Mémoire présenté devant le CNAM pour l'obtention du Diplôme du Master Droit Economie Gestion mention Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 23/06/2021

Par : Morad EL AYOUBI

Titre: Evaluation des engagements en hypothèse de rente RC médicale

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Entreprise : SHAM

Présidente du Jury
Sandrine LEMERY

Nom :

Signatures

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Jérôme SCHAEFFER

Signature :

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

Houssem JEBALI
Hélène GIBELLO
Laurence MARTINI

Invité :

Nom :

Signature :

Membres présents du jury de la filière

David FAURE,
Nathanaël ABECERA
Olivier DESMETTRE
François WEISS

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Bibliothèque :

1 Résumé 4
2 Abstract 5
3 Remerciements 6
4 Eléments de contexte 7
4.1 Définition de la branche responsabilité civile médicale 7
4.2 Vie d'un sinistre 8
4.2.1 La déclaration du sinistre 8
4.2.2 La prise en charge par l'assureur 9
4.3 Généralité sur les provisions compte sociaux (*French GAAP*) 13
4.4 Quelques rappels de base de la réglementation Solvabilité 2 14
5 Déroulement 15
6 Présentation du modèle brut de réassurance 16
6.1 Le modèle 16
6.1.1 Présentation du modèle 16
6.1.2 Un modèle stochastique à victimes connues 18
6.1.2.1 La revalorisation des rentes 20
6.1.2.2 Le plafond de garantie 21
6.2 Calibrage et simulation des facteurs pris en compte dans le modèle 22
6.2.1 Décès de la victime 22
6.2.2 Délai de jugement 23
6.2.2.1 Présentation des données 23
6.2.2.2 Modélisation 23
6.2.3 Taux de responsabilité 27
6.2.3.1 Présentation des données 27
6.2.3.2 Modélisation 27
6.2.4 Annuité jugée 28
6.2.4.1 Jugement civil 28
6.2.4.1.1 Théorie des modèles linéaires généralisés 28
6.2.4.1.1.1 Composante stochastique 28
6.2.4.1.1.2 Composante déterministe 29
6.2.4.1.1.3 Fonction de lien 29
6.2.4.1.1.4 Application numérique 29
6.2.4.2 Jugement administratif 40
6.2.4.2.1 Relevant de la jurisprudence du 25 juin 2008 40
6.2.4.2.1.1 Poids des dossiers issus de la jurisprudence du 25 juin 2008 40

6.2.4.2.1.2 Montant des annuités ... 40
7 Quantification des engagements cédés aux réassureurs ... 42
7.1 Le fonctionnement des traités XS ... 43
7.1.1 Evaluation du sinistre selon les conditions du traité ... 43
7.1.2 La clause de stabilité ... 43
7.1.3 Répartition cédante / réassureur ... 44
7.1.3.1 Les clauses de suivis ... 44
7.1.3.2 Calcul du cout et des règlements cédés ... 45
7.1.4 Exemple ... 45
8 Résultats ... 46
8.1 Engagements bruts de réassurance sur un dossier ... 47
8.2 Engagements cédés aux réassureurs sur un dossier ... 51
8.3 Résultat agrégé ... 57
8.3.1 Agrégation des résultats ... 57
8.3.3 Présentation des résultats ... 60
8.3.4 Temps de traitements ... 63
8.4 Test de sensibilité ... 64
8.4.1 Sensibilité au délai de jugement ... 64
8.4.2 Sensibilité à la table de mortalité ... 66
8.4.3 Sensibilité à la courbe des taux ... 67
8.4.4 Sensibilité à la priorité du traité XS ... 68
9 Conclusion et piste de développement ... 70
10 Annexe ... 71
10.1 Méthode de Monte Carlo ... 71
10.1.1 Le générateur de nombre pseudo aléatoire ... 71
10.1.1.1 Le générateur linéaire congruentiel ... 71
10.1.1.2 Le générateur de nombre pseudo aléatoire d'Excel 2016 ... 71
10.1.2 Fondement de la méthode de Monte Carlo ... 72
10.1.3 Quantification de l'erreur moyenne ... 72
10.2 Optimisation du temps de calcul : la méthode de Quasi Monte Carlo ... 73
10.2.1 Suite à discrépance faible ... 73
10.2.1.1 Les suites de Van Der Corput ... 73
10.2.1.2 Les suites de Halton ... 74
10.2.2 Limite et extension de la méthode ... 75
11 Bibliographie ... 77

1 Résumé

L'objectif de ce mémoire est la quantification des engagements en hypothèse de rentes de la branche RC médicale dans l'optique d'évaluer l'impact sur les cessions en réassurance non proportionnel. Comme toutes les branches de responsabilité civile, la RC médicale se caractérise par une durée des règlements des sinistres qui peut se compter en plusieurs dizaines d'années.

Pour valoriser ces engagements, notamment ceux cédés aux réassureurs, une approche stochastique est privilégiée afin de prendre en compte toutes les évolutions probables d'un dossier.

La prise en compte de plusieurs facteurs influençant le montant des provisions est nécessaire, certains d'entre eux sont inhérents à la situation de la victime, tels que l'âge, le degré d'invalidité (IPP) et le temps de présence d'une tierce personne (TP).

Cependant d'autres paramètres exogènes à la victime sont généralement d'ordre financier ou juridique tel que la courbe des taux sans risque, le taux de responsabilité de l'assuré, la date de jugement et la prise en compte d'une jurisprudence.

Nous estimons ensuite le montant flux cédés aux réassureurs en appliquant les conditions des traités en excédant de sinistre.

Finalement, nous disposons d'une chronique de flux brut et cédés aux réassureurs en sortie du modèle. Afin de nous assurer de la cohérence des calculs, nous comparons la moyenne des simulations (en faisant abstraction des plafonds de garantie et des franchises) avec un calcul théorique qui permet de valider les résultats.

Dans une optique de réduction des temps de traitement, nous mettons en place une méthode de Quasi-Monte-Carlo (QMC).

L'usage de cette technique permet d'obtenir des résultats identiques à la méthode de Monte-Carlo (MC) et nécessite 2 fois moins de simulations.

Dans l'optique d'obtenir une distribution des provisions, une agrégation des sinistres par simulation est nécessaire. Dans le cadre de la méthode MC une simple addition suffit car les sinistres sont indépendants. Cependant, cette opération n'est plus suffisante avec la méthode QMC et une technique d'agrégation est mise en place.

Cette méthode qui repose sur des permutations aléatoires de numéros de simulations, ne perturbe pas la moyenne et permet ainsi d'obtenir des distributions identiques entre les 2 techniques de simulation.

Nous concluons ce mémoire avec 3 tests de sensibilité du modèle permettant de mesurer :

- l'impact sur les provisions d'un retard ou d'une accélération des délais de jugement.
- l'impact sur les provisions d'une hausse ou d'une baisse des taux de mortalité
- l'impact sur notre modèle d'une déformation de la courbe des taux

2 Abstract

This thesis is about the quantification of the annuities hypothesis in medical malpractice liability with a view to assessing the impact on non-proportional reinsurance cessions. Like all the third-party liability, the medical malpractice liability is characterized by a duration of claims settlements that can take several decades.

In order to value these reserves, particularly those ceded to reinsurers, we favored a stochastic approach to consider all the probable changes in claims.

Consideration of several factors influencing the amount of the provisions is necessary, some of which are inherent to the victim's situation, such as age, partial permanent disability rate (IPP) and time of presence of a third party (TP).

However, other parameters exogenous to the victim are generally of a financial or legal nature such as the risk-free interest rate curve, the insured's liability rate, the date of the court decision delivery and the consideration of case law.

We then estimate the part of the claim which is ceded to reinsurers under the terms of the excess of loss treaties.
Finally, the outputs of this model are sets of future gross and ceded cash flows to the reinsurers.
To ensure the consistency of the calculations, by eliminating the guarantee caps, we compare the average of the simulations with a theoretical calculation that validates the results.
Under the constraint of reductions in the account closing time, optimization of processing times is implemented using the Quasi Monte Carlo (QMC) method.
The use of this technique makes it possible to obtain identical results to the Monte Carlo (MC) method and requires twice fewer simulations.

In order to obtain the probability distribution of the reserves, an aggregation of the results of all claims simulation is necessary. With the MC method a simple addition is enough because they are independent. However, with the QMC method, this method is no longer sufficient, an aggregation technic based on random permutations of simulation numbers has been implemented.
This aggregation method does not disturb the mean of the simulation and at the end we observe identical probability distributions between those two simulation technics.

We conclude this memory with 3 sensitivity tests allowing to measure the impact on the reserves of:

- An acceleration or a slow-down of the court decision delivery time.
- A rise or fall in the mortality rates
- A deformation of the EIOPA’s yield curve

3 Remerciements

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans le soutien, les judicieux conseils et la relecture technique de Jérôme SCHAEFFER, David FAURE, Sabri BOUDRAMA, Séverine PLANCHON, Cyrille CHERY, Jérôme VUARIER et Leila ELIJALAT.

Un grand merci aussi à l'ensemble de l'équipe Risk Management et Actuariat de SHAM pour son aide, à l'ensemble des professeurs du CNAM pour le partage de leur connaissances pointues, ainsi qu'à Hervé CAPRON de Natixis Assurances pour m'avoir transmis son goût pour l'actuariat.

Je remercie Assya BENAICH et Rajaa OUBAL pour leurs précieuses relectures et leurs corrections.

Je tiens remercier ma famille, et plus particulièrement mes parents pour leurs encouragements pendant toute la période de formation au CNAM.

Enfin, c'est vers toi, Loubna, que se tourne mes plus vifs remerciements. Je te remercie pour avoir su me motiver pendant les périodes difficiles, pour me pardonner de t'avoir délaissé tant de soirées et de week-ends pour me consacrer aux examens et à ce mémoire. Merci.

4 Eléments de contexte

4.1 Définition de la branche responsabilité civile médicale

La responsabilité civile médicale est la responsabilité encourue par les professionnels et les établissements de santé à raison des dommages causés par des actes de prévention, de diagnostic ou de soins.

Dans le cadre de son activité, le professionnel de santé peut être amené à faire face à deux types de responsabilité :

- **la responsabilité civile médicale** qui a pour but de réparer les dommages causés à la victime sous forme d'indemnisation,
- **la responsabilité pénale** qui a une finalité punitive.

Pour que la responsabilité d'un professionnel ou d'un établissement de santé soit engagée, il est nécessaire de disposer de la preuve de la faute, d'un préjudice et d'un lien de causalité.

La loi Kouchner (4 mars 2002) impose aux praticiens ayant une activité libérale la souscription d'une assurance de responsabilité personnelle. Son principal apport consiste en l'unification des règles de responsabilité des professionnels de soins en disposant que :
« les professionnels de santé ainsi que tout établissement, service ou organisme dans lesquels sont réalisés des actes individuels de prévention, de diagnostic ou de soins, ne sont responsables des conséquences dommageables d'acte de prévention, de diagnostic ou de soins qu'en cas de faute ».

La responsabilité civile d'un médecin ne peut donc être engagé que s'il a commis une faute au sens civil qui correspond à un défaut de *« soins consciencieux, attentifs et conformes aux données acquises de la science ».*
Le médecin n'est donc pas tenu par une obligation de résultat mais une obligation de moyen, il doit mettre en œuvre tous les moyens pour que le patient recouvre la santé. Il est à préciser que la preuve de la faute médicale est à la charge du patient. Néanmoins, il incombe au médecin la preuve de la correcte information des risques encourus au patient (la preuve est présentée généralement sous la forme d'une décharge signée par le patient porteur du risque.).

Le but de la responsabilité civile est essentiellement de réparer un préjudice, c'est-à-dire replacer autant que possible la victime dans la situation qu'elle connaissait avant la survenance du fait dommageable.

L'article 1382 du code civil dispose que *« tout fait quelconque de l'homme qui cause à autrui un dommage oblige celui par la faute duquel il est arrivé à le réparer. »*

Si par principe l'indemnisation doit réparer intégralement tous les préjudices subis, la chambre criminelle de la cour de cassation a reconnu le 18 mars 1975, une situation intermédiaire entre le dommage certain réparable et le dommage éventuel non réparable introduisant ainsi la notion de **perte de chance.**

La Cour de cassation a identifié une hypothèse de perte de chance chaque fois que le dommage a fait disparaître une probabilité qu'un événement positif pour la victime se réalise, ou une probabilité qu'un événement négatif ne se réalise pas. Pour qu'une situation de perte de chance puisse donner lieu à indemnisation, il faut que la faute commise par l'auteur du dommage ait entrainé la perte d'« une éventualité favorable » pour la victime.

Dans, l'hypothèse d'une faute technique (faute commise lors d'un acte médical et chirurgical), la perte de chance correspond à une éventuelle absence de guérison ou de survie du patient.
Dans le cadre d'une faute éthique (défaut d'information ou de recueil du consentement), la perte de chance correspond à l'éventualité où un patient pourrait se soustraire au risque qui s'est réalisé.

Le montant de l'indemnisation est alors fonction de la probabilité que le patient avait de guérir, de survivre ou de refuser l'intervention.

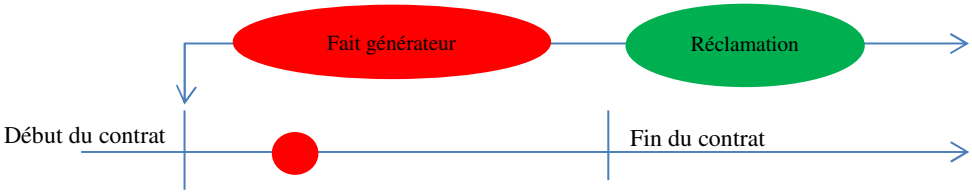
4.2 Vie d'un sinistre

4.2.1 La déclaration du sinistre

Après la loi Kouchner de 2002 qui introduit l'obligation d'assurance pour les professionnels de santé, la loi About du 30 décembre 2002 vient modifier l'élément déclencheur de la garantie.

Pour les contrats souscrits avant 2002, la garantie est due pour tout fait générateur survenu pendant la période de couverture, quelle que soit la date de réclamation de la victime, dans la limite des délais de prescription en vigueur à l'époque.

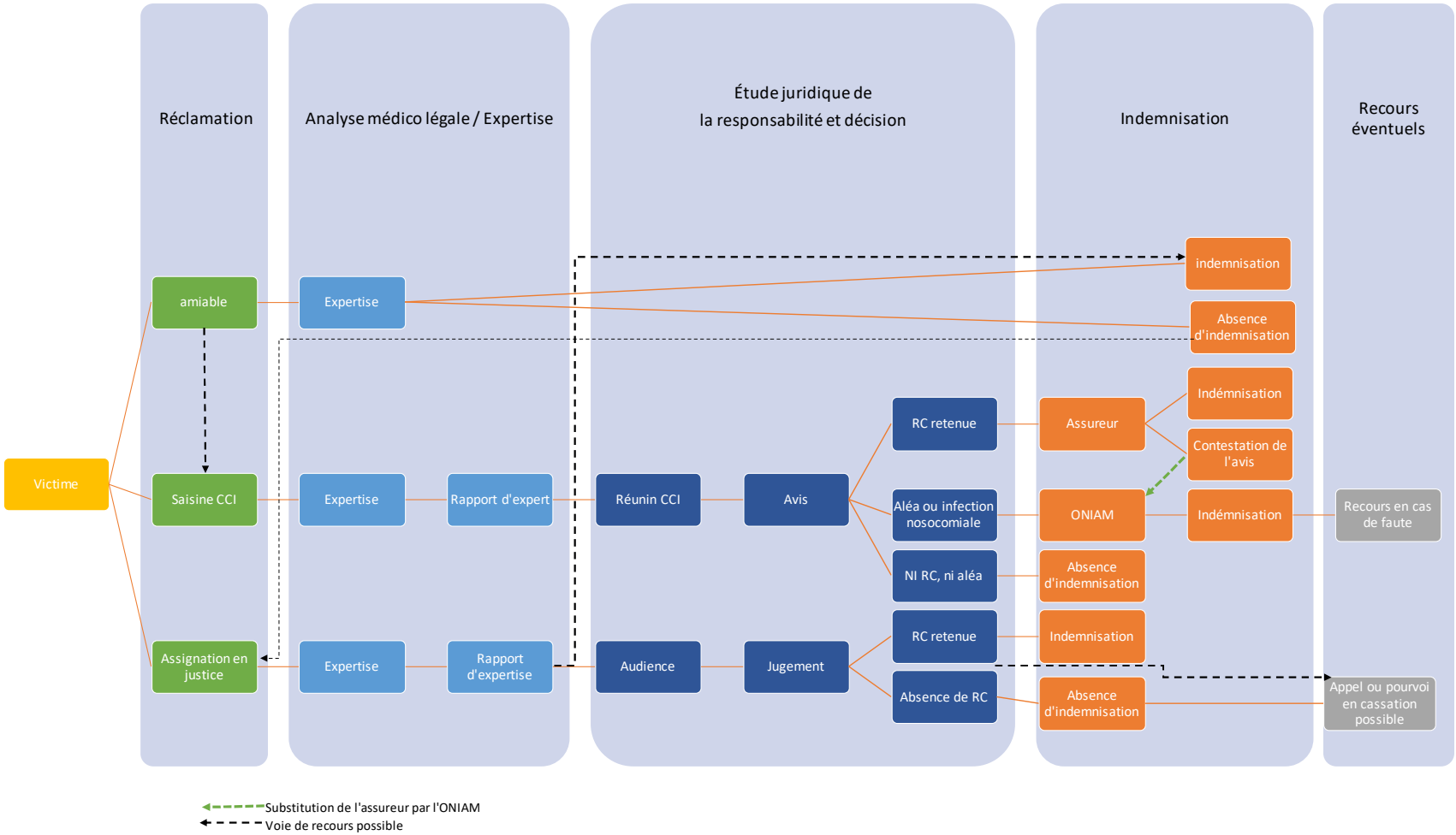
L'ensemble des contrats souscrits avant 2002 fonctionne donc selon ce schéma que nous illustrons ci-dessous :



C'est à travers la loi About du 30 décembre 2002 que la « 1ère déclaration » est définie comme déclencheur obligatoire des couvertures dans le domaine de la responsabilité civile médicale.
De façon plus précise, et à travers la modification de l'article L251-2 du code des assurances, engendrée par la création de la loi, une extension de garantie, dite garantie « subséquente », s'applique dans des cas précis lors de la résiliation du contrat. Cette période peut en fonction des cas de figure, être d'une durée légale minimale de 5 ans ou 10 ans.

4.2.2 La prise en charge par l'assureur

Une fois que la réclamation du sinistre est établie, plusieurs étapes sont nécessaires avant que la victime puisse disposer d'une indemnisation. Nous synthétisons dans le schéma ci-dessous les différentes étapes de la vie du dossier.



i) L'analyse médico-légale / l'expertise

L'expertise est un acte réalisé par un technicien, qui par le biais de plusieurs opérations médico-juridiques, mesure les conséquences d'un dommage.

Elle peut être amiable ou judiciaire, dans le cadre d'une expertise amiable, celle-ci est à l'initiative de la compagnie d'assurance. Le choix et la mission de l'expert sont donc déterminés d'un commun accord des parties.
Dans le cas d'une expertise judiciaire, l'expert est désigné par un juge sur une liste d'experts assermentés. Il effectue sa mission sous l'autorité d'un magistrat chargé du contrôle des opérations expertales.

L'expert peut donc être mandaté soit par la compagnie d'assurance ou le tribunal. Son rôle consiste à répondre à tous les points de la mission et rédiger le rapport qui conditionne l'indemnisation.
A titre d'exemple, ce rapport peut contenir :

- une description de l'état de la victime avant la survenance du sinistre
- une description de l'état actuel de la victime en mentionnant les différents traitements médicaux et soins qui ont été prescrits
- établir un compte rendu des doléances de la victime (gênes et souffrances endurées, aides techniques…)
- établir un compte-rendu des doléances des proches de la victime ainsi que de leur assistant technique si la victime est assistée
- au cas où il y aurait un déficit fonctionnel antérieur, fixer la part de déficit imputable au fait dommageable
- préciser l'imputabilité entre l'accident, les lésions initiales et les séquelles invoquées en indiquant l'incidence éventuelle sur un état antérieur
- examiner poste par poste les différents préjudices subis en se référant à la nomenclature Dintilhac

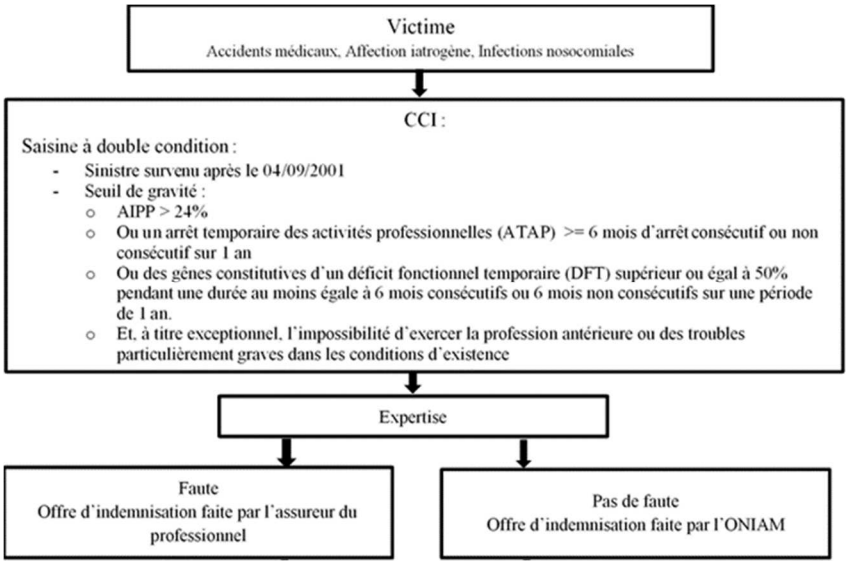
ii) L'étude juridique de la responsabilité et décision

La décision d'indemnisation peut être issue de trois procédures possibles :

- la procédure amiable :
    - le règlement à l'amiable est une négociation entre les différents acteurs du litige. La victime ou ses ayants droit en cas de décès s'adressent directement au médecin ou à l'établissement supposé être responsable du dommage. La négociation se déroule directement avec l'assureur du médecin ou de l'établissement. Une expertise est alors diligentée à la demande de l'assureur.
      Deux issues à la négociation sont alors possibles :
        - la victime accepte le rapport d'expertise et le montant de l'indemnisation proposée.
        - la victime conteste le rapport d'expertise et refuse l'indemnisation. Elle décide alors d'engager une action en justice.

- la procédure devant les CCI (Commissions de Conciliation et d'Indemnisation) et l'ONIAM (Office National d'Indemnisation des Accidents médicaux). :
    - ces deux organismes placés sous la tutelle du Ministère de la santé ont été créés par la loi Kouchner du 4 mars 2002. Ils ont pour mission d'organiser l'indemnisation amiable pour les accidents médicaux.

Le schéma ci-dessous présente le déroulement du recours à ces instances publiques :



- Procédure judiciaire :

  On dénombre quatre types de procédures qui dépendent de la finalité poursuivie par la victime (sanction du fautif ou réparation du dommage).

  - **<u>La juridiction administrative :</u>**

    Si la réclamation de la victime concerne un établissement public, le recours en indemnisation doit être intenté auprès d'une juridiction administrative.

    Cette juridiction est composée de 3 instances :

    - **Le tribunal administratif** juge les litiges entre les particuliers et les administrations, c'est à eux que le requérant doit d'abord s'adresser.
    - **Les cours administratives d'appel** sont les juridictions compétentes pour statuer en appel, à la demande d'une personne privée ou d'une administration, contre un jugement de tribunal administratif.
    - **Le Conseil d'État**, la juridiction suprême de l'ordre administratif, est le juge de cassation des arrêts rendus par les cours administratives d'appel. Il ne juge pas une troisième fois le litige mais vérifie le respect des règles de procédure et la correcte application des règles de droit par les tribunaux administratifs et les cours administratives d'appel.

  - **<u>La juridiction civile :</u>**

    Si la réclamation de la victime concerne un professionnel de santé ayant un exercice libéral ou un établissement privé, le recours en indemnisation doit être intenté auprès d'une juridiction civile qui dépend du montant du litige :

    - **les tribunaux d'instance** jugent les litiges d'un montant inférieur ou égal à 10 000 €.
    - **les tribunaux de grande instance** (TGI) traitent les affaires présentant un certain niveau d'importance (montants supérieurs à 10 000 €) ou de complexité.
    - **les cours d'appel** sont les juridictions du second degré qui connaissent par la voie de l'appel des demandes tendant à la réformation partielle ou à l'infirmation des jugements rendus par les juridictions du premier degré.

- **La juridiction pénale :**

  L'objectif poursuivi par une victime qui intente un recours devant une juridiction pénale est la répression. Elle recherche donc la condamnation pénale du praticien qu'elle estime fautif.

  Cette juridiction est composée de 4 instances :

  - **le tribunal de police** juge les contraventions commises par des personnes majeures (par exemple, pour un grand excès de vitesse).
  - **le tribunal correctionnel** juge les délits commis par des personnes majeures passibles d'emprisonnement jusqu'à 10 ans et d'autres peines (amendes, peines complémentaires, travail d'intérêt général). Par exemple, pour des violences graves.
  - **la cour d'assises** juge les crimes (infractions les plus graves) passibles de la réclusion jusqu'à la perpétuité (en première instance et en appel). Par exemple, pour meurtre. Un jury de citoyens tirés au sort participe à la décision sur la condamnation.
  - un mineur ne peut pas être jugé par un tribunal ordinaire. Ils doivent être jugés devant des juridictions spécialisées comme **le tribunal pour enfants** ou **la cour d'assises des mineurs.**

- **La cour de cassation :**

  Elle correspond à la plus haute juridiction de l'ordre judiciaire français. Siégeant dans l'enceinte du palais de justice de Paris, elle a pour mission de contrôler l'exacte application du droit par les tribunaux et les cours d'appel, garantissant ainsi une interprétation uniforme de la loi.

iii) **L'indemnisation** :

L'indemnisation se présente souvent sous la forme d'une compensation financière qui s'opère par le versement d'un capital ou d'une rente.
Dans le cas où l'indemnisation est issue d'une procédure contentieuse, c'est le juge qui fixe le montant de l'indemnisation.
Dans le cas où la victime a entrepris une procédure devant une commission de conciliation et d'indemnisation des accidents médicaux (CCI) :

- si la commission conclut à un aléa ou à une infection nosocomiale grave, elle transmet un avis en ce sens à l'ONIAM, en précisant par ailleurs la nature des préjudices subis par la victime, ou ses ayants droit, ainsi que leur étendue. Le calcul du montant de l'indemnisation, pour chacun des postes de préjudices énumérés par l'avis de la CCI, relève de la compétence de l'ONIAM.
- si la commission conclut à une faute, l'avis est adressé au responsable et à son assureur qui aura la charge de faire une offre à la victime.

4.3 Généralité sur les provisions compte sociaux (*French GAAP*)

Les provisions pour comptes sociaux se décomposent en provisions pour sinistres et provisions pour primes.
Les provisions pour sinistres sont :

- la PSAP (provision pour sinistre à payer) ou provision dossier/dossier : cette provision correspond à la différence entre le coût actuel du dossier et de l'ensemble des règlements effectué à ce jour.
- la PM (provision mathématique) : dans le cas d'un versement d'une rente, cette provision doit être constituée en se basant sur une table de mortalité, de l'annuité versée, de l'inflation et du taux d'actualisation.
- la provision associée aux sinistres sous-évalués (IBNER *Incurred but not enough reported*) : Elle correspond à la différence entre la charge ultime (déterminé par des méthodes statistique type : Chain Ladder, Munich Chain Ladder…) et la charge dossier/dossier
- la provision pour sinistre non encore déclaré (IBNYR *Incurred but not yet reported*) : Cette provision est aussi une provision statistique.
- les provisions pour frais de gestion

Pour les couvertures dans le domaine de la responsabilité civile médicale, la provision IBNYR ne concerne que :

- les sinistres pouvant être déclarés pendant la période de subséquente des contrats.
- les sinistres relatifs aux anciens contrats souscrits avant 2002 dont le déclencheur est la date de survenance.

Les provisions pour primes sont :

- la provision pour prime non acquise (PPNA) : cette provision correspond à la différence entre les primes émises et les primes acquises. Pour les contrats arrivant à échéance au 31/12 celle-ci est négligeable.
- les provisions pour risque en cours (PREC) : cette provision est constituée lorsque le montant attendu des primes pour les exercices suivants la clôture, ne permet pas de couvrir le montant des sinistres à survenir au cours de ces mêmes exercices. Cette provision est constituée lorsque le ratio sinistre à prime est attendu au-delà de 100%.

4.4 Quelques rappels de base de la réglementation Solvabilité 2

Adoptée le 22 mai 2009 par le parlement Européen, la directive Solvabilité 2 est entrée en vigueur le 1er janvier 2016. Cette réforme repose sur trois piliers ayant chacun un objectif :

- Pilier 1 :
  - Définition des provisions techniques
  - Evaluation des actifs et passifs en valeur de marché
  - Méthode de calcul (formule standard, modèle interne)
  - Définition des actifs éligibles

- Pilier 2 :
  - Gestion des risques au travers de l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)
  - Contrôle interne
  - Gouvernance

- Pilier 3 :
  - Transparence et exigence de publication d'information
  - Discipline de marché
  - Exigence de reporting au superviseur

Au travers du pilier 1, la réforme Solvabilité 2 introduit le concept de vision économique de la richesse où :

- l'actif est calculé en valeur de marché impliquant qu'il n'y a plus de plus-values latentes dans le bilan de l'entreprise.
- le passif est calculé en *fair value* (juste valeur) en introduisant le calcul de la « meilleure estimation » des provisions *(Best Estimate, BE)* et d'une marge de risque.

Selon l'article 76 des actes délégués publiés le 11 Avril 2009, la meilleure estimation des provisions est : *« The best estimate shall correspond to the probability-weighted average of future cash-flows, taking account of the time value of money (expected present value of future cash-flows), using the relevant risk-free interest rate term structure. »*

Cette provision correspond donc à la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent.
La valeur de cette provision que nous nommerons « BE » repose donc sur la formule suivante :

$$BE = \sum_i \frac{\mathbb{E}[Cash_i]}{(1 + act_i)^i}$$

Où :

$\mathbb{E}[Cash_i]$: la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité du futur flux de trésorerie i

$\frac{1}{(1+act_i)^i}$: la valeur temporelle de l'argent à l'inventaire futur i avec :

- act_i : Le facteur d'actualisation de l'inventaire futur i donné par la courbe des taux publiée par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pension Authority*, Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles)

5 Déroulement

Ce mémoire traite de la valorisation en norme Solvabilité 2 des engagements en hypothèse de rente RC médicale bruts et cédés aux réassureurs. Afin de prendre en compte toutes les évolutions possibles d'un dossier et de pouvoir quantifier les engagements cédés au plus juste, une approche stochastique a été privilégiée. L'usage de technique de simulation est d'autant plus justifié par la présence d'un traité de réassurance non proportionnel. Nous souhaitons, en effet, quantifier la moyenne des engagements cédés et non l'engagement moyen cédé.

Par souci de confidentialité, le modèle présenté dans ce mémoire n'est appliqué que sur un jeu de données fictives, les résultats présentés dans ce mémoire ne sont donc pas ceux de SHAM. Nous avons cependant veillé à conserver la même structure et les mêmes caractéristiques que les données réelles, afin notamment de retranscrire au mieux la démarche scientifique.

Nous présentons dans une première partie, la méthode de quantification des engagements bruts de réassurance avec une description des calculs effectués et le calibrage des différents facteurs pris en compte dans le modèle.

La seconde partie décrit les calculs des engagements cédés aux réassureurs dans les conditions présentes dans les traités.

Enfin, nous présentons les résultats bruts et cédés aux réassureurs qui sont d'abord calculés sur un dossier, puis sur 100 dossiers. A l'issue des différents calculs, des tests de sensibilités aux différents paramètres sont présentés dans cette partie.

6 Présentation du modèle brut de réassurance

6.1 Le modèle

6.1.1 Présentation du modèle

Lors de la déclaration du sinistre, le gestionnaire procède à une évaluation du montant du préjudice en fonction des données :

- Fournies par l'expert telle que :
  - le taux d'IPP ou d'AIPP ou DFP (Incapacité permanente partielle ou atteinte à l'intégrité physique et psychique, déficit fonctionnel permanent),
  - le temps alloué à une tierce personne TP par tranche de 8 heures (1/3, 2/3, 3/3)

- Clients qui permettent d'établir la juridiction telles que :
  - administrative pour les hôpitaux publics
  - civile pour les centres de soins / clinique / hôpitaux privés

- Concernant la victime telles que :
  - la date de naissance

Si l'évaluation établie dépasse le seuil de 500k€ au 31/12/N, nous considérerons que ce sinistre est grave et nous disposons d'un ensemble d'informations nécessaires au calcul de la provision.

Cependant, selon l'état d'avancement du dossier, la disponibilité des données n'est pas garantie pour tous les dossiers et nécessite parfois d'être simulée.

Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous les données disponibles et les données à simuler.

	Données disponibles	Données simulées
Date de naissance	☑	
Exercice de survenance	☑	
Exercice d'ouverture	☑	
Type de dossier	☑	
Type de juridiction	☑	
TP	☑	
IPP	☑	
Annuité Hypothèse	☑	
Annuité jugée		☑
Autre poste non jugé après 31/12	☑	
Provision pour arrérages échus		☑
Taux de contestation au jugement		☑
Délai de règlement autres		☑
Délai de jugement		☑
Application de la jurisprudence du 25 juin 2008		☑
age au décès		☑
Plafond de garantie	☑	

Le modèle que nous présentons est utilisé pour projeter un sinistre grave, année par année sur un horizon fixe. Nous estimons que 84 années de projection est suffisant pour ne plus avoir de survivant en moyenne lors du dernier inventaire.

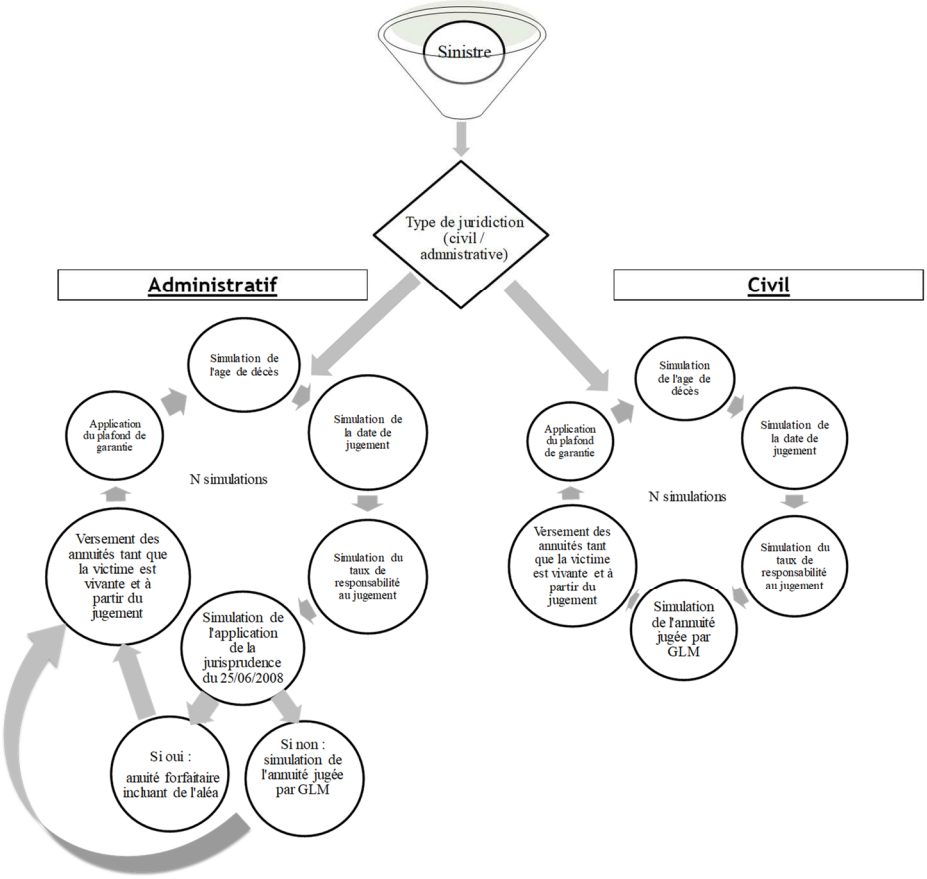
Lorsque le sinistre est déclaré, nous pouvons :

Etablir le type de juridiction en fonction de la typologie du client :

a. Soit la juridiction est civile alors nous simulons :
   - l'âge de décès de la victime
   - la date de jugement du dossier
   - l'annuité jugé à l'aide du GLM
   - nous calculons les paiements futurs du dossier dans la limite du plafond de garantie, à partir de la date de jugement et jusqu'au décès de la victime

b. Soit la juridiction est administrative alors nous simulons :
   - l'âge de décès de la victime
   - la date de jugement du dossier
   - l'annuité jugé dépend de la simulation de l'application de la jurisprudence :
     - soit le dossier relève de la jurisprudence du 25 juin 2008 et l'annuité correspondant à un forfait incluant de l'aléa.
     - soit le dossier ne relève pas de la jurisprudence du 25 juin 2008 et l'annuité est calculée à l'aide du GLM.
   - Nous calculons les paiements futurs du dossier dans la limite du plafond de garantie, à partir de la date de jugement et jusqu'au décès de la victime

Nous présentons l'algorithme de simulation par le biais du schéma suivant.



6.1.2 Un modèle stochastique à victimes connues

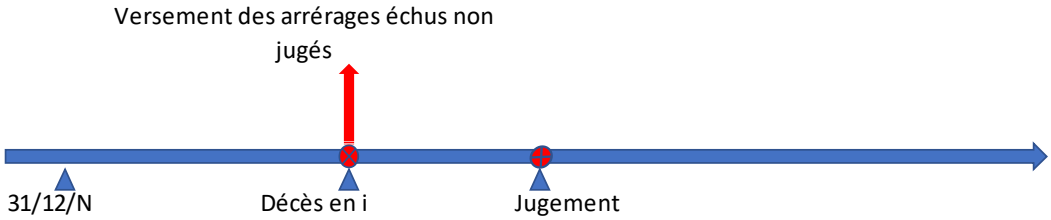
A l'ouverture du dossier, en fonction des données disponibles (taux d'incapacité IPP évalué par l'expert), le gestionnaire peut pressentir le mode de règlement du dossier. S'il s'agit d'un dossier potentiellement réglé en rente, le montant de l'annuité sera positionné à un montant forfaitaire dans l'attente d'un jugement.
Suite à des échanges avec les experts de l'entreprise, les principales variables susceptibles d'influencer le montant de l'indemnisation sont :

- le montant de l'annuité décidé par le tribunal
- la date de jugement
- la date de décès de la victime
- le taux de responsabilité

Pour le calcul de chaque flux de règlements futurs, nous déterminons plusieurs cas :

1) le décès intervient à l'inventaire i et avant le jugement.
2) le décès intervient après le jugement.

Dans le **premier cas**, la victime décède avant le jugement et un unique versement est effectué, celui-ci correspond au montant des arrérages échus non jugés pondéré par le taux de responsabilité.
Cela se traduit schématiquement de la manière suivante :



Le flux futur à l'inventaire i s'écrit donc de la manière suivante :

$$Cash_i = \mathbb{1}_{(Tx=i)} * \left[\sum_{k\geq i} \mathbb{1}_{(J=k)} * P * T_RC\right]$$

Le flux moyen théorique de l'inventaire i pour ce poste s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[Cash_i] = {}_ip_x \left[\sum_{k\geq i} \mathbb{P}(J=k) * P * T_{RC}\right]$$

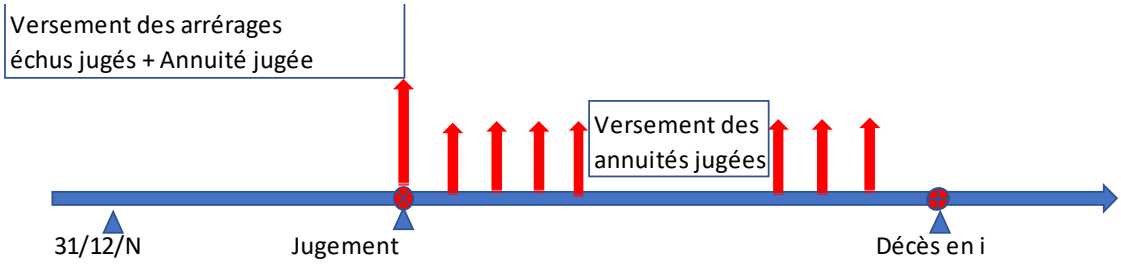
Avec :

- le délai avant jugement J
- le taux de responsabilité de l'assuré que nous noterons T_RC
- la durée de vie restante d'un individu d'âge x que nous nommerons Tx
- le montant de la provision pour arrérage échus non jugés P

Dans **le second cas**, le décès de la victime intervient après le jugement. Ainsi la victime a pu percevoir les règlements suivants :

- le montant des provisions pour les arrérages échus (calculé avec le montant de l'annuité décidé par le tribunal) entre la date de survenance et la date de jugement qui est réduit des règlements perçus en avance par la victime.
- les annuités jugées jusqu'à son décès.

Cela se traduit schématiquement de la manière suivante :



Le cash-flow de l'inventaire k s'écrit de la manière suivante :

$$Cash_k = \mathbb{1}_{(T_x>k)} * \left[\mathbb{1}_{(k\geq J)} * T_RC * A_j * (1+\mathrm{r})^{\mathrm{k-J}} + \mathbb{1}_{(J=k)} * T_RC * A_j * (k-s)\right]$$

Avec :

- le délai avant jugement J
- le taux de responsabilité de l'assuré que nous noterons T_RC
- la durée de vie restante d'un individu d'âge x que nous nommerons Tx
- l'exercice de survenance du sinistre s
- le montant de l'annuité jugée Aj
- le taux de revalorisation des rentes r

Vérifions cette formule avec un cas numérique, considérons un sinistre survenu en s = 0, jugé en J = 3, avec le versement d'une rente Aj = 1 000€, un taux de responsabilité T_RC = 100%, r = 2% et la victime décède en à l'inventaire 6.

Calculons le montant du flux de paiement pour l'inventaire k = 1 :

- la victime étant vivante : $\mathbb{1}_{(T_x>k)} = 1$
- le dossier n'étant pas jugé $\mathbb{1}_{(k\geq J)} = 0$ pour tout k < 3
- le montant du flux est donc égal à 0€

Calculons le montant du flux de paiement pour l'inventaire k = J = 3 :

- la victime étant vivante : $\mathbb{1}_{(T_x>k)} = 1$
- le dossier étant jugé en 3, $\mathbb{1}_{(k\geq J)} = 1$ et $\mathbb{1}_{(k=J)} = 1$
- le montant du flux est donc égal à :
  - $1 * \left(1 * 100\% * 1\,000 * (1+2\%)^0 + 1 * 100\% * 1\,000 * (3-0)\right) = 4\,000$

Calculons le montant du flux de paiement pour l'inventaire k = 4:

- la victime étant vivante : $\mathbb{1}_{(T_x>k)} = 1$
- le dossier étant jugé en 3, $\mathbb{1}_{(k\geq J)} = 1$ et $\mathbb{1}_{(k=J)} = 0$
- le montant du flux est donc égal à :
  - $1 * (1 * 100\% * 1\,000 * (1+2\%)^{4-3}) = 1\,020$

Calculons le montant du flux de paiement pour l'inventaire k = 5:

- la victime étant vivante : $\mathbb{1}_{(T_x>k)} = 1$
- le dossier étant jugé en 3, $\mathbb{1}_{(k\geq J)} = 1$ et $\mathbb{1}_{(k=J)} = 0$
- le montant du flux est donc égal à :
  - $1 * (1 * 100\% * 1\,000 * (1+2\%)^{5-3}) = 1\,040{,}4$

A l'inventaire 6 et après, la victime est décédée et le flux est égal à 0.

Etant donné que la date de décès, la date de jugement, le montant de l'annuité jugée et le taux de responsabilité sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres, le flux moyen théorique de l'inventaire i pour ce poste s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[Cash_k] = \mathbb{P}(T_x > k) * \left[\mathbb{P}(k \geq J) * \mathbb{E}[T_RC] * \mathbb{E}\left[A_j\right] * (1+\mathrm{r})^{k-J} + \mathbb{P}(k = J) * \mathbb{E}[T_RC] * \mathbb{E}\left[A_j\right] * (k - s)\right]$$

Regardons cette formule de plus près :

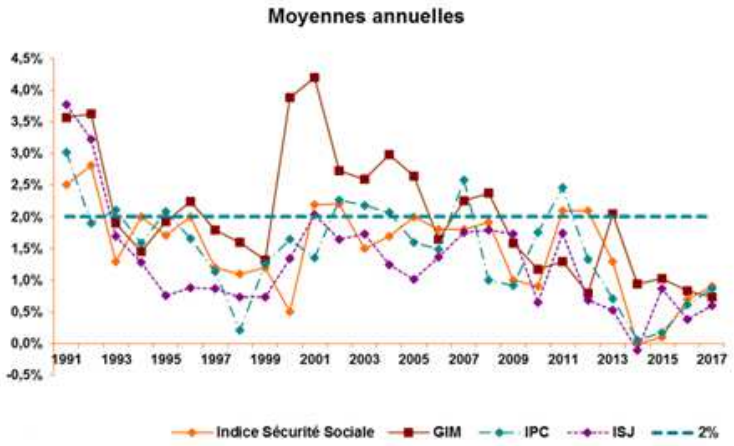
- $\mathbb{P}(Tx > k) * \left[\mathbb{P}(k \geq J) * \mathbb{E}[T_RC] * \mathbb{E}\left[A_j\right] * (1+\mathrm{r})^{k-J}\right]$: cette partie correspond à l'ensemble des arrérages qui pourrait être versé si la date de jugement antérieur ou à l'inventaire k.
- $\mathbb{P}(Tx > k) * \left[\mathbb{P}(k = J) * \mathbb{E}[T_RC] * \mathbb{E}\left[A_j\right] * (k - s)\right]$:

Cette partie correspond aux arrérages échus dans le cas où le jugement a lieu à l'inventaire k.

6.1.2.1 La revalorisation des rentes

Nous présentons dans le graphique ci-dessous l'évolution annuelle des indices suivants :

- l'IPC correspondant à l'indice des prix à la consommation hors tabac
- l'ISJ correspondant à l'indice d'inflation sous-jacente qui est un instrument de mesure permettant de dégager une tendance de fond de l'évolution des prix (en excluant les prix soumis à l'intervention de l'état (gaz, électricité, tabac…) et les produits à prix volatils (pétrole, produits frais, produits laitiers, viandes…)) (source : INSEE).
- indice de la sécurité sociale par application de l'article L351-11 et L161-25.
  Art L161-25 du code de la sécurité sociale : *« La revalorisation annuelle des montants de prestations dont les dispositions renvoient au présent article est effectuée sur la base d'un coefficient égal à l'évolution de la moyenne annuelle des prix à la consommation, hors tabac, calculée sur les douze derniers indices mensuels de ces prix publiés par l'Institut national de la statistique et des études économiques l'avant-dernier mois qui précède la date de revalorisation des prestations concernées.*
  Si ce coefficient est inférieur à un, il est porté à cette valeur. »
- indice GIM composite :
  - Groupement industriel de la métallurgie sur la période 1995 à 2011
  - Complété par l'évolution de l'indice des salaires des professions de la santé à partir de 2012



Afin de conserver une cohérence avec les traités de réassurance pour la stabilisation des paiements, nous privilégions l'usage de l'indice GIM composite. Au regard du graphique ci-dessus, nous retenons un taux de revalorisation des rentes constant à 2%, qui correspond au taux moyen de l'indice GIM composite sur la période 1991 – 2017 (2,044%).

6.1.2.2 Le plafond de garantie

Sham assure la réparation financière du préjudice dans la limite des plafonds de garantie par sinistre et/ou par année d'assurance. Ces plafonds sont fixés contractuellement et sont conforme au minimaux imposés par la loi :

- à compter du 1er janvier 2012, pour les professionnels libéraux, les plafonds de garantie ne peuvent être inférieurs à 8M€ par sinistre et 15M€ par année d'assurance pour toutes souscriptions ou renouvèlements, ou avenants à leur contrat.
- pour tous les contrats qui étaient souscrits ou renouvelés ou modifiés entre le 1er janvier 2002 et le 31 décembre 2011, les plafonds ne pouvaient être inférieurs à 3M€ par sinistre et 10M€ par année d'assurance.

Les sinistres RC médical rattachés à des contrats souscrit avant le 30 décembre 2002 (Loi About) ne disposent pas de plafond de garantie, pour des raisons purement calculatoires, nous le fixerons à 100M€ (Ce montant n'a jamais atteint par un dossier en rente RC médical).
L'application du plafond de garantie se fait sur les montants des règlements cumulés (dénommé TRGG pour le 31/12/N) à l'inventaire.

$$PL_{TRGG_i} = \min\left(Plafond, TRGG_{31/12/N} + \sum_{k=1}^{i} Cash_k\right)$$

6.2 Calibrage et simulation des facteurs pris en compte dans le modèle

Nous présentons dans cette partie le calibrage et la méthode de simulation des variables suivantes :

- l'âge de décès de la victime afin de déterminer l'arrêt des paiements de la rente
- le délai de jugement afin de déterminer le début de paiement de la rente
- le Taux de responsabilité afin de déterminer le montant de l'annuité versé après abattement
- le montant des annuités décidées au jugement
- probabilité de l'application de la jurisprudence (CPAM Dunkerque) afin de déterminer dans le cadre d'une juridiction administrative si le paiement doit prendre en compte un poste de maintien à domicile.
- le montant des annuités en lien avec l'application de la jurisprudence (CPAM Dunkerque)

6.2.1 Décès de la victime

Considérons une victime d'âge x au 31/ 12/N, nous souhaitons simuler sa durée de vie résiduelle avec la table de mortalité TD 88/90 imposé par le code des assurances (A335-1) pour provisionner le risque de survie en invalidité. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

T : représente l'âge de décès de la victime

T_x : représente la durée de vie résiduelle de la victime d'âge x

$$T_x = (T - x \mid T > x)$$

Pour simuler cette variable nous devons calculer sa fonction de répartition. Nous calculons cette fonction dans le cas discret car nous simulons les décès à partir de la table de mortalité.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x = k) &= \mathbb{P}(k \leq T_x < k+1) \\
&= \mathbb{P}(k \leq T_x) - \mathbb{P}(k+1 \leq T_x) \\
&= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} \\
&= {}_{k|}q_x
\end{aligned}$$

La fonction de répartition s'écrit comme :

$$F_{T_x}(k) = \mathbb{P}(T_x \leq k) = \sum_{i=0}^{k} {}_{i|}q_x = \sum_{i=0}^{k} \frac{l_{x+i} - l_{x+i+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k+1}}{l_x} = {}_{k+1}q_x$$

Nous disposons maintenant d'une fonction de répartition et nous pouvons donc l'inverser afin d'avoir une réalisation de la durée de vie résiduelle d'une victime. Comme nous sommes dans un cas discret l'inversion se fera selon la formule suivante :

$$F_{T_x}^{-1}(u) = \inf\{k \mid F_{T_x}(k) \geq u\}$$

Avec :

u : la réalisation d'une variable aléatoire uniforme

$F_{T_x}^{-1}$: la fonction de répartition inverse de la variable aléatoire T_x représentant la durée de vie résiduelle de la victime d'âge x

Le choix de la table de mortalité étant une limite du modèle, nous effectuons un test de sensibilité en choquant les probabilités de décès.

6.2.2 Délai de jugement

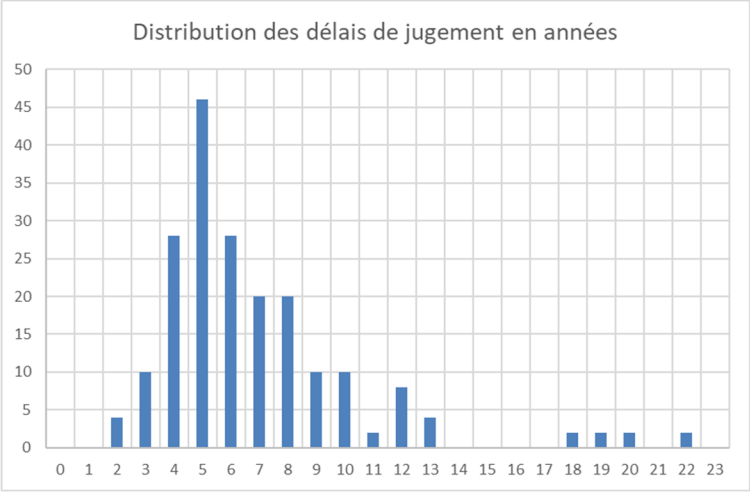
Le délai de jugement correspond au temps écoulé entre la réclamation et l'exécution du jugement.
Pour effectuer cette modélisation, nous disposons d'un échantillon de 110 sinistres ouverts entre 1995 et 2009 dont les dernières (tous type de procédure et juridiction confondu) dates de jugement se situent entre 2000 et 2017.

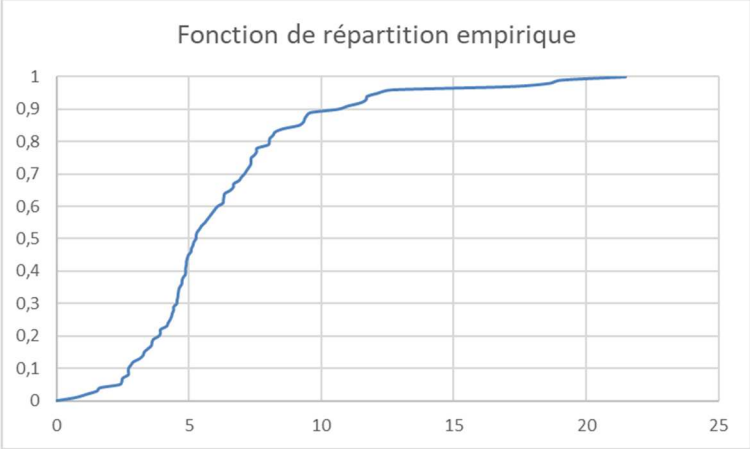
6.2.2.1 Présentation des données

Nous calculons le délai de jugement en année à l'aide la formule suivante :

- (Date de jugement – Date d'ouverture) / 365.25

Nous présentons dans les graphiques ci-dessous la distribution des délais de jugement ainsi que la fonction de répartition empirique :





Le délai de jugement moyen est de 6,83 années avec un minimum à 2 ans et un maximum à 22 ans.

6.2.2.2 Modélisation

Nous modélisons cette variable en deux étapes :

- 1ère étape : nous estimons la fonction de survie S(t) à l'aide de la méthode de Kaplan Meier
- 2ème étape : nous calibrons les modèles de survies suivant :
  - Weibull
  - Exponentiel
  - Gamma
  - Lognormal

Méthode de Kaplan Meier :
La fonction de survie S(t) est définie comme :

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t), t > 0$$

La construction de l'estimateur de Kaplan Meier s'appuie sur le théorème des probabilités conditionnelles. La probabilité au-delà de t > s peut s'écrire :

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t|T > s)\mathbb{P}(T > s) = \mathbb{P}(T > t|T > s)S(s)$$

Si nous choisissons comme instant de conditionnement les instants où se produit un évènement (jugements, décès), on se ramène à estimer des probabilités de la forme :

$$p_i = \mathbb{P}(T > T_i|T > T_{i-1})$$

p_i est la probabilité de ne pas être jugé sur la période $]T_{i-1}, T_i]$ sachant qu'il n'y a pas eu de jugement à l'instant T_{i-1}.

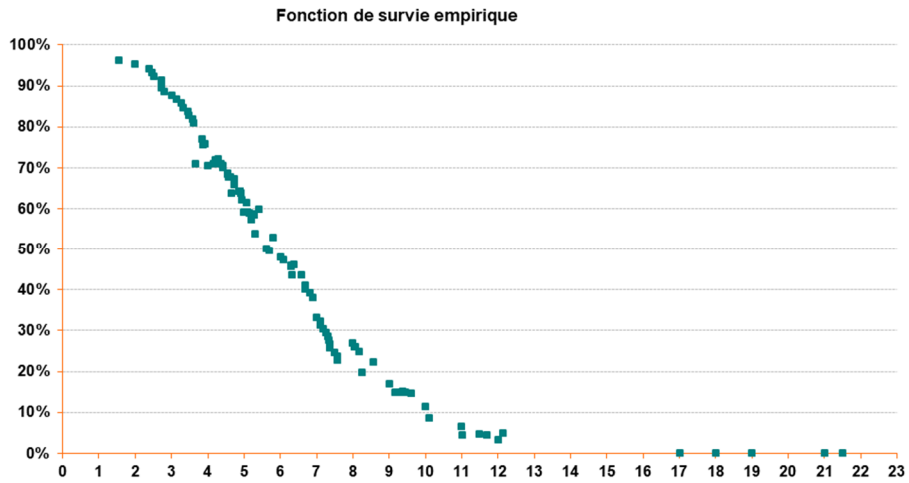
La probabilité d'être jugé en T_i est noté $q_i = 1 - p_i$, son estimateur est $\hat{q}_i = \frac{d_i}{n_i}$ où $d_i$est le nombre de dossiers jugé en T_i et n_i le nombre de dossiers qui aurai pu être jugé sur la période $]T_{i-1}, T_i]$.

L'estimateur de Kaplan Meier s'écrit donc finalement :

$$\hat{S}(t) = \prod_{T(i) \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Calibrage d'un modèle de survie :

Nous présentons dans le graphique ci-dessous les résultats de l'estimation de la fonction de survie par la méthode de Kaplan Meier.



Les proportions obtenues présentent des irrégularités, nous supposons donc qu'ils ne reflètent pas le phénomène que l'on cherche à mesurer, mais qu'ils résultent de l'imperfection des conditions de l'expérience.
Nous souhaitons donc ajuster à ces valeurs un modèle de survie qui représentera de la manière la plus fidèle la loi (inconnue) que l'on veut estimer.

Nous utiliserons les modèles suivants :

- le modèle de Weibull :

$$S(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}$$

Où :

λ >0 est un paramètre d'échelle
α >0 est un paramètre de forme
t : la durée entre la date de réclamation et la date d'exécution du jugement

- le modèle exponentiel :

$$S(t) = e^{-\lambda t}$$

Avec λ > 0 et t la durée entre la date de réclamation et la date d'exécution du jugement

- le modèle gamma :

$$S(t) = \int_{t}^{+\infty} \frac{\lambda^{r} u^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda u} du$$

Avec λ > 0 et r > 0
A l'issue de cette étude, nous pouvons donc simuler le délai de jugement de manière analogue au décès.

- le modèle log-normale

$$S(t) = 1 - \Phi\left\{\frac{\ln(t) - \mu_i}{\sigma}\right\}$$

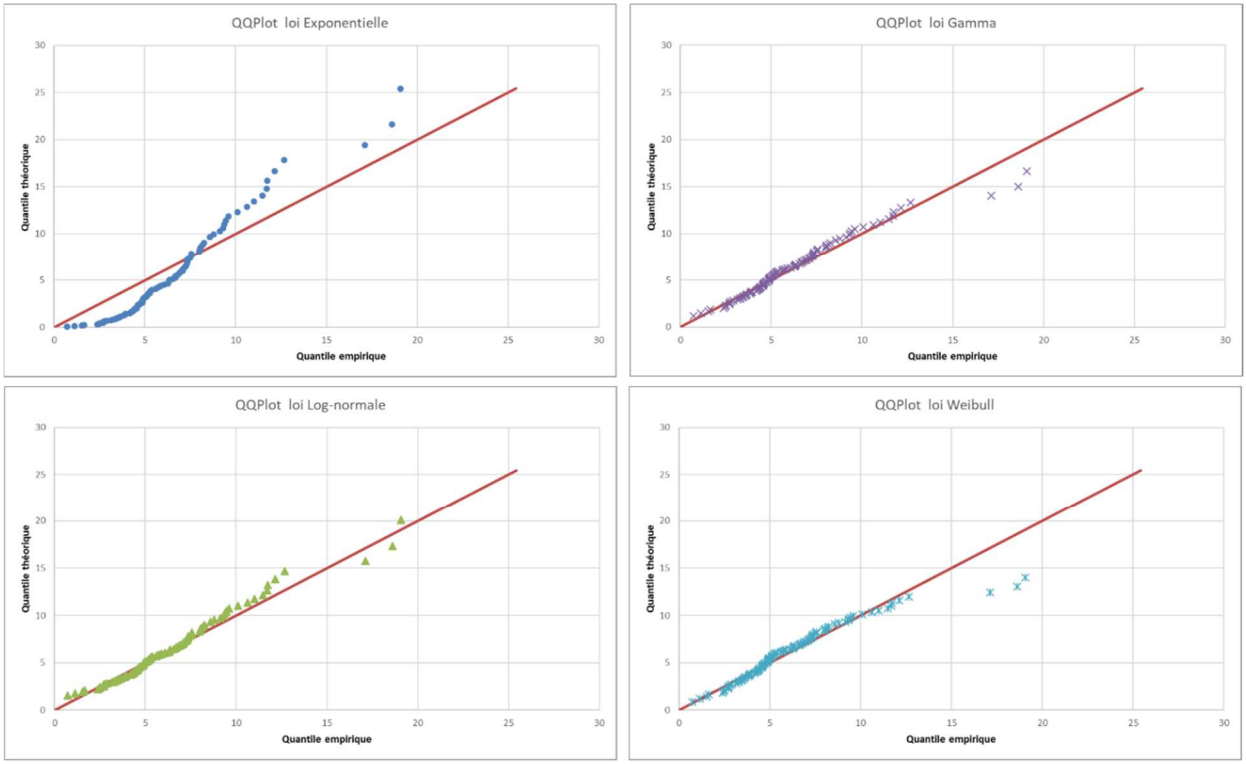
Avec $\sigma > 0$ et $t > 0$

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats :

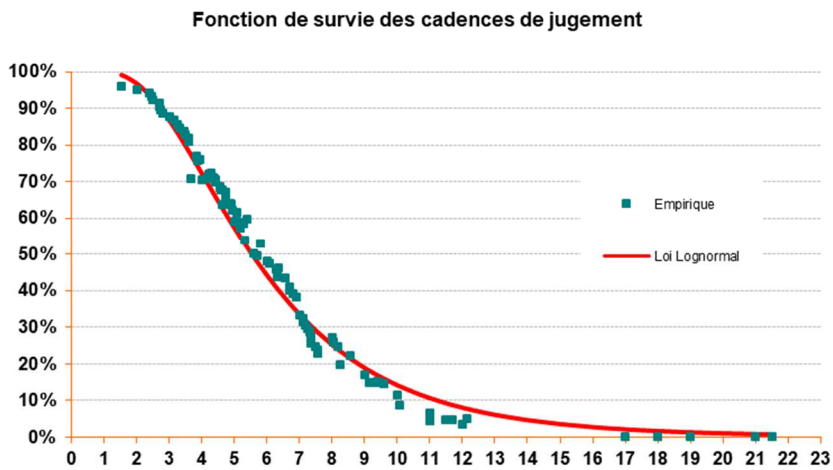
Modèle	R^2
Weibull	98,51%
Exponentiel	94,23%
Gamma	99,09%
Log-normale	99,24%

Nous sélectionnons le modèle log-normale pour modéliser le délai de jugement.

Les QQ-plot présentés dans les graphiques suivants viennent confirmer ce choix.



Nous présentons dans le graphique ci-dessous la fonction de survie empirique ainsi que la loi sélectionnée.



6.2.3 Taux de responsabilité

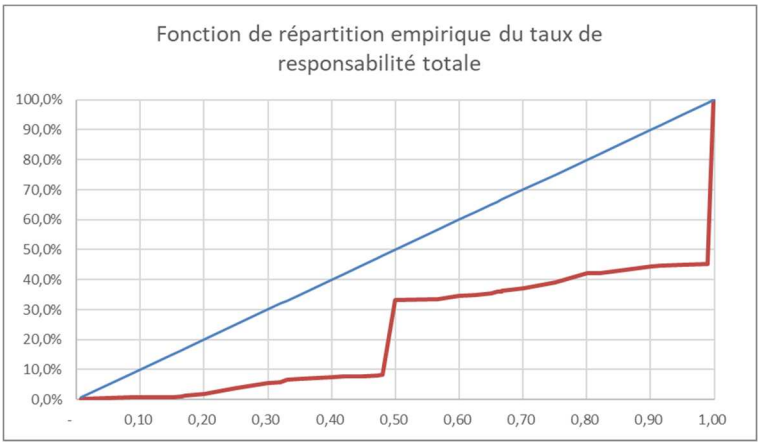
Nous cherchons dans cette partie à estimer le taux de rétention (ou de responsabilité) du dossier qui sera appliqué lors du jugement. Pour cela nous disposons d'une base de données constituée de 56 sinistres déclarés sur cette période et de 3 variables qui sont les suivantes :

- taux de responsabilité : Ce taux correspond à la part de responsabilité imputé à l'assuré lors de la survenance du sinistre, elle est aussi la part de l'indemnisation pris en charge par l'assureur. Cette variable prend uniquement les valeurs 50% (partiellement responsable) à ou 100% (totalement responsable).
- taux de rétention autre : Ce taux correspondant à tous les autres taux tel que la perte de chance, abattement suite a atteinte de plafond de garantie, cette variable prend ses valeurs sur le support]0 ;100%].
- taux de responsabilité totale : cette variable correspond au produit des 2 précédentes et prend ses valeurs sur le support]0 ;100%].

Nous nous intéressons ici à la variable modélisant le taux de responsabilité totale.

6.2.3.1 Présentation des données

Nous présentons ci-dessous la distribution de la variable « taux de responsabilité totale ».



Nous observons sur le graphique ci-dessus que :

- cette variable ne peut pas être modélisée par une loi uniforme (la fonction de répartition (courbe rouge) n'est pas confondue avec la courbe bleu (y=x, fonction de répartition d'une loi uniforme)).
- la présence de 2 paliers (50% et 100%), ces paliers sont expliqués par le taux de RC contesté.
- les valeurs autres que 50% et 100% sont expliquées par les autres taux (perte de chance, RC partagé, application du plafond de garanties…)

6.2.3.2 Modélisation

En retirant les valeurs 50% et 100%, le taux moyen de responsabilité total est de 54 %, nous assimilons donc toutes ces valeurs à 50% et considérons uniquement les taux de 50% et de 100%.
Nous obtenons la répartition suivante :

Taux de responsabilité total	0	50%	100%	Total
Nombre	0	25	31	56
Poids	0%	45%	55%	100%

Nous simulerons la variable $Taux_{resp_i}$ de la manière suivante :

$$Taux_{resp_i} = \begin{cases} 50\% \; si \; u < 0{,}45 \\ 100\% \; si \; 0{,}45 \leq u < 1 \end{cases}$$

Avec u une variable aléatoire uniforme à valeur dans [0,1].

6.2.4 Annuité jugée

6.2.4.1 Jugement civil

Nous supposons que le montant de l'annuité jugé par un tribunal civil dépend du taux d'IPP (incapacité partielle permanente) et du temps alloué à une tierce personne (TP). Nous modélisons cette variable (annuité jugé) à l'aide d'un modèle linéaire généralisé. Nous souhaitons modéliser le montant de l'annuité au moment du jugement, pour cela nous disposons d'un échantillon de 54 sinistres ayant fait l'objet d'une procédure en civil sur la période d'ouverture 1995 et 2009.

6.2.4.1.1 Théorie des modèles linéaires généralisés

Nous nous positionnons dans le contexte de régression, nous cherchons à expliquer une variable Y par p variables explicatives.
Nous disposons d'un n échantillon $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ où les $x_1 = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ sont fixes et Y_i sont des variables aléatoires réelles indépendantes.
Un modèle linéaire généralisé est constitué de trois composantes :

- une composante stochastique
- une composante déterministe
- une fonction de lien

6.2.4.1.1.1 Composante stochastique

Cette composante précise que les observations sont des variables aléatoires indépendantes avec une densité appartenant à la famille exponentielle.
Une distribution appartient à la famille exponentielle si sa densité peut s'écrire de la forme suivante

$$f_Y(y_i, \theta_i, \Phi) = \exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\theta_i)} + c(y_i, \Phi)\right\}$$

Où a(.), b(.), c(.,.) sont des fonctions spécifiques à la loi considérée, θ est un paramètre de tendance et Φ un paramètre de dispersion.

Nous retrouvons dans la famille exponentielle les lois usuelles présentées dans le tableau suivant :

Distribution de Y_i	θ_i	ϕ	$a_i(\phi)$	$b(\theta_i)$	$c(y_i, \phi)$
Normale(μ_i ;σ^2)	μ_i	σ^2	ϕ	$\frac{\theta^2}{2}$	$-\frac{1}{2}\left\{\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right\}$
Poisson(μ_i)	$\log(\mu_i)$	1	ϕ	$\exp(\theta_i)$	$-\log y!$
Binomiale$\frac{1}{m_i}$(m_i ;μ_i)	$\log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right)$	$\frac{1}{\mu_i}$	ϕ	$\log(1+\exp\theta_i)$	$\log\binom{m_i}{m_i y_i}$
Gamma(μ_i ;α)	$\frac{-1}{\mu_i}$	α^{-1}	ϕ	$-\log(-\theta)$	$\alpha\log(\alpha y) - \log y - \log\Gamma(\alpha)$

6.2.4.1.1.2 Composante déterministe

La composante déterministe du modèle attribue à chaque observation un prédicteur linéaire de la forme :

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p-1} x_{ij}\beta_j$$

6.2.4.1.1.3 Fonction de lien

Comme son nom l'indique cette composante assure le lien entre les deux premiers éléments. L'espérance de la variable Y_i notée μ_i est liée au prédicteur linéaire η_i à l'aide de la fonction de lien g :

$$\eta_i = g(\mu_i) = g\big(\mathbb{E}(Y_i)\big) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p-1} x_{ij}\beta_j$$

$\mathbb{E}(Y_i)$ est donc liée à une combinaison linéaire des paramètres β par une fonction monotone et différentiable g. Par conséquent, la fonction g est inversible et nous pouvons appliquer son inverse g^{-1} (fonction de réponse) à η pour obtenir des prédictions.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les fonctions de lien les plus fréquemment utilisée :

log	$g(\mu_i) = \log \mu_i$
logit	$g(\mu_i) = \log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right)$
probit	$g(\mu_i) = \Phi^{-1}(\mu_i)$
complementary log-log	$g(\mu_i) = \log\left(-\log(1-\mu_i)\right)$
log-log	$g(\mu_i) = \log(-\log(\mu_i))$

Pour la fonction de lien Probit, Φ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Hormis la fonction Log, toutes les fonctions de liens ne sont pas adaptées à notre étude puisque la variable de réponse doit être située dans]0,1[.

6.2.4.1.1.4 Application numérique

<u>Présentation des données</u>

Nous disposons d'une base de données composée de 55 dossiers jugés contenant les variables suivantes :

- indicatrice de minorité de la victime au jugement (âge de la victime inférieur à 18 ans)
- le taux d'incapacité permanente partiel (IPP)
- le niveau de présence d'une tierce personne (TP)

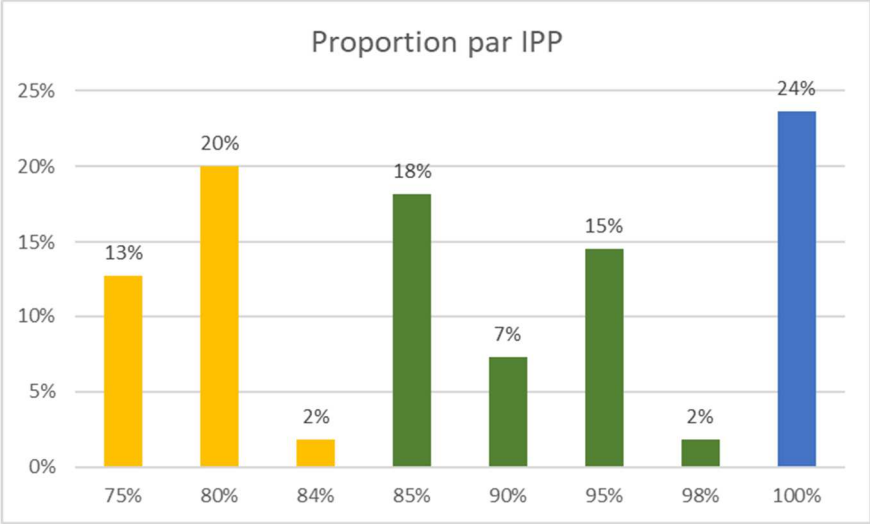
<u>Analyse statistique</u>

- **Le taux d'incapacité permanente partiel (IPP)**

Nous présentons les principales statistiques descriptives de la variable IPP

```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.7500  0.8000  0.8500  0.8831  0.9650  1.0000
```

Nous présentons dans le graphique ci-dessous la distribution de la variable IPP



Nous observons sur le graphique ci-dessous que nous pouvons segmenter cette variable en 3 catégories (Tranche_IPP) de proportion équilibrée :

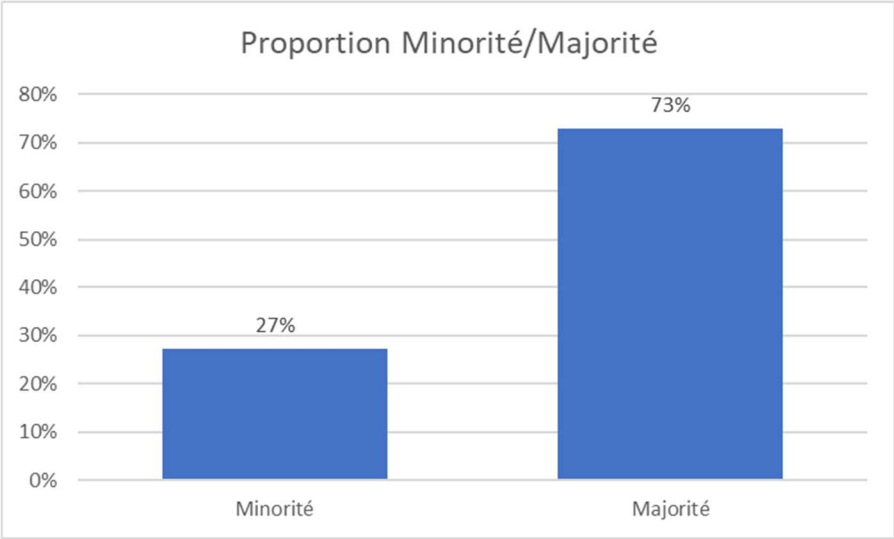
- catégorie 1 (jaune) : l'IPP est comprise entre 75% et 84% représentant 34% de l'échantillon
- catégorie 2 (vert) : l'IPP est comprise entre 85% et 99% représentant 42% de l'échantillon
- catégorie 3 (bleu) : l'IPP est égale à 100% représentant 24% de l'échantillon

- **Indicatrice de minorité (Mino)**

Les modalités de cette variable sont :

- 1 si l'âge de la victime au moment du jugement est inférieur à 18 ans
- 2 si l'âge de la victime au moment du jugement est supérieur à 18 ans

Nous présentons dans le graphique ci-dessous la distribution de la variable Mino



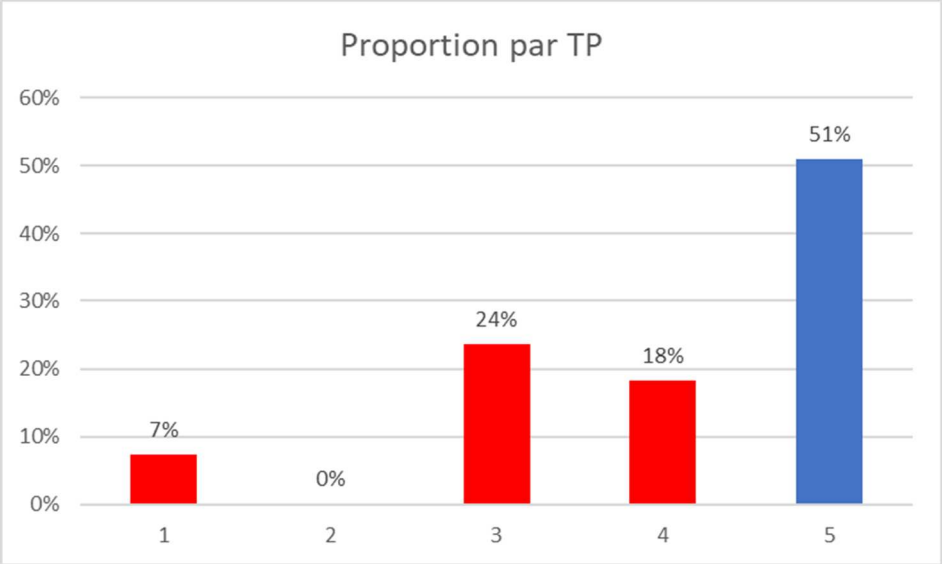
La proportion de victime majeure au moment du jugement est supérieure à la proportion de victime mineure.

- **Le niveau de présence d'une tierce personne (TP)**

Les modalités de cette variable sont :

- 1 si le temps de la tierce personne est inconnu au moment du jugement
- 2 si la victime ne nécessite pas l'aide d'une tierce personne
- 3 si la victime nécessite l'aide d'une tierce personne pendant 8 heures
- 4 si la victime nécessite l'aide d'une tierce personne pendant 16 heures
- 5 si la victime nécessite l'aide d'une tierce personne pendant 24 heures

Nous présentons dans le graphique ci-dessous la distribution de la variable TP



Nous observons que plus de la moitié des victimes présente dans l'échantillon nécessite l'aide d'une tierce personne à temps complet.
Nous segmentons cette variable en 2 catégories (Tranche_TP) de proportion équilibrée :

- catégorie 1 (rouge) : L'aide d'une tierce personne à temps partiel (TP <100%) représentant 49% de l'échantillon
- catégorie 2 (bleu) : L'aide d'une tierce personne à temps complet (TP = 100%) représentant 51% de l'échantillon

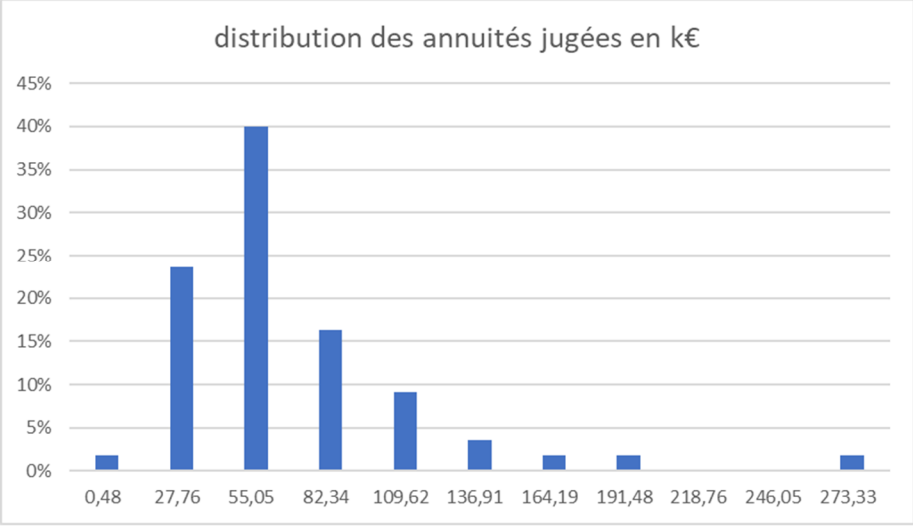
- **Le montant de l'annuité jugée**

Nous présentons les principales statistiques descriptives de la variable Annuité

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
478.9	27792.2	39695.3	55528.2	72737.1	273333.0

Nous observons que la moyenne est supérieure à la médiane indiquant la présence de valeur extrême et donc d'une queue de distribution plus épaisse à droite comme le montre le graphique suivant.

Nous présentons dans le graphique ci-dessous la distribution de la variable Annuité



Les annuités les plus élevées correspondent à des dossiers où les victimes nécessitent la présence d'une tierce personne à temps complet.

Application du modèle GLM

Les lois Binomial, Poisson et les fonctions de liens autres que log ne sont pas en adéquation avec nos données. Nous décidons de tester le modèle GLM avec une fonction lien log et les lois suivantes :

- Normale
- Gamma

Notre modèle s'écrit alors de la forme suivante :

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 1_{Mino=1} + \beta_2 1_{Mino=2} + \beta_3 1_{Tranche_{IPP}=1} + \beta_4 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_5 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_6 1_{TP=1} + \beta_7 1_{TP=2}$$

Où :
$\log(\mu_i)$ suit soit une loi normale (modèle Normal) ou une loi gamma (modèle Gamma).
Nous baserons notre choix de modèle à partir du critère d'information Aikake (AIC).

Le critère d'information Aikake (AIC)

Le critère AIC est une mesure de qualité d'un modèle statistique proposée en 1973 par Hirotugu Akaike. Ce critère est défini par la formule suivante :

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et L est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.
Si l'on considère un ensemble de modèles candidats, le modèle choisi est celui qui aura la plus faible valeur d'AIC. Ce critère repose donc sur un compromis entre la qualité de l'ajustement et la complexité du modèle, en pénalisant les modèles ayant un grand nombre de paramètres.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats des modèles

Modèle	Critère AIC
Modèle Normal avec constante liens log	1336.6
Modèle Gamma avec constante liens log	1304.2
Modèle Normal sans constante liens log	1336.6
Modèle Gamma sans constante liens log	1304.2

Nous rappelons que :

- hormis la fonction Log, les fonctions de liens probit, logit, log-log et complementary log-log ne sont pas adaptées à notre étude puisque la variable de réponse doit être située dans]0,1[.

-concernant les lois Binomial et Poisson, celles-ci correspondent à des distributions de dénombrement. Elles ne sont pas continues, donc non adaptées à notre échantillon.

Nous choisissons donc le modèle suivant :

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 1_{Mino=1} + \beta_2 1_{Mino=2} + \beta_3 1_{Tranche_{IPP}=1} + \beta_4 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_5 1_{Tranche_{IPP}=3} + \beta_6 1_{TP=1} + \beta_7 1_{TP=2}$$

Où :

$\log(\mu_i)$ suit une loi gamma (modèle Gamma avec ou sans constante).

Nous retirons du modèle les variables colinéaires suivantes :

- $1_{Mino=2}$
- $1_{TP=2}$

Notre modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 1_{Mino=1} + \beta_2 1_{Tranche_{IPP}=1} + \beta_3 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_4 1_{Tranche_{IPP}=3} + \beta_5 1_{TP=1}$$

Où :

$\log(\mu_i)$ suit une loi gamma (modèle Gamma avec ou sans constante).

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les estimations et les résultats des tests de Student pour les 2 modèles restants (avec ou sans constante).

	Modèle Gamma avec constante		Modèle Gamma sans constante	
Variable	Estimation	P valeur test de student	Estimation	P valeur test de student
Intercept	11,291	<2e-16		
TrancheIPP = 1	-0,174	0,611	11,116	<2e-16
TrancheIPP = 2	0,003	0,988	11 ,294	<2e-16
TrancheIPP = 3	NA	NA	11,291	<2e-16
TP = 1	-0,684	0,011	-0,684	0,011
Mino = 1	-0.192	0,400	-0,192	0,400

Le test de Student

Lorsqu'une variable est retenue dans le modèle, il convient de tester sa significativité. Pour ce faire deux hypothèses sont posées :

- H0 : la variable β_i n'a pas d'influence sur le modèle
- H1 : la variable β_i a une influence sur le modèle

Pour un échantillon suffisamment grand, l'estimateur du paramètre β_i suit une loi normale de moyenne et de variance qui peuvent être estimées.
Cette propriété permet de tester l'hypothèse de nullité du paramètre reposant sur la statistique de Student T_{n-p-1}. Sous $H0$ la statistique de test T_{n-p-1} s'écrit :

$$T_{n-p-1} = \frac{\sqrt{n-p-1}\hat{\beta}_i}{s}$$

Où :

$n-p-1$ est le nombre de degrés de liberté
$\widehat{\beta}_i$ l'estimateur de β_i
s l'estimateur de l'écart type

Nous observons dans le tableau précédent que :

- la variable Mino peut être éliminé du modèle sa p-valeur est supérieure à 5%
- dans le modèle avec constante, les variables IPP ne sont pas significatives alors qu'elles le sont dans le modèle sans constante.

Nous retenons le modèle sans constante en ayant retiré la variable Mino.
Notre modèle s'écrit maintenant de la forme suivante :

$$\log(\mu_i) = \beta_1 1_{Tranche_{IPP}=1} + \beta_2 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_3 1_{Tranche_{IPP}=3} + \beta_4 1_{TP=1}$$

Où :

$\log(\mu_i)$ suit une loi gamma.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les estimations et les résultats des tests de Student pour le modèle retenu.

Variable	Estimation	P valeur test de student
TrancheIPP = 1	11.073	<2e-16
TrancheIPP = 2	11.249	<2e-16
TrancheIPP = 3	11.253	<2e-16
TP = 1	-0.695	0.01

Toutes les p-valeurs sont inférieures à 5%, nous retenons donc ce modèle.
La valeur de l'AIC est de 1302.9

Analyse des résidus du modèle retenu

Résidu de Pearson :
Le résidu de Pearson est défini comme :

$$e_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{Var(\hat{\mu})}}$$

Où $Var(\hat{\mu})$ désigne la variance.

Résidu de déviance :
Ces résidus mesurent la contribution d_i de chaque observation à la déviance du modèle par rapport au modèle saturé.
La déviance du modèle est l'écart entre la log-vraisemblance obtenue en β^n, et celle obtenue avec un modèle parfait β^{max} (dit saturé).

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = -2\ln\left(\frac{L_y(\hat{\beta}^n)}{L_y(\hat{\beta}^{max})}\right)$$

Le résidu de déviance est défini comme :

$$e_{d_i} = d_i \times signe(y_i - \hat{\mu}_i)$$

Avec :

Dans le cas continue :

$$d_i^2 = -2\,ln\left(\frac{f_{\hat{\beta}^n}(y_i)}{f_{\hat{\beta}^{max}}(y_i)}\right)$$

Dans le cas discret :

$$d_i^2 = -2\,ln\left(\frac{\mathbb{P}_{\hat{\beta}^n}(Y = y_i)}{\mathbb{P}_{\hat{\beta}^{max}}(Y = y_i)}\right)$$

Un modèle de qualité aura des résidus de déviance dont la distribution est proche d'une loi normale centrée réduite

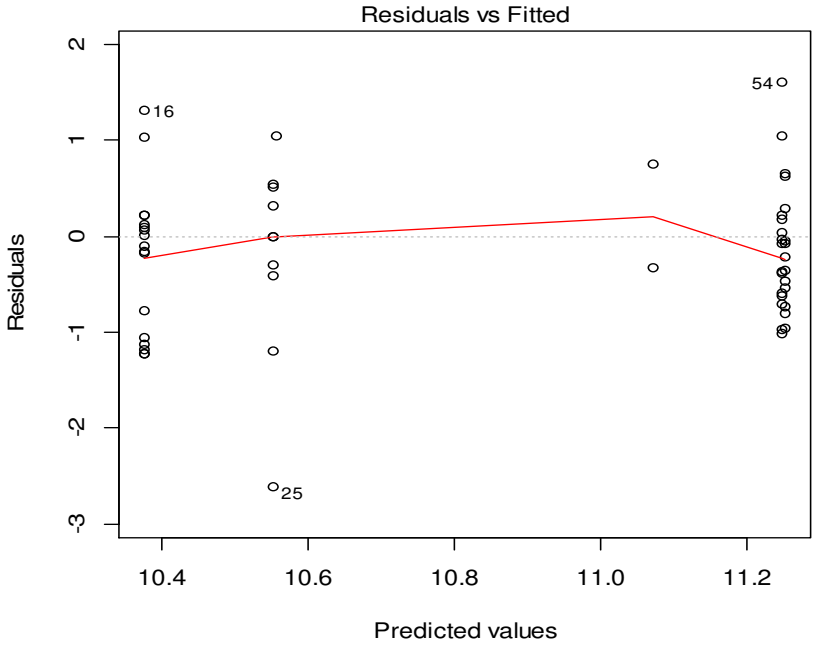
Le levier :
Nous construisons la matrice de projection (hat matrix) :

$$H = W^{\frac{1}{2}}X(X'WX)^{-1}X'W^{\frac{1}{2}}$$

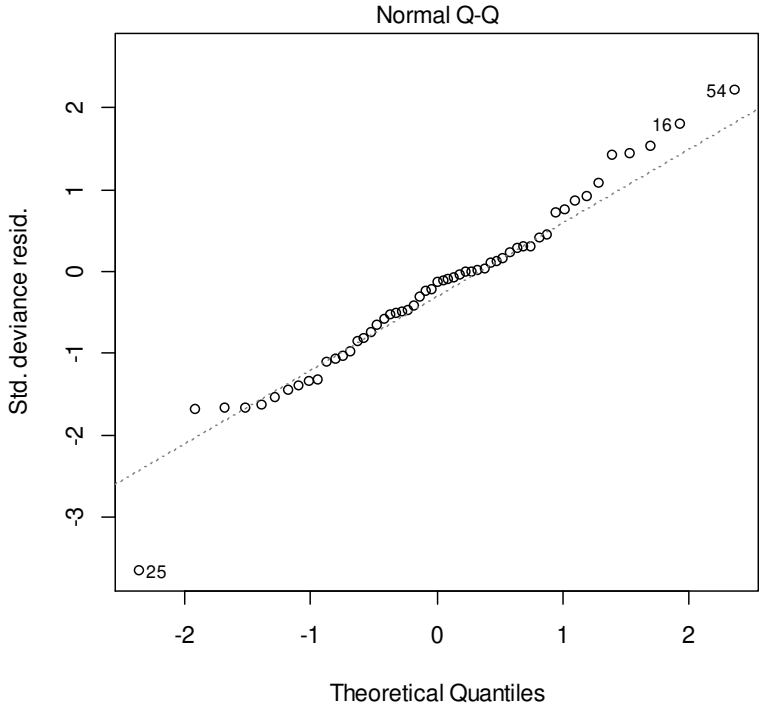
relative au produit scalaire de la matrice de 'pondération' de diagonale $W_{ii} = \frac{1}{Var(Y_i)}\left(\frac{\mu_i}{\eta_i}\right)$, sur le sous espace engendré par les variables explicatives.
L'effet de levier consiste à étudier les termes diagonaux H_{ii} , ceux qui sont supérieurs à $\frac{3(p+1)}{n}$ sont considérés comme influents, ajuster les données revient à retirer les observations faites pour ces valeurs.

Analyse des résidus

Le graphique ci-dessous représente les résidus en fonction des valeurs prédites par le modèle. La courbe rouge représente la moyenne des résidus par valeur prédite, nous observons que cette courbe est proche de 0 et varie peu.



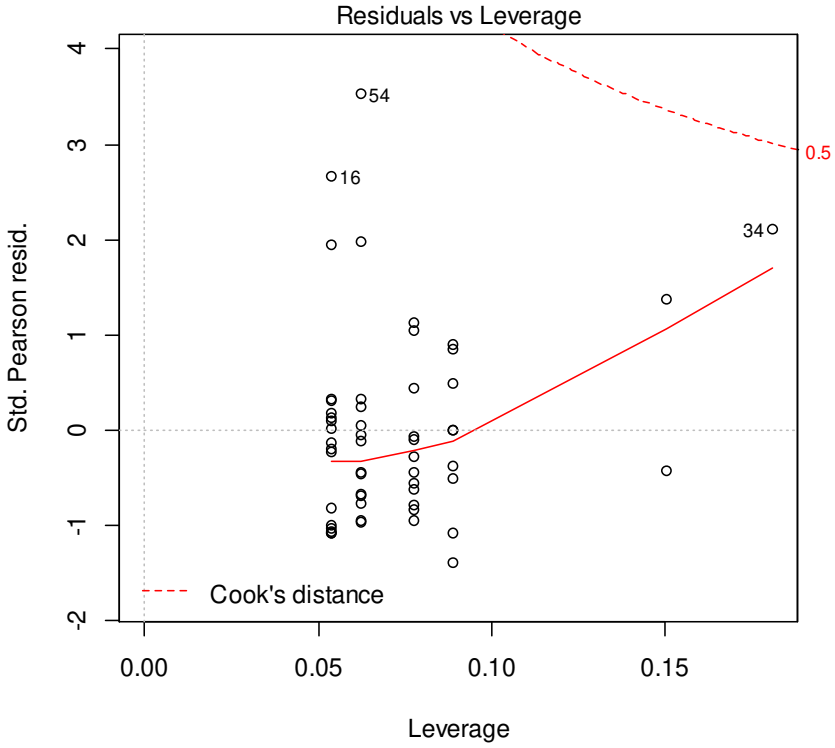
Nous testons la normalité de nos résidus de déviance via un QQ plot et le test de Kolmogorov-Smirnov.



Nous observons sur le QQ plot présenté ci-dessus que l'ensemble de nos points sont sensiblement alignés sur la droite y=x.

Le test de Kolmogorov Smirnov conforte les résultats du QQ plot avec une p-valeur de 0.9, nous acceptons l'hypothèse de normalité des résidus.

Le graphique ci-dessous représente les résidus de Pearson en fonction du levier



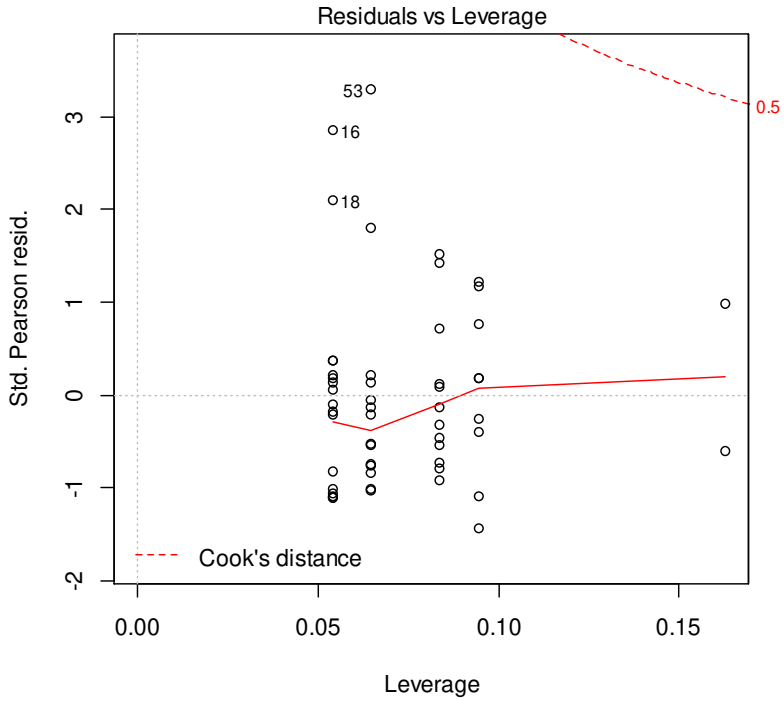
La distance de Cook (courbe représentée par des tirets de couleur rouge), mesure globalement l'influence sur l'ensemble des paramètres. Cette distance est définie par l'inverse de la covariance des paramètres, entre le vecteur des paramètres β estimé avec toutes les observations et celui estimé lorsque la ième observation est supprimée.

$$D_i = \frac{1}{2}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})'(X'WX)^{-1}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})$$

Cet indicateur prend simultanément en compte l'effet levier et l'importance du résidu de chaque observation

Nous observons sur le graphique ci-dessus les résidus qui ont une valeur élevée et un fort effet de levier. Les points proches de la courbe représentée par des tirets rouges nécessitent une étude plus poussée car ils représentent des potentiels *« outliers »*.

En retirant le point n°34 du graphique ci-dessus, nous n'observons plus de tendance (courbe rouge continue) comme le montre le graphique ci-dessous.



Le point éliminé correspond à une valeur unique pour les combinaisons TrancheIPP=3 et TP=1.
La normalité des résidus de déviance est préservée avec une p-valeur de 0.79 pour le test de Kolmogorov-Smirnov.

Les résultats de ce modèle sont les suivants :

Variable	Estimation	P valeur test de student
TrancheIPP = 1	11.238	<2e-16
TrancheIPP = 2	11.321	<2e-16
TrancheIPP = 3	11.126	<2e-16
TP = 1	-0.885	0.002

Toutes les p-valeurs sont inférieures à 5%, nous retenons donc ce modèle.
La valeur de l'AIC est de 1275.8

Résultat des différents modèles testés.
Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous les différents modèles testés ainsi que les différents critères de choix :

Modèle	AIC
Modèle Normal liens log avec constante	1336.6
Modèle Gamma liens log avec constante	1304.2
Modèle Normal liens log sans constante	1336.6
Modèle Gamma liens log sans constante	1304.2
Modèle Gamma liens log sans constante et sans la variable Mino	1302.9
Modèle Gamma liens log sans constante et sans la variable Mino et le point N°34	1275.8

Nous retenons le modèle Gamma liens log sans constante, sans la variable Mino et sans le point N°34.
Simulation du modèle

Pour simuler le montant de notre annuité, nous utilisons la formule suivante :

$$\mu = \exp\left(\beta_1 1_{Tranche_{IPP}=1} + \beta_2 1_{Tranche_{IPP}=2} + \beta_3 1_{Tranche_{IPP}=3} + \beta_4 1_{TP=1}\right) \times X$$

Où $X \sim Gamma(Forme = \frac{1}{dispersion}, echelle = dispersion)$
Et :

$$\beta_1 = 11.238$$
$$\beta_2 = 11.321$$
$$\beta_3 = 11.126$$
$$\beta_4 = -0.885$$

Avec le paramètre de dispersion estimé grâce au modèle GLM : 0,5219009

6.2.4.2 *Jugement administratif*

6.2.4.2.1 Relevant de la jurisprudence du 25 juin 2008

Cette jurisprudence (CE 25 juin 2008 CPAM de Dunkerque n°235887A) constitue le « droit commun » de l'indemnisation en droit administratif des grands invalides.
Elle stipule que : « *Dès lors qu'un juge est dans l'incapacité de déterminer si la victime de dommages dus à la faute commise par un centre hospitalier, serait placé dans une institution spécialisée ou s'il serait hébergé au domicile de sa famille, il accorde à la victime une rente trimestrielle couvrant les frais de son maintien à domicile. Cette rente est calculée sur la base d'un taux quotidien, le responsable du dommage est condamné à rembourser à l'organisme de sécurité sociale les frais d'hébergement en institution spécialisée sur la base des justificatifs qui lui sont présentés.* »

6.2.4.2.1.1 Poids des dossiers issus de la jurisprudence du 25 juin 2008

Nous disposons d'un échantillon, parmi lesquels certains sont jugés selon cette jurisprudence et dont nous présentons dans le tableau ci-dessous la proportion par tranche d'IPP et par TP.

IPP	TP	Proportion
25% ≤ IPP < 75%		10%
75% ≤ IPP < 85%		20%
85% ≤ IPP < 100%	inconnue	35%
	0	15%
	1/3	20%
	2/3	20%
	3/3	60%
IPP = 100%		40%

Dès qu'un dossier non jugé relève de la juridiction administrative, lors de son jugement un nombre uniforme sera tiré et comparé à la probabilité d'être concerné par cette jurisprudence. En fonction de ce tirage le montant de l'annuité différera et vaudra :

- Soit la réalisation du modèle GLM au même titre que les annuités issues de la juridiction civile dans le cas où le dossier n'est pas concerné par la jurisprudence.

- Ou le montant de l'annuité présenté dans le point suivant dans le cas contraire.

6.2.4.2.1.2 Montant des annuités

Les postes de préjudice en droit administratif sont les suivants :

- Préjudices économiques :
  - Dépenses de santé (placement, frais médicaux ...)
  - Frais liés au handicap (TP, logement, ...)
  - Pertes de revenus
  - Incidence professionnelle et scolaire
  - Autres dépenses liées au dommage corporel

- Préjudices personnels :
  - Souffrances physiques et morales,
  - Préjudice esthétique
  - TCE « envisagées indépendamment de leurs conséquences pécuniaires »

Les préjudices personnels sont chiffrés sous forme de rente entre 10k€/an et 15k€/an.

Les rentes Tierce Personne, dénommées « Maintien à Domicile », représente la plus grosse partie du poste de préjudice économique, son coût se situe entre 100 €/nuit et 200€/nuit[1].

Nous supposons que :

- il n'y a pas de variation entre les tarifs nuits et jours pour le maintien à domicile. Nous ferons donc usage des tarifs nuits pour en déduire un coût horaire
- le coût d'un maintien à domicile d'une victime mineure est plus faible qu'une victime majeure.

Nous émettons les hypothèses qui sont synthétisées dans le tableau suivant :

	Montant de l'annuité pour le poste "préjudices personnels"	Coût d'une heure de maintien à domicile	Nombre d'heures de maintien à domicile	Nombre de jours de maintien à domicile
Minorité	10 000 €	12,50 €	24 heures	360 jours
Majorité	15 000 €	16,67 €	24 heures	360 jours

Les montants des annuités s'évaluent de la manière suivante :

- Annuité Minorité = 10 000€ + 12,5€ * 24 * 360 = 118 000€
- Annuité Majorité = 15 000€ + 16,67€ * 24 * 360 = 159 028€, nous arrondissons ce montant à 159 000€

Nous rajoutons de l'aléa de la manière suivante :

$$Annuité = \text{Annuité} \times X$$

Où $X \sim Gamma(Forme = \frac{1}{dispersion}, echelle = dispersion)$

Avec le paramètre de dispersion estimé grâce au modèle GLM (du jugement civil) : 0,5219009

[1] *Source :* http://www.apref.org/sites/default/files/espacedocumentaire/14._note_apref_juin_2013_-_indemnisation_des_dommages_corporels_-_analyse_et_perspectives.pdf

7 Quantification des engagements cédés aux réassureurs

Dans un but de réduction de la volatilité du résultat et de limitation des pertes et d'optimisation du ratio de couverture Solvabilité 2, une société d'assurance (que nous appellerons par la suite la cédante) peut transférer une partie de son risque à une autre compagnie (plus communément connus sous le nom de réassureur ou cessionnaire). En échange du paiement d'une prime, le réassureur s'engage à intervenir sur les sinistres, sous certaines conditions et ainsi permettre à la cédante d'éviter une situation délicate voire la faillite.

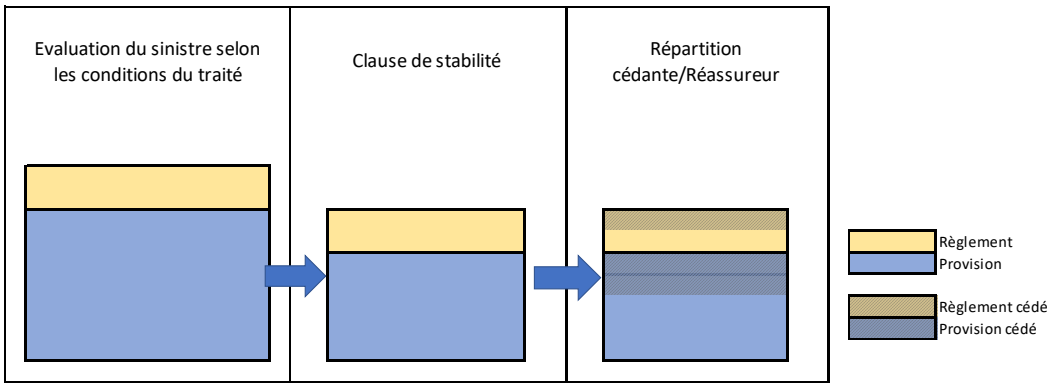
Tout comme une police d'assurance, le contrat de réassurance est composé de :

- Conditions générales qui définissent le cadre du traité et indique les obligations de chaque partie.
- Conditions particulières qui précisent de manière détaillée :
    - la nature du traité
    - les caractéristiques des affaires couvertes par le traité
    - les documents à fournir lors de l'avis au réassureur
    - le mode calcul des cessions
    - la définition des différentes clauses négocié

Les traités de réassurance sont de manière générale négociés annuellement et leur contenu est susceptible d'être modifié.

7.1 Le fonctionnement des traités XS

Le schéma suivant résume le calcul de cession effectué :



7.1.1 Evaluation du sinistre selon les conditions du traité

Les capitaux constitutifs et les provisions mathématiques des rentes sont calculés sur la base de la loi de survie en invalidité définie par la table et le taux technique défini par le traité.

7.1.2 La clause de stabilité

La Cédante et les Réassureurs, entendant conserver à la franchise et à la portée, leur valeur relative à la date d'effet du traité. Il convient de déterminer leurs montants en fonction de la variation d'un indice.

Le montant de la franchise et de la portée dans le paiement de tout sinistre (frais de règlement compris) sont augmentés ou diminués proportionnellement à la variation de l'indice, mais seulement dans la mesure où cette variation est supérieure à un seuil (que nous fixerons à 10% à titre d'exemple par la suite).

A l'aide de l'indice (que nous noterons GIM), nous calculons, pour chaque versement, un montant équivalent en monnaie constante qui est ramené à la date d'effet du traité. Le calcul de ces montants ramenés constitue un sinistre théorique (que nous nommerons S_{TH}) sur la base duquel le partage est effectué.
Considérons le sinistre S qui est constitué d'une provision P et de N règlements R_i effectués en i. Soit GIM_0 la valeur de l'indice à la date d'effet du traité et GIM_N au 31/12/N.
Le montant S_{TH} est calculé de la manière suivante :

$$S_{TH} = R_{TH} + P_{TH}$$

Avec

$$R_{TH} = \sum_{i=1}^{N} R_i \times \begin{cases} 1 \; si \; \frac{GIM_i}{GIM_0} < 110\% \\ \frac{GIM_0}{GIM_i} \; sinon \end{cases} \text{ le montant des règlements théorique}$$

Et, le montant de la provision théorique P_{TH} est évalué de la manière suivante :

$$P_{TH} = P \times \begin{cases} 1 \; si \; \frac{GIM_N}{GIM_0} < 110\% \\ \frac{GIM_0}{GIM_N} \; sinon \end{cases} \quad pour\ une\ rente\ d'une\ victime\ d'age\ x\ au\ 31/12/N$$

7.1.3 Répartition cédante / réassureur

7.1.3.1 Les clauses de suivis

Le suivi des rentes est un point important des traités de réassurance, notamment dans le cas des coûts des corporels graves. Différents modes de gestion sont envisageables :

- le suivi dit « **additionnel** » de la rente :
  Les arrérages de la rente sont purement et simplement vus comme des paiements au même titre que n'importe quel autre paiement. Le réassureur intervient dès lors que le cumul des paiements dépasse la priorité du traité

- le suivi dit « **proportionnel** » de la rente :
  Le réassureur participe dès le départ au paiement des arrérages selon la proportion $\frac{K-Priorité}{Priorité}$ où K désigne le capital constitutif de la rente.

- le « **rachat de la rente »** (ou commutation ou libération) :
  Le réassureur paie à l'assureur immédiatement ou après une certaine période sa part du sinistre dépassant la priorité selon des conditions définies dans le traité de réassurance. Ce paiement libère le réassureur de son engagement auprès de l'assureur.

Les traités que nous étudierons disposent d'une clause de suivi additionnel et d'une clause de rachat partiel.

La clause de rachat partiel de la partie rentes s'applique au moment du jugement majorité :

- pour les dossiers relevant d'une juridiction civile, la moitié de l'annuité est transformée en capital constitutif et est rachetée
- pour les dossiers relevant d'une juridiction administrative :
  - dans notre cas, pour un dossier relevant de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 », la clause de rachat négocié avec les réassureurs ne concerne que l'annuité préjudice personnel et est fixée contractuellement au maximum à 15 K€, l'annuité minimum hors préjudices personnels étant de 365 x 150 €. La clause est définie selon la formule suivante :

$$Max\left(0, Min\left(15\,000, Annuité_{jugée} - 365 \times 150\right)\right)$$

  - dans le cas d'un dossier ne relevant pas de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 », l'ensemble de l'annuité est transformé en capital constitutif et est racheté.

7.1.3.2 Calcul du cout et des règlements cédés

Les cessions au titre du traité XS sont calculées à l'aide des formules suivantes :

- considérons le traité XS dont la priorité est K et la garantie est G, la priorité stabilisée correspond à :
  - $K_{stab} = K * \frac{S}{S_{TH}}$
- le montant à charge des réassureurs est :
  - $\min(G, S - K_{stab})$
- après application de la clause additionnelle, les règlements sont calculés de la manière suivante :
  - $\min(G, R - K_{stab})$
- le montant restant à charge de la cédante est :
  - $S - \min(G, S - K_{stab})$

7.1.4 Exemple

Nous présentons le fonctionnement du traité dans un cas fictif :

- le traité comporte une garantie de 6M€ et une franchise/priorité de 3M€ avec une valeur de base de l'indice de 100 :
- un sinistre de 4,08 M€ qui se décompose en :
  - 2 versements de :
    - 1,675M€ au 31/12/N-1, la valeur de l'indice est de 105
    - 1,17 M€ au 31/12/N, la valeur de l'indice est de 120
  - une provision de 1,235M€ au 31/12/N

<u>Le coût stabilisé</u> correspond à la somme :

- du premier versement (variation de l'indice est inférieure à 10%) : 1,675M€
- du second versement : 1,17M€ * 100/120 = 975k€
- du montant de la provision : 1,235 * 100/120 = 1,029M€

<u>Le coût total réduit</u> est de : 1,675+0,975+1,029=3,679M€

<u>Le montant de la priorité stabilisé</u> est : 3M€ * 4,08/3,679 = 3,326M€

Le montant restant à charge de la cédante est de 3,326M€ qui se décompose en :

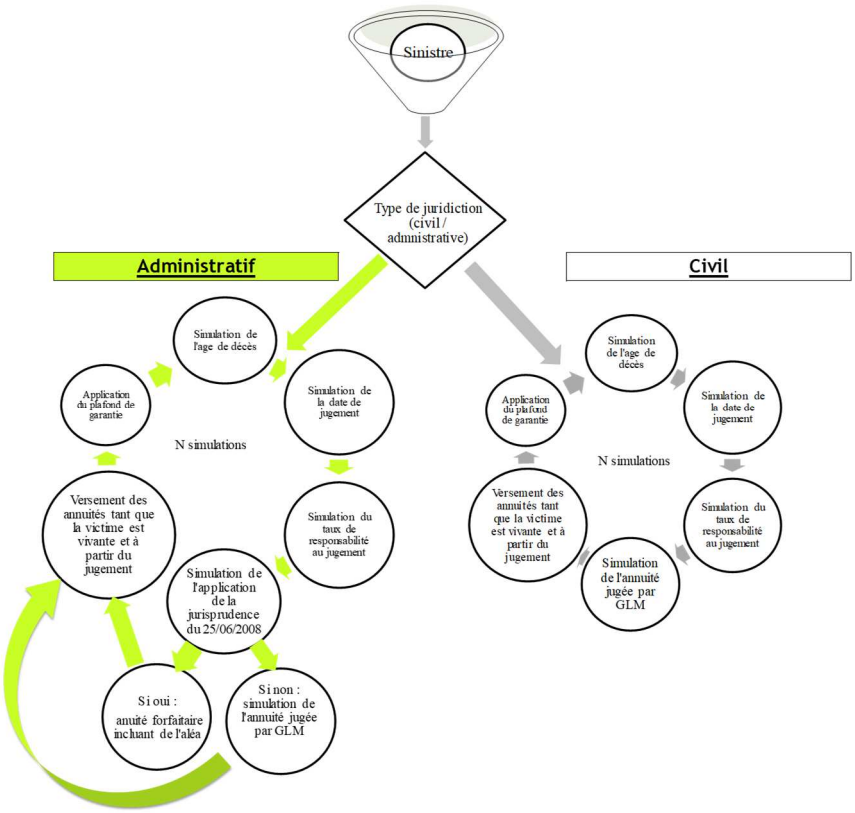
- 2,845M€ de paiement
- 481k€ de provisions

La charge cédée aux réassureurs est de 754k€ (4,08M€ - 3,326M€). Ce montant correspond uniquement à des provisions puisque les règlements ne dépassent pas la franchise.

8 Résultats

Tableau descriptif du cas étudié

Nous avons choisi ici d'étudier qu'un seul dossier relevant de la juridiction administrative afin de faire appel à toutes les parties du modèle présentées précédemment. Nous présentons ci-dessous dans le schéma représentant les parties du modèle utilisées ainsi que le tableau caractérisant le dossier.



	Caractéristiques du dossier
Juridiction	Administrative
IPP	85%
TP	1
Age de la victime	52
Priorité du traité	2,5M€

Nous ne présenterons pas de dossier relevant de la juridiction civile car le modèle est quasiment identique à l'exception de la partie jurisprudentielle administrative et des annuités qui en découlent.

Nous analyserons par la suite :

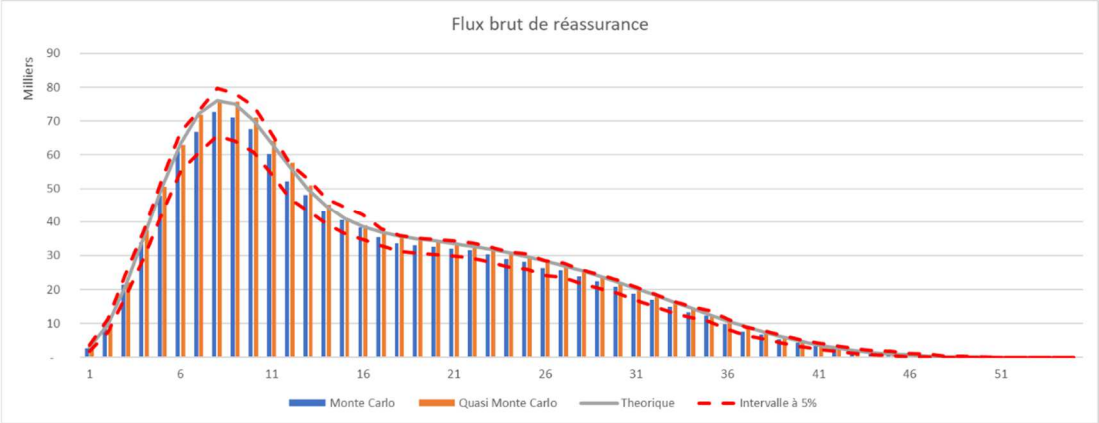
- la chronique de flux
- la convergence des simulations
- la distribution de la somme des flux futurs
- le montant des cessions en fonction du montant brut de réassurance

8.1 Engagements bruts de réassurance sur un dossier

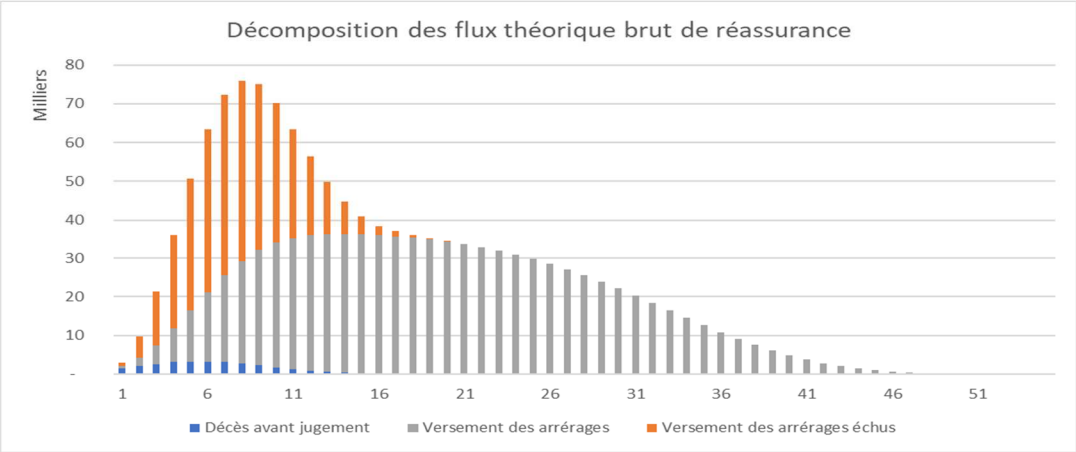
Nous avons effectué 10 000 simulations sur un dossier avec une rente en hypothèse, dont nous rappelons les principales lois de simulations :

- annuité hors jurisprudence : application du GLM en fonction de l'ipp et de la tp (cf. 6.2.4.1)
- annuité jurisprudence « JP CE 25 juin 2008 » : montant forfaitaire (cf. 6.2.4.2)
- âge de décès de la victime : simulation à l'aide de la table de mortalité (cf. 6.2.1)
- taux de responsabilité : tirage uniforme (cf. 6.2.3)
- délai de jugement : simulation de la loi log normale (cf. 6.2.2)

Nous présentons dans le graphique ci-dessous la chronique moyenne des flux simulés (selon la méthode de Monte Carlo et la méthode de Quasi Monte Carlo) que nous comparons avec celle obtenue par des calculs théoriques.



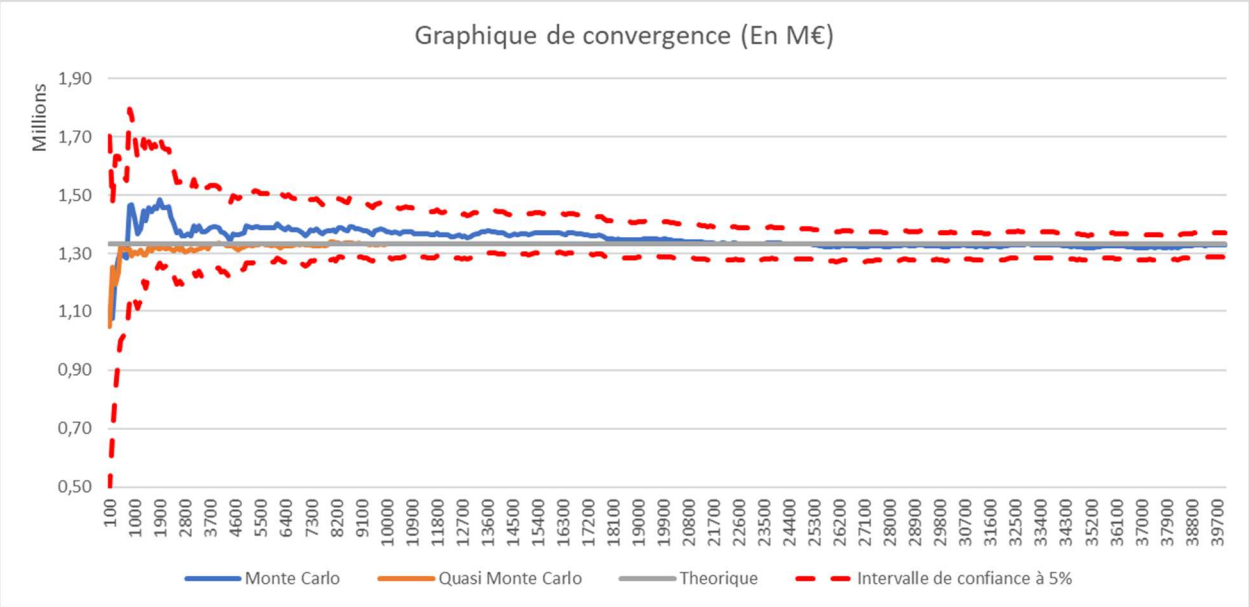
Nous observons une « bosse » entre les flux N°5 et 15 sur ce graphique qui s'explique par le paiement à la date de jugement de la partie arrérages échus. Nous décomposons le versement des arrérages sur la partie théorique dans le graphique suivant.



Sur les premières années qui correspondent aux dates de décisions de justice (21 premières années selon notre modèle), les flux sont composés en majeur partie des arrérages échus puisque ceux-ci interviennent au moment du jugement.

Nous présentons dans le graphique suivant les résultats du BE (non actualisé et inflaté) en fonction du nombre de simulations pour :

- la méthode de Monte Carlo (MC), simulation à l'aide d'un générateur de nombre pseudo aléatoire.
- la méthode de Quasi Monte Carlo (QMC), simulation à l'aide d'une suite à discrépance faible.
- le résultat théorique



Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats du *Best Estimate* brut de réassurance (en €), non actualisé, inflaté et hors plafond de garantie.

	Monte Carlo	Monte Carlo Borne inférieure à 5%	Monte Carlo Borne supérieure à 5%	Quasi Monte Carlo	Théorique
BE	1 263 224	1 186 239	1 339 958	1 334 949	1 332 483

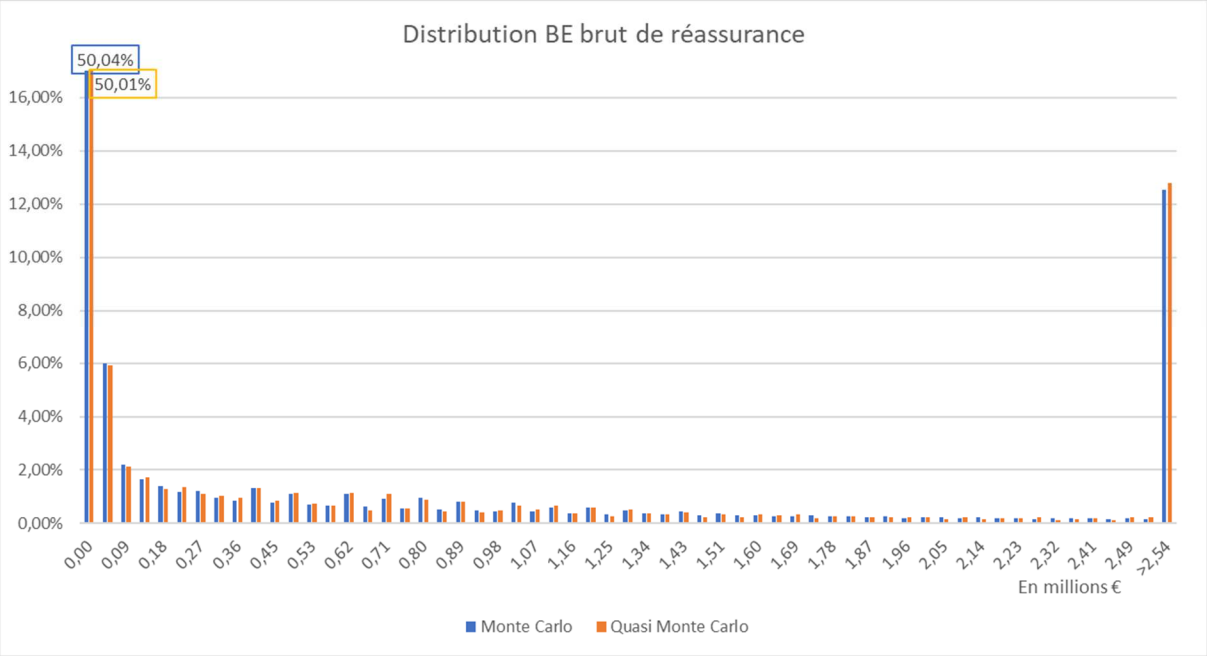
Nous observons que les montants sont tous situés dans l'intervalle de confiance à 5%. L'écart entre la méthode de Monte Carlo et la moyenne théorique est significatif (supérieur à 5%) et confirme une insuffisance du nombre de simulations.

Nous effectuons le même test avec 40 000 simulations pour la méthode de Monte-Carlo :

	Monte Carlo	Monte Carlo Borne inférieure à 5%	Monte Carlo Borne supérieure à 5%	Théorique
BE	1 330 421	1 289 765	1 371 020	1 332 483

Nous présentons dans le graphique suivant la distribution :

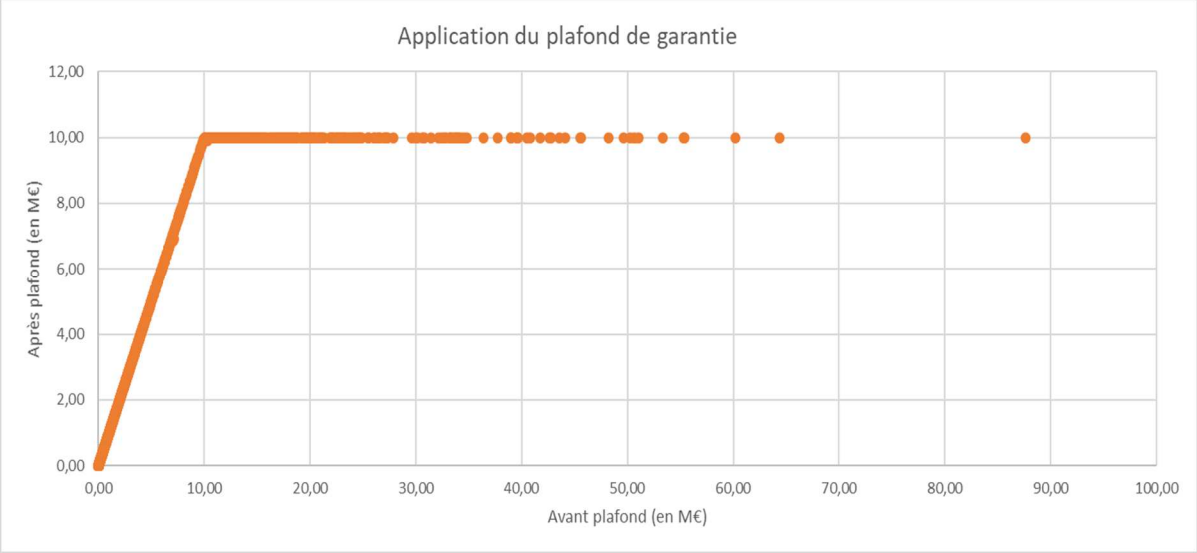
- Issue des 40 000 simulations de Monte Carlo
- Issue des 10 000 simulations de Quasi Monte Carlo



La queue de distribution étant trop longue, nous avons agrégé l'ensemble des simulations au-delà de 2,54M€ sur un seul point (>2,54).

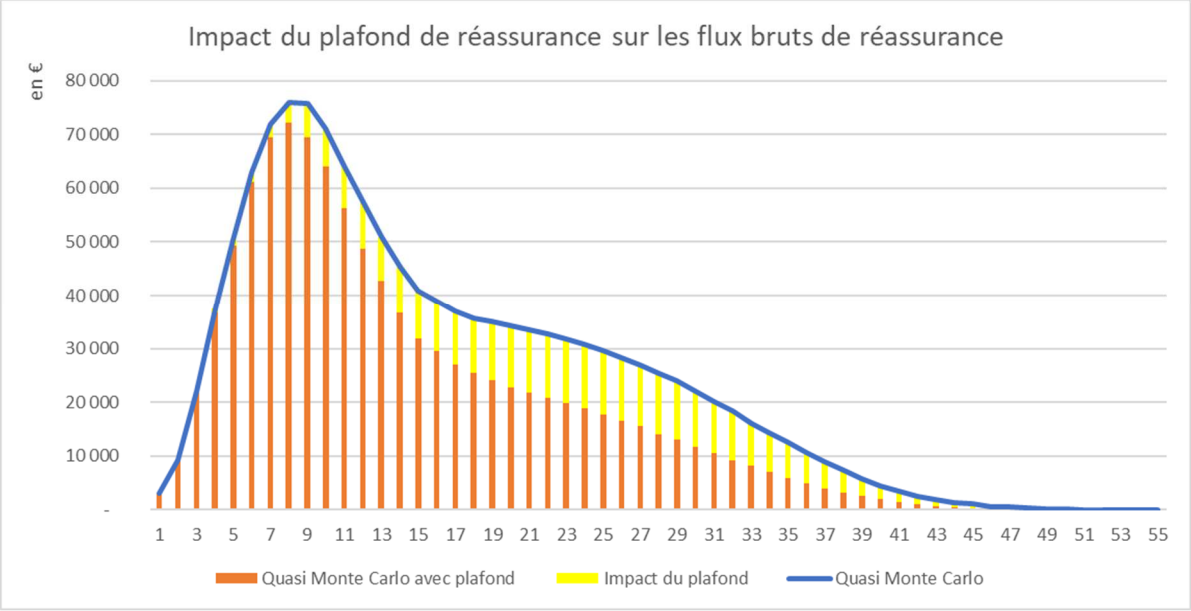
Nous observons sur le graphique précédent que les distributions sont confondues et que les montants supérieurs à 2,5M€ (priorité du traité de réassurance pour ce dossier) disposent d'un poids non nul. Cela signifie que pour près de 12% des simulations, nous disposerons de cessions en réassurance.

Nous présentons ci-dessous l'impact du plafond de garantie sur ce dossier. Afin d'éviter tout écart en lien avec de l'aléa, nous avons choisi la méthode de Quasi Monte Carlo pour quantifier l'impact du plafond.



Le plafond de garantie fixé à 10M€ est bien appliqué puisque nous observons un plateau à ce montant.

Le graphique suivant traduit l'impact sur les flux par inventaire est le suivant :



Nous observons que le plafond de garantie n'a pas d'impact sur les premiers flux.

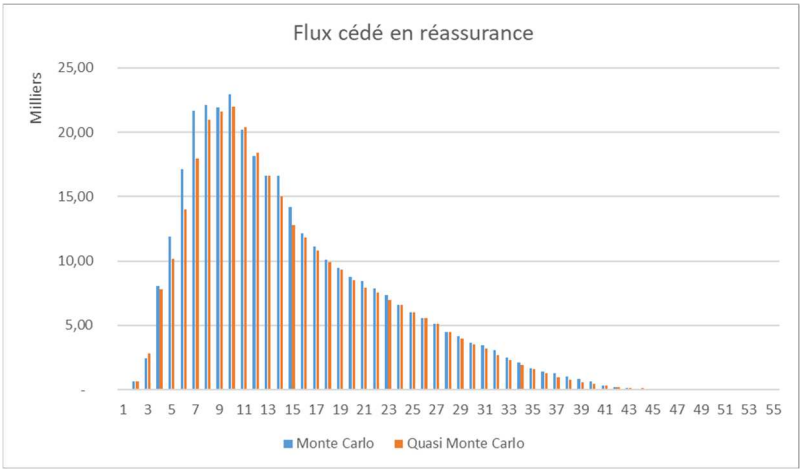
Le montant du *Best Estimate*, inflaté, non actualisé et y compris plafond de garantie est de 1,033M€ contre 1,334M€ (Hors plafond de garantie).

8.2 Engagements cédés aux réassureurs sur un dossier

Nous étudions ici les engagements cédés au réassureurs XS pour le dossier évalué dans le paragraphe précédent (8.1).
Les paramètres du traité XS sont les suivants :

- priorité : 2,5 M€
- stabilisation : Indice GIM

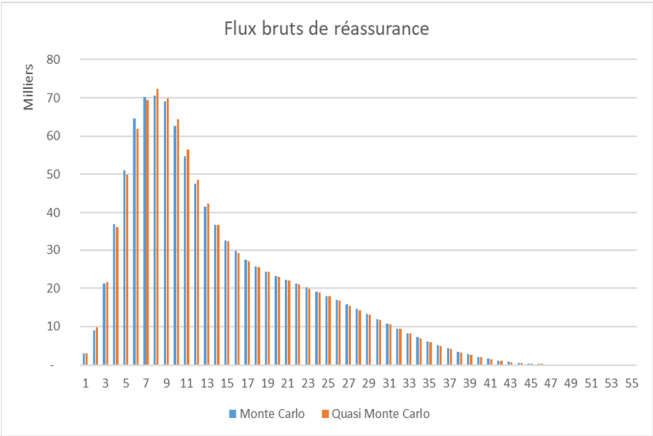
Nous présentons dans le graphique ci-dessous la chronique moyenne des flux simulés (selon la méthode de Monte Carlo et la méthode de Quasi Monte Carlo).

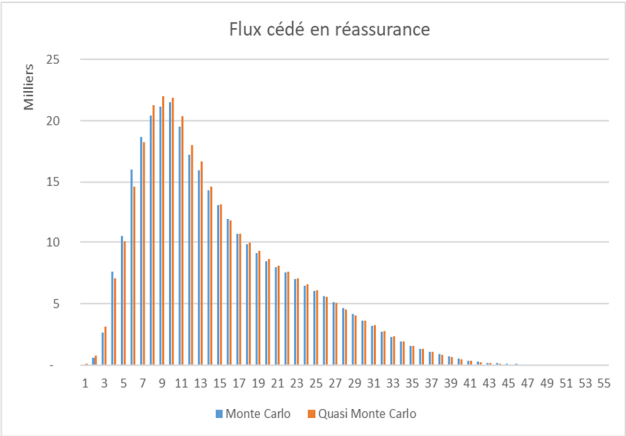


Nous n'observons pas de ressemblance entre les flux issus des deux techniques de simulations.
Nous supposons donc que 10 000 simulations pour la méthode de Monte Carlo ne sont pas suffisantes pour avoir un résultat stable.

	Monte Carlo	Monte Carlo Borne inférieure à 5%	Monte Carlo Borne supérieure à 5%	Quasi Monte Carlo
Cession XS	344 499	318 011	370 987	326 029

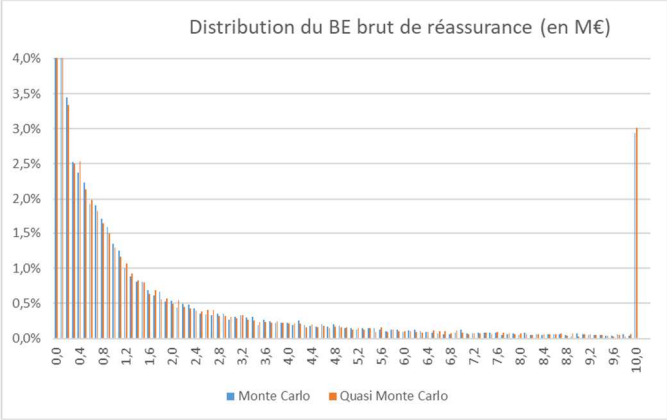
Les montants sont tous situés dans l'intervalle de confiance à 5%.
Afin d'analyser le fonctionnement des cessions en réassurance, nous décidons d'effectuer 40 000 simulations de Monte Carlo et de Quasi Monte Carlo.

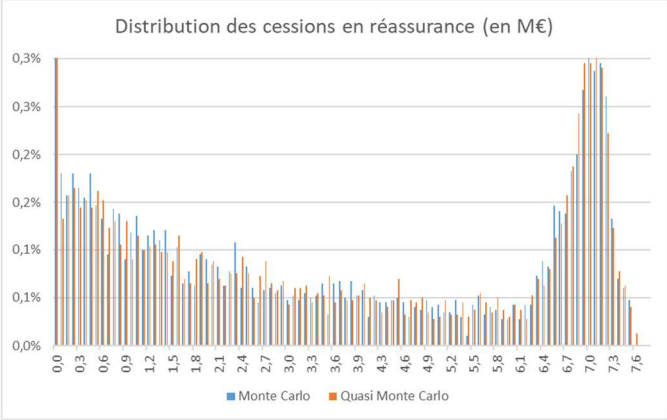




Nous observons sur les graphiques ci-dessus des chroniques de flux identiques.

Les graphiques ci-dessous décrivent des distributions similaires peu importe la méthode utilisée.

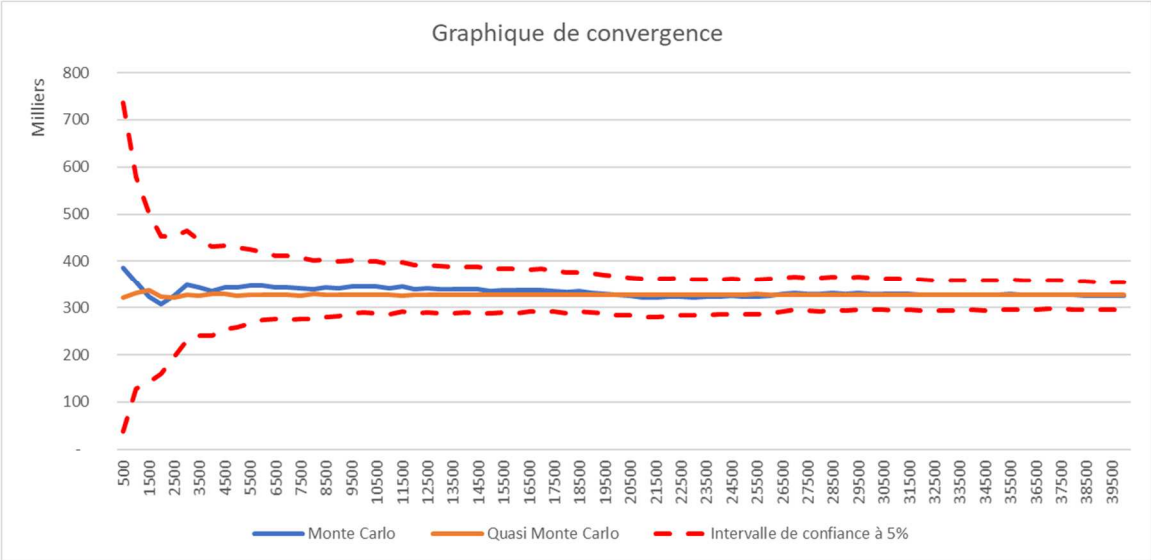




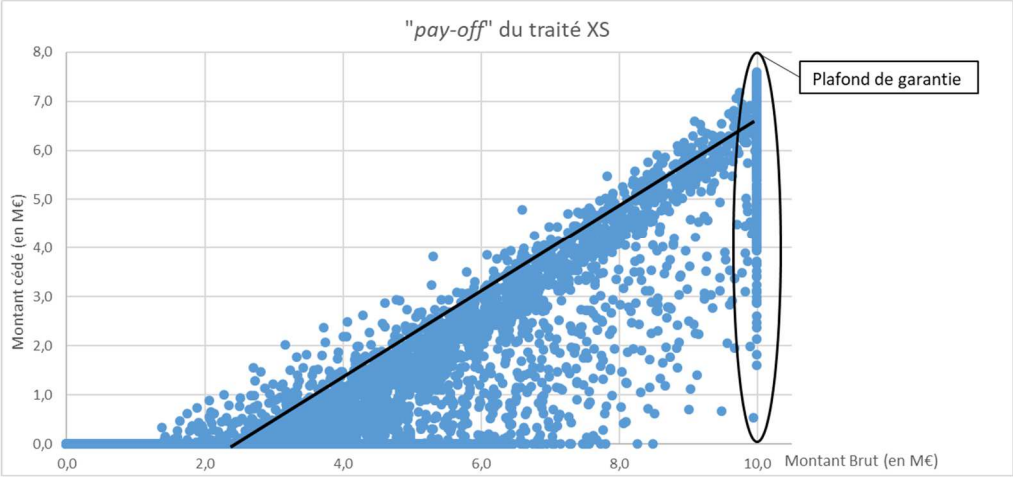
Nous observons sur les graphiques ci-dessus un pic à 10M€ pour le brut et une bosse à partir de 6,2M€ pour les cessions en réassurance, les explications sont les suivantes :

- pour le BE brut, ce pic est en lien avec le plafond de garantie
- pour les cessions, la bosse est expliquée par :
  - l'atteinte du plafond de garantie du BE brut
  - la clause de stabilité

Le graphique de convergence présenté ci-dessous nous montre que la stabilité du BE est atteinte à partir de 10 000 simulations pour la méthode de QMC et 20 000 pour la méthode MC.



Nous présentons dans le graphique ci-dessous le montant du BE cédés (issus de 40 000 simulations effectuées avec la méthode de Quasi Monte Carlo) en fonction du BE brut de réassurance.

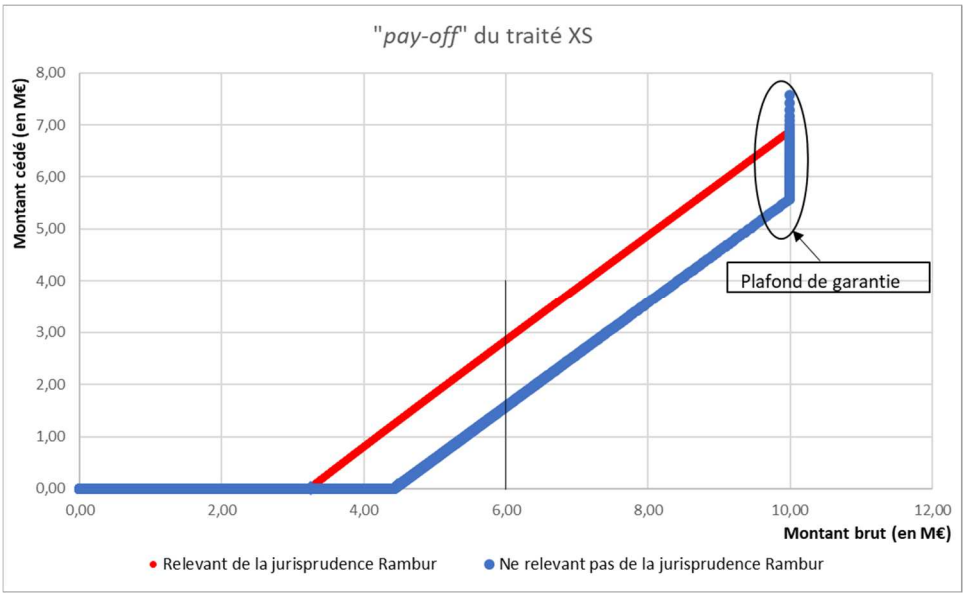


Une forme linéaire débutant à partir de la priorité stabilisée se dégage, les points autour de la droite s'explique par :

- l'aléa sur les délais de jugement
- le règlement des provisions pour arrérages échus avant jugement se faisant en 2 fois n'a pas d'impact sur la dispersion des points
- l'aléa sur l'application de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 ».

La droite verticale correspond à l'application du plafond de garantie.

En figeant l'aléa sur le délai de jugement, nous observons que les points sont parfaitement alignés sur deux droites comme le montre le graphique ci-dessous.



La présence de ces 2 droites est expliquée par l'aléa en lien avec l'application de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 ». Nous observons donc que pour un même coût brut, nous pouvons avoir des montants cessions en réassurance différents si le dossier relève de la jurisprudence ou pas.

Nous vérifions que le calcul des cessions effectué est correct en nous basant sur l'exemple suivant :
Prenons le cas de 2 simulations l'une relevant de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 » et l'autre pas, avec un BE brut (somme des flux futurs inflatés, non actualisés, y compris plafond de garantie) identique et un BE cédé différent.
Nous détaillons les résultats dans le tableau suivant :

	simulation 1	Simulation 2
âge de la victime	52	52
Payés au 31/12/N	9 118	9 118
Indice de référence	295,8	295,8
Inventaire de jugement	N+1	N+1
Jurisprudence Rambur	oui	Non
Annuité jugée	166 372	166 508
age de décès simulé	77	77
Somme des flux bruts	6 001 960	6 006 884
Somme des flux cédés	2 841 821	1 586 718
Clause de rachat	229 393	2 546 391

Nous détaillons le calcul des cessions de ces simulations :

- Simulation 2 :
  - Clause de rachat : $2\,546\,391 = (\underbrace{166\,508}_{\text{Annuité jugée rachetée}} * \underbrace{1{,}02}_{\text{revalorisation}}) * (\underbrace{14{,}993}_{\text{coefficient viager à 2\% table TD88/90}} + \underbrace{\max(18-52\,;0)}_{\text{partie échues}})$

Pour rappel, dans le cas d'un dossier ne relevant pas de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 » l'annuité est rachetée dans sa totalité.

  - Calcul du coût de réassurance stabilisé : Le dossier étant jugé en N+1, le montant des arrérages échus non jugé est complétement versé en N+2.
    Nous calculons le coût du sinistre stabilisé selon les conditions du traité de réassurance : La valeur de l'indice n'ayant pas varié de plus de 10%, nous n'appliquons pas sa variation.

$$3\,395\,585 = \underbrace{9118}_{\text{Payé avant N}} + \underbrace{2\,546\,391}_{\text{Payé en N+1 Clause de rachat}} + \underbrace{420\,038 + 420\,038}_{\text{Arrérage échus non jugé payé en N+ et N+2}}$$

  - Le taux de cession en réassurance après application de la clause de stabilité est :

$$26{,}37496\% = \frac{\min\,(illimité - 2\,500\,000, \max(3\,395\,585 - 2\,500\,000; 0))}{3\,395\,585}$$

Suite à la clause de rachat, il n'y a plus de provision dans l'évaluation du dossier dans la norme du traité de réassurance XS impliquant que le coût et le taux de cession sont constants.

  - La somme des flux cédés au titre de la réassurance XS est :

$$1\,586\,718 = 26{,}37496\% * (6\,006\,884 + 9\,118)$$

- Simulation 1 :
  - Clause de rachat : $229\,393 = (\underbrace{Min(15\,000; (166\,372 - 365 * 150)^{+})}_{\text{Annuité rachetée}} * \underbrace{1{,}02}_{\text{inflation futur}}) * (\underbrace{14{,}993}_{\text{Coefficient viager à 2\% Table TD88/90}} + \underbrace{\max(18-52\,;0)}_{\text{partie échues}})$

Pour rappel, dans le cas d'un dossier relevant de la jurisprudence « CE 25 juin 2008 » l'annuité est rachetée au maximum à 15 000€. La partie non rachetée de l'annuité est de 166 372 – 15 000 = 151 372.

- Calcul du coût de réassurance stabilisé : Le dossier étant jugé en N+1, le montant des arrérages échus non jugé est complétement versé en N+2.
  Nous calculons le coût du sinistre stabilisé selon les conditions du traité de réassurance : La valeur de l'indice n'ayant pas varié de plus de 10%, nous n'appliquons pas sa variation.

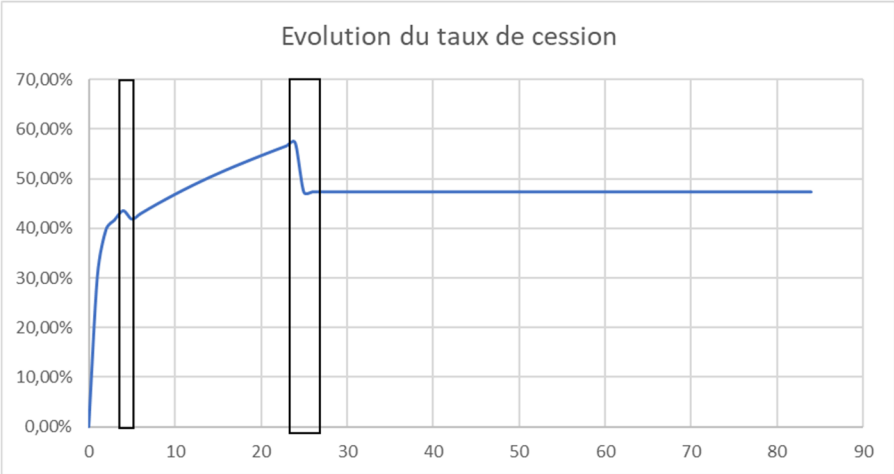
$$4\,143\,607 = \underbrace{9118}_{\text{Payé avant N}} + \underbrace{229\,393}_{\text{Payé en N+1 Clause de rachat}} + \underbrace{419\,690 + 419690}_{\text{Arrérage échus non jugé payé en N+ 1 et N+2}} + \underbrace{151\,372 * 1{,}02^2 * 17{,}486}_{\text{Provision calculé selon les conditions du traité avec les arrérages non rachetés}} + \underbrace{151\,372 * 1{,}02 + 151\,372 * 1{,}02^2}_{\text{Arrérage non racheté versé en N+1 et N+2}}$$

- Le taux de cession en réassurance après application de la clause de stabilité est :

$$39{,}66609\% = \frac{\min\,(illimité - 2\,500\,000, \max(4\,143\,607 - 2\,500\,000; 0))}{4\,143\,607}$$

La clause de rachat ne concerne qu'une partie de l'annuité jugée, il y a donc un reliquat de provision dans l'évaluation du dossier dans la norme du traité de réassurance XS.

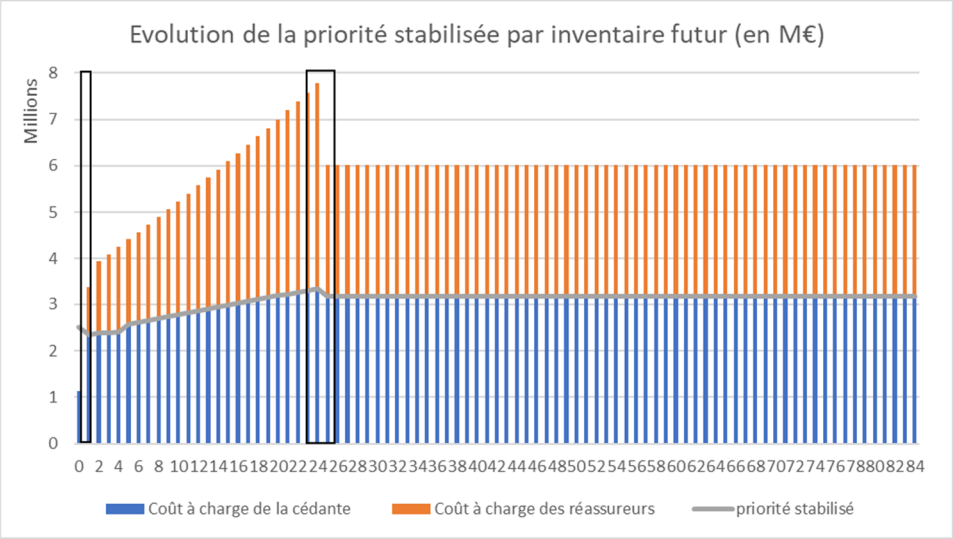
Nous présentons dans le graphique ci-dessous l'évolution du taux de cession au fil des inventaires pour cette simulation.



Nous observons 2 « cassures », la première coïncide avec l'application de l'indice, en effet le seuil de 10% a été dépassé à cet inventaire et la stabilisation entraine une baisse du coût de réassurance.
Le second choc coïncide avec le décès de la victime et donc l'annulation des provisions entrainant une baisse des cessions.
Au dernier inventaire projeté, le taux de cession est évalué à 47,27640% et le montant du coût cédé est de 2 841 821 = 47,27640% * (6 001 960 + 9 118)

Nous avons vu que pour 2 simulations dont le coût brut est identique, le coût cédé peut être différent en fonction de la clause de rachat. En effet, si la jurisprudence n'est pas appliquée au dossier, le montant des cessions est réduit suite à l'application de la clause de rachat qui concerne la totalité de l'annuité jugé. A contrario, le montant des cessions est plus élevé lorsque cette jurisprudence est appliquée car la clause de rachat est partielle.

Nous présentons dans le graphique ci-dessous l'évolution de la priorité stabilisée.

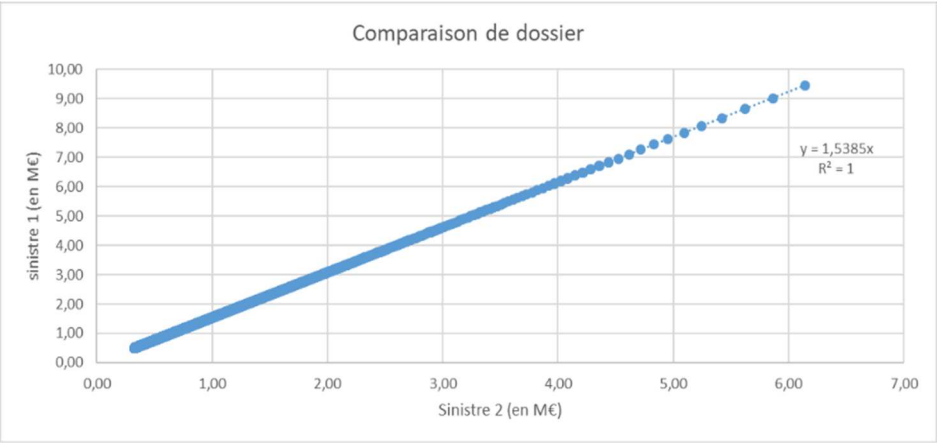


Nous observons 2 « cassures », la première est expliquée par l'application de la clause de rachat qui va augmenter le coût brut stabilisé impliquant une baisse du ratio coût brut non stabilisé sur coût brut stabilisé et donc une baisse de la priorité stabilisée. Le deuxième choc est expliqué par le décès de la victime impliquant une baisse du coût non stabilisé plus forte que le coût stabilisé et donc une baisse du ratio et de la priorité stabilisée.

8.3 Résultat agrégé

8.3.1 Agrégation des résultats

Pour les simulations issues de la méthode de Monte Carlo, une somme des sinistres suffit pour avoir le résultat global. Cependant pour la méthode de Quasi Monte Carlo les sinistres sont corrélés à cause des tirages de la suite à discrépance faible qui sont identiques.
Avec la méthode de Quasi Monte Carlo, deux sinistres avec des caractéristiques similaires auront des simulations identiques, ils ne seront donc pas indépendants comme le montre le graphique ci-dessous.



Nous sommes donc en présence d'un problème d'agrégation des données qui ne nous permet pas d'analyser la distribution des simulations de Quasi Monte Carlo.
Pour y remédier, nous proposons de tirer aléatoirement pour chaque dossier k une permutation sans répétition α_k de la suite (1…10 000) représentant les numéros de simulations.

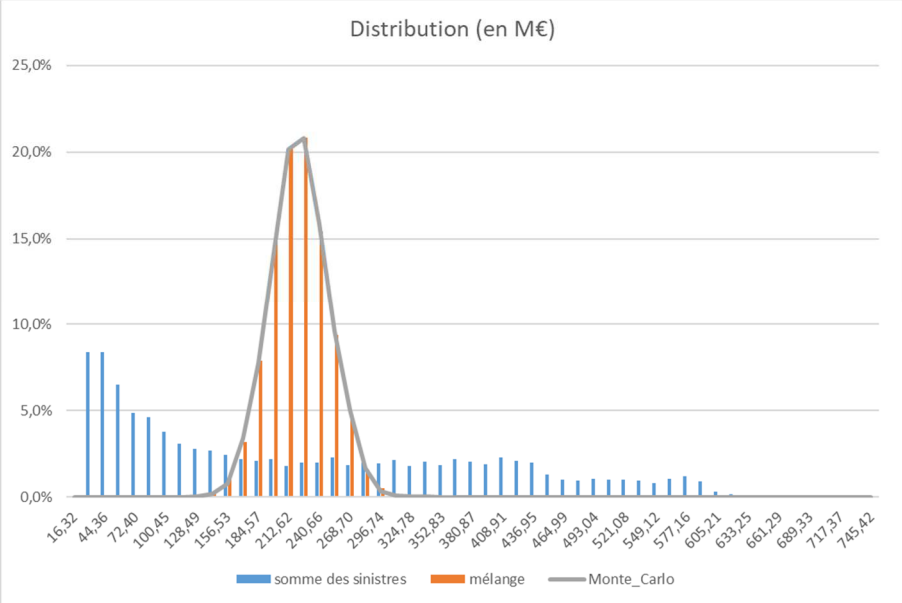
$$P_i = \sum_{k=1}^{nombre\ de\ dossiers} X_{\alpha_k}$$

Où X_{α_k} est la réalisation α_k de la variable X représentant l'ensemble des flux simulés.
Et le BE brut (inflaté, non actualisé et y compris plafond de garantie) s'écrit :

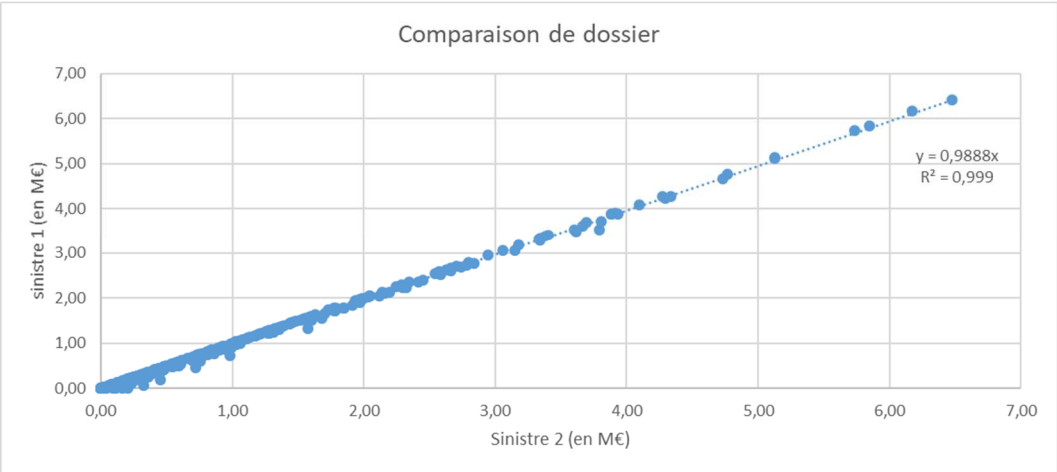
$$BE = \frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} P_i$$

Comme il s'agit de permutation, l'ensemble des simulations est conservé. En injectant de l'aléa nous pouvons disposer d'une distribution des flux.

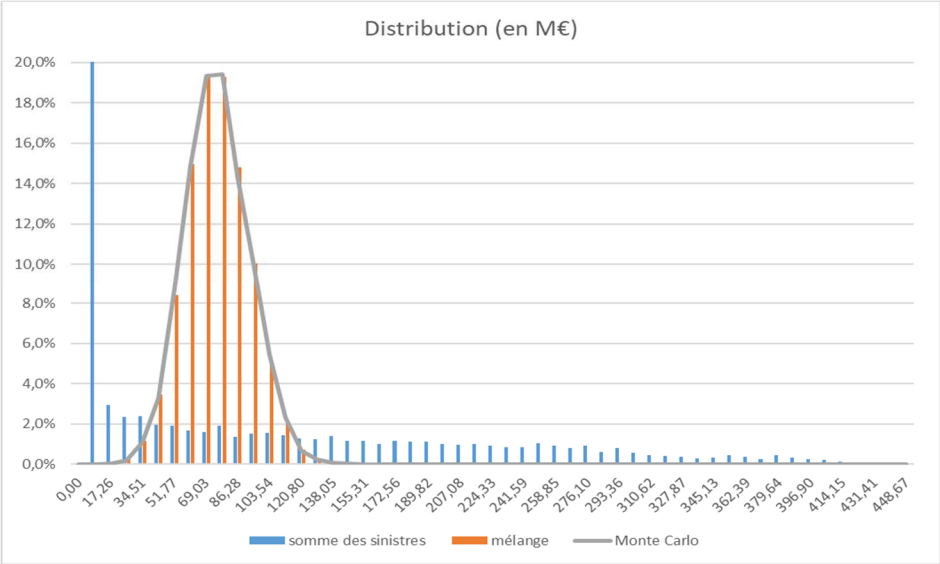
Nous présentons dans le graphique ci-dessous la distribution du BE brut total en quasi Monte Carlo (non actualisé y compris plafond de garantie) avec la méthode d'agrégation (mélange en orange), la somme des sinistres par simulation (en bleu) et la méthode de Monte Carlo (ligne grise à titre de comparaison).



L'agrégation a permis de faire coïncider les distributions issues de la méthode de Quasi Monte Carlo et de Monte Carlo.
Afin de conserver toute la cohérence entre les montants bruts et cédés, nous effectuons un traitement identique sur les cessions avec les mêmes indices.
Nous présentons les résultats analogues au brut sur les cessions XS.

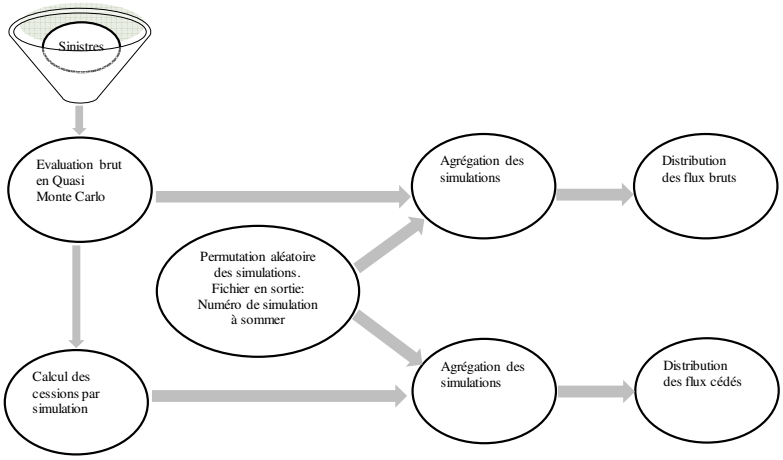


Une forme linéaire se dégage sur le graphique ci-dessus montrant une corrélation entre les deux sinistres.



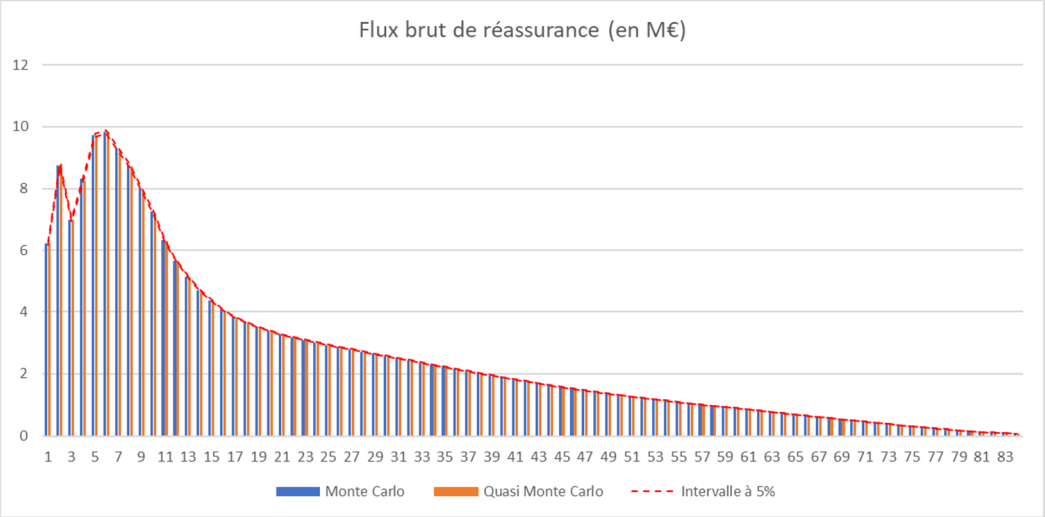
Nous présentons dans le graphique ci-dessus la distribution des cessions aux titres des traités en XS (non actualisé avec une priorité à 2,5M€) avec la méthode d'agrégation (mélange en orange), la somme des sinistres par simulation (en bleu) et la méthode de Monte Carlo (ligne grise à titre de comparaison). L'agrégation a permis de recentrer la distribution autour de la moyenne et de la faire coïncider avec la distribution issue de la méthode de Monte Carlo.

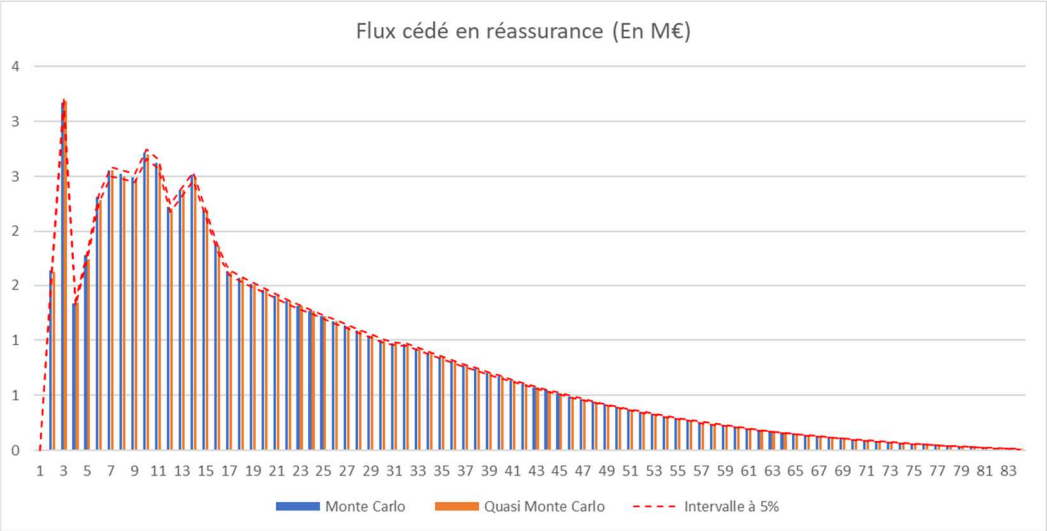
Nous synthétisons l'ensemble des calculs réalisés pour l'agrégation des résultats au travers du schéma suivant :



8.3.3 Présentation des résultats

Nous avons effectué 10 000 simulations de Monte Carlo et Quasi Monte Carlo (avec agrégation aléatoire) sur 100 dossiers. Nous présentons ci-dessous les résultats bruts de réassurance et cédés au réassureur.
Les graphiques ci-dessous décrivent les chroniques de flux bruts et cédés en réassurance.



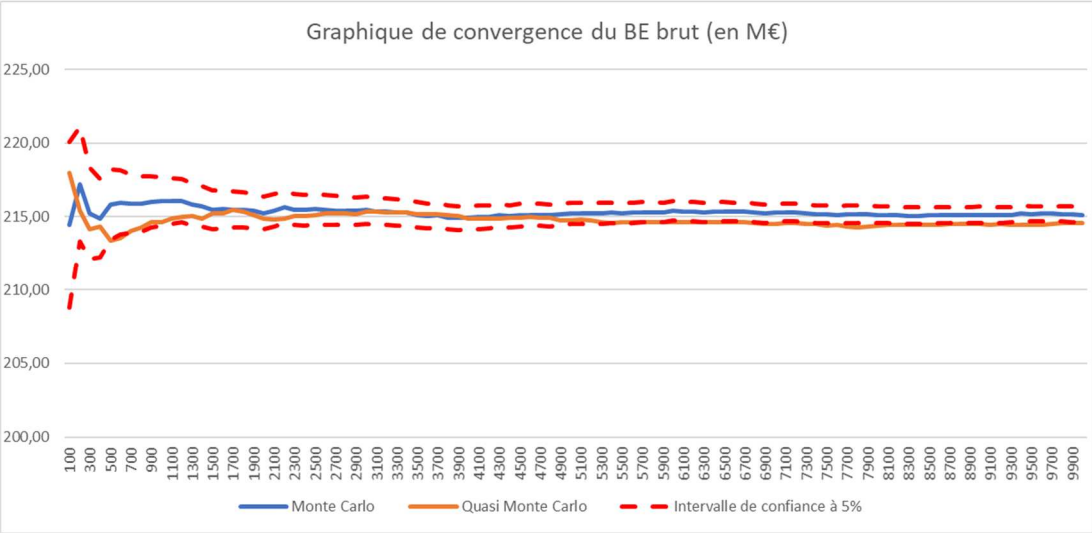


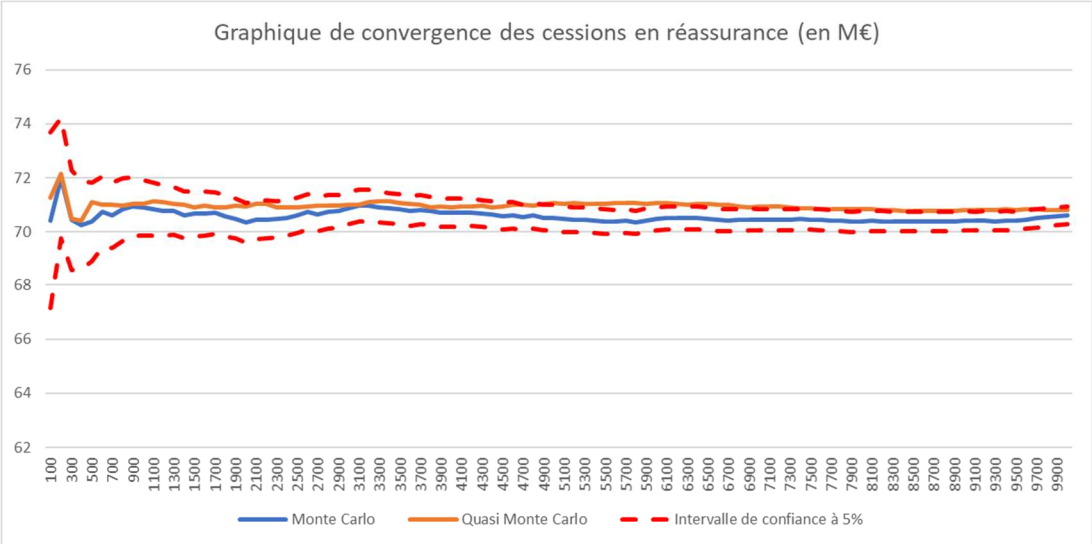
Nous observons peu différence entre les chroniques de flux issues des deux méthodes.

en M€	Monte Carlo	Monte Carlo Borne inférieure à 5%	Monte Carlo Borne supérieure à 5%	Quasi Monte Carlo
BE brut	215,15	214,63	215,66	214,58

en M€	Monte Carlo	Monte Carlo Borne inférieure à 5%	Monte Carlo Borne supérieure à 5%	Quasi Monte Carlo
Cession XS	70,61	70,28	70,95	70,81

Les graphiques ci-dessous présentent les moyennes (MC et QMC) ainsi que les intervalles à 5% pour le BE brut (non actualisé et y compris plafond de garantie) et les cessions au titre de la réassurance XS en fonction du nombre de simulations.





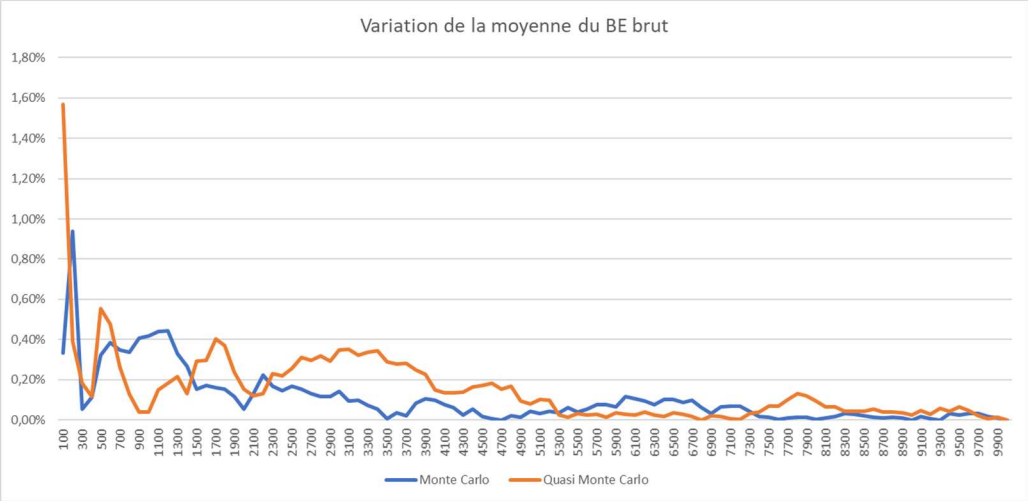
Les graphiques ci-dessus nous montrent que toutes les moyennes se situent dans l'intervalle de confiance à 5%. Nous observons de plus qu'à partir de 8000 simulations, les moyennes issues de la méthode de Quasi Monte Carlo sont stables, nous considérons donc que la convergence est atteinte.
Pour appuyer ce constat, nous présentons dans les graphiques suivants la variation des moyennes en fonction du nombre de simulations.
Cette variation est calculée par la formule suivante :

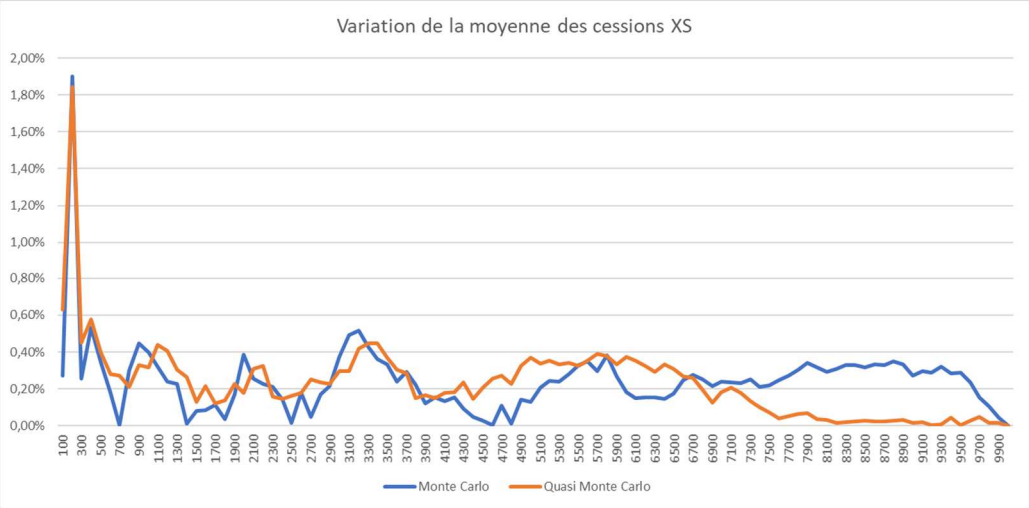
$$\Delta_i = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k}{\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} X_k} - 1$$

Avec $i \epsilon \{1 \dots N\}$ et X_k les réalisations.

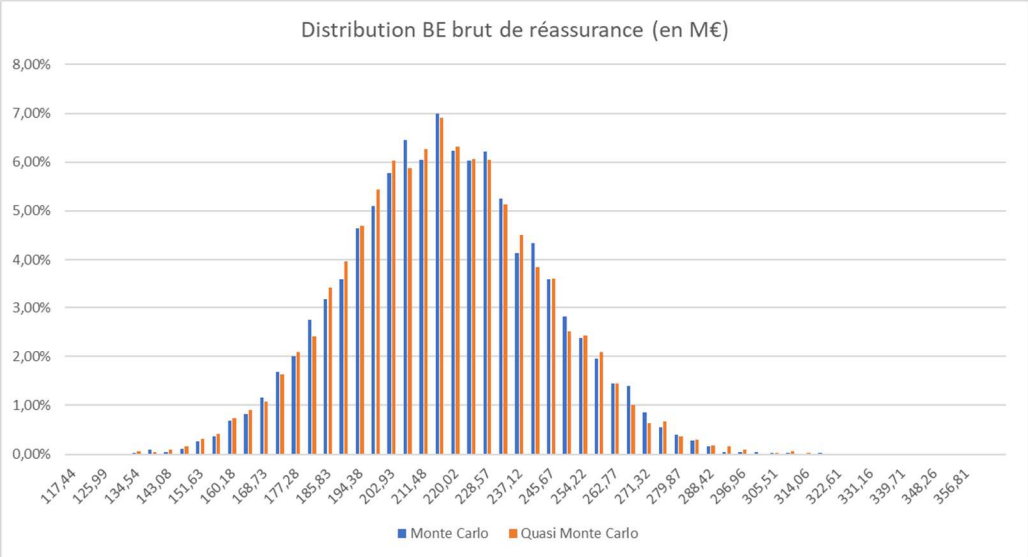
Nous observons sur les deux graphiques suivants que :

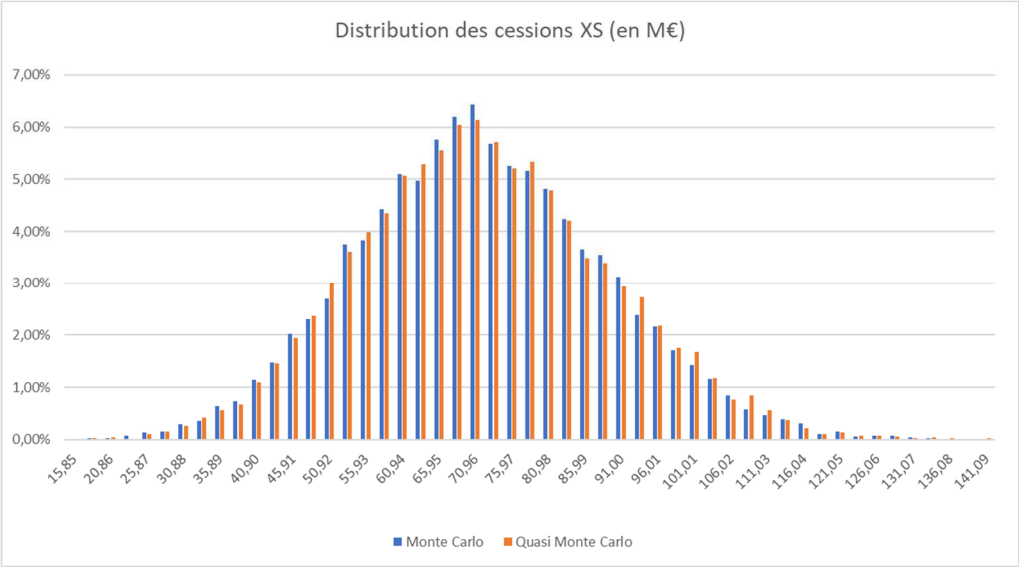
- avant la simulation 8000 les variations des moyennes issues de la méthode de Quasi Monte Carlo sont plus fortes que pour la méthode de Monte Carlo.
- après la simulation 8000 les variations des moyennes issues de la méthode de Quasi Monte Carlo sont plus faibles que pour la méthode de Monte Carlo





Nous présentons dans les graphiques ci-dessous les distributions issues de la méthode de Monte Carlo et la méthode de Quasi Monte Carlo (après agrégation).





Les deux graphiques précédents présentent des distributions similaires sur les deux méthodes de simulation.

8.3.4 Temps de traitements

Les difficultés que nous avons rencontrées dans le cadre de cette étude sont surtout d'ordre opérationnel. Au niveau du temps de calcul, le modèle de projection requiert environ 5 heures de traitement pour réaliser 10 000 simulations de 100 dossiers avec un ordinateur équipé d'un processeur Intel Core I7 cadencé à 2,8Ghz. Les fichiers créés en sortie de l'outil de projection représentent 1,5 GO de données. Il faut compter environ 2 jours et plusieurs dizaines de giga octets pour traiter l'ensemble des dossiers graves de Sham avec la méthode de Monte Carlo.

Avec la méthode de Quasi Monte Carlo, l'espace disque et le temps de traitement se voient diviser par 2 puisqu'il faut 2 fois moins de simulations pour avoir un résultat convenable.

8.4 Test de sensibilité

Nous venons donc de voir que pour calculer la valeur du *Best Estimate*, et donc projeter les flux futurs, il nous faut calibrer plusieurs paramètres. Ainsi, il est nécessaire, afin d'appréhender au mieux la qualité du modèle, d'évaluer la sensibilité de celui-ci aux différents facteurs.
Nous nous intéresserons à la sensibilité aux paramètres suivants :

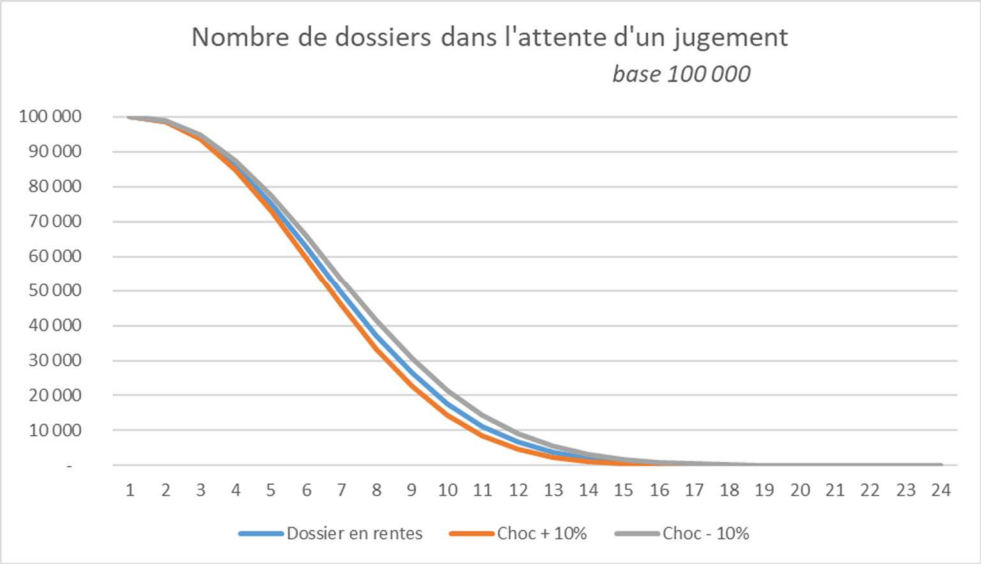
- le délai de jugement
- la mortalité
- l'actualisation
- la priorité du traité XS

Nous effectuons ces tests de sensibilité sur 10000 simulations avec la méthode de Quasi Monte Carlo.

8.4.1 Sensibilité au délai de jugement

Nous nous intéressons ici à la sensibilité du modèle au délai de jugement. Pour ce faire, nous considérons un écart de plus ou moins 10% par rapport à la valeur retenu, et nous regardons l'impact du choc sur le *Best Estimate*.

Nous illustrons la variation du paramètre en présentant le nombre dossiers non jugés par année de jugement en base 100 000.

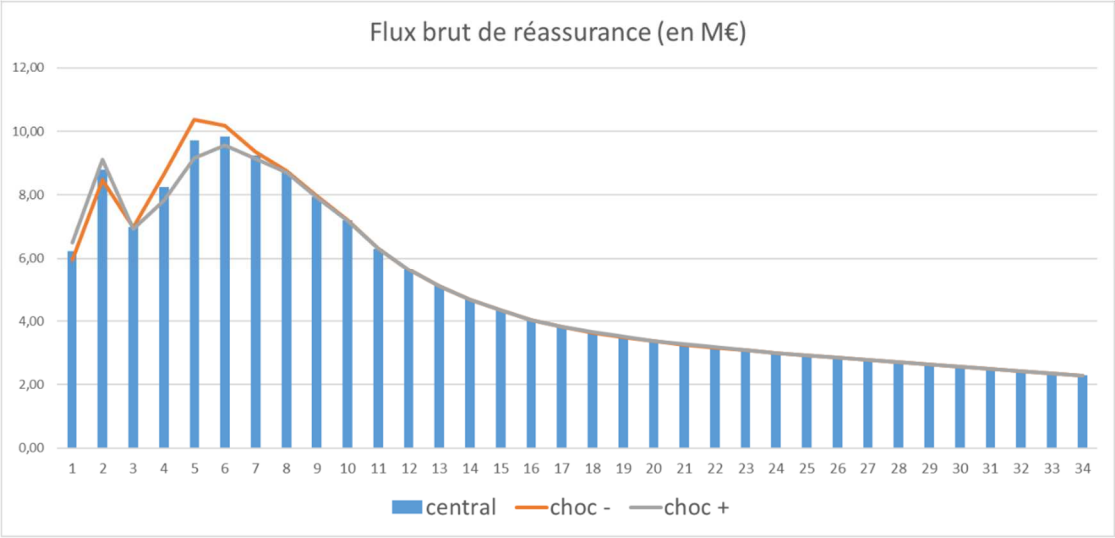


Nous observons qu'un choc à la hausse de 10% de la probabilité d'être jugé à un an entraine une baisse du nombre de dossiers dans l'attente d'un jugement. A contrario, un choc à la baisse de 10% entraine une hausse du nombre de dossiers dans l'attente d'un jugement.

Nous observons dans le tableau ci-dessous que le montant du BE (sur les dossiers avec hypothèse de rente, non actualisé, inflaté et y compris plafond) est peu sensible à la cadence de jugement

Scénario	BE non actualisé, inflaté et y compris plafond	Ecart par rapport au scénario central	
		en €	en %
central	214 579 328		
choc -	215 521 762	942 434	0,439%
choc +	213 763 460	- 815 868	-0,380%

Même si le BE (non actualisé, inflaté et y compris plafond) est quasiment insensible à la cadence de jugement, nous observons une distorsion des premiers flux de paiement à cause du versement des arrérages échus avant jugement.



Par rapport au scénario central :

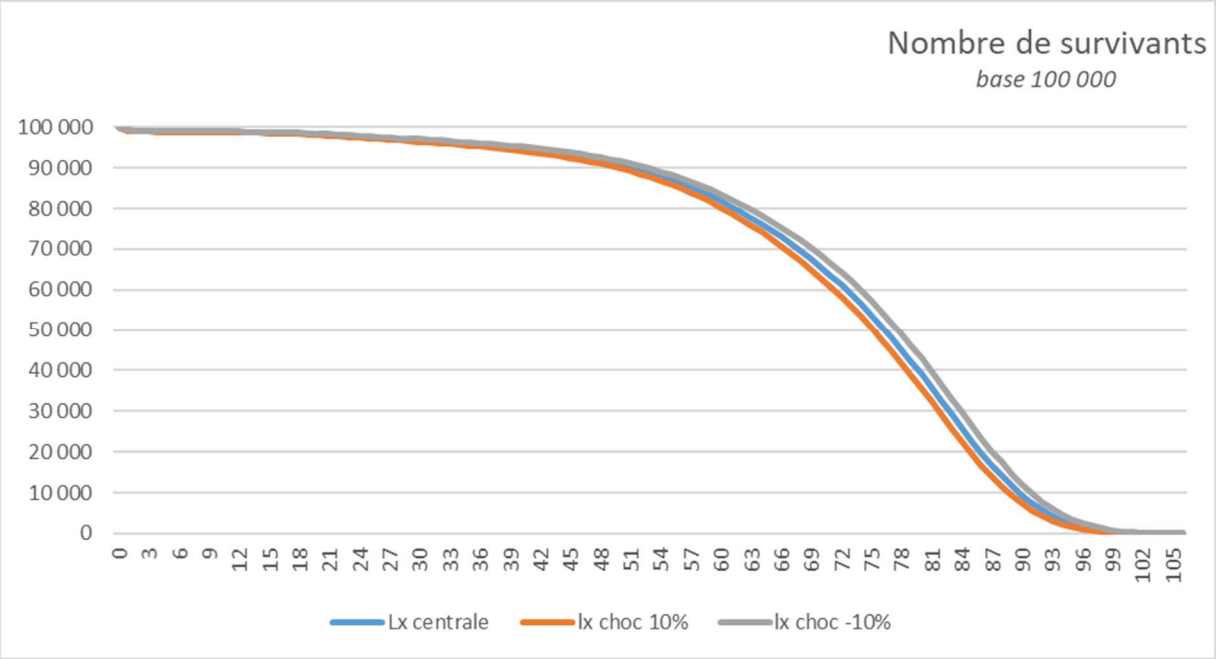
- Un choc de +10% sur les probabilités entraine une réduction des délais de jugement et donc un règlement des arrérages échus non jugés qui intervient plus tôt.
- Un choc de -10% sur les probabilités entraine une augmentation des délais de jugement et donc un règlement des arrérages échus non jugés qui intervient plus tard.

8.4.2 Sensibilité à la table de mortalité

Nous nous intéressons ici à la sensibilité du modèle à la table de mortalité. Pour ce faire, nous considérons un écart de plus ou moins 10% sur la probabilité de décès à un an par rapport à la valeur de la table, et nous regardons l'impact du choc sur le *Best Estimate*.

Cette variable concerne la totalité des dossiers, ainsi nous appliquons ce test de sensibilité sur les 100 dossiers concernés.

Le graphique ci-dessous illustre l'impact des chocs à +/-10% sur le nombre de survivant.



Effectuer un choc à +10% (respectivement – 10%) sur les probabilités de décès revient à réduire (respectivement allonger) l'espérance de vie d'une victime.

Nous synthétisons les résultats dans le tableau ci-dessous.

	BE (inflaté, non actualisé, y compris plafond) (en M€)	*Variation en %*	Montant cédé XS (en M€)	*Variation en %*
Scénario central	214,58		70,81	
choc +10%	210,89	-1,72%	69,84	-1,36%
choc -10%	218,61	1,88%	71,83	1,45%

Nous observons qu'un choc de +10% (respectivement -10%) entraine une baisse du résultat brut de 1,72% et du résultat cédé de 1,36% (respectivement une hausse du résultat brut de 1,88% et du résultat cédé de 1,45%).

Nous pouvons considérer que la sensibilité du modèle par rapport à la table de mortalité est modérée.

8.4.3 Sensibilité à la courbe des taux

Nous nous intéressons ici à la sensibilité du modèle à la courbe des taux. Pour ce faire, nous considérons plusieurs hausses et baisses de la courbe par rapport à la valeur retenue, et nous regardons l'impact du choc sur le *Best Estimate*.

Cette variable concerne la totalité des dossiers, ainsi nous appliquons ce test de sensibilité sur les 100 dossiers concernés.

La courbe des taux que nous avons sélectionné correspond à celle publiée par l'EIOPA au 31/12/2017, celle-ci est choquée par le service Risk Management à l'aide de la méthode Smith-Wilson.

Ne faisant pas l'objet du mémoire, la méthode de Smith-Wilson ne sera donc pas développé. Néanmoins, les résultats issus de cette modélisation seront utilisés pour le test de sensibilité.

Nous présentons dans le graphique les différentes courbes utilisées.

Les résultats du test sont les suivants :

	Brut (en M€)	Variation du brut en %	Cession (en M€)	Variation des cessions en %
taux 2017 - 100bps	176,50	13,8%	58,47	15,9%
taux 2017 - 50bps	165,57	6,8%	54,37	7,7%
taux 2017	155,04	0,0%	50,46	0,0%
taux 2017 + 50bps	146,43	-5,6%	47,22	-6,4%
taux 2017 + 100bps	138,04	-11,0%	44,10	-12,6%

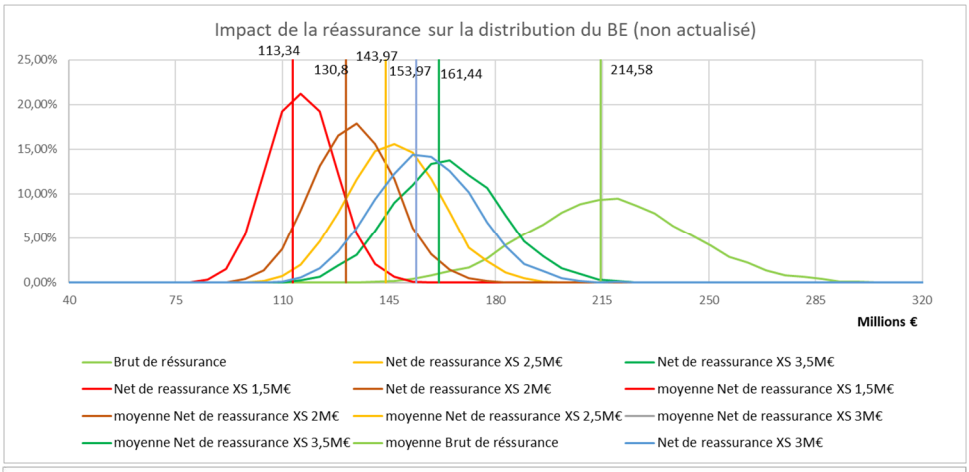
Nous observons que le BE est très sensible à une variation de la courbe des taux, cette sensibilité s'explique par la typologie des sinistres (dossier en rentes) et la longueur de l'horizon de projection (84 inventaires).

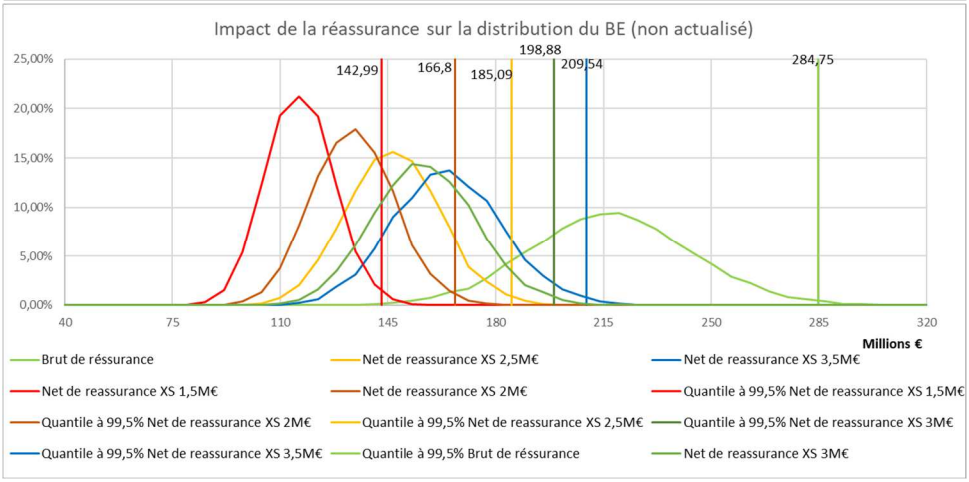
8.4.4 Sensibilité à la priorité du traité XS

Nous testons dans cette partie la sensibilité du Best Estimate (somme des flux non actualisés) net de réassurance avec les traités qui ont les caractéristiques suivantes :

- Traité N°1 : Priorité à 1,5M€ et portée à 10M€
- Traité N°2 : Priorité à 2M€ et portée à 10M€
- Traité N°3 : Priorité à 2,5M€ et portée à 10M€
- Traité N°4 : Priorité à 3M€ et portée à 10M€
- Traité N°5 : Priorité à 3,5M€ et portée à 10M€

Nous porterons notre attention sur l'impact de ces traités sur les distributions.





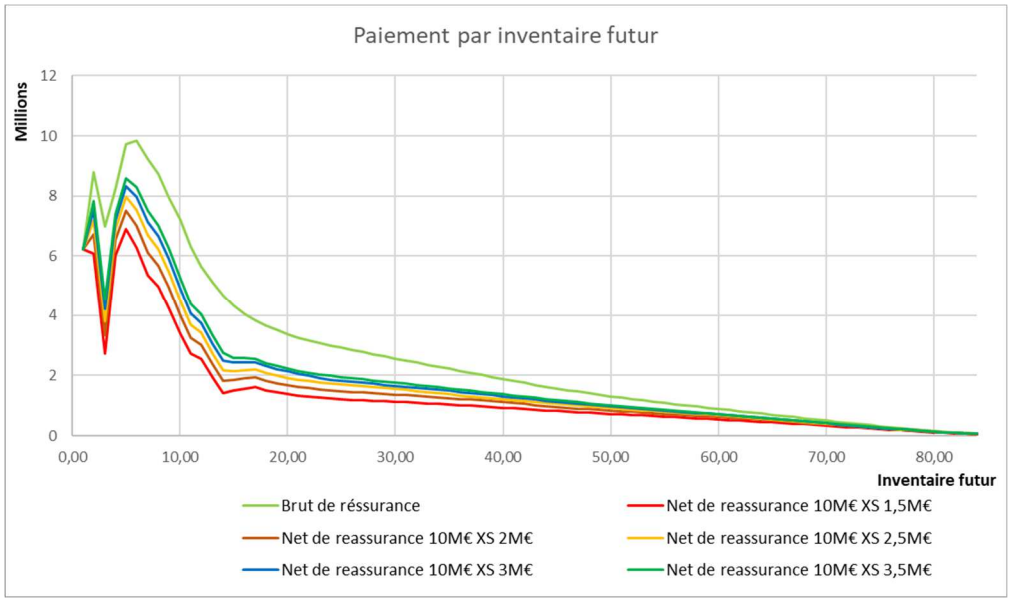
Nous observons sur les graphiques ci-dessus que la baisse de la priorité du traité engendre les déformations suivantes :

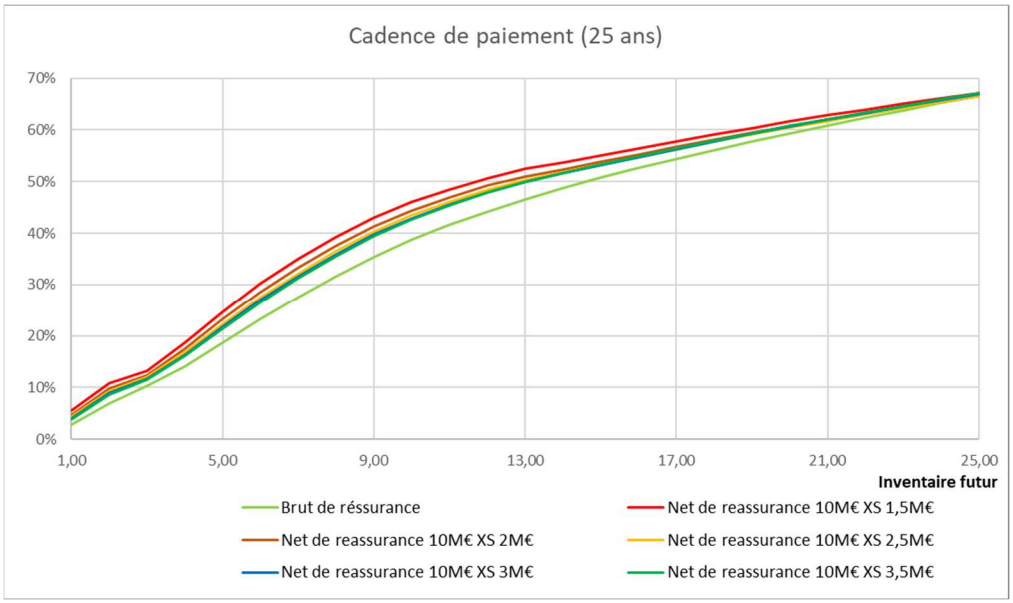
- un décalage vers la gauche de la distribution nette de réassurance avec une baisse de la moyenne et du quantile à 99,5%
- et un resserrement de la distribution traduit par une baisse de la volatilité (Ecart type / Moyenne)

Les résultats sont les suivants :

Priorité du traité en M€	1,5	2	2,5	3	3,5	brut
Quantile à 99,5% (en M€)	142,99	166,8	185,09	198,88	209,54	284,75
Ecart type (en M€)	10,89	13,37	15,26	16,7	17,8	26,29
Moyenne (en M€)	113,34	130,8	143,97	153,97	161,44	214,58
Volatilité (Ecart type / Moyenne)	9,6%	10,2%	10,6%	10,8%	11,0%	12,3%

Nous présentons la chronique des flux (bruts et nets de réassurance par inventaire futur) ainsi que les cadences de liquidations.





Le graphique ci-dessus laisse transparaitre une déformation des cadences de paiement en liens avec la variation de la priorité des traités, le poids des premiers flux diminue alors que la priorité augmente.
En tenant compte de l'actualisation traduisant la valeur temporelle de l'argent, nous pouvons calculer la duration du Best Estimate.

	Duration
Net de reassurance 10M€ XS 1,5M€	13,00
Net de reassurance 10M€ XS 2M€	13,36
Net de reassurance 10M€ XS 2,5M€	13,55
Net de reassurance 10M€ XS 3M€	13,63
Net de reassurance 10M€ XS 3,5M€	13,66
Brut de réssurance	14,40

Nous observons que la duration augmente en fonction de la priorité du traité.

9 Conclusion et piste de développement

Nous avons présenté dans ce mémoire un modèle de provisionnement des dossiers graves 31/12/N relevant de l'hypothèse de rente de la branche RC médicale. Ce modèle permet la prise en compte de l'incertitude présente dans ces dossiers telle que :

- le montant de l'annuité décidé par le tribunal qui est modélisé par un GLM en fonction de l'IPP et de la TP.
- la date de jugement qui est modélisée à l'aide de la méthode de Kaplan Maïer
- la date de décès de la victime estimée par l'intermédiaire de son âge et de la table de mortalité TD88/90.
- le taux de responsabilité simulé par inversion de la fonction de répartition empirique.

Pour nous assurer de la cohérence des résultats bruts de réassurance :

- nous avons vérifié la validité des hypothèses sous-jacentes aux différents modèles.
- nous avons réalisé une comparaison aux résultats théoriques (affranchis du plafond de garantie).

Pour l'évaluation des cessions au titre de la réassurance en excédent de sinistre, une retranscription mathématique fidèle aux conditions du traité a été mise en place. Les termes de ces contrats de réassurance stipulent la mise en « *As-If* » des sinistres à la date d'origine et le partage de l'évaluation entre les réassureurs et la cédante.
A l'issue de ces calculs, nous disposons de plusieurs chroniques simulées de flux de paiement et donc d'une distribution du montant des provisions.
Dans une optique de réduction des délais de clôture, nous avons mis en place un processus d'optimisation du temps de traitement par le biais de la méthode de Quasi Monté Carlo (QMC). Nous avons vu que cette technique permet d'avoir des résultats identiques à la méthode de Monte Carlo avec 2 fois moins de simulations. Néanmoins, suite à la perte d'indépendance des sinistres à cause de l'usage des suites à discrépance faible, la mise en place d'une technique d'agrégation est nécessaire pour avoir une distribution des résultats.

Dans le cadre de la négociation des traités de réassurance, cet outil permet de mesurer l'impact d'une modification des paramètres des traités sur :

- le montant des provisions BE (*best estimate)* net de réassurance
- la distribution des BE

Ce modèle présente néanmoins plusieurs limites :

- L'usage de la table de mortalité TD 88/90, nous amène à supposer que :
  - une victime d'accident médical et une toute autre personne qui n'a rien subie ont la même espérance de vie quelques soient leurs âges. Donc les soins et la prise en charge sont suffisant pour éviter la réduction de l'espérance de vie en liens avec l'accident.
  - quel que soit la typologie de sinistre (obstétrique, chute de lit, erreur de diagnostic, retard dans les soins …) les victimes ont la même loi de mortalité.

  Pour prouver l'usage de toute autre loi de mortalité, une étude sur la mortalité de ces victimes est nécessaire.
- La revalorisation des rentes : la RC médicale étant une branche à déroulement très long, l'hypothèse revalorisation s'avère être une limite du modèle. Nous avons utilisé ici un taux fixe à 2% qui basé sur un indice utilisé en réassurance (GIM) pour modéliser l'inflation des sinistre graves.

10 Annexe

10.1 Méthode de Monte Carlo

10.1.1 Le générateur de nombre pseudo aléatoire

Pour être en capacité d'utiliser la méthode de Monte Carlo, nous devons avant tout disposer d'un générateur de nombre aléatoire. Nous abordons ici la théorie des générateurs linéaires congruentiels de nombres pseudo aléatoires et présenterons ensuite le générateur utilisé par le logiciel Excel® 2016.

10.1.1.1 Le générateur linéaire congruentiel

Ce type de générateur est le plus couramment utilisé dans les logiciels de calcul et de développement. La valeur x_n de l'itération n est donnée par la fonction de transition suivante :

$$x_n = (ax_{n-1} + c)\ mod\ m$$

Où $m > 0$, $a > 0$ et c sont des constantes appelées le $modulo$, le $multiplicateur$ et la $constant\ additive$. Lorsque :

- $c = 0$ le générateur est dit multiplicatif
- $c > 0$ le générateur est dit linéaire

L'opérateur $mod\ m$ correspond au reste de la division euclidienne par m, ainsi x_n ne peut prendre que les valeurs appartenant à l'ensemble $\{0, 1, \dots m-1\}$.
On appelle la période d'un générateur linéaire congruentiel le nombre de valeurs que peut prendre la variable x_n autrement dit $cardinal\ \{0, 1, \dots m-1\} = m$.

10.1.1.2 Le générateur de nombre pseudo aléatoire d'Excel 2016

Utilisé par Excel sur les versions 2016 et postérieures et de période 2^{42}, ce générateur a été développé par Wichman et Hill. Il correspond à la somme de 3 générateurs linéaires multiplicatifs (x_n, y_n, z_n).

$$x_n = (171x_{n-1})\ mod\ 30269$$
$$y_n = (170y_{n-1})\ mod\ 30307$$
$$z_n = (172z_{n-1})\ mod\ 30323$$

Avec :

$$1 \leq x_0 \leq 30000$$
$$1 \leq y_0 \leq 30000$$
$$1 \leq z_0 \leq 30000$$

Pour obtenir un nombre compris entre 0 et 1, le traitement suivant est appliqué :

$$u_n = \left(\frac{x_n}{30269} + \frac{y_n}{30307} + \frac{z_n}{30323}\right) mod\ 1$$

L'opération $mod\ 1$ consiste à prendre la partie décimale de la somme.

10.1.2 Fondement de la méthode de Monte Carlo

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X à valeur dans l'espace S, de loi $\mu(dx)$. Nous souhaitons estimer par une méthode numérique la quantité :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(X)] = \int_S g(x)\mu(dx)$$

Où g est une fonction μ-intégrable.

En effectuant N tirages aléatoires indépendants $(x_1, \dots, x_N)$ suivant la loi μ nous pouvons considérer

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x_k)$$

comme estimateur de $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(X)]$.
Compte tenu des hypothèses que nous avons formulées, la loi forte des grands nombres nous assure que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x_k) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(X)] \ \ p.s.$$

<u>*Définition*</u> : On dit que X_n converge presque surement $(p.s.)$ vers X sous la probabilité $\mathbb{P}$ si :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1$$

10.1.3 Quantification de l'erreur moyenne

Nous cherchons à quantifier l'erreur en lien avec nos simulations et donc déterminer un intervalle de confiance.

<u>*Théorème de la limite centrale*</u> : soit X_n une suite de variables aléatoires réelles $i.i.d.$ de carré intégrable d'espérance m et de variance σ^2.
Alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right) \underset{Loi}{\to} N \sim N(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty \ \blacksquare$$

Grace à ce théorème, pour tout couple de nombre réels $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a \le e_n \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}}b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Nous pouvons déduire un intervalle de confiance de niveau α qui s'écrit de la forme suivante :

$$I_\alpha = \left[I_N - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), I_N + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Où ϕ^{-1} désigne la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite.

Cependant σ est inconnu, nous devons donc l'estimer par :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} g(x_k)^2 - \frac{N}{N-1}(I_N)^2$$

10.2 Optimisation du temps de calcul : la méthode de Quasi Monte Carlo

Tout comme la méthode de Monte Carlo, nous approchons $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(X)]$ par la quantité $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x_k)$.

Cependant les points x_k sont issus d'une suite dite à « discrépence faible » et ne sont donc pas des réalisations d'une variable aléatoire uniforme dans l'espace [0,1].

10.2.1 Suite à discrépance faible

Définition : On dit qu'une suite $\{x_1 \dots x_n\}$ est **équirépartie** dans l'espace $[0,1]^s$ si pour tout sous ensemble Borélien B de $[0,1]^s$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_B(x_i) \rightarrow \mu_{Lebesgue}(B)$$

Où $\mu_{Lebesgue}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^n$.

Définition : Soit B une famille de sous ensemble Borélien de $[0,1]^s$ et $X = \{x_1 \dots x_n\}$ un ensemble de points. La **discrépance** de X relative à B est définie par la fonction suivante :

$$D(x_1 \dots x_n) = \sup_{A \in B}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_A(x_i) - \mu_{Lebesgue}(A)\right|$$

Définition : la suite $\{x_1 \dots x_n\}$ est à **discrépance faible** dans l'espace $[0,1]^s$ si :

$$D(x_1 \dots x_n) = O\left(\frac{\log(n)^s}{n}\right)$$

10.2.1.1 Les suites de Van Der Corput

Les suites de Van Der Corput représentent une classe de suites à discrépance faible unidimensionnelle utilisant la décomposition p-adique d'un nombre.

Définition : Pour tout entier p>1, la décomposition p-adique d'un entier L>0 est la suite $(a_i)_{i=1\dots r}$ telle que :

$$L = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i \;\; avec\; 0 \leq a_i < p, \forall 0 \leq i < r \; et \; 0 < a_r < p$$

La suite de Van Der Corput $(y_i)_{i=1\dots n}$ de base p s'écrit :

$$y_i(p) = \sum_{i=0}^{r} \frac{a_i}{p^{i+1}}$$

En base 2 les premiers termes de la suite sont les suivants :

i	y_i
1	½
2	¼
3	3/4
4	1/8
5	5/8

10.2.1.2 Les suites de Halton

Les suites de Halton sont des extensions multidimensionnelles des suites de Van Der Corput dont les bases correspondent à des nombres premiers.

Soient $p_1, \dots, p_k$, k nombres premiers supérieurs ou égaux à deux. Les N premiers termes de la suite de Halton de dimension k correspondent à :

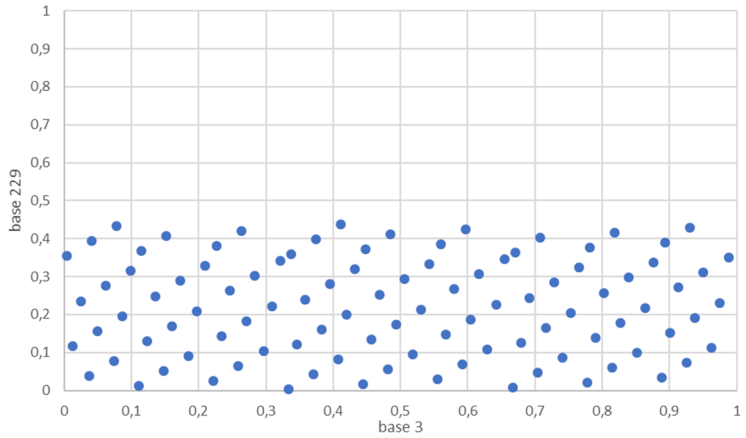
$$H_i = \left(y_i(p_1), \dots, y_i(p_k)\right) \ \forall\, i = 1, \dots, N$$

Où $y_i(p_j)$ est une suite de Van Der Corput de base p_j.

Par construction :

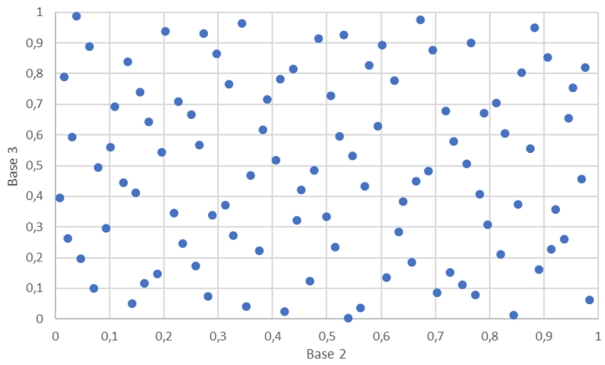
1 Plus la dimension est grande et plus le nombre premier utilisé devra être grand.
2 Plus le nombre premier est grand et plus le nombre de simulations nécessaires pour parcourir l'espace [0,1] sera grand.
3 L'usage de ces suites est limité par le choix des nombres premiers utilisés, une mauvaise sélection de nombres peut entrainer des corrélations et donc fausser les résultats.

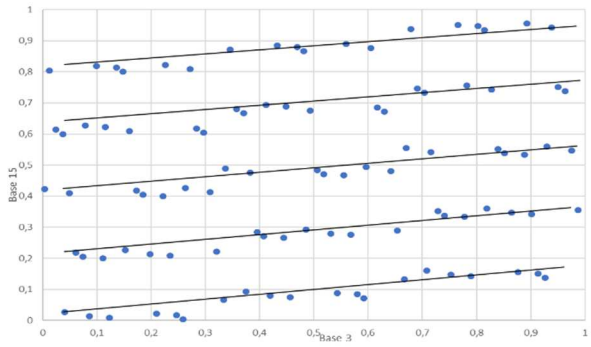
Nous illustrons le 2nd point par le graphique ci-dessous représentant 100 simulations d'une suite de Halton en base (3, 229).



Nous observons sur le graphique ci-dessus que 100 simulations ne suffisent pas à couvrir l'espace [0,1]. Dans notre modèle nous simulons que 8 variables aléatoires, nous générerons une suite de Halton de dimension 8. Pour pallier ce problème nous réaliserons un test de convergence et comparerons les résultats obtenus par cette méthode avec ceux de la méthode de Monte Carlo.

Nous illustrons le 3ème point par les graphiques ci-dessous représentant 100 simulations une suite de Halton en base (2, 3) sur le graphique de gauche et une autre en base (3, 15) sur le graphique de droite.





Nous observons que :

i) sur le graphique de gauche les points sont répartis sur tout l'espace et ne laisse aucune structure apparaitre

ii) sur le graphique de droite l'espace n'est pas totalement occupé et laisse apparaitre une structure en forme de lignes parallèles. Nous observons que si les 2 bases ne sont pas représentées par des nombres à minima premier entre eux, les calculs seront faussés par la corrélation qu'il y a entre les dimensions.

10.2.2 Limite et extension de la méthode

L'une des limites de la méthode de Quasi Monte Carlo correspond au calcul de l'erreur d'estimation, cette méthode ne permet pas le calcul d'un intervalle de confiance à cause d'une absence d'aléa mais seulement d'un majorant de l'erreur absolue de l'estimateur. Ce majorant est donné par le théorème suivant :

Théorème (inégalité de Koksma Hlawka) : soit g une fonction de $[0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ à variation finie.
Pour toute suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ dans $[0,1]^d$ on a :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(u_i) - \int_{[0,1]^d} g(x)dx\right| \leq V(g)\, D(u_1, \dots, u_n)$$

Où $V(g)$ caractérise l'irrégularité de g.

Le calcul de la borne de *Koksma-Hlawka* s'avère complexe pour les raisons suivantes :

i) l'irrégularité de la fonction f est souvent non calculable, voir infinie dans le cas d'une fonction indicatrice.
ii) le calcul de la discrépance est compliqué selon la suite utilisée.

Pour pallier ce problème *Tuffin (1997)* propose de combiner les avantages des méthodes de Monte Carlo et de Quasi Monte Carlo. Cette méthode dénommée la **Randomisation** consiste à ajouter un aléa en effectuant les calculs suivants :

$$Z_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(x_i + u_k)\ mod\ 1$$

Où :

x_i est une suite à discrépance faible

u_k est une réalisation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]^d$

l'opération $mod\ 1$ consiste à prendre la partie décimale de la somme.

Le nouvel estimateur sans biais de $\int_{[0,1]^d} g(x)dx$ est :

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} Z_i = \frac{1}{IN}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{N} g\lfloor x_i + u_k \rfloor$$

En utilisant le théorème de la limite centrale sur la variable Z_i, nous disposons d'un intervalle de confiance pour notre intégrale.

11 Bibliographie

ELIE, L. et LAPEYRE, B. (2001) : *Introduction aux méthodes de Monte-Carlo*.

SAPORTA, G. (2011) : *Probabilités, analyse de données et statistique*.

Association des paralysés de France et Le médiateur de la république (2010) : *Le guide de l'expertise médicale amiable en 10 points*.

GAUTHIER, G (2009) : *Simulation des processus de diffusion*.

LUZI, M (2007) : *Assurance IARD : Interprétation des chiffres.*

FROMENTEAU, M et PETEAUTON, P (2012) : *Théorie et pratique de l'assurance vie 4ème édition*.

PLANCHET, F et THEROND, P (2006) : *Modèles de durée*.