

Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management
pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le 9 mai 2022

Par : Jean WILHELM

Titre : Modélisation et pilotage de l'allocation d'une poche de private equity pour un contrat retraite

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Olivier Renaudin



David Graiz



Swan Broutard



Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Institut des Actuaires:

Steve Baumann



Mohamed Ouajjou



Thibault Hilpert



Institut du Risk Management :

Nicolas Baradel



Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : FIXAGE

Signature et Cachet :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Paul-Laurent FERRERI

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

FIXAGE EMPLOYEE BENEFITS

11 Avenue Myron Herrick
75008 PARIS

Tél. : 01 53 83 83 93 Fax : 01 53 83 83 99

Signature (Site du 420 020 00019)



Modélisation & pilotage de l'allocation d'une poche de *private equity*
pour un contrat retraite



Jean WILHELM
Certificat d'Expertise Actuarielle
Institut du Risk Management

31 décembre 2021

Résumé

Les assureurs cherchent en permanence à optimiser le couple rendement/risque de leurs actifs. Certains peuvent songer, sous certaines conditions, à introduire ou renforcer la part de capital investissement (*private equity* en anglais) à des fins de diversification et ainsi améliorer le rendement de leurs produits. Afin de mieux piloter leurs allocations, ils peuvent être amenés à modéliser plus finement cette classe d'actifs. Dans cette étude, nous présenterons le fonctionnement des fonds de capital investissement et les risques inhérents à leur détention. Dans le cadre d'un contrat retraite PER et d'une allocation profilée par horizon, nous comparerons plusieurs modélisations des fonds de capital investissement issues de la littérature et des pratiques de marchés. Les données issues de Preqin, d'indices boursiers et de recherches permettront de calibrer le modèle retenu. Nous étudierons ensuite l'effet de diversification pour l'assuré suite à l'introduction d'une poche de capital investissement. Dans cette optique, un fonds euros spécifiquement créé assurera la liquidité du fonds de capital investissement pour les assurés. Nous déterminerons enfin dans quelle mesure l'allocation cible du PER peut être pilotée par cette approche et quels sont les seuils de prudence que l'assureur devra respecter pour maîtriser son risque.

Mots-clés : Capital investissement, Modélisation, ALM, Pilotage

Abstract

Insurers are constantly seeking to optimise the risk/return profile of their assets. Some may think, under specific conditions, to introduce or strengthening private equity's share in their portfolio for diversification purposes and thus improve the return of their products. In order to better manage their allocations, they may need to model this asset class more precisely. In this study, we will describe the way private equity works and risks inherent in their ownership. Within the framework of the new PER pension contract and target management, we will benchmark several models of private equity funds from literature and standard practices. Data from Preqin, stock market index and research paper will help calibrate the selected model. We will then study the diversification effect for the policyholder following the introduction of a private equity fund. With this in mind, a specifically created euro fund will ensure the liquidity of the private equity fund for policyholders. We will determine to what extent the target allocation of the PER can be driven by this approach and what are the prudence thresholds that the insurer will have to respect in order to control its risk.

Keywords : Private equity, Modelling, ALM, Management

Note de synthèse

En période historique de taux bas depuis plusieurs années, et en dépit des remontées ponctuelles des taux, les investisseurs recherchent plus de rendement. Cela peut les conduire à prendre plus de risques sur les marchés dans les limites de leur politique interne et du cadre réglementaire.

Certains s'intéressent à introduire une poche du capital investissement (*private equity* en anglais ou PE en abrégé) dans leurs actifs à des fins de diversification et ainsi améliorer le rendement de leurs produits. Afin de mieux piloter leurs allocations, ils peuvent être amenés à modéliser plus finement certaines classes d'actifs telles que le capital investissement.

Le principe de fonctionnement des fonds de *private equity*

Le capital investissement (*private equity*) consiste en l'achat de parts d'entreprises telles que les PME (petites et moyennes entreprises) et les ETI (entreprises de taille intermédiaire). Les parts de ces entreprises ne sont pas échangeables sur des marchés cotés. Les investisseurs ont la possibilité d'investir directement dans la société ou bien via un fonds de capital investissement.

Les stratégies des fonds de capital investissement consistent à intervenir à différentes étapes de la vie de l'entreprise :

- le **capital risque** ou **capital innovation** : financement lors de la création de l'entreprise
- le **capital développement** : financement du développement d'une entreprise déjà existante ;
- le **capital retournement** : financement d'une entreprise en difficulté (généralement en cas de crise) ;
- le **capital transmission** : financement d'une entreprise dans le but de la céder (à un autre investisseur ou via une introduction sur des marchés cotés).

Dans le monde de la finance anglo-saxonne, le *venture capital* correspond au capital risque et au capital développement.

La vie d'un fonds de capital investissement se décompose en quatre étapes distinctes : phase de souscription, phase d'investissement, phase de désinvestissement, phase de liquidation des sociétés résiduelles.

Pendant la phase de souscription, l'investisseur institutionnel s'engage contractuellement auprès du gérant à bloquer une certaine somme (comptabilisée hors bilan) qui sera appelée tout ou partiellement

lors de la phase d'investissement. Après cette phase, le gérant vend progressivement les actifs du fonds jusqu'au terme du contrat (habituellement 10 ans) et au-delà pour les composantes sans contrepartie (risque de liquidité) ou en forte moins-value dans l'espoir d'une remontée à court terme (figure 1).

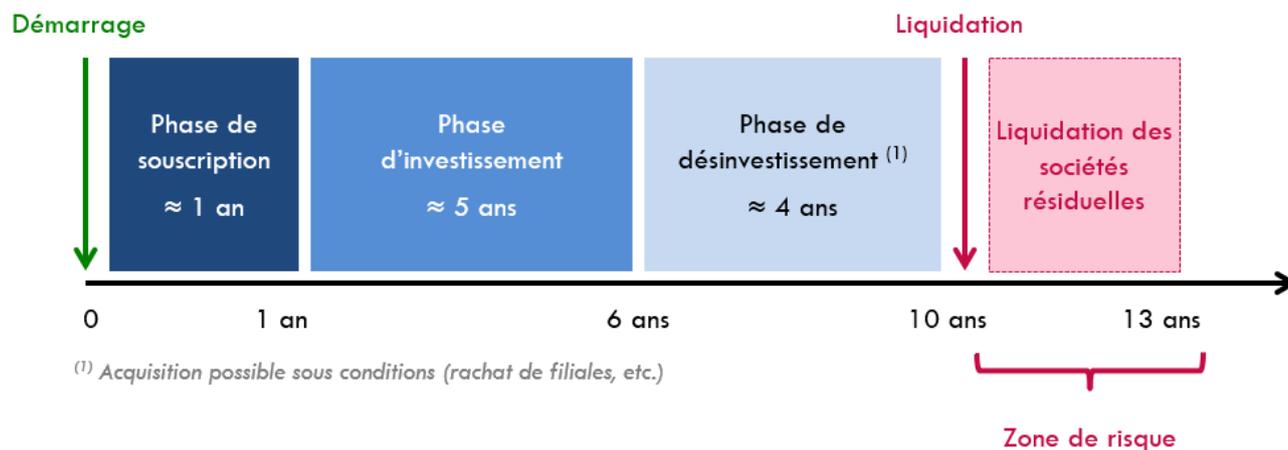


FIGURE 1 – Les phases de la vie d'un fonds de private equity

Les caractéristiques du contrat de retraite étudié et sa modélisation

Le plan d'épargne retraite (PER) a été introduit par la loi PACTE, promulguée le 22 mai 2019. Le PER se présente comme la solution dédiée à l'épargne salariale ou individuelle. Il regroupe au sein d'un même produit via plusieurs compartiments les anciens produits retraite (PERP, PERCO, article 83, Madelin). Dans le cadre de cette étude nous nous intéresserons uniquement au PER individuel qui est le successeur du PERP.

Les actifs disponibles à l'investissement sont définis à l'article R224-1 du Code Monétaire et Financier. L'article renvoie à certains paragraphes de l'article R332-2 du code des assurances. En particulier, il précise qu'il est possible d'investir dans des fonds de fonds d'investissement alternatifs.

La présence de *private equity* dans un contrat en unités de compte (UC) requiert quant à elle que le fonds soit suffisamment liquide et valorisé pour que l'option de rachat offerte à l'assuré représente un coût raisonnable pour l'assureur.

L'ACPR a notamment publié une procédure en cas de vente des titres avec une description du dispositif en cas d'illiquidité (ex : liquidité assurée par l'actif général du fonds en euros, création d'une réserve de liquidité, etc.). Cette procédure a un double enjeu : respecter le devoir de conseil (remise en numéraire des engagements pris envers les assurés) et gérer le risque de réputation.

Dans notre modélisation du passif, nous avons ainsi fait le choix de créer un fonds euros très spécifique, totalement dédié au maintien de la liquidité du produit. Nous verrons que ce choix nécessite néanmoins un pilotage particulier.

Le contrat est aussi investi dans d'autres UC (actions, obligations sans risque, actifs immobiliers, un

fonds de fonds de PE). Afin de lisser le point d'entrée sur les marchés dans le temps, l'assuré versera des primes périodiques pendant toute la durée de son contrat. Les rachats seront quant à eux limités conformément à la réglementation. Cette limitation permet de gérer et de réduire en partie le risque d'illiquidité.

La modélisation de l'actif

Les fonds de capital investissement peuvent être modélisés par deux éléments, le prix ou les flux financiers. Ici les flux financiers représentent à la fois les appels de fonds et les versements de dividendes. Les trois caractéristiques d'un flux sont la date du flux, son montant et son signe.

Dans le cadre de cette étude, six modèles ont été envisagés (le nom entre parenthèses correspond au nom abrégé) :

1. La modélisation continue du prix du fonds par le modèle de Black et Scholes (Black et Scholes) ;
2. La modélisation continue du prix du fonds par un modèle de taux (Modèle de taux (HW)) ;
3. La modélisation du montant des dividendes par une composition de trois lois normales (3 lois normales) ;
4. La modélisation du montant des dividendes par des séries temporelles (Séries temporelles) ;
5. La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux différents (Flux financiers) ;
6. La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux identiques et du prix du fonds par le modèle de Black et Scholes (FF et VM).

Les deux premiers modèles tentent de répliquer le prix du fonds. Les deux suivants tentent de répliquer les dividendes versés mais pas la date. Les deux derniers modélisent la date des flux et les montants. Il convient de noter que le dernier modèle donne le prix du fonds à tout moment en plus des caractéristiques des flux.

Les caractéristiques principales des modèles sont résumées dans la table 1. Les modèles de Black et Scholes et de taux (HW) donnent uniquement le prix du fonds et non les flux financiers. Les modèles des trois lois normales et des séries temporelles modélisent le montant du dividende final. Les deux derniers modèles fournissent les flux financiers dont un fournit aussi le prix du fonds.

Nom	Prix du fonds	Montant des appels de fonds	Date des appels de fonds	Montant des dividendes	Date des dividendes
Black et Scholes	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
Modèle de taux (HW)	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
3 lois normales	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Séries temporelles	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Flux financiers	N.A.	+	+	++	++
FF et VM	+	+	+	+	+

TABLE 1 – *Les caractéristiques des fonds de capital investissement restituées par les modèles*

Quelle que soit la modélisation envisagée, la difficulté de valorisation des fonds de *private equity* à tout moment implique la prudence quant aux interactions actif/passif entre ces fonds et les engagements de l'assureur envers les assurés.

Nous avons retenu ici six critères de sélection pour comparer les modèles envisagés et réaliser un choix pour la suite des travaux. Les six critères sont :

1. **Valorisation continue** : La valeur du fonds est-elle donnée à tout instant ?
2. **Appels de fonds** : La date de versement et le montant des appels de fonds reflètent-ils la réalité ?
3. **Dividendes** : La date de versement et le montant des dividendes reflètent-ils la réalité ?
4. **Simplicité mathématique** : Le modèle est-il transparent ?
5. **Simplicité de calibrage** : Le modèle est-il simple à calibrer et y-a-t-il besoin de beaucoup de données ?
6. **Adéquation aux passifs et besoins des assureurs** : Le modèle reflète-t-il le risque pris par les assureurs compte tenu des caractéristiques du passif ?

Les résultats sont condensés dans le tableau 2.

Nom	Valorisation continue	Appels de fonds	Dividendes	Simplicité mathématique	Simplicité de calibrage	Adéquation
Black et Scholes	+	N.A.	N.A.	++	++	--
Modèle de taux	+	N.A.	N.A.	+	+	-
3 lois normales	N.A.	N.A.	+	++	+	+
Séries temporelles	N.A.	N.A.	+	-	--	+
Flux financiers	N.A.	++	+++	--	-	++
FF et VM	+	++	++	--	-	++

TABLE 2 – *Les critères de choix des modèles de PE*

Nous avons choisi d'écartier trois modèles de l'étude : le modèle des séries temporelles et les deux modèles ne donnant que le prix. Le modèle des séries temporelles requiert des calculs intensifs pour être calibré, ce qui est rédhibitoire.

Les deux modèles qui ne répliquent que le prix (Black & Scholes et le modèle de taux), présentent un intérêt au plan comptable mais ne donnent pas d'information sur la situation de marché et la réelle liquidité des fonds pourtant essentielle en matière de *private equity*

Parmi les trois modèles restant candidats, si l'on compare les deux modèles répliquant les flux financiers, le premier modèle (celui fondé sur les flux financiers et ne donnant pas la VM) réplique le mieux les dividendes.

Le choix entre ce dernier modèle et celui répliquant les dividendes à partir de trois lois normales repose sur l'adéquation au passif et la simplicité de mise en œuvre. Les assureurs retraite ayant un encours de PE bien moins important que les gestionnaires de fonds, l'enjeu de répliquer les flux financiers du PE avec une grande précision est moins essentiel pour les assureurs. Le point clef sera de capter le rendement au terme. C'est pourquoi entre les deux derniers modèles, nous avons choisi de retenir le

modèle répliquant les dividendes à partir de trois lois normales qui présente l'avantage d'une plus grande simplicité par ailleurs.

Ce modèle suppose que les sous-jacents de ces fonds sont des entreprises. A la liquidation du fonds, ces entreprises peuvent être soit en faillite ($cas = faillite$), soit revendues à un autre fonds de PE ($cas = rachatPE$), soit introduites sur les marchés publics ($cas = public$). Nous pouvons aussi faire le parallèle entre ces cas et les conditions de marchés des actions : les périodes de crises, les périodes normales et les périodes de bulles financières. Le montant des dividendes à la liquidation du fonds de capital investissement est modélisé en fonction de ces trois issues. Le type de sortie impacte directement le rendement comme

$$P_T = C \cdot \exp\left(\begin{aligned} &+ \mathbb{1}_{cas=faillite} \cdot \left(\mu_{faillite} - \frac{\sigma_{faillite}^2}{2} + \sigma_{faillite} \cdot Z_T^{faillite} \right) \\ &+ \mathbb{1}_{cas=rachatPE} \cdot \left(\mu_{rachatPE} - \frac{\sigma_{rachatPE}^2}{2} + \sigma_{rachatPE} \cdot Z_T^{rachatPE} \right) \\ &+ \mathbb{1}_{cas=public} \cdot \left(\mu_{public} - \frac{\sigma_{public}^2}{2} + \sigma_{public} \cdot Z_T^{public} \right) \end{aligned} \right)$$

où Z_T^{cas} suit une loi normale. T pourrait être la date de sortie ou la date des appels de fonds et être une variable aléatoire. Cependant, dans notre étude T est une constante. Z_T^{cas} existe pour chaque cas de sortie car il peut être corrélé à différents indicateurs. Par exemple, $Z_T^{rachatPE}$ peut être corrélé avec le mouvement brownien des actions et les deux autres mouvements browniens être indépendants de tout autre indicateur.

La variable cas est tirée aléatoirement entre les trois choix $faillite$, $rachatPE$ et $public$. Chaque cas est modélisé par un tirage aléatoire sur une loi uniforme. La tendance et cette volatilité sont définies et calibrées sur les données historiques. La partie comprise dans la fonction exponentielle peut être calibrée comme un taux de rendement interne (TRI) en incluant le facteur temps ou directement comme un facteur multiplicatif. Les deux calibrages sont possibles car les dates de versements sont connues.

Le calibrage du modèle de capital investissement

Le modèle est calibré sur un portefeuille de fonds de capital investissement liquidés. La distribution logarithmique du coefficient multiplicateur est non symétrique. Davantage de poids est donné aux parties « centrale » et « baisse ». Cela concorde avec les probabilités d'être en situation de crise ou de bulle.

Il aurait été possible de moduler les probabilités de chaque état conditionnellement à la trajectoire passée par une chaîne de Markov. Mais par soucis de simplification et de mise en œuvre opérationnelle, nous ne l'avons pas modélisé. Le calibrage est donné dans la table 3.

Paramètre	Probabilité	Moyenne	Volatilité
Normal	80%	44 %	28 %
Crash	15%	-45 %	80 %
Performance	5%	120 %	15 %

TABLE 3 – *Le calibrage retenu pour le modèle*

Avec cette densité, le coefficient multiplicateur moyen se situe aux alentours de 160%, ce qui concorde avec les données contenues dans la base Preqin.

L'application du modèle au contrat de retraite

Du point de vue de l'assuré, l'ajout d'une poche de capital investissement permet une diversification du risque et impose une détention des parts qui réduit le risque à travers le temps.

Dans le graphique 2 est représenté l'évolution du capital moyen final de l'assuré en fonction de la volatilité de ce capital. Chaque point de ce graphique représente une allocation avec une part de capital investissement différente.

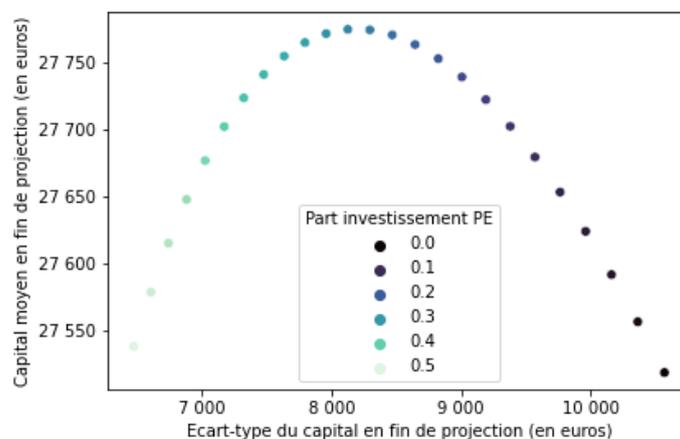


FIGURE 2 – *Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC de PE*

Plusieurs effets influent sur les résultats. Premièrement, la valorisation constante du PE réduit la volatilité annuelle car la performance du fonds n'a aucun impact sur les huit premières années, la rentabilité étant appréciée uniquement via le versement de dividende. L'écart-type en fin de projection est fortement diminué à cause de ce choix d'hypothèse de valorisation constante. Deuxièmement, le capital investissement performe légèrement moins bien que les actions. Enfin, l'augmentation de la part de capital investissement dans la partie UC provoque une déformation de l'allocation du fonds euros (présence de capital investissement) et diminue le taux net servi du fonds euros. La présence de PE dans le fonds euros réduit le coût de la garantie plancher (à cause de sa valorisation constante et de la réduction de la volatilité) et donc réduit en moyenne le taux net servi.

Du point de vue de l'assureur, nous étudions le risque de déformation de l'allocation du fonds en euros et ses conséquences. Le graphique 3 présente la part de capital investissement contenue dans le fonds en euro en fonction la part de PE investie par l'assuré sur toute la durée de projection. Le fonds euros doit racheter beaucoup de part d'UC de capital investissement lors de fortes baisse des marchés financiers et lors du changement d'allocation du contrat.

Lors d'une baisse marquée des marchés, l'encours du contrat diminue et la part de PE augmente significativement dans l'encours du contrat puis lors de la réallocation le fonds euros rachète les parts UC de PE excédentaires. Cet effet est particulièrement présent les sept premières années. Après la huitième année, les parts de PE investies huit ans plus tôt commencent à être liquidées en versant des

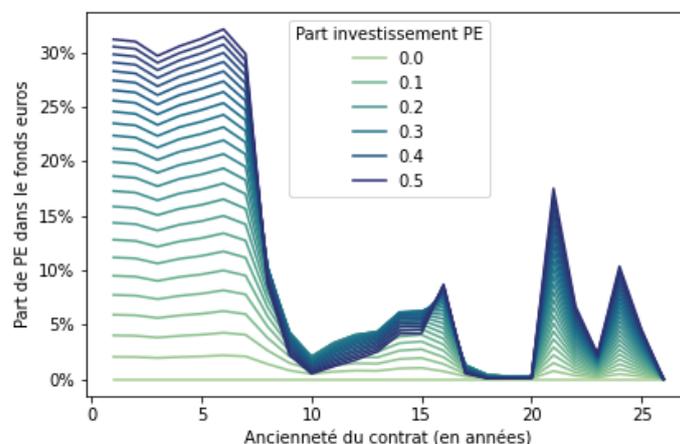


FIGURE 3 – La part de PE dans le fonds euros au cours du temps pour différentes proportions d'UC PE

dividendes. Mais les parts ainsi détruites n'ont pas besoin d'être rachetées par le fonds euros lors de la réallocation.

Aussi, nous observons des pics aux différents moments de changement d'allocation (10, 5 et 2 ans avant le terme). Après ces pics, nous observons les années suivantes une baisse de la part de PE dans le fonds euros grâce à une revente des parts UC de PE aux nouvelles primes et à la liquidation des parts via le versement des dividendes.

Afin d'évaluer l'impact pour l'assureur, nous avons calculé un impact marginal sur le SCR de marché et à cette occasion nous avons constaté que l'augmentation d'un point de PE dans la part UC du contrat augmente le SCR marché de 3,5% environ. Néanmoins, le SCR ne capte que partiellement la réalité du risque du fait de l'absence initiale de PE. En effet, le calcul du SCR est réalisé par un choc instantané et les primes futures sont exclues de la frontière des contrats. Mais à l'horizon d'un BP, dans le cadre de l'ORSA, l'impact pour l'assureur est détectable. Nous avons fait l'exercice à un an qui montre une hausse de plus 66% du SCR de marché dans les 25% des cas les plus défavorables.

La part de capital investissement vendue aux assurés devra quoiqu'il en soit être maîtrisée car elle peut aussi modifier considérablement l'allocation du fonds euros cantonné si ce dernier n'est pas suffisamment mutualisé avec d'autres profils de risque et avoir un impact sur le profil de risque de l'assureur.

Conclusion

L'introduction d'une poche de capital investissement dans un contrat retraite implique des contraintes de liquidité, de gestion des risques et un pilotage de cette poche. L'assureur devra aussi vérifier que l'assuré a le profil adéquat pour investir dans des actifs non-cotés.

Dans ce mémoire, nous avons modélisé un des comportements spécifiques du capital investissement, à savoir la distribution de dividende par bloc. L'introduction d'une poche de capital investissement dans

la partie en UC du contrat oblige l'assureur à contrôler la liquidité de cette poche. Du point de vue de l'assuré et au-delà de l'aspect commercial, l'introduction de cette poche permet un effet de diversification à condition de la détenir pendant suffisamment longtemps. Du point de vue de l'assureur, c'est une nouvelle option (option de liquidité) qu'il donne à l'assuré. Cette option peut influencer significativement sur l'allocation du fonds en euros. La modification de l'allocation du fonds euros peut provoquer une hausse du SCR à court terme et dégrader la solvabilité de l'assureur. En effet, le capital investissement subit un choc à 49%, ce choc est le plus important pour un actif. C'est ce qui conduit à envisager une hausse limitée de la part de private equity dans ce type de produit afin d'optimiser le couple rendement / risque.

La limite principale des travaux menés dans cette étude est la non modélisation du prix en continu de l'UC de *private equity*. Nous avons choisi de ne pas baser cette étude sur les prix mais principalement sur les dividendes versés à la liquidation des fonds. Ce choix implique une sous-estimation de la volatilité du rendement final de l'assuré. Une deuxième limite est la non modélisation des plus ou moins values latentes dans le fonds en euros qui engendre une hausse du coût de la garantie à effet cliquet du fonds euros. Plusieurs pistes d'améliorations sont ainsi envisageables.

Executive summary

In a period of historically low interest rates for several years, and despite occasional rises in interest rates, investors are looking for more yield. This may lead them to take more risks on the markets within the limits of their internal policy and the regulatory framework.

Some are interested in introducing a private equity (PE) component into their assets for diversification purposes and thus improve the return on their products. In order to better manage their allocations, they may need to model certain asset classes such as private equity more precisely.

How private equity funds work

Investing in private equity is the purchase of shares in companies such as SMEs (small and medium-sized enterprises) and intermediate-sized enterprises. These companies' shares are not tradable on stock market. Investors can invest directly in the company or through a private equity fund.

The strategies of private equity funds consist in intervening at different stages of the company's life :

- **Seed capital** : financing during the creation of the company
- **Venture capital** : financing the development of an already existing company
- **Turnaround capital** : financing a company in difficulty (generally in the event of a crisis)
- **Leveraged buyout** : financing of a company with the aim of selling it (to another investor or via an introduction on listed markets)

In the French financial world, venture capital corresponds to *capital risque* and to *capital développement*.

The life of a private equity fund is divided into four distinct stages : formation phase, investment phase, harvesting phase, liquidation phase of residual companies (extention phase).

During the formation phase, the institutional investor makes a contractual commitment to the fund manager to block a certain amount of money which will be called up in whole or in part during the investment phase. After this phase, the manager gradually sells the fund's assets until the end of the contract (usually 10 years) and beyond for components with no counterparty (liquidity risk) or with a high loss of value in the hope of a short-term recovery (Figure 4).

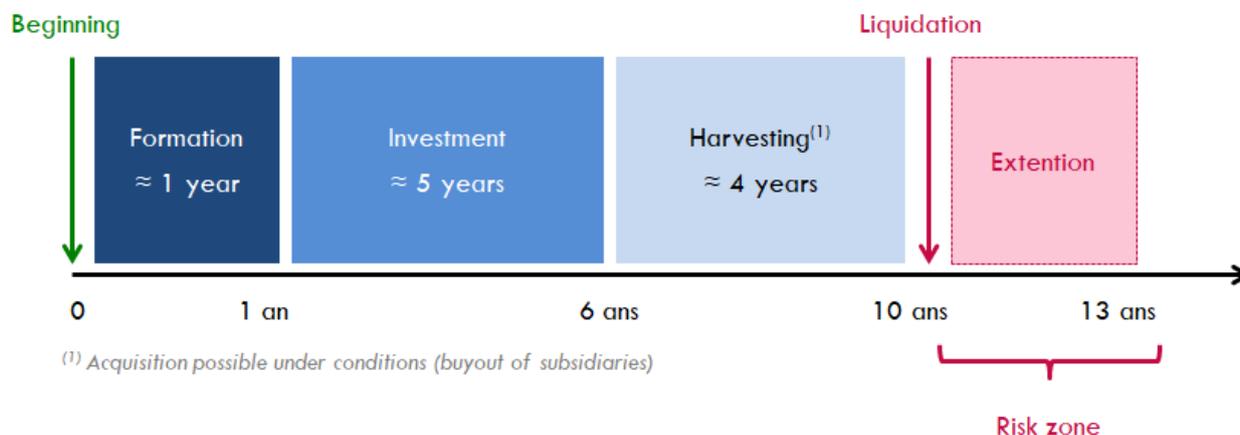


FIGURE 4 – Different stages of a private equity funds

Characteristics of the studied pension contract and its modelling

The pension savings plan (PER) was introduced by the PACTE law, enacted on 22 May 2019. The PER is presented as the solution dedicated to employee or individual savings plan. It brings together within a single product via several compartments the former retirement products (PERP, PERCO, Article 83, Madelin). In the context of this study, we will focus solely on the individual PER, which is the successor to the PERP.

The assets available for investment are defined in Article R224-1 of the *Code Monétaire et Financier*. The article refers to certain paragraphs of Article R332-2 of the *Code des Assurances*. In particular, it specifies that it is possible to invest in funds of alternative investment funds.

Presence of private equity in a unit-linked contract requires that the fund is enough liquid and valued for the surrender option offered to the policyholder to represent a reasonable cost for the insurer.

In particular, the ACPR has published a procedure for the sale of securities with a description of the arrangements in the event of illiquidity (e.g. liquidity provided by the general assets of the euro fund, creation of a liquidity reserve, etc.). This procedure has a dual purpose : to respect the duty to advise (cash delivery of commitments made to policyholders) and to manage the reputational risk.

In our liability modelling, we have thus chosen to create a very specific euro fund, totally dedicated to maintaining the liquidity of the product. We shall see that this choice nevertheless requires special management.

The contract is also invested in other ULs (equities, risk-free bonds, real estate assets, a fund of funds of PE). In order to smooth the entry point on the markets over time, the insured will pay periodic premiums throughout the duration of the contract. Surrenders will be limited in accordance with the regulations. This limitation makes it possible to manage and partially reduce the risk of illiquidity.

Assets modelling

Private equity funds can be modelled by two elements, price or cash flows. Here cash flows represent both cash calls and dividend payments. The three characteristics of a flow are the date of the flow, its amount and its sign.

In this study, six models was considered¹ :

1. Continuous modelling of the fund price by the Black and Scholes model ;
2. Continuous modelling of the fund price by a rate model (Rate Model (HW)) ;
3. Modelling the amount of dividends by a composition of three normal laws (3 standard laws) ;
4. Modelling the amount of dividends by time series (Time series) ;
5. Modelling the financial flows by two different rate models (Cash-flows) ;
6. The modelling of financial flows by two identical rate models and of the fund price by the Black and Scholes model (CF and MV).

Main characteristics of models are summarised in the table 4.

The Black-Scholes and HW models give only the fund price and not the cash flows. The three normal distribution and time series models model the final dividend amount. The last two models provide the cash flows, one of which also provides the fund price.

Name	Market value	Withdrawal amount	Withdrawal timing	Dividend amount	Dividend timing
Black and Scholes	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
Rate model (HW)	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
3 standard laws	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Time series	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Cash-flows	N.A.	+	+	++	++
CF and MV	+	+	+	+	+

TABLE 4 – *Characteristics of private equity funds replicated by models*

Whatever the model considered, the difficulty of valuing private equity funds at any given time implies caution regarding the asset/liability interactions between these funds and the insurer's commitments to policyholders.

Six selection criteria have been chosen here to compare considered models and to make a choice for further work. The six criteria are :

1. **Continuous valuation** : Is the value of the fund given at any time ?
2. **Withdrawal** : Do the payment date and the amount of withdrawal reflect reality ?
3. **Dividend** : Do the payment date and the amount of dividends reflect reality ?
4. **Mathematical simplicity** : Is the model transparent ?

1. The name in brackets corresponds to the abbreviated name.

5. **Simplicity of calibration** : Is the model simple to calibrate and does it need a lot of data ?

6. **Suitability for liabilities' and insurers' needs** : Does the model reflect the risk taken by insurers given the characteristics of the liabilities ?

Results are summarised in the table 5.

Name	Continuous valuation	Withdrawal	Dividend	Mathematical simplicity	Simplicity of calibration	Suitability
Black and Scholes	+	N.A.	N.A.	++	++	--
Rate model (HW)	+	N.A.	N.A.	+	+	-
3 standard laws	N.A.	N.A.	+	++	+	+
Time series	N.A.	N.A.	+	-	--	+
Cash-flows	N.A.	++	+++	--	-	++
CF and MV	+	++	++	--	-	++

TABLE 5 – *The selection criteria for choosing models of PE*

We have chosen to exclude three models from the study : the time series model and the two models giving only the price. The time series model is computationally intensive to calibrate, which is prohibitive.

The two models that only replicate the price (Black & Scholes and the interest rate model) are interesting from an accounting point of view, but do not provide information on the market situation and the real liquidity of the funds, which is essential for private equity.

Among the three remaining candidate models, if we compare the two models that replicate financial flows, the first model (the one based on financial flows and not giving the MV) replicates dividends the best.

The choice between the latter model and the one replicating dividends from three standard laws is based on the suitability of the liabilities and the simplicity of implementation. As pension insurers do not have the same needs as fund managers, the issue of replicating PE cash flows with high accuracy is less critical for insurers. The key point will be to capture the return at maturity. This is why, between the last two models, we have chosen to retain the model replicating dividends from three normal laws, which has the advantage of greater simplicity.

This model assumes that the underlying assets of these funds are companies. When the fund is liquidated, these companies can be either bankrupt (*case = bankruptcy*), sold to another PE fund (*case = PEbuyout*), or introduced to the public markets (*case = IPO*). We can also draw parallels between these cases and equity market conditions : crash periods, normal periods and bubble periods. The amount of dividends at the liquidation of the private equity fund is modelled according to these three outcomes.

The type of exit directly impacts the return as

$$\begin{aligned}
P_T = & C \cdot \exp(\\
& + \mathbb{1}_{case=bankruptcy} \cdot \left(\mu_{bankruptcy} - \frac{\sigma_{bankruptcy}^2}{2} + \sigma_{bankruptcy} \cdot Z_T^{bankruptcy} \right) \\
& + \mathbb{1}_{case=PEbuyout} \cdot \left(\mu_{PEbuyout} - \frac{\sigma_{PEbuyout}^2}{2} + \sigma_{PEbuyout} \cdot Z_T^{PEbuyout} \right) \\
& + \mathbb{1}_{case=IPO} \cdot \left(\mu_{IPO} - \frac{\sigma_{IPO}^2}{2} + \sigma_{IPO} \cdot Z_T^{IPO} \right) \\
&)
\end{aligned}$$

where Z_T^{case} follows a gaussian law. T can be the exit date or the date of withdrawals and be a random variable. In our study, T is a constant. Z_T^{case} exists for each exit case because it can be correlated to different indicators. For example, $Z_T^{PEbuyout}$ can be correlated with the Brownian motion of stocks and the other two Brownian motions can be independent of any other indicator.

The variable *case* is drawn randomly between the three choices *bankruptcy*, *PEbuyout* and *IPO*. Each case is modelled by a random draw on a uniform distribution. The trend and this volatility are defined and calibrated on the historical data. The part included in the exponential function can be calibrated as an internal rate of return (IRR) by including the time factor or directly as a multiplicative factor. Both calibrations are possible because the payout dates are known.

Calibration of the private equity model

Model is calibrated on a portfolio of liquidated private equity funds. The distribution of the coefficient is non-symmetric. More weight is given to the « central » and « downward » parts. This is consistent with the probability of being in a crash or bubble situation.

It would have been possible to modulate the probabilities of each state conditional on the path taken by a Markov chain. But for the sake of simplification and operational implementation, we have not modelled it. The calibration is given in the table 6.

Parameter	Probability	Mean	Volatility
Central	80%	44 %	28 %
Crash	15%	-45 %	80 %
Bubble	5%	120 %	15 %

TABLE 6 – *Selected calibration*

With this density, the average multiplier is around 160%, which is consistent with the Preqin database.

Applying the model to the pension contract

From the insured's point of view, the addition of a private equity pocket allows for risk diversification and imposes a holding period that reduces the risk over time.

In the graph 5 is represented the evolution of the final average capital of the insured in function to the volatility of this capital. Each point in this graph represents an allocation with a different share of private equity.

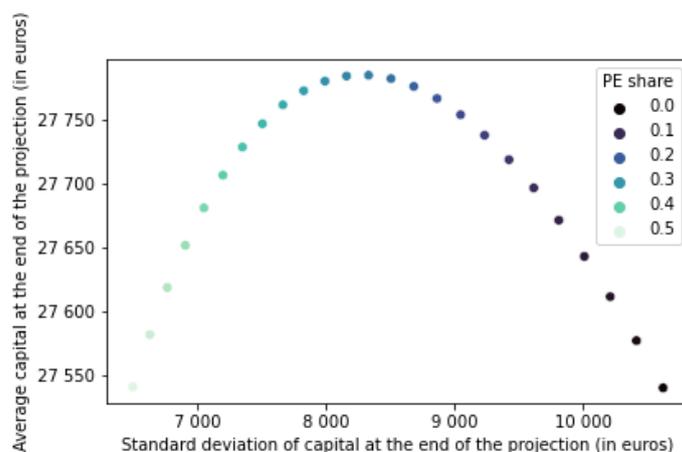


FIGURE 5 – *The final average capital of the insured in function to the volatility of this capital with different share of private equity*

Several effects impact the results. Firstly, the constant valuation of the PE reduces the annual volatility because the performance of the fund has no impact on the first eight years, profitability being assessed solely via the dividend payment. The standard deviation at the end of the projection is greatly reduced because of this choice of constant valuation hypothesis. Secondly, private equity performs slightly worse than equities. Finally, the increase in the share of private equity in the unit-linked part causes a distortion of the allocation of the euro fund (presence of private equity) and decreases the net rate served by the euro fund. The presence of PE in the euro fund reduces the cost of the floor guarantee (due to its constant valuation and the reduction of volatility) and therefore reduces the average bonus share.

From the insurer's point of view, we study the risk of distortion of the allocation of the euro fund and its consequences. The graph 6 presents the share of private equity contained in euro fund as a function of the share of PE invested by the insured over the entire projection period. The euro fund has to buy back a lot of the private equity shares when the financial markets fall substantially and when the allocation of the contract is changed.

When the markets fall substantially, the contract's assets under management decrease and the share of PE increases significantly in the contract's value, and then, during the reallocation, the euro fund redeems the excess PE unit-linked shares. This effect is particularly present in the first seven years. After

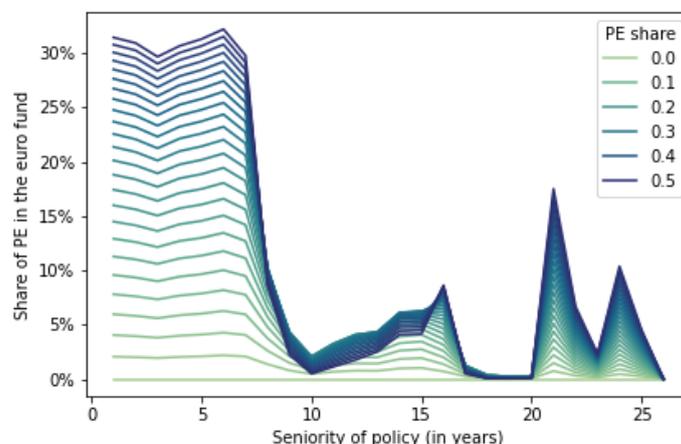


FIGURE 6 – *PE share in euro fund over time with different shares of PE in the unit-linked part*

the eighth year, the PE units invested eight years earlier start to be liquidated by paying dividends. But the shares destroyed in this way do not need to be bought back by the euro fund during the reallocation.

Also, we observe peaks at the different moments of allocation change (10, 5 and 2 years before the end). After these peaks, we observe in the following years a decrease in the share of PE in the euro fund due to a resale of PE's unit-linked shares to the new premiums and to the liquidation of the shares via the payment of dividends.

In order to assess the impact for the insurer, we calculated a marginal impact on the market SCR and on this occasion we found that the increase of one point of PE in the unit-linked part of the contract increases the market SCR by about 3.5%. Nevertheless, the SCR only partially captures the reality of the risk due to the initial absence of PE, the fact that the SCR is calculated by an instantaneous shock and the fact that future premiums are not taken into account in the contract frontier. But over the horizon of a BP, in the framework of the ORSA, the impact for the insurer is detectable. We have done the exercise at one year which shows an increase of more than 66% of the market SCR in the 25% of the worst cases.

The share of private equity sold to policyholders will have to be controlled as it can considerably modify the allocation of the ring-fenced euro fund if it is not sufficiently pooled with other risk profiles and have an impact on the insurer's risk profile.

Conclusion

The introduction of a private equity pocket in a pension contract implies liquidity and risk management constraints and the need to manage this pocket. The insurer will have to check that the policyholder has the right profile to invest in non-listed assets.

In this paper, we have modelled one of the specific behaviours of private equity, namely the distribution of dividends by block. The introduction of a private equity fund in the unit-linked part of the contract

forces the insurer to control the liquidity this fund. From the policyholder's point of view and beyond the commercial aspect, the introduction of this pocket allows for a diversification effect provided it is held for a sufficiently long period. From the insurer's point of view, it is a new option (liquidity option) given to the policyholder. This option can significantly influence the allocation of the euro fund. The change in the allocation of the euro fund can cause an increase in the SCR in the short term and degrade the solvency of the insurer. Indeed, private equity is subject to a shock at 49%, which is the most important shock for an asset. This is what leads us to consider a limited increase in the share of private equity in this type of product in order to optimise the risk/return ratio.

The main limitation of the work carried out in this study is the fact that the price of the private equity unit is not modelled continuously. We have chosen not to base this study on prices but mainly on dividends paid at the liquidation of the funds. This choice implies an underestimation of the volatility of the insured's final return. A second limitation is the non-modelling of unrealised capital gains or losses in the euro fund, which increases the cost of the ratchet guarantee of the euro fund. Several leads of improvement can therefore be considered.

Remerciements

Tout d'abord, je présente ma gratitude à Michel PIERMAY, président de FIXAGE pour m'avoir encouragé à étudier au CEA.

Je suis aussi reconnaissant envers Paul-Laurent FERRERI, Quentin MERLET et tous mes autres collègues de FIXAGE qui ont été présents pour mon mémoire.

Ensuite, je remercie le relecteur du CEA, Christophe DUTANG, de m'avoir apporté sa vision académique.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour ma famille et mes amis.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Note de synthèse	9
Executive summary	19
Introduction	37
1 Le principe de fonctionnement des fonds de <i>private equity</i>	39
1.1 Présentation du <i>private equity</i>	39
1.2 Le cadre réglementaire	45
1.3 La difficulté d'appréciation du risque	49
2 Les caractéristiques du contrat de retraite étudié et sa modélisation	57
2.1 Les contrats d'assurance vie adossables à un actif exposé à un fonds de <i>private equity</i> .	57
2.2 La description du contrat de retraite étudié	60
2.3 La modélisation du contrat au passif d'un assureur	62
3 La modélisation de l'actif	67
3.1 La gestion financière	67
3.2 La modélisation des fonds de <i>private equity</i>	70
3.3 La modélisation des autres classes d'actifs que le <i>private equity</i>	81
3.4 Les interactions actif/passif	84
4 Le calibrage du modèle de capital investissement	87
4.1 Les données utilisées	87
4.2 L'analyse des données sur un millésime	90
4.3 Le calibrage de la distribution de probabilité du TRI	94
5 L'application du modèle au contrat de retraite	99
5.1 L'implémentation des contrôles et des variables importantes	99

TABLE DES MATIÈRES

5.2	La détermination de l'allocation optimale d'actif du point de vue de l'assuré	105
5.3	Le risque porté par l'assureur	107
	Conclusion	121
	Bibliographie	123
	A Liste des variables de modélisation	125
	B Les graphiques des indicateurs de performance	127

Table des figures

1	Les phases de la vie d'un fonds de <i>private equity</i>	10
2	Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC de PE	15
3	La part de PE dans le fonds euros au cours du temps pour différentes proportions d'UC PE	16
4	Different stages of a private equity funds	20
5	The final average capital of the insured in fonction to the volatility of this capital with different share of private equity	24
6	PE share in euro fund over time with different shares of PE in the unit-linked part . .	25
1.1	Capitaux levés par les fonds de PE dans les différentes régions du monde par année (en milliards de dollars)	40
1.2	Capitaux investis par les fonds de PE en fonction des différents segments par année (en milliards d'euros)	41
1.3	Les phases de la vie d'un fonds de <i>private equity</i>	44
1.4	La courbe en J ou le TRI des fonds de <i>private equity</i> par année d'ancienneté du fonds	44
1.5	Les thèmes du reporting AIFM	47
1.6	Le risque d'endettement vu par l'AMF	52
1.7	L'horizon de détention des parts du fonds de PE par les investisseurs dans l'année et la liquidité du portefeuille d'actifs des fonds de PE en 2016 et 2017	53
1.8	Les outils de gestion de la liquidité	53
1.9	L'écart de performance (ratio EBITDA/EV) entre le marché public et le marché privé (PE) par année	54
3.1	Exemple d'allocation au cours du temps avec une part de PE (ζ) égale à 10 % et une part actions (ν) à 60 %	69
3.2	Exemple des flux financiers et de la valeur d'un fonds de PE avec un TRI de 25% . . .	81
4.1	Densité du log-rendement pour les fonds de <i>private equity</i> par stratégie	89
4.2	Le nombre de lignes disponibles par maturité	92
4.3	Le <i>PIC</i> en fonction de la maturité	93
4.4	Le <i>DPI</i> en fonction de la maturité	93
4.5	Le <i>TRI</i> en fonction de la maturité	94
4.6	Cours des principaux indices (<i>total return</i>) du capital investissement	95

TABLE DES FIGURES

4.7	Volatilité sur 6 mois annualisée du log-rendement	96
4.8	Densité estimée du log-coefficient multiplicateur pour les fonds de PE	98
5.1	Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC de PE	105
5.2	Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC actions	106
5.3	La part de PE dans le fonds euros en fonction de la PM (fonds euros + UC) à la fin de la première année et les densités des deux variables	110
5.4	La part de PE dans le fonds euros après le versement des primes au cours du temps . .	111
5.5	La part de PE dans le fonds euros après la réallocation au cours du temps pour différentes proportions d'UC PE	112
5.6	La PM au cours du temps en fonction du taux de rachat	112
5.7	La part de PE dans le fonds euros après le versement des primes au cours du temps . .	113
5.8	La part de PE dans le fonds euros au cours du temps pour différents taux de rachat . .	114
5.9	Nombre de parts d'UC PE créées nettes de destruction au cours du temps en fonction du taux de rachat	114
5.10	La performance moyenne de l'actif du fonds euros en fin de projection en fonction de sa volatilité pour différentes proportions de PE dans la partie UC du contrat	115
5.11	La performance annuelle moyenne (taux net servi) du fonds euros en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC PE	116
5.12	La marge financière moyenne de l'assureur en fin de projection en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC PE	117
B.1	Le <i>RVPI</i> en fonction de la maturité	127
B.2	Le <i>TVPI</i> en fonction de la maturité	128

Liste des tableaux

1	Les caractéristiques des fonds de capital investissement restituées par les modèles . . .	11
2	Les critères de choix des modèles de PE	12
3	Le calibrage retenu pour le modèle	14
4	Characteristics of private equity funds replicated by models	21
5	The selection criteria for choosing models of PE	22
6	Selected calibration	23
1.1	Allocation minimale en actif peu risqué ($MRM \leq 3$) à mesure que la durée restante (D) avant la retraite diminue	49
3.1	Allocation minimale en actif peu risqué ($MRM \leq 3$) à mesure que la durée restante (D) avant la retraite diminue	69
3.2	La liste des notations mathématiques employées	71
3.3	Les caractéristiques des fonds de capital investissement restituées par les modèles . . .	79
3.4	Les critères de choix des modèles de PE	79
4.1	Récapitulatif des indicateurs pour les principaux indices depuis 2004	95
4.2	Récapitulatif des indicateurs pour les principaux indices en 2019 et 2020	97
4.3	Le calibrage retenu pour le modèle	97
5.1	Les résultats des tests	101
5.2	La répartition des actifs après le versement de la prime la première année	103
5.3	La répartition des actifs après les sorties la première année	103
5.4	La répartition des actifs à la fin de la première année	104
5.5	La répartition des actifs à la fin de la première année en cas de forte baisse des actions	108
5.6	La répartition des actifs à la fin de la première année en cas de hausse des actions . . .	109
A.1	La liste des variables globales	125
A.2	La liste des variables du passif calculées à chaque pas de temps t	126
A.3	La liste des variables du passif calculées pour chaque police d'assurance	126

Liste des symboles

AFIC	Association française des investisseurs pour la croissance (aujourd'hui France Invest)
AIFM	Directive sur les gestionnaires des fonds d'investissement alternatifs
AOA	Absence d'opportunité d'arbitrage
BEL	Meilleur estimateur des engagements (<i>Best Estimate Liability</i> en anglais)
CoMoFi	Code monétaire et financier
EIOPA	Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (<i>European Insurance and Occupational Pensions Authority</i> en anglais)
FIA	Fonds d'investissement alternatifs
GSE	Générateur de scénarios économiques
IFRS	Normes internationales d'information financière (<i>International Financial Reporting Standards</i> en anglais)
LBO	Achat avec effet de levier <i>Leveraged buy out</i>
MCR	Capital minimum requis (<i>Minimum Capital Requirement</i> en anglais)
OPC	Organismes de placements collectifs
OPCVM	Organismes de placement collectif en valeurs mobilières
PE	Capital investissement (<i>Private Equity</i> en anglais)
PP	Prime périodique
PT	Provisions techniques
PU	Prime unique
RM	Marge de risque (<i>Risk Margin</i> en anglais)
SCR	Capital de solvabilité requis (<i>Solvency Capital Requirement</i> en anglais)
SII	Solvabilité II
TRI	Taux de rendement interne
UC	Unités de compte (dans une assurance vie)

Introduction

En période historique de taux bas depuis plusieurs années, et en dépit des remontées ponctuelles des taux, les investisseurs recherchent plus de rendement. Cela peut les conduire à prendre plus de risques sur les marchés dans les limites de leur politique interne et du cadre réglementaire.

Afin d'optimiser leur allocation, ils peuvent être amenés à construire une modélisation plus fine de certaines classes d'actifs.

Traditionnellement, ils investissent dans des obligations d'états et d'entreprises (environ 30 % chacune), des actions (environ 20 %) et dans l'immobilier (environ 8 %) via des OPCVM. La part restante varie suivant l'assureur, mais ils peuvent investir notamment dans des fonds d'investissement alternatifs (FIA).

Les FIA investissent sur des actifs non cotés tels que des actifs à effet de levier, des obligations risquées (*high yield*) et du capital investissement (*private equity* ou PE). La part investie dans ce dernier est encore marginale mais a progressé au cours des dernières années.

Les assureurs s'intéressent à l'optimisation de la poche du capital investissement pour diversifier leur actif et améliorer le rendement de leurs produits.

Dans cette étude, nous nous intéresserons au cas d'un assureur retraite avec passif relativement long. Nous avons déterminé dans quelle mesure il pourrait investir en *private equity* tout en maîtrisant les risques associés (liquidité, volatilité).

Afin de mener ces travaux, nous avons au préalable envisagé une modélisation plus précise du *private equity* avec le calibrage adéquate et avons utilisé un modèle ALM pour mesurer l'impact sur l'assureur et le couple rendement risque.

Chapitre 1

Le principe de fonctionnement des fonds de *private equity*

Le *private equity* consiste en la prise de participation en capital dans des entreprises non cotées, soit en direct soit via des fonds. Le but de l'investissement est de financer la constitution, le développement ou la cession/transmission de ces entreprises.

Les apporteurs de capitaux privés investissent en fonds propres, principalement dans le but de dégager une plus-value lors de la vente. Dans le cadre d'un investissement en direct, le capital investissement confère à l'apporteur de capitaux un droit de regard sur la stratégie et la gestion de l'entreprise cible. Le *private equity* relève de la Directive sur les Gestionnaires des fonds d'investissement alternatifs (AIFM).

1.1 Présentation du *private equity*

Le capital investissement (*private equity*) consiste en l'achat de parts d'entreprises telles que les PME (petites et moyennes entreprises) et les ETI (entreprises de taille intermédiaire). Les parts de ces entreprises ne sont pas échangeables sur des marchés cotés. Les investisseurs ont la possibilité d'investir directement dans la société ou bien via un fonds de capital investissement.

Les stratégies des fonds de capital investissement consistent à intervenir à différentes étapes de la vie de l'entreprise (PANSARD, 2007) :

- le **capital risque** ou **capital innovation** : lors de la création de l'entreprise
 - *seed stage* : financement de la création d'un nouveau concept ;
 - *early stage* : financement de la mise en production du premier produit ;
- le **capital développement** : financement du développement d'une entreprise déjà existante et ayant besoin de fonds supplémentaires pour se développer (pour augmenter sa production, élargir sa gamme de produits ou chercher de nouveaux marchés) ;
- le **capital retournement** : financement d'une entreprise en difficulté (généralement en cas de crise) ;

- le **capital transmission** : financement d'une entreprise dans le but de la céder (à un autre investisseur ou via une introduction sur des marchés cotés). Généralement, ce type de capital investissement est composé d'un effet de levier (*LBO : leveraged buyout*) et représente la majorité des fonds investis en PE.

Dans le monde de la finance anglo-saxonne, le *venture capital* correspond au capital risque et au capital développement.

1.1.1 Le marché du *private equity*

Le premier cas de PE recensé aurait un lien avec Thalès de Milet (auteur du théorème de Thalès) (BATTINI, 2017). Il aurait convaincu des financiers d'investir dans des moulins suite à une récolte abondante d'olives. Les fonds de capital investissement tels que nous les connaissons aujourd'hui sont présents en France depuis les années 1985. Ils ont été à l'origine développés par l'AFIC (Association française des investisseurs pour la croissance) devenue France Invest en 2018.

Nous traiterons dans les parties suivantes du marché des fonds de capital investissement en France et dans le monde. Enfin, les caractéristiques des fonds de PE seront analysées.

Le marché des fonds de *private equity*

En 2018, plus de 450 milliards de dollars ont été levés dans le monde. La majorité des levées de fonds a lieu aux États-Unis d'Amérique (graphique 1.1). Les fonds de PE étaient présents aux USA bien avant leur introduction en France.

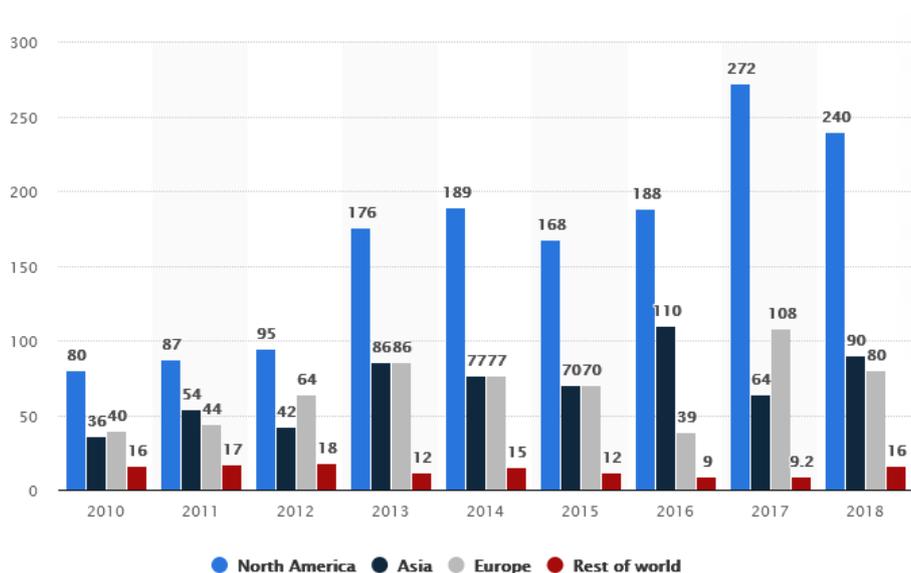


FIGURE 1.1 – Capitaux levés par les fonds de PE dans les différentes régions du monde par année (en milliards de dollars)

Source : Statista

En France, à l'exception des deux crises (2008 et 2011), l'augmentation en numéraire des fonds investis dans le capital investissement est notable (FRANCE-INVEST, 2020) (graphique 1.2). Environ 60% des fonds investis en capital investissement sont investis dans du capital transmission. La part sur ce segment est approximativement la même aux États-Unis.

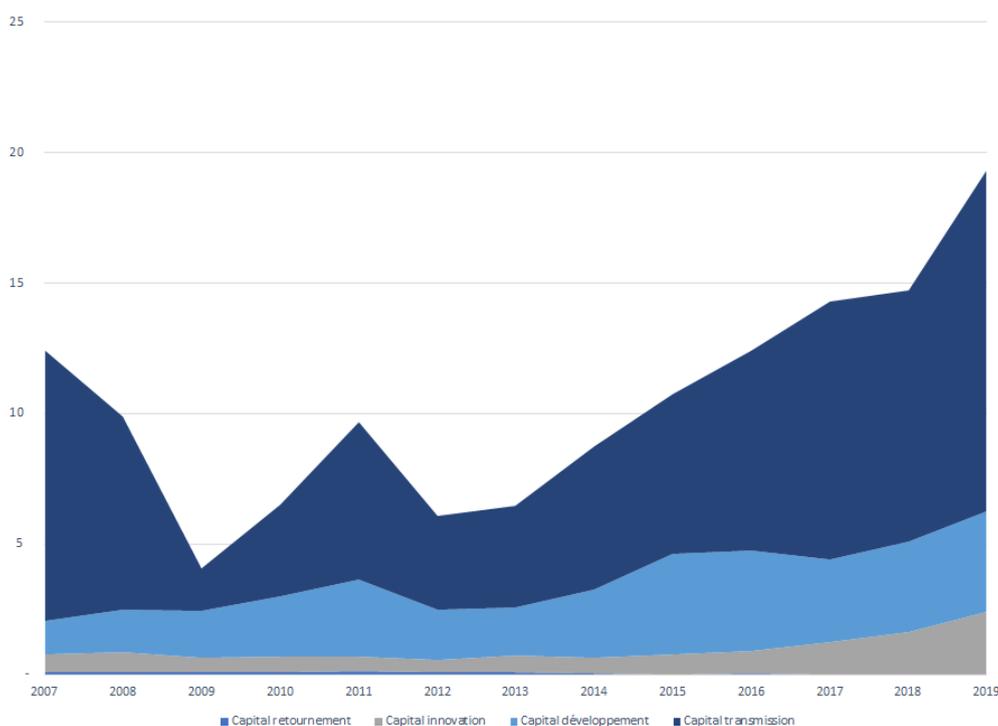


FIGURE 1.2 – Capitaux investis par les fonds de PE en fonction des différents segments par année (en milliards d'euros)

Source : France Invest

Les modalités d'investissement dans le *private equity* via son assurance vie

De 1998 à 2005, les contrats DSK permettaient d'investir dans des contrats d'assurance vie ou de capitalisation non imposés à partir de 8 ans à condition d'avoir investi une part significative dans des fonds risqués sur les PME ou ETI. A partir de 2005, les contrats NSK prennent le relais en maintenant l'avantage fiscal mais en modifiant les seuils minimaux d'investissement.

En France, peu d'assureurs vie possèdent des fonds de PE dans l'actif de leurs fonds en euros. En effet, le mécanisme de redistribution de la participation aux bénéficiaires et la volatilité du PE n'incitent pas les assureurs à investir :

- le rendement négatif en début de vie du PE peut obliger les assureurs à provisionner contre la dépréciation durable de l'actif (PDD) ;

- en cas de gain sur l'investissement en PE, l'assureur doit néanmoins redistribuer 85% de ses bénéfices (*modulo* les pertes des autres actifs) ;
- en cas de perte, l'assureur peut être amené à puiser dans ses fonds propres pour couvrir son engagement envers les assurés.

De son côté, l'assuré peut investir dans des UC constituées de fonds de fonds de capital investissement (la liquidité est gérée par le fonds de fonds), ou directement dans des fonds de capital investissement via des fenêtres de souscription, mais les frais de rachats restent importants sur cette catégorie d'UC, supérieurs à 10%.

Les modalités d'investissements varient cependant d'un pays à l'autre. Par exemple, au Luxembourg, les classes d'actifs disponibles à l'investissement dépendent du patrimoine des assurés. Plus un assuré est fortuné, plus il a accès à une large gamme de classes d'actifs, dont le capital investissement (ROBINEAU, 2019).

Mais les assureurs, principalement en vie, restent encore à ce jour de récents entrants sur ce marché. Au USA, ce sont surtout les fonds de pensions qui détiennent une part importante de fonds de capital investissement. Et en France, une part non négligeable de l'investissement dans des fonds de PE provient de fonds de pension étrangers.

Mais depuis récemment, certains assureurs non-vie envisagent aussi d'investir leurs PM dans du PE dans le but de réduire le coût de certains passifs longs (dommages, responsabilité civile, ...). Cette classe d'actifs est néanmoins vouée à rester contenue dans la mesure où elle dégrade généralement le ratio de solvabilité au sens de la directive Solvabilité 2, cet actif étant plus risqué que les obligations d'état.

Le marché du capital investissement est en progression dans le monde depuis plus de 20 ans et le marché français suit cette tendance. Cependant, cette classe d'actifs était méconnue en France jusqu'en 2008 où de nombreux travaux de recherche ont été publiés (PANSARD, 2007). Un numéro de la revue d'économie financière (REVUE D'ÉCONOMIE FINANCIÈRE, 2008) fut également consacré à ce sujet. Aujourd'hui les caractéristiques du capital investissement sont mieux connues et appréhendées par les autorités et les investisseurs qui s'y intéressent plus que jamais.

1.1.2 Les caractéristiques techniques du *private equity*

Il existe plusieurs manières de prendre des participations dans des entreprises non cotées :

- soit en direct dans l'entreprise (généralement réservé au cadre familial ou aux *business angels*) ;
- soit via un fonds de *private equity* ;
- soit via un fonds de fonds de *private equity*.

Le capital investissement est un actif particulier et n'est pas aisément accessible pour les particuliers. Ces particularités légales sont dues aux contraintes techniques de cet actif.

Les risques d'investissement dans des entreprises

L'investissement dans une société non cotée (pas forcément via un fonds de *private equity*) repose sur le principe que l'investisseur majoritaire suivra l'entreprise dans le cadre de la stratégie qu'il entend

mettre en œuvre pour que les capitaux investis génèrent la rentabilité espérée. La prime de risque pour une entreprise est supérieure à celle des sociétés cotées pour quatre raisons :

- un **risque d'exploitation** en moyenne plus élevé : le périmètre d'activité est restreint, il y a une forte sensibilité à la conjoncture économique et l'apparition de nouvelles technologies dans le secteur engendre des problématiques de pérennité ;
- une **asymétrie d'information** entre le dirigeant de l'entreprise et l'investisseur potentiel, une partie peut être mieux informée que l'autre d'où une difficulté d'évaluation correcte des titres ;
- un **risque moral** : conflits d'intérêts après la mise en place de l'investissement (rentabilité de l'investissement contre la rémunération des dirigeants) ;
- une **relation d'agence** : l'investisseur minoritaire dépend largement de l'investisseur majoritaire car ce dernier gère la politique de l'entreprise et peut modifier les caractéristiques implicites du contrat de capital investissement pour défendre ses propres intérêts (dans une société cotée, l'investisseur minoritaire possède le pouvoir de sanction dans la mesure où il peut vendre librement ses titres).

L'ensemble de ces contraintes expliquent la faible liquidité de ces titres d'où la nécessité d'engager un intermédiaire (un fonds) pour contrer ces risques et jouer un rôle de production de l'information. Ils diversifieront le portefeuille afin d'en réduire le risque global.

La vie d'un fonds de *private equity* et ses flux financiers

La vie d'un fonds de capital investissement se décompose en quatre étapes distinctes :

1. phase de souscription ;
2. phase d'investissement ;
3. phase de désinvestissement ;
4. phase de liquidation des sociétés résiduelles.

Pendant la phase de souscription, l'investisseur institutionnel s'engage contractuellement auprès du gérant à bloquer une certaine somme (comptabilisée hors bilan) qui sera appelée tout ou partiellement lors de la phase d'investissement. A l'issue de cette phase, le gérant vend progressivement les actifs du fonds jusqu'au terme du contrat liant l'investisseur et le fonds de capital investissement (habituellement 10 ans) et au-delà pour les composantes sans contrepartie (risque de liquidité) ou en forte moins-value dans l'espoir d'une remontée à court terme (figure 1.3).

La courbe en J caractéristique du taux de rendement interne de ces fonds (figure 1.4) se décompose en quatre phases :

1. **à l'ouverture** : comptabilisation des frais (sur une assiette de montant levé et non appelé) ;
2. **pendant les premières années** : inscription des faillites des entreprises (les faillites d'entreprises sont détectées plus rapidement que les expansions d'entreprises) ;
3. **après quelques années** : les premiers dividendes des entreprises sont réinvestis ce qui diminue le capital appelé et augmente le taux de rendement interne (TRI) ;
4. **pendant la fin de la vie du fonds** : stabilisation du TRI car les montants restants investis sont résiduels comparés aux montants appelés.

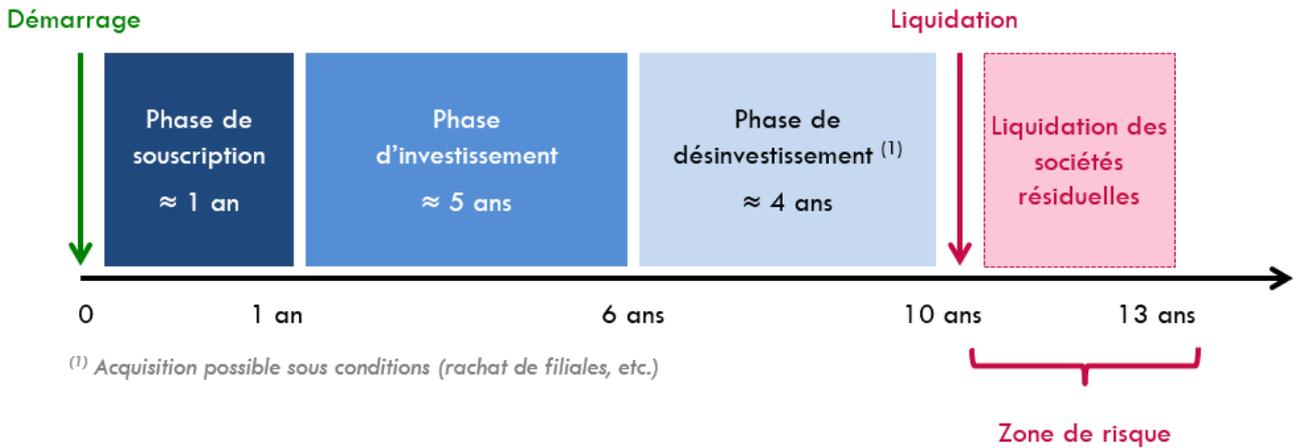


FIGURE 1.3 – Les phases de la vie d'un fonds de *private equity*

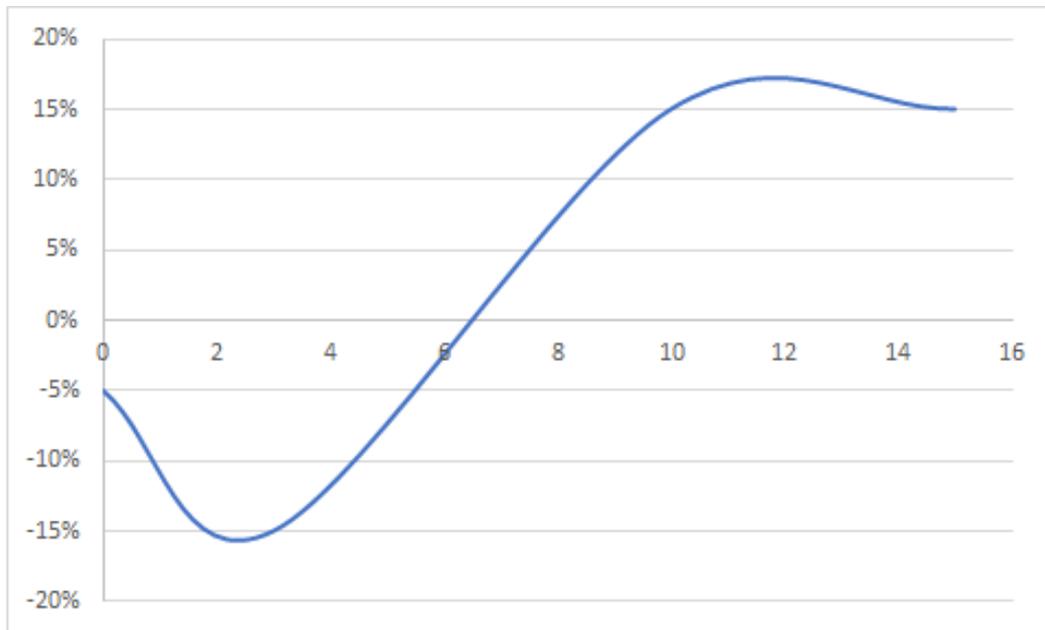


FIGURE 1.4 – La courbe en J ou le TRI des fonds de *private equity* par année d'ancienneté du fonds

Ces quatre phases correspondent aux phases de la vie du fonds de capital investissement.

Dans la littérature scientifique, la courbe en J fait référence au taux de rendement interne, cependant dans la presse ou sur certains blogs la courbe en J fait référence aux flux financiers. Les flux financiers et le TRI sont dans tous les cas intrinsèquement liés.

Dans certains travaux et études présentant le marché du capital investissement, certains graphiques sont en montants appelés et d'autres sont en montants investis. Les montants levés, ou montants bloqués, correspondent aux montants que l'investisseur s'engage à verser au fonds à la demande de ce dernier. Les montants investis sont les fonds réellement appelés par le fonds de PE, i.e. les fonds réellement versés par l'investisseur.

Enfin, pour lisser les appels des fonds et le rendement, il est possible d'investir via des fonds de fonds de capital investissement.

Investir dans un fonds de fonds de capital investissement

En moyenne, un fonds de PE est investi dans 20 entreprises, un fonds de fonds est investi dans 20 fonds. L'actif sous-jacent d'un fonds de fonds est réparti entre 300 et 400 entreprises. Grâce à ces multiples investissements non seulement dans les entreprises mais aussi dans le temps, les fonds de fonds espèrent diversifier les risques liés au PE. Cependant, en multipliant les intermédiaires (sans oublier l'assureur dans le cadre d'une assurance vie), les frais augmentent pour l'investisseur final. Le rendement supposé supérieur du capital investissement est alors réduit.

1.2 Le cadre réglementaire

Le cadre réglementaire a été renforcé suite aux crises financières de ces dernières années. Les fonds d'investissement alternatifs (FIA) sont en particulier soumis à plus de transparence.

1.2.1 La classification dans le Code Monétaire et Financier

La directive sur les gestionnaires de fonds d'investissement alternatifs entrée en vigueur depuis le 22 juillet 2013 a modifié la nomenclature des organismes de placement collectif (OPC). La partie législative du code monétaire et financier crée un nouvel ensemble global dénommé « les placements collectifs » divisé en trois catégories :

1. Les Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) relevant de la Directive Européenne UCITS ;
2. Les Fonds d'Investissement Alternatifs (FIA) relevant de la Directive sur les Gestionnaires des fonds d'investissement alternatifs (AIFM) ;
3. Les autres placements collectifs qui, par défaut, ne relèvent d'aucune des deux directives précédentes.

Le code monétaire et financier a conservé l'appellation OPC pour désigner à la fois les OPCVM et les fonds d'investissement alternatifs régulés. Les OPC peuvent prendre deux formes juridiques :

1. La Société d'Investissement à Capital Variable (SICAV) qui possède une personne morale propre. Les investisseurs détiennent des actions de la SICAV qui sont émises au fur et à mesure des demandes de souscription ;
2. Les Fonds Communs de Placement (FCP) qui sont une copropriété de valeurs mobilières (on parle de porteurs de parts).

Deux catégories de fonds d'investissement alternatif existent :

1. les FIA régulés :
 - les fonds ouverts à des investisseurs non-professionnels :
 - la gamme de fonds de capital investissement agréé (FCPR, FCPI, FIP, FIC) (AMF, 2013) ;
 - les organismes de placement collectif dans l'immobilier (OPCI) ;
 - les sociétés civiles de placement immobilier (SCPI) ;
 - les sociétés d'épargne forestière (SEF) ;
 - les sociétés d'investissement à capital fixe (SICAF) ;
 - les fonds alternatifs ;
 - les fonds ouverts à des investisseurs professionnels :
 - les fonds agréés : les fonds professionnels à vocation général et les OPPCI ;
 - les fonds déclarés : les fonds professionnels spécialisés et de capital investissement ;
 - les fonds d'épargne salariale ;
 - les organismes de financement (spécialisé, titrisation avec ou sans risque d'assurance) ;
2. les autres FIA.

1.2.2 Les exigences de la directive européenne AIFM

La directive AIFM est applicable à l'ensemble des gestionnaires de FIA, et fournit un cadre de surveillance harmonisé pour l'ensemble des gestionnaires dans l'Union Européenne. Elle vise à :

- optimiser leur transparence ;
- sécuriser les placements des investisseurs ;
- renforcer la confiance sur marché ;
- surveiller et limiter les risques systémiques susceptibles de déclencher une nouvelle crise financière.

Elle constitue une réponse européenne à la crise financière de 2008 et aux engagements du G20 de 2009 en matière de suivi des fonds alternatifs.

Cette Directive impose des contraintes concernant notamment l'évaluation de la valeur liquidative du FIA qui peut être opérée par un expert externe ou la société de gestion elle-même. Dans le dernier cas l'évaluation doit être indépendante de l'activité de gestion, ce qui nécessite de mettre en place des politiques et procédures internes. Quelle que soit la solution choisie, la société de gestion reste responsable de l'évaluation. Les reporting à destination des régulateurs pour la prévention du risque systémique sont (figure 1.5) :

- un reporting AIFM (gestionnaire) : valeur des actifs, principaux marchés et instruments
- un reporting FIA (fonds) : principales expositions, mesure de risque, etc.

Reporting	Informations
AIFM Guidelines ESMA 2013/1339 Annexe II-XI	-Identification du gestionnaire : nom, code national, codes LEI & BIC -Classement des 5 principaux marchés - MIC (réglementé), OTC ou autre "XXX" , valeur agrégée des actifs -Classement des 5 principaux instruments financiers par sous-classe d'actifs , valeur agrégée des actifs -Montant total de l'encours sous gestion, devise, taux de change
AIFM Guidelines ESMA 2013/1339 Annexe II-XI	-Identification du FIA : nom légal du FIA, code ISIN, code LEI & BCE (facultatifs), domiciliation, structure du FIA -Montant total de l'exposition, de l'encours sous gestion, devise, taux de change -Ventilation des stratégies : hedge fund (long short, market neutral...), private equity (capital-risque, capital développement...), Immobilier (résidentiel, commercial...), fonds de fonds (multigestion alternative...) et autres (actions, taux...) ou panaché de plusieurs stratégies -5 principales valeurs à la date de reporting : sous-catégorie d'actif, nom de l'instrument financier, code ISIN, valeur, position long/short -Répartition géographique : Afrique, Asie et Pacifique, UE, Amérique du nord... -10 principales expositions par sous-classe d'actifs et par position (long/short) -5 principales concentrations du portefeuille par sous-classe d'actifs et par position (long/short) -Répartition de l'encours par type d'investisseur : pourcentage de parts détenues par les 5 principaux investisseurs, par des clients professionnels ou des clients "détail" -Indicateurs de risque: Equity Delta, Vega, VaR -Risque de contrepartie : mécanismes de négociation et de compensation, montant de collatéral (titres et espèces), classement des contreparties les plus importantes en termes d'exposition, expositions à des CCP -Liquidité: liquidité du portefeuille et des investisseurs (pourcentage par tranche de nombre de jours) , part d'actifs faisant l'objet de "Side Pocket", "Gates", "Suspension de négociation" , financement disponible (pourcentage par tranche de nombre de jours) -Historique du profil de risque: rendements mensuels d'investissements, volume mensuel de rachats/souscriptions -Recours à l'effet de levier: calcul selon les méthodes brute et d'engagement

FIGURE 1.5 – Les thèmes du reporting AIFM

Source : AMF

1.2.3 Les exigences de l'AMF

L'article L. 621-6 du code monétaire et financier (Code monétaire et financier, s. d., sect. L. 621-6) donne pouvoir de législation à l'AMF. L'AMF publie son règlement général sur son site internet (AMF, s. d.). L'AMF :

- gère les demandes d'agrément et recense les FIA ;
- fixe les conditions d'acceptation des DIC1 ;
- fixe les critères de calcul du risque de chaque fonds ;
- propose le règlement de fonctionnement des fonds ;
- encadre le calcul de la valeur liquidative ;
- encadre la dissolution des fonds.

Les doctrines de l'AMF viennent compléter les textes.

Pendant la crise de la COVID-19, l'AMF a notamment permis aux FIA de rajouter des frais de sortie, de plafonner les rachats, et d'ajouter des droits ajustables acquis au fonds. Le but de ces mesures d'urgence était d'éviter l'assèchement de la liquidité des fonds et la panique sur les marchés qui aurait pénalisé les investisseurs finaux.

1.2.4 Les exigences de gouvernance de Solvabilité 2

La directive S2 ne prévoit pas de spécificité concernant le PE particulièrement. Néanmoins elle édicte des contraintes réglementaires suivantes :

- la définition d'un horizon de détention et de l'appétence au risque ;
- la création d'un processus de valorisation de la méthode alternative (articles 10 & 263 des Actes Délégués (COMMISSION EUROPÉENNE, 2015)) ;
- la création d'un processus de surveillance du sous-traitant (article 274 des Actes Délégués) ;
- l'affectation de trésorerie disponible suffisante pour le règlement des appels de fonds ;
- l'écriture d'une procédure en cas de vente des titres avec notamment une description du dispositif en cas d'illiquidité (ex : liquidité assurée par l'actif général du fonds en euros, création d'une réserve de liquidité, etc.). Cette procédure a un double enjeu, de respecter le devoir de conseil (remise en numéraire des engagements pris envers les assurés) et de gérer le risque de réputation.

En particulier sur la valorisation des actifs non cotés, la directive S2 (PARLEMENT EUROPÉEN ET CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009) définit à l'article 10 paragraphe 5 :

« Lorsque les critères visés au paragraphe 4 ne sont pas remplis, les entreprises d'assurance et de réassurance utilisent des méthodes de valorisation alternatives, sauf disposition contraire du présent chapitre. »

L'article 263 impose l'identification des actifs, la documentation des hypothèses de la valorisation et de la nécessité d'une telle valorisation. De plus l'assureur doit s'assurer que la valorisation soit cohérente avec l'historique et d'identifier le risque porté par l'actif.

« Lorsqu'une méthode de valorisation alternative est utilisée conformément à l'article 10, paragraphe 5, les entreprises d'assurance et de réassurance :

- (a) indiquent les actifs et les passifs auxquels cette méthode de valorisation est appliquée ;
- (b) justifient le recours à cette méthode de valorisation pour les actifs et les passifs visés au point a) ;
- (c) documentent les hypothèses qui sous-tendent cette méthode de valorisation ;
- (d) évaluent l'incertitude de valorisation des actifs et des passifs visés au point a) ;
- (e) évaluent régulièrement l'adéquation de la valorisation des actifs et des passifs visés au point a) par comparaison avec les données tirées de l'expérience.

»

1.2.5 Le cadre imposé par la réglementation des produits d'assurance

L'application à un contrat d'assurance vie

A partir de 2015, le gouvernement français a mis en place la possibilité de rachat des actifs ne donnant pas le droit de vote (généralement ceux qui sont peu liquides) non plus en euros mais directement en part. Les accords de l'assureur et de l'assuré sont nécessaires.

Depuis 2019, les fonds de capital investissement sont inscrits dans la liste des UC éligibles aux contrats d'assurance vie (article R-131-1-1 du code des assurances).

L'application à un contrat d'assurance retraite

Le plan d'épargne retraite (PER) a été introduit par la loi PACTE, promulguée le 22 mai 2019. Le PER se présente comme la solution dédiée à l'épargne salariale ou individuelle. Il regroupe au sein d'un même produit via plusieurs compartiments les anciens produits retraite (PERP, PERCO, article 83, Madelin). Dans le cadre de cette étude nous nous intéresserons uniquement au PER individuel qui est le successeur du PERP.

Les actifs disponibles à l'investissement sont définis à l'article R224-1 du CoMoFi. L'article renvoie à certains paragraphes de l'article R332-2 du code des assurances. En particulier, il précise qu'il est possible d'investir dans des fonds de fonds d'investissement alternatifs.

Par ailleurs, les produits PER doivent être cantonnés d'ici la fin de l'année 2023. Nous supposons donc que le contrat est cantonné. Ce cantonnement impacte notamment le fonds en euros.

L'« Arrêté du 7 août 2019 portant application de la réforme de l'épargne retraite », 2019 précise l'allocation minimale d'actif peu risqué (indicateur synthétique de risque et de rendement (MRM) inférieur ou égal à 3). Les détails se trouvent dans le tableau 1.1.

Profil	D > 10 ans	10 ans ≥ D > 5 ans	5 ans ≥ D > 2 ans	2 ans ≥ D
Prudent	30 %	60 %	80 %	90 %
Équilibré	0 %	20 %	50 %	70 %
Dynamique	0 %	0 %	30 %	50 %

TABLE 1.1 – Allocation minimale en actif peu risqué ($MRM \leq 3$) à mesure que la durée restante (D) avant la retraite diminue

1.3 La difficulté d'appréciation du risque

La sur ou sous performance du PE n'a jamais été établie de manière incontestable. Il est à ce jour considéré comme un actif de diversification. Il recouvre une diversité d'actifs sous-jacent (capital-risque, recouvrement, ...) qui sont hétérogènes en performance et en risque, le rendant ainsi difficilement comparable aux supports investis en actions ou en obligations.

Plusieurs questions sont soulevées :

1. Quels sont les risques associés aux FIA ?
2. Comment ces risques peuvent-ils être gérés ?
3. Comment ces risques sont-ils rémunérés ?

1.3.1 Les raisons d'une prime de risque plus élevée que pour les actifs cotés

La revue « Risques, Les cahiers de l'assurance » a consacré un numéro sur le *private equity*, et différents professionnels de l'assurance ou de la finance ont publié leurs avis sur cette classe d'actif. SAGNES, 2004, liste notamment les risques suivants pour un fonds de PE :

- le risque de ne pas réussir à investir ;

- le risque de perte des capitaux investis ;
- le risque de management ;
- la transparence ;
- le manque de liquidité.

BAVIÈRE, 2004, précise quant à lui comment il conviendrait de gérer une partie de ces risques pour un assureur.

Le risque de ne pas réussir à investir

Pour investir dans des sociétés cotées, il suffit de passer un ordre sur les marchés et de payer le prix. Pour les sociétés non cotées, au-delà du prix de marché, il y a un aspect psychologique supplémentaire qui va orienter le vendeur vers un acheteur plutôt qu'un autre. L'investisseur est un partenaire plus qu'un simple détenteur de parts.

Du point de vue d'un assureur souhaitant investir dans un fonds, cela se traduit par le fait que les fonds bloqués ne soient pas nécessairement appelés. Ainsi cet argent bloqué hors-bilan risque de ne pas être rémunéré car non investi.

Le risque est alors de ne pas investir pendant suffisamment longtemps. Afin d'augmenter le TRI affiché, les fonds de PE retardent les appels de fonds et essaient de verser les dividendes le plus rapidement possible. Certains fonds arrivent à afficher des TRI de plus de 100% mais sur des durées très courtes. La gestion de la liquidité en dehors de l'investissement du PE doit également être gérée.

Le risque de perte des capitaux investis

WEIDIG et MATHONET, 2004, estiment les probabilités de rendement et de perte totale du capital investi :

- 30 % lors d'un investissement en direct dans une PME ;
- 1 % lors d'un investissement dans un fonds de PE ;
- négligeable lors d'un investissement dans un fonds de fonds de PE.

La diversification des risques tant en nombre d'entreprises que dans le temps permettrait donc de diminuer le risque et sans réduire excessivement le rendement.

Au-delà des frais affichés, les gestionnaires des fonds de PE peuvent recevoir une rémunération directe de l'entreprise. Par exemple, des jetons peuvent être distribués lors des conseils d'administration, les membres de ce conseil étant désignés en partie par les gestionnaires du fonds. Pour l'investisseur, une manière de diversifier le risque est d'afficher clairement sa politique d'investissement. Le but est d'éviter le conflit d'intérêt avec le fonds de PE en créant une relation de long terme. Le choix du fonds de capital investissement est un moment crucial et doit être réfléchi.

Le risque de management

Bavière précise qu'à l'instar d'investir dans plusieurs entreprises, il est préférable d'avoir un comité à la tête des entreprises plutôt qu'un dirigeant unique. Dans ce dernier cas, l'entreprise est exposée

entièrement aux performances d'une seule personne. Dans certains cas de capital transmission, les dirigeants effectifs de l'entreprise sont remplacés par des membres choisis par le fonds d'investissement.

La transparence

Toujours d'après Sagnes, les fonds de capital transmission affichent de meilleures performances que les autres formes de capital investissement. La raison admise par le marché est que les fonds de capital transmission sont généralement financés avec de la dette (LBO), et le loyer récurrent de la dette imposerait une gestion rigoureuse des finances et les fonds seraient plus exigeants quant à la gestion et à la sélection de l'entreprise.

Le manque de liquidité

La caractéristique des fonds de PE est de ne connaître ni les flux financiers futurs ni leurs ampleurs. Ainsi valoriser un fonds à toute date est compliqué. Il est difficile de vendre des parts de PE, et un risque accru de pertes est possible en cas de manque de liquidité de l'investisseur (*fire-sale*). C'est aussi pourquoi les marchés secondaires se développent progressivement.

Finalement, les risques encourus par les investisseurs en *private equity* et les montants sont suffisamment significatifs pour que l'AMF évoque cet investissement dans ses rapports.

1.3.2 Les positions des organismes de référence

L'AMF a publié en janvier 2019 ses premiers enseignements du reporting AIFM (AMF, 2019b). Ce rapport se décompose en plusieurs axes dont voici un résumé sur le capital investissement. Les données sont arrêtées à fin 2017.

Le recours à l'effet de levier

Le recours à l'effet de levier était modéré, à 101%. En moyenne pour les FIA (fonds de fonds, *hedge funds*, fonds immobilier, autres), l'effet de levier était de 130%. Il est calculé comme le cumul des expositions réduit de la trésorerie, majoré des paiements et mises en pension divisés par l'actif net du fond.

L'AMF met en avant la corrélation positive qui lie la baisse du niveau des taux d'intérêt et le développement de la finance à effet de levier dont le *private equity* :

- du côté demande de financement, la baisse des taux pousse les entreprises à recourir au levier d'endettement ;
- du côté offre de financement, la baisse des taux incite les investisseurs en recherche de rendement à accroître leur exposition à des actifs risqués.

Dans ce contexte, le prolongement ou la fin des politiques monétaires accommodantes pourrait révéler des prises de risque excessives (figure 1.6) (AMF, 2019a).

Description des risques	Niveau mi-2019	2019-2018	Perspectives 2020
1. Relèvement des primes de risque, fragilisant les acteurs endettés ou ayant des actifs dont les prix, ne reflétant pas leurs données fondamentales, pourraient être brutalement corrigés Maintien de valorisations élevées, de primes de risque faibles et d'une volatilité basse malgré une correction temporaire (fin 2018)		→	→

	Très élevé
	Élevé
	Significatif
	Faible

FIGURE 1.6 – Le risque d'endettement vu par l'AMF

Source : AMF

La gestion du risque de liquidité

D'après l'AMF, les fonds de PE disposent de 5% d'actifs pouvant être liquidables sous un jour (figure 1.7). Le passif des fonds de *private equity* semble généralement plus long que l'actif. Le graphique suivant se lit ainsi : 30 % de l'actif des fonds de PE en 2017 (courbe bleue continue) est liquidable sous un mois.

Les FIA disposent néanmoins d'outils permettant de gérer leur liquidité (*liquidity management tools*). On peut compter parmi eux (figure 1.8) :

- la mise en place de *gates* temporaires ou non (limiter les rachats) ;
- la possibilité de rachats en nature (*in kind*), utilisée principalement pour les ETF et FIA investis via une assurance vie.

Lors de la crise de 2020, l'AMF a autorisé à partir du 31/03/2021 les FIA à introduire ou augmenter des frais d'entrée et/ou de sortie (*anti-dilution levies*). Ces frais sont acquis au fonds et permettent de limiter les rachats (AMF, 2020).

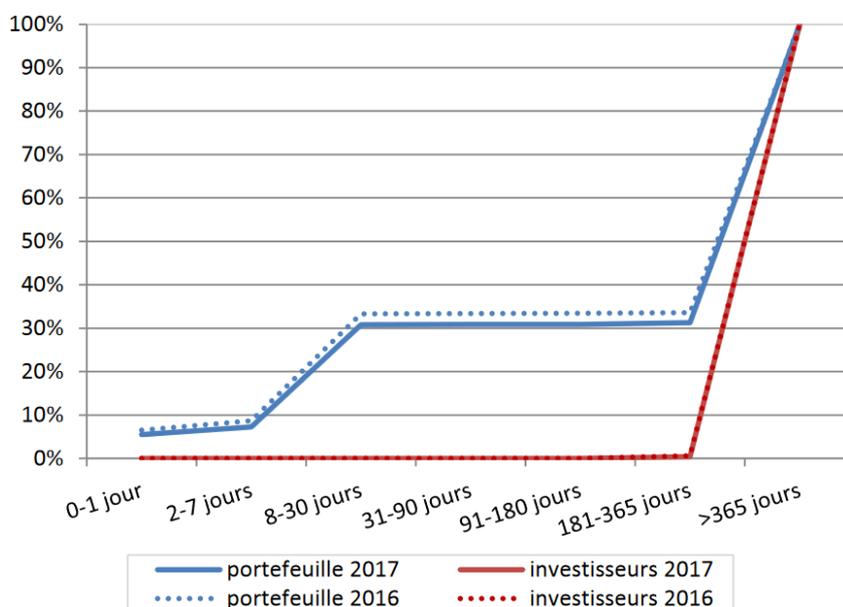


FIGURE 1.7 – L’horizon de détention des parts du fonds de PE par les investisseurs dans l’année et la liquidité du portefeuille d’actifs des fonds de PE en 2016 et 2017

Source : AMF

Présentation des outils dans les prospectus et résultats de l’analyse le cas échéant.

Outils	Dans le prospectus	Analysé	% nb de classes de parts	% actif net
Dispositifs permettant de ralentir les ventes d’actifs				
Espacement des valeurs liquidatives	Oui	Oui	-	-
Préavis de rachats	Oui	En cours	-	-
Préavis de souscriptions	Oui	En cours	-	-
Délai de règlement des ordres	Oui	En cours	-	-
Possibilité de suspension des rachats	Oui	Oui	71%	82%
Dispositifs permettant de refléter l’impact de la liquidité dans les prix				
Commissions de souscriptions/rachats acquises aux fonds	Oui	Non	-	-
Valorisation interne en cas de suspension de la valorisation des titres	Non	Non	-	-
Droits ajustables acquis aux fonds (<i>anti-dilution levies</i>)	Oui	Oui	1%	2%
<i>Swing-pricing</i>	Oui	Oui	7%	6%
Dispositifs permettant de limiter l’impact sur la liquidité des actifs				
Limiter la taille de l’encours maximum	Non	Non	-	-
Plafonnement systématique ou temporaire des rachats (<i>gates</i>)	Oui	Oui	7%	9%
Fonds associé à un mécanisme de cantonnement (<i>side pocket</i>)	Oui	Oui	0,3%	0,2%
Possibilité de rachats en nature (<i>in kind</i>)	Oui	Oui	65%	74%

FIGURE 1.8 – Les outils de gestion de la liquidité

Source : AMF

1.3.3 Le rendement du capital investissement

Le rendement du capital investissement suit généralement la courbe en J. Mais des facteurs économiques peuvent expliquer le rendement final du capital investissement.

Depuis les années 2008, le *private equity* connaît un gain de popularité. De ce fait, les performances diminuent et se rapprochent des performances du domaine public (SWEDROE, 2019) (figure 1.9). Le graphique représente le rendement espéré à l'achat pour le marché public et le marché privé. L'EBITDA correspond au rendement d'une compagnie avant impôts, dépréciation et amortissement. L'EV correspond à la valeur de l'entreprise (ILMANEN et al., 2020). Ainsi, nous avons une estimation pour les millésimes de PE les plus récents.



FIGURE 1.9 – L'écart de performance (ratio EBITDA/EV) entre le marché public et le marché privé (PE) par année

Source : ILMANEN et al., 2020

De plus, depuis les quatre dernières années, nous notons un aplatissement de la courbe en J. CHARLTON, 2020, explique les raisons et la manière. Les investisseurs institutionnels analysent le TRI en temps réel et ne souhaitent pas avoir de TRI négatif, même pour du capital investissement. Les fonds de *private equity* activent quatre leviers pour lisser le TRI :

1. appeler les capitaux juste avant l'investissement pour diminuer le temps entre l'investissement et les dividendes (*warehousing*) ;
2. faire les premiers investissements avec un crédit pour retarder l'appel des fonds ;
3. augmenter la valeur liquidative du fonds en changeant les méthodes d'évaluation (*fair-market valuation*) ;

4. diminuer les frais affichés pour les investisseurs en augmentant les frais sur les entreprises (jetons aux conseils d'administration par exemple).

PHALIPPOU et ZOLLO, 2005, estiment que les deux facteurs principaux de performance du PE sont :

1. le niveau des taux d'intérêt pour les entreprises au moment de l'investissement (corrélation négative) ;
2. le rendement des marchés pendant la durée de vie de l'investissement (corrélation positive).

Plus généralement, ils estiment que le rendement est sensible au contexte macro-économique pendant la vie du fonds (par exemple à la croissance du PIB).

De plus, ils remarquent que les fonds de capital transmission performant mieux que les fonds de capital-risque. La taille du fonds est aussi corrélée positivement avec le rendement. La raison pour laquelle des investisseurs investissent dans des petits fonds de PE est, d'après eux, qu'ils ne peuvent pas investir dans des gros fonds (par exemple le ticket d'entrée est trop élevé).

Peu de facteurs influent au moment de la sortie car les gestionnaires choisissent leur moment et les conditions de liquidation du fonds.

Ces raisons sont confirmées par DILLER et al., 2009, et admises dans la littérature en général.

Cependant, beaucoup d'études mettent en évidence une même limite : leurs données. Les données disponibles pour les sociétés non cotées ne sont pas toujours qualitatives.

1.3.4 Les limites de l'exploitation des données pour les actifs non cotés

Il existe plusieurs points d'attention sur les données disponibles pour les actifs non cotés. D'une part, les données ne sont pas exhaustives. D'autre part, les données publiées ne sont pas représentatives du risque d'investir dans du capital investissement.

En effet, une asymétrie d'information existe entre les gérants de fonds et les investisseurs. En cas de mauvaises performances, les gérants n'ont pas d'intérêt rationnel à publier les données en l'absence d'obligation de le faire (comme sur les bases de données de Prequin). Aussi les informations sur les fonds ayant peu performé seront moins publiées. Ce biais existe aussi dans les publications officielles : l'AMF publie des études en se fondant sur les chiffres communiqués par France Invest qui ne prend en compte que 80% du marché français et aucune correction n'est appliquée sur les données.

De plus, l'appréciation du risque au travers d'un comparatif de sociétés non cotées comprend des limites :

- publication trimestrielle qui lisse artificiellement la performance ;
- panier de sociétés qui change à chaque millésime ;
- réalisation à la baisse qui ne renvoie pas une vision symétrique du risque.

Même en ayant des données exhaustives et justes, pour apprécier le risque d'un investissement, il convient de pouvoir autant que possible le modéliser, à l'instar des différents modèles de taux (CIR, LMM, Vasicek) ou actions (Black et Scholes).

Conclusion du chapitre

Comme le capital investissement représente à ce jour une part marginale de l'investissement des assureurs, des approximations quant à sa modélisation peuvent être effectuées. C'est dans le cadre d'une allocation plus significative qu'une modélisation plus appropriée devient nécessaire.

Généralement, les assureurs assimilent le capital investissement à des actions. Ces dernières détachent des coupons régulièrement, et peuvent être achetées et vendues sur des marchés profonds, liquides et transparents comme Euronext Paris CAC40. La rentabilité du private equity est appréciée uniquement à l'échéance (phase de liquidation).

Le capital investissement ne peut pas objectivement être modélisé comme des actions cotées. Le mouvement brownien géométrique classique ne traduit pas le comportement intrinsèque : il suppose en particulier un rendement et une volatilité constants alors que les valeurs liquidatives du PE sont peu volatiles et la distribution des dividendes se fait en bloc. Par ailleurs, dans le modèle de Black & Scholes tous les actifs sont supposés liquides et divisibles à l'infini. Les queues de distribution sont quant à elles supposées être symétriques et peu épaisses. Toutes ces hypothèses sont particulièrement inadaptées au capital investissement.

Chapitre 2

Les caractéristiques du contrat de retraite étudié et sa modélisation

Les raisons susceptibles d'inciter un particulier à investir dans du capital investissement sont multiples :

- dans le cadre d'un investissement directement dans un fonds de PE, réduction de 25% d'impôts sur le revenu (IR) sur les parts du fonds investies en non cotés (Article 199 terdecies-0 AB du Code général des impôts) à condition de conserver les parts du fonds au moins cinq ans et que le capital ne soit pas remboursé avant la septième année ;
- diversification de l'épargne ;
- espérance d'un rendement futur supérieur.

Acheter des parts de PE peut se faire via un contrat d'assurance vie, mais un tel investissement n'est neutre ni pour l'assuré ni pour l'assureur et impose des contraintes sur le contrat d'assurance lui-même.

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons plus spécifiquement à l'investissement dans le cadre du PER individuel. Le nouveau contrat PER peut se décomposer en deux compartiments : le compartiment individuel et le compartiment collectif. Le PER individuel est alimenté par l'épargne de l'assuré et le rachat en capital est possible au moment du passage en retraite. Le PER collectif est alimenté par l'employeur (épargne salariale, versement obligatoire ou compte épargne temps) et la sortie est disponible uniquement sous forme de rente. La fiscalité entre le PER individuel et collectif est aussi différente.

2.1 Les contrats d'assurance vie adossables à un actif exposé à un fonds de *private equity*

Que ce soit en face d'un engagement comme le fonds en euros où le risque est porté par l'assureur ou via un fonds UC, l'investissement est contraint par le caractère atypique du capital investissement.

La présence de *private equity* dans un contrat en unités de compte (UC) requiert quant à elle que le fonds soit suffisamment liquide pour que l'option de rachat offerte à l'assuré représente un coût

raisonnable pour l'assureur.

2.1.1 Les enjeux commerciaux, techniques et de gestion du contrat liés à la présence du fonds de *private equity*

Les enjeux commerciaux

Afin de respecter son devoir de conseil et les règles de commercialisation, l'assureur devra vérifier que l'assuré a :

- suffisamment de connaissances financières ;
- suffisamment de liquidité par ailleurs pour éviter de devoir réaliser son investissement à un moment inopportun ;
- un profil d'investissement (horizon & risque) compatible avec la présence de PE.

Ces points sont essentiels lors de la commercialisation du contrat pour éviter une vente inadaptée (défaut de conseil).

Les enjeux techniques

Les contrats d'assurance vie libellés en euro ont de nombreuses options garanties par l'assureur. ARMEL et PLANCHET, 2021, les résumant en trois catégories :

- options financières ;
- options comportementales : options de rachats, d'arbitrage et de versements ;
- options biométriques : les garanties sur la vie de l'assuré telles que les garanties de table de mortalité lors d'un passage en rente.

Viennent s'ajouter les garanties financières (garanties de taux technique et de taux de participation aux bénéficiaires et de rachat), qui ont été détaillées et tarifées par BRIYS et de VARENNE, 1994 sous certaines conditions (notamment d'allocation). Enfin, l'assureur doit honorer à chaque instant la garantie en capital.

Les enjeux de gestion

Légalement, lors d'un rachat l'assureur a deux mois pour mettre à disposition les montants à l'assuré. Avec l'avènement de l'Internet et de la digitalisation, les délais effectifs se sont raccourcis.

Dans le cas du capital investissement, l'assureur peut exploiter les deux mois pour vendre ses actifs, ou pour faire sa propre chambre de compensation. Dans ce dernier cas, les contrats entrants (ou le fonds en euros) rachèteraient les parts de fonds illiquides aux contrats sortants.

En cas d'illiquidité de l'actif et pour un contrat d'assurance vie ou de capitalisation uniquement, si cet actif ne donne pas de droit de vote et à la demande de l'assuré, alors l'actif peut lui être restitué sous forme de part. Dans ce cas, le fonds donne les parts à l'assureur qui les transmet à l'assuré.

Dans le contrat étudié, la valorisation des UC lors d'une sortie est, si possible, la valeur de réalisation sinon la valeur de marché au lendemain de la réception de la demande de rachat. Si l'actif est totalement

illiquide (comme lors de la crise du COVID et que les fonds ont pu limiter les rachats) alors la réalisation de la vente n'a pas lieu et la valorisation de l'UC sera la valeur affichée par le fonds.

Ceci étant, les contrats retraite sont plus difficilement rachetables que les contrats d'assurance vie classiques. Et de plus, certains produits de retraite (PERP, PER) sont transférables.

Les contrats retraite ont un autre intérêt : ils possèdent un horizon d'investissement. Les contrats PER sont entièrement rachetables lors du passage en rente, aussi ils devront être obligatoirement liquides à ce moment. Mais le fonds euros n'aura pas besoin d'être entièrement liquide dans la mesure où dans la pratique, il est mutualisé sur tout le canton.

2.1.2 Les caractéristiques d'un contrat retraite

La phase de capitalisation et de liquidation

Un contrat d'assurance retraite fonctionne par capitalisation, il comporte deux phases :

- **la phase de capitalisation** pendant laquelle l'assuré épargne ;
- **la phase de liquidation** pendant laquelle l'assuré jouit de sa rente.

La phase de capitalisation s'apparente à un contrat d'assurance vie classique, et au moment du passage en rente, le capital épargné est converti en rente (en fonction d'un taux technique et une table de mortalité).

Les types de gestion lors de la phase de capitalisation

Quatre types de gestion existent en assurance vie :

- la gestion libre ;
- la gestion profilée ;
- la gestion par horizon ;
- la gestion profilée par horizon.

Lors de la mise en place d'une gestion libre pour un contrat, alors l'assuré (souvent avec l'avis de son conseiller) choisit les supports investis. Généralement, les assureurs autorisent un arbitrage gratuit par an. Les arbitrages suivants sont payants.

La gestion profilée est déterminée par le profil de l'investisseur. Suivant les connaissances financières, le patrimoine et le risque que l'assuré est prêt à prendre, l'assureur propose un profil de gestion plus ou moins risqué. Les assureurs proposent généralement trois gestions profilées (profil prudent, équilibré ou dynamique).

La gestion par horizon a pour but de maximiser le rendement à un horizon donné. Au début du contrat, le contrat est investi principalement en actif risqué espérant un rendement supérieur. Au fur et à mesure que l'horizon approche, la part d'actifs risqués diminue au profit d'actifs peu risqués afin de mieux prévoir le capital au moment de la retraite. Ce capital étant proportionnel à la rente, l'assuré peut ainsi prévoir sa rente future. Par exemple, pour les plans d'épargne retraite populaire (PERP), une part grandissante était investie dans le fonds en euros à mesure que la date de retraite (l'horizon) approche.

Cette gestion ne fait pas l'unanimité car elle réalise les moins-values en cas de baisse du marché en début d'investissement.

La gestion profilée par horizon (GPH), introduite pour le plan d'épargne retraite (PER), est une combinaison de la gestion profilée et de la gestion par horizon. Dans une GPH, la part minimale est investie dans un fonds peu risqué (Market Risk Measure < 3) et dépend de l'horizon et du profil de l'assuré.

Notons que le profil prudent défini pour le PER est plus risqué que le profil unique défini pour le PERP. Non seulement la part d'actif peu risqué est plus importante dans le PERP, mais aussi l'actif sous-jacent n'est pas le même. Le PER peut être entièrement investi sur des UC (et donc le capital n'est pas garanti) tandis que le PERP imposait la présence d'un fonds en euros pour la gestion par horizon.

2.2 La description du contrat de retraite étudié

Les contrats PER se ressemblent énormément d'une compagnie à l'autre, les différences principales résident dans l'univers d'investissement et certains frais.

2.2.1 Les phases de constitution et de rente

L'objectif d'un contrat retraite est d'épargner en vue de la retraite. Le produit PER individuel permet la défiscalisation des primes versées en échange de l'imposition de la rente.

L'objectif que nous nous fixons pour le contrat d'assurance vie de ce mémoire est de maximiser le capital au moment de la retraite en réalisant le meilleur compromis capital/risque pour le client et en maîtrisant le risque pour l'assureur. Ce capital pourra ensuite être converti en rente.

La phase de constitution

Dans le PER individuel, les versements sont volontaires. Il est possible de verser soit une prime unique (PU) soit plusieurs primes périodiques (PP). L'investissement ne sera pas nécessairement identique suivant le type de primes.

Suivant le type de primes (PP ou PU), des options de gestion peuvent être mises en place. Lors d'un versement important en une seule prime, il est possible d'investir entièrement dans le fonds en euros qui sera ensuite arbitrée progressivement dans des UC. L'avantage de cette option de gestion est de lisser le point d'entrée dans le temps sur les marchés financiers.

Le contrat est investi dans cinq supports différents :

- le fonds en euros ;
- une UC contenant des actions ;
- une UC contenant des obligations ;
- une UC contenant des actifs immobiliers ;
- une UC contenant un fonds de fonds de PE.

Les produits financiers générés par le fonds en euros sont reversés à 85% aux assurés. Aucune provision pour participation aux bénéfices (PPB) n'est disponible en début de projection. Le fonds en euros lui-même pourra contenir une poche de *private equity*. Le taux net servi (TNS) est servi net de frais mais brut de prélèvements sociaux.

Le contrat étudié possède une garantie décès. Cette garantie payante assure de retrouver le capital investi en cas de décès de l'assuré. Cette garantie est payée chaque mois en fonction de l'âge de l'assuré (qui définit un taux par tranche d'âge) et du capital sous risque (différence entre la valeur de rachat et les primes investies). Cette tarification est qualifiée d'à posteriori. Dans la mesure où cette garantie relève de la prévoyance, nous avons choisi de ne pas la modéliser dans le cadre de ce mémoire.

Après la phase de constitution vient la phase de restitution où l'assuré peut profiter de sa rente acquise.

La phase de restitution

La phase de restitution consiste au versement à l'assuré une rente récurrente viagère.

Avec la rente, plusieurs options de sorties sont disponibles :

- les annuités garanties : l'assureur garantit un nombre d'arrérages qui seront versés sans tenir compte de la survie de l'assuré. En cas de décès pendant cette période de garantie, les rentes seront versées aux héritiers ;
- la réversion : l'assureur garantit une rente viagère (généralement au conjoint) de l'assuré en cas de décès. Le second assuré doit être désigné lors du passage en rente.

Toutes ces options de gestion ont un coût pour la rente et viennent diminuer le montant de cette dernière.

Pendant la phase de rente, la mutualisation s'opère entre les assurés. Les décès prématurés des uns permettent de compenser une vie particulièrement longue des autres assurés.

Afin de mesurer simplement les effets de la présence du PE, la fiscalité ne sera pas modélisée dans ce mémoire (prélèvements sociaux et imposition sur le revenu) ni le regroupement des produits retraites collectifs (Art 83, PERCO, ...) dans un seul produit PER, seul le PER individuel sera modélisé.

La conversion du capital en rente sera ensuite réalisée selon les règles imposées par la législation et les conditions générales du produit (tables de mortalité, taux technique, rente minimum et frais maximaux).

2.2.2 Les conditions contractuelles de conversion du capital en rente

Les conditions de passage en rente sont définies par deux paramètres principaux : la table de mortalité et le taux technique. La table de mortalité est la table permettant de connaître la probabilité de survie des assurés et donc le nombre moyen d'années que l'assureur devra payer une rente. Le taux technique est le taux de revalorisation de l'épargne que l'assureur garantit à l'assuré.

En 2021, la table de mortalité légale en France est la table générationnelle pour les femmes nées jusqu'en 2005 (TGF 05). Il est interdit de tarifier une rente en fonction du sexe de l'assuré. Ces tables contiennent une marge de prudence. Les bénéfices réalisés suite à une hypothèse technique (telle qu'une table de mortalité) sont des bénéfices techniques et devront être redistribués à hauteur de 90% aux assurés.

Le taux technique minimal en assurance vie est de 0%. Cette rente doit être d'au minimum 80 € par mois (ou 920 € par an) pour un contrat PER. L'assureur peut prélever jusqu'à 3% des arrérages pour ses frais de fonctionnement.

Plus le taux technique est faible, plus la rente garantie diminue. Inversement plus le taux technique est haut, plus la rente sera élevée. Dans ce dernier cas, la rente sera moins revalorisée. Cela peut porter préjudice à l'assuré en cas de trop forte inflation.

Les assureurs supportent de nombreux risques suite au passage en rente :

- risque de longévité : en cas de survie moyenne plus longue que la table de mortalité des assurés alors l'assureur peut accuser des pertes. Ces pertes sont constatées chaque année lors de la comparaison entre la diminution des PM et des rentes versées ;
- risque de baisse des taux : en cas de baisse des taux, l'assureur peut être contraint de rogner sur sa marge pour servir le taux technique ;
- risque de décalage ALM : en cas de mauvais adossement actif/passif, l'assureur peut être mis en défaut suite aux changements des conditions économiques.

Pour prendre en compte les caractéristiques du contrat retraite et pouvoir mesurer l'impact d'une poche de PE, nous avons dans un premier temps modélisé le contrat au passif.

2.3 La modélisation du contrat au passif d'un assureur

Comme tout modèle mathématique, modéliser un contrat d'assurance nécessite de faire des hypothèses. Ces hypothèses peuvent être des contraintes légales mais aussi d'un ordre purement pratique telles que le comportement des assurés ou encore des approximations de calcul.

2.3.1 Les caractéristiques de l'assuré et leur prise en compte dans le modèle

L'horizon de détention du contrat de retraite est de 25 ans. Nous supposons que l'assuré a 40 ans.

Nous supposons que l'assuré versera une prime annuelle de 1000 € nette de frais d'entrée et rachètera intégralement son contrat au moment de la retraite. Le but de cette périodicité des versements est de lisser l'entrée sur les marchés pour réduire la volatilité du rendement à terme sans devoir passer par des options de gestion.

Nous supposons que l'assuré a un profil équilibré. Nous supposons que la réallocation de l'actif est annuelle. Dans les conditions générales et dans la loi, il est prévu que la réallocation soit exécutée au moins une fois par semestre.

Divers frais sont supportés par le contrat :

- les frais sur versement : 4,75 % des primes versées ;
- les frais sur l'encours du fonds en euros : 0,65 % de la provision mathématique (PM) ;
- les frais sur l'encours des UC : 0,96 % de la PM
- les frais de transferts : ils sont de 1% de la valeur de rachat pendant les cinq premières années puis deviennent nuls.

Contractuellement, les frais sont prélevés *pro rata temporis*. Les chargements prélevés par l'assureur sont supposés égaux aux frais payés par l'assureur pour la gestion du contrat. Les frais de transferts sont limités par la loi.

Nous supposons que les gestionnaires des fonds UC ne prélèvent aucun chargement en plus des frais déjà encaissés par l'assureur. Aussi aucune rétrocession n'est effectuée, dans la réalité le résultat futur de l'assureur serait alors directement impacté. C'est une hypothèse forte car les frais sur les fonds de capital investissement sont de 6% en moyenne.

Le taux de rachat sera de 1%. Ce taux, plus bas que sur les contrats d'assurance vie classiques, est dû au fait que les contrats PER ne sont rachetables que dans des cas bien précis comme :

- la faillite personnelle ;
- l'achat de la résidence principale ;
- la fin des droits au chômage ;
- suite à une liquidation judiciaire ;
- le décès de l'époux ou du partenaire ;
- l'invalidité de l'assuré ou de l'époux.

Cependant, le transfert du PER d'un assureur à l'autre est possible et correspond à un rachat du point de vue de l'assureur. Comme il n'y a pas de frais modélisés ayant pour assiette le nombre de contrats, avoir une distinction le nombre de contrats rachetés et le montant de PM rachetée n'est pas nécessaire. Nous ne modéliserons donc pas les rachats partiels mais uniquement les rachats totaux.

Nous supposons que 1% des contrats sont transférés par an. Nous distinguons les rachats des transferts car des frais de transfert de 1% de la PM s'appliquent lors des cinq premières années de la vie du contrat. Le contrat PER étant un investissement de long terme avec des conditions de sorties particulières, nous ne modélisons pas les rachats dynamiques liés à la conjoncture.

Comme il n'y a pas de passage en rente, nous ne nous intéresserons pas aux différentes possibilités de sorties telles que les annuités garanties et la pension de réversion.

Les flux financiers du contrat du point de vue de l'assuré seront les primes, les transferts/décès et le capital acquis, le flux final, lors du passage en rente.

L'évaluation de la performance du contrat de l'assuré peut être réalisée au regard du TRI ou du capital disponible à la retraite. Comme nous comparons différentes allocations d'actifs mais avec les mêmes flux d'investissement alors l'ordre des TRI et des capitaux disponibles seront les mêmes entre les différents scénarii.

2.3.2 Les paramètres techniques et autres hypothèses de modélisation

Les paramètres techniques correspondent aux tables de mortalité et aux conditions de revalorisation du fonds libellé en euros.

Nous supposons comme hypothèse de mortalité que les décès suivront la table TH00-02 abattue de 60% des décès. La mortalité constatée en réalité est légèrement inférieure. Cependant, nous voulons être prudents sur le risque de liquidité du PE.

Le fonds en euros n'a pas de TMG au-delà des montants légaux et le taux technique est de 0% brut de frais (soit -0,65% net de frais). La participation aux bénéfices est de 85 % des produits financiers, soit le minimum légal. Il n'y a aucun bénéfice technique car ni les rentes, ni la prévoyance ne sont modélisées.

Le pas de temps modélisé est l'année. Cette hypothèse sera reprise lors de la modélisation de l'actif et dans le modèle ALM. L'ordre des événements est :

1. à l'ouverture de l'exercice, les primes sont versées ;
2. en milieu d'année, les sorties (rachat, transfert, décès) sont simultanées ;
3. à la fin de l'exercice, les frais sur encours sont prélevés et le fonds en euro est revalorisé.

2.3.3 La modélisation du passif

Le modèle passif se décompose en quatre parties :

1. l'initialisation des variables ;
2. la sortie des contrats : prise en compte des décès, des transferts et des rachats ;
3. la valorisation des contrats : actualisation des valeurs liquidatives des UC et prise en compte de la revalorisation du fonds en euros ;
4. la réallocation des fonds.

Les variables utilisées peuvent dépendre du temps, de la police d'assurance modélisée ou être simplement être constantes. La liste des variables utilisées et leurs explications détaillées sont disponibles en annexe.

L'initialisation des variables et le versement des primes

Les variables sont initialisées à partir de l'année N-1. Pour la première année du contrat la PM initiale est nulle, seule la prime est positive. La prime nette est définie comme la prime versée nette de frais.

$$\begin{aligned}
 nb_ctrl_ouv_t &= nb_ctrl_clot_{t-1} \\
 PM_ouv_t &= PM_clot_{t-1} \\
 prime_brute_t &= prime \cdot nb_ctrl_ouv_t \\
 prime_nette_t &= prime_brute_t \cdot (1 - tx_frais_prime)
 \end{aligned}$$

Les primes sont versées au prorata de l'allocation.

$$\begin{aligned}
 PM_prime_t &= PM_ouv_t + prime_nette_t \\
 nb_uc_prime_t^{support} &= nb_uc_clot_{t-1}^{support} + \left(tx_allocation_t^{support} \cdot \frac{prime_nette_t}{VL_t^{support}} \right)
 \end{aligned}$$

Les sorties des contrats

Les sorties des contrats arriveront en fin d'année, juste avant la clôture. Les contrats ainsi sortis ne sont pas revalorisés. Pour rappel, toutes les sorties ont lieu en même temps et le taux de mortalité est calculé en fonction de l'âge de la table TH00-02 abattue.

$$\begin{aligned}
 q(age_t) &= \left(1 - \frac{TH0002(age_t + 1)}{TH0002(age_t)}\right) \cdot (1 - coef_abat_morta) \\
 tx_chute_t &= 1 - ((1 - q(age_t)) \cdot (1 - tx_rachat) \cdot (1 - tx_transfert)) \\
 nb_ctrl_sorti_t &= nb_ctrl_ouv_t \cdot tx_chute_t \\
 nb_ctrl_clot_t &= nb_ctrl_ouv_t - nb_ctrl_sorti_t
 \end{aligned}$$

En particulier, les sorties peuvent être réparties en fonction de leur type.

$$\begin{aligned}
 nb_ctrl_dc_t &= nb_ctrl_clot_t \cdot \frac{q(age_t)}{1 - q(age_t)} \\
 nb_ctrl_trsf_t &= nb_ctrl_clot_t \cdot \frac{tx_transfert}{1 - tx_transfert} \\
 nb_ctrl_rachat_t &= nb_ctrl_clot_t \cdot \frac{tx_rachat}{1 - tx_rachat}
 \end{aligned}$$

La valorisation des contrats en fin d'année

En fin d'année, le fonds en euros est revalorisé et les multiples UC sont valorisées suivant leurs valeurs liquidatives nouvellement disponibles. La PM euro à la clôture correspond à la PM euro à l'ouverture revalorisée et déduite des frais et sorties. Pour les UC, les frais et les sorties s'appliquent sur le nombre de parts. La PM s'obtient en multipliant le nombre de part d'une UC par sa valeur liquidative. La PM totale du contrat s'obtient en sommant la PM de chaque support (UC et fonds en euros). La revalorisation du fonds euros prend en compte les évolutions des marchés au cours de l'année passée.

$$\begin{aligned}
 PM_clot_t^{euro} &= PM_alloc_t^{euro} \cdot (1 - tx_frais_pm_euro) \\
 &\quad \cdot (1 + rdt_euro) \cdot (1 - tx_chute_t) \\
 nb_uc_revalo_t^{uc_i} &= nb_uc_alloc_t^{uc_i} \cdot (1 - tx_frais_pm_uc) \\
 &\quad \cdot (1 - tx_chute_t) \\
 PM_clot_t^{uc_i} &= nb_uc_revalo_t^{uc_i} \cdot VL_{t+1}^{uc_i} \\
 PM_clot_t &= \sum_{supports} PM_clot_t^{supports}
 \end{aligned}$$

La réallocation des fonds

Dans le cadre de la loi Pacte, le contrat devrait être réalloué tous les semestres. Notre modélisation étant annuelle, la réallocation aura lieu tous les ans. La grille de réallocation dépend du profil et de

CHAPITRE 2. LES CARACTÉRISTIQUES DU CONTRAT DE RETRAITE ÉTUDIÉ ET SA MODÉLISATION

l'horizon d'investissement de l'assuré. La réallocation se fait en fonction des valeurs de marché de chaque actif. Pour chaque support (UC et fonds en euros), une réallocation est faite en fin d'année.

$$nb_uc_fin_t^{support} = PM_clot_t \cdot tx_allocation_{t+1}^{support} / VL_{t+1}^{support}$$

Chapitre 3

La modélisation de l'actif

Le capital investissement nécessite une modélisation particulière. Nous verrons dans ce chapitre que cette modélisation s'inscrit dans un univers de contraintes de l'assureur et doit être adaptée en fonction des caractéristiques et nécessités induites par le passif.

La réglementation relative au contrat retraite PER impose une gestion financière et un univers d'investissement des actifs. Une fois ces caractéristiques étudiées, les différentes modélisations possibles des fonds de capital investissement seront analysées. Le choix entre ces modélisations sera discuté. Enfin, nous présenterons la modélisation des autres actifs et les interactions entre le passif et l'actif de l'assureur.

3.1 La gestion financière

Dans un premier temps, nous décrivons les actifs disponibles à l'investissement sur les marchés. Ensuite, nous définissons les proportions d'investissement dans ces actifs tant pour le fonds libellé en euros que pour la partie en unités de compte du contrat.

3.1.1 L'univers d'investissement

L'univers d'investissement est composé des actifs usuels tels que les obligations, les actions, l'immobilier et le monétaire. Conformément à la réglementation, l'assuré et l'assureur peuvent aussi investir dans un fonds de fonds de capital investissement. Ces actifs sont disponibles à l'achat en quantité illimitée car le contrat est suffisamment petit pour ne pas avoir d'impact sur le marché.

L'assuré peut aussi investir dans le fonds euros de l'assureur. Ce fonds n'est pas disponible sur les marchés et est géré entièrement par l'assureur.

Nous sommes dans une modélisation en monde réel : les actifs n'ont pas besoin de satisfaire le test de martingalité comme dans une modélisation en univers risque-neutre. Même si ce mémoire ne se place pas dans cet univers, les impacts possibles de l'application de la directive Solvabilité 2 seront évoqués.

3.1.2 L'allocation d'actif et la grille de désensibilisation

L'allocation d'actif du fonds en euros

Le fonds en euros sera composé :

- d'obligations sans risque de maturité 10 ans (cible 70%);
- d'actions (cible 17%);
- d'immobilier (cible 8%);
- d'une poche monétaire (cible 5%);
- une poche de capital investissement (cible 0%).

La poche de capital investissement n'est pas présente dans l'allocation cible du fonds euros. Les parts de fonds de capital investissement ne sont pas liquides et doivent être détenues jusqu'à leurs liquidations. Lorsque les assurés rachètent leurs contrats, le fonds euros rachète les parts de PE présentes dans les UC. Le fonds euros détient ces parts jusqu'à liquidation d'une partie du fonds ou jusqu'à la vente de ces parts aux contrats entrants. Le but que la liquidité soit assurée par le fonds euros permet d'éviter une vente précipitée et désavantageuse (*fire-sale*) pour l'assuré. Il y aura donc une poche de capital investissement présente dans le fonds en euros, en dépit du fait que la détention de cette poche ne fasse pas partie des objectifs de l'assureur. Le fonds euros assure ainsi la liquidité des UC proposées aux assurés. La répartition du fonds euros restera identique au cours du temps et les actifs seront investis et désinvestis en conservant les proportions cibles.

Chaque année, les obligations sont intégralement vendues et de nouvelles obligations avec une maturité correspondant à la maturité cible sont rachetées. Cela a pour impact de réaliser les plus ou moins values directement. La réserve de capitalisation n'est pas modélisée et ne lissera pas les rendements au cours du temps.

La grille de désensibilisation du contrat retraite

La réglementation impose à l'assureur de proposer une gestion profilée par horizon pour ses produits PER. L'allocation se décompose entre les supports non risqués (fonds euros) et les supports risqués (UC actions, immobilier, obligations et PE) et plus précisément :

- **fonds euros** : le fonds euros sera investi à hauteur du maximum entre 5% et le minimum légal défini par le profil et l'horizon d'investissement de l'assuré ;
- **fonds de fonds de PE** : La part de fonds de PE (définie comme ζ) variera pour les besoins de l'étude, quand nous évoquerons 10% de PE dans l'allocation, cela signifiera 10% de l'actif de la partie en unités de compte du contrat.
- **autres UC** : Les autres unités de compte sont les UC actions, obligations et immobilier. Ils composent la part restante de l'allocation respectivement à ν , $80\% - \nu$ et 20%. Par défaut, ν est fixé à 60%.

Dans le cadre de cette modélisation, le fonds en euros assure la liquidité des UC (en particulier celle du fonds de fonds de PE). En pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir un fonds en euros en début de vie du contrat, le fonds euros existant déjà grâce aux investisseurs plus prudents ou plus proches de la retraite.

Support	Nom variable	Formule de l'allocation cible
Fonds euros	$part_t^{euros}$	Dépend du temps t
UC PE	$part_t^{PE}$	$\zeta \cdot (1 - part_t^{euros})$
UC Actions	$part_t^{actions}$	$\nu \cdot (1 - part_t^{euros} - part_t^{PE})$
UC Obligations	$part_t^{obligations}$	$(80\% - \nu) \cdot (1 - part_t^{euros} - part_t^{PE})$
UC Immobilier	$part_t^{immo}$	$20\% \cdot (1 - part_t^{euros} - part_t^{PE})$

TABLE 3.1 – Allocation minimale en actif peu risqué ($MRM \leq 3$) à mesure que la durée restante (D) avant la retraite diminue

La part d'UC immobilier est limitée à 20% afin d'éviter l'intégration de sa valeur dans l'assiette de l'impôt sur la fortune immobilière (IFI). Le détail des calculs se trouve dans la table 3.1.

La figure 3.1 présente un exemple de l'allocation avec une part de PE à 10% au cours du temps.

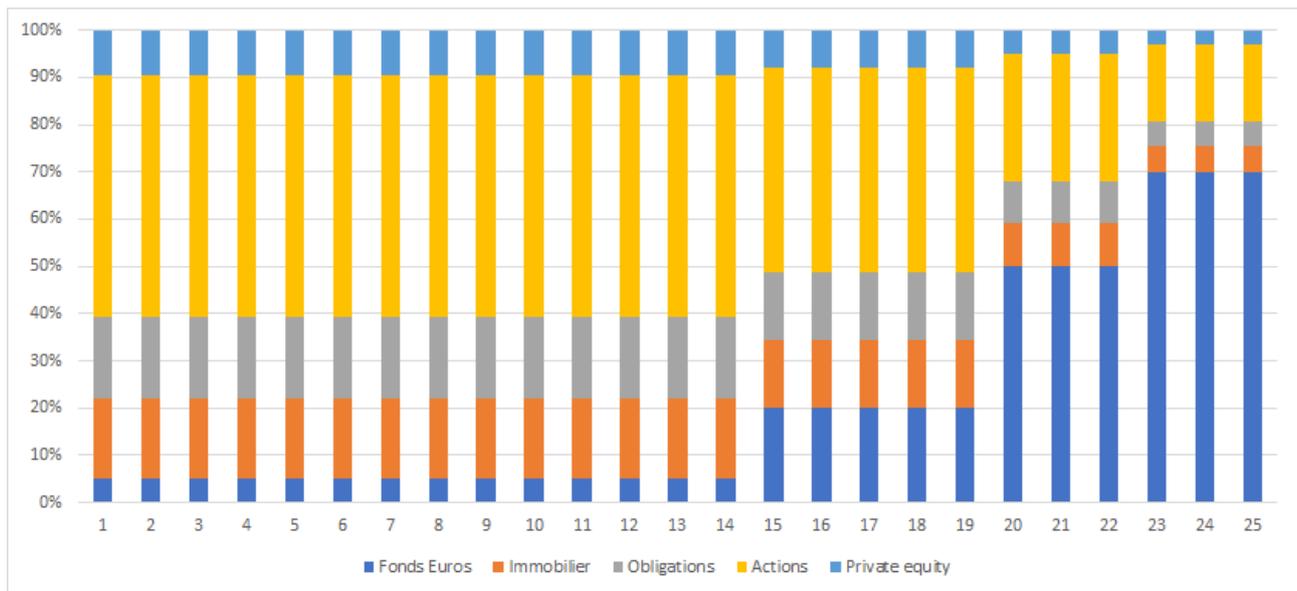


FIGURE 3.1 – Exemple d'allocation au cours du temps avec une part de PE (ζ) égale à 10 % et une part actions (ν) à 60 %

3.1.3 La gestion des millésimes pour le *private equity*

Un fonds de fonds de PE est composé de fonds de capital investissement, d'autres fonds de fonds de PE et des entreprises non cotées. Dans notre modélisation, nous supposons que :

- le fonds de fonds de PE est composé exclusivement de fonds de PE ;
- les fonds de PE seront millésimés.

Cela implique que si les fonds de PE durent en moyenne 10 ans, alors il y aura en moyenne 10 fonds PE dans l'UC PE.

Le détail de la gestion du fonds de fonds dépendra de la modélisation des fonds de *private equity*.

3.2 La modélisation des fonds de *private equity*

Cette section présente les différents modèles envisagés pour modéliser un fonds de capital investissement. Nous présentons ici les principes de fonctionnement permettant de les discriminer entre eux. Une fois tous les modèles présentés, nous choisirons le modèle le plus approprié à notre passif et exposerons les détails du modèle retenu.

3.2.1 Les modèles éligibles

Les fonds de capital investissement peuvent être modélisés par deux éléments, le prix ou les flux financiers. Ici les flux financiers représentent à la fois les appels de fonds et les versements de dividendes. Les trois caractéristiques d'un flux sont la date du flux, son montant et son signe.

Dans le cadre de cette étude, six modèles seront envisagés¹ :

1. La modélisation continue du prix du fonds par le modèle de Black et Scholes (Black et Scholes) ;
2. La modélisation continue du prix du fonds par un modèle de taux (Modèle de taux (HW)) ;
3. La modélisation du montant des dividendes par une composition de trois lois normales (3 lois normales) ;
4. La modélisation du montant des dividendes par des séries temporelles (Séries temporelles) ;
5. La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux différents (Flux financiers) ;
6. La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux identiques et du prix du fonds par le modèle de Black et Scholes (FF et VM).

Les deux premiers modèles tentent de répliquer le prix du fonds. Les deux suivants tentent de répliquer les dividendes versés mais pas la date. Les deux derniers modélisent la date des flux et les montants. Il convient de noter que le dernier modèle donne le prix du fonds à tout moment en plus des caractéristiques des flux.

Les variables mathématiques sont disponibles dans le tableau 3.2. Toutes les variables ne sont pas modélisées dans tous les modèles.

Les modélisations du capital investissement peuvent se placer dans les probabilités « univers monde réel » ou « univers risque neutre ». Cependant l'évaluation des options (Black et Scholes) et des prix des obligations zéro-coupon des modèles CIR et HW nécessite d'être en probabilité « risque neutre ».

1. Le nom entre parenthèses correspond au nom abrégé.

Nom de la variable	Signification
$P(t, T)$	le prix d'une obligation zéro-coupon au temps t de maturité T
T	la date de liquidation du fonds
C	les capitaux levés
S_t	la valeur du fonds au temps t
P_t	la somme des dividendes reçus (<i>Profit</i>) jusqu'au temps t
D_t	la somme des capitaux appelés (<i>Drawdown</i>) jusqu'au temps t
r_t	le taux de rendement instantané du fonds
p_t	les dividendes reçus au temps t
d_t	les fonds versés au temps t
ρ_t	le taux de versement des dividendes au temps t
δ_t	le taux d'appel des fonds au temps t
Z_t	variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite
$(W_t)_{t \geq 0}$	mouvement brownien

TABLE 3.2 – La liste des notations mathématiques employées

La modélisation continue du prix du fonds par le modèle de Black et Scholes (Black et Scholes)

Le modèle de BLACK et SCHOLES utilisé pour modéliser les actions est aussi utilisé par les assureurs pour modéliser leurs fonds de capital investissement. Pour rappel, l'équation de diffusion du prix est

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et $\mu = r_t$.

Un risque n'est notamment pas intégré dans ce modèle mais reste bien présent : la rationalité des agents. Le modèle de Black et Scholes suppose que les agents achèteront et vendront les actions au juste prix et ne seront pas influencés dans leurs choix par d'autres facteurs. Dans le cadre du capital investissement, le prix n'est pas le seul critère de choix, les entreprises cherchant un partenaire et les investisseurs cherchant un contrôle sur l'entreprise.

Un autre inconvénient de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte les millésimes des fonds. Ceci alors qu'un des facteurs principaux du rendement instantané d'un fonds est sa maturité (courbe en J). Un seul mouvement brownien pour refléter toutes les maturités des fonds n'est donc rationnellement pas adapté.

De plus, ce modèle n'intègre pas le risque de liquidité dans la valorisation et suppose une symétrie des queues de distribution par ailleurs peu épaisses. Le rendement gaussien n'est ainsi pas adapté aux fonds de capital investissement bien qu'aujourd'hui largement retenu par les acteurs dans une logique pragmatique au regard de leur faible exposition.

La modélisation continue du prix du fonds par un modèle de taux (Modèle de taux (HW))

Les valorisations de chaque maturité des fonds seront modélisées par une chronique de taux de rendement, à l'instar des obligations avec plusieurs maturités. Le taux de rendement instantané est modélisé par un modèle de taux. Cette partie se base sur le livre de BRIGO et MERCURIO.

Tout d'abord et par souci de simplicité, nous nous restreignons aux modèles de taux à un facteur et aux modèles de taux les plus connus. Nous ne présenterons pas les modèles de marché car le marché du capital investissement n'est ni profond, ni transparent, ni liquide.

Ensuite, le taux de rendement initial du capital investissement est négatif en début de projection (courbe en J). Cette hypothèse limite le choix à deux modèles similaires, celui de VASICEK, 1977 et celui de HULL et WHITE, 1994a. Ce dernier est aussi appelé modèle de Vasicek étendu. Nous préférons le modèle de HULL et WHITE, 1994a, car la structure du taux d'intérêt est paramétrable et réplique mieux la courbe en J.

Un capital C_t au temps t est revalorisé jusqu'à la date T deviendra C_T . La revalorisation se fera grâce au taux d'intérêt instantané r_t . Ce taux peut être constant, issu d'une fonction déterministe ou d'une fonction stochastique. Nous obtenons l'égalité

$$C_T = C_t e^{\int_t^T r_u du}.$$

Une unité monétaire (1 €) $P(t, T)$ au temps T coûtera alors à la date t :

$$P(t, T) = e^{\int_t^T -r_u du}.$$

$P(t, T)$ est aussi assimilé à une obligation zéro-coupon au temps t de maturité $T - t$. Une obligation zéro-coupon est une obligation ne délivrant aucun coupon, le capital et les intérêts sont intégralement remboursés au terme et en un flux unique.

Dans le modèle de taux présenté, la dynamique de r_t est modélisée. L'équation de diffusion du taux instantané r_t est définie par un phénomène de retour à la moyenne $\nu_t - a \cdot r_t$ et d'une partie stochastique σdW_t :

$$dr_t = [\nu_t - a \cdot r_t]dt + \sigma dW_t.$$

ν_t est défini en fonction de la rapidité du retour $a > 0$ et du taux attendu futur instantané sur les marchés (taux *forward* $f^M(0, T)$) tel que :

$$\nu_t = \frac{\delta f^M(0, t)}{\delta T} + a \cdot f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a}).$$

Dans ce cas, $f^M(0, T)$ représente la courbe en J.

L'avantage de ce modèle est de fournir un prix à chaque instant qui réplique les prix observés (courbe en J). Cependant les prix observés ne sont pas toujours cohérents avec le rendement final.

En modélisation solvabilité 2 et sous probabilité risque neutre, la courbe en J et la courbe du taux sans risque ne sont pas nécessairement égales, ce qui complique l'utilisation de ce modèle dans ce cadre réglementaire. Ce problème propre à S2 peut ici être traité différemment. Une possibilité serait de modéliser les flux financiers plutôt qu'un prix.

La modélisation du montant des dividendes par une composition de trois lois normales (3 lois normales)

Le troisième modèle proposé tente de répliquer le coefficient multiplicateur final des fonds de PE. Une méthode similaire serait de modéliser le taux de rendement interne (TRI).

Les sous-jacents de ces fonds sont des entreprises. A la liquidation du fonds, ces entreprises peuvent être soit en faillite ($cas = faillite$), soit revendues à un autre fonds de PE ($cas = rachatPE$), soit introduites sur les marchés publics ($cas = public$). Nous pouvons aussi faire le parallèle entre ces cas et les conditions de marchés des actions : les périodes de crises et crash, les périodes normales et les périodes de bulles financières. Le montant de dividendes à la liquidation du fonds de capital investissement est modélisé en fonction de ces trois issues. Le type de sortie impacte directement le rendement comme

$$\begin{aligned}
 P_T = & C \cdot \exp(\\
 & + \mathbb{1}_{cas=faillite} \cdot \left(\mu_{faillite} - \frac{\sigma_{faillite}^2}{2} + \sigma_{faillite} \cdot Z_T^{faillite} \right) \\
 & + \mathbb{1}_{cas=rachatPE} \cdot \left(\mu_{rachatPE} - \frac{\sigma_{rachatPE}^2}{2} + \sigma_{rachatPE} \cdot Z_T^{rachatPE} \right) \\
 & + \mathbb{1}_{cas=public} \cdot \left(\mu_{public} - \frac{\sigma_{public}^2}{2} + \sigma_{public} \cdot Z_T^{public} \right) \\
 &)
 \end{aligned}$$

où Z_T^{cas} suit une loi normale. T pourrait être la date de sortie ou la date des appels de fonds et être une variable aléatoire. Cependant, dans notre étude T est une constante. Z_T^{cas} existe pour chaque cas de sortie car il peut être corrélé à différents indicateurs. Par exemple, $Z_T^{rachatPE}$ peut être corrélé avec le mouvement brownien des actions et les deux autres mouvements browniens être indépendants de tout autre indicateur.

La variable cas est tirée aléatoirement entre les trois choix $faillite$, $rachatPE$ et $public$. Chaque cas est modélisé par un tirage aléatoire sur une loi uniforme. La tendance et cette volatilité sont définies et calibrées sur les données historiques. La partie comprise dans la fonction exponentielle peut être calibrée comme un taux de rendement interne (TRI) en incluant le facteur temps ou directement comme un facteur multiplicatif. Les deux calibrages sont possibles car les dates de versements sont connues.

L'appel des fonds n'est pas modélisé et les capitaux appelés sont égaux aux capitaux levés. Dans ce modèle, nous connaissons exactement les dates des flux mais pas leurs ampleurs.

Cependant, cette modélisation ne prend pas en compte la dépendance entre les différents millésimes de capital investissement.

La modélisation du montant des dividendes par les séries temporelles (Séries temporelles)

Pour introduire une dépendance entre les rendements des différents millésimes de PE, COCHRANE, 2005, introduit des séries temporelles dans sa modélisation.

Nous supposons la relation d'équilibre que la somme de tous les flux financiers (CF_t) actualisés vaut zéro. L'actualisation est décomposée en taux annuel de la forme $(1 + r_k)$:

$$0 = \sum_{t=t_0}^{\infty} \frac{CF_t}{\prod_{k=t_0}^t (1 + r_k)}.$$

Les flux financiers et leurs dates sont propres à chaque fonds. Cependant, le taux d'actualisation à la date t (r_t) est le même pour tous les fonds.

De plus r_t a une forme similaire au taux de rendement dans le modèle d'évaluation des actifs financiers introduit par SHARPE, 1964, et expliqué par HULL, 2015. Dans le MEDAF, le taux de rendement ($r_t = \alpha + \beta F_t + r_t^f$) est décomposé entre le taux sans risque r_t^f , le rendement corrélé avec le marché (βF_t) et le rendement intrinsèque de la classe d'actif α (α est alors une constante fixée par les autres paramètres). Le processus autorégressif d'ordre 1, f_t , est rajouté à l'équation par COCHRANE, ce qui donne la formule suivante :

$$r_t = \alpha + \beta F_t + f_t + r_t^f.$$

Le processus f_t est défini comme un AR(1) :

$$f_t = \phi \cdot f_{t-1} + \sigma_t Z_t$$

avec Z_t suivant une loi normale centrée réduite et ϕ entre -1 et 0 pour avoir un phénomène de retour à la moyenne.

Pour les besoins de ce mémoire, les dividendes sont définis comme :

$$P_T = C \prod_{k=0}^T (1 + r_k)$$

La dépendance entre les différents millésimes n'est pas forcément vérifiée dans la mesure où chaque étape de la vie du fonds n'est pas sensible aux mêmes facteurs.

Résoudre ces équations pour un portefeuille important de fonds demande beaucoup de puissance de calcul. ANG et al., 2018, résolvent ces équations avec les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) (BRÉMAUD, 2020).

Cependant, cette modélisation donne uniquement le rendement final et ne reflète pas tous les flux financiers des fonds de *private equity*.

La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux différents (Flux financiers)

Nous reprendrons ici la modélisation proposée par BUCHNER et al., 2010. Cette modélisation a pour but de projeter les flux financiers futurs des fonds de capital investissement. Le modèle se décompose en deux sous modèles. Le premier concerne la modélisation des appels de fonds et le second se concentre sur le versement des dividendes. Ce modèle, comme tous les modèles présentés dans ce mémoire, est stochastique.

Comme évoqué par son auteur, ce modèle est particulièrement adapté aux gestionnaires de fonds qui veulent tester la liquidité de leurs engagements.

La modélisation des appels de fonds et celle des versements des dividendes sont indépendants l'un de l'autre

Nous définissons le taux instantané d'appels de fonds par un modèle de taux d'intérêt.

Les fonds appelés D_t (*drawdown*) jusqu'à la date t , sont fonction des capitaux levés $C > 0$ et du taux instantané des appels

$$D_t = C \cdot (1 - e^{-\int_0^t \delta_u du}).$$

avec $t \leq T_e$ où T_e est la date maximale à laquelle un appel de fond peut avoir lieu. La partie $1 - e^{-\int_0^t \delta_u du}$ correspond au taux de capitaux non appelés. Il commence à 1 et ne peut être inférieur à 0.

$e^{-\int_0^t \delta_u du}$ ne peut être plus grand que 1 et $\int_0^t \delta_u du$ ne peut être inférieur à 0, i.e. le taux d'appel instantané ne peut pas être négatif.

L'auteur de cette méthode modélise ce taux comme le modèle CIR nommé d'après ses auteurs COX et al., 1985. La dynamique de ce taux est :

$$d\delta_t = \kappa(\theta - \delta_t)dt + \sigma_D \sqrt{\delta_t} dW_{D,t}$$

où $\delta_0, \kappa, \theta, \sigma_D$ sont des constantes positives.

Le taux est strictement supérieur à zéro presque sûrement si $2\kappa\theta \geq \sigma_D^2$

Dans le cas du modèle CIR (BRIGO & MERCURIO, 2007), nous obtenons le prix de l'obligation zéro-coupon

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

où

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\{(\kappa + h)(T - t)/2\}}{2h + (\kappa + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{2\kappa\theta/\sigma_D}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (\kappa + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

Nous pouvons alors estimer le montant d'appel moyen à la date t et estimé à la date s .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_s[D_t] &= \mathbb{E}_s[C \cdot (1 - e^{-\int_0^t \delta_u du})] \\
 &= C \cdot (1 - \mathbb{E}_s[e^{-\int_0^t \delta_u du}]) \\
 &= C \cdot (1 - \mathbb{E}_s[e^{-\int_0^s \delta_u du - \int_s^t \delta_u du}]) \\
 &= C \cdot (1 - \mathbb{E}_s[e^{-\int_0^s \delta_u du} e^{-\int_s^t \delta_u du}]) \\
 &= C \cdot (1 - e^{-\int_0^s \delta_u du} \mathbb{E}_s[e^{-\int_s^t \delta_u du}]) \\
 &= C \cdot (1 - e^{-\int_0^s \delta_u du} P(s, T)) \\
 &= C \cdot (1 - e^{-\int_0^s \delta_u du} A(s, T) e^{-B(s, T)r(s)}) \\
 &= C - C e^{-\int_0^s \delta_u du} A(s, T) e^{-B(s, T)r(s)} \\
 &= C - U_s A(s, T) e^{-B(s, T)r(s)}.
 \end{aligned}$$

La dernière forme de l'équation est celle obtenue dans le papier original avec $U_s = C - D_s = C e^{-\int_0^s \delta_u du}$ qui représente le capital levé et non appelé (*undrawn*).

Grâce à la littérature sur les taux d'intérêt, il est aisé d'obtenir plus de résultats et de calibrer cette partie.

Le versement des dividendes suit le même principe que les appels de fonds, à la différence que le versement des dividendes ne suit pas un modèle de taux aussi maîtrisé que celui des appels de fonds, ainsi il n'existe pas de formule fermée directement issue de la littérature.

Le taux instantané de versement des dividendes p_t correspond au d_t des appels de fonds. La dynamique de ce taux est

$$d \ln(p_t) = \rho_t dt + \sigma_P dW_{P,t}$$

où $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est un processus, $(W_{P,t})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et σ_P est une constante positive.

Cette dynamique assure que le taux soit positif et ne soit pas symétrique, en conséquence il ne suivra pas une loi normale.

Le profit instantané vu au temps s est égal :

$$p_t = p_s e^{\int_s^t \rho_u du + \sigma_P (W_{P,t} - W_{P,s})}$$

et a pour espérance

$$\mathbb{E}_s[p_t] = p_s e^{\int_s^t \rho_u du + \frac{1}{2} \sigma_P^2 (t-s)} \quad (3.1)$$

où \mathbb{E}_s est l'espérance conditionnelle par rapport à F_s où $(F_t)_{t \geq 0}$ est la tribu canonique.

Le problème principal de cette équation est de définir le taux ρ_t au cours du temps t .

Les auteurs (BUCHNER et al., 2010) définissent alors une autre vision du versement des dividendes afin de faciliter le calibrage : le facteur multiplicatif m . Ce facteur correspond au coefficient entre la somme des

dividendes espérés $\mathbb{E}[P_t] = \int_0^t p_u du$ sur les capitaux levés C . Nous définissons $M_T = P_t/C = \int_0^t p_u du/C$. Ensuite, l'espérance conditionnelle au temps passée $\mathcal{M}_t^s = \mathbb{E}_s[M_t]$ a pour dynamique :

$$d\mathcal{M}_t^s = \alpha_t(m - \mathcal{M}_t^s)dt$$

avec α_t le coefficient de rapidité de convergence. Plus le temps passe, plus ce coefficient doit être fort. Il est défini comme $\alpha_t = \alpha t$. Nous obtenons l'équation

$$\mathcal{M}_t^s = m - (m - M_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)}.$$

Sachant que $p_t = (d\mathcal{M}_t/dt) \cdot C, \forall t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s[p_t] &= (d\mathcal{M}_t^s/dt)C \\ &= \alpha t(m - \mathcal{M}_t^s)C \\ &= \alpha t(m - (m - (m - M_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)}))C \\ &= \alpha t(m - m + (m - M_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)})C \\ &= \alpha t(m - M_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)}C \\ &= \alpha t(mC - CM_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)} \\ &= \alpha t(mC - P_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)}. \end{aligned}$$

En mettant en équivalence cette dernière équation avec l'équation 3.1 alors

$$\begin{aligned} p_s e^{\int_s^t \rho_u du + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t-s)} &= \alpha t(mC - P_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)} \\ p_s e^{\int_s^t \rho_u du} e^{\frac{1}{2}\sigma_P^2(t-s)} &= \alpha t(mC - P_s)e^{-\frac{1}{2}\alpha(t^2-s^2)} \\ e^{\int_s^t \rho_u du} &= \frac{\alpha t(mC - P_s)e^{-\frac{1}{2}(\alpha(t^2-s^2)+\sigma_P^2(t-s))}}{p_s}. \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière équation dans le modèle de diffusion nous obtenons

$$p_t = \alpha t(mC - P_s)e^{-\frac{1}{2}(\alpha(t^2-s^2)+\sigma_P^2(t-s))+\sigma_P(W_{P,t}-W_{P,s})}. \quad (3.2)$$

Nous avons ainsi défini les équations de diffusion pour les dividendes et pour les appels de fonds.

En pratique, l'assureur devra recevoir deux matrices par millésime de fonds de capital investissement. Si l'on souhaite projeter sur 40 ans, il faudra 80 matrices de 20 colonnes. Les colonnes représentent les années d'occurrence des flux financiers.

D'un point de vue informatique, ce modèle n'est pas coûteux en temps de calcul. Cependant, il demande beaucoup de mémoire vive (RAM) et la lecture, le stockage puis l'écriture des matrices de flux financiers prennent beaucoup de temps.

Cette modélisation ne fournit pas de valeur du fonds du capital investissement ni le taux de rendement au cours du temps. Il peut donc être complexe de l'inclure dans le modèle S2 d'un assureur nécessitant une valorisation continue. De plus, des règles de gestion empêchant la vente des fonds devront être implémentées, les fonds de PE devant être conservés jusqu'à leur maturité. Aussi, les tests de cohérence avec le marché et ceux de martingalité sont difficilement applicables.

La modélisation des flux financiers par deux modèles de taux identiques et la valeur du fonds par le modèle de Black et Scholes (FF et VM)

de MALHERBE, 2005, modélise les flux financiers (appels et dividendes) et lie ces flux via une valorisation unique du fonds. Ce modèle est la version stochastique du modèle de TAKAHASHI et ALEXANDER, 2002.

BUCHNER et al., 2010 (auteurs du modèle précédent), décident de s'affranchir de la valorisation du fonds de capital investissement car ils considèrent cette valeur n'est ni représentative de la valeur intrinsèque du fonds, ni de la valeur de marché du fonds.

A l'instar du modèle précédent, le taux d'appel de fonds instantané δ_t est modélisé avec la dynamique du modèle de taux CIR. Il en est de même pour le taux de versement des dividendes ρ_t .

$$\begin{aligned} d\rho_t &= c_1(c_2 - \rho_t)dt + \sigma_p\sqrt{\rho_t}dW_{P,t} \\ d\delta_t &= q_1(q_2 - \delta_t)dt + \sigma_D\sqrt{\delta_t}dW_{D,t}. \end{aligned}$$

Les appels de fonds sont en fonction du capital appelé et ont la même modélisation que le modèle précédent.

$$D_t = C \cdot (1 - e^{-\int_0^t \delta_u du}).$$

Les dividendes P_t dépendent de la valorisation du fonds S_t

$$\begin{aligned} dP_t &= \rho_t S_t dt \\ P_t &= \int_0^t \rho_s S_s ds + S_t \mathbf{1}_{t=T} \end{aligned}$$

avec T date de liquidation du fonds.

Le fonds est valorisé S_t via l'équation de BLACK et SCHOLES en y ajoutant les flux financiers

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma dW_t) + dD_t - dP_t.$$

Ce modèle, bien que répliquant certains aspects du *private equity*, n'est pas forcément adapté. Comme pour BLACK et SCHOLES, le rendement gaussien ne reflète pas les rendements du *private equity*. Dans le cadre d'une modélisation S2 et de la stratégie ALM, le fait d'avoir un prix pourrait pousser les modélisateurs à vendre et acheter ces fonds comme des actifs liquides. Dans ce cas, la modélisation reviendrait à modéliser le capital investissement comme un modèle de BLACK et SCHOLES.

3.2.2 Les critères de choix de la modélisation retenue du fonds capital investissement

Les caractéristiques principales des modèles sont résumées dans la table 3.3. Les modèles de Black et Scholes et de taux (HW) donnent uniquement le prix du fonds et non les flux financiers. Les modèles des trois lois normales et des séries temporelles modélisent le montant du dividende final. L'inconvénient majeur des séries temporelles réside dans sa difficulté de calibrage. Les deux derniers modèles fournissent les flux financiers dont un fournit aussi le prix du fonds.

Nom	Prix du fonds	Montant des appels de fonds	Date des appels de fonds	Montant des dividendes	Date des dividendes
Black et Scholes	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
Modèle de taux (HW)	+	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
3 lois normales	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Séries temporelles	N.A.	N.A.	N.A.	+	N.A.
Flux financiers	N.A.	+	+	++	++
FF et VM	+	+	+	+	+

TABLE 3.3 – *Les caractéristiques des fonds de capital investissement restituées par les modèles*

Les critères de choix

Quelle que soit la modélisation envisagée, la difficulté de valorisation des fonds de *private equity* à tout moment implique la prudence quant aux interactions actif/passif entre ces fonds et les engagements de l'assureur envers les assurés.

Nous avons retenu ici six critères de sélection pour comparer les modèles envisagés et réaliser un choix pour la suite des travaux. Les six critères sont :

1. **Valorisation continue** : La valeur du fonds est-elle donnée à tout instant ?
2. **Appels de fonds** : La date de versement et le montant des appels de fonds reflètent-ils la réalité ?
3. **Dividendes** : La date de versement et le montant des dividendes reflètent-ils la réalité ?
4. **Simplicité mathématique** : Le modèle est-il transparent ?
5. **Simplicité de calibrage** : Le modèle est-il simple à calibrer et y-a-t-il besoin de beaucoup de données ?
6. **Adéquation aux passifs et besoins des assureurs** : Le modèle reflète-t-il le risque pris par les assureurs compte tenu des caractéristiques du passif ?

Les résultats sont condensés dans le tableau 3.4.

Nom	Valorisation continue	Appels de fonds	Dividendes	Simplicité mathématique	Simplicité de calibrage	Adéquation
Black et Scholes	+	N.A.	N.A.	++	++	--
Modèle de taux	+	N.A.	N.A.	+	+	-
3 lois normales	N.A.	N.A.	+	++	+	+
Séries temporelles	N.A.	N.A.	+	-	--	+
Flux financiers	N.A.	++	+++	--	-	++
FF et VM	+	++	++	--	-	++

TABLE 3.4 – *Les critères de choix des modèles de PE*

D'autres critères auraient pu être pris en compte tels que le coût informatique (temps de développement, puissance de calculs, coût de la mémoire). Nous avons fait le choix de sélectionner ces six critères car les

trois premiers critères reflètent l'essentiel du comportement des fonds de capital investissement et les trois derniers reflètent la capacité de mise en œuvre opérationnelle au regard des enjeux et des données.

A partir de cette grille d'analyse, nous avons choisi d'écartier trois modèles de l'étude : le modèle des séries temporelles et les deux modèles ne donnant que le prix. Le modèle des séries temporelles requiert des calculs intensifs pour être calibré, ce qui est rédhibitoire. Les deux modèles qui ne répliquent que le prix (Black & Scholes et le modèle de taux), présentent un intérêt au plan comptable mais ne donnent pas d'information sur la situation de marché et la réelle liquidité des fonds pourtant essentielle en matière de *private equity*

Parmi les trois modèles restant candidats, si l'on compare les deux modèles répliquant les flux financiers, le premier modèle (celui fondé sur les flux financiers et ne donnant pas la VM) réplique le mieux les dividendes.

Le choix entre ce dernier modèle et celui répliquant les dividendes à partir de trois lois normales repose sur l'adéquation au passif et la simplicité de mise en œuvre. Les assureurs retraite ayant un encours de PE bien moins important que les gestionnaires de fonds, l'enjeu de répliquer les flux financiers du PE avec une grande précision est moins essentiel pour les assureurs. Le point clef sera de capter le rendement au terme. C'est pourquoi entre les deux derniers modèles, nous avons choisi de retenir le modèle répliquant les dividendes à partir de trois lois normales qui présente l'avantage d'une plus grande simplicité par ailleurs. Néanmoins, dans le cadre d'une modélisation plus fine et d'un adossement à un fonds en euros ou à une tontine, la méthode par flux financiers pourrait présenter un intérêt supérieur. En effet, la méthode par flux financiers permet notamment de mieux répliquer le risque de liquidité dans le cas d'options plus complexes en faveur de l'assuré telles que des options de rachats et des garanties de taux.

3.2.3 La modélisation du fonds de fonds de capital investissement

Le contrat retraite PER ne permet pas d'investir dans des fonds de capital investissement mais uniquement dans des fonds de fonds de capital investissement. Il convient d'adapter la modélisation des fonds de PE retenue à celle d'un fonds de fonds. En premier lieu, nous fixons les hypothèses de la modélisation retenue puis en fonction de ces hypothèses nous définissons le comportement du fonds de fonds.

Les hypothèses de la modélisation d'un fonds de capital investissement

Nous supposons qu'un fonds de capital investissement dure dix ans. En début de projection (à $t = 1$), les fonds sont intégralement appelés. Il est possible d'investir autant que souhaité. En cours de projection, le fonds sera valorisé à sa valeur comptable brute (i.e. sa valeur d'acquisition). A partir de la huitième année ($t = 8$), les dividendes sont versés annuellement jusqu'à la dixième année ($t = 10$). La valeur comptable du fonds sera réduite de 33% la huitième année, 50% la neuvième et 100% la dixième année (liquidation totale du fonds). La valeur économique du fonds n'est connue qu'à posteriori. La figure 3.2 représente les flux financiers, la valeur comptable brute du fonds et la valeur économique. Nous supposons que les fonds de capital investissement ne sont pas liquides, par conséquent la seule modalité de sortie est la liquidation des fonds après le versement des dividendes.

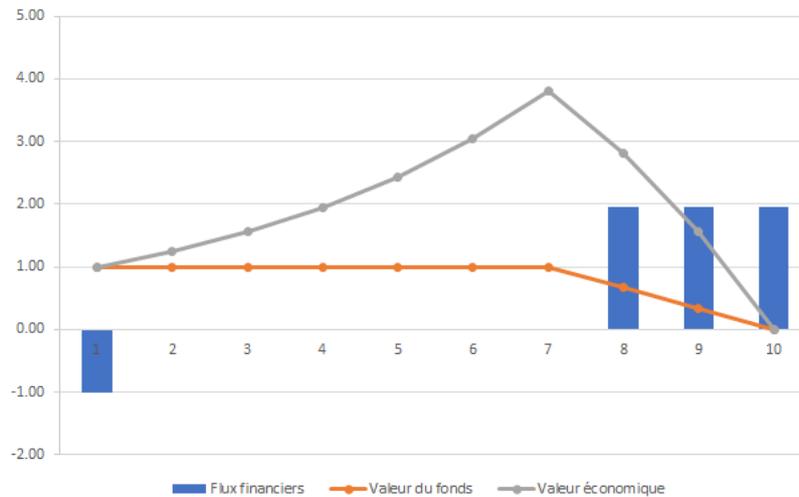


FIGURE 3.2 – Exemple des flux financiers et de la valeur d'un fonds de PE avec un TRI de 25%

La modélisation d'un fonds de fonds de capital investissement

Nous supposons ici que le fonds de fonds de capital investissement est investi entièrement en parts de fonds de capital investissement. Dans la réalité, une part non négligeable est investie en actif liquide, ce qui permet aux investisseurs de racheter leurs parts. Dans ce mémoire, nous considérons donc que le fonds de fonds ne joue pas un rôle de liquidité comme il le ferait dans la réalité.

Tous les flux entrants sont investis dans un fonds de capital investissement de la même année. Les flux sortants sont uniquement dus à la liquidation d'un fonds de capital investissement. Il n'est pas possible de racheter le fonds de fonds car l'actif sous-jacent n'est pas liquide.

Le but de ces contraintes est de mesurer les risques d'investir dans un fonds de capital investissement du point de vue de l'assureur et plus particulièrement de l'allocation de son fonds en euros.

Lors de la première année, les assurés investissent dans le fonds de fonds de PE et devront attendre huit ans avant de percevoir leurs premiers dividendes. Les dividendes sont versés au prorata des parts. Cela implique que les parts reçues pour la prime versée en deuxième année de projection et rachetant les parts de *private equity* contenues dans le fonds en euros verseront des dividendes au bout de sept ans. Ce phénomène réplique la mutualisation temporelle présente dans les fonds de fonds de capital investissement. De plus, nous pouvons observer sur les premières années l'impact de l'introduction d'une poche de capital investissement.

Le fonds de fonds est investi dans dix fonds de *private equity* de maturités différentes.

3.3 La modélisation des autres classes d'actifs que le *private equity*

L'univers d'investissement contient plusieurs classes d'actifs autre que le *private equity*. Leurs modélisations sont décrites ici.

3.3.1 La modélisation des produits de taux

La modélisation continue des taux d'intérêt

Pour modéliser $(r_t)_{t \geq 0}$, nous utilisons le modèle de HULL et WHITE, 1994b, à deux facteurs et un taux. La dynamique est

$$\begin{aligned} dr_t &= (\theta_t + u_t - ar_t)dt + \sigma_r dW_{r,t} \\ du_t &= -bu_t dt + \sigma_u dW_{u,t} \end{aligned}$$

où $(W_{u,t}, W_{r,t})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à deux dimensions avec $dW_{u,t}dW_{r,t} = \rho dt$, et où θ_t , a , σ_r , σ_u sont des constantes positives. De plus, $-1 \leq \rho \leq 1$ et θ_t est une fonction déterministe dépendant du temps permettant de reproduire la courbe des taux. Cette dynamique est HULL et WHITE, 1994a, à un facteur mais avec un coefficient oscillation autour du processus $(u_t)_{t \geq 0}$. Dans notre modélisation, nous supposons que les deux mouvements browniens sont indépendants.

La formule d'un zéro coupon à la date t de maturité $T - t$ est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^3 &= \sqrt{\sigma_r^2 + \frac{\sigma_u^2}{(a-b)^2}} \\ \sigma^4 &= \frac{\sigma_u}{|a-b|} \\ V(t, T) &= \frac{\sigma_3}{a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du + \frac{\sigma_4}{b^2} \int_t^T (1 - e^{-b(T-u)})^2 du \\ \phi(t) &= r_0 e^{-at} + \int_0^T \theta_v e^{-a(t-v)} dv \\ P^M(0, T) &= \exp\left(-\int_0^T \phi(u) du + \frac{1}{2}V(0, T)\right) \\ A(t, T) &= \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(\frac{V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)}{2}\right) \\ B(z, t, T) &= \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z} \\ P(t, T) &= A(t, T) e^{-B(a,t,T)(r(t) - (\theta_t + u_t)) - B(b,t,T)u(t)}. \end{aligned}$$

La modélisation de la performance obligataire

Dans notre modèle, nous investissons dans des obligations de maturité 10 ans. Au temps t , nous achetons une obligation au prix de $P(t, t + 10)$. Au bout d'un an, notre obligation a une maturité 9 ans et est tarifée $P(t + 1, t + 10)$. La performance des obligations zéro coupons $perf_{ZC10ans}$ de maturité 10 ans est de :

$$perf_{ZC10ans} = \frac{P(t + 1, t + 10)}{P(t, t + 10)}.$$

Nous revendons ensuite nos obligations de maturité 9 ans pour acheter des obligations 10 ans au prix de $P(t + 1, t + 11)$.

3.3.2 La modélisation du cours des actions

Les actions sont modélisées avec le modèle de BLACK et SCHOLES. Les hypothèses nécessaires sont :

- il n'y a pas de coût de transaction ou de taxes ;
- il y a absence d'opportunité d'arbitrage ;
- le marché est liquide ;
- aucun dividende n'est versé ;
- les actifs sont divisibles à l'infini ;
- il est possible d'acheter et vendre à découvert ;
- il est possible d'emprunter à un taux (r) constant, sans risque et connu à l'avance.

La plupart de ces hypothèses ne sont pas vérifiées mais admises pour les marchés cotés. Par exemple, il existe des coûts de transaction, l'achat et la vente à découvert sont réglementés dans l'Union Européenne, et le taux sans risque est approché par la dette émise par l'état allemand (EIOPA, 2022).

Le processus de diffusion du modèle de Black et Scholes est :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

Cette équation a comme unique solution :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

où

- μ : est la tendance ;
- σ : est la volatilité ;
- S_t : est le prix du sous-jacent au temps t avec $S_0 > 0$;
- W_t : est un mouvement brownien.

Le prix de l'actif a les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}.$$

Ce modèle est connu en finance, car il lie le prix des options acheteuses et vendeuses (*call* et *put*) en fonction de la tendance μ et de la volatilité σ . Lorsque la volatilité est déterminée en fonction du prix des dérivés alors on parle de volatilité implicite. Un portefeuille répliquant les options existe. Les hypothèses évoquées permettent de faire le lien entre les paramètres, le prix des options et le portefeuille répliquant.

Dans le modèle initial, les paramètres (μ et σ) doivent être constants. Cette contrainte a été relâchée dans des recherches plus récentes. Avoir une tendance variant au cours du temps permet de respecter le test de martingalité en S2 (μ correspond alors au taux sans risque).

Nous supposons que la tendance (μ) est de 8% et que la volatilité (σ) est de 20%.

3.3.3 La modélisation du cours de l'immobilier

L'immobilier est modélisé avec le modèle de BLACK et SHOLES. Ce modèle ne reflète pas le risque sous-jacent de l'immobilier mais nous l'utilisons par souci de simplicité et d'interprétation des résultats. Cette problématique a déjà été traitée dans des mémoires d'actuariat et a fait l'objet de recommandations de la part de l'institut des actuaires anglais, français et de l'ACPR.

Nous supposons que la tendance (μ) est nulle et que la volatilité (σ) est de 20%.

3.3.4 La modélisation de la poche monétaire

La poche monétaire est modélisée en déterministe. La valeur d'une UC monétaire reste constante dans le temps.

3.4 Les interactions actif/passif

Dans cette modélisation, quatre événements se produisent lors d'une année de projection. En début d'année, l'assuré verse sa prime annuelle. En milieu d'année, les décès, rachats et transferts sont comptabilisés. En fin d'année, les supports investis sont revalorisés puis réalloués pour correspondre à l'allocation cible.

Nous avons fait le choix spécifique d'assurer la liquidité du fonds de fonds de capital investissement par un fonds euros dédié. Ce fonds n'a pas vocation à représenter une part significative de l'actif total mais à permettre une gestion des flux de passifs, versements et rachats, malgré l'illiquidité du *private equity*.

Le versement d'une prime – début d'année

Lorsqu'une prime est payée, elle est investie suivant la grille d'allocation contractuelle. Si l'assuré souhaite acheter des parts d'UC contenant du capital investissement et que le fonds en euros contient une telle UC, alors nous considérons que l'assureur vendra ses parts à l'assuré. Enfin, la prime versée sur le fonds euros est investie au *pro rata* de son l'allocation cible. Pour rappel, le fonds euros est composé d'obligations (cible 70%), d'actions (cible 17%), d'immobilier (cible 8%), d'une poche monétaire (cible 5%) et d'une poche de capital investissement (cible 0%). Le fonds euros n'investit dans du capital investissement que s'il est contraint pour assurer la liquidité de l'UC de PE. Idéalement, le fonds euros ne contient pas de PE.

La sortie du contrat – milieu d'année

Lors d'un rachat, les supports (UC et fonds euros) détenus par l'assuré sont désinvestis proportionnellement. Les parts de l'UC de capital investissement détenues par l'assuré sont revendues au fonds euros. Ce dernier est désinvesti au *pro rata* de son allocation cible.

Aucune part n'est créée car la PM baisse, et aucune part n'est liquidée à ce moment.

La revalorisation des supports – fin d'année

Les trois revalorisations (UC, UC PE, fonds euros) ont lieu au même moment. Les frais sur encours sont prélevés à ce moment.

Pour le fonds en euros, le taux net servi est égal à 85% des produits financiers dans la limite du taux technique. Ce dernier, conformément à la réglementation, est égal à 0%. Aucun mécanisme de provision pour participation aux bénéfiques (PPB) ne lisse le rendement dans le temps.

La valeur liquidative des unités de comptes (UC) change et le nombre de parts est réduit des frais.

Quant aux fonds de capital investissement, des dividendes du fonds de PE sont versés à partir de la huitième année. Ces dividendes sont réinvestis sur un support monétaire en attendant d'être réalloués en fin d'année.

La liquidation des fonds de PE via le versement d'un dividende provoque la baisse du nombre de parts d'UC de PE.

La réallocation de l'actif – fin d'année

La réallocation des supports détenus par l'assuré se fait en fonction de son profil et de la durée restante. Si lors de cette réallocation, le contrat de l'assuré nécessite une augmentation des parts du fonds de PE, alors les mêmes règles que pour le versement d'une prime s'appliquent. A l'inverse, s'il y a un désinvestissement du fonds de fonds de *private equity*, alors les mêmes règles que pour le rachat sont appliquées.

Selon les montants investis et les règles ci-dessus, le nombre de parts du fonds de capital investissement peut augmenter dans le bilan de l'assureur lors de la réallocation du contrat.

Conclusion du chapitre

Dans la suite du mémoire, le modèle retenu pour la modélisation du PE prévoit d'évaluer le TRI au moyen de trois lois normales

Les fonds de capital investissement n'étant pas liquides, le fonds euros assurera leur liquidité et rachètera les parts de fonds si besoin. C'est une nouvelle interaction entre l'actif et le passif qu'il conviendra de modéliser.

Chapitre 4

Le calibrage du modèle de capital investissement

Le modèle retenu pour la modélisation du fonds de capital investissement est fondé sur les flux de dividendes plus que sur la réplication du prix. Ce modèle est simple et a peu de paramètres. Cependant, il n'existe pas d'options permettant de le calibrer comme il en existe pour les actions ou les produits de taux. Il est nécessaire de définir un autre critère de risque en probabilité historique.

Les premières données disponibles sur le PE datent du début des années 2000. La sensibilité des prix du PE aux crises et sa corrélation avec les autres classes d'actifs demeurent encore peu connues.

Dans la première partie, nous décrirons les données disponibles et les retraitements effectués. Ensuite, nous définirons les indicateurs de performance du *private equity*. Enfin, grâce aux données et aux indicateurs, nous calibrerons notre modèle.

4.1 Les données utilisées

Cette section exploite trois jeux de données différents. Le premier jeu est extrait d'un papier de recherche et contient les données financières datées du début de 2020 sur plusieurs fonds de capital investissement. Le deuxième jeu est la base de données Preqin, l'accès à cette dernière est payant mais c'est une référence dans le monde des investissements alternatifs. Le dernier jeu est une série d'indices boursiers publiée par la société LPX.

4.1.1 L'historique exploitable selon la modélisation

La base de données Preqin

Les données de Preqin sont disponibles à une maille agrégée à savoir par stratégie, région, millésime et date d'évaluation. La date d'évaluation est fournie trimestriellement.

Les informations fournies sont les capitaux appelés, les dividendes versés, la valeur résiduelle du fonds (*Net asset value*).

Les données de la stratégie *Secondary* sont peu exploitables, le marché n'est développé que depuis 2012. La stratégie *Secondary* consiste à acheter des parts de fonds de PE en cours de vie et non en phase de constitution.

La variété des données disponibles sur Prequin impose de faire des choix structurants. Les millésimes antérieurs à 2005 sont peu exploitables car les flux sont partiellement disponibles. De plus, le contrat PER étant un contrat français, nous limitons les données aux fonds commercialisés en Europe. La stratégie sélectionnée doit correspondre avec les objectifs d'investissement de l'assureur, en particulier nous nous intéressons à la stratégie *buy out*.

La base de données issues de papiers de recherche

Dans son analyse de l'émergence de nouveaux milliardaires dans le monde du capital investissement, PHALIPPOU, 2020, met à disposition les données utilisées. Ces données représentent plus de 1 000 fonds de capital investissement avec plusieurs stratégies différentes. Pour ces fonds, nous avons les données à une seule date (2020).

Comme pour la base de données Prequin, nous avons pour la plupart des fonds le TRI, le coefficient multiplicateur, les flux financiers, les capitaux levés et la valeur de l'actif (NAV).

Dans le graphique 4.1, nous observons que la répartition des log-rendements ne suit pas une loi normale car les queues de distributions sont épaisses.

Les indices boursiers du capital investissement

L'entreprise LPX AG publie des indices boursiers représentant la performance du *private equity* dans le monde. Nous en choisissons trois qui concernent les fonds de capital investissement.

Les trois indices étudiés sont publiés par LPX AG. LPX50 (ISIN : CH0022737545) représente les 50 plus importantes et liquides entreprises investissant dans du *private equity*. LPX Buyout (ISIN : CH0026029485) représente les 30 plus importantes et liquides entreprises investissant dans du *private equity* qui sont spécialisés dans la stratégie *buy out*. LPX Mezzanine (ISIN : CH0030648130) suit le même principe avec la stratégie *mezzanine*. Ces indices sont diversifiés en représentant différentes stratégies d'investissement (pour le LPX50 uniquement), plusieurs années de création et plusieurs continents. Les données sont analysées depuis 2004, année qui correspond au début de l'indice LPX Mezzanine¹.

Ces trois sources de données sont complémentaires et représentent la vision d'un marché sous trois angles différents. Les trois bases sont étudiées afin d'extraire un maximum d'information et d'utiliser l'information adéquate en fonction de notre modélisation.

1. Une dette *mezzanine* est une dette remboursée après la dette *senior* mais avant les fonds propres.

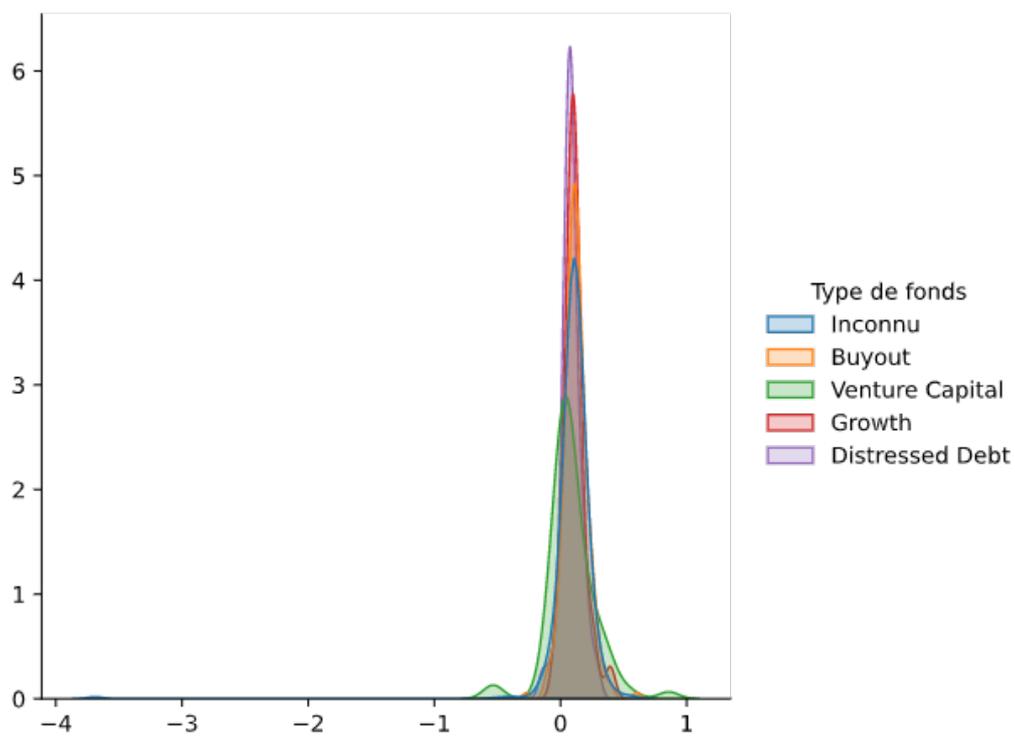


FIGURE 4.1 – Densité du log-rendement pour les fonds de private equity par stratégie

Source : PHALIPPOU, 2020

4.1.2 Les limites des données exploitées

La base de données Prequin ne donne pas d'information détaillée par fonds et la valorisation trimestrielle peut mener à sous-estimer la volatilité réelle. De plus, le panier de fonds pour un millésime et une stratégie d'investissement peut changer au cours du temps ce qui provoque un biais dans l'appréciation du risque. L'information est par ailleurs partiellement disponible (75% US et 60% Europe).

Le problème majeur des indices est qu'ils ne reflètent pas forcément l'investissement de l'assureur (taille des fonds, stratégie, millésimes, diversification) ce qui peut mener à mal estimer le risque pris.

COCHRANE, 2005, tente de mesurer la performance d'un fonds de capital investissement entreprise par entreprise en corrigeant le biais. Ce biais est en partie causé par le rachat d'entreprises vendues par des fonds de PE à d'autres fonds de PE. Les indicateurs non biaisés sont soit la faillite de l'entreprise, soit le prix de sa revente (par exemple via une introduction en bourse).

Les données issues du papier de recherche sont relativement complètes et détaillées par fonds. Cependant, elles ne donnent l'état du marché qu'à un seul moment(mi-2020) et ne fournissent pas la performance des fonds de capital investissement au cours du temps.

4.2 L'analyse des données sur un millésime

La base Prequin, bien qu'agrégée, donne des informations par millésime au cours du temps. Les différents indicateurs de rendement des fonds de capital investissement y sont définis. Certains indicateurs, comme le TRI en continu, sont utiles pour calibrer les modèles donnant les prix, tandis que d'autres indicateurs, comme le taux des appels de fonds, sont utiles pour calibrer les modèles en décrivant les flux financiers. Même si tous les indicateurs ne sont pas utilisés pour le calibrage, ils doivent servir à vérifier la cohérence des résultats en sortie du modèle.

4.2.1 Les différents indicateurs

Cette base de données fournit à chaque trimestre pour chaque maille agrégée l'état des placements. En plus des données reflétant l'importance de chaque maille (i.e. chaque ligne de la base) telles que le nombre de fonds et le montant des capitaux levés (en milliard de dollars USD), Prequin fournit des indicateurs financiers permettant de définir le comportement du capital investissement. Ces indicateurs concernent le rendement (*TRI* et *TVPI*), les flux financiers (*PIC* et *DPI*) et la valeur du fonds (*RVPI*) :

- le *TRI* : taux de rendement interne ;
- *PIC* : *paid-in capital to cumulative committed capital* correspond à la part de montant non encore investi ;
- *RVPI* : *residual value to paid-in capital* correspond à la part de la valeur nette non distribuée ;
- *DPI* : *distributions to paid-in capital* correspond à la part de dividendes distribués ;
- *TVPI* : *total value to paid-in capital* correspond au coefficient multiplicateur de l'investissement.

Ces indicateurs sont définis dans « Global Investment Performance Standards » du CFA INSTITUTE, 2020.

Le PIC , aussi appelé *dry-powder ratio*, est la part de capital non encore appelé, restant à investir. Il se définit comme

$$PIC_t = \frac{Capitaux_appeles_t}{Capitaux_leves_t}.$$

Ce ratio est négativement corrélé avec le temps.

Le DPI est le ratio entre les dividendes versés par les capitaux appelés par le fonds. C'est le rendement déjà assuré pour l'investisseur et est calculé comme

$$DPI_t = \frac{Dividendes_verses_t}{Capitaux_appeles_t}.$$

Le $RVPI$ est le rapport entre valeur résiduelle encore investie et les capitaux appelés. Pour toute date t , il est égal à

$$RVPI_t = \frac{NAV_t}{Capitaux_appeles_t}.$$

La valeur résiduelle diminue à chaque versement de dividende et devient nulle à la liquidation du fonds.

Le $TVPI$ est aussi appelé coefficient multiplicateur et correspond à la somme des dividendes versés DPI et de la valeur résiduelle du fonds $RVPI$. Il est égal à

$$TVPI_t = DPI_t + RVPI_t.$$

Lorsque l'investissement est suffisamment ancien (i.e. t est suffisamment grand) alors ce coefficient est égal au DPI .

A la liquidation du fonds, le TRI et le DPI peuvent être analysés. Le TRI prend en compte la durée de l'investissement, i.e. plus les dividendes sont versés tôt plus le TRI sera grand en valeur absolue. Le DPI est intéressant car il permet de connaître l'argent réellement gagné dans un fonds de capital investissement. Cela permet de détecter l'effet de certains fonds qui délivrent un TRI symbolique de plus de 100% mais sur une seule année.

Tous ces indicateurs sont particulièrement utiles dans le cadre d'une modélisation par flux financiers. La dynamique du ratio PIC est estimée comme le taux d'appel des fonds à une date. La dynamique du ratio $RVPI$ est estimée comme le taux de versement des dividendes à une certaine date.

Le moment où le montant de dividende reçu dépasse le montant des appels de fonds (i.e. la plus petite date t où $1 < DPI_t$) correspond à la date d'amortissement (point mort). A partir de cette date l'investissement aura nécessairement un TRI positif. Cette date moyenne permet de calibrer la vitesse de distribution des dividendes dans certains modèles.

4.2.2 L'impact du rallongement de la durée de détention sur le TRI et le DPI

Les indicateurs de performances peuvent être étudiés à différents moments de la vie du fonds :

- lors de la phase d'investissement : volatilité du cours de la performance du portefeuille ;
- lors de la date de liquidation : volatilité du TRI du portefeuille à la date de liquidation ;

- lors de la zone d'illiquidité : délai avant la cession de l'intégralité des actifs.

Sachant que les données ne sont disponibles qu'à partir de 2005, le nombre de fonds liquidés étudiés est limité. Plus la maturité étudiée est élevée, plus le nombre de données sera petit (graphique 4.2). Autrement dit, plus la maturité est élevée, moins l'information est significative.

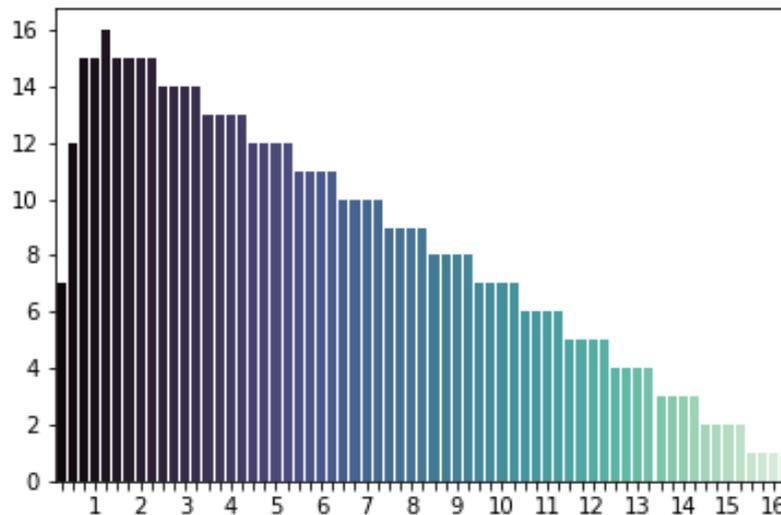


FIGURE 4.2 – Le nombre de lignes disponibles par maturité

Source : Preqin

Tous les indicateurs ne sont pas analysés, seuls les indicateurs sur les flux financiers (*PIC* et *DPI*) et le *TRI* le sont. Pour tous les graphiques suivants, l'écart-type est tracé autour de la moyenne.

Une diminution du *dry-powder ratio PIC* au cours de la projection est observée. Le fait qu'il atteigne 0 n'est pas forcément vérifié dans les investissements d'une compagnie d'assurance (graphique 4.3). Cependant, l'hypothèse que l'intégralité des montants investis soit appelée de notre modèle est cohérente avec le graphique. La chronique a peu d'impact car notre modélisation réplique le montant de dividende sans prendre en compte le facteur temps.

Le *DPI* correspond au versement des dividendes. Nous observons un remboursement du capital au bout de 10 ans et un coefficient multiplicateur à terme de l'ordre de 150%. Le *DPI* servira lors de la vérification du calibrage de notre modèle.

La courbe en J n'est pas observable sur le graphique du *TRI* (graphique 4.5) car le *TRI* n'est pas disponible avant la maturité 4 ans.

Les graphiques des autres indicateurs de performances (*RVPI* et *TVPI*) sont disponibles en annexe.

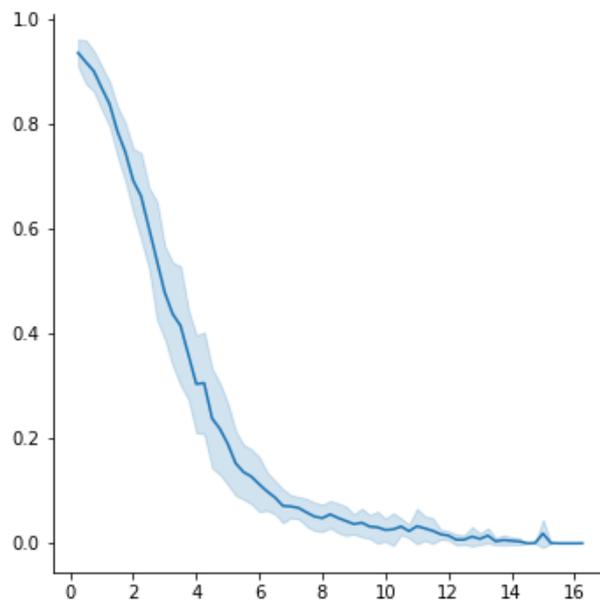


FIGURE 4.3 – *Le PIC en fonction de la maturité*

Source : Preqin

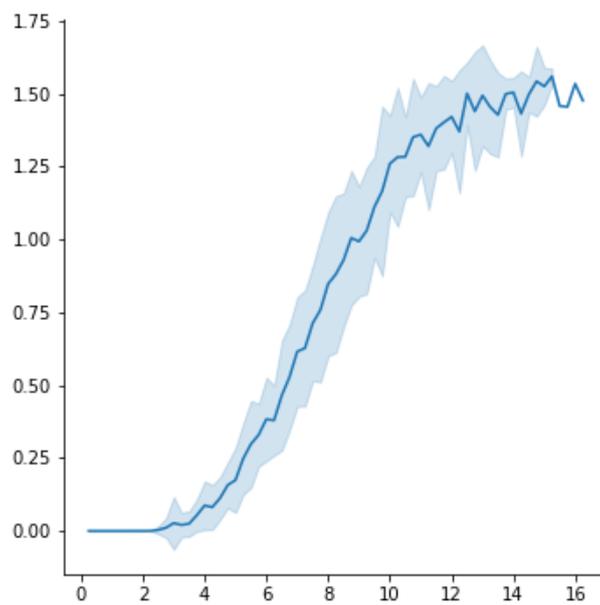


FIGURE 4.4 – *Le DPI en fonction de la maturité*

Source : Preqin

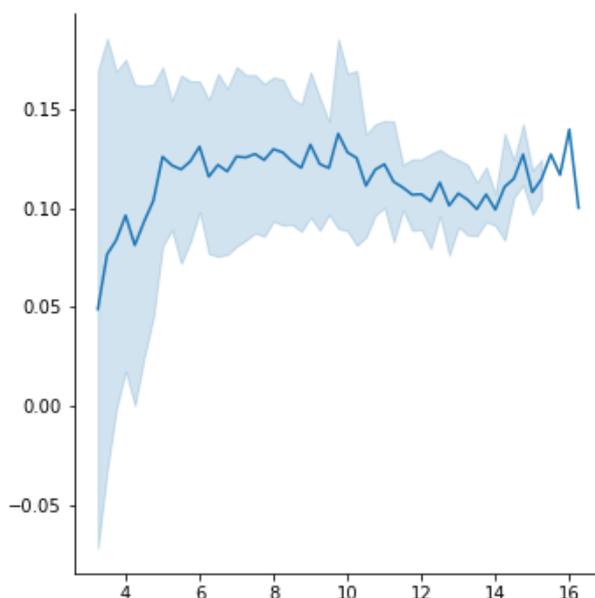


FIGURE 4.5 – *Le TRI en fonction de la maturité*

Source : Prequin

4.3 Le calibrage de la distribution de probabilité du TRI

Le modèle retenu est composé de trois lois normales, une loi normale par situation de marché. Un problème que nous rencontrons dans le monde de la finance sur le non-côté est l'absence d'options sur cette classe d'actif. Si ces options existaient alors nous pourrions estimer les volatilités implicites. La probabilité d'être dans les diverses situations de marché est calibrée en fonction des indices boursiers. Les lois normales sont ensuite calibrées en fonction de la répartition du coefficient multiplicateur des données du papier de recherche (PHALIPPOU, 2020).

Les données utilisées dépendent du modèle retenu. Pour calibrer les modèles par flux financiers, il conviendrait par exemple d'exploiter la base Prequin et l'évolution des indicateurs de performance (DPI , $TVPI$, ...).

4.3.1 Les faits marquants de l'historique sur les indices

Le graphique 4.6 représente les cours avec réinvestissement des dividendes (*total return*) des indices LPX50, LPX Buyout et LPX Mezzanine.

Deux crises majeures ont eu un effet significatif sur la tendance du rendement de ces indices : en 2008 la crise des *subprimes* et en 2020 la crise liée au coronavirus. Deux autres crises ont aussi impacté les marchés durant la période étudiée. La crise des dettes souveraines européennes (en particulier de la Grèce) a eu lieu en 2011, et en début 2016 a lieu le crash du marché chinois. Ces quatre crises sont visibles sur la volatilité des marchés. Nous analysons alors la volatilité du log-rendement de ces indices.



FIGURE 4.6 – Cours des principaux indices (*total return*) du capital investissement

Source : onvista.de, lpx-group.com

Cette volatilité mobile annualisée est calculée sur une fenêtre de 6 mois (graphique 4.7).

La volatilité des indices LPX50 et LPX Buy out sont similaires. Ce phénomène peut s’expliquer par la présence majoritaire des fonds avec une stratégie *buy out*. Cependant, la volatilité de LPX Mezzanine est supérieure à l’indice LPX Buy out. Ce phénomène est amplifié lors des différentes crises. Ce comportement est étrange car le sous-jacent est censé être moins volatil. La taille des fonds de capital investissement joue sur le rendement. Les fonds avec une stratégie *mezzanine* sont plus petits que ceux avec une stratégie *buy out*. Cet argument peut expliquer la sur-volatilité.

Pour ces indices, le rendement n’est pas positivement corrélé avec la volatilité (tableau 4.1). Le couple rendement risque au sens de Markowitz n’est pas respecté. Le rendement moyen et la volatilité moyenne pour l’indice LPX50 sont proches de ceux de l’indice du CAC40.

Indice	Moyenne	Volatilité
LPX50	7,8 %	20 %
LPX Buy out	6,1 %	22 %
LPX Mezzanine	2,9 %	28 %

TABLE 4.1 – Récapitulatif des indicateurs pour les principaux indices depuis 2004

Il existe relativement peu de données dans les conditions de crash et de bulle. Nous calibrerons ces conditions à dire d’expert. La forte performance de l’année 2019 peut faire penser à une année de bulle. L’année 2020 avec la crise de la COVID19 est sélectionnée comme année de crash. Les indicateurs sont calculés dans le tableau 4.2.

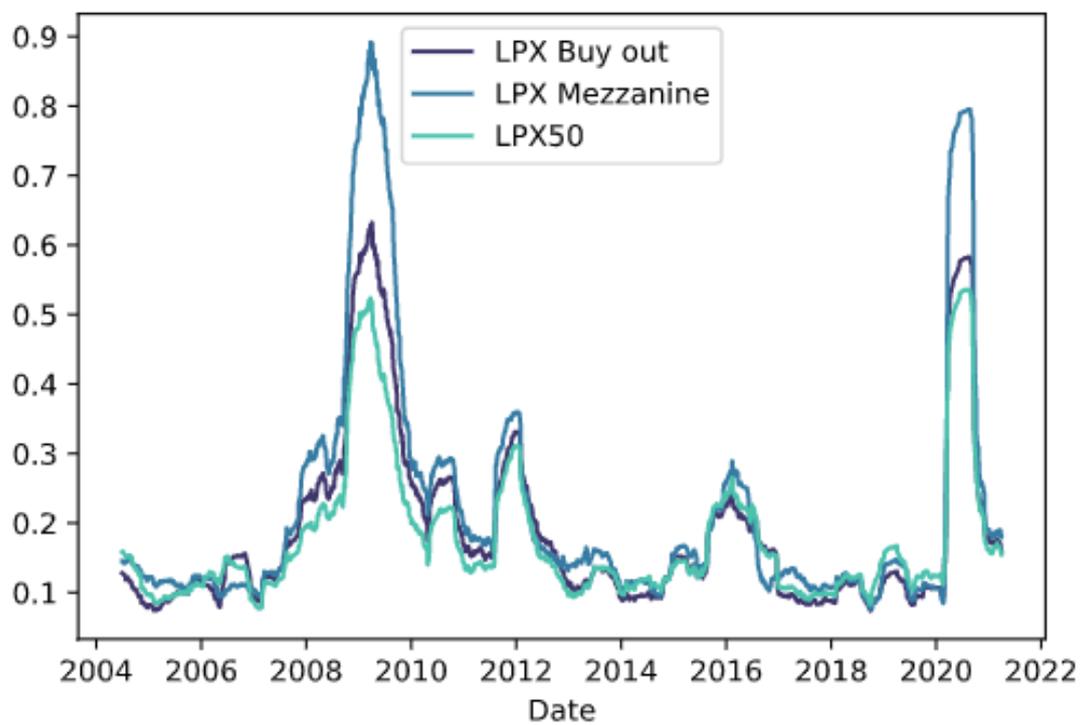


FIGURE 4.7 – Volatilité sur 6 mois annualisée du log-rendement

Source : onvista.de, lpx-group.com

Dans les conditions de bulle, une hausse du rendement et une baisse de la volatilité sont observées. Aussi, nous estimons la probabilité d'être dans une telle situation à 5%.

A l'inverse dans des années de forte baisse (crash), nous notons une baisse du rendement et une hausse de la volatilité. Nous estimons la probabilité d'être dans une situation de crise à 15%. Ce chiffre peut correspondre au cycle économique de Juglar (théorie d'une cyclicité du marché comprise entre 5 et 11 ans).

Année	Indice	Moyenne	Volatilité
2019	LPX50	36,8 %	12 %
2019	LPX Buy out	26,2 %	10 %
2019	LPX Mezzanine	27,4 %	10 %
2020	LPX50	0,0 %	39 %
2020	LPX Buy out	-12,0 %	42 %
2020	LPX Mezzanine	-20,1 %	57 %

TABLE 4.2 – *Récapitulatif des indicateurs pour les principaux indices en 2019 et 2020*

Même si les données fournies par les indices ne correspondent pas exactement à notre actif sous jacent (les fonds de capital investissement), les variations de volatilité et du rendement en cas de crash ou de bulle seront respectées lors du calibrage final.

4.3.2 Le calibrage à partir de la distribution du coefficient multiplicateur

Le modèle est calibré sur les données issues du papier de recherche (PHALIPPOU, 2020). La distribution logarithmique du coefficient multiplicateur est non symétrique. La queue de distribution à gauche est plus épaisse que celle de droite. Davantage de poids est donné aux parties centrale et baisse. Cela concorde avec les probabilités d'être en situation de crash ou de bulle. La loi de rendement est tracée à la figure 4.8.

Il aurait été possible de modéliser les probabilités de passage entre chaque état (normal, bulle, crise) par une chaîne de Markov. Mais par souci de simplification et de mise en œuvre opérationnelle, nous ne l'avons pas modélisé. Le calibrage est donné dans la table 4.3.

Paramètre	Probabilité	Moyenne	Volatilité
Normal	80%	44 %	28 %
Crash	15%	-45 %	80 %
Performance	5%	120 %	15 %

TABLE 4.3 – *Le calibrage retenu pour le modèle*

Avec cette densité, le coefficient multiplicateur moyen se situe aux alentours de 1,6, ce qui concorde avec la base de données de Preqin.

D'autres indicateurs de la volatilité auraient pu être étudiés mais ont été volontairement écartés :

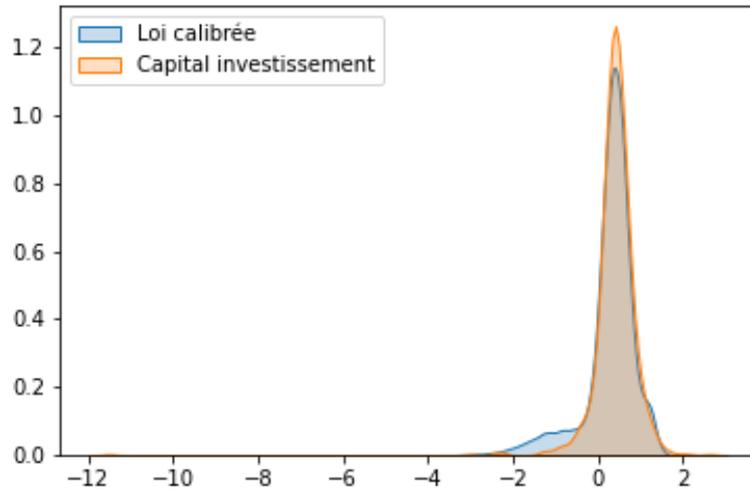


FIGURE 4.8 – Densité estimée du log-coefficient multiplicateur pour les fonds de PE

- la *VaR* à 95% à 20 jours : indicateur peu pertinent pour le capital investissement dont la durée de détention est bien supérieure ;
- le *Max drawdown* : la perte maximale entre deux durées, cet indicateur indique une perte supérieure au capital appelé quand nous le mesurons fonds par fonds ;
- la *VaR-equivalent Volatility (VEV)* : indicateur peu cohérent ici car il suppose que le log-rendement suit une loi normale.

Conclusion du chapitre

Pour calibrer le modèle composé de trois lois normales, plusieurs sources de données ont été utilisées.

Les indices boursiers ont permis de définir la probabilité d'être dans chaque état du marché (crise, bulle ou normal) et de contraindre un ordre sur la volatilité et le rendement entre ces trois états.

La liste des performances de fonds a permis de définir la densité de la loi du coefficient multiplicateur qui donne le montant des dividendes versés.

La base de données Preqin et ses nombreux indicateurs de performance au cours du temps ont servi à valider la cohérence du calibrage et les hypothèses faites sur la modélisation du fonds de capital investissement.

Chapitre 5

L'application du modèle au contrat de retraite

Ce chapitre concerne les choix de modélisation et présente les résultats obtenus pour un passif composé d'un contrat PER individuel et pour un actif composé, entre autres, d'une poche de *private equity* dont le TRI est modélisé via trois lois normales. En premier lieu, nous définirons les variables étudiées en fonction que l'on se place du point de vue de l'assureur ou de l'assuré. L'allocation optimale sera calculée pour l'assuré afin de maximiser le rendement du contrat dans la limite du cadre de gestion des risques de l'assureur. Et en fonction de cette allocation, les risques pris par l'assureur seront quantifiés. Une attention particulière a été portée aux pertes possibles de l'assureur notamment celles qui sont attribuables au *private equity*.

Des sensibilités aux hypothèses de projection seront discutées lors de la présentation des résultats.

5.1 L'implémentation des contrôles et des variables importantes

Comme le fonds en euros assure la liquidité de l'UC du fonds de fonds de PE, une nouvelle interaction entre l'actif et le passif est créée. Un nouvel outil est implémenté pour ce mémoire et comprend trois modules. Le premier, le module GSE, est développé à partir du GSE de Fixage. Les deux autres modules sont créés spécifiquement pour ce mémoire. Le module de passif définit les flux de passif et l'allocation cible à chaque pas de temps. Le module d'interactions actif/passif est le module permettant de projeter le contrat en fonction des variables financières et celles issues du passif.

Le générateur de scénarios économiques, le module de passif et le module d'interactions actif/passif sont implémentés dans le langage Python (VAN ROSSUM & DRAKE, 2009). Les tests fonctionnels et unitaires sont implémentés dans le logiciel Microsoft Excel. Les tests de martingalité et de cohérence avec le marché sont implémentés sous forme de graphique directement dans le code Python. Aucun test de corrélation n'est réalisé.

5.1.1 Les contrôles effectués

Pour chaque modèle d'actif du générateur de scénarios économiques, des tests de cohérence avec le marché (réplication du prix d'options) ont été effectués. En particulier pour le modèle de taux, la réplication de la courbe des taux *swap* fournie par le Comité de Normalisation Obligatoire sur toute la durée de projection est vérifiée. Aussi, la cohérence des résultats avec d'autres GSE disponibles chez Fixage est testée.

Les modules de passif et d'interactions actif/passif ont fait l'objet de tests de cohérence et d'échantillonnage.

Pour tous les scénarios et à chaque pas de temps (encaissement de primes, paiement des rachats, versement des dividendes par le fonds de PE, revalorisations des UC et du fonds en euros puis réallocation annuelle), les points suivants ont été testés :

- la création des parts de PE n'a lieu qu'aux moments du versement des primes et de la réallocation ;
- la destruction des parts de PE n'a lieu qu'au moment du versement des dividendes par le fonds ;
- le Taux Net Servi (TNS) du fonds en euros respecte les conditions générales (i.e. $TNS \geq$ Taux technique (0%) - frais sur le fonds euros (-0,65%) ;
- on retrouve les PM successives (primes, sorties et performances financières) par récurrence ;
- on retrouve le nombre de parts des périodes successives (primes, sorties et réallocation) par récurrence ;
- l'adéquation entre le montant nominal de fonds euros détenu par l'assuré et l'investissement réel du fonds euros est respecté.

Les tests de création et de destruction des parts sont exécutés à chaque moment de la vie du contrat.

Nous vérifions que la somme des parts de l'UC de PE (nb_parts_pe) contenues dans le fonds euros ($nb_parts_pe_{fondseuros}$) et la partie UC ($nb_parts_pe_{UC}$) respecte les contraintes suivantes :

- lors du versement d'une prime : $nb_parts_pe^{avant\ prime} \leq nb_parts_pe^{après\ prime}$;
- lors d'une sortie : $nb_parts_pe^{avant\ sortie} = nb_parts_pe^{après\ sortie}$;
- lors du versement de dividende : $nb_parts_pe^{avant\ dividende} \geq nb_parts_pe^{après\ dividende}$;
- lors de la réallocation : $nb_parts_pe^{avant\ réallocation} \leq nb_parts_pe^{après\ réallocation}$;
- à tout moment : $nb_parts_pe = nb_parts_pe_{fondseuros} + nb_parts_pe_{UC}$:

Si l'un de ces tests n'est pas respecté, alors un bogue est présent dans la modélisation et le programme s'arrête.

Le programme s'arrête aussi si le taux net servi minimal (-0,65% compte tenu des frais [0,65%] et du TMG [0%]) n'est pas servi.

Les résultats des tests sont présentés dans le tableau 5.1. Les tests déterministes sont définis comme le maximum des valeurs absolues faisant l'objet du test. Les tests stochastiques sont définis comme le résultat du test pour les valeurs moyennes. Dans ce modèle, les tests stochastiques sont vérifiés car peu d'effets non linéaires les impactent.

Des tests par échantillonnage ont également été réalisés.

Nom du test	Résultat déterministe	Résultat stochastique
Récurrence PM	$1,48 \cdot 10^{-12}$	$-2,00 \cdot 10^{-11}$
Récurrence nombre de part	$1,16 \cdot 10^{-12}$	$3,12 \cdot 10^{-12}$
Adossement fonds euros	$8,55 \cdot 10^{-12}$	$5,45 \cdot 10^{-12}$

TABLE 5.1 – *Les résultats des tests*

Les scénarii sélectionnés sont :

- le scénario avec la plus petite PM à la fin de la projection ;
- le scénario avec la plus grande PM à la fin de la projection ;
- le premier scénario ;
- un scénario choisi aléatoirement ;
- un scénario moyen.

Pour tous ces scénarios, l'évolution du contrat au cours du temps est reproduite dans un tableau.

En particulier pour les scénarii extrêmes, des valeurs aberrantes sont constatées. Lors de baisses importantes et continues des valeurs liquidatives, alors beaucoup de parts du fonds de PE sont achetées par le fonds en euros. Pour compenser cet achat de parts, le fonds en euros vend à découvert ses autres actifs. La vente à découvert est en pratique interdite. Et en effet, dans la réalité une telle *management action* ne serait pas nécessaire en raison du nombre d'assurés qui permettrait une mutualisation entre les profils et générations de contrats évitant ces difficultés. De plus dans notre étude, cette vente à découvert n'a lieu que sur une courte période de temps (inférieure à 3 ans). A l'inverse lors de fortes hausses, certains scénarios sont explosifs et provoquent des PM importantes (supérieures à 10 fois le montant investi). Ces scénarios sont peu nombreux et n'affectent pas significativement les résultats.

5.1.2 Les variables techniques et financières étudiées

Les variables sont calculées sur 1 000 simulations.

Les résultats peuvent être analysés selon deux visions différentes, celle de l'assureur et celle de l'assuré. Pour toutes les variables étudiées en fin de projection, la moyenne et l'écart-type seront étudiés. Pour les variables étudiées au cours de la projection, seule la moyenne sera présentée.

Du point de vue de l'assureur, la marge financière en fin de projection sur ce contrat sera l'indicateur de rentabilité du contrat. La marge financière (*marge_financiere*) est définie comme

$$\begin{aligned}
 perf_fonds_euros_t &= \sum_{i=1}^{UC \text{ du fonds euros}} nb_parts_uc_{uc_i} \cdot (VL_{uc_i}^{finale\ t} - VL_{uc_i}^{initiale\ t} + dividendes_{uc_i}^t) \\
 marge_financiere_t &= \min(perf_fonds_euros_t, \max(0, 15\% \cdot perf_fonds_euros_t)) \\
 marge_financiere &= \sum_{t=1}^T marge_financiere_t.
 \end{aligned}$$

Nous analyserons la part de capital investissement présente dans le fonds en euros au cours du temps.

Du point de vue de l'assuré, seuls les capitaux acquis en fin de projection seront étudiés.

Pour chaque hypothèse structurante, nous avons réalisé des sensibilités. Les hypothèses sont :

- le taux de rachat ;
- le taux de transfert ;
- le taux de décès ;
- le taux de frais ;
- la part de PE dans l'allocation cible ;
- la part des actions dans l'allocation cible ;
- l'âge de l'assuré (et par extension l'horizon de projection) ;
- la chronique de prime.

Le taux de rachat, le taux de transfert et le taux de décès influent sur les sorties du contrat. Pour la suite du mémoire, seul le taux de rachat sera étudié car il permet une interprétation simple et canonique des résultats. L'âge de l'assuré, la chronique de primes et, dans une moindre mesure, le taux de frais sont des hypothèses importantes qu'il conviendra dans une étude ultérieure.

Dans la suite du mémoire, des sensibilités au taux de rachat, aux parts de PE et d'actions dans l'allocation cible seront analysées.

5.1.3 Les résultats de la modélisation pour une simulation

Afin de mieux appréhender les résultats des sections suivantes, nous décrirons, pour le premier scénario issu de notre GSE, chaque étape de la vie du contrat (primes, sorties, revalorisation et réallocation) pour la première année. Les étapes primes, sorties et réallocation sont très similaires au cours de toute la projection. L'étape de revalorisation, avec le versement des dividendes par l'UC de PE, change au cours du temps. Nous analyserons en détail le versement du premier dividende lors de la huitième année. Lors de la dernière année, les fonds sont liquidés afin de prendre en compte leurs revalorisations dans le capital final.

La première année de projection

A la souscription du contrat et chaque année suivante, l'assuré verse une prime de 1 000 €. La prime est répartie dans le tableau 5.2. La première année, l'allocation est répartie entre les actions (51,3%), les obligations (17,1%), l'immobilier (17,1%), le fonds de capital investissement (9,5%) et le fonds euros (5%).

Après le versement de la prime surviennent les sorties. L'assuré a 40 ans, sa probabilité de décès q_x sera de $\left(1 - \frac{TH00-02(41ans)}{TH00-02(40ans)}\right) \cdot (1 - 60\%) = \left(1 - \frac{96141}{96369}\right) \cdot (1 - 60\%) = 0,0946362\%$. Le nombre de contrats restant sera de $(1 - q_x) \cdot (1 - tx_rachat) \cdot (1 - tx_transfert) = (1 - 0,0946362\%) \cdot (1 - 1\%) \cdot (1 - 1\%) = 0.979$. Cela signifie aussi que la prime en deuxième année ne sera plus de 1 000€ mais de 979€. L'allocation après les sorties du contrat est décrite dans le tableau 5.3. Les sorties du contrat provoquent un transfert des parts de PE par le fonds euros mais aussi une diminution de la PM investie sur le fonds euros.

UC	VL	Nombre de parts	PM	UC	VL	Nombre de parts	PM
Monétaire	1,00	0	0	Monétaire	1,00	2,5	2,5
Actions	1,00	513	513	Actions	1,00	8,5	8,5
Obligations	1,00	171	171	Obligations	1,00	35	35
Immobilier	1,00	171	171	Immobilier	1,00	4	4
PE	1,00	95	95	PE	1,00	0	0
Fonds euros			50				
Total			1 000	Total			50

(a) Allocation du contrat

(b) Allocation du fonds euros

TABLE 5.2 – La répartition des actifs après le versement de la prime la première année

UC	VL	Nombre de parts	PM	UC	VL	Nombre de parts	PM
Monétaire	1,00	0	0	Monétaire	1,00	2,35	2,35
Actions	1,00	502,31	502,31	Actions	1,00	7,99	7,99
Obligations	1,00	167,44	167,44	Obligations	1,00	32,89	32,89
Immobilier	1,00	167,44	167,44	Immobilier	1,00	3,76	3,76
PE	1,00	93,02	93,02	PE	1,00	1,98	1,98
Fonds euros			48,96				
Total			979,17	Total			48,96

(a) Allocation du contrat

(b) Allocation du fonds euros

TABLE 5.3 – La répartition des actifs après les sorties la première année

Aucun dividende n'est versé durant les sept premières années. La revalorisation du contrat s'effectue par la mise à jour des valeurs liquidatives, le prélèvement des frais, la revalorisation du fonds en euros et enfin la réallocation du contrat.

La valeur du fonds euro avant la mise à jour des VL est de 48,95 € puis de 49,19 € après. Le taux net servi (TNS) sera de $(\frac{49,19}{48,95} - 1) * 85\% - 0.65\% = -0.25\%$.

Comme les actions ont eu un rendement négatif, la valeur du contrat au global a diminué. Lors de la réallocation, une partie des parts de PE a été transférée au fonds euros.

UC	VL	Nombre de parts	PM	UC	VL	Nombre de parts	PM
Monétaire	1,00	0	0	Monétaire	1,00	2,14	2,14
Actions	0,98	498,34	487,51	Actions	0,98	7,44	7,28
Obligations	1,02	159,19	162,50	Obligations	1,02	29,34	29,95
Immobilier	0,92	175,46	167,44	Immobilier	0,92	3,70	3,42
PE	1,00	90,28	90,28	PE	1,00	4,72	4,72
Fonds euros			47,51				
Total			950,31	Total			47,51

(a) Allocation du contrat

(b) Allocation du fonds euros

TABLE 5.4 – La répartition des actifs à la fin de la première année

Le versement des dividendes par le fonds de capital investissement

Les 95 parts de PE investies lors de la première année verseront des dividendes à partir de la huitième année et pour trois ans. La log-performance modélisée issue de notre modèle à trois lois normales est de 0,418 soit un facteur multiplicatif de $e^{0,418} = 1,52$. Lors de la huitième année, les parts de PE verseront un dividende de $95 \cdot \frac{1,52}{3} = 48,11$ et $\frac{95}{3} = 31,67$ parts seront détruites au *pro rata*. Lors de la neuvième année, le dividende de 48,11 s'ajoutera aux parts achetées lors de la seconde année.

Une exception est faite en dernière année. Tous les fonds de PE sont liquidés. La règle de versement est :

$$P_t = e^{perf_PE} \cdot nb_parts_PE_crees_en_t \cdot anciennete_du_fonds / (8 - 1).$$

Par exemple, supposons que 10 parts ont été investies dans l'année 22 (i.e. 3 ans avant la retraite), et que la performance est de 0,418 alors $1,52 \cdot 10 \cdot 3 / (8 - 1) = 5,7$ seront versées pour ces parts. Le calcul est fait pour toutes les parts détenues par l'assuré et par le fonds euros.

En moyenne, c'est à l'avantage de l'assuré car il détient des parts relativement âgées, les dernières années les primes étant principalement versées sur le fonds euros.

5.2 La détermination de l'allocation optimale d'actif du point de vue de l'assuré

Dans cette partie, la présence d'un fonds de capital investissement est analysée du point de vue de l'assuré. Le point de vue de l'assureur sera examiné dans la prochaine section.

5.2.1 La construction du couple rendement risque

Le graphique 5.1 représente l'évolution du capital moyen final de l'assuré en fonction de la volatilité de ce capital. Chaque point de ce graphique représente une allocation avec une part de capital investissement différente. La part d'actions est de 60%. Jusqu'à une part de 30% de PE dans les UC, le capital moyen au terme augmente indiquant une hausse de la performance et l'écart-type de cette variable diminue. Le couple rendement-risque s'améliore. S'il y a plus de 30% de PE dans les UC alors le capital moyen au moment du passage en rente diminue.

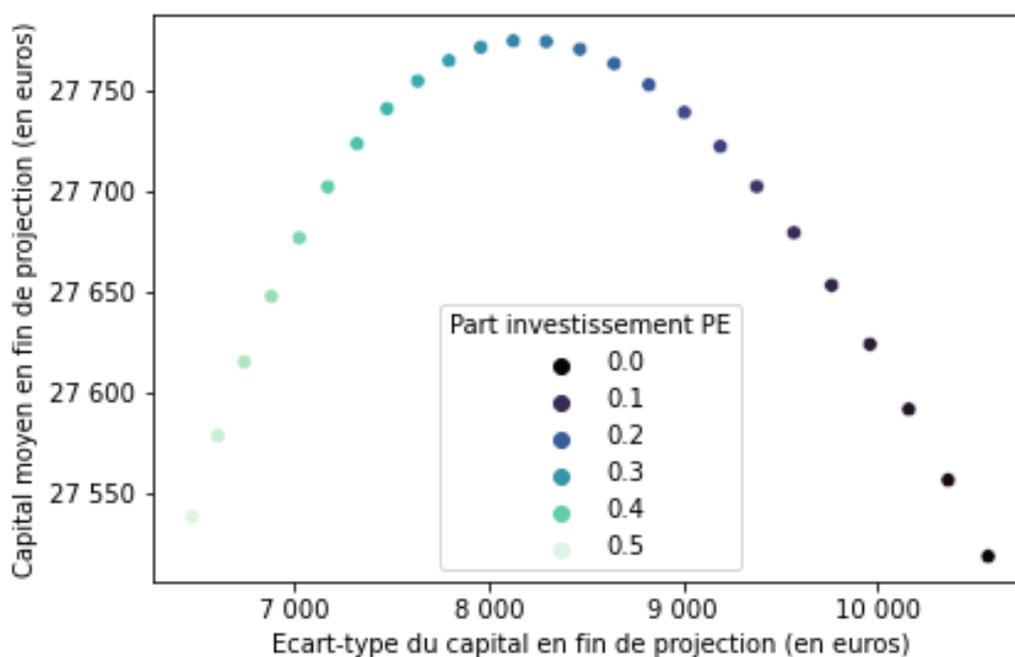


FIGURE 5.1 – *Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC de PE*

Plusieurs effets influent sur les résultats. Premièrement, la valorisation constante du PE réduit la volatilité annuelle car la performance du fonds n'a aucun impact sur les huit premières années. Cette détention du fonds de capital investissement sur une longue durée réduit la volatilité. Deuxièmement, le capital investissement performe légèrement moins bien que les actions dans notre modélisation. Enfin, l'augmentation de la part de capital investissement provoque une déformation de l'allocation présente dans le fonds euros.

L'ajout d'une poche de capital investissement permet une diversification mais impose une détention longue des parts pour réduire le risque sous-jacent. Du point de vue commercial, certains assurés peuvent être intéressés par la détention d'une telle unité de compte dans leur contrat d'assurance selon leur profil de risque et leur appétence. Cet aspect est non négligeable mais l'assuré devra être conseillé davantage que pour d'autres actifs afin de réaliser ses choix lors de la souscription.

5.2.2 La sensibilité de la performance moyenne aux autres variables avec et sans *private equity* pour un niveau de risque donné

Deux sensibilités restent à étudier, la sensibilité au taux de rachat et la sensibilité à la part d'actions de l'investissement.

Plus le taux de rachat augmente, plus les sorties augmentent. Le capital final en sera diminué proportionnellement. D'autres effets peuvent apparaître mais ils sont d'un second ordre comparés aux sorties.

A l'inverse, la part d'actions peut avoir un impact dans le capital moyen au terme. La figure 5.2 représente l'évolution du capital moyen final de l'assuré en fonction de la volatilité de ce capital, chaque point de ce graphique représentant une allocation avec une part d'actions différente. La part de capital investissement est fixée à 10%.

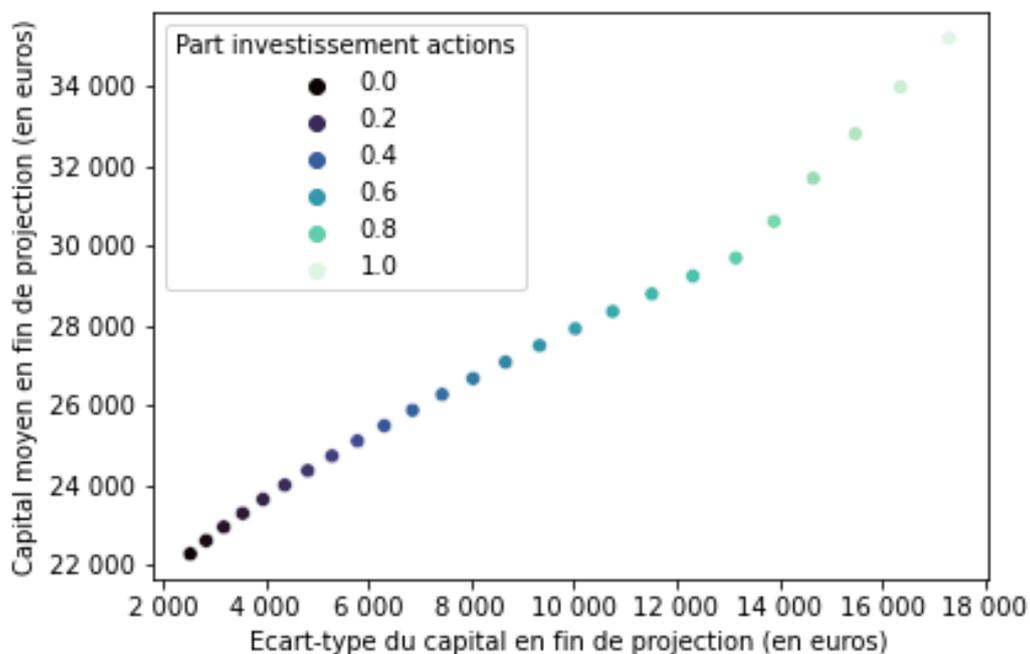


FIGURE 5.2 – Le capital moyen disponible au terme en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC actions

A partir de 80% de part d'actions, un décrochage s'opère : la volatilité et le rendement augmentent

plus rapidement. Ce phénomène s'explique par la baisse de la part d'UC Immobilier. Cette dernière est définie comme le minimum entre 20% et $1 - part_actions$. Sur ce graphique, une corrélation positive entre performance et volatilité peut s'observer. Le comportement de l'UC action est typique d'une UC volatile, liquide avec un fort rendement.

5.2.3 L'attractivité du produit pour l'assuré

La présence de capital investissement peut être intéressante pour l'assuré à des fins de diversification. Mais la détention du fonds de capital investissement oblige une gestion particulière. Dans ce cas, le distributeur du produit d'assurance devra s'assurer que le profil de l'assuré permet la présence de cette UC. En effet, si l'assuré rachète son contrat avant 8 ans alors il ne pourra bénéficier des dividendes versés.

Dans notre calibrage, le capital investissement performe légèrement moins bien que les actions. Cependant, la détention de PE permettrait d'optimiser le couple rendement risque dans le cadre d'un contrat d'assurance retraite tel que nous l'avons défini. Cet intérêt de diversification est cohérent avec diverses recherches sur ce sujet.

D'après les résultats, la part optimale de PE dans le contrat retraite serait de 25 % environ. Cependant, tous les risques ne sont pas modélisés. En effet, l'assureur peut ajouter des frais de sorties spécifiquement sur cette UC. Pour l'assuré, un niveau intermédiaire plus prudent peut se justifier pour différentes raisons, comme le caractère innovant de l'investissement et le risque en cas de rachat contraint en période défavorable. Enfin dans notre modèle, tout investissement fait par le client sur l'UC de capital investissement et racheté avant le terme aura nécessairement un rendement négatif. Le rendement du capital investissement est en effet nul les premières années car les dividendes sont versés en bloc à la fin. Mais les frais d'entrée (4,5% de la prime) et sur l'encours (0,96% de la PM) sont tout de même comptabilisés, ce qui provoque un rendement négatif au début de l'investissement.

5.3 Le risque porté par l'assureur

Après avoir étudié l'impact de l'introduction d'une poche de capital investissement dans un contrat retraite du point de vue de l'assuré, cette partie sera consacrée au risque porté par l'assureur de fournir une telle unité de compte à son client, et à l'optimisation de la part de *private equity* dans son actif.

5.3.1 Les sensibilités sur l'allocation du fonds euros des rachats et de la part investie en UC sur le PE

Dans un premier temps, nous étudions le risque de liquidité porté par l'assureur. Nous choisissons tout d'abord d'étudier la part de PE dans le fonds euros. Cet indicateur fournit une vision des actifs que l'assureur a dû racheter avec son fonds euros. Le capital investissement n'est pas dans l'allocation cible du fonds euros. Rappelons que ce dernier n'investit dans le PE que lorsqu'il est contraint de le faire. Pour rappel, le fonds euros est composé d'obligations (cible 70%), d'actions (cible 17%), d'immobilier (cible 8%), d'une poche monétaire (cible 5%) et une poche de capital investissement (cible 0%). Dans la pratique, ce fonds euros est partagé avec tous les autres contrats PER, ces derniers ayant des profils de

risque et des horizons d'investissement différents. Les résultats suivants ne prennent pas en compte cet effet de mutualisation car un seul profil de client est étudié.

Nous étudions la part de PE dans le fonds euros en fin d'année, c'est-à-dire après la phase de réallocation. Cette réallocation annuelle dans le modèle (semestrielle dans la réalité) est contractuelle et légale. Pour mieux comprendre cet indicateur, les tableaux 5.5 contiennent un exemple simplifié, ils servent uniquement d'exemple et à des fins de compréhension. Nous supposons un contrat investi en actions (75%), en capital investissement (20%) et en fonds euros (5%) (table 5.5a). Les UC ont une valeur de part (VP) égale à 1€. Initialement, la PM du contrat est de 1 000€ et le fonds euros ne contient pas de capital investissement. A la fin de la première année (table 5.5b), les actions baissent de près de 27% et le fonds euros sert le taux technique. Le contrat a une PM de 800€ à la fin de la première année. La table 5.5c présente le contrat après la phase de réallocation. La grille d'allocation prévoit dans notre exemple que l'UC de PE représente 20% du contrat, passant de 200€ ($part_allocation_{pe} \cdot PM_totale = 0,2 \cdot 1000€ = 200€$) à 160€ ($part_allocation_{pe} \cdot PM_totale = 0,2 \cdot 800€ = 160€$), soit une diminution de 40€. Le capital investissement étant totalement illiquide sur les marchés, le fonds euros assure la liquidité vis-à-vis de l'assuré. 40€ d'UC de PE sont transférés de la partie UC du contrat au fonds euros en échange d'UC liquides. Pour respecter l'allocation cible, 50 euros d'actifs sont ensuite réorientés vers des UC actions. Dans ce cas, l'indicateur de parts de PE dans le fonds euros sera $\frac{\text{Montant de PE dans le fonds euros}}{\text{PM du fonds euros}} = \frac{\text{Montant de PE initial} + \text{Montant de PE racheté} - \text{Montant de PE vendu}}{\text{PM du fonds euros}} = \frac{0 + 40 - 0}{40} = 100\%$.

Actifs	VP	PM	Actifs	VP	PM	Actifs	VP	PM
UC Actions	1,00	750	UC Actions	0,73	550	UC Actions	0,73	600
UC PE	1,00	200	UC PE	1,00	200	UC PE	1,00	160
Fonds euros		50	Fonds euros		50	Fonds euros		40
Total		1 000	Total		800	Total		800

(a) Situation initiale du contrat

(b) Situation avant réallocation

(c) Situation après réallocation

TABLE 5.5 – La répartition des actifs à la fin de la première année en cas de forte baisse des actions

Nous observons un effet multiplicateur entre le montant de PE investi dans les UC et la présence de PE dans le fonds euros. Cet effet de levier est d'autant plus important que la part de fonds euros est faible dans l'allocation cible du contrat. Nous observons aussi que plus la valeur du contrat baisse, plus de parts UC de PE sont transférées du contrat au fonds euros.

Inversement, si le prix des actions augmente, les parts UC de PE sont transférées du fonds euros à la partie UC du contrat, si le fonds euros contient de telles parts. Nous supposons la même situation initiale que précédemment (table 5.6a). Ensuite, le fonds euros sert toujours le taux technique (0%) mais les actions, elles, augmentent de 10% (table 5.6b). Lors de la phase de réallocation (table 5.6c), l'UC de PE doit représenter 20% du contrat, passant de 200€ à 215€ ($part_allocation_{pe} \cdot PM_totale = 0,2 \cdot 1075€ = 215€$), soit une augmentation de 15€. Ces 15€ de PE seraient transférés du fonds euros à la partie UC du contrat si le fonds euros en possédait. Comme il n'en possède pas, ces parts de PE sont achetées sur les marchés financiers. Le fonds euros ne contenant pas de PE, l'indicateur de la part de PE dans le fonds euros est égal à 0%.

Actifs	VP	PM	Actifs	VP	PM	Actifs	VP	PM
UC Actions	1,00	750	UC Actions	1,10	825	UC Actions	1,10	806
UC PE	1,00	200	UC PE	1,00	200	UC PE	1,00	215
Fonds euros		50	Fonds euros		50	Fonds euros		54
Total		1 000	Total		1 075	Total		1 075

(a) *Situation initiale du contrat* (b) *Situation avant réallocation* (c) *Situation après réallocation*

TABLE 5.6 – *La répartition des actifs à la fin de la première année en cas de hausse des actions*

Ces exemples signifient aussi que la volatilité des UC proposées peut avoir un impact direct sur l'allocation du fonds euros. Ce phénomène est amplifié car lorsque les marchés sont en baisse, la valorisation du fonds euros baisse en valeur de marché. Pour pouvoir acheter les parts de PE vendues par les assurés, le fonds euros devrait réaliser des moins-values et d'autant plus augmenter sa part de PE que les marchés ont été baissiers.

Dans le modèle, il y a quatre grandes étapes de calcul :

1. en début d'année - lors du versement des primes : le fonds euros transfère dans la mesure du possible ses parts d'UC de PE à la partie UC du contrat de l'assuré ;
2. en milieu d'année - lors des sorties (rachat, décès et transferts) : les parts de PE illiquides sont transférées de la partie UC du contrat au fonds euros en échange d'autres actifs liquides (obligation, actions, ...);
3. en fin d'année - lors de la revalorisation du fonds euros et des UC : les parts de PE de plus de huit ans versent des dividendes et sont détruites ;
4. en fin d'année - lors de la réallocation du contrat : si la performance des marchés était mauvaise le fonds euros peut avoir à racheter des UC de PE à la partie UC du contrat ou si les marchés étaient bons il peut avoir à les revendre.

Plusieurs hypothèses à l'actif et au passif peuvent influencer sur la part de PE dans le fonds euros. Cette part de PE est directement corrélée à la PM en fin d'année, au moment de la réallocation. Le graphique 5.3 représente ce phénomène à la fin de la première année. La courbe centrale peut être décomposée en deux parties : la partie de gauche, où la part de PE dans le fonds euros est supérieure à 0 et la partie de droite, où il n'y a pas de PE dans le fonds euros. La partie de gauche est linéaire et correspond au premier exemple simplifié (celui avec une forte baisse du prix des actions). La partie de droite correspond au second exemple simplifié, celui avec la hausse des actions. Le point séparant ces deux parties représente les sommes versées, dans notre cas 1 000€, équivalent à la première prime versée. Le graphique de droite représente l'histogramme de la répartition de la part de capital investissement dans le fonds euro et le graphique du haut celui de la PM totale à la fin de la première année. Nous observons que dans la majorité des cas, il n'y a pas de PE dans le fonds euros à la fin de la première année.

La première hypothèse pouvant influencer sur la part de capital investissement dans le fonds euros est la part de PE présente dans la partie UC du contrat. Les résultats suivants sont naturellement valables pour un fonds euros cantonné en face d'un contrat et avec les hypothèses du comportement client décrites précédemment (décès, rachat, transfert).

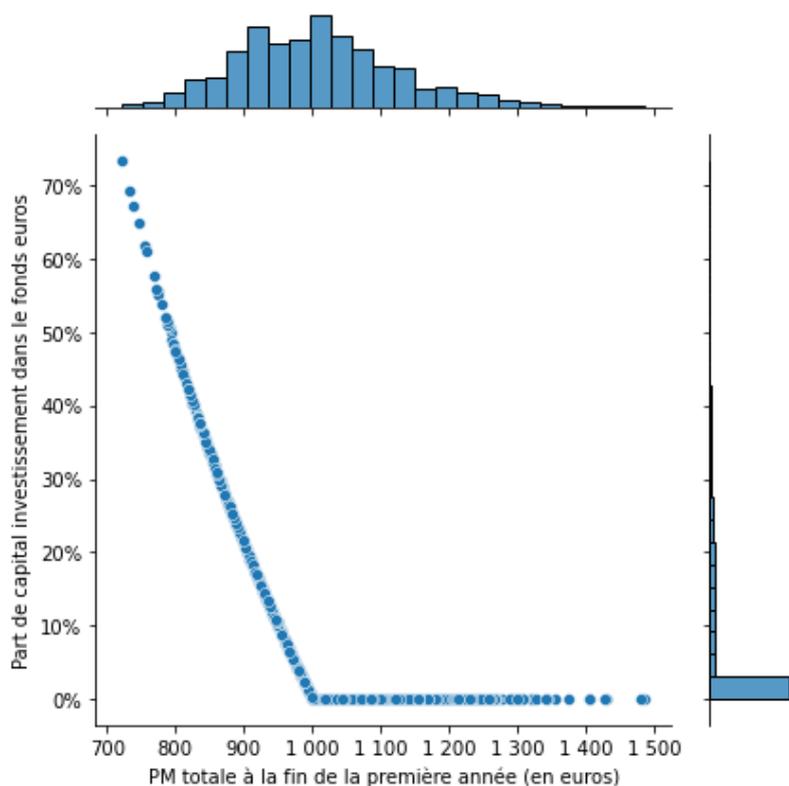


FIGURE 5.3 – La part de PE dans le fonds euros en fonction de la PM (fonds euros + UC) à la fin de la première année et les densités des deux variables

Mais en pratique, le fonds euros est cantonné pour tous les contrats PER et non pour un seul contrat. Avec cette multitude de contrats, une mutualisation s'effectue alors entre les âges et les différents profils de risque.

Nous étudions ensuite la part de PE présente dans le fonds euros après le versement des primes puis nous étudierons le fonds euros à la fin de l'année, après la réallocation. Au moment du versement des primes (graphique 5.4), les parts en UC de PE sont alors transférées du fonds euros à la partie UC du contrat.

Nous observons des pics aux différents moments de changement d'allocation (10 ans, 5 ans et 2 ans avant le terme). A ces moments, la part de fonds euros augmente dans le contrat (respectivement 20%, 50% et 70% de la PM) au détriment de la partie UC. Les parts de PE en trop seront alors transférées au fonds euros. Dans la réalité, ces pics ne devraient pas avoir lieu si le portefeuille est équitablement réparti entre les générations.

L'UC de PE ne délivre aucun dividende les sept premières années, et donc aucune part d'UC de PE n'est détruite. De plus, les nouvelles primes représentent proportionnellement de moins en moins de poids vis-à-vis de la PM au cours de la projection.

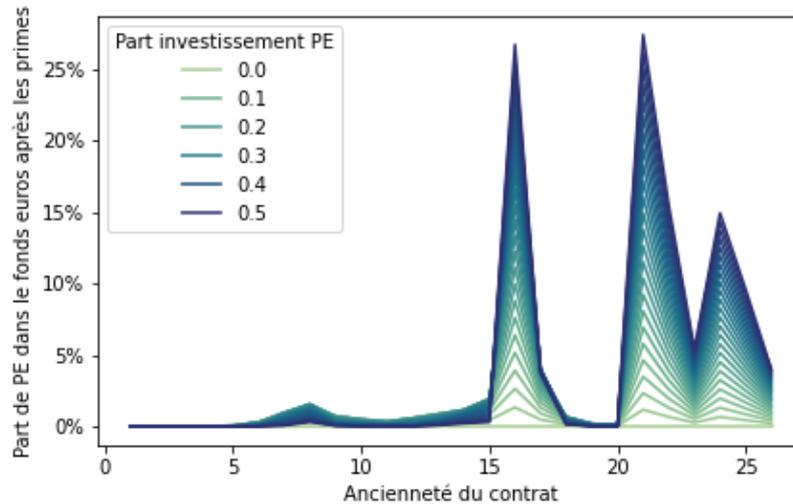


FIGURE 5.4 – La part de PE dans le fonds euros après le versement des primes au cours du temps

Au cours de ces années, le nombre de parts d'UC de PE augmente dans les parties UC et euros du contrat et le poids des nouvelles primes dans l'encours total diminue. Ces primes ne suffiront alors plus à transférer intégralement le PE du fonds euros à la partie UC du contrat en cas de baisse des marchés. Nous observons alors un léger pic autour de la sixième année d'ancienneté du contrat. Entre 8 ans et 15 ans d'ancienneté, nous observons une part moyenne de PE dans le fonds euros très faible. Ce taux est imputable uniquement à la diminution du poids des primes futures.

Lors des 15 premières années, nous observons un taux légèrement supérieur à 0% de PE dans le fonds euros. Après la hausse de parts de PE dans le fonds euros due à la réallocation, nous observons une redescente rapide de ce taux. C'est dû au fait qu'aucune part de PE n'est achetée sur les marchés, les parts de PE vendues dans la partie UC du contrat proviennent alors du fonds euros.

Nous étudions maintenant la part de capital investissement présente dans le fonds en euro en fonction de la part de PE investie par l'assuré sur toute la durée de projection (graphique 5.5).

Cette part est observée en fin d'année, après la phase de réallocation. Durant les sept premières années, nous observons des taux élevés de PE dans le fonds euros. Nous venons de voir qu'après le versement des primes, le taux de PE dans le fonds euros est très faible. Ce taux élevé est donc dû uniquement aux scénarios avec de mauvaises performances sur les marchés (comme dans le premier exemple simplifié avec la baisse des actions).

Après la huitième année, les parts de PE investies huit ans plus tôt commencent à être liquidées. Les parts ainsi détruites n'ont plus besoin d'être transférées au fonds euros. Leur destruction permet une marge de sécurité supplémentaire pour la liquidité du fonds euros en cas de baisse des marchés. Entre la huitième et quinzième année d'ancienneté, nous observons la présence de PE dans le fonds euros juste après le versement des primes. Cette présence amplifie la part de PE dans le fonds euros en fin d'année en cas de baisse des marchés.

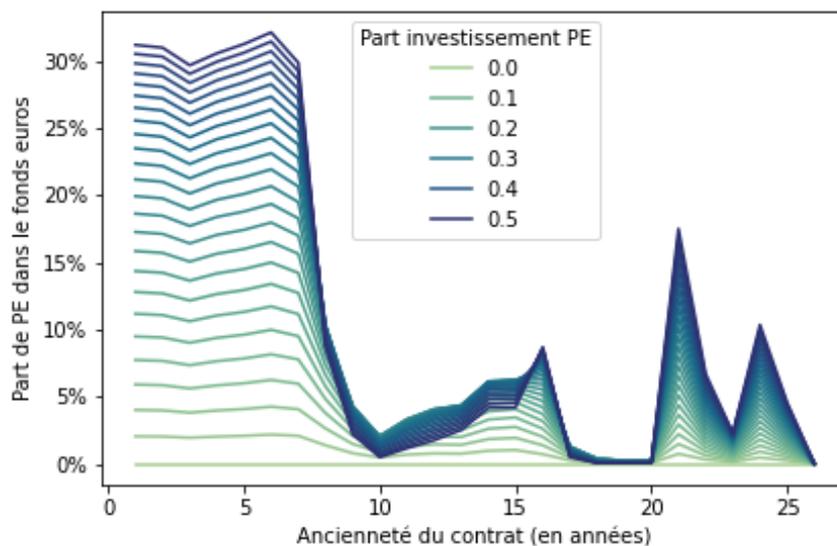


FIGURE 5.5 – La part de PE dans le fonds euros après la réallocation au cours du temps pour différentes proportions d'UC PE

Une autre hypothèse influant sur la PM en fin d'année est le taux de rachat. Le graphique 5.6 montre comment le taux de rachat influe sur la PM au cours du temps. Pour un taux de rachat élevé (de 12,5%), nous observons une diminution de la PM au cours du temps de la quatrième année jusqu'à la fin de la projection. Cela signifie que les primes entrantes sont inférieures aux rachats.

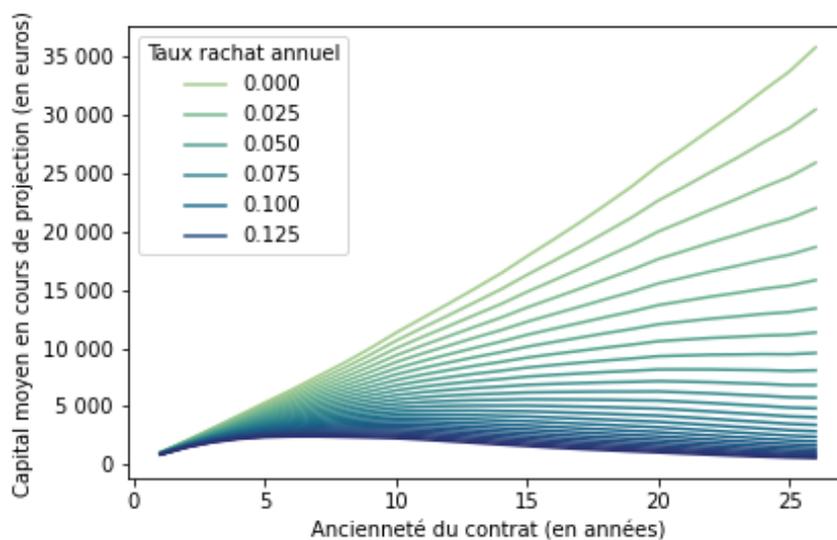


FIGURE 5.6 – La PM au cours du temps en fonction du taux de rachat

C'est à partir de ce moment que nous observons une insuffisance des primes pour racheter les fonds de PE présents dans le fonds euros (graphique 5.7).

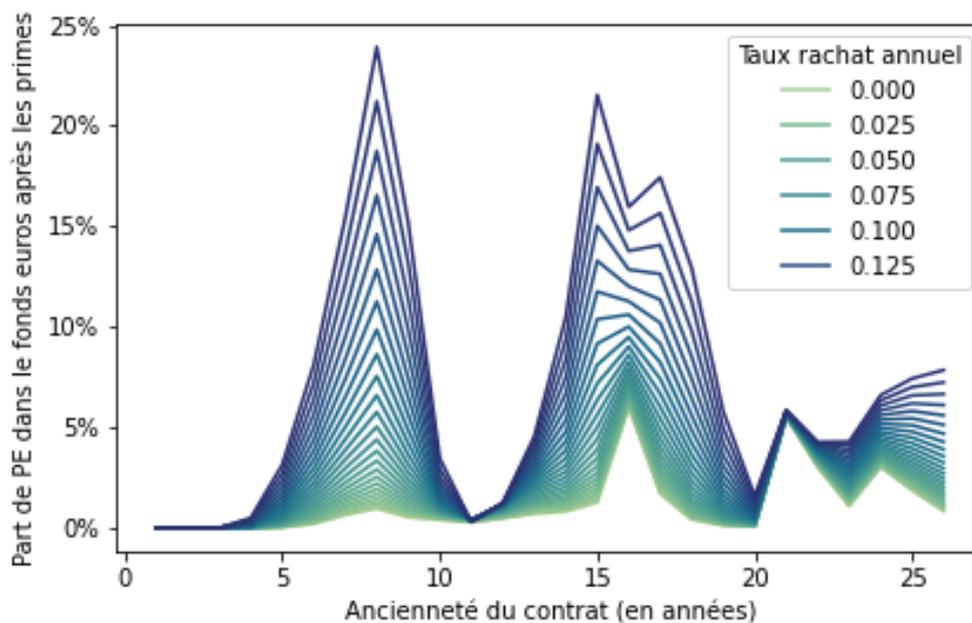


FIGURE 5.7 – La part de PE dans le fonds euros après le versement des primes au cours du temps

Le graphique 5.8 montre aussi comment le taux de rachat influe sur les sorties et donc sur la part d'UC de capital investissement rachetée par le fonds euros. A certaines dates et pour les taux de rachat les plus élevés (15%), la part de PE peut dépasser les 40 %. En pratique, ce dernier taux sera difficilement atteint car le fonds euros du PER est mutualisé avec les autres contrats PER (âge et profil de risque) et les nouveaux contrats entrants (*new business*). De plus de tels taux de rachat semblent difficilement atteignables pour un contrat retraite PER. Nous n'avons pas encore assez de recul sur ce type de produit et les hypothèses de modélisation sous-jacentes. Cependant, dans le cadre d'un contrat d'épargne (assurance vie ou de capitalisation) rachetable à la discrétion de l'assuré, ce point devra être vérifié. Cet effet est amplifié car les primes annuelles permettent de racheter les parts d'UC de PE vendues lors des années précédentes. Or les rachats influent aussi sur les primes futures : plus le taux de rachat est élevé, plus les primes futures seront faibles.

Il est intéressant de noter que lors de la vingtième année, il n'y a pas de pic comme dans le graphique présentant les sensibilités au taux de PE dans les UC (graphique 5.5). Pour les taux de rachats les plus élevés, le fonds euros est saturé de PE entre 15 et 20 ans. Ainsi peu de parts de PE sont créées dans le modèle. Le graphique 5.9 montre ce phénomène. Lors du changement d'allocation, les parts de PE sont relativement vieilles et arrivent à liquidation. Et inversement, entre 16 et 18 ans, il n'y a pas de PE dans le fonds euros et beaucoup de nouvelles parts sont créées. Le pic est donc bien moins fort pour des taux de rachat élevés car beaucoup de parts de PE arrivent à maturité à ce moment.

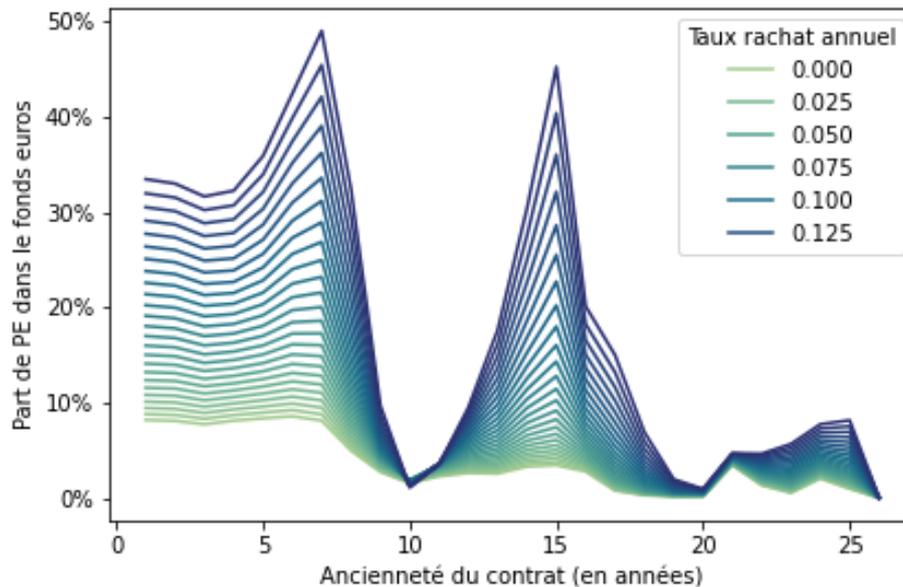


FIGURE 5.8 – La part de PE dans le fonds euros au cours du temps pour différents taux de rachat

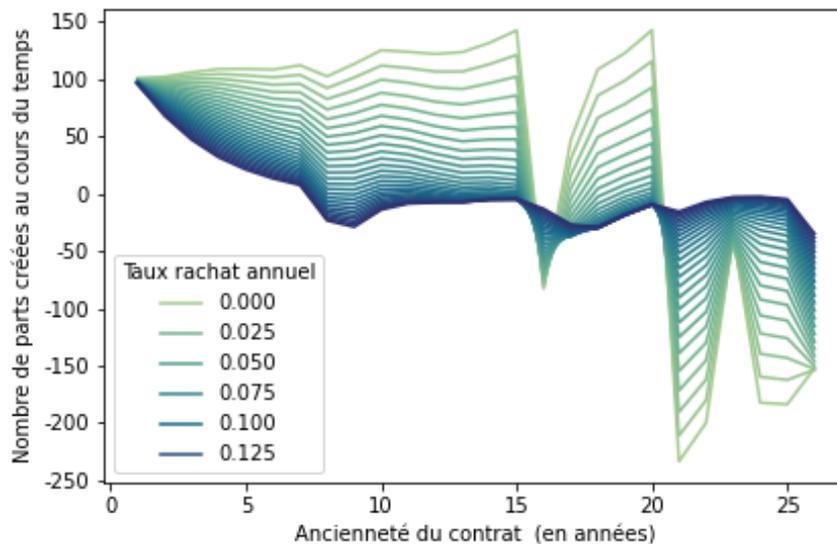


FIGURE 5.9 – Nombre de parts d'UC PE créées nettes de destruction au cours du temps en fonction du taux de rachat

Finalement, la part de capital investissement vendue aux assurés devra être maîtrisée dans la mesure où elle peut modifier considérablement l'allocation du fonds euros si ce dernier n'est pas suffisamment mutualisé avec d'autres profils de risque. Dans le cas contraire, cette part de PE peut devenir très significative et être au-delà des limites de risques que s'est fixé l'assureur. Cependant, en cas de crise, les rachats de ces parts de fonds de fonds ont pu être suspendus dans certaines situations historiques. Dans ce cas, l'actif général de l'assureur (et non uniquement le fonds euro cantonné du PER) pourrait récupérer les parts UC de PE des contrats PER. Mais dans un premier temps et afin de mieux maîtriser les risques, l'assureur devrait certainement limiter les parts de PE vendues aux assurés des contrats PER.

Enfin, tous les effets ne sont pas détectables par le modèle. Par exemple, si dans les prochaines années les taux augmentent, cela signifie que le prix des obligations en portefeuille diminuera en parallèle. Cette baisse aura deux effets : la hausse de la part de capital investissement dans le fonds euros à l'instar des scénarii précédents et une hausse des transferts, les assurés partant potentiellement vers de nouveaux fonds euros promettant de meilleurs rendements. C'est ce dernier effet qui n'est pas détecté dans le modèle, les rachats dynamiques n'étant pas implémentés.

5.3.2 Les impacts sur la marge de l'assureur et sur la performance du fonds euros

Le graphique 5.10 montre la performance de l'actif sous-jacent du fonds euros en fonction de sa volatilité et en fonction de la part de PE présent dans la partie UC du contrat. Rappelons que plus l'assuré investit dans le capital investissement, plus les parts obligataires, immobilières, monétaires et actions du fonds euros diminuent au profit du capital investissement.

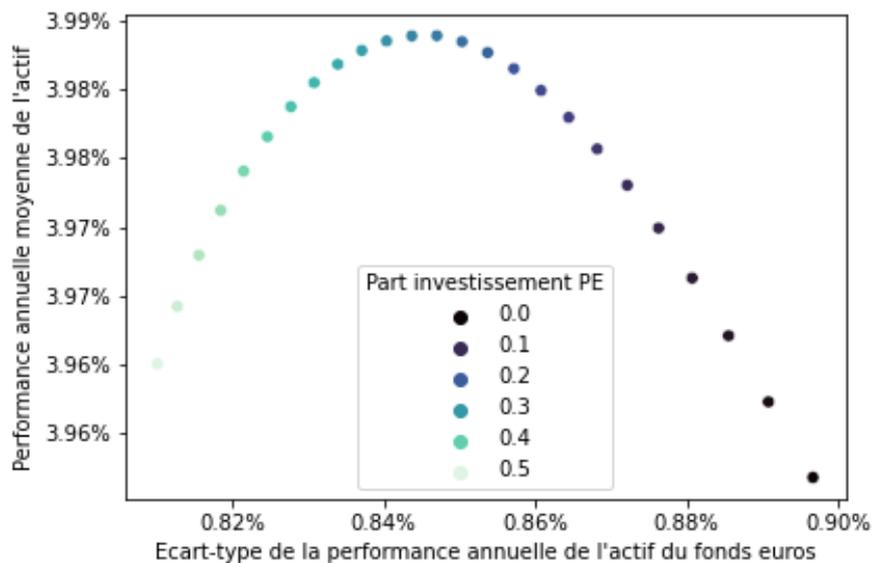


FIGURE 5.10 – La performance moyenne de l'actif du fonds euros en fin de projection en fonction de sa volatilité pour différentes proportions de PE dans la partie UC du contrat

La performance moyenne de l'actif est peu influencée (entre 3,96% et 3,99%) par déformation induite par la présence de PE dans la partie UC du contrat. Cependant la volatilité diminue fortement avec la présence de PE. Deux effets expliquent les résultats : l'effet de diversification et la valorisation au coût historique du PE. L'effet de diversification des actifs (augmentation du rendement et baisse de la volatilité) est présent dans la limite d'une part de PE de l'ordre de 25%. Le PE est valorisé dans le référentiel comptable sur les premières années (i.e. en coût historique). La présence de fonds de capital investissement introduit un lissage dans le temps de la performance, la performance étant nulle les premières années.

Cependant, la présence de capital investissement a un effet négativement corrélé au taux net servi moyen du fonds euros généré par le modèle (graphique 5.11).

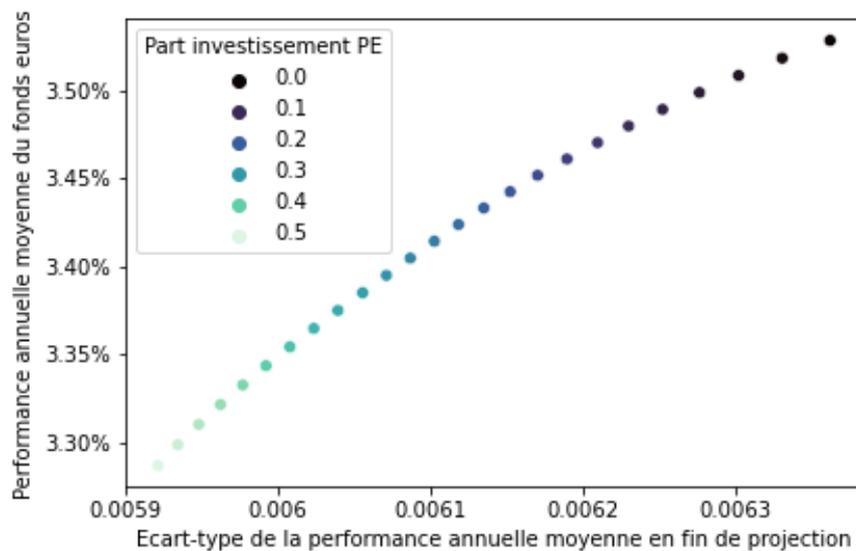


FIGURE 5.11 – La performance annuelle moyenne (taux net servi) du fonds euros en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC PE

En raison à l'effet de diversification et à la valorisation au coût historique de notre modèle, plus il y a de PE dans le fonds euros, plus la volatilité de l'actif sous-jacent de ce fonds diminue. La garantie de rendement de 0% se déclenche alors moins souvent. L'augmentation du rendement induit par l'effet de diversification est moins forte que la diminution du rendement induite par le non-déclenchement de la garantie cliquet. Le TNS moyen du fonds euros en fin de projection sera alors moins haut avec une part de PE élevée.

Le graphique 5.12 montre que la marge financière de l'assureur augmente avec la part de PE investie par l'assuré. La diminution de la volatilité de l'actif sous-jacent profite notamment à la baisse du coût de l'option cliquet. Le coût de l'option diminuant, la marge augmente. A noter que dans notre étude, l'absence de modélisation des plus ou moins values latentes des actions et de la réserve de capitalisation pour les obligations augmente le coût de cette option.

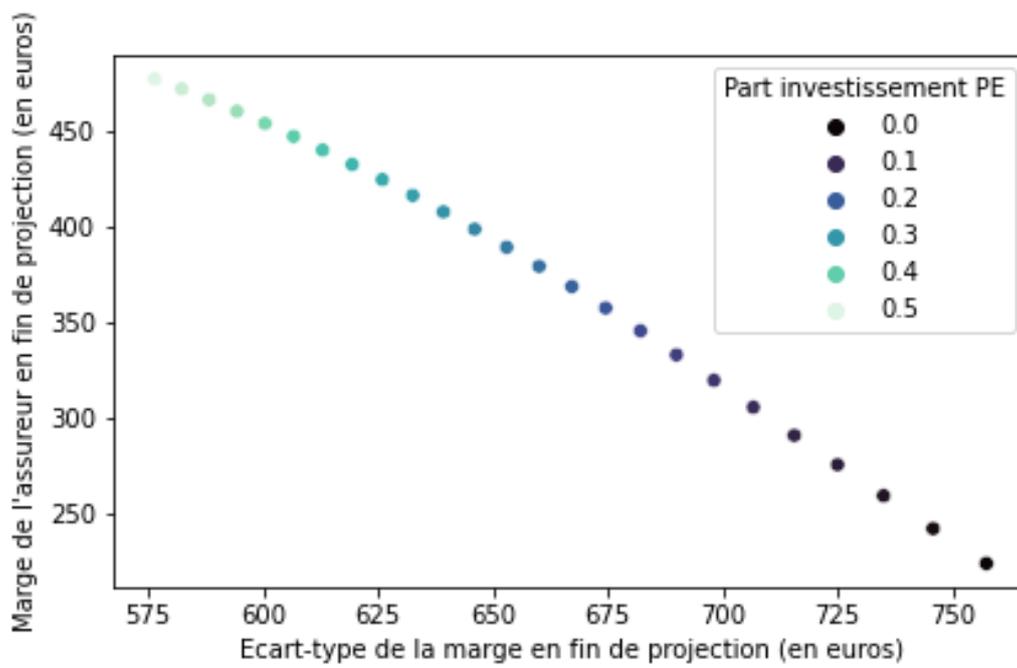


FIGURE 5.12 – La marge financière moyenne de l'assureur en fin de projection en fonction de sa volatilité pour différentes proportions d'UC PE

5.3.3 Les impacts sur les risques portés par l'assureur

Dans les dernières sections, nous avons réalisé des sensibilités aux hypothèses afin d'illustrer le fonctionnement du modèle. Nous nous intéressons maintenant aux risques que les sensibilités n'auraient pas détectés. Nous nous concentrons sur le risque d'une immobilisation en capital trop élevée et n'avons pas traité ici les risques opérationnels et commerciaux.

Augmenter significativement la part d'actifs risqués (actions ou PE) dans le fonds euros augmenterait le coût en capital requis (SCR). En effet, les actions sont généralement plus coûteuses en capital que les obligations étatiques. Le calibrage en risque neutre du PE et l'introduction rigoureuse de la directive Solvabilité 2 complique le calcul exact d'un bilan prudentiel dans le cadre de ce mémoire. Aussi, nous avons fait le choix d'un *proxy* pour calculer l'augmentation de SCR liée au capital investissement. Les PM sont celles comprises dans le fonds euros.

$$SCR_{act_type_1} = 0,39 \cdot PM_{actions}$$

$$SCR_{act_type_2} = 0,49 \cdot PM_{PE}$$

$$SCR_{actions} = \sqrt{SCR_{act_type_1}^2 + SCR_{act_type_2}^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot SCR_{act_type_1} \cdot SCR_{act_type_2}}$$

$$SCR_{immo} = 0,25 \cdot PM_{immo}$$

$$SCR_{marche} = \sqrt{SCR_{immo}^2 + SCR_{actions}^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot SCR_{immo} \cdot SCR_{actions}}$$

$$augmentation_SCR = SCR^{\text{scénario avec PE}} - SCR^{\text{scénario sans PE}}$$

Pour une PM de 1 000 € sur le fonds euros ne contenant pas de PE, nous obtenons un SCR_{immo} de 20 €, un $SCR_{actions}$ de 66,30 € pour un SCR_{marche} de 82,36. Augmenter de 1% la part de PE dans le fonds euros coûterait entre 2,8 et 4 €. Maîtriser la part de PE est donc nécessaire pour ne pas subir une trop forte mobilisation de capital.

Cependant, nous pouvons noter :

- l'absence initiale de PE ;
- que le calcul du SCR est réalisé par un choc instantané ;
- les primes futures sont exclues de la frontière des contrats.

Par conséquent, les risques encourus par la détention future de PE ne sont que très marginalement captés initialement par un indicateur du type pilier 1 de Solvabilité 2. Il conviendrait d'adopter une approche ORSA avec des scénarios à horizon du BP pour mesurer les risques fonds propres encourus. Le risque lié à la solvabilité est donc mal évalué aujourd'hui dans les comptes de notre assureur et réside dans une hausse de la part de PE dans le fonds euros qui augmenterait le capital requis.

À horizon un an et dans la majorité des cas, le fonds euros ne contiendra pas de capital investissement. Cependant, la VaR 75% de la part de PE dans le fonds euros est de 15,43%. Dans ce cas, le SCR augmenterait de 54,34 € pour une PM de 1 000€, soit une hausse de 66%. Cette hausse reste bien sûr liée à l'hypothèse d'un seul produit et d'un seul fonds euros dédié pour notre assureur. Elle ne comprends pas les autres produits et l'effet de diversification.

Conclusion du chapitre

Du point de vue de l'assuré, introduire une poche de capital investissement permet une diversification de son investissement et donc une optimisation de son couple rendement risque. Cependant, pour en bénéficier, il faut qu'il détienne les parts jusqu'à la liquidation du fonds et au versement des dividendes.

Du point de vue de l'assureur, une attention particulière devra être portée sur le risque de liquidité. En effet, si trop de parts de fonds de private equity sont rachetées par le fonds euros alors son allocation peut être modifiée significativement. Cette modification future d'allocation pourrait être au détriment des autres assurés et augmenter l'immobilisation du capital Solvabilité 2 dans le futur.

Conclusion

L'introduction d'une poche de capital investissement dans un contrat retraite implique des contraintes de liquidité, de gestion des risques et un pilotage de cette poche. Des contraintes sont aussi présentes lors de la vente. L'assureur devra ainsi vérifier que l'assuré a le profil adéquat pour investir dans des actifs non-cotés.

Dans ce mémoire, nous avons comparé plusieurs modélisations mathématiques du capital investissement. Nous avons retenu une composition de plusieurs lois normales. Ce modèle reflète un des comportements spécifiques du capital investissement, à savoir la distribution de dividendes par blocs. La composition de plusieurs lois normales permet de mieux répliquer les queues de distribution épaisses. De plus, le caractère illiquide de l'investissement est représenté par les conditions de liquidation spécifiques. Dans notre modélisation actuarielle, la distribution de dividendes est l'unique moment où les parts de PE sont liquidées. Ce modèle a aussi l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et à calibrer.

Au passif, le contrat étudié est un contrat retraite : le PER individuel. L'assuré verse une prime annuelle et sortira en rente 25 ans après le début de son contrat. Nous avons ensuite créé de nouvelles interactions entre l'actif et le passif. Lorsque l'assuré rachète son contrat, le fonds euros rachète les parts illiquides d'UC de capital investissement. Inversement, lors du versement de prime, l'assuré rachète les parts UC de PE détenues par le fonds euros. Ainsi, si les assurés rachètent massivement leurs contrats, le fonds euros peut souffrir d'une déformation de son allocation.

L'introduction d'une poche d'actifs illiquides dans la partie en UC du contrat oblige ainsi l'assureur à contrôler la liquidité de cette poche et le contraint à une gestion relativement coûteuse dans la pratique. Du point de vue de l'assuré, l'introduction de cette poche permet un effet de diversification à condition de la détenir pendant suffisamment longtemps. Pour l'assureur, c'est une nouvelle option (option de liquidité) qu'il donne à l'assuré. Cette option peut influencer significativement sur l'allocation du fonds en euros. Ce risque devra être maîtrisé lors de la vente d'UC peu liquides.

La limite principale des travaux menés dans cette étude est la non modélisation du prix en continu de l'UC de *private equity*. Nous avons en effet choisi de ne pas fonder cette étude sur les prix mais principalement sur les dividendes versés à la liquidation des fonds. Malgré son intérêt, ce choix implique une sous-estimation de la volatilité du rendement final de l'assuré. Une deuxième limite est la non modélisation des plus ou moins values latentes dans le fonds en euros qui engendre une hausse du coût de la garantie à effet cliquet.

Dans la modélisation, les fonds UC ne prélèvent aucun chargement en plus des frais déjà encaissés par

CONCLUSION

l'assureur. Aussi aucune rétrocession n'est effectuée, le résultat futur de l'assureur en est directement impacté. C'est une hypothèse forte car les frais sur les fonds de capital investissement sont autour de 6%, cette rétrocession serait un moyen de couvrir le risque de liquidité porté par l'assureur. L'influence d'une poche de capital investissement dans un contrat d'assurance vie épargne (et non dans le cadre d'un produit retraite) pourrait aussi faire l'objet d'une nouvelle étude.

Plusieurs pistes d'améliorations sont ainsi possibles. Tout d'abord, la modélisation pourrait être adaptée en fonction d'un passif différent de celui retenu dans cette étude. Ensuite d'autres formes de commercialisation d'une poche de capital investissement pourraient être étudiées, via une UC dans un contrat de capitalisation ou directement dans un fonds en euros par exemple.

Bibliographie

- AMF. (s. d.). Règlement général.
- AMF. (2013). *Investir via un fonds de capital investissement (FCPR, FCPI, FIP)*. AMF.
- AMF. (2019a). *Cartographie 2019 des marchés et des risques*. AMF.
- AMF. (2019b). *Premiers enseignements du reporting AIFM*. AMF.
- AMF. (2020). *Présentation et recensement des outils de gestion de la liquidité des fonds français*. AMF.
- ANG, A., CHEN, B., GOETZMANN, W. N. & PHALIPPOU, L. (2018). Estimating Private Equity Returns from Limited Partner Cash Flows. *The Journal of Finance*, 73(4), 1751-1783. <https://doi.org/10.1111/jofi.12688>
- ARMEL, K. & PLANCHET, F. (2021). *L'évaluation économique des engagements en assurance vie : écueils, bonnes pratiques et préconisations pour une mise en œuvre pertinente*. Institut Louis Bachelier.
- Arrêté du 7 août 2019 portant application de la réforme de l'épargne retraite [JORF n 0186]. (2019).
- BATTINI, P. (2017). Les grandes étapes du capital investissement. *Vie & sciences de l'entreprise*, 203, 124-132. <https://doi.org/10.3917/vse.203.0124>
- BAVIÈRE, C. (2004). Un assureur français peut-il diversifier ses actifs sur du private equity? *Risques*, 60, 19-24.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- BRÉMAUD, P. (2020). *Markov Chains : Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer.
- BRIGO, D. & MERCURIO, F. (2007). *Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit*. Springer.
- BRIYS, E. & de VARENNE, F. (1994). Life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulatory Implications. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 19(1), 53-72.
- BUCHNER, A., KASERER, C. & WAGNER, N. (2010). Modeling the Cash Flow Dynamics of Private Equity Funds : Theory and Empirical Evidence. *The Journal of Alternative Investments*, 13. <https://doi.org/10.3905/jai.2010.13.1.041>
- CFA INSTITUTE. (2020). GIPS Standards Handbook for Asset Owners.
- CHARLTON, W. T. (2020). *The flattening of the private equity J-curve*. Mercer.
- COCHRANE, J. H. (2005). The risk and return of venture capital. *Journal of Financial Economics*, 75(1), 3-52.
- Code monétaire et financier (s. d.).

BIBLIOGRAPHIE

- COMMISSION EUROPÉENNE. (2015). Règlement délégué (ue) 2015/35 du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II) [OJ L. 12/1].
- COX, J., INGERSOLL, J. & ROSS, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, 385-407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- de MALHERBE, E. (2005). A Model for the Dynamics of Private Equity Funds. *Journal of Alternative Investments*, 8. <https://doi.org/10.3905/jai.2005.608035>
- DILLER, C., HERGER, I. & WULFF, M. (2009). *The private equity J-Curve : cash flow considerations from primary and secondary points*. Capital Dynamics.
- EIOPA. (2022). *Monthly Technical information 2022*. EIOPA.
- FRANCE-INVEST. (2020). *Activité des acteurs français du capital investissement*.
- HULL, J. C. (2015). *Risk Management and Financial Institutions*. Springer.
- HULL, J. C. & WHITE, A. D. (1994a). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I. *The Journal of Derivatives*, 2(1), 7-16. <https://doi.org/10.3905/jod.1994.407902>
- HULL, J. C. & WHITE, A. D. (1994b). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II. *The Journal of Derivatives*, 2(2), 37-48. <https://doi.org/10.3905/jod.1994.407908>
- ILMANEN, A., CHANDRA, S. & MCQUINN, N. (2020). Demystifying Illiquid Assets : Expected Returns for Private Equity. *The Journal of Alternative Investments*, 22(3).
- LPX AG. (2020). Guide to the LPX Listed Private Equity Index Series Version 3.2.
- PANSARD, F. (2007). *Le capital investissement en Europe : quelle physionomie à terme pour ce marche en croissance accélérée ?* Risques et tendances AMF.
- PARLEMENT EUROPÉEN ET CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE. (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II) [OJ L. 335/1].
- PHALIPPOU, L. (2020). An Inconvenient Fact : Private Equity Returns and the Billionaire Factory. *The Journal of Investing*, 30(1), 11-39. <https://doi.org/doi.org/10.3905/joi.2020.1.153>
- PHALIPPOU, L. & ZOLLO, M. (2005). *What drives private equity fund performance ?* (working paper).
- REVUE D'ÉCONOMIE FINANCIÈRE (Éd.). (2008). Les fonds de private equity, 93.
- ROBINEAU, M. (2019). Les contrats d'assurance vie luxembourgeois, entre faux semblants et vrais atouts. *Revue Générale du Droit des Assurances, Librairie générale de droit et de jurisprudence/Lextenso*, 7-13.
- SAGNES, B. (2004). Peut-on limiter les risques en capital investissement ? *Risques*, 60, 25-31.
- SHARPE, W. F. (1964). Capital asset prices : a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
- SWEDROE, L. (2019). *What returns should investors expect from private equity*. Alpha Architect.
- TAKAHASHI, D. & ALEXANDER, S. (2002). Illiquid Alternative Asset Fund Modeling. *The Journal of Portfolio Management*, 28, 90-100. <https://doi.org/10.3905/jpm.2002.319836>
- VAN ROSSUM, G. & DRAKE, F. L. (2009). *Python 3 Reference Manual*. CreateSpace.
- VASICEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2)
- WEIDIG, T. & MATHONET, P.-Y. (2004). *The Risk Profiles of Private Equity* (working paper). <https://doi.org/10.2139/ssrn.495482>

Annexe A

Liste des variables de modélisation

Les variables globales sont disponibles dans le tableau A.1.

Nom de la variable	Signification
<i>tx_rachat</i>	le taux de rachat annuel
<i>tx_transfert</i>	le taux de transfert annuel
<i>tx_frais_pm_euro</i>	le taux de frais sur l'encours du fonds en euros
<i>tx_frais_pm_uc</i>	le taux de frais sur l'encours des UC
<i>tx_frais_prime</i>	le taux de frais sur les primes versées
<i>annee_debut</i>	l'année de départ du modèle
$q(x)$	le taux de décès à l'âge x
<i>coef_abat_morta</i>	le coefficient d'abattement de la table de mortalité
<i>nb_ctr_t_init</i>	le nombre initial de contrats
<i>prime</i>	la prime annuelle versée par contrat

TABLE A.1 – *La liste des variables globales*

Les variables pour chaque pas de temps t sont disponibles dans le tableau A.2.

Les variables pour chaque police d'assurance sont disponibles dans le tableau A.3.

ANNEXE A. LISTE DES VARIABLES DE MODÉLISATION

Nom de la variable	Signification
$annee_exercice_t$	l'année d'exercice
age_t	l'âge de l'assuré
$nb_ctrl_ouv_t$	le nombre de contrats à l'ouverture
$nb_ctrl_clot_t$	le nombre de contrats à la clôture
PM_ouv_t	la provision mathématique à l'ouverture
PM_clot_t	la provision mathématique à la clôture
$mt_presta_rachat_t$	le montant racheté
$mt_presta_trsf_t$	le montant transféré
$mt_presta_dc_t$	le montant des prestations décès
$nb_ctrl_rachat_t$	le nombre de contrats rachetés
$nb_ctrl_trsf_t$	le nombre de contrats transférés
$nb_ctrl_sorti_t$	le nombre de contrats sortis
$duree_ecoulee_t$	la durée écoulée depuis l'ouverture du plan (en année)
$duree_restante_t$	la durée restante avant la retraite du plan (en année)
$duree_restante_t$	le taux de frais de transfert
tx_chute_t	le taux de contrats sortis dans l'année
$prime_brute_t$	la prime brute de frais par contrat
$prime_nette_t$	la prime nette de frais par contrat
$augment_prime_t$	la part de la prime annuelle dans le contrat

TABLE A.2 – *La liste des variables du passif calculées à chaque pas de temps t*

Nom de la variable	Signification
$annee_naiss$	la date de naissance de l'assuré
$annee_ouv_plan$	l'année d'ouverture du plan

TABLE A.3 – *La liste des variables du passif calculées pour chaque police d'assurance*

Annexe B

Les graphiques des indicateurs de performance

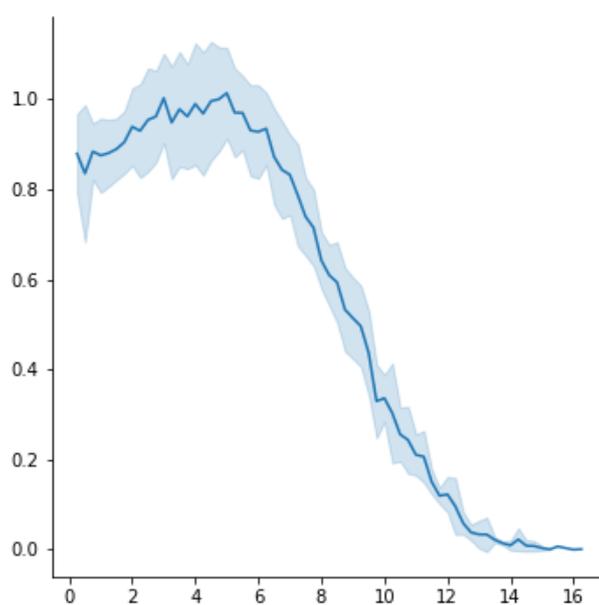


FIGURE B.1 – *Le RVPI en fonction de la maturité*

Source : Prequin

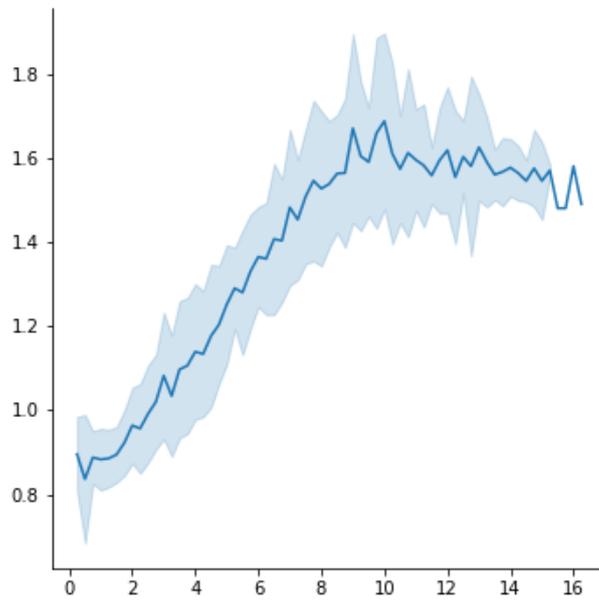


FIGURE B.2 – *Le TVPI en fonction de la maturité*

Source : Preqin