



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de
l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 23 Septembre 2021

Par : Kamel MANSOUR

Titre : Etude des modèles de taux $G2++$ et $LMM+$ au sein d'un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre et de leurs impacts sur la solvabilité d'un assureur

Confidentialité : Oui - Durée: 2 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaire :**

Simon LE DILY

Fabrice HAMON

Signature :

Entreprise :

Addactis France

Signature :

**Membre présent du jury
de l'EURIA :**

Jean-Marc DERRIEN

**Directeur de mémoire
en entreprise :**

Mohammed BENNOUNA

Signature :

Invité :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Mots clefs: Solvabilité II, Générateur de Scénarios Economiques (GSE), Risque-neutre, *Market-consistent*, Instruments financiers, Modèles de taux, G2++, *Libor Market Model*, LMM+, Calibrage, Epargne, *Asset and Liability Management* (ALM)

Solvabilité II impose aux institutions assurantielles d'évaluer leurs passifs et actifs en valeur de marché. Dès lors, l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques *market-consistent* risque-neutre s'avère nécessaire pour l'évaluation des options et garanties des contrats d'assurance et le calcul du *Best Estimate*. Le facteur de risque de taux étant le plus impactant pour les assurances, il est indispensable d'avoir une maîtrise complète de ces modèles.

Afin de pouvoir capter l'ensemble de l'information économique et financière, les modèles de taux nominaux sont hyper-paramétrés les rendant très complexes de compréhension et d'utilisation.

Dans ce cadre, deux modèles de taux fondamentalement différents ont été étudiés : le modèle G2++ qui est un modèle de taux court et un modèle gaussien à deux facteurs, et le modèle LMM+ qui est un modèle de marché et à volatilité stochastique.

Outre la description des modèles et des formules mathématiques sous-jacentes, ce mémoire porte une attention particulière au calibrage. A travers diverses méthodes telles que le calibrage sur plusieurs années d'exercice ou des études de multi-start, le but a été d'objectiver la robustesse et la stabilité des modèles en essayant de rendre compte de leurs principales limites.

Enfin, les choix relatifs au modèle de taux et au calibrage ont fait l'objet d'études de sensibilité sur des indicateurs Solvabilité II. Cette section a pour but d'une part d'exposer une méthodologie d'anticipation des scénarios de taux générés et des impacts sur la gestion actif-passif de la compagnie, et d'autre part de quantifier ces impacts ALM.

Abstract

Keywords: Solvency II, Economic Scenario Generator (ESG), Risk-neutral, *Market-consistent*, Financial instruments, Rate models, G2++, *Libor Market Model*, LMM+, Calibration, Savings, *Asset and Liability Management* (ALM)

Solvency II requires insurance institutions to value their liabilities and assets at market value. Consequently, the use of a risk-neutral economic scenario generator is necessary for the evaluation of insurance contract options and guarantees and the calculation of the *Best Estimate*. The interest rate risk factor being the most impacting for insurance companies, it is essential to have a complete understanding of these models.

In order to capture all the economic and financial information, the nominal rate models are hyper-parameterised, making them very complex to understand and use.

In this context, two fundamentally different rate models have been studied : the G2++ model which is a two factor Gaussian short rate model, and the LMM+ model which is a market model with a stochastic volatility.

In addition to the description of the models and the underlying mathematical formulas, this thesis pays particular attention to the calibration. Through various methods such as calibration over several years of exercise or multi-start studies, the aim was to objectify the robustness and the stability of the models by trying to account for their main limits.

Finally, the choices relating to the rate model and the calibration were the subject of sensitivity studies on Solvency II indicators. The aim of this section is, on the one hand, to present a methodology for anticipating the rate scenarios produced and the impacts on the company's asset and liability management, and on the other hand, to quantify these ALM impacts.

Note de synthèse

Mise en contexte du mémoire et de la problématique

La réglementation Solvabilité II impose aux institutions assurantielles d'évaluer leurs passifs et actifs en valeur de marché. Une évaluation des options et garanties embarquées dans les contrats d'assurance est alors nécessaire pour réaliser le calcul du *Best Estimate*.

Pour cela, les compagnies ont recours à un générateur de scénarios économiques (GSE) risque-neutre. Cet outil permet la projection de divers facteurs de risque auxquels sont soumises les assurances. Or, le facteur de risque de taux est considéré comme étant le plus impactant pour les assurances : il convient donc de porter une plus grande attention aux modèles de taux utilisés.

Au sein de la littérature, les modèles de taux sont classés selon trois catégories : les modèles de taux court, ceux s'inscrivant dans le cadre Heath-Jarrow-Morton, et enfin les modèles de marché. Tandis que les modèles de taux court modélisent le taux court qui n'est pas une réalité de marché, les modèles de marché représentent les taux LIBOR *forward* déduits du marché.

De ce fait, afin de pouvoir effectuer la comparaison la plus pertinente possible des modèles de taux, le choix a été fait d'étudier deux modèles appartenant à deux catégories différentes : le modèle G2++ et le modèle LMM+.

Pourquoi le choix de ces deux modèles ?

Le modèle G2++ est un modèle de taux court et à deux facteurs. Dès lors, cela en fait un modèle relativement simple d'accès mais tout de même très pertinent en raison de son nombre de facteurs et la possibilité de générer des taux négatifs. Il devait donc permettre à la fois une qualité de réplique des nappes de volatilité satisfaisante et un coût en temps de calcul très faible. Néanmoins, des limites évidentes lui sont très intrinsèques comme l'impossibilité de répliquer une nappe de volatilité *in-the-money* (ITM) et *out-the-money* (OTM).

A l'inverse, le modèle LMM+ est un modèle de marché bien plus complexe qui suppose que la dynamique des taux LIBOR *forward* déplacés est log-normale. Il a donc également la possibilité de générer des taux négatifs bornés par l'opposé du facteur de déplacement. De plus, ce modèle a la particularité de disposer d'une volatilité stochastique ayant pour but la réplique des *smile* de volatilité observés sur les swaptions ITM/OTM. Cette forte complexité permettait donc d'outrepasser les contraintes du modèle G2++ tout en apportant une efficacité bien supérieure.

Une comparaison fine de ces deux modèles était donc pertinente afin de pouvoir objectiver

l'apport d'une telle complexité.

Méthodologie d'étude et de comparaison des modèles

Tout d'abord, pour chaque modèle de taux, nous avons étudié les fondements théoriques et déterminé des formules de *pricing* d'une swaption ainsi que de diffusion.

Nous avons alors pu nous focaliser sur l'étape la plus complexe de la modélisation : le calibrage. Dans un premier temps, un calibrage sur swaption *at-the-money* (ATM) a été effectué en analysant les paramètres calibrés, notamment s'ils présentent une saturation, et les matrices d'écart de volatilité. Quant au modèle LMM+, l'intégration d'une volatilité stochastique a pour but la réplication des *smile* de volatilité : la même étude a donc été menée pour le modèle LMM+ en ajoutant le calibrage sur swaption ITM/OTM.

De plus, nous avons voulu objectiver la robustesse et la stabilité du calibrage de chaque modèle. Deux méthodes ont alors été menées : le calibrage sur plusieurs années d'exercice et le multi-start.

Le calibrage sur plusieurs années d'exercice permet de rendre compte de la stabilité du modèle de taux suivant l'utilisation de diverses courbes de taux sans risque et de matrices de swaption. En effet, nous avons d'abord mis en avant un environnement économique très changeant via des niveaux de taux sans risque ainsi que des niveaux de volatilité et de courbure des swaptions très fluctuants. De ce fait, un modèle de taux qui se retrouve efficace lors de chacun de ces contextes économiques renforce l'hypothèse de stabilité.

En complément de l'étude précédente, des analyses de multi-start ont été effectuées. Cela consiste à réaliser un grand nombre de calibrages en initialisant à chaque fois les paramètres de manière aléatoire. L'effet des paramètres d'initialisation sur la convergence du calibrage peut donc en être déduit.

L'ensemble de ces travaux ont donc permis de comparer les deux modèles sur les qualités de réplication de swaptions de même que sur la stabilité et la robustesse de leur calibrage.

Dans le but de valider les scénarios de diffusion, l'étude de ces modèles a été clôturée en effectuant les tests de validation de martingalité et de *market-consistency*.

Finalement, une étude d'impacts de ces modèles sur la santé d'une compagnie d'assurance a été effectuée. En effet, diverses sensibilités ont été réalisées afin de statuer sur l'impact du choix du modèle de taux et de son calibrage sur des indicateurs Solvabilité II.

Résultats des études de calibrage et de diffusion

Le modèle G2++

Malgré la relative simplicité du modèle, celui-ci a montré des résultats très satisfaisants en termes de calibrage sur swaption ATM avec des temps de calcul de l'ordre de quelques secondes. De plus, nous avons pu mettre en avant d'une part la robustesse à travers l'étude de multi-start et d'autre part sa stabilité via les études de calibrage suivant les années

d'exercice. En effet, ces études ont montré la capacité du modèle à toujours répliquer l'ensemble de la nappe de volatilité de manière convenable et sans saturation des paramètres. Le calibrage suivant deux algorithmes d'optimisation (algorithme de Nelder-Mead et algorithme de Marquardt-Levenberg) se sont également révélés convaincants, renforçant cette stabilité.

Néanmoins, des limites sont apparues. En effet, bien que les tests de validation furent satisfaisants, nous avons pu constater des écarts de *market-consistency* plutôt élevés, ce qui remet en cause la qualité de réplification du modèle. De plus, nous avons seulement pu calibrer sur des nappes de volatilité *at-the-money*, ce modèle n'étant pas capable de répliquer des *smile* de volatilité. Enfin, le paramètre de corrélation, une fois calibré, est régulièrement proche de la borne minimale -1 voire a saturé, ce qui nécessite une approche de calibrage par multi-start.

De ce fait, il apparaît naturel de vouloir se tourner vers un modèle plus complexe permettant non seulement une meilleure qualité de réplification des nappes de volatilité ATM mais également un modèle ayant la capacité de reproduire des nappes *out-the-money* et *in-the-money*.

Le modèle LMM+

La complexité du modèle LMM+ s'est avérée très efficace avec de très bons résultats sur les domaines attendus.

Dans un premier temps, les réplifications des nappes de volatilité sont toujours très satisfaisantes. Le G2++ fournissait également un calibrage convaincant sur des swaptions ATM mais le test de *market-consistency* montrait de forts écarts entre les volatilités modèle et les volatilités Monte-Carlo. Pour le modèle LMM+, ces écarts Monte-Carlo sont quasi nuls, démontrant donc un fort avantage pour ce modèle de marché.

Dans un second temps, comme le montrent les graphiques à la page suivante, le LMM+ a démontré la pertinence et l'efficacité de l'intégration d'une volatilité stochastique lui permettant la réplification de nappes de volatilité ITM/OTM. Il s'agit donc d'un avantage certain de ce modèle par rapport au G2++.

Enfin, le calibrage sur un ensemble important d'années d'exercice a confirmé la robustesse du modèle LMM+.

Néanmoins, les études ont mis en avant certaines limites du modèle de marché.

Premièrement, il s'agit du temps de calibrage. En effet, tandis que le modèle G2++ fournissait des paramètres calibrés satisfaisants en quelques secondes, ce modèle nécessite plusieurs dizaines de minutes afin d'effectuer un calibrage. Cela peut sembler être un inconvénient négligeable lors de la réalisation d'un calibrage ; tout de même, pour certains travaux comme la production trimestrielle des jeux de scénarios économiques ou des études de calibrage multi-start, cela induit certaines contraintes comme la diminution du nombre de calibrages pouvant être réalisés.

L'inconvénient précédent provenait du nombre conséquent de paramètres à calibrer. Une seconde limite qui en découle est la saturation de certains paramètres calibrés avec une fréquence plus élevée que le modèle G2++, pouvant avoir pour conséquence des calibrages défectueux.

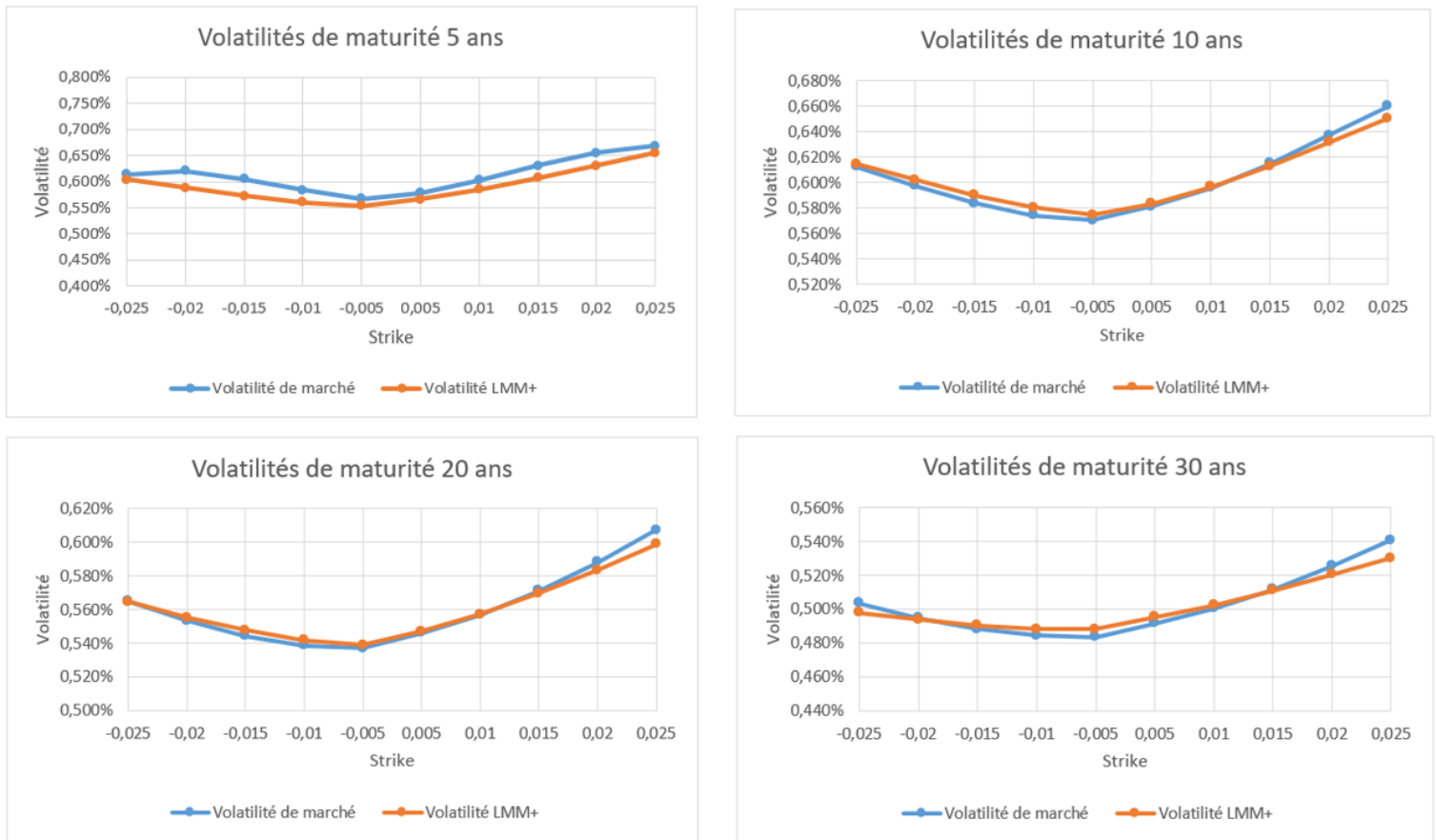


FIGURE 1: Graphiques de comparaison des volatilités ITM/OTM du marché et du modèle LMM+ en fonction des *strike* pour plusieurs maturités

Ainsi, nous avons pu étudier et comparer les modèles G2++ et LMM+ d'un point de vue strictement GSE à travers des études de stabilité, de robustesse et de diffusion des modèles.

La dernière étude effectuée concerne les impacts de ces modèles sur un aspect davantage pratique de la vie d'un assureur : sa gestion actif-passif.

Impact du modèle de taux et du calibrage sur des indicateurs Solvabilité II

Afin d'analyser l'impact des choix du modèle de taux et du calibrage sur les indicateurs Solvabilité II, plusieurs études de sensibilité ont été réalisées : une sensibilité au choix du modèle, une seconde liée à la zone de calibrage et une dernière sur le choix du *shift* du modèle LMM+.

Dans un premier temps, l'objectif a été d'analyser les calibrages obtenus à travers les paramètres calibrés ainsi que les nappes de volatilité induites afin d'anticiper les scénarios de diffusion. De ce fait, cela a permis de renforcer l'étude du modèle en montrant une réflexion concernant l'effet des paramètres sur les distributions de taux.

Dans un second temps, nous avons analysé les résultats issus de la diffusion des modèles

via des statistiques descriptives et des graphiques de quantiles de taux nominaux dont un exemple de graphique est montré ci-dessous. La même méthodologie a été menée dans le but de montrer qu'il était possible d'anticiper les impacts sur les métriques ALM en étudiant les niveaux de taux moyens et les scénarios extrêmes. En effet, en analysant les niveaux de taux et en les mettant en relation avec les mécanismes de gestion actif-passif tels que la provision pour participation aux bénéficiaires ou la provision pour risque d'exigibilité, il est alors possible d'anticiper les déclenchements de ces derniers et donc d'anticiper les interactions actif-passif.

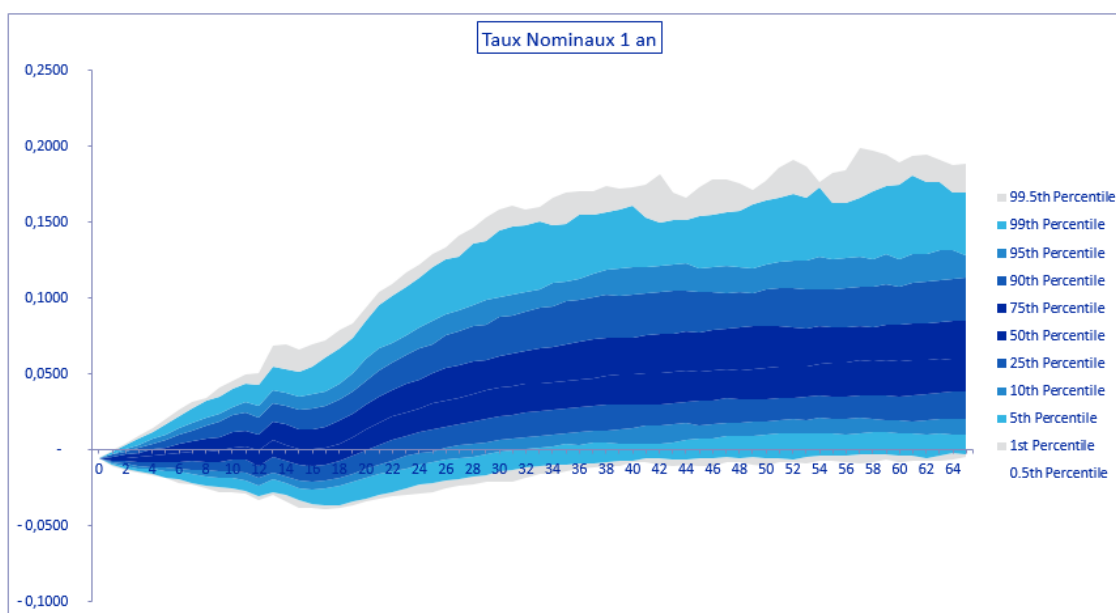


FIGURE 2: Diffusion du taux 1 an avec quantiles pour le modèle LMM+ avec *shift* 10 %

Comme le montre le tableau ci-dessous, nous avons présenté nos résultats en confrontant les modèles par rapport au ratio de couverture, au *Solvency Capital Requirement* ainsi qu'au *Best Estimate* des contrats EURO et des contrats en unités de compte. De cette manière, nous avons pu conclure sur l'impact d'un modèle sur la solvabilité d'un assureur tout en étudiant les causes de cet effet et en les mettant en relation avec les anticipations réalisées via les analyses de diffusion.

Modèles \ Indicateurs	LMM+ nappe complète	LMM+ nappe réduite
Best Estimate	8 736 013 414	8 746 893 710
Best Estimate EURO	7 019 371 681	7 030 230 221
Best Estimate UC	1 716 641 733	1 716 663 490
Ratio de couverture	156,7%	152,0%
Fonds propres admissibles	674 173 366	666 339 552
SCR	430 157 792	438 484 343

TABLE 1: Comparaison des indicateurs ALM suivant la zone de calibrage du LMM+

Ainsi, nous avons montré qu'un modèle LMM+ avait la possibilité d'améliorer la solvabilité d'un assureur, que la diminution du *shift* du modèle LMM+ engendrait une amélioration des indicateurs Solvabilité II et qu'enfin un calibrage sur nappe réduite dégradait assez fortement la solvabilité de l'assureur.

Executive Summary

Contextualizing the thesis and the issue

The Solvency II regulation requires insurance institutions to evaluate their liabilities and assets at market value. An evaluation of the options and guarantees embedded in the insurance contracts is then necessary to carry out the calculation of the *Best Estimate*.

For this purpose, companies use a risk-neutral economic scenario generator (ESG). This tool allows the projection of various risk factors to which insurance companies are subject. However, the rate risk factor is considered to be the most impacting for insurance companies : it is therefore necessary to pay more attention to the rate models used.

In the literature, interest rate models are classified into three categories : short rate models, Heath-Jarrow-Morton framework models, and market models. While short rate models model the short rate which is not a market reality, market models represent LIBOR rates inferred from the market.

Therefore, in order to make the most relevant comparison of the rate models, the choice was made to study two models belonging to two different categories : the G2++ model and the LMM+ model.

Why the choice of these two models ?

The G2++ model is a short rate model with two factors. This makes it a relatively simple model to access but still very relevant because of its number of factors and the possibility of generating negative rates. It should therefore allow both a satisfactory quality of replication of the volatility slicks and a very low cost in terms of calculation time. Nevertheless, it has obvious limitations, such as the impossibility of replicating *in-the-money* (ITM) and *out-the-money* (OTM) volatility layers.

Conversely, the LMM+ model is a much more complex market model which assumes that the dynamic of displaced LIBOR rates is log-normal. Hence, it also has the possibility of generating negative rates bounded by the opposite of the displacement factor. Moreover, this model has the particularity of having a stochastic volatility whose aim is to replicate the volatility observed on ITM/OTM swaptions. This high level of complexity enabled to overcome the constraints of the G2++ model, while at the same time providing much greater efficiency.

Thus, a detailed comparison of these two models was relevant in order to be able to objectify the contribution of such complexity.

Methodology for studying and comparing models

First of all, for each rate model, we studied the theoretical foundations and determined formulas for pricing a swaption as well as for diffusion.

We were then able to focus on the most complex stage of the modelling : the calibration. First, a calibration on an at-the-money swaption (ATM) was carried out by analysing the calibrated parameters, in particular if they present a saturation, and the volatility deviation matrices. As for the LMM+ model, the integration of a stochastic volatility aims at replicating the volatility smiles : the same study was therefore carried out for the LMM+ model with the addition of the calibration on an ITM/OTM swaption.

In addition, we wanted to objectify the robustness and stability of the calibration of each model. Two methods were then used : the calibration over several years of exercise and the multi-start.

The calibration over several years of exercise makes it possible to account for the stability of the rate model by using various risk-free rate curves and swaption matrices. Indeed, we first highlighted a very changing economic environment through risk-free rate levels and volatility and swaption curvature levels that fluctuate greatly. As a result, a rate model that performs well in each of these economic environments reinforces the stability hypothesis.

In addition to the previous study, multi-start analyses were carried out. This consists in performing a large number of calibrations by initialising the parameters randomly each time. The effect of the initialization parameters on the convergence of the calibration can thus be deduced.

All this work has made it possible to compare the two models on the qualities of replication of swaptions and also on the stability and robustness of their calibration.

In order to validate the diffusion scenarios, the study of these models was completed by conducting martingality and market-consistency validation tests.

Finally, a study of the impact of these models on the health of an insurance company was made. Indeed, various sensitivities were realized in order to rule on the impact of the choice of the rate model and its calibration on Solvency II indicators.

Results of calibration and diffusion studies

The G2++ model

Despite the relative simplicity of the model, it showed very encouraging results in terms of calibration on ATM swaption with calculation times of the order of a few seconds. Moreover, we were able to highlight the robustness of the model through the multi-start study on the one hand and its stability through the calibration studies following the years of exercise on the other hand. Indeed, these studies have shown the capacity of the model to always replicate the whole volatility table in a suitable manner and without saturation of the parameters. The calibration according to two optimisation algorithms

(Nelder-Mead algorithm and Marquardt-Levenberg algorithm) also showed convincing results, reinforcing this stability.

Nevertheless, some limitations have appeared. Indeed, although the validation tests were satisfactory, we were able to observe rather high market-consistency deviations, which calls into question the replication quality of the model. Moreover, we were only capable of calibrating on at-the-money volatility surface, as this model is not able to replicate volatility smiles. Finally, the correlation parameter, once calibrated, is regularly close to the minimum limit -1 or even saturated, which requires a multi-start calibration approach.

As a result, it seems natural to want to turn to a more complex model allowing not only a better quality of replication of the ATM volatility slices but also a model with the capacity to reproduce OTM and ITM slices.

The LMM+ model

The complexity of the LMM+ model proved to be very efficient with very good results on the expected domains.

In the first instance, the replications of the volatility slices are still very satisfactory. The G2++ also provided a convincing calibration on ATM swaptions but the market-consistency test showed strong discrepancies between the model volatilities and the Monte-Carlo volatilities. For the LMM+ model, these Monte-Carlo differences are almost zero, thus demonstrating a strong advantage for this market model.

Secondly, as shown in the figure at the end of the section, the LMM+ has demonstrated the relevance and efficiency of integrating a stochastic volatility allowing it to replicate OTM volatility slices. This is therefore a clear advantage of this model over the G2++.

Finally, the calibration on a large set of years of exercise confirmed the robustness of the LMM+ model.

Nevertheless, the studies highlighted certain limitations of the market model.

Firstly, it is the calibration time. Indeed, while the G2++ model provided satisfactory calibrated parameters in a few seconds, this model requires several tens of minutes to perform a calibration. This may seem to be a negligible inconvenience when performing a calibration ; however, for some tasks such as the quarterly production of economic scenarios or multi-start calibration studies, it does lead to some constraints such as a reduction in the number of calibrations that can be performed.

The previous disadvantage came from the large number of parameters to be calibrated. A second limitation resulting from this is the saturation of certain calibrated parameters with a higher frequency than the G2++ model, which may result in failed calibrations.

Thus, we were able to study and compare the G2++ and LMM+ models from a strictly ESG point of view through stability, robustness and model diffusion studies.

The last study carried out concerns the impacts of these models on a more practical aspect of the life of an insurer : its asset-liability management.

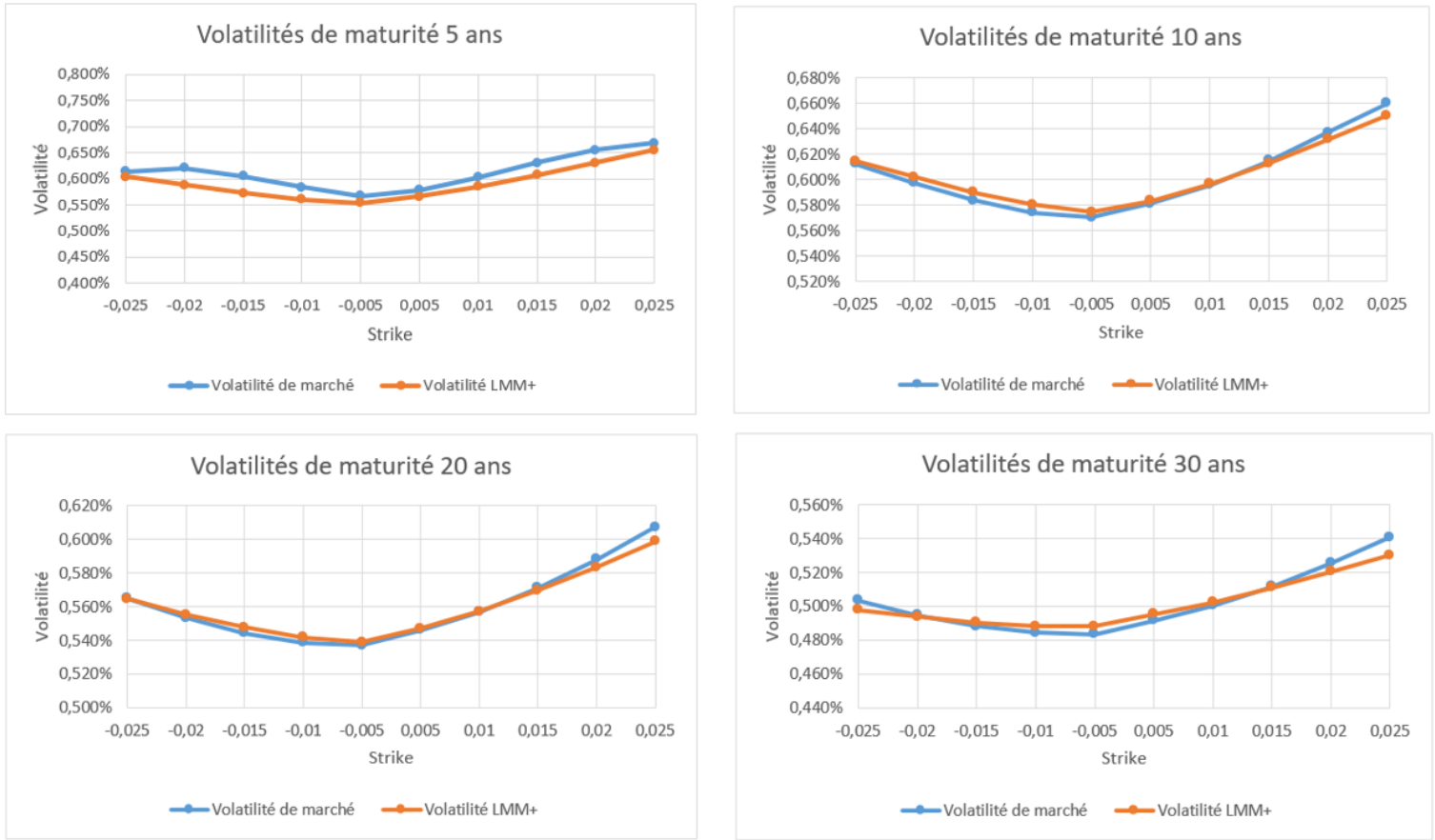


FIGURE 3: Charts comparing market ITM/OTM volatilities and LMM+ volatilities depending on strike for several maturities

Impact of the rate model and its calibration on Solvency II indicators

In order to analyse the impact of the choice of the rate model and its calibration on the Solvency II indicators, several sensitivity studies were carried out : one sensitivity to the choice of the model, a second one linked to the calibration zone and a last one on the choice of the LMM+ model shift.

Firstly, the objective was to analyse the calibrations obtained through the calibrated parameters as well as the induced volatility surface in order to anticipate the diffusion scenarios. This allowed the study of the model to be reinforced by showing a discussion of the effect of the parameters on the rate distributions.

In a second step, we analysed the results of the model diffusion through descriptive statistics and graphs of nominal rate quantiles, of which an example graph is shown below. The same methodology was carried out in order to show that it was possible to anticipate ALM results by studying average rate levels and extreme scenarios. Indeed, by analysing interest rate levels and relating them to asset-liability management mechanisms such as the provision for profit-sharing or the provision for exigibility risk, it is then possible to anticipate the triggers of the latter and therefore to anticipate asset-liability interactions.

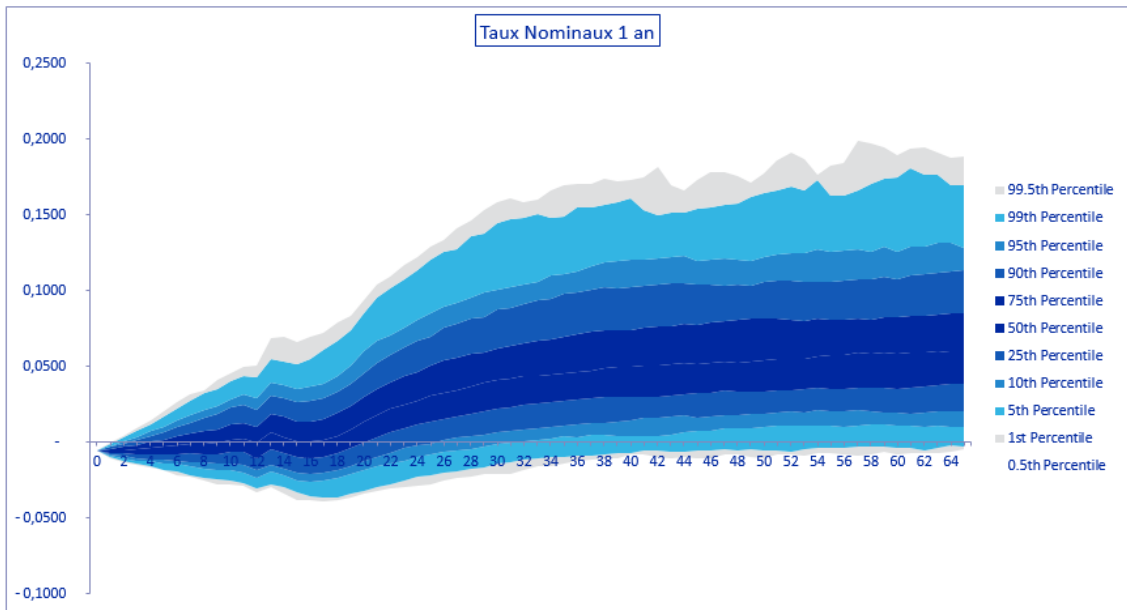


FIGURE 4: Diffusion of the 1-year rate with quantiles for the LMM+ model with a 10 % shift

As shown in the table below, we presented our results by comparing the models in relation to the coverage ratio, the Solvency Capital Requirement and the Best Estimate for EURO and unit-linked contracts. In this way, we were able to conclude on the impact of a model on the insurer's solvency while studying the causes of this effect and relating them to the expectations made through diffusion analyses.

Modèles \ Indicateurs	LMM+ nappe complète	LMM+ nappe réduite
Best Estimate	8 736 013 414	8 746 893 710
Best Estimate EURO	7 019 371 681	7 030 230 221
Best Estimate UC	1 716 641 733	1 716 663 490
Ratio de couverture	156,7%	152,0%
Fonds propres admissibles	674 173 366	666 339 552
SCR	430 157 792	438 484 343

TABLE 2: Comparison of ALM indicators depending on the LMM+ calibration area

Thus, we have shown that an LMM+ model has the possibility of improving the solvency of an insurer, that the reduction of the shift of the LMM+ model generates an improvement of the Solvency II indicators and that finally a calibration on a reduced volatility table deteriorates the solvency of the insurer quite strongly.

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier Mohammed BENNOUNA, mon tuteur de stage, pour m'avoir permis de rejoindre son équipe, pour sa confiance et son investissement. Sa forte expertise dans le domaine des GSE m'a été utile tout au long du mémoire.

Je remercie également tous les membres de l'équipe Modeling & Finance, particulièrement Laurent DEVINEAU et Charline MORDELET pour leur contribution le long du stage, leur suivi et leurs conseils pour mon mémoire.

J'aimerais aussi adresser mes remerciements à toute l'équipe d'Addactis France pour leur accueil, leur convivialité et leur bienveillance.

Je tiens également à remercier Fabrice HAMON, mon tuteur académique, pour sa disponibilité et son aide.

Je remercie Franck VERMET, directeur de l'EURIA, ainsi que l'ensemble du corps professoral pour la qualité de l'enseignement que j'ai reçu durant ces trois années de formation.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour leur soutien et leur bienveillance au quotidien.

Table des matières

I	Contexte de l'étude	2
1	Cadre réglementaire : Solvabilité II	3
1.1	Présentation de la réforme	3
1.2	Focus sur le pilier 1	4
2	Les Générateurs de Scénarios Economiques	7
2.1	Qu'est-ce qu'un GSE?	7
2.1.1	Définition d'un GSE	7
2.1.2	Les étapes de construction d'un GSE	8
2.2	Univers monde réel ou univers risque-neutre?	9
2.2.1	Univers monde réel	9
2.2.2	Univers risque-neutre	10
2.3	Les spécificités du GSE sous Solvabilité II	11
3	Socle financier	12
3.1	Notions sur les taux	12
3.1.1	Les taux <i>spot</i>	13
3.1.2	Les taux forward	14
3.1.3	Les taux swap	15
3.2	Produits financiers sur les taux	15
3.3	Les courbes de taux d'intérêt	16
3.3.1	Courbe des taux swap	16
3.3.2	Courbe des taux zéro-coupon	17
3.3.3	Courbe des taux réglementaire et sa revue	17
4	Les modèles de taux	19
4.1	Modèles de taux court	19
4.1.1	Modèles d'équilibre	20
4.1.2	Modèles sans opportunité d'arbitrage	20
4.2	Modèles de taux dans le cadre HJM	21
4.3	Modèles de marché	22
5	La modélisation des autres facteurs de risque	24
5.1	Indice action	24
5.2	Indice immobilier	25
5.3	Indice Inflation	25

II	Le modèle G2++	26
6	Théorie du modèle	27
6.1	Origine du modèle	27
6.1.1	Modèle Hull & White à deux facteurs	27
6.1.2	Pourquoi le choix du modèle G2++ ?	28
6.2	Dynamique du modèle	28
6.2.1	Dynamique du taux court	28
6.2.2	Pricing des obligations zéro-coupon	29
6.3	Pricing d'une swaption	33
6.3.1	Pricing d'une swaption de marché	33
6.3.2	Pricing d'une swaption via le modèle G2++	34
7	Méthodologie de calibrage	39
7.1	Problématiques liées au calibrage	39
7.1.1	L'optionnalité des instruments	39
7.1.2	Le choix des maturités	40
7.1.3	Prix de Black ou prix de Bachelier ?	40
7.2	Données en <i>input</i> et paramètres à calibrer	40
7.3	Minimisation quadratique	40
7.4	Résultats de calibrage	41
7.4.1	Convergence de l'optimisation et paramètres calibrés	41
7.4.2	Les volatilités ATM résultant du calibrage	42
7.5	Etude de la robustesse du calibrage	44
7.5.1	Calibrage suivant les années d'exercice	44
7.5.2	Multi-Start	49
8	Validation du modèle	51
8.1	Diffusion du modèle	51
8.2	Test de martingalité	51
8.3	Test de Monte-Carlo	54
8.4	Conclusion sur le modèle G2++	55
III	Le modèle LMM+	57
9	Théorie du modèle	58
9.1	La famille des modèles LMM	58
9.1.1	Le modèle LMM	58
9.1.2	Le modèle DDLMM	59
9.1.3	Le modèle DDLMM CEV	59
9.2	Dynamique du modèle	60
9.2.1	Notations	60
9.2.2	Dynamique des taux forward	61
9.3	Pricing d'une swaption via le modèle LMM+	66
9.3.1	Expression d'une swaption sous le modèle LMM+	66
9.3.2	Dynamique du taux swap forward	69

9.3.3	Résolution de la fonction génératrice des moments	74
9.3.4	Intégration sur un intervalle borné	77
10	Méthodologie de calibrage	79
10.1	Données en <i>input</i> et paramètres à calibrer	79
10.2	Minimisation quadratique	80
10.3	Résultats de calibrage	80
10.3.1	Calibrage sur swaption ATM	81
10.3.2	Calibrage sur swaption ITM/OTM	83
10.4	Etude de la robustesse du calibrage	86
10.4.1	Calibrage suivant les années d'exercice	86
10.4.2	Multi-Start	87
11	Validation du modèle	90
11.1	Diffusion du modèle	90
11.1.1	Discrétisation des taux forward	90
11.1.2	Discrétisation du processus de variance	93
11.1.3	Corrélations des mouvements browniens du modèle LMM+	94
11.2	Test de martingalité	95
11.3	Test de Monte-Carlo	98
11.4	Conclusion sur le modèle LMM+	99
IV	Impact du modèle de taux sur des indicateurs de la solva-	101
	bilité d'un assureur	
12	Le modèle ALM	102
12.1	Introduction au modèle ALM	102
12.2	Modélisation du passif	103
12.2.1	Portefeuille de passif	103
12.2.2	Hypothèses de modélisation du passif	104
12.3	Modélisation de l'actif	104
12.3.1	Portefeuille d'actifs	104
12.3.2	Le Générateur de Scénarios Economiques	105
12.3.3	Hypothèses de modélisation de l'actif	105
12.4	Modélisation des interactions actif-passif	105
12.5	Données utilisées	107
12.5.1	Portefeuille d'actifs	107
12.5.2	Portefeuille de passifs	107
12.6	Indicateurs clés ALM	108
12.6.1	<i>Best Estimate</i>	108
12.6.2	<i>Solvency Capital Requirement</i>	108
12.6.3	Ratio de couverture	108

13 Sensibilités et Résultats	109
13.1 Présentation des sensibilités étudiées	109
13.2 Génération des tables économiques	110
13.2.1 Résultats de calibrage pour chaque sensibilité et anticipation des diffusions de taux	110
13.2.2 Résultats de diffusion pour chaque sensibilité et anticipation des impacts ALM	119
13.3 Résultats des impacts ALM	131
13.3.1 Sensibilité au modèle de taux	131
13.3.2 Sensibilité à la zone de calibrage	132
13.3.3 Sensibilité au <i>shift</i> pour le modèle LMM+	134
Bibliographie	137
Lexique	142
A Théorèmes et lemmes essentiels	143
A.1 Lemme d'itô	143
A.2 Changement de numéraire	144
B Démonstrations relatives au modèle LMM+	145

Introduction

La réglementation Solvabilité II impose aux compagnies d'assurance d'évaluer leur passif et leur actif en valeur de marché. En outre, le calcul du *Best Estimate* nécessite l'évaluation des options et garanties embarquées dans les contrats d'assurance vie. Pour cela, l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Economiques (GSE) est indispensable.

En effet, cet outil permet de projeter les différents facteurs de risques auxquels est soumise la compagnie, en particulier le risque de taux considéré comme étant le plus impactant en assurance. Dans ce cadre, il est essentiel d'avoir une compréhension fine et une maîtrise des modèles de taux utilisés au sein du GSE.

Ce mémoire a pour objectif d'étudier et de comparer deux modèles de taux appartenant à deux classes différentes : le modèle G2++ et le modèle LMM+. Les travaux réalisés s'articulent ainsi autour de quatre grands axes.

La première partie définit le cadre général de l'étude et apporte les outils financiers nécessaires pour la suite du mémoire. Après avoir rappelé les fondements de la réglementation Solvabilité II, une définition générale des Générateurs de Scénarios Economiques sera donnée en mettant en avant les spécificités liées au cadre réglementaire. Nous décrirons enfin les différents outils financiers qui seront utilisés lors de ce mémoire.

Les seconde et troisième parties seront consacrées respectivement à l'étude des modèles G2++ et LMM+. Le but sera d'une part de présenter les raisonnements mathématiques dont est issu chaque modèle, et d'autre part de présenter des méthodes mises en œuvre afin d'évaluer leur stabilité et leur robustesse. Pour cela, une attention particulière sera portée à l'étape de calibrage des modèles.

Enfin, la dernière partie consistera en une étude d'impacts sur des indicateurs Solvabilité II quant au choix du modèle de taux et de leur calibrage.

Première partie
Contexte de l'étude

Chapitre 1

Cadre réglementaire : Solvabilité II

1.1 Présentation de la réforme

L'inversion du cycle de production, propre au secteur de l'assurance, est source d'incertitudes. Pour palier à ce problème d'aléa, la mise en place d'un nouveau régime prudentiel s'est imposée comme une nécessité afin de s'assurer que les compagnies d'assurance ont la capacité de faire face à leurs engagements.

Entrée en vigueur le 1^{er} janvier 2016, la directive européenne Solvabilité II s'articule autour de trois piliers :

— **Pilier 1** : Exigences quantitatives.

Ce pilier détaille les exigences quantitatives de la norme. Les assureurs doivent dorénavant mettre en œuvre un nouveau type de bilan, le bilan Solvabilité II, dans lequel l'actif et le passif sont évalués en valeur de marché.

Deux exigences de capital doivent être déterminées :

1. Le *Solvency Capital Requirement (SCR)* qui est défini comme le montant de capital minimum dont l'assureur doit disposer pour absorber les pertes portentielles à horizon un an avec une probabilité de 99,5% .
2. Le *Minimum Capital Requirement (MCR)* qui est défini comme le minimum absolu de capital à détenir par une compagnie d'assurance. En-dessous de ce seuil, l'ACPR² intervient et peut, en cas de non-rétablissement du MCR, retirer à l'organisme son agrément.

— **Pilier 2** : Exigences qualitatives.

Ce pilier a pour objectif le renforcement de la gouvernance, du contrôle interne et de la gestion des risques au sein de l'entreprise. Pour cela, des fonctions clés ont été mises en place afin de s'assurer que l'organisme dispose des moyens opérationnels nécessaires : la fonction de conformité, l'audit interne, la fonction actuarielle et la gestion des risques. De plus, une gestion interne des risques est mise en place à travers l'ORSA³ qui est une évaluation interne à la compagnie de son profil de risque et de sa solvabilité prospective.

2. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

3. *Own Risk and Solvency Assessment*

- **Pilier 3** : Reporting prudentiel et information du public.

A travers le pilier 3, la directive Solvabilité II exige une communication financière des organismes d'assurance sur leur situation financière et leur pilotage de la compagnie. Une transparence vis-à-vis du public est alors mise en œuvre permettant d'assurer un niveau d'information suffisant ainsi qu'un reporting détaillé à l'autorité de contrôle. Cette communication est harmonisée au plan européen.

1.2 Focus sur le pilier 1

Comme décrit dans la section précédente, la norme Solvabilité II impose aux assurances un nouveau type de bilan dans lequel l'actif est inscrit en valeur de marché et le passif est composé d'un SCR, d'un Best Estimate (BE) ainsi que d'une marge pour risque (figure 1.1).

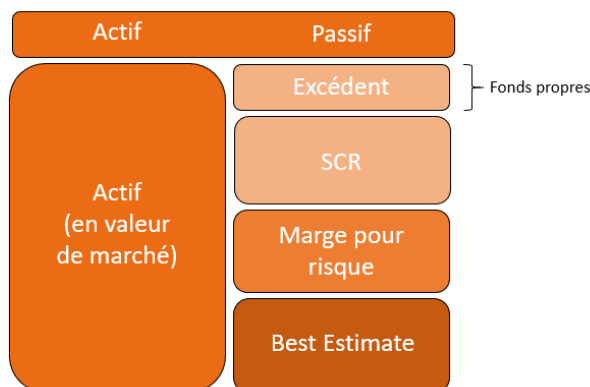


FIGURE 1.1: Bilan d'un assureur sous Solvabilité II

Définition d'un Best Estimate

Le Best Estimate correspond à la valeur probable des flux futurs de trésorerie actualisés à la courbe des taux sans risque. Ces flux comprennent entre autres les primes, les rachats et les frais de l'assureur.

La courbe des taux sans risque est fournie mensuellement par l'EIOPA¹. Sa construction sera définie dans la suite de ce mémoire.

Le Best Estimate est décrit par la formule suivante :

$$BE = \mathbb{E} \left(\sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+r_t)^t} \right)$$

avec :

- \mathbb{E} l'espérance sous l'espace probabilisé complet (Ω, \mathbb{F}, P)
- CF_t les cash-flows des prestations futures

1. European Insurance and Occupational Pensions Authority

- r_t le taux sans risque en t
- T l'horizon de projection suffisamment long pour couvrir la durée de vie totale du portefeuille d'assurance et de réassurance

Définition de la marge pour risque

La *risk margin* est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques soit équivalente au montant dont les entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour reprendre et honorer leurs engagements. L'idée sous-jacente est qu'une éventuelle compagnie repreneuse des engagements devrait disposer de fonds propres immobilisés à un coût supérieur aux produits qu'elle en tirerait.

Elle est calculée à partir du SCR en déterminant le coût que représente un montant de fonds propres éligibles :

$$RM = CoC \left(\sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \right)$$

avec :

- CoC le taux de coût du capital, égal à 6%
- $SCR(t)$ le capital de solvabilité requis après t années
- r_t le taux sans risque en t

Définition du *Solvency Capital Requirement*

Comme défini à la section précédente, le SCR est le minimum de capital requis correspondant à une probabilité de ruine de 0,5% à horizon un an. Le SCR peut donc être assimilé à une Value At Risk (VaR) au seuil de confiance 99,5% de la distribution des pertes en fonds propres économiques de la compagnie à horizon un an.

Pour déterminer ce montant, deux approches sont possibles :

- Soit avec une formule standard
- Soit avec un modèle interne qui doit être validé par l'ACPR

Pour calculer le SCR, il est nécessaire de calculer le SCR pour chaque module et sous-module de risque de la figure 1.2 . En effet, l'exigence de capital requis au titre d'un facteur de risque élémentaire R tel que le risque de taux ou le risque de mortalité, notée SCR_R , correspond à la variation du niveau de fonds propres économiques suite à un choc sur ce sous-module de risque R au niveau de risque 0,5%. Le choc à appliquer est fourni par la directive Solvabilité II.

Une fois les exigences de capital des facteurs de risque élémentaires déterminées, celles-ci sont agrégées afin de déterminer les exigences de capital au titre de chaque module de risque : Marché, Santé, Vie et Non-vie. Le SCR peut alors être déterminé.

La formule standard du SCR est définie comme suit :

$$SCR = BSCR + Ad_j + SCR_{op}$$

avec :

1.2. FOCUS SUR LE PILIER 1

- $BSCR$, le capital de solvabilité requis de base
- SCR_{op} , la charge de capital pour le risque opérationnel
- Ad_j , est l'ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéfices et des impôts différés

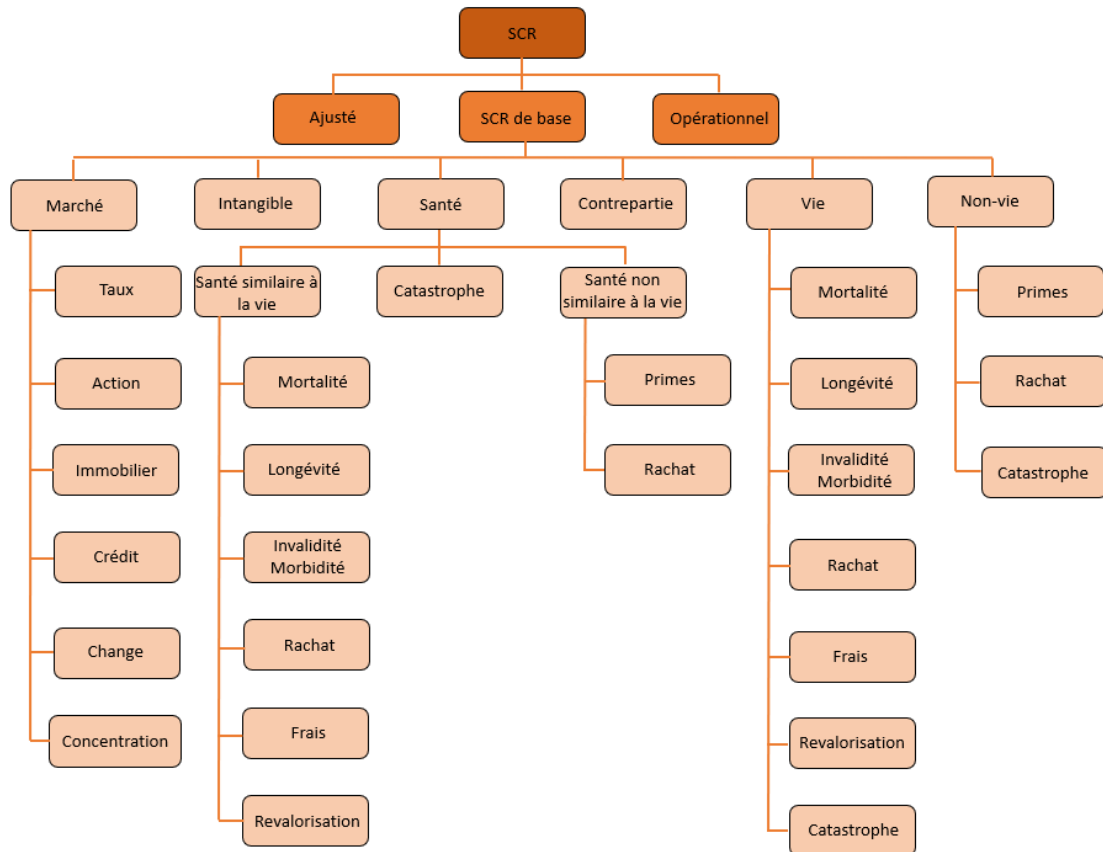


FIGURE 1.2: Structure de la formule standard

Le $BSCR$ est la racine carrée de la somme des besoins en capitaux pour chaque module (Marché, Intangible, Santé, Contrepartie, Vie et Non-Vie) agrégée par leurs corrélations :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

Les corrélations entre les modules de risque sont fournies dans la directive Solvabilité II.

Chapitre 2

Les Générateurs de Scénarios Economiques

2.1 Qu'est-ce qu'un GSE ?

2.1.1 Définition d'un GSE

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est une projection sur un horizon d'intérêt de grandeurs économiques et financières. C'est donc un outil permettant de projeter des variables économiques d'intérêt telles que les facteurs de risque (comme les taux nominaux, les taux réels, les rendements actions, les rendements immobiliers, les taux d'inflation, etc...) auxquels sont exposés les assureurs dans le temps.

Ces projections sont réalisées à l'aide de modèles mathématiques qui permettent d'obtenir des dynamiques pour les différentes grandeurs modélisées.

Ces facteurs de risques sont notamment :

- Taux
- Immobilier
- Actions
- Inflation
- Crédit

Pourquoi utiliser un GSE en assurance ?

Une compagnie d'assurance se doit d'avoir un dispositif qui lui permettra de simuler les différents risques qu'elle encourt dans le futur afin de valoriser son actif ainsi que les garanties et options financières embarquées dans les contrats d'assurance, et d'estimer ses fonds propres.

Parmi les options financières les plus répandues au sein des contrats d'assurance, nous pouvons citer l'option de taux technique, l'option de rachat d'un contrat d'assurance vie ou encore l'option de garantie de taux sur les versements libres ou programmés. Le coût de ces options et garanties financières dépendant de l'actif, du passif et de leurs interactions, l'utilisation de scénarios stochastiques apparait donc nécessaire.

2.1.2 Les étapes de construction d'un GSE

Avant de créer un générateur de scénarios économiques, quelques étapes primordiales sont à effectuer :

— **Etape 1 : Choix de l'univers de probabilité**

La modélisation d'un GSE peut se faire dans deux univers de probabilité : risque-neutre et monde réel. Ces univers probabilistes seront explicités dans la section suivante.

— **Etape 2 : Choix des facteurs de risque**

La pertinence et la complétude du GSE dépendent directement des facteurs de risque modélisés. Entre autres, nous pouvons citer les facteurs de risque de taux, d'action, d'inflation ou encore de crédit. Il est souhaitable de porter davantage d'attention aux vecteurs de risque impactant le plus la compagnie d'assurance tel que le facteur de risque de taux qui sera l'objet de ce mémoire.

— **Etape 3 : Choix des modèles de diffusion**

Il convient à cette étape de définir pertinemment les modèles utilisés pour modéliser les dynamiques individuelles de chacun des facteurs de risque décrits précédemment. Chaque modèle mathématique ayant ses propres hypothèses et spécificités, le choix du modèle de diffusion est crucial et est fortement impactant. Il s'agit également de l'étape la plus complexe à mettre en œuvre.

— **Etape 4 : Choix des instruments financiers de calibrage**

Cette étape a pour objectif de sélectionner pertinemment les instruments financiers de calibrage de manière à répliquer les contrats du passif. Dans le cadre d'un GSE risque-neutre, les critères à prendre en compte sont l'utilisation de produits financiers suffisamment liquides ainsi qu'une optionalité reflétant le passif de l'assureur.

— **Etape 5 : Choix de la structure de dépendance**

La modélisation des dépendances entre les facteurs de risque modélisés est très importante. Deux choix peuvent être effectués :

1. La première possibilité consiste à modéliser ces dépendances via des matrices de corrélation entre les différents facteurs de risque choisis. En effet, via une factorisation de Cholesky rappelée plus tard dans le mémoire, diffuser des dynamiques corrélées est relativement simple à effectuer. Tout de même, cette méthode n'est pas adaptée aux dépendances non linéaires, ni en cas de valeurs extrêmes.
2. La seconde possibilité qui semble davantage adaptée est l'utilisation de copules. Des structures de dépendance plus complexes peuvent alors être modélisées. Le mémoire de Kamal Armel [3] traite en profondeur de cette thématique.

Une fois ces étapes finalisées, le cadre du GSE est alors fixé.

Enfin, la mise en place de chaque modèle de diffusion nécessite de suivre le process suivant :

— Etape 1 : Calibrage du modèle

Les modèles de diffusion sont, en général, fortement paramétrés. Après avoir défini les paramètres du modèle, l'étape de calibrage consistera à déterminer les paramètres optimaux. Ces derniers seront ceux qui répliqueront le mieux l'instrument de calibrage via le modèle utilisé.

Pour cela, il faudra minimiser les écarts quadratiques entre les données de marché et les données théoriques dépendantes des paramètres du modèle de diffusion.

— Etape 2 : Simulation du modèle

Une fois les paramètres calibrés, la simulation du facteur de risque via le modèle de diffusion peut être effectuée. C'est à cette étape que des structures de dépendance seront utilisées afin de corréliser les divers facteurs de risque.

— Etape 3 : Validation du modèle

Finalement, des tests de validation sont réalisés afin de valider les scénarios générés. Ces tests diffèrent suivant l'univers de probabilité choisi.

1. En univers risque-neutre, les tests de validation sont au nombre de deux :
 - Le test de martingalité qui consiste à vérifier que sous l'hypothèse de probabilité risque-neutre, les prix des actifs financiers actualisés au taux sans risque sont des martingales.
 - Le test de Monte-Carlo permettant de vérifier que l'instrument financier utilisé pour le calibrage est bien répliqué, et donc que le GSE est *market-consistent*.
2. En univers monde réel, les tests de validation ont pour objectif la vérification des propriétés statistiques des distributions des actifs financiers. Entre autres, nous pouvons citer les suivantes :
 - La *skewness*, ou coefficient d'asymétrie, qui mesure l'asymétrie de la distribution de la variable étudiée. La *skewness* d'une distribution normale est nulle.
 - Le *kurtosis*, ou coefficient d'aplatissement, qui mesure l'aplatissement de la distribution de la variable étudiée. Le *kurtosis* d'une distribution normale est égale à 3.

2.2 Univers monde réel ou univers risque-neutre ?

Nous avons le choix entre deux univers pour générer un GSE, soit l'univers réel soit l'univers risque-neutre.

2.2.1 Univers monde réel

L'univers réel se base sur des données historiques et projette les facteurs de risques sur ces données. Le générateur de scénarios économiques sera calibré sur des données historiques et répliquera alors le comportement historique des données.

Ainsi, comme le calibrage se fait sur des données historiques prenant en compte l'aversion au risque des investisseurs passés, l'aversion au risque des investisseurs d'aujourd'hui sera pris en compte implicitement.

2.2.2 Univers risque-neutre

Dans l'univers risque neutre, les agents économiques (i.e les investisseurs présents sur le marché) sont indifférents au risque induisant ainsi par définition une prime de risque nulle lors de l'évaluation des actifs.

La probabilité risque-neutre de cet univers repose sur deux hypothèses importantes, à savoir :

- L'absence d'opportunité d'arbitrage : Dans cet univers, il est impossible d'élaborer une stratégie financière qui, à partir d'un investissement initial nul, assure un gain strictement positif avec une probabilité non nulle dans une date future.
- La complétude des marchés financiers : Un marché financier est complet si chaque flux financier peut être répliqué par un portefeuille composé de l'actif sans risque et des actifs risqués.

La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage et l'hypothèse d'un marché complet sont équivalentes à l'existence d'une unique mesure martingale, appelée probabilité risque-neutre, sous laquelle le prix actualisé au taux sans risque des actifs financiers est une martingale.

Cette probabilité est définie mathématiquement comme suit :

Définition : Soit $P^* \sim P$ une probabilité sur (Ω, \mathbb{F}, P) un espace probabilisé complet.

Soit le prix d'action

$$S = (S_t)_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{F}, P)$$

Et la filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{S_v, v \leq t\} \vee \mathcal{N}_p, \quad t \in [0, T]$$

P^* est une probabilité risque neutre si $S^* = (e^{-rt}S_t)_{t \in [0, T]}$ est une $(\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P^*)$ -martingale. C'est à dire si :

- $S_t \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P^*), \quad t \in [0, T]$
- $\mathbb{E}^*[S_t | \mathcal{F}_v] = S_v, \quad P^*$ presque sûrement, $0 \leq v \leq t \leq T$

Proposition : Nous avons l'équivalence suivante :

- L'absence d'opportunité d'arbitrage
- L'existence d'une probabilité risque-neutre

Dans cet univers, le calibrage des modèles du générateur de scénarios économiques doit être fait sur les prix de marché.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous placerons dans l'univers de probabilité risque-neutre. Plusieurs spécificités sont inhérentes au cadre Solvabilité II, ce qui sera l'objet de la section suivante.

2.3 Les spécificités du GSE sous Solvabilité II

Dans le cadre de Solvabilité II, le GSE a pour objectif la valorisation du Best Estimate et des garanties financières embarquées dans les contrats d'assurance, comme évoqué précédemment. Ces garanties pourront être assimilées à des options financières telles que des options d'achat ou de vente. Ainsi, dans cet objectif de *pricing*, un GSE risque-neutre est préconisé pour la valorisation de l'actif et du passif dans le cadre Solvabilité II.

Par ailleurs, un GSE destiné à la valorisation du BE doit respecter plusieurs contraintes réglementaires :

- La courbe des taux sans risque à utiliser est fournie mensuellement par l'EIOPA. Sa construction ainsi que les revues en cours à ce sujet seront traitées par la suite.
- Le GSE doit être *market-consistent*. L'intérêt de cette approche est d'être cohérente avec les prix en vigueur sur le marché et prend donc implicitement en compte le risque de marché.
- Les instruments financiers utilisés pour le calibrage doivent provenir de marchés financiers profonds, liquides et transparents. Ces produits financiers doivent également être en adéquation avec le profil de risque de l'assureur, notamment en termes d'optionnalité.

Chapitre 3

Socle financier

3.1 Notions sur les taux

Les notions qui vont suivre sont extraites du livre de D. Brigo et F. Mercurio [6].

Définition 1 : (Compte du marché monétaire). Un compte de marché monétaire est un investissement sans risque où les gains sont cumulés de manière continue au taux sans risque du marché. Notons sa valeur $B(t)$ avec $B(0) = 1$ et admettons qu'elle suit l'équation différentielle suivante :

$$dB(t) = r_t B(t) dt,$$

où r_s est le taux *spot* instantané, aussi appelé taux court, \mathbb{F} -adapté et localement intégrable par rapport au temps.

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

Définition 2 : (Facteur d'actualisation stochastique ou déflateur). Un déflateur entre t et T , est le montant en date t qui est équivalent à une unité monétaire payable à la date T . Nous la notons $D(t, T)$ avec :

$$D(t) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$$

Définition 3 : (Obligation zéro-coupon). Une obligation zéro-coupon de maturité T est un actif qui garantit à son détenteur le paiement d'une unité monétaire à l'instant T sans aucun paiement intermédiaire. Notons $P(t, T)$ sa valeur à l'instant $t < T$ observée sur le marché, avec $P(T, T) = 1$.

Définition 4 : (Temps restant jusqu'à maturité). Le temps restant jusqu'à maturité est la différence de temps en années entre la date présente t et la maturité $T > t$. La mesure de ce temps notée $\tau(t, T)$ dépend de la convention de calcul.

Définition 5 : (Convention de calcul). Une convention de calcul est le choix de la mesure du temps entre deux dates. Sur les marchés obligataires, plusieurs conventions sont utilisées :

- Actuel/365 : dans ce système, les années comportent 365 jours
- Actuel/360 : cette convention correspond à des années de 360 jours
- 30/360 : les mois comprennent 30 jours et les années 360 jours
- ...

Ici nous utiliserons :

$$\tau(T, S) = \frac{\text{Nombre de jours entre } T \text{ et } S}{360}$$

3.1.1 Les taux *spot*

Définition 6 : (Taux d'intérêt en composition continue). Le taux d'intérêt en composition continue, noté $R(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unité de monnaie à la date t croît continûment pour atteindre une unité de monnaie à maturité T . Nous obtenons ainsi :

$$P(t, T)e^{R(t, T)\tau(t, T)} = 1$$

Le taux d'intérêt en composition continue s'écrit donc :

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$$

Définition 7 : (Taux d'intérêt en composition simple). Le taux d'intérêt en composition simple, noté $L(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unité de monnaie à la date t croît proportionnellement à l'instant t pour atteindre une unité de monnaie à maturité T . Il en résulte l'expression suivante :

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1$$

Le taux d'intérêt simplement composé s'écrit donc :

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$$

Définition 8 : (Taux d'intérêt en composition annuelle). Le taux d'intérêt en composition annuelle, noté $Y(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unité de monnaie à la date t croît en étant réinvesti une fois par an pour atteindre une unité de monnaie à maturité T . Il en résulte donc :

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1$$

Le taux d'intérêt annuellement composé s'écrit donc :

$$Y(t, T) = \frac{1}{[P(t, T)]^{1/\tau(t, T)}} - 1$$

Ces divers taux *spot* nous permettent ainsi de définir le taux court qui sera la variable d'état de l'un des modèles de taux utilisé par la suite.

Définition 9 : (Taux court). Le taux court à l'instant t , noté $r(t)$, peut être défini comme la limite des taux d'intérêt définis précédemment. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) \\ &= \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) \\ &= \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) \end{aligned}$$

3.1.2 Les taux forward

Pour la définition suivante, nous caractérisons les taux forward par trois dates t, T, S avec $0 \leq t \leq T \leq S$.

- t la date à laquelle nous considérons le taux
- T la date de départ
- S la date de fin

Définition 10 : (Contrat forward). Un contrat forward évalué à l'instant t , d'expiration T , de maturité S et de nominal N , noté $FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K)$, est un contrat payant à son détenteur un taux d'intérêt fixe K à la date S contre le paiement à cette même date d'un taux d'intérêt $L(T, S)$ fixé en T . Son payoff à la date S est :

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S))$$

La valeur de ce contrat à l'instant t est :

$$FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N[P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)]$$

Le taux annulant ce contrat à la date t est le taux forward, défini ci-dessous.

Définition 11 : (Taux forward en composition simple). Le taux forward sur le marché évalué en t , de maturité S et d'expiration T , noté $F(t, T, S)$, est donné par :

$$F(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{P(t, S) \times \tau(T, S)}$$

Définition 12 : (Taux forward instantané). Notons $f(t, T)$ le taux forward instantané évalué en t de maturité T , défini par :

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}$$

Nous avons alors :

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right)$$

3.1.3 Les taux swap

Nous définissons maintenant le contrat swap. Pour cela commençons tout d'abord par décrire un calendrier de paiement aux dates T_i et deux entiers α et β tels que $i, \alpha, \beta \in \{0, \dots, M\}$ avec M la maturité du swap.

Nous notons $\tau_i = \tau(T_{i-1}, T_i)$ et $\mathcal{F} = \{\tau_\alpha, \dots, \tau_\beta\}$.

Définition 13 : (Contrat swap forward). Un contrat swap receveur, de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ est un contrat payant à son détenteur un taux fixe $\tau_i K$, contre le taux Libor $\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, à chaque date T_i , $i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$. Nous notons la valeur de ce contrat en $t < T_\alpha$, $RFS(t, \tau, K)$, donné par :

$$RFS(t, \tau, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) (K - F(t, T_{i-1}, T_i))$$

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de ce contrat en t doit être nulle.

Donc, nous pouvons définir le taux swap forward comme étant la valeur de K , noté K_{eq} , annulant le prix du RFS.

Définition 14 : (Taux swap forward). Le taux swap forward évalué en t , pour les dates τ , noté $S_{\alpha, \beta}(t)$, est le taux qui annule le contrat $RFS(t, \tau, S_{\alpha, \beta}(t))$:

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

Définition 15 : (Taux swap). Le taux swap évalué en t , noté $S_\beta(t)$, est le taux swap forward défini pour $T_\alpha = t$. Il peut donc être défini comme suit :

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

L'hypothèse de *market-consistency* implique de calibrer les modèles de diffusion tels que les modèles de taux sur des actifs financiers liquides. Nous allons donc introduire les instruments financiers couramment utilisés lors des calibrages de modèles de taux.

3.2 Produits financiers sur les taux

Définition 16 : (Option d'achat / de vente européenne). Une option d'achat (de vente) est un contrat qui donne le droit à son détenteur, et non l'obligation d'acheter (de vendre) une quantité donnée d'un actif financier, appelé sous-jacent, à une date ultérieure, appelée l'échéance T , et à un prix convenu à l'avance, le prix d'exercice K . Soit S_t l'évolution du sous-jacent, alors le payoff en T de l'option d'achat est :

$$(S_T - K)^+$$

Définition 17 : (Cap). Un cap est une séquence d'options d'achat de même strike sur la réalisation future d'un taux d'intérêt noté $L(t, T)$ sous-jacent aux dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Il paie à chaque maturité la différence, si elle est positive, entre la réalisation du taux et le strike K . Son payoff actualisé à l'instant t est :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+$$

Définition 18 : (Floor). Un floor est une séquence d'options de vente de même strike sur la réalisation future d'un taux d'intérêt noté $L(t, T)$ sous-jacent aux dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Il paie à chaque maturité la différence, si elle est positive, entre le strike K et la réalisation du taux. Son payoff actualisé à l'instant t est :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))^+$$

Définition 19 : (Swaption). Une swaption est une option d'entrer dans un contrat swap à une date future. Une swaption payeuse donne le droit à son détenteur de mettre en place un swap payeur à la date T_α , de durée (tenor) $T_\beta - T_\alpha$ au taux fixe K en échange du taux Libor forward.

Son payoff actualisé en t s'écrit :

$$E^* \left[D(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Nous pouvons donc considérer une swaption payeuse comme une option de vente sur une obligation à taux fixe avec un strike égal à la valeur nominale de l'obligation.

3.3 Les courbes de taux d'intérêt

Une courbe de taux d'intérêt est une courbe représentant, à une date donnée, les taux d'intérêt correspondant à chaque maturité.

Il existe deux types de courbes de taux :

- Les **courbes de marché** construites directement à partir de cotations sur les marchés, par exemple la courbe des taux swap.
- Les **courbes implicites** obtenues à partir de cotations de marché auxquelles des transformations ont été appliquées, telles que la courbe des taux zéro-coupon présentée par la suite.

3.3.1 Courbe des taux swap

La courbe des taux swap est une courbe de marché construite à partir de taux fixes payés dans un contrat swap contre des taux variables.

Concernant sa construction, pour les maturités supérieures à un an, les cotations des taux fixes de swap sont utilisées pour réaliser la courbe. Cependant, pour les maturités inférieures à un an, des cotations de *future* monétaires telles que les taux Euribor sont utilisées.

3.3.2 Courbe des taux zéro-coupon

La courbe des taux zéro-coupon est une courbe implicite, représentative de taux *spot* en composition annuelle.

En effet, les taux zéro-coupon sont obtenus à partir des prix zéro-coupon qui ne sont pas observables sur le marché. Afin de déterminer les prix zéro-coupon à partir des taux swap de marché, la méthode utilisée est nommée *Bootstrapping*. Elle s'effectue de la manière suivante :

— Pour la première maturité :

$$P(t, T_1) = \frac{1}{1 + \tau_1 S_1(t)}$$

— Pour les maturités suivantes :

$$P(t, T_i) = \frac{1 - S_i(t) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P(t, T_j)}{1 + \tau_i S_i(t)}, \quad i \geq 2$$

La courbe des taux zéro-coupon se déduit alors des prix zéro-coupon par application de la formule des taux en composition annuelle, présentée précédemment.

3.3.3 Courbe des taux règlementaire et sa revue

Courbe des taux règlementaire

Comme évoqué dans les spécificités du GSE sous Solvabilité II, la courbe des taux sans risque à appliquer est imposée et fournie mensuellement par l'EIOPA.

S'agissant d'une courbe de taux zéro-coupon, la construction de cette courbe de taux sans risque nécessite l'usage de taux swap de marché auxquels deux retraitements vont être appliqués : l'ajustement pour risque de crédit, ou *Credit Risk Adjustment* (CRA), et l'ajustement pour volatilité, ou *Volatility Adjustment* (VA). Les taux swap vont être extraits jusqu'au *Last Liquid Point* (LLP) défini à 20 ans, considérée comme la maturité du dernier point liquide des taux swap. La courbe des taux est ensuite extrapolée par la méthode de *Smith-Wilson*, en définissant une limite vers laquelle va tendre le taux forward, nommée *Ultimate Forward Rate* (UFR). Cet UFR a été fixé à 3,6% en 2021.

Ainsi la courbe de taux swap obtenue diffère de la courbe des taux swap observable sur le marché, donc nous ne pouvons pas retrouver les prix de marché. Cela contredit alors l'hypothèse *market-consistent*. Le choix pourrait être fait de calibrer directement sur la courbe des taux swap de marché mais la convention prise est d'utiliser la courbe des taux fournie par l'EIOPA. Ainsi, ne pas être *market-consistent* par rapport au marché financier est une limite que les acteurs assurantiels s'autorisent.

Revue de la courbe règlementaire

La courbe des taux sans risque est utilisée dans le cadre des calculs des provisions techniques et impacte donc directement la valoriation du passif.

Plusieurs problématiques ont alors été mises en avant sur la construction actuelle de la courbe des taux :

- la non adéquation des taux extrapolés avec les taux observables du marché, conduisant à une surestimation du niveau des taux et donc une sous-estimation des provisions techniques. De ce fait, cela va à l'encontre du principe de prudence sur lequel est basée la norme Solavbilité II.
- le niveau de volatilité de la courbe des taux d'intérêt, entraînant une instabilité financière au regard du bilan.
- des stratégies de couverture et de gestion des risques non pertinentes au regard du risque encouru.

L'EIOPA a ainsi proposé une méthode alternative pour la construction de la courbe des taux. Les points essentiels sont les suivants :

- Le *First Smoothing point* (FSP) : les taux pour les maturités allant jusqu'au FSP sont déterminés à l'aide des données de marché. Il joue donc un rôle similaire à celui du LLP dans la méthode de construction actuelle.
- Le *Last Liquid Forward Rate* (LLFR) : il s'agit d'une combinaison pondérée de taux de maturités inférieures et supérieures au FSP avec des pondérations qui dépendent de la liquidité de ces taux selon l'évaluation DLT de l'EIOPA. Le LLFR pour la zone Euro dépend de tous les taux de swap DLT avec une échéance maximale allant jusqu'à 50 ans.
- Une nouvelle méthode d'extrapolation : celle-ci est définie par une fonction qui dépend de l'UFR et du LLFR. Les taux à terme au-delà du FSP sont une moyenne pondérée du LLFR et de l'UFR, où le poids de l'UFR augmente avec la maturité.
- Une vitesse de convergence : elle définit la vitesse de convergence des taux vers l'UFR après le FSP.

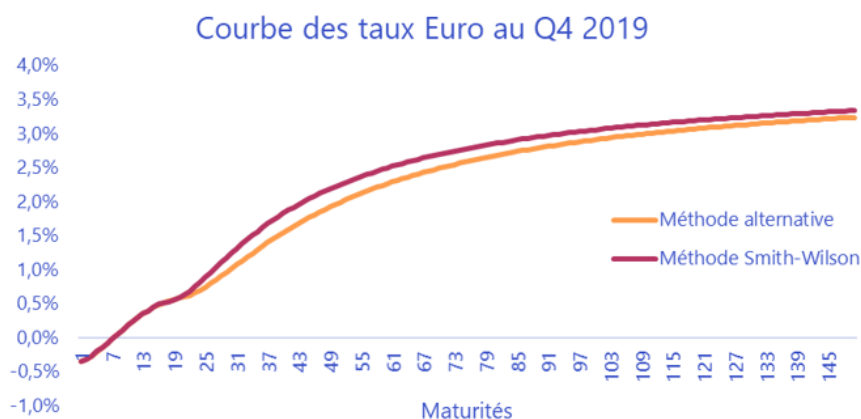


FIGURE 3.1: Comparaison des courbes de taux selon la méthode d'extrapolation

Chapitre 4

Les modèles de taux

Ce mémoire ayant pour but d'étudier en profondeur deux modèles de taux fondamentalement différents, il est donc nécessaire de présenter les diverses classes de modèles de taux existantes ainsi que leurs spécificités.

Dans la littérature, les modèles de taux peuvent être classés selon trois catégories :

- **Modèles de taux court**
- **Modèles de taux dans le cadre Heath-Jarrow-Morton** : Le cadre HJM représente un cadre de modélisation où la variable d'état définissant la structure des taux est le taux forward instantané ou le prix zéro coupon.
- **Modèles de marché** : Ces modèles permettent de modéliser directement le taux Libor Forward déduit du marché et sont ainsi les plus performants, mais aussi les plus complexes à mettre en œuvre.

4.1 Modèles de taux court

La variable d'état définissant la structure des taux dans ces modèles est le taux court. Nous pouvons dissocier les modèles de taux court en deux sous-groupes : ceux à un facteur de risque et ceux multifactoriels.

L'avantage principal des modèles de taux court est le lien direct entre la dynamique du taux court et la dynamique du prix zéro-coupon via l'expression suivante :

$$P(t, T) = E\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Afin de donner une vue d'ensemble des modèles de taux court et ainsi justifier le choix du modèle retenu pour notre étude, nous présenterons dans un premier temps les principaux modèles de cette catégorie.

Les modèles de taux court peuvent être classés en deux catégories :

- Les modèles d'équilibre
- Les modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

4.1.1 Modèles d'équilibre

Les modèles d'équilibre reposent sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques comme l'existence d'un phénomène de retour à la moyenne long terme du taux d'intérêt afin d'en déduire le comportement du taux court.

Le principal inconvénient de ces modèles est qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement avec la courbe de marché initiale contraignant ainsi la martingalité et la risque neutralité des scénarios générés. Présentons les principaux modèles d'équilibre :

Modèle de Vasicek

Dans ce modèle, le taux court suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants. Sa dynamique est :

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma dW_t$$

avec :

- α , β et σ sont des réels strictement positifs
- W_t est un mouvement brownien

Cela représente une dynamique régressive autour de la valeur moyenne α qui modélise le taux d'intérêt moyen à long terme. Le premier terme du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long-terme α avec une vitesse de retour à la moyenne β , σ étant la volatilité du taux court.

Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

La dynamique de ce modèle est la suivante :

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

avec :

- α , β et σ sont des réels strictement positifs vérifiant la condition de Feller : $2\alpha\beta > \sigma^2$
- W_t est un mouvement brownien

Comme le modèle de Vasicek, le premier terme assure au taux de tendre vers la moyenne α . Mais la présence du terme $\sqrt{r_t}$ empêche au taux de devenir négatif, si à l'époque (1985) cela était un avantage, au vue de l'économie actuelle c'est maintenant un réel inconvénient.

4.1.2 Modèles sans opportunité d'arbitrage

Les modèles fondés sur l'AOA sont construits de manière à répliquer la structure par termes des taux observée aujourd'hui. Pour cela, ces modèles vont prendre la structure initiale des taux telle que la courbe des taux EIOPA comme *input* du modèle et non comme *output*. De ce fait, cette propriété permet d'assurer la martingalité des scénarios de prix zéro-coupon générés ce qui est indispensable à la validation du modèle de taux.

Modèle de Ho-Lee

Il s'agit du premier modèle intégrant l'absence d'opportunité d'arbitrage. Sa dynamique est :

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

avec :

- θ une fonction non aléatoire de t
- σ une constante positive

Bien que ce modèle fournisse une solution explicite, nous pouvons néanmoins noter l'absence de phénomène de retour à la moyenne.

Modèle de Hull & White à 1 facteur

Le modèle Hull & White à 1 facteur est un modèle de taux court et à absence d'opportunité d'arbitrage. Le premier fort avantage de ce modèle peut déjà être mentionné : comme évoqué précédemment, les modèles d'AOA ont la capacité de reproduire parfaitement la courbe des taux initiale. Ainsi, ce modèle satisfait à la première exigence du test de martingalité qui est la réplcation des prix zéro-coupon issus de la courbe des taux sans risques fournie par l'EIOPA.

Sous l'hypothèse de l'existence d'une probabilité risque neutre, le comportement du taux court r_t suit la dynamique suivante :

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

Avec :

- a une fonction déterministe du temps qui représente la vitesse de retour à la moyenne
- σ est une fonction déterministe du temps qui représente la volatilité
- θ est une fonction déterministe qui dépend du temps t
- W_t est un mouvement brownien standard par rapport à la probabilité risque-neutre P^*

Le second point faisant que ce modèle est cohérent avec le contexte économique actuel est que sa dynamique de taux court implique la prise en compte des taux négatifs observables aujourd'hui sur le marché.

Cependant, ce modèle présente un défaut majeur. En effet, toute la courbe des taux est déterminée par une seule dynamique de taux court r , ce qui implique que les taux évoluent de manière parfaitement corrélée pour toutes les maturités, ce qui est faux dans la réalité.

4.2 Modèles de taux dans le cadre HJM

Le cadre Heath-Jarrow-Morton (HJM) ne doit pas être perçu comme une classe de modèles proposant une dynamique spécifique pour la variable de taux d'intérêt, mais plutôt

comme un cadre de travail.

Ces modèles sont également fondés sur l'AOA : ils sont donc cohérents avec la courbe des taux initiale.

La classe de modèles HJM modélise la dynamique des taux forward instantanés. En effet, HJM suppose que le taux forward instantané $f(t, T)$, dépendant de l'instant t et de la maturité T , suit le processus suivant :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T) \cdot dW(t)$$

Où :

- μ est un processus adapté et représente le drift
- σ un vecteur de N processus adaptés et représente la volatilité
- $W(t)$ un mouvement brownien N -dimensionnel

Et à l'instant $t = 0$, le taux forward instantané $f(0, T)$ est supposé observable sur le marché.

Heath, Jarrow et Morton montrent alors que, sous la probabilité risque-neutre, la tendance de la dynamique du taux forward instantané vérifie :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^t \sigma(t, s) ds$$

La spécification de la volatilité σ permet de retrouver la dynamique de certaines modèles de taux. A titre d'exemple :

- En supposant $\sigma(t, T) = \sigma$, le modèle de Ho-Lee présenté dans la section précédente est retrouvé.
- En posant $\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}$, le modèle de Vasicek généralisé est obtenu.

Cependant, tout comme les modèles de taux court, les modèles dans le cadre HJM ne modélisent pas un taux d'intérêt observable sur le marché. Les modèles de marché permettent de palier à cet inconvénient.

4.3 Modèles de marché

Les modèles de marché modélisent le taux forward qui est directement déductible du marché. In fine, ces modèles permettent de diffuser simultanément les taux forward pour l'ensemble des maturités souhaitées.

La modèle de marché initial est le modèle nommé *Libor Market Model*. La dynamique fondamentale qui régit ce modèle est que le taux forward suit une dynamique log-normale. Les taux générés sont ainsi strictement positifs, de plus la volatilité déterministe du modèle ne permet pas de répliquer les *smile* et les *skew* de volatilité.

4.3. MODÈLES DE MARCHÉ

Plusieurs extensions permettent alors de palier ces limites, comme le *Displaced Diffusion Libor Market Model* ou le LMM⁺. Ce dernier fera l'objet d'une étude approfondie dans ce mémoire.

Chapitre 5

La modélisation des autres facteurs de risque

La dernière partie de ce mémoire aura pour objectif l'étude des impacts des modèles de taux sur la gestion actif-passif d'un assureur. De ce fait, cette étude nécessitera l'utilisation d'un GSE risque-neutre modélisant en plus du risque de taux l'ensemble des facteurs de risque suivants :

- action
- immobilier
- inflation

Notre objectif étant de donner une vision globale du GSE risque-neutre utilisé au sein du modèle ALM, nous nous restreignons à présenter dans ce chapitre uniquement les modèles relatifs à la diffusion de chacun des risques cités ci-dessus.

Pour chaque modèle, la dynamique de diffusion, les paramètres ainsi que la méthode de calibrage seront brièvement présentés.

5.1 Indice action

L'indice action est diffusé par le modèle nommé *Time Variant Determinist Volatility* (TVDV). Il s'agit d'un modèle log-normal à volatilité par terme déterministe.

Sous la probabilité risque-neutre, la dynamique suivie par l'indice action est :

$$dS_t = (r_t - q) S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

Avec :

- r_t le taux sans risque
- q le taux de dividende
- σ_t la volatilité locale
- W_t un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre

Les volatilités vectorielles locales $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ utilisées dans ce modèle sont supposées constantes par morceaux, permettant donc de prendre en compte la dépendance de la volatilité au temps.

Ces volatilités vectorielles locales sont déduites des volatilités implicites de *call* d'un indice action notées $(\sigma_{\text{call } t}^{\text{market}})_{t \geq 0}$, pour l'ensemble des maturités souhaitées via l'expression suivante :

- Pour la première maturité : $\sigma_1 = \sigma_{\text{call } 1an}^{\text{market}}$
- Pour les maturités suivantes : $\forall t \geq 2, \sigma_t = \sqrt{t (\sigma_{\text{call } t}^{\text{market}})^2 - (t-1) (\sigma_{\text{call } t-1}^{\text{market}})^2}$

5.2 Indice immobilier

L'indice immobilier est diffusé par le modèle de Black-Scholes qui est un modèle log-normal à volatilité constante.

Sous la probabilité risque-neutre, l'indice immobilier suit le processus suivant :

$$dE_t = r_t E_t dt + \sigma^{immo} E_t dW_t$$

Avec :

- r_t le taux sans risque
- σ_{immo} la volatilité de l'indice immobilier
- W_t un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre

Le calibrage de ce modèle est réalisé de manière historique, en se basant sur les données annuelles de l'indice immobilier sur une certaine durée. En effet, les produits dérivés sur immobilier étant très peu liquides, il n'est pas possible d'utiliser les volatilités implicites associées. De ce fait, le paramètre de volatilité est déterminé de façon historique.

5.3 Indice Inflation

L'indice inflation est diffusé par un modèle de Gadmer qui suit la dynamique suivante :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \sigma \times \varepsilon_t^i$$

avec $\varepsilon_t^i \approx N(0, 1)$

Avec :

- r_t le taux sans risque
- α, β, σ les paramètres du modèle
- ε_t^i un aléa de loi normale centrée réduite

Le calibrage du modèle de Gadmer est effectué par régression linéaire sur un historique de longue durée et à pas mensuel d'un indice inflation.

L'utilisation du modèle de Gadmer peut être critiqué du fait qu'il est calibré historiquement et n'est pas martingale. Toutefois, étant donné que notre mémoire se concentre sur le facteur de risque de taux et, compte tenu des temps limités, nous n'avons pas pu développer un modèle d'inflation plus convenable, de type Vasicek à deux facteurs ou Jarrow-Yildirim.

Deuxième partie

Le modèle G2++

Chapitre 6

Théorie du modèle

6.1 Origine du modèle

Cette section aura pour objectif de montrer le cheminement permettant d'aboutir au modèle G2++ ainsi que de justifier la pertinence de ce dernier.

Le modèle G2++ découle d'un modèle multifactoriel dénommé Hull & White à 2 facteurs. Afin de cerner les spécificités de ce modèle, il convient dans un premier temps de rappeler les inconvénients du modèle Hull & White à 1 facteur.

Comme nous l'avons déjà précisé, malgré la réplication de la courbe des taux initiale et la possibilité d'induire des taux négatifs, le modèle à un facteur possède l'inconvénient principal suivant : toute la courbe des taux est déterminée par une seule dynamique de taux court. Les taux vont donc évoluer de manière parfaitement corrélée pour l'ensemble des maturités.

Pour palier à ce défaut, des modèles multifactoriels ont été mis en place.

6.1.1 Modèle Hull & White à deux facteurs

L'évolution logique du modèle Hull & White à 1 facteur est le modèle Hull & White à 2 facteurs dont la dynamique, sous l'hypothèse risque-neutre, est la suivante :

$$dr(t) = [\theta(t) + u(t) - \bar{a}r(t)]dt + \sigma_1 dZ_1(t), \quad r(0) = r_0$$

où le retour à la moyenne stochastique satisfait :

$$du(t) = -\bar{b}u(t)dt + \sigma_2 dZ_2(t), \quad u(0) = 0$$

où Z_1 et Z_2 sont des mouvements browniens de corrélations $\bar{\rho}$. r_0 , \bar{a} , \bar{b} , σ_1 et σ_2 sont des constantes positives et $-1 \leq \bar{\rho} \leq 1$. θ est une fonction déterministe qui reproduit parfaitement la structure par terme des taux d'intérêts.

A la différence du modèle à un facteur, ce modèle fait intervenir deux dynamiques qui ont une interprétation économique : r représente le taux court terme, tandis que u renvoie au taux long terme. Par ailleurs, une différence fondamentale est désormais la prise en

compte d'un mouvement brownien bidimensionnel (Z_1, Z_2) de corrélation $\bar{\rho}$. Cela permet de corréler les taux et ainsi de palier à la limite du modèle monofactoriel.

Nous avons donc pu rappeler l'inconvénient du modèle Hull & White à un facteur et son évolution qui est le modèle à deux facteurs.

Ces brèves descriptions nous permettent alors d'aboutir au modèle allant être étudié et présenté dans l'ouvrage de D. Brigo et F. Mercurio [6] : le modèle G2++.

6.1.2 Pourquoi le choix du modèle G2++ ?

Le modèle G2++ est un modèle gaussien à deux facteurs dont la dynamique du taux court est la somme de deux processus stochastiques gaussiens et d'une fonction déterministe dépendante de la structure par terme des taux initiaux. En ce sens, il possède les mêmes avantages que le modèle Hull & White à deux facteurs.

La dynamique à deux facteurs additifs du modèle G2++ permet néanmoins d'obtenir des formules plus simples de *pricing* et de diffusion que le modèle Hull & White, et facilite donc l'implémentation. Cependant, contrairement au modèle de Hull & White à deux facteurs qui spécifie une dynamique pour le taux court terme et une autre pour le taux long terme, les paramètres du G2++ n'ont pas d'interprétation économique possible, ce qui en fait un modèle moins intuitif.

Par ailleurs, nous pouvons préciser qu'une analogie existe entre les deux modèles. Il est alors possible d'estimer les paramètres du modèle Hull & White à deux facteurs à partir de ceux du modèle G2++. Ce lien entre les modèles est évoqué dans l'ouvrage de D. Brigo et F. Mercurio [6].

Ainsi, le G2++ paraît être un très bon compromis. D'une part, il possède les avantages d'un modèle Hull & White à deux facteurs avec une reproduction de la courbe des taux initiale, une possibilité de générer des taux négatifs et enfin une dynamique à deux facteurs. D'autre part, la somme des processus gaussiens du modèle G2++ permet une plus grande facilité d'implémentation.

6.2 Dynamique du modèle

6.2.1 Dynamique du taux court

Sous l'hypothèse risque-neutre, le processus $(r(t))_{t>0}$ est donné par :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0$$

avec,

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \quad y(0) = 0$$

où W_1 et W_2 sont des mouvements browniens de corrélation ρ . r_0 , a , b , σ et η sont des constantes positives avec a et b qui représentent les paramètres de vitesse de retour à la moyenne et σ et η les paramètres de volatilité, respectivement de $(x(t))_{t>0}$ et $(y(t))_{t>0}$.

D'après le lemme d'Itô et par intégration entre les instants s et t tels que $s < t$, nous avons :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t)$$

Il est possible d'exprimer les dynamiques de x et y en ayant recours à deux mouvements browniens indépendants, que nous noterons W_1^{ind} et W_2^{ind} . Pour cela, il a fallu réaliser une décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance de $(W_1(t), W_2(t))$.

Nous avons alors :

$$dW_1(t) = dW_1^{ind}(t), \quad dW_2(t) = \rho dW_1^{ind}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^{ind}(t)$$

La corrélation doit vérifier que : $-1 \leq \rho < 1$.

Nous pouvons alors réécrire le processus $(r(t))_{t>0}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1^{ind}(u) + \eta \rho \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_1^{ind}(u) \\ + \eta \sqrt{1 - \rho^2} \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2^{ind}(u) + \varphi(t) \end{aligned}$$

Il existe une formule fermée du prix zéro-coupon dépendante des paramètres du modèle G2++ et du taux court $(r(t))_{t>0}$, permettant de simplifier les calculs et la génération des scénarios économiques. Le raisonnement permettant d'aboutir à cette expression est l'objet de la section suivante.

6.2.2 Pricing des obligations zéro-coupon

Rappelons que le prix $P(t, T)$ d'une telle obligation zéro-coupon à l'instant t et de maturité T s'écrit comme suit :

$$P(t, T) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t)$$

où \mathbb{E} est l'espérance sous la probabilité risque neutre.

Il faut déterminer la loi de $\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t$ pour ensuite déterminer l'espérance, donc dans le cas du G2++ nous avons :

$$\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t = \int_t^T [x(u) + y(u) + \varphi(u)] du | \mathcal{F}_t$$

L'intégrale $\int_t^T \varphi(u) du$ conditionnée par l'information en t nécessite une réflexion distincte qui sera réalisée par la suite. Débutons d'abord par la loi de :

$$\int_t^T [x(u) + y(u)] du | \mathcal{F}_t = \int_t^T x(u) du | \mathcal{F}_t + \int_t^T y(u) du | \mathcal{F}_t$$

Après intégrations par parties successives, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_t^T x(u) du &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) dW_1(u) \\ \int_t^T y(u) du &= \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{\eta}{b} \int_t^T (1 - e^{-b(T-u)}) dW_2(u)\end{aligned}$$

Ainsi, nous remarquons que $\int_t^T [x(u) + y(u)] du$ sachant \mathcal{F}_t suit une distribution gaussienne conditionnelle de moyenne :

$$M(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)$$

et de variance :

$$V(t, T) = Var\left(\frac{\sigma}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)}) dW_1(u) + \frac{\eta}{b} \int_t^T (1 - e^{-b(T-u)}) dW_2(u) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a + b} \right)\end{aligned}$$

A ce stade, il reste à définir la fonction φ .

En repartant de la définition d'une obligation zéro-coupon $P(t, T) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t)$, nous remarquons que $P(t, T)$ est l'espérance d'une variable log-normale conditionnellement à l'information en t . Nous obtenons avec φ qui est une fonction déterministe :

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T \varphi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T)\right) \quad (6.1)$$

Le modèle G2++ est un modèle d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ainsi, la fonction déterministe φ est entièrement déterminée par les données initiales et réplique parfaitement la courbe des taux initiaux. Montrons alors que nous avons pour tout T :

$$\varphi(t) = f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

avec $f(0, T)$ le taux forward instantané à $t = 0$ et de maturité T induit par la structure par terme des prix zéro-coupon du marché $T \mapsto P(0, T)$, c'est-à-dire :

$$f(0, T) = -\frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} \quad (6.2)$$

Cela suppose que l'allure de la courbe $T \mapsto P(0, T)$ soit suffisamment régulière, ce qui est le cas pour la courbe des prix zéro-coupon EIOPA utilisée dans la diffusion.

Pour coïncider avec la courbe des prix zéro-coupon initiale, il est nécessaire d'avoir :

$$P(0, T) = \exp\left(-\int_0^T \varphi(u) du + \frac{1}{2}V(0, T)\right)$$

Ainsi, en composant chaque membre de l'équation par le logarithme népérien puis en dérivant par rapport à la variable T , il en résulte que :

$$f(0, T) = \varphi(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T}(V(0, T))$$

Nous aboutissons alors à l'expression souhaitée de φ permettant de répliquer la courbe des prix zéro-coupon :

$$\varphi(T) = f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

en rappelant que,

$$\begin{aligned} V(0, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du + \frac{\eta^2}{b^2} \int_0^T (1 - e^{-b(T-u)})^2 du \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})(1 - e^{-b(T-u)}) du \end{aligned}$$

De plus, en remarquant que :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(u) du\right) = \exp\left(-\int_0^t \varphi(u) du\right) + \exp\left(-\int_0^T \varphi(u) du\right)$$

La formule explicite de φ est équivalente à :

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi(u) du\right) = \frac{P(0, T)\exp\left(-\frac{1}{2}V(0, T)\right)}{P(0, t)\exp\left(-\frac{1}{2}V(0, t)\right)} \quad (6.3)$$

D'après cette égalité, nous nous apercevons qu'il n'est pas nécessaire de dériver la courbe des prix zéro-coupon (i.e la courbe $T \mapsto P(0, T)$). Cette courbe est déduite de la courbe de l'EIOPA, fournie mensuellement, qui n'est disponible que pour un nombre fini de maturités. L'expression de φ fait intervenir les taux forward instantanés de marché. Pour rappel, comme l'indique l'équation (6.2), ces derniers sont obtenus en dérivant le logarithme népérien de la fonction des prix zéro-coupon de marché par rapport à la seconde variable, ce qui peut être source d'approximations.

Cependant, pour le pricing des prix zéro-coupon par formule fermée, seule l'intégrale entre deux dates données de la fonction φ est nécessaire et cette dernière ne requiert pas de dériver la fonction $T \mapsto P(0, T)$, comme le suggère l'égalité (6.3).

Nous avons alors défini tous les outils nécessaires au pricing de l'obligation zéro-coupon, nous aboutissons alors à :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp(\mathcal{A}(t, T)) \quad (6.4)$$

$$\mathcal{A}(t, T) = \frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) \quad (6.5)$$

6.2. DYNAMIQUE DU MODÈLE

que nous pourrions synthétiser sous la forme :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T, a)x(t) - B(t, T, b)y(t)} \quad (6.6)$$

où :

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(\frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))\right)$$

$$B(t, T, z) = \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}, \quad \forall z > 0$$

Nous utiliserons cette dernière formulation pour démontrer la formule du prix d'une swap-tion.

Pour finir, la dynamique de $(r(t))_{t>0}$ étant désormais parfaitement définie, il est possible d'estimer la probabilité que r soit négatif à un instant donné à partir des paramètres du modèle, pour valider les simulations du taux court $(r(t))_{t>0}$ obtenues, ou afin de calibrer le modèle sous contrainte de probabilité de taux négatifs.

À l'instant t , l'espérance et la variance sous la mesure risque-neutre du taux court $r(t)$ sont données par :

$$\mu_r(t) = \mathbb{E}(r(t)) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})$$

$$\sigma_r^2(t) = \text{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at}) + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-2bt}) + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}(1 - e^{-(a+b)t})$$

La probabilité d'avoir un taux court négatif à l'instant t est alors obtenue par :

$$P^*(r(t) < 0) = \Phi\left(-\frac{\mu_r(t)}{\sigma_r(t)}\right)$$

où Φ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les deux sections précédentes ont permis d'explicitier les dynamiques du taux court et du prix d'une obligation zéro-coupon via des formules fermées dépendantes des paramètres du modèle. Nous avons donc toutes les informations permettant de réaliser la diffusion du modèle G2++.

Cependant, pour réaliser cette diffusion, il est nécessaire de déterminer les paramètres optimaux, c'est-à-dire d'effectuer l'étape de calibrage.

Dans notre cas, le calibrage sera effectué sur les swaptions. Les raisons relatives au calibrage sur swaption, à l'optionalité ainsi qu'au choix des maturités seront traitées dans le chapitre suivant.

Pour effectuer le calibrage, il faut déterminer le prix de marché de la swaption choisie que nous minimiserons avec le prix théorique de cette swaption via le modèle G2++. Ce prix théorique doit dépendre des paramètres du modèle afin de pouvoir effectuer l'optimisation et ainsi déterminer les paramètres calibrés.

La section suivante aura pour objectif de fournir tous les outils nécessaires afin de réaliser le calibrage.

6.3 Pricing d'une swaption

6.3.1 Pricing d'une swaption de marché

Pricing via le modèle de Black

Nous allons utiliser la formule de Black & Scholes pour calculer le prix des swaptions observées sur le marché. Pour cela nous utilisons la méthode suivante donnée par le livre de D. Brigo et F. Mercurio [6].

Définition 20 : Définissons les grandeurs suivantes :

- T_α la maturité de la swaption (c'est-à-dire l'échéance de l'option)
- σ_{BS} la volatilité du taux swap forward (définition 14), calculée et observée sur le marché
- $T_{\alpha+1} < \dots < T_\beta$ sont les dates de versement de coupon du swap

Le swap débute en T_α , c'est-à-dire à l'échéance de l'option, et se termine en T_β . Le swap est composé de versement d'un taux constant contre un taux variable à chaque temps T_i , $i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$.

La valeur de la swaption payeuse, dont le sous-jacent est le taux swap décrit supra, avec la formule de Black & Scholes est donnée par la formule suivante :

$$P_{B\&S}(t, K) = C_{\alpha,\beta}(t)(S_{\alpha,\beta}(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

avec,

$$C_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_1 et d_2 sont données par :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t)}{K}\right)}{\sigma_{BS}\sqrt{T_\alpha}} + \frac{\sqrt{T_\alpha}\sigma_{BS}}{2} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{BS}\sqrt{T_\alpha}$$

Le modèle de pricing de Black & Scholes suppose que le sous-jacent de l'option suit une dynamique log-normale. Nous dirons alors par abus de langage que la volatilité implicite associée à l'option est une volatilité log-normale.

Pricing via le modèle de Bachelier

Le modèle de Bachelier permet également de *pricer* des swaptions à partir du strike et de la volatilité observée sur le marché.

La différence entre le modèle de Black & Scholes et le modèle de Bachelier est que le second utilise une diffusion normale du sous-jacent pour le pricing de l'option, au lieu d'une diffusion log-normale pour le premier modèle.

Nous appellerons par abus de langage la volatilité associée au modèle de Bachelier une volatilité normale.

6.3. PRICING D'UNE SWAPTION

Soit une swaption payeuse de maturité T_α , de strike K et de volatilité σ_N .

Soit $T_{\alpha+1} < \dots < T_\beta$ les dates de versements du swap. Le tenor de la swaption est donc $T_\beta - T_\alpha$.

La formule de Bachelier pour le prix de cette swaption ATM (*At-The-Money*) est alors :

$$P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_N \sqrt{T_\alpha} \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(0, T_i) \right)$$

Remarque : L'absence d'opportunité d'arbitrage signifie que lorsque nous sommes sous une probabilité risque neutre le prix de chaque instrument financier est le même (unicité du prix). Donc le prix de la swaption d'après le modèle de Black & Scholes et le prix de la swaption d'après le modèle de Bachelier doivent être égaux.

D'après cette remarque, il est intéressant de noter qu'il est donc possible d'obtenir les volatilités log-normales à partir des volatilités normales, et inversement, lorsque les swaptions sont ATM via l'expression suivante :

$$\sigma_{BS} = \frac{2}{\sqrt{T_\alpha}} \Phi^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_N \sqrt{T_\alpha}}{\sqrt{2\pi S_{0,n}(0)}} \right) \right) \quad (6.7)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

6.3.2 Pricing d'une swaption via le modèle G2++

Expression générale

Soit $PS(0, T, \mathcal{T}, N, X)$ le prix d'une swaption payeuse à la date actuelle $t = 0$, de maturité T , de nominal N , donnant le droit à son détenteur d'entrer à l'instant $T = t_0$ un contrat swap de calendrier de paiements $\mathcal{T} = (t_0, \dots, t_n)$ et payant un taux fixe X (strike) et recevant le taux LIBOR. Avec $\tau_i, i = 1, \dots, n$ représente la différence de temps en année entre t_{i-1} et t_i , et $c_i = X\tau_i, i = 1, \dots, n-1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$.

De façon similaire nous définissons $RS(0, T, \mathcal{T}, N, X)$ le prix d'une swaption receveuse de mêmes caractéristiques.

Avec ces notations, nous noterons le prix d'une swaption $ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, 1)$ tel que $PS(0, T, \mathcal{T}, N, X) = ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, 1)$ et $RS(0, T, \mathcal{T}, N, X) = ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, -1)$.

Avant de continuer, définissons l'univers T-forward-neutre, appelé également T-forward, qui est l'univers dont le numéraire est le zéro-coupon $P(t, T)$. Cette dénomination provient du fait que le taux forward $F(t, S, T)$ en composition simple est une martingale dans l'univers T-forward-neutre, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}^T(F(t, S, T) | \mathcal{F}_u) = F(u, S, T), \quad 0 \leq u \leq t \leq S \leq T$$

Le prix $ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, w)$ est égal sous la mesure T-forward, associée au numéraire $P(t, T)$:

$$\begin{aligned} ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, w) &= NP(0, T) \mathbb{E}^T \left[\left(w \sum_{i=1}^n P(T, t_i) \tau_i (F(T, t_{i-1}, t_i) - X_i) \right)^+ \right] \\ &= NP(0, T) \mathbb{E}^T \left[\left(w \left(1 - \sum_{i=1}^n c_i P(T, t_i) \right) \right)^+ \right] \end{aligned}$$

6.3. PRICING D'UNE SWAPTION

avec $c_i = \tau_i X$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $c_n = 1 + X\tau_n$ et $w \in \{-1, 1\}$.

En remplaçant $P(T, t_i)$ par l'expression obtenue dans (4.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned} ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, w) &= NP(0, T) \mathbb{E}^T \left[\left(w \left(1 - \sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i, a)x(T) - B(T, t_i, b)y(T)} \right) \right)^+ \right] \\ &= NP(0, T) \int_{\mathbb{R}^2} \left(w \left(1 - \sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i, a)x(T) - B(T, t_i, b)y(T)} \right) \right)^+ f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

avec f la densité de probabilité du vecteur $(x(T), y(T))$, en notant que :

$$(x(T), y(T)) \sim \mathcal{N} \left((\mu_x(T), \mu_y(T)), \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \\ \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y & 1 \end{pmatrix} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_x &= -M_x^T(0, T) \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-a(T-u)}) + \rho \frac{\sigma\eta}{b} (1 - e^{-b(T-u)}) \right) e^{-a(t-u)} du \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-aT}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t)}) - \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} (e^{-b(T-t)} - e^{-bT-at}) \\ \mu_y &= -M_y^T(0, T) \\ &= \int_0^t \left(\frac{\eta^2}{b} (1 - e^{-b(T-u)}) + \rho \frac{\sigma\eta}{a} (1 - e^{-a(T-u)}) \right) e^{-b(t-u)} du \\ &= \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-bT}) - \frac{\eta^2}{2b^2} (e^{-b(T-t)} - e^{-a(T+t)}) - \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} (e^{-a(T-t)} - e^{-aT-bt}) \\ \sigma_x &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}} \\ \sigma_y &= \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2bT}}{2b}} \\ \rho_{xy} &= \frac{\rho\sigma\eta}{(a+b)\sigma_x\sigma_y} (1 - e^{-(a+b)T}) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$f(x, y) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho_{xy} \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right) \right]}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}$$

Nous obtenons alors :

$$ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, w) = NP(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\bar{y}}^{+\infty, w} \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{-B(T, t_i, b)y(T)} \right) \gamma e^{E(x)+F(x)(y-\mu_y)-G(x)(y-\mu_y)^2} dy dx$$

avec :

$$\begin{aligned}\lambda_i(x) &= c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i, a)x} \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \\ E(x) &= -\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \\ F(x) &= \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}^2} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x\sigma_y} \\ G(x) &= \frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y^2}\end{aligned}$$

Pour la suite du calcul, nous avons besoin d'utiliser le résultat suivant pour alléger les étapes de calcul :

$$\int_a^b e^{-Au^2+Bu} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}} e^{\frac{B^2}{4A}} \left[\Phi\left(b\sqrt{2A} - \frac{B}{\sqrt{2A}}\right) - \Phi\left(a\sqrt{2A} - \frac{B}{\sqrt{2A}}\right) \right]$$

avec $A > 0$, a , b et B sont des constantes réelles, et après quelques étapes de calcul supplémentaires, le prix $ES(0, T, T, N, X, !)$ de la swaption considérée est donné par :

$$ES(0, T, \mathcal{T}, N, X, w) = NwP(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \left(\Phi(-wh_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{-\kappa_i(x)} \Phi(-wh_2(x)) \right) dx$$

avec :

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \frac{\bar{y} - \mu_y}{\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2} - \frac{\rho_{xy}(x-\mu_x)}{\sigma_x\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}} \\ h_2(x) &= h_1(x) + B(T, t_i, b)\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2} \\ \lambda_i(x) &= c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i, a)x} \\ \kappa_i(x) &= -B(T, t_i, b) \left(\mu_y - \frac{1}{2}(1-\rho_{xy}^2)\sigma_y^2 B(T, t_i, b) + \rho_{xy}\sigma_y \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)\end{aligned}$$

et $\bar{y} = \bar{y}(x)$ est l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i, a)x - B(T, t_i, b)\bar{y}} = 1$$

Approximation de Schrager & Pelsser

Dans le cadre du modèle G2++, le prix de la swaption correspond à une formule semi-fermée composée d'une intégrale de support \mathbb{R} ainsi que d'une équation non linéaire dépendante la variable à intégrer.

Réaliser le calibrage en utilisant ce pricing pour la swaption a déjà été réalisé dans d'autres papiers comme le mémoire de Paul Bonnefoy [5] et celle-ci s'avère lourde en calcul (approximation d'intégrale, utilisation des polynômes de Legendre, etc...) et longue (plusieurs dizaines de minutes avec l'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead dans l'hypothèse d'une convergence optimale). De plus, le calibrage est très dépendant des paramètres d'initialisation de l'algorithme de Nelder-Mead.

Ainsi, deux alternatives sont possibles :

- la première est d'initialiser les paramètres de manière aléatoire dans un intervalle d'appartenance assez large, puis de calibrer le modèle avec chaque initialisation, pour finalement en déduire les paramètres qui induisent la plus petite valeur de la fonction de calibrage. Cependant, en considérant la durée d'un calibrage, le nombre conséquent d'initialisations nécessaire pour créditer cette méthode, cette dernière présente un coût en temps de calcul important.
- l'autre possibilité est d'utiliser l'approximation mise en lumière par Schrager et Pelsser [24]. Cette dernière mène à une formule analytique simple du prix d'une swaption ATM. Les travaux réalisés par Schrager et Pelsser ont exposé son efficacité pour les modèles affines.

Le prix d'une swaption ATM dans le modèle G2++, à l'instant $t = 0$, donnant le droit à son détenteur d'entrer à l'instant $T = T_\alpha$ dans un swap de calendrier de paiements $\mathcal{T} = (T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta)$, payant le taux swap $S_{\alpha,\beta}(0)$ et recevant le LIBOR, et de nominal 1, est alors approximé (Schrager et Pelsser) par :

$$PS^{SP}(0, T_\alpha, \mathcal{T}, N = 1, S_{\alpha,\beta}(0)) = A_\alpha^\beta(0) \frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.8)$$

avec,

$$\begin{aligned} A_\alpha^\beta(t) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \\ \sigma_{\alpha,\beta} &= \left[\sigma^2 (C_{\alpha,\beta}^{(1)})^2 \left(\frac{e^{2aT_\alpha} - 1}{2a} \right) + \eta^2 (C_{\alpha,\beta}^{(2)})^2 \left(\frac{e^{2bT_\alpha} - 1}{2b} \right) + 2\rho\sigma\eta C_{\alpha,\beta}^{(1)} C_{\alpha,\beta}^{(2)} \left(\frac{e^{(a+b)T_\alpha} - 1}{a+b} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ C_{\alpha,\beta}^{(1)} &= \frac{1}{a} \left[e^{-aT_\alpha} P^A(0, T_\alpha) - e^{-aT_\beta} P^A(0, T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i e^{-aT_i} P^A(0, T_i) \right] \\ C_{\alpha,\beta}^{(2)} &= \frac{1}{b} \left[e^{-bT_\alpha} P^A(0, T_\alpha) - e^{-bT_\beta} P^A(0, T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i e^{-bT_i} P^A(0, T_i) \right] \\ P^A(t, T_i) &= \frac{P(t, T_i)}{A_\alpha^\beta(t)} \end{aligned}$$

Le lecteur souhaitant une démonstration approfondie de la formule supra peut revenir à l'article de Schrager & Pelsser [24].

Afin d'appréhender cette formule de pricing, un parallèle peut être effectué entre l'expression de Schrager et Pelsser et la formule de pricing d'une swaption normale via l'expression

6.3. PRICING D'UNE SWAPTION

de Bachelier.

En effet, pour rappel, la formule de Bachelier pour le prix d'une swaption *at-the-money* est la suivante :

$$P_B = A_\alpha^\beta(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_N \sqrt{T_\alpha}$$

Ainsi, une équivalence entre l'expression de Schrager et Pelsser et celle de Bachelier peut être réalisée de la façon suivante :

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sigma_N \sqrt{T_\alpha}$$

Les deux *pricing* sont donc très similaires. Le terme $\sigma_{\alpha,\beta}$, qui est la volatilité paramétrique, peut être considérée comme une volatilité normale de marché pondérée par la racine de la maturité associée.

Ce chapitre nous a permis de déterminer le prix de marché d'une swaption ainsi que le prix théorique d'une swaption via le modèle G2++. Nous pouvons désormais passer à l'étape de calibrage.

Chapitre 7

Méthodologie de calibrage

Ce chapitre aura pour objectif de mettre en avant certaines problématiques relatives au calibrage qui n'ont pas encore été abordées, détailler le calibrage dans le cadre du modèle G2++ et enfin présenter des résultats.

7.1 Problématiques liées au calibrage

7.1.1 L'optionnalité des instruments

La première problématique non encore abordée concerne la *moneyness* (i.e la différence existante entre le prix d'exercice d'une option, et la valeur de son sous-jacent) des options à utiliser pour le calibrage. Trois types de *moneyness* existent :

- *in-the-money, ITM* : une option est dite *in-the-money* si l'exercice immédiat de l'option entraîne un cash-flow positif pour le détenteur. Une option payeuse (respectivement receveuse) est donc *in-the-money* si la valeur du sous-jacent est supérieure (respectivement inférieure) au strike.
- *at-the-money, ATM* : une option est dite *at-the-money* si l'exercice immédiat de l'option entraîne un cash-flow nul. Une option payeuse ou receveuse est donc *at-the-money* si la valeur du sous-jacent est égale au strike.
- *out-the-money, OTM* : une option est dite *out-the-money* si l'exercice immédiat de l'option entraîne un cash-flow négatif. Une option payeuse (respectivement receveuse) est donc *in-the-money* si la valeur du sous-jacent est inférieure (respectivement supérieure) au strike.

Concernant le modèle G2++, le calibrage sera effectué seulement sur les volatilités ATM. En effet, ce modèle de taux est intéressant car il répond aux exigences d'un GSE risque-neutre sous Solvabilité II tout en étant assez facile d'accès. Tout de même, ce modèle n'est pas adapté à la réplication des *smile* et *skew* de volatilité (i.e dépendance des volatilités aux niveaux des strike des options associées dessinant une courbe sous format de *smile* ou une courbe plutôt pentifiée *skew*) présents dans les swaptions ITM/OTM .

7.1.2 Le choix des maturités

Dans le marché, le choix des maturités est associé à la nature du passif de l'assureur souvent indexé sur la durée du passif. Ainsi le choix doit se faire en fonction du portefeuille d'assurance à valoriser.

Des méthodes plus innovantes existent sur le marché afin de mieux répliquer les zones de la nappe ayant des erreurs significatives, par exemple : la méthode du vega/BE qui consiste à calculer la sensibilité du Best Estimate à chaque point de la nappe de calibrage et l'optimiser pour en déduire la surface de la nappe de volatilité idéale.

7.1.3 Prix de Black ou prix de Bachelier ?

Considérer un prix de marché via la formule de Black impose d'utiliser des volatilités implicites log-normales.

Effectuer le pricing de la swaption via la formule de Bachelier implique l'utilisation de volatilités normales.

Dans le contexte économique actuel, les taux continuent de baisser jusqu'à devenir négatifs. Or, le modèle de Black suppose que le sous-jacent suit une dynamique log-normale, ie. que les taux sont positifs. Cette hypothèse implique notamment des volatilités log-normales explosives, à court terme.

Au contraire, le contexte des taux bas n'a aucune incidence sur les volatilités normales qui supposent une dynamique normale du sous-jacent.

Par conséquent, dans le cadre de notre calibrage, des swaptions normales seront utilisées et un pricing de Bachelier sera réalisé.

7.2 Données en *input* et paramètres à calibrer

Le calibrage et la diffusion du modèle G2++ ne nécessite que deux éléments :

- la courbe des taux sans risque initiale qui correspond à la courbe fournie mensuellement par l'EIOPA
- une matrice de swaption (normale dans notre cas)

Le calibrage peut ainsi être effectué et aura pour objectif de déterminer les cinq paramètres optimaux suivants :

- a et b qui sont les paramètres de vitesse de retour à la moyenne respectivement des dynamiques x et y
- σ et η correspondant aux paramètres de volatilité respectivement de x et y
- ρ qui est la corrélation du mouvement brownien bidimensionnel (W_1, W_2)

7.3 Minimisation quadratique

Le calibrage du modèle G2++ est rendu complexe par le nombre de paramètres à estimer : $(a, b, \sigma, \eta, \rho)$.

Une minimisation des écarts relatifs quadratiques des prix ou bien des écarts absolus quadratiques des prix peut être réalisée. Nous avons pu constater que minimiser les écarts relatifs quadratiques apportait de meilleurs résultats en termes de stabilité du calibrage et de réplication de la matrice de swaption : c'est cette approche qui sera donc présentée par la suite.

Ainsi, afin de déterminer ces paramètres nous devons résoudre :

$$\operatorname{argmin}_{(a,b,\sigma,\eta,\rho) \in (\mathbb{R}^+)^4 \times [-1,1]} \left(\sum_{m \in M, t \in T} \omega_{m,t} \left(\frac{PS^{G2++}(0, m, t, a, b, \sigma, \eta, \rho) - PS(0, m, t)}{PS(0, m, t)} \right)^2 \right) \quad (7.1)$$

Avec :

- $PS(0, m, t)$ le prix de marché d'une swaption (ie. le prix d'une swaption issu du pricing avec Bachelier) évalué en $t = 0$, de maturité m et de ténor t
- $PS^{G2++}(0, m, t, a, b, \sigma, \eta, \rho)$ le prix théorique d'une swaption obtenu avec le modèle G2++ évalué en $t = 0$, de maturité m , de ténor t et avec les paramètres a, b, σ, η, ρ associés (ie. le prix d'une swaption via l'approximation de Schrager & Pelsser)
- $\omega_{m,t}$ la pondération de l'écart relatif quadratique sur le prix de maturité m et de ténor t

Le lecteur peut s'interroger sur la raison d'un calibrage sur des prix de swaption au lieu de volatilités. En effet, bien que le modèle G2++ à travers la formule de Schrager et Pelsser permette d'obtenir une formule fermée des volatilités normales d'une swaption, un calibrage sur les prix permet d'une part une meilleure stabilité et d'autre part cela est conforme à la pratique utilisée par les acteurs du marché. De plus, certains modèles ne peuvent être calibrés que sur les prix, comme nous le verrons avec le modèle LMM+, cette méthode de calibrage permet donc une meilleure comparabilité entre les modèles.

7.4 Résultats de calibrage

Les résultats suivants concernent les données de marché du 4^{ème} trimestre de l'année 2020. Nous avons calculé les prix théoriques des swaptions pour l'ensemble de la nappe de volatilité, ie. pour des maturités allant de 1 à 5 années, puis 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des ténors de 1 à 10 ans, puis 15, 20, 25 et 30 ans. Pour calculer les prix sur le marché nous avons utilisé les strike à la monnaie (ce sont les taux swap calculés à partir de la courbe EIOPA) et les volatilités observées sur le marché pour ces dates.

Les premiers éléments à analyser concernant le calibrage sont :

- la convergence de la fonction objectif
- la non-saturation des paramètres obtenus
- la bonne réplication de la matrice de swaption avec les paramètres calibrés

7.4.1 Convergence de l'optimisation et paramètres calibrés

Afin de pouvoir avoir davantage de recul sur le calibrage du modèle G2++, nous avons utilisé deux algorithmes pour comparer les résultats.

7.4. RÉSULTATS DE CALIBRAGE

- Le premier est l'algorithme de Nelder-Mead. Cet algorithme permet de trouver le minimum ou le maximum d'une fonction à plusieurs variables. Cette technique est une méthode de recherche de minimum (ou de maximum) heuristique, c'est-à-dire que l'algorithme ne garantit pas un résultat optimal. En effet, un défaut de cet algorithme est qu'il s'arrête au premier minimum local trouvé, ainsi le résultat dépend majoritairement du point d'origine choisi, qui dans notre cas est choisi aléatoirement. Un avantage principal qu'il possède est qu'il ne nécessite pas de calcul de gradient, il est dit que l'algorithme est d'ordre zéro. Le second avantage est qu'il est particulièrement rapide et efficace comparativement aux autres algorithmes d'ordre zéro.
- Le second algorithme est celui de Marquardt-Levenberg. Cet algorithme permet lui aussi de trouver le minimum d'une fonction à plusieurs variables. Celui-ci nécessite, à la différence de l'algorithme de Nelder-Mead, le calcul du gradient, cela lui permet de converger vers l'optimum même s'il est très loin au départ. Cependant, pour ces raisons, le temps de calcul nécessaire afin de converger est plus élevé que l'algorithme de Nelder-Mead.

Nous pouvons désormais présenter les résultats obtenus concernant la convergence du calibrage :

Algorithme	a	b	σ	η	ρ	Erreur absolue
Nelder-Mead	2.67×10^{-1}	2.73×10^{-2}	1.10×10^{-2}	8.45×10^{-3}	-9.77×10^{-1}	5.34×10^{-3}
Marquardt Levenberg	2.64×10^{-1}	2.79×10^{-2}	1.13×10^{-2}	8.68×10^{-3}	-9.79×10^{-1}	4.99×10^{-3}

TABLE 7.1: Résultat du calibrage du modèle G2++

Nous pouvons déjà avoir un avis sur le calibrage concernant deux points évoqués précédemment : la convergence de la fonction objectif et la non-saturation des paramètres obtenus.

Le calibrage est très satisfaisant avec une très bonne convergence via les deux algorithmes d'optimisation, ce qui démontre déjà une certaine stabilité du calibrage. Par ailleurs, les paramètres optimisés obtenus via les deux algorithmes étant très semblables, l'atteinte d'un minimum semble être satisfaite. De plus, les paramètres optimisés ne saturent pas, c'est-à-dire qu'ils n'atteignent pas les bornes extrêmes imposées. Tout de même, le paramètre ρ se rapprochant fortement de la borne inférieure -1 peut être discutée. Cela pourrait provenir de l'influence de ce paramètre sur le prix d'une swaption qui est moindre que les autres paramètres, ce qui l'amènerait à tendre vers une borne extrême. Ce point sera approfondi dans l'étude de la robustesse du modèle.

7.4.2 Les volatilités ATM résultant du calibrage

Les résultats précédents montrent des résultats très satisfaisants concernant le calibrage du modèle G2++.

Le dernier point à étudier afin d'évaluer l'efficacité du calibrage concerne la comparaison des écarts entre les volatilités prises sur le marché et les volatilités obtenues après calibrage. Par ailleurs, sachant que les paramètres calibrés obtenus via les deux algorithmes d'optimisation sont quasi-identiques, les volatilités normales induites par le modèle de

7.4. RÉSULTATS DE CALIBRAGE

taux avec ces mêmes paramètres seront aussi quasi-semblables. Nous présenterons donc uniquement les résultats obtenus avec l'algorithme de Nelder-Mead.

De plus, des écarts absolus et non relatifs seront présentés. En effet, pour de faibles ténors et maturités, les volatilités de swaption sont très faibles. De ce fait, cela peut induire des écarts relatifs élevés pour cette partie de la nappe de volatilité. Néanmoins, cela ne remet pas en cause le calibrage ; à l'inverse, les écarts absolus permettent d'observer un écart homogène à chaque point de la nappe ce qui rend l'interprétation plus pertinente. Enfin, pour ces raisons, la pratique de marché est d'analyser des écarts absolus de volatilité, il est donc important de s'y conformer.

Voici la matrice des écarts absolus sur l'ensemble de la nappe de volatilité entre les deux matrices évoquées :

Maturité / Ténor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	
1	0,02%	-0,01%	0,02%	0,00%	0,02%	0,02%	0,03%	0,04%	0,04%	0,04%	0,04%	0,02%	-0,02%	-0,06%	
2	-0,02%	-0,02%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,01%	-0,03%	-0,07%
3	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,07%
4	-0,04%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,01%	-0,03%	-0,06%
5	-0,04%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,06%
7	-0,04%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,00%	-0,03%	-0,06%
10	-0,03%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,05%
15	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,03%
20	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%
25	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	
30	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,04%	0,04%	0,04%	0,05%	

FIGURE 7.1: Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage

Nous pouvons constater qu'à nouveau les résultats obtenus via le G2++ sont très convaincants. En effet, les écarts obtenus sur la réplification de la matrice de swaption sont très satisfaisants sur l'ensemble de la nappe de volatilité. Les erreurs sont les plus élevées sur les ténors extrêmes, notamment le ténor 30 ans : les volatilités pour ce ténor présentent le plus de courbure ce qui rend plus difficile la réplification, pouvant expliquer ces erreurs. En moyenne, celles-ci sont quand même assez faibles.

Nous avons pu constater à travers ces premiers résultats que le calibrage répond aux attentes en termes de convergence et de réplification de la nappe de volatilité.

Par ailleurs, il est important de rappeler que la courbe des taux sans risque est fournie mensuellement et que le calibrage est souvent effectué chaque trimestre. Les swaptions de marché sont donc également régulièrement modifiées. Ainsi, un modèle de taux a besoin d'avoir un calibrage robuste suivant ces deux éléments. De ce fait, la section suivante aura pour objectif de fournir des éléments de réponse concernant la stabilité et la robustesse du calibrage.

7.5 Etude de la robustesse du calibrage

Nous présenterons des éléments permettant de juger de la robustesse du calibrage. Pour cela, deux études ont été réalisées :

- le calibrage du modèle sur plusieurs années d'exercice
- le multi-start

7.5.1 Calibrage suivant les années d'exercice

Comme évoqué dans la section précédente, il est nécessaire d'objectiver la stabilité du modèle de taux suivant l'utilisation de diverses courbes de taux sans risque et de matrices de swaption.

Nous allons donc procéder au calibrage sur cinq années d'exercice, de 2016 à 2020, toujours au 4^{eme} trimestre. A chaque année d'exercice correspondent une courbe de taux EIOPA et une matrice de swaption spécifiques. Obtenir des résultats toujours aussi satisfaisants sur l'ensemble des années d'exercice permettrait donc de fortement conforter l'idée d'une stabilité du modèle.

Premièrement, il est nécessaire de partager quelques éléments sur les *input* utilisés afin de montrer que notre étude fait sens. En effet, nous allons d'abord établir des comparaisons sur les volatilités normales des diverses années d'exercice. Cela a pour objectif de mettre en avant les fortes disparités concernant l'évolution des volatilités sur les diverses années. Ainsi, si le modèle a la capacité de calibrer de manière convenable chacune de ces matrices de swaption, alors nous pourrions effectivement conclure sur sa stabilité.

Nous allons donc comparer les volatilités des swaptions pour une maturité ou un ténor donné.

Comparaison des volatilités de marché suivant les années d'exercice pour une maturité donnée

Présentons dans un premier temps les volatilités de marché pour toutes les années d'exercice et pour trois maturités données : 1 an, 5 ans et 20 ans.

7.5. ETUDE DE LA ROBUSTESSE DU CALIBRAGE

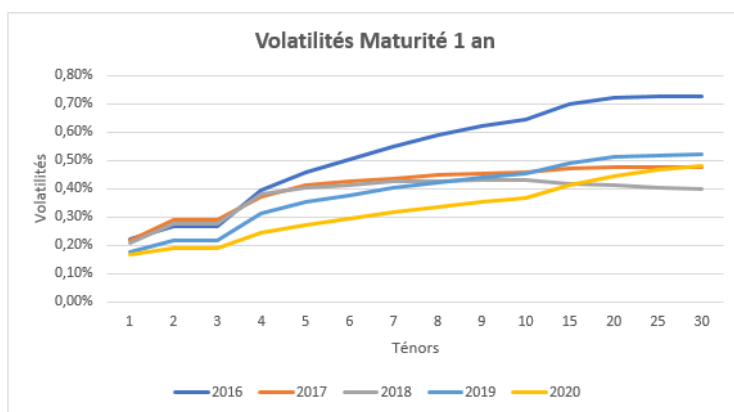


FIGURE 7.2: Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 1 an, suivant les années d'exercice

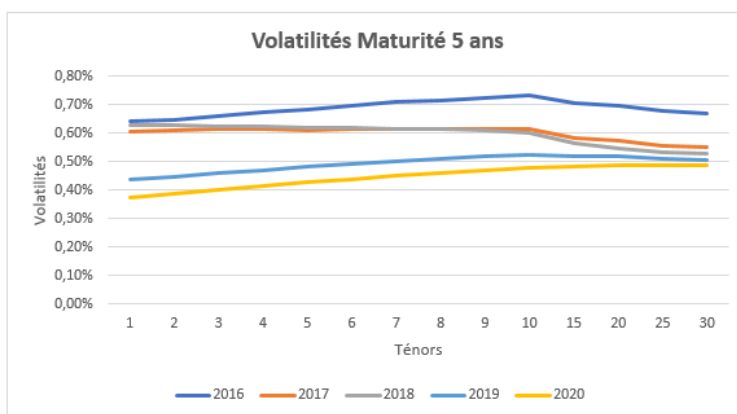


FIGURE 7.3: Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 5 ans, suivant les années d'exercice

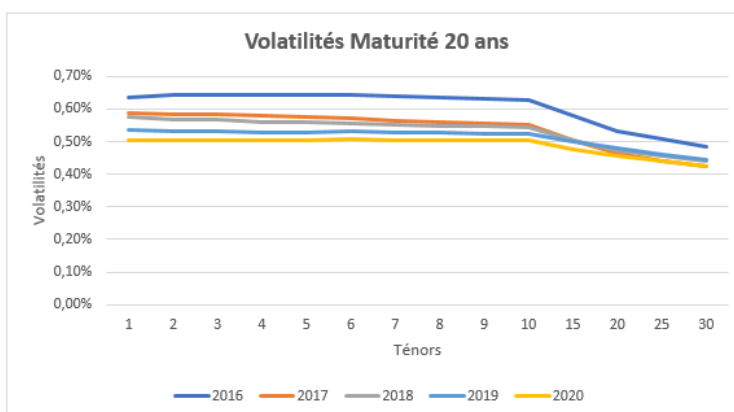


FIGURE 7.4: Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 20 ans, suivant les années d'exercice

7.5. ETUDE DE LA ROBUSTESSE DU CALIBRAGE

Nous pouvons constater que, selon les années d'exercice, les niveaux de volatilité varient assez fortement pour les faibles maturités. Par exemple, pour les maturités 1 an et 5 ans, l'année 2016 a des niveaux de volatilités bien plus élevés pour de grands ténors.

Comparaison des volatilités de marché suivant les années d'exercice pour un ténor donné

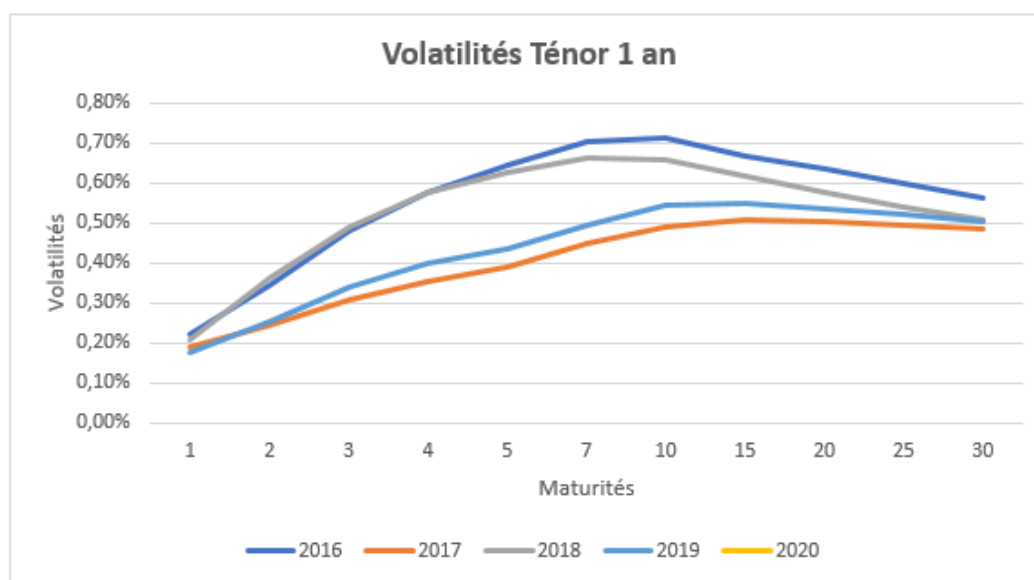


FIGURE 7.5: Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 1 an, suivant les années d'exercice

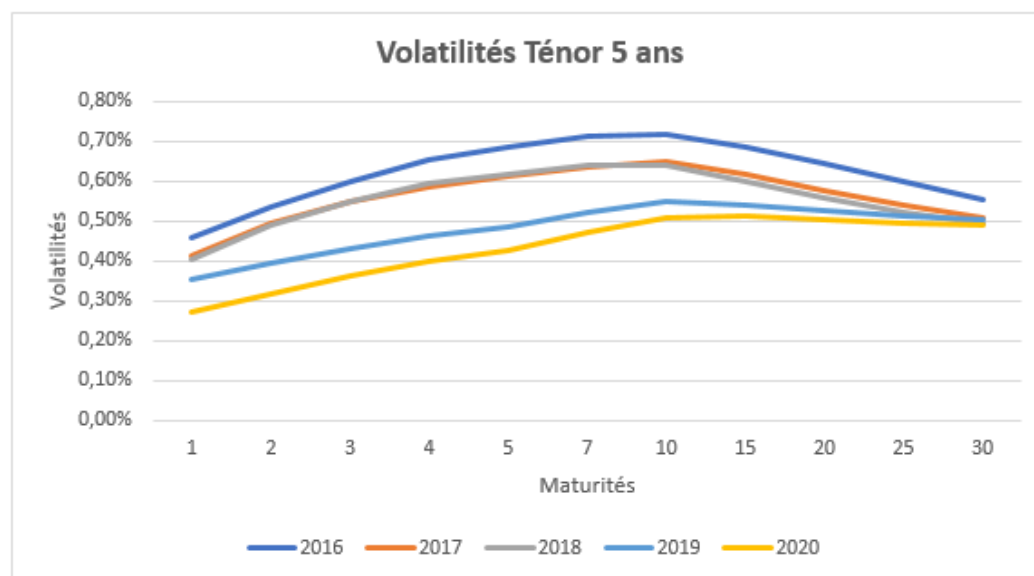


FIGURE 7.6: Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 5 ans, suivant les années d'exercice

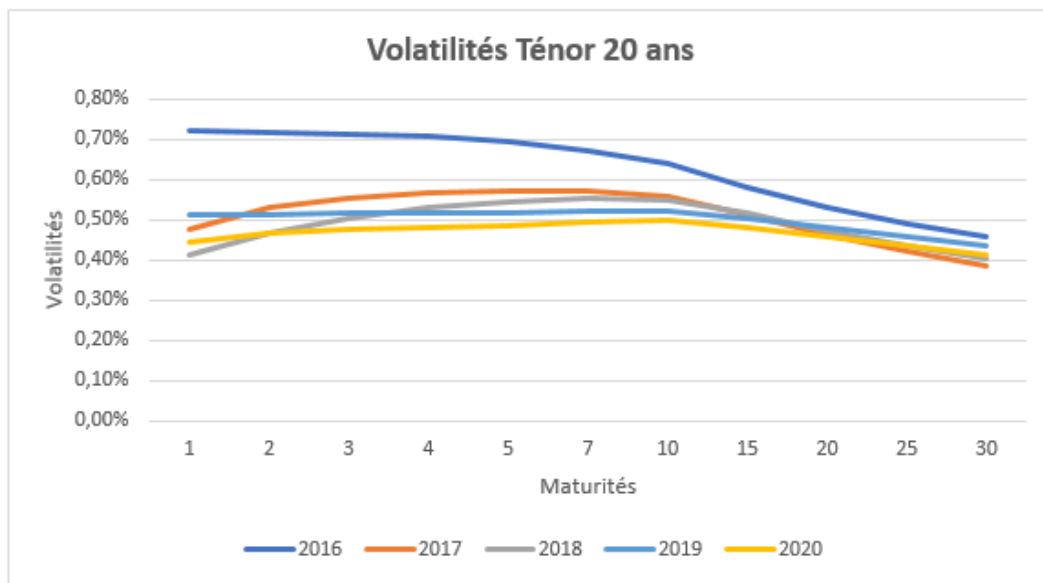


FIGURE 7.7: Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 20 ans, suivant les années d'exercice

Pour un ténor donné, ce sont les niveaux de courbure qui, selon les années d'exercice, varient assez fortement. En effet, les volatilités en fonction des maturités sont parfois quasi-linéaires comme pour le ténor 1 an et l'année 2017. A l'inverse, pour le ténor 1 an et l'année 2016 par exemple, la courbure est fortement prononcée ce qui implique une difficulté de réplcation accrue.

Ainsi, nous avons pu remarquer que, pour de faibles maturités et ténors, les volatilités de marché diffèrent fortement suivant les années d'exercice en termes non seulement de niveaux de volatilité mais aussi de niveaux de courbure. De ce fait, si le modèle $G2++$ réplique de façon satisfaisante ces diverses matrices de swaption, alors nous pourrions considérer que le modèle est stable.

Comparaison des niveaux de taux sans risque suivant les années d'exercice

Afin de compléter les études venant d'être présentées concernant les volatilités de marché très variables selon les années d'exercice, il convient de procéder à la comparaison sur les niveaux de taux sans risque. En effet, le second *input* du modèle de taux est la courbe de taux fournie par l'EIOPA. Procéder à la même étude permettra donc de mettre en avant ces fortes disparités concernant l'évolution des taux sur les diverses années. Ainsi, nous pourrions statuer sur la stabilité du modèle au regard de ces niveaux de taux.

Ce graphique montre de manière explicite que les taux sans risque ont fortement chuté avec les années, avec une accentuation à partir de l'année 2019. Par exemple, tandis qu'en 2016, seuls les taux correspondant aux trois premières maturités étaient négatifs, l'année 2020 présente des taux négatifs jusqu'à une échéance de 20 ans. Par ailleurs, cet écart est atténué à partir de la maturité 20 ans dû à l'extrapolation de Smith-Wilson comme détaillé dans la partie consacrée à la construction de la courbe de taux fournie par l'EIOPA. Tout de même, ces niveaux de taux très variables seront challengeants pour le

7.5. ETUDE DE LA ROBUSTESSE DU CALIBRAGE

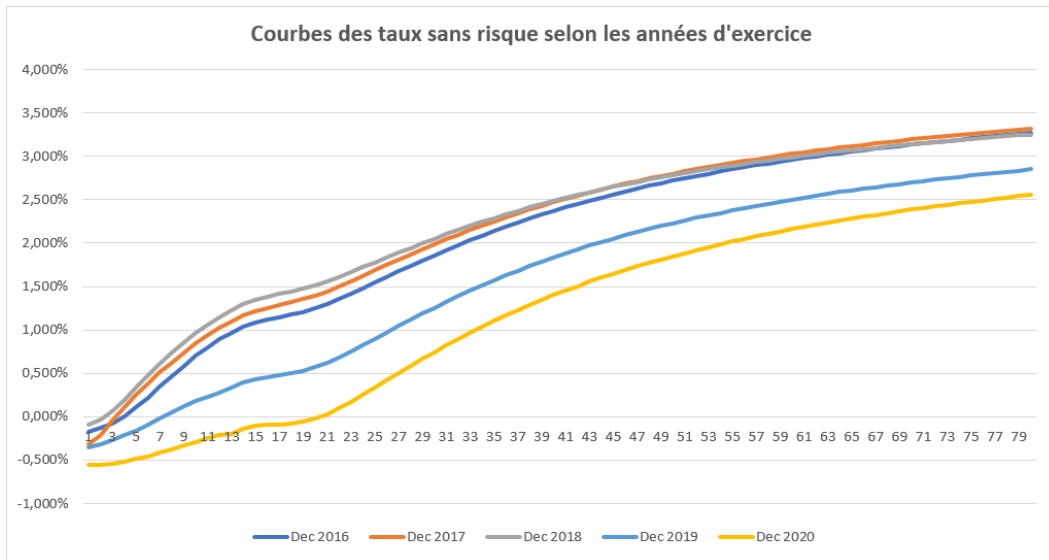


FIGURE 7.8: Comparaison des courbes de taux sans risque, suivant les années d'exercice

modèle et permettront donc également d'objectiver la stabilité de celui-ci.

A travers ces études sur l'évolution des volatilités de marché et des taux sans risque suivant les années d'exercice, nous avons pu montrer que calibrer sur plusieurs exercices avait beaucoup de sens pour justifier la robustesse du modèle en cas de résultats satisfaisants.

Présentation des résultats des calibrages suivant les années d'exercice

La même méthodologie de calibrage que celle présentée dans la section précédente a été effectuée, en calibrant sur l'ensemble de la nappe de volatilité. Par ailleurs, sachant que cette section s'attache à montrer la stabilité du calibrage dans le temps et que les deux algorithmes de calibrage semblent différer de façon mineure, seuls les résultats des calibrages via l'algorithme de Nelder-Mead seront présentés.

Nous pouvons désormais présenter les résultats obtenus concernant la convergence du calibrage :

Année	a	b	σ	η	ρ	Erreur absolue
2020	2.67×10^{-1}	2.73×10^{-2}	1.10×10^{-2}	8.45×10^{-3}	-9.77×10^{-1}	1.94×10^{-4}
2019	4.12×10^{-1}	2.25×10^{-2}	1.10×10^{-2}	7.59×10^{-3}	-9.75×10^{-1}	1.52×10^{-4}
2018	9.16×10^{-1}	2.87×10^{-2}	2.00×10^{-2}	7.83×10^{-3}	-9.98×10^{-1}	2.98×10^{-4}
2017	3.02×10^{-2}	7.85×10^{-1}	8.11×10^{-3}	1.77×10^{-2}	-9.84×10^{-1}	2.97×10^{-4}
2016	2.30×10^{-1}	1.29×10^{-2}	1.12×10^{-2}	8.78×10^{-3}	-9.80×10^{-1}	4.11×10^{-4}

TABLE 7.2: Résultats des calibrages du modèle G2++, suivant les années d'exercice

Les calibrages effectués sont très satisfaisants puisqu'ils présentent une très bonne convergence ainsi qu'une non saturation des paramètres, ce qui confirme la stabilité du calibrage du modèle G2++.

Seule l'année 2018 présente une valeur élevée pour le paramètre de vitesse de retour à la moyenne a mais la borne extrême reste non atteinte.

D'autre part, le paramètre de corrélation reste fortement attiré par la borne -1.

De plus, la grande rapidité du calibrage est maintenue avec un temps de calibrage toujours de quelques secondes : de ce fait, la simplicité du modèle donne les résultats attendus.

En moyenne, les écarts absolus sont très bons sur la majeure partie de la nappe de volatilité. Seuls les ténors extrêmes, notamment les ténors 1 an et 30 ans, ainsi que la maturité 1 an présentent des écarts absolus plus élevés ce qui n'est pas dérangeant.

Par conséquent, malgré les fortes disparités relatives aux volatilités de marché ainsi qu'aux taux sans risque, le calibrage du modèle G2++ délivre des résultats similaires et très satisfaisants. La robustesse du calibrage est donc confortée.

Un dernier point d'une grande importance est la dépendance des résultats du calibrage suivant les paramètres d'initialisation. Pour cela, nous allons effectuer du multi-start.

7.5.2 Multi-Start

Cette étude permettra de déterminer l'effet des paramètres d'initialisation sur les résultats du calibrage. En effet, le principe du multi-start est simple : cela consiste à réaliser un grand nombre de calibrages en initialisant à chaque fois les paramètres de manière aléatoire. Les étapes successives du multi-start sont donc les suivantes :

- Choix du nombre d'itérations à effectuer
- Choix de l'intervalle de valeurs que peut prendre chaque paramètre, une loi uniforme sur cet intervalle sera ensuite effectuée afin d'initialiser chaque paramètre
- Réalisation des calibrages pour chaque set de valeurs aléatoires avec les *output* préalablement choisis dont les paramètres avant et après calibrage, la valeur de la fonction objectif après calibrage, le temps de calibrage

Dans notre cas, le multi-start a été réalisé sur les données de marché du 4^{ème} trimestre de l'année 2020. L'algorithme d'optimisation utilisé est celui de Nelder-Mead.

De plus, nous avons effectué 1000 calibrages.

Les paramètres de vitesse de retour à la moyenne a et b ainsi que les paramètres de volatilité σ et η ont été déterminés par une loi uniforme entre 0 et 1, et le paramètre de corrélation ρ a été déterminé via une loi uniforme entre -1 et 1.

Nous présenterons ci-dessous les résultats satisfaisants en termes de calibrage, soit avec une fonction objectif très faible et une non-saturation des paramètres calibrés. Par conséquent, le reste des scénarios non partagés présentent au moins une des deux anomalies évoquées.

Nombre de scénarios	a	b	σ	η	ρ	Erreur absolue
206	2.79 %	26.42 %	0.87 %	1.13 %	-97.96 %	4.99×10^{-6}
212	26.42 %	2.79 %	1.13 %	0.87 %	-97.96 %	4.99×10^{-6}

TABLE 7.3: Résultats satisfaisants du multi-start via le modèle G2++

Plusieurs points importants sont à souligner.

Premièrement, nous constatons que 41.8 % des calibrages effectués aboutissent à une très bonne convergence avec des paramètres calibrés non saturés. Tous ces scénarios ont

pour erreur absolue quadratique 4.99×10^{-6} , ce qui peut naturellement laisser penser qu'il s'agit d'un minimum global. Sachant que les paramètres ont tous été initialisés de manière aléatoire avec un intervalle de valeurs assez large, les résultats obtenus sont satisfaisants. Deuxièmement, concernant les résultats non satisfaisants, 48.7 % concernent une valeur finale de la fonction objectif dont l'ordre de grandeur est différent de 10^{-6} que nous considérons comme une non-convergence de l'algorithme de calibrage, et le restant des calibrages concernent une bonne convergence de l'optimisation mais avec des paramètres calibrés saturés.

D'autre part, il est important de mentionner que, malgré l'initialisation aléatoire des paramètres, tous les calibrages effectués ont à nouveau duré quelques secondes. Par conséquent, nous pouvons constater que la rapidité du modèle est toujours vérifiée.

Comme explicité dans le tableau précédent, un résultat intéressant a pu être découvert grâce au multi-start. En effet, nous avons pu mettre en lumière des effets de compensation sur les paramètres du modèle G2++. En prenant en compte les calibrages satisfaisants du multi-start, c'est-à-dire avec une bonne convergence de la fonction objectif et une non saturation des paramètres, nous obtenons les corrélations entre paramètres suivantes :

Corrélations	a	b	σ	η	ρ
a	100.0 %				
b	-100.0 %	100.0 %			
σ	100.0 %	-100.0 %	100.0 %		
η	-100.0 %	100.0 %	-100.0 %	100.0 %	
ρ	7.3 %	-7.3 %	7.3 %	-7.3 %	100.0 %

TABLE 7.4: Corrélations des paramètres calibrés

Ces résultats sont tout de même compréhensibles.

En effet, les paramètres a et σ (respectivement les paramètres b et η) sont corrélés à 100.0 % ce qui est cohérent sachant qu'ils interviennent dans la dynamique de x (respectivement dans la dynamique y).

D'autre part, la corrélation ρ entre les mouvements browniens des équations de x et y est d'environ -98 %. Cela peut donc expliquer les corrélations de -100.0 % entre les paramètres régissant l'équation de x ie. a et b , et l'équation de y ie. σ et η .

Cette étude sur le multi-start a donc permis de mettre en avant la relative bonne efficacité du calibrage du modèle G2++. En effet, même en initialisant les paramètres sur des intervalles assez larges, environ 42 % des calibrages sont satisfaisants. Tout de même, cela a pu également montrer que l'initialisation des paramètres a un fort impact sur les résultats obtenus, pouvant conduire à l'atteinte de minimum locaux et non globaux. Enfin, la mise en lumière des effets de compensation sur les corrélations entre les paramètres calibrés donne beaucoup d'informations sur le comportement du modèle. Cela pourrait également constituer un axe d'étude sur l'utilisation de *machine learning* pour calibrer le modèle G2++, mais cela ne constitue l'objet de notre mémoire.

Chapitre 8

Validation du modèle

Pour valider notre calibrage et donc notre modèle créant la base de notre GSE, il est nécessaire d'effectuer deux tests sur les résultats obtenus. Le premier test, appelé test de martingalité, permet de vérifier que notre GSE est sans risque. Le second, appelé test de Monte-Carlo, permet de vérifier que notre GSE est *market-consistent*.

La validation du calibrage est une étape primordiale dans un GSE puisque c'est elle qui permettra l'utilisation opérationnelle du GSE.

8.1 Diffusion du modèle

Rappelons dans un premier temps la dynamique du taux court $(r(t))_{t>0}$ via le modèle G2++. $\forall t > s \geq 0$:

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1^{ind}(u) + \eta\rho \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_1^{ind}(u) + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2^{ind}(u) + \varphi(t)$$

La diffusion et la validation étant réalisées au 4^{ème} trimestre de 2020, rappelons les paramètres calibrés à cette date :

Algorithme	a	b	σ	η	ρ
Nelder-Mead	2.67×10^{-1}	2.73×10^{-2}	1.10×10^{-2}	8.45×10^{-3}	-9.77×10^{-1}

TABLE 8.1: Paramètres calibrés du modèle G2++ au 4^{ème} trimestre de 2020

Nous pouvons maintenant montrer les résultats des test de martingalité et de *market-consistency* nécessaires à la validation du modèle de taux.

8.2 Test de martingalité

Le test de martingalité consiste à vérifier que sous l'hypothèse de probabilité risque-neutre, les prix actualisés des actifs financiers sont des martingales. Si cela est vérifié alors nous aurons l'absence d'opportunité d'arbitrage. Pour les modèles de taux, le test de

martingalité revient à vérifier l'hypothèse de martingalité pour les déflateurs. Cela signifie que les trajectoires moyennes des déflateurs doivent être proches du taux zéro-coupon pour tout instant $t \geq 0$, i.e :

$$\mathbb{E}[D(t)] \approx P(0, t)$$

avec,

$$D(t) = \prod_{i=0}^{t-1} P(i, i+1)$$

Pour vérifier cela, nous allons simuler les taux à l'aide de notre modèle et vérifier que la valeur moyenne des déflateurs calculés avec les taux diffusés est proche de la valeur des zéro-coupons initiaux obtenus à partir de la courbe EIOPA.

L'espérance dans notre cas revient à considérer la moyenne sur les scénarios générés par la méthode de Monte-Carlo.

Nous pourrions aussi remarquer que le test de martingalité revient également à vérifier que le rapport entre la moyenne des trajectoires des déflateurs et le prix du zéro-coupon est proche de 1 :

$$\frac{\mathbb{E}[D(t)]}{P(0, t)} \approx 1$$

La construction d'intervalles de confiance a été préconisée par l'ACPR dans sa revue sur les GSE [1]. Nous avons donc construis un intervalle de confiance au niveau $\alpha=5\%$ par la méthode de Monte-Carlo :

$$IC = \left[\mathbb{E}(D(t)) - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \mathbb{E}(D(t)) + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right]$$

où,

- $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite
- s_n est l'estimateur de la variance des trajectoires de $D(t)$
- n est le nombre de simulations

Résultat du test de martingalité pour le modèle G2++

Les deux graphes suivants présentent les résultats du test de martingalité.

8.2. TEST DE MARTINGALITÉ

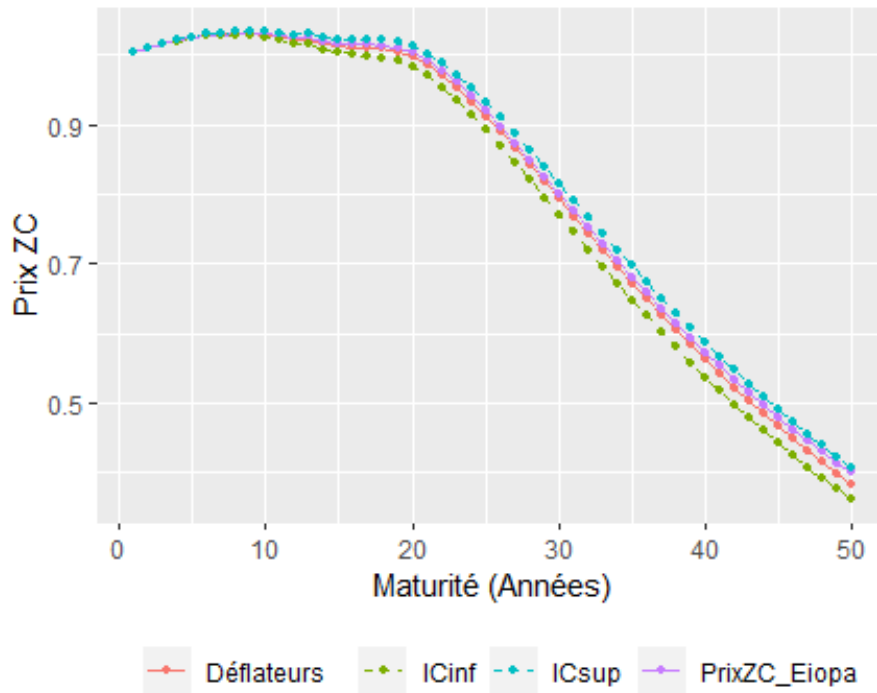


FIGURE 8.1: Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur les prix zéro-coupon

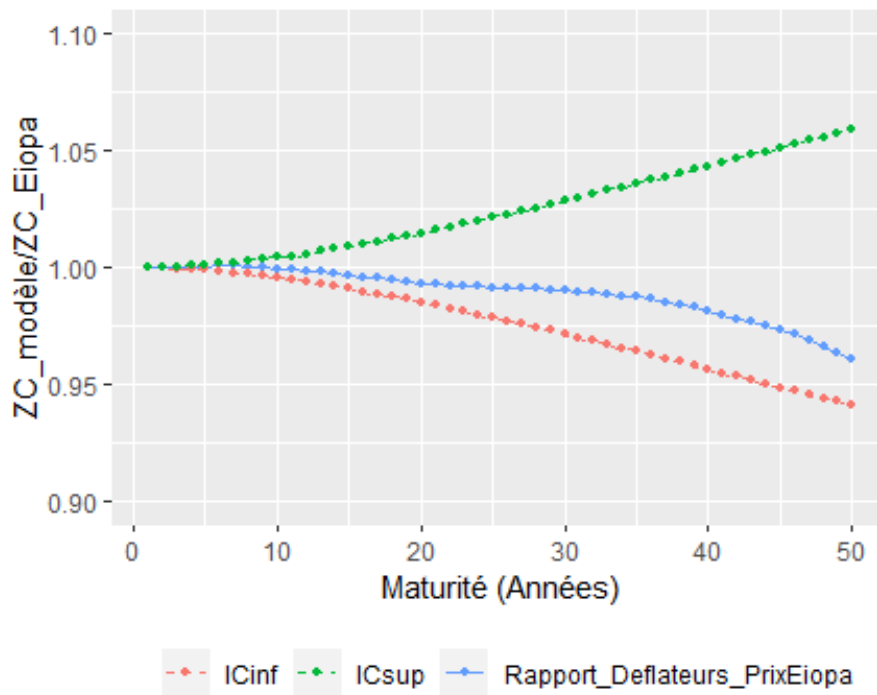


FIGURE 8.2: Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur le rapport des prix zéro-coupon $\frac{PrixZC(G2++)}{PrixZC(EIOPA)}$

Le test martingale du modèle G2++ est efficace avec une erreur relative maximale à moins de 3 %. A noter que les assurances investissent généralement jusqu'à une maturité de 20 ans et rarement au dessus. Ces très bons résultats nous permettent donc de valider ce test pour ce modèle.

8.3 Test de Monte-Carlo

Ce test est, comme son nom l'indique, basé sur la méthode de Monte-Carlo.

Rappelons alors la loi forte des grands nombres :

Théorème : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$. Alors :

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \mathbb{E}(X_1)\right) = 1$$

Nous allons donc faire le pricing risque-neutre d'une swaption avec la méthode de Monte-Carlo. La risque-neutralité vient de l'application de l'espérance à l'ensemble des simulations.

Pour faire cela, nous devons diffuser les taux jusqu'à une maturité donnée T_α puis calculer à cet instant le payoff à l'aide de la formule $(S_{T_\alpha} - Strike)^+$ où S_{T_α} est le taux swap à l'instant T_α . Il faut ensuite multiplier cela par la valeur de ce swap entre T_α et T_β .

Nous appliquons alors la formule du payoff du swaption en T_α , notée $Swaption_{T_\alpha}$, à un grand nombre de scénarios et nous prenons la moyenne en actualisant avec les déflateurs :

$$Swaption_{T_\alpha, T_\beta} = (S_{T_\alpha} - Strike)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1})P(T_\alpha, T_i)$$

Ainsi le prix simulé avec Monte-Carlo doit se rapprocher du prix observable sur le marché.

Résultat du test de Monte-Carlo pour le modèle G2++

Tout d'abord, présentons les écarts absolus entre notre matrice de swaption reconstituée à partir du pricing via le modèle G2++ et notre matrice de volatilités déterminée via la méthode Monte-Carlo :

8.4. CONCLUSION SUR LE MODÈLE G2++

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,09%	0,14%	0,14%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%	0,15%	0,15%	0,15%
2	0,09%	0,12%	0,13%	0,13%	0,13%	0,12%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,12%	0,12%	0,12%	0,11%
3	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,09%	0,08%	0,08%	0,08%
4	0,09%	0,09%	0,09%	0,08%	0,08%	0,07%	0,07%	0,07%	0,07%	0,06%	0,06%	0,05%	0,05%	0,04%
5	0,09%	0,08%	0,07%	0,06%	0,05%	0,05%	0,04%	0,04%	0,04%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%
7	0,06%	0,05%	0,05%	0,05%	0,04%	0,04%	0,04%	0,03%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%
10	0,04%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%
15	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
20	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%
25	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%
30	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%

FIGURE 8.3: Ecarts absolus entre les volatilités Monte-Carlo et les volatilités de la swap-tion après calibrage

Conclusion : Ce test met en avant des écarts entre les volatilités pricées via le modèle G2++ et les volatilités Monte Carlo obtenues à partir de notre diffusion qui sont globalement corrects. Nous notons plus précisément une très bonne adéquation des deux volatilités pour des maturités élevées, notamment à partir de 5 ans, tandis que les écarts maximaux se trouvent à des maturités très faibles, entre 0 et 3 ans. Ces écarts plutôt élevés peuvent donc représenter une limite de la formule de Schragger et Pelsser quant à la répliation des volatilités.

Toutefois, il est à noter qu'une confrontation de la formule de Schragger et Pelsser à la formule analytique du modèle G2++ peut faire l'objet d'une étude dédiée pour de futurs travaux.

Ainsi, cela achève la partie Validation de notre GSE et nous pouvons conclure que, tout comme le test de martingalité, le test de *market-consistency* est réussi pour notre modèle de taux : le G2++.

8.4 Conclusion sur le modèle G2++

A l'issue de ces travaux, nous avons donc pu étudier le modèle G2++ qui est un modèle de taux court et à deux facteurs. Nous avons pu détailler les cheminements permettant d'aboutir aux expressions de diffusion et de *pricing* du modèle.

Malgré cette relative simplicité, le modèle est apparu d'une part robuste à travers l'étude de multi-start et d'autre part stable via les études de calibrage suivant les années d'exercice. Le calibrage suivant deux algorithmes d'optimisation (algorithme de Nelder-Mead et algorithme de Marquardt-Levenberg) se sont également révélés convaincants, renforçant cette stabilité.

Néanmoins, des limites sont apparues. En effet, bien que les tests de validation furent satisfaisants et validés, nous avons pu constater des écarts de *market-consistency* plutôt élevés, ce qui remet en cause la qualité de répliation de la formule de Schragger et Pelsser. De plus, nous avons seulement pu calibrer sur des nappes de volatilité *at-the-money*, au vu de l'incapacité du modèle à répliquer des *smile* et *skew* de volatilité. D'autre part, le paramètre de corrélation, une fois calibré, se rapproche fortement de la borne minimale

-1 voire a saturé ce qui peut détériorer d'autant plus la qualité de répliation du modèle.

Nos travaux peuvent toutefois constituer un fondement pour des études plus approfondies s'assurant de la fiabilité de la formule de Schragger & Pelsser dans différentes situations de marché.

Au vu de l'objectif du mémoire, il nous semble alors plus pertinent de compléter nos études en se tournant vers un modèle plus complexe permettant non seulement une meilleure qualité de répliation des nappes de volatilité ATM mais également un modèle ayant la capacité de reproduire des nappes *out-the-money* et *in-the-money*.

Afin de pouvoir contraster au maximum avec le modèle $G2++$, nous allons étudier un modèle fondamentalement différent puisqu'il s'agit d'un modèle de marché. Et parmi cette classe de modèle, celui allant être étudié fait partie des plus complexes.

Le chapitre suivant va donc consister à étudier le modèle LMM+, ou *Libor Market Model with Stochastic Volatility and Displaced Diffusion* (SV-DD-LMM).

Troisième partie
Le modèle LMM+

Chapitre 9

Théorie du modèle

9.1 La famille des modèles LMM

Les modèles de marché modélisent le taux forward qui est directement déductible du marché. Le modèle de marché d'origine est le modèle *Libor Market Model*. Tout de même, afin de palier aux limites de ce modèle et le rendre cohérent avec le contexte économique actuel, des extensions ont été mises en place.

Présentons brièvement chaque modèle de marché.

L'étude de ces modèles a été approfondie au sein du mémoire de Mohammed Bennouna [4].

9.1.1 Le modèle LMM

Les notations allant être utilisées sont les suivantes :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ un ensemble de maturités
- τ la différence de temps séparant T_i et T_{i+1}
- $P(t, T_i)$ le prix zéro-coupon à l'instant t de maturité T_i
- $F_i(t)$ le taux forward calculé en t pour la période $[T_i, T_{i+1}]$
- $\sigma_i(t)$ la volatilité du taux forward $F_i(t)$

Pour $t \in [0, T_i]$, le taux forward $F_i(t)$ de date d'expiration T_i et de maturité T_{i+1} est directement lié au prix zéro-coupon par la relation suivante :

$$F_i(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right)$$

Pour présenter la dynamique du modèle LMM, nous introduisons la mesure forward neutre \mathbb{Q}^{T_i} .

Le taux forward $F_i(t)$ est martingale sous sa propre mesure forward-neutre. Ainsi, sous la mesure T_{i+1} forward neutre :

$$\mathbb{E}[F_i(t) | \mathcal{F}_u] = F_i(u), 0 \leq u \leq t \leq T_i < T_{i+1}$$

Le modèle LMM est régi par une hypothèse fondamentale : la dynamique des taux forward est log-normale. Sous la mesure forward neutre \mathbb{Q}^{T_i} , nous avons donc l'équation suivante :

$$dF_i(t) = \sigma_i(t)F_i(t)dW_i^{T_i}(t)$$

Avec : $W_i^{T_i}$ un $(\mathcal{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien.

Comme détaillé lors de l'étude du modèle G2++, nous sommes actuellement dans un contexte de taux bas voire négatifs. Par conséquent, supposer une dynamique log-normale des taux forward et donc induire une stricte positivité de ces taux est incohérent avec le contexte actuel et contraindrait la *market-consistency* des scénarios générés.

Ainsi, une première extension du modèle LMM fut l'ajout d'un facteur de déplacement à la dynamique des taux forward afin d'être en accord avec les taux négatifs. Cette extension est nommée le *Displaced Diffusion Libor Market Model*, ou DDLMM.

9.1.2 Le modèle DDLMM

Le principe du modèle DDLMM est de considérer une dynamique log-normale du taux forward *shifté*, et non du taux forward comme le modèle LMM.

Nous nous plaçons à nouveau sous la mesure forward-neutre associée au taux forward $F_i(t)$. En notant δ le coefficient de déplacement, la dynamique du modèle DDLMM est la suivante :

$$dF_i(t) = \sigma_i^{DDLMM}(t) (F_i(t) + \delta) dW_i^{T_i}(t)$$

Avec :

- σ^{DDLMM} le volatilité du taux forward *shifté*
- $W_i^{T_i}$ un $(\mathcal{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien.

La conséquence de cette nouvelle dynamique est d'avoir des taux forward supérieurs à $-\delta$, ce qui permet non seulement au modèle de générer des taux négatifs mais également de contrôler le niveau de négativité des taux. De plus, le modèle DDLMM a la capacité d'approcher les *skew* de volatilité des swaptions et des caplets.

Des améliorations peuvent néanmoins être réalisés sur deux points :

- la dynamique log-normale a tendance à engendrer une explosivité des taux
- affiner la réplification des *skew* de volatilité

Une seconde extension, appelée *Displaced Diffusion Libor Market Model Constant Elasticity of Variance* ou DDLMM CEV, permet de satisfaire les deux points précédents.

9.1.3 Le modèle DDLMM CEV

Le modèle DDLMM CEV intègre, comme le modèle DDLMM, un facteur de déplacement permettant de générer des taux négatifs. La spécificité de ce modèle concerne l'ajout d'un paramètre d'élasticité η qui permettra de contrôler l'explosivité des taux et de répliquer plus finement les *skew* de volatilité.

Nous nous plaçons à nouveau sous la mesure forward-neutre associée au taux forward $F_i(t)$. La dynamique du modèle DDLMM CEV est la suivante :

$$dF_i(t) = \sigma_i^{CEV}(t) (F_i(t) + \delta)^\eta dW_i^{T_i}(t)$$

Avec :

- σ^{CEV} le volatilité du taux forward
- $W_i^{T_i}$ un $(\mathcal{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien.
- η le facteur d'élasticité

La paramètre d'élasticité est tel que $0 < \eta < 1$ afin de limiter les taux explosifs. Par ailleurs, définir η à 0 induirait une dynamique normale des taux forward, tandis que poser η égal 1 permet de retrouver le modèle DDLMM.

Nous avons donc pu passer en revue l'évolution de la famille des modèles LMM. Le principe fondamental concerne donc la dynamique log-normale dont sont régis les taux forward. De plus, afin de contourner cette non négativité des taux, un élément indispensable a été introduit : le facteur de déplacement δ . Ce dernier permet non seulement de générer des taux négatifs mais également de contrôler leur niveau de négativité sachant que la borne inférieure des taux forward sera $-\delta$. Enfin, afin de contrôler l'explosivité des taux et d'améliorer la réplication des *skew*, un facteur d'élasticité a été rajouté.

Néanmoins, afin de parvenir à une réplication optimale des *smile* et *skew* de volatilité présents dans les swaptions ITM/OTM, il est nécessaire d'imposer une volatilité stochastique. Ainsi, la dernière extension existante des modèles LMM intègre à la fois un facteur de déplacement et une volatilité stochastique. Cette complexité accrue en fait un modèle très complet permettant a priori de satisfaire toutes les exigences attendues au sein d'un modèle de taux. Ce modèle, intitulé *Libor Market Model with Stochastic Volatility and Displaced Diffusion* (SV-DD-LMM) ou LMM+, sera l'objet de notre étude.

9.2 Dynamique du modèle

9.2.1 Notations

Rappelons dans un premier temps les notations utilisées :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ un ensemble de maturités
- τ la différence de temps séparant T_i et T_{i+1}
- $P(t, T_i)$ le prix zéro-coupon à l'instant t de maturité T_i
- $F_i(t)$ le taux forward calculé en t pour la période $[T_i, T_{i+1}]$
- $\sigma_i(t)$ la volatilité du taux forward $F_i(t)$

Nous rappelons également que le i^{eme} taux forward est directement lié au prix zéro-coupon via l'expression suivante :

$$F_i(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right) \quad (9.1)$$

9.2.2 Dynamique des taux forward

Cette section s'attachera à déterminer la dynamique suivie par les taux forward sous le modèle LMM+.

Comme présenté dans la section précédente, nous introduisons la mesure forward-neutre \mathbb{Q}^{T_j} associée au numéraire $P(t, T_{j+1})$ sous laquelle le taux forward $F_j(t)$ est martingale. Sous cette mesure, le taux forward déplacé suit la dynamique suivante :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \zeta_j(t) \cdot dZ_t^j \quad (9.2)$$

Où :

- Z_t^j est un mouvement brownien multi-dimensionnel sous la mesure forward-neutre \mathbb{Q}^{T_j}
- $\zeta_j(t)$ le vecteur de volatilités associé au taux forward $F_j(t)$
- \cdot désigne le produit scalaire

La spécificité du modèle LMM+ est d'introduire une volatilité stochastique au sein de la dynamique, comme nous l'avons déjà mentionné. Pour cela, la volatilité $\zeta_j(t)$ associée au j^{eme} forward va être supposée proportionnelle à la racine carrée de la variance stochastique. La racine carrée permettant simplement de se ramener à un écart-type qui est la définition de la volatilité.

Nous pouvons donc spécifier la volatilité du taux forward de la manière suivante :

$$\zeta_j(t) = \sqrt{V(t)} \gamma_j(t)$$

Où :

- $V(t)$ est le processus de variance stochastique, défini sous la mesure risque-neutre
- $\gamma_j(t)$ un vecteur déterministe

Avant de spécifier la dynamique suivie par la volatilité stochastique ainsi que la nouvelle dynamique suivie par les taux forward, il est nécessaire d'effectuer un changement de probabilité. En effet, nous avons jusqu'alors donné la dynamique du j^{eme} taux forward noté $F_j(t)$ sous sa mesure forward-neutre associée.

Cependant, afin de diffuser opérationnellement les taux forward, il est nécessaire de donner la dynamique de ces taux sous une mesure commune.

De ce fait, nous allons nous ramener sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} qui est associée au numéraire de rebalancement :

$$B(t) = \frac{P(t, T_{m(t)})}{\prod_{i=0}^{m(t)-1} P(T_i, T_{i+1})}$$

Où : $m(t)$ représente le dernier taux forward en cours et le plus petit entier t tel que $t \leq T_{m(t)}$. Par exemple, entre les instants T_j et T_{j+1} , nous aurons : $m(t) = j$.

Contrairement à la mesure forward-neutre, la mesure *spot* Libor n'induit pas la martingalité du taux forward ce qui fera apparaître un second terme, nommé *drift*, dans la dynamique.

Sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} , la dynamique suivie par le taux forward est :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \cdot \left(dZ_t - \sigma_j(t) \sqrt{V(t)} dt \right) \quad (9.3)$$

Avec :

- Z_t un mouvement brownien sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} . La dimension de ce brownien sera spécifiée par la suite.
- $V(t)$ le processus de variance stochastique
- $\gamma_j(t)$ un vecteur déterministe (détaillé par la suite)
- $\sigma_j(t)$ le vecteur de volatilité associé au prix zéro-coupon $P(t, T_j)$
- \cdot désigne le produit scalaire

Le processus de variance stochastique

Le processus de variance utilisé est un processus de *Cox-Ingersoll-Ross* (CIR) exposé dans l'article [11]. Sous la mesure *spot* Libor, sa dynamique est la suivante :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW_t \quad (9.4)$$

Le processus stochastique CIR dépend de trois paramètres :

- la vitesse de retour à la moyenne κ
- le niveau de retour à la moyenne θ
- la volatilité σ

Les paramètres du processus de variance stochastique peuvent s'interpréter comme suit : plus le paramètre de vitesse κ est élevé, plus la variance stochastique aura tendance à se stabiliser autour de son niveau moyen θ . Quant au paramètre de volatilité, cela traduit la fluctuation de la variance autour de sa moyenne.

La condition de Feller qui permet d'assurer la stricte positivité du processus CIR est la suivante : $2\kappa\theta > \sigma^2$

Néanmoins, opérationnellement, la condition de Feller n'est pas toujours vérifiée lors du calibrage des modèles à volatilité stochastique suivant un processus CIR.

Précisions sur le vecteur $\gamma_j(t)$

Plusieurs paramétrisations du vecteur $\gamma_j(t)$ peuvent être spécifiées comme le soulignent D. Brigo et F. Mercurio dans leur ouvrage [6]. Dans le cadre de ce mémoire, nous définissons ce vecteur à travers une fonction déterministe dépendante du temps restant jusqu'à maturité.

Tout d'abord, cette dépendance au temps restant jusqu'à maturité implique que :

$$\gamma_j(t) = \gamma_{j-m(t)}.$$

De plus, nous poserons la fonction $\gamma_j(t)$ égale au produit de deux fonctions dépendantes du temps restant jusqu'à maturité :

$$\gamma_j(t) = g_j(t)\beta_j(t)$$

Où :

- $g_j(t)$ est une fonction dite de Rebonato, détaillée dans le même ouvrage [6] de D. Brigo et F. Mercurio
- $\beta_j(t)$ est un vecteur multi-dimensionnel représentant les corrélations inter-forward

La structure de volatilité

La première fonction, notée $g_j(t)$, est donc la fonction dite de Rebonato et elle représente la structure de volatilité choisie. Elle dépend de quatre paramètres qui sont a , b , c et d , et elle est définie par l'expression suivante :

$$g_j(t) = (a + bT_{j-m(t)}) e^{-cT_{j-m(t)}} + d$$

Afin de fournir une meilleure interprétation de la fonction ainsi que du rôle de chaque paramètre, nous proposons le graphique ci-joint :

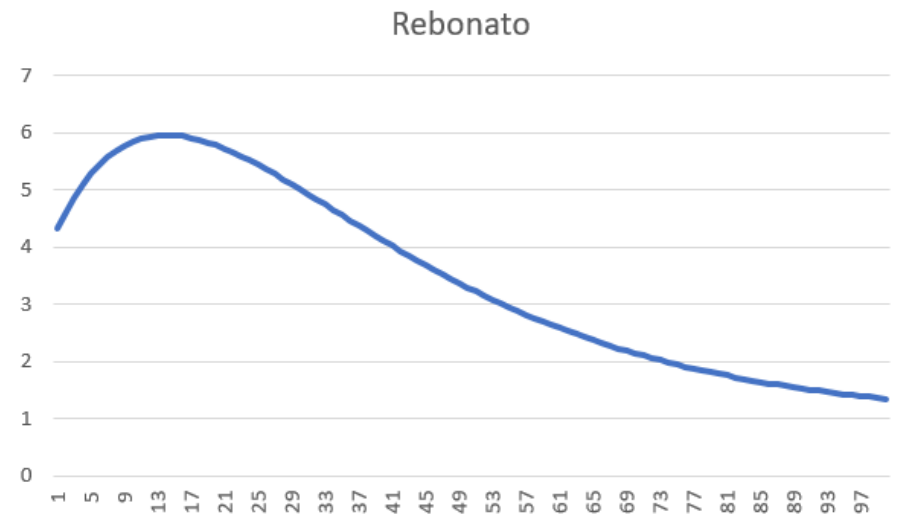


FIGURE 9.1: La fonction de Rebonato

Le graphique ci-dessus a été réalisé en posant : $a=3$, $b=0.5$, $c=0.05$ et $d=1$. Nous avons également supposés être à l'instant $t=0$.

La spécificité de la fonction de Rebonato, vérifiée par le graphique, est qu'elle permet de reproduire une bosse, également appelée "hump" observée sur les volatilités des caplets. De plus, le paramètre c représente une vitesse de décroissance exponentielle, qui est explicitée dans le graphique par la forte chute après la bosse.

Néanmoins, afin d'être moins contraignant sur la structure de volatilité, des fonctions autres que celle de Rebonato pourraient être spécifiées, comme cela est réalisé par D. Brigo et F. Mercurio [6].

La structure de corrélation

Le second terme de la fonction γ_j correspond aux corrélations inter-forward, notées β_j . En effet, les taux forward sont des processus corrélés : en plus de la structure de volatilité de Rebonato, il est donc nécessaire de spécifier une structure de corrélation.

Soient F_k le k^{eme} taux forward et F_l le l^{eme} taux forward. La corrélation de ces deux processus, notée $\rho_{k,l}$, est exprimée de la manière suivante :

$$\rho_{k,l} = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_k^q \beta_l^q$$

Avec :

- β^q , $q \in 1, \dots, N_f$ les facteurs de corrélation inter-forward vérifiant : $\sum_{q=1}^{N_f} (\beta_k^q)^2 = 1$
- N_f le nombre de facteurs du modèle

Ce résultat est obtenu par décomposition par application du théorème spectral (ou diagonalisation au choix) de la matrice de corrélation entre les différentes maturités des taux *forward*, comme décrit dans le mémoire de Mohammed Bennouna [4].

Le choix du nombre de facteurs N_f déterminera également la dimension des mouvements browniens introduits à l'équation (9.3). Ce facteur impactant les temps de calcul, il est généralement restreint au nombre de 2. Nous poserons donc par la suite $N_f=2$.

Ainsi, nous pouvons réécrire que $\beta=(\beta^1, \beta^2)$ et $Z_t=(Z_t^1, Z_t^2)$, avec (Z_t^1 et Z_t^2) des mouvements browniens indépendants sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} . La conséquence immédiate est donc l'égalité suivante :

$$\gamma_j(t) \cdot d\mathbf{Z}_t = g_{j-m(t)} (\beta_{j-m(t)}^1 dZ_t^1 + \beta_{j-m(t)}^2 dZ_t^2)$$

Avant de continuer la spécification des taux forward sous le modèle LMM+, présentons d'abord le calibrage adopté pour les corrélations inter-forward.

Méthode de calibrage des corrélations inter-forward

La méthodologie adoptée afin de calibrer ces corrélations est une approche de type Analyse en Composantes Principales (ACP) appliquée à un historique de taux forward.

Définissons dans un premier temps les *input* nécessaires ainsi que les notations utilisées par la suite.

Notons $H = \{t_1, \dots, t_N\}$ l'ensemble des dates d'historique espacées d'un pas de temps Δ , avec $\Delta \leq 1$.

Nous avons également besoin d'un historique de courbes de prix zéro-coupon, noté $(P(t, t + j\Delta))_{t \in H, j}$, déduits à partir des taux swap de marché via la méthodologie exposée à la partie I. Nous pouvons alors en déduire les taux forward historiques $(F(t, t + j\Delta, t + j\Delta + \Delta'))_{t \in H, j}$ espacés d'un même pas Δ' .

Les pas de temps Δ et Δ' sont généralement supposés égaux à $1/2$, ce qui représente un pas semi-annuel.

Afin d'effectuer l'ACP, il est nécessaire de définir une variable permettant d'approcher les corrélations inter-forward. Sachant que le modèle LMM+ est un modèle log-normal *shifté*, cette variable est définie comme étant le log-rendement du taux forward *shifté* entre les instants t_i et t_{i+1} :

$$X_{i,j} = \ln \left(\frac{F(t_{i+1}, t_{i+j}, t_{i+j+1}) + \delta}{F(t_i, t_{i+j}, t_{i+j+1}) + \delta} \right)$$

9.2. DYNAMIQUE DU MODÈLE

A présent, l'objectif de l'ACP sera de décomposer les variables $(X)_{i,j}$ comme des combinaisons linéaires de composantes principales que nous noterons $(C_q)_{q=1,2}$. Cela se traduit pas :

$$\frac{X_{i,j} - \mu_j}{\sigma_j} \approx \sum_{q=1}^{N_f} w_q(j) \cdot C_q(t_{i+1})$$

Avec $(w_q(j))_q$ les coefficients extraits de l'ACP et :

$$\mu_j = \frac{1}{\#I} \sum_{i \geq 1} X_{i,j}; \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{\#I} \sum_{i \geq 1} (X_{i,j} - \mu_j)^2}$$

En notant λ_q la q-ième valeur propre (classée par ordre décroissant) de la matrice de variance-covariance associée à l'ACP :

$$\text{Var}(C_q) = \lambda_q$$

Nous pouvons écrire :

$$\text{Var} \left(\sum_{q=1}^{N_f} w_q(j) \cdot C_q \right) = \sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j) \cdot \lambda_q$$

Après normalisation, nous en déduisons finalement :

$$\beta_j^q = \frac{w_q(j) \sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j) \cdot \lambda_q}}$$

Nous présentons ci-dessous les facteurs de corrélation obtenus en fonction de la maturité. La méthodologie précédente a été adoptée en utilisant un historique de 20 ans de courbes de taux swap, avec un pas historique trimestriel.

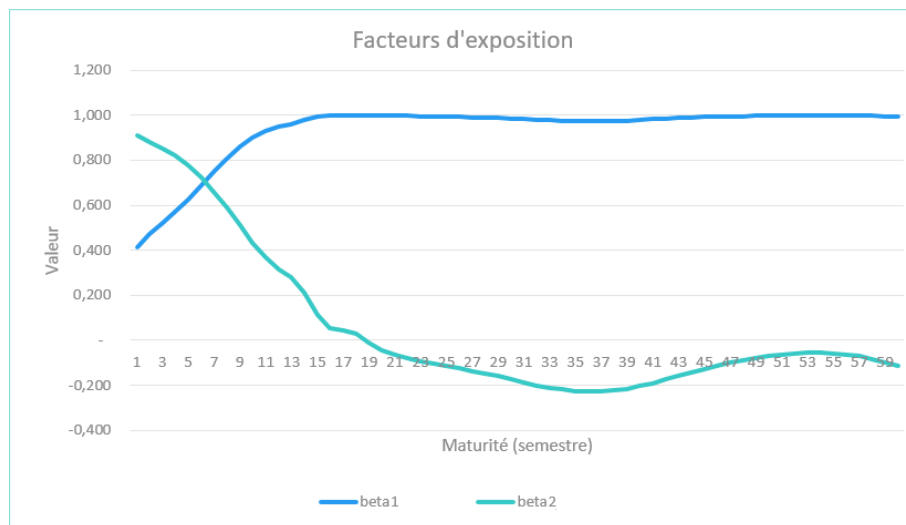


FIGURE 9.2: Facteurs de corrélation inter-forward via la méthode d'ACP

Revenons maintenant à la dynamique des taux forward sous la mesure *spot* Libor :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \cdot \left(dZ_t - \sigma_j(t) \sqrt{V(t)} dt \right)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t$$

Le dernier point à spécifier est la corrélation entre le mouvement bi-dimensionnel de la dynamique des taux forward, noté Z_t , et le mouvement uni-dimensionnel du processus de variance stochastique W_t . Pour cela, le modèle LMM+ suppose qu'il existe un paramètre constant $\rho \in [-1,1]$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\beta_j(t) \cdot dZ_t dW_t] &= \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^2 \beta_j^k(t) dt \\ &= \rho_j(t) dt \end{aligned}$$

Cette section nous a donc permis de déterminer les éléments intervenant dans la dynamique du modèle LMM+, ainsi que la mesure commune utilisée pour la diffusion des taux forward.

Présentons maintenant la démarche afin de *pricer* une swaption via le modèle LMM+.

9.3 Pricing d'une swaption via le modèle LMM+

9.3.1 Expression d'une swaption sous le modèle LMM+

Le taux swap forward pour la période (T_m, T_n) est défini par l'expression suivante :

$$R_{m,n}(t) = \frac{P(t, T_m) - P(t, T_n)}{B_s(t)}$$

où $B_s(t)$ représente l'annuité et est défini comme suit :

$$B_s(t) = \sum_{i=m}^{n-1} (T_i - T_{i-1}) * P(t, T_{i+1})$$

Soit une swaption de maturité T_m , de ténor $T_n - T_m$, indexée sur le taux swap $R_{m,n}$ et de strike K .

Son *payoff* à l'instant t s'écrit :

$$PS_{T_m, T_n}(t) = B_s(T_m) * (R_{m,n}(T_m) - K)^+$$

Le *payoff* d'une swaption de maturité T_m dépend donc directement du taux swap évalué à l'instant T_m . Nous aurons donc besoin de déterminer une dynamique du taux swap forward afin d'effectuer le *pricing* de la swaption.

La première étape consistera à déterminer une nouvelle mesure de probabilité sous laquelle le taux swap forward est martingale.

De ce fait, nous introduisons la mesure de probabilité *forward swap* \mathbb{Q}^S dont le numéraire est l'annuité de la swaption $B_s(t)$ et sous laquelle le taux swap forward est martingale. Le *pricing* de la swaption sera effectué sous cette mesure de probabilité \mathbb{Q}^S . Ainsi, sous cette nouvelle mesure, nous avons l'égalité suivante :

$$\forall t < T_m, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [R_{m,n}(T_m) \mid F_t] = R_{m,n}(t)$$

Par définition du taux swap forward, cela implique :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{PS_{T_m, T_n}(T_m)}{B_s(T_m)} \mid F_t \right] = \frac{PS_{T_m, T_n}(t)}{B_s(t)}$$

Nous pouvons donc réécrire le *pricing* de la swaption à l'instant t en introduisant la mesure de probabilité *forward swap* \mathbb{Q}^S :

$$\begin{aligned} PS_{T_m, T_n}(t) &= B_s(t) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{PS_{T_m, T_n}(T_m)}{B_s(T_m)} \mid F_t \right] \\ &= B_s(t) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(R_{m,n}(T_m) - K)^+ \mid F_t] \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons pu déterminer le *payoff* d'une swaption à l'instant t en utilisant la mesure *forward swap*.

A présent, il est nécessaire d'explicitier davantage cette expression. La méthodologie consiste à faire apparaître une fonction caractéristique. En effet, en utilisant les travaux de Heston [16] à ce sujet et que nous détaillerons par la suite, nous serons alors en mesure de fournir une formule semi-fermée de la swaption sous le modèle LMM+.

Nous allons donc chercher à introduire dans l'espérance conditionnelle précédente la forme d'une fonction caractéristique, et donc à faire apparaître une forme exponentielle.

Pour cela, décomposons dans un premier temps l'espérance conditionnelle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} PS_{T_m, T_n}(t) &= B_s(t) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(R_{m,n}(T_m) - K)^+ \mid F_t] \\ &= B_s(t) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [((R_{m,n}(T_m) + \delta) - (K + \delta))^+ \mid F_t] \\ &= B_s(t) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(R_{m,n}(T_m) + \delta) \mathbb{1}_{(R_{m,n}(T_m) > K)} \mid F_t] - (K + \delta) * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{(R_{m,n}(T_m) > K)} \mid F_t] \end{aligned}$$

Nous avons, à la seconde étape du calcul précédent, fait apparaître le facteur de déplacement δ : en effet, ce choix sera davantage justifié dans la section suivante mais un élément de réponse est le fait que dans le contexte économique actuel, les taux swap à court terme sont négatifs. L'ajout de ce *shift* permettra par la suite d'induire une dynamique log-normale *shiftée* du taux swap forward afin de le rendre cohérent avec les données de marché.

La dernière étape concerne simplement une décomposition du maximum.

Nous pouvons désormais faire apparaître la forme exponentielle souhaitée :

$$PS_{T_m, T_n}(t) = B_S(t) * (R_{m,n}(t) + \delta) \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[e^{X(T_m)} \mathbb{1}_{(R_{m,n}(T_m) > K)} \mid F_t \right] - e^x \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\mathbb{1}_{(R_{m,n}(T_m) > K)} \mid F_t \right] \right)$$

Avec :

- $X(T_m) = \log \frac{R_{m,n}(T_m) + \delta}{R_{m,n}(t) + \delta}$ le log-rendement du taux swap shifté entre les dates t correspondant à l'instant de *pricing* et T_m la maturité de la swaption
- $x = \log \frac{K + \delta}{R_{m,n}(t) + \delta}$

Toutes ces étapes nous ont donc permis d'obtenir une expression de la swaption via le modèle LMM+ sous la forme souhaitée. Nous pouvons désormais introduire la fonction caractéristique permettant de déterminer le *pricing* via une formule semi-fermée.

La fonction caractéristique associée à la variable $X(T_m)$ sous la mesure swap forward est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{X(T_m)}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[e^{zX(T_m)} \right]$$

Les travaux de Heston ont permis de relier les deux espérances conditionnées sous la mesure *forward swap* définies lors de la dernière expression du *pricing* de la swaption avec la fonction caractéristique définie à l'instant.

Les démonstrations des deux expressions sont détaillées en annexe.

D'après les travaux de Heston, nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[e^X \mathbb{1}_{(X > x)} \mid F_t \right] &= \frac{1}{2} \varphi_X(1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} (e^{-iux} \varphi_X(1 + iu))}{u} du \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\mathbb{1}_{(X > x)} \mid F_t \right] &= \frac{1}{2} \varphi_X(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} (e^{-iux} \varphi_X(iu))}{u} du \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \varphi_{X(T_m)}(0) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [1 \mid F_t] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \varphi_{X(T_m)}(1) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[e^{X(T_m)} \mid F_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{(R_{m,n}(T_m) + \delta)}{(R_{m,n}(t) + \delta)} \mid F_t \right] \\ &= \frac{1}{(R_{m,n}(t) + \delta)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [(R_{m,n}(t) + \delta) \mid F_t] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[e^{X(T_m)} \mathbb{1}_{(X(T_m) > x)} \right] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \left(e^{-iux} \varphi_{X(T_m)}(1+iu) \right)}{u} du \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\mathbb{1}_{(X(T_m) > x)} \right] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \left(e^{-iux} \varphi_{X(T_m)}(iu) \right)}{u} du\end{aligned}$$

Pour conclure, le prix à l'instant t d'une swaption de maturité T_m , de ténor $T_n - T_m$ via le LMM+ peut donc être exprimé de la manière suivante :

$$PS_{T_m, T_n}(t) = B_s(t) \left[\frac{1}{2} (R_{m,n}(t) - K) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((R_{m,n}(t) + \delta) f_1(u) - (K + \delta) f_2(u)) du \right]$$

$$\text{Avec : } f_1(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux} \varphi_{X(1+iu)})}{u} \text{ et } f_2(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux} \varphi_{X(iu)})}{u}$$

Le *pricing* de la swaption implique donc de déterminer une expression explicite de la fonction génératrice des moments, notée φ_X . Pour cela, il faudra résoudre une équation aux dérivées partielles de la fonction génératrice des moments. Au préalable, cela nécessite de déterminer la dynamique suivie par le taux swap forward, sous la mesure de probabilité *forward swap* \mathbb{Q}^S dont le numéraire est l'annuité de la swaption $B_s(t)$ et sous laquelle le taux swap forward est martingale.

La section suivante s'attachera donc à justifier le choix réalisé quant à la dynamique de ce taux ainsi qu'à en déduire une expression explicite.

9.3.2 Dynamique du taux swap forward

Tout d'abord, nous pouvons considérer la dérivation du taux swap forward comme une dérivation en chaîne :

$$dR_{m,n}(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial R_{m,n}}{\partial F_k} \partial F_k$$

Avec : F_k le k^{eme} taux forward dont l'expression est formulée à l'équation (9.1).

Afin d'expliciter davantage la dynamique du taux swap forward, il est donc nécessaire de déterminer une dynamique du taux forward sous cette même mesure.

Dynamique du taux forward sous la mesure *forward swap*

Afin de déterminer la dynamique du taux forward sous la mesure *forward swap*, il est nécessaire d'expliciter au préalable cette dynamique sous la mesure *forward neutre*.

Passage de la mesure *spot Libor* à la mesure *forward neutre*

Rappelons la dynamique, sous la mesure commune *spot Libor*, du taux forward ainsi que du processus de variance :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \cdot \left(dZ_t - \sigma_j(t) \sqrt{V(t)} dt \right)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_t$$

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les dynamiques de ces deux processus sous la mesure *forward neutre* associée.

Nous avons déjà montré dans le chapitre précédent qu'en posant le nouveau mouvement brownien $d\mathbf{Z}_t^j = d\mathbf{Z}_t - \sqrt{V(t)}\sigma_j(t)dt$ sous la mesure forward-neutre \mathbb{Q}^{T_j} , alors nous obtenons la dynamique du taux forward $dF_j(t) = (F_j(t) + \delta)\zeta_j(t) \cdot dZ_t^j$ sous cette même mesure.

En effectuant la même démarche pour le processus de variance, nous définissons le nouveau mouvement brownien suivant sous la mesure forward-neutre \mathbb{Q}^{T_j} :

$$dW_t^j = dW_t + \xi_j(t)\sqrt{V(t)}dt$$

Avec :

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^j \frac{\Delta T_k (F_k(t) + \delta) \rho_k(t) \|\gamma_k(t)\|}{1 + \Delta T_k F_k(t)}$$

Où $\|\cdot\|$ représente la norme L2 soit :

$$\|\gamma_k(t)\| = \sqrt{\gamma_k(t)^2} = \sqrt{g_k(t)^2 * (\beta_k^1(t)^2 + \beta_k^2(t)^2)} = g_k(t)$$

Nous en déduisons alors la nouvelle dynamique du processus de variance sous cette même mesure :

$$\begin{aligned} dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_t \\ &= [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon\xi_j(t))V(t)]dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_t^j \end{aligned}$$

Les démonstrations du changement de mesure ainsi que de la nouvelle dynamique sont traitées en détail dans l'article de Wu & Zhang [26], à la section *Appendix A*.

Pour résumé, nous avons donc les dynamiques suivantes du taux forward et du processus de variance sous la mesure T_{j+1} forward-neutre :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta)\zeta_j(t) \cdot dZ_t^j$$

$$dV(t) = [\kappa\theta - (\kappa + \epsilon\xi_j(t))V(t)]dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_t^j$$

Avec :

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z}_t^j &= d\mathbf{Z}_t - \sqrt{V(t)}\sigma_j(t)dt \\ dW_t^j &= dW_t + \xi_j(t)\sqrt{V(t)}dt \end{aligned}$$

Passage de la mesure *spot Libor* à la mesure *forward swap*

Les démonstrations de ce nouveau changement de mesure ainsi que de la nouvelle dynamique sont également traitées en détail dans l'article de Wu & Zhang [26], à la section *Appendix A*.

Nous définissons alors de nouveaux mouvements browniens sous la mesure *forward swap* :

$$\begin{aligned} dZ_t^S &= dZ_t - \sqrt{V(t)}\sigma_S(t)dt \\ dW_t^S &= dW_t + \sqrt{V(t)}\xi^S(t)dt \end{aligned}$$

$$\text{Où : } \sigma_S(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k(t) * \sigma(t, T_{k+1}) \quad \text{et} \quad \xi^S(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k(t) * \xi_k(t)$$

Il en résulte donc les dynamiques du taux forward et du processus de variance, sous la mesure *forward swap*, suivantes :

$$\begin{aligned} dF_j(t) &= \sqrt{V(t)} (F_j(t) + \delta) \gamma_j(t) dZ_t^S \\ dV(t) &= \kappa \left(\theta - \tilde{\xi}^S(t)V(t) \right) dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW_t^S \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\text{Avec : } \tilde{\xi}^S(t) = 1 + \frac{\sigma}{\kappa} \xi^S(t)$$

Et :

- Z_t^S un mouvement brownien multi-dimensionnel sous la mesure *forward swap* \mathbb{Q}^S
- W_t^S un mouvement brownien unidimensionnel sous la mesure *forward swap*
- $\gamma_j(t)$ le vecteur de volatilités associé au taux forward $F_j(t)$

A présent que nous avons déterminé la dynamique du taux forward sous la mesure *forward swap*, nous pouvons la remplacer dans celle du taux swap forward afin de l'explicitier. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} dR_{m,n}(t) &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_k} \partial F_k(t) \\ &= \sqrt{V(t)} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_k} (F_k(t) + \delta) \gamma_k(t) dZ_t^S \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à expliciter le terme $\frac{\partial R_{m,n}}{\partial F_k}$ de manière à déterminer complètement la dynamique du taux swap forward sous la mesure *forward swap*. Ce terme peut-être également vu comme une formule de poids, comme le montrent D. Brigo et F. Mercurio dans leur ouvrage [6].

Pour cela, nous allons dans un premier temps réécrire le taux swap forward comme une

combinaison linéaire des taux forward :

$$\begin{aligned}
 R_{m,n}(t) &= \frac{P(t, T_m) - P(t, T_n)}{B_s(t)} \\
 &= \frac{\sum_{k=m}^{n-1} (P(t, T_k) - P(t, T_{k+1}))}{B_s(t)} \\
 &= \frac{\sum_{k=m}^{n-1} P(t, T_{k+1}) \left(\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} - 1 \right)}{B_s(t)} \\
 &= \frac{\sum_{k=m}^{n-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1}) F_k(t)}{B_s(t)} \\
 &= \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k(t) F_k(t), \text{ avec } \alpha_k(t) = \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{B_s(t)}
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Nous pouvons désormais dériver le taux swap forward, sous la mesure *forward swap*, via le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_j} &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial (\alpha_k(t) F_k(t))}{\partial F_j} \\
 &= \sum_{k=m}^{n-1} \left[\frac{\partial (\alpha_k(t))}{\partial F_j} F_k(t) + \frac{\partial (F_k(t))}{F_j} \alpha_k(t) \right] \\
 &= \alpha_j(t) + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial (\alpha_k(t))}{\partial F_j} F_k(t)
 \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à exprimer le terme $\frac{\partial (\alpha_k(t))}{\partial F_j}$.

La démonstration associée pourra être consultée dans l'article de Wu & Zhang [26] (section *Appendix A*) et nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_j(t)} = \alpha_j(t) + \frac{\Delta T_j}{1 + \Delta T_j F_j(t)} \left[\sum_{l=m}^{j-1} \alpha_l(t) (F_l(t) - R_{m,n}(t)) \right] \tag{9.7}$$

Ainsi, nous avons explicité la dynamique du taux swap forward jusqu'à aboutir à l'expression suivante :

$$dR_{m,n}(t) = \sqrt{V(t)} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_k} (F_k(t) + \delta) \gamma_k(t) dZ_t^S$$

$$\text{Avec : } \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_k(t)} = \alpha_k(t) + \frac{\Delta T_k}{1 + \Delta T_k F_k(t)} \left[\sum_{l=m}^{k-1} \alpha_l(t) (F_l(t) - R_{m,n}(t)) \right]$$

A ce stade, la question à se poser est : Quelle dynamique adopter pour le taux swap forward ? Une dynamique log-normale ? Une dynamique log-normale *shiftée* ? Ou bien une dynamique normale ?

En effet, l'expression explicitée jusqu'alors correspond à une dynamique normale de ce taux. Il s'agit par ailleurs de la convention utilisée au sein de l'article *Fast calibration of the Libor Market Model with Stochastic Volatility and Displaced Diffusion* [12].

Tout de même, d'autres choix pourraient être réalisés.

Nous allons tout d'abord expliciter les deux dynamiques restantes ainsi que leurs spécificités.

Dynamique log-normale du taux swap forward

La dynamique log-normale du taux swap a été formulée dans l'article de Wu & Zhang [26].

En effet, en multipliant et en divisant par le terme $R_{m,n}(t)$ dans la dynamique du taux swap forward explicitée précédemment, celle-ci peut être réécrite de la manière suivante :

$$dR_{m,n}(t) = R_{m,n}(t) \sqrt{V(t)} \sum_{j=m}^{n-1} \omega_j(t) \gamma_j(t) dZ_t^S$$

$$\text{Avec : } \omega_j(t) = \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_j(t)} \frac{(F_j(t)+\delta)}{R_{m,n}(t)}$$

Cependant, rappelons que le choix d'une dynamique log-normale induit une positivité des taux swap forward. Or, dans le contexte actuel des taux bas, nous pouvons observer des taux swap forward négatifs à court terme. Le choix d'une dynamique log-normale est donc incohérente avec le marché.

Deux dynamiques permettent de contourner cette limite et d'être cohérente avec le contexte acutel des taux bas : la dynamique log-normale déplacée et la dynamique normale déjà explicitée.

Dynamique log-normale *shiftée* du taux swap forward

La dynamique découlant naturellement de la log-normale est la log-normale déplacée.

La méthodologie sera identique à la précédente mais en multipliant et en divisant par le terme $(R_{m,n}(t) + \delta)$. Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$dR_{m,n}(t) = (R_{m,n}(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \sum_{j=m}^{n-1} \omega_j(t) \gamma_j(t) dZ_t^S \quad (9.8)$$

$$\text{Avec : } \omega_j(t) = \frac{\partial R_{m,n}(t)}{\partial F_j(t)} \frac{(F_j(t)+\delta)}{(R_{m,n}(t)+\delta)}$$

L'utilisation d'une dynamique log-normale déplacée ou d'une dynamique normale est avant tout une convention. Ce choix conduit à des changements concernant la résolution de la fonction caractéristique présente dans le *pricing* de la swaption.

Dans notre cas, une dynamique log-normale *shiftée* du taux swap forward sera utilisée et la suite des calculs sera effectuée via cette convention. Les lecteurs intéressés par les changements induits par une dynamique normale sont invités à consulter l'article *Fast calibration of the Libor Market Model with Stochastic Volatility and Displaced Diffusion* [12].

En conclusion, la dynamique du taux swap forward sera donc la suivante :

$$dR_{m,n}(t) = (R_{m,n}(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \sum_{j=m}^{n-1} \omega_j(t) \gamma_j(t) dZ_t^S$$

$$\text{Avec : } \omega_j(t) = \frac{(F_j(t)+\delta)}{(R_{m,n}(t)+\delta)} \left(\alpha_j(t) + \frac{\Delta T_j}{1+\Delta T_j F_j(t)} \sum_{l=m}^{j-1} \alpha_l(t) (F_l(t) - R_{m,n}(t)) \right), m \leq j \leq n-1$$

Simplifications de calcul par la méthode de *freezing*

Nous pouvons remarquer que certaines fonctions nécessitent des approximations afin de pouvoir être calculées. Nous allons appliquer la méthode dite de *freezing* consistant à calculer des fonctions dépendantes du temps avec les valeurs initiales des taux forward.

Tout d'abord, nous allons l'appliquer à la fonction ξ via l'approximation suivante :

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^j \frac{\Delta T_k (F_k(t) + \delta) \rho_k(t) g_k(t)}{1 + \Delta T_k F_k(t)} \approx \sum_{k=1}^j \frac{\Delta T_k (F_k(0) + \delta) \rho_k(t) g_k(t)}{1 + \Delta T_k F_k(0)}$$

De même, pour les poids α et ω présentés respectivement dans les formules (9.6) et (9.8) : $\alpha_j(t) \approx \alpha_j(0)$ et $\omega_j(t) \approx \omega_j(0)$.

Nous pouvons ainsi conclure sur la dynamique finalement retenue pour le taux swap forward :

$$dR_{m,n}(t) = \sqrt{V(t)} \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0) \gamma_j(t) \cdot dZ_t^S, \quad 0 \leq t < T_m$$

$$dV(t) = \kappa \left(\theta - \tilde{\xi}_0^S(t) V(t) \right) dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW_t^S$$

$$\text{Avec : } \tilde{\xi}_0^S(t) = 1 + \frac{\sigma}{\kappa} \sum_{j=m}^{n-1} \alpha_j(0) \sum_{k=1}^j \frac{\Delta T_k (F_k(0)+\delta) \rho_k(t) g_k(t)}{1+\Delta T_k F_k(0)}$$

Maintenant que nous avons déterminé une dynamique log-normale *shiftée* du taux swap forward, nous allons pouvoir expliciter la fonction génératrice des moments présente au sein du *pricing* d'une swaption via le modèle LMM+. Une fois la fonction génératrice explicitée, nous aurons alors entièrement déterminé le *pricing* d'une swaption via le modèle LMM+.

9.3.3 Résolution de la fonction génératrice des moments

Equation différentielle partielle vérifiée par la fonction génératrice

Rappelons que la fonction génératrice sera appliquée à la variable $X(T_m) = \log \frac{R_{m,n}(T_m)+\delta}{R_{m,n}(t)+\delta}$ représentant le log-rendement du taux swap forward shifté entre les dates t correspondant à l'instant de *pricing* et T_m la maturité de la swaption.

La fonction caractéristique associée à cette variable sous la mesure swap forward est alors définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{X(T_m)}(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^{zX(T_m)}]$$

Cette fonction génératrice est martingale et satisfait donc la condition suivante appelée *équation rétrograde de Kolmogorov* :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_X \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu_V \frac{\partial \phi}{\partial V} + \frac{1}{2} (\sigma_X)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho_{XV} \sigma_X \sigma_V \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial V} + \frac{1}{2} (\sigma_V)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial V^2} = 0$$

Avec :

- μ_X (respectivement μ_V) les *drift* de la variable X (respectivement du processus de variance V)
- σ_X (respectivement σ_V) les volatilités de la variable X (respectivement du processus de variance V)
- ρ_{XV} la corrélation des deux processus

La solution de cette équation est connue mais il est nécessaire de déterminer au préalable les paramètres indiqués précédemment.

La dynamique du processus de variance sous la mesure *forward swap* a déjà été déterminée. Nous disposons donc du *drift* et de la volatilité de ce processus.

Cependant, la dynamique de la variable X n'a pas encore été déterminée.

La dynamique de cette variable est :

$$dX(T_m) = d \log \frac{R_{m,n}(T_m) + \delta}{R_{m,n}(t) + \delta} = d \log (R_{m,n}(T_m) + \delta)$$

Déterminer la dynamique de $X(T_m)$ revient donc à déterminer la dynamique de $\log (R_{m,n}(T_m) + \delta)$.

Pour cela, appliquons le lemme d'Ito :

$$d \log (R_{m,n}(T_m) + \delta) = \frac{dR_{m,n}(T_m)}{R_{m,n}(T_m) + \delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{m,n}(T_m) + \delta} \right)^2 [R_{m,n}]_{T_m}$$

Avec : $[\cdot]$ la variation quadratique du processus

Nous pouvons désormais remplacer la dynamique du taux swap forward par celle explicitée à la section précédente. Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} d \log (R_{m,n}(T_m) + \delta) &= \frac{R_{m,n}(T_m) + \delta}{R_{m,n}(T_m) + \delta} \sqrt{V(t)} \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0) \gamma_j(T_m) \cdot dZ_{T_m}^S \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{m,n}(T_m) + \delta} \right)^2 \left((R_{m,n}(T_m) + \delta) \sqrt{V(T_m)} \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0) \gamma_j(T_m) \right)^2 dT_m \\ &= \sqrt{V(T_m)} \sum_{j=m}^{n-1} w_0^j \gamma_j(T_m) \cdot dZ_{T_m}^S - \frac{1}{2} V(T_m) \left(\sum_{j=m}^{n-1} w_j(0) \gamma_j(T_m) \right)^2 dT_m \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons maintenant identifier les paramètres :

- le *drift* de la variable X : $\mu_X = -\frac{1}{2}V(T_m) \left(\sum_{j=m}^{n-1} w_j(0)\gamma_j(T_m) \right)^2$
- la volatilité de la variable X : $\sigma_X = \sqrt{V(T_m)} \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0)\gamma_j(T_m)$

De même, pour le processus de variance, nous avons :

- le *drift* : $\mu_V = \kappa \left(\theta - \tilde{\xi}_0^S(T_m)V(T_m) \right)$
- la volatilité : $\sigma_V = \sigma \sqrt{V(T_m)}$

Enfin, la corrélation à prendre en compte est la suivante :

$$\rho_{XV} = \rho \frac{\sum_{j=m}^{n-1} w_j(0)g_j(t)}{\left\| \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0)g_j(t) \right\|}$$

Afin de conserver les notations de divers articles dont celui de Wu & Zhang [26], notons la fonction caractéristique de la façon suivante : $\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{X(T_m)}(z) = \varphi(x, V, t, z)$.

La condition de Kolmogorov vérifiée par la fonction génératrice peut finalement être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\kappa\theta - \kappa\xi V) \frac{\partial \varphi}{\partial V} - \frac{1}{2}\lambda^2 V \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V^2} + \sigma\rho_{XY}\lambda V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V \partial x} + \frac{1}{2}\lambda^2 V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

Avec la condition finale suivante : $\varphi(x, V, T, z) = e^{zx}$

Et les variables suivantes : $\xi = \tilde{\xi}_0^S(t)$, $\lambda = \left\| \sum_{j=m}^{n-1} \omega_j(0) * \gamma_j(t) \right\|$ et $\rho_{XV} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=m}^{n-1} w_j(0) \|\gamma_j(t)\| \rho_j(t)$

Solution de l'équation différentielle partielle

La solution de cette équation de Kolmogorov, et donc de la fonction caractéristique recherchée, a été démontré dans les travaux d'Heston [16]. La solution considérée est de la forme suivante :

$$\varphi(x, V, t, z) = \tilde{\varphi}(x, V, \tau, z) = e^{A(\tau, z) + B(\tau, z)*V + zx} \quad , \tau = T - t$$

Où A et B vérifient le système d'équations et les conditions initiales suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{d\tau} = \kappa\theta B \\ \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 B + (\rho\sigma\lambda z - \kappa\xi)B + \frac{1}{2}\lambda^2(z^2 - z) \end{array} \right. , \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} A(0, z) = 0 \\ B(0, z) = 0 \end{array} \right.$$

L'équation vérifiée par B est une équation de Ricatti qui admet une solution analytique lorsque les coefficients sont constants par morceaux ce qui est le cas dans le modèle LMM+.

Comme cela est démontré au sein de l'article de Wu & Zhang [26] (*Appendix A*), l'unique solution du système d'équations précédent est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\tau, z) = A(\tau_j, z) + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(a+d)(\tau - \tau_j) - 2 \log \frac{1-g_j e^{d(\gamma-\tau_j)}}{1-g_j} \right] \\ B(\tau, z) = B(\tau_j, z) + \frac{(a+d-\sigma^2 B(\tau_j, z)) (1-e^{4(\gamma-\tau_j)})}{\sigma^2 (1-g_j e^{d(\gamma-\tau_j)})} \end{array} \right. \quad (9.9)$$

Avec : τ_j tel que $\tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}, j = 0, 1, \dots, m-1$

$$a = (\kappa\xi - \rho\sigma\lambda z)$$

$$d = \sqrt{a^2 - \lambda^2 \sigma^2 (z^2 - z)}$$

$$g_j = \frac{a+d-\sigma^2 B(\tau_j; z)}{a-d-\sigma^2 B(\tau_j, z)}$$

Remarque : D'un point de vue d'implémentation, il est à noter que les variables A et B sont déterminées de façon récursive et dépendent de la variable $\tau = T - t$. Sachant que la variable τ évoluera au fur et à mesure des itérations, cela impliquera que t évoluera également au fur et à mesure des itérations. Les variables ξ et λ , et de ce fait les variables a, d et g_j également, varieront donc au cours des itérations.

Enfin, lors du calibrage, le pricing de la swaption est réalisé à l'instant $t = 0$. La fonction caractéristique est donc évaluée de la manière suivante :

$$\varphi(x = 0, V(0), t = 0, z) = \tilde{\varphi}(x = 0, V(0), \tau = T, z) = e^{A(T, z) + B(T, z) * V(0)}$$

Ainsi, nous sommes désormais en mesure de calculer une swaption à l'instant $t = 0$ et pour toute maturité et tout ténor.

Afin de clôturer le pricing de la swaption, il reste un dernier point à aborder. Pour rappel, l'expression du pricing était la suivante :

$$PS_{T_m, T_n}(t) = B_s(t) \left[\frac{1}{2} (R_{m,n}(t) - K) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((R_{m,n}(t) + \delta) f_1(u) - (K + \delta) f_2(u)) du \right]$$

$$\text{Avec : } f_1(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux} \varphi_X(1+iu))}{u} \text{ et } f_2(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux} \varphi_X(iu))}{u}$$

Le pricing requiert donc le calcul d'une intégrale à support infini. Ainsi, afin de pouvoir effectuer l'implémentation du modèle, nous allons au préalable exposer un changement de variable dans le but de se ramener à une intégrale à support fini.

9.3.4 Intégration sur un intervalle borné

Comme montré précédemment, le pricing d'une swaption via le modèle LMM+ requiert le calcul de l'intégrale à support infini suivante :

$$\int_0^\infty ((R_{m,n}(0) + \delta) f_1(u) - (K + \delta) f_2(u)) du$$

Avec : $f_1(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux}\varphi_X(1+iu))}{u}$ et $f_2(u) = \frac{\text{Im}(e^{-iux}\varphi_X(iu))}{u}$.

Dans leur article *Not-so-complex logarithms in the Heston model* [22], Christian Kahl et Peter Jäckel mettent en avant un changement de variable permettant de se ramener à un calcul d'intégrale sur la borne $]0,1[$.

Faisons le changement de variable suivant : $v = e^{-C_\infty u}$ avec $C_\infty = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{1 - \rho^2}(V(0) + \kappa\theta\tau)$. Pour rappel, le terme λ avait été déterminé à la fin du pricing de la swaption et il était exprimé de la manière suivante : $\lambda = \left\| \sum_{j=m}^{n-1} \omega_j(0) * \gamma_j(t) \right\|$.

L'intégrale à support infini devient alors :

$$\int_0^1 -\frac{1}{vC_\infty} \left((R_{m,n}(0) + \delta) f_1 \left(-\frac{\log v}{C_\infty} \right) - (K + \delta) f_2 \left(-\frac{\log v}{C_\infty} \right) \right) dv \quad (9.10)$$

A ce stade l'ensemble des formules théoriques permettant le pricing de la swaption ont été détaillées. Nous pouvons ainsi poursuivre avec le choix méthodologique du calibrage et son application.

Chapitre 10

Méthodologie de calibrage

Diverses problématiques liées au calibrage telles que l'utilisation de prix Black ou Bachelier ou le choix lié à l'optionnalité des instruments ont déjà été abordées lors du calibrage du modèle G2++. Nous n'aborderons donc pas à nouveau ces éléments lors de ce chapitre.

Nous nous concentrerons donc sur les *input* nécessaires au calibrage du modèle LMM+ ainsi que sur les résultats obtenus.

10.1 Données en *input* et paramètres à calibrer

Le calibrage du modèle LMM+ nécessite les quatre éléments suivants :

- la **courbe des taux sans risque initiale** qui correspond à la courbe fournie mensuellement par l'EIOPA. Celle-ci permettra également de déterminer la courbe des taux *forward* à l'instant $t = 0$ nécessaire au calibrage.
- une **matrice de swaption** (normale dans notre cas) pour un ensemble de ténors et de maturités
- une **structure de corrélation inter-forward** représentant les corrélations entre les taux *forward* pour un ensemble de dates d'expiration. Par ailleurs, il s'agit d'un vecteur dont la dimension déterminera le nombre de facteurs de notre modèle LMM+.
- le ***shift*** représentant le facteur de déplacement du modèle. Ce paramètre pourrait également être calibré; cependant, au vu du nombre de paramètres à calibrer, il paraît judicieux de ne pas rajouter de complexité au calibrage notamment d'un point de vue du temps de calcul. Il sera donc considéré comme un méta-paramètre objectif à travers d'études à priori et à posteriori. Par la suite, le *shift* sera supposé constant et égal à 45 % qui est une valeur *benchmark* chez certains assureurs.

Maintenant que nous avons explicité les données nécessaires au calibrage, présentons les paramètres à déterminer.

Le calibrage aura pour objectif de déterminer les huit paramètres optimaux suivants :

- Les **paramètres de la fonction de Rebonato** : a, b, c, d
- Les **paramètres du processus de variance V** : la vitesse de retour à la moyenne κ , le niveau de retour à la moyenne θ , la volatilité σ

- La **corrélation** ρ entre le mouvement brownien du processus de variance et les browniens utilisés dans la dynamique des taux forward.

Nous pouvons à présent rappeler la minimisation effectuée afin de déterminer les paramètres calibrés.

10.2 Minimisation quadratique

Le principe du calibrage est de déterminer les paramètres permettant d'obtenir des prix issus du modèle LMM+ les plus proches possibles des prix de marché déduits de la matrice de swaption choisie en *input*.

Le calibrage du modèle LMM+ est rendu complexe par le nombre de paramètres à estimer : $(a, b, c, d, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$.

Une minimisation des écarts relatifs quadratiques ou bien des écarts absolus quadratiques peut être réalisée sur les prix. En effet, à ce stade il n'existe pas de formules fermées ou semi-fermées permettant de calculer une volatilité implicite par le modèle LMM+.

Les meilleurs résultats en termes de stabilité du calibrage et de réplication de la matrice de swaption initiale ont été obtenus via la minimisation des écarts relatifs quadratiques sur les prix : c'est cette approche qui sera donc présentée par la suite.

Soit $\psi = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$ le vecteur des paramètres à optimiser.

Ainsi, le calibrage réalisé peut être formulé comme suit :

$$\underset{\psi}{\operatorname{argmin}} f(\psi)$$

Avec :

$$f(\psi) = \sum_{m \in M, t \in T} \omega_{m,t} \left(\frac{PS^{LMM+}(0, m, t, a, b, c, d, \kappa, \theta, \sigma, \rho) - PS(0, m, t)}{PS(0, m, t)} \right)^2$$

Où :

- $PS(0, m, t)$ représente le prix de marché d'une swaption (ie, le prix d'une swaption issu du pricing avec Bachelier) évalué à l'instant 0, de maturité m et de ténor t
- $PS^{LMM+}(0, m, t, a, b, c, d, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$ le prix théorique d'une swaption obtenu avec le modèle LMM+ évalué à l'instant 0, de maturité m , de ténor t et avec les paramètres $a, b, c, d, \kappa, \theta, \sigma, \rho$ associés
- $\omega_{m,t}$ correspond à la pondération de l'écart relatif quadratique sur le prix de maturité m et de ténor t

10.3 Résultats de calibrage

En ce qui concerne le modèle G2++, seuls des résultats de calibrage sur swaption ATM ont été présentés. En effet, le principal avantage de ce précédent modèle était sa simplicité

de compréhension tout en fournissant des résultats très satisfaisants. Ce type de modèle de taux court n'avait évidemment pas pour but de répliquer à la fois des nappes de volatilité ATM et ITM/OTM.

L'attente concernant le modèle LMM+ est différente. En effet, ce modèle est la dernière évolution de la famille des modèles *Libor Market Model* et le plus complexe dû à la prise en compte d'une volatilité stochastique. Celle-ci a pour objectif la réplication des *smile* et des *skew* de volatilité, soit la réplication de swaptions non seulement *At-the-money* mais également *In-the-money* et *Out-the-money*.

Cette section ayant pour but de fournir les résultats de calibrage obtenus sera donc décomposée en deux sous-sections : le calibrage sur swaption ATM et le calibrage sur swaption ITM/OTM.

10.3.1 Calibrage sur swaption ATM

Dans un objectif de cohérence dans la comparaison des deux modèles de taux, les mêmes données de marché ont été utilisées pour les modèles G2++ et LMM+.

Ainsi, les résultats suivants concernent les données de marché du 4^{eme} trimestre de l'année 2020.

Nous avons calculé les prix théoriques des swaptions pour l'ensemble de la nappe de volatilité, ie. pour des maturités allant de 1 à 5 années, puis 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des ténors de 1 à 10 ans, puis 15, 20, 25 et 30 ans.

Pour calculer les prix de marché, nous avons utilisé les strike à la monnaie et les volatilités observées sur le marché pour ces dates.

Pour rappel, les éléments à analyser concernant le calibrage sont :

- la convergence de la fonction objectif
- la non-saturation des paramètres obtenus
- la bonne réplication de la matrice de swaption avec les paramètres calibrés

Convergence de l'optimisation et paramètres calibrés

Comme nous l'avons réalisé lors de l'étude du modèle G2++, le calibrage du modèle LMM+ a été effectué à l'aide de deux algorithmes d'optimisation : l'algorithme de Nelder-Mead et celui de Marquardt-Levenberg. Ces deux méthodes ont déjà été explicitées mais rappelons tout de même que le Nelder-Mead s'arrête au premier minimum local obtenu ce qui le rend très sensible aux paramètres de départ, tandis que le Marquardt-Levenberg comble ce défaut via un calcul de gradient.

Nous pouvons désormais présenter les résultats obtenus concernant la convergence du calibrage :

Algorithme	a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ	Erreur
Nelder-Mead	0.10 %	0.26 %	7.29 %	0.03 %	7.62 %	63.21 %	35.84 %	14.49 %	0.02 %
Marquardt Levenberg	0.01 %	0.23 %	6.15 %	0.28 %	25.82 %	43.51 %	21.03 %	-24.59 %	0.02 %

TABLE 10.1: Résultat du calibrage sur swaption ATM du modèle LMM+

Plusieurs points peuvent à présent être analysés.

D'un point de vue de la convergence de la fonction objectif, les résultats sont très satisfaisants avec une erreur absolue moyenne de 0.02 % pour les deux algorithmes d'optimisation. De plus, hormis le paramètre de corrélation, les paramètres calibrés via les deux méthodes sont semblables ce qui est rassurant quant à l'efficacité du calibrage.

Le second point est que, malgré le nombre élevé de paramètres à calibrer, aucun n'a saturé hormis le paramètre de Rebonato d . Cela est expliqué par un phénomène de compensation. En effet, nous avons pu observer lors de nos études approfondies sur le modèle une compensation entre les paramètres a et d de la structure de Rebonato. Nous pouvons de ce fait accepter la saturation d'un de ces paramètres.

Cependant, un fort point négatif et qui était prévisible concerne le temps de calcul. Ces calibrages ont nécessité entre 20 et 30 minutes afin d'obtenir cette minimisation. Par conséquent, il s'agit d'un élément primordial à prendre en compte, notamment dans un cadre opérationnel. Des études pourraient amener à réduire ce temps de calcul en diminuant l'intervalle des valeurs possibles ou encore en déterminant une matrice hessienne à injecter dans l'algorithme de Marquardt-Levenberg.

Ainsi, pour ces données de marché, la convergence ainsi que la stabilité du calibrage sont satisfaites.

Il reste à présent à vérifier que les volatilités induites par le modèle sont cohérentes avec le marché.

Les volatilités ATM résultant du calibrage

Les résultats précédents montrent des résultats très satisfaisants concernant le calibrage du modèle LMM+.

Le dernier point à étudier afin d'évaluer l'efficacité du calibrage concerne la comparaison des écarts entre les volatilités issues du marché et les volatilités obtenues après calibrage. Par ailleurs, afin de ne pas alourdir la présentation des résultats et sachant que les erreurs de calibrage obtenues via les deux algorithmes d'optimisation sont quasi-identiques, nous présenterons uniquement les résultats obtenus avec l'algorithme de Nelder-Mead.

Voici la matrice montrant les écarts absolus sur l'ensemble de la nappe de volatilité entre les deux matrices évoquées :

10.3. RÉSULTATS DE CALIBRAGE

Maturité / Ténor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,01%	0,00%	-0,02%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,03%	0,06%
2	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%
3	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,01%	0,01%
4	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,04%	-0,03%	-0,01%	0,01%
5	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,01%	0,01%
7	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,02%	-0,02%	0,00%	0,02%
10	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,02%	0,03%
15	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,03%
20	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%
25	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
30	-0,02%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%

FIGURE 10.1: Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle LMM+ après calibrage

Ainsi, nous pouvons constater que les écarts obtenus sur la réplication de la matrice de swaption sont très satisfaisants sur l'ensemble de la nappe de volatilité. Les erreurs sont les plus élevées sur les ténors très faibles, notamment le ténor 1 an. Comme démontré lors de l'étude du modèle G2++, les volatilités pour ces ténors présentent le plus de courbure ce qui rend plus difficile la réplication, pouvant expliquer ces erreurs. Cela permet donc de valider le calibrage du modèle LMM+.

Nous avons donc pu montrer que le calibrage du modèle LMM+ était très satisfaisant avec une bonne convergence des algorithmes d'optimisations ainsi qu'une qualité de réplication de la nappe de volatilité également suffisante.

Toutefois, il est à rappeler les résultats très convaincant obtenus par le modèle G2++ qui est plus simple d'accès, notamment avec la formule de pricing de Schragger et Pelsser. Au vu de la complexité de ce modèle de marché, ces résultats étaient donc prévisibles.

Par conséquent, le modèle LMM+ est principalement attendu lors du calibrage des volatilités ITM/OTM, où une bonne réplication de ces volatilités justifierait non seulement cette complexité accrue ainsi que le coût en temps de calcul.

La section suivante s'attachera donc à analyser les résultats obtenus lors du calibrage sur nappe de volatilité *In-the-money* et *Out-the-money*.

10.3.2 Calibrage sur swaption ITM/OTM

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le calibrage sur swaptions *In-the-money* et *Out-the-money* est relativement complexe.

En effet, ces swaptions présentent des *smile* de volatilité : cela provient de la prise en compte des risques symétriques de certains actifs qui implique une évaluation plus élevée de ces options en dehors de la monnaie. Par conséquent, un graphique représentant des niveaux de volatilités en fonction des *strike* montre une parabole dénommée *smile* de volatilité.

Pourquoi le calibrage sur des nappes ITM/OTM pose-t-il des problèmes pour la majeure partie des modèles de taux ?

10.3. RÉSULTATS DE CALIBRAGE

La raison en est simple : la majorité des modèles de taux embarquent un paramètre de volatilité qui est constant. Or, comme nous venons de l'évoquer, contrairement aux swaptions ATM dont les nappes de volatilité sont relativement *flat* et donc présentent peu de courbures, le *smile* de volatilité retrouvé au sein des swaptions ITM/OTM a une forme de parabole soit une courbure fortement prononcé. Afin de pouvoir fidèlement reproduire ces nappes, une volatilité constante ne suffit pas, c'est pourquoi nous retrouvons des modèles de taux comme le LMM+ qui intègrent une volatilité stochastique. Ainsi, cette volatilité va donner au modèle la "capacité de fluctuation" nécessaire à la reproduction du *smile*.

Données utilisées pour le calibrage

Les données de marché utilisées proviennent du 4^{eme} trimestre de l'année 2019. Le calibrage a été effectué sur une swaption ITM/OTM de ténor 10 ans et sur l'ensemble de la nappe de volatilité, soit pour des maturités allant de 1 à 5 années, puis 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des *strike* allant de -2,5 % à 2,5 % avec un pas de 0,5 %.

Résultats de calibrage

Le calibrage a été effectué via l'algorithme de Nelder-Mead. Précisons également que cette capacité de répliation des *smile* étant dûe à la volatilité stochastique, nous avons augmenté les bornes maximales des paramètres de cette volatilité, en l'occurrence κ , θ et σ , à 2 et non plus 1 comme précédemment.

Les paramètres calibrés obtenus sont les suivants :

a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ
0,02 %	0,01 %	12,25 %	0,87 %	22,01 %	108,58 %	104,34 %	5,15 %

TABLE 10.2: Résultat du calibrage sur swaption ITM/OTM du modèle LMM+

De manière à pouvoir rendre les résultats les plus explicites possible, nous montrerons la qualité répliation des volatilités de marché par le modèle LMM+ à l'aide de graphiques. Nous nous concentrerons sur les résultats concernant les maturités 5, 10, 20 et 30 ans. Les graphiques des comparaisons des volatilités de marché et des volatilités LMM+ avec les paramètres calibrés et pour les maturités précédemment citées sont les suivants :

10.3. RÉSULTATS DE CALIBRAGE

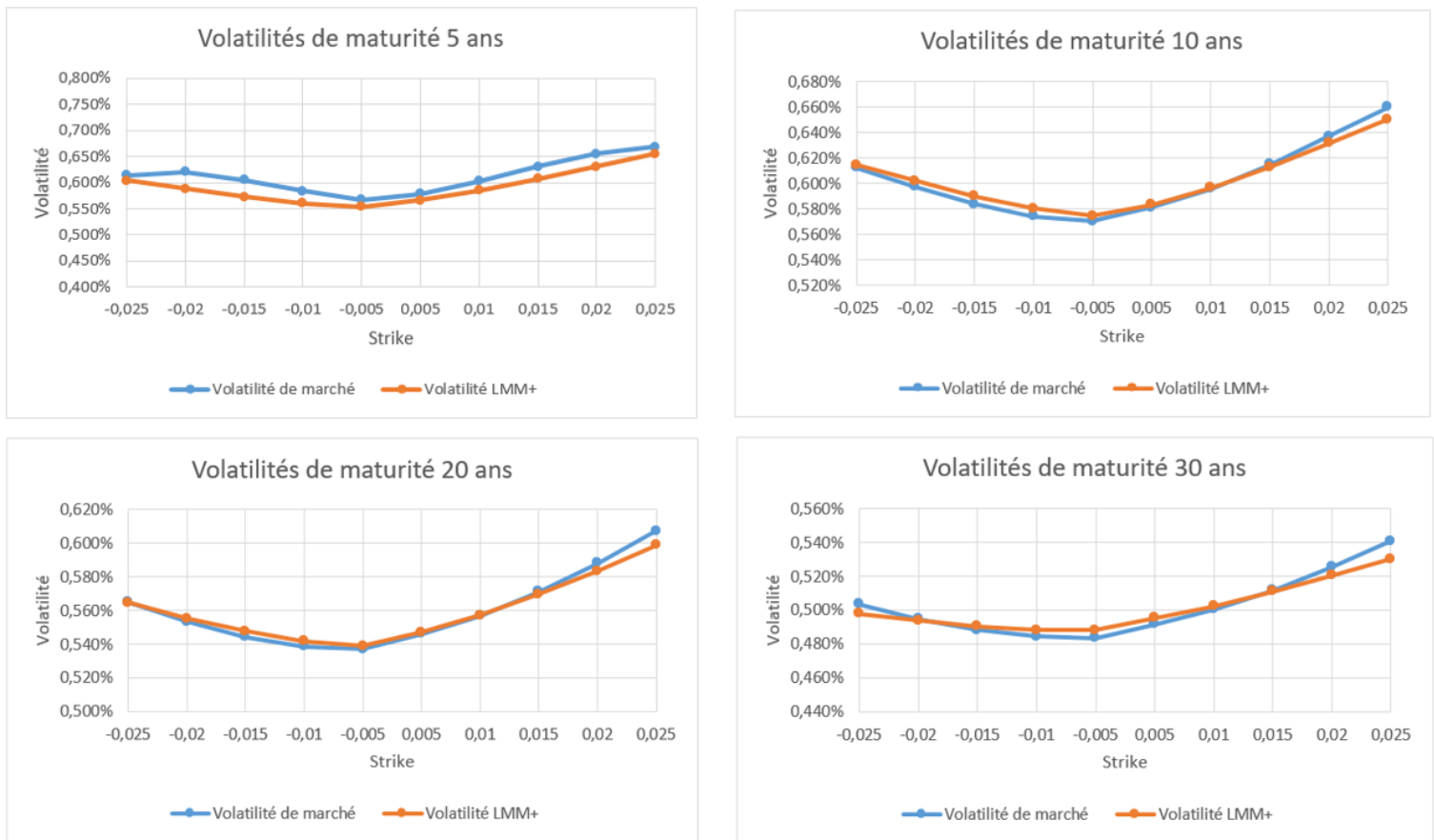


FIGURE 10.2: Graphiques de comparaison des volatilités ITM/OTM du marché et du modèle LMM+ en fonction des *strike* pour plusieurs maturités

Concernant les paramètres calibrés, nous pouvons dans un premier temps remarquer que les paramètres de Rebonato restent assez stables en comparaison au calibrage ATM. Ce sont les paramètres de la volatilité stochastique qui prennent des valeurs très élevées avec le niveau de retour à la moyenne θ et la volatilité de la volatilité stochastique qui prennent une valeur supérieure à 100 %. Cette observation est tout de même cohérente : la réplcation des *smile* impose au modèle d'avoir une très forte volatilité de manière à pouvoir reproduire les niveaux de taux pour chaque *strike*. En ce sens, aboutir à un niveau moyen de volatilité ainsi qu'à une volatilité de la volatilité bien plus élevées que précédemment est compréhensible.

Quant à la qualité de réplcation des volatilités, les résultats sont très bons. En effet, pour l'ensemble des maturités, le modèle permet de *fitter* chaque nappe de volatilité. Tandis qu'un modèle G2++ ferait apparaître une courbe relativement *flat* ie. sans forte courbure, nous pouvons ici affirmer que la volatilité stochastique du modèle LMM+ permet de très bien reproduire les *smile* de volatilité.

Ainsi, ce calibrage sur swaption ITM/OTM démontre l'efficacité du modèle LMM+ et prouve que cette forte complexité du modèle lui confère un solide atout qui est la très bonne réplcation des nappes de volatilité ATM et ITM/OTM.

Nous avons donc pu rendre compte de la très bonne efficacité du modèle LMM+.

A présent, tout comme le modèle G2++, il est nécessaire d'évaluer la stabilité et la robustesse du calibrage du modèle qui est un élément primordial avant son utilisation.

10.4 Etude de la robustesse du calibrage

Nous présenterons des éléments permettant de juger de la robustesse du calibrage. Pour cela, deux études ont été réalisées :

- le calibrage du modèle sur plusieurs années d'exercice
- le multi-start

10.4.1 Calibrage suivant les années d'exercice

L'objectif sera d'objectiver la stabilité du modèle de taux suivant l'utilisation de diverses courbes de taux sans risque et de matrices de swaption.

Lors de l'étude du modèle G2++, plusieurs points ont été abordés concernant les volatilités de marché ainsi que les niveaux de taux sans risque suivant les années d'exercice 2016 à 2020.

Résumons les conclusions de ces points afin de rappeler la pertinence de cette étude. Dans un premier temps, nous avons étudié les niveaux de volatilité pour un ténor ou une maturité donné, selon les années d'exercice. Nous avons ainsi pu constater que pour des maturités données, les niveaux de volatilités pour des ténors élevés variaient fortement. De plus, pour des ténors donnés, nous avons pu observer que les niveaux de courbure des volatilités étaient fortement disparates allant d'une courbe quasi-linéaire pour une année à une courbe fortement pentue pour une autre année.

Enfin, les mêmes études concernant les courbes de taux EIOPA entre 2016 et 2020 avaient pu montrer que les niveaux de taux sans risque chutaient fortement avec les années.

En conséquence, les études de calibrage sur l'ensemble de ces années vont permettre de challenger le modèle de taux via un large panel de niveaux de volatilité et de courbure ainsi que des niveaux de taux sans risque assez variables. Obtenir des résultats satisfaisants pour chaque année d'exercice permettrait donc de justifier la robustesse du modèle.

Présentation des résultats des calibrages suivant les années d'exercice

La même méthodologie de calibrage que celle présentée dans la section précédente a été effectuée, en calibrant sur l'ensemble de la nappe de volatilité. Seuls les résultats de calibrage via l'algorithme de Nelder-Mead seront présentés.

Les résultats suivants concernent les données de marché du 4^{eme} trimestre des années 2016 à 2020.

Nous pouvons désormais présenter les résultats obtenus :

10.4. ETUDE DE LA ROBUSTESSE DU CALIBRAGE

Année	a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ	Erreur
2020	0.1 %	0.26 %	7.29 %	0.03 %	7.62 %	63.21 %	35.84 %	14.49 %	0.02 %
2019	0.19 %	0.27 %	6.88 %	0.14 %	10.34 %	57.57 %	49.94 %	15.56 %	0.01 %
2018	0.4 %	0.27 %	8.22 %	0.09 %	3.79 %	77.17 %	41.1 %	11.92 %	0.02 %
2017	0.45 %	0.31 %	9.17 %	0.14 %	8.47 %	64.82 %	21.0 %	22.43 %	0.02 %
2016	0.26 %	0.36 %	7.32 %	0.10 %	1.66 %	46.16 %	64.55 %	21.95 %	0.03 %

TABLE 10.3: Résultats des calibrages du modèle LMM+, suivant les années d'exercice

Les calibrages effectués sont très satisfaisants puisqu'ils présentent une très bonne convergence ainsi qu'une non saturation des paramètres, ce qui confirme la stabilité du calibrage du modèle LMM+.

Les écarts de répliation des matrices de swaption de marché, pour chaque année d'exercice, sont également convaincants. En moyenne, les écarts obtenus sont très bons sur la majeure partie de la nappe de volatilité avec une erreur absolue moyenne comprise entre 0.01 % et 0.03 %.

Par conséquent, le modèle LMM+ s'adapte très bien aux divers niveaux et aux courbures des volatilités de marché ainsi qu'aux taux sans risque. Cela paraît cohérent sachant que le modèle embarque une volatilité stochastique capable de "fitter" des niveaux de volatilités très variables. La robustesse du calibrage est donc conforté.

Nous pouvons cependant noter que l'important temps de calcul nécessaire au calibrage reste présent pour l'ensemble des calibrages effectués.

Afin de clôturer cette partie de robustesse du calibrage, il est nécessaire d'avoir une idée de la dépendance des résultats du calibrage suivant les paramètres d'initialisation, d'autant plus pour des modèles très fortement paramétrés comme le LMM+.

Pour cela, nous allons effectuer du multi-start.

10.4.2 Multi-Start

Tout d'abord, rappelons le principe du multi-start : cette étude consiste à effectuer un grand nombre de calibrages en initialisant les paramètres de chacun de ces calibrage de manière aléatoire. De ce fait, suivant le nombre d'optimisations aboutissant à une bonne convergence et à une non saturation des paramètres calibrés, nous pourrions conclure quant à l'effet des paramètres d'initialisation sur les résultats du calibrage.

Rappelons enfin les étapes nécessaires au multi-start :

- Choix du nombre d'itérations à effectuer
- Choix de l'intervalle de valeurs que peut prendre chaque paramètre
- Réalisation des calibrages pour chaque set de valeurs aléatoires avec les *output* préalablement choisis dont les paramètres avant et après calibrage, la valeur de la fonction objectif après calibrage, le temps de calibrage

La première étape qui est le choix du nombre d'itérations met en avant une limite du modèle LMM+ déjà abordée précédemment : le temps de calcul du calibrage du modèle. En effet, avec le modèle G2++, le calibrage s'effectuait en quelques secondes rendant le

10.4. ETUDE DE LA ROBUSTESSE DU CALIBRAGE

multi-start possible avec un très grand nombre de scénarios, par exemple 1000 calibrages comme nous l'avons réalisé au chapitre sur ce modèle. Dans notre cas, un tel nombre de scénarios n'est plus envisageable étant donné que le calibrage s'effectue en plusieurs dizaines de minutes : une forte contrainte est donc le nombre de calibrages à réaliser. De ce fait, un multi-start seulement sur 50 jeux de calibrage a été effectué. Il est important d'avoir cette information lors de l'analyse des résultats car la pertinence de l'étude n'est plus comparable à celle réalisée sur le modèle G2++ où nous avons imposé 1000 scénarios de calibrage.

Quant aux données, le multi-start a été réalisé sur les données de marché du 4^{ème} trimestre de l'année 2020, et l'algorithme d'optimisation utilisé est celui de Nelder-Mead.

Hormis le paramètre de corrélations ρ qui a été initialisé via une loi uniforme entre -1 et 1, les autres paramètres du modèle LMM+ ont été initialisés grâce à une loi uniforme entre 0 et 1.

Nous présenterons ci-dessous les résultats satisfaisants en termes de calibrage, soit avec une fonction objectif très faible et une non-saturation des paramètres calibrés. Par conséquent, le reste des scénarios non partagés présentent au moins des deux anomalies évoquées.

Nb. scénarios	a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ	Erreur absolue
5	0,1 %	0,26 %	7,29 %	0,03 %	7,62 %	63,21 %	35,84 %	14,49 %	$5,1 \times 10^{-7}$
3	0,11 %	0,28 %	6,58 %	0,02 %	23,77 %	51,38 %	18,09 %	71,25 %	$5,5 \times 10^{-7}$
3	0,01 %	0,26 %	6,58 %	0,10 %	12,85 %	57,45 %	53,41 %	80,73 %	$1,0 \times 10^{-6}$
2	0,01 %	0,38 %	7,89 %	0,03 %	55,16 %	47,41 %	68,27 %	26,27 %	$1,3 \times 10^{-6}$
1	0,15 %	0,19 %	6,45 %	0,10 %	87,24 %	29,01 %	57,55 %	79,54 %	$1,1 \times 10^{-6}$
1	0,08 %	0,30 %	6,99 %	0,01 %	82,79 %	60,23 %	46,27 %	90,98 %	$1,1 \times 10^{-6}$

TABLE 10.4: Résultats satisfaisants du multi-start via le modèle LMM+

Plusieurs points importants sont à souligner.

Premièrement, nous pouvons noter que 30 % des calibrages fournissent de très bons résultats. Même si la proportion de ces résultats peut paraître plus faible que celle du G2++, il faut nuancer l'étude en rappelant que ce multi-start n'a été effectué que sur 50 itérations. D'autre part, pour les résultats satisfaisants, l'erreur absolue quadratique obtenue est au maximum de $1,1 \times 10^{-6}$ ce qui correspond à des erreurs plus faibles que le modèle précédent. De plus, au vu du très grand nombre de paramètres du modèle et sachant que les paramètres ont tous été initialisés de manière aléatoire avec un intervalle de valeurs assez large, les résultats obtenus sont convaincants.

Deuxièmement, concernant les résultats non satisfaisants, ces derniers concernent tous une valeur finale de la fonction objectif dont l'ordre de grandeur est différent de 10^{-6} que nous considérons comme une non convergence de l'algorithme de calibrage. Il est intéressant de noter que cette non convergence de l'algorithme est toujours accompagnée d'une saturation des paramètres κ ou θ en atteignant la borne maximale. De ce fait, une plus grande attention pourrait être portée à ces deux paramètres en restreignant les intervalles de valeurs d'initialisation ou les intervalles autorisés pendant le calibrage.

Bien que la pertinence des résultats obtenus soit à nuancer en raison du faible nombre de calibrages effectués, les optimisations en résultant sont tout de même satisfaisantes.

En effet, une proportion de 30 % converge avec des erreurs absolues très faibles mettant en avant l'efficacité du modèle LMM+ à répliquer les nappes de volatilité. Néanmoins, ce grand nombre de paramètres à calibrer est plus susceptible d'engendrer des saturations de paramètres, notamment ceux de la volatilité stochastique. Les axes d'étude mentionnés précédemment tels que l'utilisation de *machine learning* afin de déterminer les paramètres d'initialisation adéquats pour calibrer le modèle LMM+ prendraient d'autant plus de sens avec un tel modèle hyper-paramétré. En se basant sur nos travaux, cela peut constituer le sujet d'un mémoire à mener.

Chapitre 11

Validation du modèle

Nous avons présenté plusieurs éléments sur le calibrage du modèle LMM+ ainsi que sa robustesse. Les résultats obtenus sont très convaincants.

Passons désormais à la validation du modèle de taux qui s'effectue via deux tests : le **test de martingalité** et le **test de market-consistency**.

Ces deux tests permettent de valider les scénarios de taux générés par le modèle.

De ce fait nous allons dans un premier temps présenter la discrétisation du modèle LMM+ permettant la diffusion des taux avant d'analyser les résultats obtenus.

11.1 Diffusion du modèle

11.1.1 Discrétisation des taux forward

Tout d'abord, rappelons que sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} , la dynamique suivie par le taux forward est :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \cdot \left(-\sigma_j(t) \sqrt{V(t)} dt + dZ_t \right)$$

Avec :

- Z_t un mouvement brownien sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} , à deux dimensions
- $V(t)$ le processus de variance stochastique
- $\gamma_j(t) = \left(g_{j-m(t)} \beta_{j-m(t)}^1, g_{j-m(t)} \beta_{j-m(t)}^2 \right)$ un vecteur déterministe à deux dimensions. Nous ferons par la suite référence à chacun des éléments du vecteur par la notation suivante $\gamma_j^q(t)$, $q = 1, 2$
- $\sigma_j(t)$ le vecteur de volatilité associé au prix zéro-coupon $P(t, T_j)$
- \cdot désigne le produit scalaire

Or, pour rappel, le vecteur de volatilité associé au prix zéro-coupon $P(t, T_j)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\sigma_j(t) = - \sum_{k=1}^j \frac{F_k(t) + \delta}{1 + F_k(t)} \gamma_k(t)$$

Nous en déduisons donc la dynamique suivante du taux forward sous la même mesure :

$$\forall t \leq T_j, \quad dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \sqrt{V(t)} \gamma_j(t) \cdot \left(\sum_{k=1}^j \frac{F_k(t) + \delta}{1 + F_k(t)} \gamma_k(t) \sqrt{V(t)} dt + dZ_t \right)$$

Dans un soucis de clarté, nous poserons par la suite :

$$\xi_j(t) = (\xi_j^1(t), \xi_j^2(t)) = \left(\gamma_j^1(t) \sqrt{V(t)}, \gamma_j^2(t) \sqrt{V(t)} \right)$$

De ce fait, en introduisant cette notation et en explicitant le produit scalaire précédent, la dynamique du taux forward sous la mesure *spot Libor* peut être réécrite de la manière suivante :

$$dF_j(t) = (F_j(t) + \delta) \times \left[\left(\sum_{k=1}^j \left(\sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t) \right) \frac{F_k(t) + \delta}{1 + F_k(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) dZ^q(t) \right]$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme d'Ito, rappelé en annexe, afin de passer au logarithme :

$$\begin{aligned} d \ln(F_j(t) + \delta) &= \frac{dF_j(t)}{F_j(t) + \delta} - \frac{1}{2} \frac{1}{(F_j(t) + \delta)^2} \times (F_j(t) + \delta)^2 \times \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t)^2 dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^j \left(\sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t) \right) \frac{F_k(t) + \delta}{1 + F_k(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) dZ^q(t) - \sum_{q=1}^2 \frac{\xi_j^q(t)^2}{2} dt \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer entre les instants annuels de projection T_i et T_{i+1} :

$$\begin{aligned} \ln(F_j(T_{i+1}) + \delta) &= \ln(F_j(T_i) + \delta) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\sum_{k=1}^j \left(\sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t) \right) \frac{F_k(t) + \delta}{1 + F_k(t)} - \sum_{q=1}^2 \frac{\xi_j^q(t)^2}{2} \right] dt \\ &\quad + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) dZ^q(t) \end{aligned}$$

Il suffit alors de composer par la fonction exponentielle afin d'isoler le taux forward :

$$\begin{aligned} F_j(T_{i+1}) &= (F_j(T_i) + \delta) \times \\ &\quad \exp \left[\int_{T_i}^{T_{i+1}} \left(\sum_{k=1}^j \frac{(F_k(t) + \delta) \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t)}{1 + F_k(t)} - \sum_{q=1}^2 \frac{\xi_j^q(t)^2}{2} \right) dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) dZ^q(t) \right] - \delta \end{aligned}$$

Finalement, nous en déduisons la discrétisation suivante du taux forward :

$$F_j(T_{i+1}) = (F_j(T_i) + \delta) \times \exp \left[\left(\sum_{k=i+1}^j \frac{(F_k(T_i) + \delta) \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(T_i) \xi_k^q(T_i)}{1 + F_k(T_i)} - \sum_{q=1}^2 \frac{\xi_j^q(T_i)^2}{2} \right) + \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(T_i) \varepsilon_1^q(T_i) \right] - \delta$$

Avec :

- $\varepsilon_1^q, q = 1, 2$ deux aléas de loi normale centrée réduite. Comme décrit précédemment, ces deux aléas sont indépendants mais chacun est corrélé avec l'aléa du processus de variance. Une décomposition de Cholesky est donc nécessaire afin d'explicitier ces deux aléas, ce qui sera fait par la suite.
- $\xi_j^q(t) = \sqrt{V(t)} \times g_j(t) \times \beta_j(t)$

Précision quant au pas de discrétisation du processus de variance

Lors de la discrétisation du taux forward détaillée précédemment, nous avons dû intégrer entre les instants annuels de projection T_i et T_{i+1} .

Cependant, en pratique, une discrétisation plus fine est effectuée. En effet, sachant qu'un processus CIR ne dispose pas d'une discrétisation exacte, sa discrétisation s'effectue en pratique suivant un pas mensuel afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Le processus de variance $V(t)$ sera donc considéré constant par morceaux mensuellement et non annuellement.

De ce fait, ce n'est pas une intégration entre les instants annuels T_i et T_{i+1} qui est réalisée mais une intégration entre les instants mensuels T_{i+h} et $T_{i+h+\frac{1}{12}}$, avec $h = 0, \frac{1}{12}, \dots, \frac{11}{12}$. Etant donné que les taux forward sont supposés constants au cours d'une même année, seul le terme $\xi^q(t)$, qui dépend de la variance, sera impacté par cette modification du pas d'intégration. En effet, la variance $V(t)$ ne prendra plus en compte seulement la dernière échéance annuelle, mais correspondra à une somme annualisée des diffusions mensuelles.

Dans le cadre du modèle LMM+ et dû à la remarque précédente, les modifications suivantes sont obtenues :

Pour $t \in [T_{i-1}, T_i[$ et $i \leq j$:

$$\xi_j^q(t) = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^{12} V(T_{i-1} + \frac{p}{12})}}{12} \times g_j(t) \times \beta_j^q(t)$$

$$\xi_j^q(t)^2 = \frac{\sum_{p=1}^{12} V(T_{i-1} + \frac{p}{12})}{12} \times (g_j(t) \times \beta_j^q(t))^2$$

Maintenant que nous avons détaillé la discrétisation du taux forward ainsi que de la précaution à prendre concernant la finesse de discrétisation du processus de variance, nous pouvons désormais expliciter cette dernière.

11.1.2 Discrétisation du processus de variance

Le processus de variance est régi par un modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*.

Tout d'abord, rappelons que sous la mesure *spot* Libor, la dynamique du processus CIR est la suivante :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_t$$

Avec :

- κ la vitesse de retour à la moyenne
- θ le niveau de retour à la moyenne
- σ la volatilité
- W_t un mouvement brownien sous cette même mesure, corrélé au mouvement brownien bi-dimensionnel du taux forward

Discrétisation d'Euler

Le schéma habituel de discrétisation de ce processus est la discrétisation d'Euler suivante :

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \kappa(\theta - V_+(t))\tau + \sigma\sqrt{V_+(t)}\tau\varepsilon_2(t) \quad (11.1)$$

Avec :

- ε_1 un aléa de loi normale centrée réduite, corrélé aux aléas normaux des taux forward $\varepsilon_1^q, q = 1, 2$
- $V_+ = \max(V, 0)$

Même si les résultats des tests de martingalité et de *market-consistency* obtenus via cette diffusion sont très satisfaisants, plusieurs biais entrent en compte lors de cette discrétisation.

Premièrement, l'utilisation d'un maximum ou d'une valeur absolue sous la racine est nécessaire et peut impliquer de fortes variations lors de la diffusion.

De plus, si la condition de Feller n'est pas respectée, cette diffusion peut engendrer des valeurs négatives de la variance. Par conséquent, pour contourner ce problème, il sera nécessaire de remplacer la variance par le maximum entre 0 et la variance dans la fonction ξ_j^q présentée dans la section précédente. Cela induit donc un biais dans la diffusion puisque certaines valeurs du CIR seraient tronquées.

Discrétisation logarithmique

Cette discrétisation est issue de l'article de Wu & Zhang [26] qui propose un schéma log-normal du CIR.

Sous la mesure *spot* Libor \mathbb{Q} , la diffusion du CIR est la suivante :

$$V(t + \Delta t) = E_t^{\mathbb{Q}}[V(t + \Delta t)]e^{-\frac{1}{2}\Gamma_t^2\Delta t + \Gamma_t\Delta W_t} \quad (11.2)$$

Où :

$$\Gamma_t^2 = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V^2(t + \Delta t) | F_t]}{(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(t + \Delta t) | F_t])^2}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(t + \Delta t) | F_t] &= \theta + (V(t) - \theta)e^{-\kappa\Delta t} \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V^2(t + \Delta t) | F_t] &= \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2\kappa\theta}\right) (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(t + \Delta t) | F_t])^2 - \frac{\epsilon^2}{2\kappa\theta} e^{-2\kappa\Delta t} V^2(t) \end{aligned}$$

Cette discrétisation provient simplement de l'hypothèse de log-normalité du CIR d'où l'usage de l'exponentielle, tout en prenant en compte les moments d'ordres 1 noté $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(t + \Delta t) | F_t]$ et d'ordre 2 noté $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V^2(t + \Delta t) | F_t]$ du processus CIR.

Ce schéma de discrétisation permet donc de contourner le biais issu de l'utilisation d'un maximum dans la discrétisation d'Euler. De plus, cette diffusion n'engendre pas de valeurs négatives du processus de variance ce qui permet à nouveau d'éviter de tronquer certaines valeurs du processus CIR dans la fonction ξ_j^q évoquée précédemment.

Néanmoins, il est important de nuancer que les valeurs obtenues en termes de volatilités induites par le modèle LMM+ sont quasi équivalentes : nous avons constaté des différences entre les volatilités induites par les deux schémas de diffusion du CIR de l'ordre de 10^{-6} . La diffusion logarithmique sera tout de même choisie pour les avantages déjà évoqués.

Nous avons donc spécifié les discrétisations des taux forward ainsi que du processus de variance. Afin de pouvoir réaliser la diffusion du modèle, il ne reste plus qu'à préciser les aléas corrélés utilisés.

11.1.3 Corrélations des mouvements browniens du modèle LMM+

Pour rappel, dans le cadre du modèle LMM+, nous avons défini trois mouvements browniens :

- le mouvement brownien uni-dimensionnel W_t nécessaire à la diffusion du processus de variance stochastique
- Le mouvement brownien bi-dimensionnel $Z_t = (Z_t^1, Z_t^2)$ qui intervient dans la diffusion des taux forward, avec Z^1 indépendant de Z^2

Chacun des browniens Z^1 et Z^2 est corrélé au brownien W via le facteur de corrélation calibré ρ , d'où la nécessité de corréliser les aléas normaux utilisés dans la diffusion du modèle de taux.

La matrice de corrélation est donc la suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir des réalisations du mouvement brownien multidimensionnel, de matrice de corrélation Σ , à partir de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, la méthode utilisée est la factorisation de Cholesky.

Maintenant que la matrice de corrélation est définie et sachant qu'elle est symétrique définie positive, nous allons pouvoir déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que $\Sigma = LL^T$.

Cette matrice L peut facilement être déterminé et est la suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ \rho & -\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} & \sqrt{1-\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}}} \end{pmatrix}$$

La décomposition de Cholesky nous affirme alors que pour un vecteur gaussien Y , de matrice de corrélation Σ de dimension n symétrique définie positive, nous pouvons écrire Y de la forme $Y = LX$, avec L une matrice de dimension n telle que $LL^T = \Sigma$, et $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$ dans \mathbb{R}^n avec I_n la matrice identité de dimension n .

Ainsi, dans notre cas, soit le vecteur $Y = (W, Z^1, Z^2)$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ représentant les trois mouvements browniens devant être générés. Nous pouvons donc les simuler à partir de trois variables indépendantes de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ X_1, X_2 et X_3 via la méthode de Cholesky :

$$\begin{aligned} W &= X_1 \\ Z^1 &= \rho W + \sqrt{1-\rho^2} X_2 \\ Z^2 &= \rho W - \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} Z^1 + \sqrt{1-\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}} X_3 \end{aligned}$$

Nous avons donc montré comment corrélérer les aléas normaux nécessaires à la diffusion des taux forward et de la volatilité stochastique.

Montrons à présent les résultats obtenus en termes de martingalité et de market-consistency pour le modèle LMM+.

11.2 Test de martingalité

Pour rappel, le test de martingalité consiste à vérifier que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Pour les modèles de taux, le test de martingalité revient à vérifier l'hypothèse de martingalité pour les déflateurs. Cela signifie que les trajectoires moyennes des déflateurs doivent être proches du taux zéro-coupon pour tout instant $t \geq 0$, i.e :

$$\mathbb{E}[D(t)] \approx P(0, t)$$

avec,

$$D(0, t) = \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1 + \tau_i F_{i+1}(T_i)}$$

Pour vérifier cela, nous allons simuler les taux à l'aide de notre modèle et vérifier que la valeur moyenne des déflateurs calculés avec les taux diffusés est proche de la valeur des zéro-coupons initiaux obtenus à partir de la courbe EIOPA.

Nous pourrions aussi remarquer que le test de martingalité revient également à vérifier que le rapport entre la moyenne des trajectoires des déflateurs et le prix du zéro-coupon est proche de 1 :

$$\frac{\mathbb{E}[D(t)]}{P(0, t)} \approx 1$$

La construction d'intervalles de confiance a été préconisée par l'ACPR dans sa revue [1]. Nous avons donc construis un intervalle de confiance au niveau $\alpha=5\%$ par la méthode de Monte-Carlo :

$$IC = \left[\mathbb{E}(D(t)) - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \mathbb{E}(D(t)) + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right]$$

où,

- $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.
- s_n est l'estimateur de la variance des trajectoires de $D(t)$.
- n est le nombre de simulations.

Résultat du test de martingalité pour le modèle LMM+

Les deux graphes suivants présentent les résultats du test de martingalité.

11.2. TEST DE MARTINGALITÉ

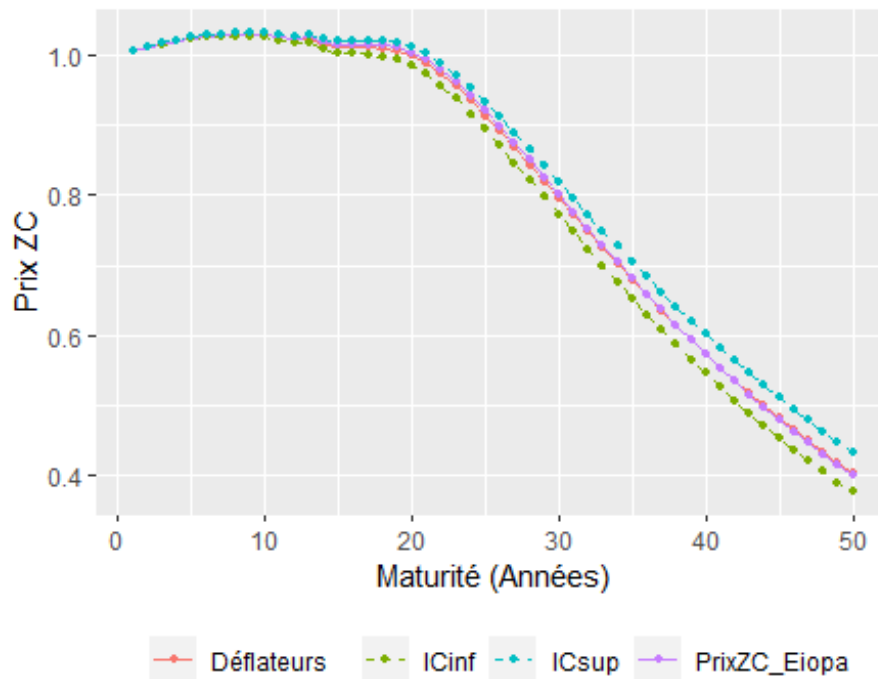


FIGURE 11.1: Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur les prix zéro-coupon

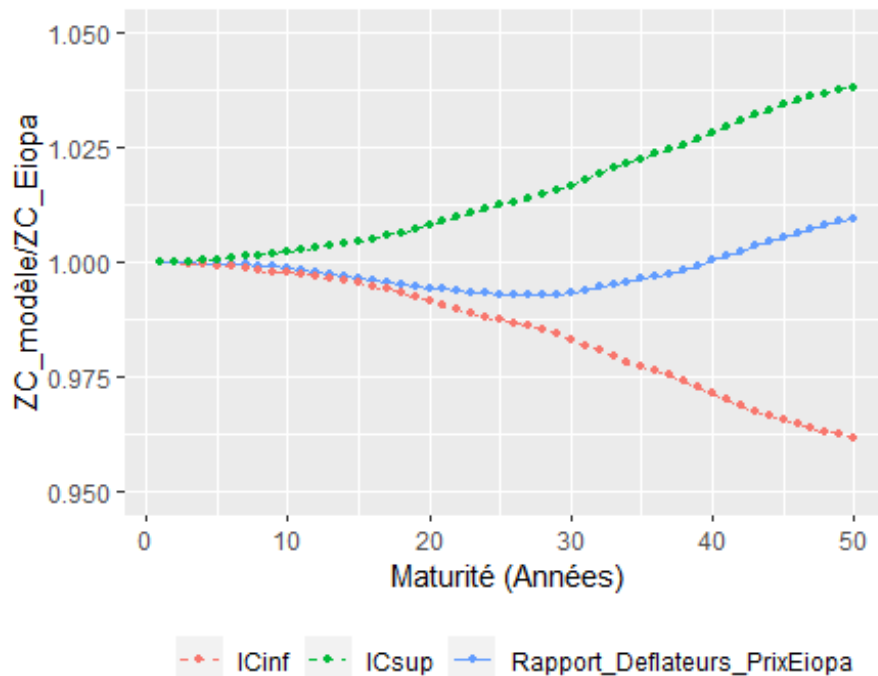


FIGURE 11.2: Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur le rapport des prix zéro-coupon $\frac{PrixZC(LMM+)}{PrixZC(EIOPA)}$

Le test martingale du modèle LMM+ est efficace avec une erreur relative maximale à

11.3. TEST DE MONTE-CARLO

moins de 1 %. Ces très bons résultats nous permettent donc de valider ce test pour ce modèle.

11.3 Test de Monte-Carlo

Pour rappel, ce test est basé sur la loi forte des grands nombres.

Nous allons donc faire le pricing risque-neutre d'une swaption avec la méthode de Monte-Carlo.

Pour faire cela, la méthodologie est la même qu'avec le modèle G2++ : nous devons diffuser les taux jusqu'à une maturité donnée T_α puis calculer à cet instant le payoff à l'aide de la formule $(S_{T_\alpha} - Strike)^+$ où S_{T_α} est le taux swap à l'instant T_α . Il faut ensuite multiplier cela par la valeur de ce swap entre T_α et T_β .

Nous appliquons alors la formule du payoff du swaption en T_α , notée $Swaption_{T_\alpha}$, à un grand nombre de scénarios et nous prenons la moyenne en actualisant avec les déflateurs :

$$Swaption_{T_\alpha, T_\beta} = (S_{T_\alpha} - Strike)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(T_\alpha, T_i)$$

Ainsi le prix simulé avec Monte-Carlo doit se rapprocher du prix observable sur le marché.

Résultat du test de Monte-Carlo pour le modèle LMM+

Tout d'abord, présentons les écarts absolus entre notre matrice de swaption reconstituée à partir du *pricing* via le modèle LMM+ et notre matrice de volatilités déterminées via la méthode Monte-Carlo :

Maturité / Ténon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
7	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%
10	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%
15	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%
20	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
25	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%
30	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,01%

FIGURE 11.3: Ecarts absolus entre les volatilités Monte-Carlo et les volatilités de la swaption après calibrage

Conclusion : Ce test met en avant des écarts entre les volatilités pricées via le modèle LMM+ et les volatilités Monte Carlo obtenues à partir de notre diffusion qui sont excellentes. En effet, nous notons des écarts absolus de l'ordre de 10^{-6} sur la majorité de la

matrice. Les erreurs augmentent avec les maturités, mais l'écart maximal de 0.02 % reste négligeable. De ce fait, nous pouvons ici mettre en avant les qualités du modèle LMM+ qui, intégrant une volatilité stochastique, est en mesure de répliquer quasi parfaitement les volatilités de notre swaption.

Cela conclut la partie Validation de notre GSE et nous pouvons conclure que, tout comme le test de martingalité, le test de "Market Consistency" est très bien réussi pour notre modèle de marché : le LMM+.

11.4 Conclusion sur le modèle LMM+

Ainsi, s'achève l'étude du modèle LMM+.

Ce modèle de marché à volatilité stochastique se différencie par sa complexité. Nous avons donc tout d'abord pu détailler l'ensemble du cadre théorique du modèle ainsi que les raisonnements mathématiques à l'origine des expressions de *pricing* d'une swaption et de diffusion via ce modèle.

Cette complexité s'est avérée très efficace avec de très bons résultats sur les nappes de volatilité attendues.

Dans un premier temps, les réplifications des nappes de volatilité sont toujours très satisfaisantes. Le G2++ fournissait également un calibrage convaincant sur des swaptions ATM mais le test de *market-consistency* montrait de forts écarts entre les volatilités modèle et les volatilités Monte-Carlo. Pour le modèle LMM+, ces écarts Monte-Carlo sont également très faibles, démontrant donc un avantage bien clair pour celui-ci.

Dans un second temps, le LMM+ a démontré la pertinence et l'efficacité de l'intégration d'une volatilité stochastique lui permettant la réplification de nappes de volatilité *In-the-money* et *Out-the-money*. Il s'agit donc d'un avantage certain de ce modèle par rapport au G2++.

Enfin, le calibrage sur un ensemble important d'années d'exercice a confirmé la robustesse du modèle LMM+.

Néanmoins, certaines limites du modèle de marché sont apparues.

Premièrement, il s'agit du temps de calibrage de ce dernier. En effet, tandis que le modèle G2++ fournissait des paramètres calibrés satisfaisants en quelques secondes, ce modèle nécessite plusieurs dizaines de minutes afin d'effectuer un calibrage. Cela peut sembler être un inconvénient négligeable lors de la réalisation d'un calibrage, tout de même, comme nous l'avons vu lors d'études telles que le multi-start, cela induit certaines contraintes comme la diminution du nombre de calibrages réalisés.

L'inconvénient précédent provenait du nombre conséquent de paramètres à calibrer. Une seconde limite qui en découle est parfois la saturation de certains paramètres calibrés, notamment ceux de la fonction de Rebonato, pouvant avoir pour conséquence de forts écarts de calibrage.

A l'issue de ces études, nous avons pu analyser et comparer les modèles G2++ et LMM+ d'un point de vue strictement GSE à travers une étude théorique, une étude de stabilité ou encore de robustesse des modèles.

A présent, il est intéressant d'étudier leurs impacts sur un aspect davantage pratique de

11.4. CONCLUSION SUR LE MODÈLE LMM+

la vie d'un assureur : sa gestion actif-passif.

La partie suivante va donc consister à présenter brièvement la modélisation ALM puis à analyser les impacts de chaque modèle sur des indicateurs clés de la gestion actif-passif.

Quatrième partie

Impact du modèle de taux sur des indicateurs de la solvabilité d'un assureur

Chapitre 12

Le modèle ALM

12.1 Introduction au modèle ALM

Nous nous plaçons dans le cadre d'une compagnie d'assurance vie détenant des portefeuilles de contrats d'épargne en Euros.

Principalement rencontrée en assurance vie, la gestion actif-passif est nécessaire. En effet, dans cette branche de l'assurance, les contrats ont des durations très élevées pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines d'années. Or, les actifs dans lesquels la compagnie a investi n'ont que très rarement des durations aussi longues. Dès lors, une gestion actif-passif est indispensable afin d'établir une concordance entre les échéanciers de l'un et de l'autre.

Tout d'abord, l'outil ALM utilisé doit être stochastique afin de pouvoir envisager une multitude de scénarios et donc capter l'ensemble des informations financières.

En effet, les options et garanties financières embarquées dans les contrats d'assurance vie telles que le taux minimal garanti (TMG) ne sont pas linéaires. En conséquence, un modèle déterministe ne peut capter l'ensemble des informations nécessaires à cet adossement actif-passif.

D'autre part, l'actif impacte nécessairement le passif, notamment dû aux mécanismes de rachats des contrats. Par exemple, supposons un scénario dans lequel les rendements financiers sont faibles par rapport à la concurrence. Du côté de l'actif, cela aura pour conséquence une faible revalorisation des actifs financiers qui impliquerait alors des taux servis plus faibles que les taux de marché. Du côté du passif, ces taux servis plus faibles pourraient naturellement être suivis de rachats de contrats d'assurance vie, en raison d'un départ vers la concurrence. De ce fait, une gestion actif-passif stochastique est indispensable.

L'enjeu d'un modèle ALM est donc de permettre la gestion actif-passif en modélisant les interactions entre les placements et les engagements de l'assureur afin d'effectuer entre autres :

- une évaluation de l'exigence en capital réglementaire : le SCR
- une évaluation de la valeur des portefeuilles et de la compagnie telle que l'*Embedded Value*
- une optimisation de l'allocation des fonds propres et de l'allocation d'actifs

La stratégie financière, notamment les politiques de redistribution des bénéfiques aux épargnants, est donc au cœur du modèle ALM. Celle-ci étant spécifique à l'assureur, chaque compagnie possède son propre modèle ALM.

In fine, l'outil projette un ensemble de flux d'actifs et de passifs, tout en prenant en compte les stratégies financières mises en place par l'assureur dans une situation donnée. Les projections sont effectuées par *model points* et sont les suivantes :

- l'évolution du **passif** : tout d'abord, cela prend en compte les cashflows de passifs dans lesquels nous retrouvons, en épargne, les prestations de décès, prestations de rachats, les frais et les commissions. De plus, cette évolution concerne aussi la **revalorisation des contrats** qui est fonction de l'algorithme de participation aux bénéfiques. Il est également indispensable de projeter les **provisions techniques**, dont les plus impactantes en épargne sont la Provision pour Participation aux Bénéfiques (PPB), la Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) et la réserve de capitalisation. Enfin, les **dividendes versés** aux actionnaires font partie intégrante du *model points*.
- l'évolution de l' **actif** : les cashflows seront les ventes et les achats d'actifs, les réalisations de plus et moins values latentes, les coupons d'obligations, les dividendes, les loyers, etc.

Toutes ces projections doivent être réalisées conformément :

- à la **stratégie financière** de l'assureur : investissements, marges, montant cible de versement de participation aux bénéfiques et allocation cible
- à la **règlementation** : montant de participation aux bénéfiques minimum, écoulement de la PPB sous 8 ans etc.
- au **comportement des assurés**

12.2 Modélisation du passif

12.2.1 Portefeuille de passif

Etant donné que les portefeuilles d'une compagnie d'assurance contiennent généralement un grand nombre de contrats, la projection contrat par contrat des cashflows de passifs est coûteuse, notamment en temps de calcul. De ce fait, la directive Solvabilité II autorise les acteurs à regrouper les contrats pour lesquels les risques sont homogènes au sein de mêmes groupes de contrat, appelés *models points*. Ainsi, cela amène à une réduction considérable de la complexité du modèle de gestion actif-passif ainsi que du temps de calcul. Afin de pouvoir effectuer des regroupements de contrats, les caractéristiques prises en compte sont en général les suivantes :

- le sexe
- l'âge
- le produit de contrat

- l'ancienneté du contrat
- les caractéristiques financières du contrat : fréquence des primes, garanties du contrat, TMG etc.

La projection d'une ligne du portefeuille de passif comprendra donc l'ensemble des données citées précédemment. D'autre part, cette projection nécessite d'émettre un ensemble d'hypothèses que nous allons désormais détailler.

12.2.2 Hypothèses de modélisation du passif

Les hypothèses réalisées sont généralement communes au domaine de l'assurance vie. Les prestations aux passifs sont déclenchées lors du rachat d'un contrat ou lors du décès de l'assuré, des hypothèses sont donc nécessaires quant à la modélisation de ces deux risques. Les hypothèses de modélisation du passif sont les suivantes :

- les hypothèses de rachats : en assurance vie, l'assuré a la possibilité de racheter son contrat à tout moment. Les rachats sont classés selon deux catégories qui sont les rachats conjoncturels, qui sont dus à la conjoncture économique, et les rachats structurels qui résultent de raisons propres à l'épargnant. Les rachats peuvent donc dépendre d'un grand nombre de facteurs : ancienneté, âge, année, situation économique. Des tables de rachats sont ainsi construites par l'assureur ou établies sur celles proposées par l'ACPR.
- les hypothèses de décès : les tables de mortalité utilisées sont certifiées par l'ACPR. Ces tables sont catégorisées par sexe et par génération.
- les hypothèses de distribution de participation aux bénéficiaires : un assureur doit redistribuer à minima 85% du résultat financier et 90% du résultat technique aux assurés. Pour rappel, l'assureur a la possibilité d'effectuer cette redistribution sous 8 années, d'où la possibilité pour celui-ci d'établir une stratégie financière adaptée.

12.3 Modélisation de l'actif

La modélisation de l'actif permet la projection des valeurs de marché et comptables des actifs possédés par l'assureur. La modélisation ne prend pas en compte de politique de réinvestissement de l'assureur, la répartition du portefeuille en valeur de marché est donc identique à celle définie initialement.

12.3.1 Portefeuille d'actifs

Les actifs sont regroupés en classes d'actifs.

Le portefeuille d'actifs de la compagnie d'assurance est composé selon les classes d'actifs suivantes :

- Les actions
- Les OPCVM¹

1. Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

- Les obligations : elles peuvent être réparties selon qu'elles fournissent un taux fixe, un taux variable ou encore un taux indexé sur inflation
- L'immobilier
- Le cash
- Les actifs compris dans le fonds en unités de compte, comme un OPCVM UC

De plus, comme pour le portefeuille de passifs, les acteurs sont autorisés à regrouper les actifs ayant des caractéristiques similaires sous forme de *model points* dans un souci de simplification du modèle et de gain en temps de calcul. Les spécificités prises en compte dans la construction du *model point* sont les suivantes :

- la nature de l'actif : actions, obligations souveraines ou *corporate*, immobilier ...
- la maturité
- le rendement
- la volatilité
- le type de taux (fixe, variable, indexé)

12.3.2 Le Générateur de Scénarios Economiques

Le rôle et le principe d'un GSE risque-neutre ont déjà été développés précédemment. Pour rappel, le GSE permettra, via la simulation de facteurs de risque corrélés, d'obtenir les *input* nécessaires à la modélisation de l'actif et sont les suivants :

- Prix zéro-coupon et facteurs d'actualisation
- Indice action
- Indice immobilier
- Indice inflation

Remarque : La prise en compte du risque de crédit *corporate* et souverain prend une part de plus en plus importante dans la génération des scénarios économiques, principalement suite aux dernières recommandations de l'ACPR comme cela est mentionné dans leur revue de 2020 sur les GSE [1]. Toutefois, dans le cadre de ce mémoire, nous ne considérons pas ce risque dans nos calculs au vu de la complexité des modèles de crédit et du temps nécessaire à leur intégration.

12.3.3 Hypothèses de modélisation de l'actif

La modélisation de l'actif est donc réalisée par le générateur de scénarios économiques. A l'actif, les hypothèses de projection sont donc celles du GSE et ont donc déjà été développées précédemment.

12.4 Modélisation des interactions actif-passif

Les projections de l'outil de gestion actif-passif se feront en quatre étapes :

1. Projection des cashflows d'actifs
2. Projection des cashflows de passifs
3. Mise en place de la stratégie financière de la compagnie
4. Mise en place de la stratégie de revalorisation de la compagnie

L'interaction actif-passif n'est observée que lors de cette dernière étape.

Les projections d'actifs et de passifs ont déjà été détaillées dans la section précédente. Tout de même, quelques précisions sont à apporter sur les passifs. La majorité des passifs est constituée par les provisions techniques : elles comprennent les provisions mathématiques (PM), la provisions pour participation aux bénéfices (PPB), la provision pour risque d'exigibilité (PRE). L'autre élément constituant les passifs correspond aux fonds propres. Enfin, concernant la projection du portefeuille de passif, précisons que l'encours du portefeuille est alimenté de façon positive par les primes futures versées par l'assuré. Au contraire, les chargements du contrat ainsi que les montants des rachats et des décès (probabilisés) diminuent la valeur du portefeuille.

Stratégie financière de la compagnie

A la fin de chaque année, une réallocation d'actifs est généralement réalisée. En effet, au cours d'une année, dû aux scénarios économiques issus du GSE ainsi qu'aux versements des prestations aux épargnants, la composition du portefeuille se retrouve modifiée. Par exemple, en cas de mauvais rendements financiers, la compagnie pourrait être amenée à verser un taux de participation aux bénéfices non attractif. De ce fait, la vente d'actifs de manière à réaliser des plus values latentes permettrait d'engendrer des bénéfices financiers de manière à servir un taux de PB plus élevé.

Par conséquent, ces opérations courantes modifient le portefeuille d'actifs. Afin de respecter son allocation d'actifs, une réallocation de ces actifs est effectuée.

A nouveau, aucun adossement actif-passif n'a été pour l'instant nécessaire.

Stratégie de revalorisation de la compagnie

Après avoir réalisé les projections des actifs et de passifs ainsi que la réallocation d'actifs via la stratégie financière mise en place par la compagnie, celle-ci peut alors se focaliser sur la revalorisation des contrats. Entrent donc en jeu des mécanismes de gestion actif-passif sachant que cette revalorisation dépend directement des taux de participation aux bénéfices.

Dans un premier temps, un taux cible de participation aux bénéfices doit être défini. En effet, étant donné que l'assuré peut racheter son contrat à tout moment, l'assureur doit proposer un taux de revalorisation de l'encours proche de celui de ses concurrents afin d'éviter les rachats dynamiques. En ce sens, ce taux cible va dépendre du taux servi durant l'année précédente, des taux minimums garanti ainsi que du taux moyen des emprunts (TME).

Dans un second temps, la compagnie définit son taux servi qui déterminera le montant des provisions mathématiques après revalorisation. Ce taux est fonction du taux cible, des produits financiers réalisés et de la provision pour participation aux bénéfices disponible. Le surplus de produits financiers non affecté à cette revalorisation approvisionnera la PPB.

12.5 Données utilisées

Les données utilisées sont des données *benchmark* d'un acteur vie moyen du marché français, ayant uniquement des contrats d'épargne.

12.5.1 Portefeuille d'actifs

La compagnie dispose d'un portefeuille d'actifs dont la valeur nette comptable est d'environ 7,8 milliards d'euros, répartis de la façon suivante :

Type d'actifs	Valeur nette comptable	Allocation initiale (hors UC)
Action	568 679 716	9%
Immobilier	339 502 819	5%
Obligation	3 515 050 593	62%
OPCVM	1 378 423 818	22%
OPCVM UC	1 910 500 000	
Cash	68 532 051	1%

TABLE 12.1: Allocation initiale des actifs

De plus, les obligations sont toutes des obligations à taux fixe.

12.5.2 Portefeuille de passifs

La compagnie détient à la fois des contrats EURO et des contrats en unités de compte (UC).

La répartition du passif est la suivante :

- les fonds propres représentent 4 % du passif
- les provisions techniques représentent la très grande majorité du passif avec 94 % du passif dont 65 % en fonds EURO et 35 % en fonds UC
- les dettes composent le passif à hauteur de 2 %

Enfin, la compagnie adopte un taux contractuel de gestion technique de 90 % et un taux usuel de produits financiers de 85 %.

Afin de clôturer cette partie sur le modèle ALM utilisé, rappelons succinctement les indicateurs d'actif-passif allant être utilisés.

12.6 Indicateurs clés ALM

12.6.1 *Best Estimate*

Le *Best Estimate* correspond à la valeur probable des flux futurs de trésorerie actualisés à la courbe des taux sans risque. Ces flux comprennent entre autres les primes, les rachats des assurés et les frais de l'assureur.

Le Best Estimate est décrit par la formule suivante :

$$BE = \mathbb{E} \left(\sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1 + r_t)^t} \right)$$

avec :

- \mathbb{E} l'espérance sous la probabilité risque-neutre
- CF_t les cash-flows des prestations futures
- r_t le taux sans risque en t
- T l'horizon de projection suffisamment long pour couvrir la durée de vie totale du portefeuille d'assurance et de réassurance

Lors de la présentation des résultats, nous ferons référence au *Best Estimate* total, au *Best Estimate* affilié aux contrats EURO ainsi que celui lié aux contrats en unité de compte.

12.6.2 *Solvency Capital Requirement*

Le *Solvency Capital Requirement* (SCR) est défini comme le montant de capital minimum dont l'assureur doit disposer pour absorber les pertes portentielles à horizon un an avec une probabilité de 99.5% . Le détail de son calcul a déjà été abordé lors du premier chapitre.

12.6.3 Ratio de couverture

Le ratio de couverture est un indicateur clé de la réforme Solvabilité II permettant d'apprécier la solvabilité d'une compagnie d'assurance. Il est calculé de la manière suivante :

$$\text{Ratio de couverture} = \text{Fonds propres} / \text{SCR total}$$

Nous avons donc présenter brièvement en quoi consiste la modélisation ALM, les mécanismes d'interaction actif-passif, les données *Benchmark* utilisées ainsi que des indicateurs clés qui nous permettront d'analyser les résultats obtenus.

A présent, nous pouvons alors présenter les sensibilités réalisées ainsi que les résultats associés.

Chapitre 13

Sensibilités et Résultats

13.1 Présentation des sensibilités étudiées

Dans le cadre de ce mémoire, plusieurs sensibilités ont été étudiées afin de pouvoir confronter les modèles de taux.

Tout d’abord, ce mémoire a pour but d’étudier et de comparer deux modèles de taux fondamentalement différents : le modèle de taux court $G2++$ et le modèle de marché $LMM+$. En ce sens, la première sensibilité nécessaire consistera à analyser les impacts ALM issus de chacun de ces modèles de taux.

De plus, lors de la réalisation d’un générateur de scénarios économiques, l’étape de calibrage est primordiale. Il est courant de calibrer sur l’ensemble de la nappe de volatilité ou bien sur une nappe tronquée ie. en omettant certains ténors ou maturités. Il sera donc intéressant d’étudier, pour chaque modèle de taux, l’impact sur des indicateurs actif-passif du choix de la zone de calibrage.

Enfin, dans le cadre de notre étude du modèle $LMM+$, nous avons considéré le facteur de déplacement comme un étant un méta-paramètre objectivé à partir d’observations a priori et a posteriori. Ce paramètre ayant un fort impact sur le modèle, il semble important de pouvoir analyser les impacts ALM découlant du choix de celui-ci.

Afin de pouvoir mener à bien ces études, six jeux de tables de scénarios économiques seront nécessaires :

- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle $G2++$** qui a été calibré sur la **nappe complète de volatilités**
- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle $G2++$** qui a été calibré sur la **nappe tronquée 1-10 ans** pour les ténors et maturités
- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle $LMM+$** qui a été calibré avec un **shift à 45 %** sur la **nappe complète de volatilités**
- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle $LMM+$** qui a été calibré avec un **shift à 45 %** sur la **nappe tronquée 1-10 ans** pour les ténors et maturités

- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle LMM+** qui a été calibré avec un *shift* à 10 % sur la **nappe complète de volatilités**
- un jeu de tables dans lequel le modèle de taux est le **modèle LMM+** qui a été calibré avec un *shift* à 10 % sur la **nappe tronquée 1-10 ans** pour les ténors et maturités

13.2 Génération des tables économiques

Cette section aura pour but de montrer les résultats obtenus pour chaque sensibilité en termes de calibrage de modèle de taux et de diffusion de celui-ci.

Dans un premier temps, les paramètres calibrés seront présentés ainsi que les écarts de volatilité en résultant. Une analyse brève des paramètres obtenus ainsi que de la qualité de réplcation de la nappe de volatilité sera menée afin d’anticiper la diffusion du modèle.

Dans un second temps, les résultats issus de la diffusion du modèle de taux seront présentés à travers des statistiques descriptives et des graphiques de quantiles de taux nominaux. Une analyse sera à nouveau effectuée, notamment sur les niveaux de taux moyens et des scénarios extrêmes, dans l’objectif d’anticiper les impacts sur les métriques ALM. En effet, en étudiant brièvement les niveaux de taux et en les mettant en exergue par rapport aux mécanismes de gestion actif-passif tels que la provision pour participation aux bénéfices ou la provision pour risque d’exigibilité, il est possible d’anticiper les déclenchements de ces derniers et donc d’anticiper les interactions actif-passif.

13.2.1 Résultats de calibrage pour chaque sensibilité et anticipation des diffusions de taux

Tous les calibrages ont été effectués sur les données de marché du 4^{eme} trimestre de 2020.

Remarque : Les calibrages n’ont pu être réalisés que sur des swaptions ATM. Toutefois, nous pensons que l’inclusion des volatilités ITM/OTM dans le calibrage aurait pu rajouter une information supplémentaire à l’algorithme d’optimisation et d’induire pour le modèle LMM+ une meilleure replication des nappes de volatilité, y compris ATM.

Sensibilité 1 : Calibrage du modèle G2++ sur nappe complète

Après calibrage sur l’ensemble de la nappe de volatilité, les paramètres obtenus sont :

a	b	σ	η	ρ
2,79 %	26,42 %	0,87 %	1,13 %	-97,96 %

TABLE 13.1: Résultat du calibrage du modèle G2++ sur nappe complète

Contrairement au modèle LMM+, la variable d’état du modèle G2++ est le taux court qui n’est pas un taux réel. L’analyse des paramètres a donc moins d’utilité sachant que ceux-ci servent à modéliser les variables x et y qui n’ont pas de réalité physique.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Nous pouvons observer l'effet de compensation entre les paramètres de vitesse de retour à la moyenne des dynamiques modélisées x et y , avec des valeurs de 2.79 % et 26.42 %. A l'inverse, les paramètres de volatilité σ et η des dynamiques sont très faibles, ce qui pourrait diminuer les fluctuations des taux générés.

Enfin, comme nous l'avions déjà constaté, la corrélation entre les variables modélisées x et y est de -97.96 % soit très proche de la borne inférieure.

Enfin, pour clôturer cette analyse des résultats, présentons les matrices de volatilité et d'écart de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,18%	0,18%	0,21%	0,25%	0,29%	0,32%	0,35%	0,37%	0,39%	0,41%	0,46%	0,47%	0,45%	0,42%
2	0,20%	0,23%	0,26%	0,30%	0,33%	0,36%	0,39%	0,41%	0,42%	0,44%	0,48%	0,48%	0,45%	0,42%
3	0,25%	0,28%	0,31%	0,34%	0,37%	0,40%	0,42%	0,44%	0,45%	0,46%	0,49%	0,48%	0,46%	0,43%
4	0,29%	0,32%	0,35%	0,38%	0,41%	0,43%	0,44%	0,46%	0,47%	0,48%	0,50%	0,49%	0,46%	0,43%
5	0,33%	0,36%	0,39%	0,41%	0,43%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,49%	0,51%	0,49%	0,46%	0,43%
7	0,40%	0,42%	0,44%	0,46%	0,47%	0,49%	0,50%	0,50%	0,51%	0,52%	0,52%	0,49%	0,46%	0,43%
10	0,46%	0,47%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,52%	0,53%	0,53%	0,53%	0,51%	0,49%	0,46%	0,43%
15	0,50%	0,50%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,50%	0,47%	0,45%	0,43%
20	0,51%	0,51%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,51%	0,49%	0,47%	0,45%	0,43%
25	0,50%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,50%	0,50%	0,49%	0,47%	0,45%	0,43%
30	0,49%	0,49%	0,49%	0,50%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,47%	0,45%	0,43%	0,42%

FIGURE 13.1: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,02%	-0,01%	0,02%	0,00%	0,02%	0,02%	0,03%	0,04%	0,04%	0,04%	0,04%	0,02%	-0,02%	-0,06%
2	-0,02%	-0,02%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,01%	-0,03%	-0,07%
3	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,07%
4	-0,04%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,01%	-0,03%	-0,06%
5	-0,04%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,06%
7	-0,04%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,01%	0,01%	0,02%	0,00%	-0,03%	-0,06%
10	-0,03%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,05%
15	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,03%
20	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%
25	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%
30	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,04%	0,04%	0,04%	0,05%

FIGURE 13.2: Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Nous pouvons remarquer que les écarts absolus sont relativement faibles sur l'ensemble de la nappe de volatilité avec un écart maximal de -0,07 % pour le ténoir 30 ans.

Par la suite, nous pourrions comparer les volatilités induites sur l'ensemble de la nappe de volatilité par les autres modèles avec celui-ci. Si les volatilités induites par un autre modèle sont plus élevées que celles induites par ce modèle, alors cela pourrait signifier que cet autre modèle engendre plus de volatilité et pourrait donc amener à des scénarios de taux plus fluctuants ainsi qu'un coût plus élevé des options et garanties embarquées dans les contrats.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Sensibilité 2 : Calibrage du modèle G2++ sur nappe tronquée

Après calibrage sur la nappe de volatilité réduite 1-10 ans, les paramètres obtenus sont :

a	b	σ	η	ρ
1.46 %	34.31 %	0.71 %	1.19 %	-100.0 %

TABLE 13.2: Résultat du calibrage du modèle G2++ sur nappe réduite

L'effet de compensation entre les vitesses de retour à la moyenne des dynamiques modélisées est à nouveau évident. En effet, tandis que la valeur de a de 1.46 % est plus inférieure que celle du modèle précédent, le paramètre b compense avec une valeur de 34.31 % plus élevée.

Les paramètres de volatilité σ et η des dynamiques restent stables par rapport à la sensibilité 1.

Enfin, la corrélation entre les variables x et y sature avec une valeur de -1.

Présentons à présent les matrices de volatilité et d'écart de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,17%	0,08%	0,08%	0,14%	0,20%	0,25%	0,29%	0,32%	0,35%	0,37%	0,43%	0,45%	0,44%	0,43%
2	0,14%	0,13%	0,18%	0,23%	0,27%	0,31%	0,34%	0,37%	0,39%	0,41%	0,46%	0,47%	0,46%	0,44%
3	0,19%	0,21%	0,25%	0,29%	0,33%	0,36%	0,38%	0,40%	0,42%	0,44%	0,48%	0,48%	0,46%	0,44%
4	0,24%	0,27%	0,31%	0,34%	0,37%	0,39%	0,42%	0,43%	0,45%	0,46%	0,49%	0,49%	0,47%	0,45%
5	0,29%	0,32%	0,35%	0,38%	0,40%	0,42%	0,44%	0,46%	0,47%	0,48%	0,50%	0,49%	0,47%	0,45%
7	0,37%	0,39%	0,41%	0,43%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,50%	0,50%	0,51%	0,50%	0,48%	0,46%
10	0,44%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,50%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,50%	0,48%	0,46%
15	0,49%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,51%	0,49%	0,48%	0,46%
20	0,51%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,52%	0,50%	0,49%	0,48%
25	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,52%	0,51%	0,49%	0,48%
30	0,51%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,51%	0,50%	0,49%	0,48%

FIGURE 13.3: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,01%	-0,11%	-0,11%	-0,10%	-0,07%	-0,05%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,02%	0,01%	-0,02%	-0,06%
2	-0,08%	-0,11%	-0,10%	-0,08%	-0,05%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,00%	-0,03%	-0,06%
3	-0,09%	-0,10%	-0,08%	-0,06%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%	-0,03%	-0,05%
4	-0,09%	-0,08%	-0,07%	-0,05%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,01%	-0,02%	-0,04%
5	-0,08%	-0,07%	-0,05%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,01%	-0,02%	-0,04%
7	-0,07%	-0,06%	-0,04%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%
10	-0,05%	-0,04%	-0,03%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,02%
15	-0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
20	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,04%	0,05%	0,05%	0,05%
25	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,04%	0,04%	0,04%	0,06%	0,07%	0,08%	0,09%
30	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,04%	0,05%	0,05%	0,05%	0,08%	0,09%	0,10%	0,11%

FIGURE 13.4: Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Même si les écarts de calibrage sont satisfaisants, nous pouvons remarquer que les écarts de volatilité sont bien plus élevés sur ce modèle ce qui est cohérent sachant qu'il a été calibré sur nappe réduite. De plus, nous pouvons remarquer que les volatilités induites par ce modèle pour des maturités et ténors élevés sont plus élevés qu'avec le modèle précédent, ce phénomène pourrait également être observé lors des diffusions du modèle avec des variations plus élevées à moyen et long terme.

Sensibilité 3 : Calibrage du modèle LMM+ avec *shift* à 45 % sur nappe complète

Le facteur de déplacement a été supposé égal à 45 %.

Après calibrage sur la nappe de volatilité complète, les paramètres obtenus sont :

a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ
0.11 %	0.26 %	7.25 %	0.04 %	14.86 %	69.31 %	26.59 %	36.02 %

TABLE 13.3: Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe complète et *shift* à 45 %

Nous avons déjà pu constater que les paramètres les plus fluctuants sont les paramètres de vitesse de retour à la moyenne κ et de niveau de retour à la moyenne θ de la volatilité stochastique ainsi que la corrélation ρ . Les différences allant être observées sur les diffusions du modèle LMM+ sont donc susceptibles d'être liées à ces paramètres, ce sont donc ces derniers qui vont être analysés.

Tout d'abord, la vitesse de retour à la moyenne κ de 14.86 % induit une durée de retour à la moyenne ($1/\kappa$) d'environ 7 ans.

Ce retour à la moyenne se fera au niveau du paramètre θ . Cela nous informe donc que le niveau moyen à long terme de la volatilité vaut 69.31 %. Il s'agit d'un niveau de volatilité assez élevé pouvant par conséquent amener à de fortes fluctuations concernant les scénarios de taux générés. A noter également que le paramètre σ , correspondant à la volatilité de la variance stochastique, est de 26.59 % donc assez élevée. Cependant, étant donné que ce paramètre est relativement stable, il ne sera pas à prendre en considération.

Enfin, la corrélation entre les diffusions de taux et le processus de variance est de 36.02 %, impliquant que plus les niveaux de taux seront élevés plus la volatilité de ces taux augmentera.

Présentons les matrices de volatilité et d'écarts de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Maturité / Téno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,15%	0,19%	0,23%	0,26%	0,29%	0,32%	0,34%	0,36%	0,38%	0,40%	0,46%	0,48%	0,47%	0,44%
2	0,21%	0,25%	0,28%	0,31%	0,34%	0,36%	0,38%	0,40%	0,42%	0,43%	0,48%	0,50%	0,48%	0,45%
3	0,25%	0,29%	0,32%	0,34%	0,37%	0,39%	0,41%	0,43%	0,44%	0,45%	0,50%	0,50%	0,48%	0,45%
4	0,29%	0,32%	0,35%	0,37%	0,39%	0,41%	0,43%	0,45%	0,46%	0,47%	0,51%	0,51%	0,48%	0,45%
5	0,32%	0,35%	0,38%	0,40%	0,42%	0,43%	0,45%	0,46%	0,47%	0,48%	0,51%	0,51%	0,48%	0,45%
7	0,38%	0,40%	0,42%	0,44%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,50%	0,50%	0,52%	0,50%	0,48%	0,45%
10	0,43%	0,45%	0,46%	0,48%	0,49%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,52%	0,51%	0,49%	0,47%	0,44%
15	0,47%	0,48%	0,49%	0,49%	0,50%	0,50%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,49%	0,47%	0,45%	0,42%
20	0,49%	0,49%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,48%	0,46%	0,44%	0,42%
25	0,48%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,49%	0,48%	0,48%	0,46%	0,44%	0,42%	0,40%
30	0,47%	0,47%	0,47%	0,47%	0,47%	0,46%	0,46%	0,46%	0,46%	0,45%	0,44%	0,42%	0,40%	0,38%

FIGURE 13.5: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

Maturité / Téno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,01%	0,00%	-0,04%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,04%	-0,03%	0,00%	0,04%
2	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,04%	-0,03%	0,00%	0,04%
3	0,03%	0,02%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,04%	-0,02%	0,01%	0,04%
4	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,04%	-0,02%	0,01%	0,04%
5	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,02%	0,01%	0,04%
7	0,06%	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,02%	-0,01%	0,01%	0,04%
10	0,06%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,01%	0,00%	0,01%	0,03%	0,04%
15	0,04%	0,03%	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,03%
20	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,01%
25	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%
30	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%

FIGURE 13.6: Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Nous remarquons à nouveau la très bonne efficacité du modèle LMM+ avec des écarts plus faibles que ceux observés précédemment. De plus, les volatilités induites sont bien faibles que ceux du modèle G2++ montrant une meilleure stabilité pour ce modèle, il sera donc intéressant de vérifier si ce comportement est également vérifié lors des diffusions de taux.

Sensibilité 4 : Calibrage du modèle LMM+ avec *shift* à 45 % sur nappe tronquée

Le facteur de déplacement a été supposé égal à 45 %.

Après calibrage sur la nappe de volatilité réduite 1-10 ans, les paramètres obtenus sont :

a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ
0.18 %	0.26 %	7.11 %	0.01 %	24.18 %	88.30 %	24.76 %	33.45 %

TABLE 13.4: Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe réduite et *shift* à 45 %

En premier lieu, la vitesse de retour à la moyenne κ est de 24.18 %, soit un temps de retour à la moyenne d'environ 4 ans ce qui est bien plus faible que précédemment. De

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

ce fait, sur les taux générés, nous aurons une volatilité stochastique qui sera davantage stabilisée autour de sa moyenne θ .

De plus, le niveau de retour à la moyenne est très élevé puisqu'il est de 88.30 %. Par conséquent, nous aurons tendance à avoir une volatilité élevée pour ce modèle : à titre de comparaison avec la sensibilité 3, sachant qu'ici nous aurons une volatilité stochastique qui sera en moyenne bien plus élevée, cela pourrait induire de plus fortes fluctuations sur les scénarios de taux générés, faisant apparaître par exemple davantage de scénarios extrêmes.

Enfin, la corrélation entre les diffusions de taux et le processus de variance est de 33.45 %, ce qui reste stable.

Présentons les matrices de volatilité et d'écart de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

Maturité / Ténor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,14%	0,18%	0,21%	0,24%	0,26%	0,29%	0,31%	0,33%	0,35%	0,36%	0,41%	0,43%	0,42%	0,39%
2	0,21%	0,25%	0,27%	0,30%	0,33%	0,35%	0,37%	0,38%	0,40%	0,41%	0,46%	0,47%	0,45%	0,42%
3	0,26%	0,29%	0,32%	0,34%	0,37%	0,39%	0,40%	0,42%	0,43%	0,44%	0,48%	0,48%	0,46%	0,43%
4	0,30%	0,33%	0,36%	0,38%	0,40%	0,42%	0,43%	0,44%	0,45%	0,46%	0,49%	0,49%	0,46%	0,43%
5	0,34%	0,36%	0,39%	0,41%	0,42%	0,44%	0,45%	0,46%	0,47%	0,48%	0,50%	0,49%	0,46%	0,43%
7	0,39%	0,42%	0,44%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,49%	0,46%	0,43%
10	0,46%	0,47%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,51%	0,48%	0,45%	0,42%
15	0,51%	0,51%	0,52%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,52%	0,52%	0,51%	0,48%	0,45%	0,42%	0,39%
20	0,53%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,53%	0,52%	0,51%	0,51%	0,46%	0,43%	0,40%	0,37%
25	0,54%	0,55%	0,54%	0,54%	0,53%	0,52%	0,51%	0,50%	0,49%	0,48%	0,43%	0,39%	0,36%	0,34%
30	0,53%	0,53%	0,53%	0,52%	0,50%	0,49%	0,48%	0,46%	0,45%	0,44%	0,39%	0,35%	0,32%	0,30%

FIGURE 13.7: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

Maturité / Ténor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,02%	0,01%	-0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,02%	0,05%	0,09%
2	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,03%	0,07%
3	0,02%	0,02%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%
4	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%
5	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%
7	0,05%	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,01%	0,03%	0,06%
10	0,04%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,05%	0,07%
15	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,02%	0,03%	0,05%	0,07%
20	-0,03%	-0,04%	-0,04%	-0,04%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,03%	0,04%	0,05%
25	-0,05%	-0,05%	-0,05%	-0,04%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,03%	0,04%	0,05%	0,06%
30	-0,05%	-0,04%	-0,04%	-0,03%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,02%	0,03%	0,04%	0,06%	0,07%	0,07%

FIGURE 13.8: Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Nous pouvons remarquer le très bon calibrage sur la nappe réduite allant de 1 à 10 ans, mais des écarts qui augmentent fortement pour maturités et ténors élevés. Quant aux volatilités induites, le même phénomène qu'avec le G2++ se produit : pour de très faibles

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

maturités, les volatilités induites sont ici plus faibles que le modèle précédent. Cependant, pour des maturités élevées, ce modèle calibré sur nappe réduite engendre des volatilités bien plus élevées, ce fait pourrait notamment être causé par les paramètres de la volatilité stochastique assez élevés comme nous l'avons décrit. De ce fait, cela renforce l'hypothèse selon laquelle un tel modèle générerait des scénarios de taux avec de plus fortes variations et donc une proportion de scénarios extrêmes plus élevée.

Sensibilité 5 : Calibrage du modèle LMM+ avec *shift* à 10 % sur nappe complète

Le facteur de déplacement a été dorénavant supposé égal à 10 %.

Après calibrage sur la nappe de volatilité complète, les paramètres obtenus sont :

a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ
0.34 %	1.24 %	7.43 %	0.6 %	17.07 %	33.72 %	20.47 %	41.15 %

TABLE 13.5: Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe complète et *shift* à 10 %

Comme précédemment, analysons tout d'abord la vitesse de retour à la moyenne κ . Celle-ci est de 17.07 %, soit un temps de retour à la moyenne d'environ 6 ans ce qui est similaire au même paramètre de la sensibilité 3.

Néanmoins, le niveau de retour à la moyenne est cette fois modéré et contraste avec les deux précédents modèles. En effet, nous avons un niveau à long terme de 33.72 % contre plus du double auparavant. Le calibrage du LMM+ sur nappe complète avec un *shift* à 10 % impliquerait donc des niveaux de volatilité généralement bien plus faibles que précédemment, ce qui induirait moins de fluctuations sur les taux générés et donc une plus faible proportion de scénarios extrêmes.

Enfin, la corrélation entre les diffusions de taux et le processus de variance est de 41.15 %, soit légèrement plus élevée que précédemment.

Présentons maintenant les matrices de volatilité et d'écart de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

Maturité / Téno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,18%	0,21%	0,24%	0,27%	0,30%	0,32%	0,35%	0,37%	0,39%	0,40%	0,46%	0,48%	0,48%	0,47%
2	0,22%	0,25%	0,28%	0,31%	0,33%	0,36%	0,38%	0,39%	0,41%	0,43%	0,47%	0,49%	0,49%	0,47%
3	0,26%	0,29%	0,31%	0,34%	0,36%	0,38%	0,40%	0,42%	0,43%	0,44%	0,49%	0,50%	0,49%	0,47%
4	0,29%	0,32%	0,34%	0,37%	0,39%	0,40%	0,42%	0,44%	0,45%	0,46%	0,50%	0,51%	0,50%	0,48%
5	0,32%	0,35%	0,37%	0,39%	0,41%	0,43%	0,44%	0,45%	0,46%	0,47%	0,50%	0,51%	0,50%	0,48%
7	0,37%	0,39%	0,41%	0,43%	0,44%	0,46%	0,47%	0,48%	0,49%	0,49%	0,51%	0,51%	0,50%	0,48%
10	0,43%	0,44%	0,45%	0,47%	0,48%	0,48%	0,49%	0,49%	0,50%	0,50%	0,52%	0,51%	0,49%	0,47%
15	0,44%	0,45%	0,46%	0,47%	0,47%	0,48%	0,49%	0,50%	0,50%	0,51%	0,51%	0,50%	0,48%	0,45%
20	0,48%	0,49%	0,50%	0,51%	0,52%	0,52%	0,52%	0,52%	0,53%	0,52%	0,51%	0,49%	0,47%	0,45%
25	0,50%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,51%	0,49%	0,47%	0,45%	0,43%
30	0,48%	0,48%	0,48%	0,48%	0,48%	0,48%	0,48%	0,47%	0,47%	0,47%	0,45%	0,43%	0,41%	0,39%

FIGURE 13.9: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Maturité / Ténoir	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	-0,01%	-0,02%	-0,05%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,04%	-0,04%	-0,02%	0,01%
2	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,02%
3	0,02%	0,02%	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	0,00%	0,02%
4	0,04%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	0,02%
5	0,05%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	0,01%
7	0,07%	0,06%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	0,01%	0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,01%	0,01%
10	0,06%	0,05%	0,05%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,01%
15	0,06%	0,06%	0,05%	0,05%	0,04%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,00%
20	0,02%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,04%	-0,04%	-0,03%	-0,03%
25	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,04%	-0,03%	-0,03%
30	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%

FIGURE 13.10: Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Les écarts relativement faibles sont similaires à ceux du modèle avec *shift* à 45 %, avec des volatilités induites stables même pour des maturités et ténors élevés. Par ailleurs, dans l'ensemble, les volatilités de ce modèle prennent des valeurs plus élevées que le modèle avec facteur de 45 %. Etant donné que la volatilité stochastique devrait être en moyenne plus faible pour ce modèle, ces valeurs plus élevées pour être causées par le *shift* plus élevé dans ce cas. Il sera donc intéressant de remarquer si le même phénomène se produit avec scénarios de taux également plus élevés, à noter qu'en terme d'indicateurs ALM, cela serait bénéfique pour ce modèle.

Sensibilité 6 : Calibrage du modèle LMM+ avec *shift* à 10 % sur nappe tronquée

Le facteur de déplacement a été supposé égal à 10 %.

Après calibrage sur la nappe de volatilité réduite 1-10 ans, les paramètres obtenus sont :

a	b	c	d	κ	θ	σ	ρ
0.81 %	1.18 %	7.04 %	0.22 %	33.47 %	86.81 %	25.18 %	43.55 %

TABLE 13.6: Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe réduite et *shift* à 10 %

Un constat similaire au calibrage sur nappe réduite avec facteur de déplacement à 45 % peut être réalisé (sensibilité 4).

La vitesse de retour à la moyenne κ est de 33.47 %, soit un temps de retour à la moyenne d'environ 3 ans soit la durée la plus faible des sensibilités sur le modèle LMM+. La volatilité stochastique reviendra plus fréquemment à sa moyenne de long terme θ .

De même que pour la sensibilité 4, le niveau de retour à la moyenne est très élevé puisqu'il est de 86.81 %. Comme nous l'avons déjà dit, cela pourrait conduire à une volatilité stochastique en moyenne assez élevée, et donc à beaucoup de fluctuations sur les scénarios de taux générés.

Enfin, la corrélation entre les diffusions de taux et le processus de variance vaut 43.55 %, ce qui reste relativement stable par rapport aux précédents résultats.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Enfin, montrons les matrices de volatilité et d'écart de volatilité induites par le *pricing* avec les paramètres calibrés :

Maturité / Ténon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,16%	0,19%	0,22%	0,25%	0,27%	0,29%	0,31%	0,32%	0,34%	0,35%	0,40%	0,43%	0,43%	0,41%
2	0,22%	0,26%	0,28%	0,30%	0,33%	0,34%	0,36%	0,38%	0,39%	0,40%	0,45%	0,47%	0,46%	0,45%
3	0,27%	0,30%	0,33%	0,35%	0,37%	0,38%	0,40%	0,41%	0,43%	0,44%	0,47%	0,48%	0,48%	0,46%
4	0,32%	0,34%	0,36%	0,38%	0,40%	0,42%	0,43%	0,44%	0,45%	0,46%	0,49%	0,49%	0,48%	0,46%
5	0,35%	0,38%	0,40%	0,41%	0,43%	0,44%	0,46%	0,46%	0,47%	0,48%	0,50%	0,50%	0,49%	0,46%
7	0,41%	0,44%	0,45%	0,47%	0,48%	0,49%	0,49%	0,50%	0,51%	0,51%	0,52%	0,51%	0,49%	0,46%
10	0,49%	0,50%	0,51%	0,52%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,53%	0,52%	0,50%	0,48%	0,45%
15	0,53%	0,53%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,54%	0,52%	0,48%	0,45%	0,43%
20	0,60%	0,61%	0,61%	0,61%	0,61%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,57%	0,52%	0,48%	0,45%	0,42%
25	0,67%	0,66%	0,65%	0,64%	0,62%	0,61%	0,60%	0,58%	0,57%	0,56%	0,50%	0,45%	0,42%	0,39%
30	0,67%	0,66%	0,64%	0,62%	0,60%	0,58%	0,56%	0,54%	0,53%	0,51%	0,45%	0,41%	0,37%	0,35%

FIGURE 13.11: Matrice de volatilités obtenues après calibrage

Maturité / Ténon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,01%	0,00%	-0,03%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,01%	0,02%	0,04%	0,07%
2	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,00%	0,02%	0,05%
3	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	0,01%	0,04%
4	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,03%
5	0,02%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,03%
7	0,03%	0,01%	0,00%	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,01%	0,01%	0,03%
10	0,00%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	-0,01%	0,01%	0,03%
15	-0,02%	-0,03%	-0,02%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	-0,02%	-0,02%	0,00%	0,02%	0,03%
20	-0,10%	-0,11%	-0,11%	-0,10%	-0,10%	-0,09%	-0,09%	-0,08%	-0,07%	-0,06%	-0,05%	-0,03%	-0,01%	0,01%
25	-0,17%	-0,17%	-0,15%	-0,14%	-0,13%	-0,11%	-0,10%	-0,09%	-0,08%	-0,07%	-0,04%	-0,02%	0,00%	0,01%
30	-0,19%	-0,17%	-0,15%	-0,12%	-0,10%	-0,09%	-0,08%	-0,07%	-0,06%	-0,05%	-0,02%	0,00%	0,02%	0,02%

FIGURE 13.12: Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage

Nous constatons une plus grande difficulté de ce modèle à calibrer sur la nappe réduite. En effet, nous remarquons des écarts de calibrage bien plus élevés que précédemment, principalement pour les maturités maximales. Cela est dû aux volatilités induites qui explosent pour des maturités allant de 20 à 30 ans. Les scénarios de taux qui en découlent devraient donc avoir des niveaux bien plus élevés que précédemment.

De ce fait, nous analyserons la diffusion de ce modèle pour vérifier notre étude du calibrage mais nous ne le prendrons pas en compte dans la comparaison des modèles lors de l'étude des impacts ALM. En effet, tous les calibrages précédents étaient performants, les études de sensibilité feront donc sens. Néanmoins, pour ce modèle, le calibrage défaillant qui pourrait par exemple être dû à un mauvais jeu de paramètres de départ fausserait l'étude ALM. Etant donné que les modèles précédents suffisent à nos études de sensibilité, nous pourrions mettre ce modèle de côté.

13.2.2 Résultats de diffusion pour chaque sensibilité et anticipation des impacts ALM

L'objectif de cette section sera d'une part de présenter quelques éléments sur les résultats de diffusion du GSE, et d'autre part de les analyser brièvement afin de pouvoir effectuer une anticipation des impacts sur les indicateurs de gestion actif-passif.

Comment anticiper ces mécanismes d'interactions actif-passif? En assurance vie, les contrats EURO disposent de taux garantis, de ce fait, si un modèle génère des scénarios de taux très bas, notamment avec une portion élevée de scénarios extrêmes bas, l'assureur se devra de puiser dans les réserves et dans la PPB afin de servir les taux garantis aux clients. De plus, étant donné que les scénarios d'action et d'immobilier sont positivement corrélés aux scénarios de taux, une génération de scénarios très bas de taux induira des scénarios très bas d'action et d'immobilier ce qui nécessitera de mettre en réserves au sein de la PRE une partie des moins-values latentes. Les études se focaliseront donc sur les scénarios bas de taux car ce sont ces derniers qui impactent de façon très négative les indicateurs ALM tels que le ratio de solvabilité, et qui sont alors très "couteux" à la compagnie.

Pour cela, nous nous concentrerons pour chaque sensibilité sur l'analyse des diffusions des taux nominaux de maturités 1 an et 10 ans, sur un horizon de projection de 65 ans. D'une part, nous présenterons des graphiques de diffusion de ces taux avec des quantiles afin d'avoir un aperçu de la proportion des scénarios moyens ainsi que des scénarios extrêmes. D'autre part, nous exhiberons des valeurs de ces diffusions afin de faciliter la comparaison entre les modèles. Ces études nous permettront ainsi d'anticiper les résultats ALM qui seront présentés dans la dernière section.

L'ensemble des diffusions ont été réalisées avec un nombre de 1000 scénarios et un horizon de projection de 65 ans.

Sensibilité 1 : Diffusion du modèle G2++ calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité

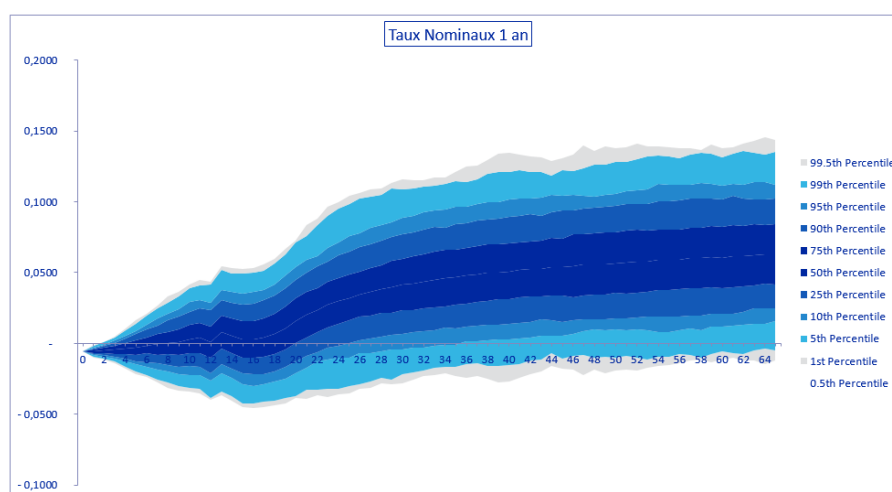


FIGURE 13.13: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,55 %	-0,29 %	0,32 %	1,59 %	5,13 %	6,10 %
Médiane	-0,55 %	-0,29 %	0,30 %	1,57 %	5,09 %	6,06 %
Taux négatifs	99,90 %	64,87 %	41,42 %	25,05 %	3,79 %	2,20 %

TABLE 13.7: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Le graphique de diffusion des taux nominaux 1 an est constitué de plusieurs quantiles. Les scénarios extrêmes concernent les quantiles les plus à l' "extérieur", notamment les quantiles inférieurs à 1 % et supérieurs à 99,5 %. Plus ces nuages sont épais, plus ils représentent une part importante des scénarios générés et impacteront donc fortement les résultats ALM.

Concernant ce graphique, nous remarquons peu de taux extrêmes, notamment très peu de taux extrêmes bas. Nous pouvons alors émettre l'hypothèse que les très faibles valeurs des paramètres de volatilités amènent les taux à fluctuer dans une mesure raisonnable.

Quant aux statistiques descriptives, nous pouvons tout d'abord noter une très forte similarité entre la moyenne et la médiane des taux 1 an avec un écart maximal entre les deux statistiques de 0,04 % qui n'intervient qu'à partir de 40 ans de projection. Cela confirme donc la faible proportion des scénarios extrêmes identifiée à l'aide du graphique.

D'autre part, nous avons un pourcentage de taux négatifs qui diminue fortement avec la projection, passant de 99,9 % à 1 an à 41 % environ à 10 ans. Cela permet d'avoir une idée de la proportion de taux très bas qui seront coûteux lors des impacts ALM.

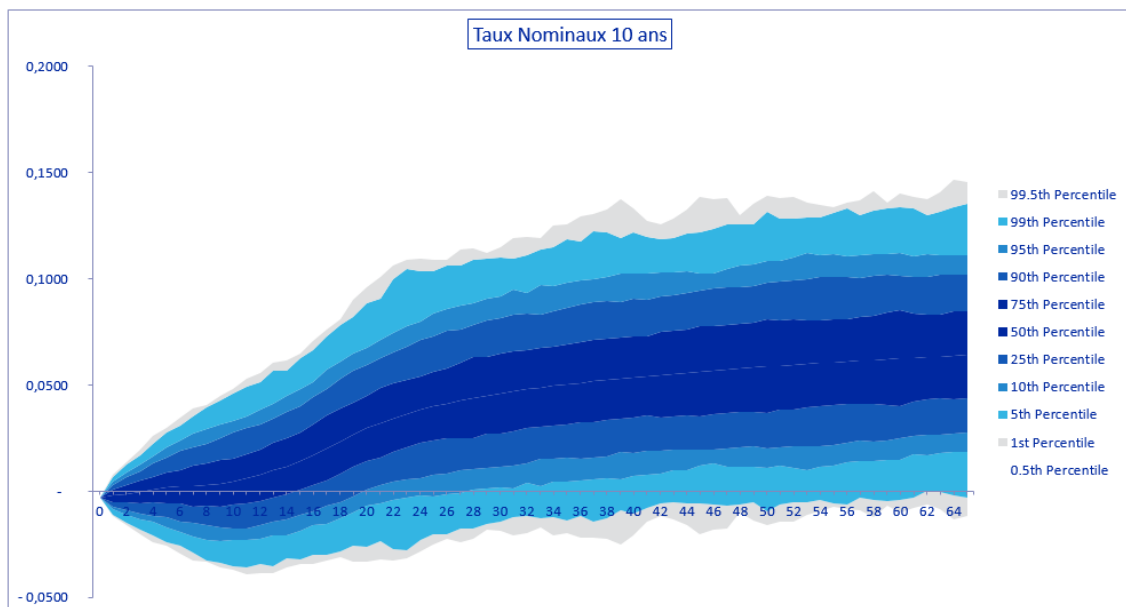


FIGURE 13.14: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,16 %	0,48 %	2,98 %	5,39 %	6,28 %
Médiane	-0,21 %	0,16 %	0,46 %	2,96 %	5,35 %	6,24 %
Taux négatifs	69,06 %	42,91 %	38,52 %	9,78 %	2,50 %	1,60 %

TABLE 13.8: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Un constat similaire peut être ici effectué.

Le graphique du taux 10 ans met en avant une plus grande part de scénarios extrêmes (partie grise davantage présente) qui est tout de même à nuancer à en juger par les statistiques descriptives qui mettent en avant de très faibles écarts entre médiane et moyenne.

Sensibilité 2 : Diffusion du modèle G2++ calibré sur nappe réduite

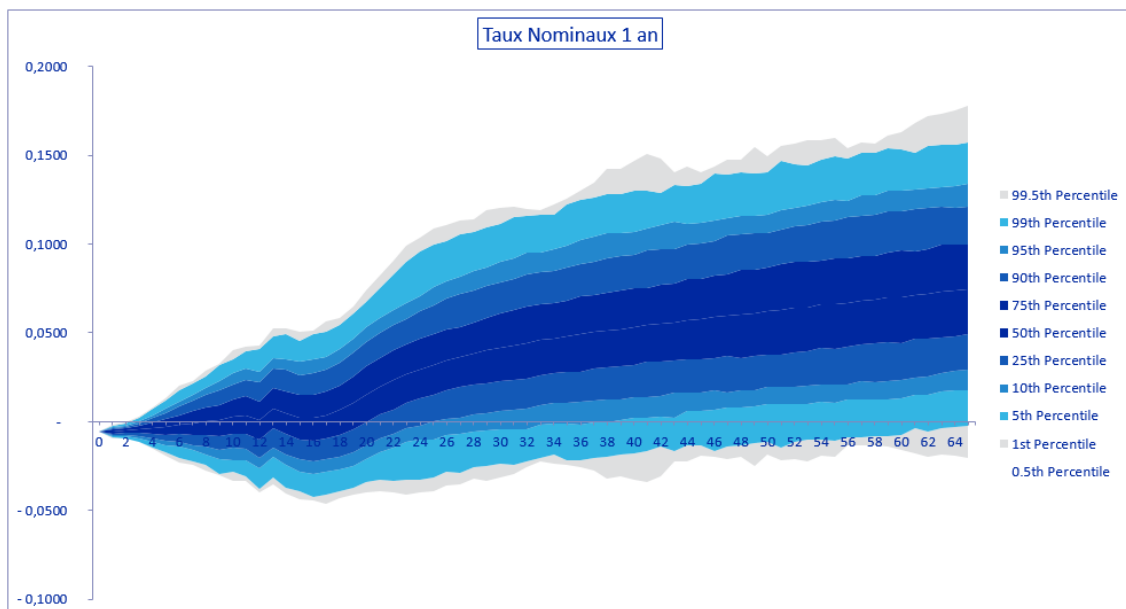


FIGURE 13.15: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,55 %	-0,30 %	0,29 %	1,56 %	5,37 %	7,04 %
Médiane	-0,55 %	-0,30 %	0,28 %	1,53 %	5,32 %	6,99 %
Taux négatifs	100 %	67,86 %	41,42 %	25,25 %	4,49 %	2,00 %

TABLE 13.9: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Le graphique met en avant davantage de scénarios extrêmes, à la baisse comme à la hausse. Les statistiques confirment ces scénarios très bas qui ont une plus grande part que le modèle précédent comme l'illustrent les 67,86 % de taux négatifs à 5 ans contre 64,87 % précédemment. Cela pourrait amener à une légère dégradation des résultats ALM.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

De plus, nous pouvons remarquer que les taux 1 an sont inférieurs à ceux du modèle précédent jusqu'à une projection de 20 ans mais par la suite ils deviennent bien supérieurs. Or, pour ce modèle, la dynamique modélisée y avait un paramètre de retour à la moyenne noté b plus élevée que pour le modèle précédent ainsi qu'une volatilité légèrement plus élevée : cela pourrait donc avoir amené ces taux à être bas pendant une plus longue période et la volatilité plus élevée à être la cause de la prise de valeurs dans un intervalle plus large.

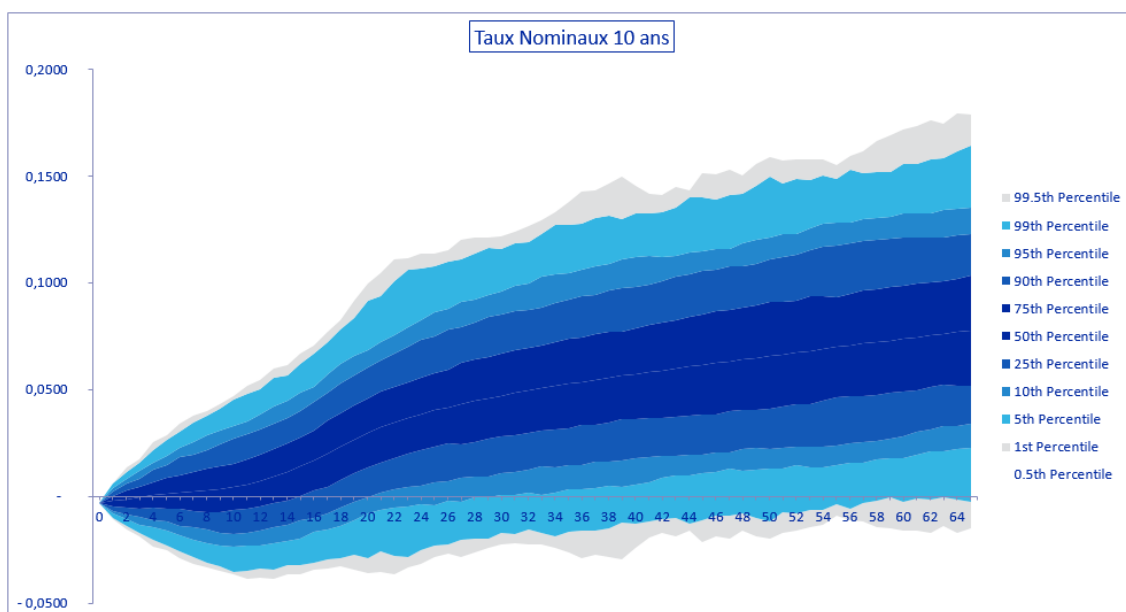


FIGURE 13.16: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,15 %	0,45 %	2,98 %	5,77 %	7,43 %
Médiane	-0,21 %	0,14 %	0,44 %	2,95 %	5,72 %	7,38 %
Taux négatifs	71,46 %	44,21 %	39,02 %	10,48 %	3,09 %	1,30 %

TABLE 13.10: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Le même constat apparaît pour le taux zéro-coupon 10 ans avec des scénarios de taux plus bas que précédemment à court et long terme, puis une forte augmentation des taux à très long terme. De même, la part de taux négatifs est plus importante jusqu'à 40 ans avant d'être plus faible que le modèle calibré sur l'ensemble de la nappe.

Ce modèle G2++ calibré sur une nappe réduite met donc en avant des fluctuations plus importantes avec des taux plus faibles jusqu'à une projection de 40 ans puis une forte hausse jusqu'à obtenir des taux plus élevés à 60 ans de projection. Au vu de la plus grande proportion de scénarios très bas, nous devrions donc avoir une détérioration des indicateurs actif-passif par rapport au modèle précédent.

Sensibilité 3 : Diffusion du modèle LMM+ avec *shift* à 45 % calibré sur nappe complète

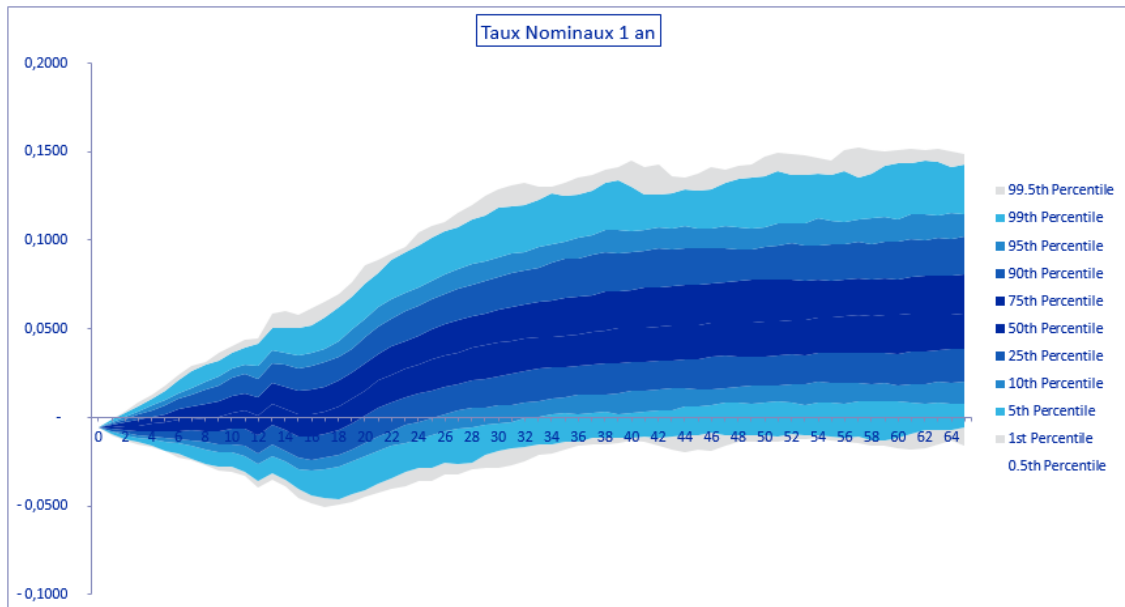


FIGURE 13.17: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,56 %	-0,27 %	0,32 %	1,59 %	5,22 %	5,81 %
Médiane	-0,56 %	-0,29 %	0,24 %	1,53 %	5,04 %	5,79 %
Taux négatifs	100 %	66,17 %	42,42 %	23,15 %	3,89 %	2,59 %

TABLE 13.11: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Tout d'abord, d'après le graphique, nous pouvons noter des zones grisées correspondant aux scénarios extrêmes davantage présents que pour le modèle G2++ calibré sur nappe complète. Cette présence est notamment présente dès un horizon moyen terme, à partir de 10 ans environ. Cette constatation est vérifiée à l'aide des statistiques descriptives : en effet, les écarts entre moyenne et médiane sont bien supérieurs à ceux que nous avons obtenu précédemment, avec ici un écart de 0,08 % à 10 ans et de 0,18 % à 40 ans. Cette écart quant à la présence de scénarios extrêmes avec le modèle G2++ peut être attribuée au caractère log-normal du modèle LMM+ dont la densité est donc asymétrique, à l'inverse du modèle G2++ qui est un modèle normal et donc symétrique. De plus, nous pouvons remarquer des taux négatifs également plus présents sur le modèle LMM+, avec par exemple 66,17 % à horizon 5 ans contre 64,87 % pour le G2++ (calibré sur nappe complète).

Nous avons donc en moyenne des scénarios de taux plus élevés mais avec une proportion de taux extrêmes plus élevés que le modèle G2++, il sera donc intéressant d'analyser ce qui prend le plus le pas sur les interactions actif-passif.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

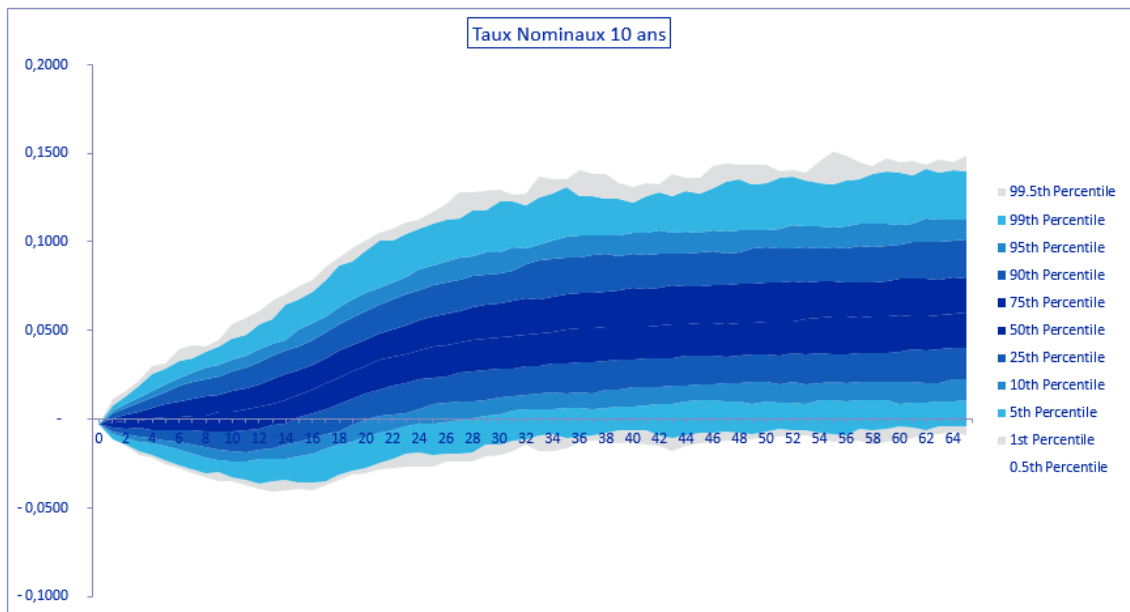


FIGURE 13.18: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,15 %	0,45 %	3,03 %	5,41 %	5,90 %
Médiane	-0,21 %	0,10 %	0,43 %	2,98 %	5,20 %	5,85 %
Taux négatifs	71,06 %	45,81 %	39,62 %	10,18 %	2,79 %	2,10 %

TABLE 13.12: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Deux constats apparaissent avec l'analyse du taux nominal 10 ans.

Tout d'abord, comme précédemment, cette différence entre la médiane et la moyenne ainsi qu'une plus haute présence de taux négatifs confirment la présence de scénarios extrêmes en plus grande proportion que le modèle G2++.

Néanmoins, à la différence du taux nominal 1 an, les taux nominaux 10 ans projetés sont en moyenne assez faibles et inférieurs à ceux du modèle G2++.

Nous pouvons donc nous attendre à une dégradation des indicateurs ALM pour ce modèle.

Sensibilité 4 : Diffusion du modèle LMM+ avec *shift* à 45 % calibré sur nappe réduite

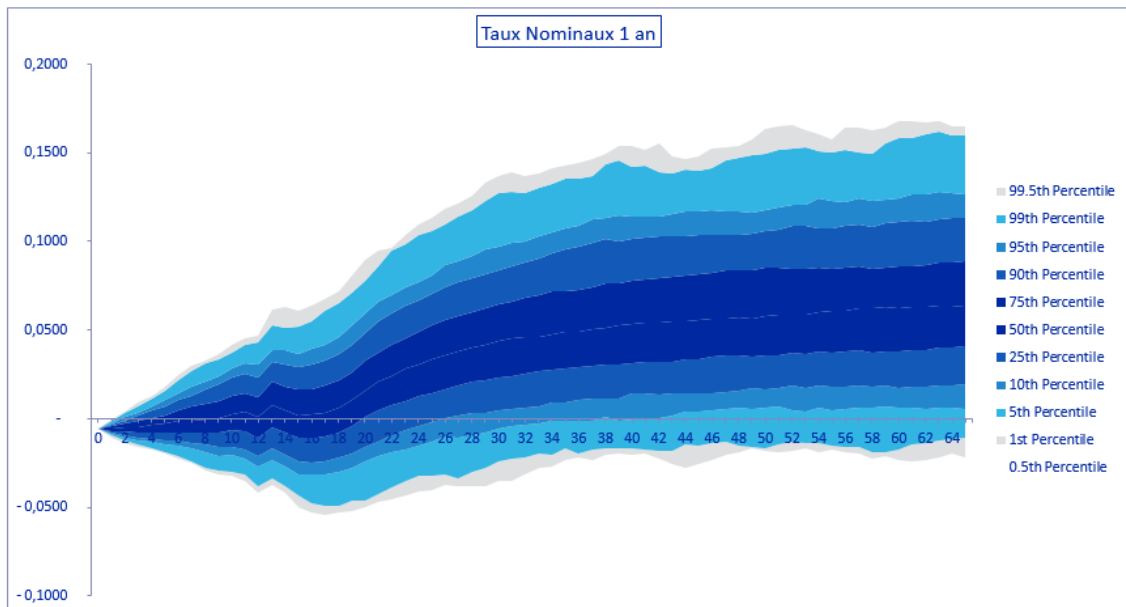


FIGURE 13.19: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,56 %	-0,27 %	0,32 %	1,63 %	5,51 %	6,29 %
Médiane	-0,56 %	-0,28 %	0,27 %	1,59 %	5,31 %	6,25 %
Taux négatifs	99,90 %	65,47 %	42,42 %	23,65 %	5,19 %	3,49 %

TABLE 13.13: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Pour rappel, les paramètres calibrés de ce modèle montraient un niveau de retour à la moyenne de la variance stochastique bien plus élevée que le modèle LMM+ calibré sur l'ensemble de la nappe, ainsi qu'une durée de retour à la moyenne long terme plus faible. Cela pouvait donc engendrer une volatilité moyenne plus élevée.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer des niveaux de taux à court terme similaires à ceux de la sensibilité 3. Cependant, à plus long terme notamment à partir de 20 ans, les différences se creusent avec des niveaux de taux pour ce modèle qui deviennent bien plus élevés avec une moyenne à 60 ans de 6,29 % contre 5,81 % pour le modèle précédent.

Néanmoins, malgré ces niveaux de taux globalement plus élevés, nous avons également des proportions de taux négatifs pour ce modèle qui deviennent de plus en plus élevés par rapport à ceux du modèle calibrés sur l'ensemble de la nappe. Par exemple, à 40 ans, nous avons 5,19 % de taux négatifs contre 3,89 % auparavant.

Par conséquent, cela montre donc qu'à long terme nous avons d'une part des niveaux de taux plus élevés et d'autre part des pourcentages de taux négatifs plus élevés. Il en vient donc naturellement à dire que la volatilité à long terme de ce modèle est plus élevée avec des scénarios extrêmes en plus grande à la hausse comme à la baisse.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

D'après cette brève étude, les mécanismes de PPB et de PRE devraient être plus facilement déclenchés via ce modèle calibré sur nappe réduite, ce qui serait plus coûteux à la compagnie.

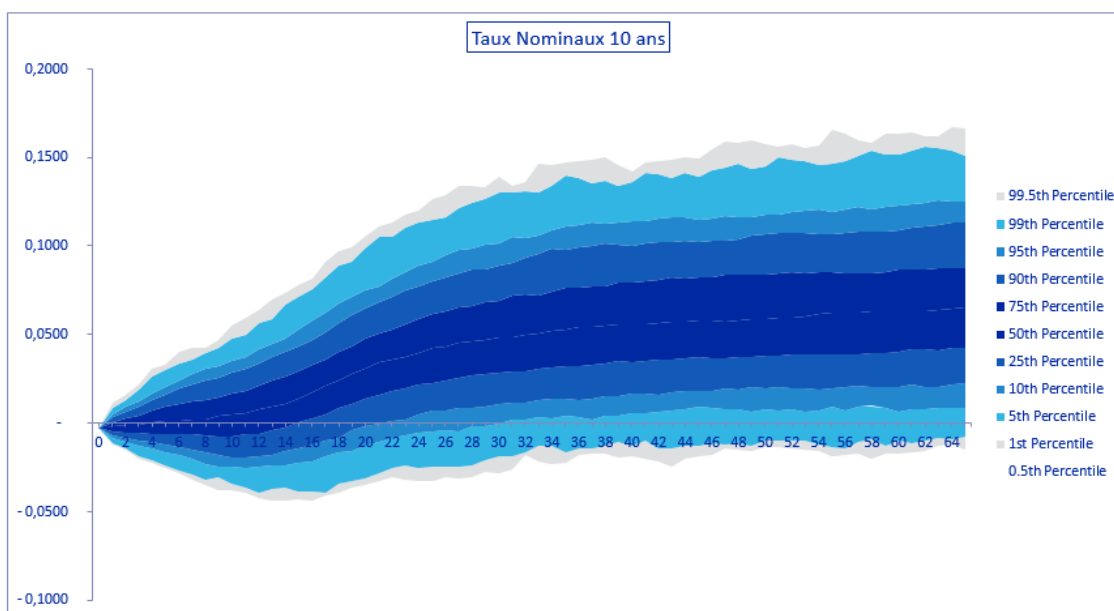


FIGURE 13.20: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,15 %	0,46 %	3,11 %	5,75 %	6,40 %
Médiane	-0,21 %	0,10 %	0,49 %	3,08 %	5,56 %	6,30 %
Taux négatifs	71,26 %	45,61 %	39,32 %	11,38 %	3,99 %	3,09 %

TABLE 13.14: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Le même constat apparait pour les taux nominaux 10 ans en comparaison avec le modèle précédent :

- des niveaux de taux moyens globalement plus élevés et qui s'accroissent à long terme
- de plus grands écarts moyenne-médiane
- une proportion de taux négatifs plus élevée, à long terme

Cela renforce donc l'hypothèse selon laquelle la volatilité de ce modèle étant plus élevée, la présence de scénarios extrêmes l'a également.

Un tel modèle devrait donc amener la compagnie à puiser davantage dans ses réserves ainsi qu'à provisionner ce qui dégradera ses indicateurs actif-passif.

Sensibilité 5 : Diffusion du modèle LMM+ avec *shift* à 10 % calibré sur nappe complète

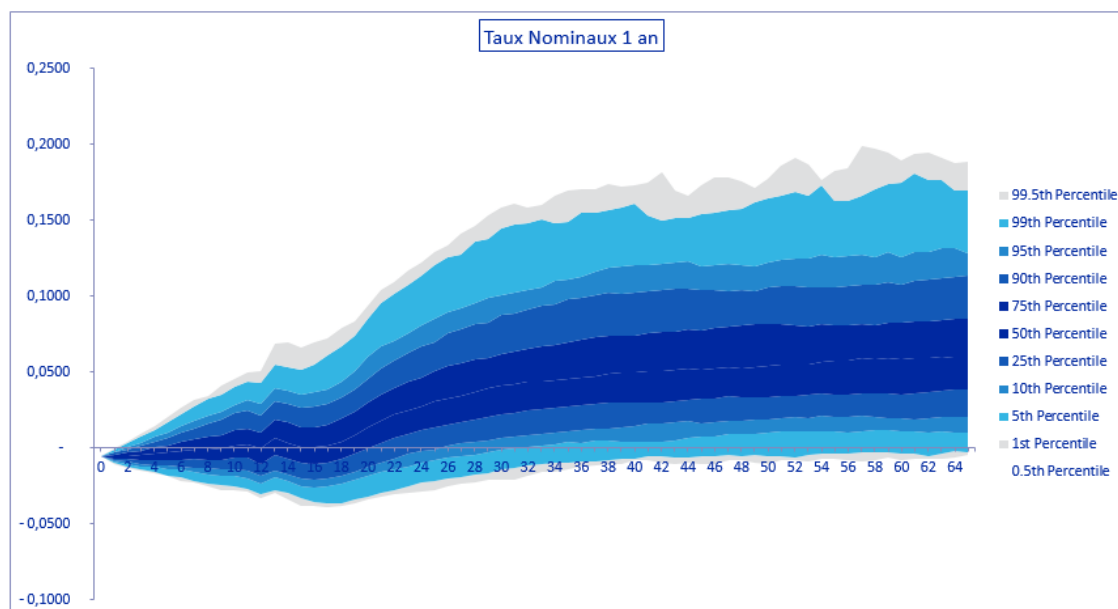


FIGURE 13.21: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,56 %	-0,28 %	0,31 %	1,58 %	5,48 %	6,18 %
Médiane	-0,56 %	-0,30 %	0,16 %	1,31 %	4,99 %	5,83 %
Taux négatifs	99,80 %	67,27 %	43,31 %	25,05 %	3,39 %	1,90 %

TABLE 13.15: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Le graphique est ici très explicite. En effet, à moyen et long terme, nous pouvons clairement remarquer que les nuages des scénarios de taux bas (quantiles inférieurs à 5-10 %) sont très fins, ce qui signifie que la proportion de ces taux bas est relativement faible. À l'inverse, les nuages relatifs aux scénarios de taux élevés (quantiles supérieurs à 90 %) sont bien plus élevés, montrant ainsi que ces scénarios de taux élevés sont fortement présents.

Cela est confirmé par les statistiques descriptives. Nous constatons que la moyenne est bien plus élevée que la médiane, par exemple à 10 ans nous avons une moyenne correspondant presque au double de la médiane. Cette asymétrie "en faveur" de la moyenne montre qu'effectivement les scénarios extrêmes hauts sont très élevés.

D'autre part, en comparant ce modèle ayant un *shift* de 10 % avec le modèle ayant un facteur de 45 % (sensibilité 3), nous pouvons remarquer que jusqu'à 20 ans, la part de taux négatifs est plus élevée avec ce modèle-ci puis devient bien inférieure. De plus, la zone grisâtre correspondant aux scénarios extrêmes bas sont quasi inexistantes ici avec ce modèle. Ainsi, nous en déduisons que le *shift* à 10 % permet un bien meilleur contrôle des taux négatifs avec une part très faible de scénarios très bas.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Par ailleurs, cette forte augmentation des taux avec la projection peut aussi être due à la corrélation entre les taux *forward* et la volatilité stochastique positive et plus élevée que précédemment signifiant que plus les taux seront élevés plus la volatilité le sera également, laissant place à davantage de fluctuations pour des taux élevés.

Ce modèle devrait donc vraisemblablement aboutir à de meilleurs résultats ALM.

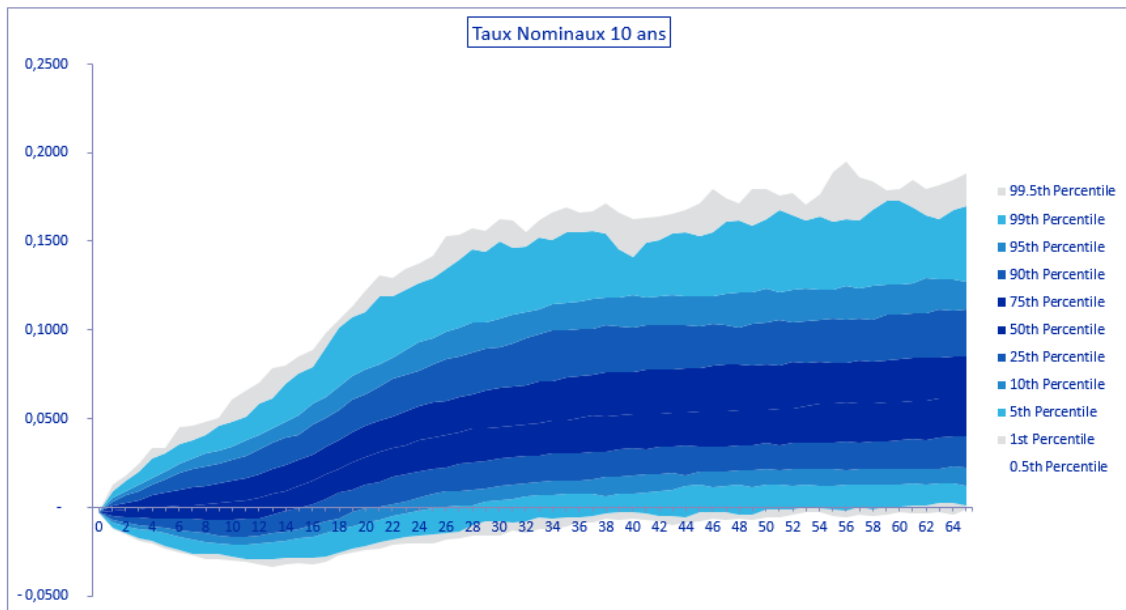


FIGURE 13.22: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,15 %	0,45 %	3,08 %	5,68 %	6,30 %
Médiane	-0,22 %	0,04 %	0,30 %	2,83 %	5,25 %	5,91 %
Taux négatifs	71,16 %	49,20 %	42,02 %	10,78 %	2,10 %	1,00 %

TABLE 13.16: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Le même constat que pour les taux nominaux 1 an apparaît avec :

- des niveaux moyens de taux plus élevés couplés à une médiane bien inférieure
- des pourcentages de taux négatifs plus élevés que précédemment jusqu'à 20 ans puis une forte baisse, par exemple tandis que ce modèle a 49 % de taux négatifs à horizon 5 ans contre moins de 46 % lors de la sensibilité 3, la situation se renverse par la suite avec 1 % de taux négatifs à 60 ans contre plus du double auparavant

Ces analyses confirment donc la présence de scénarios extrêmes élevés tandis que les scénarios bas, bien que davantage présente à court moyen terme, ne correspondent à des scénarios très bas ou extrêmes. De ce fait, les mécanismes de gestion actif-passif cités précédemment sont moins susceptibles de se déclencher. Les résultats ALM devraient donc être très satisfaisants pour ce modèle.

Sensibilité 6 : Diffusion du modèle LMM+ avec *shift* à 10 % calibré sur nappe réduite

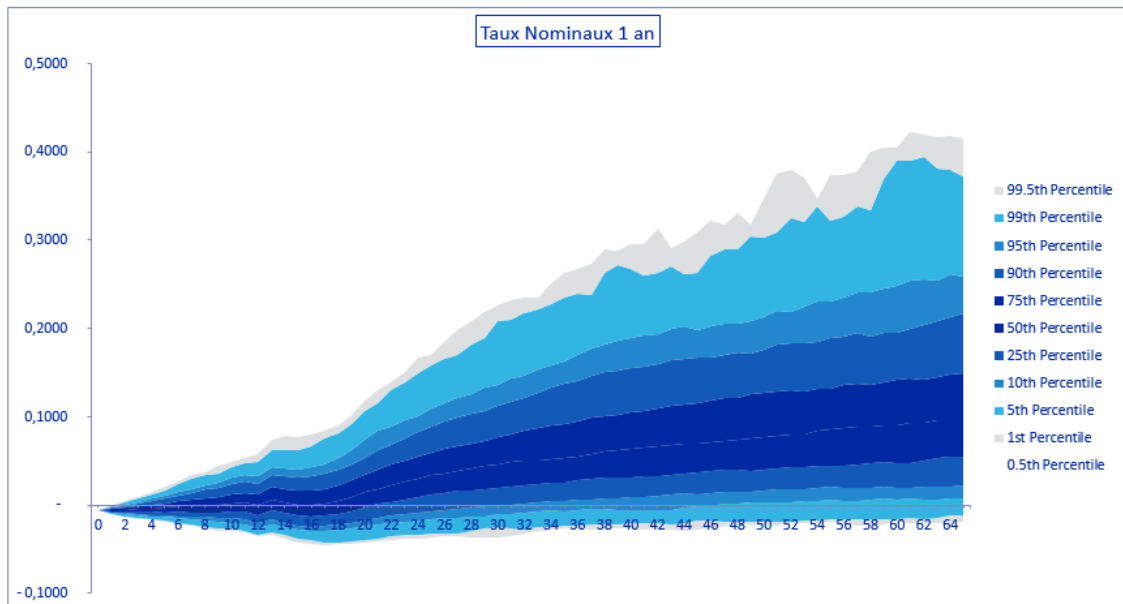


FIGURE 13.23: Diffusion du taux 1 an avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,56 %	-0,27 %	0,32 %	1,76 %	7,40 %	10,27 %
Médiane	-0,56 %	-0,30 %	0,18 %	1,42 %	6,34 %	9,05 %
Taux négatifs	99,70 %	66,47 %	44,11 %	27,64 %	6,69 %	3,09 %

TABLE 13.17: Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives

Pour rappel, les paramètres calibrés de ce modèle étaient assez similaires à ceux de la sensibilité 4 correspondant à la même étude mais avec un *shift* à 45 %. Nous avons alors pu mettre en avant lors de l'analyse de cette sensibilité les points suivants : niveaux de taux plus élevés notamment à long terme, asymétrie plus marquée entre la moyenne et la médiane et enfin des taux négatifs en plus grande part surtout à long terme.

D'autre part, la sensibilité 5 a pu mettre en évidence que les scénarios de taux extrêmes bas étaient peu présents à l'inverse des scénarios extrêmes hauts qui étaient prédominants.

Ce modèle ayant un *shift* à 10 % et calibré sur une nappe réduite regroupe les points des deux modèles précédents en les accentuant.

En effet, le graphique montre très clairement un nuage de quantiles faibles très réduit voire inexistant, et au contraire des scénarios de taux élevés (quantiles supérieurs à 90 %) très épais. Cet aspect est fortement accentué par les valeurs prises par les taux extrêmes hauts : en effet, auparavant, le niveau maximal de taux atteint était de 20 % environ et ici le niveau maximal dépasse les 40 %. Les valeurs de moyenne et médiane très élevées mais également très écartées confirment ces propos.

13.2. GÉNÉRATION DES TABLES ÉCONOMIQUES

Par ailleurs, contrairement à ce que nous pourrions anticiper, ce modèle fournit également des taux négatifs en plus grande proportion. Par exemple, à 40 ans, nous avons presque le double de parts de taux négatifs par rapport au modèle avec facteur à 10 % mais calibré sur l'ensemble de la nappe. Les moyennes et médianes élevées montrent cependant que ces taux négatifs sont contrôlés et ne dérivent pas dans des extrêmes très bas.

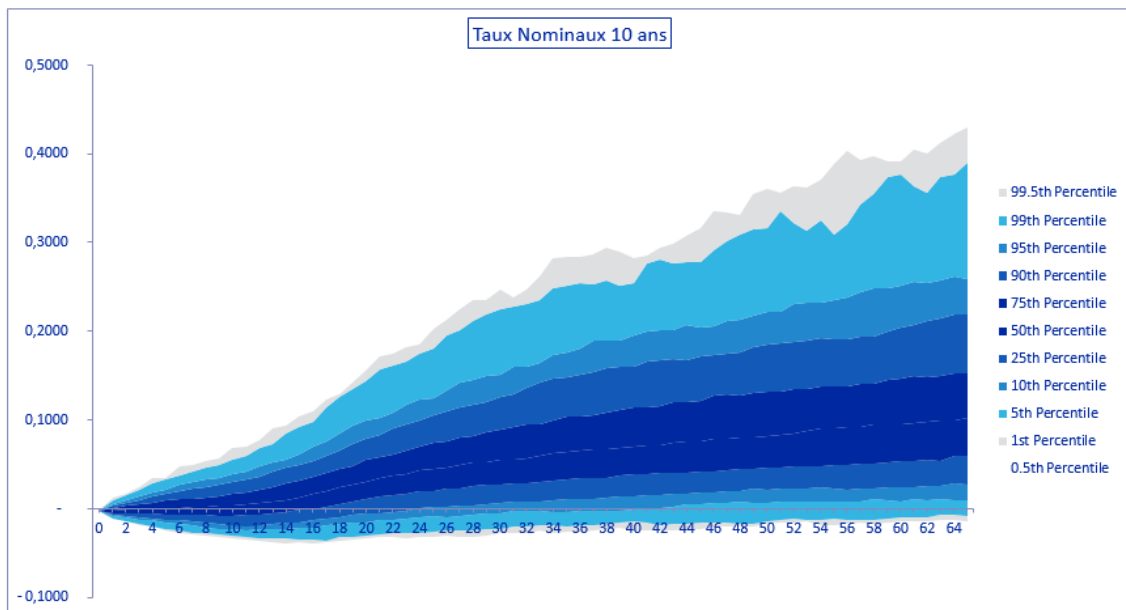


FIGURE 13.24: Diffusion du taux 10 ans avec quantiles

Durée de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans	60 ans
Moyenne	-0,21 %	0,15 %	0,49 %	3,48 %	8,05 %	10,75 %
Médiane	-0,22 %	0,03 %	0,34 %	3,05 %	7,01 %	9,50 %
Taux négatifs	71,66 %	49,30 %	41,72 %	14,57 %	5,49 %	2,99 %

TABLE 13.18: Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives

Le constat observé avec les taux nominaux 10 ans est exactement le même que les taux nominaux 1 an, nous ne détaillerons donc pas à nouveau l'étude.

Ainsi, nous avons pu analyser les diffusions des modèles de taux en :

- identifiant les niveaux moyens et extrêmes des taux générés via les graphiques et les statistiques descriptives
- faisant un parallèle avec les paramètres calibrés afin d'identifier les possibles raisons de ces niveaux de taux
- mettant en perspective ces études de diffusion avec les mécanismes d'interactions actif-passif de PPB et de PRE afin d'anticiper les résultats ALM

13.3. RÉSULTATS DES IMPACTS ALM

A présent, nous avons une vision élargie des modèles de taux utilisés, leurs spécificités ainsi que ce qu'ils induisent en termes de nappes de volatilité calibrées et de nappes de diffusion de taux.

De ce fait, nous pouvons passer aux résultats ALM obtenus pour l'ensemble de ces sensibilités.

13.3 Résultats des impacts ALM

Dans cette section, nous présenterons les résultats ALM obtenus.

La comparaison des modèles sera effectuée selon les indicateurs ALM suivants :

- le Best Estimate, en séparant le BE provenant des contrats EURO et le BE issu des contrats UC
- le ratio de couverture
- le SCR ainsi que les fonds propres éligibles

De plus, nous chercherons à étudier les impacts sur la gestion actif-passif de l'assureur quant au :

- Choix du modèle de taux : G2++ ou LMM+
- Choix de la zone de calibrage : nappe de volatilité complète ou nappe réduite aux maturités et ténors allant de 1 à 10 ans
- Choix du facteur de déplacement utilisé pour le modèle LMM+ : 10 % ou 45 %

13.3.1 Sensibilité au modèle de taux

La sensibilité au modèle de taux sera effectuée en comparant les modèles suivants :

- le modèle G2++ calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité (sensibilité 1)
- le modèle LMM+ calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité avec un *shift* à 10 % (sensibilité 5) et à 45 % (sensibilité 3)

Modèles \ Indicateurs	G2++	LMM+ avec shift 10%	LMM+ avec shift 45%
Best Estimate	8 733 150 457	8 733 705 839	8 736 013 414
Best Estimate EURO	7 013 738 612	7 017 056 023	7 019 371 681
Best Estimate UC	1 719 411 844	1 716 649 816	1 716 641 733
Ratio de couverture	157,7%	158,1%	156,7%
Fonds propres admissibles	676 234 695	675 834 820	674 173 366
SCR	428 728 706	427 372 282	430 157 792

TABLE 13.19: Comparaison des indicateurs ALM suivant le modèle de taux

Tout d'abord, nous pouvons constater que les résultats sont très similaires pour les modèles G2++ et LMM+. En effet, le modèle LMM+ avec *shift* à 45 % induit un ratio de

couverture de 156,7 %, le modèle LMM+ avec *shift* à 10 % induit un ratio de 158,1 % et le ratio du modèle G2++ se trouve en ces deux derniers.

Ces résultats sont cohérents avec l'anticipation de ces impacts effectuée lors de la section précédente.

En effet, l'analyse des diffusions des modèles montrait que le modèle LMM+ avec facteur de déplacement de 45 % induisait non seulement une plus grande part de scénarios extrêmes bas mais également des niveaux de taux nominaux 10 ans inférieurs à ceux du modèle G2++. Or, comme nous pouvons le constater, le fort impact entre ces deux modèles réside dans le BE EURO bien plus élevé pour le LMM+ que pour le G2++, avec une différence de presque 6 millions d'euros. Cela va donc bien dans le sens des hypothèses émises précédemment puisque les scénarios de taux extrêmes bas étant davantage présents avec le modèle LMM+, ces derniers seront très "couteux" à la compagnie afin de servir le taux garanti au client. De ce fait, les mécanismes de PPB et, étant donné que les actions et l'immobilier sont corrélés aux taux, le mécanisme de PRE également seront davantage déclenchés avec le modèle LMM+. De même, nous pouvons noter un SCR plus élevé avec le modèle LMM+ avec *shift* à 45 %.

D'autre part, les trois modèles ont été calibrés uniquement sur des swaptions ATM et les trois répliquaient très bien l'ensemble de la nappe de volatilité avec des écarts de calibrage faibles et similaires. Cet impact entre les modèles n'est donc pas induit par un potentiel écart de calibrage entre ces derniers mais provient uniquement des diffusions des modèles.

Quant au modèle LMM+ avec *shift* à 10 %, nous constatons que le ratio de solvabilité est très légèrement supérieur à celui du G2++. Cela reste cohérent car nous avons pu observer que les taux étaient fortement réhaussés via l'utilisation de ce facteur de déplacement. Cette hausse des taux a alors impliquée une baisse du BE EURO de ce modèle de plus de 2 millions d'euros par rapport au LMM+ avec *shift* à 45 %. Cela amena donc l'écart de ratio à devenir légèrement plus élevé que celui du modèle G2++. Tout de même, sachant que la dernière sensibilité aura pour objectif d'étudier l'impact du *shift*, nous détaillerons ce point à la partie associée.

Ainsi, ces résultats ALM confirment nos anticipations réalisées via les analyses des quantiles de diffusion. Nous avons ainsi pu constater que pour des qualités de calibrage de swaption ATM très proches entre les modèles G2++ et LMM+, les impacts sur le ratio de solvabilité restent assez faibles. Néanmoins, il est clair à travers les analyses de diffusion et des montants de BE EURO que les scénarios de taux extrêmes bas sont davantage présents avec le modèle LMM+. Ce dernier point est attendu puisque la complexité accrue du modèle de marché permet de générer une plus grande diversité de scénarios de taux dont des scénarios extrêmes.

Passons à présent à la sensibilité des résultats ALM à la zone de calibrage du modèle de taux.

13.3.2 Sensibilité à la zone de calibrage

La sensibilité à la zone de calibrage du modèle de taux sera effectuée en comparant :

- le modèle G2++ calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité (sensibilité 1) et sur la nappe réduite (sensibilité 2)

13.3. RÉSULTATS DES IMPACTS ALM

- le modèle LMM+ avec un *shift* à 45 % calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité (sensibilité 3) et sur la nappe réduite (sensibilité 4)

Modèle \ Indicateurs	G2++ nappe complète	G2++ nappe réduite
Best Estimate	8 733 150 457	8 735 673 046
Best Estimate EURO	7 013 738 612	7 016 187 837
Best Estimate UC	1 719 411 844	1 719 485 209
Ratio de couverture	157,7%	154,3%
Fonds propres admissibles	676 234 695	674 418 430
SCR	428 728 706	437 145 237

TABLE 13.20: Comparaison des indicateurs ALM suivant la zone de calibrage du G2++

Le constat est explicite : le calibrage sur nappe réduite induit une baisse modérée du ratio de couverture.

En effet, nous constatons en calibrant sur nappe réduite à la fois une baisse des fonds propres éligibles ainsi qu'une hausse du SCR conduisant au passage du ratio de 157,7 % à 154,3 %. Ces résultats étaient à nouveau ceux attendus : nous avons effectivement conclu lors de l'analyse des diffusions que le calibrage du nappe réduite entraînait une hausse des fluctuations des scénarios générés avec entre autres des taux plus bas. Or, nous observons que les BE UC sont quasi-identiques entre les deux modèles ce qui est cohérent sachant que pour les unités de compte le risque est en majorité supporté par le client. En revanche, dans les contrats EURO où des taux garantis sont servis, le risque est supporté par l'assureur : les scénarios bien plus défavorables dans le calibrage sur nappe réduite expliquent donc la forte hausse du *Best Estimate* EURO de plus de 2 millions d'euros d'où la dégradation du ratio de solvabilité.

Modèles \ Indicateurs	LMM+ nappe complète	LMM+ nappe réduite
Best Estimate	8 736 013 414	8 746 893 710
Best Estimate EURO	7 019 371 681	7 030 230 221
Best Estimate UC	1 716 641 733	1 716 663 490
Ratio de couverture	156,7%	152,0%
Fonds propres admissibles	674 173 366	666 339 552
SCR	430 157 792	438 484 343

TABLE 13.21: Comparaison des indicateurs ALM suivant la zone de calibrage du LMM+

Les résultats du LMM+ sont identiques et encore plus marqués que ceux du G2++. En effet, nous notons une baisse de presque 4 points de ratio de couverture. A nouveau, le BE UC est très similaire tandis que le BE EURO augmente de plus de 10 millions d'euros ce qui est donc une dégradation bien plus prononcée que précédemment. Nous avons conclu lors du calibrage sur nappe réduite que le niveau de retour à la moyenne plus élevé couplé à une durée de retour à la moyenne réduite avaient de fortes chances d'engendrer des

13.3. RÉSULTATS DES IMPACTS ALM

scénarios extrêmes et donc de dégrader les indicateurs Solvabilité II : c'est bien ce qui est observé.

Par conséquent, pour le modèle G2++ comme le modèle LMM+, un calibrage sur nappe réduite dégrade de façon modérée les indicateurs ALM. Une nouvelle fois, dû au modèle épargne utilisé, les analyses des paramètres calibrés ainsi que des scénarios générés de taux permettent d'anticiper de façon juste les résultats obtenus.

Ainsi, nous pouvons passer à la dernière étude : la sensibilité au facteur de déplacement du modèle LMM+.

13.3.3 Sensibilité au *shift* pour le modèle LMM+

Cette dernière étude sera effectuée en comparant :

- le modèle LMM+ avec *shift* à 10 % calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité (sensibilité 5)
- le modèle LMM+ avec *shift* à 45 % calibré sur l'ensemble de la nappe de volatilité (sensibilité 3)

Modèles \ Indicateurs	LMM+ shift à 10%	LMM+ shift à 45%
Best Estimate	8 733 705 839	8 736 013 414
Best Estimate EURO	7 017 056 023	7 019 371 681
Best Estimate UC	1 716 649 816	1 716 641 733
Ratio de couverture	158,1%	156,7%
Fonds propres admissibles	675 834 820	674 173 366
SCR	427 372 282	430 157 792

TABLE 13.22: Comparaison des indicateurs ALM suivant le *shift* du LMM+

Les résultats ALM montrent qu'une augmentation du *shift* induit une baisse modérée du ratio de couverture qui provient à la fois d'une baisse des fonds propres admissibles et d'une hausse du SCR. D'autre part, le *Best Estimate* lié aux unités de compte reste très peu modifié tandis que le *Best Estimate* lié aux contrats EURO a subi une hausse de plus de 2 millions d'euros causant cette dégradation du ratio.

Or, l'anticipation des impacts ALM avait abouti au fait qu'un *shift* à 10 % permettait un meilleur contrôle des taux négatifs qu'un facteur de 45 % avec d'une part des niveaux de taux globalement plus élevés et d'autre part des scénarios extrêmes retrouvés principalement à la hausse et non à la baisse des taux. Tous ces éléments contribuaient donc à émettre l'hypothèse d'interactions actif-passif favorables à l'assureur et, en ce sens, une amélioration des indicateurs ALM ce qui est prouvé par les résultats obtenus.

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif d'étudier deux modèles de taux nominaux fondamentalement différents : le modèle G2++ et le modèle LMM+. D'une part, cette étude poussée avait pour but de rappeler tout le raisonnement mathématique indispensable pour appréhender le modèle. D'autre part, l'intention était de pouvoir objectiver la stabilité et la robustesse du modèle par de nouvelles méthodes en portant une attention particulière à l'étape la plus complexe d'un modèle : le calibrage. Enfin, une étude de sensibilités de ces modèles de taux sur des indicateurs ALM ont permis de comparer leurs impacts quant à la solvabilité d'un assureur.

Pour cela, nous avons dans un premier temps rappelé la réglementation Solvabilité II, les spécificités d'un GSE risque-neutre dans le cadre de cette norme ainsi que l'ensemble des outils financiers nécessaires à la compréhension du mémoire.

Le choix de l'étude des modèles G2++ et LMM+ a alors été réalisé.

Le modèle G2++ est un modèle de taux court, à deux facteurs et relativement simple d'accès. Ces caractéristiques rendent ce modèle très pertinent permettant des calibrages à la fois très satisfaisants et peu coûteux en temps de calcul. Néanmoins, des limites comme l'impossibilité de répliquer une nappe de volatilité ITM/OTM sont présentes.

A l'inverse, le modèle LMM+ est un modèle de marché disposant d'une volatilité stochastique. Cette forte complexité permet d'outrepasser les contraintes du modèle G2++ tout en apportant une efficacité supérieure. Il était donc approprié de comparer ces deux modèles afin de pouvoir objectiver l'utilité d'une telle complexité.

Pour chaque modèle de taux, nous avons alors étudié les fondements théoriques et déterminé des formules de *pricing* d'une swaption ainsi que de diffusion. Nous avons alors pu nous focaliser sur l'étape de calibrage. Après avoir mis en avant l'efficacité du modèle G2++ lors du calibrage de swaption ATM, la même étude a été menée pour le modèle LMM+ en ajoutant le calibrage sur swaption OTM dont les résultats furent très satisfaisants. A ce stade, nous avons voulu étudier plus en profondeur la robustesse et la stabilité de chaque modèle à travers deux méthodes : le calibrage sur plusieurs années d'exercice et le multi-start.

Le calibrage sur plusieurs années d'exercice permet de rendre compte de la stabilité du modèle de taux suivant l'utilisation de diverses courbes de taux sans risque et de matrices de swaption. Nous avons d'abord mis en avant un environnement économique très changeant via des niveaux de taux sans risque ainsi que des niveaux de volatilité et de courbure des swaptions très fluctuants. Le modèle G2++ comme le modèle LMM+ se sont alors montrés relativement convaincants lors de ces calibrages, exposant la stabilité

de ces modèles.

En complément de l'étude précédente, une analyse multi-start a été effectuée. Celle-ci permet de montrer l'effet des paramètres d'initialisation sur les calibrages. Nous avons alors pu montrer que l'initialisation des paramètres était très impactante sur les résultats obtenus. De plus, une plus grande sensibilité à ces paramètres a été mise en avant sur le modèle LMM+.

Enfin, l'étude de ces modèles a été côturée en effectuant les tests de validation de martingalité et de *market consistency*. Pour le test de martingalité, les résultats obtenus sont satisfaisants et permettent de valider la risque neutralité des scénarios. Quant au test de *market consistency*, même s'il a été validé par les deux modèles, nous avons mis en avant une qualité de réplication bien supérieure avec le modèle LMM+.

L'ensemble de ces travaux ont permis de comparer les deux modèles sur les qualités de réplication de swaptions de même que sur la stabilité et la robustesse de leur calibrage. Finalement, une étude d'impacts de ces modèles sur la santé d'une compagnie d'assurance permettait de compléter ces analyses.

Afin de mettre en avant l'impact des choix du modèle de taux et de son calibrage sur les indicateurs Solvabilité II, plusieurs études de sensibilité ont été réalisées : une sensibilité au choix du modèle, une seconde liée à la zone de calibrage et une dernière sur le choix du *shift* du modèle LMM+.

Premièrement, nous avons procédé à une analyse des paramètres calibrés ainsi que des volatilités induites afin de montrer la possibilité d'anticiper les scénarios de taux générés. Par la suite, nous avons montré qu'une étude des diffusions de taux notamment des scénarios extrêmes bas couplées aux statistiques descriptives permettaient d'anticiper les résultats ALM.

Ainsi, nous avons mis en avant qu'un modèle LMM+ avait la possibilité d'améliorer la solvabilité d'un assureur, que la diminution du *shift* du modèle LMM+ engendrait une amélioration de ces indicateurs et qu'enfin un calibrage sur nappe réduite dégradait assez fortement la solvabilité de l'assureur.

Ce mémoire aura donc permis de constituer une base solide sur le fonctionnement des modèles de taux et les études pouvant être menées afin d'objectiver la robustesse et la stabilité du calibrage. Il aura également apporté des exemples d'anticipation d'impacts ALM et des sensibilités permettant de confronter les modèles quant à la solvabilité d'un assureur.

Dans la continuité de ce mémoire, il serait intéressant de compléter l'étude sur ces modèles via une étude de cinétique des paramètres. Le principe est de choquer un paramètre du modèle et d'identifier les impacts sur les nappes de volatilité, permettant alors d'exhiber le rôle de chaque paramètre et donc aboutir à une compréhension plus fine du modèle. De plus, une limite à notre étude ALM fut le calibrage uniquement sur swaption ATM. Une étude similaire en incorporant le calibrage sur swaption ITM/OTM pour le modèle LMM+ serait pertinente.

Bibliographie

- [1] ACPR. *Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques*, Revue, 2020.
- [2] ACTUARIAL ASSOCIATION OF EUROPE. *Negative Interest Rates and Their Technical Consequences*, Article, 2016.
- [3] ARMEL, K. *Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques : Modélisation et Simulation*, Mémoire d'actuariat (2010).
- [4] BENNOUNA, M. *Calibrage du Libor Market Model dans le cadre d'un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre*, Mémoire d'actuariat (2017).
- [5] BONNEFOY-CUDRAZ, P. *Implémentation et calibrage d'un Générateur de Scénarios Economiques : impact sur la volatilité du Solvency Capital Requirement*, Mémoire d'actuariat (2016).
- [6] BRIGO, D. and MERCURIO, F. *Interest Rate Models - Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance, 2006.
- [7] BUCKDAHN, R. *Cours de Calcul Stochastique* (2019).
- [8] BURG, A. *Étude de la calibration du modèle de taux LMM+*, Mémoire d'actuariat (2018).
- [9] CHIOCCA, G. *Modélisation des frais et décisions de gestion associées : quels leviers d'optimisation pour un assureur vie ?*, Mémoire d'actuariat (2021).
- [10] COMMISSION EUROPEENNE. *RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35*, Règlement, 2015.
- [11] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. *A theory of the term structure of interest rates*, *Econometrica* 53, 1985.
- [12] DEVINEAU, L., ARROUY, P-E., BONNEFOY, P., BOUMEZOUED, A. *Fast calibration of the Libor Market Model with Stochastic Volatility and Displaced Diffusion*, Article de recherche, 2017.
- [13] EIOPA. *PAN-EUROPEAN PERSONAL PENSION PRODUCT (PEPP) : EIOPA'S STOCHASTIC MODEL FOR A HOLISTIC ASSESSMENT OF THE RISK PROFILE AND POTENTIAL PERFORMANCE*, Article, 2020.
- [14] FOUQUES, W., HARZAFI, M., KROA, C. et MANSOUR, K. *Calibrage du modèle G2++ dans le cadre d'un GSE risque neutre*, Bureau d'études, EURIA (2020).

- [15] GRISON, P. et MONTET, L. *Comparaison de deux approches de calcul des fonds propres sous Solvabilité II*, Mémoire d'actuariat (2014).
- [16] HESTON, S. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, Article, 1993.
- [17] INSTITUT DES ACTUAIRES. & ACPR. *Commission S2 de l'Institut des Actuaires*, Conférence, 2017.
- [18] INSTITUT DES ACTUAIRES. *Les Générateurs de scénarios économiques : Éléments d'analyse et exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français*, Document d'orientation, 2018.
- [19] INSTITUT DES ACTUAIRES. *Assurance et Finance : vent debout face aux changements climatiques*, Conférence, 2019.
- [20] INSTITUT DES ACTUAIRES. *Modèles financiers pour la construction du bilan économique : Problématiques et méthodologies*, Conférence, 2016.
- [21] INSTITUT DES ACTUAIRES. *Impacts du GSE sur les éléments de bilan Cas des risques de long terme*, Conférence, 2016.
- [22] KAHL, C. and JACKEL, P. *Not-so-complex logarithms in the Heston model*, Article de recherche, 2006.
- [23] PARLEMENT EUROPEEN. & CONSEIL EUROPEEN. *DIRECTIVE 2009/138/C*, Directive, 2009.
- [24] SCHRAGER, D. F. *Pricing swaptions and coupon bond options in affine term structure models*, Article, 2006.
- [25] UNIVERSITAT ULM. *Robust Calibration of the Libor Market Model and Pricing of Derivative Products*, 2011.
- [26] WU, L. and ZHANG, F. *Libor Market Model with Stochastic Volatility*, Article de recherche, 2006.

Table des figures

1.1	Bilan d'un assureur sous Solvabilité II	4
1.2	Structure de la formule standard	6
3.1	Comparaison des courbes de taux selon la méthode d'extrapolation	18
7.1	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage	43
7.2	Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 1 an, suivant les années d'exercice	45
7.3	Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 5 ans, suivant les années d'exercice	45
7.4	Comparaison des volatilités de marché pour la maturité 20 ans, suivant les années d'exercice	45
7.5	Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 1 an, suivant les années d'exercice	46
7.6	Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 5 ans, suivant les années d'exercice	46
7.7	Comparaison des volatilités de marché pour le ténor 20 ans, suivant les années d'exercice	47
7.8	Comparaison des courbes de taux sans risque, suivant les années d'exercice	48
8.1	Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur les prix zéro-coupon	53
8.2	Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur le rapport des prix zéro-coupon $\frac{PrixZC(G2++)}{PrixZC(EIOPA)}$	53
8.3	Ecarts absolus entre les volatilités Monte-Carlo et les volatilités de la swaption après calibrage	55
9.1	La fonction de Rebonato	63
9.2	Facteurs de corrélation inter-forward via la méthode d'ACP	65
10.1	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle LMM+ après calibrage	83
10.2	Graphiques de comparaison des volatilités ITM/OTM du marché et du modèle LMM+ en fonction des <i>strike</i> pour plusieurs maturités	85
11.1	Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur les prix zéro-coupon	97

TABLE DES FIGURES

11.2	Test de martingalité avec intervalle de confiance à 95% sur le rapport des prix zéro-coupon $\frac{PrixZC(LMM+)}{PrixZC(EIOPA)}$	97
11.3	Ecarts absolus entre les volatilités Monte-Carlo et les volatilités de la swap-tion après calibrage	98
13.1	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	111
13.2	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	111
13.3	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	112
13.4	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	112
13.5	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	114
13.6	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	114
13.7	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	115
13.8	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	115
13.9	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	116
13.10	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	117
13.11	Matrice de volatilités obtenues après calibrage	118
13.12	Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités obtenues après calibrage	118
13.13	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	119
13.14	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	120
13.15	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	121
13.16	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	122
13.17	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	123
13.18	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	124
13.19	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	125
13.20	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	126
13.21	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	127
13.22	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	128
13.23	Diffusion du taux 1 an avec quantiles	129
13.24	Diffusion du taux 10 ans avec quantiles	130

Liste des tableaux

7.1	Résultat du calibrage du modèle G2++	42
7.2	Résultats des calibrages du modèle G2++, suivant les années d'exercice . .	48
7.3	Résultats satisfaisants du multi-start via le modèle G2++	49
7.4	Corrélations des paramètres calibrés	50
8.1	Paramètres calibrés du modèle G2++ au 4 ^{eme} trimestre de 2020	51
10.1	Résultat du calibrage sur swaption ATM du modèle LMM+	81
10.2	Résultat du calibrage sur swaption ITM/OTM du modèle LMM+	84
10.3	Résultats des calibrages du modèle LMM+, suivant les années d'exercice .	87
10.4	Résultats satisfaisants du multi-start via le modèle LMM+	88
12.1	Allocation initiale des actifs	107
13.1	Résultat du calibrage du modèle G2++ sur nappe complète	110
13.2	Résultat du calibrage du modèle G2++ sur nappe réduite	112
13.3	Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe complète et <i>shift</i> à 45 %	113
13.4	Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe réduite et <i>shift</i> à 45 %	114
13.5	Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe complète et <i>shift</i> à 10 %	116
13.6	Résultat du calibrage du modèle LMM+ sur nappe réduite et <i>shift</i> à 10 %	117
13.7	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	120
13.8	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	121
13.9	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	121
13.10	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	122
13.11	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	123
13.12	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	124
13.13	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	125
13.14	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	126
13.15	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	127
13.16	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	128
13.17	Taux nominaux 1 an : Statistiques descriptives	129
13.18	Taux nominaux 10 ans : Statistiques descriptives	130
13.19	Comparaison des indicateurs ALM suivant le modèle de taux	131
13.20	Comparaison des indicateurs ALM suivant la zone de calibrage du G2++ .	133
13.21	Comparaison des indicateurs ALM suivant la zone de calibrage du LMM+	133
13.22	Comparaison des indicateurs ALM suivant le <i>shift</i> du LMM+	134

Lexique

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentielle et de Résolution

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority

ALM : Asset and Liabilities Management (Gestion actif-passif)

BE : Best Estimate

UC : Unités de compte

SCR : Solvency Capital Requirement

MCR : Minimum Capital Requirement

GSE : Générateur de Scénarios Economiques

AOA : Absence d'Opportunité d'Arbitrage

LIBOR : London InterBank Offered Rate

LMM : Libor Market Model

DDLMM : *Displaced Diffusion* Libor Market Model

SVDDLMM : *Displaced Diffusion* Libor Market Model with *Stochastic Volatility*

ATM : At The Money

ITM/OTM : In The Money / Out The Money

ZC : Zéro-Coupon

PPB : Provision pour Participation aux Bénéfices

PRE : Provision pour Risque d'Exigibilité

TME : Taux Moyen d'Emprunt d'Etat

TMG : Taux Minimum Garanti

Annexe A

Théorèmes et lemmes essentiels

A.1 Lemme d'Itô

Lemme d'Itô unidimensionnel : Soit (Ω, \mathbb{F}, P) un espace probabiliste avec B un mouvement brownien sur cet espace. Soit $t > 0$.

Considérons un processus d'Itô unidimensionnel $X(t)$ qui suit l'Equation Différentielle Stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{aligned}dX(t) &= b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 &= x\end{aligned}$$

Avec,

- b un processus \mathbb{F} -adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds < +\infty$ p.s
- σ un processus \mathbb{F} -adapté vérifiant $\int_0^t \sigma_s^2 ds < +\infty, \forall t$

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} , de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x , à dérivées bornées, nous avons alors :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d \langle X \rangle_t$$

A.2 Changement de numéraire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Nous supposons qu'il existe un numéraire N et une probabilité \mathbb{Q}^N équivalente¹ à la probabilité historique \mathbb{P} tel que le prix de n'importe quel actif financier X normalisé par N soit une martingale sous \mathbb{Q}^N , i.e pour $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{X_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Alors, pour tout numéraire U , il existe une probabilité \mathbb{Q}^U équivalente à \mathbb{P} tel que le prix de n'importe quel actif financier Y normalisé par U soit une martingale sous \mathbb{Q}^U , i.e pour $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[\frac{Y_T}{U_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

De plus, la densité de Radon-Nikodym qui définit la probabilité \mathbb{Q}^U est donnée par :

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}$$

1. \mathbb{Q} est une probabilité équivalente \mathbb{P} si et seulement si $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

Annexe B

Démonstrations relatives au modèle LMM+

Espérances conditionnelles sous la mesure *forward swap*

Nous avons affirmé que les travaux de Heston ont permis de relier deux espérances conditionnelles sous la mesure *forward swap* avec une fonction caractéristique.

La première équation à démontrer est la suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{(X>x)} | F_t] = \frac{1}{2}\varphi_X(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}(e^{-iux}\varphi_X(iu))}{u} du$$

Avec :

- \mathbb{Q}^S la mesure *forward swap*
- X la variable considérée et φ_X la fonction caractéristique associée

Nous commençons par appliquer la formule d'Euler ce qui nous permet de réécrire l'égalité :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}(e^{-iux}\varphi_X(iu))}{u} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-iux}\varphi_X(iu) - e^{iux}\varphi_X(-iu)}{iu} du$$

Or, la fonction caractéristique peut être réécrite de la manière suivante :

$$\varphi_X(z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^{zX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx} f(y) dy$$

Avec : f la densité de la variable X

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}(e^{-iux}\varphi_X(iu))}{u} du &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-iux} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy} f(y) dy - e^{iux} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuy} f(y) dy}{iu} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iu(x-y)} - e^{iu(x-y)}}{2iu} du f(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u(y-x))}{u} du f(y) dy \end{aligned}$$

Or, nous avons également l'égalité suivante : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-iux} \varphi_X(iu))}{u} du &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(y-x) f(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(- \int_{-\infty}^x f(y) dy + \int_x^{+\infty} f(y) dy \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \int_x^{+\infty} f(y) dy \end{aligned}$$

Finalement, nous aboutissons bien à l'égalité voulue :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [\mathbb{1}_{(X>x)} | F_t] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-iux} \varphi_X(iu))}{u} du$$

La seconde équation à démontrer est la suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^X \mathbb{1}_{(X>x)} | F_t] = \frac{1}{2} \varphi_X(1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-iux} \varphi_X(1+iu))}{u} du$$

La démonstration étant identique, il est inutile de la démontrer également en détail.

La seule différence se fera lors de la première étape à l'application de la formule d'Euler, nous aurons ici :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{-iux} \varphi_X(1+iu))}{u} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iux} \varphi_X(1+iu) - e^{iux} \varphi_X(1-iu)}{iu} du$$

Et nous pourrons alors réécrire la fonction caractéristique de la manière suivante :

$$\varphi_X(1+z) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [e^{(1+z)X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x+zx} f(y) dy$$

Avec : f la densité de la variable X

En déroulant de façon identique la démonstration précédente avec la différence venant d'être évoquée, nous aboutissons alors à l'expression souhaitée.