duas
Diplôme Universitaire des Actuaires de Strasbourg

UFR Mathématique Informatique Strasbourg

Mémoire présenté devant

l'UFR de Mathématique et Informatique

pour l'obtention du du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 02/12/2021

Par : EBER Samuel

Titre: Calcul de la meilleure estimation d'un traité de prévoyance individuel couvrant des travailleurs non-salariés

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Signature :

Membres du jury de l'Unistra :

P. ARTZNER
J. BERARD
A. COUSIN
K.-T. EISELE
M. MAUMY-BERTRAND

Entreprise : Hannover Re

Directeur de mémoire en entreprise:
Nom : Modry Jean
Signature :
Invité :

hannover re
Hannover Rück SE
Succursale Française
33 avenue de Wagram, 75017 Paris
SIRET 451 428 684 APE 6520 Z

Jury de l'Institut des Actuaires :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Résumé

Hannover Re dispose d'un modèle actuariel pour projeter les flux de trésorerie nécessaires pour le calcul du *BE* de ses traités.
Cependant, deux problématiques inhérentes à l'activité de réassurance compliquent la mise en place de méthodes de projection des flux propres à chaque traité :

1. Les bases de données des portefeuilles réassurés ne sont pas systématiquement mises à disposition par les cédantes, ce qui ne permet pas d'effectuer des estimations d'hypothèses de projection adaptées et robustes pour chaque traité ;
2. Il y a une multitude de traités de réassurance différents pour une même ligne d'activité, couvrant des risques qui ne sont pas systématiquement similaires. Même si Hannover Re disposait de toutes les bases de données nécessaires, la projection des flux de trésorerie avec des méthodes et des hypothèses spécifiques à chaque traité serait trop coûteuse en ressources et difficile à implémenter dans un modèle.

Hannover Re a donc fait le choix de regrouper les traités en groupes de risques homogènes appelés « *Clusters* ». Les méthodes de projection et hypothèses techniques sont alors définies au niveau de ces regroupements puis appliquées à chaque traité.
Néanmoins, ces agrégations ne permettent pas de prendre en compte toutes les spécificités de chaque traité pour les projections des flux de trésorerie, tant au niveau des méthodes que des hypothèses. Il est donc essentiel de s'assurer du calcul adéquat du *BE*. Une des solutions choisies, pour les traités souscrits auprès de la succursale française d'Hannover Re, est que la fonction actuarielle et de gestion des risques de cette dernière opère au calcul manuel du *BE* et de ses sensibilités d'un traité représentatif d'un périmètre d'activité chaque année. Les résultats obtenus sont ensuite discutés avec la fonction actuarielle et de gestion des risques du groupe.

Cette étude a donc pour objectif la revue du modèle actuariel et du modèle interne d'Hannover Re sur le périmètre des traités de type prévoyance individuelle, à somme sous risque constante, et frontière des contrats à un an.
Plusieurs étapes sont nécessaires à cette revue :

1. Détermination des hypothèses techniques de projection ;
2. Construction d'un outil de calcul du *BE* souple, permettant d'utiliser des méthodes et des hypothèses adaptées ;
3. Calcul et analyse du *BE* ;
4. Calcul et analyse des sensibilités aux hypothèses techniques et à l'utilisation de *model points* ;

La revue a été réalisée sur des traités couvrants des produits de prévoyance pour les travailleurs non-salariés.

Mots Clés : réassurance, prévoyance, TNS, Solvabilité II, *Best Estimate*, table de passage en incapacité, table de maintien en incapacité, Hoem, Kaplan-Meier, Whittaker-Henderson, splines cubiques, modèles relationnels, *clustering*.

Abstract

Hannover Re has an actuarial model to project the cash flows necessary to calculate the Best Estimate of its treaties.
However, two problematics specific of the reinsurance activity constrain the cash flow projection:

1. Reinsured portfolios are not systematically sent by the ceding companies, which does not allow Hannover Re to estimate specific projection assumptions for each treaty;
2. The large number of different treaties would skyrocket the complexity of the actuarial projection model.

Hannover Re choose therefore to gather treaties with common features into homogeneous risk groups called cluster. Methods and the assumptions are defined at the cluster level and used for each treaty of the cluster.
Nevertheless, this method can lead to errors in the calculation of the BE. It is therefore necessary to ensure that the BE is fairly assessed. One of the solutions chosen for the treaties concluded with the French branch is that the local actuarial and risk management functions manually calculate, each year for the cluster chosen, the BE and sensibilities of a representative treaty, and discuss the results with the group functions to improve the internal model.

This study presents the implementation of this approach for proportional treaties covering life products with constant sum at risk and one-year contract border. It is organized around four essential guidelines:

1. The determination of the technical assumptions for the projection;
2. The creation of an adaptable projection tool on Excel-VBA, allowing the BE of these treaties to be calculated manually with specific methods and assumptions;
3. The calculation and the analysis of the BE;
4. The calculation and the analysis of the sensitivity to the technical assumptions and model points.

The review has been performed on treaties covering life products for self-employed person, which follow a specific tax system and earn annuities as benefits for the insurance product.

Keywords: reinsurance, life insurance product, Solvency II, Best Estimate, construction of temporary disability entry table, construction of temporary disability remaining table, Hoem, Kaplan-Meier, Whittaker-Henderson, cubic splines, relational models, *clustering*.

Remerciements

Avant tout, je souhaite remercier Jean Modry, *Local Chief Risk Officier*, *manager* et tuteur en entreprise pour sa grande disponibilité, son attention et sa volonté de transmettre. Il a grandement contribué à mon développement tant sur le plan professionnel que personnel.

Je remercie également l'ensemble des salariés de la succursale française d'Hannover Re, et tout particulièrement la direction des risques et de la conformité pour leur accueil chaleureux ainsi que pour leurs conseils et connaissances dont ils ont su me faire profiter au quotidien.

Je remercie aussi mes proches qui m'ont aidé dans l'accomplissement de ce travail, notamment pour les relectures mais aussi pour le soutien moral.

J'adresse enfin ma gratitude à tous les membres de l'équipe enseignante du DUAS, pour ces trois années très enrichissantes passées à leurs côtés, et à Areski Cousin pour avoir suivi la réalisation de ce mémoire.

Note de synthèse

Contexte

Hannover Re dispose d'un modèle actuariel pour projeter les flux de trésorerie nécessaires pour le calcul du *BE* de ses traités. La fonction actuarielle du groupe Hannover Re doit s'assurer du caractère approprié des méthodologies et des hypothèses techniques utilisées par ce modèle. Une des solutions choisies, pour les traités souscrits auprès de la succursale française d'Hannover Re, est que la fonction actuarielle et de gestion des risques de cette dernière opère au calcul manuel du *BE* et de ses sensibilités d'un traité représentatif d'un périmètre d'activité chaque année. Les résultats obtenus sont ensuite discutés avec la fonction actuarielle et de gestion des risques du groupe.

Cette étude a donc pour objectif la revue du modèle actuariel et du modèle interne d'Hannover Re sur le périmètre des traités de type prévoyance individuelle, à somme sous risque constante, et frontière des contrats à un an.
Plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Détermination des hypothèses techniques de projection ;
2. Construction d'un outil de calcul du *BE* souple, permettant d'utiliser des méthodes et des hypothèses adaptées ;
3. Calcul et l'analyse du *BE* ;
4. Calcul et analyse des sensibilités aux hypothèses techniques et à l'utilisation de *model points* ;

La revue a été réalisée parallèlement sur un traité et un groupe de traités couvrants des produits de prévoyance pour les travailleurs non-salariés.

Détermination des hypothèses techniques

Le Calcul du *BE* nécessite une projection des flux futurs de trésorerie, qui dépendent eux-mêmes de l'état dans lequel les assurés se trouveront.

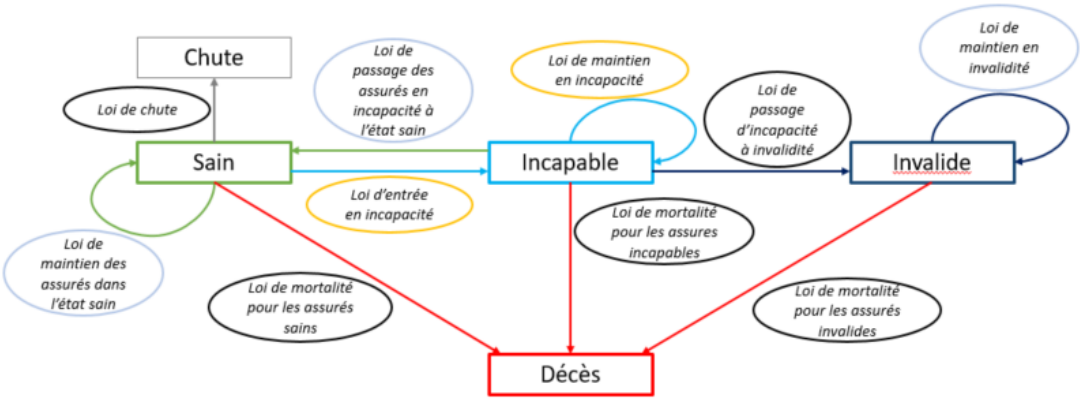


Schéma des passages entre les différents états possibles pour les assurés

Ces lois sont déterminées au moyen de l'une des méthodes suivantes :

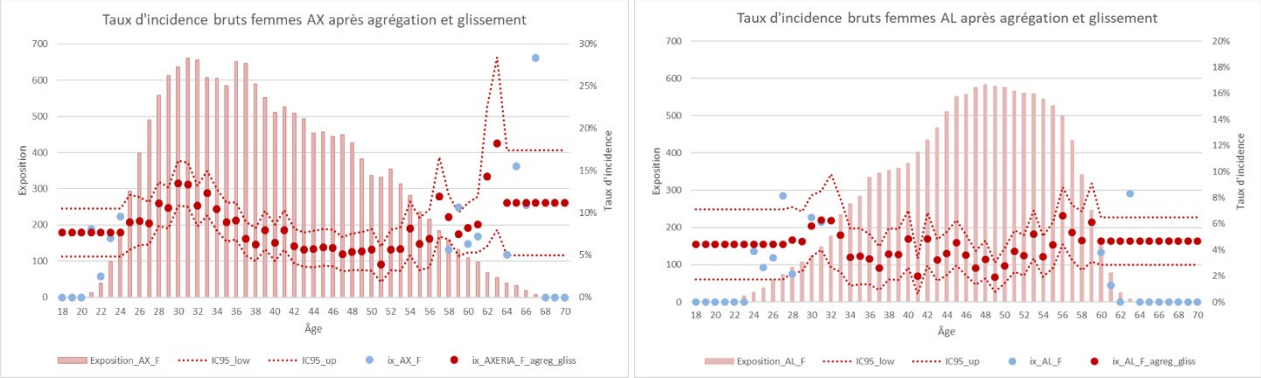
- Estimation sur l'historique du portefeuille : entourée en jaune ;
- Utilisation d'une table de référence ou d'un avis d'expert (chute) : entouré en noire ;
- Déduites des autres lois afin que la somme des probabilités de sortie et de maintien de chaque état valle 1 : entourée violet clair.

Estimation des lois de d'incidence en arrêt de travail

Avant d'estimer les taux d'incidence en incapacité des assurés sains, une analyse descriptive relative à la garantie AT a permis de mettre en exergue la nécessité d'opérer une segmentation femmes/hommes.

La construction de cette loi a été réalisée avec un volume de données peu important : en conséquence, les taux bruts estimés sont volatils sur certaines tranches d'âges. Pour remédier à cela, une méthode de glissements par âge et d'agrégation a été utilisée dans un premier temps sur les taux bruts.

- Taux d'incidence en incapacité des femmes :

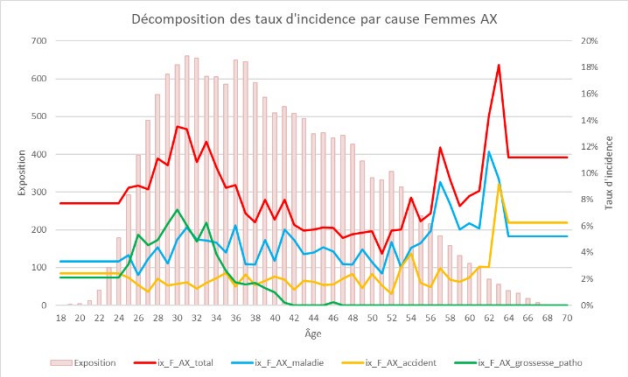


Taux d'incidence en Incapacité des femmes d'AX et d'AL agrégés et glissés

Sur ces deux graphiques, nous constatons, comme mentionné précédemment, trois principales tendances :

1. Une « bosse » en début de table :
   - Entre 20 et 42 ans pour AX : le phénomène est plus net sur AX étant donné une exposition plus importante et des taux moins volatils sur ces âges.
   - Entre 26 et 36 ans pour AL : elle est moins allongée que celle de AX (la bosse d'AL prend fin entre 34 et 36 ans) et l'agrégation de début de table vient « amputer » le début de la bosse ;
2. Un « plat » avec des taux relativement stables entre 40 et environ 50 ans.
3. Une croissance des taux à partir de 50 ans.

Ces effets structurels présents dans les taux d'incidence peuvent s'expliquer par une décomposition du taux d'incidence selon les causes : accident, maladie, grossesse pathologique.



Décomposition des taux bruts des femmes en fonction de la cause (AX)

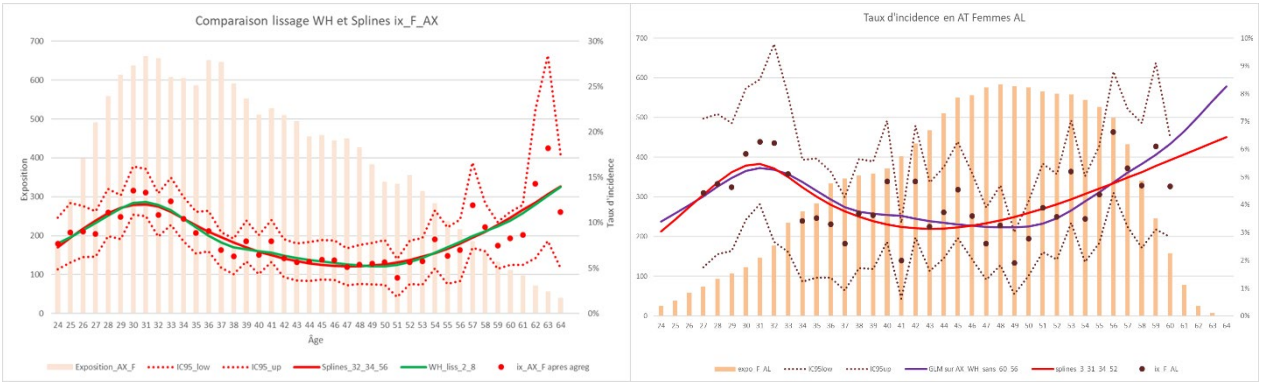
→ La « bosse » entre 20 et 40 sur AX provient des grossesses pathologiques.

→ Le « plat » entre 40 et 51 ans est expliqué par une incidence stable sur les pathologies étiquetées « maladie » et « accidents ».

→ La croissance des taux à partir de 52 ans est principalement expliquée par un accroissement des maladies dans un premier temps, ainsi que des accidents autour de 60 ans.

Les taux bruts ont ensuite été lissés :

- Pour AX : des lissages par WH et par splines cubiques ont été ajustés ;
- Pour AL : des lissages par WH et par splines cubiques ont également été ajustés mais les résultats n'ont pas été concluant dû au faible volume de données. Des modèles relationnels (Brass, GLM poisson, ratio observés/estimés) ont par conséquent été ajustés afin d'extraire les tendances présentes sur AX.

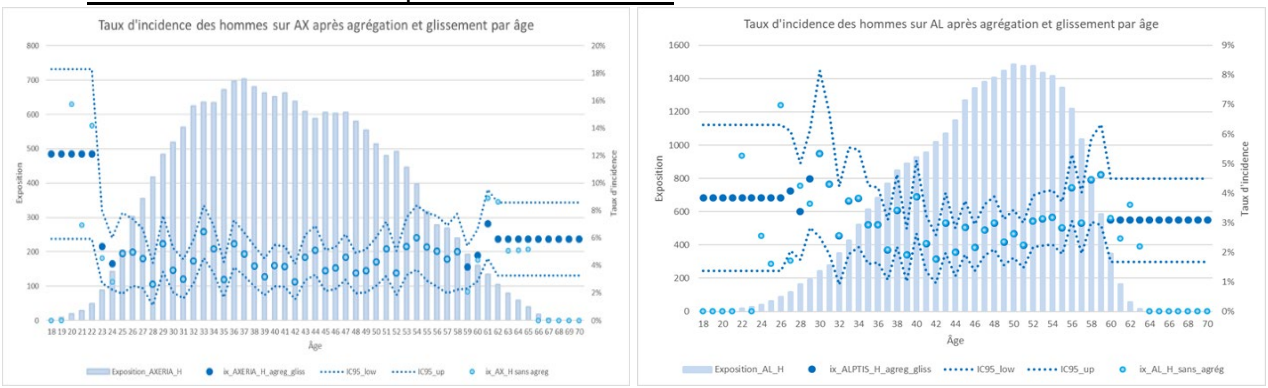


Lissages des taux bruts d'incidence en AT des femmes pour AX et AL

→ **Le lissage conservé pour AX est le lissage par WH (courbe verte dans le graphique de gauche) et pour AL le GLM Poisson sur AX (courbe violette dans le graphique de droite).**

Toutes les comparaisons de lissages et optimisations de paramètres ont été effectuées à l'aide d'une procédure de validation statistiques basée sur la distance du χ^2, le R^2, le ratio observés/estimés, le test des signes et le nombre de points hors de l'intervalle de confiance à 95% autour des taux bruts.

- Taux d'incidence en incapacité des hommes :



Taux d'incidence bruts en incapacité des hommes d'AX et d'AL agrégés et glissés

Deux principaux phénomènes sont observables :

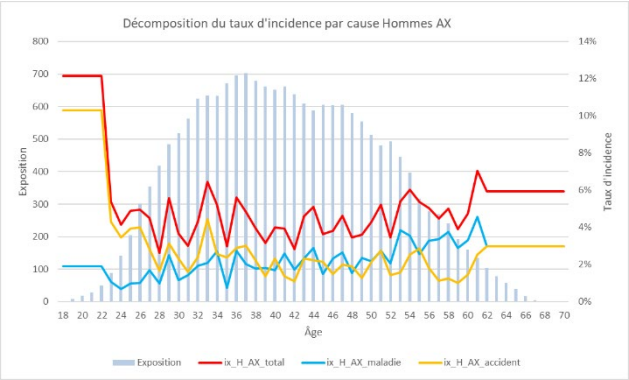
1- Des taux d'incidence nettement plus élevés pour les hommes de moins de 23 ans, ce qui est expliqué, dans la base de sinistre, par des arrêts pour les jeunes artisans. Nous pouvons supposer qu'au début de l'exercice des métiers artisanaux, il y a plus de risque d'arrêt de travail que lorsque les artisans ont gagné en séniorité.
2- Une tendance légèrement croissante avec l'âge.

Les phénomènes sont moins explicites sur AL étant donnée la plus faible exposition et les taux plus volatils. Cependant, les taux d'incidence devraient globalement suivre la même tendance étant donné que ce sont les mêmes type d'assurés (TNS) :

1- Tendance croissante avec l'âge ;
2- Les taux plus hauts avant 26 ans que sur la plage 33-54 ans pourraient être le témoin de la prise en compte de l'incidence accidentelle chez les jeunes dans ces taux agrégés.

Ces deux phénomènes se confirment à l'observation des taux d'incidences décomposés en fonction de la cause de l'arrêt :

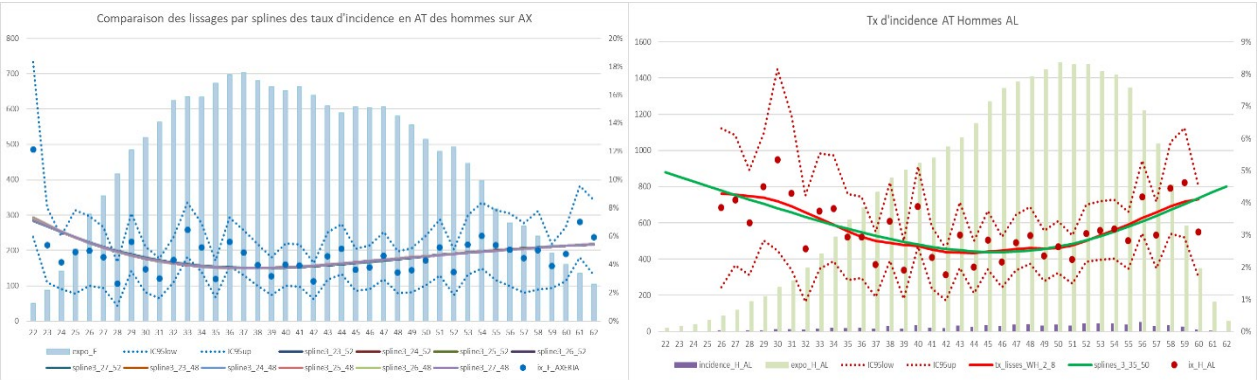
1- Les taux d'incidence sont nettement plus élevés sur les jeunes âges et sont presque totalement expliqués par des accidents ;
2- La légère croissance globale des taux est due à l'augmentation des maladies avec l'âge.



Décomposition du taux d'incidence des hommes de AX selon la cause de l'arrêt de travail

Les taux bruts ont ensuite été lissés :

- <u>Pour AX</u> : **un lissage par splines cubiques** a été ajusté car le lissage par WH n'était pas optimal sur des taux bruts aussi volatil ;
- <u>Pour AL</u> : à nouveau les lissages par WH, par splines cubiques et les modèles relationnels ont été ajustés**. Le lissageapr WH** (courbe rouge dans le graphique de droite) a été le plus performant cette fois, selon la procédure de choix définie.



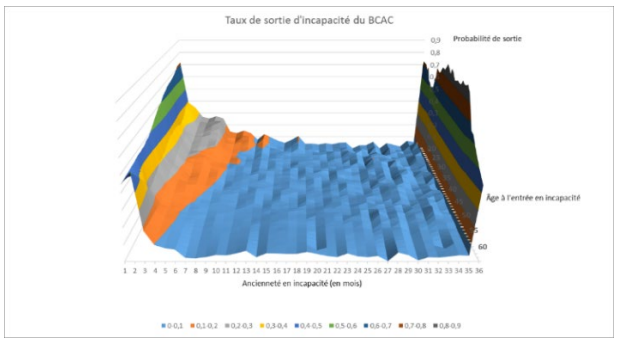
Lissages des taux bruts d'incidence en AT des hommes pour AX et AL

<u>Estimation des lois de maintien en incapacité</u>

La quantité de données a limité la précision de la construction des tables de maintien pour AX et AL. Pour pallier ce problème et accroître la robustesse des taux, nous avons usé de différentes techniques telles que la construction de classes d'âge et un positionnement par rapport aux tables du BCAC[1] grâce à un coefficient multiplicatif.

Dans un premier temps, les tendances ont été analysées sur la table de maintien du BCAC de 2013, bien que cette table ne reflète pas le risque de la population de TNS étudiée.

[1] Bureau Commun des Assurances Collectives



Taux de sortie de l'incapacité du BCAC

→ Les taux de sortie sont nettement plus élevés sur le début de la table (premiers mois d'incapacité) que sur le reste, pour tous les âges, traduisant une plus grande fréquence des arrêts de courte durée.

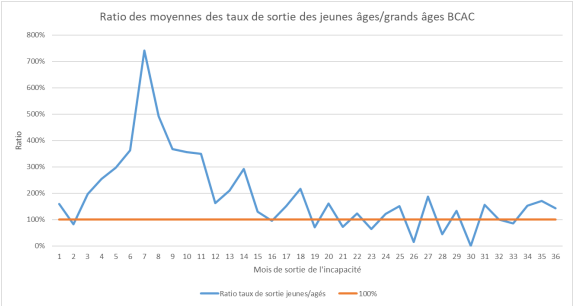
→ Pour les assurés les plus jeunes, les taux de sortie sont plus élevés sur les premiers mois de l'incapacité (jusqu'au quinzième mois environ). Ce qui peut traduire soit des causes (ex. pathologie) entrainant des arrêts plus courts, soit une capacité de guérison plus rapide du fait de l'âge;

→ À partir de quinze mois en incapacité, les taux semblent stables pour tous les âges jusqu'au 30e mois, ce qui pourrait traduire le phénomène des causes d'arrêt particulièrement lourde.

→ La croissance soudaine des taux au 36e mois traduit la sortie obligatoire des assurés de l'état d'incapacité. Cependant, il est notable que ces taux n'atteignent pas un, alors que tous les assurés sont supposés sortir.

Afin de mettre en exergue la sensibilité des taux de maintien à l'âge d'entrée sur les premiers mois, le ratios suivants a été observé (par mois) :

$$\frac{moyenne\ des\ taux\ de\ sortie\ pour\ les\ \text{âges}\ de\ 20\ \text{à}\ 24\ ans}{moyenne\ des\ taux\ de\ sortie\ pour\ les\ \text{âges}\ de\ 60\ \text{à}\ 64\ ans}$$



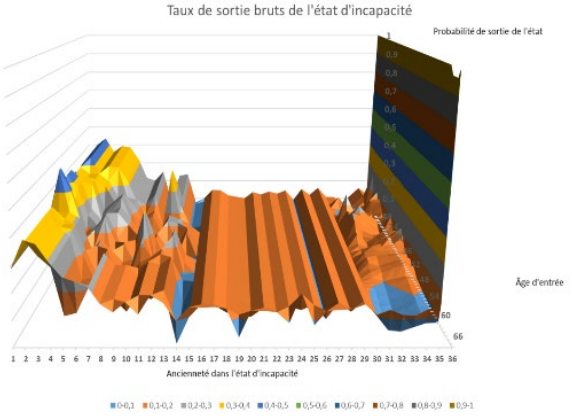
→ Il y a une différence significative jusqu'au quinzième mois en incapacité : les taux de sortie des plus jeunes âges sont nettement plus élevés que les taux de sortie des plus âgés. Après quinze mois le ratio oscille autour de 100%, et l'âge d'entrée en incapacité semblerait avoir moins d'impact sur la durée de maintien.

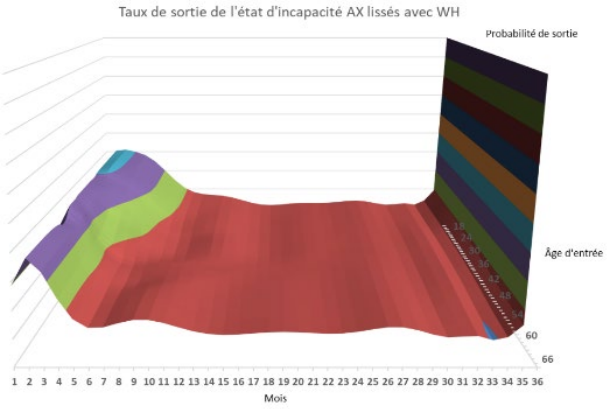
<u>Construction des taux bruts pour AX:</u>

Les taux bruts sont construits différemment sur trois périodes :

1- Des classes d'âges sont construites, permettant de capter la sensibilité à l'âge des premiers mois et jusqu'au 15e mois.
2- Puis, les taux de sortie communs pour tous les âges sont calculés, étant donné la faible quantité de données résiduelles et jusqu'au 30e mois, et la faible sensibilité à l'âge d'entrée sur ces mois.

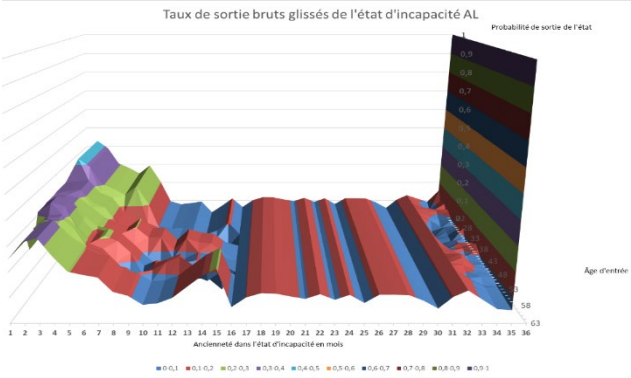
3- Ensuite, la table est fermée avec les taux du BCAC majorés d'un coefficient multiplicatif.

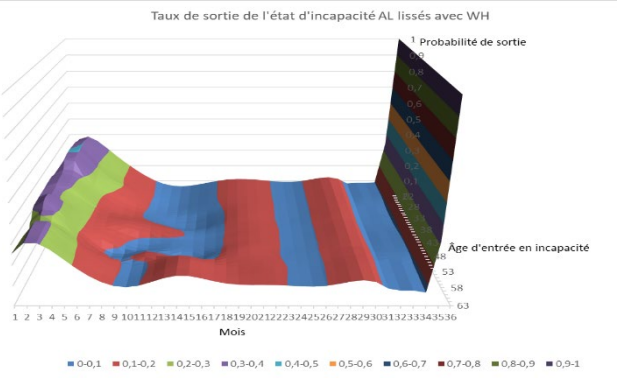




Les taux bruts ont été lissés par un lissage de Whittaker-Henderson bidimensionnel et les paramètres ont à nouveau été optimisés selon notre procédure de choix.

<u>Taux de maintien en incapacité d'AL :</u>
Les taux bruts pour AL ont été construits avec la même méthode que les taux bruts pour AX à la différence du nombre de classes pour les 15 premiers mois du maintien et recollement avec le BCAC s'effectue à 32 ans.





<u>Détermination des hypothèses techniques restantes</u>
Le reste des hypothèses biométriques sont estimées sur la base des tables réglementaires (BCAC) ou construites par L'INSEE parce que la quantité de données pour construire des tables d'expérience n'est pas suffisante.

Outil de projection

Afin de projeter les flux de trésorerie nécessaires au calcul manuel du BE, un outil de projection a été créé sur Excel-VBA. Cet outil se veut souple, permettant une projection « tête par tête » ou avec des *model points* ainsi que la possibilité de choquer les hypothèses techniques aisément.

L'outil de projection peut être décomposé en trois grandes parties :

1- <u>Les *inputs*</u> : les hypothèses techniques et le portefeuille (avec le sexe, l'âge, les garanties, le montant de la prime payée, l'état initial, l'ancienneté dans cet état) à projeter.
2- <u>Calcul des coefficients de projection</u> : des coefficients de projection sont calculés à l'aide de macros VBA pour chaque ligne du portefeuille à projeter.

3- Le calcul des flux de trésorerie : les coefficients obtenus à l'étape précédente sont multipliés par les montants de garanties et de prime pour obtenir les projections des prestations et des primes. Les commissions sont ensuite calculées à partir des flux de primes. Le calcul du *BE* ne consiste plus qu'en la somme de l'ensemble de ces flux. Cette étape est entièrement réalisée sur Excel.

Calcul des coefficients de projection :
Du fait d'une frontière de contrat à 1 an, il a été choisi de réaliser une projection en deux étapes :

- Les douze premiers mois pour lesquels les primes et prestations sont projetées ;
- Les années suivantes pour lesquelles seul l'écoulement des prestations est projeté pour les sinistres survenus lors de la première année de projection ou avant.

Pour chaque assuré ou *model points* (chaque ligne du portefeuille à projeter), deux coefficients de projection sont calculés pour chacune des garanties souscrites (décès, incapacité et/ou invalidité). Le premier coefficient permet de projeter les flux futurs de trésorerie liés à la garantie en question sur la première année. Le deuxième coefficient permet la projection sur les années suivantes. Concernant les primes, seul le calcul d'un coefficient pour la première année est nécessaire.

L'objectif est que cet outil nous permette de calculer le BE, ses sensibilités aux hypothèses techniques, ainsi qu'au regroupement d'assurés en model points. Ces résultats seront ensuite discutés avec la fonction actuarielle et de gestion des risques du groupe.

Résultats :
Les sensibilités sont finalement analysées et deux méthodes de regroupements des assurés sont comparés à une projection « tête par tête ».

	Variation en % "tête par tête"	Variation en % "MP"
BE Choc mortalité +10%	3,8%	3,7%
BE Choc mortalité -10%	-3,9%	-3,8%
BE Choc Passage incap +10%	17,7%	17,9%
BE Choc Passage incap -10%	-17,8%	-17,9%
BE Choc Sortie incap +10%	-33,6%	-33,4%
BE Choc Sortie incap -10%	42,4%	42,1%
BE Choc Passage inval +10%	3,1%	2,9%
BE Choc Passage inval -10%	-3,2%	-3,0%
BE Choc Sortie inval +10%	-0,1%	-0,1%
BE Choc Sortie inval -10%	0,0%	0,0%
BE Choc chute +10%	-1,1%	-1,1%
BE Choc chute -10%	1,0%	1,0%

Synthesis

Context

Hannover Re has an actuarial model to project the cash flows necessary to calculate the Best Estimate of its treaties. The actuarial function of the group must ensure the appropriateness of the methodologies and technical assumptions used by this model. One of the solutions chosen, for the treaties signed with the French branch, is that the actuarial and risk management function of the French branch calculate manually the BE and its sensitivities of a treaty representative of a scope of activity each year. Results are then discussed with the actuarial and risk management function of the group.

Therefore, the objective of this study is to review the actuarial model and the internal model of Hannover Re on life individual treaties, with a constant sum at risk and a one-year boundary contracts.

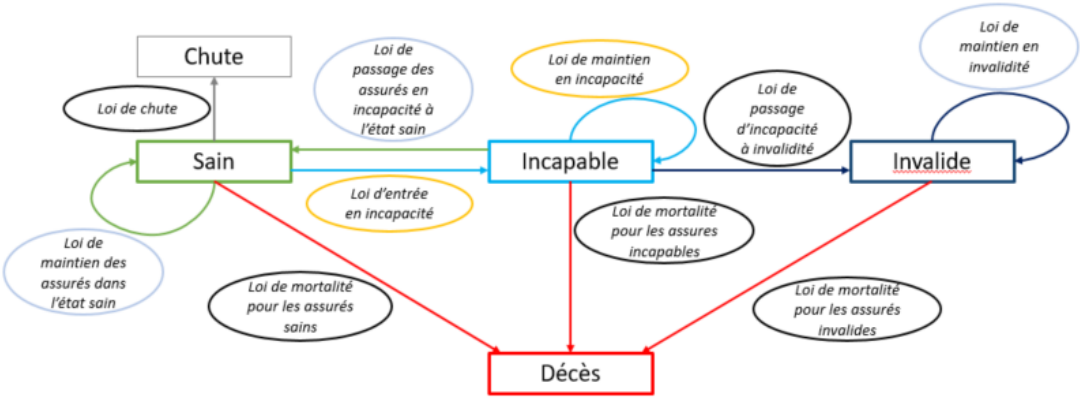
Several steps are necessary :

1. Determination of the technical projection assumptions ;
2. Construction of a flexible BE calculation tool, allowing the use of adapted methods and assumptions;
3. Calculation and analysis of the BE;
4. Calculation and analysis of sensitivities to technical assumptions and the use of model points.

The review was carried out in parallel on a treaty and a group of treaties covering life insurance products for the self-employed.

Determination of the technical assumptions

Calculating the BE requires a projection of future cash flows, which depend on the state in which the policyholders will be.



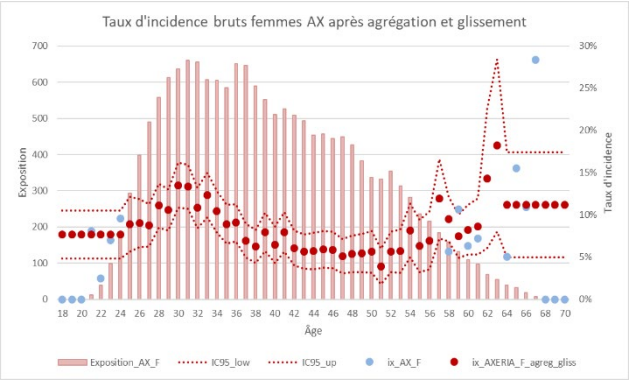
The assumptions are determined using one of the following methods :

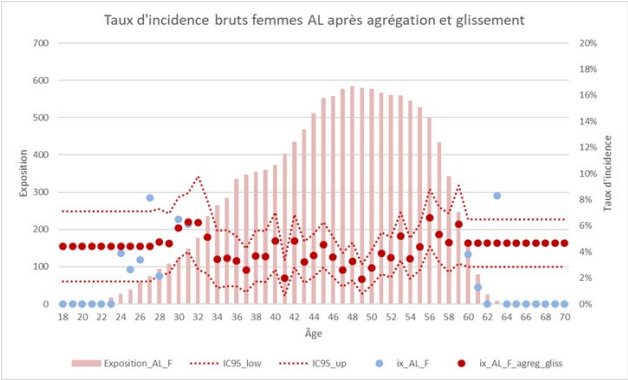
- Estimations on the history of the portefolio : circled in yellow ;
- Use of a reference table or an expert opinion (lapse) : circled in black ;
- Deduced from the others so that the sum of the exit and maintenance probabilities is equal to 1 : circled in light purple.

<u>Estimation of the temporary disability assumptions :</u>

Before estimating the disability incidence rates of healthy insureds, a descriptive analysis relating to the guarantee highlight the need to carry out a female/male segmentation. The limited amount of data implies volatility in the estimated gross rates over certain age groups. To remedy this, a method of sliding by age and aggregation has been used on the raw rates.

- <u>Women Temporary disability entry rates</u> :

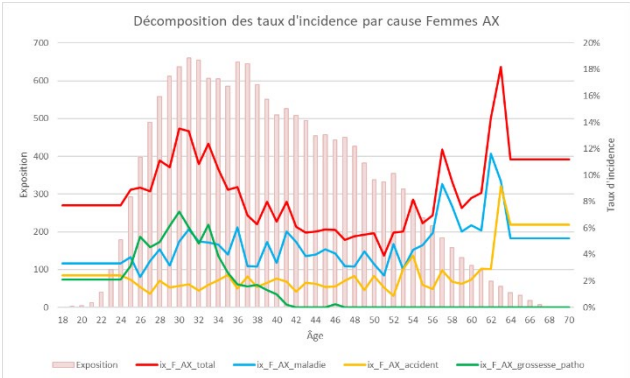




On these two graphs, as mentioned previously, three main trends are observable:

1. A “bump” at the start of the table:
   - Between 20 and 42 years old for AX: the phenomenon is clearer on AX thanks to a greater exposure and less volatile rates over these ages.
   - Between 26 and 36 years old for AL: it is less elongated than that of AX (the AL bump ends between 34 and 36 years old) and the aggregation at the start of the table “amputates” the beginning of the bump;
2. A “flat” with relatively stable rates between 40 and around 50 years.
3. An increase in rates from age 50.

These structural effects present in the incidence rates can be explained by a split of the incidence rate according to the causes: accident, illness, pathological pregnancy.



→ The “bump” between 20 and 40 on AX comes from pathological pregnancies.

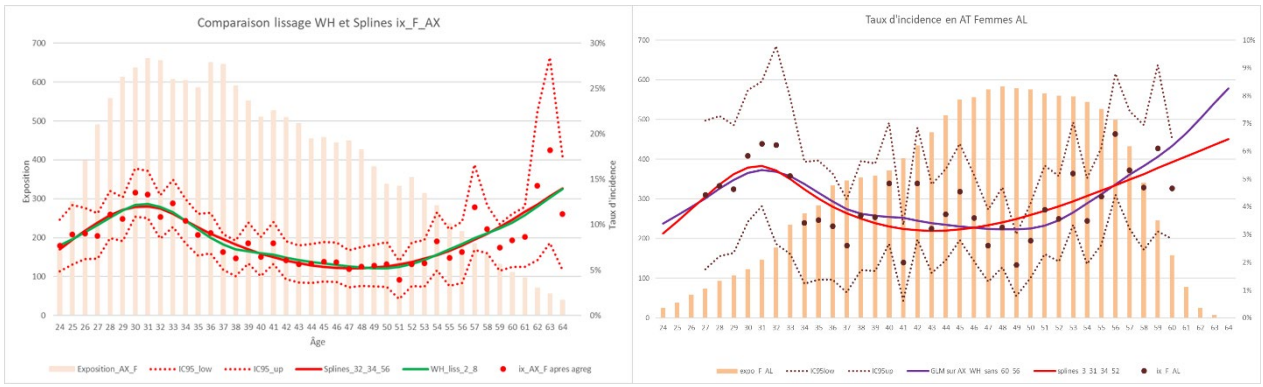
→ The “flat” between 40 and 51 years old is explained by a stable incidence of pathologies labeled “illness” and “accidents”.

→ The increase in rates from age 52 is mainly explained by an increase in illnesses, as well as accidents around age 60.

The raw rates were then smoothed::

- <u>For AX</u> : smoothings by WH and by cubic splines have been adjusted ;

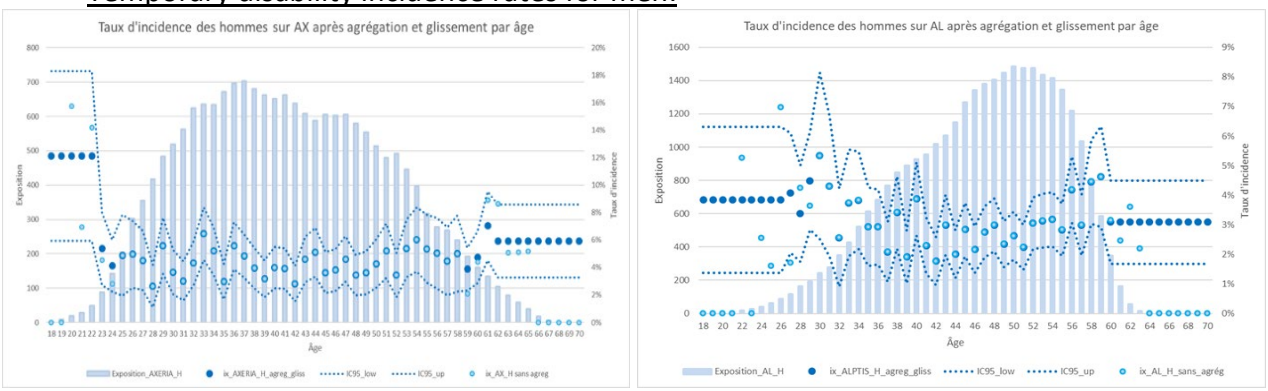
- For AL : smoothings by WH and by cubic splines were also adjusted but the results were not conclusive due to the small volume of data. Relational models (Brass, GLM fish, observed/estimated ratio) were therefore adjusted in order to extract the trends present on AX.



→ **The smoothing selected for AX is the smoothing by WH (green curve in the left graph) and for AL the GLM Poisson on AX (purple curve in the right graph).**

All the smoothing comparisons and parameter optimizations were performed using a statistical validation procedure based on the distance of χ^2, the R^2, the observed/estimated ratio, the sign test and the number of points outside the 95% confidence interval around the raw rates.

- Temporary disability incidence rates for men:



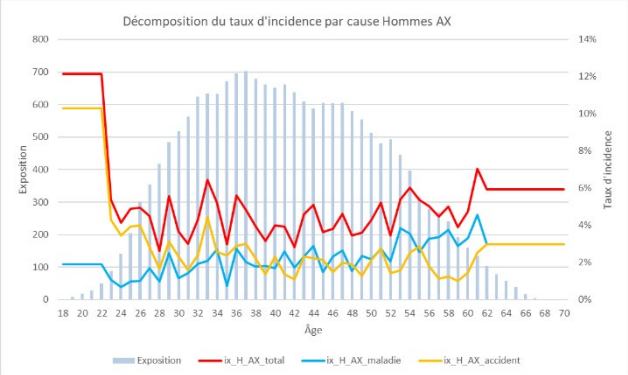
Two main trends can be observed:

1- Significantly higher incidence rates for men under 23, which is explained, in the claim database, by accidents for young craftsmen. We can assume that at the beginning of the practice of crafts, there is more risks than when craftsmen have gained in seniority.
2- A slightly increasing trend with age.

The phenomena are less explicit on AL because of the lower exposure and the important volatility in rates. However, the incidence rates should generally follow the same trend because they are the same type of insured (non-employees):

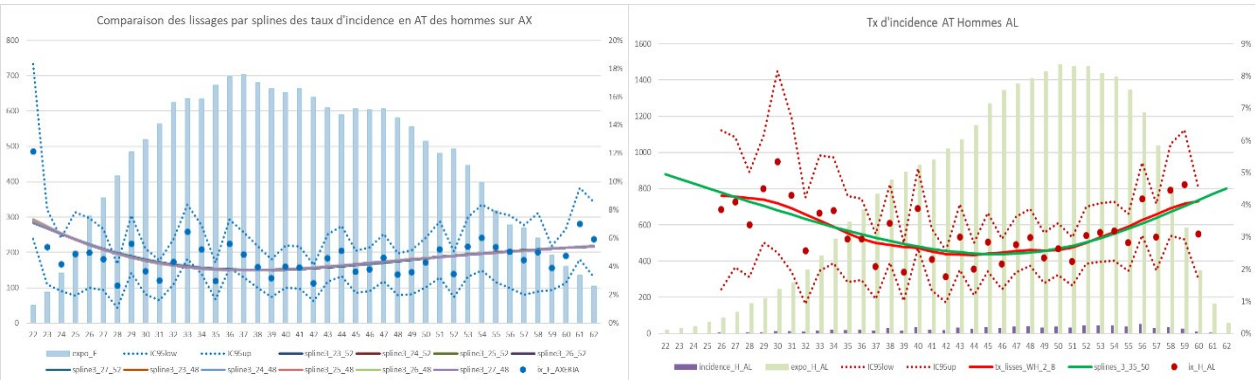
1- Increasing trend with age ;
2- The higher rates before 26 years than on the 33-54 years range could be the witness of the inclusion of the accidental incidence among young people in these aggregate rates.

These two trends are confirmed by the splited incidence rates by the cause:
1- The incidence rates are much higher in young ages and are almost totally explained by accidents;
2- The slight overall increase in rates is due to the increase in illnesses with age.



The raw rates were then smoothed:

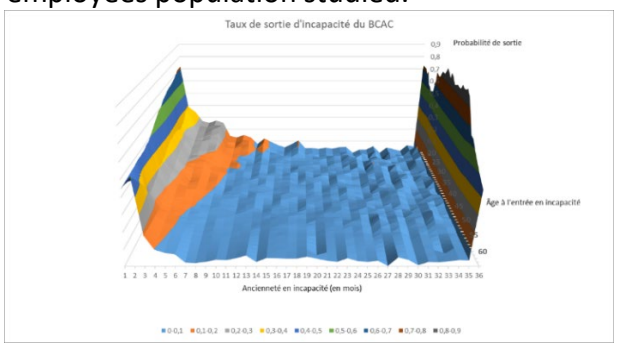
- <u>For AX</u> : **a smoothing by cubic splines** was adjusted because the smoothing by WH was not optimal on such volatile raw rates;
- <u>For AL</u> : again the smoothings by WH, by cubic splines and the relational models have been adjusted. **The smoothing by WH** (red curve in the graph on the right) was the best performer this time, according to the defined choice procedure.



<u>Estimation of disability maintenance table</u>

The amount of data limited the accuracy of the construction of the tables for AX and AL. To overcome this problem and increase the robustness of the rates, we have used various techniques such as the construction of age classes and positioning with respect to the BCAC tables using a multiplicative coefficient.

First, the trends were analyzed on the 2013 BCAC maintenance table, although this table does not reflect the risk of the non-employees population studied.



→ The exit rates are significantly higher at the beginning of the table (first months of disability) than for the rest, for all ages, reflecting a greater frequency of short-term disability.

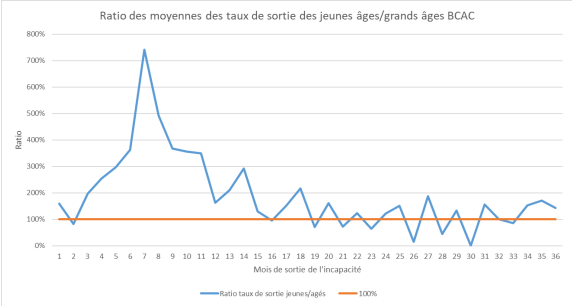
→ For the youngest insured, the exit rates are higher in the first months of incapacity (up to about the 15th month). This may reflect either causes (eg pathology) leading to shorter stops, or a faster healing capacity due to age;

→ From fifteen months of disability, the rates seem stable for all ages up to the 30th month, which could reflect the phenomenon of particularly serious causes of disability.

→ The sudden increase in rates in the 36th month reflects the compulsory exit of policyholders from the state of incapacity.

In order to observe the sensitivity of maintain rates to entry age on first months, the following ratio has been observed (by month):

$$\frac{average\ exit\ rates\ for\ ages\ from\ 20\ to\ 24}{average\ exit\ rates\ for\ ages\ from\ 60\ to\ 64}$$

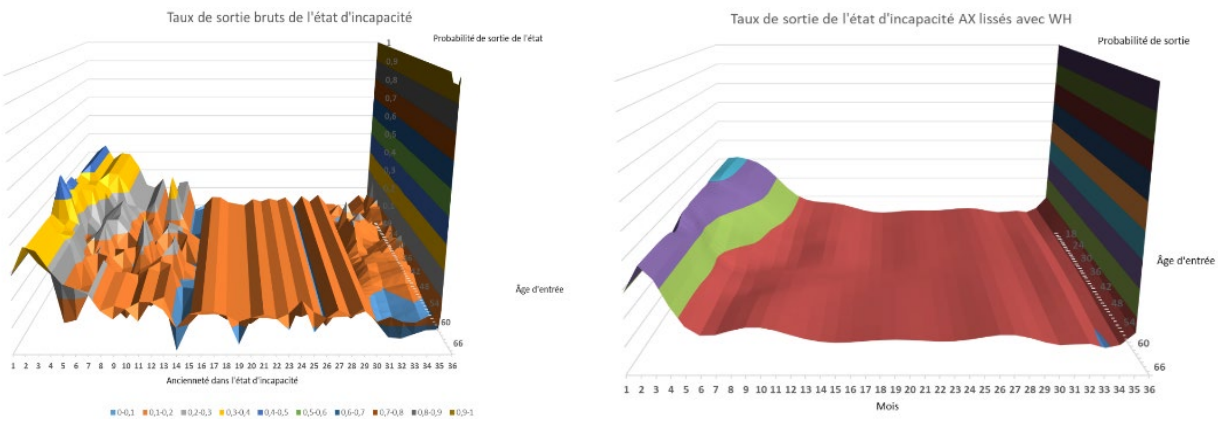


Ratios of the average exit rates of young ages (20-24 years) to the average exit rates of older ages (60-64 years)

<u>Construction of raw rates for AX:</u>

The raw rates are constructed differently over three periods :

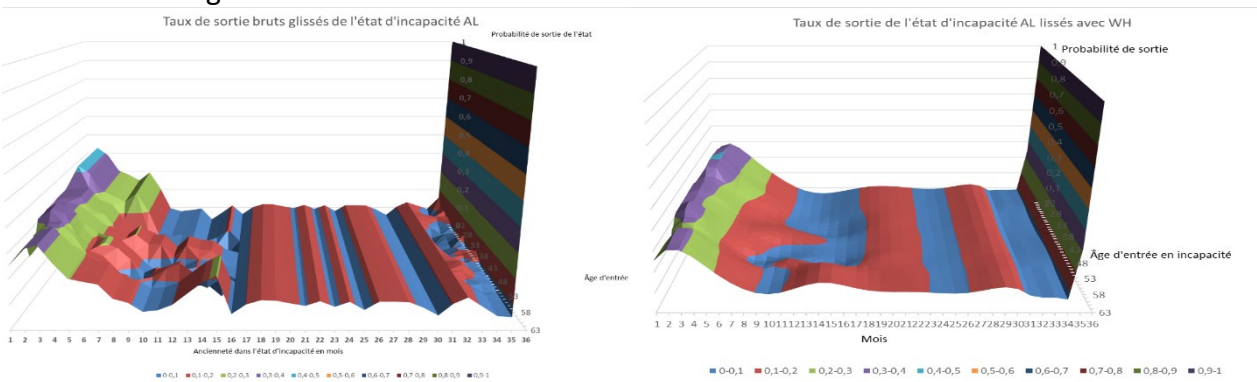
1- Age classes are constructed, to capture sensitivity to the age of the first months and up to the 15th month.
2- Then, the common exit rates for all ages are calculated, because of the small amount of residual data up to the 30th month, and the low sensitivity to entry age over these months.
3- Then the table is closed with the BCAC rates increased by a multiplicative coefficient.



Raw rates and smoothed rates of exit from the state of incapacity on AX

The raw rates were smoothed by a two-dimensional Whittaker-Henderson smoothing and the parameters were again optimized according to our procedure of choice.

<u>AL disability maintenance rates:</u>
The raw rates for AL were constructed using the same method as the raw rates for AX with a difference in the number of classes for the first 15 months of maintenance and reattachment with BCAC occurs at age 32.



Raw and smoothed two-dimensional WH-smoothed exit rates from AL disability

The rest of the biometric assumptions are estimated on the basis of regulatory tables (BCAC) or built by INSEE because the amount of data to build experience tables is not sufficient

Projection tool

In order to project the cash flows necessary for the manual calculation of the BE, a projection tool has been built on Excel-VBA. This tool is flexible, allowing a projection "head by head" or with model points as well as the possibility of shocking the technical assumptions easily.

The projection tool can be splited into three main parts:

1- *<u>Inputs</u>* : the technical assumptions and the portfolio (with gender, age, guarantees, amount of premium paid, initial state, seniority in this state) to be projected.
2- <u>Calculation of projection coefficients</u>: projection coefficients are calculated using VBA macros for each line of the portfolio to be projected.
3- <u>The calculation of cash flows</u>: the coefficients of the previous step are multiplied by the amounts of guarantees and premiums to obtain the projections of benefits and premiums. Commissions are then calculated from the premium streams. The BE calculation consists only in the sum of all these flows. This step is entirely carried out in Excel.

<u>Calculation of the projection coefficients</u>:
Due to a one-year contract boundary, the projection has been done in two steps:

- The first twelve months for which the premiums and benefits are projected;
- The following years for which only the flow of benefits is projected for claims occurring during the first year of projection or before.

For each insured or model points (each line of the portfolio to be projected), two projection coefficients are calculated for each of the guarantees subscribed (death, incapacity and / or invalidity). The first coefficient makes it possible to project the future cash flows linked to the guarantee in question over the first year. The second coefficient allows the projection over the following years. Regarding premiums, only the calculation of a coefficient for the first year is necessary.

The objective is that this tool allows us to calculate the BE, its sensitivities to technical assumptions, as well as the grouping of policyholders into model points. These results will then be discussed with the actuarial and risk management function of the group.

Results:
Sensitivities are finally analysed and two methods of policyholders clustering are compared with the "head-to-head" projection.

	Variation en % "tête par tête"	Variation en % "MP"
BE Choc mortalité +10%	3,8%	3,7%
BE Choc mortalité -10%	-3,9%	-3,8%
BE Choc Passage incap +10%	17,7%	17,9%
BE Choc Passage incap -10%	-17,8%	-17,9%
BE Choc Sortie incap +10%	-33,6%	-33,4%
BE Choc Sortie incap -10%	42,4%	42,1%
BE Choc Passage inval +10%	3,1%	2,9%
BE Choc Passage inval -10%	-3,2%	-3,0%
BE Choc Sortie inval +10%	-0,1%	-0,1%
BE Choc Sortie inval -10%	0,0%	0,0%
BE Choc chute +10%	-1,1%	-1,1%
BE Choc chute -10%	1,0%	1,0%

Table des matières

RÉSUMÉ ..... **III**
ABSTRACT ..... **IV**
REMERCIEMENTS ..... **V**
NOTE DE SYNTHÈSE ..... **VI**
SYNTHESIS ..... **XIII**
TABLE DES MATIÈRES ..... **XX**
INTRODUCTION **1**
1 CONTEXTE **3**
1.1 CONTEXTE RÉGLEMENTAIRE 3
1.1.1 Rappels de Solvabilité 2 ..... *3*
1.1.2 Les fonctions clés *3*
1.1.3 Zoom sur le pilier I *4*
1.2 NOTIONS DE RÉASSURANCE 10
1.2.1 Définitions *10*
1.2.2 La réassurance proportionnelle *10*
1.2.3 La réassurance non-proportionnelle *12*
1.3 PÉRIMÈTRE D'ACTIVITÉ 13
1.3.1 Les TNS *13*
1.3.2 Le régime obligatoire des TNS *14*
1.3.3 Contrat d'assurance prévoyance complémentaire Madelin *16*
1.3.4 Sélection médicale *18*
1.4 PRÉSENTATION DES TRAITÉS ÉTUDIÉS 19
1.4.1 Caractéristiques des traités *19*
1.4.2 Statistiques descriptives des bases assurés *20*
2 ESTIMATION DES HYPOTHÈSES TECHNIQUES **24**
2.1 DONNÉES INCOMPLÈTES 24
2.2 ESTIMATION DES TAUX BRUTS 25
2.2.1 Estimateur de Kaplan-Meier *25*
2.2.2 Estimateur des moments de Hoem *27*
2.3 LISSAGE 28
2.3.1 Modèles relationnels *30*
2.3.2 Ajustements paramétriques *32*
2.3.3 Lissage non paramétrique *33*
2.3.4 Validation de l'ajustement *35*
2.4 LOIS RELATIVES À L'INCAPACITÉ 38
2.4.1 Les données *38*
2.4.2 Incidence en arrêt de travail *41*
2.4.3 Maintien en incapacité *64*
2.5 LOIS RELATIVES AU DÉCÈS 68
2.5.1 Décès des assurés sains *68*
2.5.2 Décès des incapables *69*
2.5.3 Décès des invalides *69*
2.6 LOIS RELATIVES À L'INVALIDITÉ 69
2.7 CHUTE 69
2.8 FACTEURS D'ACTUALISATION DES FLUX DE TRÉSORERIE FUTURS 69
3* CALCUL DU *BE **70**
3.1 CALCUL AU NIVEAU LOCAL 70
3.2 CALCUL DES COEFFICIENTS DE PROJECTION 72
3.2.1 Coefficients de projection pour la garantie décès *72*
3.2.2 Coefficients de projection pour les garanties liées à l'incapacité *73*
3.2.3 Coefficients de projection pour les garanties liées à l'invalidité *74*
3.2.4 Coefficient de projection des primes *75*

3.3 PROJECTIONS TÊTE PAR TÊTE VS PROJECTIONS AVEC *MODEL POINTS* 75

4 RÉSULTATS ET ANALYSES 76

4.1 CALCULS ET SENSIBILITÉS DU *BE* DU TRAITÉ AX 76
4.1.1 Calcul du BE *76*
4.1.2 Sensibilités aux Model Points *76*
4.1.3 Sensibilités aux hypothèses techniques *76*
4.2 CALCUL DU *BE* ET SENSIBILITÉS SUR LE TRAITÉ *AL* 80
4.2.1 Calcul du BE *80*
4.2.2 Sensibilités aux hypothèses techniques *80*
4.3 OUVERTURE : IMPACT COVID SUR L'INCIDENCE EN 2020 80

5 CONCLUSION 81
BIBLIOGRAPHIE I
TABLE DES FIGURES II
ANNEXES IV

ANNEXE I : COURBES DES TAUX DE MORTALITÉ DE L'INSEE PAR SEXE ET PAR VINGTILE DE REVENUS IV
ANNEXE II : TABLEAU DE CATÉGORISATION DES PROFESSIONS EN QUATRE CLASSES V
ANNEXE IV : ETUDE DU DÉLAI DE DÉCLARATION DES SINISTRES EN ARRÊT DE TRAVAIL SUR AL VI

Introduction

Depuis son entrée en application le 1er janvier 2016, les assureurs et réassureurs sont contraints par la directive Solvabilité II. Le principal objectif de cette réforme est la protection des preneurs et des bénéficiaires des contrats (Solvabilité II, 2009, art.27) en imposant des exigences plus adaptées aux risques de chaque organisme d'assurance que la précédente directive, Solvabilité I.

Les provisions techniques et les fonds propres sont réglementés par des exigences quantitatives, imposant le calcul annuel de la meilleure estimation[2] des engagements et du capital de solvabilité requis[3]. Additionnés, ces deux postes du passif ont pour but de permettre aux organismes d'assurance de répondre à leurs engagements dans au moins 99,5% des cas à horizon un an (Solvabilité II, 2009, art. 101).

Pour effectuer le calcul du *BE*, un modèle actuariel de projection des flux de trésorerie futurs est utilisé. Cependant, Hannover Re doit faire face à deux problématiques inhérentes à l'activité de réassurance qui compliquent la mise en place de méthodes de projections des flux propres à chaque traité :

1. Les bases de données des portefeuilles réassurés ne sont pas systématiquement mises à disposition par les cédantes, ce qui ne permet pas d'effectuer des estimations d'hypothèses de projection adaptées et robustes pour chaque traité ;
2. Il y a une multitude de traités de réassurance différents pour une même ligne d'activité, couvrant des risques qui ne sont pas systématiquement similaires. Même si Hannover Re disposait de toutes les bases de données nécessaires, la projection des flux de trésorerie avec des méthodes et des hypothèses spécifiques à chaque traité serait trop coûteuse en ressources et difficile à implémenter dans un modèle.

Hannover Re a donc fait le choix de regrouper les traités en groupes de risques homogènes, appelés « *Clusters* », conformément à l'article 35 du règlement délégué. Les méthodes de projections et les hypothèses techniques sont alors définies par cluster, puis réutilisées dans le modèle de projection afin de projeter les flux de trésorerie futurs par traité, de manière réaliste.

Par définition, ces agrégations ne permettent pas de prendre en compte toutes les spécificités de chaque traité pour les projections des flux de trésorerie, tant au niveau des méthodes que des hypothèses.

Cette méthode de projection peut donc être source d'erreur pour le calcul du *BE*. C'est à la fonction actuarielle de s'assurer du calcul adéquat de ce dernier, étant le garant du « caractère *approprié des méthodologies, des modèles sous-jacents et des hypothèses utilisées pour le calcul des provisions techniques* » (Solvabilité II, 2009, art. 48). Selon la méthode choisie par la fonction actuarielle, la sensibilité du calcul du *BE* aux hypothèses peut varier. C'est à la fonction de gestion des risques de mesurer ces sensibilités du *BE* aux hypothèses (Solvabilité II, 2009, art.44), afin de détenir un montant de fonds propres répondant aux exigences de la directive.

[2] Noté *BE* dans la suite pour *Best Estimate*
[3] Noté *SCR* dans la suite pour *Solvency Capital Requirement*

Sachant qu'Hannover Re est implanté mondialement par un réseau de filiales, succursales ou bureaux de représentation, ces vérifications, tant au niveau des méthodes et des hypothèses de calcul du *BE* que de ses sensibilités, sont à effectuer sur l'ensemble des périmètres d'activités de l'entreprise. Pour la succursale française, la solution choisie a été la mise en place d'une revue annuelle[4] du modèle de projection pour un cluster identifié. Pour cela, chaque année, au sein de la direction des risques et de la conformité de la succursale française, un traité représentatif du cluster étudié est isolé et les travaux consistent :

- Au calcul manuel du *BE* avec des hypothèses et des méthodologies spécifiques au traité étudié ;
- À l'étude de la sensibilité du *BE* aux hypothèses techniques et aux regroupements d'assurés pour la projection.

Ces résultats sont ensuite présentés et discutés avec les fonctions actuarielle et de gestion des risques du groupe afin de permettre la comparaison avec les projections issues du modèle actuariel, et ainsi la vérification du caractère réaliste et approprié du *BE* et de la marge de solvabilité requise concernant le périmètre d'activité étudié.

L'enjeu de ce mémoire est la mise en œuvre de cette démarche sur un traité et un regroupement de traités de type prévoyance individuelle pour les TNS[5].

Pour cela, ce mémoire s'articule en quatre grandes parties :

La première présente le contexte réglementaire en vigueur, le périmètre d'activité étudié et les traités choisis pour effectuer cette revue. Cette partie permet ainsi de poser le cadre à notre étude et de se faire une idée des caractéristiques des assurés étudiés.

La deuxième concerne la détermination des hypothèses techniques. Ces hypothèses ont pour but de refléter au mieux le risque des assurés et sont donc liées à leurs caractéristiques mises en avant dans la première partie.

La troisième détaille l'outil de projection construit permettant le calcul du *BE* et de de ses sensibilités.

La quatrième et dernière partie expose les calculs du *BE, s*es sensibilités et ses analyses.

[4] Pour les précédentes revues, le lecteur est invité à se référer aux mémoires d'actuariat de POPHILLAT (2019) et HANNA (2020).
[5] Travailleurs non-salariés

1 Contexte

1.1 Contexte réglementaire

1.1.1 Rappels de Solvabilité 2

La directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil adopté le 25/11/2009, dite Solvabilité 2, a été transposée en droit national le 2 avril 2015 pour une entrée en application depuis le 1er janvier 2016. Cette réforme réglementaire a pour but principal la protection des preneurs et des bénéficiaires des contrats d'assurance (Directive Solvabilité II, 2009, art.27). Pour cela, elle fixe des exigences quantitatives, qualitatives et de communication visant à garantir la solvabilité[6] des entreprises d'assurance et de réassurance.
Ces exigences s'articulent autour de 3 piliers :

- Le **pilier I** concerne les exigences quantitatives. Il fixe les règles de valorisation des actifs et des passifs, ainsi que les exigences de capital ;
- Le **pilier II** définit l'ensemble des exigences qualitatives en matière de gestion des risques et de gouvernance : système de gouvernance (conseil d'administration, dirigeants effectifs, fonctions clés), politiques écrites, *ORSA*[7], contrôle interne…
- Le **pilier III** concerne la communication d'information sur les risques et la solvabilité de l'entreprise au public et aux autorités de contrôle européennes. Ces exigences visent à accroître la transparence et à harmoniser le marché au niveau européen en permettant la comparaison des organismes de pays différents.

→ Portant sur le calcul du *BE* ainsi que ses sensibilités aux hypothèses, cette étude permet de répondre à certaines exigences du pilier I, détaillées ci-dessous.

1.1.2 Les fonctions clés

L'article L-354-1 du code des assurances impose la mise « *en place d'un système de gouvernance garantissant une gestion saine et prudente de l'activité et faisant l'objet d'un réexamen interne régulier. […] Le système de gouvernance comprend les fonctions clés suivantes : la fonction de gestion des risques, la fonction de vérification de la conformité, la fonction d'audit interne et la fonction actuarielle.* »
L'ACPR (2016, pp. 3-4) précise le rôle de chacune de ces fonctions dans sa notice sur la désignation des « dirigeants effectifs » et des « responsables de fonctions clés » dans le régime Solvabilité II :

- ***La fonction de vérification de la conformité*** *a pour mission principale de veiller au respect par l'Organisme ou le Groupe de la réglementation relative aux activités d'assurance.*
- ***La fonction de gestion des risques****, au travers du système de gestion des risques qu'elle anime, vise à déceler, mesurer, contrôler, gérer et déclarer en permanence, les risques auxquels sont soumis l'Organisme ou le groupe. […] En cas de recours à un modèle interne, la majeure partie de la conception, du pilotage et de la maintenance du modèle revient à la fonction de gestion des risques.*

[6] La solvabilité peut être définie ici comme la capacité, pour les entreprises d'assurance et de réassurance, à honorer leurs engagements à long terme.
[7] *Own Risk and Solvency Assessment* – Evaluation propre des risques et de la solvabilité

- ***La fonction actuarielle*** *doit permettre d'analyser la cohérence, les forces et les faiblesses (ou points d'incertitude) du pilotage technique de l'organisme ou du groupe dans toutes ses dimensions (tarification, souscription, provisionnement, réassurance).*
- ***L'audit interne*** *a pour mission d'évaluer l'adéquation et l'efficacité de l'ensemble du système de contrôle interne.*

→ Cette étude contribue aux travaux de la fonction actuarielle. En effet, elle permet la revue de la méthodologie et des hypothèses de calcul des provisions techniques. Cette étude servira également à la fonction de gestion des risques, car les sensibilités du BE pourront être réutilisées dans le calibrage et la maintenance du modèle interne.

1.1.3 Zoom sur le pilier I

Dans le cadre de ce mémoire, l'intérêt étant porté sur le *BE* ainsi que ses sensibilités aux hypothèses, seul le premier pilier sera présenté. Pour rappel, le **pilier I** concerne les exigences quantitatives permettant de constituer le bilan prudentiel SII[8], et notamment les exigences sur les provisions techniques avec le calcul du BE, et les fonds propres avec le calcul des marges de solvabilité.

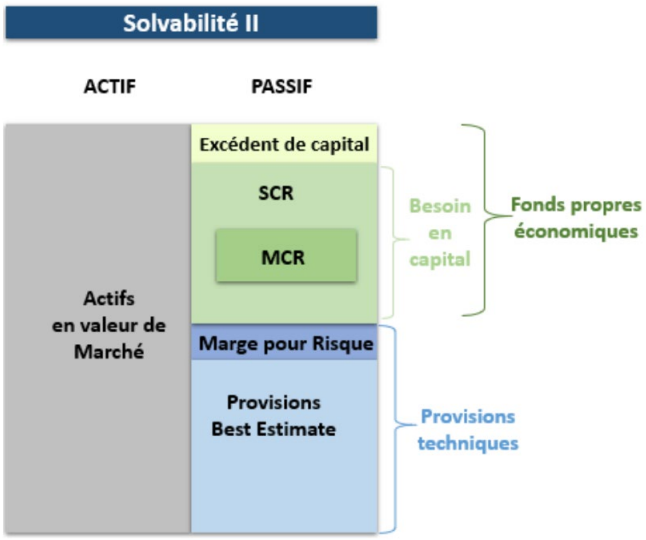


Figure 1 : Bilan en vision Solvabilité II

1.1.3.1 Les provisions techniques

Elles sont calculées de manière prudente, fiable et objective et leurs valeurs correspond « *au montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance* ».
Selon l'article 77, « *La valeur des provisions techniques est égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque* ».
L'évaluation de ces deux éléments doit être faite séparément, sauf cas contraire[9].

[8] Solvabilité II
[9] Art. 77, alinéa 4 : lorsque les flux futurs de trésorerie liés aux engagements peuvent être répliqués au moyen d'instruments financiers pour lesquels il existe une valeur de marché fiable observable.

1.1.3.1.1 Marge de risque

Selon l'article 77 de la directive, « *la marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.* »
À l'alinéa 5 de ce même article il est précisé que lorsque son évaluation est séparée de celle de la meilleure estimation, la marge de risque correspond au coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.
Remarque : Le calcul de la marge pour risque ne sera pas plus détaillé dans ce mémoire car son calcul n'est pas l'objectif de cette étude.

1.1.3.1.2 Best Estimate (BE)

Selon l'article 77 de la directive :

> *La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes.*
> *La projection en matière de flux de trésorerie utilisée dans le calcul de la meilleure estimation tient compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.*

Un groupe de travail de l'Institut des Actuaires[10] a été constitué afin d'explicité de façon pratique les principales exigences relatives à l'évaluation du *BEL* Vie pour le marché Français (IA, Groupe de travail "Best Estimate Liabilities Vie", Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français, 2016). Ce groupe de travail a publié une note suggérant une interprétation des principes de calculs énoncés dans la directive :

- **Utilisation des informations disponibles sur les marchés financiers** : les hypothèses sont définies à partir des prix d'instruments sur les marchés financiers à la date de calcul du *BE* ;
- **Cohérence avec les données de marché pour le risque de souscription** : les calculs de *BE* concernant la sinistralité doivent être comparés avec les données de marché. Ces données de marchés peuvent être utilisées dans le cas d'une absence de données suffisamment fiables ;
- **Calcul prudent, fiable et objectif** : la prudence est nécessaire lors de l'intervention du jugement d'expert dans la détermination des hypothèses et des méthodes de calcul. L'objectivité s'applique également pour la détermination des hypothèses et des scénarios et la fiabilité se vérifie en comparant les flux réels et estimés ;
- **Calcul en continuité d'exploitation** : l'entreprise doit être considérée comme devant poursuivre normalement son activité et ne sera pas liquidée dans un avenir prévisible. De plus, seuls les engagements faisant partie de la frontière des contrats[11] sont valorisés.
- **Calcul brut de réassurance et de véhicules de titrisation** ;

[10] Nommée IA dans la suite.
[11] La frontière des contrats est définie dans la partie suivante.

- **Prise en compte des options et garanties** : le *BE* tient compte de la valeur des garanties financières et de toute option contractuelle incluse dans les contrats d'assurance et de réassurance.

Les flux de trésorerie futurs à prendre en compte dans le calcul du *BE* sont définis à l'article 28 du règlement délégué. Ce sont tous les encaissements et décaissements futurs liés à des contrats d'assurance et de réassurance existants. Ils correspondent essentiellement aux :

- Versements que l'entreprise devra effectuer dans le cadre des prestations financières aux preneurs et aux bénéficiaires et des prestations en nature[12] ;
- Payements des primes et flux de trésorerie supplémentaires résultants de ces primes ;
- Payements entre l'entreprise d'assurance ou de réassurance et des intermédiaires en rapport avec des engagements d'assurance ou de réassurance ;
- Payements entre l'entreprise d'assurance ou de réassurance et des entreprises d'investissement en rapport avec des engagements d'assurance ou de réassurance ;
- Les impôts qui sont ou dont on prévoit qu'ils seront appliqués aux preneurs, ou qui sont nécessaires pour régler les engagements d'assurance ou de réassurance.

Le détail des frais à prendre en compte dans le calcul ainsi que leur ventilation sont explicités à l'article 31 du règlement délégué :

- Charges administratives ;
- Les frais de gestion des investissements ;
- Les frais de gestion des sinistres ;
- Les frais d'acquisition.

Le groupe de travail de l'IA suggère dans sa note une projection en coût unitaire (en % des primes) des frais étant donné l'approche *run-off*[13] impliquant que les contrats futurs supporteront également une partie des frais.

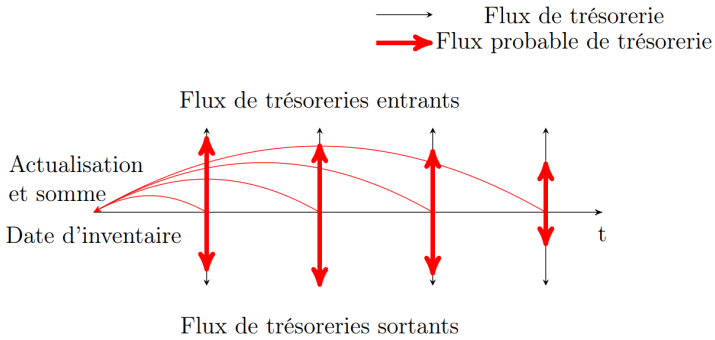


Figure 2 : Schéma simplifié du calcul du BE

1.1.3.1.3 Frontière des contrats

En effet, « *tous les engagements relatifs au contrat, y compris les engagements relatifs aux droits unilatéraux de l'entreprise d'assurance ou de réassurance de renouveler ou d'étendre la portée du contrat et les engagements relatifs aux primes payées, font partie du contrat* », sauf lorsque ces engagements excèdent la première des trois dates suivantes[14] :

[12] Les prestations en nature correspondent essentiellement à l'assistance.
[13] Cette approche consiste à exclure de la modélisation les contrats futurs.
[14] À moins que l'entreprise ne puisse contraindre le preneur à payer la prime pour ces engagements.

1- Date future à laquelle l'entreprise d'assurance ou de réassurance a un **droit unilatéral de résilier le contrat** ;
2- Date future à laquelle l'entreprise d'assurance ou de réassurance a un **droit unilatéral de rejeter les primes** à recevoir au titre du contrat ;
3- Date future à laquelle l'entreprise d'assurance ou de réassurance a un **droit unilatéral de modifier les primes ou les prestations** à payer au titre du contrat, de manière à ce que les primes reflètent pleinement les risques.

→ Dans les traités étudiés, la frontière des contrats se situe au 31/12 de l'exercice en cours, date à laquelle la prime est unilatéralement modifiable par le réassureur. De plus, la prime d'assurance peut également être modifiée par la cédante, impliquant une modification de la prime de réassurance.

1.1.3.2 Fonds propre

Dans Solvabilité II, les fonds propres sont évalués en valeur économique[15]. Ils se décomposent en fonds propres de base et en fonds propres auxiliaires. Les fonds propres de base correspondent à la différence des actifs et des passifs à laquelle les passifs subordonnés[16] sont ajoutés et les actions détenues par l'entreprise elle-même sont déduites. Les fonds propres auxiliaires se composent d'éléments pouvant être appelés pour absorber des pertes, autres que les éléments des fonds propres de base. Ces éléments sont détaillés aux articles 87 à 89 de la directive.
En termes de solvabilité, les fonds propres ont également la fonction d'absorber la sinistralité excédent les provisions. Afin de contrôler et de réduire le risque de faillite, la directive a instauré le calcul de deux marges de solvabilité (*SCR* et *MCR*) à couvrir par les fonds propres.

1.1.3.2.1 Solvency Capital Requirement (SCR)

Chaque entreprise d'assurance et de réassurance doit déterminer un niveau minimum de fonds propres, appelé SCR, qui permettrait de couvrir l'ensemble de ses engagements avec une probabilité d'au moins 99,5% à l'horizon d'un an (article 101). Le calcul de cette marge de solvabilité économique doit être effectué avec la mesure de risque qui est la *Value-at-Risk* et doit répondre à certaines exigences :

- Le calcul effectué en continuité d'exploitation ;
- Le calcul concerne tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée. Il doit couvrir au minimum les risques liés à la souscription vie et non-vie, à la santé, aux marchés, aux crédits et aux risques opérationnels ;
- Le calcul couvre tout le portefeuille en cours ainsi que le portefeuille dont la souscription est attendue dans les 12 mois. ;
- Le calcul doit prendre en compte l'impact des techniques d'atténuation des risques
- Il doit être calculé au minimum une fois par an, mais l'entreprise doit rester en permanence vigilante afin de détecter une déviation du profil de risque par rapport aux hypothèses qui sous-tendent le dernier calcul en vue d'un réajustement du calcul si besoin.

Le *SCR* peut être calculé soit par le bais de la formule standard ou par le biais d'un modèle interne (partiel ou intégral).

[15] C'est-à-dire en valeur de transfert qui, selon les cas, sera la valeur de marché ou la valeur évaluée par un modèle (*Mark-to-Market or Mark-to-model)*.
[16] Un passif subordonné est un passif dont le remboursement dépend du remboursement préalable des autres créanciers.

La Formule standard

La formule standard est une méthode de calcul du *SCR*, définie explicitement dans le règlement délégué, commune à l'ensemble des acteurs du marché de l'assurance et de la réassurance. Cette méthodologie de calcul est basée sur une architecture modulaire à plusieurs niveaux. Aux extrémités, chaque module de risque est calculé sur une logique de variation de *NAV*[17] à la suite d'un choc sur les hypothèses. Ces sous-modules de risques sont agrégés à l'aide d'une matrice d'agrégation permettant de prendre en compte les effets de la diversification. Il y a plusieurs niveaux d'agrégation menant, *in fine*, au calcul du *SCR* global.

Logique de variation de *NAV* à la suite d'un choc sur les hypothèses, permettant d'obtenir le *SCR* d'un sous-module de risque :

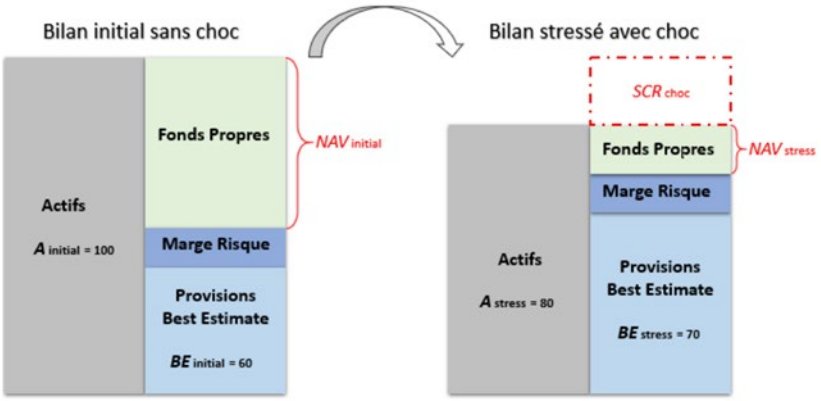


Figure 3 : Illustration du mécanisme de calcul d'un SCR sous-module de risque (choc sur le Bilan SII)

Afin de refléter un risque de 0,05% à l'année, les chocs appliqués ont pour but de correspondre à un choc bicentenaire. Par exemple, pour la mortalité en souscription vie, le choc appliqué correspond à une augmentation instantanée et permanente de 15% des taux de mortalité utilisés dans le calcul du BE.

Les modèles internes partiels ou intégraux

Lorsqu'il n'est pas approprié de calculer le SCR en application de la formule standard parce que le profil de risque de l'entreprise s'écarte significativement des hypothèses qui sous-tendent ce calcul, les autorités de contrôle peuvent, par décision motivée, exiger de l'entreprise qu'elle utilise un modèle interne pour calculer son SCR (article 119). Le modèle interne peut être intégral ou partiel[18]. L'objectif reste le même que la formule standard : calculer la marge de solvabilité permettant, additionné au BE, de répondre à l'ensemble des engagements dans au moins 99,5% des cas à l'horizon un an.

→ La dernière étape de l'étude consistera à calculer les sensibilités du BE aux différentes hypothèses techniques afin de les présenter à la fonction de gestion des risques dans l'optique d'une revue du modèle interne, si nécessaire, sur cette branche d'activité.

1.1.3.2.2 Mjnimum Capital Requierment (MCR)

Le *MCR* correspond également au calcul d'une marge de solvabilité, mais en général moins exigeante que le *SCR*, et qui entraine de plus fortes sanctions en cas de non-recouvrement. En effet,

[17] *NAV* : *Net Asset Value* = Actifs – Provisions techniques.

[18] Le modèle interne est dit partiel lorsque le SCR d'un ou plusieurs modules ou sous-modules de risque ou juste d'une partie de l'activité est calculé avec un modèle différent de la formule standard. Il est intégral lorsque le *SCR* est calculé totalement avec un modèle différent de la formule standard.

il est exigé aux entreprises d'assurance et de réassurance de détenir un montant de fonds propres supérieur au *MCR* sous peine du retrait de leur agrément, car les preneurs et les bénéficiaires seraient exposés à un niveau de risque inacceptable si l'entreprise était autorisée à poursuivre son activité (niveau de confiance dans la suffisance des fonds propres inférieur à 85% à horizon un an).
Le *MCR* est calculé comme une fonction linéaire d'un ensemble, ou d'un sous-ensemble, des variables suivantes : provisions techniques, primes souscrites, impôts différés et dépenses administratives (déduction faite de la réassurance). La réglementation impose que le *MCR* soit entre 25% et 45% du *SCR*[19].

1.1.3.3 *Model points*

L'article 35 du règlement délégué précise que « les projections de flux de trésorerie […] sont à effectuer séparément pour chaque contrats ». Cependant, dans ce même article, il est indiqué que des regroupements de polices sont possibles dès lors que les polices considérées présentent un risque sous-jacent similaire, et que l'utilisation de ce regroupement de polices (model points) ne fausse pas le résultat des projections.

→ Un regroupement similaire à la logique de regroupement du modèle actuariel du groupe a été opéré lors de cette étude afin d'en quantifier l'impact sur le montant du *BE* ainsi que sur leurs sensibilités aux hypothèses.

[19] Dans le respect des seuils minimaux définis à l'article 129 (2.2M EUR pour les entreprises d'assurance non-vie et 3.2M EUR pour les entreprises d'assurance vie).

1.2 Notions de réassurance

Cette partie a pour objectif de présenter les notions de réassurance nécessaires à la bonne compréhension de l'étude et se base principalement sur l'ouvrage de MLYNARCZYK (2014) ainsi que sur le cours de réassurance vie dispensé par l'université de Strasbourg au travers de son master d'Actuariat.

1.2.1 Définitions

La réassurance est un service financier liant un assureur (cédante) et un réassureur par le biais d'un contrat (appelé traité de réassurance), permettant la cession de tout ou partie des risques de l'assureur au réassureur contre le payement d'une prime de réassurance. Pour les assureurs, la réassurance est essentiellement un outil de gestion des risques, dont les principales fonctions peuvent être :

- La réduction des engagements d'assurance ;
- La couverture des capitaux sous risques importants ou présentant un potentiel élevé de sinistralité (réduction du risque de sinistralité extrême) ;
- La couverture du résultat du portefeuille ;
- La réduction du risque de faillite et l'allègement des pressions des exigences en capital ;
- L'apport d'une expertise technique ;
- L'augmentation de la capacité de souscription.

Les contrats de réassurances peuvent revêtir des modes de cession et des natures divers. Il existe principalement quatre modes de cession (**facultative, obligatoire, facultative-obligatoire, obligatoire-facultative**) et deux natures (**proportionnelle ou non proportionnelle**).

Une réassurance est dite :

- Facultative : lorsque toutes les affaires du ou des portefeuille.s font l'objet d'une cession et d'une acceptation individuelle (police par police ou personne par personne) ;
- Obligatoire : lorsque la cession par la cédante, et l'acceptation par le réassureur, de toutes les affaires qui entrent dans le périmètre de couverture du traité durant la période couverte sont obligatoires ;
- Facultative-Obligatoire : lorsque le caractère facultatif concerne la cession et le caractère obligatoire l'acceptation ;
- Obligatoire-Facultative : lorsque le caractère obligatoire concerne la cession et le caractère facultatif l'acceptation.

Ces notions sont essentielles en réassurance mais ne nécessitent pas d'être plus détaillées pour comprendre l'étude.

→ **L'accent portera davantage sur la nature des traités étudiés, à savoir la réassurance proportionnelle et plus particulièrement les traités en quote-part**.

1.2.2 La réassurance proportionnelle

Une réassurance est dite proportionnelle lorsque le transfert de risque est établi à partir d'une base de proportionnalité. En effet, le rapport de proportionnalité entre le risque total assuré et la part du risque cédé de l'assureur au réassureur est identique au rapport entre la prime totale d'assurance et la part de la prime cédée au réassureur. Ce rapport de proportionnalité est défini dans le traité comme le taux de cession et correspond donc à la proportion des primes et des engagements cédés de la cédante au réassureur.

On nomme :

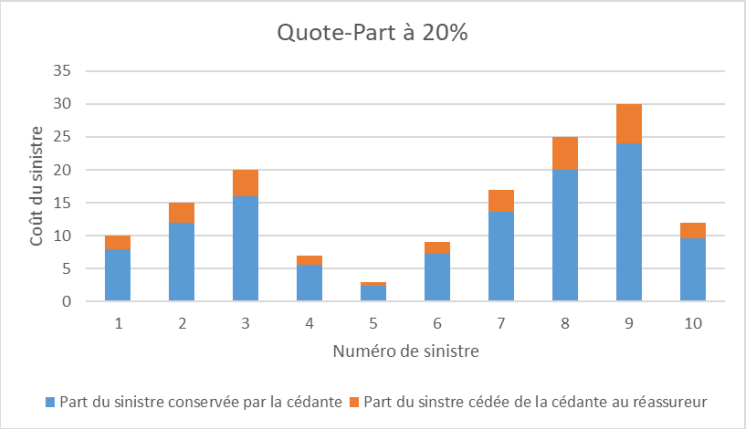
- Rétention : la part conservée par la cédante ;
- Plein de souscription : la limite de couverture du traité proportionnel, pour chaque affaire, en général, y compris la rétention de la cédante.

Il existe deux formes de réassurance proportionnelle :

- La quote-part ;
- L'excédent de plein.

1.2.2.1 *Les traités en quote-part*

Les quotes-parts sont des types de traité de réassurance où « *le réassureur prend en charge, sur tous les risques du portefeuille, une portion constante de ceux-ci. En échange de ce service, il reçoit la même proportion des primes.* » (Mlynarczyk, 2014)



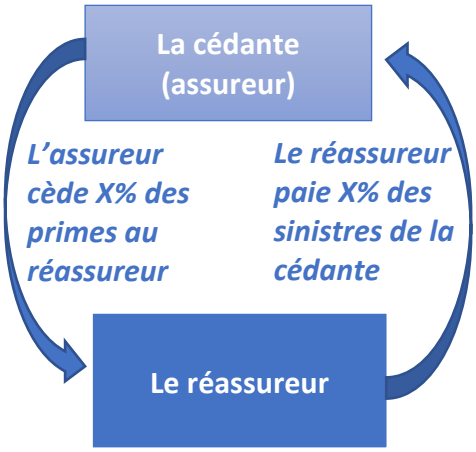


Figure 4 : La réassurance proportionnelle de type Quote-Part

Avantages des traités en QP :

- Gestion simple ;
- Couverture du risque de fréquence ;
- Partenariat entre la cédante et le réassureur.

En effet, le dernier point fait référence au partage de sort entre la cédante et le réassureur. Le réassureur apporte son expertise technique à la cédante dans la conception des produits, en contrepartie d'une prime plus conséquente en QP. Tout le risque et les primes seront alors partagés selon un taux de cession constant, entrainant un ratio de sinistralité égal pour les deux parties. Les deux parties auront toujours intérêt à collaborer pour avoir le meilleur résultat possible sur les portefeuilles couverts par des traités en QP.

Inconvénients des traités en QP :

- Volume de prime cédé important ;
- Couverture non adaptée pour la sinistralité extrême étant donné que ces sinistres ne sont pris en charge qu'à hauteur du taux de cession.

1.2.2.2 *Les excédents de plein*

Les traités en excédent de plein sont également des traités de réassurance proportionnelle, mais qui, contrairement aux QP, présentent un taux de cession différent pour chaque affaire. En effet, le taux de cession est calculé pour chaque affaire a priori, comme le rapport entre la part des capitaux

sous risque cédés et les capitaux sous risque totaux définis dans la police d'assurance. Ce taux de cession est appliqué aux primes et aux sinistres de la même façon que pour les quotes-parts.

Les traités étudiés dans ce mémoire étant des traités en QP, le fonctionnement et les intérêts des traités en excédent de plein ne seront pas plus développés par souci de synthèse.

1.2.3 La réassurance non-proportionnelle

La réassurance non proportionnelle est un type de réassurance dont les primes cédées ainsi que les prestations de réassurance ne sont pas proportionnelles aux primes et aux prestations d'assurance. Ce type de réassurance permet de compléter les couvertures en réassurance proportionnelle en protégeant mieux la cédante d'un risque de sinistralité extrême, ou en couvrant sont résultat sur les portefeuilles cédés.

Dans une volonté de synthèse, le fonctionnement et les intérêts de la réassurance non proportionnelle ne seront pas plus développés, sachant que les traités étudiés sont des traités de réassurance proportionnelle.

1.3 Périmètre d'activité

1.3.1 Les TNS

Dans cette étude, les assurés ont le statut de Travailleurs Non-Salariés (TNS). Ce sont principalement des indépendants issus des catégories socio-professionnelles suivantes :

- Professions libérales ;
- Artisans ;
- Commerçants ;
- Gérants non-salariés ;
- Conjoints collaborateurs non-salariés ;
- Exploitants agricoles.

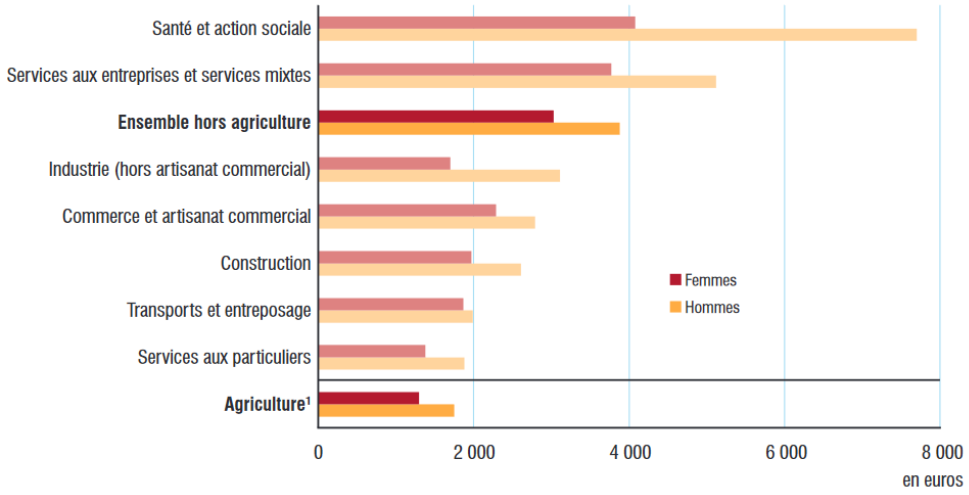
En s'appuyant sur le code de la sécurité sociale, l'INSEE (2020)[20] distingue les indépendants ou non-salariés des salariés par leur absence de contrat de travail, et par le fait **qu'ils n'ont pas de lien de subordination[21] juridique permanente** à l'égard d'un donneur d'ordre.

Dans cette même étude, l'INSEE recensait, à fin 2017, 3,2 millions de travailleurs non-salariés (à titre principal ou en complément d'activité, dans l'ensemble des secteurs), soit environ 11% des actifs.

La **répartition des non-salariés** est plus importante dans les activités où les petites et moyennes entreprises sont nombreuses et où la relation de proximité est privilégiée. Ainsi, cette répartition est plus conséquente dans les secteurs du service aux particuliers, de la santé et actions sociales et dans la construction (respectivement 21%, 18%, et 13%) par rapport aux salariés (13%, 10%, 7%). A contrario, elle est moins importante dans les secteurs de l'industrie et des transports et entreposage pour lesquels la concurrence internationale et les investissements de départ sont plus élevés. À noter également que le secteur agricole concentre 14% des TNS alors que cette proportion semble nettement moins importante chez les salariés[22].

Les **revenus des TNS** sont en moyenne plus importants[23] que les revenus salariés mais plus dispersés. En particulier, ils varient fortement en fonction de la profession exercée. Par exemple, parmi les non-salariés classiques[24], hors agriculture et hors revenus nuls, « *la moitié la moins rémunérée ne concentre que 16% des revenus (contre 29% pour les salariés), tandis que les 10% les mieux payés en concentrent à eux seuls 40% (contre 27% pour les salariés)* ». De plus, la profession exercée a un impact important sur les revenus moyens pour un TNS. Parmi les secteurs les plus rémunérés, on compte la santé et les services aux entreprises, dont les professions les plus lucratives sont la médecine, les professions juridiques et comptables et le commerce pharmaceutique.

[20] Toutes les informations (chiffres, graphiques…) de cette partie sont extraites de l'étude de l'INSEE (2020).
[21] « Le lien de subordination est caractérisé par l'exécution d'un travail sous l'autorité de l'employeur qui a le pouvoir de donner des ordres et des directives, d'en contrôler l'exécution et de sanctionner les manquements de son subordonné. » (Cour de Cassation, Chambre sociale, du 13 novembre 1996, 94-13.187, Publié au bulletin)
[22] Une autre étude de l'INSEE datant de 2018 estime à 2,5% des personnes en emploi, la part des travailleurs du secteur agricole. Sachant qu'elle est d'environ 14% pour les TNS, cela laisse à penser qu'elle est très faible chez les salariés.
[23] 3 580€ en moyenne pour les TNS hors micro-entrepreneurs, alors que les revenus nets par mois des salariés du privé tournent autour de 2500€ (INSEE).
[24] Hors micro-entrepreneurs (défini dans le paragraphe suivant).



Les TNS sont en moyenne **plus âgés** que les salariés[25] (âge médian hors agriculture : 46 ans contre 41 pour les salariés) et **majoritairement des hommes**[26] avec seulement 37% de femmes contre 49% du côté des salariés.
Entre 2008 et 2017, une forte augmentation des effectifs de non-salariés a pu être constatée (+33%), expliquée par le succès du statut d'auto-entrepreneur[27] créé en 2009. Ils représentent environ un tiers des non-salariés en 2017, mais ils n'ont aucun intérêt fiscal à souscrire un contrat de prévoyance Madelin[28].
En revanche, le nombre de non-salariés traditionnels (non micro-entrepreneurs), population sur laquelle nous allons donc porter notre attention, a baissé au cours de ces dernières années (-11% depuis 2008).

1.3.2 Le régime obligatoire des TNS

Historique

C'est au sortir de la seconde guerre mondiale, que la sécurité sociale obligatoire fut créée par le biais des ordonnances d'octobre 1945. L'objectif était la mise en place d'une couverture commune à tous les travailleurs, dans une politique de reconstruction et de solidarité. Cependant, les « non-salariés, non-agricoles » n'ont pas adhéré à cette idée, souhaitant bénéficier d'un régime dédié compte tenu de leurs particularités. C'est ainsi que les trois principaux[29] régimes de sécurité sociale des indépendants ont vu le jour. À partir de 1948, l'AVA[30] et l'ORGANIC[31] sont nés, assurant le risque

[25] L'INSEE met également en avant dans son étude que, souvent les non-salariés ont déjà effectué une activité salariale avant de se lancer en indépendant plus tard. Ce qui pourrait expliquer la tendance que les TNS soient plus âgés en moyenne que les salariés.
[26] Le graphique ci-dessus met également en avant la différence de salaire moyen entre les hommes et les femmes chez les TNS. N'étant pas le sujet de notre étude, nous le remarquerons uniquement sans plus le développer.
[27] Le statut auto-entrepreneur (actuellement appelé micro-entrepreneur) est un régime simplifié de l'entreprise individuelle. Il permet de créer plus facilement une société à but lucratif, en profitant de démarches administratives et de procédures fiscales et sociales simplifiées. Il s'adresse aux indépendants sous le statut de l'entreprise individuelle ayant un chiffre d'affaires sous un certain seuil (176 200€ ou 72 600€) Devenir micro-entrepreneur (auto-entrepreneur) - professionnels | service-public.fr
[28] Le contrat Madelin est le produit d'assurance étudié dans cette étude, il sera détaillé par la suite.
[29] D'autres régimes de protection sociale ainsi que les caisses associées sont nés entre les années 1950 et 2000. Ces sont des caisses généralement spécifiques à des professions particulières (dentistes, expert-comptable, avocats, artisans du BTP…) et auxquelles il est encore possible de cotiser pour certains TNS.
[30] AVA : régime d'Assurance Vieillesse des Artisans géré par la Caisse Autonome Nationale de Compensation de l'Assurance Vieillesse Artisanale (CANCAVA).
[31] ORGANIC : l'Organisme Nationale du Commerce et de l'Industrie était un régime de retraite destiné aux gérants de SARL, EURL, commerçants, artisans, industriels indépendants et certaines autres professions rattachées.

vieillesse des artisans, industriels et commerçants, et à partir de 1966 c'est aux risques de maladie-maternité d'être couverts par le régime AMMTNS[32] (devenant par la suite l'AMPI[33]).
En 2006, ces trois régimes ont fusionné donnant lieu à un unique organisme de sécurité sociale pour les travailleurs indépendants : le RSI (Régime Social des Indépendants). Ce nouveau régime permettait une simplification par la centralisation des démarches administratives, permettant aux indépendants d'avoir un interlocuteur social unique.
Sévèrement critiqué[34], ce régime a été dissous en 2018 et remplacé en 2020 par la Sécurité Sociale des Indépendants (SSI), qui se rattache au régime général. Ces dispositions nouvelles constituent le titre 1 du livre 6 du code de la sécurité sociale, (art. L611-1 et s.) intitulé : « Régime social des indépendants ».

Le régime obligatoire actuel : La Sécurité Sociale des Indépendants (SSI)

Au sein de la Sécurité sociale des indépendants, les activités sont prises en charge par les trois branches de la Sécurité sociale :

1. La **Caisse d'Assurance Maladie** (en métropole) ou **CGSS** (en Outre-mer) : pour les prestations maladie, maternité et invalidité ;
2. Les **CARSAT**[35], **CNAV** (en Île-de-France), les **CGSS** (Outre-mer) ou la **CSS** (Mayotte) : pour les assurances vieillesse ;
3. **L'URSSAF**[36] : pour le recouvrement des cotisations.

Les prestations sociales assurées par le régime obligatoire actuel concernent :

- L'assurance maladie (soins de santé et indemnités journalières de maladie) ;
- La maternité et la paternité ;
- L'invalidité ;
- Le décès ;
- La retraite ;
- Les allocations familiales.

Remarque : Les TNS ne sont pas assurés par le régime obligatoire contre le risque d'accident du travail et de maladie professionnelle, alors que les salariés le sont. Pour les autres risques, les couvertures sont similaires entre les salariés et les non-salariés.

Les cotisations sociales :
Les cotisations sociales des travailleurs indépendants sont calculées sur la base des revenus professionnels non-salariés non agricoles pris en compte pour le calcul de l'impôt sur le revenu (BIC/BNC) auquel des taux de cotisations sont appliqués[37].

[32] AMMTNS : Assurance Maladie Maternité des Travailleurs Non-Salariés non-agricoles.
[33] AMPI : Assurance Maladie des Professions Indépendantes.
[34] Le RSI a fait l'objet d'un rapport accablant de l'Inspection générale des affaires sociales en octobre 2011 pointant une « situation de crise grave et persistante (…) depuis la mise en place en 2008 de l'interlocuteur social unique », une « vague d'anomalies considérable » et de multiples « dysfonctionnements », notamment en matière de recouvrement de dettes. Plusieurs manifestations des indépendants contre le RSI ont également eu lieu entre 2015 et 2017.
[35] CARSAT : Caisses d'Assurance Retraite et de la Santé Au Travail.
[36] URSSAF : Union de Recouvrement des cotisations de Sécurité Sociale et d'Allocations Familiales
[37] Ces taux sont détaillés sur le site officiel Centre des liaisons européennes et internationales de sécurité sociale : https://www.cleiss.fr/docs/regimes/regime_france_independants.html

Les prestations sociales :
Seules les prestations sociales en cas d'incapacité, d'invalidité et de décès seront plus détaillées par la suite, afin de se faire une idée des indemnités sociales servies avant les prestations issues des contrats d'assurance privé couvert par les traités étudiés (contrat d'assurance de prévoyance complémentaire Madelin) :

1- **Les indemnités journalières de maladie (IJ) :**

En cas d'arrêt de travail pour maladie ou accident, les TNS bénéficient d'IJ correspondant à **1/730 du revenu d'activité annuel moyen** des trois dernières années civiles, dans la limite du Plafond Annuel de la Sécurité Sociale[38]. Le versement des IJ intervient après un délai de trois jours et durant maximum 36 mois.

2- **L'invalidité :**

En cas d'invalidité pour maladie ou accident, les TNS bénéficient d'une pension d'invalidité si l'état présente une **perte de capacité de travail ou de gain supérieur à 2/3** par rapport aux conditions de la profession exercée. La pension correspond à **30% du revenu annuel moyen** (sur les 10 meilleures années de carrière cotisées) et est plafonnée à 30% du PASS. Lorsque l'assuré est reconnu **en état d'invalidité totale et définitive**, la pension annuelle est égale à **50% du revenu annuel moyen** (plafonnée à 50% du PASS). Ces prestations sont attribuées jusqu'à l'âge légal de départ en retraite ou jusqu'à l'attribution d'une pension de vieillesse anticipée.

3- **Décès :**

En cas de décès d'un TNS, les personnes étant à la charge effective, totale et permanente de l'assuré (avec des ressources personnelles inférieures à 10 838,40€) peuvent toucher un capital :

- si l'assuré décédé était cotisant ou titulaire d'une pension d'invalidité, le capital décès est égal à 8 227,20€ (20 % du PASS) ;
- peut s'ajouter au capital décès principal, un capital supplémentaire de 2 056,80€ (5% du PASS) au titre des enfants à charge (orphelins).

1.3.3 Contrat d'assurance prévoyance complémentaire Madelin

Les prestations versées par le régime obligatoire ne suffisent pas à compenser les pertes de revenus provoquées par un accident, une maladie, l'invalidité ou le décès. De plus, par définition les TNS ne bénéficient pas d'une protection de type prévoyance collective de leur entreprise, telle que les salariés.
Ainsi, pour compléter la couverture de ces risques, ils ont la possibilité, depuis 1994, de souscrire à une assurance prévoyance complémentaire leur permettant de défiscaliser les primes, appelée produits Madelin.
Régis par la loi n°94-126 du 11 février 1994, ce sont des assurances de groupe (au sens de l'article L-141-1 du CdA) devant être souscrites par une association au profit exclusif de ses membres exerçant une activité professionnelle non salariée[39]. Elles peuvent concerner des contrats de prévoyance, de retraite et de santé.

Conditions d'adhésion pour les assurés :

- les assurés doivent exercer une activité professionnelle dont les résultats sont imposables, soit au titre des Bénéfices Non Commerciaux (BNC), soit au titre des Bénéfices Industriels et Commerciaux (BIC) ;
- l'assuré doit être à jour de ses cotisations au titre du régime obligatoire lors de la souscription ou du renouvellement de son contrat d'assurance Madelin.

[38] PASS 2021 : 41 136€. L'IJ maximum en 2021 est donc de 56,35€.
[39] L'article L144-1 du CdA décrit les caractéristiques des associations pouvant souscrire à ces contrats de groupe dans le cadre de la loi Madelin, et donne un cadre aux prestations et primes versées.

Avantage fiscal :
Les cotisations versées au titre d'un contrat Madelin peuvent être déductibles des revenus imposables[40].

Prestations :
Les prestations des contrats de prévoyance complémentaire Madelin doivent toujours être versées sous forme de rentes ou indemnités journalières.
Elles sont principalement de trois types :

1. **IJ en cas d'arrêt de travail** à la suite d'une maladie ou d'une maternité :

En cas d'impossibilité temporaire, complète ou partielle, constatée médicalement, d'exercer son activité professionnelle, les garanties ITT/ITP prévoient le versement d'une indemnité journalière (IJ) correspondant généralement à 1/365 de l'assiette de garantie, après déduction des prestations versées au titre du régime obligatoire.
Par définition, le montant des prestations totales ne peut pas excéder les revenus professionnels de l'assuré.
Remarques :

- la période d'incapacité ne peut excéder 36 mois. À l'issue de cette période, soit l'assuré retourne en activité, soit l'assuré passe en invalidité, soit il est sorti pour cause de décès ;
- une franchise en durée peut s'appliquer (ce qui est le cas pour les produits étudiés) : c'est un intervalle de temps durant lequel le sinistre n'est pas pris en charge par l'assureur.

2. **Une rente à l'assuré en cas d'invalidité** :

Si l'assuré est déclaré, médicalement, dans l'incapacité totale (ou partielle) et irrémédiable d'exercer une activité professionnelle quelconque pouvant procurer des revenus et que l'assistance d'une tierce personne est nécessaire pour accomplir des actes de la vie quotidienne (se laver, se nourrir, s'habiller, se déplacer), une rente viagère sera versée du même montant que pour la garantie décès. Cette garantie est nommée en générale garantie Invalidité Absolue et Définitives (IAD) ou garantie Perte Totale et Irréversible d'Autonomie (PTIA).
Un autre type de garantie peut servir une rente d'invalidité : les garanties nommées garantie Invalidité Permanente Totale ou Partielle (IPT/IPP). Ces garanties sont actives dès qu'un seuil d'invalidité, médicalement constaté, est dépassé (33% dans la plupart des cas), sans que l'assistance d'une tierce personne soit nécessaire. Le montant de la rente dépend du niveau d'invalidité constaté.

3. **Une rente aux conjoints/enfants de l'assuré en cas de décès** :

En cas de décès de l'assuré, il sera versé au bénéficiaire de la garantie une rente dépendant de l'assiette de garantie. Le bénéficiaire peut être :

- Le conjoint (ou un autre proche) : une rente viagère classique (jusqu'au décès) sera alors versée ;
- Le(s) enfant(s) : dans le cadre d'une garantie « rente éducation », une rente temporaire (jusqu'à 18 ans ou la fin des études) sera versée, ayant pour but de permettre le financement des études.

D'autres garanties peuvent également être activées à la suite du décès de l'assuré, telles que la garantie doublement accident, doublant les prestations en cas de décès s'il est causé par un accident, ou la garantie double effet si le conjoint décède à une date rapprochée du décès de l'assuré, alors les prestations sont également doublées (hors doublement accident en général).

[40] La déductibilité pour un contrat santé prévoyance Madelin s'effectue à hauteur de 3,75% du bénéfice imposable, majorée de 7% du PASS, dans la limite de 3% de 8 PASS (Loi Madelin : Fiscalité cotisations prestations prévoyance santé). Les prestations versées au titre d'un contrat Madelin sont imposables.

1.3.4 Sélection médicale

L'assureur peut demander des informations à l'assuré, sur son état de santé ou sa situation financière par exemple, dans le but d'évaluer le risque pris en charge. L'assuré est obligé de répondre exactement aux questions posées, en l'application de l'article L113-2 du CdA, sinon quoi l'assureur aura la possibilité :

- d'ajuster les prestations payées en fonction des primes perçues par rapport aux primes dues, si la déclaration est non-intentionnelle (art. 113-9 du CdA) ;
- d'annuler le contrat d'assurance dans le cas d'une fausse déclaration intentionnelle (art. 113-8 CdA).

Les informations demandées par l'assureur peuvent prendre une des formes suivantes :

- **Une déclaration de l'état de santé** : formulaire à compléter et à signer par l'assuré
- **Un questionnaire** médical : questionnaire ciblant l'identification de potentielles aggravations de risque à couvrir ;
- **Un rapport médical d'un médecin** ;
- **Des examens médicaux,** tels que la prise de sang, le test urinaire, un rapport cardiovasculaire, une échographie…
- **Formalités financières :** questionnaire et avis d'imposition.

1.4 Présentation des traités étudiés

La revue présente deux modélisations. La première concerne un traité nommé AX couvrant essentiellement deux produits (AX_PGL et AX_PA). La seconde concerne un regroupement de quatre traités couvrant des produits similaires, à destination de populations différentes, mais distribués par un même courtier grossiste[41] et assurés par des cédantes différentes. Les hypothèses sont estimées sur deux de ces traités (AL_MB et AL_SH), représentant quasiment la totalité du portefeuille et présentant des bases de données plus complètes. Dans les deux cas, pour AX comme pour AL, une participation au bénéfice globale est à calculer.

1.4.1 Caractéristiques des traités

Traité	AX	AL
Type de réassurance	**QP** à 75% dont 60% pour Hre (: 45%). **Réassurance obligatoire** sous le seuil de délégation de souscription.	**QP** à 50% pour Hre. **Réassurance obligatoire** sous le seuil de délégation de souscription.
CSP couvertes	Pour les deux produits, les TNS sont visés mais les professions varient. AX_PGL : ➔ Gérants majoritaires, professions libérales, architectes infographistes graphiste photographe[42], ou les conjoints collaborateurs de l'une de ces professions. AX_PA : ➔ Chef d'entreprise (artisan, commerçant, exploitant agricole, profession libérale, architecte infographiste photographe[38]), les conjoints collaborateurs de ces professions et mandataires social (président ou dirigeant, assimilés salariés, de société SAS, SASU, SELAS, SARL, SELARL, SA, SELAFA)	Pour les deux produits, les TNS sont visés mais les professions varient AL_MB : ➔ Artisans, commerçants (en gérance majoritaire ou en nom propre), professions libérales (expertise : architecte et conseil, expert-comptable, agent assurance, notaire, officier ministériel, avocat), travailleurs non-salariés agricole et leurs conjoints collaborateurs ou associés participant à l'activité de l'entreprise. AL_SH : ➔ Professions médicales ou paramédicales.
Risques couverts	- Décès - Incapacité - Invalidité	
Garanties réassurées	Paiement au bénéficiaire en fonction de la garantie souscrite et de l'assiette de base de garantie[43] : - Capital ou rente en cas de décès ou d'IAD (selon si l'option Madelin est prise ou	Paiement au bénéficiaire en fonction de la garantie souscrite et de l'assiette de base de garantie : - Capital ou rente en cas de décès ou de PTIA (selon si l'option Madelin est prise ou

[41] Courtiers intervenant dans la conception des produits et les redistribuant par le biais d'un réseau de courtage ou directement aux assurés.
[42] Architectes/infographistes/graphiste/photographe relevant de la gestion de la Maison des Artistes ou de l'AGESSA.
[43] L'assiette de base de garantie sert au calcul des garanties et est constituée du montant des revenus professionnels à garantir, limitée aux derniers revenus professionnels annuels nets déclarés. L'assiette de base de garantie est identique pour toutes les garanties souscrites.

	non) : garantie décès, double effet, double accident, rente éducation, IAD ; - IJ en cas d'incapacité Temporaire Totale de travail ou de Temps Partiel Thérapeutique (avec différentes franchises possibles[44]) ; - Capital ou rente en cas d'IPT/IPP ; - forfait professionnel (IJ)	non) : garantie décès, double effet, rente éducation, allocation obsèques, IAD ; - IJ en cas d'incapacité Temporaire Totale de travail (franchise 30j, 30/3/3j et 90j) ; - Invalidité Permanente Totale ou Partielle de Travail.
Âge de souscription	18-65 ans (55 ans, si réside hors France métropolitaine)	18-55 ans.
Type de prime	Prime de risque	
Âge maximum de couverture	Age de départ à la retraite, au plus tard le 31/12 de l'année du 67e anniversaire (70 ans en cas de souscription aux garanties 67+).	Age de départ à la retraite, au plus tard le 31/12 de l'année du 65e anniversaire.
Montant assuré Maximum	Plein de souscription : neuf PASS en France métropolitaine et quatre hors métropole.	Plein de souscription : cinq PASS.
Territorialité	France Continentale, Martinique, Guadeloupe, Guyane, Réunion, Saint Martin et Saint Barthélémy.	France métropolitaine (hors Corse et Monaco).

1.4.2 Statistiques descriptives des bases assurés.

Âges des assurés

L'âge de l'assuré est un facteur de risque[45], que ce soit pour le décès, l'incapacité ou l'invalidité. Par exemple, les tables de l'INSEE mettent en avant l'impact de l'âge sur ces risques en présentant des taux croissants en fonction de l'âge. Ci-dessous, les histogrammes du nombre d'assurés par âge dans les portefeuilles AL et AX permettent d'observer la répartition des assurés en fonction de leur âge et ainsi de se faire une idée de la plage d'âge la plus importante en termes d'exposition au risque pour chaque portefeuille.

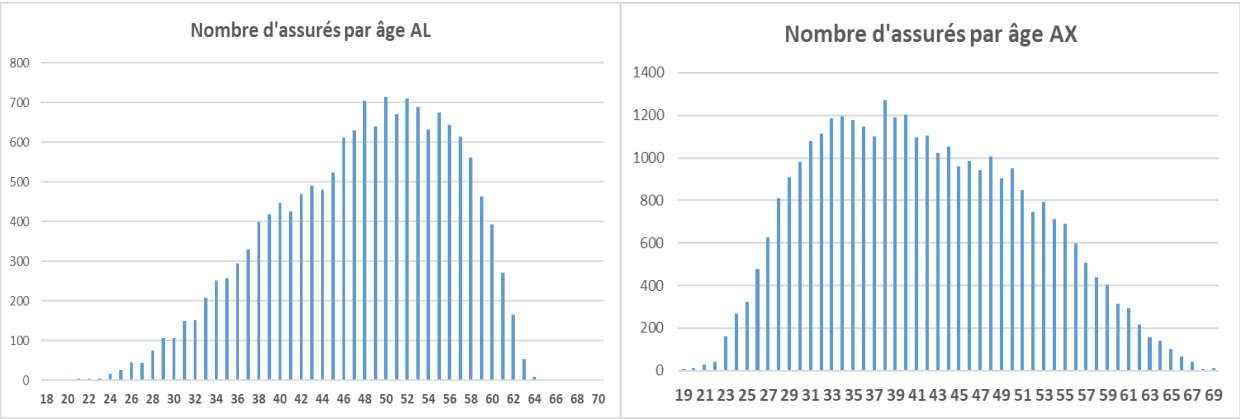


Figure 6 : Nombre d'assurés par âge par portefeuille

[44] Dix types de franchises (maladie/accident/hospitalisation) possibles (en jours) : 7/3/3, 7/3/0, 15/3/0, 15/3/3, 30/3/0, 30/3/3, 30/30/30, 60/60/60, 90/90/90, 365/365/365.

[45] Elément impactant la probabilité que le risque se réalise.

Les assurés semblent concentrés sur des âges plus importants pour AL que pour AX. Les âges actuariels[46], moyens et médians vont dans le même sens que ces observations et permettent de nous donner un ordre de grandeur pour ces deux portefeuilles.

	Âges AL	Âges AX
Actuariel	48,4	42,1
Moyen	47,7	41,7
Ecart-type	8,5	9,8
Q1	42	34
Médian	49	41
Q3	54	49

Figure 7 : Statistiques sur les âges des portefeuilles AL et AX

Sexes des assurés

Le sexe a également un impact sur les différents risques.

À nouveau, les tables de l'INSEE peuvent nous servir d'exemple pour illustrer ce propos, en présentant une mortalité pour les femmes moins importante que pour les hommes (voir courbes des taux de décès présentées en annexe 1).

La répartition des sexes varie également entre les portefeuilles, allant d'une répartition presque égalitaire pour AX à une répartition dominée par les hommes pour AL :

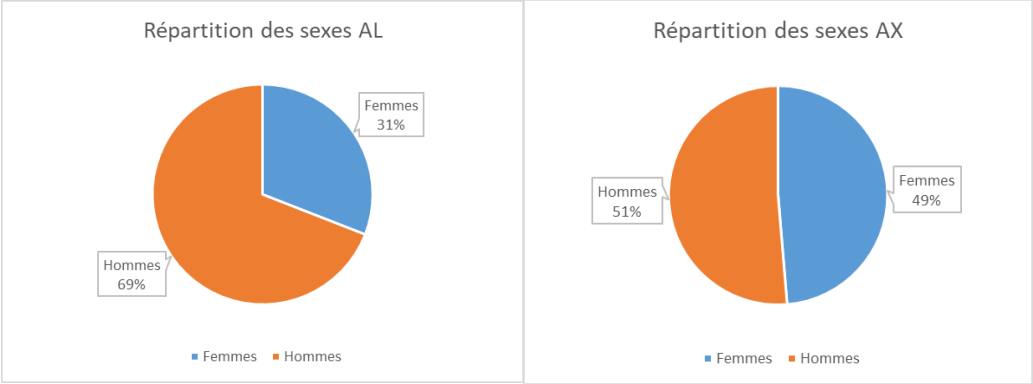


Figure 8 : Répartition des sexes pour les deux portefeuilles

Professions et bases de garantie

Les garanties sont déterminées à partir du revenu (le BIC et BNC du TNS). Ainsi, nous observons que le portefeuille AX couvre des assurés dont le revenu est supérieur aux assurés du portefeuille AL.

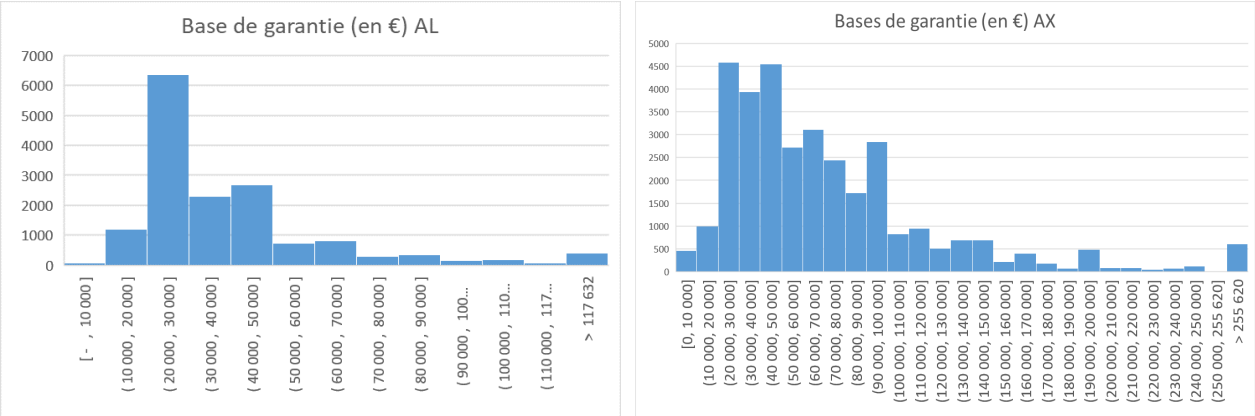


Figure 9 : Histogrammes des bases de garantie d'AL et AX

[46] Moyenne des âges pondérée par les montants des bases de garantie.

	Base de garantie AL	Base de garantie AX
Moyen	39 219 €	76 035 €
Ecart-type	26 138 €	59 862 €
Q1	20 568 €	40 000 €
Médian	31 786 €	60 000 €
Q3	41 136 €	100 000 €

Figure 10 : Statistiques des montants de base de garantie d'AL et AX

Remarque : les tables de L'INSEE de 2012 à 2016 par vingtile de revenu (voir annexe I) suggèrent un impact positif du revenu sur la mortalité, qui pourrait trouver son explication dans la facilité d'accès aux soins et à l'éducation.

Cette différence dans les revenus pourrait indiquer une différence dans les types de TNS, ce qui impacterait également le risque. Par exemple, le risque d'arrêt de travail d'une profession libérale de type avocat peut être difficilement comparé à celui d'un artisan de type boulanger ou maraicher, de par la nature même de leurs tâches. Cette différence se confirme à l'observation de la répartition des assurés dans les quatre classes créées[47] :

1- artisans, agriculteurs et BTP ;
2- commerçants, hôtellerie, café, restauration, métiers de bouche, métiers de la beauté, transport, automobile, agents généraux ;
3- libéraux et médicaux : dentistes, sages-femmes, médecins, vétérinaires, experts-comptables, officiers publiques et ministériels, avocats, notaires, artistes … ;
4- paramédicaux et infirmiers.

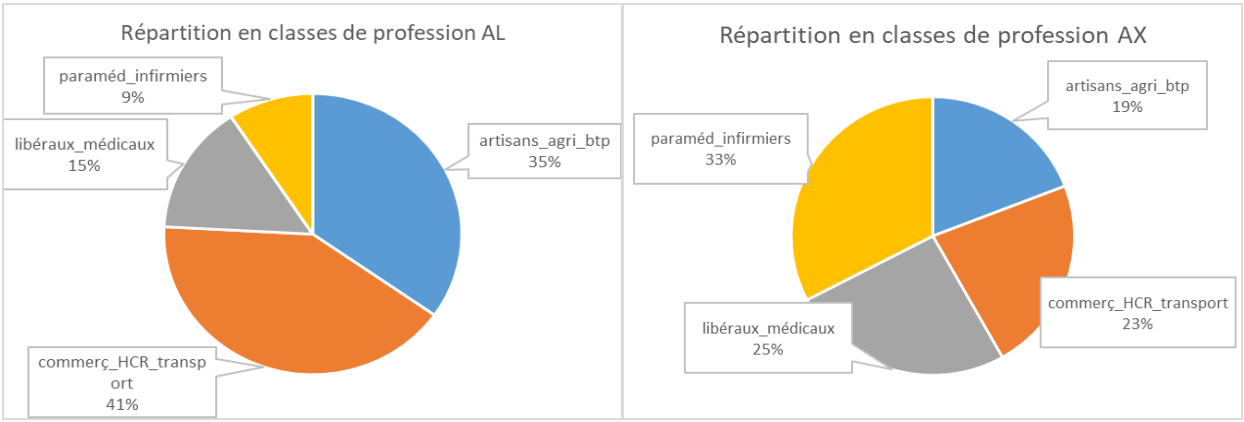
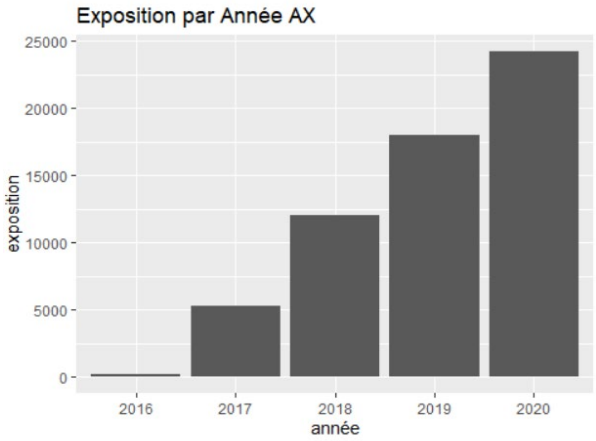


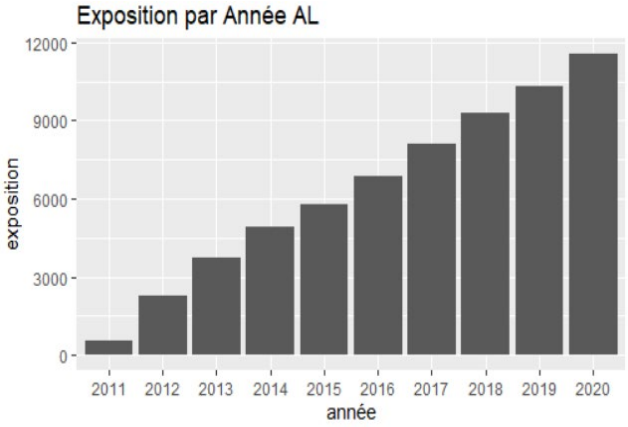
Figure 11 : Répartition des assurés des deux portefeuilles en quatre classes de professions

Pour les deux portefeuilles étudiés, plus de 80% des assurés sont couverts pour les trois risques, seules les bases de garantie changent et les franchises choisies dans le cas de l'incapacité.

[47] Ces quatre catégories ont été réalisées sur des regroupements des différents régimes obligatoires pour les TNS présents dans les portefeuilles et présentées en annexes. Ce regroupement a été choisi par l'équipe de souscription lors d'une étude pour la revue tarifaire.

<u>Evolution de l'exposition portefeuille</u> :





Les produits couverts par le traité AX ont été commercialisés depuis 2016 alors que les produits couverts par AL depuis 2011 ce qui explique les différences constatées ci-dessus. Les réseaux de distribution de ces deux produits sont différents, raison pour laquelle l'exposition d'AX est plus de deux fois supérieure en 2020 à celle d'AL.

<u>Remarques</u> :

- AX n'est pas un traité modélisé dans le cluster étudié, bien qu'il couvre les mêmes types de produit. Hannover Re a fait le choix de l'isoler car le montant des primes est nettement plus important que pour les autres traités du cluster. De plus, c'est un traité présentant des pertes importantes, traduisant une sinistralité élevée par rapport aux primes, ces dernières années. Après des échanges avec les départements de souscription et de gestion des sinistres, il s'avère que le problème est principalement expliqué par un processus de sélection médicale inadapté et qui sera mis à jour.
- AL est représentatif au sein du cluster étudié, et les sinistres semblent être en accord avec la tarification ces dernières années. Parmi les traités et groupes de traités de ce cluster dont nous disposons des données, AL est l'un des plus importants en termes de prime.
- Les réserves concernant le portefeuille AX sont donc modélisées de façon isolées, tandis que les réserves pour AL sont modélisées avec une méthode et des hypothèses communes au cluster étudié. C'est pour ces raisons que la revue de ces types de traités (prévoyance des TNS) concernant les réserves et les marges de risque, a été effectuée sur ces deux traités séparément.

2 Estimation des hypothèses techniques

Le Calcul du *BE* nécessite une projection des flux futurs de trésorerie, qui dépendent eux-mêmes de l'état dans lequel les assurés se trouveront.

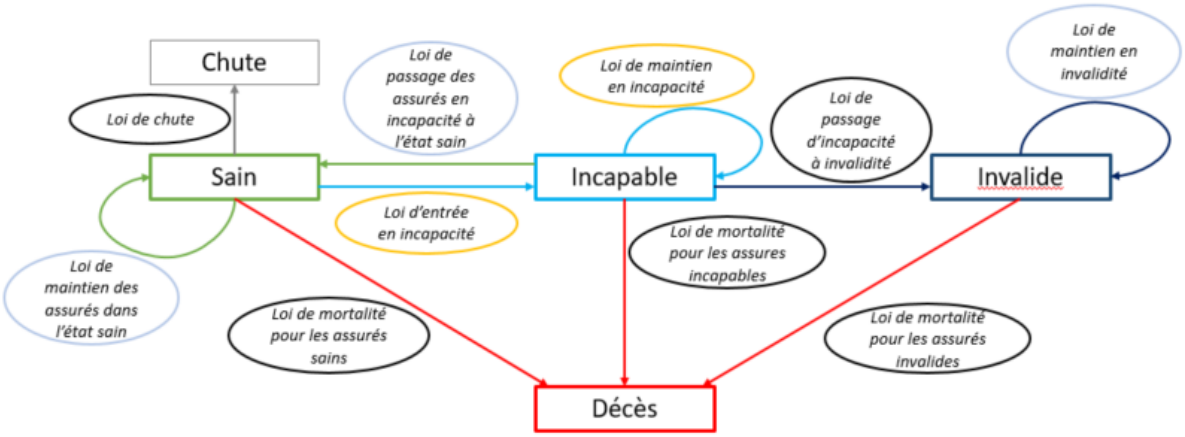


Figure 12 : Schéma des passages entre les différents états possibles pour les assurés.

Ces lois sont déterminées au moyen de l'une des méthodes suivantes :

- Estimation sur l'historique du portefeuille : entourée en jaune ;
- Utilisation d'une table de référence ou d'un avis d'expert (chute) : entourées en noire ;
- Déduites des autres lois afin que la somme des probabilités de sortie et de maintien de chaque état valle 1 : entourée violet clair.

Remarque : dans l'idéal, les hypothèses techniques présentées ci-dessus devraient toutes être estimées à partir des historiques des portefeuilles projetés. Toutefois, cette approche n'est pas possible car la quantité de donnée disponible n'est pas suffisante.

Ainsi, cette partie a pour objectif la détermination des hypothèses techniques.
Dans un premier temps, la construction des lois d'expériences (passage et maintien en incapacité) est présentée en respectant les étapes suivantes :

- Rappels théoriques
- Taux bruts
- Lissages

Dans un second temps, les autres hypothèses de projections sont explicitées en justifiant nos choix.

2.1 Données incomplètes

Les données de survie des assurés dans les différents états (sain, incapable, invalide) peuvent être incomplètes du point de vue de l'assureur sur la fenêtre d'observation. En effet, un assuré peut ne pas être observable durant un intervalle de temps (entrée avant/après la période d'observation, franchise) et/ou la réalisation du risque peut ne pas avoir lieu durant la période d'observation. Ces deux cas représentent respectivement des cas de troncature et de censure des données pour l'assureur, et doivent être pris en compte afin de limiter le biais dans les estimations des probabilités.

Censure

Les phénomènes de censure caractérisent la perte d'information due à la non-survenance du risque étudié sur la fenêtre d'observation. La censure s'analyse par rapport aux sorties des assurés et peut être de deux types :

- Censure à droite : lorsque la période d'observation prend fin avant la réalisation du risque ;
- Censure à gauche : lorsque le risque s'est réalisé avant le début de la période d'observation.

Il existe trois types de censure à droite, selon que la date de censure soit fixée, qu'elle dépende du nombre de survenance du risque ou qu'elle soit aléatoire. Dans notre cas, la censure correspond au troisième cas : elle provient soit de la réalisation d'un autre évènement aléatoire ne permettant plus l'observation de ce risque chez l'assuré, soit par la fin de la période d'observation.

Remarque : Dans notre cas, négliger la censure à droite entrainerait une sous-estimation de la probabilité de survie et donc une surestimation des probabilités d'incidence.

Troncature

Les phénomènes de troncature se caractérisent par la perte d'informations due à l'impossibilité d'observer l'assurer sur la fenêtre d'observation. La troncature s'analyse par rapport aux entrées des assurées dans la période d'observation. Elle peut être de deux types :

- Troncature à gauche : l'individu est observé qu'à partir du début de la période d'observation ou après une période de franchise dans le cas de l'incapacité ;
- Troncature à droite : l'individu n'est observable qu'après la fenêtre d'observation.

Remarque : Dans notre cas, négliger la troncature à gauche entrainerait une surestimation des probabilités de survie et donc une sous-estimation des probabilités de décès ou d'incidence.

Schéma récapitulatif

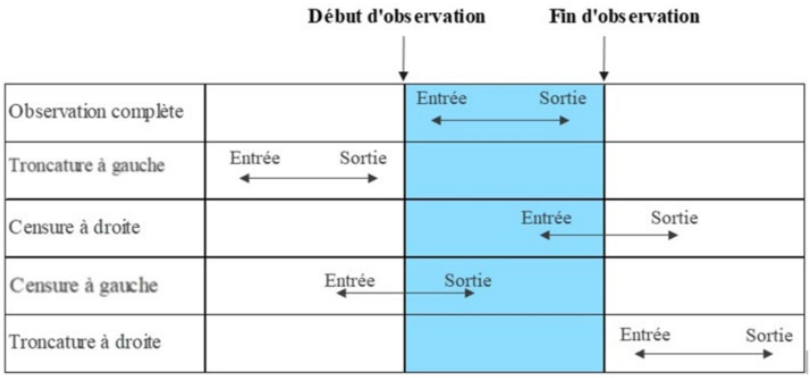


Figure 13 : Schéma récapitulatif des phénomènes de censure et de troncature

2.2 Estimation des taux bruts

Les deux méthodes présentées, à savoir la méthode des moments de Hoem et la méthode de Kaplan-Meier sont les deux méthodes mises en pratique et comparées pour l'estimation des taux bruts. Les principaux éléments théoriques nécessaires à la compréhension de leurs fonctionnements et de leurs intérêts sont présentés.

2.2.1 Estimateur de Kaplan-Meier

Introduit en 1958 par Edward L.Kaplan et Paul Meier, il s'agit d'un estimateur non paramétrique permettant d'estimer la fonction de survie sur un échantillon, en tenant compte des censures et des troncatures. Cet estimateur présente l'avantage de ne retenir aucune hypothèse sur la répartition des sorties sur l'intervalle $[x\,;\ x+1[$ (entre deux âges).

Notations :

- S : la fonction de survie ;
- T : la variable aléatoire représentant la durée ;
- $(T_1, \dots, T_n)$: les instants où se produisent un évènement (censure ou sortie). Ils sont distingués des instants $(T^*_{(1)}, \dots, T^*_{(h)})$ ordonnés et distincts ;
- $p_i = \mathbb{P}\left(T > T^*_{(i)} | T > T^*_{(i-1)}\right)$: la probabilité de survie entre $T^*_{(i-1)}$ et $T^*_{(i)}$ sachant que $T > T^*_{(i-1)}$ (si on fait l'hypothèse que $T^*_{(i)} - T^*_{(i-1)} = 1$) ;
- $q_i = 1 - p_i$: la probabilité de sortie entre $T^*_{(i-1)}$ et $T^*_{(i)}$ sachant que $T > T^*_{(i-1)}$.

La construction de l'estimateur de Kaplan-Meier[48] s'appuie sur la relation suivante :

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(T > t | T > s) \times \mathbb{P}(T > s)$$
$$= \mathbb{P}(T > t | T > s) \times S(s)$$

En découpant l'intervalle de temps selon les $(T^*_{(1)}, \dots, T^*_{(h)})$ et en itérant la décomposition réalisée à la ligne précédente, S(t) peut être estimée de la façon suivante :

$$\widehat{S_{KM}(t)} = \prod_{i|t \geq T^*_{(i)}} \hat{p}_i = \prod_{i|t \geq T^*_{(i)}} (1 - \hat{q}_i) = \prod_{i|t \geq T^*_{(i)}} \left(1 - \frac{m_i}{n_i}\right)$$

Où :

- m_i représente le nombre de sorties non-censuré en $T^*_{(i)}$: $m_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{I}_{T_j = T^*_{(i)}} \times \delta_j$. δ_j est une indicatrice représentant la présence de censure (0) ou non (1).
- n_i représente le nombre d'individus exposés au risque : $n_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{I}_{T_j \geq T^*_{(i)} \geq \tau_j}$, avec τ_j la période sur à laquelle l'individu j n'est pas observable, n_i prend en compte les troncatures à gauche.

$\widehat{S_{KM}}(t)$ est donc l'estimateur de la fonction de survie sachant $T \geq \min(\tau_i)$.
L'estimation des probabilités de sorties $\hat{q}_i$ est ensuite déduite de l'estimation de la fonction de survie :

$$\hat{q}_i = \frac{\widehat{S_{KM}}(i) - \widehat{S_{KM}}(i+1)}{\widehat{S_{KM}}(i)}.$$

<u>Remarque :</u> PLANCHET et THEROND (Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles, 2011, pp. 82-85) soulignent les « *bonnes propriétés* » de cet estimateur de la fonction de survie : « *il est convergent, asymptotiquement gaussien, cohérent, et est également un estimateur du maximum de vraisemblance généralisé ».* Toutefois, ils mentionnent également que cet estimateur de la fonction de survie est biaisé positivement, entrainant un biais négatif sur les estimateurs des taux de sortie.
Dans ce même ouvrage, PLANCHET et THEROND explicitent l'estimateur de Greenwood permettant d'estimer la variance de l'estimateur de KM et *in fine* de calculer des intervalles de confiance (asymptotiques) grâce à la normalité asymptotique de l'estimateur de KM.

<u>Greenwood</u> : $\hat{V}\left(\hat{S}(t)\right) = \hat{S}(t)^2 \sum_{T_{(i)} \leq t} \frac{m_i}{n_i(n_i - m_i)}$

<u>Intervalles de confiance</u> : $IC_{1-\alpha} = \left[\widehat{S_{KM}}(t) - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\hat{V}\left(\hat{S}(t)\right)} ; \widehat{S_{KM}}(t) + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\hat{V}\left(\hat{S}(t)\right)}\right]$

Où $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

[48] On notera KM dans la suite.

2.2.2 Estimateur des moments de Hoem

L'estimateur des moments de Hoem est un estimateur paramétrique qui repose sur l'hypothèse que le nombre d'incidences à l'âge x est une variable aléatoire suivant une binomiale de paramètres E_x et q_x où E_x représente l'exposition à cet âge et q_x le taux d'incidence.

Comme l'estimateur de KM, cet estimateur permet de prendre en compte les censures et les troncatures en utilisant les dates exactes d'entrée et de sortie de chaque assuré. Pour cela, l'exposition à chaque âge est calculée de façon à ne prendre en compte que la portion de l'année exposée au risque, pour chaque assuré : pour l'âge x, chaque assuré est exposé au risque observé dans la classe d'âge $[x; x+1]$ qu'entre les âges $x+\alpha$ et $x+\beta$, avec $[x+\alpha; x+\beta] \subset [x; x+1]$. La différence avec l'estimateur de KM est que cet estimateur permet d'estimer directement le taux d'incidence, sans passer par la fonction de survie.

Notations :

- α_i : durée entre l'âge x et l'âge de début d'observation de l'assuré i sur la classe d'âge $[x; x+1]$;
- β_i : durée entre l'âge $x+1$ et l'âge de fin d'observation de l'assuré i sur la classe d'âge $[x; x+1]$;
- ${}_tq_x \in [0; 1]$: probabilité d'incidence entre les âges x et $x+t$ (q_x lorsque $t=1$) ;
- X_i : variable aléatoire égale à 1 s'il y a incidence pour l'assuré i dans la classe d'âge $[x+\alpha_i; x+\beta_i]$ et 0 s'il n'y a pas d'incidence (variable aléatoire de Bernoulli $\sim B({}_{\beta_i-\alpha_i}q_{x+\alpha_i})$;
- n_x : nombre d'assurés exposés dans la classe d'âge $[x; x+1]$;
- $D_x = \sum_{i=1}^{n_x} X_i$: variable aléatoire représentant le nombre d'incidences dans la classe d'âge $[x; x+1]$;
- d_x : réalisation de la variable D_x ;
- $E_x = \sum_{i=1}^{n_x} (\beta_i - \alpha_i)$: exposition dans la classe d'âge $[x; x+1]$.

Hypothèses :

- (H1) : les X_i sont supposées indépendantes ;
- (H2) : répartition linéaire des incidences dans les classes d'âge, $\forall\, t \in [0\,;1]$, ${}_tq_x = t \times q_x$;
- (H3) : ${}_sq_x - {}_tq_x \approx {}_{s-t}q_{x+t}$, $\forall\, 1 \geq s \geq t \geq 0$.

Construction de l'estimateur dans le cadre de l'estimation des taux d'incidence bruts :
Sous (H1), la variable aléatoire D_x suit une loi binomiale de paramètre $(n_x\,,\, {}_{\beta_i-\alpha_i}q_{x+\alpha_i})$.
Sous (H2) et (H3), $\mathbb{E}(X_i) = {}_{\beta_i-\alpha_i}q_{x+\alpha_i} \approx {}_{\beta_i}q_x - {}_{\alpha_i}q_x = (\beta_i - \alpha_i).q_x$.
En posant ensuite $Y_i = \frac{X_i}{(\beta_i-\alpha_i)}$ afin de chercher le taux d'incidence sur une année complète, on obtient $\mathbb{E}(Y_i) = \frac{\mathbb{E}(X_i)}{(\beta_i-\alpha_i)} \approx q_x$. L'estimateur des moments de Hoem s'obtient en appliquant la loi forte des grands nombres aux variables Y_i :

$$\widehat{q_x^{Hoem}} = \frac{d_x}{E_x}$$

L'estimateur de Hoem est donc un estimateur sans biais, convergent et asymptotiquement gaussien (Planchet & Thérond, p. 157) permettant la prise en compte des censures et des troncatures dans l'estimation des taux d'incidence. La validation de l'approximation gaussienne peut se faire par le biais du **CRITÈRE DE COCHRAN**, qui consiste à vérifier que $\forall\, x, \widehat{q_x}.E_x \geq 5$ et $(1-\widehat{q_x}).E_x \geq 5$.

$$\widehat{q_x} \sim \mathcal{N}\left(\widehat{q_x}\,;\ \sqrt{\frac{\widehat{q_x}\,.\,(1-\widehat{q_x}\,)}{E_x}}\right)$$

Il est donc possible de définir l'intervalle de confiance (à α%) autour de cet estimateur à chaque âge par :

$$IC_{1-\alpha} = \left[\widehat{q_x} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\widehat{q_x}.(1-\widehat{q_x})}{E_x}};\ \widehat{q_x} + z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\widehat{q_x}.(1-\widehat{q_x})}{E_x}}\right]$$

Choix de l'estimateur :

→ Lors de l'estimation des taux bruts, la question du choix de l'estimateur se pose inévitablement. GUIBERT et PLANCHET (2017) **soulignent le biais positif dans l'estimateur de la fonction de survie de KM entrainant un biais négatif pour les estimateurs des taux de sortie qui est encore plus important lorsque la fonction de survie est estimée avec l'estimateur de Harrington-Flemming[49]. De plus, Becker (2015) et Hanna (2020) mettent en avant, dans leurs mémoires d'actuariat, cette différence entre les estimateurs des taux de sortie. Lorsque l'exposition est importante, les taux bruts estimés avec ces méthodes sont proches, alors que lorsque l'exposition est faible les biais sont observables. Le choix de l'estimateur sera explicité et justifié.**

2.3 Lissage

Le but de la modélisation est de construire une loi de probabilités pour les variables aléatoires liées à la réalisation (ou non) des événements : décès, incapacité et/ou invalidité pour une population.
Pour un assuré ayant un âge donné, la réalisation de ces événements est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre la probabilité d'incidence.
La population étudiée est l'ensemble des assurés du portefeuille sur la période de projection.
Cependant, pour estimer ces lois, des assurés ne sont observés que sur une période passée, ce qui constitue notre échantillon.

La construction de ces lois nécessite de comprendre les trois types de risques dans le but de les réduire et de représenter le mieux possible les phénomènes :

1- **<u>Un risque systémique</u> :** il s'agit du **risque touchant toute la population et qui entrainerait un écart entre la modélisation et les phénomènes se réalisant. Une erreur dans la détermination des probabilités à la baisse, exposerait l'entreprise d'assurance ou de réassurance au risque de sous-provisionnement, dégraderait son résultat et pourrait détériorer sa solvabilité ;**
2- **<u>Un risque de base</u> : il s'agit du risque de déviance du phénomène observé entre la population et l'échantillon. Ce risque, principalement dû à la fluctuation d'échantillonnage, peut entrainer des irrégularités non-justifiés dans les taux bruts (estimations avant lissage). L'un des principaux objectifs du lissage sera donc de le réduire ;**
3- **<u>Un risque intrinsèque</u> : il s'agit du risque présent au niveau de chaque assuré, individuellement, et dû à l'aléa inhérent au phénomène étudié. Le but de la modélisation est de construire une loi décrivant le comportement moyen des assurés (*BE*), donc lorsque les estimations sont réalisées sur un faible nombre d'assurés, ce risque est important car**

[49] L'estimateur de Flemming-Harrington est un autre estimateur de la fonction de survie, basé sur l'estimateur de Nelson-Aalen de la fonction de hasard cumulée. Nous ne le détaillons pas dans ce mémoire, car cet estimateur ne sera pas utilisé, étant donné qu'il est encore plus biaisé que KM et sachant l'objectif « *BE* » que nous souhaitons poursuivre dans l'estimation des lois.

une seule incidence pourrait impacter la loi. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour réduire ce risque telles que les agrégations de plusieurs âges consécutifs à faible exposition, les glissements par âges ou les lissages.

La détermination de ces probabilités se fera dans un premier temps par l'estimation des taux bruts sur l'échantillon (le portefeuille de la période passée). Cependant, du fait de la conjugaison d'un faible volume de données, de l'aléa inhérent au phénomène aléatoire et de la fluctuation d'échantillonnage, les taux bruts observés peuvent présenter une certaine volatilité qui ne serait pas dû au phénomène sous-jacent.
C'est pourquoi, il sera nécessaire d'être prudent dans les choix du lissage de ces taux en veillant à :

1- **respecter le « vrai » phénomène aléatoire sous-jacent ;**
2- **conserver un regard critique sur les tests et critères statistiques qui nous permettent d'évaluer les lissages. En effet, si ces tests se basent sur la distance entre les taux bruts et les taux lissés, et que c'est notre seul critère de choix, nous pourrions même être amenés à conclure que le « meilleur » lissage, statistiquement parlant, sont les taux bruts eux-mêmes, car ce sont eux qui réduisent le plus cette distance, par définition.**

Le lissage a donc pour but de décrire le phénomène de manière réaliste et adapté à la population étudiée, tel qu'il puisse-t-être objectivé.
Ainsi, un bon lissage est un compromis entre les trois contraintes suivantes :

1- **<u>La précision,</u> qui est la proximité avec les taux bruts ;**
2- **<u>La régularité,</u> qui est la proximité géographique entre deux taux consécutifs. Il n'y a, en général, aucune raison ne justifiant d'un changement brutal de la probabilité entre deux âges consécutifs ;**
3- **<u>La représentativité,</u> qui est la capacité des taux obtenus après lissage à rendre compte d'une tendance présente dans les portefeuilles assurés mais non visible dans les taux bruts.**

Par exemple, si les taux bruts sont trop volatiles par manque de données, nous pourrions faire le choix de nous écarter des taux bruts pour représenter au mieux le phénomène.
Ou dans le cas contraire, si nous disposons d'une grande quantité de données, représentative de la population et donnant des taux bruts robustes, nous pourrions envisager d'utiliser ces taux bruts, sans lissage ou bien avec un lissage très proche des taux bruts.

Enfin, le choix de la méthode de lissage doit être guidé par les besoins d'utilisation de la table (BE vs provisions réglementaires, selon les choix tarifaires…), par la connaissance du phénomène de l'actuaire et par la quantité d'observations disponibles.
Les différentes méthodes de lissage sont principalement groupées en trois catégories :

1- **<u>Les modèles relationnels</u> : ces modèles se basent sur une table de référence pour se rapprocher des taux bruts ;**
2- **<u>Les ajustements paramétriques</u> (lissages et modèles) : dans les deux cas il s'agit d'estimer des paramètres pour définir une fonction mathématique qui va représenter le phénomène. Pour les lissages, nous n'émettons pas d'idée a priori du phénomène. A contrario pour les modèles, nous postulons que les phénomènes répondent à une certaine causalité.**
3- **<u>Les lissages non paramétriques</u> : ces lissages consistent à estimer des taux lissés à partir des taux bruts, sans passer par l'estimation de paramètres, ni d'hypothèses sur la courbe des taux lissés ;**

La pertinence du lissage sera dans un premier temps évaluée visuellement, en se questionnant sur le caractère réaliste et adapté à notre population des phénomènes modélisés. Il sera ensuite validé par des tests et critères statistiques.

2.3.1 Modèles relationnels

Ces méthodes, dites de positionnement, permettent la construction des tables en ajustant des taux de référence aux portefeuilles étudiés, afin de se rapprocher d'une vision *Best Estimate* des engagements. Ces méthodes sont très pratiques lorsque la quantité de donnée n'est pas suffisante pour structurer correctement une table complète. Nous allons utiliser les méthodes présentées par TOMAS et PLANCHET (2016) dans leurs notes pour l'IA.

2.3.1.1 *Ratio estimés/observés*

Cette méthode à un paramètre, consiste en l'application d'un coefficient[50] multiplicatif de réduction ou majoration aux probabilités d'une table de référence.

$$\tilde{q}_x = coeff \times q_x^{réf}$$
$$coeff = \frac{\sum_x D_x}{\sum_x E_x \times q_x^{réf}}$$

En conséquence, on ajuste les probabilités de sortie uniquement avec un paramètre, représentant la déviation entre les sorties observées du portefeuille et celles de la table de référence. Cette méthode est simple à appliquer puisqu'elle ne requiert aucune hypothèse à valider. Cependant, le choix de la plage d'âge utilisée pour l'estimation de ce coefficient est très important car elle peut avoir un impact important sur le coefficient, surtout lorsque l'exposition du portefeuille n'est pas très conséquente.

2.3.1.2 *Brass*

Brass a suggéré en 1971, une relation linéaire entre les logits (régression logistique) des taux de mortalité d'intérêt et ceux d'une population de la référence, ce qui a conduit au modèle suivant :

$$logit(q_x) = a + b \times logit\left(q_x^{réf}\right) + \varepsilon_x$$

avec $logit(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \forall\, x \in]\,0\,;1[$.

Cette approche consiste, *in fine*, à une simple régression linéaire sur les logits des taux, et ne nécessite donc que l'estimation de deux paramètres.

Il sera nécessaire de vérifier les conditions d'application de la régression linéaire avant de valider cet ajustement. Ces conditions concernent essentiellement la variable d'erreur ε_x, mais invérifiable sur la variable d'erreur, elles seront testées sur les résidus, qui eux sont observables.
La normalité des résidus et leur caractère homoscédastique sera testé, par des méthodes visuelles (observation du QQplot pour la normalité et du « *standarized residuals vs fitted plot* » pour

[50] Appelé *SMR* dans la cadre de probabilité de décès.

l'homoscédasticité) ou des tests statistiques (test de Shapiro Wilk[51] pour la normalité et de Breusch-Pagan[52] pour l'homoscédasticité).
Les taux sont supposés indépendants étant donné la nature des phénomènes étudiés : un assuré décédé, tombé en incapacité ou en invalidité à un âge donné ne devrait pas avoir d'impact sur un autre assuré d'un autre âge.

Les paramètres du modèle sont estimés à l'aide de la méthode de minimisation des moindres carrés pondérés (MMCP) afin de donner plus de poids aux taux estimés avec plus d'exposition :

$$(a,b) = argmin_{(a,b)\in R^2} \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} . \left(logit(\hat{q}_x) - \left(a + b \times logit(q_x^{réf})\right)\right)^2$$

La pondération choisie (w_{x_i}) est l'effectif sous risque.
Le modèle permet d'obtenir les taux de sortie ajustés par l'application de la formule suivante :

$$\tilde{q}_x = \frac{exp(\hat{a} + \hat{b} \times logit({q_x}^{ref}))}{1 + exp(\hat{a} + \hat{b} \times logit({q_x}^{ref}))}$$

<u>Remarque</u> : l'ensemble des résultats relatifs à la méthode de Brass ont été obtenus avec l'aide de la fonction « lm » du logiciel R[53].

2.3.1.3 *Modèle linéaire généralisé de Poisson*[54]

Dans ce modèle, on suppose que le nombre de décès de la population étudiée à l'âge x est déterminé par :

$$D_x \sim \mathcal{P}(E_x . \mu_x)$$
$$\text{avec } D_x = \beta_0 + \beta_1 \log\left(q_x^{ref}\right) + \beta_2 x$$

où μ_{x+j} représente la force de mortalité d'un individu à l'âge $x + j$, d'âge actuel x :

$$\mu_{x+j} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}[j < T_x \leq j + t | T_x > j]}{t}$$

avec T la variable aléatoire positive représentant la durée de vie d'un individu de la population. T_x tel que $\{x = 1,2, \dots\}$ est une suite de variable aléatoire représentant la durée de vie restante d'un individu d'âge x.
La force de mortalité peut également s'écrire de la façon suivante, ce qui permet de faire un lien avec les probabilités de décès :

$$\mu_{x+j} = \frac{-S'_x(j)}{S_x(j)} = \frac{-\frac{d}{dj}\ {}_jp_x}{{}_jp_x} = \frac{\frac{d}{dj}\ {}_jq_x}{1 - {}_jq_x}$$

[51] Le test de Shapiro Wilk teste l'hypothèse nulle selon laquelle un échantillon est issu d'une population normalement distribuée. Ce test est particulièrement puissant pour les petits effectifs (n≤ 50) selon (Rakotomalala, Tests de normalité - Techniques empiriques et tests statistiques, 2011, p. 14). Ce test est effectué à l'aide de la fonction shapiro.test() dans R.
[52] Le test de Breush-Pagan a pour objectif de tester l'hypothèse nulle selon laquelle la variable d'erreur d'un modèle de régression linéaire aurait une variance constante, indépendante des covariables du modèle. Un modèle linéaire est ajusté sur les résidus au carré, puis la statistique de BP (: R^2 du dernier modèle * le nombre d'observation) est calculée et comparée aux quantiles d'une loi du χ^2(nombre de covariables)). Ce test est effectué à l'aide de la fonction bptest() du package lmtest dans R.
[53]Tous les travaux réalisés avec R dans ce mémoire (essentiellement toutes les estimations des hypothèses biométriques) ont été effectuées avec le version 4.1.0 du logiciel R.
[54] Appelé GLM Poisson dans la suite du mémoire.

avec S_x la fonction de survie conditionnelle d'un individu d'âge x. Selon l'hypothèse faite sur la répartition intra-annuelle de la mortalité, un lien direct peut être déterminé entre la force de mortalité et les probabilités de décès.

Dans notre cas, nous allons utiliser l'hypothèse de linéarité des décès dans l'année afin de correspondre à l'hypothèse sous-jacente à l'estimateur de Hoem (utilisée par la suite):

$$\mu_{x+j} = \frac{\frac{d}{dj}\,{}_jq_x}{1-\,{}_jq_x} = \frac{\frac{d}{dj}j.q_x}{1-j.q_x} = \frac{q_x}{1-j.q_x}$$

Ce résultat étant valable pour $j = 0$, nous utiliserons l'égalité $\mu_x = q_x$.
Ainsi, les probabilités de décès de la population $\tilde{q}_x$ sont estimées par :

$$\tilde{q}_x = \frac{\exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1.\log(q_x^{réf}) + \hat{\beta}_3.x)}{E_x}$$

Remarque :

- La validation du modèle se fera à l'observation des résidus de student (Partie 2.3.4 : Validation), des distances de COOK et de notre procédure de validation statistique ;
- On appliquera ce modèle à des probabilités d'incidence en arrêt de travail et non des probabilités de décès, mais le fonctionnement est identique.

2.3.2 Ajustements paramétriques

Deux ajustements paramétriques ont été testés : le modèle de Heligman-Pollard et les lissages par *splines cubiques*[55]. Le modèle de HP décompose la mortalité selon trois composantes : la mortalité infantile, une « bosse accident » et la mortalité due au vieillissement. Bien que ce soit un modèle de mortalité, notre objectif était de faire correspondre la bosse représentant la mortalité accidentelle dans ce modèle, avec la bosse d'incidence en arrêt de travail remarquable chez les femmes. Cependant, cet ajustement n'a pas été assez satisfaisant pour être conservé. Seul le lissage par *splines* a été conservé et son fonctionnement théorique détaillé, car ils présentent de bons résultats.

Splines cubiques :

Ces notions sont extraites du cours de modélisation financière dispensé dans le master d'actuariat de l'université de Strasbourg et de l'ouvrage de PLANCHET et THEROND (Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles, 2011, pp. 123-125).

Définition d'une spline

Une fonction *spline* de degré d > 0, à m nœuds $k_1,\ldots,k_m$ est une fonction de classe C^{d-1} (fonction continue, différentiable d-1 fois et de dérivés continues) dont les restrictions aux intervalles $[k_i, k_{i+1}]_{i\in[\![0;m]\!]}$ sont des polynômes de degré d.

Lissage

L'idée du lissage par *splines* est de découper la plage de la fonction à ajuster en sous-intervalles, puis d'ajuster sur chaque sous-intervalles une fonction simple, en prenant des précautions pour le raccordement aux points de jonction (appelés aussi nœuds). Les polynômes sont des fonctions simples et peuvent à ce titre être utilisés pour construire des lissages par splines.
Il faut donc en pratique bien choisir les sous-intervalles et imposer des conditions aux polynômes au niveau des nœuds.

[55] Dans le reste de ce mémoire, lorsqu'il sera dit « splines » nous ferons référence aux splines cubiques.

Ce lissage suppose que la courbe des taux d'incidence peut être représentée sur toute la plage d'âges par une seule fonction paramétrique.
La méthode d'ajustement choisie pour nos fonctions *splines* est la méthode des moindres carrés pondérés (MMCP), décrite dans le modèle précédent de Brass. Pour les mêmes raisons, cette méthode permettra de donner plus de poids aux taux pour lesquels il y a plus d'exposition (plus robuste).

Choix du nombre de nœuds
Il n'existe pas de procédure préétablie pour déterminer le nombre de nœuds optimal et leur emplacement. Toutefois, plus le nombre de nœuds est élevé, plus les taux lissés seront proches des taux bruts.
Dans le cadre de ce mémoire, l'approche retenue pour déterminer le nombre de nœuds consiste à fixer les nœuds préalablement à la minimisation et à comparer les résultats obtenus.

Afin de faciliter la compréhension du lecteur, un exemple est explicité dans le cadre des *splines* cubiques à deux nœuds.
Exemple *splines* cubiques à deux nœuds :
Dans un premier temps, la plage de variation des âges est découpée en deux parties :

$$q_x = \begin{cases} p_0(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ p_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

où $p_i(x)$ est un polynôme de degré 3, avec les contraintes au point de jonction :

$$p_0(x_1) = p_1(x_1), \qquad \frac{d}{dx}p_0(x_1) = \frac{d}{dx}p_1(x_1), \quad \frac{d^2}{dx^2}p_0(x_1) = \frac{d^2}{dx^2}p_1(x_1)$$

Ce qui conduit à poser :

$$p_0(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \text{ et } p_1(x) = p_0(x) + c_5(x - x_1)^3$$

Le problème comporte cinq inconnues (huit coefficients moins les trois contraintes de régularité).
Le critère de MMCP permettra de la résoudre :

$$M = \sum_{x=x_0}^{x_1} w_x(q_x - \widehat{q_x})^2.$$

Pour plus de précisions, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de PLANCHET et THEROND (Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles, 2011, pp. 123-125).

Remarque : l'ensemble des résultats relatifs aux lissages par *splines* cubiques ont été obtenus avec l'aide des fonctions « lm » et « ns » (du package « splines ») du logiciel R.

2.3.3 Lissage non paramétrique

Ces notions sont extraites du cours de modèles de durée dispensé dans le master d'actuariat de l'université de Strasbourg et de l'ouvrage de PLANCHET et THEROND (Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles, 2011, pp. 127-132).

Whittaker-Henderson :
Le principe de la méthode de lissage de Whittaker-Henderson est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité et de rechercher les valeurs des taux ajustés minimisant une combinaison linéaire des deux critères.
Ce lissage peut se réaliser sur une seule dimension ou en dimension deux. PLANCHET et THEROND (2011, pp. 128-132) décrivent cette méthode dans les deux cas.

Dimension 1 :
Le critère de fidélité est le suivant :

$$F = \sum_{i=1}^{p} w_i(\tilde{q}_i - \hat{q}_i)^2$$

Et le critère de régularité le suivant :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z \tilde{q}_i)^2$$

Où, z est un paramètre entier positif, impactant le modèle au travers de l'opérateur Δ tel que ci-dessous :

$$\Delta\tilde{q}_i = \tilde{q}_{i+1} - \tilde{q}_i,$$
$$\Delta^2\tilde{q}_i = \Delta(\Delta\tilde{q}_i) = \Delta(\tilde{q}_{i+1} - \tilde{q}_i) = \tilde{q}_{i+2} - 2\tilde{q}_{i+1} + \tilde{q}_i,$$
$$\Delta^z\tilde{q}_i = \Delta(\Delta^{z-1}\tilde{q}_i) = \Delta(\Delta(\Delta^{z-2}\tilde{q}_i) = \cdots$$

Le critère à minimiser est une combinaison linaire de la fidélité et de la régularité, où le poids des deux termes est contrôlé par un second paramètre h :

$$M = F + h \times S$$

La résolution de ce problème d'optimisation passe par la résolution de l'équation : $\frac{\partial M}{\partial \tilde{q}_i} = 0$. Cette résolution passe par quelques manipulations matricielles que nous n'allons pas développer ici mais qui peuvent être retrouvées dans l'ouvrage de PLANCHET et THEROND cité précédemment (Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles, pp. 128-129).

Dimension 2 :
L'extension en dimension suit la même logique qu'en dimension une avec un critère de fidélité et un critère de régularité. Le critère de fidélité se généralise de la façon suivante :

$$F = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij}\left(\tilde{q}_{ij} - \hat{q}_{ij}\right)^2$$

Le critère de régularité change entre la dimension une et la dimension deux. À présent, il y a un critère de régularité horizontale et un critère de régularité verticale. On distingue d'abord le critère de régularité verticale via l'opérateur Δ_v^z (qui agit sur les $\tilde{q}_{ij}$ en fixant uniquement l'indice j) :

$$S_v = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p-z} \left(\Delta_v^z \tilde{q}_{ij}\right)^2$$

Le critère de régularité horizontale (S_h) se calcule de la même manière sauf en fixant les i et en faisant varier les j cette fois-ci. Le critère devant être minimisé est désormais le suivant :

$$M = F + \alpha \times S_v + \beta \times S_h$$

La résolution de ce problème d'optimisation s'effectue en réarrangeant les éléments pour se ramener au cas unidimensionnel, mais ne sera pas plus détaillé. Les lecteurs intéressés sont à nouveau invités à consulter l'ouvrage sur lequel cette présentation des modèles s'appuie, à savoir (Planchet & Thérond, 2011, pp. 129-132).

Remarque : l'ensemble des résultats relatifs au lissage par la méthode de WH ont été réalisés avec le logiciel R.

2.3.4 Validation de l'ajustement

Comme expliqué précédemment (dans la partie 2.3. Lissage), le but de l'ajustement est de définir des taux qui décrivent un phénomène réaliste et adapté au comportement des assurés de notre portefeuille, le but final étant l'estimation des hypothèses biométriques dans le cadre du calcul du *Best Estimate*.
La première étape de la validation est visuelle, dont le principal intérêt est la vérification de la contrainte de représentativité et de régularité.
Les tests et indicateurs statistiques nous permettront ensuite de vérifier la proximité avec les taux bruts ainsi que la position des taux lissés par rapport aux taux bruts.

2.3.4.1 *La statistique du χ^2*

La statistique du χ^2 permet de quantifier une distance globale entre les taux bruts et les taux lissés. Plus cette distance est importante, plus les taux lissés sont éloignés des taux bruts.
Cette statistique, présentée par PLANCHET et THEROND (2011, p. 135), se calcule de la façon suivante :

$$\chi^2 = \sum_{(x,t)} \frac{\left(D_{x,t} - E_{x,t} \times \tilde{q}_{x,t}\right)^2}{E_{x,t} \times \tilde{q}_{x,t} \times (1 - \tilde{q}_{x,t})}$$

Où,

- $D_{x,t}$ représente le nombre de sorties pour les assurés d'âge x et d'ancienneté t dans l'état ;
- $E_{x,t}$ représente l'exposition pour les assurés d'âge x et d'ancienneté t dans l'état ;
- $\tilde{q}_{x,t}$ représente le taux de sorties lissé pour un individu d'âge x et d'ancienneté t dans l'état ;
- $\hat{q}_{x,t}$ représente le taux de sorties bruts pour un individu d'âge x et d'ancienneté t dans l'état.

Remarque :

- Les anciennetés dans l'état (t) sont utilisées uniquement pour les validations de loi de maintien.
- Cette distance prend en compte l'exposition en donnant plus de poids aux écarts lorsque l'exposition est importante sur l'âge en question.

2.3.4.2 *R^2*

Le R^2 évalue la qualité de l'ajustement en comparant les écarts entre les taux buts et les taux lissés (par un modèle) et les écarts entre les taux bruts et la moyenne des taux bruts.

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{(x,t)} \left(\hat{q}_{x,t} - \tilde{q}_{x,t}\right)^2}{\sum_{(x,t)} \left(\hat{q}_{x,t} - \frac{\sum_{(x,t)} \hat{q}_{x,t}}{n}\right)^2} \right)$$

Comme la distance du χ^2, cette grandeur nous informera principalement sur la distance entre les taux bruts et les taux lissés. A la différence du χ^2, le dénominateur ne dépend pas de l'exposition ni du lissage. Il dépend uniquement des taux bruts.

2.3.4.3 *Test des signes*

Le test des signes permet de se faire une idée du positionnement des taux lissés par rapport aux taux bruts, et plus particulièrement dans notre cas, de vérifier si la courbe des taux lissés passe bien

« au milieu » des taux bruts ou non. En effet, dans ce test, le nombre de taux lissés supérieurs aux taux bruts sera comparé au nombre de taux lissés inférieurs aux taux bruts.
Ce test non-paramétrique, présenté par RAKOTOMALALA (2008, p. 124), s'intéresse aux signes des différences $d_{x,t} = \hat{q}_{x,t} - \tilde{q}_{x,t}$ et teste si le nombre d'écarts positifs est significativement différent ou non du nombre d'écarts négatifs. On pose la variable aléatoire D décrivant cette différence entre les taux bruts et les taux lissés, et dont les réalisations sont les $d_{x,t}$.
Soit $\pi = \mathbb{P}(D > 0)$, le test d'hypothèse bilatéral s'écrit :

$$H_0 : \pi = \frac{1}{2}$$
$$H_1 : \pi \neq \frac{1}{2}$$

Pour un échantillon de taille n (où l'on n'a pas pris en compte les d_i nuls) la statistique du test est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{d_i > 0}$$

Sous H_0, S suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (qu'on nommera X), et la p_{value} de ce test bilatéral, à comparer avec le seuil d'acceptation du risque choisi (nommé α) est donc égale à :

$$p_{value} = 2 \times \mathbb{P}[X \geq \max(S, n - S)]$$

La p_{value} est utilisée pour quantifier la significativité statistique du résultat du test dans le cadre de l'hypothèse nulle. Elle peut s'interpréter comme la probabilité d'un résultat au moins aussi « extrême » que le résultat observé, sachant l'hypothèse nulle. Si sa valeur est inférieure au seuil α choisi, cela voudrait dire que sous l'hypothèse nulle, le résultat observé est peu probable.
Interprétation :

- Dans le cas où la p_{value} est supérieure à α, on décide de ne pas rejeter H_0, on l'accepte par défaut au risque de commettre une erreur de deuxième espèce β. Le calcul de cette erreur peut s'avérer compliqué dans certains cas et son explication n'est pas le but de ce mémoire. Il existe cependant dans certains cas un nombre de conditions d'expériences à remplir permettant de limiter ce risque d'erreur de deuxième espèce.
- Dans le cas où l'on rejette H_0, on accepte H_1 au risque de commettre une erreur de première espèce α.

2.3.4.4 *Ratio observés/estimés*

Le ratio observés/estimés permet d'avoir une idée globale du positionnement de la courbe ajustée par rapport aux données réelles. Ce ratio peut s'avérer intéressant en complément du test des signes, car il peut quantifier et donner un sens au « décalage » observé dans ce test.

$$ratio\ observés/estimés\ = \frac{\sum_{(x,t)} D_{x,t}}{\sum_{(x,t)} E_{x,t} \times \tilde{q}_{x,t}}$$

2.3.4.5 *Résidus*

Les résidus sont essentiellement observés pour la validation des modèles linéaires : GLM Poisson et régression linéaires sous-jacentes pour le modèle de Brass.
Les résidus constituent une mesure de l'écart entre la valeur prédite par le modèle pour la réponse et la valeur observée pour celle-ci. À l'observation des résidus, il est possible :

1- de vérifier visuellement l'adéquation du modèle aux données ;
2- de détecter graphiquement d'éventuelles tendances/structures globalement présentes dans les données mais non prises en compte dans la modélisation ;

3- de repérer les données « atypiques » (avec de grands résidus : le modèle ne prédit pas bien pour ces données).

Dans l'idéal, on disposerait de résidus qui, lorsque le modèle étudié est valide, constituent des réalisations de variables aléatoires centrées, de variance unitaire, de loi normale et indépendantes. Malheureusement, aucune de ces propriétés n'est exactement vérifiée en général, ce qui complique l'examen des résidus. Ce cadre idéaliste reste néanmoins utilisé comme une référence approximative.

<u>Résidus studentisés externes</u>

Dans le cadre d'une régression linéaire, Bertrand, Claeys et Maumy-Bertrand (Modélisation statistique par la pratique avec R, 2019, p. 226), détaillent les aspect théorique de ces résidus.

Les résidus studentisés externes (considérés comme la réalisation des variables aléatoires d'erreurs résiduelles studentisées externes) sont définis comme :

$$\hat{r}_i^t = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\widehat{\sigma_{(i)}^2}(1 - H_{ii})}}$$

Où,

- $\widehat{\sigma_{(i)}^2}$ est l'estimateur de σ^2 de construit en enlevant l'observation i à l'échantillon ;
- H_{ii} est la valeur de la matrice d'influence positionnée en i^e ligne et en i^e colonne. Cette matrice d'influence[56], dans une régression linéaire, est définie par $H = X(X^tX)^{-1}X^t$, et correspond géométriquement au projecteur orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice X noté Vect(X).
- Les y_i et $\hat{y}_i$ correspondent respectivement aux logits des taux d'incidence bruts et estimés par les régressions linéaires sous-jacentes aux modèles de Brass.

La loi des erreurs résiduelles studentisées externes est une loi de Student à $n - (p + 2)$ degrès de liberté. Ainsi, les résidus studentisés externes seront comparés aux quantiles de cette loi afin de détecter les « trop » grands résidus.

2.3.4.6 *<u>Scoring</u>*

Lorsque plusieurs ajustements sont proches graphiquement, au regard des statistiques présentées précédemment et qu'ils respectent les hypothèses sous-jacentes aux modèles utilisés, nous allons mettre en place un score nous permettant de choisir.

Il s'agira de choisir l'ajustement le plus adapté à la construction d'une loi *BE*. Ceci nécessite une discussion sur les critères statistiques retenus jusqu'à présent, afin de déterminer l'importance accordée dans la construction d'un critère global de choix :

- **Le ratio observés/estimés** nous permet d'avoir une mesure globale de la position des taux ajustés au regard des incidences réelles. En donnant plus de poids à ce critère nous favoriserons les ajustements permettant d'avoir une prédiction globalement proche du nombre réel d'incidences sur la plage sélectionnée et ce critère nous semble important lors de la construction d'une loi *BE*.
- **Le R^2 et la statistique du χ^2** nous informent quant à la distance entre les taux bruts et les taux lissés. Ces deux critères mènent au même objectif : minimiser cette distance. Cependant, le χ^2 prend en compte l'exposition en donnant plus de poids aux résidus dont les taux bruts ont été estimés avec plus d'exposition et qui sont donc supposés plus robustes. C'est pourquoi, seul le χ^2sera pris en compte parmi ces deux mesures pour ne pas être redondant au niveau des critères et pour donner moins de poids aux résidus lorsque l'exposition est faible. Ce critère nous semble important lors de la construction d'une loi *BE*,

[56] Dans le cadre des GLM, la matrice d'influence se calcul différemment mais a la même signification.

car il est essentiel que l'ajustement ne s'écarte pas trop des taux bruts lorsqu'ils sont pertinents.

- **Le test des signes** nous renseigne quant à la position, « centrale » ou non, des taux lissés par rapport aux taux bruts. Il est également important car, en complément des deux premiers critères, il permet d'éviter les situations où l'on surestime/sous-estime tous les taux tout en restant assez proche.
- **L'intervalle de confiance à 95%** est une estimation d'un intervalle telle que, si elle était réalisée un grand nombre de fois, 95% des réalisations contiendraient le « vrai » taux que l'on cherche à estimer. Ainsi, cette estimation nous donne une indication sur la position du « vrai » taux que l'on cherche à estimer.

Les poids donnés à ces critères seront :

- 3 pour la statistique du χ^2 et le ratio observés/estimés ;
- 2 pour le test des signes ;
- 1 pour le nombre de points hors de l'intervalle de confiance à 95%.

Pour chaque critère, selon le nombre d'ajustements comparés, des points seront attribués. Les points vont de 1 au nombre d'ajustements comparés. L'ajustement conservé sera celui qui a le score le plus élevé.

2.4 Lois relatives à l'incapacité

2.4.1 Les données

Périodes d'observation :

Périodes d'observation disponibles dans nos bases de données concernant l'incapacité :

- AX : 2016-2020
- AL : 2011-2020

Selon les recommandations de l'IA (2006)[57], un choix raisonnable pour la période d'observation serait une période ayant les caractéristiques suivantes :

1. La plus récente possible tout en veillant à ce qu'un certain décalage ait été conservé entre la date de fin d'observation et la date d'extraction des données pour la prise en compte des tardifs ;
2. Une durée d'observation multiple de douze mois pour éviter les phénomènes de fluctuations annuelles ;
3. Une période d'observation de 3 à 5 ans, pour prendre en compte les fluctuations conjoncturelles, permettre d'avoir plus de données pour des estimations plus robustes, sans en prendre trop dans le cadre de tables instantanées.

À l'observation du nombre d'arrêts de travail par mois, un pic, sans doute dû à l'épidémie de COVID-19, est remarquable au mois de mars 2020 (début du premier confinement). Notre objectif étant la revue du modèle interne, nous faisons le choix de stopper la période d'observation au 31/12/2019. En effet, nous ne pouvons pas prendre en compte dans la revue, un phénomène qui ne pouvait et qui ne devait pas être pris en compte dans le calcul du BE initialement. Cependant, ce phénomène pourrait servir à objectiver un choc de pandémie sur l'arrêt de travail. De plus, cette année de décalage entre la dernière extraction et la fin de la période d'observation nous permettra de prendre en compte les tardifs[58].

[57] Bien que ce soit des recommandations pour la mortalité, il semble cohérent de l'appliquer dans ce cas.

[58] Une étude est présentée en annexe, montrant qu'un an de décalage suffit pour prendre en compte les tardifs pour l'arrêt de travail sur le portefeuille AL. Nous ferons l'hypothèse que c'est également le cas pour AX.

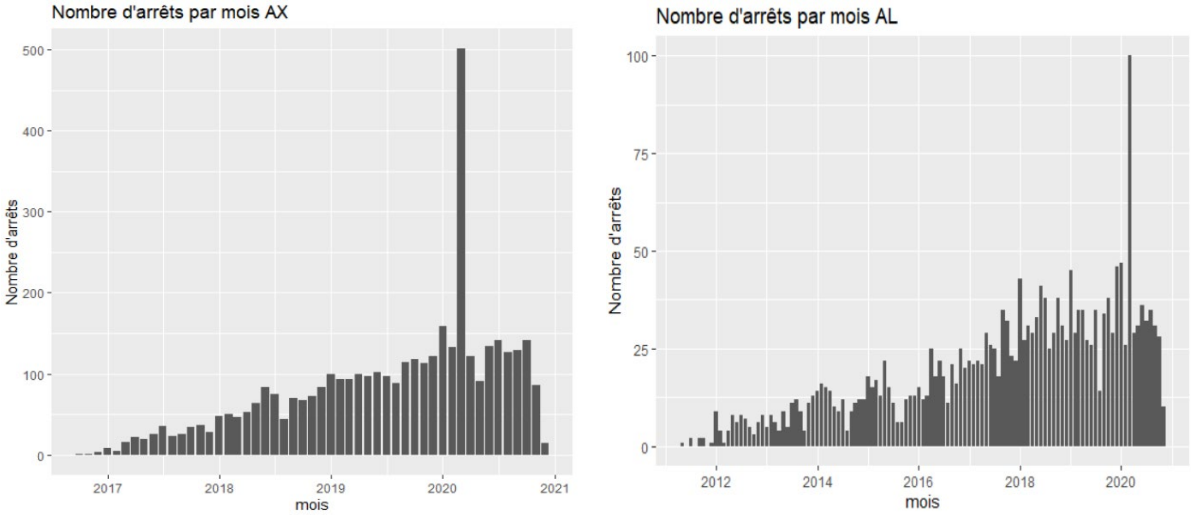


Figure 14: Nombre d'arrêts de travail par mois sur le portefeuille AX

<u>Pour rappel</u> : AX a été lancé en 2016 avec une exposition fortement croissante entre 2016 et 2020 et AL a été lancé en 2011 avec une exposition croissante entre 2011 et 2020 (cf. fin de la partie 1)

Période d'observation retenue :

AX : 01/01/2017 - 31/12/2019

AL : 01/01/2015 - 31/12/2019

2.4.1.1 *<u>Franchises</u>*

Les franchises sont indiquées par trois pour les arrêts de type maladie, accident ou hospitalisation.

<u>AX</u>

La garantie ITT d'AX se présente sous la forme de trois paliers d'IJ avec des montants de couverture garantis différents :

1. le premier palier couvre, selon la franchise appliquée, jusqu'au 90ième jour ;
2. le deuxième palier couvre à partir du 91ième jour jusqu'au 365ième jour ;
3. le troisième palier couvre du 366ième jour jusqu'au 1095ième jour.

Dix combinaisons de franchises sont possibles pour les assurés couverts par AX. Logiquement quatre d'entre elles se distinguent sur l'histogramme ci-dessous :

1. 15/3/3 et 30/3/3 pour le palier I ;
2. 90/90/90 pour le palier II ;
3. 365/365/365 pour le palier III.

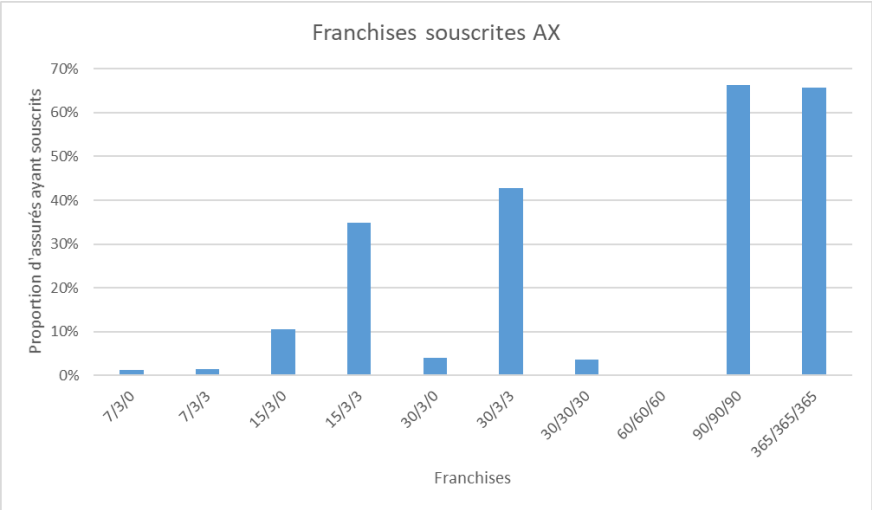


Figure 15 : Proportion des assurés par franchise pour AX

Nous observons également que les assurés peuvent bénéficier de franchises courtes (0,3,7 jours, …), entrainant la couverture d'un nombre plus ou moins important de petits arrêts, qui pourrait, en conséquence, augmenter le taux d'incidence sur ce portefeuille. En effet, il a été constaté au niveau des arrêts de travail que 55% ont concerné des franchises de trois jours et 31% des franchises de 15 jours.

<u>AL</u>

Pour AL, seulement trois ensembles de franchises sont possibles pour les assurés :

1. 30/3/3 ;
2. 30/3/30 ;
3. 30/30/30.

La garantie ITT ne se présente pas sous forme de trois paliers comme pour AX. Tous les assurés sont donc couverts sur la période allant de leur franchise au 1095ième jour d'arrêt.

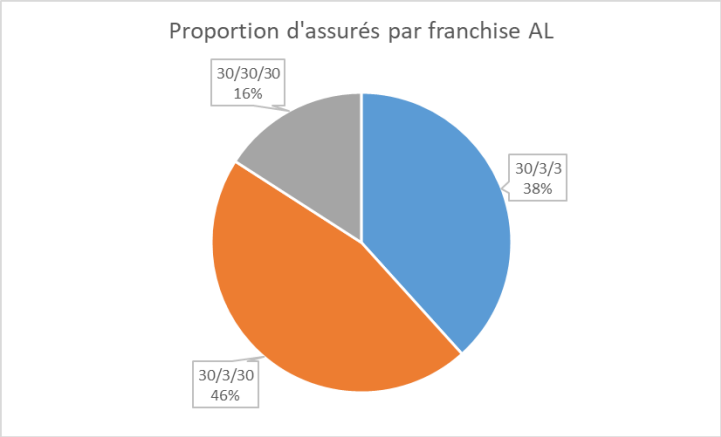


Figure 16 : Proportion des assurés par franchise pour AL

Sur ces produits, les franchises sont moins courtes que sur les produits couverts par AX, ce qui pourrait entrainer un nombre moins important de petits arrêts et réduire les taux d'incidence pour les assurés de ce portefeuille.

Rechutes : les traités indiquent que s'il y a une « rechute » en incapacité dans les deux mois suivant le retour à l'état « sain », les deux sinistres ne font qu'un et la période de franchise n'est pas réappliquée pour la rechute. Les bases de données ont été retraitées en conséquence.

2.4.2 Incidence en arrêt de travail

Le but de cette partie est d'estimer les probabilités de passer de l'état « sain » (apte à travailler) à l'état « incapable » (en arrêt de travail) pour chaque assuré, en se basant sur l'historique des portefeuilles. La première étape consistera à estimer ces taux bruts qui seront, dans un second temps, lissés.

Statistiques d'exposition et d'incidence en arrêt de travail :

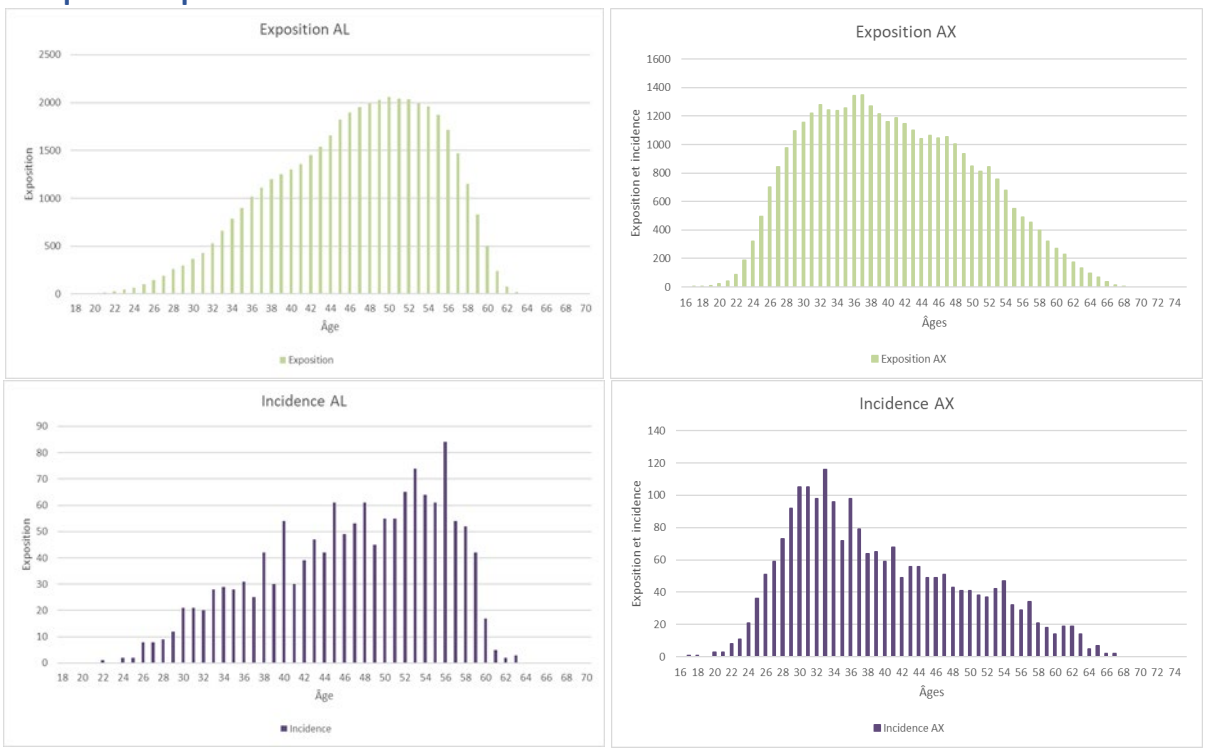


Figure 17 : Incidence et exposition sur l'historique de chaque portefeuille

	AL	AX
Exposition Totale	44 367	35 304
Incidence Totale	1431	2199
Ratio global	3,23%	6,23%

Concernant l'exposition, la même observation peut être faite que sur le nombre d'assurés par âge : la majorité de l'exposition se trouve sur des tranches d'âge plus jeunes pour AX que pour AL.
De plus, concernant le nombre d'incidence, la partie la plus importante concerne les 42-59 ans pour AL alors qu'elle concerne plutôt les 28-40 ans pour AX. Ceci semble être principalement dû à l'exposition sur ces tranches d'âges et pourrait avoir un impact sur la structure (type de l'arrêt/pathologie, durée de rémission...) de l'arrêt de travail (sur sa fréquence et sa durée).

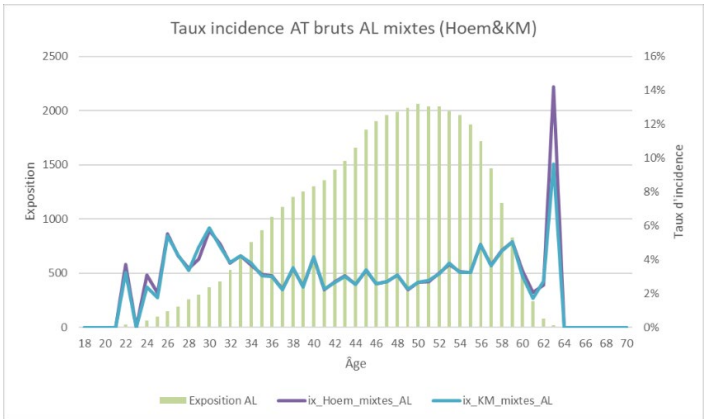
Le ratio de sinistralité global est deux fois plus important pour AX que pour AL, ce qui s'explique par les raisons suivantes :

1. La sélection médicale n'est pas la même sur les jeunes assurés à petites bases de garanties. Elle est nettement moins stricte pour AX, ce qui a entrainé un taux d'incidence significativement plus important ces dernières années.

2. Les franchises sont plus courtes sur le portefeuille AX que sur le portefeuille AL. Le nombre de petits arrêts observables sur AX et non sur AL pourrait être conséquent, ce qui augmenterait la fréquence ;
3. La répartition des catégories de profession n'est pas la même : il y a une part nettement plus importante de paramédicaux, infirmiers et de profession médicale chez AX (58%) que chez AL (24%)[59]. Selon le département de gestion des sinistres de Hannover Re, ces professions seraient plus souvent en arrêt de travail du fait des difficultés physiques et mentales des métiers.
4. Le portefeuille AX contient une part plus importante de femmes et une exposition plus conséquente sur la tranche d'âge 25-40 ans. Les femmes, contrairement aux hommes, sont susceptibles sur cette tranche d'âge d'être arrêtée pour grossesses pathologiques en plus de toutes les autres causes d'arrêt.

2.4.2.1 *Taux bruts*

Pour les deux portefeuilles, les taux d'incidence bruts (sans différenciation de sexe) ont été estimés avec les estimateurs de Kaplan-Meier et de Hoem (cf. partie 2.2).



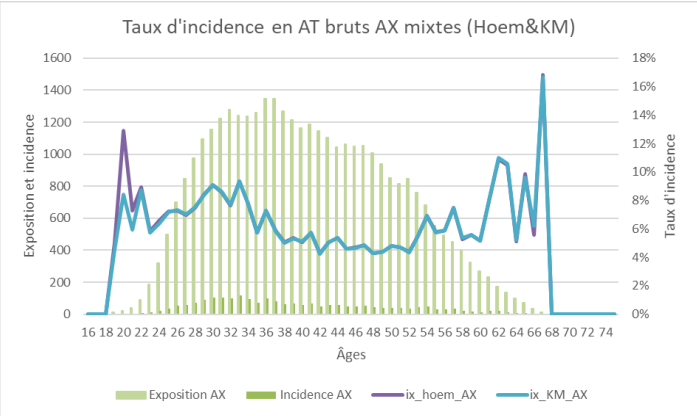


Figure 18 : Taux d'incidence bruts AL et AX

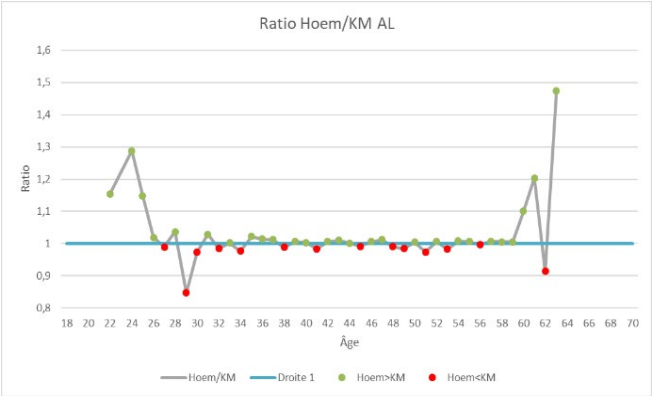
Trois principales tendances, dans l'évolution de ces taux en fonction de l'âge, sont observables :

1. Sur les âges de 20 à 40 ans :
   - Une tendance décroissante est clairement identifiable sur AX (graphique de droite) ;
   - Alors que sur AL, la tendance décroissante ne s'observe qu'à partir de 30 ans. Nous pouvons supposer que l'exposition, trop faible avant 30, ne permet pas d'observer le phénomène.
2. Une stabilisation des taux entre 40 et 50 ans pour les deux portefeuilles ;
3. Une croissance des taux à partir de 51 ans pour les deux portefeuilles.

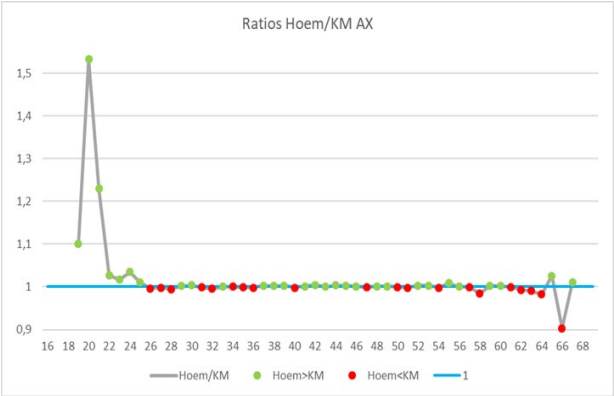
Ces phénomènes seront détaillés par la suite.

Afin de comparer les taux bruts déterminés avec les deux méthodes d'estimation (KM et Hoem), le ratio $\frac{ix_Hoem}{ix_Km}$ a été utilisé :

[59] Les professions libérales (du types avocats, notaires…) sont également prises en compte dans ces catégories, pour AX comme pour AL. Mais l'hypothèse peut être faite que la proportion de ces autres types de profession libérale est constante d'un portefeuille à l'autre.



	Hoem>KM	Hoem<KM	Total
Nombre de points	27	14	41
Proportions	66%	34%	



	Hoem>KM	Hoem<KM	Total
Nombre de points	29	20	49
Proportions	59%	41%	

Figure 19 : Comparaison des estimations des taux d'incidence avec Hoem et KM

Les conclusions sont les mêmes sur les deux portefeuilles :

- Lorsque l'exposition est importante, les estimations réalisées avec Hoem et KM sont très proches.
- *A contrario*, lorsque l'exposition est faible, l'écart peut être considérable (en début et en fin de table en général).
- Les taux estimés avec Hoem sont globalement supérieurs à ceux estimés avec KM. Ce phénomène trouve une explication dans le biais positif de l'estimateur de la fonction de survie de KM entrainant un biais négatif dans les taux de sortie[60], alors que l'estimateur de Hoem est sans biais.

L'estimateur des taux bruts conservé sera l'estimateur de Hoem pour les raisons suivantes :

- Les taux obtenus avec l'estimateur de Hoem sont plus prudents que les taux obtenus avec KM (particulièrement sur les tranches d'âge représentant l'exposition la plus importante) ;
- Cet estimateur est sans biais ;
- L'hypothèse sous-jacente de linéarité des probabilités de passage en incapacité semble acceptable (${}_tq_x = t.q_x$). En effet, il existe évidemment une saisonnalité pour l'incidence, mais cette saisonnalité n'est présente que sur les années calendaires. Lorsque nous réfléchissons en termes d'année entre deux dates d'anniversaire d'un individu, nous pourrions faire l'hypothèse qu'elle n'est pas présente lorsque les individus sont nés de façon aléatoire et uniformément répartis dans l'année.

2.4.2.2 *Différenciation par sexe*

Dans cette partie, l'impact de la variable « sexe » est étudié.

Pour rappel, nous souhaitons calculer des réserves de la façon la plus précise possible afin de satisfaire les exigences *« BE »* de la norme SII. Ainsi, si les femmes et les hommes ne sont pas exposés au risque de la même façon, une différenciation est nécessaire. Nous allons donc vérifier la pertinence de cette discrimination dans nos données.

[60] Egalement expliqué dans la partie 2.2 Estimation des taux bruts.

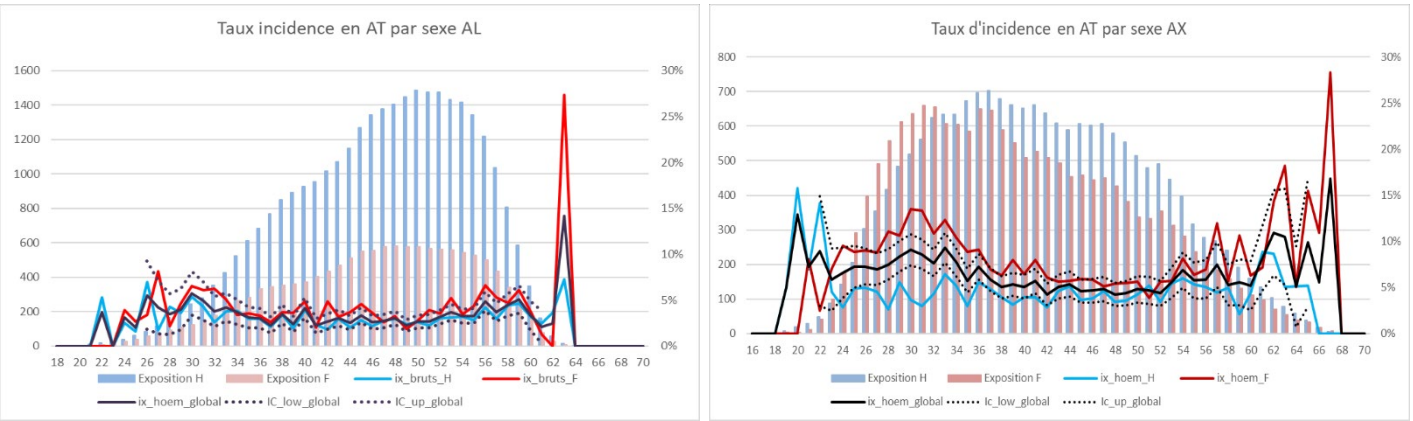


Figure 20 : Taux d'incidence bruts H/F/Mixtes avec IC95% sur les mixtes (AL et AX)

La différence entre les hommes et les femmes s'observe essentiellement avant 40 ans (principalement sur AX) et après 55 ans pour les deux portefeuilles. Les taux d'incidence des femmes semblent plus élevés sur ces deux tranches que ceux de hommes.
Une « bosse »[61] entre 25 et 42 ans chez les femmes est remarquable sur AX. La différence est plus marquée sur AX que sur AL notamment grâce à une exposition nettement plus importante sur les jeunes âges et des taux moins volatils. Sur cette tranche d'âge, la totalité des taux de sortie des hommes et des femmes sortent de l'intervalle de confiance à 95% autour des taux globaux (AX), ce qui semble compromettre la possibilité d'agrégation.
Afin de tester statistiquement la pertinence d'une différenciation, plusieurs tests et indicateurs statistiques ont été calculés :

- Le ratio observé/estimé pour chaque sexe par rapport aux incidences mixtes, qui nous permet de comparer le nombre d'incidences réelles mixtes et le nombre d'incidences estimés avec les taux de chaque sexe ;
- La proportion du nombre de taux pour chaque sexe hors de l'intervalle de confiance à 95% autour des taux globaux ;
- Les taux moyens par sexe ;
- Le test de Wilcoxon-Mann-Whitney, qui est un test non-paramétrique s'appuyant sur les rangs des observations dans l'échantillon (taux d'incidence des hommes et des femmes) pour tester si les deux groupes (hommes vs femmes) sont identiquement distribués.

$$\begin{cases} H_0 : F_1(X) = F_2(X+\theta), & \theta = 0 \\ H_1 : F_1(X) = F_2(X+\theta), & \theta \neq 0 \end{cases}$$

	AX		AL	
	H	F	H	F
Ratio incidences du sexe/mixtes	72%	131%	91%	121%
Proportion des taux hors de l'intervalle à 95% des taux globaux	43%	48%	3%	33%
Taux moyens	4,40%	8,31%	2,93%	3,93%
Test de Wilcoxon-Mann-Whitney	p_val très proche de 0 $\rightarrow$ rejet de H_0 $\rightarrow$ Il y a une différence significative entre les taux d'incidence des hommes et des femmes.		p-val = 0.02 $\rightarrow$ rejet de H_0 $\rightarrow$ Il y a une différence significative entre les taux d'incidence des hommes et des femmes.	

[61] Cette bosse représente les grossesses pathologiques et ce point sera plus détaillé par la suite.

Sur AX comme sur AL, les tests et indicateurs plaident en faveur d'une différenciation selon le sexe. Cela rejoint notre première intuition à l'observation de la « bosse » des grossesses pathologiques (cf. partie suivante).
De plus, à partir de 55 ans, bien que les taux soient volatiles, les taux d'incidence des femmes semblent rester toujours supérieurs à ceux des hommes.
Le choix d'une différenciation par sexe semble justifié. Cette différenciation devrait nous permettre donc de rendre le calcul des réserves plus précis.

2.4.2.2.1 Incidence en arrêt de travail des femmes

Taux bruts

Dans un premier temps, la volatilité des taux bruts pourra être réduite par deux méthodes :

1- Pour les taux en début et en fin de table : agrégation des expositions et du nombre d'incidences pour le calcul des taux, tant que le critère de suffisance défini ci-dessous n'est pas satisfait ;
2- Pour le reste des taux (en « milieu » de table) : réalisation d'un glissement par âge lorsque le critère ci-dessous n'est pas respecté[62].

Critère de suffisance : Il a été choisi d'accepter une volatilité de 10% par taux, ce qui conduit à un minimum de 10 en nombre d'incidences pour le calcul de chaque taux[63]. Ce critère nous permet de respecter le critère de Cochran pour effectuer l'approximation gaussienne dans le cadre de la détermination des intervalles de confiance autour des estimations réalisées avec Hoem (Cf. partie 2.2.2), et même d'être deux fois plus stricte sur ce critère. En effet, en prenant 5 incidences, nos taux bruts étaient encore trop volatiles et les lissages pas efficients.

Pour AX : Une agrégation des expositions et des incidences pour les âges [19 ; 24] et [64 ; 68] a été réalisée en vue de l'estimation des taux bruts, ainsi qu'un glissement sur les âges allant de 58 à 61 ans. L'hypothèse est alors faite que les taux déterminés sur les deux classes d'âge de début et de fin de table sont constants pour tous les âges de la classe.

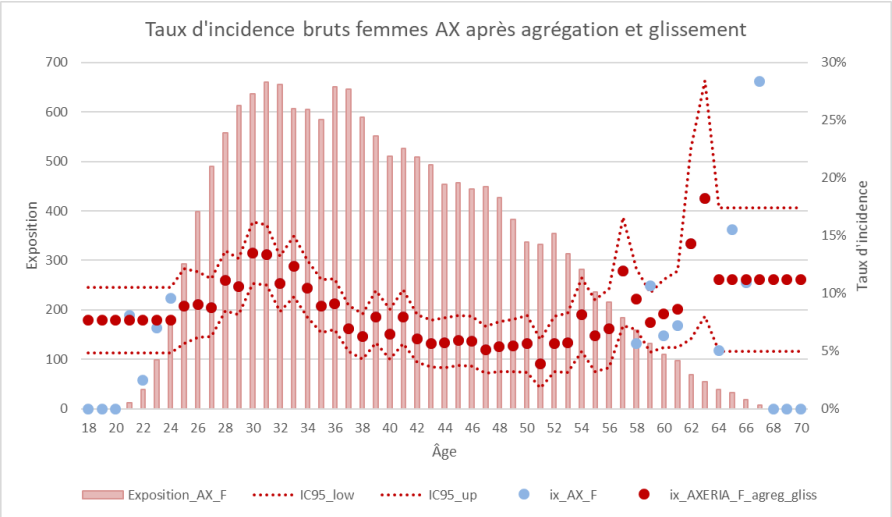


Figure 21 : Taux d'incidence bruts des femmes pour AX après agrégation et glissement

[62] Le taux d'incidence est calculé en prenant pour exposition et pour nombre d'incidence, l'exposition et le nombre d'incidences de l'âge en question, de l'âge qui suit et de l'âge qui précède sommés. Le cas échéant, lorsque le critère n'est toujours pas satisfait, les plages décrites sont portées à deux âges avant et après l'âge concerné.
[63] En effet, une incidence en plus ou en moins sur dix entraine une variation du taux de 10%.

Pour AL : Une agrégation des expositions et des incidences sur les âges [18 ; 27] et [60 ; 64] ainsi qu'un glissement par âge (28-31 ans) ont été réalisés, pour le calcul des taux.

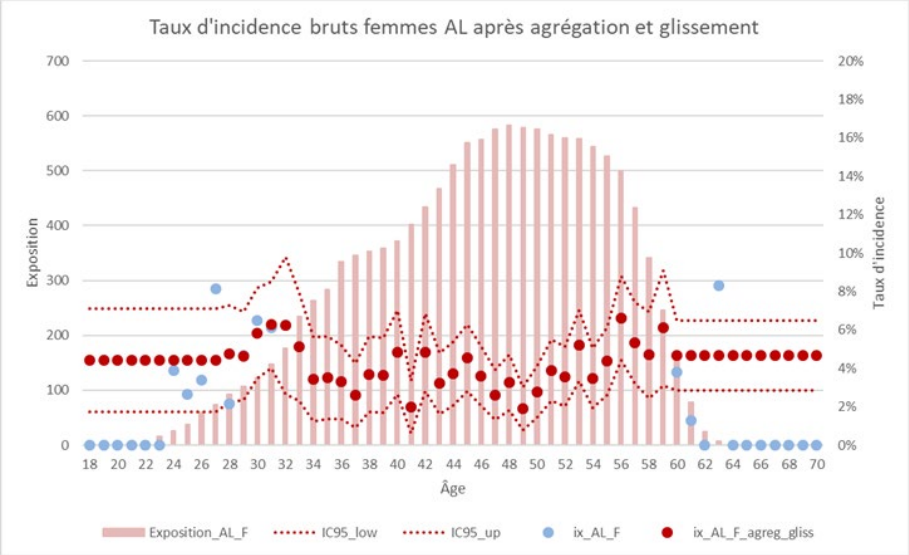


Figure 22 : Taux d'incidence bruts des femmes après agrégation et glissement

Sur ces deux graphiques, nous constatons, comme mentionné précédemment, trois principales tendances :

1. Une « bosse » en début de table :
   - Entre 20 et 42 ans pour AX : le phénomène est plus net sur AX étant donné une exposition plus importante et des taux moins volatils sur ces âges.
   - Entre 26 et 36 ans pour AL : elle est moins allongée que celle de AX (la bosse d'AL prend fin entre 34 et 36 ans) et l'agrégation de début de table vient « amputer » le début de la bosse ;
2. Un « plat » avec des taux relativement stables entre 40 et environ 52 ans. Sur AL, la variation brutale des taux bruts entre 40 et 42 ans (en « V »), vient perturber le plat qui semble s'installer et aucune explication provenant d'un phénomène réel ne justifierait cette volatilité : ces taux bruts sont discutables ;
3. Une croissance des taux à partir de 50 ans.

Ces effets structurels présents dans les taux d'incidence peuvent s'expliquer par une décomposition du taux d'incidence selon les causes : accident, maladie, grossesse pathologique.

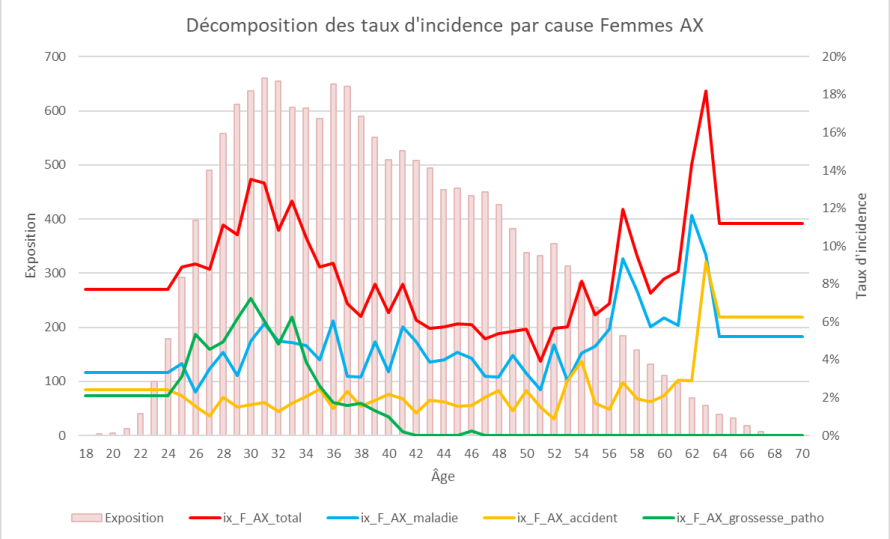


Figure 23 : Décomposition des taux bruts des femmes en fonction de la cause (AX)

Sur ce graphique, les phénomènes de croissance, de décroissance et de plats présents dans les taux globaux sont expliqués à l'aide des causes d'arrêt :

- La « bosse » entre 20 et 40 sur AX provient des grossesses pathologiques.
- Le « plat » entre 40 et 51 ans est expliqué par une incidence stable sur les pathologies étiquetées « maladie » et « accidents ».
- La croissance des taux à partir de 52 ans est principalement expliquée par un accroissement des maladies dans un premier temps, ainsi que des accidents autour de 60 ans.

Décrivant des populations similaires (TNS femmes), les taux d'incidence devraient globalement suivre la même tendance sur le portefeuille AL, malheureusement les causes des arrêts ne sont pas renseignées dans la base de données.

Lissages

Une fois la volatilité des taux réduite grâce aux deux méthodes présentées précédemment, un lissage des taux est réalisé.

- **AX**

Le lissage ne prendra pas en compte les classes d'âge avec des taux d'incidence constant afin de ne pas biaiser le lissage des taux proches de ces parties constantes. Seul un taux parmi ces taux constants sera utilisé dans le lissage afin de prendre en compte le phénomène sur ces classes. Les taux lissés seront également constants sur ces classes, égaux aux taux lissés le plus proche de ces plages constantes afin de respecter la même logique que sur les taux bruts.
Plusieurs lissages ont été testés, notamment les lissages par splines et de Whittaker-Henderson. La méthode de sélection est celle décrite précédemment (dans la partie 2.3.5 Validation de l'ajustement) et est composée des étapes suivantes :

- Validation visuelle dans le but de vérifier que les taux lissés décrivent bien un phénomène réaliste : critères de représentativité et de régularité ;
- Validation selon les critères statistiques suivant : distance de khi-deux, ratio estimés/observé, test des signes, R^2, nombre de points hors de l'intervalle de confiance à 95%.

Dans un premier temps, les paramètres des lissages par WH (précision et régularité) et par splines (nombre de nœud et emplacement de ces nœuds) ont été optimisés avec cette même procédure de validation.

Optimisation du nombre et de l'emplacement des nœuds pour les splines :
Le but est de représenter dans le lissage les trois tendances observables dans les taux bruts : la « bosse grossesse pathologique », le plat entre 40 et 50 ans, la croissance après 50 ans.

Après plusieurs tests[64], un ajustement[65] à trois nœuds semblent optimal lorsqu'ils sont répartis :

1- Entre 25 et 33 ans pour modéliser une première tendance parabolique et « coller » à la bosse ;
2- Entre 34 et 40 ans pour le plat des 40-50 ans ;

[64] Les combinaisons de tous ces nœuds ont été testés et comparés visuellement et grâce aux statistiques de notre procédure de validation. Notre choix s'est porté sur les combinaisons optimisant nos trois critères de lissage (représentativité, régularité et précision).
[65] Les splines à deux nœuds ne permettaient pas de représenter ces trois phénomènes, et les splines à quatre nœuds et plus n'amélioraient pas le lissage, au contraire ils étaient trop proches des taux bruts et incorporaient de la volatilité non souhaitée.

3- Entre 48 et 55 ans pour la croissance sur la fin de la table.

Comme pour les splines, les paramètres du lissage par WH ont également été choisis de manière à optimiser nos trois critères de lissage. Dans cette partie, seulement la comparaison entre le lissage par splines et par WH « optimisés » est présentée :

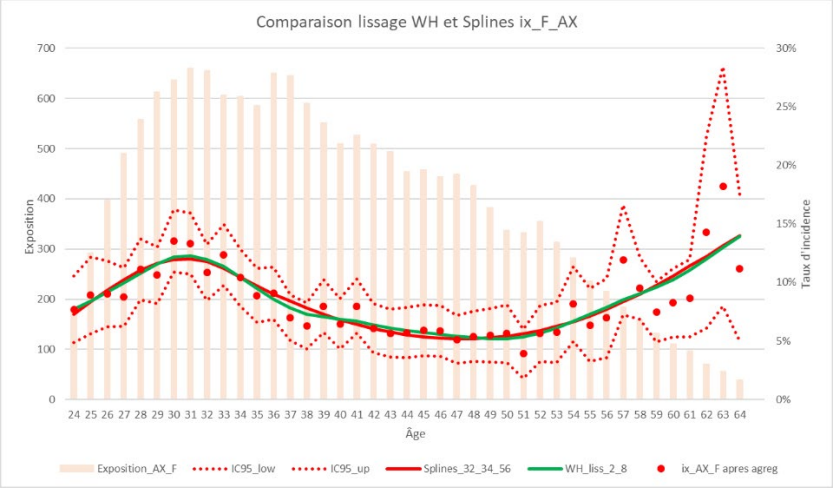


Figure 24 : Comparaison lissages WH et par splines pour ix_F_AX

Les taux lissés avec ces deux méthodes sont similaires, bien qu'il demeure une petite différence entre 36 et 39 ans :

- WH est plus proche des taux bruts ;
- Les splines sont plus lisses.

Au niveau des critères statistiques, le lissage de WH présente de meilleurs résultats que le lissage par splines sur les trois critères de la distance du χ^2, du ratio observés/estimés et du R^2 :

Lissage	hki_2	Ratio observés/estimés	p_val test des signes	R.2	NB_point_hors_IC95
Splines_5	59,71	99,92%	0,76	73,9%	0
WH_2_8	55,82	100,03%	0,53	76,5%	0

Les taux lissés par WH sont globalement plus prudents (cf. le ratio observés/estimés).
Afin d'objectiver le niveau de prudence de ces deux lissages, pour chaque type de lissage, un indicateur d'exposition a été calculé, qui est la somme des expositions lorsque le taux de ce lissage est supérieur à l'autre.

Somme de l'exposition lorsque taux WH > taux Splines :	8 978
Somme de l'exposition lorsque taux WH < taux Splines :	7 303

→ **<u>Choix :</u> Bien que les deux lissages semblent bien représenter le phénomène, le lissage choisi sera le lissage avec la méthode de WH[66] étant donné qu'il est plus prudent et plus proche des taux bruts.**

- **<u>AL</u>**

Les mêmes méthodes de lissage que pour AX ont été appliquées à AL dans un premier temps, à savoir un lissage par splines cubiques ou par WH.

[66] De paramètres égaux à 2 et à 8.

Cependant, la volatilité des taux et la plage d'ajustement réduit à 26-60 ans (agrégation en début et fin de table) pourraient dégrader la qualité des ajustements. C'est pourquoi nous avons également ajusté des modèles relationnels afin d'extraire les tendances présentes sur AX. En effet, aucune raison ne semble justifier que ces phénomènes ne soient pas similaires sur AX et sur AL, bien qu'ils puissent avoir des ordres de grandeur différents.

→ **Le lissage de WH** ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants pour les tranches d'âge 40-42 ans et 50 ans et plus car les taux bruts sont trop erratiques : **ce lissage n'est pas conservé.**

Les trois modèles relationnels présentés dans la partie théorique (ratio observés/estimés, Brass et GLM Poisson) ont donc été ajustés, en prenant comme taux de références les taux d'incidence en incapacité des femmes sur AX, précédemment lissés par WH et par des splines. En effet, nous avons profité du fait de disposer de différents taux lissés (splines et WH) représentant un même phénomène, pour améliorer l'ajustement des taux lissés sur AL.

Diagnostique sur les modèles de Brass et GLM Poisson :

- **Brass**

La régression linéaire (sur les logits), prenant en compte tous les taux, satisfait les hypothèses de :

- Normalité (test de Shapiro-Wilk sur les résidus) : p-values à 0.65 et 0.69 (taux de référence lissés par splines et par WH), donc elles sont non-significatives au seuil de 5% et les hypothèses H_0 de normalité des erreurs au seuil de 5% ne sont pas rejetées au risque de commettre des erreurs de deuxième espèce[67] ;
- Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan) : p-values à 0.30 et 0.28, donc elles sont non-significatives au seuil de 5% et les hypothèses H_0 de constance de variance des erreurs au seuil de 5% ne sont pas rejetées au risque de commettre des erreurs de deuxième espèce ;
- Linéarité (test Rainbow[68]) : p-values à 0.67 et 0.73, donc elles sont non-significatives au seuil de 5% et les hypothèses H_0 de linéarité entre les logits des taux au seuil de 5% ne sont pas rejetées au risque de commettre des erreurs de deuxième espèce.

Certains résidus[69] semblent importants (hors de l'intervalle de confiance à 95% autour de 0), interrogeant sur le caractère atypique de certaines observations utilisées dans la régression.

[67] L'objectif n'est pas de calculer exactement cette erreur, mais avec un effectif de 34 la puissance du test est satisfaisante et donc le risque d'erreur de deuxième espèce suffisamment limité.

[68] Le test de Rainbow vérifie la relation linéaire entre les données. Ils se base sur l'idée que si le modèle est vraiment linéaire, alors l'ajout de données au sous-échantillon (y_i, X_i) ne devrait pas trop modifier le R^2. Sa statistique se base sur la différence des R^2, et suit une loi de Fisher de paramètres dépendant du nombre d'observations, du nombre de covariables et de la taille du sous-échantillon. Ce test est effectué avec la fonction raintest() du package lmtest dans R.

[69] Les résidus studentisés externes (rstudent du package stats de R) sont comparés aux quantiles d'une loi de student à n-p-2 (34-1-2=31 dans notre cas) degrès de libertés afin de détecter les résidus « trop » grands (Bertrand, Claeys, & Maumy-Bertrand, 2019, p. 226).

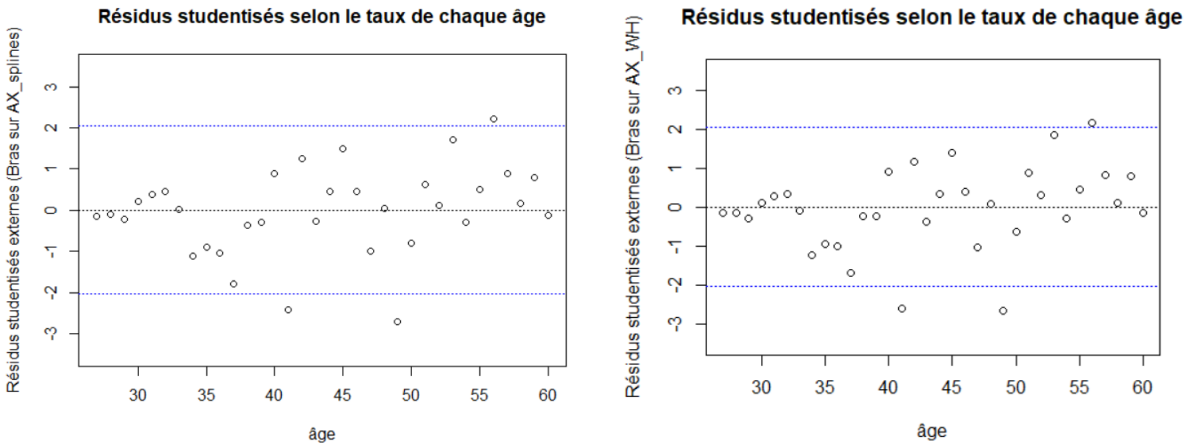


Figure 25 : Résidus studentisés externes de la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_F)

Deux types d'observations[70] atypiques peuvent être distingués selon Bertrand, Claeys et Maumy-Bertrand (2019, p. 226) :

- celles qui ont un « trop » grand résidu ;
- celles qui sont trop isolées (pouvant entrainer un effet de levier important).

Dans les deux cas, ces observations peuvent avoir un impact sur la régression et la pertinence de les prendre en compte dans l'estimation des paramètres de la régression sera questionnée.
La distance de Cook permet, en ce sens, de disposer d'une mesure globale de l'impact de la suppression d'une observation sur l'estimation des paramètres de la régression. Le seuil de $\frac{4}{n}$ (n étant le nombre d'observations) est souvent utilisé : lorsque la distance de Cook d'une observation dépasse ce seuil, l'observation est considérée comme influente.
Dans cette régression par exemple, la distance de Cook pour le taux des femmes âgées de 49 ans est bien supérieure au seuil de $\frac{4}{34}$. D'autres distances de Cook se rapprochent également de ce seuil, et la possibilité de ne pas tenir compte de ces observations sera donc aussi étudiée (56, 53, 41 ans …).
À chaque régression ajustée, en commençant par la régression sur toutes les observations, l'observation avec la plus grande distance de Cook dépassant le seuil sera identifiée et retirée pour la régression suivante, jusqu'à ce que plus aucune distance de Cook ne dépasse le seuil.

[70] Les observations, dans notre cas, sont les taux bruts sur lesquels se base la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass.

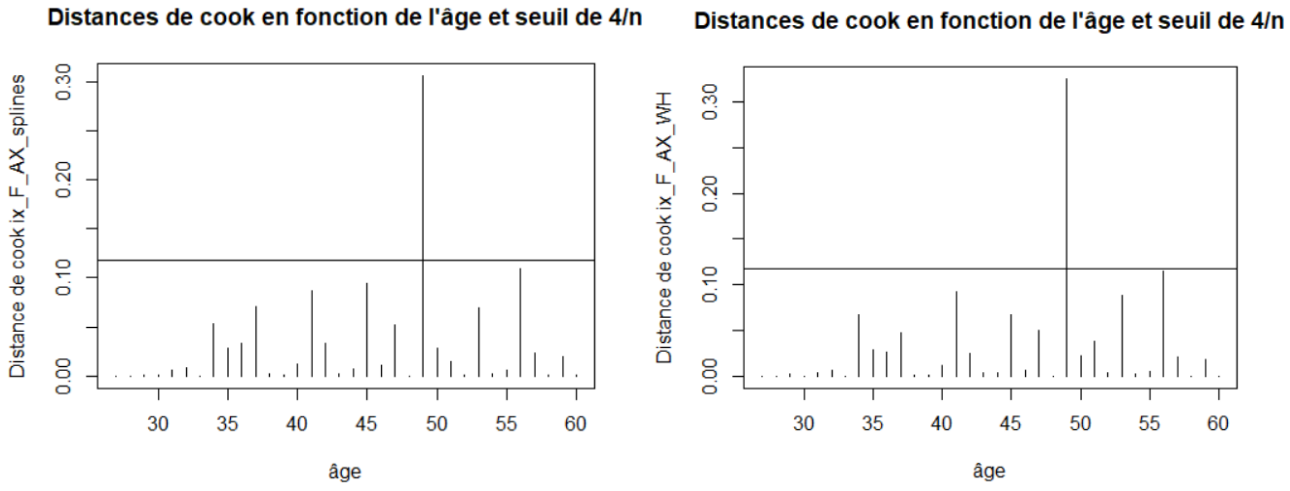


Figure 26 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_F)

<u>Optimisation du modèle de Brass :</u>

Plusieurs modèles de Brass ont donc été ajustés en retirant itérativement l'observations avec la plus grande distance de Cook dépassant le seuil de 4/n.

Le but était d'optimiser l'ajustement selon la procédure statistique définie, tout en veillant toujours à satisfaire les hypothèses du modèle linéaire (normalité, homoscédasticité et relation linéaire).

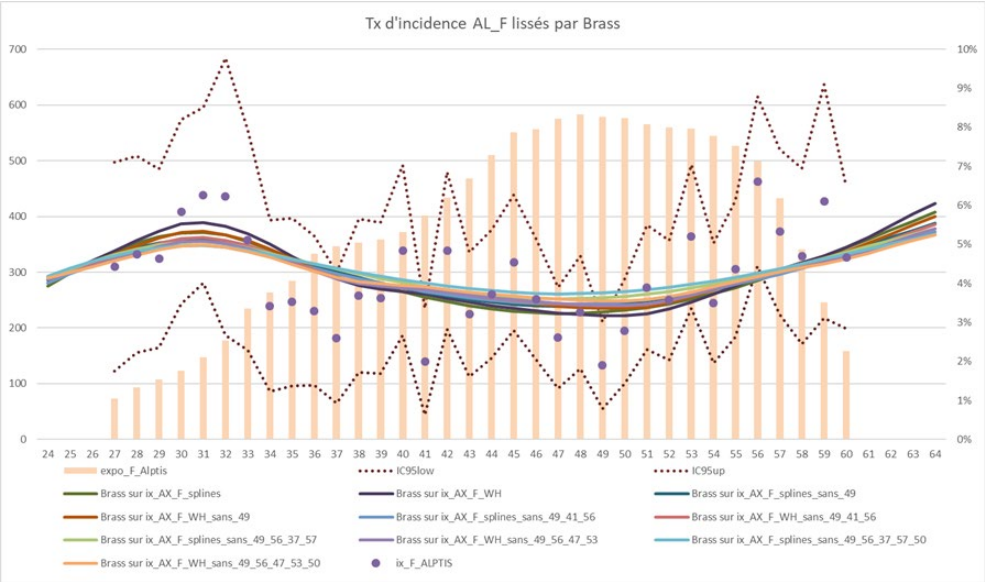


Figure 27 : Modèles de Brass pour les taux d'incidences en incapacité d'AL avec pour référence les taux lissés d'AX femmes

<u>Procédure statistique de choix</u> :

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	signes	R^2	Nb points hors IC95	SW	BP	RB	Âges à grande dist_COOK
Brass sur ix_AX_F_splines	40,501	103,3%	3,26%	0,608	31,4%	3	0,65	0,3	0,67	49
Brass sur ix_AX_F_WH	38,570	103,1%	3,09%	0,864	35,5%	3	0,69	0,28	0,73	49
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49	39,440	101,0%	0,95%	0,608	31,2%	4	0,73	0,65	0,47	56, 41
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49	37,642	100,9%	0,93%	0,864	35,4%	3	0,8	0,62	0,53	56, 41
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_41_56	39,965	100,9%	0,94%	0,864	29,7%	3	0,36	0,87	0,42	37, 47
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_41_56	38,061	100,8%	0,81%	0,864	34,3%	3	0,68	0,91	0,52	47, 53
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_56_37_57	39,256	97,8%	2,18%	0,392	29,5%	4	0,23	0,67	0,25	50
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_56_47_53	38,478	101,1%	1,08%	0,864	33,4%	3	0,43	0,67	0,48	50
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_56_37_57_50	40,082	96,2%	3,78%	0,229	27,0%	4	0,25	0,35	0,8	-
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_56_47_53_50	38,826	99,7%	0,30%	0,864	31,4%	3	0,36	0,56	0,23	-

Notation :

- signes : pour la p-valeur au test des signes ;
- SW : pour la p-valeur au test de Shapiro-Wilk ;
- BP : pour la p-valeur au test de Breusch-Pagan ;
- RB : pour la p-valeur au test de Rainbow ;

Tous les ajustements testés satisfont les hypothèses du modèle linéaire sous-jacent au modèle de Brass, la procédure de choix par le score définie dans la partie 2.3.4.6 est donc appliquée. Pour chaque critère, 10 points sont attribués à l'ajustement le plus performant et 1 au moins bon.

	Système de points					
	khi-deux	ratio obs/esti	test des signes	pts_hors_IC95%	Total	Classement
Brass sur ix_AX_F_splines	1	2	5	10	29	9
Brass sur ix_AX_F_WH	7	3	10	10	60	5
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49	4	6	4	3	41	7
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49	**10**	**8**	**9**	**10**	**82**	**1**
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_41_56	3	7	3	10	46	6
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_41_56	**9**	**9**	**8**	**10**	**80**	**2**
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_56_37_57	5	4	2	3	34	8
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_56_47_53	8	5	7	10	63	4
Brass sur ix_AX_F_splines_sans_49_56_37_57_50	2	1	1	3	14	10
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49_56_47_53_50	6	10	6	10	70	3

Les ajustements de Brass sur les taux d'incidence en incapacité des femmes ne prenant pas en compte les âges 49 ans et les âges 49, 51 et 56 ans sont les plus performant selon ce système de points. Leurs scores sont très proches, ils seront donc observés et soumis au critère de prudence déjà utilisé pour les comparaisons sur AX.

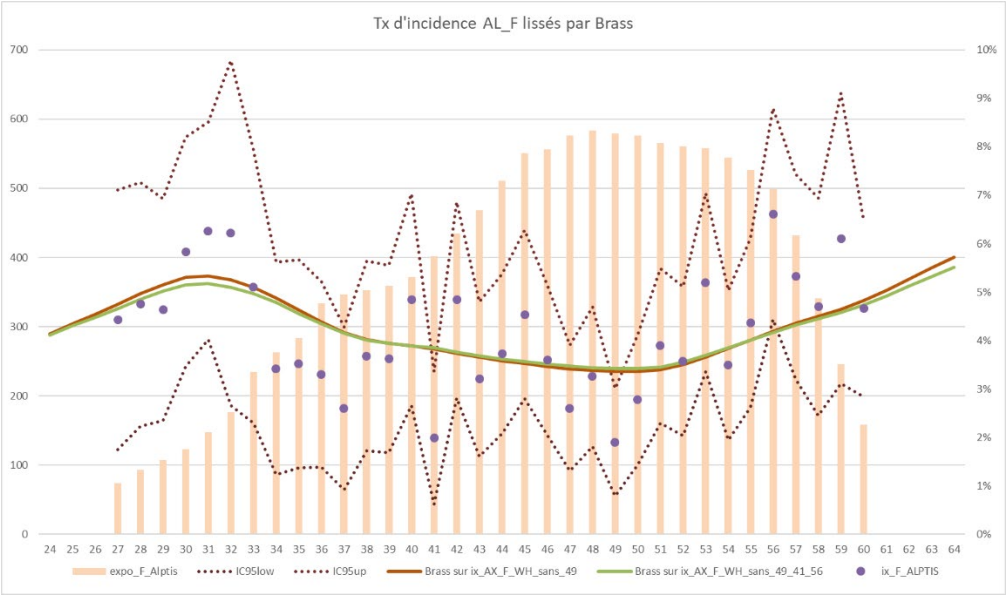


Figure 28 : Lissages par Brass pour les taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL

<u>Critère de prudence</u> :

Sum Expo ix_Brass_sur_AX_WH_sans_49 < ix_Brass_sur_AX_WH_sans_49_41_56 :	8 193
Sum Expo ix_Brass_sur_AX_WH_sans_49 > ix_Brass_sur_AX_WH_sans_49_41_56 :	4 738

→ **Le choix se portera donc sur l'ajustement par un modèle de Brass prenant comme taux de référence les taux d'incidence en incapacité des femmes d'AX et dont les estimations des paramètres du modèle se font sans prendre en compte les taux des âges 49, 41 et 56 ans (Courbe verte).**

- **<u>GLM Poisson</u>**

Les résidus studentisés externes issus des ajustements par GLM Poisson sont globalement dans les intervalles de confiance à 95% autour de 0 et ne présentent pas de tendance particulière. Cependant, comme pour le modèle de Brass, l'estimation des paramètres va être optimisée en retirant, successivement les observations les plus influentes et dépassant le seuil, selon la distance de Cook.

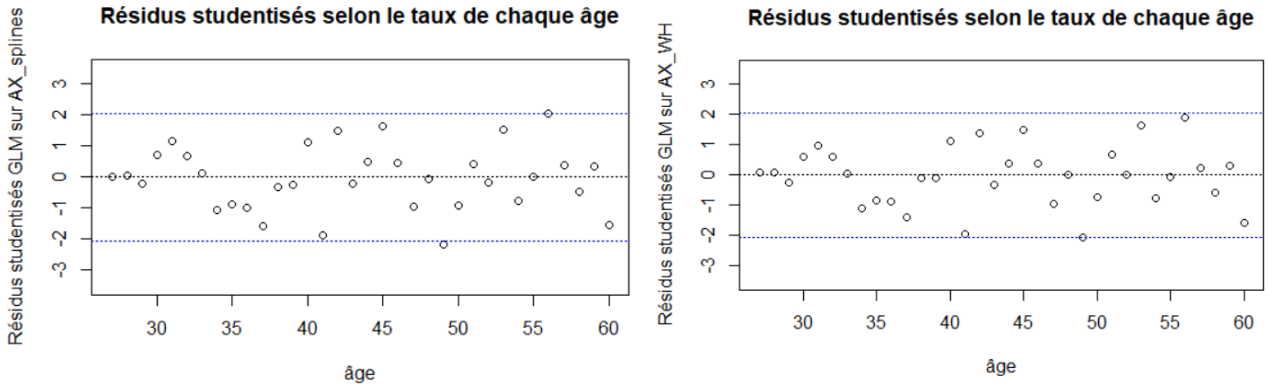


Figure 29 : Résidus studentisés externes du modèle GLM Poisson ajustés pour les taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL sur les taux de référence ix_AX_F lissés par splines et WH

Il est remarquable que plusieurs observations ont une distance de Cook supérieure au seuil de $\frac{4}{n}$ (pour les âges 60, 56 et 49) et que d'autres s'en rapprochent. La possibilité de les retirer sera étudiée afin d'optimiser l'estimation des paramètres du modèle du point de vue des critères statistiques définis.

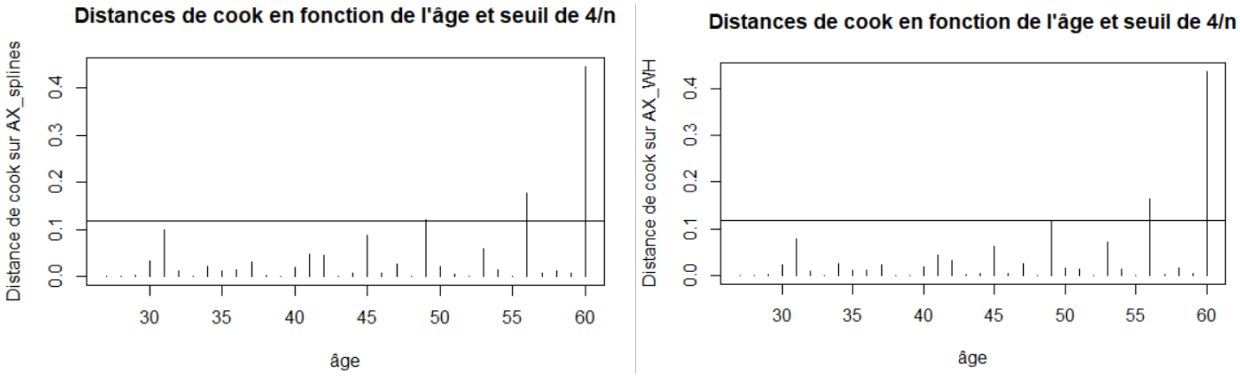


Figure 30 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour l'ajustement par GLM Poisson sur les log des taux ix_F_AX lissés par Splines et par WH et sur l'âge

<u>Optimisation de l'ajustement GLM</u> :

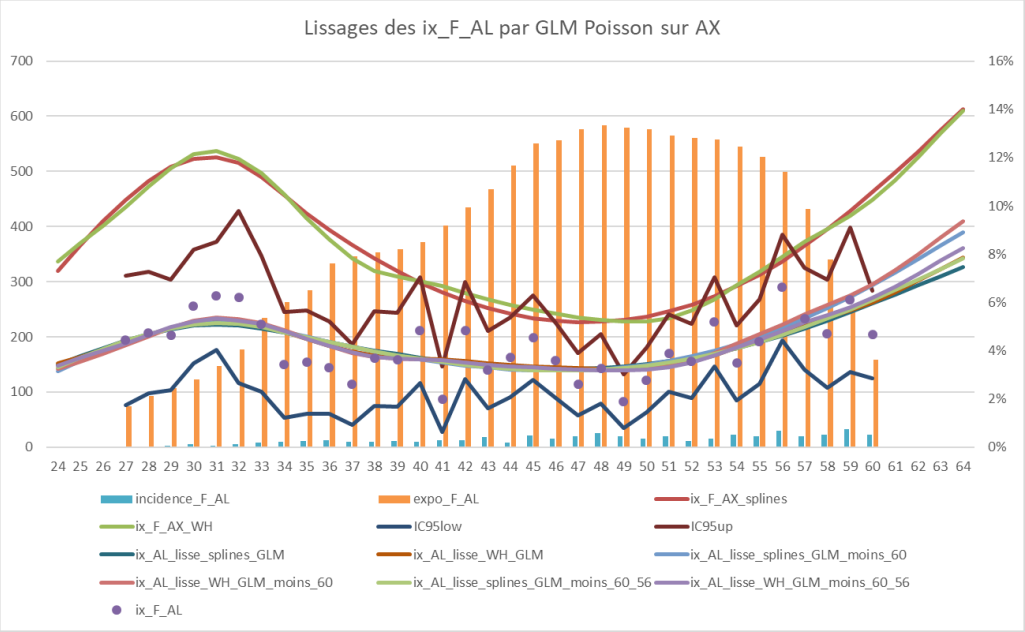


Figure 31 : Lissages des taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL par des modèles GLM Poisson sur AX

<u>Procédure statistique de choix</u> :

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	p_val test des signes	R^2	Nb points hors IC95	Âges avec gd Dist Cook
ix_AL_lisse_splines_GLM	90,646	93,4%	6,64%	0,864	40%	2	60, 56
ix_AL_lisse_WH_GLM	87,725	93,5%	6,46%	0,608	46%	2	60, 56
ix_AL_lisse_splines_GLM_moins_60	78,148	92,0%	7,99%	0,392	37%	3	56
ix_AL_lisse_WH_GLM_moins_60	75,816	92,1%	7,86%	0,229	41%	3	56
ix_AL_lisse_splines_GLM_moins_60_56	87,494	94,0%	6,02%	0,608	40%	2	-
ix_AL_lisse_WH_GLM_moins_60_56	84,213	93,9%	6,06%	0,608	45%	2	-

Le système de scoring défini à la partie 2.3.4.6, oriente notre choix vers des ajustements dont les paramètres ont été estimés sans prendre en compte les âges 60 et 56 ans pour les femmes d'AL :

	Système de points					
	khi-deux	ratio obs/esti	test des signes	pts_hors_IC95%	Total	Classement
ix_AL_lisse_splines_GLM	1	3	6	6	30	4
ix_AL_lisse_WH_GLM	2	4	5	6	34	3
ix_AL_lisse_splines_GLM_moins_60	5	1	2	2	24	6
ix_AL_lisse_WH_GLM_moins_60	6	2	1	2	28	5
ix_AL_lisse_splines_GLM_moins_60_56	3	6	5	6	43	1
ix_AL_lisse_WH_GLM_moins_60_56	4	5	5	6	43	1

Il reste à choisir les taux de référence pour l'ajustement : lissés par splines ou par WH.
Pour cela, le critère de prudence est à nouveau utilisé et plaide en faveur des taux d'AX lissés par WH :

Sum Expo ix_AL_GLM_AX_Splines_sans_60_56 > ix_AL_GLM_AX_WH_sans_60_56 :	5 636
Sum Expo ix_AL_GLM_AX_Splines_sans_60_56 < ix_AL_GLM_AX_WH_sans_60_56 :	7 296

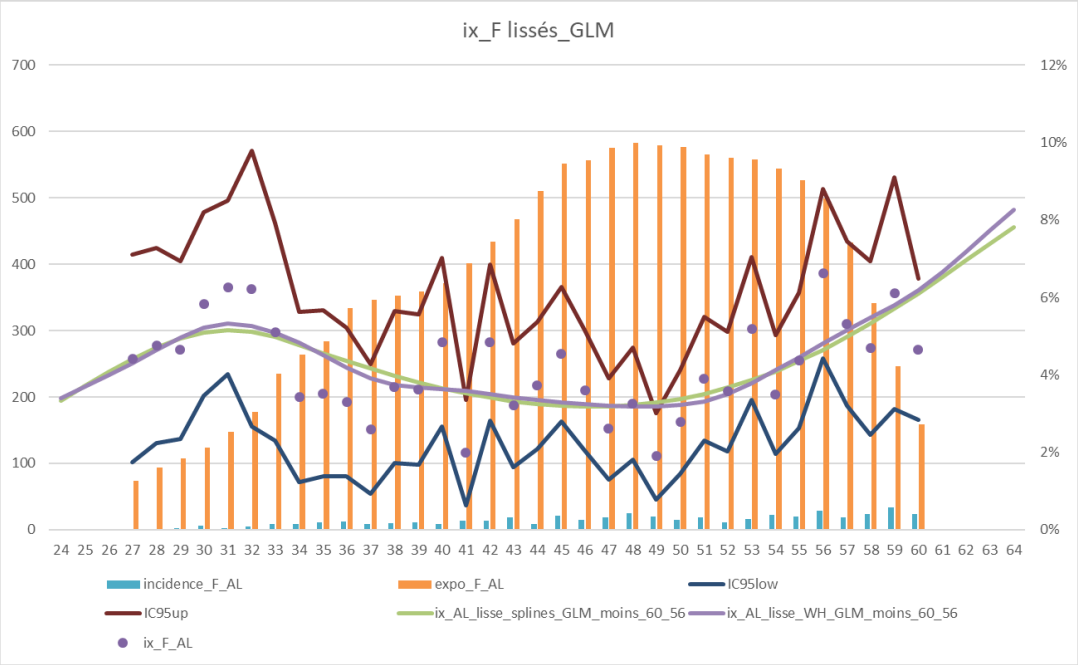


Figure 32 : Taux d'incidence en incapacité pour les femmes d'AL ajustés par un GLM poisson optimisé

<u>Comparaison des différents types d'ajustements</u> :

Afin d'avoir un aperçu de ces ajustements, voici leurs graphiques ainsi que les statistiques de la procédure de choix :

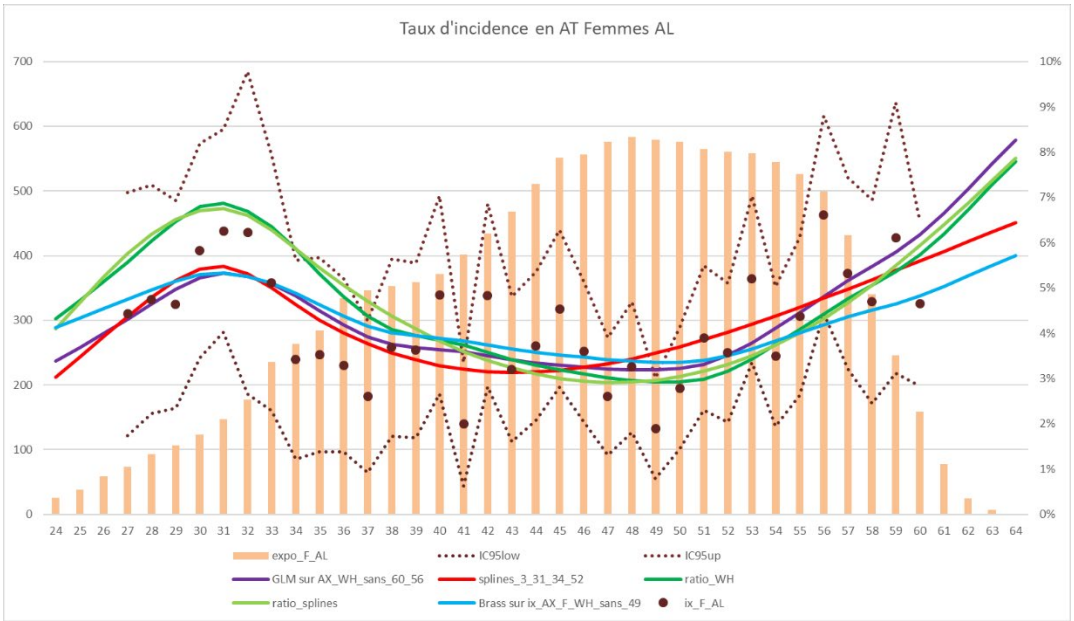


Figure 33 : Comparaison des ajustements des taux d'incidence en incapacité pour les femmes d'AL

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	p_val test des signes	R^2	Nb points hors IC95
GLM sur AX_WH_sans_60_56	32,865	100,429%	0,429%	0,608	45,23%	2
splines_3_31_34_52	35,681	99,839%	0,161%	0,608	46,05%	1
ratio_WH	41,946	100,000%	0,000%	0,121	8,12%	4
Brass sur ix_AX_F_WH_sans_49	37,642	100,933%	0,933%	0,864	35,44%	3

<u>Commentaires</u> :

- Les ajustements par ratio (courbes vertes) semblent être les moins performants selon les critères statistiques définis (hormis pour le ratio observés/estimés qui, par définition, doit être de 100% pour ces ajustements) et graphiquement (sur-ajustement en début de table et sous-ajustement en fin de table) : **ces ajustements ne sont pas conservés**.
- L'ajustement par le modèle de Brass présente une « bosse grossesses pathologiques » moins marquée et des taux plus élevés jusqu'à 51 ans pour ensuite avoir des taux globalement sous les taux bruts sur la fin de table. Cet ajustement est le plus prudent (cf. ratio obs/esti), mais le moins proche (χ^2, R^2 *et* $IC_{95\%}$) des taux bruts parmi les ajustements restants. Or, nous poursuivons un objectif d'estimation « *BE* » pour nos hypothèses techniques : **cet ajustement n'est donc pas conservé**.
- Les deux derniers ajustements conservés sont relativement proches selon ces critères statistiques et graphiquement. Nous allons donc utiliser le score et le critère de prudence pour effectuer notre choix.

Score :

	Système de points					
	khi-deux	ratio obs/esti	test des signes	pts_hors_IC95%	Total	Classement
GLM sur AX_WH_sans_60_56	4	2	3	3	27	1
splines_3_31_34_52	3	3	3	4	28	2

Critère de prudence :

Sum Expo ix_GLM>ix_splines :	6 856
Sum Expo ix_GLM<ix_splines :	5 453

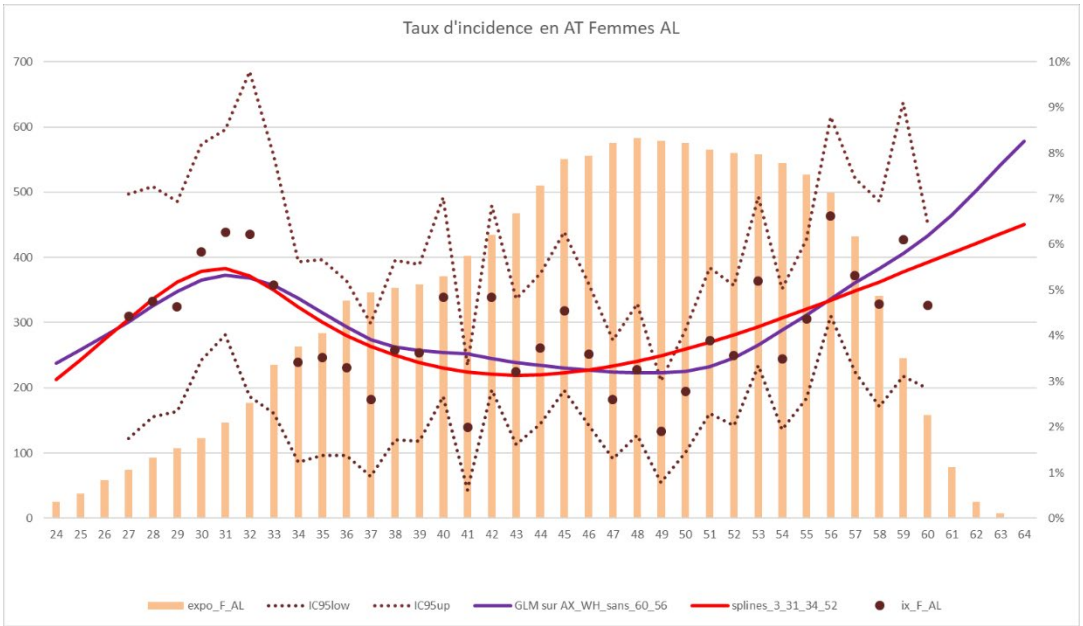


Figure 34 : Taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL lissés

→ **Choix** : **Les deux ajustements sont très proches au regard de la procédure statistique de choix qui ne permet pas de trancher. C'est le critère de prudence qui orientera notre choix vers l'ajustement par un modèle relationnel GLM Poisson sur AX (courbe violette).**
Ce choix pourrait être discutable au vu des taux plus élevés avec les splines sur la tranche fortement exposée des 46-56 ans, mais sur presque tous les autres âges, le modèle GLM présente des taux supérieurs, ce qui est mis en avant par le critère de prudence.

2.4.2.2.2 Incidence en arrêt de travail des hommes

Une méthodologie analogue à celle présentée pour les femmes a été utilisée pour les hommes. Ainsi, dans cette partie, nous ne présenterons que les résultats. Des explications seront détaillées que lorsqu'elles seront nécessaires pour comprendre la méthodologie ou les choix.

Taux brutes :

La détermination des taux bruts passe par les mêmes étapes que pour les femmes :

1. Utilisation de l'estimateur des moments de Hoem ;
2. Agrégation des expositions et du nombre d'incidences des âges en début et en fin de table, pour le calcul des taux, afin de respecter notre critère permettant de limiter la volatilité des taux à 10% en cas d'une incidence en plus ou en moins ;
3. Taux constants pour tous les âges agrégés en début et en fin de table ;
4. Glissement par âges sur les autres âges, lorsque nécessaire, pour respecter notre critère.

- **AX**

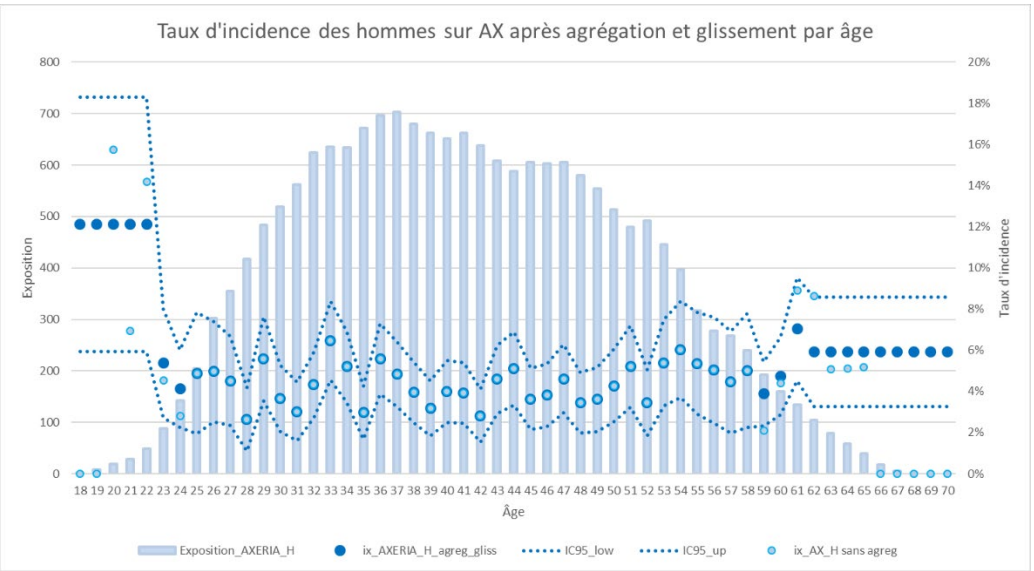


Figure 35 : Taux d'incidence bruts des hommes pour AX après agrégation et glissement par âges

Deux principaux phénomènes sont observables :

3- Des taux d'incidence nettement plus élevés pour les hommes de moins de 23 ans, ce qui est expliqué, dans la base de sinistre, par des arrêts pour les jeunes artisans. Nous pouvons supposer qu'au début de l'exercice des métiers artisanaux, il y a plus de risque d'arrêt de travail que lorsque les artisans ont gagné en séniorité.
4- Une tendance légèrement croissante avec l'âge.

Ces deux phénomènes se confirment à l'observation des taux d'incidences décomposés en fonction de la cause de l'arrêt :

1- Les taux d'incidence sont nettement plus élevés sur les jeunes âges et sont presque totalement expliqués par des accidents ;
2- La légère croissance globale des taux est due à l'augmentation des maladies avec l'âge.

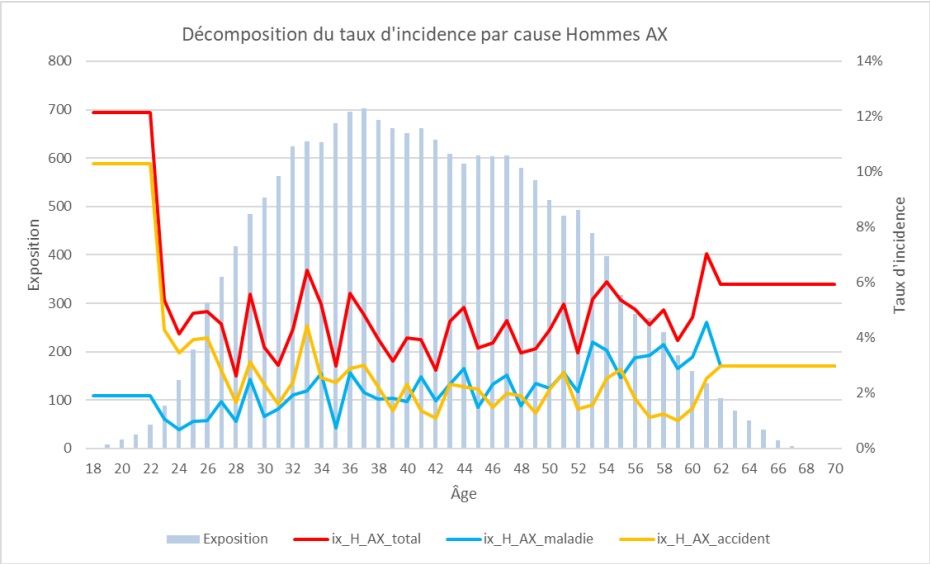


Figure 36 : Décomposition du taux d'incidence des hommes de AX selon la cause de l'arrêt de travail.

<u>Remarque</u> : en comparaison avec les femmes, la croissance des taux est moins prononcée entre 50 et 60 ans, ce qui est notamment expliqué par une composante accident moins croissante chez les hommes sur ces âges[71].

- **<u>AL</u>**

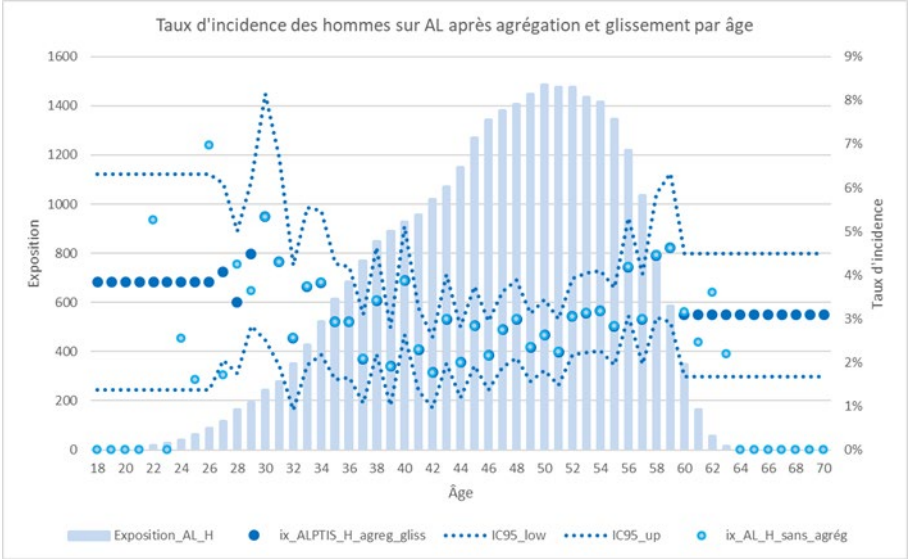


Figure 37 : Taux d'incidences bruts pour les hommes sur AL après agrégation et glissement.

Décrivant des populations similaires (TNS homme), les taux d'incidence devraient globalement suivre la même tendance sur le portefeuille AL que sur le portefeuille AX :

3- Tendance croissante avec l'âge ;
4- Les taux plus hauts avant 26 ans que sur la plage 33-54 ans pourraient être le témoin de la prise en compte de l'incidence accidentelle chez les jeunes dans ces taux agrégés.

<u>Remarque :</u> Les taux sont très volatils entre 26 et 36, ce qui complique l'interprétation et l'identification d'une tendance claire.

[71] Dans cette étude, la composante accident est fortement croissante sur les grands âges pour les femmes (cf. Figure 21 dans la partie précédente).

Lissages :

- **AX :**

Nous avons, comme pour les femmes, effectué une comparaison des lissages par splines cubiques et par WH. Les lissages par WH ne permettent pas de représenter le phénomène de façon réaliste, car ils ne lissent pas les pics présents autour 33 ans et de 54 ans, alors qu'aucune raison ne semble justifier une augmentation soudaine de l'incidence en arrêt de travail sur ces âges. Le lissage sera, par conséquent, un lissage par splines cubiques. Le nombre de nœuds et leurs emplacements sont choisis dans la même logique que pour les femmes, sachant que nous souhaitons capter :

- La première décroissance avec des taux d'incidence plus élevés pour les jeunes hommes ;
- La croissance continue des taux en fonction de l'âge, mais elle semble être plus marquée à partir de 50 ans.

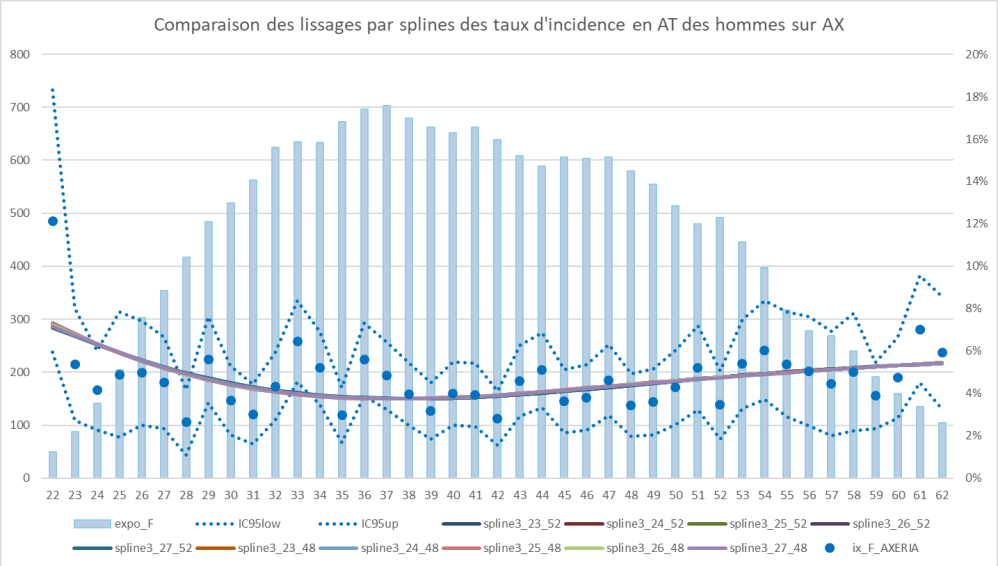


Figure 38 : Lissages par splines cubiques pour les taux d'incidence des hommes AX

Commentaire :

Ces lissages sont très proches et semblent refléter le phénomène voulu. Le choix s'effectuera donc au regard des critères statistiques utilisés depuis le début de cette étude.

→ **Choix : Tous ces lissages auraient pu être choisis étant donné leur proximité et leur capacité à refléter convenablement le phénomène. Cependant, nous choisissons celui qui est le plus proche de nos taux bruts, donc minimisant la distance du χ^2 : le spline cubique avec des nœuds aux âges 27 et 52 ans.**

- **AL :**

De façon similaire aux femmes, plusieurs modèles ont été comparés pour ajuster les taux d'incidence en incapacité des hommes sur AL :

- Des splines directement sur les taux bruts hommes estimés sur AL ;
- Un modèle de WH directement sur les taux bruts hommes estimés sur AL ;
- Un ajustement des taux d'AX (hommes) par le biais d'un coefficient multiplicatif correspondant au ratio observés/estimés par rapport aux incidences effectives sur AL (hommes) ;
- Un modèle de Brass prenant comme taux de référence les taux d'incidence sur AX (hommes) ;

- Un modèle GLM Poisson prenant comme taux de référence les taux d'incidence sur AX (hommes).

Le but était à nouveau de représenter un phénomène sur AL, inobservable par manque de données, mais dont nous souhaitions extraire la tendance sur AX (à savoir la hausse des taux d'incidence pour les jeunes due aux accidents).

Splines : le nombre de nœuds et leur emplacement ont été optimisés, comme pour AX, selon la procédure statistique définie.

WH : les paramètres ont été optimisés, selon la procédure statistique définie.

Optimisation du modèle de Brass :

La régression linéaire (sur les logits), prenant en compte tous les taux bruts, satisfait les hypothèses de :

- Normalité (test de Shapiro-Wilk sur les résidus) ;
- Homoscédasticité (test de Breusch-Pagan) ;
- Linéarité (test Rainbow).

Les résidus studentisés externes sont tous (sauf un) dans l'intervalle de confiance à 95% autour de 0, ce qui semblent globalement satisfaisant pour la régression linéaire sous-jacente.

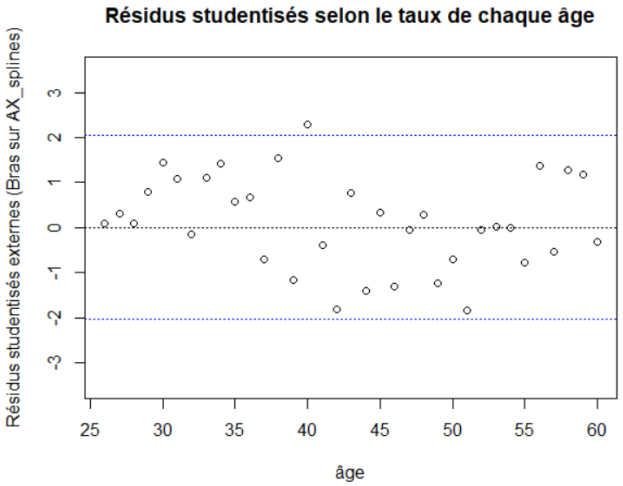


Figure 39 : Résidus studentisés externes de la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_H_AL)

Cependant, comme pour les femmes, certaines observations semblent très impactantes dans l'estimation des paramètres de la régression, et la possibilité de le retirer sera étudiée : taux pour les hommes âgés de 38, 40, 42, 51 et/ou 56 ans.

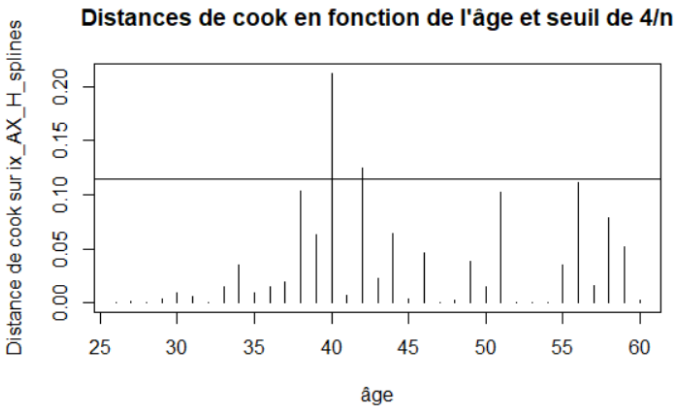


Figure 40 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_H)

Ainsi, plusieurs modèles de Brass seront ajustés, en retirant les taux à forte influence précités pour optimiser l'ajustement (tout en veillant toujours à satisfaire les hypothèses du modèle linéaire sous-jacent).

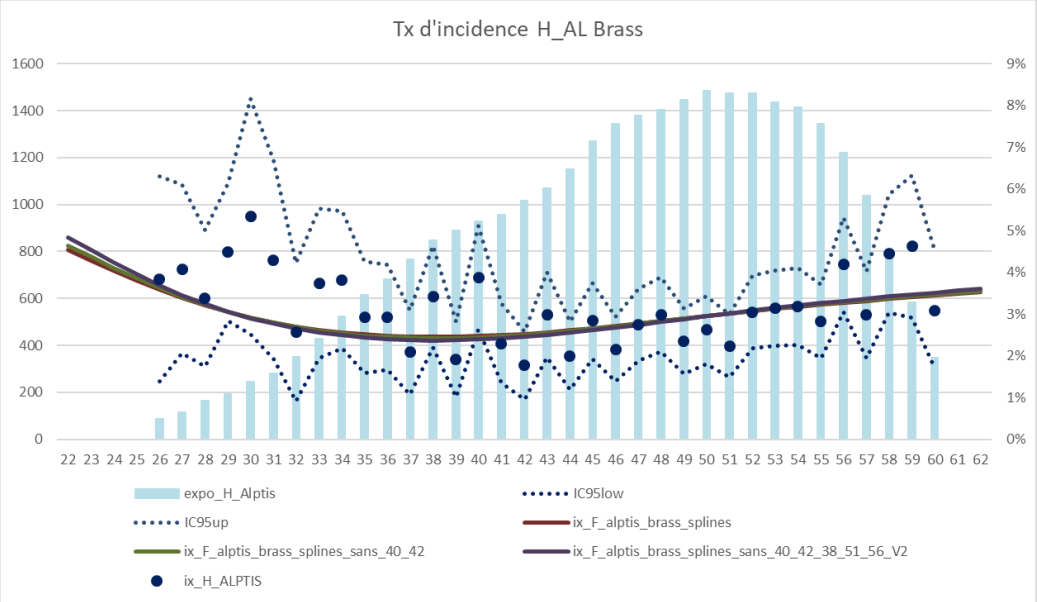


Figure 41 : Comparaison des modèles de Brass pour les taux d'incidence en incapacité H

Les trois ajustements sont très proches, surtout sur la tranche d'âge à forte exposition. Ils auraient donc tous pu être choisis.
Néanmoins, les critères statistiques de choix définis donnent un léger avantage au **modèle de Brass dont les paramètres ont été estimés sur toutes les observations (les taux bruts de tous les âges)** : ce modèle est retenu.

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	signes	R^2	Nb points hors IC95	SW	BP	RB	âges à grandes dist_Cook
ix_F_alptis_brass_splines	52,920	102,4%	2,38%	0,500	8%	2	0,51	0,13	0,22	40, 42
ix_F_alptis_brass_splines_sans_40_42	53,185	102,6%	2,57%	0,500	8%	2	0,37	0,36	0,19	38, 51, 56
ix_F_alptis_brass_splines_sans_40_42_38_51_56_V2	54,078	103,1%	3,09%	0,500	7%	2	0,11	0,41	0,17	-

<u>Optimisation de l'ajustement par modèle GLM Poisson :</u>

Bien que les résidus semblent satisfaisants (dans l'intervalle de confiance à 95% autour de 0 et sans tendance apparente), les distances de Cook montrent à nouveau que certaines observations ont une influence forte sur l'estimation des paramètres du modèle. Comme précédemment, plusieurs

modèles seront ajustés en retirant certaines observations (40, 56, 58, 59 ans) dans le but d'optimiser l'ajustement selon la procédure statistique définie.

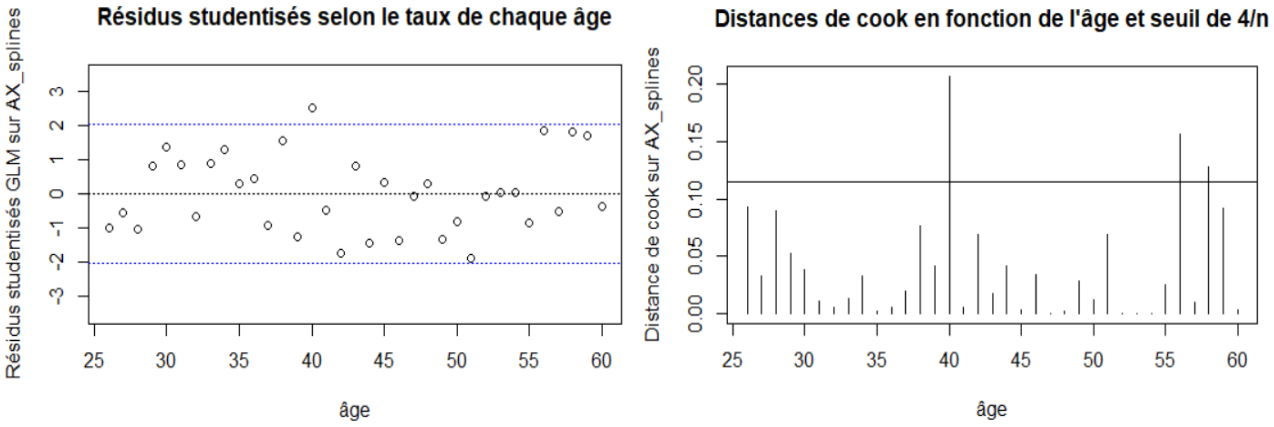


Figure 42 : Résidus studentisées externes et distances de Cook pour le modèle d'ajustement GLM Poisson sur les taux d'incidence en incapacité des hommes AL

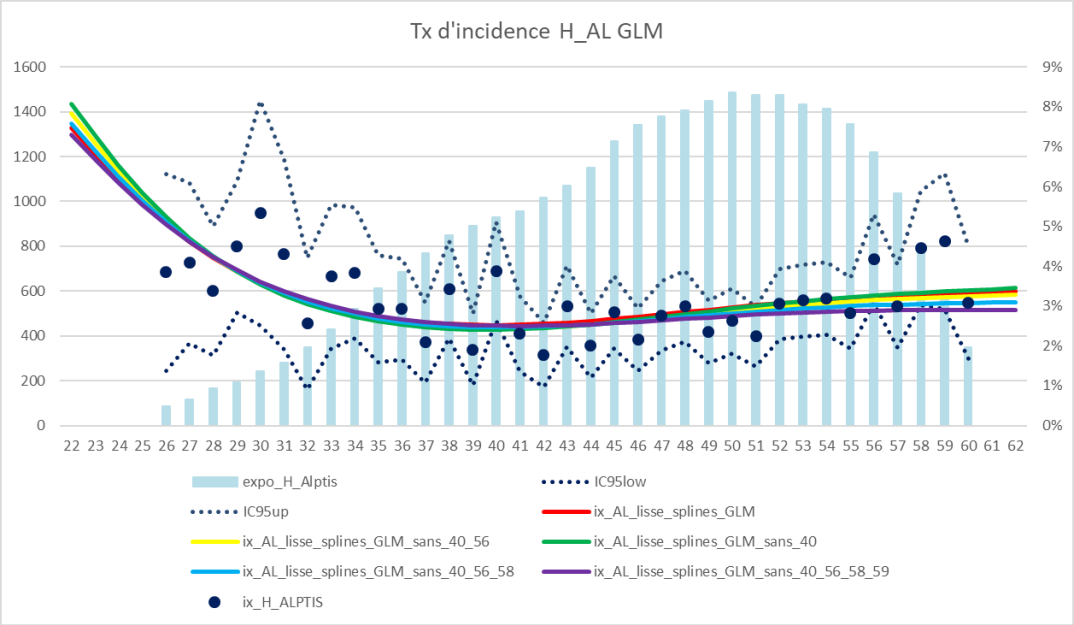


Figure 43 : Comparaison des ajustements par modèle GLM Poisson sur les taux d'incidence des hommes AL

Il est remarquable que les taux sont, logiquement, moins élevés en fin de table pour les ajustements dont les paramètres ont été estimés sans prendre en compte les âges 56, 58 et/ou 59, qui ont une incidence plus élevée (courbes violette, bleue et jaune). Ces tables sont, par conséquent, moins prudentes que les autres.

De plus, la procédure statistique d'aide à la décision mise en place plaide en faveur de **l'ajustement prenant en compte tous les taux pour l'estimation des paramètres du modèle** : il sera retenu.

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	signes	R^2	Nb points hors IC95	âges à grandes dist_Cook
ix_AL_lisse_splines_GLM	44,314	100,4%	0,42%	0,736	26%	2	40, 56, 58
ix_AL_lisse_splines_GLM_sans_40	45,453	102,0%	2,05%	0,736	22%	2	26, 56, 58
ix_AL_lisse_splines_GLM_sans_40_56	46,224	103,4%	3,44%	0,500	22%	1	58, 59
ix_AL_lisse_splines_GLM_sans_40_56_58	48,211	104,9%	4,88%	0,311	21%	2	59
ix_AL_lisse_splines_GLM_sans_40_56_58_59	51,881	106,4%	6,37%	0,175	18%	4	-

Comparaison des ajustements :

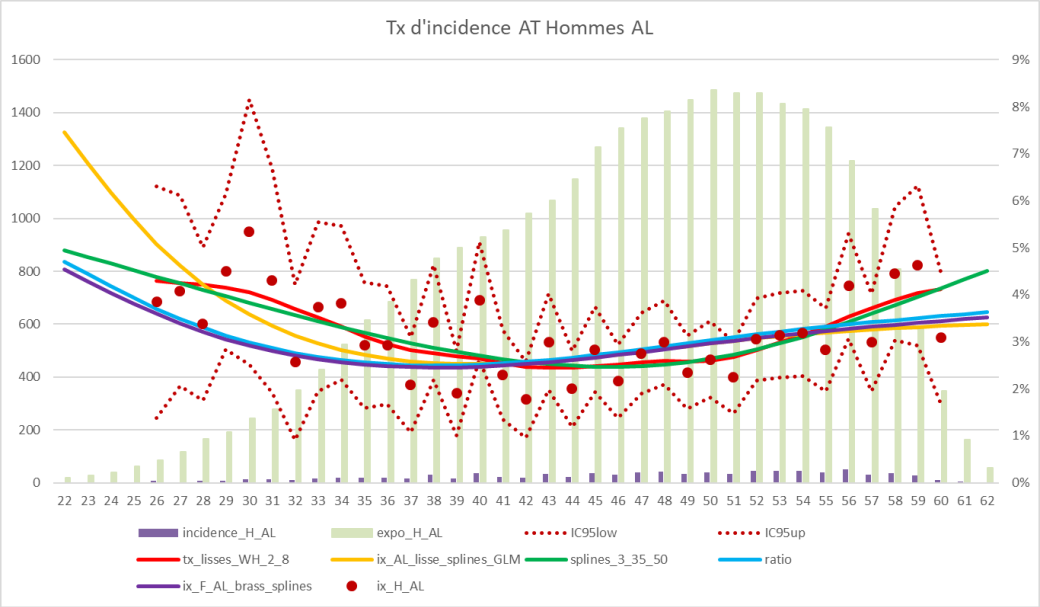


Figure 44 : Comparaison des ajustements pour les taux d'incidence en incapacité sur AL hommes

Ajustements	khi-deux	ratio obs/esti	abs(ratio obs/est-1)	p_val test des signes	R^2	Nb points hors IC95
tx_lisses_WH_2_8	31,641	100,0%	0,00%	0,736	53%	0
ix_AL_lisse_splines_GLM	44,314	100,4%	0,42%	0,736	26%	2
splines_3_35_50	33,852	100,2%	0,16%	0,736	47%	0
ratio	51,281	100,0%	0,00%	0,736	13%	2
ix_F_AL_brass_splines	52,920	102,4%	2,38%	0,500	8%	2

Commentaires :

- **Les ajustements** par **un coefficient multiplicatif** et avec le **modèle de Brass** sont très proches. Cependant, ils ne semblent pas correctement s'ajuster aux taux en début de table ni entre 47 et 54 ans. Ces deux ajustements sont également les moins performants selon les critères statistiques définis. **Ils ne sont pas conservés.**
- **L'ajustement par le modèle GLM** est très proche des ajustements par le modèle de Brass et par le ratio en deuxième partie de table (après 38 ans) mais s'adapte mieux en début de table. Il est meilleur statistiquement que les deux premiers, mais demeure tout de même nettement plus éloigné (χ^2 *et* R^2) des taux bruts que les ajustements par WH et par splines. Or, notre objectif est l'estimation « *BE* » des hypothèses techniques, cet ajustement ne semble donc pas optimal : **il ne sera pas conservé**.
- Les deux derniers ajustements (WH et splines) seront comparés au regard du score et du critère de prudence mis en place.

Score :

	Système de points					
	khi-deux	ratio obs/esti	test des signes	pts_hors_IC95%	Total	Classement
tx_lisses_WH_2_8	2	2	2	2	18	1
splines_3_35_50	1	1	2	2	12	2

Critère de prudence :

Sum Expo ix_WH>ix_splines :	16 984
Sum Expo ix_WH<ix_splines :	13 793

→ **Dans les deux cas, au niveau des critères statistiques et du critère de prudence, l'ajustement par WH est plus performant que l'ajustement par splines : l'ajustement par WH sera donc retenu (courbe rouge). Il sera même envisageable de prolonger la courbe des taux à l'aide de l'ajustement par splines étant donné la proximité des courbes.**

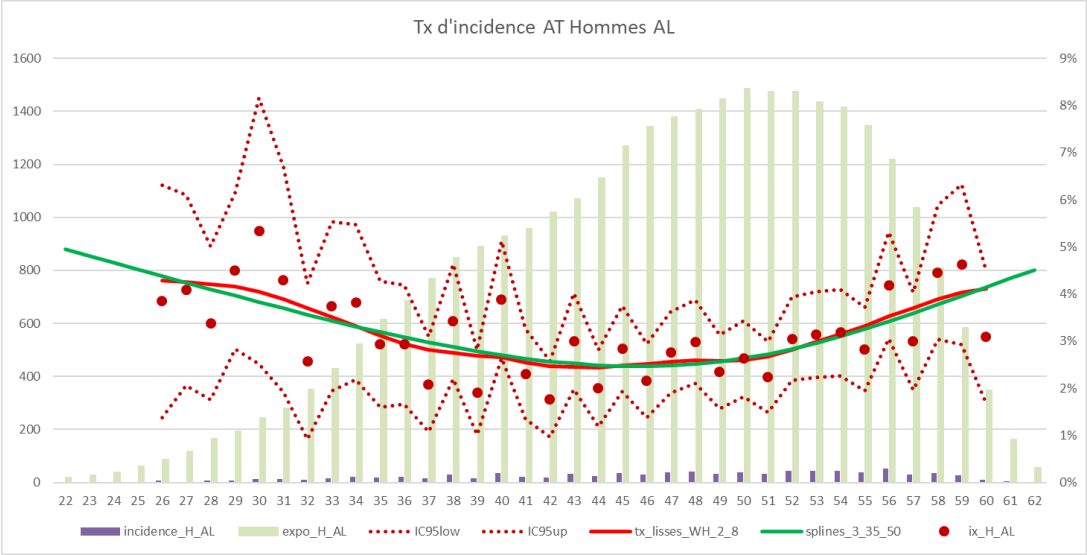


Figure 45 : Taux d'incidence en incapacité retenus pour les hommes sur AL

2.4.3 Maintien en incapacité

La quantité de données a limité la précision de la construction des tables de maintien pour AX et AL. En effet, nous ne disposions respectivement que de 2199 et 298 arrêts. Pour pallier ce problème et accroître la robustesse des taux, nous avons usé de différentes techniques telles que la construction de classes d'âge et un positionnement par rapport aux tables du BCAC[72] grâce à un coefficient multiplicatif.

2.4.3.1 *Présentation des tables du BCAC*

Les tables du BCAC ont été introduites par l'arrêté du 28/03/1996 venant compléter le loi n°89-1009 (dite « *loi Evin* »). Elles ont été établies à partir d'une étude réalisée en 1993 sur un portefeuille contenant des assurés, mixtes, salariés, adhérant à des contrats collectifs, assurés par les plus grandes compagnies d'assurances françaises de l'époque.

Pour le maintien en incapacité et en invalidité, ce portefeuille comprenait une cohorte d'invalides et/ou d'incapables issus de ces contrats assurés par ces sociétés d'assurance.
Le BCAC a également construit une table de passage de l'état incapable à celui d'invalide.
Ces tables ont été modifiées en 2010, puis entièrement reconstruites en 2013. Elles sont présentes dans le règlement 2015-11 du 30/12/2020 de l'Autorité des Normes Comptables (ANC) aux articles 600-1…600-5.

→ **Ces tables ne reflètent pas la population de TNS étudiée. Cependant, nous ne disposons pas d'autres tables pour provisionner lorsque l'historique de données du portefeuille n'est pas suffisant pour une table d'expérience. C'est pourquoi nous allons, dès que possible, tenter d'ajuster au mieux ces tables à notre population.**

Analyse du risque de maintien sur les tables du BCAC

[72] Bureau Commun des Assurances Collectives

Ne pouvant pas construire une loi de maintien par âge sur nos données, nous avons dans un premier temps observé le phénomène sur la table de maintien en incapacité du BCAC.

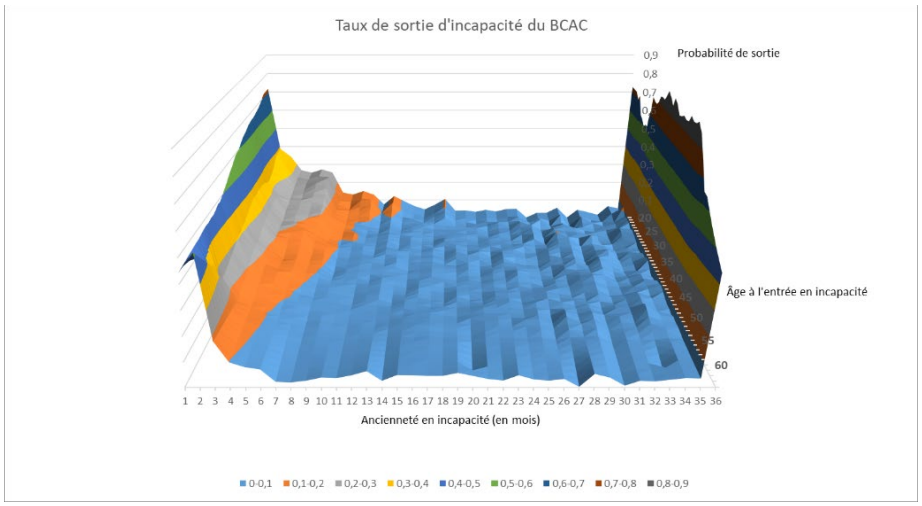


Figure 46 : Taux de sortie de l'incapacité du BCAC

Différentes tendances sont observables dans les courbes du BCAC :

- Les taux de sortie sont nettement plus élevés sur le début de la table (premiers mois d'incapacité) que sur le reste, pour tous les âges, traduisant une plus grande fréquence des arrêts de courte durée.
- Pour les assurés les plus jeunes, les taux de sortie sont plus élevés sur les premiers mois de l'incapacité (jusqu'au quinzième mois environ). Ce qui peut traduire soit des causes (ex. pathologie) entrainant des arrêts plus courts, soit une capacité de guérison plus rapide du fait de l'âge;
- À partir de quinze mois en incapacité, les taux semblent stables pour tous les âges jusqu'au 30e mois, ce qui pourrait traduire le phénomène des causes d'arrêt particulièrement lourde.
- La croissance soudaine des taux au 36e mois traduit la sortie obligatoire des assurés de l'état d'incapacité. Cependant, il est notable que ces taux n'atteignent pas un, alors que tous les assurés sont supposés sortir.

Comme explicité ci-dessus, les taux de sortie de l'arrêt de travail des premiers mois sont les plus sensibles à l'âge d'entrée, ce qui justifie un ajustement sur nos données pour ces premiers mois, a minima. Afin de mettre en exergue les mois les plus concernés par ce phénomène, nous avons observé les ratios suivants (par mois) :

$$\frac{moyenne\ des\ taux\ de\ sortie\ pour\ les\ \text{âges}\ de\ 20\ \text{à}\ 24\ ans}{moyenne\ des\ taux\ de\ sortie\ pour\ les\ \text{âges}\ de\ 60\ \text{à}\ 64\ ans}$$

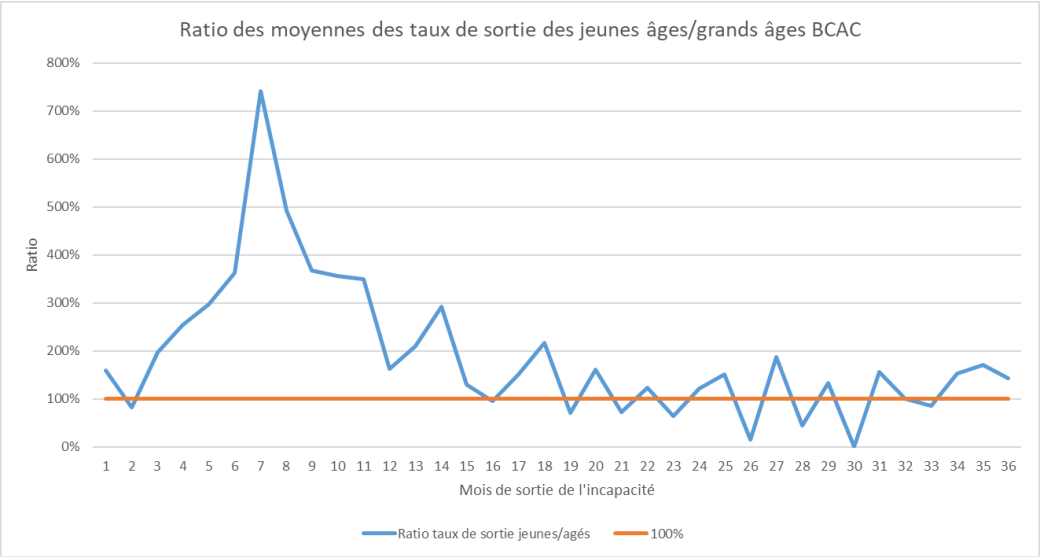


Figure 47 : Ratios des taux de sortie moyens des jeunes âges (20-24 ans) sur les taux de sortie moyens des plus grands âges (60-64 ans)

Commentaire : Il y a une différence significative jusqu'au quinzième mois en incapacité. Comme mentionné ci-dessus, les taux de sortie des plus jeunes âges sont nettement plus élevés que les taux de sortie des plus âgés.
Après quinze mois le ratio oscille autour de 100%, et l'âge d'entrée en incapacité semblerait avoir moins d'impact sur la durée de maintien.

2.4.3.2 *AX – loi de maintien en incapacité*

Construction des taux bruts :
Les taux bruts sont définis différemment sur trois périodes :

1- Du fait du faible volume de données pour certains âges, des classes d'âges sont construites, permettant de capter la sensibilité à l'âge des premiers mois et jusqu'au 15e mois.
2- Puis, des taux de sortie communs pour tous les âges sont calculés, étant donné la faible quantité de données résiduelles et jusqu'au 30e mois.
3- Ensuite, la table est fermée avec les taux du BCAC majorés par un coefficient multiplicatif défini ci-dessous.

Classes d'âge :
Au bout de quinze mois, il reste exactement 100 assurés en incapacité dans notre échantillon. Afin d'être cohérent avec la méthode utilisée pour l'incidence, nous conservons un critère de 10% de volatilité, c'est-à-dire un minimum de 10 assurés dans chaque classe à 15 mois d'ancienneté.

Coefficient multiplicatif :
Le coefficient multiplicatif est calculé dans la même logique qu'un ratio observés/estimés :

$$ratio = \frac{\sum_i \sum_{j=31}^{36} Nombre\ de\ sortie_{i,j}}{\sum_i \sum_{j=31}^{36} Nombre\ d'assuré(s) restant_{i,j} \times probabilité\ de\ sortie\ du\ BCAC_{i,j}}$$

Où,

i représente tous les âges possibles pour un assuré dans le portefeuille ;
j représente les mois de sortie.

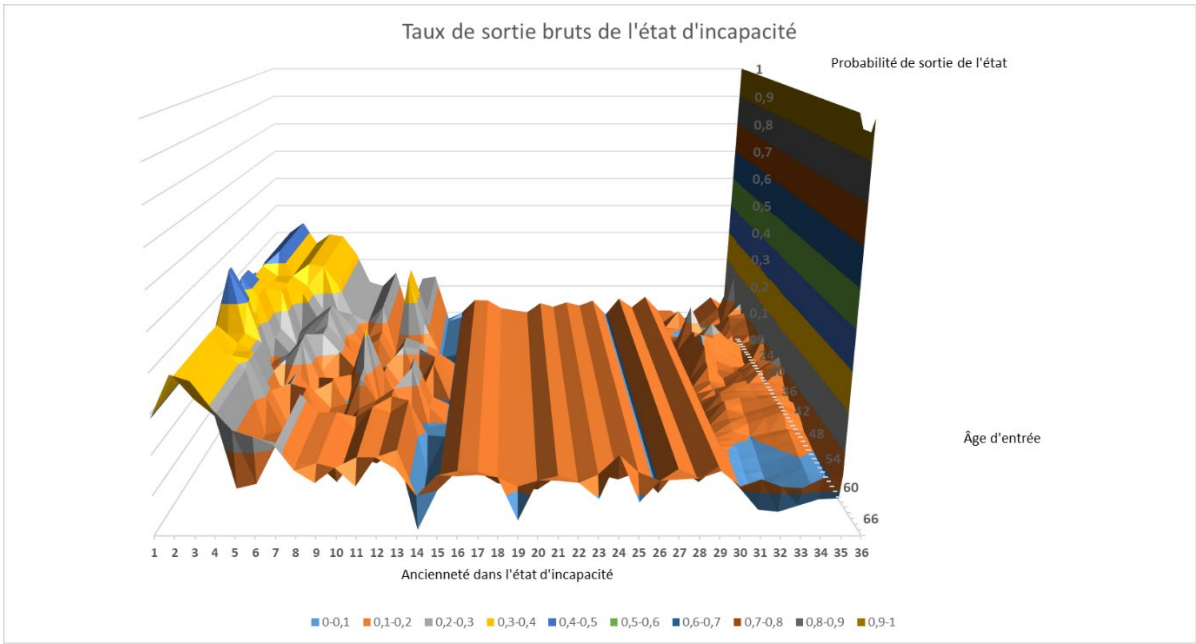


Figure 48 : Taux bruts de sortie de l'état d'incapacité

<u>Lissage des taux bruts</u> :

Un lissage de Whittaker-Henderson bidimensionnel a été réalisé pour lisser les taux bruts de sortie de l'état d'incapacité. Les critères de validation sont les mêmes que pour le lissage unidimensionnel :

1. **Représentativité du phénomène** (validation visuel) ;
2. **Régularité des taux** (validation visuel) ;
3. **Proximité avec les taux bruts** (validation avec les mêmes tests et critères statistiques que présentés précédemment).

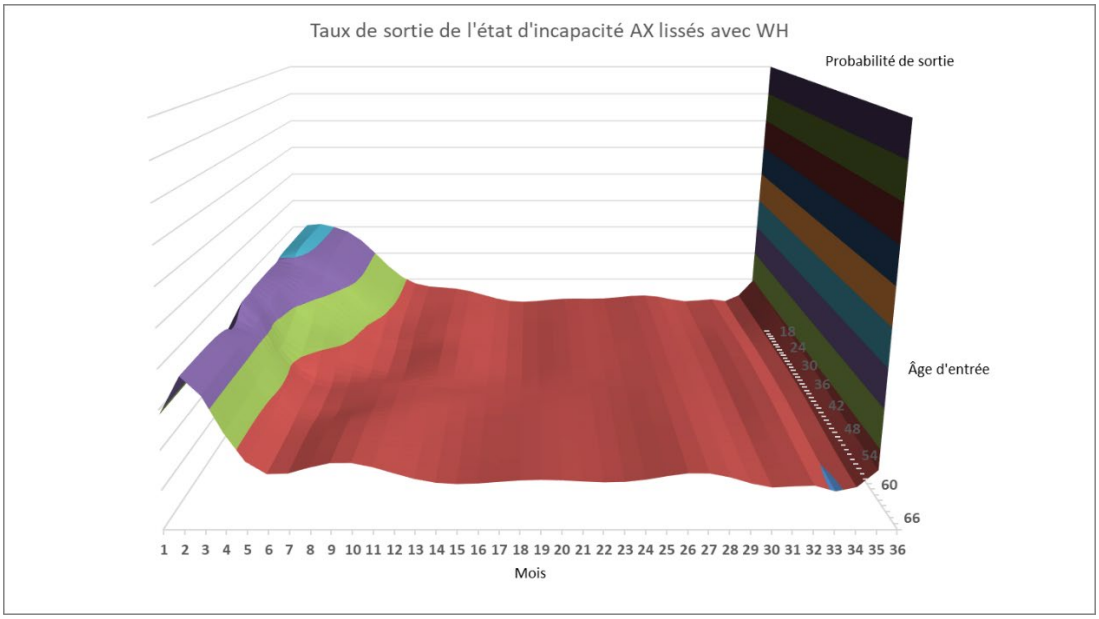


Figure 49 : Taux de sortie de l'état d'incapacité AX lissés par WH bidimensionnel

Les paramètres du lissage bidimensionnel de WH ont été optimisés selon la procédure statistique mais également visuellement afin de respecter le critère de représentativité du phénomène et de régularité des taux.

2.4.3.3 *AL - loi de maintien en incapacité*

Les taux bruts pour AL ont été construits avec la même méthode que les taux bruts pour AX à la différence du nombre de classes pour les 15 premiers mois du maintien et recollement avec le BCAC s'effectue à 32 ans.

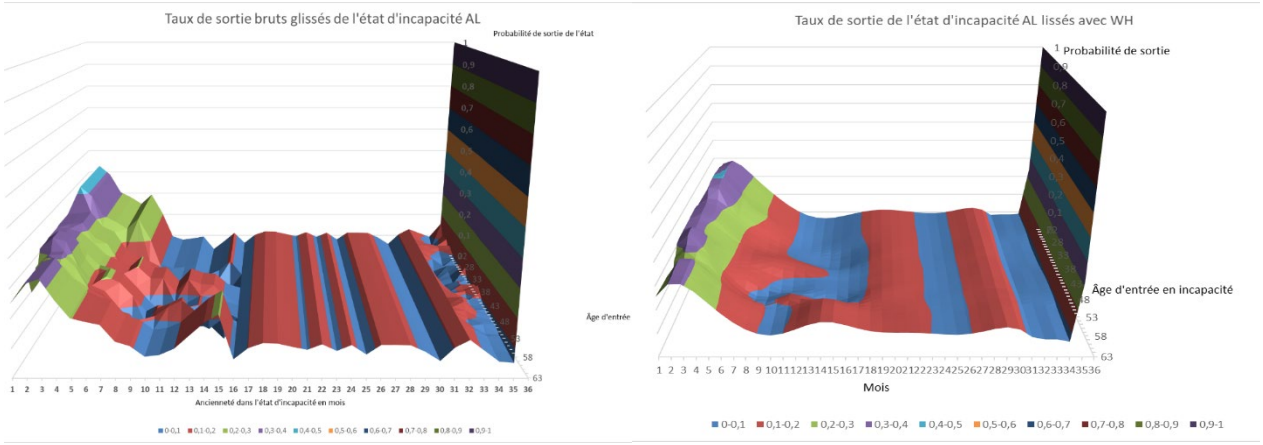


Figure 50 : Taux de sortie de l'état d'incapacité AL bruts et lissés par WH bidimensionnel

De la même façon que pour AX, les paramètres du lissage bidimensionnel de WH ont été optimisés selon la procédure statistique et visuellement afin de respecter le critère de représentativité du phénomène et de régularité des taux.

<u>Remarque</u> : Le reste des hypothèses biométriques sont estimées sur la base des tables réglementaires (BCAC) ou construites par L'INSEE parce que la quantité de données pour construire des tables d'expérience n'est pas suffisante.

2.5 Lois relatives au décès

En cas de décès (d'un assuré sain, en incapacité ou en invalidité), une rente sera versée au bénéficiaire désigné[73] si l'option « Madelin » est souscrite.
Pour modéliser cette garantie, des tables de mortalité instantanées (pour la mortalité des assurés) et prospectives (pour la longévité des rentiers/bénéficiaires) seraient nécessaires.
Cependant, nous ne disposions pas d'assez de données pour construire des tables de mortalité d'expérience.

2.5.1 Décès des assurés sains

2.5.1.1 *Mortalité*

Les tables retenues pour la mortalité des assurés sains sont les tables de l'INSEE (hommes et femmes par vingtile de niveau de vie) publiées en 2018 et estimées sur un échantillon démographique de la population française sur la période d'observation 2012-2016.
Ces tables ont été privilégiées par rapport aux TF 00 02 et TH 00 02 car elles sont plus récentes et permettent de prendre en compte l'impact du niveau de vie (par vingtile) sur la mortalité.
Le niveau de vie permettant de déterminer le vingtile à utiliser a été approximé par la moyenne de la base de garantie mensuelle du portefeuille (base de garantie annuelle divisée par 12).

[73] Conformément à l'article L132-8 du CdA.

	AL	AX
Base de garantie Moyenne annuelle	39 219 €	76 035 €
Base de garantie Moyenne mensuelle	3 268 €	6 336 €

	Vingtile de niveau de vie	Niveau de vie mensuel moyen (euros)
	0 - 5 %	466
	5 - 10 %	762
	10 - 15 %	910
	15 - 20 %	1 024
	20 - 25 %	1 122
	25 - 30 %	1 215
	30 - 35 %	1 302
	35 - 40 %	1 387
	40 - 45 %	1 471
	45 - 50 %	1 556
	50 - 55 %	1 646
	55 - 60 %	1 742
	60 - 65 %	1 846
	65 - 70 %	1 963
	70 - 75 %	2 098
	75 - 80 %	2 264
	80 - 85 %	2 477
	85 - 90 %	2 781
AL →	90 - 95 %	3 309
AX →	95 - 100 %	5 796

2.5.1.2 *Longévité*

N'ayant pas d'autre recours, les tables réglementaires TGF 05 et TGH 05 ont été utilisées pour la projection des rentiers.

2.5.2 Décès des incapables

Le règlement n°2015-11 actualisé au 30/12/2020 de l'ANC ne prévoit pas de table réglementaire pour le décès des assurés en incapacité. Pour cause, seul l'article 143-12 fait appel à ces lois du BCAC (maintien pour l'incapacité et l'invalidité et passage). Or, cette article règlemente les PSAP[74] relatives aux prestations d'incapacité et d'invalidité issues des contrats d'assurance couvrant des risques visés au 2° de l'article L.310-1 du CdA[75] et n'inclue donc pas le risque de décès.

→ **Les mêmes tables que pour les assurés sains ont été retenues, pour les mêmes raisons.**

2.5.3 Décès des invalides

La seule sortie possible pour les individus en invalidité est le décès. Cette probabilité se calcule donc de la façon suivante :

$$q_x^{inval} = 1 - p_x^{maintien\ inval}$$

2.6 Lois relatives à l'invalidité

Pour le maintien en invalidité et le passage d'incapacité à invalidité, les données ne nous permettent pas de calculer un coefficient fiable pour adapter les tables du BCAC. Les tables du BCAC sont donc utilisées sans modification, sans pouvoir objectiver qu'elles reflètent bien le risque de nos portefeuilles.

2.7 Chute

Un taux de chute annuel a été défini selon un avis d'expert.

2.8 Facteurs d'actualisation des flux de trésorerie futurs

La courbe des taux utilisée pour actualiser les flux de trésorerie futurs est la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA[76].

---

[74] Des PSAP (Provisions pour Sinistres À Payer définies à l'article R343-7 du CdA : « *Valeur estimative des dépenses en principal et en frais, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés…* ») devront être constituées dans notre cas pour le risque incapacité et invalidité.

[75] Les risques de dommages corporels liés aux accidents et à la maladie.

[76] *European Insurance and Occupational Pensions Authority*

3 Calcul du *BE*

Le calcul du *BE* est une **estimation de la somme des flux de trésorerie futurs actualisés, de la façon la plus réaliste possible**, afin de permettre à l'assureur ou au réassureur de répondre à l'ensemble de ses engagements dans un scénario central. Pour cela, Hannover Re dispose d'un modèle actuariel pour projeter les flux de trésorerie de ses traités.
Cependant, des problèmes d'accès aux bases de données et de complexité du modèle nécessite que les traités soient regroupés en groupes de risques homogènes et que la projection se fasse avec des méthodes et des hypothèses communes au sein de ces groupes. Par définition, ces agrégations ne permettent pas de prendre en compte toutes les spécificités de chaque traité pour les projections des flux de trésorerie.

3.1 Calcul au niveau local

Un outil a été construit sur Excel-VBA permettant la projection des flux de trésorerie pour le calcul du *BE*. Cet outil se veut souple, permettant une projection « tête par tête » ou avec des *model points* ainsi que la possibilité de choquer les hypothèses techniques aisément.
L'objet du calcul local n'est pas tant de fournir un chiffre de BE au Régulateur que de permettre des études sur la sensibilité du calcul aux hypothèses ou méthodes retenues.

Les flux de trésorerie à projeter sont :

- les prestations versées :
  - des sinistres survenus durant la première année de projection ou
  - des sinistres survenus avant la première année de projection et encore en cours;
- les primes perçues durant la première année de projection;
- les frais et commissions payés durant la première année de projection;
- la reprise ou dotation à la provision d'égalisation, durant la première année de projection.

Ces flux dépendent essentiellement des états dans lesquels se trouveront les assurés :

- sain,
- en incapacité,
- en invalidité ou
- décédé.

Les passages entre les états ou le maintien sont représentés par les flèches dans le schéma ci-dessous et les probabilités de passage ou de maintien sont les hypothèses techniques présentées précédemment (Cf. partie 2).

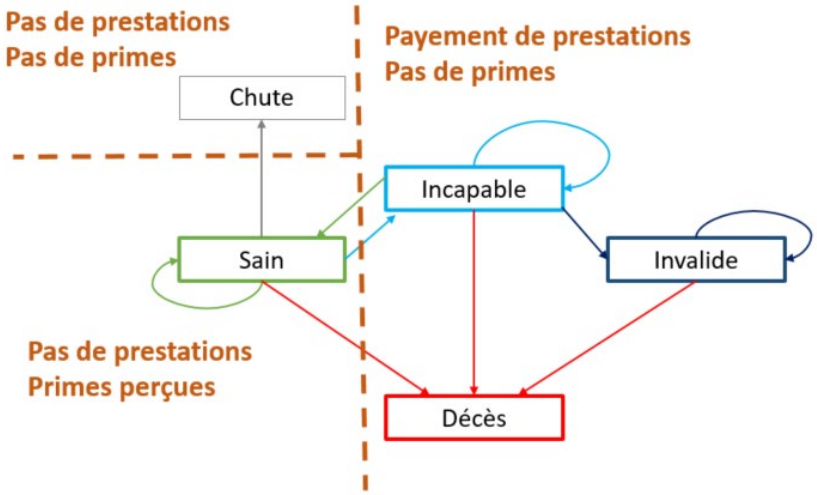


Figure 51 : Schéma de passage global simplifié entre les différents états

L'outil de projection peut être décomposé en trois grandes parties :

1- Les *inputs* : les hypothèses techniques et le portefeuille à projeter sont renseignés sur deux feuilles distinctes. Pour chaque assuré ou *model point*, il sera nécessaire de renseigner le sexe, l'âge, les garanties, le montant de la prime payée, l'état initial, l'ancienneté dans cet état.

2- Calcul des coefficients de projection : du fait qu'il n'y ait pas d'interaction actif/passif[77], des coefficients de projection pour les primes et les sinistres peuvent être déterminés à l'aide de macros VBA pour chaque assuré. Lorsqu'ils sont multipliés par le montant des garanties et de la prime payée, ces coefficients permettent de projeter les primes et les prestations futures en fonction des caractéristiques renseignées.

3- Le calcul des flux de trésorerie : les coefficients obtenus à l'étape précédente sont multipliés par les montants de garanties et de primes pour obtenir les projections des prestations et des primes. Les frais, les commissions et la participation aux bénéfices sont ensuite calculés à partir des flux de primes et de prestations. Le calcul du *BE* consiste alors en la somme de l'ensemble de ces flux. Cette étape est entièrement réalisée sur Excel.

Calcul des coefficients de projection :

Du fait d'une frontière de contrat à 1 an, il a été choisi de réaliser une projection en deux étapes :

1. Les douze premiers mois pour lesquels les primes et prestations sont projetées ;
2. Les années suivantes pour lesquelles seul l'écoulement des prestations est projeté pour les sinistres survenus lors de la première année de projection ou avant.

Définie à l'article R.343-8 du code des assurances concernant les provisions techniques de réassurance, *la provision pour égalisation*[78] *est destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité*

[77] En effet, une modélisation qui prendrait en compte la participation aux bénéfices avec un horizon des contrats de plus de 1 an ne pourrait pas être calculée par des coefficients fixes donc déterministes. Une approche stochastique devrait alors être retenue. Ce n'est pas l'objet de ce mémoire.

[78] Cette provision est également définie dans les provisions techniques vie (R343-3) et les provisions techniques non-vie (R343-7) sans qu'il n'y ait de différence avec la définition fournie pour les provisions techniques de réassurance.

afférentes aux opérations de réassurance de groupe contre le risque de décès et de dommage-corporel.
Contractuellement, la dotation à la provision d'égalisation correspond, tous les ans, à un pourcentage d'un compte de résultat établi par la cédante ou le courtier.
Le solde de ce compte est la différence entre :
- les flux entrants : primes, taux d'intérêts techniques et financiers, reprise de provision ;
- les flux sortants : prestations, commissions de gestion, d'acquisition, de courtier, dotation aux provisions.

Pour la première année de projection, le solde de ce compte de résultat peut être créditeur parce que les primes sont projetées, donnant lieu à une dotation à la provision d'égalisation.
Pour les années suivantes, la projection du solde de ce compte sera forcément débitrice entrainant aucune dotation, voire une reprise.

Par contre, pour le calcul du BE, seuls les flux réels sont retenus, i.e. les flux de dotation ou reprise de provision ne sont pas comptabilisés.
Dans le cas de la provision pour égalisation, à la fin de la projection (donc à la fin de l'écoulement des sinistres pris en compte par la modélisation), cette provision viendra en déduction des prestations à verser à la cédante.

Pour AX, cette dotation se fait selon les résultats de différents traités. Ainsi, l'estimation des flux de trésorerie a pu être effectuée, mais l'estimation de la dotation ou reprise ne peut l'être.

3.2 Calcul des coefficients de projection

Hypothèses :
- Force de mortalité constante pour les probabilités d'incidence infra-annuelles. Cette hypothèse est retenue parce qu'elle est légèrement plus prudente et plus adaptée que l'hypothèse de linéarité des incidences dans les classes d'âges, maintenant que nous savons que les taux d'incidences ne sont pas strictement croissants.
- Le facteur d'actualisation est calculé sur la base des taux d'actualisation de l'EIOPA.
- Le rentier bénéficiaire a deux ans de moins que l'assuré ;
- Les probabilités de réalisation des risques sont appliquées dans l'ordre suivant :
    1) Probabilité de décès ;
    2) Probabilité de passer en incapacité ou de sortir de l'incapacité ;
    3) Probabilité de passer en invalidité ;
    4) Probabilité de sortir du portefeuille (chute).

3.2.1 Coefficients de projection pour la garantie décès

- Première année :

Si l'assuré décède la première année, qu'il soit dans l'état Sain, d'incapacité ou d'invalidité, une prestation au titre de la garantie décès sera versée au bénéficiaire :
- soit un capital (pas d'option Madelin);
- soit une rente (option Madelin).

Le coefficient de projection pour la garantie décès de la première année se calcule à l'aide ;
- des probabilités de décès mensuelles dans les différents états ;
- des probabilités de passage et de maintien mensuelles dans les différents états ;
- par le biais d'un capital constitutif de rente sur la première si l'option Madelin est souscrite.

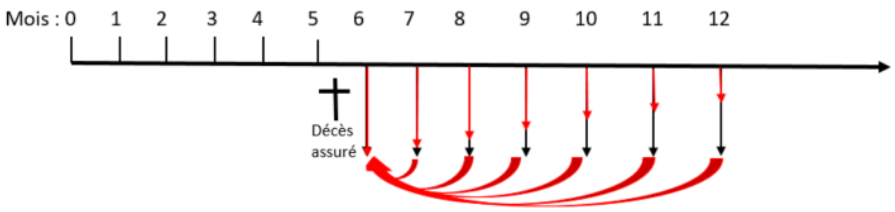


Figure 52 : Schéma d'un exemple (décès durant le cinquième mois) de probabilisation et d'actualisation des rentes pour le calcul du capital constitutif de rente de la première année

Si l'assuré est déjà décédé et qu'une rente court pour un rentier, le coefficient pour la prestation décès de la première année de projection reflètera les rentes à verser sur cette première année de projection.

Remarque : La rente est supposée être trimestrielle. Cependant, pour des soucis pratiques de prise en compte des probabilités liées à l'incapacité mensuelle, le calcul a été réalisé avec un pas mensuel. Cette approximation ne devrait pas avoir d'impact significatif sur le calcul du *BE* et de ses sensibilités.

- Années suivantes :

À nouveau, la prestation en cas de décès dépend de la souscription ou non de l'option Madelin. Le coefficient de projection des prestations au titre de la garantie prend en compte :

- la probabilité de décès dans la première année selon l'état ;
- la possibilité que l'assuré soit dans l'état d'incapacité ou d'invalidité au-delà de la première année avec une incidence dans ces états durant la première année ou avant. Les assurés restent alors couverts par la garantie décès tant qu'ils restent incapables ou invalides ;
- le capital constitutif de rente correspondant à l'année de décès, en cas d'option Maledin souscrite.

3.2.2 Coefficients de projection pour les garanties liées à l'incapacité

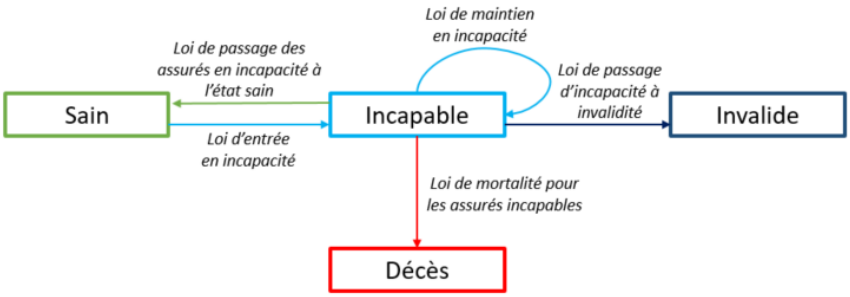


Figure 53 : Schéma des passages et des maintiens liés à l'incapacité

La particularité de l'incapacité est que **l'assuré peut entrer et sortir de cet état plusieurs fois**, à condition qu'il ne passe pas en invalidité ou qu'il ne décède pas. Il y entre toujours de l'état sain et peut y rester **un maximum de 36 mois**.

- Première année :

Le coefficient de prestation au titre de la garantie incapacité durant la première année reflète les indemnités versées durant la première année pour cette garantie. Il est calculé à l'aide :

- des taux d'incidence mensuels de l'état sain à l'état d'incapacité ;
- des taux de maintien par mois dans l'état d'incapacité ;

- des taux de sortie mensuels de l'état pour cause de décès ou d'invalidité.

Remarque : ce coefficient devra prendre en compte la franchise des assurés s'ils sont dans l'état sain ou leur ancienneté en incapacité s'ils sont déjà dans l'état.

- Années suivantes :

Pour les années suivantes, le coefficient de prestation en cas d'incapacité ne doit refléter que l'écoulement des prestations d'incapacité pour une incidence survenue lors des douze premiers mois[79] ou avant. Ce coefficient dépend à nouveau de l'état initial de l'assuré et de son ancienneté dans l'état.

3.2.3 Coefficients de projection pour les garanties liées à l'invalidité

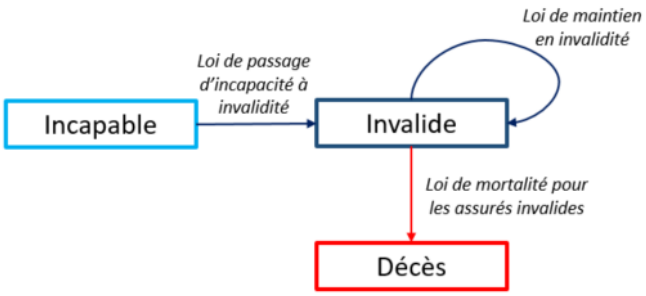


Figure 54 : Schéma des passages et des maintiens liés à l'invalidité

Les particularités de l'invalidité sont :

- **Entrée uniquement depuis l'état d'incapacité** : on fait l'hypothèse que l'assuré sera toujours déclaré incapable avant d'être déclaré invalide ;
- **Sortie uniquement pour décès** : l'assuré ne peut pas revenir à l'état d'incapable ou de sain ;

- Première année :

Le coefficient de prestation au titre de la garantie invalidité durant la première année reflète les rentes versées durant la première année pour cette garantie. Il est calculé à l'aide :

- des probabilités mensuelles de passage en invalidité des assurés incapables ;
- des probabilités mensuelles de passage en incapacité des assurés Sain ;
- des probabilités mensuelles de maintien des assurés en invalidité ;

Remarques :

- l'hypothèse que les assurés Sains ne peuvent pas passer directement en invalidité est faite, ils passent obligatoirement par l'état intermédiaire d'incapacité.
- ce coefficient devra prendre en compte la franchise des assurés s'ils sont dans l'état sain ou leur ancienneté en incapacité ou en invalidité s'ils sont déjà dans l'état.

- Années suivantes :

Pour les années suivantes, le coefficient de prestation en cas d'invalidité ne doit refléter que l'écoulement des prestations d'invalidité pour une incidence survenue :

- lors des douze premiers mois ou avant ;

[79] Pour cause : frontière des contrats à un an.

- ou tant que l'assuré est dans l'état d'incapacité au-delà de la première année de projection.

Ce coefficient dépend à nouveau de l'état initial de l'assuré et de son ancienneté dans l'état (en incapacité ou in validité).

3.2.4 Coefficient de projection des primes

Ce coefficient dépend à nouveau de l'état initial dans lequel se trouve l'assuré. Il sera supérieur à 0 uniquement si l'assuré est sain ou incapable en début de projection et il sera égale à 0 si l'assuré est invalide ou s'il est déjà décédé et qu'une rente est en cours de versement.

$$Coeff_{prime} = \sum_{j=1}^{12} {}_{\frac{j}{12}}p_x^{sain\ (inst)} \times v^{mensuel^{\,j}} - Coeff_{presta\ incap_{année\ 1}} - Coeff_{presta\ inval_{année\ 1}}$$

3.3 Projections tête par tête vs Projections avec *Model Points*

La projection par groupes d'assurés homogènes dans le modèle actuariel du groupe Hannover Re donne lieu à des approximations dans les projections. L'objectif de cette revue est également d'évaluer l'impact de ces regroupements pour le calcul des provisions mais aussi pour la marge de solvabilité.

Deux finalités de construction ont été suivies :

1. Une finalité orientée sur la représentativité la plus exhaustive,
2. Une finalité orientée sur la cohérence avec le modèle interne.

Pour les deux finalités, les segmentations se font selon les facteurs de risques les plus sensibles aux risques couverts (cf. notamment partie 1.4.2) :

- Sexe ;
- Âge ;
- État en début de projection ;
- La franchise si l'assuré est sain ;
- L'ancienneté si l'assuré est dans l'état d'incapacité ou d'invalidité ;
- La souscription à l'option Madelin ou pas.

Comme pour la construction des tables d'incidence en incapacité, nous nous sommes fixés un seuil minimal de nombre d'assurés par groupe[80], qui nous a permis d'agréger des catégories en fonction de leurs âges en début et en fin de table.

Ainsi, le BE a été calculé de deux manières différentes grâce à l'outil créé à cet effet :

1. Avec une projection « tête par tête » ;
2. Avec une projection par *model points* « exhaustifs »
3. Avec une projection par *model points* « cohérents »

[80] 100 personnes minimum en état sain, par exemple.

4 Résultats et analyses

Une remarque liminaire s'impose : les sensibilités d'un BE isolé peuvent apparaître importantes si le montant du BE est faible. Pour des traités dont la frontière des contrats est de 1 an, nous pouvons attendre effectivement un BE dont le volume est faible et ainsi des sensibilités pouvant être plus prononcées que si le volume du BE avait été plus important.

4.1 Calculs et sensibilités du *BE* du traité AX

4.1.1 Calcul du BE

La valeur du BE pour AX au 31/12/2019 est d'environ -2,5 M€.
La négativité du BE indique que la moyenne pondérée par leur probabilité, des encaissements futurs actualisés est supérieure à celle des décaissements futurs actualisés.
Ce traité était donc essentiellement profitable, avant la pandémie.

4.1.2 Sensibilités aux *Model Points*

D'abord, et c'est l'objet du mémoire, nous voulons comparer, en volume et en relatif, les BE calculés tête par tête, par *Model Points* « exhaustifs » puis par *Model Points* « cohérents ».
La recommandation de la fonction de gestion des risques se portera dans un premier temps sur ces trois calculs et notamment de mesurer le degré de prudence inclus dans le calcul avec *Model Points* « cohérents ».

BE tête par tête	**BE MP** *exhaustifs*	**BE MP** *cohérents*
- 2 537 801	- 2 560 489	- 2 716 005
	-1%	**-7%**

Figure 55 : Valeur du BE selon la méthode utilisée et variation par rapport au tête par tête

<u>Remarques :</u>

1. Les trois calculs sont proches malgré la volatilité inhérente au BE du fait du volume.
2. Le BE avec *Model Points* « cohérents » est plus négatif ce qui indique que cette valorisation serait plus « flatteuse ».

Nous serions tentés ainsi de recommander de retenir la valorisation tête par tête parce qu'aboutissant à un BE moins négatif donc plus prudent. Cependant, d'un point de vue *risk management*, le montant du BE ne peut pas suffire à lui seul à qualifier un degré de prudence dans un optique de calcul de SCR.
En effet, c'est davantage sa capacité à capter les risques que nous regarderons et donc les sensibilités.

4.1.3 Sensibilités aux hypothèses techniques

Les BE sur la base d'une projection « tête par tête » ou avec des projections par *Model Points* « exhaustifs » sont très proches. Il est donc pertinent de ne comparer que les taux de variation des BE afin d'évaluer la prudence de ces deux méthodologies en terme de *risk management*.
En effet, plus le BE sera sensible, plus cela entrainera une marge de solvabilité importante et donc de la prudence.

	Variation en % "tête par tête"	Variation en % "MP"
BE Choc mortalité +10%	3,8%	3,7%
BE Choc mortalité -10%	-3,9%	-3,8%
BE Choc Passage incap +10%	17,7%	17,9%
BE Choc Passage incap -10%	-17,8%	-17,9%
BE Choc Sortie incap +10%	-33,6%	-33,4%
BE Choc Sortie incap -10%	42,4%	42,1%
BE Choc Passage inval +10%	3,1%	2,9%
BE Choc Passage inval -10%	-3,2%	-3,0%
BE Choc Sortie inval +10%	-0,1%	-0,1%
BE Choc Sortie inval -10%	0,0%	0,0%
BE Choc chute +10%	-1,1%	-1,1%
BE Choc chute -10%	1,0%	1,0%

Figure 56 : Sensibilités du BE aux hypothèses techniques

Plusieurs aspects méritent un commentaire:

1. Les sensibilités sont globalement très proches entre une projection avec « *model points* » ou en « tête par tête ». Les deux méthodologies semblent avoir un degré de prudence similaire en termes de marge de risque.
2. L'augmentation des taux de mortalité, des taux d'entrée en incapacité et en invalidité ainsi que la diminution des taux de sortie d'incapacité et d'invalidité entrainent l'augmentation du BE, conséquence de l'accroissement des sinistres, atténuée par la diminution des commissions ;
3. L'augmentation du taux de chute entraine une diminution du BE, ce qui est la conséquence d'une réduction des prestations plus importante que la baisse des primes perçues. Le phénomène inverse est logiquement observable à la baisse du taux de chute.
4. Le BE est nettement plus sensible aux hypothèses concernant l'incapacité (incidence et maintien). Ceci s'explique par le fait que :
   i. Le montant total des prestations pour cause d'incapacité est nettement plus important que le montant des prestations pour causes de décès ou invalidité dans les projections.
   ii. Le BE est faible et comme chaque sensibilité modifie les primes et les sinistres, l'impact sur le BE (en pourcentage) apparait élevé.
5. Spécifiquement le BE semble très sensible aux taux de sortie de l'incapacité car ce choc de 10% a été appliqué aux taux mensuels[81], contrairement aux autres chocs qui ont été appliqués à des taux annuels (hormis le choc sur les taux de passage en invalidité qui sont aussi des taux mensuels).

Afin d'objectiver ces variations, une étude plus approfondie a été réalisée permettant de décomposer ces variations de BE par poste (prestations décès, prestations incapacité, prestations invalidité, primes, commissions, honoraires).
Seule la décomposition des quelques chocs, les plus importants, est :

[81] En effet, appliquer mensuellement un choc de 10% au taux de sortie, revient à appliquer un taux annuel bien plus fort, comme un taux d'intérêt composé. Mais ce choc est appliqué au taux de sortie (1-taux de maintien) et non au taux de maintien ce qui pondère l'effet sur les prestations.

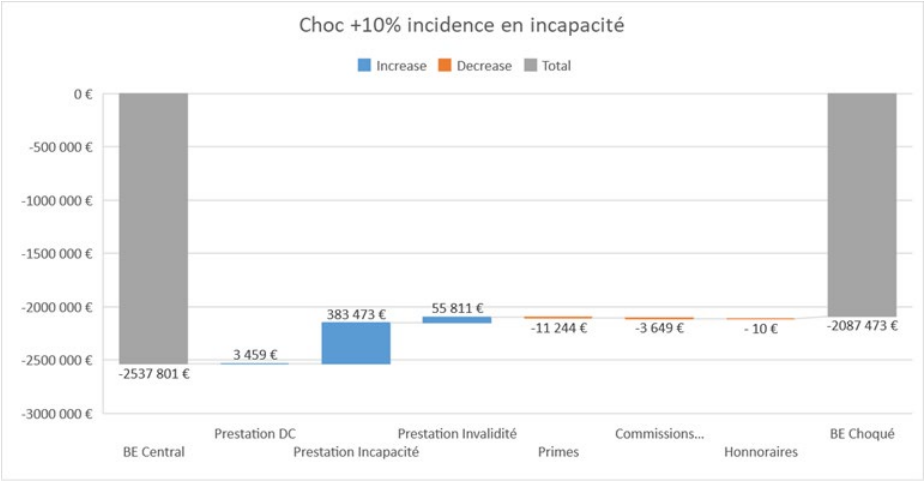


Figure 57 : Décomposition de l'impact d'une variation de +10% des taux de passage en incapacité sur le BE

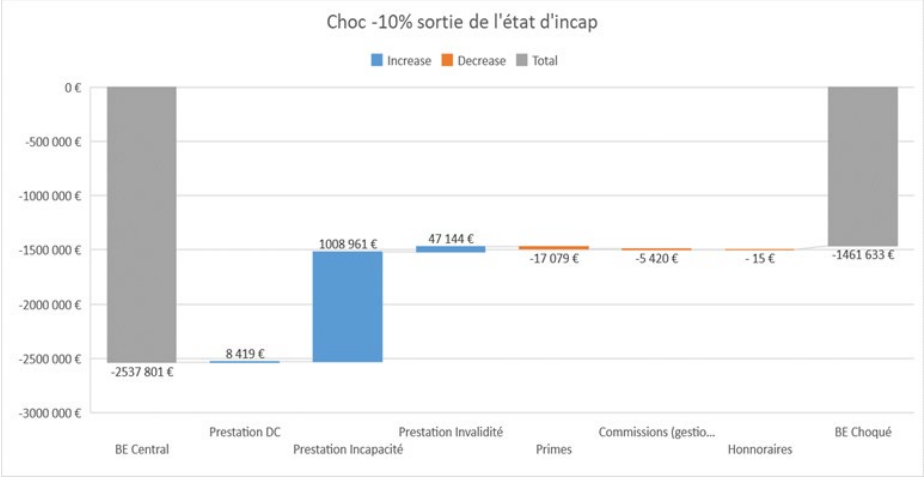


Figure 58 Décomposition de l'impact d'une variation de -10% des taux de sortie de l'incapacité sur le BE

Ces deux chocs entrainent une augmentation du BE résultant de plusieurs effets :

1. L'effet le plus important est logiquement l'augmentation des prestations pour cause d'incapacité. Le choc de +10% sur les taux l'incidence annuels entraine l'augmentation de la fréquence des personnes tombant en arrêt de travail et le choc de -10% sur les taux de sortie mensuels entraine un allongement de la durée d'incapacité.
2. Les prestations pour cause d'invalidité augmentent car plus il y a de personne en incapacité plus il y a de chance que des personnes passent en invalidité, car nous avons fait l'hypothèse que les assurés doivent obligatoirement passer par l'état d'incapacité avant de passer en invalidité.
3. Les prestations pour cause de décès augmentent également pour les raisons suivantes :
   i. Il y a plus d'invalide et les taux de décès en invalidité sont supérieurs aux taux de décès des assurés sains ou incapables ;
   ii. En restant plus longtemps en incapacité, les assurés incapables sont mécaniquement couverts plus longtemps pour la garantie décès, c'est-à-dire au-delà de la première année de projection.
4. Les derniers effets sont la diminution des primes perçues, des commissions et des honoraires. Lorsqu'un assuré n'est pas dans l'état sain il ne paie plus de primes. Les

commissions et les honoraires étant directement liés au montant de primes, ils diminuent et sont les seuls effets venant atténuer l'augmentation du BE.

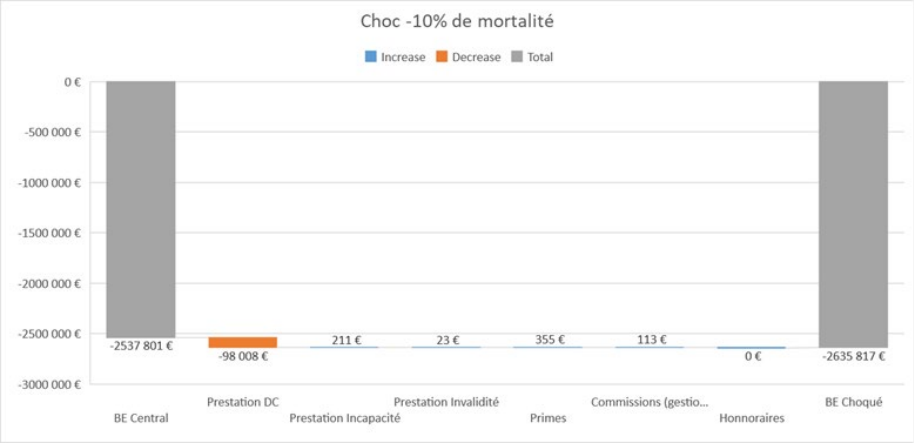


Figure 59 : Décomposition de l'impact d'une variation de +10% des taux de mortalité sur le BE

Le choc de 10% à la baisse sur les taux de mortalité ont plusieurs effets menant à une baisse du BE :

1. La baisse des prestations pour décès[82].
2. La baisse de la mortalité entraine que les assurés sains sont plus nombreux donc mécaniquement il y a donc plus d'incapable et plus d'invalide (effet volume) ;
3. Une augmentation du montant de primes perçues, de commissions et d'honoraires, car les assurés ont plus de probabilité de rester en vie et donc de payer des primes.

Par contre, puisqu'il y a une nette différence entre les deux premières valorisations du BE[83] et le BE valorisés par des *Model Points* « cohérents », comparer des taux de variation n'aurait aucun sens.
Afin de permettre une analyse du degré de prudence, le choc sur les taux d'incidence (ou de passage) en incapacité est explicité ci-dessous.

	BE tête par tête	**BE MP** *exhaustifs*	**%**	**BE MP** *cohérents*	**%**
Central	- 2 537 801	- 2 560 489	*1%*	- 2 716 005	*7%*
Coût en prestation d'incapacité du choc de +10% d'incidence	383 473	391 134	*2%*	376 623	*-2%*
%	-15,1%	-15,3%	*1%*	-13,9%	*-8%*

Figure 60 : Impact d'un choc de +10% d'incidence en incapacité sur le BE selon la méthode

À nouveau, les écarts sont très faibles entre la valorisation tête par tête et la valorisation avec *Model Points* « exhaustif ». La variation constatée sur les variations de BE suite au choc (-15,1% et -15,3%) est très proche. Entre ces deux méthodes, nous serions tentés de recommander, d'un point de vue *risk managment*, de retenir la méthode avec *Model Point*, puisque les variations sont légèrement plus prudentes.
La méthode avec *Model Points* « cohérents » est, elle, moins prudente que la méthode *Model Points* « exhaustifs ». Néanmoins, l'écart par rapport à la modélisation tête par tête est faible, qui ne

[82] La question de l'impact de l'amélioration de la mortalité sur les prestations en rente dues à l'option Madelin peut se poser. Cependant, il est important de souligner que seulement 30% des assurés ont souscrits à cette option, et donc que pour les 70% restant, les prestations en cas de décès sont en capital. Il semblerait donc que la proportion d'assurés ayant souscrits à l'option Madelin ne soit pas assez élevée pour que l'amélioration de la mortalité entraine une augmentation des prestations décès.
[83] tête par tête et par *Model Points* « exhaustifs »

semble pas justifier un changement dans l'approche de valorisation retenue jusqu'à présent par le Groupe Hannover Re.

4.2 Calcul du *BE* et sensibilités sur le traité *AL*

4.2.1 Calcul du BE

La valeur du BE pour AL au 31/12/2019 est d'environ – 790 k€.
La négativité du BE indique que la moyenne pondérée par leur probabilité, des encaissements futurs actualisés est supérieure à celle des décaissements futurs actualisés.
Ce traité était donc essentiellement profitable, avant la pandémie.

4.2.2 Sensibilités aux hypothèses techniques

Les chocs sur les hypothèses techniques présentent les mêmes types de variations, ils ne seront pas représentés dans leur intégralité afin de ne pas alourdir la lecture de ce mémoire.
À titre d'exemple, les chocs sur les taux de décès et les taux de passage en incapacité sont présentés.

	Variation en % "tête par tête"
BE Choc mortalité +10%	3,79%
BE Choc Passage incap +10%	31,79%

Puisque le montant du BE *BE* d'AL est largement inférieur à celui d'AX en valeur absolu (790k vs. 2.5M), nous pourrions attendre des sensibilités plus importantes.
C'est effectivement le cas pour le choc sur les taux de passage en incapacité (32% vs 18%) bien que les variations sur la prestation pour incapacité soient identiques.

Cependant, le choc de mortalité est similaire sur les deux BE, ce qui ne semble pas logique. En fait, il y a déjà des rentiers dans le portefeuille d'AL[84] alors qu'il n'y en a pas dans le portefeuille AX :
Un double effet va donc s'opérer :

1. Le volume de prestations décès choqué positivement (pour les assurés sains) est nettement moins important ;
2. Le choc de mortalité sur les rentiers va venir diminuer les prestations futures estimées.

Ces deux effets conduisent à réduire la sensibilité à la mortalité.

4.3 Ouverture : impact COVID sur l'incidence en 2020

La valorisation a été calculée au 31/12/2019 donc avant l'éclatement de la pandémie du Covid-19.
La robustesse du modèle aurait pu être testée avec l'impact constaté sur le ratio S/P du fait de l'accroissement du nombre d'incapacité de courte durée liée à cette nouvelle maladie[85].

Cependant, ces deux portefeuilles sont encore en production et l'effet de l'augmentation des sinistres a été partiellement diluée par l'augmentation des primes rendant un *back testing* inopérant.

[84] Plus de 50% de la prestation décès

[85] +13% sur les taux d'incidence en incapacité sur AX et +12,5% sur les taux d'incidence en incapacité sur AL

5 Conclusion

L'objectif de ce mémoire était la revue du modèle interne et actuariel d'Hannover Re sur le périmètre des traités de type prévoyance individuelle, à somme sous risque constante, et frontière des contrats à un an.
Cette revue a nécessité plusieurs étapes :

1. Détermination des hypothèses techniques de projection ;
2. Construction d'un outil de calcul du *BE* souple, permettant d'utiliser des méthodes et des hypothèses adaptées ;
3. Calcul du *BE* ;
4. Calcul des sensibilités aux hypothèses techniques et à l'utilisation de *model points* ;

L'étude a été réalisée en deux parties, parallèlement :

- Sur un traité nommé AX, modélisé par la succursale de façon isolée car il présente un montant de prime important ;
- Sur un regroupement de traités similaires nommé AL, représentatif des traités du périmètre étudié.

Ces traités couvrent des produits de prévoyance pour les TNS, pouvant souscrire à l'option Madelin (sortie en rente et fiscalité spécifique).

Concernant la détermination des hypothèses techniques, l'historique des sinistres et des portefeuilles a permis de construire des lois d'expérience pour le passage en incapacité de l'état sain (par sexe) et le maintien en incapacité.
Dans un premier temps, les taux bruts ont été estimés avec les estimateurs de Hoem. Plusieurs méthodes de lissage et d'ajustement ont ensuite été comparés : Whittaker-Henderson, splines cubiques, ratio observés/estimés, Brass et GLM Poisson.
Sur AX, l'historique nous a permis d'utiliser le modèle non-paramétrique de WH pour ajuster les taux pour les femmes mais la volatilité nous a contraint à utiliser des splines cubiques pour les hommes.
Sur AL, l'exposition étant moins importante sur certaines tranches d'âge (jeunes), nous avons également essayé des modèles relationnels afin d'extraire les tendances d'AX lorsque cela était nécessaire. Pour les femmes sur AL, les taux retenus ont été lissés avec le modèle GLM poisson, alors que pour les hommes, le lissage avec le modèle de Brass a été choisi.
Le choix du lissage et l'optimisation des paramètres ont respecté, tout au long de l'étude, une procédure basée sur des indicateurs statistiques tels que la distance du χ^2, le R^2, le ratio observés/estimés, le test des signes, le nombre de points hors des intervalles de confiances à 95% autour des taux bruts, mais également basée sur notre interprétation et notre connaissance du phénomène.
Les lois d'expérience ont pu être discutées avec les départements de souscription et financiers, d'une part pour qu'ils apportent leur vision et leur connaissance des produits, et d'autre part pour qu'ils comprennent l'élaboration de ces lois s'ils veulent les réutiliser.
Des tables réglementaires ont été utilisées pour le reste des hypothèses par manque de données (et un avis d'expert pour la chute).

Ensuite, un outil de calcul du *BE* a été construit sous Excel-VBA. Cet outil se veut souple, permettant de calculer le *BE* en entrant le portefeuille à projeter « tête par tête » ou en utilisant des *model points*.

Cet outil permet de calculer le *BE* pour AX et pour AL, de calculer les sensibilités aux hypothèses techniques en leur appliquant des chocs et également de quantifier l'impact du regroupement des assurés par *Model Points*.

Dans un premier temps, l'analyse des sensibilités a montré que les sensibilités les plus importantes des *BE* des traités étudiés sont les sensibilités relatives aux garanties d'incapacité (incidence et maintien), ce qui s'explique parce qu'elles représentent le montant de prestations le plus important par rapport aux autres garanties.

Dans un second temps, les comparaisons entre les *BE* calculés en « tête par tête » et avec des M*odel Points* a mis en exergue que :

- les écarts sont très faibles entre la valorisation « tête par tête » et la valorisation avec *Model Points* « exhaustif ». Les impacts sur les prestations d'incapacité suite au choc sont très proches.
- la méthode avec *Model Points* « cohérents » est moins prudente que la méthode *Model Points* « exhaustifs » mais l'écart est faible par rapport à la modélisation tête par tête.

Ainsi, il ne semble pas pertinent de développer un modèle spécifique avec une méthode de valorisation en tête par tête. La question de la faisabilité concernant les *Model Points* « exhaustifs » permettra à Hannover Re de trancher.

Le faible volume de données ayant servi à ajuster les lois biométriques nécessitera de suivre ces lois minutieusement et de les confronter à d'autres portefeuilles, le cas échéant. Notamment, il pourra être intéressant de re-déterminer de nouvelles lois d'incidence ou de maintien avec des franchises ou plus longues ou plus courtes.

Enfin, les *Model Points* eux-mêmes pourraient faire l'objet d'une nouvelle étude pour développer la méthodologie de regroupement retenue jusqu'à présent.

La période de la pandémie a mis à mal les modèles internes puisque, par définition, un tel événement n'est pas modélisé dans le scénario central. Les lois déterminées ne tiennent pas compte de cette nouvelle pathologie et de ses répercussions à long terme. Elles devront donc être actualisées dès que le phénomène se sera stabilisé.

Bibliographie

ACPR. (2016). *Notice de l'ACPR surla désignation des «dirigeants effectifs» et des «responsables de fonctions clés» dans le régime «Solvabilité II».* https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2020/08/07/11._notice_gouvernance-post-ccap.pdf.

Becker, Y. (2015). *La tarification d'un swap de longévité (Mémoire de Master) .* Université de Strasbourg.

Bertrand, F., Maumy-Bertrand, M., & Claeys, E. (2019). *Modélisation statistique par la pratique avec R.* Dunod.

Chesneau, C. (2017). *Modèles de régression. cel-01248297v3.* France: HAL archives-ouvertes.fr.

Guibert, Q., & Planchet, F. (2017). *Utilisation des estimateurs de Kaplan-Meier par génération et de Hoem pour la construction de tables de mortalité prospectives.* hal-01509483.

Hanna, C. (2020). *Vérification de la suffisance de la provision pour risques croissants d'un traité dépandance français (Mémoire de Master).* Université de Strasbourg.

IA. (2006). *LIGNES DIRECTRICES MORTALITE - Version approuvée après consultation des membres de l'Instituts des Actuaires.* https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=173&fg=1.

IA. (2016). *Groupe de travail "Best Estimate Liabilities Vie", Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français.* https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=2016110706_2016133822-npa4-1.pdf&fg=1.

INSEE. (2020). *Emploi et revenus des indépendants. https://www.insee.fr/fr/statistiques/4470890.* Institut national de la statistique et des études économiques, 88 avenue Verdier, 92541 Montrouge Cedex.

Mlynarczyk, E. (2014). *Technique et pratique de la réassurance.* L'argus de l'assurance.

Parlement Européen et conseil. (2009). *Solvabilité II : Directive n°2009/138/CE sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice.* Strasbourg: https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:fr:PDF.

Planchet, F., & Thérond, P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée, Applications actuarielles.* Economica, Assurance Audit Actuariat.

Pophillat, G. (2019). *Calcul de la meilleure estimation d'un traité emprunter individuel français (Mémoire de Master).* Université de Strasbourg.

Rakotomalala, R. (2008). *Comparaison de populations - Tests non paramétriques.* Université Lumière Lyon 2: https://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Comp_Pop_Tests_Nonparametriques.pdf.

Rakotomalala, R. (2011). *Tests de normalité - Techniques empiriques et tests statistiques.* Université Lumière Lyon 2: https://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Test_Normalite.pdf.

Tomas, J., & Planchet, F. (2014). *Critère de validation : aspect méthodologiques. Note de travail I1291-14 v1.2 IA.* ISFA - Laboratoire SAF.

Tomas, J., & Planchet, F. (2016). *Construction et validation des références de mortalité de place, IA Note de travail II1291-11 v1.4.* Lyon: ISFA - Laboratoire SAF.

Tomas, J., & Planchet, F. (2016). *Méthodes de positionnement : Aspects méthodologiques, Institut des actuaires, Note de travail II1291-12 v1.7.* LYON: ISFA - Laboratoire SAF.

Table des figures

Figure 1 : Bilan en vision Solvabilité II 4
Figure 2 : Schéma simplifié du calcul du BE 6
Figure 3 : Illustration du mécanisme de calcul d'un SCR sous-module de risque (choc sur le Bilan SII) 8
Figure 4 : La réassurance proportionnelle de type Quote-Part 11
Figure 5 : Revenus mensuels moyens des non-salariés classiques en 2017 par secteur et par sexe. (Source : INSEE (2020)) 14
Figure 6 : Nombre d'assurés par âge par portefeuille 20
Figure 7 : Statistiques sur les âges des portefeuilles AL et AX 21
Figure 8 : Répartition des sexes pour les deux portefeuilles 21
Figure 9 : Histogrammes des bases de garantie d'AL et AX 21
Figure 10 : Statistiques des montants de base de garantie d'AL et AX 22
Figure 11 : Répartition des assurés des deux portefeuilles en quatre classes de professions 22
Figure 12 : Schéma des passages entre les différents états possibles pour les assurés. 24
Figure 13 : Schéma récapitulatif des phénomènes de censure et de troncature 25
Figure 14: Nombre d'arrêts de travail par mois sur le portefeuille AX 39
Figure 15 : Proportion des assurés par franchise pour AX 40
Figure 16 : Proportion des assurés par franchise pour AL 40
Figure 17 : Incidence et exposition sur l'historique de chaque portefeuille 41
Figure 18 : Taux d'incidence bruts AL et AX 42
Figure 19 : Comparaison des estimations des taux d'incidence avec Hoem et KM 43
Figure 20 : Taux d'incidence bruts H/F/Mixtes avec IC95% sur les mixtes (AL et AX) 44
Figure 21 : Taux d'incidence bruts des femmes pour AX après agrégation et glissement 45
Figure 22 : Taux d'incidence bruts des femmes après agrégation et glissement 46
Figure 23 : Décomposition des taux bruts des femmes en fonction de la cause (AX) 46
Figure 24 : Comparaison lissages WH et par splines pour ix_F_AX 48
Figure 25 : Résidus studentisés externes de la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_F) 50
Figure 26 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_F) 51
Figure 27 : Models de Brass pour les taux d'incidences en incapacité d'AL avec pour référence les taux lissés d'AX femmes 51
Figure 28 : Lissages par Brass pour les taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL 52
Figure 29 : Résidus studentisés externes du modèle GLM Poisson ajustés pour les taux d'incidences en incapacité des femmes d'AL sur les taux de référence ix_AX_F lissés par splines et WH 53
Figure 30 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour l'ajustement par GLM Poisson sur les log des taux ix_F_AX lissés par Splines et par WH et sur l'âge 53
Figure 31 : Lissages des taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL par des modèles GLM Poisons sur AX 54
Figure 32 : Taux d'incidence en incapacité pour les femmes d'AL ajustés par un GLM poisson optimisé 55
Figure 33 : Comparaison des ajustements des taux d'incidence en incapacité pour les femmes d'AL 55
Figure 34 : Taux d'incidence en incapacité des femmes d'AL lissés 56
Figure 35 : Taux d'incidence bruts des hommes pour AX après agrégation et glissement par âges 57

Figure 36 : Décomposition du taux d'incidence des hommes de AX selon la cause de l'arrêt de travail. 58
Figure 37 : Taux d'incidences bruts pour les hommes sur AL après agrégation et glissement. 58
Figure 38 : Lissages par splines cubiques pour les taux d'incidence des hommes AX 59
Figure 39 : Résidus studentisés externes de la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_H_AL) 60
Figure 40 : Distances de Cook et seuil de 4/n pour la régression linéaire sous-jacente au modèle de Brass (ix_AL_H) 61
Figure 41 : Comparaison modèles de Brass pour les taux d'incidence en incapacité H 61
Figure 42 : Résidus studentisées externes et distances de Cook pour le modèle d'ajustement GLM Poisson sur les taux d'incidence en incapacité des hommes AL 62
Figure 43 : Comparaison des ajustements par modèle GLM Poisson sur les taux d'incidence des hommes AL 62
Figure 44 : Comparaison des ajustements pour les taux d'incidence en incapacité sur AL hommes 63
Figure 45 : Taux d'incidence en incapacité retenus pour les hommes sur AL 64
Figure 46 : Taux de sortie de l'incapacité du BCAC 65
Figure 47 : Ratios des taux de sortie moyens des jeunes âges (20-24 ans) sur les taux de sortie moyens des plus grands âges (60-64 ans) 66
Figure 48 : Taux bruts de sortie de l'état d'incapacité 67
Figure 49 : Taux de sortie de l'état d'incapacité AX lissés par WH bidimensionnel 67
Figure 50 : Schéma de passage global simplifié entre les différents états 71
Figure 51 : Schéma d'un exemple (décès durant le cinquième mois) de probabilisation et d'actualisation des rentes pour le calcul du capital constitutif de rente de la première année 73
Figure 52 : Schéma des passages et des maintiens liés à l'incapacité 73
Figure 53 : Schéma des passages et des maintiens liés à l'invalidité 74
Figure 54 : Taux de mortalité de l'INSEE H pour quatre vingtiles de revenus différents IV
Figure 55 : Taux de mortalité de l'INSEE par sexe (tables 2012-2016) IV
Figure 56 : Tableau de catégorisation des professions des TNS de notre portefeuille en quatre classes V
Figure 57 : Histogramme du nombre d'arrêt de travail en fonction du délai de déclaration en jourVI
Figure 58 : Statistiques descriptives concernant le délai de déclaration des sinistres en arrêt de travail sur AL VI

Annexes

Annexe I : Courbes des taux de mortalité de L'INSEE par sexe et par vingtile de revenus

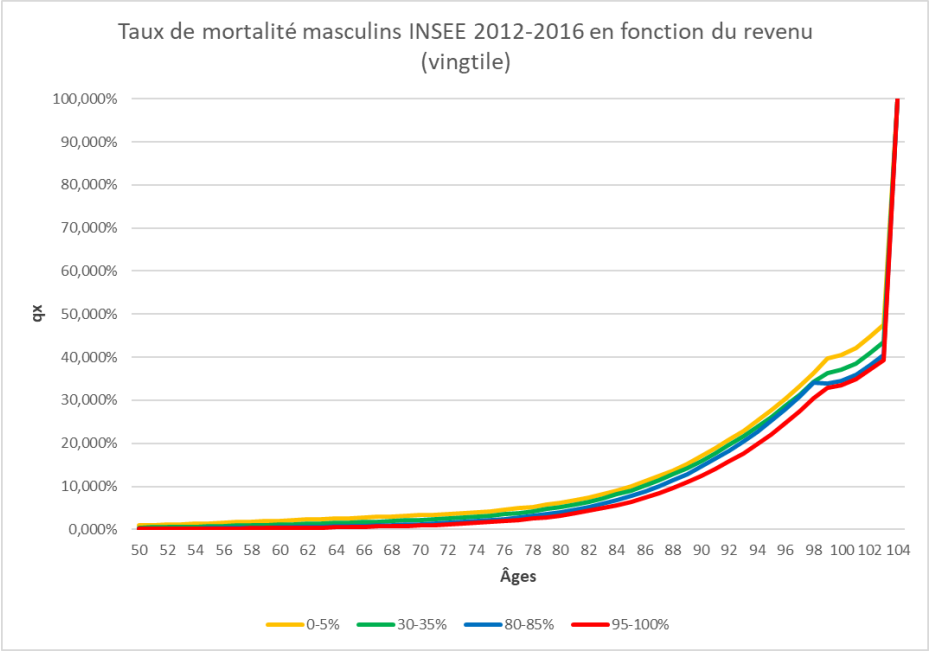


Figure 61 : Taux de mortalité de l'INSEE H pour quatre vingtiles de revenus différents

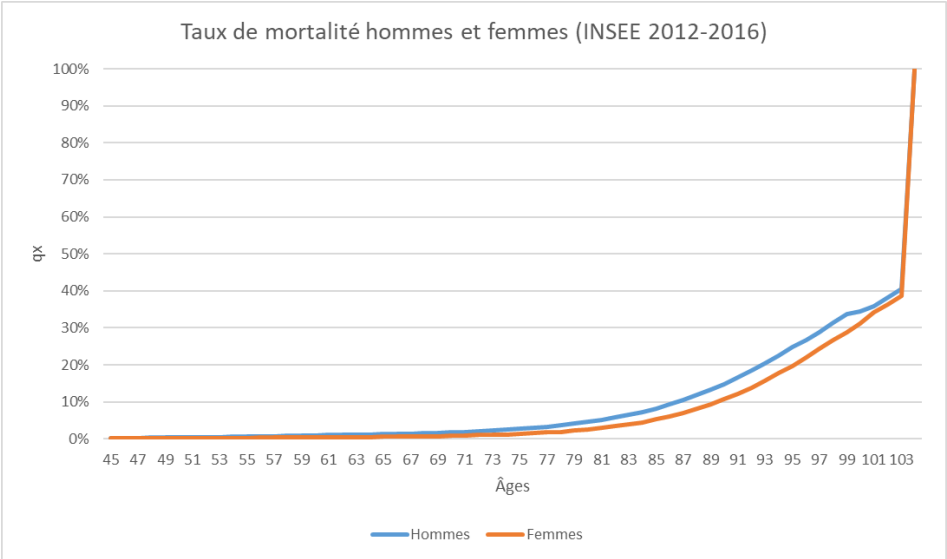


Figure 62 : Taux de mortalité de l'INSEE par sexe (tables 2012-2016)

Annexe II : Tableau de catégorisation des professions en quatre classes

V01-CNAV TNS - Artisan hors BTP/Gros oeuvre (RSI)	artisans_agri_btp
V02-CNAV TNS - Artisan du BTP/Gros oeuvre (RSI)	artisans_agri_btp
V03-MSA - Agriculteurs	artisans_agri_btp
V04-CNAV TNS - Commerçant (RSI)	commerç_HCR_transport
V05-CARCDSF1 - Dentiste et Stomatologue	libéraux_médicaux
V06-CARCDSF2 - Sage Femme	libéraux_médicaux
V07-CARMF - Médecin	libéraux_médicaux
V08-CARPIMKO - Auxiliaires médicaux/paramédicaux	paraméd_infirmiers
V09-CARPV - Vétérinaires	libéraux_médicaux
V10-CAVAMAC - Agents généraux d'assurances	commerç_HCR_transport
V11-CAVEC - Expert comptable	libéraux_médicaux
V12-CAVOM - Officiers publiques et ministériels (huissier, commissaire priseur, greffier…)	libéraux_médicaux
V13-CAVP - Pharmacien	commerç_HCR_transport
V14-CIPAV - professions libérales	libéraux_médicaux
V15-CNBF&LPA - Avocats	libéraux_médicaux
V16-CRN - Notaires	libéraux_médicaux
V17-Maison des artistes&AGESSA (uniquement les architectes, infographistes, graphistes et photographes *)	libéraux_médicaux
V19-CNAV TNS - professions libérales (RSI)	libéraux_médicaux
C01-Professions Libérales autres	libéraux_médicaux
C02-Professions médicales	libéraux_médicaux
C03-Professions paramédicales (hors Infirmiers)	paraméd_infirmiers
C04-Infirmiers	paraméd_infirmiers
C05-Commerciaux, agents d'assurance, immobilier ou patrimoine	commerç_HCR_transport
C06-Hotel / Café / Restaurant / Métiers de bouche	commerç_HCR_transport
C07-Commerçants	commerç_HCR_transport
C08-Artisans	artisans_agri_btp
C09-Métiers de la beauté	commerç_HCR_transport
C10-Professions de l'agriculture et de l'aquaculture	artisans_agri_btp
C11-Transport / Automobile	commerç_HCR_transport
C12-BTP/Gros œuvre	artisans_agri_btp
C13-Professions Libérales du Droit	libéraux_médicaux

Figure 63 : Tableau de catégorisation des professions des TNS de notre portefeuille en quatre classes

Annexe IV : Etude du délai de déclaration des sinistres en arrêt de travail sur AL

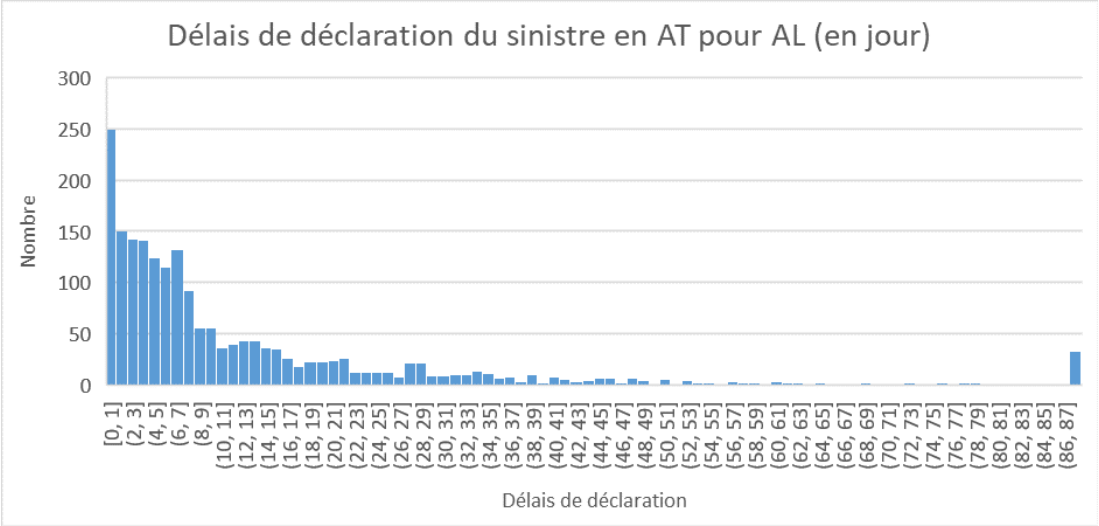


Figure 64 : Histogramme du nombre d'arrêt de travail en fonction du délai de déclaration en jour

Délai de déclaration (en jour)	**AL**
Moyen	14,17
Ecart-type	24,44
Min	0
Q1	3
Médian	7
Q3	16
Max	571
Nombre de délais > 365j	1

Figure 65 : Statistiques descriptives concernant le délai de déclaration des sinistres en arrêt de travail sur AL

Ces quelques statistiques descriptives sur les délais de déclaration des sinistres en arrêt de travail sur le portefeuille AL permet de se rendre compte que le délai sur ce type de sinistre est relativement court (quelques jours en moyenne). Cela pourrait être expliqué par la perte de salaire conséquente à l'arrêt de travail incitant à déclarer le sinistre plus rapidement. La date de déclaration des sinistres n'est pas renseignée dans la base AX, ce qui nous oblige à nous baser sur les chiffres obtenus sur AL.