Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : ~~Monsieur~~/Madame DUCOURNEAU Amandine

Titre du mémoire :

Méthodes Statistiques pour le Risk Adjustment sous IFRS 17

Confidentialité : ☐ NON ☒OUI (Durée : ☐ 1 an ☒2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires signature

Entreprise :

Nom : SOGECAP

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : BUCHET Edith

Signature :

Membres présents du jury de la filière

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

SORBONNE UNIVERSITE
Master Actuariat - ISUP

Méthodes Statistiques pour le *Risk Adjustment* sous IFRS 17

Mémoire présenté par:

Amandine DUCOURNEAU

En vue de l'obtention du titre:

Actuaire Associée

Encadrant professionnel: **Edith BUCHET**
Encadrant académique: **Guillaume BIESSY**

4 Place Jussieu, 75 005 Paris, France

Promotion 2019-2020

"Prudence est mère de sûreté".

Proverbe français.

Mercis

Parce qu'on l'emploie aussi bien pour une vie sauvée que pour un saladier passé, voici une liste (non-exhaustive !) de mes multiples mercis, par ordre chronologique.

Tout d'abord, un chaleureux merci à Frédéric DUCREUX, Anne-Laure SIRAND, Frédéric DAEFFLER pour leur confiance accordée et leur accueil bienveillant au sein de l'équipe ALM de SOGECAP. Et bien sur un affectueux merci à Edith BUCHET pour m'avoir prise sous son aile, et dont la pédagogie et la patience ont été indispensables pour rédiger ce mémoire.

Ensuite, un considérable merci à Olivier LOPEZ, ainsi qu'à toute l'équipe enseignante du Master Actuariat de l'ISUP, pour m'avoir offert la possibilité de devenir prochainement Actuaire, ainsi que pour la qualité et la variété des disciplines enseignées.

Également, un profond merci à Marc ARNAUDON, Hervé HOCQUART et Alexandre LOURME, pour leurs lettres de recommandation ainsi que leurs précieux conseils.

Un énorme merci à mes amis pour leur présence, conseils, écoute, et tout particulièrement à mes chers collègues alternants pour leurs éclats de rire.

Enfin, un infini merci à mes parents, ma famille pour leur éternel soutien. Sans oublier ma bonne étoile.

Préambule

MOT-CLEFS : *IFRS 17, Risk Adjustment, Solvabilité II, méthodes statistiques, diversification, corrélation, Théorie des Copules, méthodes d'allocation du capital.*

Ce mémoire a été rédigé au cours du premier semestre 2020 et s'inscrit dans la phase de préparation de la mise-en-place de la norme internationale IFRS 17 [1] pour les compagnies d'assurance, en particulier chez SOGECAP. Il n'a pas vocation à passer en revue l'intégralité des modalités de cette norme : il se focalisera sur les enjeux entourant la détermination d'une marge de prudence à intégrer dans le passif de l'assureur. Celle-ci, appelée *Risk Adjustment* sous IFRS 17, permet à l'assureur de se prémunir d'une déviation de la sinistralité des assurés en immobilisant un montant de capital en complément de ses provisions techniques, ces dernières reflétant le montant moyen des flux de trésorerie futurs probabilisés.

L'enjeu entourant la détermination du montant de *Risk Adjustment* est remarquable puisque ce dernier impactera directement le résultat de la compagnie d'assurance. En conséquence, l'assureur devra arbitrer entre prudence et rentabilité : l'immobilisation d'un montant de capital pour répondre à une potentielle hausse de la sinistralité a un coût élevé pour la compagnie d'assurance.

Dans ce contexte, ce mémoire s'articule sous les quatre chapitres suivants :

Le Chapitre 1 présente dans un premier temps la norme internationale IFRS 17 et ses différentes composantes, puis dans un second temps illustre la vie d'un produit comptabilisé sous la norme IFRS 17 avec quatre scenarii possibles, afin d'illustrer le rôle du *Risk Adjustment*.

Le Chapitre 2 se focalise sur les méthodes de détermination du *Risk Adjustment* : en premier lieu la méthodologie Solvabilité II est discutée pour pouvoir être adaptée à la vision IFRS 17, en second lieu deux méthodes statistiques sont proposées pour déterminer le montant du *Risk Adjustment* relatif à la sinistalité future, et en dernier lieu trois méthodes statistiques sont étudiées pour répondre à une déviation du montant estimé sur la sinistralité passée.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de la diversification entre les risques auxquels est exposé le portefeuille Prévoyance de SOGECAP : l'étude de la corrélation entre ceux-ci permet de tenir compte d'éventuels gains de diversification entre les risques et ainsi de réduire le montant global de *Risk Adjustment* immobilisé. Cette étude est fondée sur la Théorie des Copules, puis appliquée sur les données SOGECAP.

Enfin, le Chapitre 4 étudie les méthodes d'allocation de capital en les appliquant spécifiquement au montant global du *Risk Adjustment*, après prise-en-compte des gains de diversification. Quatre méthodes seront présentées puis appliquées sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP, afin de mesurer l'impact du choix relatif à celles-ci.

1. La norme IFRS 17 est l'objet de nombreuses discussions et de potentielles évolutions ; par conséquent certaines assertions peuvent s'avérer obsolètes au moment de la lecture de ce mémoire.

Preamble

KEYWORDS : *IFRS 17, Risk Adjustment, Solvency 2, statistical methods, diversification, correlation, Copula Theory, capital allocation methods.*

This dissertation has been written during the first half of 2020 and is part of the preparation phase for the implementation of International Standard IFRS 17 [2] implementation for the insurance compagnies, and in particular in SOGECAP. It is not intended to review the entirety of the terms of this standard : it will focus on the issues surrounding the determination of a margin of prudence to be included in the insurer's liabilities. This, called *Risk Adjustment* under IFRS 17, allows the insurer to protect itself from a deviation in the insured claims by immobilizing an amount of capital in addition to its technical provisions, the latter reflecting the amount average of probable future cash flows.

The issue surrounding the determination of the amount of *Risk Adjustment* is remarkable since it will directly impact the result of the insurance company. Consequently, the insurer will have to arbitrate between prudence and profitability : immobilizing an amount of capital to meet a potential increase in claims has a high cost for the insurance company.

In this context, this dissertation is organized under the following four chapters :

Chapter 1 first presents the international standard IFRS 17 and its various components, then secondly illustrates the life of a product recognized under IFRS 17 with four possible scenarii.

Chapter 2 focuses on the methods of determining the *Risk Adjustment* : firstly the Solvency 2 methodology is discussed in order to be able to be adapted to the IFRS 17 vision, secondly two statistical methods are proposed to determine the amount of the *Risk Adjustment* relating to future claims, and lastly three statistical methods are studied to respond to a deviation from the estimated amount on past claims.

Chapter 3 is devoted to the study of the diversification between the risks to which the SOGECAP Provident Fund portfolio is exposed : the study of the correlation between these makes it possible to take into account any gains in diversification between the risks and thus reduce the overall amount of locked-in *Risk Adjustment*. This study is based on the Theory of Copulas, then is applied to SOGECAP data.

Finally, Chapter 4 studies the methods of capital allocation by applying them specifically to the overall amount of the *Risk Adjustment*, after taking into account diversification gains. Four methods will be presented and then applied to the SOGECAP Provident Fund portfolio, in order to measure the impact of the choice relating to them.

2. IFRS 17 is the subject of many discussions and potential developments ; therefore some assertions may be out of date at the reading time.

Table des matières

Table des sigles et acronymes **ix**

Synthèse **1**

Summary Note **7**

1 La Norme IFRS 17 **13**

1.1 La recette IFRS 17 13

1.1.1 Un gâteau à plusieurs couches 13

1.1.2 Le choix des ingrédients 14

1.1.3 La sélection du moule 16

1.1.4 Les emporte-pièces du modèle BBA 16

1.1.4.1 Le *Current Estimate* 16

1.1.4.2 Le *Risk Adjustment* 18

1.1.4.3 La *Contractual Service Margin* 19

1.1.5 L'actualisation des composantes du passif 20

1.2 La consommation sous IFRS 17 21

1.2.1 Le produit étudié 21

1.2.2 Création du gâteau 22

1.2.3 Consommation 23

1.2.3.1 Scénario 1 : Central 25

1.2.3.2 Scenario 2 : Hausse modérée de la sinistralité 26

1.2.3.3 Scénario 3 : Forte hausse de sinistralité 28

1.2.3.4 Scénario 4 : Amélioration de la sinistralité 30

1.3 Conclusion 32

2 Détermination du *Risk Adjustment* **33**

2.1 Le *Risk Adjustment* en plan large 33

2.1.1 Une nouveauté... 33

2.1.2 ...qui nécessite un retour sur la *Risk Margin*... 34

2.1.3 ...pour écarter la méthode "Coût du Capital"... 35

2.1.4 ...tout en conservant la méthodologie Solvabilité II 38

2.2 Le *Risk Adjustement* : projecteur sur la partie *LRC* 39

2.2.1 Méthode des taux-chocs 39

2.2.1.1 Application empirique 45

2.2.1.2 Modulation des taux-chocs : l'effet DAMPENER 52

2.2.1.3 Conclusion 54

2.2.2 Méthode probabiliste 55

2.2.2.1 Application empirique 57

2.2.2.2 Conclusion 60

2.3 Le *Risk Adjustment* : focus sur la partie LIC 62

2.3.1 La méthode de MACK 62

2.3.1.1 Application empirique 64

2.3.1.2 Conclusion 66

2.3.2 Méthode du *Bootstrap* sur MACK 66

2.3.2.1 Application empirique 67

2.3.2.2 Conclusion 68

2.3.3 Variante de la méthode des taux-chocs 69

2.3.3.1 Application empirique 70

2.4 Conclusion générale 71

3 Consolidation du *Risk Adjustment* **72**

3.1 L'impossible conservation de la façade Solvabilité II 72

3.2 La rénovation IFRS 17 : la théorie des Copules 74
3.2.1 Mesures de dépendance 74
3.2.1.1 Coefficient de PEARSON 74
3.2.1.2 Le ρ de SPEARMAN 75
3.2.1.3 Le τ de KENDALL 75
3.2.2 Construction d'une copule bivariée 76
3.2.3 Personnalisation des copules bivariées 76
3.2.3.1 Cas particuliers 76
3.2.4 Copules elliptiques 77
3.2.4.1 Copule de GAUSS 77
3.2.4.2 Copule de STUDENT 77
3.2.5 Copules archimédiennes 78
3.2.5.1 Copule de FRANK 78
3.2.5.2 Copules de GUMBEL et de JOE 79
3.2.5.3 Copules de CLAYTON et de A-M-H 79
3.2.6 Copules et dépendance caudale 80
3.3 Construction empirique 82
3.3.1 Copule empirique 82
3.3.2 Inférence statistique 84
3.3.2.1 La méthode des moments 84
3.3.2.2 La méthode du maximum de vraisemblance 84
3.3.2.3 Calibration des copules 87
3.3.3 Sélection de la meilleure copule 90
3.3.3.1 Les critères d'AKAIKE et de BAYES 90
3.3.3.2 Tests statistiques 90
3.3.4 Dépendance caudale 95

3.3.5 Diversification empirique du *Risk Adjustment* 97

3.3.5.1 Diversification avec la matrice de corrélation Solvabilité II . 97

3.3.5.2 Diversification avec la matrice de corrélation calibrées par les copules 98

4 Allocation du *Risk Adjustment* **100**

4.1 Zoom sur la désagrégation 100

4.1.1 Mesure de dépendance : mise-au-point 100

4.1.2 Principe d'allocation & Cohérence 101

4.2 Panorama des méthodes d'allocation 102

4.2.1 Méthode proportionnelle 102

4.2.2 Méthode marginale 103

4.2.3 Méthode de SHAPLEY 103

4.2.3.1 Principe de la méthode de SHAPLEY 103

4.2.3.2 Résolution du jeu 104

4.2.4 Méthode d'EULER 105

4.3 Application empirique 106

Conclusion **113**

A Méthode probabiliste : données statistiques complètes **116**

B Vérification des hypothèses du modèle de MACK **120**

C Procédure pour tests statistiques de sélection de copules **122**

References **132**

Table des sigles et acronymes

AIC	*Akaike Information Criterion*
BIC	*Bayesian Information Criterion*
AT	Arrêt-de-travail.
BBA	*Building Block Approach.*
BE	*Best Estimate.*
CAT	Risque Catastrophe.
CE	*Current Estimate.*
CI	Capital Initial.
CML	*Conditional Maximum Likelihood.*
CoC	*Cost of Capital.*
CRD	Capital Restant dû.
CSM	*Contractual Service Margin.*
GCH	Groupes de Contrats Homogènes.
IASB	*International Accounting Standards Board.*
IBNR	*Inccured But Not Reported.*
IFM	*Inference Functions for Margins.*
IFRS	*International Financial Reporting Standards.*
LoB	*Line of Business.*
LC	*Loss Component.*
LIC	*Liability for Incurred Claims.*
LRC	*Liability for Remaining Coverage.*
MV	Maximum de Vraissemblance.
MSEP	*Mean Squared Prediction Error*
OCDE	*Organisation de Coopération et de Développement Economiques.*
PAA	*Premium Allocation Approach.*
PB	Participation aux bénéfices.
RA	*Risk Adjustment.*
RLC	*Reversal Loss Component.*
RM	*Risk Margin.*
SAR	*Systemic Allocation Ratio.*
SCR	*Solvency Capital Requirement.*
S/P	Sinistres sur Primes.
VaR	*Value at Risk.*
VFA	*Variable Fee Approach.*

Synthèse

La norme internationale IFRS 17, applicable à compter du 01 janvier 2023, marque un tournant dans la vie des assureurs puisqu'elle vise à harmoniser les différences de comptabilisation des contrats d'assurance entre pays afin de rendre les compagnies d'assurance comparables entre-elles.

Elle remet en cause l'un des principes fondateurs de l'activité assurantielle : la mutualisation des risques. Cette dernière sera rendue caduque puisque désormais sous la comptabilisation IFRS 17, les contrats d'assurance seront regroupés en *"Groupes de Contrat Homogènes"* (GCH) afin d'être valorisés, et dont les trois grandes classes sont définies ci-après :

— Contrats profitables ne présentant pas de risque de devenir onéreux,

— Contrats profitables à l'origine avec un risque significatif de devenir onéreux,

— Contrat onéreux dès l'origine.

Cette *"signature de profitabilité"* découle directement de la valorisation du GCH selon les spécificités IFRS 17 : le passif est valorisé en trois blocs successifs.

1. *Current Estimate* : Valeur actualisée des flux futurs probables de trésorerie (sinistres, frais généraux, commissions, participations au bénéfice).
2. *Risk Adjustment* : Marge supplémentaire pour risques des flux d'exécution des contrats.
3. *Contractual Service Margin* : Bénéfice non-encore reconnu par l'assureur puisque celui-ci est associé aux services futurs qui seront fournis par le GCH étudié. La CSM s'écoule au fil de la période de couverture du GCH.

La différence entre l'actif du GCH et son passif permet de déterminer sa signature de profitabilité : le montant des primes émises, retranché de la somme du *Current Estimate* et du *Risk Adjustment* permet de déduire le montant de la CSM. Si cette dernière est négative, le GCH est classé "onéreux" et une perte immédiate est comptabilisée.

La correcte détermination du *Risk Adjustment* représente ainsi un important enjeu pour l'assureur : un fort montant de *Risk Adjustment* le protégera d'une déviation de la sinistralité, mais impliquera un coût élevé d'immobilisation du capital, couplé à une possible comptabilisation immédiate de pertes pour le GCH étudié.

Le Chapitre 2 s'attache à étudier les méthodes statistiques permettant de déterminer le montant du *Risk Adjustment*. Les méthodes utilisées sont différentes selon s'il s'agit de l'évaluation d'une déviation de la sinistralité future (*Liability for Remaining Coverage* - LRC) ou passée (*Liability for Incurred Claims* - LIC). Toutefois, quelle que soit la méthode statistique choisie, le montant du *Risk Adjustment* repose toujours sur l'équation suivante :

$$RA = VaR_{1-\alpha}(X) - CE \tag{1}$$

avec X la variable aléatoire représentant la sinistralité du GCH et $1-\alpha$ le niveau du quantile caractérisant le niveau de tolérance aux risques de l'assureur.

Pour la partie LRC du portefeuille Prévoyance, le *Risk Adjustment* permet de se prémunir d'une déviation des risques "Mortalité", "Incapacité-Invalidité", "Rachat", "Frais généraux" et "Mortalité Catastrophe".

Méthode des taux-choc : Consiste à appliquer un choc adverse à chacun des modules de risques ci-dessus, et à déterminer le montant du *Risk Adjustment* par la différence entre la valorisation choquée des engagements de l'assureur et sa valorisation *Current Estimate*. Le niveau du choc appliqué doit être cohérent avec le niveau de tolérance aux risques de l'assureur : les taux-choc appliqués sont re-calibrés à partir de ceux permettant de calculer la probabilité de ruine bicentenale sous Solvabilité II, afin de correspondre à un niveau $1-\alpha$ inférieur à ceux calibrés au quantile 99.5%. Sous IFRS 17, en plus de la tolérance aux risques $1-\alpha$ propre à l'assureur, il est également possible de tenir-compte de l'horizon d'application h du choc.

$$taux\ choc_{1-\alpha}^{h} = taux\ choc_{99.5\%}^{1an} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \tag{2}$$

Après étude de sensibilité, le montant du *Risk Adjustment* du portefeuille Prévoyance est davantage sensible au choix du niveau $1-\alpha$ du quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ plutôt qu'aux choix de la méthode d'application du choc ou à l'horizon d'application de celui-ci. Les résultats détaillés sont à retrouver dans le Chapitre 1.

En se fondant sur la méthodologie déjà implémentée pour le calcul du SCR sous Solvabilité II, la méthode des taux-choc ne remet pas en doute la juste calibration de ses paramètres, et suppose la normalité de la distribution du *Current Estimate*.

Méthode probabiliste : Consiste à déterminer le montant de *Risk Adjustment* engendré par chaque année de projection $k = 1, ..., 30$, pour un GCH et un risque donné. Appliquée au risque "Mortalité" d'un GCH, le raisonnement est le suivant :

- $X_{i,k}$: variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si l'individu i décède au cours de l'année de projection k ; et 0 sinon.
- $q_{x,k}$: probabilité moyenne de décès des individus du GCH pour l'année de projection k.
- $\overline{CRD}_k$: capital-restant-dû moyen du GCH pour l'année de projection k.

Par conséquent, la variable aléatoire $X_{i,k}$ suit une loi de BERNOULLI de paramètres $\mathscr{B}(q_{x;k})$, avec $\mathbb{E}(X_{i,k}) = q_{x,k}$ et $\mathbb{V}ar(X_{i,k}) = q_{x,k}(1-q_{x,k})$.

Généralisée aux n_k individus du GCH, supposés indépendants et identiquement distribués (de probabilité moyenne de décès $q_{x,k}$ et de capital-restant-dû moyen $\overline{CRD}_k$), la variable aléatoire S_k du montant de sinistres réalisés au titre de l'année de projection k est une somme de variables de BERNOULLI et par conséquent :

$$S_k = \overline{CRD}_k \left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \right) \tag{3}$$

avec $\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \sim \mathscr{B}(n_k; q_{x;k})$, $\mathbb{E}(S_k) = \overline{CRD}_k n_k q_{x,k}$ et $\mathbb{V}ar(S_k) = \overline{CRD}_k^2 n_k q_{x,k}(1-q_{x,k})$

Pour un nombre suffisant d'observations $n_k \geq 30$, par le Théorème Central Limite, S_k

converge vers la loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}(S_k); \mathbb{V}ar(S_k))$. Ainsi pour chaque année de projection k, le montant de *Risk Adjustment* compatible avec le niveau de tolérance aux risques $1-\alpha$ se déduit de l'équation suivante :

$$RA_k = VaR_{1-\alpha}(S_k) - \mathbb{E}(S_k) \tag{4}$$

La somme des RA_k pour les k années de projection permet de déterminer le montant du *Risk Adjustment* associé au risque "Mortalité" pour le GCH étudié.

Bien qu'ayant un faible coût opérationnel, cette méthode repose sur de nombreuses approximations actuarielles et est mal adaptée à la détermination du montant de *Risk Adjustment* au titre du risque "Arrêt-de-travail".

Pour la partie LIC du portefeuille Prévoyance, le *Risk Adjustment* permet à l'assureur de se prémunir d'un sous-provisionnement de la sinistralité passée (déclarée ou non à l'assureur).

Méthode de MACK : Méthode de provisionnement stochastique permettant d'évaluer l'erreur de provisionnement commise par la traditionnelle technique *Chain-Ladder*.

Suite à la construction du triangle des paiements cumulés $C_{i,j}$ (avec i l'année de survenance et j l'année de développement), l'estimateur des facteurs de développement est le suivant :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \tag{5}$$

Le triangle inférieur est alors complété et la réserve à l'ultime déduite :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{\lambda}_k \text{ et } \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1} \text{ et } \hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \tag{6}$$

L'erreur quadratique moyenne de prédiction du modèle définie par MACK s'exprime par la relation suivante :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \mathbb{V}ar[(C_{i,n}|D] + \mathbb{E}[(C_{i,n}|D) - \hat{C}_{i,n}]^2 \tag{7}$$

avec D le triangle supérieur des paiements cumulés.

MACK préconise l'utilisation d'une loi normale ou log-normale pour modéliser la distribution du montant de réserve ultime, d'espérance $\hat{R}$ pour et de variance $\widehat{MSEP}(\hat{R})$. Le montant du *Risk Adjustment* est ensuite déduit de l'équation (1).

En se fondant sur les triangles de liquidations des sinistres, la méthode de MACK est davantage corrélée à la qualité de gestion des sinistres de l'assureur plutôt qu'à sa réelle exposition aux risques, ainsi qu'à la loi de distribution choisie.

Méthode du *Bootstrap* sur MACK : Consiste à approcher la valeur d'un paramètre (ici le montant de réserve à l'ultime) par un grand nombre de simulations stochastiques, grâce

au re-échantillonage des observations. Appliquée à la méthode de MACK, cette technique se fonde sur les résidus de PEARSON définis par la relation suivante :

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \mathbb{E}(C_{i,j+1})}{\mathbb{V}ar(C_{i;j+1})} = \frac{\hat{\lambda}_{i,j}C_{i,j} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j \sqrt{C_{i,j}}} \tag{8}$$

Par un tirage avec remise des résidus de PEARSON, les facteurs de développement individuels sont calculés tels que :

$$\tilde{\lambda}_{i,j} = \tilde{r}_{i,j} \times \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{i,j}}} + \hat{\lambda}_j \tag{9}$$

Pour chaque simulation, l'estimation de la réserve à l'ultime est finalement déduite en remplaçant les paramètres $\hat{\lambda}_k$, $\hat{C}_{i,n}$ et $\hat{R}_i$ des équations (5) et (6) par $\tilde{\lambda}_k$, $\tilde{C}_{i,n}$ et $\tilde{R}_i$ respectivement. Grâce à un grand nombre de simulations, une distribution des réserves à l'ultime est construite, permettant d'en déduire le montant du *Risk Adjustment* par l'équation (1).

Par construction, cette méthode reste sensible au mode de gestion des sinistres de l'assureur plutôt qu'à sa réelle exposition aux risques, tout en s'aliénant de l'adéquation en loi.

Variante de la méthode des taux-choc : Le principe est le même que celui de la méthode des taux-choc présentée pour la partie LRC du bilan, toutefois elle est adaptée à l'évaluation de l'incertitude pesant sur la sinistralité passée. Seuls les sinistres survenus en année Y et non-encore réglés en année N bénéficient d'un montant de *Risk Adjustment* :

$$CE_{Y,N}^{sinistres+frais} = CE_{Y,N-1}^{sinistres+frais} - \text{Règlements}_Y^{sinistres+frais} \tag{10}$$

Dans un second temps, l'évaluation du montant de sinistralité X survenue en année Y dans une situation choquée est évaluée par la relation suivante :

$$VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinistres+frais}(X) = VaR_{1-\alpha,Y,N-1}^{sinistres+frais}(X) - \text{Règlements}_Y^{sinistres+frais} \tag{11}$$

Finalement, le montant de *Risk Adjustment* relatif à l'année de survenance Y est déduit de d'équation suivante :

$$RA_Y = VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinistres+frais}(X) - CE_{Y,N}^{sinistres+frais} \tag{12}$$

Le montant de *Risk Adjustment* calculé par GCH nécessite d'être agrégé sur la totalité du portefeuille Prévoyance afin de bénéficier des potentiels gains de diversification entre les différents modules de risques exposant l'assureur. La corrélation entre ceux-ci doit être mesurée au niveau $1-\alpha$ pour être en adéquation avec le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$: cette dépendance caudale est étudiée grâce à la Théorie des Copules (Chapitre 3). Elle est appliquée sur l'étude de la corrélation entre les risques "Mortalité" et "Frais généraux" et "Mortalité" et "Arrêt-de-travail" : pour chacun de ces deux couples, une copule paramétrique est calibrée. La sélection de la meilleure copule paramétrique s'effectue grâce à plusieurs tests paramétriques (CRAMER-VON MISES / KOLMOGOROV-SMIRNOV / ANDERSON-DARLING) fondés sur la "distance" entre la copule empirique $C_n(.)$ et la copule paramétrique de classe $\mathscr{C}_0$, notée

$C_{\theta_n}(.)$ et calibrée sur $C_n(.)$, telle que :

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \tag{13}$$

Une fois la copule paramétrique sélectionnée, l'évolution de la dépendance locale entre les risques X et Y selon le quantile de niveau $1-\alpha$ est déterminée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_L(X;Y) = \lim_{\alpha\to 0^+} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha)|Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u;u)}{u} \\ \lambda_U(X;Y) = \lim_{\alpha\to 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha)|Y > F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 1^-} \frac{1-2u+C(u;u)}{1-u} \end{cases}$$

Le coefficient de corrélation spécifique au couple étudié est alors connu pour le niveau $1-\alpha$ choisi. S'il est strictement inférieur à $+1$, un gain de diversification est réalisé et le montant global de *Risk Adjustment* à immobiliser est réduit.

Enfin le Chapitre 4 se consacre à la répartition du montant total de *Risk Adjustment* (après prise-en-compte de la diversification) à chacun des GCH afin de déterminer leur signature de profitabilité.

Méthode proportionnelle : Alloue à chaque GCH un montant de *Risk Adjustment* proportionnel à sa propre contribution dans le montant global de *Risk Adjustment*.

$$RA_i^{prop} = \frac{RA_i}{\sum_{j\in n} RA_j} \times RA^{div} \tag{14}$$

🔧 Conserve les bénéfices de diversification mais ne permet pas de connaître l'apport de diversification apporté par le GCH_i.

Méthode marginale : Permet de révéler la contribution marginale du GCH_i vis-à-vis de l'ensemble des autres GCH dans la diversification du montant global de *Risk Adjustment*.

$$RA_i^{marg} = \frac{RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{i\}}}{\sum_{j\in n}\left(RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{j\}}\right)} \times RA^{div} \tag{15}$$

🔧 Respecte la contrainte de "totale allocation" du montant de *Risk Adjustment* mais ne permet pas d'évaluer l'apport du GCH_i vis-à-vis d'un sous-ensemble de GCH.

Méthode de SHAPLEY : Permet de tenir compte de l'apport marginal du GCH_i au sein d'un sous-ensemble de GCH, mais nécessite $2^n - 1$ évaluations de RA.

$$RA_i^{Shap} = \sum_{GCH_i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[RA_S - RA_{S\setminus\{GCH_i\}}\right] \tag{16}$$

🔧 Ne respecte pas le principe d'"allocation cohérente" et par conséquent ne prend pas en compte les gains de diversification.

Méthode d'EULER : Évalue la contribution de chaque GCH en mesurant l'impact marginal infinitésimal d'une cession d'un incrément h issu du GCH_i dans le montant total du *Risk*

Adjustment.

$$RA_i^{Euler} = \frac{\partial c(u)}{\partial u_i} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[VaR_{1-\alpha}(X) - CE(X)] - [VaR_{1-\alpha}(X - hX_i) - CE(X - hX_i)]}{h} \tag{17}$$

Méthode non-atomique et par conséquent non-cohérente avec le besoin d'allocation du montant global de *Risk Adjustment* à l'échelle d'un GCH (unité indivisible).

En définitive, l'application empirique sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP démontre d'une part un résultat similaire entre les méthodes d'allocation Proportionnelle et Marginale pour la répartition du *Risk Adjustment*, et d'autre part une absence de changement de profitabilité d'un GCH suite à l'ajout du montant de *Risk Adjustment* alloué.

Summary Note

The international standard IFRS 17, applicable from 01 January 2023, marks a turning point in the life of insurers since it aims to harmonize the differences in accounting for insurance contracts between countries in order to compare insurance companies.

It calls into question one of the founding principles of the insurance business : risk pooling. The latter will become obsolete since now under IFRS 17 accounting, insurance contracts will be grouped into *"Groups of Homogeneous Contracts"* (GCH) in order to be valued. The three main classes are defined below :

— Profitable contracts with no risk of becoming expensive,

— Originally profitable contracts with a significant risk of becoming expensive.

— Expensive contract from the start.

This *"profitability signature"* follows directly from the valuation of the GCH according to the specificities of IFRS 17 : the liability is valued in three successive blocks.

1. *Current Estimate* : Present value of probable future cash flows (claims, overheads, commissions, profit sharing).
2. *Risk Adjustment* : Additional margin for risks of contract execution flows.
3. *Contractual Service Margin* : Profit not yet recognized by the insurer since it is associated with future services which will be provided by the GCH studied. The CSM runs over the period of coverage of the GCH.

The difference between the assets of the GCH and its liabilities determines its profitability signature : the amount of the premiums written, subtracted from the sum of the *Current Estimate* and the *Risk Adjustment* gives the amount of CSM. If the latter is negative, the GCH is classified as “expensive” and an immediate loss is recognized.

The correct determination of the *Risk Adjustment* thus represents an important stake for the insurer : a large amount of *Risk Adjustment* will protect it from a deviation from the loss experience, but will involve a high cost of capital investment, coupled with a possible immediate recognition of losses for the GCH studied.

Chapter 2 focuses on studying the statistical methods used to determine the amount of the *Risk Adjustment*. The methods used are different depending on whether it is the assessment of a deviation from future (*Liability for Remaining Coverage* - LRC) or past (*Liability for Incurred Claims* - LIC) . However, whatever the statistical method chosen, the amount of the *Risk Adjustment* is always based on the following equation :

$$RA = VaR_{1-\alpha}(X) - CE \tag{18}$$

with X the random variable representing the loss experience of the GCH and $1-\alpha$ the level of the quantile characterizing the level of risk tolerance of the insurer.

For the LRC part of the Provident Fund portfolio, the *Risk Adjustment* provides protection against a deviation from the risks "Mortality", "Incapacity-Invalidity", "Redemption", "General expenses" and "Mortality Catastrophe".

Method of rate-shock : Consists in applying an adverse shock to each of the risk modules above, and determining the amount of the *Risk Adjustment* by the difference between the shocked valuation of the commitments of the insurer and its valuation *Current Estimate*. The level of shock applied must be consistent with the level of risk tolerance of the insurer : the rates-shock applied are recalibrated from those used to calculate the probability of bicentennial ruin under Solvency II, in order to correspond to a $1-\alpha$ level lower than those calibrated with the 99.5% quantile. Under IFRS 17, in addition to the risk tolerance $1-\alpha$ specific to the insurer, it is also possible to take into account the application horizon h of the shock.

$$\textit{rate-shock}^{h}_{1-\alpha} = \textit{rate-shock}^{1an}_{99.5\%} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \tag{19}$$

After a sensitivity study, the amount of the *Risk Adjustment* of the Pensions portfolio is more sensitive to the choice of the level of quantile $1-\alpha$ rather than the choices of the method of application of the shock or the shock's horizon. The detailed results can be found in Chapter 1.

Based on the methodology already implemented for the calculation of the SCR under Solvency II, the rate-shock method does not call into question the correct calibration of its parameters, and assumes the normality of the distribution of *Current Estimate*.

Probabilistic method : Consists in determining the amount of *Risk Adjustment* generated by each projection year $k = 1, ..., 30$, for a GCH and a given risk. Applied to the "Mortality" risk of a GCH, the argumentation is as follows :

- $X_{i,k}$: random variable which takes the value $+1$ if the individual i dies during the projection year k ; and 0 otherwise.
- $q_{x,k}$: average probability of death for GCH individuals for the projection year k.
- $\overline{CRD}_k$: GCH average remaining capital owed for the projection year k.

Consequently, the random variable $X_{i,k}$ follows a BERNOULLI law of parameters $\mathscr{B}(q_{x;k})$, with $\mathbb{E}(X_{i,k}) = q_{x,k}$ and $\mathbb{V}ar(X_{i,k}) = q_{x,k}(1-q_{x,k})$.

Generalized to the n_k individuals of the GCH, assumed to be independent and identically distributed (of average probability of death $q_{x,k}$ and average remaining capital- $\overline{CRD}_k$), the random variable S_k of the amount of claims realised for the projection year k is a sum of BERNOULLI variables and therefore :

$$S_k = \overline{CRD}_k \left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \right) \tag{20}$$

with $\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \sim \mathscr{B}(n_k; q_{x;k})$, $\mathbb{E}(S_k) = \overline{CRD}_k n_k q_{x,k}$ and $\mathbb{V}ar(S_k) = \overline{CRD}_k^2 n_k q_{x,k}(1-q_{x,k})$

For a sufficient number of observations $n_k \geq 30$, by the Central Limit Theorem, S_k converges to the normal law $\mathcal{N}\left(\mathbb{E}(S_k); \mathbb{V}ar(S_k)\right)$. Thus for each projection year k, the amount of *Risk Adjustment* compatible with the risk tolerance level $1-\alpha$ is deduced from the following equation :

$$RA_k = VaR_{1-\alpha}(S_k) - \mathbb{E}(S_k) \tag{21}$$

The sum of RA_k for the k projection years makes it possible to determine the amount of the *Risk Adjustment* associated with the "Mortality" risk for the GCH studied.

Although having a low operational cost, this method is based on numerous actuarial approximations and is ill-suited for determining the amount of *Risk Adjustment* for the "Work stoppage" risk.

For the LIC part of the Provident Fund portfolio, the *Risk Adjustment* allows the insurer to protect itself from under-provisioning of past claims (declared or not to the insurer).

MACK method : Stochastic provisioning method allowing to evaluate the provisioning error made by the traditional *Chain-Ladder* technique.

Following the construction of the triangle of cumulative payments $C_{i,j}$ (with i the year of occurrence and j the year of development), the estimator of the development factors is as follows :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \tag{22}$$

The lower triangle is then completed and the ultimate reserve deducted :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{\lambda}_k \text{ and } \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1} \text{ and } \hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \tag{23}$$

The mean square prediction error of the model defined by MACK is expressed by the following relation :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \mathbb{V}ar[(C_{i,n}|D] + \mathbb{E}[(C_{i,n}|D) - \hat{C}_{i,n}]^2 \tag{24}$$

with D the upper triangle of cumulative payments.

MACK recommends the use of a normal or log-normal law to model the distribution of the amount of ultimate reserve, with expectation $\hat{R}$ and variance $\widehat{MSEP}(\hat{R})$. The amount of the *Risk Adjustment* is then deducted from the equation (18).

Based on the claims settlement triangles, the MACK method is more correlated to the quality of claims management of the insurer rather than to its actual exposure to risks, as well as to the distribution law chosen.

Method of *Bootstrap* on MACK : Consists of approaching the value of a parameter (here the amount of the ultimate reserve) by a large number of stochastic simulations, thanks to

the resampling of observations. Applied to the MACK method, this technique is based on the PEARSON residues defined by the following relation :

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \mathbb{E}(C_{i,j+1})}{\mathbb{V}ar(C_{i;j+1})} = \frac{\hat{\lambda}_{i,j}C_{i,j} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j \sqrt{C_{i,j}}} \tag{25}$$

By a draw with replacement of PEARSON residues, the individual development factors are calculated such as :

$$\tilde{\lambda}_{i,j} = \tilde{r}_{i,j} \times \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{i,j}}} + \hat{\lambda}_j \tag{26}$$

For each simulation, the estimate of the ultimate reserve is finally deduced by replacing the parameters $\hat{\lambda}_k$, $\hat{C}_{i,n}$ and $\hat{R}_i$ of the equations (22) and (23) by $\tilde{\lambda}_k$, $\tilde{C}_{i,n}$ and $\tilde{R}_i$ respectively. Thanks to a large number of simulations, a distribution of reserves to the ultimate is constructed, making it possible to deduce the amount of the *Risk Adjustment* by the equation (18).

By construction, this method remains sensitive to the insurer's claim management rather than its actual risk exposure, while alienating itself from compliance with the law.

Variant of the rate-shock method : The principle is the same as that of the rate-shock method presented for the LRC part of the balance sheet, however it is suitable for the evaluation of the uncertainty weighing on past claims. Only claims occurring in year Y and not yet settled in year N benefit from an amount of *Risk Adjustment* :

$$CE_{Y,N}^{sinister+overheads} = CE_{Y,N-1}^{sinister+overheads} - \text{Settlement}_{Y}^{sinister+overheads} \tag{27}$$

In a second step, the evaluation of the amount of loss X occurring in year Y in a shocked situation is evaluated by the following relation :

$$VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinister+overheads}(X) = VaR_{1-\alpha,Y,N-1}^{sinister+overheads}(X) - \text{Settlement}_{Y}^{sinister+overheads} \tag{28}$$

Finally, the amount of *Risk Adjustment* relating to the year of occurrence Y is deducted from the following equation :

$$RA_Y = VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinister+overheads}(X) - CE_{Y,N}^{sinister+overheads} \tag{29}$$

The amount of *Risk Adjustment* calculated by GCH needs to be aggregated over the entire Provident Fund portfolio in order to benefit from the potential diversification gains between the different risk modules exposing the insurer. The correlation between these must be measured at the level $1-\alpha$ to be in adequacy with the quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$: this caudal dependence is studied thanks to the Theory of Copulas (Chapter 3). It is applied to the study of the correlation between the risks "Mortality" and "Overheads" and "Mortality" and "Work stoppage" : for each of these two couples, a parametric copula is calibrated. The selection of the best parametric copula is done through several parametric tests (CRAMER-VON MISES / KOLMOGOROV-SMIRNOV / ANDERSON-DARLING) based on the "distance" between the empirical copula $C_n(.)$ and the copula parametric class $\mathscr{C}_0$ calibrated on $C_n(.)$, called

$C_{\theta_n}(.)$ such as :

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \tag{30}$$

Once the parametric copula has been selected, the evolution of the local dependence between the risks X and Y according to the quantile of level $1-\alpha$ is determined by the following relationships :

$$\begin{cases} \lambda_L(X;Y) = \lim_{\alpha\to 0^+} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha)|Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u;u)}{u} \\ \lambda_U(X;Y) = \lim_{\alpha\to 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha)|Y > F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 1^-} \frac{1-2u+C(u;u)}{1-u} \end{cases}$$

The correlation coefficient specific to the studied couple is then known for the level $1-\alpha$ chosen. If it is strictly less than $+1$, a diversification gain is realized and the overall amount of *Risk Adjustment* to be immobilized is reduced.

Finally, Chapter 4 is devoted to the distribution of the total amount of *Risk Adjustment* (after taking diversification into account) to each of the GCHs in order to determine their profitability signature.

Proportional method : Allocates to each GCH an amount of *Risk Adjustment* proportional to its own contribution in the overall amount of *Risk Adjustment*.

$$RA_i^{prop} = \frac{RA_i}{\sum_{j\in n} RA_j} \times RA^{div} \tag{31}$$

🔧 Keeps the diversification benefits but does not allow to know the diversification contribution brought by the GCH_i.

Marginal method : Used to reveal the marginal contribution of GCH_i regarding all of the other GCHs in the diversification of the overall amount of *Risk Adjustment*.

$$RA_i^{marg} = \frac{RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{i\}}}{\sum_{j\in n}\left(RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{j\}}\right)} \times RA^{div} \tag{32}$$

🔧 Respects the constraint of "full allocation" of the amount of *Risk Adjustment* but does not allow to evaluate the contribution of GCH_i regarding a subset of GCH.

SHAPLEY method : Allows to take into account the marginal contribution of GCH_i within a subset of GCH, but requires $2^n - 1$ evaluations of *Risk Adjustment*.

$$RA_i^{Shap} = \sum_{GCH_i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[RA_S - RA_{S\setminus\{GCH_i\}}\right] \tag{33}$$

Does not respect the principle of "consistent allocation" and therefore does not take into account diversification gains.

EULER method : Evaluates the contribution of each GCH by measuring the infinitesimal marginal impact of a sale of an increment h from the GCH_i in the total amount of the *Risk*

Adjustment .

$$RA_i^{Euler} = \frac{\partial c(u)}{\partial u_i} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[VaR_{1-\alpha}(X) - CE(X)] - [VaR_{1-\alpha}(X - hX_i) - CE(X - hX_i)]}{h} \tag{34}$$

🔧 Non-atomic method and therefore non-consistent with the need to allocate the global amount of *Risk Adjustment* at the scale of a GCH (indivisible unit).

Ultimately, the empirical application on the SOGECAP Provident Fund portfolio shows on the one hand a similar result between the proportional and marginal allocation methods for the distribution of *Risk Adjustment*, and on the other hand an absence of change profitability of a GCH following the allocation of the amount of *Risk Adjustment*.

Chapitre 1

La Norme IFRS 17

Sommaire

1.1 La recette IFRS 17 13
1.1.1 Un gâteau à plusieurs couches 13
1.1.2 Le choix des ingrédients 14
1.1.3 La sélection du moule 16
1.1.4 Les emporte-pièces du modèle BBA 16
1.1.5 L'actualisation des composantes du passif 20
1.2 La consommation sous IFRS 17 21
1.2.1 Le produit étudié 21
1.2.2 Création du gâteau 22
1.2.3 Consommation 23
1.3 Conclusion 32

1.1 La recette IFRS 17

1.1.1 Un gâteau à plusieurs couches

La norme internationale d'information financière (IFRS) 17 est la résultante d'un long parcours de discussions ayant débuté il y a une vingtaine d'années. Publiée par l'IASB le 18 mai 2017 [1], elle devrait s'appliquer à partir du 01 janvier 2023 pour tous les exercices ouverts à compter du 01 janvier 2022. Elle prend ainsi la succession de la norme IFRS 4 publiée en 2004.

La norme IFRS 17 est la première véritable norme IFRS qui vise spécifiquement les contrats d'assurance : en Europe, elle s'appliquera obligatoirement pour les assureurs côtés ou émettant de la dette cotée. Son objectif est triple :

— *« Réduire les différences d'évaluation et de comptabilisation des contrats d'assurance entre pays ;*

— *Valoriser les options et garanties des contrats d'assurance ;*

— *Favoriser la cohérence avec les autres normes IFRS ».* [Source : institutdesactuaires.com]

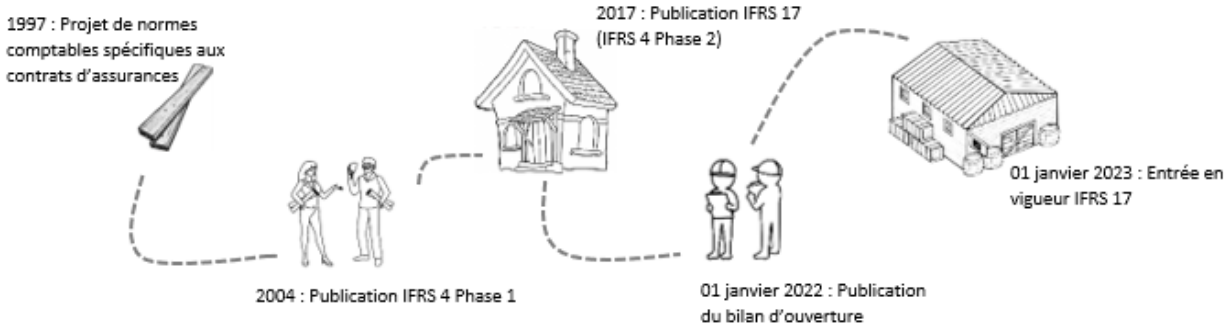


FIGURE 1.1 – Mise-en-place de la norme IFRS 17

1.1.2 Le choix des ingrédients

Une particularité notoire de la norme IFRS 17 concerne la segmentation du portefeuille. En effet, dès leur mise-en-place, les contrats d'assurances doivent être agrégés par « Groupes de Contrats Homogènes » (notés GCH par la suite). Cette agrégation repose sur deux principes :

— Tous les calculs découlant de la norme IFRS 17 seront réalisés par groupes de contrats homogènes.

— Une fois agrégés ensemble, les contrats ne pourront plus changer de groupe.

Un « groupe de contrats homogènes » est caractérisé par des contrats ayant été souscrits la même année (*génération*), exposés à des risques similaires et gérés ensemble.

La norme nécessite d'être précisée :

1. **Génération / Cohorte** : Chaque GCH doit avoir une amplitude maximale d'un an, mais sans obligation de coïncider avec les années civiles.
2. **Risques similaires** : Un GCH ne doit pas nécessairement contenir un unique risque commun à tous les contrats. Deux produits différents proposant tout deux une garantie décès et une garantie arrêt de travail peuvent être regroupés ensemble, il n'est pas obligatoire de dissocier les différentes garanties au sein de ces deux produits.

   Toutefois en pratique, il peut être plus facile de dissocier un même produit (*Ex : Emprunteur*) en plusieurs sous-produits correspondant chacun à une garantie (*Ex : Décès, Arrêt de travail*) afin de les associer avec un différent produit (*Ex :Santé*) disposant de la même garantie (*Ex :Arrêt de travail*).
3. **Contrats gérés ensemble** : Plusieurs interrogations apparaissent : la norme se réfère-t-elle au positionnement des contrats au sein du même portefeuille d'actifs financiers, ou bien fait-elle allusion au délégataire ou au mode de gestion des sinistres, ou bien encore à l'homogénéité des contrats au niveau de leur tarification ?

L'homogénéité doit s'appliquer également à la profitabilité du contrat, qui est définie dès la première comptabilisation par les trois catégories suivantes :

— Contrats onéreux dès l'origine,

— Contrats non-onéreux à l'origine avec un risque significatif de le devenir,

— Contrats profitables ne présentant pas de risque significatif de devenir onéreux.

La *signature de profitabilité* d'un GCH peut être déterminée par son ratio Sinistres-à-Primes. Pour ce faire, on projette les flux futurs estimés de primes à recevoir, de sinistres à payer, de frais de gestion à subir, de commissions à reverser sous des hypothèses actuarielles jusqu'à extinction du GCH. L'actualisation de ces *cashflow* permet d'estimer le ratio Sinistres-à-Primes.

On répète cette procédure mais cette fois-ci en choquant les hypothèses actuarielles défavorablement pour l'assureur. Le nouveau ratio Sinistre à Prime choqué permet de conclure sur la signature de profitabilité du GCH.

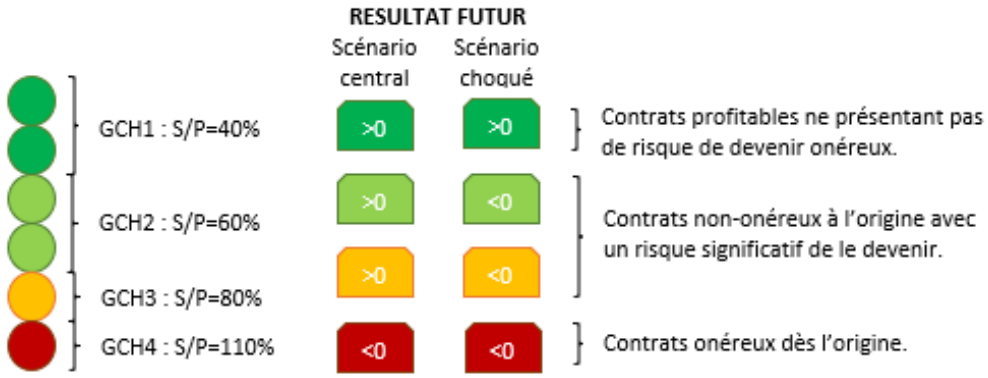


FIGURE 1.2 – Création des GCH sous IFRS 17.

La maille des calculs sous IFRS 17 sera ainsi la suivante : génération × portefeuille × rentabilité.

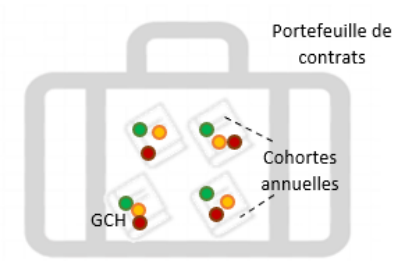


FIGURE 1.3 – Maille de calculs IFRS 17

Deux remarques peuvent être émises :

— D'une part, la fine segmentation des portefeuilles et la granularité des calculs sont une source de complexité pour les assureurs. Elles diffèrent de la segmentation existante sous Solvabilité II, et demanderont une adaptation des modèles actuariels existants, une excellente gestion des données et des capacités de calculs accrues au sein des organismes d'assurance.

— D'autre part, la fine segmentation des contrats met en péril l'un des principes fondamentaux de l'activité assurantielle : la mutualisation des risques, qui permettait aux contrats profitables de compenser les pertes des contrats non-profitables.

1.1.3 La sélection du moule

La norme IFRS 17 propose trois modèles différents pour valoriser le passif des sociétés d'assurance : le modèle BBA (*Bulding Block Approach*), PAA (*Premium Allocation Approach*) et VFA (*Variable Fee Approach*).

Le choix du modèle est laissé à l'assureur, qui doit néanmoins respecter le champ d'application des modèles. Dans ce mémoire nous développerons exclusivement le principe du modèle général (BBA) car c'est celui retenu par l'activité Prévoyance de SOGECAP. Notons que le modèle PAA est la forme simplifiée du modèle BBA tandis que le modèle VFA permet de tenir compte de la participation aux bénéfices directe qu'exigent les contrats d'épargne.

1.1.4 Les emporte-pièces du modèle BBA

Pour chaque GCH, le passif d'un assureur sous IFRS 17 se découpe en deux parties distinctes : une partie relative à la sinistralité passée (*Liability for Incurred Claims* - LIC) et une partie relative à la sinistralité future (*Liability for Remaining Coverage* – LRC).

Sous le modèle BBA, les parties LIC et LRC sont décomposées en plusieurs sous-blocs distincts, dont leur somme est égale au montant de primes émises par l'assureur.

1.1.4.1 Le *Current Estimate*

Le *Current Estimate* correspond à la valeur actualisée des flux futurs probables.

✍ IFRS 17 § 33

"Les estimations de flux de trésorerie futurs doivent :

a) *Intégrer avec objectivité l'ensemble des informations raisonnables et justifiables. Pour ce faire, l'entité doit calculer selon les probabilités la moyenne pondérée de l'ensemble des résultats possibles ;*

b) *Être corroborées avec les prix de marché observables pour les instruments financiers ayant les caractéristiques des flux de trésorerie similaires à celles des contrats d'assurance (par exemple, échéancier, monnaie, liquidité) ;*

c) *Refléter les conditions existant à la date d'évaluation ;*

d) *Être explicites."*

Le *Current Estimate* intervient à la fois dans la partie LIC et LRC du passif de l'assureur ; son mode de détermination sera défini de façon différente dans chacune de ces deux parties.

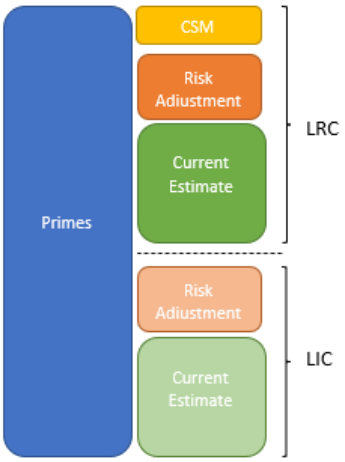


FIGURE 1.4 – Structure IFRS 17.

1. **La partie LRC :**

L'assureur doit, pour chaque groupe de contrats homogènes (définis précédemment), donner une estimation explicite, objective et pondérée par le temps de la valeur actuelle des flux de trésorerie négatifs futurs (sinistres, frais, commissions) diminués des flux de trésorerie positifs futurs (primes) qui découleront des contrats d'assurance détenus par l'assureur.

Pour cette estimation, il est nécessaire de définir la *frontière des contrats* pour délimiter les flux de trésorerie futurs à prendre en compte de ceux à exclure.

La frontière des contrats inclut les flux associés aux primes futures lorsque d'une part l'assureur à la possibilité de contraindre l'assuré à payer une prime, et d'autre part lorsque l'assureur porte l'obligation de fournir une couverture d'assurance à ses assurés. Cette obligation de couverture d'assurance cesse à partir du moment où l'assureur peut réévaluer les risques du contrat d'assurance de l'assuré. Cette frontière des contrats est plus fine que celle définie par Solvabilité II, car la maille de révision des risques est permise au niveau « contrat » sous IFRS 17, contrairement à une maille « produit » sous Solvabilité II.

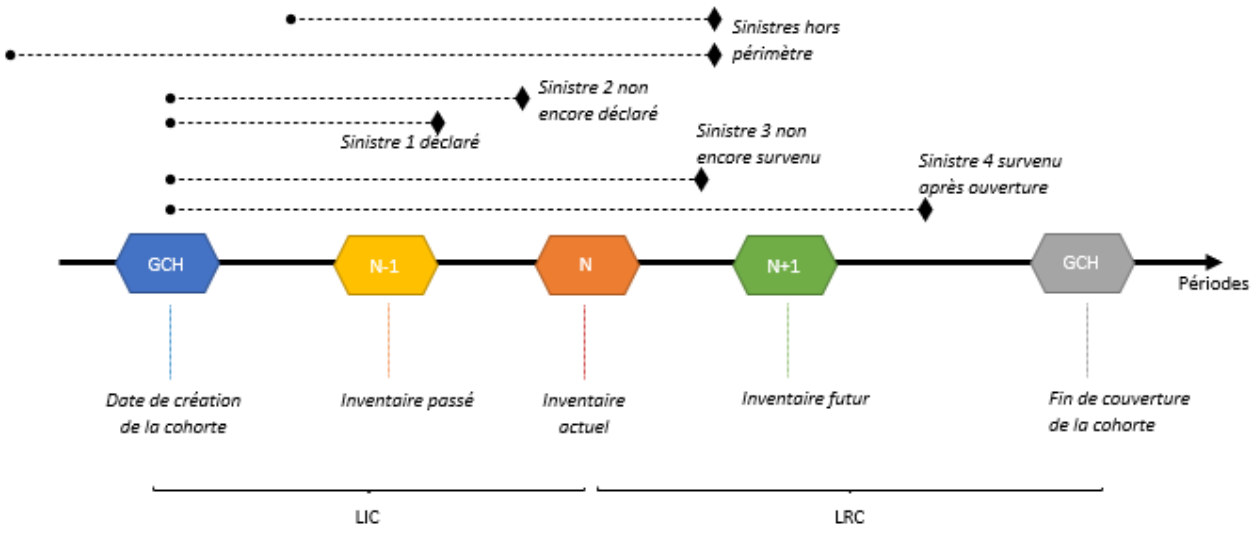


FIGURE 1.5 – Frontière des contrats sous IFRS 17.

Dans l'illustration précédente, les sinistres 1 et 2 entrent dans la frontière des contrats et seront inclus dans le *Current Estimate* LIC tandis que les sinistres 3 et 4 seront inclus dans le *Current Estimate* LRC.

2. **La partie LIC :**

Le *Current Estimate* doit couvrir le paiement futur des frais et sinistres s'étant déjà réalisés, en incluant ceux qui se sont produits mais n'ont pas encore été déclarés à l'assureur.

La méthode des triangles de liquidation est très populaire pour déterminer le *Best Estimate* de la sinistralité passée sous Solvabilité II de part sa facilité d'exécution ; son adaptation pour la détermination du *Current Estimate* LIC, en tenant compte de la granularité plus fine des contrats sous IFRS 17, sera étudiée dans le Chapitre 2.

1.1.4.2 Le *Risk Adjustment*

Le *Risk Adjustment* est défini comme étant la marge supplémentaire pour risques des flux d'exécution des contrats.

✍ IFRS 17 § 37

"L'entité doit ajuster les estimations de la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs pour refléter l'indemnité qu'elle exige pour la prise en charge de l'incertitude entourant le montant et l'échéancier des flux de trésorerie qui est engendrée par le risque non financier".

La norme IFRS 17 ne préconise pas de méthodologie pour déterminer le montant du *Risk Adjustment*, mais indique les principes qu'il doit respecter :

✍ IFRS 17 § 91

1. *"Le Risk Adjustment est plus fortement impacté par l'intensité du risque que par sa fréquence.*
2. *Le Risk Adjustment croît avec la durée du risque.*
3. *Le Risk Adjustment croît avec la volatilité du risque.*
4. *Le Risk Adjustement croît avec l'incertitude sur les risques mesurés."*

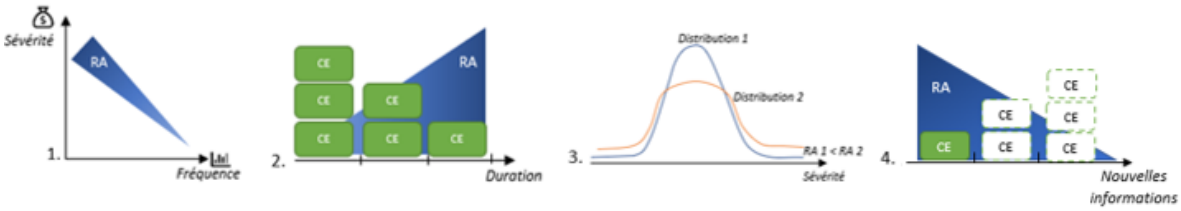


FIGURE 1.6 – Caractéristiques du *Risk Adjustment*.

De fait, la fonction du *Risk Adjustment* est très proche de celle de la *Risk Margin* sous Solvabilité II, dans la mesure où elle caractérise la compensation qu'exige l'assureur pour supporter l'incertitude des flux de trésorerie futurs, hors risques financiers (évolution de la sinistralité, des frais, du comportement des assurés...).

En conséquence de l'absence de méthodologie préconisée par la norme IFRS 17, l'entité doit indiquer la méthode utilisée pour déterminer le montant de *Risk Adjustment* ainsi que le niveau de confiance, traduit par un quantile équivalent, associé à ce montant.

Enfin, sous IFRS 17 la somme des montants du *Current Estimate* et du *Risk Adjustment* constitue le *Fulfilment CashFlow*.

📖 Le fil d'Ariane du mémoire

Le *Risk Adjustment* est présent dans les deux composantes LIC et LRC du passif de l'assureur. Une grande liberté de choix de la méthode de détermination du *Risk Adjustment* est laissée à l'assureur, mais en réalité l'utilisation d'une unique méthode de détermination du *Risk Adjustement* communes aux deux parties LIC et LRC s'avère périlleuse. Ces méthodes seront développées dans le Chapitre 2.

1.1.4.3 La *Contractual Service Margin*

✍ IFRS 17 §38

"La marge sur services contractuels est une composante de l'actif ou du passif afférent au groupe de contrats d'assurance qui représente le profit non-acquis que l'entité comptabilisera à mesure qu'elle fournira les services."

La CSM correspond au bénéfice non-encore reconnu par l'assureur car celui-ci est associé aux services futurs qui seront fournis pour un GCH donné. Elle s'écoule sur la période de couverture du GCH, au fil d'une unité de couverture (*coverage unit*) à définir par l'assureur, qui doit être cohérente avec la notion de *"service rendu au cours de la période"*.

A la création du GCH, le montant initial de CSM est la différence entre le montant des primes d'assurance à la souscription d'une part, et le montant du *Fulfilment Cashflow* d'autre part.

— Si cette différence est positive, la CSM est dotée et sera reconnue au fil du temps, car aucun profit ne doit être reconnu à l'origine du contrat.

— Si cette différence est négative, la CSM est nulle et la perte est immédiatement reconnue en compte-de-résultat par prudence comptable. Le contrat est dit onéreux.

Il est à noter que la partie LIC du passif de l'assureur ne possède pas de CSM puisque cette dernière représente le profit résultant des *cashflow* futurs ; elle n'est donc pas allouée à la sinistralité passée.

1.1.5 L'actualisation des composantes du passif

Les trois composantes précédentes (*Current Estimate*, *Risk Adjustment*, CSM) correspondent à la valeur actualisée de flux de trésorerie futurs ; par conséquent il est nécessaire de construire une courbe des taux pour procéder à l'actualisation de celles-ci.

✍ IFRS 17 § 36

"L'entité doit ajuster les estimations de flux de trésorerie futurs afin de refléter la valeur-temps de l'argent et les risques financiers liés à ces flux de trésorerie, dans la mesure où ces risques n'ont pas été pris en compte dans les estimations de flux de trésorerie. Les taux d'actualisation appliqués aux estimations de flux de trésorerie futurs décrites au paragraphe 33 doivent :

a) *refléter la valeur-temps de l'argent, les caractéristiques des flux de trésorerie et les caractéristiques de liquidité des contrats d'assurance ;*

b) *cadrer avec les prix de marché courants observables (s'il en existe) d'instruments financiers dont les flux de trésorerie ont des caractéristiques qui correspondent à celles des contrats d'assurance du point-de-vue, par exemple, de l'échéancier, de la monnaie ou de la liquidité ;*

c) *exclure l'effet des facteurs qui influent sur ces prix de marché observables, mais pas sur les flux de trésorerie futurs des contrats d'assurance."*

Deux méthodes de construction de la courbe d'actualisation sont préconisées :

— **Approche *Top-down* :** la construction de la courbe d'actualisation est fondée sur le rendement attendu d'un portefeuille d'actifs financiers, corrigé des éléments non-rattachables à des contrats d'assurance (exemple : prime de risque des placements détenus, écart de duration, ...).

— **Approche *Bottom-up* :** la construction de la courbe d'actualisation est fondée sur une courbe des taux sans risque, à laquelle on ajoute des facteurs pertinents pour représenter la moindre liquidité des contrats d'assurance comparativement aux instruments financiers (exemple : prime d'illiquidité).

Bien qu'en théorie ces deux approches doivent aboutir au même résultat, c'est rarement vérifié en pratique en raison de nombreux paramètres différenciant les contrats d'assurance des instruments financiers cotés. La norme IFRS 17 ne privilégie aucune des deux approches et ne mentionne aucune obligation de réconciliation de celles-ci.

La pratique de place des assureurs s'oriente vers le choix de l'approche *Bottom-up*.

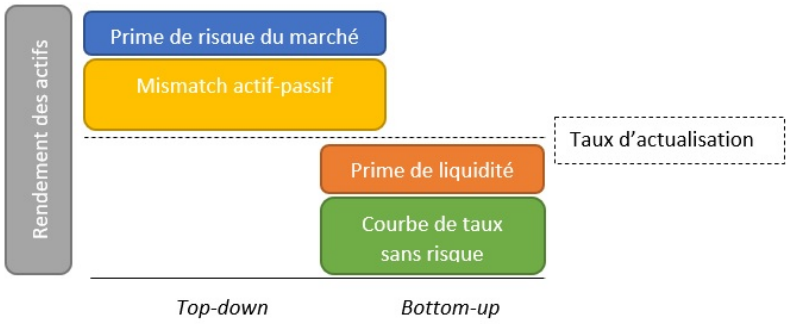


FIGURE 1.7 – Taux d'actualisation sous IFRS 17.

1.2 La consommation sous IFRS 17

Le meilleur moyen de comprendre le fonctionnement de la norme IFRS 17 sur le bilan d'un assureur est de l'appliquer sur un produit fictif du portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

1.2.1 Le produit étudié

En raison de l'activité bancaire de SOCIETE GENERALE, l'un des produits phare de SOGECAP est un produit Emprunteur du portefeuille Prévoyance. Par principe de confidentialité, l'exemple d'application IFRS 17 développé ci-après sera appliqué sur un produit emprunteur fictif reproduisant les caractéristiques du produit Emprunteur SOGECAP.

Le principe d'une assurance-emprunteur est de garantir au créancier le paiement des mensualités restantes de l'emprunteur si ce dernier venait à décéder (*garantie décès*), ou à subir un accident de la vie (*garantie incapacité, invalidité*). Elle est souvent la condition *sine qua none* à l'obtention d'un prêt bancaire.

Les caractéristiques du produit Emprunteur sont les suivantes :

— Capital-restant-dû du GCH au 31/12/N : 10 000
— Duration de couverture du GCH : 5 ans
— Prime d'assurance : 10% du capital-restant-dû
— S/P (incluant les garanties "Décès" et "Arrêt-de-travail") : 60%

L'initialisation du GCH est la suivante :

Années *(au 31/12)*	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	Total
Capital-Restant-dû	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000	0	-
Prime d'assurance reçue	1 000	800	600	400	200	0	3 000
Sinistralité prévue (S/P = 60%)	600	480	360	240	120	0	1800

La décroissance du capital restant dû du GHC tient compte du remboursement des mensualités par les emprunteurs au fil des périodes et des rachats potentiels.

1.2.2 Création du gâteau

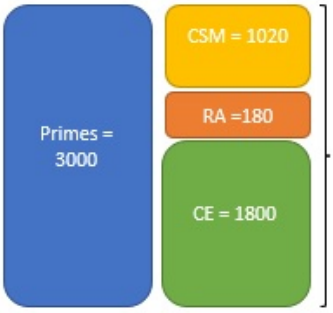
L'application de la méthodologie IFRS 17 décrite dans la partie précédente permet de construire le bilan initial du produit Emprunteur du GHC sélectionné. Pour le déterminer, les flux futurs de trésorerie attendus sont successivement planifiés :

Vision au 01/01/N	Contrat à l'origine					
Projection estimée (31/12)	*N*	*N+1*	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Prime	*1 000*	*800*	*600*	*400*	*200*	*3 000*
Sinistre *(CE)*	*600*	*480*	*360*	*240*	*120*	*1 800*
RA	*60*	*48*	*36*	*24*	*12*	*180*
Formation *CSM*	*340*	*272*	*204*	*136*	*68*	*1 020*
Formation résultat	*400*	*320*	*240*	*160*	*80*	*1 200*

Ce GCH du produit Emprunteur prévoit à terme de collecter 3 000 de primes, de payer 1 800 de sinistres, et d'ajouter une marge de prudence de 10% du *Current Estimate*, soit 180.

Le fil d'Ariane du mémoire

La marge de prudence sous IFRS 17, nommée *Risk Adjustment*, permet à l'assureur de faire face à une déviation de la sinistralité par rapport aux hypothèses sélectionnées dans le calcul du *Current Estimate*. Néanmoins *in fine*, si l'actuaire a calibré justement les hypothèses nécessaires au *Current Estimate*, il n'y a pas de raison que l'assureur consomme sa marge de prudence, qui lui revient alors sous forme de résultat. Le Chapitre 2 sera consacrée à sa détermination.



Bilan prévisionnel du CGH au 01/01/N

La CSM est construite à l'origine par la différence entre le montant de primes perçues de la période et la somme du *Current Estimate* des sinistres, frais et commissions et du *Risk Adjustment*.

Le résultat prévu à l'issu de la durée de vie du produit est la somme de la CSM et du *Risk Adjustement*.

Le compte de résultat provisionnel sous IFRS 17 n'est pas formellement défini mais doit comporter *a minima* trois rubriques :

1. ***Insurance Revenue*** : Montant que l'assureur s'attend à recevoir, en rémunération de la fourniture des services attachés au contrat sur la période. Il recouvre :
   - L'allocation de la CSM,
   - Le relâchement du *Risk Adjustment*,
   - Les sinistres survenus et les frais de l'année en vision attendue, c'est-à-dire le montant auquel ils étaient mesurés à la fin de la période précédente,
   - L'amortissement des frais d'acquisition.
2. ***Insurance Service Expense*** : Charges d'assurance liées à la fourniture du service sur la période, comprenant :
   - Les sinistres et frais de la période en vision réalisée,
   - Les pertes et annulations de pertes sur contrats onéreux,
   - L'amortissement des frais d'acquisition.
3. ***Insurance Finance Expense*** : Charges financières liées aux passifs d'assurance, comprenant :
   - L'effet de la désactualisation sur un an,
   - L'effet du changement de taux d'actualisation.

Le fil d'Ariane du mémoire

Le poste *Insurance Finance Expense* ne sera pas développé dans la suite de ce mémoire en raison de son faible lien avec le *Risk Adjustment*. On suppose de ce fait un taux d'actualisation nul dans la suite de l'exemple.

1.2.3 Consommation

Il s'agit dans cette section d'illustrer la vie du GCH du produit Emprunteur sous la comptabilisation IFRS 17 jusqu'à son extinction. Pour ce faire, deux points sont à définir :

1. Méthode d'allocation de la CSM au cours des périodes,
2. Mise-à-jour par récurrence du montant de CSM à chaque fin de période.

En premier lieu, l'allocation de la CSM au fil du temps doit être proportionnelle *"aux services rendus par l'assureur sur la période"*. La méthode des *"unités de couverture"* permet d'estimer la quantité de services fournis et la durée de couverture restante. Dans cet exemple-ci, l'unité de couverture est le montant de capital restant dû. L'allocation de la CSM pour l'année i est définie par la formule suivante :

$$\text{Allocation CSM}_i = \frac{\text{Capital restant dû}_i}{\sum_{j=i}^{n-i+1} \text{Capital restant dû}_j} \tag{1.1}$$

Période	N	N+1	N+2	N+3	N+4	Total
Capital restant dû	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000	30 000
Allocation CSM$_i$ *(en % du CRD)*	33%	27%	20%	13%	7%	100%

En second lieu, la mise-à-jour de la CSM doit tenir compte de la révision des hypothèses actuarielles pour l'estimation des flux de trésorerie futurs. Elle est calculée par récurrence selon le cheminement suivant :

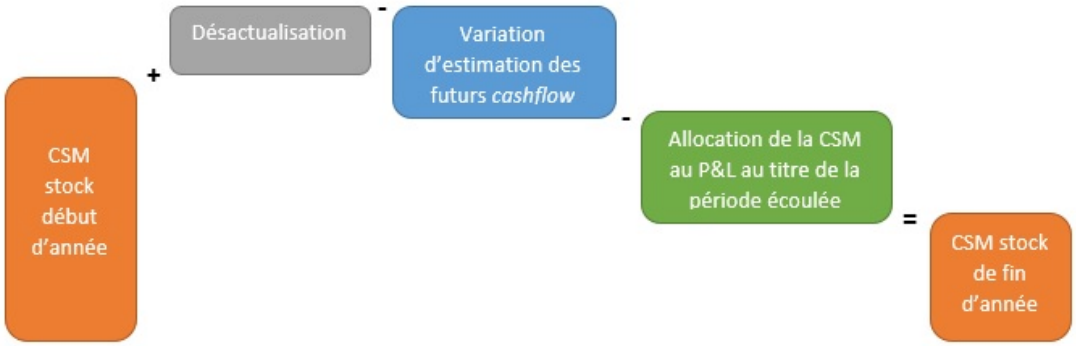


FIGURE 1.8 – Consommation de la CSM.

La CSM joue le rôle d'absorbeur de choc en cas de variations des *fulfilment cashflow*.

Deux points impactant la CSM sont à souligner :

— La courbe des taux, utile à l'actualisation des *cashflow* à chaque exercice comptable, est figée pour chaque GCH à sa valorisation à l'origine dans le modèle général. De ce fait, tout changement de l'environnement économique au cours de la vie du GCH ne viendra pas impacter la CSM, mais sera constatée dans le poste *"Investment result"* du compte-de-résultat l'année où la révision survient.

— En revanche, en cas de variations des hypothèses non-économiques (évolution de la sinistralité, des frais, du comportement des assurés, ...), la CSM sera impactée via les variations du *Current Estimate* mesuré au taux d'actualisation à l'origine.

Compte-tenu des hypothèses posées précédemment, le compte-de-résultat prévisionnel sur toute la durée de vie du GCH est le suivant :

Vision au 01/01/N	Contrat à l'origine					
Projection estimée (31/12)	*N*	*N+1*	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Income Statement						
INSURANCE SERVICE RESULT	*400*	*320*	*240*	*160*	*80*	*1 200*
Insurance Revenue	*1000*	*800*	*600*	*400*	*200*	*3 000*
Allocation CSM	*340*	*272*	*204*	*136*	*68*	*1 020*
Release of claims	*600*	*480*	*360*	*240*	*120*	*1 800*
Release of RA	*60*	*48*	*36*	*24*	*12*	*180*
Insurance Expense	*-600*	*-480*	*-360*	*-240*	*-120*	*−1 800*
Payment of claims	*-600*	*-480*	*-360*	*-240*	*-120*	*−1 800*
Loss component	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
Experience adjustment	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
INVESTMENT RESULT	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
NET INCOME	*400*	*320*	*240*	*160*	*80*	*1 200*

Afin d'illustrer les interactions entre les éléments du passif du bilan d'un assureur sous IFRS 17, quatre scenarii différents vont être commentés ci-après.

1.2.3.1 Scénario 1 : Central

Le premier scénario illustré est le scenario central : l'expérience correspond en tout point aux hypothèses qui ont été émises à la souscription. Pour construire le compte-de-résultat au 31/12/N, les étapes suivantes sont nécessaires :

1. Désactualisation au taux d'origine : la désactualisation est nulle en raison de l'hypothèse de nullité du taux d'actualisation à l'origine.
2. Réévaluation de la sinistralité pour les périodes futures : ici, la sinistralité réelle de la période correspond à la sinistralité anticipée au début de la période donc aucune révision des hypothèses futures n'est réalisée.

   Δ Estimation futurs *cashflow* d'exécution = Δ*fulfilment cashflow* $-\Delta$Primes à recevoir

3. Calcul de la CSM en stock en fin de période :

+ CSM en stock au 01/01/N	1 020
+ Désactualisation	+0
$-\Delta$ Estimation futurs *cashflow* d'exécution	-0
= CSM en stock au 31/12/N	=1 020

4. Détermination de la nouvelle chronique d'allocation de la CSM sur les périodes restantes au GCH.

Périodes *(au 01/01)*	N	N+1	N+2	N+3	N+4	Total
Capital restant dû	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000	30 000
Allocation CSM_i *(en % du CRD)*	33%	27%	20%	13%	7%	100%
Allocation CSM_i	340	272	204	136	68	1 020

Le compte-de-résultat au 31/12/N dans le scénario Central est alors :

Vision au 31/12/N	Central : réalisé = estimé					
Réalisé / *Projeté*	N	*N+1*	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Income Statement						
INSURANCE SERVICE RESULT	400	*320*	*240*	*160*	*80*	*1 200*
Insurance Revenue	1000	*800*	*600*	*400*	*200*	*3 000*
Allocation CSM	340	*272*	*204*	*136*	*68*	*1 020*
Release of claims	600	*480*	*360*	*240*	*120*	*1 800*
Release of RA	60	*48*	*36*	*24*	*12*	*180*
Insurance Expense	-600	*-480*	*-360*	*-240*	*-120*	*−1 800*
Payment of claims	-600	*-480*	*-360*	*-240*	*-120*	*−1 800*
Loss component	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
Experience adjustment	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
INVESTMENT RESULT	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
NET INCOME	400	*320*	*240*	*160*	*80*	*1 200*

Spécificité IFRS 17

Sous la comptabilisation IFRS 17, le montant de primes payées par l'assuré n'est jamais reconnu explicitement dans le compte-de-résultat. Les primes sont reconnues au fil du temps, par la somme de l' *Insurance Revenue* (retraité de l'effet d'actualisation).

1.2.3.2 Scenario 2 : Hausse modérée de la sinistralité

Au cours de l'année N+1, une dégradation de la mortalité (S/P=80%) conduit à la révision des hypothèses *Current Estimate* d'une ampleur pouvant être absorbée par la CSM.

La hausse de la mortalité agit de deux façons sur une assurance-emprunteur :

— D'une part en N+1, l'assureur devra rembourser le créancier du montant de capital-restant-dû des personnes décédées prématurément ;

— D'autre part pour les années suivantes, le capital-restant-dû futur sera moindre en raison des décès prématurés en N+1, donc le montant des primes récoltées sera diminué en proportion.

En conséquence, l'actuaire revoit à la hausse la sinistralité pour les années futures. La nouvelle estimation des futurs *cashflow* à recevoir est la suivante, elle est nécessaire pour calculer la CSM en stock du GCH à la fin de la période (31/12/N+1) :

Vision au 31/12/N+1	Stress : Hausse de la sinistralité					
Réalisé / *Projeté*	N	N+1	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Prime	1 000	800	*400*	*200*	*100*	*2 500*
Sinistre *(CE)*	600	640	*320*	*120*	*60*	*1 740*
RA	60	48	*32*	*12*	*6*	*158*

La CSM en stock en fin de période N+1 devient :

+ CSM en stock au 31/12/N	680
+ Désactualisation	+0
$-\Delta$ Estimation futurs *cashflow* d'exécution	$-\lvert\Delta \text{ prime }_i = +500\rvert$ $+\lvert\Delta \text{ sinistre }_i = +220\rvert$ $+\lvert\Delta\ RA\ _i = +22\rvert$
= CSM en stock au 31/12/N+1	=422

Avec la variation d'estimation des futurs *cashflow* d'exécution définie ci-dessous :

$$\Delta\ Cashflow_i = \sum_{j=i+1}^{n-i+1} |Cashflow_{i-1,j} - Cashflow_{i,j}| \tag{1.2}$$

où i est la période d'évaluation et j la période de survenance.

L'ultime étape est la détermination de la nouvelle chronique d'allocation de la CSM sur les quatre périodes restantes, compte-tenu de l'évolution de l'unité de couverture (CRD).

Périodes *(au 01/01)*	N+1	N+2	N+3	N+4	Total
Capital-restant-dû	8 000	4 000	2 000	1 000	15 000
Allocation CSM_i *(en % du CRD)*	53%	27%	13%	7%	100%
Allocation CSM_i	225	113	56	28	422

Le compte-de-résultat au 31/12/N+1 après le choc de mortalité a évolué de la façon suivante :

Vision au 31/12/N+1	Stress : Hausse des sinistres					
Réalisé / *Projeté*	N	N+1	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Income Statement						
INSURANCE SERVICE RESULT	400	113	*145*	*68*	*34*	*760*
Insurance Revenue	1000	753	*465*	*188*	*94*	*2 500*
Allocation CSM	340	225	*113*	*56*	*28*	*762*
Release of claims	600	480	*320*	*120*	*60*	*1 580*
Release of RA	60	48	*32*	*12*	*6*	*158*
Insurance Expense	-600	-480	*-320*	*-120*	*-60*	*−1 740*
Payment of claims	-600	-480	*-320*	*-120*	*-60*	*−1 580*
Loss component	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
Experience adjustment	0	-160	*0*	*0*	*0*	*-160*
INVESTMENT RESULT	0	0	*0*	*0*	*0*	*0*
NET INCOME	400	113	*145*	*68*	*34*	*760*

Le poste *Insurance Expense* est en vision réalisée, ce qui implique une décomposition de la sinistralité de l'année en deux flux : *Payment of claims* indique la part de la sinistralité de N+1 qui était prévue en vision 31/12/N, tandis que *Experience Adjustment* comptabilise l'écart d'expérience entre le flux anticipé au 31/12/N et la sinistralité réelle de l'année N+1. L'écart d'expérience adverse est directement observé dans le résultat de l'année N+1 puisque les sinistres payés dans l'année sont supérieurs à ceux anticipés.

Les estimations futures de *cashflow* (CSM, *Current Estimate, Risk Adjustment*) du poste *Insurance Revenue* sont mises-à-jour pour les années suivantes jusqu'à extinction du GCH pour tenir compte de la déviation de sinistralité de l'année N+1.

Le résultat de l'année N+1 (113) est plus faible qu'anticipé (320) et le résultat futur (CSM stock) du GCH est également revu à la baisse.

Le fil d'Ariane du mémoire

Le *Risk Adjustment* a absorbé une partie seulement (48) du choc total de sinistralité (160) : le positionnement de l'hypothèse de déviation de la sinistralité à 10% du *Current Estimate* est mise en doute et son mode de détermination sera le coeur de sujet de ce mémoire dans les chapitres suivants.

Spécificité IFRS 17

La CSM absorbe seulement les variations des *cashflow* d'exécution qui se rapportent aux périodes de couvertures futures ; ainsi elle n'absorbe pas la totalité de la sinistralité de l'année N+1.

1.2.3.3 Scénario 3 : Forte hausse de sinistralité

En repartant du scenario Central, supposons désormais en N+1 l'arrivée d'une grande crise sanitaire impactant fortement la population du pays, et causant de nombreux arrêts-de-travail et décès. Cette dégradation de la sinistralité (S/P = 170%) oblige à une forte révision des hypothèses *Current Estimate* futures ne pouvant plus être absorbées par la CSM.

Vision au 31/12/N+1	Stress : Forte hausse de la sinistralité					
Réalisé / Projeté	N	N+1	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Prime	1 000	800	*300*	*100*	*30*	*2 230*
Sinistre *(CE)*	600	1360	*450*	*150*	*45*	*2 605*
RA	60	48	*45*	*15*	*4.5*	*172,5*

L'estimation des *cashflow* futurs entraine un changement de profitabilité du GCH.

+ CSM en stock au 31/12/N	680
+ Désactualisation	+0
$-\Delta$ Estimation futurs *cashflow* d'exécution	$-\lvert\Delta$ prime $_i = +770\rvert$ $+\lvert\Delta$ sinistre $_i = +75\rvert$ $+\lvert\Delta\ RA_i = +7.5\rvert$
= *Loss Component* en stock au 31/12/N+1	= -7.5

La hausse du *Current Estimate* des *cashflow* d'exécution liée à la détérioration des hypothèses de mortalité pour les sinistres futurs est supérieure à la CSM résiduelle ; le GCH devient onéreux. La perte future est appelée *Loss Component*, elle est immédiatement constatée en compte-de-résultat pour -7.5.

Spécificité IFRS 17

La CSM ne peut jamais être négative, elle se transforme en *Loss Component* si tel est le cas et doit être reconnue immédiatement dans le compte-de-résultat ; il n'y a plus d'allocation de CSM sur les années résiduelles du GCH.

La *Loss Component* constatée entièrement en N+1 doit subir deux retraitements [2] :

— D'une part, elle doit être amortie dans le poste *Insurance Revenue* (*Amount allocated to Loss Component*) sur la durée de vie résiduelle du GCH afin de correspondre à la part des frais et sinistres attendus et au relâchement du *Risk Adjustment* qui n'ont pas été financés par la prime payée par l'assuré.

— D'autre part, la ligne *Reversal Loss Component* du poste *Insurance Expense* permet d'éviter une double comptabilisation de la perte.

Sans ces deux retraitements comptables, les postes *Insurance Revenue* et *Insurance Expense* seraient gonflés artificiellement et leur interprétation faussée (en particulier, le poste *Insurance Revenue* ne correspondrait plus à la somme des primes perçues).

La *Reversal Loss Component* est allouée sur les périodes résiduelles par la clé d'allocation SAR (*Systematic Allocation Ratio*), calculée à chaque début de période i. Différentes clés d'allocation peuvent être définies, toutes ayant pour objectif qu'à l'extinction du GCH, la *Reversal Loss Component* ait annulé la totalité de la *Loss Component*.

A chaque début de période, l'écoulement de la *Reversal Loss Component* est calculé en trois étapes :

1. Détermination de la part de *Loss Component* attribuable à la période i :

$$SAR_i = \frac{|LC_{stock\ i}|}{\sum_{j=i}^{n-i+1} \frac{CE_j + RA_j}{(1+t)^j}} \tag{1.3}$$

2. Détermination du montant de *Reversal Loss Component* attribuable à la période i :

$$Reversal\ LC_i = SAR_i \times (CE_i + RA_i) \tag{1.4}$$

3. Mise-à-jour du montant résiduel de *Loss Component* restant à amortir jusqu'à extinction du CGH :

$$|LC_{stock\ i+1}| = |LC_{stock\ i}| - Reversal\ LC_i \tag{1.5}$$

Le compte de résultat au 31/12/N+1 après le choc épidémique devient :

Vision au 31/12/N+1	Stress : Forte hausse des sinistres					
Réalisé / *Projeté*	N	N+1	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*Total*
Income Statement						
INSURANCE SERVICE RESULT	400	-840	*45*	*15*	*5*	*−375*
Insurance Revenue	1000	528	*490*	*163*	*49*	*2 230*
Allocation CSM	340	0	*0*	*0*	*0*	*340*
Amount allocated to Loss Component	0	0	*-5.2*	*-1.7*	*-0.5*	*−7,5*
Release of claims	600	480	*450*	*150*	*45*	*1 725*
Release of RA	60	48	*45*	*15*	*4.5*	*172,5*
Insurance Expense	-600	-1368	*-445*	*-148*	*-44*	*−2 605*
Payment of claims	-600	-480	*-450*	*-150*	*-45*	*−1 725*
Loss component	0	-7.5	*0*	*0*	*0*	*−7,5*
Reversal Loss component	0	0	*5.2*	*1.7*	*0.5*	*7,5*
Experience adjustment	0	-880	*0*	*0*	*0*	*-880*
INVESTMENT RESULT	0	0	*0*	*0*	*0*	*0*
NET INCOME	400	-840	*45*	*15*	*5*	*−375*

1.2.3.4 Scénario 4 : Amélioration de la sinistralité

A l'issue de la grande crise sanitaire de l'année N+1, un puissant remède est mis-au-point par la communauté scientifique en N+3, permettant de réduire drastiquement la mortalité et les arrêts-de-travail au cours de l'année N+3. L'actuaire prévoit le même S/P de 70% pour l'année restante.

Vision au 31/12/N+3	Stress : Amélioration de la sinistralité					
Réalisé / *Projeté*	N	N+1	N+2	N+3	*N+4*	*Total*
Prime	1 000	800	300	100	*50*	*2 250*
Sinistre *(CE)*	600	1360	450	70	*35*	*2 515*
RA	60	48	45	15	*3.5*	*171,5*

L'écart d'expérience adverse constaté en année N+3 et la révision des estimations *Current Estimate* pour l'année suivante permettent au GCH de ne plus être onéreux.

La disparition du caractère onéreux en période i se traduit par deux évènements :

1. Reprise de la *Loss Component* résiduelle, où k est la période de survenance de la *Loss Component* :

$$LC_{stock\ i} = LC_k + \sum_{j=k+1}^{n-i+1} Résidual\ LC_j$$

+ LC en stock au 31/12/N+1	$-7{,}5$
- Reversal LC au 31/12/N+2	$+5.2$
= LC en stock au 31/12/N+2	= - 2.3

2. Reconstitution d'une CSM, qui sera allouée sur les deux périodes restantes au *prorata* du capital-restant-dû de chaque période.

+ CSM en stock au 31/12/N+2	0
+ Désactualisation	$+0$
$-\Delta$ Estimation futurs *cashflow* d'exécution	$-\lvert\Delta \text{ prime }_i = -20\rvert$ $+\lvert\Delta \text{ sinistre }_i = 10\rvert$ $+\lvert\Delta\ RA\ _i = 1\rvert$
= CSM en stock au 31/12/N+3	= 31

Par cette révision positive de la sinistralité, le GCH améliore *in fine* son résultat.

Vision au 31/12/N+3	Stress : Amélioration de la sinistralité					
Réalisé / *Projeté*	N	N+1	N+2	N+3	*N+4*	*Total*
Income Statement						
INSURANCE SERVICE RESULT	400	-840	45	116	*14*	*−265*
Insurance Revenue	1000	528	490	184	*49*	*2 250*
Allocation CSM	340	0	0	21	*10*	*371*
Amount allocated to Loss Component	0	0	-5.2	-2.3	*0*	*−7,5*
Release of claims	600	480	450	150	*35*	*1 715*
Release of RA	60	48	45	15	*3.5*	*171,5*
Insurance Expense	-600	-1368	-445	-68	*-35*	*−2 515*
Payment of claims	-600	-480	-450	-150	*-35*	*−1 715*
Loss component	0	-7.5	0	0	*0*	*−7,5*
Reversal Loss component	0	0	5.2	2.3	*0*	*7,5*
Experience adjustment	0	-880	0	80	*0*	*-800*
INVESTMENT RESULT	0	0	*0*	*0*	*0*	*0*
NET INCOME	400	-840	45	116	*14*	*−265*

L'histoire illustrée de la vie de ce GCH permet de comprendre explicitement l'enchaînement des étapes de comptabilisation sous la norme IFRS 17 et de mettre en lumière les rôles de la *CSM* et du *Risk Adjustment* dans la formation du résultat.

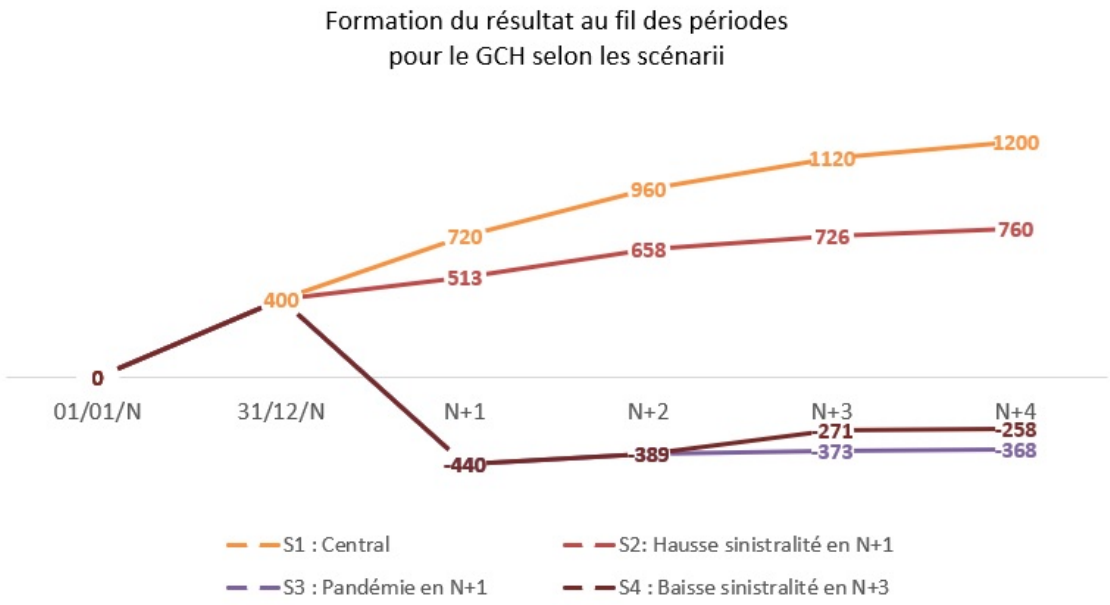


FIGURE 1.9 – Résultat du GCH selon les différents scenarii étudiés.

1.3 Conclusion

La décision arbitraire de fixer le niveau du *Risk Adjustement* à 10% du *Current Estimate* a révélé ses limites dès l'étude du Scenario 2 en montrant son incapacité à absorber la totalité du choc modéré de sinistralité.

La détermination du *Risk Adjustment* nécessite une étude approfondie et constitue un puissant (et rare) levier de pilotage sous IFRS 17, qui doit être optimisé par l'assureur compte-tenu de son impact sur son résultat. Il devra être arbitré entre la volonté de se prémunir contre une dérive de la sinistralité (nécessitant un niveau élevé de *Risk Adjustment*) et celle de ne pas rendre le GCH onéreux (en respectant l'équation *Current Estimate* + *Risk Adjustment* $<$ Primes émises).

Dans ce contexte, ce mémoire se focalisera dans le Chapitre 2 sur les méthode statistiques permettant de déterminer le montant du *Risk Adjustment* engendré par les risques exposant l'assureur, le Chapitre 3 sera consacré à la prise-en-compte des bénéfices de diversification entre ces risques-ci, et le Chapitre 4 présentera différentes méthodes d'allocation du montant de *Risk Adjustment* à la maille GCH.

Chapitre 2

Détermination du *Risk Adjustment*

Sommaire

2.1 Le *Risk Adjustment* en plan large . . . 33
2.1.1 Une nouveauté... . . . 33
2.1.2 ...qui nécessite un retour sur la *Risk Margin*... . . . 34
2.1.3 ...pour écarter la méthode "Coût du Capital"... . . . 35
2.1.4 ...tout en conservant la méthodologie Solvabilité II . . . 38
2.2 Le *Risk Adjustement* : projecteur sur la partie *LRC* . . . 39
2.2.1 Méthode des taux-chocs . . . 39
2.2.2 Méthode probabiliste . . . 55
2.3 Le *Risk Adjustment* : focus sur la partie LIC . . . 62
2.3.1 La méthode de MACK . . . 62
2.3.2 Méthode du *Bootstrap* sur MACK . . . 66
2.3.3 Variante de la méthode des taux-chocs . . . 69
2.4 Conclusion générale . . . 71

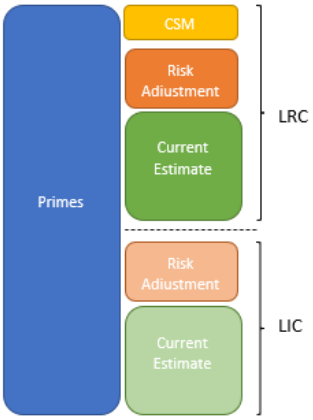
2.1 Le *Risk Adjustment* en plan large

2.1.1 Une nouveauté...

Ce chapitre est consacré à la détermination du *Risk Adjustment*, dont les enjeux sur le résultat de l'assureur ont été illustrés dans le Chapitre 1.

La théorie moderne de gestion de portefeuilles postule que toute compagnie d'assurance est averse aux risques ; par conséquent celle-ci exigera une compensation monétaire (positive) pour accepter de supporter les risques inhérents aux contrats d'assurance. Ce surplus monétaire est traduit dans les faits par le montant du *Risk Adjustment*, qui reflète l'incertitude quant aux montants et dates de versements des flux futurs non-financiers.

Pour rappel, le *Risk Adjustment* s'inscrit dans le schéma suivant et doit être évalué à deux niveaux différents du bilan :



Pour la partie LRC, le *Risk Adjustment* compensera les risques liés à la sinistralité future tels que les risques de mortalité, longévité, incapacité, invalidité, rachat, frais, révision et catastrophe.

Pour la partie LIC, le *Risk Adjustment* compensera les risques liés à la sinistralité passée tels que les risques de primes et réserve.

Intuitivement, le niveau de *Risk Adjustment* exigé pour la sinistralité future (LRC) est supposé être plus élevé que celui exigé pour la sinistralité passée (LIC) en raison de la meilleure connaissance des sinistres passés, qui ont été pour la plupart déclaré à l'assureur (hormis *IBNR*) en comparaison aux sinistres à venir dont on ignore tout de leurs montants et occurrences.

2.1.2 ...qui nécessite un retour sur la *Risk Margin*...

La définition du *Risk Adjustment* sous IFRS 17 est conceptuellement proche de celle de la *Risk Margin* sous Solvabilité II ; de ce fait l'objectif est de capitaliser au maximum sur les calculs Solvabilité II afin d'éviter de démultiplier les travaux de production IFRS 17 et Solvabilité II.

✍ Solvabilité II §77

"La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques soit équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance."

La *Risk Margin* est calculée par la méthode « Coût du Capital » par la formule standard suivante :

$$RM = CoC * \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \tag{2.1}$$

Avec :

- SCR_t le montant de fonds propres minimum que doit détenir l'assureur pour l'année t afin de limiter son risque de faillite à 0.5% pour cette année-ci,
- CoC le coût de détention des fonds propres pour un assureur, fixé à 6% par la norme Solvabilité II.
- r_{t+1} le taux d'actualisation relatif à l'année $t + 1$.

La *Risk Margin* correspond alors au coût actualisé associé à cette immobilisation de fonds propres prospectifs.

Bien que l'idée inhérente à la *Risk Margin* et au *Risk Adjustment* soit semblable, une différence notable à souligner concerne le seuil de confiance sous-jacent : la *Risk Margin* découle d'une tolérance au risque calibrée au quantile 99.5%, tandis que le choix de la tolérance aux risques est laissé au choix de l'assureur sous la norme IFRS 17, lui permettant de refléter sa propre tolérance aux risques.

Le fil d'Ariane du mémoire

La norme Solvabilite II a pour but de donner une vision économique prudentielle du bilan de l'assureur, tandis que la norme IFRS 17 donne une vision de la performance de l'activité de l'assureur pour rendre comparables les sociétés d'assurance entre-elles. Cette différence d'objectifs se traduira vraisemblablement par un niveau de prudence moins élevé en norme IFRS 17, et donc une tolérance au risque plus grande.

D'autres nuances existent entre la *Risk Margin* et le *Risk Adjustment* :

- D'une part, le périmètre de risques qu'elles recouvrent : le risque de contrepartie [1] et le risque opérationnel non-directement liés aux contrats d'assurances ne sont pas pris en compte dans la calibration du *Risk Adjustment*.
- D'autre part, la frontière des contrats n'est pas identique et la granularité des calculs exige une maille de calcul plus fine sous IFRS 17, par GCH.

En raison de ces différences non négligeables entre les notions de *Risk Margin* et de *Risk Adjustment*, l'actuaire ne peut pas utiliser directement les calculs effectués sous Solvabilité II pour IFRS 17. Toutefois, SOGECAP entend s'appuyer autant que possible sur la méthodologie déjà mise-en-place pour les calculs Solvabilité II ; par conséquent seules des méthodes de détermination du *Risk Adjustment* compatibles avec des méthodes de calculs existantes chez SOGECAP seront développées dans la suite de ce mémoire.

2.1.3 ...pour écarter la méthode "Coût du Capital"...

Naturellement, c'est la première méthode à tester pour évaluer le *Risk Adjustment* puisqu'elle est utilisée actuellement dans la détermination de la *Risk Margin* (2.1). Néanmoins, quatre éléments doivent être re-calibrés au préalable :

$$RA = x\% * \sum_{t \geq 0} \frac{C_t}{(1 + r_t)^t} \tag{2.2}$$

1. $x\%$ le coût du capital interne (6% pour le quantile à 99.5% sous Solvabilité II) qui peut être lié au choix du quantile-équivalent requis par la norme IFRS 17.

1. En cas de cession d'une partie du *Current Estimate* auprès d'un réassureur, un montant de *Risk Adjustment* est également cédé : ce dernier est alors composé d'un risque de contrepartie sur défaut du réassureur.

2. C_t le capital sous-risque, qui doit exclure les risques opérationnels et de contrepartie.
3. r_t le taux d'actualisation, incluant une prime de risque calculée par les méthodes *Bottom-up* ou *Top-down* (Chapitre 1).
4. T l'horizon temporel du GCH.

Le montant du *Risk Adjustment* se calcule très simplement une fois les paramètres précédents fixés.

Suggestion d'application (1/2) : Une compagnie d'assurance fixe son coût d'immobilisation du capital à $\tau\%$. Elle connait le montant SCR associé au produit Emprunteur, dont le montant OP correspond au montant de SCR opérationnel général non-directement lié aux contrats d'assurance de ce produit. La quantité $(SCR - OP)$ est supposée invariante. La duration de ses contrats Emprunteur est de T ans. Dans un environnement de taux nuls, le montant du *Risk Adjustment* est :

$$RA = \tau\% \times (SCR - OP) \times T \tag{2.3}$$

✍ IFRS 17 § B92

L'entité doit indiquer la méthode appliquée et le niveau de confiance auquel équivaut le résultat de l'application de cette technique.

La nécessité de traduire le montant du *Risk Adjustment* en niveau de quantile-équivalent requiert une hypothèse sur la distribution en loi de la sinistralité. L'espérance de celle-ci doit correspondre au montant du *Current Estimate*, et son quantile à 99.5% doit correspondre au montant du SCR Solvabilité II (en excluant les risques opérationnels et de contrepartie).

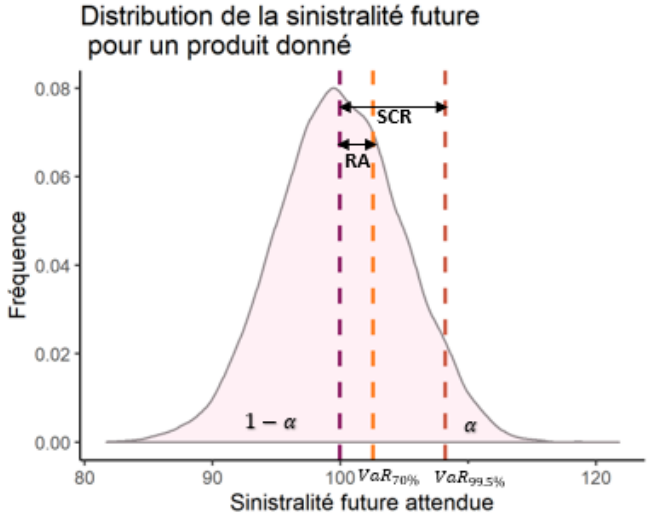


FIGURE 2.1 – Coût du *Risk Adjustment*.

Suggestion d'application (2/2) : La compagnie d'assurance calibre une loi gaussienne dont l'espérance est le Current Estimate (connu) et dont le quantile $1-\alpha$ ($\alpha = 0.05\%$ sous Solvabilité II) correspond au montant $(SCR - OP)$. Le niveau du quantile équivalent au montant du *Risk Adjustment* se déduit des deux étapes suivantes :

Soit X une variable aléatoire associée au montant de la sinistralité : $X \sim \mathcal{N}(CE; \sigma(X)^2)$.

1. Détermination de la variance de X :
   Sachant $\mathbb{P}(X \leqslant (SCR - OP)) \geqslant 1-\alpha$, alors $\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(SCR-OP)-CE}{\sigma(X)}\right) \geqslant 1-\alpha$ où $Z = \frac{X-CE}{\sigma(X)} \sim \mathcal{N}(0; 1^2)$. La lecture de la table de probabilité de la loi normale centrée réduite permet de déterminer le quantile $q_{1-\alpha}$ tel que $\mathbb{P}(Z \leqslant q_{1-\alpha}) \geqslant 1-\alpha$.
   De fait, $\frac{(SCR-OP)-CE}{\sigma(X)} = q_{1-\alpha} \Leftrightarrow \sigma(X) = \frac{(SCR-OP)-CE}{q_{1-\alpha}}$

2. Détermination du niveau du quantile associé au montant du *Risk Adjustment* :
   $\mathbb{P}(X \leqslant RA) \geqslant 1-\beta \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{RA-CE}{\sigma(X)}\right) \geqslant 1-\beta \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(RA-CE)*q_{1-\alpha}}{(SCR-CE)}\right) \geqslant 1-\beta$.
   La lecture de la table de probabilité de la loi normale centrée réduite permet de déterminer $1-\beta$, le niveau du quantile équivalent au montant du *Risk Adjustment*.

Le niveau du quantile-équivalent correspondant au montant du *Risk Adjustment* doit refléter l'aversion aux risques de l'assureur : plus le quantile est élevé, plus l'assureur est prudent et se protège contre une déviation de la sinistralité. Toutefois, si l'assureur exige un fort quantile pour la détermination du *Risk Adjustment*, le GCH risque d'être qualifié d'onéreux puisque la somme du *Current Estimate* et du *Risk Adjustment* va surpasser le montant de primes associées au GCH.

En revanche, la méthode "Coût du Capital" implique que le quantile fixant le montant du *Risk Adjustment* est subi dès lors que les paramètres de la formule (2.2) sont fixés. Cette forte contrainte inhibe le caractère stratégique laissé à l'assureur dans le choix du niveau du *Risk Adjustment*.

Bien que l'avantage principal de cette méthode soit de recapitaliser sur une méthode déjà implémentée sous Solvabilité II pour calculer la *Risk Margin*, en réalité de nombreuses différences entre Solvabilité II et IFRS 17 rendent son application caduque :

— **La granularité des calculs** : Sous Solvabilité II, les SCR sont déterminés par *line of business*, tandis que la maille des calculs est plus fine sous IFRS 17, avec une prise-en-compte de l'année de souscription notamment dans la détermination des GCH. Il est alors impossible de repartir directement du montant des SCR pour déterminer le montant du *Risk Adjustment*.

— **Le coût du capital immobilisé** : fixé par Solvabilité II à 6%, l'actuaire doit recalibrer ce taux dans la méthode "Coût du Capital" appliquée au *Risk Adjustment*, par sa propre appréciation des caractéristiques internes de la compagnie d'assurance.

— **Le choix d'une loi de distribution des sinistres** : le niveau du quantile communiqué est très corrélé à la loi choisie : pour une loi de distribution à queue épaisse à droite, une

variation du montant du *Risk Adjustment* d'une année sur l'autre aura peu d'impact sur le niveau du quantile communiqué, tandis qu'une loi de distribution à queue légère sera très sensible à une variation du montant du *Risk Adjustment*, entraînant une forte variation du niveau de quantile communiqué. Cette volatilité du niveau du quantile communiqué années après années risque d'effrayer les investisseurs, qui pourraient la traduire par une instabilité de l'aversion aux risques de la compagnie d'assurance.

Malgré son apparente facilité de mise-en-œuvre, cette méthode est inapte à répondre aux enjeux du *Risk Adjustment* et est écartée *de facto* de la sélection SOGECAP.

2.1.4 ...tout en conservant la méthodologie Solvabilité II

Sous la norme Solvabilité II, un *Solvency Capital Requirement* (SCR) est calculé pour chacun des risques suivants (seuls les modules de risques relatifs à l'activité Prévoyance de SOGECAP hors risques de marché sont développés dans la section suivante) :

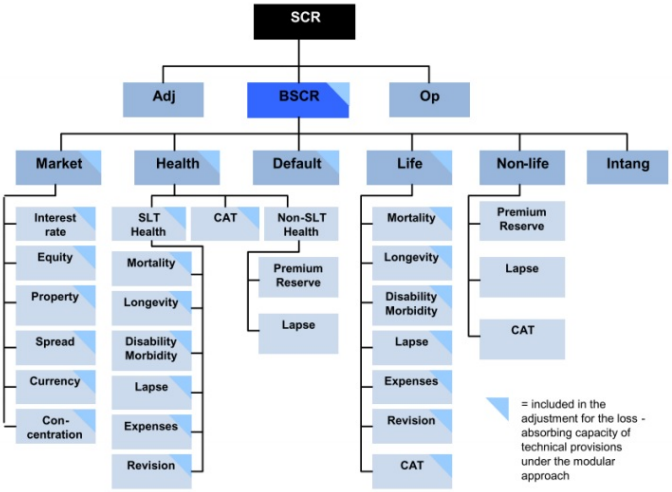


FIGURE 2.2 – Cartographie des risques par Solvabilité II.

Risque de mortalité : incertitude quant à la date de survenance du décès de l'assuré, exposant l'assureur à une hausse de la sinistralité en cas de hausse de la mortalité.

Risque de longévité : incertitude quant à la date de survenance du décès de l'assuré, exposant l'assureur à une hausse de ses engagements en cas de baisse de la mortalité.

Risque d'invalidité : incertitude quant à la date de survenance et la durée de l'incapacité ou de l'invalidité, exposant l'assureur à une hausse de ses engagements en cas de hausse du taux d'incidence ou de maintien de ces risques.

Risque de rachat : incertitude pesant sur les taux de rachat d'un contrat, sa résiliation ou la cessation de paiement des primes, exposant l'assureur à une hausse de la sinistralité en cas de hausse ou de baisse du taux d'incidence de ces risques.

Risque de frais : incertitude pesant sur le taux de frais de gestion des contrats d'assurance, exposant l'assureur à une hausse de ses engagements en cas de hausse de ceux-ci.

Risque de révision : incertitude quant aux niveaux des rentes en cas de révision non-anticipée de la sinistralité, exposant l'assureur à une hausse de ses engagements en cas de hausse de celles-ci.

Risque CAT : incertitude quant à la survenance de risques extrêmes ou irréguliers, non-pris en compte dans les risques listés ci-dessus, exposant l'assureur à une hausse de la sinistralité en cas de hausse massive de ceux-ci.

Risque de primes et réserve : incertitude quant à la correcte tarification du produit d'assurance ou le sous-provisionnement des sinistres passés.

Chacun des SCR des sous-modules de risques du portefeuille Prévoyance est ensuite agrégé au niveau de l'entité, en tenant compte des bénéfices de diversification entre les différents risques.

Le formule stantard définie par Solvabilité II pour déterminer le SCR relatif à la sinistralité passée (*Primes et réserve*) diffère de celle utilisée pour déterminer les SCR des autres modules de risques ; par conséquent la détermination du *Risk Adjustment* sera scindée entre la partie LRC et la partie LIC du bilan assurantiel.

2.2 Le *Risk Adjustement* : projecteur sur la partie *LRC*

2.2.1 Méthode des taux-chocs

Cette méthode est fondée sur celle déjà implémentée sous Solvabilité II pour calculer les SCR relatifs à la sinistralité futures pour les modules de risques auxquels est exposé l'assureur.

Le principe est le suivant : pour chaque GCH, le *Current Estimate* est calculé comme étant la valeur actualisée des flux futurs probabilisés. Les hypothèses sous-jacentes à son calcul (taux de mortalité, taux d'incidence, taux d'actualisation, etc) sont déterminées à chaque début de période par l'actuaire, en reflétant au maximum les caractéristiques de la population assurée au sein du GCH.

$$CE_{brut} = \sum_{t>0} \frac{\mathbb{E}(CF_t)}{(1+r_t)^t} = \sum_{t>0} \frac{\mathbb{E}(+Prime_t - Sinistre_t - Frais_t - Commission_t - PB_t)}{(1+r_t)^t} \tag{2.4}$$

A chaque module de risque présenté dans la section précédente, un choc adverse est appliqué sur le risque afin de dégrader la sinistralité pour l'assureur. Les chocs appliqués sur les hypothèses sous-jacentes au calcul du *Current Estimate* n'affectent que le passif du portefeuille Prévoyance de l'assureur et non son actif, entraînant une hausse de son besoin en capital.

La détermination du *Risk Adjustment* pour la partie *LRC* est calquée sur celle du *SCR*

telle que, si X est le montant probabilisé des flux de trésorerie futurs, :

$$SCR_{99.5\%} = VaR_{99.5\%}(X) - \mathbb{E}(X) = VaR_{99.5\%}(X) - BE \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow RA_{1-\alpha\%} = VaR_{1-\alpha\%}(X) - CE \tag{2.6}$$

Sous Solvabilité II, le montant de la $VaR_{99.5\%}(X)$ correspond au quantile à 99.5% de la distribution des flux de trésorerie futurs X, soit :

$$VaR_{99.5\%}(X) = inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq 99.5\%\} \tag{2.7}$$

Le fil d'Ariane du mémoire

La norme Solvabilité II ne tient pas compte du montant moyen des flux de trésorerie futurs situés en zone de risque α, qui pourrait être mesuré par la *Conditional Value-at-Risk*. Plus prudente que la VaR, la CVaR nécessite une modélisation en loi ou une approche stochastique pour évaluer la moyenne conditionnelle des pertes réalisées au-delà du quantile extrême $1-\alpha$ de la distribution.

Compte-tenu de la volonté de capitalisation sur les pratiques Solvabilité II, le montant du *Risk Adjustment* sera lui aussi calculé par une approche quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ et non par une moyenne conditionnelle $CVaR_{1-\alpha}(.)$.

La norme Solvabilité II indique les taux-choc à appliquer lors du calcul des SCR pour chacun des modules de risques [3]. En particulier, l'activité Prévoyance de SOGECAP est exposée aux risques suivants :

Risques en Prévoyance	Intensité du choc	Type de choc
Mortalité	+15%	Multiplicatif
Incapacité - Invalidité	Incidence :+35% en N+1, +25% au-delà Retour en validité : -20%	Multiplicatif
Frais généraux	+10%	Multiplicatif
Rachat massif [1]	=40% en N+1	Valeur absolue
Mortalité CAT	+0.15% en N+1	Additif

Ces taux-chocs ne peuvent pas être utilisés à l'identique sous la norme IFRS 17, il est nécessaire de redéfinir leur intensité et leur horizon d'application.

— **Intensité du choc** : les chocs calibrés sous Solvabilité II sont cohérents avec une tolérance de ruine bi-centenale : le montant du *Best Estimate* choqué est le quantile à 99.5% de la distribution du *Best Estimate* non choqué.

1. Pour le risque de Rachat, Solvabilité II exige de l'assureur qu'il se prémunisse contre le scénario qui lui est le plus défavorable entre "Hausse des rachats", "Baisse des rachats" et "Rachat massif". Ce dernier scénario est le plus adverse pour l'activité Prévoyance de SOGECAP, par conséquent il sera conservé pour le calcul du *Risk Adjustment*.

Compte-tenu de la tolérance aux risques moins restrictive des assureurs en vision IFRS 17, les taux-chocs appliqués pour la détermination du *Risk Adjustment* seront plus faibles pour être cohérents avec un niveau de quantile $1 - \alpha$ diminué.

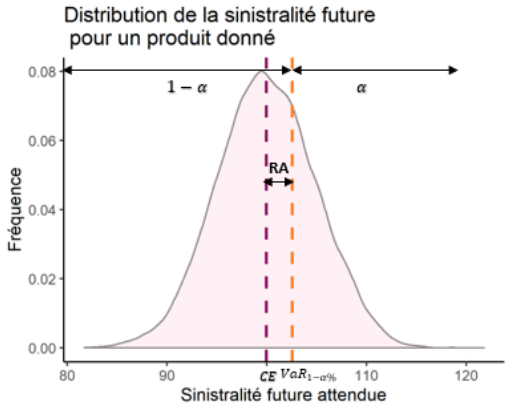


FIGURE 2.3 – Intensité du choc pour la détermination du *Risk Adjustment*.

— **Horizon du choc** : La norme Solvabilité II a déterminé des taux-chocs applicables dès la première année de projection, et courant sur toute la durée de vie résiduelles des contrats pour les chocs permanents. En revanche, la norme IFRS 17 laisse la liberté à l'assureur de fixer l'année de survenance du choc, qui doit également être appliqué sur toute la durée de vie résiduelle du GCH pour les chocs permanents.

  L'horizon du choc peut être interprété par l'assureur de différentes manières : l'horizon budgétaire de la compagnie ou la duration des *cashflow* du GCH (duration des primes, duration des sinistres, duration des primes et des sinistres...).

Ainsi pour capitaliser sur les travaux du SCR de la norme Solvabilité II, la méthodologie des taux-chocs requiert l'adaptation de deux paramètres : le niveau de quantile α déterminant le montant du *Risk Adjustment* et caractérisant l'appétit aux risques de l'assureur, et l'horizon h d'application du choc.

La formule suivante permet d'adapter le niveau du taux-choc pour un horizon h et un niveau de quantile α choisi :

$$taux\ choc_{1-\alpha}^{h} = taux\ choc_{99.5\%}^{1an} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \tag{2.8}$$

avec $z_{1-\alpha}$ le quantile au niveau $1 - \alpha$ de la loi normale centrée réduite.

Démonstration

Soit X le montant de la sinistralité future, dont la distribution est supposée suivre une loi normale de paramètres $\mathbb{E}(X) = CE$ et $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2_{1an}$. Le montant x de sinistralité protégeant l'assureur de la ruine bi-centenale est tel que :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 99.5\% \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - CE}{\sigma_{1an}}\right) = 99.5\%$$

où $Z = \frac{X-CE}{\sigma_{1an}}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Par la table de valeurs de cette dernière, on peut ainsi déterminer le montant x tel que $x = z_{99.5\%} \times \sigma_{1an} + CE$.

Soit Y le montant de la sinistralité future, dont la distribution est supposée suivre une loi normale de paramètre $\mathbb{E}(Y) = CE$ et $\mathbb{V}ar(Y) = \sigma^2_{h\ \textit{années}}$. La variance de Y correspond à la variance généralisée à l'horizon h de la variance à 1 an de X par la relation suivante : $\mathbb{V}ar(Y) = h \times \sigma^2_{1an}$.

Le montant y de sinistralité correspondant à une tolérance aux risques de $1 - \alpha\%$ de l'assureur est tel que :

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z' \leq \frac{y - CE}{\sqrt{h} \times \sigma_{1an}}\right) = 1 - \alpha$$

où $Z' = \frac{Y-CE}{\sqrt{h}\times\sigma_{1an}}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. De la même manière que précédemment, le montant y est déduit de l'équation suivante par $y = z_{1-\alpha}\sqrt{h} \times \sigma_{1an} + CE$.

En réécrivant $\sigma_{1an} = \frac{x-CE}{z_{99.5\%}}$, l'expression de y devient :

$$y = z_{1-\alpha}\sqrt{h} \times \frac{x - CE}{z_{99.5\%}} + CE \Leftrightarrow \frac{y - CE}{CE} = \frac{x - CE}{CE} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}}$$

Finalement, $\textit{taux choc}^{h}_{1-\alpha} = \textit{taux choc}^{1an}_{99.5\%} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}}$.

La formule (2.8) détermine les taux-chocs applicables pour l'année h de survenance du choc, et sur toute la durée résiduelle du GCH pour les chocs permanents. Mais comment le choc se propage-t-il entre l'année actuelle N^+ et l'année h du choc ?

L'étude suivante permet de définir la sensibilité du montant du *Risk Adjustment* aux choix du niveau de quantile $1 - \alpha$, de l'horizon h de survenance du choc et de la méthode d'application du taux choqué afin d'optimiser le compromis entre une correcte protection contre une déviation de la sinistralité et le coût d'immobilisation du capital pour l'assureur.

Sensibilité à la méthode d'application du choc :

Les trois approches suivantes sont proposées pour les chocs instantanés permanents (hors CAT) :

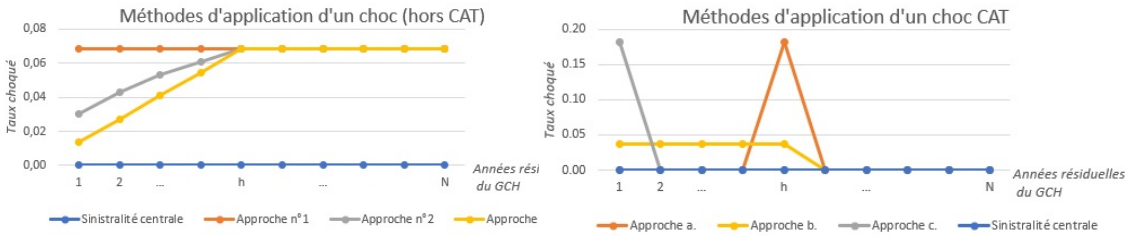
1. Application uniforme du choc depuis l'année N^+ jusqu'à l'année $N+h$: cette approche est conservatrice, elle suppose que la déviation de sinistralité apparaît dès l'année N et se poursuit jusqu'à l'extinction du GCH.
2. Application du $taux\ choc^k_{1-\alpha}$, recalculé par la formule (2.8) pour chaque période k comprise entre N^+ et $N+h$. Cette approche suppose une déviation de la sinistralité qui s'intensifie chaque année pour arriver à son apogée en année $N+h$.
3. Application du choc $\frac{k}{h} taux\ choc^h_{1-\alpha}$, qui suppose une déviation linéaire de la sinistralité depuis l'année N^+ jusqu'à l'année $N+h$.

Pour un choc de type CAT (rachat massif ou mortalité catastrophe), les trois approches présentées ci-dessus nécessitent d'être adaptées en raison du caractère non-permanent d'une catastrophe.

A Absence du choc CAT jusqu'en $N+h^-$, puis survenance du choc CAT en $N+h$.

B Application du taux-choc réparti uniformément entre N et $N+h$.

C Apparition du taux choc dès N^+.



Ces différentes approches permettant de définir l'application du choc représentent un nouveau levier de pilotage dans la détermination du *Risk Adjustment*. Selon l'approche choisie, le choc est considéré comme un évènement instantané, ou bien comme une déviation progressive de la sinistralité.

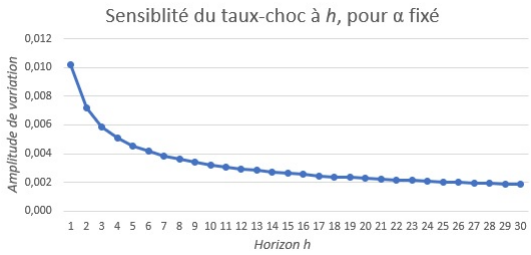
Sensibilité au choix de l'horizon h :

L'analyse des fonctions dérivées de la formule (2.8) permet de déterminer l'ampleur du levier de pilotage offert par le choix de l'horizon de choc h et du quantile α.

$$\frac{\partial taux\ choc^h_{1-\alpha}}{\partial h} = taux\ choc^{1an}_{99.5\%} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \times \frac{1}{2\sqrt{h}} > 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 taux\ choc_{1-\alpha}^{h}}{\partial h^2} = taux\ choc_{99.5\%}^{1an} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \times \frac{-1}{4} * h^{-1.5} < 0 \tag{2.10}$$

Le niveau du taux-choc$_{1-\alpha}^{h}$ est croissant avec l'horizon h d'application du choc (2.9). Néanmoins, son taux marginal de variation est décroissant : au-delà de 10 ans, une variation du choix de l'horizon h a peu d'impact sur l'intensité du taux-choc$_{1-\alpha}^{h}$.



L'exemple ci-dessus illustre l'impact du choix de l'horizon h pour un *taux-choc*$_{70\%}$ calibré sur un *taux-choc*$_{99.5\%}^{1an}$ fixé à 10%. La détermination de l'horizon h du choc entre 1 et 5 ans impactera plus fortement l'intensité du taux-choc applicable qu'une tergiversation entre les horizons 10 et 15 ans.

Sensibilité au choix du niveau α :

Le quantile $z_{1-\alpha}$ définit plus haut de la loi normale centrée réduite s'écrit :

$$\mathbb{P}(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow F_Z(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow z_{1-\alpha} = F_Z^{-1}(1-\alpha)$$

où F^{-1} est la bijection réciproque de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

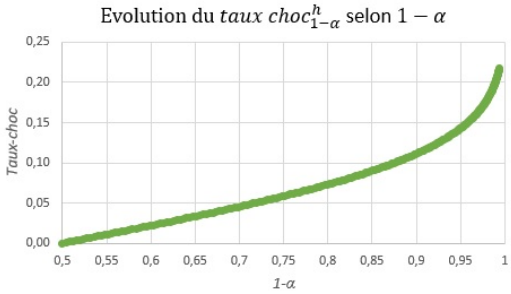
Il n'existe pas de forme analytique de la fonction de répartition $F(x)$: il n'est pas possible d'exprimer la fonction $F_Z^{-1}(1-\alpha)$ directement en fonction de α.

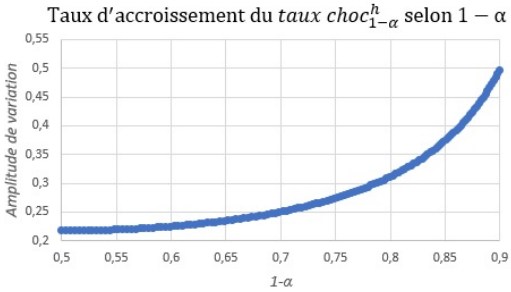
$$taux\ choc_{1-\alpha}^{h} = taux\ choc_{99.5\%}^{1an} \times \sqrt{h} \times \frac{F^{-1}(1-\alpha)}{z_{99.5\%}} \tag{2.11}$$

L'analyse de la sensibilité du *taux choc*$_{1-\alpha}^{h}$ au choix du niveau α par l'utilisation des fonctions dérivées n'est pas possible analytiquement, elle va être étudiée grâce à la distribution de la loi normale centrée réduite.

Par définition de la fonction de répartition $F_Z(.)$, celle-ci est croissante avec le quantile $z_{1-\alpha}$. Toutes choses égales par ailleurs, le *taux choc*$_{1-\alpha}^{h}$ est alors croissant avec $1-\alpha$ (et

décroissant avec α) (2.8). Toutefois, sa croissance n'est pas linéaire, elle varie selon le niveau de tolérance au risque α.





L'illustration ci-dessus a été calibrée pour un $taux\ choc^{1an}_{99.5\%} = 10\%$ et un horizon $h = 5$ ans.

L'assureur doit déterminer sa tolérance au risque α telle que dans $1-\alpha$ % des cas, la sinistralité prévue de l'année lui est inférieure. Choisir un niveau de protection à 85% plutôt qu'à 80% a davantage d'impact sur l'intensité du $taux\ choc^{h}_{1-\alpha}$ qu'une hésitation entre les niveaux de protection 80% et 75%.

La section suivante présente une application empirique de la méthode des taux-chocs sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP selon les différentes hypothèses envisagées.

2.2.1.1 Application empirique

La méthodologie des taux-chocs est appliquée au portefeuille Prévoyance, composé essentiellement de produits Emprunteur (pour les particuliers, les professionnels, à titre de prêts à la consommation ou immobiliers), de produits Temporaire-décès et Santé, et proposant des garanties en cas de décès ou d'arrêt-de-travail.

Le fil d'Ariane du mémoire

A l'heure de la rédaction de ce mémoire, SOGECAP n'est pas en phase de production IFRS 17 , mais de réflexion et de préparation. Par conséquent, les calculs du *Risk Adjustment* ont été réalisés par *line of business* Solvabilité II (maille produit) et non par GCH, comme cela devra être le cas pour la norme IFRS 17. Toutefois, la méthodologie restera la même et les conclusions ne devraient pas en être impactées.

Pour chaque produit Prévoyance, un calcul du *Current Estimate* par produit est réalisé en se fondant sur des hypothèses centrales de sinistralité. Celles-ci incluent les hypothèses de mortalité, de frais généraux, d'entrée en incapacité, de maintien en incapacité, de passage en invalidité, et de retour en validité. Les modélisations sont réalisées « tête-par-tête », compte-tenu des caractéristiques individuelles des assurés (âge, sexe, capital-restant-dû, durée résiduelle du contrat, taux d'emprûnt. . .).

Le fil d'Ariane du mémoire

Pour comprendre à quel niveau intervient la méthode des taux-choc, les hypothèses à choquer seront révélées en rouge ci-après. Les notations ci-dessous s'appuient sur celles du mémoire réalisé par Kla KOUADIO chez SOGECAP [4], fondé sur les mêmes maquettes de calculs du portefeuille Prévoyance. Certaines de ces formules ont été revisitées.

Quelques notations actuarielles :

- i : année de projection, notée $i = 0$ à la projection ;
- x :âge de l'assuré au moment de la souscription du contrat ;
- q_{x+i} : probabilité que l'assuré d'âge $x + i$ décède avant l'âge $x + i + 1$;
- tra_i : taux de remboursement anticipé en année i ;
- $\mathbb{P}_{x+i}$: probabilité de survie de l'assuré d'âge x au cours de l'année i telle que :
  $\mathbb{P}_{x+i} = \mathbb{P}_{x+i-1} \times (1 - q_{x+i}) \times (1 - tra_{x+i})$
- $\mathbb{P}^{DC}_{x+i}$: probabilité de décès de l'assuré d'âge x au cours de l'année i telle que :
  $\mathbb{P}^{DC}_{x+i} = \mathbb{P}_{x+i-1} \times q_{x+i} \times (1 - \frac{1}{2} tra_{x+i})$ (décès supposé en milieu d'année par convention)

Le calcul du *Current Estimate* (2.4) est composé des flux de trésorerie suivants :

1. **Prime commerciale** : $Prime_i = Prime_i^{DC} + Prime_i^{AT}$
   (a) Prime commerciale décès :

$$Prime_i^{DC} = \mathbb{P}_{x+i-1} \times \begin{cases} CI \times \frac{Tarif \times Part^{DC} \times (i - \text{durée résiduelle}) \times 12}{\text{Périodicité}_{remb}} & \text{si durée res.} < 12 \text{ mois} \\ CI \times \frac{Tarif \times Part^{DC} \times 12}{\text{Périodicité}_{remb}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   - CI : capital initial assuré ;
   - $Tarif$: coefficient appliqué au CI pour obtenir la prime commerciale ;
   - $Part^{DC}$: proportion du tarif alloué à la garantie décès ;

   (b) Prime commerciale arrêt de travail :

$$Prime_i^{AT} = \mathbb{P}_{x+i-1} \times \begin{cases} CI \times \frac{Tarif \times Part^{AT} \times (i - \text{durée résiduelle}) \times 12}{\text{Périodicité}_{remb}} & \text{si durée res.} < 12 \text{ mois} \\ CI \times \frac{Tarif \times Part^{AT} \times 12}{\text{Périodicité}_{remb}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   - $Part^{AT}$: proportion du tarif alloué à la garantie arrêt-de-travail ;

2. **Sinistre** : $Sinistre_i = Sinistre_i^{DC} + Sinistre_i^{AT}$
   (a) Sinistre décès : $Sinistre_i^{DC} = \mathbb{P}^{DC}_{x+i} \times CRD_i$
   - CRD_i : Capital-restant-dû en année i,
     $CRD_i = CRD_0 \times \text{quotité}_{assuré} \times \frac{1-(1-\tau)^{-\text{durée res.}}}{1-(1-\tau)^{-\text{durée}}}$

— τ : le taux d'intérêt de l'emprunt ;

(b) Sinistre arrêt de travail : $Sinistre_i^{AT} = Coût^{inc} + Coût^{inv}$

L'arrêt-de-travail garanti par les produits Prévoyance est scindé en deux états pour l'assuré : l'incapacité temporaire de travail (comportant une franchise de 3mois et pouvant durer 36 mois maximum), et l'invalidité permanente. Pendant la période d'arrêt-de-travail, l'assureur prend à sa charge tout ou une fraction des mensualités de l'assuré, en fonction notamment de son taux d'invalidité.

L'illustration suivante permet de mieux comprendre le cheminement des formules ci-après.

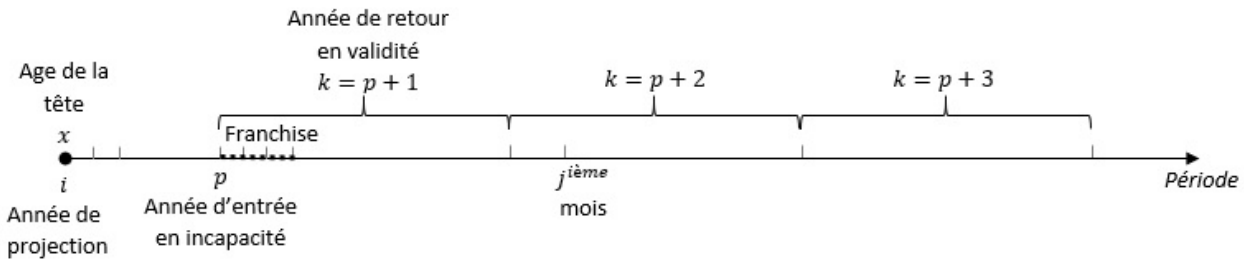


FIGURE 2.4 – Frise temporelle de la projection actuarielle.

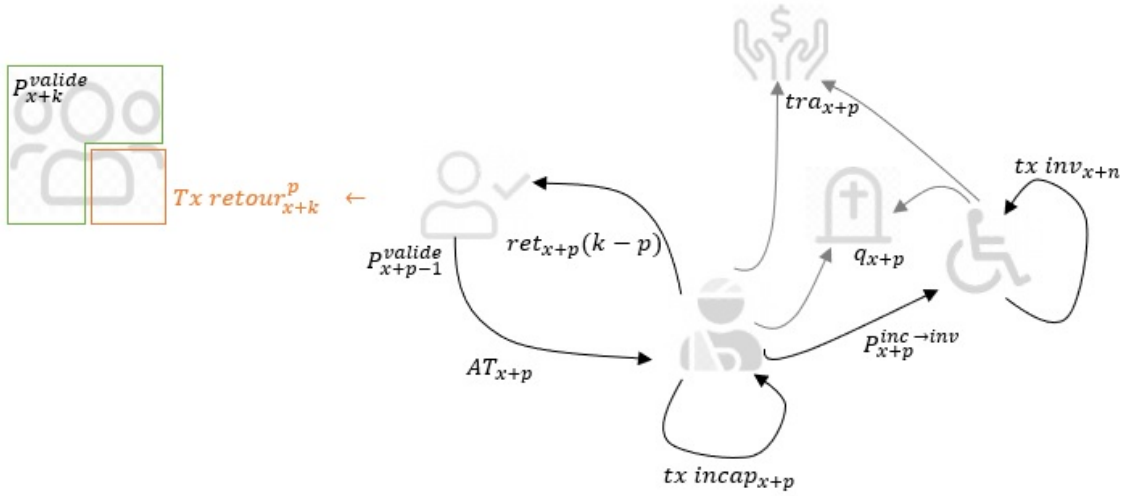


FIGURE 2.5 – États de passage sur le portefeuille Prévoyance.

Coût de l'incapacité :

1. Définition de la probabilité de survie :

$$\mathbb{P}^{VAL}_{x+k} = \mathbb{P}^{valide}_{x+k} + \sum_{p=1}^{min(k;3)} tx\ retour^{p}_{x+k} \tag{2.12}$$

— $\mathbb{P}^{valide}_{x+k}$: probabilité que la tête soit valide sans être jamais passée par l'état d'incapacité depuis le début de la simulation jusqu'à l'année k.

$$\mathbb{P}^{valide}_{x+k} = \mathbb{P}^{valide}_{x+k-1} \times (1 - tra_{x+k}) \times (1 - q_{x+k}) \times (1 - AT_{x+k}) \tag{2.13}$$

⪢ AT_{x+k} : probabilité d'entrer en arrêt-de-travail à l'âge $x + k$.

— $tx\ retour^{p}_{x+k}$: probabilité que la tête entrée en incapacité la $p^{ième}$ année redevienne valide l'année k.

$$tx\ retour^{p}_{x+k} = \begin{cases} \mathbb{P}^{valide}_{x+p-1} \times AT_{x+p} \times (1 - q_{x+p}) \times (1 - tra_{x+p}) \times \\ \left[tx\ incap_{x+p}((k-p) \times 12 - 1) \times ret_{x+p}(k-p) + \sum_{j=1}^{3} \frac{d^{inc}(x+p;j)}{l^{inc}(x+p;0)} \mathbf{1}_{k=p+1}{}^{2} \right] \end{cases}$$

⪢ $ret_{x+p}(k-p)$: probabilité qu'une tête entrée en incapacité en année p redevienne valide au cours de l'année k.

$$ret_{x+p}(k-p) = \begin{cases} \sum_{j=3}^{12} \frac{d^{inc}(x+p;j)}{l^{inc}(x+p;3)} & \text{si } k = p+1 \\ \sum_{j=(k-p-1)\times 12}^{(k-p)\times 12} \frac{d^{inc}(x+p;j)}{l^{inc}(x+p;(k-p-1)\times 12)} & \text{si } k = p+2 \text{ ou } k = p+3 \end{cases}$$

>$d^{inc}(x + p; j)$: nombre de têtes entrées en incapacité la $p^{ième}$ année et devenant valides le $j^{ième}$ mois.

>$l^{inc}(x + p; j)$: nombre de têtes entrées en incapacité la $p^{ième}$ année et toujours en incapacité le $j^{ième}$ mois.

$$\begin{aligned} d^{inc}(x+p;j) &= l^{inc}(x+p;j-1) - l^{inc}(x+p;j) \\ &- l^{inc\to inv}(x+p;j-1) - l^{inc}(x+p;j-1) \times \frac{q_{x+k}}{12} \end{aligned} \tag{2.14}$$

>$l^{inc\to inv}(x + p; j)$: nombre de têtes entrées en incapacité la $p^{ième}$ année et devenant invalides le $j^{ième}$ mois.

⪢ $tx\ incap_{x+p}(j)$: probabilité qu'une tête entrée en incapacité l'année p soit toujours incapable le $j^{ième}$ mois.

$$tx\ incap_{x+p}(j) = \begin{cases} \frac{l^{inc}(x+p;j)}{l^{inc}(x+p;0)} & \text{si } j \leq 36\ mois \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Détermination du coût de l'incapacité pour une tête entrée en incapacité à l'âge $x+p$ au $j^{i\text{ème}}$ mois de l'année de projection i :

$$Inc_i^j(x+p) = \mathbb{P}_{x+p}^{incap} \times tx\ incap_{x+p}(j) \times mensualité_j$$

   ⊳ $\mathbb{P}_{x+p}^{incap}$: probabilité qu'une tête valide en début d'année p devienne incapable dans l'année.

$$\mathbb{P}_{x+p}^{incap} = \mathbb{P}_{x+p-1}^{VAL} \times AT_{x+p} \times \left(1 - \frac{1}{2} tra_{x+p}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+p}\right) \tag{2.15}$$

3. Détermination du coût annuel de l'incapacité pour une tête entrée en incapacité à l'âge $x+p$ au titre de l'année de projection i :

$$Cout_i^{inc}(x+p) = \sum_{j=(i-1)*12}^{i*12} Inc_i^j(x+p)$$

Coût de l'invalidité :

1. Détermination de la probabilité de passage en invalidité :

$$\mathbb{P}_{x+p}^{inc \to inv}(n) = \begin{cases} \sum_{j=(n-p)\times 12}^{(n-p+1)\times 12} \frac{l^{inc\to inv}(x+p;j)}{l^{inc}(x+p;0)} & \text{si } j \leq 36\ mois \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   ⊳ $\mathbb{P}_{x+p}^{inc \to inv}(n)$: probabilité qu'une tête entrée en incapacité l'année p passe invalide l'année n.

2. Détermination de la probabilité d'être invalide :

$$\mathbb{P}_{x+n}^{inval} = \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}_{x+p}^{incap} \times \mathbb{P}_{x+p}^{inc \to inv}(n) \tag{2.16}$$

   ⊳ $\mathbb{P}_{x+n}^{inval}$: probabilité qu'une tête soit invalide à la fin de l'année n.

3. Détermination du coût annuel de l'invalidité pour une tête entrée en invalidité à l'âge $x+n$ au titre de l'année de projection i :

$$Coût_i^{inv} = \mathbb{P}_{x+n}^{inval} \times tx\ inv_{x+n}(i-n) \times annuité_n$$

   ⊳ $Coût_i^{inv}$: coût annuel de l'invalidité au titre de l'année i.
   >$tx\ inv_{x+n}(k)$: probabilité qu'une tête entrée en invalidité l'année n le soit

toujours en année k.

$$tx\ inv_{x+n}(k) = \frac{l^{inv}(x+n;k)}{l^{inv}(x+n;0)}$$

$>l^{inv}(x+n;k)$: nombre de têtes entrées en invalidité à l'âge $x+n$ et toujours invalides au bout de k années.

Pour déterminer le coût des arrêts-de-travail entrant dans le calcul du *Current Estimate*, l'actuaire a considéré que la totalité de la population assurée au début de la projection ($i = 0$) se trouvait dans l'état valide. En effet, seuls les têtes valides sont présentes dans la projection du portefeuille : la sinistralité des têtes en arrêt-de-travail au début de la projection est modélisées dans la partie LIC du bilan assurantiel.

3. **Frais généraux** :

$$Frais_i^{gé} = tx_{frais} \times Prime_i \times inflation_i \tag{2.17}$$

   — tx_{frais} : pourcentage de frais généraux.

4. **Commission** :

$$Commission_i = tx_{comm} \times Prime_i \tag{2.18}$$

   — tx_{comm} : pourcentage de commission.

5. **Participation aux bénéfices** :

$$PB_i = tx_{PB} \times Résultat\ technique_i \tag{2.19}$$

   — tx_{PB} : pourcentage de participation aux bénéfices reversé aux distributeurs du produit d'assurance.

Les paramètres surlignés en rouge ont été re-calibrés par la formule des taux-chocs (2.8) afin de déterminer le montant du *Risk Adjustment* du portefeuille Prévoyance. En particulier, pour chaque produit Prévoyance, les risques "Mortalité", "Rachat massif", "Frais généraux", "Arrêt de travail", et "Mortalité Catastrophe" ont été choqués en variant l'horizon d'application h de choc, la tolérance aux risques $1-\alpha$ et la méthode d'application du choc.

Le *Risk Adjustment* est exprimé en pourcentage du montant *Current Estimate* des sinistres et frais de gestion, ce qui permet de conserver les ordres de grandeur du coût du *Risk Adjustment* tout en préservant la confidentialité des données SOGECAP.

Le fil d'Ariane du mémoire

Le montant du *Risk Adjustment* calculé ci-après ne tient pas compte des bénéfices de diversification possibles entre les différents risques. Ceux-ci seront étudiés en détails dans le Chapitre 3.

1. **Influence du niveau de tolérance aux risques $1-\alpha$:**

Les résultats ci-dessous correspondent aux méthodes d'application des taux-choc n° 2/B et l'horizon h correspond à la duration des *cashflow* de chaque produit.

	$1-\alpha = 70\%$	$1-\alpha = 80\%$
Risk Adjustment "Mortalité"	1.98%	3.17%
Risk Adjustment "CAT"	3.05%	4.03%
Risk Adjustment "Frais"	0.49%	0.63%
Risk Adjustment "Rachat"	5.02%	8.23%
Risk Adjustment "AT"	2.47%	4.02%
Risk Adjustment (% CE)	+13.01%	+20.09%

Le risque de rachat est le plus pénalisant pour l'assureur. Le choix d'une tolérance aux risques au niveau 80% requiert d'immobiliser 54% de plus de capital qu'une tolérance aux risques de 70%.

A ce jour, une tolérance aux risque de niveau $VaR_{70\%}(.)$ semble refléter au mieux l'appétit aux risques de l'activité Prévoyance de SOGECAP.

2. **Influence de la méthode d'application du choc :**

Les résultats ci-dessous correspondent à une tolérance aux risques de 70% et l'horizon h correspond à la duration des *cashflow* de chaque produit. Les méthodes numérotées s'appliquent aux risques "Mortalité", "Frais généraux" et "Arrêt de travail" tandis que les méthodes lettrées s'appliquent aux chocs non-permanents "Mortalité CAT" et "Rachat massif".

	Méthode n° 1/C	Méthode n° 2/B	Méthode n° 3/A
Risk Adjustment "Mortalité"	2.31%	1.98%	1.77%
Risk Adjustment "CAT"	2.06%	3.05%	1.97%
Risk Adjustment "Frais"	0.52%	0.49%	0.47%
Risk Adjustment "Rachat"	-6.60%	5.02%	1.93%
Risk Adjustment "AT"	3.30%	2.47%	2.01%
Risk Adjustment (% CE)	+1.59%	+13.01%	+8.15%

Le choix de la méthode d'application du choc impacte fortement le montant du *Risk Adjustment*. La méthode n°1 est la plus conservatrice tandis que la méthode n°3 minimise le montant de capital à immobiliser au titre du *Risk Adjustment*.

Pour les chocs non-permanents, la méthode B est la plus coûteuse. Le risque "Rachat massif" peut être favorable à l'assureur : le rachat d'un contrat Prévoyance de type Emprunteur signifie que l'assuré a racheté son prêt bancaire. Par conséquent, il ne paiera plus les mensualités futures de l'assurance-emprunteur et l'assureur n'aura plus de sinistralité future vis-à-vis de cet assuré. Dans un scénario "Rachat massif" avec méthode d'application C, les assurés rachètent massivement leurs contrats d'assurance la première année de projection. Au fil des périodes de projection, les rachats sont moins nombreux que dans le scénario central puisque

qu'il y a moins d'assurés. *In fine* l'assureur gagne davantage de primes dans le scénario choqué que dans le scénario central, et le montant de *Risk Adjustment* devient négatif (2.6).

Actuellement, la méthode médiane n°2/B est privilégiée pour l'application des taux-chocs sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

3. **Influence de l'horizon h :**

Les résultats ci-après correspondent à une tolérance aux risques de 70% et aux méthodes d'application des chocs n°2/B. L'horizon h correspond soit à la duration des *cashflow* "Primes" et "Sinistres" spécifique à chaque produit, soit à l'horizon budgétaire de la compagnie fixé à 5 ans.

	Duration des *cashflow*	Horizon budgétaire (5 ans)
Risk Adjustment "Mortalité"	1.98%	2.17%
Risk Adjustment "CAT"	3.05%	2.49%
Risk Adjustment "Frais"	0.49%	0.52%
Risk Adjustment "Rachat"	5.02%	5.31%
Risk Adjustment "AT"	2.47%	2.67%
Risk Adjustment (% *CE*)	+13.01%	+13.16%

L'horizon h d'apparition du choc influence peu le montant du *Risk Adjustment* pour le portefeuille Prévoyance, puisque la duration des *cashflow* du portefeuille Prévoyance est comprise entre 2 et 4 ans par produit, soit une duration proche de celle de l'horizon budgétaire (5 ans).

A ce jour SOGECAP privilégie la duration des *cashflow* de chaque produit pour déterminer l'horizon h d'apparition du choc.

2.2.1.2 Modulation des taux-chocs : l'effet DAMPENER

L'effet DAMPENER est un mécanisme contra-cyclique présent sous Solvabilité II et utilisé par les assureurs uniquement pour le calcul du SCR Action. Il permet d'atténuer ou au contraire d'intensifier l'ampleur du taux-choc Action selon la tendance du cycle boursier du moment.

Il repose sur l'observation suivante : le cours des actions cotées est cyclique, alternant les périodes de hausse puis de baisse boursière. Dans une situation de cycle boursier bas, les actions ont déjà perdu une partie de leur valeur, il est alors peu probable qu'elles subissent à nouveau une aussi forte baisse que dans une situation où elles se trouveraient à leur valorisation boursière moyenne (et vice-versa). Par conséquent, le taux-choc appliqué au calcul du SCR Action est atténué (ou augmenté si les cours boursiers sont élevés) par l'effet DAMPENER, permettant de tenir compte des cycles boursiers par un mécanisme contra-cyclique.

En détails, l'effet DAMPENER dans le cadre du SCR Action fonctionne de la manière suivante : la norme Solvabilité II exige que les actions soient choquées à la baisse par un taux-

choc de 39% (ou 49% hors OCDE) afin de déterminer le montant du SCR Action. Toutefois, le taux-choc Action peut être corrigé par un *"dampener"*, compris entre +10% et -10%, dont le niveau exact est déterminé en comparant le niveau actuel d'un indice Action avec sa moyenne mobile sur 3 ans.

— Si le niveau de l'indice Action est 5% en dessous de sa moyenne mobile (les actions sont dans un cycle boursier bas), le taux-choc applicable pour le SCR Action s'élève à $39\% - 5\% = 34\%$, et permet de réduire le besoin d'immobilisation de capital.

— Si le niveau de l'indice Action est 5% au dessus de sa moyenne mobile (les actions sont dans un cycle boursier haut), le taux-choc applicable pour le SCR Action s'élève à $39\% + 5\% = 44\%$, entraînant une hausse du montant de capital immobilisé.

— Le montant du *"dampener"* est borné entre +10% et -10% ; ainsi si l'indice Action est 12% en dessous de sa moyenne mobile, le taux-choc à appliquer à la baisse sera borné à 39%-10%=29%.

Le caractère contra-cyclique de l'effet DAMPENER permet d'atténuer l'effet des fluctuations boursières sur le ratio de solvabilité de la compagnie d'assurance en modulant le niveau des taux-choc applicables pour le calcul du SCR Action.

Ce mécanisme contra-cyclique pourrait être appliqué plus largement dans le cadre de la détermination du *Risk Adjustment* par la méthode des taux-chocs. Pour chacun des risques du portefeuille Prévoyance, l'assureur pourrait calculer le taux moyen de sinistralité de l'année N écoulée, et le comparer à la moyenne mobile sur les trois dernières années ($N-1$,$N-2$,$N-3$) du taux de sinistralité.

En particulier, si le taux moyen de sinistralité de l'année N est 5% en dessous (resp. au-dessus) de sa moyenne mobile (la sinistralité du risque i étudié sur le portefeuille d'assurés pour l'année N est faible (resp. forte)), le taux-choc de référence pour déterminer le montant du *Risk Adjustment* serait valorisé au niveau suivant :

$$\textit{taux-choc}_{99.5\%}^{\textit{1an, Dampener}} = \textit{taux-choc}_{99.5\%}^{\textit{1an}} + 5\% \text{ (resp. } - 5\%)$$

Le taux-choc IFRS 17 applicable pour le risque i serait alors calibré par l'équation suivante :

$$\textit{taux-choc}_{1-\alpha}^{h} = \textit{taux-choc}_{99.5\%}^{\textit{1an, Dampener}} \times \sqrt{h} \times \frac{z_{1-\alpha}}{z_{99.5\%}} \tag{2.20}$$

Le principe de bornes encadrant les valeurs possibles prises par le *"dampener"* pourrait également être appliqué pour les risques du portefeuille Prévoyance, afin de conserver un niveau de choc minimal pour le $\textit{taux-choc}_{1-\alpha}^{h}$.

In fine, l'adoption de l'effet DAMPENER par l'assureur peut être une solution à double-tranchant : si pour l'année N une faible sinistralité est constatée, l'assureur sera pénalisé par l'application d'un niveau de taux-choc plus fort, conduisant à augmenter le montant de *Risk Adjustment* à immobiliser pour l'année $N+1$. En revanche, en cas de déviation à la hausse de la sinistralité en année N, l'effet DAMPENER sera bénéfique à l'assureur en réduisant le

montant de *Risk Adjustment* à immobiliser en année $N+1$: étant donné que la sinistralité a déjà dévié de sa moyenne mobile, il est peu probable qu'elle dévie à nouveau à la même intensité que si elle se situait à son niveau moyen.

Le fil d'Ariane du mémoire

L'effet DAMPENER peut être particulièrement salvateur pour les GCH peu margés : en cas de hausse de la sinistralité, ceux-ci deviendraient onéreux et obligeraient l'assureur à comptabiliser une perte immédiate. La prise en compte de l'effet DAMPENER permettrait de compenser la hausse du *Current Estimate* relatifs aux sinistres et frais généraux par une baisse du montant de leur *Risk Adjustment*.

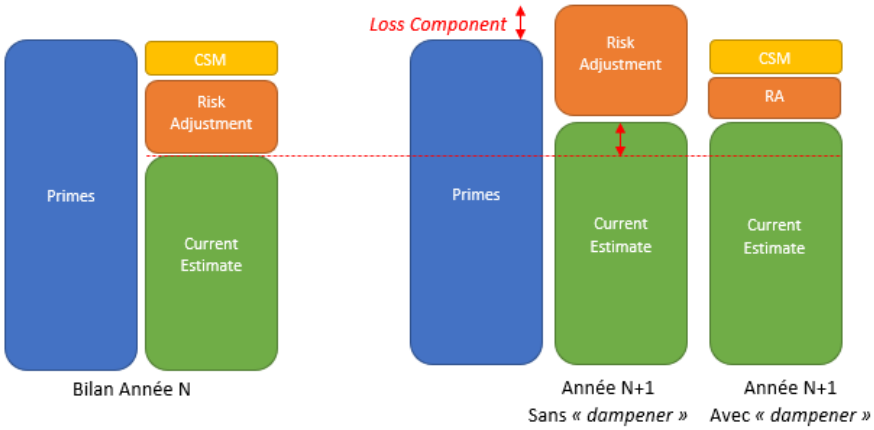


FIGURE 2.6 – Impact de l'effet DAMPENER sur le bilan IFRS 17.

2.2.1.3 Conclusion

La méthode des taux-chocs possède le remarquable avantage de capitaliser totalement sur les méthodes de production déjà existantes pour la norme Solvabilité II, pour le calcul des SCR. Elle donne libre-choix à l'assureur de fixer le niveau du quantile reflétant au mieux son appétence aux risques, l'horizon de survenance du choc ou bien encore la méthode de propagation du choc de sinistralité. Un autre levier de pilotage peut être envisagé si l'assureur choisit de prendre en compte l'effet DAMPENER, lui permettant d'éviter la double-peine en cas d'une hausse de sinistralité.

Toutefois, cette méthode construit sa totale calibration en se fondant sur les valeurs des taux-chocs calibrés par la norme Solvabilité II, ce qui suppose que l'assureur ne remet en aucun cas en doute la juste calibration de ces paramètres.

De plus, l'équation (2.8) à l'origine de la re-calibration des $\textit{taux-chocs}^{h}_{1-\alpha}$ repose sur l'hypothèse forte que la distribution de sinistralité est gaussienne, et de ce fait que les sinistralités des années de projection sont indépendantes et identiquement distribuées.

2.2.2 Méthode probabiliste

La méthode probabiliste consiste à déterminer le montant de *Risk Adjustment* engendré par chaque année de projection $k = 1, ..., 30$, pour un GCH et un risque donné.

La méthode probabiliste est étudiée pour les risques "Mortalité" et "Arrêt-de-travail" du portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

Risque de mortalité :

Soit $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si l'individu i décède au cours de l'année de projection k ; et 0 sinon. La probabilité moyenne de décès des individus du GCH pendant l'année de projection k est noté $q_{x,k}$, et le capital-restant-dû moyen couvert par l'assureur pour l'année de projection k est noté $\overline{CRD}_k$.

Par conséquent, la variable aléatoire $X_{i,k}$ suit la loi de BERNOULLI $\mathscr{B}(q_{x,k})$, et a pour paramètres $\mathbb{E}(X_{i,k}) = q_{x,k}$ et $\mathbb{V}ar(X_{i,k}) = q_{x,k}(1 - q_{x,k})$.

Les n_k individus composant le GCH durant l'année de projection k sont supposés être indépendants et identiquement distribués (de probabilité moyenne de décès $q_{x,k}$ et de capital-restant-dû moyen $\overline{CRD}_k$) ; de fait la variable aléatoire S_k du montant de sinistres décès payés au titre de l'année de projection k est une somme de variables de Bernoulli, dont l'expression est la suivante :

$$S_k = \overline{CRD}_k \left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \right) \text{ avec } \sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \sim \mathscr{B}(n_k; q_{x,k}) \tag{2.21}$$

L'espérance et la variance du montant de la sinistralité décès découlent de la loi binomiale définie précédemment, telles que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S_k) = \overline{CRD}_k \times \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k}\right) = \overline{CRD}_k n_k \times \mathbb{E}\left(X_{i,k}\right) = \overline{CRD}_k n_k q_{x,k} \\ \mathbb{V}ar(S_k) = \overline{CRD}_k^2 \times \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k}\right) = \overline{CRD}_k^2 n_k \times \mathbb{V}ar\left(X_{i,k}\right) = \overline{CRD}_k^2 n_k q_{x,k}(1 - q_{x,k}) \end{cases}$$

Pour un nombre suffisant d'observations ($n_k \geq 30$), par le Théorème Central Limite, la distribution du montant des sinistres décès S_k tend vers une loi normale, telle que : $S_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(S_k); \mathbb{V}ar(S_k)\right)$

Pour chaque année de projection k, le montant de *Risk Adjustment* compatible avec une tolérance au risque $1 - \alpha$ est déterminé par l'équation suivante :

$$RA_k = VaR_{1-\alpha}(S_k) - \mathbb{E}(S_k) \tag{2.22}$$

Le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ est déduit de la table de valeurs de la loi normale centrée réduite,

par le cheminement ci-après :

$$\mathbb{P}\left(S_k \leq VaR_{1-\alpha}(S_k)\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z_k \leq \frac{VaR_{1-\alpha}(S_k) - \mathbb{E}(S_k)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}}\right) = 1-\alpha$$

avec $Z_k = \frac{S_k - \mathbb{E}(S_k)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}} \sim \mathcal{N}\left(0; 1^2\right)$. Par la table de la loi normale centrée réduite :

$$\frac{VaR_{1-\alpha}(S_k) - \mathbb{E}(S_k)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}} = z_{1-\alpha} \Leftrightarrow VaR_{1-\alpha}(S_k) = z_{1-\alpha}\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)} + \mathbb{E}(S_k)$$

Le montant du *Risk Adjustment* est ensuite exprimé en pourcentage du montant du *Current Estimate* des sinistres décès estimé par l'espérance $\mathbb{E}(S_k)$, afin d'appliquer le taux de *Risk Adjustment* au réel montant du *Current Estimate* des sinistres décès déterminé par les maquettes de projections tête-par-tête.

$$\%RA_k = \frac{VaR_{1-\alpha}(S_k)}{\mathbb{E}(S_k)} = \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{\overline{CRD}_k^2 n_k q_{x,k}(1-q_{x,k})} + \overline{CRD}_k n_k q_{x,k}}{\overline{CRD}_k n_k q_{x,k}}$$

Le montant moyen de capital-restant-dû ($\overline{CRD}_k$) n'intervient pas dans l'expression du montant du *Risk Adjustment* en fonction du montant du *Current Estimate* de la sinistralité décès, et se simplifie alors par l'expression ci-dessous :

$$\%RA_k^{DC} = \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{n_k q_{x,k}(1-q_{x,k})}}{n_k q_{x,k}} \tag{2.23}$$

L'application empirique de la méthode probabiliste sur un produit du portefeuille Prévoyance pour le risque "Mortalité" est illustrée dans la section suivante.

Risque "Arrêt de travail"

La méthode probabiliste sur le risque "Arrêt de travail" possède de nombreuses similitudes avec la méthode décrite précédemment pour le risque "Mortalité".

Soit $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si l'individu i tombe en arrêt-de-travail au cours de l'année de projection k ; et 0 sinon. La probabilité moyenne de passage en incapacité (traduisant l'arrêt-de-travail) des individus du GCH pendant l'année de projection k est notée $i_{x,k}$, et l'annuité moyenne couverte par l'assureur pour l'année de projection k est notée $\overline{CC}_k$.

De fait, la variable aléatoire $X_{i,k}$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(i_{x,k})$, de paramètres $\mathbb{E}(X_{i,k}) = i_{x,k}$ et $\mathbb{V}ar(X_{i,k}) = i_{x,k}(1-i_{x,k})$.

Comme précédemment, les n_k individus composant le GCH durant l'année k sont supposés

être indépendants et identiquement distribués (de probabilité d'entrée en incapacité $i_{x,k}$ et d'annuité moyenne assurée $\overline{CC}_k$) ; par conséquent la variable aléatoire S_k du montant des sinistres "Arrêt-de-travail" payés au titre de l'année de projection k est une somme de variables de BERNOULLI, dont l'expression s'écrit comme ci-après :

$$S_k = \overline{CC}_k \left(\sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \right) \text{ avec } \sum_{i=1}^{n_k} X_{i,k} \sim \mathscr{B}(n_k; i_{x,k}) \tag{2.24}$$

L'expression de S_k ne tient compte uniquement que du coût des sinistres pour arrêt-de-travail causés par les assurés devenant incapables durant l'année de projection k : elle ne comptabilise pas le coût des arrêts-de-travail issus du maintien en incapacité pendant l'année k des assurés étant tombés en incapacité avant l'année k.

L'espérance et la variance du montant de sinistralité "Arrêt-de-travail" s'expriment comme qui suit :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S_k) = \overline{CC}_k n_k i_{x,k} \\ \mathbb{V}ar(S_k) = \overline{CC}_k^2 n_k i_{x,k}(1 - i_{x,k}) \end{cases}$$

Le Théorème Central Limite permet de modéliser la distribution des sinistres "Arrêt de travail" par une loi normale pour un nombre suffisant d'observations ($n_k \geq 30$), telle que : $S_k \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(S_k); \mathbb{V}ar(S_k)\right)$

La démonstration proposée pour modéliser le taux de *Risk Adjustment* relatif au risque de mortalité est appliquée au risque "Arrêt de travail", et s'exprime sous la forme suivante :

$$\%RA_k^{AT} = \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{n_k i_{x,k}(1 - i_{x,k})}}{n_k i_{x,k}} \tag{2.25}$$

2.2.2.1 Application empirique

A défaut d'être appliquée à l'ensemble des GCH du portefeuille Prévoyance de SOGECAP, la méthode probabiliste est illustrée ci-après sur un seul produit Prévoyance comportant les garanties "Décès" et "Arrêt-de-travail". Le montant de *Risk Adjustment* est calibré pour un quantile $VaR_{70\%}(.)$, et les taux de mortalité $q_{x,k}$ et d'incidence $i_{x,k}$ ont été calibrés sur la population assurée du produit étudié.

Les données nécessaires à l'application de la méthode probabiliste sur le produit étudié sont les suivantes : le nombre de contrats n_k en vigueur à chaque année de projection k, l'âge moyen $\overline{x}$ des assurés en année k, la probabilité moyenne de décès $q_{x,k}$ des assurés et la probabilité moyenne d'entrée en incapacité $i_{x,k}$ des assurés.

Le tableau complet des données statistiques est indiqué en Annexe A. Pour protéger la confidentialité des données SOGECAP, le montant moyen de capitaux-sous-risque la première année de projection a été normalisé à 1000 tout comme le montant d'annuité moyenne,

normalisé à 100, tout en conservant les ordres de grandeur des données réellement observées.

Risque "Mortalité" :

1. Détermination du taux de *Risk Adjustment* relativement à l'espérance du montant des sinistres décès.

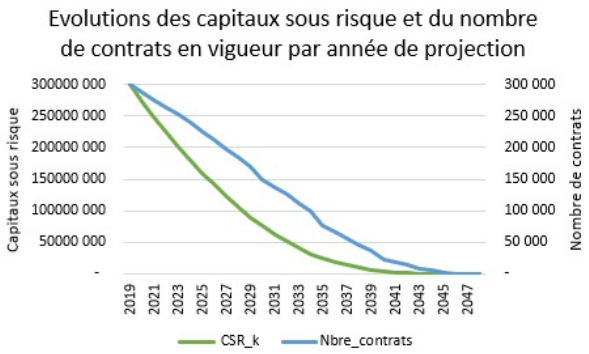
k	CRD_k [1]	n_k	$\overline{CRD}_k$	$\overline{x}$	$q_{x,k}$	$\mathbb{E}(S_k)$	$\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}$	$\%RA_k^{DC}$
2019	300 000	300 000	1 000	47	0.08%	229 608	15 147	3.46%
2020	273 621	286 730	954	47	0.08%	229 838	14 804	3.38%
2021	248 609	274 592	905	48	0.08%	208 828	13 744	3.45%
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2047	3 503	127	28	65	0.43%	15	20	71.21%
2048	497	47	11	67	0.53%	3	5	104.12%
Total	179×10^6	3×10^6	45 360	-	-	2 672 132	177 733	-

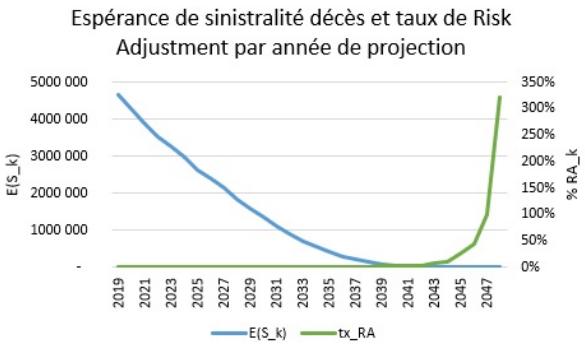
2. Application du taux de *Risk Adjustment* au montant *Current Estimate* des sinistres décès calculés par les maquettes de projection tête-par-tête.

k	CE_k	$\%RA_k^{DC}$	RA_k^{DC}
2019	324 984	3.46%	11 243
2020	277 338	3.38%	9 367
2021	237 667	3.29%	8 203
...	...	...	...
2047	1	71.21%	1
2048	0	104.12%	0
Total	1 960 421	-	66 605

Le montant total de *Risk Adjustment* à immobiliser pour la garantie "Mortalité" sur le produit étudié s'élève à $\frac{66\,605}{1\,960\,421} = 3.40\%$ du montant *Current Estimate* des sinistres décès.

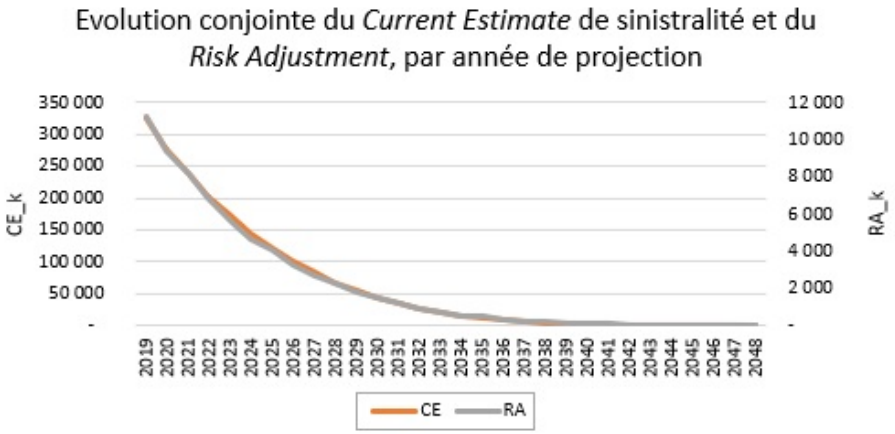
La croissance du taux de *Risk Adjustment* au fil des années de projection s'explique par la décroissance du nombre de contrats dans le portefeuille au fil du temps : moins il y a d'assurés, plus il y a d'incertitudes sur la sinistralité.





1. Les montants indiqués sont exprimés en milliers d'euros.

Le montant du *Risk Adjustment* a sensiblement la même allure que celui du *Current Estimate* des sinistres décès au fil des années de projection.



Risque "Arrêt-de-travail" :

1. Détermination du taux de *Risk Adjustment* relativement à l'espérance du montant des sinistres "Arrêt-de-travail".

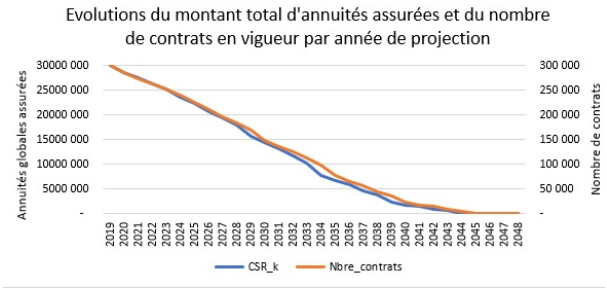
k	CC_k [1]	n_k	$\overline{CC}_k$	$\overline{x}$	$i_{x,k}$	$\mathbb{E}(S_k)$	$\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}$	$\%RA_k$
2019	30 000	300 000	100	47	1.55%	466 493	6 777	0.76%
2020	28 663	286 730	100	47	1.56%	446 848	6 631	0.78%
2021	27 541	274 592	100	48	1.56%	429 350	6 511	0.80%
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2047	3	127	24	65	0.22%	7	13	99.78%
2048	1	47	31	67	0.06%	1	5	322.04%
Total	343 824	3×10^6	2 365	-	-	5×10^6	104 475	-

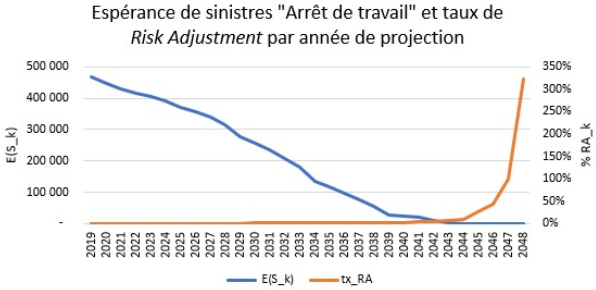
2. Application du taux de *Risk Adjustment* au montant *Current Estimate* des sinistres "Arrêt-de-travail" calculé par les maquettes de projection tête-par-tête.

k	CE_k	$\%RA_k^{AT}$	RA_k^{AT}
2019	25 858	0.76%	197
2020	77 164	0.78%	601
2021	92 828	0.80%	738
...	...	...	...
2047	1	99.78%	1
2048	0	322.04%	1
Total	696 328	-	6 129

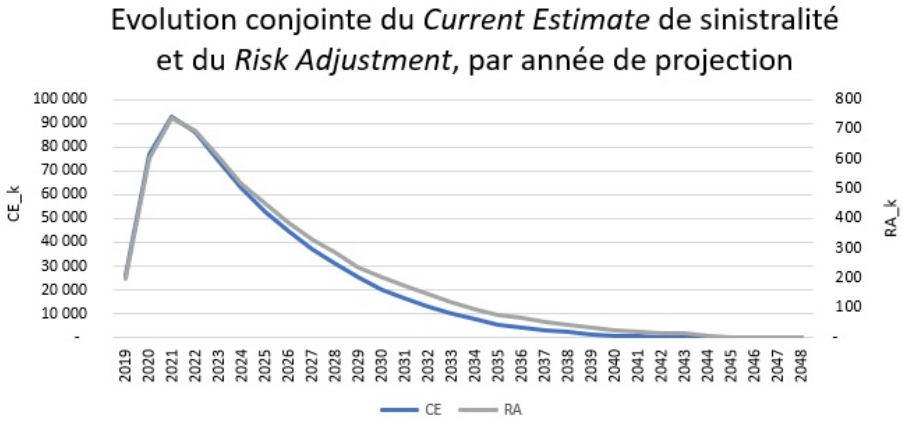
Le montant de *Risk Adjustment* à immobiliser au titre de la garantie "Arrêt-de-travail" pour le produit étudié représente $\frac{6\,129}{696\,328} = 0.88\%$ de son montant *Current Estimate* des sinistres "Arrêt de travail".

De la même manière que pour le risque de mortalité, la tendance du taux de *Risk Adjustment* associé au risque "Arrêt-de-travail" est croissant avec la décroissance de la taille du portefeuille d'assurés.





La tendance du montant de *Risk Adjustment* suit celle de montant *Current Estimate* des sinistres "Arrêt-de-travail".



2.2.2.2 Conclusion

La détermination du montant de *Risk Adjustment* par la méthode probabiliste permet de modéliser la contribution individuelle (par GCH) de chacun des risques et des années de projection dans le montant total de *Risk Adjustment*. L'atout de cette méthode repose sur son faible coût opérationnel, qui capitalise totalement sur les maquettes de projection utilisée par SOGECAP pour la norme Solvabilité II.

Néanmoins la méthode probabiliste repose sur un nombre important d'approximations.

En premier lieu, la sinistralité de chaque année de projection est représentée par un unique individu d'âge moyen et de capital-sous-risque moyen pour le GCH étudié.

En second lieu, le montant total de sinistres pour le risque étudié est supposé suivre une loi normale, permettant de calculer le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ nécessaire à la détermination du montant de *Risk Adjustment*.

En troisième lieu, les flux de sinistralité "Mortalité" et "Arrêt-de-travail" sont modélisés de façon indépendante l'un de l'autre, sans tenir compte des potentielles interactions entre ceux-ci.

En dernier lieu, la méthode probabiliste est mal adaptée à la détermination du montant de *Risk Adjustment* pour le risque "Arrêt-de-travail" en raison des multiples paramètres caractérisant ce dernier (taux d'incidence, taux de maintien, taux de passage en invalidité). Seul le taux d'incidence a été retenu dans le modèle présenté précédemment, entraînant une sous-estimation du montant du *Risk Adjustment* nécessaire pour couvrir une déviation de la sinistralité "Arrêt-de-travail".

2.3 Le *Risk Adjustment* : focus sur la partie LIC

Le *Risk Adjustment* de la partie LIC doit prémunir l'assureur contre un sous-provisionnement de la sinistralité passée, déclarée par l'assuré ou non. Sa détermination devra s'appuyer autant que possible sur les méthodes déjà implémentées chez SOGECAP.

2.3.1 La méthode de MACK

La méthode de MACK [5] est une méthode de provisionnement stochastique permettant d'évaluer l'erreur de provisionnement commise par la traditionnelle méthode de provisionnement *Chain-Ladder*. L'actuaire cherche ici à connaître le montant à l'ultime de la sinistralité passée, en fondant son analyse sur les paiements déjà réalisés par la compagnie d'assurance au titre de ces sinistres-ci.

Le point de départ est le même que celui de la méthode *Chain-Ladder* : l'actuaire classe les paiements réalisés chaque année comptable par année de survenance du sinistre, construisant un triangle de règlements des sinistres.

Un triangle de paiements cumulés $C_{i,j}$ en est déduit par le cumul des paiements annuels précédents, avec i l'année de survenance du sinistre et j l'année du paiement (année de développement).

Pour déterminer le montant à l'ultime de la sinistralité passée, la méthode de MACK pose les trois hypothèses suivantes :

— **H1** : $(C_{i,1}; ...; C_{i,n})$ est indépendant de $(C_{k,1}; ...; C_{k,n})$ pour tout $i \neq k$, autrement dit les sinistres réglés au titre de l'année de survenance i n'ont aucune influence sur les sinistres réglés au titre de l'année de survenance k.

— **H2** : $\forall i = 1; ...; n$ et $\forall j = 1; ...; n-1$:

$$\mathbb{E}(C_{i,j+1}|C_{i,1}; ...; C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j} \tag{2.26}$$

où le facteur de développement λ_j est indépendant de l'année de survenance i. L'estimateur non-biaisé de λ_j est défini par la relation suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \tag{2.27}$$

— **H3** : $\forall i = 1; ...; n$ et $\forall j = 1; ...; n-1$:

$$\mathbb{V}ar(C_{i;j+1}|C_{i;1}; ...; C_{i;j}) = \sigma_j^2 C_{i;j} \tag{2.28}$$

où la variance σ_j^2 est indépendante de l'année de survenance i considérée. L'estimateur sans biais $\hat{\sigma}_j^2$ donné par MACK est le suivant :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2 & \forall 1 \leq j \leq n-2 \\ \min \left(\frac{S_{n-2}^4}{S_{n-3}^2}; S_{n-2}^2; S_{n-3}^2 \right) & \text{si } j = n-1 \end{cases}$$

La véracité de ces trois hypothèses sera établie dans l'Annexe B .

L'estimation du montant de réserve ultime à détenir au titre de la sinistralité passée est calculée par l'enchaînement des trois étapes ci-dessous :

1. Calcul du triangle inférieur : $\forall i = 2; ....; n$:

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{\lambda}_k \tag{2.29}$$

2. Détermination du montant de réserves $\hat{R}_i$ pour chaque année de survenance i :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1} \tag{2.30}$$

3. Détermination du montant total de réserve ultime au titre de la sinistralité passée :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \tag{2.31}$$

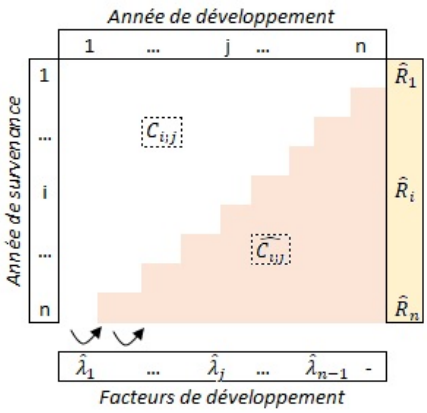


FIGURE 2.7 – Estimation de la réserve à l'ultime.

Le fil d'Ariane du mémoire

Le montant $\hat{R}$ ainsi déterminé correspond au montant *Current Estimate* de la sinistralité passée. La méthode de MACK permet de déterminer la volatilité autour de cette estimation *Chain-Ladder*. En ajustant une loi de distribution sur ces deux premiers moments statistiques, l'actuaire sera en mesure de définir le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ correspondant au montant de *Risk Adjustment*.

En surlignant le caractère aléatoire des $C_{i,j}$, MACK définit l'erreur quadratique moyenne de prédiction du modèle par la relation suivante :

$$MSEP(\hat{R}_i) = \mathbb{E}[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2|D] = \mathbb{V}ar[(C_{i,n}|D)] + [\mathbb{E}(C_{i,n}|D) - \hat{C}_{i,n}]^2 \tag{2.32}$$

avec D le triangle supérieur des paiements cumulés.

Cette relation prend en compte l'erreur entre l'estimateur $\hat{C}_{i,n}$ et la variable $C_{i,n}$, compte-tenu des informations déjà connues. L'écart entre les règlements futurs et la provision estimée peut résulter de :

— L'erreur de processus : due à la variabilité des données composant le triangle ;

— L'erreur d'estimation : liée à l'erreur commise dans l'estimation des paramètres du modèle.

Elle se réécrit par année de survenance i de la façon suivante :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right) \ \forall i = 2; ...; n. \tag{2.33}$$

La volatilité autour du montant *Current Estimate* de la réserve à l'ultime en découle :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^{n} \left\{ M\hat{S}EP(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \sum_{l=1}^{n-j} C_{l,j}} \right\} \tag{2.34}$$

Dans sa méthodologie [5], MACK recommande d'ajuster une loi normale ou log-normale pour modéliser la distribution du montant de réserve ultime, d'espérance $\hat{R}$ et de variance $\widehat{MSEP}(\hat{R})$, tout en préconisant l'approche log-normale pour éviter de prévoir une réserve $\hat{R}$ négative.

— Si R suit une loi normale : $\mathbb{E}(R) = \hat{R}$ et $\mathbb{V}ar(R) = \widehat{MSEP}(\hat{R})$

— Si R suit une loi log-normale : $\mathbb{E}(R) = log(\hat{R}) - \frac{\mathbb{V}ar(R)}{2}$ et $\mathbb{V}ar(R) = log(1 + \frac{\widehat{MSEP}(\hat{R})}{\hat{R}^2})$

2.3.1.1 Application empirique

L'application de la méthode de MACK a été réalisée sur un produit Emprunteur caractéristique du portefeuille Prévoyance de SOGECAP, dont le règlement des sinistres passés s'étale sur 10 années.

Pour préserver la confidentialité des données, les chiffres suivants seront exprimés proportionnellement au montant *Current Estimate* de la réserve ultime, normalisée à 100 (hormis pour les facteurs de développement).

	Année de développement (j)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\lambda}_j$	2.027	1.165	1.040	1.006	1.002	1.001	1.001	1.000	1.000	-
$\hat{\sigma}_j^2$	0.715	0.166	0.014	0.002	0	0	0	0	0	-

L'espérance et l'écart-type au titre de l'estimation de la réserve ultime R sont les suivants :

$$\begin{cases} \hat{R} = 100 \\ \sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R})} = 5.92 \end{cases}$$

Pour déterminer le montant du *Risk Adjustment* correspondant au quantile $VaR_{1-\alpha\%}(.)$ (ci-dessous $1-\alpha$ =70%), il est nécessaire de définir la loi de distribution de la réserve ultime R. Le graphique ci-dessous représente l'ajustement à une loi normale ou log-normale, suite à la préconisation de MACK [5].

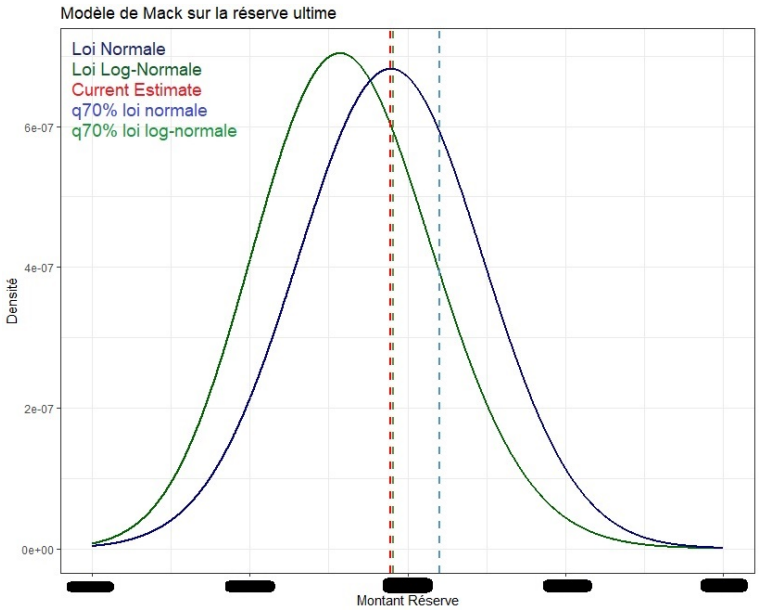


FIGURE 2.8 – Distribution en lois de la réserve à l'ultime.

En considérant le *Risk Adjustement* comme une déviation de la sinistralité par rapport à son montant *Current Estimate*, $RA = VaR_{70\%}(X) - CE_{central}$, le montant de celui-ci vaut :

— Si R suit une loi normale : $RA = 103.103 - 100 = 3.10\%$ du *Current Estimate*.

— Si R suit une loi log-normale : $RA = 100.144 - 100 = 0.14\%$ du *Current Estimate*.

2.3.1.2 Conclusion

Le montant du *Risk Adjustment* est extrêmement sensible au choix de la loi de distribution de la réserve ultime, pour un même niveau de tolérance aux risques $1 - \alpha$. Ici le rapport est de 20 entre le montant de *Risk Adjustment* déduit d'une loi normale de celui déduit d'une loi log-normale. Cette remarque avait été également soulevée pour la méthode "Coût du capital" (2.1.3). Elle partage également le principal reproche fait à l'encontre de la méthode *Chain-Ladder*, qui est très corrélée à la qualité de gestion des sinistres de l'assureur plutôt qu'à son exposition aux risques : une hausse des règlements peut refléter un gain d'efficacité dans la liquidation des sinistres plutôt qu'une réelle hausse de la sinistralité.

Néanmoins, la méthode de MACK possède le fort avantage de se fonder sur l'incontournable méthode *Chain-Ladder*, implémentée chez SOGECAP pour l'estimation de la réserve ultime. Elle permet également de fournir une mesure de la volatilité de cette estimation.

La méthode du *Bootstrap* appliquée à la méthode de MACK va se libérer de la contrainte d'adéquation en loi, tout en reprenant ses hypothèses.

2.3.2 Méthode du *Bootstrap* sur MACK

La méthode du *Bootstrap* est une méthode de re-échantillonnage dont l'objectif est d'approcher la valeur inconnue d'un paramètre (ici le montant de la réserve à l'ultime) à l'aide d'un grand nombre de simulations stochastiques.

Pour ce faire, de nouveaux échantillons sont créés en se fondant sur l'échantillon initial, par des tirages aléatoires avec remise. Pour un nombre suffisamment grand d'échantillons créés, il est possible de construire une distribution statistique de ces valeurs.

Les observations de l'échantillon initial doivent être indépendantes et identiquement distribuées, ce qui n'est pas le cas des paiements incrémentaux $C_{i,j}$.

La méthode *Bootstrap* suivante est appliquée sur le modèle de MACK décrit précédemment (2.3.1) : l'échantillon initial sera composé des résidus de PEARSON, indépendants et de loi normale centrée réduite, définis par la relation suivante : $\forall 1 \leq i + j \leq n - 1$:

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \mathbb{E}(C_{i,j+1})}{\mathbb{V}ar(C_{i,j+1})} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{\hat{\sigma}_j^2 \times C_{i,j}}} = \frac{\hat{\lambda}_{i,j} C_{i,j} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j \sqrt{C_{i,j}}} \tag{2.35}$$

avec les estimateurs $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\sigma}_j^2$ définis précédemment dans les hypothèses H2 et H3 (2.3.1).

La procédure *Bootstrap* est la suivante, répétée N fois :

1. Tirage aléatoire avec remise des résidus de PEARSON calculés précédemment. Notés $\tilde{r}_{i,j}$, ceux-ci sont positionnés dans le triangle supérieur des paiements cumulés.
2. Déduction des facteurs de développement individuels à partir de l'expression de $\tilde{r}_{i,j}$,

$\forall 1 \leq i+j \leq n-1$:

$$\tilde{\lambda}_{i,j} = \tilde{r}_{i,j} \times \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{i,j}}} + \hat{\lambda}_j \tag{2.36}$$

3. Calcul des nouveaux facteurs de développement par année de survenance :

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \tilde{\lambda}_{i,j} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \tag{2.37}$$

4. Complétion du triangle inférieur des paiements cumulés grâce aux nouveaux facteurs de développement issus du *Bootstrap*. L'erreur de processus y est également intégrée par le tirage aléatoire des nouveau facteurs de développement $\tilde{C}_{i,j}$ issus d'une loi normale :

$$\tilde{C}_{i,j+1} \sim \mathcal{N}\left(C_{i,j}\tilde{\lambda}_j; C_{i,j}\hat{\sigma}_j^2\right) \tag{2.38}$$

5. Déduction du montant de réserve par année de survenance :

$$\tilde{R}_i = \tilde{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} \tag{2.39}$$

6. Déduction du montant de réserve à l'ultime :

$$\tilde{R} = \sum_{i=2}^{n} \tilde{R}_i \tag{2.40}$$

2.3.2.1 Application empirique

La distribution de 5000 réserves estimées par *Bootstrap* est figurée ci-après, avec les résultats suivants (normalisés par rapport à la réserve de MACK précédemment calculée) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(R_{Bootstrap}) = 100.325 \\ \sqrt{\mathbb{V}ar(R_{Bootstrap})} = 3.79 \end{cases}$$

Le montant *Current Estimate* de réserve ultime estimé par *Bootstrap* est plus élevé que celui estimé par la méthode de MACK. En revanche, sa volatilité est plus faible que celle estimée par le calcul de la $\widehat{MSEP}$ dans la méthode de MACK. Ci-dessous est représentée la distribution de la réserve ultime issue de la technique du *Bootstrap*, comparativement aux lois normale et log-normale qui avaient été calibrées dans la section précédente par la méthode de MACK.

Pour une tolérance aux risques de $1-\alpha = 70\%$, le montant du *Risk Adjustment* s'élève à : $RA = VaR_{70\%}(X) - CE_{Bootstrap} = 102.150 - 100.325 = 1.819\%$ du *Current Estimate* estimé par *Boostrap*.

Dans sa méthodologie, MACK préconise l'utilisation d'une loi normale ou log-normale pour modéliser la distribution du montant de réserve à l'ultime ; cette modélisation a été réalisée et calibrée sur la distribution des réserves *bootstrappées*, afin de vérifier la pertinence de l'utilisation de ces lois.

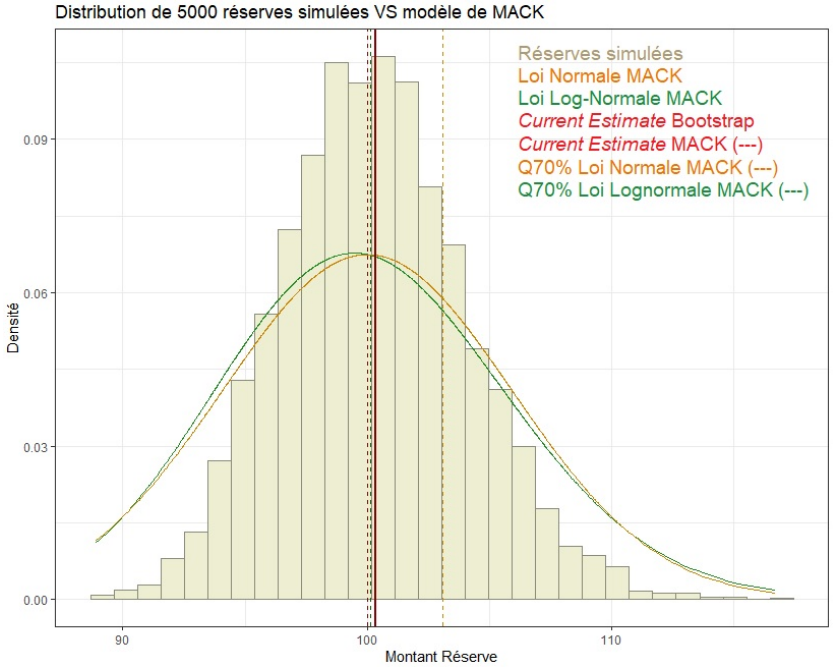


FIGURE 2.9 – *Bootstrap* VS Adéquation en lois pour la réserve à l'ultime.

— Si R suit une loi normale : $RA = 102.310 - 100.325 = 1.979\%$ du *Current Estimate* estimé par *Bootstrap*.

— Si R suit une loi log-normale : $RA = 102.256 - 100.325 = 1.925\%$ du *Current Estimate* estimé par *Bootstrap*.

Ces deux lois sont acceptables pour décrire la distribution du montant de réserve ultime, confirmées par un test d'adéquation en loi du Khi-deux, sans toutefois coïncider parfaitement avec le quantile à 70% de la distribution *boostrappée*.

La méthode de MACK, ajustée par une loi log-normale, a très certainement sous-estimée le montant de *Risk Adjustment* nécessaire pour se prémunir d'une déviation de la sinistralité à 70%, puisque que son quantile à 70% est en deçà de la moyenne de sinistralité estimée par *Bootstrap*, et reste très éloigné du quantile à 70% estimé par ce dernier.

2.3.2.2 Conclusion

La méthode *Bootstrap* sur MACK permet de s'aliéner de la principale faiblesse de la méthode de MACK : l'adéquation en loi pour déterminer un quantile reflétant le niveau de tolérance au risque de l'assureur. Elle permet de capitaliser sur la méthode de Chain-Ladder utilisée chez SOGECAP, tout en ayant un temps d'exécution des calculs très faible.

En revanche, en s'appuyant sur la méthode de MACK, elle se soumet à la même sensibilité au mode de gestion des sinistres de l'assureur plutôt qu'à sa réelle exposition aux risques.

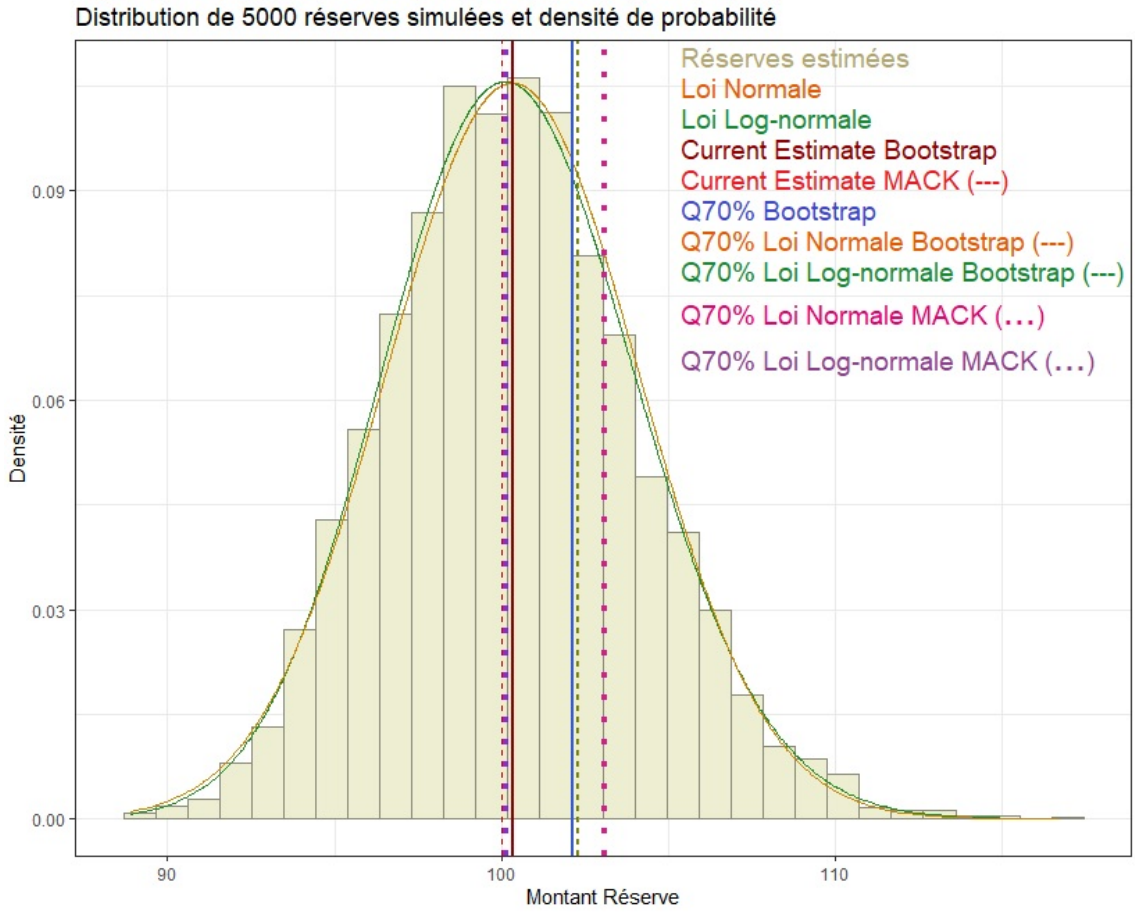


FIGURE 2.10 – Adéquation en lois sur la réserve à l'ultime *bootstrappée*.

2.3.3 Variante de la méthode des taux-chocs

Une variante de la méthode des taux-choc peut être adaptée à la détermination du montant de *Risk Adjustment* sur la partie LIC du bilan assurantiel en vision IFRS 17. Celle-ci a le mérite de s'inscrire dans la continuité de la méthode des taux-choc appliquée sur la partie LRC du bilan de l'assureur.

Cette détermination du montant de *Risk Adjustment* repose sur le même principe que la méthode des taux-choc vue dans la partie LRC : le montant de *Risk Adjustment* est la différence entre la sinistralité choquée correspondant au quantile $1 - \alpha\%$ de la distribution des sinistres et le montant *Current Estimate* de ceux-ci.

$$RA_{1-\alpha\%} = VaR_{1-\alpha\%}(X) - CE \tag{2.41}$$

Le montant du *Risk Adjustment* consacré à la partie LIC permet de se prémunir d'une mauvaise estimation de la sinistralité passée et de ses règlements associés : le montant de *Risk Adjustment* portera uniquement sur la sinistralité passée (connue ou non de l'assureur)

et non-encore réglée.

L'évaluation du montant de *Risk Adjustment* pour l'année de projection N au titre de la sinistralité survenue en année Y ($Y \leq N$) est réalisée de la façon suivante :

1. Détermination du montant de la sinistralité comportant une part d'incertitude : seuls les sinistres survenus l'année Y et non-encore réglés en année N bénéficient d'un montant de *Risk Adjustment*.

$$CE_{Y,N}^{sinistres+frais} = CE_{Y,N-1}^{sinistres+frais} - \text{Règlements}_{Y}^{sinistres+frais} \tag{2.42}$$

2. Évaluation du montant de sinistralité X survenue en année Y dans une situation choquée équivalente au quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ de la distribution des sinistres :

$$VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinistres+frais}(X) = VaR_{1-\alpha,Y,N-1}^{sinistres+frais}(X) - \text{Règlements}_{Y}^{sinistres+frais} \tag{2.43}$$

   Les hypothèses choquées correspondent aux taux de mortalité, d'incidence, de maintien en incapacité, de passage en invalidité et de frais généraux. Les chocs instantanés de rachats massifs et de mortalité catastrophe ne sont pas présents dans la partie LIC.

3. Évaluation du montant de *Risk Adjustment* pour l'année de survenance Y par la différence entre le montant de la sinistralité choquée et son évaluation *Current Estimate*

$$RA_Y = VaR_{1-\alpha,Y,N}^{sinistres+frais}(X) - CE_{Y,N}^{sinistres+frais} \tag{2.44}$$

2.3.3.1 Application empirique

L'application empirique a été réalisée sur un produit Emprunteur majeur du portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

L'évaluation au 31/12/2019 du montant de sinistres à régler au titre de la sinistralité passée pour le produit étudié est décomposée entre les sinistres "Mortalité" et "Arrêt-de-travail", pour l'année de survenance $Y = 2018$. Les taux-choc appliqués ci-après ont été calibrés pour un niveau de quantile de $1 - \alpha = 80\%$ et un horizon d'application du choc correspondant à l'horizon budgétaire de la compagnie ($h = 5$ *ans*).

Pour préserver la confidentialité des données SOGECAP, le *Current Estimate* de la sinistralité passée pour ce produit a été normalisé à 100.

	$Current\ Estimate_{2018,2019}^{sinistres}$	$VaR_{80\%,2018,2019}(.)$	RA_{2018}	$\%RA_{2018}$
Arrêt-de-travail	69.59	86.54	16.95	24.36%
Décès	30.41	31.92	1.52	5.00%
Total	100.00	118.46	18.46	18.46%

Cette méthode de détermination du montant de *Risk Adjustment* au titre de la sinistralité passée soulève les mêmes interrogations que la méthode des taux-chocs appliquée à la partie LRC du bilan assurantiel. De plus, elle ne tient pas compte de toute l'information connue :

l'estimation de la charge ultime des sinistres est déterminée en amont de la sinistralité réelle déclarée. Toutefois, elle a le mérite de s'inscrire dans la continuité de cette dernière, et permet d'éviter un effet de "rupture" de méthodologie entre le calcul du montant de *Risk Adjustment* au titre de la sinistralité future et celui attribué au titre de la sinistralité passée.

2.4 Conclusion générale

Les méthodes statistiques présentées dans ce chapitre pour déterminer le montant du *Risk Adjustment* se heurtent à la difficulté d'utiliser une unique méthode pour quantifier l'incertitude pesant sur la sinistralité future ou passée.

Néanmoins, seule la méthode des taux-choc permet d'assurer une continuité méthodologique pour déterminer le montant de *Risk Adjustement* relatif aux parties LRC et LIC du bilan assurantiel. Appliquée à l'évaluation de la sinistralité passée, elle est une alternative à la méthode de MACK, en permettant de calibrer finement les hypothèses actuarielles avec la possibilité d'intégrer facilement l'évolution du portefeuille. Toutefois, elle ne tient pas compte de l'information sur la sinistralité réelle puisqu'elle fonde l'estimation de la charge ultime des sinistres une unique fois, au début de la projection du GCH. En revanche, la méthode de MACK permet de tenir compte à la fois de la sinistralité passée mais également du risque de modèle, tout en étant mal adaptée aux branches à déroulement long du type "Rente Invalidité".

Chapitre 3

Consolidation du *Risk Adjustment*

Sommaire

3.1 L'impossible conservation de la façade Solvabilité II 72
3.2 La rénovation IFRS 17 : la théorie des Copules 74
3.2.1 Mesures de dépendance 74
3.2.2 Construction d'une copule bivariée 76
3.2.3 Personnalisation des copules bivariées 76
3.2.4 Copules elliptiques 77
3.2.5 Copules archimédiennes 78
3.2.6 Copules et dépendance caudale 80
3.3 Construction empirique 82
3.3.1 Copule empirique 82
3.3.2 Inférence statistique 84
3.3.3 Sélection de la meilleure copule 90
3.3.4 Dépendance caudale 95
3.3.5 Diversification empirique du *Risk Adjustment* 97

3.1 L'impossible conservation de la façade Solvabilité II

Les méthodes de détermination du *Risk Adjustment* présentées précédemment s'appliquent par groupes de contrats homogènes (maille IFRS 17) afin de couvrir les incertitudes associées aux risques d'assurances.

Toutefois, l'assureur a également la possibilité de tenir compte des bénéfices de diversification entre ses risques d'assurance afin d'optimiser la valeur du *Risk Adjustment*.

✍ IFRS 17 § B88.a

Étant donné que le Risk Adjustment pour risques non-financiers reflète la compensation que l'entité demande pour supporter les risques non-financiers découlant de son activité d'assurance, le Risk Ajustement pour risques non-financiers doit également refléter les bénéfices de diversification entre ses risques sous-jacents.

Pour tenir compte des potentiels bénéfices de diversification entre les différents risques exposant l'assureur, il est nécessaire d'agréger les *Risk Adjustment* élémentaires (c'est-à-dire ceux définis pour chaque risque de chaque produit) pour obtenir une vision consolidée du *Risk Adjustment* global.

La norme Solvabilité II a initié la prise-en-compte de la diversification entre modules de risques lors du calcul du *SCR* global de l'assureur (2.2) :

$$Basic\ SCR = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} \tag{3.1}$$

où les incréments i, j permettent de balayer l'ensemble des n risques de la matrice de corrélation, SCR_i est le montant de capital engendré par le risque i et $\rho_{i,j}$ est le coefficient de corrélation entre les risques i et j.

De la même façon, le montant global du *Risk Adjustment* après prise-en-compte de la diversification entre risques peut être déterminé par la formule suivante :

$$RA_{global} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} \times RA_i \times RA_j} \tag{3.2}$$

où RA_i est le montant du *Risk Adjustment* élémentaire engendré par le risque i et défini par : $RA_i = VaR_{1-\alpha}(X) - CE_i$ (2.6).

Comme précédemment, seuls les risques "Mortalité", "Incapacité - Invalidité", "Frais généraux", "Rachat massif" et "Mortalité CAT" résultants de l'activité Prévoyance de SOGECAP seront étudiés.

Avec la norme Solvabilité II [3], la diversification est mesurée entre risques deux-à-deux par l'utilisation des coefficients de corrélation détaillés ci-dessous :

Risques (Prévoyance)	Mortalité	Incap/Inval	Rachat Massif	Frais	CAT
Mortalité	1	0.25	0	0.25	0.25
Incap / Inval	0.25	1	0	0.50	0.25
Rachat massif	0	0	1	0.50	0.25
Frais	0.25	0.50	0.50	1	0.25
CAT	0.25	0.25	0.25	0.25	1

La calibration de ces coefficients de corrélation pour la norme Solvabilité II soulève des interrogations quant à sa réutilisation immédiate sous IFRS 17.

D'une part, ceux-ci ont été calibrés "à dire d'experts" sans être fondés sur des observations empiriques, en raison de l'absence de données en accès libre au moment des discussions. Ils ne reflètent pas forcément la dépendance entre les modules de risques de l'activité Prévoyance de SOGECAP puisque ses assurés lui sont spécifiques.

D'autre part, cette matrice de corrélation suppose une dépendance linéaire entre risques,

c'est-à-dire une corrélation constante quelle que soit leur intensité. Or dans la réalité, il est fréquent de voir deux variables habituellement peu corrélées entre-elles le devenir fortement en période choquée (ou vice-versa). La relation entre le cours d'un actif financier et le taux sans risque en est une bonne illustration : la célèbre formule de BLACK-SCHOLES indique une corrélation négative entre le cours d'un actif financier et le taux sans risque. Toutefois lors de la dernière grande crise financière, la chute des cours boursiers s'est accompagnée d'une baisse des taux d'intérêt, en raison de la politique monétaire expansionniste de la Banque Centrale Européenne. En période de crise, la corrélation entre le cours des actifs financiers et le taux sans risque diffère de celle connue en période non-stressée, et illustre la variation de la dépendance entre deux variables selon l'intensité de ces dernières.

La section suivante va s'atteler à déterminer le niveau de corrélation entre les risques du portefeuille Prévoyance de SOGECAP afin de bénéficier d'une potentielle diversification entre ceux-ci, tout en étant en adéquation avec une situation stressée caractérisée par le montant du *Risk Adjustment*.

3.2 La rénovation IFRS 17 : la théorie des Copules

3.2.1 Mesures de dépendance

Pour quantifier la dépendance entre les risques Prévoyance deux-à-deux, les mesures de dépendance ci-après peuvent être envisagées.

3.2.1.1 Coefficient de PEARSON

Le coefficient de PEARSON mesure la corrélation entre deux variables X et Y en la supposant constante quelle que soit l'intensité de ces variables. Pour les variables aléatoires X et Y de variance finie $\sigma^2(X) < \infty$ et $\sigma^2(Y) < \infty$:

$$\rho(X;Y) = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)} \tag{3.3}$$

Mesurer la dépendance entre les variables X et Y par le coefficient de PEARSON n'est pas pertinent si la dépendance entre ces deux variables n'est pas linéaire. De plus, bien que fréquemment utilisée, cette mesure de dépendance linéaire n'est pas une mesure de concordance.

Mesure de concordance : Soient $(x;y)$ et $(x';y')$ deux couples d'observations du vecteur aléatoire continu $(X;Y)$. Les couples $(x;y)$ et $(x';y')$ sont dits concordants si $(x-x')\times(y-y') > 0$ et discordants si $(x-x')\times(y-y') < 0$.

Soit $\kappa(.)$ une mesure de concordance pour les variables aléatoires X et Y :

1. Si Y est une fonction croissante de X, alors $\kappa(X;Y) = 1$
2. Si Y est une fonction décroissante de X, alors $\kappa(X;Y) = -1$
3. Si $f(.)$ et $g(.)$ sont des fonctions strictement croissantes, alors $\kappa(f(X);g(Y)) = \kappa(X;Y)$

Le coefficient linéaire de PEARSON n'est pas invariant à une transformation strictement croissante près puisqu'il dépend de la valeur des observations X et Y.

3.2.1.2 Le ρ de SPEARMAN

Soient $(x;y)$, $(x';y')$, $(x'';y'')$ trois couples d'observations du vecteur aléatoire continu $(X;Y)$. Le rhô de SPEARMAN est défini par :

$$\rho_S(X;Y) = 3 \times \left(\mathbb{P}[(x-x')(y-y'') > 0] - \mathbb{P}[(x-x')(y-y'') < 0]\right) \tag{3.4}$$

3.2.1.3 Le τ de KENDALL

Soient $(x;y)$ et $(x';y')$ deux couples d'observations du vecteur aléatoire continu $(X;Y)$. Le tau de KENDALL est défini par :

$$\tau(X;Y) = \mathbb{P}[(x-x')(y-y') > 0] - \mathbb{P}[(x-x')(y-y') < 0] \tag{3.5}$$

Le tau de KENDALL correspond à la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance.

Les mesures de dépendance de SPEARMAN et KENDALL sont des mesures de concordances, fondées sur la corrélation entre les rangs des variables plutôt que sur leurs valeurs. Ces deux mesures valent +1 quand la dépendance entre X et Y est positive et parfaite, -1 quand elle est négative et parfaite, et 0 quand X et Y sont indépendants.

Toutefois, les mesures de dépendances présentées ci-dessus résument la dépendance entre X et Y par un unique scalaire, sur l'ensemble de leur distribution. Pour connaître la dépendance du couple $(X;Y)$ à un niveau local de leur distribution, il est nécessaire d'utiliser la Théorie des Copules.

Le fil d'Ariane du mémoire

Pour évaluer les potentiels gains de diversification du *Risk Adjustment* entre les différents risques exposant l'activité Prévoyance de SOGECAP, le calibrage des coefficients de corrélation sera effectué par paires de risques. Par conséquent seules les copules bivariées seront présentées dans la section suivante, mais la Théorie des Copules est généralisable au cas multivarié.

3.2.2 Construction d'une copule bivariée

Une copule bivariée résume la structure de dépendance entre deux variables X et Y. On considère les fonctions de répartitions marginales de X et Y telles que : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ et $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$. Leur fonction de répartition conjointe est notée $F(x; y) = \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \leq y)$

Au lieu d'étudier la dépendance sur le couple $(X; Y)$, la Théorie des Copules étudie la dépendance au sein du couple $(F_X(x); F_Y(y))$. Par construction, les variables $U = F_X(x)$ et $V = F_Y(y)$ suivent des lois uniformes sur $[0; 1]^2$. Une copule bivariée est alors une fonction de répartition bivariée définie sur l'hypercube $[0; 1]^2$.

Théorème de SKLAR (1959) : Soit $F(.)$ une fonction de répartition bivariée dont les fonctions de répartitions marginales $F_X(.)$ et $F_Y(.)$ sont continues. Alors il existe une unique copule $C(.)$ telle que $\forall (X; Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x; y) = C(F_X(x); F_Y(y)) = C(U; V) \tag{3.6}$$

La copule bivariée associée au couple $(X; Y)$ peut alors s'écrire, $\forall (u; v) \in [0; 1]^2$:

$$C(u; v) = F(F_X^{-1}(u); F_Y^{-1}(v)) = \mathbb{P}(U < u; V < v) \tag{3.7}$$

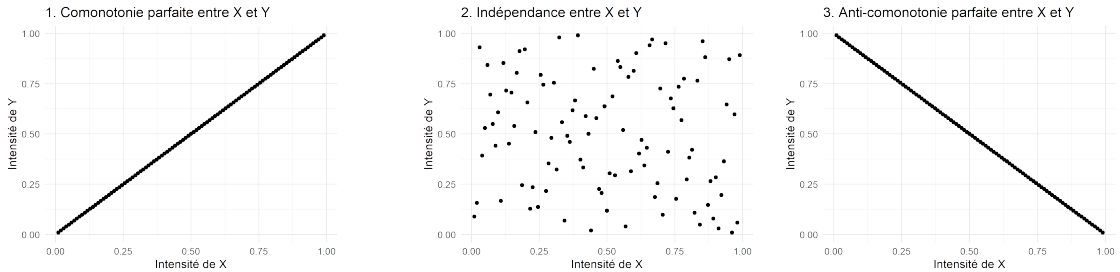
Une copule bivariée permet d'exprimer une fonction de répartition bivariée par ses marginales, uniformes. Elle permet d'analyser la structure de dépendance de la loi jointe, et si elle est absolument continue, de décomposer la fonction de densité $f(.)$ de $F(.)$ par le produit de ses marginales $f_X(.)$ et $f_Y(.)$ et de la densité marginale $c(.)$ de la copule telle que :

$$f(x; y) = c(F_X(x); F_Y(y)) \times f_X(x) \times f_Y(y) \tag{3.8}$$

3.2.3 Personnalisation des copules bivariées

3.2.3.1 Cas particuliers

Une copule bivariée, en tant que mesure de dépendance entre deux variables X et Y, peut prendre les trois formes suivantes dans les cas particuliers ci-dessous :



1. Parfaite corrélation positive entre X et Y, constante quelle que soit l'intensité de ces variables.
2. Parfaite indépendance entre X et Y, leur corrélation est nulle quelle que soit l'intensité de ces variables.
3. Parfaite corrélation négative entre X et Y, constante quelle que soit l'intensité de ces variables.

Pour obtenir l'intensité des variables X et Y, celles-ci sont remplacées par le rang qu'elles occupent dans leurs vecteurs d'observations respectifs. Il s'agit de transformer les observations $(x_1, ..., x_n)$ en uniformes empiriques par $u_i = \frac{Rang(x_i)}{n+1}$.

Pour tous les autres cas, notamment ceux où la dépendance du couple $(X; Y)$ n'est pas constante tout au long de leur distribution, des copules paramétriques permettent de caractériser la non-linéarité de la dépendance. Notamment, les familles elliptiques et archimédiennes sont incontournables grâce à leur facilité de construction et leurs propriétés intéressantes.

3.2.4 Copules elliptiques

Les copules elliptiques caractérisent une structure de dépendance symétrique dans les queues de distribution du couple $(X; Y)$. Elles sont construites à partir de lois elliptiques telles que celles de GAUSS ou de STUDENT.

3.2.4.1 Copule de GAUSS

La copule gaussienne définit des dépendances nulles dans les queues de la distribution du couple $(X; Y)$. Elle est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire de PEARSON $\rho \in [-1; 1]$ telle que, $\forall (u; v) \in [0; 1]^2$:

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u); \Phi^{-1}(v)) \tag{3.9}$$

Avec $\Phi^{-1}(.)$ l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et $\Phi_{\rho_S}(.)$ le générateur de la copule gaussienne précisé ci-dessous :

$$\Phi_\rho(u; v) = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{\frac{-(s^2 + t^2 - 2\rho st)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds\ dt \tag{3.10}$$

3.2.4.2 Copule de STUDENT

S'inscrivant dans la continuité de la copule gaussienne, la copule de STUDENT permet toutefois de capturer une dépendance non-nulle (mais symétrique) dans les queues de distribution grâce à ses queues épaisses. Elle est paramétrée par le coefficient de corrélation de

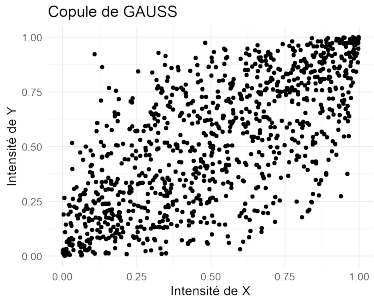
PEARSON $\rho \in [-1;1]$ et son degré de liberté κ telle que $\forall (u;v) \in [0;1]^2$: .

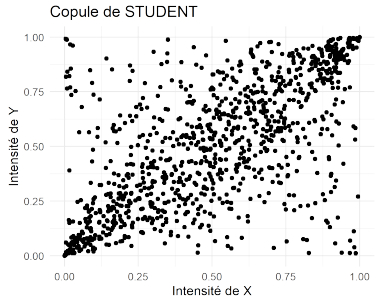
$$C(u,v) = T_{\rho,\kappa}(T^{-1}(u);T^{-1}(v)) \tag{3.11}$$

Avec $T^{-1}(.)$ l'inverse de la fonction de répartition de la loi de STUDENT, et $T_{\rho,\kappa}(.)$ le générateur de la copule de STUDENT précisé ci-dessous :

$$T_{\rho,\kappa}(u;v) = \int_{-\infty}^{v}\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{\kappa(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(\kappa+2)}{2}} ds\ dt \tag{3.12}$$

Ci-dessous sont illustrées les copules de GAUSS et de STUDENT, pour 1000 observations et un paramètre de dépendance mesuré par le coefficient de PEARSON tel que $\rho = 0.70$ et $\kappa = 2$:





3.2.5 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes possèdent l'avantage de décrire des structures de dépendance très variées, et asymétriques dans les queues de distribution. Elles sont symétriques dans le sens où $C(u;v) = C(v;u)$. Les trois copules archimédiennes les plus populaires sont celles de FRANK, GUMBEL et CLAYTON.

Pour une distribution bivariée, une copule archimédienne s'exprime sous la forme suivante :

$$C(u;v) = \Phi^{-1}(\Phi(u);\Phi(v)) \tag{3.13}$$

Avec $\Phi(.)$ une fonction convexe, continue, strictement décroissante et $\Phi(.) : [0;1] \to [0;\infty[$ telle que $\Phi(0) = \infty$ et $\Phi(1) = 0$.

3.2.5.1 Copule de FRANK

La copule de FRANK permet de modéliser les dépendances positives ou négatives, mais implique une dépendance nulle dans les queues de la distribution. La copule de FRANK

s'exprime selon le paramètre $\theta \neq 0$ par l'expression suivante :

$$C_\theta(u;v) = -\frac{1}{\theta} ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}\right) \tag{3.14}$$

Le générateur $\Phi_\theta(.)$ caractérisant la copule de FRANK s'exprime par l'expression suivante :

$$\Phi_\theta(u) = -ln \left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right) \tag{3.15}$$

3.2.5.2 Copules de GUMBEL et de JOE

Les copules de GUMBEL et de JOE permettent de modéliser uniquement les dépendances positives, et dont la dépendance est plus forte sur la queue supérieure de la distribution, c'est-à-dire lorsque les variables modélisées prennent une forte intensité. Elles sont particulièrement adaptées aux risques financiers ou assurantiels.

La copule de GUMBEL et son générateur caractéristique s'expriment selon le paramètre $\theta \geq 1$ par les expressions suivantes :

$$C_\theta(u;v) = exp\left\{-[(-ln(u)^\theta) + (-ln(v)^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}\right\} \text{ et } \Phi_\theta(u) = (-ln(u))^\theta \tag{3.16}$$

La copule de JOE s'exprime selon le coefficient de dépendance $\theta \geq 1$ par l'expression suivante :

$$C(u;v) = 1 - \left((1-u)^{-\theta} + (1-v)^{-\theta} - (1-u)^{-\theta} \times (1-v)^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.17}$$

Son générateur caractéristique $\Phi_\theta(.)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$\Phi_\theta(u) = 1 - (1 - exp(-u))^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.18}$$

3.2.5.3 Copules de CLAYTON et de A-M-H

Tout comme les copules de GUMBEL et JOE, la copule de CLAYTON ne permet de modéliser que les dépendances positives. En revanche, la copule de ALI-MIKHAIL-HAQ permet de modéliser à la fois les dépendances positives et négatives, mais ne couvre pas l'intégralité de l'intervalle $[-1;1]$. Les copules de CLAYTON et de A-M-H représentent une structure de dépendance inverse à celles de GUMBEL et JOE, en modélisant une dépendance plus forte sur les queues inférieures de la distribution.

La copule de CLAYTON et son générateur caractéristique s'expriment selon le paramètre

$\theta > 0$ par les expressions suivantes :

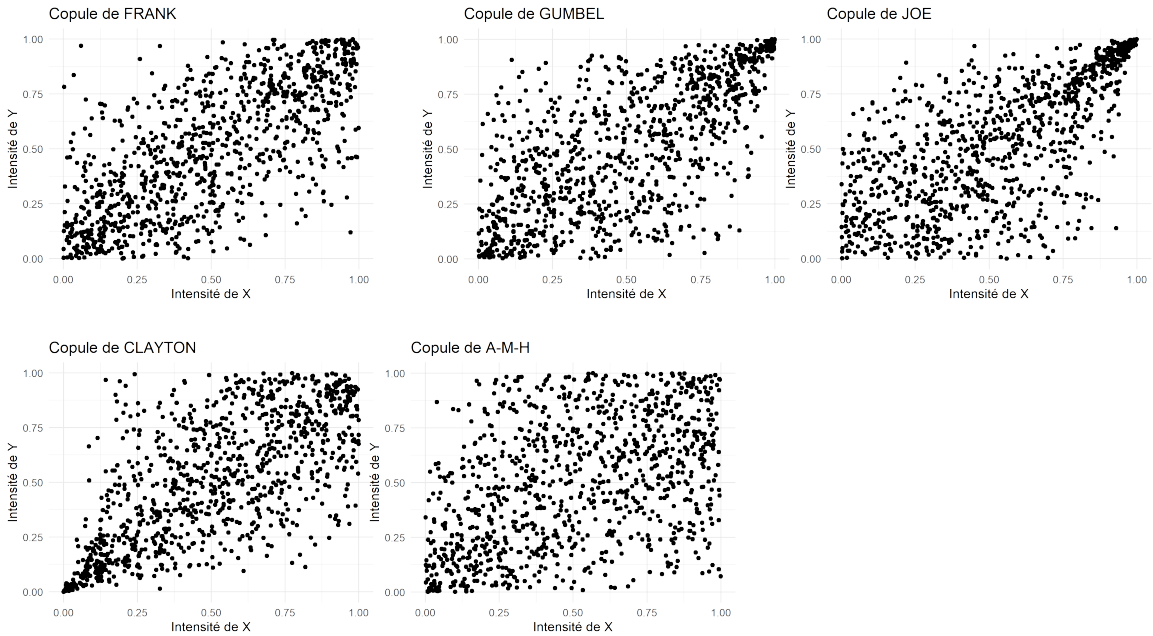
$$C_\theta(u;v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ et } \Phi_\theta(u) = \frac{u^{-\theta} - 1}{\theta} \tag{3.19}$$

La copule de A-M-H et son générateur caractéristique s'expriment selon le paramètre $\theta \in [-1;1]$ par les expressions suivantes :

$$C_\theta(u;v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)} \text{ et } \Phi_\theta(u) = \frac{ln\,(1-\theta(1-u))}{u} \tag{3.20}$$

3.2.6 Copules et dépendance caudale

Les copules paramétriques présentées précédemment sont illustrées ci-dessous, pour 1000 observations et une dépendance mesurée par le tau de KENDALL telle que $\tau = 0.5$ ($\tau = 0.33$ pour la copule A-M-H en raison de son domaine de définition restreint) :



Les copules paramétriques offrent deux grands avantages :

— D'une part, elles fournissent une expression directe entre leur paramètre θ et la dépendance globale du couple $(X;Y)$ mesurée par le τ de KENDALL. Pour calibrer les copules précédemment présentées, il suffit de calculer le τ de KENDALL du couple $(X;Y)$ et d'inverser son expression pour retrouver le paramètre θ de la copule paramétrique.

— D'autre part, elles permettent d'exprimer la dépendance caudale λ_L et λ_U en fonction du paramètre θ du générateur de la copule paramétrique.

De façon générale pour les copules bivariées, la dépendance caudale de la distribution du couple $(X;Y)$ est mesurée par λ_L et λ_U, les coefficients de dépendance des queues inférieures

(*Lower*) et supérieures (*Upper*). Pour $F_X(.)$ et $F_Y(.)$ les fonctions de répartition respectives des variables X et Y, λ_L et λ_U s'expriment par la relation suivante :

$$\begin{cases} \lambda_L(X;Y) = \lim_{\alpha\to 0^+} \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha)|Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u;u)}{u} \\ \lambda_U(X;Y) = \lim_{\alpha\to 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha)|Y > F_Y^{-1}(\alpha)) = \lim_{u\to 1^-} \frac{1-2u+C(u;u)}{1-u} \end{cases}$$

Les variables X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau de leur queue de distribution inférieure (resp. supérieure) si $\lambda_L = 0$ (resp. $\lambda_U = 0$). Autrement, il existe une dépendance caudale entre X et Y pour $\lambda_L \in]0;1]$ ou $\lambda_U \in]0;1]$.

Le fil d'Ariane du mémoire

Pour tenir compte de la diversification entre risques dans la détermination du *Risk Adjustment* consolidé, un coefficient de dépendance λ_U strictement positif signifie que compte-tenu d'une augmentation de la sinistralité sur le risque X, il existe une probabilité non-nulle qu'il y ait également une augmentation de la sinistralité sur le risque Y.

Le tableau ci-dessous récapitule le lien entre le τ de KENDALL et le générateur spécifique pour chaque copule paramétrique, ainsi que leurs dépendances caudales [6].

Copule	τ de KENDALL	λ_L	λ_U
GAUSS	$2\pi^{-1}\arcsin(\rho)$	0	0
STUDENT	$2\pi^{-1}\arcsin(\rho)$	$2t_{\kappa+1}\left(-\frac{\sqrt{(\kappa+1)(1-\rho)}}{\sqrt{\rho+1}}\right)$	$2t_{\kappa+1}\left(-\frac{\sqrt{(\kappa+1)(1-\rho)}}{\sqrt{\rho+1}}\right)$
FRANK	$1-\frac{4(1-D_1(\theta))^1}{\theta}$	0	0
JOE	$1-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\theta k+2)(\theta(k-1)+2)}$	0	$2-2^{\frac{1}{\theta}}$
GUMBEL	$1-\frac{1}{\theta}$	0	$2-2^{\frac{1}{\theta}}$
CLAYTON	$\frac{\theta}{\theta+2}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0
A-M-H	$\frac{3\theta-2}{3\theta}-\frac{2(1-\theta)^2 ln(1-\theta)}{3\theta^2}$	0.5 si $\theta=1$; 0 sinon.	0

En raison de l'ensemble de définition du paramètre $\theta \in [-1;1]$ de la copule A-M-H, celle-ci ne peut modéliser la dépendance qu'à condition qu'elle soit comprise entre $\tau \in [\frac{5-8\ln(2)}{3};\frac{1}{3}] \simeq [-0.18;0.33]$ pour le tau de KENDALL [7].

1. $D_k(.)$ est la fonction de DEBYE définie par $D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^k}{e^t-1}dt$

3.3 Construction empirique

3.3.1 Copule empirique

La copule empirique bivariée correspond aux réalisations du couple $(X;Y)$ telle que, pour n réalisations :

$$C_{emp}(u;v) = \frac{\textit{Nombre de couples } (X_i;Y_i) \textit{ tels que } F_X(X_i) \leq u \textit{ et } F_Y(Y_i) \leq v}{n} \tag{3.21}$$

La copule empirique bivariée définie ainsi par DEHEUVELS (1979) s'exprime par :

$$C_{emp}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\prod_{k=1}^{2}\mathbf{1}_{\{r_k^t < t_k\}} \tag{3.22}$$

où t_k est une graduation de l'axe k appartenant à l'intervalle $[0;T]$, et r_i^t la statistique de rang associé à l'observation x_i^t.

L'estimateur empirique $\hat{C}(.)$ de la copule $C_{emp}(.)$ s'écrit : $\hat{C}(u;v) = \hat{F}(\hat{F}_U^{-1}(u);\hat{F}_V^{-1}(v))$.

Pour étudier la dépendance au sein du portefeuille Prévoyance, deux copules empiriques sont créées : l'une entre les risques "Mortalité" et "Arrêt-de-travail" ; l'autre entre les risques "Mortalité" et "Frais généraux". Il s'agit de répondre aux questions suivantes : lorsque l'assureur subit une hausse de la mortalité de ses assurés, subit-il également une hausse des arrêts-de-travail ? Et subit-il également une hausse de ses frais généraux ?

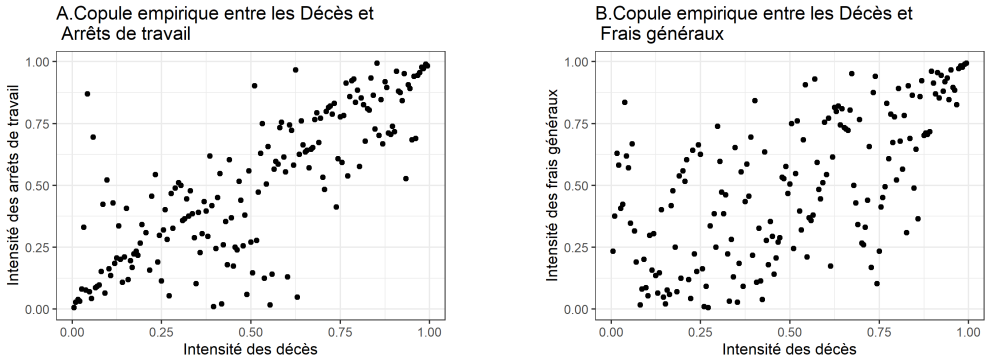
Pour construire la copule empirique "Mortalité - Arrêt-de-travail", l'actuaire sélectionne les produits du portefeuille Prévoyance qui contiennent ces deux garanties. Pour chacune des garanties, la charge totale du sinistre correspond à la somme des prestations payées, des provisions pour sinistres à payer et du montant des IBNR provisionnés au titre de ces sinistres. Cette copule contient 183 couples d'observations issues des données comptables de SOGECAP.

Pour construire la copule empirique "Mortalité-Frais généraux", l'actuaire sélectionne les produits du portefeuille Prévoyance ayant une garantie décès et pour lesquels les frais généraux sont connus. Ceux-ci correspondent à une grande diversité de frais : frais de personnels, frais de fonctionnement, frais de licences informatiques... L'affectation de frais généraux spécifiques à chaque produit est délicate en raison de frais résultants d'activités qui englobent plusieurs produits, mais elle est effectuée le plus justement possible par les équipes comptables. Cette copule contient 182 couples d'observations issues des données comptables de SOGECAP.

La dépendance du risque de "Rachat" vis-à-vis des autres risques ne sera pas étudiée dans ce mémoire. Le risque de "Rachat" est spécifique aux produits Emprunteurs du portefeuille Prévoyance et caractérise le fait qu'un assuré rachète son prêt bancaire. Par conséquent,

l'assureur ne recevra plus les primes d'assurance relatives à ce prêt bancaire. De ce fait, le risque de "Rachat" ne signifie pas un versement de prestations de la part de l'assureur vers l'assuré, cette sinistralité n'est donc pas enregistrée comptablement. [1]

Les couples *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* et *(Mortalité ; Frais généraux)* sont projetés dans l'espace $[0;1]^2$ en remplaçant le montant monétaire de l'observation par son rang dans son vecteur respectif.



Les mesures de dépendance globale au sein de ces deux couples sont les suivantes :

Copules	$\hat{\rho}$ de PEARSON	$\hat{\rho}_S$ de SPEARMAN	$\hat{\tau}$ de KENDALL
(Mortalité, Arrêt de travail)	0.76	0.79	0.61
(Mortalité, Frais généraux)	0.91	0.63	0.45

Trois tendances peuvent déjà être observées :

— Les sinistres "Arrêts-de-travail" et les "Frais généraux" semblent être positivement corrélés avec les sinistres "Décès".

— La dépendance entre les sinistres "Arrêts-de-travail" et les sinistres "Mortalité" semble être relativement constante au sein de la distribution de cette copule, elle ne varie pas avec l'intensité de ses variables. En conséquence, les trois mesures de dépendance globale sont proches puisque le coefficient de PEARSON est une mesure linéaire de la dépendance.

— La dépendance entre les sinistres "Mortalité" et les "Frais généraux" ne semble pas être constante tout au long de la distribution de cette copule : pour une faible mortalité, les frais généraux peuvent être aussi bien faibles que forts. En revanche, pour une forte mortalité, les frais généraux sont toujours élevés : une dépendance plus forte apparaît dans la partie caudale supérieure de cette copule.

La section suivante cherche à calibrer les copules paramétriques précédemment présentées sur les deux copules empiriques *(Mortalité, Arrêt de travail)* et *(Mortalité, Frais généraux)*.

1. Pour connaître le montant des rachats par produits, l'actuaire pourrait comparer les individus présents dans le portefeuille au début de l'année et ceux encore présents à la fin de celle-ci : la différence entre les deux, ôtées des sinistres "décès" de l'année, permettrait d'identifier quels assurés ont racheté leurs contrats. Il suffirait alors de quantifier pour chacun de ces assurés le montant des primes d'assurances futures qui ne seront pas perçues par l'assureur.

Le fil d'Ariane du mémoire

L'ajustement d'une copule paramétrique sur la copule empirique permet d'évaluer le niveau de dépendance locale entre les variables X et Y, qui doit être en cohérence avec le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ déterminant le montant du *Risk Adjustment*.

3.3.2 Inférence statistique

3.3.2.1 La méthode des moments

Pour ajuster une copule paramétrique sur une copule empirique [8], la méthode des moments se fonde sur la relation étroite entre le τ de KENDALL et le paramètre θ de la copule paramétrique.

L'estimateur $\hat{\tau}$ du τ de KENDALL est consistant, asymptotiquement normal et non-biaisé [9]. Par conséquent, pour une copule de GUMBEL par exemple, l'estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ s'exprime par l'expression suivante :

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{1-\tau} \text{ et ainsi : } \hat{\theta} = \frac{1}{1-\hat{\tau}} \tag{3.23}$$

D'une manière générale, la méthode des moments revient à choisir une mesure de concordance $\kappa(.)$ et à égaliser la mesure de concordance $\kappa(\theta)$ de la copule $C_\theta(.)$ à son estimateur $\hat{\kappa}$. Si $\kappa(\theta)$ est inversible, alors le paramètre θ peut être estimé.

$$\kappa(\theta) = \hat{\kappa} \Leftrightarrow \hat{\theta} = \kappa^{-1}(\hat{\kappa}) \tag{3.24}$$

Cette méthode est généralisable pour les copules multivariées mais elle ne sera pas développée ici en raison du choix d'étudier les risques du portefeuille Prévoyance deux-à-deux.

3.3.2.2 La méthode du maximum de vraisemblance

Pour déterminer le paramètre θ de la copule $C_\theta(X;Y)$ par maximum de vraisemblance, les lois marginales $F_X(.)$ et $F_Y(.)$ des variables X et Y sont supposées posséder des densités définies par les paramètres θ_X et θ_Y.

La densité jointe de la copule $C_\theta(X;Y)$ s'écrit :

$$f(x;y;\theta) = c(F_X(x);F_Y(y);\theta) \times f_X(x) \times f_Y(y) \tag{3.25}$$

avec $c(.)$ la densité de la copule $C_\theta(.)$ et $f_X(.)$ et $f_Y(.)$ les densités respectives des variables X et Y.

Maximum de vraisemblance exact : Dans cette méthode, la fonction de log-vraisemblance à maximiser s'exprime par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\ln L(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(c(F_X(x_i); F_Y(y_i); \theta)\right) + \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_X(x_i)\right) \\ + \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_Y(y_i)\right)\end{aligned} \tag{3.26}$$

L'estimateur $\hat{\theta}_{M.V}$ de θ est asymptotiquement normal : $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{M.V} - \theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0; I^{-1}(\theta)\right)$ avec $I_n^{-1}(.)$ la matrice d'information de FISHER.

La matrice d'information de FISHER $I^{-1}(.)$ correspond à la matrice de variance du score $\dot{l}_\theta(.) = \ln(L_\theta(.))$ telle que :

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\dot{l}_\theta(X)\dot{l}_\theta(X)^T] = Var[\dot{l}_\theta(X] \text{ avec } \dot{l}_\theta(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_{\theta_1}} \ln\left(L_\theta(X)\right) \\ ... \\ \frac{\partial}{\partial_{\theta_d}} \ln\left(L_\theta(X)\right) \end{pmatrix}$$

Dans le cadre des copules paramétriques archimédiennes et gaussienne, le paramètre θ à estimer est unique : $I^{-1}(.)$ est un scalaire.

La méthode de maximisation exacte de la fonction de log-vraisemblance est très laborieuse car elle exige d'estimer conjointement le paramètre θ de la copule $C_\theta(.)$ et les paramètres θ_X et θ_Y nécessaires à l'estimation des fonctions marginales de $F_X(.)$ et $F_Y(.)$.

Méthode IFM : La fonction de log-vraisemblance peut s'exprimer sous la forme suivante, en faisant apparaître les paramètres spécifiques à chacune des marginales :

$$\begin{aligned}\ln L(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n; \theta_X; \theta_Y; \theta) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(c(F_X(x_i; \theta_X); F_Y(y_i; \theta_Y); \theta)\right) + \\ \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_X(x_i; \theta_X)\right) + \sum_{i=1}^{n} ln\left(f_Y(y_i; \theta_Y)\right)\end{aligned} \tag{3.27}$$

La maximisation de la fonction de log-vraisemblance va être scindée en deux étapes :

1. Estimation des paramètres θ_X et θ_Y propres à chaque marginale par maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_X = \text{argmax} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f_X(x_i; \theta_X)\right) \text{ et } \hat{\theta}_Y = \text{argmax} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f_Y(y_i; \theta_Y)\right) \tag{3.28}$$

2. Estimation du paramètre θ de la copule $C_\theta(.)$ en maximisant la première partie de la

fonction de log-vraisemblance (3.27) :

$$\hat{\theta} = \text{argmax} \sum_{i=1}^{n} ln \left(c(F_X(x_i; \hat{\theta}_X); F_Y(y_i; \hat{\theta_Y}); \theta) \right) \tag{3.29}$$

L'estimateur $\hat{\theta}$ vérifie également la propriété de normalité asymptotique :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0; \nu^{-1}(\theta)\right)$$

avec $\nu^{-1}(.)$ la matrice d'information de GODAMBE. Cette dernière s'écrit :

$$\nu^{-1}(\theta) = D^{-1} M (D^{-1})^T \text{ avec } D = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \dot{l}_\theta(X)\right) \text{ et } M = \mathbb{E}_\theta[\dot{l}_\theta(X) \dot{l}_\theta(X)^T] \tag{3.30}$$

Lorsque la fonction de score $\dot{l}_\theta(.)$ est optimale, c'est-à-dire lorsque l'information de GODAMBE est maximale, alors cette dernière est égale à l'information de FISHER.

La méthode de maximisation de la fonction de log-vraisemblance par inférence sur les marginales est plus performante que celle précédemment décrite puisqu'elle permet de séparer l'estimation des paramètres θ_X et θ_Y des lois marginales de celle du paramètre θ de la copule. Toutefois, elle requiert toujours une appartenance en loi des marginales $F_X(.)$ et $F_Y(.)$ et peut souffrir d'erreurs d'estimation.

Méthode CML : Cette méthode est proche de la méthode IFM, à la différence près qu'elle transforme les observations X et Y en variables uniformes sur $[0; 1]^2$.

1. Estimation des fonctions de répartitions marginales $\hat{F}_X(.)$ et $\hat{F}_Y(.)$ telles que :

$$\hat{F}_X(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i < x\}} \text{ et } \hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i < y\}}$$

2. Projection des observations X et Y dans l'espace $[0; 1]^2$ par l'application de leur propre fonction de répartition : $\forall i \leq n, u_i = \hat{F}_X(x_i)$ et $v_i = \hat{F}_Y(y_i)$
3. Estimation du paramètre θ de la copule par maximisation de la fonction de log-vraisemblance telle que :

$$\hat{\theta} = \text{argmax} \sum_{i=1}^{n} ln \left(c(\hat{u}_i; \hat{v}_i; \theta) \right) \tag{3.31}$$

La méthode de maximisation canonique de la log-vraisemblance a l'avantage de ne pas supposer de formes paramétriques aux fonctions de répartitions marginales $F_X(.)$ et $F_Y(.)$, et donc ne requiert pas l'estimation des paramètres θ_X et θ_Y. Elle réduit les sources d'erreurs et permet de gagner en temps de calcul.

3.3.2.3 Calibration des copules

Pour modéliser la dépendance au sein des couples *(Mortalité ; Arrêt de travail)* et *(Mortalité, Frais généraux)*, les copules elliptiques et archimédiennes ont été ajustées sur les copules empiriques.

La méthode des moments donne l'estimation du paramètre θ de la copule paramétrique estimée par inversion du tau de KENDALL. La méthode du maximum de vraisemblance donne l'estimation du paramètre θ de la copule paramétrique, le maximum de vraisemblance calculé, l'estimation de la variance asymptotique (par le maximum de vraisemblance exacte MV ou canonique CML) et la valeur estimée du τ de KENDALL obtenue par inversion du paramètre estimé $\hat{\theta}$.

Couple *(Mortalité ;Frais généraux)* : Pour le couple *(Mortalité ; Frais généraux)*, les résultats obtenus sont les suivants, fondés sur le τ de KENDALL empirique $\hat{\tau} = 0.45$:

Copule $C_\theta(.)$	$\hat{\theta}_{Moment}$	$\hat{\theta}_{M.V}$	$\ln L_\theta(.)$	$\hat{\sigma}^2_{MV}(\hat{\theta})$	$\hat{\sigma}^2_{CML}(\hat{\theta})$	$\hat{\tau}(\theta)$
GAUSS	0.65	0.64	45.44	0.002	0.001	0.44
FRANK	4.95	4.85	44.82	0.423	0.282	0.45
GUMBEL	1.83	1.89	59.20	0.028	0.013	0.47
JOE	2.53	2.53	65.04	0.100	0.034	0.45
CLAYTON	1.66	0.71	18.11	0.008	0.001	0.26

La copule A-M-H est exclue de la calibration puisque le $\hat{\tau}$ de KENDALL empirique se situe au-delà de la dépendance maximale ($\simeq 0.33$) que peut modéliser cette copule.

La copule de STUDENT possède deux paramètres à estimer : le paramètre θ de la copule et le nombre de degrés de liberté κ. La simple inversion du τ de KENDALL empirique ne permet pas de résoudre cette équation à deux inconnues. La méthode de MASHAL et ZEEVI (M.Z) permet de résoudre cette équation en deux étapes [10] :

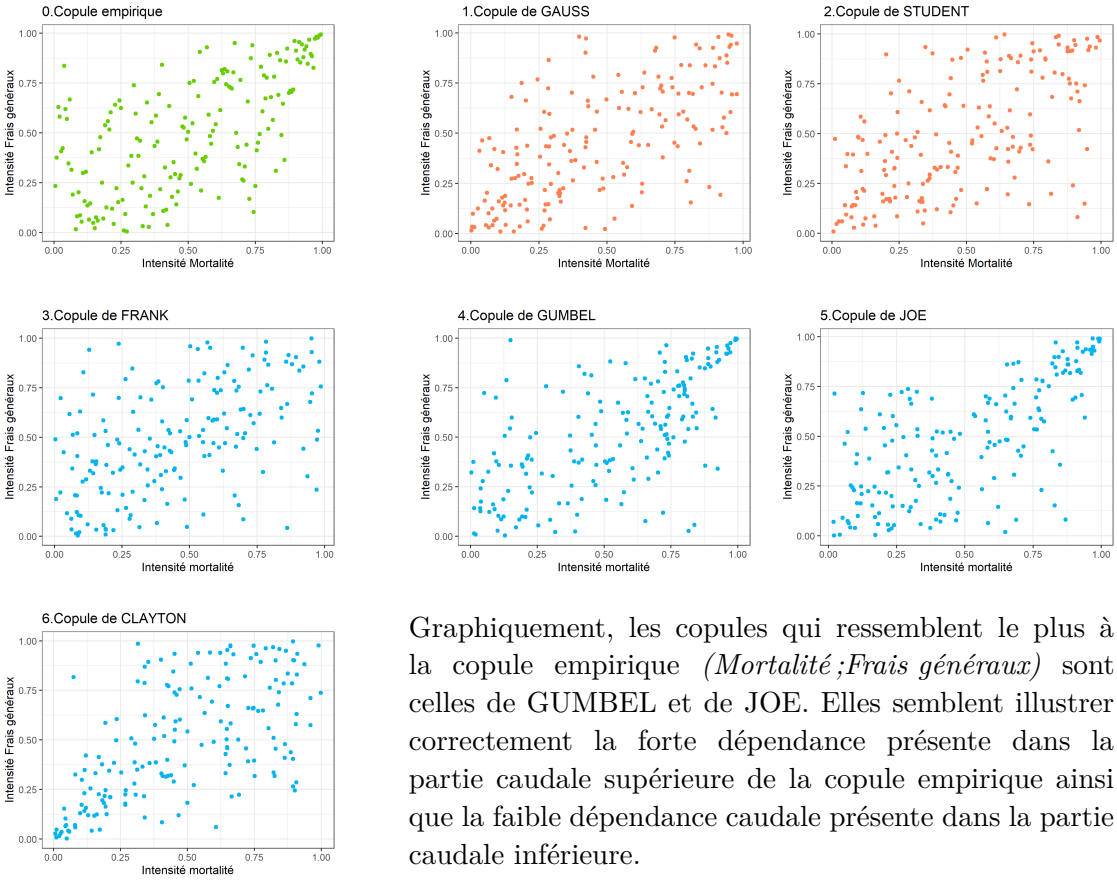
1. Dans un premier temps, la méthode des moments permet de déterminer la matrice de variance-covariance Σ : chacun de ses éléments est estimé par $\Sigma_{j;k} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}(X_j; X_k)\right)$ avec :
$$\hat{\tau}(X_j; X_k) = \binom{2}{n}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \text{sign}(X_{i_1;j} - X_{i_2;j})(X_{i_1;k} - X_{i_2;k})$$
Le $\hat{\tau}$ de KENDALL empirique permet de construire l'estimateur de la matrice de variance-covariance totale Σ tel que $\hat{\Sigma} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\tau})$
2. Dans un second temps, l'estimation du paramètre κ est réalisée par maximum de vraisemblance grâce à la détermination de la matrice de variance-covariance Σ décrite ci-dessus.

Les résultats obtenus pour la copule de STUDENT et $\hat{\tau} = 0.45$ sont les suivants :

Copule $C_{\theta;\kappa}(.)$	$\hat{\theta}_{M.Z}$	$\hat{\kappa}_{M.Z}$	$\hat{\theta}_{M.V}$	$\hat{\kappa}$	$\ln L_\theta(.)$	$\hat{\Sigma}_{\theta;\kappa}$	$\hat{\tau}(\theta)$
STUDENT	0.65	8.37	0.65	8.22	46.5	$\begin{pmatrix} 0.001 & - \\ - & - \end{pmatrix}$	0.45

L'algorithme n'a pas convergé pour déterminer la matrice de variance-covariance : seule la variance de $\hat{\theta}$ est indiquée.

Les copules elliptiques et archimédiennes calibrées précédemment sont illustrées ci-après :



Graphiquement, les copules qui ressemblent le plus à la copule empirique *(Mortalité ;Frais généraux)* sont celles de GUMBEL et de JOE. Elles semblent illustrer correctement la forte dépendance présente dans la partie caudale supérieure de la copule empirique ainsi que la faible dépendance caudale présente dans la partie caudale inférieure.

La copule de CLAYTON modélise le phénomène inverse, elle pourrait être rejetée pour la modélisation de la copule empirique.

La sélection de la meilleure copule pour le copule *(Mortalité ;Frais généraux)* sera effectuée par tests statistiques, dans la prochaine section.

Couple *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* : La démarche est la même que celle effectuée précédemment, les résultats sont résumés ci-après pour $\hat{\tau} = 0.61$:

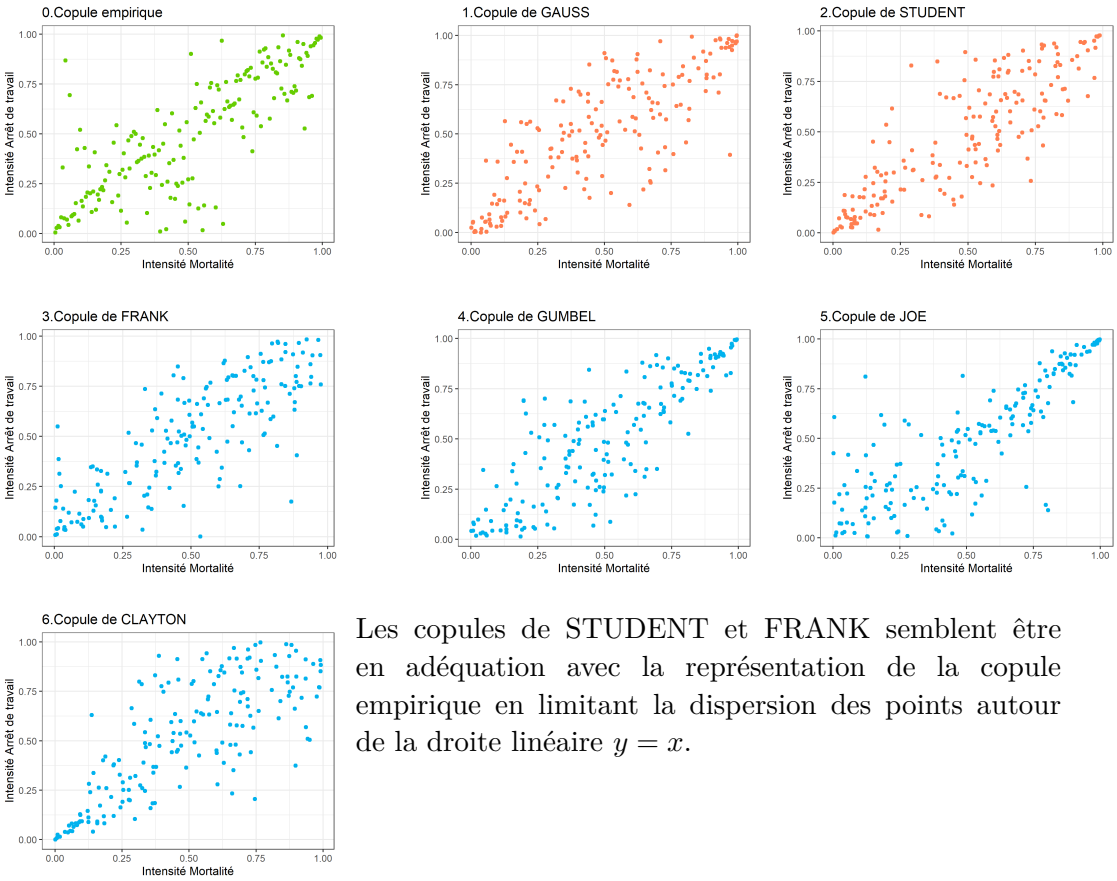
Copule $C_\theta(.)$	$\hat{\theta}_{Moment}$	$\hat{\theta}_{M.V}$	$\ln L_\theta(.)$	$\hat{\sigma}^2_{MV}(\hat{\theta})$	$\hat{\sigma}^2_{CML}(\hat{\theta})$	$\hat{\tau}(\theta)$
GAUSS	0.82	0.78	83.46	0.001	0.001	0.57
FRANK	8.17	8.40	90.48	0.49	0.51	0.62
GUMBEL	2.56	2.51	95.36	0.02	0.03	0.60
JOE	3.94	3.12	85.58	0.05	0.05	0.53
CLAYTON	3.11	1.80	62.50	0.04	0.04	0.47

Une nouvelle fois, la copule A-M-H est exclue de la sélection puisque le $\hat{\tau}$ de KENDALL empirique est ici aussi au-delà de la dépendance maximale ($\simeq 0.33$) que peut modéliser cette copule.

Les résultats obtenus pour la copule de STUDENT et $\hat{\tau} = 0.61$ sont les suivants :

Copule $C_{\theta;\kappa}(.)$	$\hat{\theta}_{M.Z}$	$\hat{\kappa}_{M.Z}$	$\hat{\theta}_{M.V}$	$\hat{\kappa}$	$\ln L_\theta(.)$	$\hat{\Sigma}_{\theta;\kappa}$	$\hat{\tau}(\theta)$
STUDENT	0.817	2.457	0.818	2.465	99.93	$\begin{pmatrix} 0.001 & 0.006 \\ 0.006 & 0.369 \end{pmatrix}$	0.61

Les copules elliptiques et archimédiennes calibrées précédemment sont représentées ci-dessous :



Les copules de STUDENT et FRANK semblent être en adéquation avec la représentation de la copule empirique en limitant la dispersion des points autour de la droite linéaire $y = x$.

3.3.3 Sélection de la meilleure copule

Pour sélectionner les copules paramétriques qui représentent au mieux les structures de dépendance des couples *(Mortalité ;Frais généraux)* et *(Mortalité ;Arrêt de travail)*, deux types de méthodes sont envisagées : les premières sont fondées sur le critère de la log-vraisemblance ; les secondes sur la distance statistique entre les réalisations de la copule empirique et celles de la copule paramétrique.

3.3.3.1 Les critères d'AKAIKE et de BAYES

Le critère d'information d'AKAIKE (1974) est fondé sur la valeur de la log-vraisemblance maximisée. Il permet d'éviter une sur-paramétrisation du modèle statistique en pénalisant la log-vraisemblance maximisée par son nombre de paramètres k.

$$AIC = -2 \ln L_\theta(.) + 2k \tag{3.32}$$

Le critère AIC permet de réaliser un compromis entre le biais du modèle statistique (décroissant avec le nombre de paramètres) et sa parcimonie (volonté de décrire le modèle avec un nombre réduit de paramètres).

Le critère d'information de BAYES complète le critère AIC en pénalisant le nombre n d'observations du modèle.

$$BIC = -2 \ln L_\theta(.) + k \ln(n) \tag{3.33}$$

La copule paramétrique qui s'ajuste le mieux à la copule empirique est celle qui minimise les deux critères précédents.

Dans le cas présent, les critères AIC et BIC sont équivalents puisque les copules paramétriques sont calibrées sur le même nombre d'observations. Seule la copule de STUDENT $C_{\theta;\kappa}(.)$ possède deux paramètres à estimer, elle sera davantage pénalisée que les autres copules paramétriques $C_\theta(.)$ à paramètre unique.

3.3.3.2 Tests statistiques

Les tests présentés ci-après souhaitent trancher entre les deux hypothèses suivantes :

— H_0 : *"La copule $C_{\theta_n}(.)$ appartient à la classe de copules paramétriques $\mathscr{C}_\theta$."*

— $\bar{H}$: *"La copule $C_{\theta_n}(.)$ n'appartient pas à la classe de copules paramétriques $\mathscr{C}_\theta$".*

Ces tests statistiques se fondent sur une comparaison de la "distance" entre la copule empirique $C_n(.)$ et la copule paramétrique de classe $\mathscr{C}_\theta$ calibrée sur $C_n(.)$, notée C_{θ_n}, et résumée par l'expression suivante :

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \tag{3.34}$$

La copule empirique bivariée, définie en (3.21) est réécrite sous la forme suivante :

$$C_n(u;v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_i \leq u, V_i \leq v\}} \tag{3.35}$$

où $(u,v) \in [0;1]^2$ sont les points d'évaluation de la fonction de répartition bivariée du couple $(U;V)$ et n le nombre d'observations.

La convergence du processus $\mathbb{C}_n$ vers une loi gaussienne est démontrée dans cet article-ci [11], et sert de fondement pour les tests statistiques de CRAMER-VON MISES, KOLMOGOROV-SMIRNOV et ANDERSON-DARLING détaillés ci-après.

Pour ces trois tests, l'utilisation d'une table de valeurs critiques permettant de conclure sur l'hypothèse testée n'est pas possible puisque l'hypothèse nulle dépend du paramètre θ et de la famille de la copule testée. La procédure de test mise-en-oeuvre est la suivante, dont les modalités sont détaillées par GENEST & al. [12] :

1. Calcul de la statistique de test.
2. Calcul de la *p-value* associée au test.
3. Règle de décision du test : l'hypothèse nulle est rejetée si la *p-value* est supérieure à 5%, c'est-à-dire que la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie est limitée à 5% maximum des cas.

L'application de cette procédure de test est expliquée en Annexe C [13].

Test de CRAMER-VON MISES : La statistique de test de CRAMER- VON MISES s'exprime comme ci-dessous :

$$S_n = \int_{[0;1]^d} \mathbb{C}_n(u_1, ..., u_d)^2 dC_n(u_1, ..., u_d) \tag{3.36}$$

La statistique de test S_n étudiée peut se réécrire sous la forme suivante :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \{C_n(U_i, V_i) - C_{\theta_n}(U_i, V_i)\}^2 \tag{3.37}$$

Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV : Le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV est fondé sur la statistique de test suivante, $\forall (u;v) \in [0;1]^2$:

$$T_n = \sup_{u \in [0;1]^2} |\mathbb{C}_n(u,v)| \tag{3.38}$$

Elle peut se réécrire sous la forme suivante :

$$T_n = \sup_{n<\infty} |C_n(u,v) - C_{\theta_n}(u,v)| \tag{3.39}$$

Test d'ANDERSON-DARLING : La statistique d'ANDERSON-DARLING accentue les déviations qui ont lieu sur les parties caudales de la distribution.

Pour un échantillon de taille n, elle s'exprime par l'expression suivante, $\forall (u;v) \in [0;1]^2$:

$$R_n = \int_{[0;1]^2} \left(\frac{C_n(u,v) - C_{\theta_n}(u,v)}{\left(C_{\theta_n}(u,v)\left\{1 - C_{\theta_n}(u,v)\right\} + \xi_m\right)^m} \right)^2 dC_n(u,v) \tag{3.40}$$

La statistique R_n coïncide avec S_n pour $m = 0$. Pour $m > 0$, il est possible d'accentuer la différence entre $C_n(u,v)$ et $C_{\theta_n}(u,v)$ dans les queues de la distribution. Cependant, GENEST & al. précisent que le choix de m et ξ_m est arbitraire et nécessite des recherches plus approfondies pour maximiser le pouvoir sélectif de la statistique R_n.

La statistique d'ANDERSON-DARLING peut se réécrire sous la forme suivante :

$$R_n = \max_{(u;v)} \frac{|C_n(u;v) - C_{\theta_n}(u;v)|}{\sqrt{C_{\theta_n}(u;v)\left(1 - C_{\theta_n}(u;v)\right)}} \tag{3.41}$$

Test du CHI-DEUX : Pour le test du CHI-DEUX, l'espace de projection $[0;1]^2$ est découpé en k pavés $[u_{i-1};u_i] \times [v_{j-1};v_j]$. Le test du CHI-DEUX compare l'effectif observé $n_{i,j}$ dans chaque pavé par rapport à l'effectif théorique $n \times p_{i,j}$, où $p_{i,j}$ est la probabilité théorique de se situer dans le pavé $[u_{i-1};u_i] \times [v_{j-1};v_j]$ définie par l'expression suivante [14] :

$$p_{i,j} = C_{\mathscr{C}_0}(u_i;v_j) - C_{\mathscr{C}_0}(u_{i-1};v_j) + C_{\mathscr{C}_0}(u_i;v_{j-1}) - C_{\mathscr{C}_0}(u_{i-1};v_{j-1}) \tag{3.42}$$

En pratique, l'espace de projection a été découpé en pavés de dimension $[0;1] \times [0;1]$. Un exemple de comptage pour la copule de GUMBEL calibrée sur 182 observations pour le couple *(Mortalité, Frais généraux)* est illustré ci-dessous :

$[0.9;1]$	0	0	0	0	0	1	1	2	4	10
$[0.8;0.9[$	0	0	1	1	1	2	2	3	5	4
$[0.7;0.8[$	0	1	1	1	2	2	3	3	3	2
$[0.6;0.7[$	1	1	1	2	2	3	3	3	2	1
$[0.5;0.6[$	1	1	2	2	2	3	3	2	2	1
$[0.4;0.5[$	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
$[0.3;0.4[$	2	2	3	3	2	2	2	1	1	0
$[0.2;0.3[$	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0
$[0.1;0.2[$	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0
$[0;0.1[$	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0
	$[0;0.1[$	$[0.1;0.2[$	$[0.2;0.3[$	$[0.3;0.4[$	$[0.4;0.5[$	$[0.5;0.6[$	$[0.6;0.7[$	$[0.7;0.8[$	$[0.8;0.9[$	$[0.9;1]$

Le découpage en $k = 100$ pavés doit respecter le critère de COCHRAN : chacun des pavés doit contenir au moins 1% des observations ($\simeq 1.82$), et pour 80% d'entre-eux au moins 5%

des observations ($\simeq 9.1$). Les 100 pavés précédents ont été regroupés en 18 classes se voulant représentatives des spécificités des copules paramétriques :

	$[0;0.1[$	$[0.1;0.2[$	$[0.2;0.3[$	$[0.3;0.4[$	$[0.4;0.5[$	$[0.5;0.6[$	$[0.6;0.7[$	$[0.7;0.8[$	$[0.8;0.9[$	$[0.9;1]$
$[0.9;1]$	0	0	0	0	0	1	1	2	4	10
$[0.8;0.9[$	0	0	1	1	1	2	2	3	5	4
$[0.7;0.8[$	0	1	1	1	2	2	3	3	3	2
$[0.6;0.7[$	1	1	1	2	2	3	3	3	2	1
$[0.5;0.6[$	1	1	2	2	2	3	3	2	2	1
$[0.4;0.5[$	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
$[0.3;0.4[$	2	2	3	3	2	2	2	1	1	0
$[0.2;0.3[$	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0
$[0.1;0.2[$	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0
$[0;0.1[$	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0

Pour n classes *in fine*, la statistique de test du CHI-DEUX est la suivante :

$$\chi^2_{obs} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \tag{3.43}$$

Avec O_j l'effectif observé de la copule empirique dans la classe j et E_j l'effectif attendu de la copule paramétrique calibrée.

La statistique du CHI-DEUX χ^2_{obs} suit une loi du CHI-DEUX à $(n-r-1)$ degrés de liberté, avec r le nombre de paramètres estimés de la copule. Elle est à comparer avec la valeur critique χ^2_{crit} de la table du CHI-DEUX : pour un seuil de tolérance choisi, si $\chi^2_{obs} < \chi^2_{crit}$, l'hypothèse H_0 est acceptée ; sinon elle est rejetée. Parmi les copules sélectionnées, celle qui minimise la valeur du χ^2_{obs} est celle qui représente le mieux la structure de dépendance du couple de variables étudiées [15].

Résultats des tests statistiques précédents pour le couple *(Mortalité ; Frais généraux)* :

Copule $C_{\theta_n}(.)$	AIC	S_n	*p-value*(S_n)	T_n	*p-value*(T_n)	R_n	*p-value*(R_n)	χ^2_{obs}
GAUSS	-88.87	0.040	0.002	0.045	0.003	0.202	0	14.47
STUDENT	-88.96	0.042	0.001	0.045	0.008	0.206	0	15.18
FRANK	-87.63	0.043	0.002	0.041	0.016	0.186	0.001	19.70
GUMBEL	-116.44	0.024	0.055	0.040	0.035	0.182	0.001	9.57
JOE	-128.08	0.017	0.166	0.032	0.186	0.159	0.012	13.39
CLAYTON	-34.23	0.116	0	0.066	0	0.238	0	53.68

— La copule de JOE minimise le critère de log-vraisemblance AIC, suivie de celle de GUMBEL.

— Pour le test de CRAMER-VON MISES (S_n), les *p-values* des copules de JOE et GUMBEL sont supérieures à 5% : pour un seuil de risque toléré de 5%, l'hypothèse nulle ne peut pas être rejetée et par conséquent ces deux copules sont acceptables, avec une préférence pour celle de JOE.

— De la même manière, le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV permet d'accepter seulement la copule de JOE, tandis que le test d'ANDERSON-DARLING ne permet pas de privilégier l'une des copules paramétriques testées pour décrire la structure de dépendance entre les sinistres de mortalité et les frais généraux.

— Pour un seuil de risques toléré de 5%, la statistique de test critique du CHI-DEUX vaut $\chi^2_{n-r-1} = 26.30$ pour $18-1-1$ degrés de liberté, et $\chi^2_{n-r-1} = 25.00$ pour $18-2-1$ degrés de liberté (copule de STUDENT). Toutes les copules paramétriques sont acceptables à l'exception de celle de CLAYTON. Toutefois, la *p-value* maximale est obtenue pour la copule de GUMBEL : elle semble être la mieux adaptée pour décrire la structure de dépendance entre les sinistres de mortalité et les frais généraux.

En définitive, les copules de JOE et GUMBEL semblent les plus appropriées pour décrire la structure de dépendance entre les sinistres de mortalité et les frais généraux, en modélisant une dépendance plus forte quand ces deux variables prennent de grandes valeurs.

Résultats des tests statistiques précédents pour le couple *(Mortalité ; Arrêt-de-travail)* :

Copule $C_{\theta_n}(.)$	AIC	S_n	*p-value*(S_n)	T_n	*p-value*(T_n)	R_n	*p-value*(R_n)	χ^2_{obs}
GAUSS	-164.91	0.043	0	0.045	0.002	0.122	0.011	42.14
STUDENT	-195.87	0.046	0	0.044	0.001	0.113	0.004	41.86
FRANK	-178.97	0.040	0.001	0.049	0.002	0.118	0.033	39.32
GUMBEL	-188.72	0.027	0.004	0.037	0.027	0.108	0.040	32.58
JOE	-169.15	0.017	0.046	0.027	0.349	0.159	0.014	41.09
CLAYTON	-123.01	0.111	0	0.063	0	0.158	0	87.88

— La log-vraisemblance est minimale pour la copule de STUDENT, suivie de celle de GUMBEL.

— Pour un seuil de tolérance aux risques de 5%, les statistiques de test de CRAMER-VON MISES (S_n) et ANDERSON-DARLING (R_n) ne permettent pas d'accepter l'hypothèse nulle et aucune copule paramétrique ne peut être sélectionnée. Toutefois, la *p-value* du test de CRAMER-VON MISES est raisonnablement proche de 5% pour la copule de JOE et dans ce cas elle pourrait être acceptée.

— Le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV (T_n) permet d'accepter la copule de JOE en conservant fortement l'hypothèse nulle pour une tolérance au risque de 5%.

— La statistique du CHI-DEUX vaut $\chi^2_{n-r-1} = 26.30$ pour $18-1-1$ degrés de liberté et $\chi^2_{n-r-1} = 25.00$ pour $18-2-1$ degrés de liberté (copule de STUDENT). Aucune copule paramétrique n'est acceptable pour le seuil d'erreur de 5%.

En conclusion, les copules de STUDENT et de JOE semblent les plus adaptées parmi les copules paramétriques testées pour décrire la structure de dépendance entre les sinistres de mortalité et ceux pour arrêt-de-travail, sans que cette sélection ne soit indiscutable.

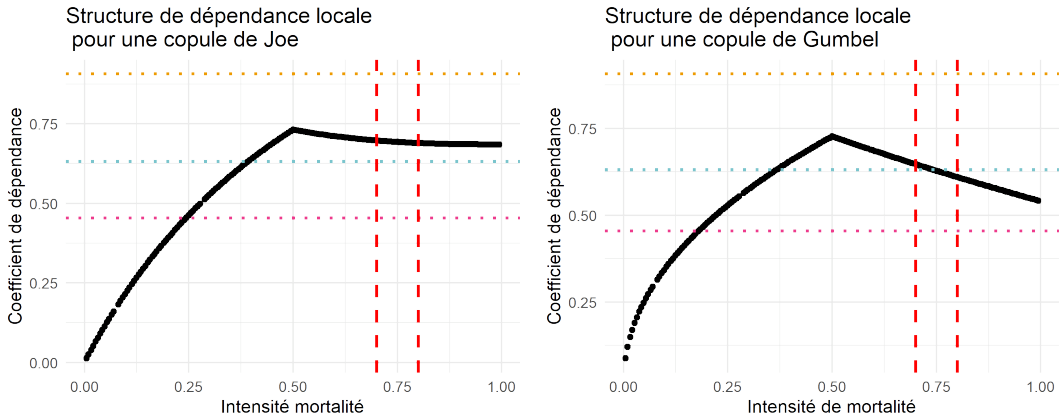
3.3.4 Dépendance caudale

Cette section va déterminer le niveau de dépendance au sein des couples *(Mortalité ;Frais généraux)* et *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* correspondant au quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ caractérisant le montant du *Risk Adjustment* [16].

Grâce à la section précédente, le choix a été fait d'étudier la structure de dépendance du couple *(Mortalité ;Frais généraux)* grâce à une copule de JOE ou de GUMBEL et celle du couple *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* grâce à une copule de STUDENT ou de JOE.

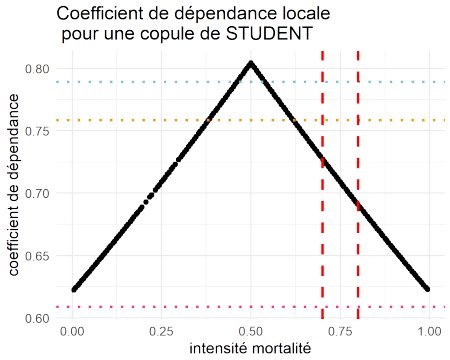
La structure de dépendance caudale est définie par les coefficients λ_L (où $0 < u_i < 0.5$ $\forall i \in [1;n]$) et λ_U (où $0.5 \leq u_i < 1$ $\forall i \in [1;n]$) présentés dans la section (3.2.6).

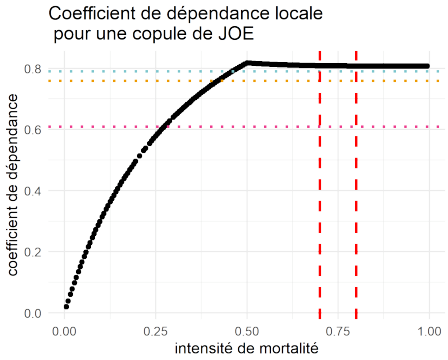
Pour le couple *(Mortalité ;Frais généraux)* :



Ces graphiques représentent l'évolution de la dépendance caudale selon l'intensité de la mortalité. Les droites horizontales en pointillées indiquent le coefficient de dépendance global : le coefficient de PEARSON ($\hat{\rho} = 0.91$) est indiqué en orange, le ρ_S de SPEARMAN ($\hat{\rho}_S = 0.63$) est en bleu et le τ de KENDALL ($\hat{\tau} = 0.45$) est en rose. Les droites verticales en pointillées rouges matérialisent le niveau de dépendance locale, aux quantiles $VaR_{70\%}(.)$ et $VaR_{80\%}(.)$.

Pour le couple *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* :





En reprenant les notations précédentes, la structure de dépendance du couple *(Mortalité ;Arrêt-de-travail)* est illustrée graphiquement avec $\hat{\rho} = 0.76$ pour le coefficient de PEARSON, $\hat{\rho}_S = 0.79$ pour le ρ_S de SPEARMAN et $\hat{\tau} = 0.61$ pour le τ de KENDALL.

Ci-dessous sont résumés les résultats obtenus pour les coefficients de dépendances au sein de chaque couple, pour les copules paramétriques sélectionnées et pour un niveau de quantile $1-\alpha = 70\%$ ou $1-\alpha = 80\%$ correspondant au niveau de tolérance aux risques caractéristiques du *Risk Adjustement*.

Couple étudié	Copule $C_\theta(.)$	$\hat{\theta}_{Moment}$	$\lambda_U^{70\%}$	$\lambda_U^{80\%}$	$\lambda_U^{99\%}$
(Mortalité ;Frais généraux)	JOE	2.53	0.70	0.69	0.69
	GUMBEL	1.83	0.64	0.60	0.54
(Mortalité ;Arrêt-de-travail)	STUDENT$_\kappa$	0.82 ($\hat{\kappa} = 2.46$)	0.73	0.69	0.62
	JOE	3.94	0.81	0.81	0.81

Pour chacun des deux couples, le coefficient de dépendance entre les deux variables étudiées varie peu en fonction du niveau du quantile $VaR_{70\%}(.)$ ou $VaR_{80\%}(.)$. En revanche, il est davantage impacté par le choix de la copule paramétrique calibrée pour représenter la structure de dépendance entre les variables étudiées.

Dans tous les cas, les coefficients de dépendance calibrés sur les données de SOGECAP pour les couples *(Mortalité ;Frais généraux)* et *(Mortalité, Arrêt-de-travail)* sont nettement supérieurs à ceux calibrés par la norme Solvabilité II au quantile 99.5%. Pour les couples *(Mortalité ;Frais généraux)* et *(Mortalité, Arrêt-de-travail)*, le quantile maximal pouvant être calculé ne se situe pas à $VaR_{99,5\%}(.)$ mais à $VaR_{99\%}(.)$ en raison du nombre limité d'observations. Toutefois la corrélation empirique reste supérieure à celle de Solvabilité II, calibrée à 0.25 entre les risques Mortalité-Frais généraux et Mortalité-Incapacité/Invalidité.

Un fort coefficient de corrélation entre deux risques implique une probabilité plus forte qu'un des deux risques dévie de sa sinistralité moyenne sachant que l'autre risque a déjà dévié de celle-ci. Par conséquent plus le coefficient de corrélation est proche de 1, moins la diversification entre les risques est possible et donc plus l'assureur devra immobiliser de capital.

3.3.5 Diversification empirique du *Risk Adjustment*

Cette section permet d'illustrer l'impact de la diversification entre risques du portefeuille Prévoyance dans le montant du *Risk Adjustment*.

Le montant global du *Risk Adjustment* calculé dans le Chapitre 2 pour chacun des produits du portefeuille Prévoyance de SOGECAP par la méthode n°2/B s'élève à 13.03% du *Current Estimate*, avant diversification entre risques. Les matrices de corrélation calibrées par la norme Solvabilité II ou par la Théorie des Copules permettent de quantifier le bénéfice de diversification entre les risques du portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

3.3.5.1 Diversification avec la matrice de corrélation Solvabilité II

En reprenant les résultats de la méthode des taux-chocs du Chapitre 2, la matrice de corrélation de la norme Solvabilité II, et la formule de calcul du *Risk Adjustment* diversifié (3.2), le bénéfice de diversification est déterminé.

Résultats issus du Chapitre 2 :

Pour protéger la confidentialité des données, le montant du *Risk Adjustment* est exprimé pour un montant *Current Estimate* des sinistres et frais généraux sur la totalité du portefeuille Prévoyance de SOGECAP normalisé à 100.

$Risque_i$	Mortalité	Incap/Inval	Rachat Massif	Frais	CAT	$\sum_i RA_i$
RA_i pour CE=100	1.98	3.05	0.49	5.02	2.47	13.01

Matrice de corrélation de la norme Solvabilité II :

Risques (Prévoyance)	Mortalité	Incap/Inval	Rachat Massif	Frais	CAT
Mortalité	1.00	0.25	0.00	0.25	0.25
Incap / Inval	0.25	1.00	0.00	0.50	0.25
Rachat massif	0.00	0.00	1.00	0.50	0.25
Frais	0.25	0.50	0.50	1.00	0.25
CAT	0.25	0.25	0.25	0.25	1.00

L'application de la formule suivante permet de déterminer le montant du *Risk Adjustment* après prise-en-compte de la diversification entre risques :

$$RA_{global}^{div} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} \times RA_i \times RA_j} = 8.16$$

Le bénéfice de diversification entre les risques du portefeuille Prévoyance de SOGECAP a permis de réduire de $\frac{13.01-8.16}{13.01} = 37\%$ le montant de *Risk Adjustment* à immobiliser pour se prémunir d'une déviation de la sinistralité équivalente au niveau $VaR_{70\%}(.)$. Toutefois, la matrice de corrélation utilisée a été calibrée de façon non-spécifique à SOGECAP, et pour un quantile $VaR_{99.5\%}(.)$. Par conséquent les gains issus de la diversification sont susceptibles de différer de ceux mesurés au quantile $VaR_{70\%}(.)$ pour le portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

L'utilisation d'une matrice de corrélation calibrée par la Théorie des Copules (Chapitre 3) sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP permet de refléter plus justement le bénéfice de diversification entre les risques exposant l'assureur.

3.3.5.2 Diversification avec la matrice de corrélation calibrées par les copules

Pour un niveau de tolérance aux risques équivalent au quantile $VaR_{70\%}$, l'étude menée dans le Chapitre 3 a permis de sélectionner les copules de JOE et GUMBEL pour mesurer la dépendance entre les risques "Mortalité" et "Frais généraux" et les copules de STUDENT et JOE pour mesurer celle entre les risques "Mortalité" et "Arrêt-de-travail". Les coefficients de corrélation calibrés empiriquement sont indiqués en rouge dans la matrice de corrélation ci-dessous, précisés par l'initiale de leur copule respective.

Matrice de corrélation partiellement calibrée sur le portefeuille Prévoyance par la théorie des copules, pour un quantile de niveau 70% :

Risques (Prévoyance)	Mortalité	Incap/Inval	Rachat Massif	Frais	CAT
Mortalité	1.00	0.73_S / 0.81_J	0.00	0.70_J / 0.64_G	0.25
Incap / Inval	0.73_S / 0.81_J	1.00	0.00	0.50	0.25
Rachat massif	0.00	0.00	1.00	0.50	0.25
Frais	0.70_J / 0.64_G	0.50	0.50	1.00	0.25
CAT	0.25	0.25	0.25	0.25	1.00

Le montant global du *Risk Adjustment* après prise-en-compte des gains de diversification, et en fonction des copules utilisées, est le suivant :

(Mortalité ;Arrêt-de-travail) / *(Mortalité ;Frais généraux)*	STUDENT	JOE
JOE	8.49	8.54
GUMBEL	8.49	8.53

Le gain de diversification pour le montant global *Risk Adjustment* est d'environ 35%, avec peu de variations selon la copule choisie pour représenter la structure de dépendance. Il reste inférieur au gain de diversification issu de la matrice Solvabilité II en exigeant davantage d'immobilisation de capital au titre du *Risk Adjustment*.

L'assureur devra immobiliser environ 8.50% du montant du *Current Estimate* des sinistres et des frais généraux, en plus de ce dernier, afin de se prémunir d'une déviation de la sinistralité équivalente au quantile $VaR_{70\%}(.)$.

Le fil d'Ariane du mémoire

Le montant global du *Risk Adjustment* diversifié permet réduire le montant total de capital à immobiliser pour se prémunir d'une déviation de la sinistralité par rapport à son montant *Current Estimate*. Il appartient désormais à l'assureur de répartir ce montant total de *Risk Adjustment* diversifié entre ses GCH afin de déterminer leur signature de profitabilité.

Chapitre 4

Allocation du *Risk Adjustment*

Sommaire

4.1 Zoom sur la désagrégation 100
4.1.1 Mesure de dépendance : mise-au-point 100
4.1.2 Principe d'allocation & Cohérence 101
4.2 Panorama des méthodes d'allocation 102
4.2.1 Méthode proportionnelle 102
4.2.2 Méthode marginale 103
4.2.3 Méthode de SHAPLEY 103
4.2.4 Méthode d'EULER 105
4.3 Application empirique 106

4.1 Zoom sur la désagrégation

Pour rappel, la norme IFRS 17 exige d'une part de la compagnie d'assurance qu'elle communique sa tolérance aux risques en indiquant le niveau $1-\alpha$ équivalent au montant du *Risk Adjustment* global, et d'autre part de redistribuer ce dernier à chacun de ses *GCH* afin de déterminer leur propre signature de profitabilité et ainsi le montant de leur *CSM*.

Le fil d'Ariane du Mémoire

L'allocation du montant de *Risk Adjustment* global à chaque GCH est une étape cruciale pour l'assureur : il s'agit d'éviter de rendre un CGH onéreux (si *Current Estimate* + *Risk Adjustment* > Primes émises) tout en s'assurant que ce dernier est correctement protégé en cas d'une déviation de sa sinistralité.

4.1.1 Mesure de dépendance : mise-au-point

Les méthodes d'allocation du *Risk Adjustment* présentées ci-après seront fondées sur la mesure de risque $VaR_{1-\alpha}(.)$ utilisée précédemment dans la détermination du montant du *Risk Adjustment*. Toutefois, elles sont généralisables à toute mesure de risques $\rho(.)$ cohérente dont les caractéristiques sont les suivantes [17] :

1. **Monotone :** pour toutes variables aléatoires X et Y telles que $X \leq Y$: $\rho(X) \leq \rho(Y)$
   Si le risque X est toujours moins coûteux que le risque Y, alors X est moins risqué que Y.

2. **Positivement homogène :** pour toute variable aléatoire X et un scalaire $\lambda \geq 0$: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
   Cas limite de la sous-additivité par l'illustration d'une diversification nulle : une multiplication du risque entraîne une multiplication équivalente du montant de capital requis.

3. **Invariante par translation :** pour toute variable aléatoire X et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$: $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$

4. **Sous-additive :** pour toutes variables aléatoires X et Y : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
   La fusion de deux risques ne crée pas un risque tiers.

La mesure de risques $VaR_{1-\alpha}(.)$ n'est pas une mesure de risques cohérente puisqu'elle ne respecte pas le critère de sous-additivité. De fait la prise-en-compte de la diversification entre les risques n'est pas assurée par la $VaR_{1-\alpha}(.)$. Néanmoins, la $VaR_{1-\alpha}(.)$ devient sous-additive au niveau des queues de distribution lorsque celles-ci sont lourdes [18].

4.1.2 Principe d'allocation & Cohérence

Les méthodes d'allocation du montant de *Risk Adjustment* pour chaque *CGH* doivent être en cohérence avec le "principe d'allocation raisonnable" défini par DENAULT [17]. En adaptant ses notations dans le contexte du *Risk Adjustment*, la définition du principe d'allocation est la suivante :

Principe d'allocation : Un principe d'allocation est une fonction $\Pi : A \mapsto \mathbb{R}^n$ associant à chaque couple $(GCH; VaR_{1-\alpha}(X))$ une unique allocation telle que :

$$\Pi : (GCH; VaR_{1-\alpha}(X)) \mapsto \begin{bmatrix} \Pi_1\left(GCH_1; VaR_{1-\alpha}(X)\right) \\ \Pi_2\left(GCH_2; VaR_{1-\alpha}(X)\right) \\ \dots \\ \Pi_n\left(GCH_n; VaR_{1-\alpha}(X)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RA_1 \\ RA_2 \\ \dots \\ RA_n \end{bmatrix} \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} RA_i = RA^{div} \tag{4.1}$$

avec A un couple $(GCH; VaR_{1-\alpha}(X))$ associant à un *GCH* la mesure de risque cohérente $VaR_{1-\alpha}(X)$, X le montant de la sinistralité du GCH et $RA_i = VaR_{1-\alpha}(X) - CE$ (2.6).

La condition de l'équation (4.1) assure une totale allocation du montant du *Risk Adjustment* global.

Cohérence du principe d'allocation : Un principe d'allocation $\Pi(.)$ est dit "cohérent" si pour toute allocation $(GCH; VaR_{1-\alpha}(X))$, la fonction $\Pi\left(GCH; VaR_{1-\alpha}(X)\right)$ satisfait les trois propriétés suivantes :

1. ***"No undercut"* (absence de sur-coût) :**

$$\forall M \subseteq GCH, \sum_{i \in M} RA_i \leq VaR_{1-\alpha}\left(\sum_{i \in M} X_i\right) \tag{4.2}$$

   Le montant du Risk Adjustment RA_i alloué au GCH_i ne doit pas être plus élevé que le montant du Risk Adjustment apporté par celui-ci ; ainsi il en va de même pour tout contrat M inclus dans le GCH_i. Cette propriété illustre les bénéfices de diversification entre GCH.

2. **Symétrie :** Si en regroupant tous les contrats $M \subseteq GCH_{\setminus\{i;j\}}$, les contrats i et j ont la même contribution au montant du *Risk Adjustment*, alors $RA_i = RA_j$.
   Le montant alloué à un GCH ne dépend exclusivement que de sa contribution aux risques au sein de la compagnie d'assurance.

3. **Allocation sans-risque :** Si le GCH_n est sans risque alors $RA_n = VaR_{1-\alpha}(\beta r_f) = \beta$, avec r_f le taux sans-risque numéraire à date du jour et $\beta \in \mathbb{R}$.

Enfin, une allocation cohérente est dite "non-négative" si elle satisfait $RA_i \geq 0 \ \forall i \in n$.

4.2 Panorama des méthodes d'allocation

Les méthodes d'allocation du montant global de *Risk Adjustment* à chaque GCH se fondent sur la mesure de risques $VaR_{1-\alpha}(.)$, et sont présentées ci-après.

4.2.1 Méthode proportionnelle

La méthode proportionnelle d'allocation du capital est la plus intuitive, et simple à justifier. Elle alloue à chaque GCH un montant de *Risk Adjustment* proportionnel à sa propre contribution au montant global du *Risk Adjustment* : plus sa contribution est forte, plus grande sera l'allocation de couverture contre le risque.

$$RA_i^{prop} = \frac{RA_i}{\sum_{j \in n} RA_j} \times RA^{div} \tag{4.3}$$

avec $\omega_i = \frac{RA_i}{\sum_{j \in n} RA_j}$ la contribution du GCH_i au montant global de *Risk Adjustment*.

Cette méthode conserve les bénéfices de diversification, mais ne permet pas de connaître l'apport de diversification apporté par le GCH_i, contrairement à la méthode marginale présentée ci-après.

4.2.2 Méthode marginale

La méthode marginale permet de tenir compte de l'apport marginal du GCH_i au montant global du *Risk Adjustment*. La différence entre le montant global du *Risk Adjustment* (après diversification) et ce même montant privé du GCH_i révèle l'impact de ce dernier dans le montant global du *Risk Adjustment*. Dans le cas discret, la méthode marginale s'exprime par l'équation suivante :

$$RA_i^{marg} = \frac{RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{i\}}}{\sum_{j\in n}\left(RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{j\}}\right)} \times RA^{div} \tag{4.4}$$

Le dénominateur permet de respecter la contrainte de "totale allocation" du montant global du *Risk Adjustment* (4.1). La contribution du GCH_i au montant global du *Risk Adjustment* est $\omega_i = \frac{RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{i\}}}{\sum_{j\in n}\left(RA^{div} - RA^{div}_{\setminus\{j\}}\right)}$.

Cette méthode évalue l'apport marginal du GCH_i dans le montant total du *Risk Adjustment* par rapport à l'ensemble des autres GCH, mais ne permet pas d'évaluer l'apport marginal du GCH_i vis-à-vis d'un sous-ensemble de GCH. La méthode de SHAPLEY présentée ci-après permet de lever cette limite.

4.2.3 Méthode de SHAPLEY

La méthode de SHAPLEY a été développée pour la Théorie des Jeux, dans le but de déterminer une unique et équitable répartition des gains entre les participants d'un jeu coopératif. Utilisée dans la littérature économique pour décrire les interactions entre les participants d'un cartel, elle peut également être appliquée pour déterminer l'allocation optimale de capital dans le cadre du *Risk Adjustment*.

4.2.3.1 Principe de la méthode de SHAPLEY

La méthode de SHAPLEY est fondée sur les jeux coopératifs : chaque joueur adopte différentes stratégies afin de maximiser son propre gain. Les joueurs ont la possibilité de s'allier pour maximiser leurs gains.

Jeu coopératif : Un jeu coopératif $(N; c)$ est défini par :

— Un ensemble N composé de n joueurs (jeu atomique),
— Une fonction de coût $c(.)$ qui attribue à chaque groupe de joueurs S (appelé "coalition") la valeur $c(S)$. La fonction de coût $c(.)$ est sous-additive : $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ pour toute coalition S et T telles que $S \cup T = \varnothing$.
— $C(.)$ représente l'ensemble des coalitions.

Dans ce jeu coopératif, l'objectif de chaque joueur est de minimiser le coût qu'il doit supporter, en acceptant ou non une coalition avec les autres joueurs. La répartition du coût total $c(N)$ entre tous les joueurs est déterminée par le concept de valeur, définie ci-après :

Valeur : Une valeur est la fonction $\Phi : C \mapsto \mathbb{R}^n$ qui attribue à chaque coalition (N, c) une unique allocation de coût :

$$\Phi : (N; c) \mapsto \begin{bmatrix} \Phi_1 (N; c) \\ \Phi_2 (N; c) \\ ... \\ \Phi_n (N; c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RA_1 \\ RA_2 \\ ... \\ RA_n \end{bmatrix} \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} RA_i = RA = c(N) \tag{4.5}$$

Chaque joueur souhaite ainsi minimiser la part $c(.)$ du coût total qu'il reçoit. A la lumière de l'allocation du montant global de *Risk Adjustment*, chaque GCH souhaite minimiser la part de *Risk Adjustment* qui lui est attribué afin de se constituer un montant maximal de CSM.

4.2.3.2 Résolution du jeu

Grâce à la propriété de sous-additivité de la fonction de coût $c(.)$, les joueurs sont incités à former des coalitions. Toutefois, la quête de minimisation de la fonction de coût individuelle $c(.)$ incitera un joueur i à quitter la coalition S si son coût alloué est supérieur à celui qu'il aurait supporté en dehors de la coalition. De la même manière, une coalition S peut être disloquée si chaque joueur de cette coalition supporte un coût individuel $c(.)$ supérieur à celui qu'il aurait eu individuellement en dehors de la coalition.

Noyau du jeu : L'ensemble des coalitions permettant d'éviter les menaces citées ci-dessus est appelé "noyau" du jeu. La contrainte s'écrit de la manière suivante, $\forall S \in N$:

$$\sum_{i \in S} RA_i \leq c(S) \tag{4.6}$$

Pour trouver une unique solution à ce jeu coopératif, la valeur de SHAPLEY doit remplir les trois conditions suivantes :

1. **Symétrie :** Si les joueurs i et j sont interchangeables, c'est-à-dire si le GCH_i contribue autant à l'apport marginal de *Risk Adjustment* que le GCH_j, alors $\Phi(N,c)_i = \Phi(N,c)_j$.
2. **Efficacité :** Un joueur muet i, c'est-à-dire un GCH_i qui ajoute le montant $\Phi(N,c)_i$ au montant global de *Risk Adjustment* quelle que soit la coalition à laquelle il appartient, est caractérisé par la relation $\Phi(N,c)_i = c(i)$.
3. **Additivité :** Deux coalitions (N,c_1) et (N,c_2) sont caractérisées par la relation suivante : $\Phi(N,c_1+c_2) = \Phi(N,c_1) + \Phi(N,c_2)$, avec la coalition (N,c_1+c_2) définie par $(c_1+c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S)$,$\forall S \in N$.

La valeur de SHAPLEY appartient au noyau du jeu si la fonction de coût est strictement sous-additive, c'est-à-dire si $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T)$ pour toute coalition $S \in N$ et $T \in N$.

Elle peut être calculée algébriquement par la formule suivante, $\forall i \in N$:

$$\Phi(N,c)_i = \sum_{S \in C_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left[c(S) - c(S_{\setminus\{i\}}) \right] \tag{4.7}$$

avec s le nombre de joueurs composant la coalition S, et C_i l'ensemble des coalitions contenant le joueur i.

Elle peut être adaptée au contexte d'allocation du *Risk Adjustment* global par l'écriture suivante :

$$RA_i^{Shap} = \sum_{GCH_i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left[RA_S - RA_{S \setminus \{GCH_i\}} \right] \tag{4.8}$$

La méthode de SHAPLEY permet de tenir compte de l'apport marginal du GCH_i au sein d'un sous-ensemble S de GCH, mais elle nécessite $2^n - 1$ évaluations de montants de *Risk Adjustment*.

Par ailleurs, appliquée à une problématique d'allocation de capital, la méthode de SHAPLEY ne respecte pas le principe d'allocation cohérente : la propriété *"No undercut"* n'est pas vérifiée. En effet, étant donné la stricte sous-additivité de la fonction de coût $c(.)$, et la positivité et l'homogénéité de la mesure de risque sous-jacente au calcul du *Risk Adjustment*, cette dernière est linéaire. Par conséquent, aucun bénéfice de diversification n'est réalisé [17].

4.2.4 Méthode d'EULER

Contrairement aux méthodes précédemment présentées, la méthode d'EULER est continue. Elle évalue la contribution de chaque GCH en mesurant l'impact marginal infinitésimal d'une cession d'un incrément h issu du GCH dans le montant total du *Risk Adjustment*.

Les notations nécessaire à l'application de la méthode d'EULER sont les suivantes :

— Le vecteur $u = (u_1, ...u_n)$ est le vecteur de poids associé aux contributions de chaque GCH.

— Le vecteur $X(u) = X(u_1, ..., u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \times X_i$ correspond à la distribution des *cashflow* pour chaque GCH_i.

— La fonction de coût $c(u) = VaR_{1-\alpha}(X(u)) - CE(X(u)) = RA$ est continûment différentiable.

L'expression générale issue de la méthode d'EULER est la suivante :

$$RA_i^{Euler} = \frac{\partial c(u)}{\partial u_i} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[VaR_{1-\alpha}(X) - CE(X)] - [VaR_{1-\alpha}(X - hX_i) - CE(X - hX_i)]}{h} \tag{4.9}$$

La méthode d'EULER ne sera pas développée plus en détails dans ce mémoire car elle n'est pas atomique : son application n'est pas cohérente avec le besoin d'allocation du montant global de *Risk Adjustment* à l'échelle d'un GCH, représentant une unité indivisible.

4.3 Application empirique

L'allocation du montant global du *Risk Adjustment* diversifié est la dernière étape permettant d'identifier la signature de profitabilité d'un GCH.

L'application empirique a été réalisée par produits issus du portefeuille Prévoyance de SOGECAP, et non par GCH comme cela devra être le cas pour la norme IFRS 17.

Le montant global du *Risk Adjustment* a été évalué pour un niveau de tolérance aux risques équivalent au quantile $VaR_{70\%}(.)$, une méthode d'application des taux-choc moyenne (n°2/B) et un horizon de survenance du choc correspondant à la duration des *cashflow* de chaque produit. Sous ces hypothèses, le montant global du *Risk Adjustment* à allouer aux produits du portefeuille Prévoyance , après prise-en-compte de la diversification entre risques par l'utilisation de la matrice Solvabilité II, s'élève à +8.13 (+13.01 avant la prise-en-compte des bénéfices de diversification) pour un montant global du *Current Estimate* des sinistres et frais généraux normalisé à 100.

Pour chacune des méthodes présentées précédemment, le montant du *Risk Adjustment* alloué à chaque produit i permet de conclure sur la signature de profitabilité de ce dernier en étudiant le montant de CSM_i qui lui est alloué. Pour rappel, la CSM_i du produit i est déterminée par la relation suivante [1] :

$$CSM_i = +CE_i^{Primes} - CE_i^{Sinistres} - CE_i^{Frais} - CE_i^{Commission} - RA_i \tag{4.10}$$

La signature de profitabilité des produits étudiés est indiquée par la mise-en-forme ci-après :

— Vert : Produit profitable ne présentant pas de risque de devenir onéreux.

1. Le montant *Current Estimate* de la participation aux bénéfices est supposé nul ici.

— Orange : Produit non-onéreux à l'origine avec un risque significatif de le devenir.
— Rouge : Produit onéreux dès l'origine.

Méthode proportionnelle :

N° du produit	RA_i *(av. diversification)*	$\%RA_i$	RA_i^{prop} alloué *(apr. diversification)*	$(CE_i^{Primes} - CE_i^{Sinistres+frais+comm})$	CSM_i	Poids du RA_i^{prop} alloué [1]
1	2.20	17%	1.38	19.48	18.10	7%
2	0.29	2%	0.18	16.39	16.20	1%
3	6.50	50%	4.08	34.67	30.59	12%
4	2.05	16%	1.29	28.06	26.77	5%
5	0.43	3%	0.27	5.70	5.43	5%
6	0.07	0%	0.04	1.18	1.14	3%
7	0.17	1%	0.11	0.64	0.53	17%
8	0.05	0%	0.03	0.17	0.13	19%
9	0.03	0%	0.02	4.28	4.27	0%
10	0.02	0%	0.01	1.70	1.69	1%
11	0.04	0%	0.02	0.43	0.40	5%
12	0.11	1%	0.07	19.76	19.69	0%
13	0.05	0%	0.03	1.22	1.19	3%
14	0.01	0%	0.01	0.91	0.90	1%
15	0.26	2%	0.16	0.89	0.73	18%
16	0.11	1%	0.07	22.79	22.72	0%
17	0.04	0%	0.03	14.11	14.09	0%
18	0.03	0%	0.02	1.76	1.74	1%
19	0.21	2%	0.13	0.52	0.39	25%
20	0.22	2%	0.14	7.47	7.33	2%
21	0.03	0%	0.02	3.13	3.10	1%
22	0.09	1%	0.06	16.54	16.48	0%
Total	13.01	100%	8.16	201.79	193.63	

1. Le poids du RA_i^{prop} alloué fait référence à la perte de marge sur le produit i causée par l'ajout du *Risk Adjustment*.

Méthode marginale :

N° du produit	RA_i *(av. diversification)*	$\lvert\Delta RA_{\setminus\{i\}}\rvert$	RA_i^{marg} alloué *(apr. diversification)*	$(CE_i^{Primes} - CE_i^{Sinistres+frais+comm})$	CSM_i	Poids du RA_i^{marg} alloué [1]
1	2.20	18%	1.44	19.48	18.04	7%
2	0.29	2%	0.17	16.39	16.22	1%
3	6.50	50%	4.07	34.67	30.60	12%
4	2.05	16%	1.27	28.06	26.79	5%
5	0.43	3%	0.27	5.70	5.43	5%
6	0.07	1%	0.04	1.18	1.14	4%
7	0.17	1%	0.11	0.64	0.53	17%
8	0.05	0%	0.03	0.17	0.13	20%
9	0.03	0%	0.02	4.28	4.27	0%
10	0.02	0%	0.01	1.70	1.69	1%
11	0.04	0%	0.03	0.43	0.40	6%
12	0.11	1%	0.07	19.76	19.69	0%
13	0.05	0%	0.04	1.22	1.18	3%
14	0.01	0%	0.01	0.91	0.90	1%
15	0.26	2%	0.13	0.89	0.76	15%
16	0.11	1%	0.08	22.79	22.72	0%
17	0.04	0%	0.03	14.11	14.08	0%
18	0.03	0%	0.02	1.76	1.74	1%
19	0.21	2%	0.13	0.52	0.39	25%
20	0.22	2%	0.13	7.47	7.34	2%
21	0.03	0%	0.02	3.13	3.11	1%
22	0.09	1%	0.05	16.54	16.49	0%
Total	13.01	100%	8.16	201.79	193.63	

1. Le poids du RA_i^{marg} alloué fait référence à la perte de marge sur le produit i causée par l'ajout du *Risk Adjustment*.

Les résultats des méthodes d'allocation proportionnelle et marginale présentés dans les tableaux ci-dessus soulèvent plusieurs remarques relatives à l'activité Prévoyance de SOGECAP :

— L'activité Prévoyance de SOGECAP est rentable, pour un niveau de tolérance aux risques équivalent au quantile $VaR_{70\%}$ de la distribution *Current Estimate* des *cashflow* futurs : le résultat futur est évalué à 193.63 (pour un montant *Current Estimate* des sinistres et frais généraux de la partie LRC normalisé à 100).

— Aucun produit du portefeuille Prévoyance n'est comptabilisé onéreux avant même l'ajout d'une marge de prudence contre la déviation de la sinistralité.

— Aucun produit du portefeuille Prévoyance ne devient onéreux suite à l'ajout de sa marge de prudence pour un niveau de tolérance aux risques équivalent au quantile $VaR_{70\%}(.)$ de la distribution *Current Estimate*, ou ne menace de devenir onéreux.

— Enfin le choix entre la méthode proportionnelle ou marginale pour l'allocation du montant de *Risk Adjustment* à chaque produit n'a pas de conséquence sur la signature de profitabilité de ceux-ci, et n'entraîne pas une forte variabilité des montants alloués à chaque produit.

Application empirique de la méthode de SHAPLEY :

Étant donné les 22 produits constituants le portefeuille Prévoyance de SOGECAP, la méthode de SHAPLEY exige $2^{22} - 1$ évaluations de montants de *Risk Adjustment* pour couvrir l'ensemble des regroupements de produits possible. La méthode de SHAPLEY n'est en pratique utilisable que pour un nombre restreint de combinaisons possible, en ce sens elle pourrait être utilisée pour allouer le montant global de *Risk Adjustment* entre les sous-groupes de produits "Assurance Emprûnteur", "Assurance Santé" et "Assurance Décès" du portefeuille Prévoyance par exemple.

L'application empirique de la méthode de SHAPLEY a été réalisée sur les produits n°1, n°3 et n°4 issus du portefeuille Prévoyance de SOGECAP, dont le montant total de *Risk Adjustment* (avant diversification) à allouer à ces trois produits s'élève à $2.19 + 6.47 + 2.04 = 10.70$. La méthode de SHAPLEY exige l'évaluation de $2^3 - 1 = 7$ montants de *Risk Adjustment* afin de déterminer l'allocation individuelle pour chacun de ces $n = 3$ produits.

Une combinaison de produits est composée de S_i regroupements, pour lesquels un montant de *Risk Adjustment* est déterminé en tenant compte des bénéfices de diversification entre produits le composant. Le nombre de produits composant le regroupement S_i est noté s_i.

N° combinaison	Regroupement produits	RA_{S_1}	RA_{S_2}	RA_{S_3}	s_1	s_2	s_3
A	n°1 // n°3 + n°4	2.19	5.33		1	2	
B	n°1 + n°3 // n°4	5.51	2.04		2	1	
C	n°1 + n°4 // n°3	2.72	6.47		2	1	
D	n°1 // n°4 // n°3	2.19	2.04	6.47	1	1	1
E	n°1 + n°3 + n°4	6.75			3		

Par la formule (4.8) issue de la méthode de SHAPLEY, le montant du *Risk Adjustment* alloué à chacun des trois produits est déterminé par la somme en ligne des combinaisons.

N° produit	N° combinaison					$RA^{Shapley}_{n°_i}$
	A	B	C	D	E	
n°1	0.73	-0.16	-0.11	0.73	0.48	1.89
n°3	0.55	0.55	2.16	2.16	1.34	6.76
n°4	-0.19	0.68	0.09	0.68	0.41	1.67

Par exemple pour le produit n°1, son montant de *Risk Adjustment* alloué est calculé par la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
RA^{Shap}_{n°1} &= \tfrac{(s_1^A-1)!(n-s_1^A)!}{n!}\left(RA^A_{S_1}-0\right)+\tfrac{(s_1^B-1)!(n-s_1^B)!}{n!}\left(RA^B_{S_1}-RA^B_{S_1\setminus\{n°1\}}\right)+\\
&\quad \tfrac{(s_1^C-1)!(n-s_1^C)!}{n!}\left(RA^C_{S_1}-RA^C_{S_1\setminus\{n°1\}}\right)+\tfrac{(s_1^D-1)!(n-s_1^D)!}{n!}\left(RA^D_{S_1}-0\right)+\\
&\quad \tfrac{(s_1^E-1)!(n-s_1^E)!}{n!}\left(RA^E_{S_1}-RA^E_{S_1\setminus\{n°1\}}\right)\\
RA^{Shap}_{n°1} &= \tfrac{0!\times 2!}{3!}(2.19-0)+\tfrac{1!\times 1!}{3!}(5.51-6.47)+\tfrac{1!\times 1!}{3!}(2.72-2.04)+\\
&\quad \tfrac{0!\times 2!}{3!}(2.19-0)+\tfrac{2!\times 0!}{3!}(6.75-5.55)\\
RA^{Shap}_{n°1} &= 0.73+(-0.16)+(-0.11)+0.73+0.48\\
RA^{Shap}_{n°1} &= 1.89
\end{aligned}$$

Par la méthode de SHAPLEY, le montant total de *Risk Adjustment* alloué aux trois produits n°1, n°3 et n°4 s'élève à 1.89+6.76+1.67=10.32, tandis que la somme des montants du *Risk Adjustment* pris individuellement, avant diversification, s'élevait à 10.70. La méthode d'allocation de SHAPLEY limite fortement la prise-en-compte des bénéfices de diversification entre risques, et exige une forte immobilisation de capital pour l'assureur.

Le tableau ci-après présente l'impact de l'allocation du montant de *Risk Adjustment* sur la signature de profitabilité des produits, effectué par la méthode d'allocation de SHAPLEY.

N° du produit	n°1	n°3	n°4	Total
RA_i *(av. diversification)*	2.19	6.47	2.04	10.70
RA_i^{Shap} alloué *(apr. diversification)*	1.89	6.76	1.67	10.32
$CE_i^{Primes} - CE_i^{Sinistres+frais+comm}$	19.56	34.82	28.18	82.56
CSM_i	17.67	28.06	26.51	72.23
Poids du RA_i^{Shap} alloué [1]	10%	19%	6%	-

1. Le poids du RA_i^{Shap} alloué fait référence à la perte de marge sur le produit i causée par l'ajout du *Risk Adjustment*.

La forte allocation de capital résultant de l'application de la méthode de SHAPLEY réduit de fait le montant de la CSM_i pour chacun des produits i, par le jeu de vases communiquants entre cette dernière et le *Risk Adjustment*. Les trois produits étudiés restent tout de même profitables, sans risque de devenir onéreux. Une piste de recherche envisageable serait d'appliquer à nouveau la méthode proportionnelle ou marginale d'allocation du capital afin de rendre la méthode de SHAPLEY économiquement viable.

Conclusion et perspectives

L'existence même d'une compagnie d'assurance est conditionnée à l'incertitude entourant la sinistralité future. Dans ce contexte, ce mémoire s'est focalisé sur la prise-en-compte de cette incertitude au moyen d'une marge de prudence, appelée *Risk Adjustment* par la norme IFRS 17, sur le portefeuille Prévoyance de SOGECAP.

La présentation de la norme IFRS 17 dans le Chapitre 1 a illustré les enjeux relatifs à la détermination du montant de *Risk Adjustment*, justifiant l'intérêt des démarches statistiques menées autour de ce dernier. En effet, l'objectif fût de déterminer le juste montant de *Risk Adjustment* permettant à la fois de se prémunir d'une déviation de la sinistralité par rapport à son estimation *Current Estimate*, tout en évitant d'immobiliser un montant trop important de capital qui engendrerait un coût important pour l'assureur. Pour répondre à cette problématique, le cheminement a été le suivant :

1. Détermination du montant de *Risk Adjustment* engendré par chacun des risques exposant l'assureur (Chapitre 2),
2. Agrégation des *Risk Adjustment* élémentaires en tenant compte des éventuels bénéfices de diversification entre modules de risques (Chapitre 3),
3. Allocation du montant global de *Risk Adjustment* diversifié à chaque "Groupes de Contrats Homogènes" (GCH) du portefeuille Prévoyance (Chapitre 4).

Le Chapitre 2 est entré dans le coeur du sujet en présentant plusieurs méthodes statistiques permettant de quantifier l'incertitude pesant sur les flux de trésorerie futurs par un montant de *Risk Adjustment*. Par nature, l'incertitude engendrée par les flux de trésorerie futurs (LRC) diffère de celle engendrée par la sinistralité passée (LIC) : en effet l'assureur possède une meilleure connaissance des sinistres passés (dont la majorité a été déclarée) comparativement aux sinistres futurs, dont il ignore tout de leurs montants et occurrence.

Pour la partie LRC, la méthode des taux-choc et la méthode probabiliste ont été présentées.

La méthode des taux-choc consiste à appliquer un choc adverse sur les hypothèses actuarielles du portefeuille Prévoyance à chacun des modules de risques définis par l'assureur ("Mortalité", "Incapacité-Invalidité","Rachat", "Frais généraux", "Mortalité Catastrophe"). Le montant de *Risk Adjustment* résulte de la différence entre la valorisation choquée des engagements et leur valorisation *Current Estimate*. L'intérêt de la méthode des taux-choc repose notamment sur le choix de la méthode de propagation du choc actuariel ainsi que sur son horizon de survenance, mais elle est directement dépendante des niveaux des taux-choc bicentenaux calibrés par la norme Solvabilité II.

La méthode probabiliste consiste à déterminer le montant du *Risk Adjustment* engendré par chaque année de projection, pour un "Groupe de Contrats Homogènes" et un module de risque donnés. Par l'application du Théorème Central Limite, la sinistralité de chaque année

de projection est modélisée par une loi gaussienne, et le montant de *Risk Adjustment* au titre de chaque année de projection se déduit par la différence entre le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ et l'espérance de la loi gaussienne modélisée. Facile à mettre en oeuvre, cette méthode est difficilement transposable au risque multi-états "Arrêt-de-travail", et repose également sur de nombreuses approximations actuarielles.

Pour la partie LIC, le *Risk Adjustment* permet de se prémunir d'un sous-provisionnement de la sinistralité passée. Les méthodes de MACK, du *bootstrap* sur MACK ainsi qu'une variante de la méthode des taux-choc ont été présentées.

La méthode de MACK permet d'évaluer l'erreur de provisionnement commise par la traditionnelle technique *Chain-Ladder*. Une fois l'erreur quadratique moyenne de prédiction du modèle déterminée, le montant de réserve ultime est calibré par une loi normale ou log-normale, permettant d'en déduire le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$ engendrant le montant du *Risk Adjustment*. La nécessité d'une adéquation en loi, couplée à l'influence de la qualité de liquidation des sinistres plutôt qu'à la réelle exposition de l'assureur aux risques sont les principales faiblesses de cette méthodologie.

La méthode du *Bootstrap* sur MACK consiste à approcher le montant de réserve à l'ultime par un grand nombre de simulations stochastiques, grâce au re-échantillonnage des observations. Par un grand nombre de simulations, une distribution du montant de réserve à l'ultime est construite, permettant d'en déduire le montant du *Risk Adjustment*. Cette méthode reste sensible au mode de gestion des sinistres de l'assureur plutôt qu'à sa réelle exposition aux risques, tout en s'aliénant de l'adéquation en loi.

La variante de la méthode des taux-choc repose sur le même principe que la méthode des taux-choc présentée sur la partie LRC du bilan, mais ici on alloue le montant de *Risk Adjustment* uniquement sur la sinistralité passée non-encore réglés. Une estimation choquée de la sinistralité de l'année de survenance Y est estimée, puis retranchée de la sinistralité déjà réglées au titre de cette année Y. Le montant restant correspond au montant du *Risk Adjustment* alloué au titre de l'année de survenance Y. Cette méthode permet d'éviter une rupture de méthodologie entre la partie LRC et LIC du bilan assurantiel, et ainsi de limiter les écarts d'expérience entre la charge de sinistres attendus (LRC) et réalisés (LIC) .

Le Chapitre 3 a étudié les potentiels gains de diversification résultants des différents modules de risques auxquels est exposé l'assureur, en déterminant leurs corrélations. En effet, en cas de déviation de la sinistralité sur l'un des modules de risques, risque-t-on d'observer également une déviation de la sinistralité sur les autres modules de risques ?

En raison du choix du niveau $1-\alpha$ fixant le montant du *Risk Adjustment* via le quantile $VaR_{1-\alpha}(.)$, la corrélation entre les différents risques a été mesurée au niveau $1-\alpha$ en s'appuyant sur la Théorie des Copules. En particulier, la corrélation caudale entre les risques "Mortalité" et "Frais généraux" d'une part, et "Mortalité" et "Arrêt-de-travail" d'autre part a été modélisée par des copules paramétriques, après sélection grâce aux tests statistiques.

Parmi les tests statistiques mis-en-oeuvre, trois d'entre-eux (CRAMER-VON MISES / KOL-

MOGOROV - SMIRNOV / ANDERSON-DARLING) reposaient sur une comparaison de la "distance" entre la copule paramétrique calibrée sur la copule empirique, et cette dernière. Pour compléter le choix statistique, le test du CHI-DEUX a également été effectué, permettant d'éclairer la décision finale en mettant en exergue les spécificités caudales des copules paramétriques testées. Enfin, les critères de maximisation de la log-vraisemblance (AIC/BIC) ont également été étudiés. Il en résulte une corrélation plus intense au sein des couples de risques étudiés que celle calibrée par la matrice de corrélation Solvabilité II cohérente avec un quantile 99.5%. En conséquence, le montant global de *Risk Adjustment* à immobiliser sera plus important si la matrice de corrélation sous-jacente utilisée est celle calibrée sur les données empiriques de SOGECAP plutôt que celle calibrée par la norme Solvabilité II.

Enfin le Chapitre 4 s'est consacré à la répartition du montant total de *Risk Adjustment* diversifié à chacun des GCH, afin de déterminer si cette couverture contre le risque allouée en supplément du *Current Estimate* des sinistres et frais généraux causait un excèdent de passif sur l'actif du GCH, et ainsi une comptabilisation immédiate de pertes pour l'assureur. Plusieurs méthodes d'allocation du capital ont été testées afin d'évaluer leur potentiel impact sur la signature de profitabilité du GCH.

La méthode proportionnelle permet d'allouer à chaque GCH un montant de *Risk Adjustment* proportionnel à sa propre contribution dans le montant global de *Risk Adjustment*. Elle permet de conserver les bénéfices de diversification entre les modules de risques mais elle ne permet pas de connaître l'apport de diversification induit par un GCH spécifique.

La méthode marginale permet de révéler la contribution marginale d'un GCH vis-à-vis de l'ensemble des autres GCH dans la diversification du montant global de *Risk Adjustment*. Elle respecte la contrainte de "totale allocation" du montant de *Risk Adjustment* mais elle ne permet pas d'évaluer l'apport d'un GCH vis-à-vis d'un sous-ensemble de GCH.

La méthode de SHAPLEY permet de tenir compte de l'apport marginal d'un GCH au sein d'un sous-ensemble de GCH, mais elle nécessite $2^n - 1$ évaluations de *Risk Ajustment* élémentaires, et ne prend pas en compte les potentiels gains de diversification entre modules de risques.

Enfin la méthode d'EULER évalue la contribution de chaque GCH en mesurant l'impact marginal infinitésimal d'une cession d'un incrément h issu d'un GCH particulier dans le montant total du *Risk Adjustment*.

Finalement, l'allocation du montant global de *Risk Adjustment* par les méthodes proportionnelles ou marginales est très similaire. En conclusion, suite à l'ajout d'une couche de prudence sur les provisions *Current Estimate* des produits du portefeuille Prévoyance, aucun de ces produits ne devient onéreux ou ne risque de le devenir pour un quantile $1 - \alpha = 70\%$, évitant ainsi à l'assureur de comptabiliser des pertes immédiates. Il reviendra alors à l'assureur de poursuivre cette étude en allouant le montant de *Risk Adjustment* à la maille GCH et non produit pour valider la conclusion précédente.

Annexe A

Méthode probabiliste : données statistiques complètes

Ci-après sont communiqués les tableaux de données statistiques utilisés dans l'application empirique de la méthode probabiliste présentée dans le Chapitre 2. Le premier tableau est relatif à la détermination du montant de *Risk Adjustment* au titre du risque "Mortalité" tandis que le second tableau est relatif au risque "Arrêt-de-travail", pour un produit du portefeuille Prévoyance de SOGECAP comportant ces deux garanties.

Pour préserver la confidentialité des données SOGECAP, le montant moyen de capitaux sous risque la première année de projection a été normalisé à 1000 tout comme le montant d'annuité moyenne, normalisé à 100, tout en conservant la chronique d'écoulement des observations réelles.

k	CRD_k	n_k	$\overline{CRD}_k$	$\overline{x}$	$q_{x,k}$	$\mathbb{E}(S_k)$	$\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}$	$\%RA_k^{DC}$	CE_k	RA_k^{DC}
2019	300 000 000	300 000	1 000	47	0.08%	229 608	15 147	3.46%	324 984	11 243
2020	273 621 866	286 730	954	47	0.08%	229 838	14 804	3.38%	277 338	9 367
2021	248 609 262	274 592	905	48	0.08%	208 828	13 744	3.45%	237 667	8 203
2022	224 707 463	263 626	852	49	0.09%	207 153	13 282	3.36%	202 921	6 823
2023	201 707 854	252 066	800	49	0.10%	204 080	12 773	3.28%	172 356	5 657
2024	179 877 920	240 982	746	50	0.11%	199 736	12 203	3.20%	145 391	4 568
2025	159 394 714	225 537	707	51	0.11%	176 991	11 178	3.31%	122 041	4 042
2026	140 043 862	212 085	660	51	0.12%	170 664	10 609	3.26%	101 563	3 311
2027	121 902 959	196 496	620	52	0.13%	163 038	10 050	3.23%	83 560	2 701
2028	104 777 042	183 577	571	53	0.13%	140 133	8 937	3.34%	67 730	2 265
2029	89 372 659	170 434	524	53	0.15%	131 182	8 288	3.31%	54 219	1 796
2030	75 569 928	149 549	505	54	0.15%	110 922	7 481	3.54%	43 403	1 535
2031	62 644 459	136 953	457	55	0.16%	110 922	6 789	3.53%	34 147	1 205
2032	50 883 994	125 947	404	55	0.18%	89 957	6 023	3.51%	26 194	920
2033	40 382 769	112 532	359	56	0.18%	71 392	5 057	3.71%	19 669	731
2034	31 787 196	98 391	323	56	0.19%	61 673	4 459	3.79%	14 498	550
2035	24 807 216	77 255	321	57	0.19%	48 130	3 927	4.28%	10 755	460
2036	18 579 393	65 517	284	57	0.21%	39 560	3 346	4.44%	7 777	345
2037	13 437 737	56 626	237	58	0.21%	28 612	2 603	4.77%	5 361	256
2038	9 198 488	44 894	205	59	0.23%	21 494	2 096	5.11%	3 541	181
2039	6 205 407	36 623	169	59	0.26%	15 913	1 640	5.40%	2 236	121
2040	4 162 721	22 862	182	59	0.26%	10 675	1 392	6.84%	1 456	100
2041	2 391 203	18 034	133	60	0.26%	6 132	901	7.70%	886	68
2042	1 199 718	15 142	79	61	0.28%	3 376	516	8.02%	455	37
2043	444 729	8 326	53	62	0.34%	1 525	285	9.80%	200	20
2044	119 993	5 903	20	63	0.34%	412	91	11.63%	54	6
2045	36 687	1 353	27	64	0.38%	140	61	23.06%	16	4
2046	8 888	644	14	64	0.43%	38	23	31.62%	4	1
2047	3 503	127	28	65	0.43%	15	20	71.21%	1	1
2048	497	47	11	67	0.53%	3	5	104.12%	0	0
Total	2 385 880 128	3 582 849	45 360	-	-	2 672 132	177 733	-	1 960 421	66 605

k	CC_k	n_k	$\overline{CC}_k$	x	$i_{x,k}$	$\mathbb{E}(S_k)$	$\sqrt{\mathbb{V}ar(S_k)}$	$\%RA_k^{AT}$	CE_k^{AT}	RA_k^{AT}
2019	30 000 000	300 000	100	47	1.55%	466 493	6 777	0.76%	25 858	197
2020	28 663 999	286 730	100	47	1.56%	446 848	6 631	0.78%	77 164	601
2021	27 541 575	274 592	100	48	1.56%	429 350	6 511	0.80%	92 828	738
2022	26 371 458	263 626	100	49	1.58%	415 604	6 397	0.81%	86 355	697
2023	25 248 951	252 066	100	49	1.61%	406 939	6 333	0.82%	74 265	606
2024	23 618 346	240 982	98	50	1.66%	392 365	6 150	0.82%	63 098	519
2025	22 299 629	225 537	99	51	1.66%	370 457	6 002	0.85%	53 113	451
2026	20 783 118	212 085	98	51	1.71%	355 683	5 853	0.86%	44 652	385
2027	19 439 303	196 496	99	52	1.75%	340 086	5 749	0.89%	37 307	331
2028	18 051 070	183 577	98	53	1.75%	315 799	5 524	0.92%	31 213	286
2029	15 707 493	170 434	92	53	1.78%	278 851	5 024	0.94%	25 062	237
2030	14 466 298	149 549	97	54	1.78%	256 816	4 940	1.01%	20 057	202
2031	13 285 571	136 953	97	55	1.78%	236 580	4 748	1.05%	16 506	174
2032	11 771 138	125 947	93	55	1.78%	208 977	4 380	1.10%	13 226	145
2033	10 232 769	112 532	91	56	1.78%	181 665	4 028	1.16%	10 334	120
2034	7 814 309	98 391	79	56	1.74%	136 110	3 259	1.26%	7 450	94
2035	6 725 075	77 255	87	57	1.74%	117 138	316	1.42%	5 351	76
2036	5 928 837	65 517	90	57	1.65%	97 758	2 950	1.58%	4 150	66
2037	4 710 209	56 626	83	58	1.65%	77 665	2 521	1.70%	3 009	51
2038	3 850 781	44 894	86	59	1.47%	56 789	2 191	2.01%	2 159	44
2039	2 279 554	36 623	62	59	1.25%	28 561	1 325	2.43%	1 308	32
2040	1 804 890	22 862	79	59	1.25%	22 614	1 328	3.08%	760	23
2041	1 557 428	18 034	86	60	1.25%	19 513	1 290	3.47%	558	19
2042	878 370	15 142	58	61	1.00%	8 771	710	4.24%	314	13
2043	630 840	8 326	76	62	0.52%	3 278	497	7.95%	163	13
2044	111 076	5 903	19	63	0.52%	577	104	9.44%	54	5
2045	40 322	1 353	30	64	0.29%	116	59	26.51%	8	2
2046	7 475	644	12	64	0.22%	16	14	44.31%	2	1
2047	3 038	127	24	65	0.22%	7	13	99.78%	1	1
2048	1 441	47	31	67	0.06%	1	5	322.04%	0	1
Total	343 824 361	3 582 850	2 365	-	-	5 671 428	104 475	-	696 328	6 129

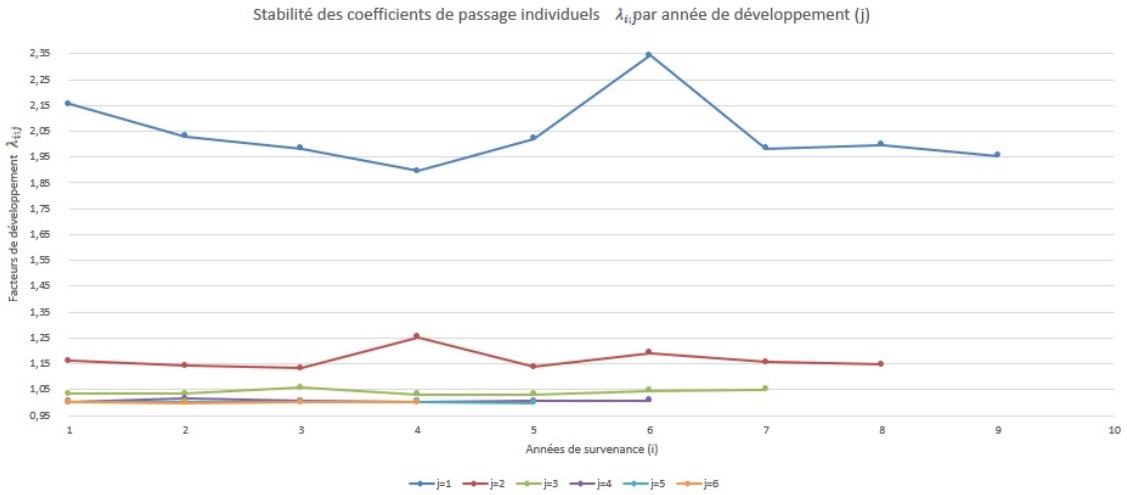
Annexe B

Vérification des hypothèses du modèle de MACK

Les résultats obtenus dans la section (2.3.1) sont conditionnels à la validité des hypothèses sous-jacentes au modèle de MACK [5].

1. **(H1)** : $(C_{i,1}; ...; C_{i,n})$ est indépendant de $(C_{k,1}; ...; C_{k,n})$ pour tout $i \neq k$.

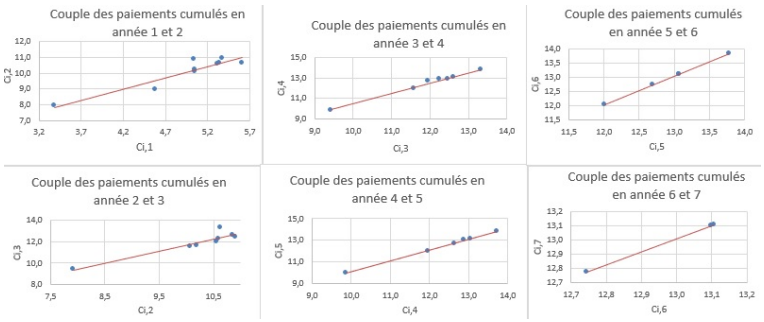
Il s'agit de vérifier que les coefficients de passages $\hat{\lambda}_{i;j} = \frac{C_{i;j+1}}{C_{i;j}}$ sont relativement constants pour une même année de développement j, afin de démontrer l'absence d'effet calendaire.



Les coefficients de passage de la première année de développement oscillent légèrement entre 1.95 et 2.10 ; pour les années de développement suivantes, l'hypothèse est confirmée.

2. **(H2)** : $\forall i = 1; ...; n$ et $\forall j = 1; ...; n-1$: $\mathbb{E}(C_{i,j+1}|C_{i,1}; ...; C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j}$

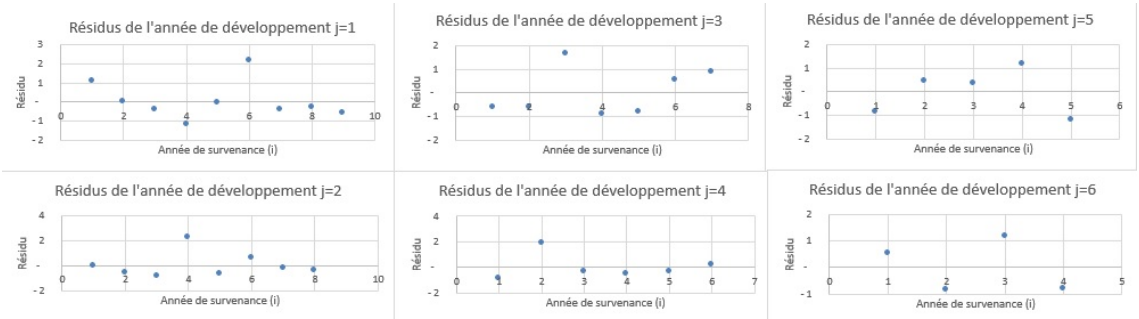
Pour une année de développement j fixée, les couples $(C_{i,j}; C_{i,j+1})$ sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère, et de coefficient directeur $\hat{\lambda}_j$



Cette hypothèse est vérifiée pour les années de développement au delà de 2 ans.

3. **(H3)** : $\forall i = 1; ...; n$ et $\forall j = 1; ...; n-1$:$\mathbb{V}ar(C_{i,j+1}|C_{i,1}; ...; C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$

Les résidus standardisés définis par MACK : $\frac{Ci,j+1-\hat{\lambda}_{i,j}\times Ci,j+1}{\sqrt{C_{i,j}}}$ doivent présenter une structure aléatoire.



Cette dernière hypothèse est validée.

Annexe C

Procédure pour tests statistiques de sélection de copules

Cette annexe présente la procédure utilisée pour mener les tests statistiques de la section (3.3.3.2) tirée de l'ouvrage de GENEST et al. [13]. Elle se fonde sur la technique du *bootstrap* : dans un premier temps la statistique de test est calculée sur la copule empirique, puis dans un second temps la *p-value* associée au test est calculée par *bootstrap*. Cette procédure peut être généralisée pour toute autre statistique de test basée sur le rang des observations empiriques.

Détails de la procédure : Application pour les statistiques de test de CRAMER-VON MISES (S_n), KOLMOGOROV-SMIRNOV (T_n) et ANDERSON-DARLING (R_n) dans le cadre des copules paramétriques bivariées :

1. Projeter les n observations du couple $(X;Y)$ dans l'espace $[0;1]^2$ en remplaçant chaque observation par son rang tel que $U_{i,1} = \frac{Rang(X_i)}{n+1}$ et $U_{i,2} = \frac{Rang(Y_i)}{n+1}$ pour tout $i = 1, ..., n$.

2. Découper l'espace de projection $[0;1]^2$ en treillis : chaque axe est divisé en m points permettant l'évaluation de la fonction de répartition $C_n(u;v)$. Le vecteur des points d'évaluation est noté $(u;v)$ pour tout $(u_i;v_i)_{i=1,...m} \in [0;1]^2$.

3. Calculer la copule empirique C_n grâce à l'expression définie en (3.21) et estimer le paramètre θ associé à la copule paramétrique testée $C_\theta(u;v)$ (par la méthode des moments ou la log-vraisemblance par exemple).

4. Grâce à l'expression analytique des copules paramétriques bivariées $C_{\hat{\theta}_n}(u;v)$, calculer les statistiques de test S_n, T_n et R_n d'après les expressions définies par les équations respectives (3.37), (3.39) et (3.41).

5. Pour un grand nombre de répétitions N, répéter les étapes suivantes pour tout $k \in \{1;...;N\}$:
   (a) Générer un échantillon de taille n de variables aléatoires (X'_k, Y'_k) de distribution $C_{\hat{\theta}_n}(u,v)$.

   (b) Projeter les n observations du couple (X'_k, Y'_k) dans l'espace $[0;1]^2$ en remplaçant chaque observation par son rang telle que $U^*_{i,1} = \frac{Rang(X'_{i;k})}{n+1}$ et $U^*_{i,2} = \frac{Rang(Y'_{i;k})}{n+1}$ pour

tout $i = 1, ..., n$.

(c) Calculer la fonction de répartition bivariée du couple $(X'_k; Y'_k)$ sur le treillis $(u; v)$ définie précédemment, telle que :

$$C^*_{n,k}(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U^*_{i,1} \leq u, U^*_{i,2} \leq v\}}$$

et estimer le paramètre $\theta^*_{n;k}$ associé à la copule paramétrique $C_\theta(u, v)$.

(d) Grâce à l'expression analytique des copules paramétriques bivariées $C^*_{\hat{\theta}_{n;k}}(u; v)$, calculer les statistiques de test $S^*_{n,k}$, $T^*_{n;k}$ et $R^*_{n;k}$ telles que :

$$S^*_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \left(C^*_{n,k}(U^*_{i,1}; U^*_{i,2}) - C^*_{\hat{\theta}_{n,k}}(U^*_{i,1}; U^*_{i,2}) \right)^2 \tag{C.1}$$

$$T^*_{n,k} = \sup_{n<\infty} \left| C^*_{n,k}(u, v) - C^*_{\hat{\theta}_{n,k}}(u, v) \right| \tag{C.2}$$

$$R^*_{n,k} = \max_{(u;v)} \frac{\left| C^*_{n,k}(u; v) - C^*_{\hat{\theta}_{n,k}}(u; v) \right|}{\sqrt{C^*_{\hat{\theta}_{n,k}}(u; v) \left(1 - C^*_{\hat{\theta}_{n,k}}(u; v) \right)}} \tag{C.3}$$

6. Déterminer la *p-value* associée au test telle que :

$$p\text{-}value(S_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{S^*_{n,k} > S_n\}}$$

$$p\text{-}value(T_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{T^*_{n,k} > T_n\}}$$

$$p\text{-}value(R_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{R^*_{n,k} > R_n\}}$$

Application sur R :

```
library(copula)
# STEP 1:
X<-as.matrix(donnees[,c(6:7)])

# STEP 2:
u<-matrix(runif(nrow(X)*ncol(X),nrow(X),ncol(X))

#STEP 3:
Cn_empirique<-F.n(u,X)
    # Méthode des moments pour trouver le paramètre θ:
    tau_kendall<-cor.test(X[,1],X[,2],method ="kendall")$estimate[[1]]
    theta_gauss=iTau(normalCopula(),tau_kendall)
    theta_frank<-iTau(frankCopula(),tau_kendall)
    theta_joe<-iTau(joeCopula(),tau_kendall)
    theta_gumbel=1/(1-tau_kendall)
    theta_clayton=2*tau_kendall/(1-tau_kendall)

    # Méthode des moments & log-vraisemblance pour STUDENT (θ,κ à estimer):
    fit_student_itau<-fitCopula(tCopula(dispstr="un"), X, method="itau.mpl")
    theta_student<-fit_student_itau@estimate[1]
    df_student<-fit_student_itau@estimate[2]

# STEP 4:
    # Expression analytique des copules paramétriques:
    copule_gauss<-ellipCopula(family = "normal",param=theta_gauss)
    copule_student<-ellipCopula(family="t",dim=2,df=df_student,
                    param=theta_student)
    copule_frank<-frankCopula(dim=2, param=theta_frank)
    copule_joe<-joeCopula(dim=2, param=theta_joe)
    copule_gumbel<-gumbelCopula(dim=2,param=theta_gumbel)
    copule_clayton<-claytonCopula(dim=2,param=theta_clayton)

# Statistiques de test S_n,T_n et R_n:
Sn<-function(u,C_n,cop_candidate){
        Cn_theta<-pCopula(u,cop_candidate)
        Sn=0
        for (i in seq(1:nrow(X))){
            Sn<-Sn+(C_n[i]-Cn_theta[i])^2
        }
    return (Sn)
    }
Sn_gauss<-Sn(u,Cn_empirique,copule_gauss)
```

```
    Sn_student<-Sn(u,Cn_empirique,tCopula(param=theta_student,
                df=round(df_student,0),dim=2))
    Sn_frank<-Sn(u,Cn_empirique,copule_frank)
    Sn_gumbel<-Sn(u,Cn_empirique,copule_gumbel)
    Sn_joe<-Sn(u,Cn_empirique,copule_joe)
    Sn_clayton<-Sn(u,Cn_empirique,copule_clayton)

    Tn<-function(u,C_n,cop_candidate){
            Cn_theta<-pCopula(u,cop_candidate)
            Tn=0
            tmp=0
            for (i in seq(1:nrow(X)){
                tmp=abs(C_n[i]-Cn_theta[i])
                if (tmp> Tn){
                    Tn<-tmp
                }
            }
        return (Tn)
        }

    Tn_gauss<-Tn(u,Cn_empirique,copule_gauss)
    Tn_student<-Tn(u,Cn_empirique,tCopula(param=theta_student,
                df=round(df_student,0),dim=2))
    Tn_frank<-Tn(u,Cn_empirique,copule_frank)
    Tn_gumbel<-Tn(u,Cn_empirique,copule_gumbel)
    Tn_joe<-Tn(u,Cn_empirique,copule_joe)
    Tn_clayton<-Tn(u,Cn_empirique,copule_clayton)

    Rn<-function(u,C_n,cop_candidate){
            Cn_theta<-pCopula(u,cop_candidate)
            Rn=0
            tmp=0
            for (i in seq(1:nrow(X)){
                tmp=abs(C_n[i]-Cn_theta[i])/sqrt(Cn_theta[i]*(1-Cn_theta[i]))
                if (tmp> Rn){
                    Rn<-tmp
                }
            }
        return (Rn)
        }

    Rn_gauss<-Rn(u,Cn_empirique,copule_gauss)
    Rn_student<-Rn(u,Cn_empirique,tCopula(param=theta_student,
                df=round(df_student,0),dim=2))
```

```
    Rn_frank<-Rn(u,Cn_empirique,copule_frank)
    Rn_gumbel<-Rn(u,Cn_empirique,copule_gumbel)
    Rn_joe<-Rn(u,Cn_empirique,copule_joe)
    Rn_clayton<-Rn(u,Cn_empirique,copule_clayton)

    # STEP 5 (hors copule de STUDENT):
    Sn_star<-function(u,cop_candidate,famille_copule){
                list_Sn_star=c()
                N=1000
                for (k in seq(1:N)){
                    ech<-rCopula(nrow(X),cop_candidate) # (a)
                    U<-pobs(ech)                        # (b)
                    Cn_star<-F.n(u,U)                   # (c)

                    # Méthode des moments pour estimer θ:
                    tau_kendall<-cor(U[,1],U[,2],method="kendall")
                    theta_star=iTau(famille_copule(),tau_kendall)

                    # Fonction de répartition bivariée:
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,famille_copule(param=theta_star,dim=2))

                    #Statistique de test:
                    Sn_star=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                        Sn_star=Sn_star+(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])^2 # (d)
                    }

                list_Sn_star<-append(list_Sn_star,Sn_star)
                }

            return(list_Sn_star)
            }

    Sn_star_gauss<-Sn_star(u,copule_gauss,normalCopula)
    Sn_star_frank<-Sn_star(u,copule_frank,frankCopula)
    Sn_star_gumbel<-Sn_star(u,copule_gumbel,gumbelCopula)
    Sn_star_joe<-Sn_star(u,copule_joe,joeCopula)
    Sn_star_clayton<-Sn_star(u,copule_clayton,claytonCopula)

    Tn_star<-function(u,cop_candidate,famille_copule){
                list_Tn_star=c()
                N=1000
                for (k in seq(1:N)){
                    ech<-rCopula(nrow(X),cop_candidate)
```

```
                    U<-pobs(ech)
                    Cn_star<-F.n(u,U)

                    # Méthode des moments pour estimer θ:
                    tau_kendall<-cor(U[,1],U[,2],method="kendall")
                    theta_star=iTau(famille_copule(dim=2),tau_kendall)

                    # Fonction de répartition bivariée :
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,famille_copule(param=theta_star,dim=2))

                    # Statistique de test
                    Tn_star=0
                    tmp=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                        tmp=abs(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])
                        if (tmp>Tn_star){
                            Tn_star<-tmp
                        }
                    }
                list_Tn_star<-append(list_Tn_star,Tn_star)
                }
            return(list_Tn_star)
            }

    Tn_star_gauss<-Tn_star(u,copule_gauss,normalCopula)
    Tn_star_frank<-Tn_star(u,copule_frank,frankCopula)
    Tn_star_gumbel<-Tn_star(u,copule_gumbel,gumbelCopula)
    Tn_star_joe<-Tn_star(u,copule_joe,joeCopula)
    Tn_star_clayton<-Tn_star(u,copule_clayton,claytonCopula)

    Rn_star<-function(u,cop_candidate,famille_copule){
                list_Rn_star=c()
                N=1000
                for (k in seq(1:N)){
                    ech<-rCopula(nrow(X),cop_candidate)
                    U<-pobs(ech)
                    Cn_star<-F.n(u,U)

                    # Méthode des moments pour estimer θ:
                    tau_kendall<-cor(U[,1],U[,2],method="kendall")
                    theta_star=iTau(famille_copule(dim=2),tau_kendall)

                    # Fonction de réparition bivariée :
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,famille_copule(param=theta_star,dim=2))
```

```
                    # Statistique de test :
                    Rn_star=0
                    tmp=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                        tmp=abs(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])/
                            sqrt(Cn_theta_star[i]*(1-Cn_theta_star[i]))
                        if (tmp>Rn_star){
                            Rn_star<-tmp
                        }
                    }
                list_Rn_star<-append(list_Rn_star,Rn_star)
                }
            return(list_Rn_star)
            }

    Rn_star_gauss<-Rn_star(u,copule_gauss,normalCopula)
    Rn_star_frank<-Rn_star(u,copule_frank,frankCopula)
    Rn_star_gumbel<-Rn_star(u,copule_gumbel,gumbelCopula)
    Rn_star_joe<-Rn_star(u,copule_joe,joeCopula)
    Rn_star_clayton<-Rn_star(u,copule_clayton,claytonCopula)

   # STEP 5 (pour une copule de STUDENT):
   Sn_star_t<-function(u,cop_candidate){
                list_Sn_star=c()
                N=1000
                for (k in seq(1:N)){
                    ech<-rCopula(nrow(X),cop_candidate)
                    U<-pobs(ech)
                    Cn_star<-F.n(u,U)

                    # Méthode des moments et log-vraisemblance pour estimer θ et κ
                    fit_student_itau<-fitCopula(tCopula(dispstr="un",dim=2),
                        U, method="itau.mpl")
                    theta_star<-fit_student_itau@estimate[1]
                    df_star<-round(fit_student_itau@estimate[2],0)

                    # Fonction de répartition bivariée :
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,tCopula(theta_star,df_star,dim=2))

                    # Statistique de test :
                    Sn_star=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                        Sn_star=Sn_star+(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])^2
```

```
                    }
                list_Sn_star<-append(list_Sn_star,Sn_star)
                }
            return(list_Sn_star)
            }

    Sn_star_student<-Sn_star_t(u,copule_student)

    Tn_star_t<-function(u,cop_candidate){
                    list_Tn_star=c()
                    N=1000
                    for (k in seq(1:N)){
                        ech<-rCopula(182,cop_candidate)
                        U<-pobs(ech)
                        Cn_star<-F.n(u,U)

                    # Méthode des moments et log-vraisemblance pour estimer θ et κ:
                    fit_student_itau<-fitCopula(tCopula(dispstr="un",dim=2),
                    U, method="itau.mpl")
                    theta_star<-fit_student_itau@estimate[1]
                    df_star<-round(fit_student_itau@estimate[2],0)

                    # Fonction de répartition bivariée :
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,tCopula(theta_star,df_star,dim=2))

                    # Statistique de test:
                    Tn_star=0
                    tmp=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                        tmp=abs(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])
                        if (tmp>Tn_star){
                            Tn_star<-tmp
                        }
                    }
                list_Tn_star<-append(list_Tn_star,Tn_star)
                }
            return(list_Tn_star)
            }

    Tn_star_student<-Tn_star_t(u,copule_student)

   Rn_star_t<-function(u,cop_candidate){
                list_Rn_star=c()
                N=1000
```

```
                for (k in seq(1:N)){
                    ech<-rCopula(nrow(X),cop_candidate)
                    U<-pobs(ech)
                    Cn_star<-F.n(u,U)

                    # Méthode des moments et log-vraisemblance pour estimer θ et κ:
                    fit_student_itau<-fitCopula(tCopula(dispstr="un",dim=2),
                    U, method="itau.mpl")
                    theta_star<-fit_student_itau@estimate[1]
                    df_star<-round(fit_student_itau@estimate[2],0)

                    # Fonction de répartition bivariée :
                    Cn_theta_star<-pCopula(u,tCopula(theta_star,df_star,dim=2))

                    # Statistique de test :
                    Rn_star=0
                    tmp=0
                    for (i in seq(1:nrow(ech))){
                         tmp=abs(Cn_star[i]-Cn_theta_star[i])/
                             sqrt(Cn_theta_star[i]*(1-Cn_theta_star[i]))
                         if (tmp>Rn_star){
                             Rn_star<-tmp
                         }
                    }
            list_Rn_star<-append(list_Rn_star,Rn_star)
            }
        return(list_Rn_star)
        }

    Rn_star_student<-Rn_star_t(u,copule_student)

    # STEP 6 (Démarche identique pour T_n et R_n à la place de S_n):
    p_value<-function(Sn_cop,Sn_cop_star){
                N=length(Sn_cop_star)
                pval=0
                for (k in seq(1:N)){
                    if (Sn_cop_star[k] > Sn_cop){
                        pval<-pval+1
                    }
                }
            pval<-pval/N
            return (pval)
            }
```

```
    pvalue_gauss<-p_value(Sn_gauss,Sn_star_gauss)
    pvalue_student<-p_value(Sn_student,Sn_star_student)
    pvalue_frank<-p_value(Sn_frank,Sn_star_frank)
    pvalue_gumbel<-p_value(Sn_gumbel,Sn_star_gumbel)
    pvalue_joe<-p_value(Sn_joe,Sn_star_joe)
    pvalue_clayton<-p_value(Sn_clayton,Sn_star_clayton)
```

References

[1] Foundation IFRS. *IFRS 17 Insurance Contracts.* IFRS Standards, May 2017.

[2] Institute and Faculty of Actuaries. *IFRS 17 : Loss components – Part 1 of 3 : Why do loss components need to be amortised ?* IFRS 17 CSM Working Party, 2019.

[3] CEIOPS. *Solvency II Calibration Paper.* CEIOPS Publications, 15 April 2010.

[4] Kla KOUADIO. *Méthodes prospectives de calcul de SCRs et Applications.* Institut des Actuaires, 22 Juin 2018.

[5] Thomas MACK. *Measuring the variability of Chain-Ladder reserve estimates.* Casualty Actuarial Society, 1993.

[6] Thierry RONCALLI, Nicolas BAUD, and Jean-Frédéric JOUANIN. *Copules et aspects multidimensionnels du risque.* Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, Février 2002.

[7] Pranesh KUMAR. *Probability distributions and estimation of Ali-Mikhail-Haq copula.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, no. 14, 2010.

[8] Arthur CHARPENTIER and Christophe DUTANG. *L'Actuariat avec R.* Version numérique, licence Creative Commons, Décembre 2012.

[9] Wassily HOEFFDING. *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* The Annals of Mathematical Statistics, 1948.

[10] Stefano DEMARTA and Alexander J. MCNEIL. *The t Copula and related copulas.* Department of Mathematics, Federal Institute of Technology, May 2004.

[11] Jean-David FERMANIAN, Dragan RADULOVIC, and Marten WEGKAMP. *Weak convergence of empirical copula processes.* Bernoulli 10(5), 2004.

[12] Christian GENEST, Wanling HUANG, and Jean-Marie DUFOUR. *A regularized goodness-of-fit test for copulas.* Journal de la Société Française de Statistique, Vol. 154 No. 1, 2013.

[13] Christian GENEST, Bruno REMILLARD, and David BEAUDOIN. *Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study.* Insurance : Mathematics and Economics 44, 2009.

[14] David CADOUX and Jean-Marc LOIZEAU. *Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non-vie.* Bulletin français d'actuariat, Vol. 6, N°12, 2004.

[15] Emna GARGOURI-ELLOUZE and Assia CHEBCHOUB. *Modélisation de la structure de dépendance hauteur—durée d'événements pluvieux par la copule de Gumbel.* Hydrological Sciences Journal, 2008.

[16] Arthur CHARPENTIER. *Copules et risques multiples.* Octobre 2013.

[17] Michel DENAULT. *Coherent allocation of risk capital.* Ecole des H.E.C. (Montréal), January 2001.

[18] Jon DANIELSSON, Bjorn N. JORGENSEN, Mandira SARMA, and Casper G. de VRIES. *Sub-additivity re-examined : the case for Value-at-Risk.* 28 February 2005.

Résumé — La norme IFRS 17 exige de l'assureur qu'il ajoute à ses provisions *Current Estimate* une marge de prudence, appelée *Risk Adjustment*, afin de se prémunir d'une potentielle déviation de sinistralité sur chacun de ses "Groupes de Contrats Homogènes". La méthode de détermination du montant de *Risk Adjustment* est laissée au libre-choix de l'assureur, qui devra néanmoins communiquer le niveau du quantile équivalent pouvant être absorbée par le *Risk Adjustment* calibré. Plusieurs méthodes statistiques sont présentées pour calibrer le montant optimal de *Risk Adjustment*, dont les méthodologies diffèrent selon s'il s'agit de l'incertitude pesant sur la sinistralité future ou sur le règlement de la sinistralité passée. Les montants de *Risk Adjustment* élémentaires (c'est-à-dire calculés par module de risques) sont ensuite agrégés afin de tenir compte d'éventuels gains de diversification entre les risques exposant l'assureur. La Théorie des Copules est ainsi utilisée pour déterminer la corrélation entre d'une part les risques "Arrêt-de-travail" et "Mortalité", et d'autre part les risques "Frais généraux" et "Mortalité", afin d'agréger les *Risk Adjustment* élémentaires. Enfin, différentes méthodes d'allocation du capital sont expérimentées pour allouer le montant global du *Risk Adjustment* diversifie à chaque "Groupes de Contrats Homogènes".

Mots clés : IFRS 17, *Risk Adjustment*, méthodes statistiques, diversification, Théorie des Copules, méthodes d'allocation du capital.

Abstract — IFRS 17 requires the insurer to add to its *Current Estimate* provisions a margin of prudence, called *Risk Adjustment*, which will apply to a potential deviation of claims on each of its "Groups of Homogeneous Contracts". The method of determining the amount of *Risk Adjustment* is left to the discretion of the insurer, who must nevertheless communicate the level of the equivalent quantile that can be absorbed by the calibrated *Risk Adjustment*. Several statistical methods are presented to calibrate the optimal amount of *Risk Adjustment*, which differ depending on whether it is the uncertainty weighing on future claims or on the settlement of past claims. The elementary *Risk Adjustment* amounts (id est calculated by risk module) are then aggregated in order to take account of any diversification gains between the risks exposing the insurer. The Copula Theory is thus used to determine the correlation between, on the one hand, the "Work Stoppage" and "Mortality" risks, and on the other hand the "Overhead" and "Mortality" risks, in order to aggregate the elementary *Risk Adjustment*. Finally, different capital allocation methods are tested to allocate the global amount of the *Risk Adjustment* diversified to each "Groups of Homogeneous Contracts".

Keywords : IFRS 17, *Risk Adjustment*, statistical methods, diversification, Copula Theory, capital allocation methods.

ISUP - Sorbonne Université, 4 Place Jussieu
75 005 Paris.