EURIA — EURo Institut d'Actuariat

Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 21 Septembre 2017

Par : Stéphane DANG NGUYEN
Titre : Extension à *shift* déterministe du modèle de *Black* généralisé et applications

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires :
Fabrice HAMON
Signature :

Entreprise :
Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique
Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA :
Rainer BUCKDAHN
Dominique ABGRALL

Directeur de mémoire en entreprise :
Franck VERMET
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Secrétariat :

Bibliothèque :

EURIA
EURo Institut
d'Actuariat

6, avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3

T +33 (0)2 98 01 66 55
F +33 (0)2 98 01 66 57
euria@univ-brest.fr

Résumé

L'objectif de ce travail est d'appliquer l'extension à *shift* déterministe au modèle de *Black* ainsi qu'à ses extensions. Initialement, ce modèle a été proposé pour éviter les taux d'intérêt négatifs générés par le modèle de *Vasicek*. Le taux au comptant est restreint aux valeurs positives d'un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*, interprété comme le *shadow rate*. Une première direction pour l'extension de ce modèle consiste à utiliser des processus multidimensionnels pour définir le *shadow rate*. Cependant, suite à l'observation de taux d'intérêts négatifs sur les marchés financiers, le modèle a été étendu en utilisant une limite inférieure négative puis en introduisant une dépendance temporelle.

La limite inférieure est délicate à estimer, puisqu'elle nécessite des considérations sur le secteur bancaire, on la considère donc comme fixe et on utilise une extension à *shift* déterministe pour capturer la courbe de taux de marché. Ce faisant, le modèle est plus facile à manipuler d'un point de vue mathématique mais son interprétation économique est affaiblie. Des illustrations numériques de calibrations sur la courbe de taux EIOPA complètent la présentation. De plus, le modèle est appliqué pour la valorisation de polices italiennes d'assurance-vie de type *gestione separata*, qui ont une participation aux bénéfices.

Mots clefs: Modèles de taux d'intérêt, *shadow rates models*, extension à *shift* déterministe, polices d'assurance vie avec participation aux bénéfices.

Abstract

The purpose of this work is to apply the deterministic shift extension to the *Black* model as well as to its extensions. The model was proposed to correct the negative interest rates generated by the *Vasicek*. The spot rate is restricted to the positives values of an *Ornstein-Uhlenbeck*, interpreted as the *shadow rate*. A first direction for the extension of the model consists in using multidimensional *shadow rate*. However, following the observation of negative interest rates in the financial markets, the model has been extended considering a negative lower bound, then introducing a time-dependent lower bound.

The lower bound is delicate to calibrate, since it involves analysis on the banking sector. As a consequence, it is considered as fixed and a deterministic shift is added so as to fir perfectly the market yield curve. The model is therefore easier to handle on a mathematical point of view but its economic interpretation is weaker. Numerical illustrations, based on calibration on the EIOPA curve, complete the presentation of the model. Moreover, the model is applied for the pricing of Italian life of *gestione separata* type, namely participting policies.

Keywords: Interest rates models, shadow rates models, deterministic shift extension, participating life policies.

Note de synthèse

Du point de vue financier, le niveau des taux d'intérêt était habituellement considéré comme positif. En effet, un taux négatif implique que le prêteur perd une partie de son capital à la suite de cette opération. La capacité du modèle de *Vasicek* [Vas77] à générer des taux négatifs était donc jugée comme une faiblesse. C'est pourquoi *Black* [Bla95] a introduit une transformation qui contraint le taux au comptant à être positif. A la suite des politiques monétaires non conventionelles, les banques centrales ont adopté des taux directeurs négatifs afin de stimuler les économies. Par exemple, la banque centrale européene a fixé une valeur négative le 11 juin 2014. A la suite de ces décisions, des taux négatifs ont été également observés sur les marchés interbancaires. De plus, les rendements de certaines obbligations d'état sont devenus négatifs. Du point de vue de la modélisation, ces valeurs ont redéfini des dogmes. Ainsi, le modèle de *Black* a été modifié pour permettre des taux d'intérêt négatifs en introduisant une limite inférieure négative dans le cadre du modèle de *Black* généralisé. Puis une dépendance temporelle a été introduite dans la limite inférieure. L'objectif de ce travail est d'appliquer l'extension à *shift* déterministe de *Brigo* et *Mercurio* [BM98] et [BM06] au modèle de *Black* généralisé. Ce faisant, le rôle de la limite inférieure est affaibli mais ce modèle est plus facile à manipuler d'un point de vue théorique et pratique.

Le modèle de *Black* est construit à partir du modèle de *Vasicek* pour éviter des taux d'intérêt négatifs. Pour ce faire, le taux au comptant est défini par la transformation :

$$r_t = \max\{0; x_t\}\,,\ r_0 = \max\{0; x(0)\}\ ,$$

avec x_t le *shadow rate*, un processus de *Ornstein-Uhlenbeck* caractérisé par l'équation différentielle stochastique :

$$dx_t = \kappa\,(\gamma - x_t)\,dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}},\ x_0 = x(0)\,,$$

avec κ la vitesse de retour vers la moyenne, γ la valeur d'équilibre, σ le coefficient de volatilité, $B_t^{\mathbb{Q}}$ un mouvement brownien sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ et $x(0)$ une constante. Le modèle de *Black* généralisé consiste à utiliser une limite inférieure négative :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\}\,,\ r_0 = \max\{\underline{s}; x(0)\}\ ,$$

et pour $\underline{s} = 0$, on retrouve le modèle de *Black*. Un problème du modèle est l'absence de formule fermée pour le coefficient d'actualisation. On peut utiliser l'approximation de

Krippner [Kri13b] et [Kri15]. Dans un premier temps, on calcule en t le taux *forward* instantané d'échéance $t+\tau$, noté $f_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, avec l'approximation :

$$f_{\underline{s}}(t,t+\tau) \approx f_V(t,t+\tau) + \psi(\tau)\,,$$

avec $f_V(t,t+\tau)$ le taux *forward* instantané en t d'échéance $t+\tau$ pour le modèle de *Vasicek* et en définissant la fonction $\psi(.)$ par :

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= [\underline{s} - f_V(t,t+\tau)]\left[1-\Phi\left(\frac{f_V(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(\tau)}\right)\right] \\ &\quad +\omega(\tau)\phi\left[\frac{f_V(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(\tau)}\right],\end{aligned}$$

où $\Phi(.)$ et $\phi(.)$ sont les fonctions cumulatives et de densité de la loi normale centrée réduite et $\omega(\tau)^2 = V_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+\tau}]$. Puis on déduit le rendement, noté $y_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, avec :

$$y_{\underline{s}}(t,t+\tau) \approx y_V(t,t+\tau) + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \psi(u)du\,.$$

Enfin, on calcule le coefficient d'actualisation, noté $P_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, à partir du rendement $y_{\underline{s}}(t,t+\tau)$:

$$P_{\underline{s}}(t,t+\tau) = \exp\left(-\tau y_{\underline{s}}(t,t+\tau)\right)\,.$$

Un exemple numérique montre que l'erreur relative est faible. De plus, elle est tendentiellement croissante par rapport à τ et $\underline{s}$.

Dans ce travail, on étend le modèle de *Black* généralisé en ajoutant une fonction déterministe au taux au comptant comme expliqué par *Brigo* et *Mercurio* [BM98] et [BM06]. Il s'écrit donc sous la forme :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\} + \varphi(t)\,,$$

avec $\varphi(.)$ une fonction déterministe. Un avantage de cette extension est que le coefficient d'actualisation, noté $P_{++}(t,t+\tau)$, est simple à calculer :

$$\begin{aligned}P_{++}(t,t+\tau) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_u du\right)\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\max\{\underline{s};x_u\}\,du\right)\right]}_{P_{\underline{s}}(t,t+\tau)} \exp\left[-\int_t^{t+\tau}\varphi(u)du\right]\,.\end{aligned}$$

Dans le cadre du modèle proposé, on remarque que le rôle de la limite inférieure est affaibli puisqu'en présence d'un *shift* négatif, le taux au comptant peut être inférieur à $\underline{s}$. On peut néanmoins forcer une calibration avec un *shift* positif ou nul. De plus, ce modèle se justifie par :

— La limite inférieure $\underline{s}$ est délicate à estimer puisqu'elle nécessite des considérations sur le secteur bancaire. De plus, des extensions proposent de lui donner une dépendence temporelle (cf *infra*), ce qui rend le modèle plus complexe. Dans le cadre du modèle proposé, une seule estimation de ce paramètre est utilisée (éventuellement mise à jour périodiquement).
— Dans le modèle de *Black* généralisé, le coefficient d'actualisation a une erreur d'approximation qui dépend à la fois de $\underline{s}$ et de l'échéance résiduelle τ. Dans le modèle proposé, cette erreur d'approximation est fonction de l'échéance résiduelle.
— Comme dans le cadre général des extensions à *shift* déterministe, le modèle est capable de produire un *fit* parfait d'une courbe de taux de marché donnée. Pour un ensemble de coefficients d'actualisation observés, notés $P^M(t, t+\tau_i)$, et associés à des échéances résiduelles τ_i, on a :

$$P^M(t, t+\tau_i) = P_{++}(t, t+\tau_i) \Leftrightarrow \int_t^{t+\tau_i} \varphi(u)du = \log\left[\frac{P_{\widetilde{M}}(t, t+\tau_i)}{P^M(t, t+\tau_i)}\right].$$

On en déduit donc une expression de l'intégrale du *shift* par morceaux. De plus, on peut utiliser le *shift* pour corriger des erreurs d'approximation. En effet, il suffit d'utiliser l'équation précédente en substituant les coefficients d'actualisation de marché par ces coefficients d'actualisation calculés par simulation de *Monte-Carlo*.

Des exemples numériques accompagnent ce travail. Le modèle est calibré sur la courbe de taux *EIOPA* de manière à garantir un *shift* positif et un *fit* parfait. La correction de l'erreur est aussi étudiée.

Le modèle de *Black* généralisé est étendu dans deux directions complémentaires :
— On introduit une dépendance temporelle pour la limite inférieure. C'est pourquoi le taux au comptant est défini par :

$$r_t = \max\{\underline{s}(t); x_t\}, \; r_0 = \max\{\underline{s}(0); x(0)\},$$

avec $\underline{s}(.)$ une fonction déterministe. Cette approche est utilisée dans différents articles et les fonctions $\underline{s}(.)$ ont des spécifications variées comme par exemple une moyenne des taux directeurs (*Ichiue* et *Ueno* [IU13]), le taux de dépôt, le taux le plus négatif observé par *cross section* ou jusqu'à la date d'observation (*Kortela*, [Kor16]).
— On utilise un *shadow rate* multi-dimensionnel. Ce processus est la somme de facteurs, comme dans le cadre des modèles affines mais dans la pratique, les facteurs sont gaussiens. Ainsi le *shadow rate* est défini par :

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^{N_D} x_t^{(i)},$$

avec $x_t^{(i)}$, $i = 1, \cdots, N_D$ des facteurs décrits par un processus stochastique. Par exemple pour $N_D = 2$, on a :

$$\mathbf{x}_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}.$$

Si on utilise le modèle G2, l'évolution des facteurs est caractérisée par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^{(1)} x_t^{(1)} \\ -\kappa^{(2)} x_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{B}^{\mathbb{Q},1}(t) \\ d\tilde{B}^{\mathbb{Q},2}(t) \end{pmatrix} .$$

On peut également spécifier une autre dynamique avec un facteur latent dans le cadre du modèle AFDNS de *Christensen et al.* [CDR11] :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \\ dx_t^{(3)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \theta^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ x_t^{(3)} \end{pmatrix} \right] dt + \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} dB^{\mathbb{Q},1}(t) \\ dB^{\mathbb{Q},2}(t) \\ dB^{\mathbb{Q},3}(t) \end{pmatrix} .$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ une matrice. Dans les deux modèles, on est capable de déterminer le coefficient d'actualisation.

On peut également utiliser l'extension à *shift* déterministe dans le cadre de modèles multivariés. En effet, l'approximation de *Krippner* est valable et on connait le coefficient d'actualisation (donc du taux *forward* instantané) ainsi que l'expression de la variance nécessaires. On peut donc calculer le coefficient d'actualisation puis appliquer l'extension à *shift* déterministe.

Comme application actuarielle, on s'intéresse à un groupe de contrats italiens, les polices vie de type *gestione separata*. Ils sont caractérisés par un mécanisme d'indexation de leurs prestations (et primes) au rendement comptable d'un fonds, nommé *gestione separata*. Une particularité de ce fonds est qu'il est géré selon des règles annexées aux conditions contractuelles de la police. De plus, le rendement est publié et certifié par un expert comptable. Comme exemple, on étudie une police qui verse un capital C_T revalorisé à partir d'un versement initial C_0 en T si l'assuré est vivant. Le *pay-off* du contrat en T est donc :

$$Y_T = C_0 \Gamma(0,T) \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)} ,$$

avec $\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}$ la fonction indicatrice de l'évènement $\mathcal{E}(x,T)$, indiquant que l'assuré est vivant en T. Annuellement, le capital se revalorise en fonction du rendement comptable du fonds. C'est pourquoi, on écrit la revalorisation annuelle sous la forme :

$$C_t = C_{t-1} \left(1 + \gamma_t\right) ,$$

avec γ_t le coefficient de revalorisation défini par :

$$\gamma_t = \frac{\max\left\{\beta I_t ; \underline{i}\right\} - \underline{i}}{1 + \underline{i}} ,$$

en notant $\underline{i}$ le taux technique actuariel, I_t le rendement comptable du fonds et $\beta \in [0;1]$ le coefficient de participation aux bénéfices. Cette formulation montre que le coefficient γ_t est supérieur ou égal à 0 donc que le capital est protégé, c'est à dire $C_T \geq C_0$. Pour la

valorisation, on suit l'approche de *De Felice* et *Moriconi* [DFM05]. De manière générale, la valeur du contrat, notée $\mathcal{V}(0,T)$, est :

$$\mathcal{V}(0,T) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T Y_T\right] ,$$

avec Δ_T le déflateur (*state-price deflater*). En supposant que les risques techniques et financiers sont indépendants, alors $\Delta_T = \Delta_T^F \Delta_T^T$ et on peut écrire la valeur du contrat sous la forme :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0 \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] ,$$

ce qui décompose le contrat comme le produit d'une composante technique et d'une composante financière. En introduisant un processus pour le taux au comptant, la composante financière devient :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)\right] .$$

Pour la composante technique, on ne peut pas effectuer des hypothèses de complétude du marché. Cependant, on peut construire une mesure de probabilité $\mathbb{T}$ telle que :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{T}}\left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] .$$

Ainsi, la valeur de la composante technique est :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] =_T p_x .$$

La valeur de ce contrat simplifié est donc :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0 \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)\right] {}_T p_x .$$

C'est donc la variable aléatoire $\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)$ qui joue un rôle central dans la valorisation du contrat. Dans le cadre de simulations, on doit modéliser la gestion du fonds pour obtenir le rendement I_t. On utilise une simplification de la stratégie de gestion. On suppose que chaque année, l'intégralité des actifs est revendue pour acheter une obbligation (en y ajoutant les dividendes éventuels), de manière à avoir une *duration* cible.

Executive summary

On a financial point of view, the values of the interest rates were considered as positive. In fact, a negative rate would imply that the lender losses a fraction of its capital after this loan. The ability of the *Vasicek* [Vas77] to generate negative rates was judged as a weakness. As a consequence, *Black* introduced a transform constraining the spot rate to be positive. However, after non-conventional monetary policies, central banks fixed negative deposit rates in order to stimulate their economies. For example, the European Central Bank fixed a negative value on June 11, 2014. Following these decisions, negative rates were also observed on money markets. Moreover, the yields of some State bonds became negative. On a modelling perspective, these values redefined dogma. The *Black* model was modified to allow negative interest rates leading to the generalized *Black* model. Then, a time-dependence was introduced in the lower threshold. The goal of this work is to apply the deterministic shift extension of *Brigo* and *Mercurio* [BM98] and [BM06] to the generalized *Black* model. By doing so, the meaning of the lower threshold is weaker but this model is easier to handle on a theoretical and practical standpoints.

The *Black* model is defined from the *Vasicek* model so as to avoid negative interest rates. The short rate is defined by the transform :

$$r_t = \max\{0; x_t\}\,,\ r_0 = \max\{0; x(0)\}\ ,$$

where x_t is the shadow rate, an *Ornstein-Uhlenbeck* process characterized by the stochastic differential equation :

$$dx_t = \kappa\,(\gamma - x_t)\,dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}},\ x_0 = x(0)\,,$$

with κ is the speed of mean-reversion, γ is the equilibrium value, σ is the volatility coefficient, $B_t^{\mathbb{Q}}$ is a Brownian motion under the risk-neutral measure $\mathbb{Q}$ and $x(0)$ is a constant. The generalized *Black* model consists in using a negative lower threshold :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\}\,,\ r_0 = \max\{\underline{s}; x(0)\}\ ,$$

and for $\underline{s} = 0$, this model is equivalent to the *Black* model. A drawback of this model is the lack of closed-form expression for the discount factor. However, *Krippner* [Kri13b] and [Kri15] has obtained an approximation. At first, the instantaneous forward rate at time t of maturity $t + \tau$, denoted $f_{\underline{s}}\,(t, t + \tau)$, is approximated by :

$$f_{\underline{s}}\,(t, t + \tau) \approx f_V\,(t, t + \tau) + \psi(\tau)\,,$$

where $f_V(t, t+\tau)$ is the instantaneous forward rate at time t of maturity $t+\tau$ in the *Vasicek* model and defining the function $\psi(.)$ by :

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= [\underline{s} - f_V(t, t+\tau)]\left[1 - \Phi\left(\frac{f_V(t, t+\tau) - \underline{s}}{\omega(\tau)}\right)\right] \\ &\quad + \omega(\tau)\phi\left[\frac{f_V(t, t+\tau) - \underline{s}}{\omega(\tau)}\right],\end{aligned}$$

with $\Phi(.)$ et $\phi(.)$ stand for the cumulative and density functions of the standard Normal distribution $\omega(\tau)^2 = V_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+\tau}]$. Then, the yield, denoted $y_{\underline{s}}(t, t+\tau)$, is valued by :

$$y_{\underline{s}}(t, t+\tau) \approx y_V(t, t+\tau) + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \psi(u)du\,.$$

Finally, the discount factor, denoted $P_{\underline{s}}(t, t+\tau)$, is given by :

$$P_{\underline{s}}(t, t+\tau) = \exp\left(-\tau y_{\underline{s}}(t, t+\tau)\right).$$

A numerical example shows that the relative error is low. Moreover, it tends to be increasing with respect to τ et $\underline{s}$.

In this work, the generalized *Black* model is extended by adding a deterministic shift to the spot rate as explained by *Brigo* and *Mercurio* [BM98] and [BM06] :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\} + \varphi(t)\,,$$

where $\varphi(.)$ is a deterministic shift function. A strength of this model is the form of the discount factor, denoted $P_{++}(t, t+\tau)$, which is deduced from its counterpart in the generalized *Black* model :

$$\begin{aligned}P_{++}(t, t+\tau) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_u du\right)\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \max\{\underline{s}; x_u\}\, du\right)\right]}_{P_{\underline{s}}(t, t+\tau)} \exp\left[-\int_t^{t+\tau} \varphi(u)du\right].\end{aligned}$$

Within the proposed model, the role of the lower threshold is weaker. In fact, if the shift is non-positive, then the spot rate can be lower than $\underline{s}$. However, the shift can be constrained to be positive in the calibration. Moreover, the following arguments support this model :

— The lower threshold $\underline{s}$ can be delicate to estimate since it involves analysis of the banking sector. Moreover, extensions of the model use a time-dependence (cf *infra*). In this model, only one estimation is necessary (that can be updated on a periodic basis).

— In the generalized *Black* framework, the approximation error depends on the $\underline{s}$ as well as on the time to maturity. In the proposed model, the error is a function of the time to maturity.
— Using a deterministic shift extension, the model is able to achieve a perfect fit of any market discount curve. Denote by $P^M(t, t+\tau_i)$ a set of observed market discount factors associated to time to maturity τ_i. The perfect fit of this curve implies :

$$P^M(t, t+\tau_i) = P_{++}(t, t+\tau_i) \Leftrightarrow \int_t^{t+\tau_i} \varphi(u)du = \log\left[\frac{P_{\widetilde{M}}(t, t+\tau_i)}{P^M(t, t+\tau_i)}\right].$$

By doing so, an expression of the integral of the shift is piecewise known. Moreover, the shift can be used in order to correct the approximation errors. In fact, it is sufficient to substitute the market discount factors of the previous example by a subset of discount factor computed with a large number of *Monte-Carlo* simulation.

Numerical examples are provided in this work. The model is calibrated using the *EIOPA* interest rates curve with a positive shift constraint and a perfect fit. The correction of the approximation error is also analysed.

The generalized *Black* model is extended in two complementary directions :
— The lower barrier has a time dependence. The spot rate is therefore defined as :

$$r_t = \max\{\underline{s}(t); x_t\}, \; r_0 = \max\{\underline{s}(0); x(0)\},$$

This approach is used in several papers and the functions $\underline{s}(.)$ have several specifications, e.g. the mean of central bank rates (*Ichiue* et *Ueno* [IU13]), the deposit rate, the most negative rate up to the observation date (*Kortela*, [Kor16]).
— The shadow rate is a multi-variate process. It is the sum of several factors, as for the affine models. However, the factors are usually Gaussian, hence the shadow rate is defined by :

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^{N_D} x_t^{(i)},$$

with $x_t^{(i)}$, $i = 1, \cdots, N_D$ factors driven by stochastic processes. For example, setting $N_D = 2$, the shadow rate is :

$$\mathbf{x}_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}.$$

If the G2 model is used, then the evolution of its two factors is driven by the stochastic differential equation :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^{(1)} x_t^{(1)} \\ -\kappa^{(2)} x_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{B}^{\mathbb{Q},1}(t) \\ d\tilde{B}^{\mathbb{Q},2}(t) \end{pmatrix}.$$

One additional latent factor can be used as in the AFDNS model of *Christensen et al.* [CDR11] :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \\ dx_t^{(3)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \theta^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ x_t^{(3)} \end{pmatrix} \right] dt + \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} dB^{\mathbb{Q},1}(t) \\ dB^{\mathbb{Q},2}(t) \\ dB^{\mathbb{Q},3}(t) \end{pmatrix} .$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is a matrix. The discount factor can be computed for both shadow rates. The deterministic shift extension can be adapted to multivariate processes. In fact, the *Krippner* approximation holds for multivariate Gaussian models. Moreover, the discount factor (hence the instantaneous forward rate) as well as the expression of the conditional variance are known. As a consequence, the discount factor can be computed for the base model, then the deterministic shift extension can be applied.

The actuarial applications are the valuation of some Italian life policies of *gestione separata* type. Those policies are characterized by the indexation of their benefits and premiums to the accounting yield of a segregated fund, namely the *gestione separata*. The management strategy of these funds is defined and is enclosed to the contractual terms and conditions of the associated policies. Moreover, the yield of the fund is certified and published. As example, we consider a policy which benefit is a sum C_T revalued from C_0 provided that the insured is alive at time T. The pay-off at time T of this contract is :

$$Y_T = C_0 \Gamma(0,T) \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)} ,$$

where $\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}$ is the indicator function of the event $\mathcal{E}(x,T)$, stating if the insured is alive at time T. The insured capital has a revaluation that depends on the accounting yield of the fund. The annual revaluation is therefore :

$$C_t = C_{t-1} \left(1 + \gamma_t\right) ,$$

with γ_t is the revaluation coefficient defined by :

$$\gamma_t = \frac{\max\left\{\beta I_t ; \underline{i}\right\} - \underline{i}}{1 + \underline{i}} ,$$

denoting by $\underline{i}$ the actuarial rate, I_t is the accounting yield of the fund and $\beta \in [0;1]$ is the participation coefficient (to the benefits of the fund). This formula shows that the coefficient γ_t is greater or equal to 0 therefore the capital is protected, meaning $C_T \geq C_0$. The valuation of the contract is performed following *De Felice* and *Moriconi* [DFM05]. Generally speaking, the market consistent value of the policy, denoted $\mathcal{V}(0,T)$, is :

$$\mathcal{V}(0,T) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T Y_T\right] ,$$

where $\Delta_T$is the *state-price deflater*. Assuming that the technical and financial risks are independent, then the deflater satisfies $\Delta_T = \Delta_T^F \Delta_T^T$ and the value of the contract has the form :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0 \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] .$$

This value is therefore the product of a financial and technical component. Introducing a stochastic process for the spot rate, the financial component becomes :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)\right] .$$

The hypothesis of complete market does not hold for the technical component. However, a measure can be constructed such that :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{T}}\left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] .$$

As a consequence, the value of the technical component is given by :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}\left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] =_T p_x \, .$$

The market consistent value of this simplified contract is therefore :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0 \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)\right] {}_T p_x \ .$$

The random variable $\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)$ plays a key role in the valuation of this contract. The management strategy has to be modelled for the simulations in order to compute the yield of the fund I_t. A simplification is adopted. At each simulated year, all the assets are sold and are reinvested in a target obligation (among with the coupons), so as to control the duration of the fund.

Remerciements

> Ma guardate l'idrogeno tacere nel mare
> guardate l'ossigeno al suo fianco dormire :
> soltanto una legge che io riesco a capire
> ha potuto sposarli senza farli scoppiare.
>
> *Fabrizio De Andrè*

Avant tout, je souaite remercier Monsieur Fabrice Hamon ainsi que mon directeur de mémoire Monsieur Franck Vermet pour leur disponibilité, leur aide et conseils lors de la rédaction de ce mémoire.

Ce travail est la fin d'un parcours de reprise des études et valorisation des acquis de l'expérience. C'est pourquoi, je souhaite remercier les différentes personnes qui ont permis de le réaliser : L'équipe du bureau REVA, pour l'aide apportée à la réalisation du dossier ; Les enseignants chercheurs ainsi que les étudiants de l'EURIA qui m'ont permis de concillier les études et les activités professionnelles.

Je voulais également exprimer ma reconnaissance à mes collègues actuels et passés pour leurs nombreux échanges. Ils m'ont permis de saisir la diversité des problématiques actuarielles, aidé tout au long de ces études et fait progresser mes réflexions lors de l'écriture de ce mémoire.

De plus, je souhaite remercier le Professeur Yves Rakotondratsimba pour notre collaboration de recherche. L'idée d'appliquer l'extension à *shift* déterministe au modèle de *Black* est née lors d'une discussion. Nous avons écrit un document de travail qui a servi de base pour la rédaction de ce travail. J'espère que nous continuerons cette activité en utilisant et approfondissant certains résultats obtenus.

Enfin, je remercie ma famille qui m'a toujours soutenu lors de mes (trop longues) études.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Du modèle de Vasicek à Black généralisé **5**
2.1 Le modèle de *Vasicek* 5
2.1.1 Définition 5
2.1.2 Le coefficient d'actualisation 6
2.1.3 Les taux négatifs 9
2.2 Le modèle de *Black* 12
2.2.1 Définition 12
2.2.2 Le coefficient d'actualisation 14
2.2.3 Les taux négatifs 16
2.3 Le modèle de *Black* généralisé 17
2.3.1 Définition 17
2.3.2 Le coefficient d'actualisation 19
2.3.3 Les taux négatifs 24

3 Le modèle BG++ **25**
3.1 Introduction à l'extension à *shift* déterministe 25
3.1.1 Définition 25
3.1.2 Spécification(s) du *shift* déterministe 26
3.1.3 Applications numériques 28
3.2 Extension à *shift* déterministe du modèle de *Black* généralisé 33
3.2.1 Définition 33
3.2.2 Applications numériques (1) : Estimations sur la courbe EIOPA . . 35
3.2.3 Applications numériques (2) : Correction de l'erreur d'approximation 38
3.3 Comparaison des modèles décrits 42

4 Extension aux modèles multivariés **43**
4.1 Le modèle de *Black* multidimensionnel 43
4.1.1 Les extensions multivariées du modèle de *Black* 43
4.1.2 Le coefficient d'actualisation 45
4.1.3 Extension à *shift* déterministe 47
4.2 Extension du modèle G2 47

4.2.1 Le modèle G2 47
4.2.2 Extension à *shift* déterministe 49
4.3 Extension du modèle AFDNS 49
4.3.1 Le modèle AFDNS 49
4.3.2 Extension à *shift* déterministe 52

5 Applications actuarielles **55**
5.1 Les polices de type *gestione separata* 55
5.1.1 Présentation des contrats de type *gestione separata* 55
5.1.2 La valorisation des contrats de type *gestione separata* 57
5.1.3 Hypothèses simplificatrices et mise en œuvre 59
5.2 Valorisation dans le cadre des modèles univariés 61
5.2.1 Le modèle de *Vasicek* et *Vasicek++* 61
5.2.2 Le modèle de *Black* et *Black++* 64
5.2.3 Le modèle BG et BG++ 67

6 Conclusions **69**

7 Appendice **71**
A Rappels de mathématiques financières 71
A.1 Le cadre déterministe 71
A.2 Le cadre stochastique 73
B La courbe de taux de l'EIOPA 74
B.1 Base légale 74
B.2 Le modèle mathématique 75

Bibliographie **81**

Chapitre 1

Introduction

A la suite de la crise financière de 2007-2008, les banque centrales ont continuellement abaissé leurs taux directeurs afin de stimuler leurs économies. L'échec de leurs politiques monétaires, matérialisé par un taux de chômage élevé et une inflation basse, les ont poussé à adopter des intruments non conventionnels, puisque les taux ont atteint une valeur nulle ou presque. Par exemple le taux directeur de la banque centrale européenne a été fixé à une valeur nulle le 11 juillet 2012. Comme l'observe *Gregory Nicholas Mankiw*[1] :

> The problem today, it seems, is that the Federal Reserve has done just about as much interest rate cutting as it can. Its target for the federal funds rate is about zero, so it has turned to other tools, such as buying longer-term debt securities, to get the economy going again. But the efficacy of those tools is uncertain, and there are risks associated with them.

Dans le cadre de la zone *euro*, l'achat de titres, le *quantitative easing*, a été associé avec des taux directeurs négatifs. Le lien entre ces deux intruments a été réaffirmé par *Mario Draghi*[2] :

> From today's perspective, however, the negative rates, in conjunction with the other elements of our easing package, have turned out to be powerful in terms of easing financial conditions. And the potential negative side effects have so far been limited.

L'intérêt économique de ces taux négatifs est d'inciter les banques privées à effectuer des prêts au secteur privé au lieu de déposer leurs excès de réserves chez les banques centrales. Néanmoins, cette politique monétaire présente certains risques comme l'explique *Huw van Steenis*[3] : Premièrement les prêteurs sont incités à rechercher des opportunités d'investissement en dehors de leur marché domestique. Deuxièmement, le coût des taux négatifs peut se reporter sur les prêts, ce qui a l'effet contraire de la politique monétaire. Troisièmement, ces taux peuvent affaiblir le secteur bancaire. Enfin, de manière anecdotique, les épargnants se portent vers l'achat de coffre-forts.

1. *It May Be Time for the Fed to Go Negative*, New York Times, 18 Avril 2009.
2. The ECB and Its Watchers XVIII Conference, Frankfurt sur le Main, 6 Avril 2017.
3. *Negative interest rates are a high-risk experiment*, Financial Times, 21 Mars 2016

Les taux directeurs ont été fixés à des valeurs négatives entre le 8 juillet et le 8 septembre 2009 en Suède (*deposit rate*) puis à partir du 9 juillet 2014. La banque centrale européene a fixé son taux directeur à une valeur négative le 11 juin 2014. De même ils sont négatifs en Suisse (depuis le 22 janvier 2015), au Danemark (depuis le 5 septembre 2015 et ils l'ont été entre le 6 juillet 2012 et le 25 avril 2014) et au Japon (depuis le 29 janvier 2016). Cependant, ils ne doivent pas être considérés comme une nouveauté, puisqu'ils ont été observés brièvement en 1979 en Suisse. Ils peuvent également être reliés aux travaux de l'économiste *Silvio Gesell*. En effet, il a proposé une monnaie, *Freigeld*, qui se dévalue avec le temps comme un bien ou une matière première afin d'accélérer les transactions [4] :

> So we must make money worse as a commodity if we wish to make it better as a medium of exchange.

D'un point de vue des banques centrales, les effets positifs de ces politiques monétaires compensent leurs effets négatifs. Comme l'explique *Cœuré* [Coe14] au sujet de l'introduction de taux négatifs par la banque centrale européeene :

> Following the June decision, the lower policy rates were transmitted well to the money market and, in line with forward guidance, market uncertainty about the expected path of policy rates fell. EONIA forwards curves flattened and shifted down (Slide 2). In addition, the volatility of EONIA rates as well as the option-implied volatility of short-term interest rates dropped. The lower policy rates were also transmitted to longer maturities and to market segments other than the unsecured money market. EURIBOR rates and rates implied by EURIBOR futures fell after the June decision and again after the September decision (Slide 3 and 4). Unsecured money market interest rates are now negative for a maturity of up two weeks.

A la suite de cette décision, des taux d'intérêt négatifs ont été observés sur le marché interbancaire. Des obligations d'état ont aussi eu des rendements négatifs. Mais le secteur bancaire ne paraît pas affaibli par cette nouvelle donne monétaire. C'est le sens de la dernière phrase dans la citation de *Mario Draghi* précédente.

Les taux d'intérêt négatifs ont un impact pour les banques mais aussi les sociétés d'assurance comme résumé par *Paul Davies* [5] :

> While negative rates could become an increasing issue for insurers globally, it is more pressing for parts of Europe and Asia. There are three ways to think about the effects. The first is in terms of investment returns and insurers' cash flows ; second is the cost they impose on insurers' liabilities and so their capital ; and third is the wild card of how this all affects consumer behavior.

Les arguments développés dans cet article sont les suivants. Tout d'abord, sur le court terme, les stratégies de couverture rendent les assureurs moins sensibles aux taux. Sur le long terme, les assureurs fixent les garanties de rendement sur les nouveaux produits

4. *The Natural Economic Order*, 1958
5. *Negative Rates and Insurers : Be Afraid* , Wall Street Journal, 3 Mars 2016

inférieures aux rendements actuels. En revanche, à moyen terme, les incertitudes des prestations à verser ainsi que des rendements et des garanties proches créent des problèmes. De plus, la diminution des taux implique que la valeur de marché des polices augmente, tout comme leur besoin de capital et réciproquement. Des taux négatifs ont pour conséquence que la valeur actuelle de flux futurs est supérieure à leur somme. Enfin il est possible que les polices d'assurance deviennent moins attractives pour les épargnants.

Ces valeurs négatives ont également induit des changements dans la modélisation des taux d'intérêt. Un exemple de réflexion actuarielle est le mémoire de *Sacha Flavian* [Fla15]. Le modèle de *Vasicek* [Vas77], basé sur une distribution gaussienne pour le taux au comptant, peut générer des taux négatifs, ce qui était considéré comme une faiblesse. C'est pourquoi *Black* [Bla95] a proposé une une nouvelle définition du taux au comptant : C'est le maximum entre un processus de *Ornstein-Uhlenbeck*, comme pour le modèle de *Vasicek* et dénommé le *shadow rate*, et 0. Ainsi, il est positif ou nul par construction, et donc les taux d'intérêt sont positifs. Le sens de cette transformation est expliqué par *Ben Bernanke*[6] :

> No one will lend at a negative interest rate ; potential creditors will simply choose to hold cash, which pays zero nominal interest.

Cependant, il n'existe pas de formule fermée pour le coefficient d'actualisation, donc on utilise des approximations. Ce modèle a été étendu en deux directions complémentaires. Premièrement, on peut définir le *shadow rate* comme la somme de plusieurs facteurs, comme dans le cadre des modèles affines. D'ailleurs, les modèles utilisés sont souvent des modèles affines gaussiens à deux ou trois facteurs, comme *Krippner* [Kri12] ou *Christensen* et *Rudebusch* [CR15] et [CR16]. Deuxièmement, la limite inférieure peut être négative, comme suggéré suite à l'observation de taux négatifs. On nomme de dernier modèle le modèle de *Black généralisé*. On peut également introduire une dépendance temporelle en utilisant une fonction déterministe. Des exemples de fonctions déterministes sont donnés par *Ichue* et *Ueno* [IU13], *Lemke* et *Vladu* [LV16] ou *Kortela* [Kor16]. L'objectif de ce travail est d'appliquer le *shift* déterministe de *Brigo* et *Mercurio* [BM98] et [BM06] au modèle de *Black généralisé* au lieu d'une limite inférieure avec une dépendance temporelle. Ce faisant, on affaiblit son rôle. On justifie le modèle proposé par une calibration plus aisée, la limite inférieure étant difficile à estimer ainsi qu'une facilité d'utilisation d'un point de vue mathématique et pratique.

Ce travail est organisé comme suit. Tout d'abord le modèle de *Vasicek*, puis de *Black* et *Black* généralisé sont présentés dans un premier chapitre. Cette progression suit la logique de construction du dernier modèle. Chaque modèle est défini puis le coefficient d'actualisation est introduit, sous forme exacte ou approchée et la possibilité de générer des taux négatifs est discutée. L'extension à *shift* déterministe est présentée dans un second chapitre. Tout d'abord cette méthode est détaillée dans un contexte général et illustrée avec le modèle de *Vasicek*. Puis elle est appliquée au modèle de *Black* généralisé,

6. *Downside Danger : Why the world's central banks must become more vigilant about falling prices*, Foreign Policy, 2 novembre 2009

d'un point de vue théorique. Deux exemples numériques, relatifs au modèle de *Black* généralisé et *Black* illustrent le modèle proposé. A la fin de ce chapitre, toutes les propriétés théoriques des modèles considérés sont résumées. L'extension à *shift* déterministe est brièvement appliquée aux modèles multivariés dans un troisième chapitre. Cette technique est tout d'abord introduite dans un contexte général puis est illustrée avec deux modèles gaussiens habituellement utilisés, à deux et trois facteurs. Cette discussion est cantonnée au cadre théorique, en l'absence de calibration. Enfin, tous les modèles univariés et leurs extensions à *shift* déterministe sont appliqués pour la valorisation d'une police vie italienne de type *gestione separata* dans un quatrième chapitre. Ce type de contrat est tout d'abord décrit puis sa valorisations est illustrée avec les différents modèles considérés. Des résultats de base de mathématiques financières, relatifs aux taux d'intérêt ainsi que des détails sur la courbe de taux de l'*EIOPA* sont donnés en appendice.

Les innovations de ce travail sont les suivantes : Tout d'abord, l'extension du modèle de Black *généralisée a été obtenue en collaboration avec* Yves Rakotondratsimba *et présentée lors d'une conférence scientifique (XVIII Workshop on Quantitative Finance, Milan, 25-27 Janvier 2017). Les exemples numériques ont été actualisés avec les données de l'*EIOPA. *L'application de cette méthode aux modèles multi-variés est une seconde innovation, dont l'idée a été suggérée lors d'un échange avec* Leo Krippner. *Enfin l'application de ce nouveau modèle de taux à la valorisation de polices d'assurance de type* gestione separata *est une dernière innovation et peu d'articles couvrent ces contrats.*

Chapitre 2

Du modèle de *Vasicek* au modèle de *Black* généralisé

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le modèle de *Black* généralisé (BG) qui sera étendu par la suite. Cette présentation suit la logique de construction du modèle, c'est à dire en discutant le modèle de *Vasicek* [Vas77], puis celui de *Black* [Bla95] et enfin sa généralisation. Cette progression suit donc la définition du taux au comptant. Chaque modèle est défini puis le coefficient d'actualisation et la possibilité des taux négatifs sont décrits.

2.1 Le modèle de *Vasicek*

2.1.1 Définition

Dans le cadre du modèle de *Vasicek* [Vas77], soient $\{r_t\}_{t\geq 0}$ le processus stochastique modélisant le taux au comptant et $\{x_t\}_{t\geq 0}$ un processus de *Ornstein-Uhlenbeck*, tels que $r_t = x_t$ pour tout instant $t \geq 0$. Ce dernier processus est caractérisé par l'équation différentielle stochastique sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$dx_t = \kappa\left(\theta - x_t\right)dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}}, \quad x_0 = x(0)\,, \tag{2.1}$$

avec $\kappa > 0$ la vitesse de retour vers la moyenne, $\theta > 0$ la valeur d'équilibre, $\sigma > 0$ le coefficient de volatilité et $\left\{B_t^{\mathbb{Q}}\right\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{Q}$. κ, θ, σ et $x(0)$ sont les paramètres du modèle. Pour tous instants t et s tels que $t > s \geq 0$, on montre que la distribution de x_t conditionnement à x_s est gausienne dont les moyennes et variances sont données par (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 59) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}\left[x_t\right] &= x_s \exp\left(-\kappa(t-s)\right) + \theta\left[1 - \exp\left(-\kappa(t-s)\right)\right] \\
&= \theta + \left(x_s - \theta\right)\exp\left(-\kappa(t-s)\right), \qquad (2.2) \\
V_s^{\mathbb{Q}}\left[x_t\right] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left[1 - \exp\left(-2\kappa(t-s)\right)\right], \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

en introduisant $\mathbb{E}_u^{\mathbb{Q}}[.]$ et $V_u^{\mathbb{Q}}[.]$ les opérateurs d'espérance et de variance conditionnellement à l'information en u, $u \geq 0$. On remarque que le phénomène de retour vers la moyenne de équation différentielle stochastique (2.1) s'illustre également dans la seconde formulation de l'espérance conditionnelle. Par ailleurs, la variance conditionnelle ne dépend pas de la valeur du processus en s, c'est à dire x_s.

A titre illustratif, on considère la courbe de taux EIOPA [1] au 31 décembre 2016 et on obtient des paramètres en minimisant la distance quadratique absolue entre les taux d'intérêt de marché et de modèle pour des échéances entre 1 et 150 ans. Des détails additionnels relatifs à ces paramètres sont décrits dans 3.1.3. Les paramètres obtenus sont donnés dans le tableau 2.1. On projette le taux au comptant à un horizon de un et

Paramètre	Valeur
$x_0^{(1,V)}$	-0.0062
$\kappa^{(1,V)}$	0.0485
$\theta^{(1,V)}$	0.0494
$\sigma^{(1,V)}$	0.0055

Table *2.1* – *Paramètres du modèle de* Vasicek *calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016*

dix ans. Le premier cas correspond au cadre du calcul du *Solvency Capital Requirement* tandis que le second se rencontre pour la valorisation de certains dérivés de taux. Les distributions obtenues sont représentées dans le graphique 2.1. On remarque que le taux au comptant de ces distributions sont négatifs avec une probabilité cumulée de 0.7478 (respectivement 0.1374) et que la probabilité cumulée que le taux au comptant soit supérieure à θ est négligeable (respectivement 0.0068). Ces observations s'expliquent par les effets combinés d'une faible valeur de la vitesse de retour vers la moyenne κ et d'une valeur initiale éloignée de la valeur d'équilibre. De plus, la moyenne et la variance de la distribution du taux au comptant sont majeures pour l'horizon de 10 ans, ce qui se remarque également sur le graphique.

2.1.2 Le coefficient d'actualisation

Dans le cadre du modèle, un résultat important est l'existence d'une formule fermée pour le prix d'une obligation sans coupon ou coefficient d'actualisation.

Proposition 2.1.1. *Pour un instant d'évaluation t, une échéance $t+\tau$, avec $\tau > 0$, le coefficient d'actualisation, noté $P_V(t, t+\tau)$, est donné par :*

$$P_V(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} x_u du\right)\right] = A(\tau)\exp\left[-x_t B(\tau;\kappa)\right], \tag{2.4}$$

1. https ://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/... risk-free-interest-rate-term-structures/. Des détails sur cette courbe de taux sont donnés en appendice.

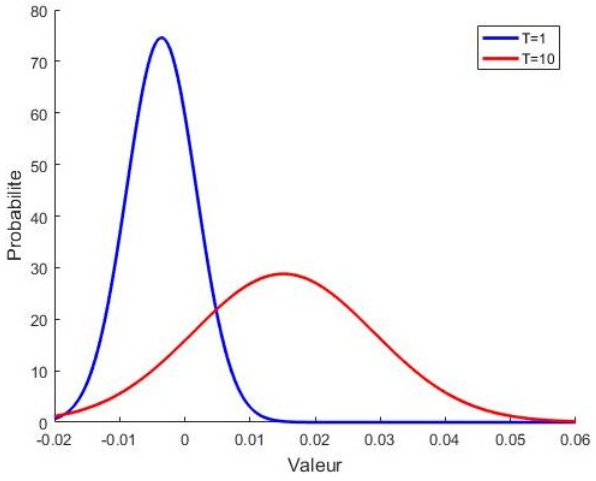

FIGURE *2.1* – *Distributions du taux au comptant dans le modèle de* Vasicek *à un horizon de un et dix ans avec comme paramètres ceux tableau 2.1.*

en introduisant les fonctions $A(.)$ *et* $B(.;.)$ *:*

$$A(\tau) = \exp\left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)(B(\tau;\kappa) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B^2(\tau;\kappa)\right], \tag{2.5}$$

$$B(\tau;\kappa) = \frac{1-\exp(-\kappa\tau)}{\kappa}. \tag{2.6}$$

Démonstration. La formule du coefficient d'actualisation (2.4) peut être obtenue de différentes manières (voir *Mamon* [Mam04]). Des principes pour ces démonstrations sont les suivants :

1. Approche probabiliste : On sait que la distribution du taux au comptant est gaussienne et on montre que la variable aléatoire $\int_t^{t+\tau} x_u du$ l'est également. Puis, on calcule son espérance et sa variance conditionnelle. Enfin, on interprète le coefficient d'actualisation comme une fonction génératrice des moments cette variable aléatoire (en $t = 1$). Dans le cas d'une variable gaussienne, cette fonction dépend uniquement de la moyenne et variance et on en déduit le coefficient d'actualisation.
2. Résolution l'équation différentielle (2.7) : On montre l'unicité de la solution puis on utilise la forme exponentielle affine de la solution pour obtenir deux équations différentielles satisfaites par les fonctions $A(.)$ et $B(.;.)$. Enfin, on résout séparement ces équations différentielles.
3. Théorie des modèles affines : Dans le cadre plus général des modèles affines, on montre que le coefficient d'actualisation a cette forme exponentielle affine et que les fonctions $A(.)$ et $B(.;.)$ sont les solutions d'un système différentiel. Le résultat général est énoncé dans la proposition 4.1.1. Les simplifications liées au modèle

de *Vasicek* permettent d'aboutir aux deux équations différentielles de l'approche précédente.

4. Approche de *Heath-Jarrow-Morton* [HJM92] : On utilise une autre mesure de probabilité, la mesure *T-forward* et l'on calcule l'équation différentielle stochastique du taux au comptant sous cette mesure, puis sont espérance conditionnelle. Enfin, on obtient le coefficient d'actualisation par intégration.

□

On remarque que l' expression du coefficient d'actualisation (2.4) dépend uniquement de la valeur courante du taux au comptant, x_t, ainsi que deux fonctions des paramètres et du *time to maturity* τ. Cette forme particulière illustre l'appartenance du modèle à la classe des modèles affines (*affine term structure models*) qui sont partiellement décrits en 4.1.1.

On montre également que le coefficient d'actualisation est la solution de l'équation différentielle (voir *Mamon* [Mam04]) :

$$\begin{aligned} x_t P_V(t, t+\tau) &= \frac{\partial P_V(t, t+\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial P_V(t, t+\tau)}{\partial x_t} \kappa [\theta - x_t] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_V(t, t+\tau)}{\partial x_t^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec comme condition aux bords $P_V(t, t) = 1$.

Le prix d'une obligation avec coupons et obtenu par combinaison linéaire et le taux *swap* en appliquant la formule classique (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 15). Il est également possible d'évaluer des options sur obligations sans coupon, se reporter à *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 60. Par conséquence, on obtient le prix de dérivés de taux de base tels que des *caps* ou des *floors*.

De plus, d'après l'expression du coefficient d'actualisation (2.4), le rendement d'une obligation sans coupons évalué en t pour une échéance $t + \tau$, avec $\tau > 0$, et noté $y_V(t, t+\tau)$ est donc :

$$y_V(t, t+\tau) = -\frac{1}{\tau} \log [P_V(t, t+\tau)] = \frac{-\log[A(\tau)]}{\tau} + x_t B(\tau; \kappa) . \tag{2.8}$$

On observe donc une dépendance linéaire entre le rendement et la valeur courante du taux au comptant. Cette particularité a des applications pour l'estimation du modèle. En effet, il est possible de construire un système linéaire d'équations de transition (pour le taux au comptant) à partir de l'équivalent de l'équation diffférentielle stochastique (2.1) sous la mesure historique. La forme du rendement produit une équation linéaire entre le taux au comptant, non observé, et une quantité observable et on suppose un bruit d'observation gaussien. Ainsi, on peut appliquer les techniques de filtrage, comme le filtre de *Kalman*. Pour une mise en œuvre, consulter, par exemple *Babbs* et *Nowman*

[BN99]. De même en utilisant l'équation (2.4), le taux *forward* instantané $f_V(t, t+\tau)$, est donné par :

$$f_V(t, t+\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \log\left[P_V(t, t+\tau)\right] = \left[\kappa\theta - \frac{\sigma^2}{2} B(\tau;\kappa)\right] B(\tau;\kappa) + x_t \exp(-\kappa\tau) \,. \tag{2.9}$$

En combinant les équations (2.2), (2.6) et (2.9), on réécrit le taux *forward* instantané sous la forme :

$$f_V(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[x_{t+\tau}\right] - \frac{\sigma^2}{2} B^2(\tau;\kappa) \,. \tag{2.10}$$

Enfin, lors de la simulation de scenarii économiques entre $t \geq 0$ et $T > t$ pour le coefficient d'actualisation d'échéance résiduelle en T de τ, on effectue les étapes suivantes :

- On simule une valeur de la distribution de x_T conditionnellement à x_t.
- On applique la formule (2.4) avec la valeur simulée de x_T conditionnellement à x_t et les fonctions $A(\tau)$ et $B(\tau;\kappa)$ pour une échéance $t+\tau$.

C'est pourquoi la distribution future du coefficient d'actualisation est de type log-normal. A titre illustratif, on extrait 1 000 000 valeurs de la distribution du taux au comptant à 10 ans du graphique 2.1 et on calcule le coefficient d'actualisation pour une échéance résiduelle de 10 ans. L'histogramme de la distribution obtenue est représenté dans le graphique 2.2. On remarque que la probabilité empirique que le coefficient d'actualisation

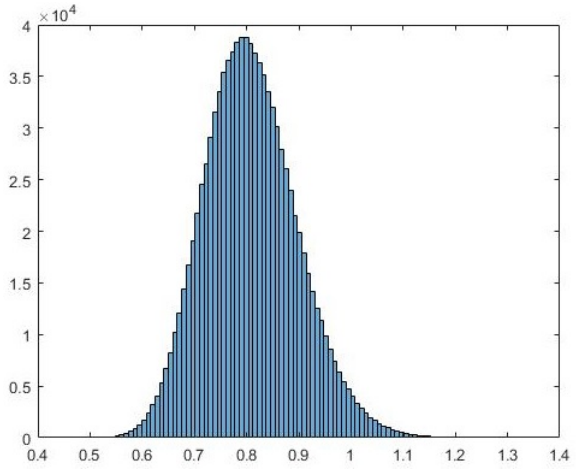

Figure *2.2 – Distribution du coefficient d'actualisation dans le modèle de* Vasicek *à un horizon de 10 ans pour une échéance résiduelle de 10 ans et comme paramètres du ceux tableau 2.1*

soit majeur de 1 vaut 0.0231.

2.1.3 Les taux négatifs

Dans le modèle de *Vasicek*, le taux au comptant peut devenir négatif puisque sa distribution conditionnelle est gaussienne, comme illustré dans le graphique 2.1. Les taux

d'intérêt simulés peuvent être négatifs, ou de manière équivalente, le coefficient d'actualisation peut être supérieur à un, comme le montre le graphique 2.2. Traditionellement, cette faiblesse du modèle de *Vasicek* a été relativement peu considérée. D'une part, les probabilités de générer des taux négatifs étaient considérées comme négligeables, voir par exemple *Rogers* [Rog96]. D'autre part, la comodité mathématique du modèle, basé sur une distribution gaussienne, le rend attractif puisqu'il est facile à manipuler d'une point de vue théorique et numérique. La génération de taux d'intérêt négatifs est détaillée par *Dang-Nguyen* et *Rakotondratimba* [DNR15] et [DNR16].

Les taux d'intérêt sont négatifs si et seulement si le coefficient d'actualisation est majeur à un. En utilisant les expressions (2.4)-(2.6), on a :

$$P_V\left(t, t+\tau\right) \geq 1 \Leftrightarrow x_t \leq \frac{\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\left(B(\tau;\kappa) - \tau\right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B^2(\tau;\kappa)}{B\left(\tau;\kappa\right)} = x^* \,. \tag{2.11}$$

On obtient donc une limite sur le taux au comptant x^*. Cette dernière peut être négative ou positive, en fonction de la valeur des paramètres et de l'échéance résiduelle, c'est pourquoi un taux au comptant négatif n'est pas suffisant pour comprendre si les taux d'intérêt sont négatifs ou positifs. Comme exemple, d'après les graphiques 2.1 et 2.2, la probabilité que le taux au comptant soit négatif à un horizon de dix ans est de 0.1374 alors que la probabilité que le coefficient d'actualisation pour une échéance résiduelle de 10 ans soit majeur de un vaut 0.0231. Cette différence s'explique par la valeur de la limite (2.11) qui est, dans ce cas, de -0.0125. Ainsi, si le taux au comptant est supérieur à cette limite (donc il peut aussi être négatif), le taux d'intérêt à 10 ans sera positif.

Un autre développement de *Dang-Nguyen* et *Rakotondratimba* [DNR15] et [DNR16] est l'introduction de temps d'arrêt. En effet, dans l'exemple précédent, seule une simulation ponctuelle d'un instant t à T a été considérée. Cependant, dans le cadre de valorisations ou pour le calcul de risques, on simule une tractoire sur un intervalle temporel, donc il est important de s'assurer que le processus pour le taux au comptant ne soit pas égal à une limite définie sur toute la trajectoire. Dans le cadre de valorisations, les simulations du taux au comptant sont effectuées sous la mesure risque-neutre. On considère donc la limite (2.11) et les paramètres du processus sont ceux de l'équation (2.1). Pour le calcul de risques, on simule sous la mesure historique. Dans ce cas, avec un changement de mesure adapté, on obtient une équation différentielle stochastique similaire à (2.1). En revanche la limite est donnée par (2.11), donc dépend des paramètres risque neutre. Toutefois, dans les deux cas, un processus de *Ornstein-Uhlenbeck* doit être supérieur à une limite, c'est pourquoi les outils mathématiques sont identiques. On s'intéresse donc à la variable aléatoire :

$$T\left[x^*\right] = \inf\left\{t > 0 \,|x_t = x^*\right\}\,, \tag{2.12}$$

avec x^* la limite définie par (2.11). Cette variable aléatoire est un temps d'arrêt. On choisit la version "continue", c'est à dire que l'on définit le temps d'arrêt sur un ensemble continu, donc on suppose que les simulations sont effectuées sur un intervalle temporel

continu. Dans ce contexte, on peut approximer sa densité avec les méthodes [2] de *Gorovoi* et *Linetski* [GL04] et donc obtenir la probabilité :

$$\mathbb{Q}\left\{T\left[x^*\right] \leq t\right\} = \mathbb{Q}\left\{\inf\left\{u > 0 \,|x_u = x^*\right\} \leq t\right\} , \tag{2.13}$$

Cependant, dans la pratique, les simulations sont effectuées sur un ensemble discret et la densité du le temps d'arrêt équivalent est plus difficilement approximable [3]. Des renseignements complémentaires, relatifs aux temps d'arrêt discrets et continus, sont présentés dans les articles de référence [DNR15] et [DNR16].

En utilisant l'exemple illustratif, on souhaite éviter que le taux d'intérêt une échéance de 10 ans soit inférieur à 0 donc on utilise la limite (2.11). On introduit le temps d'arrêt défini par (2.12). En utilisant les paramètres du tableau 2.1, on approxime la densité du temps d'arrêt comme dans l'article de *Dang-Nguyen* et *Rakotondratimba* [DNR15]. On peut donc calculer la probabilité que le taux d'intérêt une échéance de 10 ans soit négatif lors de simulations jusqu'à un instant donné, choisi à 20 ans. De plus, on effectue 500 000 simulations de la trajectoire du processus (pas de 1/10000) pour obtenir la probabilité empirique d'atteindre la barrière sur même horizon temporel de 20 ans, c'est à dire (2.13). Cette seconde simulation sert à contrôler la qualité de l'approximation utilisée. Les résultats obtenus sont représentés dans le graphique 2.3. On remarque que

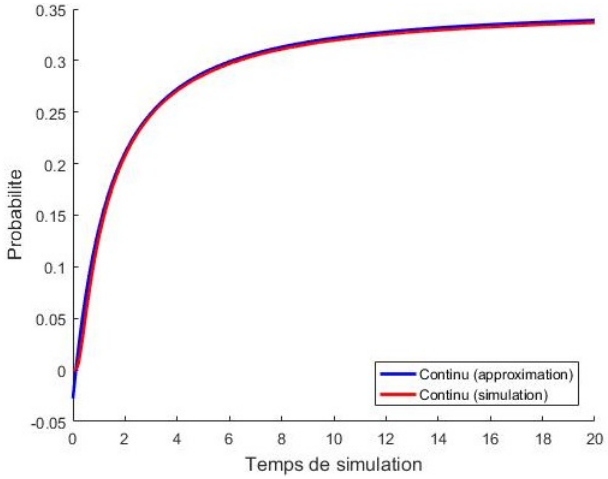

FIGURE ***2.3*** *– Probabilité que le taux d'intérêt une échéance de 10 ans soit négatif dans le cadre de simulations continues jusqu'à 20 ans et comme paramètres ceux tableau 2.1.*

la probabilité d'avoir un taux à 10 ans négatif n'est pas négligeable puisqu'elle atteint

2. Cette approximation nécessite l'utilisation de fonctions spéciales, telles que les fonctions de Hermitte et de Kummer. Elle n'est donc pas décrite dans ce travail mais on peut se référer aux articles originaux pour plus de détails.

3. Il existe un algorithme récursif mais il devient difficile à mettre en oeuvre pour des simulations longues. Une solution alternative consiste à calculer sa densité aux 10 premiers points et à l'approximer par un temps d'arrêt continu, plus facile à évaluer, en modifant la valeur barrière.

0.25 entre 4 et 6 ans et 0.34 environ à 20 ans. De plus, on observe que les probabilités empiriques et approximées sont similaires, ce qui valide l'approximation. Cependant, même si elle est légèrement négative pour un temps proche de 0, ce qui est une limite.

2.2 Le modèle de *Black*

2.2.1 Définition

Comme expliqué dans 2.1.3, le modèle de *Vasicek* peut produire des taux négatifs, bien que cette possibilité était considérée comme peu probable. Cependant, pour éviter ce problème d'un point de vue théorique, *Black* [Bla95] a proposé une nouvelle approche de modélisation du taux au comptant en le maintenant positif :

> It is because currency is an option : when an instrument has a negative short rate, we can choose currency instead. Thus, we can treat the short rate itself as an option : we can choose a process that allows negative rates and can simply replace all the negative rates with zeros. We still have a process with a single number describing the state of the world : either the short rate (when it is positive or zero) or what the short rate would be without the currency option (when it is negative). We can call this number the "shadow short rate".

C'est une argumentation similaire à la citation de *Bernanke* en introduction. En considérant $\{x_t\}_{t\geq 0}$ un processus modélisé par l'équation (2.1), nommé *shadow rate*, on définit le taux au comptant par la transformation :

$$r_t = \max\{0; x_t\}, \quad r_0 = \max\{0; x(0)\}. \tag{2.14}$$

Ce faisant, le taux au comptant est positif ou nul à chaque instant $t \geq 0$ par construction. Un autre nom de cette transformation est *call transform* puisqu'on reconnaît le *pay-off* d'une option de type *call* sur le *shadow rate* avec un prix d'exercice nul. De plus, on observe que la transformation (2.14) ne définit pas de bijection entre le taux au comptant et le *shadow rate*. En effet, si $x_t \geq 0$, alors $r_t = x_t$. En revanche, si $x_t \leq 0$, alors $r_t = 0$. Enfin, on remarque que cette transformation n'introduit pas de paramètre supplémentaire pour le modèle, qui est donc caractérisé par κ, θ, σ et $x(0)$.

Le modèle (ou des extensions) a été appliqué dans différents contextes. *Ueno et al.* [UBS06] utilisent le modèle originel avec l'approximation de *Gorovoi* et *Linetsky* [GL03] et [GL04] pour l'analyse des rendements japonais. Une extension consiste à combiner un *shadow rate* multivarié avec la transformation (2.14). *Krippner* [Kri12] propose un processus de type *GATSM* (voir *Dai* and *Singleton* [DS00]) générique et, comme application, un *shadow rate* bivarié et estimé sur des données américaines. *Kim* et *Singleton* [KS12] utilisent un *shadow rate* bivarié dans le cadre des modèles gaussiens quadratiques affines, qui est une extension d'un processus *GATSM* bivarié en y ajoutant un produit scalaire des facteurs. Le modèle est appliqué sur des données japonaises. *Krippner* [Kri13b] dérive une approximation pour les taux *forward* instantanés et donc du coefficient d'actualisation (voir 2.3.2). Différentes spécifications sont testées sur des données américaines comme

shadow rate GATSM bivarié ou un processus *AFDNS* (voir *Christensen et al.* [CDR11]) à deux ou trois facteurs. Similairement, *Christensen* et *Rudebusch* [CR15] et [CR16] appliquent un processus *AFDNS* à trois facteurs et analysent des données américaines et japonaises. Enfin, des références plus récentes, appliquées à la zone euro, sont *Pericoli* et *Taboga* [PT15] (dynamique gaussienne à trois facteurs) et *Damjanović*, *Masten* [DM16] (processus de type *AFDNS* à deux facteurs) et *Christensen et al.* [CNP16] (processus AFDNS à trois facteurs simplifié). Des détails additionnels sur ces modèles sont donnés en 3.2.1 et 4.1.1.

Comme exemple, on extrait 1 000 000 valeurs des distributions de la figure 2.1 dont on suppose qu'elles représentent le *shadow rate*. On applique la transformation (2.14) pour obtenir les distributions du taux au comptant. Les histogrammmes de ces distributions sont représentés dans le graphique 2.4. Ces deux distributions perdent le caractère gaus-

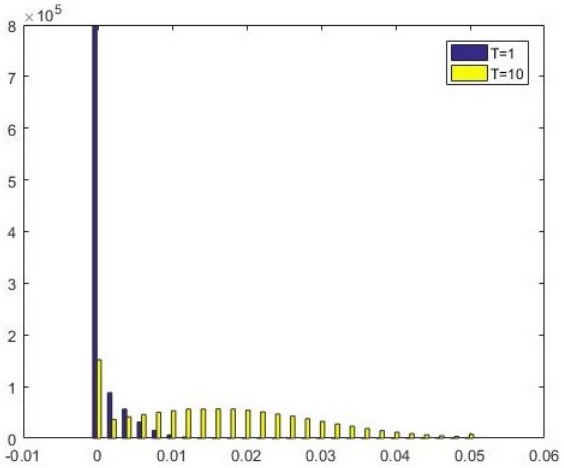

Figure *2.4* – *Distribution du taux au comptant dans le modèle de* Black *à un horizon de un et dix ans avec comme paramètres ceux tableau 2.1.*

sien du modèle de *Vasicek*. La distribution à un an de la figure 2.1, donc du *shadow rate*, présente de nombreuses valeurs négatives qui sont concentrées sur la valeur nulle dans la distribution du taux au comptant à un an par la transformation (2.14). *A contrario*, la distribution du taux au comptant à dix ans a une densité moins importante à zéro puisque les valeurs négatives ont une densité plus faible dans la distribution du *shadow rate*.

2.2.2 Le coefficient d'actualisation

Le coefficient d'actualisation évalué en t pour une échéance $t+\tau$, avec $\tau > 0$, noté $P_B(t, t+\tau)$, est l'espérance conditionnelle :

$$P_B(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_u du\right)\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \max\{0, x_u\}\, du\right)\right]. \quad (2.15)$$

Il n'existe pas de formule fermée pour le coefficient d'actualisation du fait de la non linéarité induite par la transformation (2.14). Il est donc obtenu par des méthodes d'approximation numériques. La théorie financière permet de montrer que le coefficient d'actualisation est solution de l'équation différentielle (voir *Krippner* [Kri15], p. 169) :

$$\begin{aligned}\max\{0; x_t\} P_B(t, t+\tau) &= \frac{\partial P_B(t, t+\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial P_B(t, t+\tau)}{\partial x_t}\kappa[\theta - x_t] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_B(t, t+\tau)}{\partial x_t^2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec comme condition aux bords $P_B(t, t) = 1$. On remarque que cette équation différentielle est non linéaire, à cause du terme $\max\{0; x_t\}$, contrairement à l'équation différentielle correspondante pour le modèle de *Vasicek* (2.7). Au lieu de résoudre cette équation différentielle, on peut utiliser différentes approximations. Elles sont présentées dans la partie 2.3.2 dans le cadre du modèle BG [4].

On peut réécrire le taux au comptant (2.14) sous la forme optionelle :

$$r_t = x_t + \max\{0; 0 - x_t\}, \quad (2.17)$$

Le taux au comptant est donc la somme du *shadow rate* et d'une option sur le *shadow rate*. Le coefficient d'actualisation devient donc :

$$P_B(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} x_u du\right)\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \max\{0; 0 - x_t\}\, du\right)\right] \quad (2.18)$$

En l'absence d'indépendance, on ne peut pas séparer les termes de cette espérance conditionnelle mais il est évident que la transformation (2.14) modifie le taux au comptant. Par abus de language, on nomme "composante optionelle" la différence entre une quantité dans le cadre du modèle de *Black* et la même quantité évaluée avec le modèle de *Vasicek*. Ainsi, on peut interpréter le coefficient d'actualisation (ou d'intérêt) dans le modèle de *Black* comme la somme d'une composante liée au modèle de *Vasicek* et d'un terme correctif ou composante optionelle. Par exemple, en prenant les paramètres du tableau 2.1, on simule le coefficient d'actualisation dans le modèle de *Black* pour des échéances de 1 à 30 ans (25000 simulations avec un pas mensuel). On calcule également le coefficient d'actualisation dans le modèle de *Vasicek* et on déduit la composante optionelle par différence. On calcule les taux d'intérêt correspondants et on calcule la "composante optionelle" par différence. Les résultats représentés sont dans le graphique 2.5. On re-

4. Il suffit de fixer la valeur d'un paramètre à zéro pour obtenir les approximations dans le cadre du modèle de *Black*.

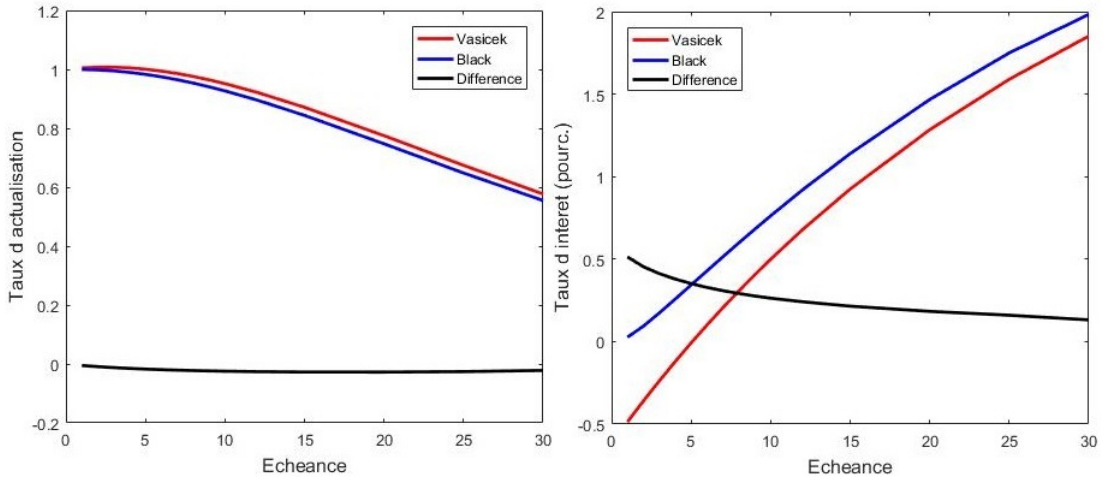

FIGURE ***2.5*** – *Comparaison des coefficients d'actualisation et d'intérêt dans le modèle de* Vasicek *et* Black *pour des échéance résiduelle de 1 à 30 ans avec comme paramètres ceux tableau 2.1.*

marque que la composante optionnelle n'est pas négligeable mais qu'elle tend à se réduire pour des échéances plus longues.

Dans ce modèle, la distribution future du coefficient d'actualisation n'est pas log-normale contrairement à celle correspondante dans le cadre du modèle de *Vasicek*. A titre illustratif, on construit un histogramme empirique de la distribution du coefficient d'actualisation en appliquant la technique du *nested Monte-Carlo* avec les paramètres du tableau 2.1.

— Dans un premier temps, on extrait 250 000 réalisations de la distribution du *shadow rate* à 10 ans.

— Puis on calcule le coefficient d'actualisation pour une échéance de 10 ans. Ce dernier est obtenu par 1000 simulations de *Monte-Carlo* avec un pas de simulation mensuel. On génère une trajectoire puis on calcule l'intégrale de la trajectoire et on en déduit le taux d'actualisatio simulé. Ce second groupe de simulations est volontairement limité pour avoir un temps de calcul raisonnable.

Les résultats sont donnés dans le graphique 2.6. Comme pour la distribution du taux au comptant du graphique 2.4, une valeur particulière concentre une partie de la distribution.

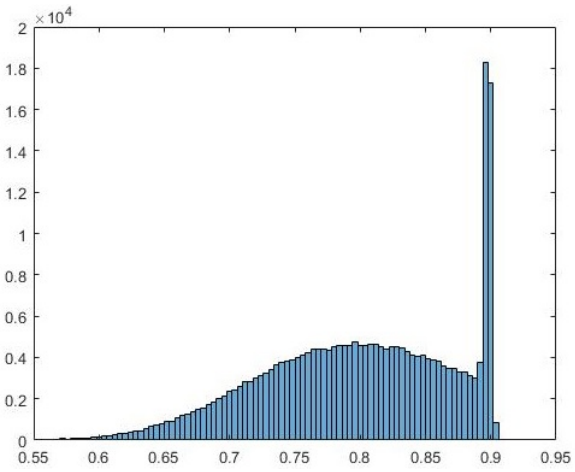

Figure ***2.6*** – *Distribution des coefficients d'actualisation dans le modèle de* Black *à un horizon de dix ans pour une échéance résiduelle de 10 ans (*nested Monte-Carlo*) et comme paramètres ceux tableau 2.1.*

2.2.3 Les taux négatifs

Le taux au comptant étant positif ou nul, la quantité $\int_t^{t+\tau} r_u du$ est presque sûrement positive ou nulle donc le coefficient d'actualisation est inférieur ou égal à un. C'est pourquoi, le modèle de *Black* ne génère pas de taux d'intérêt négatifs. On l'observe également de manière empirique dans les graphiques 2.5 et 2.6 puisqu'aucune valeur du coefficient d'actualisation présente ou simulée n'est égale à un.

2.3 Le modèle de *Black* généralisé

2.3.1 Définition

Dans le cadre du modèle de *Black*, les taux d'intérêt ne peuvent pas être négatifs par construction. Cependant, des banques centrales ont utilisé des taux directeurs négatifs afin d'inciter les prêts interbancaires. Par exemple, la banque centrale européenne a fixé son taux directeur à -10 points de base le 11 juin 2014 et, par voie de conséquence, certains taux interbancaires sont devenus négatifs. À titre illustratif, les taux de la banque centrale européenne ainsi que certains taux interbancaires entre le 30 juin 2014 et le 30 décembre 2016 sont représentés dans le graphique 2.7. Les données sont obtenues à partir des sites

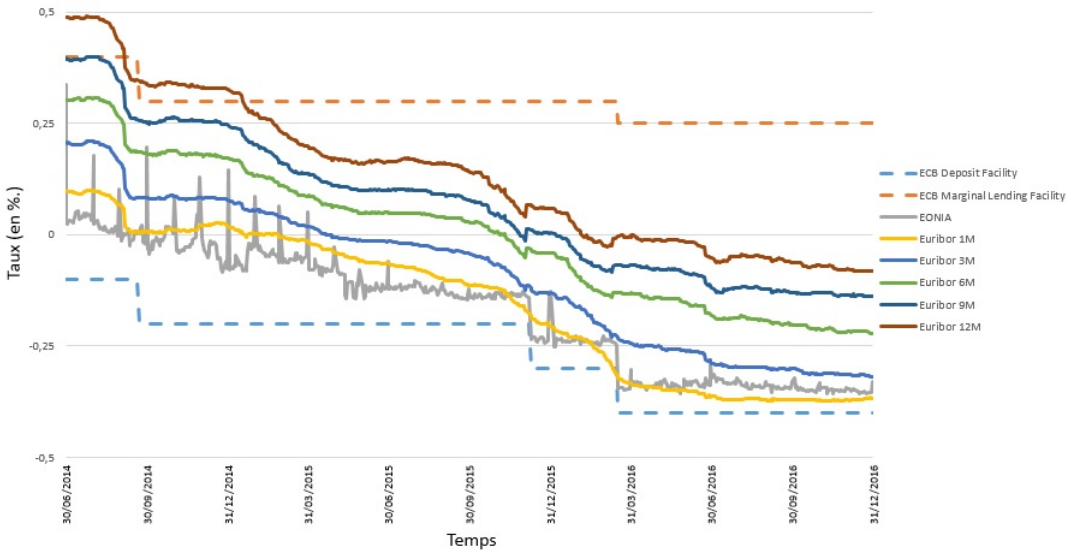

Figure 2.7 – *Série chronologique de certains taux de la banque centrale européenne et interbancaires entre le 30 juin 2014 et 30 décembre 2016.*

internet de la banque centrale européenne[5] et française[6, 7]. Durant le dernier tiers de la période d'observation, tous les taux considérés sont négatifs à l'exception du taux de prêt marginal. De plus, les taux *swap* sont également devenus négatifs pour certaines échéances durant cet intervalle temporel. D'un point de vue économique, un prêt avec des taux négatifs implique une perte financière. L'interprétation de ces valeurs est expliquée par *Cœuré* [Coe14] :

> Banks can always choose to hold physical currency instead of electronic money in their accounts with the ECB. Since physical currency has a zero nominal rate of return, there is what I would call an "economic lower bound" for the

5. see https ://www.ecb.europa.eu/stats/monetary/rates/html/index.en.html
6. see https ://www.banque-france.fr/economie-et-statistiques/changes-et-taux/les-taux-interbancaires.html
7. Le taux de l'EONIA est une moyenne mensuelle.

> rate on excess reserves. It is difficult to identify but it is not zero because the effective rate of return on currency is negative. [...]. There is a cost of storing, holding, and more importantly, using physical currency [8]. This involves the cost of renting, maintaining and securing storage facilities such as vaults as well as the cost of shipping currency around in a safe and timely manner. A recent ECB study estimated the private cost of cash payments to be 1.1 % of GDP on average in the participating countries [9].

Une force théorique du modèle de *Black* devient donc une faiblesse dans le contexte actuel. C'est pourquoi, afin de considérer une limite inférieure "économique", la transformation définie par (2.14) est étendue sous la forme :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\} \qquad r_0 = \max\{\underline{s}; x(0)\}. \tag{2.19}$$

avec $\underline{s} \leq 0$ une constante. Ainsi, le taux au comptant r_t prend des valeurs supérieures ou égales à $\underline{s}$ et en posant $\underline{s} = 0$ on retrouve le modèle de *Black*. De plus, cette transformation introduit une option de type *call* sur le *shadow rate* avec un prix d'exercice égal à $\underline{s}$. De plus, comme pour le modèle de *Black*, la transformation (2.19) ne définit pas une bijection. Enfin, le modèle est caractérisé par les paramètres κ, θ, σ, $x(0)$ ainsi que $\underline{s}$.

Le choix de la limite inférieure $\underline{s}$ peut être délicat à déterminer : Il nécessite des considérations financières mais aussi sur le fonctionnement bancaire. De plus, comme le précise *Cœuré* [Coe16] :

> Also, the "economic lower bound" is not uniquely determined at the aggregate level, since it will vary across banks and markets.

Christensen et al. [CNP16] utilisent un processus plus complexe pour le *shadow rate* et les rendements des obligations danoises. Mais ils discutent deux valeurs possibles pour la limite inférieure : la valeur minimale observée et la valeur qui maximise la vraisemblance. Cette dernière est supérieure à la première, donc son utilisation implique une erreur de prédiction.

Enfin, les effets de la transformation (2.19) sur le *shadow rate* sont similaires à ceux de la transformation (2.14). Comme pour les histogrammes 2.4, on extrait 1 000 000 valeurs des distributions de la figure 2.1 et on applique la transformation (2.19) avec comme limite inférieure $\underline{s} = -1/100$ pour obtenir les distributions du taux au comptant. Les histogrammmes des distributions obtenues sont représentés dans le graphique 2.8. Les deux distributions ne sont pas gaussiennes. Cependant, comme la valeur de la limite inférieure est localisé dans la queue de la distribution, les effets de troncature sont moins présents que dans les histogrammes 2.4.

8. Beyond the direct opportunity cost, moving the deposit rate into deeply negative territory may involve indirect costs, depending on the ability of banks to pass it to their customers, in particular retail ones.

9. Schmiedel, H., Kostova, G., and W. Ruttenberg, 2012. The social and private costs of retail payment instruments. A European perspective, ? ECB Occasional Papers Series , No. 137.

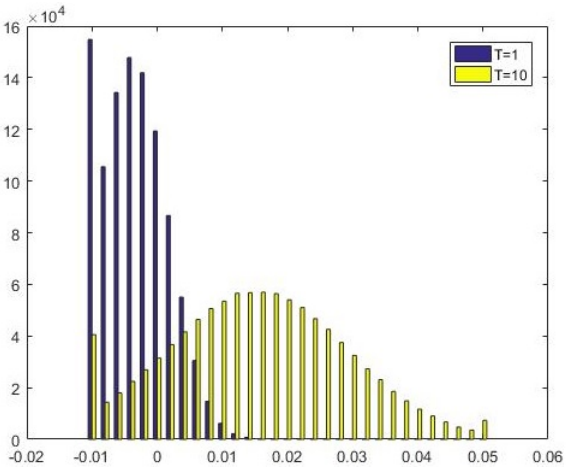

FIGURE ***2.8*** – *Distribution du taux au comptant dans le modèle BG à un horizon de un et dix ans avec comme paramètres ceux du tableau 2.1 et* $\underline{s} = -1/100$.

2.3.2 Le coefficient d'actualisation

Le coefficient d'actualisation évalué en t pour une échéance $t+\tau$, avec $\tau > 0$, noté $P_{\underline{s}}(t, t+\tau)$, est l'espérance conditionnelle :

$$P_{\underline{s}}(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_u du\right)\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \max\{\underline{s}, x_u\}\, du\right)\right]. \quad (2.20)$$

On retrouve l'espérance conditionnelle (2.15) avec $\underline{s} = 0$. Comme pour le modèle de *Black*, il n'existe pas de formule fermée pour le coefficient d'actualisation. Il est également obtenu en combinant une approximation dans le cadre du modèle *Black* et en utilisant la seconde formulation de l'équation (2.19). On considère le processus $\tilde{x}_t = x_t - \underline{s}$, le *shadow rate* translaté, qui est caractérisé par :

$$d\tilde{x}_t = \kappa(\theta - \underline{s} - \tilde{x}_t)\, dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}}, \quad \tilde{x}_0 = x(0) - \underline{s}\,. \quad (2.21)$$

Ainsi $\tilde{x}_t$ est un processus de type *Ornstein-Uhlenbeck* avec comme valeur d'équilibre $\theta - \underline{s}$ et comme valeur initiale $\tilde{x}_t = x_0 - \underline{s}$. Le coefficient d'actualisation est donné par :

$$P_{\underline{s}}(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \max\{0, \tilde{x}_u\}\, du\right)\right] \exp(-\underline{s}\tau)\,. \quad (2.22)$$

La première composante, $P_B(t, t+\tau)$, est évaluée dans le cadre du modèle de *Black*, comme expliqué dans 2.2, en modifiant les valeurs initiales et d'équilibre. La seconde composante est simplement un terme correctif déterministe, immédiat à calculer. C'est

pourquoi, les formules du coefficient d'actualisation relatives au modèle de *Black*, sont données dans le cadre du modèle généralisé.

En l'absence de formule fermée pour le coefficient d'actualisation, un résultat important est l'approximation de *Krippner*, [Kri13b] et [Kri15] :

Proposition 2.3.1. *(*Krippner*, [Kri13b] et [Kri15]) Le taux* forward *instantané évalué en t pour une échéance $t+\tau$, noté $f_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, est approximé par :*

$$f_{\underline{s}}(t,t+\tau) \approx f_V(t,t+\tau) + \psi(\tau), \tag{2.23}$$

avec $f_V(t,t+\tau)$ le taux forward *instantané pour le modèle de Vasicek (2.9) et en définissant la fonction $\psi(.)$ par :*

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= [\underline{s} - f_V(t,t+\tau)]\left[1-\Phi\left(\frac{f_V(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(\tau)}\right)\right] \\ &\quad +\omega(\tau)\phi\left[\frac{f_V(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(\tau)}\right],\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\Phi(.)$ et $\phi(.)$ sont les fonctions cumulatives et de densité de la loi normale centrée réduite et $\omega(\tau)^2 = V_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+\tau}]$. Par conséquence, le rendement, noté $y_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, est approximé par :

$$y_{\underline{s}}(t,t+\tau) \approx y_V(t,t+\tau) + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \psi(u)du. \tag{2.25}$$

Enfin, le coefficient d'actualisation, $P_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, est obtenu en inversant la relation (2.8) :

$$P_{\underline{s}}(t,t+\tau) = \exp\left(-\tau y_{\underline{s}}(t,t+\tau)\right). \tag{2.26}$$

Démonstration. Voir *Krippner*, [Kri15]. □

L'idée principale de cette approximation est de remplacer le taux *forward* instantané $f_{\underline{s}}(t,t+\tau)$ par l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+\tau}]$ (voir *Kortela*, [Kor16], p. 10). Ce faisant on introduit une erreur. Par exemple, dans le cadre du modèle de *Vasicek*, l'équation (2.10) montre que l'erreur est donnée par $\sigma^2 B^2(\tau;\kappa)/2$. Elle tend donc vers 0 lorsque τ tend vers 0 et sa limite vaut $\sigma^2/2$ pour une échéance résiduelle infinie. On compare des coefficients d'actualisation à ceux approximés. On effectue 5 000 000 simulations avec un pas de $1/52$ avec les paramètres du tableau 2.1 et en faisant varier l'échéance résiduelle ainsi que le paramètre $\underline{s}$. Les erreurs relatives obtenues sont données dans le tableau 2.2 (en pourcentage). On remarque que l'erreur relative est faible. De plus, elle est tendentiellement croissante par rapport à échéance résiduelle ainsi que par rapport au paramètre $\underline{s}$.

Wu et *Xia* [WX16] en déduisent une approximation du taux *forward* qui est basée sur une version discrète de ce résultat. Leur approximation est valide pour un *shadow rate* gaussien multivarié, donc pour un processus de *Ornstein-Uhlenbeck*. On note

τ / $\underline{s}$	-0.05	-0.03	-0.02	-0.01	0
1	-0.0004	-0.0000	-0.0002	0.0000	-0.0001
5	-0.0020	-0.0003	-0.0030	-0.0060	-0.0144
7	-0.0034	-0.0011	-0.0048	-0.0147	-0.0352
10	-0.0058	-0.0025	-0.0078	-0.0326	-0.0833
15	-0.0117	-0.0040	-0.0163	-0.0726	-0.1990
20	-0.0200	-0.0059	-0.0288	-0.1202	-0.3425
30	0.0242	0.0584	0.0074	-0.1633	-0.5836

Table 2.2 – *Erreur relative entre le coefficient d'actualisation approximé et celui par simulation de* Monte-Carlo *dans le cadre du modèle BG (pourcentages).*

$f_{\underline{s}}(n, n+1; t)$ le taux *forward* évalué en t pour un prêt en $t+n$ et d'échénce $t+n+1$ [10].

$$f_{\underline{s}}(n, n+1; t) = (n+1) y_{\underline{s}}(t, t+n+1) - n y_{\underline{s}}(t, t+n) \approx \underline{s} + \omega(n) g\left(\frac{a_n + b_n' x_t - \underline{s}}{\omega(n)}\right), \tag{2.27}$$

avec $\omega(n)^2 = V_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+n}]$ et $g(z) = z\Phi(z) + \phi(z)$ et a_n et b_n deux coefficients (ce dernier est un vecteur si le *shadow rate* est multivarié) tels que :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[x_{t+n}] = a_n + b_n' x_t \,.$$

Avec un *shadow rate* de type *Ornstein-Uhlenbeck*, on identifie ces coefficients à l'aide de l'équation (2.2). Ce résultat est prouvé dans l'appendice de l'article cité (pp. 282-288).

Il existe d'autres approximations pour le coefficient d'actualisation : Premièrement, on peut effectuer des simulations de *Monte-Carlo* avec le contrôle de la variance de *Krippner* [Kri13a]. Deuxièmement, *Gorovoi* et *Linetsky* [GL03] et [GL04] ont obtenu une expression analytique qui nécéssite l'usage de fonctions spéciales. Cette solution n'est donc pas utilisable sur tous les logiciels de calcul. Troisièmement, *Priebsch* [Pri13] présente une approximation dans un cadre plus général. En effet, il suppose que le *shadow rate* est décrit par un processus multivarié de type GATSM. Cette classe contient le processus de *Ornstein-Uhlenbeck* de (2.1). La méthode est basée sur l'approximation des moments cumulés du rendement. *Krippner* [Kri15] observe que :

> The advantage of the cumulant method is that the approximation to the [Black model] can be improved indefinitely by simply adding more terms. In practice, two terms provide a very close approximation, which is fortunate because the second-order term already comes at the cost of some additional computational burden.

On remarque que l'équation (2.19) est l'extension de celle (2.17) qui permet de considérer la "composante optionelle". En effet, on peut réécrire le taux au comptant sous la

10. Le taux *forward* considéré précédement est simplement sa valeur instantanée en t, c'est à dire $f_{\underline{s}}(t, t+\tau) = f_{\underline{s}}(t, t+\tau; t)$.

forme :

$$r_t = x_t + \max\{0; \underline{s} - x_t\} = \underline{s} + \max\{0; x_t - \underline{s}\} \tag{2.28}$$

La première reformulation a la même interprétation que pour le modèle de *Black*. La seconde montre que le taux au comptant a une valeur minimale de $\underline{s}$ et une option qui s'active au delà de cette valeur. Comme pour le graphique 2.5, on compare les coefficients d'actualisation et d'intérêt dans le cadre du modèle de *Vasicek* et du modèle BG. On effectue des simulations avec les paramètres du tableau 2.1 et pour différentes valeurs de $\underline{s}$ (-2/100, -1/100, -0.5/100, -0.1/100 et 0) pour obtenir le coefficient d'actualisation puis d'intérêt pour des échéances de 1 à 30 ans (50 000 simulations avec un pas mensuel). Les résultats sont dans le graphique 2.9. On remarque que la composante optionelle est

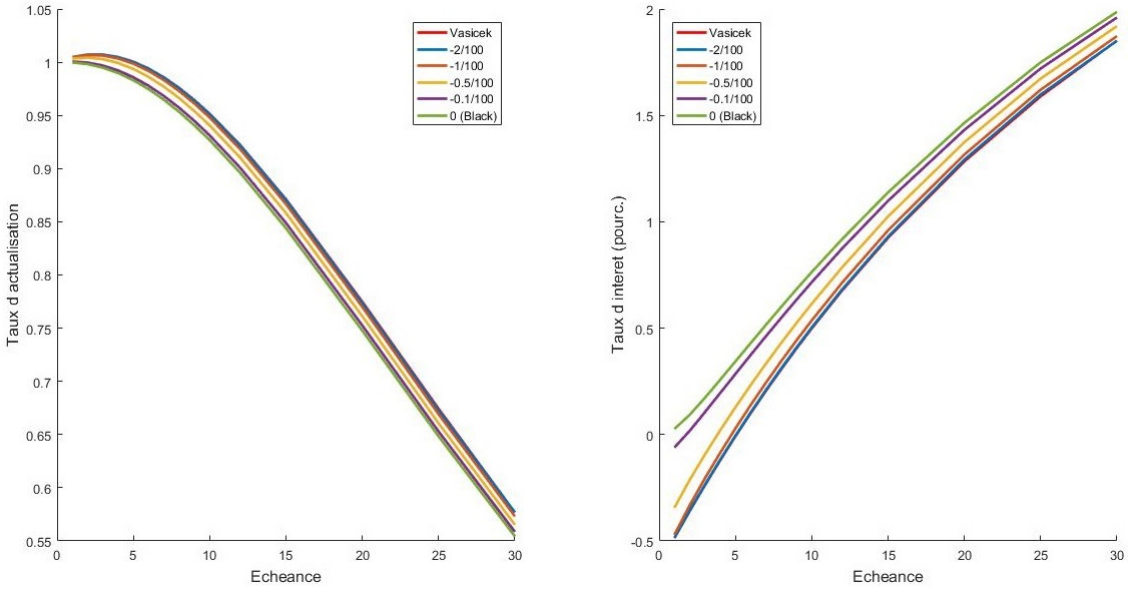

Figure ***2.9*** *– Comparaison des coefficients d'actualisation et d'intérêt dans le modèle de* Vasicek *et BG pour des échéance résiduelle de 1 à 30 ans avec comme paramètres ceux tableau 2.1 et* $\underline{s}$ *égal à -2/100, -1/100, -0.5/100, -0.1/100 et 0.*

maximale pour $\underline{s} = 0$ et presque nulle pour $\underline{s} = -2/100$, à la fois pour les coefficients d'actualisation et d'intérêt.

Tout comme pour le modèle de *Black*, la distribution future du coefficient d'actualisation n'est pas log-normale. On construit un histogramme empirique de la distribution du coefficient d'actualisation à titre illustratif. On utilise les les paramètres de la simulation pour obtenir le graphique 2.6 :

— Premièrement, 250 000 extractions de la distribution du *shadow rate* à 10 ans.
— Deuxièmement, on calcule le coefficient d'actualisation pour une échéance de 10 ans par 1000 simulations à partir des valeurs précédement simulées. On effectue

des simulations de *Monte-Carlo* en générant une trajectoire puis en calculant l'intégrale de la trajectoire.

Les paramètres sont ceux du tableau 2.1 et $\underline{s} = -1/100$ et les résultats sont donnés dans le graphique 2.10. Comme pour la distribution du taux au comptant du graphique 2.4),

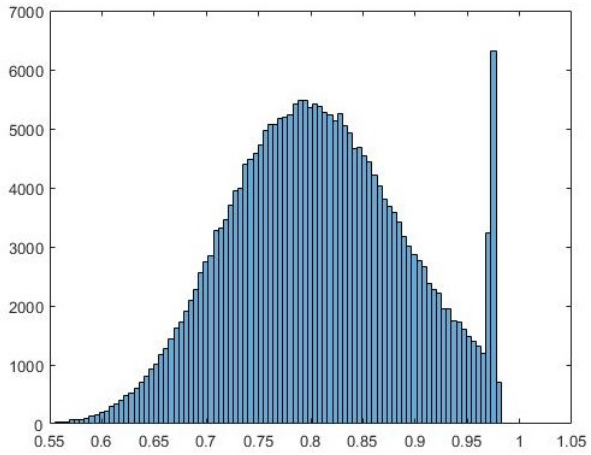

Figure *2.10* – *Distribution du coefficient d'actualisation à un horizon de dix ans pour une échéance résiduelle de 10 ans (*nested Monte-Carlo*) dans le modèle BG avec comme paramètres ceux du tableau 2.1 et* $\underline{s} = -1/100$.

une valeur particulière concentre une partie de la distribution. Mais on observe, d'une part, que l'effet de troncature est moins prononcé et, d'autre part, que des valeurs proches de l'unité sont atteintes.

2.3.3 Les taux négatifs

Le choix de la limite $\underline{s}$ permet d'autoriser ou non des taux négatifs. Pour $\underline{s} = 0$, on retrouve le modèle de *Black* donc les taux sont positifs. Pour $\underline{s} < 0$, le taux au comptant peut être négatif donc le coefficient d'actualisation peut devenir supérieur à un. Comme exemple, on simule le taux au comptant à 10 ans pour différentes valeurs de $\underline{s}$, -10/100, -1/100, -0.5/100 et 0 et en utilisant les paramètres du tableau 2.1 pour le *shadow rate*. Puis on calcule le coefficient d'actualisation pour une échéance de un an par simulation de *Monte-Carlo* à partir de la valeur du *shadow rate* obtenue précédement puis il est converti en taux d'intérêt en utilisant l'expression habituelle. On effectue 250 000 simulations pour le *shadow rate* puis 2500 *nested simulations* pour chaque valeur obtenue précédement afin d'en déduire le coefficient d'actualisation. Enfin, on convertit les coefficients d'actualisation en taux d'intéret. Les distributions ainsi obtenues sont représentées dans le graphique 2.11. Comme attendu, le modèle de Black ne produit pas

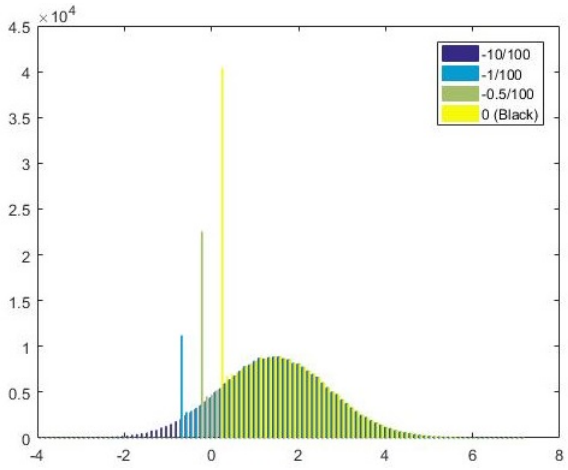

FIGURE *2.11* – *Distribution du taux d'intérêt à un horizon de dix ans pour une échéance résiduelle de un (*nested Monte-Carlo*) dans le modèle BG avec comme paramètres ceux du tableau 2.1 et $\underline{s}$ = -10/100, -1/100, -0.5/100 et 0.*

de taux d'intérêt négatifs et les effets d'une limite $\underline{s}$ à -10/100 sont négligeables puisque l'on observe pas de pic dans la distribution. En revanche, le choix de limites $\underline{s}$ à -1/100 et -0.5/100 permet de d'obtenir des taux négatifs avec une limite inférieure et donc un pic dans la distribution.

Chapitre 3

L'extension à *shift* déterministe du modèle de *Black* généralisé

L'extension à *shift* déterministe du modèle BG est présentée dans ce chapitre. Dans un premier temps, des résultats généraux relatifs à cette extension sont introduits puis illustrés avec le modèle de *Vasicek*. Ensuite, le modèle proposé est discuté. Enfin, les propriétés de tous les modèles considérés depuis les deux premiers chapitres sont résumés.

3.1 Introduction à l'extension à *shift* déterministe

3.1.1 Définition

L'extension à *shift* déterministe a été introduite par *Brigo* et *Mercurio* [BM98]. On suppose que l'on dispose d'un modèle pour le taux au comptant, noté $\widetilde{r}_t$, dont on connait le coefficient d'actualisation, noté $P_{\widetilde{M}}(t,T)$. Des exemples sont les modèles CIR (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM98] et [BM06], p. 102-110), de *Vasicek* ([BM06], p. 100-102), G2 ([BM06], p. 142-175), AFDNS (*Dang-Nguyen et al.* [DNLCH14]). Les modèles ainsi construits sont habituellement notés "++" comme par exemple CIR++, G2++, $\cdots$. On suppose que le taux au comptant a la forme :

$$r_t = \widetilde{r}_t + \varphi(t)\,, \tag{3.1}$$

avec $\varphi(t)$ une fonction déterministe. Il est immédiat que :

$$\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[r_t] = \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\widetilde{r}_t] + \varphi(t), \tag{3.2}$$

$$V_s^{\mathbb{Q}}[r_t] = V_s^{\mathbb{Q}}[\widetilde{r}_t]\,, \tag{3.3}$$

ce qui permet de calculer facilement la moyenne et la variance du taux en comptant en utilisant les propriétés du modèle de base, par exemple (2.2) et (2.3) pour le modèle de *Vasicek*. Le coefficient d'actualisation, noté $P_{++}(t,t+\tau)$, est obtenu par l'espérance

conditionnelle standard :

$$\begin{aligned} P_{++}(t,t+\tau) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} r_u du\right)\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau} \widetilde{r}_u du\right)\right]}_{P_{\widetilde{M}}(t,t+\tau)} \underbrace{\exp\left[-\int_t^{t+\tau} \varphi(u) du\right]}_{P_{\varphi}(t,t+\tau)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sous cette forme, on remarque que le coefficient d'actualisation requiert uniquement le calcul d'un terme correctif supplémentaire, $P_{\varphi}(t,t+\tau)$. De plus, il peut être interprété comme un coefficient d'actualisation.

Dans le cadre du modèle initial, comme on connaît le coefficient d'actualisation $P_{\widetilde{M}}(t,t+\tau)$, on en déduit le taux *forward* instantané $f_{\widetilde{M}}(t,t+\tau)$. De même, puisque $P_{\varphi}(t,t+\tau)$ peut être interprété comme un coefficient d'actualisation, on en définit un taux *forward* instantané par :

$$f_{\varphi}(t,t+\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\log\left[P_{\varphi}(t,t+\tau)\right] = \varphi(t+\tau). \tag{3.5}$$

Ainsi, le taux *forward* instantané du modèle, $f_{++}(t,t+\tau)$, est donc :

$$f_{++}(t,t+\tau) = f_{\widetilde{M}}(t,t+\tau) + f_{\varphi}(t,t+\tau) = f_{\widetilde{M}}(t,t+\tau) + \varphi(t+\tau). \tag{3.6}$$

Similairement, le rendement, noté $y_{++}(t,t+\tau)$, est donné par :

$$y_{++}(t,t+\tau) = y_{\widetilde{M}}(t,t+\tau) + \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \varphi(u) du, \tag{3.7}$$

avec $y_{\widetilde{M}}(t,t+\tau)$ le rendement obtenue dans le cadre du modèle initial.

3.1.2 Spécification(s) du *shift* déterministe

Il existe différentes approches pour spécifier l'extension à *shift* déterministe. La fonction $\varphi(.)$ peut être définie de manière à obtenir un modèle particulier. Ainsi étendre le modèle de *Vasicek* avec une certaine fonction permet de retrouver le modèle de *Hull* et *White* à un facteur [HW90] (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], pp. 100-102). De même, en combinant un modèle de type G2 avec une extension particulière, on obtient le modèle *Hull* et *White* à deux facteurs [HW94] (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], pp. 159-162). Dans ce cas, on remarque que le coefficient d'actualisation (3.4) nécessite le calcul du terme correctif donc il est nécessaire de calculer l'intégrale de la fonction $\varphi(.)$.

Alternativement, cette fonction peut être implicitement déterminée par des données de marché, par exemple pour de réaliser un *fit* parfait d'une courbe de taux observée. Pour

une date t, on se donne un ensemble d'échéances sous la forme $T_i = t+\tau_i$, $i = 1, \cdots, N^*$ et on note $\mathbf{P}^M(t) = \left\{P^M(t, t+\tau_i)\right\}$, l'ensemble des coefficients d'actualisation de marché observés. Si on suppose un *fit* parfait entre la courbe de marché et de modèle, alors, pour toutes les échéances T_i, on a :

$$P^M(t, t+\tau_i) = P_{++}(t, t+\tau_i) \Leftrightarrow \underbrace{\int_t^{t+\tau_i} \varphi(u)du}_{I_{t,\varphi}(\tau_i)} = \log\left[\frac{P_{\widetilde{M}}(t, t+\tau_i)}{P^M(t, t+\tau_i)}\right]. \tag{3.8}$$

Ce faisant, on remarque que la fonction $I_{t,\varphi}(\tau_i)$, ou de manière équivalente, les intégrales $\int_t^{\tau_1} \varphi(u)du$, $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(u)du$, $\cdots$, $\int_{\tau_{N^*-1}}^{\tau_{N^*}} \varphi(u)du$ sont connues pour pour un ensemble discret de points compris entre τ_1 et τ_{N^*}. Cependant, le coefficient d'actualisation (3.4) nécessite de calculer la valeur de $I_{t,\varphi}(\tau)$ pour l'échéance $\tau > 0$, ce qui implique :

- Des hypothèses d'interpolation : Pour $\tau > 0$ tel que $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_{N^*}$, il faut interpoler la fonction $I_{t,\varphi}(.)$. De nombreuses méthodes sont utilisables puisque cette fontion peut être supposée constante ou linéaire par morceaux. Une alternative consiste à utiliser des *splines* cubiques. Dans ce cas, la fonction interpolante est dérivable facilement et sa dérivée est continue aux points d'observation (τ_i). D'un point de vue financier, cette propriété est intéressante puisque le taux au comptant (3.1) n'a pas de sauts induits par la fonction $\varphi(.)$.
- Des hypothèses d'extrapolation : Pour $\tau > 0$ tel que $\tau < \tau_1$ ou $\tau_{N^*} < \tau$, il faut interpoler la fonction $I_{t,\varphi}(.)$. L'utilisation de méthodes d'interpolation pour des extrapolation peut amener à des erreurs, c'est pourquoi on préfère des hypothèses basées sur des considérations financières. Par exemple, on peut supposer que la fonction est constante ou converge vers une valeur à l'infini.

On observe que ces hypothèses additionnelles peuvent impliquer des choix basés sur des raisonnements financiers et qu'il n'existe pas de solution évidente d'un point de vue mathématique.

Si on suppose un *fit* parfait de les courbes *forward* instantanées de marché et de modèle pour un ensemble d'échéances $T_i = t + \tau_i$, on a d'après (3.6) :

$$f^M(t, t+\tau) = f_{++}(t, t+\tau) \Leftrightarrow \varphi(t+\tau_i) = f^M(t; t+\tau_i) - f_{\widetilde{M}}(t; t+\tau_i). \tag{3.9}$$

Ainsi, en utilisant les taux *forward* instantanés, on peut obtenir directement la valeur du *shift* déterministe contrairement au cas des coefficients d'actualisation (3.8). Cependant, l'ensemble des échéances est discret donc il est nécessaire d'interpoler et/ou extrapoler les valeurs obtenues comme expliqué précédement.

Enfin, il est parfois préférable d'utiliser une fonction $\varphi(.)$ positive ou nulle pour certains modèles. Par exemple, dans le cadre du modèle CIR, le taux au comptant est positif presque sûrement et on souhaite maintenir cette propriété avec la transformation (3.1). On suppose que l'on veut effectuer une calibration sur une courbe de coefficient

d'actualisation avec un *fit* parfait comme précédement. Si la fonction φ est positive, alors la fonction $I_{t,\varphi}(\tau)$ est croissante et donc les intégrales $\int_t^{\tau_1} \varphi(u)du$, $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(u)du$, $\cdots$, $\int_{\tau_{N^*-1}}^{\tau_{N^*}} \varphi(u)du$ sont positives. On a donc des conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} \int_t^{\tau_1} \varphi(u)du \geq 0 \\ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \varphi(u)du \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log\left[\frac{P_{\widetilde{M}}(t,t+\tau_1)}{P^M(t,t+\tau_1)}\right] \geq 0 \\ \log\left[\frac{P_{\widetilde{M}}(t,t+\tau_i)P^M(t,t+\tau_{i-1})}{P^M(t,t+\tau_i)P_{\widetilde{M}}(t,t+\tau_{i-1})}\right] \geq 0 \end{cases} . \tag{3.10}$$

Les conditions de (3.10) sont nécessaires mais pas suffisantes. En effet, les méthodes d'interpolation telles que les *splines* ne garantissent pas la positivité ni de la fonction interpolée ni de sa dérivée en tout point. Ainsi, il est possible de respecter les contraintes (3.10) mais avoir une fonction $\varphi(.)$ négative. Ce problème est illustré dans les exemples numériques des parties 3.1.3 et 3.2.2.

3.1.3 Applications numériques

On illustre l'extension à *shift* déterministe avec le modèle de *Vasicek*. Dans un premier temps, on utilise la courbe de taux de l'EIOPA au 31 décembre 2016 comme données de marché. On utilise la courbe de l'euro sans *volatility adjuster* dont on note $\mathbf{I}^M(0) = \left\{I^M(0,\tau_i)\right\}$, l'ensemble des taux d'intérêt de marché, pour des échéances entre 1 et 150 ans (N^*), observé en $t = 0$. On effectue une estimation de type *cross-section*, c'est à dire que l'on utilise une seule observation de la courbe des taux. Les paramètres sont obtenus en minimisant une norme entre les taux de marché et de modèle correspondants, notée $\mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0); x_0, \kappa, \theta, \sigma\right)$, donc ils sont une [1] solution du problème :

$$\left\{\hat{x_0}, \hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}\right\} = \underset{x_0,\kappa,\theta,\sigma \in \mathcal{D}}{\arg\min}\, \mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0); x_0, \kappa, \theta, \sigma\right), \tag{3.11}$$

avec $\mathcal{D}$ l'ensemble restreint des paramètres. On spécifie la norme comme la distance quadratique absolue entre les taux d'intérêt de marché et de modèle :

$$\mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0); x_0, \kappa, \theta, \sigma\right) = \sum_{i=1}^{N^*} \left[I^M(0,\tau_i) - I_V(0,\tau_i)\right]^2, \tag{3.12}$$

avec $I_V(0,\tau_i)$ le taux d'intérêt de modèle. Cette fonction est positive et nulle si et seulement si les taux d'intérêt de marché de modèle sont égaux pour toutes les échéances.

1. Lors de l'estimation par *cross-section*, il est possible d'obtenir plusieurs solutions à ce problème, c'est à dire des paramètres différents mais équivalents du point de vue de la norme. Il est donc nécessaire d'introduire des contraintes supplémentaires et/ou selectionner des solutions par *expoert judgement*.

C'est donc une norme. Les paramètres sont bornés par :

$$\begin{cases} l_x \leq x_0 \leq u_x \\ \epsilon \leq \kappa \leq u_\kappa \\ \epsilon \leq \theta \leq u_\theta \\ l_\sigma \leq \sigma \leq u_\sigma \end{cases} \tag{3.13}$$

avec ϵ est un nombre petit. L'interprétation de ces contraintes est la suivante. Tout d'abord, la valeur de x_0 peut être positive ou négative, donc on la borne à un intervalle $[l_x; u_x]$. Puisque cette quantité représente un taux au comptant, on peut supposer qu'elle ne prend pas des valeurs trop importantes. En effet, on peut avoir une idée de sa valeur en utilisant le taux à 3 mois comme *proxy*. Les paramètres κ et θ sont positifs mais peuvent avoir une valeur faible, donc appartiennent à un intervalle $[\epsilon; u_\kappa]$ et $[\epsilon; u_\kappa]$. Pour des raisons de stabilité numérique, on choisit $\epsilon > 0$ et, comme pour x_t, on peut supposer que ces quantités ont des valeurs relativement faibles. Enfin le coefficient σ est positif mais sa valeur est faible. Cependant, on fixe arbitrairement une valeur inférieure l_σ pour introduire un minimum de volatilité. En effet, l'estimation par *cross-section* est peu sensible à la volatilité donc, par *expert judgement*, on introduit cette valeur minimale. Les valeurs de ces contraintes sont reportées dans le tableau 3.1. Le problème (3.11) avec

Paramètre	Valeur inférieure	Valeur supérieure
x_0	-10/100	10/100
κ	1/10000	5
θ	1/10000	10/100
σ	0.005	10/100

Table *3.1* – *Contraintes sur paramètres du modèle de* Vasicek *pour la calibration sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016*

la norme (3.12) sous les contraintes (3.13) est résolu et on obtient les paramètres du tableau 2.1.

On suppose que ces paramètres sont la composante stochastique du modèle de *Vasicek++*. A partir de la courbe de coefficient d'actualisation de marché et des paramètres, on peut déduire, en appliquant (3.8), la valeur de l'intégrale de la fonction $\varphi(.)$. On l'interpole avec une *spline* cubique, que l'on dérive pour obtenir les valeurs du *shift*. Les résultats sont donnés dans les graphiques 3.1. Tout d'abord, les courbes des taux d'intérêt et d'actualisation montrent que le modèle capture assez bien les données de marché. Par conséquence, les valeurs de l'intégrale du *shift* sont faibles. De plus, on remarque que plusieurs intersections entre la courbe des coefficients d'actualisation de marché et de modèle, donc l'intégrale (*shift*) est croissante et décroissante (positif et négatif). Ensuite, les *splines* induisent un comportement oscillatoire pour le *shift* pour des échéances longues. Enfin, on remarque que la courbe de marché des taux d'intérêt présente un point

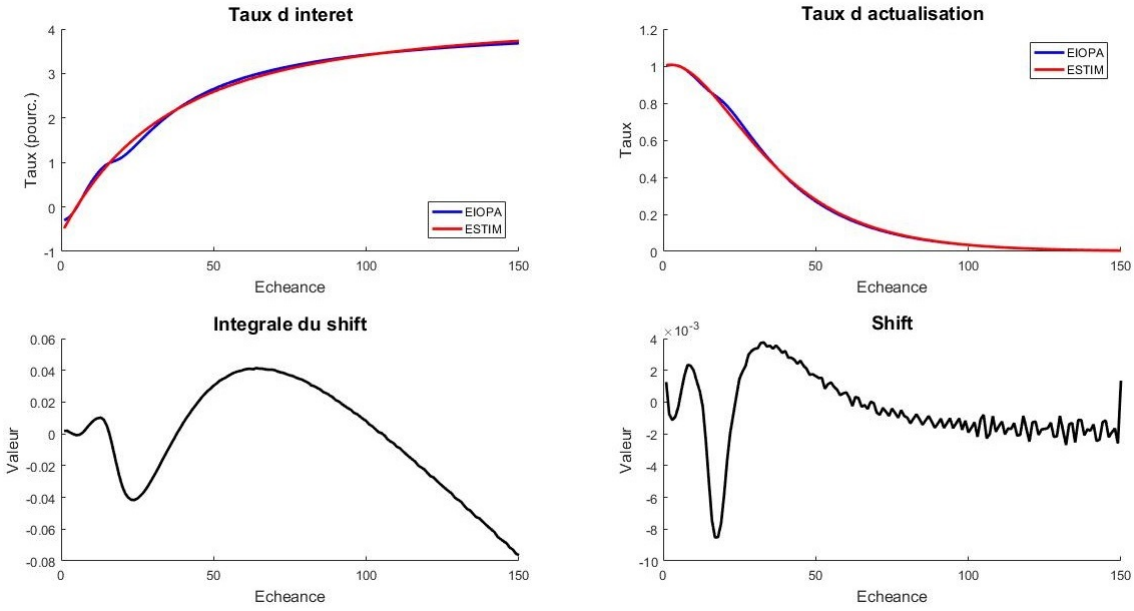

FIGURE ***3.1*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle de* Vasicek *dont les paramètres sont ceux du tableau 2.1.*

d'inflexion autour de 20 ans. Ceci est du à la méthode de construction puisque les taux jusqu'à 20 ans sont calculés à partir des données de marché tandis que les taux pour des échéances supérieures sont obtenus par extrapolation (consulter la documentation technique [EIO17] pour plus de détails). Ce phénomène se répercute sur les courbes du *shift* ainsi que de son intégrale.

Dans un second temps, on souhaite obtenir un *shift* positif. On modifie le problème pour effectuer une estimation cohérente, c'est à dire en ajustant uniquement les valeurs de x_0 et θ et en conservant κ et σ égales à celles du tableau 3.1. L'interprétation de cette approche est la suivante. Les paramètres x_0 et θ influencent fortement la courbe de taux de modèle à ses deux extrémités, donc peut être visuellement inspectés. De plus, ils ont une interprétation financière. En revanche, les paramètres κ et σ ont peu d'influence sur la courbe de taux. On suppose qu'ils ont été sélectionnés par *expert judgement* lors de l'estimation initiale, c'est pourquoi on les laisse invariés. On résout donc le problème :

$$\left\{\hat{x_0}, \hat{\theta}\right\} = \underset{x_0,\theta\in\mathcal{D}}{\arg\min}\, \mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0)\,; x_0, \theta\right), \tag{3.14}$$

avec la norme $\mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0);x_0,\theta\right)=\mathcal{O}\left(\mathbf{I}^M(0);x_0,\kappa^{(1)},\theta,\sigma^{(1)}\right)$ et sous les contraintes :

$$\begin{cases} l_x \leq x_0 \leq u_x \\ \epsilon \leq \theta \leq u_\theta \\ \log\left[\frac{P_V(t,t+\tau_1)}{P^M(t,t+\tau_1)}\right] \geq 0 \\ \log\left[\frac{P_V(t,t+\tau_i)P^M(t,t+\tau_{i-1})}{P^M(t,t+\tau_i)P_V(t,t+\tau_{i-1})}\right] \geq 0 \end{cases}, \tag{3.15}$$

dont les valeurs l_x, u_x, ϵ et u_θ sont données dans le tableau 3.1. Les paramètres obtenus sont rapportés dans le tableau 3.2. Par rapport aux paramètres initiaux, la valeur de x_0 a

Paramètre	Valeur
$x_0^{(2,V)}$	-0.0220
$\kappa^{(2,V)}=\kappa^{(1,V)}$	0.0490
$\theta^{(2,V)}$	0.0453
$\sigma^{(2,V)}=\sigma^{(1,V)}$	0.0051

Table *3.2* – *Paramètres du modèle de* Vasicek*++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016 avec une intégrale du* shift *croissante.*

fortement baissé et celle de θ s'est légèrement abaissée. Les résultats visuels sont donnés dans le graphique 3.2. On remarque que l'ordre de grandeur de l'intégrale ainsi que du *shift* est plus élevé puisque la différence entre la courbe de marché et de modèle est plus conséquente. De plus, les valeurs du *shift* sont positives sauf pour quelques valeurs autour de 20 ans. Les conditions (3.15) sur son intégrale sont nécessaires mais pas suffisantes et l'interpolation avec des *splines* cubiques ne garantit pas la positivité. Tout comme dans le cas de l'estimation précédente, le *shift* a un comportement oscillatoire et le changement de construction de la taux d'intérêt a des conséquences sur le *shift* et son intégrale.

Pour éviter un *shift* négatif, on introduit des hypothèses supplémentaires. On interpole l'intégrale du *shift* avec une *spline* cubique que l'on dérive. On souhaite que la valeur obtenue soit positive ou nulle à tous les points d'observation $t+\tau_i$, que l'on note $\hat{\varphi}_V(t+\tau_i)$. Ce faisant, on introduit donc des hypothèses dans l'optimisation mais aussi sur la forme du *shift*, étant définie comme la dérivée d'une *spline* cubique. Dans le cas précédent dans les contraintes (3.15), aucune hypothèse n'est faite durant l'optimisation, les contraintes relatives à l'intégrale du *shift* étant valables pour toute forme fonctionelle. Ces dernières dépendent des prix de marché et de la composante stochastique. Le choix de l'interpolation pour calculer le *shift* est effectué une fois les paramètres estimés. Dans cette nouvelle approche, on choisit une forme fonctionelle pour le *shift* en amont de l'optimisation. On résout donc le problème (3.14) sous les contraintes :

$$\begin{cases} l_x \leq x_0 \leq u_x \\ \epsilon \leq \theta \leq u_\theta \\ \hat{\varphi}_V(t+\tau_i) \geq 0 \end{cases}, \tag{3.16}$$

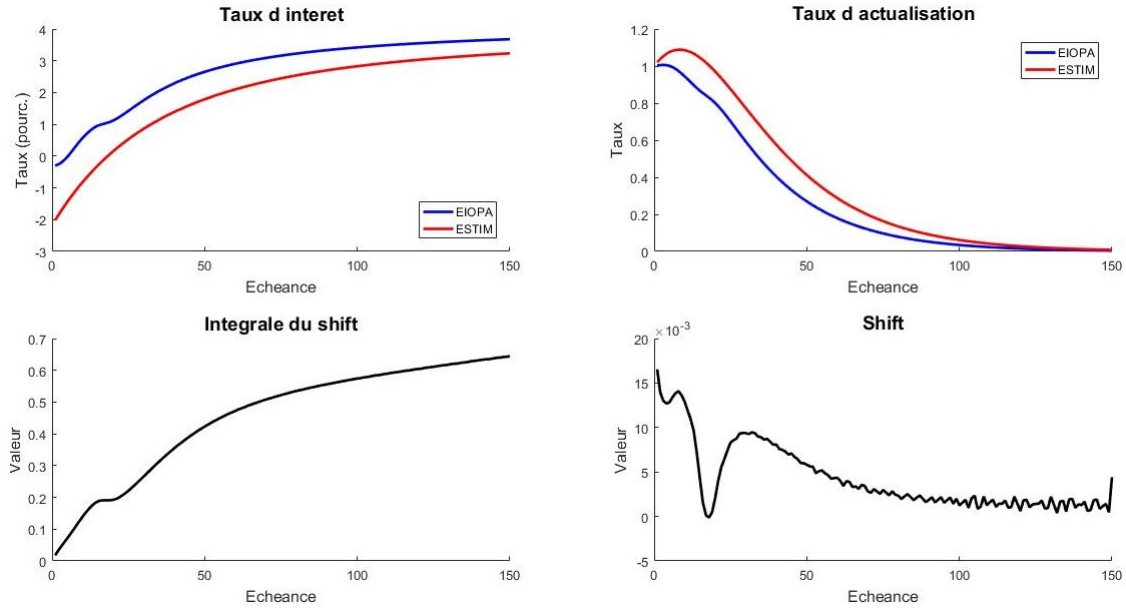

Figure ***3.2*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle de* Vasicek *dont les paramètres sont ceux du tableau 3.2.*

avec les valeurs l_x, u_x, ϵ et u_θ sont données dans le tableau 3.1. Les paramètres obtenus sont rapportés dans le tableau 3.3. Les valeurs ont légèrement changé par rapport aux

Paramètre	Valeur
$x_0^{(3,V)}$	-0.0215
$\kappa^{(3,V)} = \kappa^{(1,V)}$	0.0490
$\theta^{(3,V)}$	0.0447
$\sigma^{(3,V)} = \sigma^{(1,V)}$	0.0051

Table ***3.3*** – *Paramètres du modèle de* Vasicek*++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016 avec un* shift *interpolé positif.*

paramètres du tableau 3.2 avec une petite augmentation (diminution) de x_0 (θ). Les résultats visuels sont donnés dans le graphique 3.3. Puisque les paramètres sont relativement proches entre les deux estimations, les composantes stochastiques du modèle sont similaires. Cependant, le *shift* est positif ou nul, comme souhaité par la reformulation des contraintes, et il atteint son minimum à l'échéance de 20 ans, le point de changement de construction de la courbe de taux. Enfin, il maintient le comportement oscillatoire pour des longues échéances.

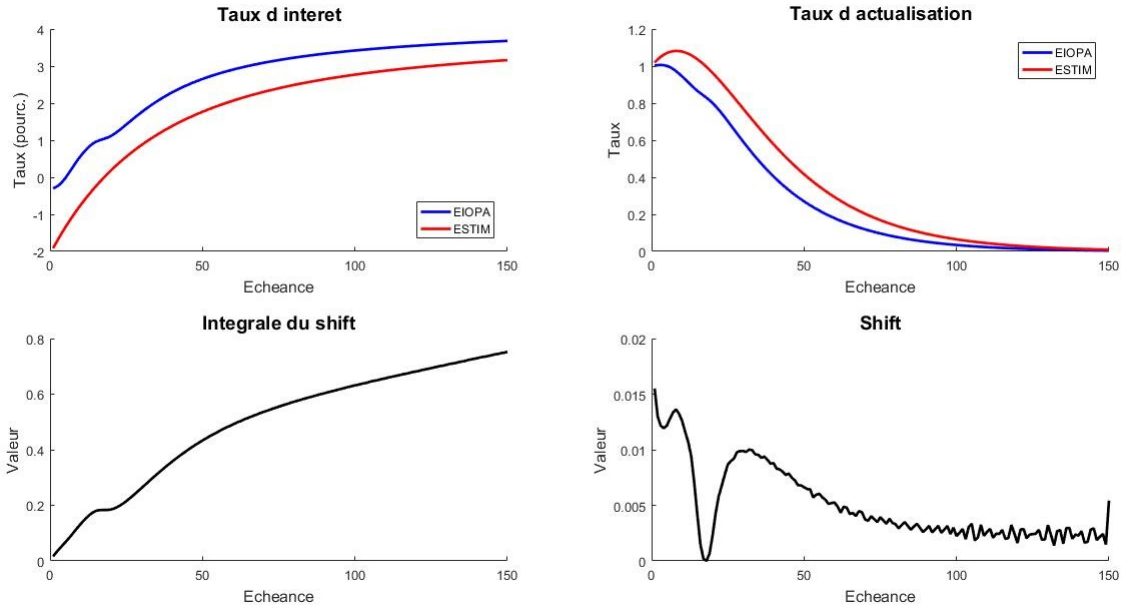

FIGURE ***3.3*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle de* Vasicek *dont les paramètres sont ceux du tableau 3.3.*

3.2 Extension à *shift* déterministe du modèle de *Black* généralisé

3.2.1 Définition

Une extension naturelle de la transformation (2.19) est d'introduire une dépendance temporelle pour la limite inférieure :

$$r_t = \max\{\underline{s}(t); x_t\} = \underbrace{\max\{0; x_t - \underline{s}(t)\}}_{\max\{0;\hat{x}_t\}} + \underline{s}(t)\,, \tag{3.17}$$

avec $\underline{s}(.)$ une fonction déterministe. Si elle est constante, on retrouve (2.19). Dans ce cadre, le traux d'actualisation est obtenu en étendant le résultat 2.3.1 comme expliqué par *Krippner* [Kri15] ou *Kortela* [Kor16]. De manière similaire, *Lemke* et *Vladu* [LV16] utilisent la discrétisation de *Wu* et *Xia* [WX16].

Cette approche est utilisée dans différents articles et les fonctions $\underline{s}(.)$ ont des spécifications variées (tout comme les processus pour le *shadow rate*). *Ichiue* et *Ueno* [IU13] combinent un modèle *GATSM* bivarié avec une limite inférieure déterminée comme une moyenne des taux directeurs. Leur modèle est appliqué sur des données des marchés japonais, américains et anglais. *Lemke* et *Vladu* [LV16] proposent un modèle *GATSM* à trois facteurs et une limite inférieure constante par morceaux. Leur modèle est testé sur

des données de la zone euro. *Kortela* [Kor16] utilise un modèle de type *AFDNS* avec 6 spécifications différentes pour la limite inférieure : Deux constantes, le taux de dépôt, le taux le plus négatif observé par *cross section* ou jusqu'à la date d'observation et une estimation. Ces trois dernières spécifications impliquent des variations majeures que les fonctions constantes par morceaux. Ces modèles sont comparés avec des données de la zone euro.

Une alternative à l'extension (2.19) est d'utiliser un *shift* déterministe. En s'inspirant de *Brigo* et *Mercurio* [BM98] et [BM06], l'équation (2.19) est étendue :

$$r_t = \max\{\underline{s}; x_t\} + \varphi(t) = \underbrace{\max\{0; x_t - \underline{s}\}}_{\max\{0;\tilde{x}_t\}} + \underbrace{\underline{s} + \varphi(t)}_{\tilde{\varphi}(t)}, \tag{3.18}$$

avec $\varphi(.)$ une fonction déterministe. Des propriétés de ce modèle sont obtenues en combinant les résultats des sections 2.3 et 3.1. Cette solution est préférée à l'extension (2.19) pour les raisons suivantes :

1. La valeur de la limite inférieure $\underline{s}$ peut être donnée de manière exogène ou estimée avec la courbe des taux. Cependant, ce facteur peut être délicat à déterminer. En revanche, l'extension (3.18) nécessite une valeur pour la limite inférieure $\underline{s}$, qui peut être déterminée périodiquement, contrairement aux spécifications quotidiennes requises par l'extension (3.17).
2. Comme illustré en 2.3.2, le coefficient d'actualisation est obtenu par une approximation qui dépend à la fois de l'échéance résiduelle et de la limite inférieure. En fixant cette dernière, l'erreur d'approximation n'aura plus de dépendance temporelle, mais dépend uniquement de l'échéance résiduelle, c'est à dire τ.
3. L'équation (3.18) implique une simple correction pour calculer le coefficient d'actualisation. Cette approche peut donc produire un *fit* parfait de la courbe de taux (voir 3.2.2) ou corriger les erreurs d'approximation (voir 3.2.3).

Par conséquence, le modèle sacrifie l'interprétation économique pour simplifier les traitements analytiques et numériques.

Une comparaison entre les équations (3.17) et (3.18) montre que dans le premier cas le taux au comptant est supérieur ou égal à $\underline{s}_t$. Dans le second cas, le taux au comptant est supérieur ou égal à $\underline{s} + \varphi(t)$. Si le *shift* n'est pas positif, $\underline{s}$ n'est pas exactement interprétable comme une limite inférieure. Ce problème est évité si on impose un *shift* positif ou nul lors des estimations (voir 3.2.2).

Le second terme de l'équation (3.18) montre que l'extension à *shift* déterministe proposée peut être également interprétée comme une extension à *shift* déterministe du modèle de *Black* avec comme *shadow rate* $\tilde{x}_t = x_t - \underline{s}$ et en redéfinissant le *shift* par $\tilde{\varphi}(t) = \underline{s} + \varphi(t)$ dont l'équation diffétrentielle stochastique est (2.21). De manière similaire, le second terme de l'équation (3.17) montre un *shadow rate* défini par $\hat{x}_t = x_t - \underline{s}(t)$. Son équation différentielle stochastique est :

$$d\hat{x}_t = \kappa\left(\theta - \underline{s}(t) - \hat{x}_t\right) dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}}, \quad \hat{x}_0 = x(0) - \underline{s}(0)\,. \tag{3.19}$$

La valeur d'équilibre est $\theta - \underline{s}(t)$ qui a une dépendance temporelle. Le modèle peut être également interprété comme l'application de la transformation (2.14) à un *shadow rate* décrit par le modèle de *Hull* et *White* à un facteur [HW90] puisque ce modèle utilise l'équation différentielle stochastique (3.19) pour le taux au comptant, qui devient le *shadow rate*.

3.2.2 Applications numériques (1) : Estimations sur la courbe EIOPA

On effectue les diverses calibrations du modèle comme dans 3.1.3, c'est à dire sans contraintes sur le *shift*, avec des contraintes sur l'intégrale et avec des contraintes sur le *shift*. On utilise la courbe de taux de l'EIOPA au 31 décembre 2016 et on fixe de manière exogène la limite inférieure à $\underline{s} = -0.5\%$. Cette valeur est inférieure au plus petit taux observé (-0.302% pour l'échéance de un an) mais elle est fixée arbitrairement. Idéalement, elle devrait être obtenue après une analyse économique et financière.

Dans un premier temps, on effectue une calibration sans contraintes sur le *shift*. On minimise la distance quadratrique entre les taux d'intérêt de marché et de modèle donc les paramètres sont solution du problème (3.11) avec la norme (3.12). Puisque la valeur de $\underline{s}$ est fixe, il suffit d'estimer x_0, κ, θ et σ. Les contraintes sur ces paramètres sont donc données par les équations (3.13) et on utilise les valeurs du tableau 3.1. Les paramètres obtenus sont donnés dans le tabeau 3.4. On remarque que ces paramètres diffèrent de

Paramètre	Valeur
$x_0^{(1,B)}$	-0.0094
$\kappa^{(1,B)}$	0.0532
$\theta^{(1,B)}$	0.0478
$\sigma^{(1,B)}$	0.0054
$\underline{s}$	$-0.5/100$

Table 3.4 – *Paramètres du modèle de BG++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016*

ceux du modèle de *Vasicek* calibrés sur les mêmes données de marché (voir tableau 2.1). Cependant, cette conclusion est fausse si on utilise comme limite inférieure $\underline{s} = -1\%$. Comme dans 3.1.3, on représente les résultats sous forme graphique (coefficient d'actualisation et d'intérêt, de marché et de modèle, intégrale et *shift*). On obtient les graphiques 3.4. On remarque que les courbes liées au modèle de *Black* sont très simialires à celles obtenues avec le modèle de *Vasicek* sur les mêmes données de marché (voir figure 3.1), donc les *shift* sont similaires. Les conclusions sont donc identiques. Premièrement, le *shift* a des valeurs faibles, positives et négatives. Deuxièmement le *shift* a un comportement oscillatoire pour de longues échéances. Troisièmement, l'échéance de 20 ans est un point particulier pour la construction de la courbe, ce qui se répercute sur le *shift*.

Le *shift* a certaines valeurs négatives, jusqu'à - 80 points de base à 20 ans à ajouter

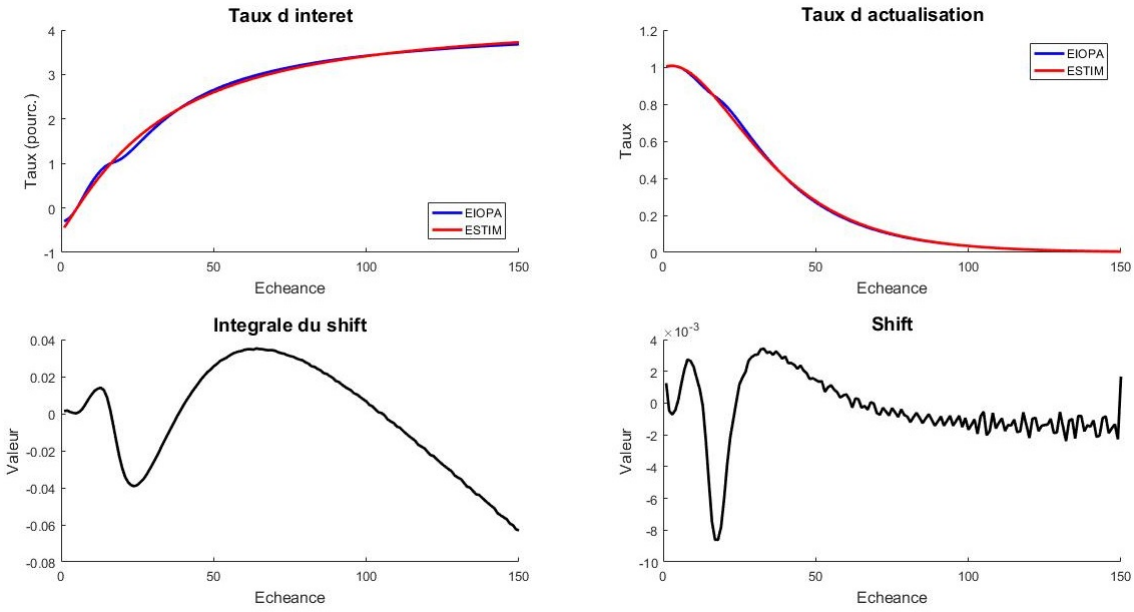

FIGURE ***3.4*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle BG dont les paramètres sont ceux du tableau 3.4 et* $\underline{s} = -0.5/100$.

à la limite de - 50 points de base. On effectue donc une calibration en imposant que l'intégrale du *shift* soit positive. On résout donc le problème (3.14), c'est à dire en ne faisant varier que les valeurs de x_0 et θ, avec la norme (3.12) et les contraintes (3.15) deviennent :

$$\begin{cases} l_x \leq x_0 \leq u_x \\ \epsilon \leq \theta \leq u_\theta \\ \log\left[\frac{P_{\underline{s}}(t,t+\tau_1)}{P^M(t,t+\tau_1)}\right] \geq 0 \\ \log\left[\frac{P_{\underline{s}}(t,t+\tau_i)P^M(t,t+\tau_{i-1})}{P^M(t,t+\tau_i)P_{\underline{s}}(t,t+\tau_{i-1})}\right] \geq 0 \end{cases}, \tag{3.20}$$

avec les valeurs l_x, u_x, ϵ et u_θ sont données dans le tableau 3.1. Les paramètres obtenus sont rapportés dans le tableau 3.5. On remarque que la valeur de x_0 s'est fortement abaissée et celle de θ a légèrement diminué. Les résultats sont représentés sur les graphiques 3.5. Ces variations sur les valeurs initiales et d'équilibre font que l'intérale et le *shift* ont des valeurs plus importantes. Tout comme dans le cadre du modèle de *Vasicek* (voir graphiques 3.2), le *shift* a des valeurs négatives. Les conditions (3.20) sur son intégrale sont nécessaires mais pas suffisantes et l'interpolation avec des *splines* cubiques ne garantit pas la positivité.

On effectue une estimation en imposant les *splines* soient positives. On dérive l'interpolation de l'intégrale du *shif* pour obtenir $\hat{\varphi}_{\underline{s}}$. On résout donc le problème (3.14), c'est à

Paramètre	Valeur
$x_0^{(2,B)}$	-0.0287
$\kappa^{(2,B)} = \kappa^{(1,B)}$	0.0532
$\theta^{(2,B)}$	0.0453
$\sigma^{(2,B)} = \sigma^{(1,B)}$	0.0054
$\underline{s}$	$-0.5/100$

TABLE *3.5* – *Paramètres du modèle BG++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016 avec une intégrale du* shift *croissante.*

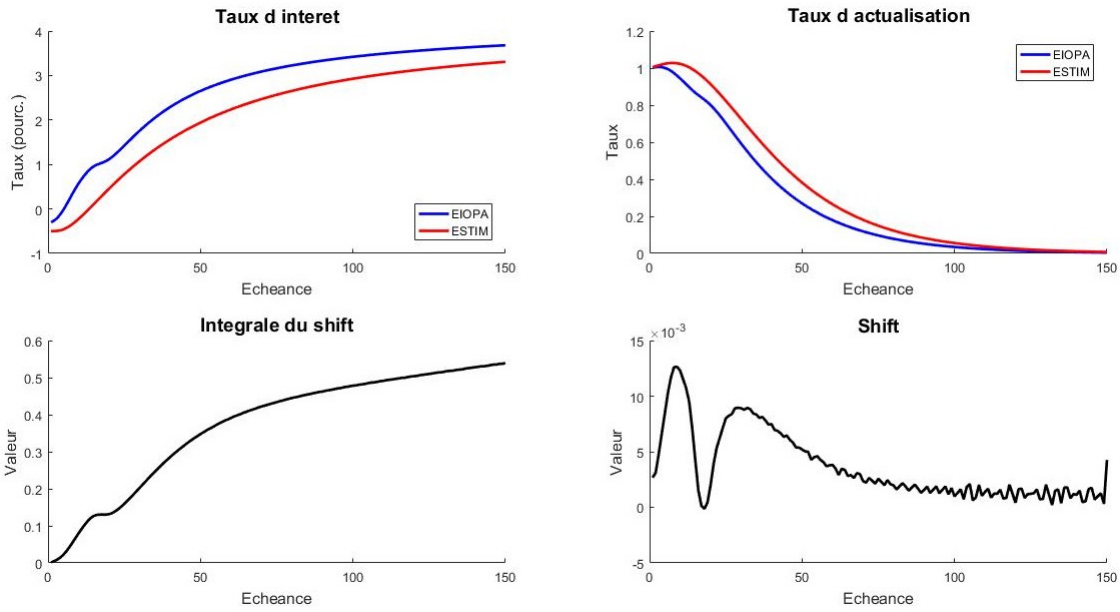

FIGURE *3.5* – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle BG dont les paramètres sont ceux du tableau 3.5.*

dire en ne faisant varier que les valeurs de x_0 et θ, avec la norme (3.12) et les contraintes (3.16) sont reformulées :

$$\begin{cases} l_x \leq x_0 \leq u_x \\ \epsilon \leq \theta \leq u_\theta \\ \hat{\varphi}_{\underline{s}}(t + \tau_i) \geq 0 \end{cases}, \tag{3.21}$$

avec les valeurs l_x, u_x, ϵ et u_θ sont données dans le tableau 3.1. Les paramètres obtenus sont rapportés dans le tableau 3.6. Cette estimation abaisse légèrement la valeur de x_0 et augmente celle de θ. Les courbes obtenues sont représentées dans les graphiques 3.6. Dans cette estimation, le *shift* est positif, comme souhaité.

Paramètre	Valeur
$x_0^{(3,B)}$	-0.0294
$\kappa^{(3,B)} = \kappa^{(1,B)}$	0.0532
$\theta^{(3,B)}$	0.0455
$\sigma^{(3,B)} = \sigma^{(1,B)}$	0.0054
$\underline{s}$	$-0.5/100$

TABLE ***3.6*** – *Paramètres du modèle BG ++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016 avec un* shift *interpolé positif.*

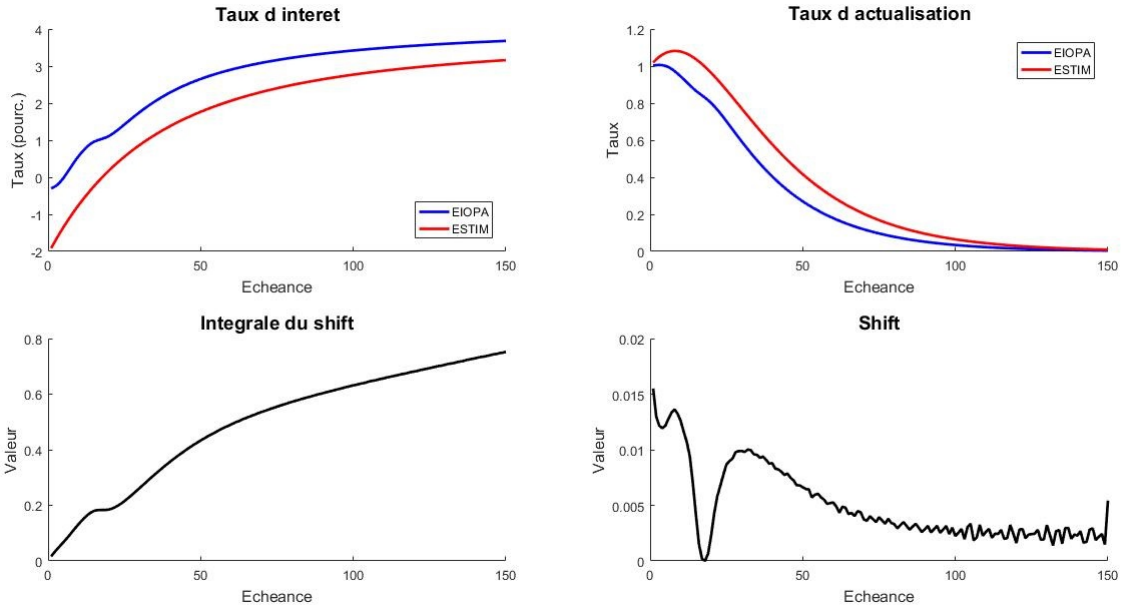

FIGURE ***3.6*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle BG dont les paramètres sont ceux du tableau 3.6.*

3.2.3 Applications numériques (2) : Correction de l'erreur d'approximation

Les illustrations des parties 3.1.3 et 3.2.2 sont classiques des extensions à *shift* déterministe. Une autre exemple est la correction des erreurs de calcul du coefficient d'actualisation. En effet dans la section 3.1, en particulier en 3.1.1, on suppose que le coefficient d'actualisation est connu en formule exacte. Cependant, on a utilisé une approximation dans le cadre du modèle de *Black* (voir 2.3.2), qui produit des erreurs (voir tableau 2.2) bien que très faibles. On peut la corriger avec un *shift* déterministe approprié.

Dans un premier temps, on calibre le modèle de *Black* sur les données des exemples

précédents en imposant un *shift* positif. En effet, c'est avec une valeur de $\underline{s}$ nulle que l'erreur d'approximation est majeure (voir tableau 2.2). On résout le problème (3.14), c'est à dire en ne faisant varier que les valeurs de x_0 et θ, avec la norme (3.12). Puisque les taux sont négatifs et que le modèle de *Black* ne permet pas de telles valeurs, on n'impose pas de contraintes sur le *shift*. On obtient les paramètres du tableau 3.7. Les

Paramètre	Valeur
$x_0^{(4,B)}$	-0.0134
$\kappa^{(4,B)} = \kappa^{(1,B)}$	0.0532
$\theta^{(4,B)}$	0.0483
$\sigma^{(4,B)} = \sigma^{(1,B)}$	0.0054
$\underline{s}$	0

TABLE ***3.7*** – *Paramètres du modèle de* Black *calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016.*

courbes de marché et de modèle sont représentées dans le graphique 3.7. La calibration

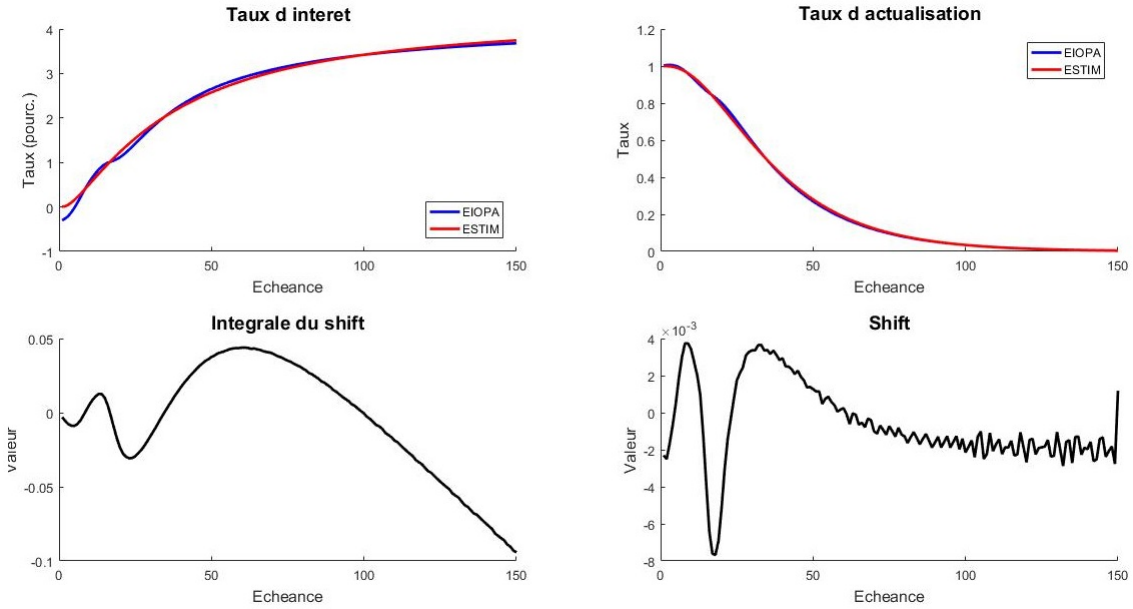

FIGURE ***3.7*** – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle de* Black *dont les paramètres sont ceux du tableau 3.7.*

est assez satisfaisante et donc le *shift* est faible. Comme pour les modèles précédents, on remarque que l'échéance de 20 ans est particulière et que le *shift* a un comportement oscillatoire. De plus, le modèle de *Black* ne produit pas de taux négatifs, ce qui s'observe sur le graphique.

Dans un second temps, on s'intéresse à l'erreur d'approximation sur la composante stochastique. Premièrement, on construit une courbe de taux "exacte", c'est à dire en effectuant 1 000 000 simulations de *Monte-Carlo* avec un pas de 1/52, pour des échéances de 1 à 150 ans. On en conserve un échantillon réduit 1, 50, 100 et 150 ans. A partir de ces coefficients d'actualisation, on calcule le *shift* que l'on interpole à l'aide des *splines* cubiques comme précédement et on calcule les coefficients d'actualisation et d'intérêt pour les échéances de 1 à 150 ans, que l'on compare aux données originelles. Les résultats sont représentés dans le graphique 3.8. Comme l'erreur d'approximation est faible, les

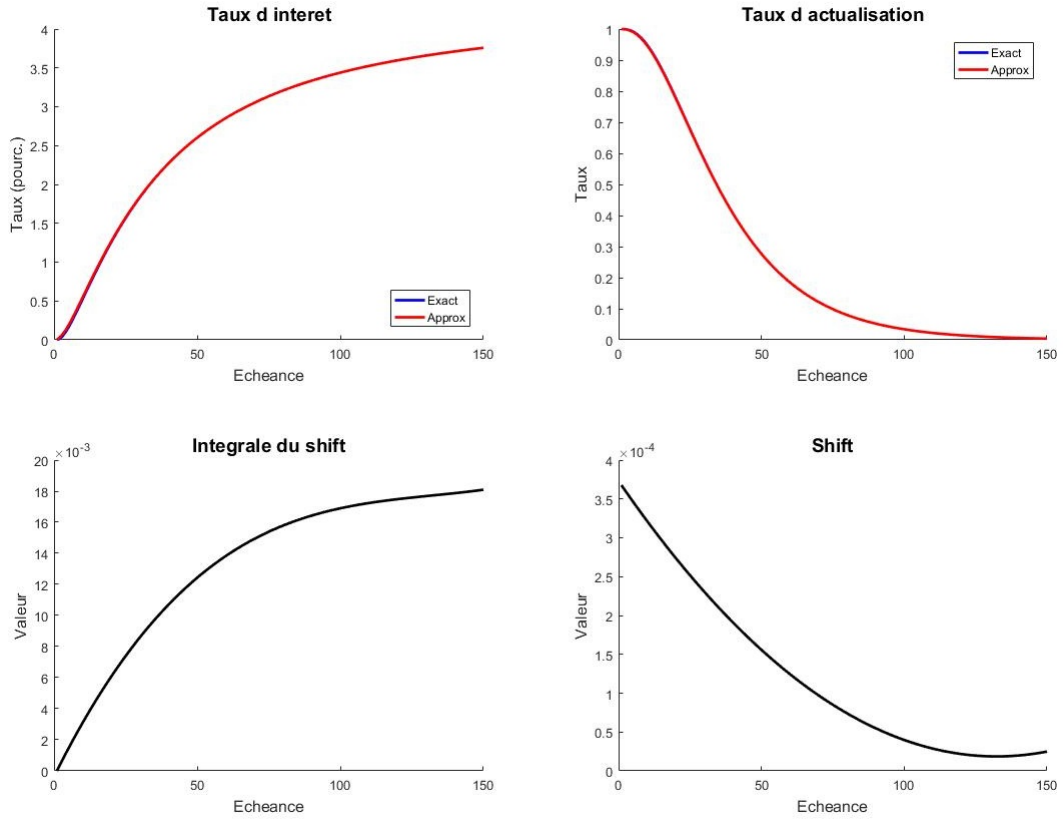

FIGURE ***3.8*** *– Interpolation de l'erreur sur le coefficient d'actualisation dont les paramètres sont ceux du tableau 3.7 et pour échantillon d'interpolation 1, 50, 10 et 150 ans.*

courbes des coefficients d'actualisation et d'intérêt sont similaires et le *shift* est faible. De plus, on remarque qu'il a un comportement régulier. L'erreur quadratique moyenne (hors points "exacts") est de 3.8329e-08 sans la correction et de 5.1596e-09 avec la correction, ce qui montre une amélioration.

On effectue la même analyse en conservant les coefficients d'actualisation "exacts" pour des échéances de 1, 10, 20 jusqu'à 150 ans. Les résultats sont représentés dans

le graphique 3.9. Contrairement au graphique 3.8, le comportement du *shift* est moins

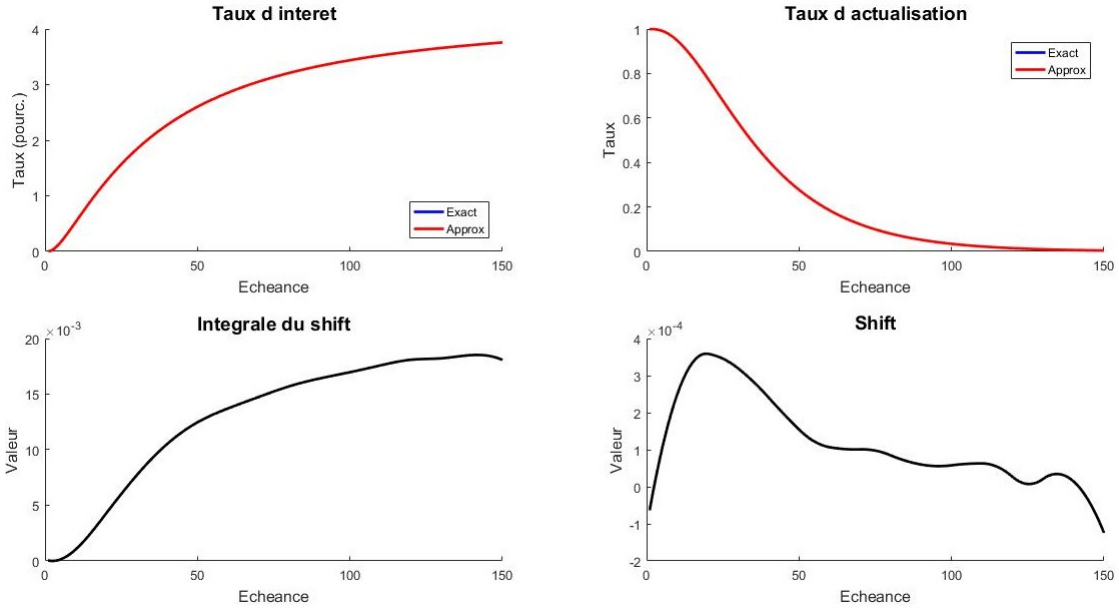

FIGURE ***3.9*** – *Interpolation de l'erreur sur le coefficient d'actualisation dont les paramètres sont ceux du tableau 3.7 et pour échantillon d'interpolation 1, 10, 20, ... 150 ans.*

régulier. Cependant, l'erreur quadratique moyenne (hors points "exacts") est de 3.8291e-08 sans la correction et de 8.8823e-12 avec la correction. L'amélioration est donc plus conséquente mais elle nécessite un temps de calcul majeur pour obtenir plus de coefficients d'actualisation précis.

3.3 Comparaison des modèles décrits

Différents modèles ont été décrits et illustrés dans les deux premiers chapitres, montrant différentes propriétés :

- Coefficient d'actualisation : Il peut être donné par une formule fermée exacte ou par une approximation. Cette propriété est importante si on doit effectuer des estimation du modèle puisque le coefficient d'actualisation est calculé à de nombreuses reprises en faisant varier les paramètres.
- Taux négatifs : Certains modèles génèrent des taux d'intérêt positifs, d'autres négatifs jusqu'à une limite inférieure ou non. Cette caractéristique est un choix lors de la modélisation.
- *Fit* parfait : Pour une courbe de taux d'intérêt de marché donnée, des modèles la capturent parfaitement ou non. Cette propriété est nécessaire pour des valorisations *market consistent*, comme dans le cadre de Solvency II.

Ces critères sont comparés dans le tableau 3.8. Les modèles répondent donc plus ou moins

Modèle	Coefficient d'actualisation	Taux négatifs	*Fit* parfait
Vasicek	Exact	Oui	Non
Vasicek++	Exact	Oui	Oui
Black	Approximation	Non	Non
Black++	Approximation	Non	Oui
BG	Approximation	Oui, limités	Non
BG++	Approximation	Oui, limités	Oui

Table *3.8* – *Comparaison des modèles univariés utilisés.*

à différentes exigences, aucun n'étant performant pour toutes les propriétés considérées.

Chapitre 4

Extension aux modèles multivariés

Dans ce chapitre, on applique l'extension à *shift* déterministe aux modèles multidimensionnels affines. Dans un premier temps, on présente les extensions du modèle de *Black* avec un *shadow rate* multivarié ainsi que leur extension à *shift* déterministe. Puis, on applique ces résultats à deux modèles classiques, les modèle G2 et AFDNS.

4.1 Le modèle de *Black* multidimensionnel

4.1.1 Les extensions multivariées du modèle de *Black*

Comme mentionné en 2.2.1, le modèle de *Black* a été utilisé avec des *shadow rates* multidimensionnels. Dans ce cadre, le processus a la forme générique :

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^{N_D} x_t^{(i)}, \tag{4.1}$$

avec $x_t^{(i)}$, $i = 1, \cdots, N_D$ des facteurs décrits par un processus stochastique. Il faut donc modéliser l'évolution conjointe du vecteur $X_t = \left(x_t^{(1)}, \cdots, x_t^{(N_D)}\right)'$. Tout comme le processus de *Vasicek* qui appartient à la classe des modèles affines, les facteurs ont souvent une dynamique affine multidimensionnelle. On suppose que le vecteur X_t est caractérisé par l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \kappa\left(\theta - X_t\right)dt + \sigma\sqrt{\varsigma\left(X_t\right)}dB_t^{\mathbb{Q}}, X_0 = X(0), \tag{4.2}$$

avec κ et σ deux matrices $N_D \times N_D$, θ un vecteur de dimension N_D, $\left\{B_t^{\mathbb{Q}}\right\}$ un mouvement Brownien de dimension N_D sous la mesure risque neutre et $\varsigma(.)$ une matrice diagonale $N_D \times N_D$ dont le i-ème terme a la forme :

$$\varsigma\left(X_t\right)_{i,i} = \varsigma_i^{(0)} + \varsigma_i^{(1)} X_t, \tag{4.3}$$

pour des scalaires $\varsigma_i^{(0)}$ et vecteurs $\varsigma_i^{(1)}$. Les paramètres sont donc les coefficients $\delta^{(i)}$ et $\varsigma_i^{(0)}$, les matrices κ et σ, les vecteurs θ et $\varsigma_i^{(1)}$ ainsi que les valeurs initiales $X(0)$. En

posant $N_D = 1$, $\delta^{(1)} = 1$, $\varsigma_i^{(0)} = 1$, $\varsigma_i^{(1)} = 0$, on retrouve l'équation (2.1) du modèle de *Vasicek*. De même, pour $N_D = 1$, $\delta^{(1)} = 1$, $\varsigma_i^{(0)} = 0$, $\varsigma_i^{(1)} = 1$, on obtient le modèle CIR. De manière plus générale, en écrivant (4.2) sous la forme :

$$dX_t = \kappa\left(\theta - X_t\right)dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}}, X_0 = X(0), \tag{4.4}$$

on obtient un processus gaussien multidimensionnel.

Dans certains modèles, on utise parfois des facteurs latents, comme pour le modèle AFDNS (voir 4.3.1). Dans ce cas, le taux au comptant de l'équation (4.1) est modélisé par :

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^{N_D^*} x_t^{(i)}, \tag{4.5}$$

avec $N_D^* < N_D$ mais on modélise l'évolution du vecteur X_t avec (4.2) ou (4.4). Ainsi, il existe un ou plusieurs facteurs stochastiques $x_t^{(i)}$ pour $i > N_D^*$ qui influencent X_t mais qui n'apparaissent pas dans le taux au comptant.

Il existe des restrictions sur les paramètres de l'équation (4.2) afin d'obtenir des modèles *admissibles* comme étudié par *Dai* et *Singleton* [DS00]. On suppose qu'elles sont satisfaites dans la suite (c'est le cas pour les deux modèles approfondis dans la suite).

Les moyennes et variances conditionnelles peuvent être obtenues en résolvant des équations différentielles (voir *Piazzesi* [Pia10], p. 707) :

$$\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}\left[x_t\right] = \theta + \left(x_s - \theta\right)\exp\left(-\kappa(t-s)\right), \tag{4.6}$$

$$V_s^{\mathbb{Q}}\left[x_t\right] = \int_s^t \exp\left(-\kappa(t-u)\right)\sigma\sqrt{\varsigma\left(X_u\right)}\sqrt{\varsigma\left(X_u\right)}^T\sigma^T\exp\left(-\kappa(t-u)\right)du, \tag{4.7}$$

en utilisant l'exponentielle matricielle et M^T étant la transposée de la matrice M. Pour un processus gaussien, l'équation (4.7) devient donc :

$$V_s^{\mathbb{Q}}\left[x_t\right] = \int_s^t \exp\left(-\kappa(t-u)\right)\sigma\sigma^T\exp\left(-\kappa(t-u)\right)du. \tag{4.8}$$

Dans ce cadre théorique, le coefficient d'actualisation a une forme de dépendance affine (extension de la proposition 2.1.1 au cadre multivarié) :

Proposition 4.1.1. *(Duffie et Kan, [DK96]) On suppose que le taux au comptant est défini par (4.1) et (4.2) et que les paramètres sont* admissibles *au sens de* Dai *et* Singleton *[DS00], alors le coefficient d'actualisation, noté $P_X\left(t, t+\tau\right)$, a la forme exponentielle affine :*

$$\begin{aligned} P_X\left(t, t+\tau\right) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\mathbf{x}_u du\right)\right] \\ &= \exp\left[A\left(\tau\right) - B\left(\tau\right)X_t\right], \end{aligned} \tag{4.9}$$

dont les fonctions $A(.)$ *et* $B(.)$ *sont les solutions du système différentiel :*

$$\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} = -\theta'\kappa' B(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_D}\left[\sigma' B(\tau)\right]_i^2 \varsigma_i^{(0)}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} = -\kappa' B(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_D}\left[\sigma' B(\tau)\right]_i^2 \varsigma_i^{(1)}, \tag{4.11}$$

avec comme conditions initiales $A(0) = 0$ *et* $B(0) = 0$.

Démonstration. Voir [DK96], pp. 383-386. □

Connaissant le coefficient d'actualisation, on en déduit le rendement ainsi que le taux *forward* instantané.

Par la suite, on suppose que le processus des facteurs est gaussien, c'est à dire caractérisé par l'équation (4.4). En effet, il permet d'avoir des valeurs négatives pour un ou plusieurs facteurs de X_t et donc un taux au comptant $\mathbf{x}_t$ négatif. On introduit les extensions multivariées en suivant la logique de 2.2.1, 2.3.1 et 3.2.1. Dans un premier temps, la transformation (2.14) devient :

$$\mathbf{r}_t = \max\left\{0; \mathbf{x}_t\right\}, \tag{4.12}$$

ce qui permet de définir le taux au comptant à partir du *shadow rate*. On restreint donc le taux au comptant à une valeur positive ou nulle. Cependant, tout comme dans le cadre du modèle de *Black*, cette la limite inférieure nulle n'est pas adaptée au contexte des taux négatifs. C'est pourquoi, la transformation (2.19) est étendue en :

$$\mathbf{r}_t = \max\left\{\underline{s}; \mathbf{x}_t\right\}, \tag{4.13}$$

avec $\underline{s}$ un scalaire. Pour $\underline{s} = 0$, on retrouve (4.12). Enfin, une dépendance temporelle peut être également souhaitée. La transformation (3.18) est donc généralisée sous la forme :

$$\mathbf{r}_t = \max\left\{\underline{s}_t; \mathbf{x}_t\right\}, \tag{4.14}$$

avec $\underline{s}_t$ une fonction déterministe. Si cette fonction est constante, on retrouve (4.13). Les éléments constituant les extensions multivariées du modèle de *Black* ont tous été décrits. Par la suite, on introduit une extension à *shift* déterministe donc on suppose que la limite inférieure est constante et égale à $\underline{s}$, comme dans l'équation (4.13).

4.1.2 Le coefficient d'actualisation

Le coefficient d'actualisation s'obtient en calculant l'espérance conditionnelle du taux au comptant, c'est à dire en étendant (2.20) :

$$P_{\underline{s},N_D}(t, t+\tau) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\mathbf{r}_u du\right)\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\max\left\{\underline{s}; \mathbf{x}_u\right\} du\right)\right]. \tag{4.15}$$

Si le *shadow rate* est gaussien, alors le résultat de *Kripner* 2.3.1 est valable dans le cas multivarié :

Proposition 4.1.2. *(*Krippner*, [Kri13b] et [Kri15]) Le taux* forward *instantané évalué en t pour une échéance $t+\tau$, noté $f_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, est approximé par :*

$$f_{\underline{s}}(t,t+\tau) \approx f_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau) + \psi(\tau), \tag{4.16}$$

avec $f_{\tilde{M},N_D}(t,t+\tau)$ le taux forward *instantané obtenu dans le modèle pour le* shadow rate *et en définissant la fonction $\psi(.)$ par :*

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= \left[\underline{s} - f_{\tilde{M},N_D}(t,t+\tau)\right]\left[1-\Phi\left(\frac{f_{\tilde{M},N_D}(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(t,\tau)}\right)\right] \\ &\quad +\omega(t,\tau)\phi\left[\frac{f_{\tilde{M},N_D}(t,t+\tau)-\underline{s}}{\omega(t,\tau)}\right],\end{aligned} \tag{4.17}$$

où $\Phi(.)$ et $\phi(.)$ sont les fonctions cumulatives et de densité de la loi normale centrée réduite et $\omega(t,\tau)$ définie par :

$$\omega(t,\tau)^2 = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\Sigma(t,\tau,\tau+\delta), \tag{4.18}$$

avec $\Sigma(t,\tau,\tau+\delta)$ le terme de volatilité dans le prix d'une option sur une obbligation sans coupons. A partir de $f_{\underline{s}}(t,t+\tau)$, on déduit le rendement et le coefficient d'actualisation, notés respectivement $y_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau)$ et $P_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau)$ par :

$$y_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau) \approx \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f_{\tilde{M},N_D}(t,u)\,du, \tag{4.19}$$

$$P_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau) \approx \exp\left[-y_{\underline{s},N_D}(t,t+\tau)\,\tau\right]. \tag{4.20}$$

Démonstration. Voir *Krippner*, [Kri15]. □

Comme dans le cadre uni-dimensionnel, le coefficient d'actualisation est solution d'une équation aux dérivées partielles. L'extension de (2.16), pour $\underline{s}=0$ et avec un *shadow rate* gaussien (4.4), est (voir *Kim* et *Singleton*, [KS12]) :

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial P_{0,N_D}(t,t+\tau)}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 P_{0,N_D}(t,t+\tau)}{\partial X_t \partial X_t'}\sigma\sigma'\right] - \left[\frac{\partial P_{0,N_D}(t,t+\tau)}{\partial X_t}\right]'\kappa(\theta - X_t) \\ + \max\{0;x_t\}\,P_{0,N_D}(t,t+\tau)\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec $\mathrm{tr}[.]$ l'opérateur de trace d'une matrice et comme condition initiale $P_{0,N_D}(t,t)=1$. *Kim* et *Singleton* utilisent une approximation par différences finies pour la résoudre dans le cadre d'un modèle gaussien bivarié.

4.1.3 Extension à *shift* déterministe

On applique l'extension à *shift* déterministe sur le modèles précédents, comme expliqué en 3.1.1. On adapte la transformation (3.18) au cadre multidimensionnel :

$$\mathbf{r}_t = \max\{\underline{s}; \mathbf{x}_t\} + \varphi(t) = \underbrace{\max\{0; \mathbf{x}_t - \underline{s}\}}_{\max\{0;\tilde{\mathbf{x}}_t\}} + \underbrace{\underline{s} + \varphi(t)}_{\tilde{\varphi}(t)}, \tag{4.22}$$

avec $\underline{s}$ une constante et $\varphi(.)$ une fonction déterministe. Cette extension est identique à celle du cadre univarié donc la comparaison entre les taux au comptant de (4.14) et (4.22) mène à des conclusions identiques : D'une part, on affaiblit l'interprétation de la limite inférieure. D'autre part, la limite inférieure peut être estimée une fois mais on maintient un *fit* parfait de la courbe de taux. De plus, le coefficient d'actualisation est plus simple à calculer et l'erreur n'a pas de dépendance temporelle.

Pour le coefficient d'actualisation, on applique la relation (3.4) :

$$\begin{aligned} P_{\underline{s},N_D,++}(t,t+\tau) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\mathbf{r}_t\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{t+\tau}\max\{\underline{s};\mathbf{x}_u\}\,du\right)\right]\exp\left[-\int_t^{t+\tau}\varphi(u)du\right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

La première composante s'obtient comme expliqué en 4.1.2 tandis que la seconde est un terme correctif, facile à calculer. On peut également utiliser les autres résultats de la section 3.1.

4.2 Extension du modèle G2

4.2.1 Le modèle G2

Dans le cadre du modèle G2, le taux au comptant est la somme de deux facteurs $x_t^{(1)}$ et $x_t^{(2)}$:

$$\mathbf{x}_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)}. \tag{4.24}$$

L'évolution des facteurs est caractérisée par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^{(1)}x_t^{(1)} \\ -\kappa^{(2)}x_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{B}^{\mathbb{Q},1}(t) \\ d\tilde{B}^{\mathbb{Q},2}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

avec $\tilde{B}^{\mathbb{Q},1}$ and $\tilde{B}^{\mathbb{Q},2}$ deux mouvements browniens corrélés dont le coefficient de corrélation est ρ. Habituellement, on utilise comme condition initiales $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 0$. Dans la suite, on suit une approche légèrement plus générale en ne restreignant pas les valeurs initiales à zéro. En effet, on effectue des calibrations par *cross-section* donc les valeurs initiales

offrent deux degrés de liberté supplémentaires dans le problème d'optimisation. De plus, les résultats dans le cadre habituel s'obtiennent en posant $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 0$. On peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)} \\ dx_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^{(1)} x_t^{(1)} \\ -\kappa^{(2)} x_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB^{\mathbb{Q},1}(t) \\ dB^{\mathbb{Q},2}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

afin d'utiliser des mouvements browniens indépendants comme pour l'équation (4.4).

On montre que les distributions conditionnelles de ces facteurs est gaussienne donc le taux au comptant l'est également d'après (4.24) (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 143-144). En particulier, son espérance et sa variance conditionnelle sont données par :

$$\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}_t] = x_s^{(1)} \exp\left[-\kappa^{(1)}(t-s)\right] + x_s^{(2)} \exp\left[-\kappa^{(2)}(t-s)\right], \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} V_s^{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}_t] = & \left[\sigma^{(1)}\right]^2 B\left(t-s; 2\kappa^{(1)}\right) + \left[\sigma^{(2)}\right]^2 B\left(t-s; 2\kappa^{(2)}\right) \\ & + 2\rho\sigma^{(1)}\sigma^{(2)} B\left(t-s; \kappa^{(1)}+\kappa^{(2)}\right), \end{aligned} \tag{4.28}$$

en utilisant la fonction $B(\tau;\kappa)$ définie par (2.6).

Comme expliqué en 4.1.2, le coefficient d'actualisation dans le cadre du modèle de base joue un rôle important. Comme le modèle appartient à la classe des modèles affines, le coefficient d'actualisation, noté $P_{G2}(t, t+\tau)$, a une forme exponentielle affine, plus précisément (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 144-145) :

$$P_{G2}(t, t+\tau) = \exp\left[-M(\tau) + 1/2 V(\tau)\right], \tag{4.29}$$

en introduisant les fonctions $M(.)$ et $V(.)$:

$$M(\tau) = B\left(\tau;\kappa^{(1)}\right) x_t^{(1)} + B\left(\tau;\kappa^{(2)}\right) x_t^{(2)}, \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} V(\tau) = & \left[\frac{\sigma^{(1)}}{\kappa^{(1)}}\right]^2 \left[\tau + \frac{2}{\kappa^{(1)}} \exp\left[-\kappa^{(1)}\tau\right] - \frac{1}{2\kappa^{(1)}} \exp\left[-2\kappa^{(1)}\tau\right] - \frac{3}{2\kappa^{(1)}}\right] \\ & + \left[\frac{\sigma^{(2)}}{\kappa^{(2)}}\right]^2 \left[\tau + \frac{2}{\kappa^{(2)}} \exp\left[-\kappa^{(2)}\tau\right] - \frac{1}{2\kappa^{(2)}} \exp\left[-2\kappa^{(2)}\tau\right] - \frac{3}{2\kappa^{(2)}}\right] \\ & + 2\rho \frac{\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}}{\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}} \left[\tau - B\left(\tau;\kappa^{(1)}\right) - B\left(\tau;\kappa^{(2)}\right) + B\left(\tau;\kappa^{(1)}+\kappa^{(2)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Une conséquence du coefficient d'actualisation (4.29) est l'expression du taux *forward* instantané :

$$\begin{aligned} f_{G2}(t, t+\tau) = & x_t^{(1)} \exp\left[-\kappa^{(1)}\tau\right] + x_t^{(2)} \exp\left[-\kappa^{(2)}\tau\right] - \frac{1}{2}\left[\sigma^{(1)} B\left(\tau;\kappa^{(1)}\right)\right]^2 \\ & - \frac{1}{2}\left[\sigma^{(2)} B\left(\tau;\kappa^{(2)}\right)\right]^2 - \rho\sigma^{(1)}\sigma^{(2)} B\left(\tau;\kappa^{(1)}\right) B\left(\tau;\kappa^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

L'extension à *shift* déterministe du modèle G2, G2++ (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 142-175), est l'un des modèles les plus connus. On connaît l'expression du coefficient d'actualisation (voir 3.1.1) mais aussi le prix de dérivés de taux tels que les *caps* et *floors* ainsi que les *swaptions* (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 157-519). Le modèle se révèle performant pour des calibrations sur ces instruments financiers (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 166-169), d'où sa diffusion. Il est également utilisé dans un cadre actuariel *Aas et al.* [ANWR17].

4.2.2 Extension à *shift* déterministe

On s'intéresse à la spécification du coefficient d'actualisation dans le cadre de l'extension à *shift* déterministe. Tout d'abord, on peut appliquer l'approximation du coefficient d'actualisation de la proposition 4.1.2 puisque le taux au comptant est gaussien, étant la somme de deux variables aléatoires gaussiennes. De plus, le taux *forward* instantané est donné par (4.32). Il est donc nécessaire de spécifier la valeur de $\omega(t,\tau)$:

Proposition 4.2.1. *Pour le modèle G2, la fonction $\omega(t,\tau)$ de la proposition 4.1.2 vaut :*

$$\begin{aligned}\omega(t,\tau) &= \left(\sigma^{(1)}\right)^2 B\left(\tau;2\kappa^{(1)}\right)+\left(\sigma^{(2)}\right)^2 B\left(\tau;2\kappa^{(2)}\right)\\ &\quad +2\rho\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}B\left(\tau;\kappa^{(1)}+\kappa^{(2)}\right)\end{aligned} \tag{4.33}$$

Démonstration. La fonction $\Sigma(t,T,S)$ dans le cadre du modèle G2 est (voir *Brigo* et *Mercurio* [BM06], p. 155) :

$$\begin{aligned}\Sigma(t,T,S) &= \left(\sigma^{(1)}\right)^2\left[B\left(S-T;\kappa^{(1)}\right)\right]^2 B\left(T-t;2\kappa^{(1)}\right)\\ &\quad +\left(\sigma^{(2)}\right)^2\left[B\left(S-T;\kappa^{(2)}\right)\right]^2 B\left(T-t;2\kappa^{(2)}\right)\\ &\quad +2\rho\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}B\left(S-T;\kappa^{(1)}\right)B\left(S-T;\kappa^{(2)}\right)B\left(T-t;\kappa^{(1)}+\kappa^{(2)}\right)\end{aligned}$$

On la calcule facilement pour $S=T+\delta$ puis on la dérive et on obtient le résultat pour $\delta\to 0$. □

4.3 Extension du modèle AFDNS

4.3.1 Le modèle AFDNS

Dans le cadre du modèle AFDNS de *Christensen et al.* [CDR11], le taux au comptant est la somme de deux facteurs, comme dans l'équation (4.24), mais avec un facteur latent $x_t^{(3)}$. Ainsi le vecteur X_t a pour dimension $N_D=3$ et est caractérisé par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{pmatrix} dx_t^{(1)}\\ dx_t^{(2)}\\ dx_t^{(3)}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\\theta^{(2)}\\\theta^{(3)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_t^{(1)}\\x_t^{(2)}\\x_t^{(3)}\end{pmatrix}\right]dt+\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix}dB^{\mathbb{Q},1}(t)\\dB^{\mathbb{Q},2}(t)\\dB^{\mathbb{Q},3}(t)\end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ une matrice. C'est donc un cas particulier de l'équation (4.4). Tout comme pour le modèle G2, les facteurs $x_t^{(1)}$, $x_t^{(2)}$ et $x_t^{(3)}$ sont gaussiens donc le taux au comptant l'est aussi.

Une particularité de ce modèle est la forme du rendement, qui est donc présenté avant le coefficient d'actualisation :

Proposition 4.3.1. *(Christensen et al. [CDR11]) Pour un instant d'évaluation t, une échéance $t+\tau$, avec $\tau > 0$, si les facteurs sont caractérisés par l'équation différentielle stochastique (4.34), alors le rendement, noté $y_{AFDNS}(t, t+\tau)$, est donné par :*

$$\begin{aligned} y_{AFDNS}(t,t+\tau) &= x_t^{(1)} + x_t^{(2)} \underbrace{\left(\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau}\right)}_{B^{(2)}(t,t+\tau)} + x_t^{(3)} \underbrace{\left(\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau} - \exp(-\lambda\tau)\right)}_{B^{(3)}(t,t+\tau)} \\ &\quad - \frac{1}{\tau} C(t,t+\tau) \,, \end{aligned} \tag{4.35}$$

avec le terme $C(t,t+\tau)$ solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dC(t,t+\tau)}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \left(\sigma' \mathbf{B}(t,t+\tau)\mathbf{B}(t,t+\tau)'\sigma\right)_{j,j} \,, \tag{4.36}$$

en introduisant le vecteur $\mathbf{B}(t,t+\tau) = (1, B^{(2)}(t,t+\tau), B^{(3)}(t,t+\tau))'$. En particulier, si le vecteur θ est nul et si la matrice σ a la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \,, \tag{4.37}$$

alors le terme $C(t,t+\tau)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{C(t,t+\tau)}{\tau} &= \bar{A}\frac{\tau^2}{6} + \bar{B}\left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\tau} + \frac{1}{4\lambda^3}\frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{\tau}\right) + \bar{C}\frac{1}{2\lambda^2} \\ &\quad + \bar{C}\left(\frac{1}{\lambda^2}\exp(-\lambda\tau) - \frac{1}{4\lambda}\tau\exp(-2\lambda\tau) - \frac{3}{4\lambda^2}\exp(-2\lambda\tau) - \frac{2}{\lambda^3}\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\tau}\right) \\ &\quad + \bar{C}\left(\frac{5}{8\lambda^3}\frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{\tau}\right) + \bar{D}\left(\frac{1}{2\lambda}\tau + \frac{1}{\lambda^2}\exp(-\lambda\tau) - \frac{1}{\lambda^3}\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\tau}\right) \\ &\quad + \bar{E}\left(\frac{3}{\lambda^2}\exp(-\lambda\tau) + \frac{1}{2\lambda}\tau + \frac{1}{\lambda}\tau\exp(-\lambda\tau) - \frac{3}{\lambda^3}\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\tau}\right) \\ &\quad + \bar{F}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\exp(-\lambda\tau) - \frac{1}{2\lambda^2}\exp(-2\lambda\tau) - \frac{3}{\lambda^3}\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\tau}\right) \\ &\quad + \bar{F}\frac{3}{4\lambda^3}\frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{\tau} \,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

en utilisant les coefficients :

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \left(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2\right) , \\
\bar{B} &= \left(\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2\right) , \\
\bar{C} &= \left(\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2+\sigma_{33}^2\right) , \\
\bar{D} &= \left(\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22}+\sigma_{13}\sigma_{23}\right) , \\
\bar{E} &= \left(\sigma_{11}\sigma_{31}+\sigma_{12}\sigma_{32}+\sigma_{13}\sigma_{33}\right) , \\
\bar{F} &= \left(\sigma_{21}\sigma_{31}+\sigma_{22}\sigma_{32}+\sigma_{23}\sigma_{33}\right) .
\end{aligned}$$

Une ultérieure spécification de la matrice σ (4.37) consiste à utiliser une matrice σ triangulaire inférieure, donc $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$. Dans la suite, on suit cette formulation puisqu'elle est utilisée dans différents articles. Les coefficients deviennent donc :

$$\begin{aligned}
\bar{A}^r &= \sigma_{11}^2 , \\
\bar{B}^r &= \left(\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2\right) , \\
\bar{C}^r &= \left(\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2+\sigma_{33}^2\right) , \\
\bar{D}^r &= \sigma_{11}\sigma_{21} , \\
\bar{E}^r &= \sigma_{11}\sigma_{31} , \\
\bar{F}^r &= \left(\sigma_{21}\sigma_{31}+\sigma_{22}\sigma_{32}\right) .
\end{aligned}$$

Ainsi le taux *forward* instantané en t pour une échéance $t+\tau$, noté $f_{AFDNS}(t,t+\tau)$, est donné par :

$$f_{AFDNS}(t,t+\tau)=x_t^{(1)}+x_t^{(2)}\exp\left(-\lambda\tau\right)+x_t^{(3)}\lambda\tau\exp\left(-\lambda\tau\right)+C^f(t,t+\tau) , \qquad (4.39)$$

en introduisant le terme correctif :

$$\begin{aligned}
C^f(t,t+\tau) &= -\frac{\partial C\left(t,t+\tau\right)}{\partial\tau} \\
&= -\bar{A}^r\frac{\tau^2}{2}-\frac{\bar{B}^r}{2}\left(\frac{1-\exp\left(-\lambda\tau\right)}{\lambda}\right)^2 \\
&\quad -\frac{\bar{C}^r}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}\exp\left(-\lambda\tau\right)-\frac{2}{\lambda}\tau\exp\left(-\lambda\tau\right)+\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(-2\lambda\tau\right)\right] \\
&\quad -\frac{\bar{C}^r}{2}\left[\frac{2}{\lambda}\tau\exp\left(-2\lambda\tau\right)+\tau^2\exp\left(-2\lambda\tau\right)\right]-\bar{D}^r\tau\frac{1-\exp\left(-\lambda\tau\right)}{\lambda} \\
&\quad -\bar{E}^r\left[\frac{1}{\lambda}\tau-\frac{1}{\lambda}\tau\exp\left(-\lambda\tau\right)-\tau^2\exp\left(-\lambda\tau\right)\right]-\bar{F}^r\left[\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}\exp\left(-\lambda\tau\right)\right] \\
&\quad -\bar{F}^r\left[-\frac{1}{\lambda}\tau\exp\left(-\lambda\tau\right)+\frac{1}{\lambda^2}\exp\left(-2\lambda\tau\right)+\frac{1}{\lambda}\tau\exp\left(-2\lambda\tau\right)\right] \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Enfin, le coefficient d'actualisation est obtenu par :

$$P_{AFDNS}(t,t+\tau)=\exp\left[-y_{AFDNS}(t,t+\tau)\tau\right] . \qquad (4.41)$$

En obervant les équations (4.35) et (4.39), on retrouve *presque* la forme de *Nelson-Siegel* [NS87] pour le rendement et le taux *forward* instantané. En effet, dans ce cadre, le taux *forward* instantané, noté $f_{NS}(t, t+\tau)$, est défini par :

$$f_{NS}(t, t+\tau) = \beta_1 + \beta_2 \exp(-\lambda\tau) + \beta_3 \lambda\tau \exp(-\lambda\tau) \ , \tag{4.42}$$

avec β_1, β_2 et β_3 les paramètres de la fonctionnelle. Le rendement, $y_{NS}(t, t+\tau)$, est donc :

$$y_{NS}(t, t+\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left[\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau}\right] + \beta_3 \left[\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau} - \exp(-\lambda\tau)\right] \ . \tag{4.43}$$

En identifiant les paramètres β_1, β_2 et β_3 par $x_t^{(1)}$, $x_t^{(2)}$ et $x_t^{(3)}$ on retrouve l'équation (4.35), qui contient le terme correctif $C(t, t+\tau)$. De même, on obtient l'équation des taux *forward* instantané (4.39) au terme correctif $C^f(t, t+\tau)$ près. C'est pourquoi, pour ce modèle, on présente le rendement et on en déduit le coefficient d'actualisation. Traditionnellement, cette fonctionnelle (ou l'extension de *Svensson* [Sve94]) est utilisée pour construire des courbes de rendement par les banques centrales comme expliqué dans le rapport [BfIS05] à une date d'observation donnée. *Diebold* et *Li* [DL06] ont introduit une évolution temporelle des paramètres. Enfin, le modèle AFDNS est une spécification dans le cadre des modèles affines, donc on peut simuler l'evolution de la courbe des taux mais aussi utiliser les résultats théoriques relatifs à cette classe de modèles.

Les modèles affines sont aussi caractérisés par une absence d'arbitrage contrairement à la forme de *Nelson-Siegel*, d'où le terme correctif $C(t, t+\tau)$. *Bjork* et *Christensen* [BC99] définissent la *consistence* d'un modèle de taux avec une famille de courbes de taux *forward* instantanés $\mathcal{F}$ si toutes les courbes du modèle appartiennent à $\mathcal{F}$. Ils montrent que les modèles de *Ho-Lee* [HL86] et de *Hull-White* [HW90] ne sont pas *consistants* avec la fonctionnelle de *Nelson-Siegel*. *Filipovic* [Fil99] étend ce résultat à toute diffusion de *Ito* et que le changement de mesure avec une martingale équivalente maintient cette absence de *consistence*. Cependant, *Coroneo et al.* [CNVK11] montrent, en utilisant les données du marché des obligations américaines que les facteurs du modèle de *Nelson-Siegel* ne sont pas statistiquement différents, à un intervalle de confiance de 95%, de ceux du modèle sans opportunité d'arbitrage. De plus, les deux modèles ont une capacité de prédiction similaire.

Le modèle AFDNS++ est introduit dans l'article de *Dang-Nguyen et al.* [DNLCH14]. La spécification de la matrice est (4.37) donc le terme correctif du rendement utilisé est (4.38). Une calibration, par *cross section*, sur la courbe ECB illustre le modèle.

4.3.2 Extension à *shift* déterministe

Tout comme dans le cadre du modèle G2, on peut appliquer l'approximation du coefficient d'actualisation de la proposition 4.1.2 puisque le modèle AFDNS est gaussien. Il est donc nécessaire de conaître la valeur de $\omega(\tau)$, le taux *forward* instantané étant donné par (4.39) :

Proposition 4.3.2. *(*Christensen *et* Rudebusch*, [CR16]) Pour le modèle AFDNS, la fonction $\omega(t,\tau)$ de la proposition 4.1.2 vaut :*

$$\begin{aligned}\omega(t,\tau) &= \bar{A}^r\tau + \bar{B}^r\frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{2\lambda} \\ &\quad +\bar{C}^r\left[\frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{4\lambda} - \frac{1}{2}\tau\exp(-2\lambda\tau) - \frac{1}{2}\lambda\tau^2\exp(-2\lambda\tau)\right] \\ &\quad +2\bar{D}^r\frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda} + 2\bar{E}^r\left[-\tau\exp(-\lambda\tau) + \frac{1-\exp(-\lambda\tau)}{\lambda}\right] \\ &\quad \bar{F}^r\left[-\tau\exp(-2\lambda\tau) + \frac{1-\exp(-2\lambda\tau)}{2\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

En combinant les résultats des propositions 4.1.2 et 4.3.2, on obtient donc le coefficient d'actualisation dans ce modèle.

L'utilisation de l'approximation 4.1.2 implique une erreur. *Christensen* et *Rudebusch* [CR16] ainsi que *Christensen et al.* [CNP16] ont des exemples numériques relatifs à cette erreur.

Chapitre 5

Applications actuarielles

Les modèles introduits précédement sont appliqués pour la valorisation d'un groupe de polices italiennes, nommés *gestione separata*. Elles sont présentées, ainsi que leur valorisation d'un point de vue théorique, dans une première section. Dans une deuxième section, on illustre ce calcul avec des exemples numériques utilisant les calibrations précédentes et un contrat simplifié.

5.1 Les polices de type *gestione separata*

5.1.1 Présentation des contrats de type *gestione separata*

Une classe de contrats italiens, les polices vie de type *gestione separata*, est utilisé pour des illustrations numériques. Ces contrats sont caractérisés par un mécanisme d'indexation de leurs prestations (et primes) au rendement comptable d'un fonds, nommé *gestione separata*. A part ce mécanisme d'indexation, ces contrats ne diffèrent pas des autres polices d'assurance vie.

Comme exemple, on considère une police d'assurance qui verse un capital C_T à un instant T revalorisé à partir d'un versement initial C_0 si l'assuré est vivant en T. Ce contrat est utilisé par *De Felice* et *Moriconi* dans un article de référence [DFM05] sur la valorisation de ces polices. Le *pay-off* du contrat en T, noté Y_T, est donc :

$$Y_T = C_T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\,, \tag{5.1}$$

avec $\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}$ la fonction indicatrice de l'évènement $\mathcal{E}(x,T)$, indiquant que l'assuré est vivant en T. On note $\Gamma(0,T)$ le coefficient de revalorisation entre $t=0$ et $t=T$ tel que le capital en T sera :

$$C_T = \Gamma(0,T)C_0\,, \tag{5.2}$$

et donc :

$$Y_T = C_0\Gamma(0,T)\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\,. \tag{5.3}$$

On s'intéresse au coefficient de revalorisation $\Gamma(0,T)$. Dans le cadre des polices de type *gestione separata*, ce coefficient dépend du rendement comptable d'un fonds.

La gestion de ce fonds est régulée par le règlement 38 de l'IVASS [1] [IVA11]. Certains points particuliers de ce texte sont les suivants :

- La gestion du fonds est spécifiée par un règlement (art. 6), inclus dans les conditions contractuelles des polices associées : Devise(s) de référence, type d'instruments pouvant être acquis avec les limites qualitatives et quantitatives.
- La valeur du fonds ne doit pas être inférieure à la valeur des provisions des polices associées (art. 8).
- Les ressources du fonds sont investies dans des activités admissibles pour la couverture des provisions (art. 9) :
  - Les opérations de sortie sont effectuées pour réaliser les plus/moins-values.
  - Les pertes et profits restent virtuels jusqu'à la vente du titre.

  Ainsi, on utilise la valeur historique et non celle de marché pour la valorisation des actifs.
- La société d'assurance tient un livre de comptes spécifique à ce fonds (art. 12).
- La composition et le rendement du fonds sont certifiés par un expert comptable agréé (art. 11) et publiés (art. 13).

Au 31 décembre 2011, on dénombrait 386 fonds en Euro gérés par 70 sociétés et 28 fonds en devises étrangères gérés per 28 sociétés. Ils sont principalement composés d'obligations comme le démontre une étude de l'*IVASS* [IVA12] dont les résultats principaux sont rapportés dans le tableau 5.1. On remarque que ces fonds contienent dans une très

Classe d'actif	Part Q42010 (%)	Part Q42011 (%)
Obligations	88.45	87.73
dont obligations d'état	60.52	63.66
dont obligations privé	27.95	24.06
Actions	3.82	3.33
Autres actifs	7.72	8.94
dont liquidité	0.86	1.97

Table *5.1* – *La composition des fonds en Euro au 31 Décembre 2010 et 2011 (millions d'Euros), d'après [IVA12]*

large majorité des obligations, en particulier émises par des états. Pour les fonds en devises étrangères, la proportion des obligations est plus élevée (supérieure à 90% pour les données considérées).

Pour le rendement, on choisit une forme simplifiée et utilisée par *De Felice* et *Moriconi* [DFM05]. On note C_t le capital en t assuré et I_t le rendement du fonds entre les instants $t-1$ et t. La revalorisation de ce capital est :

$$C_t = C_{t-1}\left(1+\gamma_t\right) , \tag{5.4}$$

1. *Istituto per la vigilanza sulle assicurazioni*, autorité de régulation italienne

avec γ_t le coefficient de revalorisation défini par :

$$\gamma_t = \frac{\max\{\beta I_t; \underline{i}\} - \underline{i}}{1+\underline{i}}, \tag{5.5}$$

en notant $\underline{i}$ le taux technique actuariel et $\beta \in [0;1]$ le coefficient de participation aux bénéfices. C'est pourquoi le capital en T sera donné par :

$$C_T = C_0 \underbrace{(1+\underline{i})^{-T} \prod_{t=0}^{T} (1+\max\{\beta I_t; \underline{i}\})}_{\Gamma(0,T)} . \tag{5.6}$$

On remarque que le taux technique actuariel joue le rôle d'un taux minimal garanti. En effet, d'après l'expression (5.5), le coefficient γ_t est supérieur ou égal à 0 donc la revalorisation du capital $C_t \geq C_{t-1}$ et $C_T \geq C_0$. Le capital est donc protégé par une garantie. Si le rendement βI_t est supérieur au taux garanti, alors le capital se revalorise à un taux supérieur. D'un point de vue financier, il existe donc une option dans la revalorisation du contrat. Cependant, elle est de type *path-dependent* puisque le coefficient de revalorisation du fonds introduit une dépendence temporelle.

5.1.2 La valorisation des contrats de type *gestione separata*

On dénombre de nombreux articles consacrés à la valorisation de polices d'assurance vie avec participation aux bénéfices. Evidemment, un nombre plus restreint de publications se focalise sur les contrats italiens. Une liste, couvrant certains de ces travaux, est rassemblée par *Dang-Nguyen* [DN14] (p. 24-29) dont on résume cette description pour les polices italiennes. Un premier article de *Bacinello* [Bac01] analyse le prix des options. La dynamique du fonds est un mouvement brownien géométrique. Ces résultats sont étendus par *Bacinello* [Bac03a] et [Bac03b] en offrant la possibilité à l'assuré d'anticiper la fin du contrat. *De Felice* et *Moriconi* [DFM02a] et [DFM02b] présentent la valorisation des polices de type *unit-* et *index-linked* mais aussi avec participation aux bénéfices. Les taux d'intérêt sont modélisés avec un processus CIR tandis que les autres actifs le sont par un mouvement brownien géométrique. Des travaux ayant un cadre similaire sont ceux de *Castellani et al.* [CDFMP05], *De Felice* et *Moriconi* [DFM05] (*cf. infra*) mais aussi *Andreatta* et *Corradin* [AC03a] et [AC03b]. Ce dernier article utilise le modèle CIR++ pour les taux d'intérêt.

On suit l'approche de valorisation de *De Felice* et *Moriconi* [DFM05]. D'un point de vue général, la valeur du contrat est donné par :

$$\mathcal{V}(0,T) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}}[\Delta_T Y_T] , \tag{5.7}$$

avec Δ_T le déflateur (*state-price deflater*). On suppose que les risques financiers et techniques sont indépendants, donc le délateur peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta_T = \Delta_T^F \Delta_T^T , \tag{5.8}$$

avec Δ_T^F (Δ_T^T) le déflateur financier (technique). Ainsi la valeur du contrat illustratif devient :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0 \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] . \tag{5.9}$$

Cette expression montre que la valeur est décomposée en une composante financière, $\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right]$, et technique, $\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right]$.

On s'intéresse, dans un premier temps, à la composante financière. Si l'on suppose que les hypothèses habituelles relatives aux marchés financiers sont valides, alors on peut construire une mesure de probabilité risque neutre telle que :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\tilde{\Delta}_T^F \Gamma(0,T)\right] , \tag{5.10}$$

avec $\tilde{\Delta}_T^F = 1/\chi_T$ en introduisant χ_T le *money market account*. De plus, en supposant qu'un taux au comptant existe et est noté $(r_t)_{t\geq 0}$, alors :

$$\tilde{\Delta}_T^F = \exp\left(\int_0^T r_u du\right) . \tag{5.11}$$

Les résultats (5.10) et (5.10) sont obtenus par *Harrison Pliska* [HP81] en se basant sur les travaux de *Harrison* et *Kreps* [HK79], ainsi que *Harrison* [HP81] et [HP83]. Cependant, du fait de leur nature classique, ils sont aussi expliqués dans des livres comme celui de *Duffie* [Duf01], pages 101-128. Ainsi la composante financière est donnée par :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^F \Gamma(0,T)\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right) \Gamma(0,T)\right] . \tag{5.12}$$

On s'intéresse à la composante technique. Comme le marché des polices d'assurance n'est pas aussi liquide que celui financier, on ne peut pas appliquer les méthodes de réplication pour déterminer le prix. Cependant, on peut construire une mesure de probabilité $\mathbb{T}$ avec $d\mathbb{T} = \Delta_T^T d\mathbb{P}$ telle que :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{T}} \left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] . \tag{5.13}$$

Ainsi, la composante technique est donc :

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\Delta_T^T \mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] =_T p_x . \tag{5.14}$$

Les auteurs précisent que l'introduction de cette mesure de probabilité a été proposée par *Venter* [Ven91] puis développée par *Wang* [Wan96], [Wan00], et [Wan02]. L'expression (5.14) illustre une pratique pour le choix de la mesure $\mathbb{T}$. En effet, les probabilités ${}_Tp_x$ peuvent être obtenues à partir de tables imposées par les autorités de régulation ou en utilisant des tables d'exprérience. Dans les deux cas, on choisit une mesure $\mathbb{T}$ différente. De plus, la quantité :

$$C_0 \left(\mathbb{E}_0^{\mathbb{T}} \left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right] - \mathbb{E}_0^{\mathbb{P}} \left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(x,T)}\right]\right) , \tag{5.15}$$

représente la prime pour acquérir le risque de survie de l'assuré.

En combinant les expressions (5.12) et (5.14), la valeur du contrat est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(0,T) &= C_0\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\Gamma(0,T)\right]\ {}_Tp_x \\ &= C_0\left(1+\underline{i}\right)^{-T}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_0^T r_u du\right)\prod_{t=0}^{T}\left(1+\max\left\{\beta I_t;\underline{i}\right\}\right)\right]\ {}_Tp_x \ . \quad (5.16)\end{aligned}$$

Ainsi, la quantité qui joue un rôle important est l'espérance conditionnelle de cette expression. Cette expression est à confronter avec les provisions déterministes :

$$\mathcal{V}(0,T) = C_0\left(1+\underline{i}\right)^{-T}\ {}_T\tilde{p}_x \ , \quad (5.17)$$

avec ${}_T\tilde{p}_x$ la probabilité de survie déduite des tables de mortalité réglementaires.

5.1.3 Hypothèses simplificatrices et mise en œuvre

On s'intéresse à l'espérance conditionnelle (5.16). Pour l'évaluer, il est nécessaire de disposer d'un modèle pour le taux au comptant mais aussi de modéliser la stratégie de gestion du fonds afin de déterminer son rendement annuel I_t puis γ_t.

On utilise la stratégie de gestion, basée sur de nombreuses simplifications, suivante :

— On définit une allocation des actifs cible, c'est à dire un ensemble de flux associés à une date de paiement. D'un point de vue financier, c'est donc une obligation avec ou sans coupons, ce qui permet de contrôler la *duration* du fonds. D'un point de vue actuariel, cette obligation permet de couvrir des flux, induits par le paiement des prestations aux assurés.

— Les opérations suivantes sont effectuées lors de chaque année :

1. Au début de chaque année, la valeur du fonds est allouée dans l'obligation recherchée. Concrètement, on calcule la valeur de marché de cette obligation et l'intégralité de la valeur du fonds est convertie dans cette obligation.
2. Les éventuels coupons perçus sont enregistrés comme liquidités.
3. A la fin de l'année, on calcule la valeur de marché du fonds, les taux ayant changé et l'échéance des paiements s'étant raccourcie. On ajoute la valeur des liquidités accumulées et on calcule le rendement annuel I_t.
4. On retourne au point 1. et la valeur des fonds et des liquidités est intégralement réinvestie dans l'obligation cible.

Cette stratégie de gestion est simple à comprendre mais elle se base sur les différentes hypothèses fortement simplificatrices :

— Chaque année, tous les actifs du fonds sont revendus et l'intégralité du produit de la vente est réinvesti. Cette stratégie permet de contrôler la *duration*. Cependant,

dans la pratique, de nombreux actifs ont détenus par les fonds et les opérations peuvent être effectuées sur une minorité afin de contrôler la *duration* ainsi que les plus/moins- values.

— On calcule le rendement à partir de la valeur de marché des actifs et non avec leur valeur comptable. L'utilisation de la valeur comptable implique l'utilisation de règles plus complexes, déduites de la valeur de marché. Comme on étudie l'impact d'un modèle de taux, l'utilisation de la valeur de marché permet de mieux percevoir cet effet.

— Le règlement [IVA11] impose que la valeur du fonds soit supérieure ou égale au montant des provisions. Si cette condition n'est pas remplie, il est nécessaire de procéder à une recapitalisation du fonds. On ne prend pas en compte cet aspect dans un souci de simplicité.

— On ne considère que le risque de taux : L'obligation est valorisée en ne prenant pas en compte le risque de crédit. Dans la réalité, les fonds détiennent une grande partie de titres italiens donc l'absence de risque de crédit est une hypothèse très simplificatrice. De plus, seule une classe d'actifs est considérée alors que d'autres actifs sont acquis par les fonds, comme le montre le tableau 5.1, notamment des actions et des actifs immobiliers.

L'étude est restreinte à la valorisation d'une seule police. En réalité, plusieurs polices sont indexées au rendement d'un fonds. De plus, plusieurs fonds peuvent gérés par une société d'assurance. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte différents aspects tels que la stratégie de gestion actif-passif de l'entreprise, les éventuelles recapitalisations du fonds et/ou de l'entreprise. Un exemple de mise en œuvre, dans un système informatique *DISAR* est expliqué par *Castellani* et *Passalacqua* [CP11], notamment p. 416 pour les diverses stratégies de gestion. Une autre description plus détaillée de *DISAR* est effectuée *Dang-Nguyen* [DN14], p. 97-101.

On remarque tout d'abord que le rendement simulé I_t dépend uniquement des taux d'intérêt. C'est pourquoi, on ne peut pas séparer les quantités $\exp\left(\int_0^T r_u du\right)$ et $\Gamma(0,T)$ dans l'évaluation de l'espérance conditionnelle dans l'équation (5.16). De plus, en cas d'utilisation d'une extension à *shift* déterministe, l'intégrale du *shift* est évaluée à l'instant initial $t = 0$. Pour calculer le coefficient d'actualisation à un instant futur t, on ajuste la composante stochastique par :

$$\int_t^\tau \varphi(u)du = \int_0^\tau \varphi(u)du - \int_0^t \varphi(u)du\,, \tag{5.18}$$

avec τ l'échéance considérée. Le terme de gauche intervient d'après l'équation (3.4). Les deux intégrales dans le terme de droite sont obtenues par l'interpolation des données de marché, comme expliqué en 3.1.2. De plus, afin de contrôler la qualité de la simulation, on compare le coefficient d'actualisation simulé (entre l'instant initial jusqu'à une certaine échéance) avec celui théorique.

On effectue le calcul de l'espérance conditionnelle de l'équation (5.12) en suivant les étapes suivantes. On se donne un horizon temporel, correspondant à la durée de vie de la police considérée noté $t = T$, ainsi qu'un nombre de simulations N^S. Pour chacune des simulations générées :

— Simulation d'une trajectoire des facteurs : On construit une trajectoire entre $t = 0$ et $t = T$. Comme on calcule aussi le coefficient d'actualisation empirique, on simule la trajectoire avec un pas mensuel.
— Calcul des rendements du fonds I_t : On applique la stratégie de gestion présentée en 5.1.3. Entre chaque instant on applique donc les points 1., 2. et 3. On obtient donc une trajectoire des rendements simulés. D'un point de vue pratique, on effectue des calculs de coefficient d'actualisation, donc il suffit de fournir la valeur du (ou des facteurs) ainsi que l'interpolation pour du *shift* afin d'appliquer l'équation (5.18).
— Calcul du coefficient d'indexation : On applique la formule (5.5) pour obtenir γ_t puis (5.6) pour calculer le coefficient de revalorisation cummulatif $\Gamma(0, T)$.
— Actualisation : On actualise le coefficient d'indexation avec le coefficient d'actualisation calculé en premier.

Dans les exemples numériques, on utilise comme courbe de taux de l'EIOPA qui a été utilisée pour les calibrations précédentes. De plus, on suppose que l'allocation recherchée est une obligation qui paye un coupon semestriel de 1/100 et rembourse un nominal unitaire à une échéance de 7 ans. Le taux technique actuariel est $\underline{i} = 1/100$ et le coefficient de participation vaut $\beta = 0.95$. On effectue des simulations de 1 à 25 ans. On effectue $N^S = 100000$ simulations.

5.2 Valorisation dans le cadre des modèles univariés

5.2.1 Le modèle de *Vasicek* et *Vasicek*++

Pour chaque modèle considéré, on représente la moyenne (noir) ainsi que les quantiles (à 1/100, 5/100, 10/100, 25/100 50/100, 75/100, 90/100 95/100 et 99/100) des variables aléatoires suivantes pour les échéances simulées :

— Le rendement du fonds I_t,
— Le coefficient de revalorisation γ_t,
— Le coefficient de revalorisation cumulatif $\Gamma(0, T)$,
— Le coefficient de revalorisation cumulatif $\Gamma(0, T)$ actualisé,
— La différence entre le coefficient de revalorisation cumulatif $\Gamma(0, T)$ et la composante garantie,
— Le coefficient d'actualisation.

Les quatre premières quantités suivent la progression de la valorisation de la police considérée. La cinquième correspond à un contrôle et la dernière permet de juger si les simulations sont en nombre suffisant et sans biais.

Dans un premier temps, on effectue les simulations décrites en 5.1.3 dans le cadre du modèle de *Vasicek* en utilisant les paramètres du tableau 2.1. On résume les résul-

tats dans les graphiques 5.1. On observe que le rendement du fonds I_t peut avoir des

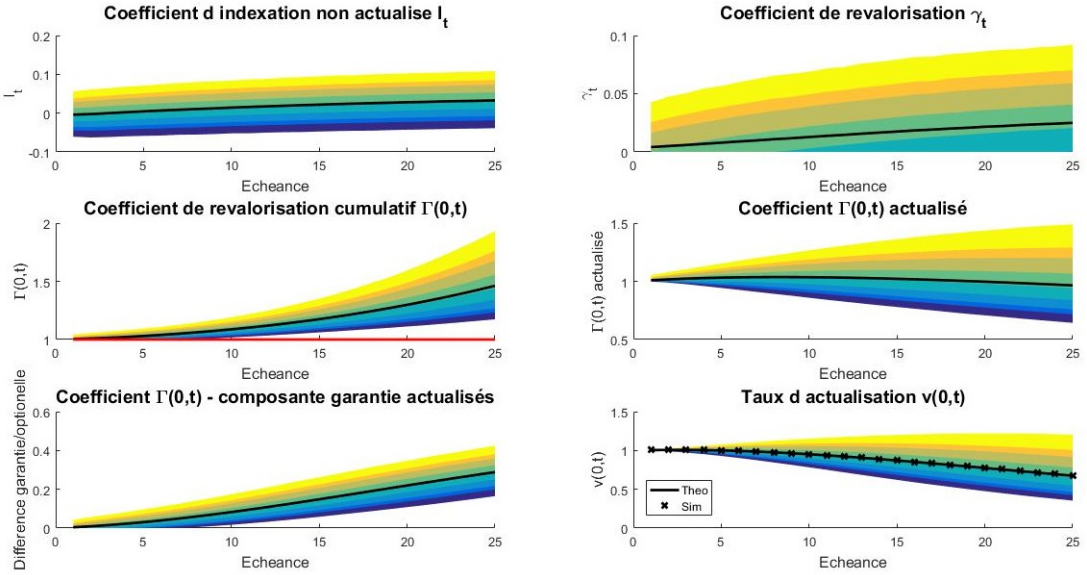

FIGURE 5.1 – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de* Vasicek

valeurs positives et négatives mais montre un comportement croissant avec le temps. De plus, sa volatilité semble constante. Lorsque le coefficient de redistribution γ_t est calculé, l'effet de la garantie crée une distortion de la distribution précédente. En effet on remarque que de nombreuses valeurs sont concentrée a 0 (la très large majorité pour les premières échéances). C'est pourquoi, les quantiles inférieurs n'apparaissent pas dans le graphique, étant tous nuls. Le coefficient de revalorisation cummulatif $\Gamma(0,T)$ est également croissant. On représente (en rouge) le coefficient de revalorisation cummulé garanti. Il est égal à un pour toutes les échéances puisque le capital est garanti. En observant le coefficient de revalorisation cummulatif actuatlisé, on remarque que la majorité des valeurs sont inférieures à un mais que certains quantiles sont supérieurs à un. La différence entre le coefficient de revalorisation garanti est nulle pour les premières échéances. Enfin, le nombre de simulations est satisfaisant pour le coefficient d'actualisation puisque les moyennes empiriques et théoriques coincident. Des taux d'intérêt peuvent être négatifs puisque certains quantiles montrent un coefficient d'actualisation supérieur à un.

On effectue les mêmes simulations avec le modèle de *Vasicek++*. On choisit la calibration qui garantit un *shift* positif, donc les paramètres du tableau 3.2. On représente le résultat des simulations dans les graphiques 5.2. On remarque une discontinuité pour le rendement du fonds I_t entre la première année et le reste des échéances simulées. Elle se répercute également sur le coefficient de revalorisation γ_t. Elle s'explique par une valeur initiale éloignée de la valeur d'équilibre donc l'effet de retour vers la moyenne est prépodérant. En dehors de cette discontinuité, on remarque que la volatilité du fond est

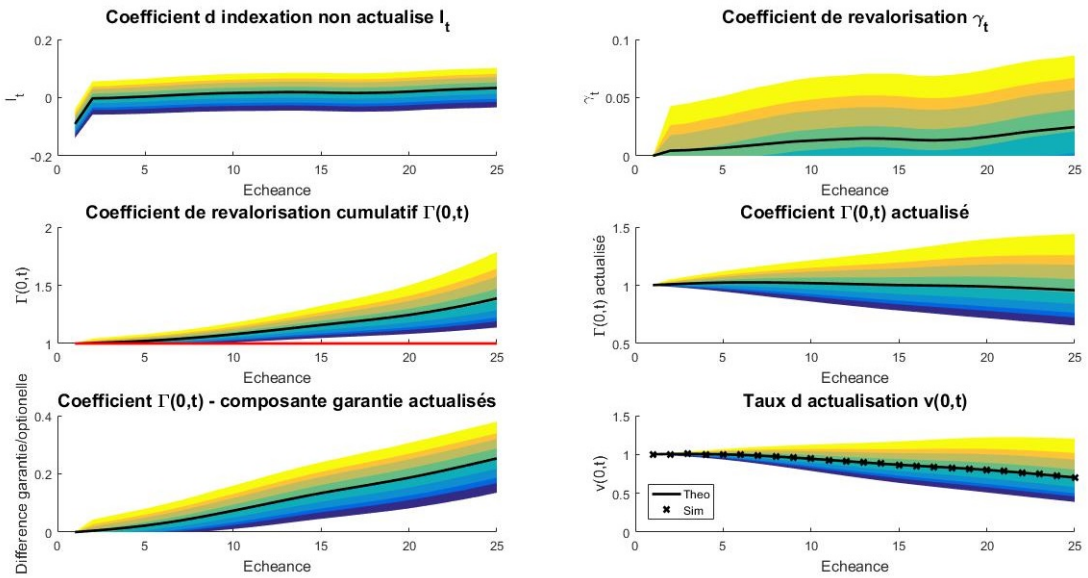

FIGURE 5.2 – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de* Vasicek++

constante pour les autres échéances. Un effet du *shift* déterministe se manifeste sur le coefficient γ_t et $\Gamma(0,T)$. En effet, les moyennes et les quantiles ne sont pas monotones avec l'échéance, comme c'est le cas pour le modèle de *Vasicek*. On observe également que l'ordre de grandeur du coefficient de revalorisation actualisé est le même pour les deux modèles mais le modèle de *Vasicek++* a une volatilité moindre. Comme dans le modèle de *Vasicek*, des taux d'intérêt négatifs sont générés. Contrairement au premier modèle, le coefficient d'actualisation n'est pas monotone en moyenne ni sur les quantiles générés. Enfin, le nombre de simulations est suffisant puisque les moyennes empiriques et théoriques sont similaires.

5.2.2 Le modèle de *Black* et *Black*++

On effectue les simulations dans le cadre du modèle de *Black* en utilisant les paramètres du tableau 3.7. On représente les résultats dans le graphique 5.3. Tout comme dans

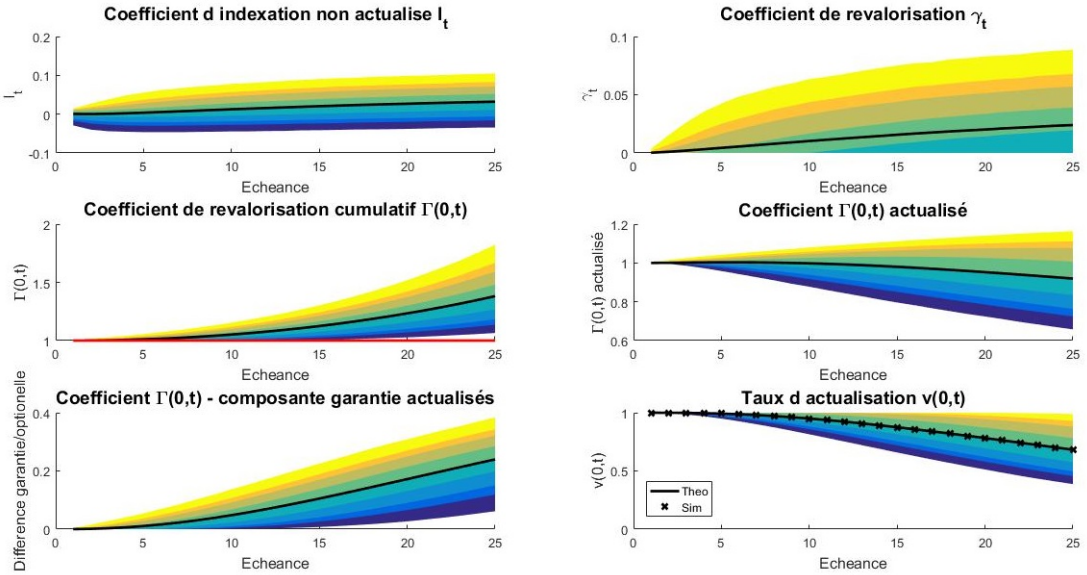

FIGURE 5.3 – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de* Black

le cadre du modèle de *Vasicek*, le rendement du fonds est croissant avec l'échéance. En revanche, on observe que sa volatilité est croissante lors des premières échéances. Comme pour les deux modèles précédents, la couverture tronque la distribution du coefficient de revalorisation γ_t. Le cofficient de revalorisation cummulatif est, sur le court terme confondu avec un, soit la composante garantie. Pour le long terme, il est légèrement plus faible qu'en utilisant les modèle de *Vasicek* et *Vasicek*++. Le coefficient de revalorisation est moins dispersé à long terme qu'avec les deux modèles précédents. Enfin, en observant les distributions du coefficient d'actualisation, on en déduit que le nombre de simulations est satisfaisant et que le modèle ne génère pas empiriquement de taux négatifs. En réalité, pour les premières échéances, le coefficient d'actualisation est pratiquement égal à un. Cette observation est à relier avec le fait que la volatilité du rendement du fonds I_t est croissant lors des premières échéances.

Dans un deuxième temps, on effectue ces simulations avec le modèle de *Black*++. On effectue une estimation des paramètres du modèle comme dans la sous-section 3.2.2. Une difficulté est que les taux sont négatifs donc on ne peut pas concillier une calibration satisfaisante avec un *shift* positif pour toutes les échéances considéres [2]. C'est pourquoi

2. C'est une observation empirique, diverses tentatives de calibration on été effectuées. *Brigo* et *Mercurio* [BM06] (pp. 106-109) ont une discussion plus approfondie de cet argument.

on exclut les valeurs négatives des la courbe de taux (les 5 premières échéances). On utilise la norme de type (3.14) et on utilise les contraintes de type (3.20), c'est à dire que l'on ajuste que les valeurs initiale et d'équilibre. On obtient donc les paramètres du tableau 5.2. On représente également les graphiques habituels, pour évaluer la qualité

Paramètre	Valeur
$x_0^{(5,B)}$	-0.0309
$\kappa^{(5,B)} = \kappa^{(1,B)}$	0.0532
$\theta^{(5,B)}$	0.0452
$\sigma^{(5,B)} = \sigma^{(1,B)}$	0.0054
$\underline{s}$	0

Table 5.2 – *Paramètres du modèle de* Black*++ calibrés sur la courbe EIOPA au 31 décembre 2016 (taux de 1 à 6 and exclus).*

des paramètres obtenus, dans la figure 5.4. Comme attendu, le *shift* et son intégrale sont

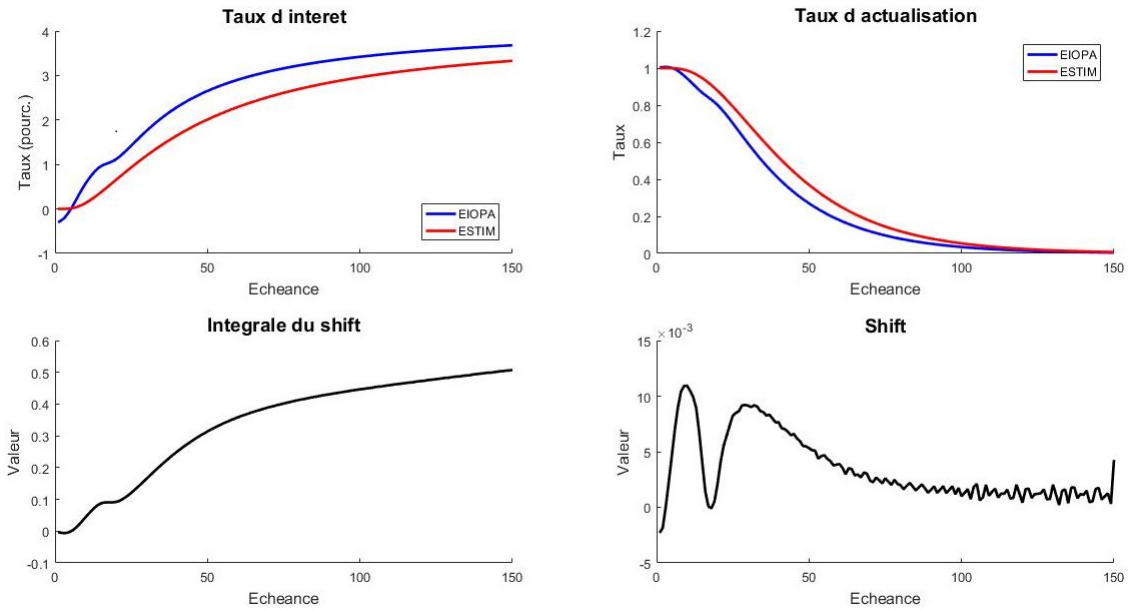

Figure 5.4 – *Extension à* shift *déterministe de la courbe de taux EIOPA au 31 décembre 2016 avec le modèle* Black*++ dont les paramètres sont ceux du tableau 5.2.*

négatifs pour les premières échéances. En revanche, le *shift* est positif et son intégrale est croissante pour les autres échéances. Tout comme les calibrations précédentes, on observe, d'une part, que le shift atteint une valeur nulle à 20 ans et, d'autre part, un comportement oscillatoire pour les échéances longues.

En effectuant les simulations, on obtient le graphique 5.5. On remarque le rendement

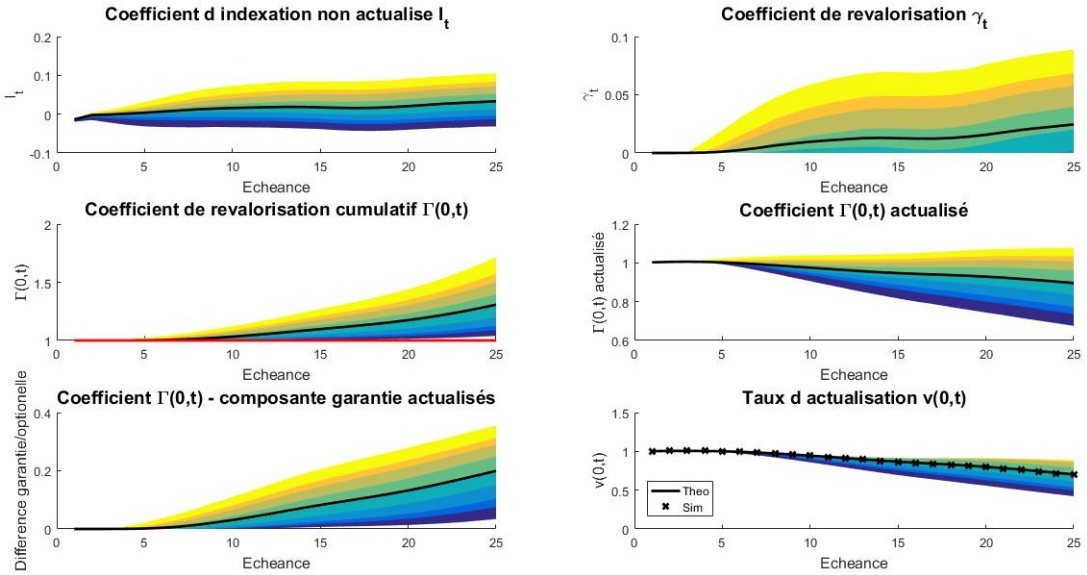

FIGURE 5.5 – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de* Black++

I_t ainsi que ses quantiles non sont pas monotones avec les échéances considéres, comme pour le modèle de *Vasicek++*. Cet effet est lié à l'utilisation d'un *shift* non monotone. Ensuite, les coefficients γ_t, $\Gamma(0,T)$, ainsi que son actualisation ont une volatilité très basse durant les premières échéances. En observant le coefficient d'actualisation, on déduit qu'il n'a pas de volatilité et est pratiquement égal à un. Ainsi, l'option est activée durant les premières années. Pour les échéances successives, la volatilité de toutes ces variables aléatoires est croissante. Enfin, l'ordre de grandeur du coefficient de revalorisation actualisé est le même que pour le modèle de *Black*.

5.2.3 Le modèle BG et BG++

On effectue les simulations dans le cadre du modèle BG en utilisant les paramètres du tableau 3.4, sans utiliser le *shift*. On représente les résultats dans le graphique 5.6. Contrairement au modèle de *Black*, le coefficient de revalorisation γ_t est légèrement moins

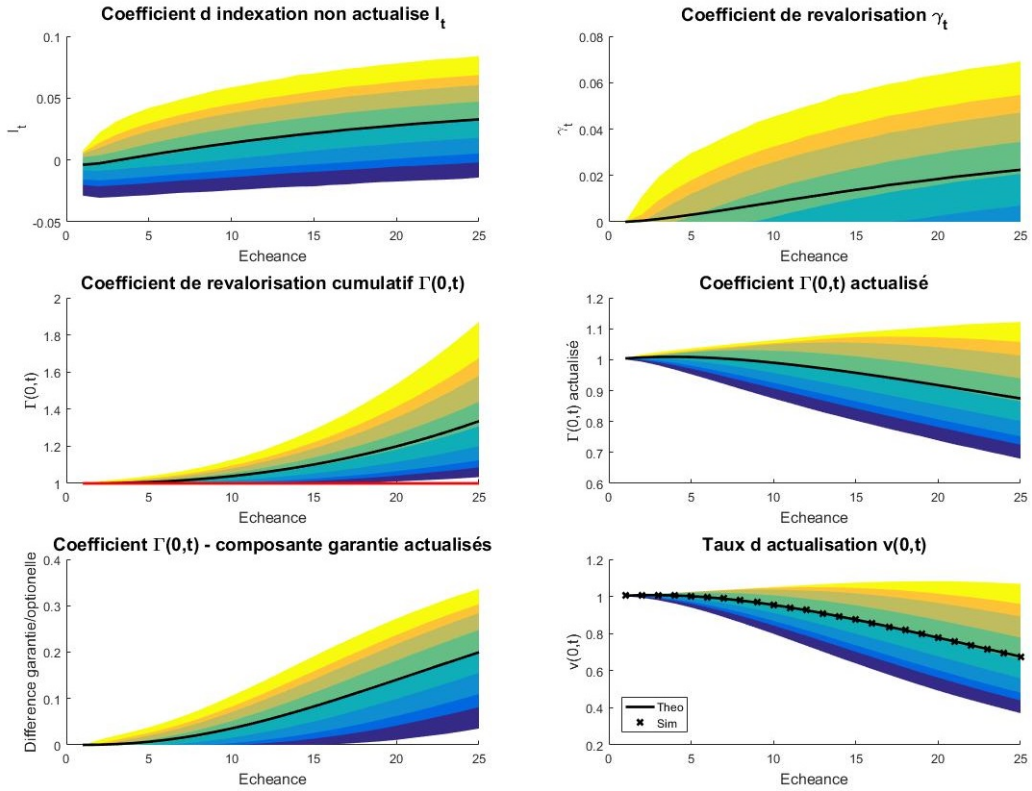

FIGURE ***5.6*** – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de BG*

élevé. Cela se répercute sur le coefficient $\Gamma(0,T)$ actualisé ou non. Néamoins, l'ordre de grandeur des moyennes est similaire mais la volatilité est plus faible. Comme attendu, le modèle génère des taux négatifs puisque certains quantiles du coefficient d'actualisation sont supérieurs à un.

Enfin, on effectue les simulations avec le modèle BG++ avec les paramètres du tableau 3.5. Tout d'abord, les ordres de grandeurs des moyennes obtenues sont simulaires à celles des modèles précédents. Ensuite, comme pour les modèles de *Vasicek*++ et *Black*++, l'introduction d'un *shift* déterministe implique un comportement non monotone (en moyenne et sur les quantiles) pour toutes les variables aléatoires considérées. De plus, comme dans le cadre du modèle de *Black*++, les coefficients γ_t, $\Gamma(0,T)$, ainsi que son actualisation ont une volatilité très basse durant les premières échéances sont

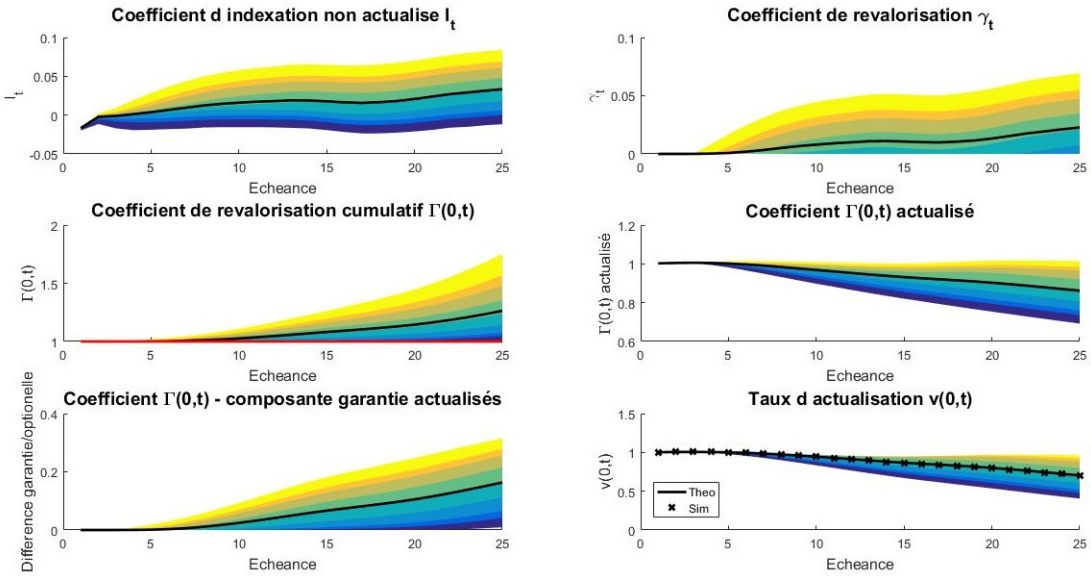

FIGURE 5.7 – *Analyse du coefficient d'indexation du fonds dans le cadre du modèle de BG++*

constants. Cette observation est à lier avec une très faible volatilité du coefficient d'actualisation. Pour les échéances successives, la volatilité de toutes ces variables aléatoires est croissante. Enfin, le modèle génère des taux négatifs, notamment durant les premières échéances, donc ils sont certainement négatifs puisque la volatilité est basse.

Chapitre 6

Conclusions

D'un point de vue économique et financier, les taux d'intérêt négatifs n'ont pas, *a priori* de sens, puisqu'ils impliquent une perte de capital pour le prêteur. C'est pourquoi le modèle de *Vasicek*, qui peut en générer, a été reformulé par *Black*. II suppose que le taux au comptant est le maximum entre un processus stochastique, le *shadow rate*, et 0. Ce faisant, il est positif ou nul par construction. L'observation de taux négatifs a induit un changement de paradigme dans la modélisation de taux. Le modèle BG est obtenu en bornant le *shadow rate* par une limite inférieure négative, ce qui permet d'obtenir un coefficient d'actualisation supérieur à un. Un inconvénient de ce modèle (tout comme pour celui de *Black*) est l'absence de formule fermée pour le coefficient d'actualisation. On dénombre cependant diverses techniques d'approximation. Un exemple est l'approche de *Kripnner* qui est un bon compromis entre simplicité mathématique et qualité de l'approximation. Une ultérieure généralisation consiste à introduire une dépendance temporelle (déterministe) pour la limite inférieure.

Au cours de ce travail, deux modèles ont été combinés : Le modèle de *Black* généralisé et l'extension à *shift* déterministe. Cette combinaison est assez simple d'un point de vue théorique. Pour le modèle, on remarque que le rôle de la limite inférieure pour définir le taux au comptant est affaibli. Cependant, comme ce paramètre peut être délicat à estimer, il est préférable d'utiliser une valeur fixe. Deux exemples numériques ont été proposés. Dans le premier, on illustre comment effectuer un *fit* parfait à partir d'une courbe de taux donnée. C'est ce problème qui a donné naissance à *shift* déterministe, les modèles stochastiques à un facteur tels que *Vasicek* ou CIR n'étant pas très performants. L'application au modèle BG est relativement simple. Le second exemple numérique consiste à utiliser l'apport précédent pour corriger l'erreur d'approximation pour le calcul du coefficient d'actualisation. Pour ce faire, on substitue la courbe de taux de marché avec une courbe de taux simulée.

Les résultats ont été également étendus aux modèles multivariés. En effet, le *shadow rate* peut être modélisé comme la somme de plusieurs facteurs stochastiques. Un choix commun dans la litérature est d'utiliser des modèles gaussiens tels que G2 ou AFDNS à deux ou trois facteurs. Comme ces modèles sont gaussiens, introduire une limite inférieure

a un sens. L'extension à *shift* déterministe peut être appliquée comme dans le cadre du modèle BG. En effet, l'approximation de *Krippner* est également valable pour des modèles multivariés. On est donc en mesure d'utiliser les méthodes mathématiques précédement employées. Cependant, ces modèles doivent être approdondis d'un point de vue théorique et pratique. Les calibrations n'ont pas été présentées dans ce travail mais devraient être effectuées afin de mieux comprendre ces modèles et l'extension proposée.

Les modèles à un facteur ont été appliqués pour la valorisation d'un contrat simplifié inspiré de polices italiennes. C'est une police versant un capital si l'assuré est vivant à une certaine date. Elle offre une garantie de capital. En appliquant les techniques de valorisation, on décompose la valeur du contrat comme le produit du capital initialement versé, l'espérance conditionnelle du coefficient de revalorisation actualisé et une probabilité repésentant les risques techniques. Ainsi, le coefficient de revalorisation joue un rôle central pour la valorisation de la police. Une particularité de ces contrats est l'indexation des prestations (et des primes), donc du coefficient de revalorisation, au rendement comptable d'un fonds, nommé *gestione separata*. Son mandat de gestion est inclus dans les conditions contractuelles. Dans le cadre des exemples, la stratégie de gestion du fonds a été simplifiée en introduisant un mécanisme de *rolling duration*. Les modèles de taux ont été calibrés sur la même courbe de taux mais l'étude de la distribution du coefficient de revalorisation montrent différentes propriétés qualitatives et quantitatives.

Une autre direction pour l'extension de ce travail est la formulation des résultats sous la mesure historique. En effet, ils ont été obtenus sous la mesure risque-neutre, ce qui a permis diverses considérations liée à la valorisation de contrats financiers ou des polices d'assurance vie. Cependant, pour évaluer les risques associés à ces contrats, il est nécessaire de modéliser l'evolution des facteurs de risque sous la mesure historique. Il existe quelques formulations des modèles de *shadow rate*, même multivariés, sous la mesure historique. En effet, ils sont utilisés par certains auteurs pour analyser la politique monétaire et leur capacité de prévision est étudiée. Pour ce faire, il est donc nécessaire de formuler l'évolution des facteurs sous la mesure historique. C'est pourquoi, il existe donc une base pour considérer l'extension de ces résultats sous la mesure historique, ce qui permet d'étendre le champs d'application du modèle.

Chapitre 7

Appendice

A Rappels de mathématiques financières

A.1 Le cadre déterministe

On considère un actif financier dont on note génériquement P_t son prix pour tout instant $t \geq 0$.

Définition A.1. *Pour deux instants t et T tels que $T > t \geq 0$, on définit le rendement de l'actif, noté $y(t,T)$, par :*

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t} \log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) \Leftrightarrow P_T = P_t \exp\left[y(t,T)(T-t)\right] . \tag{A.1}$$

Ainsi, entre t et T, le prix de l'actif est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dP_u}{du} = y(t,T), T \geq u \geq t , \tag{A.2}$$

Un actif particulier est l'obligation sans coupon unitaire :

Définition A.2. *Une obligation sans coupon unitaire de maturité T est un contrat qui verse une unité de compte en T. On note $P(t,T)$ son prix évalué en T, pour $T \geq t$. Ce prix est aussi appelé coefficient d'actualisation.*

En absence d'opportunité d'arbitrage le prix en T satisfait $P(t,T) = 1$. Le rendement de l'équation (A.1) s'exprime donc par :

$$y(t,T) = \frac{-1}{T-t} \log\left[P(t,T)\right] . \tag{A.3}$$

On étend l'équation (A.2) en supposant que le rendement instantané d'un actif quelconque est déterministe et noté r_u, pour tout $u \geq 0$. Le prix de l'instrument, P_u pour $T \geq u \geq t$, est donc caractérisé par l'équation différentielle :

$$\frac{dP_u}{du} = r_u , \tag{A.4}$$

d'où le prix de l'actif en T :

$$P_T = P_t \exp\left(\int_t^T r_u du\right) . \tag{A.5}$$

Si le rendement est constant alors on retrouve (A.1). De plus, pour une obligation sans coupon unitaire de maturité T, on a en particulier :

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) . \tag{A.6}$$

Définition A.3. *Le rendement instantané de l'obligation sans coupon est le taux au comptant (*spot/short rate*).*

Définition A.4. *Soit r_u, pour tout $u \geq 0$, le taux au comptant et soient t et T deux instants tels que $T > t \geq 0$. Le coefficient d'actualisation, noté $P(t,T)$, est le prix en t d'une obligation sans coupon versant une unité de compte en T. Il est donc donné par l'équation (A.6).*

Dans les exemples précédents, la composition des taux d'intérêt s'effectue sur base continue. Une autre approche est la composition annuelle, c'est à dire une relavorisation annuelle égale à $(1+i)$ où i est le taux d'intérêt. Ainsi, on a :

Définition A.5. *Le taux d'intérêt annuel, noté $i(t,T)$, est défini par :*

$$P(t,T)\left[1+i(t,T)\right]^{T-t} = 1 \Leftrightarrow i(t,T) = \frac{1}{P(t,T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1 . \tag{A.7}$$

L'interprétation de l'équation (A.7) est la suivante. En t, on achète une obligation sans coupon d'échéance T au prix $P(t,T)$. On applique une composition annuelle entre t et T d'où le terme de gauche. Le terme de droite est simplement la valeur en T de l'obligation sans coupon, i.e. $P(T,T) = 1$. On en déduit le coefficient d'actualisation à partir du taux d'intérêt annuel en inversant l'équation (A.7) :

$$P(t,T) = \frac{1}{\left[1+i(t,T)\right]^{T-t}} . \tag{A.8}$$

Pour $T_2 > T_1 > t$, on considère un contrat (un *forward*) qui livre en T_1 une obligation sans coupon d'échéance T_2. La valeur actuelle de ce contrat (en t) est donc $P(t,T_2)/P(t,T_1)$.

Définition A.6. *Le taux* forward*, noté $f(t,T_1,T_2)$, est le rendement continu du* forward *:*

$$\begin{aligned} \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)} &= \exp\left[-f(t,T_1,T_2)(T_2 - T1)\right] \\ &\Leftrightarrow f(t,T_1,T_2) = -\frac{1}{T_2-T_1}\log\left(\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}\right) . \end{aligned} \tag{A.9}$$

On en déduit le taux *forward* instantané :

Définition A.7. *Le taux* forward *instantané est défini par :*

$$f\left(t,t+\tau\right)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\log\left[P\left(t,t+\tau\right)\right]\,. \tag{A.10}$$

L'interpétation de ce taux est la suivante. On considère la limite d'un taux *forward* avec $T_1=T$ et $T_2=T+\Delta t$. Ainsi :

$$\lim_{\Delta t\to 0} f\left(t,T,T+\Delta t\right)=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\log\left(P(t,T+\Delta t\right)-\log\left(P(t,T\right)}{\Delta t}=-\frac{\partial}{\partial\tau}\log\left[P\left(t,t+\tau\right)\right]\,.$$

A.2 Le cadre stochastique

Dans le cadre des modèles stochastiques, on utilise un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. La construction du processus stochastique du prix d'un actif est un sujet très technique : De la notion de l'absence d'opportunités d'arbitrage, on construit une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ qui permet d'évaluer des contrats. Dans un premier temps, des résultats ont été obtenus dans le cadre discret puis continu avec un nombre fini puis infini d'actifs. Des articles fondamentaux sont de *Harrison* et *Pliska* [HP81] [HP83] ou de *Delbaen* et *Schachermayer* [DS94].

On introduit le cadre stochastique pour le taux en comptant en suivant l'approche de *Musiela* et *Rutkowski* [MR04] (p. 331-337). On suppose que les marchés ont un horizon fini, c'est à dire que l'on considère les prix dans un intervalle $[0;T^*]$. Une première hypothèse relative à la valeur du coefficient d'actualisation est la suivante :

Hypothèse A.8. *Pour chaque échéance $T\leq T^*$, le coefficient d'actualisation $P(t,T)$, $t\in[0;T]$, est un processus strictement positif, adapté à la filtration $\mathcal{F}$ et défini sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ avec $\mathcal{F}$ la filtration $\mathbb{P}$-complétée de la filtration générée par un mouvement brownien B.*

On suppose l'existence d'un taux au comptant r_t et on définit le processus M_t par :

$$M_t=\exp\left(\int_0^t r_u du\right)\,, \tag{A.11}$$

Cette quantité, nommée le *savings account*, mesure l'accroissement d'une unité de compte placée sur un compte et rémunéré avec le taux au comptant.

Définition A.9. *Une famille $P(t,T)$ avec $t\leq T\leq T^*$ de processus adaptés est une famille de coefficients d'actualisation sans arbitrage relatifs à un taux au comptant r si :*

- *$P(T,T)=1$ pour tout $T\in[0,T^*]$.*
- *Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega,\mathcal{F}_{T^*})$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que pour tout échéance $T\in[0,T^*]$, le prix :*

$$\tilde{P}(t,T)=P(t,T)/M_t\,, \tag{A.12}$$

est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Puisque $\tilde{P}(t,T)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, alors par définition $\tilde{P}(t,T) = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{P}(T,T)\right]$ et donc, en t, le coefficient d'actualisation est donné par :

$$P(t,T) = M_t \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[M_T^{-1}\right] = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)\right]. \tag{A.13}$$

Une fois le coefficient d'actualisation calculé, on en déduit le rendement ainsi que le taux *forward* en appliquant les relations (A.1) et (A.10).

B La courbe de taux de l'EIOPA

B.1 Base légale

La présentation de la base légale pour la courbe de taux de l'*EIOPA* suit la hiérarchie réglementaire ainsi que sa mise en place, de la directive à la documentation technique. Selon l'article 77(e) de la direction *Solvency II*, l'*EIOPA* doit publier une courbe de taux avec et sans *volatility adjuster* :

> 1. EIOPA shall lay down and publish for each relevant currency the following technical information at least on a quarterly basis :
>
> (a) a relevant risk-free interest rate term structure to calculate the best estimate referred to in Article 77(2), without any matching adjustment or volatility adjustment ;
>
> [...]
>
> (c) for each relevant national insurance market a volatility adjustment to the relevant risk-free interest rate term structure referred to in Article 77d(1).

Cette directive est complétée par les actes délégués REF. Tout d'abord, la méthodologie doit être publique selon le point (23) de l'introduction :

> In order to ensure transparency in the determination of the relevant risk free interest rate, in accordance with recital 29 of Directive 2014/51/EU, the methodology, assumptions and identification of the data used by the European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) to calculate the adjustment to swap rates for credit risk, the volatility adjustment and the fundamental spread for the matching adjustment, should be published by EIOPA as part of the technical information to be published by virtue of Article 77e(1) of Directive 2009/138/EC.

Cette méthodologie détaillée dans le document [EIO17]. De plus, d'après les actes délégués, les courbes de taux doivent avoir les propriétés suivantes :

- Elles sont calculées à partir de taux *swap* ou d'obligation d'Etat (article 44),
- Les taux *swap* ont un ajustement pour le risque de crédit (article 45),
- Si les taux *swap* ne sont pas issus d'un marché dit *DLT* (*deep*, *liquid* and *transparent*), alors il est nécessaire de les extrapoler (article 46),

— Le taux *forward* a une limite nommée *ultimate forward rate* (article 47),
— Un ajustement pour la volatilité (*volatility adjuster*) peut être appliqué à la courbe de taux de base (articles 49 et 50).

Enfin, l'*EIOPA* a adopté les critères additionnels, [EIO17], pp. 12 :

> EIOPA has based those decisions on the following principles : a) respect to the essential elements underpinning the political agreement of Directive 2014/51/EU (Omnibus II Directive),
>
> b) transparency of all the elements of the process of calculation,
>
> c) replicability of the calculations, which has as a direct consequence the restriction of expert judgement to the minimum extent possible, if any,
>
> d) market consistency, prudent assessment of the technical provisions and optimal use of market information.

B.2 Le modèle mathématique

La construction est basée sur le modèle de *Smith* et *Wilson* [SW00] et elle est détaillée dans la documentation [EIO17]. Les paramètres fondamentaux du modèle sont :

— La limite du taux *forward* ω : C'est la valeur du taux *forward* pour une échéance infinie.
— La vitesse de convergence α : Elle ajuste la convergence des taux *forward* vers ω.

Deux fonctions jouent un rôle central :

$$W(u,v) = \exp\left[-\omega\left(u+v\right)\right], \tag{B.1}$$

$$H(u,v) = \alpha\min\left\{u,v\right\} - \exp\left[-\alpha\max\left\{u,v\right\}\right] sinh\left[\alpha\min\left\{u,v\right\}\right]. \tag{B.2}$$

avec $W(u,v)$ la fonction de *Wilson* et $H(u,v)$ le noyau *Wilson* function. On les dénote sous forme matricielle $\mathbf{W}\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)$ pour deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$, i.e. $\left[\mathbf{W}\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)\right]_{i,j} = W\left(v_i,u_j\right)$; $\mathbf{H}\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)$ pour deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$. La dérivée première est :

$$G(u,v) = \frac{H(u,v)}{dv} = \begin{cases} \alpha - \alpha\exp\left(-\alpha u\right) cosh\left(-\alpha v\right) \text{ si } v \leq u \\ \alpha\exp\left(-\alpha v\right) sinh\left(-\alpha u\right) \text{ si } u \leq v \end{cases}. \tag{B.3}$$

On la note $\mathbf{G}\left(\mathbf{v},\mathbf{u}\right)$ sous forme matricielle.

L'idée principale de la méthodologie de *Smith-Wilson* est de remplacer une matrice de flux financiers $\mathbf{C}$ pour des échéances $\mathbf{u}$ et un prix de marché $\mathbf{p}$ en un vecteur auxilliaire $\mathbf{Qb}$. Tout d'abord un vecteur $\mathbf{d}$ tel que $\left[\mathbf{d}\right]_i = \exp\left(-\omega\left[\mathbf{u}\right]_i\right)$ est calculé, puis une matrice diagonale $\mathbf{Q}$ est défine en tant que produit $\mathbf{C'd}$ dont on note $\mathbf{q}$ le vecteur des termes diagonaux. Enfin le vecteur $\mathbf{b}$ est le produit $\left[\mathbf{Q'H}\left(\mathbf{u},\mathbf{u}\right)\mathbf{Q}\right]^{-1}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)$.

Le coefficient d'actualisation pour une échéance v, noté $p(v)$, est donné par :

$$p(v) = \exp\left(-\alpha\omega\right) + \mathbf{W}\left(v,\mathbf{u}\right)\mathbf{Cb} = \exp\left(-\alpha\omega\right) + \exp\left(-\alpha\omega\right)\mathbf{H}\left(v,\mathbf{u}\right)\mathbf{Qb}. \tag{B.4}$$

Similairement, le taux *forward* est calculé comme :

$$f(v) = \omega - \frac{\mathbf{G}(v, \mathbf{u})\,\mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u})\,\mathbf{Qb}}\,. \tag{B.5}$$

La convergence du taux *forward* vers ω en T est mesuré par la fonction :

$$g(\alpha) = |f(T) - \omega| = \frac{\alpha}{1 - K\exp(\alpha T)}\,, \tag{B.6}$$

avec $K = \frac{1+\alpha\mathbf{u}'\mathbf{Qb}}{sinh(\alpha\mathbf{u}')\mathbf{Qb}}$.

L'*EIOPA* effectue les calculs suivants :

— Ajustement pour le risque de crédit : Les taux *swap* sont abaissés d'une valeur déterminée par l'*EIOPA*, nommée *Credit Risk Adjustement* (*CRA*).

— Matrice des flux financiers : On utilsie de préférence des taux *swap* de marchés *DLT*. En pratique, l'*EIOPA* utilise des taux pour une maturité de un à une échéance maximale nommée *Last Liquid Point* (LLP). Cette dernière est déterminée par l'*EIOPA*. Avec les *swaps* de taux, on construit une matrice de flux **C** (partie fixe du *swap*), et les quotations (ajustées) déterminent le vecteur **p** ce qui permet de calculer le vecteur **Qb**.

— Utilisation du *Ultimate Forward Rate* : Il est estimé par l'*EIOPA* et est noté (UFR), ainsi le paramètre ω est $\omega = \ln(1 + UFR)$.

— Calibration de α : Les taux *forward* à partir d'une échéance réglementaire (nommée *convergence point* qui est la somme du *LLP* et d'une période de convergence fixée par l'*EIOPA*) doivent appartenir à l'intervalle $[\omega - \delta; \omega + \delta]$. La tolérance de convergence δ est égale à un point de base (voir [EIO17], point 304). Elle est mesurée par la fonction (B.6) au point de convergence. Concrètement, le paramètre α est obtenu par une recherche par grille.

D'un point de vue pratique, les paramètres pour l'*euro* sont les suivants :

Paramètre	Valeur
CRA	10 bp
UFR	4.2/100
LLP	20 ans
Point de convergence	60 ans
α (estimé)	0.130011

Table 7.1 – *Paramètres réglementaires pour la courbe de taux de l'*euro *au 31 décembre 2016 (source* EIOPA*)*

La courbe de taux est publiée sous forme d'intérêts annuellement composés pour des échéances de 1 à 150 ans. Elle est publiée avec et sans *volatility adjuster* ainsi que les vecteurs **Qb**. On dispose donc de taux d'intérêt annuels et on en déduit le coefficient d'actualisation en appliquant l'équation (A.8).

Bibliographie

[AC03a] Giulia Andreatta and Stefano Corradin. Fair value of life liabilities with embedded options : an application to a portfolio of Italian insurance policies. In *Proceedings of the AFIR/ERM colloquium*, September 2003.

[AC03b] Giulia Andreatta and Stefano Corradin. Valuing the surrender options embedded in a portfolio of Italian life guaranteed participating policies : A least squares Monte Carlo approach. Working Paper, RAS S.p.A., May 2003.

[ANWR17] Kjersti Aas, Linda R. Neef, Lloyd Williams, and Dag Raabe. Interest rate model comparisons for participating products under Solvency II. *Scandinavian Actuarial Journal*, 0(0) :1–22, 2017.

[Bac01] Anna Rita Baccinello. Fair pricing of life insurance participating policies with a minimum interest rate guarantee. *ASTIN Bulletin*, 31(2) :275–297, November 2001.

[Bac03a] Anna Rita Baccinello. Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *Journal of RIsk and Insurance*, 70(3) :461–487, September 2003.

[Bac03b] Anna Rita Baccinello. Pricing guaranteed life insurance participating policies with annual premiums and surrender option. *North American Actuarial Journal*, 7(3) :1–17, July 2003.

[BC99] Tomas Björk and Bent Jesper Christensen. Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, 9(4) :323–348, 1999.

[BfIS05] Bank for International Settlements. *Zero-coupon yield curves : technical documentation*, 2005. BIS Papers No 25.

[Bla95] Fisher Black. Interest rates as options. *The Journal of Finance*, 50(5) :1371–1376, 1995.

[BM98] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. On deterministic-shift extensions of short-rate models. Technical report, Banca IMI, 1998.

[BM06] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance. Springer, 2nd edition edition, 2006.

[BN99] Simon H. Babbs and K. Ben Nowman. Kalman filtering of generalized vasicek term structure models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(1) :115–130, 1999.

[CDFMP05] Gilberto Castellani, Massimo De Felice, Franco Moriconi, and Claudio Pacati. Embedded value in life insurance. Working Paper, Università di Roma La Sapienza and Università di Siena, 2005.

[CDR11] Jens H.E. Christensen, Francis X. Diebold, and Glenn D. Rudebusch. The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, 164(1) :4 – 20, 2011. Annals Issue on Forecasting.

[CNP16] Nicolaj H. Christensen, Anders Nysteen, and Niklas B. D. Pedersen. Modelling Danish government bonds yields in a low-rate environment. Working paper, Danmarks Nationalbank, No. 106, February 2016.

[CNVK11] Laura Coroneo, Ken Nyholm, and Rositsa Vidova-Koleva. How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model ? *Journal of Empirical Finance*, 18(3) :393–407, 2011.

[Coe14] Benoît Coeuré. Life below zero : Learning about negative interest rates. Presentation at the annual dinner of the ECB's Money Market Contact Group, Frankfurt am Main, 09/09 2014.

[Coe16] Benoît Coeuré. Assessing the implications of negative interest rates. Speech at the Yale Financial Crisis Forum, Yale School of Management, New Haven, 28 July 2016.

[CP11] Gilberto Castellani and Luca Passalacqua. *Applications of Distributed and Parallel Computing in the Solvency II Framework : The DISAR System*, pages 413–421. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[CR15] Jens H. E. Christensen and Glenn D. Rudebusch. Estimating shadow-rate term structure models with near-zero yields. *Journal of Financial Econometrics*, 13(2) :226–259, 2015.

[CR16] Jens H. E. Christensen and Glenn D. Rudebusch. *Modeling Yields at the Zero Lower Bound : Are Shadow Rates the Solution ?*, volume 35 of *Advances in Econometrics*, chapter 3, pages 75–125. Emerald Publishing Group, 2016.

[DFM02a] Massimo De Felice and Franco Moriconi. A course on finance of insurance. Groupe consultatif actuariel europeen, summer school, organized by Istituto Italiano degli Attuari, 2002.

[DFM02b] Massimo De Felice and Franco Moriconi. Finanza dell'assicurazione sulla vita : Principî per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 65 :13–89, 2002.

[DFM05] Massimo De Felice and Franco Moriconi. Market based tools for managing the life insurance company. *ASTIN Bulletin*, 35(1) :79–111, 2005.

[DK96] Darrell Duffie and Rui Kan. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4) :379–406, 1996.

[DL06] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *The Journal of Econometrics*, 130 :337–364, 2006.

[DM16] Milan Damjanović and Igor Masten. Shadow short rate and monetary policy in the Euro area. *Empirica*, 43(2) :279–298, 2016.

[DN14] Stéphane Dang-Nguyen. *Valuation and Control of Risk for Italian Life Policies of "Gestione Separata" Type in the Solvency II Framework : The Case of Credit Risk*. 2014. Thèse de doctorat Sciences et technologies de l'information et de la communication Télécom Bretagne.

[DNLCH14] Stéphane Dang-Nguyen, Jean-Marc Le Caillec, and Alain Hillion. The deterministic shift extension and the affine dynamic Nelson-Siegel model. *The North American Journal of Economics and Finance*, 29 :402 – 417, 2014.

[DNR15] Stéphane Dang-Nguyen and Yves Rakotondratsimba. Valuing the probability of generating negative interest rates under the Vasicek one-factor model. *Communications in Mathematical Finance*, 4(2) :1–47, 2015.

[DNR16] Stéphane Dang-Nguyen and Yves Rakotondratsimba. Control of price acceptability under the univariate Vasicek model. *International Journal of Financial Engineering*, 03(03) :1650014, 2016.

[DS94] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(1) :463–520, 1994.

[DS00] Qiang Dai and Kenneth J. Singleton. Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55(5) :1943–1978, 2000.

[Duf01] Darell Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 2001. Princeton, New Jersey, third edition.

[EIO17] EIOPA. *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*, May 2017. EIOPA-BoS-15/035.

[Fil99] Damir Filipović. A note on the Nelson-Siegel family. *Mathematical Finance*, 9(4) :349–359, 1999.

[Fla15] Sacha Flavian. Modèles de diffusion de taux en période de taux négatifs dans le cadre d'un générateur de scenarios économiques. Mémoire ISUP - Institut des actuaires, 2015.

[GL03] Viatcheslav Gorovoi and Vadim Linetsky. Shadow interest. *RISK*, pages 81–84, December 2003.

[GL04] Viatcheslav Gorovoi and Vadim Linetsky. Black's model of interest rates as options, eigenfunction expansions and japanese interest rates. *Mathematical Finance*, 14(1) :49–78, 2004.

[HJM92] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1) :77–105, January 1992.

[HK79] J.Michael Harrison and David M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3) :381 – 408, 1979.

[HL86] Thomas S. Y. Ho and Sang-Bin Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41(5) :1011–1029, 1986.

[HP81] J.Michael Harrison and Stanley R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3) :215–260, 1981.

[HP83] J.Michael Harrison and Stanley R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading : Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3) :313 – 316, 1983.

[HW90] John Hull and Alan White. Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4) :573–592, 1990.

[HW94] John Hull and Alan White. Numerical procedures for implementing term structure models II : Two-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(2) :37–48, 1994.

[IU13] Hibiki Ichiue and Yoichi Ueno. Estimating term premia at the zero bound : An analysis of Japanese, US, and UK yields. Working paper, Bank of Japan, 13-E-8, May 2013.

[IVA11] IVASS. Regolamento isvap n. 38 del 3 giugno 2011. Regolamento concernente la costituzione e l'amministrazione delle gestioni separate delle imprese che esercitano l'assicurazione sulla vita., 2011.

[IVA12] IVASS. Rilevazione sui rendimenti e sulla composizione delle attività assegnate alle gestioni al IV trim. 2011. Pubblicazioni e statistiche, 2012.

[Kor16] Tomi Kortela. A shadow rate model with time-varying lower bound of interest rates. Bank of Finland Research Discussion Paper, 19 - 2016, 2016.

[Kri12] Leo Krippner. Modifying Gaussian term structure models when interest rates are near the zero lower bound. Working paper, Reserve Bank of New Zealand, DP2012/02, March 2012.

[Kri13a] Leo Krippner. Faster solutions for Black zero lower bound term structure models. Working paper, Centre for Applied Macroeconomic Analysis 66/2013, September 2013.

[Kri13b] Leo Krippner. A tractable framework for zero lower bound Gaussian term structure models. Working paper, Reserve Bank of New Zealand, DP2013/02, August 2013.

[Kri15] Leo Krippner. *Zero Lower Bound Term Structure Modeling - A Practitioner's Guide*. Applied Quantitative Finance. Palgrave Macmillan, 2015.

[KS12] Don H. Kim and Kenneth J. Singleton. Term structure models and the zero bound : An empirical investigation of Japanese yields. *Journal of Econometrics*, 170(1) :32 – 49, 2012.

[LV16] Wolfgang Lemke and Andreea L. Vladu. Below the zero lower bound - a shadow-rate term structure model for the Euro area. Discussion Paper, Deutsche Bundesbank, 32/2016, 2016.

[Mam04] Rogemar S. Mamon. Three ways to solve for bond prices in the Vasicek model. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 8(1) :1–14, 2004.

[MR04] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2004.

[NS87] Charles R. Nelson and Andrew F. Siegel. Parsimonious modelling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4) :467–489, 1987.

[Pia10] Monika Piazzesi. Affine term structure models. In *Handbook of financial econometrics*, pages 691–766. Elsevier : Amsterdam, 2010.

[Pri13] Marcel A. Priebsch. Computing arbitrage-free yields in multi-factor Gaussian shadow-rate term structure models. Finance and Economics Discussion Series 2013-63. Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.), 2013.

[PT15] Marcello Pericoli and Marco Taboga. Understanding policy rates at the zero lower bound : insights from a Bayesian shadow rate model. Temi di Discussione (Working paper), Bank of Italy, Number 1023, July 2015.

[Rog96] Chris Rogers. Gaussian errors. *RISK*, January 1996.

[Sve94] Lars E.O. Svensson. Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992-1994. IMF Working Paper 94/114, 1994.

[SW00] A. Smith and T. Wilson. Research report, Bacon & Woodrow, 2000.

[UBS06] Yoichi Ueno, Naohiko Baba, and Yuji Sakurai. The use of the Black model of interest rates as options for monitoring the JGB market expectations. Working paper, Bank of Japan, 06-E-15, September 2006.

[Vas77] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2) :177–188, November 1977.

[Ven91] Gary G. Venter. Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. *ASTIN Bulletin*, 21(2) :223–230, 1991.

[Wan96] Shaun Wang. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26(1) :71–92, 1996.

[Wan00] Shaun S. Wang. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance*, 67(1) :15–36, 2000.

[Wan02] Shaun S. Wang. A universal framework for pricing financial and insurance risks. *ASTIN Bulletin*, 32(2) :213–234, 2002.

[WX16] Jing Cynthia Wu and Fan Dora Xia. Measuring the macroeconomic impact of monetary policy at the zero lower bound. *Journal of Money, Credit and Banking*, 48(2-3) :253–291, 2016.