indices boursiers considérés et ainsi, le modèle devrait être revu. Les coûts en temps et calculs engendrés par ce nouveau modèle seraient donc amplifiés. Néanmoins, le modèle étant adaptable, cela n'est pas forcément rédhibitoire car l'investissement de départ permettrait de limiter considérablement le risque de faillite au final.

Afin d'enrichir le travail réalisé à travers ce mémoire, il est possible pour les organismes bancaires d'intégrer, dans leur programme de *stress tests* de crédit internes, des scénarii hypothétiques basés sur des hypothèses d'événements catastrophiques économiques, politiques, ou environnementaux, ou des hypothèses de défaillances du modèle stratégique de l'entreprise, présumés causer de fortes pertes dans le portefeuille de crédit. L'idée est de construire des événements encore jamais observés à partir, entre autres, d'études politico-socio-économiques (une sortie de la France de l'Union Européenne par exemple). L'objectif de cette procédure est de se détacher davantage des variations passées et d'étudier l'impact de tels événements hypothétiques futurs sur le portefeuille de crédit. Cela permettrait d'enrichir le programme de tests de résistance en mettant en évidence d'éventuelles faiblesses non-encore identifiées.

# Bibliographie

## ARTICLES ET PUBLICATIONS

ARTZNER A., DELBAEN F., EBER J-M, HEATH D. (1999) *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

BALKEMA A., DE HAAN L. (1974) *Residual life time at great age*. *Annals of Probability*, 2, 792-804.

BOLLERSLEV T. (1986) *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity with applications in finance*. *The Journal of Econometrics*, 3, 307-327.

BOLLERSLEV T., WOOLDRIDGE J. (1992) *Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances*. *Econometric Reviews*, 11, 143-172.

CAMPBELL R., KOEDJIK K., KOFMAN P. (2002) *Increased Correlation in Bear Markets*. *The Financial Analysts Journal*, 58, 87-94.

CHRISTOFFERSEN P., PELLETIER D. (2004) *Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach*. *Journal of Empirical Finance*, 2, 84-108.

ENGLE R. (1982) *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, 50, 987-1007.

ENGLE R. (2001) *The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics*. *Journal of Economic Perspectives*, 15, 157-168

GENEST C., QUESSY J-F., REMILLARD B. (2006) *Goodness-of-Fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transformation*. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33, 337-366.

GLOSTEN L., JAGANNATHAN R., RUNKLE D. (1993) *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. *The Journal of Finance*, 48, 1779-1801.

KUHA J. (2004) *AIC and BIC: Comparisons of Assumptions and Performance*. *Sociological Methods Research*, 33, 188-229.

KUPIEC P. (1995) *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*. *The Journal of Derivatives*, 3, 73-84.

KUPIEC P. (1998) *Stress testing in a value at risk framework*. *The Journal of Derivatives*, 6, 7-24.

LONGIN F. (1998) *Application de la théorie des valeurs extrêmes aux marchés financiers*. *Banque et Marchés*, 32, 5-14.

LONGIN F. (2000) *From value at risk to stress testing: The extrême value approach. The Journal of Banking & Finance*, 7, 1097-1130.

LONGIN F. (2001) *Beyond the VaR. The Journal of Derivatives*, 8, 36-48.

LONGIN F. (2005) *The choice of the distribution of asset prices : How extreme value theory can help ?*. *The Journal of Banking & Finance*, 29, 1017-1035.

PICKANDS J. (1975) *Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. Annals of Statistics*, 3, 119-131.

SKLAR A. (1959) *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8, 229-231.

WEISS A. (2010) *Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing. Econometric Theory*, 2, 107-131.

#### **COURS, RAPPORTS DE RECHERCHE ET THESES**

EMBRECHTS P., MCNEIL A. (2001) *Modelling dependence with copulas and applications to risk management. Research report, Université de Zurich*.

DUPRE D., KOUROUMA L., SANFILIPPO G., TARAMASCO O. (2011) *Extreme value at risk and expected shortfall during financial crisis. Research report, Université de Grenoble*.

GARDES L. (2020) *Théorie des valeurs extrêmes. Cours, Université de Strasbourg*.

GAVIN J. (2000) *Extreme value theory – an empirical analysis of equity risk. Research report, UBS Warburg, Londres*.

QUIGLEY L., RAMSEY D. (2008) *Statistical Analysis of the Log Returns of Financial Assets. Thesis, Université de Münster*.

#### **OUVRAGES ET CONTRIBUTIONS**

DOWD K. (2005) *Measuring Market Risk, 2<sup>nd</sup> edition. Nottingham : Wiley*.

EMBRECHTS P., KLUPPELBERG C., and MIKOSCH T (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin : Springer*.

JORION P. (2006) *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk, third edition. Irvine : McGraw-Hill Professional*.

LONGIN F. (2001) « Stress testing : application of extreme value theory to foreign exchange markets ». *Global financial markets at the turn of the century, 1st edition. Bingley : Emerald Publishing Limited.*

LONGIN F. (2016) *Extreme events in finance : a handbook of extreme value theory and its applications. Paris : Wiley.*

MANDELBROT B. (2009) *Fractales, hasard et finance. Paris : Flammarion.*

NELSEN R. (2006) *An Introduction to Copulas. New York : Springer.*

## **REGLEMENTATION**

BASEL COMMITTEE (2001) *A survey of stress tests and current practice at major financial institutions. Bank for International Settlements, Bâle.*

EUROPEAN BANKING AUTHORITY (2018) *Orientations sur les tests de résistance des établissements, Paris.*



## ANNEXE 1 :

### LES TESTS DE VERIFICATION DES PROPRIETES DES RESIDUS STANDARDISES

Les résidus standardisés utilisés dans le modèle GARCH-GJR doivent vérifier les propriétés suivantes :

- la nullité de la moyenne,
- l'homoscédasticité,
- l'indépendance,
- l'absence d'autocorrélation.

Ces propriétés peuvent être vérifiées grâce aux quatre tests statistiques présentés ci-après.

#### **Le test de nullité de la moyenne :**

La nullité de la moyenne peut être vérifiée avec le test de Student sous réserve que la taille de l'échantillon soit supérieure à 30 lorsque la distribution des données n'est pas normale.

Soit  $X$  un échantillon de taille  $n \geq 30$ , de moyenne  $\mu_n$  et d'écart-type  $\sigma_n$ . Les hypothèses du test sont :

$$H_0 : \mu_n = 0$$

$$H_1 : \mu_n \neq 0$$

La statistique de test est définie par :

$$t = \frac{\mu_n}{\sigma_n/\sqrt{n}}$$

La conclusion du test s'obtient en comparant la valeur de la statistique  $t$  à la valeur critique au seuil  $\alpha$  pour un degré de liberté  $n - 1$  disponible dans la table du test.

### **Le test d'homoscédasticité :**

Afin de tester l'homoscédasticité des données, le test ARCH basé sur le principe des multiplicateurs de Lagrange est mis en œuvre. Il consiste à réaliser une régression de la série temporelle  $(x_t)_t$  par la méthode des moindres carrés avec un retard donné  $p$ , ainsi :

$$x_t^2 = cste + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p x_{t-p}^2 + \varepsilon_t$$

Les hypothèses du test sont :

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

$$H_1 : \text{au moins l'un des coefficients est non nul}$$

Sous l'hypothèse nulle, la statistique du multiplicateur de Lagrange suit asymptotiquement une loi du Chi-deux à  $p$  degrés de liberté. L'hypothèse nulle est donc rejetée si la statistique dépasse la valeur critique du test.

### **Le test d'indépendance :**

Le test utilisé pour contrôler l'indépendance d'une série temporelle a été introduit par Brock, Dechert, et Scheinkman (1987), il est couramment appelé « test BDS ». L'hypothèse nulle du test est :

$$H_0 : \text{l'échantillon est identiquement et indépendamment distribué}$$

Ce test s'appuie sur l'intégrale de corrélation. Cette intégrale mesure la probabilité que deux points d'une série temporelle soient proches dans l'espace des phases reconstruit avec une dimension  $m$  du plongement.

Le test BDS peut être mis en œuvre à partir du *package tseries* du logiciel *open source R*.

### **Le test d'absence d'autocorrélation :**

Le test de Ljung-Box permet de contrôler l'absence d'autocorrélation sérielle dans une série temporelle.

En notant  $k$  le décalage de temps et  $r_k$  le coefficient de corrélation entre l'observation de la date  $t$  et celle de la date  $t + k$ , les hypothèses du test sont :

$$H_0 : r_k = 0 \quad \forall k$$

$$H_1 : r_k \neq 0 \quad \forall k$$

La statistique du test est notée  $Q(k)$ , elle teste l'hypothèse que les coefficients d'autocorrélation sont nuls. Elle est distribuée selon une loi Chi-deux avec  $k$  degrés de liberté. L'expression de la statistique est :

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{r_j^2}{n-j}$$

avec :

- $n$  le nombre d'observations composant la série temporelle
- $r_k$  le coefficient de corrélation entre l'observation de la date  $t$  et celle de la date  $t+k$
- $k$  le décalage de temps

L'hypothèse nulle est rejetée si :

$$Q(k) > \chi_{1-\alpha, k}^2$$

où :

- $\chi_{1-\alpha, k}^2$  est la valeur critique du Chi-deux pour un niveau de significativité  $\alpha$  et  $k$  degrés de liberté.

## **ANNEXE 2 :**

### **LES TESTS D'ADEQUATION DE LA LOI PARETO GENERALISEE ESTIMEE A PARTIR DES RESIDUS STANDARDISES DU MODELE GARCH-GJR(1,1)**

L'adéquation des lois Pareto généralisées ajustées sur les résidus standardisés du modèle GARCH-GJR(1,1) est vérifiée à l'aide d'un outil statistique graphique, le Q-Q *plot*, et d'un test statistique, le test d'Anderson-Darling.

Les Q-Q *plots* obtenus pour chaque indice sont les suivants :

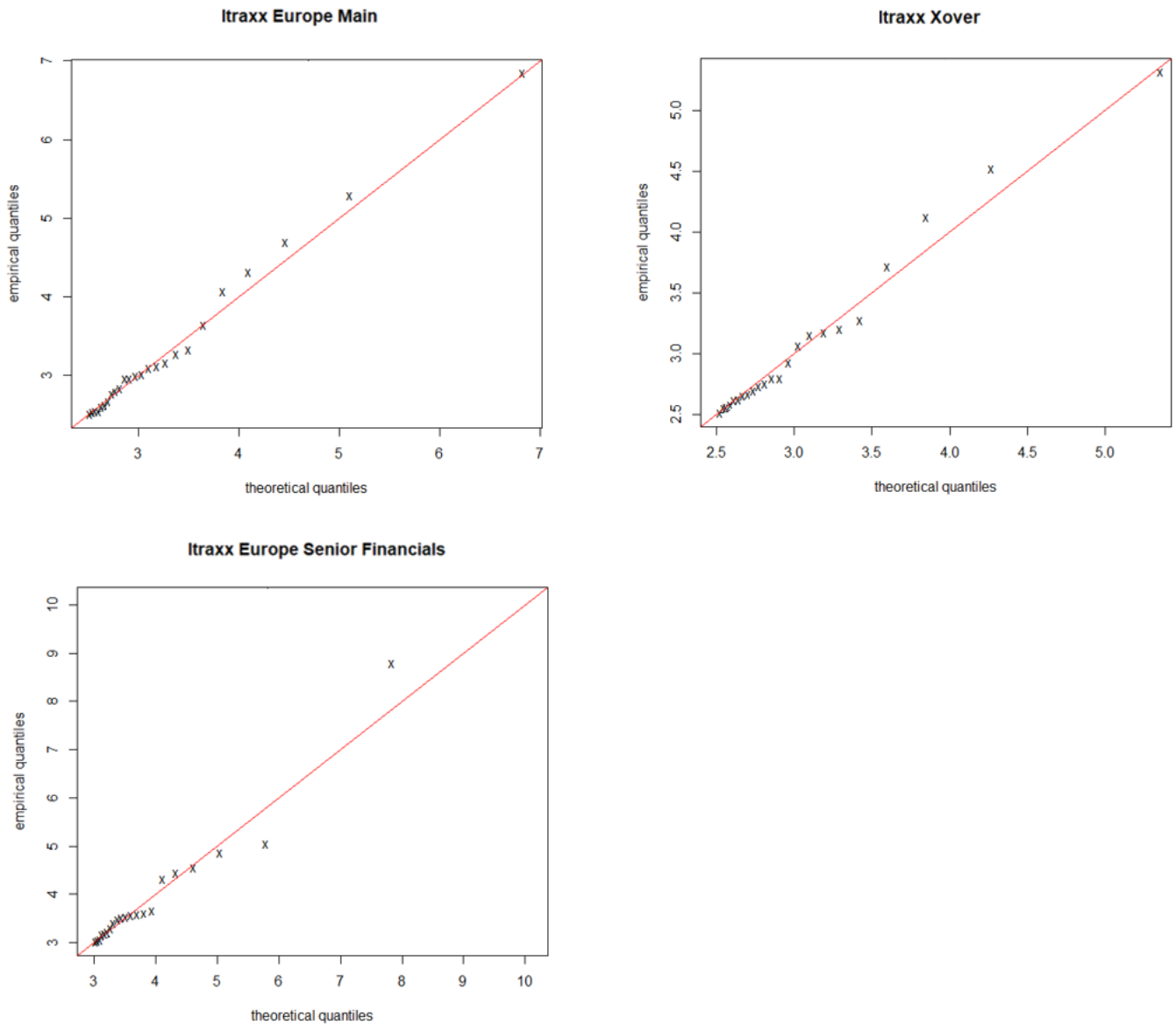


Figure A – Les graphiques Quantile-Quantile des résidus standardisés des trois indices étudiés

Les points étant relativement bien alignés avec la première bissectrice du plan, les lois estimées semblent décrire convenablement les données étudiées. Ces Q-Q *plots* sont davantage satisfaisants que ceux obtenus sur les distributions ne tenant pas compte de la volatilité conditionnelle.

Ces résultats qualitatifs sont contrôlés à l'aide d'un test statistique quantitatif, le test de d'Anderson-Darling. Celui-ci a permis d'obtenir les résultats ci-dessous :

	<i>Itraxx Europe Main</i>	<i>Itraxx Xover</i>	<i>Itraxx Europe Senior Financials</i>
<b>Statistique</b>	0,16	0,11	0,13
<b>P-valeur</b>	0,42	0,95	0,85

Tableau B – Les résultats du test statistique d'Anderson-Darling

Les p-valeurs obtenues entraînent l'acceptation de l'hypothèse nulle au seuil de significativité de 5%. Les lois ajustées sont bien en adéquation avec les distributions des résidus standardisés du modèle GARCH-GJR(1,1).

## ANNEXE 3 :

### LA PROCEDURE DE CONTROLE EX-POST

Le *backtesting*, ou contrôle ex-post, est un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées ex-post sont en adéquation avec les pertes prévues.

#### **Le backtesting de la Value at Risk :**

La première étape du processus de *backtesting* de la *Value at Risk* (*VaR*) consiste à construire la série de violations sur laquelle sera réalisée un ensemble de tests statistiques permettant de mesurer la fiabilité du modèle.

La violation correspond à une situation dans laquelle la perte observée excède la *Value at Risk* anticipée à la date  $t$ . Elle est notée  $I_t(\alpha)$  pour une *VaR* à  $\alpha\%$  et est exprimée de la manière suivante :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t > VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $r_t$  la rentabilité de l'actif financier à l'instant  $t$  ( $t$  étant compris dans la fenêtre temporelle considérée pour réaliser le *backtesting*).

D'après Christoffersen (1998), une prévision de la *VaR* est valide si et seulement si la séquence des violations  $(I_t)_{1 \leq t < n}$  satisfait les hypothèses suivantes :

- **L'hypothèse de couverture non-conditionnelle :**

Kupiec (1995) propose un test appelé POF-test (*Proportion Of Failures test*) permettant de contrôler l'hypothèse de couverture non-conditionnelle. Son objectif est d'analyser la proportion  $\hat{\alpha}$  de violations de la *VaR* au niveau  $\alpha$  observées. Le modèle n'est pas considéré fiable lorsque  $\hat{\alpha}$  diffère significativement de  $\alpha$ .

Les hypothèses du test sont :

$$H_0 : \hat{\alpha} = \alpha$$

$$H_1 : \hat{\alpha} \neq \alpha$$

Le test de Kupiec repose sur le test du ratio de vraisemblance de la couverture non-conditionnelle. Soit un échantillon de  $n$  observations avec  $I(\alpha)$  violations, la statistique du test est :

$$LR_c = 2 \log \left( \frac{\left( \frac{1 - \hat{\alpha}}{1 - \alpha} \right)^{n - I(\alpha)} \hat{\alpha}^{I(\alpha)}}{\alpha} \right)$$

où  $I(\alpha)$  est supposé suivre une loi binomiale de paramètres  $\alpha$  et  $n$ .

L'hypothèse nulle est rejetée lorsque la statistique de test  $LR_c$  est supérieure à la valeur critique du Khi-deux à un degré de liberté et dans ce cas, la propriété de couverture non-conditionnelle n'est pas vérifiée.

- L'hypothèse d'indépendance :

Afin de vérifier l'hypothèse d'indépendance, Christoffersen (1998) propose un test markovien d'indépendance entre deux observations consécutives. L'idée de ce test est de vérifier si la vraisemblance d'une violation de la VaR est influencée par la violation, ou non, de la VaR du jour précédent. Le modèle de mesure de la VaR est considéré comme fiable si la probabilité de violation de la VaR à la date  $t$  est indépendante de ce qui s'est passé à la date  $t - 1$ .

La réalisation de ce test s'appuie sur la matrice de contingence ci-dessous, en notant  $I_t$  la fonction indicatrice indiquant la survenance ou non d'une violation à la date  $t$  :

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$
$I_t = 0$	$n_{0,0}$	$n_{1,0}$
$I_t = 1$	$n_{0,1}$	$n_{1,1}$

Tableau A – Tableau de contingence du test de Christoffersen

Comme le test de Kupiec, ce test d'indépendance est un test de ratio de vraisemblance dont la statistique est la suivante :

$$LR_{ind} = -2 \log \left( \frac{(1 - \pi)^{n_{0,0} + n_{1,0}} * \pi^{n_{0,1} + n_{1,1}}}{(1 - \pi_0)^{n_{0,0}} \pi_0^{n_{0,1}} (1 - \pi_1)^{n_{1,0}} \pi_1^{n_{1,1}}} \right)$$

avec :

$$\pi_0 = \frac{n_{0,1}}{n_{0,0} + n_{0,1}}, \quad \pi_1 = \frac{n_{1,1}}{n_{1,0} + n_{1,1}} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{n_{0,1} + n_{1,1}}{n_{0,0} + n_{0,1} + n_{1,0} + n_{1,1}}$$

L'hypothèse d'indépendance entre l'événement de la date  $t$  et celui de la date  $t - 1$  est rejetée lorsque la statistique de test  $LR_{ind}$  est supérieure à la valeur critique du Khi-deux à un degré de liberté.



### **Le backtesting de l'Expected Shortfall :**

Par ailleurs, le *backtesting* de l'Expected Shortfall (*ES*) peut être réalisé grâce à la statistique  $V$  introduite par Kourouma et al. (20012) et définie par :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (ES_i - X_i) \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i > VaR_i}}$$

où  $X_i$  est la perte réelle au jour  $i$ ,  $ES_i$  et  $VaR_i$  sont l'Expected Shortfall et la Value at Risk estimés au jour  $i$ .

Une valeur négative de  $V$  indique une sous-estimation du risque de perte, et inversement, une valeur positive souligne une surestimation du risque. L'estimateur de l'Expected Shortfall est précis si  $V$  est proche de 0. Mais cette méthode comporte tout de même une limite : elle n'associe aucune probabilité à la statistique calculée pour pouvoir trancher sur la fiabilité du modèle de mesure de l'Expected Shortfall.

## ANNEXE 4 :

### LE TEST STATISTIQUE DE SPEARMAN

La statistique rho de Spearman, notée  $\rho$ , peut être utilisée pour contrôler la significativité d'une dépendance entre deux variables. Le test de Spearman présente l'avantage de pouvoir être réalisé sur des données ne provenant pas d'une distribution normale.

Les hypothèses du test sont :

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

La statistique de test est :

$$t = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$$

avec  $n > 2$  le nombre d'observations.

Cette statistique suit une loi de Student à  $n - 2$  degrés de liberté.

L'hypothèse nulle d'indépendance est rejetée si la statistique de test est supérieure à la valeur critique de Student à  $n - 2$  degrés de liberté et au niveau de confiance considéré.