

**Mémoire présenté devant l'UFR de Mathématique et Informatique  
pour l'obtention du Master Mathématiques et Application,  
spécialité Statistique, parcours Actuariat**

le 08/12/2021

Par : Tanguy Mouden

Titre: Projection du coût de couverture d'un portefeuille d'obligations

Confidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Signature :*

Membres du jury de l'Unistra :

Entreprise :

P. ARTZNER  
J. BERARD  
A. COUSIN  
K.-T. EISELE  
M. MAUMY-BERTRAND

Directeur de mémoire en entreprise:

*Nom :*

*Signature :*

*Invité :*

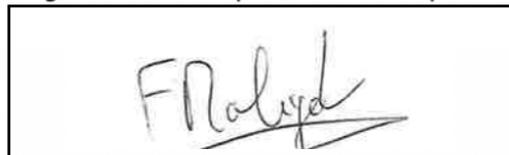
*Nom :*

*Signature :*

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents**

**actuariels** (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)

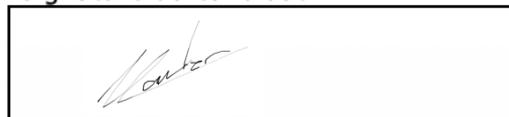
Signature du responsable entreprise



Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Signature du candidat

Bibliothèque : Mme Christine Disdier



# Projection du coût de couverture d'un portefeuille d'obligations

Tanguy MOUDEN

# Synthèse longue

Les récentes crises financières ont accru les exigences des régulateurs envers les différents acteurs de la sphère financière. En particulier, la norme prudentielle Solvabilité II regroupe un ensemble d'exigences quantitatives pour renforcer la solvabilité des sociétés d'assurance. Elle impose aux assureurs d'adopter une vision future de leurs risques à travers une projection de leur bilan.

Dans ce mémoire, nous proposons une méthodologie pour évaluer de manière prospective la charge associée au coût de couverture des obligations contre le risque de défaut.

Nous présenterons une méthode d'évaluation *spot* de la charge associée au coût de couverture. Nous montrerons ensuite comment simuler dynamiquement un indicateur de défaut pour projeter ce coût. Enfin, nous étendrons la méthodologie pour permettre à un praticien de fixer le montant maximum de son coût de couverture projeté et d'adapter le niveau de la couverture.

## 1. Les exigences quantitatives de Solvabilité II dans les piliers 1 et 2

Le pilier 1 de Solvabilité II énonce les modalités du calcul du montant minimum de fonds propre à détenir pour exercer l'activité d'assureur. Le montant de fonds propre est calculé de telle sorte qu'avec une certitude de 99,5%, la société soit solvable sur un horizon un an.

Le pilier 2 renforce les exigences énoncées par le premier pilier à travers le dispositif *Own Risk and Solvency Assessment* ou ORSA. Ce dispositif exige une évaluation prospective de l'ensemble des charges. L'assureur est tenu de respecter les exigences de solvabilité sur un horizon temporel généralement fixé à cinq ans. Cependant, la norme Solvabilité II n'impose pas de méthodologie pour appliquer les projections. Si certaines branches de l'assurance reposent leurs calculs sur la littérature actuarielle, cette dernière s'avère trop faible pour certains praticiens. C'est le cas des gestionnaires actif-passif dont la mission consiste à maîtriser les risques sous-jacents à la détention d'obligations en portefeuille. La diversité des produits échangés sur les marchés financiers offre la possibilité de couvrir le portefeuille moyennant le versement de primes périodiques aux vendeurs de protection, ce qui constitue comptablement une charge.

Ainsi, les charges associées à la couverture du portefeuille obligataire s'inscrivent dans le périmètre défini par le dispositif ORSA et requièrent une évaluation prospective. Ce mémoire s'intéresse tout particulièrement à la mise en place d'une méthodologie pour projeter la charge associée à la couverture du portefeuille d'obligations contre le risque de défaut des entités émettrices

## 2. Évaluation *spot* de la charge associée à la couverture du risque de défaut

Pour estimer la charge associée à la couverture du risque de défaut des obligations, il convient de se munir d'un cadre de valorisation des produits obligataires et d'une stratégie de couverture applicable.

### 2.1 Cadre de valorisation des obligations et des primes CDS

La mise en place d'une couverture sur le portefeuille d'obligations nécessite un cadre de valorisation performant. Ainsi, il est nécessaire de mesurer la part de la composante défaut dans le prix de l'obligation. Cette composante est estimée par des modèles de crédit sophistiqués.

Dans ce mémoire nous retenons l'approche Longstaff, Mithal, Neis [7] [2004] ou LMN. Elle consiste à déterminer la part de la composante défaut dans le *spread* en faisant intervenir l'information disponible dans la valorisation des CDS. Il en résulte, une composante de non défaut dans le *spread* de l'obligation, qui est attribuée au risque de liquidité. Ainsi, le prix de l'obligation est actualisé au taux  $rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$  avec  $r_t$  qui désigne le taux sans risque effectif à la date  $t$ ,  $\lambda_t$  désigne l'intensité d'un processus de Poisson qui traduit le défaut et  $\gamma_t$  qui constitue la composante de non défaut.

Dans leur article, Longstaff, Mithal et Neis, proposent alors une formule fermée pour la valorisation des obligations et des primes CDS :

$$\begin{aligned} CB(c, w, T) &= c \int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) e^{-\gamma t} dt \\ &\quad + A(T) \exp(B(T)\lambda) C(T) D(T) e^{-\gamma T} \\ &\quad + (1 - w) \int_0^T \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) e^{-\gamma t} dt \\ s &= \frac{w \int_0^T \exp(B(t)\lambda) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) dt}{\int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) D(t) dt} \end{aligned}$$

### 2.2 Stratégie de couverture

Pour illustrer la méthodologie, nous adopterons la stratégie de couverture mise en place au sein du service ALM de la compagnie Malakoff Humanis qui est décrite ci-dessous.

Elle consiste à segmenter le portefeuille d'obligations en groupes d'obligations jugées homogènes en termes de risque de défaut. D'un point de vue opérationnel, cette segmentation est basée sur le *rating* et la zone géographique. Il existe ainsi huit groupes d'obligations : AAA, AA, A,

BBB, BB<sup>-</sup>, Allemagne, France et Périphérique. La catégorie BB<sup>-</sup> rassemble les obligations des catégories BB et moins.

A chaque premier du mois, l'information contenu dans la cotation des primes CDS est analysée de manière à pouvoir extraire les probabilités de défaut.

Une probabilité de défaut est calculée pour chaque segment de *rating* et chaque maturité. Soit  $t$  le premier jour du mois où les calculs sont effectués : l'ensemble de ces probabilités se présente de la manière suivante :

Maturité/ <i>Rating</i>	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	$p_{1,t}^{AAA}$	$p_{1,t}^{AA}$	$p_{1,t}^A$	$p_{1,t}^{BBB}$	$p_{1,t}^{BB^-}$	$p_{1,t}^{Allemagne}$	$p_{1,t}^{France}$	$p_{1,t}^{Périphérique}$
T = 2	$p_{2,t}^{AAA}$	$p_{2,t}^{AA}$	$p_{2,t}^A$	$p_{2,t}^{BBB}$	$p_{2,t}^{BB^-}$	$p_{2,t}^{Allemagne}$	$p_{2,t}^{France}$	$p_{2,t}^{Périphérique}$
T = ...	$p_{3,t}^{AAA}$	$p_{3,t}^{AA}$	$p_{3,t}^A$	$p_{3,t}^{BBB}$	$p_{3,t}^{BB^-}$	$p_{3,t}^{Allemagne}$	$p_{3,t}^{France}$	$p_{3,t}^{Périphérique}$

Avec  $p_{i,t}^G$  la probabilité de défaut des obligations de segment  $G$  et de maturité résiduelle  $i$  vu de  $t$ . Ces probabilités sont comparées à celle du mois précédent, en mesurant leur évolution relative : pour chaque segment d'obligations  $G$  et maturité résiduelle  $i > 1$ , le ratio suivant est calculé :

$$r_{i,t}^G = \frac{p_{i,t}^G - p_{i+1,t-1}^G}{p_{i+1,t-1}^G}$$

Cela donne le tableau suivant :

Maturité/ <i>Rating</i>	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^A$	$r_{1,t}^{BBB}$	$r_{1,t}^{BB^-}$	$r_{1,t}^{Allemagne}$	$r_{1,t}^{France}$	$r_{1,t}^{Périphérique}$
T = 2	$r_{2,t}^{AAA}$	$r_{2,t}^{AA}$	$r_{2,t}^A$	$r_{2,t}^{BBB}$	$r_{2,t}^{BB^-}$	$r_{2,t}^{Allemagne}$	$r_{2,t}^{France}$	$r_{2,t}^{Périphérique}$
T = ...	$r_{...}^{AAA}$	$r_{...}^{AA}$	$r_{...}^A$	$r_{...}^{BBB}$	$r_{...}^{BB^-}$	$r_{...}^{Allemagne}$	$r_{...}^{France}$	$r_{...}^{Périphérique}$

Plus le ratio  $r_{i,t}^G$  est grand (petit) plus le risque de défaut est orienté à la hausse (baisse). Au-delà d'un certain seuil  $a^G > 0$ , un CDS est contracté sur les obligations du segment  $G$  et de maturité résiduelle  $i$ , si elles ne sont pas déjà couvertes.

A l'inverse, si le ratio  $r_{i,t}^G$  passe en dessous d'un autre seuil  $v^G < 0$ , le CDS est vendu.

Ainsi, chaque obligation est associée à un couple *rating*-maturité  $(G, T)$  à partir duquel est calculé un indicateur de risque de défaut. Cet indicateur est comparé à la valeur des seuils d'achat  $a^G$  et de vente  $v^G$  uniquement déterminé par la catégorie de *rating*  $G$ .

Les seuils sont les suivants :

<i>Ratings</i> $G$	Seuils d'achat $a^G$	Seuils de vente $v^G$
AAA	0.60	-0.40
AA	0.60	-0.40
A	0.55	-0.40
BBB	0.50	-0.45
BB <sup>-</sup>	0.40	-0.55
Allemagne	0.60	-0.40
France	0.57	-0.43
Périphérique	0.42	-0.50

Par la suite nous noterons  $AV$  le vecteur regroupant les seuils d'achats-ventes de l'ensemble des groupes de *rating*.

A une date d'évaluation  $t$ , il existe trois situations possibles pour un couple *rating*-maturité  $(G, T)$ :

- Les obligations du couple ne sont pas couvertes mais le ratio n'excède pas  $a^G$  : les obligations sont maintenues en portefeuille sans couverture
- Les obligations du couple ne sont pas couvertes et le ratio excède  $a^G$  : Un CDS est contracté sur les obligations associées au couple  $(G, T)$  avec un nominal égal à celui des obligations.
- Les obligations du couple sont couvertes et le ratio se situe au-dessus du seuil de vente  $v^G$  : les obligations sont maintenues en portefeuille avec une couverture

Les deux derniers cas entraînent le versement de primes CDS dont le montant peut être estimé à l'aide des formules fermées du modèle LMN. La somme de ces primes sur l'ensemble des couples *rating*-maturité constitue alors le coût de couverture *spot*.

### 3. Projection de la charge associée à la couverture du risque de défaut

Dans cette partie, nous cherchons à projeter la stratégie de couverture de sorte à définir le coût futur associé à la couverture des obligations contre le risque de défaut compte tenu d'une stratégie de couverture définie.

#### 3.1 Projection du coût à partir d'une politique de couverture fixée

Nous utilisons un Générateur de Scénarios Économiques pour projeter 1000 scénarios mondiaux réels sur une suite de pas de temps  $(t_i)_{i \in [1, N]}$ . A chaque pas de temps, les paramètres de modèles LMN font l'objet d'un calibrage dans une vision risque-neutre. Les intervalles de temps sont

réguliers et correspondent à un mois. Pour chaque scénario  $S_k$  avec  $k \in [1,1000]$  chaque segment d'obligation  $G$  et chaque maturité résiduelle  $T$ , nous obtenons alors une série temporelle de la composante de défaut  $(\lambda_t^{k,G,T})_{t \in [t_1 \dots t_N]}$ . Nous introduisons alors l'indicateur de défaut suivant :

$$ROC_t^{k,G,T} = ROC^{k,G,T}(t) = \left[ \frac{\lambda_t^{k,G,T}}{\lambda_{t-1}^{k,G,T}} - 1 \right] * 100$$

Il correspond à l'évolution relative de la composante de défaut  $\lambda_t^{k,G,T}$  entre deux dates consécutives  $t$  et  $t - 1$ . Nous récupérons alors la série temporelle  $(ROC_t^{k,G,T})_{t \in [t_1 \dots t_N]}$ .

Maintenant que l'indicateur de défaut est construit, il est possible de projeter la méthode d'achats-ventes de CDS en fonction des valeurs que prend cet indicateur.

Le vecteur  $q^G = (q^{G+}, q^{G-})$  est introduit et définit tel que,  $\forall t \in [t_1, t_N]$  :

- Si  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  et que le titre n'est pas déjà couvert, un CDS de maturité résiduelle et de nominal égal au nominal de l'obligation sous-jacente est contracté.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  et que le titre est déjà couvert par un CDS, ce dernier est maintenu.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  et que le titre est couvert par un CDS, ce dernier est vendu.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  et que le titre n'est pas couvert par un CDS, la détention du titre est maintenue sans couverture.

L'ensemble des opérations d'achats-ventes de CDS engendre des flux, correspondant aux primes de CDS de l'obligation, qui sont regroupés dans la série temporelle suivante :

$$\left( \varphi^{k,G,T}_t(q^G) \right)_{t \in [t_1, t_N]}$$

Le terme  $\varphi$  désigne la prime CDS. Le coût projeté se définit alors comme la somme des séries temporelles sur l'ensemble des pas de temps et des couples *rating*-maturité telle que :

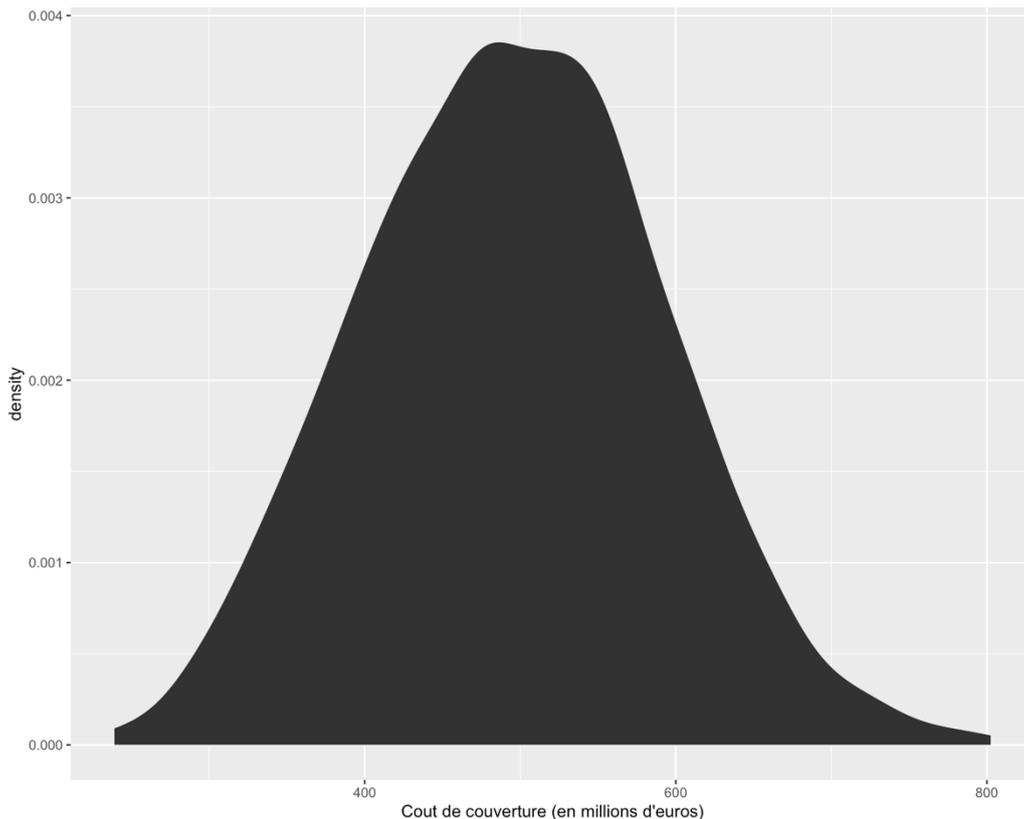
$$\epsilon^k = \sum_{g \in \Omega_G} \sum_{T=1}^{T_{max}} \sum_{i=1}^N \varphi^{k,g,T}_{t_i}(q^g)$$

En simulant l'ensemble des 1000 scénarios  $\Omega_S$ , le vecteur  $\epsilon^k$  prend 1000 valeurs différentes regroupées dans le vecteur suivant :

$$\left(\epsilon^k(Q)\right)_{k \in [1,1000]}$$

Avec  $Q = (q^g)_{g \in \Omega_G}$ . Pour la suite, nous prendrons  $Q = AV$ .

Il s'agit d'un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuées. Le graphique de la densité empirique pour l'année 5 est le suivant :



Coût de couverture contre le risque de défaut des obligations projeté à l'année 5

Ce montant peut s'avérer trop important selon le praticien qui souhaiterait le diminuer en réévaluant aujourd'hui sa politique de couverture.

Il convient alors d'étendre la méthodologie pour répondre à la problématique suivante : comment modifier la politique de couverture aujourd'hui telle que le praticien puissent fixer son coût maximal dans 5 ans ?

### 3.2 Réévaluation de la politique de couverture

Jusqu'ici, nous partions d'une politique de couverture fixée (seuils d'achats-ventes déterminés) pour obtenir une distribution du coût projeté. Dans cette dernière partie, le raisonnement est inversé : nous souhaitons trouver une politique de couverture telle que le coût de couverture ne dépasse pas un certain montant  $\epsilon^*$  avec une probabilité fixé à 90%.

Lorsque le niveau de risque (ensemble des seuils d'achats et de ventes) est fixé, le coût de couverture qui en découle se calcule en sommant les flux engendrés par la stratégie d'achats-ventes de CDS. Ainsi, à niveau de risque et scénario fixés, le coût est unique. En revanche, lorsqu'il s'agit de fixer le coût de couverture, il n'est pas possible d'inverser la méthodologie ou de tester l'ensemble des combinaisons possibles car celui-ci est beaucoup trop vaste pour être exploré exhaustivement. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser des techniques algorithmiques d'optimisation faisant apparaître des fonctions objectifs dont le but est de quantifier une erreur de réplcation. Soit  $Q \in \mathbb{R}^d$  tel que  $Q = (Q_1, \dots, Q_d)$  un vecteur appartenant à l'ensemble des seuils d'achats et de ventes. La fonction objectif  $f$  est de la forme suivante :

$$f(Q) = (F(Q) - \epsilon^*)^2$$

Dans cette application, nous prenons l'exemple suivant :  $F$  mesure le quantile à 90% du vecteur  $Q$ . La fonction  $f$  mesure alors l'écart quadratique entre le quantile à 90% du vecteur  $Q$  et le budget cible  $\epsilon^*$ . L'objectif est alors le suivant : nous cherchons un vecteur de seuils d'achats-ventes  $Q^*$  qui engendra une distribution future du coût dont le quantile à 90% sera égal au budget cible  $\epsilon^*$ . Notons que l'optimisation à réaliser est soumise à certaines contraintes. Les seuils que contient le vecteur  $Q$  doivent être compris entre 0% et 100% pour les seuils d'achat et entre -100% et 0% pour les seuils de vente. Les vecteurs suivants sont introduits :

$$l = (0)_d$$

$$u = (1)_d$$

Ainsi, les contraintes prennent la forme de bornes et le problème d'optimisation s'écrit sous forme suivante :

$$\min_Q f(Q)$$

$$sc : l \leq Q \leq u$$

Dans le cas de cette étude, la fonction objectif mesure un écart quadratique entre un réel (le budget cible) et une métrique obtenue à partir d'un jeu de scénarios aléatoires. La fonction objectif n'est pas une fonction analytique. La littérature mathématique offre toutefois une solution pour ce genre de problème. Il existe ainsi des algorithmes réalisant l'optimisation de fonctions non analytiques. Il s'agit par exemple des algorithmes génétiques ou de certains algorithmes de descente de gradient, robustes pour résoudre des problèmes d'optimisation de fonctions non analytiques.

Dans le cas de cette étude, nous choisissons l'algorithme Limited Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Byrd [8] qui est un dérivé de l'algorithme Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [9], utilisé pour des problèmes d'optimisation non linéaire en l'absence de contrainte. Dans [8], H. Byrd, J. Nocedal et R. B. Schnabel ont montré que si la fonction  $f$  vérifiait les hypothèses de différentiabilité et de convexité dans le cas où  $F$  était une fonction analytique alors l'algorithme pouvait s'étendre à la résolution de la fonction  $f$  dans le cas où  $F$  est non analytique.

En appliquant la méthodologie aux budgets  $\epsilon_1 = 50\,000\,000$  et  $\epsilon_2 = 100\,000\,000$ , nous obtenons les résultats suivants :

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_1$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.96	0.95	0.94	0.90	0.81	0.97	0.94	0.81
$v^G$	-0.16	-0.19	-0.24	-0.30	-0.36	-0.13	-0.18	-0.28

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_2$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.95	0.92	0.92	0.87	0.78	0.94	0.83	0.79
$v^G$	-0.19	-0.21	-0.27	-0.32	-0.39	-0.18	-0.20	-0.30

Plus le budget  $\epsilon_j$  est élevé, plus la politique de couverture incite à la détention de CDS. Elle précipite l'achat de CDS, en fixant des seuils d'achat faibles et retarde leurs ventes, en fixant des seuils de ventes faibles.

Il apparaît également que plus le segment de *rating* des obligations est mauvais, plus le niveau de confiance varie avec le budget. Cette observation est logique : le risque de défaut étant principalement porté par les catégories de notation basses, le budget est en priorité alloué à la couverture de ces catégories. Les niveaux de confiance de ces catégories sont alors particulièrement sensibles aux variations de budgets. A l'inverse, les segments d'obligations bien notées ne sont pas prioritaires sur le budget de couverture. L'algorithme sous-pondère le budget qui leur est alloué et la variation des niveaux de confiance est plus lente.

# Executive summary

The recent financial crises have increased the demands of regulators on the various players in the financial sphere. In particular, the Solvency II prudential standard brings together a set of quantitative requirements to strengthen the solvency of insurance companies. It requires insurers to adopt a future vision of their risks through a projection of their balance sheet.

In this thesis, we propose a methodology to prospectively assess the charge associated with the cost of hedging bonds against the risk of default.

After setting out the main regulatory principles of Solvency II, we will present a spot valuation method for the charge associated with the cost of hedging. We will then show how to dynamically simulate a default indicator to project this cost. Finally, we will extend the methodology to allow a practitioner to set the maximum amount of their projected cost of coverage.

## 1. Quantitative Solvency II requirements in pillars 1 and 2

Pillar 1 of Solvency II sets out the methods of accounting calculations and requires insurance companies to hold a minimum amount of equity to absorb unforeseen losses. The amount of equity is calculated such that with 99.5 percent certainty the company will be solvent over a one-year horizon.

Pillar 2 reinforces the requirements set out by the first pillar through the Own Risk and Solvency Assessment or ORSA system. This system requires a prospective assessment of all charges. Thus, the insurer is required to meet the solvency requirements over a time horizon generally set at five years. However, the Solvency II standard does not impose a methodology for applying the projections. While some industries base their calculations on actuarial literature, the latter is too weak for some practitioners. This is the case of asset-liability managers whose mission is to control the risks underlying the holding of bonds in the portfolio. The diversity of the products traded on the financial markets offers the possibility of covering the portfolio by paying periodic premiums to the protection sellers, which constitutes an accounting charge.

Thus, the charges associated with hedging the bond portfolio fall within the scope defined by the ORSA system and require a prospective assessment. This thesis is particularly interested in the implementation of a methodology to project the charge associated with hedging the bond portfolio against the risk of default of issuing entities.

## 2. Assessment of the charge associated with hedging the default risk

To estimate the charge associated with hedging the default risk of bonds, it is necessary to have a framework for valuing bond products and an applicable hedging strategy.

## 2.1 Spot valuation of the charge associated with the default risk hedging

Setting up a hedge on the bond portfolio requires an effective valuation framework. Thus, it is necessary to measure the share of the default component in the price of the bond. This component is estimated by sophisticated credit models.

In this dissertation we take the Longstaff, Mithal, Neis [7] [2004] or LMN approach. It consists in determining the share of the defect component in the spread by involving the available information in the valuation of the CDS. The result is a non-default component in the bond spread, which is attributed to liquidity. Thus, the bond price is discounted at the rate  $rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$  with  $r_t$  denoting the effective risk-free rate at date  $t$ ,  $\lambda_t$  denotes the intensity of a Poisson process which reflects the default, and  $\gamma_t$  which reflects non-default component.

In their article, Longstaff, Mithal and Neis then propose a closed version of the formulas for valuing bonds and CDS premiums:

$$\begin{aligned}
 CB(c, w, T) &= c \int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) e^{-\gamma t} dt \\
 &\quad + A(T) \exp(B(T)\lambda) C(T) D(T) e^{-\gamma T} \\
 &\quad + (1 - w) \int_0^T \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) e^{-\gamma t} dt \\
 s &= \frac{w \int_0^T \exp(B(t)\lambda) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) dt}{\int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) D(t) dt}
 \end{aligned}$$

## 2.2 Hedging strategy

To illustrate the methodology, we will adopt the hedging strategy implemented within the ALM department of the company Malakoff Humanis which is described below.

It consists of segmenting the bond portfolio such that each segment reflects the default risk underlying the bonds therein. This segmentation classifies bonds according to their rating category. There are thus eight groups of bonds: A AAA, AA, A, BBB, BB<sup>-</sup>, Germany, France and Peripheral. Category BB<sup>-</sup> groups bonds of categories BB and below.

Each month, the information contained in the valuation of CDS premiums is analyzed so as to be able to extract the probabilities of default.

A probability of default is calculated for each segment and each maturity. Either  $t$  on the first day of the month where the calculations are performed: all of these probabilities appear as follows:

Maturity/ <i>Rating</i>	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Germany	France	Peripheral
T = 1	$p_{1,t}^{AAA}$	$p_{1,t}^{AA}$	$p_{1,t}^A$	$p_{1,t}^{BBB}$	$p_{1,t}^{BB^-}$	$p_{1,t}^{Germany}$	$p_{1,t}^{France}$	$p_{1,t}^{Peripheral}$
T = 2	$p_{2,t}^{AAA}$	$p_{2,t}^{AA}$	$p_{2,t}^A$	$p_{2,t}^{BBB}$	$p_{2,t}^{BB^-}$	$p_{2,t}^{Germany}$	$p_{2,t}^{France}$	$p_{2,t}^{Peripheral}$
T = ...	$p_{3,t}^{AAA}$	$p_{3,t}^{AA}$	$p_{3,t}^A$	$p_{3,t}^{BBB}$	$p_{3,t}^{BB^-}$	$p_{3,t}^{Germany}$	$p_{3,t}^{France}$	$p_{3,t}^{Peripheral}$

With  $p_{i,t}^G$  the probability of default of bonds of segment  $G$  and of residual maturity  $i$  seen from  $t$ . These probabilities are compared with that of the previous month, by measuring their relative evolution: for each segment of  $G$  bonds and residual maturity  $i > 1$ , the following ratio is calculated:

$$r_{i,t}^G = \frac{p_{i,t}^G - p_{i+1,t-1}^G}{p_{i+1,t-1}^G}$$

This gives the following table:

Maturity/ <i>Rating</i>	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Germany	France	Peripheral
T = 1	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^A$	$r_{1,t}^{BBB}$	$r_{1,t}^{BB^-}$	$r_{1,t}^{Germany}$	$r_{1,t}^{France}$	$r_{1,t}^{Peripheral}$
T = 2	$r_{2,t}^{AAA}$	$r_{2,t}^{AA}$	$r_{2,t}^A$	$r_{2,t}^{BBB}$	$r_{2,t}^{BB^-}$	$r_{2,t}^{Germany}$	$r_{2,t}^{France}$	$r_{2,t}^{Peripheral}$
T = ...	$r_{...}^{AAA}$	$r_{...}^{AA}$	$r_{...}^A$	$r_{...}^{BBB}$	$r_{...}^{BB^-}$	$r_{...}^{Germany}$	$r_{...}^{France}$	$r_{...}^{Peripheral}$

The greater (smaller) the ratio  $r_{i,t}^G$ , the more upward (downward) the default risk. Beyond a certain threshold  $a^G > 0$ , a CDS is contracted on the bonds of segment  $G$  and of residual maturity  $i$ , if they are not already covered. Conversely, if the ratio  $r_{i,t}^G$  falls below another threshold  $v^G < 0$ , the CDS is sold.

Thus, each bond is associated with a rating-maturity pair  $(G, T)$  from which a default risk indicator is calculated. This indicator is compared to the value of the  $a^G$  buy and sell  $v^G$  thresholds determined only by the  $G$  rating category.

The thresholds are as follows:

Rating $G$	Buy threshold $a^G$	Sell threshold $v^G$
AAA	0.60	-0.40
AA	0.60	-0.40
A	0.55	-0.40
BBB	0.50	-0.45
BB <sup>-</sup>	0.40	-0.55
Germany	0.60	-0.40

France	0.57	-0.43
Peripheral	0.42	-0.50

Subsequently, we will denote by  $AV$  the vector grouping together the buy-sell thresholds of all the rating groups.

On a valuation date  $t$ , there are three possible situations for a rating-maturity pair  $(G, T)$ :

- The couple's bonds are not hedged but the ratio does not exceed  $a^G$ : the bonds are kept in the portfolio without hedging
- The bonds of the couple are not covered and the ratio exceeds  $a^G$ : A CDS is contracted on the bonds associated with the couple  $(G, T)$  with a nominal equal to that of the bonds.
- The couple's bonds are hedged and the ratio is above the sales threshold  $v^G$ : the bonds are kept in the portfolio with a hedge

The last two cases result in the payment of CDS premiums which are valued using the closed formulas of the LMN model. The sum of these premiums over all the rating-maturity pairs then constitutes the spot hedging cost.

### 3. Projection of the charge associated with hedging the default risk

In this section, we seek to project the hedging strategy so as to define the future cost associated with hedging bonds against default risk.

#### 3.1 Projection of the cost from a fixed hedging policy

We use a GSE to project in a real-world scenario the value of rates and spreads over a sequence of time steps  $(t_i)_{i \in [1, N]}$ . At each time step, the GSE calibrates the parameters of LMN models in a risk-neutral vision. The time intervals are regular and correspond to one month. For each scenario  $S_k$  with  $k \in [1, 1000]$  each bond segment  $G$  and each residual maturity  $T$ , we then obtain a time series of the default component  $(\lambda_t^{k, G})_{t \in [t_1, \dots, t_N]}$ . We then introduce the following fault indicator:

$$ROC_t^{k, G, T} = ROC^{k, G, T}(t) = \left[ \frac{\lambda_t^{k, G}}{\lambda_{t-1}^{k, G}} - 1 \right] * 100$$

It corresponds to the relative evolution of the default component  $\lambda_t^{k, G}$  between two consecutive dates  $t$  and  $t - 1$ . We then recover the time series  $(ROC_t^{k, G, T})_{t \in [t_1, \dots, t_N]}$ .

Now that the default indicator is constructed, it is possible to project the CDS buy-sell method based on the values that this indicator takes.

The vector  $q^G = (q^{G+}, q^{G-})$  is introduced and defined as,  $\forall t \in [t_1, t_N]$  :

- If  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  and the security is not already covered, a CDS with residual maturity and nominal equal to the nominal value of the underlying bond is contracted.
- If  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  and the security is already covered by a CDS, the latter is maintained.
- If  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  and the security is covered by a CDS, the latter is sold.
- If  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  and the security is not covered by a CDS, the security's holding is maintained without hedging.

All CDS buy-sell transactions generate flows, corresponding to the CDS premiums of the bond, which are grouped into the following time series:

$$\left( \varphi^{k,G,T}_t(q) \right)_{t \in [t_1, t_N]}$$

The term  $\varphi$  designates the CDS premium. The projected cost is then defined as the sum of the time series over all the time steps and rating-maturity pairs such as:

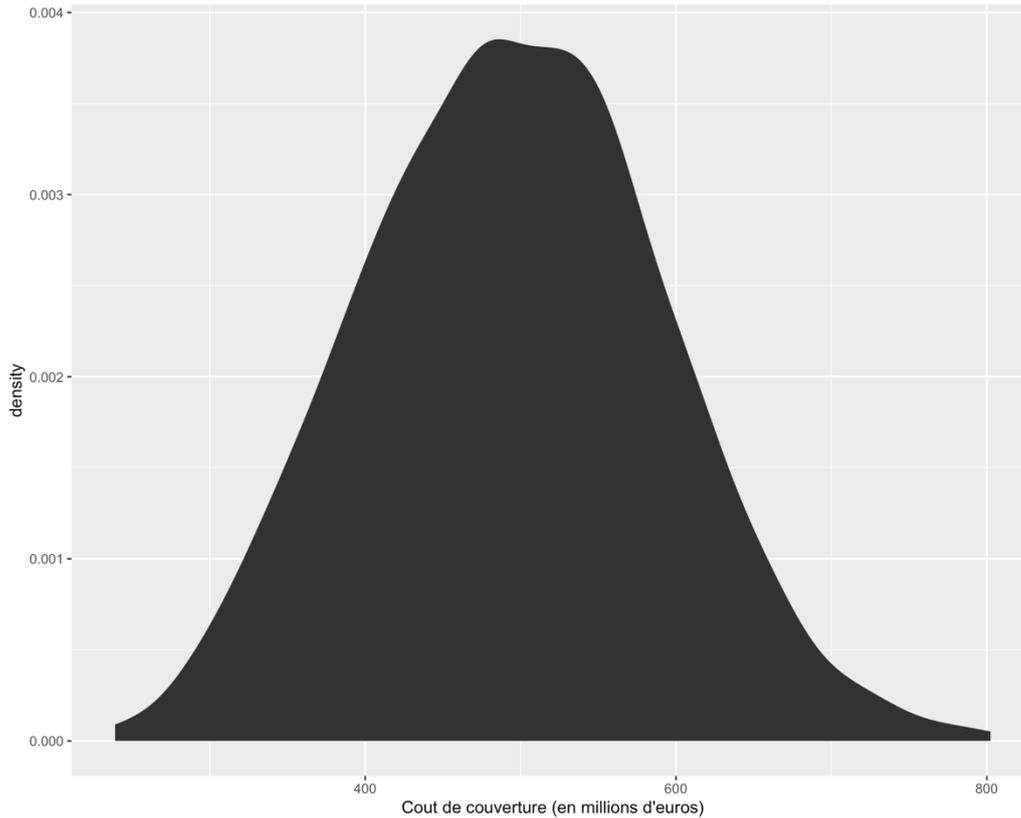
$$\epsilon^k = \sum_{g \in \Omega_G} \sum_{T=1}^{T_{max}} \sum_{i=1}^N \varphi^{k,g,T}_{t_i}(q^g)$$

By simulating all 1000 scenarios  $\Omega_S$ , the vector  $\epsilon^k$  takes 1000 different values grouped in the following vector:

$$\left( \epsilon^k(Q) \right)_{k \in [1, 1000]}$$

With  $Q = (q^g)_{g \in \Omega_G}$ . For the rest, we will take  $Q = AV$ .

This is a sample of independent and identically distributed variables. The graph of empirical density for year 5 is as follows:



Cost of hedging against the risk of default on bonds projected in year 5

This amount may turn out to be too large depending on the practitioner who would like to reduce it by reassessing his hedging policy today.

It is therefore necessary to extend the methodology to respond to the following problem: how to modify the coverage policy today such that the practitioner can set its maximum cost in 5 years?

### 3.2 Reassessment of the hedging policy

When the risk level (all of the AV buy and sell thresholds) is set, the resulting hedging cost is calculated by summing the flows generated by the CDS buy-sell strategy. Thus, for a fixed risk level and scenario, the cost is unique. On the other hand, when it comes to fixing the cost of coverage, it is not possible to reverse the methodology or test all the possible combinations because it is far too large to be explored exhaustively. In this case, it is preferable to use algorithmic optimization techniques revealing objective functions whose purpose is to quantify a replication error. Let  $Q \in \mathbb{R}^d$  such that  $Q = (Q_1, \dots, Q_d)$  be a vector belonging to the set of buying and selling thresholds. The objective function  $f$  is of the following form:

$$f(Q) = (F(Q) - \epsilon^*)^2$$

In this application, we take the following example:  $F$  measures the 90% quantile of the vector  $Q$ . The function  $f$  then measures the quadratic difference between the 90% quantile of the vector  $Q$  and the target budget  $\epsilon^*$ . The objective is then the following: we are looking for a

vector of buy-sell thresholds  $Q^*$  which will generate a future distribution of the cost whose quantile at 90% will be equal to the target budget  $\epsilon^*$ . Note that the optimization to be carried out is subject to certain constraints. The thresholds contained in the vector  $Q$  must be between 0% and 100% for the purchase thresholds and between -100% and 0% for the sale thresholds. The following vectors are introduced:

$$l = (0)_d$$

$$u = (1)_d$$

Thus, the constraints take the form of bounds and the optimization problem is written in the following form:

$$\min_Q f(Q)$$

$$sc : l \leq Q \leq u$$

In the case of this study, the objective function measures a quadratic difference between a real (the target budget) and a metric obtained from a set of random scenarios. The objective function is not an analytical function. Mathematical literature offers a solution for this kind of problem, however. There are thus algorithms performing the optimization of non-analytical functions. These are, for example, genetic algorithms or certain gradient descent algorithms, which are robust to solve problems of optimization of non-analytical functions.

In the case of this study, we choose the Limited Memory algorithm Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Byrd [8] which is a derivative of the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algorithm [9], used for problems of nonlinear optimization in the absence of constraint. In [8], H. Byrd, J. Nocedal and R. B. Schnabel have shown that if the function  $f$  satisfies the hypotheses of differentiability and convexity in the case where  $F$  was an analytical function then the algorithm could extend to the resolution of the function  $f$  in the case where  $F$  is non-analytical.

By applying the methodology to budgets  $\epsilon_1 = 50\,000\,000$  and  $\epsilon_2 = 100\,000\,000$ , we obtain the following results:

Results of the algorithm for the cover budget  $\epsilon_1$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Germany</i>	<i>France</i>	<i>Peripheral</i>
$a^G$	0.96	0.95	0.94	0.90	0.81	0.97	0.94	0.81
$v^G$	-0.16	-0.19	-0.24	-0.30	-0.36	-0.13	-0.18	-0.28

Results of the algorithm for the cover budget  $\epsilon_2$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Germany</i>	<i>France</i>	<i>Peripheral</i>
$a^G$	0.95	0.92	0.92	0.87	0.78	0.94	0.83	0.79
$v^G$	-0.19	-0.21	-0.27	-0.32	-0.39	-0.18	-0.20	-0.30

The higher the budget  $\epsilon_j$ , the more the hedging policy encourages the holding of CDS. It rushes the buying of CDS, setting low buy thresholds and delays their sales, setting low sales thresholds.

It also appears that the worse the bond rating segment, the more the confidence level varies with the budget. This observation is logical: the risk of default being mainly borne by the low rating categories, the budget is primarily allocated to cover these categories. The confidence levels of these categories are then particularly sensitive to variations in budgets. Conversely, well-rated bond segments do not have priority on the hedging budget. The algorithm underweight the budget allocated to them and the variation in confidence levels is slower.

# Résumé

Mots-clés : Obligations, Risque de défaut, CDS, Modèle ALM, GSE, ORSA

Dans le cadre du dispositif ORSA imposé par la norme prudentielle Solvabilité II, un assureur doit disposer d'une vision prospective pour l'ensemble de ses charges. Dans ce mémoire, nous nous intéressons en particulier au cas de la projection des charges associées à la couverture contre le risque de défaut des obligations.

La méthodologie proposée consiste dans un premier temps à modéliser la stratégie de couverture comme un ensemble de règles pouvant déclencher les opérations d'achats-ventes de CDS. L'algorithme doit être en phase avec les pratiques de l'assureur. Cela nous permettra de proposer un algorithme d'évaluation de la charge de couverture contre le risque de défaut.

Dans un second temps, nous procéderons à une projection des indicateurs financiers pertinents sur un horizon de 5 ans pour un ensemble de scénarios monde-réel. Nous utiliserons pour cela un Générateur de Scénarios Économiques.

On disposera alors d'une distribution de la charge anticipée et celle-ci pourra alimenter le processus de gestion des risques et les activités réglementaires liées à l'ORSA.

# Abstract

Key words: Bonds, Default Risk, CDS, ALM model, ESG, ORSA

Under the ORSA framework imposed by the Solvency II prudential standard, an insurer must have a forward-looking vision of all its expenses. In this brief, we are particularly interested in the case of the projection of charges associated with hedging against the default risk of bonds.

The proposed methodology first consists in modeling the hedging strategy as a set of rules that can trigger CDS buy-sell transactions. The algorithm must be in line with the insurer's practices. This will allow us to propose an algorithm for assessing the hedging charge against the default risk.

Secondly, we will project the relevant financial indicators over a horizon of 5 years for a set of real-world economic scenarios. For this, we will use an Economic Scenario Generator.

A distribution of the anticipated charge will then be available to feed into the risk management process and regulatory activities to the ORSA.

# Remerciements

Je tiens à remercier mon maître de stage François Maligot pour l'ensemble de ses précieux conseils et de son encadrement tout au long de l'alternance. Son expertise sur le sujet étudié ainsi que sa pédagogie m'ont permis de mener à bien mon alternance de fin d'étude.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des collaborateurs du service ALM qui m'ont fait partager leurs compétences et expertises dès que nécessaire.

Je remercie également Areski Cousin, enseignant chercheur au DUAS, pour son suivi et ses recommandations lors de cette alternance et durant mes études d'actuariat, ainsi que le corps professoral du DUAS qui m'a apporté une formation de qualité.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire et avec qui j'ai pu échanger tout au long de mon alternance.

# Table des matières

## Introduction

PARTIE I : Solvabilité II et évaluation prospective des charges	1
Chapitre 1 : Pilier 1, exigences quantitatives	2
1.1. Modalités et règles de calculs	2
1.2. Calcul des ratios de solvabilité SCR et MCR	3
Chapitre 2 : Pilier 2 et dispositif ORSA	5
2.1. Contrôle des risques	5
2.2. Dispositif ORSA	5
Chapitre 3 : Application des principes pruden­tiels à l'évaluation des charges associées à la couverture	7
PARTIE II : Évaluation de la charge associée à la couverture du risque de défaut	9
Chapitre 1 : Définition du risque de défaut	10
1.1. Le marché obligataire	10
1.2. Les risques liés aux obligations	13
Chapitre 2 : Couverture du risque de défaut	17
Chapitre 3 : Modélisation de la couverture du risque de défaut	20
3.1 Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt	20
3.1.1 Le modèle Nelson-Siegel .....	20
3.1.2 Le modèle Neslon-Siegel dynamique (DNS) .....	21
3.1.1 Le modèle <i>arbitrage-free</i> Neslon-Siegel (AFNS).....	22
3.2 Modèle de risque de crédit	24
3.2.1 Approche structurelle .....	24
3.2.2 Approche à intensité .....	26
3.2.3 Le modèle Longstaff-Mithal-Neis.....	27
3.3 Calibration des paramètres de modèle	31
Chapitre 4 : Application numérique : évaluation <i>spot</i> de la charge associée à la couverture du risque de défaut	34
PARTIE III : Projection de la charge associée à la couverture du risque de défaut	40
Chapitre 1 : Utilisation du Générateur de Scénarios Économiques	41

1.1. Présentation générale des Générateurs de Scénarios Économiques	41
1.1.1 le Générateur de Scénarios Économiques monde-réel .....	41
1.1.2 le Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre .....	42
1.2. Présentation du Générateur de Scénarios Économiques de Malakoff Humanis	42
Chapitre 2 : Création d'un indicateur de défaut dynamique à l'aide d'un GSE	47
2.1 Construction de l'indicateur	47
2.2 Projection de la couverture en fonction de l'indicateur	49
Chapitre 3 : Application numérique : évaluation de la charge projetée	52
Chapitre 4 : Outil de pilotage - réévaluation de la politique de couverture	57
4.1 Mise en place	57
4.2 Étapes de l'algorithme	61
4.3 Application	63
Conclusion	69
Bibliographie	70
Annexe : Algorithme L-BFGS-B	71

# Introduction

Depuis l'entrée en application de la norme Solvabilité II en 2016, les sociétés d'assurance sont tenues de répondre à un certain nombre d'exigences prudentielles. Au cœur de la réforme, le dispositif ORSA (pour *Own Risk and Solvency Assessment*) regroupe un ensemble de processus ayant pour but de former un outil d'analyse stratégique et de gestion des risques pour tester la solidité financière des compagnies d'assurance. L'ORSA repose en grande partie sur un principe d'évaluation prospective de toutes les charges comptables engendrées par l'activité d'assurance.

Les charges dont les techniques de projection sont le mieux documentées dans la littérature actuarielle sont celles qui relèvent du passif. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une charge importante et liée à l'actif. Il s'agit du coût de la couverture contre le risque de défaut des obligations.

Ce mémoire développe une méthodologie pour répondre à ce besoin.

La première partie présente le cadre réglementaire européen qui s'applique aux sociétés exerçant des activités d'assurance et introduit les exigences générales du dispositif ORSA.

Dans la deuxième partie, on propose un algorithme de simulation des procédures internes à une compagnie d'assurance en matière de couverture contre le risque de défaut. En adoptant un cadre de valorisation pour les produits de couverture, il est alors possible de calculer la charge liée à la couverture compte tenu des conditions de marché en vigueur.

Dans la troisième partie, les conditions de marché sont projetées sur un horizon de cinq ans en utilisant un Générateur de Scénarios Économiques monde réel.

On obtient alors la distribution de la charge liée à la couverture pour chacune des cinq années de l'horizon de projection.

Enfin, dans l'optique de proposer un outil de pilotage complet, nous étudions la possibilité d'inverser la problématique et de réévaluer la politique de couverture de la compagnie d'assurance pour que la distribution de la charge anticipée soit en phase avec les contraintes de la direction de la compagnie d'assurance.

# PARTIE I : Solvabilité II et évaluation prospective des charges

Chapitre 1 : Pilier 1, exigences quantitatives	2
1.1. Modalités et règles de calculs	2
1.2. Calcul des ratios de solvabilité SCR et MCR	3
Chapitre 2 : Pilier 2 et dispositif ORSA	5
2.1. Contrôle des risques	5
2.2. Dispositif ORSA	5
Chapitre 3 : Application des principes prudentiels à l'évaluation des charges associées à la couverture	7

En France, les entités habilitées par l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) à exercer des activités d'assurance sont contraintes de respecter la norme prudentielle Solvabilité II. La mise en application de cette norme en 2016, a été motivée par le renforcement du contexte de crise qui a mis en évidence les défaillances de certains grands acteurs de la sphère financière face à des situations exceptionnelles. Cette partie énonce les principes prudentiels de la norme Solvabilité II.

# Chapitre 1 : Pilier 1, exigences quantitatives

## 1.1. Modalités et règles de calculs

Le pilier 1 a pour but de définir les provisions techniques, la marge de solvabilité et les modalités de calcul de la formule standard afin d'estimer la richesse et mesurer les risques. La valorisation des actifs et des passifs diffère du cadre classique selon les règles présentées ci-dessous.

Les actifs sont calculés en « juste valeur », c'est-à-dire en valeur de marché. La valorisation intègre alors les plus ou moins-values, ce qui n'est pas le cas dans le cadre comptable classique, puisque ce dernier repose sur un principe de prudence. Le calcul du passif se divise en deux éléments : le *Best Estimate* (BE) des fonds propres et la marge de risque.

La directive définit le BE comme la moyenne des flux de trésorerie futurs pondérés par leur probabilité compte tenu de la valeur temporelle de l'argent. Elle stipule également que la projection en matière de flux de trésorerie utilisée dans les calculs du BE tient compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance. Mathématiquement, le BE se définit de la manière suivante :

$$BE_t = \sum_{j \geq t} \frac{CF_j}{(1 + r(j))^j}$$

Avec  $CF_j$  la somme totale des *cash-flow* de trésorerie à décaisser à la date  $j$  et  $r(j)$  le taux sans risque pour l'échéance  $j$ . La notion de taux sans risque sera développée plus tard dans le mémoire. Par ailleurs, la norme Solvabilité II identifie les composantes à prendre en considération dans le calcul de la somme totale des cash-flow. Les composantes sont les suivantes :

- Les versements de prestations aux preneurs et bénéficiaires
- Les paiements des primes et flux de trésorerie supplémentaires résultant de ces primes
- Les dépenses qui seront engagées aux fins d'honorer les engagements d'assurance et de réassurance
- Les impôts

La marge de risque (RM) est donc, avec le *Best Estimate*, le deuxième élément constitutif des provisions techniques. Elle représente le coût, en termes de mobilisation de fonds propres, inhérent au portefeuille de l'organisme qui serait supporté par le repreneur dans un scénario de transfert du portefeuille. La marge de risque se calcule de la manière suivante :

$$RM = CoC \cdot \sum_{j \geq 0} \frac{SCR(j)}{(1 + r(j + 1))^{j+1}}$$

Avec  $CoC$  le coût du capital, souvent fixé à 6% et  $SCR(j)$  le capital de solvabilité requis défini ci-après.

## 1.2. Calcul des ratios de solvabilité SCR et MCR

Le *solvency capital requirement* (SCR), ou capital de solvabilité requis en français correspond à un niveau de fonds propres permettant à une entreprise d'absorber des pertes imprévues et assurant le paiement intégral des prestations. Plus précisément, le SCR correspond à la *value at risk* à 99,5% sur un horizon d'un an : si le montant de fond propre d'une entreprise est égal au SCR, l'entreprise pourra faire face à ses engagements dans 99,5% des cas, sur un horizon d'un an.

Le *minimum capital requirement* (MCR) correspond à l'exigence de fonds propres minimum à respecter par l'organisme pour continuer à exercer ses activités. Son non-respect conduit au retrait d'agrément.

La norme Solvabilité II fournit une méthodologie à appliquer pour calculer l'exigence de capital. Il s'agit de la formule standard, basée sur une architecture modulaire qui est la suivante :

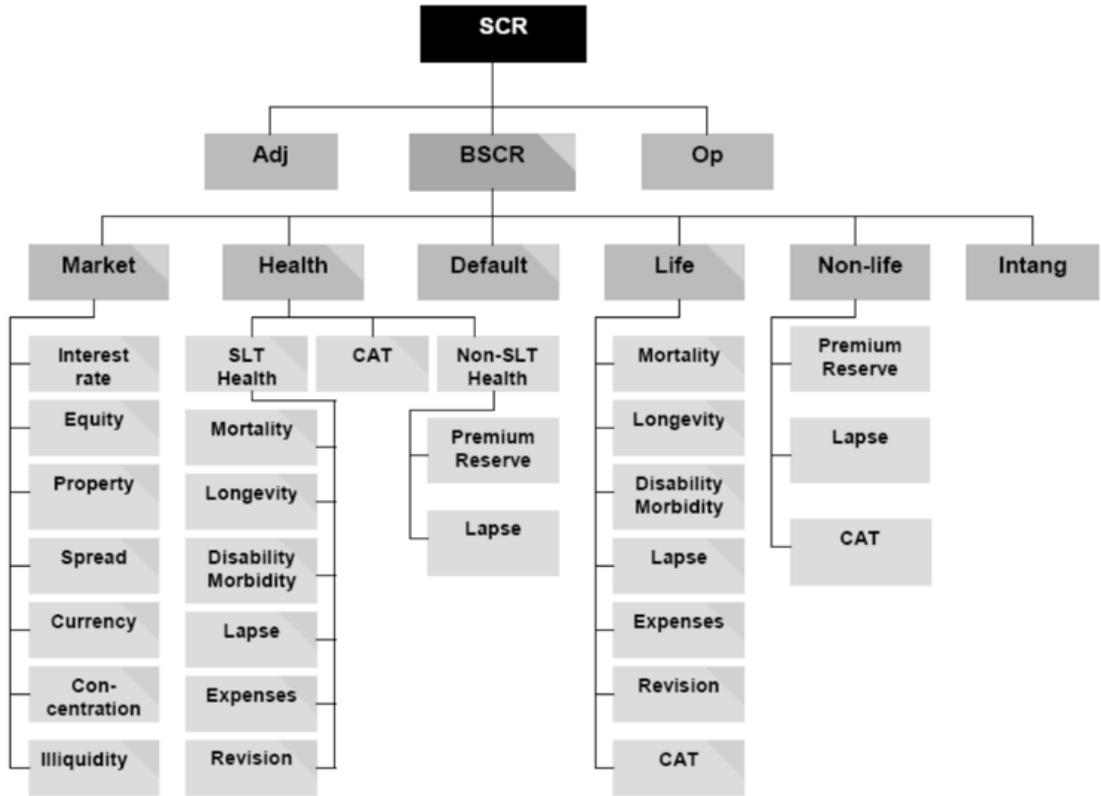


FIGURE 1.2 - Les modules de risque fournis par le régulateur

Chaque module de risques est composé de plusieurs sous-modules qui représentent un risque élémentaire. Pour chaque sous-module, l'exigence de capital est calculée à l'aide d'un scénario fourni dans les spécifications techniques : un choc est appliqué et une variation de capital est alors observée entre le bilan avant choc et le bilan après choc. Puis, les différentes exigences de capital sont agrégées à l'aide de matrices de corrélation.

Cette méthodologie peut être remplacée par un modèle interne qui, généralement, est appliqué pour fournir une évaluation du SCR plus cohérente avec l'activité de la compagnie, en ajoutant des sous-modules de risques.

## Chapitre 2 : Pilier 2 et dispositif ORSA

Le pilier 2 a pour objectif de renforcer les exigences du pilier 1. Il comprend également des aspects qualitatifs, mais dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à la consolidation des principes quantitatifs du premier pilier.

### 2.1. Contrôle des risques

Le pilier 2 impose aux entreprises de mettre en place un système de gestion des risques pour répondre à leurs objectifs de solvabilité et de rentabilité. Ce système doit être efficace, et de telle sorte qu'il comprenne les stratégies, processus et procédures d'information nécessaires pour déceler, mesurer, contrôler, gérer et déclarer, en permanence, les risques, aux niveaux individuel et agrégé, auxquels ils sont ou pourraient être exposés ainsi que les interdépendances entre ces risques.

Le système de gestion de risques de l'entreprise doit contenir une évaluation interne et externe de ses risques et de sa solvabilité. L'évaluation repose sur les éléments suivants :

- Le besoin global de solvabilité (BGS), compte-tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise,
- Le respect permanent des exigences de capital et des exigences concernant les provisions techniques
- La mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.

Une fois le BGS évalué, l'entreprise met en place les mesures nécessaires pour maîtriser les risques sous-jacents à son activité. Elle doit par ailleurs justifier la cohérence de ces mesures compte tenu des risques mis en évidence par le BGS.

### 2.2. Dispositif ORSA

L'évaluation Interne des Risques et de la Solvabilité (ORSA) est un processus qui fournit une évaluation à court et à moyen terme des risques propres à la compagnie, ainsi que du niveau de capital correspondant pour les couvrir. Il s'agit pour l'entreprise de démontrer sa capacité à apprécier et à maîtriser ses risques dans une vision prospective. L'entreprise définit alors :

- Les limites maximales de risque, c'est-à-dire les besoins maximaux en fonds propres qu'elle est capable de supporter

- Son aversion au risque, c'est-à-dire un indicateur quantifiant sa limite de risque : un niveau de risque, niveau de quantile ou de probabilité.
- Une mesure de risque, dont l'objectif est de quantifier le risque qui sera considéré

En pratique l'ORSA requiert une modélisation prospective du bilan économique, généralement sur 3 ou 5 ans. Puis, l'entreprise identifie, évalue et organise un suivi de ses risques.

## Chapitre 3 : Application des principes prudentiels à l'évaluation des charges associées à la couverture

Les piliers 1 et 2 de la norme Solvabilité II requièrent un certain nombre de calculs quantitatifs pour apprécier la solvabilité de l'entreprise sur un horizon de cinq ans. Ce chapitre s'intéresse à l'application de ces exigences dans le calcul prospectif de la charge associée à la couverture des obligations contre le risque de défaut.

Comme mentionné dans la présentation du pilier 1, les flux de trésorerie à projeter pour calculer le *Best Estimate* comprennent les dépenses qui seront engagées aux fins d'honorer les engagements d'assurance et de réassurance. Cette définition recouvre un large périmètre des dépenses à anticiper pour l'assureur et le calcul du BE impose alors de les identifier.

Les charges que la compagnie d'assurance doit supporter dans son activité sont diverses et sont classées en différentes catégories dans le compte de résultat :

- Charges d'exploitation : elles relèvent de l'activité normale de l'entreprise comme par exemple l'achat de services, les taxes et les impôts
- Charges financières : elles correspondent au coût des ressources d'emprunt obtenus auprès des différents créanciers bancaires et financiers
- Charges exceptionnelles : elles désignent les dépenses qui ne se rapportent pas au cycle normal d'exploitation de l'entreprise

L'ORSA exige une évaluation prospective de l'ensemble de ces charges sur un horizon temporel fixé généralement à cinq ans. Cependant, la norme Solvabilité II, ne fournit aucune indication sur les modalités de calculs. Les méthodes de projection sont laissées libres aux assureurs. Si certaines branches d'activité reposent leurs calculs sur la littérature actuarielle, cette dernière s'avère trop faible pour certains praticiens.

C'est le cas des gestionnaires d'obligations ou des gestionnaires actif-passif dont la mission consiste à maîtriser les risques sous-jacents à la détention d'obligations en portefeuille. La diversité des produits échangés sur les marchés financier leur offre la possibilité de couvrir le portefeuille moyennant le versement de primes périodiques aux vendeurs de protection, ce qui constitue comptablement une charge.

Ainsi, les charges associées à la couverture du portefeuille obligataire s'inscrivent dans le périmètre défini par le dispositif ORSA et requièrent une évaluation prospective. Ce mémoire s'intéresse tout particulièrement à la mise en place d'une méthodologie pour projeter la charge

associée à la couverture du portefeuille d'obligations contre le risque de défaut des entités émettrices

# PARTIE II : Évaluation de la charge associée à la couverture du risque de défaut

Chapitre 1 : Définition du risque de défaut	10
1.1. Le marché obligataire	10
1.2. Les risques liés aux obligations	13
Chapitre 2 : Couverture du risque de défaut	17
Chapitre 3 : Modélisation de la couverture du risque de défaut	20
3.1 Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt	20
3.1.1 Le modèle Nelson-Siegel	20
3.1.2 Le modèle Nelson-Siegel dynamique (DNS)	21
3.1.1 Le modèle <i>arbitrage-free</i> Nelson-Siegel (AFNS)	22
3.2 Modèle de risque de crédit	24
3.2.1 Approche structurelle	24
3.2.2 Approche à intensité	26
3.2.3 Le modèle Longstaff-Mithal-Neis	27
3.3 Calibration des paramètres de modèle	31
Chapitre 4 : Application numérique : évaluation <i>spot</i> de la charge associée à la couverture du risque de défaut	34

La norme Solvabilité II impose ainsi aux sociétés exerçant des activités d'assurance d'évaluer leurs charges comptables dans une vision prospective et sur un horizon de cinq ans. En particulier, le service *Asset Liability Management* (ALM), chargé de la gestion des investissements obligataires est tenu d'évaluer le coût de couverture du portefeuille d'obligations contre le risque de défaut des entités émettrices. Cette partie présente le cadre conceptuel et la méthodologie mis en place pour procéder à l'évaluation du coût de couverture.

# Chapitre 1 : Définition du risque de défaut

La mise en place d'une couverture sur le portefeuille d'obligations répond à un besoin de neutralisation du risque, ce qui nécessite d'identifier et de définir correctement les risques sous-jacents à la détention d'obligations.

Avant d'explorer les différentes sources de risques, un rappel sur le fonctionnement des obligations est donné ci-dessous. L'objectif est de rappeler les principaux résultats concernant les obligations ainsi que la base théorique sur les taux d'intérêt et les produits dérivés de taux.

## 1.1. Le marché obligataire

Le marché obligataire est le marché de la dette à moyen et long terme. On distingue le marché primaire concernant les créances nouvellement émises, et le marché secondaire ou s'échangeant des titres d'occasion. Ce marché est le plus important au monde en termes de volumes et de montants économiques avec un encours mondial de 115 000 milliards de dollars en 2019, loin devant le marché des actions dont l'encours en 2019 s'élevait à 70 000 milliards de dollars. Le marché obligataire se caractérise par une grande diversité de titres, appelés obligations et dont la définition est rappelée ci-après :

**Définition 1.1.1 :** (Obligation) *Une obligation est un titre financier représentatif d'un prêt octroyé à un tiers et donnant droit à la réception de différents flux financiers fixes à des dates d'échéances futures fixées  $t_1, \dots, t_N$ . Ces flux sont de deux natures, soit des versements d'intérêts appelés coupons, versés à intervalles réguliers, soit le remboursement du prêt effectué le plus souvent en une fois.*

L'échéancier des flux d'une obligation change selon la date à laquelle le nominal est remboursé. Le plus souvent le remboursement se fait in fine.

**Définition 1.1.2 :** (Remboursement in fine) *Le remboursement in fine est une méthode permettant à l'émetteur de l'obligation de rembourser la totalité du nominal au dernier jour de l'échéance. Les intérêts sont quant à eux versés tout au long de la durée de vie de l'obligation.*

À l'émission du titre en date  $t_0$ , les flux d'une obligation in fine peuvent être schématisés de la manière suivante :



FIGURE 1.3 - Flux d'une obligation in fine

Le schéma ci-dessus adopte les notations suivantes :

- $P$  le prix de l'obligation en  $t_0$
- $t_N$  la maturité de l'obligation
- $C_{t_i}$  le coupon versé à la date  $t_i$
- $R_{t_N}$  le nominal

**Définition 1.1.3 :** (Obligation à taux fixe). *Soit une obligation dont l'échéancier de flux est  $(t_i)_{1 \leq i \leq N}$ . Si  $\forall i \neq j, C_i = C_j$ , c'est-à-dire si tous les coupons sont égaux, alors le taux de coupon défini par  $C_i/R_{t_N}$  est fixe et l'obligation est appelée « obligation à taux fixe ». Il s'agit de la forme d'obligation la plus classique.*

Il existe un cas particulier d'obligations à taux fixe pour lequel le taux de coupon est nul. Ces obligations sont appelées obligations zéro-coupon, et leur définition est la suivante :

**Définition 1.1.4 :** (Obligation zéro-coupon). *Une obligation zéro-coupon de maturité  $t_N$  est un titre de créance qui garantit le paiement d'une unité monétaire à la date  $t_N$ . On note  $P(t, t_N)$  le prix d'une obligation zéro-coupon pour toutes dates  $0 < t < t_N$ . Ce prix correspond à la valeur aujourd'hui d'une unité monétaire payée en  $t_N$  et est aussi appelé fonction d'actualisation.*

À l'émission du titre en date  $t_0$ , les flux d'une obligation zéro-coupon peuvent être schématisés de la manière suivante :



FIGURE 1.4 – Flux d’une obligation zéro-coupon

De manière générale, les prix zéro-coupon historiques ne sont pas directement observables sur les marchés. Ils sont extraits des prix d’autres produits financiers liquides à l’aide de méthodes d’extraction, dont l’une des plus courantes est la méthode *bootstrapping* (Medvedev G dans [1] [2019]). Il s’agit d’une procédure qui permet de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, i.e. segment de maturité par segment de maturité. En pratique, cela revient le plus souvent à procéder à des interpolations linéaires ou cubiques pour obtenir une courbe continue.

A partir des obligations zéro-coupon, il est possible de définir la notion de taux *spot*, comme ci-dessous :

**Définition 1.1.5 :** (Taux *spot*). *On appelle taux spot ou taux zéro-coupon  $R(t, t_N)$ , le taux de rendement annuel d’un investissement en  $t$  sur une obligation zéro-coupon de maturité  $t_N$ .*

Le taux *spot* s’exprime différemment selon la convention adoptée. Dans cette étude, seule la convention continue est retenue, bien que de nombreux taux, comme le taux LIBOR, s’expriment en convention simple.

**Définition 1.1.6 :** (Taux *spot* en convention continue). *On appelle taux d’intérêt spot en composition continue le taux constant auquel un investissement croît de manière continue pour produire une unité de monnaie à la maturité. Il sera noté  $R$  et il vérifie  $\forall t$ , tel que  $0 < t < T$  :*

$$R(t, T - t) = -\frac{1}{T - t} \ln P(t, T)$$

Ce qui se réécrit également :

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T-t)}$$

La définition des taux d'intérêt amène naturellement à la notion de taux sans risque, dont la définition est donnée ci-après :

**Définition 1.1.7 :** (Taux sans risque). *On appelle taux sans risque le processus  $(r_t)_{t \geq 0}$  qui correspond au taux auquel un investissement non risqué doit croître de manière continue en absence d'opportunité d'arbitrage.*

Le taux sans risque est un processus stochastique bien que dans de nombreux modèles financiers tels que Black & Scholes, il soit supposé déterministe ou constant par souci de simplification.

**Définition 1.1.8 :** (Compte bancaire). *On appelle compte bancaire le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ , de valeur initiale  $B_0 = 1$ , qui évolue de manière continue au taux sans risque  $(r_t)_{t \geq 0}$ , de sorte que sa dynamique vérifie  $\forall t \geq 0$  :*

$$dB_t = r_t B_t dt$$

Ce qui se réécrit :

$$B_t = e^{\int_0^t r_u du}$$

A partir du processus définissant le compte bancaire, il est possible d'introduire le facteur d'actualisation, c'est-à-dire le facteur qui permet l'actualisation des flux à une date donnée ce qui constitue le principe de l'évaluation d'un actif. Ainsi,  $\forall t \in [0, t_N]$ , le facteur d'actualisation de  $t$  à  $t_N$ , noté  $\delta(t, t_N)$ , est tel que :

$$\delta(t, t_N) = \frac{B_t}{B_{t_N}} = e^{-\int_t^{t_N} r_u du}$$

## 1.2. Les risques liés aux obligations

La détention d'obligations dans un portefeuille expose son propriétaire à certains risques qu'il est nécessaire d'identifier pour en garantir la bonne gestion. Les quatre risques les plus courants liés à la détention d'obligations sont présentés ci-dessous :

Le premier risque est le risque de taux : comme vu précédemment, les taux d'intérêt permettent de mesurer la valeur d'une obligation. Selon la manière dont ces taux évoluent, l'obligation est

plus ou moins attractive pour les investisseurs si elle est comparée à la valeur du coupon. Si les taux montent, le prix d'une obligation déjà émise diminue. Les investisseurs préfèrent en effet placer à des taux plus élevés et donc revendent les obligations qu'ils détiennent, ce qui engendre une baisse de leur prix. Ainsi, les obligations déjà émises offrent le même rendement que celui du marché. Inversement, si les taux diminuent, la valeur de l'obligation monte.

Le deuxième risque est le risque de liquidité : le risque de liquidité correspond à celui qu'un investisseur pourrait prendre en détenant une ou plusieurs obligations dont le volume de transactions sur les marchés est faible. Autrement dit, s'il décide de vendre son obligation, il fait face à un risque de liquidité s'il ne trouve pas de contrepartie prête à la racheter.

Le troisième risque est le risque de change : lorsqu'un investisseur fait l'acquisition d'une obligation dans une devise étrangère, la plus-value qu'il est susceptible de générer dépend du taux de change entre la devise d'émission et la devise de conversion.

Enfin, le quatrième risque est le risque de crédit qui apparaît dès lors qu'un créancier accorde un prêt à un débiteur car le créancier court le risque que le débiteur ne le rembourse pas. Dans le cadre de l'assurance vie, le risque de crédit est le risque qu'un acteur, ayant émis de la dette achetée par un assureur (au travers du prêt ou d'une obligation par exemple), ne rembourse ni sa dette ni les intérêts dus. Lorsque l'émetteur n'est plus en mesure de faire face à ses engagements, il peut renégocier les termes du contrat avec ses créanciers ou être déclaré en faillite. Le risque de crédit se décompose en trois postes : le risque de dégradation de la qualité du portefeuille de crédit, le risque de taux de recouvrement en cas de défaut et le risque de défaut qui peut être défini comme la perte économique liée au non-respect des obligations contractuelles qui lient deux parties. Le risque de défaut est porté par le détenteur de l'obligation pendant toute la durée de vie de l'obligation et il est donc nécessaire de se munir d'indicateurs quantifiant l'exposition à ce risque. Le principal indicateur est le *rating*, c'est-à-dire une note attribuée à une entreprise par une agence de notation, organisation indépendante chargée de noter le risque de non remboursement des entités émettrices. Les trois plus grandes agences de notations sont Moody's, Standard & Poors et Fitch Rating, et elles attribuent une note à chaque titre de créance, dont l'échelle de notation est donnée à la page suivante :

	Moody's	Standard & Poors	Fitch Rating
<b>Meilleure qualité, solvabilité maximale</b>	Aaa	AAA	AAA
	Aa1	AA+	AA+
<b>Haute qualité</b>	Aa2	AA	AA
	Aa3	AA-	AA-
<b>Qualité moyenne supérieure</b>	A1	A+	A+
	A2	A	A
	A3	A-	A-
<b>Qualité inférieure moyenne</b>	Baa1	BBB+	BBB+
	Baa2	BBB	BBB
	Baa3	BBB-	BBB-
<b>Spéculatif</b>	Ba1	BB+	BB+
	Ba2	BB	BB
	Ba3	BB-	BB-
	B1	B+	B+
<b>Très spéculatif</b>	B2	B	B
	B3	B-	B-
<b>A haut risque/ Ultra spéculatif</b>	Caa1	CCC+	CCC
	Caa2	CCC	
<b>En défaut, quelques espoirs</b>	Caa3	CCC-	
<b>En défaut</b>	Ca	CC	CC
	C	C/CI/R	C
		SD	RD
		D	D

FIGURE 1.5 - Tableau de *rating* des agences Moody's, Standard & Poors et Fitch Rating

Les notes attribuées représentent correctement la solvabilité des entreprises et traduisent le risque de défaut associé à chaque titre, ce qui influence grandement les marchés. En effet lorsque qu'une entreprise voit la notation d'un de ses titres de dette baisser, cela entraîne une variation du prix du titre associé et du niveau des *spread* de taux d'obligations nouvellement émises. Cependant, il est important de considérer d'autres éléments, notamment macro-économiques comme le secteur d'activité, pour mieux apprécier la notation.

Longtemps, les obligations gouvernementales étaient considérées sans risque, mais la crise financière de 2008 a mis en évidence que certains émetteurs, dont la santé économique et financière dégradait la qualité de leur dette, étaient particulièrement plus risqués que d'autres. Suite à cette crise, l'exposition au risque de défaut est alors devenue une problématique centrale autour de laquelle ont été menés de nombreux travaux de recherches. La gestion d'un portefeuille obligataire repose désormais grandement sur la gestion du risque de défaut auquel l'investisseur est exposé. Le marché des dérivés de crédits s'est alors développé et l'intérêt pour les produits de taux s'est accru.

## Chapitre 2 : Couverture du risque de défaut

Il est apparu que la gestion du portefeuille d'obligations repose en grande partie sur la maîtrise du risque de défaut. Le gestionnaire est alors chargé de neutraliser ce risque sur certaines obligations et dispose pour cela d'un large choix de produits financiers dérivés échangeables sur les marchés financiers. Ce chapitre présente le fonctionnement de ces produits de couverture.

**Définition 1.3.1 :** (Produit dérivé). *Un produit dérivé est un instrument dont la valeur fluctue en fonction du prix ou du taux d'un autre produit, appelé le sous-jacent. Lorsque ce sous-jacent est un titre de créance issu du marché obligataire, il s'agit alors d'un dérivé de crédit.*

Le but d'un dérivé de crédit est de transférer le risque de crédit d'un actif d'une contrepartie "acheteuse de protection" vers une contrepartie "vendeuse de protection" en échange d'une rétribution financière. La protection pourra être exercée lors de l'occurrence d'un événement de crédit sur l'actif sous-jacent du dérivé de crédit. Les principaux produits échangés sur ce marché sont les *Credit Default Swap*, dits CDS, dont la définition est donnée ci-dessous :

**Définition 1.3.2 :** (CDS) *Un CDS est un contrat d'assurance couvrant le risque de crédit. Lorsqu'un investisseur veut s'assurer contre le risque de crédit d'une obligation émise par une entité de référence, il achète un CDS auprès d'un vendeur de protection. L'acheteur est alors protégé du risque de défaut jusqu'à maturité. Si l'entité de référence fait défaut, le vendeur verse la valeur faciale au créancier et perçoit le recouvrement de la part de l'entité. En échange, l'acheteur doit verser au vendeur une prime périodique.*

Le défaut survient lorsque l'entité de référence dépose le bilan, si sa dette subit une restructuration ou si l'entité de référence ne remplit pas une obligation contractuelle. Schématiquement, le flux entre le vendeur et l'acheteur de CDS et l'entité émettrice d'obligation peut être représenté de la manière suivante :

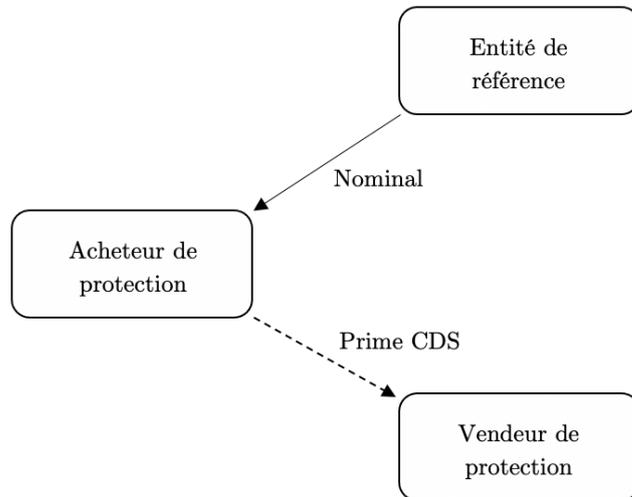


FIGURE 2.1 - Cas où le défaut ne survient pas

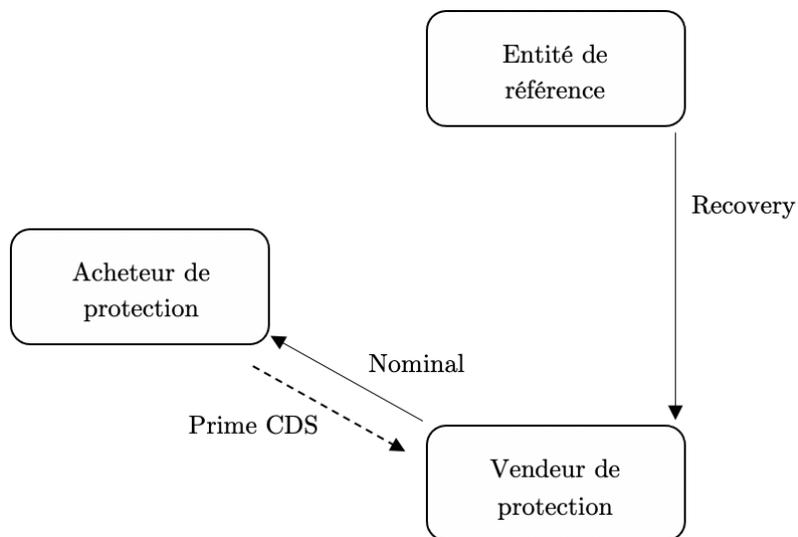


FIGURE 2.2 - Cas où le défaut survient

La problématique clé pour l'investisseur est de maîtriser son exposition au risque de défaut en le quantifiant. Il est nécessaire de mesurer la part de la composante défaut dans le prix de l'obligation. Cette composante est estimée par des modèles de crédit sophistiqués. L'investisseur peut donc s'interroger si l'obligation émise par la société ou l'État est évaluée au juste prix et si l'investissement en vaut la peine.

L'enjeu du calcul obligataire est notamment important pour les assureurs compte tenu du poids du portefeuille obligataire dans leur portefeuille d'actifs (généralement compris entre 60 et 80 %). C'est pourquoi ces derniers doivent modéliser correctement le risque de crédit pour pouvoir piloter efficacement les allocations du portefeuille et avoir une meilleure appréciation des risques dans leur processus de gestion.

De nombreux modèles de risque de crédit ont été développés dans la littérature, comme dans le livre de Schönbucher [2] [2003], leur but étant généralement l'un des suivants : l'évaluation de produits dérivés de crédit ou le calcul des probabilités de défaut historiques.

## Chapitre 3 : Modélisation de la couverture du risque de défaut

L'achat de *Credit Default Swap* sur les marchés financiers offre la possibilité de couvrir les obligations contre le risque de défaut moyennant le versement de primes périodiques aux vendeurs de protection. Le montant de la couverture des obligations est donc directement lié aux montants des primes CDS à verser. Ainsi, l'évaluation du coût de couverture requiert en premier lieu une formule de valorisation des obligations et des primes CDS associées. Pour cela, il convient de présenter le cadre conceptuel du risque de crédit et des taux d'intérêts intervenant dans la valorisation des produits manipulés.

L'objectif est de s'approprier un modèle de valorisation des obligations et des primes de CDS, tenant compte du risque de défaut afin de calculer la charge dans une vision *spot*. Néanmoins, une vision *spot* requiert les valeurs projetées de certains indicateurs financiers. Pour cette raison, les modèles manipulés intégreront des paramètres dynamiques.

### 3.1 Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt

**Définition 3.1.1 :** (Structure par terme des taux) *La structure par terme des taux d'intérêt est la fonction qui à une date et maturité données indique le niveau du taux d'intérêt associé. Cette courbe décrit, à un moment donné, la manière dont évoluent les taux d'intérêt en fonction de l'échéance à laquelle ils correspondent.*

La littérature de la finance a consacré une large partie de ses études à la construction des courbes de taux d'intérêt. En effet, l'évolution des taux d'intérêt est depuis des années au centre des préoccupations dans les marchés financiers pour l'évaluation et la couverture des titres financiers. Ainsi, les bonnes estimations de la structure par terme des taux d'intérêt revêtent une importance capitale pour les investisseurs et les décideurs. A cette fin, de nombreux modèles ont été proposés et parmi eux, le modèle Nelson-Siegel présenté ci-après.

#### 3.1.1 Le modèle Nelson-Siegel

Le modèle Nelson-Siegel propose une expression mathématique, reposant sur quatre paramètres pour décrire la dynamique des taux. La structure par terme des taux d'intérêt est donnée par :

$$\forall T > 0, \quad y(T) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \left( \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) - \beta_3 e^{-\lambda T}$$

Dans cette approche, la méthode utilisée est la même pour toutes les maturités, elle met donc en œuvre la même forme paramétrique pour reconstituer l'intégralité de la courbe. Il n'y a donc pas de risque d'observer une discontinuité au niveau d'un point de jonction entre différents segments.

Le modèle se calibre simplement par régression linéaire, après optimisation du paramètre  $\lambda$  (qui s'estime lui-même par régressions successives).

La fonction d'actualisation se déduit du taux zéro-coupon, de sorte qu'en notant ce taux  $y(t, T)$  pour la maturité  $T$  à la date  $t$ , cela donne :

$$P(t, T) = e^{-y(t, T) * T}$$

### 3.1.2 Le modèle Nelson-Siegel dynamique (DNS)

Diebold et Li [3] [2006] proposent une version dynamique du modèle :

$$y_t(T) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} \right) - \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} - e^{-\lambda_t T} \right)$$

Il est d'usage d'optimiser le paramètre d'échelle  $\lambda$  en tant que paramètre extérieur (constant, non dépendant du temps), pour éviter une potentielle "explosion" dans les projections à cause de l'exponentielle. Le modèle devient alors :

$$y_t(T) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right) - \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} - e^{-\lambda T} \right)$$

Diebold et Li utilisent un processus autorégressif d'ordre 1 pour décrire la dynamique de chaque facteur  $\beta_{i,t}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Les paramètres sont obtenus par moindres carrés ordinaires. Diebold et Li [2006] proposent une méthode d'estimation. La première étape de la procédure consiste à fixer le facteur de décroissance et à estimer les paramètres. La deuxième étape consiste à ajuster un modèle dynamique aux facteurs  $\{\widehat{\beta}_{1,t}, \widehat{\beta}_{2,t}, \widehat{\beta}_{3,t}\}$  avec un vecteur autorégressif (ou VAR) ou un autre modèle pertinent.

Il possède l'inconvénient de ne pas garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans le but de construire un cadre théorique rigoureux, la suite de l'étude nécessite un modèle plus sophistiqué,

basé sur l'hypothèse d'AOA et qui permet de conserver la forme factorielle de la fonction de Nelson-Siegel ainsi que la paramétrisation des déformations par 3 facteurs comme défendue par Litterman et Scheinkman dans [4] [1991].

### 3.1.1 Le modèle *arbitrage-free* Nelson-Siegel (AFNS)

L'objectif est d'effectuer des projections de prix zéro-coupon évalués *spot* après diffusion de séries temporelles de paramètres implicites inobservables, ce qui est adapté au modèle Nelson-Siegel. La spécification du modèle Nelson-Siegel, et de ses extensions, permet également de rentrer dans un cadre de régression par méthode des moindres carrés, et ainsi d'assurer l'extraction optimale des séries temporelles de régresseurs en vue de la projection des structures par terme de prix zéro-coupon. En effet, les MCO garantissent des optimums globaux dans le cas d'un critère d'erreur quadratique.

La solution retenue est donc de travailler avec le modèle Nelson-Siegel dynamique, mais celui-ci nécessite une extension théorique garantissant l'hypothèse d'AOA. Cette extension, appelée *arbitrage-free* Nelson-Siegel (AFNS), est l'objet de cette partie.

Soit  $\mathbb{Q}$  la mesure de probabilité risque-neutre. Le processus de taux d'intérêt instantané  $(r_t)_{t \geq 0}$  est alors défini comme un processus de classe affine à trois facteurs tel que :

$$dr_t = X_t' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec

$$dX_t = -\Lambda X_t dt + \Sigma dW_t$$

Et

- $X_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{bmatrix}$
- $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$  la matrice de vitesse de retour à la moyenne, pour  $\lambda > 0$

- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  la matrice de volatilité
- 
- $W_t = \begin{bmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ W_t^3 \end{bmatrix}$  un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien multidimensionnel.

La matrice de volatilité correspond à la décomposition de Cholesky de la matrice variance-covariance. En reprenant l'équation suivante :

$$dX_t = -\Lambda X_t dt + \Sigma dW_t$$

Et en remplaçant les différentes composantes par leur expression, il apparaît un système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dX_t^1 = \sigma_{11} dW_t^1 \\ dX_t^2 = -\lambda(X_t^2 - X_t^3) + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2 \\ dX_t^3 = \lambda X_t^3 + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2 + \sigma_{33} dW_t^3 \end{cases}$$

Il est désormais possible de donner la formule du taux *spot* dans le modèle AFNS. Ce dernier reprend la fonctionnelle du modèle dynamique avec la présence de trois processus  $(X_t^1, X_t^2, X_t^3)$  analogues aux trois facteurs  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . La dynamique est la suivante :

$$R(t, T-t) = X_t^1 + X_t^2 * \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} + X_t^3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} - e^{-\lambda(T-t)} \right) - \frac{C(t, T)}{T-t}$$

Le modèle introduit une fonction déterministe  $C$  qui dépend de la maturité résiduelle du taux. Son expression est la suivante :

$$\frac{dC}{dt}(t, T) = \frac{1}{2} Tr\{\Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma\}$$

Avec  $B$  solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dB}{dt} - \nabla' B(t, T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans la suite de l'étude, les courbes de taux sans risque utilisées sont celles générées par la méthode d'interpolation du modèle *arbitrage-free* Nelson Siegel (AFNS). Les modèles des taux étant définis, il est désormais possible d'introduire les modèles de crédit. C'est l'objet de la partie suivante.

## 3.2 Modèle de risque de crédit

L'objectif des modèles de crédit est de valoriser un produit soumis à un risque de défaut de l'entreprise émettrice. Deux grandes approches sont possibles pour modéliser le défaut : les modèles à forme réduite, aussi appelés « modèles à intensité » et les modèles dits « structurels ».

Les modèles structurels se basent sur une représentation de la cause du défaut alors que dans les modèles à intensité, l'hypothèse est que le défaut est un événement exogène, représenté par un processus de Poisson, qui peut se réaliser à tout instant pendant la détention de l'actif risqué.

Théoriquement, l'approche structurelle est plus rigoureuse mais ses résultats empiriques s'avèrent peu performants : ils sous-estiment la probabilité de défaut, et donc le *spread* de crédit des produits d'échéances courtes. Cette faiblesse est due à la continuité du processus qui régit la valeur des actifs. En effet, la continuité rend peu probable la baisse « soudaine » d'un cours d'actifs, pourtant probable et notamment sur les « *junk bond* », les obligations « pourries ». A l'inverse, dans l'approche à intensité, les sauts sont possibles à tout instant, par nature d'un processus de Poisson.

### 3.2.1 Approche structurelle

L'approche structurelle du risque de crédit a vu le jour suite aux travaux de Merton [5] [1974], qui sont fondés sur la théorie d'évaluation des options développée par Black et Scholes [6] [1973].

Dans cette approche, le risque de crédit encouru par le détenteur d'une obligation est directement relié à l'aspect économique de l'entreprise. Il y a défaut dès que la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée.

Le modèle suppose que la dette est composée d'un unique zéro-coupon d'échéance  $t_N > 0$  et de nominal  $R_{t_N}$ . Par ailleurs le défaut ne peut survenir qu'à la date  $t_N$ , c'est-à-dire à l'échéance. Les actifs de l'entreprise sont des titres négociables sur un marché supposé sans friction et

complet, et où l'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée. Il s'échange également un actif sans risque de rendement égal au taux sans risque dont la dynamique est :

$$\frac{dB_t}{B_t} = r * dt$$

L'évolution de la valeur des actifs de l'entreprise suit un processus log-normal  $(Vt)_{t \geq 0}$  dont la dynamique, sous la mesure de probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  est :

$$\frac{dV_t}{V_t} = rdt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Avec  $W^{\mathbb{Q}}$  un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ . Le défaut est alors l'événement  $\{V_{t_N} < R_{t_N}\}$  et le taux de recouvrement, noté  $R$  est alors :

$$R = V_{t_N}/R_{t_N}$$

La dette et les fonds propres de l'entreprise peuvent être évalués de la même manière qu'une option européenne dans le modèle de Black & Scholes : en effet, les *pay-off* à l'échéance  $t_N$  sont respectivement  $\min(V_{t_N}, R_{t_N})$  et  $(V_{t_N} - R_{t_N})^+$ . Les capitaux propres sont donc assimilables à une option d'achat européenne de *strike*  $R_{t_N}$  et de sous-jacent la valeur  $V_{t_N}$  des actifs de l'entreprise.

Il est également possible de calculer la probabilité de défaut risque neutre  $q_t$  vu de la date  $t$  avec  $0 < t < t_N$  tel que :

$$q_t = P[V_T \geq R_{t_N} | F_t] = \Phi \left( \frac{\ln(V_t/R_{t_N}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

Le modèle a l'avantage de pouvoir directement expliqué la cause du défaut par la diminution de sa valeur, mais il suppose que le défaut ne survient qu'à maturité et qu'il est synonyme de non remboursement.

### 3.2.2 Approche à intensité

Dans cette approche le défaut est un temps d'arrêt régi par un processus aléatoire exogène qui n'est donc pas formellement relié à la valeur de la firme. Le temps d'arrêt, noté  $\tau$  est alors :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \lambda_s ds \geq E \right\}$$

Avec

- $E$  une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1
- $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  le processus adapté à une filtration  $G$  indépendante de  $E$

L'intensité s'interprète comme la probabilité instantanée de défaut sachant que l'entité a survécu. Lorsque  $\Delta t$  tend vers 0 :

$$\frac{1}{\Delta t} * \mathbb{Q}(\tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t) \rightarrow \lambda_t$$

La probabilité de survie est alors :

$$\mathbb{Q}(\tau > t_N) = E \left[ \exp \left( - \int_0^{t_N} \lambda_t dt \right) \right]$$

En supposant le taux de recouvrement nul, et en considérant que le taux court est décrit par un processus  $(r_t)_{t \geq 0}$ , le prix en  $t = 0$  d'un zéro-coupon de maturité  $t_N$  est :

$$\begin{aligned} P(0, t_N) &= E \left[ \exp \left( - \int_0^{t_N} r_t dt \right) 1_{\{\tau > t_N\}} \right] \\ &= E \left[ \exp \left( - \int_0^{t_N} (r_t + \lambda_t) dt \right) \right] \end{aligned}$$

### 3.2.3 Le modèle Longstaff-Mithal-Neis

L'approche du modèle Longstaff, Mithal, Neis [7] [2004] est une approche qui consiste à déterminer la part de la composante défaut dans le *spread* en faisant intervenir l'information disponible dans la valorisation des CDS. Il en résulte, une composante de non défaut dans le *spread* de l'obligation, qui est attribuée au risque de liquidité et au risque de taux. Ce modèle présente par ailleurs deux avantages majeurs : il existe des formules fermées pour calculer le prix des zéro-coupon, et il est compatible avec tous les modèles de taux sans risque. Il est donc possible d'utiliser le modèle AFNS présenté en amont de ce chapitre, pour la modélisation du taux sans risque.

Il est important de noter que le modèle Longstaff-Mithal-Neis n'explique pas directement la cause du défaut. Il s'intéresse plutôt à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises, défaut pouvant survenir à tout moment. Cette modélisation repose sur l'utilisation de quatre facteurs qui sont les suivants :

- $r_t$  désigne le taux sans risque effective à la date  $t$
- $\lambda_t$  désigne l'intensité d'un processus de Poisson qui traduit le défaut
- $\gamma_t$  traduit le risque de liquidité
- $1 - w$  désigne le taux de recouvrement

Ces processus stochastiques sont indépendants les uns des autres. Ces hypothèses semblent grossières mais leur impact est minime compte tenu des résultats empiriques. Le taux d'intérêt d'une obligation risquée s'écrit alors de la manière suivante :

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon est donné par :

$$D(T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right]$$

Le processus d'intensité est donné par :

$$d\lambda = (\alpha - \beta\lambda)dt + \sigma\sqrt{\lambda}dZ_\lambda$$

Avec  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$  sont des constantes positives et  $Z_\lambda$  un mouvement brownien standard. Cette dynamique garantit que le processus d'intensité ne peut pas être négatif.

**Remarque 3.2.1 :** Pour définir entièrement le processus d'intensité, il faut introduire la valeur initiale  $\lambda^0$  du processus  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ . Ce processus est alors entièrement défini par les quatre paramètres suivants :  $\alpha, \beta, \sigma$  et  $\lambda^0$ .

Le processus de liquidité  $\gamma$  est donné par :

$$d\gamma = \eta dZ_\gamma$$

Avec  $\eta$  une constante positive et  $Z_\gamma$  un mouvement brownien standard. Cette dynamique permet au processus de prendre des valeurs positives ou négatives. La valeur initiale  $\eta^0$  doit également être fournie pour définir entièrement  $(\eta_t)_{t \geq 0}$ .

Dans leur article, Longstaff, Mithal et Neis considèrent que le risque de liquidité ne s'applique qu'aux obligations *corporate*. Leur article étant paru en 2004, cette hypothèse n'a plus la même valeur aujourd'hui, et les formules de valorisations utilisées dans cette étude font donc apparaître la composante de liquidité pour toutes les obligations. La formule de *pricing* d'une obligation de remboursement in fine, de nominal 1, de taux de recouvrement  $(1 - w)$  et versant un taux de coupon  $c$  de manière continue, s'écrit :

$$CB(c, w, T) = E \left[ c \int_0^T \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds \right) dt \right] + E \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt \right) \right] \\ + E \left[ (1 - w) \int_0^T \lambda_t \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds \right) dt \right]$$

Le premier terme désigne la valeur actuelle du coupon promis par l'obligation, le deuxième terme désigne la valeur actuelle du paiement nominal, et le troisième désigne la valeur actuelle du recouvrement des paiements en cas de défaut. Dans chaque terme, les *cash-flow* sont minorés au taux ajusté  $r_t + \lambda_t + \gamma_t$ . Dans leur article, Longstaff, Mithal et Neis, proposent également une version fermée des formules :

$$CB(c, w, T) = c \int_0^T P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt + P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\ + (1 - w) \int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt$$

Avec :

$$P(X, t) = E_Q \left[ \exp \left( - \int_0^t r_u du \right) \right]$$

$$F(\lambda, t) = E_Q \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda_u du \right) \right] = A(t) e^{\lambda B(t)}$$

$$W(\lambda, t) = E_Q \left[ \lambda_t \exp \left( - \int_0^t \lambda_u du \right) \right] = (G(t) + \lambda H(t)) e^{\lambda B(t)}$$

$$V(\gamma, t) = E_Q \left[ \exp \left( - \int_0^t \gamma_u du \right) \right] = C(t) e^{-\gamma t}$$

Et :

$$A(t) = \exp \left( \frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t \right) \left( \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)$$

$$B(t) = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi t})}$$

$$C(t) = \exp \left( \frac{\eta^2 t^3}{6} \right)$$

$$G(t) = \frac{\alpha}{\phi} (e^{\phi t} - 1) \exp \left( \frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t \right) \left( \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1}$$

$$H(t) = \exp \left( \frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi \sigma^2}{\sigma^2} t \right) \left( \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 2}$$

$$\phi = \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}$$

$$\kappa = (\beta + \phi) / (\beta - \phi)$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
CB(c, w, T) &= c \int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) e^{-\gamma t} dt \\
&\quad + A(T) \exp(B(T)\lambda) C(T) D(T) e^{-\gamma T} \\
&\quad + (1 - w) \int_0^T \exp(B(t)\lambda) C(t) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) e^{-\gamma t} dt
\end{aligned}$$

Le modèle fournit également une formule de valorisation pour les CDS. Il est important de noter que le CDS est un contrat et non un titre, ce qui le rend moins sensible au risque de liquidité. En effet, si le détenteur d'un contrat CDS souhaite le revendre, il lui suffit de prendre la position inverse en achetant ou vendant un autre contrat *swap* qui permute les flux du contrat précédent. Ainsi, le processus  $\gamma$  n'intervient pas dans la valorisation. Dorénavant,  $s$  désigne la prime payée par l'acheteur de protection en faisant l'hypothèse que cette prime est payée en continue. Soit un CDS de maturité  $T > 0$  sur une obligation de nominal 1 et de *Loss Given Default*  $w$ . La valeur actuelle de la jambe  $P(s, T)$  peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$P(s, T) = E \left[ s \int_0^T \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right]$$

La jambe de protection  $PR$  est donnée par :

$$PR(w, T) = E \left[ w \int_0^T \lambda_t \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right]$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, il y a équilibre des deux engagements à l'émission du contrat :

$$P(s, T) = PR(w, T)$$

$$E \left[ s \int_0^T \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right] = E \left[ w \int_0^T \lambda_t \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right]$$

La prime payée par l'acheteur de protection peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$s(w, T) = \frac{E \left[ w \int_0^T \lambda_t \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right]}{E \left[ \int_0^T \exp \left( - \int_0^t r_s + \lambda_s ds \right) dt \right]}$$

Par ailleurs, si  $\lambda$  n'est pas stochastique, la prime  $s$  devient simplement  $\lambda w$ . En réutilisant les notations utilisées pour la formule fermée du prix d'une obligation, la prime CDS se réécrit :

$$s(w, T) = w \frac{\int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) dt}{\int_0^T P(X, t) F(\lambda, t) dt}$$

Soit

$$s = \frac{w \int_0^T \exp(B(t)\lambda) D(t) (G(t) + H(t)\lambda) dt}{\int_0^T A(t) \exp(B(t)\lambda) D(t) dt}$$

### 3.3 Calibration des paramètres de modèle

Le modèle LMN repose sur une hypothèse d'indépendance des sources de risque, qui rend le modèle relativement simple. Pour autant l'étape de calibration est complexe dans la mesure où l'objectif est de reproduire, le mieux possible, les prix de marchés aux caractéristiques diverses (maturité, coupon ...). La calibration se fait en deux étapes majeures :

- La première étape consiste à calibrer le processus de Poisson  $(\lambda_t)_{t \geq 0}$  en minimisant l'erreur de réplication des primes CDS.
- La deuxième étape consiste à calibrer le processus  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  en minimisant l'erreur de réplication des obligations en utilisant les paramètres de crédit de la première étape.

Comme mentionné dans la première étape, les paramètres de défaut sont exclusivement calibrés sur les données des primes de CDS, ce qui garantit que la composante défaut contient uniquement l'information de défaut. Ce n'est pas le cas des modèles qui se calibrent par réplication des probabilités de défaut monde-réel. En effet dans ces modèles, l'information extraite n'est pas l'information implicite associée à l'anticipation qu'a le marché sur le défaut, mais l'information sur un historique. Pour comprendre la différence entre ces deux schémas de fonctionnement, il est possible de faire l'analogie avec les volatilités implicites et historiques. Ces deux approches diffèrent de la même manière que les deux approches de calibration.

Comme vu précédemment, le facteur d'actualisation  $r c_t$  se décompose en trois termes  $r_t$ ,  $\lambda_t$  et  $\gamma_t$  pour lesquels l'approche de calibration est différente.

Le taux sans risque  $r_t$  est modélisé selon l'approche du modèle AFNS dont la formule d'interpolation est la suivante :

$$R(t, T - t) = X_t^1 + X_t^2 * \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)} + X_t^3 \left( \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)} - e^{-\theta(T-t)} \right) - \frac{C(t, T)}{T-t}$$

Pour un  $\theta$  fixé, la calibration des paramètres  $X_t^1, X_t^2$  et  $X_t^3$  du modèle se réduit à un simple problème d'optimisation linéaire. Mais dans ce cas-ci, la valeur du paramètre  $\theta$  doit être optimale. Dans un premier temps, le paramètre  $\theta$  est optimisé pour minimiser l'écart quadratique des taux observés et des prédictions de ces taux. A l'intérieur de cette optimisation, la valeur de  $X_t = (X_t^1, X_t^2, X_t^3)$  est également optimisée. Une distinction est alors faite entre les paramètres extérieurs, qui ne dépendent pas du temps, ici  $\theta$ , et les paramètres intérieurs qui dépendent du temps, ici  $\beta$ .

Le processus d'intensité  $\lambda_t$  suit la dynamique stochastique suivante :

$$d\lambda = (\alpha - \beta\lambda)dt + \sigma\sqrt{\lambda}dZ_\lambda$$

Cette dynamique requiert une valeur initiale  $\lambda_0$  à partir de laquelle le processus se construit. Ainsi, la valorisation des primes CDS se réduit à la valeur du vecteur  $(\alpha, \beta, \sigma)$  et à la valeur de  $\lambda_0$ . Dans cet état-là, les valeurs de ces quatre paramètres sont fixées pour chaque pas de temps  $t$  et chaque maturité d'obligations. Or, après calibration, cette modélisation s'est avérée trop faible. Il a donc fallu chercher à dynamiser intelligemment les paramètres, en définissant ceux devant être extérieurs et ceux devant être intérieurs. Ainsi, le choix a été fait de conserver les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$  extérieurs et de dynamiser uniquement  $\lambda_0$ .

**Remarque 3.3.1 :** Le paramètre  $\lambda_0$  est doublement intérieur, puisqu'il dépend du pas de temps  $t$  et également de la maturité  $T$ .

**Remarque 3.3.2 :** Pour la calibration de la courbe des taux, cette dépendance n'est pas nécessaire puisque la maturité apparaît directement dans la dynamique Nelson-Siegel. Cette maturité n'apparaissant pas dans la modélisation du processus d'intensité  $\lambda$ , il existe donc un processus  $\lambda$  par pas de temps  $t$  et par maturité  $T$ , qui est noté  $\lambda_{t,T}$ .

**Remarque 3.3.3 :** En faisant le choix de ne dynamiser que le paramètre d'initialisation  $\lambda_0$ , définir un processus  $\lambda$  par pas de temps  $t$  et par maturité  $T$ , revient à définir un paramètre  $\lambda_0$  par pas de temps  $t$  et par maturité  $T$  ; le reste des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$ , étant indépendants du pas de temps et de la maturité.

Il est maintenant possible de définir une matrice  $M$  telle que  $M_{ij} = \lambda_0^{i,j}$  c'est-à-dire telle que l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne corresponde à la valeur de  $\lambda_0$  pour le pas de temps  $i$  et la maturité  $j$ . Cette matrice  $M$  est ensuite approchée avec un modèle Nelson-Siegel. Cette approximation est justifiée par le fait que  $\forall t > 0$ , la courbe traçant la fonction  $T \rightarrow M_t(T) = M_{t,T}$  s'apparente à une courbe de taux. La formule d'interpolation est la suivante :

$$\lambda_0^{t,T} = \beta_{1,t}^{\lambda_0} + \beta_{2,t}^{\lambda_0} \left( \frac{1 - e^{-\theta \lambda_0 T}}{\theta \lambda_0 T} \right) - \beta_{3,t}^{\lambda_0} \left( \frac{1 - e^{-\theta \lambda_0 T}}{\theta \lambda_0 T} - e^{-\theta \lambda_0 T} \right)$$

## Chapitre 4 : Application numérique : évaluation *spot* de la charge associée à la couverture du risque de défaut

Disposant d'un cadre de modélisation complet, il est possible d'évaluer le coût de la charge dans une vision *spot*, c'est-à-dire, vu d'aujourd'hui. Le montant de la charge dépend de l'aversion au risque de l'assureur. En effet, un acteur averse au risque de défaut aura tendance à contracter précipitamment des CDS et à les maintenir le plus longtemps possible. A l'inverse, un acteur non averse au risque tardera à contracter des CDS et les revendra précipitamment. Pour illustrer l'évaluation *spot* de la charge, l'exemple s'appuiera sur la méthode de couverture utilisée par le service ALM de la compagnie Malakoff Humanis.

### 4.1 Méthode de couverture appliquée chez Malakoff Humanis

Actuellement, le portefeuille d'obligations de la compagnie est soumis à une stratégie de *hedging*, ce qui offre une méthode d'évaluation du coût de la couverture.

Elle consiste à segmenter intelligemment le portefeuille d'obligations tel que chaque segment reflète le risque de défaut sous-jacent aux obligations qui s'y trouvent. Cette segmentation classe les obligations selon leur catégorie de *rating*. Il existe ainsi huit groupes d'obligations : AAA, AA, A, BBB, BB<sup>-</sup>, Allemagne, France et Périphérique. La catégorie BB<sup>-</sup> rassemble les obligations des catégories BB et moins.

A chaque premier du mois, l'information contenu dans la cotation des primes CDS est analysée de manière à pouvoir extraire les probabilités de défaut.

Une probabilité de défaut est calculée pour chaque segment de *rating* et chaque maturité. Soit  $t$  le premier jour du mois où les calculs sont effectués : l'ensemble de ces probabilités se présente de la manière suivante :

Maturité/ <i>Rating</i>	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	$p_{1,t}^{AAA}$	$p_{1,t}^{AA}$	$p_{1,t}^A$	$p_{1,t}^{BBB}$	$p_{1,t}^{BB^-}$	$p_{1,t}^{Allemagne}$	$p_{1,t}^{France}$	$p_{1,t}^{Périphérique}$
T = 2	$p_{2,t}^{AAA}$	$p_{2,t}^{AA}$	$p_{2,t}^A$	$p_{2,t}^{BBB}$	$p_{2,t}^{BB^-}$	$p_{2,t}^{Allemagne}$	$p_{2,t}^{France}$	$p_{2,t}^{Périphérique}$
T = 3	$p_{3,t}^{AAA}$	$p_{3,t}^{AA}$	$p_{3,t}^A$	$p_{3,t}^{BBB}$	$p_{3,t}^{BB^-}$	$p_{3,t}^{Allemagne}$	$p_{3,t}^{France}$	$p_{3,t}^{Périphérique}$
T = 4	$p_{4,t}^{AAA}$	$p_{4,t}^{AA}$	$p_{4,t}^A$	$p_{4,t}^{BBB}$	$p_{4,t}^{BB^-}$	$p_{4,t}^{Allemagne}$	$p_{4,t}^{France}$	$p_{4,t}^{Périphérique}$
T = 5	$p_{5,t}^{AAA}$	$p_{5,t}^{AA}$	$p_{5,t}^A$	$p_{5,t}^{BBB}$	$p_{5,t}^{BB^-}$	$p_{5,t}^{Allemagne}$	$p_{5,t}^{France}$	$p_{5,t}^{Périphérique}$

T = ...	$p_{...}^{AAA}$	$p_{...}^{AA}$	$p_{...}^A$	$p_{...}^{BBB}$	$p_{...}^{BB^-}$	$p_{...}^{Allemagne}$	$p_{...}^{France}$	$p_{...}^{Périphérique}$
---------	-----------------	----------------	-------------	-----------------	------------------	-----------------------	--------------------	--------------------------

Avec  $p_{i,t}^G$  la probabilité de défaut des obligations de segment  $G$  et de maturité résiduelle  $i$  vu de  $t$ . Ces probabilités sont comparées à celle du mois précédent, en mesurant leur évolution relative : pour chaque segment d'obligations  $G$  et maturité résiduelle  $i > 1$ , le ratio suivant est calculé :

$$r_{i,t}^G = \frac{p_{i,t}^G - p_{i+1,t-1}^G}{p_{i+1,t-1}^G}$$

Cela donne le tableau suivant :

Maturité/Rating	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^{AA}$	$r_{1,t}^A$	$r_{1,t}^{BBB}$	$r_{1,t}^{BB^-}$	$r_{1,t}^{Allemagne}$	$r_{1,t}^{France}$	$r_{1,t}^{Périphérique}$
T = 2	$r_{2,t}^{AAA}$	$r_{2,t}^{AA}$	$r_{2,t}^A$	$r_{2,t}^{BBB}$	$r_{2,t}^{BB^-}$	$r_{2,t}^{Allemagne}$	$r_{2,t}^{France}$	$r_{2,t}^{Périphérique}$
T = 3	$r_{3,t}^{AAA}$	$r_{3,t}^{AA}$	$r_{3,t}^A$	$r_{3,t}^{BBB}$	$r_{3,t}^{BB^-}$	$r_{3,t}^{Allemagne}$	$r_{3,t}^{France}$	$r_{3,t}^{Périphérique}$
T = 4	$r_{4,t}^{AAA}$	$r_{4,t}^{AA}$	$r_{4,t}^A$	$r_{4,t}^{BBB}$	$r_{4,t}^{BB^-}$	$r_{4,t}^{Allemagne}$	$r_{4,t}^{France}$	$r_{4,t}^{Périphérique}$
T = 5	$r_{5,t}^{AAA}$	$r_{5,t}^{AA}$	$r_{5,t}^A$	$r_{5,t}^{BBB}$	$r_{5,t}^{BB^-}$	$r_{5,t}^{Allemagne}$	$r_{5,t}^{France}$	$r_{5,t}^{Périphérique}$
T = ...	$r_{...}^{AAA}$	$r_{...}^{AA}$	$r_{...}^A$	$r_{...}^{BBB}$	$r_{...}^{BB^-}$	$r_{...}^{Allemagne}$	$r_{...}^{France}$	$r_{...}^{Périphérique}$

Plus le ratio  $r_{i,t}^G$  est grand (petit) plus le risque de défaut est à la hausse (baisse). Au-delà d'un certain seuil  $a^G > 0$ , un CDS est contracté sur les obligations du segment  $G$  et de maturité résiduelle  $i$ , si elles ne sont pas déjà couvertes.

A l'inverse, si le ratio  $r_{i,t}^G$  passe en dessous d'un autre seuil  $v^G < 0$ , le CDS est vendu.

Ainsi, chaque obligation est associée à un couple *rating*-maturité  $(G, T)$  à partir duquel est calculé un indicateur de risque de défaut. Cet indicateur est comparé à la valeur des seuils d'achat  $a^G$  et de vente  $v^G$  uniquement déterminé par la catégorie de *rating*  $G$ .

Les seuils sont les suivants :

<i>Rating G</i>	Seuils d'achat $a^G$	Seuils de vente $v^G$
AAA	0.60	-0.40
AA	0.60	-0.40
A	0.55	-0.40
BBB	0.50	-0.45
BB <sup>-</sup>	0.40	-0.55
Allemagne	0.60	-0.40
France	0.57	-0.43
Périphérique	0.42	-0.50

A une date d'évaluation  $t$ , il existe trois situations possibles pour un couple *rating*-maturité  $(G, T)$ :

- Les obligations du couple ne sont pas couvertes mais le ratio n'excède pas  $a^G$  : les obligations sont maintenues en portefeuille sans couverture
- Les obligations du couple ne sont pas couvertes et le ratio excède  $a^G$  : Un CDS est contracté sur les obligations associées au couple  $(G, T)$  avec un nominal égal à celui des obligations.
- Les obligations du couple sont couvertes et le ratio se situe au-dessus du seuil de vente  $v^G$  : les obligations sont maintenues en portefeuille avec une couverture

## 4.2 Calcul de la charge dans une vision *spot*

Pour illustrer la méthode de couverture dans un cas concret, l'exemple suivant est présenté :

Au 01/10/21 le service ALM souhaite évaluer le coût de couverture sur 5 ans de ses obligations d'échéance maximale 10 ans. La dernière modification de la couverture date du 01/09/21 et elle se présente sous la forme suivante :

	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert
T = 2	Nu	Nu	Nu	Couvert	Couvert	Nu	Nu	Couvert
T = 3	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert	Nu	Nu	Nu
T = 4	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 5	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert	Nu	Nu	Nu
T = 6	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu

T = 7	Nu							
T = 8	Nu							
T = 9	Nu							
T = 10	Nu							

L'ensemble des primes versées sur 5 ans pour maintenir cette couverture s'élève à 92 500 000 euros au 01/10/21.

Les probabilités de défaut observées aux dates 01/10/21 et 01/09/21 sont extraites pour les différents segments et maturités à partir de cotations des CDS. En effectuant le ratio des probabilités pour mesurer l'évolution relative du risque de défaut, le service dispose des tableaux suivants :

	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	0.11	0.15	0.13	-0.13	0.12	-0.13	-0.05	0.04
T = 2	0.08	-0.12	0.08	0.12	-0.57	-0.03	-0.11	-0.02
T = 3	-0.01	-0.01	-0.21	-0.11	-0.21	-0.13	-0.11	0.11
T = 4	0.12	0.02	0.12	0.14	0.03	0.11	-0.02	0.21
T = 5	0.17	-0.03	0.17	0.33	0.22	-0.11	-0.03	0.47
T = 6	-0.15	-0.11	-0.15	0.09	0.16	-0.14	-0.09	0.13
T = 7	0.15	-0.11	0.15	0.17	0.12	0.12	-0.08	0.07
T = 8	0.10	0.03	0.10	-0.05	0.09	0.13	0.13	0.02
T = 9	-0.19	0.09	-0.21	-0.08	-0.23	-0.19	-0.07	0.09
T = 10	-0.07	0.13	-0.07	0.12	-0.22	-0.01	-0.12	-0.01

FIGURE 4.2 - Évolutions des probabilités de défaut entre le 01/09/21 et le 01/10/21

Seuils achats	0.60	0.60	0.55	0.50	0.40	0.60	0.57	0.42
Seuils ventes	-0.40	-0.40	-0.40	-0.45	-0.55	-0.40	-0.43	-0.50

FIGUR 4.3 - Seuils de confiance pour les achats et ventes de CDS

Dans cet exemple, la couverture est à modifier pour les deux cas suivants :

- Le ratio  $r_2^{BB^-}$  se situe en dessous du seuil de ventes  $v^{BB^-}$  alors que les obligations sont couvertes. Cela signifie que le risque de défaut s'est amélioré.

L'ensemble des primes à verser sur 5 ans pour couvrir ce segment d'obligations de maturité résiduelle 2 ans s'élevait à 12 000 000 d'euros. Les CDS correspondants sont vendus.

- Le ratio  $r_5^{Périphérique}$  se situe au-dessus du seuil d'achats  $a^{Périphérique}$  alors que les obligations ne sont pas couvertes. Cela signifie que le risque de défaut s'est détérioré. Un CDS est alors contracté sur les obligations du segment Périphérique et de maturité résiduelle 5 ans. Le montant nécessaire pour couvrir l'ensemble de ces obligations jusqu'à leur échéance est de 17 000 000 d'euros.

Aucune modification n'est apportée pour le reste des obligations. Ainsi, la vision *spot* du coût de couverture est de :

$$\text{coût existant} + \text{nouvelles primes} - \text{primes cédées}$$

Soit

$$92\,500\,000 + 17\,000\,000 - 12\,000\,000 = 97\,500\,5000$$

La charge associée à la couverture des obligations sur 5 ans est donc de 97 500 000 euros, et la couverture au 01/10/21 est :

	AAA	AA	A	BBB	BB <sup>-</sup>	Allemagne	France	Périphérique
T = 1	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert
T = 2	Nu	Nu	Nu	Couvert	<b>Nu</b>	Nu	Nu	Couvert

T = 3	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert	Nu	Nu	Nu
T = 4	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 5	Nu	Nu	Nu	Nu	Couvert	Nu	Nu	<b>Couvert</b>
T = 6	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 7	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 8	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 9	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
T = 10	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu

La couverture est donc réévaluée chaque mois à l'aide de l'information de défaut contenu dans les CDS à la date de réévaluation. Il s'agit donc d'une vision *spot*. Or, l'objectif de cette étude est de projeter la méthode de couverture. Ainsi, à chaque pas de temps de projection  $t$  il sera nécessaire de prendre en compte l'évolution future du risque de défaut « vu de  $t$  », et non vu d'aujourd'hui.

Il aurait été possible de s'affranchir du besoin de projection en disposant d'une structure par terme des probabilités de défaut. Dans un tel cas, le temps de défaut est simulé par un processus de Poisson inhomogène, ce qui reviendrait à simuler un temps de défaut pour chaque segment. Cependant, la granularité des segments ne permettrait pas une calibration performante et il conviendrait alors de simuler un temps de défaut pour chaque titre. C'est opérationnellement impossible à cause du temps de calcul.

# PARTIE III : Projection de la charge associée à la couverture du risque de défaut

Chapitre 1 : Utilisation du Générateur de Scénarios Économiques	41
1.1. Présentation générale des Générateurs de Scénarios Économiques	41
1.1.1 le Générateur de Scénarios Économiques monde-réal .....	41
1.1.2 le Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre .....	42
1.2. Présentation du Générateur de Scénarios Économiques de Malakoff Humanis	42
Chapitre 2 : Création d'un indicateur de défaut dynamique à l'aide d'un GSE	47
2.1 Construction de l'indicateur	47
2.2 Projection de la couverture en fonction de l'indicateur	49
Chapitre 3 : Application numérique : évaluation de la charge projetée	52
Chapitre 4 : Outil de pilotage - réévaluation de la politique de couverture	57
4.1 Mise en place	57
4.2 Étapes de l'algorithme	61
4.3 Application	63

Disposant d'une méthode de couverture *spot* pour les obligations du portefeuille et d'un modèle de valorisation des primes CDS, il est donc possible d'évaluer la charge associée à la couverture des obligations contre le risque de défaut. L'objectif de cette partie est d'obtenir une évaluation prospective. Il convient alors de mettre en place une méthode pour simuler le risque de défaut sur 5 ans et d'appliquer, pour chaque pas de simulation, la stratégie de couverture. A terme, la somme totale des flux donnera alors une estimation du coût de couverture.

# Chapitre 1 : Utilisation du Générateur de Scénarios Économiques

En adoptant une méthode de couverture, la charge peut être évaluée *spot*. Pour dynamiser la stratégie de couverture et obtenir une vision prospective de la charge, il est nécessaire d'utiliser un outil de projection performant : le Générateur de Scénarios Économiques.

## 1.1. Présentation générale des Générateurs de Scénarios Économiques

Une réflexion sur la projection des actifs est indispensable pour le pilotage technique d'un organisme assureur, notamment pour la gestion dite actif-passif et pour réaliser des processus d'optimisation de portefeuille. Ainsi, un outil solide appelé Générateur de Scénarios Économiques (GSE) a été créé pour répondre à ces besoins. Un GSE correspond à une projection sur un certain horizon de grandeurs économiques et financières en se basant sur un ensemble de modèles financiers stochastiques implémentés numériquement à l'aide de techniques de simulation de type Monte-Carlo. L'objectif est d'envisager le champ des possibles et non de prédire l'évolution future d'un actif financier.

Parmi les GSE se distinguent deux grandes familles : les GSE dits « monde-réel » et les GSE dits « risque-neutre ». Ces notions sont fondamentales puisque l'utilisation de plusieurs modèles financiers stochastiques fondés sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage peuvent nécessiter la spécification d'un cadre mathématique où cohabitent les mesures de probabilité monde-réel et risque neutre.

### 1.1.1 le Générateur de Scénarios Économiques monde-réel

La valeur future des grandeurs économiques et financières est aléatoire, mais lorsque les distributions historiques de ces grandeurs sont étudiées, il est possible d'observer des caractéristiques statistiques (épaisseur de queue, tendance, asymétrie...). Il est ainsi possible d'en approcher la dynamique. Les événements futurs, incertains, sont alors associés à une probabilité objective, appelée probabilité historique.

Sous cette probabilité, le prix des actifs intègre l'aversion aux risques des acteurs, c'est-à-dire une prime de risque pour compenser une perte potentielle liée aux risques sous-jacents. Ces risques n'étant pas les mêmes selon les différentes classes d'actifs, il en découle que les rendements espérés ne sont pas non plus les mêmes.

Le GSE sous probabilité historique, doit donc générer des trajectoires réalistes, c'est-à-dire des trajectoires dans lesquelles se retrouvent les propriétés statistiques observées sur les données historiques

### 1.1.2 le Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre

Dans l'univers risque-neutre, les agents économiques sont neutres à l'égard du risque c'est-à-dire que les primes de risques sont toutes nulles. Les actifs ont le même rendement, celui du taux sans risque. Les prix des produits financiers peuvent être ainsi calculés plus simplement à l'aide de l'espérance des *payoff* futurs actualisés au taux sans risque.

Dans l'univers risque-neutre, les dynamiques des prix des actifs dépendent des paramètres de modèle qui sont calibrés sur les prix observés. Ainsi, il est nécessaire que les prix de marché soient fiables.

## 1.2. Présentation du Générateur de Scénarios Économiques de Malakoff Humanis

Pour illustrer la méthodologie, nous nous appuyerons sur l'exemple du GSE développé au sein du service ALM de Malakoff Humanis. Ce GSE est à la fois monde-réel et risque-neutre. Celui-ci projette en monde-réel la valeur des taux et des *spread* sur une suite de pas de temps  $(t_i)_{i \in [1, N]}$ . A chaque pas de temps, il calibre les paramètres intervenant dans le cadre de valorisation décrit précédemment (modèles LMN, NS, AFNS) dans une vision risque-neutre. Les intervalles de temps sont réguliers et correspondent à un mois, ce qui signifie que :

$$\forall i \neq j, t_{i+1} - t_i = t_{j+1} - t_j = 1 \text{ mois}$$

Le nombre de scénarios monde-réel à simuler est paramétrable. Plus ce nombre est élevé, plus les résultats en sortie sont fiables mais plus cela exige des capacités de calculs importantes. Ainsi, il est nécessaire de trouver un compromis pour optimiser l'arbitrage entre la fiabilité des résultats et le temps de calcul. En pratique, les simulations se font sur un ensemble  $\Omega_S$  de 1000 scénarios tels que :

$$\Omega_S = \{S_1, S_2, \dots, S_{1000}\}$$

La modélisation et la projection de l'ensemble de l'activité de la compagnie nécessitent un très grand nombre de paramètres mais dans la suite du rapport, seuls les paramètres servant à la modélisation du portefeuille obligataire interviennent. Ainsi, l'étude se restreint uniquement à un nombre précis de paramètres pour chaque obligation. Comme vu précédemment, la valorisation d'une obligation et de sa prime CDS dans le modèle Longstaff-Mithal-Neis reposent sur les trois composantes  $r_t$ ,  $\lambda_t$  et  $\gamma_t$  dont les dynamiques sont rappelées ci-dessous :

Le taux sans risque  $r_t$  est approché par la dynamique AFNS :

$$R(t, T - t) = X_t^1 + X_t^2 * \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)} + X_t^3 \left( \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)} - e^{-\theta(T-t)} \right) - \frac{C(t, T)}{T-t}$$

Les processus d'intensité et de liquidité sont donnés par :

$$d\lambda = (\alpha - \beta\lambda)dt + \sigma\sqrt{\lambda}dZ_\lambda$$

Et

$$d\gamma = \eta dZ_\gamma$$

Avec  $\lambda_0$  et  $\gamma_0$  les valeurs initiales des dynamiques, approchées par un modèle Nelson-Siegel. Cela porte à 9 le nombre de paramètres intérieurs à diffuser dans le GSE pour une seule obligation. Pour tout  $t > 0$ , ces paramètres sont :

- Pour le processus  $r_t : X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t}$
- Pour le processus  $\lambda_t : \beta_{1,t}^{\lambda_0}, \beta_{2,t}^{\lambda_0}, \beta_{3,t}^{\lambda_0}$
- Pour le processus  $\gamma_t : \beta_{1,t}^{\gamma_0}, \beta_{2,t}^{\gamma_0}, \beta_{3,t}^{\gamma_0}$

**Remarque 1.2.1** : Les paramètres dépendent d'un pas de temps  $t$  et d'un scénario. L'approximation des paramètres  $\lambda_0$  et  $\gamma_0$  par un modèle Nelson-Siegel implique que ceux-ci dépendent également d'une maturité fixe, puisque la formule d'interpolation de ce modèle fait intervenir une maturité.

Ainsi, le nombre de paramètres s'avère très élevé puisqu'ils ne sont valables que pour une seule obligation, un seul pas de temps  $t$ , un seul scénario et une seule maturité. En reprenant la notation introduite en début de partie, la complexité de l'algorithme en temps de calcul croît en même temps que  $N$  et que le nombre d'obligations présentes en portefeuille.

Il est possible d'améliorer la complexité de l'algorithme en regroupant les obligations selon des caractéristiques communes. Ainsi, à pas de temps  $t$  et maturité  $T$  fixés, il n'est plus nécessaire de calculer les paramètres pour chaque obligation, mais pour chaque type d'obligations. La segmentation reprend celle de la stratégie de couverture adoptée chez Malakoff Humanis.

La segmentation des obligations *corporate* est alors :

- Groupe *AAA*
- Groupe *AA*
- Groupe *A*
- Groupe *BBB*
- Groupe *BB<sup>-</sup>*

Et la segmentation des obligations gouvernementales est :

- Groupe Allemagne (comprenant notamment l'Autriche, la Belgique et le Luxembourg)
- Groupe France (comprenant notamment l'Angleterre)
- Groupe Périphérique (comprenant notamment l'Italie, l'Espagne et le Portugal)

Cette restructuration des données permet donc de réduire très efficacement la complexité. Les modèles ne sont plus appliqués à chaque obligation individuelle, mais seulement à huit groupes d'obligations.

A chaque maturité  $T > 0$ , chaque pas de temps  $t \in [0, T]$ , chaque scénario  $S_k$ , où  $k \in \{1, \dots, 1000\}$  et chaque groupe d'obligation  $G$  parmi les huit possibles, le Générateur de Scénarios Économiques calibre les 9 paramètres mentionnés précédemment et qui sont regroupés dans un vecteur noté  $\rho_{t,T}^{S_k,G}$  tel que :

$$\rho_{t,T}^{S_k,G} = \left( X_{1,t}, X_{2,t}, X_{3,t}, \beta_{1,t}^{\lambda_0}, \beta_{2,t}^{\lambda_0}, \beta_{3,t}^{\lambda_0}, \beta_{1,t}^{\gamma_0}, \beta_{2,t}^{\gamma_0}, \beta_{3,t}^{\gamma_0} \right)_{T,S_k,G}$$

En agrégeant ces vecteurs sur l'ensemble des huit groupes d'obligations existant, un nouveau vecteur  $\rho_{t,T}^{S_k}$  est introduit tel que :

$$\rho_{t,T}^{S_k} = \begin{bmatrix} \rho_{t,T}^{S_k,AAA} \\ \rho_{t,T}^{S_k,AA} \\ \rho_{t,T}^{S_k,A} \\ \rho_{t,T}^{S_k,BBB} \\ \rho_{t,T}^{S_k,BB^-} \\ \rho_{t,T}^{S_k,Allemagne} \\ \rho_{t,T}^{S_k,France} \\ \rho_{t,T}^{S_k,Péripherique} \end{bmatrix}$$

Il s'agit donc du vecteur de paramètres des huit groupes d'obligations pour une maturité  $T > 0$ , un pas de temps  $t \in [1, T]$  et un scénario  $S_k$ , avec  $k \in [1, \dots, 1000]$ . Par la suite, la notation suivante sera également adoptée :

$$\Omega_G = \begin{bmatrix} AAA \\ AA \\ A \\ BBB \\ BB^- \\ Allemagne \\ France \\ Péripherique \end{bmatrix}$$

Il s'agit du vecteur regroupant l'ensemble des segments possibles pour les obligations *corporate* et souveraines.

L'architecture du GSE permet de moduler sa sortie, de sorte qu'il est possible de rendre visible des paramètres calibrés, normalement inobservables. Ainsi, à chaque pas de temps  $t \in [1, T]$ , le GSE est en capacité d'extraire le vecteur suivant :

$$(\rho_{t,T}^{S_k})_{T>0, k \in [1, \dots, 1000]}$$

L'extraction de ces données inobservables pour chaque pas de temps  $t \in [1, t_N]$  permet d'utiliser les variables de sortie du GSE pour des calculs annexes, sans avoir à intégrer ces calculs dans le GSE lui-même. De cette manière, une seule exécution du GSE suffit, ce qui assure aux calculs un coût particulièrement faible comparé au temps de calcul nécessaire à la calibration des paramètres de modèles à travers le GSE. Pour autant, le coût reste une variable déterminante puisque le nombre de données manipulées est très grand, comme en témoigne le paramétrage final, qui est le suivant :

- $n = 1\,000$  scénarios
- $n_t = 60$  pas de temps mensuels, soit 5 ans
- $n_T = 360$  maturités mensuelles, soit 30 ans
- 9 paramètres de modèles
- $n_G = 8$  groupes d'obligations

Ce qui donne  $1\,000 * 240 * 360 * 9 * 8 = 1\,550\,200\,000$  paramètres en sortie. A titre de comparaison, dans un cadre idéal où les paramètres seraient calculés pour chaque obligation, comme les modèles sont construits à la base, le nombre de données serait de 194 milliards. Ainsi, la segmentation intelligente des obligations permet d'utiliser trente fois moins de données.

## Chapitre 2 : Création d'un indicateur de défaut dynamique à l'aide d'un GSE

L'utilisation d'un Générateur de Scénarios Économiques offre la possibilité de diffuser des séries temporelles dans le temps et de calibrer les paramètres de modèle. Les tables de GSE obtenues en sortie contiennent alors les valeurs des paramètres pour chaque pas de simulation et pour chaque scénario simulé. Pour projeter le risque de défaut dans le temps, il convient donc de créer un indicateur de défaut dynamique.

### 2.1 Construction de l'indicateur

Il est nécessaire de créer un indicateur de défaut pour projeter la stratégie d'achats-ventes de CDS en exploitant les scénarios simulés par le GSE. La décision d'acheter ou de vendre un CDS, devant être uniquement fonction du risque de défaut, la manière la plus naturelle de construire l'indicateur est d'isoler le processus de défaut  $\lambda$ , introduit dans la valorisation des obligations dans le modèle LMN. A chaque pas de temps de simulation, il est possible d'accéder aux valeurs que prend ce processus puisque le GSE est modulé ainsi. Ainsi, la première étape consiste à transformer le processus  $\lambda$  en un indicateur traduisant l'évolution du risque de défaut entre deux dates consécutives.

La construction d'un tel indicateur est très courante dans les activités de finance de marché, et en particulier pour des opérations de *trading* et elle représente le cœur de l'analyse technique, c'est-à-dire de l'analyse des mouvements de prix ou d'indicateurs de marché. De nombreux travaux de recherche ont été portés sur le développement de l'analyse technique qui dispose aujourd'hui d'un large choix d'indicateurs. Le plus simple des indicateurs techniques est la moyenne mobile, aussi appelée moyenne glissante ou *moving average* dans la littérature anglaise.

**Définition 2.1.1 :** (Moyenne mobile) *La moyenne à mobile à t jours d'un cours x correspond à la moyenne arithmétique de ce cours calculée sur les t derniers jours. Son expression mathématique est la suivante :*

$$\bar{x}_n = \frac{1}{t} * \sum_{k=0}^t x_{n-k}$$

La moyenne est dite « mobile » car elle est recalculée de façon continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien. La moyenne mobile est intéressante dans le cas de cette étude car elle est très efficace pour détecter des tendances. Cette méthode a l'avantage d'être très simple d'utilisation, mais elle s'avère

performante lorsque la fréquence d'observation est petite (souvent quotidienne). Or ici, ce n'est pas le cas puisque les données s'observent mensuellement. Il convient alors de favoriser un indicateur moins sensible à la fréquence d'observation. L'analyse technique ne manque pas de choix lorsqu'il s'agit de proposer un indicateur aux caractéristiques précises, mais pour assurer une interprétabilité de l'indicateur, il est préférable d'en sélectionner un construit simplement. Parmi eux, existe le *Rate Of Change* dont la définition est la suivante :

**Définition 2.1.2 :** (ROC) *L'indicateur ROC, Rate of Change ou « taux de variation » mesure le pourcentage de variation du prix actuel par rapport au prix d'un certain nombre de périodes antérieures.*

L'indicateur ROC peut être utilisé pour confirmer les mouvements de prix ou détecter des divergences. Soit  $t \geq 0$ , l'indicateur ROC réalise le ratio suivant :

$$ROC_t = ROC(t) = \left[ \frac{\text{cours}(t)}{\text{cours}(t-n)} - 1 \right] * 100$$

Avec  $n$  la période d'observation et  $\text{cours}(t)$  le cours du titre étudié à la date  $t$ . Le ROC est un indicateur de tendances haussières ou baissières sur des cours d'actifs financiers et l'objectif est d'appliquer le ROC au processus de défaut  $\lambda$  d'une obligation. En notant  $G$  le groupe de cette obligation,  $T$  sa maturité,  $S_k \in \Omega_S$  un scénario quelconque et  $t$  le pas de temps en cours, cela donne l'indicateur suivant :

$$ROC_t^{k,G,T} = ROC^{k,G,T}(t) = \left[ \frac{\lambda_t^{k,G,T}}{\lambda_{t-1}^{k,G,T}} - 1 \right] * 100$$

Il correspond à l'évolution relative de la composante de défaut  $\lambda_t^{k,G,T}$  entre deux dates consécutives  $t$  et  $t-1$ . Nous récupérons alors la série temporelle  $(ROC_t^{k,G,T})_{t \in [t_1 \dots t_N]}$ .

**Remarque 2.1 :** L'introduction d'un indicateur de variation nécessite de définir sa valeur initiale. Puisque l'indicateur traduit une variation relative entre deux valeurs consécutives de la composante de défaut, sa valeur initiale est :

$$ROC_{t_1}^{k,G,T} = 0\%$$

Avec 0% la valeur frontière entre les hausses et les baisses. Le choix de cette valeur est arbitraire et n'a pas de réelle importance. En effet, initialement, le portefeuille ne contient pas d'obligation exposée à un défaut immédiat, ce qui ne contraint pas le détenteur du portefeuille à envisager une éventuelle couverture dès le premier pas de temps.

## 2.2 Projection de la couverture en fonction de l'indicateur

Maintenant que l'indicateur de défaut est construit, il est possible de projeter la méthode d'achats-ventes de CDS en fonction des valeurs que prend cet indicateur. Pour rappel, il traduit l'évolution relative de la composante de défaut du modèle Longstaff-Mithal-Neis, utilisée dans la valorisation des obligations et des primes CDS.

Le vecteur  $q^G = (q^{G+}, q^{G-})$  est introduit et définit tel que,  $\forall t \in [t_1, t_N]$  :

- Si  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  et que le titre n'est pas déjà couvert, un CDS de maturité résiduelle et de nominal égal au nominal de l'obligation sous-jacente est contracté.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} > q^{G+}$  et que le titre est déjà couvert par un CDS, ce dernier est maintenu.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  et que le titre est couvert par un CDS, ce dernier est vendu.
- Si  $ROC_t^{k,G,T} < q^{G-}$  et que le titre n'est pas couvert par un CDS, la détention du titre est maintenue sans couverture.

Les réels  $q^{G+}$  et  $q^{G-}$  correspondent aux niveaux de confiance d'achats et de ventes de CDS introduits en 4.1 de la partie 2. Pour rappel ils traduisent deux « régions » d'alerte et de sécurité du risque de défaut. Dès lors que l'indicateur entre dans la région d'alerte, la couverture est mise en place si ce n'est pas déjà le cas. Dès que l'indicateur entre dans la région de sécurité, la couverture est annulée si elle existe. L'existence d'une région de sécurité offre ainsi la possibilité de revendre un CDS contracté si le risque de défaut sous-jacent s'est fortement amélioré.

Cette stratégie repose sur l'hypothèse forte que le marché des CDS n'est pas soumis au risque de liquidité, puisque pour tout pas de temps de projection  $t \in [t_1, t_N]$ , le détenteur du portefeuille à couvrir est en mesure d'acheter ou de vendre de tels contrats. Cela est cohérent avec le cadre de valorisation théorique car le modèle Longstaff-Mithal-Neis repose sur la même hypothèse. Il faut toutefois noter que cette hypothèse pose un grand problème pratique. En effet, lorsque l'indicateur dépasse un seuil d'alerte et entraîne une opération d'achat de CDS, rien n'assure l'existence d'un tel CDS aux caractéristiques souhaitées. Cette affirmation est d'autant plus vraie que les modalités d'un CDS côté sont standardisées par l'*International Swaps and Derivatives Association* et la Fédération Bancaire Européenne en définissant des principes relatifs à la définition des aléas de crédit, à l'univers des obligations concernées, aux

montants notionnels, aux primes, aux maturités et aux procédures de règlement suite à un aléa de crédit. Ainsi, le CDS demandé par l'algorithme pour une obligation en situation d'alerte de défaut peut être inexistant et la couverture devient fictive. Pour rappel, les CDS contractés doivent être de même valeur notionnelle et maturité résiduelle que les obligations du segment en situation d'alerte de risque de défaut. En notant  $R_{t_N}$  le nominal d'une l'obligation présente dans le segment, les deux problèmes possibles sont :

- Le CDS côté a un nominal  $R_{CDS}$  plus petit que celui de l'obligation. Dans ce cas l'algorithme ne se limite pas à l'achat d'un seul CDS, mais en achète autant qu'il faut pour couvrir la plus grande part du nominal possible. Soit  $m^* > 0$  la quantité de CDS à acheter. Alors  $m^*$  est défini tel que :

$$m^* = \operatorname{argmin}_{m \in \mathbb{N}^+} |R_{CDS} - mR_{t_N}|$$

- Le CDS côté a une échéance  $T_{CDS}$  plus petite que celle de l'obligation. Dans ce cas, il faut renouveler le CDS autant de fois que possible de manière à couvrir le plus longtemps l'obligation.

L'ensemble des opérations d'achats-ventes de CDS engendre des flux, correspondant aux primes de CDS de l'obligation, qui sont regroupés dans la série temporelle suivante :

$$\left( \varphi^{k,G,T}_t(q^G) \right)_{t \in [t_1, t_N]}$$

Le terme  $\varphi$  désigne la prime CDS. Le coût projeté se définit alors comme la somme des séries temporelles sur l'ensemble des pas de temps et des couples *rating*-maturité telle que :

$$\epsilon^k = \sum_{g \in \Omega_G} \sum_{T=1}^{T_{max}} \sum_{i=1}^N \varphi^{k,g,T}_{t_i}(q^g)$$

Il est important de noter que le coût  $\epsilon^{k,G,T}$  de la stratégie est fonction du vecteur  $q^G = (q^{G+}, q^{G-})$ , c'est-à-dire des seuils à partir desquels sont déclenchées des opérations d'achats-ventes de CDS. Cela signifie qu'il n'existe pas une unique stratégie de couverture, mais une infinité de possibilités. Le choix se fait donc selon l'arbitrage suivant :

- Le niveau de risque acceptable, traduit par les seuils  $q^{G+}$  et  $q^{G-}$
- Le coût acceptable, ou budget, traduit par  $\epsilon(q^G)$

La couverture peut donc se paramétrer de deux manières différentes selon les exigences de la direction. Dans le premier cas, la direction demande une estimation du coût de couverture sur un horizon de projection en renseignant les niveaux de confiance d'achats et de ventes, et la projection de l'indicateur de défaut jusqu'à l'horizon  $T$  offre une distribution du coût de couverture. Le deuxième cas présente le raisonnement inverse. Il s'agit du cas où la direction demande la politique de couverture à adopter en fonction d'un budget de couverture fixé

L'étude présentée dans ce rapport se place dans le premier cas. La direction fournit les niveaux de confiance pour chaque groupe d'obligation qui déterminent la valeur des seuils d'achats et de ventes. Il s'agit alors d'estimer le coût de la couverture sur 5 ans.

## Chapitre 3 : Application numérique : évaluation de la charge projetée

L'objectif de ce chapitre est de projeter l'indicateur d'évolution du risque de défaut. En appliquant l'algorithme d'achats-ventes de CDS à chaque pas de temps simulation, le coût projeté de couverture sera obtenu. Il suffira de sommer, au dernier pas de simulation, l'ensemble des flux engendrés. L'horizon fourni par la direction est de 5 ans, ce qui correspond à 60 mois donc autant de pas de temps de simulation.

La direction fournit également sa politique de risque pour chaque groupe d'obligation. Elle renseigne des seuils d'achats et de ventes au-delà desquels sont effectuées des opérations d'achats et ventes de CDS. Pour rappel, ces seuils sont les suivants :

<i>Rating G</i>	Niveau de confiance à l'achat	Niveau de confiance à la vente
AAA	0.60	-0.40
AA	0.60	-0.40
A	0.55	-0.40
BBB	0.50	-0.45
BB <sup>-</sup>	0.40	-0.55
Allemagne	0.60	-0.40
France	0.57	-0.43
Périphérique	0.42	-0.50

Par la suite, pour tout groupe d'obligations  $G$ , le vecteur  $Q_G$  est introduit de telle sorte que :

$$Q_G = (a^G, v^G)$$

C'est-à-dire le vecteur regroupant les seuils d'achats et de ventes de CDS pour le groupe d'obligations  $G$  et tels que :

$$a^G \in [0,1]$$

$$v^G \in [-1,0]$$

Il existe ainsi 8 vecteurs de ce type, correspondant aux 8 groupes d'obligations. La notation suivante est adoptée :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{AAA} \\ Q_{AA} \\ Q_A \\ Q_{BBB} \\ Q_{BB^-} \\ Q_{Allemagne} \\ Q_{France} \\ Q_{Périphérique} \end{bmatrix}$$

Il s'agit du vecteur regroupant les seuils déclenchant des opérations d'achats-ventes de CDS pour l'ensemble des 8 groupes d'obligations. Connaissant ce vecteur, il est désormais possible d'utiliser dynamiquement la méthode de couverture du portefeuille d'obligations. En considérant un scénario quelconque  $S_k$ , ou  $k \in [1, \dots, 1000]$ , et un groupe d'obligation  $G \in \Omega_G$ , la méthode de couverture engendre les vecteurs suivants :

$$\left( \varphi^{k,G}_t(Q_G) \right)_{t \in [t_1, t_N]}$$

$$\epsilon^{k,G}(Q_G) = \sum_{i=1}^N \varphi_{t_i}^{k,G}(Q_G)$$

Pour rappel, le premier vecteur regroupe les flux engendrés par la stratégie d'achat-ventes de CDS sur les maturités résiduelles, et  $\epsilon^{k,G,T}$  le coût de la stratégie à terme. En agrégeant les coûts de couverture pour l'ensemble des groupes d'obligations, le vecteur  $\left( \varphi^k_t(Q) \right)_{t \in [t_0, t_N]}$  regroupant les flux pour l'ensemble du portefeuille est construit, de sorte que :

$$\left( \varphi^k_t(Q) \right)_{t \in [t_1, t_N]} = \left( \sum_{G \in \Omega_G} \varphi_t^{k,G}(Q_G) \right)_{t \in [t_1, t_N]}$$

Le coût total est donné par :

$$\epsilon^k(Q) = \sum_{i=1}^N \left( \varphi^k_{t_i}(Q) \right)$$

En simulant l'ensemble des 1000 scénarios  $\Omega_S$ , le vecteur  $\epsilon^k$  prend 1000 valeurs différentes regroupées dans le vecteur suivant :

$$\left(\epsilon^k(Q)\right)_{k \in [1,1000]}$$

Il s'agit d'un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuées. Le graphique de la densité empirique pour l'année 5 est le suivant :

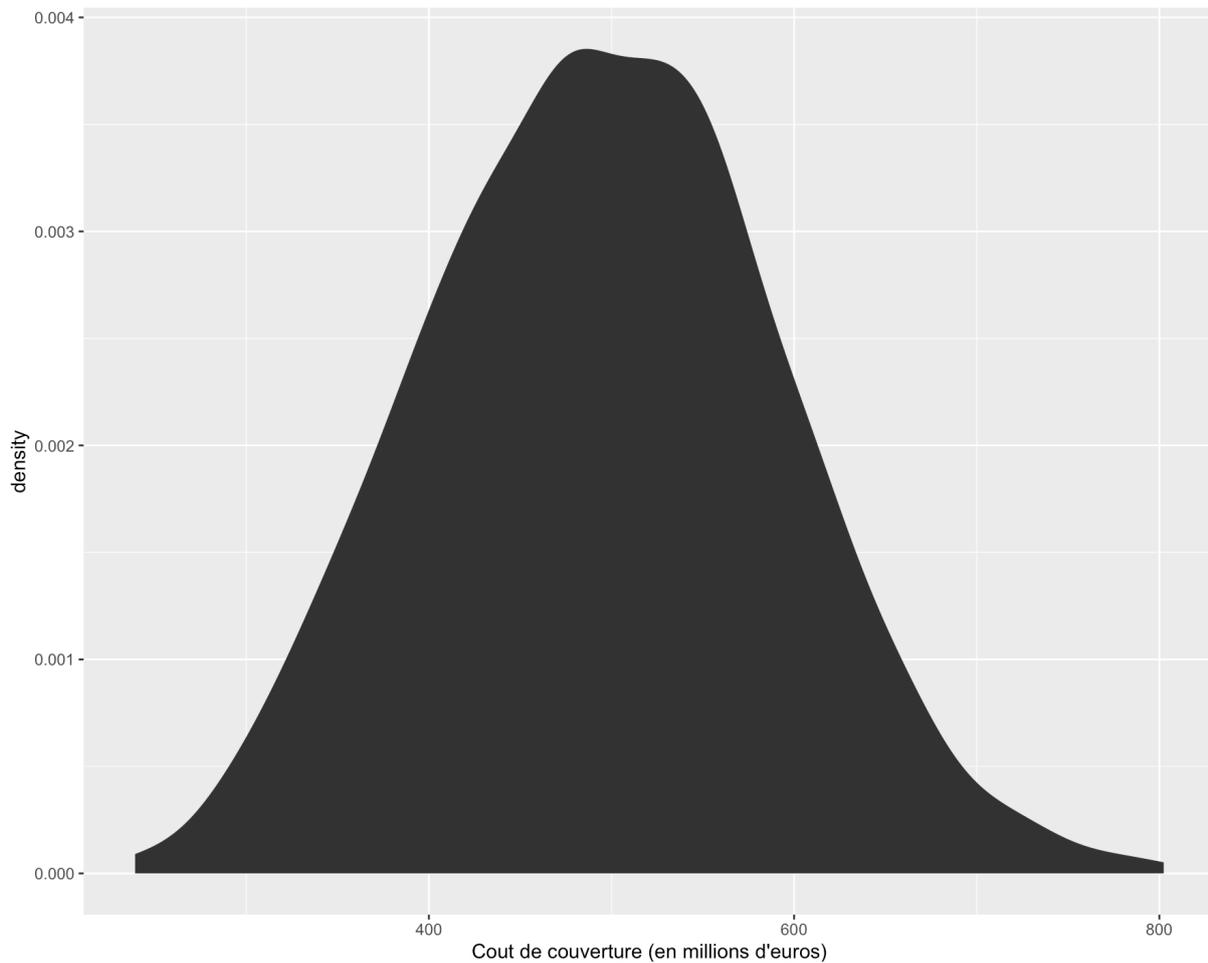


FIGURE 3.1 - Distribution du coût de couverture sur 5 ans

Le graphique montre qu'en 5 ans, le coût engendré par la couverture s'étend de 240 à 802 millions d'euros. L'étendue de l'échantillon est donc très importante puisque le pire scénario envisageable sur 5 ans de projection, engendre un budget quatre fois plus important que le meilleur scénario. Pour autant, la dispersion des données est faible puisqu'elles se situent dans un intervalle de valeurs plus étroit : entre 400 et 600 millions d'euros. Pour s'en convaincre, le tableau des statistiques descriptives est donné ci-dessous (les données sont en millions d'euros) :

Coût minimum	240
Coût moyen	495
Coût maximum	802
Quantile à 25%	426
Quantile à 50%	494
Quantile à 75%	559
Quantile à 90%	617
Quantile à 95%	655
Quantile à 99%	727
Écart-type	96

La valeur des quantiles et de l'écart-type montrent une dispersion modérée. En particulier, il apparaît que la moitié des données se situent entre 426 et 559 millions d'euros, ce qui offre une fourchette de valeurs possibles relativement étroite. Cela se visualise facilement en affichant la valeur des statistiques descriptives sur le graphique, comme ci-dessous :

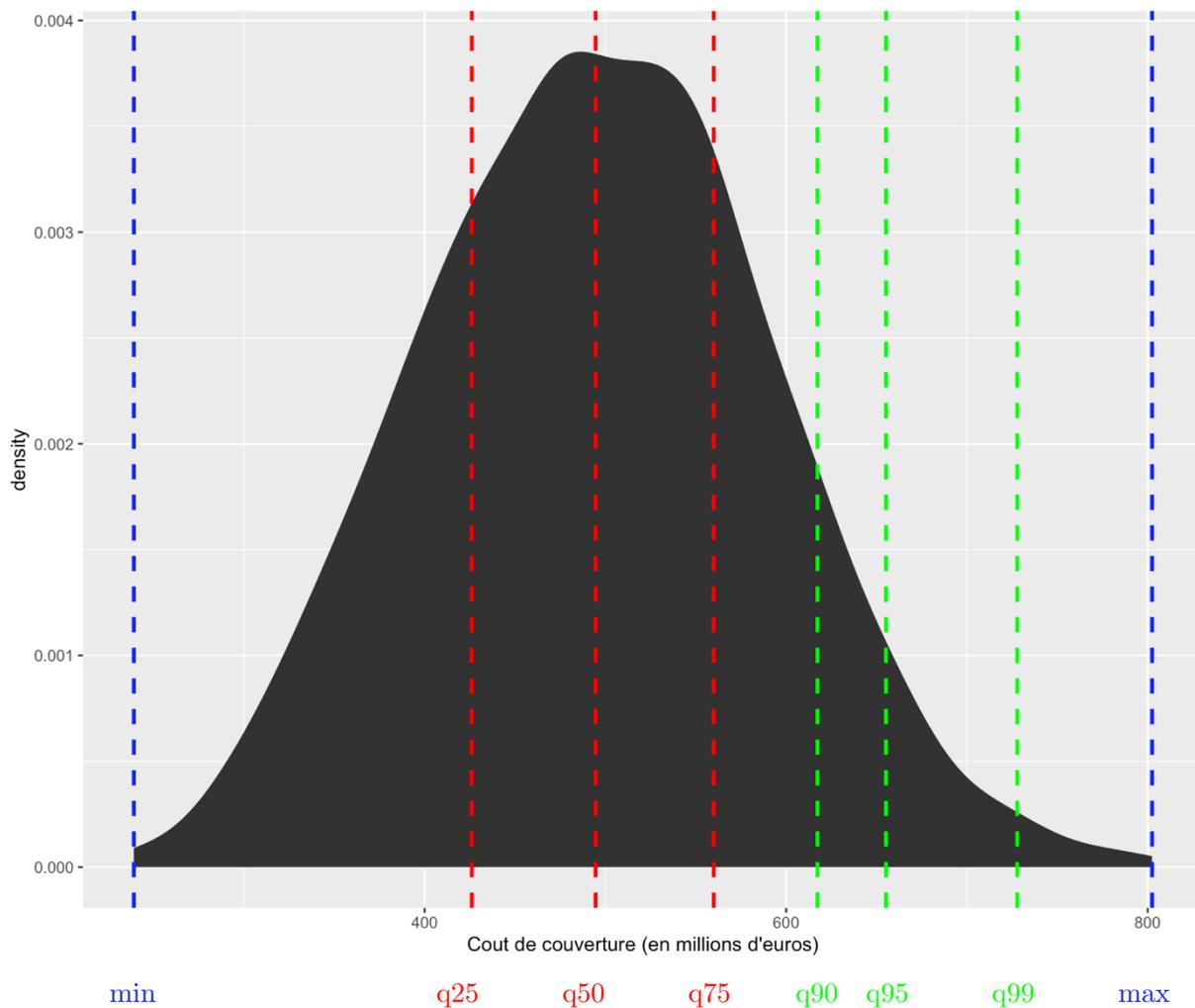


FIGURE 3.2 – Quantile de distribution du coût de couverture sur 5 ans

L’outil de projection permet donc à la direction de connaître la distribution du coût de couverture des obligations selon la politique de couverture actuellement en place. L’ordre de grandeur du coût de couverture sur 5 ans est de 500 millions.

La distribution du coût est donc entièrement déterminé par la politique de l’entreprise, c’est-à-dire le niveau de confiance souhaité pour contrôler le risque de défaut sous-jacent à chaque groupe d’obligations. La distribution du coût peut ne pas convenir à la direction, estimant que le budget alloué à la couverture est trop élevé. Elle peut, de surcroît, demander à réévaluer la politique de couverture en fonction du budget maximal qu’elle souhaiterait consacrer au *hedging* du portefeuille obligataire. C’est l’objet du quatrième chapitre.

## Chapitre 4 : Outil de pilotage - réévaluation de la politique de couverture

La méthodologie proposée dans ce mémoire permet de simuler le coût associé à la couverture du risque de défaut des obligations sur un horizon cinq ans et selon un jeu de scénarios aléatoires. La distribution obtenue associe à chaque coût de couverture projetée, sa probabilité de survenance. A niveau de quantile fixé, le praticien donc peut estimer le montant maximal de sa perte sur un horizon cinq ans.

Ce montant de perte peut s'avérer trop important selon le praticien qui souhaiterait le diminuer en réévaluant aujourd'hui sa politique de couverture.

Il convient alors d'étendre la méthodologie pour répondre à la problématique suivante : comment modifier la politique de couverture telle que le praticien puissent fixer la perte maximale associée à un niveau de risque ?

### 4.1 Mise en place

Comme vu précédemment, lorsque le niveau de risque est fixé, le coût de couverture qui en découle se calcule en sommant les flux engendrés par la stratégie. Ainsi, à niveau de risque et scénario fixés, le coût est unique. En revanche, lorsqu'il s'agit de fixer le coût de couverture, il n'est pas possible d'inverser la méthodologie ou de tester l'ensemble des combinaisons possibles car celui-ci est beaucoup trop vaste pour être exploré exhaustivement. Le temps de calcul serait trop coûteux. L'objectif est alors de trouver une stratégie optimale  $Q^*$  permettant de répliquer le coût de couverture souhaité  $\epsilon^*$ .

Dans ce cas, il est préférable d'utiliser des techniques algorithmiques d'optimisation faisant apparaître des fonctions objectives dont le but est de quantifier une erreur de répliation. Soit  $Q \in \mathbb{R}^d$  tel que  $Q = (Q_1, \dots, Q_d)$  un vecteur appartenant à l'ensemble des seuils d'achats et de ventes. La fonction objective  $f$  est de la forme suivante :

$$f(Q) = (F(Q) - \epsilon^*)^2$$

Avec  $Q$  un vecteur contenant les seuils d'achats et de ventes,  $\epsilon^*$  le budget cible et  $F$  une métrique quelconque, qui peut être :

- Une médiane
- Une moyenne
- Un max/ min
- Un quantile quelconque

Dans cette application, nous prenons l'exemple suivant :  $F$  mesure le quantile à 90% du vecteur  $Q$ . La fonction  $f$  mesure alors l'écart quadratique entre le quantile à 90% du vecteur  $Q$  et le budget cible  $\epsilon^*$ . L'objectif est alors le suivant : nous cherchons un vecteur de seuils d'achats-ventes  $Q^*$  qui engendra une distribution future du coût dont le quantile à 90% sera égal au budget cible  $\epsilon^*$ .

Classiquement, lorsque l'on souhaite optimiser une fonction par des techniques algorithmiques, il convient d'étudier les caractéristiques du problème afin de choisir l'algorithme convenable. Il s'agit généralement des hypothèses de différentiabilité et de convexité. Dans le cas de cette étude, nous devons procéder autrement. En effet la fonction objective mesure un écart quadratique entre un réel (le budget cible) et une métrique obtenue à partir d'un jeu de scénarios aléatoires. La fonction objective n'est pas une fonction analytique.

La littérature mathématique offre toutefois une solution pour ce genre de problème. Il existe ainsi des algorithmes réalisant l'optimisation de fonction non analytiques. Il s'agit par exemple des algorithmes génétiques ou de certains algorithmes de descente de gradient, robustes pour résoudre des problèmes d'optimisation de fonctions non analytiques.

Dans le cas de cette étude, nous choisissons l'algorithme Limited Memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Byrd [8] qui est un dérivé de l'algorithme Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [9], utilisé pour des problèmes d'optimisation non linéaire en l'absence de contrainte. Dans [8], H. Byrd, J. Nocedal et R. B. Schnabel ont montré que si la fonction  $f$  vérifiait les hypothèses de différentiabilité et de convexité dans le cas où  $F$  était une fonction analytique alors l'algorithme pouvait s'étendre à la résolution de la fonction  $f$  dans le cas où  $F$  est non analytique.

Vérifions que les conditions d'application soient respectées : La première propriété est la différentiabilité de la fonction. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  et  $i \in [1, d]$  la dérivée partielle de la fonction  $f$  en  $\alpha_i$  est alors :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_d) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} ((F(\alpha) - \epsilon^*)^2) = 2 * (F(\alpha) - \epsilon^*) * \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}$$

La dérivée partielle seconde de  $f$  en  $\alpha_i$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 \alpha_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( 2 * (F(\alpha) - \epsilon^*) * \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( 2 * (F(\alpha) - \epsilon^*) * \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right) = 2 * \left( \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right)^2 + 2 * (F(\alpha) - \epsilon^*) * \frac{\partial^2 F(\alpha)}{\partial^2 \alpha_i} \end{aligned}$$

L'existence de dérivées partielles permet d'introduire le gradient de la fonction  $f$  défini de la manière suivante :

$$\nabla f(X) = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1} f(X), \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(X), \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_N} f(X) \right)$$

La deuxième propriété est la convexité de la fonction. Plus précisément, c'est la présence d'un minimum unique. Cela signifie que lorsque l'algorithme repère un minimum, il est assuré qu'il s'agit du minimum global. Cette propriété se visualise facilement en dimension 1, comme le montre le graphique suivant :

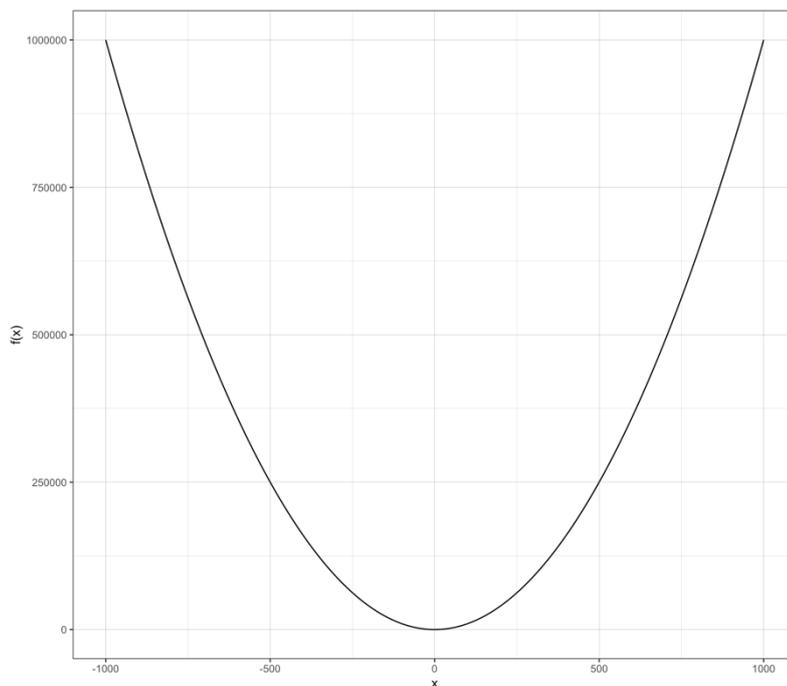


FIGURE 4.1 - Fonction convexe en dimension 1

La propriété de convexité se visualise également en dimension 2, comme l'illustre le graphique ci-dessous :

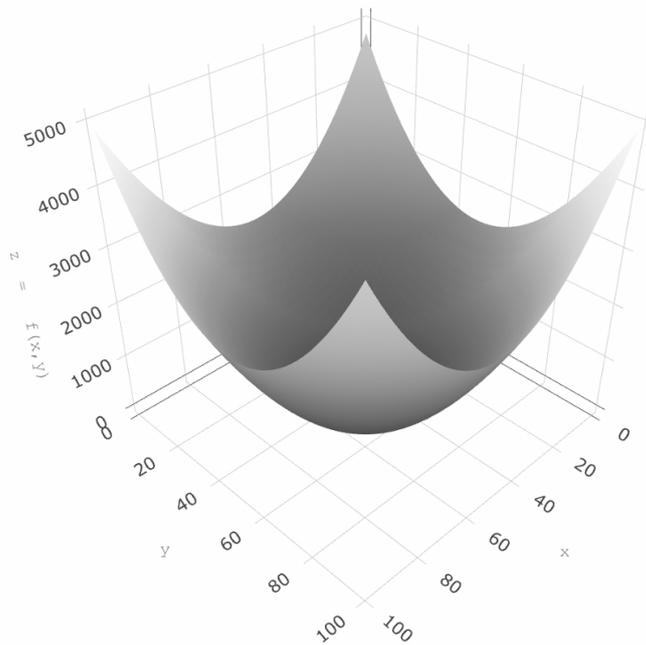


FIGURE 4.2 - Fonction convexe en dimension 2

Il n'est pas possible de visualiser la fonction au-delà de la dimension 3 mais le concept reste le même. Pour n'importe quelle dimension, il existe un unique minimum qui se situe au fond d'un « puits ».

Il apparaît donc que dans le cas où  $F$  est une fonction analytique,  $f$  vérifie les hypothèses de différentiabilité et de convexité. Nous pouvons donc appliquer l'algorithme L-BFGS-B à notre problème de minimisation.

Notons que l'optimisation à réaliser est soumise à certaines contraintes. Les seuils que contient le vecteur  $Q$  doivent être compris entre 0% et 100% pour les seuils d'achat et entre -100% et 0% pour les seuils de vente. En notant  $L$  la dimension du vecteur  $Q$ , les vecteurs suivants sont introduits :

$$l = (0)_L$$

$$u = (1)_L$$

Ainsi, les contraintes prennent la forme de bornes et le problème d'optimisation s'écrit sous forme suivante :

$$\min_Q f(Q)$$

$$sc : l \leq Q \leq u$$

## 4.2 Étapes de l'algorithme

L'objectif de cette partie est de décrire la méthode de quasi-Newton à mémoire limitée (L-BFGS-B) pour résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaire. Le problème s'écrit de la manière suivante :

$$\min f(x)$$

$$sc : l \leq x \leq u$$

Avec  $f: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction objective décrite précédemment. Les vecteurs  $l$  et  $u$  représentent les bornes basses et hautes imposées aux variables.

Classiquement, pour optimiser une fonction objective  $f$ , le gradient  $g_k$  de cette fonction est évalué avec les paramètres d'optimisation afin de construire une direction de descente  $d$ . Une recherche linéaire est ensuite effectuée le long de cette direction pour déterminer un pas  $\alpha$  qui réduise la fonction objectif  $f$ , de telle sorte que

$$f(x + \alpha d) < f(x)$$

L'algorithme L-BFGS-B [8] est un cas particulier d'optimisation par région de confiance dont la méthode consiste à remplacer le problème initial par une suite de sous-problèmes d'optimisation de fonctions quadratiques, plus simples à résoudre. La fonction objectif  $f$  est donc remplacée par une fonction modèle quadratique  $m_k$ , dans une certaine région  $\Delta_k$  autour d'un point  $x_k$  donné. A la  $k^{\text{ème}}$  itération, le modèle quadratique approchant  $f$  au point  $x_k$  est :

$$m_k(x) = f(x_k) + g_k^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T B_k(x - x_k)$$

Où  $B_k$  est une matrice à mémoire limitée approximant la matrice hessienne de  $f$ . L'algorithme minimise approximativement la fonction  $m_k$  sous les contraintes. Pour cela, une méthode de projection de gradient est utilisée afin de définir un ensemble de variables actives, puis,  $m_k$  est

minimisée en traitant les contraintes comme des égalités. Soit le chemin linéaire par morceau défini par :

$$x(t) = P(x_k - t \cdot g_k, l, u)$$

Ce chemin est obtenu en projetant les directions de pentes les plus fortes dans la zone réalisable, tel que :

$$P(x, l, u)_i = \begin{cases} l_i & \text{si } x_i < l_i \\ x_i & \text{si } x_i \in [l_i, u_i] \\ u_i & \text{si } x_i > u_i \end{cases}$$

Ensuite est effectué le calcul du point de Cauchy généralisé  $x^C$ , défini comme le premier minimum local de la fonction suivante :

$$q_k(t) = m_k(x(t))$$

Les variables de  $x^C$  qui se situent à la borne basse ou haute, c'est-à-dire qui appartiennent à l'espace des variables actives de  $x^C$ , noté  $A(x^C)$ , sont fixées. Le problème quadratique sur l'espace des variables libres est ensuite introduit tel que :

$$\min \{m_k(x) : x_i = x_i^C, \forall i \in A(x^C)\} \quad (1)$$

$$sc : l_i \leq x_i \leq u_i \quad \forall i \notin A(x^C) \quad (2)$$

Dans un premier temps, (1) est résolu en ignorant les contraintes sur les variables libres, à l'aide d'une méthode directe. Une fois la solution obtenue, le chemin  $P$  lui est appliqué, afin de trouver une solution satisfaisant les contraintes (2). Une fois qu'une telle solution approchée  $\bar{x}_{k+1}$  est obtenue, le prochain point  $x_{k+1}$  est calculé par une direction de descente le long de  $d_k = \bar{x}_{k+1} - x_k$  de manière à satisfaire une condition de décroissance suffisante :

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \alpha \lambda_k g_k^T d_k$$

Où  $\lambda_k$  est une longueur de pas et  $\alpha$  un paramètre de valeur  $10^{-4}$ . Ensuite le gradient de  $f$  en  $x_{k+1}$  et la nouvelle matrice à mémoire limitée  $B_{k+1}$  sont calculés et une nouvelle itération commence. L'algorithme s'arrête à l'itération  $k^*$  telle que :

$$\|P(x_{k^*} - g_{k^*}, l, u) - x_{k^*}\|_\infty < 10^{-5}$$

Les trois parties décrivant en détail le calcul de la matrice à mémoire limitée, le calcul du point de Cauchy et la minimisation du problème quadratique sur l'espace des variables libres sont disponibles en annexe.

### 4.3 Application

Le cas étudié dans ce chapitre est le suivant : la politique actuelle de *hedging* du portefeuille obligataire engendre une distribution du coût de couverture dont l'ordre de grandeur (500 millions d'euros) ne convient pas à la direction. Elle souhaiterait connaître la politique associée au budget souhaité. Pour mettre en application la réévaluation de la politique, le raisonnement se fera avec les budgets suivants :

- Budget  $\epsilon_1 = 50\,000\,000$
- Budget  $\epsilon_2 = 100\,000\,000$
- Budget  $\epsilon_3 = 200\,000\,000$
- Budget  $\epsilon_4 = 300\,000\,000$
- Budget  $\epsilon_5 = 400\,000\,000$

Pour chaque  $\epsilon_j$ , avec  $j \in [1,5]$ , l'algorithme renvoie le vecteur optimal  $Q_{\epsilon_j}^*$  c'est-à-dire le niveau de confiance ayant engendré le coût le plus proche possible de la valeur cible  $\epsilon_j$ . Pour rappel,  $Q_{\epsilon_j}^*$  contient les seuils d'achats et de ventes des *Credit Default Swap* pour l'ensemble des groupes d'obligations  $\Omega_G$ .

Il est possible d'anticiper raisonnablement les résultats selon le budget  $\epsilon$  alloué. Logiquement, plus le budget de couverture  $\epsilon_j$  est élevé, plus le vecteur optimal  $Q_{\epsilon_j}^*$  associé contient des seuils d'achats et de ventes faibles pour les obligations les plus risquées. En effet, pour dépenser entièrement un budget  $\epsilon_j$  élevé, l'algorithme doit inciter précipitamment à l'achat, ce qui correspond à des seuils d'achats bas, et retarder le plus possible la vente, ce qui correspond également à des seuils de ventes bas. Inversement, pour un budget  $\epsilon_j$  faible, l'algorithme doit retarder l'achat et précipiter la vente, ce qui correspond à des seuils d'opération achats-ventes

élevés, et donc à un profil peu averse au risque. L'algorithme est exécuté pour l'ensemble des budgets  $(\epsilon_j)_{j \in [1,5]}$ . Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_1$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.96	0.95	0.94	0.90	0.81	0.97	0.94	0.81
$v^G$	-0.16	-0.19	-0.24	-0.30	-0.36	-0.13	-0.18	-0.28

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_2$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.95	0.92	0.92	0.87	0.78	0.94	0.83	0.79
$v^G$	-0.19	-0.21	-0.27	-0.32	-0.39	-0.18	-0.20	-0.30

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_3$

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.93	0.91	0.90	0.84	0.66	0.94	0.90	0.72
$v^G$	-0.23	-0.26	-0.31	-0.34	-0.41	-0.21	-0.25	-0.32

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_4$

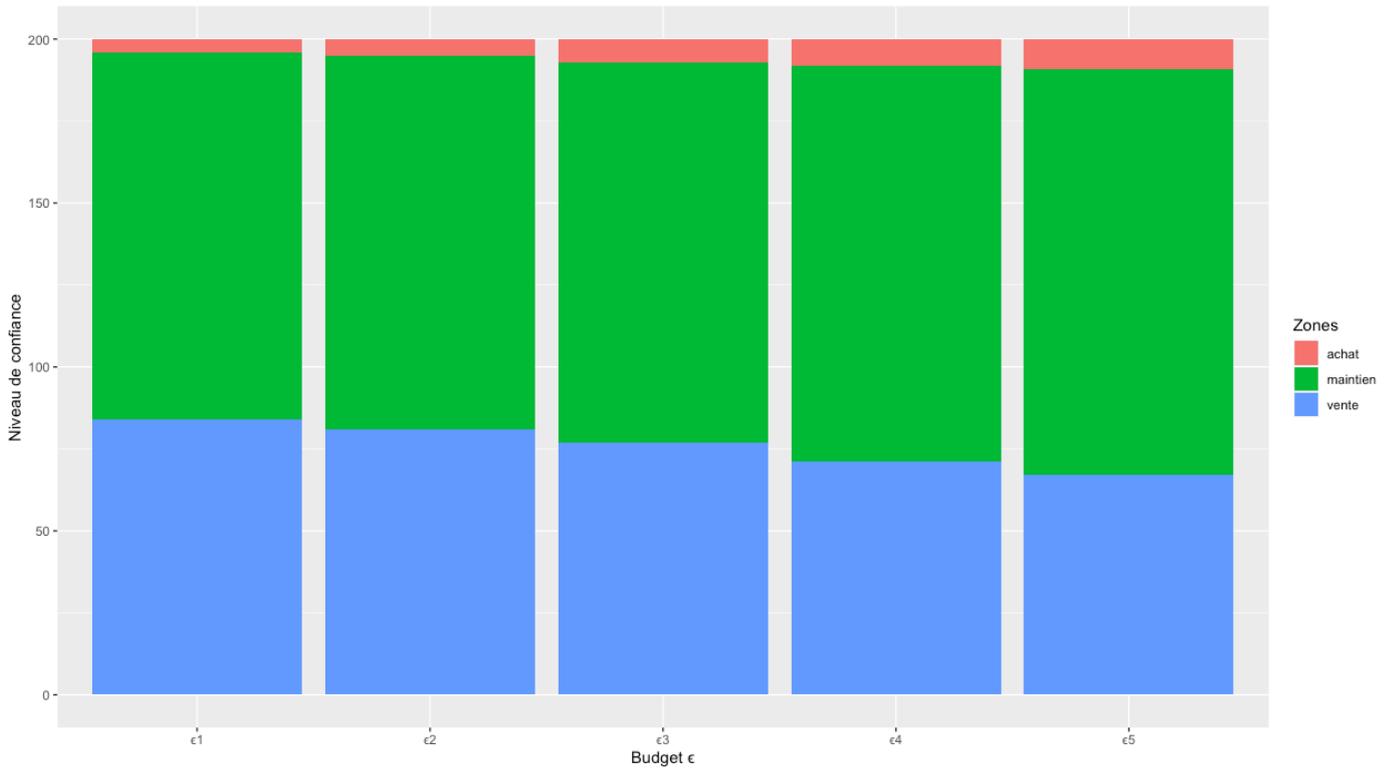
	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.92	0.90	0.88	0.80	0.55	0.93	0.89	0.62
$v^G$	-0.29	-0.30	-0.35	-0.37	-0.44	-0.27	-0.30	-0.40

Résultats de l'algorithme pour le budget de couverture  $\epsilon_5$

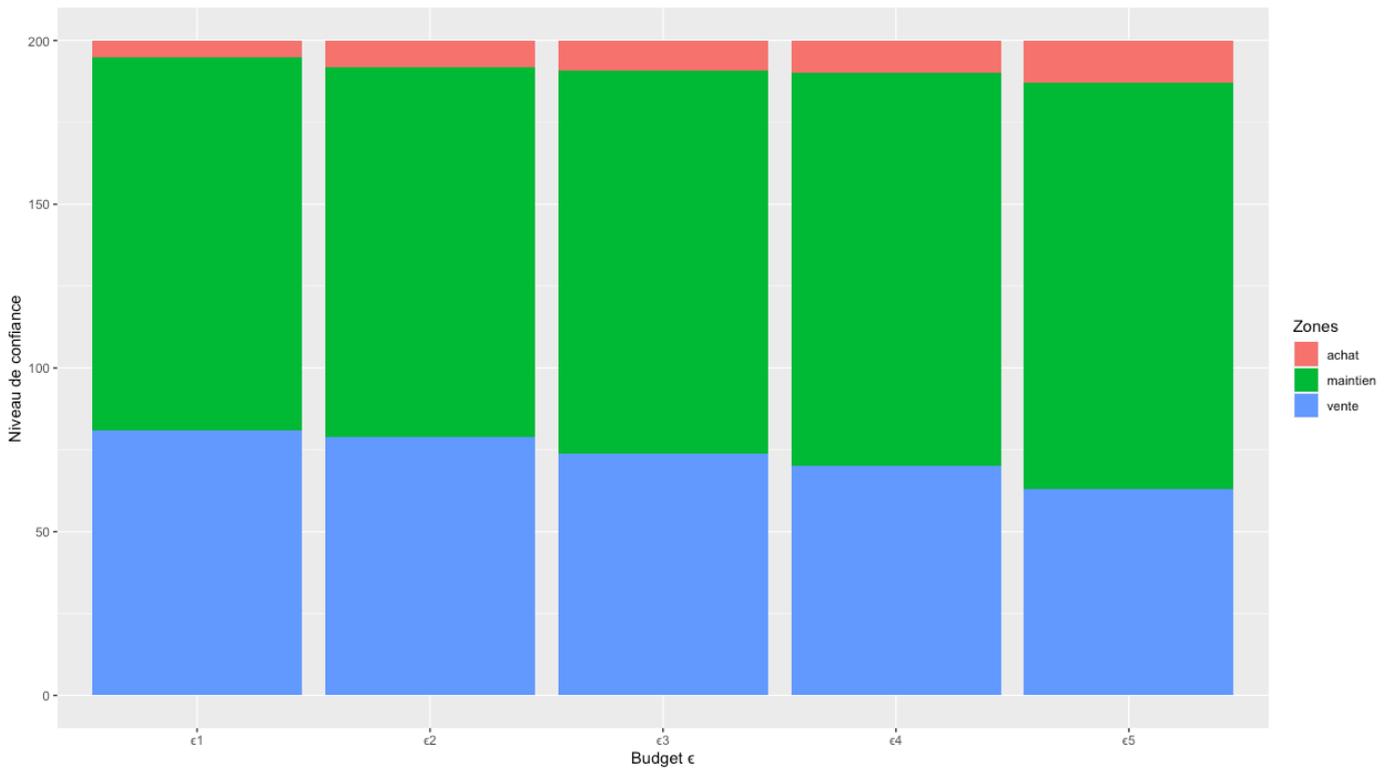
	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB<sup>-</sup></i>	<i>Allemagne</i>	<i>France</i>	<i>Périphérique</i>
$a^G$	0.91	0.89	0.87	0.75	0.45	0.91	0.88	0.55
$v^G$	-0.33	-0.34	-0.37	-0.39	-0.47	-0.32	-0.35	-0.43

Les résultats confirment les anticipations précédentes. Plus le budget  $\epsilon_j$  est élevé, plus les seuils des obligations favorisent la détention de CDS sur les obligations risquées : les seuils d'achats et de ventes diminuent. Cette évolution se visualise graphiquement comme ci-dessous :

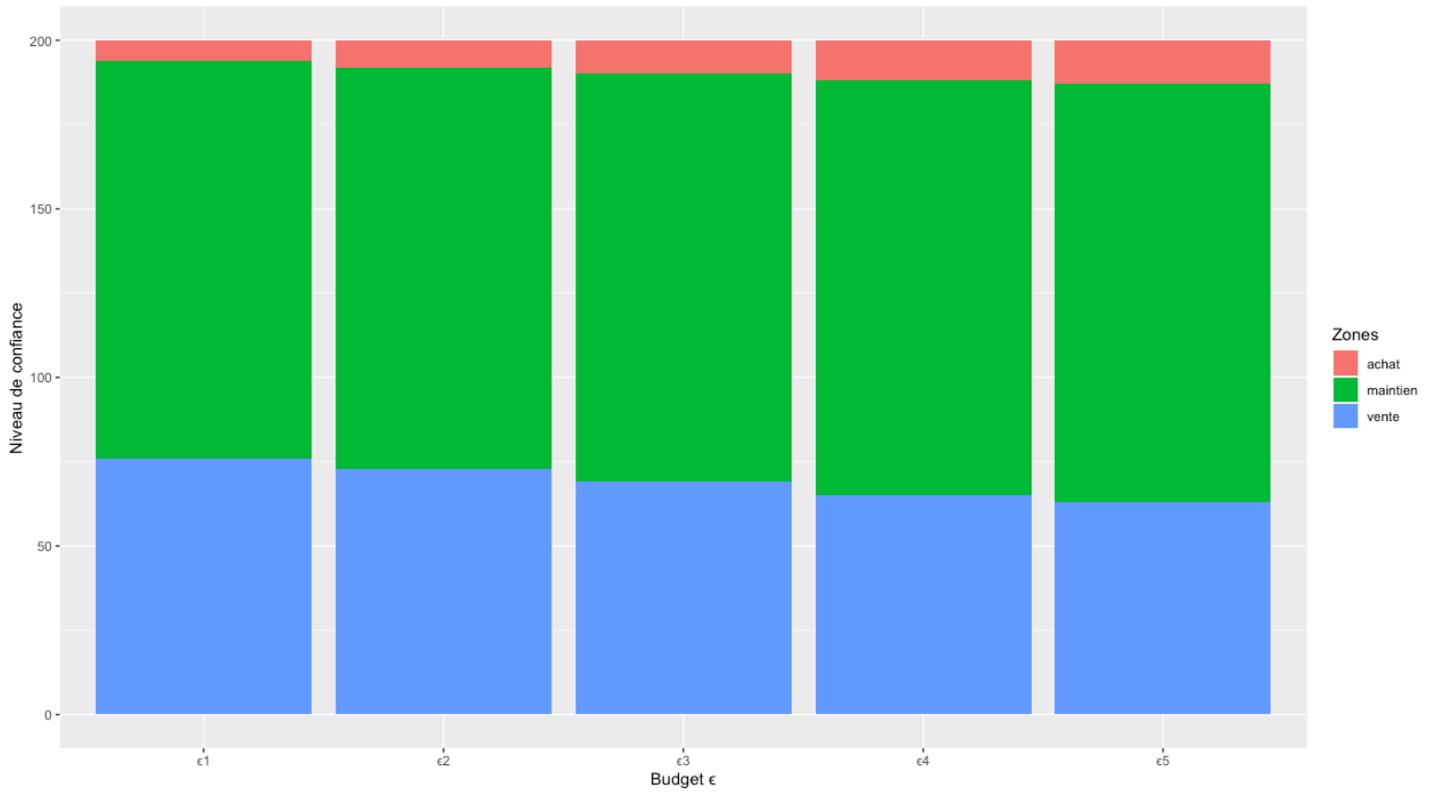
Évolution des seuils d'achats et de ventes du groupe d'obligations AAA en fonction du budget de couverture



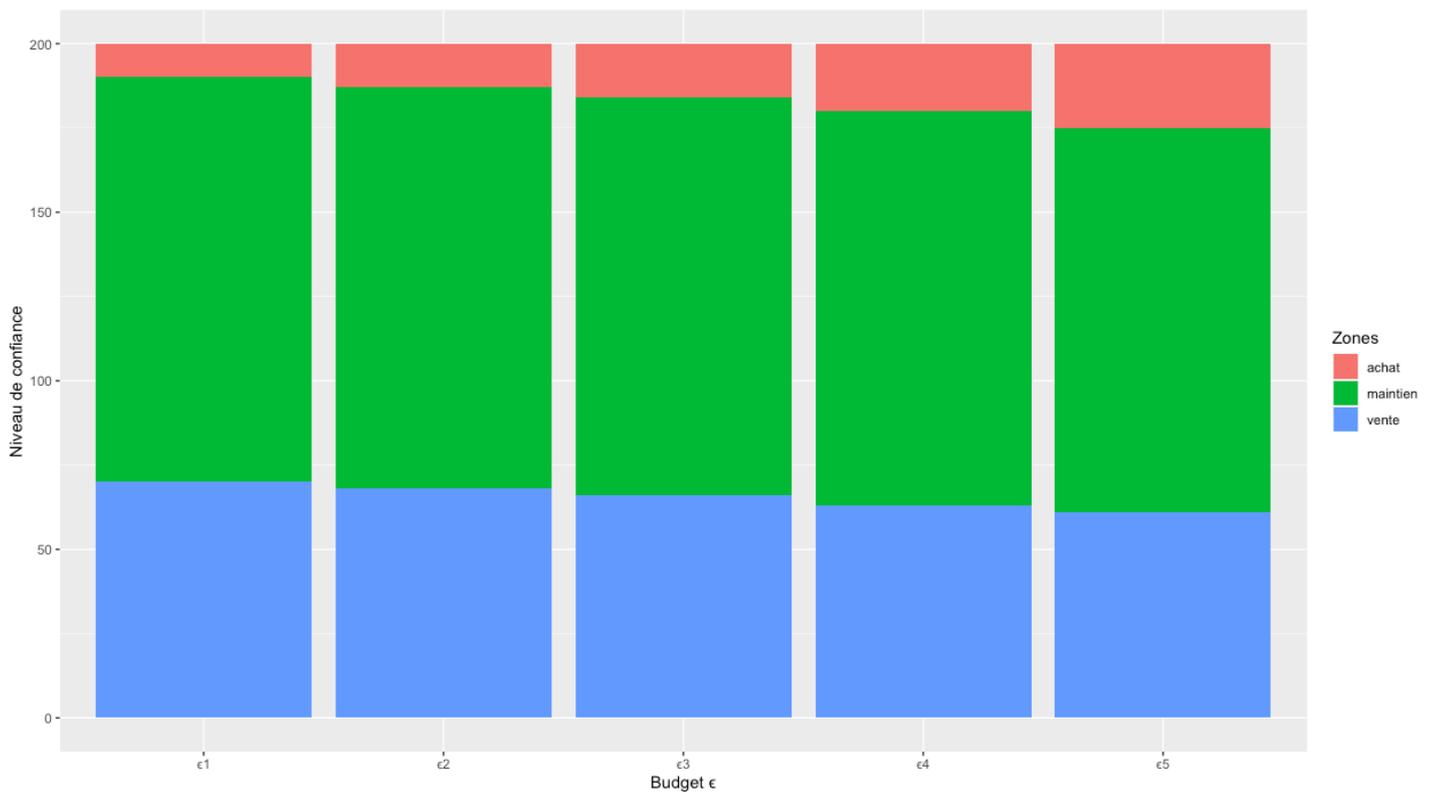
Évolution des seuils d'achats et de ventes du groupe d'obligations AA en fonction du budget de couverture



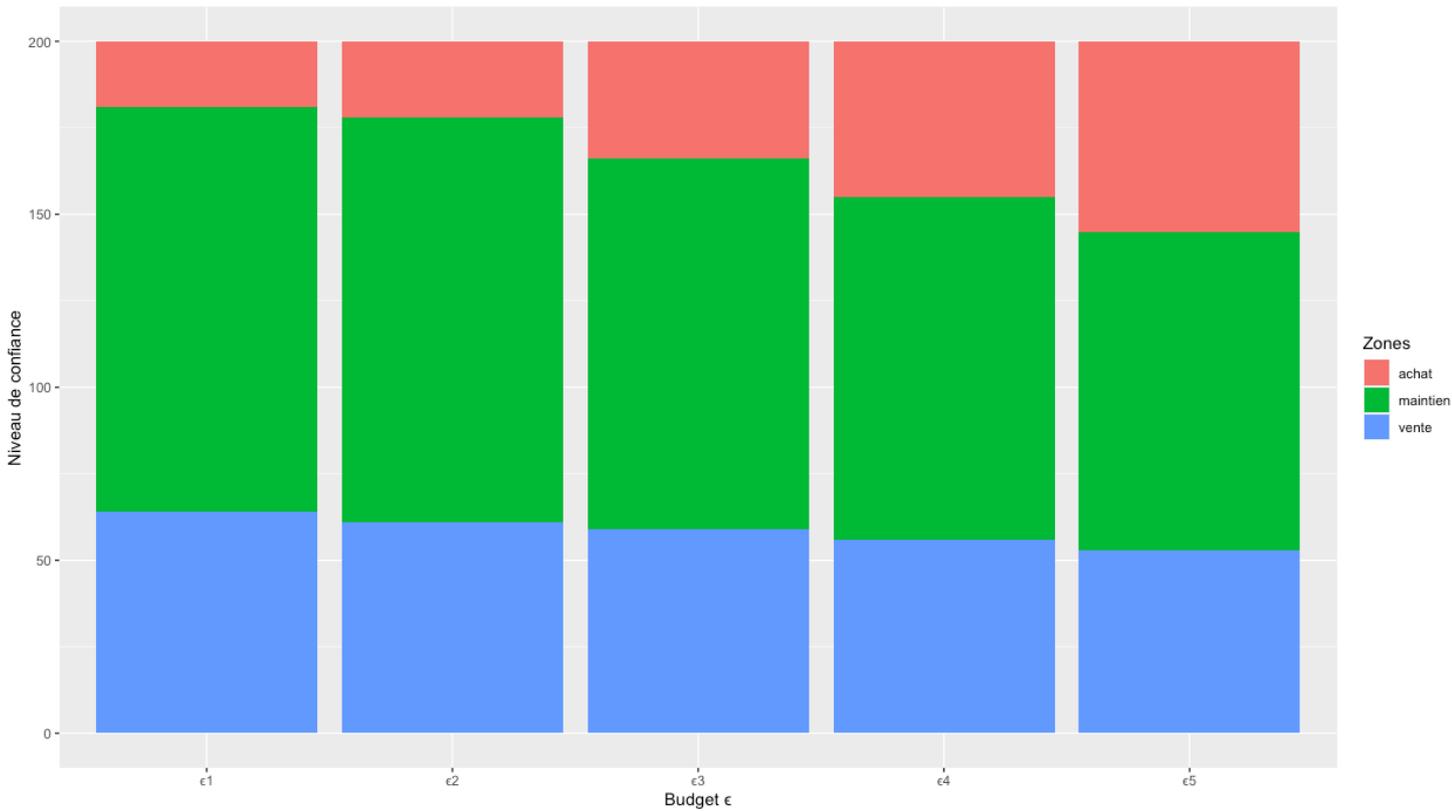
Évolution des seuils d'achats et de ventes du groupe d'obligations A en fonction du budget de couverture



Évolution des seuils d'achats et de ventes du groupe d'obligations BBB en fonction du budget de couverture



## Évolution des seuils d'achats et de ventes du groupe d'obligations BB<sup>-</sup> en fonction du budget de couverture



Plus le budget  $\epsilon_j$  est élevé, plus la politique de couverture incite à la détention de CDS. Elle précipite l'achat de CDS, en fixant des seuils d'achat faibles et retarde leurs ventes, en fixant des seuils de ventes faibles.

Il apparaît également que plus le segment de *rating* des obligations est mauvais, plus le niveau de confiance varie avec le budget. Cette observation est logique : le risque de défaut étant principalement porté par les catégories de notation basses, le budget est en priorité alloué à la couverture de ces catégories. Les niveaux de confiance de ces catégories sont alors particulièrement sensibles aux variations de budgets. A l'inverse, les segments d'obligations bien notées ne sont pas prioritaires sur le budget de couverture. L'algorithme sous-pondère le budget qui leur est alloué et la variation des niveaux de confiance est plus lente.

Ainsi, si la direction estime que la distribution du coût de couverture ne convient pas, il suffit de renseigner le budget souhaité et d'exécuter l'algorithme d'optimisation. Celui-ci renvoie alors pour chaque segment d'obligations, la valeur optimale des niveaux de confiance associés aux seuils d'achats et de ventes. Les niveaux définissent entièrement la politique à adopter sur 5 ans.

## Conclusion

La détention d'obligations au sein d'un portefeuille expose à un risque de défaut de la part des entités émettrices. La diversité des produits présents sur les marchés offre la possibilité de maîtriser ce risque moyennant le versement de primes, dont la somme totale au cours d'une année représente une charge à évaluer. L'objectif de l'étude était la projection de cette charge sur un horizon de 5 ans dans le cadre de l'évaluation prospective des charges comptables, exigée par le dispositif ORSA.

La procédure mise en place dans cette étude permet de simuler un indicateur d'évolution du risque de défaut, en s'appuyant sur la dynamique stochastique de la composante de défaut présente dans la valorisation des obligations du modèle Longstaff-Mithal-Neis. Les valeurs prises par la composante au cours du temps sont rendues observables par les sorties du Générateur de Scénarios Économiques qui simule les paramètres du modèle LMN. La transformation de la composante en un *rate of change* permet d'observer l'évolution du risque de défaut entre deux pas de temps de simulation consécutifs.

La politique de couverture que nous avons implémenté est basée sur des seuils de *rating* auxquels sont associés des opérations d'achats et de ventes de CDS. Nous pensons que ce cadre est suffisamment général pour couvrir les politiques de gestion des risques de nombreuses compagnies d'assurance.

Par ailleurs, les seuils constituent des paramètres ajustables et le cadre proposé est donc suffisamment flexible pour permettre la réévaluation de la politique de couverture, en cohérence avec les contraintes de budget alloué.

Le développement et l'implémentation de cet outil d'évaluation prospective des charges requiert quelques points d'attention. La transformation de la composante de défaut en *rate of change* ne tient pas compte de la décote naturelle du risque de défaut à mesure qu'une obligation se rapproche de son échéance. La construction d'un indicateur tenant compte de ce biais temporel est une piste à explorer, bien que cet indicateur serait moins interprétable pour le praticien. Ainsi, la construction d'un indicateur sur-mesure peut s'avérer plus performante mais moins exploitable pour la construction de stratégie de couverture. Un autre problème ne doit pas être négligé : l'hypothèse forte selon laquelle les CDS ne sont pas soumis au risque de liquidité. Dans un cas idéal, le cadre de modélisation, et la méthode de projection sous-jacente, devrait pouvoir exhiber une composante de liquidité dans les opérations d'achats et de ventes des CDS.

# Bibliographie

- [1] Medvedev G. *Yield Curves and Forward Curves for Diffusion Models of Short Rates*. 2019
- [2] Schönbucher P. J. *Credit Derivatives Pricing Models : Models, Pricing and Implementation*. 2003.
- [3] Diebold F. X., Li C. and Yue V. Z. Global yield curve dynamics and interactions : A dynamic nelson–siegel approach. *Journal of Econometrics*, pages 351–363, 2008.
- [4] Litterman R. and Scheinkman J. Common factors affecting bond returns. *Goldman Sachs*, 1991.
- [5] Merton R. C. On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *J. Finance*, 29 :449–470, 1974.
- [6] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of political Economy*, pages 637-654, 1973.
- [7] Longstaff F. A., Mithal S. and Neis E. Corporate yield spreads : Default risk or liquidity ? new evidence from the credit default swap market. *National Bureau of Economic Research*, 2004
- [8] R. H. Byrd, J. Nocedal and R. B. Schnabel, “Representation of quasi Newton matrices and their use in limited memory methods”, *Mathematical Programming*, 1987
- [9] J. Nocedal, Updating quasi-Newton matrices with limited storage, *Mathematics of Computation*, 1980

# Annexe : Algorithme L-BFGS-B

Cette annexe se divise en trois parties : le calcul de la matrice à mémoire limitée, le calcul du point de Cauchy et la minimisation du problème quadratique sur l'espace des variables libres.

## 1 Calcul de la matrice à mémoire limitée

L'approximation quadratique  $m_k$  de  $f$  autour du point  $x_k$  est issue d'un développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 2, qui s'écrit de la manière suivante :

$$f(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) + o(\|x^2\|)$$

Mais un tel calcul pourrait s'avérer très coûteux, puisqu'à chaque itération  $k$ , nous devrions calculer la valeur exacte de  $\nabla^2 f(x_k)$  de dimensions  $N * N$ . Dans les méthodes BFGS, le sous-problème d'optimisation fait apparaître une valeur approximée de la hessienne de  $f$ , appelée matrice à mémoire limitée BFGS, notée  $B_k$  et le problème se réécrit comme en (4.3). Le problème est de représenter correctement la matrice hessienne sans avoir à l'explicitier.

Pour cela, à chaque itéré  $x_k$  l'algorithme stocke un nombre  $m$  de couples  $(s_i, y_i)_{i=k-1, \dots, k-m}$  avec :

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \quad y_k = g_{k+1} - g_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

Ces couples contiennent une information sur la courbure de la fonction. Notons

$$Y_k = [y_{k-m}, \dots, y_{k-1}], \quad S_k = [s_{k-m}, \dots, s_{k-1}]$$

Il est montré dans [1] que si  $\theta$  est un scalaire positif et si les  $m$  couples  $(s_i, y_i)_{i=k-1, \dots, k-m}$  vérifient  $s_i^T y_i > 0$  alors la matrice à mémoire limitée s'écrit :

$$B_k = \theta I - W_k M_k W_k^T$$

Avec

$$W_k = [Y_k \theta S_k]$$

$$M_k = \begin{bmatrix} -D_k & L_k^T \\ L_k & \theta S_k^T S_k \end{bmatrix}^{-1}$$

Et avec  $L_k$  et  $D_k$  des matrices  $m * m$  :

$$(L_k)_{ij} = (s_{k-m-1+i})^T (y_{(k-m-1+j)}) * 1_{i>j}$$

$$D_k = \text{diag} [s_{k-m}^T \cdot y_{k-m}, \dots, s_{k-1}^T \cdot y_{k-1}]$$

Notons que la matrice  $M$  est de taille  $2m * 2m$  donc le coût de calcul de son inverse est négligeable. Il est également montré dans [1] que pour forcer  $B_k$  à être définie positive, les couples  $(s_k, y_k)$  sont rejetés s'ils ne vérifient pas la condition :

$$s_k^T y_k > \varepsilon \|y\|^2$$

Où  $\varepsilon$  est un réel suffisamment petit.

## 2 Calcul du point de Cauchy généralisé

L'objectif est de trouver le premier minimum local du modèle quadratique  $m_k$  le long d'un chemin linéaire obtenu en projetant les plus grandes directions de gradient dans la région réalisable. Dans cette partie, on pose  $x^0 = x_k$  et nous omettons l'indice  $k$  de sorte que  $g, x$  et  $B$  désignent  $g_k, x_k$  et  $B_k$ . Les indices serviront à désigner les composantes d'un vecteur ; par exemple  $g_i$  désignera la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $g$ . Pour rappel, le chemin linéaire est défini comme tel :

$$x(t) = P(x_k - t \cdot g_k, l, u)$$

Où  $t$  est un réel. Or les contraintes imposent, pour n'importe quelle composante du vecteur solution, des bornes  $l_i$  et  $u_i$ . Quelle que soit la composante  $i$ , il existe alors un réel  $t_i$  tel que  $\forall t > t_i$  nous avons  $x_i - t g_i > u_i$  si  $g_i < 0$  ou  $x_i - t g_i < l_i$  si  $g_i > 0$ . Nous pouvons percevoir  $t_i$  comme une valeur limite définissant un point de rupture  $x(t_i)_i$  au-delà duquel  $x(t)_i$  ne respecte plus les contraintes.

On peut ainsi définir les points de rupture pour chaque coordonnée de la direction :

$$72 \quad \begin{array}{l} \text{si } g_i < 0 \\ \text{si } g_i > 0 \\ \text{si } g_i = 0 \end{array}$$

$$t_i = \begin{cases} (x_i^0 - u_i)/g_i \\ (x_i^0 - l_i)/g_i \\ \infty \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un vecteur de coordonnées  $\{t_i : i = 1 \dots n\}$  que nous trions en ordre croissant :  $\{t^j : t^j \leq t^{j+1}, j = 1 \dots n\}$ . Ce vecteur est construit à l'aide d'un algorithme de tri par tas ou *heapsort* mis en place par A.V.Aho, J.E.Hopcroft and J.D.Ullman. Nous cherchons ensuite une direction  $t$  sur le chemin linéaire  $P(x^0 - tg, l, u)$  de sorte que

$$t_i = \begin{cases} x_i^0 - tg_i & \text{si } t < t_i \\ x_i^0 - t_i g_i & \text{si } t > t_i \end{cases}$$

Supposons que  $t \in [t^{j-1}, t^j]$ . Le  $j - 1^{\text{ème}}$  point de rupture est alors :

$$x^{j-1} = x(t^{j-1})$$

De sorte que nous avons sur ce même intervalle :

$$x(t) = x^{j-1} + \Delta t d^{j-1}$$

Avec

$$\Delta t = t - t^{j-1}$$

Et

$$d_i^{j-1} = \begin{cases} -g_i & \text{si } t^{j-1} \leq t_i \\ 0 & \text{si } t^{j-1} > t_i \end{cases}$$

L'idée sous-jacente est que le nombre de contraintes saturées augmente dès lors que la valeur de  $t$  atteint une valeur  $t^j$ , mais que si  $t$  se situe exactement entre deux valeurs  $t^j$  et  $t^{j+1}$ , aucune nouvelle contrainte ne sature. Pour  $t \in ]t^{j-1}, t^j[$ , les contraintes saturées en  $x(t^{j-1})$  restent saturées en  $x(t)$ , et celles qui ne le sont pas évoluent « librement ». Ainsi,  $x(t)$  est construit à partir de  $x(t^{j-1})$ , en fixant les coordonnées dont les contraintes sont déjà saturées et en ajoutant, seulement pour les autres composantes un « résidu ». On peut alors effectivement décomposer  $x(t)$  de la manière suivante :

$$x(t) = x^{j-1} + \Delta t d^{j-1}$$

En reprenant le modèle quadratique :

$$m(x) = f + g^T(x - x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0)^T B(x - x^0)$$

Et en considérant  $x(t)$  sur l'intervalle  $[x(t^{j-1}), x(t^j)]$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} m(x) &= f + g^T(x^{j-1} + \Delta t d^{j-1} - x^0) + \frac{1}{2}(x^{j-1} + \Delta t d^{j-1} - x^0)^T B(x^{j-1} + \Delta t d^{j-1} - x^0) \\ &= f + g^T((x^{j-1} - x^0) + \Delta t d^{j-1}) + \frac{1}{2}((x^{j-1} - x^0) + \Delta t d^{j-1})^T B((x^{j-1} - x^0) + \Delta t d^{j-1}) \\ &= f + g^T(z^{j-1} + \Delta t d^{j-1}) + \frac{1}{2}(z^{j-1} + \Delta t d^{j-1})^T B(z^{j-1} + \Delta t d^{j-1}) \end{aligned}$$

Avec

$$z^{j-1} = x^{j-1} - x^0$$

Ainsi, sur le segment  $[x(t^{j-1}), x(t^j)]$ ,  $m(x)$  peut s'écrire comme une fonction quadratique de  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned} m(\Delta t) &= \left( f + g^T z^{j-1} + \frac{1}{2} z^{j-1 T} B z^{j-1} \right) + \left( g^T d^{j-1} + d^{j-1 T} B z^{j-1} \right) \Delta t + \frac{1}{2} \left( d^{j-1 T} B d^{j-1} \right) \Delta t^2 \\ &= f_{j-1} + f'_{j-1} \Delta t + \frac{1}{2} f''_{j-1} \Delta t^2 \end{aligned}$$

Avec la notation suivante

$$\begin{aligned}
f_{j-1} &= f + g^T z^{j-1} + \frac{1}{2} z^{j-1T} B z^{j-1} \\
f'_{j-1} &= g^T d^{j-1} + d^{j-1T} B z^{j-1} \\
f''_{j-1} &= d^{j-1T} B d^{j-1}
\end{aligned}$$

Dérivons  $m$  en  $\Delta t$  :

$$\frac{dm}{d\Delta t}(\Delta t) = 0 \leftrightarrow f'_{j-1} + \Delta t \cdot f''_{j-1} = 0 \leftrightarrow \Delta t^* = -f'_{j-1}/f''_{j-1}$$

Puisque  $B$  est définie positive,  $t^{j-1} + \Delta t^*$  définit bien un minimum, et non un maximum. Si la solution obtenue  $t^{j-1} + \Delta t^*$  se situe dans l'intervalle  $[t^{j-1}, t^j]$ , nous conservons cette valeur. Sinon, nous répétons l'opération sur l'intervalle  $[t^j, t^{j+1}]$  jusqu'à trouver le premier minimum local, noté  $x^C$ , se situant dans l'intervalle de recherche.

Une fois le point de Cauchy  $x^C$  calculé, nous procédons à la minimisation approximative du modèle quadratique  $m_k$  sur l'espace des variables libres et imposons les bornes du problème. Pour rappel, le problème est le suivant :

$$\begin{aligned}
&\min\{m_k(x) : x_i = x_i^C, \forall i \in A(x^C)\} \\
&sc : l_i \leq x_i \leq u_i \quad \forall i \notin A(x^C)
\end{aligned}$$

Pour minimiser le modèle nous utilisons une méthode primale directe. Dans un premier temps nous minimisons  $m_k$  en ignorant les bornes puis nous réarrangeons la solution obtenue afin qu'elle appartienne à la région réalisable. On note  $t$  le nombre de variables libres dans le point de Cauchy, il y a donc  $n - t$  variables aux bornes.

On note  $F$  l'espace des variables libres de  $x^C$ ,  $A_k$  la matrice des contraintes actives du gradient en  $x^C$  qui est composée de  $n - t$  vecteurs et  $Z_k$  la matrice de taille  $n * t$  dont les colonnes sont les colonnes unité qui permettent de cibler les variables libres.

Nous fixons les  $n - t$  variables de  $x^C$  se situant aux bornes et résolvons le problème quadratique sur les  $t$  variables restantes. Ainsi nous ne considérons que les points de la forme

$$x = x^C + Z_k \hat{d}$$

Où  $\hat{d}$  est un vecteur de dimension  $t$ . Avec cette notation nous pouvons écrire le problème quadratique sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
m_k(x) &= f_k + g_k^T(x - x^C + x^C - x_k) + \frac{1}{2}(x - x^C + x^C - x_k)^T B_k(x - x^C + x^C - x_k) \\
&= (g_k + B_k(x^C - x_k))^T(x - x^C) + \frac{1}{2}(x - x^C)^T B_k(x - x^C) + \gamma \\
&= \hat{d}^T \hat{r}^C + \frac{1}{2} \hat{d}^T \hat{B}_k \hat{d} + \gamma
\end{aligned}$$

Avec  $\gamma$  une constante

$$\hat{B}_k = Z_k^T B_k Z_k$$

Qui est la matrice hessienne réduite de  $m_k$  et :

$$\hat{r}^C = Z_k^T (g_k + B_k(x^C - x_k))$$

Qui est le gradient réduit de  $m_k$  en  $x^C$ . Et en reprenant la notation suivante :

$$B_k = \theta I - W_k M_k W_k^T$$

On peut écrire :

$$\hat{r}^C = Z_k^T (g_k + \theta(x^C - x_k) - \theta I - W_k M_k c)$$

Avec :

$$c = W_k^T (x^C - x_k)$$

Le problème peut alors être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \hat{m}_k(\hat{d}) \equiv \hat{d}^T \hat{r}^C + \frac{1}{2} \hat{d}^T \hat{B}_k \hat{d} + \gamma \\
sc : & l_i - x_i^C \leq \hat{d}_i \leq u_i - x_i^C, \quad i \in F
\end{aligned}$$

La solution au problème sans contrainte se trouve en dérivant la fonction :

$$\frac{dm}{d\hat{d}}(\hat{d}) = 0 \leftrightarrow \hat{r}^C + \hat{d}\hat{B}_k = 0 \leftrightarrow \hat{d}^u = -\hat{B}_k^{-1} \cdot \hat{r}^C$$

Pour résoudre le problème avec contrainte, nous projetons la solution  $\hat{d}^u$  pour que sa projection appartienne à la région réalisable. Nous obtenons alors :

$$\hat{d}^* = \alpha^* \hat{d}^u$$

Où  $\alpha^*$  est un scalaire défini par :

$$\alpha^* = \max \{ \alpha : \alpha \leq 1, l_i - x_i^C \leq \alpha \hat{d}_i \leq u_i - x_i^C, i \in F \}$$

Ainsi la solution approchée  $\bar{x}$  au problème est définie comme :

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i^C & \text{si } i \in F \\ x_i^C + (Z_k \hat{d}^*)_i & \text{si } i \notin F \end{cases}$$

Il reste à savoir comment est implémenté l'inverse de  $B_k$  dont la matrice réduite est donnée par :

$$\hat{B} = \theta I - (Z^T W)(M W^T Z)$$

On reconnaît une expression matricielle de la forme :

$$(A + uv^T)$$

Avec :

$$A = \theta I, \quad u = (Z^T W), \quad v = (M W^T Z)^T$$

Le calcul de l'inverse s'établit avec la formule de Sherman-Morrison-Woodbury donnée par :

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$$

On obtient alors :

$$\hat{B}^{-1} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} Z^T W \left( I - \frac{1}{\theta} M W^T Z Z^T W \right)^{-1} M W^T Z \frac{1}{\theta}$$

Ainsi nous avons :

$$\hat{d}^u = \frac{1}{\theta} \hat{r}^C + \frac{1}{\theta} Z^T W \left( I - \frac{1}{\theta} M W^T Z Z^T W \right)^{-1} M W^T Z \frac{1}{\theta} \hat{r}^C$$

Une fois le calcul effectué nous obtenons la valeur  $\hat{d}^u$  et nous pouvons résoudre (4.6) pour connaître  $\hat{d}^*$ . Le prochain point est alors  $x_{k+1} = x_k + \hat{d}^*$ . Nous réitérons le procédé décrit dans cette partie afin de résoudre le modèle quadratique de la  $(k + 1)^{i\grave{e}me}$  itération :

$$m_{k+1}(x) = f(x_{k+1}) + g_{k+1}^T (x - x_{k+1}) + \frac{1}{2} (x - x_{k+1})^T B_{k+1} (x - x_{k+1})$$

L'algorithme s'arrête à l'itération  $k^*$  qui vérifie :

$$\|P(x_{k^*} - g_{k^*}, l, u) - x_{k^*}\|_{\infty} < 10^{-5}$$

Le point  $x_{k^*}$  est alors considéré comme le minimum global de la fonction  $f$ . Dans notre cas,  $x_{k^*}$  contient l'allocation optimale permettant de minimiser la fonction objective, c'est-à-dire l'allocation permettant de répliquer les flux du plan de retraite le plus fidèlement.