

Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et
d'Assurances
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le 08/07/2021

Par : Johanna BUAYI

Titre : Recherche d'un lien entre la conjoncture économique et l'évolution de la qualité de crédit des collectivités locales : Application au stress test BCE

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Entreprise :
Nom : Pierre THEROND
Signature :


*Membres présents du Jury du Master
Actuariat de ISFA Lyon :*

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Mamadou YADE
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)


Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



I.S.F.A LYON
POUR L'OBTENTION DU TITRE D'ACTUAIRE
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

**RECHERCHE D'UN LIEN ENTRE LA CONJONCTURE
ÉCONOMIQUE ET L'ÉVOLUTION DE LA QUALITÉ DE CRÉDIT
DES COLLECTIVITÉS LOCALES**

APPLICATION AU STRESS TEST BCE

Par Johanna BUAYI

Encadré par Mamadou YADE

Résumé

En amont de l'exercice réglementaire du *stress test* BCE, ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la refonte du modèle de stress test de SFIL. Il se propose ainsi d'implémenter un modèle mathématique permettant de lier un portefeuille de crédit à la conjoncture économique. Le but final étant sur ledit portefeuille de projeter l'évolution des notations des clients sous deux scénarios économiques, central et dégradé. Les résultats obtenus nous permettront alors de mesurer l'impact d'une conjoncture économique défavorable sur l'évolution des notations du portefeuille à l'aide d'indicateurs créés pour l'occasion.

Nous commençons notre analyse en présentant les spécificités du portefeuille du secteur public local étudié ainsi que le référentiel de l'étude. En nous appuyant sur l'existant concernant les travaux sur la dégradation de la qualité de crédit ainsi que sur la défaillance des emprunteurs, nous poursuivons par une présentation de l'état de l'art des modèles macroéconomiques du risque de crédit et de leur intérêt pour le problème posé. Parmi les deux modèles introduits, le modèle retenu est le modèle de Vasicek à un facteur qui permet de projeter des matrices de migration, conditionnellement à l'état de l'économie. Dans la suite, nous estimons les paramètres de ce modèle sous différentes hypothèses et nous comparons conjointement les résultats obtenus pour chaque hypothèse prise, puis avec un *benchmark* interne. A la fin de notre analyse, nous challengeons les résultats du modèle interne, ce qui conduit à remettre partiellement en question les hypothèses considérées dans le cadre de sa construction.

Mots-clés : *Risque de crédit, Secteur Public Local, Taux de défaut, Migrations, Classe de risque, Conjoncture économique, Bâle II, Défaillance des emprunteurs, Stress test*

Abstract

Upstream of the ECB stress test regulatory exercise, this thesis is part of the overhaul of SFIL's stress testing model. Thus, this thesis proposes to implement a mathematical model making it possible to link a loan portfolio to the economic situation. The final goal is to project, on said portfolio, the evolution of customer ratings under two economic scenarios, baseline and adverse. The results obtained will then allow us to measure the impact of an unfortunate economic environment on the evolution of the portfolio's ratings using specific indicators.

We begin our analysis by presenting the specificities of the local public sector portfolio studied as well as the scope of the study. By relying on the existing work on borrowers' credit quality deterioration and default, we continue with a presentation of the state of the art of credit risk macroeconomic models and their interest for the problem at stake. Among the two models introduced, the model retained is the one-factor Vasicek model which makes it possible to project migration matrices, conditionally on the state of the economy. Throughout the document, we estimate the parameters of this model under different assumptions and we compare the results obtained for each assumption taken together, then with an internal benchmark. At the end of our analysis, we are able to challenge the results of the internal model and to partially question the assumptions considered in the context of its construction.

Keywords : *Credit risk, Public Local Sector, Default rate, Migrations, Risk class, Economic situation, Basel II, Défault of borrowers, Stress test*

Note de synthèse

Contexte de l'étude

Approche quantitative du stress test BCE en interne

Dans le cadre du stress test de la banque centrale européenne (BCE), le département de modélisation quantitative du risque de crédit de la SFIL est amené à quantifier les impacts de la survenance des projections fournies par la BCE en termes de capital requis pour son portefeuille. Depuis sa création en 2013, SFIL utilise des modèles internes de projection des métriques utiles à l'évaluation de son besoin en fonds propres : la probabilité de défaut (PD) et le taux de perte en cas de défaut (LGD).

Du point de vue de l'analyste quantitatif, le *stress test* consiste à distordre la distribution des effectifs à travers les classes de risque de manière conditionnelle à la survenance des projections de la BCE. Cela nécessite de pouvoir calculer des matrices de migration à travers les classes de risque dont la gravité dépend des variables macroéconomiques fournies par la BCE.

Cadre conjoncturel et motivations de l'étude

Début 2020, la BCE a lancé son exercice de stress test dont l'objectif principal est de tester la résistance des institutions financières à des scénarios macroéconomiques central et dégradé à horizon 3 ans, soit : 2020, 2021 et 2022. Cependant, la crise sanitaire liée au COVID-19 et les conséquences économiques exceptionnelles qui en ont découlé ont conduit la BCE au report de son exercice à 2021.

Néanmoins, le travail quantitatif ayant été réalisé avant le report de ce test de résistance, il a paru utile d'étudier les résultats obtenus lors de ces travaux en y intégrant les points d'attention et les problèmes rencontrés au fil de leurs implémentations afin d'améliorer la modélisation actuelle.

Parmi les points d'attention mentionnés, on relève notamment la faible réactivité des modèles économétriques de projection des variables cibles (facteurs systémiques) aux scénarios macroéconomiques de la BCE. En effet, lors de l'application des modèles, le scénario stressé ne conduit pas à suffisamment de dégradations de notes par rapport au scénario de base, ce qui oblige à recourir dans la plupart des cas à des avis expert.

Objectif visé et périmètre retenu

Le report de l'exercice de stress test a donc été l'occasion de revoir la méthodologie globale du stress test et de creuser des hypothèses alternatives à la modélisation proposée en interne. L'objectif principal recherché dans la suite est de tenter de disposer de modèles de projection des migrations de notes suffisamment sensibles aux chocs macroéconomiques. Le périmètre retenu a été celui des communes et des groupements à fiscalité propre (GFP) agrégés. Cette agrégation est en phase avec l'approche adoptée lors des travaux de modélisation de la probabilité de défaut réglementaire.

Choix du modèle

Le modèle implémenté est le modèle de Vasicek à un facteur. Celui-ci s'inspire largement du modèle de la firme de Merton. Dans ce modèle, au cours de la période t , le processus de migration d'une contrepartie k entre les notations est défini par des seuils de migration auxquels est comparée une variable latente R_t^k :

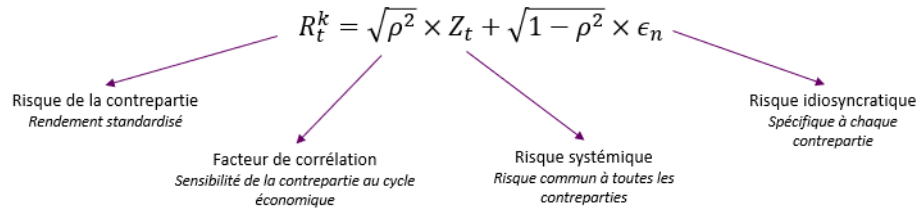


FIGURE 1 – Rendement standardisé de la contrepartie

La variable latente R_t^k désigne le rendement standardisé généré par la contrepartie k au cours de l'année t . Ce rendement s'exprime comme la somme pondérée de deux facteurs :

1. L'état global de l'économie au cours de l'année t qui est résumé par le facteur systémique noté Z_t . C'est par l'intermédiaire de ce paramètre que les matrices sont stressées.
2. Un processus spécifique à la contrepartie k dans l'année t , noté ϵ_t^k , qualifié de facteur idiosyncratique.
3. Le paramètre ρ est la corrélation entre le rendement et le facteur systémique. Il est supposé être invariant dans le temps et commun à toutes les classes de risque. Ce paramètre mesure la sensibilité du portefeuille à l'état de l'économie.

Pour la contrepartie k , au cours de l'année t , la probabilité de transition de la notation i vers la notation j est telle que :

$$p^{i,j} = P(B_{i,j} \leq R_t^k \leq B_{i,j+1}) \quad (1)$$

où les facteurs $B_{i,j}$ sont appelés les seuils de transitions. Ils correspondent aux quantiles d'une loi normale centrée réduite évalués en des probabilités de transition moyenne sur l'historique.

En résumé, les matrices de migrations que l'on souhaite projetées dépendent des paramètres suivants qu'il conviendra d'estimer :

$$M_t = f(\bar{M}, Z_t, \rho) \quad (2)$$

Où :

- ▶ \bar{M} est une matrice empirique des migrations moyennes, inconditionnelle au cycle économique, et de coefficients $\bar{M}_{i,j} = p^{i,j}$;
- ▶ Z_t est le facteur systémique permettant de capturer la position dans le cycle économique ;
- ▶ ρ un facteur de sensibilité au cycle économique.

Remarque La méthodologie interne ne considère pas une mais deux expressions caractérisant le processus de migration d'une contrepartie :

- Une expression permettant de modéliser les migrations entre les classes de risque saines drivée par le facteur systémique Z_t^R

$$R_t^k = \sqrt{(\alpha\rho)^2} \times Z_t^R + \sqrt{1 - (\alpha\rho)^2} \times \epsilon_t^k \tag{3}$$

où α est un facteur de pénalisation.

- Une variable modélisant les migrations vers l'état de défaut uniquement, drivée par le facteur systémique Z_t^D

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t^D + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_t^k \tag{4}$$

Remarque importante Dans notre cas, on simplifiera la méthode en modélisant un processus de migration régit par un unique facteur systémique Z_t , pour pouvoir la comparer à l'approche interne.

Décomposition des étapes de modélisation

Etape 0 Construction d'un historique de matrice de transition et retraitements

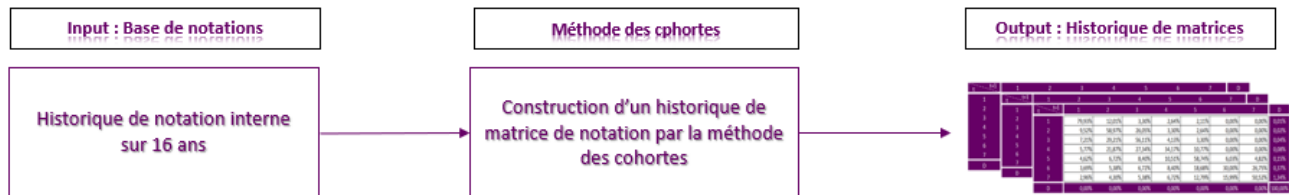


FIGURE 2 – Construction d'un historique de matrice de transition

On construit notre historique de matrice de transition initiale par la méthode des cohortes. Après l'obtention des matrices historiques, nous poursuivons par l'optimisation des paramètres du modèle.

Etape 1 Estimation de la matrice \bar{M}

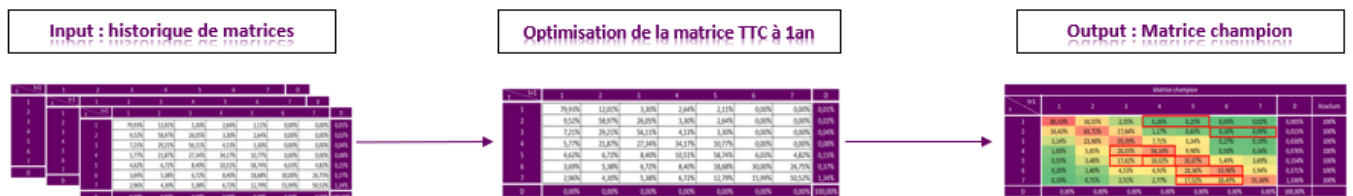


FIGURE 3 – Historique de matrices de notations

Pour estimer la matrice moyenne des transitions à 1 an (matrice champion, \bar{M}) nous utilisons le cadre théorique des chaînes de Markov continues. Par ce cadre, on s'assure que tous les estimateurs des taux de transition moyens soient non nuls.

Etape 2 L'étape 3 est l'estimation du facteur de sensibilité au cycle économique ρ . Elle s'est faite par maximum de vraisemblance en faisant deux hypothèses qui aboutissent :

- ▶ A l'estimation d'un facteur de sensibilité ρ sur l'ensemble du portefeuille ;
- ▶ A l'estimation de plusieurs facteurs de sensibilité ρ_i pour chaque classe de risque.

Remarque Les classes de risque peu risquées étant plutôt stables sur l'historique (peu de migrations), ce constat a motivé l'implémentation de la seconde méthode. Une comparaison de ces deux approches est réalisé sur un exemple pour justifier l'importance du choix de modélisation de ce paramètre.

Etape 3 Estimation du facteur systémique Z_t

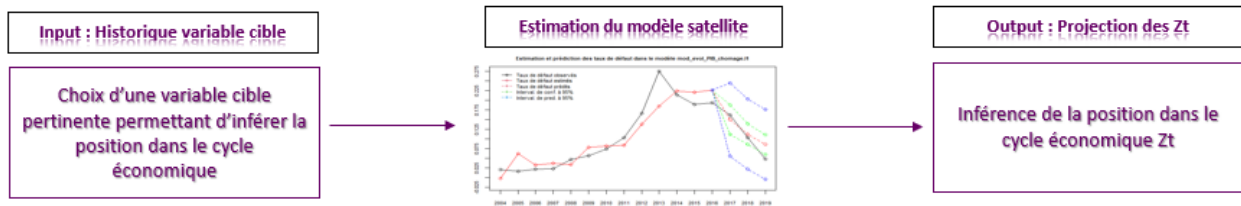


FIGURE 4 – Modèles satellites et inférence des Z_t

Les derniers paramètres à estimer sont les facteurs systémiques Z_t . Les facteurs systémiques permettent de positionner le portefeuille au sein du cycle économique. Pour leur estimation, nous comparons également deux approches :

- ▶ Inférence à partir d'une série de facteurs systémiques pseudo-observés ;
- ▶ Inférence à partir des taux de défaut moyens observés sur l'historique.

Ces deux séries (Z_t pseudo-observés et taux de défaut moyens historiques) sont ensuite expliqués par des modèles de régression avec des variables explicatives de nature macroéconomiques. Nous appelons ces modèles de régression les *modèles satellites*.

Les scénarios

| BASELINE | | | | | ADVERSE | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|--------|--------|--------|
| Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| PIB | 1,49% | 1,11% | 1,26% | 1,32% | PIB | 1,49% | -0,43% | -1,99% | -1,20% |
| Inflation | 1,11% | 1,13% | 1,27% | 1,38% | Inflation | 1,11% | 0,64% | -0,49% | -0,79% |
| Immo | 3,34% | 3,17% | 3,18% | 3,21% | Immo | 3,34% | -4,59% | -6,68% | -4,06% |
| Chomage | 8,45% | 8,22% | 8,13% | 8,02% | Chomage | 8,45% | 8,63% | 9,59% | 10,83% |
| EURLT | 0,13% | 0,07% | 0,22% | 0,36% | EURLT | 0,13% | -0,68% | -0,52% | -0,48% |

FIGURE 5 – Scénario stress test BCE 2020

Etape 4 La dernière étape consiste à projeter, en utilisant les modèles satellites estimés dans l'étape 4, les facteurs systémiques selon les deux scénarios fournis par la BCE. A la suite de ces projections, on possède tous les paramètres nécessaires à la projection des matrices de transition. On note, pour le scénario fourni par la BCE en 2020 que, le scénario central (baseline) peut être qualifié d'optimiste alors que le scénario dégradé (adverse) est pessimiste.

Les résultats

À la fin des étapes de modélisation, nous avons estimé, selon différentes approches, tous les paramètres nécessaires à l'utilisation de la formule fermée du modèle de Vasicek à un facteur. Nous comparons ainsi les matrices obtenues avec les différents paramétrages suivants :

| Modèles | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|---------|---------------------------------|-----------------|--|
| 1 | Matrice champion \overline{M} | $\rho = \rho^*$ | Projection des Z_t pseudo-observés |
| 2 | Matrice champion \overline{M} | $\rho = \rho^*$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

Le but recherché est de challenger les hypothèses de modélisation du modèle interne et de mettre en lumière différents types de méthodes de modélisation possibles pour les paramètres à estimer dans le modèle de Vasicek à un facteur. Notre benchmark initial est celui des matrices de migrations stressées par le modèle interne. À la fin des étapes de modélisation, nous réussissons à montrer que :

- Le premier modèle permet de mieux stresser les migrations entre les classes de risque. Néanmoins, il ne permet pas de bien discriminer les impacts des deux scénarios. Voici la distribution des effectifs par classe de risque obtenu pour le premier modèle.

| | | DEPART | BASELINE | | | ADVERSE | | |
|----------------------------|-----|--------|----------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2020 | 2021 | 2022 |
| Modèle 1 | CR1 | 3360 | 3361 | 3272 | 3163 | 3275 | 3098 | 3008 |
| | CR2 | 3585 | 3582 | 3542 | 3497 | 3569 | 3511 | 3464 |
| | CR3 | 2858 | 2711 | 2700 | 2726 | 2753 | 2779 | 2792 |
| | CR4 | 555 | 710 | 796 | 854 | 728 | 838 | 898 |
| | CR5 | 689 | 646 | 668 | 705 | 672 | 722 | 753 |
| | CR6 | 79 | 119 | 143 | 160 | 124 | 155 | 175 |
| | CR7 | 117 | 109 | 112 | 119 | 115 | 126 | 132 |
| Taux de dégradation global | | | 17,08% | 18,11% | 18,46% | 18,16% | 19,46% | 18,51% |

FIGURE 6 – Distribution des effectifs par classe de risque pour le modèle 1

- Le deuxième modèle est intéressant du point de vue des niveaux de stress et de son interprétabilité. En effet, les taux de défaut moyens possèdent une bonne sensibilité aux chocs économiques de la BCE. On observe que les matrices projetées suivent l'évolution de l'état de la conjoncture économique. En effet, en scénario baseline, les effectifs pour les meilleures classes de risque augmentent progressivement lorsque les conditions économiques s'améliorent. En scénario adverse, ils diminuent lorsque les conditions économiques se dégradent.

| | | DEPART | BASELINE | | | ADVERSE | | |
|----------------------------|-----|--------|----------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2020 | 2021 | 2022 |
| Modèle 2 | CR1 | 3360 | 3770 | 4111 | 4385 | 3237 | 3095 | 2850 |
| | CR2 | 3585 | 3619 | 3589 | 3552 | 3563 | 3509 | 3429 |
| | CR3 | 2858 | 2503 | 2303 | 2168 | 2772 | 2780 | 2864 |
| | CR4 | 555 | 627 | 613 | 578 | 737 | 840 | 931 |
| | CR5 | 689 | 538 | 460 | 411 | 684 | 722 | 813 |
| | CR6 | 79 | 99 | 96 | 87 | 126 | 156 | 185 |
| | CR7 | 117 | 85 | 66 | 54 | 118 | 126 | 148 |
| Taux de dégradation global | | | 12,61% | 12,84% | 13,01% | 17,17% | 19,18% | 21,95% |

FIGURE 7 – Distribution des effectifs par classe de risque pour le modèle 2

Au regard des scénarios fournis, on arrive à challenger les niveaux de stress du modèle interne en adoptant des hypothèses un peu plus simples. Ce constat ouvre le débat sur le choix de certaines hypothèses de modélisation faite en interne.

Executive summary

Study context

Quantitative approach to internal ECB stress test

As part of the stress test of the European Central Bank (ECB), SFIL's quantitative credit risk modeling department is required to quantify the impacts of the occurrence of projections provided by the ECB in terms of capital required for its portfolio. Since its creation in 2013, SFIL has used internal projection models of metrics useful for assessing its capital requirements : The probability of default (PD) and the loss given default (LGD)

From a quantitative analyst's point of view, the *stress test* consists of distorting the distribution of exposure across risk classes conditional on the occurrence of the ECB's projections. This requires being able to calculate migration matrices across risk classes whose severity depends on macroeconomic variables provided by the ECB for a 3-year horizon.

Economic framework and reasons for the study

At the start of 2020, the ECB launched its stress test exercise, the main objective of which is to test the resistance of financial institutions to central and degraded macroeconomic scenarios over a 3-year horizon, namely : 2020, 2021 and 2022. However, the health crisis related to COVID-19 and the exceptional economic consequences that resulted from it led the ECB to postpone its financial year to 2021.

Nevertheless, the quantitative work having been carried out before the postponement of this stress test, it seemed useful to study the results obtained during this work by integrating the points of attention and the problems encountered during their implementations in order to improve the current modeling.

Among the points of attention noted, we note the low responsiveness of econometric models for projecting target variables (systemic factors) to the ECB's macroeconomic scenarios. Indeed, during the application of the models, the stressed scenario does not lead to sufficient degradation of grades compared to the base scenario, which forces the teams to resort in most cases to expert advice.

Objective and scope adopted

The postponement of the stress test exercise was therefore an opportunity to review the overall methodology and to explore alternative hypotheses to the modeling proposed internally. The main objective sought in what follows is to try to have projection models of note migrations sensitive to macroeconomic shocks. The scope retained was that of municipalities and aggregated tax groups. This aggregation is in line with the approach adopted during the default probability modeling work.

Choice of model

The model implemented is the one-factor Vasicek model. This is largely inspired by the model of the Merton firm. In this model, during period t , the process of migrating a counterparty k between ratings is defined by migration thresholds to which a latent variable is compared R_t^k :

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_n$$

The diagram illustrates the decomposition of the standardized return R_t^k into four components. The equation $R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_n$ is at the top. Four arrows point from this equation to the following components:

- Firm risk**: Standardized yield
- Correlation factor**: Counterparty sensitivity to the economic cycle
- Systematic risk**: Risk common to all firms
- Idiosyncratic risk**: Specific to each counterparty

FIGURE 8 – Standardized return of the counterparty

The latent variable R_t^k designates the standardized return generated by counterparty k during year t . It is expressed as the weighted sum of two factors :

1. The overall state of the economy during year t which is summarized by the systemic factor noted Z_t . It is through this parameter that the matrices are stressed.
2. A process specific to the counterpart k in year t , denoted ϵ_t^k , qualified as an idiosyncratic factor.
3. The parameter ρ is the correlation between the return and the systemic factor. It is assumed to be time invariant and common to all risk classes. It measures the sensitivity of the portfolio to the state of the economy.

For counterparty k , during year t , the probability of transition from rating i to rating j is such that :

$$p^{i,j} = P(B_{i,j} \leq R_t^k \leq B_{i,j+1}) \quad (5)$$

where the factors $B_{i,j}$ are called the thresholds of transitions. They correspond to the quantiles of a reduced centered normal distribution evaluated in average transition probabilities over the history.

In summary, the migration matrices that one wishes to project depend on the following parameters that should be estimated :

$$M_t = f(\overline{M}, Z_t, \rho) \quad (6)$$

Where :

- \overline{M} is an empirical matrix of average migrations, unconditional to the economic cycle, and of coefficients $\overline{M}_{i,j} = p^{i,j}$;
- Z_t is the systemic factor allowing to capture the position in the economic cycle ;
- ρ a factor of sensitivity to the economic cycle.

Remark The internal methodology does not consider one but two latent variables :

- ▶ A variable modeling migration between healthy risk classes derived by the systemic factor Z_t^R

$$R_t^k = \sqrt{(\alpha\rho)^2} \times Z_t^R + \sqrt{1 - (\alpha\rho)^2} \times \epsilon_t^k \tag{7}$$

where α is a penalty factor.

- ▶ A variable modeling migration towards default state driven by the systemic factor Z_t^D

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t^D + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_t^k \tag{8}$$

Main remark In our case, we will simplify the method by modeling a migration process governed by a single systemic factor Z_t , in order to compare it to the internal model.

Decomposition of modeling steps

Step 0 Construction of inputs and reprocessing

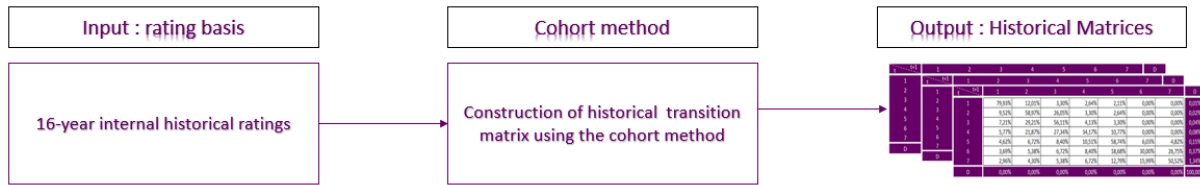


FIGURE 9 – Construction of a transition matrix history

We build our initial transition matrix history by the cohort method. After obtaining the historical matrices, we continue with the optimization of the model parameters.

Step 1 Estimation of the matrix \bar{M}

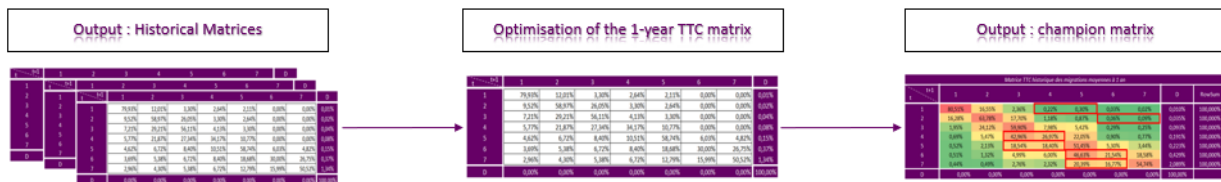


FIGURE 10 – History of transition matrices

To estimate the average matrix of the 1-year transitions (champion matrix, \bar{M}) we use the theoretical framework of continuous Markov chains. By this framework, we make sure that all the estimators of the mean transitions are non-zero.

Step 2 Step 2 is the estimation of the sensitivity factor to the business cycle ρ . It was made by maximum likelihood by making two hypotheses that succeed :

- ▶ The estimation of a sensitivity factor ρ over the entire portfolio ;
- ▶ To the estimation of several sensitivity factors ρ_i for each risk class.

Remark The low-risk risk classes being rather stable over the history (few migrations), this observation motivated the implementation of the second method. A comparison of these two approaches is carried out on an example to justify the importance of the choice of modeling of this parameter.

Step 3 Estimation of the systemic factor Z_t

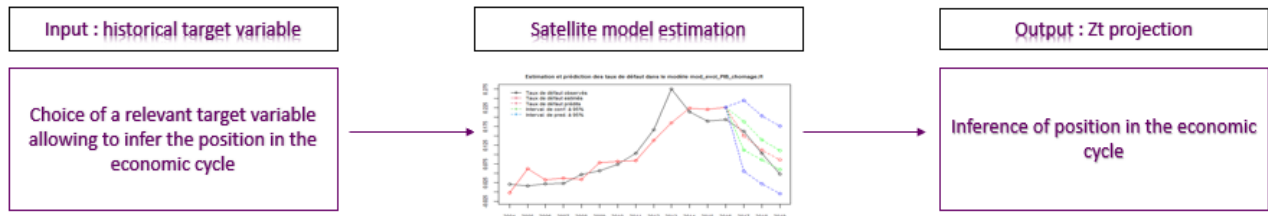


FIGURE 11 – Satellite models and Z_t inference

The last parameters to be estimated were the systemic factors Z_t . Systemic factors help position the portfolio within the economic cycle. For their estimation, we also compare two approaches :

- ▶ Inference from a series of pseudo-observed systemic factors ;
- ▶ Inference from the average default rates observed over the history.

These two series (pseudo-observed Z_t and historical average default rates) are then explained in regression models with explanatory variables of a macroeconomic nature. We call these regression models satellite models.

Scenarios

| BASELINE | | | | | ADVERSE | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|--------|--------|--------|
| Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| PIB | 1,49% | 1,11% | 1,26% | 1,32% | PIB | 1,49% | -0,43% | -1,99% | -1,20% |
| Inflation | 1,11% | 1,13% | 1,27% | 1,38% | Inflation | 1,11% | 0,64% | -0,49% | -0,79% |
| Immo | 3,34% | 3,17% | 3,18% | 3,21% | Immo | 3,34% | -4,59% | -6,68% | -4,06% |
| Chomage | 8,45% | 8,22% | 8,13% | 8,02% | Chomage | 8,45% | 8,63% | 9,59% | 10,83% |
| EURLT | 0,13% | 0,07% | 0,22% | 0,36% | EURLT | 0,13% | -0,68% | -0,52% | -0,48% |

FIGURE 12 – 2020 ECB stress test scenario

Step 4 The last step consists in projecting the systemic factors according to the two scenarios provided by the ECB, using the satellite models estimated in step 4. Following these projections, we have all the inputs necessary for the projection of the transition matrices. . We note for the scenario provided by the ECB in 2020 that the central scenario (baseline) can be qualified as optimistic while the degraded scenario (adverse) is pessimistic.

The results

At the end of the modeling steps, we estimated according to different approaches all the parameters necessary for the use of the closed formula of the one-factor Vasicek model. We thus compare the matrices obtained with the following different settings :

| Models | Matrix at 1 year | Sensitivity | Systemic factor Z_t |
|--------|--------------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| 1 | Champion matrix \overline{M} | $\rho = \rho^*$ | Projection of pseudo-observed Z_t |
| 2 | Champion matrix \overline{M} | $\rho = \rho^*$ | Inference of Z_t by default rates |

The goal is to challenge the modeling hypotheses of the internal model and to highlight different types of possible modeling methods for the parameters to be estimated in the one-factor Vasicek model. Our initial benchmark is that of migration matrices stressed by the internal model. At the end of the modeling steps, we succeed in showing that :

- The goal is to challenge the modeling hypotheses of the internal model and to highlight different types of possible modeling methods for the parameters to be estimated in the one-factor Vasicek model. Our initial benchmark is that of migration matrices stressed by the internal model. At the end of the modeling steps, we succeed in showing that :

| | | START | BASELINE | | | ADVERSE | | |
|---------|-----------------------|-------|----------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2020 | 2021 | 2022 |
| Model 1 | CR1 | 3360 | 3361 | 3272 | 3163 | 3275 | 3098 | 3008 |
| | CR2 | 3585 | 3582 | 3542 | 3497 | 3569 | 3511 | 3464 |
| | CR3 | 2858 | 2711 | 2700 | 2726 | 2753 | 2779 | 2792 |
| | CR4 | 555 | 710 | 796 | 854 | 728 | 838 | 898 |
| | CR5 | 689 | 646 | 668 | 705 | 672 | 722 | 753 |
| | CR6 | 79 | 119 | 143 | 160 | 124 | 155 | 175 |
| | CR7 | 117 | 109 | 112 | 119 | 115 | 126 | 132 |
| | Global downgrade rate | | 17,08% | 18,11% | 18,46% | 18,16% | 19,46% | 18,51% |

FIGURE 13 – Distribution of workforce by risk class for model 1

- The second model is interesting from the point of view of stress levels and its interpretability. Indeed, average default rates have good sensitivity to the ECB's economic shocks. We observe that the projected matrices follow the evolution of the state of the economic situation. In fact, in the baseline scenario, the numbers for the best risk classes gradually increase when economic conditions improve. In an adverse scenario, they decrease when economic conditions deteriorate.

| | | START | BASELINE | | | ADVERSE | | |
|---------|-----------------------|-------|----------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2020 | 2021 | 2022 |
| Model 2 | CR1 | 3360 | 3770 | 4111 | 4385 | 3237 | 3095 | 2850 |
| | CR2 | 3585 | 3619 | 3589 | 3552 | 3563 | 3509 | 3429 |
| | CR3 | 2858 | 2503 | 2303 | 2168 | 2772 | 2780 | 2864 |
| | CR4 | 555 | 627 | 613 | 578 | 737 | 840 | 931 |
| | CR5 | 689 | 538 | 460 | 411 | 684 | 722 | 813 |
| | CR6 | 79 | 99 | 96 | 87 | 126 | 156 | 185 |
| | CR7 | 117 | 85 | 66 | 54 | 118 | 126 | 148 |
| | Global downgrade rate | | 12,61% | 12,84% | 13,01% | 17,17% | 19,18% | 21,95% |

FIGURE 14 – Distribution of workforce by risk class for model 2

With regard to the scenarios provided, we manage to challenge the stress levels of the internal model by adopting simpler assumptions. This finding opens the debate on the choice of certain modeling assumptions made internally.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux personnes qui ont contribué au bon déroulement de mon stage puis de mon alternance à la SFIL. En particulier, je souhaite remercier dans un premier temps mes référents directs depuis mon arrivée, Mamadou Yade, Idriss Salla ainsi que Ning Zuo pour leur disponibilité, leur écoute ainsi que leurs judicieux conseils et leur relecture.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres de l'équipe Modèles Crédit et Projets Transverse pour leur bienveillance, leur disponibilité et leur aide pour la rédaction de ce mémoire. Je pense notamment à Thomas, Ismael et Mamadou dont l'écoute m'a beaucoup apporté. Mon expérience au sein de cette équipe a été avant tout une expérience humaine au cours de laquelle j'ai eu la chance d'être entourée par des personnes heureuses de transmettre leur savoir, pédagogues et profondément sympathiques.

De plus, je tiens à remercier M. Pierre Thérond, mon tuteur académique, pour son écoute et son aide lors de mes moments de doute. Je remercie également M. Fabien Perrucot pour son soutien sans faille et sa relecture pointue.

Enfin, je remercie du fond du coeur mes proches qui, par leur présence et leurs mots ont su constamment me remonter le moral et me faire voir le verre à moitié plein. Merci à Ilona, Jimmy, Sophie et Brice pour vos conseils et votre écoute. J'ai également une pensée toute particulière pour Anaïs et Olivier, mes coéquipiers, qui m'ont transmis leur positivité et qui ont permis à ce projet d'aboutir par leur critique avisée et leur relecture pointue au cours de nos nombreuses nuits blanches. Vous avez été un soutien moral indéfectible quand j'en avais le plus besoin et pour cela vous avez mon éternelle reconnaissance. Enfin, je remercie ma mère et mes amies de longues dates, Meïssa et Stesy, qui n'ont jamais cessé de croire en moi toutes ces années.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Présentation du portefeuille étudié : Le SPL, Secteur Public Local | 3 |
| 1.1 Présentation de SFIL | 4 |
| 1.1.1 Description et mission actuelle | 4 |
| 1.1.2 Le pilotage des risques chez SFIL | 4 |
| 1.2 Le SPL : Le Secteur Public Local | 5 |
| 1.2.1 Segmentation du portefeuille | 5 |
| 1.2.2 Les collectivités locales françaises en quelques chiffres | 5 |
| 1.2.3 Le rôle des collectivités locales | 6 |
| 1.3 Les finances des collectivités locales | 7 |
| 1.3.1 Le fonctionnement budgétaire des collectivités locales | 7 |
| 1.3.2 Les rouages du budget local | 8 |
| 1.4 L'emprunt bancaire | 9 |
| 1.4.1 Recours à l'emprunt bancaire et réglementation | 9 |
| 1.4.2 Le risque de crédit des collectivités locales | 9 |
| 1.4.3 Aparté sur les emprunts structurés | 9 |
| 1.4.4 Bilan sur le recours à l'emprunt | 10 |
| 2 Risque de crédit et stress tests | 11 |
| 2.1 Le risque de crédit | 12 |
| 2.1.1 Introduction | 12 |
| 2.1.2 Cadre normatif | 12 |
| 2.2 Les stress tests | 16 |
| 2.2.1 Cadre normatif et définition | 16 |
| 2.2.2 Déclinaison et implémentation des stress tests en interne | 17 |
| 2.3 Le stress test EBA/BCE | 18 |
| 2.3.1 Objectif visé | 18 |
| 2.3.2 Rappel méthodologique | 18 |
| 2.3.3 Vers une approche macroprudentielle | 19 |
| 2.3.4 Motivation de l'étude | 19 |
| 3 Modèles macroéconomiques du risque de crédit | 21 |
| 3.1 Introduction aux modèles macroéconomiques du risque de crédit | 22 |
| 3.1.1 Intérêts des modèles macroéconomiques | 22 |
| 3.1.2 Les variables traitées | 23 |
| 3.2 Les notions de base | 25 |
| 3.2.1 Système de notation interne et classe de risque | 25 |
| 3.2.2 Matrice de migration de notes | 26 |
| 3.2.3 Probabilités de défaut marginales et cumulées | 27 |
| 3.2.4 Rappel des objectifs de notre étude | 28 |
| 3.3 Le modèle CreditPortfolioView de McKinsey & Co | 28 |
| 3.4 Le modèle de Vasicek à un facteur | 32 |
| 3.4.1 Introduction au modèle de la firme de Merton | 32 |
| 3.4.2 Adaptation du modèle de Merton à notre problématique | 33 |
| 3.4.3 Cadre théorique du modèle de Vasicek à un facteur | 34 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.4.4 | Intérêt du modèle exposé par rapport au sujet | 38 |
| 3.4.5 | Choix du modèle | 39 |
| 4 | Le cadre théorique de la modélisation | 42 |
| 4.1 | Traitement des données | 43 |
| 4.1.1 | Présentation de la base de modélisation | 43 |
| 4.1.2 | Construction d'un historique de matrice de transition | 44 |
| 4.1.3 | Statistiques descriptives | 45 |
| 4.2 | Modélisation de la matrice champion \overline{M} | 47 |
| 4.2.1 | La matrice de migration TTC à 1 an | 47 |
| 4.2.2 | Optimisation sous contrainte de la matrice TTC à 1 an | 48 |
| 4.2.3 | Lissage par les chaînes de Markov continue | 50 |
| 4.2.4 | Analyse des résultats | 52 |
| 4.3 | Estimation du paramètre de sensibilité au cycle économique, ρ | 54 |
| 4.3.1 | Cadre théorique | 55 |
| 4.3.2 | Analyse des résultats | 58 |
| 4.4 | Estimation des facteurs systémiques, Z_t | 61 |
| 4.4.1 | Estimation par maximum de vraisemblance | 61 |
| 4.4.2 | Analyse des résultats | 62 |
| 4.4.3 | Autre méthode d'inférence du facteur systémique | 62 |
| 5 | Modèles de projection des facteurs systémiques | 66 |
| 5.1 | Présentation du <i>stress test</i> BCE 2020 | 67 |
| 5.1.1 | Les projections macroéconomiques | 67 |
| 5.1.2 | Analyse des scénarios | 68 |
| 5.1.3 | Enjeux des modèles satellites | 68 |
| 5.2 | Modèles de projection des facteurs systémiques | 69 |
| 5.2.1 | Rappels sur le modèle linéaire | 69 |
| 5.2.2 | Critères d'évaluation de la qualité d'ajustement | 70 |
| 5.2.3 | Critères de validité des modèles | 71 |
| 5.2.4 | Les régressions fallacieuses | 72 |
| 5.2.5 | Investigation de la non stationnarité dans la pratique | 73 |
| 5.3 | Préparation des modèles économétriques | 74 |
| 5.3.1 | Les variables macroéconomiques d'intérêts | 75 |
| 5.3.2 | Méthodologie d'implémentation des modèles | 78 |
| 5.4 | Modèle satellites | 79 |
| 5.4.1 | Modèle satellite de la série des Z_t pseudo-observés | 79 |
| 5.4.2 | Modèle satellite de la série des taux de défaut moyen TD_t | 85 |
| 6 | Obtention des matrices de migration stressées | 94 |
| 6.1 | Obtention des matrices de transition stressées | 95 |
| 6.1.1 | Rappel des résultats numériques des parties précédentes | 95 |
| 6.1.2 | Objectif de la partie | 97 |
| 6.1.3 | Jeu de matrices 1 | 98 |
| 6.1.4 | Jeu de matrices 2 | 102 |
| 6.1.5 | Jeu de matrices 3 | 105 |
| 6.1.6 | Analyse des matrices projetées dans le modèle interne | 109 |
| 6.1.7 | Comparaison des approches retenues avec le benchmark interne | 113 |
| 6.1.8 | Réflexion sur les hypothèses du modèle interne | 118 |
| 6.1.9 | Limites des approches développées | 120 |
| | Conclusion | 123 |
| | Annexes | 127 |

| | |
|---|------------|
| Annexe 1 | 127 |
| 1 Les tests de stationnarité complémentaires | 127 |
| 1.1 Test de Dickey-Fuller augmenté | 127 |
| 1.2 Processus TS et DS | 128 |
| 1.3 Stratégie du test de Dickey-Fuller augmenté | 128 |
| 1.4 Stationnarité des variables explicatives | 130 |
| Bibliographie | 131 |

Liste des abréviations

PD : Probability of Default - Probabilité de défaut

LGD : Loss Given Default - Perte en cas de défaut

EAD : Exposure at Default - Exposition en cas défaut

ECL : Expected Credit Loss - Pertes de crédit attendues

RWA : Risk-Weighted Assets -Actifs pondérés du risque

EBA : European Banking Authority - Autorité Bancaire Européenne

BCE : Banque Centrale Européenne

DR : Default Rate - Taux de défaut

CR : Classe de risque

PIT : Point-in-time

TTC : Through-the-cycle

F-IRB : Foundation Internal Rating-Based

A-IRB : Advanced Internal Rating -Based

TIE : Taux d'intérêt effectif

Introduction

Dans le domaine bancaire, le lien entre la conjoncture économique et le niveau du risque de crédit des emprunteurs est une information précieuse constituant un outil d'aide à la décision primordial. En effet, ce lien permettrait de se doter d'outils d'analyse prospective du profil de risque d'un portefeuille, notamment en période de crise (*stress test*, par exemple). Il s'agira notamment de mesurer et expliquer l'impact des évolutions défavorables de la conjoncture économique sur la dégradation de la qualité du portefeuille de crédit.

Il est à noter que dans la littérature financière ce type de sujet est d'ores et déjà éprouvé pour les clients de type « Corporates » mais que peu de travaux existent sur les collectivités locales. En effet, deux éléments ont contribué à limiter la recherche de ce type de lien pour les collectivités publiques :

- ▶ Leur capacité à atténuer les effets d'une crise grâce aux dotations de l'Etat mais aussi au levier fiscal dont elles disposent ;
- ▶ La faible fréquence des défaillances observées pour les collectivités publiques qui limite la capacité à mener des travaux de modélisation robuste.

Néanmoins, malgré les difficultés, l'objectif du présent mémoire est de construire un modèle de stress test pour le portefeuille des communes de SFIL. Nous nous placerons dans le cadre particulier du stress test BCE qui requiert notamment la traduction théorique de chocs économiques en hypothèses stressées puis en impact sur les indicateurs des portefeuilles des banques (ratio de solvabilité notamment). Ainsi, nous étudierons des modèles qui permettent de simplifier le passage du choc économique aux stress des indicateurs.

Un point essentiel du sujet qu'il est important de préciser est la définition du risque de crédit que nous considérerons au sein de notre étude. On rappelle que le risque de crédit peut se définir comme :

« Le risque financier lié aux incapacités d'un agent - un particulier, une entreprise ou un état souverain - de payer un engagement de remboursement. Le cas extrême étant la faillite ou le défaut de l'agent. »

On comprend, par cette définition, que le risque de crédit distingue en réalité deux événements importants : la dégradation de la qualité de crédit d'un client qui, à son paroxysme, entraîne un deuxième événement, le défaut de ce client. Or, par abus de langage ou simplification, le risque de crédit est souvent réduit au seul risque de défaut d'un emprunteur. Cependant, cette définition peut s'avérer parfois limitante. En effet, elle amène à se concentrer uniquement sur les événements de défaut au détriment de l'étude des migrations des notes des clients. Ainsi, pour se questionner sur l'évolution du niveau de crédit, il est primordial de s'intéresser également à cette notion de migration et de dégradation de la notation financière d'un client.

Dans le cadre du stress test BCE, on cherche à savoir si la banque reste solvable dans un contexte où la qualité de crédit de son portefeuille est dégradée. L'accent est donc mis sur la dégradation des notations. Finalement, un choc macroéconomique sera retranscrit par une évolution de la distribution initiale des notes au sein du portefeuille. La déformation de cette distribution se fera au moyen de tout un processus de modélisation que nous détaillons au sein de ce mémoire. Ainsi, tout au long de notre étude, la qualité de crédit d'un client sera évaluée par sa notation interne et plus particulièrement par des matrices de notation. Il s'agit du principal outil de simulation de l'évolution d'un portefeuille de crédit. Ces matrices rassemblent toutes les probabilités de migration d'une notation donnée vers une autre à un horizon t .

Les objectifs de ce mémoire sont multiples. En effet, il s'agira :

- ▶ D'estimer un modèle de stress test permettant de lier le portefeuille des communes françaises de SFIL à l'état de l'économie selon plusieurs hypothèses. En nous plaçant dans le cadre du stress test BCE, ce modèle permettra alors de faire évoluer la distribution des effectifs à travers les classes de risque selon deux scénarios, *baseline* et *adverse* ;
- ▶ De challenger les résultats obtenus par le modèle interne de stress test de SFIL, et le cas échéant, de questionner les hypothèses ayant servi à sa construction.

Pour cela, ce mémoire est composé de six chapitres. Dans un premier temps, nous présenterons les spécificités du portefeuille du secteur public local étudié (*Chapitre 1*). Dans un second temps, nous nous attacherons à rappeler le référentiel de l'étude (*Chapitre 2*). En s'appuyant sur l'existant concernant les travaux sur la dégradation de la qualité de crédit ainsi que sur la défaillance des emprunteurs, nous poursuivrons par une présentation de l'état de l'art des modèles macroéconomiques du risque de crédit et leur intérêt pour le problème posé (*Chapitre 3*). Nous détaillerons ensuite la méthodologie du modèle choisi en réalisant les premières applications numériques qui nous permettront de tirer nos premières conclusions (*Chapitre 4*). Puis, on poursuivra notre étude par la présentation des modèles de projection implémentés (*Chapitre 5*). Enfin, nous clôturerons ce mémoire par la présentation des résultats suivi d'une analyse de l'impact des différents choix de modélisation sur ceux-ci (*Chapitre 6*).

Chapitre 1

Présentation du portefeuille étudié : Le SPL, Secteur Public Local

Introduction au chapitre 1

Le chapitre 1 a pour but de présenter le portefeuille du Secteur Public Local de SFIL. Nous présentons dans un premier temps les éléments constitutifs d'une partie de ce portefeuille : les collectivités locales françaises. Nous insistons sur les enjeux financiers liés à ces dernières en détaillant les rouages de leur fonctionnement budgétaire, qui nécessite parfois le recours à l'emprunt bancaire. Nous finissons par expliquer en quoi ce recours à l'emprunt bancaire rend les collectivités locales sujettes au risque de crédit.

1.1 Présentation de SFIL

1.1.1 Description et mission actuelle

SFIL, est une banque publique de développement, qui a été créée le 1er février 2013 dans le but de garantir la stabilité du Secteur Public Local en France en lui offrant des solutions de financement. Elle est devenue en 6 ans l'un des acteurs majeurs du financement de l'économie française. Depuis mai 2015, elle assure également le refinancement des grands contrats de crédit à l'exportation.

SFIL est une banque à 100% publique détenue à 99,99% par la Caisse des Dépôts et Consignations (CDC). Grâce à sa société de crédit foncier, la Caisse Française de Financement Local (CAFFIL), SFIL refinance des prêts à moyen et long terme que la banque postale propose en partenariat avec la Caisse des Dépôts et de Consignations aux collectivités territoriales et aux établissements publics de santé.

SFIL participe au financement de nombreux projets pour servir l'intérêt commun et dans le but de développer le pays et l'économie. Son objectif est de faire bénéficier à ces derniers des meilleures conditions de financement. Enfin, afin de renforcer la capacité d'exportation des entreprises établies en France, l'Etat a confié à SFIL une nouvelle mission de politique publique : le refinancement des grands contrats de crédits à l'exportation, assurés par BPI France Assurance Export. SFIL est également membre de l'EAPB, l'Association Européenne des Banques Publiques, et son directeur général Philippe Mills en assure la présidence.

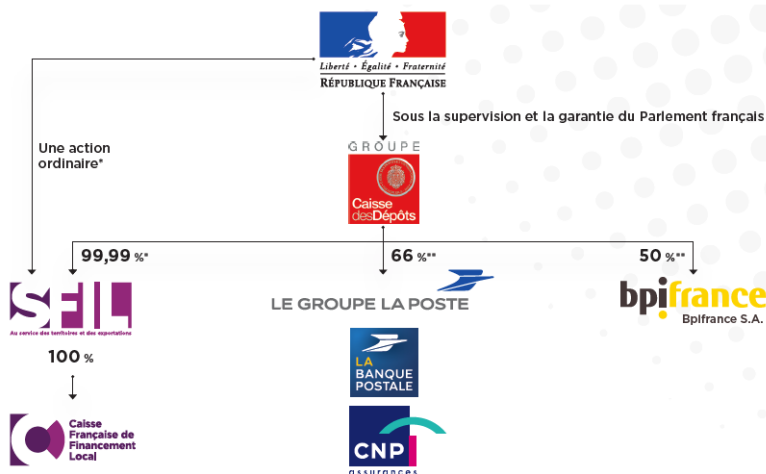


FIGURE 1.1 – Actionnariat SFIL

1.1.2 Le pilotage des risques chez SFIL

La question de la gestion des risques est inhérente à l'activité bancaire et s'est renforcée suite à des crises ayant par la suite fragilisé l'économie nationale ou mondiale. Comme tout organisme financier, la mesure, la couverture et le pilotage des risques ainsi que leurs mises en œuvre représentent une grande partie de l'activité chez SFIL. La direction de Pilotage et Mesure des risques (PMR), qui en est chargée s'organise autour de quatre directions opérationnelles et quatre directions transversales.

Les principales responsabilités de cette direction transversale sont :

- ▶ L'élaboration de la politique générale en matière de risque, sous la supervision du comité exécutif ;
- ▶ La mise en place et la gestion d'une fonction de surveillance des risques et les processus de décision, notamment au travers des équipes de validation ;
- ▶ La détermination des limites de crédit et les attributions pour les différents décisionnaires.

Les différents risques couverts chez SFIL-CAFFIL sont au nombre de trois : le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel. Le périmètre étant centré sur le risque de crédit, nous nous concentrerons dans les parties suivantes sur le risque de crédit des collectivités locales.

1.2 Le SPL : Le Secteur Public Local

1.2.1 Segmentation du portefeuille

Le Secteur Public Local constitue le portefeuille le plus important de la banque. En effet, les prêts attribués aux collectivités locales représentent plus de 70% de ses actifs et donc ses expositions les plus importantes. Il se divise de la manière suivante :

| Type de gestion | Composition du portefeuille |
|----------------------|--|
| Périmètre d'activité | Régions Départements Communes Groupements à fiscalité propre Etablissements publics de santé Autres collectivités |
| Gestion extinctive | Logement social SPL Italie |

TABLE 1.1 – Composition du portefeuille SPL

Au sein de ce portefeuille, le périmètre d'activité principal de SFIL porte sur les collectivités locales dans leur ensemble. Le SPL comporte également deux portefeuilles pilotés en run-off : le Logement social et le SPL Italie. Plus précisément, pour ces deux portefeuilles, SFIL gère les anciens prêts déjà négociés jusqu'à leur maturité sans en contracter de nouveaux.

Au 31 mars 2020, SFIL compte 11.141 collectivités locales françaises parmi ses clients ce qui représente une exposition de plus de 37 milliards d'€. La majorité de ces collectivités locales clientes sont des communes, des groupements à fiscalité propre (GFP) et des départements représentant respectivement 9873, 991 et 95 contreparties.

On limitera notre étude au périmètre d'activité qui est celui des collectivités locales françaises et plus particulièrement à celui des communes françaises. Dans la suite, on présentera ce portefeuille dans son intégralité afin de comprendre pourquoi il est si spécifique au sein du marché des prêts.

1.2.2 Les collectivités locales françaises en quelques chiffres

Pour débiter, il est important de rappeler que les termes collectivités locales et territoriales sont équivalents et apparaissent dans la constitution (respectivement article 34, titre XII). Les collectivités locales se définissent comme étant des personnes morales de droit public distinctes de l'État et qui bénéficient à ce titre d'une autonomie juridique et patrimoniale. En effet, il s'agit de structures administratives françaises, qui doivent prendre en charge les intérêts de la population d'un territoire précis.

Depuis la révision constitutionnelle du 28 mars 2003, sont définies comme « collectivités territoriales de la République » à l'article 72 de la Constitution : les communes, les départements y compris les départements d'outre-mer (DOM), les collectivités à statut particulier et les collectivités d'outre-mer (COM).

En 2020, en France sont recensés les effectifs suivants :

| | |
|------------------------------------|--------|
| Collectivités locales | Total |
| Communes | 34 968 |
| Dont : France métropolitaine | 34 839 |
| Outre-Mer | 129 |
| Conseils départementaux | 96 |
| Dont : France métropolitaine | 94 |
| Outre-Mer | 2 |
| Collectivités à statut particulier | 5 |
| Collectivité de Corse | 1 |
| Métropole de Lyon | 1 |
| Martinique | 1 |
| Guyane | 1 |
| Département de Mayotte | 1 |

TABLE 1.2 – Répartition des collectivités locales en 2020

1.2.3 Le rôle des collectivités locales

La vocation des collectivités territoriales est définie par la Constitution en ces termes : « *prendre les décisions pour l'ensemble des compétences qui peuvent le mieux être mises en œuvre à leur échelon* ». Dans le cadre de la décentralisation, un transfert des compétences administratives de l'Etat vers les collectivités territoriales s'est opéré progressivement suivant un long processus législatif. C'est ainsi que les collectivités territoriales disposent de pouvoirs transférés qui s'ajoutent à des pouvoirs propres dans le cadre de leur autonomie constitutionnelle.

En subdivisant les collectivités locales en des blocs distincts, une liste de compétences par blocs peut ainsi être établie :

- ▶ Le bloc Communal, comprenant les communes et les EPCI (Etablissement Public de Coopération) :
 - Les communes, au nombre de 34968 en 2020, sont les plus petites subdivisions administratives françaises. Chacune est administrée par un maire, des adjoints et un conseil municipal. Elles sont en particulier responsables de l'exercice de pouvoirs délégués par l'Etat, de la gestion de nombreux services publics, de l'aménagement de la cité et de la politique de la ville.
 - Les EPCI sont des groupements de communes. En janvier 2020, on en compte 1254. Elles peuvent également accomplir ces activités, dès lors que les compétences leurs ont été déléguées par les communes membres ou attribuées par la loi. Ce sont devenus des acteurs majeurs du développement local.
- ▶ Le bloc Départemental, comprenant les 96 départements de France ainsi que les 5 départements d'outre-mer (DOM) : Les départements assurent la gestion de certains équipements et services publics. Leur responsabilité s'exerce notamment dans le domaine de la voirie, des collèges, du ramassage scolaire, de l'action sanitaire et sociale.
- ▶ Le bloc Régional, comprenant les 14 régions : Elles gèrent les lycées et la formation professionnelle, les aides à l'emploi et aux entreprises et mettent en place les contrats de plan dans la programmation des politiques de transport, de l'aménagement du territoire et des grandes infrastructures. Les statuts particuliers, à mi-chemin entre les blocs communaux et régionaux, tels que les grandes métropoles françaises et leurs arrondissements (Paris, Lyon et Marseille).
- ▶ Les communes à statut particulier au nombre de 5 qui désignent toutes les collectivités ne pouvant être classées ci-dessus. En 2020, elles sont au nombre de 5 : la collectivité de Corse, la métropole de Lyon, La Martinique, la Guyane ainsi que le département de Mayotte.

Chaque collectivité est ainsi dotée d'un ensemble de compétences qui leur permet d'intervenir de façon générale sur les affaires de leur champ territorial. De plus, au fil des années, les collectivités locales et leurs groupements ont vu leur rôle s'accroître notamment en matière de développement économique. En tant qu'acteur de l'économie, pour mener à bien leur projet, celles-ci bénéficient pour leur fonctionnement de différents leviers leur permettant d'accroître leurs recettes nécessaires à leur dépenses courantes mais également au besoin d'investissement dans leur champ territorial. On peut notamment citer le levier fiscal. Les collectivités bénéficient également d'aide de l'Etat portant le nom de dotations. Dans une moindre mesure, elles peuvent avoir recours à l'emprunt bancaire pour le développement de certains projets.

1.3 Les finances des collectivités locales

1.3.1 Le fonctionnement budgétaire des collectivités locales

Le budget et la comptabilité des collectivités est scindé en deux sections. La section de fonctionnement qui retrace l'ensemble des dépenses et recettes permettant la gestion courante de la vie de la collectivité et la section d'investissement qui rassemble les projets d'investissement en cours et à mener durant l'année à l'échelle de la commune.

| Section de fonctionnement | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| Recettes | Dépenses |
| Impôts et taxes | Dépenses de personnel |
| Dotations de l'Etat | Charges générales et de gestion |
| Produits financiers | Charges financières et exceptionnels |
| Epargne N-1 | Epargne |

FIGURE 1.2 – Section de fonctionnement

Dans la section de fonctionnement, on distingue les recettes et les dépenses de fonctionnement :

- ▶ Les recettes de fonctionnement se composent :
 - Des impôts et taxes : taxe foncière, taxe d'habitation et cotisations foncières d'entreprises ;
 - Des dotations de l'Etat : La principale dotation financière de fonctionnement de l'Etat versée aux collectivités est la DGF, dotation globale de fonctionnement. Elle constitue le pivot des relations financières entre l'État et les collectivités locales ;
 - Des produits financiers exceptionnels et de l'excédent de fonctionnement reporté.

- ▶ Les dépenses de fonctionnement d'une commune correspondent à l'ensemble des frais engagés pour sa gestion courante. On distingue :
 - Des dépenses de personnel : salaires, cotisations, ... ;
 - Des dépenses liées au fonctionnement général soit les charges générales et de gestion ;
 - Des charges financières et exceptionnels ;
 - Du déficit de fonctionnement reporté, soit l'épargne brute.

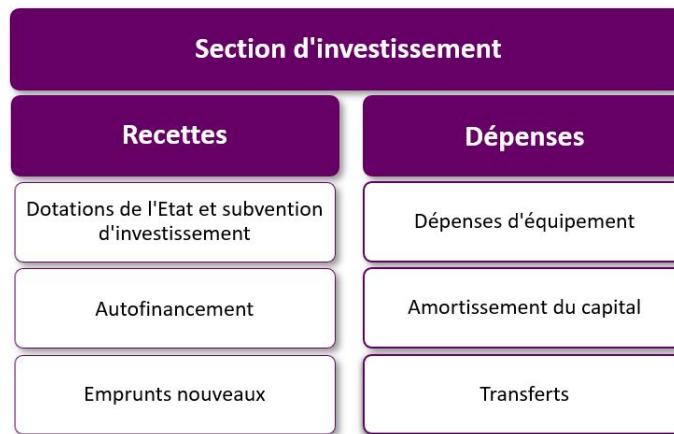


FIGURE 1.3 – Section d'investissement

Dans la section de d'investissement, on distingue les recettes et les dépenses d'investissement :

- ▶ Les recettes d'investissement proviennent :
 - Des ressources propres, i.e. recettes directes d'investissement comprenant les dotations et participations de l'Etat telles que le fonds de compensation pour la taxe sur la la valeur ajoutée (TVA) et subventions accordées par d'autres collectivités ;
 - De l'autofinancement correspondant à l'excédent des recettes de fonctionnement par rapport aux dépenses de fonctionnement (cf. Epargne brute sur le schéma précédent)
 - De l'endettement par le biais d'emprunts nouveaux.
- ▶ Les dépenses d'investissement des collectivités concernent d'une part, l'ensemble des investissements visant à augmenter son patrimoine (dépenses d'équipement) et d'autre part, le remboursement du capital des emprunts contractés (amortissement du capital) ainsi que les subventions d'investissement versées (ou transferts) aux autres collectivités dans le cadre du respect de la péréquation.

1.3.2 Les rouages du budget local

Le fonctionnement budgétaire des collectivités est similaire à celui d'une entreprise avec un bilan comptable de type actif-passif. Ainsi, comme vu précédemment, le budget d'une collectivité locale se divise traditionnellement en une section de fonctionnement, dédiée aux charges courantes, et une section d'investissement. La section de fonctionnement regroupe les dépenses liées au fonctionnement courant de la collectivité tandis que la section d'investissement recense les dépenses d'équipement ou encore le remboursement du capital de la dette. Les recettes de cette section incluent notamment les dotations et subventions de l'État, ainsi qu'une capacité d'autofinancement lorsque le solde de la section de fonctionnement est excédentaire. Cette capacité d'autofinancement correspondant à l'épargne brute et constitue la majorité du financement de la section d'investissement. Il s'agit là de la quantité liant les deux sections.

Le budget couvre théoriquement la période du 1er janvier au 31 décembre, et doit être adopté avant le début de l'année concernée. Le budget est voté par l'assemblée de la collectivité (conseil municipal, départemental ou régional). Il doit respecter plusieurs principes fondateurs du droit budgétaire au même titre que le budget de l'Etat et vérifier certaines règles. La plus connue est celle de l'équilibre budgétaire qui oblige les collectivités à respecter un équilibre entre les dépenses et les recettes globales mais également au sein de chaque section. Les recettes et les dépenses doivent être évaluées de manière sincère (principe de sincérité). Pour le respect de ces principes et différentes règles, le budget local fait l'objet de plusieurs contrôles par différentes instances.

Malgré l'autonomie financière de ces dernières, le budget des collectivités locales est très réglementé. En effet, il est important de rappeler que bien que celles-ci « bénéficient de ressources dont elles peuvent disposer librement » - *article 72-2 de la Constitution* - elles sont soumises au principe d'équilibre réel de leurs dépenses et de leurs recettes par section (fonctionnement et investissement) selon l'article L.1612-4 du code général des collectivités territoriales. Or, dans l'hypothèse d'une baisse des dotations de l'Etat, avec un levier fiscal qui

laisserait peu de marge de manœuvre, les collectivités peuvent avoir du mal à respecter cet équilibre. Les dépenses de fonctionnement dépassant les recettes les fonctionnement, l'autofinancement qui résulte de l'épargne brute de la section de fonctionnement et qui permet d'investir dans les dépenses d'investissement se verrait diminuer. Le recours à l'emprunt demeurerait alors le seul levier disponible pour investir dans les dépenses d'investissement et respecter le calendrier fixé. Nous verrons ainsi par la suite dans quelles mesures les collectivités ont recours à l'emprunt bancaire et en quoi cela génère un risque de crédit.

1.4 L'emprunt bancaire

1.4.1 Recours à l'emprunt bancaire et réglementation

Initialement, le décloisonnement des marchés de capitaux a conduit à la banalisation de financement des collectivités locales. En effet, le processus de décentralisation au début des années 1980 a induit un accroissement de l'offre de crédit sur le marché des finances locales pour faire face aux transferts de compétences nouvelles à ces dernières.

Ainsi, on comprend qu'au départ, l'accès des collectivités locales à l'emprunt bancaire résulte d'une politique économique et financière. Les banques alors férues de nouveaux marchés à conquérir se sont penchées sur le cas des collectivités. Cependant, l'accès aux crédits pour les collectivités locales était loin d'être automatique et seules quelques banques spécialisées sur le secteur public local pouvait s'y atteler. Aujourd'hui les collectivités pour se financer peuvent faire appel à des banques publiques ou privées. Néanmoins, le recours à l'emprunt demeure très réglementé.

Les emprunts contractés par les collectivités constituent une ressource budgétaire réglementée et l'on en fait mention au sein de texte réglementaire. La souscription des emprunts est exclusivement destinée à financer des investissements, qu'il s'agisse d'un équipement spécifique, d'un ensemble de travaux relatifs à cet équipement ou encore d'acquisitions de biens durables considérés comme des immobilisations. Néanmoins, les emprunts n'ont pas à être affectés explicitement à une ou plusieurs opérations d'investissement précisément désignées au contrat. Ils peuvent être globalisés et correspondre à l'ensemble du besoin de financement de la section d'investissement prévu au budget.

Le recours à l'emprunt est donc utilisé pour des besoins spécifiques d'investissement. Cependant avec cet accès à l'emprunt, les collectivités sont sujettes au risque de crédit certes dans une moindre mesure que d'autres entités telles que les entreprises, mais ce risque demeure bel et bien.

1.4.2 Le risque de crédit des collectivités locales

Nous avons vu précédemment le rôle essentiel joué par l'Etat dans le support des collectivités à travers les dotations et les subventions diverses versées au secteur public local. Il est donc légitime de se poser la question de l'existence d'un risque de crédit sous-jacent au marché de l'emprunt local. Cependant, la libéralisation du recours à l'emprunt a permis une souplesse dans son usage, qui s'est malheureusement parfois fait de manière inconsidérée. De plus, le contrôle de l'utilisation et de la gestion des emprunts est complexe et présente plusieurs inconvénients. La crise de la dette locale engendrée par les emprunts dit *toxiques* est le symbole historique des dérives du recours à l'emprunt de manière excessive, et ce malgré tous les procédés mis en place en vue d'assurer sa gestion éclairée.

1.4.3 Aparté sur les emprunts structurés

Les emprunts structurés sont des prêts combinant dans un seul et même contrat un prêt bancaire classique et un ou plusieurs dérivés. Les intérêts sont déterminés selon l'évolution d'un indice sous-jacent non standard tel que : le taux de change, le différentiel entre un taux long et un taux court, ou encore l'écart de valeur entre deux indices d'inflation par exemple. Ces intérêts peuvent aussi être calculés selon des formules complexes pouvant être non linéaires de sorte que l'évolution des taux supportés peut être plus que proportionnelle à celle de l'index lui-même.

L'une des caractéristiques des produits structurés tient à la présence de plusieurs périodes de taux successives :

- La première, en général de deux ou trois ans, est marquée par un taux d'intérêt fixe bonifié (en dessous du cours du marché, voire nul) ;
- La deuxième période, très longue, est assortie d'un taux qui résulte d'une formule arithmétique contenant un ou plusieurs produits dérivés du contrat assis sur des indices non standards ;
- Une troisième période peut éventuellement exister, de courte durée (un ou deux ans), assortie d'un taux fixe égal ou proche du taux de la première période.

En raison du caractère attractif des taux bonifiés et des difficultés d'appréhension des risques encourus, un nombre significatif de collectivités territoriales et d'établissements publics locaux ont eu recours aux produits structurés. C'est le cas depuis leur introduction au début des années 1990 et plus particulièrement au cours des années 2007 et 2008. La crise financière de 2008, qui a entraîné des niveaux de volatilité de forte amplitude des indices utilisés dans les formules de calcul des taux des emprunts structurés, a révélé la réelle dangerosité de certains des emprunts contractés. Les emprunts structurés ayant entraîné une incapacité de la collectivité à rembourser sa dette, et donc un événement de défaut, ont été re-qualifiés en **emprunt toxique**. Face à cette crise, les collectivités se sont alors retrouvées démunies et ont dû se retourner vers la figure titulaire de l'Etat.

1.4.4 Bilan sur le recours à l'emprunt

Il est vrai que le recours à l'emprunt a permis aux collectivités territoriales d'étendre matériellement leur autonomie par le financement d'opérations d'investissement. L'emprunt s'est imposé comme une solution face au montant important exigé par les investissements et dépassant parfois le statut de simple ressource complémentaire. Il est même parfois devenu une nécessité.

En effet, ce montant figure au passif de la collectivité et le passé nous montre que sa mauvaise gestion est un danger qui risque d'accroître davantage la charge qu'il représente par nature sur ses finances. L'emprunt facilite et favorise certes la libre administration de la collectivité mais n'est pas une opération sans risque.

Ainsi, le risque de crédit du secteur public local, est un enjeu essentiel dans le contexte actuel. Empiriquement, les événements de retard de paiement voire de défaut observés sur les portefeuilles de SFIL sont en très faible nombre mais pas inexistant. Il s'agit d'un événement difficilement observable du fait des contrôles budgétaires sur les budgets locaux et des aides de l'Etat qui apportent un support conséquent aux collectivités en difficulté leur permettant ainsi d'éviter d'arriver jusqu'au défaut. L'événement de dégradation ou de défaut des collectivités est par conséquent difficilement modélisable, sans compter l'historique peu profond dont on dispose. C'est d'autant plus le cas dans le cadre de stress test où l'exigence est accrue par l'identification d'un lien entre des chocs macro-économiques exogènes et le niveau du risque de crédit des portefeuilles de SFIL.

Résumé du chapitre 1

Le chapitre 1 décrit les particularités du portefeuille étudié et introduit la notion du risque de crédit des clients du secteur public local. On revient notamment sur les rouages du budget local. Cette partie est décisive dans notre analyse car c'est notamment par des chocs directs ou indirects sur leurs dépenses ou leurs recettes que les collectivités locales seront affectées par l'état de l'économie. De plus, on traite de la libéralisation de l'emprunt bancaire pour ce type client, qui les rend sujet au risque de crédit. Il s'agira donc dans le chapitre suivant de présenter les notions clés associées au risque de crédit bancaire.

Chapitre 2

Risque de crédit et stress tests

Introduction au chapitre 2

Ce chapitre a pour but d'introduire des notions essentielles à la définition du cadre du mémoire. Il est défini ici les notions clés du risque de crédit, le cadre réglementaire sous-jacent à sa gestion ainsi que les outils qui contribuent à son pilotage : les *stress tests*.

2.1 Le risque de crédit

2.1.1 Introduction

Les crises systémiques des dernières décennies ayant fortement impacté le système bancaire mondial, la gestion des risques est devenue une activité au cœur du pilotage des institutions bancaires. On compte différents risques contre lesquels une institution bancaire doit se prémunir dans le cadre du pilotage de son activité et parmi les plus importants, il y a le risque de crédit. En effet, l'activité principale des entités bancaires est l'intermédiation. Il s'agit de l'ensemble des opérations de commercialisation effectuées par les banques dont les crédits sont au cœur. Néanmoins, cette activité génère un risque de crédit qui se définit comme :

« Le risque financier lié aux incapacités d'un agent (un particulier, une entreprise ou un état souverain) de payer un engagement de remboursement. C'est un risque qui existe universellement pour les investisseurs (ici les banques). Le cas extrême étant la faillite ou le défaut de l'agent. »

Il est important de retenir qu'un événement de défaut se produit rarement, mais qu'il induit en général de grandes pertes. Ainsi, la maîtrise du risque de crédit est au cœur du métier du banquier car il détermine la rentabilité des opérations. Ce risque est intimement lié au niveau de solvabilité de l'emprunteur (risque individuel). Il dépend également de facteurs exogènes comme le risque sectoriel engendré par la conjoncture économique propre au domaine d'activité de l'emprunteur, ou le risque global, qui est le risque systémique affectant toute une économie. Son évaluation passe par une bonne connaissance du client ainsi qu'une analyse exhaustive de sa santé financière, en mesurant sa solvabilité présente et future. Pour le pilotage de ce dernier, les banques utilisent un grand nombre de méthodes qui seront détaillées ultérieurement. Ces méthodes permettent entre autres de stresser des indicateurs de risque définis par le cadre normatif régissant le pilotage du risque de crédit.

2.1.2 Cadre normatif

Dans le domaine bancaire, les accords de Bâle et la norme IFRS 9 régissent les principales exigences réglementaires au titre du risque de crédit.

2.1.2.1 Le cadre réglementaire du comité de Bâle

Les accords de Bâle I

En 1988, sous l'égide de la banque des règlements internationaux (BRI), le Comité de Bâle s'est réuni pour émettre un ensemble de recommandations visant à renforcer la résilience des banques. L'ensemble de ces recommandations ont été formalisées sous les accords de Bâle I. Ceux-ci sont intervenus après une transition d'une économie d'endettement vers une économie de marché. Ces accords visent principalement à encadrer une activité de marché en pleine croissance. Les principaux points d'attention des accords de Bâle I sont les suivants :

- ▶ L'introduction des principes réglementaires du ratio de solvabilité dans le but d'assurer le financement de l'économie tout en maîtrisant les risques et éviter les faillites bancaires ;
- ▶ Une première harmonisation internationale ;
- ▶ L'instauration d'un rapport minimum entre les fonds propres, dont dispose une banque, et les risques qu'elle prend lorsqu'elle accorde des crédits avec l'introduction du ratio Cooke.

L'intérêt de ce ratio Cooke, dont le seuil est fixé à 8%, est de limiter les défaillances bancaires ainsi que les coûts concomitants de restructuration et de sauvetage en cas de chocs. Cependant, celui-ci est rapidement pointé du doigt et se verra quelque peu modifié à la suite des accords de Bâle II.

Les accords de Bâle II

Apparus en 2004, les accords de Bâle II constituent un dispositif prudentiel destiné à mieux appréhender les risques bancaires en précisant et en améliorant les dispositions déjà prises sous Bâle I. Ceux-ci mettent principalement l'accent sur le risque de crédit et les exigences en capital. Ils instaurent un niveau minimum de capitaux propres dérivé des accords de Bâle I afin d'assurer la solidité financière des institutions bancaires. Sous les accords de Bâle II, le ratio Cooke défini sous Bâle I est vite remis en question par l'omission de la qualité de crédit des contreparties. Il évolue par la suite pour laisser place au ratio McDonough formalisé au sein du pilier I qui concerne les exigences en fonds propres. Ce ratio, plus fin, vient préciser le précédent en introduisant la pondération des risques et en prenant en compte le risque opérationnel. Il est tel que :

$$\frac{\text{Fonds propres}}{\text{RWA}_{\text{crédit}} + \text{RWA}_{\text{marché}} + \text{RWA}_{\text{opérationnel}}} \geq 8\% \quad (2.1)$$

Le dénominateur de ce ratio constitue la somme des actifs pondérés du risque (RWA) des trois plus grands risques bancaires. Au titre du risque de crédit, ces RWA se calculent comme le produit de la pondération (RW) et de l'exposition au risque (EAD) soit :

$$\text{RWA}_{\text{crédit}} = \text{RW} \times \text{EAD} \quad (2.2)$$

Au titre du risque de crédit, la pondération **RW** peut être évaluée selon 3 méthodes :

- La méthode **Standard** : La pondération (RW) est une pondération forfaitaire dépendant du rating externe du client et imposée par la réglementation.

| Notation externe | AAA à AA- | A+ à A- | BBB+ à BBB- | BB+ à BB- | Inférieur à BB- | NR |
|------------------|-----------|---------|-------------|-----------|-----------------|------|
| Pondération RW | 20,00% | 50,00% | 75,00% | 100,00% | 150,00% | 100% |

- La méthode **IRB-A** (Internal Rating Based Advanced) où :

$$\text{RW} := f(\text{PD}, \text{LGD}, \text{M}) \quad (2.3)$$

La probabilité de défaut (PD) et le taux de perte en cas de défaut (LGD), sont issus d'un modèle interne et la maturité (M) est comprise entre 1 et 5 ans.

- La méthode **IRB-F** (Internal Rating Based Foundation) où :

$$\text{RW} := f(\text{PD}, \text{LGD}_f, \text{M}) \quad (2.4)$$

La probabilité de défaut (PD), est issue d'un modèle interne, le taux de perte en cas de défaut (LGD_f) est forfaitaire et la maturité (M) est capée à 2.5 ans.

En conclusion, les accords de Bâle II, permettent d'appréhender l'ensemble des risques dont les risques opérationnels. Ils instaurent la mise en place d'un dispositif de surveillance individualisé par l'autorité de contrôle bancaire et insistent sur le volet de transparence vis-à-vis des marchés. Enfin, ils s'accompagnent de contraintes réglementaires plus complexes et coûteuses mais permettant une meilleure appréciation du risque de la banque.

Les accords de Bâle III

Les accords de Bâle II ont connu par la suite quelques révisions. En juillet 2009, le Comité de Bâle a établi le dispositif de Bâle III en vue de renforcer la couverture des risques dans certains domaines et d'accroître le niveau global des exigences de fonds propres, en ciblant particulièrement les instruments négociables exposés au risque de crédit. SFIL répond aujourd'hui de cette norme bâloise.

Les accords de Bâle III amorcent une transition vers une nouvelle étape macro-prudentielle. Ils visent à stabiliser le système financier dans son ensemble. Ces accords mettent l'accent sur les exigences en fonds propres et le risque de liquidité, non pris en compte dans les précédents accords. Les principaux points relatifs aux accords de Bâle III sont :

- ▶ Le renforcement quantitatif des fonds propres avec un relèvement des ratios CET1 (Core Equity Tier 1) et Tier 1 ;
- ▶ Une définition plus restrictive des fonds propres et une focalisation sur les fonds propres CET1 ;
- ▶ L'introduction de coussins de capital (coussins de conservation de capital, contra-cyclique et systémiques) ;
- ▶ Une amélioration de la couverture des risques, notamment du risque de contrepartie sur les dérivés ;
- ▶ L'introduction de nouveaux ratios de liquidité à court terme (LCR) et long terme (NSFR) ;
- ▶ L'introduction d'un ratio de levier.

Résumé des trois accords

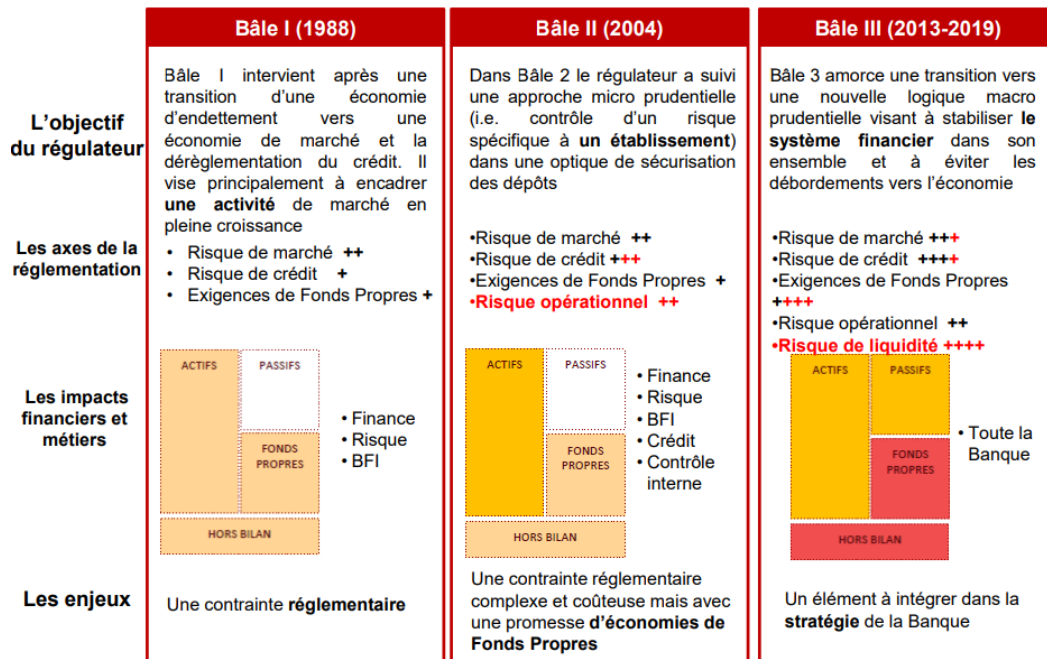


FIGURE 2.1 – Points d'attention des accords de Bâle I, II et III (Source : Cours de réglementation bancaire I.S.F.A Lyon)

Transition Les accords de Bâle ont instauré des exigences focalisées sur le passif des institutions bancaires. Paru en 2018, la norme IFRS 9 régit quant à elle la comptabilisation des dépréciations des actifs des instruments financiers.

2.1.2.2 La norme IFRS 9

Remise en cause au moment de la crise financière, la méthode de dépréciation en vigueur dans IAS 39 reposait sur une approche dite a posteriori. En effet, cette approche traduisait dans les états financiers les conséquences d'un événement passé. Venant se substituer à IAS 39, la norme IFRS 9 introduit une démarche de dépréciation dynamique basée sur des pertes attendues, cela marque ainsi un changement profond de philosophie.

Cette norme internationale, dont la version définitive a été publiée le 24 juillet 2014, s'inscrit donc dans une dynamique d'évolution réglementaire et normative. D'application en janvier 2018, celle-ci a instauré un nouveau modèle de provisionnement basé sur les pertes de crédit anticipées après une mise en évidence des limites du modèle de provisionnement de IAS 39.

Le calcul de provision pour pertes attendues selon cette norme dépend de la classification au préalable des actifs selon trois buckets. Ils sont définis comme suit :

- ▶ Bucket 1 : L'encours est sain. Le niveau de risque n'a pas été dégradé de façon significative par rapport aux conditions à l'octroi du crédit. La provision est alors calculée sur un horizon d'un an.
- ▶ Bucket 2 : L'encours est sain, néanmoins, le niveau de risque s'est dégradé de façon significative par rapport aux conditions à l'octroi du crédit. Le calcul de la provision est effectué sur la durée résiduelle de l'actif financier (à maturité).
- ▶ Bucket 3 : Le niveau de risque est avéré, un événement de crédit est survenu. Le calcul de la provision est effectué sur la durée résiduelle de l'actif financier (à maturité). La différence notable avec le bucket 2 est que le taux d'intérêt effectif permettant d'actualiser les flux est calculé sur la valeur des actifs nette de dépréciation.

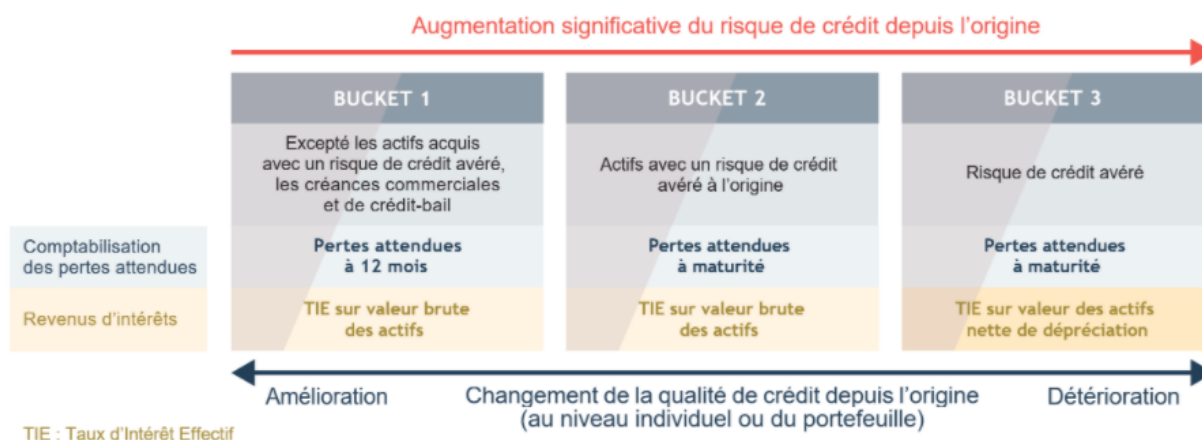


FIGURE 2.2 – Distinction des trois buckets dans le volet de dépréciation IFRS 9 ([2])

Postérieure à l'étape de classification, l'évaluation de la dépréciation au titre du risque de crédit revient à chiffrer la perte attendue par différence entre les flux attendus actualisés et les flux d'origine soit, l'encours du bilan. Puis, les provisions pour pertes attendues (ECL), correspondent à la moyenne pondérée des pertes attendues au titre du risque de crédit sur la période étudiée (douze mois ou la durée de vie totale). La perte est définie comme la différence entre la valeur actualisée des flux initialement prévus et celle des flux désormais. Ils dépendent des paramètres suivants :

$$ECL := f(PD, LGD, EAD, TIE^1) \quad (2.5)$$

1. TIE := Taux d'intérêt effectif

Finalement, la norme IFRS 9 marque le passage d'un modèle de pertes encourues à un modèle de pertes attendues. Elle se substitue ainsi au modèle IAS 39 prévoyant uniquement une dépréciation sur la base du risque avéré.

Transition Les normes réglementaires décrites ci-dessus imposent des exigences qualitatives et quantitatives aux institutions bancaires telles que le calcul des provisions pour pertes attendues (ECL) ainsi que l'évaluation des pertes inattendues (RWA). Le respect de ces exigences peut être testé dans différents états du monde (contexte économique usuel et stressé) au travers d'exercices particuliers qualifiés de tests de résistance (*stress tests*).

2.2 Les stress tests

Les *stress tests* s'inscrivent dans le dispositif de gestion des risques des institutions bancaires. Ils viennent en appui d'une méthodologie de gestion des risques bien établies et ont pour but de tester la robustesse de ces méthodes. Depuis le milieu des années 90, les banques centrales et les autorités en charge de la supervision bancaire mettent davantage l'accent sur une approche macro-prudentielle, c'est-à-dire sur l'étude des liens entre l'évolution économique (au travers d'indicateurs macroéconomiques) et la stabilité du système financier, en particulier au sein du système bancaire. Les stress tests en constituent un élément important, voire central.

2.2.1 Cadre normatif et définition

Les stress tests constituent un élément essentiel des dispositifs d'évaluation de l'adéquation du capital et de gestion des risques mis en place par les accords Bâle II (BCBS128) et leurs transpositions. A la suite des différentes crises systémiques ayant frappé la zone euro, les membres du G20 ont décidé d'intervenir sur la régulation du système bancaire mondial. A l'échelle européenne, la BCE a décidé de tester la solidité des banques européennes grâce aux exercices de stress tests établis par l'Autorité bancaire européenne (*European Banking Authority*, EBA). Les textes réglementaires s'y référant sont :

- ▶ BCBS 128 «International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards» (Bâle II), en particulier les paragraphes 434-437;
- ▶ BCBS 155 «Principles for sound stress testing practices and supervision», qui décrit les principes de conception, de gouvernance et d'utilisation des résultats de stress tests;
- ▶ CRD IV «Directive 2013/36/EU of the European Parliament and of the Council», qui transpose en droit européen l'accord de Bâle;
- ▶ « Bâle III : finalisation des réformes de l'après-crise », déc-2017, qui décrit les normes de Bâle III constituant des exigences minimales.

L'objectif principal des stress tests est d'évaluer le comportement d'un portefeuille ou d'une activité dans un contexte économique dégradé. Ils consistent à simuler des conditions économiques ou financières sévères mais plausibles afin d'en étudier les conséquences sur les institutions bancaires et de mesurer leur capacité de résistance le cas échéant. Enfin, il s'agit d'une évaluation prospective, destinée à appréhender le degré de vulnérabilité des portefeuilles ciblés à une situation de crise. Ils contribuent donc à l'identification, à la mesure et au pilotage des risques bancaires dans leur ensemble, ainsi qu'à l'évaluation de l'adéquation du capital et de la liquidité au regard des risques. À ce titre, ils constituent une mesure privilégiée de la résilience de la banque, de ses activités et de ses portefeuilles, et font partie intégrante du processus d'élaboration de l'appétit au risque.

L'article 177 de la *Capital Requirement Regulation* (CRR), nous donne quelques précisions dans les deux points cités ci-après :

- ▶ Les établissements sont dotés de solides processus de tests de résistance, qu'ils utilisent lorsqu'ils évaluent l'adéquation de leur fonds propres. Les tests de résistance permettent notamment aux établissements de détecter les événements possibles ou les modifications futures de la conjoncture économique susceptibles d'avoir des conséquences préjudiciables sur leurs expositions de crédit et d'évaluer leur capacité à faire face à de telles modifications.
- ▶ Les établissements procèdent régulièrement à des tests de résistance pour le risque de crédit, en vue d'évaluer l'incidence de certaines circonstances particulières sur le total de leurs exigences de fonds propres [...]. Le test est choisi par chaque établissement, sous réserve du contrôle prudentiel. Il doit être pertinent et raisonnablement prudent, en envisageant au moins les conséquences de scénarios de récession sévère, mais plausible. L'établissement évalue également la migration de ses notations dans le cadre des scénarios des tests de résistance. Les portefeuilles testés doivent inclure la grande majorité de son exposition totale.

2.2.2 Déclinaison et implémentation des stress tests en interne

Les stress tests de SFIL peuvent être classés en deux catégories d'exercices. Il existe les exercices réglementaires et les exercices internes, qui viennent compléter le dispositif de pilotage des risques. Parmi les exercices réglementaires nous pouvons citer :

- ▶ Le stress test EBA/BCE : Imposé par les régulateurs, cet exercice est réalisé de manière simultanée par des institutions financières en Europe en utilisant un scénario identique ainsi qu'une méthodologie commune. ce dernier est destiné à évaluer la résistance de SFIL dans un environnement dégradé et de la comparer avec ses pairs ;
- ▶ Les stress tests globaux : destinés à évaluer l'adéquation du niveau de fonds propres et de liquidité de SFIL, ces exercices sont réalisés sur l'ensemble des activités de SFIL à partir de scénarios et de méthodologies internes. Il en existe plusieurs dont l' ICAAP, l'ILAAP, le PPR ²ou encore l'exercice budgétaire ;
- ▶ Il existe d'autres stress tests demandés par le régulateur, par exemple le stress test de liquidité.

Les exercices internes sont réalisés à la demande sur un périmètre prédéfini et précis. Ces exercices complètent le dispositif de gestion des risques et affinent le pilotage opérationnel des risques. La cartographie ci-après recense l'existant en termes d'exercices de stress test menés par SFIL et l'éventail des risques couverts par chaque exercice.

| | | Risque de crédit | Risque de contrepartie | Risque de marché | Risque opérationnel & non-conformité | Risque de liquidité | Autres risques* | Stress en PnL ou en capital (i.e. MNI) |
|----------------------------|---------------------------------|------------------|------------------------|------------------|--------------------------------------|---------------------|-----------------|--|
| Stress tests réglementaire | Stress test EBA/BCE | X | X | X | X | X | | X |
| | ICAAP | X | X | X | X | X | X | X |
| | ILAAP | | | | | X | | |
| | PPR | X | X | X | X | X | X | X |
| | Stress test thématique BCE | X | X | X | X | X | X | X |
| Stress tests internes | Exercice budgétaire | X | X | X | X | X | X | X |
| | Stress tests spécifiques marché | | | X | | | | |
| | Exercices ad-hoc | X | X | X | X | X | X | X |

* Autres types de risques, par exemple le risque de réputation etc.

 Risque concerné par l'exercice

 En fonction de la demande de client final, le type de risque peut être concerné par l'exercice précis

FIGURE 2.3 – Cartographie des stress tests

2. ICAAP : Internal Capital Adequacy Assessment Process/ ILAAP : Internal Liquidity Adequacy Assessment Process/ PPR : Plan Préventif de Rétablissement

La construction des stress tests s'effectue sur la base de scénarios **économiques, idiosyncratiques³ et réglementaires plausibles**. Cela favorise la compréhension de leurs résultats et leur insertion dans le pilotage des risques au quotidien. Chaque exercice comprend au moins un scénario de référence qualifié de **baseline** qui correspond à la trajectoire la plus probable et un scénario dégradé, **adverse**, plus sévère. Les scénarios économiques couvrent des situations diverses et variées allant des réactions de la banque (baisse d'activité) à des événements impactant l'activité au-delà du contexte économique (catastrophes naturelles, pandémie ou chocs réglementaires). Pour réaliser les exercices de stress test il est nécessaire de fixer un objectif, un périmètre, une méthodologie d'implémentation et de mesurer les impacts de ces choix.

2.3 Le stress test EBA/BCE

Tous les deux ans, l'EBA organise conjointement avec la BCE, un exercice de stress-test à l'échelle de l'Union européenne. Le but est d'évaluer la résilience du secteur bancaire de l'Union Européenne à une dégradation prononcée de l'environnement macro-économique et financier. Cet exercice est quelque peu particulier et extrêmement exigeant. **Il requiert notamment la traduction théorique de chocs économiques en hypothèses stressées puis en impact sur les indicateurs des portefeuilles des banques.** La mise en évidence d'un **lien concret entre conjecture économique et l'évolution de la qualité de crédit des portefeuilles stressés** permettrait alors de **simplifier le passage du choc économique aux stress de ces indicateurs.**

2.3.1 Objectif visé

L'organisation par le superviseur de *stress tests* prudentiels pour les banques sous la supervision de l'EBA répond d'abord à une exigence réglementaire. L'objectif est alors d'évaluer la résistance des institutions financières face à un développement économique très défavorable et le respect des exigences sous cette conjoncture.

Ainsi, lors du stress test organisé par l'autorité bancaire européenne, la résilience d'une cinquantaine de banques représentant près de 70% des actifs du secteur bancaire européen est testée. De plus, la BCE mène parallèlement sur certaines institutions de la zone euro son propre exercice de stress test sur la base d'une méthodologie identique à celle développée par l'EBA. SFIL évoluant sous l'autorité de la BCE, se doit de répondre de ce dernier.

2.3.2 Rappel méthodologique

Durant cet exercice, la capacité de résistance des établissements en termes de solvabilité est évaluée à partir de deux scénarios hypothétiques, qualifiés de central et adverse, sur un horizon de 3 ans. Les banques se doivent de mesurer les impacts de ces scénarios sur leur solvabilité en appliquant une méthodologie commune, fondée sur des bilans statiques et intégrant différentes contraintes visant à homogénéiser la prise en compte du stress et rendre ainsi les résultats comparables.

Le respect de l'application de cette méthodologie fait par la suite l'objet d'un contrôle conjoint de la BCE, des autorités nationales et de l'EBA dans le cadre d'un processus très strict d'assurance-qualité. Pour cet exercice, la méthodologie est élaborée par un groupe de travail réunissant, sous l'égide de l'EBA, des représentants des différentes autorités nationales compétentes (*National Competent Authorities*). Dans un objectif d'égalité de traitement des banques, les méthodes imposées doivent être harmonieuses. Néanmoins, certaines spécificités inhérentes à un pays peuvent être acceptées.

Pour ce qui concerne les scénarios développés, le scénario central est généralement construit à partir des prévisions sur un ensemble de variables macroéconomiques faites par la BCE durant le mois de décembre précédant l'année de l'exercice. Le scénario adverse, reflet des risques systémiques apparaît beaucoup plus sévère que le scénario central qui est lui beaucoup plus plausible. Sur la base de ces scénarios, les établissements bancaires vont introduire dans leurs modèles internes les niveaux des variables transmises afin de projeter et mesurer les impacts sur leurs pertes et leurs capitaux réglementaires à horizon 3 ans. Le calcul du ratio de solvabilité est reconduit après l'application de ces stress. Le but étant d'évaluer le respect des exigences réglementaires dans ces conditions défavorables.

3. spécifiques

En fonction des résultats obtenus, des mesures peuvent être prises pour renforcer la résilience de la banque avec une immobilisation de davantage de fonds propres ou une augmentation des provisions.

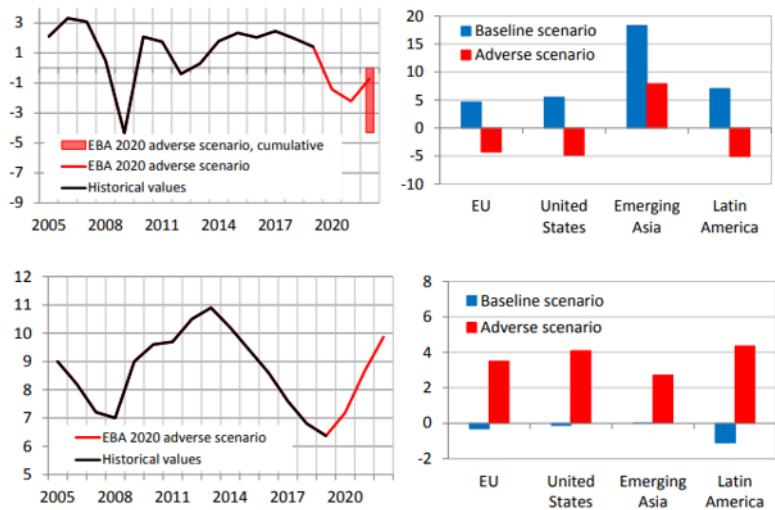


FIGURE 2.4 – Projection du taux de croissance du PIB et du taux de chômage pour différentes zones dans le cadre des stress tests 2020 ([3])

2.3.3 Vers une approche macroprudentielle

L'approche macroprudentielle est basée sur la prise en compte de la conjoncture économique d'un système. La conjoncture est la situation générale de l'économie d'un pays. Elle fait référence aux évolutions économiques de court terme d'un ensemble, par exemple un pays, une région, ou à un niveau plus fin c'est-à-dire pour un secteur économique particulier. Elle s'apprécie à l'aide d'indicateurs macroéconomiques tels que le taux de croissance du PIB, le taux d'inflation, l'évolution du taux de chômage et la balance commerciale. La conjoncture est liée aux cycles économiques. Les durées types vont de quelques mois à quelques années.

Malgré le suivi individuel des établissements financiers par les autorités de supervision et les différentes politiques prises par les banques centrales, les crises systémiques ont révélé l'insuffisance des réglementations financières fondées sur les accords de Bâle I et II, notamment dans la zone euro et ont souligné l'intérêt de développer une analyse macroéconomique du système bancaire mise en place de manière effective au sein des accords de Bâle III.

En effet, les réglementations financières antérieures, essentiellement microprudentielles, ont eu majoritairement pour but la quantification du risque de faillite d'une entité financière en ne tenant compte que du risque de défaillance individuelle d'un client. Le risque d'instabilité financière au niveau macroéconomique a donc été omis.

2.3.4 Motivation de l'étude

Pour mettre en place la réglementation macroprudentielle formulée dans les accords de Bâle III, l'UE a créé de nouvelles institutions et de nouveaux instruments réglementaires. La BCE s'est vu attribuer des pouvoirs macroprudentiels importants concernant le système bancaire. La mise en place des exercices de stress incluant des chocs économiques et l'exigence accrue de la prise en compte d'une politique macro-prudentielle ont amené les banques à penser leurs modèles internes autrement. Ainsi, les instruments mis en place pour la gestion de leurs risques sont conçus tels que ceux-ci soient sensibles à la conjoncture macroéconomique.

Ces dernières années, les études additionnelles mandatées par la BCE aux institutions bancaires (l'évaluation d'impacts sous trois scénarios IFRS 9 ou encore l'identification d'une composante downturn pour la LGD) sont l'exemple d'une politique macroprudentielle en pleine expansion. Le besoin des banques de lier leurs outils aux chocs économiques se révèle encore plus urgent dans le contexte économique que nous traversons : c'est dans ce cadre que notre étude est ancrée.

Résumé du chapitre 2

Le chapitre 2 définit les notions de risque de crédit, le cadre normatif sous-jacent et le pilotage de ce dernier via les exercices de *stress test*. Nous terminons en mettant en avant des exigences du régulateur de plus en plus grandes envers les institutions bancaires avec l'adoption d'une politique macroprudentielle de plus en plus marquée. L'application d'une telle politique a provoqué de nombreux changements dans la conception des modèles internes des institutions financières, qui ont désormais pour défi de stresser leur portefeuille via des chocs économiques sévères. La transposition de ces chocs en impact n'est pas toujours aisée et la facilité d'implémentation dépend finalement d'un lien entre les portefeuilles considérés et la conjoncture macroéconomique. Nous présenterons dans la suite les modèles macroéconomiques du risque de crédit identifiés permettant de répondre à ses exigences.

Chapitre 3

Modèles macroéconomiques du risque de crédit

Introduction au chapitre 3

Dans ce chapitre, nous chercherons à décrire l'existant en termes de modèles macroéconomiques du risque de crédit. Nous nous concentrerons sur des modèles tenant compte de la conjoncture économique. En effet, il s'agira de prendre en compte des variables macroéconomiques directement dans la modélisation des métriques du risque de crédit (PD notamment). Nous finissons par présenter le cadre théorique de deux modèles retenus : Le modèle *CreditPortfolioView* de *McKinsey* et le modèle de *Vasicek* à un facteur.

3.1 Introduction aux modèles macroéconomiques du risque de crédit

Les modèles macroéconomiques utilisés dans le cadre du pilotage du risque de crédit présentent l'avantage de faire dépendre les métriques modélisées (PD notamment) de la conjoncture économique. Par ces modèles, on tente d'expliquer le comportement des indicateurs clés du risque de crédit selon le contexte conjoncturel. L'inclusion d'un aspect macroéconomique au sein de la modélisation peut permettre d'obtenir des prévisions parfois plus précises et/ou plausibles. Ainsi, dans un premier temps, nous commencerons par présenter l'intérêt de tels modèles qui peuvent s'avérer particulièrement utiles pour l'implémentation d'exercices de stress test.

3.1.1 Intérêts des modèles macroéconomiques

L'introduction des modèles macroéconomiques a été motivée par le fait qu'en période de récession, il a été observé une hausse remarquable des taux de défaut dans le secteur bancaire, s'accompagnant d'une détérioration des notations et ce pour différents portefeuilles. Ce constat a donc conduit à la mise en oeuvre de modèles économétriques permettant de lier les indicateurs du risque de crédit tels que la probabilité de défaut ou encore le taux de perte en cas de défaut à la conjoncture économique.

L'estimation des probabilités de défaut constitue le premier pas dans l'évaluation du risque de crédit et des pertes potentielles encourues. Ainsi, les modèles macroéconomiques le plus souvent développés dans la littérature se basent avant tout sur la modélisation de la probabilité de défaut. Cependant, l'estimation puis la prédiction de ces probabilités de défaut n'est pas chose évidente, notamment en période de crise. Dans la littérature financière, les études portant sur le sujet ont été majoritairement menées sur des portefeuilles de type *corporates* ou *industriels*. Cependant, très peu d'études existent sur le périmètre des collectivités locales du fait de la difficulté de mise en oeuvre de ces modèles sur de tels portefeuilles.

Chan-Lau (2006), auteur de l'article "*Fundamentals-Based Estimation of Default Probabilities : A Survey.*", sépare en deux groupes les modèles permettant d'estimer les probabilités de défaut. Il distingue les modèles "**market-based**", qui se basent sur les prix des titres, des modèles "**fundamental-based**" qui se subdivisent en quatre sous-groupes :

| Modèle | Principe |
|--|---|
| Les modèles basés sur des variables macroéconomiques | Ces modèles ont pour but d'évaluer comment les probabilités de défaut (et les migrations) sont affectées par l'état de l'économie par l'intermédiaire d'une variable cible |
| Les modèles basés sur des variables comptables | Ces modèles permettent de prédire la probabilité de défaut individuelle de chaque client à partir de ses données financières propres |
| Les modèles basés sur les ratings | Ils permettent d'inférer la probabilité de défaut lorsque des ratings externes sont disponibles sur les contreparties en portefeuille |
| Les modèles dit hybrides | Il s'agit d'une combinaison des trois premières approches utilisant des variables économiques, financières et les notations externes pour évaluer les probabilités de défaut. |

TABLE 3.1 – Les modèles de probabilité de probabilité de défaut

Nous pouvons citer trois avantages quant à l'utilisation des modèles macroéconomiques :

1. Tout d'abord, ces types de modèle sont pratiques pour **mener des exercices de *stress tests*** ;
2. De plus, l'accès aux données est simplifié puisque des **longues séries de données macroéconomiques sont disponibles** pour de nombreux pays ;
3. Enfin, **les variables candidates cibles** permettant d'estimer ces modèles sont pour la plupart **observées historiquement**, ce qui permet d'éviter de faire des hypothèses.

Parallèlement, il existe également des inconvénients :

1. Premièrement, **la période d'observation** à considérer pour les données de modélisation doit être plus longue qu'un cycle économique. En effet, sans cette condition, le modèle ne sera pas capable de capturer les impacts de ce cycle économique sur les probabilités de défaut.
2. De plus, le stress des métriques du risque de crédit passe souvent par l'estimation d'un modèle de régression sur un indicateur de la position dans le cycle économique. Les variables d'intérêt y sont de nature macroéconomique. Dans ces modèles, **les paramètres de la forme fonctionnelle n'ont pas tendance à rester stables**. Ainsi, il est par conséquent **très difficile de capturer les interactions complexes** entre la conjoncture économique et les variables cibles du risque de crédit.
3. Enfin, **les données économiques sont souvent disponibles avec des retards substantiels**. Il est par conséquent **difficile d'estimer des modèles macroéconomiques à l'aide de données à jour**. Ainsi, se questionner sur les données à considérer en entrée est primordial. On peut également être amené à introduire des variables laguées, c'est-à-dire dont l'impact est décalé dans le temps.

3.1.2 Les variables traitées

Nous avons énoncé brièvement dans la sous-partie précédente les variables modélisées sans entrer dans le détail de leur construction. Pour éviter toute confusion, il convient de rappeler les définitions et les différences entre les métriques utilisées. Cependant, commençons tout d'abord par introduire la définition du défaut en vigueur en interne. Celle-ci résulte de la réglementation bâloise et est applicable au sein de toute banque dont les modèles internes sont en approche A-IRB (modèle interne) ou standard, elle constitue un point de départ pour la définition des métriques qui suivront.

3.1.2.1 La définition bâloise du défaut

Conformément à la définition de défaut dans le Bâle II, un impayé est considéré comme réel s'il résulte de l'incapacité financière de la contrepartie à payer son(es) échéance(s). Par opposition, les impayés dits "opérationnels" ou "techniques" en sont exclus. En effet, ils reposent sur le fait que la contrepartie a la capacité financière de payer. Initialement, un emprunteur était identifié comme étant en défaut lorsqu'il était identifié comme appartenant à l'un de cas suivants :

- ▶ L'emprunteur n'est pas en mesure d'honorer la totalité de ses obligations financières envers la banque créancière ou son groupe bancaire, à leurs échéances, sans recourir à une procédure particulière ;
- ▶ L'emprunteur est en retard de plus de 90 jours sur le paiement d'une échéance de crédit.

L'autorité bancaire européenne a publié en septembre 2016, des orientations relatives à la nouvelle définition du défaut concernant le nombre de jours d'arriéré, les indications d'une absence probable de paiement (dénommée ci-après « UTP ») :

- ▶ Le seuil d'impayé a été abaissé à 500€ et couplé avec une autre condition : la somme des impayés rapportée au total des expositions de la contrepartie concernée doit être supérieur à 1%.
- ▶ La durée de l'impayé doit être supérieure à 90 jours pour les contreparties relevant du secteur public français.

3.1.2.2 Le taux de défaut et la probabilité de défaut

Ainsi, un client est jugé en défaut sur la base de la définition de l'événement de défaut ci-dessus. Finalement, le nombre de défaut à une date t provient d'une analyse claire de chaque client d'un portefeuille. On définit alors le taux de défaut comme suit :

Definition 3.1.1 (Le taux de défaut) *Le taux de défaut est une métrique observée. Il s'agit en effet du taux réel de nouveaux défauts observés en portefeuille à une date t fixée.*

Definition 3.1.2 (La probabilité de défaut) *Dans le cadre réglementaire de Bâle II, la probabilité de défaut désigne la probabilité qu'un débiteur ne puisse faire face à ses obligations de remboursement à horizon donné. Elle modélise finalement le taux de défaut moyen d'un portefeuille ou d'une classe de risque sur un horizon donné.*

L'évaluation de la probabilité de défaut résulte le plus souvent d'une modélisation de l'événement de défaut. Une analyse discriminante est utilisée dans le cadre d'un modèle de scoring. Dans ce modèle, les clients en défaut sont identifiés par un *flag défaut*, indicateur binaire qui prend 0 si la contrepartie est saine et 1 si la contrepartie est tombée en défaut dans l'année. Le but est alors de trouver les variables discriminant au mieux la population saine de la population en défaut. Une fonction de score est alors calibrée sur ces variables et la probabilité de défaut s'expriment comme une fonction logistique du score interne.

Cette probabilité de défaut est une probabilité de long terme qualifiée de probabilité de défaut *à travers le cycle* (TTC, *through-the-cycle* en anglais). On suppose ici que l'on peut regrouper les contreparties en K classes de risque homogènes. Les contreparties d'une même classe i ayant la même probabilité PD_i^{TTC} de faire défaut. Ces probabilités calibrées sur l'ensemble du cycle économique sont utilisées pour le calcul des besoins en fonds propres réglementaires dans l'exercice usuel de l'activité. Cependant pour le besoin d'autres exercices réglementaires visant à tester la résilience de la banque, la notion de probabilité de court terme dit *point-in-time* doit être introduite.

3.1.2.3 Introduction à la probabilité de défaut *point in time*

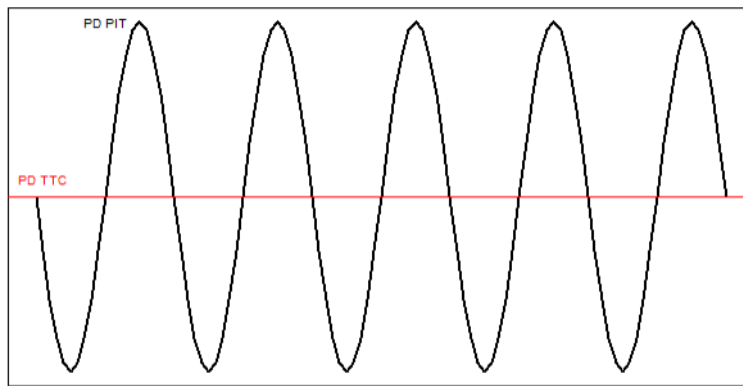


FIGURE 3.1 – Oscillation de la PD_{PIT} autour de la PD_{TTC}

Les principaux points d'attention sur ces deux métriques sont :

- ▶ La première distinction formelle entre les deux notions est proposée par le comité de Bâle. Les probabilités de défaut *point in time* (PD^{PIT}) mesurent le risque d'occurrence du défaut sur un horizon temporel court - 1 an généralement - tandis que les probabilités de défaut *through the cycle* (PD^{TTC}) sont caractérisées comme mesurant le risque de défaut sur un horizon lointain.
- ▶ Les PD^{TTC} sont calibrées sur l'ensemble du cycle économique et varient peu en fonction des conditions économiques. Les modèles permettant de les simuler dépendent uniquement de variables spécifiques à la contrepartie. Celles-ci sont donc considérées stables sur l'ensemble du cycle économique. Finalement, on note de grandes différences finalement entre les probabilités modélisées et les taux de défaut réellement observés, surtout dans les périodes de crises ou de surperformance.
- ▶ En revanche, les PD^{PIT} évoluent en fonction des variations du cycle économique. Ces probabilités de défaut sont calibrés sur la base de modèles incluant des variables reflétant le risque systémique se rattachant à l'état global de l'économie et le risque idiosyncratique, propre à la contrepartie. Sous cette vision, les probabilités de défaut calculées sont en adéquation avec les taux de défauts réellement observés chaque année.

Finalement, l'importance d'une vision *point-in-time* réside dans le fait que celle-ci permette de décrire plus précisément la situation des contreparties sur une courte période de temps tout en prenant en compte les variations du cycle économique. Ce sont ces probabilités que l'on cherche à inférer par des modèles macroéconomiques dans

les cadres des exercices de stress tests. Dans la suite, nous introduirons des notions de base nécessaires afin d'étendre notre étude à la notion de migration vers des classes autres que le défaut, c'est-à-dire les classes de risque saines.

3.2 Les notions de base

Dans les sous-parties précédentes en traitant uniquement la notion de probabilité de défaut, nous avons considéré uniquement deux états pour les contreparties en portefeuille : l'état sain et l'état de défaut. Cependant au titre du risque de crédit, les contreparties en portefeuille sont affiliées à des classes de risque à travers un système de notation interne. C'est dans ce cadre théorique qu'on introduira la notion de migration en des classes de risque saines.

3.2.1 Système de notation interne et classe de risque

La notation interne constitue un moyen d'appréciation du risque de perte consécutif à la défaillance de l'emprunteur. Cette appréciation tient compte de tous les aspects pouvant renseigner sur la contrepartie qu'ils soient qualitatifs ou quantitatifs. Le comité de Bâle retient la définition suivante des systèmes de notation interne :

" Un système de notation interne recouvre l'ensemble des processus, méthodes, contrôles ainsi que les systèmes de collecter et informatiques qui permettent d'évaluer le risque de crédit, d'attribuer des notations internes et que quantifier les estimations de défaut des pertes. "

Qu'il soit simple ou avancé, un système de notation interne a pour objectif principal d'affecter chaque contrepartie à une classe de risque. Les individus ayant été classés au même niveau de risque présentent des caractéristiques communes. Ainsi, à chaque classe de risque est attribuée une probabilité de défaut TTC de long terme. A la SFIL, le portefeuille des communes est subdivisé en 7 classes de risque (défaut non compris) comme suit :

| Classe de risque | PD ^{TTC} | Notation Masterscale |
|------------------|-------------------|----------------------|
| 1 | 0,0050% | AAA |
| 2 | 0,0150% | AA+ |
| 3 | 0,0380% | AA- |
| 4 | 0,0760% | A- |
| 5 | 0,1540% | BBB+ |
| 6 | 0,3710% | BBB |
| 7 | 1,3360% | BB |

TABLE 3.2 – Probabilités de défaut de long terme

Remarque Le défaut "*D*" désigne le pire état dans lequel une contrepartie est susceptible de migrer, la probabilité de défaut associée à cet état est de 100%.

3.2.2 Matrice de migration de notes

Dans la nouvelle génération des modèles de risque de crédit, les notes attribuées par les agences de notation ou d'autres institutions financières sont le reflet à une date donnée de la qualité de crédit d'un emprunteur qu'il soit une entreprise, un pays souverain ou en l'occurrence une collectivité locale.

La dynamique du système de notation interne est représentée par une matrice de notation dont les termes représentent les probabilités de migrations historiques d'une classe de risque i vers une classe de risque j . Il s'agit du principal outil de simulation de l'évolution globale d'un portefeuille de crédit. Par la suite, le but des modèles présentés sera de stresser ces matrices pour distordre les distributions des migrations par classe de risque. Ces matrices se présentent sous la forme suivante :

| Matrice de migration à 1 an | | | | | | | | |
|-----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D |
| 1 | $p_t^{1,1}$ | $p_t^{1,2}$ | $p_t^{1,3}$ | $p_t^{1,4}$ | $p_t^{1,5}$ | $p_t^{1,6}$ | $p_t^{1,7}$ | $p_t^{1,D}$ |
| 2 | $p_t^{2,1}$ | $p_t^{2,2}$ | $p_t^{2,3}$ | $p_t^{2,4}$ | $p_t^{2,5}$ | $p_t^{2,6}$ | $p_t^{2,7}$ | $p_t^{2,D}$ |
| 3 | $p_t^{3,1}$ | $p_t^{3,2}$ | $p_t^{3,3}$ | $p_t^{3,4}$ | $p_t^{3,5}$ | $p_t^{3,6}$ | $p_t^{3,7}$ | $p_t^{3,D}$ |
| 4 | $p_t^{4,1}$ | $p_t^{4,2}$ | $p_t^{4,3}$ | $p_t^{4,4}$ | $p_t^{4,5}$ | $p_t^{4,6}$ | $p_t^{4,7}$ | $p_t^{4,D}$ |
| 5 | $p_t^{5,1}$ | $p_t^{5,2}$ | $p_t^{5,3}$ | $p_t^{5,4}$ | $p_t^{5,5}$ | $p_t^{5,6}$ | $p_t^{5,7}$ | $p_t^{5,D}$ |
| 6 | $p_t^{6,1}$ | $p_t^{6,2}$ | $p_t^{6,3}$ | $p_t^{6,4}$ | $p_t^{6,5}$ | $p_t^{6,6}$ | $p_t^{6,7}$ | $p_t^{6,D}$ |
| 7 | $p_t^{7,1}$ | $p_t^{7,2}$ | $p_t^{7,3}$ | $p_t^{7,4}$ | $p_t^{7,5}$ | $p_t^{7,6}$ | $p_t^{7,7}$ | $p_t^{7,D}$ |
| D | $p_t^{D,1}$ | $p_t^{D,2}$ | $p_t^{D,3}$ | $p_t^{D,4}$ | $p_t^{D,5}$ | $p_t^{D,6}$ | $p_t^{D,7}$ | $p_t^{D,D}$ |

FIGURE 3.2 – Matrice de migration à horizon un an

Dans l'exemple ci-dessus, pour tout couple $(i, j) \in [1, 8]^2$, la donnée $p_t^{i,j}$ représente la probabilité de migration de la notation i vers la notation j à horizon $T = 1$ an où $T \in \mathbb{N}^*$. La dernière colonne de la matrice de migration représente les probabilités de défaut à la date t pour chaque classe de risque. Les matrices de transition peuvent dépendre du temps (PIT) ou invariante en temps (TTC).

Les taux de migration de crédit sont calculés en comparant les notes le premier jour et le dernier jour de l'année pour construire les taux de migration. Les mouvements de notation au cours de l'année ne sont donc pas comptabilisés. Aussi, cette méthode d'estimation, basée sur un comportement moyen, ne capture pas réellement les événements rares tels que les transitions ou séries de déclassements consécutifs au cours de l'année. La valeur par défaut est considérée comme être une classe de risque absorbante : si une reprise après défaut peut être observée, elle est extrêmement rare. Habituellement, les entreprises en défaut sont exclues du nombre de contreparties totales l'année suivante. Ainsi, une contrepartie en défaut en $t-1$ est maintenue en défaut en t .

De plus, nous notons que ces matrices de migration dépendent du portefeuille considéré et du système de notation interne relatif au portefeuille étudié. Elles dépendent aussi de l'horizon sur lequel le risque de crédit doit être évalué.

Remarques

1. Usuellement les probabilités sur la diagonale (probabilité de conserver la même classe de risque/ notation) sont beaucoup plus élevés que les probabilités d'évoluer vers les autres classes de risque.
2. De plus les probabilités d'être dégradées (diagonale supérieure de la matrice) sont plus élevées que les probabilités d'être améliorées (diagonale inférieure de la matrice).

3.2.3 Probabilités de défaut marginales et cumulées

Dans le cadre de l'implémentation du stress test BCE, l'analyste a besoin de deux informations spécifiques :

1. La **distribution du nombre de contreparties** par classe de risque sur l'horizon de projection
2. Les **probabilités de défaut PIT cumulées** pour le calcul des ECL.

La distribution du nombre de contrepartie par classe de risque

Les matrices de migration présentées à la section précédente sont des matrices de migration conditionnelles¹ qui traduisent l'évolution des notations entre les dates t et $t+1$. Ainsi, les matrices de migration marginales une fois stressées vont permettre de faire évoluer (améliorer ou dégrader) la distribution du nombre de contreparties par classe de risque. C'est donc par la distorsion de la distribution du nombre de contreparties que le portefeuille est alors stressé. Au titre du risque de crédit, les actifs pondérés du risque (RWA) sont ensuite recalculés sur la base de cette nouvelle réallocation annuelle du nombre de contreparties par classe de risque. Cela va permettre de déduire un nouveau ratio de solvabilité stressé.

Les probabilités de défaut PIT cumulées

Au niveau de la dernière colonne des matrices marginales, on trouve les probabilités de défaut PIT marginales. Mathématiquement, la probabilité de défaut marginale $PDM_{i,t}$ de la classe de risque i à l'instant t , est la probabilité de faire défaut entre $t-1$ et t sachant que le défaut n'a pas eu lieu avant l'horizon $t-1$ soit :

$$\forall t \geq 1, PDM_{i,t} = \mathbb{P}(\tau \in]t-1; t] | \tau \geq t-1) \text{ avec } \tau \text{ le temps d'arrêt de défaut} \quad (3.1)$$

Cependant dans le cadre de la vision à long terme, il est nécessaire d'introduire la notion de probabilité de défaut cumulée. On notera $PDC_{i,t}$ la probabilité de défaut cumulée de la classe de risque i à l'horizon t .

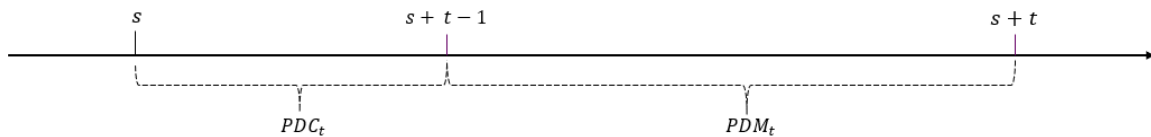


FIGURE 3.3 – Vision des probabilités de défaut cumulée et marginale depuis l'instant de calcul s

Enfin, la probabilité de défaut cumulée $PDC_{i,t}$ est obtenue par récurrence à partir de la probabilité de défaut marginale comme :

$$\begin{cases} PDC_{i,0} = 0 \\ PDC_{i,t} = PDC_{i,t-1} + (1 - PDC_{i,t-1}) \times PDM_{i,t} \quad \forall t \geq 1 \end{cases}$$

¹ appelées également matrices marginales

3.2.4 Rappel des objectifs de notre étude

Dans les sous parties précédentes, nous avons introduit l'ensemble des notions nécessaires à la compréhension des modèles macroéconomiques du risque de crédit. Dans les sous parties qui suivent, nous présentons deux modèles macroéconomiques que nous jugeons pertinents pour répondre au problème posé. Ces deux modèles sont les suivants : le modèle **CreditPortfolioView** de la firme McKinsey et le **modèle de Vasicek à un facteur**, qui est une adaptation du modèle de la firme de Merton.

Comme rappelé dans la synthèse, du point de vue de l'analyste quantitatif, le *stress test* BCE consiste à distordre la distribution de l'exposition à travers les classes de risque de manière conditionnelle à la survenance des projections de la BCE. Cela nécessite de pouvoir calculer des matrices de migration à travers les classes de risque dont la gravité dépend des variables macroéconomiques fournies par la BCE pour un horizon de 3 ans.

Ces deux modèles ont pour objectif de stresser la distribution du nombre de contreparties par classe de risque. Leur particularité est qu'ils tiennent directement compte de la conjoncture économique au sein des étapes de modélisation. L'objectif de ce chapitre sera de présenter le cadre théorique de ces deux modèles et d'arbitrer quant au choix de l'un ou l'autre pour la poursuite de notre étude. Ainsi, les deux modèles qui seront présentés dans la suite vont permettre de stresser l'évolution du nombre de contreparties par classe de risque selon les projections macroéconomiques de la BCE.

3.3 Le modèle CreditPortfolioView de McKinsey & Co

Objectif du modèle

Le modèle **CreditPortfolioView** est un modèle macroéconomique d'évaluation du risque de crédit². Dans le cadre de cette étude, Nous nous concentrons la composante de ce modèle permettant de projeter le risque de défaut factoriel.

Ce modèle est un modèle multifactoriel utilisé pour simuler la distribution des probabilités de transition entre classe de risque saine et de défaut, conditionnellement au cycle économique. Le lien avec le cycle économique se fait par l'intégration de facteurs macroéconomiques comme le taux de chômage, le taux de croissance du PIB dans la modélisation des probabilités de défaut.

Motivation du développement de ce modèle

Le développement du modèle CreditPortfolioView a été motivée par l'observation occasionnelle d'une hausse des taux de défaut lors des crises historiques : lorsque l'économie se détériore, les taux de dégradation et de défaut augmentent. Ce cycle est inversé lorsque l'économie connaît une période dite d'expansion. En d'autres termes, l'hypothèse principale du modèle est la suivante : les cycles de crédit suivent de près les cycles économiques.

L'état de l'économie étant dans une large mesure motivée par des facteurs macroéconomiques, le modèle CreditPortfolioView propose une méthodologie pour lier certains facteurs macroéconomiques aux probabilités de défaut et de transition. Conditionnellement à disponibilité des données, cette méthodologie peut être appliquée dans chaque pays, à différents secteurs et pour différentes classes de débiteurs, qui réagissent différemment au cours du cycle économique comme par exemple : la construction, les institutions financières, l'agriculture, les services, etc.

2. édité par McKinsey en 1998

3.3.0.1 Modèle de prédiction des probabilités de défaut

Dans ce modèle, les taux de défaut sont modélisés par une fonction logistique d'une variable que l'on qualifie d'indice macroéconomique. On note $\mathcal{P}d_{j,t}$, la probabilité conditionnelle de défaut à la date t, du secteur j. Elle se calcule comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{P}d_{j,t} = \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}} \\ Y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \dots + \beta_{j,m} X_{j,m,t} + \epsilon_{j,t}, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon,j}^2) \end{cases}$$

où :

- $Y_{j,t}$ est la valeur de l'indice macroéconomique, celui-ci est lié aux variables macroéconomiques par un modèle linéaire.
- $X_{j,i,t}$ représentent les variables macroéconomiques endogènes choisies pour la calibration du modèle. Les coefficients associés $\beta_{j,0}, \beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,m}$ à ces variables sont à estimer par la méthode des moindres carrés ordinaires.
- $\epsilon_{j,t}$ représente un terme d'erreur qui suit une distribution normale et qui est indépendant de $Y_{j,t}$.

Toutes les variables macroéconomiques $X_{j,i,t}$ de ce modèle sont supposées suivre un processus autorégressif d'ordre 2 (AR2) :

$$X_{j,i,t} = \alpha_{j,i,0} + \alpha_{j,i,1} X_{j,i,t-1} + \alpha_{j,i,2} X_{j,i,t-2} + \omega_{j,t} \quad \text{où} \quad \omega_{j,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\omega,j}^2)$$

Finalement, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{P}d_{j,t} = \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}} \\ Y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \dots + \beta_{j,m} X_{j,m,t} + \epsilon_{j,t} \\ X_{j,i,t} = \alpha_{j,i,0} + \alpha_{j,i,1} X_{j,i,t-1} + \alpha_{j,i,2} X_{j,i,t-2} + \omega_{j,t} \end{cases}$$

Remarque : Dans ce modèle, la fonction f telle que $\mathcal{P}d_t = f(y_t)$ est la fonction logistique :

$$\begin{cases} f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R} \\ y \longrightarrow \frac{1}{1 + e^{-y}} \end{cases}$$

La transformation permet de s'assurer que les taux de défaut prédit seront toujours compris entre 0 et 1.

3.3.0.2 Obtention des matrices de transition point in time

L'objectif de cette partie est d'obtenir des matrices conditionnelles à l'état de l'économie. Comme présenté dans la partie théorique, ces matrices sont dépendantes du temps.

Input du modèle

Le point de départ est la matrice de transition markovienne inconditionnelle basée sur les données historiques de l'entreprise que nous noterons ΦM . C'est une matrice indépendante du cycle économique qui peut être vue comme la moyenne des matrices de transition à 1 an sur l'historique. Elle retrace les transitions moyennes à 1 an du portefeuille. Le but est de distordre cette matrice de migration moyenne par un facteur liée à l'état de l'économie.

Établissement d'un lien avec l'économie

Rappelons qu'empiriquement les taux de défaut sont supposés évoluer dans le même sens que l'évolution de la conjoncture économique : en période de récession, les taux de dégradation ont également tendance à augmenter et l'inverse est constaté en période de reprise. On introduit le ratio suivant :

$$\frac{\mathcal{P}d_{j,t}}{\Phi SDP} \quad (3.2)$$

où $\mathcal{P}d_{j,t}$ est la probabilité à l'échelle du portefeuille prédite par le modèle à la date t et ΦSDP est le taux de défaut moyen calibrés sur l'historique disponible, on comprend alors qu'on peut capter ces mouvements. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{P}d_{j,t}}{\Phi SDP} < 1 \text{ en période d'expansion économique} \\ \frac{\mathcal{P}d_{j,t}}{\Phi SDP} > 1 \text{ en période de récession économique} \end{array} \right.$$

En effet, en période d'expansion, la probabilité de défaut prédite devrait être inférieure au taux de défaut historique moyen, et l'inverse devrait se produire en période de récession. Finalement, pour conditionner la matrice de transition moyenne TTC à 1 an au cycle économique, c'est ce ratio qui est utilisé. A la date t, les matrices point-in-time se calcule comme suit :

$$M_t = M \left(\frac{\mathcal{P}d_{j,t}}{\Phi SDP} \right) \quad (3.3)$$

Cet ajustement consiste à translater la masse de probabilité vers la classe des défauts et les classes de risques saines vers les classes de risque les plus risquées, lorsque ce ratio est supérieur à 1, et inversement lorsque ce ratio est inférieur à 1. La probabilité $\mathcal{P}d_{j,t}$ peut être estimé à n'importe qu'elle date. Ainsi, cette approche peut permettre de générer des matrices de transition multi-périodes :

$$M_T = \prod_{t=1, \dots, T} M \left(\frac{\mathcal{P}d_{j,t}}{\Phi SDP} \right) \quad (3.4)$$

On obtient ainsi des matrices à n'importe quel horizon temporel.

3.3.0.3 Intérêt du modèle exposé par rapport au sujet

Le modèle présenté suppose qu'avec un historique conséquent on peut trouver un lien fonctionnel simple entre les taux de défaut d'un portefeuille et des variables macroéconomiques permettant de prédire la probabilité de défaut future d'un portefeuille conditionnellement à l'état de l'économie. Ce modèle a priori simple à implémenter présente des avantages et des inconvénients :

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Ce modèle relie de manière simple la probabilité de défaut et les matrices de transition à la conjoncture économique.2. Ce modèle permet de déduire facilement une distribution des pertes. | <ol style="list-style-type: none">1. Ce modèle détermine uniquement la probabilité de défaut à l'échelle d'un pays ou d'un secteur d'activité et non d'une contrepartie.2. Ce modèle nécessite de disposer de longues séries de données pour pouvoir approcher les probabilités de défaut en utilisant directement les taux de défaut.3. La distribution des migrations est simplement stressée par une élasticité, on ne prend pas en compte les spécificités de chaque classe de risque.4. Ce modèle suppose que les variables macroéconomiques sont des processus auto-régressifs d'ordre 2, ce qui est difficilement vérifiable dans la réalité. |

TABLE 3.3 – Avantages et inconvénients du modèle CPV

3.4 Le modèle de Vasicek à un facteur

Cette section est consacrée à l'introduction du modèle de Vasicek à un facteur. Dans ce modèle, les migrations sont liées à l'état de l'économie pour l'année t par l'intermédiaire du facteur systémique Z_t . Le modèle de Vasicek à un facteur s'inspire largement du modèle de la firme de Merton. Nous commencerons donc cette sous partie en rappelant les principes de base du modèle de la firme de Merton.

3.4.1 Introduction au modèle de la firme de Merton

La théorie de la firme de Merton constitue la première base pour la construction des modèles structurels du risque de crédit. Ce modèle repose sur une représentation simplifiée de la structure financière de la firme et de sa dette aux moyens de deux hypothèses : on suppose que la dette obligataire est composée d'un unique zéro-coupon d'échéance T et de nominal B (*Hypothèse 1*) et à toute date t , les actifs de la firme (en valeur de marché) valent $A(t)$ et les fonds propres valent $E(t)$ (*Hypothèse 2*).

Il est important de rappeler que, dans ce modèle, l'événement de défaut intervient à l'instant où la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un seuil. En se plaçant à l'échéance T , ce seuil critique correspond à la valeur totale de la dette contractée par la firme, soit B . On distingue alors deux cas :

| | |
|--|--------------------------------|
| <i>Valeur des actifs de la firme</i> $A(t)$ | <i>Fonds propres</i> $E(t)$ |
| | <i>Dettes</i> $B(t)$ |

- Si $A_T \geq B$: les actifs sont supérieurs au nominal de l'obligation, la firme peut rembourser sa dette et les fonds propres sont égaux à la différence entre ces deux valeurs.
- Si $A_T \leq B$: les actifs sont inférieurs au nominal de l'obligation, l'entreprise est alors en défaut et les prêteurs reçoivent A_T .

FIGURE 3.5 – La firme de Merton

A l'échéance T , la valeur des fonds propres E_T peut être considéré comme un call de strike B et de sous-jacent A_T : $E_t = (A_T - B)^+$. Notons que cette égalité est maintenue pour $t \leq T$. Ainsi, la détermination de E_t implique la spécification du processus A_t , représentant la valeur des actifs de la firme à chaque instant t . Merton suppose alors une dynamique de Black-Scholes, soit :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad A_0 > 0 \tag{3.5}$$

où μ désigne la moyenne du rendement des actifs, σ , la volatilité du rendement des actifs et W_t , un mouvement brownien. Puis, la valeur des actifs à chaque instant est telle que :

$$A_t = A_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \tag{3.6}$$

L'événement de défaut de la firme a lieu lorsque la contrepartie ne peut plus honorer ses engagements à un horizon donné du fait que la valeur de ses actifs soit inférieure à la dette engendrée. La probabilité de défaut de la firme à l'échéance s'écrit :

$$P(A_T < B) = P(W_T < c) = \phi(c) \tag{3.7}$$

$$\text{où } c = \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{B}{A_0} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right).$$

Remarque Φ est la fonction de répartition d'une variable de loi normale centrée réduite et Φ^{-1} son inverse.

Le processus de passage en défaut de la firme Merton est décrit dans le schéma suivant :

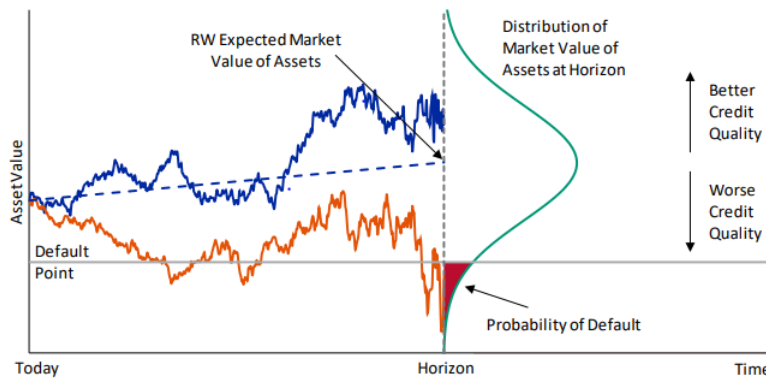


FIGURE 3.6 – Schéma synthétique du modèle de Merton ([1])

Ce schéma représente la trajectoire de deux actifs ainsi que la distribution de leur valeur marché à un instant donné. On distingue sur ce graphique la barrière de défaut qui lorsqu'elle est franchie entraîne le défaut de la contrepartie. Nous verrons dans les sous parties suivantes comment celle-ci est définie au titre du risque de crédit. Avant cela nous présenterons une adaptation du modèle de Merton à notre problématique.

3.4.2 Adaptation du modèle de Merton à notre problématique

Bien que le modèle de la firme de Merton présente des limites du fait de ces hypothèses simplificatrices, il propose une première modélisation permettant de relier le défaut d'une firme à son activité économique. Aussi, il s'est imposé au fil des années comme un modèle de référence de la modélisation des probabilités de défaut au titre du risque de crédit. En voici l'adaptation ci-dessous.

Considérons une contrepartie k de classe de risque i , l'événement de défaut de cette contrepartie est modélisé à partir d'une variable indicatrice Y_t^k telle que :

$$Y_t^k = \begin{cases} 1 & \text{Si la contrepartie } k \text{ a fait défaut en } t \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Cet événement discret peut être transformé en événement continu par l'introduction d'une **variable latente** R_t^k . Cette variable aléatoire modélise la variation de la valeur de la firme.

Dans le cadre du modèle de la firme de Merton, le défaut a lieu lorsque la variable aléatoire R_t^k passe sous un certain seuil $B_{i,K+1}$ ³, on a donc une équivalence entre les deux événements suivants :

$$\{Y_t^k = 1\} \iff \{R_t^k \leq B_{i,K+1}\}$$

En effet, en reprenant l'équation (3.7), il vient que l'événement de défaut est équivalent à :

$$\{Y_t^k = 1\} \iff \{A_t^k < B\} \iff \{W_t^k < c\} \text{ où } W_T \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t}) \quad (3.8)$$

Ainsi, en posant $R_k^t = \frac{W_t^k}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $B_{i,K+1} = c$, nous avons bien l'équivalence ci-dessus.

Remarque On note qu'on peut élargir ce problème aux migrations entre les classes de risque saines dans le but de pouvoir estimer tous les paramètres de la matrice de transition conditionnellement à la conjoncture économique. Pour ce faire nous introduisons le cadre théorique du modèle de Vasicek.

3.4.3 Cadre théorique du modèle de Vasicek à un facteur

3.4.3.1 Approche intuitive du modèle

Le modèle de Vasicek à un facteur a pour objectif de lier les migrations entre les classes de risque/notations à l'état de l'économie par l'intermédiaire du facteur systémique Z_t . Pour simplifier la compréhension du cadre théorique du modèle, voici deux graphiques qui permettront au lecteur de comprendre son objectif principal :

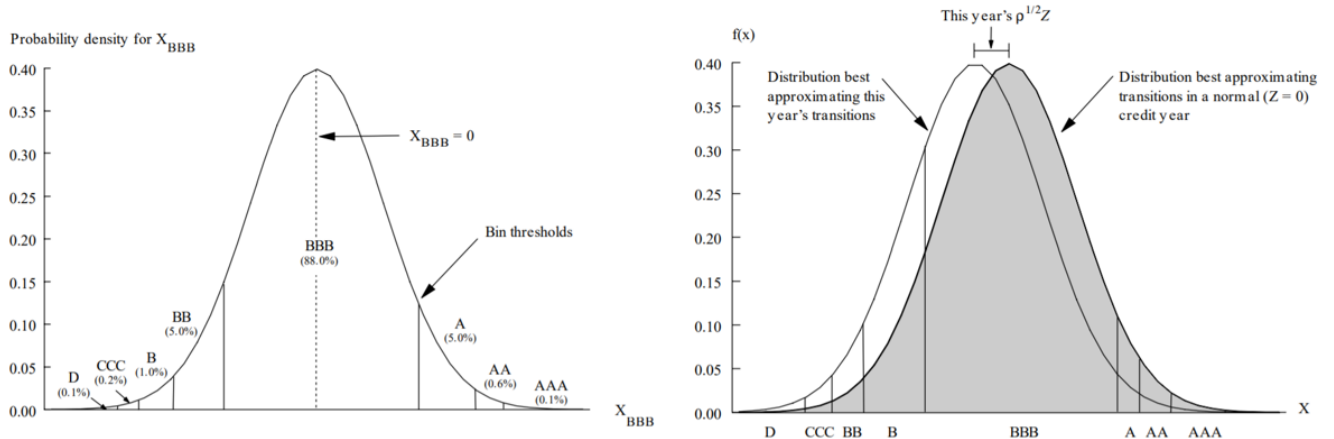


FIGURE 3.7 – Distorsion des seuils de migration dans le modèle de Vasicek à un facteur ([7])

Considérons un système de notation *masterscale* contenant 8 états de AAA à CCC, le 9^{ème} états étant l'état de défaut D. Sur le graphique de droite est représenté la fonction de densité de la distribution du rendement d'une contrepartie initialement notée BBB. Des droites verticales délimitent chaque zone de migration. Empiriquement, une contrepartie de rating initial BBB à 88.0% de chance de conserve sa notation à horizon T an. De plus, la probabilité que son rating soit amélioré est de 5.7%⁴ et inversement la probabilité que son rating soit dégradé est de 6.3%⁵.

3. Pour un système de notation à K classes de risque, la $(K + 1)$ ^{ème} classe de risque représente l'état de défaut. Ainsi, $B_{i,K+1}$ est le seuil critique en dessous duquel une contrepartie de classe de risque i migrent vers l'état de défaut.

4. Somme des probabilités de tous les ratings supérieurs ou égaux à BBB

5. Somme des probabilités de tous les ratings inférieurs ou égaux à BBB

Les droites verticales, délimitant les zones de migration, représentent les quantiles de la distribution des rendements évalués liée aux probabilités historiques de transition. Ainsi, les seuils historiques de migration se calculent comme suit :

$$\begin{cases} B_{BBB,j} &= \phi^{-1}(PD_{BBB,j}) & \text{où } j \in [AAA, CCC] \\ B_{BBB,D} &= \phi^{-1}(PD_{BBB,D}) & \text{où } j = D \end{cases}$$

Le graphique de droite présente la superposition de la distribution des migrations initiales et d'une distribution stressée conditionnellement à l'état de l'économie. On observe que celle-ci a translaté vers la gauche par rapport à sa position initiale d'une distance de $\sqrt{\rho}Z_t$.

On comprend alors que l'ambition du modèle de Vasicek à un facteur est d'évaluer l'écart entre une distribution empirique moyenne et une distribution stressée par la seule donnée $\sqrt{\rho}Z_t$. En d'autres termes, ce modèle permet d'inférer la distribution des migrations à une date t à partir d'une distribution des migrations moyennes empirique .

La facteur ρ permet de capter la sensibilité de la distribution à la conjoncture et Z_t la position exacte dans le cycle économique en période de stress.⁶ Dans la suite, nous présenterons le cadre théorique de ce modèle et l'intérêt de son utilisation dans notre étude.

Remarques :

- L'appellation *modèle de Vasicek à un facteur* vient du fait que l'état de l'économie à l'instant t est capturée par un unique facteur systémique Z_t uniquement.
- Dans la suite, nous substituerons la notion de notation à celle de classe de risque. En effet, la classe de risque est la transformation numérique de la notation, variable ordinale, les deux notions sont similaires.

3.4.3.2 Elargissement du modèle de Merton aux migrations

Considérons un système de notation comprenant K classes de risque, la $(K + 1)^{\text{ième}}$ classe de risque désignant l'état de défaut. Le modèle de Merton suppose que les probabilités de transition entre les différentes classes de risque sont définies par des seuils auxquels est comparée une variable aléatoire R_t^k de loi normale standard, représentant le rendement de la contrepartie k à la date t. Pour une classe de risque i, la probabilité que la contrepartie k migrent de i vers j à horizon 1 an s'écrit :

$$p^{i,j} = \mathcal{P}(B_{i,j} \leq R_t^k \leq B_{i,j+1}) = \mathcal{P}(R_t^k \leq B_{i,j+1}) - \mathcal{P}(R_t^k \leq B_{i,j}) = \Phi(B_{i,j+1}) - \Phi(B_{i,j}) \quad (3.9)$$

$B_{i,j}$ est le seuil de migration permettant de déclencher le passage de la classe de risque i à la classe de risque j lorsqu'il est franchit.

Remarque Il est à noter que le seuil relatif au pire état, le défaut a une borne inférieure de $-\infty$ et le seuil relatif au meilleur état, la classe de risque à une borne supérieure de $+\infty$ soit :

$$\begin{cases} p^{i,1} &= \mathcal{P}(B_{i,1} \leq R_t^k) &= 1 - \Phi(B_{i,1}) \\ p^{i,D} &= \mathcal{P}(R_t^k \leq B_{i,D}) &= \Phi(B_{i,D}) \end{cases}$$

Le facteur $B_{i,1}$ est le seuil de transition déclenchant le passage de la classe de i à la classe de risque 1. Le facteur $B_{i,D}$ est le seuil de transition déclenchant le passage de la classe de i à l'état de défaut D.

6. Z_t va permettre de déterminer si l'on est dans un cycle bas ou haut de crédit

3.4.3.3 Estimations des seuils de migration

Notons $p_t^{i,h}$ la probabilité annuelle PIT de migrer de la classe de risque i vers la classe de risque h . La probabilité que la contrepartie k de classe de risque i à la fin de l'année $t-1$ soit attribuée à une classe inférieure ou égale à j (et donc incluant le défaut) à la fin de l'année t est notée $\sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h}$.

Etape 1 Inconditionnellement à l'état de l'économie

Avec les notations de l'adaptation du modèle Merton introduites en section précédente, $\sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h}$ désigne la probabilité que rendement généré par la contrepartie k soit inférieur à seuil $B_{i,j}$. Il s'agit donc de la probabilité de l'événement $\{R_t^k \leq B_{i,j}\}$. Mathématiquement, cela revient à écrire la relation suivante :

$$\mathcal{P}(R_t^k < B_{i,j}) = \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} \quad (3.10)$$

Rappelons que l'on suppose que la variable latente R_t^k suit une loi normale centrée réduite. Ainsi, on en déduit la valeur du seuil $B_{i,j}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R_t^k < B_{i,j}) &= \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} \\ \Leftrightarrow \Phi(B_{i,j}) &= \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} \\ \Leftrightarrow B_{i,j} &= \Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} \right) \end{aligned}$$

Remarque Dans la pratique, les seuils de transition $B_{i,j}$ sont estimés à partir des probabilités *through-the-cycle* moyenne de transition empirique calibrées sur l'historique que l'on notera $\bar{p}_t^{i,h}$, il vient :

$$\hat{B}_{i,j} = \Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h} \right) \quad (3.11)$$

Etape 2 Conditionnellement à l'état de l'économie

Pour conditionner les migrations entre les classes de risque et au défaut à l'état de l'économie, le modèle de Vasicek à un facteur impose pour la $k^{\text{ième}}$ contrepartie du portefeuille des migrations régies par le processus suivant :

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_t^k$$

où R_t^k désignant le rendement standardisé généré par la contrepartie k au cours de l'année t devient la somme pondérée deux termes :

1. L'état de l'économie au cours de l'année t qui est résumé par le facteur systémique noté Z_t
2. Un processus spécifique à la contrepartie k dans l'année t noté ϵ_t^k qualifié de facteur idiosyncratique.
3. Le paramètre ρ est la corrélation entre le rendement et le facteur systémique. Il est supposé être invariant dans le temps au niveau du portefeuille. Ainsi, il mesure la sensibilité des migrations entre les classes de risque et vers le défaut à l'état de l'économie.

Remarque Dans le modèle de Vasicek à un facteur, R_t^k suivant distribution normale standard, il existe deux facteurs de risque Z_t et ϵ_t^k **indépendants** et de **distribution normale standard** telle que l'on puisse décomposer R_t^k comme une somme pondérée ces deux termes. Un calcul simple de l'espérance et la variance R_t^k montre par construction que le rendement suit une loi normale centrée réduite.

Conditionnellement à l'état de l'économie, la probabilité de l'événement $\{R_t^k < B_{i,j}\}$ se calcule avec cette nouvelle décomposition du rendement et il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} &= \mathcal{P}(R_t^k < B_{i,j}) \\ \Leftrightarrow \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} &= \mathcal{P}(\sqrt{\rho^2} \times Z_t + \sqrt{1-\rho^2} \times \epsilon_t^k < B_{i,j}) \\ \Leftrightarrow \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} &= \mathcal{P}\left(\epsilon_t^k < \frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ \Leftrightarrow \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} &= \phi\left(\frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned}$$

Remarque De nouveaux seuils de transition régissant la migration entre les classes de risque vers le défaut fonction du facteur systémique Z_t et de la sensibilité au cycle économique ρ apparaissent :

$$B_{i,j}^* = \frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (3.12)$$

En utilisant l'estimateur de $B_{i,j}$ dans l'équation (3.6), il vient :

$$\sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} = \phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h}\right) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (3.13)$$

Finalement, nous possédons tout en main pour estimer chaque coefficient de la matrice de transition pit.

Etape 3 Estimation de la matrice de transition PIT à la date t

Soit M_t la matrice de migration pit à stresser. On notera $p_t^{i,j}$ ou $M_t^{i,j}$ les coefficients de cette matrice. Avec les notations précédentes, pour tout couple $(i, j) \in [1, K] \times [1, K+1]$:

$$p_t^{i,j} = (M_t)^{i,j} = \mathcal{P}(B_{i,j+1}^* \leq R_t^k \leq B_{i,j}^*) = \mathcal{P}(B_{i,j}^* \leq R_t^k) - \mathcal{P}(B_{i,j+1}^* \leq R_t^k) = \sum_{h=j}^{K+1} p_t^{i,h} - \sum_{h=j+1}^{K+1} p_t^{i,h} \quad (3.14)$$

Pour la suite, on retiendra le système suivant :

$$p_t^{i,j} = \begin{cases} 1 - \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h} \right) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall i \in [1, K] / j = 1 \\ \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(\sum_{h=j+1}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h} \right) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) - \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h} \right) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall (i, j) \in [1, K] \times [2, K] \\ \phi \left(\frac{\Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h} \right) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall i \in [1, K] / j = K + 1 \end{cases}$$

Finalement, les matrices conditionnelles à l'état de l'économie sont fonction des paramètres suivant :

$$M_t = f(\bar{M}, Z_t, \rho) \quad (3.15)$$

Où \bar{M} est une matrice empirique des migrations moyennes inconditionnelle au cycle économique et de coefficients $\bar{M}_{i,j} = p^{i,j}$, Z_t est le facteur systémique permettant de capturer la position dans le cycle économique et ρ un facteur de sensibilité au cycle économique.

3.4.4 Intérêt du modèle exposé par rapport au sujet

Le modèle de Merton possède plusieurs intérêts par rapport à notre sujet que nous récapitulerons dans la table suivante :

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| <p>1. Le modèle de Vasicek à un facteur est malléable. Il laisse plus de flexibilité à l'analyste dans ses choix de modélisation (pluralité de méthodes pour estimer ρ et Z_t).</p> <p>2. Dans ce modèle, les migrations sont dictées par un facteur systémique, presque sans perdre aucune information. Il s'agit de la dynamique de Z_t qui anime la dynamique des taux de migration. Cette approche est plus fine que celle proposée dans le modèle CPV.</p> | <p>1. Le modèle de Vasicek à un facteur fait partie d'un processus de modélisation long et exigeant.</p> <p>2. Le nombre de paramètres à estimer est de trois contre deux pour le modèle CPV.</p> |

TABLE 3.4 – Avantages et inconvénients du modèle de Vasicek à un facteur

3.4.5 Choix du modèle

Le choix du modèle s'est porté sur la flexibilité et la marge de manoeuvre autorisée par ceux-ci. En considérant ces deux critères le modèle de Vasicek se démarque considérablement du premier. Le fait que l'on puisse estimer la sensibilité au cycle économique permet tout d'abord d'avoir une vision plus précise de l'impact de la conjoncture sur les migrations. En effet, dans le modèle CPV, seule l'élasticité régit les migrations, en cas de conjoncture très défavorable, le stress du portefeuille pourrait s'avérer bien trop important. Finalement, le rôle joué par les paramètres du modèle de Vasicek permet d'obtenir une déformation des distributions des migrations bien plus fine. Pour illustrer le phénomène de déformation des seuils de migration par l'état de l'économie et interpréter le rôle du facteur systémique, nous avons choisi d'implémenter une application numérique simple.

Premier exemple

En considérant un système avec $K = 7^7$ classes de risque, prenons l'exemple d'une contrepartie initialement en classe de risque 5. Fixons la valeur de ces seuils de migration TTC arbitrairement :

| h | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|------------------|---------------------|-------------------|-------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| $\bar{p}_{5,h}$ | 0,154% | 3,69% | 5,49% | 50,87% | 18,02% | 17,62% | 3,48% | 0,55% |
| Inter. $B_{5,h}$ | $]-\infty ; -2.76]$ | $]-2.76 ; -1.75]$ | $]-1.75 ; -1.31]$ | $]-1.31 ; 0.26]$ | $]0.26 ; 0.78]$ | $]0.78 ; 1.75]$ | $]1.75 ; 2.55]$ | $]2.55 ; +\infty[$ |

Où :

- h représente le numéro de la classe de risque ;
- $\forall h \in [1, 8]$, $\bar{p}_{5,h}$ est la probabilité moyenne empirique qu'une contrepartie initialement de classe de risque 5 migre vers la classe de risque h ;
- $\forall h \in [1, 8]$, Inter. $\bar{B}_{5,h}$ est l'intervalle des seuils de transition TTC pour chaque classe de risque. Il est calculé comme le quantile d'une distribution normale des probabilités de transition $\bar{p}_{5,h}$.

En représentant les seuils de transition sur la distribution d'une loi normale, on observe que l'aire sous la courbe de densité entre les seuils $B_{i,5}$ et $B_{i,6}$ est la plus grande. Cela traduit le fait que la probabilité qu'une contrepartie de classe de risque 5 reste dans cette même classe de risque à horizon 1 an est plus élevée que les probabilités de transiter :

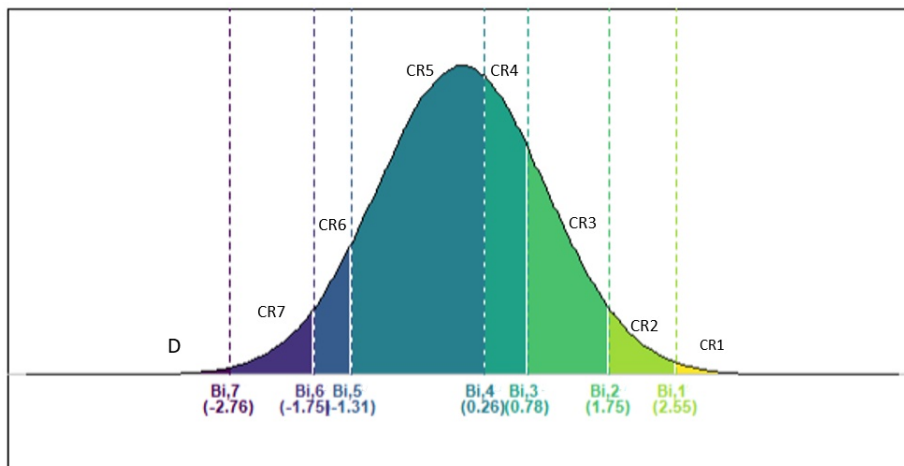


FIGURE 3.8 – Distribution des migrations moyennes à horizon 1 an d'une contrepartie de classe de risque 5

7. La $(K + 1)^{\text{ième}}$ classe de risque étant le défaut

Fixons le paramètre de sensibilité à l'état de l'économie de façon arbitraire. Nous choisissons de prendre $\rho = 20\%$. On choisit également deux valeurs du facteur systémique de signe opposé $Z_t = \{-2.8, 2.8\}$. Calculons ensuite les nouveaux seuils de migration stressés par la formule suivante :

$$B_{5,h}^* = \frac{B_{5,h} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (3.16)$$

A ρ fixé, on distingue alors 2 cas :

1. Lorsque $Z_t < 0$:

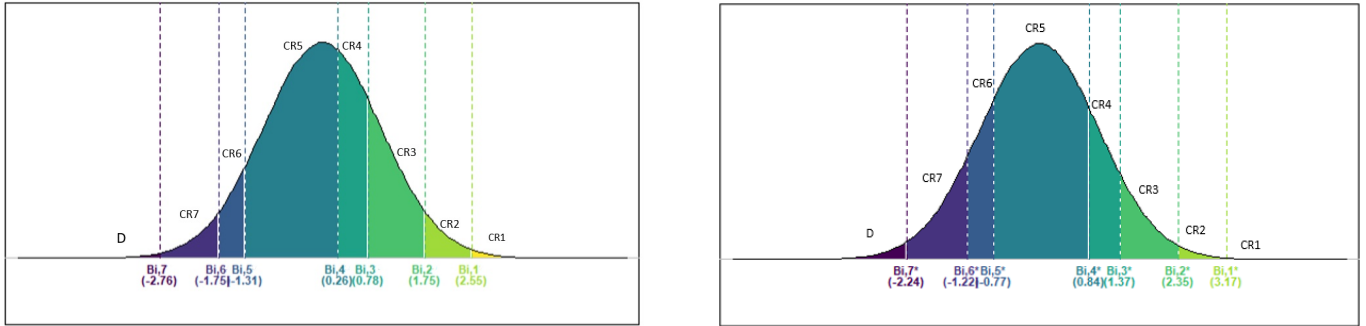


FIGURE 3.9 – Déformation des migrations pour une contrepartie initialement en classe de risque 5 (Seuil de migration TTC (à gauche) et Seuils de migration stressés ($Z_t = -2.8$) (à droite))

On observe que les seuils de migrations stressés sont supérieurs aux seuils de migration TTC, les probabilités de migrer vers les classes de risque inférieures sont donc plus élevées : il est donc plus facile de migrer vers les classes de risque les plus risquées qu'en moyenne. La distribution globale des migrations est sensiblement décalée vers la droite. Ainsi, les seuils de migration des classes de risques les plus risquées sont plus facilement atteignables : la conjoncture est défavorable au portefeuille.

2. Lorsque $Z_t > 0$:

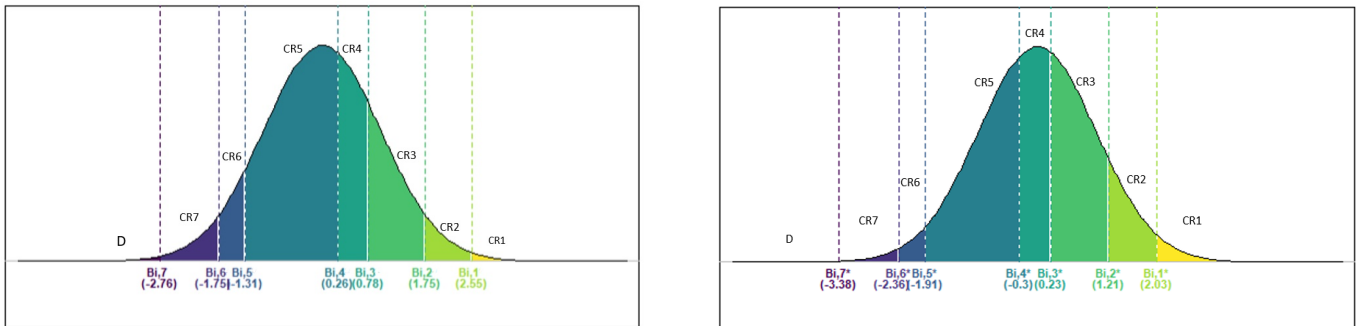


FIGURE 3.10 – Déformation des migrations pour une contrepartie initialement en classe de risque 5 (Seuil de migration TTC (à gauche) et Seuils de migration stressés ($Z_t = +2.8$) (à droite))

La distribution globale des migrations est sensiblement décalée vers la gauche. Ainsi, on observe que les seuils de migration stressés sont inférieurs aux seuils de migration TTC, les probabilités de migrer vers les classes de risque les plus risquées sont donc inférieures à leur niveau TTC. Il est donc moins commun de migrer vers les classes de risque les plus risquées et donc vers le défaut. A l'inverse, les classes de risque les moins risquées sont plus facile d'accès : la conjoncture devient favorable au portefeuille.

Résumé du chapitre 3

Parmi les deux modèles présentés, le modèle de Vasicek à un facteur semble être celui laissant le plus de marge de manoeuvre à l'analyste.

Les points d'attention à retenir dans le cadre de la construction de ce modèle sont les suivants :

- En s'appuyant sur le modèle de la firme de Merton, la probabilité de défaut d'une contrepartie k est définie comme la probabilité que le rendement standardisé généré par cette contrepartie passe en-dessous d'un certain seuil.
- Nous avons ensuite démontré qu'on pouvait étendre cette définition à l'estimation des probabilités de migration entre classes de risque. En considérant que la probabilité qu'une contrepartie initialement en classe de risque i transite vers la classe de risque j peut être définie tel que :

$$p^{i,j} = \mathcal{P}(B_{i,j} \leq R_t^k \leq B_{i,j+1}) \quad (3.17)$$

- Pour pouvoir calculer ces probabilités conditionnellement à l'état de l'économie, on modélise le rendement d'une contrepartie au moyen du modèle de Vasicek qui propose une décomposition du rendement selon 2 termes :

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_t^k$$

où ρ désigne la sensibilité à l'état de l'économie et Z_t le facteur systémique permettant de positionner le portefeuille au sein du cycle économique.

Grâce à ce cadre théorique, nous avons déduit les formules fermées du modèle de Vasicek à un facteur permettant de projeter des matrices de transition conditionnellement à l'état de l'économie selon 3 paramètres : \bar{M} , ρ et Z_t qu'on cherchera à estimer dans la suite de notre étude.

Chapitre 4

Le cadre théorique de la modélisation

Introduction au chapitre 4

Le chapitre précédent avait pour objectif de présenter le cadre théorique de deux modèles macroéconomiques. Le modèle retenu pour la poursuite de nos travaux a été le modèle de Vasicek à un facteur. Ce modèle nous permettra à terme d'obtenir des matrices de transition *point-in-time* (dépendantes du temps) conditionnelles à l'état de l'économie. Dans la suite, nous présentons toute la stratégie d'implémentation de ce modèle, du traitement de la base de départ aux choix de modélisation de chacun des paramètres du modèle.

4.1 Traitement des données

4.1.1 Présentation de la base de modélisation

La base de départ comporte les caractéristiques de 252.520 communes françaises notées entre 2002 et 2017. Les colonnes composant la base sont les suivantes :

| Portefeuilles | Variables | Type | Signification | Modalités |
|---------------|---------------|--------------|-----------------------|---------------------------------|
| Communes | NUM_TIERS | Numérique | ID des clients | NA |
| | EXER | Catégorielle | Années de compte | {2002 ; ... ; 2017} |
| | FL_DEFAULT | Numérique | Flag défaut | {0 ; 1 ; 2} |
| | ENCOURS_TOTAL | Numérique | Exposition | NA |
| | TTC_RC | Catégorielle | Classes de risque TTC | {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; D} |

FIGURE 4.1 – Eléments constitutifs de la base de modélisation

La description de chaque champ est la suivante :

- Le champ NUM_TIERS, permet d'identifier le client de manière unique pour chaque année de compte ;
- Le champ EXER, correspond à l'année de compte ;¹
- Le champ FL_DEFAULT, renseigne sur le statut du client sain au $31/12/N+1$, où N est l'année d'exercice. Il peut prendre trois valeurs : 0, si le client n'est pas en défaut au $31/12/N+1$, 1, si le client passe en défaut l'année suivante et 2 si le client est déjà en défaut au $31/12/N$.
- Le champ ENCOURS_TOTAL, est l'exposition en cas de défaut (EAD) de la contrepartie ;
- Le champ TTC_RC, est la notation interne finale de la contrepartie.

Choix du pas de temps Pour les besoins du stress test BCE des projections annuelles des distributions des effectifs par classe de risque sont demandées. Le choix du pas de temps est donc imposé par ce cadre théorique. Néanmoins, dans la littérature, on justifie généralement le pas de temps annuel pour les travaux de modélisation en risque crédit par le fait que : les cycles de crédit sont plus longs que les cycles de marché (les portefeuilles de crédit tournent moins vites). De plus, l'horizon d'évaluation du risque doit coïncider avec celui utilisé pour réaliser le budget ou les plans financiers, qui est annuel. On choisira donc un pas de temps **annuel**.

1. A noter que l'année de défaut (année où le client tombera en défaut), est décalée de deux ans par rapport à l'année de compte soit, année de défaut = EXER + 2

4.1.2 Construction d'un historique de matrice de transition

À partir de cette base de notation, le premier objectif a été de construire les matrices historiques de transition entre les classes de risque à partir de la méthode des cohortes.

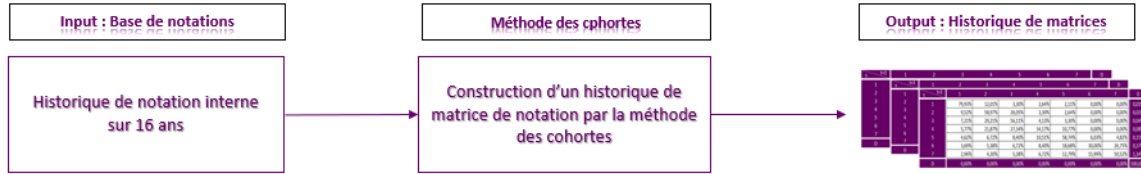


FIGURE 4.2 – Etape 0 du processus de modélisation

La méthode des cohortes consiste en l'estimation des probabilités empiriques de transition sur la base d'un historique de notations suffisamment long. La précision de l'estimation est proportionnelle à la longueur de l'historique.

Afin de définir le cadre théorique de cette méthode, introduisons quelques notations. Soient :

- $N_i(t)$ le nombre de contreparties de la classe de risque i où $i \in [1, K]$ à la date t , l'état de départ ne pouvant pas être le défaut. En effet, dans ce modèle est considéré comme une notation absorbante c'est-à-dire qu'une contrepartie ne peut pas migrer de l'état de défaut vers une classe de risque saine ;
- $N_{i,j}(\Delta t)$ le nombre de contreparties dans qui migrent de la classe de risque i vers la classe de risque j où $(i, j) \in [1, K] \times [1, K + 1]$ sur la période comprise entre $t - \Delta t$ et t . Dans notre cas, $\Delta t = 1$;
- $D_i(t)$ le nombre de nouveaux défauts observés sur entre les dates $t - \Delta t$ et t .

Les estimateurs des taux de migration de les classes de risque saines i et j puis entre vers l'état de défaut ne sont :

$$\begin{cases} p_t^{i,j} = \frac{N_{i,j}(\Delta t)}{N_i(t)} & \text{où } (i, j) \in [1, K]^2 \\ p_t^{i,D} = \frac{D_i(\Delta t)}{N_i(t)} & \text{où } i \in [1, K] \text{ et } j = K + 1 \end{cases}$$

Remarques :

- Nous ne considérons alors que les contreparties qui démarrent d'un état sain et qui migrent vers un état sain ou font défaut.
- Il est important de souligner que cette méthode attribue une probabilité nulle si l'on n'observe aucune transition d'un état à un autre dans l'historique. Il s'agit d'un point d'attention à garder à l'esprit car il est normalement toujours possible qu'une transition ait lieu.

4.1.3 Statistiques descriptives

La base de départ se constitue d'un total de 16 matrices de transition couvrant la période de 2002 à 2017 en année de compte, soit de 2004 à 2019 en année de défaut. Nous présenterons dans cette partie des graphiques permettant de mieux appréhender notre étude. Les matrices des migrations historiques doivent suivre certaines propriétés que nous nous attacherons à vérifier dans cette partie. De plus, des corrections pourront être apportées, notamment en cas de non monotonie de la probabilité de défaut ou d'une évolution aberrante du nombre de contreparties par classe de risque.

4.1.3.1 Monotonie des taux de défaut historique

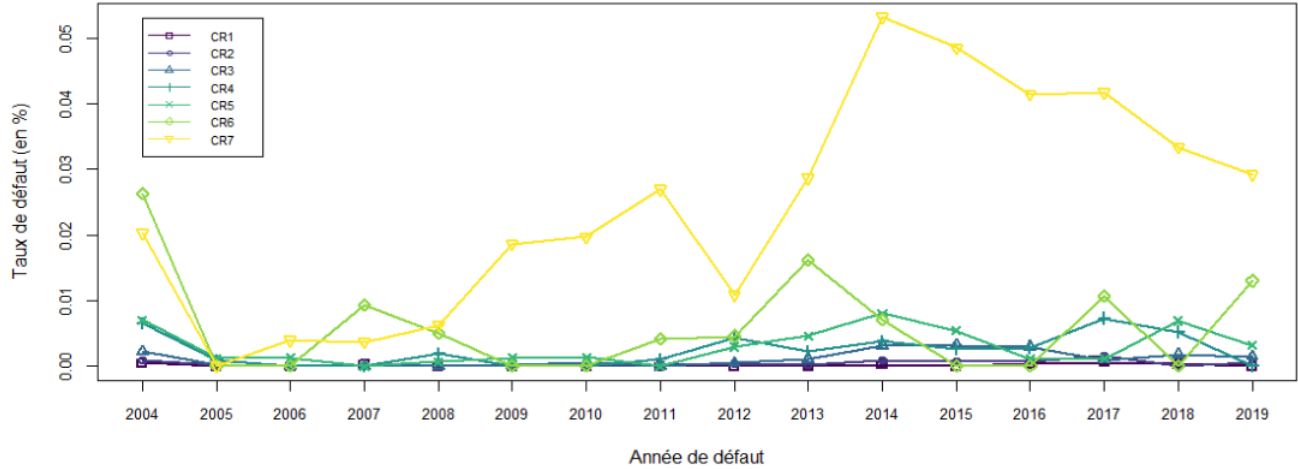


FIGURE 4.3 – Évolution annuelle des taux de défaut par classe de risque

On remarque historiquement le taux de défaut de classe de risque moins élevé a été supérieur à celui de classe de risque plus élevé. Par exemple au cours de l'année 2007, le taux de défaut de la classe de risque 6 a été supérieur à celui de la classe de risque 7 ou encore en 2015, les taux de défaut des classes de risque 4, 5, 6 ont été supérieurs à celui de la classe de risque 6. Le critère de monotonie des taux défaut n'est donc pas respecté empiriquement. En effet, s'il était respecté, on s'attendrait à ce que les courbes représentés soit au-dessus les unes des autres. Pour pallier cette contrainte empirique qui pourrait nous faire défaut lors des étapes de modélisation, on choisit d'appliquer l'ajustement linéaire suivant :

$$\forall j \in [2, K] \text{ tel que } p_{j,D} > p_{j+1,D}, \quad p_{j,D} = \frac{p_{j-1,D} + p_{j+1,D}}{2} \quad (4.1)$$

Après correction des taux de défaut, nous obtenons bien ce à quoi nous nous attendions.

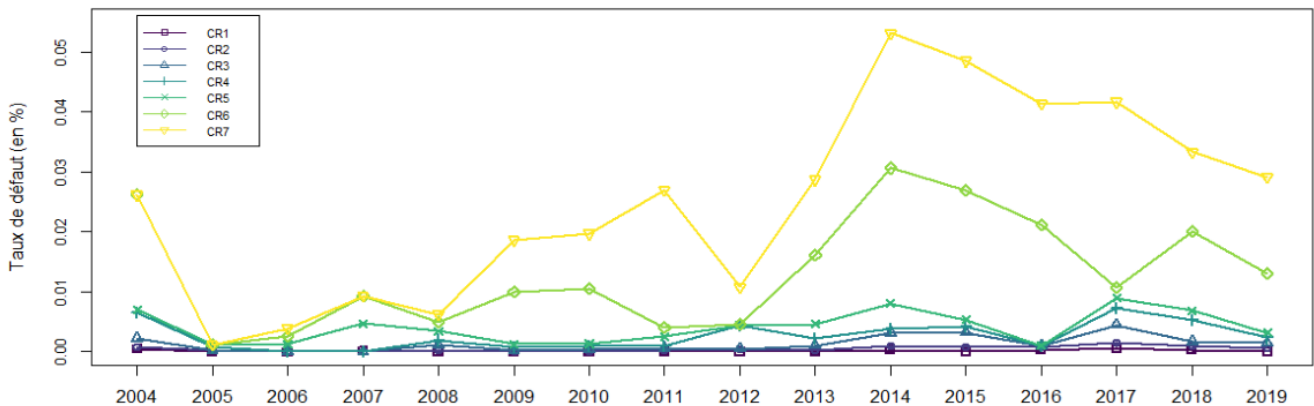


FIGURE 4.4 – Évolution annuelle des taux de défaut corrigés par classe de risque

4.1.3.2 Répartition du nombre de contrepartie par classe de risque sur l'historique

Pour ne pas causer de biais dans notre modèle, nous nous assurons que le nombre de contrepartie par classe de risque sur l'historique est stable par classe de risque.

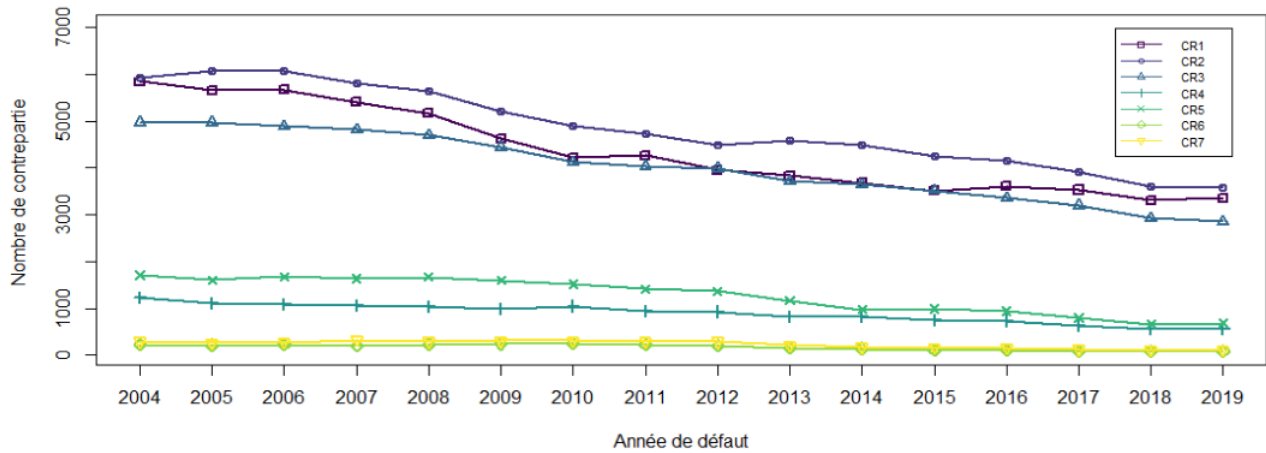


FIGURE 4.5 – Nombre de contreparties annuel par classe de risque

Le nombre de contreparties annuel notées par classe de risque est plutôt stable sur l'historique à disposition pour les classes de risque moyennement à très risqué $\{4, 5, 6, 7\}$. Pour les classes de risques les moins risqués $\{1, 2, 3\}$, on observe une diminution progressive du nombre de contreparties notées dans ces différentes classes de risque. On n'observe pas d'évolution aberrante, l'ensemble de l'historique peut être conservé.

4.2 Modélisation de la matrice champion \overline{MM}

La première étape du processus de modélisation est l'estimation d'une matrice de migration permettant de répliquer les migrations moyennes à 1 an observée sur la profondeur de l'historique à disposition. En effet, d'après le cadre théorique du modèle de Vasicek, les probabilités de transition *point-in-time*² constituent simplement des déviations par rapport aux probabilités de transition moyennes observées sur l'historique à disposition. Ces probabilités de transition moyennes sont les coefficients d'une matrice qu'il faudra estimer dans la suite. On schématise les différentes étapes permettant l'obtention d'une telle matrice comme suit :

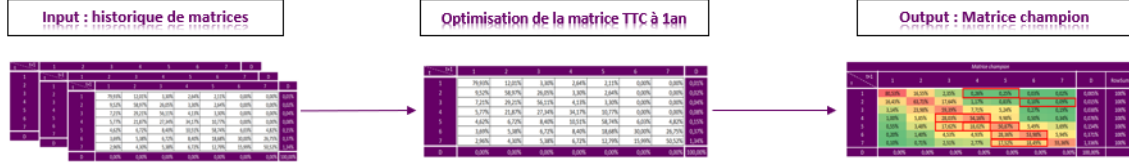


FIGURE 4.6 – Etape 1 du processus de modélisation

4.2.1 La matrice de migration TTC à 1 an

Soit $MM_{t,t+Y}$, la matrice de transition synthétisant les migrations des contreparties des états en fin d'année t vers les états en fin d'année $t + Y$. Le facteur Y est l'horizon du risque considéré. Mathématiquement, cette matrice s'écrit comme suit :

$$MM_{t,t+Y} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t+Y}=1 \cap s_{k,t}=1}}{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t}=1}} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t+Y}=D \cap s_{k,t}=1}}{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t}=1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t+Y}=1 \cap s_{k,t}=K}}{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t}=K}} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t+Y}=D \cap s_{k,t}=K}}{\sum_{k=1}^{N_t} 1_{s_{k,t}=K}} \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où $s_{k,t}$ est l'état attribué à la $k^{\text{ième}}$ contrepartie à la fin de l'année t avec r classe de risque possible et un état absorbant D correspondant à l'état de défaut. On a : $s_{k,t} \in [1, K]$ où K est le nombre de classe de risque.

La matrice $MM_{t,t+Y}$ est une matrice stochastique, c'est-à-dire que la somme de chaque ligne de la matrice est égale à 1. La dernière ligne de cette matrice concerne l'état de défaut. Par définition, tous les coefficients de cette ligne valent zéro sauf le dernier qui vaut 1 : l'état de défaut est donc absorbant. Considérer l'état de défaut comme un état absorbant est motivé par le droit à l'oubli dont bénéficie une contrepartie défaillante chez SFIL. En effet, toute contrepartie dans l'état de défaut en sort définitivement à l'issue d'une période probatoire de 1 an.³ Dans le cadre de notre étude, nous cherchons à répliquer au mieux la matrice moyenne des migrations historique à 1 an.

Soit T la profondeur de l'historique à disposition, on définit $MM_{t,t+1}$ les matrices des migrations historiques observées entre les années t et $t+1$ où ($t \in \mathbb{N}t \leq T - 1$) et $Nobs_t$ le vecteur donnant la distribution du nombre de contreparties par classe de risque à la date t . La matrice à optimiser se calcule comme suit :

$$\overline{MM}_{1yr} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} MM_{t,t+1}}{\sum_{t=1}^{T-1} Nobs_t} \quad (4.2)$$

2. On rappelle que ce sont des probabilités dépendantes du temps et conditionnelles à l'état de l'économie

3. En d'autres termes, lorsqu'une contrepartie est en défaut, elle bénéficie d'une période probatoire d'un an durant laquelle aucun événement de défaut ne doit être constatée avant qu'elle en sorte définitivement.

4.2.2 Optimisation sous contrainte de la matrice TTC à 1 an

L'obtention de la matrice TTC des migrations à 1 an constitue une étape cruciale dans le processus de modélisation des probabilités de transition conditionnelles à l'état de l'économie. En effet, cette matrice régira en majeure partie la qualité de la modélisation. La matrice des migrations moyennes à 1 an calculé à partir de notre historique est la suivante :

| Matrice TTC historique des migrations moyennes à 1 an | | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|----------|
| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D | RowSum |
| 1 | 80,51% | 16,55% | 2,36% | 0,22% | 0,30% | 0,03% | 0,02% | 0,010% | 100,000% |
| 2 | 16,28% | 63,78% | 17,70% | 1,18% | 0,87% | 0,06% | 0,09% | 0,035% | 100,000% |
| 3 | 1,95% | 24,12% | 59,90% | 7,98% | 5,42% | 0,29% | 0,25% | 0,093% | 100,000% |
| 4 | 0,69% | 5,47% | 42,96% | 26,97% | 22,05% | 0,90% | 0,77% | 0,191% | 100,000% |
| 5 | 0,52% | 2,13% | 18,54% | 18,40% | 51,45% | 5,30% | 3,44% | 0,223% | 100,000% |
| 6 | 0,51% | 1,32% | 4,99% | 6,00% | 46,63% | 21,54% | 18,58% | 0,429% | 100,000% |
| 7 | 0,44% | 0,49% | 2,76% | 2,32% | 20,39% | 16,77% | 54,74% | 2,089% | 100,000% |
| D | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 100,00% | |

FIGURE 4.7 – Matrice moyenne des migrations historiques à 1 an

Au titre du risque de crédit, pour que la modélisation soit cohérente, cette matrice doit respecter différentes propriétés intuitives. En rouge, ont été mis en évidence les incohérences au niveau de cette matrice :

- Concernant la classe de risque 1 : la probabilité de transition de la classe de risque 1 vers la classe de risque 5 (0.30%) est supérieure à la probabilité de transition de la classe de risque 1 vers la classe de risque 4 (0.22%), qui est moins risqué. Cependant, de manière intuitive, on s'attendrait à observer le phénomène inverse. En effet, la probabilité pour une contrepartie initialement en classe de risque 1 à la date t de transiter vers la classe de risque 4 devrait être supérieure à celle de transiter vers la classe de risque 5, plus risqué. Le phénomène similaire est rencontré pour : la classe de risque 2 respectivement avec les classes de risque 7 et 6, la classe de risque 5 respectivement avec les classes de risque 4 et 3, la classe de risque 7 respectivement avec les classes de risque 6 et 5.
- L'observation des classes de risque 4 et 6 révèle un autre problème. Prenons l'exemple de la classe de risque 4, la probabilité de transition vers la classe de risque 3 est nettement plus élevée que celle de conserver la même classe de risque.

Néanmoins, au titre du risque de crédit cette matrice des migrations moyennes à 1 an doit respecter les conditions ci-après :

1. **Critère de monotonie ligne/colonne** les probabilités de transition (défaut non compris) sont décroissantes en partant de la diagonale. Mathématiquement, ces contraintes s'écrivent :

- (a) **Monotonie ligne** : en considérant les éléments des triangles inférieur ou supérieur de la matrice, sur une ligne ; les probabilités de transition doivent décroître :

$$\begin{cases} \forall i < j \text{ et } j < K & \text{on a } (M)_{i,j+1} \leq (M)_{i,j} \\ \forall i > j \text{ et } j > 1 & \text{on a } (M)_{i,j} \leq (M)_{i,j-1} \end{cases}$$

- (b) **Monotonie colonne** : en considérant les éléments du triangle supérieure ou inférieur de la matrice, sur une colonne, les probabilités de transition doivent être décroissantes :

$$\begin{cases} \forall j > i \text{ et } i > 1 & \text{on a } (M)_{i-1,j} \leq (M)_{i,j} \\ \forall j < i \text{ et } i < K & \text{on a } (M)_{i+1,j} \leq (M)_{i,j} \end{cases}$$

2. **Monotonie de la probabilité de défaut** Les probabilité de défaut (dernière ligne de la matrice de transition) sont croissantes avec la classe de risque :

$$\forall i \in [2, K], \quad j = K + 1, \quad (M)_{i-1, K+1} \leq (M)_{i, K+1} \quad (4.3)$$

| Monotonie ligne/ colonne et des probabilités de défaut | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D |
| 1 | ↑ | → | → | → | → | → | → | ↓ |
| 2 | ↓ | ↑ | → | → | → | → | → | ↓ |
| 3 | ↓ | ↓ | ↑ | → | → | → | → | ↓ |
| 4 | ↓ | ↓ | ↓ | ↑ | → | → | → | ↓ |
| 5 | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↑ | → | → | ↓ |
| 6 | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↑ | → | ↓ |
| 7 | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↑ | ↓ |
| D | | | | | | | | ↑ |

FIGURE 4.8 – Monotonie ligne/ colonne et de la monotonie des probabilités de défaut

3. **Les coefficients de la matrice** Par définition, les coefficients de la matrice doivent être compris entre 0 et 1 :

$$\forall (i, j) \in [1, K + 1] \times [1, K + 1], \quad 0 \leq (M)_{i, j} \leq 1 \quad (4.4)$$

4. **Somme des coefficients sur une ligne** La somme des éléments d'une ligne de la matrice doit valoir 1 :

$$\forall (i, j) \in [1, K + 1] \times [1, K + 1], \quad \sum_{j=1}^{K+1} (M)_{i, j} = 1 \quad (4.5)$$

5. **Contrainte sur les PD_{TTC}** La matrice que nous essayons d'optimiser à pour but de répliquer parfaitement les matrices de transitions à 1 an, pour que l'estimation soit plus précise la dernière colonne de cette matrice est forcé comme étant égale aux PD_{TTC} calibrées en interne dont les valeurs par classe de risque sont présentées (p25).

6. **Critère de Jarrow** Une notation de moins bonne qualité représente un risque de crédit plus important. Soit :

$$\text{Pour tout } i, \quad \sum_{j \leq q} p_{i, j} \text{ est une fonction décroissante de } i \text{ pour tout } k \text{ fixé.} \quad (4.6)$$

Problème Sous ces différentes contraintes, on résout le problème de minimisation suivante :

$$\underset{(M)_{i, j}}{\operatorname{argmin}} \sqrt{\sum_{i=1}^{K+1} \sum_{j=1}^{K+1} [(M)_{i, j} - (\overline{M}_{1yr})_{i, j}]^2} \quad \text{sc. } \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (4.7)$$

Résultat Le problème d'optimisation a été résolu à l'aide de la **méthode GRG non linéaire du solveur d'excel**. La **norme euclidienne** obtenue a été de 0,246211. Enfin, la matrice obtenue à cette étape a été utilisée par la suite. Celle-ci figure en annexe.

4.2.3 Lissage par les chaînes de Markov continue

Une approche commune pour prédire l'évolution future de la distribution des notations consiste à se placer dans un cadre Markovien. En effet, les taux de transition d'une matrice de notation peuvent être modélisés comme des probabilités de transition d'une chaîne de Markov. Ainsi, ce cadre théorique impose que la note future d'une contrepartie en portefeuille à la date t se base uniquement sur sa notation à la date antérieure $t-1$.

4.2.3.1 Rappels sur les chaînes de Markov

Les chaînes de Markov discrètes

Une chaîne de Markov discrète homogène dans le temps est un processus stochastique sans mémoire en temps discret $t \in \mathcal{N}\{X_t; t \geq 0\}$. On se réfère à la variable aléatoire X_t comme l'état du processus au temps t en considérant X_0 l'état initial. L'espace d'état est l'ensemble des valeurs possibles que la variable aléatoire X_t peut prendre. On retiendra la définition suivante :

Definition 4.2.1 (*Chaîne de Markov discrète*) Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ à valeurs dans un espace au plus dénombrable S est une chaîne de Markov d'espace d'états S si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{N}$, $(r_0, \dots, r_{t-1}, r, s) \in S$:

$$\mathcal{P}(X_{t+1} = s | X_t = r, X_{t-1} = r_{t-1}, \dots, X_0 = r_0) = \mathcal{P}(X_{t+1} = s | X_t = r) \quad (4.8)$$

La chaîne est dite homogène si pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout r et s dans S , on a :

$$\mathcal{P}(X_{t+1} = s | X_t = r) = \mathcal{P}(X_1 = s | X_0 = r) \quad (4.9)$$

Ainsi la probabilité d'aller d'un état r vers un état s ne dépend pas du temps.

Les chaînes de Markov continues

Certaines chaînes de Markov sont à espace d'états continu, on les qualifie de chaînes de Markov continue. On retiendra la définition suivante :

Definition 4.2.2 (*Chaîne de Markov continue*) Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes dates $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$ et tous états $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n+1}$ alors :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n) \quad (4.10)$$

Une chaîne de Markov continue est définie par une matrice génératrice Q dont les coefficients satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_{i,j} = 1 & , \text{ pour tout } i \\ \lambda_{i,i} < 0 \text{ et } \lambda_{i,j} > 0 & \text{ pour tout } i \neq j \end{cases}$$

Remarque En interne, la matrice des migrations moyennes à 1 an est optimisée par maximum de vraisemblance en supposant que l'ensemble des migrations suivent une loi de poisson. Ensuite, celle-ci est estimée en utilisant une chaîne de Markov discrète. Cependant, le cadre markovien continue confère également des propriétés intéressantes d'où son traitement dans notre étude.

4.2.3.2 Arbitrage entre l'utilisation d'une chaîne de Markov continue ou discrète

Pour l'estimation de la matrice des migrations moyennes à 1 an, on se pose légitimement la question du choix de l'utilisation d'une chaîne de Markov discrète ou continue. En effet, au titre du du risque de crédit, l'une ou l'autre de ses approches possède ses spécificités. Entre autres :

- ▶ Dans le cas d'une estimation de la matrice moyenne des migrations à 1 an par une chaîne de markov discrète : si une transition n'a pas eu lieu historiquement , l'estimateur en temps discret obtenu sera nul. Or, en réalité toute transition devrait être envisageable.
- ▶ En revanche, l'analyse des transitions entre notation de crédit par un processus de Markov en temps continu permet l'estimation des probabilités de transitions rares, même si ces transitions n'ont pas été observée sur l'historique disponible contrairement au cas discret.

Or, le *stress test* BCE étant très porté sur l'aspect mathématique, même si pour l'analyste il est peut-être étonnant d'observer des transitions extrêmes, nous nous autoriserons dans notre cas à modéliser toutes les transitions. Ce choix est notamment motivé par le fait qu'en situation extrême, il est tout à fait possible d'observer une migration de la classe de risque 1 vers la classe de risque 7 par exemple. On retiendra donc dans la suite une estimation par les chaînes de Markov continues.

4.2.3.3 Estimation par la méthode des générateurs

Introduction On rappelle que les notations reflètent à une date donnée la qualité de crédit d'un emprunteur. Néanmoins celle-ci peut varier dans le temps. Ainsi, en interne, on calcule des matrices de transition dont la lecture renseigne sur la qualité de crédit d'un emprunteur.

Cadre mathématique Soit M_t la matrice de transition d'une chaîne de Markov continue et homogène d'espace d'états $[1, K+1]$. Soit la matrice Q telle que :

$$\forall t \geq 0, M_t = \exp(Qt) \quad (4.11)$$

Q est appelé le générateur de la matrice M_t , il s'agit de la dérivée en 0 de la matrice de transition M_t . En supposant la chaîne de Markov homogène, ce qui implique que Q ne dépend pas du temps, pour obtenir un estimateur de la matrice M_t , il suffit d'obtenir un estimateur de Q soit :

$$\forall t \geq 0, \hat{M}_t = \exp(\hat{Q}t) \quad (4.12)$$

De plus, les éléments de la matrice génératrice que l'on notera $\lambda_{i,j}$ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda_{i,j} \geq 0 \\ \lambda_{i,i} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{i,j} \end{cases}$$

Remarques :

1. L'exponentielle est l'exponentielle matricielle ;
2. La diagonale est négative et les éléments hors diagonale sont positifs ;
3. La diagonale est négative car en étant initialement dans un i , la probabilité de rester dans cet état au cours du temps doit forcément diminuer.

4.2.4 Analyse des résultats

4.2.4.1 Le générateur

Le package R *ctmcd* permet d'estimer les paramètres d'une chaîne de Markov en temps continu à partir de données à temps discret. La fonction `gm()` avec sélection de la méthode "WA" (Weighted-Adjustment) résout le problème de minimisation suivant :

$$\underset{Q}{\operatorname{argmin}} \quad \|M_t - \exp(Qt)\| \quad (4.13)$$

Et réalise l'ajustement suivant :

$$\begin{cases} \text{Ajustement diagonal} & \lambda'_{i,j} = \max(\lambda_{i,j}; 0) \\ \text{Ajustement hors diagonale} & \lambda'_{i,i} = \lambda_{i,j} - |\lambda_{i,j}| \frac{\sum_{i \neq j} \lambda_{i,j}}{\sum_{i \neq j} |\lambda_{i,j}|} \end{cases}$$

Le générateur de la matrice moyenne \overline{MM}_{1yr} est :

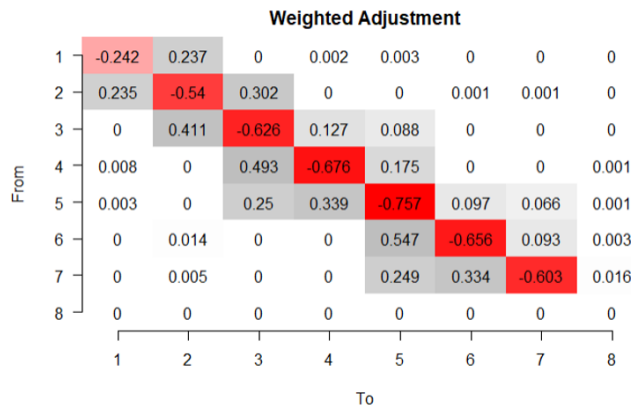


FIGURE 4.9 – Estimateur de la matrice génératrice

4.2.4.2 La matrice champion \overline{M}

| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 80,53% | 16,55% | 2,35% | 0,26% | 0,25% | 0,03% | 0,02% | 0,005% |
| 2 | 16,43% | 63,71% | 17,64% | 1,17% | 0,83% | 0,10% | 0,09% | 0,015% |
| 3 | 3,14% | 23,98% | 59,39% | 7,71% | 5,24% | 0,27% | 0,19% | 0,038% |
| 4 | 1,00% | 5,85% | 28,03% | 54,16% | 9,98% | 0,50% | 0,34% | 0,076% |
| 5 | 0,55% | 3,48% | 17,62% | 18,02% | 50,87% | 5,49% | 3,69% | 0,154% |
| 6 | 0,20% | 1,40% | 4,53% | 4,93% | 28,36% | 53,98% | 5,94% | 0,371% |
| 7 | 0,10% | 0,71% | 2,51% | 2,77% | 17,52% | 18,49% | 55,36% | 1,336% |
| D | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 100,00% |

FIGURE 4.10 – Matrice champion \overline{M}

Interprétation La matrice respecte bien l'ensemble des contraintes fixées plus haut. Les migrations vers toutes les classes de risque y sont autorisées (pas de probabilités nulles). Nous pouvons désormais la comparer avec la matrice de migration historique. Pour cela nous définissons 3 mesures synthétiques : le taux d'amélioration, le taux de dégradation et le taux de non migration par classe de risque.

| CR | MATRICE HISTORIQUE | | | MATRICE CHAMPION | | |
|-----|---------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| | Taux d'amélioration | Taux de dégradation | Taux de non migration | Taux d'amélioration | Taux de dégradation | Taux de non migration |
| CR1 | 0,00% | 19,48% | 80,51% | 0,00% | 19,46% | 80,53% |
| CR2 | 16,28% | 19,91% | 63,78% | 16,43% | 19,83% | 63,71% |
| CR3 | 26,07% | 13,94% | 59,90% | 27,12% | 13,42% | 59,39% |
| CR4 | 49,12% | 23,72% | 26,97% | 34,87% | 10,82% | 54,16% |
| CR5 | 39,59% | 8,74% | 51,45% | 39,67% | 9,17% | 50,87% |
| CR6 | 59,45% | 18,58% | 21,54% | 39,42% | 5,94% | 53,98% |
| CR7 | 43,17% | 2,09% | 54,74% | 42,09% | 1,34% | 55,36% |

FIGURE 4.11 – Comparaison des mesures synthétiques de la matrice historique et de la matrice lissée

Interprétation On observe que les indicateurs de la matrice champion \overline{M} ne s'écartent pas trop de ceux mesurés sur la matrice initiale sauf pour les taux de non migration des classes de risques 4 et 6 pour lesquels on observe des écarts importants. On note que ce constat pour créer un biais au sein de nos estimations. L'écart quadratique calculé entre les deux matrices est de 27,26%.

Remarque C'est grâce à cette matrice qu'on déduit les seuils de transition $B_{i,j}$ intervenant dans la formule fermée du modèle de Vasicek à un facteur. Ainsi, pour tout couple $(i, j) \in [1, K] \times [1, K + 1]$, on rappelle l'estimateur de ces seuils défini au chapitre 3 :

$$\hat{B}_{i,j} = \Phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \hat{p}_t^{i,h} \right)$$

4.3 Estimation du paramètre de sensibilité au cycle économique, ρ

Pour estimer le paramètre ρ de sensibilité au cycle économique, nous avons opté pour une méthode statistique. Ainsi, l'estimation de ce paramètre se réalise par maximisation d'une fonction de vraisemblance. Pour obtenir l'expression de cette fonction à optimiser, on se place à une date t et on suppose une loi de probabilité sur le nombre de dégradation par classe de risque (défaut compris) observés entre $t-1$ et t .

Dans la littérature, il existe deux moyens d'estimer ce paramètre : sur l'ensemble du portefeuille ou par classe de risque. Le tableau ci-dessous résume les hypothèses prises lors de la construction de la fonction de vraisemblance à optimiser pour obtenir alternativement l'un ou l'autre des résultats. Soit :

| Hypothèses | Explications | Résultats |
|-------------|---|--|
| Hypothèse 1 | On modélise conjointement le nombre de dégradations (défaut compris) par classe de risque sur l'ensemble de l'historique → On suppose ici que le nombre de dégradations observées par classe de risque à la date t suit une loi binomiale. | ρ est calibré sur l'ensemble du portefeuille. |
| Hypothèse 2 | On modélise séparément le nombre de dégradation par classe de risque sur l'ensemble de l'historique → On suppose toujours ici que le nombre de dégradations par classe de risque suit une loi de binomiale. | ρ_i où $i \in [1, K]$. |

TABLE 4.1 – Hypothèses prises pour l'estimation du paramètre ρ

Remarques :

1. Une modélisation conjointe du nombre de dégradations par classe de risque découle sur la calibration d'un paramètre ρ , commun à toutes les classes de risque du portefeuille. Chaque classe de risque est alors supposée avoir la même sensibilité au cycle de l'économie, ce qui n'est pas intuitif en réalité. En effet, les classes moins risquées sont supposées être plus stables que les classes risquées et donc moins sensibles aux variations de la conjoncture économique⁴. C'est finalement cette réflexion qui motive le choix d'estimer des facteurs de sensibilités au cycle économique par classe de risque.

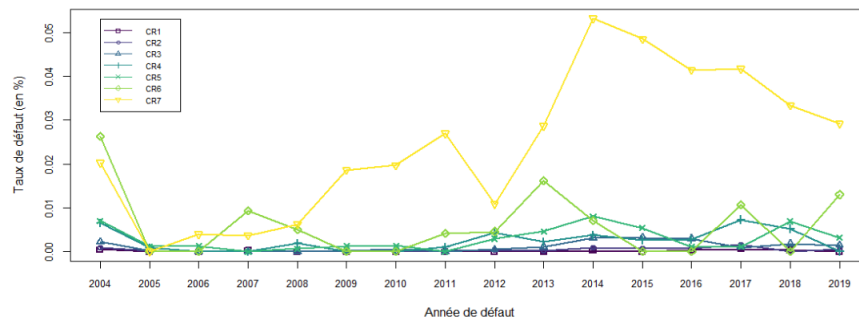


FIGURE 4.12 – Représentation de l'évolution annuelle des taux de défaut par classe de risque

2. En choisissant comme variable cible le nombre de dégradations par les classes de risque (défaut compris), on choisit de modéliser conjointement les migrations vers des classes de risque saines et celles au défaut. On suppose donc implicitement que le rythme avec lequel une contrepartie se rapproche de la barrière par défaut est moins élevé que le rythme avec lequel il se rapproche (ou s'éloigne) des barrières de migration entre les classes de risque saines, en cas de détérioration (resp. *amélioration*) du profil financier du portefeuille.

Ainsi, une contrepartie ne peut atteindre l'état de défaut avant d'atteindre une classe de risque très risqué. Il faut cependant garder à l'esprit que d'autres choix de modélisation sont envisageables. En effet, il est

4. On le voit notamment avec la représentation des taux de défaut par classe de risque sur la figure ci-dessus. Les taux de défaut des classes de risque $\{1,2,3\}$ sont stables sur l'historique. Tandis que celui des classes de risque 6 et 7 varient davantage

possible notamment de modéliser les défauts entre classe de risque saine d'un côté et vers le défaut séparément. Par soucis de simplification ce cas ne sera pas traité ici.

4.3.1 Cadre théorique

Notations

- ▶ Soit T le nombre d'années pour lesquelles les migrations annuelles des classes de risque sont observées dans l'historique ;
- ▶ Soit C_t^i le nombre de contreparties appartenant à la $i^{\text{ème}}$ classe de risque au début de l'année t ;
- ▶ Soit D_t^i le nombre de contreparties appartenant à la $i^{\text{ème}}$ classe de risque au début de l'année t ayant été dégradées vers des classes de risque $j < i$ à la fin de l'année t ;
- ▶ Soit $N_{D_t^i}$ la variable aléatoire donnant le nombre de contreparties appartenant à la i^{me} classe de risque au début de l'année t et ayant été dégradées à la fin de l'année t .

Hypothèse principale

En supposant une homogénéité parfaite au sein de chaque classe de risque jusqu'au défaut, on retient que $N_{D_t^i} = \sum_{k=1}^{C_t^i} X_k$ avec X_k une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli du paramètre $p_{d,t}^i = f(\rho, z_t)$ ⁵. Sous l'hypothèse que les tirages C_t^i soient conditionnellement indépendants les uns des autres, la variable $N_{D_t^i}$ suit une distribution binomiale de paramètres C_t^i et $p_{d,t}^i$, soit $\mathcal{B}(C_t^i, p_{d,t}^i)$.

Soit Z_t la variable aléatoire normalement distribuée des occurrences non observables z_t pour l'année t , résumant l'état de l'économie. Conditionnellement à Z_t , la probabilité d'observer exactement D_t^i contreparties dégradées à la fin de l'année t parmi les C_t^i contreparties appartenant à la $i^{\text{ème}}$ classe de risque au début de l'année t est égal à :

$$\mathcal{P}(N_{D_t^i} = D_t^i | Z_t = z_t) = \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \quad (4.14)$$

où :

1. $\binom{C_t^i}{D_t^i}$ donne le nombre de combinaisons permettant de produire exactement D_t^i dégradations sachant C_t^i contreparties dans la classe de risque i ;
2. $(p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i}$ est la probabilité d'observer D_t^i dégradations.

La probabilité d'observer exactement D_t^i contreparties dégradées à la fin de l'année t parmi les contreparties appartenant à la $i^{\text{ème}}$ classe de risque au début de l'année t est l'espérance mathématique de la probabilité conditionnelle de l'expression précédente, soit :

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(N_{D_t^i} = D_t^i | Z_t = z_t \right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.15)$$

5. En reprenant les notations introduite au sein du cadre théorique du modèle de Merton, la probabilité qu'une contrepartie appartenant à la classe de i soit dégradée dans une classe de risque strictement inférieure à i est : $P(R_t^k \leq B_{i,i}) = \sum_{h=i+1}^{K+1} p_t^{i,h}$. Par souci de simplification, on notera dans cette sous partie $p_{d,t}^i$ cette probabilité.

Modélisation conjointe du nombre de dégradation par classe de risque (Hypothèse 1)

Le facteur systémique Z_t traduit la position dans le cycle économique pour l'année t . Il est donc indépendant de la classe de risque et ne dépend que de l'année de survenance. Par conséquent, la probabilité d'observer conjointement $N_{D_t^i}$ dégradations au sein des K classes de risque s'écrit :

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(\bigcap_{i=1}^K N_{D_t^i} = D_t^i \mid Z_t = z_t \right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^K \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.16)$$

Il s'agit de la probabilité d'observer exactement $\sum_{i=1}^K D_t^i$ contreparties dégradées pour l'année t avec le bon nombre d'observations dégradées par classe de risque. Le facteur de sensibilité ρ étant indépendant de t , il s'ensuit que la probabilité d'observer conjointement et exactement les comptages observés D_t^i pour tout couple (i, t) se calcule comme suit :

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(\bigcap_{t=1}^T \bigcap_{i=1}^K N_{D_t^i} = D_t^i \mid Z_t = z_t \right) \right] = \prod_{t=1}^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^K \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.17)$$

Fonction de vraisemblance à optimiser (Hypothèse 1)

Le facteur systémique est estimé sur la base de l'historique complet de migrations annuelles en maximisant la vraisemblance des observations D_t^i conjointement pour chaque couple $(i, t) \in ([1, K], [1, T])$ comme suit :

$$L_t(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^K \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.18)$$

Or $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, soit :

$$L_t(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i=1}^K \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] \times \frac{e^{-\frac{z_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz_t \quad (4.19)$$

$$\text{où } p_{d,t}^i = \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\sum_{h=i+1}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h}) - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

Le problème d'optimisation s'écrit ensuite :

| |
|---|
| $\operatorname{argmax}_{\rho \in]-1, 1[} \prod_{t=1}^T L_t(\rho) \iff \operatorname{argmin}_{\rho \in]-1, 1[} -\ln(\prod_{t=1}^T L_t(\rho)) \iff \operatorname{argmin}_{\rho \in]-1, 1[} -\sum_{t=1}^T \ln(L_t(\rho))$ |
|---|

Modélisation du nombre de dégradation par classe de risque séparément (Hypothèse 2)

En repartant de l'expression (4.16), on peut choisir de modéliser individuellement le nombre de dégradations par classe de risque, ce qui conduit à considérer que chaque classe de risque possède une sensibilité différente par rapport à l'état de l'économie et donc à calibrer 7 facteurs de sensibilité ρ_i . Chacun de ces facteurs étant indépendant de t, il s'ensuit la probabilité d'observer dans chaque classe exactement les comptages observés D_t^i pour tout couple (i, t) se calcule comme suit :

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(\bigcap_{t=1}^T N_{D_t^i} = D_t^i \mid Z_t = z_t \right) \right] = \prod_{t=1}^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.20)$$

Fonction de vraisemblance à optimiser (Hypothèse 2)

La fonction de vraisemblance à optimiser devient dépendante de la classe de risque i :

$$L_{i,t}(\rho_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] dZ_t \quad (4.21)$$

Or $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, soit :

$$L_{i,t}(\rho_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] \times \frac{e^{-\frac{z_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz_t \quad (4.22)$$

$$\text{où } p_{d,t}^i = \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\sum_{h=i+1}^{K+1} \bar{p}_t^{i,h}) - \sqrt{\rho_i^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right)$$

Le problème d'optimisation s'écrit ensuite :

$$\boxed{\operatorname{argmax}_{\rho_i \in]-1, 1[} \prod_{t=1}^T L_{i,t}(\rho_i) \iff \operatorname{argmin}_{\rho_i \in]-1, 1[} -\ln(\prod_{t=1}^T L_{i,t}(\rho_i)) \iff \operatorname{argmin}_{\rho_i \in]-1, 1[} -\sum_{t=1}^T \ln(L_{i,t}(\rho_i))}$$

4.3.2 Analyse des résultats

4.3.2.1 Sensibilités calibrées sur les méthodes

Les résultats obtenus sont les suivants :

1. La résolution du premier problème de minimisation donne le résultat suivant $\rho^* = 6.94\%$. L'ensemble des migrations n'est pas très sensible au cycle économique.
2. La résolution du second problème de minimisation nous a donnée les résultats suivant :

| Classe de risque i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--------------------|-------|-------|-------|---------------|-------|---------------|--------------|
| ρ_i^* | 0.42% | 0.58% | 0.81% | 18.83% | 1.43% | 21.17% | 6.90% |

Sans surprise, les classes de risque les moins sensibles au cycle économique sont les classes de risque les moins risquées $\{1,2,3\}$. On note également que la classe de risque 7 est peu sensible à l'état de l'économie. Cela peut s'interpréter comme le fait qu'un environnement favorable ne permet pas de s'extraire de cette classe, une fois qu'on y est. Enfin, les classes de risque les plus sensibles à l'état de l'économie sont les classes de risques 4 et 6. En revanche, il est étonnant d'observer pour la classe de risque 5 une sensibilité si faible à l'état de l'économie.

4.3.2.2 Impact des deux méthodes sur la modélisation des migrations

Pour tenter de comprendre l'influence du facteur de sensibilité dans l'évolution des migrations entre les classes de risque et vers l'état de défaut, nous présentons deux graphiques :

1. Un premier graphique représentant l'évolution des PD^{PIT} en fonction de l'état de l'économie à ρ fixé. Nous avons utilisé la formule du modèle de Vasicek à un facteur et la matrice \bar{M} pour le calcul :

$$p_t^{i,D} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\bar{p}^{i,D}) - \sqrt{\rho^{*2}} \times z_t}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right) \quad (4.23)$$

où $z_t \in [-3; 3]$.

Remarque On utilisera alternativement le facteur ρ^* calibré sur l'ensemble des classes de risque et les facteurs ρ_i^* calibrés par classe de risque pour comparer les deux méthodes.

2. Un deuxième graphique représentant l'évolution des distributions des migrations à ρ fixé en fonction de l'état de l'économie. Les taux de migration sont calculés en utilisant la formule du modèle de Vasicek à un facteur :

$$p_t^{i,h} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\sum_{h=1}^{K+1} \bar{p}^{i,h}) - \sqrt{\rho^{*2}} \times z_t}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right) \quad (4.24)$$

Remarque On considère 2 états de l'économie : une période de reprise et une période dégradée. On superposera également les migrations moyennes.

Influence du facteur ρ sur les migrations vers l'état de défaut

Nous présentons les graphiques pour la classe de risque 4. Sur le graphique de gauche, nous avons représenté l'évolution de la probabilité de défaut *point-in-time* (PD^{PIT}) en fonction de l'état de l'économie. Sur ce graphique, la sensibilité à l'état de l'économie est spécifique à la classe de risque 4. Sur le graphique de droite, nous utilisons le facteur de sensibilité commun à toutes les classes de risque.

Premièrement, on observe que la probabilité de défaut est plus sensible à l'état de l'économie sur le graphique de gauche que sur celui de droite. Tout d'abord, on se rappelle, par construction de notre modèle, du résultat suivant⁶ :

$$\begin{cases} Z_t > 0 & \iff \text{Conjoncture favorable au portefeuille} \\ Z_t < 0 & \iff \text{Conjoncture défavorable au portefeuille} \end{cases}$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'une conjoncture économique défavorable au portefeuille (Z_t), les valeurs prises par la probabilité de défaut sont sensiblement plus élevées que celles prises dans le cas de gauche. Plus généralement, les probabilités s'écartent davantage de leur niveau de long terme dans le cas de gauche.

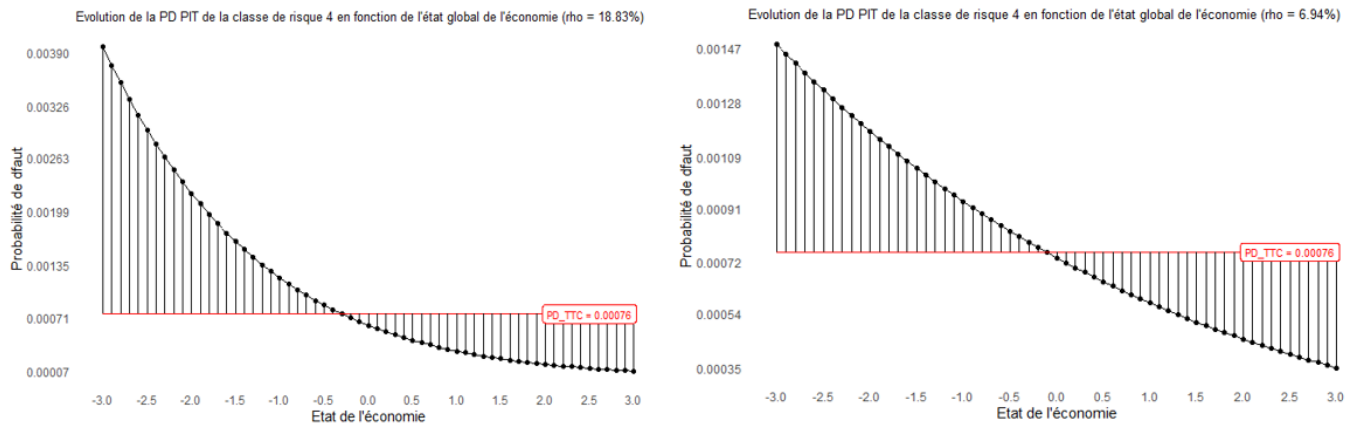


FIGURE 4.13 – Evolution de la PD^{PIT} en fonction de l'état de l'économie à ρ fixé

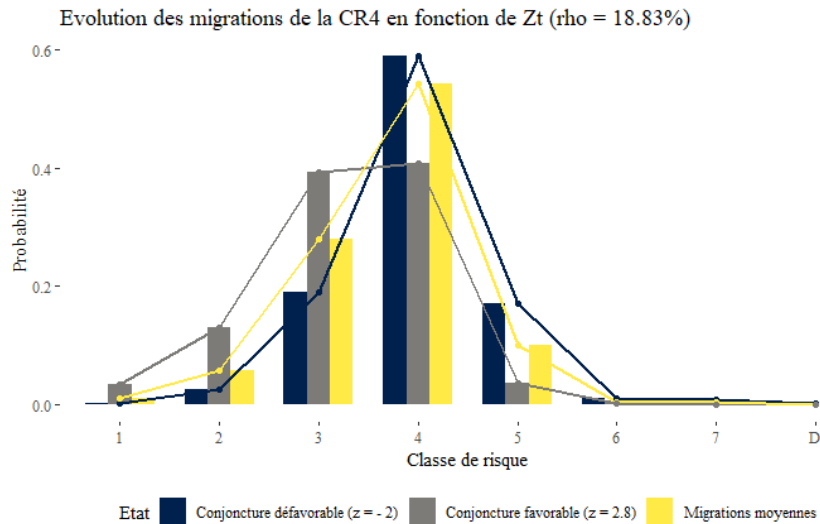
La valeur maximale que peut prendre la PD^{PIT} dans la pire situation économique considéré ($Z_t = -3$ dans notre cas) est 0,390% pour $\rho_4^* = 18.84\%$ contre 0,147% pour $\rho^* = 6.94\%$. Cependant, dans des conditions économiques très favorables ($Z_t = 3$), la PD^{PIT} du graphique de droite est supérieure à celle de gauche.

Remarque Pour les classes de risque peu risquées, dont les facteurs de sensibilité par classe de risque sont très faibles, on s'attend à observer très peu d'écart entre les probabilités de défaut *point-in-time* et les probabilités de défaut de long terme.

6. On rappelle que ce résultat a été démontré en fin de chapitre 3.

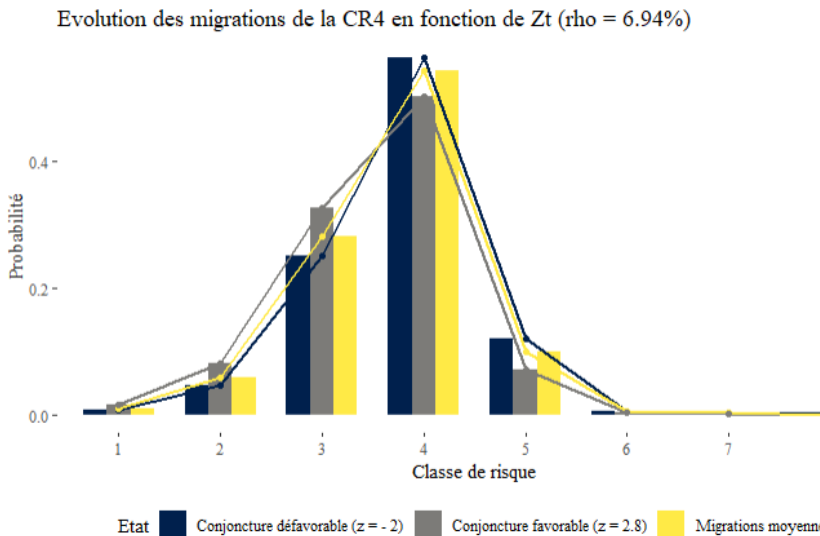
Influence du facteur ρ sur les migrations entre les classes de risque

On traite toujours le cas de la classe de risque 4. En ce qui concerne les migrations par classe de risque, on observe que les distributions se déplacent sensiblement vers la droite (i.e. vers les classes de risque les moins risquées) sous l'hypothèse d'une conjoncture favorable, et vers la gauche (i.e. vers les classes de risque les plus risquées) sous l'hypothèse d'une conjoncture défavorable. Sur le graphique du haut, on remarque qu'en conjoncture défavorable, les probabilités de transition sont plus élevées pour les classes de risques inférieures {5,6} que sur celles du graphique du bas par exemple.



| CR | DEFAV | MOY | FAV |
|-----|--------|--------|--------|
| CR1 | 0,42% | 1,00% | 2,58% |
| CR2 | 3,25% | 5,85% | 11,02% |
| CR3 | 21,12% | 28,03% | 36,85% |
| CR4 | 58,18% | 54,16% | 44,55% |
| CR5 | 15,11% | 9,98% | 4,71% |
| CR6 | 0,93% | 0,50% | 0,16% |
| CR7 | 0,68% | 0,34% | 0,10% |
| D | 0,18% | 0,08% | 0,02% |

La sensibilité étant plus élevée, les probabilités de migration sont exacerbées. En conjoncture défavorable, les taux de dégradation vers les classes de risque les plus élevées augmentent, par rapport au premier cas ainsi que la probabilité de défaut qui est très stressé par rapport à son niveau TTC.



| CR | DEFAV | MOY | FAV |
|-----|--------|--------|--------|
| CR1 | 0,70% | 1,00% | 1,63% |
| CR2 | 4,60% | 5,85% | 8,12% |
| CR3 | 25,02% | 28,03% | 32,53% |
| CR4 | 56,24% | 54,16% | 50,03% |
| CR5 | 12,09% | 9,98% | 7,12% |
| CR6 | 0,67% | 0,50% | 0,30% |
| CR7 | 0,47% | 0,34% | 0,19% |
| D | 0,11% | 0,08% | 0,04% |

Pour une conjoncture défavorable ($Z_t < 0$), toutes choses égales par ailleurs, on remarque que les taux de dégradations des classes de risques les plus risquées {5,6,7} sont inférieurs aux taux observés ci-dessus : cela s'explique par le fait que le portefeuille soit moins corrélé à l'état de l'économie.

FIGURE 4.16 – Influence du facteur ρ sur les migrations par classe de risque

4.3.2.3 Anticipation des résultats

Lors de l'application du modèle de Vasicek à un facteur, on pourra choisir entre l'utilisation d'un facteur de sensibilité commun à l'ensemble du portefeuille ou de plusieurs facteurs systémiques propres à chaque classe de risque. En faisant le premier choix, on s'attend à observer des migrations dans toutes les classes de risque. En faisant le deuxième choix, on s'attend à observer pour les distributions stressées, une majorité de migrations au sein des classes de risque 4 et 6, voire 7.

Ainsi, plus tard dans notre étude, nous comparerons les matrices obtenues avec l'une ou l'autre des méthodes. Cela nous permettra d'affirmer ou réfuter nos premières intuitions. Pour la suite, il nous reste à présenter les méthodes trouvées dans la littérature qui nous permettront d'estimer le dernier paramètre de notre modèle, soit le facteur systémique Z_t .

4.4 Estimation des facteurs systémiques, Z_t

Dans le modèle de Vasicek à un facteur, le risque systémique est caractérisé par la variable Z_t permettant de capter les variations du cycle de crédit qui ne peuvent être expliquées uniquement par l'historique des taux moyens de transition. Cet indicateur peut être approché de différentes façons que l'on explicitera dans les parties.

4.4.1 Estimation par maximum de vraisemblance

Dans la continuité du choix de modélisation du facteur de corrélation ρ , il est possible d'inférer une série de facteurs systémiques annuels par la méthode statistique du maximum de vraisemblance et en voici une démonstration ci-dessous.

Soit $\rho^* = 6.94\%$, le facteur de sensibilité commun à l'ensemble des classes de risque. A la date t , la fonction de vraisemblance permettant d'inférer le facteur systémique Z_t s'écrit :

$$L_t(z_t) = \mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(\bigcap_{i=1}^K N_{D_t^i} = D_t^i \mid \rho = \rho^* \right) \times \mathcal{P}[Z_t = z_t \mid Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)] \right]$$

$$L_t(z_t) = \mathbb{E} \left[\mathcal{P} \left(\bigcap_{i=1}^K N_{D_t^i} = D_t^i \mid \rho = \rho^* \right) \right] \times \mathbb{E} (\mathcal{P}[Z_t = z_t \mid Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)])$$

$$L_t(z_t) = \left[\prod_{i=1}^K \binom{C_t^i}{D_t^i} \times (p_{d,t}^i)^{D_t^i} \times (1 - p_{d,t}^i)^{C_t^i - D_t^i} \right] \times \frac{e^{-\frac{z_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

La séquence de facteurs systémiques z_t , pour tout $t \in [1, T]$ est obtenue en résolvant les problèmes de maximisation suivants :

$$\boxed{\operatorname{argmax}_{z_t \in]-3,3[} L_t(z_t) \iff \operatorname{argmin}_{z_t \in]-3,3[} -L_t(z_t)}$$

4.4.2 Analyse des résultats

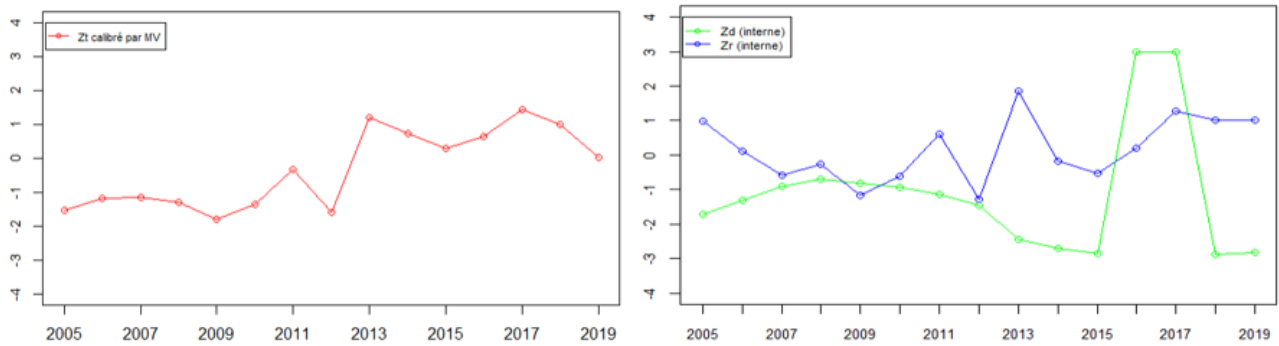


FIGURE 4.17 – Estimation des facteurs systémiques selon 2 méthodes : Avec un facteur systémique (à gauche) avec deux facteurs systémiques (à droite)

Interprétations Le graphique de gauche est la série des facteurs systémiques inférée par la méthode présentée en (4.4.1). A droite ont été représentés les estimations des deux facteurs systémiques utilisés dans le cadre du modèle interne.

Le modèle interne de SFIL utilise le modèle de Vasicek bivarié. En effet, on distingue dans ce modèle : un facteur systémique pour le processus de migration entre les classes de risque saines (Z_t^R) et un deuxième facteur systémique pour le processus de migration vers l'état de défaut (Z_t^D). Un tel modèle nécessite donc d'inférer deux séries de facteurs systémiques. Dans notre cas, nous choisissons une hypothèse simplificatrice, en ne modélisant qu'un seul facteur systémique commun au processus de migration entre les classes de risque saines et au processus de migration vers l'état de défaut Z_t .

La série inférée est légèrement semblable au processus de migration Z_t^R . En étant même optimiste, elle semble à la fois capturer les variations des deux processus Z_t^R et Z_t^D (formes arrondies du processus Z_t^D au départ et forme en dents de scie du processus Z_t^R).

Variations de la série Z_t Les valeurs de Z_t inférées par maximum de vraisemblance captent bien les variations du cycle économique. Les valeurs positives captent un risque de crédit faible à l'échelle portefeuille tandis que des valeurs négatives de Z_t captent un risque de crédit que l'on peut qualifier d'élever.

4.4.3 Autre méthode d'inférence du facteur systémique

Les facteurs systémiques Z_t sont un indicateur de la position dans le cycle économique. Ils peuvent être estimés de différentes manières. On peut utiliser comme dans la sous-partie précédente une méthode statistique. On obtient alors en résultat des pseudo-observations qui traduisent la position du portefeuille au sein du cycle économique à la date t .

Il est également possible de recourir à des données observables. Dans la littérature, **les taux de dégradations historiques** ou **les taux de défaut historiques** sont souvent considérées au sein des études comme de bons indicateurs de la position d'un portefeuille dans le cycle économique. Nous verrons dans la sous-partie suivante comment ce choix a été motivée et l'application de cette méthode dans la pratique.

4.4.3.1 Les motivations

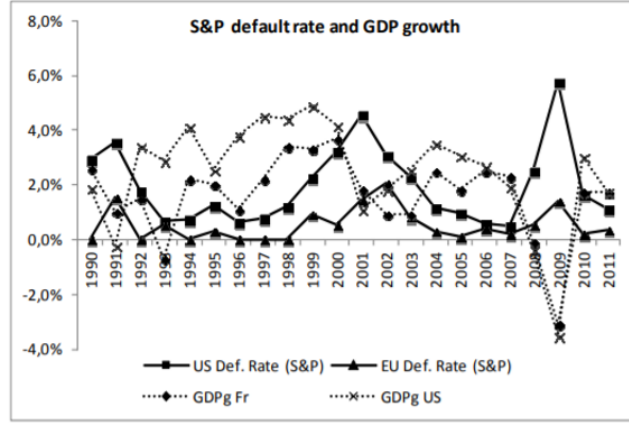


FIGURE 4.18 – Evolution historique des taux de défaut moyens d'un portefeuille de corporate et du taux de croissance PIB ([15])

Historiquement, plusieurs études ont montré que les taux de défaut annuels étaient sensibles au cycle économique. En effet, dans une étude menée par l'ACPR sur l'implémentation de stress sur un portefeuille de type Corporates, les chercheurs ont montré que les taux de défaut suivaient une évolution inverse à celle du taux de croissance du PIB. On constate en effet sur le graphique ci-dessus, que pour les événements financiers/ crises financières historiques (bulle internet (~ 2000) et crise des subprimes (~ 2008)) une augmentation significative des taux de défaut. Cette donnée étant particulièrement sensible à la conjoncture, elle peut être utilisée pour inférer puis projeter Z_t . Ainsi, nous nous inspirons dans cette partie de la méthode tirée d'un article de l'ACPR pour inférer les Z_t depuis les taux de défaut.

4.4.3.2 Méthode 1 : Par résolution d'un problème d'optimisation

Les notations suivantes sont introduites :

- ▶ \widehat{TD}_t , une projection des taux de défaut à horizon t ;
- ▶ \overline{TD} , le taux de défaut de la $i^{\text{ème}}$ classe de risque calculé comme suit sur la base des données historiques disponibles au début de l'année t ;
- ▶ D_t^i , le nombre de défauts de la classe de i à la date t ;
- ▶ C_t^i , le nombre de contreparties total de la classe de risque i à la date t.

Le taux de défaut moyen du portefeuille \overline{TD} calculé sur la base des données historiques disponibles au début de l'année t du *stress test* tel que :

$$\overline{TD} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^K D_t^i}{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^K C_t^i} \quad (4.25)$$

Le facteur systémique pour l'année à venir t noté \hat{z}_t est estimé en résolvant le problème suivant :

$$\underset{\hat{z}_t}{\operatorname{argmin}} \left[\widehat{TD}_t - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\overline{TD}) - \sqrt{\rho^{*2}} \times \hat{Z}_t}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right) \right]^2 \quad (4.26)$$

Remarque Une telle approche est possible uniquement sur un historique suffisamment long. En effet, dans ce cas les taux de défaut sont assimilables aux probabilités de défaut de long terme (PD^{TTC}).

4.4.3.3 Méthode 2 : échelle économique et fonction de conversion (voir si à conserver)

Construction d'une échelle économique L'enjeu ici est de lier l'état de l'économie Z_t au taux de défaut. Pour cela, on distingue deux périodes : une période moyenne/ centrale et une période de crise puis on introduit un indicateur permettant de déduire la position dans le cycle économique à partir des taux de défaut. L'indicateur que l'on notera λ_t est tel que :

$$\lambda_t = \frac{\widehat{TD}_t - \overline{TD}}{TD_{crise} - \overline{TD}} \quad (4.27)$$

Finalement, l'indicateur λ_t constitue une échelle de taux de défaut. On définit les notations suivantes :

- ▶ \widehat{TD}_t est une projection du taux de défaut à la date t ;
- ▶ \overline{TD} est le taux de défaut moyen sur l'ensemble de l'historique ;
- ▶ TD_{crise} est le taux de défaut moyen observé en période de crise.

Remarque Cette échelle de taux de défaut choisie de telle sorte que λ_t soit positif en période récession ($\widehat{TD} \geq \overline{TD}$) et négatif en période de reprise ($\widehat{TD} \leq \overline{TD}$).

Construction d'une fonction de conversion La fonction de conversion est la relation qui va permettre de réaliser le mapping entre l'échelle des taux de défaut et les facteurs Z_t permettant de capter les variations de la conjoncture pour générer les matrices de transition stressées.

La relation est basée sur le couple de variables Z_{ttc} et Z_{crise} qui sont les deux indices qui approchent le mieux respectivement :

1. La matrice des transitions à 1 an MM_{1yr}
2. La matrice des transitions moyenne à 1 an calibrée uniquement sur les périodes de crise $MM_{1yr,crise}$

Les deux paramètres sont ensuite estimés en résolvant le problème de minimisation suivant ⁷ :

$$\begin{cases} Z_{ttc} &= \underset{Z_t}{\operatorname{argmin}} ||\bar{M}M_{1yr} - MM(Z_t)|| \\ Z_{crise} &= \underset{Z_t}{\operatorname{argmin}} ||\bar{M}M_{1yr,crise} - MM(Z_t)|| \end{cases}$$

où $MM(Z_t)$ est la matrice de transition calculé avec les formules introduites dans le cadre théorique du modèle de Vasicek à un facteur.

Finalement, la fonction de conversion entre l'échelle de taux de défaut et le facteur systémique est :

⁷. A noter que la norme choisie est la norme euclidienne, c'est la norme usuelle des problèmes d'optimisation linéaire $||\Delta MM|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{K+1} (MM)_{i,j}^2}$

$$\begin{cases} Z_t = Z_{crise} & \text{Si } \lambda_t = 1 \\ Z_t = (Z_{crise} - Z_{ttc}) \times \lambda_t + Z_{ttc} & \text{Si } \lambda_t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ Z_t = Z_{ttc} & \text{Si } \lambda_t = 0 \end{cases}$$

Résumé du chapitre 4

Le chapitre 3 avait pour objectif de présenter le cadre théorique du modèle de Vasicek à un facteur. Cela nous avait alors permis d'introduire les formules fermées permettant de calculer les probabilités de transition conditionnellement à l'environnement économique. Les matrices de transition *point-in-time* dépendent alors de trois paramètres, soit : $M_t = f(\bar{M}, Z_t, \rho^2)$.

Dans le chapitre 4, nous détaillons toutes les méthodes utilisées pour modéliser chacun des paramètres. Nous analysons ensuite les résultats pour souligner l'importance des choix de modélisation des différents paramètres. Nous finissons par introduire dans ce chapitre deux approches permettant de modéliser la série des facteurs systémiques. Dans le chapitre suivant, nous présenterons les modèles économétriques estimés sur chacune des variables cibles identifiées : la série des facteurs systémiques pseudo-observés et les taux de défaut moyens observés sur le portefeuille.

Chapitre 5

Modèles de projection des facteurs systémiques

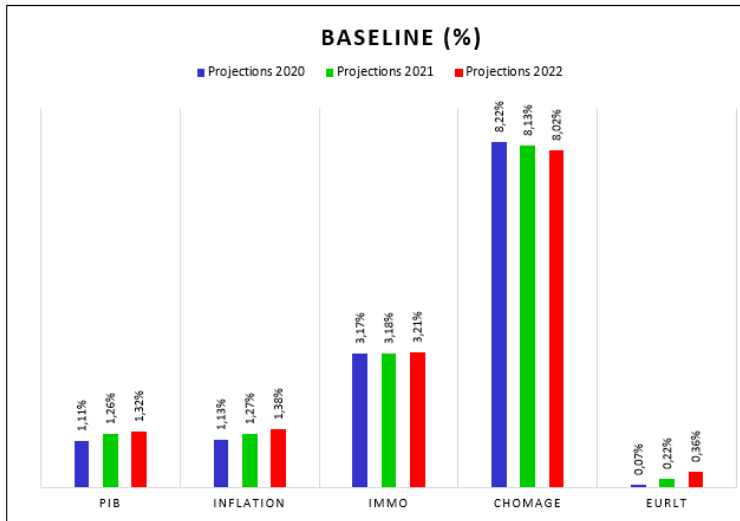
Introduction au chapitre 5

Le chapitre 5 vise à estimer les modèles économétriques (satellites) de projection des variables cibles : la série des facteurs systémiques pseudo-observés et celle des taux de défaut moyens observés. Ainsi, dans cette partie, nous commençons par introduire les enjeux du stress BCE. Ensuite, nous rappelons le cadre théorique du modèle linéaire, les critères d'évaluation de la qualité d'ajustement et les critères de validité des modèles. Nous poursuivons par l'estimation des modèles satellites et finissons par présenter les résultats.

5.1 Présentation du *stress test* BCE 2020

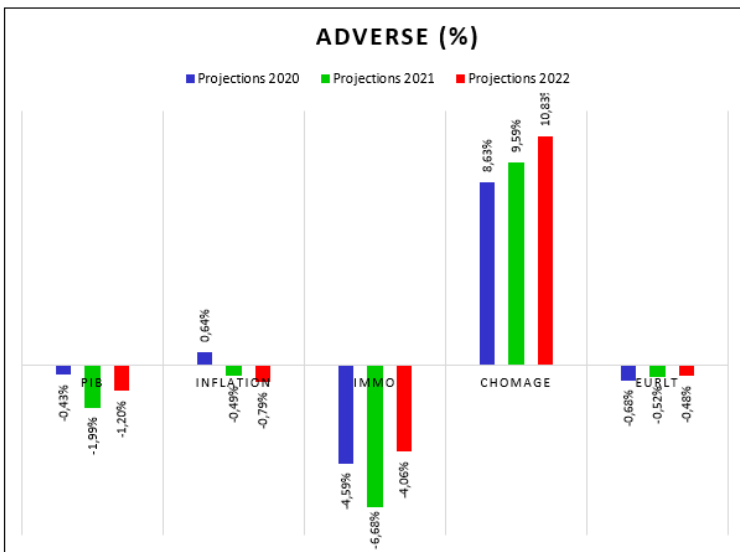
5.1.1 Les projections macroéconomiques

Pour son *stress test* 2020, la BCE fournit des projections de variables macroéconomiques selon 2 scénarios qui incluent : l'évolution du PIB réel, l'inflation, le taux de chômage, les prix de l'immobilier, les cours des actions, le taux de change et les taux d'intérêt (long terme et court terme). Les scénarios couvrent trois années, de 2020 à 2022. Pour le *stress test* de l'année 2020, la base de référence pour les pays de l'Union Européenne est basée sur les projections de décembre 2019 des banques centrales nationales. Ces scénarios serviront de référence pour le reste de l'étude.



| BASELINE | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| PIB | 1,49% | 1,11% | 1,26% | 1,32% |
| Inflation | 1,11% | 1,13% | 1,27% | 1,38% |
| Immo | 3,34% | 3,17% | 3,18% | 3,21% |
| Chomage | 8,45% | 8,22% | 8,13% | 8,02% |
| EURLT | 0,13% | 0,07% | 0,22% | 0,36% |

Projections macroéconomiques du scénario baseline à horizon 3 ans



| ADVERSE | | | | |
|-----------|-------|--------|--------|--------|
| Variable | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| PIB | 1,49% | -0,43% | -1,99% | -1,20% |
| Inflation | 1,11% | 0,64% | -0,49% | -0,79% |
| Immo | 3,34% | -4,59% | -6,68% | -4,06% |
| Chomage | 8,45% | 8,63% | 9,59% | 10,83% |
| EURLT | 0,13% | -0,68% | -0,52% | -0,48% |

Projections macroéconomiques du scénario adverse à horizon 3 ans

FIGURE 5.3 – Scénario fournis par la BCE pour son *stress test* 2020

5.1.2 Analyse des scénarios

On rappelle que dans le cadre de ce *stress test*, l'objectif est de distordre une distribution initiale des effectifs par classe de risque, conditionnellement à des chocs macroéconomiques. Ainsi, une analyse des scénarios au préalable est indispensable. En effet, en fonction de leur sévérité, il est possible de tirer les premières conclusions sur l'évolution présumée de la qualité de crédit du portefeuille. Ainsi :

- Le **scénario baseline** proposé par la BCE pour l'année 2020 peut être qualifié d'optimiste. Pour une majorité des variables projetées, on observe une amélioration de la situation au niveau de la 3^{ème} année de projection. Prenons pour exemple les taux de long terme : une légère baisse des taux est anticipée en 2020 par rapport au niveau 2019. Une hausse est ensuite prévue pour les années 2021 et 2022. Pour le taux de chômage, une diminution progressive est prévue sur l'horizon de projection.

Les deux exemples ci-dessus nous montrent qu'un stress n'équivaut pas forcément à un impact négatif. Ainsi, on sera vigilant lors de l'interprétation de nos résultats en fonction des variables macroéconomiques mises en évidence par nos modèles. En effet, il est tout à fait possible d'obtenir une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille. Cette amélioration se traduit par une migration de notes vers les classes de risque les moins risquées.

- Le **scénario adverse** proposé par la BCE pour son *stress test* 2021 est bien plus sévère. Les niveaux de la majorité des variables retenues sont très dégradés par rapport à leur niveau 2019. Pour le scénario adverse, les taux long terme sont bas et atteignent des valeurs négatives. Le taux de chômage augmente considérablement sur l'horizon de projection. Le taux de croissance PIB décroît fortement. Cela signifie que le PIB réel diminue sur l'horizon de projection.

Pour le scénario adverse, on s'attend à observer des niveaux de dégradations plus prononcés. En effet, intuitivement, les conditions économiques devraient induire une baisse de la qualité de crédit du portefeuille.

5.1.3 Enjeux des modèles satellites

Néanmoins, avant de tirer des conclusions sur l'évolution de la qualité crédit du portefeuille, il faut en premier lieu lier le portefeuille à l'état de l'économie. Dans le cadre du modèle de Vasicek à un facteur, ce lien s'établit par l'intermédiaire du facteur systémique. Aussi, c'est ce facteur qu'on cherchera directement à expliquer en fonction de variables macroéconomiques au sein d'un modèle de régression linéaire simple. Enfin, la projection de ce facteur selon les deux scénarios permettra en dernier lieu de distordre la distribution des effectifs au sein des classes de risque.

Lors de la calibration des modèles permettant d'expliquer les facteurs systémiques en fonction de variables macroéconomiques, un compromis est souvent à trouver. En effet, un arbitrage doit être effectué entre facilité d'implémentation et d'appropriation par les métiers d'une part, et puissance prédictive et robustesse statistique d'autre part. La démarche à mettre en oeuvre pour assurer la robustesse statistique du modèle consiste en une approche itérative en trois étapes qui comprend : la collecte et le retraitement de la donnée, la détermination des variables explicatives et l'expression du modèle et enfin, l'évaluation de sa performance.

De plus, le choix de la forme des modèles statistiques est d'abord fonction de la qualité et de la profondeur des données disponibles. Par exemple, les données doivent être suffisamment profondes pour représenter différentes situations économiques (expansion, crise). Ensuite, les modèles linéaires sont souvent privilégiés pour leur appropriation plus aisée. Enfin, des transformations mathématiques des séries de données peuvent améliorer la qualité des modèles à tester mais doivent être justifiées méticuleusement.

Ainsi, pour l'implémentation de nos modèles régression, nous tiendrons compte de toutes les recommandations précédentes. Dans la suite, nous commencerons par rappeler le cadre théorique du modèle linéaire, les critères de sélection et de validation de ses hypothèses retenus.

5.2 Modèles de projection des facteurs systémiques

5.2.1 Rappels sur le modèle linéaire

La régression linéaire multiple est la généralisation de la régression linéaire simple au cas $p > 1$ au sein de laquelle une variable quantitative Y dite à *expliquer* est mise en relation avec p variables quantitatives X^1, \dots, X^p , appelées variables explicatives. Elle implique de se restreindre à une famille de fonction de prédiction linéaires et à des variables exogènes quantitatives ou qualitatives recodées. Les données sont supposées provenir de l'observation d'un échantillon de taille n , où $n > p + 1$ de \mathcal{R}^{p+1} .

Definition 5.2.1 (*Écriture du modèle linéaire*)

Soit Y_i une variable dépendante que l'on souhaite expliquer en fonction d'un vecteur de variables explicatives X_i , les $(p + 1)$ variables aléatoires vérifient :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_p x_i^p + u_i \quad (5.1)$$

où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Puis, l'écriture matricielle du problème de régression multiple est telle que :

$$Y = X\beta + u \quad (5.2)$$

où $\beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_p]^T$, $u = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_p]^T$ et X une matrice de taille $n \times (p + 1)$.

Le modèle linéaire est défini sous les hypothèses probabilistes suivantes :

1. Les termes x^j sont supposés déterministes (non aléatoires).
2. Les paramètres $(\beta_0, \dots, \beta_p)$ sont supposés constants.
3. Les u_i sont des termes aléatoires qui cristallisent toutes les insuffisances du modèle. Ils quantifient les écarts entre les valeurs réellement observées et les valeurs prédites par le modèle. Mathématiquement, il s'agit de termes d'erreur, d'une variable U , non observés, iid¹ et vérifiant :
 - $\mathbb{E}(u) = 0$, en moyenne le modèle est bien spécifié
 - $\text{Var}(u) = \sigma_u^2$, la variance de l'erreur est constante (homoscédasticité)
 - $\forall i \neq j, \mathbb{E}(u_i, u_j) = 0$, les erreurs non corrélées (pas d'autocorrélation).
 - $\text{Cov}(X, u) = 0$, l'erreur est indépendante des variables explicatives.
4. En vue de l'étude statistique des estimateurs les u_i sont i.i.d et $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$.

Estimations des paramètres Les paramètres inconnus du modèle que sont le vecteur β et la variance des résidus σ_u^2 peuvent être estimés par minimisation du critère des moindres carrés ordinaires (MCO) ou par maximum de vraisemblance (MV).

1. Indépendant et identiquement distribués

5.2.2 Critères d'évaluation de la qualité d'ajustement

5.2.2.1 Test de nullité d'un paramètre du modèle

Les hypothèses nulle et alternative de ce test sont :

$$\begin{cases} H_0 & := \beta_j = 0 \\ H_1 & := \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

A travers l'hypothèse nulle de ce test, on étudie l'effet de la présence d'une variable explicative X^j . L'hypothèse H_0 de nullité d'un paramètre du modèle peut être testée au moyen de la statistique de Student :

$$t_{cal} := \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_j^2} \sim \text{Student}(n - p - 1)$$

On note ici $\hat{\sigma}_j^2$ l'estimateur de la variance de $\hat{\beta}_j$. Sous H_0 , l'estimateur de $\hat{\beta}_j$ du paramètre β_j est comparé à la valeur $\beta_j = 0$. Pour statuer sur la significativité du coefficient on compare la statistique de student t_{cal} à la valeur tabulée $t_{n-p-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} |t_{cal}| \geq t_{n-p-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & \text{alors on rejette } H_0 \\ |t_{cal}| \leq t_{n-p-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & \text{alors on ne peut pas rejeter } H_0 \end{cases}$$

5.2.2.2 Test de nullité jointe de plusieurs paramètres du modèle

Les hypothèses nulle et alternative de ce test sont :

$$\begin{cases} H_0 & := \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j = 0 \\ H_1 & := \exists j, \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

Sous l'hypothèse nulle de ce test, on teste la nullité de tous les paramètres du modèle associés aux variables explicatives. L'hypothèse composée de p contraintes signifie que les p paramètres associés aux p variables explicatives sont nuls, c'est-à-dire qu'aucune variable explicative présente dans le modèle ne permet d'expliquer la variable endogène.

La statistique du test de Fisher-Snedecor permettant de tester la nullité jointe des p paramètres du modèles est telle que :

$$F_{cal} := \frac{ESS/p}{RSS/(n-p-1)} \sim \mathcal{F}(p, n-p-1) \quad (5.3)$$

où :

- ▶ TSS = $\|y - \bar{y}\|$, somme des carrés totaux corrigés de y ; Elle indique la variabilité totale de Y c.-à-d. l'information disponible dans les données;
- ▶ ESS = $\|\hat{y} - \bar{y}\|$, somme des carrés expliqués. Elle indique la variabilité expliquée par le modèle c.-à-d. la variation de Y expliquée par X ;
- ▶ RSS = TSS - ESS = $\|y - \hat{y}\|$, somme des carrés résiduels. Elle indique la variabilité non-expliquée (résiduelle) par le modèle c.-à-d. l'écart entre les valeurs observées de Y et celles prédites par le modèle.

5.2.2.3 Coefficient de détermination R^2

Le coefficient de détermination R^2 indique la part de la variabilité de la variable dépendante Y expliquée par le modèle de régression. Il est tel que :

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)} \quad (5.4)$$

Il a la particularité de croître avec le nombre de variables explicatives. Ainsi, il ne peut servir qu'à la comparaison de deux modèles de même dimension car sinon il conduirait à sélectionner le modèle le plus complexe et donc à du sur-ajustement. Pour pallier le caractère croissant du R^2 en fonction du nombre de variables, une version pénalisée a été proposée, le R^2 ajusté.

La version pénalisée du coefficient de détermination est le coefficient de détermination ajusté. On le notera R_{adj}^2 . Il est tel que :

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2) = 1 - \frac{ESS/(n-p-1)}{TSS/(n-1)} \quad (5.5)$$

Il introduit une pénalisation liée au nombre de paramètre à estimer. On l'utilisera pour la comparaison de modèle de dimensions différentes.

5.2.3 Critères de validité des modèles

5.2.3.1 L'homoscédasticité des résidus

Le critère de variance constante des résidus, dit *homoscédasticité*, peut être vérifié à l'aide du test statistique de Breusch-Pagan (*bptest* sous R).

$$\begin{cases} H_0 & := \text{Homoscédasticité des résidus du modèle} \\ H_1 & := \text{Hétérocédasticité des résidus du modèle} \end{cases}$$

Ce test ajuste un modèle de régression linéaire aux résidus d'un modèle de régression linéaire (par défaut, les mêmes variables explicatives sont prises que dans le modèle de régression principal) et rejette l'hypothèse nulle d'homoscédasticité si une trop grande partie de la variance est expliquée par les variables explicatives supplémentaires.

5.2.3.2 L'autocorrélation des résidus

L'autocorrélation des résidus peut être vérifiée à l'aide du test de statistique de Durbin-Watson (*dwttest* sous R) :

$$\begin{cases} H_0 & := \text{L'autocorrélation des résidus est nulle.} \\ H_1 & := \text{L'autocorrélation des résidus est non nulle.} \end{cases}$$

La statistique de ce test est telle de :

$$DW = \frac{\sum_i (e_{i+1} - e_i)^2}{\sum_i e_i^2} \text{ où} \quad (5.6)$$

e est le terme d'erreur du modèle.

Remarque L'hypothèse nulle permet de tester alors si le résidu e_i est corrélé au résidu e_{i+1} . Dans la littérature, on considère que, lorsque la statistique de test est proche de 2, alors il n'y a pas d'autocorrélation entre les résidus.

5.2.3.3 Normalité des résidus

La normalité des résidus peut être tout d'abord observée par méthode graphique par la réalisation d'un graphique quantile-quantile (*Q-Q plot*). On s'attend ici à observer un bon alignement autour de la droite de pente 1 et d'équation $y = x$. Le test de normalité de Shapiro-Wilk peut venir ensuite confirmer nos observations. L'hypothèse nulle de ce test est la distribution à caractère normal de l'échantillon en input.

5.2.3.4 Détection de la multicollinéarité, le *VIF*

Il s'agit du facteur d'inflation de la variance qui est tel que :

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad (5.7)$$

où R_j^2 désigne le coefficient de détermination de la régression de la variable X^j sur les autres variables. Ainsi, plus X^j est linéairement proches des autres variables. On en déduit donc que plus R_j^2 est grand et plus la valeur de l'estimateur β_j est élevé. Dans la littérature, on considère que des coefficients VIF inférieurs à 5 sont acceptables.

5.2.4 Les régressions fallacieuses

L'estimation d'un modèle de régression sur des séries temporelles pose le problème des régressions dites fallacieuses. En effet, dans la littérature, un bon nombre de chercheurs ont mis en évidence les inconvénients de l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaires sur des séries non stationnaires. Ces études se concentrent plus précisément sur les séries intégrées à l'ordre 1². Les régressions sur ces séries I(1) amènent trop souvent à de fausses conclusions. En effet, les statistiques et tests usuels laissent souvent croire à l'existence de liens de dépendance non avérés dans la réalité. Les régressions **fallacieuses** se caractérisent par :

- ▶ Des **statistiques de Fisher élevés**, conduisant à des pourcentages de rejet de l'hypothèse nullité jointe des coefficients anormaux ;
- ▶ Des **statistiques de student** trop souvent significatives pour les coefficients du modèle ;
- ▶ Des **coefficients de détermination élevés**, souvent supérieurs à 50% ;
- ▶ Des statistiques de **Durbin-Watson faibles**, conduisant au rejet de l'hypothèse nulle d'autocorrélation non significative des résidus.

Ce problème vient notamment du fait que dans le cas de séries non stationnaires, les distributions des estimateurs moindres carrés ordinaires puis des statistiques de Fisher et de student ne suivent plus leurs distributions classiques.

Les différents points cités semblent d'autant plus aberrants lorsque le nombre de variables explicatives augmentent. Une solution pourrait alors être de différencier les variables pour les rendre stationnaires ou travailler avec des variables en niveau (non différenciées) cointégrées.

Remarque Manipulant des séries temporelles, il est important de traiter de cette limite prépondérante dans notre analyse. Ainsi, une analyse de la stationnarité de séries manipulées sera menée. De surcroît, on sera particulièrement regardant sur les points cités plus haut au niveau des modèles de régression implémentés.

2. C'est à dire à des séries stationnaires en différence première

5.2.5 Investigation de la non stationnarité dans la pratique

5.2.5.1 Le test de Dickey-Fuller simple

Le test de Dickey-Fuller est un test de racine unitaire dont l'hypothèse nulle est la présence d'une racine unitaire équivalent à la non stationnarité d'un modèle autorégressif du premier ordre.

Considérons un X_t un processus $AR(1)$ de la forme :

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t \quad (5.8)$$

où ϵ_t est un bruit blanc faible.

Les hypothèses nulle et alternative du test de Dickey-Fuller sont :

$$\begin{cases} H_0 := \rho = 1 \Leftrightarrow \text{La série contient une racine unitaire (non stationnarité)} \\ H_1 := \rho < 1 \Leftrightarrow \text{La série ne contient pas de racine unitaire (stationnarité)} \end{cases}$$

Le test de Dickey-Fuller estime trois modèles :

| | | | |
|--|-------------------|---|------------|
| $y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot t + \beta + \epsilon_t$ | \Leftrightarrow | $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot t + \beta + \epsilon_t$ | (modèle 3) |
| $y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \beta + \epsilon_t$ | \Leftrightarrow | $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \beta + \epsilon_t$ | (modèle 2) |
| $y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \epsilon_t$ | \Leftrightarrow | $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \epsilon_t$ | (modèle 1) |

Sous l'hypothèse nulle, le processus X_t est une marche aléatoire, soit un processus non stationnaire par définition.

Remarques

1. Les hypothèses nulle et alternative du test se réécrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} H_0 := \Phi = 0 \Leftrightarrow \rho = 1 \\ H_1 := \Phi < 0 \Leftrightarrow \rho < 1 \end{cases}$$

2. Le test de Dickey-Fuller simple est un test unilatéral à gauche. Ainsi, si l'on ne peut pas rejeter H_0 , on conclut à la non stationnarité du processus étudié et ce peu importe le modèle considéré.
3. Dans le test de Dickey-Fuller simple, l'erreur du processus étudié est considérée indépendante et identiquement distribuée.

5.2.5.2 Le KPSS test

Le test de *Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, and Shin*, dit *KPSS test* (1992) est basé sur l'hypothèse nulle de stationnarité autour d'une tendance de la série chronologique testée. Il diffère du test de Dickey-Fuller par le fait qu'il ne cherche pas à démontrer la présence d'une racine unitaire au sein de la série. Les hypothèses nulle et alternative s'écrivent :

| | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| $H_0 = \sigma_\nu^2 = 0$ | i.e. la série est stationnaire |
| $H_1 = \sigma_\nu^2 \neq 0$ | i.e. la série est non stationnaire |

Remarque importante Dans la suite, la stationnarité des variables explicatives sera présentée en annexe. Nous ne développerons que les analyses de stationnarité sur les variables à expliquer.

5.3 Préparation des modèles économétriques

La Banque centrale européenne (BCE) fournit les projections à horizon 3 ans de plusieurs variables macroéconomiques selon 2 scénarios : baseline et adverse. Les banques ont alors pour but de stresser les distributions du nombre de contreparties par classe de risque de leur portefeuille, conditionnellement à ces scénarios.

Pour cela, il est nécessaire de mettre en œuvre un modèle satellite. Il s'agit d'un modèle économétrique qui permet d'expliquer une variable capturant les variations du cycle économique (variable cible) par des données macroéconomiques. Dans le chapitre précédent, nous avons identifié deux variables cibles : la série des facteurs systémiques pseudo-observés Z_t et la série des taux de défaut moyens historiques. Ainsi, dans la suite de l'étude, nous construisons deux modèles satellites selon les étapes suivantes :

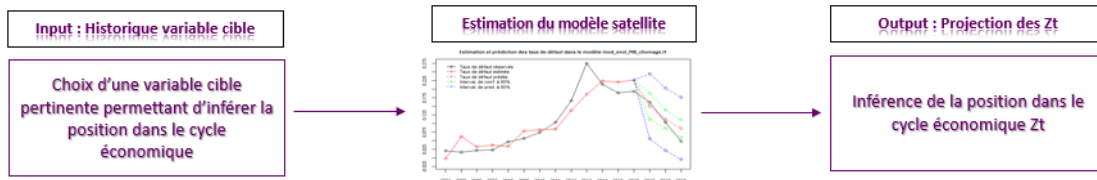


FIGURE 5.4 – Projection des facteurs systémiques

- Dans la première méthode, la variable à expliquer est la série des facteurs systémiques pseudo-observés Z_t . Nous estimons dans les sous-parties suivantes le modèle linéaire suivant :

$$Z_t = X\beta + u_t \quad (5.9)$$

où X , est la matrice des variables explicatives de nature macroéconomique, β est le vecteur des coefficients à estimer et u_t le vecteur des termes d'erreur.

Pour ce premier cas, une fois le modèle retenu, on obtiendra les Z_t pour les années 2020, 2021 et 2022 en projetant directement le modèle retenu. Nous utiliserons pour les variables retenues dans notre modèle, les projections fournis par la BCE pour l'exercice de *stress test* 2020.

- Dans la deuxième méthode, la variable dépendante est une variable observée. Nous estimons un modèle de régression sur les taux de défaut moyens de l'historique :

$$TD_t = X\beta + \epsilon_t \quad (5.10)$$

où X , est la matrice des variables explicatives de nature macroéconomique, β est le vecteur des coefficients à estimer et u_t le vecteur des termes d'erreur.

Pour ce second cas, notre modèle nous permettra de projeter les taux de défaut moyens du portefeuille pour les années 2020, 2021, 2022. Pour revenir au facteur systémique, nous choisissons la méthode 1 présentée au chapitre précédent. Elle consiste à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\underset{\hat{z}_t}{\operatorname{argmin}} \left[\widehat{TD}_t - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\overline{TD}) - \sqrt{\rho^{*2}} \times \hat{Z}_t}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right) \right]^2 \quad (5.11)$$

Remarque importante Nous choisissons d'implémenter deux modèles de projection des facteurs systémiques dans l'objectif de pouvoir comparer les distributions stressées obtenues par ces deux approches.

5.3.1 Les variables macroéconomiques d'intérêts

5.3.1.1 Présentation

Le choix des variables macroéconomiques candidates s'est fait sur la base des variables projetées par la BCE dans le cadre de son exercice de *stress test*. Parmi l'ensemble des variables proposées, un tri a été opéré en tenant compte de l'avis des experts en interne. Les données proviennent toutes de sources externes³. Ainsi, les variables suivantes ont été retenues dans le cadre de notre analyse⁴ :

| Nom de la variable | Libellé BCE | Description | Signe Z_t | Signe TD_t |
|--------------------|-----------------------------|---|-------------|--------------|
| PIB | GDP growth | Taux de croissance du PIB réel | + | - |
| IMMO | Residential property prices | Taux de croissance annuel de l'indice des prix de l'immobilier résidentiel | + | - |
| CHOMAGE | Unemployment rate | Ratio du nombre de personnes sans emploi sur la population active | - | + |
| INFLATION | Inflation (HICP) | Taux de croissance annuel de l'indice des prix à la consommation harmonisé (IPCH) | NA | NA |
| TAUX LT | Long term growth rate | Taux d'intérêt long terme | - | + |

TABLE 5.1 – Variables d'intérêt

Au sein de notre jeu de données, pour chaque variable *brute*, on considère son taux de croissance ainsi que la variable standardisée⁵. Pour la variable brute et ses transformations, on considère les mêmes variables retardées d'un an puis deux ans.

Remarque La prise en compte de variables retardées se justifie par le fait que les effets de la conjoncture économique sur la variable dépendante sont souvent décalés par rapport à la survenance d'un choc. Il faut en effet parfois considérer plus d'une année de décalage afin de constater l'effet notable d'un choc économique sur les portefeuilles de crédit. On choisit de retarder les variables au plus jusqu'à deux ans. En effet, il a été estimé par les analyses qu'en considérant un plus grand retard les effets des variables retardées sur la variable à expliquer pourraient s'avérer contre-intuitifs.

Voici un récapitulatif du type de variables qui figurent dans notre jeu données :

| Libellé | Nature de la variable |
|-----------|---|
| X | Variable non retraitée |
| evol_X | Taux de croissance de la variable brute |
| X_std | Variable standardisée |
| X.li | Variable retardée avec $i = \{1,2\}$ |
| evol_X.li | Taux de croissance de la variable retardée avec $i = \{1,2\}$ |
| X_std.li | Variable standardisée retardée avec $i = \{1,2\}$ |

TABLE 5.2 – Type de variables contenues dans la base de données

3. OCDE pour la majorité

4. Le choix du signe des variables sera justifié un peu plus bas.

5. Soit X une variable, sa valeur standardisée consiste en la transformation suivante : $\frac{X - \min(X)}{\max(X) - \min(X)}$

Dans la suite, nous présentons l'intérêt théorique de chaque variable dans l'explication des taux de défaut d'un portefeuille tel que le nôtre. Cela va permettre de mieux expliquer les choix effectués. Par ailleurs, afin de retenir des modèles cohérents d'un point de vue économique, nous argumentons quant aux signes attendus des variables explicatives.

5.3.1.2 Justification du choix des variables

Dans cette sous partie, nous allons interroger la relation entre les variables cibles d'un portefeuille de collectivités locales et les variables macroéconomiques retenues. On verra que, pour certaines variables, l'interprétation de leur effet éventuel sur les variables dépendantes découle directement du fonctionnement budgétaire de nos clients tandis que pour d'autres, le lien présumé découle de la gestion financière des prêts au sein de la banque (indexation, revalorisation). Pour chaque variable, nous allons décrire la relation économique qui la lie a priori au risque de crédit des communes et plus largement à celui des collectivités locales, ce qui permettra de justifier les signes attendus.

Le taux de chômage

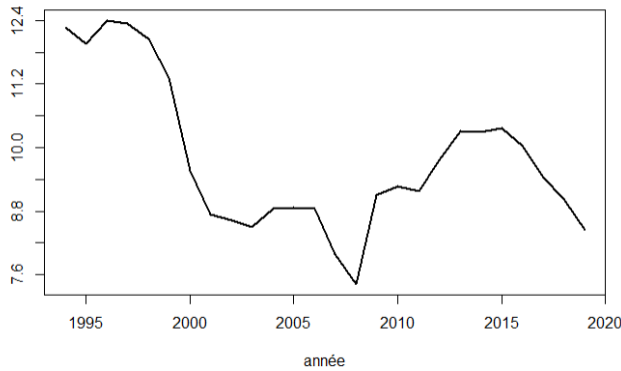


FIGURE 5.5 – Taux de chômage en pourcentage de la population active

Un premier lien notable pourrait être qu'une hausse du taux de chômage entraînerait une hausse des dépenses des collectivités. En effet, ces dernières redistribuent une partie de leurs ressources à des organismes tel que pôle emploi. En augmentant les dépenses des collectivités locales, un taux de chômage élevé déséquilibrerait et affaiblirait le budget local. Ainsi, on s'attend à un **signe positif** pour cette variable.

Le taux de croissance PIB

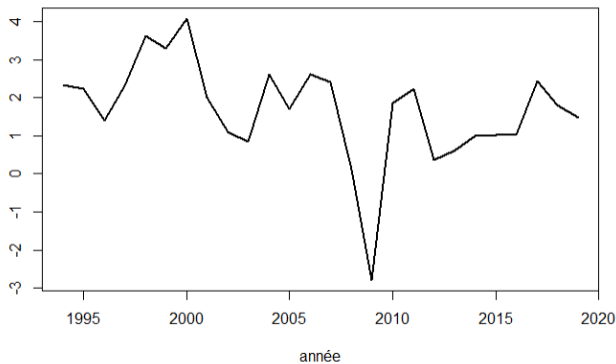


FIGURE 5.6 – Taux de croissance PIB

Le PIB est le reflet de l'activité économique nationale. Une diminution de celui-ci impactera indirectement les finances des collectivités locales en ayant une influence sur la gestion budgétaire de l'Etat. Lors de récession, l'Etat devra resserrer son budget dans certains secteurs et pourrait ainsi réduire le montant des dotations versées aux collectivités. En revanche, lors de périodes d'expansions, l'Etat sera enclin à verser plus de dotations. Le **signe attendu** pour le taux de croissance du PIB est par conséquent **négatif**.

Le prix de l'immobilier

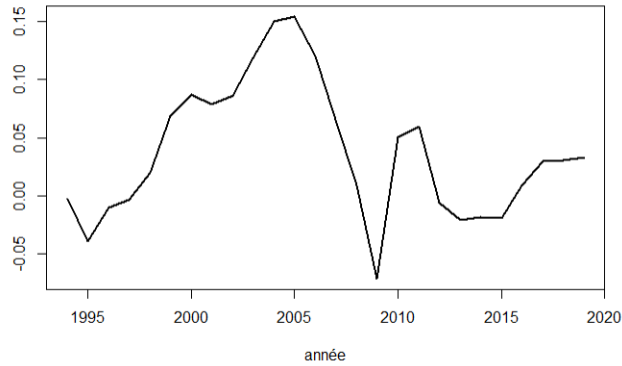
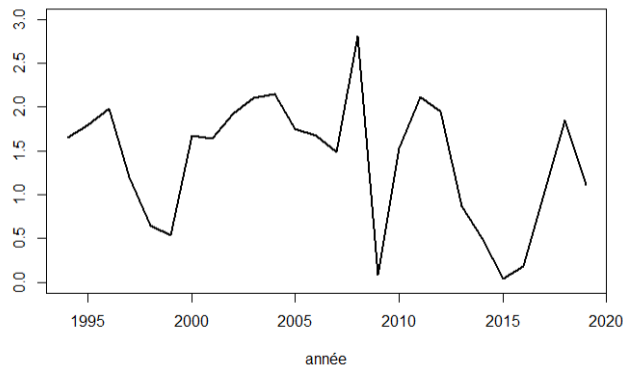


FIGURE 5.7 – Evolution du prix de l'immobilier résidentiel

Les principaux impôts locaux versés aux communes correspondent à la taxe d'habitation et à la taxe sur le foncier bâti et non bâti. Ce sont les collectivités locales qui déterminent le taux associé à ses taxes qui, multipliée par les bases (voir ci-dessous), donnent le produit perçu par la collectivité locale considérée. Ainsi, une baisse de cette ressource, devrait nécessairement s'accompagner sur le long terme d'une augmentation des taux de défaut en portefeuille. Le **signe attendu** pour cette variable est **négatif**.

L'inflation

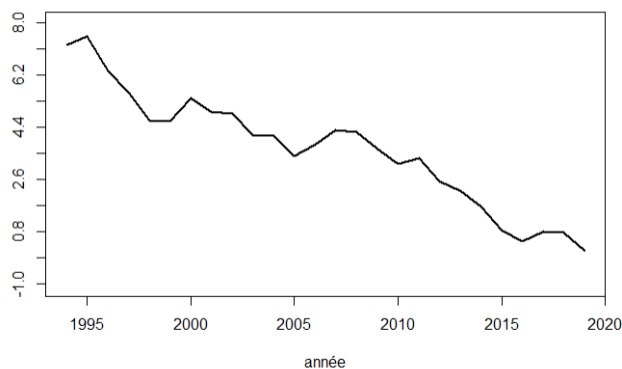


Interprétation 1 Les dotations de l'Etat semblent diminuer par l'effet inflation. Ce gel est d'autant plus problématique que les dotations constituent une part de plus en plus importante dans les ressources locales. Cette contrainte sur les recettes amène certains professionnels et économistes à penser qu'à terme les difficultés de financement pourraient venir essentiellement de la réduction des recettes versées par l'Etat.

Interprétation 2 Cependant, un autre lien probant pourrait être le suivant : lorsque le taux d'inflation est très élevé, celui-ci impacte à la baisse le salaire moyen des individus et donc les marges sur la fiscalité, premier levier financier des collectivités. Si l'inflation venait à trop augmenter, les marges sur la fiscalité seraient alors restreintes, ce qui pourrait impacter la santé financière des collectivités. Cependant, le **signe attendu** pour cette variable reste **ambigu** car un taux d'inflation trop bas peut être le signe d'une conjoncture économique défavorable également, **on ne retiendra donc pas de signe spécifique pour cette variable**.

FIGURE 5.8 – Inflation

Le taux long terme



Les collectivités locales souscrivent leur prêt à long terme et empruntent donc au taux long terme. Une augmentation critique de ce taux sur le marché alourdirait les charges de la dette acquise. Les collectivités se trouveraient alors en difficulté pour le remboursement de leur prêt et devraient faire face à des retards de paiement voire à des défauts de paiements. Le **signe attendu** pour cette variable est **positif**.

FIGURE 5.9 – Taux d'intérêt long terme

5.3.2 Méthodologie d'implémentation des modèles

L'historique à disposition étant court et les possibilités de modélisation nombreuses, nous choisissons pour l'implémentation des modèles de procéder par **méthode naïve** pour n'occulter aucune possibilité. Nous générons ainsi des régressions avec toutes les combinaisons possibles d'au plus trois variables afin d'en tirer le meilleur modèle prédictif possible tout en limitant le phénomène de sur-apprentissage et la multicolinéarité au sein de nos régresseurs.

Nous réalisons trois disjonctions de cas en étudiant tous les modèles possibles à un, deux et trois facteurs. Le mode opératoire est similaire pour ces trois cas. La présélection des modèles s'effectue sur la base des critères de qualité d'ajustement énoncés en début de chapitre. Nous fixons les seuils suivants :

- ▶ L'analyse de la significativité de chaque coefficient : on considérera pour ce test un *seuil d'erreur de 5%*.
- ▶ Le signe des coefficients attendus : pour les variables dont le signe a été identifié comme étant ambigu, on conservera indifféremment des modèles avec l'un des deux signes.
- ▶ L'analyse de la nullité jointe des coefficients de la régression : on considérera également pour ce test un *seuil d'erreur de 5%*.
- ▶ L'analyse de la multicolinéarité au sein des régresseurs : on retiendra pour le VIF qu'une valeur *inférieure ou égal à 5* est raisonnable.
- ▶ L'analyse du R^2 pour des modèles de mêmes dimensions, puis du R^2 ajusté pour des modèles de dimensions différentes : on considérera un coefficient de détermination *supérieur à 50%* est raisonnable.

Tous ces axes d'analyse constituent un premier filtre au sein de nos modèles. En guise de deuxième filtre, nous poursuivons par l'analyse des résidus des modèles présélectionnés. On tache pour cela de vérifier les trois points suivants :

- ▶ L'autocorrélation des résidus : les tests de *Durbin-Watson* et de *Breusch-Godfrey* nous permettront de statuer sur l'autocorrélation au sein des résidus du modèle. *L'hypothèse nulle* de ces deux tests est *l'absence d'autocorrélation au sein des résidus du modèle*. Il a été jugé judicieux de réaliser les deux car la statistique de test de *Durbin-Watson* est plus restrictive. En effet, elle ne permet que de tester la possibilité d'un AR(1) pour les résidus de la régression. En revanche, le test de *Breusch-Godfrey* ne possède pas cette restriction. De plus, il est connu pour être statistiquement plus puissant.
- ▶ L'hétéroscédasticité au sein des résidus de nos modèles : nous utiliserons pour cela le test de *Breusch-Pagan*. *L'hypothèse nulle* de ce test est *l'homoscédasticité des résidus* du modèle.
- ▶ La normalité des résidus du modèle : Elle sera testée grâce au test de *Shapiro-Wilk*. *L'hypothèse nulle* de ce test est *la validation d'une distribution standard* pour l'échantillon testé.

Transition Dans la sous-partie précédente, nous avons présenté l'intérêt de chaque variable candidate pour la modélisation des variables cibles. Dans la suite, nous présentons les étapes clés de l'implémentation des modèles. Par des raisons de lisibilité nous ne présenterons que les modèles finaux retenus.

5.4 Modèle satellites

5.4.1 Modèle satellite de la série des Z_t pseudo-observés

5.4.1.1 Stationnarité de la série des Z_t

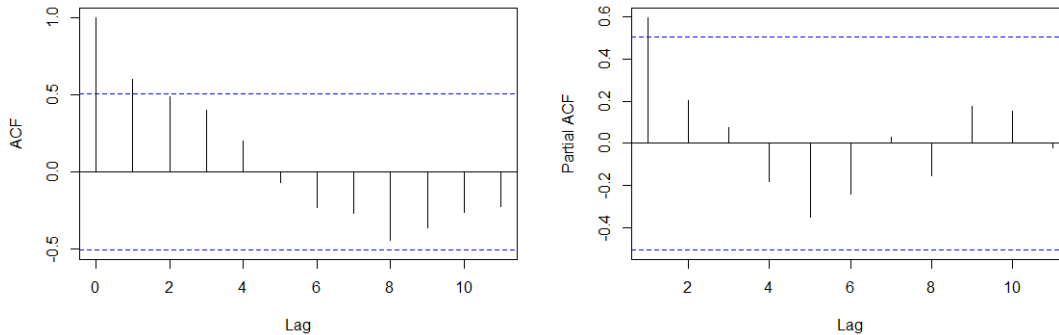


FIGURE 5.10 – Autocorrélogramme (*gauche*) et autocorrélogramme partiel (*droite*)

Les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle témoignent d'une autocorrélation d'ordre 1 de la série. L'autocorrélogramme partiel présente une autocorrélation partielle significative pour le retard d'ordre 1. Enfin, on remarque que la fonction d'autocorrélation décroît vite ce qui pourrait laisser présager que la série est stationnaire. Pour s'en assurer, nous implémentons deux tests statistiques : Le test de Dickey-Fuller et le KPSS test.

Nous avons procédé au test de Dickey-Fuller augmenté pour les trois modèles : le modèle avec tendance, avec constante puis sans tendance ni constante. Les résultats obtenus ont été les suivants :

| Modèles | Fstat | Critical_fstat | Statut | Test_stat | Critical_tstat | Nature | Ordre_int |
|-------------|--------|----------------|----------------|-----------|----------------|--------|-----------|
| model_trend | 2,0669 | 5,68 | Mauvais modèle | -3.456717 | -3,60 | - | - |
| model_drift | 0,8952 | 5,18 | Mauvais modèle | -2.893760 | -3,00 | - | - |
| model_none | - | - | Bon modèle | -0.221833 | -1,95 | DS | I(1) |

TABLE 5.3 – Test de Dickey Fuller sur la série des facteurs systémiques pseudo-observés

Interprétation du test de Dickey-Fuller D'après les résultats du test, on rejette les modèles *avec tendance* (*model_trend*) et *avec constante* (*model_drift*). Les statistiques de Fisher (respectivement, 2,0669 et 0.8952) pour ces deux modèles étant inférieures à leur valeur critique respective au seuil d'erreur de 5% (respectivement, 5,68 et 5,18).

Les résultats du test mené dans le modèle *sans tendance ni drift* (*model_none*), montre qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de présence d'une racine unitaire au seuil d'erreur de 5%⁶ car la valeur de la statistique de test est supérieure au seuil critique considéré de $(-0,221833 > -1.95)$. Les résultats du test affirment que la série est alors intégrée d'ordre 1, soit stationnaire en différence première.

Remarque importante Cependant, l'interprétation d'un test statistique asymptotique sur un échantillon de taille aussi faible que celui manipulé est critiquable. Les résultats sont à prendre avec précaution et à challenger. Nous allons donc procéder au test KPSS pour confronter ce résultat.

6. Les valeurs critiques des tests pour les différents modèles sont affichées au seuil critique de 5%.

Le KPSS test est un test de stationnarité qui diffère par nature du test de stationnarité de Dickey-Fuller. L'hypothèse nulle est la stationnarité de la série considérée. Voici les résultats obtenus :

| KPSS test statistic | Critical value at 5% level | P-value |
|---------------------|----------------------------|---------|
| 0,279 | 0,4630 | 10,00% |

TABLE 5.4 – Test de stationnarité KPSS des taux de défaut transformés

Les résultats du test montrent qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité au seuil critique de 5%, la valeur de statistique de test étant inférieure à sa valeur critique au seuil de 5% ($0,279 < 0,4630$). Ce résultat vient donc contredire les conclusions du test du Dickey-Fuller.

Arbitrage Les résultats des deux tests sont contradictoires. L'interprétation du test de Dickey-Fuller montre que la série est stationnaire en différence première. Néanmoins, le test de Dickey-Fuller est peu performant et ce notamment sur de courts historiques de données. De plus, le test de Dickey-Fuller augmenté échoue uniquement à prouver la stationnarité de la série, mais ne prouve pas pour autant la non stationnarité. En revanche, les résultats du test de stationnarité KPSS permettent de ne pas rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité au seuil de 5%. On tiendra compte de ce dernier résultat dans la suite.

5.4.1.2 Modèle sélectionné

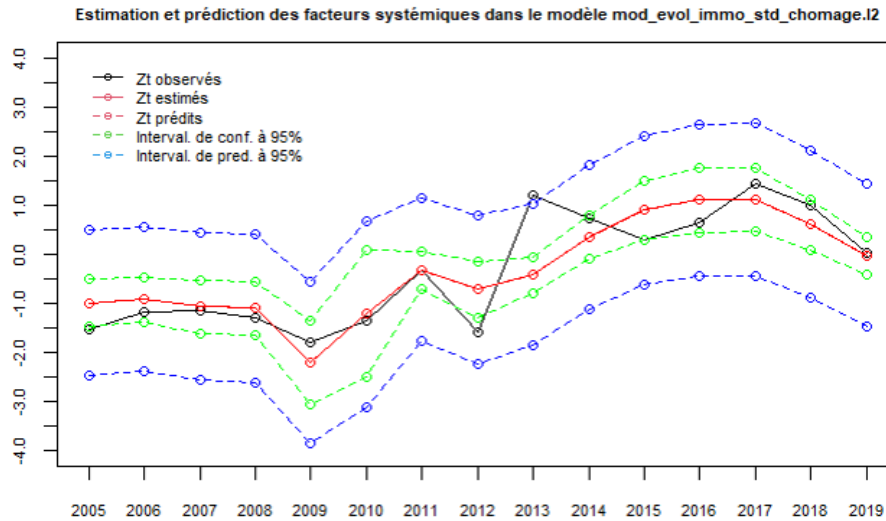


FIGURE 5.11 – Ajustement du modèle sélectionné sur les données observées

Pour la série des facteurs systémiques estimés par maximum de vraisemblance, le modèle satellite retenu fait intervenir le prix de l'immobilier standardisé et le taux de chômage retardée de 2 ans :

$$Z_t = -10.7326 + 1.5854 \times \frac{\text{IMMO}_t - \min(\text{IMMO}_t)}{\max(\text{IMMO}_t) - \min(\text{IMMO}_t)} + 1.0665 \times \text{CHOMAGE}_{t-2} \quad (5.12)$$

5.4.1.3 Analyse du modèle sélectionné

Pour notre étude, un modèle faisant intervenir 2 variables explicatives a été retenu, sur la base des critères définies dans les sous-parties précédentes. Il s'agit du seul modèle trouvé sur l'ensemble des régressions implémentées qui

vérifient les critères de sélection annoncés. Le tableau ci-dessus regroupe l'ensemble de ces critères de présélection. Ainsi, tous les coefficients sont significatifs au seuil d'erreur de 5% . :

| Variable | Coefficient | Signe attendu | p-value |
|---------------|-------------|---------------|---------|
| constante | -10,7326 | NA | 0,01% |
| evol_immo_std | 1,5854 | + | 4,547% |
| Chomage.l2 | 1,0665 | - | 0,018% |

TABLE 5.5 – Composante du modèle satellite

Le coefficient R^2 de la régression est de 73.19%. Ainsi, le modèle sélectionné explique 73.19% de la variabilité de la série des facteurs systémiques pseudo-observés. Ce résultat est en accord avec le seuil de 50% qui avait été retenu plus haut. La nullité jointe des coefficients du modèle est acceptée au seuil d'erreur de 5% . Le facteur d'inflation de la variance répond également au critère fixé. Les valeurs et les seuils critiques retenus sont recensés dans le tableau suivant :

| Critère | Valeur | Seuil validation |
|----------------|--------|------------------|
| R^2 | 73,26% | > 50% |
| R^2_{adjust} | 68,72% | NA |
| F-STAT | 0,03% | < 5,00% |
| VIF | 1,0010 | < 5 |

TABLE 5.6 – Critère de validité du modèle

Remarque Avant la lecture du paragraphe suivant, il est important de se rappeler que l'interprétation des signes du facteurs systémiques est la suivante :

$$\begin{cases} Z_t > 0 \iff \text{Conjoncture } \mathbf{favorable} \text{ au portefeuille} \\ Z_t < 0 \iff \text{Conjoncture } \mathbf{défavorable} \text{ au portefeuille} \end{cases}$$

Cohérence économique des résultats Le signe de la variable faisant intervenir le prix de l'immobilier est positif et correspond à ce qui était attendu. En revanche, le signe du coefficient faisant intervenir le taux de chômage n'est pas celui attendu. Néanmoins, il s'agit du taux de chômage retardé de deux ans qui est ici retenu. Avec deux ans de décalage, il n'est pas absurde de supposer que l'effet attendu soit contre-intuitif du au décalage temporel. D'un point de vue économique, les résultats sont interprétables comme suit :

- ▶ Concernant le **prix de l'immobilier standardisé** : on constate qu'une variation d'une unité de cette variable, induit une variation du facteur systémique de 1.58. Dans un contexte défavorable, on s'attend à observer une baisse du prix de l'immobilier donc une baisse des facteurs systémiques.
- ▶ Concernant le **taux de chômage retardée de deux ans** : une augmentation d'une unité du taux de chômage deux années auparavant, induit une augmentation de 1.0665 du facteur systémique au cours de l'année t. Cette évolution est contre-intuitive. En effet, une augmentation du taux de chômage traduit un cycle bas de l'économie. On s'attend donc à observer une diminution du facteur systémique, or c'est l'inverse qui est constaté. Néanmoins, l'interprétation du signe d'une variable retardée est à relativiser. L'effet attendu peut souvent être contre-intuitif du fait du temps passé.

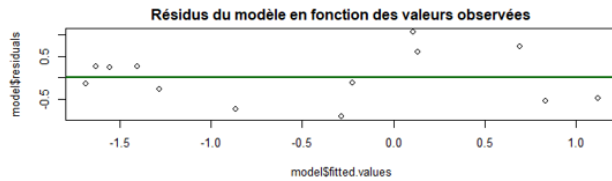
5.4.1.4 Validation des hypothèses sur les résidus

Validation par les graphiques

Pour l'analyse des résidus du modèle, nous avons choisi de représenter les graphiques suivants :

- Le **graphique des résidus** en fonction des valeurs estimées qui permettra de relever une non linéarité au sein de nos données ;
- Le **graphique des résidus standardisés en fonction des valeurs estimées** qui permettra de statuer sur l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus des modèles. En effet, on peut supposer que la variance des résidus est constante si l'on observe une ligne horizontale avec des points répartis aléatoirement sur l'ensemble du graphique ;
- Enfin, le **graphique quantile-quantile des résidus** du modèle pour valider l'hypothèse d'une distribution normale.

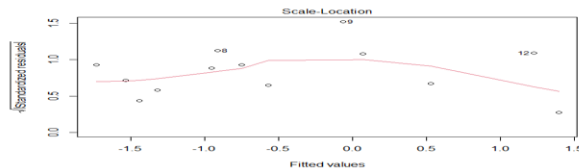
L'hypothèse de linéarité On trace les résidus du modèle en fonction des valeurs estimées. Il nous renseigne sur la qualité de la représentation de nos données par le modèle estimé et sur le problème d'ajustement d'un modèle linéaire à nos données. Pour un *bon modèle*, on s'attend à ce que les points soient répartis de manière aléatoire autour de l'axe des abscisses.



Les points sont répartis sur l'ensemble du graphique. Néanmoins, on constate un amas de point à droite de l'axe autour des petites valeurs de l'axe des abscisses. On dégage une légère tendance au niveau des points. Cependant, avec le faible nombre de points, on ne peut pas réellement statuer.

FIGURE 5.13 – Validation de l'hypothèse de linéarité

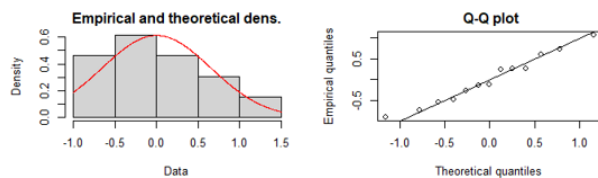
L'hypothèse d'homoscédasticité Ce graphique représente la racine carrée des résidus standardisés en fonction des valeurs estimées. Si les points sur ces graphiques évoluent selon une tendance ou présente une disposition non aléatoire alors on peut supposer que l'hypothèse de variance constante n'est pas respectée.



Les points autour d'une droite plus ou moins horizontale. Encore une fois aucune observation alarmante n'est constatée.

FIGURE 5.15 – Validation de l'hypothèse d'homoscédasticité

Hypothèse de normalité On représente ici la densité de la distribution des résidus accompagné d'un Q-Q plot.



La densité de la distribution des résidus pour les différents modèles se présente sous la forme d'une courbe gaussienne. De même, les Q-Q plot représenté témoigne d'un bon alignement sur la première bissectrice (droite de Henry), ce qui laisse supposer que les résidus sont normaux.

FIGURE 5.17 – Validation de l'hypothèse de normalité

Validation par les tests

Tous les tests statistiques sont validés. En effet, pour l'autocorrélation des résidus, la statistique de test de *Durbin-Watson* est proche de 2, il s'agit du seuil retenu dans la littérature. Puis, le test de *Breush-Godfrey* vient également confirmer ce résultat. L'hypothèse nulle du test de *Breush-Pagan* ne peut pas être rejetée au seuil d'erreur de 5% : les résidus sont homoscédastiques. Enfin, le shapiro test confirme la normalité des résidus. Les résultats des tests obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

| Test | Hypothèse nulle | Valeur | Type | Seuil validation |
|-----------------------|---------------------------------|----------------|--------|------------------|
| <i>Durbin-Watson</i> | Non autocorrélation des résidus | Statistique | 2,21 | ~ 2 |
| <i>Breush-Godfrey</i> | Non autocorrélation des résidus | <i>p-value</i> | 59,37% | $> 5,00\%$ |
| <i>Breush-Pagan</i> | Homoscédasticité des résidus | <i>p-value</i> | 87,53% | $> 5,00\%$ |
| <i>Shapiro-Wilk</i> | Normalité des résidus | <i>p-value</i> | 10,69% | $> 5,00\%$ |

TABLE 5.7 – Validation des hypothèses sur les résidus du modèle

5.4.1.5 Stabilité du modèle : Etude *Leave-one-year-out*

Dans le **chapitre 3**, nous avons cités plusieurs inconvénients dus à l'utilisation de modèles macroéconomiques. L'un d'eux est l'instabilité des modèles de régression des variables cibles. En effet, dans ces modèles, les paramètres de la forme fonctionnelle n'ont pas tendance à rester stables. Ainsi, pour s'assurer d'une certaine stabilité des coefficients du modèle sélectionné, on procède à l'étude de dépendance liée à une année spécifique, nommée « *Leave-one-year-out* ».

A chaque étape de ce test, nous enlevons successivement une année d'observation, et nous réestimerons la régression avec cette année en moins. Une analyse des coefficients issus de la régression sera présentée. Pour le modèle estimé, voici les résultats retenus :

| Year out | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | Régression | |
|-----------------------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|---------|
| Valeur du coefficient | Intercept | -10,318 | -10,595 | -10,694 | -10,605 | -11,592 | -9,455 | -10,731 | -10,553 | -10,933 | -10,529 | -11,435 | -11,334 | -10,311 | -10,418 | -10,724 | -10,733 |
| | evol_immo_std | 1,626 | 1,537 | 1,563 | 1,514 | 1,872 | 2,323 | 1,587 | 1,228 | 1,663 | 1,555 | 1,626 | 1,723 | 1,509 | 1,560 | 1,582 | 1,585 |
| | chomage.l2 | 1,024 | 1,056 | 1,064 | 1,057 | 1,144 | 0,906 | 1,066 | 1,068 | 1,073 | 1,042 | 1,146 | 1,131 | 1,021 | 1,030 | 1,065 | 1,067 |
| p-value | Intercept | 0,025% | 0,022% | 0,023% | 0,024% | 0,028% | 0,928% | 0,019% | 0,010% | 0,000% | 0,021% | 0,012% | 0,017% | 0,043% | 0,027% | 0,019% | 0,014% |
| | evol_immo_std | 4,479% | 6,347% | 6,755% | 7,449% | 4,214% | 15,378% | 5,662% | 11,095% | 0,602% | 5,652% | 4,229% | 4,001% | 6,783% | 5,581% | 5,679% | 4,547% |
| | chomage.l2 | 0,044% | 0,037% | 0,037% | 0,037% | 0,038% | 2,675% | 0,034% | 0,015% | 0,001% | 0,040% | 0,022% | 0,029% | 0,078% | 0,052% | 0,035% | 0,018% |
| R2 | 67,70% | 67,41% | 67,09% | 66,77% | 65,53% | 67,14% | 68,31% | 71,45% | 84,04% | 67,29% | 70,58% | 68,39% | 62,37% | 65,93% | 68,09% | 73,19% | |

FIGURE 5.18 – *Leave-one-year out* sur le modèle retenu

Pour chaque année de défaut supprimée de l'historique, les coefficients sont réestimés. A la vue de ce tableau récapitulatif, on note :

- ▶ Une stabilité quant aux signes des coefficients pour les modèles de régression réestimés. La variable *Chomage.l2* reste du mauvais signe.
- ▶ Globalement, on constate de bons résultats en termes de stabilité des coefficients et des p-values du test de student pour la variable *evol_immo_std* ;
- ▶ Sur chaque échantillon, les régressions effectuées ne diffèrent que très légèrement de la référence, dont les coefficients ont été rappelés tout en bas de la table (dernière colonne) ;

Cette étude nous montre que le modèle choisi est plutôt stable. On constate tout de même que l'explicabilité du modèle augmente beaucoup avec le retrait de l'observation liée à l'année 2013. Il aurait été intéressant de

davantage creuser sur la nature de cette observation (aberrante/ influente). On retiendra de cette analyse que ce modèle semble plutôt stable.

5.4.1.6 Projection des Z_t selon les scénarios économiques

Les hypothèses ayant été validées, la dernière étape consiste à projeter les facteurs systémiques selon les deux scénarios, à horizon de 3 ans. On remplace pour cela les projections fournies par la BCE dans l'équation suivante :

$$Z_t = -10.7326 + 1.5854 \times \frac{IMMO_t - \min(IMMO_t)}{\max(IMMO_t) - \min(IMMO_t)} + 1.0665 \times CHOMAGE_{t-2} \quad (5.13)$$

Le graphique ci-après présente les résultats obtenus :

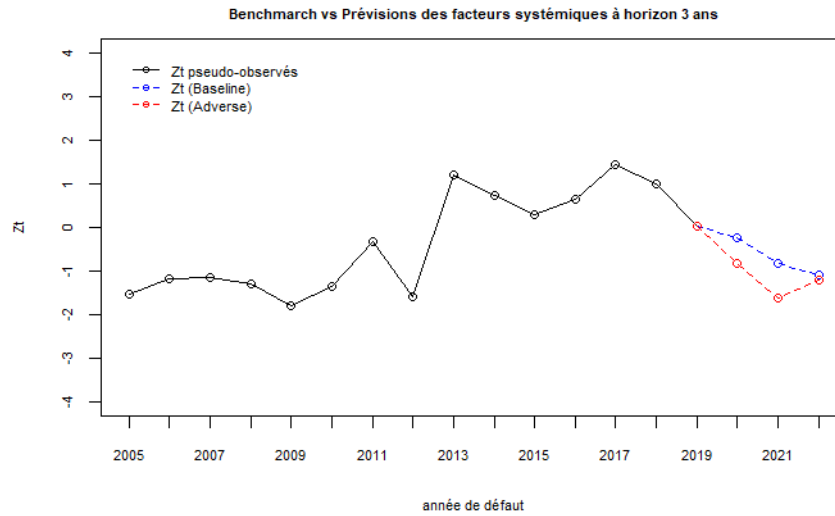


FIGURE 5.19 – Projection des facteurs systémiques selon les deux scénarios

Interprétation des résultats Les facteurs systémiques du scénario baseline sont dégradés (courbe bleue) mais les valeurs restent toujours au-dessus de celles du scénario adverse(courbe rouge). On se rappellera encore une fois de l'interprétation du signe des facteurs systémiques :

$$\begin{cases} Z_t > 0 \iff \text{Conjoncture favorable au portefeuille} \\ Z_t < 0 \iff \text{Conjoncture défavorable au portefeuille} \end{cases}$$

Les valeurs des facteurs systémiques projetés par cette première approche sont :

| | Z_{2020} | Z_{2021} | Z_{2022} |
|----------|------------|------------|------------|
| Baseline | -0,2295 | -0,8419 | -1,088 |
| Adverse | -0,8375 | -1,6141 | -1,2138 |

TABLE 5.8 – Facteurs systémiques inférées pour les deux scénarios

Pour le scénario adverse, les facteurs systémiques sont négatifs et inférieurs à ceux projetés pour le scénario baseline : on en déduit implicitement que la conjoncture est plus défavorable au portefeuille en scénario adverse

qu'en scénario baseline. Pour le scénario baseline, le prix de l'immobilier est supposé quasiment invariant sur l'horizon de projection. Enfin, le taux de chômage retardée de 2 ans subit une diminution progressive sur l'horizon de projection. Ce qui explique la valeur la diminution progressive des facteurs systémiques en scénario baseline. Enfin, pour ce qui est du scénario adverse, la chute drastique du prix de l'immobilier explique la faible valeur du facteur systémique Z_{2021} qui atteint sa valeur la plus faible pour ensuite remonter en 2022.

5.4.2 Modèle satellite de la série des taux de défaut moyen TD_t

5.4.2.1 Construction de la série des taux de défaut moyen

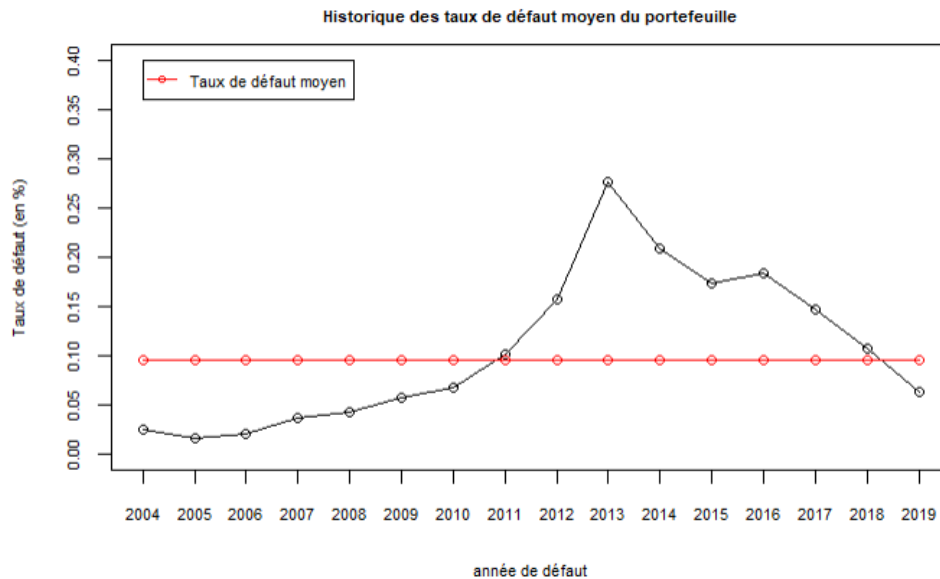


FIGURE 5.20 – Série des taux de défaut

Le taux de défaut moyen du portefeuille se calcule pour chaque année comme :

$$TD_t = \frac{\#\text{défaut}(t, t + 1)}{N_t} \quad (5.14)$$

où $\#\text{défaut}(t, t + 1)$ est le nombre de défaut de nouveaux défaut comptabilisé à la date t et N_t le nombre de contreparties notées en t .

Le nombre de défaut moyen sur l'historique total est tel que :

$$TD_t = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \#\text{défaut}(t, t + 1)}{\sum_{t=1}^T N_t} \quad (5.15)$$

Voici quelques observations que nous pouvons faire au niveau du portefeuille :

- Les taux de défaut historiques oscillent autour de leur moyenne, on est en présence d'un cycle de crédit ;

- Les taux de défaut annuels sur le portefeuille sont globalement très faibles d'où la qualification de portefeuille *low-default* ;
- Le point culminant du graphique se trouve en 2013. Cette valeur élevée du taux de défaut sur le portefeuille des communes pourrait être la conséquence d'un effet retardé de la crise de la dette souveraine du début des années 2010.

Remarque importante Dans la suite, pour s'assurer que les projections des modèles linéaires soient comprises dans l'intervalle $[0, 1]$, nous choisissons d'appliquer une transformation logistiquie sur les données initiales. Les résultats dans la suite concerneront donc la série des taux de défaut transformés. On la notera :

$$\tilde{TD}_t = \log\left(\frac{TD_t}{1 - TD_t}\right) \quad (5.16)$$

Dans la littérature, une telle transformation est commune (Olivier de Bandt, Nicolas Dumontaux, 2013, [15]). Cependant, on note néanmoins que pour une interprétation plus simple des coefficients du modèle, il aurait été préférable de modéliser directement la probabilité de défaut.

5.4.2.2 Stationnarité de la série TD_t

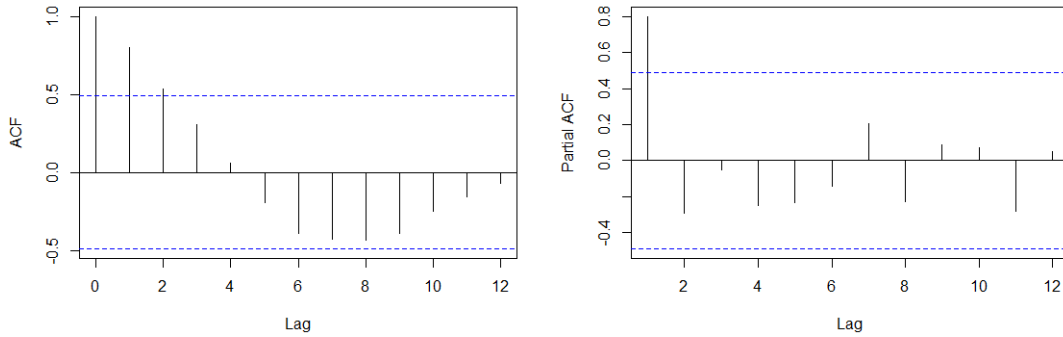


FIGURE 5.21 – Autocorrélogramme (*gauche*) et autocorrélogramme partiel (*droite*)

La fonction d'autocorrélation témoigne d'une autocorrélation d'ordre 2. Cependant, la fonction d'autocorrélation partielle nous assure que seule l'autocorrélation d'ordre 1 est significative. Enfin, la fonction d'autocorrélation décroît vite ce qui laisse présager que la série est stationnaire.

Comme dans le cas des pseudo-observations de la série des facteurs systémique Z_t , nous avons effectué le test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté⁷ pour statuer sur la stationnarité de la série \tilde{TD}_t . Les résultats obtenus sont les suivants :

| Modèles | Fstat | Critical_fstat | Statut | Test_stat | Critical_tstat | Nature | Ordre_int |
|-------------|--------|----------------|----------------|-----------|----------------|--------|-----------|
| model_trend | 0,7999 | 5,68 | Mauvais modèle | -0,5627 | -3,60 | - | - |
| model_drift | 1,2650 | 5,18 | Mauvais modèle | -1,5905 | -3,00 | - | - |
| model_none | - | - | Bon modèle | -0,8589 | -1,95 | DS | I(1) |

TABLE 5.9 – Test de Dickey-Fuller de la série des taux de défaut moyen

7. On rappelle que les étapes de réalisation de ce test sont entièrement rappelées en annexe.

Interprétation du test Les résultats du test de Dickey Fuller augmenté rejettent la recherche d'une racine unitaire dans les modèles avec tendance (*model_trend*) et constante (*model_drift*). On recherche donc la présence d'une racine unitaire dans le modèle sans tendance ni contrainte (*model_none*). Dans ce modèle, la statistique de Test_stat est supérieure à son seuil critique à 5% ($-0.8589 > -1,95$). Ainsi, d'après le test de Dickey-Fuller mené dans le modèle sans tendance ni contrainte (*model_none*), on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de la présence d'une racine unitaire au seuil d'erreur de 5%. Ainsi, d'après le test de Dickey-Fuller la série est stationnaire en différence première⁸.

Comme pour le cas précédent, nous réalisons parallèlement le KPSS test pour challenger ce résultat :

| KPSS test statistique | Critical value at 5% level | P-value |
|-----------------------|----------------------------|----------|
| 0,3538 | 0,4630 | > 10,00% |

Encore une fois, les résultats du test KPSS viennent contredire les résultats du test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté. En effet, la statistique du test KPSS est inférieure à sa valeur critique au seuil de 5% ($0,3538 < 0,4630$). par conséquent, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle du test de stationnarité KPSS selon laquelle la série des taux de défaut transformées est stationnaire.

Arbitrage Par les mêmes arguments développés pour le cas de la série des facteurs systémiques pseudo-observés, on conclut à la stationnarité de la série transformée des taux de défaut moyen observés.

5.4.2.3 Analyse du modèle retenu

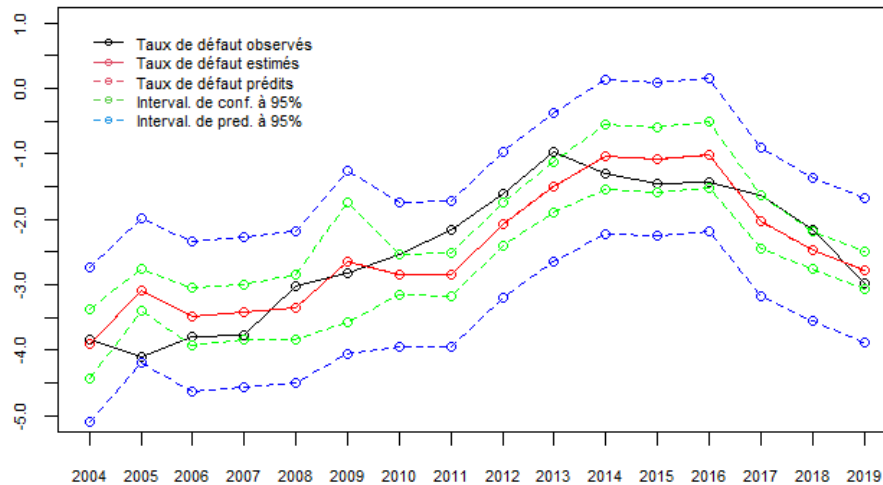


FIGURE 5.22 – Ajustement du modèle sélectionné sur les données observées

Pour la série des taux de défaut, le modèle satellite retenu comprend le taux de croissance PIB et le taux de chômage retardé d'un an :

$$\tilde{TD}_t = \log\left(\frac{TD_t}{1 - TD_t}\right) = -12,5640 - 0,4634 \times PIB_t + 1,1608 \times CHOMAGE_{t-1} \quad (5.17)$$

Interprétation des résultats La courbe des valeurs estimées (*courbe rouge*) s'ajuste bien aux observations (*courbe noire*). De plus, la majorité des observations sont incluses dans l'intervalle de confiance à 95% (*courbes vertes*) et sont totalement incluses dans l'intervalle de prédiction à 95% (*courbes bleues*).

8. L'abréviation DS, signifie *Difference Stationnary* c'est-à-dire que la série $\Delta\tilde{TD}_t = \tilde{TD}_t - \tilde{TD}_{t-1}$ est stationnaire

5.4.2.4 Analyse du modèle sélectionné

Pour notre analyse, un modèle faisant intervenir 2 variables explicatives a été retenu sur la base des critères définis dans les sous-parties précédentes. Tous les coefficients sont significatifs au seuil d'erreur de 5%. Le tableau ci-dessus regroupe les éléments d'analyse des coefficients du modèle :

| Variable | Coefficient | Signe attendu | p-value |
|------------|-------------|---------------|---------|
| constante | -12,5640 | NA | 0,0001% |
| PIB | -0,4634 | - | 0,0538% |
| Chomage.l1 | 1,1608 | + | 0,0009% |

TABLE 5.10 – Composante du modèle satellite

Le R^2 ajusté de la régression est égal à 84.06%. Le modèle sélectionné explique donc 84.06% de la variabilité de la série des taux de défaut. Tous les coefficients de la régression sont statistiquement significatifs au seuil de 5%. La nullité jointe des coefficients de la régression est rejetée au seuil d'erreur de 5%. Enfin, on ne relève pas de multicolinéarité au sein du modèle. Les éléments d'analyse sont indiqués au sein du tableau suivant :

| Critères | Valeur | Seuil validation |
|----------------|--------|------------------|
| R^2 | 84,06% | > 50% |
| R^2_{adjust} | 80,87% | NA |
| F-STAT | 0,02% | < 5,00% |
| VIF | 1,1317 | < 5 |

TABLE 5.11 – Critère de validité du modèle

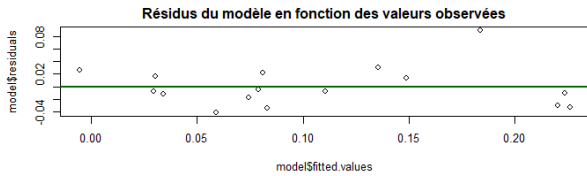
Cohérence économique des résultats Les signes des coefficients sont les signes attendus. Ils sont cohérents d'un point de vue économique. En effet :

- ▶ La transformation des taux défaut dépend négativement du taux de croissance PIB. Soit, une unité de la variation de la croissance du PIB réduit les taux de défaut transformés de -0.4634 dans l'année.
- ▶ La transformation des taux de défaut dépend positivement du taux de chômage retardé d'un an : une augmentation d'une unité du taux de chômage il y a un an induit une augmentation de la transformation des taux de défaut de $1,1608$ dans l'année.

5.4.2.5 Validation des hypothèses sur les résidus

Comme pour la série des facteurs systémiques Z_t pseudo-observés, nous présenterons tout d'abord des résultats graphiques. Puis, nous validerons les hypothèses sur les résidus à l'aide de tests statistiques.

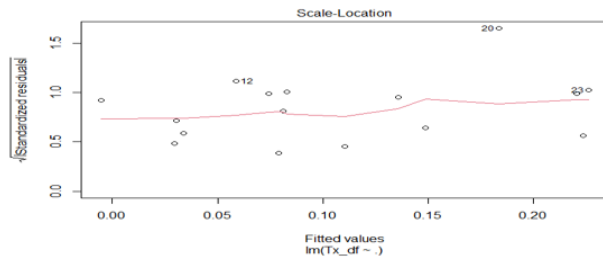
L'hypothèse de linéarité On trace les résidus du modèle en fonction des valeurs estimées. On rappelle que ce graphique nous renseigne sur la qualité de la représentation de nos données par le modèle estimé et sur le problème d'ajustement d'un modèle linéaire à nos données.



Les points sont répartis sur l'ensemble du graphique. Néanmoins, on constate quelques amas de points à droite ainsi qu'autour de l'axe central. Les points ne sont pas dispersés aléatoirement mais on ne note rien de choquant. En effet, on ne dégage aucune tendance prononcées au niveau des points.

FIGURE 5.24 – Validation de l'hypothèse de linéarité

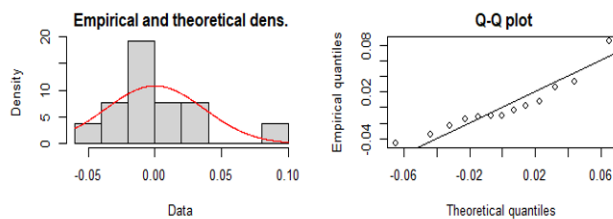
L'hypothèse d'homoscédasticité Le graphique représente la racine carrée des résidus standardisés en fonction des valeurs estimées. Si les points sur ces graphiques évoluent selon une tendance ou présentent une disposition non aléatoire alors on peut supposer que l'hypothèse de variance constante (homoscédasticité) n'est pas respectée.



Les points sont dispersés autour d'une droite plus ou moins horizontale, c'est ce qui est attendu.

FIGURE 5.26 – Validation de l'hypothèse d'homoscédasticité

Hypothèse de normalité On représente ici la densité de la distribution des résidus accompagné d'un Q-Q plot.



La densité de la distribution des résidus pour les différents modèles se présente sous la forme d'une courbe gaussienne. En revanche, sur le Q-Q plot représenté les points ne sont pas bien alignés sur la première bissectrice : l'hypothèse de normalité sera confirmée par le test statistique.

FIGURE 5.28 – Validation de l'hypothèse de normalité

Validation par les tests statistiques La statistique de test de *Durbin-Watson* est proche de 2, c'est ce qui est attendu. De plus, le test de *Breusch-Godfrey* vient confirmer l'hypothèse d'absence d'autocorrélation des erreurs. L'analyse des p-value des tests de *Breusch-Pagan* et de *Shapiro-Wilk* permettent quant à eux de statuer respectivement sur l'homoscédasticité et la normalité des résidus des régressions. En effet, on ne peut pas rejeter, au seuil d'erreur de 5%, les hypothèses nulles de ces tests au vu des valeurs obtenues.

| Test | Hypothèse nulle | Valeur | Type | Seuil validation |
|------------------------|---------------------------------|--------------------|--------|------------------|
| <i>Durbin-Watson</i> | Non autocorrélation des résidus | <i>statistique</i> | 1,52 | ~ 2 |
| <i>Breush-Geodfrey</i> | Non autocorrélation des résidus | <i>p-value</i> | 44,27% | > 5,00% |
| <i>Breush-Pagan</i> | Homoscédasticité des résidus | <i>p-value</i> | 49,53% | > 5,00% |
| <i>Shapiro-Wilk</i> | Normaliité des résidus | <i>p-value</i> | 12,77% | > 5,00% |

TABLE 5.12 – Validation des hypothèses sur les résidus du modèle

5.4.2.6 Stabilité du modèle : étude *Leave-one-year-out*

On réitère l'étude « Leave-one-year-out » de dépendance liée à une année spécifique, les résultats obtenus sont les suivants :

| Year out | | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | Régression |
|-----------------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|
| Valeur du coefficient | Intercept | -12,665 | -12,002 | -12,311 | -12,300 | -13,001 | -11,888 | -12,656 | -12,701 | -12,517 | -12,170 | -12,935 | -13,075 | -13,179 | -12,308 | -12,545 | -12,500 | -12,5640 |
| | evol_PIB | -0,471 | -0,432 | -0,438 | -0,439 | -0,456 | -0,544 | -0,473 | -0,493 | -0,444 | -0,436 | -0,478 | -0,482 | -0,486 | -0,476 | -0,469 | -0,460 | -0,4634 |
| | chomage.l1 | 1,172 | 1,103 | 1,132 | 1,132 | 1,205 | 1,103 | 1,170 | 1,175 | 1,149 | 1,110 | 1,205 | 1,222 | 1,234 | 1,132 | 1,157 | 1,155 | 1,1608 |
| p-value | Intercept | 0,001% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,003% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,000% | 0,0001% |
| | evol_PIB | 0,147% | 0,027% | 0,184% | 0,157% | 0,089% | 0,609% | 0,072% | 0,031% | 0,106% | 0,113% | 0,078% | 0,063% | 0,057% | 0,063% | 0,075% | 0,091% | 0,0538% |
| | chomage.l1 | 0,004% | 0,000% | 0,003% | 0,003% | 0,002% | 0,009% | 0,002% | 0,001% | 0,002% | 0,002% | 0,003% | 0,002% | 0,002% | 0,002% | 0,002% | 0,002% | 0,0009% |
| R2 | | 74,07% | 82,48% | 75,18% | 75,53% | 77,77% | 77,79% | 78,01% | 80,86% | 77,89% | 76,05% | 75,63% | 76,88% | 77,17% | 77,48% | 77,79% | 77,17% | 84,06% |

FIGURE 5.29 – *Leave-one-year out* sur le modèle retenu

Pour la construction de nos modèles, on utilise 16 années de défaut. Ainsi, 16 échantillons sont générés pour cette étude. Pour chaque année de défaut supprimée de l'historique, les coefficients sont réestimés. A la vue de ce tableau récapitulatif, on note que :

- ▶ Les signes des coefficients de la régression restent stables, quelle que soit l'année d'observation supprimée.
- ▶ De bons résultats en termes de stabilité des coefficients et des p-values du test de student.
- ▶ Sur chaque échantillon, les régressions effectuées ne diffèrent que très légèrement de la référence, dont les caractéristiques ont été rappelés tout à droite de la table.
- ▶ Le modèle le plus explicatif est celui dans lequel l'observation de l'année 2011 a été retirée. Le R^2 de la régression est d'environ 80%. Il aurait été intéressant de se questionner sur la nature de cette observation (influyente, aberrante).

5.4.2.7 Projection des TD_t selon les scénarios économiques

Les hypothèses ayant été validées, la dernière étape consiste à projeter les facteurs systémiques selon deux scénarios, à horizon 3 ans. Pour cela, on remplace ensuite les projections fournies par la BCE dans le modèle retenu :

$$\log\left(\frac{TD_t}{1 - TD_t}\right) = -12,5640 - 0,4634 \times PIB_t + 1,1608 \times CHOMAGE_{t-1} \quad (5.18)$$

Le graphique ci-après représente l'évolution des taux de défaut⁹ selon les deux scénarios, baseline et adverse, à horizon 3 ans :

9. Nous nous sommes ramenés au taux de défaut en appliquant la transformation logit aux résultats de la projection, soit $f(y) = \frac{1}{1 + \exp -y}$

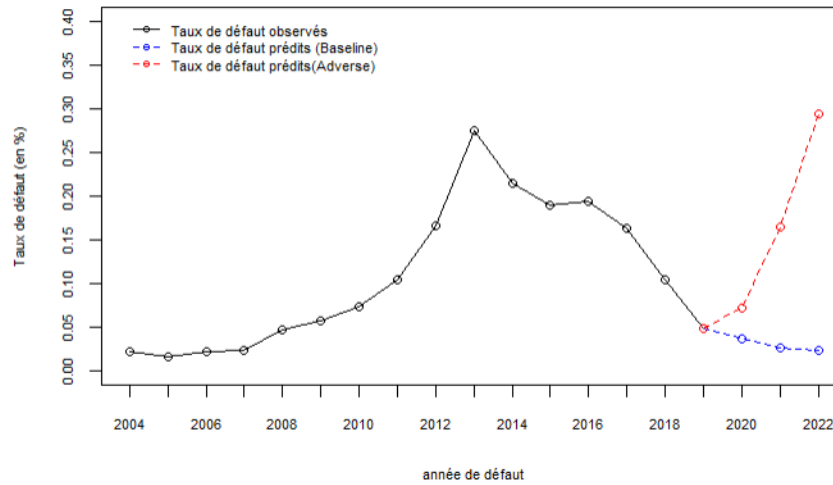


FIGURE 5.30 – Projection des taux de défaut pour le scénario baseline (bleu) et le scénario adverse (rouge)

Interprétation des résultats Tout d’abord, les résultats obtenus sont cohérents. Pour le scénario baseline (courbe bleue), les taux de défaut projetés sont inférieurs à leur niveau 2019. Cela va dans le sens d’une conjoncture économique favorable. En analysant les projections de la BCE, pour le scénario baseline, on constate une diminution progressive du taux de chômage et une légère diminution puis une reprise en ce qui concerne le taux de croissance PIB. Ces observations se traduisent par une diminution des taux de défaut du portefeuille dans cette conjoncture. Ainsi, pour ce scénario optimiste, la qualité de crédit du portefeuille s’améliore (taux de défaut bas).

En revanche, pour le scénario adverse, on observe une augmentation considérable des taux de défaut moyens du portefeuille, atteignant presque 0,30% pour la dernière année de projection. Ces résultats sont encore en ligne avec la conjoncture économique : en effet, dans le scénario adverse, le taux de chômage augmente considérablement et le taux de croissance PIB chute fortement les deux premières années puis remonte légèrement en 2022. Ainsi, cette conjoncture économique défavorable conduit à une hausse des taux de défaut moyens au sein du portefeuille. Pour analyser l’intensité des chocs appliqués, nous avons recours à un calcul d’élasticité. Celle-ci est définie comme le rapport du taux de défaut projeté sur le taux de défaut moyen observé sur le portefeuille :

Soit t l’année de projection, SCEN le scénario, \overline{TD}_t le taux de défaut moyen sur l’historique et \widehat{TD}_t le taux de défaut projeté :

$$\text{Elasticité}_{\text{SCEN},t} = \frac{\widehat{TD}_t}{\overline{TD}_t} \quad (5.19)$$

Les résultats obtenus sont inscrits dans le tableau suivant :

| Année | Baseline | Adverse | Elasticité_baseline | Elasticité_adverse |
|--------------|----------|---------|---------------------|--------------------|
| 2020 | 0,0442% | 0,0955% | 46,3% | 100,1% |
| 2021 | 0,0171% | 0,1648% | 18,0% | 172,7% |
| 2022 | 0,0068% | 0,2284% | 7,1% | 239,3% |
| Long term PD | 0,0954% | | | |

Les résultats nous montre que :

- ▶ Pour le scénario baseline, l'élasticité calculée pour les trois années de projection décroît progressivement. Les valeurs sont toutes inférieures à 1. Ainsi, les taux de défaut projetés sont inférieurs aux taux de défaut moyen du portefeuille ($\widehat{TD}_t < \overline{TD}_t$). Ceci montre qu'une conjoncture favorable induit un choc favorable au niveau du portefeuille.
- ▶ En revanche, pour le scénario adverse, l'élasticité croît sur l'horizon de projection. De plus, les valeurs des élasticités sont toutes supérieures à 1. Ainsi, les taux de défaut projetés sont supérieurs au taux de défaut moyen. Au cours de la 3^{ième} année de projection, le taux de défaut estimé est 2 fois supérieur au taux de défaut moyen observé. Ainsi, la sévérité du scénario adverse est bien retraduite en termes de choc sur les taux de défaut.

5.4.2.8 Inférence des facteurs systémiques Z_t par résolution d'un problème de minimisation

Nous résolvons le problème de minimisation suivant :

$$\underset{\widehat{z}_t}{\operatorname{argmin}} \left[\widehat{TD}_t - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\overline{TD}) - \sqrt{\rho^{*2}} \times \widehat{Z}_t}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right) \right]^2 \quad (5.20)$$

avec $\rho = 6,94\%$ et $\overline{TD} = 0,0954\%$.

Remarque Nous avons résolu ce problème à l'aide du solveur d'excel.

Les résultats obtenus sont les suivants :

| | Z_{2020} | Z_{2021} | Z_{2022} |
|----------|------------|------------|------------|
| Baseline | 2,5980 | 2,606 | 2,612 |
| Adverse | -0,2812 | -1,1415 | -2,942 |

TABLE 5.13 – Facteurs systémiques inférées pour les deux scénarios

Interprétation des résultats Nous rappelons l'interprétation des facteurs systémiques en fonction de leur signe :

$$\begin{cases} Z_t > 0 & \iff \text{Conjoncture } \mathbf{favorable} \text{ au portefeuille} \\ Z_t < 0 & \iff \text{Conjoncture } \mathbf{défavorable} \text{ au portefeuille} \end{cases}$$

En scénario baseline, les facteurs systémiques sont tous positifs et croissent avec les années de projection. Ce résultat s'interprète comme le fait que la conjoncture est de plus en plus favorable au portefeuille. On en dégage donc la même interprétation qu'avec les taux de défaut. En revanche, en scénario adverse, les facteurs systémiques sont négatifs et décroissent sur l'horizon de projection. Ces valeurs traduisent bien une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille.

Finalement, l'évolution des facteurs systémiques inférés par cette deuxième méthode, permet de tirer les mêmes conclusions sur l'évolution de la qualité de crédit du portefeuille qu'une analyse faite avec les taux de défaut. C'est ce qui est attendu.

Résumé du chapitre 5

Le chapitre 5 nous a permis d'estimer les modèles satellites nécessaires à la projection des matrices de transition *point-in-time*. Dans la suite, nous rassemblons tous les résultats des parties précédentes pour projeter nos matrices de transition stressées. On gardera à l'esprit les résultats démontrés dans le chapitre 5 :

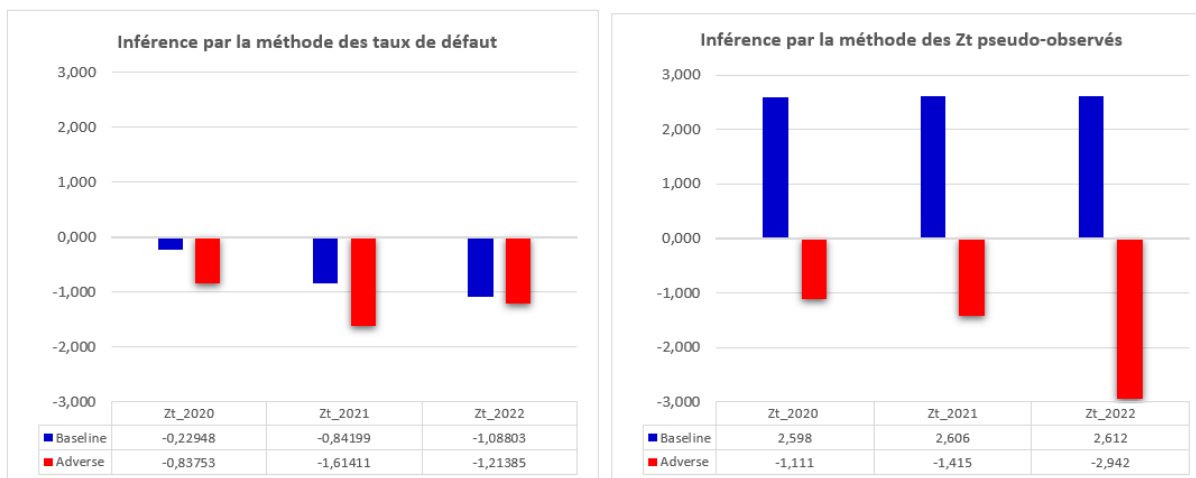


FIGURE 5.31 – Facteurs systémiques du modèle de Vasicek à un facteur inférés selon 2 méthodes.

Chapitre 6

Obtention des matrices de migration stressées

Introduction au chapitre 6

Le chapitre 6 vise à synthétiser l'ensemble des résultats obtenus dans les parties précédentes. Dans ce chapitre, nous appliquons le modèle de Vasicek à 1 facteur en retenant différentes hypothèses pour l'estimation de chaque paramètre. Le but est d'obtenir des matrices de transition projetées à horizon 3 ans selon les deux scénarios fournis par la BCE. Nous comparons ensuite les résultats obtenus selon ces différentes approches aux matrices projetées en interne. Nous finissons par conclure quant à la possibilité de simplifier ou non le modèle de stress test en vigueur.

6.1 Obtention des matrices de transition stressées

Dans cette partie, nous présentons et comparons les matrices de transition obtenues en utilisant les résultats numériques issus des parties précédentes puis nous comparons les différentes matrices obtenues entre elles.

6.1.1 Rappel des résultats numériques des parties précédentes

Les matrices de transition sont calculées à l'aide des formules du modèle de Vasicek à un facteur. Nous rappelons le système à avoir en tête :

$$p_t^{i,j} = \begin{cases} 1 - \phi \left(\frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall i \in [1, K] / j = 1 \\ \phi \left(\frac{B_{i,j+1} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) - \phi \left(\frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall (i, j) \in [1, K] \times [2, K] \\ \phi \left(\frac{B_{i,j} - \sqrt{\rho^2} \times Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) & \forall i \in [1, K] / j = K + 1 \end{cases}$$

Les paramètres intervenant au sein de ces formules ont été estimés tout au long de cette étude par des méthodes différentes que nous rappelons ci-dessous :

- **Les seuils de transition $B_{i,j}$** Ils sont calculés en se basant sur une matrice des migrations moyennes à 1 an, la **matrice champion \bar{M}** . Cette matrice est inconditionnelle au cycle économique. En effet, elle est estimée de sorte qu'elle rende compte au mieux des migrations moyennes à 1 an observable sur l'historique.

Pour tout couple $(i, j) \in [1, K] \times [1, K + 1]$, les seuils de transitions sont calculés depuis la matrice champion à l'aide de la formule suivante :

$$B_{i,j} = \phi^{-1} \left(\sum_{h=j}^{K+1} \bar{p}^{i,h} \right) \quad (6.1)$$

où les $\bar{p}^{i,h}$ sont les coefficients de la matrice champion \bar{M} et ϕ^{-1} est la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite. Les valeurs des seuils de transition par classe de risque sont résumées dans la matrice suivante :

| Seuils de transition TTC | | | | | | | | |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D |
| 1 | -0,8609 | -1,8934 | -2,5352 | -2,7435 | -3,2914 | -3,5114 | -3,8769 | -3,8769 |
| 2 | 0,9769 | -0,8470 | -2,0119 | -2,3104 | -2,8578 | -3,0652 | -3,6086 | -3,6086 |
| 3 | 1,8611 | 0,6093 | -1,1050 | -1,5767 | -2,5757 | -2,8377 | -3,3684 | -3,3684 |
| 4 | 2,3260 | 1,4872 | 0,3887 | -1,2319 | -2,3578 | -2,6386 | -3,1722 | -3,1722 |
| 5 | 2,5453 | 1,7473 | 0,7841 | 0,2620 | -1,3209 | -1,7695 | -2,9587 | -2,9587 |
| 6 | 2,8758 | 2,1446 | 1,5439 | 1,2232 | 0,2683 | -1,5292 | -2,6774 | -2,6774 |
| 7 | 3,0978 | 2,4065 | 1,8367 | 1,5480 | 0,7192 | 0,1995 | -2,2155 | -2,2155 |

► **Le facteur de sensibilité au cycle économique ρ** Pour l'estimation du facteur de sensibilité au cycle économique, nous avons testé deux méthodes issues de l'état de l'art :

- (a) Nous avons estimé par maximum de vraisemblance un facteur de sensibilité commun à l'ensemble du portefeuille. La valeur estimée a été de : $\rho^* = \mathbf{6,94\%}$.
- (b) Nous avons estimé des facteurs de sensibilité pour chacune des classes de risque du portefeuille. Les valeurs estimées sont recensées dans la table suivante :

| CR_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| ρ_i^* | 0.42% | 0.58% | 0.81% | 18.83% | 1.43% | 1.17% | 6.90% |

► **La projection des facteurs systémiques Z_t** Nous avons retenu deux méthodes :

- (a) On se base sur la série des Z_t pseudo-observés. On rappelle que cette série a été obtenue par la maximisation d'une fonction de vraisemblance (cf 4.4.1 et 4.4.2). Un modèle de régression a permis ensuite d'expliquer cette série par deux variables macroéconomiques selon l'équation suivante :

$$Z_t = -10.7326 + 1.5854 \times \frac{\text{IMMO}_t - \min(\text{IMMO}_t)}{\max(\text{IMMO}_t) - \min(\text{IMMO}_t)} + 1.0665 \times \text{CHOMAGE}_{t-2}$$

Pour les deux scénarios, les facteurs systémiques obtenus par application de cette équation sont :

| | Z_{2020} | Z_{2021} | Z_{2022} |
|----------|------------|------------|------------|
| Baseline | -0,8375 | -0,8419 | -1,088 |
| Adverse | -0,8375 | -1,6141 | -1,2138 |

TABLE 6.1 – Facteurs systémiques inférées pour les deux scénarios

- (b) On se base sur la série TD_t des taux de défaut moyens observés. Cette série est expliquée par un modèle de régression faisant intervenir deux variables macroéconomiques :

$$\log\left(\frac{TD_t}{1 - TD_t}\right) = -12,5640 - 0,4634 \times \text{PIB}_t + 1,1608 \times \text{CHOMAGE}_{t-1} \quad (6.2)$$

Les facteurs systémiques sont obtenus par résolution d'un problème d'optimisation. Pour les deux scénarios, les valeurs obtenues sont :

| | Z_{2020} | Z_{2021} | Z_{2022} |
|----------|------------|------------|------------|
| Baseline | 2,5980 | 2,606 | 2,612 |
| Adverse | -0,2812 | -1,1415 | -2,942 |

TABLE 6.2 – Facteurs systémiques inférées pour les deux scénarios

6.1.2 Objectif de la partie

6.1.2.1 Présentation des résultats

Dans la suite, nous comparons les matrices de transitions obtenues avec les différentes hypothèses prises pour l'estimation de chaque paramètre. Nous présentons dans l'ordre annoncé ci-dessous les jeu de matrices obtenues à l'aide des paramétrages suivants :

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--|
| 1 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Projection des Z_t pseudo-observés |
| 2 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |
| 3 | Matrice champion \bar{M} | ρ_i^* | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

TABLE 6.3 – Ordre de présentation des résultats

6.1.2.2 Méthodologie de comparaison des résultats

Pour chaque jeu de matrices, le but sera de comparer les niveaux de stress entre les deux scénarios. Il s'agit du critère le plus important. Dans les exercices de stress test, les chocs appliqués au portefeuille doivent être proportionnels aux chocs conjoncturels. De manière intuitive, on s'attend à ce que la dégradation des notes au sein de portefeuille soit plus prononcée pour le scénario adverse que pour le scénario baseline. On rappelle cependant un point d'attention important : un choc conjoncturel n'est pas nécessairement associé à une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille. En effet, une période de reprise économique peut engendrer une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille.

Un premier indicateur de la qualité de crédit du portefeuille est le nombre de dégradations constaté par classe de risque. Cet indicateur permet à la fois d'analyser la détérioration du portefeuille et l'impact du stress appliqué pour chaque scénario. Ainsi, afin d'apprécier le niveau de sensibilité aux chocs macroéconomiques, nous adoptons une approche consistant à :

1. Représenter l'évolution du nombre de contreparties par classe de risque. En effet, l'analyse du mouvement globale des effectifs par classe de risque est un premier indicateur de comparaison entre les deux scénarios. Pour le scénario baseline, il ne sera pas impossible d'observer une augmentation globale des effectifs au sein des classes de risque les moins risquées. En revanche, observer un tel phénomène pour le scénario adverse serait alarmant puisque l'effet inverse est attendu, du fait de sa sévérité accrue.
2. Calculer les taux de dégradation pour chaque classe de risque i et ce pour chaque scénario. En effet, pour toute classe de risque ($i \in \{1, \dots, 7\}$), ce taux de dégradation se calcule comme :

$$\text{Taux de dégradation}_i = \frac{\sum_{j>i} \text{Nombre de migrations}_{i \rightarrow j}}{\text{Nombre total de contreparties de la classe de risque } i} \quad (6.3)$$

On analyse également l'écart entre les taux de dégradation du scénario adverse et du scénario baseline. On s'attend à observer une différence positive.

3. Représenter graphiquement la superposition des probabilités de défaut *point-in-time* (dernière colonne des matrices de transition) en fonction des classes de risque pour chaque scénario et pour chaque année de projection. On s'attend à observer des courbes strictement croissantes (monotonie de la probabilité de défaut) et à ce que la courbe du scénario adverse soit au-dessus de celle du scénario baseline.

Toutes ces analyses seront faites au regard des scénarios fournis à horizon 3 ans par la BCE. On tentera d'interpréter nos résultats sous un point de vue qualitatif et quantitatif.

6.1.3 Jeu de matrices 1

6.1.3.1 Les inputs

| Jeu de matrices | Matrice TTC à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--------------------------------------|
| 1 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Projection des Z_t pseudo-observés |

TABLE 6.4 – Input du jeu de matrices 1

Description du modèle Dans ce modèle, les seuils de transition $B_{i,j}$ sont calculés à partir de la matrice champion \bar{M} . Le facteur de sensibilité à l'état de l'économie retenu est commun à toutes les classes de risques. Enfin, les facteurs systémiques Z_t sont projetés à partir du modèle satellite retenu pour la série des Z_t pseudo-observés, soit :

$$Z_t = -10.7326 + 1.5854 \times \frac{\text{IMMO}_t - \min(\text{IMMO}_t)}{\max(\text{IMMO}_t) - \min(\text{IMMO}_t)} + 1.0665 \times \text{CHOMAGE}_{t-2}$$

Les résultats attendus L'analyse des projections de la BCE au chapitre précédent a démontré que le scénario baseline était plutôt optimiste sur l'horizon de projection. A horizon 3 ans, on s'attend donc à observer très peu de dégradations pour ce dernier. En revanche, pour le scénario adverse pour lequel la conjoncture est plus défavorable, on s'attend à observer des dégradations vers les classes risquées.

6.1.3.2 Les matrices stressées

| SCENARIO BASELINE | | | | | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 2019_2020 | | | | | | | | | 2019_2020 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 80,150% | 16,858% | 2,414% | 0,265% | 0,261% | 0,028% | 0,017% | 0,01% | 1 | 78,950% | 17,759% | 2,640% | 0,296% | 0,296% | 0,033% | 0,020% | 0,01% |
| 2 | 15,980% | 63,780% | 17,969% | 1,198% | 0,853% | 0,108% | 0,096% | 0,02% | 2 | 14,973% | 63,573% | 18,945% | 1,310% | 0,948% | 0,122% | 0,110% | 0,02% |
| 3 | 2,994% | 23,547% | 59,711% | 7,862% | 5,370% | 0,281% | 0,195% | 0,04% | 3 | 2,718% | 22,455% | 60,128% | 8,301% | 5,817% | 0,314% | 0,221% | 0,05% |
| 4 | 0,945% | 5,649% | 27,656% | 54,607% | 10,198% | 0,517% | 0,350% | 0,08% | 4 | 0,843% | 5,226% | 26,640% | 55,324% | 10,910% | 0,573% | 0,395% | 0,09% |
| 5 | 0,512% | 3,345% | 17,271% | 17,901% | 51,430% | 5,602% | 3,780% | 0,16% | 5 | 0,453% | 3,063% | 16,409% | 17,490% | 52,306% | 5,966% | 4,131% | 0,18% |
| 6 | 0,187% | 1,329% | 4,379% | 4,813% | 28,076% | 54,751% | 6,082% | 0,38% | 6 | 0,164% | 1,198% | 4,052% | 4,534% | 27,225% | 55,811% | 6,583% | 0,43% |
| 7 | 0,090% | 0,669% | 2,406% | 2,682% | 17,211% | 18,394% | 57,174% | 1,37% | 7 | 0,078% | 0,597% | 2,201% | 2,494% | 16,422% | 18,019% | 58,660% | 1,53% |
| 2020_2021 | | | | | | | | | 2020_2021 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 78,941% | 17,766% | 2,641% | 0,296% | 0,296% | 0,033% | 0,020% | 0,01% | 1 | 77,356% | 18,936% | 2,951% | 0,340% | 0,345% | 0,039% | 0,025% | 0,01% |
| 2 | 14,966% | 63,571% | 18,953% | 1,311% | 0,949% | 0,122% | 0,110% | 0,02% | 2 | 13,749% | 63,186% | 20,222% | 1,465% | 1,082% | 0,142% | 0,131% | 0,02% |
| 3 | 2,716% | 22,447% | 60,131% | 8,304% | 5,821% | 0,314% | 0,221% | 0,05% | 3 | 2,397% | 21,084% | 60,542% | 8,874% | 6,427% | 0,362% | 0,260% | 0,05% |
| 4 | 0,842% | 5,223% | 26,633% | 55,329% | 10,915% | 0,574% | 0,395% | 0,09% | 4 | 0,726% | 4,719% | 25,337% | 56,137% | 11,862% | 0,653% | 0,458% | 0,11% |
| 5 | 0,453% | 3,061% | 16,403% | 17,486% | 52,313% | 5,969% | 4,133% | 0,18% | 5 | 0,386% | 2,731% | 15,333% | 16,935% | 53,335% | 6,449% | 4,615% | 0,22% |
| 6 | 0,163% | 1,197% | 4,050% | 4,532% | 27,219% | 55,818% | 6,587% | 0,43% | 6 | 0,137% | 1,047% | 3,661% | 4,190% | 26,113% | 57,079% | 7,266% | 0,51% |
| 7 | 0,078% | 0,596% | 2,199% | 2,492% | 16,417% | 18,017% | 58,671% | 1,53% | 7 | 0,065% | 0,514% | 1,959% | 2,266% | 15,429% | 17,507% | 60,510% | 1,75% |
| 2021_2022 | | | | | | | | | 2021_2022 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 78,443% | 18,136% | 2,737% | 0,310% | 0,311% | 0,035% | 0,022% | 0,01% | 1 | 78,186% | 18,326% | 2,787% | 0,317% | 0,319% | 0,036% | 0,022% | 0,01% |
| 2 | 14,570% | 63,463% | 19,354% | 1,359% | 0,990% | 0,128% | 0,117% | 0,02% | 2 | 14,371% | 63,402% | 19,560% | 1,384% | 1,011% | 0,131% | 0,120% | 0,02% |
| 3 | 2,611% | 22,009% | 60,276% | 8,484% | 6,009% | 0,329% | 0,233% | 0,05% | 3 | 2,558% | 21,787% | 60,345% | 8,577% | 6,107% | 0,337% | 0,239% | 0,05% |
| 4 | 0,803% | 5,058% | 26,220% | 55,599% | 11,211% | 0,598% | 0,414% | 0,10% | 4 | 0,784% | 4,975% | 26,009% | 55,733% | 11,365% | 0,611% | 0,424% | 0,10% |
| 5 | 0,430% | 2,953% | 16,059% | 17,314% | 52,650% | 6,120% | 4,282% | 0,19% | 5 | 0,420% | 2,898% | 15,884% | 17,225% | 52,818% | 6,198% | 4,360% | 0,20% |
| 6 | 0,155% | 1,148% | 3,923% | 4,422% | 26,869% | 56,231% | 6,798% | 0,46% | 6 | 0,150% | 1,123% | 3,859% | 4,366% | 26,689% | 56,438% | 6,908% | 0,47% |
| 7 | 0,073% | 0,569% | 2,120% | 2,419% | 16,100% | 17,858% | 59,263% | 1,60% | 7 | 0,071% | 0,555% | 2,081% | 2,382% | 15,939% | 17,776% | 59,564% | 1,63% |

FIGURE 6.1 – Matrices de transition pit stressées du jeu 1

Premières observations Nous avons représenté ci-dessus le jeu de matrices stressées obtenu avec la première approche. Pour le scénario baseline, en analysant rapidement les coefficients diagonaux des matrices sur l'horizon de projection, on observe que : les taux de non migration des classes de risques 1 et 2 diminuent tandis que les taux de non migration des autres classes de risque augmentent progressivement sur l'horizon de projection. Il s'agit là d'un premier indicateur de la dégradation de la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline. On peut faire la même analyse pour les deux premières années de projection en scénario adverse.

En s'intéressant cette fois-ci aux migrations hors diagonale, on observe que :

- Pour le scénario baseline, les probabilités de transition situées au-dessus de la diagonale augmentent sur l'horizon de projection. Ces probabilités de transition représentent les probabilités de dégradation pour

toute classe de risque i . Ainsi, cette première observation témoigne de nouveau de la dégradation de la qualité de crédit du portefeuille sur l'horizon de projection. Inversement, les probabilités situées en dessous de la diagonale (probabilités d'amélioration) diminuent sur l'horizon de projection.

- Pour le scénario adverse, la tendance décrite pour le scénario baseline est similaire pour les deux premières années de projection. En revanche, la comparaison des matrices 2020-2021 puis 2021-2022, montre que la tendance s'inverse. En effet, en comparant n'importe quel coefficient situé sur la diagonale supérieure de la matrice 2020-2021 à son homologue sur la matrice 2021-2022, on observe que sa valeur diminue ou stagne. Ainsi, les probabilités de dégradation du scénario adverse diminuent en 2022. Cela démontre une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille en 2022 par rapport à son niveau en 2021.

En rappelant les valeurs prises par les facteurs systémiques Z_t dans ce premier modèle, on comprend mieux leur signification :

| | Z_{2020} | Z_{2021} | Z_{2022} |
|----------|------------|------------|------------|
| Baseline | -0,2295 | -0,8419 | -1,0880 |
| Adverse | -0,8375 | -1,6141 | -1,2138 |

La diminution progressive du facteur Z_t en scénario baseline se traduit bien par une détérioration progressive de la qualité de crédit du portefeuille. Enfin, en scénario adverse, l'augmentation du facteur systémique Z_t en 2022 par rapport à son niveau en 2021, est bien retranscrite par une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille en dernière année pour ce scénario.

6.1.3.3 Obtention des mesures synthétiques de migrations

Pour comprendre comment nous obtenons nos mesures, nous expliquons dans cette sous-partie le passage des matrices ci-dessus à des matrices retraçant les migrations en termes d'effectif. Pour cela, nous allons traiter un exemple. On considère le portefeuille en run-off, notre point de départ est la distribution par classe de risque au 31/12/2019. On notera cette distribution D_{2019} . Pour obtenir l'évolution des effectifs par classe de risque en 2020 (pour le scénario baseline par exemple), on multiplie la distribution initiale des effectifs par classe de risque D_{2019} par la matrice de migration pit 2019-2020 projetée pour le scénario baseline. Soit :

$$D_{2020,BAS} = D_{2019} * MM_{2019,2020} \tag{6.4}$$

On obtient la matrice suivante sur laquelle nous avons interprété certains champs :

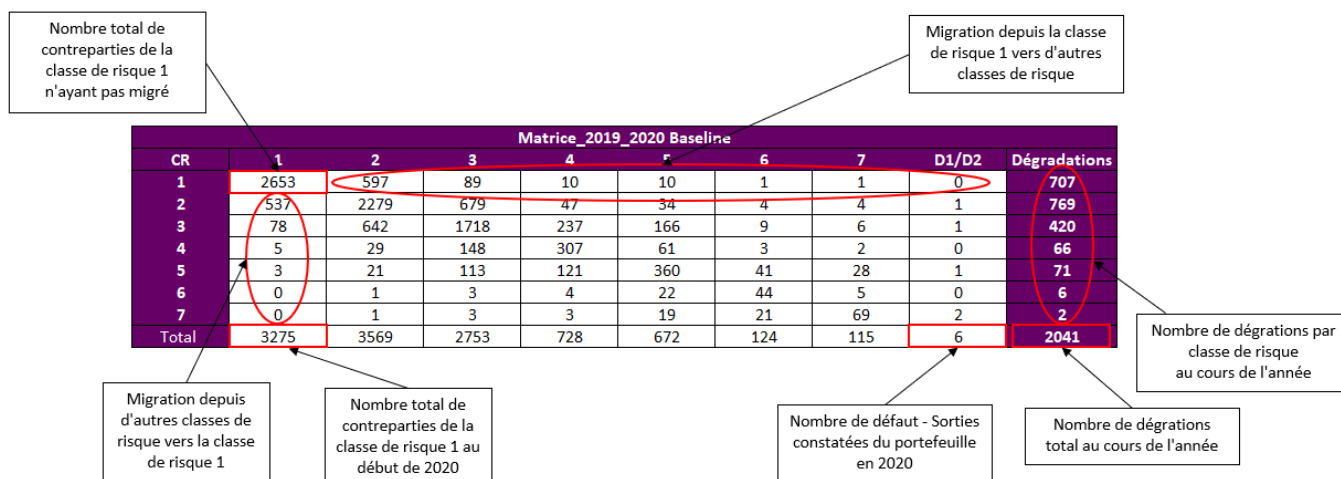


FIGURE 6.2 – Obtention des effectifs par classe de risque

Les points d'attention sont :

1. En diagonale figure le nombre de contreparties n'ayant pas changé de classes de risque entre la fin de l'année t et l'année $t+1$. Pour la classe de risque 1, il y a 2653 contreparties en classe de risque 1 en fin d'année 2019 qui reste en classe de risque 1 en 2020.
2. En ligne figurent les migrations des classes de risque $i \in [1, K]$ vers les classes de risque $j \in [1, K + 1]$. La valeur à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 2 s'interprète comme suit : 597 contreparties appartenant à la classe de risque 1 en fin d'année 2019 ont migré en classe de risque 2 au début de 2020.
3. En colonne figurent les nouvelles distributions des effectifs par classe de risque. En colonne 1 sont représentées les migrations des autres classes de risque vers la classe de risque 1. La valeur à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 1 s'interprète comme le nombre de contreparties en classe de risque 2 ayant migré en classe de risque 1 à la fin de l'année.
4. La ligne *Total* contient la somme de chaque colonne. En 2020, pour scénario baseline, les effectifs par classe de risque sont les suivants :

| CR _{<i>i</i>} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| D _{2020,BAS} | 3275 | 3569 | 2753 | 728 | 672 | 124 | 115 |

C'est de cette distribution dont on repartira pour obtenir l'évolution des effectifs par classe de risque en 2021. Les 6 défauts constatés représentent les sorties du portefeuille en fin d'année 2019.

Ces résultats intermédiaires ont permis de construire les mesures synthétiques nécessaires à l'analyse des résultats qui suivront.

6.1.3.4 Les mesures synthétiques

Mouvements des effectifs par classe de risque Pour le premier jeu de matrices, les résultats obtenus ont été les suivants :

| CR | SCENARIO BASELINE | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | |
|-----|-------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif |
| | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 |
| CR1 | 3360 | ↑ 0,02% | ↓ -2,64% | ↓ -3,34% | 3163 | 3360 | ↓ -2,52% | ↓ -5,40% | ↓ -2,92% | 3008 |
| CR2 | 3585 | ↓ -0,08% | ↓ -1,13% | ↓ -1,25% | 3497 | 3585 | ↓ -0,44% | ↓ -1,65% | ↓ -1,32% | 3464 |
| CR3 | 2858 | ↓ -5,16% | ↓ -0,40% | ↑ 0,98% | 2726 | 2858 | ↓ -3,67% | ↑ 0,96% | ↑ 0,43% | 2792 |
| CR4 | 555 | ↑ 27,91% | ↑ 12,11% | ↑ 7,35% | 854 | 555 | ↑ 31,21% | ↑ 15,09% | ↑ 7,14% | 898 |
| CR5 | 689 | ↓ -6,22% | ↑ 3,32% | ↑ 5,55% | 705 | 689 | ↓ -2,49% | ↑ 7,43% | ↑ 4,34% | 753 |
| CR6 | 79 | ↑ 50,73% | ↑ 19,91% | ↑ 12,39% | 160 | 79 | ↑ 56,84% | ↑ 25,36% | ↑ 12,63% | 175 |
| CR7 | 117 | ↓ -6,59% | ↑ 2,58% | ↑ 6,28% | 119 | 117 | ↓ -1,33% | ↑ 9,00% | ↑ 5,10% | 132 |

FIGURE 6.3 – Mouvements des effectifs par classes de risque pour le jeu 1

Cette première table présente l'évolution des effectifs au sein des classes de risque sur l'horizon de projection. Pour les deux scénarios, on représente les effectifs par classe de risque pour le point de départ (l'année 2019) et en fin de projection. Entre ces deux distributions, on représente les évolutions successives pour les années intermédiaires. La signification du code couleur est la suivante :

1. Une flèche représente le mouvement entre les années $t-1$ et t . On autorise deux mouvements uniquement : une hausse ou une baisse.
2. Une flèche rouge dirigée vers le bas traduit une baisse du nombre de contreparties entre les années $t-1$ et t .
3. Inversement, une flèche verte dirigée vers le haut traduit une hausse du nombre de contreparties entre les classes de risque entre les années $t-1$ et t .

Interprétation Au cours des trois années de projection, pour les deux scénarios, on observe que les effectifs diminuent progressivement au sein des classes peu risquées {1, 2, 3} et augmentent au sein des classes risquées {4, 5, 6, 7}. On en déduit une dégradation globale de la qualité de crédit sur l’horizon de projection. En effet, ces mouvements entre les effectifs des différentes classes de risque démontrent la détérioration progressive du portefeuille dont le nombre de clients au sein des classes risquées augmente en période de stress. En sommant les effectifs des classes de risque {4, 5, 6, 7}, en début et en fin de projection, pour les deux scénarios, on passe d’un total de 1440 clients risqués en 2019 à 1839 en scénario baseline contre 1958 en scénario adverse en 2022. L’augmentation du nombre de clients risqués est gage de la dégradation de la qualité de crédit du portefeuille. Le gap entre le scénario central et le scénario adverse témoigne de la plus grande sévérité du deuxième.

Taux de dégradation et de défaut par classe de risque Pour analyser de manière plus fine l’impact des deux scénarios sur le portefeuille, nous calculons les taux de dégradation par classe de risque.

| CR | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|-------|----------|---------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|-------|
| | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| 1 | 19,85% | 21,60% | 1,75% | 21,63% | 23,94% | 2,31% | 22,30% | 22,47% | 0,17% |
| 2 | 20,26% | 21,55% | 1,29% | 21,71% | 23,45% | 1,74% | 22,24% | 22,52% | 0,28% |
| 3 | 14,49% | 15,26% | 0,76% | 14,76% | 15,83% | 1,06% | 14,96% | 15,24% | 0,29% |
| 4 | 8,71% | 9,12% | 0,41% | 10,68% | 11,37% | 0,69% | 11,47% | 11,66% | 0,19% |
| 5 | 10,17% | 10,54% | 0,37% | 9,95% | 10,50% | 0,55% | 10,04% | 10,31% | 0,27% |
| 6 | 4,29% | 4,47% | 0,18% | 5,85% | 6,20% | 0,35% | 6,45% | 6,55% | 0,09% |
| 7 | 1,47% | 1,55% | 0,08% | 1,49% | 1,61% | 0,11% | 1,50% | 1,55% | 0,05% |
| Total | 17,08% | 18,16% | 1,08% | 18,11% | 19,46% | 1,34% | 18,46% | 18,51% | 0,05% |

FIGURE 6.4 – Taux de dégradation et de défaut pour le jeu 1

Interprétation On observe en premier lieu que les taux de dégradation totaux du scénario adverse sont supérieurs à ceux du scénario baseline (cf ligne *Total*). Ce premier constat est rassurant : en effet, la sévérité du scénario adverse étant supérieure à celle du scénario baseline, il est logique de faire ce constat pour chaque année de projection.

Pour une année de projection, la comparaison des taux de dégradation par classe de risque, pour chaque scénario, est également intéressante. On relève plusieurs axes d’analyse. Prenons l’exemple de la première année de projection : pour le scénario baseline, les taux de dégradation les plus élevés sont constatés au sein des classes de risque {1, 2, 3, 5}. Ensuite, pour chacune de ces classes, les taux de dégradation du scénario adverse sont supérieurs à ceux du scénario baseline. En 2022, le choc appliqué au portefeuille est quasiment similaire pour les deux scénarios. En effet, les écarts entre les taux de dégradation du scénario adverse et du scénario baseline sont très faibles.

Probabilités de défaut *point-in-time* Pour chaque année de projection et chaque scénario, on représente la probabilité de défaut en fonction de la classe de risque. Les probabilités de long terme (PD TTC) ont été ajoutés à chaque graphique (courbe noire en pointillé) pour comparaison.

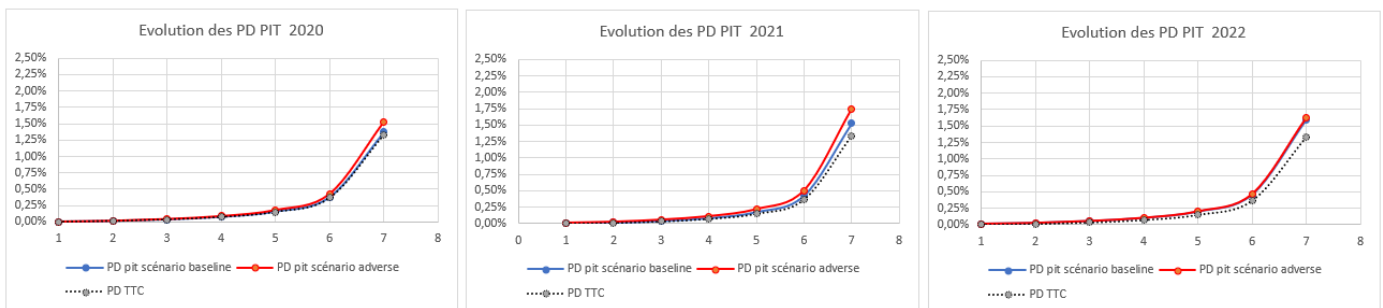


FIGURE 6.5 – PD PIT marginales stressées pour le jeu 1

Interprétation Au titre du risque de crédit, les probabilités de défaut *point-in-time* doivent respectées le critère de monotonie. Ces probabilités de défaut doivent croître avec la classe de risque. On observe des courbes strictement croissantes : ce point est respecté.

Pour l'année 2020, les probabilités de défaut des deux scénarios ne sont pas tellement *stressées* par rapport à leur niveau de long terme. De plus, les courbes des deux scénarios sont quasiment confondues. En revanche, pour l'année 2021, on arrive à distinguer chaque courbe. En effet, les probabilités de défaut des deux scénarios sont supérieures à leur niveau de long terme. Enfin, on constate que les probabilités de défaut du scénario adverse sont au-dessus de celles du scénario baseline. Néanmoins, en 2022, on distingue moins bien les probabilités de défaut stressées par les deux scénarios.

6.1.3.5 Bilan de l'approche 1

L'avis sur ce premier modèle est positif. Celui-ci permet de distordre la distribution des classes de risque sur l'horizon de projection. Les résultats obtenus sont facilement interprétables. Néanmoins, on relève un point important. En début de chapitre 5, nous avons qualifié le scénario baseline d'optimiste. Or, on constate pour ce premier modèle une dégradation progressive de la qualité de crédit du portefeuille sur l'horizon de projection, cependant les taux de dégradation restent relativement faire à ceux du scénario adverse, ce qui est acceptable.

6.1.4 Jeu de matrices 2

6.1.4.1 Les inputs

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--|
| 2 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

TABLE 6.5 – Input du jeu de matrices 2

Description du modèle Les approches permettant de calculer les seuils de transition $B_{i,j}$ ainsi que le facteur de sensibilité au cycle économique restent identiques au modèle précédent. Ce qui change est la façon dont les facteurs systémiques Z_t sont projetés.

On rappelle brièvement le procédé, on choisit comme indicateur de la position dans le cycle économique les taux de défaut moyen observés sur l'historique. On explique ensuite cette série¹ par des variables macroéconomiques. Une fois le modèle satellite obtenu, on projette les taux de défaut sur l'horizon de projection selon les deux scénarios. Grâce à ces projections, on en déduit les projections des facteurs systémiques à horizon 3 ans. On rappelle l'expression du modèle satellite retenu :

$$\log\left(\frac{\text{TD}_t}{1 - \text{TD}_t}\right) = -12,5640 - 0,4634 \times \text{PIB}_t + 1,1608 \times \text{CHOMAGE}_{t-1} \quad (6.5)$$

L'intérêt ici sera de mettre en évidence l'apport du choix d'une autre approche pour la modélisation des facteurs systémiques.

Résultats attendus On rappelle que le scénario baseline fourni par la BCE est optimiste : l'état de l'économie s'améliore sur les 3 années de projection. Idéalement, on s'attend donc à ce que la qualité de crédit du portefeuille s'améliore sur l'horizon de projection. La qualité de crédit étant appréciée par l'intermédiaire de l'évolution des migrations entre les classes de risque, on s'attend à observer une migration des contreparties vers les classes de risque les moins risquées. Inversement, pour le scénario adverse, la situation se dégrade progressivement. On s'attend donc à ce que le portefeuille se détériore.

1. Transformation logistique de la série des taux de défaut.

6.1.4.2 Les matrices stressées

| SCENARIO BASELINE | | | | | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 2019_2020 | | | | | | | | | 2019_2020 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 85,172% | 12,947% | 1,557% | 0,155% | 0,144% | 0,014% | 0,008% | 0,002% | 1 | 80,050% | 16,934% | 2,433% | 0,268% | 0,264% | 0,029% | 0,018% | 0,006% |
| 2 | 21,230% | 63,617% | 13,754% | 0,772% | 0,511% | 0,059% | 0,050% | 0,007% | 2 | 15,893% | 63,766% | 18,051% | 1,208% | 0,861% | 0,109% | 0,097% | 0,016% |
| 3 | 4,601% | 28,761% | 56,760% | 5,968% | 3,623% | 0,162% | 0,105% | 0,019% | 3 | 2,970% | 23,454% | 59,750% | 7,899% | 5,407% | 0,283% | 0,197% | 0,039% |
| 4 | 1,575% | 7,936% | 32,218% | 50,429% | 7,295% | 0,312% | 0,197% | 0,039% | 4 | 0,936% | 5,612% | 27,570% | 54,671% | 10,258% | 0,521% | 0,354% | 0,079% |
| 5 | 0,888% | 4,925% | 21,441% | 19,489% | 46,641% | 4,085% | 2,449% | 0,083% | 5 | 0,507% | 3,320% | 17,197% | 17,866% | 51,507% | 5,633% | 3,809% | 0,161% |
| 6 | 0,345% | 2,103% | 6,136% | 6,209% | 31,696% | 49,182% | 4,120% | 0,209% | 6 | 0,185% | 1,318% | 4,350% | 4,789% | 28,005% | 54,844% | 6,124% | 0,386% |
| 7 | 0,173% | 1,110% | 3,560% | 3,677% | 20,936% | 19,782% | 49,946% | 0,816% | 7 | 0,089% | 0,662% | 2,388% | 2,666% | 17,144% | 18,363% | 57,302% | 1,386% |

| 2020_2021 | | | | | | | | | 2020_2021 | | | | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 85,185% | 12,936% | 1,555% | 0,155% | 0,144% | 0,014% | 0,008% | 0,002% | 1 | 77,771% | 18,632% | 2,869% | 0,328% | 0,332% | 0,037% | 0,024% | 0,008% |
| 2 | 21,247% | 63,614% | 13,742% | 0,771% | 0,510% | 0,059% | 0,050% | 0,007% | 2 | 14,056% | 63,298% | 19,892% | 1,424% | 1,046% | 0,137% | 0,125% | 0,022% |
| 3 | 4,607% | 28,777% | 56,749% | 5,963% | 3,618% | 0,162% | 0,105% | 0,019% | 3 | 2,476% | 21,432% | 60,449% | 8,726% | 6,267% | 0,349% | 0,249% | 0,052% |
| 4 | 1,577% | 7,944% | 32,231% | 50,415% | 7,287% | 0,311% | 0,197% | 0,039% | 4 | 0,755% | 4,845% | 25,671% | 55,940% | 11,613% | 0,631% | 0,441% | 0,103% |
| 5 | 0,889% | 4,930% | 21,454% | 19,492% | 46,625% | 4,081% | 2,445% | 0,082% | 5 | 0,403% | 2,813% | 15,606% | 17,080% | 53,081% | 6,323% | 4,487% | 0,207% |
| 6 | 0,345% | 2,106% | 6,142% | 6,213% | 31,706% | 49,164% | 4,115% | 0,208% | 6 | 0,144% | 1,084% | 3,759% | 4,277% | 26,401% | 56,763% | 7,086% | 0,486% |
| 7 | 0,173% | 1,112% | 3,564% | 3,680% | 20,947% | 19,785% | 49,924% | 0,815% | 7 | 0,068% | 0,535% | 2,019% | 2,323% | 15,682% | 17,642% | 60,041% | 1,690% |

| 2021_2022 | | | | | | | | | 2021_2022 | | | | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 85,195% | 12,928% | 1,554% | 0,155% | 0,143% | 0,014% | 0,008% | 0,002% | 1 | 74,480% | 20,999% | 3,548% | 0,427% | 0,447% | 0,053% | 0,034% | 0,012% |
| 2 | 21,259% | 63,611% | 13,734% | 0,770% | 0,509% | 0,059% | 0,050% | 0,007% | 2 | 11,819% | 62,211% | 22,470% | 1,762% | 1,347% | 0,184% | 0,174% | 0,032% |
| 3 | 4,611% | 28,788% | 56,741% | 5,959% | 3,615% | 0,162% | 0,105% | 0,019% | 3 | 1,921% | 18,817% | 60,934% | 9,882% | 7,573% | 0,458% | 0,339% | 0,076% |
| 4 | 1,579% | 7,949% | 32,240% | 50,405% | 7,282% | 0,311% | 0,196% | 0,039% | 4 | 0,560% | 3,939% | 23,112% | 57,243% | 13,603% | 0,809% | 0,588% | 0,146% |
| 5 | 0,890% | 4,934% | 21,463% | 19,495% | 46,614% | 4,078% | 2,443% | 0,082% | 5 | 0,292% | 2,229% | 13,568% | 15,922% | 54,838% | 7,317% | 5,544% | 0,288% |
| 6 | 0,346% | 2,108% | 6,146% | 6,216% | 31,713% | 49,152% | 4,111% | 0,208% | 6 | 0,101% | 0,826% | 3,058% | 3,637% | 24,163% | 59,009% | 8,548% | 0,659% |
| 7 | 0,173% | 1,113% | 3,567% | 3,683% | 20,955% | 19,787% | 49,909% | 0,814% | 7 | 0,047% | 0,397% | 1,595% | 1,912% | 13,780% | 16,555% | 63,526% | 2,190% |

FIGURE 6.6 – Matrices de transition stressées

Premières observations Les matrices obtenues pour ce deuxième modèle sont différentes des matrices du jeu 1 :

- Pour le scénario baseline, l'analyse des taux de non migration (diagonale) sur l'horizon de projection montre que ceux-ci augmentent progressivement pour les classes peu risqués et diminuent pour les classes risquées. Puis, en dehors de la diagonale, les probabilités de transition du triangle inférieur augmentent progressivement sur l'horizon de projection. On observe donc une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille.
- Pour le scénario adverse, on peut faire les observations exactement inverses. On constate en effet que la qualité de crédit du portefeuille se détériore sur l'horizon de projection. Globalement, les probabilités du triangle inférieur diminuent progressivement sur l'horizon de projection. Inversement, les probabilités du triangle supérieure augmentent.

6.1.4.3 Les mesures synthétiques

Mouvements des effectifs par classe de risque Les résultats du jeu 2 sont les suivants :

| CR | SCENARIO BASELINE | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | |
|-----|-------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif |
| | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 |
| CR1 | 3360 | ↑ 12,19% | ↑ 9,04% | ↑ 6,69% | 4385 | 3360 | ↓ -0,20% | ↓ -4,97% | ↓ -10,57% | 2850 |
| CR2 | 3585 | ↑ 0,94% | ↓ -0,81% | ↓ -1,04% | 3552 | 3585 | ↓ -0,11% | ↓ -1,49% | ↓ -2,81% | 3429 |
| CR3 | 2858 | ↓ -12,42% | ↓ -8,00% | ↓ -5,85% | 2168 | 2858 | ↓ -5,03% | ↑ 0,94% | ↑ 4,54% | 2864 |
| CR4 | 555 | ↑ 12,94% | ↓ -2,18% | ↓ -5,67% | 578 | 555 | ↑ 28,19% | ↑ 14,58% | ↑ 14,24% | 931 |
| CR5 | 689 | ↓ -21,91% | ↓ -14,48% | ↓ -10,73% | 411 | 689 | ↓ -5,91% | ↑ 7,08% | ↑ 17,12% | 813 |
| CR6 | 79 | ↑ 25,47% | ↓ -3,01% | ↓ -9,17% | 87 | 79 | ↑ 51,24% | ↑ 24,12% | ↑ 24,93% | 185 |
| CR7 | 117 | ↓ -27,58% | ↓ -22,68% | ↓ -18,13% | 54 | 117 | ↓ -6,15% | ↑ 8,07% | ↑ 24,61% | 148 |

FIGURE 6.7 – Mouvements des effectifs par classe de risque pour le jeu 2

Interprétation Les résultats se différencient par plusieurs points du modèle précédents :

- Pour le scénario baseline, on constate que les effectifs augmentent progressivement au sein des classes peu risqués {1, 2} et diminuent globalement dans les classes moyennement à très risquées {3, 4, 5, 6, 7}. Ceci témoigne d'une amélioration progressive de la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline. En effet, la meilleure classe de risque, qui est la classe de risque 1, compte 3 360 contreparties en 2019 contre 4 385 contreparties en fin de projection.
- Pour le scénario adverse, on note une dynamique inversée de l'évolution des effectifs par classe de risque par rapport au scénario baseline. En effet, les effectifs dans les classes de risque {1, 2} diminuent progressivement, tandis que les effectifs des classes risquées augmentent sur l'horizon de projection. On atteint respectivement 185 et 148 contreparties au sein des classes de risque 6 et 7 en 2022 contre 79 et 117 contreparties, en début de projection.

On poursuit par l'analyse des taux de dégradation par classe de risque.

Taux de dégradation par classe de risque Les résultats obtenus pour le jeu de matrice 2 sont les suivants :

| CR | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|-------|----------|---------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|--------|
| | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| 1 | 13,22% | 19,99% | 6,77% | 13,59% | 23,39% | 9,80% | 13,88% | 28,54% | 14,66% |
| 2 | 15,01% | 20,36% | 5,35% | 15,26% | 22,99% | 7,72% | 15,29% | 26,72% | 11,43% |
| 3 | 11,28% | 14,56% | 3,28% | 10,72% | 15,50% | 4,77% | 10,47% | 17,53% | 7,06% |
| 4 | 6,94% | 8,75% | 1,80% | 8,01% | 11,16% | 3,15% | 8,30% | 13,26% | 4,96% |
| 5 | 8,47% | 10,21% | 1,73% | 7,73% | 10,29% | 2,56% | 7,40% | 11,23% | 3,83% |
| 6 | 3,45% | 4,30% | 0,85% | 4,46% | 6,10% | 1,64% | 4,76% | 7,37% | 2,61% |
| 7 | 1,13% | 1,48% | 0,35% | 1,05% | 1,56% | 0,51% | 0,99% | 1,76% | 0,76% |
| Total | 12,61% | 17,17% | 4,56% | 12,84% | 19,18% | 6,34% | 13,01% | 21,95% | 8,94% |

FIGURE 6.8 – Taux de dégradation pour le jeu 2

Interprétation Sur l'ensemble des années de projection, les taux de dégradation totaux du scénario adverse sont supérieurs à ceux du scénario baseline. Il en est de même pour les taux de dégradation par classe de risque. Ce résultat est logique et intuitif : la sévérité du scénario adverse étant supérieure à celle du scénario baseline, on observe plus de dégradations de notes. Enfin, on relève également les particularités suivantes :

- Au niveau du scénario baseline, les taux de dégradation sont plutôt bas sur l'horizon de projection et varient peu. Ils diminuent notamment pour les classes de risque {3, 5, 7}.
- Pour le scénario adverse en revanche, pour chaque classe de risque, les taux de dégradation sont croissants et s'écartent un peu plus chaque année des valeurs calculées pour le scénario baseline. On le voit notamment par le creusement entre les écarts calculés pour les deux scénarios.
- Au niveau des classes de risque 7, les probabilités d'être dégradé à l'état de défaut diminuent sur l'horizon de projection en scénario adverse et augmentent en scénario baseline.

Globalement, on retiendra que, sur l'horizon de projection, la qualité de crédit du portefeuille s'améliore en scénario baseline et se dégrade en scénario adverse.

Probabilités de défaut *point-in-time*

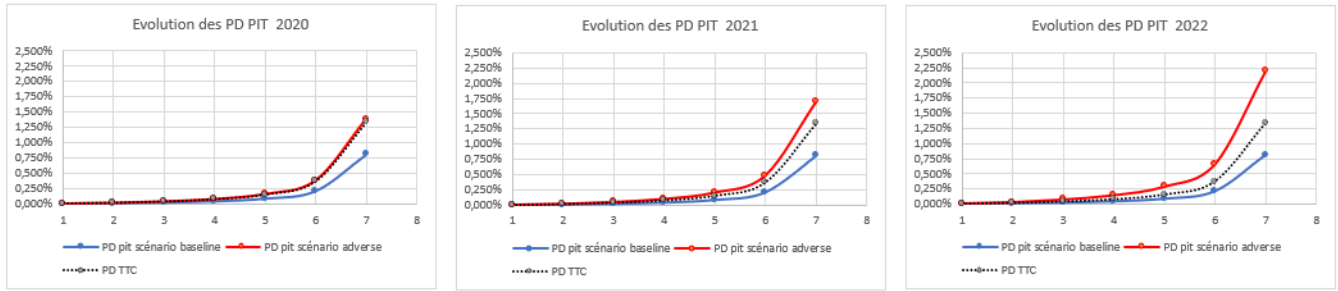


FIGURE 6.9 – PD^{PIT} marginales stressées du jeu 2

Interprétation Sur les trois années de projection, pour le scénario baseline, les probabilités de défaut *point-in-time* sont inférieures aux probabilités de défaut de long terme. L'amélioration des conditions économiques dans le scénario baseline est bien retranscrite en termes de choc sur les probabilités de défaut. Pour le scénario adverse, on observe sur l'horizon de projection, un écartement progressif de la courbe rouge des courbes bleue et noire. Cet écartement retranscrit bien la sévérité de plus en plus prononcée du scénario adverse. En somme, le modèle permet donc de bien stresser les niveaux des probabilités de défaut point-in-time.

6.1.4.4 Bilan de ce modèle

Ce modèle est plutôt satisfaisant sur plusieurs points :

- ▶ Tout d'abord, l'évolution de l'état de l'économie est bien retranscrite dans les mouvements des effectifs par classe de risque. Cette caractéristique rend le modèle facilement interprétable. En effet, l'amélioration des conditions économiques du scénario baseline conduit à une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille. Inversement, la dégradation des conditions économiques dans le scénario adverse se traduit bien par une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille. On note en effet pour ce dernier une évolution des contreparties vers les classes risquées.
- ▶ Ensuite, le modèle *discrimine* bien les deux scénarios. En effet, les écarts importants constatés lors de la comparaison des taux de dégradation le démontrent.
- ▶ Enfin, en scénario adverse, les probabilités de défaut *point-in-time* sont très stressées et deviennent même largement supérieures à leur niveau de long terme. Inversement, en scénario baseline, elle passe en dessous de leur niveau long terme. Les stress appliqués à la conjoncture économique sont bien retranscrits en termes de choc au sein du portefeuille.

6.1.5 Jeu de matrices 3

6.1.5.1 Les inputs

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------|--|
| 3 | Matrice champion \bar{M} | ρ_i^* | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

TABLE 6.6 – Input du jeu de matrices 3

Description du modèle La matrice champion utilisée pour le calcul des seuils de transition $B_{i,j}$ est la même que pour les deux modèles précédents. Puis, de la même façon que dans le modèle précédent, les facteurs systémiques sont projetés par la méthode des taux de défaut. Le seul changement s'applique au niveau du facteur de sensibilité au cycle économique, qui n'est plus commun à l'ensemble du portefeuille mais propre à chaque classe de risque. On rappelle les valeurs pour chaque classe de risque :

| CR _i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|
| ρ_i^* | 0,42% | 0,58% | 0,81% | 18,83% | 1,43% | 21,17% | 6,90% |

L'objectif de cette sous-partie est de voir comment les résultats de la partie précédente sont modifiés par la prise en compte de cette hypothèse.

Les résultats attendus Les facteurs de sensibilité au cycle économique des classes de risque $\{4,6\}$ sont très élevés et valent respectivement : $\rho_4^* = 18,83\%$ et $\rho_6^* = 21,17\%$. Pour les classes de risque $\{1, 2, 3\}$, les facteurs de sensibilité sont très faibles. En effet, ces classes peu risquées sont plutôt stables : on note peu de migration vers les autres classes de risque sur l'historique ainsi qu'un faible taux de défaut.

Intuitivement, on s'attend à observer une hausse des migrations dans les classes de risque $\{4, 6\}$ pour les deux scénarios. Dans les classes peu risquées, on s'attend en revanche à observer une certaine stabilité. Leur faible sensibilité au cycle économique devrait les rendre presque invariante à la conjoncture.

6.1.5.2 Les matrices de migration stressées

| SCENARIO BASELINE | | | | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 2019_2020 | | | | | | | | 2019_2020 | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 80,833% | 16,323% | 2,299% | 0,251% | 0,246% | 0,027% | 0,016% | 0,01% | 1 | 80,503% | 16,574% | 2,359% | 0,259% | 0,255% | 0,028% | 0,017% | 0,01% |
| 2 | 16,805% | 63,763% | 17,299% | 1,131% | 0,799% | 0,100% | 0,089% | 0,01% | 2 | 16,389% | 63,716% | 17,674% | 1,172% | 0,833% | 0,105% | 0,094% | 0,02% |
| 3 | 3,287% | 24,530% | 59,177% | 7,501% | 5,035% | 0,258% | 0,178% | 0,04% | 3 | 3,120% | 23,921% | 59,454% | 7,736% | 5,266% | 0,275% | 0,191% | 0,04% |
| 4 | 3,072% | 12,404% | 38,595% | 41,944% | 3,798% | 0,115% | 0,063% | 0,01% | 4 | 0,771% | 5,071% | 26,803% | 55,857% | 10,551% | 0,523% | 0,349% | 0,07% |
| 5 | 0,606% | 3,753% | 18,390% | 18,352% | 50,177% | 5,181% | 3,403% | 0,14% | 5 | 0,539% | 3,454% | 17,536% | 17,983% | 51,097% | 5,519% | 3,716% | 0,16% |
| 6 | 0,866% | 4,273% | 10,321% | 9,088% | 36,796% | 36,986% | 1,621% | 0,05% | 6 | 0,133% | 1,072% | 3,838% | 4,424% | 27,397% | 56,504% | 6,262% | 0,37% |
| 7 | 0,172% | 1,107% | 3,553% | 3,671% | 20,915% | 19,775% | 49,988% | 0,82% | 7 | 0,089% | 0,662% | 2,389% | 2,667% | 17,146% | 18,364% | 57,297% | 1,39% |
| 2020_2021 | | | | | | | | 2020_2021 | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 80,834% | 16,323% | 2,299% | 0,251% | 0,246% | 0,027% | 0,016% | 0,01% | 1 | 80,195% | 16,807% | 2,416% | 0,266% | 0,263% | 0,029% | 0,018% | 0,01% |
| 2 | 16,807% | 63,763% | 17,297% | 1,131% | 0,799% | 0,100% | 0,089% | 0,01% | 2 | 16,011% | 63,661% | 18,025% | 1,211% | 0,866% | 0,110% | 0,099% | 0,02% |
| 3 | 3,288% | 24,531% | 59,176% | 7,500% | 5,034% | 0,258% | 0,178% | 0,03% | 3 | 2,972% | 23,361% | 59,688% | 7,956% | 5,487% | 0,291% | 0,203% | 0,04% |
| 4 | 3,083% | 12,432% | 38,621% | 41,893% | 3,785% | 0,114% | 0,062% | 0,01% | 4 | 0,168% | 1,716% | 14,974% | 58,645% | 21,185% | 1,623% | 1,305% | 0,38% |
| 5 | 0,606% | 3,754% | 18,393% | 18,354% | 50,174% | 5,180% | 3,402% | 0,14% | 5 | 0,483% | 3,194% | 16,759% | 17,622% | 51,899% | 5,841% | 4,025% | 0,18% |
| 6 | 0,871% | 4,288% | 10,346% | 9,102% | 36,809% | 36,924% | 1,613% | 0,05% | 6 | 0,017% | 0,214% | 1,099% | 1,614% | 15,147% | 64,222% | 15,910% | 1,78% |
| 7 | 0,172% | 1,109% | 3,557% | 3,674% | 20,926% | 19,779% | 49,966% | 0,82% | 7 | 0,047% | 0,398% | 1,599% | 1,916% | 13,802% | 16,568% | 63,486% | 2,18% |
| 2021_2022 | | | | | | | | 2021_2022 | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 80,834% | 16,322% | 2,299% | 0,251% | 0,246% | 0,027% | 0,016% | 0,01% | 1 | 80,372% | 16,673% | 2,383% | 0,262% | 0,259% | 0,028% | 0,017% | 0,01% |
| 2 | 16,807% | 63,763% | 17,297% | 1,131% | 0,799% | 0,100% | 0,089% | 0,01% | 2 | 16,227% | 63,694% | 17,823% | 1,189% | 0,847% | 0,107% | 0,096% | 0,02% |
| 3 | 3,091% | 24,533% | 59,176% | 7,500% | 5,033% | 0,258% | 0,178% | 0,03% | 3 | 3,056% | 23,682% | 59,556% | 7,830% | 5,359% | 0,282% | 0,196% | 0,04% |
| 4 | 3,091% | 12,451% | 38,638% | 41,858% | 3,776% | 0,114% | 0,062% | 0,01% | 4 | 0,415% | 3,294% | 21,527% | 58,487% | 14,617% | 0,875% | 0,632% | 0,15% |
| 5 | 0,607% | 3,755% | 18,395% | 18,354% | 50,172% | 5,180% | 3,402% | 0,14% | 5 | 0,515% | 3,341% | 17,203% | 17,831% | 51,444% | 5,655% | 3,845% | 0,16% |
| 6 | 0,874% | 4,298% | 10,363% | 9,112% | 36,817% | 36,880% | 1,608% | 0,05% | 6 | 0,058% | 0,561% | 2,343% | 2,997% | 22,100% | 61,524% | 9,668% | 0,75% |
| 7 | 0,173% | 1,110% | 3,559% | 3,677% | 20,934% | 19,781% | 49,951% | 0,82% | 7 | 0,068% | 0,536% | 2,022% | 2,326% | 15,693% | 17,647% | 60,020% | 1,69% |

FIGURE 6.10 – Matrices de transition du jeu 3

Premières observations Pour ce troisième modèle, on joue sur les facteurs de sensibilité à l'état de l'économie. Ainsi, il est difficile de dégager une tendance sur l'horizon de projection comme pour les modèles précédents. En effet, chaque classe de risque possède une sensibilité différente à l'état de l'économie. A première vue, pour les deux scénarios, on peut dire que les classes de risque $\{1, 2, 3\}$ semblent plutôt stables sur l'horizon de projection. Pour analyser nos résultats de manière plus fine, nous considérons les mesures synthétiques également calculées pour les deux modèles précédents.

6.1.5.3 Les mesures synthétiques

Les mouvements des effectifs au sein des classes de risque

Les résultats obtenus pour le jeu de matrice 3 sont les suivants :

| CR | SCENARIO BASELINE | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | |
|-----|-------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif |
| | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 |
| CR1 | 3360 | ↑ 2,22% | ↑ 1,95% | ↑ 1,62% | 3558 | 3360 | ↑ 0,89% | ↑ 0,11% | ↓ -0,76% | 3368 |
| CR2 | 3585 | ↑ 1,39% | ↑ 0,63% | ↑ 0,40% | 3672 | 3585 | ↓ -0,19% | ↓ -1,44% | ↓ -2,02% | 3456 |
| CR3 | 2858 | ↓ -4,06% | ↓ -1,55% | ↓ -0,91% | 2675 | 2858 | ↓ -5,97% | ↓ -3,71% | ↓ -3,54% | 2496 |
| CR4 | 555 | ↑ 14,24% | ↑ 1,55% | ↓ -1,18% | 636 | 555 | ↑ 28,35% | ↑ 12,16% | ↑ 6,04% | 847 |
| CR5 | 689 | ↓ -12,75% | ↓ -7,26% | ↓ -4,87% | 530 | 689 | ↓ -6,93% | ↑ 3,02% | ↑ 10,78% | 732 |
| CR6 | 79 | ↑ 27,26% | ↓ -1,66% | ↓ -6,04% | 93 | 79 | ↑ 51,39% | ↑ 23,45% | ↑ 20,47% | 178 |
| CR7 | 117 | ↓ -21,05% | ↓ -16,33% | ↓ -11,79% | 68 | 117 | ↓ -6,91% | ↑ 5,94% | ↑ 24,03% | 143 |

FIGURE 6.11 – Mouvements des effectifs par classe de risque du jeu 3

Interprétations A l'échelle globale du portefeuille, nous tirons les mêmes conclusions que pour le modèle précédent.

- Le scénario baseline étant optimiste sur l'horizon de projection, cela entraîne bien une diminution des effectifs au sein des classes risquées et une augmentation des effectifs dans les classes peu risquées. Néanmoins, malgré les conditions favorables, on observe une augmentation des effectifs au sein des classes de risque {4, 6} au cours de la première année de projection.
- Pour le scénario adverse, on observe le phénomène inverse : les effectifs au sein des classes de risque {4, 6} augmentent considérablement sur l'horizon de projection.

Taux de dégradation par classe de risque

| CR | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|-------|----------|---------|-------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|
| | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| 1 | 18,75% | 19,33% | 0,57% | 18,75% | 19,61% | 0,85% | 18,75% | 19,96% | 1,21% |
| 2 | 19,17% | 19,93% | 0,77% | 19,31% | 20,37% | 1,06% | 19,35% | 20,75% | 1,39% |
| 3 | 13,56% | 14,36% | 0,81% | 13,21% | 14,23% | 1,02% | 13,12% | 14,49% | 1,37% |
| 4 | 3,49% | 8,96% | 5,47% | 3,91% | 14,51% | 10,60% | 4,01% | 23,10% | 19,09% |
| 5 | 10,00% | 10,09% | 0,09% | 9,40% | 9,38% | -0,02% | 9,16% | 9,07% | -0,10% |
| 6 | 1,31% | 4,38% | 3,07% | 1,69% | 8,44% | 6,75% | 1,76% | 14,68% | 12,92% |
| 7 | 1,04% | 1,49% | 0,45% | 0,98% | 1,59% | 0,62% | 0,93% | 1,76% | 0,83% |
| Total | 15,99% | 16,82% | 0,83% | 16,02% | 17,29% | 1,27% | 16,09% | 18,16% | 2,07% |

FIGURE 6.12 – Mesures synthétiques du jeu 3

Interprétations La faible sensibilité des classes de risque {1, 2, 3} au cycle économique les rendent peu sensibles à l'état de l'économie. Le même phénomène est constaté pour la classe de risque 5. En effet, on observe à peine plus de dégradations pour le scénario adverse au sein de ces classes de risque.

En revanche, pour les classes de risque {4, 6}, on observe des chocs importants entre les deux scénarios pour les trois années de projection.

Probabilités de défaut *point-in-time*

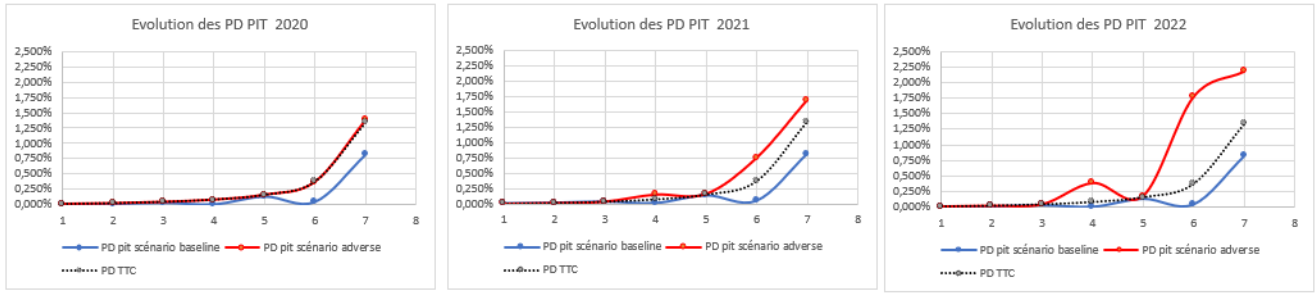


FIGURE 6.13 – PD^{PIT} marginales stressées du jeu 3

Interprétation Concernant les probabilités *point-in-time*, on observe une anomalie. En effet, l’hypothèse de monotonie des probabilités de défaut n’est pas respectée. Prenons l’exemple de la dernière année de projection : on observe, pour le scénario baseline, que la probabilité de défaut de la classe de risque 5 est supérieure à celle de la classe de risque 6. Pour le scénario adverse, on observe le même phénomène pour des classes de risque différentes. En effet, la probabilité de défaut de la classe de risque 4 est supérieure à celle de la classe de risque 5. Cette contrainte est due aux facteurs de sensibilité très élevés des classes risque 4 et 6 qui stressent un peu trop les probabilités de défaut. Or, cette propriété est indispensable pour assurer la cohérence des résultats.

6.1.5.4 Bilan du modèle 3

En imposant des facteurs de sensibilité différents pour chaque classe de risque, on capte mieux l’impact de l’état de l’économie pour chaque classe homogène de contrepartie. Ainsi, les migrations dans les classes peu sensibles à l’état de l’économie sont moins prononcées. L’essentiel du stress est appliqué aux contreparties des classes de risque 4 et 6 qui sont les plus sensibles à l’état de l’économie. Premièrement, on peut se demander si le fait que les chocs soit quasiment exclusivement retranscrits en termes de migration au sein de ces deux classes uniquement est pertinent. Enfin, le point rédhibitoire de cette approche reste le non respect de la monotonie de la probabilité de défaut en période de stress. Un tel modèle ne peut être retenu. Nous retenons en revanche les deux premiers modèles introduits que nous comparons dans la sous partie suivante.

Transition

Dans les sous-parties précédentes, nous avons présenté l’étendu de nos résultats et comparé les matrices projetées selon 3 approches. L’objectif de ce mémoire étant de challenger les hypothèses du modèle interne, nous présentons dans la sous-partie suivante, les matrices stressées obtenues à l’aide du modèle interne. Avant cela, nous commençons par rappeler les hypothèses principales.

6.1.6 Analyse des matrices projetées dans le modèle interne

Remarque Dans cette sous-partie, nous détaillons les résultats issues de la modélisation en interne. Nous nous contentons de présenter des résultats synthétiques sans rentrer dans le détail exhaustif des processus développés. Enfin, nous ne pourrions pas divulguer l'intitulé exacte des variables retenues au sein des modèles satellites car cette donnée est confidentielle.

6.1.6.1 Les hypothèses du modèle interne

Le modèle interne de stress test de SFIL est le modèle de Vasicek à un facteur. Cependant, celui-ci est estimé avec des hypothèses autres que celle prises pour l'estimation de nos modèles ci-dessus :

- **Matrice champion \bar{M} .** La matrice champion interne représente une chaîne de Markov discrète. Elle est estimée par maximum de vraisemblance :

| t \ t+1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 80,00% | 9,82% | 7,85% | 1,34% | 0,99% | 0,00% | 0,00% | 0,005% |
| 2 | 18,00% | 60,00% | 19,08% | 1,67% | 1,23% | 0,00% | 0,00% | 0,015% |
| 3 | 0,44% | 37,20% | 58,69% | 2,09% | 1,54% | 0,00% | 0,00% | 0,038% |
| 4 | 0,00% | 4,73% | 41,45% | 51,81% | 1,93% | 0,00% | 0,00% | 0,076% |
| 5 | 0,00% | 0,00% | 2,67% | 13,20% | 77,13% | 3,80% | 3,04% | 0,154% |
| 6 | 0,00% | 0,00% | 2,14% | 10,56% | 24,62% | 50,00% | 12,31% | 0,371% |
| 7 | 0,00% | 0,00% | 1,71% | 7,94% | 9,93% | 12,41% | 66,67% | 1,336% |
| D | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 100,00% |

FIGURE 6.14 – Matrice champion interne

Le cadre Markovien discret fait que les taux de transition extrêmes (coin supérieur gauche et coin inférieur droit) possède des estimateurs nuls. On verra comment cette particularité affecte les matrices projetées par ce modèle.

- **Le facteur de sensibilité économique ρ** Pour modéliser le processus de migration, le modèle interne se base non pas sur un mais deux facteurs systémiques. Ce processus bivarié se caractérise par :

- Une variable modélisant les migrations entre classe de risque saine drivée par le facteur systémique Z_R :

$$R_t^k = \sqrt{(\alpha\rho)^2} \times Z_t^R + \sqrt{1 - (\alpha\rho)^2} \times \epsilon_t^k \quad (6.6)$$

où α est un facteur de pénalisation tel que $\alpha^2 \in \left[\frac{1}{\rho^2}, 1 \right]$.

- Une variable latente modélisant les migrations vers l'état de défaut uniquement, drivée par le facteur systémique Z_D :

$$R_t^k = \sqrt{\rho^2} \times Z_t^D + \sqrt{1 - \rho^2} \times \epsilon_t^k \quad (6.7)$$

Le choix de recourir à une approche bivariée a été motivé par le fait qu'une contrepartie peut être dégradée à l'état de défaut sans transiter vers les pires classes de risque. En supposant que les classes de risque sont moins sensibles à l'état de l'économie que le défaut, un facteur de pénalisation α vient s'ajouter au coefficient de corrélation ρ pour le cas des migrations vers les classes de risque saines.

Ainsi, les matrices *point-in-time* du modèle interne dépendent cette fois-ci des paramètres suivants :

$$M_t = f(\bar{M}, z_t^D, z_t^R, \rho^2, \alpha^2) \quad (6.8)$$

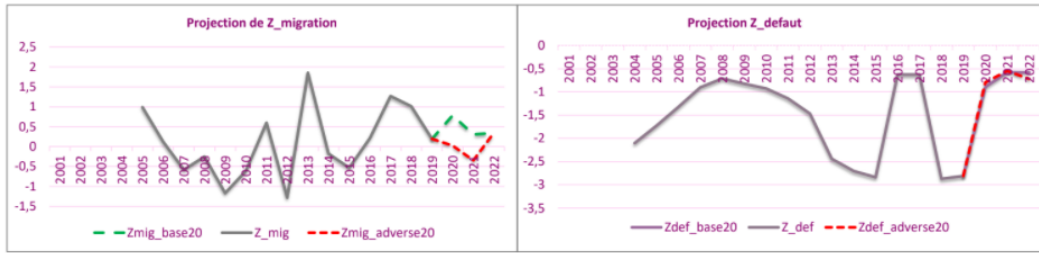


FIGURE 6.15 – Résultats obtenus pour la projection des facteurs systémiques Z_R et Z_D en interne

6.1.6.2 Conclusion sur le modèle

A partir du cadre théorique ci-dessus, les équipes ont estimé deux modèles satellites pour les facteurs systémiques Z_R et Z_D . Les conclusions sur les deux modèles ont été les suivantes :

1. Pour le processus Z_R , les variables macroéconomiques ayant été mises en évidence sont le prix de l'immobilier et le taux de croissance PIB. Le modèle estimé a donné un bon ajustement linéaire et une analyse des résidus satisfaisantes. De plus l'application des scénarios permettait de bien différencier le cas stressé du cas base.
2. Pour le processus Z_D , le modèle satellite estimé dépend du chômage et de l'inflation. L'ajustement linéaire trouvé était peu satisfaisant et les projections du scénario de base ne s'écartaient pas sensiblement du scénario stressé.

Ce premier résultat questionne la modélisation disjointe des migrations entre les classes de risque saines (1 à 7) et l'état de défaut selon le processus bivarié décrit en section précédente. En effet, avec les projections de la variable Z_D obtenues, il est difficile de stresser les probabilités de défaut pour les deux scénarios. C'est notamment pour cette raison que dans notre étude nous décidons de modéliser ses migrations conjointement.

6.1.6.3 Inputs du modèle

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilités | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|------------------|---|---|
| Interne | Matrice TTC 1 an | $\rho^* = 26,14\% / \alpha^* = 18,69\%$ | Projections $\hat{Z}_t^R / \hat{Z}_t^D$ |

TABLE 6.7 – Input du jeu de matrices internes

Remarque On note que le facteur de sensibilité ρ estimé dans le modèle interne est supérieur au facteur systémique estimé pour notre approche. Cela est dû au fait qu'on utilise uniquement l'information du à l'état de défaut pour l'estimer. Celui-ci étant plus sensible au cycle économique, le facteur de sensibilité estimé est très élevé.

6.1.6.4 Matrices stressées

Premières observations On remarque que pour les deux scénarios, les probabilités de transition des coins supérieur droit (dégradations extrêmes) et inférieur gauche (amélioration extrêmes) sont nuls. Il s'agit d'une conséquence directe de la modélisation de la matrice champion. Pour le scénario baseline, ce constat n'est pas vraiment choquant. En revanche, pour le scénario adverse, il n'est pas absurde d'envisager une migration d'une contrepartie initialement en classe de risque 1 vers la classe de risque 7. Ainsi, un estimateur nul est une hypothèse forte.

| SCENARIO BASELINE | | | | | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 2019_2020 | | | | | | | | | 2019_2020 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 68,141% | 16,656% | 12,962% | 1,302% | 0,930% | 0,000% | 0,000% | 0,01% | 1 | 66,804% | 17,103% | 13,648% | 1,410% | 1,028% | 0,000% | 0,000% | 0,01% |
| 2 | 31,118% | 56,836% | 9,222% | 1,634% | 1,167% | 0,000% | 0,000% | 0,02% | 2 | 29,818% | 57,377% | 9,735% | 1,764% | 1,285% | 0,000% | 0,000% | 0,02% |
| 3 | 0,000% | 32,976% | 63,451% | 2,051% | 1,464% | 0,000% | 0,000% | 0,06% | 3 | 0,000% | 31,643% | 64,491% | 2,206% | 1,607% | 0,000% | 0,000% | 0,05% |
| 4 | 0,000% | 11,473% | 39,532% | 47,043% | 1,836% | 0,000% | 0,000% | 0,12% | 4 | 0,000% | 10,770% | 38,759% | 48,355% | 2,010% | 0,000% | 0,000% | 0,11% |
| 5 | 0,000% | 0,000% | 2,943% | 15,389% | 73,973% | 4,191% | 3,265% | 0,24% | 5 | 0,000% | 0,000% | 2,703% | 14,663% | 74,419% | 4,449% | 3,546% | 0,22% |
| 6 | 0,000% | 0,000% | 2,358% | 12,350% | 24,564% | 29,862% | 30,298% | 0,57% | 6 | 0,000% | 0,000% | 2,160% | 11,717% | 23,996% | 29,984% | 31,617% | 0,53% |
| 7 | 0,000% | 0,000% | 1,882% | 9,871% | 19,378% | 23,659% | 43,205% | 2,00% | 7 | 0,000% | 0,000% | 1,720% | 9,334% | 18,828% | 23,536% | 44,704% | 1,88% |

| 2020_2021 | | | | | | | | | 2020_2021 | | | | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 67,304% | 16,939% | 13,392% | 1,369% | 0,991% | 0,000% | 0,000% | 0,01% | 1 | 66,148% | 17,316% | 13,987% | 1,465% | 1,078% | 0,000% | 0,000% | 0,01% |
| 2 | 30,299% | 57,186% | 9,544% | 1,715% | 1,240% | 0,000% | 0,000% | 0,02% | 2 | 29,197% | 57,621% | 9,990% | 1,829% | 1,346% | 0,000% | 0,000% | 0,02% |
| 3 | 0,000% | 32,139% | 64,118% | 2,147% | 1,553% | 0,000% | 0,000% | 0,04% | 3 | 0,000% | 31,008% | 64,985% | 2,284% | 1,681% | 0,000% | 0,000% | 0,04% |
| 4 | 0,000% | 11,029% | 39,059% | 47,881% | 1,944% | 0,000% | 0,000% | 0,09% | 4 | 0,000% | 10,442% | 38,379% | 48,995% | 2,100% | 0,000% | 0,000% | 0,08% |
| 5 | 0,000% | 0,000% | 2,791% | 14,938% | 74,294% | 4,354% | 3,441% | 0,18% | 5 | 0,000% | 0,000% | 2,594% | 14,322% | 74,638% | 4,579% | 3,691% | 0,18% |
| 6 | 0,000% | 0,000% | 2,234% | 11,962% | 24,233% | 29,974% | 31,156% | 0,44% | 6 | 0,000% | 0,000% | 2,070% | 11,425% | 23,731% | 30,052% | 32,290% | 0,43% |
| 7 | 0,000% | 0,000% | 1,785% | 9,561% | 19,093% | 23,659% | 44,285% | 1,62% | 7 | 0,000% | 0,000% | 1,650% | 9,101% | 18,601% | 23,520% | 45,540% | 1,59% |

| 2021_2022 | | | | | | | | | 2021_2022 | | | | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | D1/D2 |
| 1 | 67,369% | 16,917% | 13,358% | 1,364% | 0,986% | 0,000% | 0,000% | 0,01% | 1 | 67,384% | 16,912% | 13,350% | 1,363% | 0,985% | 0,000% | 0,000% | 0,01% |
| 2 | 30,361% | 57,160% | 9,519% | 1,708% | 1,234% | 0,000% | 0,000% | 0,02% | 2 | 30,376% | 57,152% | 9,512% | 1,707% | 1,233% | 0,000% | 0,000% | 0,02% |
| 3 | 0,000% | 32,203% | 64,058% | 2,140% | 1,546% | 0,000% | 0,000% | 0,04% | 3 | 0,000% | 32,217% | 64,052% | 2,138% | 1,544% | 0,000% | 0,000% | 0,05% |
| 4 | 0,000% | 11,063% | 39,096% | 47,818% | 1,936% | 0,000% | 0,000% | 0,09% | 4 | 0,000% | 11,070% | 39,100% | 47,797% | 1,933% | 0,000% | 0,000% | 0,10% |
| 5 | 0,000% | 0,000% | 2,803% | 14,973% | 74,273% | 4,342% | 3,428% | 0,18% | 5 | 0,000% | 0,000% | 2,805% | 14,977% | 74,251% | 4,338% | 3,424% | 0,21% |
| 6 | 0,000% | 0,000% | 2,243% | 11,992% | 24,261% | 29,968% | 31,092% | 0,44% | 6 | 0,000% | 0,000% | 2,245% | 11,993% | 24,255% | 29,951% | 31,060% | 0,50% |
| 7 | 0,000% | 0,000% | 1,792% | 9,587% | 19,119% | 23,665% | 44,212% | 1,62% | 7 | 0,000% | 0,000% | 1,791% | 9,578% | 19,095% | 23,628% | 44,123% | 1,79% |

FIGURE 6.16 – Matrices de transition stressées

De plus, en observant globalement les probabilités de transition pour chaque scénario, on ne distingue pas réellement de tendance. En revanche, pour les deux scénarios, on observe beaucoup de mouvements au sein des classes de risque 6 et 7.

6.1.6.5 Les mesures synthétiques

Mouvements des effectifs par classe de risque Pour le jeu de matrices du modèle interne, nous obtenons les résultats suivants :

| CR | SCENARIO BASELINE | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | |
|-----|-------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif |
| | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 |
| CR1 | 3360 | ↑ 1,34% | ↓ -0,63% | ↓ -0,28% | 3374 | 3360 | ↓ -1,38% | ↓ -2,17% | ↑ 1,12% | 3278 |
| CR2 | 3585 | ↑ 0,51% | ↑ 0,06% | ↑ 0,16% | 3611 | 3585 | ↑ 0,30% | ↑ 0,12% | ↑ 0,43% | 3616 |
| CR3 | 2858 | ↓ -1,21% | ↑ 0,84% | ↑ 0,36% | 2857 | 2858 | ↑ 1,06% | ↑ 1,69% | ↓ -1,12% | 2904 |
| CR4 | 555 | ↓ -1,01% | ↑ 0,49% | ↓ -0,11% | 551 | 555 | ↑ 1,48% | ↑ 1,89% | ↓ -1,30% | 566 |
| CR5 | 689 | ↓ -1,76% | ↓ -0,46% | ↓ -0,71% | 669 | 689 | ↑ 0,35% | ↑ 1,08% | ↓ -1,29% | 690 |
| CR6 | 79 | ↑ 1,46% | ↓ -4,63% | ↓ -3,53% | 74 | 79 | ↑ 3,65% | ↓ -2,06% | ↓ -3,28% | 78 |
| CR7 | 117 | ↓ -17,11% | ↓ -5,95% | ↓ -4,41% | 87 | 117 | ↓ -13,06% | ↓ -3,38% | ↓ -6,19% | 92 |

FIGURE 6.17 – Mouvements des effectifs par classe pour le jeu de matrices internes

L' évolution de la distribution des effectifs par classe de risque ne suit pas vraiment de tendance claire :

- Pour le scénario baseline : en première année de projection les effectifs augmentent au sein des classes de risque {1, 2, 6} et diminuent au sein des autres classes de risque. Pour la deuxième et la troisième années de projection, la tendance se dégage un peu plus : on observe une diminution des effectifs dans les classes risquées et une augmentation des effectifs dans les classes peu risquées. On peut dire qu'à la manière du modèle 2, la qualité de crédit du portefeuille s'améliore. L'augmentation des effectifs dans les classes de risque 1 et 2 en fin de projection en témoigne.
- Pour le scénario adverse en revanche, le résultat est inattendu : on observe une diminution progressive des effectifs dans les classes risquées saines et une augmentation dans les classes peu risquées. En fin de projection, les classes de risques 2 et 3 voient leurs effectifs grimper. Ce résultat est incohérent avec l'hypothèse d'une détérioration progressive des conditions économiques dans le scénario adverse. Ainsi, les résultats du modèle sont difficilement interprétables d'un point de vue économique.

Les taux de dégradation par classe de risque Pour le jeu de matrices du modèle interne, nous obtenons les résultats suivants :

| CR | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| 1 | 31,44% | 33,66% | 2,22% | 32,90% | 34,60% | 1,70% | 32,72% | 32,26% | -0,47% |
| 2 | 11,99% | 12,77% | 0,78% | 12,51% | 13,17% | 0,66% | 12,46% | 12,42% | -0,04% |
| 3 | 3,62% | 3,83% | 0,21% | 3,71% | 3,94% | 0,23% | 3,72% | 3,77% | 0,05% |
| 4 | 1,97% | 2,09% | 0,11% | 2,02% | 2,14% | 0,12% | 2,03% | 2,06% | 0,03% |
| 5 | 7,83% | 8,19% | 0,35% | 8,01% | 8,36% | 0,34% | 8,01% | 8,07% | 0,06% |
| 6 | 30,42% | 31,01% | 0,59% | 33,13% | 33,41% | 0,28% | 32,69% | 32,63% | -0,06% |
| 7 | 2,42% | 2,16% | -0,26% | 1,72% | 1,64% | -0,08% | 1,70% | 1,90% | 0,20% |
| Total | 15,09% | 15,85% | 0,76% | 15,69% | 16,12% | 0,43% | 15,60% | 15,24% | -0,36% |

FIGURE 6.18 – Taux de dégradation par classe de risque pour le jeu de matrice interne

L'analyse des taux de migrations par classe de risque révèle d'autres phénomènes intéressants :

- En comparant tout d'abord les taux de dégradations totaux pour chaque année de projection, on note les écarts faibles entre les deux scénarios. Au sein du modèle interne, la sévérité du scénario adverse n'est pas vraiment retranscrite en terme de choc sur le portefeuille. Les taux de dégradation du scénario adverse sont à peine plus stressés que ceux du scénario baseline. En fin de projection, le taux de dégradation total observé sur le portefeuille est plus faible en scénario adverse qu'en scénario baseline. Or, au regard de la sévérité des scénarios, c'est l'inverse qui est attendu.
- L'analyse des taux de dégradation par classe de risque montre que l'essentiel du stress s'applique aux classes de risque {1, 2, 6} : en effet, on observe des taux de dégradation particulièrement élevés pour ces différentes classes. Pour le reste des classes de risque du portefeuille, on observe peu de dégradations. De plus, au cours de la dernière année de projection, on observe que les taux de dégradation de certaines contreparties en scénario baseline sont plus élevés que les taux de dégradation en scénario adverse.
- Enfin, en s'intéressant à la classe de risque 7, les probabilités de migration vers le défaut sont beaucoup plus stressées que pour nos modèles.

Les probabilités de défaut *point-in-time*

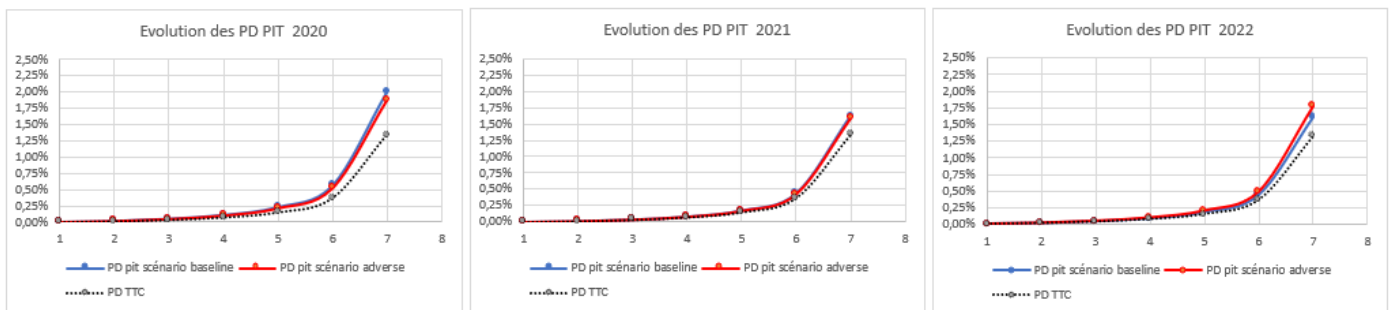


FIGURE 6.19 – PD^{PIT} stressées du jeu de matrice interne

Interprétations Pour les trois années de projection, les probabilités de défaut *point-in-time* stressées sont au-dessus de leur niveau de long terme. Pour la première année de projection, les probabilités de défaut stressées par le scénario baseline sont supérieures à celles du scénario adverse. La sévérité du scénario adverse n'est pas bien retranscrite en termes de choc sur les probabilités de défaut pour la première année. En effet, on s'attend à ce que la courbe rouge soit au-dessus de la courbe bleue. Pour la dernière année de projection, on observe le bon alignement des courbes.

Bilan de ce modèle Le modèle interne de stress test présente quelques incohérences qui le rende difficilement interprétable d'un point de vue économique. En effet, en scénario adverse, on observe une amélioration de la qualité du portefeuille. Or, le portefeuille étant positivement corrélé avec l'état de l'économie ($\rho > 0$), une dégradation des conditions économiques devrait logiquement s'accompagner d'une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille.

Néanmoins, en analysant les résultats de manière plus fine, on observe qu'une dégradation de note est constatée au cours de la première année de projection avec une augmentation des effectifs de 3,65% au sein de la classe de risque 6. En revanche, pour la dernière année de projection, pour laquelle les conditions économiques sont les plus dégradées, on observe une amélioration de la qualité du portefeuille. Du point de vue de l'analyste, il est difficile d'analyser de tels résultats.

Ensuite, le fait que pour certaines classes de risque le scénario adverse soit moins stressé que le scénario baseline pose également problème. Il s'agit encore là d'un phénomène qui soulève des interrogations au niveau de l'interprétabilité du modèle. Enfin, ce modèle ne permet pas de bien différencier le choc entre le scénario baseline et le scénario adverse. Or, avec une sensibilité économique à l'état de l'économie de 20%, intuitivement le choc devrait être plus prononcé.

Ainsi, dans la suite, nous comparons conjointement les modèles 1 et 2 au benchmark interne.

6.1.7 Comparaison des approches retenues avec le benchmark interne

6.1.7.1 Comparaison des mouvements des effectifs par classe de risque

| | | SCENARIO BASELINE | | | | | SCENARIO ADVERSE | | | | |
|-------------------|-----|-------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| | | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif | Effectif | Evolutions annuelles | | | Effectif |
| | | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 | 2019 | 2019-2020 | 2020-2021 | 2021-2022 | 2022 |
| Modèle 1 | CR | | | | | | | | | | |
| | CR1 | 3360 | ↑ 0,02% | ↓ -2,64% | ↓ -3,34% | 3163 | 3360 | ↓ -2,52% | ↓ -5,40% | ↓ -2,92% | 3008 |
| | CR2 | 3585 | ↓ -0,08% | ↓ -1,13% | ↓ -1,25% | 3497 | 3585 | ↓ -0,44% | ↓ -1,65% | ↓ -1,32% | 3464 |
| | CR3 | 2858 | ↓ -5,16% | ↓ -0,40% | ↑ 0,98% | 2726 | 2858 | ↓ -3,67% | ↑ 0,96% | ↑ 0,43% | 2792 |
| | CR4 | 555 | ↑ 27,91% | ↑ 12,11% | ↑ 7,35% | 854 | 555 | ↑ 31,21% | ↑ 15,09% | ↑ 7,14% | 898 |
| | CR5 | 689 | ↓ -6,22% | ↑ 3,32% | ↑ 5,55% | 705 | 689 | ↓ -2,49% | ↑ 7,43% | ↑ 4,34% | 753 |
| | CR6 | 79 | ↑ 50,73% | ↑ 19,91% | ↑ 12,39% | 160 | 79 | ↑ 56,84% | ↑ 25,36% | ↑ 12,63% | 175 |
| | CR7 | 117 | ↓ -6,59% | ↑ 2,58% | ↑ 6,28% | 119 | 117 | ↓ -1,33% | ↑ 9,00% | ↑ 5,10% | 132 |
| Modèle 2 | CR | | | | | | | | | | |
| | CR1 | 3360 | ↑ 12,19% | ↑ 9,04% | ↑ 6,69% | 4385 | 3360 | ↓ -0,20% | ↓ -4,97% | ↓ -10,57% | 2850 |
| | CR2 | 3585 | ↑ 0,94% | ↓ -0,81% | ↓ -1,04% | 3552 | 3585 | ↓ -0,11% | ↓ -1,49% | ↓ -2,81% | 3429 |
| | CR3 | 2858 | ↓ -12,42% | ↓ -8,00% | ↓ -5,85% | 2168 | 2858 | ↓ -5,03% | ↑ 0,94% | ↑ 4,54% | 2864 |
| | CR4 | 555 | ↑ 12,94% | ↓ -2,18% | ↓ -5,67% | 578 | 555 | ↑ 28,19% | ↑ 14,58% | ↑ 14,24% | 931 |
| | CR5 | 689 | ↓ -21,91% | ↓ -14,48% | ↓ -10,73% | 411 | 689 | ↓ -5,91% | ↑ 7,08% | ↑ 17,12% | 813 |
| | CR6 | 79 | ↑ 25,47% | ↓ -3,01% | ↓ -9,17% | 87 | 79 | ↑ 51,24% | ↑ 24,12% | ↑ 24,93% | 185 |
| | CR7 | 117 | ↓ -27,58% | ↓ -22,68% | ↓ -18,13% | 54 | 117 | ↓ -6,15% | ↑ 8,07% | ↑ 24,61% | 148 |
| Benchmark interne | CR | | | | | | | | | | |
| | CR1 | 3360 | ↑ 1,34% | ↓ -0,63% | ↓ -0,28% | 3374 | 3360 | ↓ -1,38% | ↓ -2,17% | ↑ 1,12% | 3278 |
| | CR2 | 3585 | ↑ 0,51% | ↑ 0,06% | ↑ 0,16% | 3611 | 3585 | ↑ 0,30% | ↑ 0,12% | ↑ 0,43% | 3616 |
| | CR3 | 2858 | ↓ -1,21% | ↑ 0,84% | ↑ 0,36% | 2857 | 2858 | ↑ 1,06% | ↑ 1,69% | ↓ -1,12% | 2904 |
| | CR4 | 555 | ↓ -1,01% | ↑ 0,49% | ↓ -0,11% | 551 | 555 | ↑ 1,48% | ↑ 1,89% | ↓ -1,30% | 566 |
| | CR5 | 689 | ↓ -1,76% | ↓ -0,46% | ↓ -0,71% | 669 | 689 | ↑ 0,35% | ↑ 1,08% | ↓ -1,29% | 690 |
| | CR6 | 79 | ↑ 1,46% | ↓ -4,63% | ↓ -3,53% | 74 | 79 | ↑ 3,65% | ↓ -2,06% | ↓ -3,28% | 78 |
| | CR7 | 117 | ↓ -17,11% | ↓ -5,95% | ↓ -4,41% | 87 | 117 | ↓ -13,06% | ↓ -3,38% | ↓ -6,19% | 92 |

FIGURE 6.20 – Comparaison du mouvement des effectifs au sein des classes de risque pour les modèles 1 et 2 avec le benchmark interne

En commençant par comparer les deux premiers modèles, on tire les conclusions suivantes :

- Le premier modèle s'oppose au deuxième par une évolution différente de la dynamique des effectifs au sein des classes de risque. En effet, on note une détérioration de la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline. Celle-ci se traduit notamment par une augmentation progressive des effectifs dans les classes risquées, au cours de l'horizon de projection. Pour le deuxième modèle, l'évolution est inversée. En scénario baseline, on constate une amélioration de la qualité crédit du portefeuille.
- En scénario adverse, les mouvements des effectifs par classe de risque pour les deux modèles suivent la même tendance : les effectifs augmentent dans les classes risquées et diminuent dans les classes peu risquées. Ainsi, sur l'horizon de projection, la qualité de crédit du portefeuille est détériorée. C'est ce qui est attendu.
- Parmi les deux modèles, celui qui traduit le mieux la sévérité du scénario adverse est le modèle 2. En effet, la distribution des effectifs par classe de risque est très dégradée par rapport au point de départ. Le nombre de contreparties au sein de la classe de risque 1 passe en dessous de la barre des 3000.
- Enfin, on note que le deuxième modèle a l'air beaucoup plus réactif aux chocs économiques que le premier. En conjoncture favorable (scénario baseline), la qualité de crédit du portefeuille augmente considérablement et dans le cas inverse, elle baisse considérablement. On réalise ce constat rapidement en comparant les effectifs au départ et à l'arrivée.

En comparant les résultats avec ceux du modèle interne, on remarque plusieurs points intéressants :

- Pour le scénario baseline, la dynamique d'évolution observée sur le benchmark interne est reproduite par le modèle 2. En effet, on observe pour les deux modèles une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille pour ce scénario. Néanmoins, pour le modèle 2, cette amélioration est bien plus marquée. En comparant les effectifs en fin période deux à deux pour le scénario baseline, on se rend rapidement compte de ce résultat.
- Comme expliqué dans la sous partie précédente, pour le benchmark interne, la dynamique d'évolution des effectifs au sein des classes de risque n'est pas intuitive en scénario adverse. On observe, en fin de période, une augmentation des effectifs au sein des classes de risque 2 et 3, peu risquées et une diminution de l'effectif au sein de la classe de risque 7, très risquée. Sur cette base, on peut dire que les deux modèles proposés plus haut permettent de challenger les résultats obtenus en interne. On observe en effet, pour les modèles 1 et 2, une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille. Enfin, la comparaison des effectifs en fin de projection montre que le modèle 2 stresse davantage le portefeuille pour le scénario adverse.

Ces premières observations confortent l'idée selon laquelle il est possible de challenger les résultats du modèle de stress en interne en adoptant une méthodologie plus simple. Pour confirmer cette assertion, on poursuit par la comparaison des taux de dégradations.

6.1.7.2 Taux de dégradation par classe de risque

| | | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|----------|-------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|
| Modèle 1 | CR | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| | | 1 | 19,85% | 21,60% | 1,75% | 21,63% | 23,94% | 2,31% | 22,30% | 22,47% |
| | 2 | 20,26% | 21,55% | 1,29% | 21,71% | 23,45% | 1,74% | 22,24% | 22,52% | 0,28% |
| | 3 | 14,49% | 15,26% | 0,76% | 14,76% | 15,83% | 1,06% | 14,96% | 15,24% | 0,29% |
| | 4 | 8,71% | 9,12% | 0,41% | 10,68% | 11,37% | 0,69% | 11,47% | 11,66% | 0,19% |
| | 5 | 10,17% | 10,54% | 0,37% | 9,95% | 10,50% | 0,55% | 10,04% | 10,31% | 0,27% |
| | 6 | 4,29% | 4,47% | 0,18% | 5,85% | 6,20% | 0,35% | 6,45% | 6,55% | 0,09% |
| | 7 | 1,47% | 1,55% | 0,08% | 1,49% | 1,61% | 0,11% | 1,50% | 1,55% | 0,05% |
| | Total | 17,08% | 18,16% | 1,08% | 18,11% | 19,46% | 1,34% | 18,46% | 18,51% | 0,05% |

| | | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|----------|-------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|
| Modèle 2 | CR | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| | | 1 | 13,22% | 19,99% | 6,77% | 13,59% | 23,39% | 9,80% | 13,88% | 28,54% |
| | 2 | 15,01% | 20,36% | 5,35% | 15,26% | 22,99% | 7,72% | 15,29% | 26,72% | 11,43% |
| | 3 | 11,28% | 14,56% | 3,28% | 10,72% | 15,50% | 4,77% | 10,47% | 17,53% | 7,06% |
| | 4 | 6,94% | 8,75% | 1,80% | 8,01% | 11,16% | 3,15% | 8,30% | 13,26% | 4,96% |
| | 5 | 8,47% | 10,21% | 1,73% | 7,73% | 10,29% | 2,56% | 7,40% | 11,23% | 3,83% |
| | 6 | 3,45% | 4,30% | 0,85% | 4,46% | 6,10% | 1,64% | 4,76% | 7,37% | 2,61% |
| | 7 | 1,13% | 1,48% | 0,35% | 1,05% | 1,56% | 0,51% | 0,99% | 1,76% | 0,76% |
| | Total | 12,61% | 17,17% | 4,56% | 12,84% | 19,18% | 6,34% | 13,01% | 21,95% | 8,94% |

| | | 2020 | | | 2021 | | | 2022 | | |
|-------------------|-------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|
| Benchmark Interne | CR | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART | BASELINE | ADVERSE | ECART |
| | | 1 | 31,44% | 33,66% | 2,22% | 32,90% | 34,60% | 1,70% | 32,72% | 32,26% |
| | 2 | 11,99% | 12,77% | 0,78% | 12,51% | 13,17% | 0,66% | 12,46% | 12,42% | -0,04% |
| | 3 | 3,62% | 3,83% | 0,21% | 3,71% | 3,94% | 0,23% | 3,72% | 3,77% | 0,05% |
| | 4 | 1,97% | 2,09% | 0,11% | 2,02% | 2,14% | 0,12% | 2,03% | 2,06% | 0,03% |
| | 5 | 7,83% | 8,19% | 0,35% | 8,01% | 8,36% | 0,34% | 8,01% | 8,07% | 0,06% |
| | 6 | 30,42% | 31,01% | 0,59% | 33,13% | 33,41% | 0,28% | 32,69% | 32,63% | -0,06% |
| | 7 | 2,42% | 2,16% | -0,26% | 1,72% | 1,64% | -0,08% | 1,70% | 1,90% | 0,20% |
| | Total | 15,09% | 15,85% | 0,76% | 15,69% | 16,12% | 0,43% | 15,60% | 15,24% | -0,36% |

FIGURE 6.21 – Comparaison des taux de dégradation des modèles 1 et 2 au benchmark interne

En comparant les deux premiers modèles. Nous tirons les conclusions suivantes :

- On remarque que le premier modèle permet de mieux dégrader la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline que le second. En effet, nous avons vu dans les sous parties précédentes que ce modèle induit une diminution progressive de la qualité de crédit du portefeuille pour ce scénario, l'augmentation des taux de dégradation sur les années de projection en témoignent.

Globalement, pour les deux premières années de projection, ce premier modèle permet de mieux dégrader le portefeuille.

- Au niveau du scénario baseline, ce modèle s'oppose au premier. En effet, la qualité de crédit du portefeuille s'améliore.² En revanche, pour la 3^{ème} de projection, en scénario adverse, les taux de dégradation observés par classe de risque sont supérieurs pour la deuxième méthode. Le taux de dégradation total atteint alors sa valeur la plus élevée, soit 21,95%.

Enfin, le modèle 2 permet de discriminer au mieux les scénarios adverse et baseline. En effet, les écarts entre les taux de dégradation des deux scénarios sont élevés et augmentent sur l'horizon de projection.

2. On fera attention à ce détail : pour la classe de risque 1 le taux de dégradation augmente sur l'horizon de projection mais le nombre de contreparties également. Ainsi, le taux de dégradation du scénario baseline augmente en 2021 mais celui-ci est calculé sur une distribution transformée. Ainsi, un augmentation du taux de dégradation n'est pas directement assimilable à une dégradation totale. (à voir)

La comparaison des résultats des deux premiers modèles au benchmark interne révèle que :

- Le modèle 1 permet de challenger les résultats internes. En effet, les taux de dégradation totaux du portefeuille constatés en scénario baseline et adverse sont supérieurs à ceux du benchmark interne.
- En ce qui concerne le scénario adverse, les deux modèles implémentés permettent également de challenger les résultats du modèle interne. En effet, les taux de dégradation totaux observés sur le portefeuille sont supérieurs pour les modèles 1 et 2 sont supérieurs à ceux du scénario adverse. La dégradation la plus sévère du portefeuille s'obtient en dernière année de projection pour le modèle 2. Le modèle 1 est plus sévère en revanche pour les deux premières années de projection.
- On relève néanmoins la bonne capacité du modèle 3 à stresser les migrations de la classe de risque 7. En effet, les taux de dégradation constatés pour cette classe de risque sont supérieurs pour le benchmark interne.

6.1.7.3 Les probabilités de défaut *point-in-time*

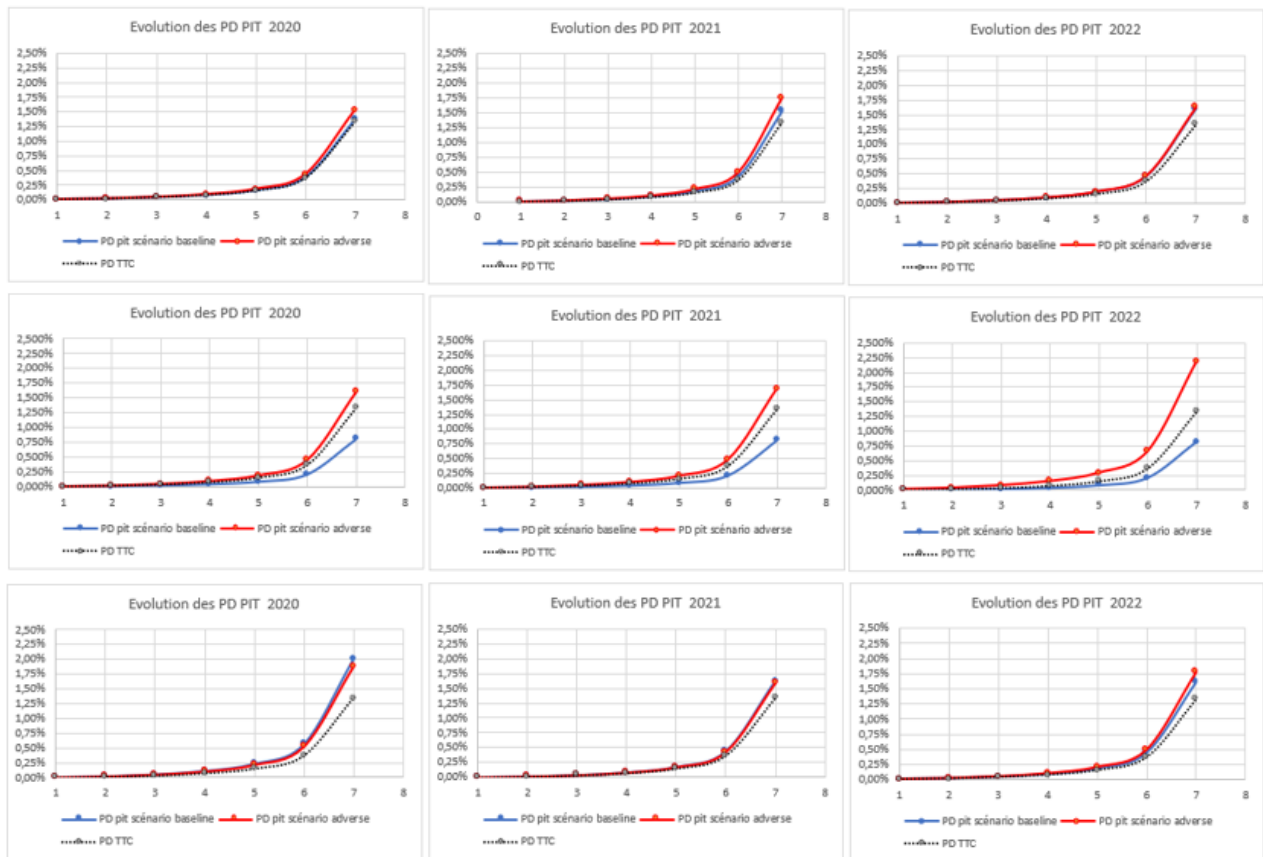


FIGURE 6.22 – Comparaison des probabilités *point-in-time* des modèles 1 et 2 au benchmark interne

Pour ce qui est du stress des probabilités de défaut *point-in-time* :

- Le modèle 1 permet pour les deux scénarios de stresser les probabilités de défaut *point-in-time* au-dessus de leur niveau de long terme et ce pour les trois années de projection. En revanche, on fait mal la différence entre les probabilités stressées par les deux scénarios sauf peut-être pour la deuxième année de projection.

- Pour le modèle 2, les probabilités de défaut sont mieux stressées par le scénario adverse. Elles s'éloignent de plus en plus de leur niveau de long terme sur l'horizon de projection. Cela témoigne de la sévérité croissante du scénario adverse. Inversement, les probabilités de défaut stressées pour le scénario baseline sont inférieures à leur niveau TTC et semble peu varier sur l'horizon de projection. Ainsi, l'amélioration des conditions économiques dans le scénario baseline est retranscrite par le fait que ces probabilités soient inférieures à leur niveau de long terme.

La comparaison avec les probabilités de défaut *point-in-time* du modèle interne révèle que les modèles 1 et 2 permettent tout deux de challenger ces résultats. En effet, les résultats obtenus pour nos deux modèles sont plus cohérents. Pour nos deux modèles, la courbe bleue (probabilités de défaut stressées dans le scénario baseline) reste toujours en dessous de la courbe rouge (probabilités de défaut stressées dans le scénario adverse), ce qui est attendu du fait de la sévérité des deux scénarios. Or, ces observations ne sont pas toujours vérifiables pour le modèle interne. Néanmoins, on note tout de même que les probabilités de défaut stressées par celui-ci présentent les meilleurs résultats pour le scénario baseline. Enfin, on retiendra que le meilleur modèle pour stresser ces probabilités en scénario adverse reste le modèle 2.

6.1.7.4 Synthèse des résultats

Tout d'abord, les deux modèles retenus implémentés dans le cadre de notre étude répondent aux exigences premières d'un modèle de stress test et s'inscrivent dans le cadre d'une approche macroprudentielle. En introduisant indirectement des variables macroéconomiques dans la modélisation des taux de transition, le modèle de Vasicek à un facteur permet de distordre la distribution initiale des contreparties par classe de risque, conditionnellement à l'état de l'économie. On rappelle le paramétrage des deux premiers modèles retenus :

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--|
| 1 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Projection des Z_t pseudo-observés |
| 2 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

Les deux modèles retenus se différencient uniquement sur la base de l'estimation des facteurs systémiques. On constate, grâce au modèle 1, que la projection directe des facteurs systémiques permet de mieux stresser les migrations mais ne différencie pas bien les impacts des deux scénarios.

En revanche, l'inférence des facteurs systémiques par les taux de défaut, nous donne un résultat différent mais néanmoins cohérent. En effet, le modèle 2 améliore la qualité de crédit du portefeuille lorsque le scénario est optimiste. Inversement, il dégrade sa qualité lorsque le scénario est pessimiste. Ce rapport de cause à effet simple, facilite son appropriation et son interprétabilité par les analystes. On note également pour la dernière année de projection, une dégradation très sévère du portefeuille en scénario adverse. Le taux de dégradation observé traduit la bonne retranscription des chocs conjoncturels sur le portefeuille. Ce résultat est notamment du à la bonne sensibilité des taux de défaut moyens aux données macroéconomiques.

Ainsi, ces deux modèles permettent individuellement de challenger le modèle interne, en termes de niveau de stress du portefeuille. Nous sommes revenus dans la partie précédente sur les différents points permettant d'amener à cette conclusion. On retiendra notamment que l'évolution des effectifs au sein des classes de risque est plus facilement interprétable pour nos modèles que l'évolution prédite par le modèle interne. De plus, un point d'attention important reste qu'en fin de projection, en scénario adverse, le modèle interne prédit une amélioration du portefeuille. Ce point est le plus bloquant sachant la sévérité du scénario adverse et la corrélation positive du portefeuille à l'état de l'économie. Ainsi, on peut partiellement conclure que par des hypothèses plus simples, nous arrivons à challenger le niveau de stress du portefeuille. Ceci questionne notamment les hypothèses du modèle interne. Nous en débattons dans la sous-partie suivante.

6.1.8 Réflexion sur les hypothèses du modèle interne

Dans le cadre de notre étude, pour l'implémentation des modèles de *stress test*, nous avons conservé le cadre théorique du modèle de Vasicek à un facteur. Néanmoins, comme nous l'avons vu dans les sous-parties précédentes, il existe différentes approches pour estimer les 3 paramètres du modèle. Ainsi, pour challenger les résultats du modèle interne, nous avons choisi de considérer des hypothèses différentes pour l'estimation de chaque paramètre. Nous traitons ici de l'apport de chaque hypothèse considérée au cas par cas.

6.1.8.1 Matrices de migration moyennes à 1 an

Pour la matrice moyenne des migrations à 1 an, nous avons choisi le cadre théorique des chaînes de Markov continue plutôt que celui des chaînes de Markov discrète (choix interne). Ce choix est notamment motivé par la volonté d'assurer l'obtention d'estimateurs non nuls pour chaque taux de transition. L'objectif recherché est alors de pouvoir modéliser des mouvements de migration rares mais plausibles, pour des conditions économiques très favorables ou très dégradées (migration entre les classes de risque extrêmes 1 et 7, par exemple).

La différence notable de ce choix est l'observation de l'augmentation du nombre d'effectifs dans les classes de risque très risquées {6, 7} dans des conditions économiques défavorables par exemple. En effet, avec cette hypothèse, les migrations des classes de risque {1, 2, 3, 4} sont autorisées vers la classe de risque 7. Inversement, dans un contexte économique favorable, plus de migrations sont autorisées dans les meilleures classes de risque car on autorise les migrations des classes risquées 5, 6, 7 vers celles-ci.

6.1.8.2 Processus des migration

On choisit de modéliser les migrations entre les classes de risque saines et vers le défaut selon un processus unique. Cette hypothèse simplificatrice conduit à estimer non plus deux facteurs systémiques mais un seul. Elle permet ainsi de réduire le nombre de paramètres à estimer de 5 à 3 pour projeter les matrices stressées. En effet, selon le modèle interne, les matrices de transition *point-in-time* sont telles que : $M_t = f(\bar{M}, Z_t^R, Z_t^D, \rho^2, \alpha^2)$. Sous nos hypothèses, elles sont telles que : $M_t = f(\bar{M}, Z_t, \rho^2)$.

Dans la suite, nous avons eu à estimer un unique facteur de sensibilité ρ et à considérer un unique processus Z_t .

Estimation du facteur de sensibilité ρ

Sous nos hypothèses, ρ est estimé en maximisant une fonction de vraisemblance obtenue en faisant l'hypothèse d'une loi binomiale sur *le nombre de dégradation* de chaque classe de risque à une date t . Ce facteur de sensibilité représente la corrélation entre Z_t , indicateur de la position dans le cycle économique et la variable R_t^k , représentant le rendement standardisé de la contrepartie k à la date t . Ce facteur de corrélation est estimé à l'échelle du portefeuille, la valeur obtenue est plutôt faible et vaut 6.94%. On note qu'il est positif ainsi, nous avons pu conclure que le portefeuille était positivement corrélé à l'état de l'économie. Puis, logiquement, l'évolution du portefeuille est sensée suivre celle de l'état de l'économie.

Or, dans le modèle interne, le paramètre ρ est estimé en maximisant une fonction de vraisemblance obtenu en faisant l'hypothèse d'une loi binomiale sur *le nombre de défaut* de chaque classe de risque à une date t . Le signe du paramètre est toujours positif, mais on remarque que la valeur estimée pour ce paramètre est bien plus élevée dans ce cas, en effet $\rho = 26,14\%$. Ce phénomène est intéressant : en effet, il semblerait que le processus de migration vers le défaut soit plus corrélé à l'état de l'économie que l'ensemble des migrations agrégées. On comprend le parti pris de la distinction de l'état de défaut et des classes de risque saines. Néanmoins, les résultats du benchmark interne montrent que malgré cette forte corrélation à l'état de l'économie, les probabilités de défaut stressées par ce modèle restent faibles même lors de conditions économiques très défavorables, ce qui questionne ce choix.

Estimation du facteur systémique Z_t

Les facteurs systémiques projetés dans le modèle interne sont issus de deux modèles satellites calibrés sur les pseudo-observations des séries Z_t^R et Z_t^D . Ce cadre théorique distingue le comportement des migrations entre les classes de risque saines et au défaut. Néanmoins, cette méthode aboutit à des matrices de transition faiblement stressées par rapport aux chocs communiqués par la BCE. En effet, l'approche systémique telle qu'elle est appliquée en interne permet d'obtenir des migrations vers les autres classes de risque mais les migrations vers les défauts s'avèrent moins sensibles aux chocs.

Dans notre analyse, nous avons modélisé cette fois-ci les migrations entre les classes de risque saines (de 1 à 7) et au défaut conjointement. En simplifiant l'hypothèse de départ, on espérait cette fois-ci pouvoir mieux stresser les probabilités de défaut. Cependant, pour challenger cette hypothèse, nous avons tenté dans un second temps de capter la position au sein du cycle économique à l'aide d'une variable observée, les taux de défaut moyens du portefeuille. On résume ces deux approches comme suit :

- Les facteurs systémiques sont projetés en utilisant le modèle satellite calibré sur la série des Z_t pseudo-observés (méthode 1) ;
- Les facteurs systémiques sont projetés en utilisant le modèle satellite calibré sur la série des taux de défaut moyens (méthode 2).

Nous analysons ensuite chaque méthode séparément :

- **Méthode 1** Pour la première méthode, le modèle satellite calibré sur la série des facteurs systémiques pseudo-observés dépend du prix de l'immobilier et du taux de chômage retardé de 2 ans. Il s'agit des variables les plus explicatives. Le modèle projeté donne un bon ajustement linéaire et une analyse de résidus satisfaisantes. De plus, l'application des scénarios projetés permet de distinguer le cas stressé du cas de base.

L'apport de cette première méthode est multiple. Tout d'abord, elle donne des niveaux de stress intéressants puis elle permet d'obtenir des résultats cohérents. En effet, les taux de dégradation constatés pour le scénario adverse sont toujours plus élevés que ceux du baseline. De plus, le modèle est facilement interprétable au vu des résultats obtenus : en effet, pour les chocs communiqués par la BCE, en scénario baseline, le portefeuille est très peu détérioré, ce qui est acceptable au regard des conditions économiques favorables dans ce scénario. En scénario adverse en revanche, les conditions économiques plus dégradées s'accompagnent d'une dégradation de la qualité de crédit du portefeuille plus prononcée.

- **Méthode 2** Pour la seconde méthode, le modèle satellite retenu comprend le taux de croissance PIB et le taux de chômage retardé d'un an. Tout d'abord, on note une bonne sensibilité des taux de défaut aux chocs communiqués par la BCE. Ce résultat permet de projeter des matrices de transition qui suivent de près les évolutions du cycle économique. En effet, pour le scénario baseline, les prédictions des conditions économiques de la BCE sont optimistes, cela se retranscrit par une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille. Et inversement lors des conditions économiques dégradées.

L'apport de cette hypothèse réside dans le fait que les taux de défaut du portefeuille sont très sensibles au cycle économique et semblent suivre la même évolution que les variables macroéconomiques. Ils constituent donc un bon indicateur de la position dans le cycle économique, qui permet de capter les variations liées à la conjoncture à l'échelle du portefeuille.

Finalement, dans cette sous-partie, on voit que les hypothèses prises pour l'estimation des paramètres permettent de challenger certaines hypothèses du modèle interne et ouvrent certaines pistes de recherche pour sa refonte. Dans la partie suivante, nous traitons des limites des méthodes implémentées.

6.1.9 Limites des approches développées

Dans cette section, nous traiterons les limites des approches développées. Nous traiterons 3 types de limites : les limites sur les données, sur le modèle utilisé et enfin, sur les hypothèses prises.

6.1.9.1 Les limites sur les données

Une des premières limites de notre étude est le faible historique de données à disposition. En effet, celui-ci se compose de 16 années d'observation. Il ne permet pas de valider toutes les hypothèses nécessaires à l'implémentation du modèle dans sa globalité et permet encore moins de mettre en place des estimations robustes pour nos paramètres. Ce point a particulièrement été bloquant pour l'estimation des modèles économétriques. En effet :

- Les historiques étant si faibles, le champs des possibles pour l'estimation des modèles satellites a été considérablement restreint. En introduisant le chapitre 5, nous rappelons dans les objectifs de la partie que le choix de la forme des modèles statistiques était d'abord fonction de la qualité et de la profondeur des données disponibles [14]. Dans notre cas, les séries de données disponibles étant courtes, nous nous sommes limités à l'utilisation d'un modèle de régression linéaire simple.

Ainsi, nous exploitons donc uniquement un lien de corrélation entre nos variables cibles (taux de défaut moyens observés et série des facteurs systémiques pseudo-observés) et les variables d'intérêts retenues dans le cadre de l'étude. En réalité, la mise en évidence d'un lien de causalité ou de cointégration³ [6] aurait été préférable. De tels liens auraient pu être exploités en tentant d'implémenter des modèles plus complexes appartenant à la théorie des séries temporelles tels que : les modèles vectoriels autorégressifs (VAR), les modèles à correction d'erreur vectoriels (MCEV), qui sont des approches dites non structurelles ou encore le modèle autorégressif à retard échelonné (ARDL).

Ces deux derniers modèles estiment des relations dites de *long terme* entre les variables à expliquer et les variables explicatives. Ils permettent d'exploiter des liens statistiquement plus solides et pérennes entre les métriques du risque de crédit et l'état global de l'économie. On invite notamment le lecteur intéressé à consulter les articles [?], [9] et [11] figurant en bibliographie pour plus de détails sur ces approches. Néanmoins, ces modèles plus complexes nécessitent des hypothèses de stationnarité qui ne peuvent être vérifiées de manière honnête sur un échantillon si faible.

- En effet, il a été très difficile de vérifier la stationnarité des variables manipulées (variables à expliquer et explicatives). Or, cette hypothèse est importante car elle permet d'éviter l'implémentation de régressions dite *fallacieuses*⁴. Cependant, l'étude de la stationnarité sur des séries si courtes est très problématique. En effet, l'interprétation de tests statistiques asymptotiques telle que le test de Dickey-Fuller ou le KPSS test est hasardeuse sur des échantillons de taille faible. Une preuve est que l'on obtient des résultats contradictoires. Avoir pleinement conscience de cette limite est indispensable pour la remise en cause des liens établis entre les variables cibles et les variables d'intérêts macroéconomiques.

Nous présentons dans la suite, les limites liées au modèle.

3. On dit qu'un ensemble de variables est co-intégré avec la série observée s'il existe une combinaison des variables permettant d'annuler « la tendance stochastique » de la série observée pour aboutir à une série stationnaire. Ces variables co-intégrées sont alors liées avec la série observée par une équation linéaire dite « long-terme » qui s'interprète comme un équilibre macro-économique par rapport auquel les écarts constituent des fluctuations temporaires.

4. Il s'agit d'une situation dans laquelle l'utilisation de séries temporelles non stationnaires dans une régression linéaire fait apparaître des résultats erronés, trop optimistes, qui font croire à une relation entre les variables alors que ce n'est pas nécessairement le cas.

6.1.9.2 Les limites du modèle

En ce qui concerne les limites du modèle implémenté, elles résident principalement dans les choix de modélisation des différents paramètres. En effet, comme nous l'avons vu tout au long de notre étude, il existe différentes approches dans l'état de l'art permettant de modéliser les paramètres du modèle de Vasicek à un facteur. Nous en avons présenté quelques-unes sans pour autant être exhaustif. Ainsi, il y a un risque que les méthodes implémentées ne soient pas forcément pertinentes pour la modélisation de nos paramètres. De plus, nous avons conscience que le modèle choisi n'est pas forcément représentatif de la réalité. En effet, les limites d'un modèle réside dans le fait qu'il peut être mal choisi, incomplet ou mal spécifié entre autres.

Certains doutes quant à la spécification du modèle pourraient être levés en implémentant des exercices de backtesting. Cette approche est imposée par le pilier 2 de la norme Bâle II, pour les modèles réglementaires permettant de calibrer les probabilités de défaut de long terme (PD TTC), utilisée pour le calcul des exigences en fonds propres. Dans ce contexte, les enjeux du backtesting sont doubles : s'assurer de la qualité des prévisions des défaillances. Puis, le cas échéant, refondre ou faire évoluer les modèles de notation, de façon à prévoir toujours au mieux le défaut. Néanmoins, ce type d'approche est peu privilégiée dans le cas des modèles de stress test.

En effet, il est difficile de backtester de tels modèles. L'objectif visé n'est pas en effet de voir si le modèle calibré reproduit un phénomène passé mais de s'assurer que celui-ci est bel et bien sensible à des chocs économiques extrêmes. Ainsi, lors de l'analyse des modèles, on privilégie une approche factuelle en comparant des indicateurs simples permettant d'analyser l'évolution du nombre de contreparties par classe de risque.

Dans la pratique, le choix du modèle est réalisé la plupart du temps à dire d'expert. En effet, l'expert se base sur sa connaissance pointue du portefeuille pour établir si les niveaux de stress projetés par le modèle sont acceptables. Néanmoins, nous avons tout de même pensé à deux approches permettant la validation des modèles de manière quantitative qui n'ont malheureusement pas pu être mise en oeuvre par faute de temps :

- L'année 2020 ne faisant pas partie de notre échantillon de modélisation et étant une année de stress, il aurait été intéressant de simuler la distribution du portefeuille de 2020 avec les deux modèles et analyser lequel des deux permet de la prédire au mieux.
- On aurait également pu appliquer les différentes matrices de transition au portefeuille réel et analyser les impacts en termes de RWA, mais les données n'ont pas été disponibles à temps.

Nous tenions néanmoins à faire part de ces axes d'analyse intéressants.

6.1.9.3 Les limites des hypothèses

Nous sommes revenus sur l'apport des hypothèses du modèle dans la sous-section 6.1.8 sans en mentionner les limites. Le premier paramètre traité était celui de la matrice moyenne des transitions à 1 an. Nous avons insisté sur le cadre théorique des chaînes de Markov continues que nous avons opposé à celui des chaînes de Markov discrètes. Mais nous n'avons pas évoqué une autre hypothèse importante : celle de l'homogénéité des chaînes de Markov.

En effet, on modélise ici les matrices de transition par des chaînes de Markov homogènes dans le temps. Cela signifie simplement que des matrices de transition de même maturité ne varient pas au cours du temps. Cette hypothèse forte ne permet pas d'aborder la problématique de la non homogénéité des transitions réelles, qui est un autre point intéressant à creuser. En effet, la déviation par rapport à l'hypothèse d'homogénéité des matrices de transition réelles a été le sujet de plusieurs études qui mettent en évidence les sources latentes et inobservables d'hétérogénéité. Pour le lecteur intéressé, nous renvoyons à une thèse référencée en bibliographie [8] traitant du risque de crédit des obligations. Celle-ci reprend de manières exhaustives l'ensemble de la documentation sur ce sujet.

Enfin, en souhaitant simplifier l'hypothèse interne selon laquelle le processus de migration distingue le comportement des migrations entre les classes de risque saines et vers le défaut, nous avons peut-être trop voulu simplifier un phénomène qui peut être avérée en réalité. Il serait intéressant de pouvoir prouver factuellement que le processus de passage au défaut se comporte différemment de celui permettant de transiter entre les classes de risques saines.

6.1.9.4 Les nouveaux enjeux des modèles de stress test

Nous avons énoncé plus haut comme principale limite des modèles de stress test l'instabilité des modèles satellites et plus généralement des paramètres estimés. Un challenge pour le futur serait d'assurer la maintenance de tels modèles plus régulièrement. Dans le cadre de la crise sanitaire par exemple, il serait intéressant de se doter de tels outils. En effet, on serait ainsi capable de tester la réactivité des modèles de stress test, conditionnellement à un changement économique immédiat, sans attendre des scénarios économiques fournis dans le cadre d'un exercice de stress test.

Pour appliquer de telles approches, il faudrait néanmoins avoir recours à des modèles statistiques robustes tels que des modèles de machine learning. En effet, les méthodes d'apprentissage automatique, comme les forêts aléatoires, sont de très bons outils pour orienter le choix des variables. Elles sont par contre rarement conservées pour la projection elle-même car elles sont souvent complexes à mettre en place et difficiles à auditer pour le régulateur. De plus, elles nécessitent une profondeur de données conséquentes. Ainsi, il s'agit d'un arbitrage à effectuer en facilité d'implémentation et pertinence de la modélisation au regard des données disponibles.

Résumé du chapitre 6

Dans le chapitre 6, nous revenons sur l'ensemble des résultats présentés au sein de ce mémoire. Nous appliquons le modèle de Vasicek à un facteur. En prenant différentes hypothèses pour les paramètres, nous avons mis en évidence deux modèles intéressants dans le cadre d'un exercice de stress test macroprudentiel (comme celui du *stress test* BCE). Les modèles implémentés ont été obtenus avec les paramétrages suivants :

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--|
| 1 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Projection des Z_t pseudo-observés |
| 2 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

La comparaison de ces deux modèles avec les hypothèses du modèle interne nous permet de remettre en question deux hypothèses liées à sa construction :

- La pertinence de l'utilisation d'une approche bivariée pour la modélisation du processus de migration, sachant que le processus de migration vers le défaut Z_D est peu sensible au cycle économique ;
- L'utilisation d'une méthode d'estimation des Z_t historiques par maximum de vraisemblance, sachant que les taux de défaut constituent également un bon indicateur de la position dans le cycle économique.

Dans la conclusion, nous répondrons à l'ensemble des questions posées dans ce mémoire.

Conclusion

Dans les **chapitres 1 et 2** de ce mémoire, nous avons présenté le référentiel de l'étude et introduit le cadre théorique du risque de crédit et des *stress tests*. En particulier, nous avons conduit l'ensemble de notre étude sous l'angle du *stress test* BCE. Par la suite, nous avons mis en avant les difficultés certaines de l'implémentation de méthodes de modélisation macroprudentielles robustes sur le portefeuille du secteur public local français. En effet, cette catégorie de client est connue pour être peu sensible aux chocs conjoncturels et, pour cette raison, peu de travaux de modélisation quantitative existent à ce jour sur ce type de portefeuille.

Jusqu'alors, les précédents travaux réalisés en interne sur les modèles de *stress test* ont révélé :

- Une faible réactivité des modèles satellites aux chocs communiqués par la BCE ;
- Des incohérences sur les résultats obtenus : on note dans certains cas une dégradation du portefeuille plus prononcée en scénario de baseline qu'en scénario adverse.

Néanmoins, dans le cadre de la refonte des modèles de stress test, l'ambition de ce mémoire a été d'implémenter un modèle de *stress test* permettant de distordre la distribution des effectifs par classe de risque, conditionnellement à l'état de l'économie. Le but recherché était de challenger les résultats et les hypothèses prises dans le cadre de l'implémentation du modèle interne de *stress test* de SFIL. Pour simuler l'évolution des transitions entre les classes de risque et obtenir des distributions stressées, nous avons utilisé comme outil principal pour notre étude des matrices de transition de notes.

La littérature existante sur les portefeuilles de type *Corporates*, plus riche, nous a permis de mettre en évidence deux modèles macroéconomiques jugés intéressants pour répondre à notre sujet. Les modèles sélectionnés (*CreditPortfolioView* de McKinsey et le modèle de Vasicek à un facteur) introduisent des méthodes quantitatives rigoureuses permettant d'intégrer une dimension conjoncturelle directement au sein de la modélisation des métriques du risque de crédit. Dans le **chapitre 3**, à la suite de la comparaison des deux modèles, nous avons retenu le modèle de Vasicek à un facteur. Celui-ci permet de distordre la distribution des effectifs par classe de risque de manière plus fine que le premier. Dans ce modèle, les matrices de transition *point-in-time* s'expriment selon 3 paramètres que nous avons cherchés à estimer par la suite :

$$M_t = f(\bar{M}, Z_t, \rho^2) \quad (6.9)$$

où :

- \bar{M} est l'estimateur de la matrice moyenne des migrations à 1 an ;
- Z_t est le facteur systémique traduisant la position au sein du cycle économique ;
- ρ le facteur de sensibilité au cycle économique.

Ce modèle s'inscrit dans un processus complet de modélisation. De plus, le cadre théorique de l'application de chaque méthode étant dense et rigoureux, dans le **chapitre 4**, nous avons pris soin de détailler les étapes de modélisation pour chaque paramètre de ce modèle. Ainsi, pour chaque facteur modélisé, nous avons reprecisé le formalisme mathématique de la méthode choisie et analysé progressivement les différents résultats obtenus pour chaque hypothèse prise.

Puis, le **chapitre 5** permet quant à lui de repréciser dans un premier temps les enjeux du *stress test* macro-prudentielle de la BCE. Ensuite, nous poursuivons en présentant les modèles de projection économétriques des variables cibles (taux de défaut moyens observés et série des facteurs systémiques pseudo-observés) permettant d’inférer la position dans le cycle économique et d’obtenir les projections des facteurs systémiques Z_t . A la fin de ce chapitre, nous avons à notre disposition des facteurs systémiques projetés à horizon 3 ans pour deux scénarios et selon deux approches.

Enfin, le **chapitre 6** vise à synthétiser l’ensemble des résultats obtenus dans les parties précédentes. Dans ce chapitre, nous appliquons le modèle de Vasicek à 1 facteur en retenant différentes hypothèses pour l’estimation de chaque paramètre. Le but est d’obtenir des matrices de transition stressées à horizon 3 ans selon les deux scénarios fournis par la BCE. Ainsi, parmi les deux sous-modèles implémentés, nous avons retenus les deux sous-modèles suivants :

| Jeu de matrices | Matrice à 1 an | Sensibilité | Facteur systémique Z_t |
|-----------------|----------------------------|-------------------|--|
| 1 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Projection des Z_t pseudo-observés |
| 2 | Matrice champion \bar{M} | $\rho^* = 6.94\%$ | Inférence des Z_t par les taux de défaut |

L’analyse des résultats obtenus à l’issue de ce chapitre nous a permis d’interroger et de challenger les résultats du modèle interne en termes de niveau de stress appliqué au portefeuille et d’interprétabilité :

- Notre premier modèle nous permet d’obtenir un niveau de stress satisfaisant à l’échelle globale du portefeuille. En effet, on observe une dégradation progressive de la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline. Le même phénomène est constaté de manière plus sévère en scénario adverse.
- Notre deuxième modèle nous permet de conclure à une autre interprétation tout aussi pertinente. En effet, pour ce modèle, on observe une amélioration de la qualité de crédit du portefeuille en scénario baseline et une détérioration progressive de celle-ci en scénario adverse. Ainsi, au regard du scénario fourni par la BCE pour son stress test 2020, l’évolution du cycle de crédit suit l’évolution du cycle économique. Ce résultat est notamment dû à la bonne sensibilité des taux de défaut aux chocs économiques fournis par la BCE.

Le choix du modèle final se fait au regard de la dynamique des portefeuilles de crédit. Ainsi, on attend d’un modèle de stress test sur un portefeuille de crédit, qu’il produise une réaction à l’échelle du portefeuille face un choc économique, mais cette réaction se doit toutefois d’être modérée. En effet, la sensibilité des portefeuilles de crédit est en général plus mesurée que ce qui peut être observée sur des portefeuilles de marché par exemple. Ceci est d’autant plus vrai que notre portefeuille d’étude est constitué de collectivités publiques qui disposent de beaucoup de leviers pour atténuer les effets d’une crise économique.

Lors de notre analyse, nous avons mis en évidence un modèle plutôt sensible à l’évolution du cycle économique : le modèle 2. Ce dernier est préconisé pour poursuivre des études sur le portefeuille interne. En effet, la bonne réactivité des taux de défaut aux chocs économiques communiqués par la BCE permet d’obtenir des résultats non seulement compréhensibles, mais aussi facilement interprétables par les équipes d’analystes. Ce modèle n’est peut-être pas parfait mais il fonctionne sur le portefeuille de la banque et permet de le stresser convenablement au regard des chocs communiqués par la BCE.

De plus, on se souvient que le deuxième objectif visé par ce mémoire était de challenger les hypothèses du modèle interne. Finalement, à la suite de nos recherches, les hypothèses qui peuvent être questionnées sont :

- La pertinence de l’utilisation d’une approche bivariée pour la modélisation du processus de migration, sachant que le processus de migration vers le défaut Z_D est peu sensible au cycle économique (**Hypothèse 1**) ;
- L’utilisation d’une méthode d’estimation des Z_t historiques par maximum de vraisemblance sachant que les taux de défaut constituent un bon indicateur de la position dans le cycle économique (**Hypothèse 2**).

Concernant l'**hypothèse 1**, l'utilisation d'une approche bivariée pour la modélisation du processus de migration peut se comprendre du fait que :

- La migration vers le défaut peut avoir lieu avant certaines migrations risquées de classe de risque ;
- Les migrations des classes de risque sont supposées moins sensibles à l'état de l'économie.

Cette distinction est très intéressante et fait sens d'un point de vue théorique mais celle-ci aboutit à des résultats peu satisfaisants en pratique. En effet, alors qu'on s'attendrait à ce que la prise en compte de cette hypothèse stresse davantage les probabilités de défaut, ce n'est pas ce qui est constaté. Une explication est que le processus de migration vers le défaut Z_D est peu sensible aux chocs économiques communiqués par la BCE. Il peut s'agir d'un problème opérationnel dans l'inférence de la série des facteurs systémiques pseudo-observés permettant de projeter les Z_D , ou d'une mauvaise spécification du modèle satellite par exemple. Cependant toutes ces pistes sont difficiles à investiguer une à une.

Ainsi, ce que nous assure notre analyse est que le choix de recourir à la modélisation du processus de migration par un seul facteur systémique permet partiellement de pallier le problème. Cette hypothèse est peut-être imprécise du fait qu'on confonde les migrations entre les classes saines et au défaut. Néanmoins, elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants et cohérents en termes de niveau de stress à la fois sur le nombre de dégradations et sur le nombre de défauts constatés en portefeuille. De plus, elle simplifie le problème posé.

Concernant l'**hypothèse 2**, on s'intéresse ici au choix de la méthode permettant de projeter les facteurs systémiques Z_t selon les scénarios. Comme nous l'avons vu :

- Il est possible de reconstituer une série de facteurs systémiques pseudo-observés sur l'historique ;
- Ou d'utiliser une variable observée jugée pertinente pour positionner le portefeuille au sein du cycle économique.

Au cours de notre analyse, nous testons ces deux approches. Pour la première méthode, d'un point de vue purement opérationnel, la recherche d'un modèle satellite satisfaisant a été laborieuse. Cette série était en effet peu corrélée aux séries des variables macroéconomiques. Aussi, c'est principalement cette difficulté qui nous pousse à nous interroger sur d'autres manières de projeter les facteurs systémiques Z_t . Dans la littérature, les taux de défaut sont souvent utilisés comme alternative. Dans le cas de notre portefeuille, leur bonne sensibilité au cycle économique nous permet d'obtenir à la fin du processus du modélisation des résultats pertinents pour les matrices de transition stressées. Enfin, l'évolution de la distribution des effectifs par classe de risque obtenue par cette méthode est la plus cohérente. C'est pourquoi cette approche est à préconiser pour des développements futurs.

Finalement, on conclura sur le fait qu'il existe d'innombrables méthodes d'estimation de chaque paramètre du modèle. Le travail du modélisateur est alors d'arbitrer entre difficulté d'implémentation et pertinence de la modélisation choisie. En effet, estimer un bon modèle de stress test revient à trouver un bon compromis entre : le choix de modèles statistiques adaptés à la profondeur et la qualité des données. Sans oublier que les résultats obtenus à l'issue de leur implémentation doivent être appropriables et facilement interprétables par les équipes d'analystes qui les utilisent ensuite.

Fin

Annexes

Annexe 1

Remarque Ces annexes concernent le chapitre 5.

1 Les tests de stationnarité complémentaires

1.1 Test de Dickey-Fuller augmenté

Les modèles utilisés pour le test simple de Dickey Fuller considère ϵ_t comme étant un bruit blanc gaussien, soit un processus indépendant et identiquement distribué tel que $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Le test de Dickey-Fuller augmenté (*ADF*) permettant de détecter la présence d'une racine unitaire pour les processus de type AR(p) prend en compte l'autocorrélation potentielle des erreurs. Il consiste à estimer les modèles qui précèdent en introduisant des variables retardées. Soit en considérant l'écriture d'un processus AR(p), il vient :

$$y_t = \alpha \cdot t + \beta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t \quad (10)$$

Ainsi, les modèles estimés dans le cadre du test de Dickey-Fuller augmenté sont tels que :

| | |
|--|------------|
| $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot t + \beta + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$ | (modèle 3) |
| $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \beta + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$ | (modèle 2) |
| $\Delta y_t = \Phi \cdot y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$ | (modèle 1) |

où p est le nombre de retards et $\epsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$.

L'approche du test de Dickey-Fuller augmenté, *ADF* est très similaire à celle du test de Dickey-Fuller simple, les seules différences résident dans les valeurs tabulées et la valeur du retard p , considéré dans les modèles. La valeur optimal du retard p à considérer peut être déterminée sur la base d'un critère d'information, tels que les critères d'information de Schwartz (*SIC*) ou d'Akaike (*AIC*). En considérant les valeurs initiales supérieures de p , p peut être estimé pas à pas; la valeur retenue de p est celle qui minimise les critères ci-dessus. Le choix de la longueur du retard p pour le test ADF a son importance. En effet si p est trop petit alors la corrélation sérielle demeurant dans les erreurs biaisera le test et si p est trop grand cela affecte la puissance du test. Une règle empirique courante consiste à utiliser la valeur suivante de p suivante⁵ :

$$p_{max} = \left\lceil 12 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil \quad (11)$$

où T désigne le nombre d'observation de la série.

5. Proposé par Schwert (1989)

1.2 Processus TS et DS

Definition 1.1 (Processus TS) Le processus X_t caractérisé par une stationnarité déterministe, **TS** (Trend Stationary), est tel que :

$$X_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t = f(t) + \epsilon_t \quad (12)$$

où ϵ_t est un bruit blanc faible.

Remarque Cette série n'est pas stationnaire car son espérance dépend du temps. Pour stationnariser un tel processus, il suffit de lui retirer sa tendance déterministe, en effet on remarque facilement que le processus $X_t - f(t) = \epsilon_t$ où ϵ_t est un bruit blanc faible est un processus stationnaire par définition.

Definition 1.2 (Processus DS) Le processus X_t est caractérisé par une stationnarité de type stochastique **DS** (Difference Stationary), si le processus X_t intégré d'ordre d , différencié d fois devient stationnaire, soit si :

$$(1-L)^d X_t \text{ est stationnaire}$$

où :

- $L := L'$ opérateur retard tel que $(1 - L)^d X_t = X_t - X_{t-d}$
- $d := L'$ ordre de différenciation de la série

1.3 Stratégie du test de Dickey-Fuller augmenté

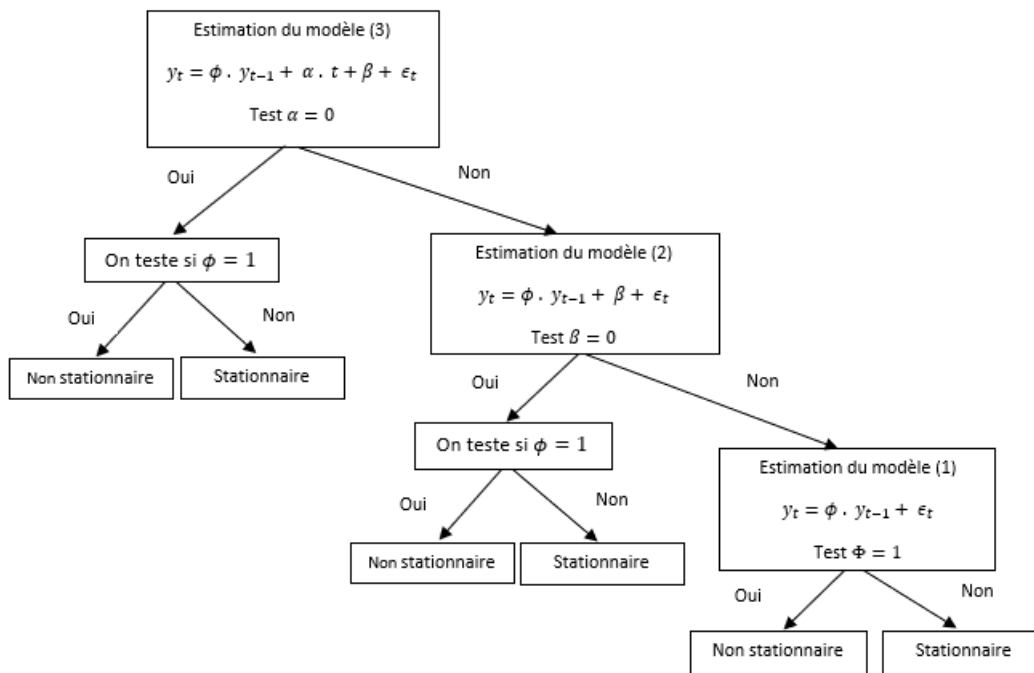


FIGURE 23 – Stratégie du test de Dickey-Fuller

Le test de racine unitaire de Dickey Fuller se réalise de manière méthodique comme suit :

- On teste la présence de racine unitaire au sein du modèle le plus complet (modèle 3). Les résultats du test nous donne ensuite deux valeurs : la statistique F de Fisher, $F-stat$, et la statistique t de student, $t-stat$. On s'intéresse en premier lieu à la statistique de Fisher. Deux cas peuvent se présenter :

1. Si **F-stat** < $\text{Phi}_{3\%}$, où $\text{Phi}_{3\%}$ est la valeur critique du test au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 3, tous les coefficients ne sont pas statistiquement nuls, on ne peut pas rejeter \mathbb{H}_0 . Nous sommes dans le **bon modèle**. On s'intéresse désormais à la statistique de t de student qui teste la présence de racine unitaire au sein du modèle.
 - (a) Si **t-stat** < $\text{tau}_{3\%}$, où $\text{tau}_{3\%}$ est la valeur critique du test de student au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 3, on rejette $H_0 \iff$ il n'y a pas de racine unitaire \iff il y a stationnarité \rightarrow Le processus est **TS**.
 - (b) Si **t-stat** > $\text{tau}_{3\%}$, on ne peut pas rejeter $H_0 \iff$ il y a une racine unitaire \iff il n'y a pas stationnarité \rightarrow Le processus est **DS**.
2. Si **F-stat** > $\text{Phi}_{3\%}$, tous les coefficients sont nuls, on rejette donc $H_0 \rightarrow$ On teste le (*modèle 2*) avec constante.
 - Si nous sommes dans le point 2., nous devons tester l'hypothèse de racine unitaire dans le (*modèle 2*).
 1. Si **F-stat** < $\text{Phi}_{2\%}$, où $\text{Phi}_{2\%}$ est la valeur critique du test au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 2, tous les coefficients ne sont pas statistiquement nuls, on ne peut pas rejeter \mathbb{H}_0 . Nous sommes dans le **bon modèle**. On s'intéresse désormais à la statistique de t de student qui teste la présence de racine unitaire au sein du modèle.
 - (a) Si **t-stat** < $\text{tau}_{2\%}$, où $\text{tau}_{2\%}$ est la valeur critique du test de student au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 2, on rejette $H_0 \iff$ il n'y a pas de racine unitaire \iff il y a stationnarité \rightarrow Le processus est **stationnaire**.
 - (b) Si **t-stat** > $\text{tau}_{2\%}$, on ne peut pas rejeter $H_0 \iff$ il y a une racine unitaire \iff il n'y a pas stationnarité \rightarrow Le processus est **DS**.
 2. Si **F-stat** > $\text{Phi}_{2\%}$, tous les coefficients sont nuls, on rejette donc $H_0 \rightarrow$ On teste le (*modèle 1*) sans contrainte.
 - Si le modèle 2 est rejeté, on procède alors au modèle 1 sans contrainte.
 1. Si **F-stat** < $\text{Phi}_{1\%}$, où $\text{Phi}_{1\%}$ est la valeur critique du test au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 1, tous les coefficients ne sont pas statistiquement nuls, on ne peut pas rejeter \mathbb{H}_0 . Nous sommes dans le **bon modèle**. On s'intéresse désormais à la statistique de t de student qui teste la présence de racine unitaire au sein du modèle.
 - (a) Si **t-stat** < $\text{tau}_{1\%}$, où $\text{tau}_{1\%}$ est la valeur critique du test de student au seuil d'erreur de 5% dans le modèle 1, on rejette $H_0 \iff$ il n'y a pas de racine unitaire \iff il y a stationnarité \rightarrow Le processus est **stationnaire**.
 - (b) Si **t-stat** > $\text{tau}_{1\%}$, on ne peut pas rejeter $H_0 \iff$ il y a une racine unitaire \iff il n'y a pas stationnarité \rightarrow Le processus est **DS**.
 2. Si **F-stat** > $\text{Phi}_{1\%}$, tous les coefficients sont nuls, on rejette donc $H_0 \rightarrow$ On teste le (*modèle 1*) sans contrainte.

La table suivante récapitule les valeurs critiques utilisés pour l'implémentation de ce test :

| Modèles | Modèle 3 | | Modèle 2 | | Modèle 1 |
|------------------|----------|------|----------|------|----------|
| Seuils critiques | tau3 | phi3 | tau2 | phi2 | tau1 |
| 1% | -4.38 | 8.21 | -3.75 | 7.88 | -2.66 |
| 5% | -3.60 | 5.68 | 3.00 | 5.18 | -1.95 |
| 10% | -3.24 | 4.67 | -2.63 | 4.12 | 1.60 |

FIGURE 24 – Valeurs critiques du test de Dickey-Fuller augmenté

1.4 Stationnarité des variables explicatives

| Augmented Dickey-Fuller Test | | | | | |
|------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------|--------------|
| Variable | None | Drift | Trend and drift | Ordre integration | Action |
| chomage | -1.43 [0.1616] | -1.63 [0.464] | -1.47 [0.7667] | I(1) | Différencier |
| chomage_lag1 | -1.07 [0.2887] | -1.4 [0.5465] | -1.27 [0.8488] | I(1) | Différencier |
| chomage_lag2 | -0.52 [0.484] | -1.16 [0.6287] | -1.32 [0.8261] | I(1) | Différencier |
| evol_chomage | -3.85 [0.01] | -3.88 [0.01] | -3.82 [0.0343] | I(0) + C | NA |
| evol_chomage_lag1 | -4.09 [0.01] | -4.05 [0.01] | -3.99 [0.0236] | I(0) + C | NA |
| evol_chomage_lag2 | -3.81 [0.01] | -3.71 [0.0113] | -3.63 [0.0479] | I(0) + C | NA |
| evol_PIB | -1.93 [0.0529] | -3.27 [0.0293] | -3.53 [0.0595] | I(0) + C | NA |
| evol_PIB_lag1 | -1.89 [0.0588] | -3.72 [0.0109] | -4.15 [0.0179] | I(0) + C | NA |
| evol_PIB_lag2 | -1.97 [0.0481] | -3.46 [0.0203] | -3.56 [0.0561] | I(0) + T | NA |
| Inflation | -1.48 [0.1424] | -3.47 [0.02] | -3.62 [0.0487] | I(1) | Différencier |
| Inflation_lag1 | -1.41 [0.1667] | -3.45 [0.0206] | -3.48 [0.0665] | I(1) | Différencier |
| Inflation_lag2 | -1.63 [0.0959] | -3.34 [0.0246] | -3.62 [0.0487] | I(1) | Différencier |
| evol_Inflation | -4.78 [0.01] | -5.09 [0.01] | -5.17 [0.01] | I(0) + C | NA |
| evol_Inflation_lag1 | -4.77 [0.01] | -5.08 [0.01] | -5.3 [0.01] | I(0) + C | NA |
| evol_Inflation_lag2 | -4.66 [0.01] | -4.94 [0.01] | -5.21 [0.01] | I(0) + C | NA |
| EUR_USD | -0.35 [0.5333] | -1.55 [0.4942] | -1.48 [0.7654] | I(1) | Différencier |
| EUR_USD_lag1 | -0.2 [0.5787] | -1.59 [0.4778] | -1.57 [0.7293] | I(1) | Différencier |
| EUR_USD_lag2 | -0.54 [0.4739] | -1.64 [0.4598] | -1.68 [0.6836] | I(1) | Différencier |
| evol_EUR_USD | -3.77 [0.01] | -3.68 [0.0123] | -3.62 [0.0489] | I(0) + C | NA |
| evol_EUR_USD_lag1 | -3.89 [0.01] | -3.8 [0.01] | -3.72 [0.0416] | I(0) + C | NA |
| evol_EUR_USD_lag2 | -3.99 [0.01] | -3.91 [0.01] | -3.82 [0.0346] | I(0) + C | NA |
| evol_immo | -1.46 [0.1479] | -1.88 [0.3743] | -1.93 [0.584] | I(1) | Différencier |
| evol_immo_lag1 | -1.48 [0.1422] | -1.87 [0.3773] | -1.88 [0.6029] | I(1) | Différencier |
| evol_immo_lag2 | -1.5 [0.1357] | -1.88 [0.3732] | -1.85 [0.6144] | I(1) | Différencier |
| EURLT | -2.79 [0.01] | -0.69 [0.7881] | -2.34 [0.4277] | I(1) + T | Différencier |
| EUR_LT_lag1 | -2.29 [0.0239] | -0.52 [0.8479] | -2.4 [0.4048] | I(0) | Différencier |
| EUR_LT_lag2 | -3.04 [0.01] | -1.46 [0.5233] | -3.17 [0.1239] | I(0) | Différencier |
| evol_EUR_LT | -3.7 [0.01] | -4.11 [0.01] | -4.2 [0.0162] | I(0) + T | NA |
| evol_EUR_LT_lag1 | -4.77 [0.01] | -4.97 [0.01] | -4.89 [0.01] | I(0) + T | NA |
| evol_EUR_LT_lag2 | -3.45 [0.01] | -3.7 [0.0119] | -3.44 [0.0725] | I(0) + T | NA |

Bibliographie

- [1] Nick JESSOP Alasdair THOMPSON. A cost of capital approach to estimating credit risk premia, 2018.
- [2] Julien FERMAUD Bacem BEN YAHIA. Ifrs 9 : Quelles modalités et quels enjeux?, 2018.
- [3] ESRB European Systemic Risk Board. Macro-financial scenario for the 2020 euwide banking sector stress test, 2020.
- [4] C.CHOUQUET. Modeles lineaires, laboratoire de statistique et probabilités - université paul sabatier - toulouse. <https://www.math.univ-toulouse.fr/~barthe/M1modlin/poly.pdf>, 2010.
- [5] Jorge A. CHAN-LAU. Fundamentals-based estimation of default probabilities : A survey. <https://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2006/wp06149.pdf>, Juin 2006.
- [6] Gilbert COLLETAZ. Introduction à la cointégration. <https://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/GC/sources/Cointegration%20-%20une%20introduction.pdf>, mars 2020.
- [7] Dr. Stephan SUCHOWER Dr. Barry BELKIN. A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. <https://www.z-riskengine.com/media/1032/a-one-parameter-representation-of-credit-risk-and-transition-matrices.pdf>, 1998.
- [8] Myriam Ben Ayed Ghamgui. Essais sur le risque de crédit des obligations : Analyse de la migration des notes et des effets de contagion, 2013.
- [9] SORENSEN HOGGARTH and ZICCHINO. Stress tests of uk banks using a var approach. <https://www.bankofengland.co.uk/-/media/boe/files/working-paper/2005/stress-tests-of-uk-banks-using-a-var-approach.pdf>, 2005.
- [10] Auteur inconnu. Les risques pris par les collectivités territoriales et les établissements publics locaux en matière d'emprunt. <https://www.ccomptes.fr/sites/default/files/EzPublish/12-risques-coll-terr-emprunt.pdf>, 2010.
- [11] Véronique MEURIOT. Réflexions méthodologiques sur la modélisation non structurelle : une approche par les modèles vectoriels autorégressifs (var) et leurs extensions dynamiques. <https://journals.openedition.org/msh/pdf/10423>, 2008.
- [12] Eric SALOMON Natacha JOURDAN, Laurent MICHEL. Comment mettre en œuvre un backtesting des outils de notation de la banque de détail? http://www.maths-fi.com/malliavin/Comment_mettre_en_oeuvre_un_backtesting_des_outils_de_notation_de_la_banque_de_detail_03_2004.pdf.
- [13] Philippe Wust Nicolas Darbo, Louis Bernot. Stress test episode 1 – pilotage bancaire : Vers des plateformes de planification financière et de stress-test, 2019.
- [14] Philippe Wust Nicolas Darbo, Louis Bernot. Stress test episode 2 – modélisation prospective des revenus bancaires : Revue des méthodes statistiques, 2019.
- [15] Vincent MARTIN Denys MÉDÉE Olivier DE BANDT, Nicolas DUMONTAUX. Débats économiques et financiers. <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/201303-debats-economiques-et-financiers-2.pdf>.
- [16] Antoine SIMON. Mémoire sur *Les emprunts des collectivités locales et la libre administration*. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01223681/document>, Juin 2015.
- [17] Dietske SIMONS and Ferdinand ROLWES. Macroeconomic default modeling and stress testing. <https://www.ijcb.org/journal/ijcb09q3a6.pdf>, Septembre 2009.
- [18] Farouk TOUKOUROU. Optimisation d'un portefeuille de crédit entreprise en utilisant une approche par secteur d'activité. https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem%2F786ca6e95ccff15992e9a769e455926b.pdf&fg=1, 2018.