Mémoire présenté
pour l'admission à l'Institut des Actuaires
le

Par : Amine Ben Fadhel
Titre : Accélération de l'évaluation de la solvabilité prospective d'un assureur épargne

Confidentialité : ☐ *Non* ☑ *Oui* (*Durée* : ☐ 1 an ☑ 2 *ans*)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

Entreprise : Natixis Assurances
Nom : Thibault Jacob
Signature :

Membres présents du Jury de la filiȓe

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Elie Meryglod
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

L'entrée en vigueur de la directive Européenne Solvabilité II le 1er janvier 2016 avait pour but d'assurer la solidité financière du secteur de l'assurance de l'union européenne. Cette nouvelle réglementation a impliqué un accroissement des besoins en matière de capacités calculatoires pour les assureurs, plus particulièrement pour les assureurs vie pour qui les risques financiers demandent une modélisation stochastique via des méthodes de Monte Carlo afin d'évaluer la valorisation du passif ou du capital de solvabilité requis lié aux contrats épargne.

À l'évolution de la réglementation prudentielle s'ajoute l'entrée en vigueur de la norme de comptabilisation des contrats d'assurance IFRS 17 qui bouleverse le séquencement des travaux de clôture trimestrielles et annuelles et qui implique une charge opérationnelle supplémentaire à effectuer en un temps limité.

C'est donc dans le cadre de cette problématique que nous avons étudié plusieurs méthodes permettant d'obtenir des évaluations de Best Estimate ou de capital de solvabilité requis en un temps accéléré relativement au modèle ALM actuel de Natixis Assurances.

L'étude associée à ce mémoire a permis de développer une optimisation de l'agrégation de la base de passif épargne, permettant une accélération du modèle ALM de Natixis Assurances, notamment dans le cadre des exercices de stress tests ORSA, d'un facteur oscillant entre 5 et 10 tout en garantissant des évaluations équivalentes à l'agrégation initialement utilisée.

Mots-clés : Solvabilité 2, ORSA, Ratio de couverture, Capital économique, Fonds propres économiques, Temps de calcul

Abstract

The entry into force of the European Solvency II Directive on January 1, 2016 was intended to ensure the financial robustness of the European Union's insurance sector. This new regulation implied an increase in the needs in terms of computational capacities for insurers, more particularly for life insurers for whom financial risks assessments require stochastic modeling via Monte Carlo methods in order to evaluate the valuation of their liabilities or the required solvency capital related to savings contracts.

In addition to the change in prudential regulation, the introduction of the IFRS 17 accounting standards for insurance contracts has disrupted the sequencing of quarterly and annual closing operations and entails an additional operational burden to be carried out in a limited timeframe.

It is thus within the framework of this issue that we have studied several methods allowing us to obtain Best Estimate or Solvency Capital Requirement evaluations in an accelerated time relative to the current ALM model used at Natixis Assurances.

This study resulted in the development of an optimization of the aggregation of the savings liability database, allowing an acceleration of the ALM model of Natixis Assurances, in particular within the framework of the ORSA stress tests, by a factor of between 5 and 10 while guaranteeing equivalent valuations to the aggregation initially used.

Keywords : Solvency 2, ORSA, Coverage ratio, Own funds, Computational time

Note de Synthèse

Contexte et problématique

L'entrée en vigueur de la directive Européenne Solvabilité II le 1er janvier 2016 avait pour but d'assurer la solidité financière du secteur de l'assurance de l'union européenne. Cette nouvelle réglementation a impliqué un accroissement des besoins en matière de capacités calculatoires pour les assureurs, plus particulièrement pour les assureurs vie pour qui les risques financiers demandent une modélisation stochastique via des méthodes de Monte Carlo afin d'évaluer la valorisation du passif ou du capital de solvabilité requis lié aux contrats épargne.

À l'évolution de la réglementation prudentielle s'ajoute l'entrée en vigueur de la norme de comptabilisation des contrats d'assurance IFRS 17 qui bouleverse le séquencement des travaux de clôture trimestrielles et annuelles et qui implique une charge opérationnelle supplémentaire à effectuer en un temps limité.

C'est donc dans le cadre de cette problématique que nous avons étudié plusieurs méthodes permettant d'obtenir des évaluations de Best Estimate ou de capital de solvabilité requis en un temps accéléré relativement au modèle ALM actuel de Natixis Assurances, nous distinguons deux types de solutions :

- Des méthodes d'approximation statistiques (LSMC/machine Learning...) mettant en place un modèle indépendant du modèle ALM et se basant sur des données générées par le modèle pour construire une base d'apprentissage permettant d'entraîner un modèle régressif qui calque les évaluations du modèle ALM.

- Des méthodes d'accélération des modèles existants : ces solutions préconisent l'utilisation du modéle ALM dans une version plus rapide en terme de temps de calculs nous pouvons citer parmi celles ci :

  1. Des méthodes d'accélération de convergence de monte carlo tel que l'usage de scénarios antithétiques ou de variables de contrôles.
  2. Des méthodes d'agrégation des paramètres du modèle afin de diminuer la complexité algorithme de ce dernier (solution préconisée par le mémoire)

.

Méthodologie suivie pour répondre à la problématique

Afin de répondre à la problématique de ce mémoire nous avons suivi une méthodologie basée sur 4 étapes principales :

1. Mise en place d'un cahier des charges décrivant les caractéristiques de la méthode d'approximation que nous souhaitons obtenir.
2. Étude des différentes méthodes d'approximation ou d'accélération d'un modèle ALM et sélection d'une méthode respectant au mieux le cahier des charges défini à la première étape.
3. Mise en oeuvre de la méthode d'approximation sélectionnée.
4. Backtest de la méthode mise oeuvre et mise en oeuvre d'un processus de validation associé.

Nous synthétisons ci-dessous l'évaluation de la pertinence de chaque méthode d'approximation de modèle ALM relativement aux principaux points du cahier des charges :

	Points principaux du cahier des charges décrivant la méthode d'approximation cible						
Méthode utilisée	**Précision**		**Interpretabilité**	**Temps de calcul**	**Sensibilité à un grand nombre de paramètres**	**Base d'apprentissage**	**Adapté au modèle ALM de Natixis Assurances (Formule Standard)**
---	**Calculs infra-annuels**	**Calculs prospectifs**	---				
Modèles régressifs	La littérature étudiée montre une précision acceptable dans le cas d'approximation de solvabilité infra-annuels basé sur une base d'apprentissage générée à une date proche de l'évaluation.	La littérature étudiée montre une précision insuffisante dans l'estimation de la solvabilité prospective plus particulièrement pour des scénarios de stress tests.	L'usage de modèle régressif implique une interprétabilité et une **capacité d'analyse moindre** relativement à l'utilisation classique d'un modèle ALM.	L'évaluation d'un modèle régressif nécessite un temps de calcul négligeable relativement au modèle ALM.	Le nombre de paramètres est limité par la taille de la base d'apprentissage qu'il est possible de construire.	Nécessite la construction d'une base de sensibilité afin d'entrainer le modèle regressif.	Oui
Agrégation de paramètres du modèle ALM	La précision de la méthode est indépendante du caractère prospectif ou non prospectif de l'évaluation. La littérature étudiée montre que les méthodes basés sur l'agrégation de paramètres modèles (tables actif/passif, scénarios économiques...) sont performants en terme de précision		Les méthodes étudiées proposent l'utilisation d'une version accélérée du modèle que nous cherchons à approximer et admettent donc le **même niveau d'interprétabilité que le modèle** lui-même.	La littérature étudiée montre une accélération du modèle ALM pouvant atteindre un facteur égal à 30.	L'utilisation du modèle ALM accéléré implique la sensibilité à l'ensemble des paramètres du processus approximé.	Ne nécessite pas la construction du base d'apprentissage.	Oui
Sélection de scénarios économiques par SVM	La précision de la méthode est indépendante du caractère prospectif ou non prospectif de l'évaluation. Il est néanmoins nécessaire de balayer un large espace de facteurs de risques lors de la construction de la base d'apprentissage afin d'assurer la précision dans le cas de calculs prospectifs.		La méthode permet d'obtenir une estimation du capital de solvabilité requis de l'assureur utilisant un modèle interne (quantile 99.5%) sans évaluer l'ensemble de la distribution des fonds propres.	La littérature étudiée montre une accélération du modèle ALM pouvant atteindre un facteur égal à 50.	L'utilisation du modèle ALM accéléré implique la sensibilité à l'ensemble des paramètres du processus approximé.	Nécessite la construction d'une base d'apprentissage.	Non : la méthode est appliquée dans le cadre d'approximation de modèle interne.

FIGURE 1 : Principales méthodes d'approximations candidates

L'analyse synthétisée dans le tableau ci-dessus préconise la méthode d'agrégation la base de passif utilisée par le modèle ALM étant donnée la facilité de son implémentation ainsi que le fait qu'elle soit fondée théoriquement et efficace dans la pratique.

Résultats de l'étude :

Afin de valider l'usage de l'approximation développée dans le cadre d'évaluations prospectives de la solvabilité (ORSA ou autres stress tests), un backtest a été effectué sur la base des projections ORSA et donne des résultats équivalents à ceux obtenus en utilisant le modèle ALM classique, le backtest concerne 3 scénarios ORSA (1 scénario central dit "Baseline" 2 scénarios adverses dit "Adverse1" et "Adverse2") se déroulant chacun sur 4 ans :

		2019	2020	2021	2022	Ecart max	Ecart moyen
SCR marché	Baseline	0.1%	0.5%	0.4%	0.0%	0.5%	0.3%
	Adverse 1	0.1%	0.0%	0.6%	0.6%	0.6%	0.3%
	Adverse 2	0.1%	0.4%	0.6%	0.2%	0.6%	0.3%
SCR Souscription vie	Baseline	0.9%	0.0%	1.6%	0.6%	1.6%	0.8%
	Adverse 1	0.9%	0.2%	0.2%	2.1%	2.1%	0.6%
	Adverse 2	0.9%	3.0%	3.5%	0.4%	3.5%	1.8%
SCR	Baseline	0.3%	0.3%	0.2%	0.1%	0.3%	0.2%
	Adverse 1	0.3%	0.0%	0.4%	0.8%	0.8%	0.4%
	Adverse 2	0.3%	0.5%	0.5%	0.2%	0.5%	0.4%

FIGURE 2 : Tableaux récapitulatif des écarts relatifs obtenus lors du backtest

En terme de temps de calcul le gain obtenu est une diminution du temps de calcul d'un facteur 5 à 7 :

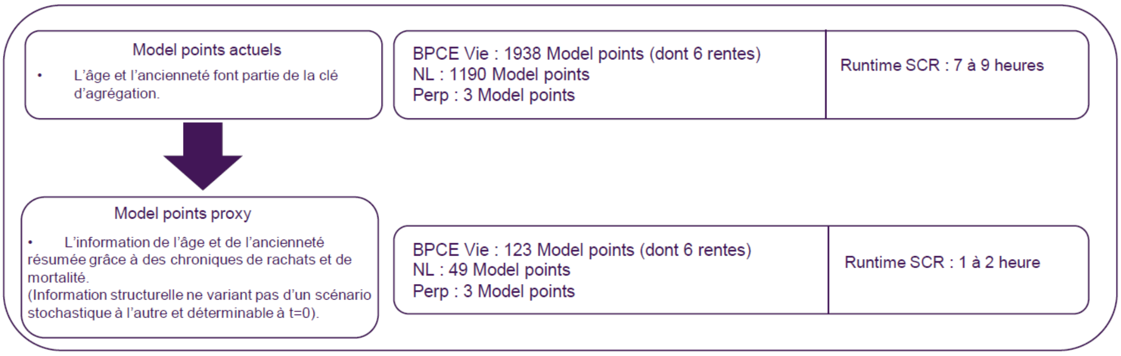


FIGURE 3 : Comparison of computing time - Proxy VS Classic ALM

Conclusion des travaux

Les résultats obtenus sont satisfaisants et permettent à un assureur vie de calculer la valorisation de passif épargne ou le capital économique requis associé d'une manière plus rapide.
Cette méthode est aujourd'hui appliqué au sein de Natixis Assurances dans le cadre de l'exercice ORSA où la multiplication des scénarios d'évaluations implique une hausse de la charge opérationnelle, l'approche peut aussi être utilisée dans toute étude ALM où il est nécessaire de tester divers choix stratégiques afin d'évaluer leurs impacts sur la solvabilité du portefeuille.

Synthesis note

Context

The entry into force of the European Solvency II Directive on January 1, 2016 was intended to ensure the financial robustness of the European Union's insurance sector. This new regulation implied an increase in the needs in terms of computational capacities for insurers, more particularly for life insurers for whom financial risks assessments require stochastic modeling via Monte Carlo methods in order to evaluate the valuation of their liabilities or the required solvency capital related to savings contracts.

In addition to the change in prudential regulation, the introduction of the IFRS 17 accounting standards for insurance contracts has disrupted the sequencing of quarterly and annual closing operations and entails an additional operational burden to be carried out in a limited timeframe.

It is thus within the framework of this issue that we have studied several methods allowing us to obtain Best Estimate or Solvency Capital Requirement evaluations in an accelerated time relative to the current ALM model used at Natixis Assurances, we distinguish two types of solutions:

- Methods based on statistical approximation (LSMC/machine learning, etc.) that implement an independent model of the ALM evaluation process and that use evaluations generated by the model to build a training set for calibrating a regressive model that mimics the evaluations of the ALM processus.

- Model acceleration methods: these solutions recommend the use of the ALM model in a faster version in terms of calculation time such as :

    1. Monte Carlo convergence acceleration methods such as the use of antithetical scenarios or control variables : these methods aim to reduce the variance of the monte-carlo estimator.
    2. Model input aggregation methods : in order to reduce the algorithmic complexity of the ALM process these methods aim to reduce the size of inputs such as liabilities tables.

.

Methodology followed

In order to answer the issue of this thesis we have followed a methodology based on 4 main steps:

1. Formulation of a specification describing the characteristics of the approximation method we wish to obtain.

2. Review of the different methods of approximation or acceleration of an ALM model and selection of a method that best meets the specification defined in the first step.

3. Implementation of the selected approximation method.

4. Backtesting of the implemented method and implementation of an associated validation process.

We summarize below the evaluation of the suitability of each ALM approximation method with respect to the main points of the specification :

	Main points of the specifications describing the target approximation method						
Reviewed method	Accuracy		Interpretability	Computation Time	Sensitivity to a large set of inputs	Training set	Adapted to the ALM model of Natixis Assurance (Standard Formula)
---	Calculs infra-annuels	Calculs prospectifs	---				
Regressive models	The reviewed litterature shows an acceptable accuracy in the case of infra-annual solvency approximation based on a training set generated at a date close to the approximated evaluation.	The reviewed litterature shows insufficient precision in the estimation of prospective solvency, especially for extreme stress test scenarios.	The use of a regressive model implies a lower interpretability and analysis capacity compared to the classical use of an ALM model.	The evaluation of a regressive model requires a negligible computation time compared to the ALM model	The number of parameters is limited by the size of the learning base that can be built within a reasonable time	Requires the construction of a database of sensitivities in order to train the regression model.	Yes
Aggregation of ALM model inputs	The accuracy of the method is independent of the prospective or non-prospective nature of the valuation. The reviewed litterature shows that methods based on the aggregation of model input (asset/liability tables, economic scenarios, etc.) perform well in terms of accuracy.		The reviewed methods propose the use of an accelerated version of the model we seek to approximate and admit the same level of interpretability as the model itself.	The reviewed litterature shows an acceleration of the ALM model by a factor than can reach 30.	The use of the accelerated ALM model implies the sensitivity to all the set of parameters of the approximated process	Does not require the construction of a training set.	Yes
Selection of economic scenarios by SVM	The accuracy of the method is independent of the prospective or non-prospective nature of the valuation. Nevertheless, it is necessary to scan a wide range of risk factors when constructing the training set in order to ensure accuracy in the case of prospective calculations.		The method provides an estimate of the insurer's Solvency Capital Requirement using an internal model (99.5% quantile) without evaluating the entire capital distribution.	The reviewed litterature shows an acceleration of the ALM model by a factor than can reach 50.	The use of the accelerated ALM model implies the sensitivity to all the set of parameters of the approximated process	Requires the construction of a training set.	No : the method is applied within an internal model framework

Figure 4: Principales méthodes d'approximations candidates

Study Results :

In order to validate the use of the approximation developed in the context of prospective solvency assessments (ORSA or other stress tests), a backtest was carried out on the basis of the 2019 official ORSA projections and gave results equivalent to those obtained using the classic ALM model. The backtest concerns 3 ORSA scenarios (1 central scenario known as "Baseline", 2 adverse scenarios known as "Adverse1" and "Adverse2"), each of which takes place over a period of 4 years:

		2019	2020	2021	2022	Ecart max	Ecart moyen
SCR marché	Baseline	0.1%	0.5%	0.4%	0.0%	0.5%	0.3%
	Adverse 1	0.1%	0.0%	0.6%	0.6%	0.6%	0.3%
	Adverse 2	0.1%	0.4%	0.6%	0.2%	0.6%	0.3%
SCR Souscription vie	Baseline	0.9%	0.0%	1.6%	0.6%	1.6%	0.8%
	Adverse 1	0.9%	0.2%	0.2%	2.1%	2.1%	0.6%
	Adverse 2	0.9%	3.0%	3.5%	0.4%	3.5%	1.8%
SCR	Baseline	0.3%	0.3%	0.2%	0.1%	0.3%	0.2%
	Adverse 1	0.3%	0.0%	0.4%	0.8%	0.8%	0.4%
	Adverse 2	0.3%	0.5%	0.5%	0.2%	0.5%	0.4%

Figure 5: Summary table of the relative differences obtained during the backtest

In terms of calculation time, the gain obtained is a reduction of the by a factor of 5 to 7:

		Classical model point aggregation	Optimised proxy aggregation
Number of model points	---	~3131	~175
Computational time	Best Estimate	20 to 30 min	3 to 5 min
	Solvency	7 to 9 hours	1 to 2 hours

Figure 6: Comparison between classical model point aggregation and optimised aggregation

Conclusion

The results obtained are satisfactory and allow a life insurer to calculate the valuation of savings liabilities or the associated required economic capital in a faster way.
This method is currently applied within Natixis Assurances as part of the ORSA exercise where the multiplication of valuation scenarios implies an increase in the operational load. The approach can also be used in any ALM study where it is necessary to test various strategic choices in order to evaluate their impact on the solvency of the portfolio.

Remerciements

Je tiens à remercier Elie Meryglod, mon tuteur lors de mon alternance à Natixis Assurances pour sa disponibilité et ses nombreux conseils.

Je souhaite également remercier Sebastien le Darz Marangoni et Thibault Jacob pour la confiance qu'ils m'ont accordé pour mener à bien cette étude ainsi que l'ensemble du département "mesure du risque et gestion actif-passif" de la direction des risques de BPCE Vie pour l'aide reçu, plus particulièrement François Penet pour les informations éclairantes concernant la structure du passif du portefeuille épargne.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à mes parents pour leur soutien constant et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

L'entrée en vigueur de la directive Européenne Solvabilité II le 1er janvier 2016 avait pour but d'assurer la solidité financière du secteur de l'assurance de l'union européenne. Cette nouvelle réglementation a impliqué un accroissement des besoins en matière de capacités calculatoires pour les assureurs, plus particulièrement pour les assureurs vie pour qui les risques financiers demandent une modélisation stochastique via des méthodes de Monte Carlo afin d'évaluer la valorisation du passif ou du capital de solvabilité requis lié aux contrats épargne.

À l'évolution de la réglementation prudentielle s'ajoute l'entrée en vigueur de la norme de comptabilisation des contrats d'assurance IFRS 17 qui bouleverse le séquencement des travaux de clôture trimestrielles et annuelles et qui implique une charge opérationnelle supplémentaire à effectuer en un temps limité.

C'est donc dans le cadre de cette problématique que nous avons étudié plusieurs méthodes permettant d'obtenir des évaluations de Best Estimate ou de capital de solvabilité requis en un temps accéléré relativement au modèle ALM actuel de Natixis Assurances.

Notre travail s'est donc articulé en plusieurs étapes, la première étape a consisté à mettre en place un cahier des charges décrivant les caractéristiques de la méthode d'approximation que nous souhaitons obtenir, par la suite l'étude des différentes techniques d'approximation de modèle ALM a permis de sélectionner une méthode respectant au mieux le cahier des charges défini : la méthode sélectionnée consiste à optimiser l'agrégation de la base de passif utilisée par le modèle afin d'accélérer le temps de calcul de ce dernier. Afin de valider cette méthode nous étudierons une application concrète de la méthode dans le cadre de l'évaluation de la solvabilité prospective durant 3 scénarios ORSA. Pour clôturer cette étude nous proposons plusieurs leviers d'améliorations futures de l'approche ainsi qu'une application annexe de la méthode dans le cadre de la construction d'une variable de contrôle permettant de diminuer la variance de l'estimateur Monte-Carlo du Best Estimate d'un passif épargne.

Chapitre 1

Contexte réglementaire et enjeux calculatoires

1.1 Cadre de l'assurance vie

L'assurance vie est une branche de l'assurance qui fait naître des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine. En assurance vie, le décès est certain, seule sa date est inconnue. L'aléa porte donc sur la durée de vie résiduelle et non pas sur l'évènement de décès.
Ainsi les contrats d'assurance vie couvrent les risques qui sont liés à cette durée de vie résiduelle.

Ce type de contrat garantit à l'assuré (ou aux bénéficiaires du contrat), en l'échange de prime(s), le versement d'une prestation sous la forme d'un capital ou d'une rente, ces garanties sont de deux types :

- La garantie en cas de vie assure le versement d'une prestation au bénéficiaire du contrat si l'assuré est en vie à une date donnée fixée par le contrat.
- La garantie en cas de décès assure le versement d'une prestation au bénéficiaire du contrat en cas de décès de l'assuré.

Il existe quatre grands types de contrats en assurances vie. Ces contrats sont répartis en contrats en cas de vie ou en cas de décès, temporaires ou viagers.
Le tableau (1.1) résume ces types de contrats.

Les contrats d'assurance-vie étudiés dans ce mémoire sont des contrats d'**épargne**, qui contiennent à la fois une garantie en cas de vie et une autre en cas décès : ces contrats permettent à l'assuré de faire fructifier les primes versées afin de constituer un capital.
Il existe plusieurs supports d'investissement :

	En cas de vie	En cas de Décès
Garantie viagère	**Retraite ou Epargne**	**Contrat Vie entière** (versement d'une somme à un bénéficiaire le jour du décès de l'assuré, l'aléa porte donc sur la date du décès)
Garantie temporaire	**Capital différé** (capital payé si la personne est en vie à une date fixée au contrat)	**Assurance temporaire décès** (versement d'une somme à un bénéficiaire le jour du décès de l'assuré si celui-ci intervient pendant une période fixée au contrat)

Table 1.1 : Les grands types d'assurance vie

- **Les supports en Euros** dont la caractéristique principale et d'admettre une garantie du capital investi, cette clause de garantie prend la forme d'un taux minimum garanti (TMG), il s'agit du rendement en dessous duquel les placements effectués par l'épargnant ne puissent descendre en dessous. Du fait du faible rendement offert par les marchés obligataire, principale cible d'investissement des supports euros, la majorité des contrats commercialisés en France proposent un TMG de 0%, cette garantie peut être brut ou net de frais de gestion.

- **Les supports en unité de comptes**, l'investissement se fait sur des supports divers (Fonds, OPCI, SCPI, ETF, titres cotés sur un marché boursier...), seul le nombre d'unités de compte est garanti, la valeur de ces dernière étant fluctuant le capital investit n'est pas garanti.

- **Les contrats multi-supports** permettent d'investir sur les deux supports ci-dessus, le support en euros vient donc assurer une garantie du capital sur une partie de l'investissement de l'assuré.

Les contrats d'épargne bénificient d'un avantage fiscal sur les revenus. En effet, les plus values réalisées bénéficient d'un dispositif fiscal spécifique qui dépend de l'ancienneté du contrat.
Le dispositif est le suivant :

- **Pour les contrats souscrits depuis moins de 4 ans** intégration des plus values réalisées aux revenus imposables OU prélèvement forfaitaire libératoire de 35% sur les plus values réalisées

- **Pour les contrats souscrits depuis 4 et 8 ans** intégration des plus values réalisées aux revenus imposables OU prélèvement forfaitaire libératoire de 15% sur les plus values réalisées

- **Pour les contrats ouverts depuis plus de 8 ans** exonération d'impôts jusqu'à 4600€ de plus values réalisées par an. Les plus values réalisées dépassant 4600€ sont intégrées aux revenus imposables OU subissent un prélèvement forfaitaire libératoire de 7,5%

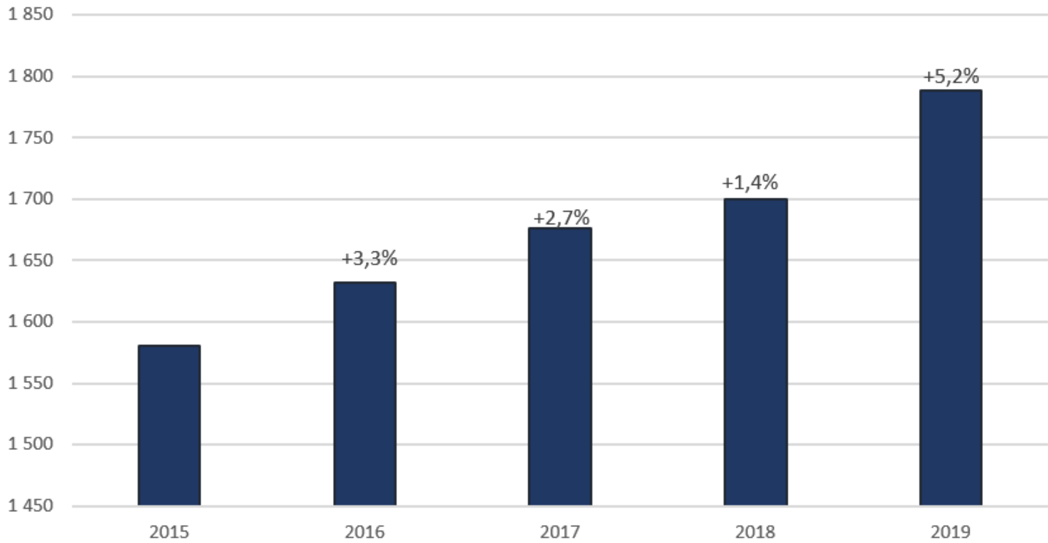


FIGURE 1.1 : Encours des contrats d'assurance vie en France (Mds €) (FFA)

Du fait de règles de transmission avantageuses, d'abattement fiscaux sur les plus-values, des garanties offertes par les fonds euros et de la liquidité du placement, l'assurance-vie représente le premier moyen d'épargne en France, selon les « chiffres clés » publiés par la Fédération Française de l'Assurance (1), les contrats d'assurance vie totalisent à la fin de l'année 2019 en encours total de plus de 1700 milliards d'euros (voir figure (1.1))

1.2 Bilan et solvabilité dans le cadre de "Solvabilité II"

Solvabilité II représentant une évolution de la réglementation précédente nous énoncerons dans cette partie les caractéristiques principales de la directive Solvabilité I, puis nous mettrons en évidence les raisons ayant amené la mise en place d'un nouveau cadre réglementaire.

1.2.1 De Solvabilité I...

Solvabilité I regroupe les premières directives en matière de solvabilité des compagnies d'assurance mises en place pendant les années 70, sa mise en œuvre définitive s'est concrétisée en 2002.

a. Bilan comptable sous solvabilité I

Le bilan d'une société peut être vu comme une photographie de son patrimoine à une date donnée.

L'actif d'une compagnie d'assurance représenté l'ensemble des biens détenus par celle-ci. Dans le cas de Solvabilité 1 l'actif est valorisé en valeur comptable, le passif est constitué de **fonds propres** (richesse de la compagnie) et de **provisions techniques** (dette contractée par l'assureur pour faire face à ses engagements envers les assurés).

Nous représentons ici le bilan simplifié d'une compagnie d'assurance illustrant l'égalité :

$$Actifs\ comptables = Fonds\ Propres + Provisions\ Techniques$$

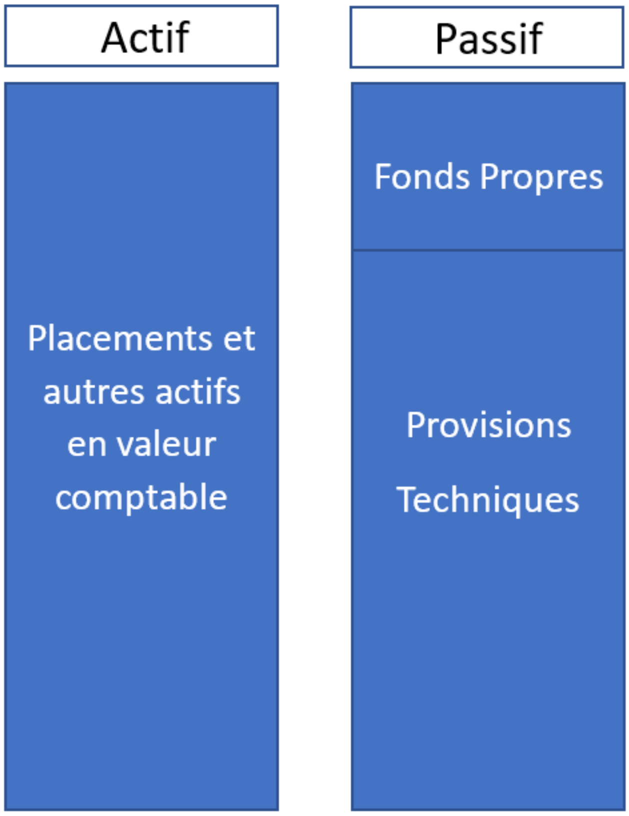


Figure 1.2 : Présentation du bilan sous Solvabilité I

L'élément principal de cette réglementation est la définition d'une Marge de Solvabilité Requise, noté MSR. Les fonds propres de l'entreprise doivent donc être supérieur à cette marge afin de faire face aux différents risques qu'elle encourt. Ces risques peuvent être liés aux placements de l'assureur (actif), par exemple : une évolution à la baisse des actions qu'il détient, mais aussi liés aux assurés (passif) comme une vague de rachats massifs.

Une fois les provisions techniques valorisées de manière prudente le calcul du MSR (pour le périmètre épargne) consiste en un pourcentage des provisions mathématiques des contrats en euros et en Unités de compte comme suit :

$$MSR = 4\% \cdot PM_{euros} + 1\% \cdot PM_{UC}$$

b. Limites de Solvabilité 1

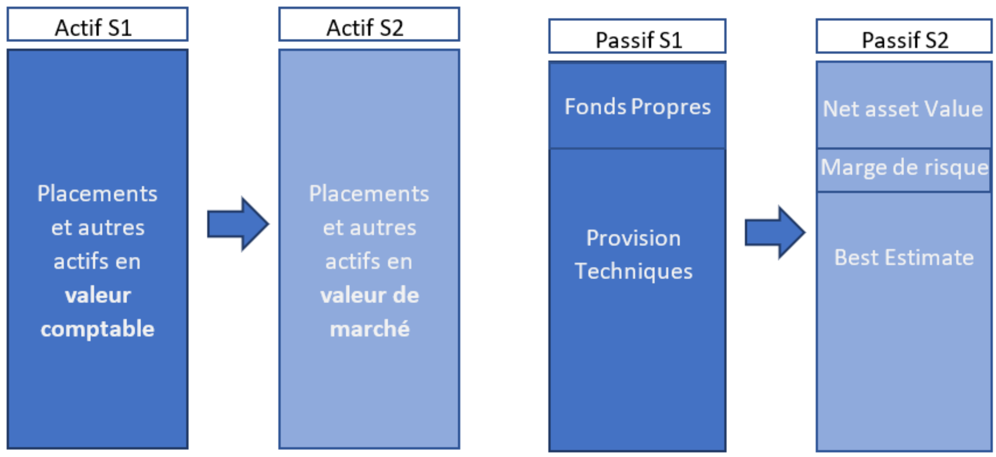
Malgré la simplicité du calcul, la réglementation Solvabilité 1 a montré sa fiabilité dans la mesure ou aucune compagnie d'assurance n'a fait faillite sous ce régime, il présente cependant un certain nombre de limites qui ont motivé la mise en place d'une nouvelle directive :

- Dans le cas où les provisions techniques sont calculées de manière prudentes la marge de solvabilité sera plus élevée sans que cela ne soit justifié.
- La marge de solvabilité n'est pas représentative de l'ensemble des risques de l'assureur et ne se base que sur des éléments du passif, si on considère deux compagnies ayant au passif des engagements similaires en tous points, la première a un actif constitué de 100% d'actions et l'autre à 100% d'obligations. En considérant la formule du MSR nous obtiendrons les mêmes montants pour les deux compagnies malgré une exposition au risque plus importante pour la compagnie exposée à une baisse des marchés actions (en général plus volatile que le marché obligataire).
- Aucune interaction entre l'actif et le passif n'est prise en compte.
- La directive est transposée à la réglementation de chaque pays, cela peut entrainer des problèmes concurrentiels entre les pays.
- La vision comptable des engagements ne permet pas de prendre en compte l'évolution du profil de risque de la compagnie au cours du temps.

Sachant les limites de cette directive, il devient nécessaire d'identifier et de quantifier l'ensemble des risques notables auxquels les assureurs doivent faire face. Cette démarche apportant un nouveau cadre à la gestion du risque et au calcul du besoin en capital se traduit par le passage à la norme Solvabilité 2.

1.2.2 ... Vers Solvabilité II

Adoptée par le parlement Européen en 2009 et entrée en vigueur le 1er janvier 2016 Solvabilité 2 apporte de nouvelles méthodes de quantification du risque pour les assureurs et les réassureurs et harmonise la communication de ces derniers en imposant des règles communes, à l'échelle de l'Europe, en matière de publication des états réglementaires.
Nous détaillerons ces évolutions dans un second temps mais nous pouvons déjà observer les évolutions de représentations bilancielles entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2 (cf. figure (1.3))



(a) Evolution des actifs de Solvabilité I à Solvabilité II (b) Evolution des passif de Solvabilité I à Solvabilité II

FIGURE 1.3 : Evolution du bilan de Solvabilité I à Solvabilité II

Cadre de la norme Solvabilité II

La norme Solvabilité 2 se base sur trois axes appelés piliers qui décrivent les éléments que doivent produire les assureurs pour démontrer leur solvabilité et la maitrise de leurs risques.
Ces piliers traitent respectivement des aspects quantitatifs, qualitatifs et de communication en matière de gestion des risques.
Les trois piliers de la directive sont explicités dans la figure (1.4)

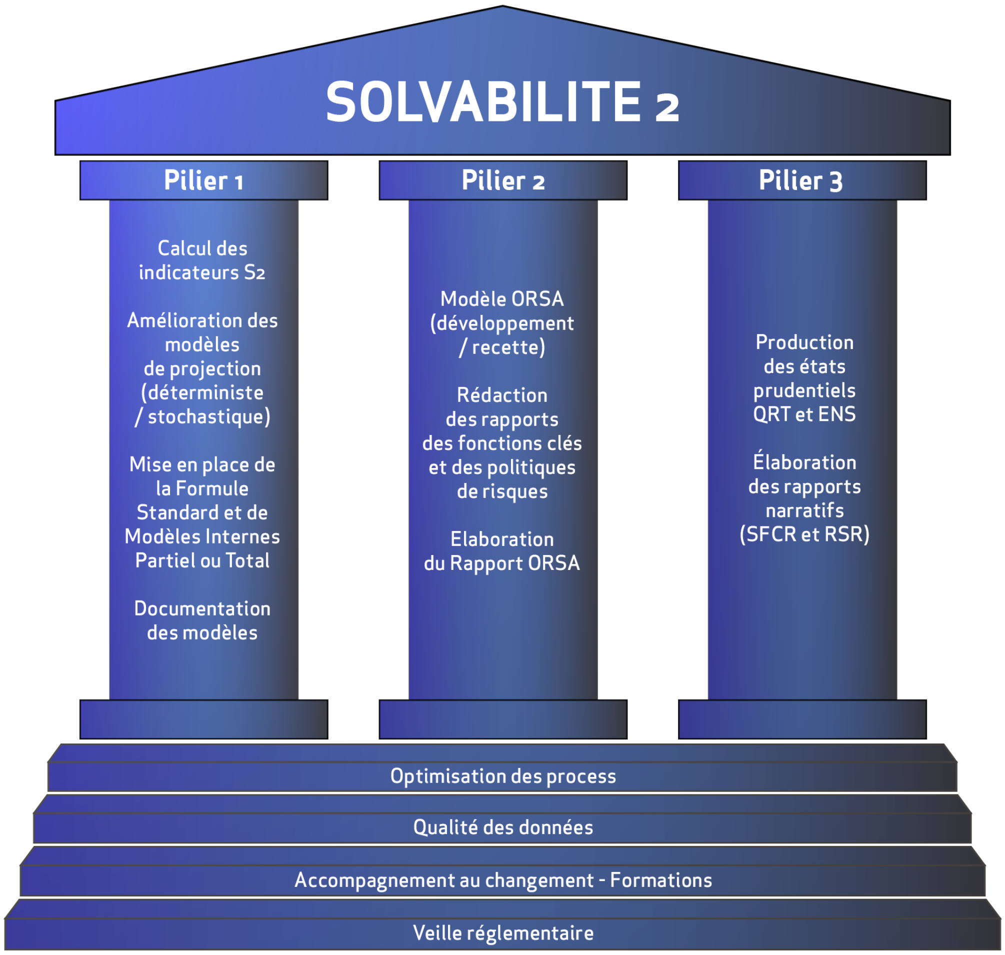


FIGURE 1.4 : Piliers de la directive Solvabilité II

Pilier I : Exigences quantitatives : Ce pilier vise à définir les seuils quantitatifs pour les fonds propres. Deux indicateurs de solvabilité sont définis :

- **Le MCR** : Minimum Capital Requirement : représente le niveau minimum de fonds propres à détenir en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique.
- **Le SCR** : Solvency Capital Requirement : représente le capital de solvabilité à

détenir pour absorber l'impact financier des risques liés à l'activité d'assurance dans 99.5% des cas.

Le Bilan Economique sous solvabilité 2 : Sous Solvabilité 2, le bilan de la compagnie d'assurance est évalué selon le principe de "Juste Valeur" (*Fair Value*), cela permet ainsi de refléter la richesse réelle de l'entreprise. Avant de définir chacun de ces éléments nous rappelons ci-dessous les éléments du bilan prudentiel introduits par Solvabilité II :

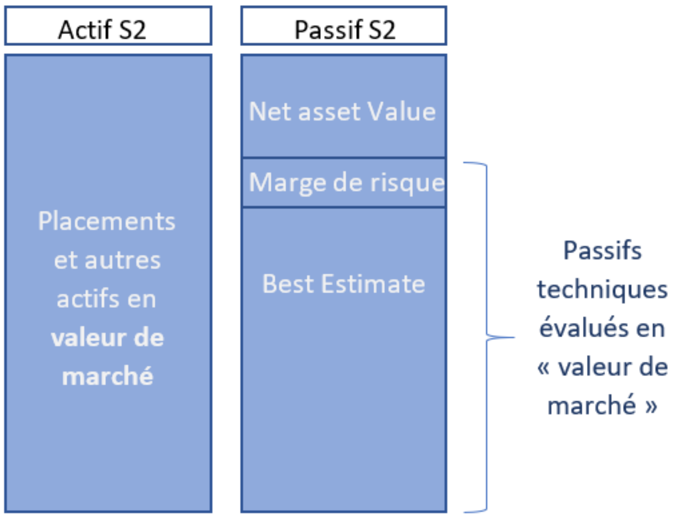


FIGURE 1.5 : Bilan prudentiel sous Solvabilité II

- La valeur des placements correspond à l'évaluation sur le marché des actifs détenus par l'entreprise, cette valeur à la date t sera notée $VM(t)$
- Les **provisions techniques** du bilan S2 sont composées :
  - Du **Best Estimate** : L'espérance des flux de passif (dans le cas de l'épargne seul les flux sortants sont considérés, l'évaluation est dite en run-off) calcul sous la probabilité risque-neutre. Le BE peut donc se calculer comme suit :

    $$BE(t) = \mathbb{E}^Q(\sum_{u \geq t} \frac{F_u}{(1+r_u)^u})$$

    avec :
    * Q représente la probabilité risque-neutre.
    * F_u représente le flux de passif à la date u.
    * r_u représente le taux sans risque.

- De la **Marge pour Risque** qui correspond au coût prospectif d'immobilisation du capital lié à l'activité d'assurance elle est définie par Solvabilité 2 comme la valeur actuelle du SCR lié à la souscription ainsi que le SCR opérationnel multipliée par le taux du coût du capital qui est en général est calibré à 6%

$$RM = CoC \cdot \sum_t \mathbb{E}(\frac{SCR_{RU}}{(1+r_t)^t})$$

- La **Net Asset Value (NAV)** représente la différence entre l'actif et les provisions techniques

$$NAV(t) = VM(t) - (BE(t) + RM(t))$$

Le capital de Solvabilité requis (SCR) : Le SCR (*Solvency Capital Requirement*) représente le capital nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur à l'horizon d'une année. Le niveau de probabilité de couverture du risque de 99.5% a été retenu.

Une traduction mathématique de cette définition serait la définition de la *Value at Risk* (VaR) :

$$SCR(t) = inf\{x \in \mathbb{R}/\mathbb{P}[NAV(t+1) > 0|NAV(t) = x] \geq 99,5\%\}$$

Du fait des interactions entre actif/passif, des règles de gestion associés à la revalorisation des contrats le Best Estimate (dans le cadre de l'épargne) est généralement estimé grâce à des simulations **Monte Carlo**.

Le contrat d'épargne est donc valorisé de la même manière qu'une option exotique dont le sous-jacent serait l'actif investi par l'assureur.

Pour faire ce calcul un générateur de scénarios économiques permet de simuler des chroniques d'indices financiers sur un horizon de temps T et à un pas de temps choisi (courbes de taux, actions, spreads...).

Pour un scénario et un pas de temps donné, la valeur des indices financiers permet de valoriser l'actif et de déterminer les flux de produits financiers qui lui sont associés.

Les flux d'actifs sont donc matérialisés par les coupons des obligations, les versements de dividendes ainsi que la réalisation de plus ou moins-values.

Les flux de passifs sont constitués de rachats, d'arbitrages euros/unité de compte, de prestations liées au décès ou à la maturité des contrats ainsi que les flux liés à la gestion des contrats tel que les frais généraux ou les commissions dus aux apporteurs.

L'évaluation des flux de passif se base sur des lois de rachats, des tables de mortalité, les caractéristiques des contrats (règles d'arbitrages, commissions, dates de maturité...).

Pour un pas de temps et un scénario donné de l'évaluation risque neutre le schéma ci-dessous résume les grandes lignes du principe de l'évaluation :

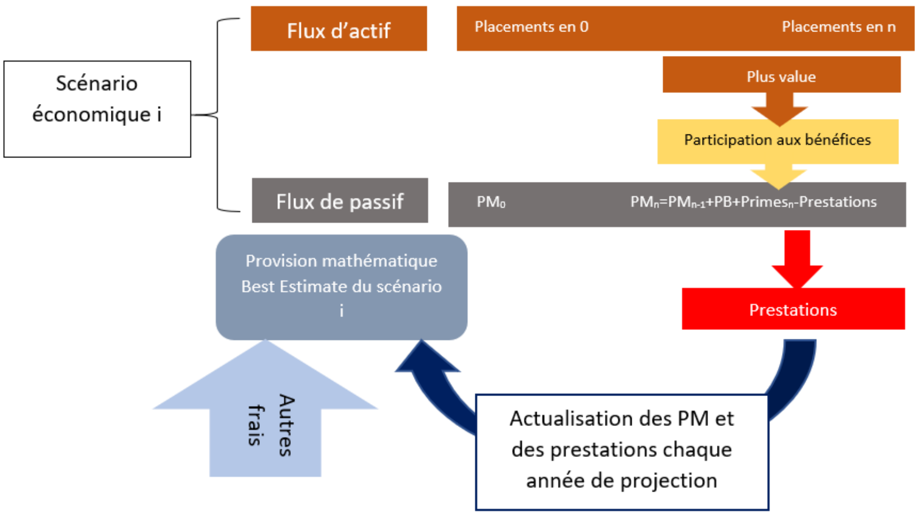


FIGURE 1.6 : Valorisation des postes du bilan sous Solvabilité 2

Pilier II : Exigences qualitatives : Définition de l'ORSA : Le pilier II incite les assureurs à mettre en place un dispositif de pilotage adapté au profil de risque de l'entreprise.

Défini par l'article 45 de la directive Solvabilité 2 (2009/138/CE), l'ORSA est un ensemble de processus formant un outil d'analyse décisionnelle et stratégique visant à comprendre et évaluer de manière continue et prospective la structure de risques liés à l'activité d'assurance ou de réassurance, sa capacité à les couvrir et à absorber les fluctuations de manière continue et prospective.

La définition de l'ORSA laisse les entreprises libres d'interprétation néanmoins la directive identifie trois objectifs qui permettront d'établir un dispositif adapté :

1. **Le respect permanent des exigences de capital et des exigences concernant**

les provisions techniques : cela se matérialise par la mise en place de processus de surveillance des indicateurs du pilier I (SCR/MCR)

2. **L'évaluation du besoin global de solvabilité** : l'organisme assureur doit définir l'ensemble des moyens dont il doit disposer compte tenu du plan stratégique qu'il a mis en place et de l'appétence au risque qu'il a défini.

3. **L'analyse du caractère adapté des risques aux modèles d'évaluation et hypothèses du pilier 1** : ce point incite les assureurs à analyser d'éventuelles divergences du profil de risques par rapport au modèles et hypothèses du pilier 1. (Exemple : non prise en compte de charge de capital du risque de spread pour les obligations gouvernementales de pays de l'Espace Economique Européen)

L'ORSA concentre plusieurs enjeux du pilier 2 de solvabilité II et incite les entreprises à :

- Identifier et évaluer les risques internes et externes auquel l'entreprise est soumise.
- Démontrer la maîtrise continue de la solvabilité, y compris de manière prospective et en situations stressés.
- Mettre en place un plan stratégique cohérent avec la politique de gestion des risques. Nous nous intéressons dans la partie suivante à la dimension prospective apportée par l'ORSA grâce aux exercices de stress tests.

1.2.3 Stress tests : gestion des risques et pilotage :

Les tests de résistance ou ≪ Stress tests ≫ ont été mis en place par les banques centrales et les autorités prudentielles à la fin des année 1990. Le but de ces exercices consistait à mesurer l'effet d'une éventuelle détérioration des facteurs macro-économiques (évolution de la consommation et des investissements, récession, taux de chômage, inflation...) sur la solvabilité des institutions financières.

Pour les assureurs, les exercices de stress tests s'inscrivent dans la dimension prospective de l'ORSA qui impose de tenir compte non seulement des risques existants à la date d'évaluation mais également les risques liés l'activité future prévue par le plan stratégique de l'organisme. Parmi ces risques on peut citer :

- Les engagements futurs de risques liés à un développement de nouvelles activités.
- L'évolution des indicateurs financiers : cet aléa est évalué par le biais de scénarios économiques (exemple : maintien d'un environnement de taux bas, crise globale portant sur le cours des actions, les spreads des obligations etc...)

- Les évolutions stratégiques prévues par la compagnie (augmentation de capital, changement de la couverture de réassurance, acquisition de portefeuille...)

La mise en œuvre des exercices de stress tests diffère d'une entreprise à l'autre mais suit en général le plan classique exposé dans la figure ci-dessous :

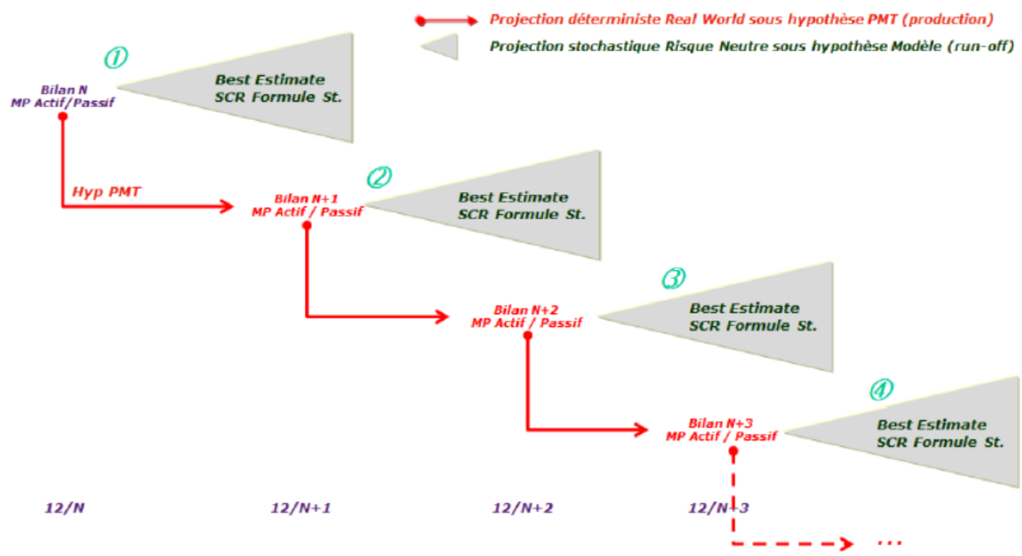


FIGURE 1.7

1.3 Accroissement du nombre d'études prospectives : problématique calculatoire :

Les exercices de stress test représentent une charge opérationnelle non négligeable pour les assurances, Solvabilité II apporte une complexité supplémentaire à la valorisation du passif et à l'estimation de la solvabilité de l'entreprise. Les exercices de stress tests (ou toutes études prospective) multiplient cette charge opérationnelle par le nombre de scénarios et le nombre d'années prévues par l'exercice.

En termes d'évaluations quantitatives un exercice prospectif s'articule suivant ce schéma simplifié :

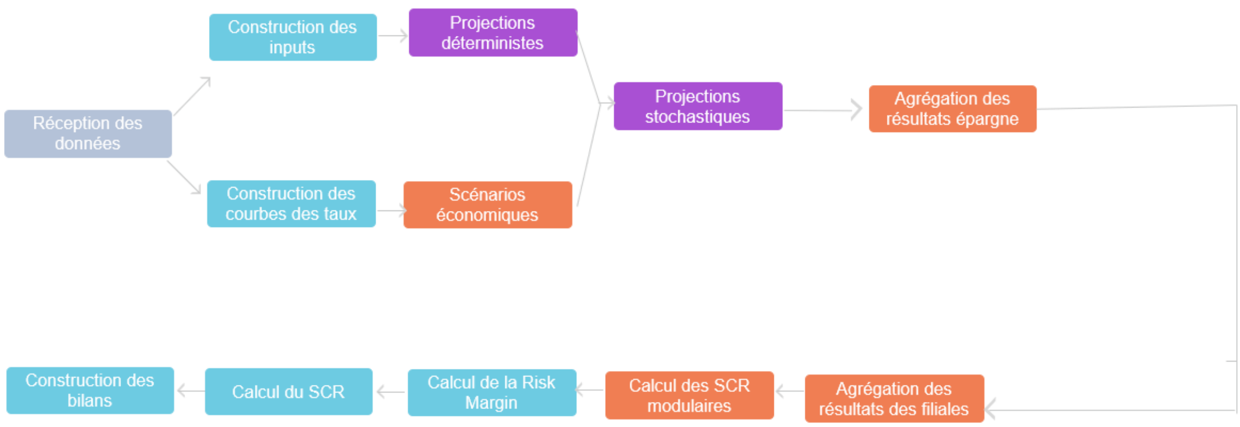


Figure 1.8 : Schéma opérationnel exercice prospectif Natixis assurances

Le modèle ALM de Natixis Assurances évalue un Best Estimate en 20 à 30 minutes (cela dépend de la disponibilités des serveurs de calcul) sachant que pour estimer un capital de solvabilité requis (SCR) il est nécessaire de calculer 22 évaluations Best Estimate (formule standard) cela correspond à un temps machine de 7 à 10h par SCR. Un exercice prospectif à N scénarios sur T années correspond alors au moins à $7 \times N \times T$ heures de calculs, dans le cas où l'exercice contient 4 scénarios sur 4 années cela correspond à 112 heures de temps machine, de plus il arrive souvent que les hypothèses d'un stress test changent au cours de l'exercice afin de prendre en compte l'évolution des données macroéconomiques, ce qui aura aussi un impact sur le temps de calcul puisque cela demanderait un recalcul de l'ensemble ou d'une partie des évaluations associées au stress test.

Chapitre 2

Approximation des résultats du modèle ALM

2.1 Origine et besoin

Comme nous l'avons soulevé à la fin du chapitre précédent, l'élaboration des calculs pour la détermination du Best Estimate est d'une part chronophage en terme de temps machine et d'une autre part complexe du fait de l'évaluation Market consistent, requise par la directive solvabilité 2, qui se fait par une approche Monte-Carlo demandant un paramétrage ainsi que des ressources opérationnelles coûteuses.

Les contraintes, liées aux stress-tests, citées à la section précédente ne sont pas les seules qui peuvent altérer le temps des calculs pour la détermination du capital de solvabilité requis.

Nous pouvons donner à titre d'exemples d'autres points qui peuvent venir multiplier les scénarios d'évaluation des stress-tests afin d'apporter une meilleure visions des risques pour l'exécutif ce qui crée un besoin d'un modèle de substitution plus rapide.
Parmi ces points nous pouvons citer :

- La multiplication des scénarios de sensibilités associés au stress tests afin de d'améliorer l'analyse et l'interprétation des évaluations.
- L'évaluation de l'impact de choix de gestion (management rules) diverses tel que les études d'allocations stratégiques prospectives.
- L'écourtement des délais de production des évaluations de portefeuilles dans le cadre d'IFRS17.

Quelque soit le cadre du calcul : stress tests ou simple calcul trimestriel Le calcul du SCR est un processus lourd pour les compagnies d'assurance vie car il nécessite la projection d'un bilan économique sur plusieurs dizaines d'années afin de calculer plusieurs Best Estimate associés aux chocs unitaires de la formule standard, afin d'effectuer ce calcul plusieurs étapes sont nécessaires les principales étant :

- La mise à jour des “model points” d'actif et de passif : les model points sont une base, le plus souvent agrégée, représentant l'ensemble des lignes d'actifs détenus par l'assureur : obligations, actions, private equity...etc (model point “actif”) donnant une information précise sur les caractéristiques de l'actif : volume, maturité, rating..., ils peuvent aussi représenter des lignes de passif (model point “passif”) contenant des informations relatives aux clients : âge, ancienneté, catégorie patrimoniale...ainsi que les caractéristiques du contrats : frais de gestion sur encours, TAF, valeur de rachat...etc
- Calibrer et valider un générateur de scénario économique via une série de tests (martingale, corrélation des différents indices économiques...)
- La génération d'un jeu de scénarios stochastiques market consistent sous la probabilité risque neutre : pour un scénario donné l'évolution des données économiques permet de valoriser l'actif détenu par l'assureur, l'algorithme ALM (participation aux bénéfices, stratégie d'investissement...etc) permet d'en déduire une revalorisation du passif.
- Lancer des simulations qui peuvent parfois durer plusieurs heures.

La lourdeur des calculs et du paramétrage décrit ci-dessus encourage donc la recherche de méthodes pouvant accélérer ou remplacer certaines étapes par un processus moins lourd.

2.2 État de l'art : revue de la littérature associée au approximations de modèles ALM

Cette partie a pour but l'analyse de certaines solutions s'inscrivant dans la même problématique que le mémoire c'est à dire l'approximation ou l'accélération des calculs d'un modèle ALM épargne. Certaines approches apportent des solutions dans le cadre d'un modèle interne, d'autres dans le cadre de l'utilisation de la formule standard d'après l'analyse effectuée deux familles de méthodes se détachent :

- Des méthodes d'approximation statistiques (Least Squares Monte-Carlo/machine Learning. . .) mettant en place un modèle indépendant du modèle ALM et se basant sur des données générées par le modèle pour construire une base d'apprentissage permettant d'entraîner un modèle régressif qui calque les évaluations du modèle ALM.

- Des méthodes d'accélération des modèles existants : ces solutions préconisent l'utilisation du modèle ALM dans une version plus rapide en terme de temps de calculs nous pouvons citer parmi celles ci :
  1. Des méthodes d'accélération de convergence de monte carlo tel que l'usage de scénarios antithétiques (cette méthode est déjà utilisée au sein du modèle ALM de Natixis Assurances) ou de variables de contrôles.
  2. Dans le cadre d'un modèle interne où l'évaluation du SCR correspond à l'évaluation d'un quantile 99.5% parmi des milliers d'évaluations : la sélection de scénarios économiques adverses par SVM permet de diminuer drastiquement le nombre de scénarios à évaluer.
  3. Des méthodes d'agrégation des paramètres du modèle afin de diminuer la complexité algorithme de ce dernier (solution préconisée par le mémoire)

.

Nous présenterons dans cette partie plusieurs mémoires IA ou publications qui ont permis d'enrichir la réflexion autour de la problématique étudiée. Mais avant cela une analyse des raisons sous-jacentes à la lourdeur du calcul ALM s'impose.

2.2.1 Analyse formelle de la complexité du modèle ALM : identification de leviers d'accélération :

Afin d'identifier des leviers d'accélération du temps de calcul du modèle ALM nous allons essayer d'identifier les raisons pour lesquels l'évaluation Best Estimate prends autant de temps d'exécution.

Afin de simplifier l'analyse nous allons nous intéresser à une itération du modèle pour un scénario stochastique s et un pas de temps t donné en considérons que le nombre d'opération associé à cette brique de l'algorithme est constante quelque soit le pas de temps ou le scénario.

Soit N le nombre d'opérations élémentaires intervenant pendant le calcul d'un pas de temps et d'un scénario donné :

$$N(s,t) = \alpha Taille_{MPP} + \beta Taille_{MPA} + \gamma$$

- α : le nombre d'opération supplémentaires lié au rajout d'un seul model point de passif autrement dit $\alpha = \frac{\partial N}{\partial (Taille_{MPP})}$.
- β : le nombre d'opération supplémentaires lié au rajout d'un seul model point d'actif autrement dit $\beta = \frac{\partial N}{\partial (Taille_{MPA})}$.
- γ : le nombre d'opérations résiduel qui ne dépend pas de la taille des données d'actif ou de passif.

- $Taille_{MPP}$ et $Taille_{MPA}$ correspondent respectivement au nombre de lignes de la base de model points de passif (MPP) et au nombre de ligne de la base de model points d'actif (MPA)

Ce découpage en 3 type d'opération est naturellement issu de l'analyse formelle des calculs intervenant au sein du modèle ALM, les calculs liés à la valorisation des actifs croient de manière linéaire relativement au nombre de lignes d'actifs en input du modèle, de la même manière rajouter un model point de passif implique des calculs de prestations en plus augmentant ainsi le nombre d'opérations à effectuer. Certains calculs tel que l'algorithme de participation aux bénéfices se font à une maille supérieure, celle du fond, et ne dépendent donc pas du nombre de lignes d'actif ou de passif qui est utilisé au lancement du calcul.

Afin de simplifier l'analyse nous pouvons considérer que $N(s,t)$ ne dépend pas du scénarios s ou du pas de temps t. Le nombre d'opération intervenant au sein d'un calcul Best Estimate est alors :

$$N_{ALM} = N_{scen} \times N_T \times (\alpha Taille_{MPP} + \beta Taille_{MPA} + \gamma)$$

L'observation de cette formule nous permet donc d'identifier plusieurs leviers d'accélération du calcul :

- La diminution du nombre de scénarios d'évaluation (N_{scen}) : des méthodes agissant sur ce levier tel que l'usage de scénarios antithétiques ou la sélection de scénarios d'évaluations ont été présentés dans les parties précédentes.
- La diminution de l'horizon de projection (N_T) : la duration du passif étant assez longue cela laisse peu de marges de modification par rapport à l'horizon de projection actuel : 30 ans, de plus cet horizon correspond à l'horizon minimal recommandé (afin de garantir l'écoulement total du passif) dans le cadre de l'évaluation d'un passif épargne.
- La diminution de la taille des données liées au passif (N_{MPP})
- La diminution de la taille des données liées à l'actif (N_{MPA})

La méthode qui a été développée au sein de ce mémoire s'attaque au levier concernant la taille des données liées au passif.

2.2.2 Approximation de modèles ALM

2.2.2.a Approximation : LSMC

Nous étudierons dans cette partie une méthode d'approximation du modèle ALM basé sur une approche statistique. Elle fut développée par Longstaff & Schwartz dans le cadre de la valorisation de prix d'options de vente américaines (put). Cette approche a été présenté dans une publication intitulée "Valuing American Options by Simulation : A simple Least-Squares Approach". L'approximation a été adaptée aux évaluations Monte-Carlo intervenant dans le calcul de capital de solvabilité pour l'industrie de l'assurance, elle a été proposée par D. Bauer, D. Bergmann et A. Reuss dans l'article "Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach".

Cette méthode a été appliquée dans le cadre de plusieurs mémoires et publications depuis sa première utilisation dans le cadre de Solvabilité II en 2009, elle est à la fois applicable dans le cadre d'une approximation d'évaluations associés à un modèle interne ou à un modèle "formule standard", étant donnée que Natixis Assurances utilise la méthode formule standard pour l'évaluation de son capital de solvabilité c'est cette méthode que nous allons étudier.

2.2.2.a.1 Présentation de la méthode LSMC

Le Least Square Monte Carlo est une méthode qui à approcher une fonction inconnue à l'aide d'une régression des moindres carrées sur des points évalués par Monte Carlo. Sous certaines hypothèses nous pouvons montrer qu'il est possible de construire une série de fonction qui converge vers la fonction cible, dans notre cas la cible pourrait être l'évaluation d'un Best Estimate, d'un SCR ou des fonds propres.

Le cadre théorique de la méthode est le suivant : On se place dans un espace complet probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}\right)$

- Ω est l'univers des possibles
- $\mathcal{F}$ est la tribu associée
- $\mathcal{P}$ est la probabilité historique
- $\mathbb{F}$ est la filtration naturelle, ici celle qui reflète toute l'information disponible à la date t.

Dans le cadre d'un bilan dit économique, les fonds propres peuvent être assimilés à la différence suivant qui correspond à une Net Asset Value (NAV) :

$$FP_t = A_t - P_t$$

où A_t correspond à la valeur de marché des actifs à la date t et P_t correspond à la valeur de marché des passifs à la date t que l'on assimile ici uniquement au Best Estimate.
On introduit les processus Markoviens $(Y, D) = (Y_t, D_t)$ qui synthétisent respectivement les risques financiers (en pratique Y est représenté par l'aléa généré par le GSE) ainsi que le niveau du passif à chaque instant. On admet également que le théorème de Girsanov s'applique et qu'il existe une probabilité risque neutre Q équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les

(Y_t) actualisés au taux sans risque r_t sont martingales.

X_t représente les cash-flows futurs, la mise en place d'un modèle ALM admet l'existence d'un T-uplet de fonctions $f_1, ..., f_T$ telles que

$$\forall t, X_t = f_t((Y_s, D_s)), s\epsilon[0,T]$$

Étant donné que la valeur des actifs est directement lié à l'évolution des indicateurs financiers on a l'existence d'un T-uplet de fonction $g_1, ..., g_T$ telles que :

$$\forall t, A_t = g_t(Y_s), s\epsilon[0,T]$$

Les fonds propres FP_t, s'expriment donc, pour chaque trajectoire i et toute date t sous la forme suivante :

$$FP_t^{(i)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(A_t^{(i)} - \sum_{k=t+1}^{T} X_k^{(i)} e^{-\int_t^k r_u^{(i)},du} |(Y_t^{(i)}, D_t^{(i)})\right)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(g_t(Y_s^{(i)}) - \sum_{k=t+1}^{T} f((Y_s^{(i)}, D_s^{(i)}))e^{-\int_t^k r_u^{(i)},du} |(Y_t^{(i)}, D_t^{(i)})\right), s\epsilon[0,t]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(h_t\left((Y_s^{(i)}, D_s^{(i)})_{s\epsilon[0,t]})\right)\right)$$

Étant donné que dans l'espace $L^2(\Omega, \sigma(Y,D), P)$ l'espérance conditionnelle peut prendre la forme d'une projection orthogonale on peut l'approcher en dimension finie par une combinaison linéaire de la base engendrée par les variable de conditionnement. On a alors :

$$F\hat{P}_t(Y_t, Dt) \approx \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \cdot e_k(Y_t, D_t)$$

où $(e_k(Y_t, D_t))_{k=1,...,M}$ est une base de fonctions d'un sous espace de $L^2(\Omega, \sigma(Y,D), P)$, l'approximation des coefficients (α_k) de cette combinaison linéaire peut se faire en calculant pour N trajectoires les fonds propres :

$$FP_t^{(i)} = \left(A_t - \sum_{k=t+1}^{T} X_k e^{-\int_t^k r_u,du}\right) \forall t, \forall i = 1, ..., N$$

On peut alors utiliser les réalisations calculées pour en déduire une approximation des coefficients $(\alpha_1, ..., \alpha_M)$ par moindres carrés en résolvant :

$$\widehat{\alpha^{(N)}} = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\widetilde{FP_t^{(i)}} - \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \cdot e_k \left(Y_t, D_t \right) \right]^2 \right\}$$

En général la mise en oeuvre de la méthode dans le cas d'une approximation de Best Estimate se fait selon les étapes suivantes :

1. Identifier les facteurs de risques ayant un impact sur la valorisation du portefeuille au sein du modèle, le choix des facteurs de risques doit être limité pour éviter les problèmes de temps de calculs mais suffisamment important afin d'obtenir un modèle sensible a suffisamment de facteurs de risques.
2. Construire un plan d'expérience de sensibilités pour les facteurs sélectionnés, il est possible d'appliquer à cette étape des méthode d'échantillonage tel que l'hypercube latin afin de "balayer" de façon optimale l'espace des facteurs de risques.
3. Lancement des simulations Monte-Carlo associés au plan d'expérience sélectionné.
4. Calcul des SCR,BE...etc associés à chaque sensibilité
5. Choix des fonctions de base servant à l'approximation : dans la littérature étudiée la base de fonction choisie est en générale polynomiale.
6. Effectuer une régression sur les évaluations de Best Estimate obtenus.

2.2.2.b Approximation : Machine Learning

Pour un principe proche de la méthode LSMC c'est à dire basé sur la construction d'une base d'apprentissage d'évaluations stochastiques il est possible d'approximer les évaluations d'un modèle ALM via des fonctions d'apprentissage automatique dites "Machine Learning" tel que :

1. Les réseaux de neurones
2. Les arbres de décision
3. Le kriging

La littérature étudiée montre une précision acceptable de cette approche dans le cadre d'approximation de la solvabilité infra-annuelle, c'est à dire dans le cas où la base d'apprentissage a été générée à une date proche de l'approximation, néanmoins elle admet des limites dans le cas où nous souhaitons évaluer des indicateurs SII prospectifs dans le cadre de stress tests en particulier pour les scénarios extrêmes souvent peu représentés dans les bases d'apprentissage à cause des contraintes opérationnels associées à la génération de la base.

2.2.3 Accélération de modèles ALM

Nous étudierons dans cette partie des approches ayant pour but d'accélérer les évaluations du modèle ALM sans le remplacer par un modèle régressif, les méthodes qui seront étudiés dans cette section permettent d'obtenir des évaluations Best Estimate du passif épargne et donc du capital de solvabilité d'une manière plus rapide soit en agissant sur le nombre de scénarios risque neutre à évaluer ou en diminuant la complexité algorithmique associée à une évaluation risque neutre.

2.2.3.a Accélération : Scénarios antithétiques

Dans le cadre d'une évaluation Best Estimate du passif épargne une génération de scénarios économiques est préalable à la valorisation du passif du portefeuille, en effet ces scénarios permettent la valorisation des différentes poches d'actif à chaque pas de temps de la projection afin d'en déduire la valeur du portefeuille d'actif ainsi que les flux de produits financier qui serviront par la suite à revaloriser l'épargne investie par les clients via un algorithme de participation aux bénéfices.

L'usage de scénarios antithétiques une est technique de réduction de variance employée dans la méthode Monte-Carlo, cela permet d'améliorer la convergence des tests de validation du calcul tout en conservant un nombre limité de scénarios par jeu, le fait de limiter le nombre de scénarios à évaluer implique donc une **accélération** du temps de calcul.

Cette propriété est expliquée par la symétrie des distribution des variables antithétiques générées qui engendre une réduction de la variance de l'estimateur Monte-Carlo lorsque les variables sont corrélées négativement. Dans cette configuration nécessite il est nécessaire de produire des variable en nombre pair. Nous allons décrire mathématiquement l'approche ci-dessous :

Dans le cadre d'un calcul monte-carlo on souhaite estimer $\theta = \mathbb{E}(h(X))$, ou X est une variable aléatoire, dans notre cas X correspond à la variable aléatoire issue du générateur de scénarios économiques et $\mathbb{E}$ désigne son espérance mathématique. Tel qu'on l'a décrit auparavant la méthode Monte-Carlo de base consiste à simuler $X_1 \times ... \times X_n$ n variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X puis on estime par l'estimateur empirique :

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

Nous pouvons calculer un estimateur de la variance de l'estimateur $\sigma^2_{\widehat{\theta}}$ dans le cas où on suppose que l'on dispose de deux échantillons de taille n, le premier noté $X_1, ..., X_n$ et le second $X_1^{'}, ..., X_n^{'}$ tel que m_1 et m_2 les estimateurs empiriques de l'espérance de $h(X)$ sur respectivement l'échantillon 1 et 2.

Par linéarité de l'espérance, l'estimateur de Monte-Carlo sur l'échantillon complet est alors

$$\widehat{\theta} = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

et la variance associé à l'estimateur est

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^2 + \sigma_{m_2}^2 + 2Cov(m_1, m2)}{4}$$

Dans le cas où les variables sont indépendantes et identiquement distribuées la covariance du terme ci-dessus s'annule ($n \to \infty$) et $\sigma_{m_1}^2 = \sigma_{m_2}^2$ si bien que $\sigma_{\theta}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^2}{2}$.

La technique des scénarios antithétiques consiste alors à choisir le deuxième échantillon de façon à ce qu'il partage la même distribution que le premier mais en renonçant à l'indépendance, le but étant d'obtenir $Cov(m_1, m_2) < 0$, cela est possible en exploitant les éléments de symétrie de la loi de X pour construire le second échantillon à partir du premier assurant alors la négativité de la covariance. En s'arrangeant pour cette covariance soit négative la variance de l'estimateur calculé sera donc inférieur à la variance initiale $\frac{\sigma_{m_1}^2}{2}$.

Les scénarios économiques générés pour le calcul Best Estimate se basent essentiellement sur des processus à mouvement brownien qui sont eux même générés par des lois normales nous allons donc illustrer l'obtention de ce deuxième échantillon pour une loi normale étant donnée que les variables du GSE sont fonctions de ces variables suivant une loi normale.

Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon issue d'une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, en appliquant la transformation $X_i^{'} = 2\mu - X_i$ on obtient un tirage de même loi $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ qui négativement corrélés avec le premier tirage permettant ainsi une diminution de la variance de l'estimateur, cette diminution de la variance permet alors d'évaluer un plus faible nombre de scénarios tout en garantissant une estimation d'une même qualité en terme de test de convergence.

Cette approche est déjà appliquée au sein du modèle de Natixis Assurances, nous avons jugé qu'il est pertinent de la présenter car elle propose une solution pertinente pour l'accélération de l'évaluation des indicateurs SII c'est à dire la diminution de la variance de l'estimateur Monte-Carlo du Best Estimate passif.

2.2.3.b Accélération : Variables de contrôles

Une autre technique classique de réduction de la variance d'un estimateur Monte-Carlo est l'utilisation d'une variable de contrôle.

Nous nous plaçons dans le même cadre que la partie précédente où on chercher à estimer $BE = \mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(FPA)$, FPA étant la variable aléatoire calculée par le modèle ALM comme étant la somme des flux futurs de passif actualisés.

Considérons alors une variable aléatoire Y présentant une corrélation non nulle ρ avec X :

$$cor(FPA, Y) = \rho$$

On suppose que l'espérance théorique de Y est connue :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu_Y$$

Notons par ailleurs $\sigma_F PA$ (resp σ_Y) l'écart-type de la variable aléatoire FPA (resp. Y).

Pour une constante quelconque $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ soit Z_λ la variable aléatoire définie par :

$$Z_\lambda = FPA - \lambda(Y - \mu_Y)$$

On a alors Z_λ qui vérifie :

$$\mathbb{E}(Z_\lambda) = \mathbb{E}(FPA) = BE$$

Le calcul de la variance de Z_λ donne :

$$V(Z_\lambda) = V(FPA) + \lambda^2 V(Y) - 2\lambda Cov(FPA, Y)$$

Étant donné que nous souhaitons obtenir un estimateur Monte-Carlo de BE ayant une plus faible variance nous pouvons minimiser cette variance par rapport à λ, nous obtenons alors :

$$\lambda_0 = \frac{Cov(FPA, Y)}{V(Y)} = \rho \frac{\sigma_{FPA}}{\sigma_Y}$$

Le calcul de la variance minimale de Z_lambda_0 donne alors :

$$V(Z_{\lambda_0}) = V(FPA) \times (1 - \rho^2)$$

$Z_{\lambda 0}$ est donc une variable aléatoire qui présente la même espérance que la somme des flux actualisés FPA, mais son écart-type le même que FPA à un facteur $\sqrt{1-\rho^2}$ prêt, ce facteur tend à s'annuler lorsque ρ^2 est proche de 1.

Le principe de cette technique de réduction de variance est donc de trouver une variable aléatoire Y dont l'espérance est connue et qui présente une forte corrélation (ou anti-corrélation) avec FPA, la somme des flux futurs actualisés de passif.

La meilleure estimation du Best Estimate peut alors être déterminée par :

$$BE_Y = F\bar{P}A - \lambda_0(\bar{Y} - \mu_Y)$$

2.2.3.b.1 Variable de contrôle en pratique : introduction d'un faible biais pour un gain de stabilité de l'estimation :

Dans la plupart des cas pratiques où cette technique est appliquée la moyenne de la variable de contrôle Y n'est pas forcément connu, l'estimateur empirique $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ remplace alors μ_Y dans les différentes formules présentées ci-dessus cela implique alors que

$$\mathbb{E}(Z_\lambda) = E(FPA) - \lambda(\mu_Y - \bar{Y})$$

Le terme $\lambda(\mu_Y - \bar{Y})$ correspond alors (à une multiplication par λ prêt) l'erreur de convergence de l'estimation de l'espérance de Y, il est donc nécessaire de minimiser ce biais afin d'obtenir une bonne estimation du Best Estimate.

2.2.3.b.2 Exemple illustratif : choix d'une variable de contrôle pour la réduction de variance d'un estimateur Best Estimate :

Un article publié par Julien Vedani et Fabrice Borel-Mathurin ("Market-consistent valuation : a step towards calculation stability. 2019. ffhal-02282378") propose une variable de contrôle possédant une forte corrélation avec les évaluations Best Estimate du passif épargne à instant t donné.

L'approche présenté par l'article a pour principal but de diminuer la variance de l'estimation de Monte-Carlo intervenant dans le cadre de l'évaluation de la valeur du portefeuille. Elle n'a pas été présenté tel qu'une méthode d'accélération de calcul ayant pour but de diminuer le nombre de scénarios stochastiques à évaluer.

L'approche a été motivée par des observations empiriques concernant des évaluations de modèles ALM à deux dates d'arrêtés (t_1, t_2) différentes sous certaines conditions :

- t_1 et t_2 sont proches par exemple une évaluation Best estimate au troisième trimestre d'une certaine année et l'évaluation au 4ème trimestre de l'année précédente.
- La racine du générateur de scénarios économique n'a pas été modifiée entre les deux évaluations : cette propriété implique que les évaluations des flux futurs actualisés FPA_{t_1} et FPA_{t_2} sont des variables aléatoire fonctions de la même variable aléatoire ayant généré les deux jeux de scénarios économique.
- La structure des calculs intervenant au sein du modèle ainsi que les inputs du modèle ont évolué marginalement : cela est en général vérifié car le portefeuille d'un assureur possède une certaine inertie d'un trimestre à l'autre, cela est du au fait que les contrats ont une période de maturité longue et que les règles de gestion implémentés au sein du modèle varient rarement et sont fortement réglementées.

Ces conditions permettent de garantir que le modèle ALM devrait réagir aux jeux de scénarios économiques générés par la même racine d'une manière similaire quelque soit l'état initial des facteurs économiques.

La méthode proposée consiste à utiliser FPA_{t1} (ainsi que l'estimation de $\mathbb{E}(FPA_{t_1})$) dans le cadre de l'application de la méthode de variable de contrôle afin de diminuer la variance de l'estimateur de Monte-Carlo à l'instant t_2.

Dans le cadre de l'implémentation de la méthode effectuée par Julien Vedani et Fabrice Borel-Mathurin les corrélations sont généralement supérieur à 90% et atteignent jusqu'à 96.9% cela correspond à un facteur $\sqrt{1-\rho^2} = 0.031$ diminuant ainsi drastiquement l'écart-type de l'estimateur de Monte-Carlo et permet d'obtenir des intervalle de confiance de l'estimation inférieur à ceux obtenus sans variable de contrôle.

Nous présenterons dans la dernière partie de ce mémoire une application de la méthode où le choix de la variable de contrôle a été inspiré par le papier publié par Julien Vedani et Fabrice Borel-Mathurin.

2.2.4 Accélération : Sélection de scénarios économiques par machine à vecteurs de support (SVM)

Cette méthode d'accélération a été appliquée dans le cadre d'accélération d'évaluation du capital de solvabilité requis pour un assureur qui choisit l'approche d'un modèle interne plutôt que l'utilisation de la formule standard. Cela n'est pas le cas pour Natixis Assurances mais la méthode enrichit la réflexion autour de notre problématique et peut inspirer une méthode que nous allons proposer à la fin de cette section. La méthode a été proposé dans le cadre des mémoire présenté à l'institut des actuaires par NIEDZWIEDZ Marine : "Utilisation des supports vecteurs machines pour l'accélération du calcul du capital économique".

Afin d'accélérer le temps de calcul de l'estimation du capital économique dans le cadre de la méthode des simulations dans les simulations la méthode cherche a réduire le nombre de simulations à réaliser. Le capital économique requis étant calculé à partir du quantile à 0.5% de la distribution des fonds propres en t=1 an, dans le cas où le calcul classique nécessite 5000 scénarios cela revient à connaître seulement les 25 scénarios les plus risqués en terme de solvabilité.

La méthode préconise alors l'utilisation de support vecteurs machine afin d'identifier les pires scénarios à l'avance sans évaluation de l'ensemble des scénarios économiques. En effet les pires scénarios en terme de fonds propres sont généralement des scénarios adverse pour les facteurs de risques du générateur de scénario économique, l'observation suivante permet d'obtenir l'intuition derrière la méthode :

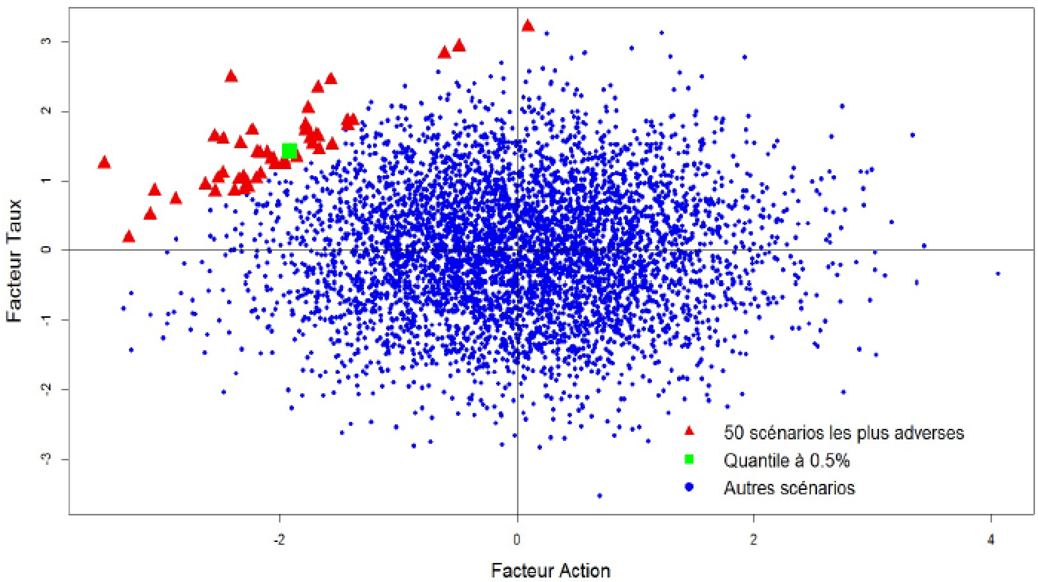


Figure 2.1 : Projection des fonds propres économiques en fonction de leur facteurs de risque action et taux (Source : M.NIEDZWIEDZ

L'application des SVM a pour objectif de délimiter la zone contenant les scénarios primaires les plus adverse en fonction des facteurs de risques qui les caractérisent. Une base d'apprentissage est obtenue en associant à des scénarios évalués par le modèle ALM une donnée binaire (-1 ou 1), chaque scénario se voit attribuer la classe 1 s'il est parmi les scénarios les plus adverse ou la classe -1 s'il ne l'est pas. A partir de la base d'apprentissage obtenu la méthode de classification choisi nous permet d'obtenir une fonction de décision permettant de séparer les scénarios considérés risqués et ceux non risqués. L'illustration est faites ci-dessous pour le cas où les scénarios ne sont formés que de deux variables mais cela peut être généralisé pour une dimension n quelconque :

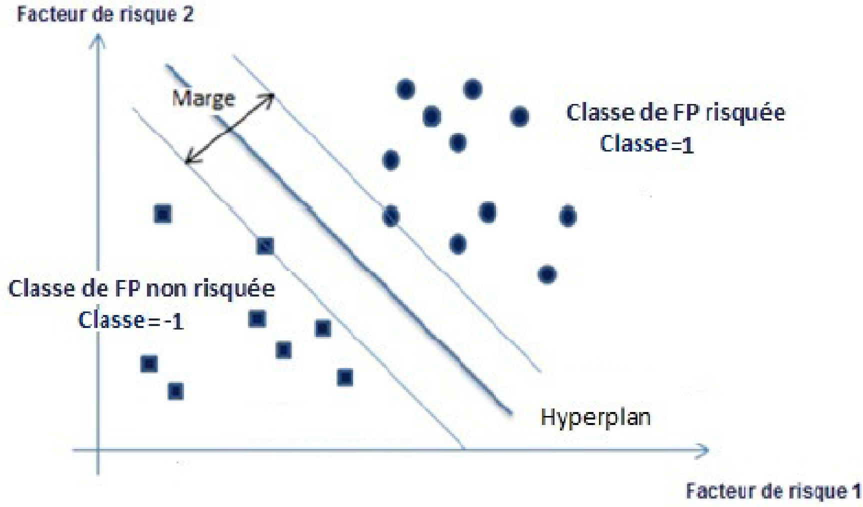


Figure 2.2 : Illustration de la classification par SVM

Cette méthode a permis de diminuer le nombre de scénarios d'évaluations de 97% au sein du mémoire étudié.

2.2.4.a Application des SVM pour l'accélération d'un modèle ALM utilisant la formule standard

Nous pouvons nous inspirer de la méthode proposée par Marine NIEDZWIEDZ afin de proposer une approche (qui n'a pas été développée au sein de ce mémoire) : dans le cas dans d'un modèle utilisant la formule standard pour l'évaluation du SCR nous estimons des Best Estimate centraux et choqués, une base d'apprentissage peut être obtenue en associant à chaque scénarios économique évalué par le modèle une variable binaire (-1 ou 1), on attribuerait à chaque scénario la classe 1 s'il est parmi les p scénarios les plus proche de la moyenne de tous les scénarios ou la classe -1 s'il ne l'est pas. Nous pourrions alors obtenir par une méthode de classification (SVM ou autres) étalonner une fonction de décision permettant de décider si un scénario est proche de la moyenne du Best Estimate ou pas. La sélection des p scénarios nous permettrait alors de calculer la moyenne des évaluations stochastiques sur ces p scénarios afin d'obtenir une approximation du Best Estimate.

2.2.5 Accélération : Agrégation de tables de paramètres modèle

Le temps de calcul associé à un modèle ALM est intrinsèquement lié à sa **complexité algorithmique**, l'analyse de cette complexité consiste en l'étude formelle de la quantité de ressources nécessaires à l'exécution du processus.

2.2.5.a Optimisation de l'agrégation de portefeuille de contrats d'assurance vie :

L'agrégation du portefeuille de contrats d'assurance vie est une étape indispensable qui intervient en amont de la projection Best Estimate, en effet un portefeuille de contrats peut contenir plusieurs millions de lignes de contrats individuels projeter les flux associés à chacun de ces contrats individuellement demanderait une trop grande puissance de calcul ou impliquerait des temps de calculs inacceptables.

L'agrégation du portefeuille est donc une technique permettant de regrouper plusieurs contrats en une seule ligne de contrat synthétique, cette agrégation est faite via **une clé d'agrégation** ainsi que des règles d'agrégation des différentes caractéristiques des contrats :

- **Clé d'agrégation** : correspond à un groupe de variables qualitatives décrivant un contrat d'assurance. Cette oriente la décision de regrouper deux contrats ou non, les contrats partageant les même modalités suivant les variables de clés sont regroupés au sein du même agrégat de contrats
- **Règles d'agrégation** : ces règles correspondent aux opérations à effectuer sur les variables quantitatives décrivant les contrats afin d'obtenir une valeur synthétique correspondant au regroupement des contrats, par exemple la provision mathématique d'un groupe de contrats correspond à la somme des provisions des contrats du regroupement. Le taux de frais de gestion sur encours euros du regroupement va quant à lui correspondre à la moyenne des taux de frais de gestion pondérée par les provisions mathématiques des différents contrats.

Exemple d'agrégation de contrat Considérons deux client ayant les mêmes caractéristiques. Étant donné que la projection des prestation dépend essentiellement de l'âge et de l'ancienneté du client ces deux lignes sont "homogènes" et peuvent donc être agrégées au sein d'une même ligne synthétique :

Numéro	Âge	Sexe	Année d'adhésion	Taux de frais de gestion	Provisions
1	37	1	2009	0.67%	10 000
2	37	1	2009	0.78%	15 000

L'agrégation du model point donne alors :

Numéro	Âge	Sexe	Année d'adhésion	Taux de frais de gestion	Provisions
1	37	1	2009	0.736%	25 000

L'âge et l'ancienneté des détenteurs des contrats représentent des variables structurante dans l'évaluation des flux futurs associés à chaque police, en général ces deux variables expliquent en grande partie la taille des model points agrégés, le croisement des différentes modalités des âges et des anciennetés des assurés donne une table de passif agrégée contenant 2000 à 3000 model points.

Les variables âge et ancienneté représente néanmoins des variables intermédiaires permettant d'obtenir le bon taux de rachats et de décès associés à chaque model point à un pas de temps donné au cours de la projection, l'information structurante est donc contenue dans ces différents taux.

2.2.5.a.1 Est-il toujours optimal de rassembler les contrats d'assurance vie en fonction de l'âge et de l'ancienneté ?

L'âge et l'ancienneté expliquent pour une large proportion le fait que la taille des model points finaux en input d'un modèle ALM, supprimer ces deux variables de la clé d'agrégation tout en garantissant une précision équivalente au calcul impliquerait une forte accélération du modéle ALM.

Cette piste a été étudiée par Pierre-Olivier GOFFARD et Xavier GUERRAULT dans le cadre d'une publication ("Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for BEL computations based on model points ?") dont le but principal est d'optimiser le temps de calcul des estimations Monte-Carlo pour l'estimation du Best Estimate en agrégeant la base de model points de passif.

Principe de la méthode d'agrégation de model point par classification k-means :

Si on considère un ensemble de model points $\mathcal{P} = (x_i),\ i \ \epsilon\ 1, ..., n$ où n correspond à la taille du portefeuille. Nous cherchons a classifier ces n model point en k groupes de model points $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_k)$ via une méthode de partitionnement afin d'identifier des sous-groupes "homogènes" de model points. Nous devons donc faire un choix pour caractériser une métrique de similarité entre deux model points. Pour chaque model point nous pouvons représenter une matrice

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} p_i^{\mathbf{F}_1}(0,1) & \dots & p_i^{\mathbf{F}_1}(\text{ T}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{\mathbf{F}_N}(0,1) & \dots & p_i^{\mathbf{F}_\text{N}}(\text{T}) \end{pmatrix}$$

Où $(F_1, ..., F_N)$ représente l'ensemble des N scénarios financiers de l'évaluation Monte-Carlo et $p_i^{F_j}(t, t+1)$ représente le taux de prestations (taux de rachats, taux de mortalité...etc) du model point entre t et $t+1$ pour un scénarios F_j. Pour un contrat d'épargne les taux de prestations sont en général modélisé en deux partie : une part structurelle lié aux caractéristiques du model point : l'âge, l'ancienneté du contrat...etc, ainsi qu'une part de rachats dynamique liée à l'environnement financier où on modélise une hausse de rachat dans le cas où le client n'est pas satisfait par la performance annuelle de son contrat. Le scénario économique a un impact limité sur la proximité des contrats. En effet, deux contrats ayant des taux de chutes proches pour un scénario financier devraient avoir des taux de chutes proches pour un autre : s'il existe un k tel que $x_i^{F_k} \approx x_j^{F_k}$ on aura alors $x_i^{F_l} \approx x_j^{F_l}$ pour tout $l \epsilon (1, ..., N)$. Nous pouvons alors caractériser un model point par une seule ligne de la matrice précédemment définie. Une mesure de dissimilarité naturelle est alors définie :

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 = \sqrt{(p_i(0,1) - p_j(0,1))^2 + \ldots + (p_i(\ \mathrm{T}) - p_j(\ \mathrm{T}))^2}.$$

La classification que nous souhaitons alors obtenir est de trouver les k-groupes qui minimisent la variance intra-classe :

$$\tilde{C} = \underset{C}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{C}_j} \|\mathbf{x} - \mu_j\|_2^2$$

où μ_j'correspond au vecteur moyen des taux de chutes des model points appartenant à C_j

Cette approche permet alors d'obtenir une classification des model point relativement à leur structure de rachat permettant ainsi de se défaire de l'âge et de l'ancienneté dans la clé d'agrégation :

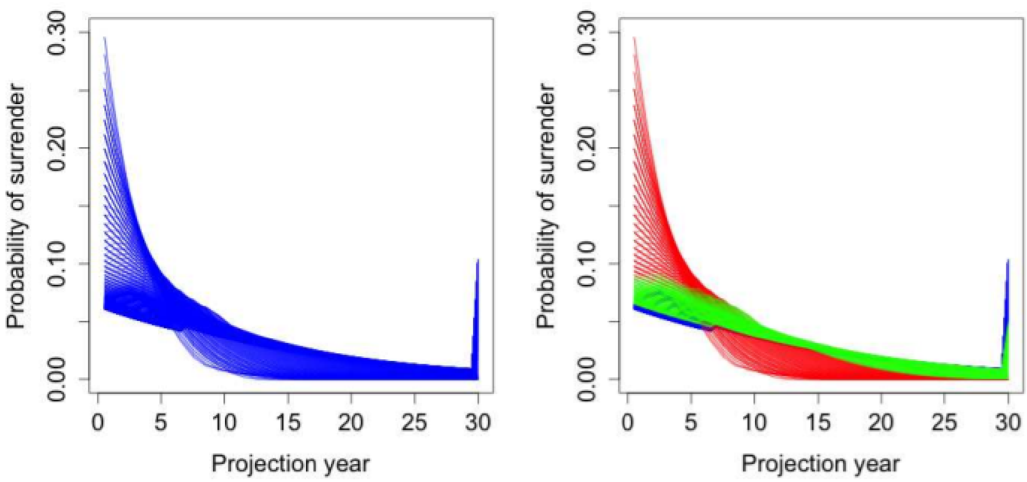


Figure 2.3 : Illustration de l'agrégation de model point par k-means (Source : P.O Goffard)

2.3 Approximation de calculs S2 via régression

2.3.1 Modèles régressifs

Cette partie a pour but de présenter une tentative de mise en place d'un modèle régressif sur une base de données très limitée de 30 points d'un exercice ORSA passé afin d'étudier la possibilité de mettre en place un modèle approximatif simple sans génération de base d'apprentissage spécifique à l'approximation.

2.3.1.a Présentation des données

Nous disposons d'une base de données de sensibilités d'évaluations de Best Estimate issue des résultats de projections des exercices de stress tests internes calculés en 2017 et 2018.

Au total nous avons à disposition 32 points calculés par le modèle ALM de Natixis Assurances, chaque point correspond à un bilan économique calculé soit dans une situation stressée soit dans une situation centrale.

Nous disposons alors de :

- 8 points correspondant deux scénarios centraux de l'exercice ORSA 2017 et 2018 (1 scénario central correspond à 4 années de projections)
- 24 points correspondant à 5 scénarios de stress économique pour l'exercice de 2018 et 3 scénarios de stress pour l'exercice effectué en 2017. Les scénarios stressés durent 4 ans mais la première année est commune à tous les scénarios et correspond à la première année du scénario central. Ce point là a été supprimé pour chaque scénarios stressé nous avons alors 3 points par scénario stressé.

Pour chacun de ces points nous disposons des facteurs économiques correspondant ainsi que l'état du portefeuille d'actifs/passifs, ces variables font donc partie des candidats en tant que variables explicatives du modèle que nous allons calibrer :

- La valeur comptable de l'actif adossé à l'épargne fond euros.
- La valeur de marché de l'actif adossé à l'épargne fond euros.
- La provision technique épargne fond euros.

- La provision pour participation aux excédents (PPE)

- Le niveau de l'indice Eurostoxx au moment de l'évaluation Best Estimate.

- Le niveau de de la courbe des taux sans risques au moment de l'évaluation pour les maturités 1/2/3/5/7/10/20/30 ans.

- La variation de la performance de la proche action du portefeuille pendant l'année précèdent l'évaluation.

2.3.1.b Mise en oeuvre de l'étude :

Le but de l'étude est d'apprécier la qualité d'une régression linéaire afin d'obtenir des approximations de Best Estimate, la base de sensibilité a été scindée relativement à la date de l'exercice de stress test concernant chaque point, les données dites d'apprentissage correspondent alors aux données relatives à l'exercice de 2017. Étant donnée que le nombre de variables explicatives candidates est relativement faible (14 en comptant chaque maturité de la courbe des taux) il est possible de calculer toutes les combinaisons de régressions possibles où 1,2,3...etc variables sont sélectionnées en tant que variables explicatives. Pour chaque modèle évalué nous pouvons alors calculer l'erreur de prédiction commise par l'estimation pour les projections de l'exercice 2018.

L'étude menée peut être résumée suivant ces étapes :

1. Choix de la base d'apprentissage.

2. Choix du critère de classement des modèles linéaires : AICc, erreur maximum sur les données approximées, erreur moyenne sur les données approximées...

3. Choix de la variable cible du modèle de régression : Best Estimate, NAV, SCR....

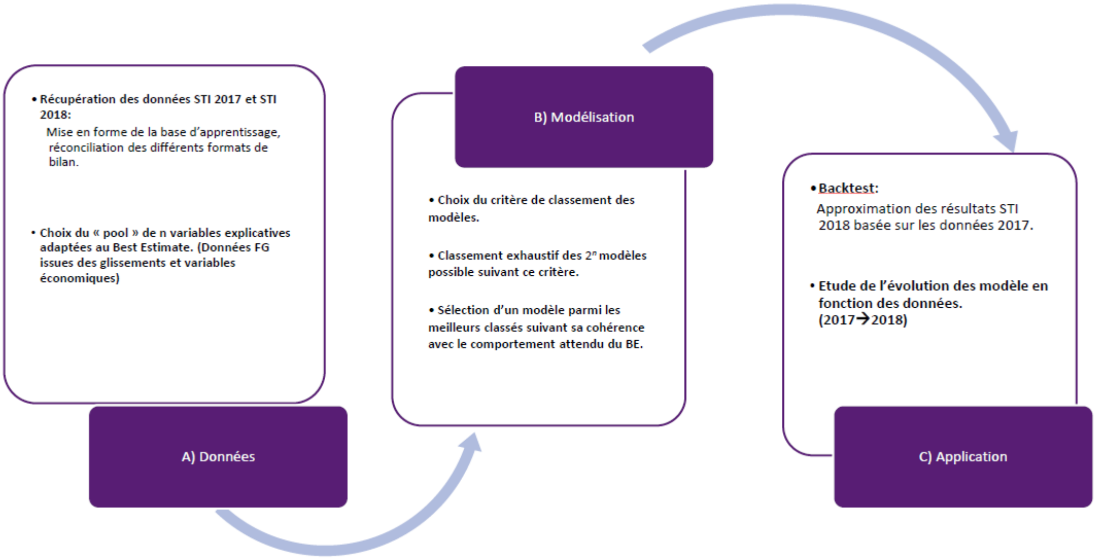


FIGURE 2.4 : Approximation linéaire : étapes de l'étude

2.3.1.b.1 Résultats obtenus : Parmi les modèles testés nous présentons dans cette partie les résultats obtenus pour un modèle régressif, le choix des variables explicatives s'est fait en classant l'ensemble des modèles linéaires possible,pour le pool de variables explicatives initiales, par rapport à leur précision sur l'estimation des Best Estimate pour l'exercice du stress test de 2018. Le critère de "précision" qui a été choisi ici correspond à l'erreur maximale du modèle sur la base de test. Les variables explicatives obtenus via cette méthode sont alors :

- Le niveau de l'indice Eurostoxx.
- La variation de l'indice sur l'année précèdent l'évaluation.
- Le niveau de taux de maturité 1 an/10 ans/20 ans et 30 ans

Best Estimate Réel	Best Estimate Modèle
45 412 707 266.37	45 693 688 874.15
47 543 302 570.75	47 752 194 316.96
48 984 001 123.93	49 244 296 057.88
49 798 763 834.82	50 025 477 703.16
48 766 448 783.33	48 942 287 512.31
50 921 733 461.43	50 465 714 496.27
52 203 167 370.59	51 729 572 942.78
47 597 090 240.98	47 099 301 227.78
50 012 853 115.71	49 846 177 679.75
51 650 089 574.78	52 122 165 817.25
42 563 592 362.43	42 074 524 810.67
48 623 179 316.77	48 327 059 265.29
54 724 112 318.98	54 651 779 428.26
41 962 293 101.54	41 629 193 282.47
50 154 645 868.71	49 969 483 991.96
57 654 687 166.46	57 825 905 828.98
44 939 495 710.05	44 468 334 675.70
48 973 318 996.71	48 670 818 913.99
52 990 294 668.05	52 654 702 098.39
Erreur Max	497 789 013.21 (1%)
Erreur Moyenne	309 217 342.58 (0.8%)
Erreur Min	72 332 890.72 (0.13%)
	Modèle de Nav minimisant l'erreur max en 2018

FIGURE 2.5 : Modèle linéaire : résultats de l'approximation sur la base de test

Malgré une erreur relative inférieur à 1% pour quasiment tous les points de la base d'apprentissage nous ne pouvons considérer ce modèle comme "précis", en effet l'erreur induite sur le Best Estimate correspond à des niveaux d'erreurs relatifs à la NAV réel bien plus importants : Pour le point où l'erreur est de 498M et 1% du Best Estimate cela correspond à une erreur de 31% pour l'évaluation de la NAV.

2.3.1.c Interprétation des limites de la méthode

Les modèles basés sur des critères de minimisation d'erreur moyenne ou maximale sont par construction plus précis mais manquent de fondement et de justification mathématique, rien ne garanti que le modèle ayant bien performé pour cette base de données là soit totalement obsolète pour une autre base de données. De plus l'ordre de grandeur de l'erreur associée au modèle est bien trop proche de celui des fonds propres économiques faussant ainsi l'interprétation des résultats dans le cas où le modèle serait utilisé pour estimer l'impact d'un stress sur le portefeuille.
La base d'apprentissage choisie est surtout constituée de points en situation stressés ce qui en fait une base très hétérogène et ne quadrille par le monde des possibles d'une manière optimale.

Compte tenu de la volatilité des fonds propres lors d'un exercice de stress test et le caractère non linéaire de la NAV face aux caractéristiques du portefeuille et aux variables économiques, nous considérons alors que l'estimation des résultats du modèle ALM par des modèles linéaires n'est pas adapté lors d'un exercice de stress tests.

2.4 Approximation de calcul S2 via agrégation de données de passif

Dans cette partie nous allons présenter la méthode implémenté au sein de Natixis Assurances afin d'obtenir des approximations de la valeur du portefeuille épargne ainsi que de la solvabilité, nous allons justifier avant tout le choix de la méthode implémentée par élimination des différentes approches présentés dans les parties précédentes, pour faire cela nous devons définir les caractéristiques attendus par l'exécutif pour décrire la méthode cible qui ont permis de guider l'élimination de certaines approches.

2.4.1 Caractéristiques de la méthode cible :

Les caractéristiques que nous allons citer représentent un cahier des charges qui nous permettra définir une méthode respectant le maximum de points ci-dessous.

- L'approche choisie doit garantir la **précision** des approximations effectuées : cette précision doit être démontrée à la fois par des exercices de backtest ainsi que des garanties théoriques. L'approximation doit être fine pour le calcul du Best Estimate mais aussi pour la NAV, le SCR ou le ratio de solvabilité.

- L'approche choisie doit permettre la bonne **interprétation** des estimations produites : l'évolution des résultats d'une sensibilité à l'autre doit être facilement lié à l'évolution d'un paramètre cela permet de guider les choix de pilotage du portefeuille par l'exécutif.

- La méthode choisie doit être **sensible** à un grand nombre de paramètres **économiques** afin de traduire au mieux le profil de risque du portefeuille.
- L'approximation doit être sensible à la **structure actif/passif** afin d'impacter les choix commerciaux ou stratégiques futurs sur la valorisation estimée, nous pouvons citer à titre d'exemples :
  1. Les caractéristiques des nouveaux contrats dit "New Business".
  2. L'allocation stratégique d'actifs.
  3. La participation aux bénéfices distribuée lors d'exercices prospectifs en terme de taux servis ou de mouvement de provisions pour participation aux bénéfices.
- Le modèle d'approximation pourra servir dans le cadre d'évaluation **prospectives** tel que les exercices ORSA ou autres études ou stress tests.
- Le modèle doit impliquer un gain de **temps de calcul** significatif pour justifier son utilisation.
- L'éventuelle base de données d'apprentissage construite pour calibrer le modèle doit être calculée dans un temps court, en effet le **budget** en terme de temps de calcul machine est **limité** car la construction de cette base bloquerait ou ralentirait les simulations du reste du département.

2.4.2 Élimination des méthodes d'approximation par régression :

Parmi les méthodes envisagés nous avons présentés des méthodes basé sur des modèles régressifs permettant de remplacer les évaluations du modèle ALM, coûteuses en temps de calcul, par des évaluations de fonctions plus rapides à évaluer tel que des interpolations polynomiales, des réseaux de neurones ou des arbres de décisions.

Avant de remettre en question cette approche nous allons rappeler un phénomène rencontré lors du calibrage de modèles d'apprentissage automatique : **le fléau de la dimension**.

2.4.2..1 Le fléau de la dimension En 1961 Richard Bellman invente le terme de fléau de la dimension pour désigner divers problèmes ayant lieu lorsque l'on cherche à organiser ou analyser des données dans des espaces de grande dimension c'est à dire avec un grand nombre de variables (paramètres). Parmi les domaines concernés par ce phénomène nous pouvons citer la fouille de données, l'apprentissage automatique, les bases de données, l'échantillonnage ou encore l'analyse numérique.

Le principe générale du phénomène est que lorsque le nombre de dimensions augmente le volume de l'espace croit rapidement si bien que les données que nous avons à disposition deviennent éparses et se retrouvent isolées. Cela est problématique pour les méthodes nécessitant un grand nombre de données (ie relativement à la taille de l'espace total) pour être valides, les rendant alors peu efficaces voire inopérantes.

Exemples illustratifs :

Combinatoires : Supposons que l'espace où varient les paramètres d'un modèle ALM est fini et discret, cette supposition est simplificatrice : en effet certains paramètres varient dans des intervalles continues à titre d'exemple nous pouvons citer les valeurs que peuvent prendre les différentes maturité de la courbe des taux sans risque où l'évolution de la valeur de marché du portefeuille d'actifs.

Soit $f(x_1, ..., x_n)$ une fonction discrète tel que $x_i \ \epsilon \ A_i$, afin de simplifier le calcul considérons que chaque ensemble A_i admet p éléments.

Le nombre de point total de l'espace $A = A_1 \times ... \times A_n$ ou varie f contient alors p^n éléments.

n	Nombre d'éléments de A
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625

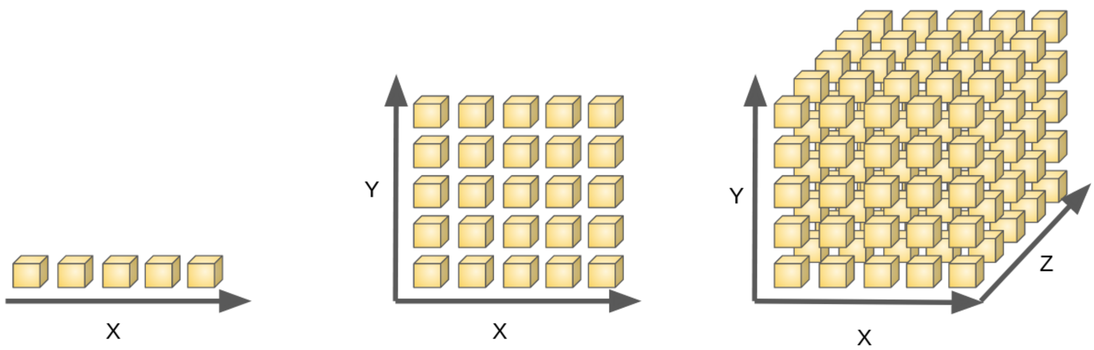


FIGURE 2.6 : Illustration du fléau de la dimension

Cet exemple simplifié pour une fonction discrète montre à quelle point l'augmentation du nombre de variables de la fonction augmente drastiquement la taille de son espace d'évaluation.

Un modèle ALM est une fonction dont le nombre de paramètres est très grand dont le nombre de paramètres se compte par dizaines ou même milliers si on considère que chaque ligne d'une table de paramétrage comme celle décrivant le passif, l'actif ou la table des scénarios économique comme un paramètre à part entière.

2.4.2..2 Estimation du budget de la création d'une base d'apprentissage en temps machine :

Un calcul d'un seul point Best Estimate à l'aide du modèle de Natixis Assurances correspond à un temps machine de 20 à 30 minutes, le calcul est effectué à l'aide de serveurs ayant à disposition 250 machines allouées aux calculs MoSes.

Considérons une base de donnée d'apprentissage contenant 10 000 points Best Estimate, le calcul d'une telle base prendrait au mieux **138** jours où la totalité des machines seraient allouées à la construction de ces abaques, cela bloquerait l'ensemble des travaux du département pendant une période beaucoup trop longue.

Au vu du nombre de paramètres auxquels nous souhaiterions que notre régression soit sensible il est très probable que 10 000 points soient insuffisants pour calibrer un modèle respectant le "cahier des charges" décrit précédemment. De plus le risque qu'avec le temps cette base devienne obsolète est beaucoup trop grand par rapport au "coût machine" investi. Nous pouvons citer plusieurs dérives pouvant induire l'obsolescence de la base d'apprentissage produite :

1. Une modification des règles de gestion inscrites au sein du modèle.
2. L'évolution de la structure du passif ainsi que son vieillissement.
3. L'évolution des indicateurs économiques qui induisent une dérive vers un espace n'ayant pas été "balayé" par la base d'apprentissage.

2.4.2..3 Les modèles régressifs respectent-ils le cahier des charges attendu ? :

Reprenons les points associés à notre cahier des charges afin de vérifier si les modèles régressifs peuvent être un bon candidat pour la méthode choisie :

- **Précision** : Dans les cas où les méthodes régressives sont appliqués à des modèles d'assureur réels (en opposition à des modèles ALM simplifiés) l'étude de la littérature montre une précision insuffisante pour l'estimation de la solvabilité, bien que la précision de l'estimation du Best Estimate peut être inférieure à 1% cela peut correspondre à une erreur 10 fois plus grande pour l'estimation des fonds propres économiques impliquant une erreur inacceptable pour l'estimation du ratio de solvabilité

- **Interprétabilité** : Le modèle régressif aura un output unique c'est à dire une estimation du Best Estimate, cela diminue fortement la capacité d'interprétation des résultats par les équipes effectuant les calculs qui observe d'habitude l'évolution de l'ensemble du bilan économique de l'assureur.

- **Sensibilité à un grand nombre de paramètres** : tel que nous l'avons décrit ci-dessus plus le nombre de paramètres est grand plus la base d'apprentissage doit augmenter en taille de manière exponentielle rendant ainsi la méthode opérationnellement difficile.

- **Sensibilité à la structure Actif-Passif** : Ce point pose problème de la même manière que le point précédent. La structure Actif-Passif d'un portefeuille est en général décrite par des tables contenant plusieurs milliers de lignes et peut difficilement être décrit par un faible nombre de variables.

- **Approximation prospective** : Les estimations liés à l'approximation du Best Estimate dans un cadre prospectif par des modèle régressifs sont en général de mauvaise qualité car la base d'apprentissage devient obsolète et doit être mise à jour régulièrement. Dans le cadre d'un ORSA il serait inutile de calibrer une base d'apprentissage pour chaque année de projection puisqu'il serait plus rapide de calculer la valeur du Best Estimate directement via le modèle.

- **Temps de calcul** : l'évaluation d'un modèle régressif est en général immédiate et ne prends que quelques secondes pour un réseau de neurones par exemple mais cela a une contrepartie lié aux temps de calculs associés à la base d'apprentissage.

- **Budget lié à la base d'apprentissage** : Le temps de calcul associé à la construction d'une base d'apprentissage est beaucoup trop grand et risque de bloquer les travaux du reste du département.

Les modèles régressifs sont généralement utilisés en statistique pour décrire ou mieux comprendre un phénomène dont les rouages réels sont encore inconnus en extrayant l'information à partir de données d'observations. Dans le cas d'un modèle ALM, l'ensemble des calculs correspond à des règles comptables connus et à un enchaînement de formules fermés et de règles logiques, l'information associée au calcul du Best Estimate est donc connue puisque le modèle est mis en place par l'entreprise elle même.

Partons de ce constat, nous allons présenter dans la suite une méthode analytique d'approximation du Best Estimate respectant les points du cahier des charges.

2.4.3 Modèle ALM de Natixis Assurances

Ce mémoire ayant pour but d'offrir une approximation de la valorisation du passif effectuée par le modèle ALM il est nécessaire d'avoir une vision claire sur les différents calculs intervenant au sein de ce processus, c'est en effet l'étude analytique du modèle ALM qui a permis d'identifier des pistes de simplifications du calcul permettant de diminuer la complexité algorithmique tout en garantissant une précision acceptable à la fois pour la valorisation Best Estimate ainsi que l'estimation de la solvabilité de l'entreprise.

À l'époque où l'étude associé à ce mémoire a été effectuée le calcul du Best Estimate se réalise sous Moses, outil de projection développé par Willis Towers Watson. Néanmoins le principe de la méthode implémentée peut être généralisé pour n'importe quelle projection de Best Estimate et a été adaptée au nouvel outil de projection de Natixis Assurances "NA#".

2.4.3.a Le générateur de scénarios économiques :

Afin d'établir un bilan économique tel que décrit par Solvabilité II, il est nécessaire de projeter les différents flux du bilan associés aux contrats :

- Rachats
- Prestations liés au décès des clients
- Commissions aux apporteurs d'affaire
- Frais généraux
- ....

Ainsi que les différents flux d'actifs liés à la performance de ces derniers, au dividendes perçus ainsi que les flux de réinvestissement. La projection des actifs se fait par l'intermédiaire d'un jeux de scénarios économiques.

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est donc un outil qui permet de projeter la valeur et flux associés aux différents types d'actifs du bilan d'une compagnie d'assurance pour un horizon d'étude donné. (30 ans pour le calcul au sein de Natixis Assurances)

Le GSE s'appuie sur des modèles mathématiques de diffusion qui sont calibrés à partir de données de marché à date de calcul du Best Estimate ou à une date historique donnée. Les scénarios économiques font donc partie des nombreux paramètres du modèle ALM et ils sont au coeur des interactions actif-passif.

Le GSE nécessite un travail de fond important en amont de sa configuration :

- Les différents indices de projection sont définis et rattachés aux actifs du portefeuille.
- Les modèles de projection sont établis selon le type de projection réalisé (dans notre cas le type est "Risque Neutre" en opposition à une projection dite "Monde réel")
- Les différentes données de marché sur les indices sont à récupérer pour permettre le calibrage des modèles et leur diffusion.

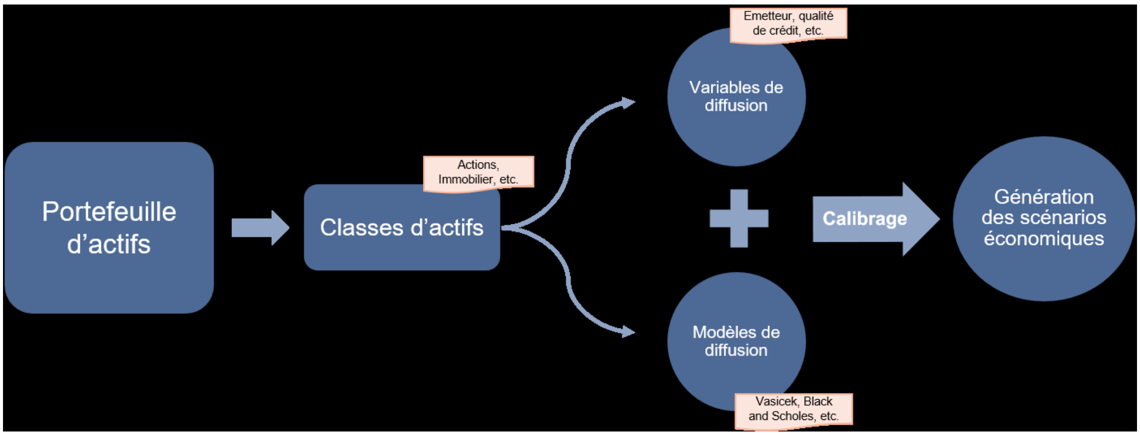


Figure 2.7 : Illustration du fonctionnement du GSE

2.4.3.b Classes d'actifs modélisés au sein du modèle Natixis Assurances :

Afin de traduire la diversité du portefeuille d'une compagnie d'assurance il est possible de regrouper les titres détenus dans un nombre limité de classes. Pour chaque groupe d'actifs qui partagent des caractéristiques communes nous pouvons définir une classe qui sera diffusée de la même manière par le GSE.

Nous pouvons diviser les actifs en trois grandes catégories :

- Les actifs diversifiés : ceux-ci corresponde à la détention d'actions, de parts de fonds, de titres immobiliers ou de matières premières...
- Les produits de taux : tel que les actifs obligataires qui sont des titres de dette : un émetteur emprunte une somme d'argent en échange d'un remboursement à l'échéance, à terme échu ou à échoir.
- Les produits dérivés : puts/calls ou swaps qui permettent de se protéger contre les variations de la valeur des actifs détenus.

Au cours de la projections la valorisation des actifs diversifiés est obtenue par la diffusion de la performance d'un indice rattaché à la classe d'actifs. Une part des performances de l'actif diversifié peut être issue d'un revenu récurrent comme les dividendes (part des bénéfices d'une entreprise qui revient aux actionnaires) ou les loyers perçus via les titres immobiliers. La modélisation de ces rendements supplémentaires peut également être rajoutée dans le but de représenter au mieux l'évolution future de l'actif sous-jacent.

La valeur ainsi que les flux associés aux actifs obligataires est obtenu par le biais de la diffusion des taux. Les taux nominaux sont utilisés dans le cadre de la projection des obligations classiques tandis que les taux réels sont utilisés dans le cadre des obligations indexées sur l'inflation. Une courbe des taux permet à chaque pas de temps de recalculer la valeur de l'obligation en déterminant son prix de marché. Pour rappel, sa valeur de marché en t, notée $V_m(t)$, est calculée suivant la formule suivante :

$$V_m(t) = \sum_{i=t+1}^{T} \frac{Flux(i)}{(1 + R(t,i))^{i-t}}$$

Tel que $Flux$ représente le montant des flux associés à l'obligation ce montant peut être nul à un pas de temps donné ou égal au coupon détaché de l'obligation ou au montant du nominal remboursé, $R(t,i)$ représente la valeur du taux d'actualisation en t pour la maturité (i-t) ce taux est déduit à partir des courbes de taux issues du générateur de scénarios économiques.

Nous avons cité ci-dessus trois grandes catégories d'actifs détenus au sein du portefeuille de Natixis Assurances mais ce découpage reste insuffisant pour décrire la diversité du portefeuille. En effet les actions n'ont par exemple par le même comportement que les actifs immobiliers notamment en terme de volatilité : le prix des actions fluctue en général plus que celui d'actifs immobiliers tandis que les fonds immobiliers sont caractérisés davantage par une faible volatilité des prix et par des revenus récurrents sous forme de loyers. Étant donné ces différences ces deux types d'actifs ne peuvent pas être projetés de la même manière via le générateur de scénarios économiques ce qui implique alors une classification distincte pour ces deux poches.

C'est donc une analyse des caractéristiques des actifs ,ainsi que le comportement de leurs prix ou des revenus récurrents qu'ils servent, qui nous permet de regrouper des titres de manière homogène.

Le tableau ci-dessous récapitule alors les 10 classes d'actifs qui ont été définis au sein du modèle de Natixis Assurances ainsi que la modélisation associée :

	Classe d'actif	Modélisation
Poche Diversifiée	Actions et assimilés	SVJD
	Immobilier	B&S (m_{Immo};σ_{Immo})
	Private equity	B&S (m_{PE};σ_{PE})
	OPCVM Low Vol	B&S (m_{LV};σ_{LV})
	OPCVM monétaire	B&S (m_{M};σ_{M})
	OPCVM obligataire	Stratégie d'investissement*
Poche Taux	Obligations à taux fixe	LMM+, EBK2F
	Obligations à taux variable	
	OATi	LMM+, V2F, EBK2F

FIGURE 2.8 : Classification des actifs retenue par Natixis Assurances au sein du modèle ALM

2.4.3.c Modélisation du passif épargne :

Le modèle utilisé au sein de Natixis Assurances permet de valoriser le passif de 3 fonds gérés au sein du groupe BPCE :

1. BPCE Vie : filiale à 100% de Natixis Assurances, est une compagnie d'assurance vie créée en 1982 pour proposer des contrats d'épargne et de retraite aux clients des Banques Populaires et des Caisses d'épargne ainsi qu'à l'ensemble du réseau bancaire détenu par le groupe BPCE.
2. Natixis Life : Créée en 1997 et filiale à 100% de Natixis Assurances, Natixis Life est une compagnie d'assurance vie luxembourgeoise.
3. Fond PERP : Fond regroupant les encours investis dans le cadre de plans épargne retraite.

Étant donné un traité de réassurance interne liant l'entité BPCE Vie à Natixis Life qui garantit l'alignement du taux (à la hausse) servis aux clients de Natixis Life avec le taux servi par BPCE Vie il est nécessaire de projeter les engagements des deux entités simultanément.

Tel que le prévoit la réglementation Solvabilité II, le calcul du Best Estimate est calculé en "run-off" c'est à dire qu'aucune nouvelle police n'est souscrite durant la projection sur

30 ans. Au bout de 30 ans, on suppose l'extinction du portefeuille. Ainsi, l'ensemble des des assurés rachètent leurs contrats et la provision mathématique de l'assureur devient nulle, au sein du modèle les contrats sont considérés à prime unique, il n'y a donc pas de primes futures lors de la projection.

Les engagements de l'assureur sont évalués via des flux de différents types que nous allons décrire ci-dessous :

2.4.3.c.1 Flux de rachats :

On distingue au sein du modèle deux types de rachats :

1. Les rachats structurels.
2. Les rachats dynamiques (ou conjoncturels).

Les rachats structurels :

Les rachats structurels sont observables dans un contexte économique classique, ils dépendent principalement de la fiscalité du pays et de l'ancienneté du contrat. Au sein du modèle ALM de Natixis Assurances les flux de rachats sont calculés pour chaque model point et ils dépendent de trois facteurs :

1. L'âge de l'assuré : une table de rachat différente est utilisée si l'assuré a plus de 70 ans.
2. L'ancienneté du contrat.
3. La gamme de clientèle auquel appartient les contrats du model point.

Les lois de rachats sont définis par le service actuariat produit et transmis aux équipes de la direction des risques, ces lois sont calibrées suivant des données empiriques concernant l'historique observé des rachats.

Ces taux de rachats possèdent en général un pic à la 9ème année d'ancienneté du contrat car au delà de huit ans les bénéficiaires d'un contrat d'assurance vie profitent d'une fiscalité avantageuse sur les plus values accumulés au cours de la vie du contrat incitant ainsi les clients à attendre cette échéance avant de racheter leur contrats pour en bénéficier. À partir de la 16 éme année on suppose que les taux de rachats structurels sont constants.

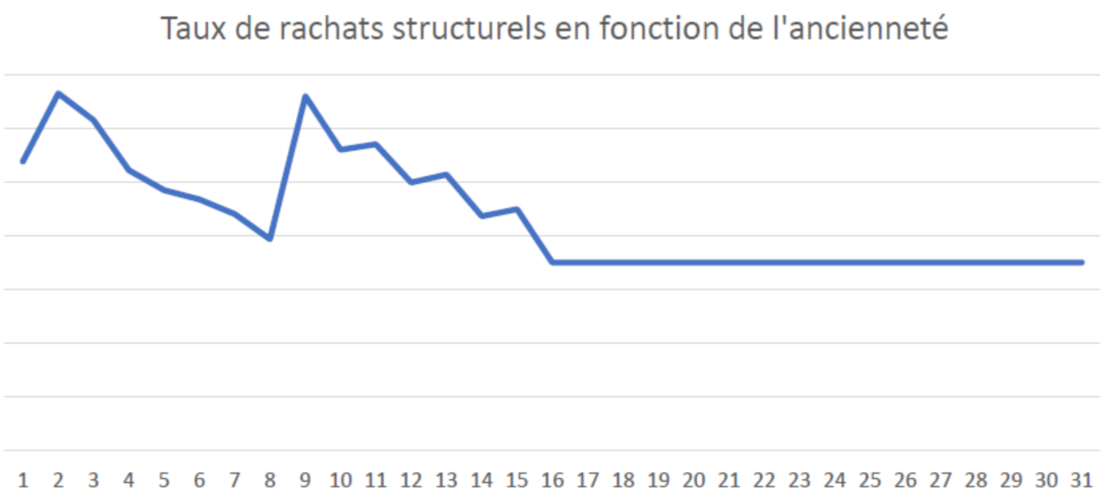


FIGURE 2.9 : Forme de la loi de rachats structurels

Rachats dynamiques :
Les rachats dynamiques sont liés à l'environnement économique, à la politique de revalorisation des assurés ainsi qu'à la situation concurrentielle du secteur.

Pour définir une loi de rachats dynamiques il est nécessaire de définir un taux attendu par l'assuré, ce taux dépend de plusieurs facteurs :

- La performance d'indices du marché : cette performance est directement issue du générateur de scénarios économiques

- Le niveau des taux observés : donnée issue de la projection de la courbe des taux par le générateur de scénarios économiques.

Une combinaison linéaire de différentes données issues du GSE permet alors d'obtenir le taux attendu par l'assuré. Les rachats dynamiques s'enclenchent lorsque la différence entre le taux servi et le attendu dépasse 1% , le taux de rachat conjoncturel croit alors linéairement par rapport à la différence entre le taux attendu par le client et le taux servi jusqu'à atteindre un seul maximal.

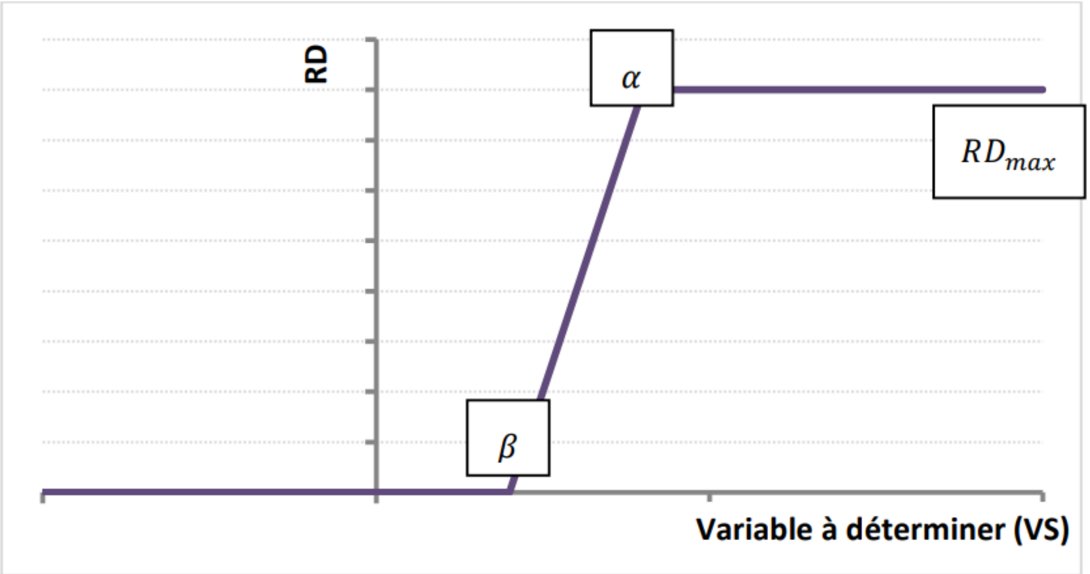


FIGURE 2.10 : Forme de la loi de rachats conjoncturels

2.4.3.c.2 Flux de mortalité :

La mortalité des détenteurs de contrats d'assurance vie impacte les flux associés à ces contrats, sauf contrat de capitalisation le décès de l'assuré entraîne en règle générale le dénouement du contrat. Au cours de la projection et pour chaque model point de passif le flux de décès pour un pas de temps donné est obtenu grâce à la formule suivante :

$$Dcs_t = min(q_x \times PM_t, PM_t - Rachats_t)$$

- q_x correspond à la probabilité de décès des détenteurs de contrats associés au model point. Cette probabilité est obtenue via une table de mortalité prospective dont les paramètres sont l'année de projection et l'âge du model point.
- PM_t correspond à la provision mathématique du model point au pas de temps t
- $Rachats_t$ correspond au montant du flux de rachat autre que les prestations liés au décès qui ont été décrits précédemment.

2.4.3.c.3 Frais généraux :

Les frais généraux correspondent aux frais générés afin d'assurer l'engagement de l'assureur envers ces assurés. Ces frais correspondent par exemple à la masse salariale de l'assureur ou aux coûts associés au bon fonctionnement du système d'information de l'entreprise. L'article .77 de la directive Solvabilité II demande de prendre en compte " toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci [...]. Nous devons alors considérer "[...]

toutes les dépenses qui seront engagée aux fins d'honorer les engagements d'assurance et de réassurance ; [...]". Ces flux de trésorerie incluent nécessairement les frais liés à la gestion des contrats et des prestations afin de garantir le respect de la directive.

Plusieurs type de frais sont considérés au sein du modèle Natixis Assurances :

1. Les frais d'administration : frais liés à la gestion des contrats.
2. Les frais liés aux rachats des contrats : les frais engagés dans le cadre des rachats.
3. Les frais liés aux décès : les frais engagés dans le cadre des prestations liées aux décès. Étant donné que la procédure liée à l'opération est différente d'un simple rachat ce poste est projeté indépendamment des frais liés aux rachats.
4. Les frais liés aux placements : les frais engagés dans le cadre de la gestion des placements.
5. Autres frais : tous frais qui ne sont pas liés aux types de frais énumérés ci-dessus.

L'évaluation et la projection de ces frais est basée sur le principe de ratio de coûts unitaires adossés à différentes variables calculés aux cours de la projection. Ces coûts unitaires sont calculés au niveau de chaque entité et pour chaque gamme de clientèle.

Un poste de frais au pas de temps t et pour une gamme de clientèle G est calculé suivant les formules suivantes :

- $$FraisAdmin_G(t) = NombreDeContrats_G(t) \times CoutUnitaireAdmin_G$$
- $$FraisPrestRachats_G(t) = Rachats_G(t) \times CoutUnitaireRachat_G$$
- $$FraisPrestDC_G(t) = PrestDCG(t) \times CoutUnitairePrestDC_G$$
- $$AutresFraisG(t) = PM_G(t) \times CoutUnitAutreFrais_G$$

Les coûts unitaires sont calculés grâce aux donnés observés sur les frais de l'année précédente en appliquant la formule $CU = \frac{Frais}{Driver}$. Les frais pour chaque gamme de clientèle sont par la suite sommés au niveau de chaque fond.

2.4.3.c.4 La participation aux bénéfices (PB) :

La participation aux bénéfices (PB) correspond aux produits financiers distribués aux assurés. Si le taux de participation aux bénéfices est inférieur au taux minimum garanti (TMG) caractérisant un model point donné alors la provision mathématique du model point est revalorisé via le TMG. Pour couvrir la différence de revalorisation l'assureur abandonne une partie de sa marge.

Le taux de redistribution des produit financiers de l'actif détenu doit être supérieur à 85% sur la globalité du portefeuille, un taux de PB personnalisé peut néanmoins être associé à chaque model point.

L'algorithme de participation aux bénéfices implémenté au moment de l'étude peut être décomposé en 9 étapes :

0. Initialisation de l'algorithme ALM : Cette étape sert à construire la liste des caractéristiques de chaque model point et qui serviront au calcul du montant de la participation aux bénéfices tel que les taux de frais de gestion sur encours, les taux d'affectation aux produits financier entre autres. Cette étape permet aussi de vérifier que les taux servis au cours de la projection n'ont pas été forcé (Dans le cadre d'un plan moyen terme ORSA par exemple ou au cours de la première année de projection risque neutre).
1. Vérification que les produits financiers initiaux sont suffisant pour servir le taux cible.
2. Réalisation de plus-values latentes supplémentaires si besoin.
3. Reprise sur provision pour participation au bénéfices si besoin. (part de la provision provisionnée l'année précédente).
4. Réduction du taux servi à un taux servi réduit au cas où les deux leviers précédents sont insuffisants.
5. Consommation de la marge variable & des produits financiers associés aux fonds propres.
6. Consommation supplémentaire (PPE provisionnée deux années plus tôt).
7. Consommation de la marge fixe disponible : cette marge correspond aux montants prélevés en tant que frais de gestion sur encours.
8. Toutes les marges de manoeuvres sont consommées.

Les éléments calculés au cours de l'algorithme de participation aux bénéfices sont calculés au niveau du fond, cette maille de calcul se distingue des calculs de flux de rachats ou de mortalité qui sont eux calculés au niveau de chaque model point avant d'être agrégés au niveau du fond, certaines transformations appliquées aux model point ne devraient donc qu'impacter à la marge les résultats de cet algorithme tant que les transformations conservent les inputs de cet algorithme ce point là sera développé au sein de la prochaine section.

2.4.4 Principe de la méthode implémentée

Tel que nous l'avons vu au sein de la partie (2.2.4) un levier possible pour accélérer le temps de calcul d'un modèle ALM est de diminuer la taille des données en inputs puisque cela implique mécaniquement un nombre plus faible d'opérations à effectuer au cours du calcul.

L'approche choisie est basée sur une analyse formelle des calculs intervenant au sein du modèle et propose une solution analytique permettant de diminuer fortement la taille des model points de passif en construisant une clé d'agrégation la plus limitée possible garantissant une conservation de la précision des calculs.

Afin de construire cette clé il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble des calcul intervenant au sein du modèle ALM qui peut être vu comme un processus faisant interagir différents type de données :

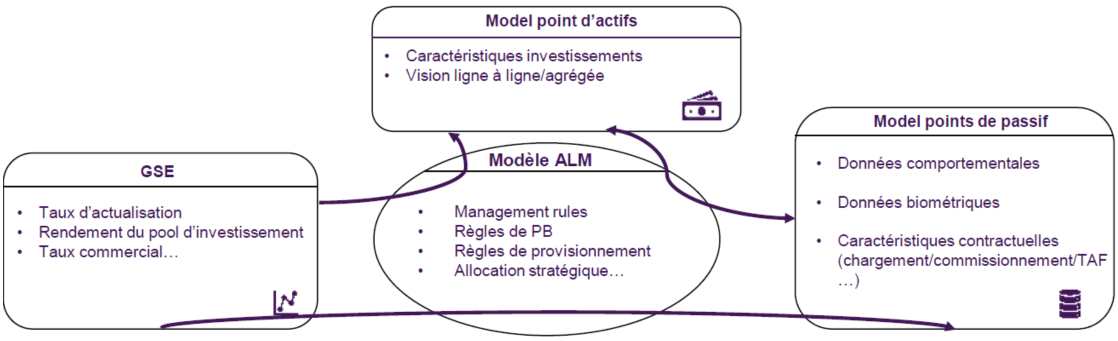


FIGURE 2.11 : Modèle ALM : interactions entre les différentes données

Étant donné le cahier des charges décrivant les caractéristiques de la méthode attendue le cheminement de l'étude effectuée au cours de ce mémoire a orienté l'utilisation d'une méthode basée sur l'agrégation des données de passif :

FIGURE 2.12 : Cheminement de l'étude proxy

2.4.4..1 Observation des principaux flux constituant un Best Estimate Epargne :

En examinant les différents postes constituant un Best Estimate on remarque une forte dépendance de tous les flux aux **données structurelles du passif** : les principaux flux de passif découlent des **hypothèses de rachats, de mortalité**, même les flux de participation aux bénéfices qui sont considérés comme conjoncturels étant donné leur dépendance aux produits financier de l'actif sont eux même assis sur l'écoulement structurel des provisions mathématiques puisqu'ils sont calculés sur la base d'un taux multipliant la PM.

Une observation des flux sur un calcul Best Estimate sur un scénario risque neutre central à septembre 2019 donne :

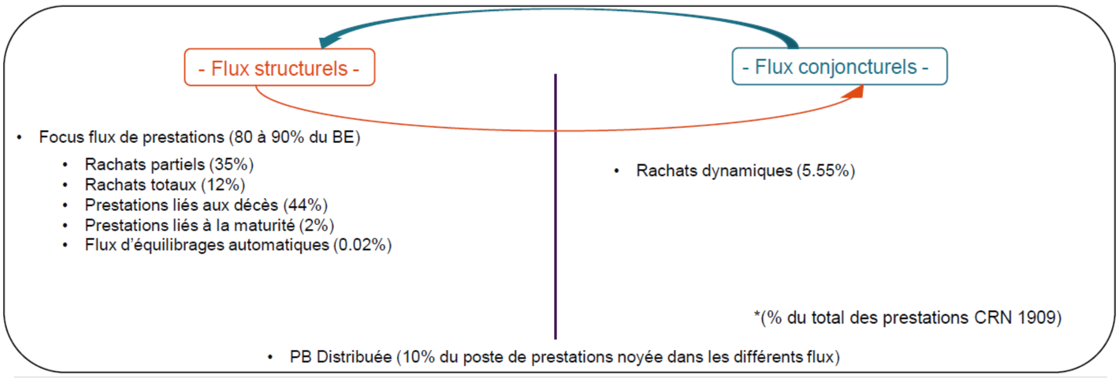


FIGURE 2.13 : Répartition des principaux flux Best Estimate

L'approximation que nous cherchons à faire doit conserver ces proportions et estimer ces principaux flux d'une manière précise, la question qui se pose alors est :

*Quelle est **l'information déterminante** contenue dans les **données modèle** qui régit le calcul de ces **flux** ? Cette information doit être conservée au maximum au moment de l'agrégation que nous souhaitons mettre en place*

Cette question est avant tout posée pour les flux de prestations qui représentent proportionnellement une grande partie des flux de Best Estimate mais la même réflexion peut être posée pour tous les autres postes du Best Estimate tels que le commissionnement, les frais généraux...etc

2.4.4..2 D'un âge et une ancienneté : une chronique de taux d'écoulement des prestations :

L'âge et l'ancienneté font initialement partie de la clé d'agrégation des model points de passif, cette information est utilisée pour déterminer les taux de rachats partiels et totaux ainsi que les probabilités de décès du model point. Tel que que le montre l'analyse des postes du Best Estimate cette information est structurante dans l'écoulement du passif.

Pendant la mise en place de l'agrégation des model point pour les calculs Solvabilité

II ces variables ont été considéré comme "non-agrégeables" étant donné qu'un âge ou une ancienneté moyenne ne serait pas représentatif de l'écoulement réel attendu du passif.

Nous proposons une méthode d'agrégation de model point permettant de se défaire de l'âge et de l'ancienneté au sein de la clé d'agrégation :

Soit MPP une table de model point constituée de n model point où l'âge et l'ancienneté des model points fait partie de la clé d'agrégation qui a permis de construire cette table.

Pour un model point MP_i $i\epsilon 1, ..., n$ d'âge A_g et d'ancienneté A_n nous pouvons déterminer la chronique des taux d'écoulements liés au 3 types de prestations définis au sein du modèle :

- $TM_i = (tm_{(i,1)}, ..., tm_{(i,T)})$ correspond au vecteur contenant les taux de mortalité associé au model point i durant l'horizon de projection T
- $TRP_i = (trp_{(i,1)}, ..., trp_{(i,T)})$ correspond au vecteur contenant les taux de rachats partiel associé au model point i durant l'horizon de projection T
- $TRT_i = (trt_{(i,1)}, ..., trt_{(i,T)})$ correspond au vecteur contenant les taux de rachats totaux associé au model point i durant l'horizon de projection T

Sachant ces chroniques d'écoulements ainsi que la provision mathématique à $t = 0$ nous pouvons calculer **une chronique d'écoulement structurel** de la provision mathématique cette chronique est obtenue en appliquant les flux de sorties des 3 chroniques définis ci-dessus à la provision mathématique d'un pas de temps à l'autre :

- $ChroniquePM_i = (PM_{(i,0)}, ..., PM_{(i,T)})$ tel que $PM_{(i,j+1)} = PM_{(i,j)} \times (1 - tm_{(i,j)}) \times (1 - trp_{(i,j)}) \times (1 - trt_{(i,j)})$

Pour un sous ensemble de model point $1, ..., p$ de la table initiale MPP nous pouvons alors construire un model point agrégé MP_{ag} dont les chroniques de d'écoulement correspondent aux moyenne pondérés par les provisions mathématiques des model point constituant le sous ensemble, c'est à dire que pour un pas de temps donné t :

- $TM_{(ag,t)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{PM(i,t) \times tm(i,t)}{PM(ag,t)}$
- $TRP_{(ag,t)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{PM(i,t) \times trp(i,t)}{PM(ag,t)}$
- $TRT_{(ag,t)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{PM(i,t) \times trt(i,t)}{PM(ag,t)}$
- $PM(ag,t) = \sum_{i=1}^{p} PM(i,t)$

Nous pouvons illustrer le calcul par un exemple d'agrégation de deux model points :

	Age	Ancienneté	tm_t1	trp_t1	trt_t1	...	...	...	tm_t30	trp_t30	trt_t30
Model point 1	34	6	2.0%	7.0%	1.5%	...	...	...	7%	6%	3%
Model point 2	37	3	3.0%	8.0%	1.0%	...	...	...	8%	9%	4%

	Age	Ancienneté	PM€_0	...	...	...	PM€_29
Model point 1	34	6	40 000	...	...	...	1 500
Model point 2	37	3	25 000	...	...	...	250

Moyenne pondérée

	Age	Ancienneté	tm_t1	trp_t1	trt_t1	...	...	...	tm_t30	trp_t30	trt_t30
MP agrégé	**	**	2.4%	7.4%	1.3%	...	...	...	7.1%	6.4%	3.1%

Figure 2.14 : Exemple illustratif d'agrégation de deux model points

La moyenne pondérée qui a été appliquée conserve alors les flux projetés pour les deux model points au sein de cette projection déterministe.

L'agrégation proposée est basée sur une moyenne pondérée dont les poids (provisions mathématique) ne dépendent que d'un seul scénario déterministe projeté or pour un pas de temps donné les provisions mathématiques associé à un model point peuvent être trés variables d'un scénario stochastique à l'autre, nous allons alors montrer ci-dessus que les poids associés à la moyenne pondérée définie ci-dessus dépendent peu des scénarios stochastiques :

La provision mathématique d'un model point i à la date t pour le scénario s peut être écrite sous cette forme :

- $$PM_i^s(t) = PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t} \underbrace{(1 - TP_i(j))}_{Taux\ de\ prestations} \times \prod_{j=1}^{t} (1 + \underbrace{TB^s(j) - Tf_i(j)}_{Taux\ servi\ brut - Taux\ frais})$$

- $$PM_i^s(t) = PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t} (1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t} (1 + TB^s(j) - Tf_i(j) - Tf_i(j) TB^s(j) + Tf_i(j) TB^s(j))$$

- $$PM_i^s(t) = PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t} (1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t} (1 + TB^s(j) \times (1 - Tf_i(j)) + Tf_i(j) TB^s(j))$$

Il est possible de négliger le terme $Tf_i(j) \times TB^s(j)$, une justification numérique est possible en étudiant la fonction :

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1 + x) \times (1 - y)}, (x, y) \epsilon A = [0, 20\%] \times [0, 2\%]$$

on obtient alors $max(f(x,y))_{(x,y)\epsilon A} = 0.0034$

On a alors :

$$PM_i^s(t) \approx PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 + TB^s(j)) \times (1 - Tf_i(j)))$$

Si on considère alors un groupe de p model point la somme des provisions mathématiques de ces model point est :

$$PM_{tot}^s(t) \approx \sum_{i=1}^{p} PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 + TB^s(j)) \times (1 - Tf_i(j)))$$

Le poids relatif de chaque model en terme de provision mathématique peut donc être approximé via cette formule :

$$\frac{PM_i^s(t)}{PM_{tot}^s(t)} \approx \frac{PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 + TB^s(j)) \times (1 - Tf_i(j)))}{\sum_{i=1}^{p} PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 + TB^s(j)) \times (1 - Tf_i(j)))}$$

Le terme $(1 + TB^s(t))$ peut alors être simplifier on obtient alors :

$$w_i \approx \frac{PM_i^s(t)}{PM_{tot}^s(t)} \approx \frac{PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 - Tf_i(j)))}{\sum_{i=1}^{p} PM_i(0) \times \prod_{j=1}^{t}(1 - TP_i(j)) \times \prod_{j=1}^{t}((1 - Tf_i(j)))}$$

Les poids relatif w_i associés à un model point ne dépendent alors pas du scénario stochastique. Nous avons donc démontré que $\frac{\partial w_i}{\partial s} \approx 0$ ce qui nous permet de calculer ces poids pour un seul scénario déterministe et de les utiliser au sein de la moyenne pondérée décrite auparavant.

2.4.4..3 Intégration opérationnelle de l'approximation proposée : La méthode proposée s'intègre facilement au sein du processus classique de production, étant donné que le modèle ALM n'est pas remplacé par un autre modèle mais que nous utilisons une version accélérée de l'algorithme tous les axes d'analyse habituels sont conservés et il n'est pas nécessaire de développer d'outils supplémentaires pour exploiter les résultats de l'approximation.

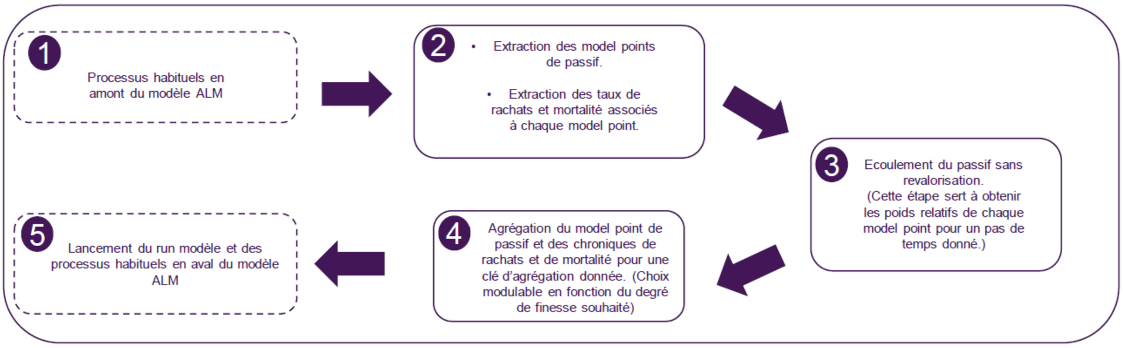


FIGURE 2.15 : Intégration opérationnelle de l'agrégation proxy

2.4.4..4 Définition d'une clé d'agrégation par méthode d'essai-erreur :

La méthode essai-erreur est une méthode de résolution de problèmes, elle est caractérisée par des essais divers jusqu'au succès de la recherche.

Dans le cadre de la recherche d'une clé d'agrégation optimale une analyse des variables décrivant les model point de passif a été effectuée afin de déterminer s'il est nécessaire de considérer si une variable doit faire partie de la clé d'agrégation.

La méthode essai-erreur a été appliquée de cette façon :

0. Définition d'une clé d'agrégation minimale : cette clé permet de conserver la structure générale du passif en terme d'entité ou de cantons (entre autres) afin d'obtenir une table de model point cohérente avec d'autres tables d'hypothèses : on ne cherche pas à minimiser d'erreur d'évaluation à cette étape.

1. Observation des différents flux calculés par le modèle version proxy et comparaison avec le calcul classique.

2. Détermination des variables de la table de model point influant sur les écarts les plus significatifs.

3. Rajout des variables déterminées à l'étape précédente à la clé d'agrégation proxy.

4. Reprise des étapes 1-2-3 jusqu'à obtention d'évaluations d'une précision satisfaisante.

À titre d'exemple cette analyse a permis d'identifier qu'une première version du proxy n'incluait pas les arbitrages des encours euros vers les encours en unités de compte, cette erreur a été corrigée en rajoutant la variable régissant les flux d'arbitrage dans la clé d'agrégation :

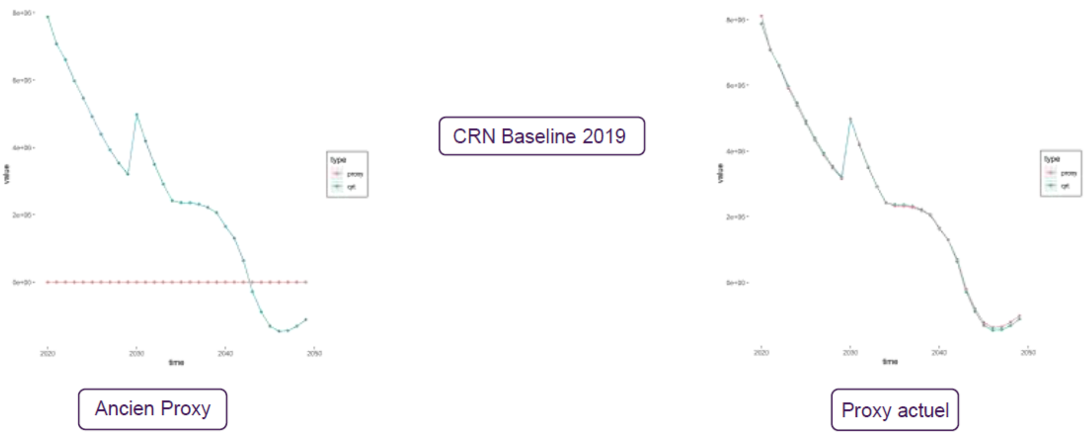


FIGURE 2.16 : Méthode essai-erreur : correction de l'évaluation des flux d'arbitrage

La figure correspond à la comparaison du flux d'arbitrage observé pour le model point proxy et le model point classique, à gauche le model point proxy impliquait des arbitrages nul, l'enrichissement de la clé d'agrégation a permis d'obtenir des flux d'arbitrages quasi égaux.

Outre la correction des flux associés à un run central l'analyse par la méthode d'essai-erreur a permis de corriger l'évaluation des sous-module SCR dit de "souscription" tel que le module de mortalité, longévité et le module associé au rachats.

Évaluation des chocs de souscription : enrichissement de l'agrégation proxy : Les premières versions de l'agrégation proxy entraînaient des écarts non négligeables lors de l'évaluation des chocs de souscription (comparé au évaluation sans agrégation proxy), une analyse formelle montre que cela est dû à la méthodologie spécifique au calcul de ces sous modules.

Pour rappel l'évaluation Best Estimate associée à un choc de souscription est calculée en deux étapes :

1. Une évaluation Best Estimate est effectuée où les hypothèses biométriques/comportementales (mortalité ou rachats) de **tous les model points** sont déformées (à la hausse ou à la baisse), notons $BE(i, choc)$ le Best Estimate associé au model point i pour un choc donné.

2. Une évaluation de Best Estimate où **seul les model points vérifiant la condition** $BE(i, choc) > BE(i, central)$ sont choqués.

L'agrégation que nous effectuons doit donc intégrer cette information : une clé d'agrégation qui regrouperait des model points dont la réponse au test : $BE(i, choc) > BE(i, central)$

diffère entraînerait des écarts de valorisation entre le calcul classique et le calcul agrégé. En effet cela serait équivalent à choquer un certain nombre de model point (inclus dans le model point agrégé) qui ne l'aurait pas été lors du calcul classique ou vice versa.

La solution proposée à ce problème est de déterminer des variables (**parmi celles qui n'étaient pas déjà incluses dans la clé d'agrégation proxy**) entraînant un choc/non-choc du model point. En ajoutant ces variables dans la clé d'agrégation on obtiendrait des regroupements de model points "homogènes" d'un point de vue des chocs de souscription.

Tous les chocs de souscription correspondent à la même mécanique en terme de calcul que ce soit un choc concernant la mortalité ou les rachats d'un point de vue bilantiel cela correspond à un allongement ou un raccourcissement de la duration attendue du passif, un model point i dont l'allongement de la duration implique $BE(i, choc) > BE(i, central)$ est un model point moins rentable qu'un model point j qui donne un résultat $BE(j, choc) < BE(j, central)$: l'allongement de la duration de i implique une baisse de la NAV tandis que l'allongement de la duration de j implique une hausse de la NAV, cette intuition guide alors la recherche de variable pouvant prédire si pour un model point i on obtiendra $BE(i, choc) > BE(i, central)$ ou $BE(i, choc) < BE(i, central)$ nous allons donc nous intéresser aux variables influant sur **la rentabilité** du model point.

La rentabilité d'une ligne de passif (model point) est fortement liée au taux d'unités de compte investis par le client, en effet le coût des options et garanties est très faible dans le cas des engagements en unités de compte puisque l'assureur ne propose pas de garantie en capital dans le cadre d'un investissement en unités de compte, une première tentative naïve de correction des évaluations des chocs de souscription a été de créer des classes décrivant le taux d'unités de compte des model points de la base de passif, une variable qualitative $classeUC$ admettant 10 modalités a été crée tel que pour tout model point i $classeUC(i) = k$ *si le* $tauxUC(i)\ \epsilon [10\% \times k, 10\% \times (k+1)]$ *tel que* $k \epsilon \{0, ...9\}$, la base a ainsi été découpée en 10 groupes où les taux d'unités de compte ne différent pas plus de 10%.

La variable $classeUC$ a été rajoutée au sein de la clé d'agrégation et cela a fortement amélioré les évaluations des chocs de souscription à un niveau acceptable néanmoins le choix de créer une variable ayant 10 modalités augmente fortement la taille des model points proxy et diminue le gain en temps de calcul, il est donc nécessaire d'améliorer cette classification en diminuant le nombre de classes ce qui induirait une base agrégée plus petite et un meilleur gain en temps de calcul.

Détermination d'une classification relatives aux taux d'unités de compte optimale :

Afin de diminuer la taille de la base de passif issue de l'agrégation proxy nous cherchons à définir un découpage de $[0, 100\%]$ du taux d'unités de compte permettant d'assurer la bonne estimation des chocs de souscription, une observation préliminaire de la distribution de la provision mathématique relativement aux taux d'unités de compte montre que la PM n'est pas distribuée de manière équirépartie :

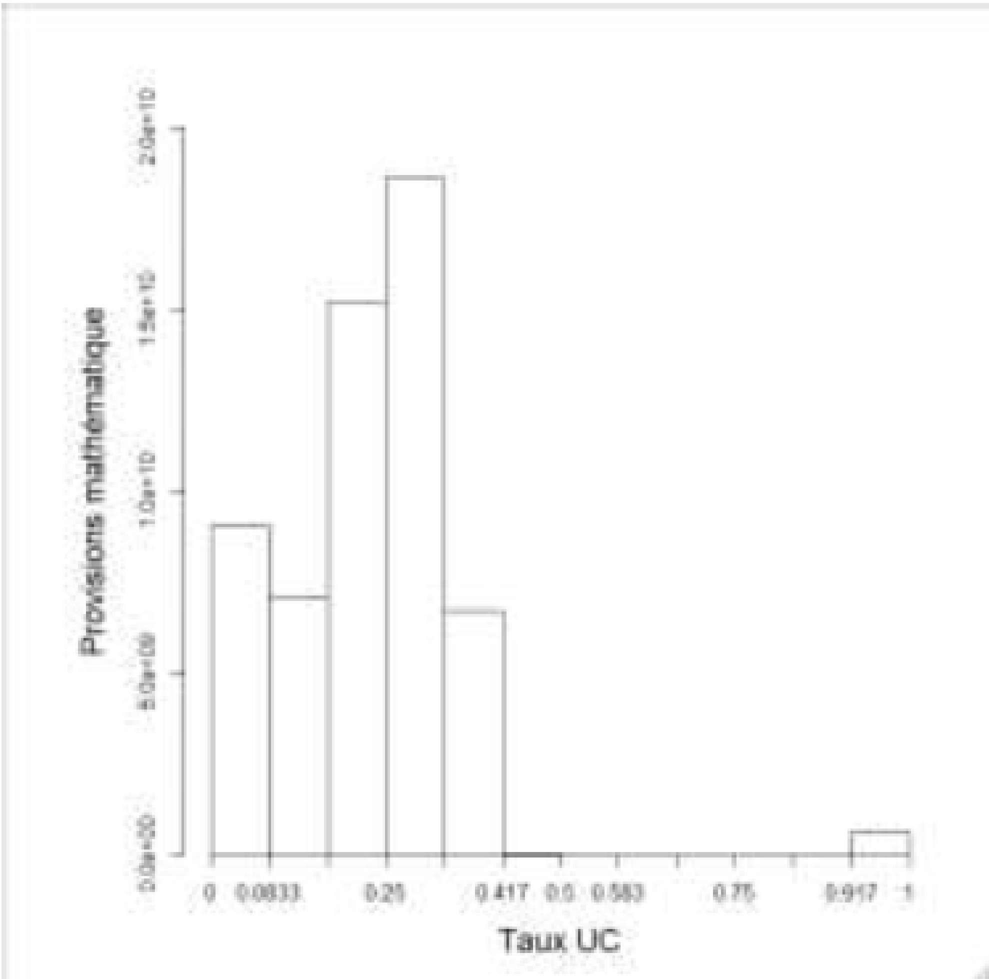


FIGURE 2.17 : Histogramme de distribution des taux d'UC relativement à la provision mathématique

Cette distribution montre qu'il n'est pas nécessaire de découper la base d'une manière fine au delà de 40% de taux d'unités de compte étant donné que cela concerne une faible part de la provision mathématique. Le but le but recherché du découpage et de conserver au maximum une distribution équivalente entre le model point agrégé et le model point classique.

Pour un *choc* donné et pour chaque model point i nous rajoutons à la table de passif la variable $indicatrice_{choc}$ tel que $indicatrice_{choc} = 1$ si $BE(i, choc) > BE(i, central)$, en essayant de prédire la variable $indicatrice_{choc}$ via des arbres de décision (apprentissage statistique) les données montrent que le taux d'unité de compte est un bon indicateur étant donné qu'on lui associe un poids fort dans au sein de toutes les combinaisons de modèles linéaires généralisés possible où on sélectionne 1,2,3... variables explicatives (l'ensemble des combinaisons de variables explicatives ont été explorés via le package glmulti sur R) :

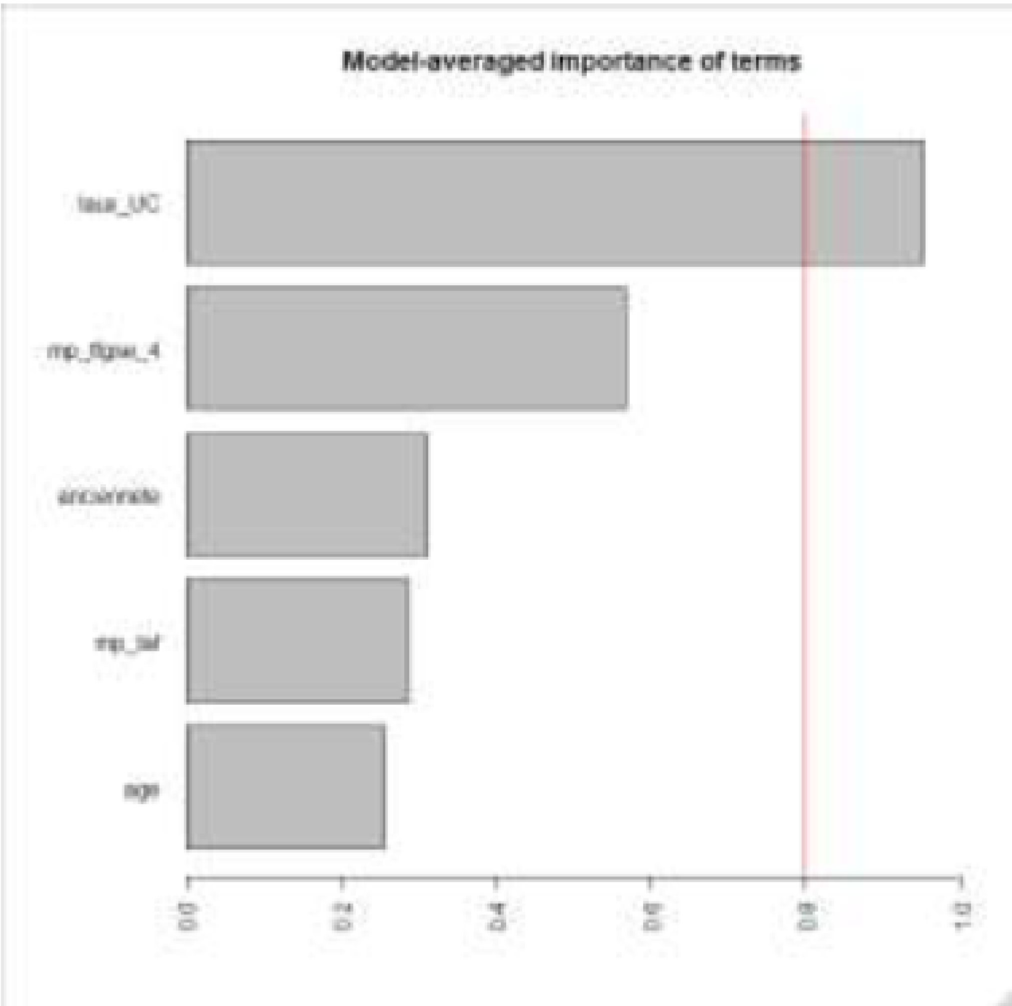


FIGURE 2.18 : Importance du taux d'UC : pouvoir prédicatif du choc/non-choc (souscription) du model point

Cette analyse confirme l'intuition lié au fait que le taux d'unités de compte impacte la réponse d'un model point aux chocs de souscription.

Afin d'obtenir un découpage de classes de taux d'unités de compte nous calculons des arbres de décisions ayant pour variable explicative le taux d'unité d'unités de compte et obtenons ainsi des niveaux permettant d'obtenir un découpage homogène de la base relativement à la question ?$BE(i, choc) > BE(i, central)$? l'observation de ces arbres de décisions a permis de diminuer le nombre de classes de taux d'unités de compte à 3 pour l'entité BPCE Vie et à 4 pour l'entité Natixis Life (la distribution des taux d'unités de compte est plus étalée pour l'entité Luxembourgeoise).

Résultat de la méthode essai-erreur : clé d'agrégation proxy finale : La méthode que nous avons décrit précédemment a permis d'obtenir une clé d'agrégation suffisante permettant une bonne estimation de la valorisation Best Estimate pour l'ensemble des chocs des modules solvabilité II, la clé obtenu concerne les variables suivantes :

- **Fond** : cette variable renseigne le fond associé au model point, l'ajout de cette variable a la clé d'agrégation permet d'obtenir des résultats homogène en terme d'entité.
- **Canton** : Cette variable renseigne le canton associé au model point. Étant donné les calculs spécifiques à certains cantons.
- **Résidence fiscale** : Cette variable renseigne la résidence fiscale associée au model point : certains clients de l'entité Luxembourgeoise possède une résidence fiscale au Luxembourg et cela implique des différences lors du calcul associés aux prélèvement sociaux (CSG).
- **Type de contrat** : cette variable renseigne si le contrat est un contrat de capitalisation ou un contrat d'assurance vie : une différence notable entre ces deux types en terme de modélisation est qu'il n'y a pas de prestations liés à la mortalité pour les contrats de capitalisation puisqu'ils n'arrivent pas à terme au décès de l'assuré.
- **Segment de clientèle** : cette variable renseigne la classe patrimoniale des clients et admet deux modalités "Grand public" ou "client aisé" ce découpage impacte le calcul des frais généraux au sein du modèle étant donné les services apportés aux clients possédant un patrimoine plus grand.
- **Réseau de distribution** : cette variable renseigne le réseau où le client a souscrit son contrat et a 3 modalités : "Caisse d'épargne", "Banque populaire" ou "Autre". Étant donné un traité de réassurance qui lie BPCE Vie et CNP concernant le stock de passif distribué par le réseau des caisse d'épargne cette variable a été rajouté afin de conserver la structure de ce traité.
- **Type de commissionnement** : cette variable admet deux modalité et renseigne la manière dont est calculé les commissions versés aux apporteurs d'affaires : une part des commissions est sensible au résultat technique de l'assureur tandis qu'une autre part est fixe, le rajout de cette variable permet d'assurer le bon calcul des commissions versés au réseau.
- **Entité Natixis Life** : Cette variable renseigne si la ligne de passif est associée à l'entité Français ou à l'entité Luxembourgeoise de Natixis Life, cette variable impacte

le calcul associé aux frais généraux étant donné l'usage de coûts unitaires spécifiques à chaque entité.

- **Équilibrages automatiques** : Cette classe renseigne si le client a souscrit à l'option d'équilibrage automatique qui permet de conserver une proportion euros/unité de compte fixe même si la valeur de chaque poche évolue via des arbitrages mensuels. Cette variable a été rajouté afin de corriger l'erreur associée aux flux d'arbitrages.

- **Type de personne** : Cette classe renseigne si la ligne de passif a été souscrite par une personne physique ou une personne morale. Une personne morale n'est pas concernée par les flux de mortalité.

- **Taux minimum garanti** : la valeur du taux minimum garanti ayant un impact sur la participation aux bénéfices servie aux clients nous regroupons les clients ayant le même TMG.

- **Classe taux d'UC** : tel que nous l'avons décrit dans la sous section précédente cette classification est nécessaire afin d'obtenir un regroupement homogéne en terme de rentabilité de lignes de passif permettant ainsi une bonne estimation des chocs de souscription.

Cette liste de variable est le fruit de l'analyse effectuée à la fois sur l'estimation Best Estimate au global ainsi que sur l'observation des écarts obtenus concernant différents flux du modèle ALM tel que la participation aux bénéfices, les frais généraux, le commissionnement, les arbitrages etc... Cette analyse a permis de construire une clé d'agrégation garantissant une conservation de la structure du passif post agrégation.

Règles d'agrégation du model point proxy Une fois la clé d'agrégation déterminée il est nécessaire de définir des règles d'agrégation pour chaque variable quantitative du model point de passif.

Ces règles ont été définis de manière formelle en se basant sur les formules du modèle ALM. Parmi les variables décrivant une ligne de passif nous trouvons plusieurs taux tel que :

- Les taux de frais de gestion sur encours euros et unité de comptes.

- Les taux de commissions sur encours.

- Les taux d'affectation des produits Financiers, noté TAF

- Les taux de répartitions décrivant l'allocation de la poche UC

- ....

Tous ces taux interviennent dans des calculs à un pas de temps t et un scénario s ayant la forme suivante :

$$Flux(t, s) = Taux * Assiette(t, s)$$

Le terme *Assiette* correspond en général à l'une des trois variable suivantes (éventuellement multiplié par un autre taux) :

- La provision mathématique des encours en euros du model point.
- La provision mathématique des encours UC du model point.
- La provision mathématique totale du model point

Sachant cette observation nous définissons alors 4 règles d'agrégation possibles permettant d'obtenir une valeur agrégée pour chaque variable quantitative :

1. Agrégation par moyenne pondérée par la provision mathématique euros initiale. **Exemples de variables agrégés de cette manière** : Taux de frais de gestion sur encours euros, Taux de commissions sur encours euros, Taux d'affectation des produits financiers...
2. Agrégation par moyenne pondérée par la provision mathématique en unités de compte initiale. **Exemples de variables agrégés de cette manière** : Taux de frais de gestion sur encours en unités de compte, Taux de commissions sur encours en unité, proportion de la provision investie sur une poche d'actif particulière...
3. Agrégation par moyenne pondérée par la provision mathématique totale.
4. Agrégation par somme. **Exemples de variables agrégés de cette manière** : Provisions mathématique, nombre de contrats contenus au sein de la ligne de passif...

2.4.5 Processus de validation et de backtest de l'approche

Pour assurer la robustesse de l'agrégation proxy il est nécessaire de mettre en place un processus de validation en amont de l'utilisation de la méthode dans le cadre d'une étude ou d'un exercice de stress test, en plus de ce cadre de validation il sera aussi nécessaire d'effectuer des backtest afin de s'assurer que la méthode reste adaptée en cas d'évolution structurante du modèle, des données ou du contexte économique.

Le processus de validation et de backtest s'inspire de la méthode essai-erreur qui a servi a calibrer la méthode, 3 questions sont alors étudiées afin de valider la méthode :

1. **Comment se comporte le proxy en évaluation déterministe ?** : une comparaison des écoulements et des caractéristiques moyennes du passif à chaque pas de

temps est effectuée, on vérifie alors que les principaux flux, tel que les prestations, les frais généraux, la participation aux bénéfices...etc, sont évalués de la même manière pendant le calcul proxy et le calcul classique. Cette étape est donc réalisée avant l'utilisation du proxy dans le cadre d'une étude ou d'un stress test.

2. **Le proxy réplique t-il la valeur du Best Estimate officiel** : ce point concerne le type de backtest à effectuer afin de s'assurer qu'il n'y a pas de dérive impliquant des erreurs d'évaluation du Best Estimate central ou choqué.

3. **La distribution de la variable Best Estimate est-elle conservée ?** : Dans le cadre de l'évaluation Monte-Carlo nous nous intéressons à la moyenne de l'estimateur mais il peut être intéressant de vérifier que la distribution des 1 000 évaluations stochastique ne diffère pas entre l'évaluation proxy et l'évaluation classique.

Le premier point représentera le processus de validation du proxy, tandis que les deux derniers points correspondent au backtest a effectué à une fréquence déterminée (recommandation de la fonction actuarielle de Natixis Assurances : effectuer un backtest 1 fois par an pendant les arrêtés annuels). Dans le cadre de la validation nous définissons une liste de flux à comparer entre l'évaluation classique et l'évaluation proxy :

2.4.5..1 Processus de validation : principaux flux à contrôler :

Dans le cadre d'une approximation Best Estimate via l'agrégation proxy il est possible d'expliquer une erreur d'estimation du BE à l'aide d'une erreur d'estimation d'un des flux constituant le BE. Vérifier que l'évaluation des principaux flux calculés par le modèle ne diverge pas du calcul classique permet de garantir une précision théorique relativement au calcul classique. Une liste de flux (ou écoulement de stocks) est alors définie pour garantir cette précision, cette liste est constituée des variables suivantes :

- **Les provisions mathématiques** : Les provisions mathématiques interviennent dans plusieurs calculs au sein du modèle puisqu'elles constituent l'assiette de calcul de plusieurs autres flux.

- **Les prestations** : Les différents types de prestations constituent le flux le plus conséquent du Best Estimate et impactent l'écoulement des provisions mathématiques il est donc essentiel d'observer des flux de prestations équivalents entre l'évaluation proxy et l'évaluation classique.

- **La provision pour participation aux bénéfices** : un écoulement équivalent de cette provision entre le calcul classique et le calcul proxy indique que les dotations et reprise sur cette provision sont équivalents entre les deux calculs, cela indique alors que le déroulement de l'algorithme de participation aux bénéfice diffère peu entre les deux calculs.

- **Caractéristiques moyennes du portefeuille** : certaines caractéristiques du portefeuille peuvent être suivies durant la projection, nous pouvons alors vérifier que le taux de frais de gestion sur encours (TFGSE) ou le taux d'affectation des produits financiers (TAF) ne diverge pas d'une évaluation à l'autre.

- **Résultats net** : La bonne évaluation des résultats prévus de l'entreprise assurera une bonne évaluation de la VIF du portefeuille, cela est important pour retranscrire le profil de risque du portefeuille.

- **Participation aux bénéfices** : Une participation aux bénéfices distribuée équivalente entre le calcul proxy et le calcul classique assure que les résultats de l'algorithme ALM sont en accord entre les deux calculs.

Il serait possible d'effectuer ce type d'analyse pour pour l'ensemble des variables évaluées au sein du modèle ALM mais nous considérons qu'il est suffisant d'effectuer la vérification sur ce groupe de variable étant donné leur caractère structurant dans l'évaluation du passif.

Nous présentons ci-dessous les comparaisons graphiques entre l'évaluation proxy et l'évaluation classique pour les principales variables du modèle ALM :

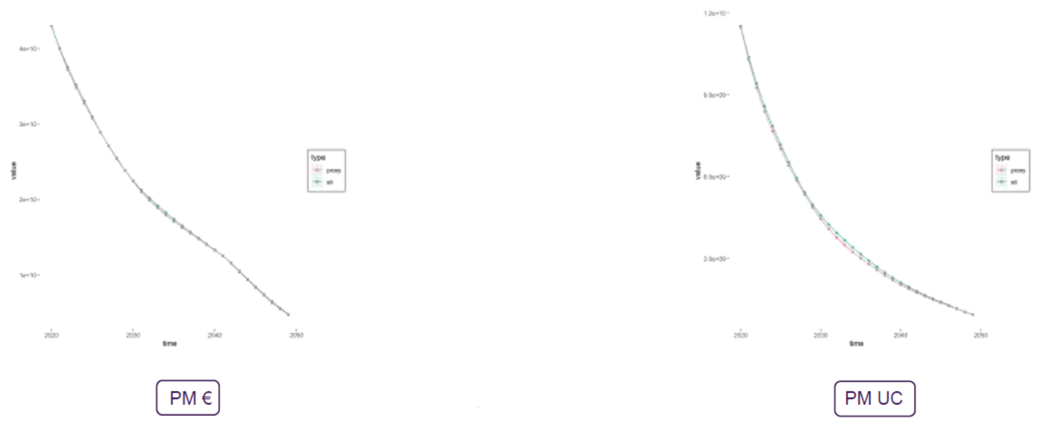


FIGURE 2.19 : Provisions mathématiques - Proxy VS Calcul Classique

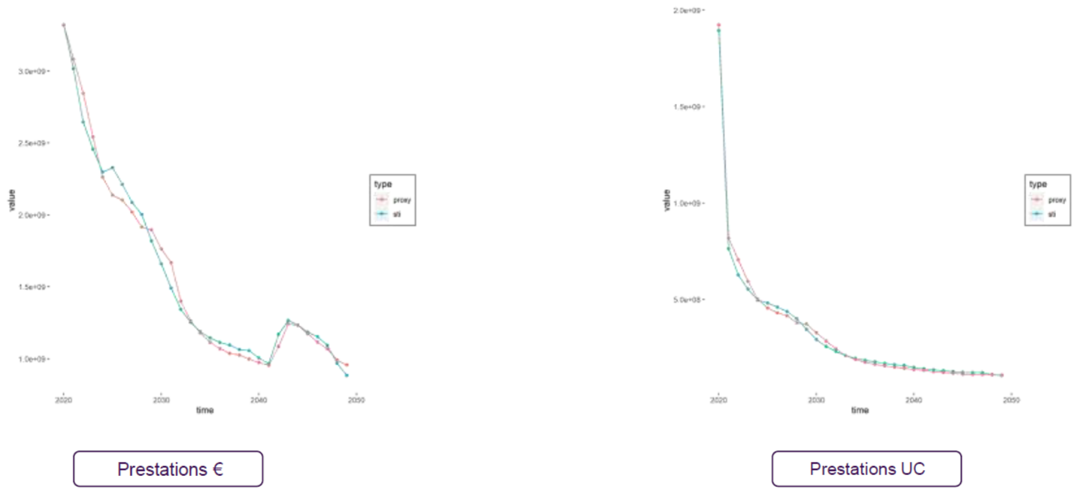


Figure 2.20 : Prestations - Proxy VS Calcul Classique

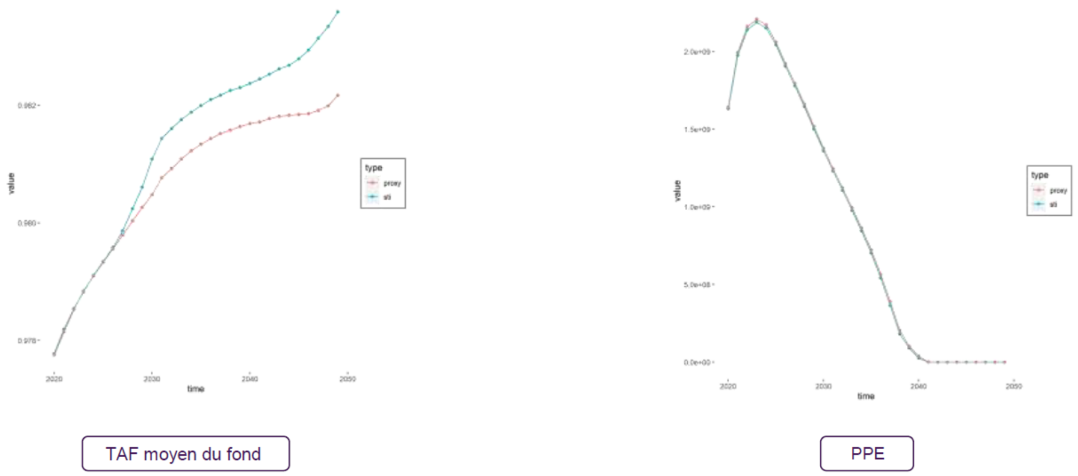


Figure 2.21 : TAF & PPB - Proxy VS Calcul Classique

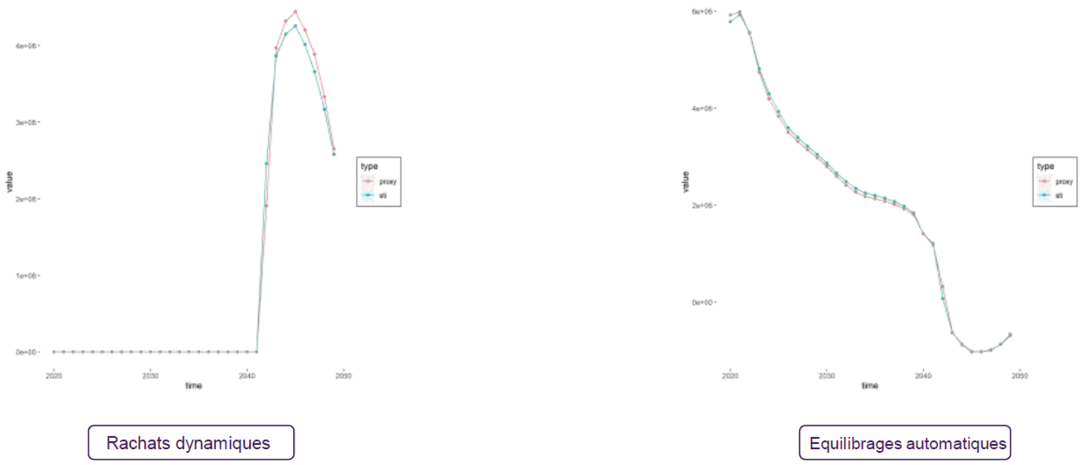


FIGURE 2.22 : Rachats & équilibrages automatiques - Proxy VS Calcul Classique

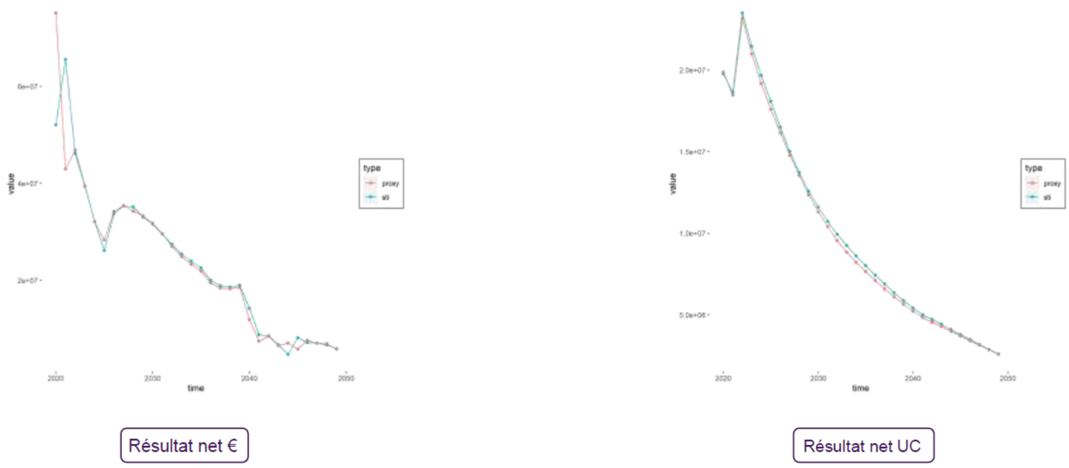


FIGURE 2.23 : Résultat net - Proxy VS Calcul Classique

2.4.5..2 Processus de backtest :

Tel que nous l'avons décrit au début de la section **(2.4.5)** il est nécessaire de définir un processus de backtest permettant de s'assurer qu'il n'y a pas de dérive entraînant un écart entre le calcul classique et le calcul proxy. Nous présenterons au sein de la prochaine section un exemple d'exercice de back-test concernant la bonne évaluation des Best Estimate centraux et choqués. Il est possible de comparer les distribution empiriques des estimateurs Monte-Carlo du Best Estimate ou de tout autre variable du modèle ALM afin de s'assurer que le profil de risque des deux visions du passif concordent :

Calcul classique VS proxy : comparaison des distribution de la NAV :
Afin de comparer les deux distributions de la NAV nous nous basons sur une observation graphique des distributions ainsi que sur un test statistique : **le test de Kolmogorov-Smirnov** qui est un test d'hypothèse pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connue par sa fonction de répartition ou bien si deux échantillons suivent la même loi.

Test de Kolmogorov-smirnov : Le principe de ce test est de mesurer l'écart maximum qui existe entre une fonction de répartition empirique et une fonction de répartition théorique ou entre deux fonctions de répartitions empiriques. Notre cas correspond au deuxième cas puisqu'on souhaite comparer la fonction de répartition empirique de la NAV associée au calcul classique à la fonction de répartition empirique de la NAV associée au calcul approximé.

On calcule alors $D = \max_x(F_1(x) - F_2(x))$ tel que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ correspondent respectivement à la fonction de répartition empirique des estimations de NAV pour le calcul classique et pour le calcul proxy.

Pour une p-value=α et pour des échantillons de taille (n_1, n_2) le seuil de kolmogorov-smirnov est determiné par la formule suivante : $D_\alpha = c(\alpha)\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$ tel que $c(\alpha) = \sqrt{\frac{-1}{2}ln(\alpha)}$. Pour un seuil d'erreur $\alpha = 0.05$ et pour une taille d'échantillon $n = n_1 = n_2 = 1000$ nous obtenons alors $D_\alpha \approx 0.054$ dans le cadre de notre backtest nous obtenons $D = 0.013$ nous pouvons alors valider l'hypothèse que les échantillons suivent la même distribution, cela est confirmé par l'observation graphique des distribution de NAV pour un run central ainsi que pour un run choqué :

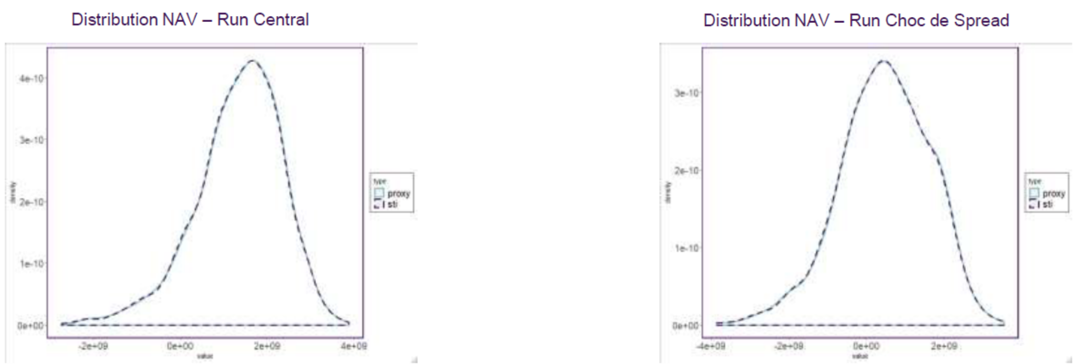


FIGURE 2.24 : Comparaison de distribution empiriques - Proxy VS Calcul classique

Nous obtenons donc des résultats satisfaisants concernant la comparaison des distributions empirique de l'évaluation proxy et de l'évaluation classique, cela implique qu'il n'y a pas de perte d'informations dans la structure de passif du point de vue du coûts des options et garanties. La corrélation entre les deux processus estimant les best estimate est supérieure à 99.99% et le test de kolmogorov est réussi confortablement.

Afin de pousser la validation nous pouvons aussi nous intéresser aux points "extrêmes" relativement à la NAV. Considérons alors les deux trajectoires les plus extrêmes (c'est à dire ceux donnant la NAV la plus favorable et la moins favorable) de la NAV euros pour une évaluation Best Estimate donnée : ces deux scénarios sont les scénarios extrêmes à la fois pour le proxy et pour le calcul classique, nous présentons ci-dessus deux variables du générateur de scénarios économiques pour chacun de ces scénarios, le niveau de taux sans risque pour une maturité 10 ans et le niveau de l'indice action :

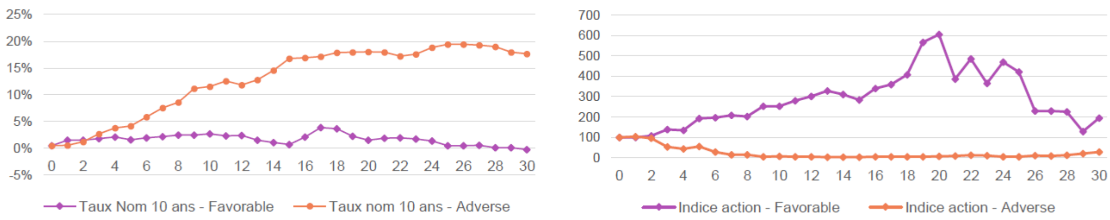


FIGURE 2.25 : écoulement de variables économiques : scénarios extrêmes

Le scénario défavorable allie une forte hausse de la courbe des taux à une forte baisse de l'indice action, la NAV du périmètre euros pour le calcul classique est égale à **- 2 690M€** en vision proxy cette NAV est estimée à **-2 735M€** soit une erreur relative de **1.60%**.

Le scénario favorable allie une légère hausse de la courbe des taux, préservant ainsi la valorisation de la poche taux, à une forte hausse de l'indice action. La NAV euros pour le calcul classique est de **3 867M€**, celle calculée en vision proxy est de **3 877M€** soit une erreur relative de **0.25%**

Cette bonne estimation de la NAV est lié au bon calcul de l'écoulement du résultat prospectif garanti par l'approche :

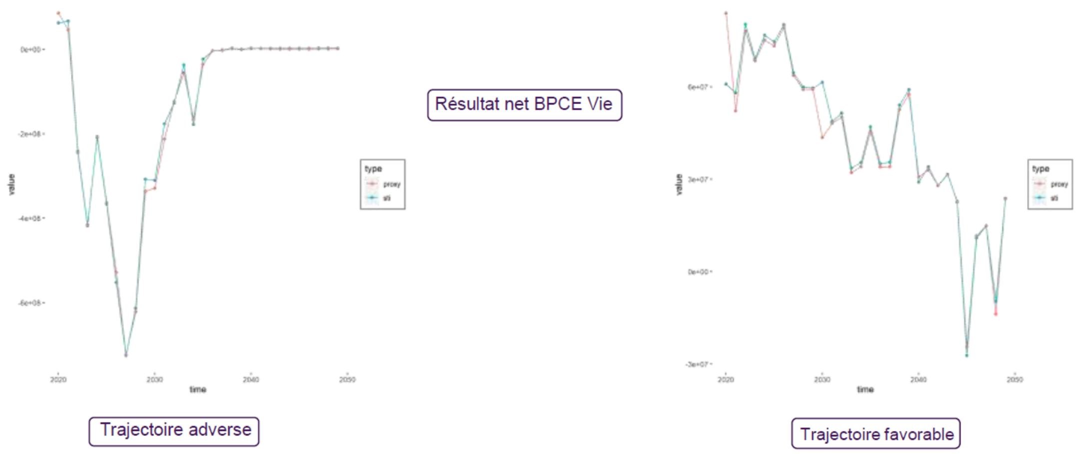


FIGURE 2.26 : Scénarios extrêmes : Écoulement des chroniques de résultats

Cette observation nous permet de montrer que la précision de l'approximation est indépendante du caractère extrême des trajectoires économiques où on souhaite estimer le Best Estimate, cette particularité ne se retrouve pas dans le cadre d'une estimation par régression étant donné qu'il faudrait considérer des points extrême au sein de la base d'apprentissage augmentant ainsi fortement la taille de cette base.

2.4.5.a Gain en temps de calcul :

La méthode proposée permet de diminuer fortement le nombre de model points de passif nécessaires au calcul du Best Estimate et capital de solvabilité requis (SCR).

Le temps de calcul d'une évaluation Best Estimate a été divisé par un facteur oscillant **entre 5 et 10** et une projection Best Estimate dure entre **3 à 5 minutes** contre **20 à 30 minutes** pour le calcul classique.

La figure ci-dessous présente une comparaison du nombre de model point entre l'évaluation proxy et l'évaluation classique :

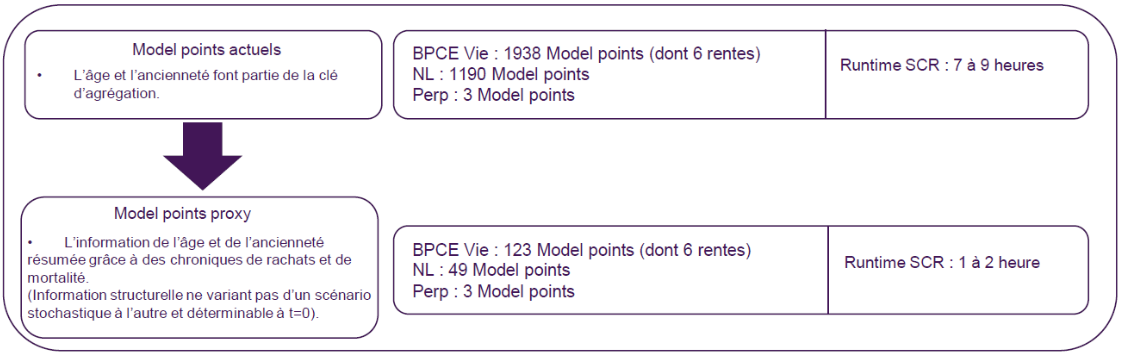


FIGURE 2.27 : Comparaison du nombre de model points par fond - Proxy VS Calcul Classique

Dans le cadre d'un exercice de stress test le département peut estimer jusqu'à 28 SCR correspondant à des évaluations de la solvabilité prospectives pour plusieurs scénarios économiques pouvant s'étaler pendant 4 ans. Cela représente alors **196 à 252 heures** de temps de calcul, via l'approche proxy ce temps est diminué à **28 à 56 heures** de calculs.

2.5 Application de la méthode à un exercice ORSA

Afin de valider l'usage de la méthode proposée dans le cadre d'études prospectives nous allons présenter un backtest qui a été effectué sur 3 scénarios de stress tests ORSA effectué en 2019 au sein du département, ces 3 scénarios s'étalent sur 4 ans et correspondent à l'évaluation de 12 arrêtés annuels, cela représente l'évaluation de 12 SCR et de 264 évaluations Best Estimate.

Les 3 scénarios envisagés sont appelés : Baseline, Adverse 1 et Adverse 2. Ces scénarios sont définis par le département de recherche économique du groupe Natixis, l'ensemble des entités du groupes évaluent l'impact du même jeu de stress tests dans le cadre d'un exercice de stress tests interne. Ce jeu de scénarios est repris dans le cadre de l'exercice ORSA pour les entités d'assurances.

Les principales hypothèses du scénarios Baseline sont présentés dans la figure ci-dessous :

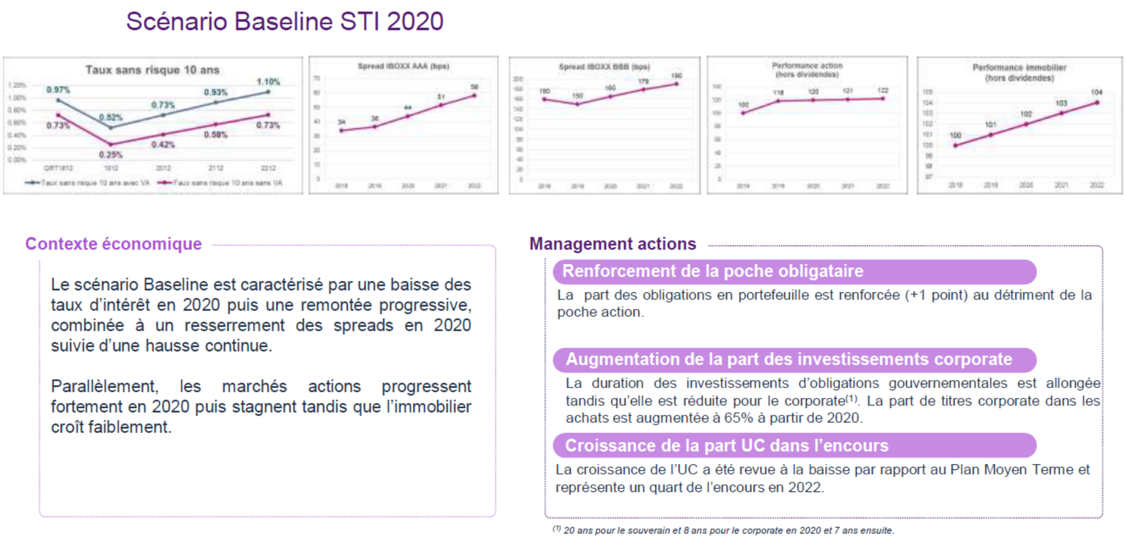


FIGURE 2.28 : Baseline - Contexte et management actions

2.5.1 Backtest de l'évaluation du Best Estimate

L'exercice ORSA a été rejoué en utilisant la méthode proxy d'agrégation de model point et nous obtenons les résultats ci-dessous pour l'évaluation du Best Estimate épargne pour le périmètre euros :

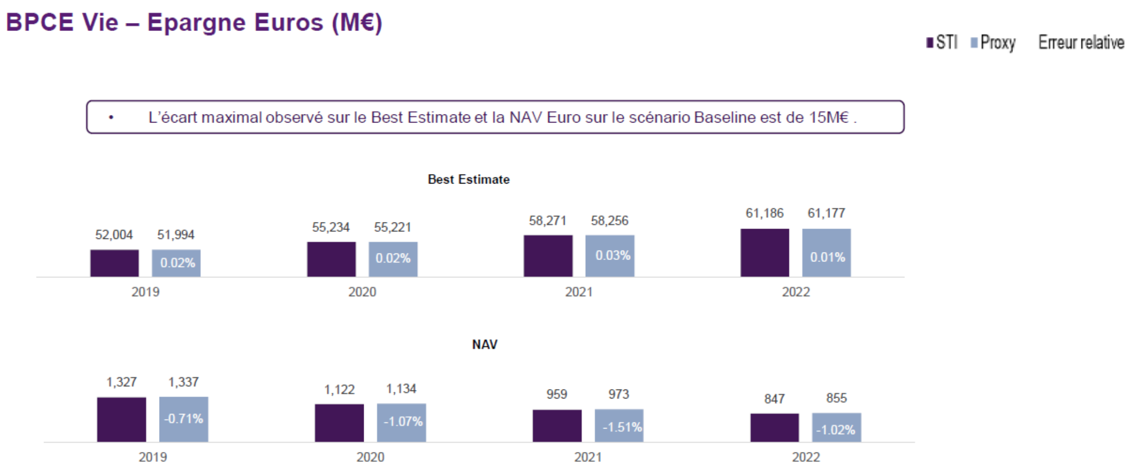


FIGURE 2.29 : Baseline - Backtest Best Estimate et NAV

L'erreur maximale concernant l'évaluation Best Estimate pour les 4 années du scénarios est de 15M€ soit 0.03% du Best Estimate et 1.51% de la NAV calculée lors de l'exercice officiel.

Une observation équivalente en terme de qualité d'estimation est observée pour l'estimation du Best Estimate des engagements en unités de comptes :

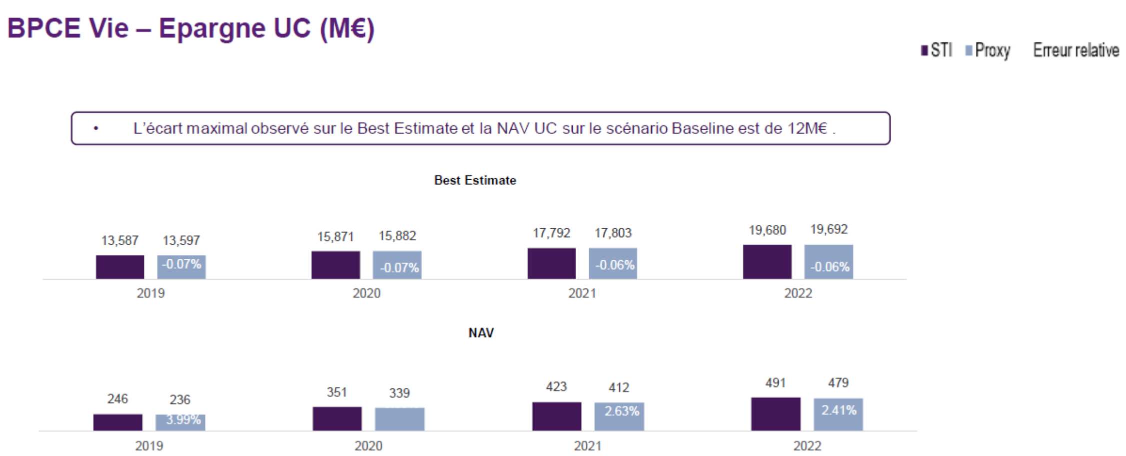


FIGURE 2.30 : Baseline - Backtest Best Estimate UC et NAV

Nous obtenons aussi une estimation équivalente de l'ensemble des sous-postes du Best Estimate en terme de flux futurs de prestations, de commissions ou de frais généraux...Les analyses et conclusions résultant du calcul proxy devraient alors être les mêmes que celles tirées du calcul en vision non agrégée.

2.5.2 Backtest de l'évaluation de la solvabilité prospective :

Nous allons présenter dans cette sous-section les résultats associés à la réévaluation de la solvabilité prospective via l'agrégation proxy des model points. Afin de valider le backtest il était nécessaire que l'évaluation de chaque sous-module de risque de la formule standard soit bien estimé afin de ne pas biaiser les analyses et conclusions associés à l'exercice de stress test.

2.5.2.a Chocs de marché :

Nous présentons ci-dessous l'évaluation backtest des principaux chocs de marché : Spread, Taux, Action ainsi que l'agrégation de ces trois chocs :

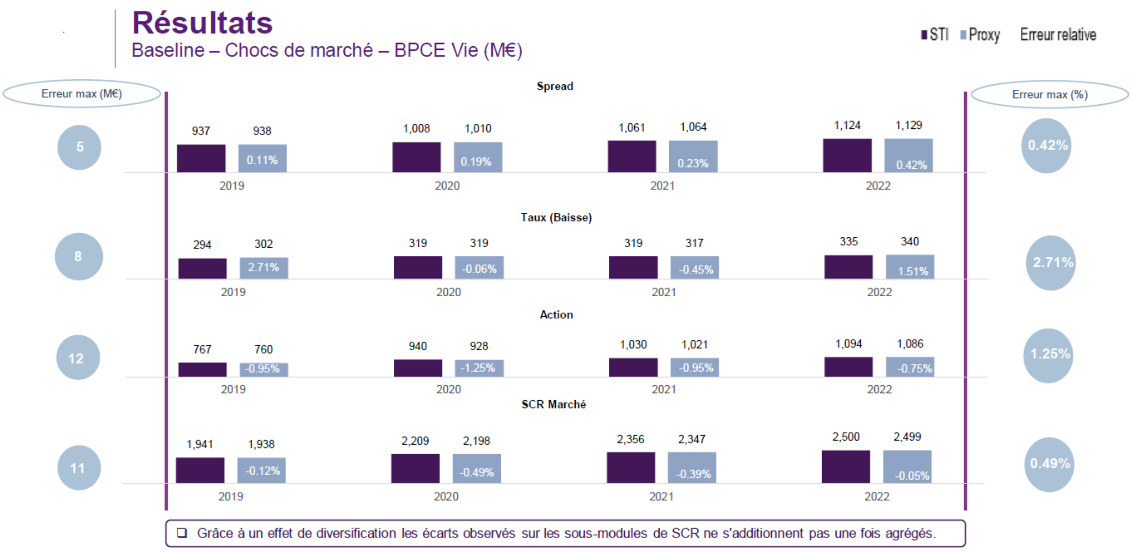


FIGURE 2.31 : Baseline - Backtest chocs de marché

Les écarts calculés par rapport à l'exercice officiels sont acceptables, l'agrégation proxy permet de conserver le même profil de risque concernant les chocs de marché.

2.5.2.b Chocs de souscription :

Tel que nous l'avons décrit au sein de la section **(2.4.4)** un enrichissement de la clé d'agrégation a permis d'obtenir des évaluation acceptables associés aux chocs de souscription, nous présentons ci-dessous les résultats du backtest lié à l'évaluation des chocs de souscription pour le scénario Baseline :

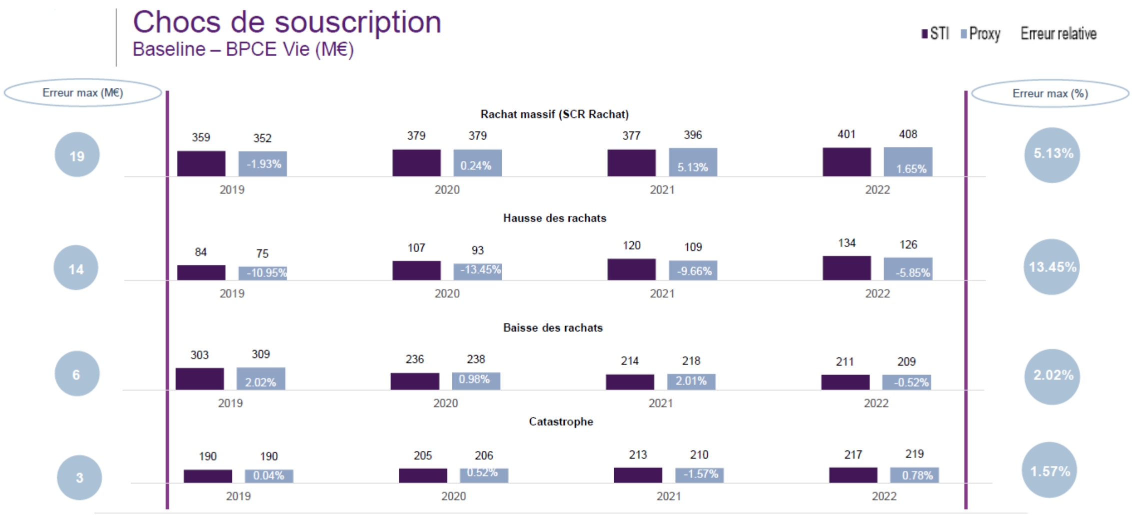


FIGURE 2.32 : Baseline - Backtest chocs de souscription

FIGURE 2.33 : Baseline - Backtest chocs de souscription

Étant donné que certains chocs présentent une faible variation de NAV certaines erreurs relatives sont élevés (19% dans le cas du choc de longévité) néanmoins l'erreur absolue reste à des niveaux faibles permettant une évaluation du module vie du SCR avec un écart au maximum de 1.67%.

2.5.2.c Ratio de solvabilité :

Les évaluations centrales et choquées permettent de calculer les fonds propres économiques ainsi que le niveau de capital de solvabilité, ces deux éléments nous permettent alors de calculer les ratios de solvabilité prospectifs pour le scénario Baseline :

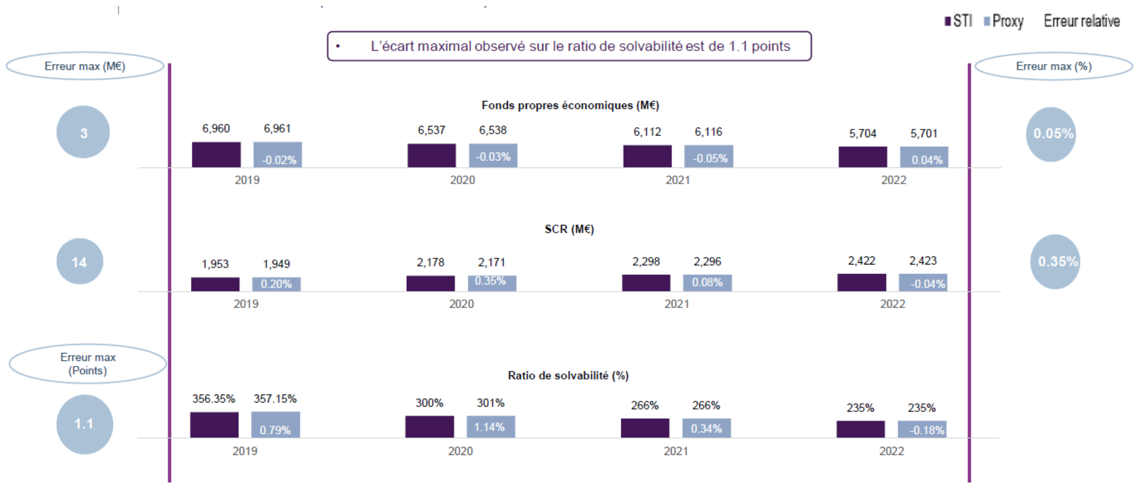


FIGURE 2.34 : Baseline - Backtest solvabilité

Étant donné la bonne évaluation des modules de chocs de la formule standard nous obtenons une erreur associée à l'évaluation du ratio de solvabilité inférieure à 1 point pour les 4 années du scénario Baseline.

Des résultats équivalents en terme de qualité de l'approximation sont obtenus pour les scénarios "Adverse 1" et "Adverse 2", ces résultats sont détaillés de la même façon que le scénario Baseline en annexe.

Ci-dessous un tableau récapitulatif des résultats obtenus en terme d'écarts d'évaluation de SCR Marché, SCR Vie ainsi que le SCR global de BPCE Vie.

		2019	2020	2021	2022	Ecart max	Ecart moyen
SCR marché	Baseline	0.1%	0.5%	0.4%	0.0%	0.5%	0.3%
	Adverse 1	0.1%	0.0%	0.6%	0.6%	0.6%	0.3%
	Adverse 2	0.1%	0.4%	0.6%	0.2%	0.6%	0.3%
SCR Souscription vie	Baseline	0.9%	0.0%	1.6%	0.6%	1.6%	0.8%
	Adverse 1	0.9%	0.2%	0.2%	2.1%	2.1%	0.6%
	Adverse 2	0.9%	3.0%	3.5%	0.4%	3.5%	1.8%
SCR	Baseline	0.3%	0.3%	0.2%	0.1%	0.3%	0.2%
	Adverse 1	0.3%	0.0%	0.4%	0.8%	0.8%	0.4%
	Adverse 2	0.3%	0.5%	0.5%	0.2%	0.5%	0.4%

FIGURE 2.35 : Tableaux récapitulatif des écarts obtenus

2.6 Pistes d'améliorations envisagées

Les pistes d'amélioration qui ont été envisagées s'articulent autour de 2 caractéristiques du proxy :

1. La finesse de l'approximation : l'évaluation du passif via les model points agrégés doit être fidèle à l'évaluation sans agrégation proxy.
2. La vitesse de calcul : ce point concerne toute amélioration pouvant améliorer la performance en terme de temps de calcul tout en garantissant sa précision.

2.6.1 Optimiser l'allocation encours/model-point :

Que ce soit en vision proxy ou en vision classique, les encours détenus par les clients de l'assureur sont distribués sur l'ensemble des model points, l'observation de cette distribution montre que les model points sont très hétérogènes en terme de volumes détenus : la majeure partie des encours est contenue dans un faible nombre de model points, un grand nombre de model point ne contient qu'une faible proportion des encours.

On observe alors en vision proxy que 77% de la provision mathématiques en unités de comptes et 69% de la PM en fond euros de BPCE Vie est modélisée par seulement 8 model points soit 6% du nombre total de model points tandis que 1% de la PM en euros et 3.6% de la PM en UC est contenue dans 80 model points :

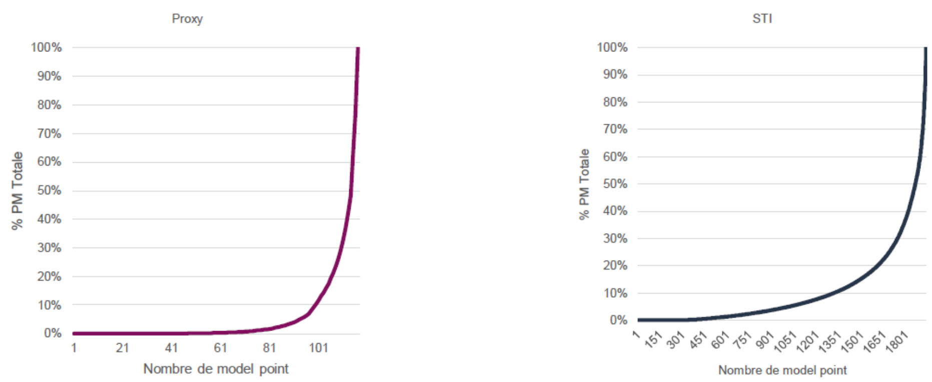


FIGURE 2.36 : Proportion des encours par nombre de model points

Ce constat implique que l'allocation de la puissance de calcul n'est pas optimale, regrouper des model points ayant un faible encours et scinder les model points ayant un volume d'encours supérieur devrait améliorer la précision du calcul sans altérer la performance en terme de temps d'exécution.

Une clé d'agrégation dynamique qui intègre le compromis (provision mathématique - hétérogénéité des model points) pourrait alors faire en sorte d'aplatir la distribution observée sur la figure ci-dessus permettant ainsi d'obtenir une meilleure précision pour un temps de calcul équivalent ou moindre.

2.6.2 Agrégation du model point d'actifs obligataires :

Au sein du modèle ALM de Natixis Assurances, les actifs obligataires détenus sont projetés ligne à ligne, les flux des titres sont évalués pendant chaque pas de temps et chaque scénario stochastiques afin de calculer les produits financiers qui y sont associés ainsi que l'évolution de leurs valeurs de marché.

L'information structurante concernant les actifs obligataires est donc leur performance en terme de produits financiers ainsi que l'évolution de leur valeur de marché, cette performance ainsi que la valorisation est directement déduite des flux de trésorerie du portefeuille obligataire.

Dans le cas de titres obligataires à taux fixes les flux de trésorerie futurs ne dépendent pas des scénarios stochastiques et peuvent être calculés sans projeter l'ensemble des scénarios stochastiques, une fois cette projection de flux obtenus nous pouvons construire un model point d'actifs obligataires fictifs ayant les mêmes flux de trésorerie que la vision ligne à ligne.

Une approche simple serait de considérer un titre obligataire zéro-coupon pour chaque année de projection, chaque titre aurait un nominal égal au flux de trésorerie de l'année de projection du portefeuille obligataire en vision ligne à ligne. Les deux visions des titres obligataires impliqueraient alors les mêmes flux financiers, le portefeuille fictif pourrait donc être modélisé par seulement 30 lignes tandis que le portefeuille réel comporte plusieurs milliers de lignes.

FIGURE 2.37 : Approche proxy - model point d'actifs

2.6.3 Application de l'agrégation proxy à la base réelle de clients :

L'agrégation proposée déforme une base de passif déjà agrégée, cette agrégation implique donc déjà une perte d'information quant à la structure du passif. La méthode proposée peut être appliquée à une base de passif quelconque et donc pourrait être appliquée directement aux contrats clients non agrégés :

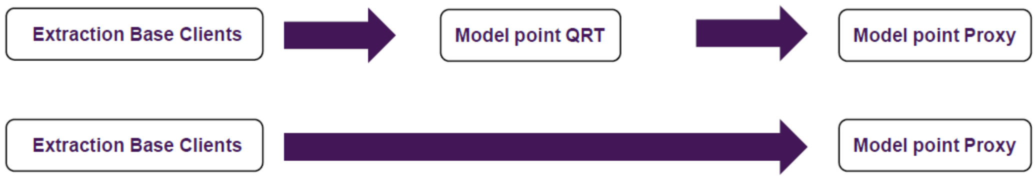


FIGURE 2.38 : Agrégation des données brutes de passif

Outre l'intérêt de la méthode proposée en tant d'approximation des calculs classiques dans le cadre de solvabilité II, elle apporte une solution d'agrégation des données du passif efficace du point de vue la taille des model point sans induire un biais élevé, il serait donc intéressant d'effectuer une étude comparative des biais induits par les deux méthodes d'agrégation.

Le gain en nombre de model point défait de l'âge et l'ancienneté au sein de la clé d'agrégation permettrait aussi de rajouter d'autres variables à la clé d'agrégation tel que les stratégies d'arbitrages automatiques choisis par les clients qui ne sont aujourd'hui pas pris en compte au sein de la modélisation ou d'intégrer d'autres variables décrivant le comportement des assurés pouvant avoir un effet sur l'évaluation des flux futurs de prestations.

2.7 Construction d'une variable de contrôle

La méthode d'accélération des évaluations Monte-Carlo par variable de contrôle a été présenté au sein de la partie **(2.2.2.b)**, le principe de cette méthode est de construire ou d'identifier un processus stochastique le plus corrélé que possible avec le processus stochastique dont nous évaluons la moyenne dans le cadre d'un Monte-Carlo. Étant donné que le calcul du Best Estimate via les model points agrégés donne une évaluation de Best Estimate très proche du calcul sans agrégation proxy nous nous sommes intéressés à la corrélation observées entre les deux processus.

Si nous considérons X le processus stochastique dont la moyenne est le Best Estimate dans le cadre du calcul classique et $\hat{X}$ le processus stochastique dont la moyenne est le Best Estimate utilisant le model point agrégé nous obtenons dans l'ensemble de nos évaluations $cor(X, \hat{X}) > 99.9\%$ cela implique alors que $\hat{X}$ est un très bon candidat de variable de contrôle pour la diminution de la variance l'évaluation Monte-Carlo via X.

Si nous considérons alors le processus stochastique suivant $Y = X - c(\hat{X} - \overline{\hat{X}})$ tel que $c = \frac{\sigma_X}{\sigma_{\hat{X}}}\rho_{X,\hat{X}}$, étant donné que l'espérance de $\hat{X}$ n'est pas connue nous considérons ici son espérance empirique, de même pour σ_X, $\sigma_{\hat{X}}$ et $\rho_{X,\hat{X}}$.

En appliquant la méthode d'accélération de l'évaluation monte-carlo nous obtenons alors une approximation beaucoup plus stable en terme de variance :

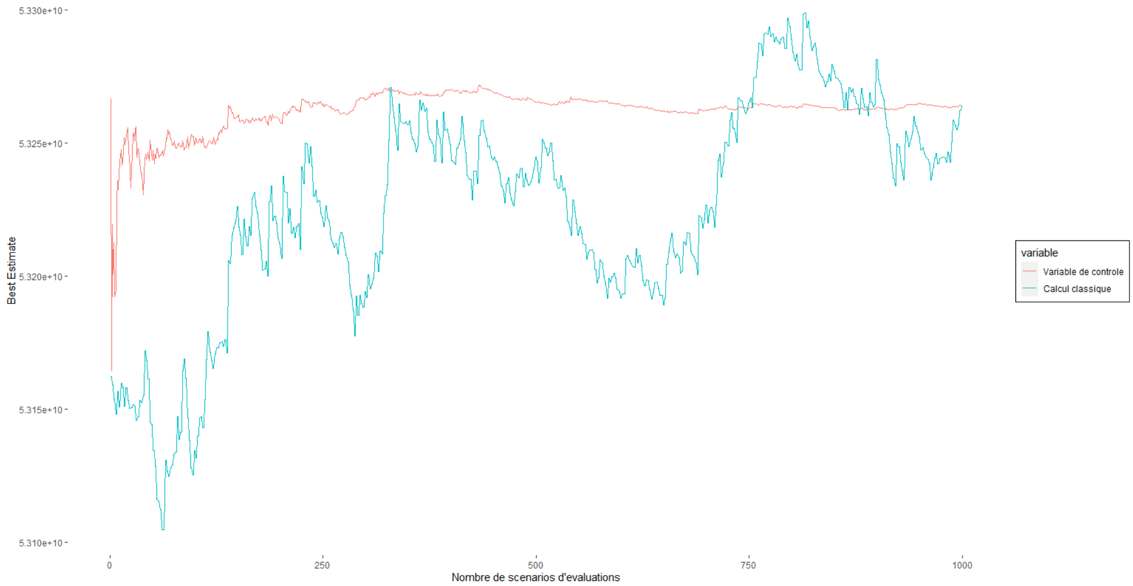


FIGURE 2.39 : Convergence de l'estimateur Monte-Carlo : Calcul classique VS Variable de contrôle

Nous observons une convergence rapide de l'estimation dans le cas où la variable de contrôle choisie est utilisée.

Le théorème central limite nous permet de calculer une estimation de l'intervalle de confiance asymptotique des deux estimateurs de la forme $BE = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour un niveau de confiance $0 < p < 100\%$ donné.

Nous obtenons alors pour le calcul classique de taille $CI_{0.99} = 742\,417\,609$ soit 1.39% de la moyenne estimée, pour l'estimateur accéléré par variable de contrôle nous obtenons $CI_{0.99} = 28\,055\,089$ soit 0.05% du Best Estimate estimé soit une diminution de la taille de l'intervalle de confiance d'un coefficient $\frac{742\,417\,609}{28\,055\,089} \approx 26.46$. Nous obtenons même une estimation de la même "qualité" que le calcul classique au bout de seulement 4 évaluations de scénarios : l'évaluation donne $CI_{0.99} = 701\,300\,656$ et une estimation de Best Estimate différente de 0.11% du calcul utilisant 1 000 scénarios.

Le processus stochastique obtenu lors de "l'évaluation proxy" du Best Estimate est donc un bon candidat de variable de contrôle étant donné son faible coût calculatoire et sa forte corrélation avec le processus estimant le Best Estimate.

Conclusion

La méthode développée au sein de ce mémoire présente plusieurs avantages :

- **Un gain significatif en temps de calcul :** une division du temps de calcul du modèle ALM d'un facteur 5 à 10.
- **Une intégration simple dans la chaîne de production des évaluations de Best Estimate ou de solvabilité :** l'utilisation du proxy ne nécessite de développement d'outil ou de retraitement spécifique.
- **Conservation de la capacité d'analyse et de l'utilisation des outils de reporting :**les formats des résultats de la méthode d'approximation sont inchangés par rapport aux outils de production habituels.
- **Agilité opérationnelle :** il est possible d'évaluer un plus grand nombre de sensibilités et de disposer des résultats rapidement, cela faciliterait par exemple la prise en compte d'éventuelles mise à jour des scénarios au cours d'un exercice de stress tests.

L'approche mise en place a été validée par la fonction actuarielle de BPCE Vie lors d'un comité et est actuellement utilisée pour l'accélération des calculs du modèle ALM lors des exercices officiels ORSA.
Malgré le gain obtenu en terme de temps de calcul la méthode développée pourrait être améliorée : les model points agrégés obtenus allouent la majorité de la capacité de calcul à une très faible proportion de l'encours, l'optimisation de cette allocation pourrait diviser le nombre de model point final par 3 et induire une accélération d'un facteur équivalent, cela fera l'objet d'une étude future.

Bibliographie

[Cescutti,] Cescutti, V. Estimés de solvabilité par méta-modélisation. Master's thesis, ISUP.

[Fabrice Borel-Mathurin, Julien Vedani, 2019] Fabrice Borel-Mathurin, Julien Vedani (2019). Market-consistent valuation : a step towards calculation stability.

[Frerix,] Frerix, S. Efficient estimation of the Solvency Capital Requirement using Neural Networks. Master's thesis, University of Amsterdam.

[Gauville,] Gauville, R. Projection du ratio de solvabilité : des méthodes de machine learning pour contourner les contraintes opérationnelles de la méthode des SdS. Master's thesis, EURIA.

[Goffard and Guerrault,] Goffard, P.-O. and Guerrault, X. Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for bel computations based on model points ?

[Hejazi and Jackson, 2016] Hejazi, S. and Jackson, K. R. (2016). Efficient valuation of scr via a neural network approach.

[Julien Vedani,] Julien Vedani, Title = Conceptualisation et mise en oeuvre du processus Own Risk and Solvency Assessment pour l'assurance vie, Y.

[Julien Vedani and Fabien Ramaharobandro,] Julien Vedani and Fabien Ramaharobandro, Title = Continuous compliance : a proxy-based monitoring framework, Y.

[Marine,] Marine, N. Utilisation des supports vecteurs machines pouR l'accélération du calcul du capital économique. Master's thesis, ENSAE.

[Meryglod,] Meryglod, E. Mise en oeuvre de la méthode Least Square Monte Carlo sur un portefeuille d'épargne. Master's thesis, ISFA.

[Messousi,] Messousi, A. Application d'algorithmes de machine learning pour l'estimation du ratio de couverture d'un assureur-vie détenteur d'un produit épargne. Master's thesis, ENSAE.

[RAMANAMPISOA,] RAMANAMPISOA, T. Application de la méthode Least-Square Monte-Carlo pour la mise en place de l'ORSA en Assurance vie. Master's thesis, ISUP.

[Rongiéras,] Rongiéras, L. Analyse de la méthode LSMC pour le suivi infra-annuel de la solvabilité. Master's thesis, ISUP.

Annexe A

Annexes

A.1 Résultats du backtest : Autres scénarios

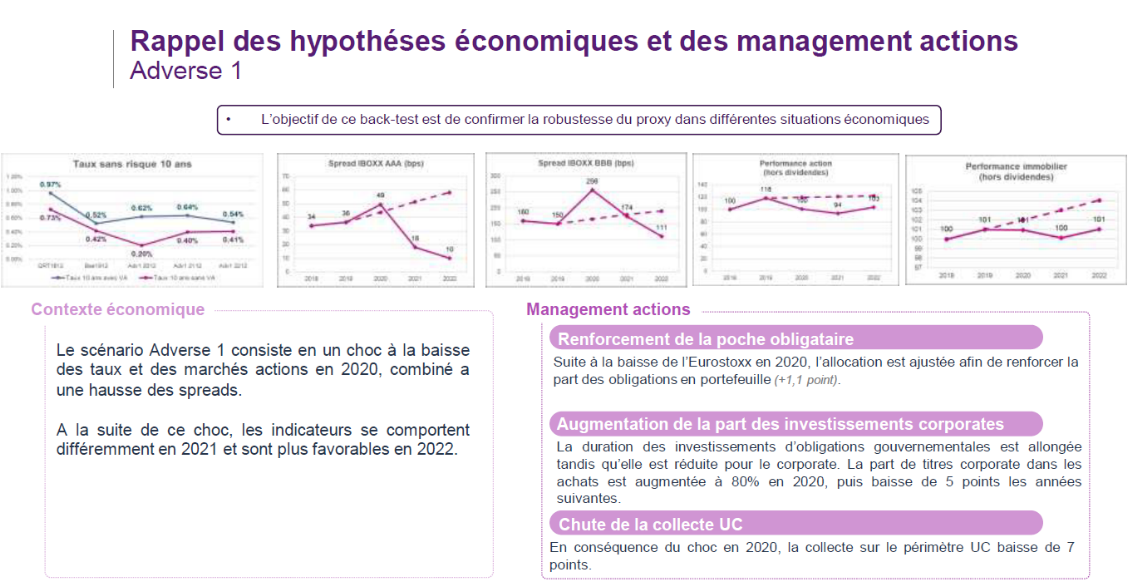


Figure A.1 : Adverse 1 - Contexte et management actions

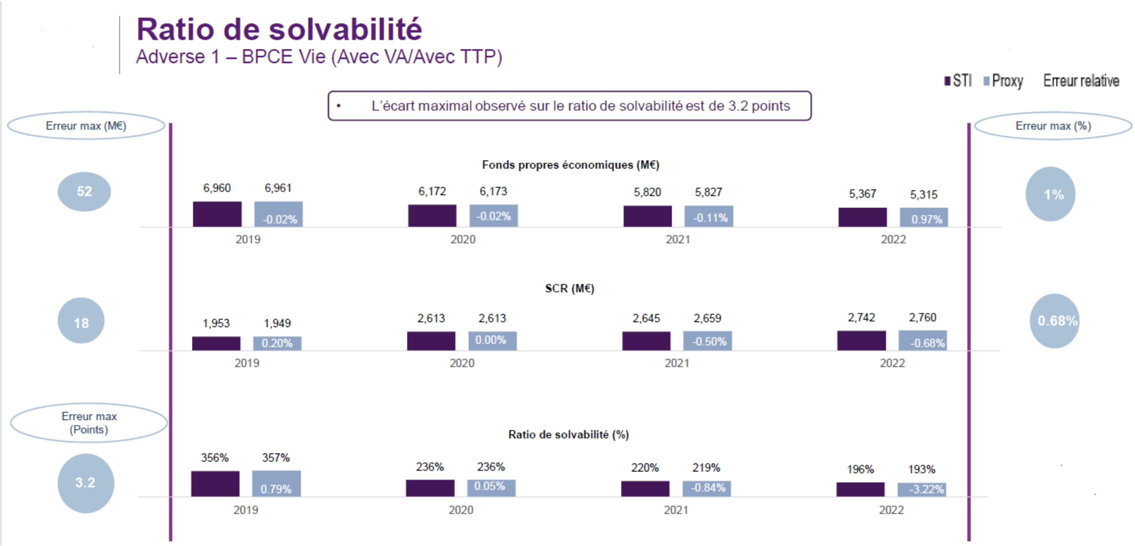


Figure A.2 : Adverse 1 - Backtest solvabilité

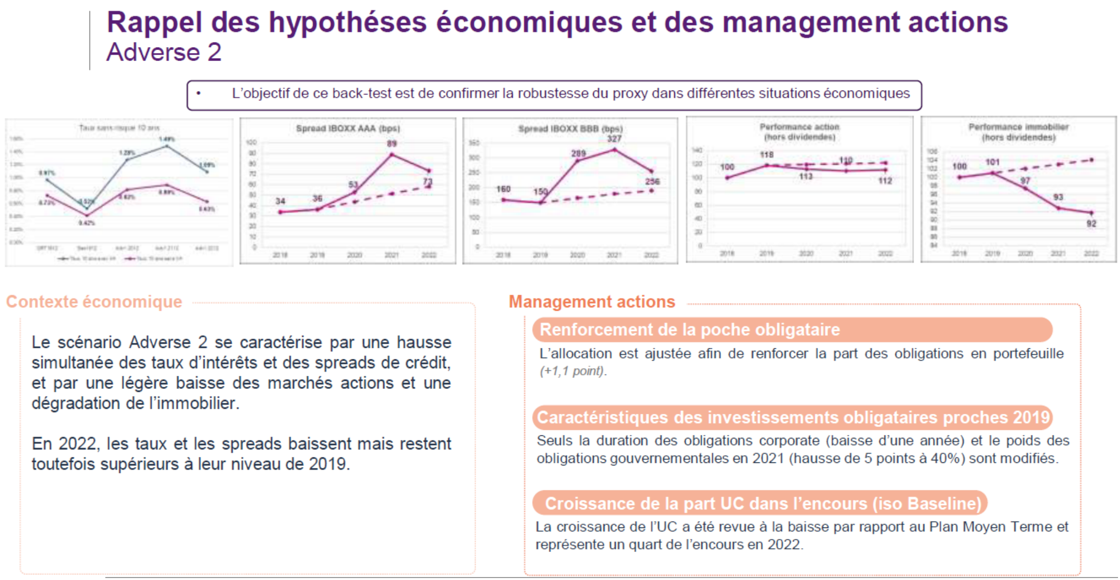


Figure A.3 : Adverse 2 - Contexte et management actions

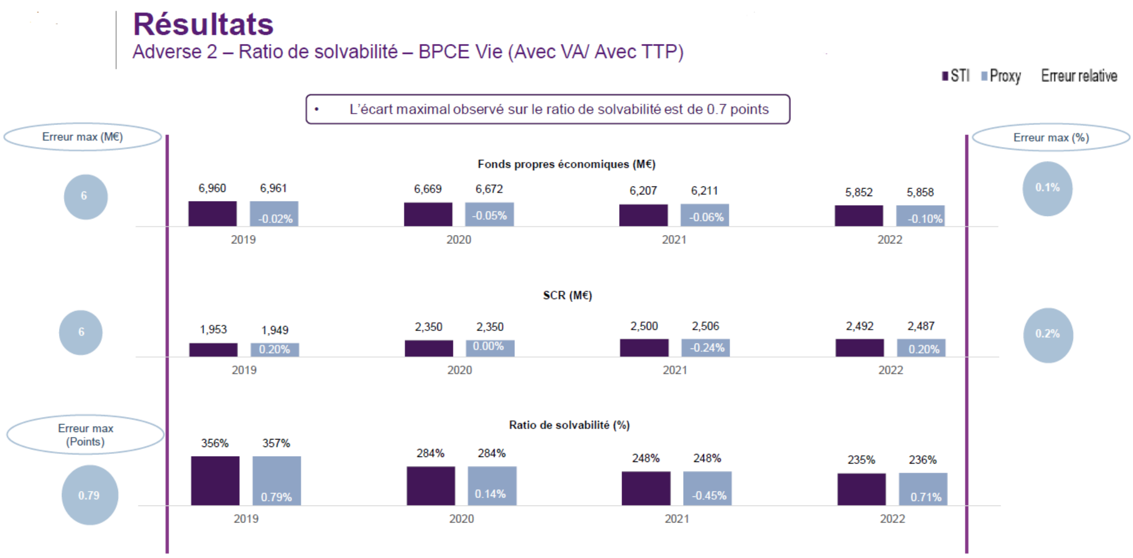


Figure A.4 : Adverse 2 - Backtest solvabilité