

**Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine  
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine  
et l'admission à l'Institut des Actuaire**  
**le 21/03/2025**

Par : Agathe Wittoeck

Titre : Besoin en capital à travers l'utilisation d'un modèle interne partiel : les limites de l'approche variance covariance

Confidentialité : ☒ Non    ☐ Oui    (Durée : ☐ 1 an    ☐ 2 ans)

---

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaire :*

*Entreprise :*  
Nom : Forvis Mazars Actuariat  
Signature :

*Membres présents du Jury du Certificat  
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

*Directeur de Mémoire en entreprise :*  
Nom : Thomas PRAT  
Alia ZOUINE  
Fouad BRAX  
Signature :

---

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Secrétariat :*

*Signature du responsable entreprise*

*Bibliothèque :*

*Signature du candidat*



## Résumé

---

Le cadre réglementaire Solvabilité 2 encadrant les activités d'Assurance et de Réassurance depuis janvier 2016 prévoit la mise en place d'un capital économique réglementaire (SCR). Ce dernier correspond au niveau de fonds propres nécessaires pour s'assurer que la compagnie ne soit pas en situation de ruine économique avec une probabilité 99,5% à horizon un an. Le régulateur européen propose différentes approches pour son calcul : la formule standard (FS), le modèle interne (MI) ou le modèle interne partiel (MIP), combinant les deux approches. La FS consiste en une approche modulaire qui prévoit le calcul de capitaux élémentaires au titre d'un des risques encourus par la compagnie, agrégés par la suite à l'aide de matrices de corrélation fournies par l'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (*European Insurance and Occupational Pensions Authority* ou EIOPA). Le MI permet quant à lui un calcul du SCR permettant une prise en compte plus fine du profil de risque du portefeuille considéré, mais pouvant s'avérer plus délicat et coûteux à mettre en place. Il est également soumis à l'approbation de l'Autorité de contrôle prudentielle de résolution (ACPR) avant de pouvoir être utilisé. Nous pouvons distinguer 3 types de modèles internes : la FS *Entity Specific*, le MIP, et le modèle interne total.

L'agrégation des risques joue un rôle majeur dans la détermination du capital économique au titre des différents risques et permet la prise en compte de l'interaction entre les différents facteurs de risque pour le calcul du capital économique.

L'ACPR a présenté en décembre 2023 de nouvelles notices relatives aux modèles internes, indiquant notamment son aptitude à pouvoir déterminer à tous niveaux d'agréations et tous niveaux de confiance :

- le quantile de la distribution de probabilité prévisionnelle sous-tendant le modèle interne ;
- les contributions au quantile de la distribution de probabilité prévisionnelle des différentes composantes de risque ;
- le comportement joint des facteurs de risques considérés dans le modèle interne.

Ces contraintes entraînent la considération de méthodes d'agrégation plus minutieuses que l'approche variance-covariance, qui ne permet notamment pas l'obtention d'une distribution à tous les niveaux de quantiles.

Ce mémoire vise à mettre en lumière les défis inhérents à l'agrégation des risques, tels qu'identifiés par l'ACPR.

Pour ce faire, nous amorcerons notre analyse en explorant les travaux de recherche existants sur l'agrégation des risques dans le cadre de Solvabilité 2. Nous présenterons par la suite une méthodologie permettant la mise en place d'un modèle interne partiellement simulateur, en concentrant notre étude sur une sélection de risques de marché. Nous évoquerons en particulier la méthode de *Curve Fitting* et la mise en place d'une structure de dépendance à l'aide de copules. Une dernière partie consistera à étudier la sensibilité du modèle mis en place aux hypothèses prises. L'étude est fondée sur un cas pratique de la détermination du SCR d'une compagnie fictive.

---

*Mots-clés : Solvabilité II, Générateurs de Scénarios Economiques, Agrégation, Modèle Interne, Curve Fitting, Copules.*

## Abstract

---

The Solvency 2 regulatory framework, which has been governing the activities of Insurance and Reinsurance since January 2016, provides for the establishment of a regulatory economic capital (SCR). This corresponds to the level of capital required to ensure that the company is not in a state of economic ruin with a 99.5% probability over a one-year horizon. The European regulator proposes different approaches for its calculation: the standard formula (SF), the internal model (IM), or the partial internal model (PIM), combining the two approaches. The SF consists of a modular approach that calculates basic capital for one of the risks incurred by the company, which are then aggregated using correlation matrices provided by the European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). The IM, on the other hand, allows for a more detailed consideration of the risk profile of the portfolio, but it can be more complex and costly to implement. It is also subject to approval by the ACPR before it can be used. We can distinguish three types of internal models: the Entity Specific SF, the PIM, and the total internal model.

Risk aggregation plays a major role in determining the economic capital for different risks and allows for the consideration of the interaction between different risk factors in the calculation of economic capital.

In December 2023, the ACPR presented new notices regarding internal models, indicating its ability to determine, at all levels of aggregation and confidence

- the quantile of the predictive probability distribution underlying the internal model;
- the contributions to the quantile of the predictive probability distribution from different risk components;
- the joint behavior of the risk factors considered in the internal model.

These constraints require the consideration of more detailed aggregation methods than the variance-covariance approach, which does not allow for obtaining a distribution at all quantile levels.

This paper aims to highlight the challenges inherent in risk aggregation, as identified by the ACPR.

To do this, we will start our analysis by exploring existing research on risk aggregation within the Solvency 2 framework. We will then present a methodology for implementing a partially simulation-based internal model, focusing our study on a selection of market risks. We will specifically discuss the Curve Fitting method and the implementation of a dependency structure using copulas. A final part will involve studying the sensitivity of the model to the assumptions made. The study is based on a practical case of determining the SCR for a fictional company.

---

*Keywords : Solvency II, Economic Scénario Generators, Agregation, Internal Models, Curve Fitting, Copulas.*



# Note de Synthèse

## Contexte

La Directive Solvabilité II, entrée en vigueur le 1er janvier 2016, met en place un cadre réglementaire stricte régulant les activités d'assurance au sein du territoire européen. Cette dernière prévoit entre autres la mise en place d'un capital économique réglementaire (SCR), permettant aux compagnies d'assurance d'être en mesure d'honorer leurs engagements.

Elle remplace la Directive Solvabilité I et introduit une méthodologie qui s'appuie sur le profil de risque particulier des assureurs dans le cadre de l'évaluation des besoins en solvabilité.

Deux approches sont présentées par la Directive pour le calcul du SCR :

- l'utilisation de la **formule standard** (FS) mise en place par l'EIOPA, qui consiste en l'application de chocs déterminés par le régulateur ainsi qu'une agrégation modulaire pour l'obtention d'un capital au titre des différents facteurs de risques, effectuée à partir d'une matrice de corrélation ;
- l'utilisation d'un **modèle interne** (MI) mis en place par la compagnie d'assurance, permettant une vision plus fine du profil de risque du portefeuille étudié.

La seconde approche est soumise à la validation de l'ACPR avant de pouvoir être utilisée par la compagnie l'ayant façonnée. A cette fin, une nouvelle notice a été publiée en décembre 2023 par cette dernière, précisant ses exigences en terme d'évaluation du MI. Cette notice vise à enrichir les Orientations Nationales Complémentaires (ONC) et permettre aux acteurs du secteur assurantiel de mettre en place des pratiques en adéquation avec les attentes du régulateur. Elle présente des indications complémentaires concernant 16 critères quantitatifs et qualitatifs. Les méthodes de modélisation qui pourraient être considérées comme inadéquates au vu de la réglementation sont alors précisées. Pour ces dernières, des éléments précis devront être présentés pour justifier de leur utilisation et de la pertinence de ces choix de modélisation. Une attention particulière est notamment donnée à la mise en place de la structure d'agrégation, indiquant l'importance d'effectuer une analyse plus poussée des structures de dépendance entre les différents facteurs de risques auxquels la compagnie est soumise.

**L'objectif de cette étude réside dans la mise en place d'un modèle interne partiellement simulatoire (MIP) suivant les nouveaux préceptes de l'ACPR. Elle vise à apporter un éclairage quant à la notice publiée, en évaluant l'impact de la non-prise en compte de ces spécifications sur la perception de la solvabilité d'un assureur-vie.**

Ce mémoire se concentre sur certains éléments évoqués dans la notice. Une attention particulière est donnée à ceux précisés ci-dessous :

- l'importance d'avoir une compréhension fine de la structure de dépendance existante entre les différents facteurs de risque auxquels la compagnie est soumise ;

- l'importance du choix des données utilisées pour la modélisation des risques de la compagnie d'assurance ;
- la nécessité de disposer d'une méthode d'agrégation plus adaptée au profil de la compagnie d'assurance que l'approche VaR-CovAR (VC).

L'utilisation d'une agrégation par approche VC semble en effet insuffisante. Cette dernière ne permet pas l'obtention d'une distribution à tous les niveaux de quantile et se base sur des hypothèses simplificatrices qui ne retranscrit pas fidèlement le profil de risque des compagnies d'assurance.

Cette analyse se fonde sur l'évaluation du ratio de couverture d'un assureur-vie représentatif du marché proposant uniquement des contrats épargne. Une étude de la robustesse du modèle et de la sensibilité des valeurs aux modifications des paramètres sont finalement effectués.

### Mise en place du modèle

Pour répondre aux exigences de l'ACPR, la mise en place d'un MIP est considérée, utilisant une approche simulateur sur deux facteurs de risques. L'approche FS est maintenue pour les autres modules et facteurs de risques.

L'assureur utilisé est construit en se basant sur un portefeuille représentatif des acteurs du marché français, constitué en majeure partie de contrats multisupports. Afin de valoriser le bilan économique de notre assureur, nous utilisons l'outil interne de Gestion Actif-Passif (ALM) de Forvis Mazars permettant ainsi de modéliser les interactions actif-passif.

Les facteurs de risques retenus pour la modélisation en MI correspondent aux risques action et immobilier, inclus dans le module marché. Ce dernier représente la contribution la plus importante au SCR, en particulier pour les assureurs-vie. En plus d'être modélisables à partir de données qui sont disponibles en *Open Source*, le rapport EIOPA sur le calibrage de la FS laisse présager une structure de dépendance forte entre ces deux facteurs de risques, pouvant s'avérer intéressante pour la suite de l'étude. Afin de mettre en place l'approche simulateur pour ces deux facteurs de risques, la modélisation des distributions de pertes élémentaires et agrégée est effectuée à partir de *proxys Curve Fitting*. La dépendance entre ces deux risques est déterminée à partir de copules.

L'obtention de distributions de pertes au titre des différents risques auxquels est exposée une compagnie d'assurance fait appel à une méthode de Simulations dans les Simulations (SdS). Celle-ci a recours à deux types de diffusions :

- diffusion monde réel (RW) : vieillissement du bilan à un an en fonction des différentes trajectoires des facteurs de risques en probabilité historique ;
- diffusion en risque neutre (RN) : pour chaque simulation primaire effectuée en univers historique, un certain nombre de simulations secondaires est effectué en fin de première année, conditionnellement à l'information issue de la simulation primaire. Ces simulations permettent de faire évoluer le bilan de la compagnie jusqu'à l'horizon de projection des engagements, en respectant le critère de *market consistency*. Ainsi, une distribution des fonds propres économiques à un an de la compagnie est obtenue.

En pratique, cette approche nécessite un temps de calcul prohibitif et les compagnies d'assurance ont recours à des méthodologies alternatives. Le *Curve Fitting* représente une de ces méthodes et consiste en l'ajustement d'une forme paramétrique sur les facteurs de risques retenus, permettant l'obtention d'un échantillon de fonds propres économiques à un an à partir d'un nombre restreint de simulations primaires.

En notant alors  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une observation du vecteur aléatoire représentant les différents facteurs de risques, la fonction de perte est donnée par

$$L_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = NAV_0 - D(0, 1)NAV_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n),$$

avec  $NAV_{1,\dots,n}$  la fonction approchée par *Curve Fitting*.

Dans le cadre de l'étude, les pertes élémentaires au titre des risques action et immobilier sont évaluées, ainsi que la perte agrégée au titre des deux risques. Cette perte élémentaire au titre du risque  $\epsilon_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  est obtenue en neutralisant les autres risques à partir de valeurs centrales, de la manière suivante

$$L_1(\epsilon_k) = L_{1,\dots,n}(\epsilon_1^{cent}, \dots, \epsilon_{k-1}^{cent}, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}^{cent}, \dots, \epsilon_n^{cent}).$$

La perte au titre des deux facteurs de risques, permettant la prise en compte de l'effet de l'interaction, est donnée par

$$L_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) = L_1(\epsilon_1) + L_1(\epsilon_2) + Inter_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) - L_1(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent}),$$

avec  $Inter_{1,2}$  la forme paramétrique représentant les interactions et  $L_1(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent})$  la perte en scénario central. L'interpolation *spline* est retenue pour la mise en place des *proxys*, permettant une meilleure précision qu'une interpolation polynomiale.

Pour cette étude, huit quantiles de distributions à un an des risques action et immobilier sont retenus pour calibrer les fonctions de pertes élémentaires et le calibrage de la fonction de perte agrégée fait appel à vingt-cinq scénarios de couples action-immobilier. Des métriques ont été utilisées pour s'assurer de la suffisance des scénarios retenus.

Afin de projeter les facteurs de risques en monde réel et en risque neutre tel que précisé ci-dessus, les dynamiques employées correspondent à des modèles de *Black&Scholes*, calibrés en fonction de la vision souhaitée à partir des données historiques ou par inversion de la formule de *Black&Scholes*. Afin de prendre en compte une structure de dépendance plus fine entre les différents facteurs de risques, une copule est affectée aux risques action-immobilier à un an pris en entrée de la forme paramétrique déterminée. Pour ce faire, une approche simplifiée est considérée supposant que l'historique des données utilisées pour modéliser les deux risques peuvent être représentés par deux dynamiques de *Black&Scholes*. Alors, pour  $X_t$  suivant une telle dynamique de *drift*  $\mu$  et de volatilité  $\sigma$ ,

$$\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W_1,$$

permettant ainsi l'obtention de données indépendantes identiquement distribuées (iid) qui ne dépendent pas du temps  $t$ , et auxquelles une copule peut être affectée. Ces log-rendements constituant des transformations croissantes des facteurs de risques, cette même copule est alors utilisée pour obtenir la distribution multivariée à un an du vecteur (Action, Immobilier).

En appliquant la technique de maximum de vraisemblance à l'échantillon déterminé, une copule de Student de paramètre de corrélation de 64% et de degré de liberté 5,3 est retenue.

Une fois que le SCR agrégé est déterminé, à partir des *proxys Curve Fitting* et de la mise en place d'une structure de dépendance à l'aide de copules, l'agrégation des résultats obtenus en approche simulationnaire avec ceux déterminés en FS est effectuée. Le coefficient de corrélation décrivant la dépendance entre les risques action et immobilier de la matrice intra-modulaire du module Marché est remplacé par le coefficient de corrélation *Entity Specific* suivant

$$\rho_{act, immo} = \frac{SCR_{simu}(act, immo)^2 - SCR_{simu}(act)^2 - SCR_{simu}(immo)^2}{2SCR_{simu}(act)SCR_{simu}(immo)}.$$

## Résultats

Les valeurs de SCR obtenus au titre des risques élémentaires et agrégés à partir de la fonction d'interpolation *pairwise* sont résumées dans le tableau 1. Les données du CAC 40 sont utilisées pour modéliser l'indice action tandis que la diffusion de l'indice immobilier s'obtient à partir des données IEIF et de l'indice des notaires.

SCR	SCR (Action)	SCR (Immobilier)	SCR (Action, Immobilier)	ratio de couverture
valeur (m €)	16,41	5,97	23,91	158%

TABLE 1 : Résultats obtenus pour les données considérées

La méthodologie présentée précédemment mène à un SCR agrégé qui présente un effet de contagion. Cette observation peut sembler étonnante. En effet, il semble plus intuitif de constater une diversification du fait de la prise en compte de deux risques. Néanmoins, dans notre cas de figure, cette contagion peut être expliquée. En effet, deux mécanismes en sont responsables :

- **une structure de dépendance positive très marquée** : Un paramètre de corrélation à 64% a été retenu pour la copule de *Student* utilisée, entraînant une très forte dépendance entre les deux facteurs de risques. En effet, au sein de l'économie à un an obtenue, un grand nombre de valeurs action défavorables vont être associées à des valeurs immobilier défavorables (cf. figure 1). Les scénarios (action, immobilier) alors engendrés constituent des observations pour lesquelles les risques se réalisent de manière simultanée, ne favorisant pas l'effet de diversification.
- **l'effet de l'interaction entre les deux risques augmente la perte observée pour des scénarios où l'action et l'immobilier sont simultanément faibles**. Comme présenté dans la figure 1, pour les scénarios (action,immobilier) à l'origine des 100 pertes les plus importantes, un excédent de perte dû aux interactions entre les deux facteurs est observé. Le SCR, situé en queue de distribution supérieure de la perte, est donc concerné par ce phénomène de gonflement.

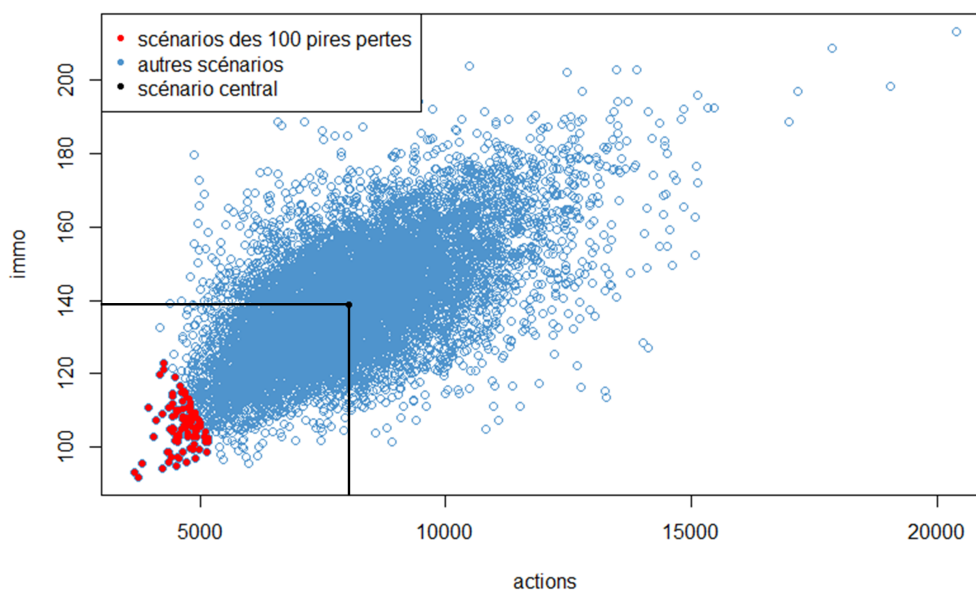


FIGURE 1 : scénarios économiques à l'origine de niveaux de pertes significatifs

Cela permet d'émettre un regard critique quant à la structure de dépendance mise en place. Dans cette étude, un indice immobilier et action extrêmement corrélés (IEIF & CAC 40) sont utilisés pour déterminer la structure de dépendance. En pratique, les compagnies d'assurance disposent d'un portefeuille diversifié d'actions et d'actifs immobilier, rendant une telle dépendance entre les deux facteurs de risques peu probable.

En retenant seulement l'indice des notaires pour modéliser le risque immobilier, des résultats totalement différents sont obtenus, répertoriés dans le tableau 2.

Risque	SCR (m €)
Action	17,40
Immobilier	2,43
Agrégé	17,30

TABLE 2 : Résultats des SCR obtenus pour les données immobilier « indices des notaires »

En effet, la faible volatilité alors calibrée au sein du GSE RW limite grandement le SCR immobilier obtenu, et les deux facteurs de risques sont associés de manière indépendante. Ces constatations sont responsables de l'observation qui peut être faite sur le SCR agrégé obtenu : il est légèrement plus faible que le SCR action. Ces résultats témoignent de l'importance du choix des données utilisées pour représenter le risque auquel la compagnie est exposée.

Afin d'évaluer la robustesse du modèle ainsi que l'incidence de l'utilisation de l'agrégation VC sur les SCR obtenus, un premier jeu de sensibilités est effectué concernant la calibration des paramètres du GSE RW. Ces intervalles sont déterminées à partir des quantiles 20% et 80% des distributions obtenues en considérant des intervalles d'historiques de 2 ans déterminés par glissement sur l'historique initial.

paramètre	valeur dans le modèle	borne inférieure	borne supérieure	ratios de couverture
corrélacion ( $\rho$ )	64%	50%	75%	[155%, 161%]
volatilité ( $\sigma$ )	21%	14%	25%	[145%, 189%]
<i>drift</i> ( $\mu$ )	6%	-2,7%	15%	[146%, 171%]

TABLE 3 : Influence des paramètres RW action sur les ratios de couverture obtenus

Comme présenté dans le tableau 3, les ratios de couverture semblent sensibles aux modifications des paramètres RW. Ces constats sont à nuancer en pratique. En effet, il a été constaté à partir d'un *benchmark* que l'assureur considéré était particulièrement sensible au risque action par rapport aux acteurs du marché. De plus, quel que soit le paramètre considéré, la solvabilité de l'assureur ne semble pas mise à mal.

En comparant en fonction des différents intervalles de paramètres considérés le SCR agrégé obtenu en approche VC et en approche simulatoire, il est constatable que l'approche VC sous-estime systématiquement le SCR dans cette étude, comme peut le représenter la figure 2, se concentrant sur les différentes valeurs de volatilité. Une surestimation de 14% du ratio de couverture présenté dans le tableau 1 est observée en utilisant l'approche VC pour déterminer le SCR agrégé.

Ces écarts s'expliquent notamment du fait de la non prise en compte de l'interaction dans le cadre VC et mettent en avant la non-adaptation de cette approche pour un MI. En effet, il pourrait être envisagé de corriger le coefficient de corrélation pris en compte dans l'agrégation VC afin de le faire coïncider avec l'approche simulatoire mais cette correction ne serait alors valide que dans le cadre d'un quantile à 99,5% et ne permettrait donc pas l'obtention d'une vision complète du profil de risque de la compagnie telle que préconisée par l'ACPR.

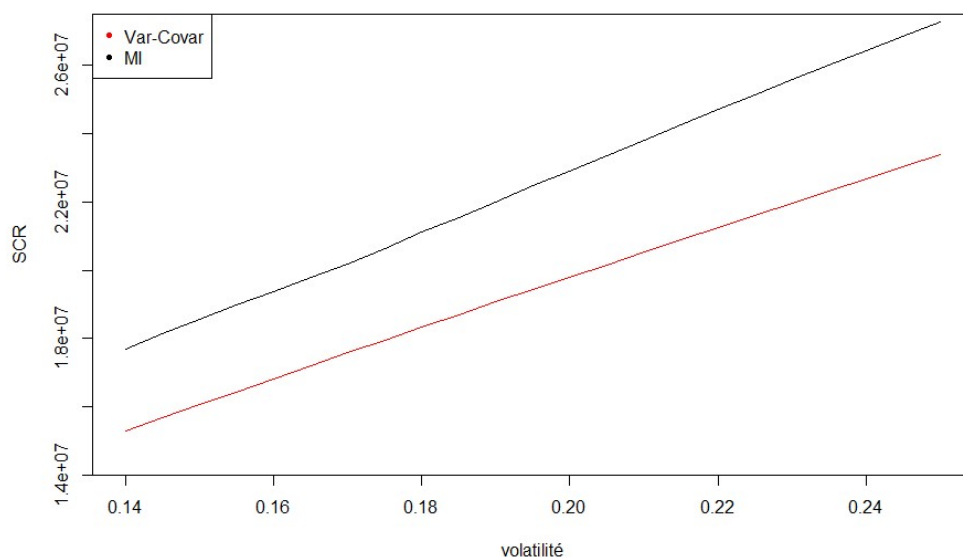


FIGURE 2 : SCR agrégés obtenus en MI et à partir de l'approche VC, en €

Après avoir évalué les impacts des modélisations retenues pour la diffusion des facteurs de risques au sein du GSE RW, il convient de s'intéresser à l'influence de la modélisation utilisée pour la structure de dépendance sur le ratio de couverture obtenu.

En observant les résultats obtenus en associant les indices action et immobilier à partir des différentes copules étudiées pour l'affectation par maximum de vraisemblance, avec un paramètre de corrélation identique égal à 64%, il est constatable que le ratio de couverture est sensible à cette modélisation. En effet, la corrélation ne permet que d'obtenir une vision moyenne de la dépendance constatée sur l'échantillon associé à une copule et le SCR agrégé obtenu varie de manière significative en fonction de la répartition de la dépendance instaurée par les différentes copules. Dans le cadre de cette étude, comme le souligne le tableau de résultats 4, les copules engendrant les SCR les plus importants correspondent aux copules pour lesquelles la dépendance est accentuée sur la queue de distribution inférieure. Alors, des scénarios (action, immobilier) plus défavorables sont observés dans l'économie engendrant des valeurs plus importantes en queue de distribution supérieure de la perte. Une variation du ratio de couverture de 15% est notamment constatée.

copule	SCR agrégé (m €)	SCR global (m €)	ratio de couverture
<i>Student</i>	24,05	31,70	158%
Gumbel Survie	25,12	32,62	153%
Gaussienne	23,80	31,49	159%
Frank	21,87	29,86	167%
Clayton	25,33	32,81	152%

TABLE 4 : incidence de la modification de la structure de dépendance sur le SCR global et le ratio de couverture

Afin de clore l'analyse de l'influence de l'utilisation de l'agrégation VC sur les résultats obtenus, il a semblé intéressant d'observer les écarts avec cette dernière, en se plaçant dans un cadre où toutes les hypothèses sous-jacentes à l'approche sont vérifiées mis-appart l'ellipticité de la copule modélisant la dépendance entre les risques, en retenant des copules archimédiennes. Comme l'illustre la figure 3, l'agrégation VC engendre un SCR sous-estimé dans le cas où la copule de Clayton modélise la

dépendance entre les facteurs, quel que soit son paramètre, mettant en avant la non-adéquation de la méthode et la potentielle mise à mal de la solvabilité de l'assureur.

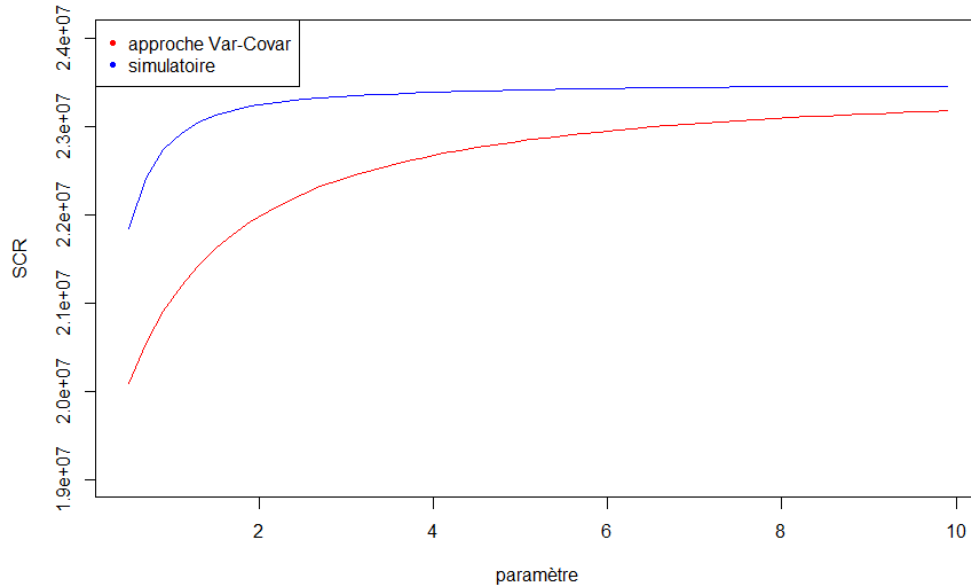


FIGURE 3 : Comparaison de l'approche Var-Covar et simulatoire pour la copule de Clayton (€)

### Conclusion

Cette étude permet de mettre en avant l'importance des exigences formulées par l'ACPR dans la nouvelle notice de 2023. Il peut notamment y être constaté que les SCRs obtenus dépendent fortement des hypothèses retenues, notamment des données utilisées pour représenter les facteurs de risques. De même, la structure de dépendance utilisée pour modéliser ces derniers a une influence non négligeable sur le capital obtenu et ne pas capturer correctement cette dépendance peut entraîner une estimation erronée du risque auquel la compagnie est exposée. Enfin, l'agrégation VC ne semble pas judicieuse dans le cadre de la mise en place du modèle et n'appréhende pas correctement les quantiles de la distribution de perte au titre des différents facteurs. Néanmoins, il est important de noter que les résultats obtenus dépendent des spécificités propres à l'assureur considéré. De plus, le MI mis en place constitue une approche simplifiée de ce qui observable en pratique et induit de nombreuses limites.





# Synthesis note

The Solvency II Directive, which came into force on January 1, 2016, establishes a strict regulatory framework governing insurance activities within the European territory. Among other things, the latter provides for the introduction of regulatory economic capital (SCR), enabling insurance companies to be able to meet their commitments.

It replaces the Solvency I Directive, and introduces a methodology based on the specific risk profile of insurers as part of the assessment of solvency requirements.

The Directive presents two approaches for calculating the SCR:

- the use of the **standard formula** (SF) set up by EIOPA, which consists of the application of shocks determined by the regulator and a modular aggregation to obtain capital for the various risk factors, based on a correlation matrix;
- the use of an **internal model** (IM) set up by the insurance company, providing a more refined view of the risk profile of the portfolio studied.

The second approach is subject to validation by the ACPR before it can be used by the company that designed it. To this end, a new notice was published in December 2023 by the latter, specifying its requirements in terms of IM assessment. The purpose of this notice is to enhance the *Orientations Nationales Complémentaires* (ONC) and enable actors of the insurance sector to implement practices in line with the regulator's expectations. It provides additional information on 16 quantitative and qualitative criteria. Modeling methods that might be considered inappropriate in light of the regulations are then specified. In the case of the latter, precise details must be provided to justify their use and the relevance of these modeling choices. Particular attention is paid to the implementation of the aggregation structure, indicating the importance of carrying out a more in-depth analysis of the dependency structures between the various risk factors to which the company is subject.

**The aim of this study is to set up a partially simulative internal model (PIM) in line with the new ACPR precepts. It aims to shed light on the published notice, by assessing the impact of not taking these specifications into account on the perception of a life insurer's solvency.**

This thesis focuses on some of the elements mentioned in the leaflet. Particular attention is given to those specified below :

- the importance of having a detailed understanding of the dependency structure existing between the various risk factors to which the company is subject;
- the importance of the choice of data used to model the insurance company's risks;
- the need for an aggregation method better suited to the insurance company's profile than the VaR-CovAR (VC) approach.

In fact, the use of a VC aggregation approach seems insufficient. The latter does not allow us to obtain a distribution at all quantile levels, and is based on simplifying assumptions that do not faithfully reflect the risk profile of insurance companies.

This analysis is based on the evaluation of the coverage ratio of a market representative life-insurer offering only savings contracts. Finally, the robustness of the model and the sensitivity of values to parameter changes are examined.

### Implementation of the model

To meet ACPR requirements, we are considering the implementation of a PIM, using a simulative approach on two risk factors. The SF approach is maintained for the other modules and risk factors.

The insurer used is constructed on the basis of a portfolio representative of the french market actors, made up for the most part of multisupport contracts. In order to value the insurer's economic balance sheet, the Asset & Liability Management (ALM) tool of Forvis Mazars is used to model the existing interactions between assets and liabilities.

The risk factors used for the IM approach correspond to the equity and real estate risks included in the market module. The latter represents the largest contribution to SCR, particularly for life insurers. In addition to the fact that they can be modeled using data available in Open Source, the EIOPA report on SF calibration suggests a strong dependency structure between these two risk factors, which could prove to be interesting for the rest of the study. In order to implement the simulation approach for these two risk factors, elementary and aggregate loss distributions are modeled using Curve Fitting proxys. The dependency between these two risks is determined using copulas.

To obtain loss distributions for the various risks to which an insurance company is exposed, we use the Simulations within Simulations (SwS) method. Two types of diffusion are used:

- real-world diffusion (RW): aging of the one-year balance sheet according to the different trajectories of risk factors in historical probability;
- risk-neutral diffusion (RN): for each primary simulation carried out in the historical universe, a certain number of secondary simulations are carried out at the end of the first year, conditional on the information obtained from the primary simulation. These simulations allow the company's balance sheet to evolve up to the liability projection horizon, while respecting the market consistency criterion. The result is a distribution of the company's one-year economic equity.

In practice, this approach requires a prohibitive calculation time, and insurance companies resort to alternative methodologies. One such method corresponds to the Curve Fitting approach, which involves fitting a parametric form to the selected risk factors, to obtain a sample of one-year economic equity from a limited number of primary simulations.

Denoting then  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  an observation of the random vector representing the different risk factors, the loss function is given by

$$L_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = NAV_0 - D(0, 1)NAV_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n),$$

with  $NAV_{1,\dots,n}$  the function approximated by Curve Fitting.

For the purposes of this study, the elementary losses for equity and real estate risks are evaluated, as well as the aggregate loss for both risks. This elementary loss for the risk  $\epsilon_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  is obtained by neutralizing the other risks from central values, as follows

$$L_1(\epsilon_k) = L_{1,\dots,n}(\epsilon_1^{cent}, \dots, \epsilon_{k-1}^{cent}, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}^{cent}, \dots, \epsilon_n^{cent}).$$

The loss for the two risk factors, allowing for the effect of the interaction, is given by

$$L_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) = L_1(\epsilon_1) + L_1(\epsilon_2) + Inter_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) - L_1(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent}),$$

with  $Inter_{1,2}$  the parametric form representing interactions and  $L_1(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent})$  the central scenario loss. Spline interpolation is used to set up the proxys, providing better accuracy than polynomial interpolation.

For this study, eight quantiles of one-year equity and real estate risk distributions were used to calibrate the elementary loss functions, and twenty-five scenarios of equity-real estate pairs were used to calibrate the aggregate loss function. Metrics were used to ensure the adequacy of these scenarios.

In order to project the risk factors in RW and RN conditions as specified above, the dynamics used correspond to Black&Scholes models, calibrated according to the desired vision based on historical data or by inversion of the Black&Scholes formula. In order to take into account a finer dependency structure between the various risk factors, a copula is assigned to the 1-year equity-real estate risks taken as input to the parametric form determined. To do so, a simplified approach is considered, assuming that the historical data used to model the two risks can be represented by two Black&Scholes dynamics. Then, for  $X_t$  following such a dynamic of drift  $\mu$  and volatility  $\sigma$ ,

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_1,$$

allowing us to obtain independent identically distributed (iid) data which are not time-dependent  $t$ , and to which a copula can be assigned. As those log-returns represent increasing transformations of the risk factors, this same copula is then used to obtain the multivariate 1-year distribution of the (equity, real estate) vector. Applying the maximum likelihood technique to the sample determined, a Student copula with a correlation parameter of 64% and a degree of freedom of 5.3 is selected.

Once the aggregate SCR has been determined, based on the Curve Fitting proxys and the implementation of a dependency structure using copulas, the aggregation of the results obtained in the simulatory approach with those determined in SF is implemented. The correlation coefficient describing the dependency between equity and real estate risks in the Market module's intramodular matrix is therefore replaced by the following Entity Specific correlation coefficient.

$$\rho_{act, immo} = \frac{SCR_{simu}(act, immo)^2 - SCR_{simu}(act)^2 - SCR_{simu}(immo)^2}{2SCR_{simu}(act)SCR_{simu}(immo)}.$$

## Results

The SCR values obtained for elementary risks and aggregated using the pairwise interpolation function are summarized in table 5. CAC 40 data is used to model the equity index, while the real estate index is obtained from IEIF data and the notaries' index.

SCR	SCR (Equity)	SCR (Real Estate)	SCR (Equity, Real Estate)	solvency ratio
valeur	16,41	5,97	23,91	158%

Table 5: Results obtained in €, for the data considered

The methodology presented above leads to an aggregate SCR that exhibits a contagion effect. This observation may seem surprising. Indeed, it seems more intuitive to observe diversification as a result of taking two risks into account. In this case, this contagion can be explained by two mechanisms:

- **a strong positive dependency structure.** A correlation parameter of 64% was chosen for the Student copula used, resulting in a very strong dependency between the two risk factors. Indeed, within the one-year economy obtained, a large number of unfavorable equity values will be associated with unfavorable real estate values (cf. figure 4). The scenarios generated (equity, real estate) are composed of observations for which the risks are realized simultaneously, not favoring the diversification effect.
- **the effect of the interaction between the two risks increases the loss observed for scenarios where equity and real estate are simultaneously weak.** As shown in figure 4, for the equity and real estate scenarios responsible for the 100 largest losses, an excess loss due to the interaction between the two factors is observed. The SCR, located at the tail of the upper loss distribution, is therefore affected by this inflation phenomenon.

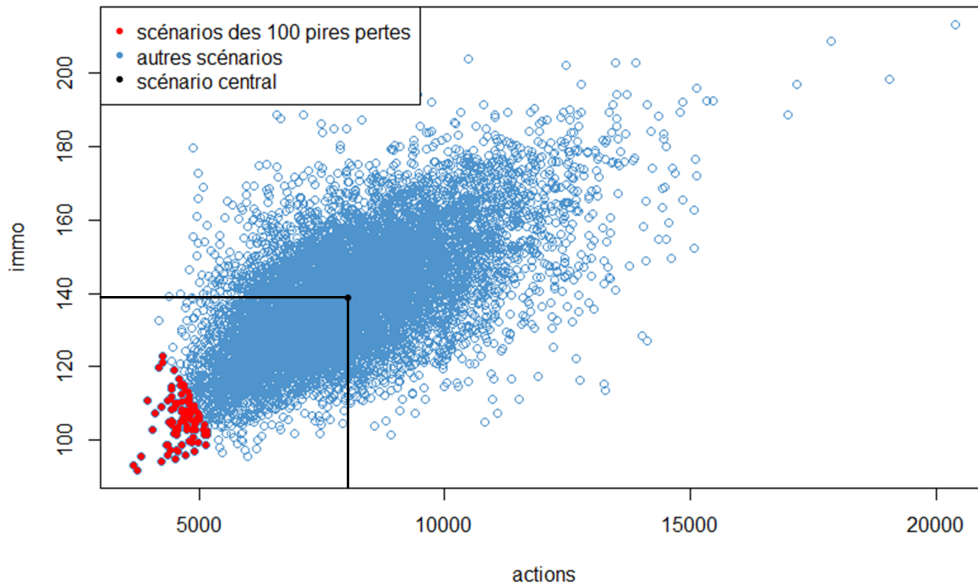


Figure 4: economic scenarios behind significant losses

This allows us to take a critical look at the dependency structure in place. In this study, highly correlated real estate and equity indexes (IEIF & CAC 40) are used to determine the dependency structure. In practice, insurance companies have a diversified portfolio of equities and real estate assets, making such positive dependence between the two risk factors unlikely. If we use the notaries' index to model real estate risk, we obtain completely different results, which are listed in the table 6.

Risk	SCR (m €)
Equity	17,40
Real-Estate	2,43
Agregated	17,30

Table 6: SCR results obtained for real estate “notary index” data

Indeed, the low volatility then calibrated within the RW ESG greatly limits the real estate SCR obtained, and the two risk factors are independently associated. These findings are responsible for the observation that can be made about the aggregated SCR obtained: it is slightly lower than the equity SCR. These results underline the importance of the choice of data used to represent the risk to which the company is exposed.

In order to assess the robustness of the model and the impact of using VC aggregation on the SCRs obtained, a first set of sensitivities is performed concerning the calibration of the RW ESG parameters. These intervals are determined from the 20% and 80% quantiles of the distributions obtained by considering 2-year historical intervals determined by sliding over the initial history.

paramètre	value in the model	lower boundary	upper boundary	solvency ratio
corrélation ( $\rho$ )	64%	50%	75%	[155%, 161%]
volatilité ( $\sigma$ )	21%	14%	25%	[145%, 189%]
drift ( $\mu$ )	6%	-2,7%	15%	[146%, 171%]

Table 7: Influence of RW parameters on the coverage ratios obtained

As shown in table 7, coverage ratios appear to be sensitive to changes in RW parameters. These findings need to be nuanced in practice. Indeed, it was found from a benchmark that the insurer considered was particularly sensitive to equity risk compared with market actors. Moreover, whatever the parameter considered, the insurer's solvency did not appear to be endangered.

Comparing the aggregate SCR obtained using the VC approach and the simulative approach for the different parameter ranges considered, it can be seen that the VC approach systematically underestimates the SCR in this study, as shown in figure 5, focusing on the different volatility values. An overestimation of 14% of the coverage ratio presented in table 5 is observed using the VC approach to determine the aggregated SCR.

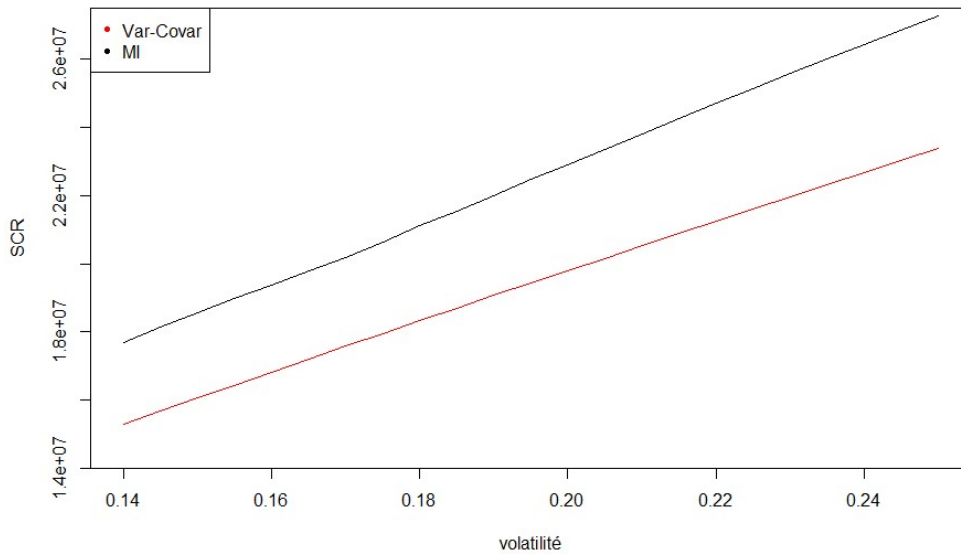


Figure 5: SCRs obtained in MI and from the VC approach, in €

These discrepancies can be explained by the fact that interaction is not taken into account in the VC framework, and highlight the unsuitability of the VC approach for MI. Indeed, it might be possible to correct the correlation coefficient taken into account in the VC aggregation to make it coincide with the simulatory approach, but this correction would then only be valid in the context of a 99.5% quantile and would therefore not provide a complete view of the company's risk profile, as recommended by the ACPR.

Having assessed the impact of the models used to disseminate risk factors within the RW GSE, we now turn to the influence of the model used for the dependency structure on the coverage ratio

obtained. By observing the results obtained by associating the equity and real estate indices using the different copulas studied for maximum likelihood assignment, with an identical correlation parameter equal to 64%, it can be seen that the coverage ratio is sensitive to this modelling. Indeed, correlation only provides an average view of the dependency observed on the sample associated with a copula, and the aggregate SCR obtained varies significantly according to the distribution of dependency established by the different copulas. In the context of this study, as highlighted in the results table 8, the copulas generating the highest SCRs correspond to copulas for which dependency is accentuated on the tail of the lower distribution. This means that more unfavorable (equity, real estate) scenarios are observed in the economy, generating larger values in the upper tail of the loss distribution. In particular, a change in the 15% coverage ratio is observed.

copula	aggregate SCR	global SCR	coverage ratio
<i>Student</i>	24,05	31,70	158%
Gumbel Survival	25,12	32,62	153%
Gaussian	23,80	31,49	159%
Frank	21,87	29,86	167%
Clayton	25,33	32,81	152%

Table 8: incidence of the modification of the dependency structure on the global SCR and the coverage ratio

To conclude the analysis of the influence of the use of VC aggregation on the results obtained, we thought it would be interesting to observe the deviations from the latter, in a framework where all the assumptions underlying the approach are verified, apart from the ellipticity of the copula modeling the dependence between risks, by using Archimedean copulas. As illustrated in figure 6, VC aggregation generates an underestimated SCR in the case where the Clayton copula models the dependency between factors, whatever its parameter, highlighting the non-adaptability of the method and the potential damage to the insurer's solvency.

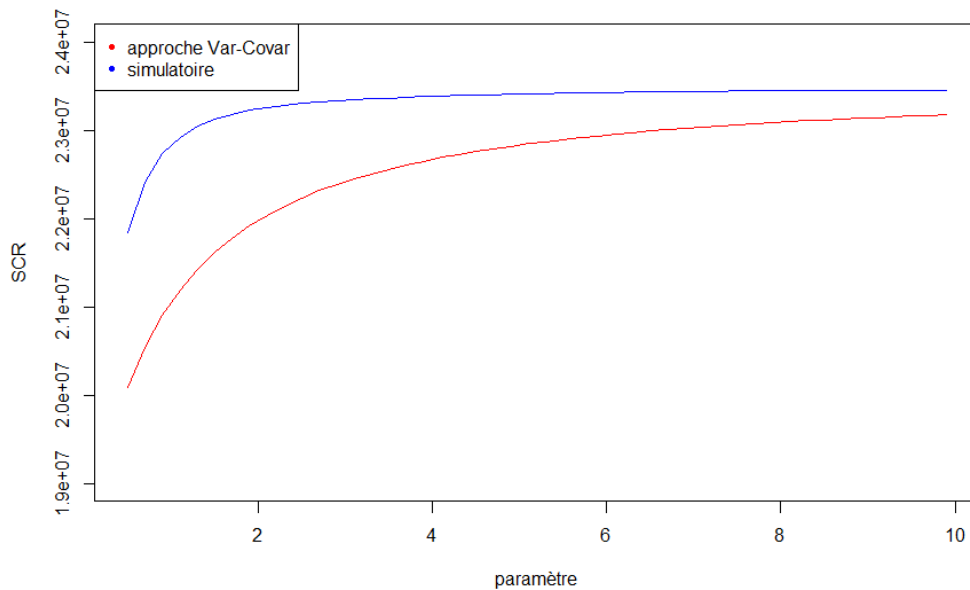


Figure 6: Comparison of the Var-Covar and simulatory approaches for Clayton's copula

## Conclusion

This study highlights the importance of the requirements formulated by the ACPR in the new 2023 notice. In particular, it shows that the SCRs obtained are highly dependent on the assumptions made, and in particular on the data used to represent risk factors. Similarly, the dependency structure used to model the latter has a significant influence on the capital obtained, and failure to capture this dependency correctly may result in an erroneous estimate of the risk to which the company is exposed. Lastly, VC aggregation does not seem to be an appropriate approach for the model's implementation, and does not correctly capture the quantiles of the loss distribution for the various factors. Nevertheless, it is important to note that the results obtained depend on the specific characteristics of the insurer under consideration. Moreover, the IM used is a simplified approach to what can be observed in practice, and has a number of limitations.





# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à l'équipe de Forvis Mazars Actuariat pour leur accueil chaleureux et l'aide précieuse qu'ils m'ont apporté tout au long du stage.

Je souhaite adresser mes remerciements particuliers à mes encadrants en entreprise, Thomas PRAT, Alia ZOUINE et Fouad BRAX, pour leur disponibilité constante et leurs conseils avisés, qui ont été essentiels pour mener à bien ce projet.

Merci à Tachfine EL ALAMI, mon tuteur académique, pour son implication tout au long de l'étude et ses orientations qui m'ont été très utiles pour la réalisation du mémoire.

Mes remerciements vont également à Quentin GUIBERT, responsable du Master Actuariat de l'Université Paris Dauphine, pour la qualité de l'enseignement dispensé et son engagement envers la formation.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma famille, dont le soutien quotidien a été une source de motivation et de réconfort.



# Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	21
Table des matières	23
Introduction	25
<b>1 L'agrégation des risques dans un environnement SII</b>	<b>27</b>
1.1 La Directive Solvabilité II et ses 3 Piliers . . . . .	27
1.2 Les différentes approches pour le calcul du SCR . . . . .	34
1.3 Révision de la Directive Solvabilité II . . . . .	37
1.4 Les limites de l'approche Variance-Covariance . . . . .	38
1.5 Les méthodes d'agrégation dans le cadre d'un MI . . . . .	44
<b>2 Mécanismes ALM et SdS</b>	<b>55</b>
2.1 L'Assurance-vie et les contrats épargne . . . . .	55
2.2 Modélisation ALM . . . . .	57
2.3 Mise en place du mécanisme SdS dans l'outil ALM . . . . .	71
2.4 Les générateurs de scénarios économiques . . . . .	73
<b>3 Mise en place d'un Modèle interne partiel</b>	<b>87</b>
3.1 La méthode <i>Curve Fitting</i> . . . . .	88
3.2 Les copules . . . . .	103
3.3 Agrégation au sein du MIP . . . . .	111

3.4	Analyse des Résultats . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Sensibilités aux hypothèses prises</b>	<b>121</b>
4.1	Variations des calibrages du GSE RW . . . . .	121
4.2	Prise en compte d'une nouvelle structure de dépendance . . . . .	141
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
A.1	Tests de validation effectués pour le GSE RW . . . . .	155
A.2	SCR déterminé par formule standard . . . . .	156
A.3	Pistes étudiées pour différencier les calibrages RN . . . . .	157
A.4	<i>Benchmarks</i> concernant les SCR des Assureurs-Vie . . . . .	161
A.5	Modification des calibrages <i>Curve-Fitting</i> . . . . .	162
A.6	Calibrages RW - granularité et de la profondeur des données . . . . .	168
A.7	Calibration RW sur un historique de 2 ans glissant . . . . .	169
A.8	Familles usuelles de copules . . . . .	170
A.9	Structures de dépendance instaurée par les copules étudiées . . . . .	175
A.10	Les mesures de concordance . . . . .	176
A.11	Copules archimédiennes et mesures de dépendance . . . . .	178
A.12	Analyse des différences entre l'approche VC et simulateur . . . . .	182
A.13	Précision de l'estimateur de SCR . . . . .	183
A.14	Précision des estimateurs des paramètres du GSE RW . . . . .	184

# Introduction

Le secteur des assurances constitue un des fondements du modèle économique de nos sociétés. Ce dernier est régi par un cadre réglementaire strict permettant notamment de garantir la capacité des organismes d'assurance à honorer leurs engagements envers les assurés. La Directive Solvabilité II, en vigueur depuis 2016, introduit un ensemble de règles visant à harmoniser la réglementation des assureurs au sein de l'Union Européenne. Cette dernière instaure notamment le maintien d'un capital de solvabilité requis (SCR) permettant aux assureurs de faire face aux différents risques auxquels ils sont exposés. Il permet aux assureurs de continuer à satisfaire les obligations contractuelles envers les assurés en cas de survenance d'événements extrêmes.

Afin de déterminer le SCR, plusieurs méthodes peuvent être mises en oeuvre. La méthode la plus simplifiée correspond à la formule standard, élaborée par l'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (*European Insurance and Occupational Pensions Authority* ou EIOPA). Cette dernière constitue un cadre prescriptif donnant la possibilité aux assureurs de calculer leur SCR en fonction de règles prédéfinies. Elle ne permet cependant pas d'avoir une vision fine des risques auxquels la compagnie est soumise et engendre des capitaux qui peuvent ne pas être adaptés au profil de risque de la compagnie. Un certain nombre de compagnies d'assurance optent donc pour l'implémentation de modèles internes, partiels ou complets, pour calculer leur SCR de manière plus précise. Ces modèles internes permettent une approche plus flexible et personnalisée pour le calcul du SCR. Ils sont néanmoins soumis à des exigences de validation strictes de la part des régulateurs européens. En France, l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) se charge d'attester de la conformité du modèle interne vis-à-vis des exigences requises.

Afin de répondre à l'évolution constante des risques financiers et à la complexification des marchés, l'ACPR a renforcé les exigences relatives aux modèles internes par la publication, en décembre 2023, d'une nouvelle notice qui impose une modélisation plus approfondie des risques. Celle-ci engendre des critères supplémentaires dans le cadre de l'utilisation des modèles internes. Les organismes d'assurance concernés par cette pratique doivent désormais être en mesure de simuler les distributions de fonds propres économiques (NAV) à tous les niveaux d'agrégation des risques et de confiance, ainsi que de mesurer les contributions spécifiques de chaque facteur de risque au SCR. Ces nouvelles exigences rendent inadaptées certaines approches comme celle de la Variance-Covariance, qui ne permet pas une modélisation suffisamment fine des interdépendances existantes entre les différents risques auxquels la compagnie est exposée.

L'objectif du mémoire est de répondre à ces nouvelles exigences en mettant en place un modèle interne partiel (MIP) qui soit conforme aux recommandations de l'ACPR. Nous appliquerons ce modèle à un cas pratique s'appuyant sur un assureur-vie représentatif du marché français, en simulant certains risques de marché et en considérant la méthode *Curve Fitting* et les copules pour l'agrégation des risques. Une analyse approfondie des résultats obtenus sera effectuée, ainsi qu'une étude de sensibilité des hypothèses de modélisation retenues permettant d'évaluer l'incidence des variations des paramètres du modèle sur la distribution de perte de la compagnie.

L'étude est structurée en quatre chapitres. Le premier chapitre (1) présente les bases de la Directive Solvabilité II et explore les différentes approches d'agrégation des risques, en mettant l'accent sur les limites de l'approche Variance-Covariance. Le chapitre 2 s'intéresse à la modélisation ALM (*Asset and Liability Management*) dans le cadre de l'assurance-vie, en se concentrant sur les contrats d'épargne et les mécanismes de projection des flux financiers pour calculer le *Best Estimate*. Le chapitre 3 traite de la mise en place du MIP, en détaillant la méthode *Curve Fitting* et l'usage des copules pour l'agrégation des risques. Enfin, le quatrième chapitre (4) analyse la sensibilité des résultats aux hypothèses prises quant aux paramètres déterminés et à la structure de dépendance retenue tout au long de ce mémoire.

# Chapitre 1

## L'agrégation des risques dans un environnement Solvabilité II

Les compagnies d'assurance européennes sont soumises à une réglementation stricte instaurée par la Directive Solvabilité II qui prévoit sa mise en oeuvre dans chaque pays de l'UE. Afin de s'assurer de la capacité de l'assureur à pouvoir honorer ses engagements envers les assurés, elle prévoit l'instauration d'un capital de solvabilité requis (SCR) correspondant au montant que l'assureur doit détenir pour couvrir les risques auxquels il est exposé. Ce dernier est calculé à partir de la formule standard (FS) élaborée par l'EIOPA ou bien à travers l'utilisation d'un modèle interne (MI). Dans le deuxième cas, les compagnies d'assurance agrègent leurs risques en étudiant le comportement joint de ces derniers afin d'anticiper un capital leur permettant de se prémunir contre la survenance d'événements extrêmes.

Le premier chapitre de ce mémoire consiste à passer en revue les différents moyens existants et travaux de recherche effectués pour agréger les risques auxquels les compagnies d'assurance sont soumises et déterminer leur capital de solvabilité requis.

Afin d'y parvenir, il convient de présenter plus en détail la Directive Solvabilité II réglementant le secteur de l'assurance, en se concentrant sur les différentes méthodologies de calcul du SCR. Par la suite l'approche variance-covariance proposée par l'EIOPA pour le calcul du SCR agrégé sera présentée, en mettant en avant les limites de cette dernière. Enfin, les différentes méthodes d'agrégation en vigueur dans le cadre des modèles internes seront explicitées.

### 1.1 La Directive Solvabilité II et ses 3 Piliers

#### 1.1.1 Cadre de la Directive

La Directive européenne Solvabilité II, entrée en vigueur en janvier 2016 (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009)), encadre les activités d'assurance et de réassurance sur le territoire européen. Elle vise à assurer la solvabilité des compagnies et leur capacité à honorer leurs engagements vis-à-vis de leurs assurés.

Elle s'applique à l'ensemble des organismes régis par le Code des Assurances, le Code de la Mutualité, ou encore les institutions de prévoyance encadrées par le Code de la Sécurité Sociale. Seules les infrastructures de moins de 5 millions d'euros de primes ou de moins de 25 millions d'euros de provisions ne sont pas soumises à la Directive.

Cette dernière vient remplacer la Directive Solvabilité I, mise en place dans les années 70, dont

l'insuffisance a été mise en avant par la crise des *Subprimes* de 2008. En effet, de nombreuses limites ont été constatées, parmi lesquelles nous pouvons observer :

- une vision du bilan qui se fonde sur les données historiques et l'expérience plutôt qu'une approche prospective ;
- pas d'analyse approfondie du profil de risque ;
- l'hétérogénéité de la réglementation au sein de l'Europe ;
- pas de dimension qualitative de la réglementation.

Une des principales exigences du régime prudentiel consiste en la détermination de la marge de solvabilité, qui permet aux compagnies de faire face à leurs engagements. Sous Solvabilité I, l'estimation de cette marge reposait sur le niveau d'activité plutôt que sur le niveau de risque.

La nouvelle réglementation Solvabilité II aspire donc à apporter des solutions au sujet des limites présentées précédemment, en instaurant une vision prospective du bilan, avec une valorisation économique de ses actifs et de ses passifs. Le calcul des marges de solvabilité est également fondé sur le profil de risque de la compagnie, permettant de trouver un juste milieu entre la protection des clients et le coût du capital. Les exigences en terme de gouvernance sont également introduites via des mécanismes de contrôle interne et de gestion des risques.

La création d'un marché européen de l'assurance constitue un autre objectif de la réglementation, permettant l'harmonisation du secteur de l'assurance comme ce qui a été fait pour le secteur financier avec l'introduction de Bâle II. Enfin, la recherche de transparence des opérations vis-à-vis du public et des Autorités de contrôle est considérée dans cette Directive.

La mise en application de Solvabilité II s'opère à travers des textes réglementaires qui sont hiérarchisés en trois niveaux. Le premier niveau constitue la Directive même. Il présente l'ensemble des exigences demandées sans proposer de méthodologies pour la mise en oeuvre. Le règlement délégué de la COMMISSION EUROPÉENNE (2014) permet ensuite d'explicitier certains aspects de la Directive ainsi que la méthodologie à adopter pour la détermination du niveau de risque des organismes. Il correspond au deuxième niveau. Finalement, nous observons au niveau 3 les normes techniques d'exécution, qui sont d'application directe, et les orientations qui font l'objet d'une procédure *comply or explain* pour les autorités nationales européennes.



La Directive s'articule autour de 3 Piliers :

Pilier 1: Exigences quantitatives	Pilier 2: Exigences qualitatives et supervision	Pilier 3: Information du public et du régulateur
<ul style="list-style-type: none"> <li>Mise en place des provisions techniques (<i>Best Estimate</i>)</li> <li>Bilan prudentiel, évaluation <i>market consistent</i> de l'actif et du passif</li> <li>Calcul des capitaux de solvabilité (SCR, MCR)</li> <li>Utilisation possible d'un modèle interne pour le calcul du SCR</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Renforcement de la gouvernance à travers les fonctions clé et le <i>fit &amp; proper</i></li> <li>Politiques écrites</li> <li>Renforcement du contrôle interne et de la gestion des risques</li> <li>Auto-évaluation du besoin en capital (ORSA)</li> <li>Principe de la personne prudente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Rapport au public (SFCR) et à l'ACPR (RSR)</li> <li>Transparence</li> <li>Harmonisation des états prudentiels à l'échelle européenne</li> <li>Réconciliation des rapports comptables et prudentiels</li> </ul>

FIGURE 1.1 : Les 3 Piliers de Solvabilité II

Il convient dès à présent d'étudier plus en détail les différents piliers constituant la réglementation.

### 1.1.2 Pilier 1 : Les Exigences Quantitatives

Ce Pilier constitue la base de l'estimation des engagements de l'assureur. La mesure du niveau de solvabilité des compagnies d'assurance et de réassurance est l'un des objectifs de ce pilier, à travers les différents capitaux à constituer. En effet, afin de s'assurer de la solvabilité des différents organismes, Solvabilité II prévoit la constitution de deux niveaux de capitaux : le SCR (*Solvency Capital Requirement*) et le MCR (*Minimum Capital Requirement*).

Ces deux niveaux de fonds propres permettent de se prémunir contre des risques auxquels les organismes pourraient faire face dans l'année. En particulier, le SCR correspond au niveau de fonds propres à détenir au titre des risques auxquels l'organisme est exposé afin de s'assurer qu'il ne soit pas en situation de ruine économique. Les pertes au titre des risques considérés pour ce calcul sont choisies de sorte à ce qu'ils aient une probabilité d'occurrence de 1 sur 200, c'est-à-dire des risques ayant lieu une fois tous les 200 ans. Afin de déterminer ces différentes quantités, plusieurs notions sont à introduire.

#### Notion de *Market Consistency*

La notion de *Market Consistency* repose sur le principe d'évaluation des actifs et passifs à leur juste valeur et correspond au cadre de valorisation Risque Neutre des flux futurs de la compagnie. Elle s'appuie sur plusieurs hypothèses :

- les acteurs du marché disposent de la même information constituant les données de marché ;
- les actifs et les passifs sont valorisés à partir d'informations fiables et objectives ;

- les actifs qui sont échangés sur un marché organisé sont valorisés à leur prix de marché, on dit alors qu'ils sont *marked-to-market* ;
- la valorisation du passif correspond au prix qu'un individu serait disposé à payer pour acheter la dette de l'organisme avec absence d'opportunité d'arbitrage. Cette valorisation s'opère à partir d'un modèle calibré sur les valeurs de marché ; on dit alors que le passif est *marked-to-model*.

## Bilan prudentiel Solvabilité II

Le Bilan Solvabilité II s'apparente au bilan économique de la compagnie, contrairement au cadre Solvabilité I qui prévoit une valorisation comptable des actifs et des passifs. Le Bilan est déterminé en *run-off*, c'est-à-dire que les affaires nouvelles ne sont pas prises en compte lors de la valorisation.

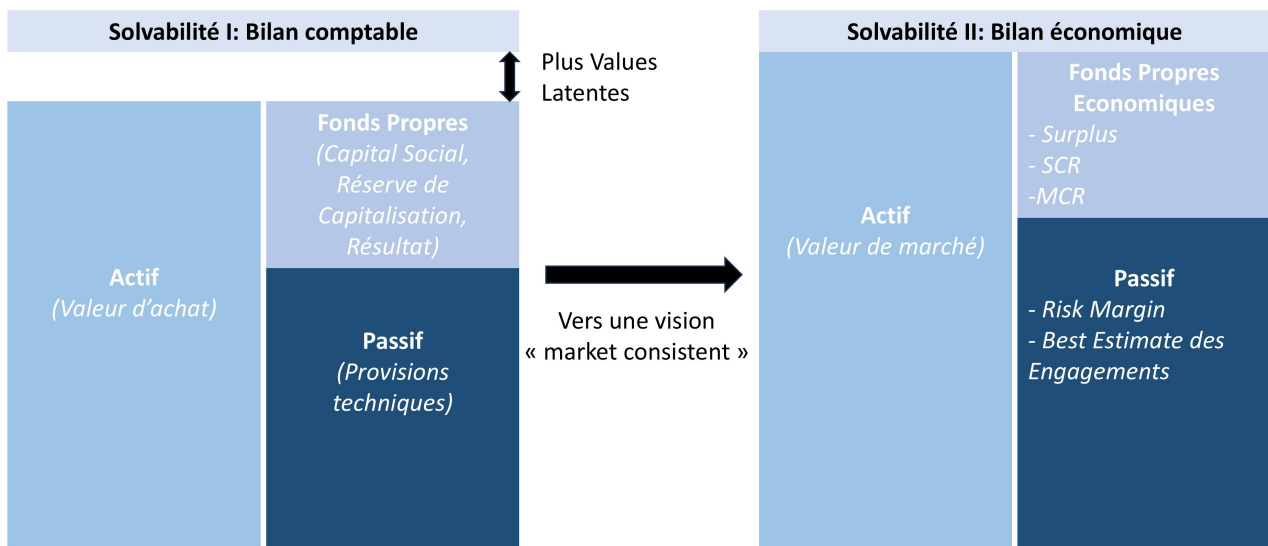


FIGURE 1.2 : Passage d'un bilan comptable à un bilan économique

## Les Passifs

Le passif sous Solvabilité II est constitué de deux types de provisions techniques : le *Best Estimate* (BE) et la *Risk Margin* (RM). Elles se rapportent au montant qu'un acteur demanderait pour prendre à sa charge les engagements supportés par la compagnie d'assurance.

### *Best Estimate*

Le BE donne une « meilleure estimation » des engagements d'une compagnie d'assurance. Il est défini d'après l'article R.351-2 du Code des Assurances comme « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs ».

Ainsi, en considérant l'échiquier  $t_0, t_1, \dots, t_N = T$ , avec  $T$  l'horizon de projection des engagements,  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$  un espace de probabilité filtré,  $\mathcal{F}_t$  correspondant à l'information disponible à la date  $t$

et  $\mathbb{Q}$  la probabilité Risque-Neutre, nous obtenons

$$BE_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{u=t}^T P_u D(t, u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (1.1)$$

avec :

- $BE_t$  le *Best Estimate* au temps  $t$  contenu dans l'échiquier,
- $P_u$  le flux de passif au temps  $u$ ,
- $D(t, u)$  le déflateur entre  $t$  et  $u$ .

### **Risk Margin**

La RM correspond au coût du capital à immobiliser au titre des engagements de la compagnie d'assurance. Il s'agit d'une compensation financière théorique qui est reversée aux actionnaires pour pallier la perte d'opportunité que représente l'immobilisation du SCR qui ne peut alors pas être investi pendant la durée de vie des engagements.

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$RM = \gamma \times \sum_{t=0}^T SCR_t D(0, t), \quad (1.2)$$

avec :

- $\gamma$  : taux d'immobilisation du capital (soit 6% dans la version actuelle de Solvabilité II) ;
- $D(0, t)$  : déflateur entre 0 et  $t$  ;
- $T$  : horizon de projection des engagements utilisé pour le calcul du BE.

Comme le précise K.KOUADIO (2018) dans son mémoire, le calcul de la RM peut être très coûteux en temps et en complexité. En pratique, les assureurs ont recours à différentes méthodes pour avoisiner cette quantité, qui sont détaillées dans ce mémoire. L'EIOPA hiérarchise les différentes méthodes par ordre de complexité de la manière suivante :

1. utilisation de la formule 1.2 et détermination des SCRs futurs ;
2. approximation des SCRs issus des modules de risques ou des sous-modules élémentaires ;
3. utilisation d'une approche proportionnelle pour approximer les SCR futurs ;
4. utilisation de l'approche par duration pour déterminer les SCR futurs ;
5. approximation de la RM comme pourcentage du BE.

### **Les Fonds Propres**

Les Fonds Propres (*Net Asset Value* ou NAV) sont définis par la différence entre les Actifs et les provisions techniques. La compagnie est dite insolvable si les Fonds Propres deviennent négatifs à un certain temps  $t$ .

Ils sont déterminés de la manière suivante :

$$NAV_t = A_t - (BE_t + RM_t), \quad (1.3)$$

avec :

- $A_t$  : les actifs de la compagnie au temps  $t$  ;
- $BE_t + RM_t$  : les provisions techniques au temps  $t$ .

L'objectif de la mise en place du SCR est d'éviter une situation d'insolvabilité.

### 1.1.3 Les Marges de Solvabilité requises

Nous pouvons désormais expliciter de manière plus détaillée les différentes exigences en capital introduites par la Directive.

#### SCR

Le capital de solvabilité requis correspond au montant de capital à immobiliser pour s'assurer avec une probabilité de 99,5% de ne pas se trouver dans une situation de ruine économique, à horizon un an. Il représente le niveau de Fonds Propres que doit détenir la compagnie pour être en mesure de pallier un sinistre majeur. Le SCR est propre à chaque compagnie et exprime le risque auquel elle est exposée, permettant ainsi de connaître le niveau de solvabilité de la compagnie, déterminé à partir du ratio de solvabilité :

$$RS_t = \frac{NAV_t}{SCR_t}.$$

Les compagnies sont dans l'obligation de détenir un niveau de Fonds Propres supérieur au SCR. Si cette exigence n'est pas respectée, le régulateur français (ACPR) accorde un délai à l'assureur pour lui permettre de retrouver un niveau de richesse convenable au-dessus du SCR, sous condition de la présentation d'un plan de rétablissement sous 6 mois.

#### MCR

Le MCR correspond au niveau minimal de Fonds Propres que doit détenir l'organisme d'assurance, sans lequel un retrait d'agrément par le régulateur est à prévoir.

#### Illustration

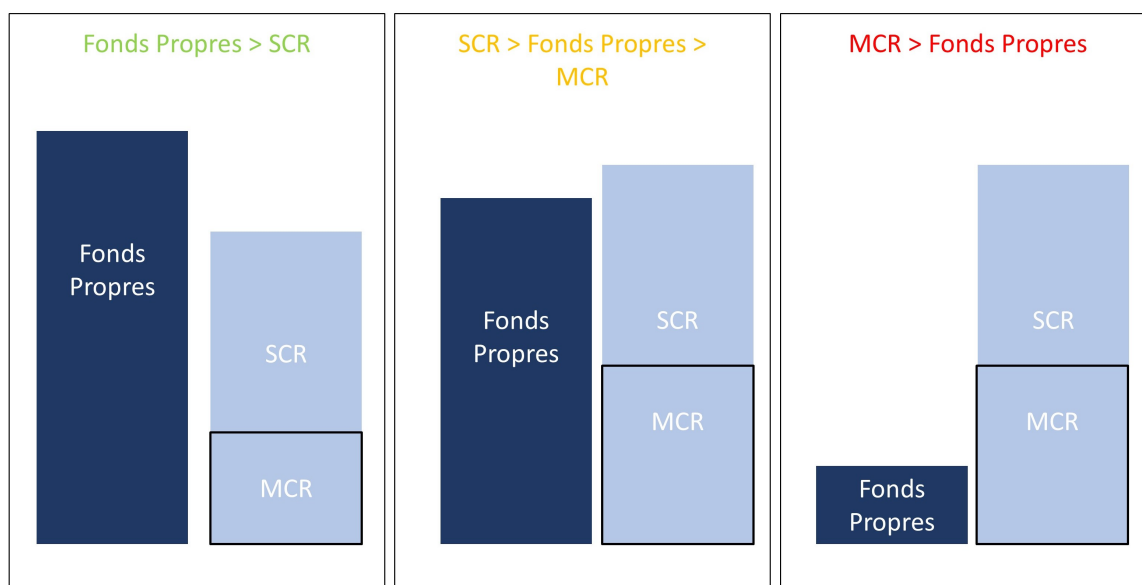


FIGURE 1.3 : Fonds Propres en comparaison aux Capitaux Requis

### 1.1.4 Pilier 2 : Exigences Qualitatives et Supervision

Le Pilier 2 de la Directive a pour but de préciser l'ensemble des exigences qualitatives en matière de gestion des risques et de gouvernance, permettant au régulateur de s'assurer de la bonne gestion de la compagnie ainsi que de sa capacité à calculer et maîtriser ses risques. Il préconise la structure organisationnelle qui façonne les responsabilités de chaque service ou encore les règles de prise de décision, de *reporting* interne, de rémunération et de supervision.

Pour ce faire, il prévoit notamment la mise en place des fonctions clés suivantes :

- conformité : veille au respect de la mise en place des mesures législatives, réglementaires et administratives ;
- audit interne : évalue le système de gouvernance ;
- actuariat : apprécie les méthodes de calcul des provisions techniques, émet un avis sur la politique globale de souscription, *etc.* ;
- gestion des risques : mise en oeuvre du système de gestion des risques, identification et évaluation des risques émergents.

Les compagnies sont également tenues de mettre en place un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité, appelé ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*), présenté dans l'article 45 de la Directive.

Ce mécanisme vise à instaurer de façon régulière une appréciation des besoins en solvabilité propres à l'organisme, en fonction de son profil de risque et de son plan stratégique. Pour son implémentation, il est donc nécessaire pour la compagnie de déterminer sa tolérance et son appétence aux risques.

Cette évaluation est indispensable pour le bon fonctionnement du pilotage et de la mise en place d'une stratégie de l'entreprise. Elle s'appuie, comme l'indique la notice "Solvabilité II" sur l'ORSA de 2015, ACPR (2015), sur trois éléments :

- évaluation prospective du besoin global en solvabilité en fonction de son profil de risque et de sa tolérance au risque ;
- le respect continu des exigences sur le plan du capital et de provisions techniques ;
- la pertinence des hypothèses prises en compte dans le calcul du SCR, par rapport au profil de risque de l'entreprise.

Le rapport ORSA doit être validé par le conseil d'administration de l'organisme, et fait appel aux différentes fonctions clés. En effet, les points de vue des différentes fonctions sont considérés dans le cadre de l'évaluation des risques et aspects de la stratégie commerciale.

Une fois finalisé et validé par le conseil d'administration, ce rapport est transmis à l'ACPR.

### 1.1.5 Pilier 3 : *Reporting*

Le Pilier 3 de Solvabilité II s'inscrit dans une optique de transparence vis-à-vis du public (notamment les actionnaires et les assurés) et du régulateur. Il impose aux organismes de publier des rapports décrivant leurs états prudentiels (QRTs) sous Solvabilité II et qui se décomposent en deux parties : une partie narrative et des états quantitatifs. Le rapport remis au superviseur lui permet de détenir

les informations nécessaires au contrôle des compagnies et d'harmoniser les techniques utilisées pour le contrôle au sein de l'Union Européenne. A partir du rapport, celui-ci peut en particulier émettre un avis quant à la gouvernance mise en place et prendre les mesures nécessaires en cas de non respect des règles instaurées par la Directive. Les deux grands rapports exigés sont le Rapport de Solvabilité et Situation Financière (SFCR) à destination du public et le Rapport Régulier au Contrôleur (RSR) à destination du contrôleur.

## 1.2 Les différentes approches pour le calcul du SCR

Nous pouvons dès à présent nous concentrer sur les différentes méthodes appliquées par les compagnies d'assurance pour le calcul du SCR. Le régulateur européen (EIOPA) propose deux approches pour le calcul du SCR : une approche formule standard (FS) et une approche modèle interne (MI).

### 1.2.1 Approche FS

La FS constitue une méthode simplifiée pour l'estimation du SCR, facilitant le calcul de ce dernier. Sa forme est introduite par l'étude d'impact quantitative QIS4 réalisée par l'EIOPA, anciennement CEIOPS (2008). Il s'agit d'une approche modulaire, de type *bottom-up*. En effet, cette méthode prévoit la détermination de capitaux élémentaires au titre de chaque risque, puis une agrégation des capitaux élémentaires en deux niveaux, pour obtenir des SCR par module puis un SCR global. L'agrégation est effectuée à l'aide de matrices de corrélations fournies par l'EIOPA. L'architecture d'agrégation proposée par la FS est présentée dans la figure 1.4.

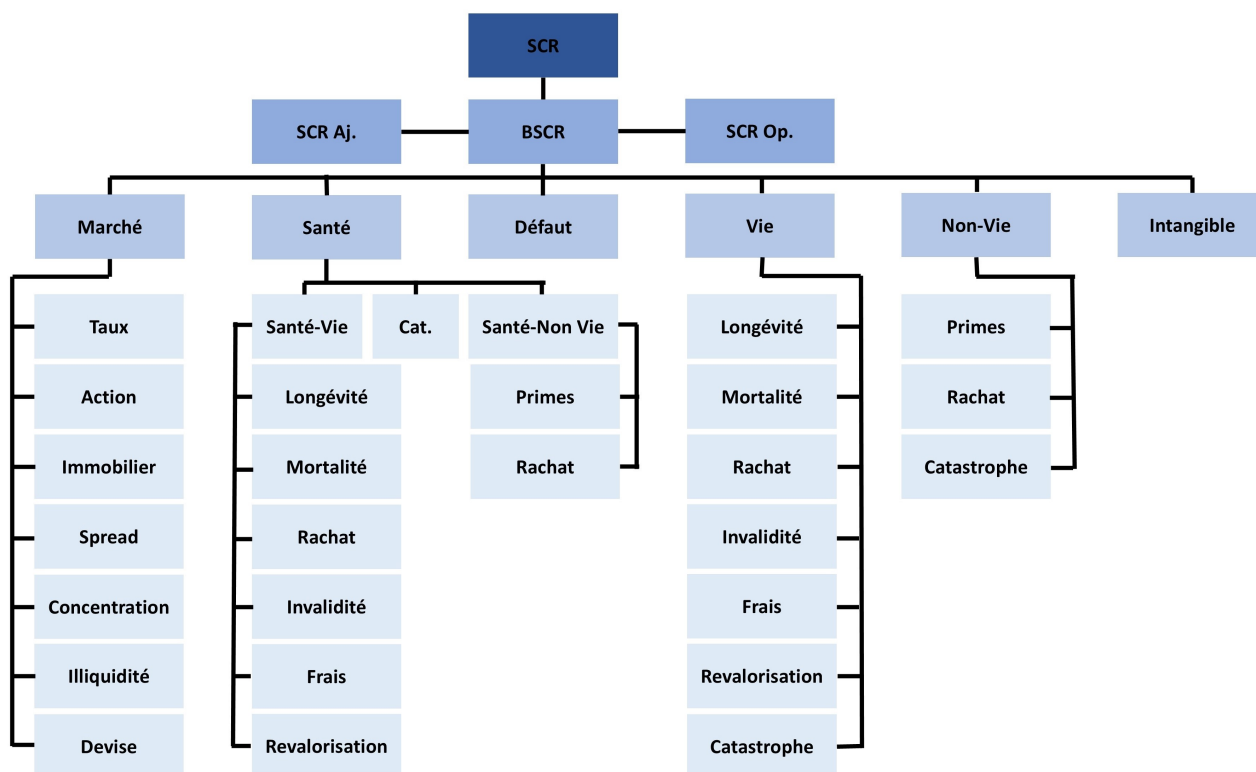


FIGURE 1.4 : Méthode FS pour le calcul du SCR

La figure 1.5 correspond à la matrice de corrélation pour l'agrégation intra-modulaire du module marché.

	Taux	Action	Immobilier	Marge	Devise	Concentration
Taux	1					
Action	$\rho$	1				
Immobilier	$\rho$	0.75	1			
Marge	$\rho$	0.75	0.5	1		
Devise	0.25	0.25	0.25	0.25	1	
Concentration	0	0	0	0	0	1

\* $\rho=50\%$  ou  $0\%$  en fonction de la sensibilité de l'organisme d'assurance au choc de taux

FIGURE 1.5 : matrice de corrélation pour le module marché fournie par l'EIOPA

Nous pouvons donc décomposer la méthode en 2 étapes. La première consiste à calculer le capital élémentaire au titre de chaque risque. Dans un second temps, la FS prévoit l'agrégation des capitaux sur deux niveaux.

Les capitaux élémentaires au titre des différents risques considérés sont obtenus par différence de NAV. Ils se calculent par évaluation d'un bilan central et d'un bilan stressé sur lequel un choc instantané sur le risque considéré a été appliqué. Un modèle ALM fournissant un bilan économique à une date d'évaluation donnée est utilisé, permettant le calcul du niveau de NAV en scénario central et choqué résultant du stress instantané appliqué sur le risque considéré. Le capital économique élémentaire au titre du risque est ensuite donné par différence de NAV. Il est à noter que le scénario choqué correspond à un quantile de la distribution du facteur de risque observé pour le choc.

Mathématiquement, en utilisant les notations introduites précédemment, les Fonds Propres économiques sont définis par

$$NAV_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{u=t}^T P \& L_u D(t, u) | \mathcal{F}_t \right], \quad (1.4)$$

avec  $(P \& L_u)_{t \leq u \leq T}$  l'ensemble des flux futurs générés par le portefeuille de l'assureur.

Ainsi, par définition de l'espérance conditionnelle, et en supposant que l'unique information nécessaire correspond à la valeur des facteurs de risques auxquels la compagnie est exposée  $(X_{1,t}, \dots, X_{d,t})$ , alors il existe une fonction  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $NAV_t = \psi(X_{1,t}, \dots, X_{d,t})$ .

Le capital élémentaire au titre du risque R est par la suite donné par

$$C^R = (NAV_0 - NAV_0^{choc})_+, \quad (1.5)$$

où  $NAV_0^{choc} = \psi(X_{1,0}, \dots, X_{R-1,0}, X_R^{choc}, X_{R+1,0}, \dots, X_{d,0})$ .

Une illustration est présentée par la figure 1.6.

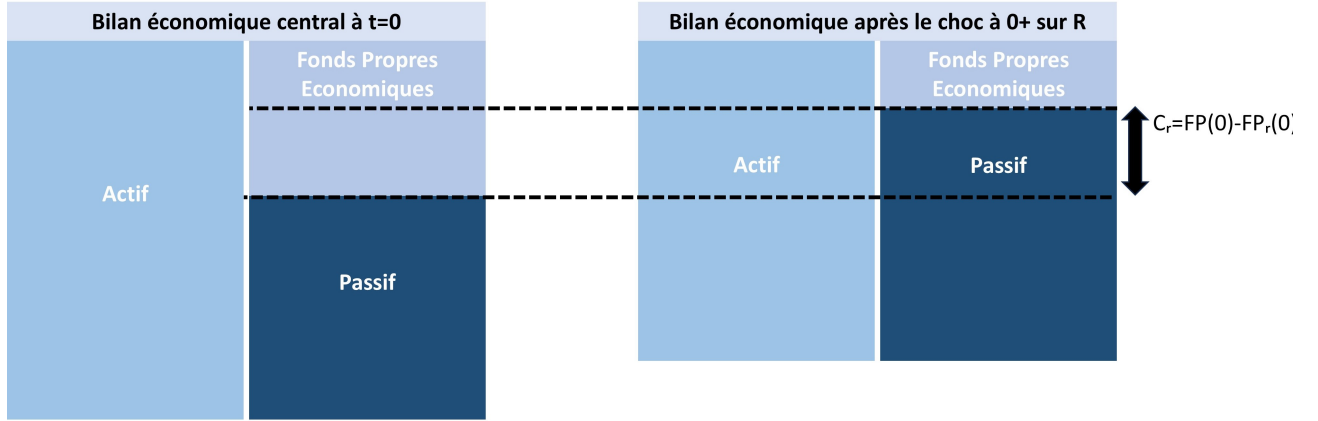


FIGURE 1.6 : obtention des Capitaux Élémentaires par la FS

Après détermination des capitaux élémentaires, une formule d'agrégation elliptique et les matrices de corrélations fournies par l'EIOPA sont utilisées pour les agréger. La méthode prévoit une agrégation intra-modulaire des capitaux, puis une agrégation inter-modulaire. Elle constitue une approche Variance-Covariance, détaillée dans la suite de ce chapitre.

L'obtention du SCR au titre du module  $m$  se fait alors par l'agrégation intra-modulaire

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^m C_i C_j}, \quad (1.6)$$

où :

- $R_m$  : l'ensemble des risques contenu dans le module  $m$  ;
- $\rho_{i,j}^m$  : coefficient de corrélation fournie par l'EIOPA entre les risques  $i$  et  $j$  du module  $m$  ;
- $C_i$  : capital élémentaire au titre du risque  $i$ .

Nous obtenons ensuite le SCR global par l'agrégation inter-modulaire

$$SCR_{global} = \sqrt{\sum_{(u,v) \in M^2} \rho_{u,v} SCR_u SCR_v}, \quad (1.7)$$

où :

- $M$  : l'ensemble des modules ;
- $\rho_{u,v}$  : coefficient de corrélation fournie par l'EIOPA entre les modules  $u$  et  $v$  ;
- $SCR_u$  : SCR du module  $u$ .

Il est à noter que l'agrégation inter-modulaire est en réalité utilisée pour le calcul du BSCR (SCR de base). Le SCR global est obtenu par agrégation du BSCR et du SCR au titre des risques opérationnels ( $SCR_{op}$ ) et d'un ajustement permettant de prendre en compte la capacité d'absorption des pertes à travers les provisions techniques prudentielles. Il n'y a pas de prise en compte de diversification entre le BSCR et le risque opérationnel. Par conséquent,

$$SCR_{global} = SCR_{op} + BSCR + Ajustements. \quad (1.8)$$



### 1.2.2 Approche simulateur

L'approche simulateur, régulièrement présentée comme « approche modèle interne » par abus de langage, consiste généralement à obtenir un quantile de la distribution de perte de la compagnie d'assurance considérée, à horizon un an. La mise en oeuvre de cette méthode est propre à chaque compagnie et permet une meilleure adéquation aux risques encourus par cette dernière : la modélisation de la structure de dépendance est plus libre. Elle est implémentée à partir de l'expérience de l'organisme d'assurance et fait appel aux jugements d'experts. La corrélation des facteurs de risques considérés est effectuée dans les scénarios économiques et l'agrégation est implicite à travers les règles ALM.

Sa mise en place est soumise à l'approbation de l'ACPR et elle doit respecter des règles strictes en matière de méthodologie statistique adoptée, de normes de calibration, et de validation.

Pour déterminer le SCR en se fondant sur une approche simulateur, il convient d'introduire la fonction de perte d'une compagnie (au temps  $t$ ). Celle-ci est donnée par

$$L_t = NAV_{t-1} - D(t-1, t)NAV_t. \quad (1.9)$$

Ainsi, en reprenant la définition du SCR,

$$SCR_1 = VaR_{99,5\%}(L_1), \quad (1.10)$$

$$SCR_1 = NAV_0 - D(0, 1)VaR_{0,5\%}(NAV_1), \quad (1.11)$$

avec  $VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ .

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer ce quantile de fonds propres à  $t = 1$ . Certaines méthodes — détaillées dans la suite de ce mémoire — permettent même d'obtenir la distribution complète et donc les fonds propres à tous les niveaux de quantiles.

## 1.3 Révision de la Directive Solvabilité II

Comme le souligne l'article de l'ACPR de mars 2024, ACPR (2024), une révision majeure de la Directive est en cours depuis 2020. Un accord a été trouvé entre les différentes parties prenantes constituant le Conseil, la Commission et le Parlement européens en décembre 2023. Cette dernière vise à adapter les exigences réglementaires des assureurs pour mieux refléter l'environnement économique actuel et orienter l'épargne longue vers le financement de l'économie et la transition écologique.

L'entrée en application, prévue pour le second semestre de 2026, constitue l'aboutissement de l'accord finalisé le 13 décembre 2023 entre les législateurs européens sur la révision de la Directive Solvabilité II. Après des discussions techniques en janvier 2024, le texte a été adopté par le Comité des représentants permanents du Conseil le 24 janvier 2024. La Commission Européenne est chargée de finaliser le texte cet été, qui devra ensuite être adopté par le Parlement, avec une entrée en vigueur 20 jours après sa publication. Les États membres disposeront de 24 mois pour transposer ces textes.

Les révisions prévues correspondent principalement à des mesures quantitatives, de gestion des risques concernant le changement climatique et macro-prudentiels. Les adaptations quantitatives ont pour objectif de stimuler le financement de l'économie et de s'adapter aux conditions actuelles du marché. Les principales mesures de la revue sont les suivantes :

- **Révision de la méthode d'extrapolation des taux**

La révision de la Directive Solvabilité II introduit une nouvelle méthode pour extrapoler la courbe des taux au-delà de 20 ans, où les données de marché sont insuffisantes. Cette méthode proposée par l'EIOPA améliore la cohérence entre la courbe des taux et les données de marché

disponibles, réduisant ainsi les écarts observés avec l'ancienne méthode, qui souvent surévaluait la courbe en période de taux bas.

- **Révision des chocs pour le calcul du SCR taux en FS**

La revue adresse les anomalies du calcul du choc de taux observées en période de taux négatifs. Le mode de calcul actuel, qui réduit à zéro le choc de baisse des taux lorsqu'ils sont déjà négatifs, a faussé les évaluations, particulièrement entre 2019 et 2021. La nouvelle méthode permettra de mieux calibrer ce choc dans un environnement de taux négatifs, tout en évitant des niveaux irréalistes de taux, grâce à la prise en compte d'un *floor*.

- **Le calcul de la marge pour risque**

La marge pour risque, actuellement calculée en projetant et actualisant les exigences de capital futures avec un paramètre de coût en capital (CoC) fixé à 6% (1.2), va être revue. La nouvelle méthode introduit un paramètre  $\lambda$  pour réduire l'importance des exigences de capital à long terme et abaisse le CoC à 4,75%, avec une révision tous les 5 ans dans une fourchette de 4 à 5%.

- **Ajustement du calcul de la *Volatility Adjustment***

La correction pour volatilité (VA) vise à compenser l'impact des variations de la valeur des actifs obligataires sur la solvabilité des assureurs. Elle ajuste la courbe des taux pour limiter la volatilité des provisions techniques. La révision introduit un "ratio de sensibilité aux spreads" pour refléter la sensibilité des actifs et passifs aux mouvements de spreads, et un "ratio d'ajustement" pour adapter le VA aux caractéristiques spécifiques du portefeuille obligataire de chaque entreprise.

- d'autres mesures s'inscrivent dans la revue de la Directive, visant notamment à favoriser l'accroissement de l'investissement de long terme, soutenir la finance durable, renforcer les mesures macro-prudentielles et assouplir certaines exigences grâce à un régime proportionnel pour les assureurs satisfaisant certains critères. Un lecteur intéressé pourra se référer à l'étude réalisée par ZOUINE (2023).

## 1.4 Les limites de l'approche Variance-Covariance

La FS impose d'agréger les capitaux élémentaires des différents risques via l'approche Variance-Covariance. Dans ce paragraphe, les mécanismes de cette méthode sont explicités afin d'en apporter une justification puis d'en exposer les limites. En premier lieu, il convient de définir la notion de mesure de risque, et plus particulièrement de *Value at Risk*.

### 1.4.1 Mesure de risque

En notant  $\Gamma$  l'ensemble des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , les mesures de risque sont des applications  $\mathcal{R} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^+$  qui permettent d'apporter une information sur la nature du risque considéré. Il s'agit d'outils utilisés pour la prise de décision dans un environnement risqué. Elles permettent aux preneurs de décision de disposer d'un critère pour se positionner. Les mesures de risque sont notamment des outils essentiels dans le secteur de la finance pour quantifier l'exposition d'une société aux pertes financières. Dans le contexte du calcul du SCR, la fonction VaR est la mesure de risque utilisée.

En effet, comme nous l'indique l'égalité 1.11, le SCR est donné par  $R : X \longrightarrow VaR_{99,5\%}(X)$  et  $X = L_1$  (la perte à horizon un an).

Dans cette section, nous détaillerons quelques éléments théoriques qui accompagnent la notion de mesure de risque, pour ensuite nous concentrer sur les particularités de la *Value at Risk*.

### Cohérence des mesures de risque

Certaines propriétés de la mesure de risque peuvent s'avérer utiles dans le cadre de la prise de décision à l'aide de cet outil. Elles permettent d'assurer la robustesse et la fiabilité de cette dernière, tout en vérifiant qu'elle soit en mesure de comparer l'exposition au risque de différents portefeuilles.

Pour  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, les différentes propriétés à analyser sont les suivantes :

- Invariance en loi :  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \Rightarrow \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$  ;
- Invariance par translation :  $\forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{R}(X + a) = \mathcal{R}(X) + a$  ;
- Monotonie :  $X \leq Y \text{ p.s.} \Rightarrow \mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$  ;
- Convexité :  $\forall \lambda \in [0, 1], \mathcal{R}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \mathcal{R}(X) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(Y)$  ;
- Homogénéité :  $\forall \lambda \geq 0, \mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$  ;
- Sous-additivité :  $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$ .

En particulier, une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les propriétés d'invariance en loi, invariance par translation, homogénéité et sous-additivité.

Dans le cadre de cette étude, ces propriétés peuvent être interprétées de la manière suivante : l'invariance en loi s'apparente au fait que deux risques identiques nécessitent le même capital économique. De même, la monotonie de la mesure de risque induit qu'un risque plus important nécessite un capital économique plus important pour pallier un choc sur ce dernier. L'invariance par translation et l'homogénéité traduisent le fait que l'augmentation ou la multiplication d'un risque par une quantité déterministe n'implique pas de risque supplémentaire au-delà de celui généré par la transformation initiale. La sous-additivité met en avant la diversification observée lors de l'agrégation des risques. En effet, le capital au titre de plusieurs risques est moins important que la somme des capitaux élémentaires.

### Autres propriétés : la comonotonie

Ce mémoire vise à étudier différentes méthodes d'agrégation existantes pour le calcul des SCR. L'optimisation du phénomène de diversification est l'un des objectifs des compagnies d'assurance lors de la mise en place d'un MI, afin de réduire leur besoin en capital de solvabilité. Il est à noter que si deux risques sont comonotones, cette diversification n'est pas possible si une mesure de risque additive pour les risques comonotones est considérée. Afin de préciser ce propos, il convient de rappeler à quoi correspondent des variables aléatoires comonotones.

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites comonotones s'il existe deux fonctions  $u$  et  $v$  monotones et de même monotonie, et  $Z$  une variable aléatoire telle que  $X = u(Z)$  et  $Y = v(Z)$ . Ainsi, des variables comonotones évoluent de manière identique. Le capital économique obtenu à partir de l'agrégation de deux risques comonotones ne devrait donc pas conduire à un phénomène de diversification.

Ainsi, il serait cohérent pour une mesure de risque de vérifier la propriété d'additivité pour les risques comonotones, c'est-à-dire que l'agrégation de risques comonotones à partir de cette mesure de risque n'implique nécessairement pas de diversification, *ie.* pour une mesure de risque  $\mathcal{R}$ ,  $X$  et  $Y$  comonotones  $\Rightarrow \mathcal{R}(X + Y) = \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$ .

### La Value at Risk

Après avoir présenté les mesures de risques de manière générale, la *Value at Risk* et l'étude de ses caractéristiques peuvent être introduites.

La *Value at Risk* de niveau  $\alpha$  correspond au quantile de niveau  $\alpha$  d'un risque  $X$ , c'est-à-dire

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}. \quad (1.12)$$

Comme la *Value at Risk* correspond à un quantile, il est à noter que pour  $X$  continue telle que sa fonction de répartition  $F_X$  est strictement croissante,

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Elle vérifie également les propriétés de monotonie suivantes :

- Si  $f$  est une fonction croissante, alors  $VaR_\alpha(f(X)) = f(VaR_\alpha(X))$ ;
- Si  $f$  est une fonction décroissante, alors  $VaR_\alpha(f(X)) = f(VaR_{1-\alpha}(X))$ .

Etant donné les propriétés de cohérence explicitées ci-dessus, il est possible de regarder si ces dernières sont vérifiées par la *Value at Risk*. Cette mesure de risque est invariante en loi et par translation, monotone et homogène. Elle n'est en revanche ni convexe ni sous-additive (sauf pour les lois elliptiques).

Cette mesure n'est donc pas cohérente. L'absence de sous-additivité de cette mesure de risque implique la possibilité d'une agrégation des SCR au titre de différents risques qui engendre un phénomène de contagion entre risques (*ie.* le SCR obtenu par agrégation est supérieur à la somme des capitaux économiques au titres des risques considérés).

#### 1.4.2 Conditions d'équivalence entre la FS et l'approche simulateur

Afin de mieux appréhender les enjeux qui se formulent autour des modèles internes, il convient de commencer par justifier la mise en place de la FS et de comprendre dans quel cas de figure cette dernière équivaut à la méthodologie MI.

L'approche FS se décline en deux étapes :

- détermination des capitaux économiques au titre d'un seul risque (risque *stand-alone*) ;
- agrégation des risques pour obtenir un SCR consolidé.

Comparer les résultats issus d'une méthodologie simulateur avec ceux obtenus par approche FS nécessite, comme le précisent DEVINEAU et LOISEL (2009b), de se placer dans un contexte de période unique et de redéfinir le capital économique de la manière suivante :

$$C = NAV_{sc.central} - q_{0,5\%}(NAV_1), \quad (1.13)$$

où :

- $NAV_{sc.central}$  correspond aux Fonds Propres à un an dans le cas où les aléas de la première période sont négligés ;
- $NAV_1$  correspond aux Fonds Propres à un an ;
- $q_{0,5\%}(X) = VaR_{0,5\%}(X)$  le quantile d'ordre 0,5% de  $X$ .

### Equivalence dans le cas d'un risque *stand-alone*

Cette section précise dans quel cas l'approche choc/facteur de la FS est équivalente à l'approche simulatoire, c'est-à-dire sous quelles conditions une équivalence entre les quantiles sur les Fonds Propres marginaux et les Fonds Propres déterminés en un quantile de la distribution du facteur de risque est observée.

Pour ce faire, il est nécessaire de définir le capital économique au titre du risque *stand-alone* caractérisé par un unique facteur de risque  $X$  selon les deux méthodes. En notant  $f$  la fonction qui au risque élémentaire  $X$  associe la NAV de la compagnie, ce capital est donné par

**FS :**  $C_{FS} = NAV_{sc.central} - f(q_{0,5\%}(X))$  ou  $C_{FS} = NAV_{sc.central} - f(q_{99,5\%}(X))$  en fonction du sens du risque étudié ;

**Approche simulatoire :**  $C_{dS} = NAV_{sc.central} - q_{0,5\%}(f(X))$ .

En reprenant les propriétés de monotonie présentées dans la section 1.4.1, une équivalence entre les deux approches est bien constatée dans le cas de figure où  $f$  est une fonction monotone. En effet, si  $f$  est croissante du risque  $X$ , alors le capital économique en FS est obtenu via le quantile à 0,5% (conduisant à un capital plus important). A l'inverse, si  $f$  est décroissante, c'est le quantile 99,5% qui est utilisé.

Il est à noter que dans la majorité des modèles internes, les fonds propres marginaux sont localement monotones au voisinage du scénario quantile, permettant de confirmer l'équivalence entre les deux types de capitaux élémentaires.

### Equivalence au niveau de l'agrégation

Afin de comprendre la méthodologie Variance-Covariance et de la comparer à l'approche simulatoire, le cas où la compagnie est soumise à  $N$  risques  $\{X_1, \dots, X_N\}$  sera étudié. Dans la démonstration

qui suit,  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}$ .

Pour rappel, le SCR se calcule de la manière suivante dans le cadre de la FS :  $SCR_{FS} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} C_i C_j}$ , avec  $\rho_{i,j}$  le coefficient de corrélation linéaire entre les risques  $X_i$  et  $X_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ .

La formule ci-dessus peut être retrouvée à partir de la définition 1.13 en faisant les hypothèses suivantes :

- H1 : Les Fonds Propres constituent une structure affine des risques, c'est-à-dire :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^N / FP(1) = \lambda + \beta^T X$  ;
- H2 :  $X$  suit une loi elliptique.

Cette propriété sera démontrée dans le cas où  $X$  suit une loi gaussienne  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , avec  $\Sigma = (\rho_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ , qui constitue une loi elliptique.

$NAV_1$  correspondant à une combinaison linéaire d'un vecteur gaussien, elle suit par définition une loi normale. En notant  $\sigma^2$  sa variance, l'homogénéité de la mesure de risque  $Var_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 5\%$ , permet de noter que  $Var_\alpha(NAV_1 - E[NAV_1]) = \sigma Var_\alpha(Z)$ , où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Il convient de remarquer que pour une petite valeur de  $\alpha$ ,  $Z$  étant centrée en 0,  $VaR_\alpha(NAV_1 - E[NAV_1])$  est négative.

De plus,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= Var(\lambda + \beta^T X) \\ &= \beta^T Var(X) \beta \\ &= \beta^T \Sigma \beta \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i \beta_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j,\end{aligned}$$

où  $\sigma_i$  correspond à l'écart-type de  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Par conséquent,  $VaR_\alpha(NAV_1 - E[NAV_1]) = -\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i \beta_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j VaR_\alpha(Z)^2}$ .

Or,  $VaR_\alpha(X_i - E[X_i]) = \sigma_i VaR_\alpha(Z)$ ,  $\forall i \in 1, \dots, N$ .

Ainsi,

$$VaR_\alpha(NAV_1 - E[NAV_1]) = -\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i \beta_j \rho_{i,j} VaR_\alpha(X_i - \mathbb{E}[X_i]) VaR_\alpha(X_j - \mathbb{E}[X_j])}. \quad (1.14)$$

En appliquant la définition 1.13 à ce cas de figure et aux hypothèses considérées, le capital élémentaire obtenu au titre du risque  $i$  suivant :

$$C_i = \mathbb{E}[\lambda + \beta_i X_i] - VaR_\alpha(\lambda + \beta_i X_i).$$

Par invariance par translation de la mesure  $VaR_\alpha$ ,

$$\begin{aligned}C_i &= \mathbb{E}[\lambda + \beta_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])] - VaR_\alpha(\lambda + \beta_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])) \\ &= \lambda - VaR_\alpha(\lambda + \beta_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])) \\ &= -VaR_\alpha(\beta_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])).\end{aligned}$$

En différenciant le cas où  $\beta_i$  est positif et négatif, le capital  $C_i$  au titre du risque  $i$  est donné par

$$C_i = \begin{cases} -\beta_i VaR_\alpha(X_i - \mathbb{E}[X_i]) & \text{si } \beta_i \geq 0 \\ \beta_i VaR_\alpha(X_i - \mathbb{E}[X_i]) & \text{si } \beta_i < 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $C_i = -sg(\beta_i) \beta_i VaR_\alpha(X_i - \mathbb{E}[X_i])$ .

En remplaçant  $C_i$  dans la formule 1.14, l'égalité suivante est trouvée :

$$VaR_\alpha(NAV_1 - E[NAV_1]) = -\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N sg(\beta_i) sg(\beta_j) \rho_{i,j} C_i C_j},$$

d'où

$$C = \sqrt{\sum_{i,j} sg(\beta_i) sg(\beta_j) C_i C_j \rho_{i,j}}.$$

Si l'ensemble des coordonnées de  $\beta$  sont de même signe, alors l'approche Variance-Covariance utilisée dans la FS est retrouvée.

Comme le précise S.DECUPERE (2011), la preuve s'étend au cas où l'hypothèse de normalité du vecteur de facteurs de risques est remplacé par l'hypothèse d'ellipticité du vecteur, à l'aide des propriétés suivante :

- Les marginales  $X_1, \dots, X_N$  d'un vecteur elliptique sont également elliptiques de même générateur caractéristique ;
- Toute combinaison linéaire  $Y = \lambda + \beta X$  des marginales d'un vecteur elliptique de même générateur caractéristique ;
- Les marginales centrées réduites et la variable aléatoire centrée réduite associée à  $Y$  sont elliptiques et de même générateur : elles sont identiquement distribuées.

### 1.4.3 Les limites de cette approche

Il est notable que le type d'agrégation introduit par l'approche Variance-Covariance adopte un cadre très spécifique, en supposant des facteurs de risques qui suivent une distribution elliptique et qui forment une relation linéaire avec les Fonds Propres de la compagnie. Ce type d'hypothèses très restrictives ne représente pas correctement le profil de risque des assureurs dans la majorité des cas et engendre donc un calcul de SCR qui est erroné. Cette partie cherche à observer plus en détail les différentes problématiques induites par cette approche.

#### Facteurs de risques gaussiens et dépendance de queue

Les compagnies utilisant la FS considèrent souvent que leurs facteurs de risques sont gaussiens. Cependant, cette loi n'est pas adaptée pour modéliser des valeurs extrêmes, utilisées pour la détermination du SCR. Afin de comprendre cette affirmation, la définition de dépendance de queue et de loi à queue lourde est présentée.

**Définition 1.4.1** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires. Les dépendances de queue supérieure  $\lambda_U$  et inférieure  $\lambda_L$  sont définies par

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(t) | Y > F_Y^{-1}(t)), \quad (1.15)$$

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(t) | Y \leq F_Y^{-1}(t)). \quad (1.16)$$

En particulier, si  $\lambda_U = 0$  (respectivement  $\lambda_L = 0$ ), alors il y a indépendance pour la queue supérieure (respectivement inférieure).

**Définition 1.4.2** Une loi de probabilité à queue lourde correspond à une loi dont la queue de probabilité n'est pas exponentiellement bornée. Cela signifie que cette dernière dispose d'une queue de distribution plus "lourde" que la loi exponentielle. Mathématiquement, une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$  est dite à queue lourde si elle admet une fonction génératrice des moments infinie pour tout  $t > 0$ . Cela s'exprime de la manière suivante :

$$\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} dF(x) = +\infty. \quad (1.17)$$

La dépendance de queue est une notion permettant de mesurer la probabilité de réalisation d'événements extrêmes pour plusieurs risques simultanés. Il est donc essentiel dans le cadre du calcul du SCR et dans l'optique de modéliser correctement les facteurs de risques auxquels la compagnie est exposée ainsi que leur interaction de considérer une loi avec une dépendance de queue. Or, la loi gaussienne est telle que  $\lambda_U = 0$  et  $\lambda_L = 0$ . De plus, la loi gaussienne n'est pas une loi à queue lourde. Elle ne satisfait donc pas les exigences de l'ACPR mentionnées dans la notice ACPR (2023b), et ne reflète pas de manière adéquate la possibilité de survenance d'événements extrêmes.

## Linéarité de la FS

Comme le soulignent DEVINEAU et LOISEL (2009b) dans leur papier *Risk aggregation in Solvency II : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula ?*, l'hypothèse de linéarité de la relation reliant les risques à la distribution des Fonds Propres à horizon un an, présentée ci-dessus 1.4.2, permet d'assurer le caractère universel du coefficient de corrélation. En effet, pour une fonction non-linéaire, le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfaisant pas la propriété d'invariance par transformation monotone, les coefficients de corrélation des distributions marginales diffèrent des coefficients de corrélation des facteurs de risques. Ces paramètres deviennent alors *Entity-Specific* et ne sont plus des valeurs communes aux compagnies.

Néanmoins, cette relation n'est en pratique pas satisfaite par les compagnies d'assurance et ne permet pas la prise en compte d'effets croisés entre les facteurs de risques.

## L'obtention d'un seul niveau de quantile

Une autre grande limite se présente en considérant l'approche Variance-Covariance. Il s'agit de l'impossibilité pour la compagnie de déterminer la perte que cette dernière pourrait subir si un événement situé plus loin sur la queue de distribution se produisait. L'éventualité d'un événement moins important mais plus probable n'est également pas considéré par cette approche. Ainsi, la seule connaissance de la VaR à 99,5% de la distribution de perte du portefeuille ne permet pas à une compagnie d'appréhender correctement ses risques. Deux distributions de perte qui disposent d'un SCR identique ne présentent pas nécessairement le même risque. En effet, leur exposition au risque peut diverger si l'un des portefeuilles peut présenter un risque de pertes très importantes au-delà du quantile 99,5%.

Après avoir étudié les caractéristiques de la Directive Solvabilité II, introduit les notions de capital de solvabilité requis et présenté les différentes méthodologies de calcul de cette quantité, les différentes méthodes existantes pour agréger des capitaux dans le cadre d'un MI peuvent être étudiées.

## 1.5 Les méthodes d'agrégation dans le cadre d'un MI

Il est important de constater, comme le souligne S.DECUPERE (2011), que les problématiques d'agrégation s'opèrent sur deux dimensions. La première dimension, la plus intuitive, correspond à l'agrégation entre risques pour le calcul d'un SCR global. Une seconde dimension est à considérer pour des grandes compagnies disposant de plusieurs entités, pour lesquelles il est intéressant de connaître le SCR consolidé au titre des différentes entités, à risques fixés. L'appellation « agrégation entre sous-périmètres de passifs » est alors utilisée. Dans le cadre de ce mémoire, seule l'agrégation entre risques est considérée.

L'appellation « modèle interne » est régulièrement utilisée pour définir l'approche simulatoire de calcul du SCR à partir de la distribution des Fonds Propres économiques à horizon un an. Il convient néanmoins de préciser qu'une compagnie d'assurance adopte un MI à partir du moment où l'approche envisagée est propre à cette dernière. La définition du MI au sens large n'implique donc pas nécessairement une approche simulatoire. Les différents types de modèles internes et les différentes techniques d'agrégation qui en découlent sont exposés dans la suite de cette partie.



### 1.5.1 La FS *Entity Specific*

Un MI pour lequel une approche modulaire, telle qu'observée dans la FS est adoptée, est appelé FS *Entity Specific*. La compagnie peut alors décider de modifier les paramètres de chocs et/ou les corrélations appliquées dans la FS. Dans certains cas, les compagnies peuvent également intégrer des risques non compris dans la FS auxquels ils sont exposés, lorsqu'ils le jugent nécessaire. Cette méthodologie permet à la compagnie de bénéficier d'un modèle leur permettant de se rapprocher plus précisément des véritables risques auxquels elle fait face sans nécessairement être confrontée aux coûts engendrés par la mise en place d'un MI totalement simulateur.

Il est important de noter que la modification de certains paramètres de la FS peut-être effectuée sans avoir recours à un MI. Ces paramètres propres à la compagnie d'assurance sont alors appelés *USP* (*Undertaking Specific Parameters*). Ces outils sont par ailleurs très utilisés dans le cadre de l'assurance non-vie. Bien que cette approche ne soit pas soumise aux exigences des modèles internes, l'utilisation d'*USPs* doit vérifier certains critères afin que leur utilisation soit approuvée par l'ACPR. Tout candidat doit notamment disposer d'un dossier complet, d'un historique conséquent pour la calibration, et de données de qualité.

En pratique, l'utilisation des *USPs* est restreinte dans le cadre du calcul de la FS au sous-module Primes des modules Non-Vie et Santé Non-Vie ainsi qu'au sous-module Révision des modules Vie et Santé-Vie, comme le stipule la COMMISSION EUROPÉENNE (2014). En revanche, dans le cadre de l'étude ORSA, les compagnies d'assurance doivent évaluer la pertinence des hypothèses prises lors du calcul du SCR et déterminer si ces dernières sont adaptées à leur profil de risque. Dans cette optique, elles s'intéressent à la conformité des calibrages proposées par l'EIOPA aux risques qu'elles supportent, et peuvent donc avoir recours aux *USPs* pour estimer la déviation du profil de risques par rapport aux hypothèses prises.

Une autre approche qui peut être qualifiée *Entity Specific* consiste en l'utilisation d'une architecture d'agrégation différente de la FS. Un tel exemple peut notamment être représenté par la structure « en râteau ». Elle induit une agrégation des risques au niveau le plus élémentaire possible. L'agrégation s'effectue alors sur un seul niveau, tel que présenté par la figure 1.7.

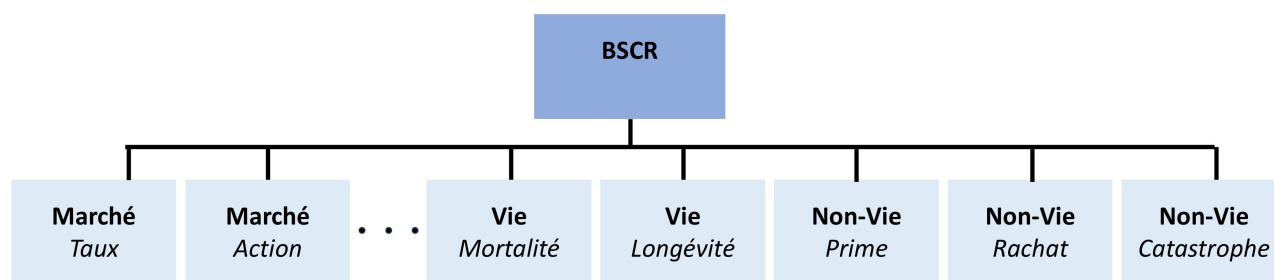


FIGURE 1.7 : Agrégation des risques à l'aide de l'architecture râteau

Cette architecture permet une prise en compte des dépendances entre les risques qui n'appartiennent pas au même module, à partir de la matrice de corrélation entre tous les risques élémentaires présentée dans la figure 1.8.

	Marché Taux	Marché Action	...	Marché Mortalité	Marché Longévité	Marché Prime	Marché Rachat	Marché Cat.
Marché Taux	1							
Marché Action	$\rho_{act,taux}$	1						
...	...	...	...					
Marché Mortalité	$\rho_{mort,taux}$	$\rho_{mort,act}$	...	1				
Marché Longévité	$\rho_{long,taux}$	$\rho_{long,act}$	...	$\rho_{long,mort}$	1			
Marché Prime	$\rho_{prime,taux}$	$\rho_{prime,act}$	...	$\rho_{prime,mort}$	$\rho_{prime,long}$	1		
Marché Rachat	$\rho_{rach,taux}$	$\rho_{rach,act}$	...	$\rho_{rach,mort}$	$\rho_{rach,long}$	$\rho_{rach,prime}$	1	
Marché Cat.	$\rho_{cat,taux}$	$\rho_{cat,act}$	...	$\rho_{cat,mort}$	$\rho_{cat,long}$	$\rho_{cat,prime}$	$\rho_{cat,rach}$	1

FIGURE 1.8 : Matrice de corrélation pour l'agrégation sur un niveau des capitaux élémentaires au titre des risques considérés

### Une technique d'obtention de FS *Entity Specific* : la Dé-modularisation

Afin de prendre en compte les corrélations entre les risques qui ne sont pas compris dans les mêmes modules et d'obtenir la matrice ci-dessus, les organismes d'assurance peuvent utiliser la technique de Dé-modularisation. Cette méthode permet d'avoir une meilleure perception des risques auxquels ils sont exposés ainsi qu'une meilleure compréhension de leurs interactions. Cette méthode se base sur les travaux présentés dans FILIPOVIĆ (2009).

Le raisonnement est simplifié en se concentrant sur l'obtention de corrélations implicites obtenues entre les risques élémentaires contenus dans deux modules. L'objectif est de déterminer une matrice  $C$  contenant les corrélations entre les risques du module 1 et les risques du module 2.

En notant  $R$  le coefficient de corrélation inter-modulaire modélisant la dépendance entre les modules 1 et 2, la matrice  $C$  s'obtient en résolvant l'égalité suivante :

$$\sqrt{SCR_1^2 + 2 R SCR_1 SCR_2 + SCR_2^2} = \sqrt{(x'_1 \ x'_2) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \quad (1.18)$$

et

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ C' & A_2 \end{pmatrix},$$

avec :

- $SCR_i$  le SCR obtenu au titre du module  $i$  ;
- $x_i$  les capitaux élémentaires au titre des risques contenus dans le module  $i$  ;
- $A_i$  la matrice de corrélation intra-modulaire associée au module  $i$ .

L'équation 1.18 admet une infinité de solutions qui conduisent toutes à une matrice  $C$  dépendante des niveaux de capitaux élémentaires, comme le mentionne Damir Filipovic dans son article *Multi-Level*

*Risk Aggregation*, FILIPOVIĆ (2009). Autrement dit, la matrice  $C$  est nécessairement *entity-specific*. L'unique solution qui minimise la norme euclidienne est :

$$C = R \frac{\sqrt{x'_1 A_1 x_1} \sqrt{x'_2 A_2 x_2}}{\|x_1\|^2 \|x_2\|^2} x_1 \cdot x'_2. \quad (1.19)$$

**Remarque 1.5.1** Bien que cette méthode permette une meilleure adéquation au profil de risque de la compagnie considérée, il est à noter que ce type de MI repose sur une approche Variance-Covariance et fait donc face aux limites présentées dans la partie 1.4.3. En particulier, cette méthode ne permet l'obtention que d'un unique niveau de quantile.

### 1.5.2 Le MI totalement simulateur

Cette approche s'appuie sur la méthode MI présentée dans la partie 1.2.2. Elle se fonde sur la distribution des Fonds Propres économiques à horizon un an, obtenue en faisant évoluer les facteurs de risques de manière simultanée. L'agrégation des risques est alors effectuée de manière implicite à travers la modélisation des Fonds Propres. En pratique, la mise en place de ce type de modèle n'est pas courante. En effet, certains risques sont délicats à modéliser et cette méthode requiert souvent une complexité trop importante.

En reprenant la perte  $L_1$  définie précédemment dans l'équation 1.9 et les notations associées, nous pouvons constater que

$$L_1 = \mathbb{E}^Q[NAV_0 - D(0, 1) \sum_{u=1}^T P \& L_u D(1, u) | \mathcal{F}_1]. \quad (1.20)$$

Par conséquent, le SCR est donné par  $SCR = q_\alpha(\mathbb{E}^Q[Z | X_1])$ ,

Avec :

- $Z = NAV_0 - D(0, 1) \sum_{u=1}^T F_u D(1, u)$  ;
- $X_1$  les facteurs de risques à un an, en supposant que toute l'information nécessaire et disponible se résume aux facteurs de risques.

Les différentes méthodes utilisées pour l'obtention d'un MI totalement simulateur peuvent désormais être présentées.

### L'approche Simulation dans les Simulations

Cette méthode est une des approches les plus intuitives dans le cadre du calcul du SCR par simulations et la plus conforme aux critères dictés par la Directive. Néanmoins, elle nécessite un nombre de simulations Monte-Carlo très important et entraîne un temps de calcul qui est en pratique prohibitif. Nous présentons cette méthode en nous basant sur ce qui est expliqué par DEVINEAU et LOISEL (2009b).

L'enjeu fondamental est l'obtention de la distribution de pertes (ou de Fonds Propres) empiriques en s'appuyant sur des simulations en deux temps. La perte étant définie comme une espérance conditionnelle, il convient d'effectuer dans un premier temps  $P$  simulations des facteurs de risques en monde réel (*real world* ou RW) projetés sur un an (simulations primaires). Ensuite, pour chaque simulation primaire,  $S$  simulations secondaires des postes du bilan sont effectuées en fin de première année, conditionnées par la simulation primaire. Les simulations secondaires sont effectuées en univers risque-neutre (ou RN) afin de respecter le critère de *market consistency*. Elles ont pour but d'estimer la perte au titre de chacune des simulations des facteurs de risques. On obtient alors un échantillon

de taille  $P$  de la perte du portefeuille, correspondant à la distribution empirique. Ces deux étapes de simulations sont effectuées à partir d'un GSE RW et d'un GSE RN.

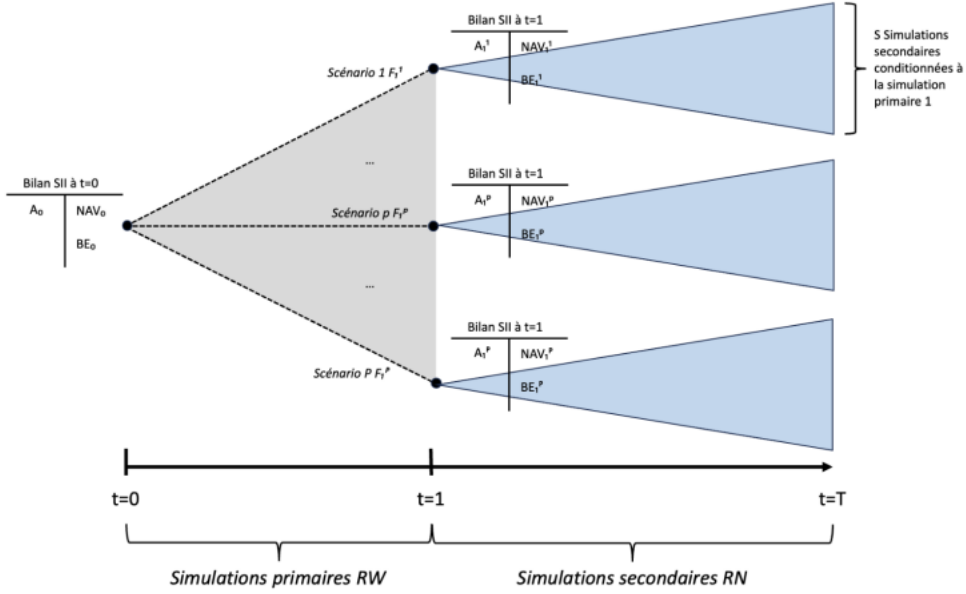


FIGURE 1.9 : Illustration de l'approche Simulations dans les simulations

La méthode SdS, illustrée par la figure 1.9, peut donc être résumée en quatre étapes :

1. Simulations primaires en monde réel des facteurs de risques à horizon un an. Un échantillon  $(X_1^i)_{i=1,\dots,P}$  est alors obtenu.
2. Pour chaque simulation primaire, réalisation de  $S$  simulations secondaires risque neutre et recalibrées sur la simulation primaire considérée.
3. Pour chaque jeu de simulations secondaires, application de l'estimateur de Monte-Carlo pour obtenir une estimation de la perte conditionnellement à la simulation primaire considérée pour le jeu.
4. Estimation du SCR en déterminant le quantile empirique à 99,5% associé à l'échantillon obtenu.

Afin de formaliser la méthode, reprenons les notations utilisées par DEVINEAU et LOISEL (2009a). En considérant  $p \in \{1, \dots, P\}$  et  $s \in \{1, \dots, S\}$  :

- $R_u^{p,s}$  le résultat de l'année  $u > 1$  pour la simulation primaire  $p$  et la simulation secondaire  $s$  ;
- $R_1^p$  le résultat de l'année 1 pour la simulation primaire  $p$  ;
- $\delta_u^{p,s}$  le facteur d'actualisation pour la simulation primaire  $p$  et la simulation secondaire  $s$  ;
- $\delta_1^p$  le facteur d'actualisation pour la simulation primaire  $p$  ;
- $F_1^p$  l'information de la première année obtenue au titre de la simulation primaire  $p$  ;
- $E_1^p$  les fonds propres de la première année obtenus dans les conditions de la simulation primaire  $p$ .

Les fonds propres obtenus au titre de la simulation primaire  $p$  sont données par

$$E_1^p = R_1^p + E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u^p}{\delta_1^p} R_u^p | F_1^p\right], \quad (1.21)$$

avec :

- $\delta_1^p$  le facteur d'actualisation de l'année 1 au titre de la simulation primaire  $p$  ;
- $\delta_u^p$  le facteur d'actualisation de l'année  $u$  au titre de la simulation primaire  $p$  ;
- $R_u^p$  le résultat de l'année  $u$  au titre de la simulation primaire  $p$ .

La méthode SdS consiste en la mise en place de l'estimateur Monte Carlo suivant, pour  $E_1^p$  :

$$\widehat{E}_1^p = R_1^p + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u^{p,s}}{\delta_1^p} R_u^{p,s}. \quad (1.22)$$

Afin de déterminer une estimation du SCR, la formule 1.11 permet de déterminer une estimation du SCR. Il convient ainsi d'obtenir une estimation de  $Var_{0,5\%}(E_1)$ .

Il est naturel de considérer comme estimateur le quantile empirique de la distribution obtenue à l'aide de l'échantillon  $(\widehat{E}_1^i)_{1 \leq i \leq p}$ , soit  $\widehat{E}_1^{\sigma([0,5\%p])}$ .

Le SCR calculé par la méthode est ainsi donné par

$$\widehat{SCR} = \widehat{E}_0 - D(0,1) \widehat{E}_1^{\sigma([0,5\%p])}, \quad (1.23)$$

avec  $\widehat{E}_0$  l'estimateur Monte Carlo des Fonds propres économiques au temps 0.

En règle générale, un choix adapté de nombre de simulations primaires correspond à environ 5000, avec un nombre de simulations secondaires au titre d'une simulation primaire d'environ 1000.

**Remarque :** Le choix d'obtenir la distribution des fonds propres ou la distribution de pertes du portefeuille peut être fait arbitrairement car

$$SCR = Var_{99,5\%}(L_1) = NAV_0 - D(0,1)Var_{0,5\%}(NAV_1) \quad (1.24)$$

### Variantes de l'approche SdS

En pratique, afin de réduire le temps de calcul de cette méthode, des méthodes alternatives sont mises en place, mentionnées dans la notice ACPR (2023b). Certains mémoires traitent de ces variantes et de leur efficacité en terme de modélisation des distributions de pertes des assureurs. Un lecteur intéressé pourra notamment se référer à COUSIN (2012), F.ROUCHATI (2016) et BERNARD (2013).

Afin de faire face à ce problème de complexité, ces méthodes s'appuient sur les trois axes suivants :

- limiter le nombre de simulations (primaires et/ou secondaires) ;
- avoir recours à des formules fermées ;
- utiliser des trajectoires à dire d'experts.

Quelques-unes des méthodes les plus courantes sont par la suite présentées.

### Accélérateur SdS

Cette méthode présentée dans DEVINEAU et LOISEL (2009a) repose sur une réduction du nombre de simulations en utilisant partant du postulat que le calcul du SCR est effectué à partir des simulations primaires situées en queue de distribution. En effet, une simulation pour laquelle les facteurs de risques sont favorables à l'obtention de Fonds Propres élevés ne sera pas utile pour l'obtention du quantile à 0,5% des Fonds Propres. L'algorithme mis en place consiste donc à sélectionner les simulations primaires pour lesquelles des projections sont effectuées, à partir d'une norme qui permet la mise en place d'une frontière d'exécution comme présenté dans la figure 1.10, en ne sélectionnant que les scénarios les plus adverses.

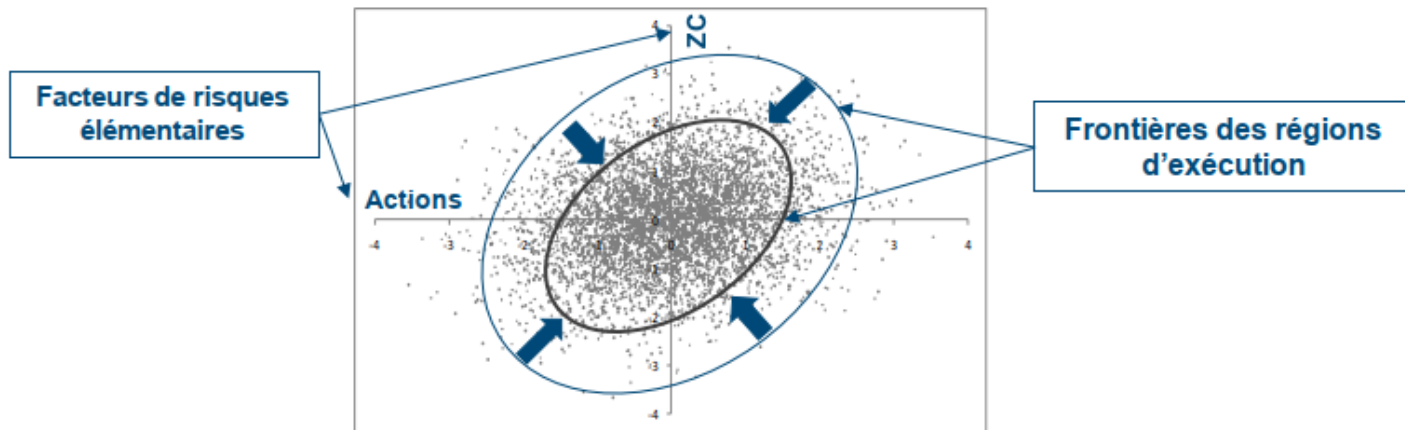


FIGURE 1.10 : Choix des scénarios projetés dans l'algorithme d'accélérateur SdS, DEVINEAU et LOISEL (2009a)

Néanmoins, comme peut le souligner BERNARD (2013), les approximations provoquées par cette méthode peuvent provoquer une sous-estimation du SCR, en délaissant des scénarios primaires qui peuvent s'avérer primordiaux pour l'évaluation du SCR.

### Méthode *LSMC* et *Curve Fitting*

Les méthodes de *Least Square Monte Carlo* et *Curve Fitting* constituent des approches paramétriques qui permettent la mise en place d'une formule fermée pour l'obtention des Fonds Propres à horizon un an.

Le principe est le suivant :

- mise en place d'un jeu de données construit par la méthode SdS en s'appuyant sur un nombre de simulations restreint ;
- calibrage de la forme paramétrique (*proxy*) à partir du jeu de données obtenu à l'étape précédente ;
- obtention de la distribution de Fonds Propres à horizon un an par interpolation.

Les deux méthodes se différencient au niveau de la construction du jeu de données, comme mis en avant dans la figure 1.11. En effet, l'approche *Curve Fitting* considère un nombre restreint de simulations primaires monde réel, tandis que la méthode *LSMC* utilise le même nombre de simulations primaires que dans la méthode SdS mais associe à chaque simulation primaire une unique simulation secondaire.

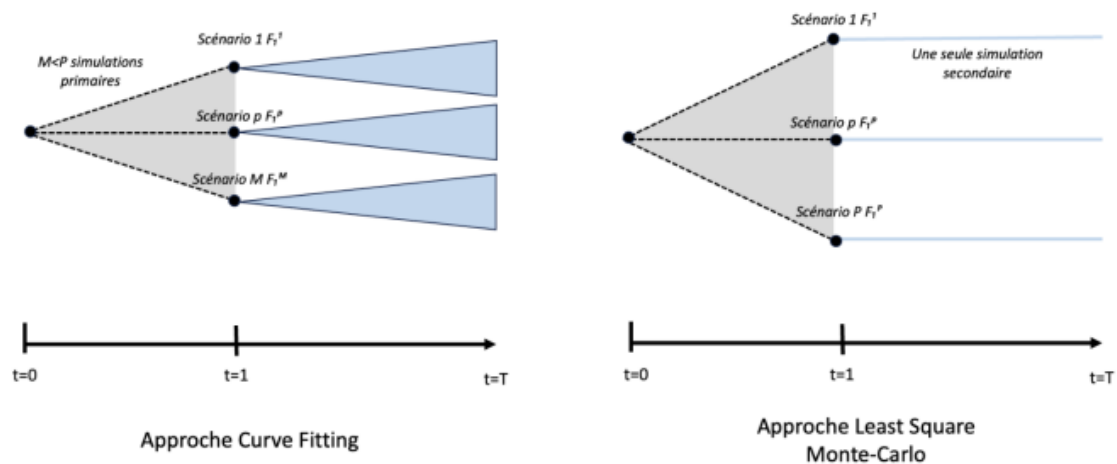


FIGURE 1.11 : Présentation des méthodes paramétriques

D'après KRAPF (2012), les méthodes paramétriques sont aisément compréhensibles et implémentables, et présentent une méthodologie homogène pour les risques d'actifs et de passifs. Dans certains cas de figures, la calibration de ces fonctions peut s'avérer complexe.

La méthode *Curve Fitting* sera étudiée plus en détail dans la partie suivante.

### Replicating Portfolio

Cette méthode a pour but de répliquer les flux futurs du portefeuille de l'organisme d'assurance à l'aide de produits dérivés qui sont valorisables par formule fermée. Elle permet donc l'obtention d'une distribution de fonds propres à partir de laquelle le quantile à 0,5% est déterminé pour le calcul du SCR. Elle est très efficace en terme de temps de calcul et ne nécessite qu'un seul jeu de simulations monde réel, comme le précise COUSIN (2012). En pratique, cette méthode ne permet pas de prendre en compte les risques qui sont de nature non-financière, ces derniers n'étant pas couvrables. Elle est donc généralement utilisée pour le calcul du SCR marché.

KRAPF (2012) étudie dans son mémoire l'utilisation des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance-vie. Il y met notamment en avant le fait que cette technique peut manquer de stabilité et peut présenter des difficultés quant au calibrage des *proxys* du fait de la sensibilité des instruments financiers considérés à des multiples facteurs de risques. Il précise également que cette méthode peut présenter des difficultés pour mesurer l'erreur du modèle.

Le tableau 1.1 récapitule les différents avantages et inconvénients des différentes méthodes alternatives à l'approche SdS rencontrées sur le marché.

Après avoir décrit les différentes méthodes de détermination du SCR à partir d'une approche simulatoire, les modèles internes combinant une approche simulatoire ainsi qu'une approche par facteur/choc peuvent être présentés.

Méthode	Avantages	Inconvénients
Accélérateur SdS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• conserve la logique de l'approche SdS.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• déficience dans le choix des scénarios retenus qui peut engendrer une erreur d'estimation du SCR ;</li> <li>• arbitrage entre le degré de précision et le temps de calcul.</li> </ul>
LSMC et <i>Curve Fitting</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• aisément compréhensible et implémentable ;</li> <li>• méthodologie homogène pour les risques d'actifs et de passifs ;</li> <li>• flexibilité au niveau du choix de la distribution par facteur de risque.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• le calibrage peut s'avérer complexe.</li> </ul>
<i>Replicating Portfolio</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• très efficace en terme de temps de calcul ;</li> <li>• ne nécessite qu'un jeu de simulations monde réel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• manque de stabilité du calibrage ;</li> <li>• difficultés pour mesurer l'erreur du modèle.</li> </ul>

TABLE 1.1 : Avantages et Inconvénients des différentes approches alternatives à l'approche SdS

### 1.5.3 Le modèle interne partiellement simulateur

Pour mettre en place une approche qui ne soit pas trop coûteuse et complexe mais qui permette une meilleure adéquation au profil de risque de la compagnie d'assurance, le modèle interne partiellement simulateur (ou MIP) constitue souvent un bon compromis. Ce dernier propose d'avoir recours aux deux types d'approches. Il consiste à intégrer par approche simulateur une partie des risques auxquels l'organisme est exposé, puis à appliquer une méthodologie par choc pour les autres risques. Une étude est en général effectuée pour déterminer les risques pour lesquels il est pertinent de considérer une approche simulateur. En pratique, les assureurs ont recours à ce type de modèle en utilisant une des variantes de l'approche SdS présentées ci-dessus.

Cette dernière méthode peut être illustrée au niveau du SCR marché et de ses sous-risques, à travers la figure 1.12.

Dans le cadre de l'agrégation des risques effectuée dans un MIP, il est généralement judicieux de considérer une architecture à trois niveaux. Pour chaque module de risque, cette nouvelle architecture



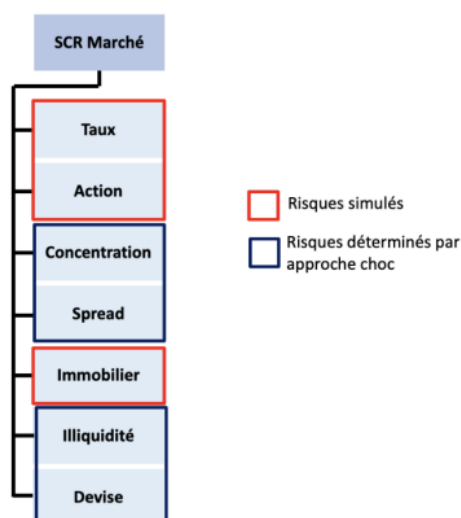


FIGURE 1.12 : Illustration de l'approche MIP à travers le SCR marché

prévoit deux groupes de sous-modules de risques. L'un regroupe les risques quantifiés par une approche MI, et l'autre les risques quantifiés par l'approche FS.

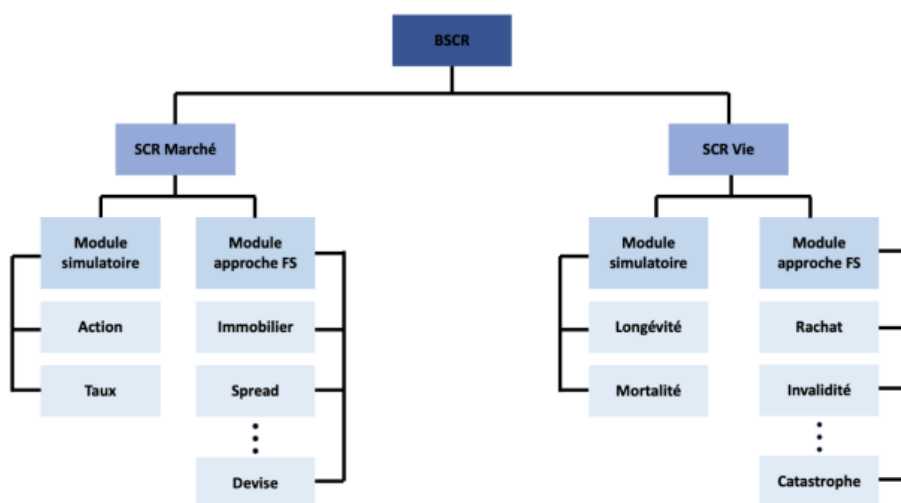
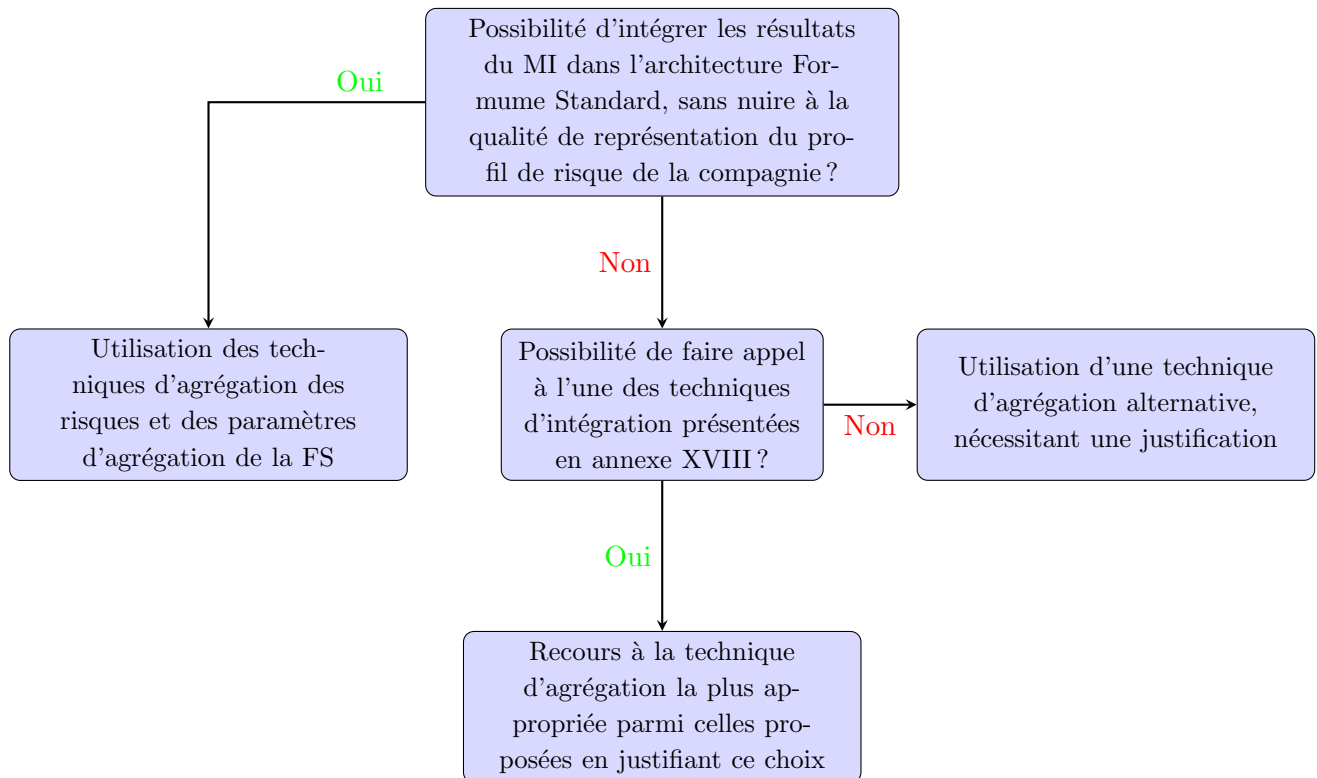


FIGURE 1.13 : Architecture avec 3 Niveaux d'agrégations

En effet, les deux méthodes d'agrégation ne sont pas compatibles. Les hypothèses requises pour appréhender une agrégation de type FS ne sont en règle générale pas satisfaites dans le cadre des modèles internes.

Cette problématique fait notamment l'objet d'une mention dans les actes délégués et propose plusieurs techniques d'agrégation mentionnées en annexe XVIII ainsi qu'un arbre de décision présenté dans la figure ci-dessous permettant de se positionner vis-à-vis de l'approche à considérer pour cette agrégation.



## Chapitre 2

# Mécanismes ALM et mise en place des simulations dans les simulations

Cette étude se concentre sur la mise en avant de l'information supplémentaire que permet l'obtention de distributions complètes de fonctions de perte à tout niveau d'agrégation. Afin de pouvoir répondre à cette problématique, le mémoire s'appuie sur un assureur-vie représentatif du marché français et évalue l'impact des différents risques liés aux actifs financiers sur sa NAV à partir de mécanismes de gestion actif-passif (*Asset and Liability Management* ou ALM).

Ce chapitre a pour objectif de préciser les hypothèses prises pour la modélisation ALM de notre compagnie fictive et la détermination des flux futurs permettant le calcul du *Best Estimate* à un an. Le bilan économique de l'assureur sera projeté sur un horizon  $T = 30$  ans.

Dans cette optique, le cadre de l'assurance-vie et les contrats proposés par l'assureur étudié seront introduits. Les procédés ALM et les dynamiques retenues pour le GSE utilisé en entrée de l'outil ALM interne de Forvis Mazars seront ensuite explicités. Cette section contiendra également des précisions concernant les modifications apportées à l'outil ALM pour mettre en place le mécanisme SdS présenté dans le chapitre précédent, en section 1.5.2.

### 2.1 L'Assurance-vie et les contrats épargne

L'assurance-vie consiste en la mise en place de contrats d'assurance faisant apparaître des engagements pour lesquels l'aléa repose sur la durée de vie résiduelle et non sur la survenance incertaine d'un événement. En effet, l'occurrence du décès est inévitable et l'aléa porte sur la date du décès. Elle est introduite pour la première fois en 1653 en France par le banquier italien Lorenzo Tonti, à l'origine des tontines, dans le but de financer le royaume de France. En 2023, ce secteur constitue d'après les données de FRANCE ASSUREURS (2024) 57,1% des cotisations, soit plus de la moitié des cotisations perçues sur le marché de l'assurance.

Une opération d'assurance-vie s'articule autour de plusieurs acteurs clés. Le premier acteur présenté est l'assureur. Il est en charge de couvrir le risque porté par un autre acteur, l'assuré. Le souscripteur correspond alors à l'individu qui signe le contrat et paye la prime et le bénéficiaire reçoit la prestation en cas de survenance du risque. En règle générale, l'assuré et le souscripteur ne sont qu'une seule et même personne.

Parmi les contrats d'assurance-vie, plusieurs types de garanties peuvent être distingués, les deux principales étant les suivantes :

- Les garanties en cas de vie, qui prévoient un paiement si l'assuré est toujours en vie à une date spécifiée dans le contrat ;
- Les garanties en cas de décès, qui prévoient un paiement au bénéficiaire stipulé dans le contrat en cas de décès de l'assuré.

En particulier, les contrats en cas de vie permettent d'accumuler des droits différés, exprimés sous forme de capital ou de rente, si l'assuré est en vie à l'échéance du contrat. Ces derniers s'appuient sur la capitalisation viagère et financière des primes versées. L'activité d'épargne constitue notamment une garantie en cas de vie et représente une part fondamentale du marché de l'assurance-vie. Ces contrats se soldent à travers le rachat du contrat par l'assuré, du décès de l'assuré ou à l'arrivée à terme du contrat. Elle peut principalement se présenter sous la forme de trois types de supports :

- **Les supports en euro** : les garanties et les primes sont exprimées en euros. Pour ce type de support, le souscripteur verse des fonds à l'assureur, correspondant aux primes, qui les investit principalement dans des obligations d'État ou d'entreprises. Chaque année, ce dernier distribue une partie des revenus financiers générés par ces placements, après avoir prélevé des frais de gestion. L'assuré peut alors retirer son capital et les intérêts accumulés à tout moment. Il se peut néanmoins, en fonction des termes du contrat souscrit, que des pénalités de rachat soient à prévoir.

L'assureur s'engage à verser les prestations en euro et porte le risque financier. Des garanties financières sont ainsi incluses dans ce type de support, notamment à travers le mécanisme de Taux Minimum Garanti (TMG), assurant la revalorisation annuelle du capital investi à un taux supérieur au TMG. Cette garantie protège l'assuré des conditions de marché et lui permet de bénéficier d'un rendement minimum sur son épargne.

Pour ce type de contrat, le Code des Assurances stipule que l'assureur doit partager les bénéfices perçus avec les assurés : il s'agit de la participation aux bénéfices (PB) réglementaire. Cette dernière correspond à 85% du résultat financier de l'assureur et 90 % du résultat technique. Elle se présente de la manière suivante :

$$PB_{regl.} = \begin{cases} 90\% \text{ du bénéfice technique} \\ \text{ou} \\ 100\% \text{ de la perte technique} \end{cases} + \begin{cases} 85\% \text{ du bénéfice financier} \\ \text{ou} \\ 0\% \text{ de la perte financière} \end{cases} - \text{intérêts techniques}$$

Le calcul de la PB réglementaire se fait directement au niveau de l'entreprise d'assurance et non fonds par fonds. La PB contractuelle constitue la participation aux bénéfices définie dans les clauses du contrat et est au moins égale à la PB réglementaire. Afin de satisfaire les assurés et de rester compétitifs vis-à-vis des produits d'épargne concurrents, cette dernière est généralement supérieure à la PB réglementaire.

Les modalités d'attribution de PB sont multiples. Les assurés peuvent bénéficier d'une attribution directe via l'augmentation des prestations futures ou la diminution des primes. L'attribution peut également être différée. La PB est alors versée dans la provision pour participation aux excédents (PPE) et doit être reversée aux assurés sous 8 ans selon la règle FIFO (*first in first out*). Cette provision permet notamment de lisser dans le temps les bénéfices versés aux assurés et de combler les années où les taux servis ne sont pas satisfaisants.

- **Les supports en unités de compte** : les garanties sont exprimées en unité d'investissement, appelées "unités de compte". Ces unités peuvent constituer un nombre de parts dans un OPCVM,

des parts de SCI, *etc.* L'assureur s'engage donc à fournir à l'assuré un certain nombre d'unités de compte (UC) et n'émet aucune garantie sur leur valeur en euro. Le risque est alors porté par l'assuré. Le fonctionnement de ce type de support diffère des contrats euro. Le souscripteur investit dans une part d'un actif risqué en utilisant l'assureur comme intermédiaire. Chaque année, l'assureur et le gestionnaire de l'actif prélèvent des frais de gestion. Une partie de ceux prélevés par le gestionnaire d'actif est rétrocédée à l'assureur. Il peut proposer une garantie plancher en cas de décès, assurant le capital initialement versé. Les contrats en UC sont majoritairement investis en actions, contrairement aux contrats euro dont l'investissement principal constitue les obligations. La collecte nette de ce type de contrat est donc fortement dépendante des fluctuations des marchés financiers.

- **Les contrats multi-support** : ces derniers constituent un mélange des deux premiers supports et reposent sur des garanties qui s'appuient sur un ou plusieurs supports en UC et un support en euro. L'assureur s'engage alors à verser des prestations en euro pour la garantie concernant le support en euro et à verser un nombre d'UC au titre des supports en UC. Le risque est à la fois porté par l'assureur et l'assuré. Certains assureurs offrent des options d'arbitrage automatique entre les fonds en euros et les unités de compte, en vendant par exemple automatiquement une unité de compte si sa dévalorisation est jugée trop importante.

Il est à noter que la plupart des contrats permettent aux assurés de pouvoir arbitrer leurs droits. Ainsi, ils peuvent convertir leurs droits exprimés en euros en droits en unité de compte et inversement.

## 2.2 Modélisation ALM

L'assureur sur lequel se fondent nos travaux dans ce mémoire est un assureur-vie qui vend uniquement des contrats épargne, présentés ci-dessus. Cette section vise à expliciter les caractéristiques de ce dernier et les hypothèses prises quant à la modélisation de son profil ainsi que les mécanismes ALM considérés.

La gestion actif-passif est un outil indispensable pour la mise en place du système de gestion des risques présenté par la Directive Solvabilité II. Elle est essentielle pour les assureurs car elle permet le pilotage stratégique de la compagnie d'assurance et la prise en compte des interactions entre l'actif et le passif. En effet, en coordonnant efficacement les actifs et les passifs, les assureurs peuvent mieux répondre aux attentes des assurés et des régulateurs, tout en maximisant leurs performances financières. La modélisation ALM permet aux assureurs d'évaluer les risques financiers auxquels la compagnie est exposée, d'assurer leur solvabilité en analysant les besoins de liquidité de l'assureur et de se conformer aux exigences réglementaires. L'ALM consiste plus précisément en l'analyse des flux d'actif et de passif de l'assureur ainsi que leur interaction dans le but de prévoir l'évolution du bilan de l'assureur (en valeur comptable et en valeur de marché) sur un horizon de temps prédéfini.

Le passif de l'assureur sur lequel se fonde l'étude n'est constitué que de contrats d'épargne et son actif d'investissements représentatifs du marché français. Ce portefeuille est à l'origine des flux d'actifs et de passifs mentionnés précédemment. Les flux de passifs sont associés aux engagements des assureurs engendrés par les contrats et les flux d'actifs sont associés aux placements effectués par l'assureur pour couvrir leurs engagements. Par conséquent, pour être solvable, l'assureur doit adapter la composition de son actif à celle de son passif, ce qui est effectué au travers des différents mécanismes ALM.

Les différents placements effectués par les assureurs pour couvrir leur passif sont les suivants :

- investissement en obligations d'état ou d'entreprises qui constituent des titres de créance et

permettent à l'assureur de recevoir des revenus fixes et certains ;

- investissement en action et immobilier qui constituent des revenus variables. Ces investissements permettent des rendements plus élevés mais sont plus risqués.
- investissement en trésorerie qui constituent des ressources financières très liquides que l'assureur peut mobiliser à très court terme.

Les portefeuilles d'actifs des Assureurs étaient composés à fin 2023 de 57% d'obligations d'après les études menées par l'ACPR (2023a), avant transposition des OPCVM. Cette proportion a légèrement diminué par rapport aux années précédentes du fait de la diversification croissante des placements des assureurs en faveur d'actifs plus dynamiques. Une part importante d'obligations est néanmoins détenue pour s'assurer un revenu régulier et stable. Après avoir présenté de manière brève la gestion actif-passif, les caractéristiques de l'assureur considéré peuvent être exposées.

### 2.2.1 Les caractéristiques de l'Assureur à $t=0$

Les caractéristiques spécifiques de l'assureur modélisé dans l'outil *ALM* sont identifiées dans cette section. Elles sont par la suite utilisées afin de projeter ses engagements sur la période considérée. Le bilan initial de l'assureur reflétant sa situation à l'instant 0 est présenté, suivi d'une analyse de son portefeuille d'actifs et de passifs.

#### Le Bilan de l'Assureur

Au 31/12/2023, le bilan comptable (exprimé en millions d'euros) de l'assureur utilisé est le suivant :

Actif (m €)		Passif (m €)	
<b>Obligations</b>	378,79	<b>Fonds Propres</b>	27,30
<b>Actions</b>	51,19	<b>Provision Mathématique</b>	455,00
<b>Immobilier</b>	61,43	<b>PPE</b>	18,20
<b>Monétaire</b>	20,48	<b>Réserve de capitalisation</b>	11,36
<b>Total Actif</b>	511,88	<b>Total Passif</b>	511,88

TABLE 2.1 : Bilan comptable de la compagnie fictive au 31/12/2023

De même, il convient de présenter la valeur de marché de la compagnie fictive au temps initial :

Actif VM (m €)	
<b>Obligations</b>	359,95
<b>Actions</b>	67,11
<b>Immobilier</b>	65,98
<b>Monétaire</b>	20,48
<b>Total Actif</b>	513,48

TABLE 2.2 : Valeur de marché de l'actif au 31/12/2023

La valeur de marché des actifs et de l'immobilier correspondent aux valeurs d'actions et d'immobilier en VNC, augmenté des plus ou moins values latentes (PMVL) observées sur chacun de ces

actifs. Ces PMVL sont obtenues à partir d'un *benchmark*. La valeur de marché des obligations est déterminée dans l'outil ALM, à partir de la formule présentée dans la partie 2.2.2. Par simplification, nous supposons qu'il y a égalité entre la VNC et la VM du monétaire.

Le modèle ALM utilisé permet de déterminer le bilan Solvabilité II de notre assureur ainsi que les SCRs aux différents niveaux d'agrégation en FS. Afin de déterminer la  $NAV_0$  de l'assureur, il y a lieu de rappeler qu'elle correspond à la différence entre la valeur de marché de l'actif et du passif au temps 0. La valeur de marché du passif est constituée du *Best Estimate* et de la marge pour risque. Cette quantité ne constituant pas le coeur du mémoire, il a été décidé par simplification d'utiliser l'approche par pourcentage du BE pour la déterminer. Ainsi, comme présenté en section 1.1.2,  $RM = \alpha_{lob} BE_0$  où  $\alpha_{lob}$  correspond à un pourcentage donné pour la ligne d'activité considérée. Dans le cas de figure de cette étude,  $\alpha_{lob} = 1,53\%$ , correspondant au ratio moyen  $\frac{RM}{BE}$  obtenu sur un panel d'assureurs-vie du marché français.

### Les *Model Points*

Pour simplifier l'analyse du portefeuille d'actifs et de passifs de la compagnie fictive, les différents contrats et actifs ont été agrégés en *Model Points*. En effet, l'outil ALM utilisé fait appel à des simulations Monte Carlo pour estimer les flux futurs issus des contrats et déterminer le BE. Cette opération est trop coûteuse si elle est effectuée contrat par contrat. Les *Model Points* regroupent donc des contrats aux caractéristiques similaires, conformément à l'article 35 du Règlement Délégué, PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2014). De manière similaire à ce qui a été entrepris pour le Passif, le portefeuille d'actif a également été agrégé par *model points*.

### L'Actif

L'assureur considéré détient quatre classes d'actifs principales :

- Actions ;
- Immobilier ;
- Monétaire ;
- Obligations.

Dans le cadre de la modélisation de l'assureur, il a été décidé de modéliser les actions, l'immobilier et les actifs monétaires par un unique *Model Point*. Les obligations sont quant à elles agrégées en dix *Model Points*, présentés dans le tableau 2.3. Ce choix a été effectué dans le but de reproduire un assureur représentatif du marché simplifié. Il permet d'obtenir des résultats satisfaisants et l'ajout de *models points* ne permet pas d'améliorer significativement la modélisation de cet assureur. Les obligations détenues sont supposées être achetées au pair, c'est-à-dire que leur valeur comptable correspond à leur valeur nominale à l'achat. De plus, elles permettent de modéliser les réinvestissements sur toute la période de projection. Par ailleurs, nous supposons également que les investissements futurs modélisés dans l'outil sont réalisés sur des OAT de maturité 10 ans.

L'obligation la plus ancienne dans le portefeuille a été acquise en 2014 et arrive à échéance en 2024. A des fins de simplification, toutes les obligations détenues sont de notation AAA et libellées en euros. Ces obligations sont considérées comme des OAT (Obligations Assimilables du Trésor) à 10 ans. Les

Année de terme	Taux de coupon	Nominal (m €)	VNC (m €)
2024	2,40%	37,88	37,88
2025	1,28%	37,88	37,88
2026	0,90%	37,88	37,88
2027	1,20%	37,88	37,88
2028	1,00%	37,88	37,88
2029	0,70%	37,88	37,88
2030	0,10%	37,88	37,88
2031	0,20%	37,88	37,88
2032	2,50%	37,88	37,88
2033	3,00%	37,88	37,88

TABLE 2.3 : Model Points d'obligations détenues au 31/12/2023

taux de coupons ont été déterminés en fonction des taux de coupons observés à l'année d'achat de l'obligation sur le marché.

Nous supposons que les actions détenues en portefeuille constituent 50% d'actions de type 1 et 50% d'actions de type 2, cotées sur un marché réglementé d'un pays membre de l'Espace Économique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE), comme le précise l'article 168 du Règlement Délégué, PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2014).

**Le Passif** Le passif de la compagnie est constitué de contrats regroupés en 10 différents *Model Points* (cf. figure 2.4), comme présenté précédemment. Ce regroupement se base sur plusieurs critères :

- Le type de contrat (EUR, UC ou multi-support) ;
- L'ancienneté du contrat ;
- Le Taux Minimum Garanti (TMG) du contrat ;
- Le taux servi ;
- L'âge moyen des assurés au sein du *Model Point*.

Type de contrat	Année	TMG	PM Euro (m €)	PM UC (m €)
Mono-Support	2008	2,5%	26,00	0,00
Mono-Support	2012	1,25%	40,00	0,00
Multi-Support	2016	0%	59,82	13,61
Multi-Support	2017	0%	52,34	20,42
Multi-Support	2018	0%	59,91	40,83
Multi-Support	2019	0%	52,43	47,64
Multi-Support	2020	0%	44,86	34,03
Multi-Support	2021	0%	44,86	27,22
Multi-Support	2022	0%	37,39	27,22
Multi-Support	2023	0%	37,39	34,03

TABLE 2.4 : Portefeuille de contrats au 31/12/2023



### 2.2.2 Modélisation de l'Actif

Il convient de rappeler que les actifs de notre assureur se composent principalement d'obligations, d'actions, d'immobilier et de placements monétaires. Ces actifs sont modélisés sur une période de 30 ans à l'aide de l'outil ALM, qui en détermine leur valeur comptable (valeur d'achat) et leur valeur de marché à chaque pas de projection. Cette section se rapporte aux différentes valorisations effectuées pour les classes d'actifs.

#### Les Obligations

La valeur nette comptable et la valeur de marché des obligations sont déterminées en actualisant les flux futurs perçus. Ces flux incluent les coupons annuels et le remboursement du nominal à l'échéance, actualisés respectivement au taux technique à l'achat et au taux zéro-coupon.

En notant :

- $c$  le taux de coupon,
- $N$  le nominal,
- $i$  le taux technique,
- $T$  la date de maturité de l'obligation,
- $R(t, l)$  le taux zéro-coupon à la date  $t$  pour une maturité  $l$ ,

Les valeurs suivantes sont obtenues :

Valeur comptable	Valeur de marché (au temps $t$ )
$\sum_{k=1}^T \frac{cN}{(1+i)^k} + \frac{N}{(1+i)^T}$	$\sum_{k=1}^{T-t} \frac{cN}{(1+R(t, t+k))^k} + \frac{N}{(1+R(t, T))^T}$

#### Les actions et l'immobilier

Les actions et l'immobilier évoluent de manière similaire dans l'outil ALM. En effet, leur valeur de marché évolue en fonction des scénarios simulés par un GSE pour chacune des classes fournies en entrée de l'outil. Leur valeur comptable évolue selon les ventes et achats réalisés, influencés par les plus ou moins-values de l'année de projection.

#### Le Monétaire

Les placements monétaires dépendent d'investissements non risqués à court terme. Leur rendement à la date de projection  $t$  est indexé sur le taux sans risque, correspondant au taux zéro-coupon à un an projeté à  $t$  années  $R(t, 1)$ . Ce rendement dépend des trajectoires de taux fournies par le GSE en entrée de l'outil ALM.

### 2.2.3 Modélisation du Passif

Il convient dès à présent de détailler la modélisation du passif au sein de l'outil ALM. Les hypothèses retenues quant au comportement des assurés et le montant des frais considérés seront présentés. Un point d'attention sera également porté sur les provisions techniques considérées dans le modèle.

#### Les Provisions techniques

Trois types de provisions sont modélisées dans l'outil : la provision mathématique (PM), la provision pour participation aux excédents (PPE) et la réserve de capitalisation (RC).

**Provision Mathématique** La provision mathématique (PM) est définie comme étant la « différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés » d'après l'article R.343-3 du Code des assurances. Il convient néanmoins de préciser que la différence est déterminée à partir des valeurs actuelles probables. Elle représente la dette probable de l'assureur vis-à-vis de ses assurés.

Cette dernière est obtenue à la fin de chaque année de projection et est déterminée pour un contrat épargne par la formule suivante

$$PM_t = PM_{t-1} + Revalorisation_{t-1} + Primes_{t-1} - Charg.acquisition_{t-1} - Prestations_{t-1} - Frais_{t-1} - PrelevementsSociaux_{t-1},$$

où :

- les prestations constituent les rachats et les décès ;
- la revalorisation de la PM correspond à la capitalisation de l'épargne de l'assuré à un taux supérieur ou égal au TMG. Elle sera détaillée plus précisément dans la partie 2.2.4.

**Réserve de Capitalisation** La réserve de capitalisation constitue une « réserve destinée à parer les dépréciations des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ». Elle concerne les obligations (hors obligations à taux variable). En cas de vente de ces derniers, des versements ou des prélèvements sont effectués sur cette réserve, pour lisser les résultats financiers en découlant. Dans notre outil ALM, le management achète ou cède des obligations pendant toute la projection. En cas de cession d'obligations, les plus-values sont versées dans cette réserve et les moins-values engendrent des reprises.

Il convient de préciser qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'une provision et qu'elle est recensée parmi les fonds propres de l'assureur.

**Provision pour Participation aux Excédents** Les assureurs se doivent de verser une partie de leurs bénéfices aux assurés à travers le mécanisme de participation aux bénéfices présenté dans la partie 2.1. Néanmoins, cette participation n'est pas nécessairement versée pendant l'exercice qui les a produits mais doit être reversée dans les 8 ans qui suivent. Cette contrainte est respectée dans la modélisation.

En pratique, les assureurs disposent d'autres provisions techniques telles que la provision pour aléas financiers (PAF), la provision de gestion (PGG), la provision pour risque d'exigibilité (PRE), la provision pour frais d'acquisition reporté et la provision pour égalisation. Ces provisions ne seront pas considérées dans le cadre de ce mémoire.

## Le comportement des assurés

Les décès et les rachats engendrent des prestations à verser aux assurés. Elles sont modélisées en début d'année de projection, tout comme le versement des primes. La représentation de ces flux dans l'outil est détaillée dans cette section.

**Les décès** Les prestations en cas de décès de l'assuré sont versées immédiatement après survenance du décès, en début d'année. Il est supposé que ces dernières correspondent à la provision mathématique de clôture de l'année précédant le décès. Pour chaque *model point*  $i$ , un taux de décès  $tx_i$  est déterminé à partir de la table TF 00-02, conformément à l'article A335-1 régissant les contrats d'assurance-vie. Il

dépend donc de l'âge moyen du *model point* à la date  $t$ . La formule suivante déterminant la prestation totale issue des décès est alors obtenue

$$Prestation_{DC}(t) = \sum_{i \in MP} tx_i PM_{t-1}(i),$$

où :

- $MP$  correspond à l'ensemble des *model points* ;
- $PM_{t-1}(i)$  correspond aux provisions mathématiques de clôture à l'année  $t - 1$  au titre du *model point*  $i$ .

**Les rachats** Les assurés peuvent en pratique décider de racheter leur contrat. Ce rachat peut être total ou partiel, en fonction des conditions définies dans le contrat. Au titre de ce rachat, les assurés se voient verser une partie où la totalité de la provision mathématique prévue pour leur contrat. Dans le cadre de ce mémoire, seuls les rachats totaux sont considérés. Il est également important de distinguer les rachats structurels et les rachats conjoncturels, pour lesquels deux modélisations différentes sont proposées.

En effet, les rachats structurels émanent des particularités du contrat ou des besoins de liquidité de l'assuré et ne sont pas la conséquence des taux servis par les assureurs. Ces rachats sont en grande partie expliqués par la fiscalité des contrats d'épargne. En revanche, les rachats conjoncturels s'expliquent par la situation économique du moment et la capacité de l'assureur à servir des taux satisfaisants aux assurés. Les deux types de modélisations retenus sont détaillés ci-dessous.

- **les rachats structurels** : historiquement, les contrats d'assurance-vie étant mis en place pour protéger leurs bénéficiaires en cas de décès de l'assuré, ces derniers bénéficient d'une fiscalité très avantageuse qui incite les individus à ne pas racheter leurs contrats et à investir sur le long terme. Néanmoins, la fiscalité évolue en fonction de l'ancienneté du contrat, qui explique donc les rachats observés en pratique dans les portefeuilles d'assureurs.

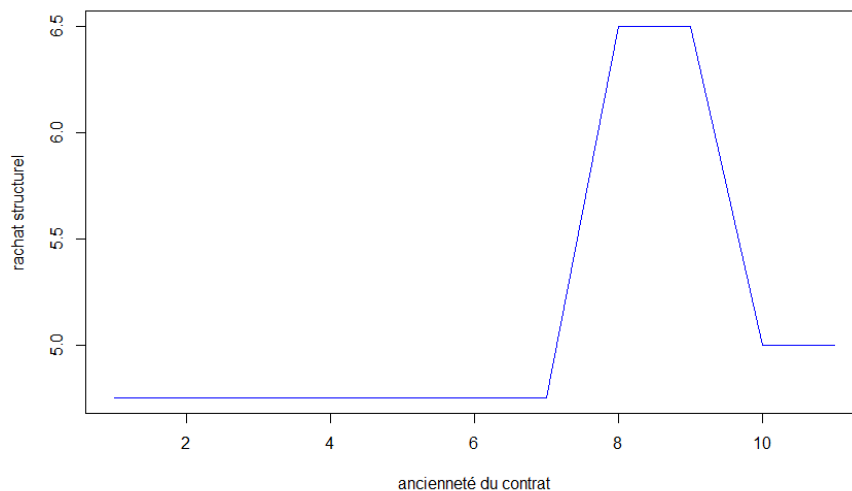


FIGURE 2.1 : rachats structurels observés en fonction de l'ancienneté du contrat

En particulier, à partir de 8 ans d'ancienneté, les assurés peuvent bénéficier d'un abattement annuel sur les gains de 4600€ lors de rachats (9200€ lorsqu'il s'agit d'un couple) ainsi que d'une

diminution du taux d'imposition. Par conséquent, l'outil modélise une loi de rachat fonction de l'ancienneté du contrat. Ces rachats sont exprimés en pourcentage de la PM du *model point*. La modélisation retenue au sein de l'outil est illustrée par la figure 2.1. Un pic est observé à 8 ans avec une augmentation du taux au delà de 8 ans pour refléter les caractéristiques du contrat.

- **les rachats conjoncturels ( $R_{conj}$ )** : ce type de rachat s'explique par le contexte économique affectant les performances de l'assureur. En effet, si l'assureur se trouve dans une situation où il ne parvient pas à servir des taux pouvant concurrencer des offres disponibles sur le marché telles que le livret A ou tout autre type de plans épargne proposé par les autres assureurs du marché, les assurés peuvent racheter leur contrat pour investir dans ces autres produits qui leur semblent plus intéressants. Ces types de rachats présentent un risque pour l'assureur et peuvent intervenir aux moments les plus inopportuns. En cas de hausse de taux, comme ce qui a pu être observé à fin 2022 (hausse brutale des taux sur le marché après un contexte de taux historiquement bas), les autres offres sur le marché paraissent plus attractives tandis que les valeurs des obligations détenues par les assureurs diminuent : pour financer le rachat massif de contrats, les assureurs vont devoir réaliser des moins-values sur les obligations ou bien même devoir utiliser leurs fonds propres pour financer ces prestations de rachat.

En pratique, pour modéliser ce type de rachats, les assureurs utilisent la loi de rachat conjoncturel proposée par l'ACPR dans les orientations nationales complémentaires du QIS 5. Il s'agit d'une fonction de l'écart de taux entre le taux servi par l'assureur et le taux attendu par l'assuré, déterminé à l'aide d'un taux de référence observé sur le marché. En notant  $r_s$  le taux servi par l'assureur,  $r_o$  le taux attendu par l'assuré,  $RC_{max}$  et  $RC_{min}$  les niveaux de rachats maximaux et minimaux observés, la loi est donnée par

$$R_{conj} = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } r_s - r_o < \alpha \\ RC_{max} \frac{r_s - r_o - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq r_s - r_o < \beta \\ RC_{min} \frac{r_s - r_o - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq r_s - r_o < \delta \\ RC_{min} & \text{si } \delta \leq r_s - r_o. \end{cases}$$

L'ACPR précise dans ACPR (2013) que les différents paramètres peuvent être interprétés de la manière suivante :

- «  $\alpha$  est le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à  $RC_{max}$ . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés,
- $\beta$  et  $\gamma$  sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces 2 seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié,
- $\delta$  est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixée à  $RC_{min}$ . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés. »

L'ACPR propose un plafond minimal et un plafond maximal pour chacun des paramètres présentés ci-dessus. Les assureurs sont libres de déterminer comme ils le souhaitent la valeur de ces derniers à condition qu'ils soient compris dans l'intervalle proposé par l'ACPR. Dans notre outil, les paramètres utilisés correspondent à la moyenne entre les plafonds minimum et maximum de chaque paramètre. Le tableau 2.5 recense les plafonds minimum et maximum déterminés par l'ACPR ainsi que la valeur retenue dans l'outil pour chacun des paramètres.

	Min proposé par l'ACPR	Max proposé par l'ACPR	Paramètres retenus dans le modèle
$\alpha$	-6%	-4%	-5%
$\beta$	-2%	0%	-1%
$\gamma$	1%	1%	1%
$\delta$	2%	4%	3%
$RC_{min}$	-6%	-4%	-5%
$RC_{max}$	20%	40%	30%

TABLE 2.5 : Tableau des paramètres utilisés pour la loi de rachats conjoncturels

La courbe des rachats conjoncturels en fonction de l'écart de taux observé est également représentée dans la figure 2.2.

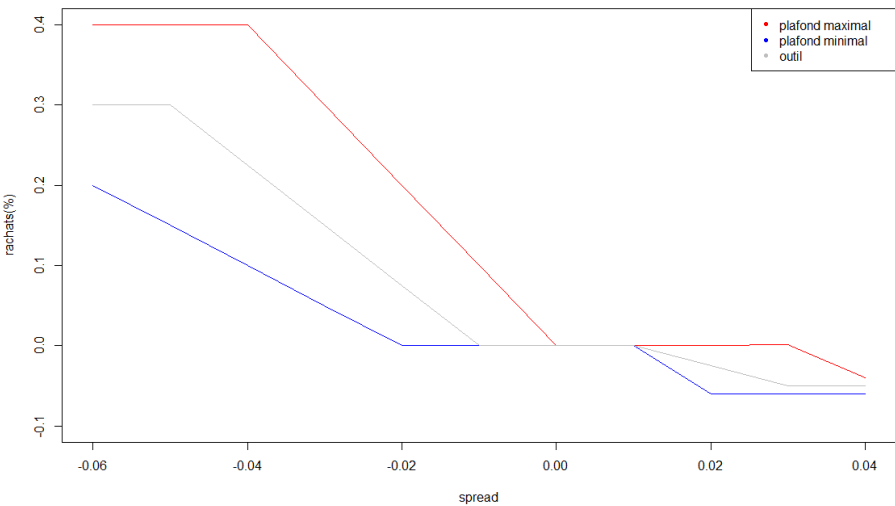


FIGURE 2.2 : rachats conjoncturels observés en fonction de l'écart de taux

Le taux attendu par l'assuré est modélisé par le taux servi par les concurrents (taux concurrent). Il est en effet responsable du comportement des assurés vis-à-vis des rachats : un assuré pouvant bénéficier d'un taux plus élevé que celui dispensé par son contrat a intérêt à le racheter et investir dans des produits concurrents.

En pratique, il n'existe pas d'unique taux concurrent. Néanmoins, un unique taux concurrent est considéré dans le cadre de notre étude par simplification. L'ACPR propose de refléter la concurrence à travers l'utilisation d'une référence exclusivement obligatoire. Pour suivre cette recommandation, à chaque date de projection au sein de l'outil, le taux concurrent est mis en place de sorte à ce que le taux de rendement de l'actif de la concurrence soit égal au rendement d'une OAT de maturité 10 ans. La modélisation du taux concurrent dans l'outil ALM de Forvis Mazars actuariat est détaillée dans le mémoire de ZOUINE (2023).

**Les primes** Le mémoire s'envisage dans un cadre Solvabilité II où l'évaluation du bilan s'effectue dans un contexte de *run-off*. Il n'y a donc pas de nouveaux-entrants au sein du portefeuille de l'assureur utilisé qui soient modélisés et les primes futures sont supposées nulles.

## Les Frais

Les frais constituent les charges auxquelles font face les assureurs, notamment afin de gérer les contrats détenus dans le portefeuille de la compagnie d'assurance et de s'assurer du respect des engagements faits au titre de ces contrats. Les frais modélisés au sein de l'outil ALM correspondent à :

- **L'imposition** Le taux d'imposition retenu est de 25,83% sur l'ensemble de la période de projection. Il est constitué de l'impôt sur les sociétés étant de 25%, et de la contribution sociale sur les bénéfices de 0.83%.
- **Les prélèvements sociaux** Ils sont effectués sur les plus-values constatées sur les contrats d'assurance-vie et sont prélevés en début d'année de projection.
- **Autres frais** Les autres frais considérés dans notre modèle correspondent aux chargements sur les placements, aux frais de gestion et aux frais d'administration. Les frais d'acquisition sont nuls car une situation de *run-off* est appliquée.

### 2.2.4 Modélisation des interactions entre l'actif et le passif

L'intérêt principal de l'outil ALM dans le cadre de la projection des engagements de l'assureur réside dans la prise en compte d'interactions entre l'actif et le passif. En effet, ces deux catégories n'évoluent pas de manière indépendante et influent l'une sur l'autre, notamment à travers des exigences réglementaires ou encore l'action entreprise par le *management* pendant la projection afin de satisfaire certains objectifs, tels que la revalorisation des provisions mathématiques, détaillée dans la partie 2.2.4. Dans cette section, les hypothèses et choix de modélisations de ces interactions seront présentés. Les étapes de prise en compte de ces différentes interactions le long d'une année de projection sont exposées dans la figure 2.3.

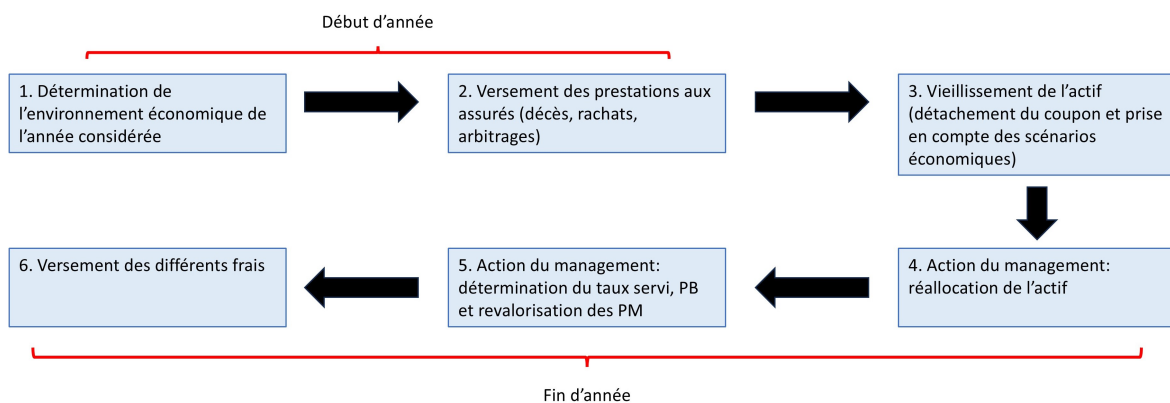


FIGURE 2.3 : Projection sur une année au sein de l'outil ALM

## Les produits financiers

Les produits financiers de la compagnie fictive au titre de l'année de projection  $t$  sont déterminés à la fin de cette dernière. Ils sont par la suite utilisés pour revaloriser les PMs et sont définis de la

manière suivante :

$$PF_t = \sum_i Coblig_t(i) + PVLact_t + PVLimmo_t + PVLmon_t - Fplts_t, \quad (2.1)$$

avec :

- $Coblig_t(i)$  : coupon reçu par la compagnie (et/ou nominal pour les obligations arrivant à échéance) au titre de l'obligation  $i$  ;
- $PVLu_t$  les plus-values réalisées sur l'actif  $u$  ;
- $Fplts_t$  les frais de placement supportés par la compagnie.

Il convient de préciser que l'outil prévoit, lorsque les conditions économiques le permettent, la réalisation d'un pourcentage de PVL sur l'action et l'immobilier, donné en entrée de l'outil.

Les produits financiers sont ensuite attribués aux actionnaires et aux assurés en suivant la règle

$$PFassures_t = PF \times PARTassures_t; \quad (2.2)$$

$$PFactionnaires_t = PF \times PARTactionnaires_t \quad (2.3)$$

où la part des assurés et la part des actionnaires sont définies en fonction de la part de chacun prise dans le passif de la compagnie. En supposant que la PPE et la PM reviennent aux assurés et le reste du passif aux actionnaires,

$$PARTassures_t = \frac{PPE_{t-1} + PM_{t-1}}{Passif_{t-1}}; \quad (2.4)$$

$$PARTactionnaires_t = 1 - PARTassures_t. \quad (2.5)$$

### L'action du *management*

Pour permettre à l'assureur de mener à bien son activité, ce dernier doit s'assurer de pouvoir constamment être en mesure de respecter ses engagements envers les assurés et d'être consistant avec les offres proposées sur le marché. Pour ce faire, le *management* prend des mesures. Dans notre outil, la réallocation de l'actif et la revalorisation des PMs sont considérés.

**La réallocation de l'actif** Voici les hypothèses retenues quant à l'allocation d'actifs. Cette dernière est supposée constante dans le temps et est fournie en entrée de l'outil ALM de Forvis Mazars Actuariat. Le portefeuille est supposé majoritairement obligataire, permettant à l'assureur d'avoir des revenus fixes. L'allocation à respecter est la suivante. Ce choix sera précisé ultérieurement.

Actif	Allocation
Obligations	70%
Actions	13%
Immobilier	13%
Monétaire	4%

TABLE 2.6 : Allocation de l'actif cible retenue au sein de l'outil ALM

De nombreux mécanismes intervenant durant l'année de projection vont avoir un impact sur l'allocation de l'actif et rendre cette étape nécessaire. Il y a notamment le versement des prestations et de frais qui vont avoir un impact sur le monétaire ou encore la revalorisation de la provision mathématique qui peut engendrer la réalisation de PVL actions.

Afin de satisfaire l'allocation initiale, des achats et ventes sont réalisés sur les différentes catégories d'actifs. Pour les obligations, la règle suivante est appliquée :

- Cessions d'obligation : la vente d'obligation est appliquée en priorité aux obligations dont l'échéance est la plus rapprochée ;
- Achat d'obligations : les obligations achetées consistent uniquement en titres d'Etat de maturité 10 ans, de type AAA et cotant le pair.

Il convient de rappeler que les plus ou moins-values réalisées sur la vente d'actions ou d'immobilier ne sont pas traitées comme celles réalisées sur les obligations. En effet, comme le précise la partie 2.2.3, les plus ou moins-values issues des obligations sont gérées à travers la réserve de capitalisation et ne font pas l'objet de produits financiers. En revanche, les plus ou moins-values issues des ventes / achats d'action ou d'immobilier à travers ce processus de réallocation sont affectées aux produits financiers et sont donc partagées entre les assurés et les actionnaires en respectant la règle établie ci-dessus.

**La revalorisation des PMs** La revalorisation de PMs détenues au titre de chaque assuré (*model point dans notre cas de figure*) constitue la seconde phase d'action du management prévu par l'outil. Celle-ci forme une étape essentielle dans les phases de projection annuelles des engagements de l'assureur et explique en grande partie les comportements des assurés. En effet, elle permet de rendre compte de la situation économique dans laquelle l'assureur se trouve et évalue la capacité de ce dernier à verser le taux cible prévu par le management aux assurés. Un taux de revalorisation inférieur au taux versé par la concurrence inciterait les assurés à racheter leur contrat tandis qu'un taux supérieur à celui observé sur des produits concurrents favoriserait le prolongement du contrat détenu par l'assuré et le maintient de son épargne.

La revalorisation effective appliquée aux contrats des assurés dépend donc de plusieurs facteurs :

- le taux concurrent introduit dans la section 2.2.3 ;
- le taux cible correspondant au taux fixe traduisant les objectifs de revalorisation du management ;
- les engagements contractuels tels que le taux minimum garanti (TMG) et la participation aux bénéfices contractuelle (PB contractuelle) présentés dans la section 2.1.

Dans l'outil ALM, le taux cible dépend du taux de rendement observé pour un nouvel entrant et se définit de la façon suivante :

$$r_{cible_k}(t) = \max(85\%r_{servi_k}(t-1), r_{servi_k}(t-1)) + \frac{1}{3}\max(0, r_c(t) - r_{servi_k}(t-1)) + \frac{1}{2}\min(0, r_c(t) - r_{servi_k}(t-1)),$$

où  $r_{servi_k}$  correspond au taux servi au *model point k* et  $r_c$  au taux concurrent.

Le versement du taux cible aux assurés dépend des moyens financiers de l'organisme d'assurance, issus de ses produits financiers et de la PPE. Il convient de remarquer que la revalorisation doit à minima comprendre le TMG et la PB contractuelle, car l'assureur se doit d'honorer ses engagements envers les assurés.

Ainsi, la revalorisation des PMs s'effectue en deux temps, détaillés ci-dessous.



### 1. La revalorisation contractuelle

Cette revalorisation est déterminée pour chaque *model point*  $k$  et aboutit à la revalorisation

$$Revalo_{contrat_k} = \max(PM_k TMG_k, PB_{contrat_k} PF_{assures} \frac{PM_k}{PM})$$

où

- $PM_i$  correspond à la revalorisation prévue au titre du *model point*  $k$  ;
- $TMG_i$  le TMG prévu au titre du contrat du *model point*  $k$  ;
- $PB_{contrat_k}$  la PB contractuelle du *model point*  $k$  ;
- $PF_{assures}$  la part des produits financiers revenant aux assurés ;
- $PM$  la provision mathématique totale.

Alors, le taux de revalorisation contractuel pour le contrat  $k$  est donné par

$$r_{contrat_k} = \frac{Revalo_{contrat_k}}{PM_k}$$

### 2. La revalorisation cible

Le niveau de revalorisation ciblé par le *management* dépend des taux utilisés par la concurrence.

Pour chaque *model point*, il est défini de sorte à limiter les rachats conjoncturels, par

$$Revalo_{cible_k} = PM_k \max(r_{cible_k}, r_{contrat_k}).$$

Afin de déterminer le taux qui sera effectivement servi aux assurés pour chaque année de projection considérée, l'outil ALM prévoit un algorithme de politique de taux servi, détaillé dans le mémoire de ZOUINE (2023). Il précise les actions employées par le *management* pour verser le taux cible. Il reprend les deux étapes précisées ci-dessus.

Les moyens employés pour servir les taux sont :

- la réalisation de plus-values sur actions ;
- l'application de reprises de PPE ;
- le recours à la part des produits financiers destinée aux assurés.

Dans le cas où ces actions ne sont pas suffisantes pour verser le montant de revalorisation contractuel dans un premier temps, l'assureur utilise les produits financiers issus des actifs en représentation des fonds propres et de la part du résultat financier à destination de l'assureur. Si cela ne suffit toujours pas, il peut réaliser des pertes sèches sur les fonds propres.

Pour verser le taux cible, l'assureur regarde en premier lieu si les 12,5% de PPE reversés annuellement dans l'outil sont suffisants pour atteindre ce dernier. Sinon, il puisera d'abord dans les bénéfices financiers versés aux assurés restants, puis se dirigera vers la PPE résiduelle après reprise automatique de 12,5%, en se limitant à 85% de la PPE avant reprise automatique. En derniers recours, il utilisera les bénéfices financiers à destination de l'assureur et réalisera de nouvelles plus-values sur action.

Il est à noter que  $r_{contrat} \leq r_{servi} \leq r_{cible}$  pour chaque année de projection.

## 2.2.5 Obtention du Best Estimate

Après avoir détaillé les différents mécanismes intervenant dans la mise en place de la projection ALM, le mécanisme d'obtention du BE peut être précisé. Il convient de rappeler à quoi cette quantité correspond. Il s'agit de la somme probable actualisée des flux de trésorerie futurs de l'assureur.

Les mécanismes de calcul du BE à un an seront premièrement introduits, puis une partie suivante explicitera les modifications apportées à l'outil ALM pour déterminer le BE à un an.

Le BE est estimé au sein de l'outil ALM par la méthode de Monte-Carlo, qui s'appuie sur la loi des grands nombres pour estimer la valeur d'une quantité, à partir d'un nombre important de simulations indépendantes. En effet, dans le cadre de cette étude, 1000 trajectoires de scénarios économiques RN (pour rappel, le BE est déterminé dans le cadre de *market consistency*) sont simulées à partir du GSE, présenté par la suite. Ces différents scénarios de trajectoires sur 30 ans sont utilisés pour faire interagir les mécanismes ALM et déterminer le flux d'engagements futurs de la compagnie d'assurance fictive au titre de ces scénarios. Ainsi, 1000 réalisations de flux futurs sont effectuées. Le *Best Estimate* constitue alors la moyenne de la somme des flux futurs obtenus au titre de chacune des projections et s'obtient à partir de la formule

$$BE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^T \delta_j^i P_j^i, \quad (2.6)$$

où :

- $n$  constitue le nombre de simulations (ici  $n = 1000$ ) ;
- $T$  l'horizon de projection (ici  $T = 30$ ) ;
- $\delta_j^i$  le facteur d'actualisation pour la  $i^{eme}$  simulation ;
- $P_j^i$  le flux de passif de l'année  $j$  pour la simulation  $i$  ;

qui correspond à l'estimateur Monte Carlo de  $\mathbb{E}^{QxP} \left[ \sum_{j=1}^T P_j \delta_j \right]$ .

Il est important de noter qu'un nombre suffisant de simulations doit être effectué afin que l'erreur d'estimation soit tolérable. En pratique, il convient de prendre le nombre de simulations à partir duquel la convergence de cette quantité est observée. Ce choix conduit à l'obtention du plus faible nombre de simulations pour lequel l'erreur est acceptable. Il permet ainsi de minimiser le nombre nécessaire de simulations et de limiter le temps de calcul et sa complexité. La figure 2.4 met en avant que 1000 simulations permettent une convergence du BE.

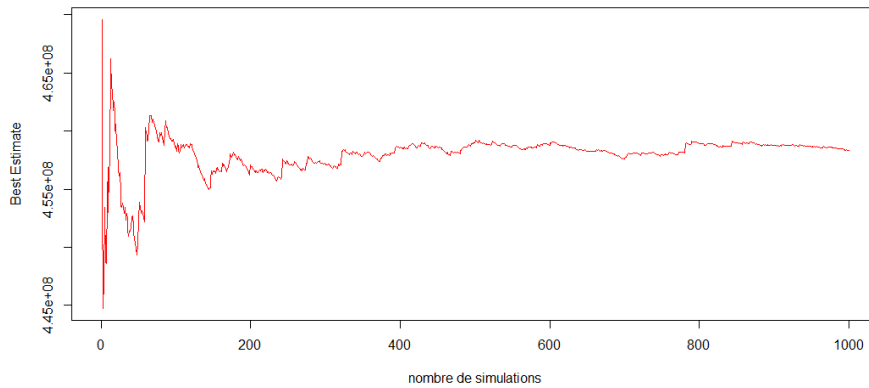


FIGURE 2.4 : Détermination du nombre de simulations optimal

## 2.2.6 Tests de cohérence

Afin de s'assurer de la cohérence des résultats qui sont fournis par l'outil ALM, des tests sont effectués. Les valeurs données par le test TRA (Taux de rendement des actifs) sont notamment observées pour vérifier pour vérifier qu'il n'y a ni perte ni création de richesse lors de la projection. L'idée

de ce test est de revaloriser le passif en actualisant la valeur des flux entrants et sortants à chaque pas de temps  $t$ , à partir du taux de rendement des actifs observé en sortie de modèle. Pour que le test soit validé, la valeur obtenue doit être égale à la valeur de marché de l'actif au temps 0. Les flux pris en compte dans la revalorisation du passif correspondent à ceux observés pour la détermination du BE.

En reprenant les notations précédemment introduites pour chaque année de projection, le TRA suivant est obtenu :

$$TRA_t = \frac{PF_t + \Delta PMVL_t}{A_{t-1}^{VM} - Prestation_{DC}(t) - Rachats(t)}.$$

Un déflateur qui permet d'actualiser une quantité sur la base des TRA est alors déterminé :  $D_t^{TRA} = \prod_{k=1}^t \frac{1}{1+TRA_k}$ .

Le test TRA effectué au titre du scénario économique n considéré au sein de l'outil ALM est le suivant :

$$Test^{TRA}(n) < 10^{-16}, \quad (2.7)$$

où

$$Test^{TRA}(n) = \frac{A_0^{VM} - P_{30}^{VC}(n) \times D_{30}^{TRA}(n) + \sum_{t=0}^{30} F_t(n) \times D_t^{TRA}(n)}{A_0^{VM}}, \quad (2.8)$$

avec  $F_t(n)$  correspondant aux flux observés en début d'année  $t+1$  et en fin d'année  $t$ . Pour chaque run effectué au sein de l'outil ALM dans le cadre de notre étude, un test TRA est effectué et validé.

## 2.3 Mise en place du mécanisme SdS dans l'outil ALM

Afin d'obtenir des distributions de NAV au titre des risques considérés, une approche *Curve Fitting* présentée dans le chapitre 1 et détaillée dans le chapitre 3 est mise en place. Cette méthode consiste à adopter une approche SdS en limitant le nombre de scénarios primaires considérés tout en gardant le même nombre de scénarios secondaires pour chacun des scénarios primaires. Elle permet de limiter la complexité de l'approche SdS et est en pratique adoptée par certaines compagnies d'assurance. Après avoir appliqué la méthode SdS sur un nombre réduit de scénarios primaires ( $p$ ), un jeu de données  $(R_i, NAV_1^i)_{1 \leq i \leq p}$  (avec  $R_i$  le  $i^{eme}$  scénario primaire retenu et  $NAV_1^i$  la NAV au temps 1 associée) est obtenu. Il est utilisé par la suite pour construire une fonction qui à tout scénario primaire associe une NAV au temps 1. Cette section a pour but de détailler comment a été mis en place le mécanisme SdS dans l'étude. Pour ce faire, il sied de rappeler que les simulations primaires s'effectuent dans un contexte monde réel et que les scénarios secondaires sont en risque neutre. Ainsi, la mise en place de l'approche SdS fait appel à deux types de GSE :

- Monde Réel (RW) ;
- Risque Neutre (RN).

Dans le cadre du mémoire, l'outil ALM est utilisé afin de générer le jeu de données par la suite utilisé pour entraîner la fonction mise en place par *Curve Fitting* qui à tout scénario fait correspondre une valeur de NAV au temps 1. Le mécanisme SdS mis en place dans l'outil permet en premier lieu de vieillir notre bilan à un an en RW et par la suite de prendre en entrée les GSE RN pour obtenir un BE à un an au titre de chaque scénario considéré. Une NAV par scénario en est alors déduite. Afin d'illustrer les modifications apportées à l'outil ALM dans le but de mettre en place le mécanisme SdS, les figures 2.6 et 2.7 représentent un schéma simplifié de ce qui a été implémenté. Dans le but de mieux visualiser ces modifications apportées, un schéma simplifié du fonctionnement de l'outil ALM initial est exposé dans la figure 2.5.

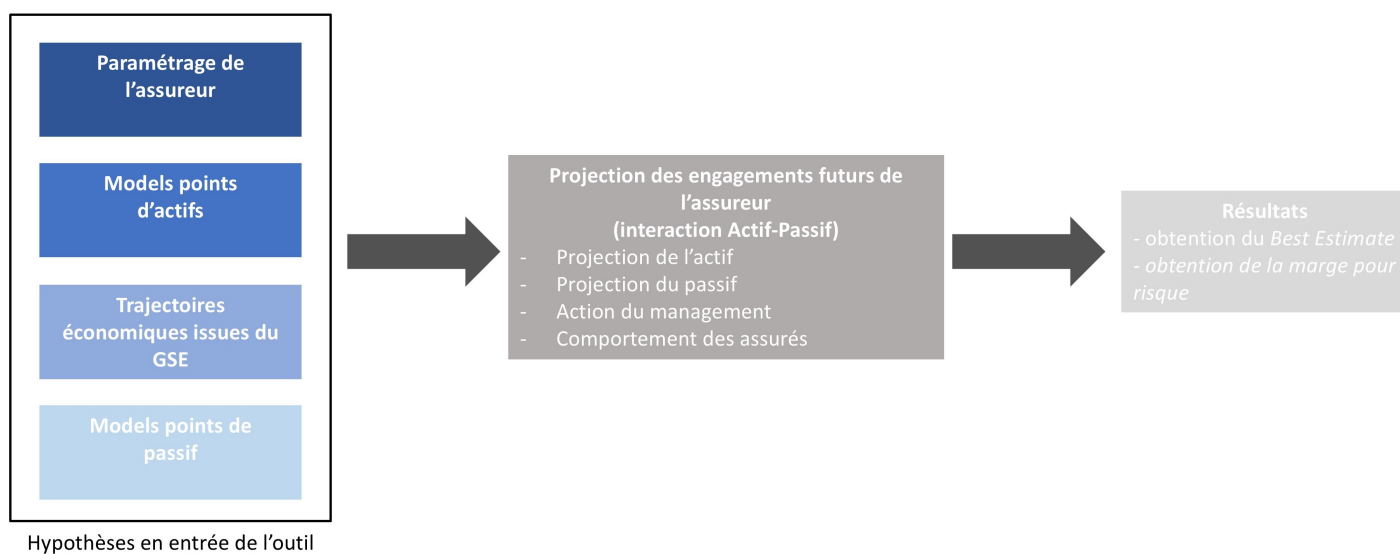


FIGURE 2.5 : Fonctionnement de l'outil ALM

Afin de déterminer la NAV telle que présentée dans le paragraphe ci-dessus, le logiciel développé par R CORE TEAM, 2023 parcourt deux fois l'outil ALM. Le premier parcours permet de vieillir le bilan de l'assureur à un an à partir des trajectoires RW.

#### Premier run ALM de 0 à 1 an

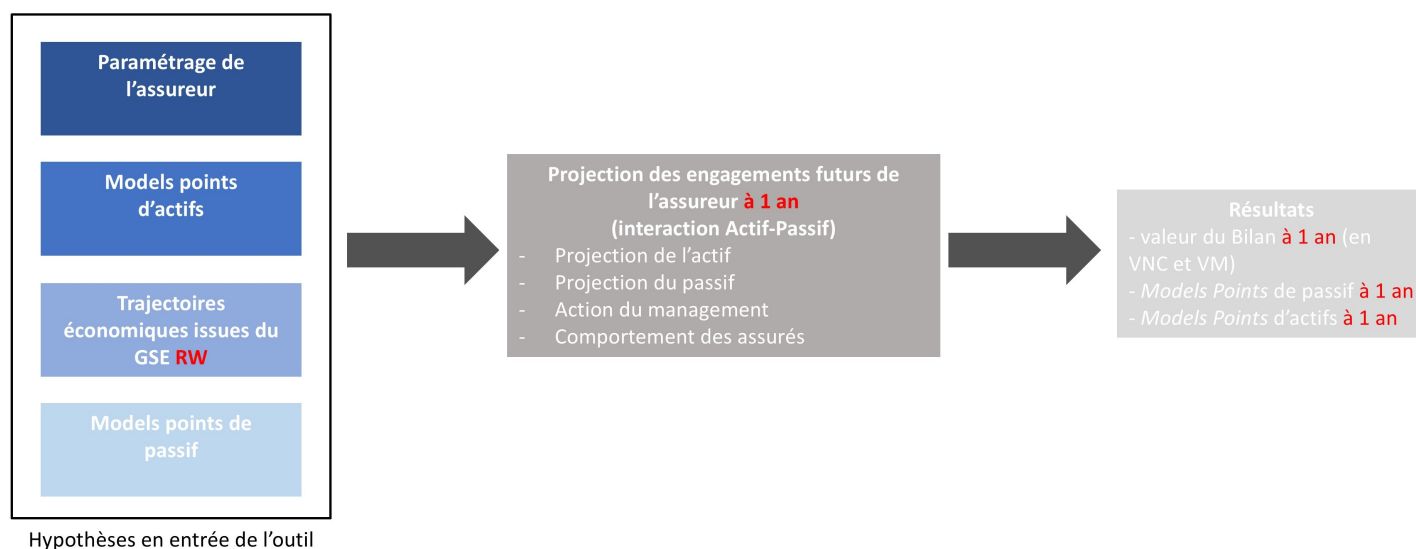


FIGURE 2.6 : Première étape de la mise en place SdS au sein de l'outil ALM : vieillissement du Bilan à un an en RW

Une fois que le bilan a été vieilli à un an, les données à un an de l'assureur (valeur de marché des actifs, bilan en valeur comptable, l'évolution des *model points* de passif, etc) sont reprises par le code et utilisées en entrée de l'outil ALM pour lancer un second *run* permettant de faire évoluer les engagements de l'assureur sur 30 ans, en utilisant le GSE RN.

Deuxième run ALM de 1 à T années

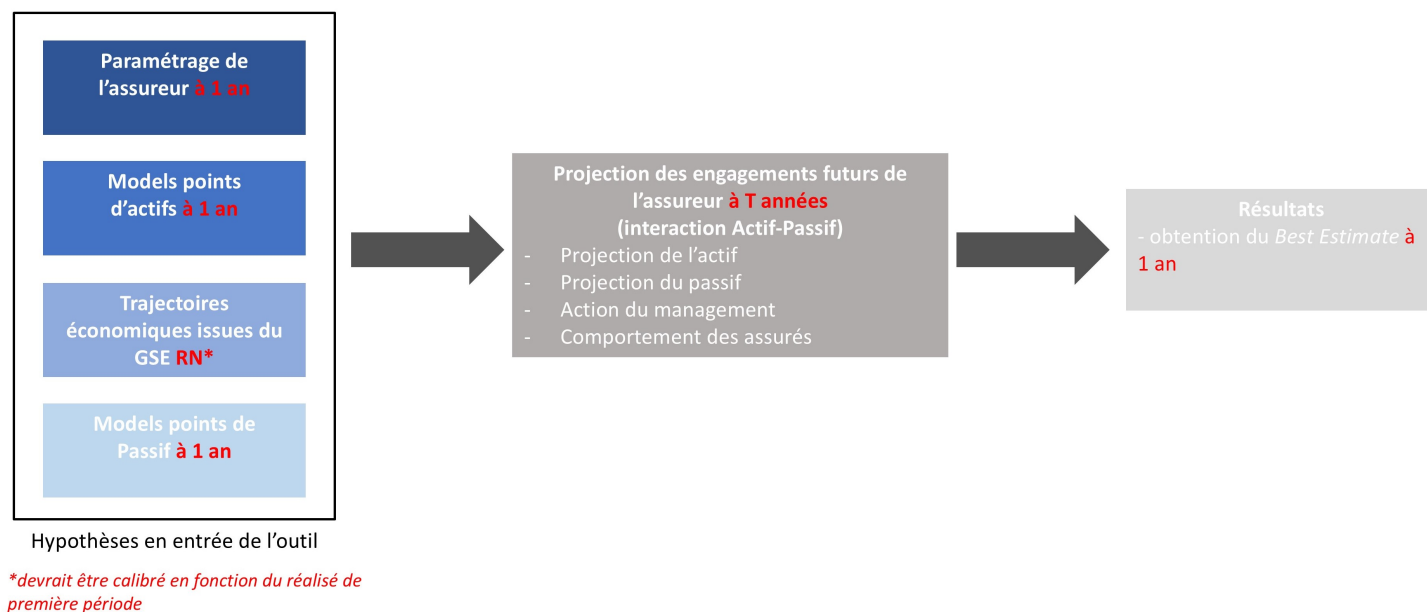


FIGURE 2.7 : Deuxième étape de la mise en place SdS au sein de l'outil ALM : projection sur 30 ans des engagements de l'assureur

Après avoir présenté dans sa globalité l'approche considérée pour mettre en place le mécanisme SdS, l'implémentation des différents GSE est étudiée. Ces derniers modélisent les trajectoires des facteurs de risques financiers auxquels notre compagnie fictive est exposée.

## 2.4 Les générateurs de scénarios économiques

Comme relevé dans la partie 2.2.5, l'outil ALM utilise des générateurs de scénarios économiques (GSE) en entrée afin de prendre en compte les différents scénarios de conjonctures économiques pouvant se présenter et projeter par la suite les engagements de l'assureur sur l'horizon de temps désiré. Ils constituent des outils permettant la simulation conjointe de trajectoires stochastiques de variables financières rendant compte de l'évolution dans le temps de l'état global de l'économie. À partir d'une dynamique déterminée et pour le pas de temps souhaité, un GSE permet d'obtenir un certain nombre de trajectoires de ces grandeurs jusqu'à un horizon déterminé. Ces derniers permettent ainsi de déterminer le comportement des différents facteurs de risques financiers et de les prendre en compte dans la projection ALM.

Les facteurs de risques économiques considérés dans l'outil et pour lesquels des GSE diffusent des trajectoires sont les actions, l'immobilier et les taux.

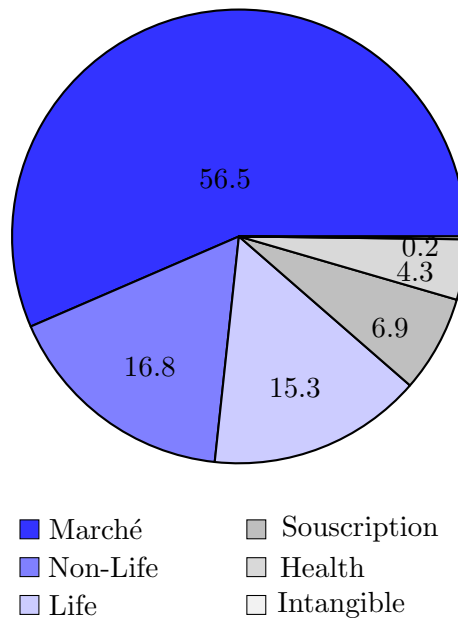
Dans ce mémoire, comme précisé dans la section 2.3, une première projection sur un an est effectuée (en RW) puis une seconde projection sur 30 ans en RN. Dans le cadre de ces différentes projections, deux générateurs de scénarios économiques sont considérés : le GSE RW et le GSE RN. Les différentes dynamiques prises en compte dans chacun des GSE pour diffuser les facteurs de risques économiques considérés sont explicités dans cette partie.

### 2.4.1 Facteurs de risques retenus

Pour cette étude, une approche simulatoire est retenue pour déterminer les capitaux à constituer au titre des risques action et immobilier. Ces deux facteurs sont inclus dans le module Marché. Pour un grand nombre d'assureurs et plus particulièrement pour les assureurs-vie, ce module représente la plus importante contribution au SCR. Il est notamment observable à l'aide de la figure ci-dessous qu'il mobilisait en moyenne 56,5% du SCR en 2018. Avec la prédominance du risque de marché sur la contribution des risques au SCR, les facteurs de risques immobilier et action peuvent donc être intéressants à étudier car ils ont potentiellement un impact non négligeable sur le SCR final obtenu.

**Ventilation du SCR par risques**

(source : FRAERIS (2018))



Le rapport SFCR d'AXA (2023) mentionne notamment une part du risque de marché de 49% du SCR global avant diversification.

Le rapport EIOPA sur la calibration de la FS, CEIOPS (2010), présente également des risques immobilier et action qui évoluent de façon dépendante l'une de l'autre et qui peuvent afficher une structure de dépendance intéressante pour la suite de notre étude, en particulier dans le cadre de l'affectation de copules. Il y est notamment précisé que les rendements des indices immobiliers sont grandement influencés par les rendements des actions. Comme vu précédemment dans la figure 1.8, la corrélation calibrée par l'EIOPA pour la corrélation FS entre les risques immobilier et action correspond à 75%. Effectivement, d'après leur étude, un choc négatif sur la valeur des actions peut avoir un effet conséquent sur l'immobilier. Cette baisse de rendement reflète une récession économique et une intensification de l'aversion au risque. Cela engendre alors une baisse de la demande en immobilier et par conséquent une diminution de la valeur de l'indice. L'EIOPA justifie donc cette corrélation importante par le fait que ces risques sont reliés par les conditions économiques.

En plus d'être potentiellement intrinsèquement liés, ces risques sont modélisables à travers une dynamique de *Black&Scholes*. Une autre raison ayant motivé ce choix de facteurs de risques constitue la disponibilité des données qui en découlent.

Une allocation (précisée en section 2.2.4) avec une part d'action et d'immobilier équivalente a volontairement été retenue afin d'éviter une situation de concentration du risque action-immobilier au

sein du risque action. Cela constituerait un frein à notre étude. En effet, en cas de concentration du risque au niveau d'un unique facteur, la dépendance existante entre les différents facteurs ne joue pas un rôle prépondérant dans la détermination du capital de solvabilité.

### 2.4.2 GSE monde réel

Le GSE RW est un outil qui, contrairement aux GSE RNs, est calibré à partir des données historiques et permet de répliquer des observations dans l'historique des données. Il est utilisé dans les modèles internes pour vieillir les facteurs de risques et le bilan à un an, comme précisé dans la partie 1.5.2. L'objectif est alors de se placer à un an afin de pouvoir déterminer la valeur de marché de l'actif ainsi que le BE, obtenu à partir des simulations RN effectuées à cette date. Ce GSE RW est donc indispensable pour déterminer la distribution de la NAV à un an et par la suite déterminer le SCR.

Les facteurs de risques financiers considérés dans le modèle doivent ainsi être diffusés sur un an en vision RW. Les dynamiques retenues pour l'action et l'immobilier seront présentées dans cette partie. Les taux seront également analysés.

#### Risques action et immobilier

Les actions et l'immobilier constituent les actifs les plus volatils du portefeuille d'un assureur, et ont un comportement similaire. Ils nécessitent par conséquent une modélisation permettant de reproduire ces fluctuations.

La profondeur et la granularité retenue pour ces indices est identique : une profondeur de 20 ans est retenue, permettant de prendre en compte au sein de l'historique des périodes plus stables tout comme des périodes de crise. En effet, l'objectif étant d'évaluer un risque d'occurrence de 200 ans, il semble judicieux de prendre une profondeur importante permettant de refléter l'évolution des différents indices dans le temps. Il est néanmoins important de ne pas considérer un historique trop important engendrant un phénomène de tendance. 20 ans semble donc constituer un bon compromis. La maille retenue est journalière. Elle permet de disposer d'un grand nombre de données, engendrant par la suite des estimateurs plus robustes.

#### Données retenues pour calibrer le GSE

**L'indice action** Les données retenues pour l'indice action correspondent aux données du CAC40 entre les années 2003 et 2023 en maille journalière, extraites à partir de Bloomberg. Ces données ont été sélectionnées par soucis de cohérence entre les GSE RW et RN utilisés, le Pôle Ingénierie Financière de Forvis Mazars calibrant le GSE RN à partir de ces données.

**L'indice immobilier** Pour l'indice immobilier, deux types de données ont été retenues. En effet, le portefeuille d'un assureur est composé de plusieurs types d'actifs immobilier, classés dans l'énumération par ordre d'importance :

1. Bureaux/Commerces ;
2. Industriel ;
3. Résidentiel ;

#### 4. Hôtel et loisirs.

Afin de capturer les spécificités de chacun des types d'actifs, il a été décidé de se concentrer sur les données IEIF (Institut de l'épargne immobilière et foncière) Europe et les données « Indice des prix des logements (neufs et anciens) – Brut – Base 100 en moyenne annuelle 2015 ». Ces derniers sont utilisés dans le cadre de la diffusion RN permettant de projeter les engagement de l'assureur sur 30 ans.

Ces deux indices semblent pertinents pour capturer l'ensemble des particularités du portefeuille immobilier car ils comportent des caractéristiques complémentaires. L'indice Euronext IEIF REIT Europe constitue un indice boursier offrant une vision des fluctuations et tendances du marché de l'immobilier commercial et d'entreprise à l'échelle européenne. Les compagnies d'assurance françaises comprenant une grande partie de leurs investissements immobiliers en Europe, cet indice semble pertinent. Il permet de capturer la dynamique du marché immobilier européen pour les actifs non résidentiels. Comme le précise GILLOT (2019), cet indice est régulièrement utilisé comme référence sur le marché de l'assurance. Les indices des notaires en France permet de son côté de refléter l'évolution de l'indice immobilier résidentiel en se concentrant sur le marché français. Ainsi, ces indices se complètent et permettent de prendre en compte la dimension géographique et sectorielle des investissements en Europe, en tenant compte des dynamiques spécifiques aux différents marchés régionaux et secteurs d'activité. Cette approche permet de capturer à la fois les tendances du marché résidentiel local, via les indices des notaires, et celles du marché européen plus large et diversifié, via l'indice Euronext. En effet, comme le précise CEIOPS (2010), le marché Anglais de l'immobilier est par exemple beaucoup plus volatile que le marché français. Il est donc nécessaire de pouvoir considérer des données permettant de refléter les particularités du marché européen et non uniquement français.

#### Dynamiques retenues pour la diffusion des facteurs de risques

Un modèle de *Black&Scholes* sera retenu pour la modélisation de ces actifs. Ce dernier est très populaire sur le marché en raison de son interprétabilité et sa facilité d'implémentation. Il est important de souligner que l'hypothèse de volatilité constante dans le temps a été largement contestée. En effet, des études ont montré que la volatilité dépend du temps et qu'elle est très sensible au contexte économique et financier. Les GSE ne constituant pas l'objet de ce mémoire, cette dynamique simple sera retenue. Certains modèles tels que le modèle de Heston permettent une reproduction plus fidèle du marché, en tenant compte de la variation dans le temps de la volatilité et du concept de *smile*. Un lecteur intéressé pourra se référer à SUSLU (2012).

La dynamique appliquée aux deux risques est donc :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad (2.9)$$

avec :

- $X_t$  : le processus de prix du sous-jacent à l'instant  $t$  (action ou immobilier) ;
- $\mu$  : le *drift* ;
- $\sigma$  : la volatilité du sous-jacent ;
- $B_t$  : mouvement brownien à l'instant  $t$  (dans la suite,  $B_t$  désignera également un mouvement brownien).

Un des avantages du modèle de *Black&Scholes* est donné par le fait qu'une formule fermée pour le sous-jacent est disponible. En effet, la formule d'Itô peut être appliquée à  $Y_t = \ln(X_t)$ ,  $X_t$  étant un



processus d'Itô et  $x \longrightarrow \ln(x)$  étant  $\mathcal{C}^2$ . Alors,

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right). \quad (2.10)$$

Comme le cadre RW est appliqué, le *drift* et la volatilité se déterminent à partir des données historiques. En effet, le calibrage en RW s'obtient à partir de la méthode de maximum de vraisemblance des observations des log-rendements  $\ln \left( \frac{X_t}{X_{t-\delta}} \right)$ , avec  $\delta$  le pas de temps de la série historique. Ces observations ont pour avantage d'être indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, ces log-rendements suivent une loi normale  $\mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta, \sigma^2 \delta \right)$ .

Le paramétrage d'une loi normale  $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$  à partir d'une méthode de maximum de vraisemblance, pour un échantillon  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , permet d'obtenir les paramètres suivants :

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Par conséquent, en notant  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  la série historique retenue, les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont obtenus de la manière suivante :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n\delta} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\hat{\sigma}^2}{2},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\delta} \times \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

où  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

#### Intégration des deux jeux de données dans la mise en place de la diffusion immobilier

Pour la diffusion immobilière, nous nous basons sur les deux jeux données présentés précédemment afin de représenter l'ensemble du portefeuille immobilier de l'assureur. Par simplification, la modélisation de l'indice immobilier ne constituant pas le cœur de ce mémoire, une seule dynamique est utilisée pour diffuser l'indice immobilier, illustrant les deux historiques. Cette vision simplificatrice n'est pas idéale et permet simplement de prendre en compte les deux jeux de données représentatifs du portefeuille. Une approche plus complète considérerait deux types d'indices immobilier et  $I^1$  et  $I^2$ , représentés par les deux jeux de données, en allouant les deux types d'indices au sein du portefeuille immobilier. Ces deux indices seraient alors diffusés en fonction d'une dynamique de Black&Scholes paramétrés tel que présenté ci-dessus.

Pour diffuser l'indice immobilier, les *drifts* et volatilités de la dynamique de Black&Scholes pour chacun des jeux de données ont été déterminés. Nous obtenons alors deux dynamiques,

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1,$$

$$\frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2,$$

avec  $W_1$  et  $W_2$  deux mouvements browniens.

Afin de regrouper ces deux indices au sein d'une unique dynamique de Black&Scholes, nous calibrons les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de la dynamique de Black&Scholes en suivant la relation

$$\ln \left( \frac{S_t}{S_{t-\delta}} \right) = \omega \ln \left( \frac{S_t^1}{S_{t-\delta}^1} \right) + (1 - \omega) \ln \left( \frac{S_t^2}{S_{t-\delta}^2} \right)$$

avec  $\omega \in [0, 1]$ , de telle sorte à avoir des rendements qui sont issus des deux indices.

Alors, le système suivant est résolu

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left[ \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-\delta}} \right) \right] &= \omega(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})\delta + (1 - \omega)(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})\delta, \\ Var \left( \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-\delta}} \right) \right) &= \omega^2 \sigma_1^2 Var(W_\delta^1) + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 Var(W_\delta^2) + \omega(1 - \omega)Cov(W_\delta^1, W_\delta^2), \end{cases}$$

et les valeurs suivantes sont trouvées

$$\begin{cases} \mu &= \left[ \omega \left( \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) + (1 - \omega) \left( \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right] + \frac{\sigma^2}{2}, \\ \sigma^2 &= \omega^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_2^2 + \omega(1 - \omega)\sigma_1 \sigma_2 \tilde{\rho}, \end{cases}$$

avec  $\tilde{\rho}$  la corrélation entre  $W^1$  et  $W_2$ .

En se basant sur le portefeuille de notre assureur,  $\omega = \frac{1}{2}$  est retenu.

Il semble étonnant d'appliquer cette méthodologie pour l'immobilier et non pour l'action. En effet, il peut être argumenté que tout comme l'immobilier, l'assureur ne détient pas qu'un unique type d'action et que plusieurs types de données peuvent être utilisés pour modéliser l'action. Seulement, dans notre cas de figure, cette approche ne semble pas justifiée pour le risque action. En effet, en étudiant les différents jeux de données utilisés pour modéliser le risque action, les disparités observées ne sont pas si importantes que ce qui a pu être constaté au titre des jeux de données immobilier présentés. Il semble néanmoins intéressant de mentionner que, tout comme pour l'indice immobilier, une modélisation plus fine du risque action considérerait plusieurs diffusions d'indices action permettant de modéliser de manière plus réaliste les portefeuilles d'assureurs présents sur le marché. Il est donc notable que l'utilisation d'une seule dynamique pour chacun des risques constitue une limite de ce modèle et va tendre à sous-évaluer la diversification possible entre ces facteurs de risques, une diversification intra-action et intra-immobilier n'étant pas envisageable dans ce cas de figure.

## Dépendance entre les facteurs de risques

Afin d'affecter une dépendance aux trajectoires simulées en RW, les browniens utilisés pour la simulation de chaque indice (ici  $B_t$  et  $W_t$ ) sont corrélés en se reposant sur les corrélations obtenues entre les deux séries de log-rendements. En effet, en notant  $\Delta S_t$  et  $\Delta I_t$  les log-rendements des indices action et immobilier respectivement ainsi que  $(\mu, \sigma)$  et  $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$  leurs paramètres respectifs, alors

$$\begin{aligned} Cov(\Delta S_t, \Delta I_t) &= Cov \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \sigma B_\delta, \left( \tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) \delta + \tilde{\sigma} W_\delta \right) \\ &= \sigma \tilde{\sigma} Cov(B_\delta, W_\delta). \end{aligned}$$

En constatant que  $Cov(B_\delta, W_\delta) = \rho \delta$ , où  $\rho$  correspond à la corrélation,  $\rho$  peut être obtenu de la manière suivante :  $\rho = \frac{Cov(\Delta S_t, \Delta I_t)}{\delta \sigma \tilde{\sigma}}$ .

La matrice de corrélation ainsi déterminée est alors donnée par

	Action	Immobilier
Action	100%	$\rho$
Immobilier	$\rho$	100%

TABLE 2.7 : Matrice de corrélation des simulations RW

La décomposition de Cholesky est utilisée par la suite pour corréler les mouvements browniens dans notre code.

**Calibration du GSE RW** Les paramètres des dynamiques calibrés selon les méthodes présentées ci-dessus sont reportés dans le tableau 2.8.

	Action	Immobilier
$\mu$	6%	4%
$\sigma$	21%	11%
$\rho$	67 %	

TABLE 2.8 : Calibration obtenue dans le GSE RW

Il est à noter que la structure de dépendance du GSE RW a été calibrée en utilisant uniquement les données immobilier IEIF Euronext. En effet, ces données présentent une corrélation beaucoup plus importante avec les données du CAC 40 que les données indices du notaires, pour lesquels la structure de dépendance semble très peu marqué. Ce choix est par conséquent plus prudent.

A la suite de la mise en place de notre GSE, les distributions présentées dans la figure 3.3 sont obtenues.

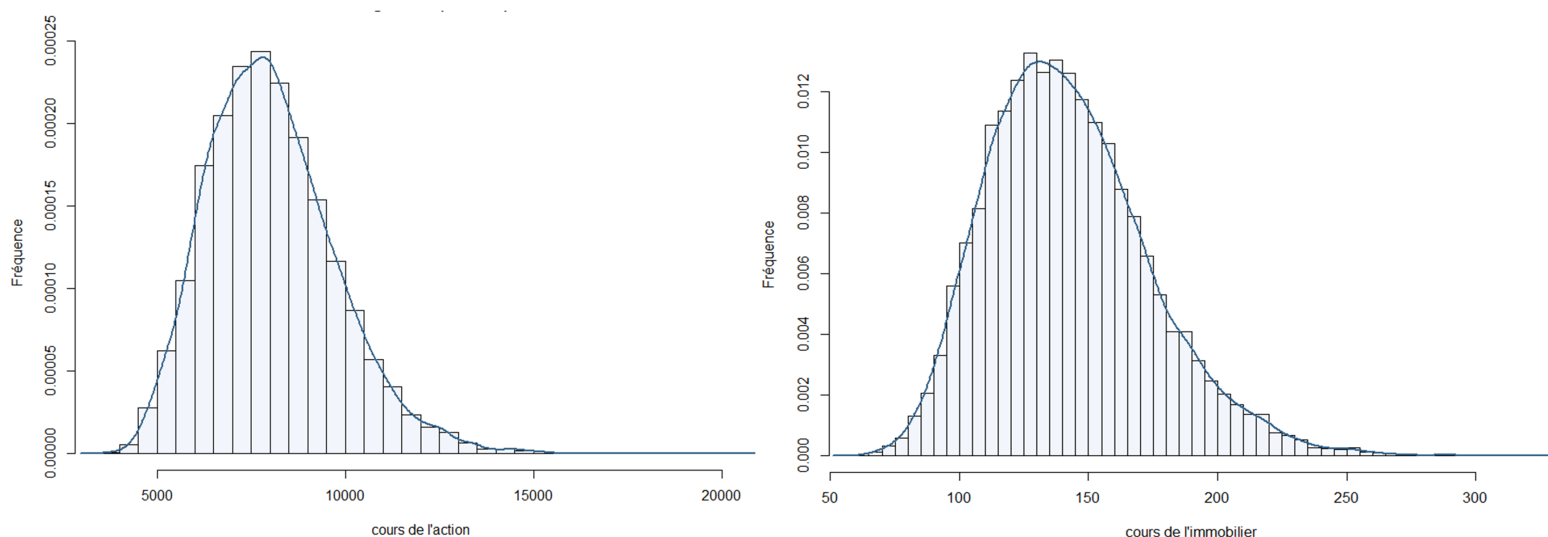


FIGURE 2.8 : Distributions des facteurs de risques obtenus à t=1 an

## Validation du modèle

Après la mise en place du GSE RW, il convient de s'assurer que la diffusion effectuée est cohérente et que la projection des facteurs considérés vérifie les hypothèses théoriques du modèle. Pour cette étude, des facteurs de risques correspondant à des processus log-normaux sont obtenus.

Afin de vérifier cette hypothèse, des tests statistiques peuvent être effectués afin de vérifier que les distributions associées aux processus  $\log(S_1)$  et  $\log(I_1)$  appartiennent à la famille gaussienne. Deux outils ont notamment été utilisés : le test de Kolmogorov-Smirnov ainsi que le diagramme quantile-quantile, permettant de comparer les quantiles du processus normalisé à ceux d'une loi normale standard. Le test de Shapiro-Wilk aurait pu être envisagé, mais ce dernier n'est pas adapté à des échantillons de taille supérieure à 5000. Le test de Kolmogorov-Smirnov permet une meilleure puissance que ce dernier et est largement recommandé pour les tests de normalité.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Facteur	p-value
Action	89,43%
Immobilier	97,82%

TABLE 2.9 : Résultats obtenus par le test de Kolmogorov-Smirnov

Les p-valeurs sont supérieures à 5%. **L'hypothèse de normalité n'est donc pas rejetée.** Les diagrammes quantiles-quantiles disponibles en annexe A.1 mettent en avant des échantillons au temps 1 qui se situent sur la bissectrice, et s'en écartent légèrement en queues de distribution. Elles restent néanmoins dans l'intervalle représenté. Les données sont par conséquent normalement distribuées.

Pour assurer une mise en place cohérente de la dépendance attendue entre les facteurs de risques action et immobilier au sein du GSE RW, une copule a été affectée à l'échantillon des facteurs de risques action et immobilier obtenu à un an à l'aide de la fonction 'BiCopSelect' du *package* 'vineCopula' de R CORE TEAM (2023). La copule retenue est bien une copule gaussienne de corrélation 67%.

Après avoir détaillé les dynamiques utilisées pour la diffusion des facteurs action et immobilier, il convient de se concentrer sur les taux.

## Risque de Taux

Afin de diffuser en RW le facteur taux, il convient de faire évoluer la courbe des taux EIOPA à un an en RW. Cette courbe sera par la suite utilisée pour calibrer les GSE RN à  $t=1$ an. Une première idée était de reprendre les travaux effectués par MECHERGUI (2018), présentés avec la diffusion du risque de taux à un an.

Ce mémoire fait appel à la méthode de l'ACP pour vieillir la courbe des taux EIOPA. Il s'agit d'une technique utilisée en analyse des données pour résumer l'information contenue dans un certain nombre de variables corrélées dans un ensemble plus petit de variables décorrélées, appelées « composantes principales ».

Le vieillissement de la courbe EIOPA s'obtient donc à partir de plusieurs étapes.

**Etape 1 : obtention d'un historique de taux zéro-coupons (ZC)** La courbe des taux EIOPA est construite à partir des taux swaps. Comme présenté dans le mémoire de WILHELMY (2012), l'étude s'appuie sur ces données pour reconstruire la courbe des taux EIOPA. En effet, la reconstitution de

la courbe des taux est indispensable car les zéro-coupons sont des instruments théoriques et non directement cotés sur les marchés.

Ainsi, l'historique trimestriel de la courbe des taux de swaps du 31/12/2013 au 31/12/2023 sera requis et la formule décrite dans le mémoire de WILHELMY (2012), pour reconstruire un historique de courbe des taux zéro-coupon sera appliquée, permettant d'obtenir les données utilisées avec l'ACP. Il aurait été plus judicieux de considérer une maille plus fine de données mais ces données ne sont pas disponibles. La relation récursive retenue pour déterminer à partir des taux swaps les taux zéro coupons et reconstruire un historique de courbe de taux zéro-coupons est donnée par

$$r_1 = S_1,$$

$$r_n = \left( \frac{1 + S_n}{1 - S_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+r_i)^i}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad \forall n \geq 2,$$

avec  $r_n$  le taux du zéro-coupon de maturité  $n$  et  $S_n$  le taux du swap de maturité  $n$ .

Au final, une matrice de taille  $N \times M$  est obtenue, où  $N$  correspond aux différents jours pour lesquels la valeur de la courbe des taux est observée, et  $M$  au nombre de maturités considérés. Dans notre cas de figure,  $N=41$  et  $M=30$ . L'ACP est effectuée sur la matrice obtenue en déterminant la variation annuelle des taux ZC pour chaque maturité  $m$ ,  $r_{ZC}(t_{i+1}, m) - r_{ZC}(t_i, m)$ . La matrice obtenue est résumée à partir de l'ACP effectuée.

**Etape 2 : ACP et détermination des composantes principales retenues pour expliquer le comportement de la courbe des taux** A partir de l'ACP 2 composantes principales sont retenues, expliquant à elles seules plus de 98% de la variance des données. Par conséquent, la diffusion de la courbe des taux EIOPA à un an se fonde sur l'égalité suivante.

$$Variation(1an)_{EIOPA} = c_1 CP_1 + c_2 CP_2$$

$c_1$  et  $c_2$  sont alors diffusés pour la variation dans un an entre la courbe des taux EIOPA au 31/12/2023 et au 31/12/2024.

**Etape 3 : diffusion à un an des coordonnées des composantes principales** Les dynamiques retenues sont les mêmes que dans le mémoire cité, des modèles de Vasicek, et les calibrages suivent les mêmes procédés.

**Etape 4 : obtention de la courbe des taux EIOPA diffusée à un an** Comme le risque de taux n'est pas considéré, l'objectif est d'obtenir un scénario central de vieillissement de la courbe des taux à un an. Pour ce faire, les distributions obtenues de nos coordonnées à un an pour chacune des composantes principales sont reprises et la moyenne est déterminée sur ces distributions. La courbe EIOPA pour le 31/12/2024 obtenue au titre des 30 premières maturités est alors donnée par

$$EIOPA_{2024} = EIOPA_{2023} + (\bar{c}_1 CP_1 + \bar{c}_2 CP_2),$$

avec :

- $EIOPA_{2024}$  correspondant aux 30 premières maturités observées pour la courbe EIOPA vieillie à un an en RW ;
- $EIOPA_{2023}$  les 30 premières maturités de la courbe des taux EIOPA du 31/12/2023 ;
- $\bar{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_k^i$  la moyenne de l'échantillon des coordonnées  $c_k$ ,  $k \in \{1, 2\}$  de l'ACP diffusées à un

an ;

-  $CP_k$  la  $k^{ieme}$  composante principale.

Afin de créer sa courbe des taux, l'EIOPA se base sur les données de *swaps* EURIBOR 6 mois pour les maturités allant de 1 à 20 ans, 20 correspondant au *Last Liquid Point* (LLP). Les *swaps* de maturité supérieure ne sont pas considérés comme suffisamment observables sur le marché par l'EIOPA pour pouvoir servir de base à la construction de la courbe. La totalité de la courbe est obtenue en interpolant les maturités en dessous du LLP puis en extrapolant pour obtenir les maturités de 21 à 150 ans. La méthode recommandée par l'EIOPA est la méthode de Smith-Wilson, détaillée dans la documentation technique EIOPA (2022). Pour extrapoler, l'EIOPA détermine annuellement l'*Ultimate Forward Rate* (UFR) correspondant au taux ultime, paramètre de la méthode de Smith-Wilson, vers lequel la courbe converge. L'EIOPA a fixé l'UFR applicable au 01/01/2025 à 3,30%. Cette valeur sera donc retenue pour l'extrapolation. Une *Volatility Adjustment* (VA) de 20 bp, sera appliquée. Elle correspond à sa valeur au 31/12/2024.

La courbe obtenue est donnée dans la figure 2.9 et est comparée à la courbe des taux EIOPA au 31/12/2023. Cette dernière semble consister en une translation vers le bas de la courbe des taux initiale. Dans le contexte économique actuel, une hausse des taux est plutôt anticipée et la courbe des taux modélisée ne semble pas traduire ce phénomène. Il est par conséquent préférable de retenir la courbe des taux au 30/06/2024, correspondant à la courbe des taux connue la plus rapprochée de la date  $t=1$  à laquelle les taux doivent être diffusés.

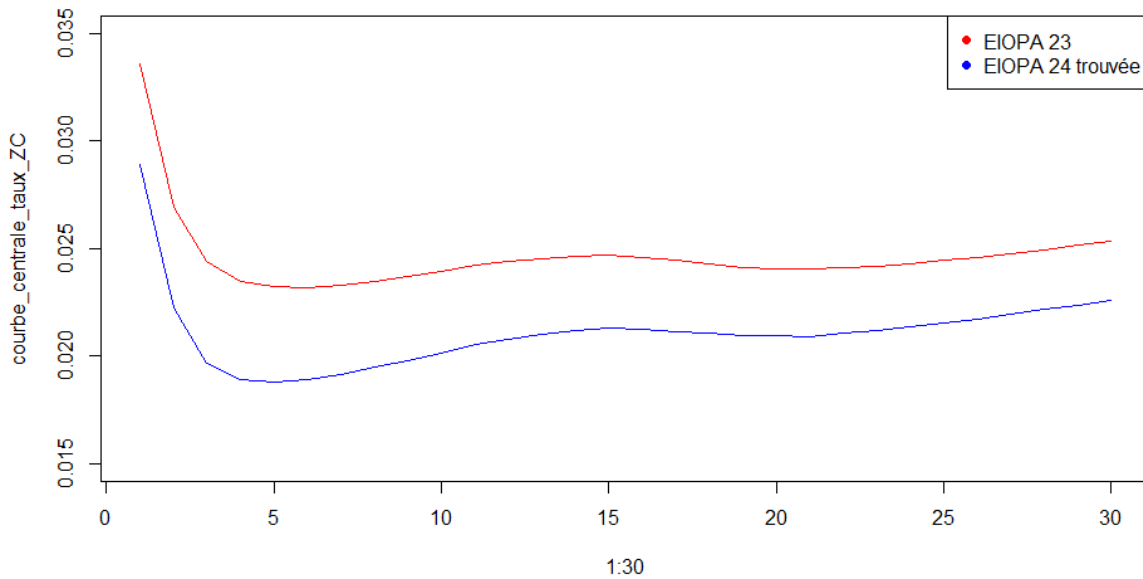


FIGURE 2.9 : courbe EIOPA au 31/12/2024 obtenue par ACP

### 2.4.3 GSE risque neutre

Afin de projeter les engagements de la compagnie sur un horizon  $T=30$  ans après avoir diffusé les facteurs de risques en RW et vieilli le bilan à un an, le GSE RN est nécessité. Ce dernier permet de modéliser les trajectoires des différents facteurs de risques sur un horizon d'intérêt de sorte à permettre une valorisation des actifs et passifs *market consistent*, telle que requise par la Directive Solvabilité II. L'univers RN correspond à une déformation de l'espace de probabilité historique (espace

utilisé en univers RW) laissant place à une valorisation objective des différents instruments financiers. En effet, cette probabilité permet d'évaluer ces derniers en supposant la neutralité des agents face au risque. Cet univers se base sur deux hypothèses fondamentales qui sont l'absence d'opportunité d'arbitrage et la complétude des marchés. Ces hypothèses permettent à l'espérance de rendement des actifs d'égaliser le taux sans risque. Une particularité de cet espace de probabilité est qu'elle rend martingale tout processus de prix actualisé et permet donc de faciliter l'interprétation et le calcul des différents produits financiers.

Comme vu précédemment, les trajectoires des différents facteurs de risques obtenues par le GSE sont données en entrée de l'outil ALM. Elles permettent à ce dernier de valoriser le bilan économique en s'appuyant sur la projection des facteurs de risques financiers auxquels la compagnie considérée est exposée et leur interaction. L'évolution du portefeuille de cette dernière est alors déterminée pour chaque scénario (ici, les trajectoires) et permet l'obtention de flux financiers actualisés moyennés correspondant à des estimations des quantités d'intérêt, comme précisé dans la section 2.2.5. Les GSE RN interviennent ici à  $t=1$  an pour projeter le bilan à un an de la compagnie fictive et déterminer les BE de la compagnie en fonction des différents scénarios primaires considérés.

La suite de cette section s'intéresse aux dynamiques utilisées dans le GSE RN pour diffuser les différents facteurs de risques auxquels la compagnie fictive est exposée. Il est important de noter que le GSE utilisé correspond à un modèle composite, c'est-à-dire que chaque facteur de risque est déterminé de manière individuelle à travers une dynamique indépendante des autres facteurs de risques avec une dépendance prise en compte par la suite avec l'utilisation d'une copule gaussienne et d'une matrice de corrélation.

Les différents modèles présentés dans cette section ont été calibrés par le Pôle Ingénierie Financière de Forvis Mazars actuariat.

### Risque action

La même dynamique que celle présentée dans la diffusion monde-réel, issue du modèle de *Black&Scholes*, est utilisée pour le facteur de risque action. Ainsi,

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

avec :

- $\mu$  le drift correspondant à la tendance de l'évolution moyenne de  $S_t$ , égal au taux sans risque sous la probabilité RN,
- $\sigma$  la volatilité (constante) de l'indice,
- $B_t$  un mouvement brownien.

Lors du calibrage du GSE action RN, seul le paramètre de volatilité est à déterminer, la tendance moyenne de l'actif étant identique à l'évolution de l'actif sans risque. Ce dernier est effectué en utilisant des données de marché dans le respect du critère de *market consistency*. Comme précisé précédemment, la dynamique action du GSE RN est calibrée à partir des données du CAC 40. Le call constitue un des produits dérivés dont le sous-jacent correspond à un indice action des plus échangés sur le marché. Il est utilisé ici pour calibrer la volatilité, à travers la formule de Black. En effet, cette formule est donnée par

$$Black^{call}(S_t, K, r, T, \sigma) = S_t \psi(d_1) - K e^{-rt} \psi(d_2),$$

avec :

- $\psi$  la fonction de répartition d'une  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,
- $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$  et  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ,

- $K$  le strike,
- $r$  le taux sans risque.

Pour  $(S_t, K, r, T)$  fixé, la fonction  $\sigma \rightarrow Black^{call}(S_t, K, r, T, \sigma)$  est une bijection. Ainsi, à un unique prix correspond un unique paramètre de volatilité. En inversant le prix d'un call à travers cette formule, la volatilité peut être déterminée.

### Risque immobilier

Tout comme le risque action, le modèle de *Black&Scholes* est utilisé pour diffuser l'immobilier en RN. Le calibrage est néanmoins effectué à partir de données historiques (rendements des indices immobiliers) car il n'existe pas de surface de volatilités d'options sur laquelle la volatilité peut être calibrée. L'indice des notaires publié par l'INSEE est utilisé pour l'immobilier.

### Risque de Taux

Les taux d'intérêt constituent le centre de la modélisation économique et sont fondamentaux pour la mise en place des GSE, ces derniers intervenant également dans la diffusion des autres risques. En effet, comme précisé précédemment, ils coïncident notamment avec le rendement espéré des actifs. Ces derniers permettent de refléter la valeur du temps et de comparer des investissements réalisés sur des horizons de temps différents. Sous Solvabilité II, les modèles de taux s'appuient sur la courbe des taux EIOPA publiée mensuellement par cette dernière. Ils doivent pouvoir répliquer la structure par terme des taux dictée par cette courbe, et être *market consistent*. Le modèle doit donc vérifier que les prix des Zéro-Coupons fournis par le modèle égalisent les prix fournis par la courbe des taux EIOPA. Pour la diffusion de ce facteur de risque, le modèle Gaussien à 2 facteurs est retenu pour notre modélisation. Ce dernier est simple à interpréter tout en permettant un bon ajustement à la courbe des taux initiale (EIOPA). La dynamique des taux courts est alors donnée par

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + y(t) + \psi(t), \\ r(0) &= r_0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \beta dW_1(t), \\ dy(t) &= -bx(t)dt + \eta dW_2(t), \end{aligned}$$

avec  $W_1$  et  $W_2$  deux mouvements browniens tels que  $\rho = d \langle W_1, W_2 \rangle$ , et  $\psi$  une fonction telle que  $\psi(0) = 0$ , permettant l'ajustement du modèle à la courbe des taux zéro-coupon du marché.

Pour rappel, le prix d'un Zéro-Coupon de maturité  $T$  au temps  $t$  est donnée par

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \right], \quad (2.11)$$

il convient donc de s'assurer que  $P^{Modele}(0, T) = P^{EIOPA}(0, T)$ .

Un étude détaillée du modèle gaussien à deux facteurs est présentée dans le mémoire de HAGUET (2012). En introduisant la quantité  $I(t, T) = \int_t^T x(s) + y(s)ds$ , qui conditionnellement à la filtration  $\mathcal{F}_t$ , est normalement distribuée, dont la moyenne  $M$  et la variance  $V$  sont détaillés dans le mémoire cité, une formule exacte du prix du zéro-coupon peut être obtenue.

En constatant à l'aide de la formule 2.11 et de la dynamique présentée ci-dessus que le prix Zéro-coupon n'est autre que la transformée de Laplace de  $I - \int_t^T \psi(s)ds$ , normalement distribuée de variance



V et de moyenne  $M - \int_t^T \psi(s)ds$ , la formule obtenue est alors donnée par

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp \left( -M(t, T) + \frac{V(t, T)}{2} \right), \\ &= \exp \left( \int_t^T \psi(s)ds - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{V(t, T)}{2} \right). \end{aligned}$$

La structure par terme des taux zéro-coupon par la suite utilisée dans l'outil ALM pour actualiser nos projections d'actif et de passif sous Solvabilité II est donnée par

$$R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T))}{(T - t)}.$$

Après avoir détaillé les dynamiques utilisées au sein du GSE RN pour chacun des facteurs de risques, il est judicieux de présenter la structure de dépendance définie entre eux.

### Précisions sur le GSE RN utilisé

Le calibrage du GSE RN à  $t=1$  an utilisé par la suite pour nos simulations secondaires est effectué en se plaçant au 30/06/2024. Il s'agit de la date la plus proche de  $t=1$  an pour laquelle les données sont accessibles. Par souci de cohérence avec la volatilité obtenue en RW sur le facteur immobilier, nous avons retenu une volatilité de 11% pour la diffusion de ce risque. La même méthode que celle présentée dans le cadre du GSE RW (2.4.2) est utilisée pour déterminer les corrélations entre les différents facteurs de risques.

### Validation des trajectoires

Afin de s'assurer de la qualité de la diffusion opérée au sein du GSE, la dernière étape de production de scénarios économiques réside en la validation des trajectoires simulées. Il convient notamment de s'assurer que les trajectoires sont :

- Market consistent : elles sont cohérentes avec les données de marché ;
- Martingales : vérification du caractère martingale sur des produits qui le sont théoriquement.

Les tests de martingalité ont été réalisés sur les trajectoires du GSE à  $t=1$  an calibrées à partir des données du 30/06/2024 et validés.

### Modification des tables de GSE pour prendre en compte le réalisé de première période

Comme explicité dans la section 1.5.2, les trajectoires secondaires RN dépendent des réalisations primaires en RW. Afin de mettre en place un mécanisme SdS, il est nécessaire de recalibrer les paramètres des diffusions présentées précédemment et de les adapter aux scénarios primaires utilisés pour la diffusion RN en cours. Etant donné qu'il est trop coûteux de simuler des GSE RN différenciés pour chacun des scénarios primaires retenus par la suite dans la section 3.1, une approche simplifiée a été considérée permettant de prendre en compte les réalisés de première période sans régénérer et recalibrer des GSE pour chacun des scénarios. L'idée de la manipulation effectuée sur les tables de GSE est de modifier la volatilité afin qu'elle soit cohérente avec le réalisé de première période. Il aurait pu être envisagé de diffuser la volatilité implicite à un an en RW pour le prendre en compte par la

suite dans notre GSE RN. Néanmoins, cela implique l'introduction d'une nouvelle dynamique avec un procédé de calibrage et de validation à prendre en compte. La mise en place de GSE RN à partir de scénarios RW n'étant pas le coeur du mémoire, cette option a été écartée. Une manipulation plus simple des tables de GSE au 30/06/2024 était donc recherchée, et plus particulièrement une modification des tables des rendements action et immobilier obtenus en sortie du GSE RN afin de prendre en compte la nouvelle volatilité.

N'étant pas en mesure d'affecter des volatilités aux réalisés de première période de manière satisfaisantes, une méthode SdS simplifiée sera considérée dans ce mémoire. Le GSE RN au temps 1 ne sera par différencié en fonction du scénario de première période considéré. Néanmoins, les pistes explorées pour appliquer une différenciation son présentées en annexe A.3.1.

Le fait de ne pas différencier les SCRs au temps 1 constitue une des limites de cette étude. Les SCRs élémentaires en seront altérés, néanmoins cela n'aura pas d'incidence sur la méthode d'agrégation utilisée. Il n'est pas judicieux de se pencher plus en profondeur sur cette problématique, cette dernière ajoutant une complexité non-négligeable à l'implémentation.

Nous pouvons néanmoins émettre une hypothèse quant à l'effet de cette non-prise en compte de calibrage différencié en fonction du réalisé de première période. Une relation inverse entre la valeur des actions et la volatilité implicite utilisée pour la diffusion des actions à un an semble le plus cohérent. MECHERGUI (2018) a notamment instauré une structure de dépendance négative entre l'indice action et la volatilité implicite dans son GSE RW permettant une diffusion à un an des facteurs de risques. En effet, une baisse du prix de l'action mène à une croissance de l'incertitude observée sur les marchés, associée à l'augmentation de la volatilité implicite. En revanche, une hausse de l'indice action est indicateur de stabilité des marchés.

Par conséquent, la prise en compte de calibrages différenciés en fonction du scénarios économique retenu devrait avoir un impact à la hausse sur le SCR, et sur les queues inférieures des distributions de perte, à tout niveau d'agrégation. Il aurait été intéressant, en considérant cette approche, de se pencher sur la plus-value apportée par la considération d'une mesure de risque TVaR au lieu de la VaR habituelle, celle-ci permettant de mieux rendre compte du risque évalué en queue de distribution de la perte, dans le cas où cette dernière est épaisse. Comme le précise CHEIKH IBRAHIMA (2013), les réassureurs les plus importants du marché pratiquant de la réassurance non-proportionnelle font généralement appel à cette mesure pour évaluer leur besoin global en solvabilité. Ces derniers étant particulièrement exposés aux risques extrêmes, la TVaR leur permet de fournir davantage d'information sur la queue de distribution et l'étendue de la perte en cas de sinistres majeurs.

## Chapitre 3

# Mise en place d'un Modèle interne partiel

Afin d'être en mesure d'avoir une vision complète des risques auxquels la compagnie d'assurance est exposée, et de pouvoir bénéficier pleinement du MI pour son pilotage et la mise en place d'une stratégie, l'ACPR a mis en place de nouvelles exigences relatives à celui-ci dans sa notice de décembre 2023, ACPR (2023b). Il y est notamment mentionné que « le modèle interne doit être en mesure de déterminer, à tous les niveaux d'agrégation des composantes du modèle interne et à tout niveau de confiance compris entre 0% et 100% :

- le quantile de la distribution de probabilité prévisionnelle sous-tendant le modèle interne ;
- les contributions au quantile de la distribution de probabilité prévisionnelle des différentes composantes de risque, unités opérationnelles majeures, lignes d'activités, techniques d'atténuation du risque et de toutes autres composantes pertinentes au regard du système de gestion des risques de l'entreprise ;
- le comportement joint des facteurs de risques contribuant à la distribution de probabilité prévisionnelle sous-tendant le modèle interne ».

Ces contraintes empêchent une utilisation telle quelle de l'approche variance-covariance (Var-CovaR ou VC), cette dernière ne permettant ni l'obtention d'une distribution à tous les niveaux d'agrégation ni l'allocation du capital de solvabilité entre les différents facteurs de risques.

Afin de mettre en oeuvre une démarche répondant aux exigences de l'ACPR, ce chapitre met en place un MIP en appliquant une méthode simulateur sur deux facteurs de risques (cf. 2.4.1). L'approche FS est conservée pour les autres modules et facteurs de risques. Pour ce faire, la méthode *Curve Fitting* est considérée. Cette dernière permet de déterminer les NAVs au temps 1 obtenues en fonction des réalisations des différents facteurs de risques. Les structures de dépendance entre les facteurs de risques sont mises en place à partir de la théorie des copules. Par la suite, l'agrégation des risques au sein de la FS est réalisée et les différents résultats et observations faites au cours de l'étude sont étudiés. Le principe et la mise en place de proxys *Curve Fitting* sont introduits en premiers lieux. La notion de copule est détaillée dans un second temps.

### 3.1 La méthode *Curve Fitting*

Comme précisé dans la première partie de ce mémoire, la méthode de *Curve Fitting* (CF) constitue une méthode alternative à l'algorithme SdS pour obtenir une distribution de perte ou de Fonds Propres au titre des risques auxquels la compagnie d'assurance est exposée, à tout niveau d'agrégation souhaité. Dans ce mémoire, cet outil est utilisé pour obtenir une fonction de perte à  $t=1$  associée aux facteurs de risques élémentaires pour lesquels une distribution de perte complète est souhaitée. L'agrégation est par la suite appliquée à travers l'utilisation conjointe des copules et de cette méthode. Cette partie repose sur les travaux effectués par MECHERGUI (2018).

#### 3.1.1 Présentation de la méthode

La méthode CF consiste à mettre en place une forme paramétrique (ou proxy) pour la détermination des distributions de fonds propres (ou de perte du portefeuille) à  $t=1$ . Elle s'apparente à la méthode LSMC présentée précédemment, ces deux méthodes permettant l'obtention d'une formule fermée pour le calcul des fonds propres. Plus précisément, cette approche est mise en place à partir d'un jeu de données restreint déterminé par une méthode SdS, qui permet de calibrer une fonction d'interpolation qui à tout scénario primaire RW permet d'associer un niveau de fonds propres à  $t=1$ . Elle est illustrée par la figure 3.1.

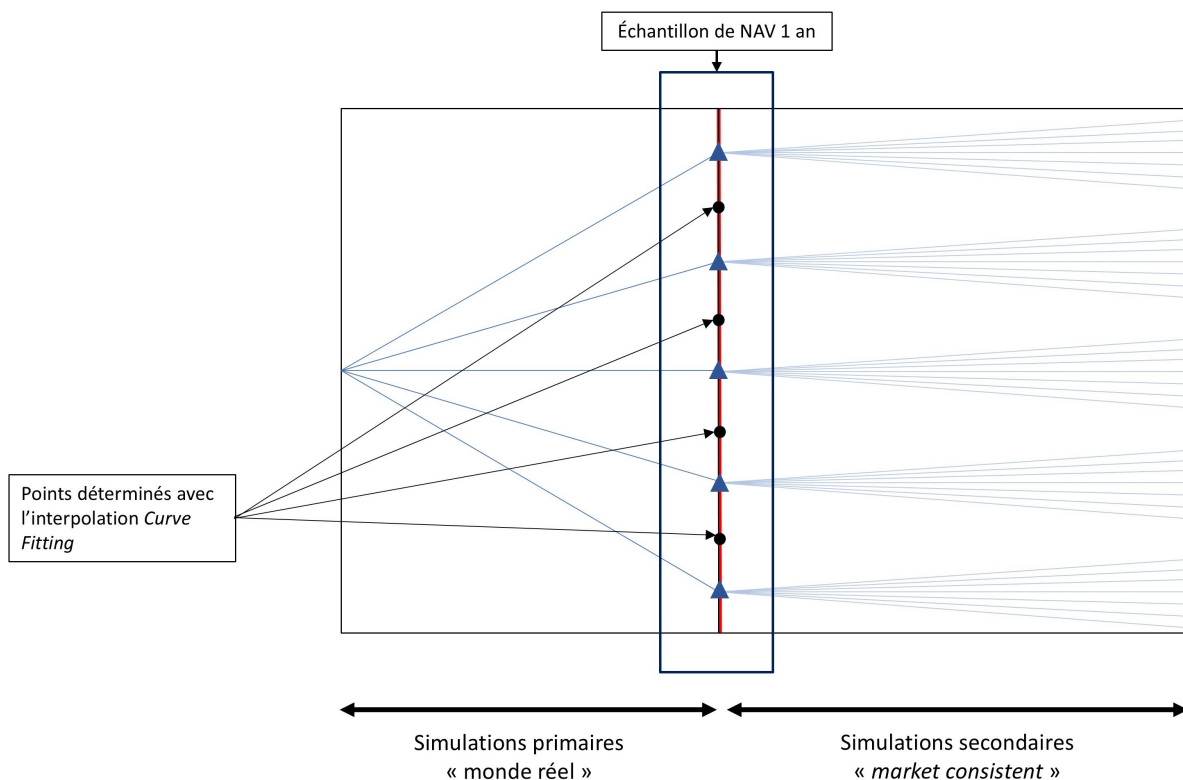


FIGURE 3.1 : Illustration de la méthode de *Curve Fitting*

Il a été décidé d'avoir recours dans ce mémoire à la méthode *Curve Fitting*, cette dernière semblant la plus adaptée aux travaux réalisés par la suite. En effet, au vu des méthodes présentées dans la section 1.5.2, une approche par forme paramétriques a été préférée. Comme le précise COUSIN (2012), cette dernière est aisément mise en oeuvre, donne matière au lancement d'un grand nombre de simulations et garantit une flexibilité au niveau du choix de la distribution par facteur de risque. Une approche

*Curve Fitting* sera préférée à l'approche LSMC du fait de l'instabilité au cours du temps que peut présenter cette méthode, comme le met en avant MECHERGUI (2018). Un lecteur intéressé par la méthode LSMC peut néanmoins se référer aux travaux réalisés par KOUSARIS (2011).

Cette méthode permet de limiter le nombre de simulations primaires par rapport à une méthode SdS, avec un nombre de simulations secondaires par simulation primaire qui reste inchangé. En effet, en pratique, la méthode de CF permet de passer de 5000 simulations primaires à 150, pour des scénarios bien choisis. Cela permet donc de réduire grandement la complexité, en passant de 5 000 000 à 150 000 simulations.

La fonction d'interpolation obtenue à partir du jeu de données déterminé de la sorte permet de calculer les Fonds Propres au titre des scénarios primaires pour lesquels les simulations secondaires ne sont pas effectuées.

En effet, pour  $n$  facteurs de risques sont considérés,  $\{(\epsilon_1^u, \dots, \epsilon_n^u)\}_{1 \leq u \leq p}$  l'ensemble des scénarios RW, l'échantillon de fonds propres obtenus à  $t=1$  est donné par la formule suivante :

$$\widehat{NAV}_1(\epsilon_1^u, \dots, \epsilon_n^u) = f(\epsilon_1^u, \dots, \epsilon_n^u) \quad (3.1)$$

avec :

- $\epsilon_k^u$  : la valeur du  $k^{\text{ème}}$  facteur de risque obtenu pour la  $u^{\text{ème}}$  simulation ;
- $f$  : la fonction d'interpolation continue obtenue par le calibrage CF.

Comme le souligne le mémoire de MECHERGUI (2018), deux types d'interpolation peuvent être utilisés pour déterminer le proxy :

- l'interpolation polynomiale : détermination d'un unique polynôme permettant de définir le proxy sur l'ensemble de son espace de définition. Cette approche est justifiée par le théorème de Stone-Weierstrass qui assure que toute fonction continue peut être approchée aussi précisément que souhaité par une fonction polynomiale ;
- l'interpolation spline qui consiste à définir le *proxy* par morceaux en calibrant plusieurs fonctions polynomiales sur des intervalles formant une partition de l'ensemble de définition.

En règle générale, une interpolation spline est préférée pour ce type de problématique, cette dernière permettant par sa mise en place par morceaux d'obtenir une grande précision à partir de polynômes ayant des degrés moins importants, et limitant ainsi le phénomène de Runge. Ce phénomène se caractérise par le fait que la calibration d'une unique fonction polynomiale à partir d'un nombre important de points d'interpolation peut entraîner des oscillations importantes aux voisinages des bornes des intervalles constituant l'ensemble de définition de la fonction d'interpolation. En effet, la précision recherchée étant maximale, il est intuitif que plus le nombre de points d'interpolation est important, plus le degré du polynôme calibré sera important, entraînant des oscillations qui augmentent avec le degré du polynôme. Par conséquent, bien que la fonction d'interpolation passe par tous les points d'interpolation en pratique, cette dernière n'approche pas correctement la fonction souhaitée et ne constitue pas une estimation fiable. Une explication plus précise de ce phénomène peut être retrouvée dans DEMENGEL et POUGET (1998).

La notion de fonction spline au titre d'une seule variable peut désormais être présentée. Cette définition s'étend facilement aux dimensions supérieures.

**Définition 3.1.1 (Fonction Spline)** Soit  $[a, b]$  un intervalle,  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  un ensemble de points contenus dans  $[a, b]$  tels que  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ , et  $P_i : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme. Une fonction

spline  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  correspond à une fonction polynômiale par morceaux définie de la sorte :

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ P_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ P_n(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \end{cases} \quad (3.2)$$

**Remarque 3.1.1 (degré et continuité)** Le degré d'une fonction spline est donné par le degré maximal atteint par un des polynômes  $(P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . La fonction spline est dite uniforme si tous les polynômes qui la composent sont de même degré.

La continuité de la fonction spline est déterminée à partir de la jonction entre chaque intervalle. En effet, un polynôme étant de classe  $C^\infty$ , la dérivabilité de  $S$  dépend de la continuité au niveau des points  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ . En particulier, si l'égalité  $P_i^{(k)}(x_i) = P_{i+1}^{(k)}(x_i), \forall 0 \leq k \leq v$  et  $0 \leq i \leq n$  est vérifiée, alors  $S$  est de classe  $C^v$ .

Comme constaté précédemment, la mise en place de l'approche Curve-Fitting s'effectue en 4 étapes principales :

- **Sélection des scénarios pour le calibrage** : Il est important de choisir des scénarios pertinents pour la mise en place de la fonction d'interpolation et le calibrage des paramètres associés, les résultats issus de cette interpolation découlant en grande partie de la sélection de scénarios adaptés. Il est également important, si une fonction de perte globale est souhaitée, de sélectionner les facteurs de risques auxquels la compagnie est le plus exposée et de connaître la loi suivie par ces derniers afin de choisir des scénarios correspondant à des quantiles précis ;
- **Détermination des fonds propres économiques à t=1 pour les scénarios choisis** : Afin d'obtenir le jeu de données permettant par la suite de calibrer la fonction d'interpolation, il est nécessaire de déterminer pour chaque scénario primaire obtenu en RW un niveau de fonds propres économiques au temps 1. Ceci est effectué à partir de la méthode SdS : des trajectoires secondaires RN sont effectuées dans l'outil ALM interne de Forvis Mazars, comme présenté dans la section 2.3, en tenant compte du scénario primaire RW considéré, pour obtenir le niveau de fonds propres économiques associé ;
- **Calibrage de la fonction d'interpolation** : La fonction *spline* est par la suite ajustée au jeu de données obtenu à l'étape précédente ;
- **Détermination de la distribution de fonds propres économiques** : La distribution des fonds propres s'obtient en intégrant un grand nombre de scénarios primaires RW en entrée de la fonction calibrée. En effet, cela permet de passer de la distribution des facteurs de risques à la distribution des fonds propres (NAV).

Dans le cadre de cette étude, un premier point d'attention est porté sur la NAV à un an obtenue au titre de risques élémentaires puis sur la NAV obtenue au titre de plusieurs facteurs de risques.

Les scénarios ne prenant en compte qu'un unique facteur de risque seront notés **1-scénario** et les scénarios considérant  $n$  facteurs de risques seront notés **n-scénario**.

Par conséquent, une fonction d'interpolation utilisée pour déterminer la NAV au titre d'un seul facteur de risque prend en entrée des 1-scénarios. La distribution des fonds propres au titre de ce risque élémentaire est alors obtenue à partir de la distribution du facteur de risque, déterminé par le

GSE RW, constituant les différents 1-scénarios appliqués à cette fonction d'interpolation. Le même principe est appliqué sur des n-scénarios constituant l'échantillon des n facteurs de risques auxquels la compagnie est exposée, pour déterminer la distribution de NAV à un an au titre de ces n facteurs de risques.

### 3.1.2 Présentation des quantités nécessaires à la compréhension du *proxy* CF

Avant d'exposer les différents mécanismes de mise en place de la méthode CF, il convient d'introduire les notions fondamentales pour son implémentation. Cette section définira en premiers lieux les éléments intermédiaires conduisant à la construction des *proxys* permettant l'obtention de distributions de NAVs un an au titre des différents risques considérés.

Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une observation du vecteur aléatoire représentant les différents facteurs de risques auxquels la compagnie d'assurance est exposée. Il s'agit d'un n-scénario. Dans les sections suivantes de notre étude, n sera fixé à 2.

#### La fonction de perte

La fonction de perte permet de renvoyer la perte à un an liée au scénario primaire fourni en entrée. En reprenant les notations introduites dans la partie 1.9, elle se présente de la manière suivante :

$$L_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = NAV_0 - D(0, 1)NAV_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \quad (3.3)$$

avec  $NAV_{1,\dots,n}$  la fonction qui à tous les n-scénarios primaires permet de renvoyer la NAV un an associée.

Afin de déterminer la perte au titre d'un k-scénario avec  $k < n$ , les risques qui ne sont pas pris en compte évoluent selon une trajectoire centrale. La valeur à un an des risques non pris en compte sont alors fixés selon une situation centrale. A titre d'exemple, dans l'optique de connaître la perte au titre du (n-2)-scénario  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n)$ , les valeurs des risques  $i$  et  $j$  sont fixés selon une situation centrale  $\epsilon_i^{cent}$  et  $\epsilon_j^{cent}$ . La perte est alors donnée par

$$\begin{aligned} & L_{1,\dots,n-2}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n) \\ &= L_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i^{cent}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_j^{cent}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n) \\ &= NAV_0 - D(0, 1)NAV_{1,\dots,n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i^{cent}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_j^{cent}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n) \\ &= NAV_0 - D(0, 1)NAV_{1,\dots,(n-2)}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{j-1}, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_n). \end{aligned}$$

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , et en considérant k facteurs de risques parmi les n auxquels la compagnie est exposée,  $(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent}, \dots, \epsilon_k^{cent})$  sera appelé k-scénario central, soit le k-scénario constitué des valeurs centrales pour chaque risque.

Il est à noter que  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} & L_{1,\dots,n}(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent}, \dots, \epsilon_n^{cent}) \\ &= L_{1,\dots,k}(\epsilon_1^{cent}, \epsilon_2^{cent}, \dots, \epsilon_k^{cent}) \\ &= L_{cent}, \end{aligned}$$

avec  $L_{cent}$  la perte obtenue en scénario central.

#### Les fonctions d'ajustement et d'interaction

Les fonctions d'ajustement  $Ajust_{1,\dots,n}$  et d'interaction  $Inter_{1,\dots,n}$  correspondent à des quantités permettant, comme leur nom l'indique, de prendre en compte les interdépendances existantes entre les

différents facteurs de risques et leur impact sur les fonds propres économiques de la compagnie. Elles quantifient l'incidence de la réalisation jointe de facteurs de risques sur ces derniers et permettent d'ajuster la fonction de perte au titre de risques multiples de sorte à ce que celle-ci ne corresponde pas à une simple combinaison linéaire des pertes au titre des différents risques.

La fonction  $Ajust$  est définie telle que - pour  $n = 1$ ,  $Ajust_i(\epsilon_i) = L_i(\epsilon_i)$   
 - pour  $l \in \{2, \dots, n\}$ ,  $Ajust_{1,\dots,l}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l) = L_{1,\dots,l}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l) - \sum_{r \in P(R), \#(r) < l} Ajust_{1,\dots,\#(r)}(r)$   
 avec  $R = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_l)$ .

La fonction  $Ajust$  permet de distinguer l'ajustement apporté à la perte du fait des interactions entre les facteurs de risques considérés et l'ajustement dû au fait que les pertes au titre des risques élémentaires soient conditionnées par le scénario central considéré. En effet, les valeurs centrales utilisées pour neutraliser les différents facteurs de risques et le n-scénario central qui en découle n'a pas de raisons d'induire une perte  $L_{cent}$  nulle. Ainsi, en déterminant une perte au titre de risques élémentaires, il est notable qu'une partie de la perte est expliquée par le choix de valeurs centrales pour neutraliser les autres risques. Cependant, sommer les pertes élémentaires obtenues de cette manière pour calculer la perte liée aux risques multiples, sans ajustement approprié, conduirait à inclure des pertes induites par les valeurs centrales considérées. Or, dans le cas de l'étude, les risques ne doivent plus être neutralisés, et la perte ne devrait pas dépendre des valeurs centrales retenues pour les risques considérés.

En remarquant que  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $Ajust_{1,\dots,k}(\epsilon_1^{cent}, \dots, \epsilon_k^{cent}) = (-1)^{k+1} L_{cent}$ , cette quantité peut être décomposée de la manière suivante

$$Ajust_{1,\dots,k}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = Inter_{1,\dots,k}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) + (-1)^{k+1} L_{cent},$$

où la fonction  $Inter$  représente les interactions existantes entre les différents facteurs de risques.

Dans le cadre du mémoire, seuls les risques action et immobilier sont considérés. Ainsi,  $n=2$  et

$$L_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) = L_1(\epsilon_1) + L_2(\epsilon_2) + Inter_{1,2}(\epsilon_1, \epsilon_2) - L_{cent}.$$

Les risques observés de manière élémentaire seront appelés par la suite des risques *standalone* et les risques observés de manière conjointe (en considérant un couple de facteurs de risques) seront qualifiés de *pairwise*. Un point d'attention peut désormais être porté sur la mise en place d'un point de vue pratique de la méthode CF.

### 3.1.3 Mise en place de la méthode

Cette section vise à détailler la mise en place des *proxys standalone* et *pairwise*. Comme précisé dans la partie, 2.4.1, les facteurs de risque action et immobilier sont retenus dans le cadre de l'approche simulateur.

#### *Proxys standalone*

Afin de déterminer le capital requis au titre de chacun des deux risques étudiés, deux fonctions d'interpolation CF sont mises en place, notées  $\widehat{NAV}_{act}$  et  $\widehat{NAV}_{immo}$ . Celles-ci permettent d'obtenir un échantillon de NAV à  $t=1$  au titre d'un des deux facteurs, en faisant évoluer les autres risques auxquels la compagnie fictive est exposée en scénario central, comme précisé dans la section précédente. En reprenant la formule 3.1,



$$\widehat{NAV}_{act}(action_1^u) = f(action_1^u, immo_{cent.}, taux_{cent.}), \quad (3.4)$$

$$\widehat{NAV}_{immo}(immo_1^v) = f(action_{cent.}, immo_1^v, taux_{cent.}), \quad (3.5)$$

avec :

- $action_1^u$  la valeur du facteur action pour la  $u^{eme}$  simulation ;
- $immo_1^v$  la valeur du facteur immobilier pour la  $v^{eme}$  simulation ;
- $\epsilon_{cent.}$  la valeur en scénario central du facteur de risque  $\epsilon$ .

Ainsi, pour étudier l'impact du risque action sur la NAV au temps 1 et pour déterminer le capital requis au titre du risque action, les taux évoluent en égalisant la valeur des prix ZC au temps 1 à la valeur du déflateur EIOPA au 30/06/2024, afin de les faire coïncider avec les valeurs données en entrée du GSE un an RN utilisé pour la seconde projection ALM. L'immobilier évolue en trajectoire centrale entre 0 et 1. Cette trajectoire est déterminée de telle sorte qu'elle corresponde à la valeur moyenne théorique obtenue à  $t=1$  pour la distribution de l'indice immobilier. Pour rappel, notre indice immobilier évolue selon la dynamique de *Black&Scholes* et vaut donc à  $t=1$

$$I_1 = I_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W_1 \right),$$

avec  $W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $\mu$  et  $\sigma$  les paramètres du modèle calibrés en donnée historique. Par conséquent,  $\mathbb{E}[I_1] = I_0 \exp(\mu)$ . Le rendement entre 0 et 1 affecté aux 1-scénarios action pour décrire l'évolution de l'immobilier est donc  $\exp(\mu) - 1$ . Il s'agit de la valeur centrale du rendement de l'immobilier.

Le même raisonnement est appliqué pour définir les valeurs centrales prises par les facteurs action et taux lorsque les 1-scénarios immobilier sont considérés. Ils sont utilisés pour déterminer le *proxy* qui permet d'évaluer l'évolution des fonds propres économiques en fonction du risque immobilier.

Les deux *proxys* sont construits en sélectionnant un certain nombre de 1-scénarios bien choisis de chacun des deux risques à un an parmi les échantillons obtenus en sortie du GSE RW.

Ces *proxys* permettent d'avoir deux échantillons de fonds propres économiques :

- un échantillon de fonds propres économiques représentant l'effet de l'évolution du risque action sur ce dernier, qui sera noté  $Ech_{act}$  ;
- un échantillon de fonds propres économiques représentant l'effet de l'évolution du risque immobilier sur ce dernier, qui sera noté  $Ech_{immo}$  ;

Afin d'obtenir les SCR au titre des risques action et immobilier, la définition 1.9 de la perte à un an est appliquée et

$$SCR_{act} = NAV_0 - D(0, 1)VaR_{0,5\%}(Ech_{act}), \quad (3.6)$$

$$SCR_{immo} = NAV_0 - D(0, 1)VaR_{0,5\%}(Ech_{immo}). \quad (3.7)$$

### *Proxys pairwise*

La fonction *Inter* sera dans ce modèle déterminée à partir d'une interpolation bilinéaire pour avoir un *proxy* associant à chaque 2-scénario action-immobilier la perte à un an associée. En effet, en reprenant la définition de la perte obtenue au titre de la distribution des risques action et immobilier, disponible dans la section 3.1.2, cette modélisation est suffisante pour avoir un *proxy* déterminant

pour chaque 2-scénario action-immobilier la perte à un an associée qui soit suffisamment précise. Les interactions ne représentent pas la plus grande partie de la perte et il n'est pas nécessaire de complexifier davantage cette estimation. Les observations de la distribution action-immobilier obtenue en sortie du GSE RW seront par la suite notées  $(s_1, i_1)$ . A partir d'un jeu de données obtenu par SdS au sein de l'outil ALM (les points de calibrage  $(s^k, i^j)_{1 \leq k, j \leq u}$ ), le *proxy* est modélisé par la formule suivante :

$$\forall s_1 \in [s^k, s^{k+1}], i_1 \in [i^j, i^{j+1}],$$

$$Inter(s_1, i_1) = \beta^{k,j} s_1 i_1 + \alpha^{k,j} s_1 + \zeta^{k,j} i_1 + \eta^{k,j}, \quad (3.8)$$

avec  $(\beta^{k,j}, \alpha^{k,j}, \zeta^{k,j}, \eta^{k,j})_{1 \leq k, j \leq (u-1)}$  les paramètres à calibrer.

Le *proxy* de perte  $\hat{L}_1^{pair}$  est alors donné par

$$\hat{L}_1^{pair}(s_1, i_1) = \hat{L}_1^{act}(s_1) + \hat{L}_1^{immo}(i_1) + Adjust(s_1, i_1), \quad (3.9)$$

$$\hat{L}_1^{act}(s_1) = NAV_0 - D(0, 1) \times \widehat{NAV}_{act}(s_1), \quad (3.10)$$

$$\hat{L}_1^{immo}(s_1) = NAV_0 - D(0, 1) \times \widehat{NAV}_{immo}(i_1). \quad (3.11)$$

Les taux sont toujours considérés en valeur central et ne constituent pas le sujet de ce mémoire.

En notant  $Ech.P_{act,immo}$  l'échantillon de perte dérivé de ce *proxy* CF, le SCR au titre des deux risques est obtenu de la manière suivante :

$$SCR_{act,immo} = VaR_{99,5\%}(Ech.P_{act,immo}). \quad (3.12)$$

### 3.1.4 Choix des scénarios utilisés

Comme précisé dans la présentation de la méthode CF, le choix des scénarios de calibrage de la fonction d'interpolation est essentiel afin de prédire correctement les fonds propres associés aux différents facteurs de risques. Les 1-scénarios retenus pour calibrer les *proxys standalone* pour chacun des facteurs de risques seront d'abord présentés puis les 2-scénarios *pairwise* retenus pour calibrer la fonction *Inter* seront introduits.

#### 1-scénarios *standalone*

Pour chacune des deux fonctions d'interpolation déterminées, 8 scénarios de réalisation du facteur de risque  $n$  seront retenus. La sélection des quantiles choisis est montrée dans le tableau 3.1.

scénarios	1/2000	1/200	1/50	1/10	9/10	49/50	199/200	1999/2000
-----------	--------	-------	------	------	------	-------	---------	-----------

TABLE 3.1 : scénarios quantiles retenus pour le calibrage de la fonction d'interpolation *standalone*

Ces scénarios de calibration ont été sélectionnés car ils correspondent à des quantiles en queue de distribution des facteurs de risques à  $t=1$ . Il s'agit de scénarios extrêmes ; ceux-ci sont les plus pertinents et auront le plus grand impact sur la NAV à  $t=1$ . Dans le cadre du calcul du capital de solvabilité requis et de l'étude des queues de distribution des NAVs à  $t=1$ , ce sont donc ces scénarios qui seront déterminants et pour lesquels l'erreur de prédiction doit être minimisée. Ainsi, il est plus prudent de considérer ce type de scénarios de calibration pour notre étude. Ce choix reste arbitraire et pourrait être discuté.

Seuls 8 scénarios sont utilisés pour des raisons pratiques. Effectivement, les outils à notre disposition ne permettent pas de considérer des calculs d'une complexité trop grande et la prise en compte d'un nombre considérable de scénarios primaires, engendrant un temps de calcul trop important.

### 2-scénarios *pairwise*

Pour des raisons de complexité de calcul, la fonction d'interaction est calibrée à partir de 5 quantiles obtenus sur la distribution d'action et 5 quantiles obtenus sur la distribution de l'immobilier. Chacun des quantiles actions est associé un à un aux quantiles immobilier de sorte à obtenir 25 2-scénarios  $(s_1, i_1)$  pour lesquels une NAV à un an est déterminée par méthodologie SdS implémentée dans l'outil ALM, ce qui permettra par la suite de déterminer la fonction *Inter* au titre de chacun de ces scénarios puis d'obtenir un jeu de données pour calibrer cette fonction. Les quantiles retenus sont résumés dans le tableau 3.2. Ils ont été déterminés de manière à parcourir uniformément les valeurs prises par le couple  $(S_1, I_1)$ . En effet, il est moins évident d'anticiper les scénarios pour lesquels les interactions vont engendrer des excédents de pertes conséquents et vont intervenir en queue de distribution supérieure de la perte. Il est par conséquent plus pertinent de considérer tout type de scénario.

Il est à noter que ce choix de calibration se fait indépendamment de l'échantillon  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$  sorti de notre GSE RW. La plausibilité des scénarios de calibration n'est donc pas considérée et la structure de dépendance mise en place dans le GSE RW n'est pas utilisée dans cette étape. Un poids important dans le calibrage de la fonction d'interactions est donc donné à des scénarios qui ont très peu de chance de se produire, ce qui pourrait engendrer des erreurs dans la mise en place de la fonction d'ajustements et ne pas représenter fidèlement le profil de risque de l'assureur. Néanmoins, des études ont été menées en annexe A.5, avec un calibrage plus prudent, a mené à l'obtention d'un SCR *pairwise* quasiment identique (écart de 0,5%). Il a donc été convenu de maintenir ce choix de calibrage. En effet, l'écart obtenu sur le ratio de couverture est inférieur à 1%, correspondant au seuil fixé dans cette étude à partir duquel l'écart entre les deux valeurs obtenues est considéré comme significative. Ce dernier apparaît comme un bon compromis entre prudence et coût et permet de minimiser les ajustements inefficaces ou coûteux. En effet, il était important de vérifier que ce choix de calibrages n'engendrait pas un biais significatif dans les valeurs de SCR obtenues mais l'objectif de ce mémoire ne réside pas dans l'implémentation d'une méthode de *Curve Fitting*. Ce seuil nous permet donc de nous assurer que nous serons en mesure avec cette calibration d'appréhender les interactions de manière suffisamment complète en introduisant un biais qui soit négligeable pour par la suite pouvoir mener l'étude à bien.

scénarios	1/200	1/5	sc. cent	4/5	199/200
-----------	-------	-----	----------	-----	---------

TABLE 3.2 : quantiles des distributions marginales retenus pour la calibration de la fonction d'interpolation *pairwise*

### 3.1.5 Validation des *proxys* CF

Afin de pouvoir s'assurer de la fiabilité de la fonction d'interpolation implémentée pour déterminer le SCR, la validation du *proxy* est fondamentale. En pratique, une compagnie d'assurance peut assimiler jusqu'à 3/4 du budget de calcul global pour la validation du *proxy*. Cette étape consiste à comparer la prédiction de NAV pour une observation de facteurs de risques à la « vraie valeur » déterminée à partir de la méthodologie SdS. Afin de rendre l'exercice réalisable dans ce cas de figure, 5 scénarios de validation par *proxy standalone* ont été retenus et 8 scénarios de validation pour le *proxy pairwise*, en sélectionnant des quantiles de la distribution des facteurs de risques de manière aléatoire. Les NAVs associées ont par la suite été déterminées par la méthode SdS implémentée au sein de l'outil ALM

et comparées avec les valeurs en sortie de la fonction d'interpolation obtenue. Afin de valider par la suite la fonction d'interpolation obtenue, il convient de définir une métrique et de s'assurer que cette dernière ne dépasse pas un certain seuil de tolérance défini par la compagnie. En notant  $(x_k, y_k)_{1 \leq k \leq n}$  le jeu de données et  $\tilde{f}$  la fonction de prédiction issue du modèle à valider, les métriques retenues sont illustrées dans le tableau 3.3.

métrique	Ecart Absolu Moyen (EAM)	Ecart Quadratique Moyen (EQM)	Ecart Maximal (EM)
formule	$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n  y_k - \tilde{f}(x_k) $	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \tilde{f}(x_k))^2}$	$\max_{1 \leq k \leq n}  y_k - \tilde{f}(x_k) $

TABLE 3.3 : métriques utilisées pour la validation des fonctions d'interpolation *Curve Fitting*

Ces indicateurs de performance figurent parmi les plus connus en *machine learning* pour s'assurer du bon fonctionnement d'un modèle. Il est recommandé d'examiner plusieurs métriques pour valider un modèle. En effet, elles ne vont pas toutes évaluer les mêmes caractéristiques et il est prudent de se référer à plusieurs d'entre elles pour valider un modèle. Ici, l'EAM mesure l'erreur absolue moyenne entre les valeurs prédites et les valeurs réelles. Il permet de donner une idée du niveau moyen de l'erreur sur la prédiction fournie par la fonction d'interpolation. En revanche, l'EQM mesure l'erreur quadratique moyenne entre les valeurs prédites et les valeurs réelles. Il va donc plus pénaliser les erreurs de prédiction conséquentes et permet de s'assurer que les erreurs de prédiction sont suffisamment faibles sur les valeurs extrêmes. L'écart maximal permet de voir s'il existe des cas de figure dans le modèle où les valeurs prédites sont très éloignées des valeurs réelles, même si en moyenne la prédiction est bonne par exemple dans le cas d'une valeur d'EAM satisfaisante.

Afin de valider le modèle, il est souhaitable de s'assurer que l'EAM et l'EQM ne dépassent pas 2% de la valeur de la NAV au temps 1 obtenue en scénario central, et 5% pour l'EM.

### 3.1.6 Résultats obtenus

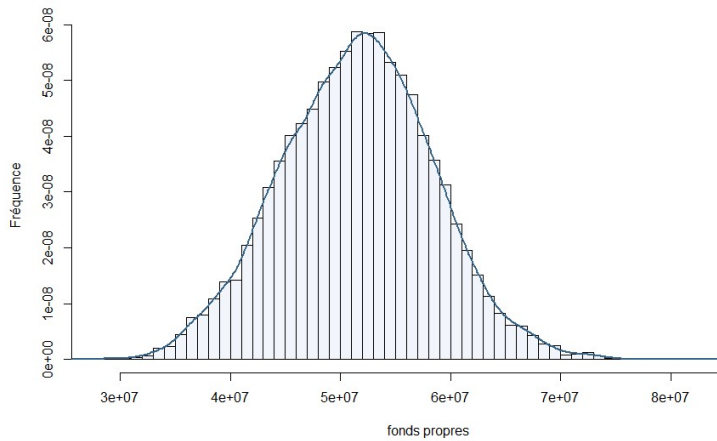
Les fonctions d'interpolation obtenues ainsi que les distributions de NAVs en découlant seront présentées dans cette section. Comme précisé précédemment, ces fonctions d'interpolation sont calibrées à partir du jeu de données déterminé à l'aide de l'outil ALM et du mécanisme SdS implémenté détaillé dans la section 2.3. L'implémentation de ces fonctions d'interpolation repose sur 8 scénarios de calibrage chacune. Des scénarios de validation sont par la suite déterminés avec l'outil ALM afin de s'assurer de la robustesse des fonctions implémentées.

#### Risques *standalone*

Les résultats obtenus pour la NAV au titre du risque action seront détaillés dans un premier temps. Les résultats pour la distribution de NAV au titre du risque immobilier seront commentés dans un second temps.

**Risque action** La distribution de NAV obtenue est représentée dans la figure 3.2a.

La fonction illustrée par la figure 3.2b est croissante selon les valeurs des actions. Ce résultat est intuitif : plus la valeur des actions détenue par l'assureur est élevée, plus il sera en mesure de réaliser de la plus-value sur ses actions ainsi que de satisfaire les assurés en versant un taux de revalorisation convenable et limiter les rachats. Il ne semble donc pas aberrant d'observer une NAV qui augmente avec la valeur des actions.



(a) NAV un an

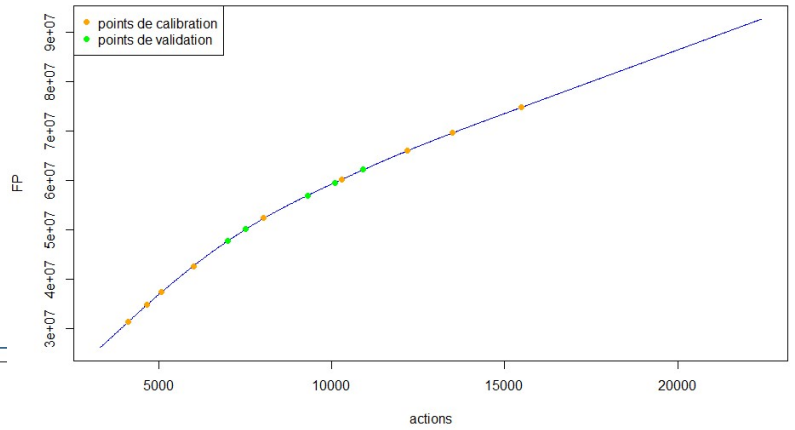
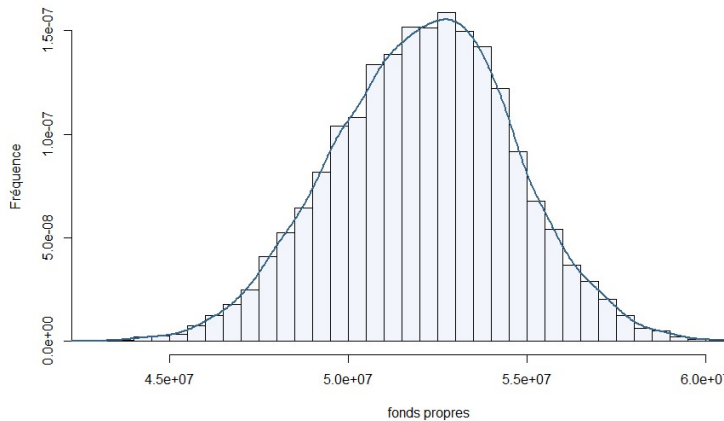
(b) fonction *Curve Fitting*

FIGURE 3.2 : Résultats CF pour le risque action (en €)

Les tests mentionnés ci-dessus dans la section 3.1.6 ont été effectués et validés sur les scénarios de validation de l'indice action, reportés dans la figure 3.2b. Comme cette figure l'illustre, les scénarios de validation semblent très satisfaisants et sont quasiment alignés avec la courbe.

**Risque immobilier** La figure 3.3a représente la distribution de NAV à un an obtenue au titre du risque immobilier.



(a) NAV un an

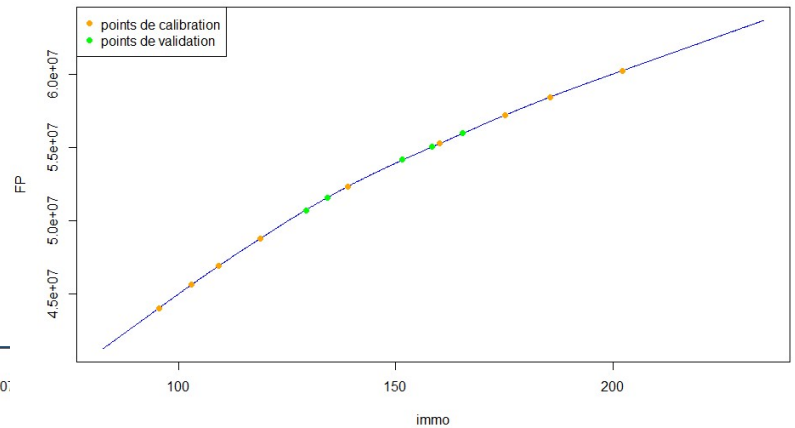
(b) fonction *Curve Fitting*

FIGURE 3.3 : Résultats CF pour le risque Immobilier (en €)

Le risque immobilier ayant été implémenté de la même façon que le risque action, une courbe similaire à ce qui a été obtenu dans le cadre du risque action est observée. Il convient néanmoins de noter que les valeurs prises par les NAVs sont moins étendues que dans le cadre du risque action. En effet, il peut être remarqué que la volatilité implémentée dans le GSE RW pour le risque immobilier est deux fois moins importante que pour le risque action. L'étendue des valeurs prises au temps 1 par l'immobilier est donc moins importante que pour l'action et par conséquent, la distribution de perte immobilier au temps 1 est obtenue à partir de valeurs moins extrêmes. D'autre part, l'immobilier a beaucoup moins d'impact sur la NAV de l'assureur considéré dans l'étude que les actions. Ces dernières

sont utilisées par l'assureur pour revaloriser la provision mathématique et jouent un rôle important dans les mécanismes d'interaction actif-passif. En revanche, l'immobilier, bien qu'il ait un impact non négligeable sur la NAV et intervient nécessairement dans les mécanismes d'interaction actif-passif, notamment à travers sa contribution aux produits financiers, entre moins en jeu que le risque action et va par conséquent moins affecter le bilan économique final de l'entreprise.

La figure 3.3b représente une NAV à un an croissante en fonction des valeurs de l'indice immobilier à un an. Ce résultat est également intuitif : plus les valeurs immobilières détenues par la compagnie sont importantes, plus la compagnie détient de la richesse et plus sa NAV à un an est importante. Les scénarios de validations présentés dans la figure 3.3b permettent bien l'obtention de tests de validation satisfaisants. La fonction d'interpolation présentée ci-dessus est également validée.

### Risques *pairwise*

Le jeu de données déterminé associant à tout scénario de calibrage la valeur de la fonction *Inter*, obtenu à l'aide des simulations SdS au sein de l'outil ALM, est présenté dans le tableau 3.4.

$q_{act} \backslash q_{immo}$	1/200	1/5	sc. cent	4/5	199/200
1/200	2,82	0,97	0	-0,66	-1,90
1/5	0,88	0,30	0	-0,20	-0,59
sc. cent	0	0	0	0	0
4/5	-0,79	-0,31	0	0,09	0,40
199/200	-2,04	-0,61	0	0,37	1,27

TABLE 3.4 : valeurs de la fonction *Inter* en m € obtenues à partir de l'outil ALM, pour les scénarios de calibration considérés

Les scénarios pour lesquels les valeurs d'action et d'immobilier se situent en queue de distribution présentent un excédent de perte : pour les faibles valeurs d'action et d'immobilier, il y a une perte supplémentaire induite par l'interaction entre les deux risques et pour les valeurs élevées d'action et d'immobilier, un gain moins important est observé lorsque les deux risques interagissent ensemble. Pour des scénarios où une faible valeur d'immobilier est observée et une valeur élevée d'action (et inversement), l'interaction engendre une diminution de la perte. Ces observations sont intuitives :

- **Pour des valeurs d'action et d'immobilier simultanément faibles au temps 1**, une diminution simultanée des deux types d'actifs est constatée. Cela entraîne une diminution conjointe des revenus provenant des deux classes d'actifs et une réduction des entrées de trésorerie de l'assureur. Ainsi, ce dernier dispose de moins de liquidité pour couvrir les engagements à court terme, exacerbant ainsi la perte en terme de flux financiers. Cela peut mener à des ventes d'actifs en pertes, pour sécuriser les fonds, amplifiant la perte réalisée.
- **En cas de valeurs d'action et d'immobilier à un an provenant de chocs de sens opposés** (une valeur élevée d'immobilier et faible d'action ou inversement), la perte en est diminuée : la hausse d'une classe d'actifs compense en partie la baisse de l'autre, permettant de limiter la perte observée. L'impact global visualisé sur le bilan est atténué, la pression exercée sur le bilan étant diminuée. En effet, dans le cas où la valeur de l'indice immobilier est élevé et l'action est défavorable, les revenus immobiliers restent disponibles même si les dividendes des actions baissent en raison de la baisse des marchés actions. Cela permet de préserver une certaine liquidité, limitant la nécessité de ventes d'actifs en perte, amortissant l'impact financier

et comptable. Ce même raisonnement s'applique dans le cas où les actifs disposent d'une valeur élevée et l'immobilier est défavorable.

- **Pour des valeurs d'action et d'immobilier simultanément favorables**, le gain constaté au temps 1 est atténué par l'interaction. Lorsqu'une classe d'actifs comme les actions augmente, l'assureur peut ajuster ses autres investissements pour maintenir un profil de risque cible. Cela engendre des prises de bénéfices partielles sur l'immobilier ou des réallocations, limitant l'impact combiné des deux hausses : il s'agit d'ajustements stratégiques qui limitent le gain net du portefeuille. Il est également possible que l'assureur applique des réserves de précaution ou des provisions comptables, par prudence et pour lisser les résultats futurs.

$q_{action} \backslash q_{immo}$	1/200	1/5	sc. cent	4/5	199/200
1/200	3,34	1,49	0,52	-0,14	-1,38
1/5	1,40	0,82	0,52	0,32	-0,07
sc. cent	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52
4/5	-0,28	0,21	0,52	0,60	0,92
199/200	-1,52	-0,09	0,52	0,89	1,79

TABLE 3.5 : valeurs de la fonction  $Ajust$  en m€ obtenues à partir de l'outil ALM, pour les scénarios de calibration considérés

Il convient de constater que pour un même tableau de jeu de données déterminé pour la fonction  $Ajust$  (tableau 3.5), tous les scénarios défavorables observés se verraient attribuer un excédent de perte positif au titre de l'interaction entre les deux risques. En effet, la perte constatée pour le scénario central ( $action_{cent}, immo_{cent}$ ) où les deux risques sont neutralisés  $L_{cent}$  est strictement négative, de valeur -0,52€. Cette valeur est proche d'une perte nulle et a donc très peu d'impact sur la fonction d'ajustement, principalement expliquée par la fonction  $Inter$  (tableau 3.4).

Une fois cette fonction déterminée, la distribution de perte à un an au titre des deux facteurs de risques considérés est obtenue à partir de l'échantillon  $(\hat{L}_1^{pair}(s_1^u, i_1^u))_{1 \leq u \leq n}$ , où  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$  correspondent aux  $n$  couples d'actions et d'immobilier à un an issus de notre GSE RW (les 2-scénarios). Cet échantillon dispose donc de la structure de dépendance imposée par le GSE RW précisée dans la section 2.4.2 (il s'agit d'un échantillon gaussien de corrélation de Pearson 67%).

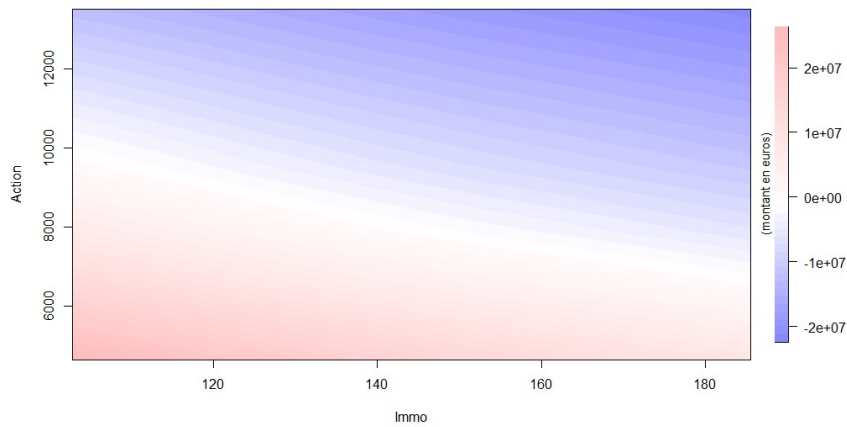


FIGURE 3.4 : Valeur de la Perte déterminée par *Curve Fitting* au titre des risques action et immobilier

La figure 3.4 illustre le fait que la perte est la plus importante pour des scénarios où l'action et l'immobilier sont simultanément défavorables. L'action semble avoir légèrement plus d'impact sur la valeur de la perte que l'immobilier et compense plus aisément une valeur d'immobilier très faible.

### SCRs obtenus

Les valeurs de SCR obtenus au titre des risques *standalone* et agrégés à partir de la fonction d'interpolation *pairwise* sont résumées dans le tableau 3.6.

SCR	SCR (Action)	SCR (Immobilier)	SCR (Action, Immobilier)
valeur	16,41	5,97	23,68

TABLE 3.6 : Résultats des SCR obtenus en €, pour les données considérées

Il est judicieux de commencer par constater que les fonctions d'interpolation *standalone* obtenues au titre des deux facteurs de risques considérés sont croissantes de ces facteurs (cf. figures 3.2b et 3.3b). Ainsi, la NAV un an utilisée pour déterminer la valeur du SCR au titre de chacun des risques, correspondant au quantile 0,5% de la distribution de NAV un an obtenue n'est autre que la valeur de la NAV un an pour le quantile 0,5% du facteur de risque. Ce résultat émane de la propriété 1.4.1 présentée dans le premier chapitre de ce mémoire. Après avoir mis en avant cette caractéristique, les valeurs de SCR obtenus au titre des différents risques étudiés peuvent être explicitées.

**SCR action** Il est à noter que la valeur obtenue est inférieure à la valeur déterminée en FS (un écart de 20,9% est constaté). Néanmoins, de nombreux mécanismes interviennent, tendant à augmenter et diminuer la valeur obtenue. Cette section permet de détailler ces différents phénomènes. Le SCR action est obtenu à partir du quantile à 0,5% de la distribution des actions à un an déduite de le GSE RW. Ce dernier vaut 4647. Afin d'évaluer la présente valeur et dans l'optique de comparer le SCR obtenu à celui obtenu en FS, disponible en annexe A.2, elle est confrontée à la valeur de l'action au temps 1 pour laquelle la perte observée est nulle. Le choc appliqué à cette action pour obtenir le quantile à 0,5% présenté est de -41%. Ce choc est légèrement inférieur au choc appliqué en FS, qui est de -46% pour le portefeuille d'actions considéré. Ce premier constat tend à mener à l'observation d'une baisse du SCR au titre du risque action. Cependant, les données immobilier utilisées pour calibrer notre GSE RW mènent à une calibration du *drift* de 4% (cf. 3.12). Cette valeur est importante et induit un 1-scénario central décrit en section 3.1.3 favorable. Les NAVs obtenues par SdS étant conditionnés par le 1-scénario central considéré, un *drift* élevée aura tendance à augmenter la valeur des NAVs observées et à diminuer les valeurs de l'échantillon de perte obtenu. Par conséquent, un tel *drift* tend à limiter la valeur du SCR action. Une autre constatation est que la volatilité des trajectoires immobilier pour le GSE RN à un an est fixé à 11,64% par cohérence avec ce qui a été déterminé en RW, en section 3.12. Les 1-scénarios de calibration action font appel à ces trajectoires pour les simulations secondaires. Elles ont par conséquent un impact sur le SCR obtenu. En comparaison au GSE au 31/12/2023 utilisé pour le SCR en FS pour laquelle la volatilité implicite immobilier est de 8%, cette valeur est plus importante et est encline à augmenter la valeur du SCR action observée.

**SCR immobilier** Le SCR immobilier obtenu dans notre étude est moins élevé que la valeur FS disponible en annexe A.2 et représente 85% de cette dernière. La valeur immobilier utilisée pour le calcul du SCR correspond au quantile à 0,5% de la distribution issue du GSE RW, donné par 102. En déterminant le choc appliqué de la même manière que pour le risque action, un choc à -24% est



obtenu, ce qui est légèrement plus faible que ce qui est obtenu en FS pour laquelle le choc appliqué en immobilier est de -25%. Cette première observation peut mener à comprendre le fait que les deux SCR obtenus ne sont pas très éloignés. En revanche, comme il a été précisé dans la section précédente, les GSE RN utilisés au temps 1 disposent de volatilités de l'ordre de 11% pour les 1-scénarios immobilier. Cette constatation va avoir un impact sur le SCR immobilier déterminé et va gonfler ce dernier. En revanche, le paramètre  $\mu$  de la dynamique *Black&Scholes* déterminé est assez favorable et peut limiter la valeur du SCR immobilier estimé.

**SCR *pairwise*** La méthodologie *pairwise* présentée précédemment mène à un SCR de 23,68 m€. Cette observation peut sembler étonnante. Il semble plus intuitif de constater une diversification du fait de la prise en compte de deux risques : ces deux risques constituant des classes d'actifs distincts, il ne devraient potentiellement pas se produire de manière simultanée. Le risque devrait par conséquent s'atténuer. Cependant, ce n'est pas ce qui est constaté ici : la somme des SCR élémentaires action et immobilier (22,38 m€) est inférieure au SCR agrégé. Cet effet peut s'expliquer par deux mécanismes qui s'opèrent dans notre cas de figure :

1. **Une structure de dépendance positive très marquée.** Une corrélation à 67% a été calibrée pour le GSE RW, entraînant une très forte dépendance entre les deux facteurs de risques : au sein de l'économie à un an obtenue, un grand nombre de valeurs action défavorables vont être associées à des valeurs immobilier défavorables, engendrant des scénarios (action, immobilier) pour lesquels les risques se réalisent de manière simultanée, ne favorisant pas l'effet de diversification.
2. **L'effet de l'interaction entre les deux risques qui augmente la perte observée pour des scénarios où l'action et l'immobilier sont simultanément faibles.** Comme mis en avant dans la section 3.1.6, pour des scénarios d'action et d'immobilier pour lesquels les valeurs d'action et d'immobilier sont inférieures aux valeurs centrales, un excédent de perte dû aux interactions entre les deux facteurs est observé. Nous pourrions constater avec la figure 3.5 que ces scénarios sont à l'origine de la queue de distribution supérieure de la perte agrégée. Le SCR, situé en queue de distribution supérieure de la perte, est donc concerné par ce phénomène de gonflement de perte.

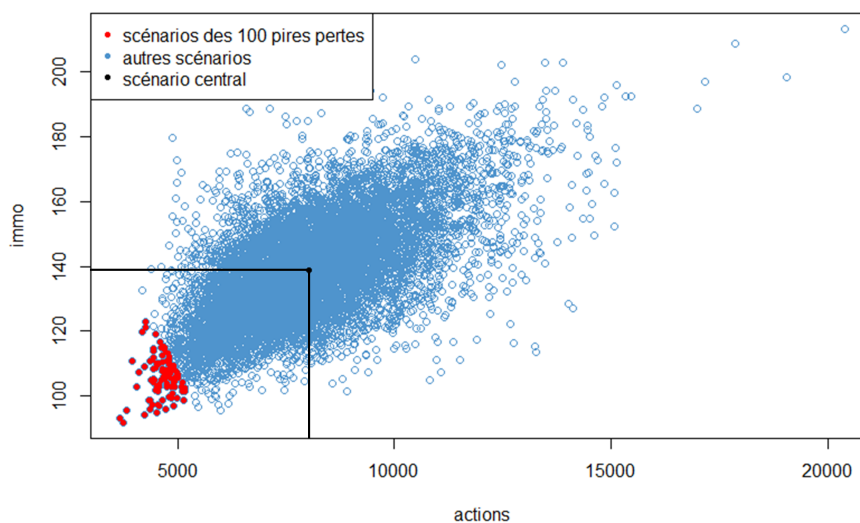


FIGURE 3.5 : scénarios économiques à l'origine de niveaux de pertes significatifs

La figure 3.5 met en avant les scénarios économiques responsables des 100 pertes les plus importantes constatées. Elles sont toutes telles que leurs valeurs d'action et d'immobilier sont inférieures aux valeurs centrales associées, illustrées par le carré noir sur la figure. Ainsi, un ajustement positif est appliqué sur ces pertes en queue de distribution supérieure. La valeur de la perte représentant la 50ème plus grande valeur de la distribution (l'estimateur du SCR utilisé) est concernée par le phénomène d'augmentation de la perte avec prise en compte de l'ajustement.

Avec une structure de corrélation moins prononcée, une diversification sera néanmoins constatée, comme l'illustre la figure 3.6, où est représenté à l'aide de la droite horizontale rouge le niveau de référence correspondant à la somme des deux SCRs élémentaires. En effet, on observera des scénarios (action, immobilier) pour lesquels le risque ne se produit pas en même temps : les scénarios seront tels que l'action aura une valeur élevée et l'immobilier une valeur faible et inversement. En plus de cette survenance non simultanée des risques, nous avons alors pu voir dans la partie 3.1.6 que dans ce cas de figure, les interactions entre les deux risques atténuait la perte agrégée observée, favorisant l'effet de diversification.

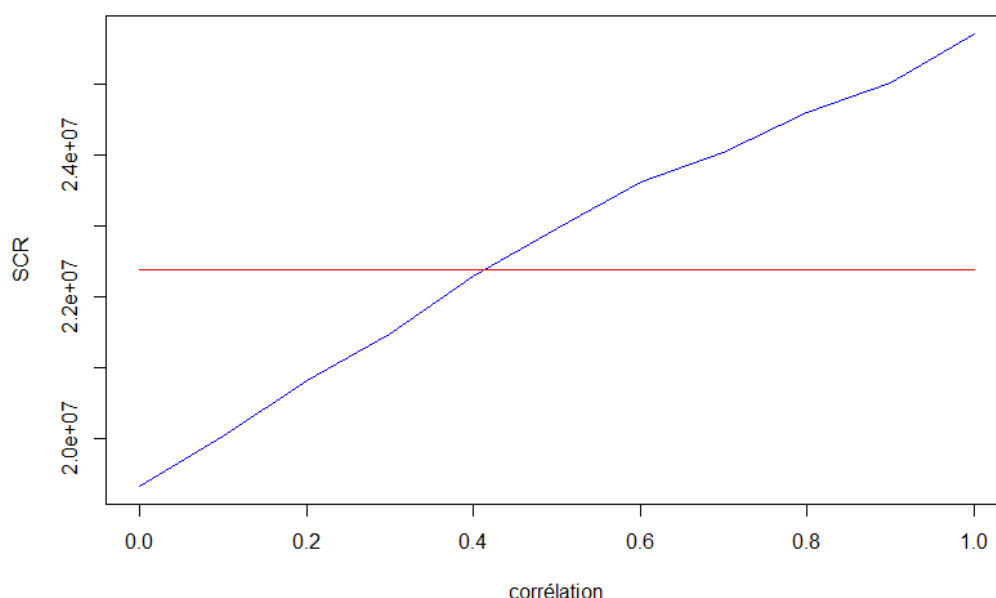


FIGURE 3.6 : SCRs en fonction de la corrélation implémentée dans le GSE RW

**Regard critique sur la corrélation observée** Il est étonnant de constater un effet de contagion lors de l'agrégation entre les différents facteurs de risques. En pratique, une diversification est attendue après agrégation de facteurs de risques. Dans cette étude, un seul indice immobilier et action extrêmement corrélés sont utilisés pour déterminer la structure de dépendance. En prenant l'indice des notaires pour représenter l'indice immobilier, alors la structure de dépendance est beaucoup moins prononcée. Ainsi, la structure de dépendance utilisée n'est représentative que de la moitié des indices immobiliers et en pratique, l'action et l'immobilier semblent moins corrélés. Comme précisé dans la partie 2.4.2, il aurait été judicieux de considérer des sous-modules de risque immobilier et action permettant par la suite d'adopter une structure de dépendance plus juste et plus représentative du portefeuille immobilier et action de l'assureur, les différents indices action et immobilier limitant alors

la dépendance positive existante entre ces deux facteurs.

## 3.2 Les copules

La théorie des copules est un concept utilisé pour modéliser de manière précise la dépendance entre différentes variables aléatoires. Elle est présentée en 1959 par Abe Sklar et constitue depuis les années 80 un outil de prédilection en assurance et en banque pour modéliser de manière conjointe les différents facteurs de risques auxquels ils sont soumis.

A cet effet, les modèles internes des compagnies d'assurance peuvent avoir recours aux copules afin d'agréger les risques dans le cadre du calcul du capital économique. Avant de les utiliser à des fins d'agrégation de risques dans notre étude, il convient d'en présenter la théorie. Cette introduction à la théorie des copules se fonde sur les travaux d'EMBRECHTS et al. (2001).

### 3.2.1 Définition et théorèmes fondamentaux

Par souci de compréhension et de lisibilité, il convient de présenter préalablement les copules bi-variées, qui modélisent la dépendance entre deux variables aléatoires. Il est cependant important de noter que les définitions et propositions présentées sont facilement extensibles aux dimensions supérieures à 2.

Une copule correspond à une application  $C : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$  vérifiant les conditions suivantes :

- $C$  est croissante sur  $[0, 1]$  en chacune de ses composantes ;
- $C$  est continue sur  $[0, 1]^2$  ;
- $C(u_1, u_2) = 0$  si  $u_i = 0$  avec  $i \in \{1, 2\}$  ;
- $C(u_1, u_2) = u_1$  si  $u_2 = 1$  et inversement ;
- $C$  est supermodulaire, c'est-à-dire :  
 $\forall 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1, \forall 0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1,$

$$C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) \geq 0.$$

Il est à noter que la fonction copule  $C$  peut être vue comme la fonction de répartition bi-variée d'un couple  $(U_1, U_2)$  de lois uniformes  $\mathcal{U}(0, 1)$ . En effet, le couple admet pour support  $[0, 1]^2$  et sa fonction de répartition admet les propriétés ci-dessus. En particulier, la propriété de supermodularité peut être démontrée.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(U_1 \leq b_1, U_2 \leq b_2) - \mathbb{P}(U_1 \leq b_1, U_2 \leq a_2) - \mathbb{P}(U_1 \leq a_1, U_2 \leq b_2) + \mathbb{P}(U_1 \leq a_1, U_2 \leq a_2) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq b_1, a_2 \leq U_2 \leq b_2) + \mathbb{P}(U_1 \leq a_1, b_2 \leq U_2 \leq a_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Suite à ce constat, le théorème fondamental de la théorie des copules peut être introduit.

**Théorème 3.2.1 (Théoreme de Sklar)** *Soit  $F$  une fonction de répartition bi-variée admettant pour marginales les fonctions de répartition  $F_1$  et  $F_2$ . Alors, il existe une copule  $C$  telle que :*

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Inversement, pour une copule  $C$  et les fonctions de répartition  $F_1$  et  $F_2$ , la fonction  $F$  définie ci-dessus constitue une fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires de lois marginales  $F_1$  et  $F_2$ .

En effet, supposons  $F$  la fonction de répartition du couple  $(X_1, X_2)$ . En notant  $C$  la fonction de répartition du couple  $(U_1, U_2)$ , avec  $U_1 = F_1(X_1)$  et  $U_2 = F_2(X_2)$ , deux variables aléatoires de lois uniformes  $\mathcal{U}(0, 1)$ , alors

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)) \\ &= \mathbb{P}(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= F(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Il est à noter que si  $F_1$  et  $F_2$ , les marginales du couple  $(X_1, X_2)$ , sont continues, alors la copule  $C$  vérifiant 3.2.1 est définie de manière unique.

Dans le cadre de l'assurance-vie, la plupart des lois utilisées pour modéliser les différents risques sont des lois continues. Le théorème de Sklar est ainsi essentiel et permet la génération de n'importe quelle loi bi-variée par utilisation d'une copule, qui détermine la structure de dépendance de ces variables.

Un raisonnement en termes de copule de survie pour définir la fonction de survie d'un couple  $(X_1, X_2)$  peut également être envisagé.

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \bar{C}(S_1(x_1), S_2(x_2)),$$

avec  $S_1$  la fonction de survie de  $X_1$  et  $S_2$  la fonction de survie de  $X_2$ . La relation suivante peut alors être obtenue :

$$\bar{C}(S_1(x_1), S_2(x_2)) = \mathbb{P}(X_1 > x_1) + \mathbb{P}(X_2 > x_2) - 1 + C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Les copules permettent de mettre en place une structure de dépendance entre des variables aléatoires et caractérisent à cet effet les vecteurs aléatoires. En particulier, elles affectent les densités de ces derniers. Pour  $(X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires dont la structure de dépendance est représentée par la copule  $C$ , de fonctions de répartitions respectives  $F_1$  et  $F_2$ , de densités marginales respectives  $f_1$  et  $f_2$ , la densité du couple est donnée par

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2),$$

où  $c$  correspond à la densité bi-variée associée à la copule  $C$ , c'est-à-dire

$$c(u_1, u_2) = \frac{\delta^2 C}{\delta u_1 \delta u_2}(u_1, u_2).$$

Une propriété importante vérifiée par les copules qui sera par la suite utilisée pour appliquer la théorie à notre cas pratique est la suivante.

**Propriété 3.2.1** *Pour  $\psi_1$  et  $\psi_2$  des fonctions strictement croissantes,  $C$  la copule d'un couple de variables aléatoires continues  $(X_1, X_2)$ , alors  $(\psi_1(X_1), \psi_2(X_2))$  admettent la même structure de dépendance, c'est-à-dire :*

$$C_{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2)}(u, v) = C(u, v).$$

De même, si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont strictement décroissantes, alors  $(\psi_1(X_1), \psi_2(X_2))$  sont agrégés selon la copule de survie associée à la copule de  $(X_1, X_2)$ , c'est-à-dire :

$$C_{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2)}(u, v) = \bar{C}(u, v).$$

Cette propriété se démontre aisément, notamment dans le cas croissant. En effet, en prenant  $\psi_1, \psi_2$  strictement croissantes,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\psi_1(X_1) \leq t_1, \psi_2(X_2) \leq t_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leq \psi_1^{-1}(t_1), X_2 \leq \psi_2^{-1}(t_2)) \\ &= C(F_1(\psi_1^{-1}(t_1)), F_2(\psi_2^{-1}(t_2))) \end{aligned}$$

avec  $F_1 \circ \psi_1^{-1}$ ,  $F_2 \circ \psi_2^{-1}$  les fonctions de répartition de  $\psi_1(X_1)$  et  $\psi_2(X_2)$ .

Les familles les plus courantes de copules sont présentées en annexe A.8.

Afin d'affecter une structure de dépendance à un vecteur aléatoire de facteurs de risques, le réordonnement par copules est l'une des méthodes utilisées par les compagnies d'assurance. Cette méthode est utilisée par la suite dans nos travaux.

### 3.2.2 Réordonnement par copules

Dans le cadre des modèles internes, les risques peuvent être agrégés par des copules en utilisant la méthode de réordonnement par copule. En effet, à partir d'échantillons de lois marginales données, la méthode de réordonnement par copules décrite par DERENDINGER (2015) permet à l'aide d'un algorithme, qui sera détaillé par la suite, d'obtenir des échantillons de variables dont la structure de dépendance correspond à la copule souhaitée.

Dans notre cas de figure, l'objectif de cet algorithme est de permettre, à différents niveaux d'agrégation, de déterminer la distribution de perte au titre des différents risques considérés. Afin d'illustrer ce propos, un arbre est utilisé, comme présenté dans le papier cité ci-dessus.

En notant  $L = (L_1, \dots, L_n)$  un vecteur aléatoire représentant les pertes subies par une compagnie au titre des  $n$  risques individuels supportés par la compagnie, l'objectif est de connaître la perte totale subie par la compagnie d'assurance donnée par  $L_{tot} = L_1 + \dots + L_n$ . Afin de déterminer cette quantité, il est nécessaire de connaître la structure de dépendance entre les différentes fonctions de perte et ainsi d'obtenir  $F(l_1, \dots, l_n) = \mathbb{P}(L_1 \leq l_1, \dots, L_n \leq l_n)$ .

Pour notre étude, seul le cas  $n = 2$  sera étudié. En partant de deux fonctions de perte  $L_1$  et  $L_2$  ainsi que d'une structure de dépendance donnée par la copule, la méthode de réordonnement par copules permet alors d'obtenir  $L_{tot} = L_1 + L_2 \sim F_{tot}$ .

L'algorithme de réordonnement par copules suit ainsi l'idée suivante :

- Simulation d'échantillons marginaux suivant les lois de  $L_1$  et  $L_2$  ;
- Simulation d'un échantillon de la copule bi-variée souhaitée  $C$  ;
- Former un échantillon du vecteur aléatoire  $(L_1, L_2)$  de structure de dépendance  $C$  en réordonnant suivant le rang des uniformes simulées à l'étape précédente.

On note  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  la fonction de répartition de  $(L_1, L_2)$  de telle sorte que  $G(l_1, l_2) = C(F_1(l_1), F_2(l_2))$  et,  $F_{tot}$  la fonction de répartition de  $L_{tot}$ .

Avant de présenter l'algorithme, il convient de présenter d'autres quantités.  $G^n$  correspond à la fonction de répartition empirique du vecteur  $(L_1, L_2)$  et  $F^n$  la fonction de répartition empirique de  $L_{tot}$ .  $p_i(k) = R_i^k$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , où  $R_i^k$  correspond au rang de  $U_i^k$  dans l'échantillon  $\{U_i^j\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ , c'est-à-dire :  $R_i^k = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{U_i^j \leq U_i^k}$

### Algorithme :

1. Générer un échantillon indépendant de taille  $n$  pour chacune des lois marginales et la copule :

- $L_i^k \sim F_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  ;
- $U^k = (U_1^k, U_2^k) \sim C$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

2. Récursivement l'échantillon de  $L_{tot}$ ,  $\{L^k\}_{k=1, \dots, n}$  est défini par :

$$L^k = L_1^{(p_1(k))} + L_2^{(p_2(k))},$$

avec  $L_i^{(k)}$  la  $k^{\text{ème}}$  statistique d'ordre de  $\{L_i^1, \dots, L_i^n\}$ , c'est-à-dire :  $L_i^{(1)} \leq L_i^{(2)} \leq \dots \leq L_i^{(n)}$ .

3. Alors  $G^n(l_1, l_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{L_1^{(p_1(k))} \leq l_1, L_2^{(p_2(k))} \leq l_2\}}$  et  $F^n(l) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k$ .

L'algorithme peut être représenté par l'illustration 3.7.

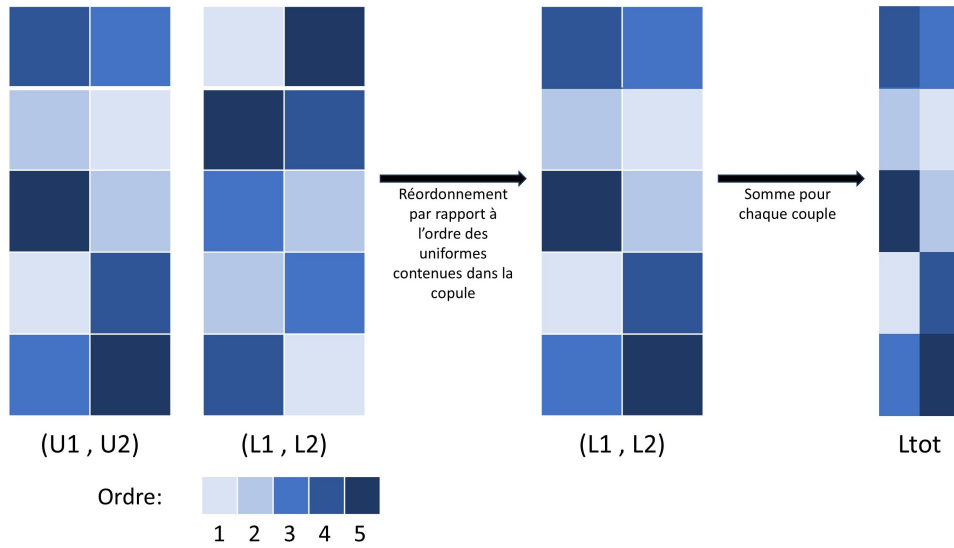


FIGURE 3.7 : Illustration de la méthode de réordonnement par copules

Un algorithme plus détaillé considérant une dimension supérieure à 2 et plusieurs niveaux d'agrégation est disponible dans DERENDINGER (2015).

### Détermination du SCR Agrégé au titre des deux risques à partir du réordonnement par copules

Afin d'établir le SCR agrégé au titre des risques action et immobilier, une structure de dépendance doit être affectée aux fonctions de pertes associées aux risques action et immobilier, déterminées à partir des NAVs un an obtenues par *Curve Fitting*. A partir de cette structure de dépendance un

échantillon  $(L_{act}, L_{immo})$  de pertes au titre des deux risques étudiés est obtenu et chaque couple est sommé à l'instar de l'illustration 3.7, pour obtenir la perte totale. Cette section permettra d'expliciter l'étude menée pour affecter une structure de dépendance au couple de perte  $(L_{act}, L_{immo})$ .

Idéalement, afin d'affecter une structure de dépendance aux pertes engendrées par l'action et l'immobilier, il faudrait calibrer une copule sur un historique observé de ces pertes. Seulement, seuls les historiques de valeurs d'indices immobilier et action sont disponibles. L'idée poursuivie est donc d'affecter une structure de dépendance aux facteurs de risques action et immobilier en utilisant les 2 premières étapes de la méthode de réordonnement par copules. Cette structure de dépendance permet alors de représenter l'économie à un an considérée  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$ , en se concentrant uniquement sur les facteurs action et immobilier. Afin de déterminer par la suite la distribution de perte au titre des deux risques en prenant en compte l'interaction existante entre ces deux facteurs, la fonction  $\hat{L}_1^{pair}$  est appliquée à l'échantillon  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$ .

En effet, en appliquant directement la méthode de réordonnement par copules pour déterminer la structure de dépendance à partir des scénarios (action, immobilier), et en l'utilisant pour affecter une structure de dépendance aux pertes *standalone* action et immobilier associées à chaque observation de l'échantillon des facteurs de risques, le fait de sommer les pertes obtenues à partir de l'échantillon de couple de perte ne permettrait pas la prise en compte de l'interaction entre les deux risques.

### **Etape 1 : Affectation d'une structure de dépendance aux risques action et immobilier**

Pour affecter une structure de dépendance à ces deux facteurs de risques, les données utilisées au sein du GSE RW détaillées dans la section 2.4.2 sont considérées. Ces données récupérées quotidiennement permettent, pour chaque date, d'obtenir une valeur d'action et une valeur d'indice immobilier.

Afin d'associer une copule à cet échantillon de données, il est nécessaire de le rendre iid et par conséquent d'en supprimer l'effet tendance, les données ayant été récupérées sur une vingtaine d'années. A cette fin, il a tout d'abord été envisagé d'appliquer des séries temporelles sur ces dernières afin de récupérer les bruits blancs qui sont iid. Seulement, les résultats n'étaient pas concluants. Il a donc été décidé de se concentrer sur les séries de log-rendements dérivés des indices action et immobilier. En théorie, comme les facteurs de risques action et immobilier ont été diffusés à partir de la dynamique *Black&Scholes*, les log-rendements du facteur de risque  $X_t$  sont donnés par

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_1, \quad (3.13)$$

et sont donc indépendants du temps et iid. L'hypothèse simplificatrice que l'historique des données peut également être représenté par une dynamique de *Black&Scholes* est donc retenue, mais n'est pas observée en pratique. En passant aux log-rendements tels que présentés dans l'égalité 3.13, les données historiques de la figure 3.8 sont obtenues.

Afin d'observer la structure de dépendance entre ces différentes données, le passage aux uniformes associées est effectué en appliquant la transformation  $X \rightarrow \hat{F}(X)$  aux deux distributions marginales des log-rendements action et immobilier, où  $F$  représente la fonction de répartition empirique des deux échantillons. Une forte dépendance positive entre les facteurs de risques action et immobilier est alors constatée sur la figure 3.9, notamment en queues de distribution avec une grande concentration de points : une faible valeur de rendements action dans les données est souvent associée à un faible rendement immobilier et inversement.

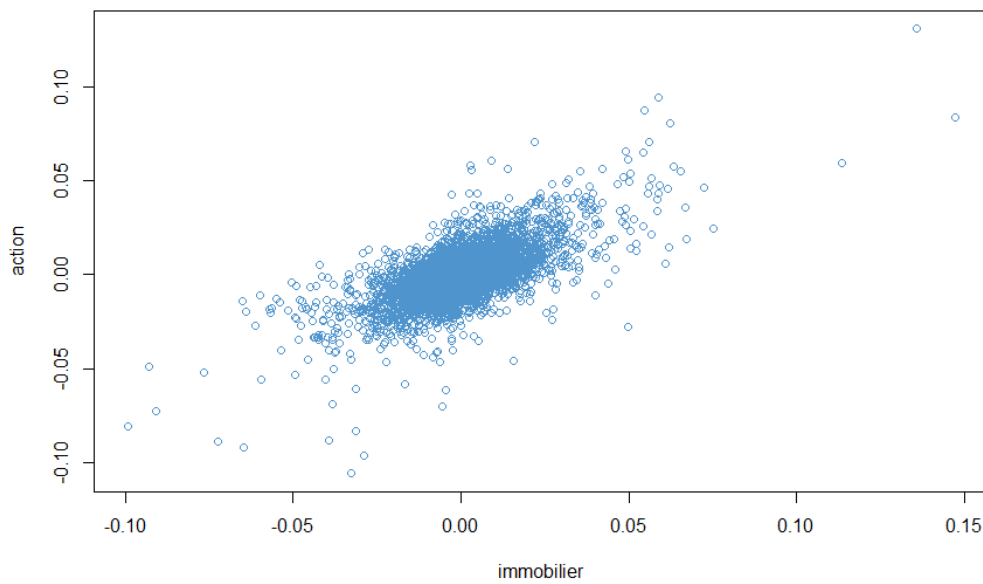


FIGURE 3.8 : historique des log-rendements action et immobilier de 2000 à 2023

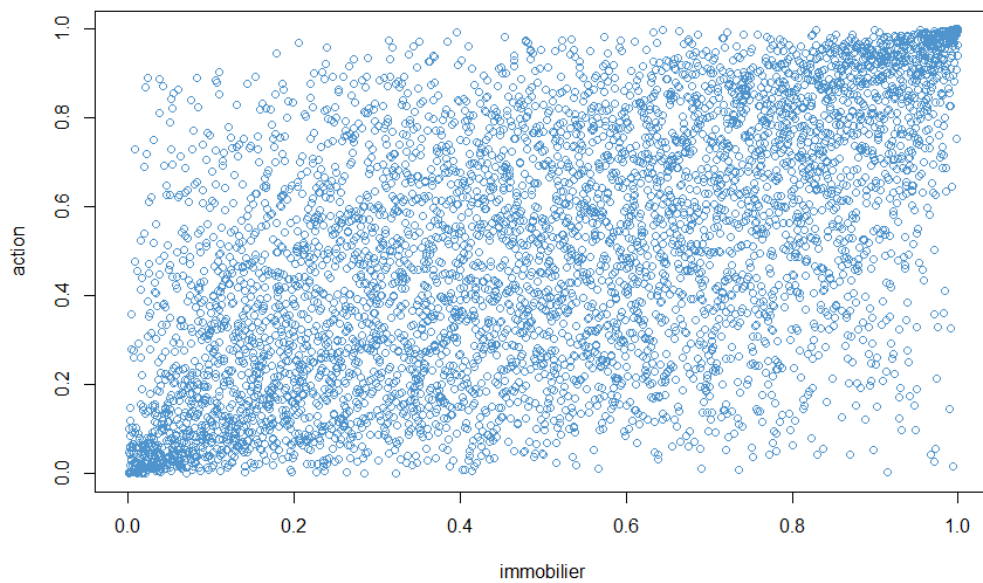


FIGURE 3.9 : Passage aux uniformes associées à l'historique des log-rendements action et immobilier de 2000 à 2023

A partir de ces données d'uniformes, des tests statistiques ont été effectués et la vraisemblance de plusieurs types de copules a été calculée. Pour chaque famille de copules, les paramètres utilisés permettant d'atteindre la plus grande vraisemblance sont retenus : la technique de maximum de vraisemblance est appliquée pour affecter la copule à notre échantillon. Une explication plus complète de cette méthode est présentée dans le mémoire de BOUTAYBI (2014). Parmi toutes les familles, celle qui a obtenue la plus grande vraisemblance pour les données est retenue.

Dans le cadre de ce mémoire, seule l'étude des familles de copules usuelles présentées dans l'annexe A.8 est considérée. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.7.



Famille	Gaussienne	<i>Student</i>	Gumbel de Survie	Frank	Clayton
Paramètre 1	0,64	0,64	1,75	4,66	1,16
Paramètre 2	/	5,3	/	/	/
Tau de Kendall	0,44	0,44	0,43	0,43	0,37
Vraisemblance	1460	1542	1471	1257	1255
AIC	-2919	-3081	-2939,02	-2513	- 2508

TABLE 3.7 : Résultats obtenus pour l'affectation de copules

Ainsi, la copule la plus représentative des données correspond à la copule de *Student* de degrés de liberté 5,3 et de coefficient de corrélation 64%. Les valeurs des AIC associées aux différentes copules semblent satisfaisantes. D'autre part, les mesures de dépendance de copules observées pour chacune des familles semblent coïncider. En effet, les taus de Kendall retenus sont similaires et les coefficients de corrélation pour les copules de *Student* et gaussiennes identiques. Il est à noter que les coefficients de corrélation obtenus correspondent aux coefficient de corrélation de Spearman, car il s'agit de coefficients de corrélation de Pearson déterminés sur les rangs des fonctions de répartition des rendements du couple (action, immobilier). La définition est disponible en annexe A.10. Par la suite, le terme corrélation sera employé pour se référer à cette mesure.

La copule retenue ici est affectée aux distributions marginales d'action et d'immobilier. Cela est possible car la copule trouvée pour les rendements est la même que la copule associée aux facteurs de risques, ces derniers correspondant à une transformation croissante des rendements (pour s'en convaincre, il convient de se référer à la propriété 3.2.1).

Désormais, l'échantillon  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$  correspond à l'échantillon de scénarios (action, immobilier) au temps 1 obtenu avec la nouvelle structure de dépendance imposée par la copule retenue.

**Etape 2 : Obtention d'un échantillon de perte prenant en compte l'interaction entre les deux risques** A l'étape précédente, un échantillon du couple  $(S_1, I_1)$  d'indices action et immobilier à un an a été obtenu. Comme précisé ci-dessus, la fonction *Curve Fitting* — déterminée en section 3.1.3 — qui à un couple de valeurs  $(s_1, i_1)$  associe une perte  $L_{s,i}$  est utilisée pour chaque observation de l'échantillon déterminée à l'étape 1. Une distribution de perte agrégée de taille  $n=10000$  est alors modélisée.

**Etape 3 : Obtention d'un SCR au titre des deux risques** Pour obtenir le SCR agrégé, il suffit alors de déterminer le quantile à 99,5% sur la distribution de perte totale obtenue à l'étape précédente. Le SCR obtenu est reporté dans le tableau 3.8.

	SCR obtenu (m €)
copule de <i>Student</i>	23,91

TABLE 3.8 : Résultat obtenu pour la méthode de réordonnement par copules

Le résultat obtenu est légèrement supérieur à ce qui a été déterminé dans la partie 3.1.6. En effet, un écart relatif de 0,95% est obtenu. Cet écart est faible et permet de confirmer l'ordre de grandeur attendu pour la valeur de ce SCR agrégé. La valeur légèrement supérieure obtenue dans le cas de l'utilisation d'une structure de dépendance à l'aide d'une copule de *Student* peut notamment être due au fait qu'elle intègre des dépendances de queues et qu'elle permet par conséquent une meilleure prise

en compte des événements extrêmes qu'une copule gaussienne, comme précisé dans la partie 1.4.3. En effet, la structure de dépendance considérée entre les facteurs de risques action et immobilier lors de la mise en place de la distribution de NAV un an déterminée en *pairwise* est la structure de dépendance gaussienne présentée en section 2.4.2. Comme constaté précédemment, cette structure ne permet pas la modélisation de dépendances de queue et ne représente pas correctement les événements extrêmes, en les sous-représentant. Ainsi, bien que la corrélation en GSE RW soit de 67% contre 64% retenu pour la mise en place de la copule de *Student*, cette dernière va associer plus de valeurs action et immobilier défavorables les unes avec les autres. Elle engendre alors la considération de pertes plus importantes au sein de l'échantillon de perte obtenu et un SCR plus élevé. Il convient de préciser que le coefficient de corrélation de 64% retenu pour *Student* correspond en réalité à un coefficient de corrélation de Spearman tandis que le coefficient de 67% obtenu pour la copule gaussienne dans le GSE RW est déterminé à partir des données et non de leur rang : elle correspond donc à un coefficient de Pearson. Une étude sera menée dans le chapitre 4 afin de regarder plus en détail ce phénomène et de quantifier l'impact de la modification de la structure de dépendance sur la distribution de perte agrégée obtenue.

Ce paragraphe met ainsi en lumière que les hypothèses de dépendance peuvent influencer sur les SCR obtenus. L'écart obtenu peut sembler marginal. Néanmoins, dans le cadre de la gestion de capital et de la solvabilité, des variations dans le SCR peuvent avoir un impact sur la stratégie de couverture, de provisionnement et de gestion des risques. En choisissant une structure de dépendance qui correspond mieux au profil de l'assureur, une estimation plus précise des besoins en capital est obtenue. En prenant en compte une structure de *Student*, permettant une modélisation plus fiable des risques extrêmes, l'assureur dispose alors d'une meilleure prise en compte de ses spécificités, en donnant un aperçu plus réaliste de son besoin en capital.

### 3.2.3 Les avantages de l'utilisation de copules dans le cadre des Modèles Internes

Les copules présentent un nombre important d'avantages en matière de modélisation des risques d'une compagnie d'assurance. Certains de ces avantages sont explicités ci-dessous.

- Les copules permettent une modélisation fine de la structure de dépendance des différents risques à l'aide des différents paramètres dont elles disposent ;
- La loi jointe des facteurs de risques peut être déterminée en 2 étapes. En effet les distributions marginales des facteurs de risques et leur structure de dépendance peuvent être analysés séparément ;
- Les copules permettent de représenter la structure de dépendance existante entre les facteurs de risques de manière plus juste que ne le font les mesures de dépendance telles que les coefficients de corrélation. Une copule peut par exemple permettre la modélisation d'une dépendance de queue ;
- Ces instruments sont relativement simples à simuler en utilisant des Méthodes de Monte Carlo ;
- L'argument principal en faveur des copules réside dans le fait que ces dernières permettent la mise en place d'une structure de dépendance à partir de l'expression de la distribution des facteurs de risques ou des pertes associées. Elles permettent donc d'étudier la distribution de perte à tout niveau de quantile et d'avoir une vision plus claire du profil de risque associé à la compagnie d'assurance.

### 3.2.4 Les limites de l'utilisation de copules dans le cadre des Modèles Internes

Les limites sont les suivantes :

- Les copules sont difficilement interprétables par une audience qui n'est pas constituée de mathématiciens. Les résultats sont alors peu compréhensibles et manquent de transparence. Il s'agit du phénomène de boîte noire ;
- Les compagnies d'assurance sont régulièrement confrontées à un manque de données constituant un frein dans la sélection des copules appropriées et de leurs paramètres ;
- Les copules de dimension trop importantes ne permettent pas une modélisation fine de la structure de dépendance entre les variables aléatoires. En effet, le nombre de paramètres n'est généralement pas suffisant pour capter pleinement la dépendance entre chacun des risques ;
- Les distributions marginales doivent être accessibles pour chacun des facteurs de risques, ce qui n'est pas toujours le cas.

## 3.3 Agrégation au sein du MIP

Comme précisé dans la section 1.5.3, le MIP utilise des méthodologies à la fois simulatoires et FS pour déterminer les SCR élémentaires et à différents niveaux d'agrégation. Une compagnie peut estimer qu'il est judicieux et rentable de déterminer les capitaux à détenir au titre de certains risques en appliquant une méthodologie simulatoire, puis que les autres risques auxquels elle est exposée sont représentés de manière suffisamment fine par la FS. Dans ce cas de figure, une méthodologie d'agrégation particulière est considérée afin de déterminer le SCR global. Dans cette partie, les méthodologies adoptées en pratique par les compagnies d'assurance sont présentées. Le cas où les risques modélisés appartiennent au même module sera détaillé dans cette section, ce cas de figure étant retenu dans ce mémoire.

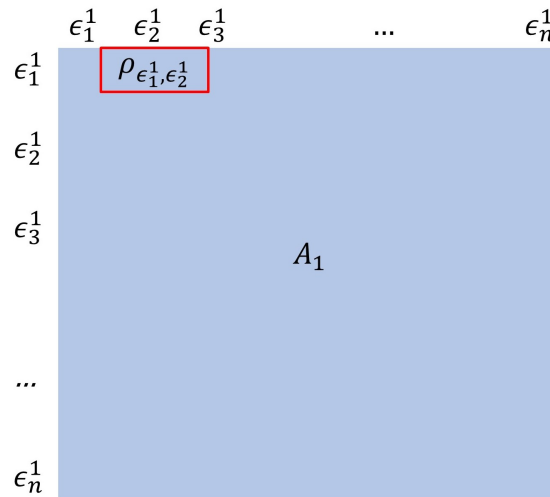
### 3.3.1 Agrégation pour des risques appartenant au même module

Afin de simplifier la réflexion menée autour de cette méthodologie, cette dernière sera détaillée en supposant deux risques appartenant au même module pour lesquels une approche simulatoire a été mise en place puis les autres risques modélisés à partir d'une approche FS.

Le cadre retenu est le suivant : la compagnie regroupe ses risques dans deux modules de risques  $M_1$  et  $M_2$ . Les risques appartenant au module  $M_2$  sont modélisés par FS. Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  les risques contenus dans le module  $M_1$ . Seuls les risques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont modélisés par une approche simulatoire. La prise en compte de la structure de dépendance mise en place entre les risques simulés  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  s'effectue en modifiant le coefficient de corrélation de la matrice intra-modulaire du module  $M_1$  décrivant la dépendance instaurée par la FS entre les risques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , tel qu'illustré par la figure 3.10. Ce dernier prend la valeur

$$\rho_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \frac{SCR_{simu}(\epsilon_1, \epsilon_2)^2 - SCR_{simu}(\epsilon_1)^2 - SCR_{simu}(\epsilon_2)^2}{2SCR_{simu}(\epsilon_1)SCR_{simu}(\epsilon_2)}. \quad (3.14)$$

Il s'agit du coefficient qui permet de retrouver la valeur du SCR agrégé au titre des deux risques trouvé par simulation à partir de l'approche Var-Covar et des SCR élémentaires également déterminés par simulation. Il s'agit d'une corrélation *Entity Specific* qu'il convient de ne pas confondre avec une corrélation de Pearson. Ce n'est en effet pas un coefficient de corrélation déterminé en évaluant le

FIGURE 3.10 : matrice d'agrégation intra-modulaire du module  $M_1$ 

coefficient de corrélation observé sur l'échantillon du couple de risques  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  mais il s'agit d'un paramètre permettant la prise en compte du SCR agrégé trouvé par approche simulateur au sein de la FS retenue pour les autres risques. L'agrégation inter-modulaire entre les module  $M_1$  et  $M_2$  n'est pas modifiée. Dans la suite, la dénomination "corrélation *Entity Specific*" (ou corrélation ES) fera uniquement référence à cette corrélation présentée dans l'égalité 3.14.

### 3.3.2 Corrélation *Entity-Specific* obtenue

Le coefficient de corrélation ES obtenu à partir de la formule suivante pour la copule de *Student* retenue est de 136%. Cette quantité déterminée est supérieure au paramètre de corrélation de la copule et confirme donc le fait que les hypothèses FS ne sont pas satisfaites dans ce cas de figure. Le paramètre de corrélation supérieur à 1 obtenu témoigne de la dépendance importante observée en queue de distribution supérieure de l'échantillon de pertes (action, immobilier) et du phénomène de contagion explicité dans la section 3.1.6. Ainsi, la somme des pertes obtenues au titre des deux risques est augmentée du fait de la présence de nombreux scénarios (action, immobilier) défavorables, plus que si la dépendance avait été répartie de manière uniforme sur l'ensemble des points observés. L'interaction engendrant les excédents de perte constatés participent à l'importance du paramètre de corrélation *Entity Specific* obtenu. Le SCR global pour la compagnie d'assurance fictive à partir de l'étude effectuée en découlant peut dès à présent être déterminé.

méthode	SCR (m €)	ratio de couverture
FS	33,73	148%
MIP	31,58	158%

TABLE 3.9 : SCR obtenus en fonction des différentes méthodes appliquées

Les SCR élémentaires trouvés au titre des deux risques et le coefficient de corrélation obtenu étant plus faibles qu'en FS, un SCR global moins important ainsi qu'un ratio de couverture plus avantageux sont obtenus. Le coefficient ES trouvé est beaucoup plus important que le coefficient de corrélation action-immobilier de 75% retenu par l'EIOPA pour la FS. Il n'est en revanche pas suffisamment conséquent pour compenser les économies faites par l'assureur sur les SCR élémentaires,

en considérant une approche MI. Cette dernière permet d'augmenter le ratio de couverture de 11%, ce qui est non négligeable pour l'assureur. Il peut ainsi être intéressant pour ce dernier de mettre en place une approche MI, pour les risques action et immobilier, sous réserve que cette mise en place ne soit pas trop coûteuse.

### 3.4 Analyse des Résultats

Les résultats obtenus précédemment pour le SCR dépendent fortement des données utilisées pour calibrer notre GSE RW fournissant les trajectoires économiques de nos facteurs de risques sur un an ainsi que de la définition de la perte utilisée pour par la suite obtenir des SCR au titre des deux facteurs de risques considérés. Dans cette section, ces hypothèses et les procédés utilisés sont remis en cause. Les résultats obtenus en considérant de nouvelles approches sont alors étudiés.

#### 3.4.1 SCR obtenus en vision forward

La mise en place du cadre Solvabilité II au chapitre 1 ainsi que la présentation de la FS a permis de mettre en avant une autre définition du SCR. En effet, certaines études telles que celles de S.DECUPERE (2011) et MECHERGUI (2018) présentent le SCR comme étant la différence entre la NAV à un an obtenue pour le scénario central et le quantile à 0,5% de la distribution de NAV obtenue au titre des risques considérés. Pour rappel, le scénario central est introduit dans la partie 3.1.3, et est noté  $(action_{cent}, immo_{cent})$ . La justification de la mise en place de la FS avec l'approche VC se base notamment sur cette définition, comme le précise la section 1.4.2. Il semble donc judicieux de comparer l'approche mise en place avec cette définition.

En notant  $SCR_{Act}$ ,  $SCR_{Immo}$ , et  $SCR_{Act,Immo}$  les SCR obtenus respectivement au titre des risques action, immobilier et conjoints,  $NAV_{cent}$  la NAV à un an obtenue en sortie de l'outil ALM pour le scénario central,  $NAV_{Act}$ ,  $NAV_{Immo}$  et  $NAV_{Act,Immo}$  les variables aléatoires représentant les NAV à un an au titre des deux facteurs de risques considérés,

$$SCR_{Act} = NAV_{cent} - q_{0,5\%}(NAV_{Act}), \quad (3.15)$$

$$SCR_{Immo} = NAV_{cent} - q_{0,5\%}(NAV_{Immo}), \quad (3.16)$$

$$SCR_{Act,Immo} = NAV_{cent} - q_{0,5\%}(NAV_{Act,Immo}). \quad (3.17)$$

Dans cette section, les résultats obtenus avec cette définition seront étudiés et comparés aux résultats obtenus dans la section précédente. La même méthodologie est mise en place pour obtenir les distributions de NAV un an que précédemment, seule la définition de la perte est modifiée. La vision *forward* étudiée ne sera utilisée que dans cette partie de l'étude et les autres SCR déterminés relèvent de la définition initiale.

Pour chaque scénario de l'échantillon  $(s_1^u, i_1^u)_{1 \leq u \leq n}$  (obtenu à partir d'une copule de *Student* ou bien gaussienne dans le cas *pairwise*), la perte à un an associée est donnée par

$$L_{act,immo}(s_1, i_1) = NAV_{cent} - NAV_{act,immo}(s_1, i_1). \quad (3.18)$$

Dans le cas de scénarios *standalone*, les pertes observées sont obtenues en neutralisant le facteur de risque non concerné de la même manière que précédemment, en utilisant les scénarios centraux. De ce fait, les pertes au titre des risques action et immobilier  $L_{act}$  et  $L_{immo}$  sont alors données par

$$L_{act}(s_1) = NAV_{cent} - NAV_{act,immo}(s_1, i_{cent}), \quad (3.19)$$

$$L_{immo}(i_1) = NAV_{cent} - NAV_{act,immo}(s_{cent}, i_1), \quad (3.20)$$

où  $s_{cent}$  et  $i_{cent}$  correspondent aux 1-scénarios centraux d'action et d'immobilier. Dans ce cas de figure, la perte obtenue en scénario central  $L_{cent}$  est nulle. Par conséquent, en reprenant les notations présentées dans la section 3.1.6,

$$L_{act,immo}(s_1, i_1) = L_{act}(s_1) + L_{immo}(i_1) + Inter_{act,immo}(s_1, i_1). \quad (3.21)$$

Le mémoire de MECHERGUI (2018) contient une explication détaillée de cette égalité.

En effet, il n'y a dans ce cas plus à ajuster la perte obtenue par rapport au scénarios centraux et les ajustements sont entièrement expliqués par les interactions existant entre les facteurs de risques.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.10.

	SCR obtenu (m €)
Action <i>standalone</i>	17,53
Immobilier <i>standalone</i>	6,72
<i>pairwise</i>	25,06
copule de <i>Student</i>	25,30

TABLE 3.10 : Résultats obtenus pour une vision forward de SCR

Ces résultats sont plus importants que les SCR obtenus en considérant la définition initiale. Pour expliquer ce phénomène, il convient de rappeler la définition des SCR dans les deux cas de figure.

	Définition du SCR
Vision de base	$D(0, 1)(NAV_0/D(0, 1) - NAV_1(q_{0,5\%}(\epsilon)))$
Vision <i>forward</i>	$NAV_{cent} - NAV_1(q_{0,5\%}(\epsilon))$

TABLE 3.11 : Définitions des SCR selon les différentes approches

Dans la vision initiale, le quantile à 0,5% de la distribution de NAV à un an est comparé avec  $NAV_0/D(0, 1) = 51\,768\,923$ , tandis que dans la vision forward, il est comparé à la NAV à un an obtenue en scénario central,  $NAV_{cent} = 52\,306\,627$ . Comme vu précédemment, la perte en scénario central obtenue est non nulle (strictement négative, constituant par conséquent un gain), induisant une NAV centrale au temps 1 plus importante que la NAV au temps 0 ayant évolué en suivant le taux sans risque au temps 1 (soit  $NAV_0/D(0, 1)$ , constituant la valeur de la NAV à un an pour laquelle la perte observée est nulle), la perte étant une fonction décroissante de la NAV à un an. Finalement,  $NAV_0/D(0, 1) < NAV_{cent}$ . Le quantile à 0,5% de la NAV correspondant à une faible valeur de NAV, la différence entre ce quantile et  $NAV_{cent}$  est plus important que sa différence avec  $NAV_0/D(0, 1)$ . Ce fait permet d'expliquer les écarts obtenus entre les différents SCR.

La vision de base, plus en accord avec la méthodologie adoptée en Solvabilité II, permet de rendre compte de la variation relative de la valeur de la NAV à horizon un an. La vision *Forward* se base sur une valeur centrale projetée  $NAV_{cent}$ . Ce résultat est indépendant de la valeur initiale  $NAV_0$  et résulte uniquement d'une vision prospective. Elle ne considère pas l'actualisation explicitement, qui reflète une réalité économique, négligée ici. De plus, le SCR a pour but de mesurer l'impact défavorable aujourd'hui. Ignorer l'actualisation pourrait sous-estimer la gravité des pertes à couvrir, et mal appréhender le véritable risque encouru par l'assureur. En effet, en période de stress, ces modèles ne représentent pas fidèlement la réalité : en implémentant par exemple des volatilités beaucoup plus importantes dans le GSE RN à un an, la valeur  $NAV_{cent}$  en serait impactée négativement, engendrant une valeur très faible de NAV centrale (beaucoup plus faible que  $NAV_0/D(0, 1)$ ). Cette quantité sera alors utilisée pour être comparée au quantile 0,5% de la distribution de NAV à un an, générant

des pertes moins importantes que dans le cadre de la vision de base et sous-estimant largement les SCR.  $NAV_{cent}$  ne représente pas une valeur sûre. Elle est obtenue à partir du scénario  $(s_{cent}, i_{cent})$  correspondant aux moyennes des distributions à un an obtenues. D'autres choix méthodologiques auraient pu être pris et justifiés, comme le choix de la médiane par exemple. Ce scénario n'a pas non plus été véritablement déterminé à partir de l'économie obtenue, n'ayant pas cherché à tenir compte de la structure de dépendance implémentée pour déterminer ce scénario central. La projection est par conséquent incertaine. Les hypothèses prises prennent donc plus d'importance et engendrent une incertitude supplémentaire vis-à-vis du résultat obtenu. Prendre la  $NAV_0$  comme valeur de référence permet de choisir une base de comparaison plus prudente liée à l'état actuel des actifs.

Il convient néanmoins de remarquer que les autres caractéristiques constatées sur les résultats obtenus peuvent être interprétés de la même manière que précédemment. En effet, nous observons un effet de contagion qui peut être expliqué par la dépendance positive forte et l'interaction engendrant une perte augmentée pour les scénarios (action, immobilier) simultanément défavorables. La structure implémentée dans le GSE RW entraîne également un SCR agrégé plus faible que dans le cas où la structure de dépendance est induite par une copule de *Student*.

Ainsi, la vision *forward* constitue une approche plus simpliste, directe et facile à interpréter, mais ne respecte pas les contraintes réglementaires instaurées par Solvabilité II, les flux futurs n'étant pas actualisés avec la courbe des taux sans risques publiée mensuellement par l'EIOPA. La vision *forward* peut donc être intéressante dans un cadre théorique pour effectuer des analyses financières, sans contraintes réglementaires strictes. Dans un cadre Solvabilité II et pour déterminer son SCR, un assureur a tout intérêt à se limiter à la définition initiale du SCR. Le fait que la justification de l'approche Var-Covar se base sur cette approche *forward* constitue donc une véritable limite de cette méthodologie et forme une raison pour laquelle il ne semble pas prudent d'utiliser l'approche Var-Covar au sein d'un MI pour agréger des SCR déterminés par approche simulateur.

### 3.4.2 Etude avec les données du Pôle Ingénierie Financière de Forvis Mazars

Comme le mentionne la section 3.1.6, les valeurs de SCR obtenues à partir de l'approche simulateur, en particulier en immobilier, sont plus faibles que ce qui est obtenu à partir de la FS. D'un point de vue de l'assureur, ce résultat est satisfaisant : la plupart des assureurs fait le choix d'adopter un MI car ce dernier permet de limiter la valeur du SCR, d'améliorer le ratio de couverture et d'éviter d'immobiliser un montant trop important de capital. Le coût associé à la mise en place d'une approche simulateur est alors compensé par les bénéfices qui en découlent. Néanmoins, dans certains cas de figure, le SCR a tendance à sous-estimer le risque encouru par les assureurs et la mise en place d'un MI est considérée par prudence. L'objectif principal d'un MIP/MI est de permettre une vision plus fine du profil de risque des assureurs.

Dans le cadre de cette étude, il a été mentionné que l'obtention de SCR étaient notamment dues aux données utilisées. Dans l'implémentation précédente, le choix de baser la diffusion immobilier sur deux indices a été fait, permettant de refléter de manière plus adéquate le portefeuille immobilier de l'assureur fictif. Ce choix a engendré une volatilité immobilier plus importante que si nous avions utilisé les données utilisées dans le cadre de la FS. Il est alors naturel de se demander s'il est pertinent de comparer ces résultats obtenus à ce qui a été déterminé en FS, à partir de GSE RN calibrés (historiquement) avec les données « Indice des prix des logements - Brut - Base 100 en moyenne annuelle 2015 » disponibles sur le site de l'INSEE et regroupant les données immobilières pour le secteur français. Ces données sont en effet beaucoup moins volatiles mais ne sont disponibles que trimestriellement, et ce depuis 2000.

Il semble donc judicieux d'effectuer l'étude menée précédemment en utilisant les données immobilier

présentées ci-dessus. Il est à noter que la quantité de données disponibles est alors moindre et que seuls 96 points sont utilisés pour calibrer les paramètres du GSE, soit une précision de vitesse de convergence de 10% sur les résultats obtenus.

**Détermination des SCR au titre des risques action et immobilier** À partir de ces données, les calibrations obtenues pour le GSE RW sont déterminées dans le tableau 3.12.

Les valeurs obtenues sont totalement différentes de ce qui a été observé sur les données précédentes. Les données immobilier disposent dès à présent d'une volatilité de 3%, et la corrélation entre les deux risques est passée à -3%. Ainsi, les risques qui semblaient très corrélés dans les études menées jusqu'à présent semblent désormais ne pas dépendre l'une de l'autre de manière évidente. Les paramètres  $\mu$  déterminés ici sont plus faibles pour les deux facteurs de risques. Bien que les données action soient les mêmes que celles utilisées précédemment, la profondeur retenue ici n'est pas la même que celle observée sur les premières données. Ainsi, les paramètres calibrés pour le facteur action varient également.

	Action	Immobilier
$\mu$	3%	4%
$\sigma$	22%	3%
$\rho$	-3%	

TABLE 3.12 : Calibration obtenue dans le GSE RW avec les nouvelles données immobilier

Le GSE RN utilisé dans cette étude correspond au GSE calibré au 30/06/2024. La volatilité de l'immobilier n'a pas été modifiée dans cette étude, cette dernière étant cohérente avec la volatilité calibrée en RW.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.13.

risque	SCR (m €)
Action	17,40
Immobilier	2,43
<i>pairwise</i> (Action, Immobilier)	17,23

TABLE 3.13 : Résultats des SCR obtenus pour les données FS

Avec les nouvelles données appliquées, des valeurs de SCR au titre des risques *standalone* action et immobilier plus faibles que les valeurs FS sont obtenues.

En reprenant le calcul présenté en section 3.1.6, le choc appliqué est de -46% pour l'action. Cette valeur correspond au choc appliqué en FS. En comparant le SCR à celui obtenu précédemment par simulation, ce dernier a augmenté. Cette augmentation est due au fait que la distribution d'action à un an obtenue dans ce cas de figure engendre des valeurs d'actions plus faibles que dans l'implémentation précédente. En effet, le paramètre  $\mu$  obtenu ici est moins important. Le quantile à 0,5% de l'action, à l'origine du SCR action, constitue une valeur plus extrême que pour la distribution précédente. Les pertes observées sont par conséquent plus importantes, tendant à augmenter la valeur du SCR obtenu. En revanche, le GSE RW immobilier utilisé dans cette section est implémenté à partir d'une volatilité diminuée de 8% par rapport au GSE utilisé précédemment. La réduction considérable de la volatilité tend à augmenter la valeur de la NAV au temps 1 au titre du risque immobilier. Ainsi, les pertes observées sont moindres et les SCR sont limités. Le  $\mu$  implémenté pour la diffusion immobilier est comparable à ce qui a été implémenté précédemment. Par conséquent, les scénarios utilisés pour calibrer la fonction d'interpolation CF au titre du risque action disposent d'une valeur immobilier



comparable au premier cas de figure. La nouvelle distribution d'immobilier obtenue ne devrait donc pas avoir d'impact sur le SCR action déterminé ici.

Pour le SCR immobilier, en plus de la volatilité implicite du GSE RN utilisé, la faible valeur du SCR obtenu est en majeure partie expliquée par une volatilité immobilier calibrée très faible. Ainsi la dispersion de la distribution de l'immobilier à un an est très faible et par conséquent la valeur de l'immobilier correspondant au quantile à 0,5% de cette distribution n'est pas très éloignée de la valeur moyenne et ne correspond pas à un scénario aussi défavorable que les scénarios obtenus précédemment. Il en résulte que le choc appliqué est de -9%, ce qui correspond à un choc très faible. En revanche, le scénario central action utilisé pour déterminer les scénarios immobilier *standalone* sont moins favorables que dans le cas précédent, limitant la diminution de la valeur du SCR. Cet effet est largement compensé par les impacts positifs exprimés ci-dessus.

Il est à noter que les risques action et immobilier ont des poids éloignés dans l'ensemble du profil de risque de la compagnie. En effet, le capital à détenir au titre du risque immobilier est 7,5 fois inférieur au capital élémentaire conservé pour le risque action. Il semble donc que le risque supporté par la compagnie au titre des risques action et immobilier est concentré sur le risque action. L'effet de diversification ne peut pas être observé de manière significative si le risque total de l'entreprise se concentre sur un seul risque. Afin d'illustrer notre propos, prenons l'exemple d'une compagnie d'assurance dont le profil de risque est constitué à 90% du risque de marché. Alors, la diversification observée en agrégeant avec des risques moindres sera minime. En effet, l'agrégation devrait pouvoir permettre aux compagnies de prendre en compte les comportements joints des risques et compenser une situation défavorable pour un risque par la réalisation d'une situation favorable pour un autre risque. Cela permettrait alors de limiter la valeur du capital à conserver au titre des deux risques supportés par la compagnie et d'observer de la diversification. Seulement, si l'un des risques s'avère beaucoup plus conséquent que l'autre, cette compensation ne peut avoir lieu même si les risques ont peu de chance de se réaliser au même moment.

Afin de se convaincre de cette concentration du risque, le coefficient de Gini aux poids relatifs des SCR *standalone* des deux sous-risques considérés est déterminé. Ce coefficient est notamment présenté dans l'étude EIOPA (2024).

En notant  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$  le vecteur de risques auxquels la compagnie est exposée, le coefficient de Gini est donné par la formule suivante :

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|}{2 \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3.22)$$

avec  $x_i = \frac{SCR_{\epsilon_i}}{\sum_{k=1}^n SCR_{\epsilon_k}}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Un coefficient de Gini proche de 0 montre des sous-risques qui sont uniformément distribués. En revanche, un coefficient de Gini proche de 1 met en avant la présence d'un sous-risque qui représente la majeure partie du risque supporté par la compagnie. Plus le coefficient de Gini est proche de 0, plus les compagnies d'assurance seront en mesure d'observer un bénéfice de diversification.

Dans le cas de figure de cette étude, les risques action et immobilier sont considérés et  $n = 2$ . Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 3.14.

$x_{act}$	88,25%
$x_{immo}$	11,75%
coefficient de Gini	77%

TABLE 3.14 : concentration des risques et coefficient de Gini

Un coefficient de Gini se rapprochant de 1 est effectivement observé, démontrant une faible capacité de diversification et une concentration du risque importante sur l'action.

Le SCR Agrégé obtenu au titre des 2 risques peut désormais être commenté. Il est plus faible que le SCR *standalone* action. Cet effet peut être expliqué par le fait que la valeur du SCR agrégé est principalement due au risque action. Ce dernier correspond au quantile à 99,5% de la distribution de perte obtenu à partir d'un échantillon (action, immobilier) en sortie du GSE RW. Seulement, les valeurs de perte importantes, qui forment la queue de distribution de la perte au titre des risques (action, immobilier), sont issus des scénarios  $(s_1, i_1)$  pour lesquels  $s_1$  est très faible. De plus, les valeurs d'action et d'immobilier de l'échantillon étant associées de manière pratiquement indépendante, avec une corrélation légèrement négative, des valeurs défavorables d'action sont associées à des valeurs favorables d'immobilier, permettant de diminuer légèrement la perte par rapport à la distribution obtenue en *standalone* pour le facteur action, pour lequel l'immobilier prend toujours la valeur centrale présentée en section 3.1.3. Pour les scénarios (action, immobilier) détenant des valeurs d'action favorables, ils peuvent alors être associés à des valeurs d'immobilier plus défavorables, mais l'impact sur la NAV à un an sera moindre et cette dernière restera importante. Par conséquent, les scénarios (action, immobilier) responsables de la queue de distribution de la perte agrégée engendreront des pertes légèrement moins importantes que les scénarios actions associés à la valeur centrale de l'immobilier. Ce constat explique la valeur du SCR agrégé légèrement plus faible dans le cas de la prise en compte des risques action et immobilier.

En continuant l'étude préalablement effectuée, avec la nouvelle méthode introduite dans la section précédente, une copule est affectée aux données d'action et d'immobilier afin de déterminer le SCR agrégé au titre des deux risques. La copule obtenue est la copule indépendante. En effet, aucune de structure de dépendance particulière n'est constatée entre les données. Le SCR alors obtenu au titre de cette copule est de 17 301 358€. Cette valeur est légèrement plus importante que la valeur obtenue en *pairwise*. Cette différence est expliquée par le passage d'une corrélation de -3% à 0%. La valeur du SCR au titre des deux risques est légèrement moins diminuée par l'association de scénarios d'action défavorables avec des valeurs d'immobilier plus favorables que le scénario central. Le même procédé est observé mais dans une moindre mesure.

**Obtention du SCR global et du ratio de couverture** L'étude entreprise en section 3.3.2 est appliquée en considérant les nouvelles données. La corrélation ES obtenue dans ce nouveau cadre est de -11%. Ce résultat n'est pas surprenant, la valeur de SCR agrégé étant légèrement inférieure à la valeur du SCR action. Cette corrélation négative obtenue est beaucoup plus faible que la valeur calibrée par l'EIOPA pour quantifier la dépendance existante entre les actions et l'immobilier. En effet, la valeur étant de 75% dans la FS, cette nouvelle corrélation aura tendance à diminuer fortement la valeur du nouveau SCR global obtenu en comparaison au résultat FS. Les SCR élémentaires action et immobilier étant également inférieurs à ce qui est obtenu en FS, le SCR global MIP sera plus faible que le SCR FS et permettra à la compagnie d'assurance de bénéficier d'un meilleur ratio de couverture.

méthode	SCR (m €)	ratio de couverture
FS	33,73	148%
MIP	26,15	191%

TABLE 3.15 : SCR obtenus en fonction des différentes méthodes appliquées

Les résultats obtenus sont décrits dans le tableau A.6.

Le ratio de couverture obtenu augmente de 32% par rapport à l'implémentation précédente. Ce gain, dû à la modification du choix des données pour la diffusion du risque immobilier dans un cadre

RW, témoigne de l'importance du choix des données utilisées pour déterminer le SCR. Il est nécessaire que ces dernières soient représentatives du profil de risque auquel la compagnie est exposée. Il est à noter qu'il est peu probable en pratique d'observer une variation de 30% du ratio de couverture de la compagnie d'assurance uniquement due au choix fait sur les données du risque action immobilier. Cependant, plusieurs mécanisme expliquent cette constatation dans notre cas de figure.

1. **Des données qui semblent ne pas du tout suivre les mêmes évolutions** En effet, le choix de retenir entre autres les données immobilier IEIF Europe dans la première étude mène à une distribution immobilier beaucoup plus volatile que dans le second cas et la structure de dépendance est beaucoup plus marquée entre les données IEIF et CAC 40 qu'en utilisant la structure de dépendance avec les données immobilier INSEE (passage d'une corrélation ES supérieure à 1 à une corrélation ES négative). Le SCR agrégé obtenu en est par conséquent grandement impacté et un passage d'un effet de contagion à un effet de diversification extrêmement poussé est observé ;
2. **un assureur simplifié** les mécanismes mis en place au sein de l'outil ALM pour décrire l'interaction actif-passif de l'assureur considéré sont simplifiés par rapport aux assureurs-vie présents sur le marché. Ainsi, bien que l'assureur considéré soit paramétré de sorte à être en cohérence avec les observations du marché, les SCR obtenus au titre des risques marché et immobilier ont dans ce contexte un impact beaucoup plus marqué sur le SCR global que dans le cadre d'un assureur implémenté sur le marché.

Après avoir effectué un benchmark de marché résumé en annexe A.4, le constat suivant a pu être effectué : le SCR agrégé au titre des risques action et immobilier représente en moyenne 36% du SCR global, et les SCR élémentaires action et immobilier représentent en moyenne 29% et 9% du SCR global, respectivement.

Ces valeurs sont bien inférieures aux observations faites au titre de notre étude. Effectivement, le SCR agrégé présenté en section 3.2.2 représente 76% du SCR global et les SCR action et immobilier représentent respectivement 50% et 21% du SCR global.

Cette analyse constitue une limite de l'étude effectuée et est à garder en tête pour le chapitre suivant. En effet, il peut en être conclut qu'une variation des hypothèses de modélisation faite sur les indices action ou immobilier auront un impact conséquent sur le SCR global et le ratio de couverture, bien plus que ce qui est en pratique observable sur le marché. L'assureur représenté est très sensible aux action et à l'immobilier. En plus d'avoir retenu une allocation de 12,5% des actifs à la fois pour l'action et l'immobilier, ce qui est supérieur à ce qui est observable sur le marché, cette allocation est supposée constante dans le temps comme précisé dans la section 2.2.4. Cette allocation ne tient donc pas compte du contexte économique, engendre la nécessité de faire des achats/vente au sein de l'outil qui ne sont pas nécessairement judicieux et engendrent une sensibilité aux paramètres action et immobilier encore plus importante dans le cas où ces derniers sont défavorables.

Cela ne constitue néanmoins pas une entrave majeure aux conclusions que nous pourrions apporter à ce mémoire, les observations faites restant similaires à ce qui sera observable sur le marché, seulement dans une moindre mesure.



## Chapitre 4

# Analyse et sensibilité des distributions aux hypothèses prises

Les résultats déterminés précédemment mettent en avant l'importance des données utilisées pour représenter le risque encouru. Le chapitre 3 met notamment en avant l'influence des hypothèses prises en termes de modélisation du risque et de ses interactions et leurs impacts sur la variation des résultats qui peuvent être obtenus. Il est ainsi essentiel de mettre au défi ces hypothèses et d'analyser la variabilité des résultats obtenus au sein d'un MI lorsque d'autres hypothèses sont vérifiées. Cela permet de s'assurer de la solvabilité de la compagnie d'assurance et du bon pilotage de cette dernière. Au sein des compagnies d'assurance, des sensibilités sont notamment mises en place pour permettre une évaluation interne des risques et de la solvabilité.

Il est également attendu des compagnies d'avoir une vision prospective des risques auxquels la compagnie est exposée. A cet effet, il est nécessaire pour une compagnie d'assurance d'évaluer les besoins globaux de solvabilité à moyen-terme et à long-terme. Les risques survenant avec une occurrence différente de celle utilisée pour le SCR sont alors analysés. Par conséquent, l'étude des distributions des différents facteurs de risques et leurs interactions en fonction des conjectures faites est indispensable pour piloter une compagnie d'assurance et s'assurer de sa capacité à absorber différents chocs pouvant survenir au niveau des risques auxquels ils sont exposés.

Dans le but d'étudier l'incidence de l'utilisation de l'agrégation VC sur les résultats déterminés dans le chapitre précédent, les différents SCR et ratios de couverture seront confrontés aux valeurs obtenues en utilisant cette approche. Dans cette partie, les valeurs des paramètres calibrés obtenus au sein du GSE RW ainsi que les structures de dépendance retenues pour modéliser nos facteurs de risques seront *challengeés*. L'étude de la prise en compte de différentes structures de dépendance et la simulation de distributions de NAV à un an sera également comparée à l'approche VaR-CovaR (VC).

Ce chapitre est notamment destiné à évaluer comment les résultats des sensibilités évoluent en fonction de l'approche considérée (simulatoire ou VC). Il a également pour objectif de mettre en avant l'importance de la modélisation fidèle des structures de dépendance des facteurs de risques auxquels l'assureur est confronté.

### 4.1 Variations des calibrages du GSE RW

Comme précisé dans le mémoire de GILLOT (2019), la sélection des données utilisées pour mettre en place un générateur de scénarios économiques constitue la première étape du processus de construc-

tion d'un GSE RW. Elle a une incidence importante sur les résultats obtenus et peut modifier les distributions considérées au titre des risques action et immobilier.

Deux leviers peuvent notamment impacter le calibrage du GSE, pour des données choisies en amont :

1. **La granularité** : il s'agit du pas de temps utilisé dans l'historique de données, séparant les différentes observations faites. Il peut être annuel, trimestriel, mensuel ou encore journalier. Le pas de temps utilisé pour calibrer le GSE peut avoir un impact important sur la volatilité estimée des dynamiques choisies et engendrer des résultats très différents quant aux risques encourus par la compagnie d'assurance. En effet, l'utilisation d'un pas de temps plus fin dans les données historiques utilisées engendre la modélisation de fluctuations plus importantes ;
2. **La profondeur de l'historique** : le choix de la date d'observation des données peut également avoir une incidence importante sur le calibrage du GSE et il est nécessaire de se demander sur combien d'années il est judicieux d'observer les données historiques qui vont par la suite être utilisées. L'objectif premier d'un GSE étant de prévoir les trajectoires économiques futures probables, il est nécessaire d'étudier l'historique et d'évaluer la propension du risque à se reproduire tel qu'il s'est produit sur les différentes années.

Dans le chapitre 3, un historique de 20 ans a été choisi et un pas de temps journalier. Cet historique permet d'obtenir un nombre de données suffisant pour assurer la stabilité des résultats obtenus et des paramètres calibrés, déterminés par méthode des moments : la loi des grands nombres s'applique et permet d'assurer une erreur d'estimation de vitesse de convergence de 1% ( $1/\sqrt{5000}$ ). Seulement, ce choix peut être largement remis en question. En effet, le contexte économique a grandement changé sur 20 ans et il n'est pas nécessairement judicieux de considérer des données trop anciennes pour diffuser nos facteurs de risques à un an : cette profondeur engendre l'intégration d'un effet tendance. De même le pas de temps considéré peut être remis en cause. En effet, en s'appuyant sur un historique de 20 ans, il n'est pas nécessairement naturel de considérer un pas de temps très fin.

Les assureurs n'ont pas des contraintes très importantes concernant le choix de la granularité et la profondeur de l'historique retenu dans le GSE. Il est néanmoins précisé dans le Règlement Délégué (cf. COMMISSION EUROPÉENNE (2014)) que les mesures suivantes doivent être respectées :

- Une profondeur d'historique supérieure à 5 ans pour des indices mensuels ;
- Une profondeur d'historique supérieure à 4 ans pour des indices hebdomadaires ;
- Une profondeur d'historique supérieure à 2 ans pour des indices journaliers.

En annexe A.6, les graphiques illustrant l'impact de la profondeur et la granularité de l'historique de nos données action sur le calibrage obtenu pour le GSE sont présentés. Au vu des graphiques observés, une relative stabilité est notable pour les valeurs des estimateurs obtenus, permettant de se conforter dans le choix fait en termes de paramétrage. En effet, pour chacun des paramètres considérés, la modification de la profondeur et de la granularité engendre des variations d'au plus 15%. Néanmoins, en considérant un historique glissant de 2 ans représenté en annexe A.7 (car des données journalières sont considérées), les paramètres obtenus sont plus volatiles. Afin d'évaluer l'effet de la modification des paramètres sur la perception du risque et évaluer leur influence sur l'écart constaté avec l'agrégation VC, des intervalles sont mis en place à partir des quantiles 20% et 80% des distributions obtenues avec l'historique glissant. Ces derniers sont représentés ci-dessous (les notations de la section 3.12 sont reprises).

- le paramètre  $\mu$  de la dynamique de l'action prend ses valeurs entre -1% et 15% ;
- le paramètre  $\sigma$  de la dynamique de l'action prend ses valeurs entre 14% et 25% ;
- le paramètre de corrélation  $\rho$  prend ses valeurs entre 50% et 75%.

Cette méthodologie permet d'instaurer un cadre de prudence et d'évaluer l'impact de potentielles déviations sur la valeur des paramètres utilisés, tout en considérant un intervalle raisonnable.

Les paramètres déterminés pour la modélisation sont rappelés dans le tableau 4.1.

paramètre	valeur
$\mu_{mod}$	6%
$\sigma_{mod}$	21%
$\rho_{mod}$	64%

TABLE 4.1 : paramètres calibrés dans la mise en place du modèle

#### 4.1.1 Modification de la corrélation

Modifier la corrélation obtenue décrivant la structure de dépendance entre les risques action et immobilier ne modifiera uniquement la distribution de perte obtenue au titre des risques agrégés. En effet, les 2-scénarios économiques considérés seront modifiés, impactant l'échantillon de perte à un an obtenu. Pour cette étude, il semble intéressant de considérer tout type de corrélations, et de ne pas se limiter aux valeurs observées en modifiant l'historique des données considérées, afin de capter l'impact de la corrélation sur la distribution de perte. La structure de dépendance imposée par la copule de *Student* est ici reprise et le paramètre de corrélation est modifié. Les différentes distributions obtenues sont représentées dans la figure 4.1.

Des densités beaucoup moins étendues sont constatées sur la figure 4.1 quand le coefficient de corrélation utilisé est faible. L'échantillon de perte obtenu est plus dispersé lorsque ce coefficient augmente. En effet, lorsque la corrélation est fixée à -1, une valeur défavorable pour un des facteurs de risques est associée à une valeur favorable pour l'autre facteur de risque. Ainsi, la perte agrégée au titre d'un tel scénario fait intervenir des pertes élémentaires qui se compensent et la distribution de perte agrégée ne disposera donc pas de valeurs très élevées/faibles en queue de distribution. L'effet inverse est observé dans le cadre d'une corrélation qui se rapproche de 1. En effet, les scénarios action défavorables vont être associés à des scénarios immobilier défavorables et inversement, entraînant une distribution de perte plus étendue et des valeurs de pertes/gains qui peuvent être beaucoup plus important(e)s.

En reprenant l'intervalle [50%, 75%] retenu pour le paramètre de corrélation en modifiant l'historique et la profondeur, les quantiles situés en distribution de perte supérieure répertoriés dans le tableau 4.2 sont obtenus.

quantile	9/10	95/100	98/100	99/100	199/200	1999/2000
$\rho = 50\%$	11,28	14,84	18,66	21,22	23,30	28,52
$\rho = 75\%$	12,10	15,85	20,01	22,62	24,52	29,18
écart (% du SCR)	3,41	4,24	5,61	5,85	5,13	2,74

TABLE 4.2 : différences observées sur la queue de distribution au niveau des quantiles obtenus (m €)

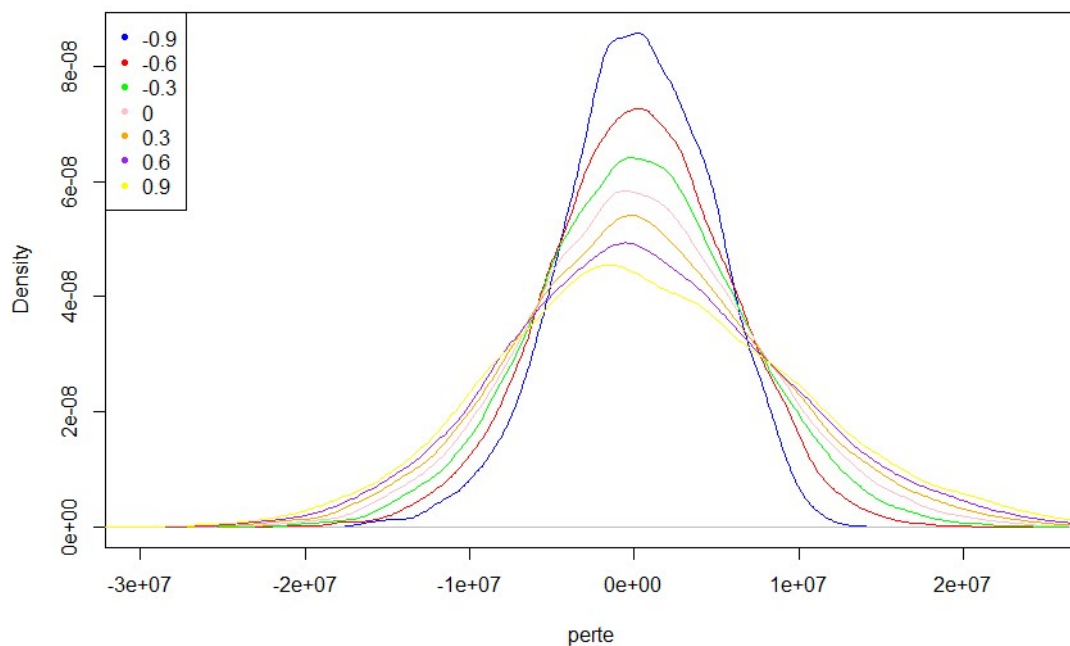


FIGURE 4.1 : Densité des pertes obtenues en fonction du coefficient de corrélation utilisé pour affecter la copule de *Student*

L'écart observé sur les différents quantiles croît jusqu'au quantile à 99%, puis décroît : ce constat peut être expliqué du fait que dans le cas où une corrélation à 80% est implémentée dans une copule de *Student*, une très forte structure de dépendance est observée sur l'ensemble de la distribution multivariée, tandis que dans le cas où la corrélation implémentée est de 50%, l'accentuation de la structure de dépendance sur les queues de distribution est plus prononcée. Ainsi, une intensification de la dépendance dans les queues pour une corrélation à 50% assure des pertes au titre de ces scénarios augmentée et va assurer que l'écart avec la distribution de perte pour un paramètre de corrélation à 75% en sera diminué pour les quantiles très extrêmes. L'incertitude sur la corrélation estimée peut influencer les quantiles de la queue de distribution supérieure à hauteur de 3-6% de la valeur du SCR donnée dans le tableau 3.8. En particulier, le SCR obtenu peut varier dans une plage de 5% de sa valeur actuelle.

Au vu de ce constat, il convient de se concentrer sur les différentes valeurs prises par le SCR en fonction de la corrélation observée. Les résultats sont reportés dans la figure 4.2.

Les SCR obtenus sont croissants de la corrélation. Cette observation est en accord avec les résultats observés précédemment. En s'appuyant sur l'intervalle de confiance précisé dans l'annexe A.14, à historique fixé, une précision de l'estimateur de  $[estimateur - 1,7\%; estimateur + 1,5\%]$  est obtenue \*. La conséquence de la variation de la corrélation de 1% sur le SCR agrégé obtenu est alors analysée. En se reposant sur les valeurs obtenues dans la figure 4.2, une variation de 0,82 m€ est observée en moyenne, en augmentant de 1% la corrélation, soit 3,4% du SCR agrégé.

La valeur du SCR global et le ratio de couverture peuvent désormais être étudiés, pour une corrélation de 50%, de 75%. Un point d'attention sera également donné à la précision de l'estimateur à historique fixé, en analysant le ratio de couverture obtenu pour la borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95% de l'estimateur, soit 64%+1,5%. Cette borne est analysée car elle correspond à la situation qui est défavorable pour l'assureur et peut influencer négativement sa situation de solvabilité.

\* Cette précision est obtenue à partir de l'intervalle décrit dans l'annexe, appliqué aux uniformes associées au log-rendements, utilisées pour affecter une copule aux actions et à l'immobilier en section 3.2.2



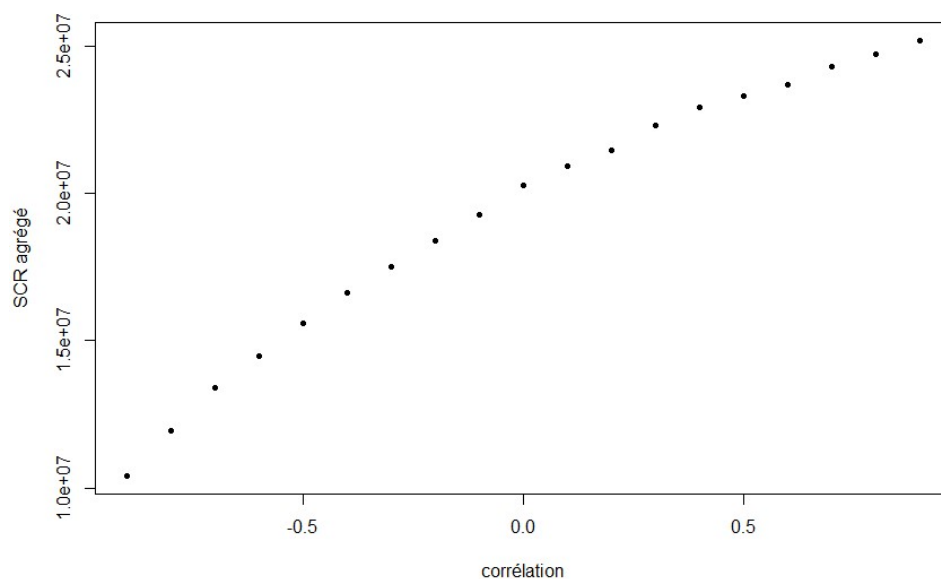


FIGURE 4.2 : SCR agrégé obtenu en fonction des corrélations, en €

Les résultats sont recensés dans le tableau 4.3.

	SCR agrégé	corrélation ES	SCR global	ratio de couverture
$\rho = 50\%$	23,30	121%	31,06	161%
$\rho = 75\%$	24,52	151%	32,11	155%
$\rho = \rho_{mod} + 1,5\%$	24,07	140%	31,72	157%

TABLE 4.3 : impact de la modification de la corrélation sur le SCR global et le ratio de couverture (m €)

En se référant au tableau 3.9, il peut être constaté qu'une augmentation de 1,5% de la corrélation ne dégrade pas de manière significative le ratio de couverture de l'entreprise. Cela nous réconforte dans l'estimation faite du ratio de couverture. En effet, avec une précision de 1,5% de l'estimateur de corrélation, le ratio de couverture ne sera que très peu impacté par les fluctuations obtenues sur l'estimateur. Avec les corrélations estimées observées en fonction des différents historiques retenus, un ratio de couverture se situant entre 155% et 161% est obtenu, le meilleur cas de figure étant déterminé à partir de la plus faible corrélation retenue, soit 50%.

Le SCR agrégé déterminé pour la corrélation estimée de 64% correspond au quantile 99,38% de la distribution de perte en considérant une corrélation de 75%. Ainsi, ce SCR correspond à un risque survenant une fois tous les 162 ans.

Il convient de constater que les corrélations ES semblent très importantes et traduisent bien un effet de contagion. Ce constat est également valable pour des valeurs de corrélation plus faibles. En effet, en retenant un paramètre de 20%, la corrélation ES obtenue est de 79%. La prise en compte de l'interaction à travers cette valeur fait augmenter de 59% la corrélation à considérer pour la formule VC. En effet, avec un coefficient de corrélation de 20%, nous pouvons imaginer que les scénarios pris en compte dans l'économie sont tels que les scénarios (action, immobilier) peuvent être associés de sorte à obtenir moins de scénarios simultanément défavorables au sein de l'économie. Ces scénarios économiques plus cléments peuvent alors se voir attribuer des pertes au titre de l'interaction plus faibles. Ils peuvent même être associés à un gain (limitant la perte) lorsque l'indice action et immobilier qui les composent

ont un comportement opposé. Seulement, la copule de *Student* est considérée avec une structure de dépendance positive. Cette dernière est accentuée en queue de distribution. Or, la queue de distribution supérieure de la perte agrégée est engendrée par les scénarios les plus défavorables. Ainsi, une corrélation à 20% au sein de la copule de *Student* est suffisante pour engendrer des scénarios (action, immobilier) au sein de l'économie suffisamment défavorables pour affecter un ajustement  $Inter(s_1, i_1)$  strictement positif aux valeurs de pertes *standalone* pour obtenir le SCR agrégé. Cela limite grandement le phénomène de diversification qui peut être constaté si les interactions n'avaient pas été prises en compte.

En effet, en nous référant au graphique 4.3, il est constatable que les 100 scénarios les plus défavorables de l'économie (engendrant les pertes les plus importantes) sont concernés par l'ajout de perte au titre des interactions entre facteurs de risques. Néanmoins, cette figure montre également que dans ce cas de figure, certaines actions très défavorables sont associées à des valeurs d'immobilier favorable et inversement, limitant les valeurs prises par la perte pour ces scénarios et par conséquent les valeurs de pertes agrégées situées en queue de distribution supérieure.

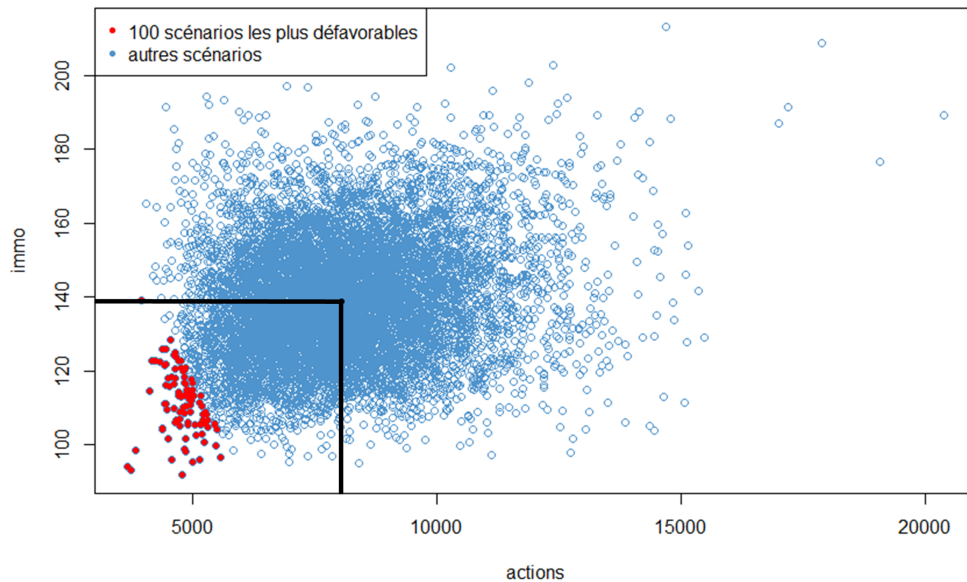


FIGURE 4.3 : Environnement économique obtenu pour un paramètre de corrélation de 20% implémenté dans la copule de *Student*

### Comparaison à l'approche VC

Il semble judicieux de s'intéresser désormais à la différence entre la valeur prise par le SCR agrégé à partir de notre MI et en mettant en place l'approche VC à partir des distributions obtenues au sein du MI établi, en fonction des différents paramètres de corrélation implémentés dans la copule de *Student*. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.4. Bien que nous nous concentrons dans notre étude au cas où la corrélation est comprise entre 50 et 75%, nous représenterons les écarts observés pour l'ensemble des paramètres de corrélation afin de mieux comprendre les effets constatés.

Nous constatons que l'approche VC sous-estime le SCR pour des corrélations comprises entre 50% et 75%. L'écart observé en fonction des deux approches, pour le paramètre actuel de corrélation (64%) et celui induisant l'écart maximal (75%), sont recensés dans le tableau 4.4 .

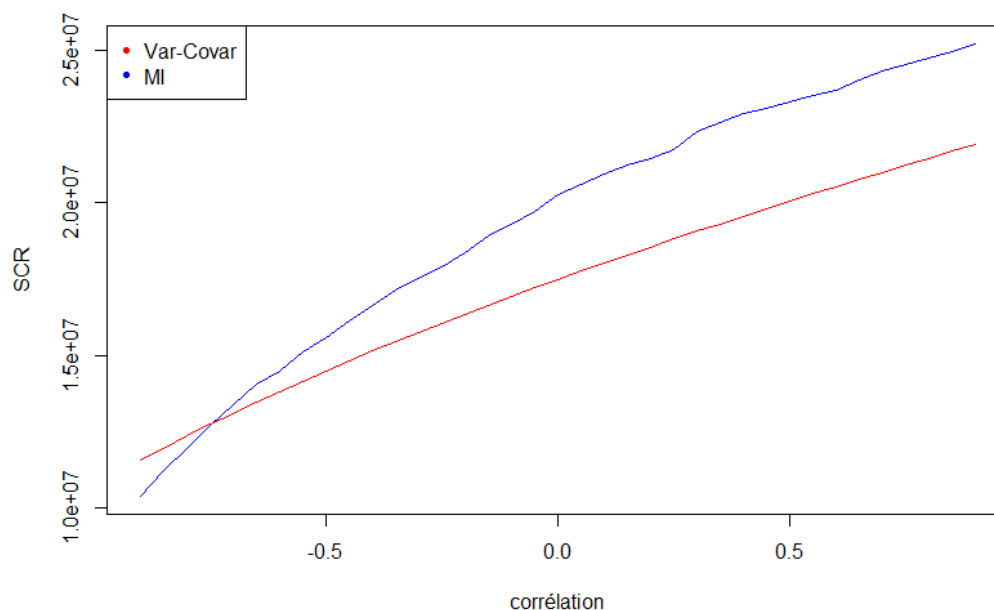


FIGURE 4.4 : SCRs obtenus en MI et à partir de l'approche VC, en €

corrélation	$\rho = \rho_{mod}$	$\rho = 75\%$
SCR agrégé (m €)	3,24	3,29
ratio de couverture	14%	15%

TABLE 4.4 : Ecart observé sur le SCR agrégé et le ratio de couverture en fonction de l'approche considérée

Une des raisons pour lesquelles nous observons ce cas de figure (cf. 4.4) correspond au fait que les interactions ne sont pas prises en compte avec l'approche VC. En effet, cette dernière suppose que la NAV agrégée constitue une combinaison linéaire des facteurs de risques action et immobilier. Ainsi, comme nous avons pu le voir ci-dessus, un excédent de perte étant constaté même pour de faibles valeurs de corrélation, celles-ci seront ignorées dans le cadre d'une méthodologie VC. Inversement, pour des paramètres de corrélations inférieurs à -70%, la surestimation par approche VC est constatée. Elle peut notamment être due au fait que, pour une structure de dépendance négative très marquée, les interactions observées pour les différents scénarios de l'économie sont en grande partie négatives et engendrent un gain. En effet, comme précisé dans la section 3.1.6, des scénarios ayant des facteurs de risques ayant évolué de manière opposée se voient attribuer une interaction négative. Une diminution de la perte est observée du fait de l'interaction entre les facteurs de risques. Alors, les pertes agrégées situées en queue de distribution supérieure ont bénéficié d'une atténuation qui n'a pas été prise en compte dans le cadre de la FS.

Au vu des observations faites en considérant tous les paramètres de corrélation possibles, il peut être supposé que lorsque la corrélation est telle que l'économie engendrée va instaurer des scénarios responsables de la queue de distribution supérieure de la perte agrégée pour lesquels les interactions sont négatives, alors l'approche VC va sur-estimer la perte. Sinon, cette dernière sous-estimera la perte.

Afin de se convaincre de cette hypothèse, il convient d'observer l'économie engendrée pour un facteur de corrélation de  $-70\%$ , paramètre pour lequel la modification semble s'opérer. En observant la figure 4.5, il peut être constaté que les scénarios en queue de distribution sont composés en grande partie de scénarios qui sont associés à des interactions négatives. En diminuant ce paramètre, cette tendance va augmenter, menant à une prédominance d'interactions négatives qui vont tendre à diminuer le SCR lorsque ces dernières seront prises en compte.

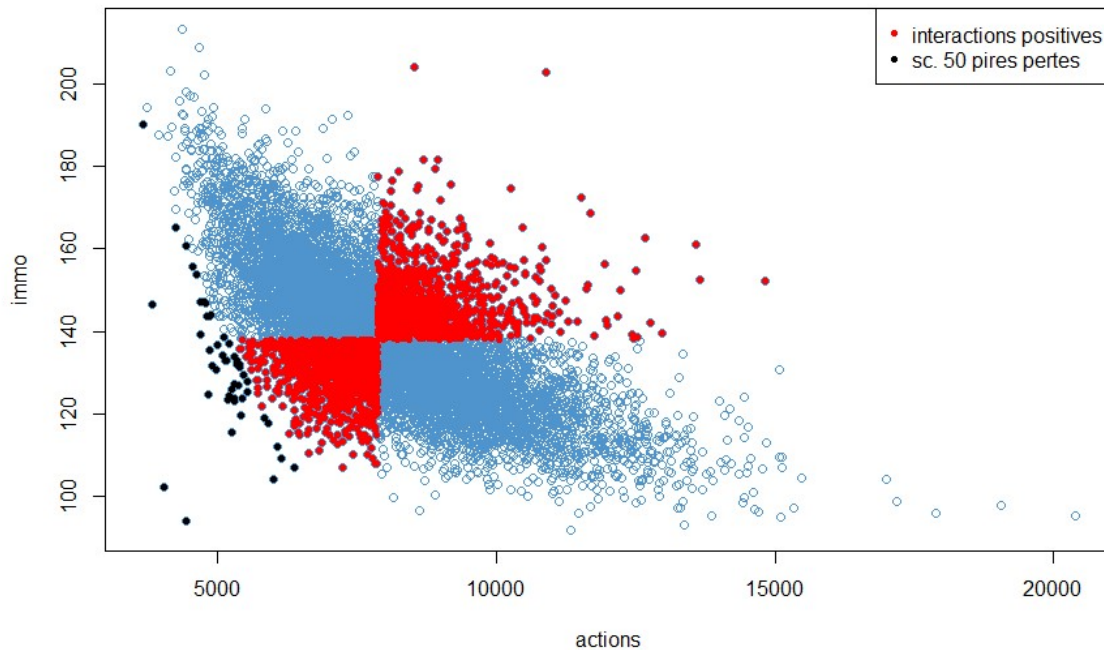


FIGURE 4.5 : environnement économique pour un paramètre de  $-70\%$

Une autre constatation peut-être faite : les interactions sont beaucoup moins fortes que dans le cas d'une corrélation élevée (positive). En effet, dans le cas d'une structure de dépendance négative prononcée, les scénarios économiques en queue de distribution supérieure de la perte, comme présentés dans la figure 4.5, sont constitués soit de scénarios avec une action très défavorable, soit des actions moins défavorables et des indices immobilier légèrement plus défavorables. Le constat global est que les scénarios semblent moins extrêmes. Ils sont alors associés à des interactions moins importantes. Cela peut expliquer le fait que pour des corrélations très faibles, l'écart avec l'approche VC semble moins important. Lorsque le coefficient de corrélation diminue encore, cet écart augmente à nouveau, car les scénarios associés à la queue de distribution supérieure engendrent des interactions négatives plus importantes.

Il est intéressant de constater dans la figure 4.4 que plus le paramètre de corrélation est important et plus l'écart est important. Cet écart semble se stabiliser à partir du paramètre  $30\%$ .

Afin de distinguer les écarts observés du fait des interactions et les écarts qui sont expliqués par les autres hypothèses qui ne sont pas vérifiées avec l'approche simulateur considérée, il convient de déterminer le SCR obtenu par approche simulateur, en négligeant les interactions. Ces résultats sont présentés dans la figure 4.6.

Les mêmes tendances sont observées mais semblent très atténuées par rapport aux résultats obtenus avec interaction. Les observations faites ci-dessus sont cohérentes avec les interprétations faites concernant l'impact de la non-prise en compte de l'interaction des facteurs de risques dans l'approche VC : l'écart entre l'approche VC et simulateur n'est plus croissant pour les corrélations supérieures à

-70%.

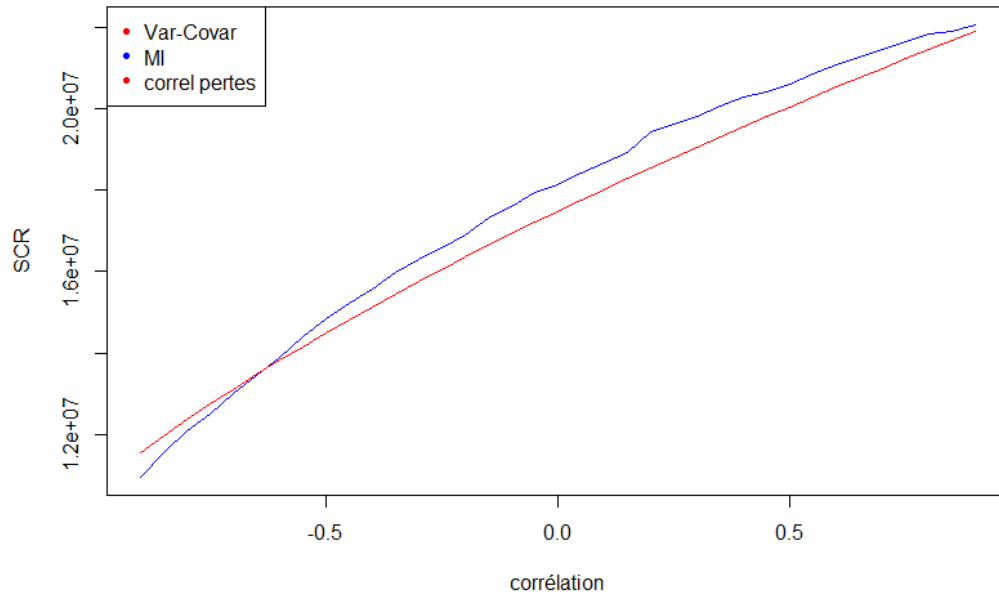


FIGURE 4.6 : SCRs obtenus en MI sans interactions et à partir de l'approche VC, en €

Les autres hypothèses VC qui peuvent créer des écarts, et qui sont détaillées dans la section 1.4.2, sont les suivantes :

- une vision *forward* est appliquée pour la détermination des SCRs, à tout niveau d'agrégation ;
- la NAV à un an est une combinaison linéaire des facteurs de risques ;
- les facteurs de risques suivent une distribution elliptique (ce qui n'est pas le cas pour l'approche simulateur : bien que la structure de dépendance corresponde à une copule de *Student*, la loi marginale appliquée est une log-normale pour les deux facteurs de risques).

En supposant que toutes les hypothèses VC sont vérifiées mis apart la log-normalité des marginales modélisant les facteurs de risques, les résultats sont comparables à ce qui est obtenu en figure 4.6. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cet écart. Les lois marginales considérées ne sont plus elliptiques (et donc symétriques). Par conséquent, même si la NAV à un an est une combinaison linéaire des facteurs de risques, cette dernière ne sera pas elliptique. La formule ne s'applique plus du tout et des différences qui sont obtenues par plusieurs effets sont observables :

- Une structure de dépendance qui est plus prononcée dans les queues de distributions, qui correspond à la partie de la distribution utilisée pour déterminer le SCR, et qui n'est pas retranscrite à travers l'approche VC. Il est vrai qu'une copule de *Student* vérifie les hypothèses de l'approche VC. Seulement, dans ce cas de figure, les lois-marginales ne suivent pas une loi de *Student*. Les lois log-normales ont une queue épaisse à droite et fine à gauche. L'hypothèse de symétrie est rompue et les dépendances ne sont plus nécessairement bien représentées par le coefficient de corrélation. L'hypothèse que l'approche VC va sous-estimer la dépendance existante dans les queues de distributions peut donc être émise, menant à une sous-estimation du SCR quand le

coefficient de corrélation est positif. Si cela avait été l'unique effet, il aurait pu être attendu que dans le cas où le coefficient de corrélation implémenté est négatif, alors l'approche VC sur-estime le SCR, la dépendance entre les queues de distributions opposées étant plus fortes que ce que prévoit la corrélation de Pearson (de plus que le degré de liberté implémenté ici est faible, de l'ordre de 5). Seulement, cette inversion a lieu pour un paramètre de corrélation très négatif.

- en se référant à la preuve présentée en section 1.4.2, celle-ci ne s'applique plus dans le cas étudié à partir du moment où la propriété que la NAV à un an centrée suit la même distribution que les facteurs de risques centrés. En effet, en reprenant les notations précisées dans la section 1.4.2, la propriété utilisée qui permet de dire que  $VaR_\alpha(Z) = VaR_\alpha(\frac{X_i - E[X_i]}{\sigma_i})$  n'est plus valable. Ainsi, en fonction des différents cas de figures considérés, les capitaux élémentaires vont sur-estimer ou sous-estimer les quantités  $\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j VaR_\alpha(Z)^2$ . La prédiction du SCR agrégé en sera impactée. Afin de mieux comprendre ce qui se produit, il convient de comparer, en fonction de la corrélation retenue, la valeur  $|VaR_\alpha(Z)|$  avec les valeurs  $|VaR_\alpha(\frac{X_i - E[X_i]}{\sigma_i})|$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

En analysant les différences entre ces 3 quantités, disponibles en annexe A.12, il est constaté que le quantile 0,5% du facteur immobilier normalisé est inférieur à celui de l'action, et que pour des corrélations au delà d'un paramètre  $\gamma$  négatif, le quantile 0,5% de la NAV un an combinaison linéaire des deux facteurs est compris entre ces deux valeurs. Pour un paramètre de corrélation inférieur à  $\gamma$ , ce dernier augmente et passe au delà du quantile action.

Bien que les facteurs de risques normalisés disposent d'un écart-type et d'une moyenne commune (respectivement 1 et 0), les lois log-normales n'étant pas symétriques, leurs distributions conservent la forme relative des queues héritées de leurs lois respectives et ne forment pas des variables aléatoires identiquement distribuées. En effet, il est constatable que dans le cas de lois log-normales, plus le paramètre de volatilité est important, moins la loi est symétrique. C'est-à-dire que plus le paramètre considéré est conséquent, plus la queue à droite de la loi est épaisse et la queue à gauche est faible. Ainsi, la queue à gauche du facteur de risque action est plus concentrée que celle de l'indice immobilier, engendrant par conséquent dans le cadre de la normalisation une queue de distribution inférieure plus proche de la moyenne (0) que pour le facteur immobilier.

Le quantile 0,5% de la NAV à un an dépend des facteurs de pondération utilisés dans la combinaison linéaire permettant de déterminer cette quantité. Il dépend également des distributions des facteurs de risques et de la structure de dépendance utilisée entre ces facteurs. Pour une dépendance positive fortement marquée, la queue de distribution inférieure de la NAV est expliquée par l'association de la queue inférieure des deux facteurs de risques. La combinaison linéaire de ces deux facteurs engendre un effet de lissage, expliquant le fait que le quantile obtenu soit compris entre les deux valeurs précédemment analysées. Lorsque la corrélation devient négative, les fluctuations extrêmes des facteurs de risques se compensent et atténuent la variabilité de la combinaison linéaire. La queue de distribution tend donc à être moins étendue. En diminuant ce paramètre au delà du paramètre  $\gamma$ , les compensations réalisées entre les facteurs de risques engendrent une queue de distribution inférieure plus faible que celle du facteur action. Au vu de ce qui a pu être observé, il convient d'analyser les impacts sur chacun des coefficients de la formule de l'approche VC. Pour rappel, en notant  $X_1$  la variable aléatoire associée au facteur action et  $X_2$  la variable aléatoire associée au facteur immobilier,

$$SCR_{1,2} = \sqrt{SCR_1^2 + 2\rho_{1,2}SCR_1SCR_2 + SCR_2^2}.$$

Cette formule est déduite à partir de l'égalité

$$VaR(E[NAV_1] - NAV_1) = \sqrt{\beta_1^2\sigma_1^2 VaR_{0,5\%}(Z)^2 + \beta_1\beta_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 VaR_{0,5\%}(Z)^2 + \beta_2^2\sigma_2^2 VaR_{0,5\%}(Z)^2}$$

Pour  $\rho_{1,2} > \gamma$  et  $\rho_{1,2}$  positif,

$$\begin{aligned} -VaR_{0,5\%}(Z) &> -VaR_{0,5\%}\left(\frac{X_1 - E[X_1]}{\sigma_1}\right); \\ -VaR_{0,5\%}(Z) &< -VaR_{0,5\%}\left(\frac{X_2 - E[X_2]}{\sigma_2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $SCR_1^2$  sous-estime la quantité  $\beta_1\sigma_1^2VaR_{0,5\%}(Z)^2$ , et  $SCR_2^2$  sur-estime la quantité  $\beta_2\sigma_2^2VaR_{0,5\%}(Z)^2$ . L'action expliquant la plus grande partie du risque auquel l'assureur est exposé, la quantité  $SCR_1SCR_2$  sous-estimera la quantité  $\sigma_1\sigma_2VaR_{0,5\%}(Z)^2$ . Au final, l'approche VC sous-estimera la valeur effective du SCR dans ce cas de figure.

Pour  $0 > \rho_{1,2} > \gamma$ , les observations sur les quantiles ne changent pas. En revanche le paramètre de corrélation étant négatif, la contribution  $2\rho_{1,2}SCR_1SCR_2$  compensera en partie la surestimation due à l'utilisation du capital action et tend alors à réduire l'écart observé.

Pour  $\rho < \gamma$ ,

$$\begin{aligned} -VaR_{0,5\%}(Z) &< -VaR_{0,5\%}\left(\frac{X_1 - E[X_1]}{\sigma_1}\right); \\ -VaR_{0,5\%}(Z) &< -VaR_{0,5\%}\left(\frac{X_2 - E[X_2]}{\sigma_2}\right), \end{aligned}$$

engendrant une sur-estimation des deux quantités  $\beta_1\sigma_1^2VaR_{0,5\%}(Z)^2$  et  $\beta_2\sigma_2^2VaR_{0,5\%}(Z)^2$ . Le coefficient de corrélation étant négatif, ces sur-estimations seront compensées par la quantité  $SCR_1SCR_2$ , également surestimée.

Ainsi, il est constatable que l'approche VC n'appréhende pas correctement le SCR pour la majorité des paramètres de corrélation. Il y a donc bien un effet corrélation mais ce qui peut surtout être conclut est que dans le cas où les hypothèses VC ne sont pas vérifiées, la formule n'est plus du tout valable. Bien que ces écarts semblent se compenser dans un cas de figure où deux risques sont étudiés, en pratique l'utilisation d'une approche VC sur des risques multiples peut rapidement mener à une dérive des résultats obtenus. L'impact le plus important semble être associé à la non-prise en compte des interactions dans le cadre VC.

Un approfondissement qu'il convient d'envisager correspond à l'étude de méthodes qui permettraient de corriger le coefficient de corrélation tel que présenté dans la section 3.3 par exemple. L'objectif serait d'appréhender de manière plus juste le SCR agrégé au titre des risques action et immobilier.

Si la modélisation avec des GSE différenciés pour la diffusion secondaire à partir des scénarios primaires RW avait été retenue, les NAVs obtenues aux différents niveaux d'agrégation auraient probablement disposées de queues plus épaisses (cf. annexe A.3.3). Le fait que l'épaisseur de queue ne soit potentiellement pas bien appréhendée dans notre cas de figure tend à limiter les écarts observés entre l'approche VC et simulateur. En effet, avec une NAV à un an disposant d'une queue plus épaisse que celle retenue dans cette étude, le quantile de la variable normalisée associée peut atteindre des valeurs plus extrêmes, augmentant cet effet de sous-estimation observé.

#### 4.1.2 Modification de la volatilité

Un point d'attention peut désormais être porté sur l'incidence de la modification de la volatilité sur les différentes distributions de perte obtenues. Les valeurs de volatilité observées dans cette section correspondent comme précisé précédemment aux différentes valeurs comprises entre les quantiles 20%

et 80% de la distribution sous-jacente à l'historique glissant A.7. Les valeurs observées sont comprises entre 14 et 25%.

Modifier le paramètre de volatilité d'un facteur de risque concerné par la dynamique de *Black&Scholes* va modifier la distribution de ce dernier et par conséquent impacter la distribution de perte au titre de ce risque. La perte au titre de l'autre facteur de risque ne sera pas modifiée, le scénario central considéré ne dépendant pas du paramètre de volatilité. La perte constatée au titre des risques conjoints sera en revanche influencée, cette dernière dépendant de l'échantillon de scénarios économiques  $(s_1, i_1)$  obtenus.

L'action et l'immobilier étant modélisés de la même manière, seule la variation du paramètre de volatilité du facteur action est considérée. Une modification de la volatilité de l'indice immobilier peut s'interpréter de la même manière et aura les mêmes effets sur les différentes distributions considérées.

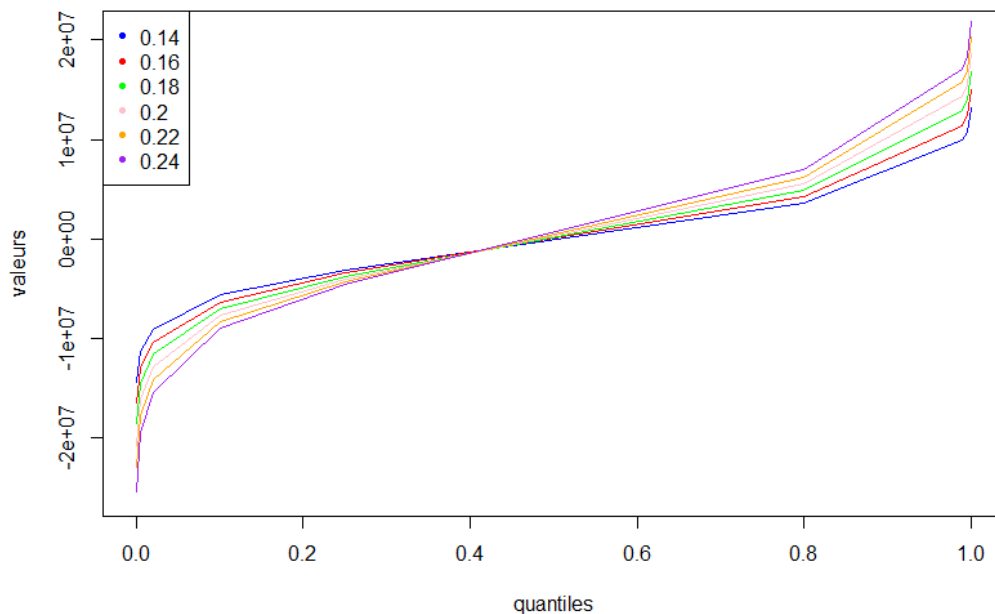


FIGURE 4.7 : quantiles de la distribution de perte issue de l'action en fonction de la volatilité implémentée (€)

La figure 4.7 montre sans surprise une distribution plus dispersée des valeurs de perte lorsque la volatilité augmente. En effet, plus la volatilité implémentée est importante, plus les quantiles sont extrêmes.

Ainsi, la dispersion des valeurs prises par le facteur de risque action augmente avec le paramètre de volatilité. Intuitivement, plus les valeurs d'action observées sont faibles, plus les pertes au titre du risque action sont importantes. En effet, l'échantillon  $Ech_{act}$  présenté dans la partie 3.1.3 contiendra alors des valeurs de NAV à un an plus faibles, venant augmenter les pertes associées observées.

Le quantile à 99,5% de la perte au titre du risque action ( $SCR_{act}$ ) en fonction de la volatilité calibrée est déterminé dans la figure 4.8.

En se fondant sur l'intervalle de confiance à 95% pour le paramètre de volatilité de l'action précisé dans l'annexe A.14, une précision de  $\pm 0,5\%$  est obtenue. En augmentant de 0,5% le paramètre de volatilité, une augmentation moyenne du SCR de 0,38 m € est obtenue, soit 2,3% du SCR action



renseigné dans le tableau 3.6. L'erreur d'estimation qui peut être observée sur l'estimateur trouvé, à historique fixé, semble donc raisonnable. Nous nous concentrant sur une augmentation de 0,5% du paramètre, ce dernier constituant le cas le plus défavorable pour la compagnie de l'intervalle de précision.

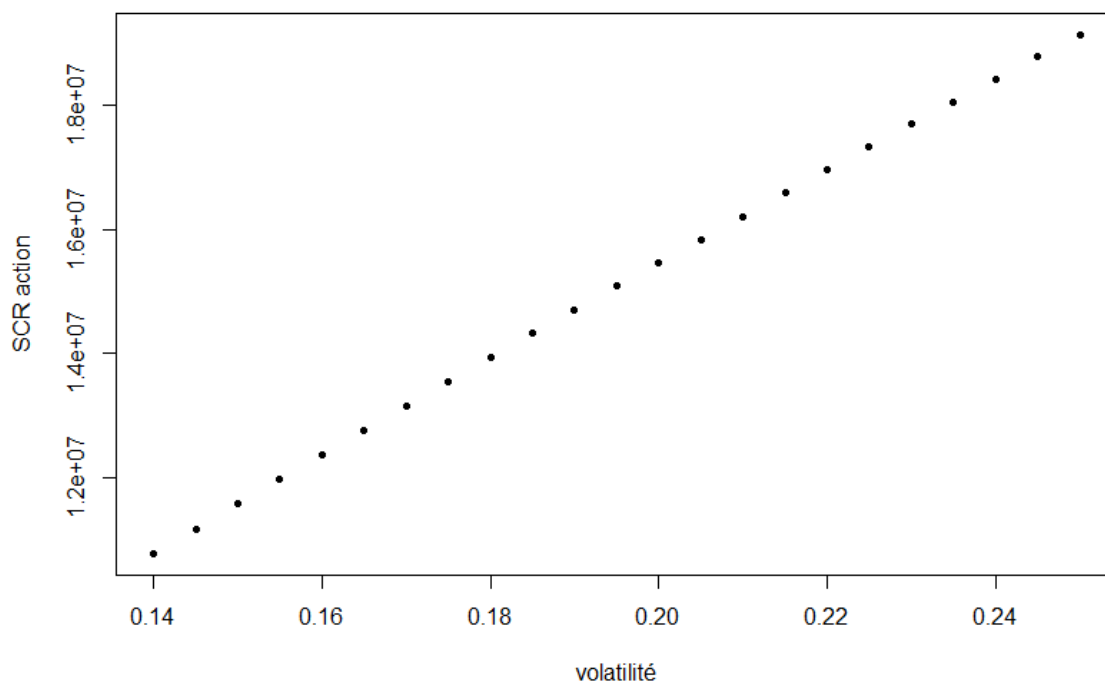


FIGURE 4.8 : SCR action obtenu en fonction de la volatilité implémentée, en €

Dans le cas où le paramètre de volatilité obtenu est de 25%, le SCR déterminé pour l'action au chapitre 3 correspond au quantile à 92,05% de la distribution de perte au titre du risque action, soit un risque d'occurrence de 51 ans. Cette valeur est donc peu prudente mais ne semble pas constituer une menace pour la solvabilité de la compagnie et permet de couvrir un risque d'occurrence importante.

L'influence de la variation de la volatilité sur le SCR global et le ratio de couverture peut désormais être analysé. Comme précédemment, un point d'attention est porté sur les bornes de l'intervalle obtenu à partir de l'historique glissant, soit 14% et 25%. La borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95% de l'estimateur à historique fixé est également analysé.

	SCR agrégé (m €)	corrélation ES	SCR global (m €)	ratio de couverture
$\sigma = 14\%$	17,68	125%	26,45	189%
$\sigma = 25\%$	27,28	149%	34,50	145%
$\sigma = \sigma_{mod} + 0,5\%$	24,43	140%	32,03	156%

TABLE 4.5 : impact de la modification de la volatilité sur le SCR global et le ratio de couverture

En passant à une volatilité de 14% pour la dynamique action, le ratio de couverture augmente de 33%. Pour une augmentation de 0,5% de la volatilité, le ratio de couverture de la compagnie est impactée à hauteur de 2%. Comme constaté précédemment, le risque action influence de manière très

significative le ratio de couverture. Au vu de cette observation, il peut en être conclut que l'erreur d'estimation du paramètre de volatilité est relativement maîtrisé sur le ratio de couverture. A historique fixé, la valeur donnée est fiable.

### Comparaison à l'approche VC

Comme envisagé dans la partie 4.1.1, il semble intéressant de se pencher sur les SCR agrégés obtenus en utilisant l'approche VC, en fonction des différentes volatilités étudiées. Les résultats sont illustrés par la figure 4.9.

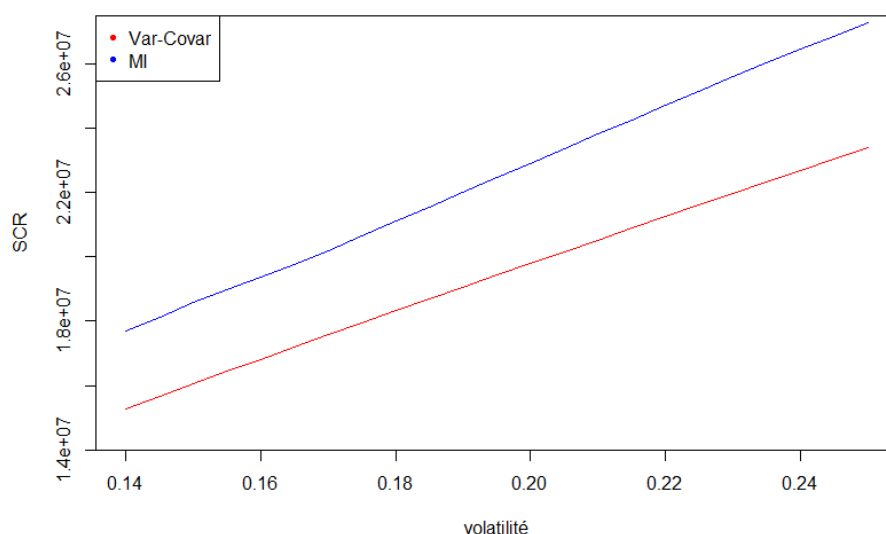


FIGURE 4.9 : SCR obtenus en MI et à partir de l'approche VC, en €

Les résultats obtenus quant à l'écart observé entre les deux approches sont résumés dans le tableau 4.6.

paramètre de volatilité	$\sigma = \sigma_{mod}$	$\sigma = 25\%(\sigma_{max})$
SCR agrégé (m €)	3,24	3,90
ratio de couverture	14%	15%

TABLE 4.6 : Ecart observé sur le SCR agrégé et le ratio de couverture en fonction de l'approche considérée

Une sous-estimation du SCR avec l'approche VC est constatée. Cette observation est cohérente avec ce qui a été observé pour les corrélations. En effet, dans le cas de figure où la corrélation est de 64%, le SCR est bien sous-estimé par l'approche VC. En augmentant la variance de l'indice action, le SCR action augmente, des valeurs plus extrêmes du risque action étant observées au temps 1. L'augmentation de la variance semble avoir le même effet sur l'implémentation VC. Il semble néanmoins judicieux de préciser que l'augmentation de la variance va augmenter l'effet de dépendance perçu entre les facteurs de risques et va donc augmenter la corrélation. Celle-ci intervenant dans la formule VC, l'augmentation de la variance aura donc un double effet sur le SCR déterminé en approche VC : une augmentation due à l'augmentation du SCR élémentaire action ainsi qu'à une augmentation du

paramètre de corrélation.

Une augmentation de la volatilité va augmenter les interactions. En effet, des valeurs plus extrêmes d'action sont observées engendrant des ajustements plus importants sur les scénarios responsables des observations en queue de distribution supérieure de la perte agrégée. Afin de rendre compte des écarts dus aux interactions et des écarts qui s'expliquent par d'autres mécanismes, il convient de déterminer la différence entre l'approche VC et simulatoire sans prise en compte des interactions. Cette dernière est présentée dans la figure 4.10.

Nous observons une réduction de l'écart, confirmant le fait que les interactions (positives pour une corrélation à 64%) augmentent le SCR agrégé obtenu en comparaison à l'approche VC qui ne prend pas en compte ces interactions. Ce qui semble remarquable réside dans le fait que sans interaction, les écarts en fonction de la volatilité semblent constants. Avec prise en compte de l'interaction, l'écart est croissant du paramètre de volatilité. Cela confirme le fait que les interactions augmentent avec le paramètre de volatilité.

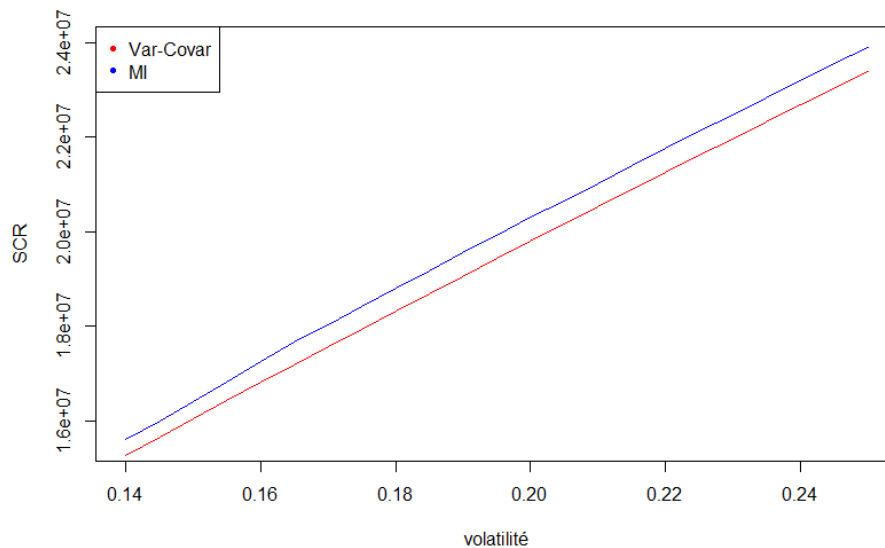


FIGURE 4.10 : SCRs obtenus en MI et à partir de l'approche VC sans prise en compte de l'interaction, en €

Bien que l'écart entre les deux méthodes aient été réduits, l'approche VC sous-estime encore l'approche simulatoire. En effet, comme précisé dans la section 4.1.1, bien que les interactions ne soient pas prises en compte, les autres hypothèses VC ne sont pas vérifiées. Comme mentionné, les lois marginales des facteurs de risques sont notamment des log-normales. Une interprétation similaire à ce qui a pu être fait pour un coefficient de corrélation strictement positif (64%) peut expliquer l'écart observé. L'écart étant presque constant, le paramètre de volatilité ne semble pas être déterminant dans l'explication de l'écart observé entre l'approche simulatoire et VC.

### 4.1.3 Modification du *drift*

Modifier le *drift*  $\mu$  dans la dynamique de *Black&Scholes* associée à un facteur de risque revient à modifier la distribution à un an de ce dernier et par conséquent la distribution de NAV à un an associée. Le scénario central présenté dans la section 3.1.3 dépend de  $\mu$ . Ce dernier intervient pour

neutraliser les risques dans les *proxys* associant un facteur de risque à la NAV à un an. Ainsi, modifier  $\mu$  impactera également le *proxy* mis en place pour un autre facteur de risque que celui dont la dynamique a été modifiée. La distribution de perte engendrée par ce nouveau *proxy* sera donc également impactée. En observant la perte agrégée au titre des deux risques considérés, cette dernière sera nécessairement impactée : les pertes élémentaires au titre des deux risques sont modifiées.

Cette section sera dédiée à l'impact de la modification du *drift*  $\mu$  intervenant dans la dynamique du risque action, pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la partie 4.1.2.

En notant  $S_1$  la variable aléatoire représentant la valeur de l'action au temps 1, l'espérance et la variance de cette variable trouvées à partir de la dynamique de *Black&Scholes* sont données par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_1] &= S_0 e^\mu, \\ \mathbb{V}(S_1) &= S_0^2 (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu}.\end{aligned}$$

Ainsi, une augmentation du paramètre  $\mu$  devrait augmenter en moyenne les valeurs d'action observées ainsi que la dispersion de la distribution associée. Le *proxy* de perte associé aux valeurs d'action étant décroissant des valeurs d'action, une augmentation de  $\mu$  aura tendance à diminuer les valeurs de perte observées en moyenne et augmenter la dispersion de la perte observée.

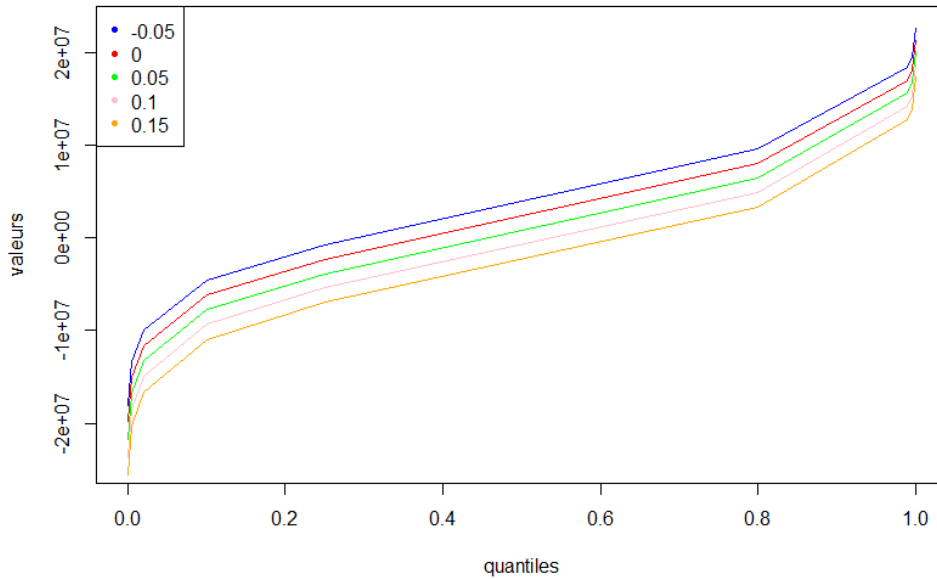
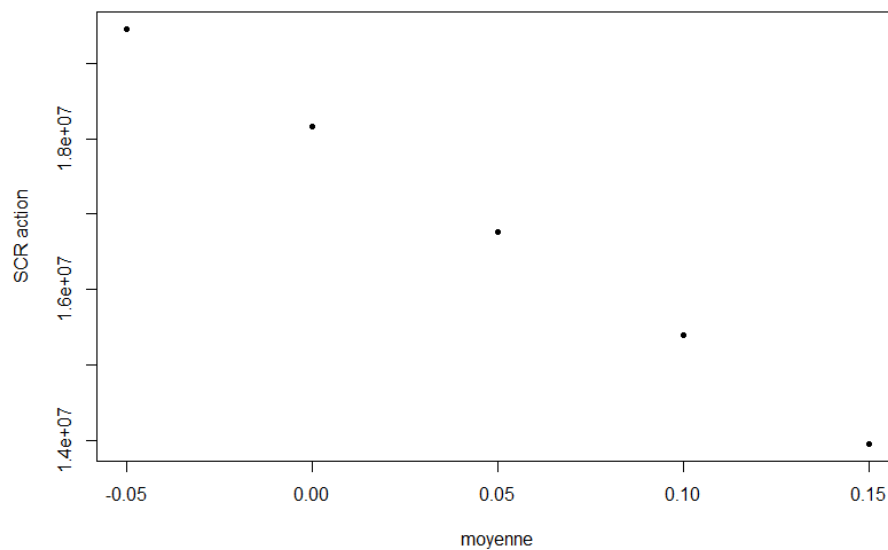


FIGURE 4.11 : quantiles des distributions de pertes Action en fonction du *drift* calibré (€)

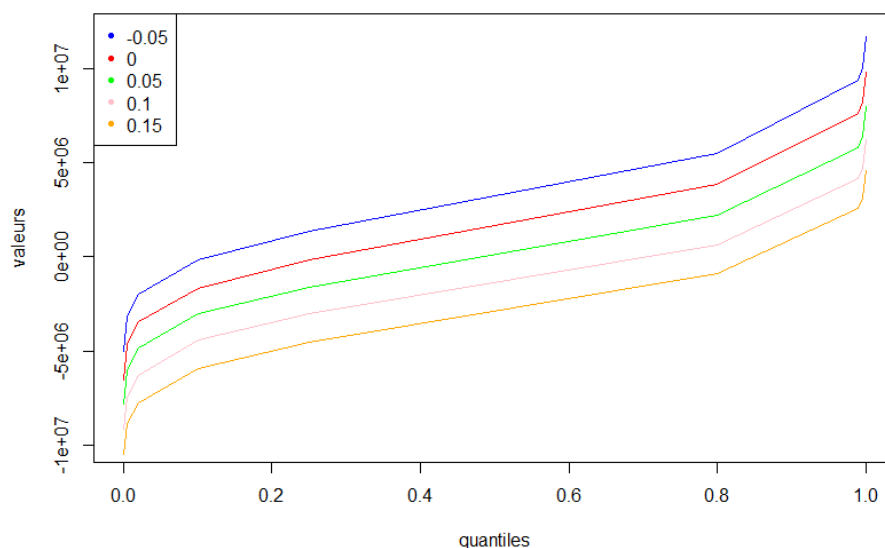
La figure 4.11 traduit une translation vers le bas des quantiles lorsque le paramètre  $\mu$  augmente, témoignant de la diminution des pertes observées. Cependant, la dispersion semble peu impactée par la variation de ce paramètre et l'effet mentionné ci-dessus doit être minime. La variance n'est pas suffisamment modifiée pour compenser l'effet de l'augmentation de la valeur des actions.

En observant plus précisément l'impact de la variation du paramètre  $\mu$  sur le quantile à 99,5% de la perte action, la figure 4.12 présente un SCR décroissant du paramètre de *drift*.

Les points déterminés dans la figure ci-dessus correspondent aux SCR obtenus en augmentant de 5% le *drift* entre -5% et 15%. Sur ces points est observé une diminution moyenne de 1,38 m €, soit 8,4% du SCR action obtenu au tableau 3.6.

FIGURE 4.12 : SCR action obtenu en fonction du *drift* implémenté, en €

En observant l'impact de la variation du paramètre sur la distribution de perte au titre du risque immobilier sur la figure 4.13, les mêmes effets sont constatés que sur la distribution de perte au titre du risque action. En effet, une translation vers le bas des quantiles s'opère pour une augmentation du *drift*  $\mu$ . La volatilité et la dispersion observée sur la distribution ne sont pas modifiées. Ces dernières ne dépendent que de la dynamique de l'indice immobilier et de la distribution immobilier obtenue à un an.

FIGURE 4.13 : quantiles des distributions de pertes Immo en fonction du *drift* calibré (€)

Ce résultat est intuitif : plus le paramètre de *drift* calibré est important, plus le scénario central

utilisé pour neutraliser le risque action est favorable pour la compagnie d'assurance et mène à une NAV à un an importante. Cela tend à limiter la perte. Les mêmes effets sont également constatés sur la perte au titre du risque agrégé, avec une augmentation moyenne de 1,59 m € lorsque  $\mu$  diminue de 5%, représentant 6,6% du SCR agrégé.

En reprenant l'intervalle de confiance à 95% du paramètre précisé en annexe A.14, une précision de  $\pm 9\%$  est obtenue pour le paramètre de *drift* de la dynamique action. Il convient d'analyser la situation de solvabilité pour une diminution de 9% de la moyenne, correspondant au paramètre le plus défavorable pour la compagnie de l'intervalle. Une évaluation dans le cadre des paramètres déterminés pour l'historique glissant est également considérée.

	SCR act.	SCR immo.	SCR agrégé	corrélation ES	SCR global	ratio de couverture
$\mu = 15\%$	13,95	3,11	21,10	278%	29,22	171%
$\mu = \mu_{mod} - 9\%$	18,85	9,20	26,77	80%	34,06	146%

TABLE 4.7 : impact de la modification du *drift* sur le SCR global et le ratio de couverture (m €)

Dans le cas le plus négatif, avec  $\mu = -2,7\%$ , un ratio de couverture plus faible de 146% est constaté. Ce résultat peut être discuté et une étude plus poussée de la modification du *drift* peut potentiellement mener à un résultat plus négatif et une situation d'insolvabilité. Une corrélation ES de 80% est observée ce qui peut étonner au vu de ce qui a été observé précédemment. Il n'y a pas de raisons apparentes pouvant expliquer une corrélation ES plus faible que les autres corrélations. Ce constat s'explique du fait que pour un *drift* faible, le scénario central est pessimiste, engendrant une perte  $L_{cent}$  plus importante. Cette quantité vient donc artificiellement diminuer l'ajustement ajouté à la perte agrégée, pour prendre en compte le conditionnement des pertes élémentaires aux scénario central. Cette approche est explicitée en section 3.1.2.

Inversement, dans le cas où  $\mu = 15\%$ , une corrélation ES supérieure à ce qui a été déterminé et extrêmement importante est observée, indiquant un effet de contagion. En reprenant la formule du *proxy* déterminé dans l'équation 3.9, cette contagion peut être expliquée. L'excédent de perte observé pour les 2-scénarios économiques défavorables, responsables de la queue de distribution de perte agrégée n'est plus compensé par la perte au titre du scénario central. En effet,  $L_{cent}$  prend une valeur très négative. Un gain est par conséquent observé en scénario central. L'ajustement permet d'annuler l'effet de conditionnement par rapport aux valeurs centrales observées dans les cas d'évaluation élémentaire du risque. Bien qu'une contagion soit observée, le cas où  $\mu = 15\%$  est très avantageux pour la compagnie d'assurance fictive et le ratio de couverture obtenu est de 171%.

Il est notable que le paramètre  $\mu$  a un impact non négligeable sur le ratio de couverture de la compagnie considérée. Ce constat s'explique par plusieurs facteurs. Le premier réside dans le fait que le *drift* a plus d'influence sur le SCR agrégé. En effet, comme précisé, il ne modifie pas uniquement le SCR action mais a également un impact sur la distribution de perte au titre du risque immobilier. Le scénario central étant impacté par la modification du *drift*, l'interaction est également changée. Le SCR agrégé est donc fortement impacté par cette modification. De plus, le paramètre  $\mu$  semble induire plus d'incertitude que les autres paramètres du GSE RW. L'intervalle de confiance à 95% induit, notamment une erreur de  $\pm 9\%$ , expliqué par le fait que l'estimateur de cette quantité dépend de l'estimateur de  $\sigma$ . Ainsi, la robustesse de cet estimateur dépend de la robustesse de l'estimateur de  $\sigma$  et des autres facteurs qui le composent.

Bien que le ratio de couverture est impacté de manière plus conséquente dans le cadre de l'évaluation de la robustesse de l'estimateur  $\mu$ , la solvabilité de la compagnie n'est pas mise à mal. En effet, en

diminuant de 9% ce paramètre, une baisse de 12% du ratio de couverture est constatée.

L'étude sur les variations des calibrages déterminés dans le GSE RW peut être améliorée et certains axes intéressants n'ont pas été explorés. En effet, afin d'observer le véritable impact d'une crise sur le SCR obtenu et le ratio de couverture de la compagnie fictive, il n'est pas judicieux de modifier un à un les paramètres calibrés. En situation de crise, les paramètres vont prendre des valeurs impactant négativement le ratio de couverture de la compagnie simultanément. Il serait donc intéressant d'observer quel serait le ratio de couverture obtenu dans ce cas de figure et d'observer si la compagnie est alors encore solvable. Au vu de l'étude effectuée, un choc simultané sur les paramètres de volatilité et de *drift* engendreront potentiellement un ratio de couverture inférieur à 100% et par conséquent une situation d'insolvabilité pour la compagnie. Il serait intéressant de regarder si la modification de la stratégie d'allocation d'actif permettrait alors à la compagnie d'être solvable. L'étude n'est également pas complète sans la prise en compte de la modification des paramètres de la dynamique suivie par les facteurs immobilier.

### Comparaison à l'approche VC

Comme pour les paramètres précédents, l'influence de la modification du *drift* sur l'estimation du SCR agrégé par approche VC peut être évaluée.

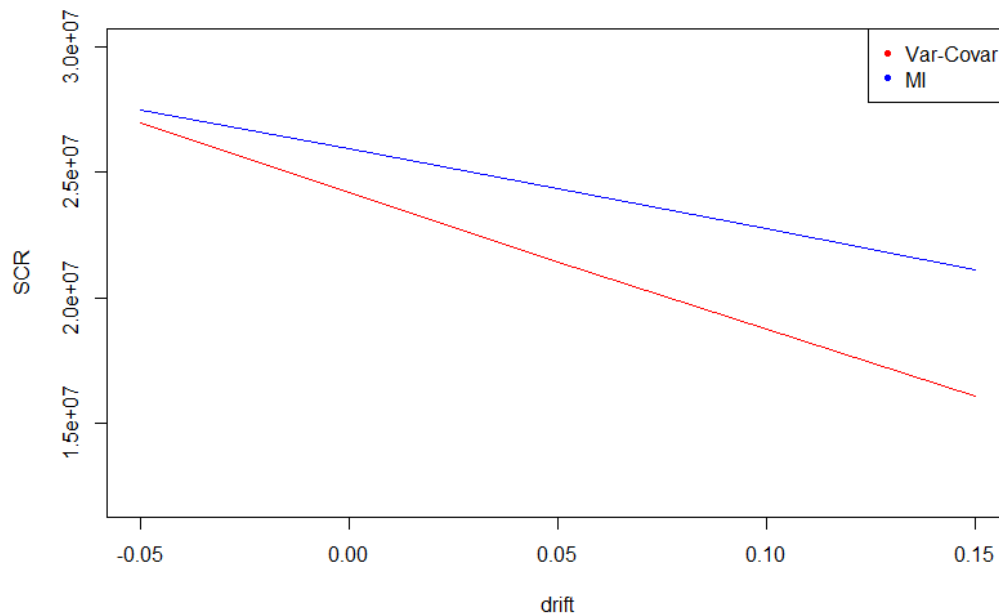


FIGURE 4.14 : SCRs obtenus en MI et à partir de l'approche VC, en €

La modification du paramètre  $\mu$  semble avoir un impact important sur l'écart observé avec la prédiction faite par méthodologie VC.

Les résultats obtenus quant à l'écart observé entre les deux approches sont résumés dans le tableau 4.8.

Ces écarts semblent beaucoup plus importants que les écarts maximaux constatés pour les autres paramètres et montrent que l'approche VC n'appréhende pas correctement le SCR agrégé.

paramètre de <i>drift</i>	$\mu = \mu_{mod}$	$\mu = 15\%$
SCR agrégé (m €)	3,24	5,01
ratio de couverture	14%	27%

TABLE 4.8 : Ecart observé sur le SCR agrégé et le ratio de couverture en fonction de l'approche considérée

Ce dernier s'explique notamment par la non-prise en compte du facteur d'ajustement *Ajust*. Ce dernier permet dans le cas de l'approche simulatoire de considérer les interactions et d'annuler l'effet de conditionnement par rapport aux scénarios centraux. Comme vu dans l'étude de la variation du *drift*, plus ce dernier est important, plus le scénario central est favorable. Ainsi, dans le cas de la prise en compte des deux risques, un ajustement est mis en place permettant d'annuler la neutralisation des facteurs de risques contenus dans les *proxys standalone*. Plus le gain central constaté est important et plus cet ajustement est important, qui n'est pas pris en compte en approche VC. Inversement, plus le scénario central est défavorable, plus l'ajustement sera faible, engendrant une sur-estimation du SCR avec l'approche VC.

Le paramètre  $\mu = 12\%$  permet l'obtention d'un même résultat pour ces deux méthodes. Avec ce paramètre, la non-prise en compte des hypothèses VC dans l'approche simulatoire est compensée par les autres mécanismes non considérés dans l'approche VC. Le fait que ces approches se croisent en ce paramètre dépend du modèle considéré.

Afin de regarder les effets dus à la prise en compte des interactions et les autres effets, il convient de se pencher comme pour les autres paramètres sur les résultats obtenus sans interactions. Ces derniers sont présentés dans la figure 4.15.

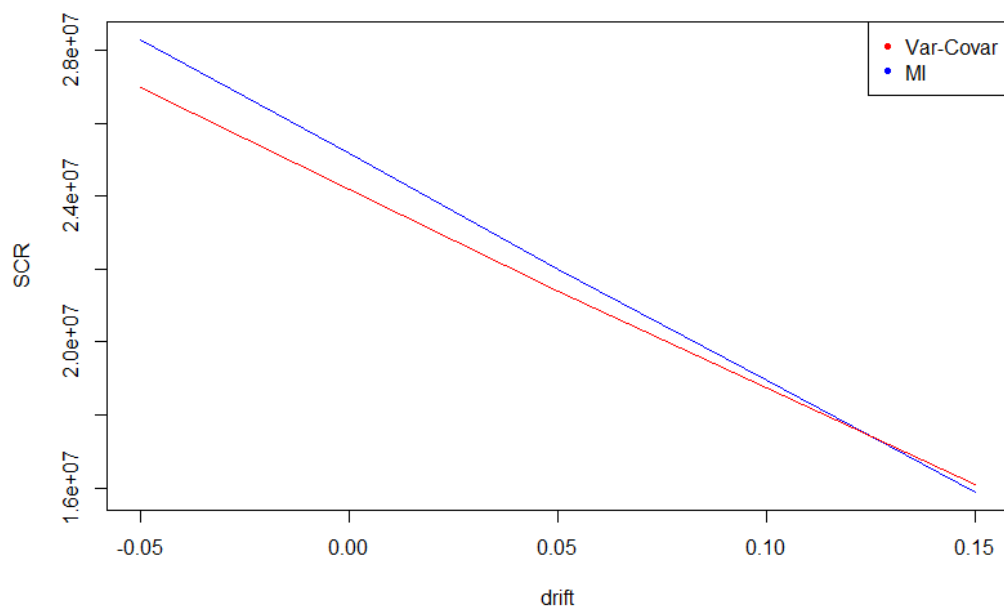


FIGURE 4.15 : SCR obtenus en MI et à partir de l'approche VC, en €

Dans ce cas de figure, l'écart maximal reste relativement important, correspondant à 1,33 m€. Une inversion des tendances se produit par rapport à l'évaluation précédente. En effet, pour les faibles



valeurs de  $\mu$ , l'approche VC semble sous-estimer le SCR et pour des valeurs importantes, une surestimation est constatée. Une des possibilités pour ce constat est la suivante : plus le *drift* est faible, plus les scénarios utiles pour la détermination du SCR sont extrêmes. La perte étant déterminée à partir de *splines* cubiques dans l'approche simulatoire, plus les valeurs sont extrêmes, plus l'effet de non-linéarité est mis en avant. Par conséquent, les écarts avec l'approche VC se font plus ressentir pour les bornes de l'intervalle de *drift* considéré (amplification de la non-linéarité dans ce cas de figure). Le croisement entre les deux courbes est ici observé pour un paramètre beaucoup plus importants, proche de 10%. En effet, pour une telle valeur, les quantiles en queue de distribution inférieure des actions sont relativement peu extrêmes et pour ces valeurs le *proxy* CF peut traduire une certaine linéarité.

## 4.2 Prise en compte d'une nouvelle structure de dépendance

Dans cette section, l'objectif est d'analyser l'impact de la modification de la structure de corrélation obtenue sur la distribution de perte agrégée au titre des risques action et immobilier. Pour cela, les 5 structures de dépendance considérées dans l'étude 3.2.2 sont réutilisées. Ces structures de dépendance seront comparées au cas d'indépendance des facteurs de risques, permettant d'analyser le capital supplémentaire engendré par les différentes structures. Dans un dernier temps, les structures de dépendance imposées par des copules archimédiennes seront comparées à l'approche VC.

Les valeurs du SCR agrégé obtenues en fonction des différentes structures de dépendance obtenues sont étudiées dans cette section. Il semble donc plus judicieux de comparer les résultats obtenus dans ces sections avec le SCR déterminé à partir des calibrages plus complets, analysés en annexe A.5.

### 4.2.1 Prise en compte de différentes copules

Pour rappel, les différentes copules candidates pour représenter la dépendance entre les facteurs action et immobilier sont les copules Gaussiennes, de *Student*, Clayton, survie de Gumbel et Frank. Afin de prendre uniquement en compte l'impact de la structure de dépendance sur la distribution de perte obtenue, le paramètre de corrélation est fixé à 64% pour chaque copule. Les différentes remarques qui peuvent être faites sur ces structures de dépendance sont les suivantes :

- Gumbel : modélisation de dépendances positives plus accentuées sur la queue supérieure ;
- Frank : modélisation de dépendances positives et négatives ;
- Clayton : modélisation de dépendances positives plus accentuées sur la queue inférieure ;
- Gaussienne : distribution symétrique ne permettant pas la modélisation de dépendances de queues ;
- *Student* : distribution symétrique permettant la modélisation de dépendances de queue.

### Observation des distributions de pertes obtenues en fonction des copules retenues

Les densités obtenues en fonction de la copule appliquée sont représentées dans la figure 4.16.

La distribution de perte engendrée par la copule indépendante est la moins dispersée. Cela n'est pas étonnant car la copule indépendante ne dispose pas de dépendance positive contrairement aux autres copules implémentées. Cette copule ne va donc pas associer des valeurs de facteurs de risques extrêmes ensemble, et les valeurs de perte restent donc modérées. La queue de distribution observée est fine en

comparaison aux autres distributions. Si une copule engendrant une structure de dépendance négative avait été considérée, la perte observée aurait été encore moins dispersé qu'avec le cas d'indépendance. En effet, les faibles valeurs d'action auraient été associées aux valeurs importantes d'immobilier et inversement, permettant aux pertes et aux gains de se compenser : peu de gains importants ou de pertes importantes seraient observés.

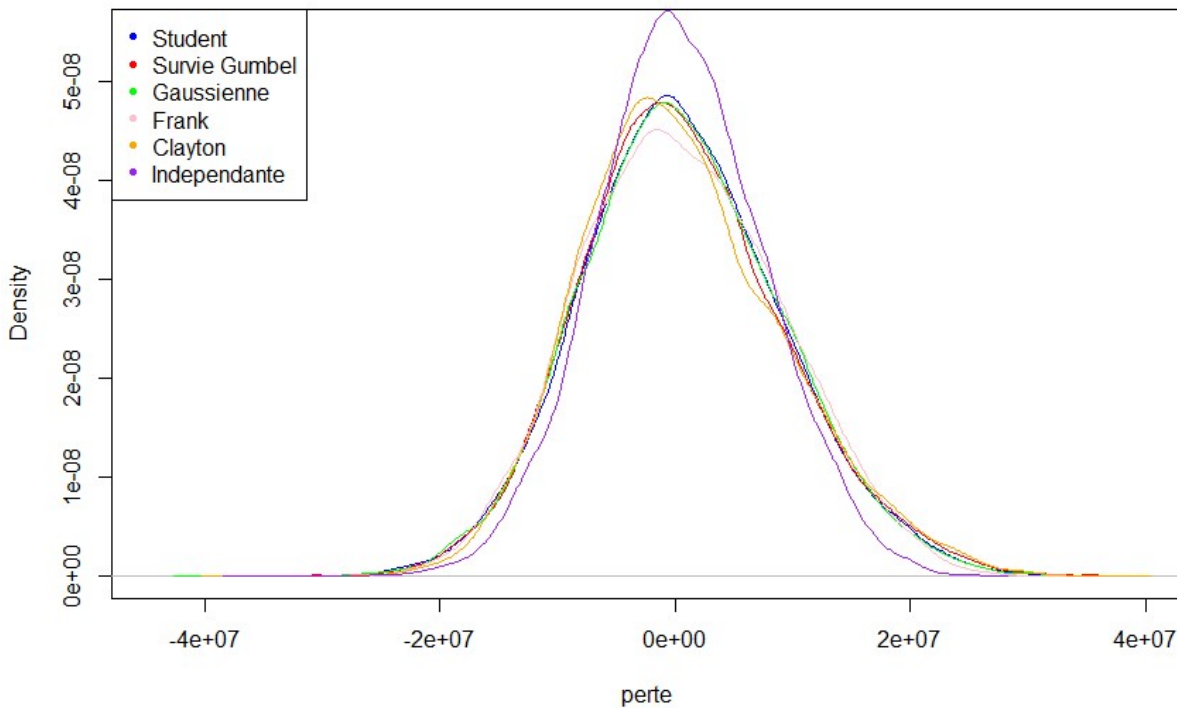


FIGURE 4.16 : Densités des pertes obtenues en fonction de la copule utilisée

En ce qui concerne la copule de Clayton, sa queue de distribution supérieure est une des plus importantes. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la copule de Clayton prend en compte des dépendances pour la queue inférieure. Elle va donc associer des valeurs faibles de risques ensemble et les autres valeurs de facteurs de risques seront moins dépendantes les unes entre elles. Cet effet peut notamment être illustré par le graphique représentant la structure de dépendance instaurée par la copule de Clayton disponible en annexe A.9. La queue de distribution supérieure pour la perte associée va en être gonflée en comparaison aux autres structures de dépendance, à coefficient de corrélation égal. La perte engendrée par la structure de survie de Gumbel se comporte de la même manière que la perte issue de la copule de Clayton au niveau de la queue de distribution supérieure. Cela s'explique pour les mêmes raisons. En effet, la structure de Gumbel instaure une dépendance accentuée sur la queue supérieure. Ainsi, la queue inférieure bénéficie d'une dépendance positive intensifiée.

Pas de différences notables sont constatées pour les pertes associées aux copules de *Student* et Gaussienne, si ce n'est que la queue de distribution supérieure et inférieure de la copule de *Student* soient légèrement plus importantes que celles observées pour une copule Gaussienne. Cela est dû au fait que des dépendances de queue positives sont modélisées avec la copule de *Student*. Ce phénomène s'observe mieux sur la figure 4.17.

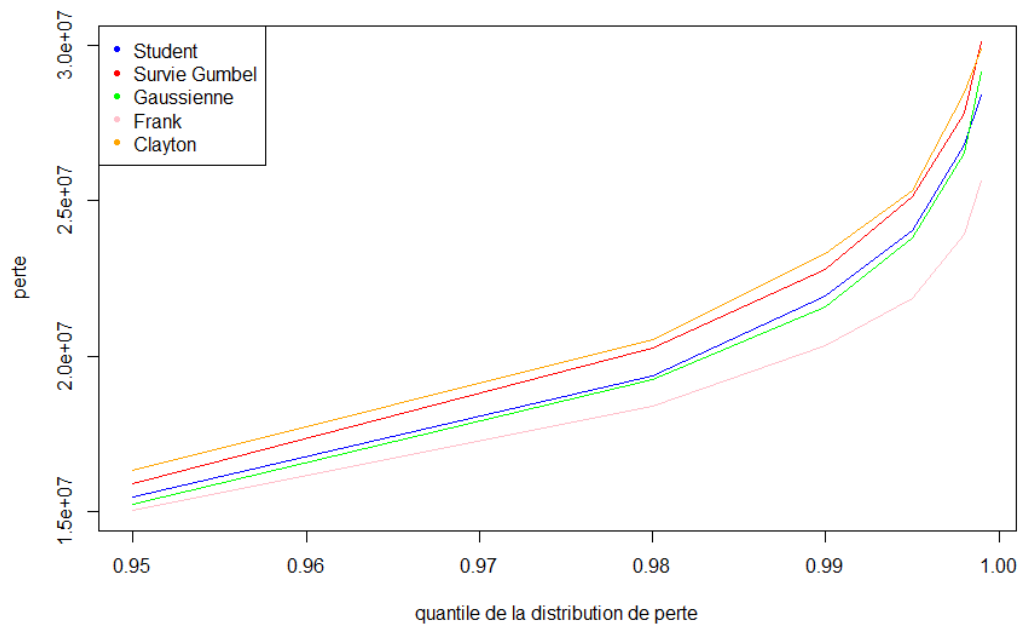


FIGURE 4.17 : Quantiles extrêmes des pertes en fonction de la copule retenue (€)

La figure 4.18 représente les différents SCR obtenus en fonction de la structure de dépendance considérée.

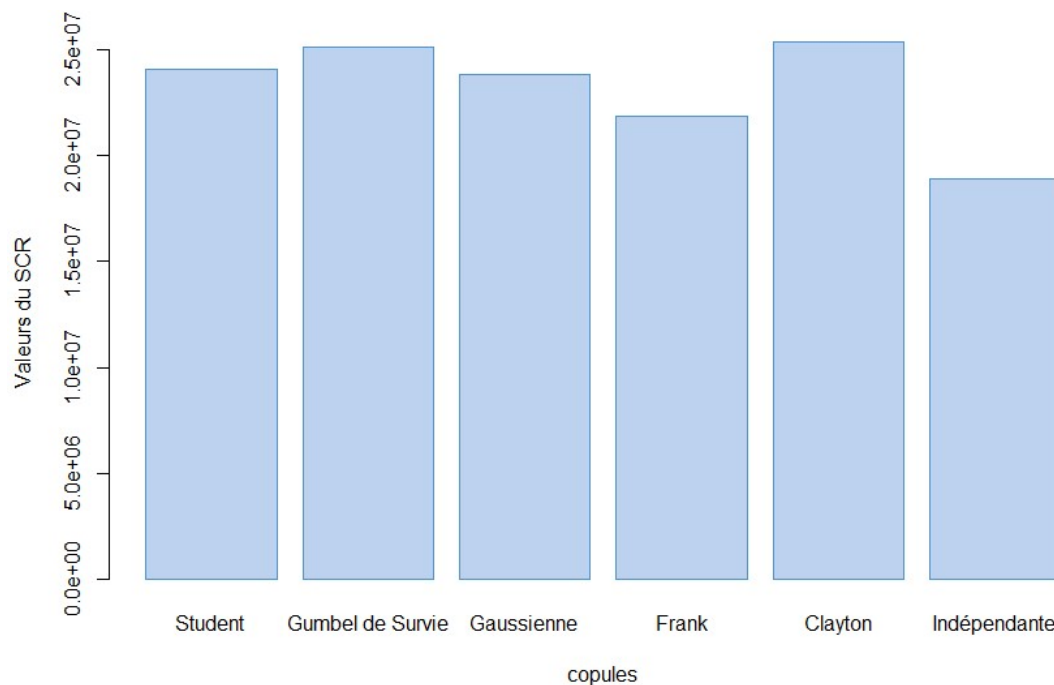


FIGURE 4.18 : SCR agrégés obtenu en fonction des corrélations, en €

L'obtention de ces SCR rejoint ce qui a été observé précédemment au niveau des distributions de

perte. Les SCR les plus élevés sont obtenus à partir de copules permettant la prise en compte d'une dépendance accentuée en queue inférieure pour les scénarios économiques, impactant donc la queue supérieure de la distribution de perte, engendrant un surplus de capital à détenir par rapport aux autres structures considérées. Les SCR obtenus au titre de la copule Gaussienne et de *Student* sont comparables. En dehors de la copule indépendante, la copule de Frank engendre le plus faible SCR. La copule de survie de Gumbel engendre un SCR proche de celui de Clayton, restant néanmoins plus faible, avec un écart relatif de 0,86%. Cela est dû au fait que la copule considérée pour l'étude dispose d'une dépendance de queue (1.4.1) inférieure de 56%, soit un résultat légèrement moins important que la dépendance de queue observée sur la copule de Clayton, de 67%.

La dépendance de queue empirique obtenue sur l'échantillon des couples de scénarios économiques en fonction de la copule considérée, dans la figure 4.19, montre bien que plus la dépendance de queue inférieure imposée par la copule est importante, plus la queue de distribution supérieure de la perte observée est importante. Cela confirme les interprétations faites ci-dessus.

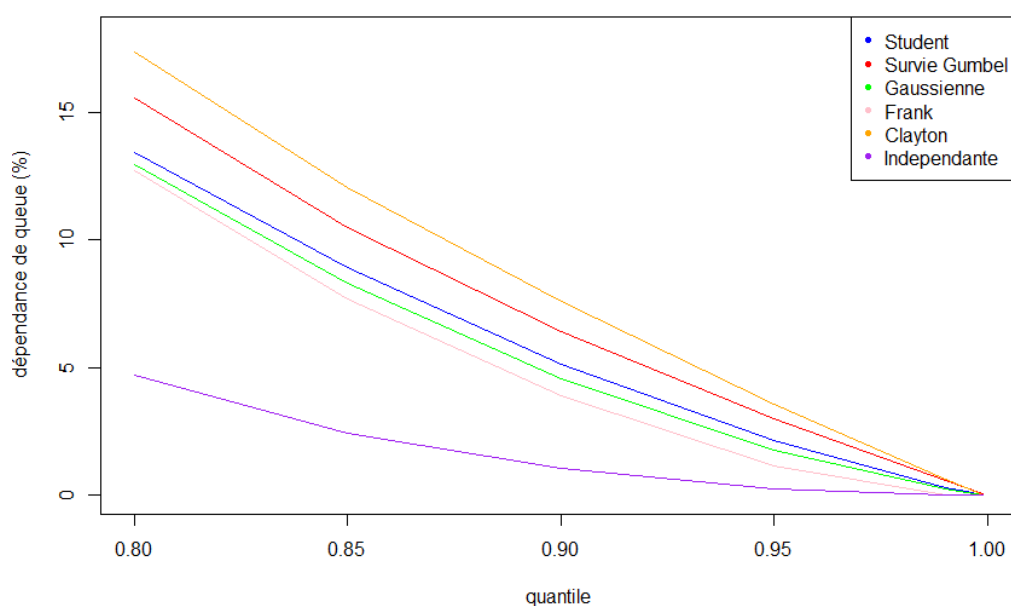


FIGURE 4.19 : Analyse de la dépendance de queue

Il convient dès à présent d'observer l'écart entre les quantiles obtenus pour les différentes copules considérées et la structure d'indépendance.

Quantile	<i>Student</i>	survie Gumbel	Gaussienne	Frank	Clayton
90%	20.91	24.94	21.94	24.40	27.28
95%	24.69	28.40	23.05	21.46	31.66
99,5%	27.41	33.07	26.07	15.87	34.21
99,95%	30.19	40.52	33.36	14.14	34.81

TABLE 4.9 : Ecart(%) entre les quantiles de la perte agrégée obtenus pour les différentes copules et la structure d'indépendance

L'écart observé dans le tableau 4.9 est croissant en fonction des quantiles pour chaque copule analysée, mis à part pour la copule de Frank. La modélisation de dépendances à partir d'une structure émanant de copules augmente considérablement le besoin en fonds propres, quels que soient les seuils

de mesure de risque considérés. En cas de dépendance entre les facteurs de risques, le maintien du seuil de sécurité à 99,5% implique une augmentation de la VaR allant jusqu'à +34%.

3 groupes sont cependant remarqués :

- Premier groupe pour lequel l'écart est le plus important : Survie Gumbel et Clayton  
la dépendance dans le cas des survie Gumbel et Clayton est concentrée sur la queue de distribution inférieure. Ainsi des scénarios plus défavorables seront observés dans ces cas de figure. La queue de distribution supérieure de la perte sera par conséquent beaucoup plus importante que la distribution de perte avec indépendance des facteurs de risques.
- Second groupe : les copules de *Student* et Gaussienne  
Les copules elliptiques prévoient une structure de dépendance symétrique. La corrélation est plus répartie même si accentuée sur les queues de distribution pour la copule de *Student*. Ainsi, des scénarios (Act, Immo) moins défavorables seront observés avec ces copules, à corrélation égale.
- Troisième groupe : la copule de Frank  
La dépendance de queue (inférieure et supérieure) d'une copule de Frank est nulle. Par conséquent, il est intuitif de constater que les quantiles extrêmes induits par cette copule soit inférieure à ceux obtenus à partir de copules permettant de modéliser des dépendances de queue. En observant le tableau 4.9, il est clair que l'écart observé entre les quantiles de perte obtenus avec l'hypothèse d'indépendance et ceux obtenus en prenant une copule de Frank tend à diminuer lorsque le niveau du quantile augmente. Ce résultat tend à mettre en avant le fait que la corrélation de 64% est concentrée sur les valeurs moyennes des actions et de l'immobilier. Pour des valeurs extrêmes faibles d'action et d'immobilier, la dépendance observée est plus faible, et se rapproche de la situation d'indépendance, expliquant cet écart décroissant. Cela explique également la raison pour laquelle le SCR obtenu au titre de la copule gaussienne est plus important que dans le cadre de la copule de Frank : la copule gaussienne met en place une structure de dépendance qui est répartie uniformément sur l'ensemble de la distribution.

### Incidence sur le SCR global et le ratio de solvabilité

Cette section se concentre sur l'influence des différentes structures de dépendance sur le SCR global et le ratio de couverture de la compagnie d'assurance fictive.

copule	SCR agrégé (m €)	corrélation ES	SCR global (m €)	ratio de couverture
<i>Student</i>	24,05	140%	31,70	158%
Gumbel Survie	25,12	166%	32,62	153%
Gaussienne	23,80	133%	31,49	159%
Frank	21,87	88,5%	29,86	167%
Clayton	25,33	171%	32,81	152%

TABLE 4.10 : incidence de la modification de la structure de dépendance sur le SCR global et le ratio de couverture

Ainsi, plus la dépendance implémentée par les différentes copules au niveau de la queue de distribution inférieure des facteurs de risques est importante, plus le paramètre de corrélation ES est important, engendrant une augmentation du SCR et une diminution du ratio de couverture. Les ratio de couverture varient entre 152% et 167%, engendrant un écart de 15% sur les ratios constatés.

Il est donc clair que la structure de dépendance mise en place a une incidence sur la valeur du SCR global et influence la perception de la santé financière de la compagnie d'assurance.

#### 4.2.2 Les structures de dépendance et l'approche VC

Après avoir étudié l'impact des différentes structures de dépendance sur le SCR final obtenu, il semble intéressant de comparer l'approche VC avec l'approche simulatoire en prenant en compte les différentes structures de dépendance pour lesquelles l'approche VC ne s'applique pas. Cette étude permet de justifier l'utilisation de l'approche simulatoire et de constater à quel point la structure de dépendance choisie impacte le SCR prédit. Ce paragraphe permet également d'observer dans quels cas de figure l'approche Var-Cover est prudente, et dans quels cas elle ne l'est pas. Pour rappel, les hypothèses — précisées dans la section 1.4.2 — que doivent satisfaire les facteurs de risques auxquels la compagnie est exposée et sa NAV pour justifier que l'approche VC permette le calcul du quantile à 99,5% de la perte sont les suivantes :

- La NAV est une fonction croissante des facteurs de risques
- Le vecteur des facteurs de risques suit une loi elliptique
- La NAV est une combinaison linéaire des facteurs de risques, càd en notant  $X \in \mathbb{R}^d$  le vecteur de facteurs de risques,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{R}^d, NAV = \lambda + \beta^T X$

La comparaison entre l'approche VC et simulatoire nécessite par ailleurs de se placer dans une vision *forward* comme précisé dans la section 1.4.2. La perte est donc définie comme étant de la forme  $NAV_{sc.cent.} - NAV_1$ .

Afin d'analyser de comparer l'utilisation de l'approche VC seule l'hypothèse d'ellipticité de la structure de dépendance sera modifiée afin d'étudier l'impact de la prise en compte de la nouvelle structure sur le SCR prédit, en fonction des paramètres de la copule archimédienne considérée.

Pour ce faire, le SCR donné par l'approche VC et le SCR simulé seront comparés. Pour chaque copule analysée, les hypothèses suivantes sont retenues :

- la compagnie est soumise aux risques action et immobilier ;
- ces facteurs de risques suivent une loi normale. Leur loi jointe n'est en revanche plus caractérisée par une copule gaussienne mais par la copule étudiée ;
- la NAV est une combinaison linéaire des facteurs de risques, c.à.d. que les interactions entre les risques ne sont pas considérées.

Dans ce cas de figure seule l'hypothèse faite sur la structure de dépendance empêche la validité de l'approche VC pour déterminer un quantile de la distribution de perte.

Pour déterminer quels paramètres retenir pour les lois normales représentant les différents facteurs de risques, un maximum de vraisemblance est appliqué sur les échantillons des facteurs de risques à un an obtenus en sortie du GSE RW.

Il est à noter que les SCR tels quels ne seront pas étudiés et ne renvoient pas des valeurs qui doivent par la suite être considérées. Ce qui est étudié ici correspond à l'écart observé entre le SCR prédit par l'approche VC et l'approche simulatoire, lorsque l'hypothèse de dépendance elliptique n'est pas respectée.

Afin de s'assurer que dans le cas gaussien, l'approche simulateur et VC renvoient bien des résultats identiques, l'étude est amorcée en comparant l'approche simulateur et l'approche VC dans le cas où la copule gaussienne est utilisée. La figure 4.20 montre bien une équivalence entre les résultats obtenus dans le cas gaussien pour l'approche simulateur et l'approche VC. Un très léger écart est observé de l'ordre de 0,9%, du fait de l'utilisation d'estimateurs de SCRs, mais une correspondance forte entre les deux valeurs est tout de même constatée.

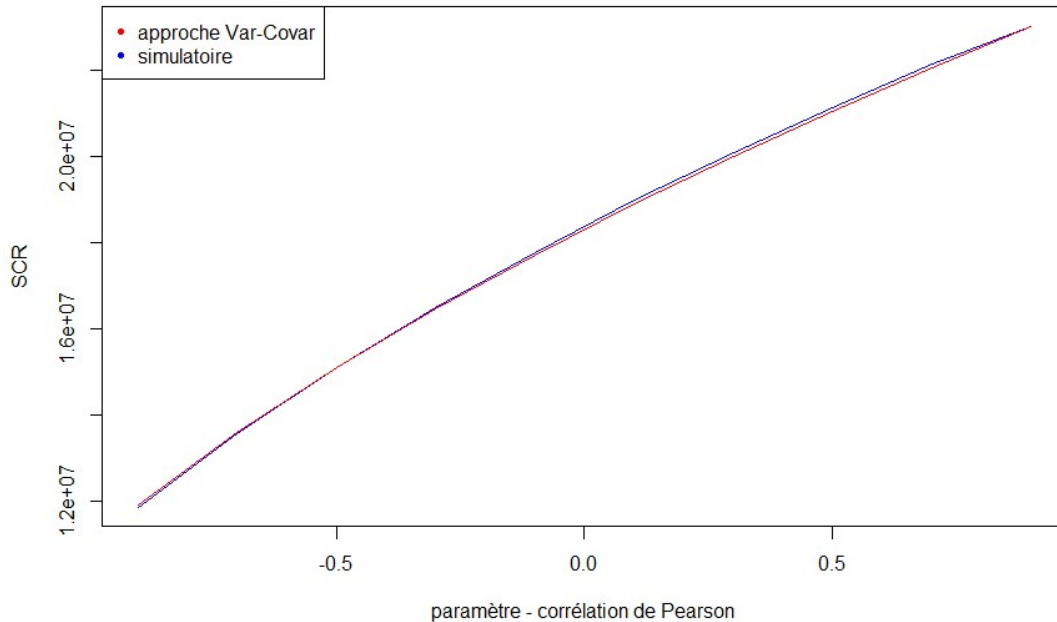


FIGURE 4.20 : Comparaison de l'approche VC et simulateur pour la copule gaussienne (€)

L'étude peut donc être amorcée en utilisant les 3 autres copules archimédiennes considérées.

### La copule de Gumbel

Dans le cadre de la copule de Gumbel, représenté par la figure 4.21, la FS surestime le SCR par rapport à l'approche simulateur, quel que soit le paramètre de la copule considérée. Il est également notable que pour des paramètres plus importants, cet écart tend à se réduire et la valeur du SCR obtenu converge, pour les 2 méthodes.

En observant la corrélation obtenue en fonction du paramètre pour la copule de Gumbel sur la figure A.26 disponible en annexe A.11, cette convergence peut s'expliquer. En effet, plus le paramètre augmente, plus la corrélation tend vers 1 et stagne. Etant donné que d'un paramètre à l'autre, seul la corrélation de Pearson implémenté dans l'approche VC est modifiée, la variation du SCR déterminé en approche VC est uniquement expliquée par le paramètre de corrélation. Plus le paramètre est important, plus les deux méthodes fournissent des résultats similaires.

Cette observation tend à supposer que pour un paramètre important, la corrélation capte bien la dépendance existante au sein de l'échantillon. En effet, en se référant à la figure A.26 disponible en annexe, la structure de dépendance imposée par une copule de Gumbel de paramètre 12 semble traduire une relation linéaire, qui s'apparente au cas de figure où le coefficient de corrélation de Pearson est un bon indicateur de la dépendance implémentée. En comparant l'échantillon de facteurs obtenu pour cette copule de Gumbel et pour la copule gaussienne de même paramètre de corrélation ( $\rho = 99\%$ ) — en figure A.25 — qui correspond au cas où l'approche VC s'applique, les échantillons sont similaires. En

appliquant un maximum de vraisemblance sur l'échantillon de rangs associés à la copule de Gumbel de paramètre 12, pour *fitter* cet échantillon avec une copule de Gumbel et une copule Gaussienne, les maximums des vraisemblance obtenus sont relativement proches (respectivement de 20736,31 et 19657,8), confirmant ce qui est présenté ci-dessus.

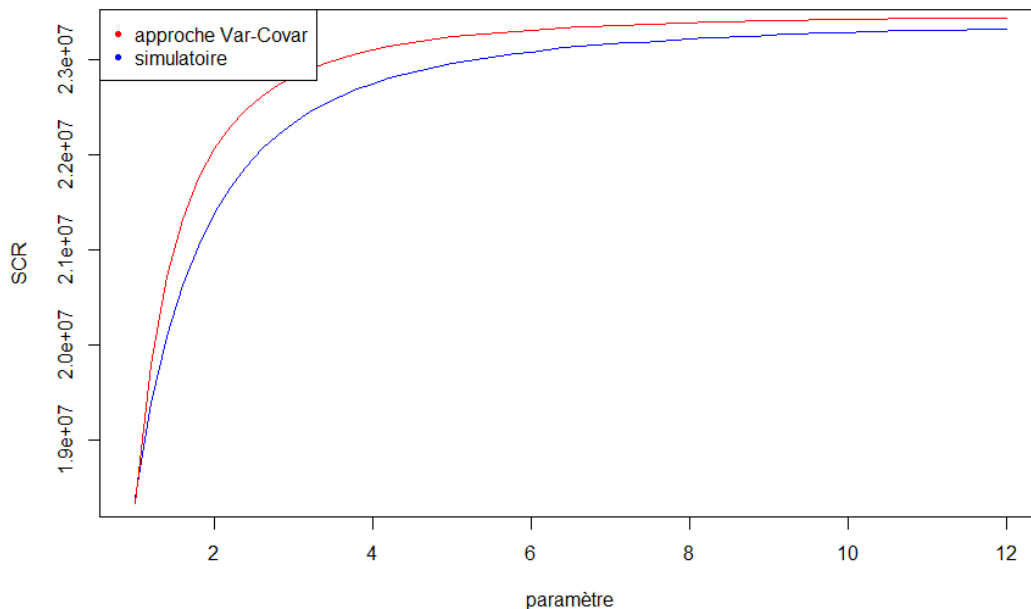


FIGURE 4.21 : Comparaison de l'approche VC et simulatoire pour la copule gumbel (€)

### Pourquoi l'approche VC renvoie-t-elle des SCR<sub>s</sub> surestimés par rapport à la copule de Gumbel ?

Pour répondre à cette question, il convient de se référer à la structure de dépendance disponible en annexe A.9. La copule de survie de Gumbel instaure une dépendance accentuée sur la queue de distribution supérieure. Ainsi, le coefficient de corrélation de Pearson représentant une sorte de moyenne de la dépendance estimée sur l'ensemble de l'échantillon analysé ne va pas prendre en compte le fait que cette dépendance soit plus accentuée sur la queue de distribution supérieure. Ainsi, dans le cas où l'approche simulatoire est considérée, les scénarios d'action et d'immobilier reliés par la copule de Gumbel vont être associés de manière à ce que la dépendance entre ces deux variables soit accentuée sur les queues de distribution supérieures de ces deux variables. Ainsi, les scénarios plus défavorables seront moins corrélés que ce qui est prévu par le coefficient de corrélation de Pearson et les scénarios économiques engendrés par cette copule seront moins pessimistes que si une copule gaussienne de coefficient de corrélation de Pearson identique avait été considérée. Par conséquent, l'échantillon de perte issu des scénarios économiques avec la copule de Gumbel contient moins de pertes importantes et les quantiles en queue de distribution supérieure de la distribution associée seront moins importants.

### La copule de Clayton

Comme précédemment, une convergence du SCR en fonction du paramètre considéré est observée. De la même manière, la corrélation obtenue converge et les trajectoires de SCR VC en fonction du paramètre s'apparente à la trajectoire suivie par la corrélation. Ce paramètre explique les SCR<sub>s</sub> obtenus pour l'approche VC. Dans le cadre de l'approche simulatoire, le SCR semble converger à



partir du paramètre 2. Cette convergence peut s'expliquer par des valeurs de rho de Spearman qui semblent également converger à partir du paramètre 2 (cette convergence est moins évidente du fait de la différence d'échelle observée sur les deux graphes), sur la figure A.22. Au niveau du paramètre 10, qui instaure une corrélation de Pearson sur les facteurs de 93%, les résultats des deux méthodes diffèrent. Cela est dû au fait que la structure de dépendance mise en place par une copule de Clayton de paramètre 10 n'est pas comparable à la structure gaussienne. En effet, en se référant à la figure A.27, une dépendance positive accentuée sur les petites valeurs de l'échantillon est constatée. Ces deux approches semblent donc ne pas converger vers le même point, mais cette supposition devrait être nuancée : en augmentant le paramètre au delà de 10 les méthodes finiront probablement par converger.

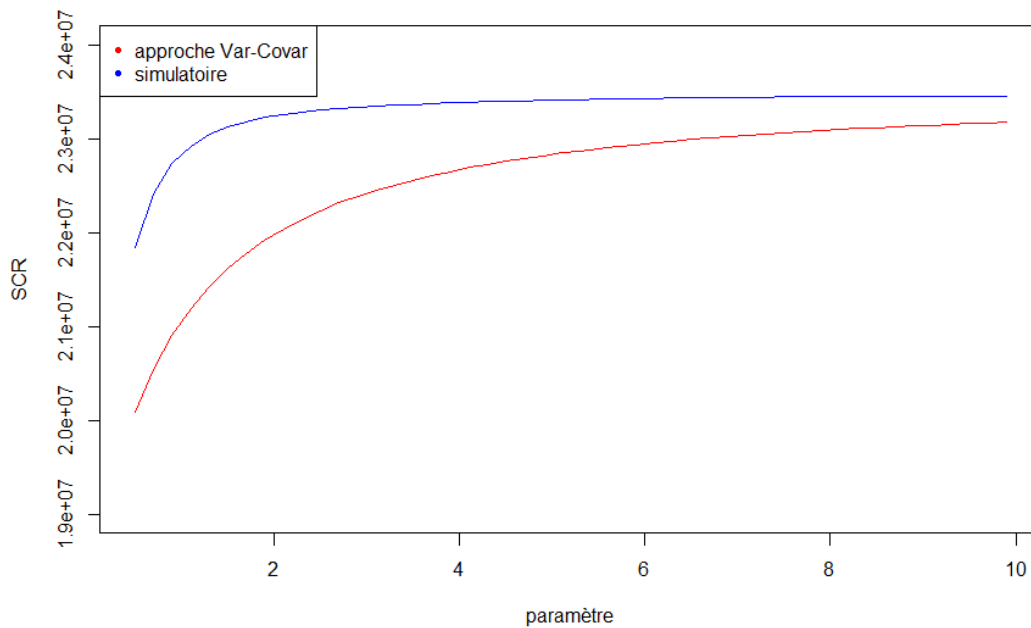


FIGURE 4.22 : Comparaison de l'approche VC et simulatoire pour la copule de Clayton (€)

#### Pourquoi l'approche VC renvoie-t-elle des SCR sous-estimés par rapport à la copule de Clayton ?

Le raisonnement inverse peut être adopté pour le cas de la copule de Clayton, qui instaure une dépendance accentuée sur la queue de distribution inférieure. Dans le cas où l'approche simulatoire est considérée, les scénarios d'action et d'immobilier reliés par la copule de Clayton vont être associés de manière à ce que la dépendance positive entre ces deux variables soit accentuée sur pour des faibles valeurs de ces risques. Ainsi, les scénarios plus défavorables seront plus corrélés que ce qui est prévu par le coefficient de corrélation de Pearson et les scénarios économiques engendrés par cette copule seront plus pessimistes que si une copule gaussienne de coefficient de corrélation de Pearson identique avait été considérée. Par conséquent, l'échantillon de perte issu des scénarios économiques avec la copule de Clayton contient plus de pertes importantes et les quantiles en queue de distribution supérieure de la distribution associée seront supérieurs à ce qui est déterminé en approche VC.

#### La copule de Frank

Comme le montre la figure A.24, la copule de Frank peut mettre en place des structures de dépendance négatives lorsque le paramètre associé est négatif. De ce fait, des valeurs de SCR plus

faibles que pour les copules présentées précédemment sont observées, celles-ci ne permettant pas de prise en compte de dépendance négative. Pour un paramètre proche de 0, la copule de Frank se rapproche de la copule indépendante, correspondant également à la copule gaussienne de coefficient de corrélation 0. De ce fait, les deux courbes se croisent pour un paramètre proche de 0. Pour les paramètres inférieurs à 0, l'approche VC sous-estime le SCR et pour des paramètres supérieurs à 0, l'inverse est observé.

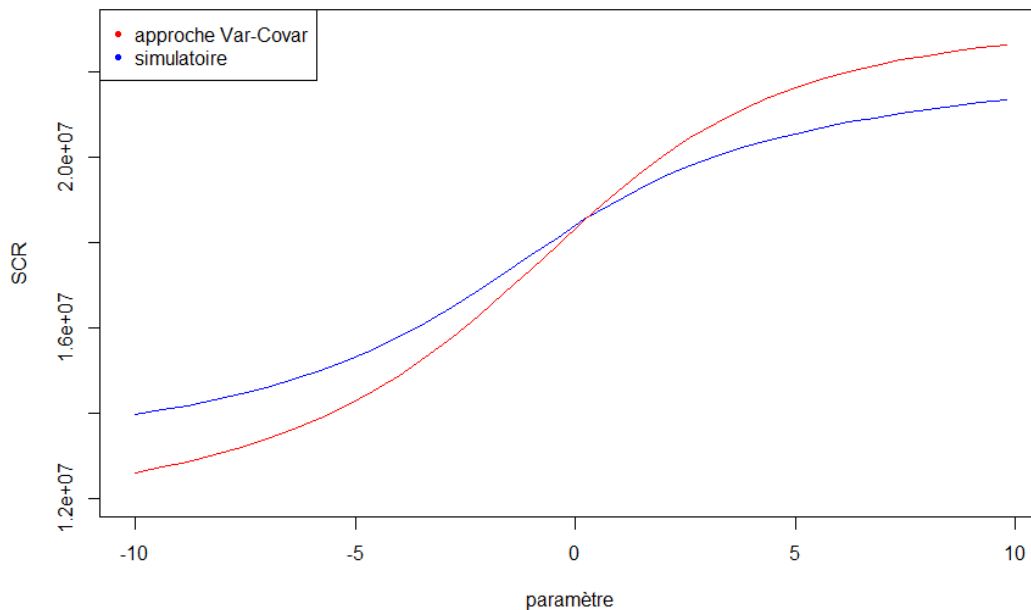


FIGURE 4.23 : Comparaison de l'approche VC et simulatoire pour la copule de Frank (€)

Encore une fois il convient de noter que la trajectoire du SCR en approche VC suit la trajectoire de la corrélation. La figure 4.23 sous-entend que la dépendance observée sur un échantillon de la copule de Frank n'est pas concentrée sur les queues de distribution. En effet, cette copule dispose de dépendances de queues nulles. Ainsi, pour un paramètre négatif, les actions et l'immobilier qui sont reliés par une copule de Frank vont être associés de manière à ce que la dépendance entre ces deux variables soit accentuée en dehors des queues de distribution. Ainsi, une corrélation moins négative que celle obtenue sur l'ensemble de l'échantillon sera observée en ne considérant uniquement les scénarios extrêmes. Les scénarios économiques obtenus avec une copule de Frank seront donc plus pessimistes que si une copule gaussienne engendrant un coefficient de corrélation de Pearson identique avait été considérée. L'inverse est observé en considérant une dépendance positive, engendrant un SCR moins important que celui déterminé par approche VC. Les scénarios extrêmes des distributions des deux facteurs de risques considérés sont moins corrélés que lorsque tous les scénarios de l'échantillon engendré par la copule de Frank sont considérés. Des valeurs de perte moins importantes sont alors obtenues générant des quantiles sur la distribution supérieure moins importants.

# Conclusion

En décembre 2023, l'ACPR a introduit une nouvelle notice fixant les exigences pour la mise en place d'un modèle interne et le calcul du SCR via une approche simulateur. Cette notice souligne notamment l'importance d'être en mesure de déterminer les différents quantiles de la distribution de probabilité à tous les niveaux d'agrégation, ainsi que de comprendre le comportement joint des facteurs de risques modélisés. L'approche simulateur offre une vision plus détaillée du profil de risque d'une compagnie et permet davantage de flexibilité dans la modélisation, notamment en prenant en compte les spécificités du profil de risque de chaque assureur. Ce mémoire se concentre sur la mise en place d'une approche simulateur répondant à ces critères, avec pour objectif d'évaluer l'influence des différentes hypothèses sur les valeurs de SCR à plusieurs niveaux d'agrégation. Un point d'attention sur les risques actions et immobiliers est effectué, ces risques étant retenus pour être considérés en approche simulateur. Les autres facteurs de risques sont traités en formule standard. Afin de mener à bien notre étude, un assureur représentatif du marché a été créé, dont l'activité se limite aux contrats d'épargne en assurance-vie.

Pour modéliser l'évolution des facteurs de risques dans le temps, des simulations en monde réel et en risque neutre ont été utilisées, permettant de projeter les risques jusqu'à l'extinction des engagements de l'assureur. Les mécanismes ALM ont été détaillés et une approche simplifiée de simulations imbriquées a été proposée puis intégrée à l'outil ALM à disposition. En raison de la complexité de cette méthode, l'approche *Curve Fitting* a été retenue pour établir des proxys associant aux facteurs de risques simulés des valeurs de fonds propres économiques. La structure de dépendance entre les deux risques a été modélisée à l'aide des copules, offrant une représentation plus précise des dépendances que le simple paramètre de corrélation de Pearson utilisé dans la formule standard, supposant une structure de dépendance elliptique. Dans un premier temps, les SCR obtenus via le modèle interne partiel ont été analysés, soulignant des écarts significatifs avec ceux obtenus par la formule standard. Ces écarts dépendent fortement des hypothèses retenues et des données utilisées pour représenter les actions et l'immobilier. En effet, selon les données immobilières utilisées, une différence de 32% a été observée dans le ratio de couverture de la compagnie, influençant la vision de la santé financière de la compagnie d'assurance. De plus, le postulat initial fait sur la définition de la perte de la compagnie, *forward* ou au actuel, a un effet marqué sur le SCR requis. Dans notre cas, la vision actuelle est plus favorable pour la compagnie.

Par la suite, l'influence de la modification des paramètres de diffusion dans le GSE RW sur les distributions de perte a été étudiée. En pratique, les compagnies d'assurance peuvent utiliser des historiques glissants pour calibrer les paramètres des GSE et retenir le scénario le plus défavorable afin d'être prudentes. L'étude a montré que l'assureur pouvait subir des pertes importantes et que les paramètres RW pouvaient avoir un effet conséquent sur le ratio de solvabilité si les paramètres les plus défavorables étaient retenus. Il serait pertinent d'explorer des stratégies permettant de limiter ces pertes dans de tels cas. De plus, en appliquant une approche VaR-CovaR pour agréger les SCR obtenus, l'évaluation des sensibilités aux paramètres utilisées dans le GSE RW n'appréhendent pas correctement le risque modélisé. La modification de la structure de dépendance a également été ana-

lysée. Dans cette étude, avec la prise en compte des risques actions et immobiliers, ce sont les faibles valeurs de ces facteurs qui ont le plus d'influence sur la perte subie par la compagnie. Il a alors été observé que les copules mettant en place des dépendances marquées entre les queues inférieures des distributions marginales engendraient les SCR les plus élevés.

En regardant plus précisément l'incidence de l'hypothèse d'ellipticité de la structure de dépendance entre les facteurs de risques dans le cadre d'une approche VaR-CovaR utilisée notamment dans la formule standard, il est observable que cette dernière engendre un écart entre le SCR prédit par approche simulatoire et celui prédit en utilisant ce type d'agrégation. L'écart observé entre les hypothèses prises par approche VaR-CovaR en termes de structure de dépendance et la véritable structure de dépendance observée sur les facteurs de risques peut donc avoir une influence non négligeable sur le capital retenu.

Les résultats obtenus dans ce mémoire doivent être interprétés avec prudence. De nombreuses simplifications ont été faites par souci de temps, limitant ainsi l'analyse. La première limite réside dans le fait que les GSE risque neutre utilisés pour les simulations secondaires ne tiennent pas compte du réalisé de la première période. L'hypothèse de volatilité implicite constante et déterministe dans les dynamiques utilisées pour diffuser les risques actions constitue également une limite de cette étude. Une modélisation avec une volatilité stochastique serait préférable pour mieux capturer leur évolution. De plus, le GSE utilisé pour la diffusion secondaire a été calibré au 30/06/2024, et ne reflète donc pas l'environnement économique probable au 31/12/2024. Une autre simplification peut être relevée au niveau de la modélisation des deux facteurs. Seulement une diffusion économique par facteur est retenue, ne permettant pas de constater de diversification pour chaque facteur de risque et engendrant la prise en compte d'une structure de dépendance trop marquée. Enfin, la modélisation par Curve Fitting utilisée pour estimer la perte induite par l'interaction entre les deux risques a été basée sur une interpolation bilinéaire, entraînant une estimation peu précise qui pourrait être améliorée.

Pour aller plus loin, il serait intéressant d'étendre l'étude en intégrant davantage de facteurs de risques, dont la modélisation ou la structure de dépendance serait plus complexe, afin d'observer comment ces dynamiques affectent la perte. Une analyse approfondie des contributions des facteurs de risques au quantile de la distribution des pertes, comme le précise la notice de l'ACPR de 2023, ainsi qu'une étude des différentes méthodes d'allocation de capital, mériteraient également d'être envisagée. La plus-value obtenue en considérant une mesure de risque TVaR au lieu de la VaR habituelle constitue un axe qu'il serait également pertinent d'analyser.

# Bibliographie

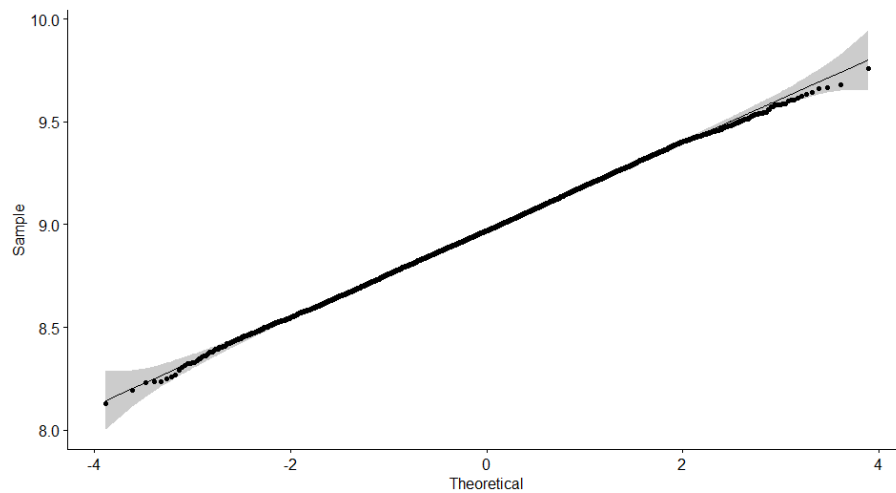
- ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. URL : [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013\\_0.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20130527-onc-2013_0.pdf).
- ACPR (2015). NOTICE « Solvabilité II » - Évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA). URL : [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2020/08/07/2.\\_notice-solvabilite2-orsa.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2020/08/07/2._notice-solvabilite2-orsa.pdf).
- ACPR (2023a). La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France au premier semestre 2023.
- ACPR (2023b). Modalités relatives à l'utilisation d'un modèle interne pour les organismes et groupes d'assurance soumis à la Directive Solvabilité 2. URL : [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2023/12/01/20231201\\_notice\\_mi\\_s2.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2023/12/01/20231201_notice_mi_s2.pdf).
- ACPR (2024). Revue de la directive Solvabilité 2 : vers un régime proportionné. URL : <https://acpr.banque-france.fr/revue-de-la-directive-solvabilite-2-vers-un-regime-proportionne>.
- AXA (2023). rapport SFCR. URL. URL : [https://www.axa.fr/content/dam/axa-fr-convergence/transverse/informations\\_financieres/AXA-France-Vie-Rapport-annuel-2023-sur-la-solvabilite-et-la-situation-financiere.pdf](https://www.axa.fr/content/dam/axa-fr-convergence/transverse/informations_financieres/AXA-France-Vie-Rapport-annuel-2023-sur-la-solvabilite-et-la-situation-financiere.pdf).
- BERNARD, R. (2013). Rentabilité d'un contrat épargne en euros sous Solvabilité II. Mémoire d'actuariat. Lyon.
- BOUTAYBI, A. D. (2014). Techniques d'agrégation des risques. Mémoire d'actuariat. Brest : EURIA.
- CEIOPS (2008). CEIOPS' Report on its fourth Quantitative Impact Study (QIS4) for Solvency II. URL : [https://www.finanstilsynet.dk/upload/finanstilsynet/mediafiles/newmedia/solvens/solvens%20ii/ceiops.82\\_08.qis4report.pdf](https://www.finanstilsynet.dk/upload/finanstilsynet/mediafiles/newmedia/solvens/solvens%20ii/ceiops.82_08.qis4report.pdf).
- CEIOPS (2010). Solvency II Calibration Paper. URL : <https://register.eiopa.europa.eu/CEIOPS-Archive/Documents/Advices/CEIOPS-Calibration-paper-Solvency-II.pdf>.
- CHARPENTIER, A. (oct. 2013). Copules et risques multiples.
- CHEIKH IBRAHIMA, S. (2013). Adéquation au profil de risque et besoin Global de Solvabilité. Mémoire d'actuariat. Lyon.
- COMMISSION EUROPÉENNE (2014). RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35 DE LA COMMISSION du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 12/I.
- COUSIN, C. (2012). Modèles internes en Assurance-Vie: état de l'Art et axes d'amélioration. Mémoire d'actuariat. Paris.
- DEMENGEL, G. et POUGET, J.-P. (1998). Modèles de Bézier, des B-splines et des Nurbs : mathématiques des courbes et des surfaces outils pour l'ingénieur, bases pour la CAO. Paris : Ellipses.
- DERENDINGER, F. (juin 2015). Copula Based Hierarchical Risk Aggregation - Tree Dependent Sampling and the Space of Mild Tree Dependence. *SSRN Electronic Journal*.
- DEVINEAU, L. et LOISEL, S. (juin 2009a). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des «simulations dans les simulations» pour le calcul du capital économique Solvabilité II.
- DEVINEAU, L. et LOISEL, S. (déc. 2009b). Risk aggregation in Solvency II: How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula? *HAL, Post-Print* 9.

- EIOPA (1<sup>er</sup> sept. 2022). Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. OJ L. 335/I.
- EIOPA (2024). Study on Diversification in Internal Models. OJ L. 335/I. URL : <https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2024-01/EIOPA%27s%20Comparative%20Study%20on%20diversification%20in%20internal%20models.pdf>.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F. et MCNEIL, E. (oct. 2001). Modelling Dependence With Copulas and Applications to Risk Management. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* 8.
- FILIPOVIĆ, D. (2009). Multi-Level Risk Aggregation. *ASTIN Bulletin* 39.2, p. 565-575.
- FRAERIS (2018). SCR DE MARCHE ET OBLIGATIONS CONVERTIBLES. URL.
- FRANCE ASSUREURS (juill. 2024). L'Assurance Française - Données clés 2023. URL. URL : <https://www.franceassureurs.fr/wp-content/uploads/donnees-cles-2023.pdf>.
- F.ROUCHATI (2016). Projection du ratio de solvabilité d'un assureur retraite : les méthodes paramétriques (Curve Fitting et Least Squares Monte Carlo) peuvent-elles se substituer à la méthode des Simulations dans les Simulations? Mémoire d'actuariat. Brest.
- GILLOT, G. (2019). Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche par Markov Switching. Mémoire d'actuariat. Lyon.
- HAGUET, E. (2012). Calibrage d'un modèle de taux gaussien. Mémoire d'actuariat. Paris.
- K.KOUADIO (2018). Méthodes Prospectives de Calcul de SCRs et Applications. Mémoire d'actuariat. Paris.
- KOUSARIS, A. (2011). The Advantages of Least Squares Monte Carlo. Rapp. tech. Barrie-Hibbert.
- KRAPF, A. (2012). Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie. Mémoire d'actuariat. Paris.
- MECHERGUI, M. A. (2018). Evaluation du capital économique sous Solvabilité 2: Mise en place de l'approche Curve Fitting. Mémoire d'actuariat. Paris : Université Paris Dauphine.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2014). Directive 2014/51/UE du 16 avril 2014 modifiant les directives 2003/71/CE et 2009/138/CE et les règlements (CE) no 1060/2009, (UE) no 1094/2010 et (UE) no 1095/2010 en ce qui concerne les compétences de l'Autorité européenne de surveillance (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles) et de l'Autorité européenne de surveillance (Autorité européenne des marchés financiers). OJ L. 153/1.
- R CORE TEAM (2023). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL : <https://www.R-project.org/>.
- RAKOTOMALALA, R. (2012). Analyse de corrélation. Rapp. tech. Lyon : Université Lumière Lyon 2.
- S.DECUPERE (2011). Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II. Mémoire d'actuariat. Malakoff : ENSAE ParisTech.
- SUSLU, R. (2012). Générateurs de Scénarios Economiques en Assurance: Impact de la modélisation adoptée sur les calculs de solvabilité. Mémoire d'actuariat. Lyon.
- WILHELMY, F. (2012). Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif. Mémoire d'actuariat. Lyon.
- ZOUINE, A. (2023). Pilotage stratégique d'une compagnie d'assurance-vie dans le contexte de la Directive Solvabilité II. Mémoire d'actuariat. Paris : Paris Dauphine.

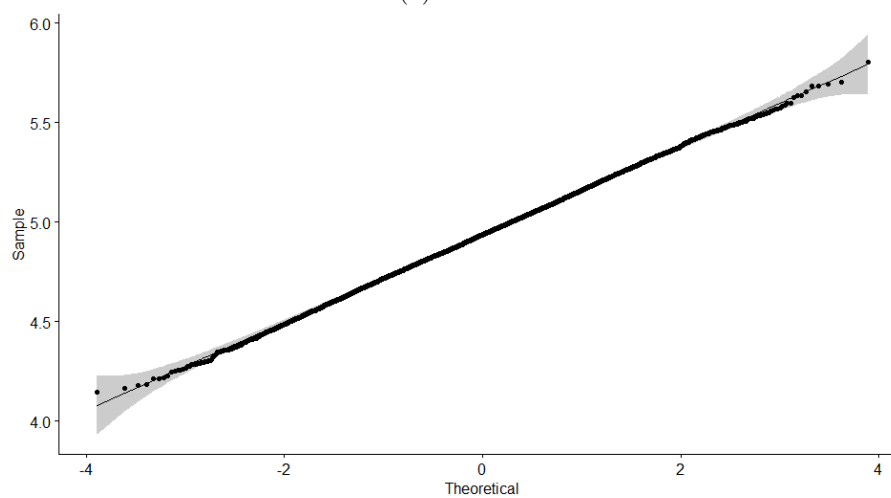
# Annexe A

## Annexes

### A.1 Tests de validation effectués pour le GSE RW



(a) action



(b) immobilier

FIGURE A.1 : diagrammes quantile-quantile obtenus au titre des deux facteurs de risques

## A.2 SCR déterminé par formule standard

Risque	SCR (m €)
SCR Global	33,73
BSCR	35,16
SCR Marché	26,56
Action	20,75
Immobilier	6,98

TABLE A.1 : SCRs obtenus en FS avec notre assureur



## A.3 Pistes étudiées pour différencier les calibrages RN

Cette section retrace les développements effectués pour différencier les trajectoires de seconde période en fonction du réalisé de première période et les raisons pour lesquels ces derniers n'ont pas aboutis.

### A.3.1 Choix des nouvelles volatilités pour chaque scénario

Afin de prendre en compte le réalisé de première période pour les différents scénarios considérés, la volatilité doit être adaptée en prenant en compte la volatilité observée sur la première année avec les différents scénarios. Plusieurs approches peuvent être prises pour effectuer ce choix :

1. Il peut sembler cohérent de remarquer que pour une volatilité importante observée sur la première année pour une valeur  $x_1$  de la distribution du facteur de risque  $X_1$ , celle-ci tend à diminuer sur les années qui suivent et inversement. Ainsi, il est souhaitable d'affecter des paramètres de volatilités implicites aux facteurs de risques de manière à obtenir une corrélation négative entre la valeur du facteur de risque et la volatilité implicite utilisée pour la projection RN secondaire de ce scénario. Cette approche tend alors à limiter la valeur des SCRs obtenus.
2. Associer aux facteurs de risques action les volatilités implicites *forward* à la monnaie obtenue tel que le strike corresponde au scénario considéré. Alors la volatilité implémentée correspondrait à celle prévue par le marché pour le temps 1 si la réalisation du scénario action considéré était retenue. Ces données correspondent à la surface de volatilité, disponible sur Bloomberg. En adoptant cette approche, les SCRs vont tendre à augmenter. En effet, plus la valeur de l'indice action est faible, plus la volatilité implicite forward est importante. Cela est dû au fait que cette dernière est croissante du *payoff*.

Une fois que les volatilités implicites sont affectées aux différentes valeurs d'action et d'immobilier, l'outil ALM fera alors appel à des trajectoires de GSE prenant en compte les volatilités associées aux scénarios considérés.

### A.3.2 Manipulation effectuée sur les tables

La manipulation des tables de GSE est effectuée uniquement dans l'objectif de modifier la volatilité de la dynamique utilisée dans les fichiers générés par le GSE RN, afin de prendre en compte le réalisé de première période pour les facteurs de risques action et immobilier. Il convient de rappeler que les dynamiques utilisées en RN sont des modèles de *Black&Scholes*, c'est-à-dire que pour le facteur de risque  $X$ ,

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

avec  $\mu$  et  $\sigma$  les paramètres et  $W_t$  un mouvement brownien. Sous la probabilité RN,  $\mu$  correspond au taux court de sorte à ce qu'il y ait égalité entre le rendement espéré des actifs et le taux sans risque.

En concentrant notre analyse sur le risque action (la diffusion de l'immobilier étant identique), il y a lieu de rappeler que

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W_1 \right). \quad (\text{A.1})$$

Afin de modifier la volatilité  $\sigma$  et de considérer une volatilité  $\sigma^*$ , il a été envisagé l'introduction de deux paramètres, avec la modification suivante :

$$\exp(\kappa) \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right)^\alpha. \quad (\text{A.2})$$

Le paramètre  $\alpha$  sert alors à modifier la volatilité et le paramètre  $\kappa$  correspond à un facteur correctif permettant de conserver la même valeur pour le paramètre  $\mu$  dans la dynamique considérée précédemment. Les paramètres  $\alpha$  et  $\kappa$  doivent être déterminés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^*}{\sigma} \\ \kappa = \mu - \frac{(\sigma^*)^2}{2} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\sigma^*}{\sigma} \end{cases}$$

Les nouveaux rendements obtenus sont les suivants :

$$\frac{S_t^*}{S_{t-1}^*} = \exp \left( \left( \mu - \frac{(\sigma^*)^2}{2} \right) + \sigma^* (W_t - W_{t-1}) \right) \quad (\text{A.3})$$

Il est nécessaire de vérifier que le processus de prix actualisé  $\tilde{S}_t^*$  soit bien martingale. Tout d'abord, il sied de constater que

$$S_t^* = \frac{S_t^*}{S_{t-1}^*} \times \frac{S_{t-1}^*}{S_{t-2}^*} \times \dots \times \frac{S_1^*}{S_0} \times S_0 \quad (\text{A.4})$$

$$= \exp \left( \left( \mu - \frac{(\sigma^*)^2}{2} \right) t + \sigma^* W_t \right) S_0 \quad (\text{A.5})$$

avec  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , le brownien utilisé pour projeté les actions  $S_t$ .

L'objectif est de s'assurer que  $\mathbb{E}[\tilde{S}_t^* | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s^*$ . En partant de la formule A.5 trouvée, cette égalité peut être démontrée de la même manière que ce qui est effectué pour démontrer la martingalité pour un processus actualisé suivant la dynamique de *Black&Scholes*.

En appliquant ces modifications aux tables de GSE, des tests de martingalité ont été effectués pour se convaincre que la modification apportée ne vient pas perturber le caractère martingale de la table initialement sortie du GSE. Ces tests ont été validés.

Les modifications effectuées sur les tables peuvent désormais être concrètement observées en les appliquant. Pour ce faire, le fichier des rendements des actions obtenu par le GSE au 30/06/2024 — utilisé pour les trajectoires des facteurs de risques à un an en RN — est analysé. Des volatilités 30% et 6% sont choisies arbitrairement pour observer les modifications obtenues sur les trajectoires et les distributions des rendements lorsque la nouvelle volatilité retenue est plus importante ou plus faible que la volatilité initiale calibrée dans le GSE RN (cette volatilité est de 16%).

En observant la figure A.2, il y a lieu de remarquer que plus la volatilité est faible, plus les valeurs sont concentrées sur un petit intervalle et la variance est faible. Ceci est en accord avec ce qui a voulu être implémenté et ne semble pas incohérent : un paramètre de volatilité faible dans la dynamique de *Black&Scholes* entraîne un échantillon d'observation d'actifs et en particulier de rendements sur un intervalle plus petit.

Les mêmes observations peuvent être faites en se concentrant sur les trajectoires observées dans les fichiers modifiés. En effet, en comparant ces trajectoires comme présenté dans la figure A.3, les mêmes pics sont représentés sur chaque trajectoire mais leur intensité dépend de la volatilité choisie.

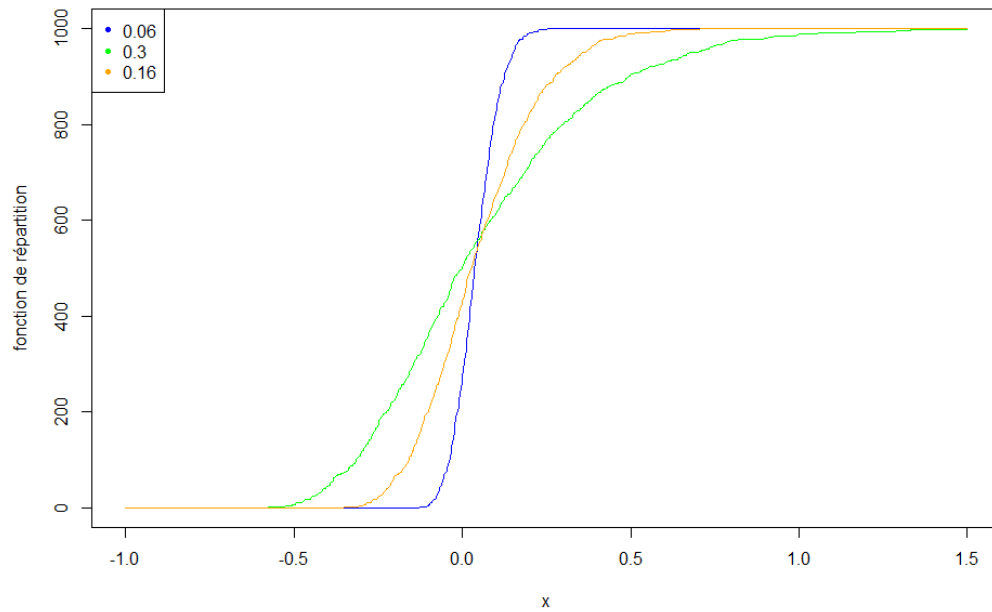


FIGURE A.2 : Fonctions de répartitions obtenues en fonction des volatilités pour l'échantillon au temps 1

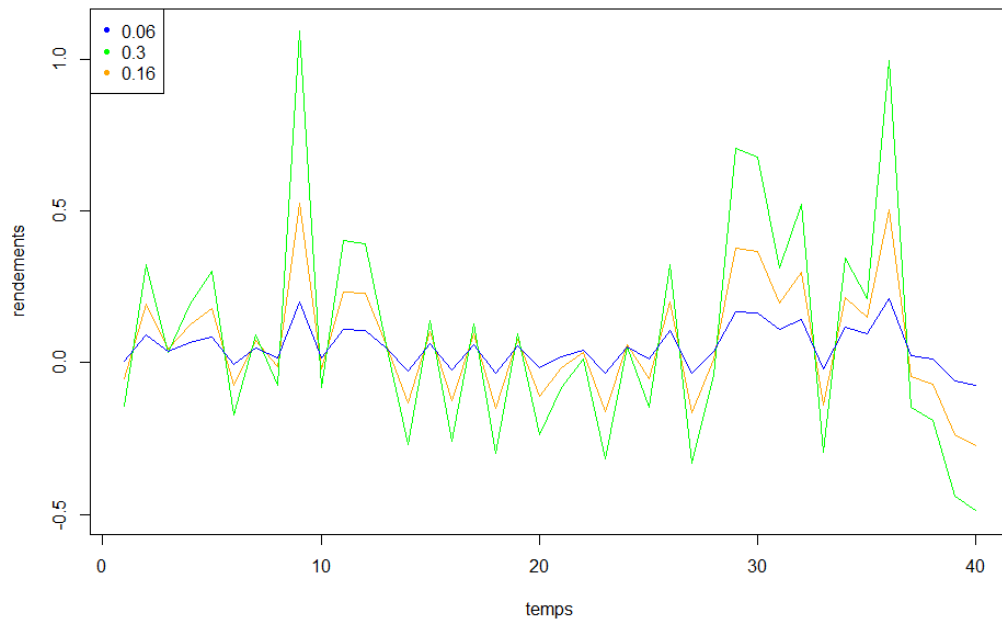


FIGURE A.3 : Premières trajectoires obtenues en fonction des volatilités

### A.3.3 Une approche non retenue dans la modélisation

Au final, la différenciation des tables n'est pas retenue dans le modèle présenté dans cette étude. Une méthode SdS simplifiée sera appliquée, où le GSE RN au temps 1 ne sera pas différencié en fonction du scénario de première période considéré.

En effet, après avoir essayé plusieurs méthode d'affectation de volatilité implicites qui n'étaient pas satisfaisantes, il a été décidé d'abandonner cette tentative de différenciation.

Les essais qui n'ont pas aboutis sont les suivants :

- le choix des volatilités implicites *forward* ne s'applique pas à ce modèle à volatilité constante (en RW et RN) : en effet, en prenant ces volatilités au temps 1, l'hypothèse non vérifiée d'un indice action très en dehors de la monnaie est faite dans le cas de scénarios action très défavorables. La volatilité est alors très importante et la mise en place de ce type d'approche va engendrer des volatilités extrêmement importantes et non réalistes. C'est le phénomène de *skew*.
- application d'une régression (linéaire et polynomiale) sur l'historique des volatilités spot observées aux différents temps. Les résultats obtenus ne semblent pas réalistes. Tout d'abord, les données ne sont pas suffisantes pour permettre l'obtention d'un modèle robuste, et les mesures statistiques obtenues telles que le  $R^2$  ne sont pas satisfaisants (proche de 0).
- simulation d'un échantillon de volatilités implicites de même taille que l'échantillon du facteur de risque à partir d'une loi (les lois normale et log-normale ont été envisagées) puis corrélérer très négativement les deux échantillons à partir d'une structure de dépendance gaussienne, afin d'appliquer la suggestion 1. faite dans l'énumération A.3.1 . Ce choix semble trop arbitraire et ne semble pas refléter correctement ce qui devrait se produire en pratique.

Comme mentionné précédemment, une manière de différencier les GSE RN de seconde période est de diffuser la volatilité implicite au temps 1 en RW. En ne diffusant pas le facteur volatilité implicite au temps 1, le choix fait sur la volatilité implicite est trop arbitraire pour ajouter une véritable plus-value au mémoire. Plusieurs choix auraient pu être faits, menant à des résultats distincts et des conséquences sur les SCRs opposés.

## A.4 Benchmarks concernant les SCRs des Assureurs-Vie

Afin de comprendre les variations de ratios de couverture importantes constatées dans ce mémoire, un *benchmark* a été effectué à partir d'assureurs vie représentatifs du marché français afin d'analyser quelle importance le risques action et immobilier constituaient au sein des portefeuilles de ces compagnies. Pour ce faire, les valeurs des SCRs de marché et net globaux des grands assureurs français ont été récupérés dans les cahiers SFCR disponible en *open source*. N'ayant pas accès aux SCRs élémentaires action, immobilier ainsi que le SCR agrégé au titre de ces deux risques, ces derniers ont été estimés à partir de la ventilation des sous-risques au sein du module marché — avant diversification — détaillée dans l'étude FRAERIS (2018), et en supposant par simplification que le SCR agrégé était obtenu par la formule standard :  $SCR_{Act,Immo} = \sqrt{SCR_{Act}^2 + 2 \times 75\% \times SCR_{Act}SCR_{Immo} + SCR_{Immo}^2}$ . Cette étude de marché est résumée dans le tableau A.2. Ce dernier prévoit également une ligne pour présenter les pourcentages obtenus sur l'assureur considéré.

	$\frac{SCR_{Act,Immo}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Act}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Immo}}{SCR_{global}}$
Moyenne <i>benchmark</i>	36,26%	29,30%	8,53%
Assureur de l'étude	76%	50%	21%

TABLE A.2 : Résultats issus de l'étude de marché sur la part des SCR action et immobilier dans le SCR global

Afin de se convaincre du fait qu'en retenant des paramétrages de l'assureur permettant de nous rapprocher des observations du marché, il a été entrepris de regarder les résultats obtenus en modifiant manuellement les valeurs de SCRs contenues dans la pieuvre en annexe A.2. L'objectif était d'obtenir des ratios pour l'assureur égaux à la moyenne du benchmark effectué ci-dessus.

En retenant un SCR Taux de 31 800 000 €, et un SCR Vie de 32 560 000 €, les ratios représentés dans le tableau A.3 sont obtenus.

	$\frac{SCR_{Marche}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Act,Immo}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Act}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Immo}}{SCR_{global}}$	$\frac{SCR_{Act}}{SCR_{Marche}}$
Moyenne <i>benchmark</i>	71,13%	36,26%	29,30%	8,53%	41,19%
Nouveaux ratios	71,13%	42,75%	29,34%	10,67 %	41,25%

TABLE A.3 : Nouveaux ratios obtenus avec les modifications apportées à la pieuvre de la formule standard

Afin de garder le même ratio de couverture initial (avant mise en place des sensis), déterminé en section 3.2.2, la NAV au temps zéro est fixée à 88 375 867 €.

Comme constaté dans le tableau A.4, alors les écarts obtenus au titre des différentes études réalisées sont diminuées.

	borne inférieure	borne supérieure	écart initial	nouvel écart
corrélation	50%	75%	6%	2%
volatilité	14%	25%	44%	13%
moyenne	-2,7%	15%	25%	8%
structure de dépendance	Frank	Clayton	15%	5%

TABLE A.4 : Écarts constatés entre les ratios de couverture selon les différents paramètres étudiés

## A.5 Modification des calibrages *Curve-Fitting*

Comme constaté dans la section 3.1.3, les scénarios de calibration *pairwise* utilisés peuvent être critiqués. Seul le cas des calibrages *pairwise* sera considéré dans cette partie. En effet, les scénarios de validation effectués dans le cas *standalone* étant très satisfaisants, la prise en compte d'autres scénarios ne devrait pas modifier les *proxys standalone* obtenus.

Dans le chapitre 3, le tableau 3.4 reflète le fait que l'outil ALM associe des excédents de perte strictement positifs pour des 2-scénarios défavorables pour l'action et l'immobilier. Les scénarios défavorables correspondent ici aux 2-scénarios pour lesquels l'action et l'immobilier prennent chacun des valeurs inférieures à leur scénario central.

Plus le scénario est défavorable, et plus l'excédent de perte est important. Or, en considérant un jeu de données pour lequel le scénario le plus défavorable correspond à  $(q_{0,5\%}(Act), q_{0,5\%}(Immo))$ , tous les scénarios comportant des valeurs d'action ou d'immobilier plus défavorables se voient affecter une valeur au plus égal à cet excédent de perte. Cela tend à sous-estimer l'excédent de perte associé aux 2-scénarios économiques obtenus après affectation de la copule, et par conséquent sous-estimer la valeur de la perte agrégée puis le SCR.

En effet, pour des valeurs d'action inférieures au quantile à 0,5% de la distribution d'actions, notre interpolation bilinéaire retient l'impact de la valeur de l'action du quantile à 0,5% sur la NAV, sous-estimant l'impact de ce quantile. Le même mécanisme est observé sur le risque immobilier. Ainsi, le fait de ne pas considérer de quantiles de calibration au delà du quantile à 0,5% dans la queue de distribution inférieure des facteurs de risques peut avoir un impact sur les valeurs de perte dues aux interactions affectées aux différents scénarios et modifier la distribution finale de perte obtenue.

La figure A.4 recense en rouge les 172 scénarios pour lesquels l'impact de l'interaction peut être mal appréhendé.

Pour contrer cet effet, de nouveaux calibrages *pairwise* renseignés dans le tableau A.5 sont considérées.

Les résultats obtenus pour les deux matrices peuvent désormais être comparés.

Le résultat observé est légèrement plus prudent mais l'impact est au final assez faible avec un écart relatif observé de 0,5%. Pour comprendre cet effet, il convient de se référer aux excédents de perte observés au titre des deux calibrages.

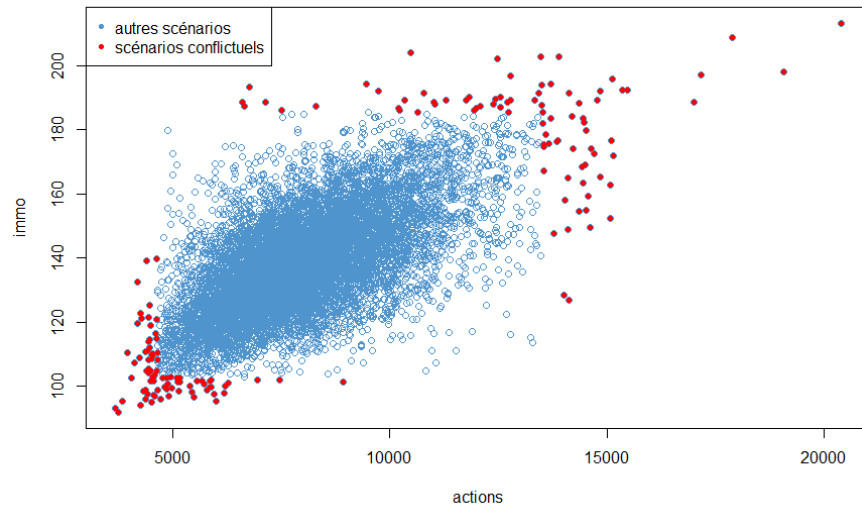


FIGURE A.4 : scénarios économiques obtenus en sortie du GSE RW

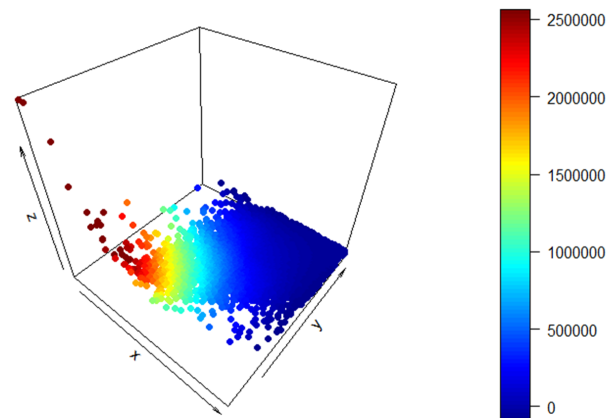


FIGURE A.5 : différences observées entre les pertes au titre des interactions prédites

$q_{imm} \backslash q_{act}$	min.	1/2000	1/200	5/100	1/5	sc. cent	4/5	95/100	199/200	1999/2000	max.
min.	5,50	4,82	3,97	2,59	1,34	0	-0,92	-1,64	-2,62	-3,06	-3,70
1/2000	5,03	4,37	3,60	2,35	1,23	0	-0,83	-1,45	-2,37	-2,73	-3,32
1/200	4,00	3,46	2,82	1,86	0,97	0	-0,66	-1,13	-1,90	-2,16	-2,61
5/100	2,57	2,22	1,78	1,23	0,64	0	-0,40	-0,69	-1,17	-1,343186	-1,64
1/5	1,31	1,13	0,88	0,64	0,30	0	-0,20	-0,34	-0,59	-0,68	-0,841
sc. cent	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4/5	-1,06	-0,92	-0,79	-0,54	-0,31	0	0,09	0,27	0,40	0,46	0,49
95/100	-1,91	-1,65	-1,36	-0,91	-0,47	0	0,13	0,52	0,76	0,84	0,94
199/200	-2,94	-2,50	-2,04	-1,31	-0,61	0	0,37	0,90	1,27	1,43	1,60
1999/2000	-3,68	-3,14	-2,55	-1,63	-0,77	0	0,54	1,18	1,65	1,86	2,08
max.	-4,15	-3,54	-2,90	-1,86	-0,92	0	0,59	1,29	1,82	2,06	2,32

TABLE A.5 : valeurs de la fonction *Inter* en m € obtenues à partir de l'outil ALM, pour les nouveaux scénarios de calibration considérés

	SCR ( <i>Student</i> , m €)
Matrice <i>Inter</i> initiale	23,91
Nouvelle matrice <i>Inter</i>	24,05

TABLE A.6 : SCR obtenus en fonction des différents calibrages *pairwise*

La figure A.5 représente la différence entre la valeur *Inter* associée aux scénarios défavorables en fonction des calibrages retenus. Cette figure met en avant le fait que plus les valeurs d'actions(x) et d'immobilier(y) sont faibles, plus la fonction *Inter* prédite diffère de la fonction *Inter* initiale. Les excédents de perte augmentent pour les scénarios extrêmes (en queue de distribution inférieure) avec la nouvelle calibration, ce qui est cohérent avec l'interprétation faite ci-dessus.

Il convient néanmoins de noter que la matrice de calibration étant plus précise, certaines valeurs de perte associées à des scénarios  $(s_1, i_1)$  pour lesquelles les actions et l'immobilier ne dépassent pas le quantile à 99,5% de leur distribution respectives sont mieux appréhendées et peuvent avoir été surestimées pour la fonction *Inter* déterminée à partir de la première calibration. Ainsi, certains excédents de perte sont plus faibles lorsqu'ils sont déterminés avec la seconde calibration. Au final, la queue de distribution supérieure de la nouvelle distribution de perte agrégée ne va pas tant différer de la distribution de perte obtenue avec un jeu de données plus conséquent. En reprenant la perte correspondant au quantile à 99,5% et en observant le scénario auquel cette perte est associée, il est observé que ce dernier est identique en fonction du calibrage retenu : (4432.19, 113.90). Ainsi, la nouvelle matrice *Inter* ne va pas modifier les scénarios responsable 50 des pertes les plus importantes, ni l'ordre pris par la perte qu'elle génèrent. Au vu de ce constat et de la figure A.5, il peut en être conclut que les 50 pertes les plus importantes se voient attribuer des ajustements légèrement sous-estimés par le calibrage précédent, mais comme précisé, cette sous-estimation est non significative. Finalement, ce constat permet d'observer que les scénarios pour lesquels l'impact sur la perte au titre des interactions prédites est important sont des scénarios très extrêmes qui vont renvoyer des pertes situées en queue de distribution au delà du quantile à 99,5%.

Les scénarios de calibrages représentés par le tableau A.5 seront considérés pour les analyses présentées dans le chapitre 4, cette dernière étant plus précise et permettant d'évaluer les écarts observés de la manière la plus fidèle possible. Néanmoins, cette modélisation n'est pas retenue dans le chapitre 3.

Le ratio de couverture et le SCR global obtenus au titre de cette nouvelle modélisation *pairwise* sont reportés dans le tableau A.7.

Ces scénarios ne sont toujours pas optimaux car ils ne sont pas nécessairement représentatifs des



	SCR agrégé (m €)	SCR global (m €)	ratio de couverture
Nouvelle modélisation	24,05	31,70	158%

TABLE A.7 : SCR global et ratio de couverture pour la nouvelle modélisation

trajectoires économiques obtenues à un an. Néanmoins, elles sont plus prudentes que les premiers scénarios de calibration considérés.

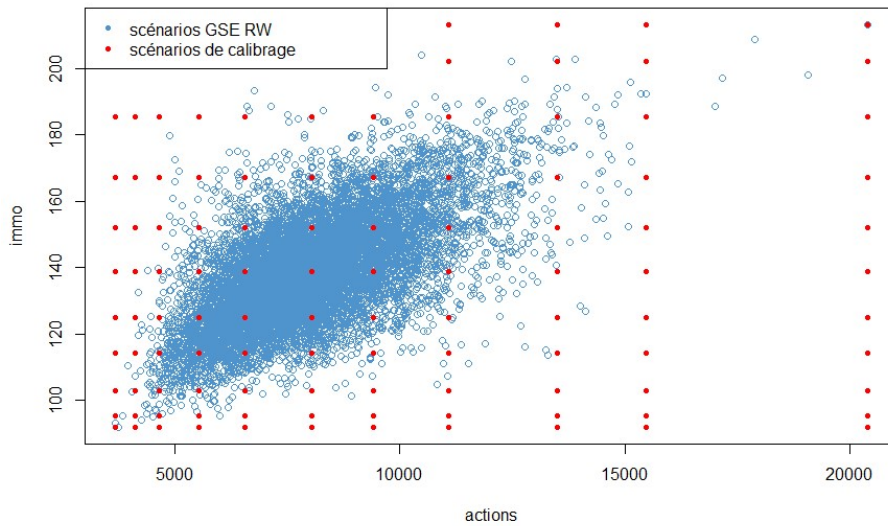


FIGURE A.6 : scénarios de calibrages représentés avec les trajectoires économiques obtenues

Les scénarios de calibrages choisis ne correspondent pas aux 2-scénarios observés dans l'économie et peuvent correspondre à des scénarios totalement improbables. Déterminer la valeur de la NAV à un an au titre de ces scénarios peut alors constituer un coût inutile. En effet, en observant la figure A.6, il est remarquable que le calibrage donne le même poids à des scénarios plutôt plausibles et des poids à des scénarios qui se produisent jamais. Les scénarios pertinents dans le cadre de la détermination des risques encourus par la compagnie d'assurance et de son impact sur la NAV à un an de cette dernière sont ceux qui vont avoir un effet sur la queue de distribution supérieure de la perte à un an de la compagnie d'assurance. Il s'agit des scénarios qui vont impacter le SCR : les scénarios défavorables. C'est notamment la raison pour laquelle dans la figure A.5, seuls les scénarios défavorables sont considérés.

Les autres scénarios semblent avoir peu de chance de générer des points situés en queue de distribution supérieure de la perte de la compagnie. Ils sont donc moins intéressants à étudier. En effet, bien que dans le cas de scénarios  $(s_1, i_1)$  où les deux facteurs de risques prennent des valeurs favorables pour la compagnie sont observés, la fonction *Inter* obtenue au titre de ce scénario soit positive et représente donc un excédent de perte, ce dernier est beaucoup moins important que le gain observé au titre de chaque risque  $\hat{L}_1^{act}(s_1)$  et  $\hat{L}_1^{immo}(i_1)$ . La valeur totale de la perte sera donc nécessairement peu importante, ou du moins pas suffisamment importante pour se trouver en queue de distribution supérieure. Pour les scénarios où la valeur d'un des facteurs de risques favorable pour la compagnie et l'autre valeur moins favorable, la perte est diminuée suite à la prise en compte de l'interaction. Ces scénarios n'étant initialement pas à l'origine des pertes constituant la queue de distribution supérieure de la perte de la compagnie sans prise en compte de l'interaction, ils ne le seront pas non plus en prenant en compte les interactions.

Le maximum de la perte (totale) observée sur les scénarios non défavorables est de 17 946 604.

Cette perte est associée au quantile à 97,12% de la distribution de perte. Il peut en être conclut que ces scénarios n'auront pas d'impacts sur la valeur du SCR. Néanmoins, la queue de distribution semble être influencée par certains de ces scénarios. Dans le cadre de l'étude des risques de la compagnie d'assurance, il semble essentiel d'être en mesure d'appréhender tout quantile de la queue de distribution supérieure de la perte de manière fiable. Ainsi, négliger complètement ces scénarios est imprudent et une analyse plus fine doit être conduite. A partir de ce qui a été constaté en section 3.4.2, le risque est plus concentré sur l'action. Ainsi, de très faibles valeurs d'actions qui sont associées à des valeurs d'immobilier légèrement plus importantes que le scénarios central engendreront des pertes conséquentes du fait que la valeur plutôt positive de l'immobilier ne compensera le choc constaté sur l'action. Il convient donc de ne pas négliger les scénarios économiques pour lesquels les valeurs d'action sont très défavorables. En considérant les scénarios économique qualifiés de 'non-défavorables' en ne retenant pas les scénarios économiques pour lesquels les valeurs d'action sont inférieures à la valeur centrale et la valeur de l'indice immobilier associé est inférieure au quantile à 80% de la distribution d'immobilier obtenue à un an, alors la perte la plus importante obtenue est de 11 890 676, correspondant au quantile à 90,27% de la distribution de perte agrégée. Ces scénarios n'ont donc bien as de véritable effet sur la queue de distribution supérieure de la perte agrégée.

L'incidence sur le SCR déterminé peut alors être observé en considérant les calibrages représentés dans la figure A.7.

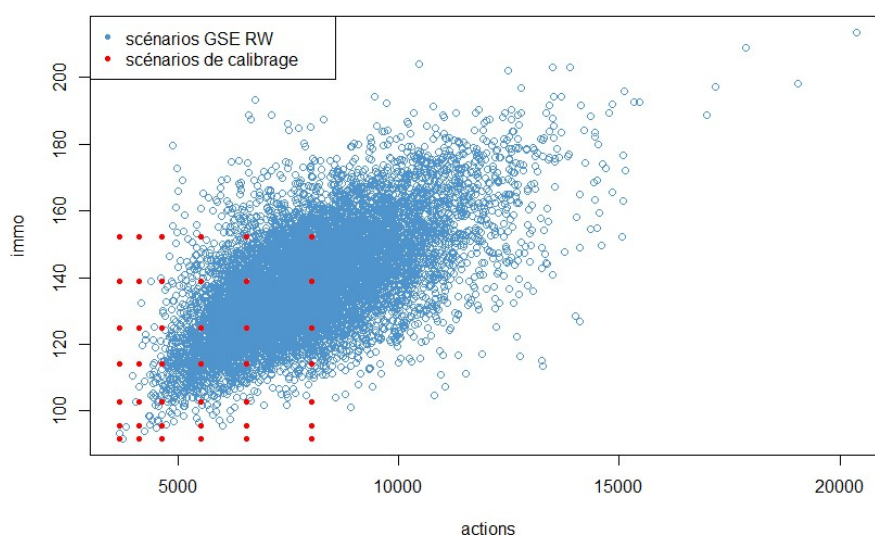


FIGURE A.7 : scénarios de calibrages représentés avec les trajectoires économiques obtenues

Les tableaux A.8 et A.9 recensant les quantiles de la perte obtenue en considérant les calibrages prudents A.6 puis les calibrages constitués de scénarios défavorables A.7, mettent en avant le fait que la queue de distribution inférieure de la fonction de perte n'est pas bien appréhendée par la seconde calibration mais que la queue de distribution supérieure obtenue est identique.

quantiles	1/200	1/100	3/100	1/20	1/10
ancien calibrage	-21,03	-18,53	-14,94	-12,96	-9,87
nouveau calibrage	-21,99	-19,32	-15,44	-13,27	-10,03

TABLE A.8 : queue de distribution inférieure obtenue en fonction des calibrages retenus

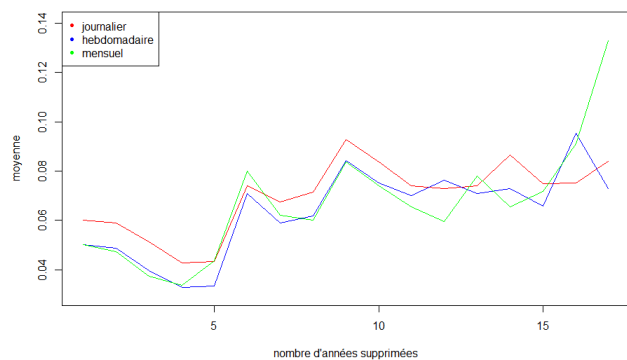
quantiles	9/10	19/20	97/100	99/100	199/200
ancien calibrage	11,76	15,45	17,76	21,94	24,05
nouveau calibrage	12,06	15,78	18,07	22,42	24,54

TABLE A.9 : queue de distribution supérieure obtenue en fonction des calibrages retenus

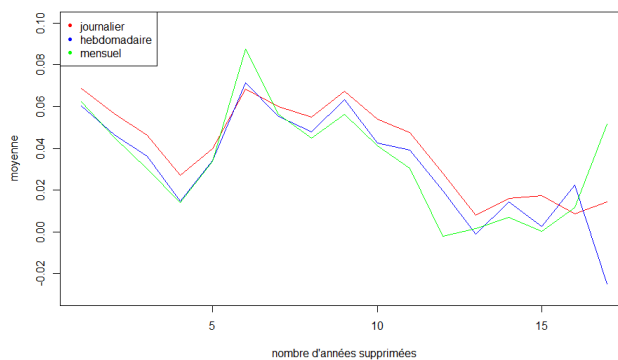
En effet, l'écart relatif maximal obtenu sur la queue de distribution inférieure est de 8,7% tandis que pour la queue de distribution supérieure, l'écart relatif maximal est de 2,58%. L'écart relatif ne reste pas si important pour la queue de distribution inférieure.

Les distributions de perte obtenues en faisant varier les différents paramètres calibrés dans le GSE RW peuvent désormais être analysées.

## A.6 Calibrages RW - granularité et de la profondeur des données

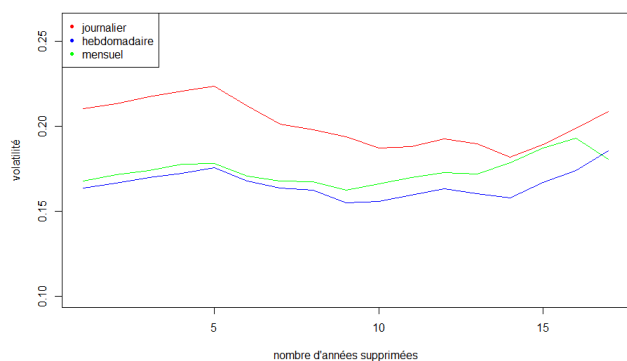


(a) action

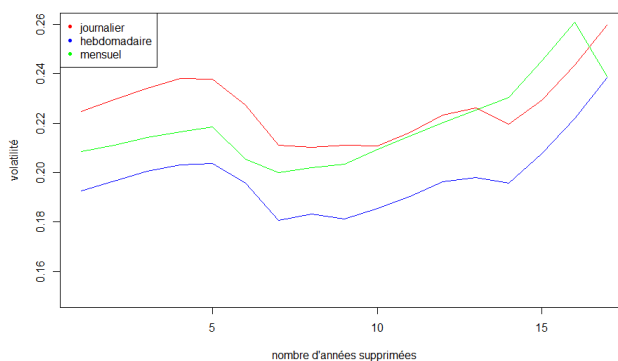


(b) immobilier

FIGURE A.8 : Moyennes retenues dans le GSE RW



(a) action



(b) immobilier

FIGURE A.9 : Volatilités retenues dans le GSE RW

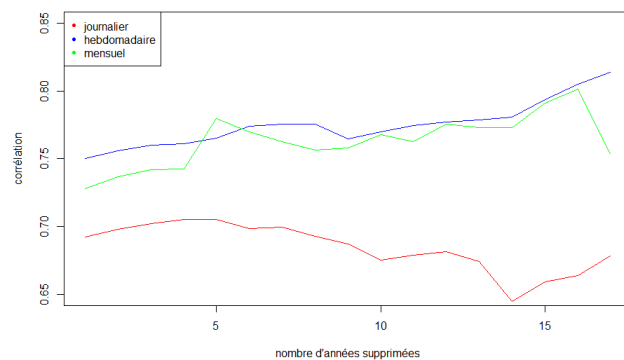


FIGURE A.10 : Corrélations retenues dans le GSE RW

## A.7 Calibration RW sur un historique de 2 ans glissant

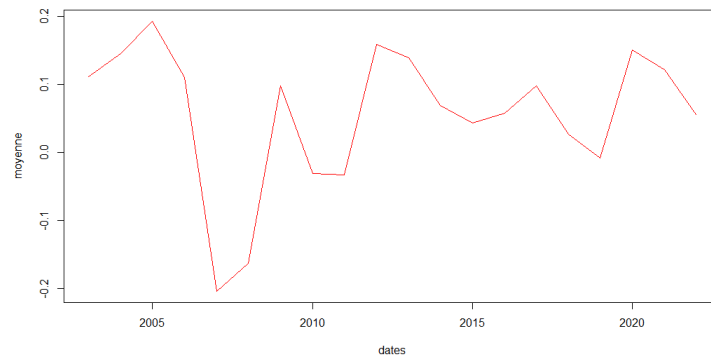


FIGURE A.11 : Calibration de la moyenne de la dynamique action en historique glissant sur 2 ans

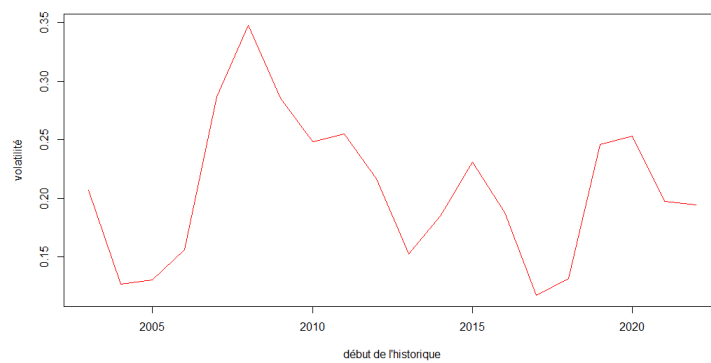


FIGURE A.12 : Calibration de la volatilité de la dynamique action en historique glissant sur 2 ans

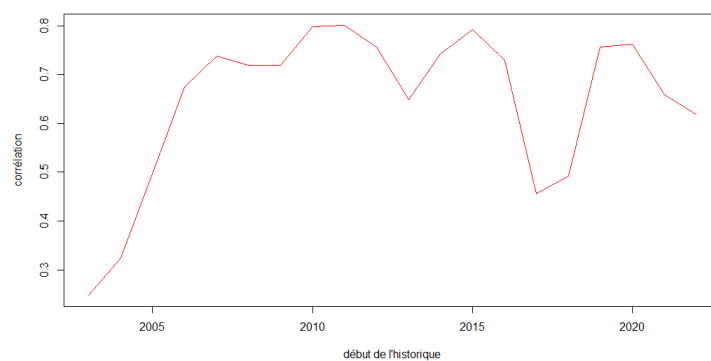


FIGURE A.13 : Calibration de la corrélation action/immobilier en historique glissant sur 2 ans

## A.8 Familles usuelles de copules

Les familles usuelles utilisées en banque et en assurances sont les copules elliptiques et archimédiennes. Nous nous concentrerons donc sur ces deux familles dans la suite de ce mémoire. Des représentations de la densité seront présentées pour chaque copule mentionnée. Les paramètres utilisés pour la représentation correspondent aux paramètres utilisés par la suite et trouvés en section 3.2.2.

### A.8.1 La famille de copules elliptiques

**Définition A.8.1 (famille elliptique)** *Les copules elliptiques s'obtiennent comme leur nom l'indique avec des lois elliptiques, c'est-à-dire dont la fonction caractéristique est donnée par la formule  $x \rightarrow \phi(x^T \Gamma x)$  pour  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\Gamma$  une matrice de corrélation. Une copule elliptique est donc donnée par*

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), F^{-1}(v)),$$

avec  $H$  une fonction de répartition de dimension 2 et  $F$  une fonction de répartition de dimension 1.

Nous pouvons étendre la définition en dimension quelconque. La copule elliptique de dimension  $d$  est alors définie par

$$C(u_1, \dots, u_d) = H_d(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_d)),$$

avec  $H_d$  une fonction de répartition de dimension  $d$ .

Les deux principales copules elliptiques sont la copule gaussienne et la copule de *Student*.

#### La copule gaussienne

Cette copule est associée à la distribution gaussienne multi-dimensionnelle. Elle est définie par l'égalité suivante :

$$C(u, v) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (\text{A.6})$$

avec  $\Phi_{\Sigma}$  la fonction de répartition multi-variée d'un vecteur gaussien centré dont la matrice de variance-covariance est donnée par  $\Sigma$ ,  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sa densité est donnée par

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left( -\frac{1}{2} \kappa(\Sigma^{-1} - Id) \kappa^T \right),$$

avec  $\kappa = (\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$ . Cette copule est représentée sur la figure A.14.

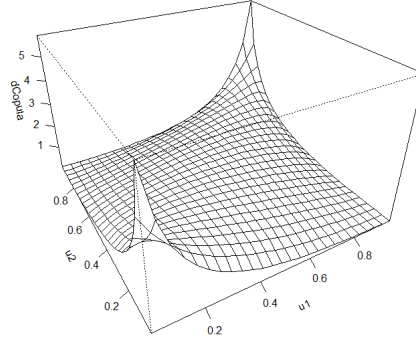


FIGURE A.14 : Représentation de la densité d'une copule Gaussienne de corrélation 0,64

### La copule de *Student*

Comme son nom l'indique, cette copule est associée à la loi de *Student*. Elle est définie par l'égalité suivante :

$$C(u, v) = t_{\Sigma, \nu}(t_{\nu}^{-1}(u), t_{\nu}^{-1}(v)),$$

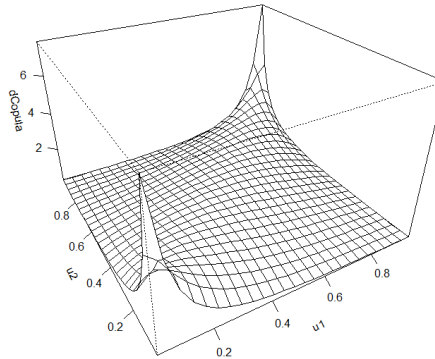
avec  $t_{\Gamma, \nu}$  la fonction de répartition d'une loi de *Student* bvariée de degré de liberté  $\nu$  et de matrice de corrélation  $\Sigma$ , et  $t_{\nu}$  la fonction de répartition d'une loi de *Student* univariée de degré de liberté  $\nu$ . Nous rappelons les formules de ces deux quantités ci dessous.

Sa densité est donnée par :

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^2} \frac{\left(1 + \frac{\tau^T \Sigma^{-1} \tau}{\nu}\right)^{-(1 + \frac{\nu}{2})}}{\left(\left(1 + \frac{t_{\nu}^{-1}(u)^2}{\nu}\right) \left(1 + \frac{t_{\nu}^{-1}(v)^2}{\nu}\right)\right)^{(1 + \frac{\nu}{2})}}, \quad (\text{A.7})$$

avec  $\tau = (u, v)$ .

Cette copule est représentée dans la figure A.15.

FIGURE A.15 : Représentation de la densité d'une copule de *Student* de corrélation 0,64 et de degré de liberté 5,3

### A.8.2 La famille de copules archimédiennes

Étudiée depuis les années 80, la famille archimédienne est aujourd'hui très populaire car elle admet une formule fermée et est facilement généralisable aux dimensions supérieures à 2. Nous pouvons dès à présent présenter cette famille.

**Définition A.8.2 (famille archimédienne)** *Une copule archimédienne est donnée par la formule suivante :*

$$C(u, v) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) & \text{si } \phi(u) + \phi(v) < \phi(0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  de classe  $C^2$ , strictement décroissante et convexe, et  $\phi(1) = 0$ . Cette fonction est appelée *générateur de la copule*.

Cette définition s'étend facilement au cas multi-dimensionnel. Une copule archimédienne de dimension  $d$  est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)),$$

avec  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  une fonction telle que  $\phi^{(i)}(t)(-1)^i \leq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Les trois copules archimédiennes les plus populaires et que nous détaillerons par la suite sont les copules de Clayton, Gumbel et Frank.

#### La copule de Clayton

Cette copule permet de mettre en place une dépendance positive accentuée sur la queue de distribution inférieure. Il s'agit d'une copule archimédienne qui a pour générateur  $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$ , avec  $\theta \in [-1, +\infty[ \setminus \{0\}$ . Ainsi, cette copule prend la forme

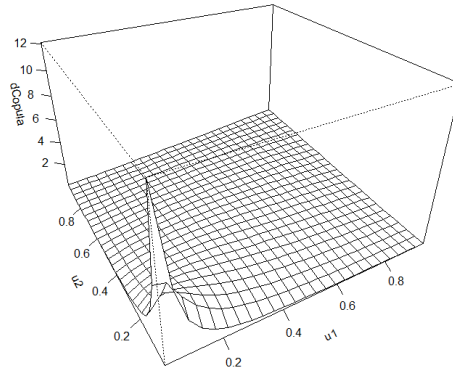
$$C(u, v) = \max \left( (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right),$$

et la densité est donnée par

$$c(u, v) = \frac{1 + \theta}{(uv)^{\theta+1}} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-\frac{1}{\theta}}.$$

La structure de dépendance instaurée par la copule est illustrée par la figure A.16.



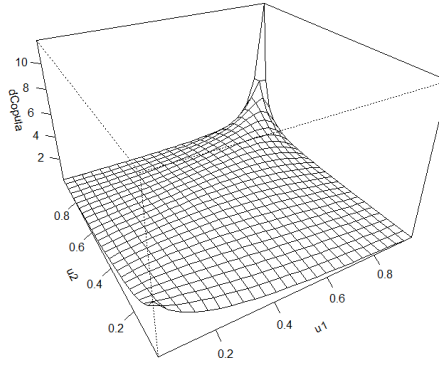
FIGURE A.16 : Représentation de la densité d'une copule de Clayton pour  $\theta = 1, 16$ 

### La copule de Gumbel

Cette copule archimédienne instaure une dépendance positive en accentuant la dépendance sur la queue de distribution supérieure. Elle a pour générateur  $\phi(t) = (-\log(t))^\theta$ , avec  $\theta \geq 1$ , et est donnée par

$$C(u, v) = \exp(-((- \log(u))^\theta + (- \log(v))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}),$$

Nous pouvons observer la structure de dépendance mise en place par cette copule dans la figure A.17.

FIGURE A.17 : Représentation de la densité d'une copule de Gumbel pour  $\theta = 1, 75$ 

### La copule de Frank

La copule de Frank permet la mise en place de structures de dépendance positives et négatives, accentuées sur les deux queues de distribution. Elle a pour générateur  $\phi(t) = -\ln\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La copule est alors donnée par

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)}\right),$$

et la densité est donnée par

$$c(u, v) = \frac{\theta \exp(-\theta(u + v))(1 - \exp(-\theta))}{(\exp(-\theta(u + v)) - \exp(-\theta u) - \exp(-\theta v) + \exp(-\theta))^2}.$$

Sa densité est représentée dans la figure A.18.

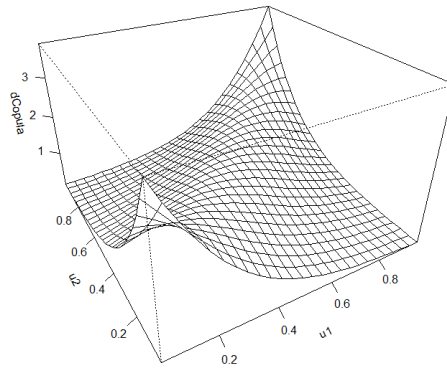
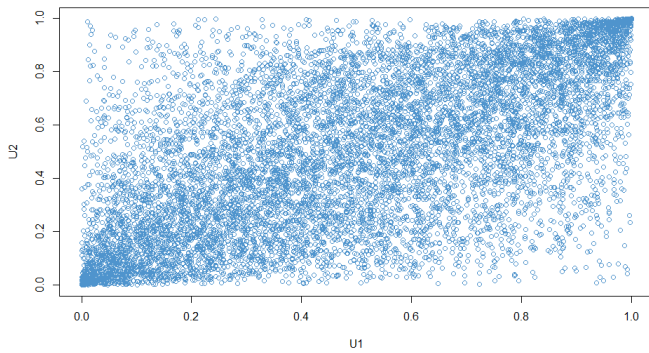


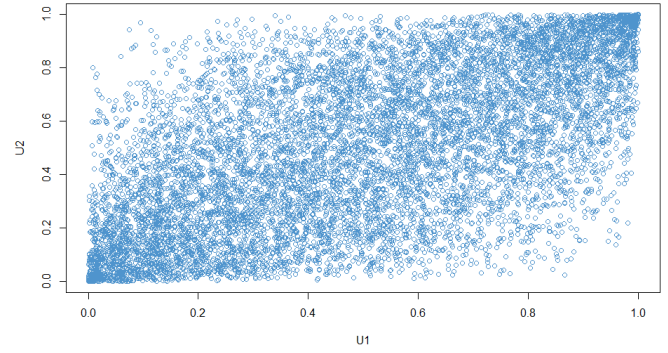
FIGURE A.18 : Représentation de la densité d'une copule de Frank pour  $\theta = 4,66$

## A.9 Structures de dépendance instaurée par les copules étudiées

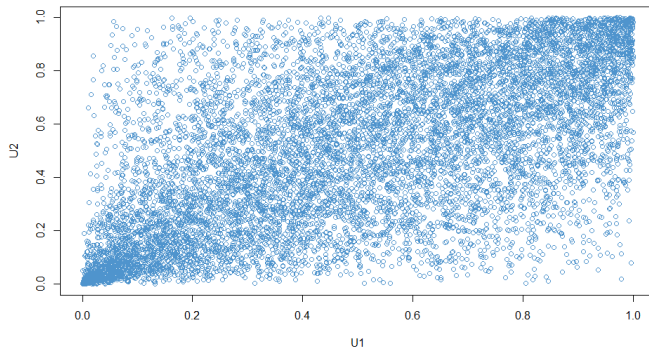
Les paramètres utilisés pour ces copules correspondent à celles recensées dans le tableau 3.7.



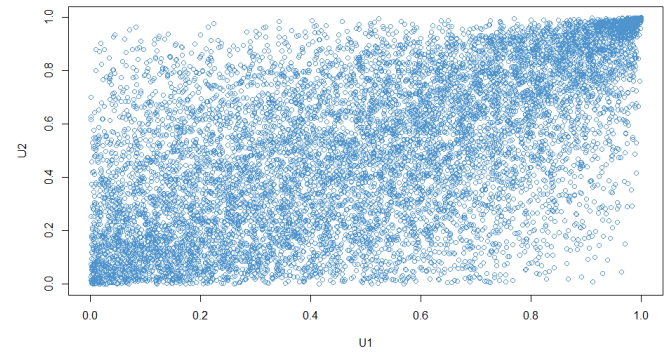
(a) Student



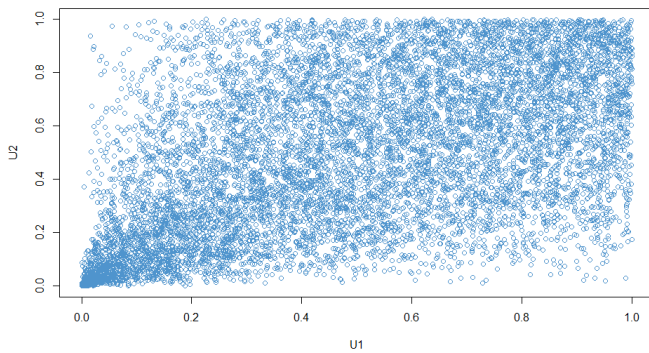
(b) Gaussienne



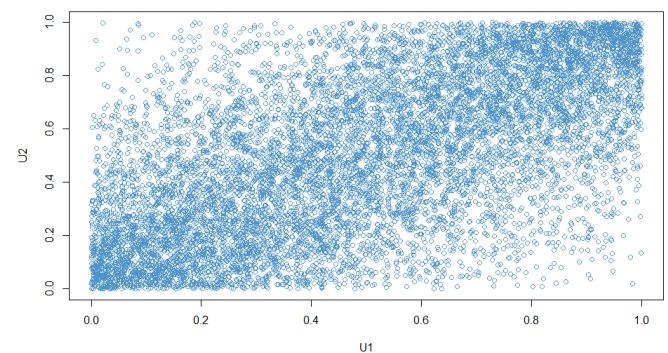
(a) Survie Gumbel



(b) Gumbel



(a) Clayton



(b) Frank

FIGURE A.21 : Dépendogrammes pour les différentes copules considérées

## A.10 Les mesures de concordance

Les concepts présentés dans cette annexe se basent sur le cours de CHARPENTIER (2013). Une mesure de concordance est un outil permettant d'analyser et de caractériser la structure de dépendance existant au sein d'un vecteur aléatoire  $X \in \mathbb{R}^n$ . Par simplification, le cas  $n = 2$  sera retenu pour définir les concepts propre à cette mesure.

**Définition A.10.1 (Mesure de concordance)**  $\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$  est une mesure de concordance si les propriétés suivantes sont vérifiées. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires.

1.  $-1 \leq \kappa \leq 1$ ,  $\kappa(X_1, X_1) = 1$  et  $\kappa(X_1, -X_1) = -1$  ;
2.  $\kappa(X_1, X_2) = \kappa(X_2, X_1)$  ;
3. si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes,  $\kappa(X_1, X_2) = 0$  ;
4.  $\kappa(-X_1, X_2) = \kappa(X_1, -X_2) = -\kappa(X_1, X_2)$  ;
5. si  $\mathbb{F}_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) \leq u_2 \leq \mathbb{F}_{Y_1}(Y_1) \leq u_1, F_{Y_2}(Y_2) \leq u_2$ ,  $\forall 0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ , alors  $\kappa(X_1, X_2) \leq \kappa(Y_1, Y_2)$  ;
6. pour  $(X_1^n, X_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs convergent en loi vers  $(X_1, X_2)$ , alors  $\kappa(X_1^n, X_2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \kappa(X_1, X_2)$

Le coefficient de corrélation de Pearson, correspondant à l'outil le plus intuitif pour évaluer la dépendance existant entre deux variables aléatoires ne constitue pas une mesure de concordance. Elle ne vérifie par exemple pas l'axiome 3. En effet, en considérant par exemple  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $\rho(X_1, X_1^2) = 0$  alors que ces deux variables sont trivialement dépendantes.

Les mesures de dépendance permettent de préciser la structure de dépendance plus finement qu'un coefficient de corrélation de Pearson, qui ne parvient pas à décrire convenablement la structure de dépendance entre variables aléatoires. Ce dernier se contente de mesurer la relation linéaire existant entre deux variables. Elle n'est donc fiable que dans le cas gaussien et peut engendrer une mauvaise appréciation de la dépendance. Les mesures de concordance permettent de décrire des dépendances autres que linéaires. Les deux mesures de concordance les plus couramment utilisées correspondent au tau de Kendall et au rho de Spearman. Avant de les expliciter, il convient de présenter les probabilités de concordance et de discordance.

**Définition A.10.2 (Concordance et discordance)** Soient  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  deux vecteurs indépendants et identiquement distribués. Les probabilités de concordance et de discordance de la distribution de ces vecteurs sont données par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{concordance}) &= \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0), \\ \mathbb{P}(\text{discordance}) &= \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0). \end{aligned}$$

elles peuvent s'interpréter de la manière suivante : deux observations sont concordantes (resp. discordantes) si l'observation d'une valeur importante pour  $X$  coïncide avec l'observation d'une valeur importante pour  $Y$  (resp. faible valeur).

Les deux mesures de concordance peuvent désormais être introduites.

**Définition A.10.3 (tau de Kendall)** Soient  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  deux vecteurs indépendants et identiquement distribués. Alors le tau de Kendall  $\tau$  du vecteur  $(X, Y)$  est donné par

$$\begin{aligned} k(X, Y) &= \mathbb{P}(\text{concordance}) - \mathbb{P}(\text{discordance}) \\ &= 4 \times \mathbb{P}(X < X', Y < Y') - 1. \end{aligned}$$

**Définition A.10.4 (rho de Spearman)** Soit  $(X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire continu, dont les fonctions de répartition des lois marginales associées soient notées respectivement  $F_1$  et  $F_2$ . Le rho de Spearman est alors défini à partir du coefficient de corrélation de Pearson et des rangs induits par  $F_1$  et  $F_2$ . En notant  $\rho$  le coefficient de corrélation de Pearson,

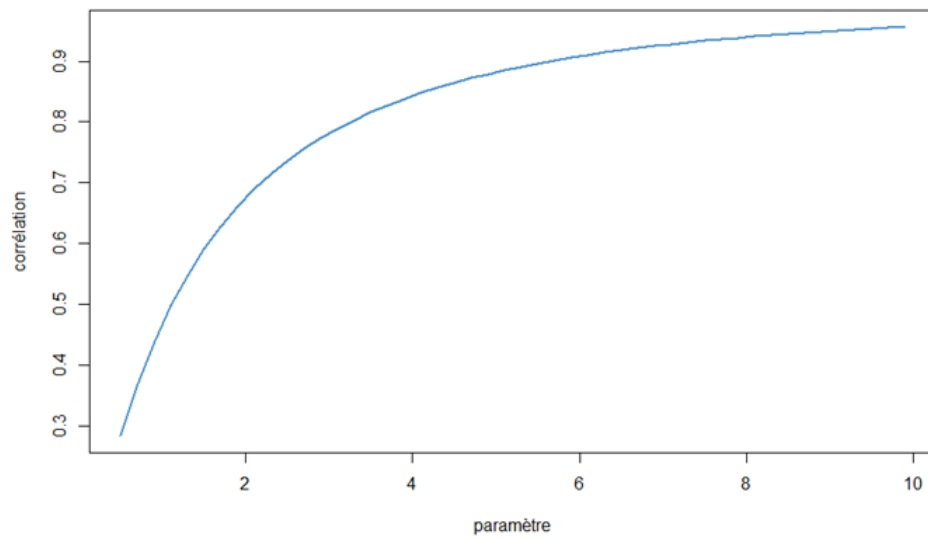
$$s(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Ces mesures de concordance peuvent s'écrire en fonction des paramètres des copules utilisées pour mettre en place la structure de dépendance.

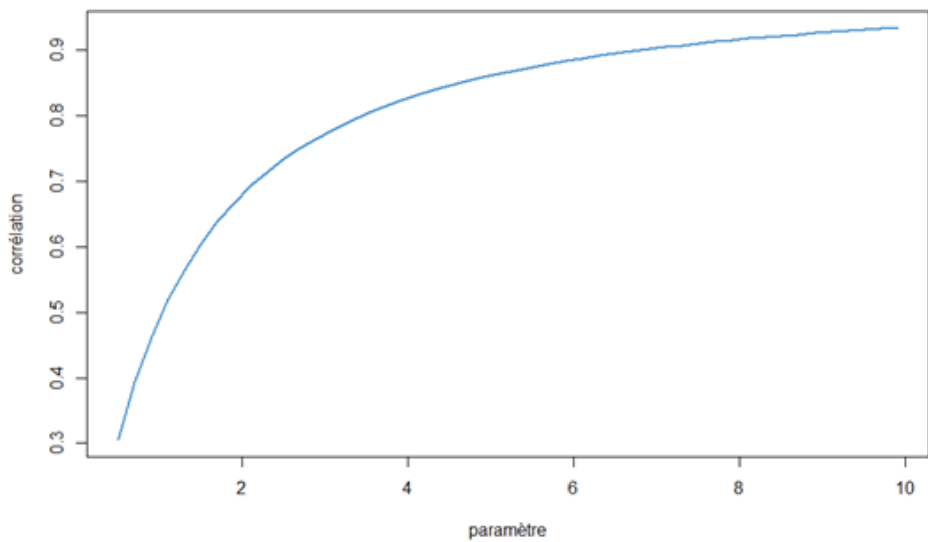
En notant  $(X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire continu reliées par la copule  $C$ , et  $U_1 = F_1(X_1), U_2 = F_2(X_2)$

$$\begin{aligned} k(X_1, X_2) &= 4 \times \mathbb{E}[C(U_1, U_2)] - 1, \\ s(X_1, X_2) &= 12 \times \mathbb{E}(U_1 U_2). \end{aligned}$$

## A.11 Copules archimédiennes et mesures de dépendance



(a) rho de Spearman



(b) corrélation de Pearson

FIGURE A.22 : Mesures de dépendance en fonction du paramètre retenu pour la copule de Clayton

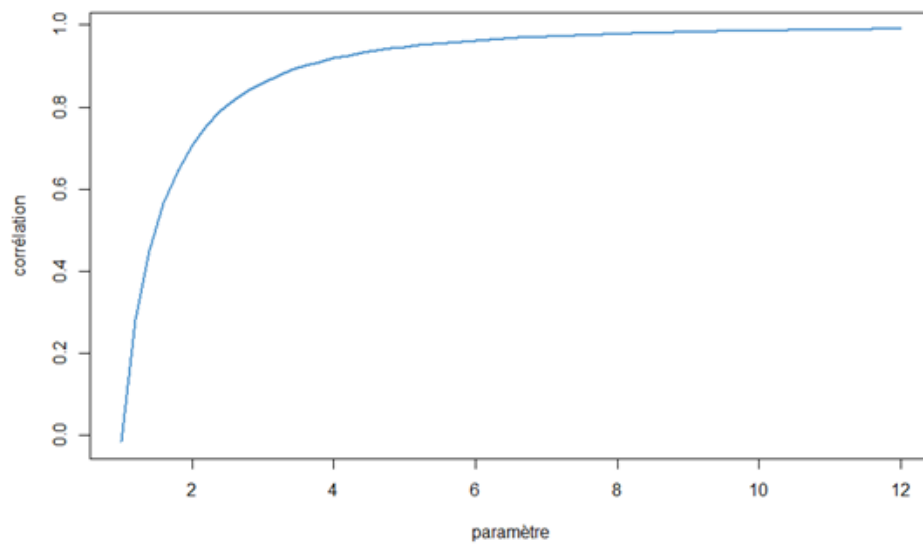


FIGURE A.23 : Corrélation de Pearson observé sur l'échantillon de facteurs de risques en fonction du paramètre retenu pour la copule de Gumbel

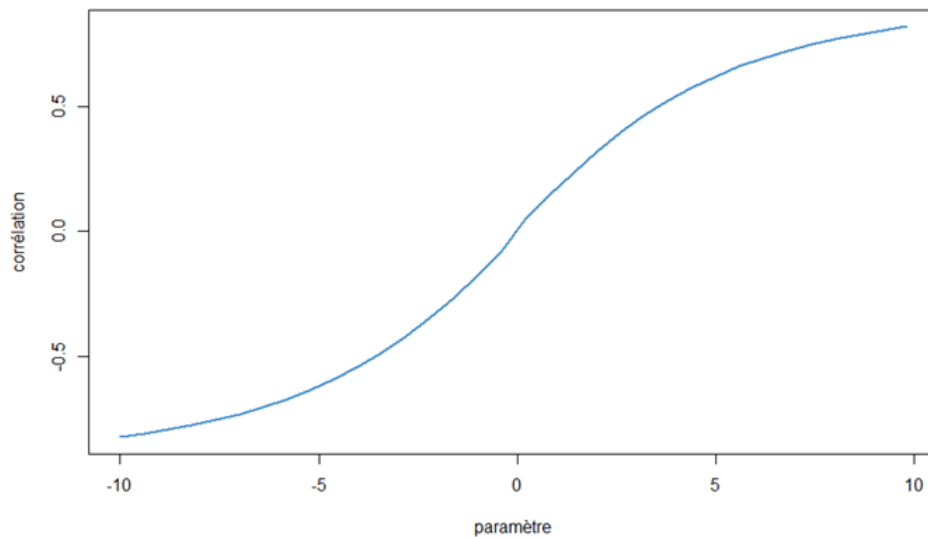


FIGURE A.24 : Corrélation de Pearson observé sur l'échantillon de facteurs de risques en fonction du paramètre retenu pour la copule de Frank

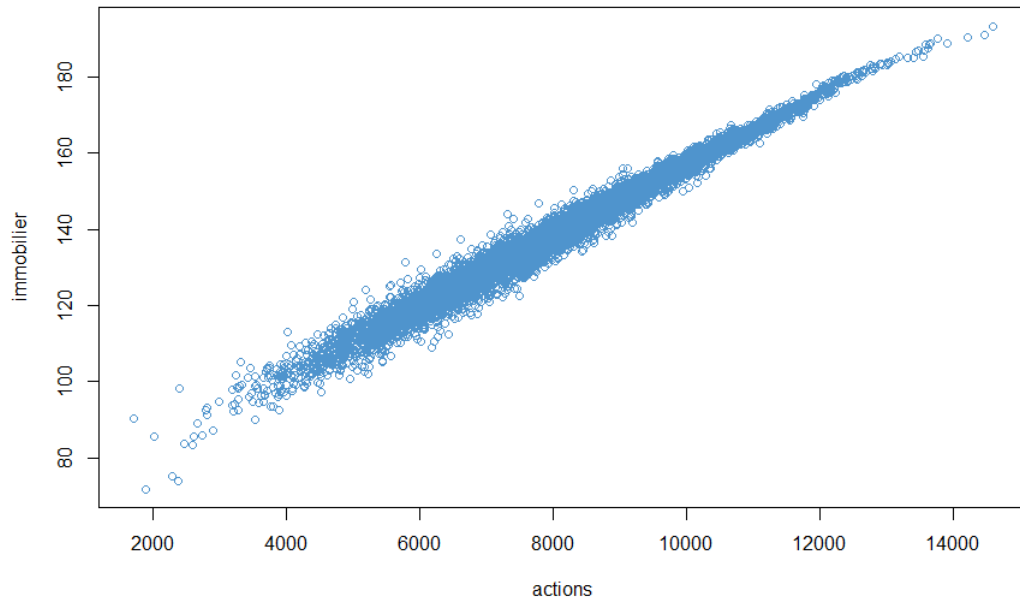
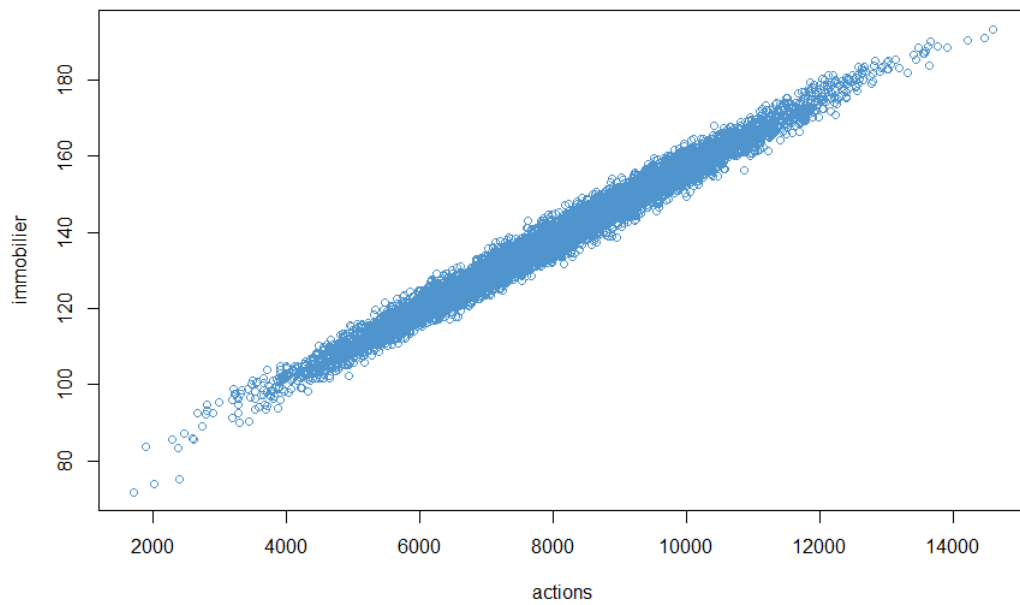
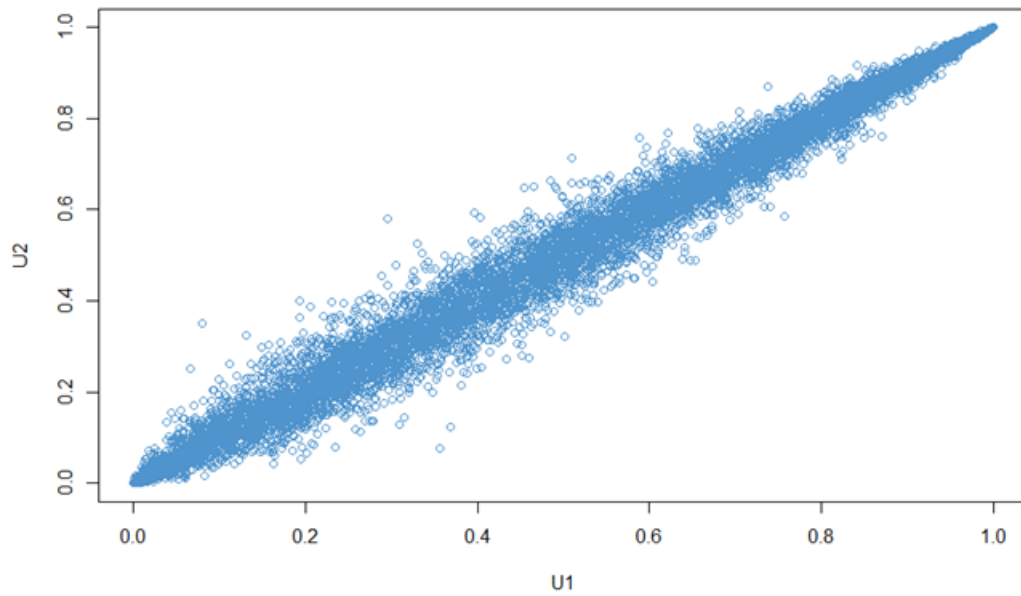
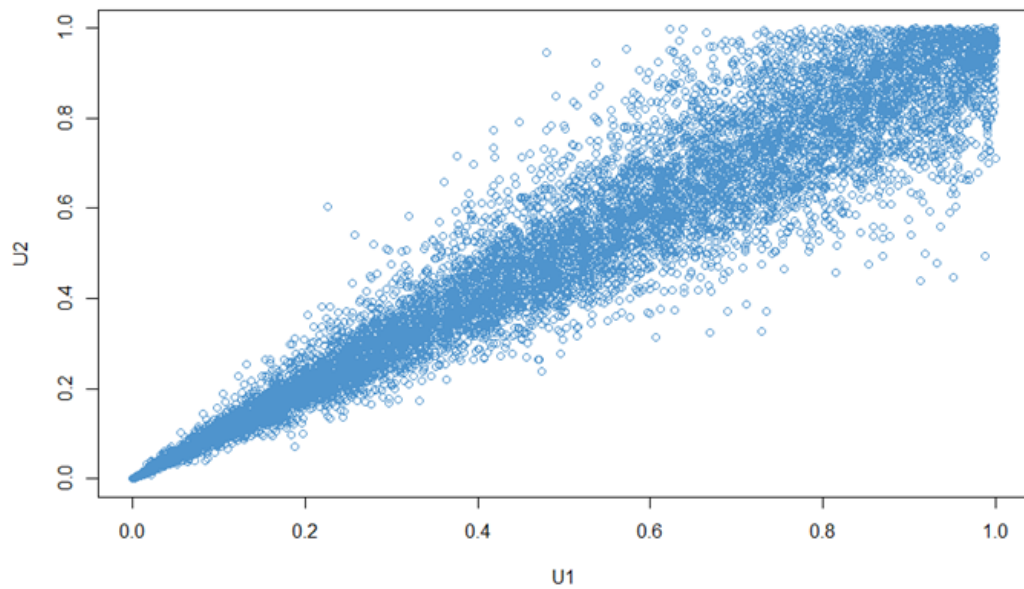
(a) Gumbel,  $\theta = 12$ (b) Gaussienne,  $\rho = 99\%$ 

FIGURE A.25 : échantillons des facteurs de risques dont la structure est représentée par une copule instaurant un paramètre de corrélation de Pearson de 99%



FIGURE A.26 : Uniformes associées à la copule de Gumbel de paramètre  $\theta = 12$ FIGURE A.27 : Uniformes associées à la copule de Clayton de paramètre  $\theta = 10$

## A.12 Analyse des différences entre l'approche VC et simulateur

Cette annexe regroupe les résultats obtenus sur la différence entre les SCR obtenus dans le cadre d'une approche VC et simulateur, en supposant toutes les hypothèses de l'approche VC vérifiées mis appart l'ellipticité des marginales. La figure A.28 se rapporte à l'étude effectuée en section 4.1.1 , et analyse les valeurs prises par  $VaR_{0,5\%}(Z)$ ,  $VaR_{0,5\%}(\frac{X_i - E[X_i]}{\sigma_i})$ ,  $i \in 1, 2$ .

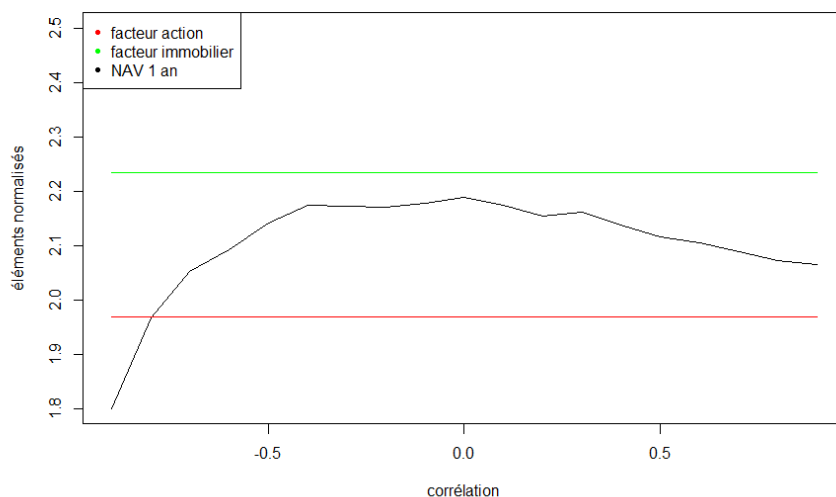


FIGURE A.28 : quantiles 0,5% obtenus en fonction du paramètre de corrélation retenu

## A.13 Précision de l'estimateur de SCR

La détermination du SCR dans ce mémoire s'effectue à partir des échantillons obtenus pour les pertes au titre des risques action et immobilier. Ces derniers découlent des échantillons d'action et d'immobilier obtenus dans le GSE RW implémenté et à partir de l'échantillon de lois uniformes représentant la structure de dépendance entre les deux facteurs de risques. Par conséquent, les SCR déterminés tout au long de ce mémoire constituent des estimateurs de la valeur exacte du SCR.

La taille des échantillons générés a été fixée à 10 000. Il s'agit de la valeur pour laquelle le SCR semblait converger vers une valeur de SCR exacte.

Le SCR n'est autre que le quantile de la distribution de perte de la compagnie d'assurance fictive. Son estimateur pour un échantillon de perte  $(L_1, \dots, L_n)$  de taille  $n$  est donné par :

$$\hat{SCR}_n = L_{(\lceil n \times 99,5\% \rceil)}. \quad (\text{A.8})$$

L'intervalle de confiance de niveau  $\alpha$  pour cet estimateur est de la forme

$$\hat{SCR}_n - SCR \in \left[ -q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f(q_\alpha)\sqrt{n}}, q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f(q_\alpha)\sqrt{n}} \right], \quad (\text{A.9})$$

où  $f$  correspond à la densité de la distribution de perte, et  $q_{1-\alpha/2}$  le quantile de niveau  $1 - \alpha/2$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

La vitesse de convergence de cet estimateur est de  $1/\sqrt{n}$ . Afin de s'assurer que l'estimateur est de qualité suffisante, nous cherchons à vérifier que ce dernier ne s'éloigne pas de plus de 1% de la valeur exacte avec une probabilité de 95%. Pour ce faire il conviendrait de déterminer  $f(q_{5\%})$  et de s'assurer que  $q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f(q_\alpha)\sqrt{10000}} \leq 1\%$ .

Dans le but de limiter encore le biais engendré par notre estimateur de SCR dans le cas où nous déterminons le SCR agrégé au titre des deux facteurs de risques considérés, nous simulons 10 fois un échantillon d'uniformes représentant la structure de dépendance entre les actions et l'immobilier en gardant les distributions marginales d'actions et d'immobilier générés par le GSE RW. Nous obtenons alors 10 distributions de perte différentes et donc 10 estimateurs de SCR différents. L'estimateur final correspond à la moyenne de ces estimateurs.

## A.14 Précision des estimateurs des paramètres du GSE RW

Afin de nous assurer de la qualité des trajectoires des facteurs de risques déterminés dans le GSE RW, il est judicieux de déterminer des intervalles de confiance (asymptotiques) quant aux paramètres déterminés pour projeter les facteurs de risques. Pour rappel, nos risques action et immobilier sont modélisés par une dynamique de Black&Scholes. En vision RW, cette dynamique est donnée par

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où :

- $X_t$  correspond au facteur projeté,
- $W_t$  est un mouvement brownien,
- $\mu$  et  $\sigma$  les paramètres à déterminer.

Comme nous avons pu le voir précédemment dans la section 2.4.2, ces quantités sont déterminées à partir de la série  $Y_t = \ln(\frac{X_t}{X_{t-\delta}})$ , avec  $\delta$  le pas de temps considéré dans notre étude.

En effet,

$$Y_t = \underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta}_{\kappa} + \underbrace{\sigma\sqrt{\delta}}_{\beta} W_1$$

de telle sorte que les  $(Y_t)_{1 \leq t \leq n}$  sont iid et ne dépendent pas du temps.

Nous rappelons également que

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n\delta} \sum_{k=1}^n Y_k + \frac{\hat{\sigma}^2}{2},$$

$$\hat{\sigma}_n = \frac{1}{\delta(n-1)} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y}_n)^2.$$

Nous pouvons commencer par déterminer un intervalle de confiance (IC) à 95% ( $\alpha = 5\%$ ) pour le paramètre  $\sigma$ .

Les  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  étant iid de loi normale  $\mathcal{N}(\kappa, \beta^2)$ , nous avons

$$\sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y}_n)^2 = \beta^2 \sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z}_n)^2$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

D'après le théorème de Cochran,  $\sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z}_n)^2 \sim \chi_{n-1}^2$ . Ainsi  $\frac{\delta(n-1)\hat{\sigma}^2}{\delta\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ .

A partir de cette constatation, nous pouvons en conclure que  $\sigma$  appartient à l'IC suivant :

$$\left[ \frac{\sqrt{n-1}\hat{\sigma}_n}{\sqrt{q_{1-\alpha/2}^{\chi_{n-1}^2}}}, \frac{\sqrt{n-1}\hat{\sigma}_n}{\sqrt{q_{\alpha/2}^{\chi_{n-1}^2}}} \right]$$

où  $q_{\alpha/2}^{\chi_{n-1}^2}$  et  $q_{1-\alpha/2}^{\chi_{n-1}^2}$  correspondent respectivement aux quantiles de niveaux  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$  de la loi  $\chi_{n-1}^2$ .

Nous pouvons désormais passer à la détermination d'un IC à 95% pour le paramètre  $\mu$ . Pour rappel,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\kappa}{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}, \\ \hat{\mu}_n &= \frac{\bar{\kappa}_n}{\delta} + \frac{\hat{\sigma}_n^2}{2}, \\ \text{avec } \bar{\kappa}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Cochran, nous pouvons affirmer que les quantités  $\frac{\bar{\kappa}_n}{\delta}$  et  $\frac{\hat{\sigma}_n^2}{2}$  sont indépendantes. De plus, elles sont asymptotiquement normales. En effet, en utilisant le TCL, nous pouvons démontrer que

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \left( \frac{\bar{\kappa}_n}{\delta} - \frac{\kappa}{\delta} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{\delta}), \\ \sqrt{n} \left( \frac{\hat{\sigma}_n^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{2}).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{\sigma^4}{2}}} (\hat{\mu}_n - \mu) \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

L'IC à 95% pour le paramètre  $\mu$  est donné par

$$\left[ \hat{\mu} + / - q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_n^2}{\delta} + \frac{\hat{\sigma}_n^4}{2}}}{\sqrt{n}} \right].$$

Nous souhaitons désormais déterminer un IC pour la corrélation associée à l'échantillon des log-rendements d'action et d'immobilier, respectivement notés  $A_t = \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$  et  $B_t = \ln \left( \frac{I_t}{I_{t-1}} \right)$ .

L'estimateur associé est donné par :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum (A_i - \bar{A})(B_i - \bar{B})}{\sqrt{\sum (A_i - \bar{A})^2 \sum (B_i - \bar{B})^2}}$$

La distribution de  $\hat{\rho}$  n'étant pas symétrique, nous appliquons la transformation de Fisher permettant d'obtenir une variable asymptotiquement normale.

$$\hat{z} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}} \right)$$

Cette variable est telle que

$$\sqrt{n-3} \left( \hat{z} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Nous pouvons alors déterminer un IC pour la transformée de Fisher à 95% :

$$z \in \left[ \underbrace{\hat{z} - q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}(0,1)} \frac{1}{\sqrt{n-3}}}_{z_{lower}}, \underbrace{\hat{z} + q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}(0,1)} \frac{1}{\sqrt{n-3}}}_{z_{upper}} \right].$$

En appliquant la transformation inverse pour trouver la valeur de l'IC pour la corrélation  $\rho$ , l'IC est donné par :

$$\rho \in \left[ \frac{e^{2z_{lower}} - 1}{e^{2z_{lower}} + 1}, \frac{e^{2z_{upper}} - 1}{e^{2z_{upper}} + 1} \right]$$

Une explication plus détaillée de l'application de la transformée de Fisher pour trouver un intervalle de confiance pour le paramètre de corrélation est présentée dans l'étude de RAKOTOMALALA (2012).

Pour déterminer un intervalle pour le coefficient de Spearman, il convient de s'appuyer sur les uniformes associées  $(F_A(A_i), F_B(B_i))_{1 \leq i \leq n}$ , où  $F_A$  et  $F_B$  désignent respectivement les fonctions de répartition des variables  $A$  et  $B$ .

*Attention : ces intervalles sont conditionnées par l'hypothèse que l'historique du facteur  $X_t$  suive une dynamique de Black&Scholes ce qui n'est pas le cas en pratique*