

**Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances  
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire  
et l'admission à l'Institut des Actuares**

**le 14/09/2021**

Par : Brice Fotso

Titre : Etude d'une approche de calcul semi-supervisé du SCR par des chocs *multiwise*

Confidentialité : Non  Oui  (Durée :  1 an  2 ans)

---

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuares :*

Frédéric Planchet

*Entreprise :*

Nom : Pierre-Olivier GOFFARD

Signature :

*P.-O. Goffard*

*Membres présents du jury du Master  
Actuariat de ISFA Lyon :*

Denys Pommeret

*Directeur de Mémoire en entreprise :*

Nom : Florentine TSAYEM


Signature : 

---

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)


*Secrétariat :*

*Signature du responsable entreprise*



*Bibliothèque :*

*Signature du candidat*



## Table des figures

1	Architecture de Aviva . . . . .	13
2	Bilan économique sous Solvabilité II . . . . .	17
3	Générateur de scénarios économiques . . . . .	21
4	Structure modulaire de la formule standard . . . . .	25
5	Projection du bilan . . . . .	26
6	Simulations dans les simulations . . . . .	28
7	Méthode de Replicating Portfolio . . . . .	30
8	Méthode de Curve Fitting . . . . .	31
9	Quadrants <i>pairwise</i> . . . . .	38
10	Distributions marginales des facteurs de risques. . . . .	46
11	Processus de tirage de la base d'apprentissage. . . . .	49
12	Matrice de corrélation . . . . .	52
13	Pertes standalone EConv-P . . . . .	53
14	Pertes standalone EConv-Eqvol . . . . .	53
15	Représentation du biais et de la variance . . . . .	58
16	Relation entre biais, variance et erreur de prédiction . . . . .	59
17	Exemple de représentation d'une fonction spline avec différents nombres de noeuds. . . . .	63
18	Arbre de décision à 5 variables. . . . .	67
19	Illustration du principe de boosting en utilisant de 0 à 1024 prédicteurs. . . . .	68
20	Méthode de Gradient boosting machine . . . . .	69
21	Actif - Régression AICc : Test de normalité des résidus . . . . .	74
22	Actif - Régression AICc : Test de variance des résidus . . . . .	74
23	Actif - Régression MARS : Importance des variables . . . . .	77
24	Actif - Régression XGBoost : Importance des variables . . . . .	77
25	Actif - Régression MARS : Dépendance partielle . . . . .	77
26	Actif - Régression XGBoost : Importance des variables . . . . .	77
27	Passif - Régression AICc : Test de normalité des résidus . . . . .	79
28	Passif - Régression AICc : Test de variance des résidus . . . . .	79
29	Passif - Régression MARS : Importance des variables . . . . .	80
30	Passif - Régression XGBoost : Importance des variables . . . . .	80
31	Actif - Régression AICc : Test Durbin Watson . . . . .	96
32	Passif - Régression AICc : Test Durbin Watson . . . . .	96
33	Actif - Coefficients de la régression AICc. . . . .	97
34	Actif - Coefficients de la régression Elastic Net. . . . .	98
35	Actif - Coefficients de la régression MARS. . . . .	98
36	Passif - Coefficients de la régression AICc. . . . .	99
37	Passif - Coefficients de la régression Elastic Net. . . . .	100
38	Passif - Coefficients de la régression MARS. . . . .	101

## Liste des tableaux

1	Matérialité définie en comparaison avec le SCR . . . . .	39
2	Répartition des scénarios au niveau de la queue de la distribution . . . . .	50
3	Temps de compilation des méthodes alternatives. . . . .	72
4	Performances des modèles sur la valeur d'actif du portefeuille de prévoyance. . . . .	73
5	Performances des modèles sur la valeur de passif du portefeuille de prévoyance. . . . .	78
6	Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille de prévoyance. . . . .	81
7	Performances des modèles dans la région du SCR du portefeuille de prévoyance. . . . .	82
8	Performances des modèles sur la valeur de l'actif du portefeuille UC AER. . . . .	83
9	Performances des modèles sur la valeur du passif du portefeuille UC AER. . . . .	84
10	Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille UC AER. . . . .	84
11	Performances des modèles dans la région du SCR du portefeuille UC AER. . . . .	84
12	Performances des modèles sur la valeur d'actif du portefeuille Euro. . . . .	85
13	Performances des modèles sur la valeur de passif du portefeuille Euro. . . . .	86
14	Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille Euro. . . . .	86
15	facteurs de risques - Partie I . . . . .	102
16	facteurs de risques - Partie II . . . . .	103

## Résumé

---

**Mots clés :** Modèle Interne, Solvabilité II, Fonctions de perte, Assurance Vie, Bilan, facteurs de risques, Scénarios *multiwise*, Régression linéaire, SCR, MARS, Gradient Boosting, Elastic Net

---

Le but de ce mémoire est de construire un *proxy* prenant en compte la co-occurrence des risques assurantiels et de marché pour calculer le SCR sur un horizon de 1 an. L'enjeu principal est de sélectionner une base d'apprentissage qui puisse rendre compte de la relation entre les risques et leur impact sur les évolutions du bilan. Cette base d'apprentissage est composée d'un nombre restreint de scénarios probables. Ces scénarios sont représentés par des vecteurs dont chaque élément décrit l'évolution d'un risque donné, les risques représentés dans ces vecteurs sont les risques auxquels le portefeuille de Aviva est exposé. Ce *proxy* s'inscrit comme une alternative aux méthodes de Simulations Dans les Simulations et de *Curve Fitting* utilisées par Aviva mais qui sont coûteuses en temps d'exécution.

Pour pallier ce problème, on se propose d'étudier deux approches de modélisation :

- la régression linéaire pénalisée
- la régression non paramétrique

L'interprétabilité de la méthode de régression linéaire en fait communément la méthode utilisée par défaut, cependant, supposer une relation linéaire entre des facteurs de risques ou des combinaisons de facteurs de risques, représente ici une limite. Par ailleurs, la flexibilité ainsi que la performance des méthodes de régression non paramétrique (***Extreme Gradient Boosting***, **Régression Multivariée par Spline Adaptative**) nous poussent à privilégier ces dernières.

Ainsi, par l'application des modèles de régression non linéaire, l'objectif de performance est satisfait. De plus, pour s'assurer de l'interprétabilité et de la cohérence de ces modèles, nous utilisons des méthodes graphiques et statistiques comme le graphique de dépendance partielle ou le critère de validation croisée généralisée. Dans la suite, nous appliquons ces méthodes de régression sur des portefeuilles de taille et de profil de risque différents. Enfin, à la suite de l'application de ces méthodes, nous exposons les limites de leur généralisation et nous ouvrons le sujet sur des axes d'amélioration.

## Abstract

---

**Key words :** Internal Model, Solvency II, Loss Function, Life Insurance, Balance Sheet, Risk Factor, *Multivariate* scenario, Linear Regression, SCR, MARS, Gradient Boosting

---

The aim of this thesis is to build a proxy model able to learn from the co-occurrence of life insurance and market risks to estimate the SCR on a 1-year-horizon. The issue at stake is to select a database who efficiently portrays the relationships between risks and their impact on the evolutions of the balance sheet. This database consists in a limited number of probable scenarios. These scenarios are represented by a vector of values, each of these values represent the evolution of a given risk who has an impact on Aviva's balance sheet. The proxy model is an alternative to time consuming methods, such as the "nested simulations" method and the Curve Fitting method implemented by Aviva.

To tackle this issue, we consider two different modelling approaches :

- Penalized regression
- Non linear adaptative regression

The interpretability of the linear regression method makes it a commonly used method, yet, assuming a linear relationship between risk factors and combination of risk factors is a limit. Nevertheless, the flexibility and the accuracy of the two non linear regression methods (***Extreme Gradient Boosting, Multivariate Adaptive Regression Splines***) make them adequate solution.

Thus, these non linear regression models meet our accuracy goal. Furthermore, to make sure that our final non linear regression model are consistent and interpretable, we use graphic and statistical techniques such as the partial dependance plot and the generalized cross-validation criteria. Then, we apply the candidate models on portfolios of different magnitude and different risk exposure. Finally, after applying the methods to the portfolios, we expose the limits behind the generalization of the methods and we discuss about improvement angles.

## **Remerciements**

Je tiens premièrement à remercier mes parents Evelyne et Gabriel FOTSO, pour avoir été présents et investis durant tout mon parcours académique.

Je souhaite également remercier le reste de ma famille et mes amis (notamment Ilona KEDOTE et Johanna BUAYI) pour m'avoir épaulé, diverti et encouragé tout au long de mon parcours.

Pour finir, je remercie mes tuteurs de mémoire : Florentine TSAYEM pour m'avoir accueilli au sein de Aviva et pour m'avoir fait confiance en me proposant ce projet ambitieux et Pierre-Olivier GOFFARD pour sa disponibilité et ses nombreux conseils.

## Introduction

Le système économique actuel donne la possibilité à des individus ou des entités d'être assurés financièrement contre de nombreux risques. Ces risques peuvent être bénins ou de grande magnitude. Pour assurer la confiance en ce système, les compagnies d'assurances sont soumises à une forte réglementation qui a pour but de garantir leur solvabilité et assurer la protection des assurés. Entrée en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016, la directive Solvabilité 2 constitue le cadre réglementaire à respecter pour la valorisation actuarielle des entreprises du secteur. Cette norme définit des règles permettant aux assureurs et réassureurs de mieux prendre en compte et évaluer les risques liés à leur activité.

Cette directive repose sur trois piliers. Le pilier I décrit les exigences quantitatives. On définit dans ce pilier deux indicateurs de solvabilité : le Minimum de Capital Requis (MCR), et le Capital de Solvabilité Requis (SCR). Ce dernier représente le niveau de fonds propres qu'il faut posséder au minimum pour limiter la probabilité de ruine de l'assureur à moins de 0,5% sur un horizon de un an. Le calcul de cet indicateur représente un enjeu primordial pour les entreprises. Pour l'estimer, elles doivent tenir compte de l'ensemble des risques auxquels elles sont soumises, de manière exhaustive et pertinente. Il s'agit ensuite de déterminer la valeur de cet indicateur de la manière la plus précise possible.

**En partant de ce cadre, l'étude portera sur l'implémentation d'une approche alternative de calibrage semi-supervisé d'une fonction de perte, utilisée pour calculer le SCR. On se basera pour cela sur la co-occurrence de tous les risques pertinents<sup>1</sup>.**

Pour répondre à la question posée, on présentera tout d'abord le contexte de l'étude. On introduira notamment la méthode de calibrage des fonctions de perte en vigueur au sein du modèle interne de Aviva. Cela permettra d'introduire et de comprendre la démarche générale de cette étude. Ensuite, nous présenterons la démarche suivie pour créer la base de donnée *multiwise*. Celle-ci servira pour le calibrage et la validation des fonctions de perte. Enfin, les modèles candidats pour la mise en place de l'approche alternative seront présentés. Ils seront ensuite appliqués à la base de données et comparés au *benchmark* interne.

---

1. qu'on appellera par la suite "approche *multiwise*"

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Contexte de l'étude</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Assurance vie et solvabilité II</b>	<b>12</b>
1.1	Contexte et périmètre de l'étude . . . . .	12
1.1.1	Activité de Aviva France . . . . .	12
1.1.2	AFER . . . . .	12
1.1.3	Aviva Vie (AVIE) . . . . .	12
1.1.4	Aviva Epargne Retraite (AER) . . . . .	13
1.1.5	Epargne Actuelle (EA) . . . . .	13
1.2	Produits d'assurance vie en portefeuille . . . . .	13
1.2.1	Epargne . . . . .	13
1.2.2	Prévoyance . . . . .	14
1.2.3	Options et garanties . . . . .	15
1.3	Règlementation Solvabilité II . . . . .	16
1.3.1	Les piliers de la réglementation . . . . .	16
1.3.2	Les postes du bilan économique . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modélisation ALM</b>	<b>17</b>
2.1	Modélisation du passif . . . . .	18
2.1.1	Risques du passif . . . . .	18
2.1.2	Chocs du passif . . . . .	19
2.1.3	Modèles déterministe et stochastique . . . . .	19
2.2	Modélisation de l'actif . . . . .	20
2.2.1	Générateurs de scénarios économiques . . . . .	21
2.2.2	Risques de l'actif . . . . .	22
2.2.3	Chocs de l'actif . . . . .	22
2.3	Interaction actif-passif . . . . .	23
2.4	Fuite économique du modèle . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Définition et calcul du capital réglementaire</b>	<b>24</b>
3.1	Définition . . . . .	24
3.2	Formule standard . . . . .	25
3.3	Modèle Interne . . . . .	26
3.3.1	L'approche SDS . . . . .	27
3.3.2	Accélérateur SdS . . . . .	28
3.3.3	Portefeuilles répliquants . . . . .	29
3.3.4	LSMC (Least Square Monte Carlo) . . . . .	30
3.3.5	Curve Fitting . . . . .	31
<b>II</b>	<b>Mise en place d'une méthode d'optimisation du calcul de capital réglementaire</b>	<b>32</b>



<b>4</b>	<b>Méthodologie actuelle</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction aux fonctions de perte . . . . .	35
4.1.1	Notions utiles . . . . .	35
4.1.2	Choix des points du calibrage . . . . .	38
4.2	Calibrage de la fonction de perte . . . . .	39
4.3	Validation de la fonction de perte . . . . .	40
4.3.1	Scénarios de test . . . . .	40
4.3.2	Scénarios de validation . . . . .	41
4.4	Limites à l'utilisation des fonctions de perte . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Construction de la base de données</b>	<b>44</b>
5.1	Choix des scénarios <i>multiwise</i> . . . . .	44
5.1.1	Ajustement de la base d'étude . . . . .	45
5.1.2	Bases d'apprentissage et de test . . . . .	45
5.2	Ajustement des données . . . . .	51
5.3	Limites de la méthodologie . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Régression polynomiale multiple : Approche par formules fermées</b>	<b>55</b>
6.1	Méthodologie . . . . .	55
6.2	Critère d'information d'Akaike (AIC) . . . . .	57
6.3	Polynôme AIC . . . . .	57
6.4	Equilibre biais-variance . . . . .	58
6.4.1	Méthode Ridge . . . . .	59
6.4.2	Méthode LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) . . . . .	60
6.4.3	Méthode Elastic Net . . . . .	60
6.4.4	Limites . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Régression non paramétrique : Régression multivariée par spline adaptative</b>	<b>62</b>
7.1	Méthodes de lissage . . . . .	62
7.2	Estimation des paramètres . . . . .	64
7.3	Modèle MARS . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Méthode de machine Learning : Gradient Boosting</b>	<b>67</b>
8.1	<i>Gradient Boosting Machine (GBM)</i> . . . . .	68
8.2	<i>eXtreme Gradient Boosting (XGB ou XGBoost)</i> . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Application à un portefeuille de produits de prévoyance de l'entité Aviva Vie hors AFER</b>	<b>71</b>
9.1	Méthodes de comparaison des modèles . . . . .	71
9.2	Estimation des postes du bilan . . . . .	72
9.2.1	Sélection de variables . . . . .	72
9.2.2	Estimation de l'actif - Performance des modèles . . . . .	72
9.2.3	Estimation de l'actif - Interprétabilité . . . . .	73
9.2.4	Estimation du passif - Performance des modèles . . . . .	78
9.2.5	Estimation du passif - Interprétabilité . . . . .	78
9.3	Estimation de la perte globale . . . . .	81
9.3.1	Sélection de variables . . . . .	81

9.3.2	Performance des modèles . . . . .	81
<b>10</b>	<b>Analyse critique de la méthode</b>	<b>83</b>
10.1	Tests de sensibilité sur deux portefeuilles de nature et de volume différents . . . . .	83
10.1.1	Application au portefeuille de contrats UC de l'entité AER . . . . .	83
10.1.2	Application au portefeuille de contrats Euros de l'entité Epargne Actuelle . . . . .	85
10.2	Limites des modèles . . . . .	86
10.3	Perspectives de l'étude . . . . .	87
<b>11</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>89</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Régression linéaire</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Validation croisée</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Tests de Durbin Watson</b>	<b>96</b>
<b>D</b>	<b>Analyse des coefficients</b>	<b>97</b>
<b>E</b>	<b>Facteurs de risques</b>	<b>102</b>

## Liste des abréviations et notations

**ALM** : Gestion Actif/Passif (Asset and Liability Management)

**EIOPA** : Autorité Européenne des Assurances et des Pensions professionnelles (European Insurance and Occupational Pensions Authority)

**FP** : Fonds Propres

**GCV** : Validation croisée généralisée (Generalised Cross-Validation)

**MARS** : Splines de régression multivariée adaptatives (Multivariate Adaptive Regression Splines)

**PPE** : Provision pour Participation aux Excédents

**PB** : Participation aux Bénéfices

**QRT** : Reporting Quantitatif (Quantitative Reporting Templates)

**RF** : Facteur de risque (Risk Factor)

**RMSE** : Racine carrée de l'erreur quadratique (Root Mean Squared Error)

**SDS** : Simulations Dans les Simulations

**SCR** : Solvency Capital Requirement

**TMG** : Taux Minimum Garanti

**UC** : Unité(s) de Compte(s)

**VAN** : Valeur Actuelle Nette

**VEP** : Valeur Economique du Passif

$[X]_+ = \max(X, 0)$ ,  $[X]_- = \min(X, 0)$

**Première partie**

**Contexte de l'étude**

# 1 Assurance vie et solvabilité II

## 1.1 Contexte et périmètre de l'étude

L'assurance-vie est la branche de l'assurance proposant des produits basés sur la durée de vie humaine. L'assureur s'engage à payer une prestation, sous forme de capital ou de rente, au profit d'une personne bénéficiaire, lorsque survient un événement de vie ou le décès de l'assuré, avant le terme du contrat.

Les produits d'assurance-vie sont populaires en raison des avantages en matière de fiscalité pour l'assuré et ses successeurs. La réduction d'impôt est d'autant plus importante au fil du temps car c'est un produit d'épargne à long terme. C'est donc une solution d'épargne pour augmenter son capital ou préparer sa retraite, mais également pour assurer l'avenir de ses proches.

### 1.1.1 Activité de Aviva France

Aviva France est le deuxième plus important marché du Groupe international Aviva plc. C'est un assureur généraliste opérant en assurance-vie : épargne, retraite, prévoyance ainsi qu'en assurance dommages. Avec des millions de clients à son compte, son activité est majoritairement axée sur l'assurance-vie<sup>2</sup>. Il offre une panoplie de produits d'assurance-vie et non-vie mais également des services de gestion d'actifs.

Aviva France possède plusieurs entités proposant divers produits d'assurance, chacune de ces entités possède des engagements propres ainsi qu'une stratégie d'investissement sur des actifs financiers liée à son activité et aux types de contrats souscrits. Cette stratégie a pour but de financer ses engagements et parfois rémunérer ses actionnaires. Pour chacune de ces entités se distinguent alors un portefeuille d'actif et un portefeuille de passif. Quelques-unes de ces entités sont présentées par la suite.

### 1.1.2 AFER

Afer<sup>3</sup> est une association d'épargnants libre et indépendante qui compte plus de 760 000 adhérents et dont le volume monétaire à gérer s'élève à plus de 50 milliards d'euros d'épargne. En 2020, le taux de rendement du fonds garanti Afer a été fixé à 1,70% net de frais de gestion et hors prélèvements sociaux et fiscaux. L'Afer se donne pour objectif de permettre à ses adhérents de se constituer une épargne dans les meilleures conditions financières et juridiques possibles. Dans cette idée, l'Afer a créé, avec des partenaires assureurs, le GIE Afer au sein duquel s'effectue la gestion administrative et la distribution de contrats d'assurance vie Afer notamment par Aviva France. Les entités Aviva Vie et Aviva Epargne Retraite, co-assurent à parts égales les contrats collectifs d'assurance vie Afer.

### 1.1.3 Aviva Vie (AVIE)

Aviva Vie aussi appelée Avie est une société mixte distribuant principalement des produits d'Epargne, de Retraite et de Prévoyance. Elle prend en compte l'activité de AFER.

---

2. 80% assurance Vie, 20% assurance dommage et santé

3. Association Française d'Épargne et de Retraite

### 1.1.4 Aviva Epargne Retraite (AER)

AER est une entité juridique liée à Aviva Vie par un traité de coassurance alignant les produits financiers sur l'ensemble du périmètre AFER.

### 1.1.5 Epargne Actuelle (EA)

Epargne Actuelle accompagne ses 212 000 clients au quotidien dans la gestion de leur patrimoine. Principal distributeur du contrat d'assurance vie multi-support AFER et filiale de l'assureur Aviva France, Epargne Actuelle propose une gamme diversifiée de produits d'investissement : Assurance vie, Capitalisation, Retraite, Dépendance, Immobilier SCPI.

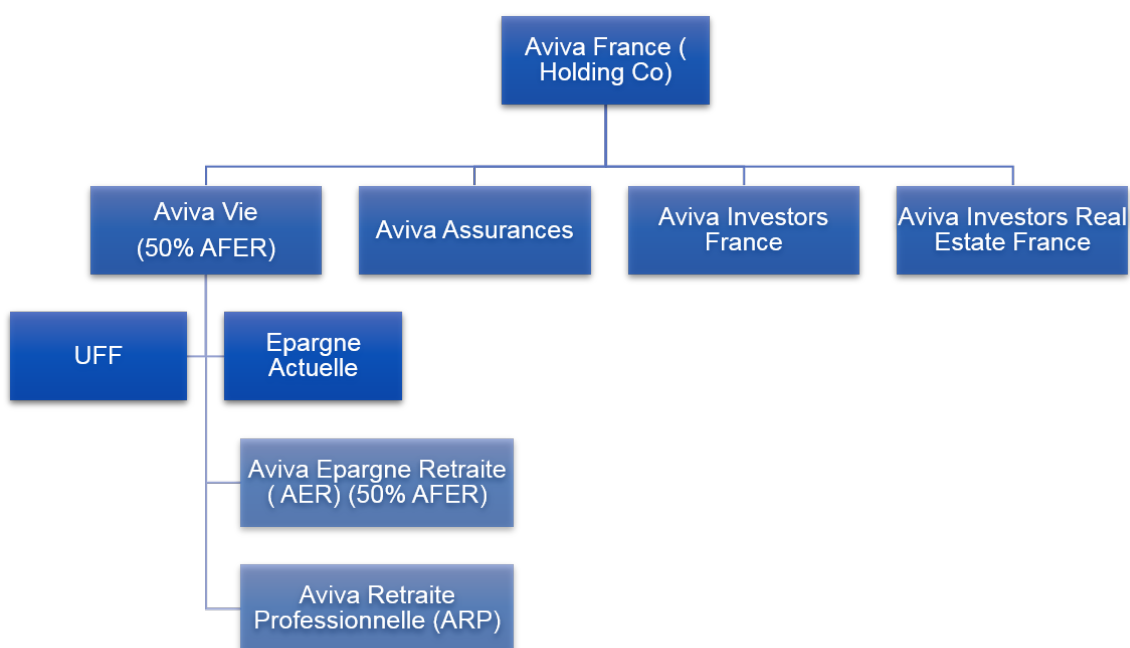


FIGURE 1 – Architecture de Aviva

## 1.2 Produits d'assurance vie en portefeuille

Dans cette partie seront évoqués différents produits proposés par Aviva à ses clients, ainsi que leurs spécificités : il sera question ici d'assurance vie épargne et prévoyance.

### 1.2.1 Epargne

Les contrats d'épargne peuvent être investis sur des fonds en euros, sur des Unités de Compte (UC) ou encore sur des fonds multi-supports :

#### Fonds en euros

Bien que l'environnement économique actuel l'ait rendu moins attrayant et que les assureurs cherchent à restreindre son accès, l'investissement en fonds euro est l'investissement le plus courant sur le marché en raison de son avantage d'être sans risque pour les assurés. En fait, il garantit le montant payé et les intérêts cumulés. Ceci oblige notamment les compagnies d'assurance à investir principalement dans des obligations d'Etat afin de pouvoir tenir leurs engagements, étant donné que ces dernières offrent le rendement le plus sûr.

Le fonds Euro a donc été très avantageux pour les assurés comme pour les assureurs dans la période où il offrait un rendement supérieur à celui du marché. Dans le contexte économique actuel, ce taux de rendement diminue progressivement et les obligations précédemment investies arrivent à échéance. Les rendements obligataires actuels chutent, du fait de la dilution du taux de rendement des obligations souscrites par le passé. En effet, depuis 2017, une baisse des rendements obligataires historique en Europe peut être observée sur le marché, en 2020, pour une OAT<sup>4</sup> de maturité "10 ans", le taux moyen de rendement a été estimé à  $-0.17\%$  en France. Ainsi certains rendements obligataires actuels ne sont plus à même d'assurer les engagements pris par l'assureur.

## **Fonds en UC**

Ils permettent aux souscripteurs d'investir sur une variété de supports d'investissement, qu'il s'agisse d'actions, d'obligations, d'investissement immobilier et même produits de taux d'intérêt. Cependant, il y a un risque de perte car ces actifs dépendent des tendances du marché et l'assureur ne garantit pas ici le montant investi. Pour ces contrats, les investisseurs, qui sont par définition enclins à prendre des risques, veulent des rendements supérieurs à ceux des fonds en euro, en investissant sur des produits présentant des risques plus élevés.

## **Fonds multi-supports**

Il existe une alternative qui est d'investir dans des contrats multi-supports regroupant à la fois des fonds en euros et des unités de compte avec la possibilité d'arbitrer le capital entre les deux fonds. Ainsi, une partie de l'investissement est sécurisée grâce au rendement garanti des fonds en euro, mais l'investisseur peut quand même dégager des plus-values conséquentes grâce à la partie investie en UC.

### **1.2.2 Prévoyance**

D'après la loi Evin, la prévoyance désigne " les opérations ayant pour objet la prévention et la couverture du risque décès, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne, des risques liés à la maternité, des risques d'incapacité de travail, d'invalidité ou encore du risque de chômage ".

Dans le périmètre de la prévoyance, les risques couverts sont nombreux. La Sécurité Sociale prend en charge une partie des indemnités en cas de réalisation d'un risque lié à la prévoyance. Cependant, une part des indemnités reste à la charge de l'assuré et le contrat de prévoyance vient donc en complément du régime obligatoire. Les garanties associées à ces contrats prévoient des prestations qui viennent compléter celles du régime de la sécurité sociale.

---

4. Obligation Assimilable du Trésor

### 1.2.3 Options et garanties

La complexité des produits d'assurance-vie vient des options et garanties qu'ils détiennent. Les garanties des contrats d'assurance sont les engagements réglementaires et contractuels de l'assureur envers les assurés. Sur les fonds en euros, le montant placé ne peut diminuer quelles que soient les évolutions des marchés financiers, car c'est l'assureur qui porte le risque. L'épargne est revalorisée chaque année d'un taux servi composé d'un **taux minimum garanti (TMG)** et d'une **participation aux bénéfices (PB)**.

**Taux Minimum Garanti** : L'application du TMG en assurance vie évolue dans un cadre légal strict. En effet, selon l'arrêté sur les modifications des modalités de l'application du taux minimum garanti, ce taux doit respecter quelques règles dont les principales sont les suivantes :

- il doit être calculé et établi pour une durée annuelle.
- il doit être fixé pour une durée minimale de un semestre et maximale de 2 ans.
- il ne peut pas dépasser 85 % de la performance des actifs de la société d'assurance sur les deux dernières années.
- il ne doit pas entraver la rémunération des autres produits du portefeuille.

L'assureur investit les primes perçues dans le cadre des contrats en fonds euros, dans un portefeuille d'actifs. Ce portefeuille évolue en fonction des aléas des marchés financiers, il lui est donc difficile de prévoir la rémunération de ce dernier sur une longue durée, ceci malgré le fait qu'il se soit engagé à verser un taux fixe. C'est en ce sens que le TMG représente une contrainte majeure pour les assureurs, d'autant plus lorsque le contexte économique n'est pas favorable.

**Participation aux bénéfices** : L'assureur est dans l'obligation de verser aux assurés une partie des bénéfices réalisés. En effet, d'après l'article *L331-3 du Code des Assurances*, « les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent, dans les conditions fixées par arrêté du ministre de l'économie et des finances ». Il existe certains engagements qui en sont exonérés comme les contrats Plan d'Épargne Retraite Populaire (PERP), les contrats en Unités de Compte ou encore les contrats de retraite professionnelle.

Il existe par ailleurs des garanties sur les contrats en unités de comptes, ces dernières sont optionnelles pour l'assuré en contrepartie d'une prime additionnelle. Certains produits d'Aviva offrent la **garantie plancher**. Elle permet au bénéficiaire, en cas de décès de l'assuré, de recevoir au minimum un montant correspondant généralement aux primes investies net des rachats, ceci quelles que soient les évolutions des marchés financiers et donc quelles que soient la valeur des unités de compte présentes dans le contrat.

Il existe également des garanties propres aux contrats de prévoyances comme :

- **Garanties accidents de la vie** : elles couvrent les préjudices liés aux accidents de la vie privée qui entraînent le décès ou l'invalidité permanente.
- **Garanties hospitalisation** : elles couvrent les frais liés à une hospitalisation et garantissent à l'assuré un montant d'indemnité journalière.
- **Garanties dépendance** : elles garantissent le risque de ne plus pouvoir assumer, seul ou sans difficulté, des actes essentiels de la vie. Elles permettent de compenser le coût financier résultant de ce manque ou de cette perte d'autonomie.



Les options sont des droits offerts aux assurés en vertu de la réglementation ou des conditions contractuelles.

**Option de rachat** : L'assuré a la possibilité de récupérer son capital avant la fin prévue du contrat. Ce rachat peut être soit total, c'est-à-dire que l'assuré peut demander la récupération de l'intégralité de son investissement, soit partiel, en récupérant une partie de sa provision sans rupture du contrat. Les rachats sont généralement pénalisés et ces pénalités sont généralement proportionnelles à la réserve mathématique du groupe de contrats auquel celui de l'assuré appartient.

**Option d'arbitrage** : L'option d'arbitrage permet à l'assuré de modifier la répartition de son épargne selon les différents supports proposés dans le contrat. L'arbitrage concerne les contrats multi-supports et permet à l'assuré de réduire ou augmenter son exposition aux risques du marché financier en fonction de l'appétence au risque de ce dernier et de l'état de l'environnement économique. L'arbitrage peut être manuel ou bien automatique et consiste à ajuster la part de l'investissement total investie sur fonds euro et celle investie sur les différentes UC.

## 1.3 Règlementation Solvabilité II

### 1.3.1 Les piliers de la réglementation

Une compagnie d'assurance doit être en mesure de tenir ses engagements envers ses clients. Cette capacité dépend à la fois de ses fonds propres et des divers actifs qu'elle détient. En plus de ces garanties minimales, il existe des réserves obligatoires pouvant, par exemple, couvrir des événements imprévus majeurs.

La directive Solvabilité II, adoptée en novembre 2009 par la Commission Européenne, est la nouvelle réglementation du marché européen de l'assurance. Elle offre un cadre réglementaire unifié à travers l'Europe et définit un ensemble de règles régissant le régime de solvabilité applicable aux entreprises d'assurances.

Elle adopte une vision de la valorisation en "juste valeur" en adéquation avec les paramètres du marché, cette vision s'articule autour de la notion du risque et de bilan prudentiel<sup>5</sup>. Elle permet ainsi une meilleure protection des assurés, renforce la politique de gestion des risques de la compagnie et facilite également l'investissement grâce à un système unifié. Elle s'articule autour de 3 piliers :

- Le **pilier I** ou pilier quantitatif concerne les exigences réglementaires en fonds propres en fonction de la valeur économique des risques. Le calcul du SCR, qui est l'un des indicateurs principaux de cette réforme, doit être effectué de manière précise au moins une fois par an et dès que le profil de risque varie sensiblement.

- Le **pilier II** concerne les exigences qualitatives et de supervision. Il traite du renforcement de la gouvernance, du contrôle interne et de la gestion des risques au sein de l'entreprise.

- Le **pilier III** concerne les exigences en matière de "reporting" et information du public, il impose aux assureurs, une transparence accrue de leur fonctionnement vis-à-vis des autorités de contrôle ainsi que du public.

---

5. vision économique des postes du bilan

### 1.3.2 Les postes du bilan économique

Le bilan économique sous solvabilité II est donné ci-dessous :

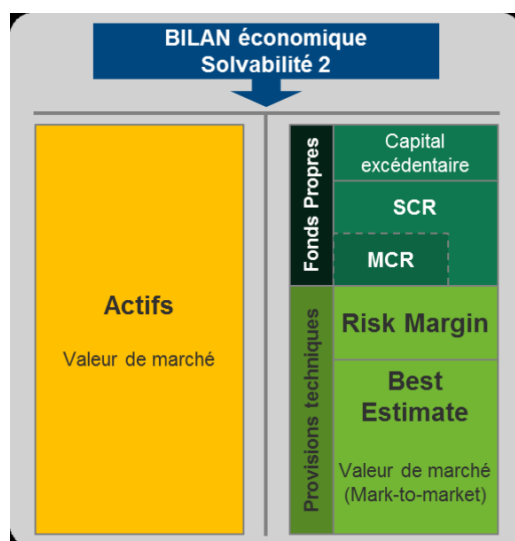


FIGURE 2 – Bilan économique sous Solvabilité II

L'actif est évalué en "juste valeur", c'est à dire en valeur de marché, les calculs relatifs aux provisions techniques quant à eux sont en général effectués en vison *Best Estimate*<sup>6</sup>.

La *Risk Margin*<sup>7</sup> est la part des provisions techniques permettant de s'assurer que le montant total des provisions techniques est équivalent au montant dont l'assureur doit disposer pour honorer ses engagements. Elle représente le coût en terme de mobilisation de fonds propres inhérent au portefeuille. C'est également le coût qui serait supporté par le « repreneur » de ce portefeuille dans un scénario où celui-ci devrait être transféré à un autre organisme.

Dans ce mémoire, nous ne chercherons pas à exprimer le capital excédentaire ainsi que la marge pour risque, nous négligerons donc ces deux composantes.

## 2 Modélisation ALM

Un modèle ALM est un outil qui permet de projeter dans le temps, des flux comptables et de trésorerie d'une institution financière. Il permet de modéliser :

- L'**actif** : valeur de marché, valeur comptable, flux ;
- Le **passif** : primes, prestations/sinistres, rachats, provisions, frais ;
- La **stratégie financière** : Allocation d'actifs, achats/vente de titres ;
- La **politique de revalorisation** : taux servi, gestion de la Provision pour Participation aux Excédents (PPE), gestion de la PB
- Les **fonds** : résultats, dividendes, capitaux

6. \*valeur actuelle probable des engagements de l'assureur - valeur actuelle probable des engagements de l'assuré

7. marge pour risque

Les modèles peuvent être utilisés sous forme :

- déterministe : Partant d'un état initial, un seul état final parfaitement connu est atteint, aucun phénomène aléatoire n'est incorporé dans le processus.
- stochastique : Partant d'un état initial, plusieurs états finaux sont possibles, il y a une prise en compte des phénomènes aléatoires. L'état final représente donc une espérance des différents scénarios aléatoires.

Un modèle prend en entrée des hypothèses : les caractéristiques liées aux instruments modélisés ainsi que des scénarios économiques, puis il renvoie les résultats des différents postes du bilan après prise en compte des interactions entre les composantes de l'actif et du passif.

Il existe plusieurs interfaces de modélisation utilisées aujourd'hui comme :

- Prophet (utilisé dans le cadre de ce mémoire)
- MoSes
- SimBEL : package développé au sein du logiciel R, qui permet le calcul de la provision best estimate pour un contrat d'épargne. Pour plus d'informations, le lecteur peut consulter [14].
- Matlab, Excel, SAS..

## 2.1 Modélisation du passif

### 2.1.1 Risques du passif

Au sein du modèle, le passif est modélisé par la prise en compte de certains risques :

- **Hausse des rachats** : Le risque de hausse des rachats désigne le risque qu'un souscripteur résilie, réduise, transfère ou rachète ses polices dans une proportion plus importante ou de manière anticipée par rapport aux prévisions entraînant des pertes liées aux dépenses engagées, des pertes de profits futurs et un risque de réputation lié à la mauvaise qualité des pratiques de vente et de service aux clients.
- **Baisse des rachats** : Au contraire le risque de baisse des rachats désigne le risque de surestimation des taux de rachat pour certains contrats qui à cause des conditions économiques, ne sont pas ou plus profitables à la compagnie. Cela peut donc entraîner des pertes liées à la prolongation inattendue d'une situation contractuelle non profitable et ainsi des pertes de profits futurs.
- **Arbitrage** : Le risque d'arbitrage désigne le risque que les profits attendus soient modifiés par des mouvements d'arbitrage importants entre supports à rentabilité très différentes. D'une part, de forts mouvements d'arbitrage sortant du fonds euros peuvent provoquer un problème de liquidité à l'actif, d'autre part, les arbitrages entraînant une modification de la répartition euro/UC des encours peuvent avoir un impact non négligeable sur le niveau du minimum de marge pour risque requis.
- **Garantie plancher décès ou vie** : Le risque de garantie plancher désigne le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements de l'assureur lorsque le recours à la garantie plancher (décès ou vie) dépasse le montant pris en compte dans la base de calcul de la tarification d'un produit ou du montant des richesses présentes et des richesses futures actualisées.
- **Mortalité** : Le risque de mortalité désigne le risque que l'incidence des sinistres pour cause de décès dépasse le nombre ou le montant pris en compte dans la base de calcul de la tarification d'un produit ou du montant des richesses présentes et des richesses futures actualisées.

- **Longévité** : Le risque de longévité désigne le risque que les clients vivent plus longtemps que prévu au moment du calcul de la tarification du produit ou plus longtemps que prévu par la table de mortalité utilisée pour le provisionnement ou le calcul du montant des richesses présentes et des richesses futures actualisées, en raison de l'amélioration future de l'espérance de vie.
- **Réassurance** : Le risque de réassurance désigne le risque d'inadéquation de la réassurance existante ou non avec les risques encourus.
- **Dérive des frais** : Le risque de dérive des frais désigne le risque de gestion inadaptée des dépenses d'acquisition et de maintenance entraînant des pertes lorsque les dépenses réelles ne peuvent être couvertes par les primes reçues.
- **Catastrophe** : Le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements de l'assureur provoqué par un événement unique ou une série d'événements (survenus dans un intervalle de temps réduit) de grande(s) magnitude(s). Ce(s) dernier(s) conduisant à une dérive importante de la sinistralité réelle par rapport à la sinistralité estimée.
- **Réputation** : Le risque de perte ou de variation défavorable de la valeur des engagements de l'assureur due à la perte de clients actuels ou futurs en raison d'événements impactant la réputation de l'assureur (réclamations, sinistres, mauvaise qualité des pratiques de vente et de service aux clients, etc.).
- **Opérationnel** : Le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements de l'assureur résultant du manque, de l'inadéquation ou du mauvais fonctionnement des procédures internes. Ces défauts de procédures pouvant provenir des ressources humaines, des systèmes ou d'événements extérieurs.

### 2.1.2 Chocs du passif

Afin de prendre en compte des potentielles évolutions de l'environnement économique et assurantiel, le modèle est évalué sur des scénarios qui représentent ces potentielles évolution. Les scénarios représentent ce type d'évènements :

- Scénario de hausse de la longévité
- Scénario de hausse de la mortalité
- Scénario de pandémie
- Scénario de dérive des frais
- Scénario de baisse des rachats
- Scénario de hausse des rachats
- Scénario de rachat massif

### 2.1.3 Modèles déterministe et stochastique

La modélisation du passif au sein de Aviva Vie nécessite l'utilisation d'un modèle dit "déterministe" permettant de générer des chroniques de flux financiers déterministes, regroupées au sein d'une table appelé "DET\_CF", ces flux sont nécessaires à l'estimation du profit. Plusieurs quantités sont calculées :

- Primes perçues,
- Prestations payées,
- frais payés,
- commissions perçues et payées.

Le modèle déterministe est alimenté par des hypothèses financières et comportementales. Lors du choc de certaines composantes du passif, ce sont ces hypothèses qui sont modifiées afin de recalculer la table "DET\_CF". Ainsi, la prise en compte des fonctionnalités des produits d'assurance commercialisés est réalisée en premier lieu à partir du modèle déterministe.

Par la suite, la table obtenue en sortie de modèle déterministe est utilisée en entrée d'un modèle stochastique permettant de modéliser les fonctionnalités suivantes :

- Arbitrages
- Taux minimum garanti
- Rachats
- Garantie plancher
- Clause de Participation aux bénéfices
- Réserves de capitalisation
- Provision pour risque d'exigibilité
- Provision pour participation aux excédents

## 2.2 Modélisation de l'actif

La catégorisation des actifs consiste à classer les actifs en portefeuille en catégories et sous-catégories en fonction de leurs caractéristiques. Chaque actif est catégorisé en trois niveaux :

- **Éligibilité aux réserves générales**<sup>8</sup>
- **Type d'actif** : obligations à taux fixes, obligations à taux variables, immobilier, actions, etc.
- **Sous-type d'actif** : segmentation supplémentaire des actifs (ex : obligations à taux fixes courts, obligations taux fixes longs, obligations à taux variables).

Les actifs principaux modélisés au sein du modèle, sont :

- Obligations et assimilés : Obligations à taux fixes, taux variables courts, taux variables longs, obligations indexées sur l'inflation, OPCVM
- Indices : Actions, immobiliers, OPCVM
- Trésorerie : Montant de trésorerie

---

8. exemple : réserve de capitalisation, provision pour risque d'exigibilité

### 2.2.1 Générateurs de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques est un outil permettant de projeter sur un horizon d'intérêt, de façon cohérente avec le marché<sup>9</sup>, les éléments aléatoires présents dans le bilan d'une société d'assurance. À l'actif, il permet par exemple de projeter l'évolution des différentes classes d'actifs (actions, obligations, immobilier,...) et au passif les provisions techniques et le SCR.

Il prend en compte de nombreux modèles financiers et permet de projeter dans le temps des facteurs de risques pertinents, en prenant en compte la structure de dépendance existant entre eux. Les facteurs de risques sont générés en utilisant des modèles sophistiqués qui captent la dynamique des marchés financiers.

Les principales variables modélisées sont :

- Les taux d'intérêts
- Les cours d'indices
- Les rendements immobiliers
- L'inflation

Il existe deux univers pour générer des scénarios économiques : l'univers historique et l'univers risque neutre. Dans l'univers historique les acteurs du marché ont une fonction d'utilité et font des anticipations sur ce marché. Cet univers sera utilisé lorsqu'on s'intéresse à la distribution réelle des flux futurs. Les données historiques seront utilisées pour calibrer les paramètres caractérisant la distribution considérée.

L'univers risque neutre est un univers dans lequel les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque. Le terme "risque neutre" provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. Cet univers facilite l'évaluation des actifs financiers car cette évaluation se ramène à un calcul d'espérance des flux futurs actualisés.

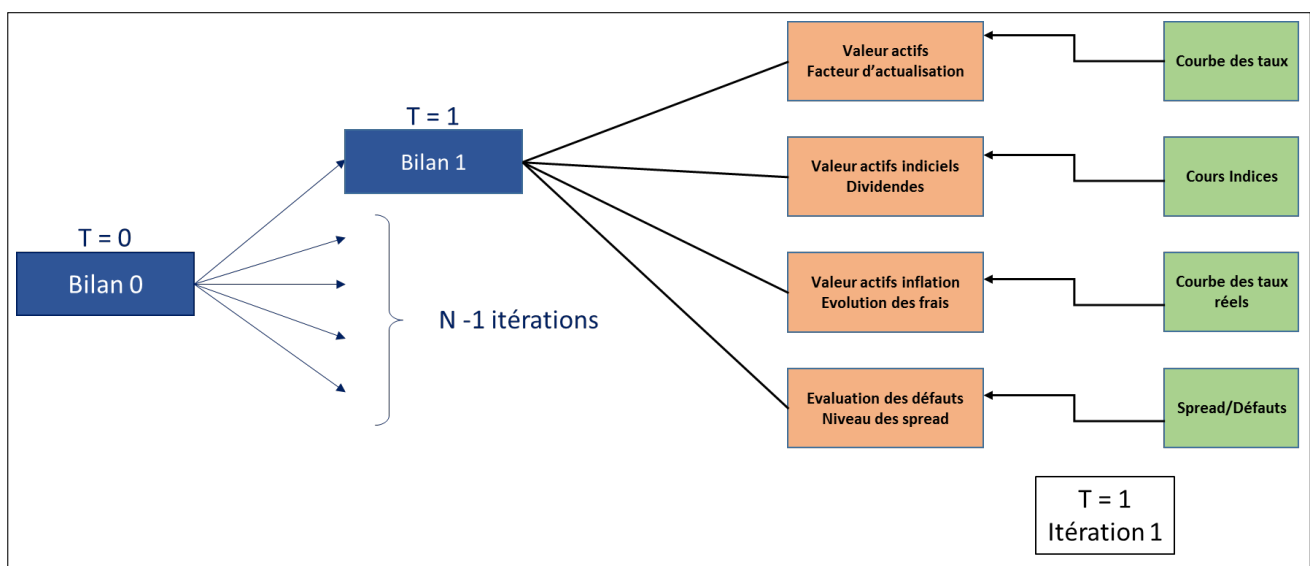


FIGURE 3 – Générateur de scénarios économiques

9. market consistent

### 2.2.2 Risques de l'actif

Au sein du modèle, l'actif est modélisé par la prise en compte de certains risques :

- **Action** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les mouvements des marchés action, incluant les variations de prix ou de cours indices. La volatilité implicite des actions est exclue.
- **Immobilier** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les mouvements de la valeur de marché des actifs immobiliers en portefeuille.
- **Taux** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les modifications de structure de la courbe de taux d'intérêts risque-neutre. On distingue trois principaux paramètres : niveau, pente et courbure, le lecteur peut consulter [18] pour plus d'informations à ce sujet.
- **Crédit** : Le risque additionnel de variation du rendement des actifs causé par les évènements de crédit. Aviva Vie considère les évènements de crédits suivants :
  - Le risque de défaut associé au taux de recouvrement
  - La notation
  - La variation des spreads risque-neutres
- **Volatilité Action** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les modifications de la volatilité implicite des actions.
- **Volatilité Taux** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les modifications de la volatilité implicite des taux d'intérêts sans risque.
- **Inflation** : Le risque d'un impact financier défavorable causé par les mouvements de l'inflation réelle et/ou implicite.

### 2.2.3 Chocs de l'actif

Afin de prendre en compte des potentielles évolutions de l'environnement économique et assurantiel, le modèle est évalué sur des scénarios qui représentent ces potentielles évolution. Les scénarios représentent ce type d'évènements :

- Choc de crédit sur les obligations souveraines domestiques
- Choc action sur les actions conventionnelles
- Augmentation de la volatilité des actions
- Augmentation / diminution de la courbure de la courbe des taux risque-neutres
- Hausse / baisse du niveau de la courbe des taux risque-neutres
- Choc immobilier

## 2.3 Interaction actif-passif

L'ensemble des interactions entre l'actif et le passif se déroulent au sein du modèle de projection stochastique. En effet, Aviva applique la méthode de **Flexing** : le modèle de projection stochastique est alimenté par les flux de passif calculés au cours des projections déterministes d'une part, ensuite ces entrées sont impactées par le modèle stochastique qui prend en compte le comportement dynamique des assurés vis à vis des options et garanties. Ce comportement est lié à l'état de l'environnement économique et aux stratégies de participation aux bénéfiques et d'actions de gestion de la compagnie d'assurance, comme : la participation aux bénéfiques discrétionnaire, le taux servi ou encore la volatilité des rendements des actifs pour les contrats en unité de compte en compte et en euros.

En ce qui concerne la participation aux bénéfiques, pour chaque période et chaque trajectoire, un taux de PB cible dépendant notamment de l'environnement économique est défini, ensuite, en fonction de la production financière de la période, un taux de PB compris entre 0 et le taux cible est fixé.

En ce qui concerne les **rachats dynamiques**, pour chaque période et chaque trajectoire, le taux servi de la période précédente est comparé avec un taux de référence qui dépend de l'environnement économique. Si la différence entre le taux de référence et le taux servi dépasse un certain seuil, le modèle considère un déclenchement de rachats dynamiques.

L'impact du modèle stochastique est représenté par une revalorisation des flux de passif à chaque pas de temps, à partir d'un ratio de *flexing* appliqué à la table "DET\_CF", fournie en entrée.

## 2.4 Fuite économique du modèle

Une fuite de modèle correspond à la différence entre la valeur de marché initiale et la somme de tous les flux futurs actualisés et de la valeur de marché résiduelle. Les modèles ALM récents contiennent plusieurs milliers de lignes de code, il peut arriver qu'une fuite de valeur économique surviennent, voici quelques exemples de points pouvant conduire à une sur ou sous – estimation de la richesse projetée :

- Il faut s'assurer de la bonne prise en compte de la capitalisation de chacun des flux, en s'assurant du timing du versement.
- Incohérence stochastique entre les différents flux et la valeur de marché, due aux frottements liés à l'actualisation effective des flux futurs.
- Lors de l'application des taux de rachats / décès / arbitrages, un soin doit être porté à l'application des taux sur les assiettes.



### 3 Définition et calcul du capital réglementaire

#### 3.1 Définition

En considérant la forme du bilan présentée dans la figure 2, le SCR représente donc la différence entre le montant de fonds propres au temps 0 et le montant de fonds propres au temps 1, ce dernier obtenu en considérant un scénario ayant une probabilité d'occurrence de 0,5% en se plaçant sur un horizon de un an.

La contribution des affaires nouvelles<sup>10</sup> est à prendre en compte dans une approche rigoureuse de calcul du SCR. Toutefois, elles ne seront pas considérées dans ce mémoire, par souci de simplification.

Le SCR est défini comme étant la **Value-at-Risk (VaR)** au niveau de confiance 99.5% sur un horizon de 1 an. C'est à dire, le montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique<sup>11</sup> à horizon 1 an avec un niveau de précision de 99.5%.

Cette notion se traduit mathématiquement par :

$$SCR = FP_0 - FP_1(X_{99.5})$$

Avec

- $FP_0$  le montant de fonds propre au temps 0.
- $FP_1(X_{99.5})$  représente le percentile à 99.5% dans la distribution des fonds propres à l'année 1.

Pour calculer le montant de fonds propres pour l'année 1, un choc instantané est appliqué aux postes du bilan au temps 0 :

$$FP_1(X_{99.5}) = (FP_0 - \delta FP_0(X_{99.5})) * (1 + r_{rf})$$

$r_{rf}$  représente le taux sans risque et  $\delta FP_0(X_{99.5})$  représente la variation instantanée du montant de fonds propres au temps zéro, due au choc sur les postes du bilan.

Suivant cette méthodologie, deux approches peuvent être adoptées : soit le taux sans risque est considéré fixe pour tous les chocs soit, il est considéré variable en fonction du niveau de choc. Dans notre cas, il est supposé variable et est directement appliqué au sein du modèle ALM.

Dans le cadre de l'application de la directive Solvabilité 2, une prise en compte exhaustive des risques financiers et assurantiels et de leur évolution est nécessaire pour une estimation précise du SCR. Les assureurs ont deux options pour calculer ce capital réglementaire, soit par **Formule Standard**<sup>12</sup> soit par le biais d'un **modèle interne** qui est souvent jugé mieux adapté au profil de risque de la compagnie.

---

10. Elles concernent la modélisation de nouveaux contrats qui seront souscrits au cours de l'exercice considéré.

11. le cas où la valeur de marché de la part actif du bilan est inférieure au niveau de *Best Estimate* du passif

12. méthode de calcul standardisée du SCR

### 3.2 Formule standard

Définie par l'EIOPA, la formule standard offre une méthode de calcul standardisée du SCR en mesurant l'impact des risques quantifiables matériels auxquels la plupart des entreprises sont exposées. Elle repose sur une approche dans laquelle le risque global est divisé en plusieurs modules, eux-mêmes divisés en sous-modules.

Pour chacun des modules, le calcul de l'exigence en capital peut se faire de trois manières différentes : à partir d'une formule analytique, d'une méthode déterministe ou d'une estimation par simulations. Pour les deux dernières approches, la formule standard nécessite le recours à un modèle de projection des *cash-flows*. Pour cette raison, le calcul du SCR en formule standard nécessite l'utilisation d'un modèle ALM.

A partir de matrices de corrélation fournies par le régulateur et en adoptant une approche ascendante, intra-module, puis inter-modules, la compagnie d'assurance procède à des calculs de SCR modulaires.

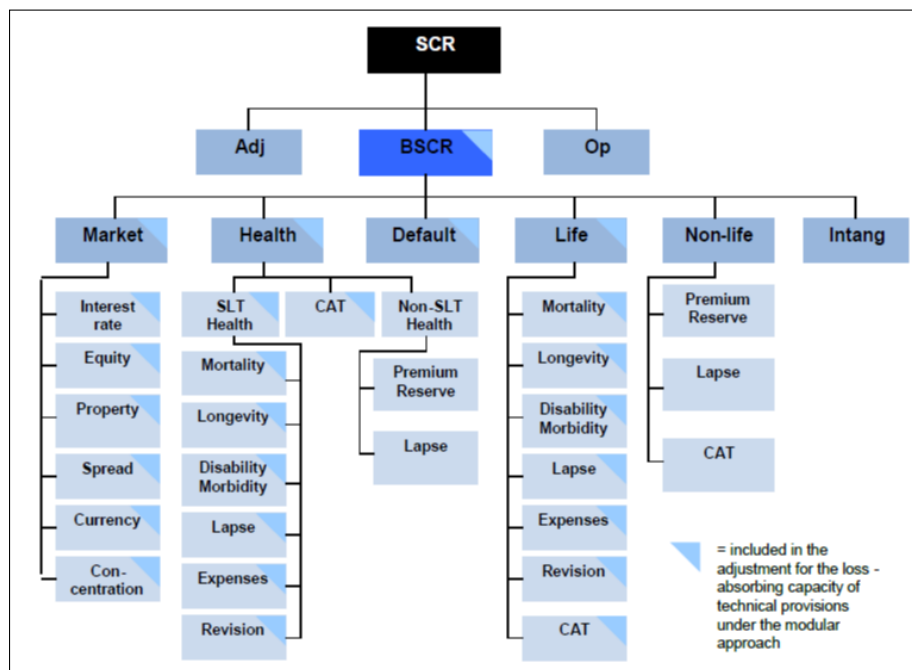


FIGURE 4 – Structure modulaire de la formule standard

- le terme *Adj* désigne l'ajustement calculé à partir du BSCR pour tenir compte de la capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques et les impôts différés,
- le terme *Op* correspond au SCR pour le risque opérationnel.

Ainsi, le SCR de base (BSCR) s'exprime comme ceci :

$$SCR_{base} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

où  $SCR_i$  représente le SCR du module de risque  $i$ , lui-même obtenu suivant la même formule en prenant les sous-modules correspondants.

Cette méthode a été révisée par EIOPA en tenant compte de l'expérience acquise depuis la mise en application de Solvabilité II.

### 3.3 Modèle Interne

Pouvant être intégral ou partiel, il s'agit d'une méthode développée au sein d'une compagnie d'assurance et approuvée par le régulateur, reflétant au mieux le profil de risque de l'entreprise, ceci tout en respectant les exigences de calcul du SCR.

Régie par la norme Solvabilité 2 et disposant d'un profil de risque propre qui rendrait la formule standard inadéquate, Aviva Vie a choisi l'utilisation du modèle interne pour calculer son SCR. Ce modèle lui permet en outre d'avoir une meilleure connaissance de ses risques et par la suite, de mieux gérer ceux-ci.

Dans le cadre du modèle interne, l'assureur projette ses flux financiers en prenant en compte tous les risques pouvant impacter son bilan. Le modèle ALM est donc utilisé pour modéliser les interactions actif/passif permettant d'obtenir ces flux.

#### Méthodologie

L'utilisation du modèle ALM se décompose en trois étapes :

1. Identification des différents risques auxquels le bilan est exposé (mortalité, longévité, taux d'intérêt, volatilité du cours des actions, etc..).
2. Production d'un nombre important d'états du bilan possibles, en prenant en compte l'évolution de ces risques sur un horizon de un an et en mesurant l'impact de chacun des scénarios évalués. Nb : Ces calculs sont effectués à partir du modèle ALM aussi appelé *heavy model*.
3. Dans la réalité, un scénario correspond à l'évolution simultanée d'un groupe de risques. En utilisant une approche de Monte Carlo, pour un seul scénario, 3000 simulations de modèle ALM sont lancées pour mesurer son impact.

Le recours à des simulations au sein du modèle ALM permet de prendre en compte les structures de dépendance complexes entre les différents risques impactant le résultat final de l'entreprise.

Les scénarios sont classés en fonction de leur impact sur le bilan, c'est à dire que sur 100 000 scénarios, le 100,000<sup>e</sup> est celui entraînant la plus grande perte. Le SCR est obtenu en calculant la moyenne des pertes sur un ensemble de scénarios autour du quantile 99.5% .

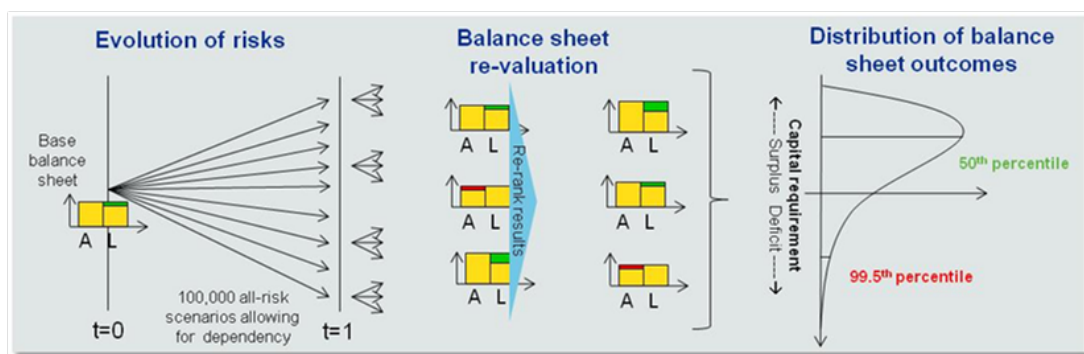


FIGURE 5 – Projection du bilan

Les pertes peuvent être évaluées à plusieurs échelles :

- L'échelle du groupe Aviva Plc
- L'échelle de l'entité légale
- L'échelle du portefeuille et ses sous-jacents<sup>13</sup> appelée "QRT" par abus de langage.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire à l'échelle QRT.

Pour calculer la distribution des fonds propres à horizon 1 an, la méthode la plus précise, qui est par ailleurs utilisée au sein des modèles ALM, est la méthode des Simulations dans les Simulations (SdS).

### 3.3.1 L'approche SDS

Calculer la distribution des fonds propres à horizon 1 an revient à prédire l'évolution des variables économiques entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , puis à évaluer le bilan économique conditionnellement à la réalisation de ces variables.

Pour avoir une quantification compatible avec la réalité, les projections des variables entre  $t = 0$  et  $t = 1$  doivent être faites en univers "monde-réel" ou univers historique. Ainsi, les scénarios économiques peuvent respecter la corrélation entre les différents risques et être calibrés sur les données historiques.

Ensuite, conditionnellement à l'information obtenue en  $t = 1$ , le bilan est projeté de manière *market consistent*. Pour chaque simulation primaire<sup>14</sup>, sont effectuées plusieurs simulations secondaires sous la probabilité risque-neutre. D'après le théorème de Radon-Nikodym, en considérant le changement de mesure  $\frac{dP}{dQ} = \delta_T$ , on a donc :

$$VEP_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{t \geq 2} \frac{\delta_t}{\delta_1} CF_t | \mathbb{F}_1^{MR}\right) \quad (1)$$

$$FP_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{t \geq 2} \frac{\delta_t}{\delta_1} R_t | \mathbb{F}_1^{MR}\right) \quad (2)$$

où  $\mathbb{F}_1^{MR}$  est l'information *monde-réel* de l'année 1,  $VEP_1$  représente la valeur économique estimée des passifs en fin de première période,  $R_t$  le résultat au temps  $t$ ,  $CF_t$  les flux financiers du passif au temps  $t$  et  $FP_1$  représente la valeur économique estimée des fonds propres en fin de première période.

Cette technique consiste à évaluer les postes du bilan en  $t = 1$  en considérant la moyenne actualisée des flux projetés par le modèle.

L'utilisation de la probabilité risque-neutre est justifiée par le fait que les options et garanties du passif sont *path-dependant*<sup>15</sup>, ainsi, on ne peut pas forcément obtenir de formules fermées pour évaluer ces postes de bilan.

---

13. Contrats Euro, UC, Prévoyance, Rentes

14. Simulation en "monde réel"

15. La valeur à l'échéance dépend des valeurs prises au cours du temps

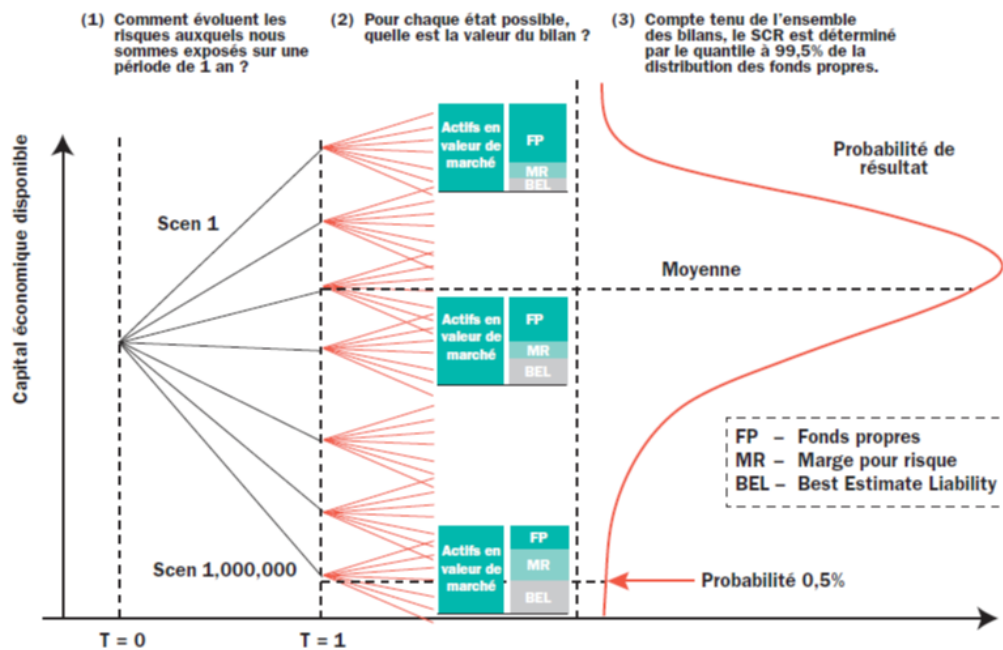


FIGURE 6 – Simulations dans les simulations

Bien que ce soit la méthode la plus précise, cette approche requiert un grand nombre de simulations et implique des temps de calcul conséquents. Il faut ainsi considérer des méthodes alternatives.

### 3.3.2 Accélérateur SdS

Le principe de la méthode est de localiser à travers les facteurs de risques, les situations les plus adverses en terme de solvabilité et ainsi réduire le nombre de scénarios primaires. En effet, les simulations primaires servent à avoir une distribution des fonds propres dans un an, mais le chiffre d'intérêt est le quantile 0.5% de cette distribution, il semble donc approprié de prioriser l'exécution des scénarios primaires les plus adverses.

La méthode repose sur plusieurs étapes :

1. Construction des facteurs de risques élémentaires (actions, taux, mortalité,..) véhiculant l'intensité du risque de chaque simulation primaire et détermination de la norme associée.
2. Définition d'une région d'exécution associée à un seuil fixé : lorsque les facteurs de risques appartiennent à la région d'exécution, les simulations primaires sont effectuées.
3. Itérations sur le seuil de la région de manière à intégrer à chaque étape un nombre supplémentaire de scénarios à exécuter.
4. L'algorithme s'arrête lorsque les N « pires valeurs » des fonds propres économiques sont stabilisées.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de localiser la région la "moins solvable", ce qui donne une idée sur la nature des risques de la compagnie et la manière de les gérer. Mais si le portefeuille est de composition compliquée, et que le nombre de facteurs de risques augmente, la détermination des scénarios adverses peut prendre plus de temps que prévu et l'intérêt de la méthode devient limité.

Aussi, du fait de cette méthode de réduction du temps de calcul, des approximations peuvent être faites et peuvent mener à rejeter certains scénarios primaires qui auraient pu s'avérer utiles pour la détermination du quantile à 0.5%. Ces approximations peuvent donc mener à une sous-estimation du SCR.

### 3.3.3 Portefeuilles répliquants

On désigne par « portefeuille répliquant » le portefeuille d'actifs qui reproduit les *cash-flows* du passif (ou des fonds propres) pour chaque simulation et chaque date future, de façon à ce que l'équation suivante soit vérifiée :

$$\forall t \geq 0 \quad V_t^{RP} = V_t^{BEL}$$

Où  $V_t^{RP}$  désigne la valeur en t du portefeuille répliquant et  $V_t^{BEL}$  désigne la somme des flux de passif actualisés.

Il s'agit donc d'un proxy<sup>16</sup> des passifs par des actifs financiers. Son utilité réside dans le fait que sa valeur future puisse être déterminée grâce à des formules fermées, et ainsi qu'elle soit estimable à l'aide d'actifs financiers "facilement" valorisables. Pour cela, un seul niveau de simulations est généré, le jeu de simulations en monde-réel. L'implémentation de la méthode se fait selon les étapes suivantes :

1. Choix des instruments financiers pertinents,
2. Exécution d'un certain nombre de scénarios pour reproduire les flux des passifs,
3. Résolution d'un programme d'optimisation pour l'allocation des poids des actifs dans le portefeuille proxy,
4. Réévaluation du portefeuille selon l'évaluation du passif.

---

16. Les modèles proxys sont des imitations de systèmes, processus ou autres modèles existants. Leur but est d'approximer les résultats de modèles plus complexes.

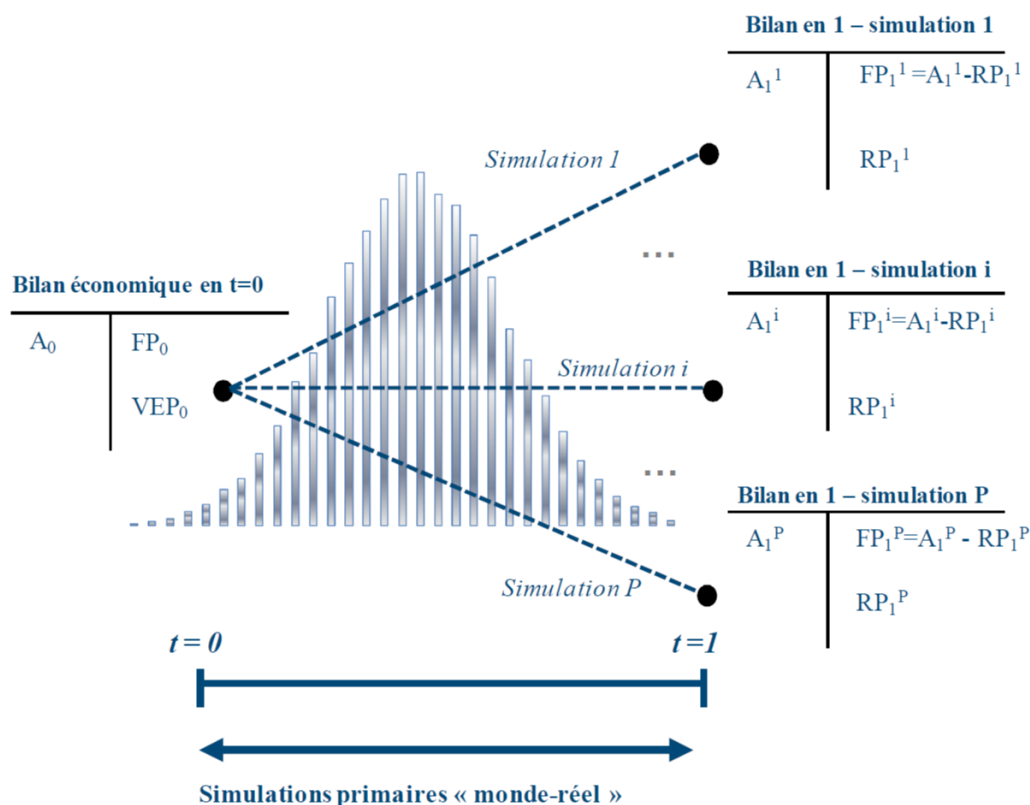


FIGURE 7 – Méthode de Replicating Portfolio

Le choix des actifs sous-jacents se fait généralement selon un avis d'expert et le calibrage du portefeuille selon une régression des moindres carrés, en minimisant l'écart entre la VAN<sup>17</sup> des passifs et celle du portefeuille d'actifs choisis. Le choix de la composition de ce portefeuille est une tâche difficile et le fait que certains risques du passif ne soient pas répliquables, par exemple le risque de mortalité, reste l'un de ses principaux inconvénients. Par construction, un portefeuille répliquant se concentre sur les risques de marché et de crédit.

### 3.3.4 LSMC (Least Square Monte Carlo)

Parmi les méthodes qui approchent la distribution des fonds propres à l'aide d'une forme paramétrique, se trouve le **Least Squares Monte Carlo**.

Le principe repose, comme son nom l'indique, sur la régression via la méthode des moindres carrés. L'algorithme constitue une approximation numérique d'un calcul de « Nested simulations » : pour chaque trajectoire primaire, on se contente de générer une unique trajectoire secondaire. Les fonds propres sont exprimés comme des fonctions des facteurs de risques.

Les fonctions de bases utilisées sont des polynômes ordinaires, mais il est préférable d'utiliser des bases orthogonales dans un souci de convergence, comme des polynômes de Laguerre ou d'Hermite.

17. Valeur actuelle nette

### 3.3.5 Curve Fitting

C'est une approche paramétrique permettant d'effectuer le calcul du capital réglementaire à l'aide d'une formule fermée. Cette dernière traduit l'impact des facteurs de risques sur les fonds propres de la compagnie grâce à des fonctions de perte.

Un nombre relativement faible de points en monde réel est évalué précisément grâce à un jeu complet de simulations secondaires, ensuite, une fonction paramétrique, la fonction de perte, est calibrée sur ces points. Dans l'hypothèse où elle est calibrée de manière suffisamment précise, le capital réglementaire est déterminé à la fin à partir de cette fonction de perte.

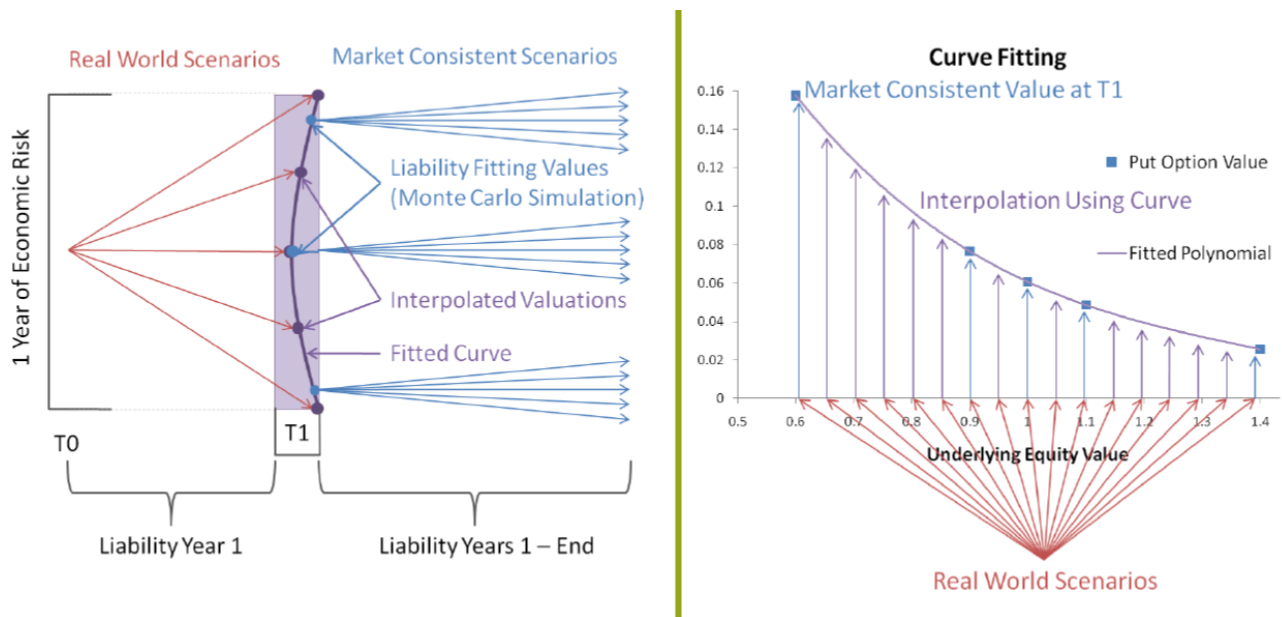


FIGURE 8 – Méthode de Curve Fitting

L'alternative choisie par Aviva est une méthodologie adaptée qui permet de faire une approximation du bilan à l'aide de modèles simplifiés visant à reproduire les résultats du *heavy model*. Ces modèles nécessitent beaucoup moins de ressources en temps et en puissance de machine que le modèle ALM pour obtenir des résultats à partir des chocs des risques. Le modèle interne utilise donc des fonctions de perte prenant en entrée des facteurs de risques et qui, en sortie, approximent les résultats du modèle ALM sur la base de pertes observées.



Deuxième partie

## **Mise en place d'une méthode d'optimisation du calcul de capital réglementaire**

## 4 Méthodologie actuelle

Les fonctions de perte considérées sont des polynômes dont les variables sont des facteurs de risques. Ce que nous appelons "perte" ici, c'est la différence brute "Passif-Actif" ou encore la variation des fonds propres, par simplification. Ainsi, elles permettent de calculer le montant de capital réglementaire dont aurait besoin la compagnie pour faire face à une certaine situation dont l'adversité est caractérisée par un certain niveau de risque.

Les fonctions de perte modélisées par Aviva permettent de calculer l'évolution de chacun des postes du bilan<sup>18</sup> pour chaque scénario, elles sont ensuite agrégées pour former une fonction de perte globale.

Les fonctions de perte sont calibrées à partir de :

- L'état du bilan au départ<sup>19</sup>
- Des états stressés du bilan associés à différents scénarios qui sont représentés par des vecteurs de facteurs de risques à stressés.

La forme de fonction de perte  $LF$  que l'on va considérer se présente comme ceci :

$$LF : \begin{cases} \Omega & \mapsto \mathbb{R} \\ (RF_1, RF_2, \dots, RF_p) & \mapsto F(RF_1, RF_2, \dots, RF_p) \end{cases}$$

L'univers  $\Omega$  est modélisé par la réalisation d'un vecteur de facteurs de risques  $RF = (RF_1, RF_2, \dots, RF_p) \in \mathbb{R}^p$ , ces facteurs de risques représentent en fait, l'évolution des risques, par rapport à leur état central. La fonction associée à chaque état de l'univers, l'évolution d'un poste du bilan par rapport à sa valeur initiale. Les évolutions de l'actif et du passif actif sont calculés séparément et sont ensuite agrégées pour obtenir la perte globale vis à vis du bilan central, ceci pour chaque scénario (s'agissant d'une perte, une évolution positive est donc une diminution). Au cours de ce mémoire, il sera toujours question de "perte", bien que parfois la quantité désignée soit un montant d'actif ou de passif.

La méthodologie consiste à construire une fonction proxy pour un exercice N, à partir de points du calibrage qui dépendent : de la distribution et de la corrélation des différents risques considérés, des observations réelles des postes du bilan données par le modèle ALM à partir de différentes simulations du vecteur  $RF(\cdot)$  et des fonctions de perte calibrées pour l'exercice N-1.

Le modèle créé va ensuite se servir de , pour déduire la distribution des pertes.

Trois types de fonction de perte sont considérés :

- Fonction de perte **individuelle** ou *singlewise/standalone* : les pertes sont dues aux variations d'un seul risque ;
- Fonction de perte à **interaction double** ou *pairwise* : les excédents de pertes sont dues aux variations de deux risques ;
- Fonction de perte à **interaction triple** ou *threewise* : les excédents de pertes sont dues aux variations de trois risques ;

---

18. actif d'une part et passif de l'autre

19. état "central" ou état à "t=0"

Lorsque tous les facteurs de risques sont nuls, la fonction de perte l'est aussi. Cela correspond à la position "centrale" :

$$LF(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Les facteurs de risques prennent leur valeur dans l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ , on a donc  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . En effet la réalisation d'un évènement relatif à un ou plusieurs facteurs de risques est caractérisée par une évolution de la valeur réelle du facteur de risque.

### Fonctions de perte individuelles

Elles correspondent à une restriction de la fonction de perte à un seul facteur de risque. Par exemple, pour le  $k^e$  facteur de risque, la fonction de perte individuelle donne :

$$LF : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow F(0, \dots, 0, x_{(k)}, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Ces fonctions permettent de calculer les pertes dites "standalone" c'est à dire les pertes relatives à un unique facteur de risque et par la même occasion, le capital économique requis pour faire face à ce seul risque.

Dans les situations d'interaction, une fonction de perte excédentaire<sup>20</sup> est calculée. Cette perte excédentaire correspond à la contribution de l'interaction des facteurs de risques concernés, en omettant la contribution des facteurs de risques individuellement, ainsi que celle des interactions d'ordre inférieur.

### Fonctions de perte excédentaire

Soit un ensemble E composé de n facteurs de risques et  $X = (x_1, \dots, x_p)$  un vecteur de p réels, la fonction de perte relative à l'interaction des facteurs  $x_i$  de cet ensemble se présente comme ceci :

$$LF^E : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, \dots, x_p) & \rightarrow F(0, \dots, 0, x_1, 0, \dots, 0, x_p, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Soit E un ensemble composé de p facteurs de risques, la fonction *Excess Loss (EL)* pour cet ensemble est définie par :

$$\begin{aligned} \text{Si } p = 1, EL^E &= LF^E \\ \text{Si } p > 1, \text{ on a la relation de récurrence :} \\ EL^E &= LF^E - \sum_{E' \in P(E)/E' \neq E} EL^{E'} \end{aligned}$$

En inversant la formule, on peut donc obtenir la relation suivante :

$$LF^E = \sum_{C \in P(E)} EL^C$$

ou encore :

$$LF^E = \sum_{k=1}^p \sum_{C \in P(E) \# C=k} EL^C$$

Cette dernière relation montre que la fonction de perte d'un ensemble de risques E peut-être exprimé comme la somme des différents niveaux d'interaction.

---

20. Excess Loss

Dans le cas d'un ensemble à deux facteurs de risques, on a donc la formule suivante :

$$EL(x_1, x_2) = LF(x_1, x_2) - LF(x_1) - LF(x_2) \quad (3)$$

Et dans le cas de trois facteurs de risques, on a :

$$EL(x_1, x_2, x_3) = LF(x_1, x_2, x_3) - EL(x_1, x_2) - EL(x_2, x_3) - EL(x_1, x_3) - EL(x_1) - EL(x_2) - EL(x_3)$$

Ce qui donne :

$$EL(x_1, x_2, x_3) = LF(x_1, x_2, x_3) - LF(x_1, x_2) - LF(x_1, x_3) - LF(x_2, x_3) + LF(x_1) + LF(x_2) + LF(x_3) \quad (4)$$

## 4.1 Introduction aux fonctions de perte

Les fonctions de perte sont définies pour chacune des entités de Aviva , cependant, le choix des points du calibrage est fait effectué en considérant l'activité totale de Aviva Vie. Ces points du calibrage sont donc identiques pour chacune des entités.

### 4.1.1 Notions utiles

Pour faciliter la compréhension des procédés qui vont suivre, certaines notions nécessitent d'être expliquées en amont.

#### Facteur de risque

C'est un facteur représentant l'évolution d'un risque donné auquel le portefeuille d'Aviva Vie est exposé :

- **ECONV** : Risque Action
- **EQVOL** : Risque Volatilité implicite action
- **P** : Risque Immobilier
- **FL** : Risque Niveau de courbe de taux
- **FS** : Risque Pente de courbe de taux
- **FT** : Risque Courbure de courbe de taux
- **FVOL** : Risque Volatilité implicite des taux
- **INF** : Risque Inflation
- **CCORP** : Risque de crédit (entreprise)
- **CSOV** : Risque de crédit (Etat)
- **MANN** : Risque de longévité
- **MASS** : Risque de mortalité
- **MPAN** : Risque de pandémie
- **LEXP** : Risque d'augmentation des rachats
- **LSUPP** : Risque de diminution des rachats
- **LMASS** : Risque de rachat massif
- **X** : Risque de frais

Ces risques sont brièvement présentés en annexe E. D'autres risques auraient pu être considérés pour cette étude comme le risque opérationnel, le risque de défaut de la réassurance ou encore le risque d'exposition à plusieurs devises. Ces risques n'ont soit, pas été significatifs pour l'estimation du SCR dans le passé, soit, ils sont comptabilisés *à posteriori* sous forme d'add-on<sup>21</sup> leur impact est donc négligé pour la suite de cette étude.

Pour fluidifier la rédaction, les termes "risque" et "facteur de risque" pourront être utilisés de manière conjointe, néanmoins, ce sont des choses à distinguer. Le facteur de risque est un indicateur d'évolution du risque sous-jacent qui suit une loi calibrée sur des données d'évolution empiriques relatives à ce risque. Pour le risque concernant l'inflation par exemple, le facteur de risque est la variation de l'indice des prix à la consommation, par rapport à sa valeur "centrale".

## Niveau de risque

Il y a plusieurs manières de définir le niveau de risque :

1. On peut tout d'abord simplement considérer l'intensité du choc qui désigne directement la valeur à laquelle le risque va être choqué, c'est à dire que pour une intensité de -5%, la valeur du facteur de risque diminue de 5% par rapport à la position centrale.
2. On peut ensuite considérer le percentile. En effet, en considérant la distribution d'un facteur de risque, dire que l'on considère ce facteur au percentile 99%, cela signifie qu'on estime la probabilité du facteur de risque en question de se trouver dans l'état considéré, à 1%.
3. On peut enfin considérer directement la probabilité pour le facteur de risque d'atteindre une certaine valeur : pour une probabilité de 0.05%, on note le niveau de risque "1 :200" ou encore "1in200". Cette notation est la plus explicite, en effet, pour un risque X, une perte au niveau 1 :4 représente une perte ayant une probabilité de se survenance égale à 1 fois sur un horizon de 4 ans.

Deux niveaux de risques clés sont désignés par les termes : *Ultimate* ou *Ult* et *Extreme* ou *Ext*, ils sont utilisés pour capter l'information dans les régions extrêmes des distributions. Le niveau *Ult*, respectivement *Ext*, désigne le niveau 1 :10000, respectivement 1 :1000.

La plupart des facteurs de risques sont calibrés de manière croissante vis à vis de la perte *standalone* qu'ils engendrent, ainsi, la partie adverse de ces facteurs de risques correspond à des valeurs d'intensité positives et en ce sens, la partie adverse de la queue de la distribution est désignée par des percentiles élevés (99.95%, 99.99%, ...). Cependant, certains facteurs de risques ont été calibrés de manière décroissante vis-à-vis de la perte qu'il engendrent, autrement dit, de manière croissante vis-à-vis de du gain qu'ils engendrent (c'est le cas pour ECONV, P, MANN et LSUPP). Ainsi, pour ces risques, l'adversité correspond à des valeurs d'intensité négatives et en ce sens, la partie adverse de la queue de la distribution est désignée par des percentiles faibles (0.05%, 0.001%...).

## Stress/choc

---

21. C'est un capital supplémentaire exigé par le superviseur dans des circonstances exceptionnelles (en cas de constatation d'une défaillance sur les aspects quantitatifs ou qualitatifs).

A partir de la distribution d'un facteur de risque et d'un niveau de risque donné, on peut donc définir la transformation à appliquer sur une quantité, pour obtenir sa valeur stressée. La transformation à appliquer est appelée un choc et elle dépend du facteur de risque considéré et de la distribution de celui-ci. Par exemple, en ce qui concerne le facteur de risque lié à l'immobilier, étant donné qu'il suit une distribution hyperbolique, la transformation appliquée à la valeur de marché initiale ou "centrale" concernant l'immobilier est :

$$\delta VM_{t=0^+}^{immo} = VM_{t=0}^{immo} * \exp(RF_{immo})$$

$RF_{immo}$  désigne le facteur de risque immobilier et  $VM$ , la valeur de marché. La valeur de marché "choquée" est donc :

$$VM_{t=0^+}^{immo} = VM_{t=0}^{immo} + \delta VM_{t=0^+}^{immo}$$

### Bénéfique/Adverse

Ce qu'on souhaite évaluer au cours de ce mémoire, ce sont des pertes. Ainsi, on s'intéresse principalement à l'aspect **adverse** de la distribution des facteurs de risques. Cependant, en considérant la distribution totale, certaines valeurs de facteur de risque sont bénéfiques au résultat du bilan comptable. Lorsqu'un niveau de stress est censé être "bénéfique" pour le bilan, on ajoute le suffixe "b" au niveau de choc. Par exemple, un risque ayant une probabilité de 0.05% de se produire en ayant un effet positif, c'est à dire en engrangeant une perte négative<sup>22</sup> au niveau du bilan, est désigné par un niveau de perte "1 :200b".

### Quadrant

Lorsqu'on considère les termes représentant l'interaction entre certains risques, pour un même groupe de risque, il y a plusieurs niveaux d'interaction possibles. Dans le cas d'une interaction entre deux facteurs de risques X et Y par exemple, chacun de ces facteurs peut être considéré à plusieurs niveaux. On dira que l'interaction est considérée au niveau h/k lorsque le facteur de risque X, respectivement Y, est considéré au niveau 1 :h, respectivement 1 :k, le terme croisé correspondant est donc  $X_{1:h}Y_{1:k}$ .

Comme il a été vu précédemment, pour un facteur de risque, on considère sa distribution sous un aspect "adverse" et sous un aspect "bénéfique". C'est la raison pour laquelle, pour la construction des fonctions de perte, on considère des quadrants pour les termes d'interaction. On voit donc clairement que pour modéliser l'interaction entre deux risques, 4 quadrants sont à considérer et dans le cas d'un groupe de trois risques, 8 quadrants sont à considérer.

Dans le cas d'interactions, on cherche donc à modéliser une fonction de perte par quadrant. Cependant il se peut que, pour un couple ou une triade de facteurs de risques, certains quadrants ne soient pas assez matériels pour être pris en compte, notamment car les pertes censées être modélisées par ce quadrant sont estimées négligeables.

---

22. un gain

					Quantile Y						
<b>Q2</b>					Ultimate	<b>Q1</b>					
					Extreme						
					1in200						
					1in50						
					1in10	1in50	1in200	Extreme	Ultimate	Quantile X	
Ultimateb	Extreme	1in200b	1in50b	1in10b							
<b>Q3</b>					1in10b	<b>Q4</b>					
					1in50b						
					1in200b						
					Extreme						
					Ultimateb						

FIGURE 9 – Quadrants *pairwise*

#### 4.1.2 Choix des points du calibrage

Pour des raisons évidentes, le choix des points du calibrage pour un exercice donné est effectué avant l'obtention de la fonction de perte globale pour ce même exercice. C'est pourquoi, le choix des points du calibrage est effectué en considérant une version "actualisée" des fonctions de perte de l'exercice précédent, afin de savoir quelles régions de la distribution des fonctions de perte *singlewise*, *pairwise* et *threewise* nécessitent une attention particulière. Les principes selon lesquels les points sont choisis sont présentés ci-dessous :

##### Principe 1 : Sélection de points comparables et significatifs

La conséquence de ce principe est que les points auxquels on s'intéresse sont des percentiles prédéfinis comme le percentile 99.5%<sup>23</sup> ou encore le percentile 98% pour construire les fonctions de perte. La perte associée au point 1 :200 correspond au capital réglementaire requis dans le cas des fonctions *singlewise*, c'est ce qui en fait un point particulièrement important. La comparaison entre risques est faite sur deux même percentiles, cela facilite la détection d'erreurs.

Lors de la prise en compte d'interactions, on s'intéresse aux combinaisons des points *singlewise* choisis précédemment.

##### Principe 2 : Sélection de points matériels

Ce principe est une conséquence de la limite opérationnelle au niveau du nombre de points du calibrage. Ainsi, on considère davantage de points du calibrage au niveau des zones considérées "matérielles".

Pour se faire, les risques sont classés par matérialité :

- La matérialité peut être définie par la perte calculée avec les fonctions de perte "actualisées" de l'exercice précédent à un niveau de stress pertinent (1 :200 par exemple).

23. C'est le percentile correspondant au SCR pour certains risques.

- La matérialité peut être déterminée par la probabilité d'occurrence du risque pour un niveau de risque important en terme d'intensité.
- La matérialité peut aussi être déterminée pour une région de percentile autour de laquelle il y aurait un changement de monotonie ou encore une zone sensible à l'extrapolation.
- Ce classement par matérialité est effectué pour les points *singlewise*, *pairwise* et *threewise* séparément.

Materialité	Pourcentage du SCR
High	>5%
Medium	1% - 5%
Low	<1% or <3m€ nominal

TABLE 1 – Matérialité définie en comparaison avec le SCR

### Principe 3 : Sélection de points autour de la zone du SCR

La conséquence de ce principe est que bien qu'on s'assure que la qualité du calibrage soit suffisante sur l'ensemble de la distribution pour la fonction globale, on cherche particulièrement à bonifier la qualité du calibrage au niveau de la région du SCR. Ce principe est une conséquence de la limite opérationnelle au niveau du nombre de points du calibrage. Ainsi, on considère davantage de points du calibrage au niveau des zones considérées "matérielles".

### Principe 4 : Recours aux jugements d'experts

Des points supplémentaires peuvent être ajoutés par jugement d'expert, dans le cas où le calibrage de certains risques aurait changé et qu'on anticiperait de nouveaux niveaux de risque matériels qui n'auraient pas été captés par les exercices précédents.

## 4.2 Calibrage de la fonction de perte

Pour les *standalone*, les fonctions calibrées sont de type splines cubiques. Les splines cubiques sont des fonctions polynomiales par morceaux, ici, elles sont construites à partir d'une interpolation polynomiale de degré 3 et d'une extrapolation linéaire. Ce choix est dû au fait que l'impact de l'extrapolation est très limité en raison des points de fitting choisis, l'extrapolation linéaire empêche donc tout changement inattendu de monotonie.

Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  les points du calibrage, correspondant aux états du monde pour un risque donné. La fonction *cubic splines* des pertes *standalone* s'écrit :

$$LF(x) : \begin{cases} ax & x \in ] - \infty, x_1] \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^3 C_{i,j} x^j \mathbf{1}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} & \text{if } x \in [x_1, x_n] \\ bx & \text{if } x \in [x_n, \infty[ \end{cases} \quad (5)$$



Les coefficients  $C_{ij}$  sont obtenus par régression linéaire, la méthode de régression linéaire étant présentée en annexe A.

Les splines cubiques présentent plusieurs avantages dont le fait que la courbe passe par tous les points du calibrage, on ne perd donc aucune information, de plus, le modèle octroie une certaine liberté quant à l'ajout de variables, notamment car il n'y a pas de changement imprévu de monotonie.

Par ailleurs, des conditions sont ajoutées à la fonction de perte pour éviter que les pertes (ou les gains) ne dépassent des niveaux irréalistes. Par exemple, la perte en actifs sur le stress lié aux actions ne peut dépasser la valeur de marché initiale des actions, car ici la perte en actifs est limitée à la constitution du portefeuille d'actions.

En ce qui concerne les **interactions** : une fonction est calibrée par quadrant, donc quatre fonctions calibrées au maximum dans le cas *pairwise* et huit dans le cas *threewise*. Le calibrage se fait par des polynômes en ayant recours à la régression linéaire classique. Le niveau maximal d'interaction retenu est le degré 3 car la qualité d'ajustement n'est pas significativement améliorée en considérant de plus grands degrés d'interaction.

Après calibrage des fonctions *singlewise* et des fonctions avec interaction (*pairwise* et *threewise*), les fonctions sont importées au sein d'un logiciel du calibrage interne afin de servir de données sources, pour obtenir la fonction de perte globale finale. Le processus est résumé en quelques étapes :

- **Préparation de données sources** : Cette étape consiste à le calibrage de chacune des fonctions de perte, à la récupération d'informations sur la distribution des facteurs de risques et des hypothèses de corrélation sous forme de matrice.
- **Génération de facteurs de risques** : A partir de la matrice de corrélation, d'un générateur de nombre aléatoire et de la distribution des facteurs de risques, un jeu de 100,000 scénarios de facteurs de risques ayant une structure de dépendance régie par une copule gaussienne, est généré.
- **Simulations** : A cette étape, on calcule une perte globale pour chacun des 100,000 scénarios, ceci en partant de l'ensemble des fonctions de perte précédemment calibrées. Les résultats des fonctions de perte sont agrégés au sein du modèle selon des règles qui dépendent des propriétés spécifiques à l'entité considérée.
- **Calcul du capital réglementaire** : Après avoir obtenu les montants de pertes pour chacun des 100,000 scénarios, les scénarios sont classés en fonction de la valeur de perte associée. Ainsi, Le SCR est obtenu en effectuant la moyenne des pertes sur un ensemble de 801 scénarios, comprenant le 99500<sup>e</sup> scénario et les 800 scénarios les plus proches de cette valeur.

## 4.3 Validation de la fonction de perte

### 4.3.1 Scénarios de test

Des points supplémentaires *singlewise*, *pairwise* et *threewise* sont sélectionnés, afin de tester la capacité d'interpolation et d'extrapolation des fonctions de perte calibrées. Par souci de ressources en terme de temps et de puissance de machine, ces points ne concernent que les points jugés "matériels" lors de l'exercice précédent mais qui n'ont pas servi à le calibrage. Les niveaux de risque considérés pour contrôler l'extrapolation sont les niveaux : 1 :200, Ext, 1 :10 qui n'ont pas été utilisés pour le calibrage. en ce qui concerne les *pairwise* et les

*threewise*. Des niveaux qui recouvrent davantage le coeur de la distribution des risques sont considérés pour contrôler l'interpolation.

Une analyse de la moyenne quadratique des erreurs ainsi qu'un test statistique  $R^2$  réalisés sur l'ensemble des points du calibrage permettent de justifier l'utilisation des fonctions de perte en contrôlant que l'erreur globale d'estimation ne dépasse pas un certain seuil défini par jugement d'expert.

#### 4.3.2 Scénarios de validation

Pour éviter une erreur de modèle ou une erreur d'estimation injustifiée, il convient d'évaluer l'adéquation des fonctions de perte obtenues. En pratique, cela signifie évaluer l'ajustement global en utilisant des scénarios dans lesquels tous les risques sont choqués en simultanément<sup>24</sup>. Ces scénarios permettent de capter la dynamique de l'interaction entre l'ensemble des risques les plus importants au sein du modèle ALM.

Les scénarios de validation se concentrent particulièrement sur les risques à forte matérialité et les niveaux d'interaction pertinents pour chacun de ces risques. Puisque l'enjeu majeur est l'estimation du SCR, on cherche principalement à tester les scénarios présents dans la région de calcul du SCR global, appelée *smoothing window*. C'est la zone de niveau de risque du SCR, c'est à dire que les scénarios correspondant sont les 801 scénarios dont les montants de perte sont les plus proches du quantile 99.5%.

Par la suite, étant donné que l'on cherche à vérifier la qualité d'ajustement de la fonction de perte sur la distribution totale, on sélectionne des scénarios additionnels qui couvrent le reste de la distribution de la fonction de perte.

Pour choisir les scénarios de validation, on ne retient que les risques dont la valeur du SCR en *standalone* correspond à plus de 5% de la valeur du SCR global<sup>25</sup>. On considère que ce sont les risques les plus à même d'influencer le montant du SCR global aujourd'hui. Les facteurs de risques considérés sont donc :

- **Econv** : 32,8% du SCR
- **P** : 18,3% du SCR
- **FL** : 51,5% du SCR
- **FS** : 8,9% du SCR
- **Inf** : 9,8% du SCR
- **CCorp** : 16,9% du SCR
- **CSov** : 27,7% du SCR
- **LExp** : 22,4% du SCR
- **LSupp** : 18,6% du SCR
- **X** : 15,4% du SCR

Puisqu'il peut y avoir des comportements différents pour chaque entité de Aviva, en ce qui concerne les pertes autour du SCR, le choix des scénarios de validation est effectué en considérant l'entité principale : Aviva Vie.

---

24. Ce sont des scénarios *multiwise*

25. Ces mesures sont effectués sur la base de l'exercice précédent

Après ajout des scénarios additionnels, on aboutit à une couverture de toute la distribution des niveaux de risque ( segmentée en intervalles) pour tous les facteurs de risques :

	<25%	.<35%	.<50%	.<70%	.<85%	.<92,5%	.<96,5%	.<98,75%	.<99,73%	.<100%	Total
EConv	1	2	3	3	3	4	2	8	10	1	37
P	4	2	3	7	6	3	4	2	5	1	37
FL	13	5	6	4	2	2	2	1	1	1	37
FS	9	1	7	8	5	3	1	1	1	1	37
Inf	5	1	2	1	8	3	7	5	3	2	37
CCorp	1	3	4	2	2	7	4	8	5	1	37
CSov	5	2	2	2	3	4	4	10	4	1	37
LExp	4	1	3	6	12	3	3	3	1	1	37
LSupp	7	5	6	6	7	2	1	1	1	1	37
X	3	2	4	3	6	7	7	3	1	1	37

On remarque donc que les 37 scénarios recouvrent bien toute la distribution et ceci, pour chacun des facteurs de risques. Les niveaux de risque dans ce tableau sont exprimés en percentile.

Pour tester la qualité d'ajustement de la fonction de perte, on compare la valeur de la perte donnée par le modèle ALM à partir des postes du bilan stressés, à la valeur renvoyée par la fonction de perte.

Les mesures de cette qualité d'ajustement sont :

– **Erreur résiduelle absolue (AE) :**

$$AE = |Loss_{fitted} - Loss_{observed}|$$

– **Moyenne quadratique (RMSE) :**

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(Loss_{obs,i} - Loss_{fitted,i})^2}{n}}$$

Lorsque les test rejettent certains scénarios, il arrive qu'on ait à revoir le choix de points du calibrage de la fonction afin d'améliorer la fiabilité des *proxys*.

#### 4.4 Limites à l'utilisation des fonctions de perte

La justification théorique derrière ces fonctions est donnée par le théorème de Stone-Weierstrass :

"Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné peut-être approximée sur cet intervalle par un polynôme, ceci pour tout degré de précision".

Cela veut dire qu'il devrait toujours être possible de trouver une formule pour approximer le comportement des actifs et/ou des passifs avec suffisamment de précision. Cependant, le polynôme requis pour atteindre une précision suffisante peut-être d'ordre infini, ceci représente un obstacle au vu des ressources limités et de la capacité informatique.

Certains aspects du processus mettent en exergue des contraintes :

- **Dépendance des étapes** : Le processus de calcul de fonction perte chez Aviva est découpé en plusieurs étapes interdépendantes qui ne peuvent donc pas abordées simultanément.
- **Dépendance des exercices** : Il y a une dépendance d'un exercice à l'autre dans le choix des points qui est fait pour l'exercice N, à partir des fonctions de perte de l'exercice N-1. Ceci peut s'avérer peu pertinent au vu de l'évolution du portefeuille et des conditions de marché entre ces deux exercices.
- **Limite d'observations** : Le but même de l'utilisation de ces fonctions de perte est de limiter le besoin de générer des sorties du modèle ALM car cela est coûteux en temps. Cependant, en fonction du contexte économique, d'une année sur l'autre, davantage de points d'observation pourraient être nécessaires pour s'assurer de capter l'impact de certaines interactions complexes.
- **Jugements d'expert** : Au sein du processus de choix des points du calibrage, certaines étapes font appel au jugement de l'utilisateur et à son anticipation de l'évolution de l'impact de certains risques, il y a donc un aspect subjectif dans le choix des points.
- **Erreurs opérationnelles** : Enfin, des erreurs opérationnelles sont susceptibles de s'insérer au sein des nombreuses étapes du processus, ce qui accroît considérablement le temps total du processus total.

Afin de contourner ces différentes limites, des méthodes alternatives permettant d'automatiser le calcul de fonction de perte globale tout en s'assurant de la fiabilité des résultats seront étudiées par la suite. Elle seront directement basées sur la prise en compte de la co-occurrence des risques dans chacun des scénarios.

## 5 Construction de la base de données

Afin de mettre en place la nouvelle méthode, la prise en compte des données du calibrage est révisée. Il s'agira à présent de s'intéresser à l'information fournie par un vecteur de 17 facteurs de risques. Tout d'abord, une base d'apprentissage et une base de test seront construites, puis, les modèles seront calibrés sur la base d'apprentissage et testés sur la base de test pour vérifier leur robustesse.

Chaque base est composée de jeux de scénarios qui associent chacun, une perte<sup>26</sup> à un vecteur de 17 facteurs de risques qui sont présentés dans la partie 4.1.1.

### 5.1 Choix des scénarios *multiwise*

Puisque l'on souhaite construire un modèle prédictif, l'idée tout d'abord est de sélectionner deux ensembles de scénarios : une base d'apprentissage et une base de test, afin que le modèle retire un maximum d'information de la base d'apprentissage et qu'il puisse être testé de manière exhaustive et pertinente sur la base de test. On souhaite donc construire un modèle fiable capable de prédire la perte engendrée par un scénario quelconque, en ayant une exigence supplémentaire en terme de précision, pour les pertes estimées avoisinant le montant du SCR.

Deux contraintes importantes se présentent à nous lors du choix de ces scénarios :

- Premièrement, la contrainte majeure qui se présente concerne le nombre maximal de scénarios qui pourront être évalués par le modèle ALM, ce sont les points d'observation. En effet, comme il a été expliqué précédemment, du fait du manque de temps et de capacité de machines, nous avons recours au *curve fitting* parce que nous ne pouvons lancer le modèle ALM que sur un nombre restreint de scénarios : dans le cadre de cette étude, ce nombre est fixé à 1340 scénarios au total.
- Aussi, le choix des scénarios doit forcément reposer sur l'historique le plus récent que l'on possède en ce qui concerne l'influence des différents niveaux de chaque risque sur les postes du bilan. Étant donné le nombre limité de scénarios possibles, il est crucial de choisir des scénarios clés qui permettront de capter les informations essentielles concernant la distribution de la perte globale en fonction de l'ensemble des risques. Afin de s'inspirer de l'expérience du portefeuille de Aviva pour choisir ces scénarios, nous nous intéressons à un ensemble de 100,000 scénarios précédemment évalués par Aviva Vie, à partir des fonctions de perte des exercices précédents.

Parmi les 1340 scénarios considérés, on choisit de répartir les proportions de nos différentes bases comme ceci : la base d'apprentissage<sup>27</sup> constituera 80% de la taille totale des données et ainsi la base de test globale constituera 20% du volume des données.

Les scénarios de test permettront de mesurer la robustesse des différents modèles et de les comparer entre eux.

---

26. Passif - Actif

27. Au sein de cette base, un scénario représente le scénario "central" : Il correspond à l'état du bilan au départ, avant prise en compte de l'évolution des facteurs de risques.

### 5.1.1 Ajustement de la base d'étude

Après étude de la distribution des différents risques en fonction de la perte, on remarque qu'il y a un comportement très différent entre la partie adverse et la partie "bénéfique" de la distribution du facteur de risque  $FL$ . Cela veut dire que le comportement de la perte est très différent lorsqu'on considère des valeurs positives de facteur de risque et des valeurs négatives. Afin que cela ne perturbe pas l'estimation des paramètres du calibrage pour ce facteur de risque, on décide de créer un facteur de risque supplémentaire. On sépare le risque  $FL$  en deux :

$$FL \rightarrow FLU/FLD$$

Le "U" signifie "Up" et désigne  $[RF_{FL}]_+$ , c'est donc la partie adverse. Le "D" signifie "Down" et désigne  $[RF_{FL}]_-$ , c'est donc la partie "bénéfique".

Le nombre total de facteurs de risques passe donc de 17 à 18.

### 5.1.2 Bases d'apprentissage et de test

L'idée ici est de générer 1029 scénarios qui rendent compte de l'impact de l'interaction entre les risques de manière exhaustive et ceci particulièrement au niveau de la queue de la distribution de la fonction de perte. Les scénarios doivent donc tenir compte de la loi de distribution intrinsèque à chaque risque, de la corrélation existante entre les différents risques et de l'aspect aléatoire de l'environnement économique. La base d'apprentissage étant sélectionnée par échantillonnage d'un jeu de 100,000 scénarios précédemment évalués, il est important d'expliquer comment ont été sélectionnés ces scénarios au préalable.

#### 1) Simulation de 100,000 scénarios corrélés

Le principe est le suivant : à partir d'un groupe d'indices de risques<sup>28</sup> et de la corrélation observée entre ces indices, 100,000 scénarios corrélés sont générés. Chaque facteur de risque suit une loi calibrée sur les valeurs empiriques des indices de risques qui lui sont associés. Notons  $p$  le nombre d'indices de risques pour la suite. Chaque scénario représente une réalisation de l'ensemble des 18 facteurs de risques.

#### Distributions marginales des facteurs de risques

La première étape consiste à considérer des distributions compatibles avec les données d'évolution de chaque indice de risque sur un horizon annuel. Plusieurs distributions sont calibrées en utilisant deux méthodes :

- **La méthode des moments** : Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques et leur contrepartie empirique.
- **L'estimation de maximum de vraisemblance** : C'est une estimation statistique utilisée pour inférer les paramètres de la loi de probabilité d'un échantillon donné en recherchant les valeurs des paramètres maximisant la fonction de vraisemblance.

Pour pouvoir valider ces lois choisies, les tests de validation de ces distributions calibrées sont effectués sur des échantillons n'ayant pas servi à le calibrage.

---

28. Ce sont les indicateurs réels permettant d'évaluer l'évolution des risques : indicateur du prix à la consommation qui permet de modéliser l'inflation

Le choix des distributions de chacun des facteurs de risques est effectué dans une logique de parcimonie, c'est à dire qu'on cherche à obtenir une distribution suffisamment ajustée aux données de l'indice de risque mais également, la plus "économique" possible en nombre de paramètres à estimer. Les lois candidates sont nombreuses : Normale, Weibull, T-Student, Log-Normale, Uniforme, Empirique, Gumbel, Hyperbolique,...

Les distributions retenues sont les suivantes :

Facteur de risque	Distribution	$\alpha$	$\beta$	$\delta$
P	Hyperbolique	58,647054	-43,305556	0,135885
FVOL	Hyperbolique	0,074874	0,046004	167,548911
INF	Hyperbolique	0,430407	0,049757	52,182095
Facteur de risque	Distribution	Moyenne	Volatilité	
MPAN	Normal	0	0,388224483	
X	Normal	0	0,388224483	
LMASS	Normal	0	0,388224483	
Facteur de risque	Distribution	Degrés de liberté	Paramètre de position	Paramètre d'échelle
CCORP	T-Student généralisée	3	-0,024855342	0,171206219
CSOV	T-Student généralisée	3	0,043247651	0,171206219
FLU	T-Student généralisée	8,974014946	0	0,307482394
FLD	T-Student généralisée	44,38781279	0	0,371578856
FS	T-Student généralisée	21,40434963	0	0,353843351
FT	T-Student généralisée	4,308955686	0	0,22798316
Facteur de risque	Distribution	mu	$\beta$	Paramètre de position
LEXP	Gumbel	-0,149230575	0,213852894	0,070850727
LSUPP	Gumbel	-0,149230575	0,213852894	0,070850727
Facteur de risque	Distribution	Paramètre de forme	Paramètre d'échelle	
MASS	Fischer	1807,22	2125,79	
Facteur de risque	Distribution	Paramètre de forme	Paramètre d'échelle	
MANN	Weibull	5,624	0,03066	
Facteur de risque	Distribution			
ECONV	Distribution empirique			
EQVOL	Distribution empirique			

FIGURE 10 – Distributions marginales des facteurs de risques.

## Structure de dépendance

La corrélation observée entre les différents indices de risques est synthétisée par une matrice de corrélation A. L'idée est de modéliser la structure de dépendance entre les indices de risques par une copule gaussienne. Les justifications derrière l'utilisation de cette copule sont qu'elle est relativement simple d'application et qu'elle est cohérente avec la mesure de dépendance par coefficient de corrélation linéaire.

La distribution C de la copule gaussienne en dimension p vérifie l'égalité suivante :

$$\forall (U_1, \dots, U_p) \in [0, 1]^p, C(U_1, \dots, U_p) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(U_1), \Phi^{-1}(U_2), \dots, \Phi^{-1}(U_p))$$

$\Phi_{\Sigma}$  représente la fonction de répartition de la loi normale multivariée  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ .  
 $\Sigma$  représente la matrice de variance-covariance sous-jacente, c'est également la matrice de corrélation.  
 $\Phi$  représente la fonction de répartition de la loi normale centré réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Afin de modéliser la structure de dépendance par une copule gaussienne, il faut que la matrice de corrélation A soit semi-définie positive (SDP). Cependant, ce n'est pas le cas en général et on cherche donc à ajuster la matrice A afin d'obtenir une matrice semi-définie positive B qui est la "plus proche" de la matrice A.

### Matrice de corrélation semi-définie positive

La méthode utilisée pour construire la matrice B est une méthode de projection sur des ensembles convexes<sup>29</sup> pour sa simplicité d'implémentation, le lecteur peut se référer à [28] pour en apprendre davantage sur la méthode. Comme son nom l'indique, le but de cet algorithme est de trouver l'intersection entre deux ensembles convexes fermés. Cet algorithme permet ainsi de trouver la matrice B qui est l'intersection entre la matrice A et  $M_p^+$  qui est l'ensemble des matrices semi-définies positives en dimension p. Cette matrice nous permet donc de générer le groupe de scénarios corrélés.

### Simulation de scénarios corrélés

Afin, de représenter la structure de dépendance par copule gaussienne ainsi que le caractère aléatoire de l'environnement économique, les étapes sont les suivantes :

- Génération de 100,000 réalisations de p variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi  $\mathcal{N}(0,1)$ .
- Application d'une décomposition spectrale à la matrice B afin d'obtenir la matrice C, telle que :

$$B = C^T C$$

- Appliquer à chaque scénario  $V_i$ , la transformation :

$$V_i^* = V_i * C$$

Où  $V_i$  est un vecteur ligne.

Ainsi, est obtenu un ensemble de scénarios corrélés  $S = \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ \vdots \\ V_n^* \end{pmatrix}$ , avec  $n=100,000$ .

---

29. Projections on convex sets (POCS)



## Ajustement des scénarios

Après obtention de S, les valeurs de chaque facteur de risque sont ajustées dans chacun des scénarios comme ceci :

Notons  $V_{i,j}$ , la valeur du  $j^e$  facteur de risque au sein du  $i^e$  scénario.

Pour chaque facteur de risque  $j$ , les  $V_{i,j}$  sont classés dans l'ordre croissant.

Considérons que  $V_{i,j}$  soit la  $k^e$  plus grande valeur parmi l'ensemble des  $(V_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, 1 < i < 10^5}$ .

On a alors que  $V_{i,j}$  est la valeur du  $k^e$  plus petit percentile<sup>30</sup> de la loi  $N(0,1)$ .

Cet ajustement est fait pour permettre au SCR *standalone* de chaque risque, de converger vers le percentile 99.5%, en minimisant l'erreur d'échantillonnage, de plus, cela aide à la convergence du SCR diversifié par risque. Bien que cet ajustement modifie la corrélation établie entre les risques, une étude de l'impact de l'ajustement a permis de démontrer qu'il reste moindre.

## Calcul des facteurs de risques

Enfin, les scénarios d'indices de risques sont transformés en scénarios de facteurs de risques à partir de la fonction de répartition de chaque distribution marginale sélectionnée précédemment. Pour la réalisation<sup>31</sup> d'un indice de risque  $i$  donné, l'opération de transformation se fait en appliquant l'inverse de la fonction de répartition de la loi marginale du risque  $i$ , à ce quantile.

## 2) Tirage de la base d'apprentissage

La perte associée à chacun de ces scénarios est ensuite calculée à partir de la fonction de perte globale<sup>32</sup> calculée pour l'exercice précédent et "mise à jour" pour prendre en compte le changement de l'environnement économique. Ces scénarios sont ensuite classés dans l'ordre croissant en fonction de la perte qu'ils engendrent et ainsi un percentile global leur est attribué : par exemple, le scénario engendrant la perte correspondant au percentile 99.5% est le 99,500<sup>e</sup>.

Ces scénarios représentent donc un jeu de données exhaustif des évolutions envisageables des risques en fonction du niveau de choc. On décide donc de tirer les 1029 scénarios qui serviront de base d'apprentissage, au sein de ces 100,000 scénarios.

## Méthodologie

On choisit de développer une méthode d'échantillonnage qui repose en grande partie sur des jugements d'expert : le choix des scénarios va reposer sur les impacts historiques des risques sur le bilan.

---

30. sur une base de 100,000 percentiles

31. valeur en quantile

32. agrégation des fonctions *singlewise*, *pairwise* et *threewise* présentées dans la **Partie I**

Le fonctionnement de l'algorithme est le suivant :

- L'ensemble des percentiles est décomposé en 11 intervalles non proportionnels : ces intervalles sont des zones clés de la distribution *singlewise* des différents risques considérés. Les intervalles ne sont pas proportionnels car, pour les régions de la distribution très matérielles, les intervalles sont d'amplitude réduite afin de capter les informations dans ces régions de manière très précise.
- Le principe est de sélectionner, pour chaque facteur de risque, des pourcentages qui représentent la proportion souhaitée de scénarios passant par un intervalle donné. Par exemple, si pour le risque *Inf*, le pourcentage associé à l'intervalle [70%, 80%] est 9%, cela signifie que l'on souhaite que le facteur de risque *Inf* soit à un niveau de percentile compris entre 70% et 80% dans environ 9% des scénarios de la base d'apprentissage.
- Il se peut que l'algorithme ne parvienne toujours pas à trouver un jeu scénario satisfaisant les contraintes précédemment établies. Deux cas sont distingués :
  - S'il y a plus de 10 scénarios ne respectant pas totalement les contraintes, dans ce cas, l'algorithme est relancé après avoir réajusté les contraintes de départ de façon à les rendre davantage "réalistes".
  - Sinon un ajustement est apporté à chacun des scénarios ne respectant pas les contraintes prédéfinis afin que l'ensemble final respecte les contraintes de répartitions.

Le processus est illustré ci-dessous :

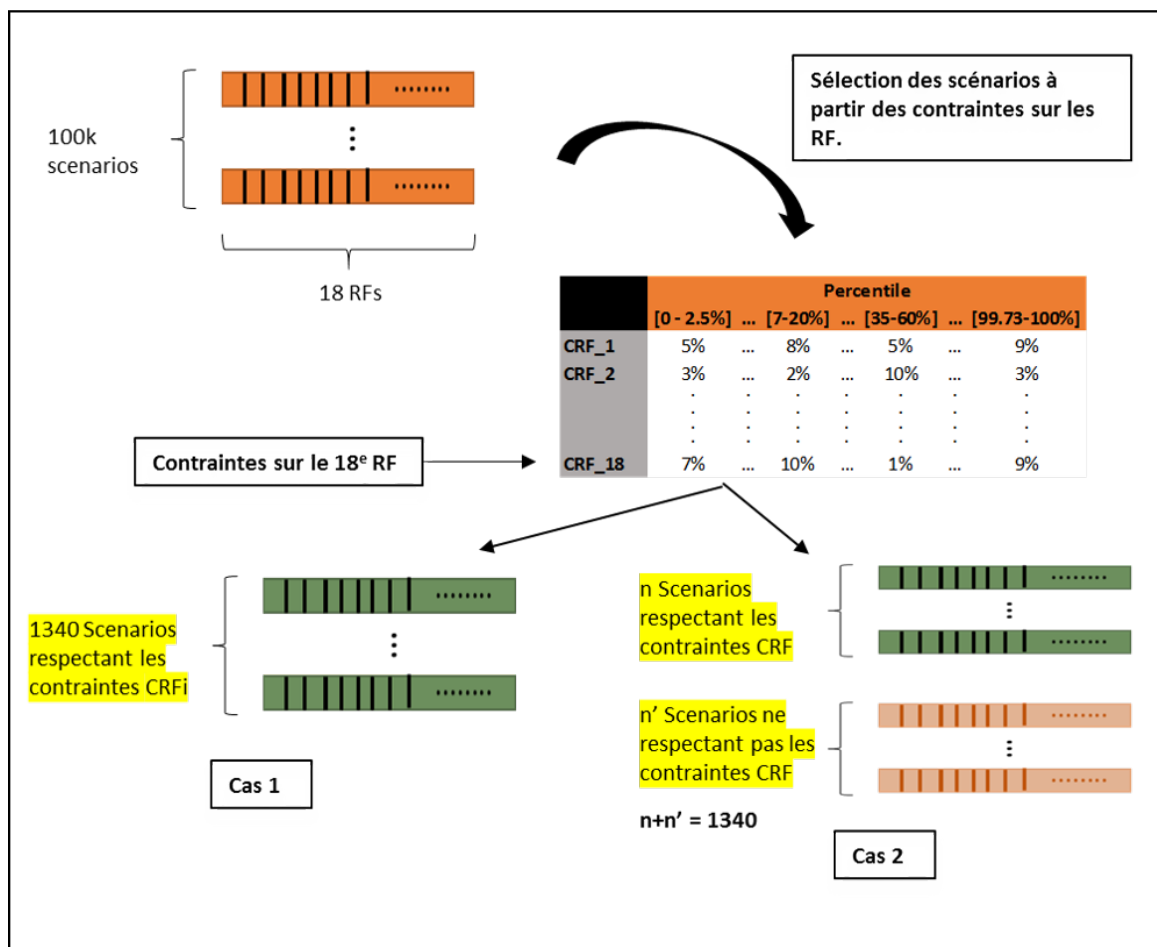


FIGURE 11 – Processus de tirage de la base d'apprentissage.

Pour les risques considérés comme étant les plus matériels, on s'intéresse davantage à la queue de leur distribution, ces risques sont : **Econv**, **P**, **Ccorp**, **Csov**, **FL**, **LExp**, **LMass**, et **X**. Pour les autres risques, on cherche à obtenir une répartition plus uniforme sur l'ensemble de la distribution. Etant donné que les fonctions de perte n'interviennent pas que dans le calcul du SCR mais également au sein de processus de mesure d'appétit au risque ou de test de scénarios quelconques, il est nécessaire de ne pas se focaliser exclusivement sur la queue de la distribution. Nous présentons la répartition des facteurs de risques au niveau de la queue de la distribution de chacun des risques, au sein de la base d'apprentissage :

	<b>[85%;92,5%]</b>	<b>[92,5;96,5%]</b>	<b>[96,5%;98,75%]</b>	<b>[98,75%;99,73%]</b>	<b>[99,73%;100%]</b>	<b>TOTAL</b>
<b>Econv</b>	8,88%	7,69%	2,99%	5,67%	2,39%	<b>27,61%</b>
<b>P</b>	9,19%	7,54%	4,26%	5,75%	2,54%	<b>29,28%</b>
<b>Ccorp</b>	8,81%	7,91%	5,67%	6,79%	2,24%	<b>31,42%</b>
<b>Csov</b>	9,04%	7,62%	3,81%	6,88%	2,39%	<b>29,75%</b>
<b>FLU</b>	10,52%	7,16%	3,43%	6,34%	2,24%	<b>29,70%</b>
<b>FLD</b>	10,52%	7,16%	3,43%	6,34%	2,24%	<b>29,70%</b>
<b>FS</b>	7,46%	3,73%	1,87%	1,19%	0,45%	<b>14,70%</b>
<b>FT</b>	7,54%	2,84%	2,39%	1,12%	0,30%	<b>14,18%</b>
<b>Eqvol</b>	7,76%	2,31%	3,81%	2,76%	1,19%	<b>17,84%</b>
<b>Fvol</b>	7,16%	3,43%	2,84%	2,01%	1,49%	<b>16,94%</b>
<b>Infl</b>	6,72%	2,99%	2,46%	1,27%	0,82%	<b>14,25%</b>
<b>Mann</b>	7,54%	3,73%	2,31%	0,75%	0,45%	<b>14,78%</b>
<b>Mass</b>	7,24%	4,33%	2,46%	0,90%	0,15%	<b>15,07%</b>
<b>Mpan</b>	7,54%	3,81%	2,16%	1,04%	0,22%	<b>14,78%</b>
<b>X</b>	8,66%	8,06%	3,66%	6,72%	2,01%	<b>29,10%</b>
<b>LExp</b>	9,18%	6,94%	4,18%	6,12%	2,31%	<b>28,73%</b>
<b>LSupp</b>	7,31%	3,96%	1,79%	1,57%	0,52%	<b>15,15%</b>
<b>LMass</b>	9,55%	6,94%	3,43%	6,04%	2,54%	<b>28,51%</b>

TABLE 2 – Répartition des scénarios au niveau de la queue de la distribution

On remarque donc bien ici que la proportion des observations, au niveau de la queue de distribution des risques les plus matériels est supérieure à la proportion des observations au niveau la queue de la distribution des autres risques.

### 3) Tirage de la base de test

#### Scénarios de test

Parmi les scénarios de test se trouvent :

- Des scénarios *singlewise* au niveau 1 :200 et 1 :200b pour chaque risque.
- Des scénarios *pairwise* et *threewise* qui représentent les interactions les plus matérielles pour l'exercice précédent. Ces scénarios ayant été déterminés en utilisant la méthodologie actuelle de calibrage des fonctions de perte.
- Ces scénarios *multiwise* permettant de tester l'ensemble de la distribution des différents facteurs de risques.

#### Scénarios de validation

La méthodologie choisie pour sélectionner ces scénarios est la même que la méthodologie présentée dans la partie 4.3.2 en prenant en compte l'ensemble des 18 facteurs de risques et plus seulement les risques les plus matériels. Ces scénarios représentent des scénarios de la *smoothing window* non présents dans la base d'apprentissage.

## 5.2 Ajustement des données

### Corrélation

La corrélation entre les risques est mesurée par la matrice de corrélation qui a servi d'hypothèse pour générer les 100,000 scénarios *multiwises*. Les 18 facteurs de risques ont ainsi été sélectionnés car ils ont un impact non négligeable sur l'état du bilan. La matrice de corrélation est présentée ci-dessous :

	EConv	EqVol	P	FL	FS	FT	FVol	Inf	Ccorp	CSov	MAnn	MAss	MPan	LExp	LSupp	LMass	X
EConv	1.00	-0.80	0.60	0.00	0.00	0.00	-0.50	0.10	-0.70	-0.45	0.00	0.00	0.00	-0.30	-0.28	0.00	-0.21
EqVol		1.00	-0.40	0.00	0.00	0.00	0.40	-0.10	0.60	0.40	0.00	0.00	0.00	0.43	0.23	0.00	0.03
P			1.00	0.00	0.00	0.00	-0.45	0.20	-0.50	-0.30	0.00	0.00	0.00	0.05	0.03	0.00	0.01
FL				1.00	0.00	0.00	-0.30	0.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.25	-0.24	0.00	-0.01
FS					1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
FT						1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
FVol							1.00	-0.30	0.50	0.50	0.00	0.00	0.00	0.25	0.21	0.00	0.01
Inf								1.00	-0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.06	0.00	0.02
Ccorp									1.00	0.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	-0.16	-0.01
CSov										1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	-0.01
MAnn											1.00	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MAss												1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
MPan													1.00	0.00	-0.02	0.00	0.00
LExp														1.00	0.03	0.00	0.30
LSupp															1.00	0.00	0.28
LMass																1.00	0.00
X																	1.00

FIGURE 12 – Matrice de corrélation

A partir de cette matrice, la décision est d'analyser les impacts des risques ayant une corrélation supérieure au seuil 60%. Les couples de risque concernés sont donc : **EConv/Eqvol**, **EConv/P**, **EConv/Ccorp**, **FL/Inf**. Il existe une corrélation élevée entre les facteurs de risques **MAnn** et **MAss**, cependant, on sait d'ores et déjà que leurs impacts sur la perte finale sont pertinents à modéliser. En effet, **MAss** et **MAnn** sont logiquement tous deux indexés par le taux de mortalité (**MAnn** étant calibré de manière décroissante avec le niveau de perte). Cependant, dans ce cas, nous conservons les deux facteurs de risque au sein de l'étude, car ils ne sont pas appliqués sur les mêmes produits. **MAss** est appliqué sur les produits étant exposés à une hausse de la mortalité, ce qui concerne tous les produits à l'exception des rentes. **MAnn** est à l'inverse appliqué sur les produits exposés à une hausse de la longévité, ces produits étant les rentes.

L'analyse des impacts par couple de risque est effectuée à partir des fonctions de perte *standalone* au niveau l'entité Aviva Vie, mentionnées dans la partie 4 :

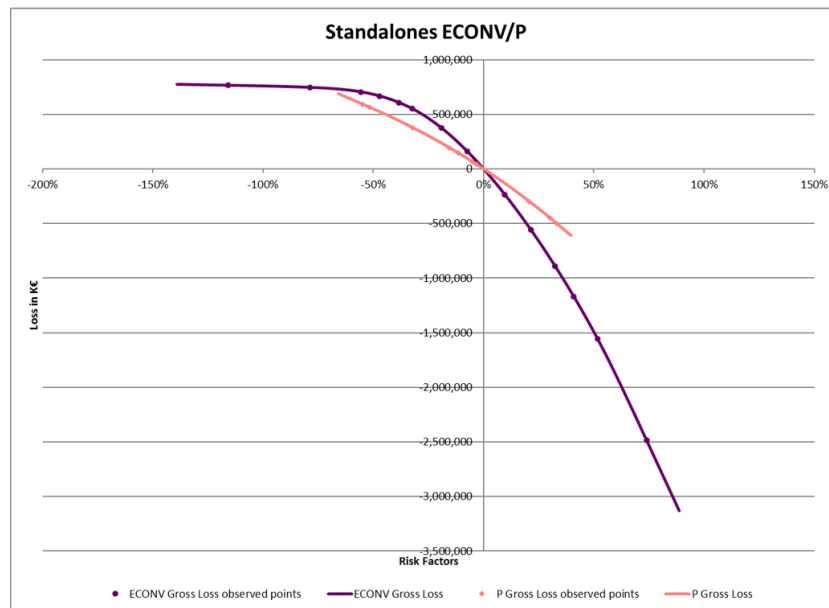


FIGURE 13 – Pertes standalone EConv-P

Il apparaît clairement que les risques ECONV et P ont un impact similaire vis à vis de la perte globale. Cette observation se confirme en observant l'impact de ces deux risques sur le montant de passif global d'un côté et sur le montant global d'actif de l'autre, pour l'entité Aviva Vie. Ainsi, conserver ces deux variables au sein du modèle pourrait mener à une situation de redondance de l'information. L'autre information que fournit ce graphique est que le risque Econv a une influence plus forte sur la perte que le risque P. Autrement dit, une évolution au niveau de l'indice des actions a un impact plus important sur le bilan qu'une évolution de l'indice de valeur de marché concernant le secteur de l'immobilier. Le risque P est donc retiré de l'étude pour la suite.

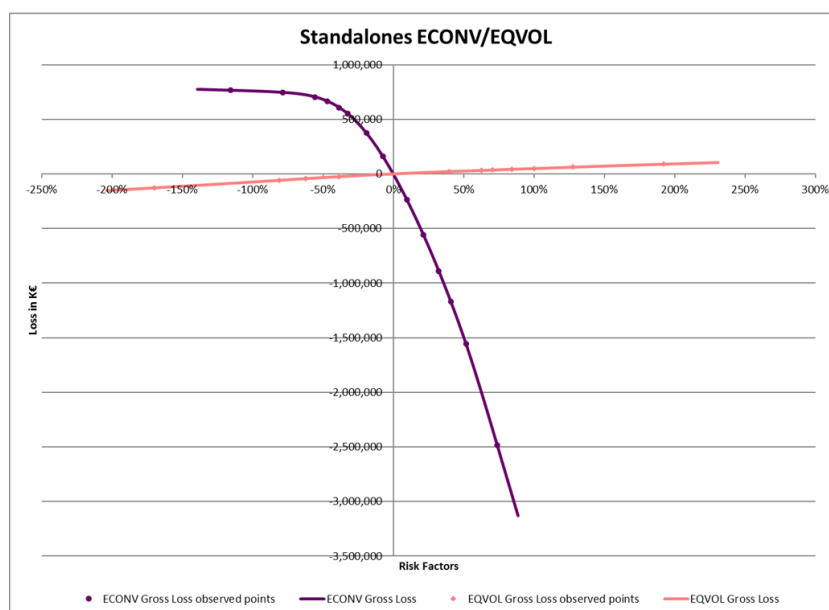


FIGURE 14 – Pertes standalone EConv-Eqvol

En ce qui concerne le risque ECONV et EQVOL, bien que le risque action soit beaucoup plus important en magnitude, ces deux risques ont des impacts différents sur la perte globale, ainsi, enlever un des deux risques entraînerait une perte d'information. En ce qui concerne les autres relations citées précédemment, après étude des impacts, aucune sélection supplémentaire n'est effectuée à ce stade.

### **Non-régularisation des données**

Dans le cadre de ce mémoire, certaines des méthodes étudiées sont en théorie plus efficaces sur des données standardisées. Il y a plusieurs raisons qui peuvent donc mener à standardiser les données, voici les principales :

- Lorsque les variables sont exprimées sur des échelles différentes, le fait de standardiser les données permet d'empêcher à des variables de magnitude importante de peser davantage dans l'analyse, que des variables tout aussi importantes mais de faible magnitude.
- Certaines méthodes de régression convergent plus rapidement lorsqu'elles sont utilisées sur des données standardisées.

Dans notre cas, les données d'entrée du modèle sont des facteurs de risques qui représentent l'évolution des risques en pourcentage par rapport à leur position initiale. Ainsi, les facteurs de risques sont de même magnitude. De plus, les données tests doivent être standardisées de la même manière que les données d'apprentissage, cependant, étant donné la taille relativement faible des données, cela serait susceptible d'ajouter un biais important au sein du modèle. Enfin, l'application de la standardisation à nos données, les rendrait plus difficilement interprétables. C'est pourquoi les données ne seront pas standardisées pour la suite.

### **5.3 Limites de la méthodologie**

Dans le cadre de ce mémoire, pour des raisons opérationnelles, nous ne choisissons qu'un seul échantillon de scénarios *multiwise*. Cet échantillon est donc celui choisi en utilisant la méthodologie présentée précédemment, cependant, il aurait été intéressant de sélectionner en utilisant des méthodes différentes plusieurs groupes de scénarios et de tester l'efficacité des modèles en fonction de la méthode utilisée pour choisir les bases de scénarios *multiwise*.

Après avoir sélectionné ce jeu de scénarios, nous cherchons à présent à construire un modèle robuste et automatisé qui nous permette de prédire la perte engendré par un scénario probable quelconque. Le fait que le modèle souhaité soit un modèle automatisé, cela nous empêche de superviser et optimiser l'apprentissage du modèle en ajoutant certaines informations récoltées à partir d'une analyse sur la relation entre les données. Enfin, certaines méthodes étudiées par la suite sont sensibles<sup>33</sup> à la présence de colinéarité au sein des données.

---

33. Création de biais au sein du modèle

## 6 Régression polynomiale multiple : Approche par formules fermées

Dans un premier temps, l'étude se porte sur des modèles d'approche par formule fermée afin d'avoir une vision exhaustive des différents paramètres du modèle de pouvoir interpréter relativement simplement les résultats obtenus en sortie de modèle.

### 6.1 Méthodologie

Etant donnée la méthode actuelle du calibrage des fonctions de perte, la méthode la plus naturelle à considérer est la régression polynomiale multiple. Il s'agit d'un cas particulier de la régression linéaire appliquée à plusieurs variables explicatives : des polynômes formés des 18 facteurs de risques et de leurs termes d'interaction. En effet la régression polynomiale permet de rendre compte de la relation non linéaire entre les facteurs de risques et la perte d'une part et de représenter simplement l'impact des interactions entre les différents facteurs de risques. Le principe est de trouver le bon ensemble de termes sur lesquels effectuer une régression linéaire classique. Les termes possibles sont les facteurs de risques considérés à divers degrés et les interactions entre ces facteurs de risques élevés à divers degrés. Le modèle se présente comme ceci :

$$Y = P(X) + E \quad (6)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \text{ le vecteur des observations.}$$

$P$  un polynôme de degré  $r$  à déterminer.

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} & \dots & X_1^{(p)} \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ X_n^{(1)} & \dots & X_n^{(p)} \end{pmatrix} = \left( X^{(1)} \dots X^{(p)} \right), \text{ la matrice de scénarios.}$$

Chaque ligne correspond à un scénario et  $X_i^{(j)}$  correspond au  $j^e$  facteur de risque du  $i^e$  scénario.  $p$  désigne le nombre de variables,  $n$  désigne le nombre de scénarios.

L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet dans une certaine mesure, de modéliser des relations non linéaires entre les facteurs de risques et la variable à expliquer. Toutefois, en choisissant une fonction polynomiale, il faut déterminer le degré de cette dernière et également le degré maximal des interactions à prendre en compte. Par exemple un terme de la fonction pourrait contenir tous les facteurs de risques considérés, chacun avec une puissance différentes, ce qui constitue une infinité de choix. L'enjeu de la méthode est donc de déterminer les termes à considérer et le degré maximal de  $P$ .

### Phénomène de Runge



Dans le domaine de l'analyse numérique, le phénomène de Runge est un problème d'oscillation qui se produit lors de l'utilisation d'une interpolation polynomiale en ayant recours à des polynômes de haut degré. Cela signifie que, bien que augmenter le degré de  $P$  permette de modéliser des relations plus complexes, cela peut accroître l'erreur d'interpolation. Ainsi, pour éviter ce phénomène et pour rester fidèle à la méthodologie actuelle du calibrage des fonctions de perte, le degré maximal du polynôme  $P$  et le degré maximal d'interaction sont fixés à 3.

La formule (6) devient :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X^{(i)} + \sum_{i,j=1}^p \beta_{i,j} X^{(i)} \otimes X^{(j)} + \sum_{i,j,k=1}^p \beta_{i,j,k} X^{(i)} \otimes X^{(j)} \otimes X^{(k)} + E \quad (7)$$

Les coefficients  $\beta$  sont obtenus par régression linéaire.

Soit deux matrices colonne de longueur 3,  $V$  et  $W$ , on définit le produit  $\otimes$  comme ceci :

$$V \otimes W = \begin{pmatrix} V_1 W_1 \\ . \\ V_3 W_3 \end{pmatrix} = V^T I_3 W$$

$I_3$  la matrice carré diagonale de taille 3.

Par convention, on écrit également :

$$V^n = \begin{pmatrix} V_1^n \\ . \\ V_3^n \end{pmatrix}$$

Le problème qui se pose à présent est celui du choix des termes à considérer dans la fonction polynomiale. En effet, étant donné le nombre élevé de facteurs de risques et le nombre relativement restreint d'observations ( $n = 1029$ ), si nous souhaitons considérer tous les termes possibles, nous tomberions dans un cadre de régression de grande dimension ( $n < p$ ), ce qui pourrait rendre imprécise l'estimation des coefficients du polynôme par régression linéaire, pour en savoir plus, la méthode de régression linéaire est présentée en annexe A.

Il apparaît aussi clairement que certains termes possibles, ne sont pas pertinents, c'est à dire qu'ils ne contribuent pas significativement à l'amélioration du modèle de prédiction. L'enjeu ici est alors de sélectionner les termes pertinents. Il convient donc de choisir un critère permettant de quantifier cette pertinence mais également qui applique le principe de parcimonie en pénalisant suffisamment l'ajout de terme au sein du modèle.

Pour cela, nous avons recours à une méthode de régression par sélection de termes. Ces méthodes de régression cherchent le modèle optimal en ayant recours à l'optimisation d'une "fonction objectif" (minimisation de l'erreur quadratique, maximisation de la vraisemblance,...) cherchant à contraindre la complexité du modèle. Le critère retenu est le critère "AICc"<sup>34</sup>.

---

34. Akaike Information Criterion corrected

## 6.2 Critère d'information d'Akaike (AIC)

Ce critère mesure la qualité d'ajustement d'un modèle statistique. Pour mesurer cette qualité d'ajustement, l'AIC utilise le maximum de vraisemblance, tout en pénalisant l'ajout de variables<sup>35</sup>. Le meilleur modèle est celui qui présente le plus petit AIC.

Il se présente comme ceci :

$$AIC = 2k - 2 \ln L$$

avec  $k$  le nombre de paramètres à estimer du modèle et  $L$  le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.

Dans notre cas de régression par moindres carrés, l'expression peut se simplifier :

$$AIC = 2k + 2 \ln \frac{RSS}{n} - 2C$$

où  $RSS$  est la somme des carrés des erreurs résiduelles,  $n$  la taille de l'échantillon choisi et  $C$  une constante non impactée par les autres paramètres.

Le terme  $2k$  sert à pénaliser l'ajout d'un terme. Cela signifie que pour qu'un terme soit ajouté au modèle, il faut que l'impact de l'ajout de ce terme, sur la réduction de la somme des carrés des erreurs résiduelles soit suffisant pour compenser ce facteur de pénalité.

Notre échantillon étant de "petite taille", nous préférons le critère AICc qui est un ajustement du critère AIC qui intègre une pénalité supplémentaire qui augmente au fur et à mesure que le nombre de termes se rapproche de la taille de l'échantillon. Le nouveau critère corrigé AICc s'écrit alors :

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

L'AICc tend vers l'AIC pour de grandes valeurs de  $n$ , pour plus d'informations sur ce critère, le lecteur peut consulter [15].

Par la suite, nous désignerons la méthode par l'appellation "*polynôme AIC*".

## 6.3 Polynôme AIC

L'algorithme utilise une méthode d'inclusion/exclusion<sup>36</sup> sur des modèles de régression linéaire :

— **Etape 1** : On établit que le modèle de base n'inclut que la constante égale à 1, soit

$$Y = \beta_0$$

— **Etape 2** : On procède à la phase d'inclusion des termes de degré 1. On commence par mesurer pour chaque terme de degré 1 possible, la valeur de AICc résultant de l'inclusion de ce terme au modèle de base. Les termes sont donc classés dans l'ordre croissant par rapport à la valeur de AICc résultante de leur inclusion au modèle de base. En sélectionnant les termes dans l'ordre à présent établi, on inclut

---

35. Principe de parcimonie

36. *forward/backward*

un terme sélectionné au modèle si son inclusion entraîne une diminution de la valeur AICc, sinon, on considère que le terme ne contribue pas suffisamment à l'ajustement du modèle et on sélectionne le terme suivant. Lorsqu'il ne reste plus de terme d'ordre 1 à tester, on reproduit la même démarche pour les termes d'ordre 2<sup>37</sup> et 3, en prenant comme modèle de départ, le modèle résultant de la phase d'inclusion des termes d'ordre inférieur.

- **Étape 3** : Une fois que tous les termes ont été ajoutés, un processus *backward* considère l'abandon de chaque terme précédemment choisi en sélectionnant à chaque étape, le terme ayant été le moins significatif lors de l'étape 2. Pour chaque terme testé, on compare la valeur de AICc avant et après son exclusion du modèle. Le processus s'arrête lorsque l'impact de chaque terme du modèle à l'issue de l'étape 2 a été testé.
- **Étape 4** : Le polynôme  $P$  est finalement obtenu par régression linéaire sur les termes sélectionnés.

Le critère AICc représente un critère intéressant pour la sélection de terme. Cependant, ce n'est pas un modèle de sélection de variable flexible. Il y a deux critères à prendre en compte lors de la détermination des estimateurs des coefficients de régression : le **biais** et la **variance**. La rigidité de la sélection *forward/backward* du critère AICc n'est donc pas optimale pour "contrôler" l'ajout de biais ou de variance au sein du modèle.

## 6.4 Equilibre biais-variance

Le biais mesure l'erreur de l'estimation entre la valeur réelle et l'estimateur du paramètre  $\beta_i$  :

$$\text{Biais}(\hat{\beta}_i) = \mathbb{E}[\hat{\beta}_i] - \beta_i$$

La variance mesure l'instabilité des estimations de cet estimateur :

$$\text{Var}(\hat{\beta}_i) = \mathbb{E}[(\hat{\beta}_i - \mathbb{E}[\hat{\beta}_i])^2]$$

On présente ici une représentation graphique du biais et de la variance :

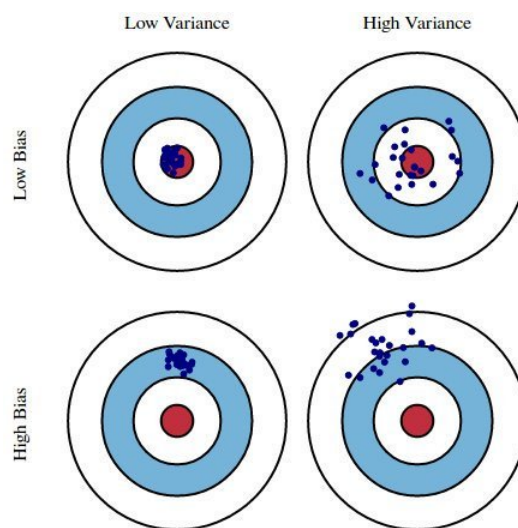


FIGURE 15 – Représentation du biais et de la variance

37. un RF élevé au degré 2 ou une interaction de deux RF

Les estimateurs déterminés par la méthode des moindres carrés ordinaires sont par définition sans biais. Cependant, ils peuvent avoir une très grande variance, notamment dans ces cas :

- Les termes du polynôme sont très corrélés entre eux.
- Le nombre de termes au sein du polynôme est très important ( $n \leq p$ ). A partir de la formule de l'estimateur de  $\sigma$ , on se rend compte que ce cas fait tendre la variance vers l'infini.

La solution est donc de réduire la variance en introduisant du biais. Cette méthode permet par ailleurs d'accroître les performance prédictives du modèle.

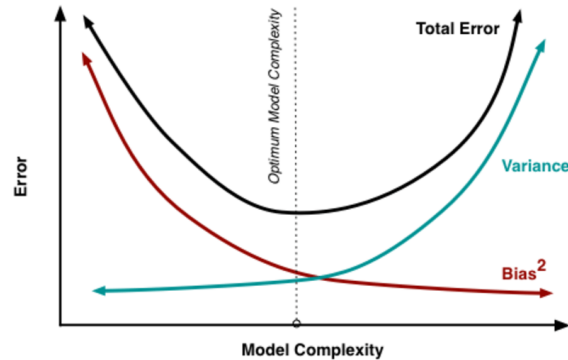


FIGURE 16 – Relation entre biais, variance et erreur de prédiction

Cependant, compte tenu de la forte colinéarité qui existe entre certains termes du polynôme, il est préférable de considérer une méthode qui permette de contrôler l'ajout de biais et de variance au sein du modèle. Il s'agit donc de mettre en place une variante du polynôme AIC qui n'aurait plus recours au critère AICc pour la procédure d'exclusion de termes du modèle.

Pour se faire nous considérons d'autres critères de sélection de modèle : **Ridge**, **Lasso** et **Elastic Net**. Ces méthodes sont choisies car elles sont adaptées au cas de multicollinéarité.

#### 6.4.1 Méthode Ridge

La méthode Ridge est une méthode de régression linéaire pénalisée, elle permet de pénaliser un modèle qui possède "trop" de variables explicatives ou si ces variables ont une influence trop importante. La fonction de coût à minimiser est :

$$f_{Ridge} = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda\|\beta\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i^T \beta)^2 + \lambda \sum_{j=0}^p \beta_j^2$$

On appelle souvent cette méthode, méthode de régression  $L^2$  car le facteur de pénalisation est exprimé à partir de la norme  $L^2$ . Le but de cette méthode est de contraindre la magnitude des coefficients en les réduisant progressivement vers zéro. Cette contrainte permet de réduire l'ampleur des fluctuations des coefficients au sein du modèle, ce qui réduit la variance générale du modèle.

$$Biais_{Ridge}(\hat{\beta}_i) = (-\lambda X^T X - \lambda^2 I)^{-1} \beta$$

$$Var_{Ridge}(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T X (X^T X + \lambda I)^{-1}$$

$\sigma^2$  peut-être déterminé à l'aide des résidus :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{E^T E}{n - p}$$

On remarque donc que plus le paramètre  $\lambda$  est grand, plus la variance croît et le biais décroît. L'équilibre biais-variance est donc contrôlé par le paramètre  $\lambda$ .

La régression Ridge est une alternative adaptée lorsqu'on préfère conserver toutes les potentielles variables au sein du modèle, cette méthode est particulièrement adaptée si la plupart des variables ont un impact de même magnitude sur la perte.

#### 6.4.2 Méthode LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

La méthode Lasso est également une méthode de régression linéaire pénalisée, cette méthode ne se contente pas cependant, de limiter l'influence des variables explicatives, elle permet plutôt d'annuler l'effet des variables explicatives considérées "peu importantes" par le modèle. La fonction de coût à minimiser est :

$$f_{Lasso} = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda \|\beta\|_1 = \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i^T \beta)^2 + \lambda \sum_{j=0}^p |\beta_j|$$

On appelle souvent cette méthode, méthode de régression  $L^1$ . L'inconvénient avec cette méthode c'est que souvent, le fait d'annuler certains coefficients entraîne une perte d'information et donc de précision. Finalement, la régression Lasso est particulièrement adaptée dans le cas où le nombre de variables explicatives significatives est restreint et que l'influence des autres variables est négligeable.

#### 6.4.3 Méthode Elastic Net

La méthode Elastic Net est une méthode de régression pénalisée qui associe la régression LASSO et la régression Ridge. La fonction de coût à minimiser est :

$$f_{ElasticNet} = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda_1 \|\beta\|_1 + \lambda_2 \|\beta\|_2^2$$

Cette méthode permet une plus grande flexibilité dans la maîtrise des impacts des différentes variables explicatives, en comblant les lacunes des deux méthodes précédemment citées. En effet, au sein d'un groupe de variables extrêmement corrélées, le LASSO a tendance à ne sélectionner qu'une seule des variables, au détriment de l'information apportées par les autres. La méthode Ridge quant à elle conserve au sein du modèle des variables très peu significatives, ce qui peut potentiellement poser des problèmes de dimension.

C'est donc la méthode Elastic Net qui est utilisée comme méthode d'ajout contrôlé de biais au sein du modèle polynôme AICc lors de la procédure *backward*, à la place du critère AIC. Le lecteur peut se référer à [29] pour plus d'informations. Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  optimaux, la méthode choisie ici est la **validation croisée à k blocs** car elle est adaptée aux cas où la base de donnée n'est pas de volume important d'une part, d'autre part, elle favorise les qualités prédictives du modèle. Cette méthode est présentée en annexe B. Pour implémenter la méthode **Elastic Net**, nous avons recours à la fonction **glmnet** du package **glmnet** de R Studio.

#### 6.4.4 Limites

Le fait que ces méthodes modifient l'influence de certains coefficients de régression, constitue une limite pour l'interprétabilité des sorties du modèles.

De plus, bien que les mesures d'ajustement présentées précédemment soient robustes, la régression linéaire offre un cadre restrictif au modèle en supposant une relation linéaire entre les différents termes et la perte. Cependant, dans ce mémoire, le but ultime est de prédire la différence entre le montant de passif et le montant de l'actif pour un scénario donné. Ainsi, puisque certaines variables ont un impact sur les deux composantes du bilan, il semble approprié de considérer des modèles plus complexes qui seraient plus à même de refléter la véritable nature de la relation entre les facteurs de risques et la perte.

## 7 Régression non paramétrique : Régression multivariée par spline adaptative

La régression non paramétrique est un type de régression dans laquelle les prédicteurs n'ont pas toujours une forme prédéterminée, leur forme est estimée à partir des données. C'est cette flexibilité qui permet de capter les relations complexes entre les différentes variables. Cette méthode peut-être considéré comme un entre-deux entre les méthodes de régression linéaire "classique" et les méthodes complexes de machine learning.

De manière générale, un modèle de régression linéaire multiple à  $p$  variables explicatives se présente comme ceci :

$$Y = F(X^{(1)}, \dots, X^{(p)}) + \epsilon \quad (8)$$

L'objectif est de déterminer l'expression de l'opérateur  $F$  afin de pouvoir prédire la perte du bilan en appliquant l'opérateur à un vecteur de facteurs de risques.

### 7.1 Méthodes de lissage

Pour présenter ces méthodes, le cas univarié est considéré :  $Y = F(X^{(1)}) + \epsilon$

Il existe un grand nombre de méthodes permettant d'obtenir une estimation de l'opérateur  $F$ , notamment les fonctions dites de "lissage". Une fonction de lissage est un outil permettant de décrire le comportement de la variable à expliquer  $Y$  en fonction d'une ou plusieurs variables explicatives.

La fonction de lissage est une estimation. Elle est donc par définition moins variable que la variable  $Y$  et permet comme son nom l'indique de "lisser" la tendance de  $Y$ . Il existe plusieurs méthodes de régression non paramétrique, elles procèdent toutes au lissage de la variable de réponse en plusieurs points, en se basant sur les données observées en ces points ou des points voisins de ces points. Les principales méthodes sont :

- **Régression Kernel** : C'est une technique statistique qui estime l'opérateur  $F$  en utilisant la moyenne pondérée des données observées de  $Y$ . Considérons un point d'intérêt  $X_i^{(1)}$  pour lequel on voudrait avoir une estimation de  $F$ , soit  $\hat{F}(X_i^{(1)})$ . On peut définir :

$$\hat{F}(X_i^{(1)}) = \sum_{j=1}^n W_j(X_i^{(1)}) Y_j$$

Les poids  $W_j(X_i^{(1)})$  sont définis en fonction de la pseudo-distance entre les points  $X_i^{(1)}$  et  $X_j^{(1)}$ . Ainsi, les points les plus proches sont ceux dont le poids est le plus important. Cette méthode est développée dans [12].

- **Régression locale** : La régression locale, aussi appelée "régression polynomiale avec pondération locale" combine la simplicité de la régression linéaire simple par les moindres carrés avec la flexibilité de la régression non linéaire, en effectuant une régression simple sur des sous-ensembles locaux de données. Elle consiste à déterminer, pour chaque point du jeu de données initial, les coefficients d'un polynôme de faible degré pour effectuer la régression d'un sous-ensemble des données. Les résultats des régressions sur les sous-ensembles sont ensuite agrégés pour obtenir une fonction globale. C'est un type de régression Kernel.

- **Splines** : Les splines sont une somme de fonctions polynomiales par morceaux qui se rejoignent en des points appelés "noeuds". Ces noeuds divisent l'intervalle des valeurs de  $X^{(1)}$  en plusieurs régions. Il y a trois éléments à considérer pour définir une fonction spline :
  - le degré du polynôme global,
  - le nombre de noeuds,
  - les points où sont localisés les noeuds.

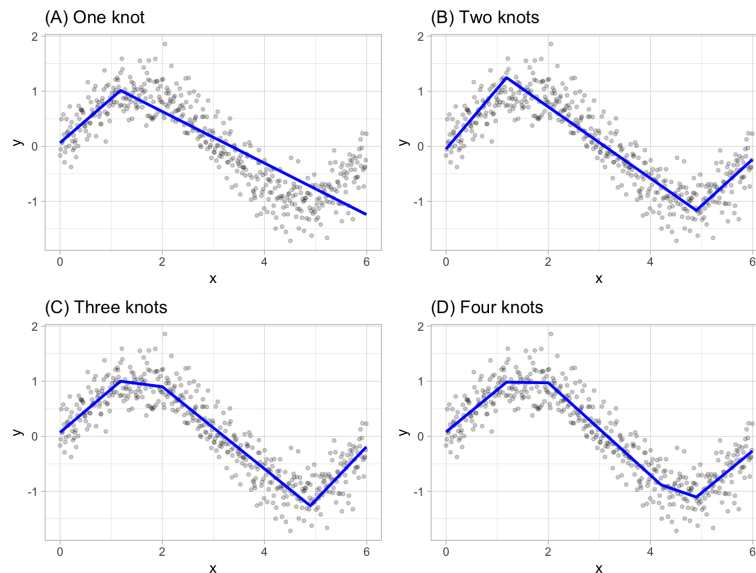


FIGURE 17 – Exemple de représentation d'une fonction spline avec différents nombres de noeuds.

Une spline de degré  $q$  est généralement construite, de sorte que les  $q-1$  dérivées premières soient continues, cela garantit le caractère "lisse" des fonctions au niveau des noeuds. Considérons une séquence de noeuds :

$$\Lambda = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$$

Un spline de degré  $q$  peut-être défini comme ceci :

$$S(X^{(1)}) = \sum_{i=0}^q \beta_i (X^{(1)})^i + \sum_{j=1}^r \lambda_j (X^{(1)} - \xi_j)_+^q \quad (9)$$

Les splines les plus utilisées aujourd'hui sont les splines cubiques<sup>38</sup>, on représente ici l'expression d'un spline cubique à deux noeuds  $C_1$  et  $C_2$  :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^{(1)} + \beta_2 (X^{(1)})^2 + \beta_3 (X^{(1)})^3 + \beta_4 (X^{(1)} - C_1)_+^3 + \beta_5 (X^{(1)} - C_2)_+^3$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons donc à la méthode de lissage par splines. En effet, les splines sont un bon choix dans le contexte de la régression multivariée non paramétrique, notamment parce que en partant du cas univarié, on peut relativement facilement adapter la méthode au cas multivarié et fournir une expression explicite de l'estimateur de  $F$ .

38. polynôme de degré 3



## 7.2 Estimation des paramètres

La difficulté liée à l'utilisation des splines pour la régression, réside notamment dans l'estimation de certains paramètres. Pour cette partie, nous utiliserons les notations suivantes :

$$P_i(X) = X^i, i \in \{0, \dots, q\}$$

$$P_{q+j}(X) = (X - \xi_j)^q, j \in \{1, \dots, r\}$$

On note aussi  $\gamma = (\beta_0, \dots, \beta_q, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ , le vecteur des coefficients exprimé précédemment dans l'équation (9). On peut alors écrire :

$$S(X^{(1)}) = \sum_{i=1}^{q+r} \gamma_i P_i(X^{(1)})$$

Les paramètres à estimer sont :

- $\Lambda$  : le nombre et l'emplacement des différents noeuds,
- $\gamma$  : l'ensemble des coefficients des différents polynômes formant la spline,
- $q$  : Le degré maximal de la spline.

Nous présentons donc quelques méthodes permettant d'estimer les paramètres d'une spline de régression et pour cela nous distinguons plusieurs cas :

**$\Lambda$  est connu :** C'est le cas le plus simple, S devient donc un estimateur linéaire en fonction des termes  $\gamma$ . Le vecteur  $\gamma$  peut donc être exprimé par la méthode des moindres carrés :

$$\gamma = \text{Argmin}_{\gamma} \text{RSS}(\gamma) = \text{Argmin}_{\gamma} \sum_i^n (Y_i - \sum_k^{q+r} \gamma_k P_k(X_i))^2 \quad (10)$$

$\gamma_k$  étant le  $k^e$  coefficient du vecteur  $\gamma$

**r et q sont connus :** En terme d'automatisation, une méthode intéressante est celle de la minimisation de l'erreur dans la formule (10) par rapport à  $\gamma$  et  $\Lambda$  simultanément. Il vaut mieux pour cela utiliser des méthodes d'optimisation numérique. Cependant, il a été montré que la vraisemblance pour ce modèle n'a pas toujours de maximum et il existe ainsi parfois plusieurs solutions possibles. De plus, fixer le nombre de noeuds de manière arbitraire n'est pas optimal.

**Analyse des données :** Dans le cas où on décide de placer les noeuds aux endroits où la  $(q - 1)^e$  dérivée de S change, il est alors envisageable d'établir une procédure pour capter ces changements. Il est cependant rare que les relations obtenues grâce aux données permettent de déterminer ces changements de manière suffisamment évidente.

Si on choisit de définir la matrice  $M_{\Lambda} = (P_j(X_i))_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, q+r\}}$ , on a  $p_{\Lambda} = (p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_{(q+r)}})$ ,  $\hat{\gamma}$  peut-être obtenu par résolution des équations normales de la méthode des moindres carrés. En appliquant cette résolution, obtient :

$$p_{\Lambda} = (M_{\Lambda}^T M_{\Lambda})^{-1} M_{\Lambda}^T Y \quad (11)$$

Cependant, cette méthode ne peut pas être appliquée directement car  $\Lambda$  n'est pas connu en général.

**Répartition uniforme :** Une autre méthode relativement simple est de fixer le nombre de noeuds et de les répartir de manière uniforme de telle sorte qu'ils soient à équidistance. D'une part, cette méthode n'est pas optimale car elle ne tient pas compte de la singularité des données, en effet, un mauvais choix d'emplacement pour les noeuds peut augmenter le biais au sein de l'estimateur de  $S$ . D'autre part, le succès de cette méthode ne peut être dû qu'au hasard ou à l'utilisation d'un volume important de données, ce qui n'est pas le cas ici.

**Méthodes adaptatives :** Certaines méthodes permettent d'estimer  $S$  sans fixer  $\Lambda$  ou  $r$  au préalable, elles sont appelées "méthodes adaptatives". Elles portent ce nom car elles basent uniquement sur les données pour estimer les paramètres. Ces méthodes sont donc particulièrement adaptées à la mise en place d'un processus automatisé et flexible. Le fonctionnement de ces méthodes est normalement fait en deux phases : une phase d'ajout de termes au modèle selon un ou plusieurs critères et une phase d'exclusion de termes afin d'accroître la capacité de prédiction du modèle et de ne pas sur-ajuster le modèle aux données.

Davantage de détails sont disponibles sur ces méthodes dans [22].

Parmi les méthodes adaptatives, nous approfondirons par la suite la méthode MARS<sup>39</sup>.

### 7.3 Modèle MARS

Le modèle MARS est un modèle de régression non paramétrique développé en 1991. Ce modèle est adapté à la modélisation de la non linéarité et aux problèmes de dimension au sein des données. La fonction construite à partir de ce modèle prend la forme :

$$F(X^{(1)} \dots X^{(p)}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i(X^{(1)} \dots X^{(p)})$$

Les valeurs  $\lambda_i$  étant des constantes, le modèle est donc une somme pondérée de fonctions de base  $\beta_i$ .

#### Fonctions de base

Soit  $k \in \{1, \dots, p\}$  et  $c$  une constante. On note  $C = C \otimes V_1$  avec  $V_1$  la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On appelle **fonction charnière**, une fonction de la forme :

$$[X^{(k)} - C]_+ \tag{12}$$

Ou de la forme

$$[C - X^{(k)}]_+ \tag{13}$$

La fonction charnière est définie par un noeud  $C$  et une variable  $X^{(k)}$  qui ici est un facteur de risque. Une fonction charnière est nulle pour certaines parties de son ensemble de définition, ceci afin de pouvoir partitionner les données en régions disjointes et pour que le comportement de chacune des régions soit modélisée de manière indépendante.

---

39. *Multivariate Adaptive Regression Spline* ou Régression par spline adaptative multivariée

Les fonctions de bases peuvent avoir différentes formes :

- La constante égale à 1.
- Une fonction charnière. Le modèle sélectionne automatiquement les noeuds qui seront associés à une variable au sein de chaque fonction charnière.
- Un produit  $\otimes$  de plusieurs fonctions charnières, ce qui permet de modéliser l'interaction entre plusieurs variables.

### Sélection des termes

La sélection des termes se déroule en deux étapes : une étape d'ajout de variables et une étape de retrait. Au cours de l'étape d'ajout, des fonctions de bases sont ajoutées au modèle si elles contribuent à la réduction de la somme quadratique des erreurs, par exemple. L'étape d'exclusion quant à elle permet de ne pas sur-ajuster les données et permet donc en outre d'améliorer les qualités de prédiction.

L'étape d'ajout de terme prend fin, lorsque l'ajout de termes au modèle contribue trop faiblement à la réduction de la fonction de coût ou alors lorsque le nombre de terme maximum<sup>40</sup> est atteint. Les termes sont ajoutés au modèle par paire, c'est à dire en considérant les formes (12) et (13) à chaque ajout.

L'étape d'exclusion quant à elle concerne toutes les bases du modèles, excepté  $B_0$  et dans ce cas, c'est le critère de validation croisée généralisée, présentée en annexe B, qui est utilisé pour mesurer la performance du modèle. Une explication plus complète et détaillée du modèle Mars est fournie dans [26].

### Contraintes supplémentaires

Le modèle MARS offre la possibilité de contraindre le modèle de manière encore plus précise, en spécifiant :

- le nombre maximum de termes considéré dans l'étape d'inclusion,
- le degré maximal d'interaction,
- l'ensemble des interactions possibles,
- le coefficient de pénalité.

Ces contraintes sont particulièrement utiles, dans le cas où l'on posséderait certaines connaissances des données au préalable. Pour utiliser ce modèle MARS, nous avons fait appel au package **earth** du logiciel R Studio.

### Avantages de la méthode :

- Le modèle de régression multivariée par spline adaptative est un modèle relativement simple à comprendre et à interpréter.
- L'utilisation de ce modèle offre la liberté d'avoir très peu, voire pas du tout recours à un ajustement à priori des données.
- La sélection de variable est automatique.
- Le modèle est suffisamment flexible pour modéliser la non-linéarité de la relation entre les variables, de plus, la forme des fonctions de base empêche le modèle d'être excessivement complexe.

---

40. défini en entrée du modèle

## 8 Méthode de machine Learning : Gradient Boosting

Nous commençons par introduire quelques concepts qui faciliteront la compréhension de ce modèle.

### Arbre de décision

Les arbres de décision sont des modèles prédictifs. Comme leur nom l'indique, ces modèles utilisent des arbres de décision pour conclure ou prédire la valeur d'un objet, à partir d'observations de cet objet. Dans notre cas l'objet représente la perte. Les arbres de décision pour lesquels les valeurs cibles sont des nombres réels sont aussi appelés **arbres de régression**.

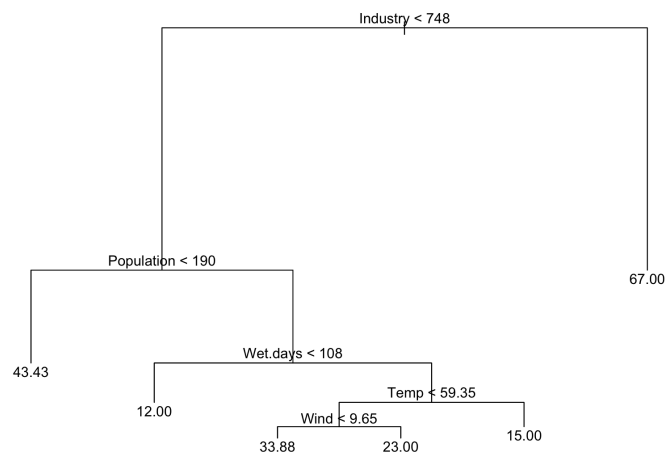


FIGURE 18 – Arbre de décision à 5 variables.

### Descente de gradient

La descente de gradient est un algorithme d'optimisation itératif permettant de trouver un minimum local d'une fonction dérivable à partir d'un point de départ donné. En *machine learning*, l'algorithme de descente de gradient est généralement utilisé pour minimiser une fonction de coût comme la somme des carrés des erreurs résiduelles. Le principe derrière cet algorithme est que, pour une fonction  $F$ , trouver son minimum local revient à se déplacer dans la direction opposée au gradient. Cette méthode est détaillée dans [21].

### Boosting

Le principe derrière l'idée du *boosting* est d'agrèger des prédicteurs faibles afin de former un prédicteur robuste. Le terme "prédicteur faible" désigne un arbre de décision dont les performances sont à peine meilleures que celles du hasard. L'algorithme se concentre sur les observations difficilement appréhendées par le modèle et développe de nouveaux prédicteurs faibles qui prennent en compte les erreurs de leurs prédécesseurs et qui tentent de les corriger.

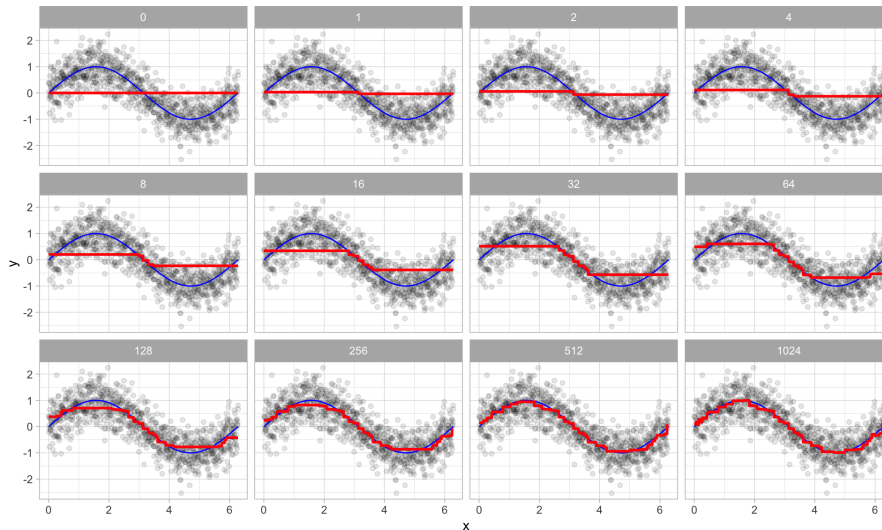


FIGURE 19 – Illustration du principe de boosting en utilisant de 0 à 1024 prédicteurs.

## 8.1 Gradient Boosting Machine (GBM)

Le *Gradient Boosting Machine* peut-être vu comme technique d’optimisation numérique itérative dont l’objectif est de minimiser une fonction de coût en ajoutant au modèle des prédicteurs faibles, ceci en associant le concept du *boosting*, à une procédure de type descente de gradient. Nous cherchons à présent à expliciter la méthode.

Considérons un algorithme de *gradient boosting* à  $M$  étapes. L’étape  $M$  n’est en générale pas fixée mais plutôt déterminée au cours de la compilation, par un critère d’arrêt. A chaque étape  $i \in \{1, \dots, M\}$ , on suppose qu’on obtient un modèle imparfait  $F_i$ . Afin d’améliorer ce modèle, on cherche à ajouter de nouveaux prédicteurs noté  $h_i$ . On a donc par la suite :

$$F_{i+1}(X) = F_i(X) + h_i(X) = Y \iff h_i(X) = Y - F_i(X)$$

On note  $\{X_i, Y_i\}, i \in \{1, \dots, n\}$  les données de la base d’apprentissage,  $\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{F}(\mathbf{X}))$  la fonction de coût à minimiser et  $M$  la dernière étape, dénie en fonction du critère d’arrêt. Le fonctionnement de l’algorithme est le suivant :

1. Le modèle est initialisé avec une constante  $\alpha$ <sup>41</sup> :

$$F(X) = \arg_{\alpha} \min \sum_{i=1}^n L(Y, \alpha)$$

2. Pour  $m$  allant de 1 à  $M$  :

- (a) Génération de pseudo-résidus :

$$r_i^{(m)} = - \left[ \frac{\partial L(Y_i, F(X_i))}{\partial F(X_i)} \right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}$$

- (b) Ajustement d’un arbre de régression  $h_m$  aux couples  $(x_i, r_i^{(m)})$ .

41. La convention est matricielle ici,  $\alpha$  est donc le vecteur de taille  $n$  dont toutes les valeurs sont  $\alpha$

(c) Calcul de  $\alpha_m$  en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_m = \arg \min_{\alpha} \sum_{i=1}^n L(Y_i, F_{m-1}(X_i)) + \alpha h_m(X_i)$$

(d) Mise à jour du modèle :

$$F_m(X) = F_{m-1}(X) + \alpha_m h_m(X)$$

3. La fonction finale est donc  $F = F_M$

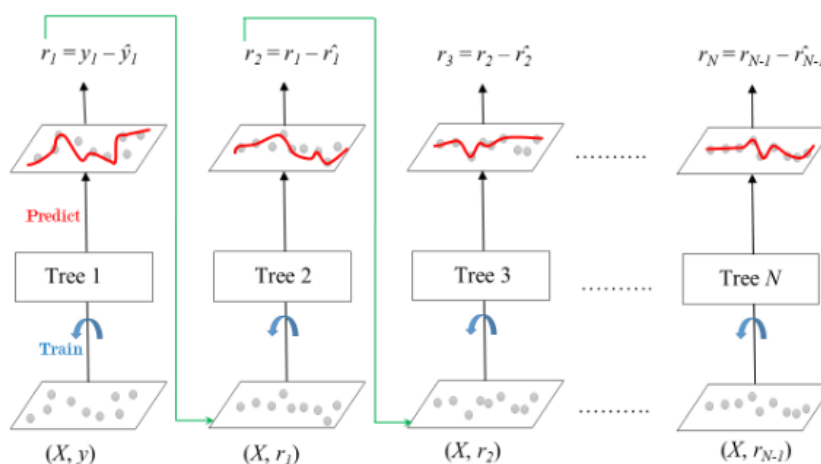


FIGURE 20 – Méthode de Gradient boosting machine

Les modèles de gradient boosting permettent aujourd'hui également de spécifier et optimiser une combinaison de paramètres appelés **hyper-paramètres**, ce qui les rend d'autant plus flexibles. L'inconvénient est que rechercher la combinaison optimale de ces paramètres peut-être coûteux en temps. Les hyper-paramètres que l'on retrouve sont :

- **Nombre d'arbres** : Il représente le nombre total d'arbres de régression par itération. Les GBMs ont souvent besoin d'un grand nombre d'arbres de régression, cependant, il ne faut pas que ce nombre soit trop grand pour ne pas sur-ajuster les données. L'objectif est donc de trouver le nombre d'arbres optimal.
- **Profondeur des arbres** : Il représente le nombre de noeuds ou de feuilles dans chacun des arbres qui permet de contrôler la complexité du modèle.
- **Taux d'apprentissage ou shrinkage** : Ce paramètre permet de contrôler le pas d'exécution de l'algorithme de descente de gradient. De faibles valeurs assurent la convergence du modèle mais cela augmente la propension à sur-ajuster les données et accroît le temps de compilation pour trouver un modèle optimal.
- **Sous-échantillonnage** : Ce paramètre permet de segmenter ou non la base d'apprentissage afin d'implémenter une méthode de descente de gradient stochastique. Le lecteur peut se référer à [23] pour en savoir davantage à propos de cette méthode.
- **Fonction de décision** : Fonction ou critère permettant de définir les noeuds des arbres de décision.

## Limites

Une limite majeure de cette méthode est que les modèles créés sont sujet à un sur-ajustement aux données. Cependant, une combinaison optimale des hyper-paramètres permet de palier à cela.

## 8.2 *eXtreme Gradient Boosting (XGB ou XGBoost)*

L'eXtreme Gradient Boosting est une extension de l'algorithme GBM qui s'inscrit dans une volonté d'améliorer les performances du modèle original. Ce modèle a recours à une méthode consistant à pénaliser l'ajustement d'un arbre ajouté en modifiant la fonction de coût :

$$L(Y, F(X))_2 = L(Y, F(X)) + \sum_{m=1}^M \Omega(\delta_m)$$

$$\Omega(\delta_m) = \lambda|\delta_m| + \frac{1}{2}\beta\|w_m\|^2$$

$L(Y, F(X))_2$ , désigne l'expression de la fonction de coût modifiée,  $|\delta_m|$  est le nombre de feuilles de l'arbre considéré à l'étape  $m$  et  $w_m$  désigne le vecteur des valeurs attribuées à chacune des feuilles de cet arbre.  $\Omega$  peut être interprété comme une combinaison de la régularisation *Ridge* de coefficient  $\beta$  et de pénalisation *LASSO* de coefficient  $\lambda$ .

XGB est préféré au modèle GBM car il permet de réduire le temps de calcul, en effet, grâce à une astuce faisant intervenir un développement de Taylor, la construction des arbres est parallélisée dans le modèle XGB. Les temps de calcul sont donc rapides en comparaison aux temps de calcul du modèle GBM. Le lecteur peut explorer davantage la méthode en se référant à [19].

C'est donc le modèle XGB que l'on décide d'entraîner et de tester sur nos données. Pour utiliser le modèle XGB, la méthode utilisée est "**xgbTree**" à partir des bibliothèques **caret** et **xgboost** du logiciel R Studio.

## 9 Application à un portefeuille de produits de prévoyance de l'entité Aviva Vie hors AFER

Après présentation de la théorie sous-jacente à chaque modèle envisagé, les modèles seront appliqués au portefeuille de contrats de prévoyance de l'entité Aviva Vie, en dehors du périmètre de l'AFER, on nommera par la suite cette entité **AVHA** (Aviva Vie Hors AFER). Les modèles seront ensuite comparés entre eux et à la méthode de curve fitting actuellement utilisée par Aviva, qui sera nommé pour la suite **Modèle Aviva**, ceci afin de sélectionner la méthode optimale de calcul de SCR.

Dans un premier temps, les modèles seront appliqués pour prédire le montant de l'**Actif** d'une part et du **Passif** d'autre part. En effet, il est préférable de séparer les postes du bilan pour faciliter la compréhension de l'influence de chacun des facteurs de risques sur la variable cible. Dans un deuxième temps, l'objectif sera de prédire la **perte globale**<sup>42</sup>. Les valeurs d'actif et de passif prédites par l'outil interne sont ajustées avant d'être agrégées pour prédire la perte globale, ainsi, la méthode de Aviva ne sera comparée aux modèles alternatifs que pour les prédictions des postes du bilan de manière séparée. Les performances sur la prédiction de la perte globale seront évaluées en fonction du seuil absolu de **5% d'erreur de prédiction maximale**.

### 9.1 Méthodes de comparaison des modèles

Dans cette section, les méthodes qui serviront à comparer les modèles sont présentées. Deux types de comparaisons sont distinguées : la comparaison en termes de performance et la comparaison en terme d'interprétabilité. En effet, bien que les assureurs souhaitent utiliser des modèles très performants, afin de ne pas surestimer ou sous-estimer leur besoin en fonds propres d'une part, d'autre part, pour pouvoir respecter les délais de soumission de résultats aux actionnaires ou aux organismes de réglementation, il faut aussi qu'ils soient en mesure d'expliquer les sorties du modèle ainsi que les relations entre variables.

Plusieurs indicateurs seront utilisés pour comparer les **performances** de chacun des modèles :

– **Mean AE** (Mean Absolute Error) :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|Perte_{obs,i} - Perte_{pred,i}|)$$

– **Max AE** (Maximum Absolute Error) :

$$MAE = \max_i (|Perte_{obs,i} - Perte_{pred,i}|)$$

– **RMSE** (Root Mean Square Error) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Perte_{obs,i} - Perte_{pred,i})^2}$$

– Le temps d'exécution.

---

42. Passif - Actif



Pour comparer l'interprétabilité des résultats deux approches se distinguent :

– **Régression linéaire (AICc, Elastic Net) :**

- Analyse des résidus afin de vérifier la fiabilité du modèle.
- Analyse des coefficients de la régression linéaire.

– **Régression non linéaire (MARS, XGBoost) :**

- Classement des variables par importance.
- Analyse de la dépendance partielle : Cette étape permet de comprendre comment la variable cible se comporte en fonction d'un facteur de risque donné. Si le lecteur souhaite en savoir plus à propos de cette méthode, il peut se référer à [13].

## 9.2 Estimation des postes du bilan

### 9.2.1 Sélection de variables

En ce qui concerne l'actif, le choix des variables est effectué par jugement d'expert. Les variables impactant de manière non négligeable le montant d'actif du portefeuille sont : **ECONV, EQVOL, CCORP, CSOV, FLU, FLD, FS, FT, FVOL** et **INF**.

En ce qui concerne le passif, de par les mécanismes d'interaction actif-passif présentés en partie 2.3, bien que certaines variables soient plus influentes que d'autres, la décision prise est de mesurer la contribution de chacune des variables à l'évolution de la valeur de passif au bilan.

### 9.2.2 Estimation de l'actif - Performance des modèles

Les temps d'exécution des algorithmes sont relativement constants pour chaque méthode, que l'on pour prédise l'actif, le passif ou la perte globale. Les temps de compilation pour chacune des méthodes sont présentés ci-dessous :

	Time
AICc	1 min 10 sec
AICc/Elastic Net	30 min
MARS	35 sec
XGBoost	14 min

TABLE 3 – Temps de compilation des méthodes alternatives.

Le temps de compilation maximal de l'algorithme permettant de trouver la combinaison de 1340 scénarios a été de **1 heure et 30 minutes**. En comparaison, le choix des points du calibrage, de test et de validation de la méthode actuelle chez Aviva est d'environ une semaine car il comprend toutes les phases présentées en **partie 4** qui sont interdépendantes et prônes à de nombreuses erreurs opérationnelles qui ralentissent le processus. Ces méthodes alternatives sont donc toutes plus efficaces en terme de temps d'exécution. Les performances des modèles en fonction des autres indicateurs sont présentées ci-dessous :

		AVIE - PREV - NONAFER				
		ACTIF				
		AICc	AICc/Elastic Net	MARS	XGBoost	Modèle Aviva
Apprentissage	Mean AE	1,05%	1,05%	0,90%	0,57%	0,04%
	Max AE	11,54%	11,37%	5,33%	3,07%	6,31%
	RMSE	11494,47	11478,91	9713,743	6059,817	x
Test	Mean AE	0,95%	0,95%	0,71%	0,97%	0,02%
	Max AE	11,54%	11,51%	3,31%	4,47%	0,45%
	RMSE	10713,89	10691,13	7551,302	10021,76	x

TABLE 4 – Performances des modèles sur la valeur d’actif du portefeuille de prévoyance.

**Pour rappel :** La base d’apprentissage utilisée ici, n’est pas la base d’apprentissage qui a été utilisée pour construire les fonctions de perte du modèle de Aviva, ainsi, la base d’apprentissage et la base de test de nos modèles sont ici deux bases de test pour le modèle de Aviva.

En observant le **Mean AE**, il semble que chacune des méthodes soit performante en ce qui concerne les prédictions des scénarios d’apprentissage et de test. Cela s’explique par le fait que la valeur de marché des actifs du portefeuille de prévoyance de AVHA peut s’exprimer par une formule fermée. Toutefois, les méthodes de régression linéaire captent difficilement certaines interactions non linéaires, ce qui crée des variations au niveau des estimations et qui se reflète par des valeurs de *Max AE* et *RMSE* relativement grandes par rapport aux autres méthodes. Le modèle Aviva apparaît comme le modèle avec le moins de biais, cela est dû au processus très supervisé du choix des points et de correction du choix des points en fonction des écarts détectés lors des tests de validation. Cependant, en terme de variance sur l’ensemble des bases de test et d’apprentissage, les modèles MARS et XGBoost sont les modèles les plus intéressants.

### 9.2.3 Estimation de l’actif - Interprétabilité

**Analyse des résidus** Afin d’anticiper la pertinence des modèles de régression linéaire et notamment des résultats des différents tests statistiques, la conformité des résidus à la régression linéaire est analysée :

- **Indépendance des résidus** : Le test de Durbin Watson présenté en annexe C, indique qu’il n’existe pas d’autocorrélation entre les résidus, d’une observation à l’autre.
- **Normalité des résidus** : Ce test est effectué à partir du diagramme Quantile-Quantile :

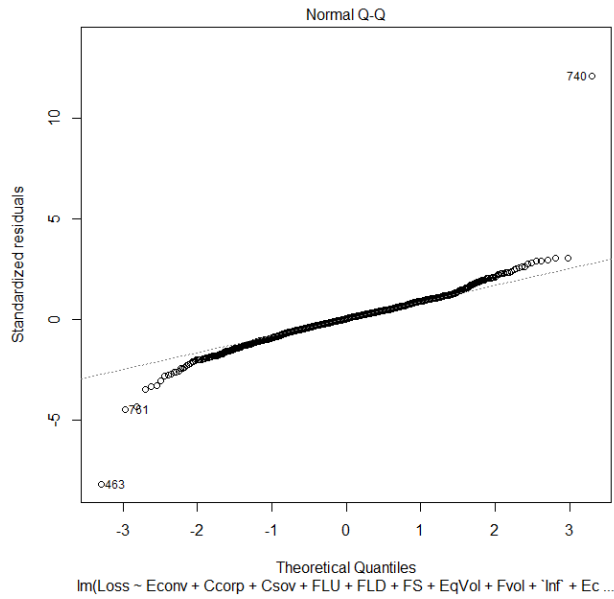


FIGURE 21 – Actif - Régression AICc : Test de normalité des résidus

Ce résultat indique que la loi suivie par les résidus est très proche d'une loi normale puisque les points sont pratiquement alignés sur la droite.

- **Homoscédasticité**<sup>43</sup> **des résidus** : Le test utilisé est un graphique mettant en relation les racines carrées des résidus standardisés en fonction de la valeur théorique de la variable à expliquer :

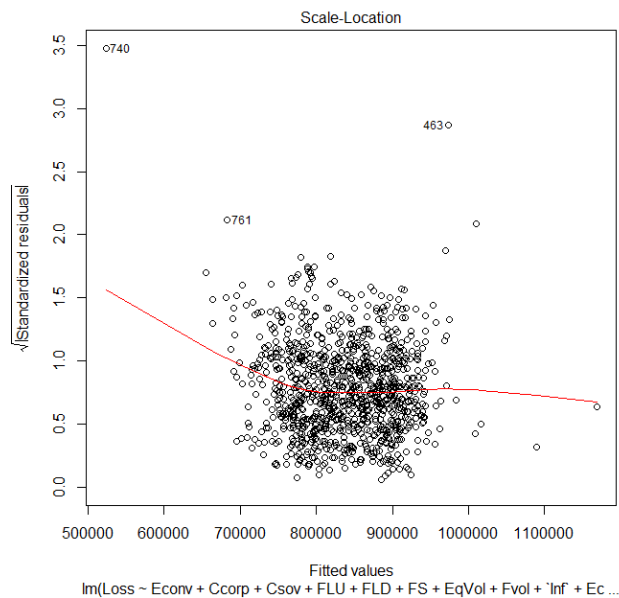


FIGURE 22 – Actif - Régression AICc : Test de variance des résidus

43. Constance de la variance des résidus pour chaque observation

La courbe rouge n'étant pas plane, le test indique une hétéroscédasticité entre les résidus.

Ainsi, l'analyse des résidus indique que les critères de la régression linéaire vis-à-vis des résidus ne sont pas entièrement respectés, la régression linéaire n'est donc pas parfaite et cela est à prendre en compte au cours de l'analyse des coefficients. Par ailleurs, l'analyse des résidus dans le cas de la **régression Elastic Net** donne un résultat similaire.

### **Analyse des coefficients**

Les coefficients obtenus pour les deux méthodes de régression linéaire sont présentés en annexe D. Les coefficients obtenus permettent d'estimer l'impact marginal de chaque terme du polynôme sur la variable cible.

**Régression AIC :** L'analyse des coefficients présente les facteurs de risques ECONV, FL (FLU et FLD) et CCORP comme les variables les plus importantes pour le portefeuille d'actifs. Le coefficient associé au risque ECONV est très important, notamment parce que ce coefficient comporte la contribution du risque immobilier également, en effet, le risque immobilier (P) a été retiré du modèle car il avait un impact similaire au risque action sur chaque poste du bilan et le conserver au sein des modèles entraînerait des erreurs d'estimation à cause de la redondance d'information et de la corrélation entre ces variables.

**Rappel :** Les risques ECONV, P, MANN et LSUPP sont calibrés de manière décroissante vis-à-vis de la perte globale<sup>44</sup>, le risque est donc "bénéfique" pour des valeurs positives du facteur de risque, c'est la raison pour laquelle le coefficient associé à ce risque est positif si l'évolution "bénéfique" du risque, contribue à un gain de valeur pour l'actif. De même, pour les risques calibrés de manière croissante vis-à-vis de la perte globale, si leur partie "bénéfique" contribue à une augmentation de la valeur d'actif, le coefficient de la régression linéaire associé à ce risque sera négatif.

Le portefeuille d'actif pour cette entité est composé de nombreux actifs de type obligataire, ainsi, la valeur des actifs est sensible à la dégradation du risque de crédit comme le montre le modèle. Le portefeuille d'actif est également sensible aux variations des niveaux de taux d'intérêt, en effet, si le niveau de la courbe de taux augmente, les rendements des actifs de type obligation à taux variables, qui constituent une part importante de nos actifs, augmentent et inversement. Enfin, le modèle final est un polynôme du second degré, les interactions retenues sont les interactions entre les risque de niveau de taux, d'action et de crédit, ce sont bien ces interactions qui sont les plus matérielles.

Bien que les tests statistiques comme le  $R^2$  ajusté témoignent d'un très bon ajustement du modèles, la contrainte linéaire conduit à des erreurs d'estimation des coefficients : contrairement aux estimations du modèle, le risque EQVOL contribue de manière négligeable aux évolutions de la valeur des actifs, ce risque impacte davantage les portefeuilles comportant des options sur actions, ce qui n'est pas le cas ici.

---

44. autrement dit, de manière croissante vis-à-vis de la valeur d'actif

**Régression Elastic Net :** Les paramètres optimaux de cette régression sont :  $\alpha=0$ ,  $\lambda=0.1$ . Le terme  $\alpha = 0$  signifie que le critère optimal de pénalisation ici est le critère Ridge, le terme  $\lambda = 0.1$  signifie que la contrainte appliquée aux coefficients est très faible, ainsi, le modèle indique que tous les termes ajoutés au modèle lors de la phase d'inclusion apportent une information significative.

L'analyse des coefficients de la régression Elastic Net montre le polynôme final est très similaire au polynôme obtenu par la méthode AICc, en effet, les termes d'interaction sont les mêmes, à l'exception du risque INF qui intervient davantage pour la méthode Elastic Net. Les modèles de régression linéaire permettent de donner un bon aperçu de l'influence de chacune des variables significatives. Cependant, du fait de la colinéarité existante entre les variables et de la non linéarité de certaines relations, certaines estimations sont erronées et cela entraîne des erreurs de prédiction.

En ce qui concerne la régression non linéaire, l'interprétabilité est un enjeu majeur. L'expression des fonctions charnières, des noeuds optimaux choisis pour chacune de ces fonctions et des coefficients associés à chaque fonction du modèle MARS sont présentés en annexe D. Toutefois, sous cette forme, il peut être difficile de comprendre l'influence et l'importance de chacune des variables. De plus, pour le modèle XGBoost, il n'existe pas de méthode permettant d'exprimer et d'interpréter les coefficients du modèle. Pour les modèles de régression non linéaire, des méthodes d'analyse différentes seront utilisées pour mesurer l'impact marginal de chaque variable.

## Importance des variables

L'analyse de l'importance relative des variables pour chacun de ces modèles est effectuée par rapport à un critère mesurant l'apport moyen de chaque variable dans la minimisation de l'erreur de prédiction : critère GCV pour MARS et MSE<sup>45</sup> pour XGBoost.

Les deux modèles indiquent que les risques majeurs pour le portefeuille sont les risques d'action, de crédit et de niveau de la courbe de taux.

Tout d'abord, la régression MARS semble capter correctement l'influence de chacun des facteurs de risques, cependant, les variables moins importantes ont tendance à être négligées, ce qui peut engranger une perte d'information (en annexe D, on peut voir que sur les 10 facteurs de risques utilisés en entrée de modèle, 3 ont été écartés). Pour la régression XGBoost, les rapports d'importance ont été influencés par les corrélations, en effet, cela se voit au niveau de l'importance du risque EQVOL qui est très corrélé au risque ECONV mais qui n'a en réalité pas d'impact sur la valeur des actifs de ce portefeuille. En ce qui concerne les variables importantes, les modèles s'accordent dans l'ensemble. Cependant, ce critère n'est pas suffisant pour clairement visualiser l'impact marginal de chaque variable.

## Dépendance partielle

Les graphiques de dépendance partielle en trois dimensions pour les risques ECONV et CCORP sont présentés ci-dessous :

---

45. RMSE<sup>2</sup>

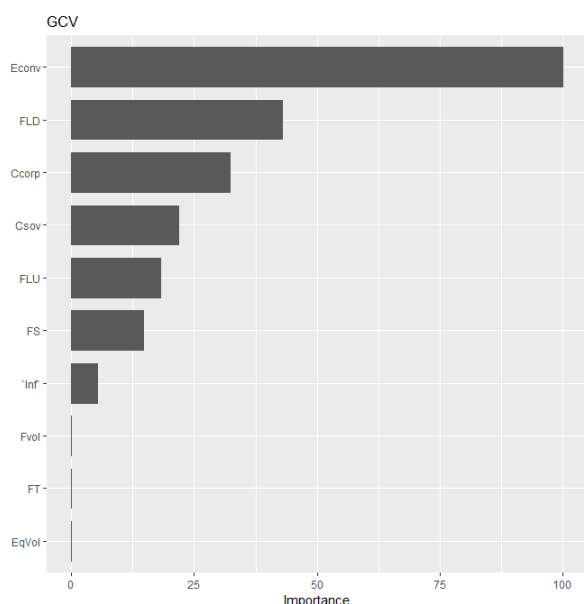


FIGURE 23 – Actif - Régression MARS : Importance des variables

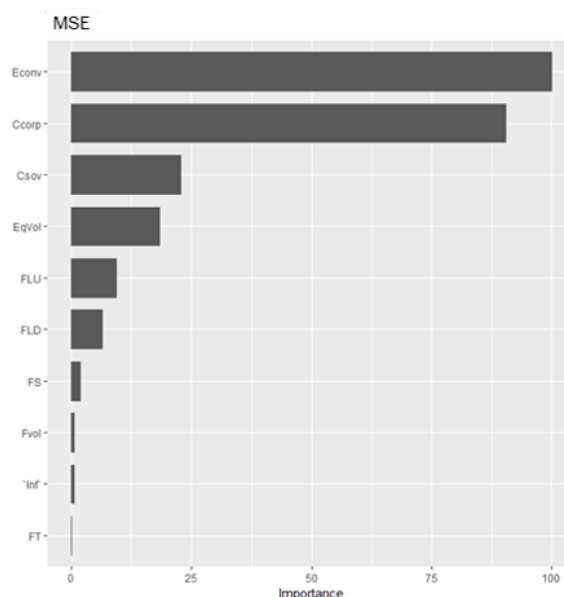


FIGURE 24 – Actif - Régression XGBoost : Importance des variables

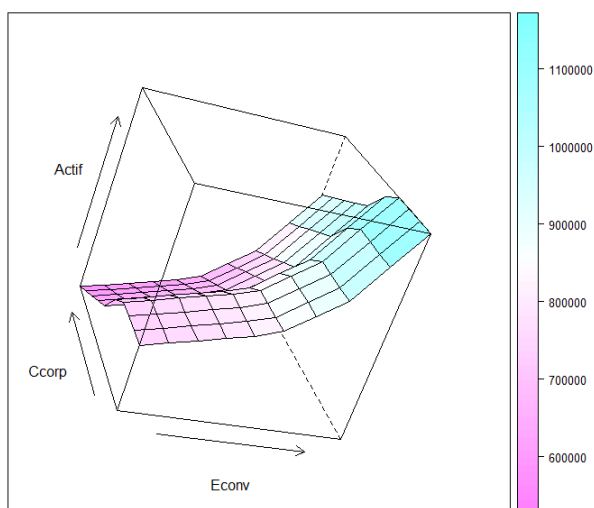


FIGURE 25 – Actif - Régression MARS : Dépendance partielle

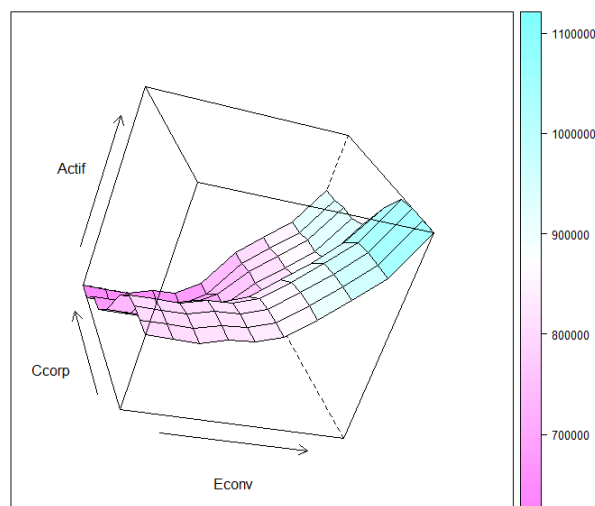


FIGURE 26 – Actif - Régression XGBoost : Importance des variables

L'analyse des graphiques de dépendance partielle de la valeur d'actif, vis-à-vis des risques majeurs permet de conclure que les modèles de régressions non linéaires modélisent des relations relativement similaires entre les variables.

En terme de performance, les meilleurs modèles sont les modèles MARS et XGboost car ils sont rapides d'exécution et donnent un résultat précis et stable pour les valeurs d'actif. En terme d'interprétabilité, le modèle MARS apparaît comme le modèle le plus intéressant car il n'est pas sensible à la corrélation entre les variables, cependant, ce modèle nécessite un contrôle supplémentaire sur les variables moins influentes, afin de mesurer la perte d'information.

### 9.2.4 Estimation du passif - Performance des modèles

Les performances des modèles en fonction des autres indicateurs sont présentées ci-dessous :

		AVIE - PREV - NONAFER				
		PASSIF				
		AICc	AICc/Elastic Net	MARS	XGBoost	Modèle Aviva
Apprentissage	Mean AE	1,70%	1,61%	0,95%	0,82%	0,51%
	Max AE	16,20%	16,40%	13,79%	5,88%	61,95%
	RMSE	11458,55	10961,96	7547,421	5122,489	x
Test	Mean AE	1,34%	1,28%	0,90%	1,42%	0,20%
	Max AE	4,82%	4,77%	3,19%	5,77%	3,95%
	RMSE	8283,091	7951,629	5342,463	8579,98	x

TABLE 5 – Performances des modèles sur la valeur de passif du portefeuille de prévoyance.

La valorisation du passif n'est pas optimale par formule fermée, c'est pourquoi, les modèles sont en général, moins performants que lorsqu'ils modélisent l'actif. En terme de performance, le modèle XGBoost est le seul modèle qui reste à la fois précis et stable. Le modèle MARS est également précis, mais étant donné qu'il doit rester suffisamment flexible pour pouvoir être appliqué à la base test, certaines relations au sein du modèle sont difficilement captés.

Le modèle Aviva reste précis, cependant, il semblerait que la liste des points utilisée pour calibrer les fonctions de perte n'était pas assez exhaustive, cela se reflète par cette valeur extrême de **Max AE**, contrastée par rapport à la moyenne des erreurs qui est très faible.

### 9.2.5 Estimation du passif - Interprétabilité

En ce qui concerne les résultats présentés dans cette partie, ils se limiteront à l'analyse des résidus, des coefficients et à l'importance des variables.

#### Analyse des résidus

- **Indépendance des résidus** : Le test de Durbin Watson présenté en annexe C, indique qu'il n'existe pas d'autocorrélation entre les résidus, d'une observation à l'autre.
- **Normalité des résidus** :

La majorité des points est située sur la droite, cependant, une part non négligeable des points est en dehors, cela signifie que les résidus suivent une loi proche de la loi normale, mais l'adéquation à cette loi est imparfaite.

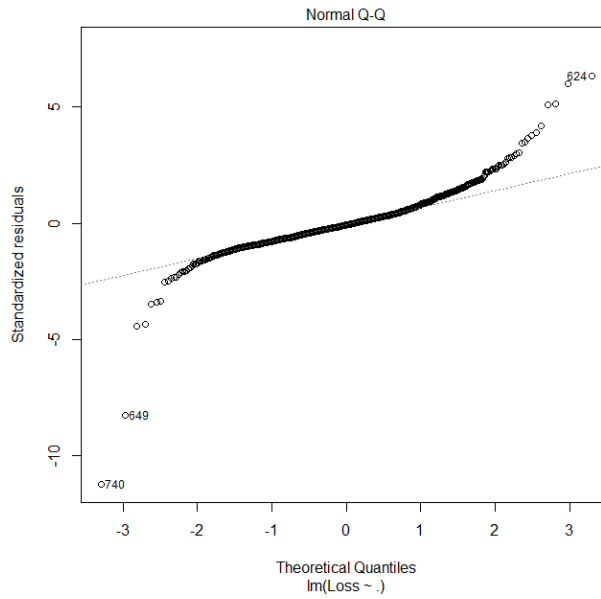


FIGURE 27 – Passif - Régression AICc : Test de normalité des résidus

- Homoscédasticité des résidus :

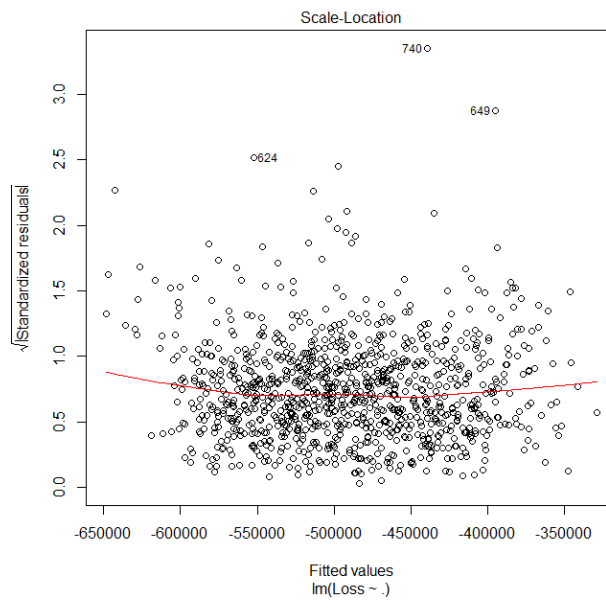


FIGURE 28 – Passif - Régression AICc : Test de variance des résidus

La courbe rouge est "proche" d'une courbe plane, il semble donc que les variances des résidus sont proches.

L'analyse des résidus permet de montrer que les conditions d'application de la régression linéaire ne sont pas parfaitement remplies, mais que les données sont "proches" de l'état idéal. Ces considérations sont pris en compte dans l'analyse des méthodes de régression linéaire. Encore une fois, l'analyse des résidus dans le cas de la **régression Elastic Net** donne un résultat similaire.



## Analyse des coefficients

Les paramètres optimaux pour la régression Elastic Net sont :  $\alpha=0.1$ ,  $\lambda=50$ . Cela signifie que la majorité des termes obtenus après inclusion de variables au sein du modèle, sont conservés.

Les coefficients sont analysés de la même manière que pour les actifs, à partir des sorties de R Studio, présentées en annexe D. L'analyse des coefficients des deux modèles de régression linéaire indique que les variables les plus importantes pour modéliser l'évolution du passif, sont : MASS, FLD, FLU, LMASS, LEXP, X, CCORP, et FS. Par ailleurs, l'analyse des coefficients du modèle MARS reflète la même chose.

En effet, les risques de passif sur le périmètre de la prévoyance, sont les risques inhérents à la protection et notamment liés au fait qu'il y ait des intérêts techniques à prendre en compte dans la tarification et le provisionnement de ces produits.

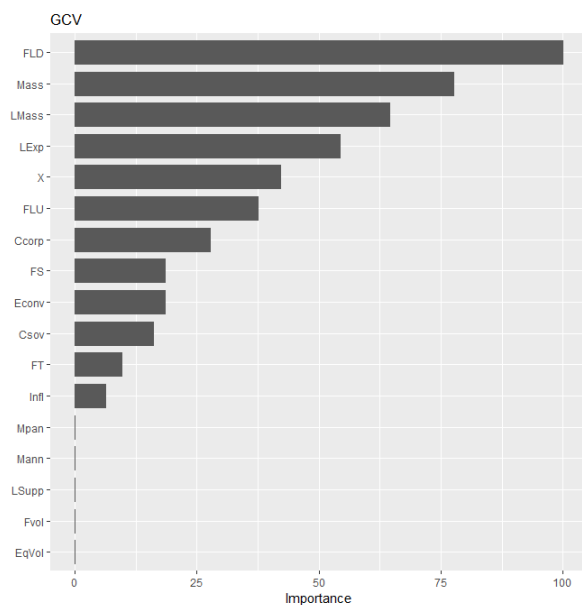


FIGURE 29 – Passif - Régression MARS : Importance des variables

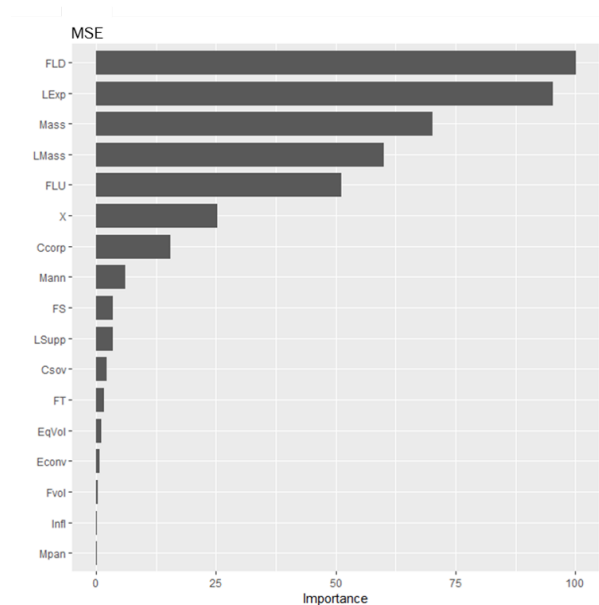


FIGURE 30 – Passif - Régression XGBoost : Importance des variables

## Importance des variables

L'analyse de ces graphiques montre que les variables considérées importantes pour la régression linéaire sont les mêmes que celles qui sont considérées importantes pour les modèles MARS et XGBoost. Encore une fois, le modèle de machine learning XGBoost n'écarte pas l'information pour les risques moins importants, contrairement au modèle MARS. L'analyse des impacts marginaux des différentes variables met en évidence le fait que les deux modèles de régression non linéaire sont en phase.

Compte tenu des différentes analyses, c'est le modèle XGBoost qui paraît le plus adéquat pour approcher la non-linéarité des relations entre les différents risques de passif.

### 9.3 Estimation de la perte globale

#### 9.3.1 Sélection de variables

Etant donné le choix de sélection de variable qui a été fait pour estimer le niveau de passif, dans cette partie, toutes les variables seront également conservées au sein de la base d'apprentissage des modèles.

#### 9.3.2 Performance des modèles

Les performances des modèles en fonction des autres indicateurs sont présentées ci-dessous :

		AVIE - PREV - NONAFER			
		PERTE GLOBALE			
		AICc	AICc/Elastic Net	MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	4,25%	3,85%	2,66%	2,09%
	Max AE	29,13%	26,37%	40,42%	8,42%
	RMSE	17443,69	16089,08	11466,72	7668,369
Test	Mean AE	3,19%	2,86%	2,57%	3,31%
	Max AE	16,09%	14,25%	16,60%	10,02%
	RMSE	13176,42	11977,53	10830,8	8978,58

TABLE 6 – Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille de prévoyance.

Pour estimer la perte globale, tous les facteurs de risques sont conservés au sein de la base d'apprentissage.

D'après la valeur **RMSE**, les modèles les plus stables sont les modèles MARS et XGBoost, cela n'est pas étonnant puisque les modèles de régression linéaire ne sont pas assez flexibles pour pouvoir modéliser les relations entre variables, de manière exhaustive. Cependant, du fait du faible nombre d'observations, le modèle MARS se dégrade beaucoup sur certaines zones peu explorées dans la base de départ, ceci explique les valeurs obtenues pour le **Max AE**. Le modèle XGBosst encore une fois est le modèle avec la meilleure performance, ses valeurs de **Max AE** sont cependant trop élevées pour satisfaire le seuil de matérialité d'erreur absolue relative fixé à 5% chez Aviva.

En effet, les fonctions de perte globales utilisées au sein du modèle interne de Aviva ne doivent pas dépasser le seuil de 5% d'erreur relative absolue, après ajustement. Ainsi, bien que les résultats ne soient pas présentés ici, le processus utilisé par Aviva consistant à construire des fonctions de perte de manière très supervisé reste pertinent jusqu'ici.

Puisque la base d'apprentissage a été construite afin de permettre au modèle d'être particulièrement précis dans un voisinage du SCR, nous regardons les résultats pour les scénarios de tests tirés de la **Smoothing Window** :

		AVIE - PREV - NONAFER PERTE GLOBALE	
		MARS	XGBoost
Smoothing	Mean AE	2,94%	3,17%
Window	Max AE	8,95%	7,14%

TABLE 7 – Performances des modèles dans la région du SCR du portefeuille de prévoyance.

Ainsi, le tableau 7 montre que les modèles XGBoost et MARS sont plus précis pour prédire les pertes dans le voisinage du SCR. Cela nous conforte dans l'idée que le choix des scénarios au sein de la base d'apprentissage a été pertinent.

Pour la suite, les deux méthodes explorées seront la méthode MARS et la méthode XGBoost. Afin de s'assurer de la généralisation de ces deux méthodes, elles seront appliquées à deux portefeuilles différents : le portefeuille de contrats UC de l'entité AER et le portefeuille de contrats Euro de l'entité Epargne Actuelle.

## 10 Analyse critique de la méthode

### 10.1 Tests de sensibilité sur deux portefeuilles de nature et de volume différents

#### 10.1.1 Application au portefeuille de contrats UC de l'entité AER

Le portefeuille de contrats UC de l'entité AER est de magnitude beaucoup plus importante que le portefeuille de contrats de prévoyance.

Le profil de risque du portefeuille de contrats UC est différent du profil de risque du portefeuille de contrats de prévoyance. En effet, tout d'abord, la valorisation du passif des contrats d'épargne UC n'est pas exposée à des garanties de taux d'intérêt. Les contrats UC sont par contre grandement exposés aux risques de garantie Plancher et d'arbitrage présentés à la partie 2.1.1. Le risque d'arbitrage étant par ailleurs fortement corrélé à la performance des unités de compte sous-jacentes aux contrats. En ce qui concerne le portefeuille d'actifs adossé à ces contrats, il est aussi de nature différente car il est composé en majorité d'actifs indexés sur des actions ou des options sur actions. Le risque ECONV est donc d'autant plus matériel, les risques de crédit et de taux sont donc en comparaison moins matériels. Ainsi, cette sensibilité permettra de rendre compte de la capacité d'adaptation de la méthode à un profil de risque et un volume monétaire différents.

#### Estimation de l'Actif

		AER_UC_AFER		
		ACTIF		
		Modèle Aviva	MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	0,10%	1,50%	0,48%
	Max AE	30,97%	9,38%	2,90%
	RMSE	x	116172,1	37138,47
Test	Mean AE	0,06%	1,31%	1,34%
	Max AE	8,38%	6,48%	11,13%
	RMSE	x	95781,84	102921,2

TABLE 8 – Performances des modèles sur la valeur de l'actif du portefeuille UC AER.

#### Estimation du passif

		AER_UC_AFER PASSIF		
		Modèle Aviva	MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	0,09%	1,44%	0,70%
	Max AE	26,16%	7,26%	4,05%
	RMSE	x	103024,1	51226,84
Test	Mean AE	0,04%	1,31%	1,53%
	Max AE	2,56%	7,34%	14,28%
	RMSE	x	91816,42	102023,9

TABLE 9 – Performances des modèles sur la valeur du passif du portefeuille UC AER.

### Estimation de la perte globale

		AER_UC_AFER PERTE GLOBALE	
		MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	2,38%	1,66%
	Max AE	16,01%	12,61%
	RMSE	10969,8	7451,747
Test	Mean AE	2,30%	3,10%
	Max AE	26,53%	30,75%
	RMSE	12658,55	19049,9

TABLE 10 – Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille UC AER.

		AER - UC - AFER PERTE GLOBALE	
		MARS	XGBoost
Smoothing Window	Mean AE	2,36%	3,24%
	Max AE	10,36%	14,15%

TABLE 11 – Performances des modèles dans la région du SCR du portefeuille UC AER.

Le tableau 10 montre une dégradation conséquente de la qualité de prédiction pour certains scénarios, ces scénarios sont présents dans le coeur de la distribution. Ce constat témoigne des limites la stratégie de sélections des scénarios qui consiste à restreindre la sélection de ceux-ci au coeur de la distribution, au profit des queues de distribution. Toutefois, cette stratégie étant une conséquence du nombre faible de scénarios possibles, elle témoigne finalement d'une limite quant au nombre de scénarios fixé pour construire les deux bases principales.

Les résultats du tableau 11 montrent une amélioration au niveau de la **Max AE** cependant, quelques scénarios entraînent des erreurs de prédiction non négligeables. Ces scénarios mettent en évidence des zones matérielles de la distribution de certains risques comme EQVOL qui ne sont pas considérés comme des risques majeurs au niveau Aviva Vie mais qui le sont au niveau du portefeuille de contrats UC de AER. Ceci met en exergue des limites quant à l'efficacité du choix des points qui n'est fait qu'au niveau de l'entité Aviva Vie.

### 10.1.2 Application au portefeuille de contrats Euros de l'entité Epargne Actuelle

Le portefeuille de contrats Euro de l'entité Epargne Actuelle est un portefeuille de magnitude plus faible que celle du portefeuille de contrats de prévoyance.

Le profil de risque du portefeuille de contrats euro est également différent du profil de risque du portefeuille de contrats de prévoyance. Premièrement, contrairement aux contrats de prévoyance, certains contrats dont la valorisation est effectué à l'aide d'une table de mortalité sont exposés au risque de longévité. De plus, les contrats euros sont sujets à une participation aux bénéfices discrétionnaire contrairement aux contrats UC et de prévoyance, ce qui les rend davantage exposés au risques de taux d'intérêt. Par ailleurs, tout comme les contrats UC, ces contrats sont exposés au risque d'arbitrage. En ce qui concerne le portefeuille d'actifs adossés à ces contrats, le profil de risque est similaire à celui du portefeuille d'actif adossé aux contrats de prévoyances.

#### Estimation de l'Actif

		EPARGNE ACTUELLE - EURO - AFER		
		ACTIF		
		Modèle Aviva	MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	0,48%	0,78%	0,57%
	Max AE	58,56%	4,96%	2,79%
	RMSE	x	118,719	82,69877
Test	Mean AE	1,97%	0,67%	1,38%
	Max AE	8,72%	4,65%	6,76%
	RMSE	x	109,8296	200,0768

TABLE 12 – Performances des modèles sur la valeur d'actif du portefeuille Euro.

#### Estimation du passif

		EPARGNE ACTUELLE - EURO - AFER PASSIF		
		Modèle Aviva	MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	0,55%	1,28%	1,19%
	Max AE	61,46%	20,28%	8,87%
	RMSE	x	2316,599	1970,148
Test	Mean AE	0,31%	1,03%	1,97%
	Max AE	7,90%	5,00%	8,72%
	RMSE	x	1802,48	3540,417

TABLE 13 – Performances des modèles sur la valeur de passif du portefeuille Euro.

### Estimation de la perte globale

		EPARGNE ACTUELLE - EURO - AFER PERTE GLOBALE	
		MARS	XGBoost
Apprentissage	Mean AE	1,42%	1,32%
	Max AE	27,06%	6,45%
	RMSE	2307,561	2019,884
Test	Mean AE	1,09%	2,31%
	Max AE	8,06%	8,46%
	RMSE	1794,481	3806,179

TABLE 14 – Performances des modèles sur la perte globale du portefeuille Euro.

L'analyse des résultats des tableaux 12, 13 et 14 montrent que le résultat se généralisent plutôt bien au portefeuille de contrats Euro. Cela peut s'expliquer par le fait que aujourd'hui, la majorité des contrats du portefeuille global de Aviva Vie sont des contrats en fonds euro, ainsi, l'échantillon de 1029 scénarios choisi pour cette étude, semble adéquat pour ce portefeuille. On peut également remarquer que sur ce portefeuille, les modèles XGBoost et MARS sont beaucoup plus précis que le modèle Aviva, notamment en ce qui concerne la prédiction des postes du bilan de manière séparée.

### 10.2 Limites des modèles

Après application et analyse des modèles calibrés, certaines critiques de la méthodologie peuvent être émises. Les alternatives à ces limites n'ont pas été développées en pratique par manque de temps.

Tout d'abord, la méthodologie employée pour sélectionner les scénarios de la base d'apprentissage conserve la dépendance entre les fonctions de perte calibrées pour l'exercice N-1 et les fonctions de perte calibrées pour l'exercice N. En effet, les pertes associés aux 100,000 scénarios probables, à partir desquels la base d'apprentissage pour l'exercice N est calibrée, sont déterminées à partir des fonctions de perte de de l'exercice N-1. Cette

particularité est donc sensible au changement soudain de profil de risque d'une compagnie d'assurance, ce qui n'est pas considéré comme un événement rare. Il est vrai que dans le contexte économique actuel de taux négatifs, certaines entreprises se sont retrouvées soudainement, fortement exposées à la baisse des taux de rachat sur les contrats en fonds euro.

De plus, comme les sensibilités ont pu le montrer, bien que les méthodes de régression non linéaire utilisées soient performantes, la taille de la base est insuffisante pour que le modèle soit adapté à tout type de portefeuille. En effet, le tirage de la base d'apprentissage a été effectué dans une logique de choix de scénarios se concentrant sur les zones de la distribution les plus matérielles pour le profil de risque de Aviva Vie. Cependant, certaines entités au sein de Aviva Vie ont un profil de risque sensiblement différent et comme les sensibilités ont pu le montrer, la base d'apprentissage est donc moins adaptée et des erreurs importantes apparaissent au niveau de la base de test.

Pour se rendre compte de cela, il aurait été préférable de sélectionner plusieurs échantillons de scénarios adaptés à différents portefeuilles et mesurer ainsi, la sensibilité de la méthode aux différents profils de risques.

La méthode de conversion des indices de risques en facteurs de risques est également discutable. En effet, ce n'est statistiquement pas précis de sélectionner des lois candidates afin de calibrer la "meilleure" sur des données empiriques. Une alternative plus précise serait de s'approcher la distribution des indices de risques par la méthode de bootstrap (le lecteur peut se référer à [9] pour approfondir le sujet).

Enfin, la démarche ici est simplifiée car elle néglige certains aspects importants du calcul véritable du SCR. En effet, la marge pour risque, les affaires nouvelles ainsi que l'allègement fiscal sont des quantités indispensables en pratique pour une estimation convenable du SCR. Pour palier cela, une option serait d'ajouter des add-ons après obtention du SCR.<sup>46</sup>

### 10.3 Perspectives de l'étude

Un axe majeur d'amélioration de la méthode actuelle serait de chercher à trouver une méthodologie de tirage de la base d'apprentissage qui permettrait aux modèles de pouvoir se généraliser au maximum à tous les profils de risques du portefeuille. Une première alternative serait de sélectionner un profil de risque, de construire un modèle basé sur ce profil de risque et de s'intéresser aux scénarios ayant présentant des erreurs d'estimations significatives au niveau des bases de test. Cela permettrait ainsi de localiser les zones mal prédites et de comprendre ainsi les lacunes de chacun des profils de risques. Une deuxième alternative plus directe, qui a d'ailleurs commencée à être explorée en entreprise mais qui ne sera pas développée ici, consiste à accélérer le processus de génération des données d'entrées du modèle ALM pour pouvoir accélérer le processus général et ainsi permettre de générer davantage de scénarios.

Un deuxième axe d'amélioration majeur serait de réviser les méthodes de régression linéaire choisie en sélectionnant des méthodes permettant de se débarrasser de la colinéarité entre les variables, en ayant recours par exemple à la **régression orthogonale**, le lecteur peut en apprendre davantage sur cette méthode dans [24].

---

46. **capital add-on** : capital supplémentaire exigé par le superviseur dans des circonstances exceptionnelles (en cas de constatation d'une défaillance sur les aspects quantitatifs ou qualitatifs).



Un dernier axe d'exploration serait d'utiliser les performances à la fois précises et rapides des méthodes alternatives, en adaptant la méthodologie développée à une approche infra-annuelle. Cela permettrait en outre, de faciliter et fiabiliser les reportings aux autorités d'assurance comme l'ACPR.

## 11 Conclusion générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la recherche d'une méthode alternative du calibrage de la fonction de perte globale utilisée par Aviva au sein de son modèle interne. Celle-ci est utilisée pour estimer le SCR mais également pour des travaux divers comme la mesure de l'appétit au risque.

Le but de cette méthode alternative est de prédire une projection du bilan sur un horizon de 1 an, en tenant compte de la co-occurrence des risques assurantiels et de marché. L'idée est d'utiliser des approches novatrices performantes et permettant de se débarrasser des travers de la méthode actuelle qui est trop coûteuse en temps d'exécution et trop exposée au risque opérationnel.

Au départ, on considère 17 facteurs de risques pertinents et 100,000 scénarios probables<sup>47</sup>, à chaque scénario est associée une évolution du bilan par rapport à son état de départ. A partir de cette base, on sélectionne un échantillon de scénarios par tirage. Ce tirage s'effectue parmi cet ensemble de scénarios probables. Le volume de l'échantillon étant limité, ce dernier est choisi de manière à refléter les relations importantes entre les risques, ainsi que les impacts majeurs de ces relations sur l'état final du bilan. Il en ressort 1029 scénarios pertinents qui constituent donc la base d'apprentissage. Après sélection des scénarios, on s'intéresse aux facteurs de risques qui sont ici, les variables explicatives de la perte. Une sélection des facteurs de risques est faite pour la modélisation de l'actif, du passif, puis de la perte globale. On retient :

- 10 facteurs de risques qui impactent l'actif, ces facteurs sont sélectionnés par jugements d'expert ;
- l'ensemble des facteurs de risques disponibles pour modéliser le passif, soit 17 variables ;
- l'ensemble des facteurs de risques disponibles pour modéliser la perte globale, soit 17 variables ;

Enfin, la dernière étape consiste en le calibrage, le test et l'interprétation des méthodes de régression linéaire et non linéaire, puis en la comparaison des différents modèles. Les modèles retenus, sont les modèles de régression non-linéaire **MARS (Régression Multivariée par Spline Adaptative)** et **XGBoost**. Ces modèles présentent des performances satisfaisantes en ce qui concerne la prédiction des postes du bilan, tout en réduisant considérablement le temps d'exécution. Toutefois, ces modèles présentent également des limites d'adaptation à des portefeuilles de profils de risque différents, en raison du faible nombre d'observations au sein de la base d'apprentissage. En effet, ces modèles de régression non linéaire se généralisent de manière optimale lorsque la base de donnée est exhaustive et que le volume des données est conséquent, ils se généralisent moins bien lorsque ce n'est pas le cas.

Par ailleurs, les performances des modèles révèlent d'autres champs d'application possibles pour ces derniers, comme la détermination du capital réglementaire de manière infra-annuelle.

---

47. Chaque scénario représente une réalisation probable de ces 17 facteurs de risques

## Références

- [1] A.Koursaris. *Proxy models, applications in economic capital and erm. Entreprise Risk Management Symposium.*, 2015.
- [2] A.Koursaris et P.Murphy. *Using least squares Monte Carlo for capital calculation. The Actuarial profession, Life Conference and Exhibition.*, 2011.
- [3] A.Messoussi. *Application d’algorithmes de machine learning pour l’estimation du ratio de couverture d’un assureur-vie détenteur d’un produit épargne. Mémoire Institut des Actuaire.*, 2017.
- [4] Sylvain Arlot. *Validation croisée*, 2018.
- [5] Atlas Magazine. *Les risques spécifiques aux compagnies d’assurance*. Atlas Conseil International, 2020.
- [6] Aviva France. *Loss function fitting and stress selection methodology*, 2016.
- [7] EIOPA. *Directive 2009/138/ce du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009 sur l’accès aux activités de l’assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*, 2009.
- [8] EIOPA. *The underlying assumptions in the standard formula for the solvency capital requirement calculation*, 2014.
- [9] Emmanuel Flachaire. Les méthodes du bootstrap dans les modèles de régression. *Économie et prévision*, 142 :183–194, 2001.
- [10] Jerome H Friedman and Jacqueline J Meulman. Multiple additive regression trees with application in epidemiology. *Statistics in medicine*, 22(9) :1365–1381, 2003.
- [11] Frédéric Leroy. *Cours sur les Produits et les Stratégies de Taux, Chapitre 3 : Pricing Trading Obligataire*, 2013.
- [12] Theo Gasser and Hans-Georg Müller. Kernel estimation of regression functions. In *Smoothing techniques for curve estimation*, pages 23–68. Springer, 1979.
- [13] Brandon M. Greenwell. pdp : An R Package for Constructing Partial Dependence Plots. *The R Journal*, 9(1) :421–436, 2017.
- [14] Quentin Guibert, Guillaume de Kervénoaël, and Montassar Tammar. Simbel : Calculate the best estimate in life insurance with monte-carlo techniques. In *5ème conférence R in Insurance*, 2017.
- [15] Clifford M Hurvich and Chih-Ling Tsai. A corrected akaike information criterion for vector autoregressive model selection. *Journal of time series analysis*, 14(3) :271–279, 1993.
- [16] JY Baudot. *Le critère AIC*.
- [17] Laurent Devineau, Stéphane Loisel. *Construction d’un algorithme d’accélération de la méthode des “simulations dans les simulations” pour le calcul du capital économique Solvabilité II*. Bulletin Français d’Actuariat, Institut des Actuaire., 2009.
- [18] Emanuel Mönch. Term structure surprises : the predictive content of curvature, level, and slope. *Journal of Applied Econometrics*, 27(4) :574–602, 2012.
- [19] Kan Nishida. *Introduction to extreme gradient boosting in exploratory*, 2019.
- [20] Pandat Finance. *Les produits structurés – Les structurés indexés sur les taux – Partie 2*, 2017.
- [21] Ning Qian. On the momentum term in gradient descent learning algorithms. *Neural networks*, 12(1) :145–151, 1999.
- [22] German Rodriguez. *Smoothing and non-parametric regression*. Technical report, Working paper, 2001.

- [23] Sebastian Ruder. An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv preprint arXiv :1609.04747*, 2016.
- [24] R Tomassone. Une méthode d’investigation : la régression orthogonale. In *Annales des Sciences Forestières*, volume 24, pages 233–258. EDP Sciences, 1967.
- [25] Tower Watson. *Economic capital for life insurers, the ‘state of the art’ – an overview. Insights.*, 2013.
- [26] Nathalie Vandal. La régression non paramétrique multidimensionnelle. théorie et application à une étude portant sur la densité mammaire. 2005.
- [27] WikiStat. *Sélection de modèle en régression linéaire*.
- [28] Jörg Worlitschek, Thomas Hocker, and Marco Mazzotti. Restoration of psd from chord length distribution data using the method of projections onto convex sets. *Particle & Particle Systems Characterization*, 22(2) :81–98, 2005.
- [29] Zheng Zhang, Zhihui Lai, Yong Xu, Ling Shao, Jian Wu, and Guo-Sen Xie. Discriminative elastic-net regularized linear regression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 26(3) :1466–1481, 2017.

**Troisième partie**

**Annexes**

## A Régression linéaire

La régression linéaire a pour but de déterminer la fonction linéaire en les variables d'entrée qui est la plus à même de répliquer la perte engendrée à partir d'un scénario quelconque. Le modèle se présente comme ceci :

$$Y = X\beta + E \quad (14)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{pmatrix}, \text{ le vecteur des observations.}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{pmatrix}, \text{ le vecteur des paramètres obtenus par la méthode des moindres carrés.}$$

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon_n \end{pmatrix}, \text{ le vecteur des erreurs d'estimation.}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1X_1^{(1)} & \dots & X_1^{(p)} \\ \dots & & \\ \dots & & \\ \dots & & \\ 1X_n^{(1)} & \dots & X_n^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \text{ la matrice de scénarios. Chaque ligne correspond à un scénario et } X_i^{(j)}$$

correspond au  $j^e$  facteur de risque du  $i^e$  scénario.

### Hypothèses

Certaines hypothèses sont inhérentes à l'utilisation de cette méthode :

1. Dans le cas d'une régression multiple, il faut qu'il y ait plus d'observations que de variables, c'est à dire  $n > p + 1$ .
2. Dans le cas d'une régression multiple, il y a indépendance entre les résidus et chaque variable explicative.
3. Le modèle est rendu instable par la présence de colinéarité entre deux variables.
4. La distribution des  $E_i$  et  $Y_i$  est une loi normale centrée et de variance constante. Les  $E_i$  et  $Y_i$  doivent par ailleurs être indépendants.

### Méthode des moindres carrés

Pour modéliser  $Y$  comme une fonction linéaire de  $X \in \mathbb{R}^{n \times p+1}$ , nous pouvons utiliser la régression linéaire en résolvant le problème des moindres carrés :

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i^T \beta)^2$$

*Démonstration : On cherche à minimiser*

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i^T \beta)^2 = \sum_{i=1}^n E_i^2$$

*L'équation devient alors à minimiser :*

$$E^T E = (Y - X^T \beta)^T (Y - X^T \beta) = Y^T Y - 2Y^T X \beta + \beta^T X^T X \beta$$

*En dérivant par rapport à  $\beta$  et on cherche la valeur de  $\beta$  qui permet d'annuler la valeur de cette dérivé, on obtient :*

$$\frac{\partial E^T E}{\partial \beta} = -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0$$

*La solution du problème s'écrit alors :*

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X Y \tag{15}$$

Etant donné le vecteur de coefficients optimaux  $\hat{\beta}$ , nous pouvons alors estimer une prédiction de la variable à expliquer pour toute valeur de  $X$ .

Cependant, cette solution n'est bien définie que lorsque les variables prédictives, à savoir les colonnes de  $X$ , sont linéairement indépendantes et que le nombre d'observation est supérieur au nombre de variables. En effet lorsque l'hypothèse 1. ou l'hypothèse 2. n'est vérifiée, cela rend compliquée voir impossible l'inversion de la matrice  $X$ .

## B Validation croisée

La meilleure façon de mesurer la précision d'un estimateur est d'utiliser un échantillon n'ayant pas servi à le calibrage de l'estimateur et de minimiser l'erreur de prédiction relative à cet échantillon.

Dans ce cadre, la validation croisée à K blocs est une méthode d'estimation de la fiabilité d'un modèle, en donnant un aperçu de sa capacité à être appliqué à de nouvelles données. Cette méthode donne une vision générale de la validation croisées, les variantes suivent le même principe.

### Principe de la méthode

Soit le couple  $(\lambda, \mu)$  de paramètres à estimer. La méthode peut se généraliser à d'autres dimensions.

Soit N le nombre de jeux de paramètres à tester (on teste N valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$ ). Soit K le nombre d'échantillons.

La base d'apprentissage est divisée en K échantillons<sup>48</sup>, un des K échantillons est sélectionné pour être utilisé comme échantillon de test, il servira donc à tester le modèle qui aura été calibré sur l'ensemble d'apprentissage, formé par les K-1 autres échantillons. Il y a plusieurs moyens de mesurer la performance du modèle, ici le moyen retenu est la somme des carrés des erreurs d'estimations ou "résidus", notée **SSR**. Cette opération est répétée K fois, en changeant à chaque fois l'échantillon de test, de sorte que chacun des K échantillons ait fait office de bloc de test lors d'une itération.

Ainsi, on récupère la moyenne de la performance de prédiction pour chacun des couples  $(\lambda_n, \mu_n)$  :

$$SSR_n = \frac{\sum_{k=1}^K SSR_{k,n}}{K}, 1 < n \leq N$$

$$SSR_{k,n} = [Y_{(K)} - F(X_{(k)}, \lambda_n, \mu_n)]^2, 1 < n \leq N$$

$Y_{(K)}$  et  $X_{(k)}$  désignent les données de test de l'échantillon K.

### Validation croisée généralisée

Dans certains cas, la validation croisée n'est pas envisageable car elle apparaît trop coûteuse en temps. Le critère alternatif utilisé peut donc alors être le GCV qui se présente comme ceci :

$$GCV(\lambda) = \frac{1}{K} \frac{[\sum_{i=1}^n Y_i - H(X_i)]^2}{1 - \frac{H(\lambda)}{n}}$$

Où H désigne une fonction dépendant du paramètre de lissage  $\lambda$  et qui varie selon le type de régression. Cette méthode est aussi appelée "somme des résidus au carré pénalisée". Pour plus d'informations sur cette méthode, le lecteur peut se référer à [4].

---

48. Dans le cas de la validation à K blocs, les échantillons sont de même taille.



## C Tests de Durbin Watson

```
> dwtest(model5_final)

Durbin-watson test

data: model5_final
DW = 2.0226, p-value = 0.6426
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

FIGURE 31 – Actif - Régression AICc : Test Durbin Watson

```
Durbin-watson test

data: model5_final
DW = 2.0126, p-value = 0.5823
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

FIGURE 32 – Passif - Régression AICc : Test Durbin Watson

## D Analyse des coefficients

```

Residuals:
  Min      1Q  Median      3Q      Max
-52589 -6380   353   6566  68251

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 834296.9      818.8  1018.870 < 2e-16 ***
Econv       150171.3      2882.8   52.093 < 2e-16 ***
Ccorp      -18167.5       833.6  -21.794 < 2e-16 ***
Csov       -13360.9       737.1  -18.126 < 2e-16 ***
FLU        -33349.2      1412.0  -23.618 < 2e-16 ***
FLD        -40065.8      1610.6  -24.877 < 2e-16 ***
FS          14055.0       935.5   15.024 < 2e-16 ***
Eqvol      10038.3       1676.1    5.989 2.93e-09 ***
Fvol      -13069.9      1625.4   -8.041 2.48e-15 ***
`Inf`       8713.2       1212.9    7.184 1.32e-12 ***
Econv_Econv 50331.2      3960.4   12.709 < 2e-16 ***
Ccorp_Ccorp  713.5        406.5    1.755 0.07956 .
Ccorp_Csov -11741.3     1340.8   -8.757 < 2e-16 ***
Csov_Csov   -777.6        186.6   -4.168 3.34e-05 ***
Csov_Eqvol  4041.1       1616.9    2.499 0.01260 *
Ccorp_Fvol  6357.1       1968.2    3.230 0.00128 **
Econv_Ccorp  6585.8       3148.6    2.092 0.03672 *
Econv_FS   -4262.8       2982.0   -1.430 0.15317
Econv_FLU -16643.5      4247.0   -3.919 9.49e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 11600 on 1010 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9694,    Adjusted R-squared:  0.9689
F-statistic: 1778 on 18 and 1010 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

FIGURE 33 – Actif - Coefficients de la régression AICc.

```

26 x 1 sparse Matrix of class "dgMatrix"
      s0
(Intercept) 834453.0639
Econv      149193.1941
Ccorp     -18004.3218
Csov      -13395.2886
FLU       -33230.9433
FLD       -39981.0074
FS        13989.9100
FT        -486.8702
Eqvol     9845.6556
Fvol     -13314.1204
Inf       7783.2803
Econv_Econv 50097.3073
FT_FT     -1408.9756
Ccorp_Ccorp 667.3448
Ccorp_FLD 1079.5432
Ccorp_Csov -11697.0170
FLU_Fvol  1116.7465
Csov_Csov -810.5897
Csov_Fvol 697.3149
Csov_Eqvol 3803.8183
Ccorp_Fvol 6028.4465
Econv_Inf -2061.3434
Econv_Ccorp 5995.1372
Econv_FS  -4483.7243
Econv_FLU -13874.7831
Inf_Inf_Inf 1539.3370

```

FIGURE 34 – Actif - Coefficients de la régression Elastic Net.

```

coefficients
(Intercept)      822704.87
h(-0.343405-Econv) -42978.38
h(Econv- -0.343405) 129206.33
h(Econv-0.522844) 121393.99
h(Ccorp- -0.735199) -39112.89
h(Ccorp-1.30283) 25635.65
h(-0.758844-Csov) -2357.88
h(Csov- -0.758844) -15874.66
h(0.434179-FLU) 36759.39
h(FLU-0.434179) -28041.17
h(-0.0586201-FLD) 37821.13
h(0.244011-FS) -11381.69
h(FS-0.244011) 16844.63
h(0.320102-Inf) -7451.56
h(Inf-0.320102) 12615.68

Selected 15 of 17 terms, and 7 of 10 predictors
Termination condition: RSq changed by less than 0.001 at 17 terms
Importance: Econv, FLD, Ccorp, Csov, FLU, FS, `Inf`, FT-unused, Eqvol-unused, Fvol-unused
Number of terms at each degree of interaction: 1 14 (additive model)
GCV 99908859 RSS 97093157275 GRSq 0.9769096 RSq 0.9781504

```

FIGURE 35 – Actif - Coefficients de la régression MARS.

(Intercept)	-478186.46	1057.79	-452.061	< 2e-16	***
Econv	-8615.88	2833.46	-3.041	0.002423	**
Ccorp	13577.30	922.71	14.715	< 2e-16	***
Csov	-7716.30	1021.37	-7.555	9.64e-14	***
FLU	52240.95	1582.63	33.009	< 2e-16	***
FLD	59684.71	1852.53	32.218	< 2e-16	***
FS	-10472.99	843.16	-12.421	< 2e-16	***
FT	5891.77	859.61	6.854	1.27e-11	***
Eqvol	-519.42	2229.30	-0.233	0.815812	
Fvol	892.30	1546.48	0.577	0.564080	
Inf1	-6433.15	1447.14	-4.445	9.78e-06	***
Mann	1823.73	1427.75	1.277	0.201784	
Mass	-70190.92	1655.21	-42.406	< 2e-16	***
Mpan	735.92	856.15	0.860	0.390234	
X	-21677.48	837.04	-25.898	< 2e-16	***
LExp	-27898.67	1667.11	-16.735	< 2e-16	***
LSupp	4154.49	1570.15	2.646	0.008278	**
LMass	-32041.00	1423.90	-22.502	< 2e-16	***
LMass_LMass	-28004.57	867.41	-32.285	< 2e-16	***
FLD_LMass	-21543.91	2103.99	-10.240	< 2e-16	***
LExp_LSupp	-13601.99	3175.32	-4.284	2.02e-05	***
FLU_LMass	-9499.41	1994.75	-4.762	2.21e-06	***
Ccorp_Csov	7548.82	1343.83	5.617	2.53e-08	***
X_X	-283.95	944.03	-0.301	0.763645	
Ccorp_LSupp	-19961.61	3040.87	-6.564	8.47e-11	***
Econv_Csov	7940.96	2943.32	2.698	0.007097	**
FLU_Mass	-8634.62	2820.08	-3.062	0.002260	**
Econv_Ccorp	-11058.24	3310.60	-3.340	0.000869	***
Econv_FS	-72.01	3875.51	-0.019	0.985178	
Ccorp_Mass	-4146.01	2988.86	-1.387	0.165712	
Mass_LSupp	-4546.92	3323.35	-1.368	0.171573	
Fvol_Inf1	-4884.24	2251.02	-2.170	0.030264	*
Csov_FS	3685.44	1702.12	2.165	0.030613	*
Fvol_LMass	2709.06	2189.91	1.237	0.216360	
Ccorp_FT	1583.93	1350.14	1.173	0.241017	
FS_Mpan	-5119.75	2214.18	-2.312	0.020971	*
Fvol_LSupp	12592.21	4503.00	2.796	0.005269	**
Eqvol_LMass	-4090.48	2496.25	-1.639	0.101609	
Ccorp_LMass	-10952.59	1427.10	-7.675	4.01e-14	***
Csov_Mann	4247.89	1770.64	2.399	0.016623	*
Econv_Mass	-13193.64	4748.59	-2.778	0.005567	**
Econv_LSupp	-12581.18	6800.00	-1.850	0.064591	.
FLU_Eqvol	-10006.97	3708.51	-2.698	0.007088	**
Csov_FLU	5549.23	1513.86	3.666	0.000260	***
Econv_X	1320.92	2552.90	0.517	0.604982	
FS_Fvol	-10545.04	3450.77	-3.056	0.002305	**
Econv_LMass	-12300.27	3853.85	-3.192	0.001460	**
Ccorp_Mann	-7450.13	2308.15	-3.228	0.001289	**
Econv_LExp	-8157.72	4593.30	-1.776	0.076044	.
FLD_Eqvol	-6465.75	3701.74	-1.747	0.081008	.
Ccorp_Ccorp	-719.47	418.36	-1.720	0.085798	.
Ccorp_LExp	-9192.39	2125.42	-4.325	1.68e-05	***
Econv_Econv	-7392.25	4561.16	-1.621	0.105406	
LMass_LMass_LMass	725.14	1104.51	0.657	0.511643	

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10300 on 975 degrees of freedom  
Multiple R-squared: 0.9735, Adjusted R-squared: 0.9721

FIGURE 36 – Passif - Coefficients de la régression AICc.

```

54 x 1 sparse matrix of class "dgCMatrix"
      s0
(Intercept) -478197.41076
Econv       -8386.78955
Ccorp       13228.30297
Csov        -7648.15000
FLU         51477.52777
FLD         58835.84413
FS          -10378.00593
FT           5840.15799
EqVol      -0.00000
Fvol        791.25994
Infl        -5602.73876
Mann         847.57243
Mass        -68594.61920
Mpan         763.21623
X           -21441.01635
LExp        -28307.33425
LSupp        4384.66329
LMass       -31054.21237
LMass_LMass -27905.91911
FLD_LMass   -20059.18276
LExp_LSupp -11403.09725
FLU_LMass   -10245.98982
Ccorp_Csov  7374.28330
X_X         -225.40656
Ccorp_LSupp -16503.20208
Econv_Csov  7524.49586
FLU_Mass    -9335.55184
Econv_Ccorp -9688.08271
Econv_FS    16.89723
Ccorp_Mass  -3096.41681
Mass_LSupp -4350.36872
Fvol_Infl  -4520.90296
Csov_FS     3220.02462
Fvol_LMass  2825.95982
Ccorp_FT    1647.50841
FS_Mpan     -4931.16994
Fvol_LSupp  9796.37055
EqVol_LMass -2626.04432
Ccorp_LMass -10519.48943
Csov_Mann   3938.77672
Econv_Mass  -10726.26436
Econv_LSupp -7908.02667
FLU_EqVol   -9045.61608
Csov_FLU    5552.01436
Econv_X     1281.93768
FS_Fvol     -9087.07273
Econv_LMass -9303.01432
Ccorp_Mann  -7339.34379
Econv_LExp  -5850.93198
FLD_EqVol   -6488.34558
Ccorp_Ccorp -683.71958
Ccorp_LExp  -8323.06011
Econv_Econv -5630.98095
LMass_LMass_LMass 240.59992

```

FIGURE 37 – Passif - Coefficients de la régression Elastic Net.

	coefficients
(Intercept)	-519634.36
h(ccorp- -0.502277)	25034.76
h(csov- -1.24546)	-7858.56
h(-0.0444817-FLD)	-71310.47
h(FLD- -0.0444817)	1341157.40
h(-0.207799-FS)	9765.19
h(FS- -0.207799)	-10556.25
h(0.67267-FT)	-6900.92
h(-0.259785-Infl)	11151.79
h(Infl- -0.259785)	-7719.78
h(0.479921-Mass)	88948.06
h(Mass-0.479921)	-59617.80
h(0.313099-X)	21231.03
h(X-0.313099)	-24170.86
h(0.0365412-LExp)	44182.36
h(LExp-0.0365412)	-32248.44
h(LMass-0.0955645)	-51272.70
h(1.01284-FLU) * h(FLD- -0.0444817)	-1235874.30
h(FLU-1.01284) * h(FLD- -0.0444817)	1276951.74
h(-0.17899-FLD) * h(LMass-0.0955645)	34843.14
h(FLD- -0.17899) * h(LMass-0.0955645)	-89351.60
h(Mass- -0.537944) * h(LExp-0.0365412)	20795.24
h(0.479921-Mass) * h(LMass- -0.105861)	-27728.76
h(0.479921-Mass) * h(-0.105861-LMass)	-12866.01
h(0.0330081-LExp) * h(LMass-0.0955645)	-33837.80
h(LExp-0.0330081) * h(LMass-0.0955645)	16101.24
h(-0.401244-Econv) * h(ccorp- -0.502277) * h(FS-0.244011)	-87740.36

Selected 27 of 35 terms, and 12 of 17 predictors  
 Termination condition: Reached nk 35  
 Importance: FLD, Mass, LMass, LExp, X, FLU, Ccorp, Econv, FS, Csov, FT, Infl, Eqvol-unused, Fvol-unused, Mann-unused, Mpan-unused, LSupp-unused  
 Number of terms at each degree of interaction: 1 16 9 1  
 GCV 65039228    RSS 58615513853    GRSq 0.9829132    RSq 0.9850057  
 ~ |

FIGURE 38 – Passif - Coefficients de la régression MARS.

## E Facteurs de risques

Code risque	Nom du risque	Signification
ECONV	Action	C'est le risque de subir un impact financier adverse, causé par des mouvements au niveau du marché des actions. Cela comprend les mouvements au niveau du prix d'actions, de l'indice d'actions, des actions à terme...
EQVOL	Volatilité implicite des actions	C'est le risque de subir un impact financier adverse, causé par des mouvements au niveau de la volatilité implicite des actions.
P	Immobilier	C'est le risque de subir un impact financier adverse, causé par des évolutions de la valeur de marché d'un bien immobilier ou d'un portefeuille de biens commerciaux immobiliers.
FL (FLU/FLD)	Niveau de la courbe de taux	C'est le risque de subir un impact financier adverse, résultant des variations du niveau de la courbe de taux d'intérêts.
FS (FSU/FSD)	Pente de la courbe de taux	C'est le risque de subir un impact financier adverse, résultant des variations de la pente de la courbe de taux d'intérêts.
FT	Courbure de la courbe de taux	C'est le risque de subir un impact financier adverse, résultant des variations de la courbure de la courbe de taux d'intérêts.
FVOL	Volatilité des taux	C'est le risque de subir un impact financier adverse, causé par des variations de la volatilité implicite des taux d'intérêts.
INF	Inflation	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à des variations au niveau de l'indice d'inflation.
CCORP, CSOV	Crédit	C'est le risque de subir un impact financier adverse au niveau des actifs sujets à un risque de crédit, lié à une baisse de la notation de la contrepartie, à des défauts et des variations au niveau du spread de crédit relatif à la courbe de taux sans risque. On distingue deux types de risque, le "Credit Corporate (CCORP)" qui désigne les actifs rattachés à une ou plusieurs entreprises et le "Credit Sovereign(CSOV)" qui désigne les actifs rattachés à l'Etat.
MANN	Longevité	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à une diminution de la mortalité au-dessus de ce qui était estimé, au sein des personnes ayant souscrit à des contrats d'assurance vie.
MASS	Mortalité	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à une augmentation, dans le temps, supérieure à celle estimée, de la mortalité au sein des personnes ayant souscrit à des contrats d'assurance vie.

TABLE 15 – facteurs de risques - Partie I

<b>Code risque</b>	<b>Nom du risque</b>	<b>Signification</b>
MPAN	Mortalité due à une pandémie	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à des changements drastiques et soudain au niveau de la mortalité de personnes ayant souscrit à des assurances vie, causé par un évènement de catastrophe rare.
LEXP	Augmentation des rachats	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à une augmentation du taux de rachat ou du taux de d'annulation de garantie la part de l'assureur, supérieure à ce qui était prédit pour des produits exposés à ce risque.
LSUPP	Diminution des rachats	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à une diminution du taux de rachat ou du taux de d'annulation de garantie la part de l'assureur, supérieure à ce qui était prédit pour des produits exposés à ce risque.
LMASS	Rachat massif	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à une augmentation drastique au niveau des terminaisons ou rachats de contrats pour des produits exposés à ce risque, ceci dû à un évènement rare.
X	Frais	C'est le risque de subir un impact financier adverse, lié à des dépenses liés à l'activité d'assurance ou de réassurance et qui sont bien plus élevées que le montant dépenses attendue.

TABLE 16 – facteurs de risques - Partie II