

**Mémoire présenté  
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : AGBA Fabrice

Titre : Structuration d'un *Cat Bond* indiciel

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Signature *Entreprise :*

Nom : AXA Global Re

Signature : Jérôme CRETEN 

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : JOVET Stella 

Signature :


Invité :

Nom :


Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de diffusion  
de documents actuariels (après  
expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



## Résumé

**Mots-clés** : risques catastrophe, réassurance, capacité, titrisation, *Cat Bonds*, *Payout Factors*, risque de base, optimisation non-linéaire.

Dans les années 1990, des ouragans particulièrement extrêmes ont frappé les Etats-Unis et ont mis en lumière la capacité limitée qu'offrait le marché de l'assurance et de la réassurance contre les catastrophes naturelles. Dans ce contexte, la titrisation des risques d'assurance ou *Insurance-Linked Securities* (ILS) est apparue comme une solution pour pallier le manque de capacité.

Les ILS résultent de la convergence entre l'industrie de l'assurance et le marché des capitaux. Les obligations catastrophe, ou *Cat Bonds* en sont la forme la plus répandue et ont bénéficié d'un intérêt croissant de la part des investisseurs, qui y voient un outil de diversification de leurs portefeuilles.

Dans ce cadre, on constate une appétence particulière du marché des capitaux pour la transparence qu'apportent les *Cat Bonds* indiciels. En effet, cette forme d'obligation catastrophe repose sur un principe de réplication des pertes de la cédante : le montant de l'indemnisation est calculé en appliquant des coefficients, appelés *Payout Factors*, à des pertes de marché.

Ce fonctionnement entraîne un risque de base pour la cédante, dont les pertes réelles peuvent différer des indemnisations reçues.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une approche permettant de structurer un *Cat Bond* indiciel devant être émis par le Groupe AXA.

L'approche retenue se divise en trois étapes.

La **première étape** consiste à déterminer la capacité optimale à émettre au regard d'indicateurs de risque et de rentabilité.

La **deuxième étape** réside dans la calibration d'une tranche optimale sur laquelle placer la capacité.

La **dernière étape** traite de l'optimisation des *Payout Factors* dans l'objectif de minimiser le risque de base à l'aide d'un algorithme de type Quasi-Newton.

## Abstract

**Keywords:** catastrophe risks, reinsurance, capacity, securitization, Cat Bonds, Payout Factors, basis risk, non-linear optimization.

In the 1990s, particularly extreme hurricanes hit the United States and highlighted the limited capacity of the insurance and reinsurance market against natural disasters. In this context, the Insurance-Linked Securities (ILS) appeared as a solution to overcome the lack of capacity.

ILS are the result of the convergence between the insurance industry and the capital market. Catastrophe bonds are the most common form of ILS and have been gaining interest from investors as a tool to diversify their portfolios.

In this context, the capital market has expressed a strong appetite for the transparency provided by indexed Cat Bonds. Indeed, this form of catastrophe bond is based on the principle of replicating the cedant's losses: the amount of compensation is calculated by applying coefficients, called Payout Factors, to market losses.

This operation creates a basis risk for the cedant, whose actual losses may differ from the indemnities received.

The objective of this paper is to propose an approach aims to structure an indexed *Cat Bond* to be issued by AXA Group.

The approach adopted is divided into three steps.

The **first step** consists in determining the optimal capacity to issue with respect to risk and profitability indicators.

The **second step** consists in calibrating an optimal layer on which to place the capacity.

The **last step** deals with the optimization of the Payout Factors with the objective of minimizing the basis risk using a Quasi-Newton type algorithm.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très chaleureusement ma Directrice de mémoire en entreprise, Stella Jovet pour sa disponibilité, son accompagnement. Merci à toi Stella pour ton engagement inestimable.

Je remercie aussi Nabil Kazi Tani, enseignant-chercheur à l'ISFA-Université Lyon 1 pour sa disponibilité et ses conseils avisés.

Je manifeste ma reconnaissance à l'endroit de Jérôme Crétien, Responsable de l'équipe *Analytics & Pricing* de AXA Global Re pour m'avoir accueilli dans son équipe.

Pour finir, j'adresse mes remerciements à Maxime Coumes, Omar El Warari, Diep Nguyen-Dang, Brian Whannou et Soliath KAFFO pour m'avoir soutenu et conseillé.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>7</b>
<b>CHAPITRE 1 : RISQUE CATASTROPHE ET REASSURANCE</b> .....	<b>9</b>
1. CATASTROPHES NATURELLES .....	9
1.1. Définitions et chiffres clés.....	9
1.2. Modélisation du risque catastrophe.....	10
2. LA REASSURANCE, ACTEUR MAJEUR SUR LE MARCHÉ DES CATASTROPHES NATURELLES .....	19
2.1. Définition de la réassurance.....	19
2.2. Enjeux et fonctions de la réassurance .....	19
2.3. Différents types de réassurance .....	19
2.4. Différentes formes de réassurance.....	20
2.5. AXA Global Re : filiale stratégique du Groupe AXA .....	23
3. MARCHÉS FINANCIERS, ALTERNATIVE ET COMPLÉMENT À LA REASSURANCE TRADITIONNELLE : CAS DES INSURANCE-LINKED SECURITIES (ILS).....	25
3.1. Titrisation en assurance .....	25
3.2. Les obligations catastrophes ou « Cat Bonds » .....	29
3.3. Réassurance vs Titrisation .....	38
<b>CHAPITRE 2 : DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UN CAT BOND INDICIEL</b> .....	<b>39</b>
1. DONNEES UTILISEES.....	40
1.1. Brut de la Cédante.....	40
1.2. Modélisation du risque catastrophe du groupe .....	42
2. OBJECTIFS ET CONTRAINTES.....	44
2.1. Minimisation de la marge cédée du Groupe .....	44
2.2. Respect de l'appétit au risque du Groupe .....	45
2.3. Maximisation de l'efficacité du Cat Bond .....	46
2.4. Minimisation du SCR ou STEC en modèle interne AXA (Short Term Economic Capital).....	47
3. CHOIX DE LA CAPACITE .....	48
3.1. Présentation de l'approche retenue .....	49
3.2. Impact de la variation de la capacité sur le Risk Appetite.....	53
3.3. Efficacité de la capacité vis-à-vis de l'AEPby.....	55
3.4. Impact de la variation de la capacité sur les prix du Cat Bond et de l'Enterprise Aggregate .....	56
3.5. Impact de la variation de la capacité sur la marge cédée .....	60
3.6. Impact de la variation de la capacité sur le STEC du Groupe (entièrement diversifié) .....	62
4. CONCLUSION SUR LE CHOIX DE LA CAPACITE.....	63
5. STRUCTURATION DES TRANCHES.....	64
5.1. Définition de la tranche : Cadrage du problème .....	64
5.2. Définition de la tranche : Méthodologies retenues .....	66
5.3. Définition de la tranche : résultats .....	71
6. AVANTAGES ET LIMITES DES APPROCHES PROPOSEES DANS CE CHAPITRE .....	74
<b>CHAPITRE 3 : OPTIMISATION DES PAYOUT FACTORS</b> .....	<b>76</b>
1. PRESENTATION DU PROBLEME .....	76
1.1. Enjeux et objectifs .....	76
1.2. Présentation des données marché .....	77
2. DETERMINATION DES PAYOUT FACTORS .....	79
2.1. Cadrage du problème.....	79
2.2. Utilisation des parts de marché d'exposition comme Payout Factors.....	80
2.3. Modélisation mathématique du risque de base.....	81
2.4. Modèle de régression linéaire classique.....	82
2.5. Modèle non linéaire : Algorithme L-BFGS-B .....	83

3.	PRESENTATION DES RESULTATS .....	89
3.1.	<i>Application de l'algorithme aux pertes strictement positives de la cédante</i> .....	90
3.2.	<i>Application de l'algorithme aux pertes pondérées de la cédante</i> .....	92
3.3.	<i>Mise en place d'études de sensibilité</i> .....	94
4.	AVANTAGES ET LIMITES DES APPROCHES PROPOSEES DANS CE CHAPITRE .....	98
	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>100</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>101</b>
	<b>TABLE DES FIGURES .....</b>	<b>102</b>
	<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>104</b>
	<b>ANNEXE : RECHERCHE LINEAIRE PAR LA METHODE DE WOLFE.....</b>	<b>105</b>

## INTRODUCTION

Les événements de type catastrophes naturelles sont très rares et difficilement prévisibles. En cas de survenance, ces événements de faible fréquence et de forte sévérité peuvent peser fortement sur le bilan des compagnies d'assurances et de réassurances. La gestion du risque catastrophe représente donc un enjeu de taille car ces événements extrêmes peuvent entraîner des faillites, comme ce fût le cas de la *Mennonite Mutual Hail Insurance Company* au Canada en 1984. Il est donc crucial pour les (ré) assureurs de disposer de couvertures solides contre ces types de risques.

L'ouragan Andrew (1992) a été l'un des plus destructeurs qui ait frappé les Etats-Unis et a causé environ 15,5 milliards de dollars de pertes assurées et provoqué l'insolvabilité de onze assureurs selon la *Property Claims Services*® (PCS). Dans ce contexte, la titrisation des risques d'assurance ou *Insurance-Linked Securities* (ILS) est apparue comme une solution pour pallier le manque de capacité.

Les ILS résultent de la convergence entre l'industrie de l'assurance et le marché des capitaux. Les obligations catastrophe, ou *Cat Bonds* en sont la forme la plus répandue et ont bénéficié d'un intérêt croissant de la part des investisseurs, qui y voient un outil de diversification de leurs portefeuilles.

Dans ce cadre, on constate une appétence particulière du marché des capitaux pour la transparence qu'apportent les *Cat Bonds* indiciels. En effet, cette forme d'obligation catastrophe repose sur un principe de réplication des pertes de la cédante : le montant de l'indemnisation est calculé en appliquant des coefficients, appelés *Payout Factors*, à des pertes de marché.

Ce fonctionnement entraîne un risque de base pour la cédante, dont les pertes réelles peuvent différer des indemnisations reçues.

L'objectif de notre étude est de structurer un *Cat Bond* indiciel devant être émis par le Groupe AXA. Au sein du Groupe, AXA Global Re est l'entité en charge de la structuration et du placement de la réassurance. Par conséquent, elle a pour mission de participer à la structuration et l'émission des *Cat Bonds*.

Ce mémoire est structuré en trois parties.

Dans la **première partie**, le risque catastrophe ainsi que sa modélisation seront présentés. Nous parlerons d'abord de la couverture des risques catastrophe à l'aide de la réassurance traditionnelle. Nous introduirons ensuite les *ILS* et nous nous intéresserons tout particulièrement aux *Cat Bonds* et à leur fonctionnement.

Dans la **deuxième partie**, il sera question de structurer les différentes caractéristiques du *Cat Bond*. Dans un premier temps, la capacité optimale à émettre sera déterminée, en se basant sur des indicateurs économiques tout en prenant en compte des contraintes liées à l'appétit au risque. Dans un second temps, l'objectif sera de déterminer les caractéristiques optimales de la tranche sur laquelle placer la capacité.

Dans la **troisième partie**, nous optimiserons le risque de base du *Cat Bond*. L'objectif sera donc de déterminer des *Payout Factors* qui minimisent le risque de base. Pour ce faire, nous mettrons en place des méthodes de régressions multiples puis nous explorerons des méthodes d'optimisation non-linéaires. Enfin, nous étudierons la sensibilité du risque de base.



# CHAPITRE 1 : RISQUE CATASTROPHE ET REASSURANCE

## 1. Catastrophes naturelles

### 1.1. Définitions et chiffres clés

Selon la Fédération Internationale des Sociétés de la Croix-Rouge et du Croissant-Rouge, « une catastrophe consiste en un évènement soudain et désastreux qui perturbe gravement le fonctionnement d'une communauté ou d'une société et cause des pertes humaines, matérielles et économiques ou environnementales dépassant les capacités de la société ou de la communauté à faire face à l'aide de ses propres ressources. Bien qu'étant souvent causées par la nature, les catastrophes peuvent aussi avoir une origine humaine. »

La définition du risque catastrophe s'avère être très complexe. Néanmoins, certains critères permettent de reconnaître le risque catastrophe naturelle. Il s'agit d'un risque :

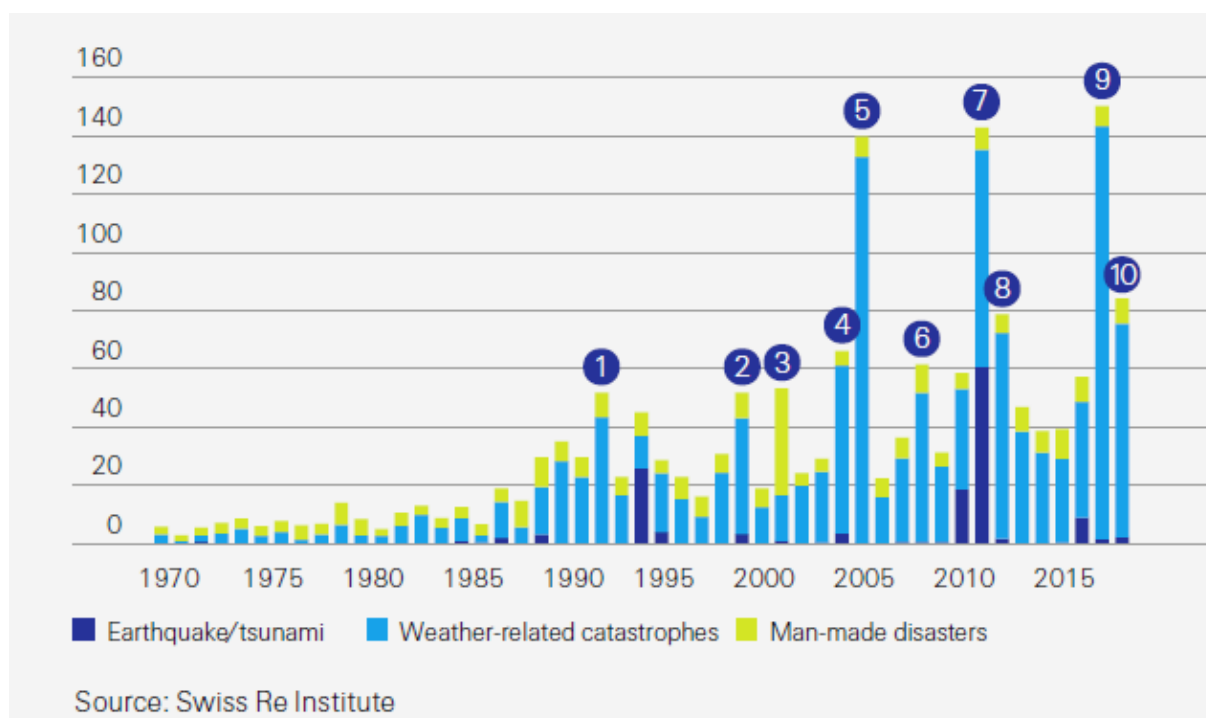
- Naturel : il ne résulte pas d'une action directe de l'humain. Il est important ici de noter la présence du terme « conséquence directe » car on serait tenté de considérer par exemple que les actions de l'homme engendrent le réchauffement climatique et donc que les conséquences qui en résulteraient ne seraient pas naturelles. Ce raisonnement est assez complexe et n'est aujourd'hui pas pris en compte dans la définition du risque catastrophe naturelle.
- A haute sévérité et qui dépasse généralement les attentes. Par exemple, une catastrophe naturelle qui survient dans une zone très urbanisée causera des dommages importants.

L'une des caractéristiques propres des catastrophes naturelles est leur rareté. Ces évènements surviennent avec de très faibles probabilités mais pèsent assez lourdement sur le bilan des compagnies d'assurance et de réassurance.

Voici un historique de pertes catastrophes assurées entre 1970-2018. Le montant des pertes est en milliards de dollars.

Cette figure montre à la fois les pertes liées aux catastrophes naturelles mais aussi celles liées aux catastrophes causées par l'homme dites *man made*.

Figure 1: Pertes catastrophes assurées entre 1970 et 2018



Nous remarquons que l'année 2017, surnommée « l'année des ouragans » ou encore « l'année des extrêmes » a fait subir une perte colossale à l'industrie de l'assurance et de la réassurance.

Munich Re dans l'une de ses études a estimé à environ 330 milliards de dollars les dommages engendrés par les catastrophes naturelles de 2017. Cette somme est au moins égale à deux fois la moyenne des pertes combinées des dix dernières années.

## 1.2. Modélisation du risque catastrophe

Les modèles utilisés en (ré) assurance sont généralement statistiques, c'est-à-dire qu'ils sont basés sur l'historique de pertes de la compagnie. Par exemple, au vu des pertes passées, on peut calibrer la fréquence des sinistres par une loi de Poisson ou une Binomiale Négative et la sévérité par une loi de Pareto ou une Pareto Généralisée.

Les modèles de type Fréquence x Sévérité ou tweedie ne sont pas adaptés aux événements catastrophiques à cause de leur faible fréquence d'occurrence.

Ces méthodes statistiques ne sont pas très adaptées à la modélisation du risque catastrophe car elles font une hypothèse sous-jacente assez forte. En effet, ces méthodes supposent que la distribution des événements passés est représentative de la distribution des événements futurs.

Les modèles catastrophes ont une structure très particulière et ne ressemblent pas aux modèles classiques et statistiques utilisés par les compagnies d'assurance et de réassurance.

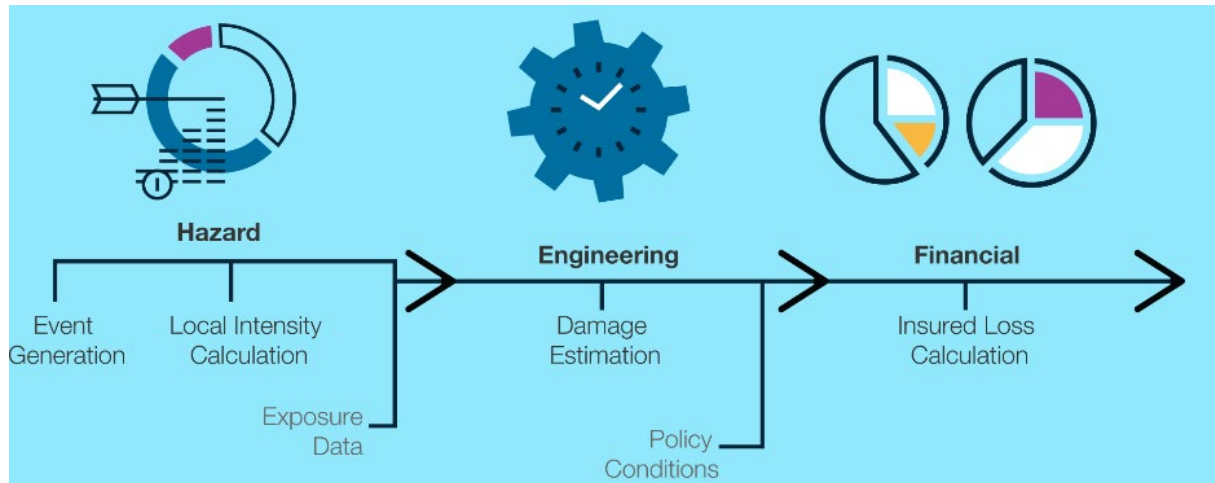
### 1.2.1. Architecture d'un modèle catastrophe

Les modèles de catastrophes naturelles combinent des informations historiques sur les catastrophes avec des données actuelles sur la démographie, les bâtiments (âge, structures, matériaux utilisés, utilisation etc..), la science afin de déterminer l'impact en termes de coût des catastrophes dans un endroit donné du globe. Les modèles utilisent ces vastes bases de données d'informations pour simuler les caractéristiques physiques de milliers de catastrophes potentielles et projeter le coût économique et assurantiel.

Aujourd'hui, les trois principales entreprises qui licencient des modèles catastrophes sont *AIR Worldwide*, *Risk Management Solutions (RMS)* et *EQECAT* (également connu sous le nom d'EQE). Les assureurs, les réassureurs, les agences de notation, les gestionnaires de risques et les principaux courtiers d'assurances utilisent les modèles de ces entreprises pour gérer leurs risques catastrophe.

Ci-dessous l'ossature d'un modèle Catastrophe

Figure 2: Architecture d'un modèle catastrophe



Source : AIR Worldwide

L'architecture d'un modèle catastrophe est essentiellement constituée de 3 modules : un module "Aléa", un module "Vulnérabilité" et enfin un module "Financier".

**Le module « Aléa »** des modèles catastrophes a pour but de fournir des informations sur le lieu probable de survenance des événements naturels, leur gravité et leur probabilité de survenance.

Chaque modèle a un catalogue d'événements stochastiques. Chaque catalogue est composé de plusieurs dizaines de milliers d'événements. Ces catalogues représentent un large spectre d'événements probables.

- **Générateurs d'évènements** : Chaque évènement est défini par une probabilité annuelle qui a tendance à décroître quand l'intensité de l'évènement augmente. L'évènement est aussi défini par des paramètres physiques :

*Tableau 1: Périls et paramètres physiques*

<b>Péril</b>	<b>Paramètres physiques</b>
Evènement climatique	Pression minimale Rayon maximum des vents
Tremblement de terre	Magnitude Emplacement de l'épicentre Profondeur de la faille
Inondation	Quantité de pluie Intensité des pluies

- **Calcul de l'intensité locale** : Une fois que les événements sont générés, il faut les « diffuser » afin de mesurer leur impact car l'intensité à un endroit donné est nécessaire pour calculer les pertes plutôt que l'intensité à la source.

Ainsi, les caractéristiques physiques des évènements stochastiques doivent être transformées en paramètres qui représentent pleinement les conditions locales et qui sont utilisés par le module « Vulnérabilité » afin de calculer le taux de destruction.

### **Le module « Vulnérabilité »**

Les mesures de l'intensité des évènements catastrophes simulés sont ensuite appliquées à des informations très détaillées sur les propriétés qui sont exposés aux catastrophes. Les équations appelées courbes de vulnérabilité sont développées et utilisées pour calculer le taux de destruction que subiraient les biens assurés en cas d'événements catastrophe. Les firmes de modélisation des catastrophes ont développé des centaines de courbes de vulnérabilité car les formes de ces courbes sont hautement dépendantes des caractéristiques du risque qui lui, peut être très varié. Une unique courbe devra être construite pour chaque combinaison des paramètres suivants :

Description physique des biens assurés

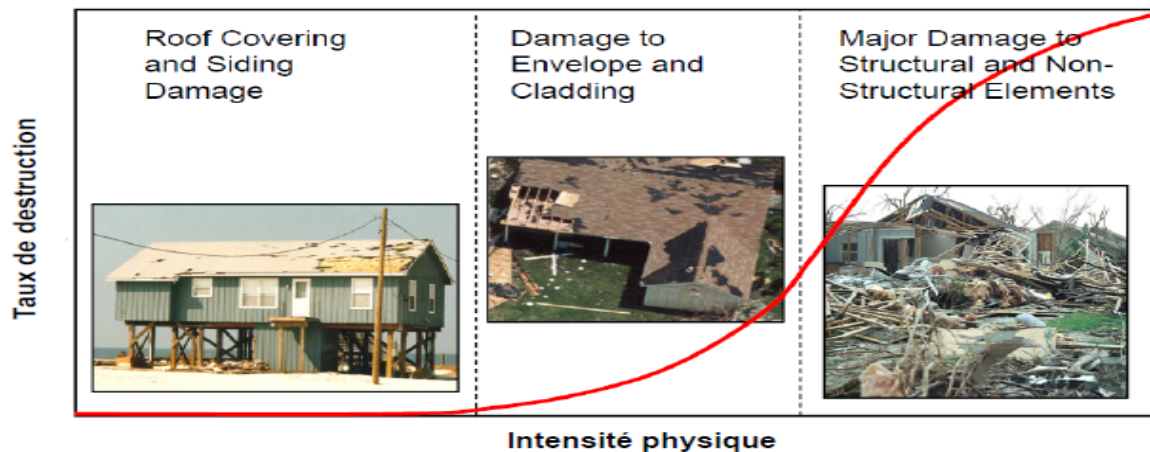
- Données d'exposition
  - Valeurs assurées
- Caractéristiques primaires
  - Type d'occupation
  - Type de construction
  - Âge du bâtiment

- Nombre d'étages du bâtiment
- Surface du bâtiment
- Caractéristiques secondaires
  - Détails sur la toiture
  - Type de fondation
  - Maintenance
  - ....

Si certaines caractéristiques des biens sont manquantes, il y a des valeurs par défaut qui sont utilisées. L'absence de certaines valeurs diminue évidemment la fiabilité du modèle.

La vulnérabilité permet d'attribuer un taux de destruction en fonction de l'intensité physique d'un évènement à un point donné.

*Figure 3: Taux de destruction en fonction de l'intensité physique*



Il faut remarquer que plus l'intensité physique est forte, plus le taux de destruction est élevé. Il est important de préciser qu'il peut y avoir un plafonnement une fois qu'un site est totalement détruit.

### **Le module « Financier »**

Cette dernière partie d'un modèle *Cat* a pour vocation de calculer les pertes assurantielles en se basant sur les conditions financières des polices d'assurances des risques analysés. Ces conditions sont :

- La valeur totale assurée (le coût de remplacement total du bien) : pour chaque évènement, cette valeur est multipliée par le taux de destruction.
- La part de coassurance (pratique qui consiste pour une compagnie d'assurance à ne prendre en charge qu'un pourcentage fixe d'une police).
- Les franchises (montant à la charge du détenteur de la police d'assurance).
- Les limites (les montants maximums couverts par la police d'assurance).

- Les conditions de réassurance.

Plusieurs niveaux de pertes sont obtenus :

- *Ground Up Loss* : Résultats avant application des conditions d'assurance.
- *Gross Loss* : Résultats après application des conditions d'assurance par site et par police.
- *Net Loss* : Résultats après application des conditions de réassurance par site/police.

L'application de ces conditions financières est loin d'être triviale, particulièrement dans le cas de polices multi-sites où les conditions financières peuvent s'appliquer aussi bien à un seul risque qu'à toute la police. Etant donné que les conditions influent grandement sur les pertes calculées, leur bonne intégration s'avère cruciale.

### 1.2.2. Sortie d'un modèle catastrophe

A la sortie des modèles catastrophes, plusieurs indicateurs sont récupérés. Ceux-ci permettent une analyse relativement fine des risques sous-jacents.

Ces indicateurs sont entre autres :

- Les **Event Loss Tables (ELT)** : liste des différents événements catastrophe  
Pour chaque événement, les éléments suivants sont fournis :
  - *Event ID* : numéro de l'évènement modélisé
  - *Frequency* : Probabilité d'occurrence de l'évènement (en moyenne par an)
  - *Mean Loss* : montant moyen de perte pour cet évènement
  - *StdDev* : Ecart type de la distribution de perte
  - *Exposed* : somme assurée exposée à cet évènement (égale à la perte maximale)

Tableau 2: Exemple d'ELT

EventID	Frequency	Mean Loss	StdDev	Exposed
1	0.0028	525,684	170,815	11,004,529
14	0.0001	23,625	26,022	481,442
18	0.0032	32,292,399	3,254,164	224,869,408
19	0.0116	780,297	234,658	11,136,437
24	0.0001	7,131,073	1,033,703	102,485,528
27	0.0001	265,927,664	14,945,817	1,284,289,496
29	0.001	16,721,359	1,892,136	145,541,856
31	0.0094	14,553	20,650	310,886
32	0.0001	114,106,338	8,229,480	674,223,635
49	0.0034	776,339	194,899	10,289,336
62	0.0052	6,549,240	1,232,714	112,621,925
64	0.0021	8,114,472	1,142,071	104,246,326
71	0.0001	17,647	22,185	619,343
72	0.0001	309,462	125,016	3,686,923
76	0.0012	6,653,107	714,039	62,670,572
82	0.0001	1,705,755	349,740	17,407,602
89	0.0003	6,638	13,688	343,003
93	0.0009	135,396,157	9,777,603	863,142,929
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- Les courbes **d'Exceedance Probability (EP)** : il s'agit de courbes de probabilités de dépassement. Elles visent à donner une image complète du risque catastrophe d'un portefeuille, avec indication des probabilités de dépassement de certains seuils. Soit  $(X_i)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. Il existe deux types de courbes EP :

- **L'AEP (Aggregate Exceedance Probability)** est la probabilité que la somme des pertes annuelles excède un certain seuil. Ainsi dans un modèle fréquence-sévérité, on a :

$$AEP(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i > x\right)$$

Où N est la loi de fréquence du modèle. Avec la convention :

$$\sum_{i=1}^N X_i = 0 \text{ si } N = 0$$

En utilisant les probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} AEP(x) &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > x\right) \times \mathbb{P}(N = n) \right) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( F_X^{(n)}(x) \times \mathbb{P}(N = n) \right) \end{aligned}$$

Où  $F_X^{(n)}$  est la convolution d'ordre n de  $F_X$  avec  $F_X$  fonction de répartition de X.

L'AEP est une métrique très intéressante si on calibre un traité annuel. Il est aussi utile pour le calcul du STEC<sup>1</sup> (équivalent du SCR en modèle interne chez AXA). Cette métrique permet de regarder la sinistralité sur toute une année et pas seulement sur un événement en particulier.

- **L'OEP (Occurrence Exceedance Probability)** représente la probabilité annuelle que la perte maximum dépasse un certain seuil. De ce fait, la courbe des AEP est toujours au-dessus de celle des OEP.

$$OEP(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_N) > x)$$

Où N est la loi de fréquence du modèle. Avec la convention :

---

<sup>1</sup> STEC : Short Term Economic Capital

$$\max(X_1, \dots, X_N) = 0 \text{ si } N = 0$$

Il s'en suit que :

$$OEP(x) = 1 - \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_N) \leq x)$$

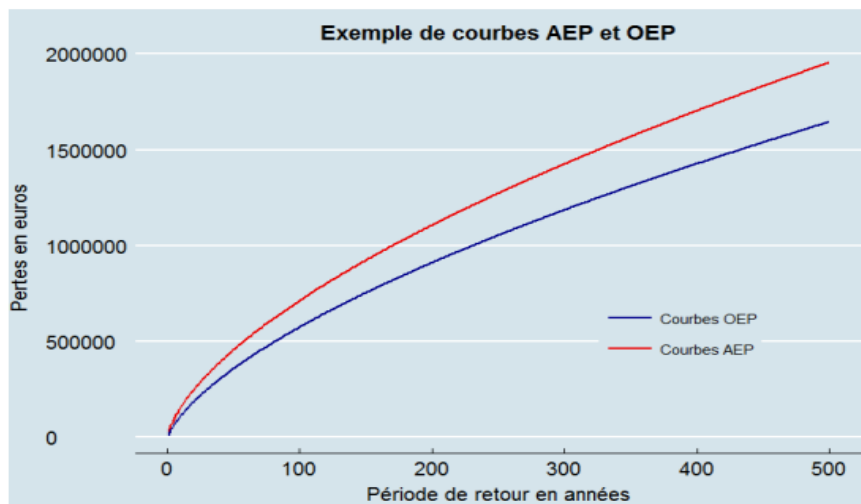
$$OEP(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x | N = n) \times \mathbb{P}(N = n))$$

Par indépendance des  $(X_i)$  on :

$$OEP(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (F_{X_i}(x))^n \times \mathbb{P}(N = n) \right)$$

Le calcul de l'OEP d'un modèle fréquence-sévérité peut être fait analytiquement en utilisant les fonctions de répartition des lois de fréquence et de coût. L'OEP est très utile pour calibrer des traités par événement.

Figure 4: Exemple de courbes AEP et OEP



Une **période de retour (Return Period)** est une autre façon d'exprimer la probabilité annuelle de dépassement EP, et décrit la probabilité estimée qu'une perte d'un montant donné se produise sur une période donnée. A titre d'exemple, une période de retour de 50 ans est une déclaration selon laquelle un évènement donné se produira, en moyenne, une fois sur des échantillons répétés de période de 50 ans.

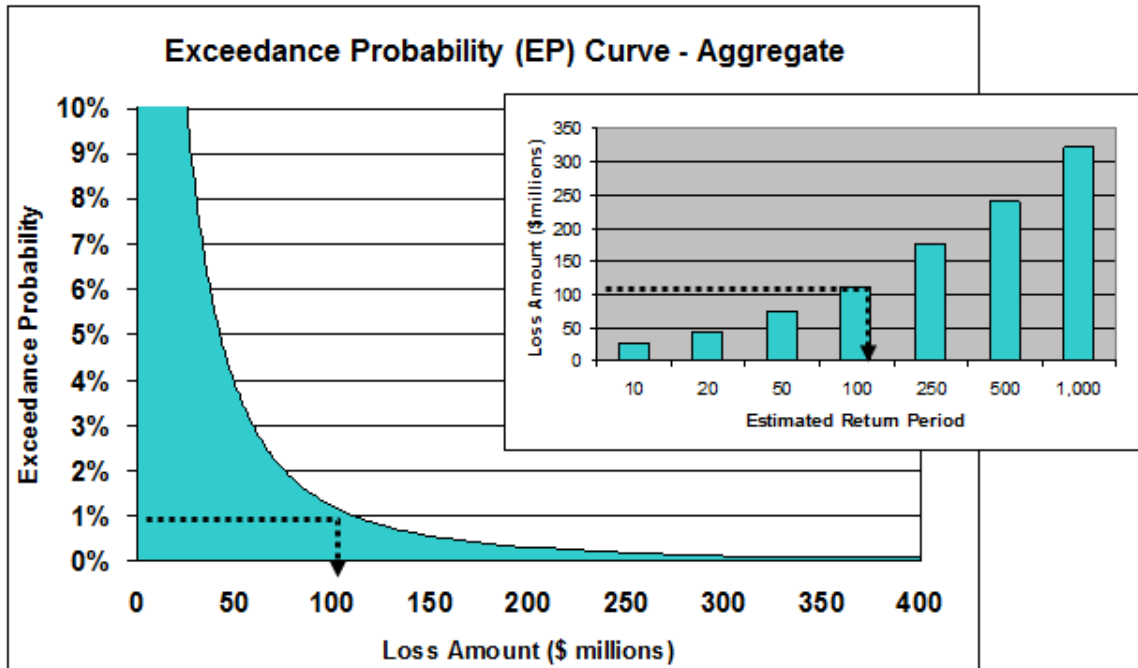
Il existe une équivalence entre période de retour et quantile. La perte à une période de retour de  $x$  ans ( $x > 0$ ) équivaut au quantile à  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$  % de la distribution de perte. Par exemple l'AEP à 200 ans correspond au quantile à 99,5% de la distribution de perte agrégée par année.



Voici comment passer d'une métrique à une autre :

$$\text{Période de retour de perte} = \frac{1}{\text{Probabilité de dépassement}}$$

Figure 5: Exemple de courbe EP



D'après le graphe principal, la probabilité d'avoir une perte supérieure à 100 millions \$ est de 1%. De manière équivalente, on lit sur le graphe secondaire que tous les 100 ans, la compagnie en question est susceptible de subir une perte annuelle d'au moins 100 millions \$.

- **Perte Moyenne Annuelle (AAL : Average Annual Loss)**

L'AAL est la perte moyenne (la « valeur attendue ») qui survient au cours d'une année. Elle représente une moyenne sur le nombre d'années simulées, généralement 50 000, et ne doit pas être utilisée seule pour la fixation des prix ou des taux, car les pertes peuvent fluctuer considérablement. Pour calculer la perte moyenne annuelle, il faut additionner les pertes de chaque année du catalogue et les diviser par le nombre d'années du catalogue.

- **La Value at Risk (VaR)**

La VaR est une mesure de risque très utilisée pour quantifier les risques. En assurance par exemple, elle quantifie un montant ne devant pas être dépassé ; et ce avec une probabilité définie sur un certain horizon de temps.

#### Définition-Value-at-Risk :

Soit X une variable aléatoire (v.a) de fonction de répartition F.

La *Value-at-Risk* (VaR) d'ordre  $\alpha \in [0,1]$  de X est :

$$VaR_{\alpha} = F^{(-1)}(1 - \alpha) = \inf x | F(x) \geq 1 - \alpha$$

### 1.2.3. Avantages et limites d'un modèle catastrophe

« Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles » disait Georges Box<sup>2</sup>. Comme tout modèle, les modèles catastrophes possèdent des avantages mais aussi des limites.

#### **Avantages d'un modèle catastrophe**

Les modèles de catastrophes fournissent des informations plus complètes sur les pertes présentes et futures potentielles que les données historiques. Les données modélisées ont les avantages suivants :

- Un grand nombre d'années simulées crée une distribution complète d'évènements potentiels.
- L'utilisation des expositions actuelles représente la population la plus récente, les codes des bâtiments et les valeurs de remplacement

#### **Limites d'un modèle catastrophe**

Les modèles catastrophe ont néanmoins quelques limites :

- Nécessité d'avoir une bonne qualité de données : la géolocalisation mais aussi les caractéristiques des sites (type de toit, matériaux de construction etc...) sont des informations parfois difficiles à récolter par les souscripteurs.
- Décalage possible des modèles avec l'historique.
- Variabilité importante entre les modèles.

---

<sup>2</sup> Georges Box : Statisticien Britannique connu pour ses contributions majeures liées aux séries temporelles et à l'inférence bayésienne.

## **2. La réassurance, acteur majeur sur le marché des catastrophes naturelles**

### **2.1. Définition de la réassurance**

#### **Définition**

La réassurance est un procédé de transfert de risque d'une entreprise d'assurance vers une autre société spécialisée. L'assureur peut transférer une partie des risques qu'il a souscrit voire même l'ensemble des risques.

L'entreprise cédant le risque est appelé « cédante » et celle qui l'accepte « cessionnaire ».

Le cessionnaire prend l'engagement d'indemniser la cédante en cas de survenance du risque et ce en respectant les limites définies.

### **2.2. Enjeux et fonctions de la réassurance**

#### **Enjeux**

Les objectifs de la réassurance sont :

- Réduire le besoin en capital en Solvabilité 2 : en libérant les fonds propres liés à la couverture des risques cédés au réassureur. Cela peut lui permettre d'améliorer son ratio de solvabilité.
- Protéger le bilan : La réassurance permet de prendre en charge les variations non attendues de la sinistralité.
- Augmenter la capacité de souscription : La réassurance permet à l'assureur de souscrire des risques qui dépassent sa capacité de souscription.
- Aider à développer de nouvelles couvertures et à assurer de nouveaux risques : en partageant les aléas avec les assureurs et en apportant un soutien technique (exemple : Assurance dans des marchés émergents – Terrorisme).

### **2.3. Différents types de réassurance**

Il existe deux types de réassurance :

- Facultative : la réassurance est facultative lorsque la couverture a lieu à l'échelle d'une police ou d'un site (industriel, commercial, etc..) et le réassureur a la liberté de l'accepter ou de décliner. L'assureur transfère le risque selon ses conditions et le réassureur peut les accepter ou faire des contre-propositions.
- Obligatoire : dans le cadre de la réassurance obligatoire, la couverture a lieu à l'échelle d'un portefeuille. Une fois que cette entente est mise en place, l'assureur s'engage à transférer au réassureur les risques afférents au portefeuille spécifié ; le réassureur quant à lui est dans l'obligation d'accepter ces risques, dans la limite des conditions prévues au contrat : on parle alors de traité de réassurance conclu entre le réassureur et l'assureur.

## **2.4. Différentes formes de réassurance**

### **2.4.1. La réassurance proportionnelle et non proportionnelle**

Deux formes de réassurance existent : proportionnelle et non-proportionnelle. Dans notre étude, seule la réassurance non proportionnelle nous intéresse. Nous ne nous attarderons donc pas sur la réassurance proportionnelle.

#### **Réassurance proportionnelle**

Cette forme de réassurance implique que tous les éléments concernant le risque tels que les sinistres et la prime soient partagés de manière proportionnelle entre la compagnie d'assurance et le réassureur. Ici, l'assureur et le réassureur partagent le même sort.

On appelle  $\alpha$  le taux de cession. En effet si l'assureur cède  $\alpha\%$  de risque au réassureur, il lui donnera également  $\alpha\%$  de la prime collectée et le réassureur s'engagera à hauteur de  $\alpha\%$  de ce sinistre qu'importe le montant total.

#### **La réassurance non proportionnelle**

En ce qui concerne la réassurance non proportionnelle, l'intervention du réassureur a lieu au-delà d'un certain montant de perte de l'assureur et dans une certaine limite. Cette intervention du réassureur est faite en contrepartie d'une prime payée préalablement par l'assureur.

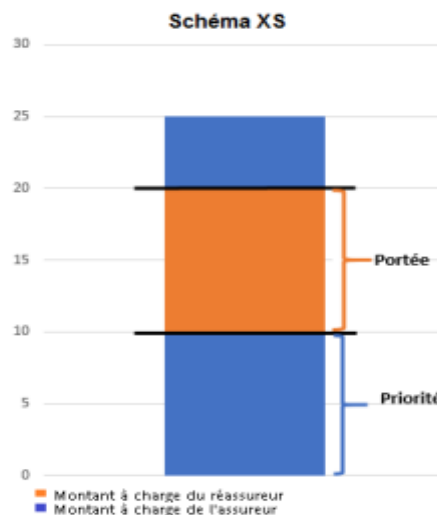
Dans cette forme de réassurance, contrairement à la proportionnelle, les sorts de l'assureur et du réassureur sont moins dépendants.

Un traité appelé Excess of Loss ou XL (ou XS : excédent de sinistre) lie l'assureur au réassureur. Le réassureur intervient au-delà d'une certaine limite appelée « priorité ou point d'attachement » et dans la limite de la « portée ».

Illustrons ce mécanisme par l'exemple ci-dessous :

Pour l'exemple, l'écriture suivante est adoptée : « 10 XS 10 ».

Figure 6: Exemple traité XS



Plus généralement, pour un traité XL s'écrivant portée XS priorité et pour un sinistre d'un montant S, les charges se répartissent de la façon suivante entre assureur et réassureur de la façon suivante :

$$\text{Charge Réassureur} = \min(\text{portée}; \max(S - \text{priorité}; 0))$$

$$\text{Charge Assureur} = S - \min(\text{portée}; \max(S - \text{priorité}; 0))$$

➤ **L'excédent de sinistre par risque (XL per risk)**

Pour ce traité, le sinistre est constaté au niveau du risque. Le réassureur prend l'engagement d'indemniser la cédante dès lors que le montant du sinistre dépasse la priorité. Le montant payé par le réassureur est toutefois au plus égal à la portée de la structure XL *per risk*.

➤ **L'excédent de sinistre par évènement (XL per event)**

Dans le cas des traités XL *per event*, la sinistralité est constatée au niveau non pas d'une police spécifique (contrairement à une couverture XL *per risk*) mais au niveau de plusieurs polices. Les sinistres relatifs à un même évènement sont agrégés avant l'application du traité.

Ce type de traité couvre généralement les catastrophes naturelles, qui ont un fort potentiel d'accumulation.

## 2.4.2. Quelques clauses de réassurance

Pour donner plus de flexibilité au traité, des clauses de réassurance sont insérées dans le contrat.

### **Limite Annuelle (*Annual Aggregate Limit : AAL*)**

Il s'agit d'une clause qui fixe le montant maximal de l'engagement du réassureur sur une année. La couverture n'intervient pas au-delà de ce montant, et ce même si la sinistralité annuelle de la cédante dépasse ce montant.

L'objectif de cette clause est de limiter l'intervention du réassureur en cas de sinistralité particulièrement exceptionnelle.

$$Charge_{cédée} = \min \left( AAL; \sum_i \min(\text{portée}; \max(0; \text{sinistre}_i - \text{priorité})) \right)$$

### **Franchise Annuelle (*Annual Aggregate Deductible : AAD*)**

La clause de franchise annuelle augmente la part annuelle de sinistralité que la cédante accepte de porter elle-même. Elle est utile quand la cédante estime qu'elle a la capacité nécessaire pour porter le risque ; cette clause permet de réduire le coût d'un traité.

Mathématiquement, le montant à charge du réassureur se calcule en vision annuelle de la façon suivante :

$$Charge_{cédée} = \max \left( 0; \left( \sum_i \min(\text{portée}; \max(0; \text{sinistre}_i - \text{priorité})) \right) - AAD \right)$$

### **Clause de Reconstitution de Garantie (*Reinstatement Clause*)**

Dans un traité XL, l'assureur est indemnisé en cas de sinistre par le réassureur dans la limite d'une certaine portée prédéfinie par le traité. Ce mécanisme pourrait mettre la cédante dans une situation de découvert si la portée est entièrement épuisée et qu'un nouveau sinistre survient. La clause de reconstitution répond à ce problème spécifique et permet de reconduire la couverture en cas d'absorption totale de la portée en l'échange du paiement d'une prime additionnelle définie à l'avance. Les primes de reconstitution sont généralement payées dès qu'une partie de la portée a été utilisée.

## 2.4.3. Quelques limites de la réassurance traditionnelle

Malgré les avantages présentés dans les parties précédentes, la réassurance possède aussi quelques limites. Quelques-unes de ces limites sont abordées ci-dessous :

**Capacité limitée** : Considérant le fait que la sinistralité est de plus en plus forte, la part de risque acceptée par les compagnies de réassurance est limitée. L'ouragan Andrew en 1992 et les événements tels que l'attentat du World Trade Center de 2001 ont révélé que les réassureurs disposaient de capacités limitées pour honorer leurs engagements lorsqu'il s'agit de pertes conséquentes. En 2009, THOUROT affirmait « pour la première fois sans doute, (...) l'assurance a découvert que sa solvabilité globale n'était pas garantie par un prêteur en dernier ressort ».

**Risque de contrepartie** : Comme nous l'avons vu plus haut, la réassurance permet aux compagnies d'assurance d'être indemnisées lorsqu'elles subissent des pertes en échange du paiement d'une prime. L'indemnisation de l'assureur est conditionnée par la solvabilité du réassureur : en cas de faillite du réassureur, l'assureur ne sera pas indemnisé. Le risque de contrepartie est donc inhérent à l'utilisation de la réassurance.

**Concentration des risques extrêmes sur un petit nombre d'acteurs** : La relation de second ordre existant entre les réassureurs et les assureurs implique qu'il y a très peu de réassureurs comparativement au nombre d'assureurs.

Face à des risques de forte ampleur, la diversification est une nécessité absolue ; ce qui est très peu possible dans le monde de la réassurance. En effet, d'après le rapport « Global Reinsurance Highlights 2012 » de Standard & Poors, seulement quatre réassureurs internationaux réalisent la moitié du chiffre d'affaires à l'échelle du monde.

S'agissant des risques extrêmes, cette concentration des risques sur un petit nombre d'acteurs est très préjudiciable. En effet, l'exposition croisée qui en résulterait pourrait s'avérer systémique et par conséquent non-ré assurable.

Face à ces différents inconvénients, l'industrie de l'assurance et de la réassurance a compris que de nouvelles formes de couverture face aux risques extrêmes devaient être imaginées et mises en place.

## **2.5. AXA Global Re : filiale stratégique du Groupe AXA**

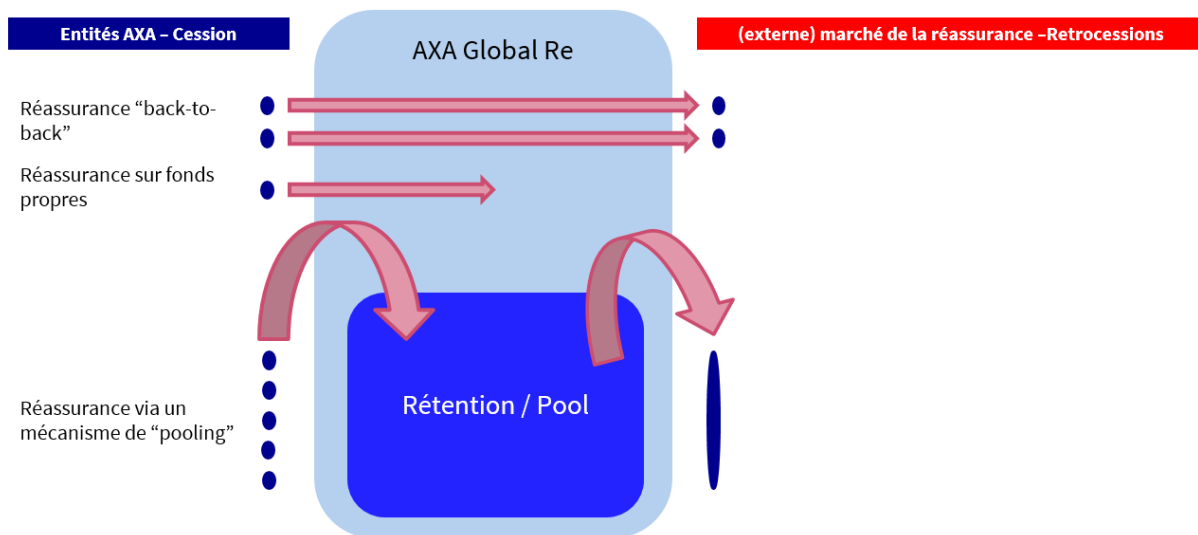
Au service du Groupe et de ses entités, AXA Global Re est une filiale dynamique et innovante d'environ 180 collaborateurs, qui associe la flexibilité d'une structure à taille

humaine et la puissance d'une organisation tournée vers l'international. Elle a pour principales missions la gestion, le placement et l'élaboration de la stratégie de réassurance du Groupe AXA.

Il existe trois principaux régimes de réassurance à AXA Global Re.

Ci-dessous les traités qui transitent via AXA Global Re.

Figure 7 : Structure des traités transitant via AXA Global RE

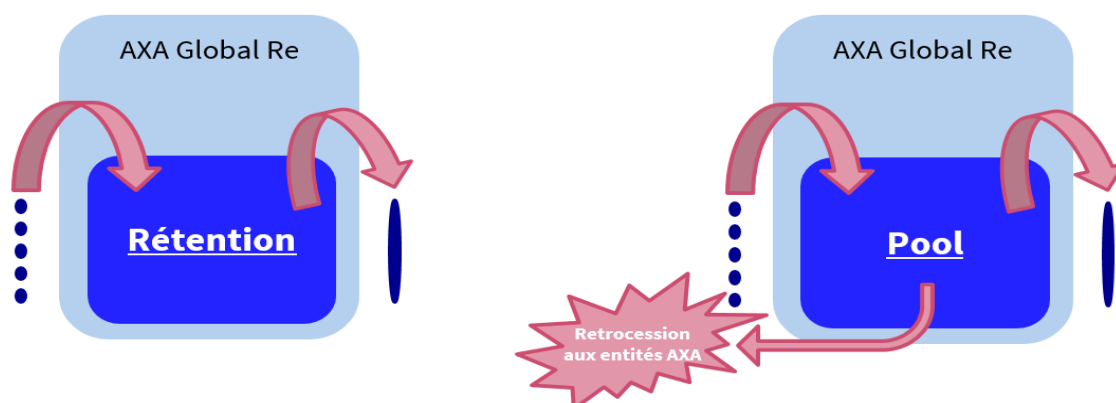


- **Réassurance « back-to-back »** : AXA Global Re accepte un traité d'une entité du Groupe AXA et le rétrocède à l'identique sur le marché de la réassurance.
- **Réassurance sur fonds propres** : AXA Global Re accepte un traité d'une entité du Groupe AXA et le garde tel quel sur son bilan. Elle supporte donc le risque.
- **Réassurance via un mécanisme de « pooling »** : AXA Global Re accepte un ensemble de traités (généralement du même secteur d'activité) et les conserve dans son bilan, mais couvre partiellement le risque avec un traité placé à l'extérieur, appelé "Group Cover".

Il faut faire la distinction entre une structure de « pool » et une structure de « rétention ». Lorsque le risque « poolé » est (partiellement) rétrocedé aux entités AXA, on parle de « pool », sinon on parle de « rétention ».



Figure 8 : Différence entre « pool » et « rétention »



### 3. Marchés financiers, alternative et complément à la réassurance traditionnelle : Cas des Insurance-Linked Securities (ILS)

Dans la partie précédente, nous avons évoqué quelques limites de la réassurance traditionnelle. Il était donc important pour les acteurs de l'industrie de l'assurance d'imaginer d'autres façons de gérer leurs risques. C'est ainsi que la titrisation, phénomène connu dans l'industrie bancaire depuis 1970 a été transposée en assurance.

#### 3.1. Titrisation en assurance

##### 3.1.1. Définition et mécanismes

La titrisation des risques d'assurance est un mécanisme financier permettant à des (ré) assureurs de procéder au transfert des risques assurantiels vers les marchés des capitaux. Cette opération nécessite de regrouper puis de transformer les risques en question en titres échangeables sur les marchés des capitaux.

La titrisation en assurance est essentiellement basée sur deux mécanismes :

- D'une part, l'argent issu des contrats vendus par les assureurs est transformé en des titres financiers qui seront mis sur les marchés financiers.
- D'autre part, le transfert des risques acceptés à destination des places financières.

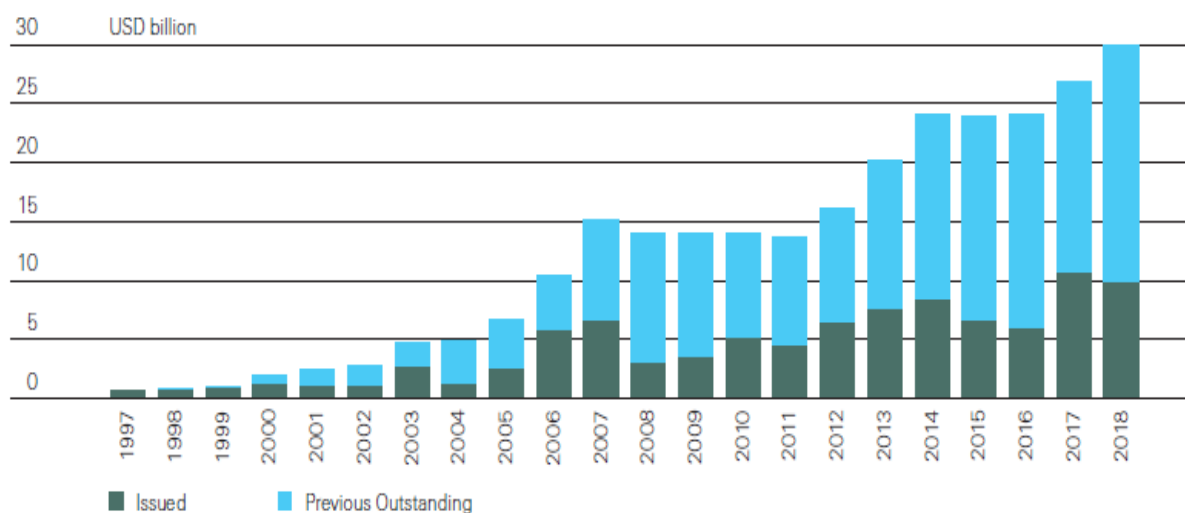
### 3.1.2. Naissance et évolution des ILS

L'idée du transfert de risque de pointe au marché des capitaux a été considérée pour la première fois au début des années 90, après le passage en août 1992 du cyclone Andrew en Floride. Cette catastrophe a fait de l'année 1992, à cette époque, l'année la plus coûteuse de l'histoire de l'assurance en matière de catastrophes naturelles. Depuis 1992, la titrisation en assurance est en constant développement et couvre des risques très différents :

- Catastrophes naturelles (ouragans sur la côte des USA (USAA-*Residential Rec*, etc.), séismes dans la région de San Francisco, tempêtes en Europe, etc..).
- Risque de mortalité :
  - Swiss Re: Vita Capital I, II, III,
  - Scottish Re
  - Axa : Osiris Capital
- Risque automobile (Axa, opérations 1 et 2 (Sparc avec Natixis))

La figure ci-dessous montre l'évolution des ILS au cours du temps.

Figure 9: Evolution des ILS au cours du temps.



Source : Swiss Re Capital Markets

Nous remarquons que l'émission des ILS est un phénomène bien récent et que les émissions d'ILS se sont accélérées ces dernières années.

### 3.1.3. Les avantages de la titrisation d'un point de vue (ré)assureur

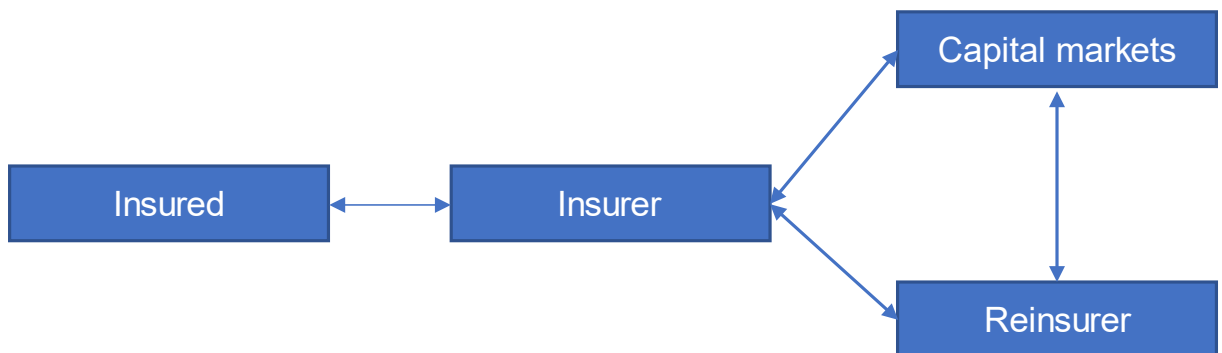
La titrisation en assurance présente de nombreux avantages pour les compagnies d'assurance et de réassurance. Au nombre de ces avantages, nous pouvons citer :

#### ➤ Augmentation de la capacité totale d'assurance

La volatilité des catastrophes naturelles est l'une de leur caractéristique propre. Le montant des sinistres causés par les périls naturels peut atteindre des niveaux très élevés. Ces pertes peuvent parfois dépasser la capacité des assureurs et des réassureurs individuellement mais aussi la capacité de l'industrie de l'assurance dans sa globalité. Lorsqu'on compare les pertes touchant l'industrie de l'assurance à la capacité du marché des capitaux, on se rend compte que ces pertes sont négligeables.

L'Ouragan Katrina qui a touché les Etats-Unis a causé des pertes de plus de 125 milliards de dollars et donné lieu à des indemnisations record. Dans son étude relative aux *Insurance Linked Securities*, Christian WEISTROFFER [2010] avance que les pertes causées par l'ouragan Katrina pèsent 0,5% du marché des obligations privées aux Etats-Unis.

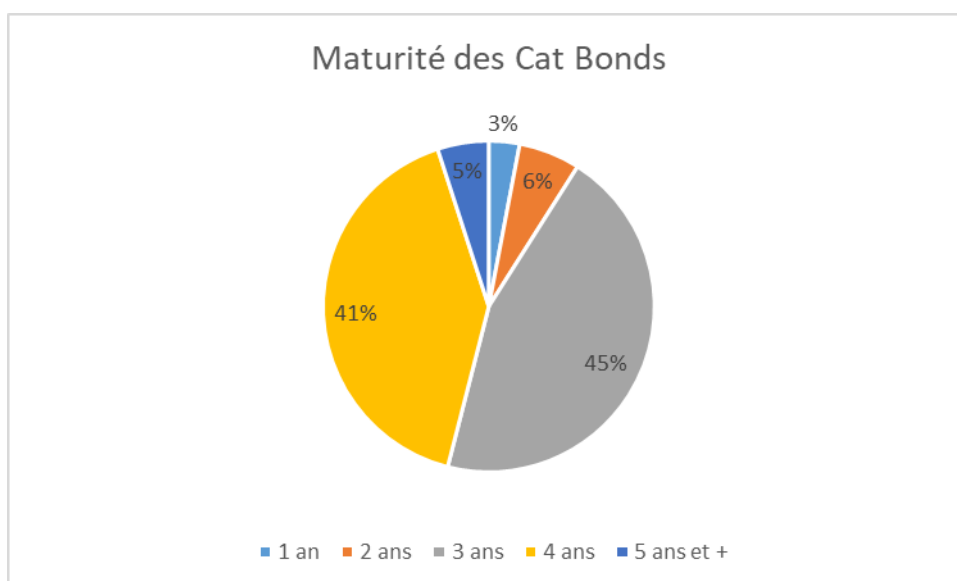
Cette augmentation de capacité est rendue possible par le mécanisme de transfert de risque représenté par le diagramme ci-dessous :



#### ➤ Couverture pluriannuelle avec garantie de prix

A la différence de la réassurance classique dont la durée de couverture de référence est généralement d'une année, les ILS proposent en règle générale des périodes de couverture allant habituellement de 3 à 4 ans. La figure ci-dessous donne une idée des périodes de couverture qui se pratiquent actuellement sur le marché.

Figure 10: Maturité des Cat Bonds



Source : GC Securities

Cette couverture pluriannuelle est assortie d'un prix fixe sur toute la durée de couverture, qui est déterminé à priori. Les dépenses de l'assureur ou du réassureur sont ainsi clairement établies, ce qui facilite le pilotage du budget.

➤ **Très faible risque de crédit**

Nous avons évoqué plus haut que l'activité de réassurance traditionnelle est par définition soumise à un risque de contrepartie. Contrairement à la réassurance traditionnelle, la titrisation grâce au mécanisme de collatéralisation réduit significativement ce risque. En effet, la couverture des ILS étant généralement pluriannuelle, la garantie investie est exposée aux marchés financiers. Pour rendre la protection disponible de façon continue et totale, un collatéral est mis en place, c'est-à-dire qu'un ensemble d'actifs dits « collatéraux » est utilisé en guise de garantie. Lorsque le débiteur se retrouve dans l'impossibilité d'honorer son engagement, le créancier se réserve le droit de garder les actifs remis en collatéral pour le dédommagement de la perte financière.

➤ **Création de nouvelles sources de financement**

Pour finir, le transfert de risque associé à une titrisation se fait sans qu'il n'y ait de risque supplémentaire. Cela permet donc à la cédante de libérer des fonds propres. A partir de ce moment-là, les exigences réglementaires en matière de capital sont moindres et le ratio de solvabilité amélioré.

## **3.2. Les obligations catastrophes ou « *Cat Bonds* »**

### **3.2.1. Définition, différentes étapes d'émission et structure d'un *Cat Bond***

#### **Définition**

Les *Cat Bonds* – pour *Catastrophe Bonds* ou obligations catastrophe – sont des obligations qui transfèrent tout ou une partie du risque catastrophe assurantiel des assureurs, réassureurs et entreprises vers les marchés des capitaux.

#### **Emission d'un *Cat Bond***

Les obligations catastrophe sont émises selon une méthodologie cadrée. Certaines exceptions ou spécificités peuvent néanmoins être prises en compte selon la complexité de l'obligation et du déclencheur choisi. Généralement, le processus commence par la désignation d'un agent de modélisation (une société de modélisation de catastrophes telles qu'AIR, RMS...). L'indépendance de l'agent de modélisation est nécessaire afin que les investisseurs aient confiance dans l'estimation du risque du *Cat Bond*. Un conseil juridique est nécessaire pour gérer les aspects réglementaires liées à l'émission des titres, et un organisme de structuration (généralement une banque d'investissement ou la branche des marchés de capitaux d'un grand courtier ou réassureur) qui offre un service de conseil sur la structuration et le placement de l'obligation.

Ensemble, le sponsor (ou l'émetteur du *Cat Bond*) et l'organisme de structuration choisissent le mécanisme par lequel l'obligation sera remboursée (le mode de déclenchement).

L'agent de modélisation utilisera ensuite des modèles catastrophe afin de fournir une estimation du risque auquel la cédante est exposée.

L'analyse du risque a pour finalité de fournir une quantification des pertes potentielles selon différentes probabilités.

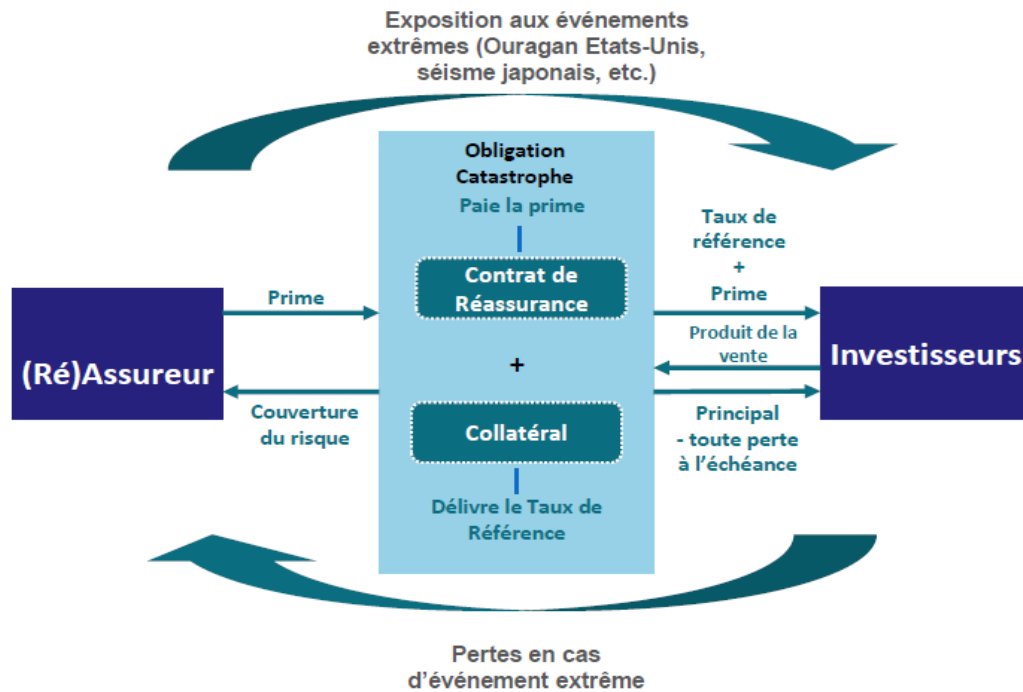
Le résultat de l'analyse de risque est une estimation des pertes potentielles selon diverses probabilités et périodes de rendement.

Comme nous le verrons plus loin, les obligations indicielles et les obligations paramétriques peuvent nécessiter une étape supplémentaire permettant de minimiser le risque de base pour la cédante.

Une fois que le profil de risque du portefeuille de la cédante a été identifié, le sponsor se concerta avec l'organisme de structuration afin d'identifier la protection optimale dont la cédante a besoin. Il est assez courant que l'organisme de structuration assiste la cédante dans le placement de l'obligation auprès des investisseurs.

## Structure d'un Cat Bond

Figure 11: Schéma d'une structure type de Cat Bond



Source : AXA Investment Managers

Une société ad hoc (un Fonds) appelée « *Special Purpose Vehicle* » (SPV) est mise en place par la société désirant émettre des titres. Cette structure est spécialement créée pour l'opération de titrisation afin de protéger les investisseurs contre une éventuelle faillite de la cédante. Un accord d'ordre financier est conclu entre la SPV et le sponsor.

Moyennant le paiement d'une prime, la cédante bénéficie d'une protection contre la survenance d'un ou de plusieurs événements préalablement définis. Il s'agit ici d'un paiement conditionné à la matérialisation d'un événement.

La SPV prend en charge la couverture du contrat financier conclu avec l'émetteur en émettant des titres qui seront placés sur le marché des capitaux. La possibilité de se procurer ces titres est alors offerte aux investisseurs.

Grâce aux sommes récoltées, la SPV met en place des investissements sur les marchés financiers et encaisse les retours sur investissements.

Une dernière étape et non des moindres consiste à mettre en place une opération de collatéralisation. Cette opération a pour but d'utiliser des produits dérivés afin d'échanger le retour de ces investissements contre le paiement d'un intérêt. Le calcul des intérêts est fait en tenant compte du taux interbancaire mais aussi d'une prime de risque.

Dans le cas où le risque sous-jacent se réalise (un tremblement de terre ou un ouragan par exemple) pendant la période de couverture, si l'ILS est activé, la SPV indemnise l'émetteur et les investisseurs voient donc les titres émis par la SPV se déprécier.

Si à l'issue de toute la période de couverture, aucun sinistre n'est constaté, les investisseurs touchent non seulement le principal mais aussi des intérêts.

### **Les différents modes de déclenchement des Cat Bonds**

Les mécanismes de déclenchement varient d'une obligation à l'autre. Différents types de déclencheurs existent et sont destinés à équilibrer les préférences du sponsor et de l'investisseur. Par exemple, les sponsors auront une appétence pour les obligations donnant lieu à des indemnités basées sur les pertes réelles de la cédante. Cette situation crée toutefois un aléa moral car la cédante pourrait être moins vigilante vis-à-vis des risques souscrits et pourrait donc se retrouver avec de mauvais risques dans son portefeuille. A contrario, les investisseurs préféreront des types d'obligations qui leur procureront le plus de transparence possible.

Le type de déclencheur et le niveau de couverture d'une obligation sont souvent déterminés par un processus itératif mené entre le sponsor et l'agent de structuration. L'agent de modélisation peut aider à ce processus en fournissant des analyses de risque intermédiaires. Les déclencheurs relèvent généralement de l'un des quatre grands types définis ci-dessous, bien qu'ils puissent être personnalisés pour répondre aux besoins de la transaction. Tous les types de déclencheurs sont largement utilisés. La sélection doit être basée sur les objectifs spécifiques de transfert de risque du sponsor.

Les différents types de déclenchements sont :

#### **Indemnisation**

L'indemnisation est basée sur les pertes réelles du sponsor, comme dans la plupart des contrats de réassurance. L'agent de modélisation estime le risque de la transaction sur la base du portefeuille d'exposition réel du sponsor.

#### **Perte modélisée**

La perte de l'obligation est déterminée par l'agent de modélisation en collectant les paramètres des événements réels, tels que la magnitude et la localisation de l'épicentre des tremblements de terre, en les recréant dans son modèle de catastrophe et en estimant leur impact financier sur le portefeuille d'exposition utilisé à l'origine pour estimer le risque de l'obligation. Ce portefeuille peut ou non être similaire à l'exposition réelle du sponsor.

#### **Indice des pertes de l'industrie**

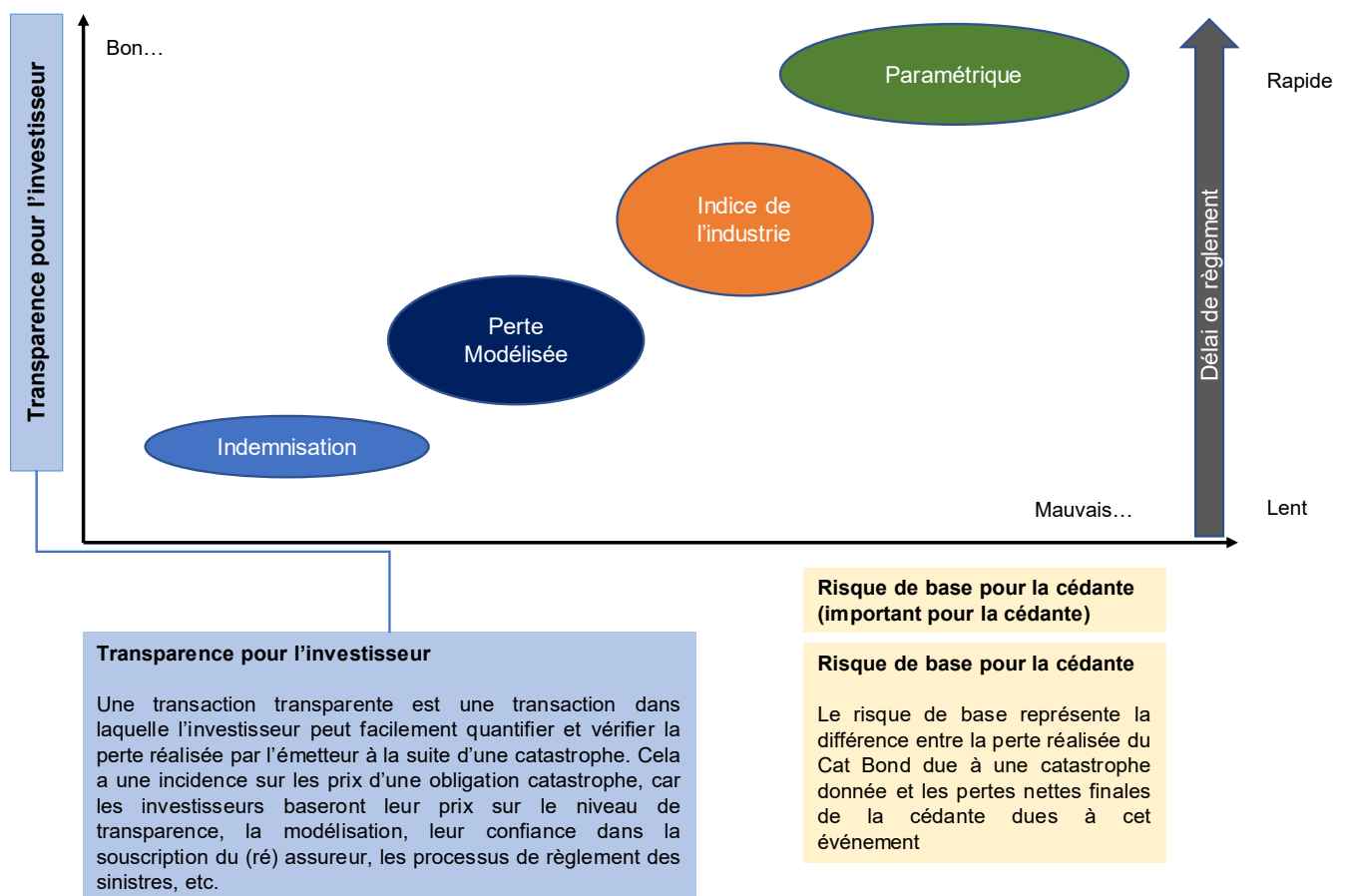
L'indemnisation est déclenchée en fonction des pertes réelles subies par l'ensemble de l'industrie de l'assurance. Aux États-Unis et au Japon, la perte est généralement mesurée par le Property Claims Services® (PCS). L'équivalent en Europe et en Australie est PERILS AG, un organisme indépendant qui recueille et communique les données sur les pertes des compagnies d'assurance à la suite de tempêtes, de tremblements de terre, d'inondations etc.

## Paramétrique

La récupération est basée sur des mesures objectives, telles que la vitesse maximale du vent et la position des terres d'un ouragan, ou le mouvement du sol mesuré par plusieurs sismomètres après un tremblement de terre. Pour minimiser le risque de base du sponsor, une analyse de risque détaillée du portefeuille du sponsor est effectuée avant de décider des paramètres d'un événement qualifiant.

On peut résumer les différents mécanismes de déclenchement et leurs implications sur le schéma ci-dessous. Ce schéma présente le compromis entre transparence pour l'investisseur, le risque de base de la cédante et le délai de règlement.

Figure 12: Mécanismes de déclenchement des Cat Bonds





### 3.2.2. Evolution du marché des *Cat Bonds*

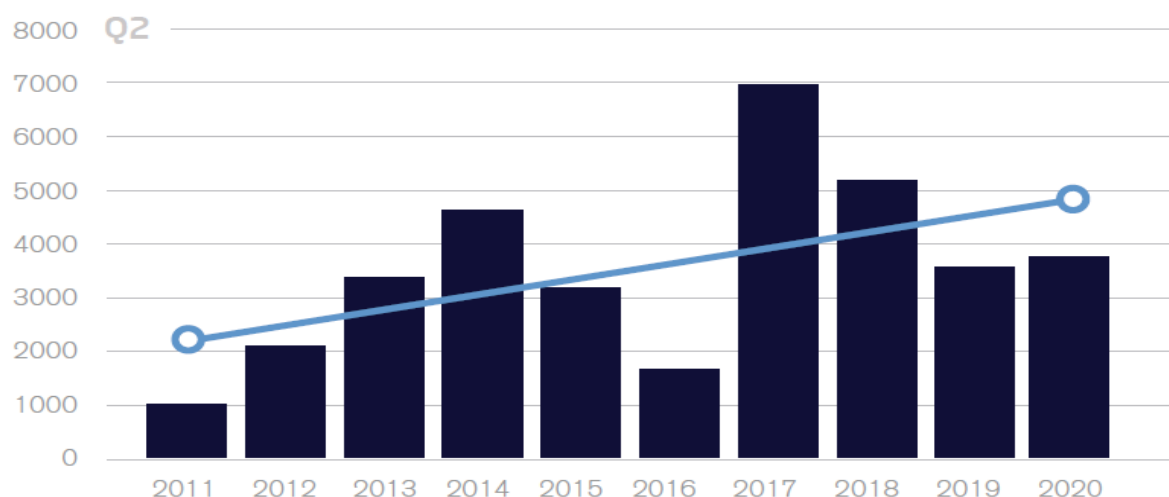
Depuis la première émission des *Cat Bonds* dans les années 90, le marché n'a cessé de croître. Le marché s'est agrandi tant en nombre qu'en volume.

#### Evolution annuelle

La figure ci-dessous représente les émissions en millions de \$ par an jusqu'au deuxième trimestre de 2020. Les émissions d'obligations catastrophe et de titres d'assurance au deuxième trimestre 2020 ont augmenté d'environ 4 % par rapport à la même période en 2019, et à 3,76 milliards de dollars, elles ont dépassé la moyenne des dix dernières années.

Il peut être aussi remarqué que le nombre de transactions par an est croissant depuis 2011.

Figure 13: Evolution annuelle du marché des *Cat Bonds* entre 2011 et 2020

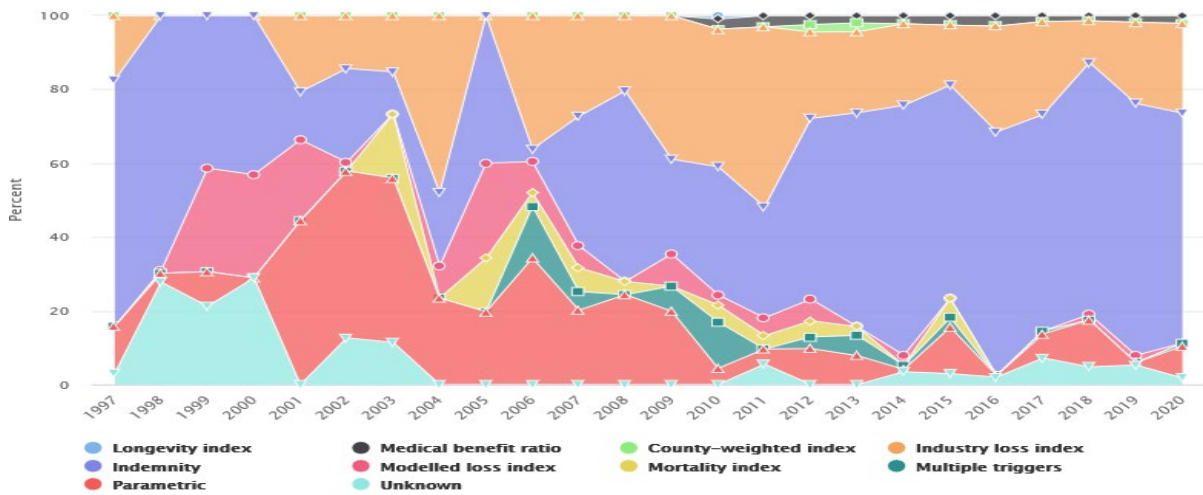


Source : [www.artemis.bm](http://www.artemis.bm)

#### Emission d'obligations catastrophe et d'*ILS* par déclencheur et par année

La figure ci-dessous montre l'évolution des émissions de *Cat Bonds* selon le type de déclencheur. Nous remarquons que le déclenchement indemnitaire est le plus plébiscité suivi du déclenchement indiciel.

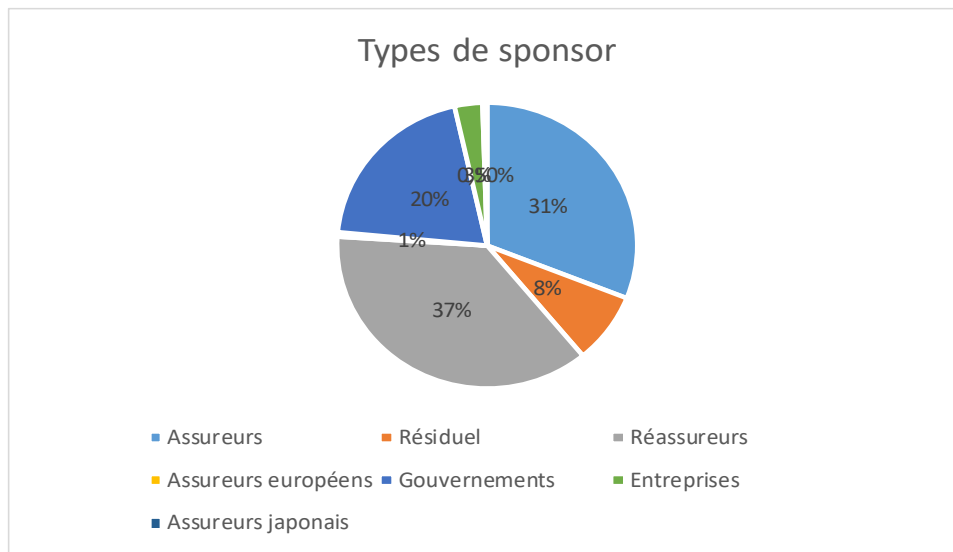
Figure 14: Emission de Cat Bonds et d'ILS par déclencheur et par année



Source : [www.artemis.bm](http://www.artemis.bm)

### Emission d'obligations catastrophe selon les différents types de sponsor (vision fin 2017)

Figure 15: Emission Cat Bonds par type de sponsors



Source : GC Securities

Nous remarquons que les réassureurs sont les principaux acheteurs de *Cat Bonds* suivi par les assureurs. Malgré un fort intérêt des entreprises d'assurance, on voit que les sponsors sont assez variés.

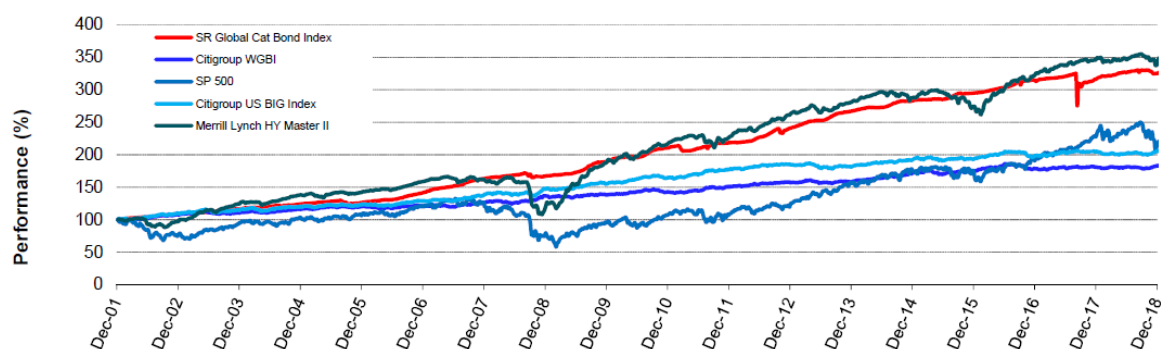
### 3.2.3. Avantages des *Cat Bonds* pour les investisseurs

Les *Cat Bonds* sont plébiscités par les investisseurs pour trois raisons principales :

#### Bonne performance :

Historiquement les *Cat Bonds* ont offert aux investisseurs de très bonnes performances en comparaison des obligations d'entreprise de notations financières similaires et par rapport aux indices des autres classes d'actifs. La figure ci-dessous fait la comparaison entre un indice *Cat Bonds* et d'autres indices classiques dans le temps.

Figure 16: Comparaison d'un indice *Cat Bonds* à d'autres indices classiques



Source: AXA Investment Manages, Swiss Re Capital Markets

#### Volatilité limitée

Swiss Re (2006) précise que les obligations catastrophes ont l'avantage d'offrir aux investisseurs une meilleure adéquation entre le risque pris et la rentabilité potentielle.

Tableau 3: comparaison rendement et volatilité d'un *Cat Bond* avec d'autres actifs

	Rendement Moyen	Volatilité
<b><u>Cat Bond</u></b>	<b><u>7,10%</u></b>	<b><u>5,20%</u></b>
<b>Govies</b>	3,60%	2,90%
<b>Equity</b>	5,80%	16,70%
<b>Invest. Grade</b>	4,30%	3,50%
<b>High Yield</b>	7,40%	7,30%

Source: AXA Investment Managers, Swiss Re Capital Markets, Citigroup US BIG Index

## Faible corrélation

Les *Cat Bonds* représentent une classe d'actifs fournissant des rendements très intéressants pour une volatilité moindre par rapports aux d'actifs comparables. Elles sont faiblement corrélées avec les autres actifs du marché financier, ce qui en fait donc un excellent actif de diversification.

Tableau 4: Matrice de corrélation d'un *Cat Bond* avec d'autres actifs

Corrélation	<u>Cat Bond</u>	Govies	Equity	Invest. Grade	High Yield
<u>Cat Bond</u>	100,00%	-4,50%	5,70%	-0,40%	7,60%
Govies	-4,50%	100,00%	-33,10%	82,70%	-9,50%
Equity	5,70%	-33,10%	100,00%	-23,20%	54,30%
Invest. Grade	-0,40%	82,70%	-23,20%	100,00%	11,90%
High Yield	7,60%	-9,50%	54,30%	11,90%	100,00%

Source: AXA Investment Managers, Swiss Re Capital Markets, Citigroup US BIG Index

En effet, l'ajout d'un *Cat Bonds* dans un portefeuille traditionnel d'actions et d'obligations peut entraîner une diminution de l'écart type des rendements et donc une augmentation du **ratio de Sharpe**.

### Ratio de Sharpe

Ce ratio mesure la différence de rendement entre un portefeuille d'actifs financiers (par exemple des actions) et le taux de rendement d'un placement sans risque, divisé par l'écart type (volatilité) de la rentabilité de ce portefeuille.

Mathématiquement,  $s = \frac{R-r}{\sigma}$  où  $r$  le référentiel (en général le taux sans risque),  $R$  est l'espérance des rentabilités du portefeuille et  $\sigma$  l'écart type.

L'ajout d'une obligation catastrophe permet d'améliorer la frontière efficiente.

## Hypothèses

- Un portefeuille traditionnel composé d'obligations et d'actions

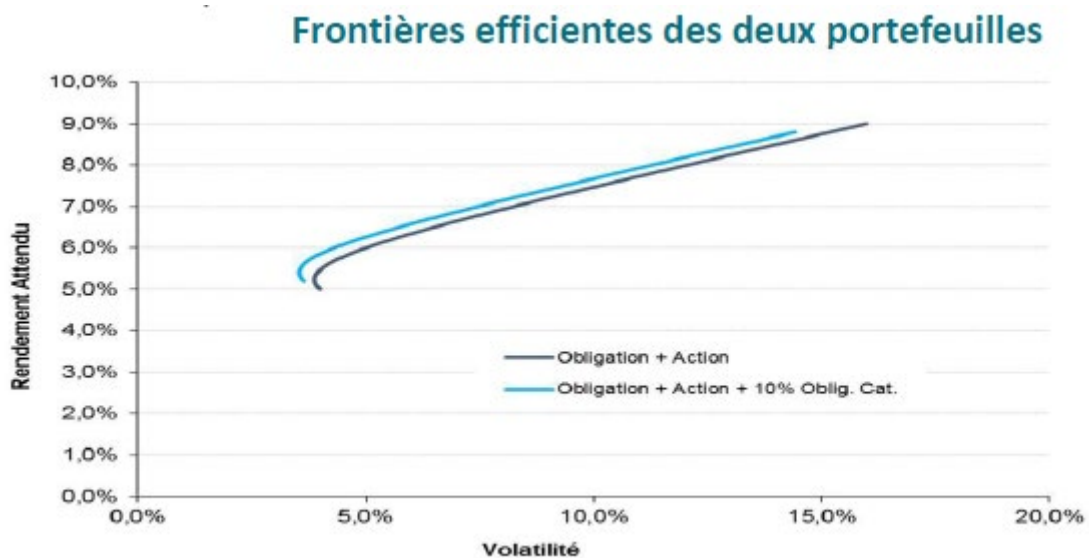
- Le même portefeuille incluant une exposition de 10% aux obligations catastrophe

Tableau 5: Exemple portefeuille

	Obligation	Action	Oblig. Cat
Rendement attendu	5%	9%	7%
Ecart-type	4%	16%	3%

Correlation	Obligation	Action	Oblig. Cat
Obligation	100%	0%	10%
Action	0%	100%	10%
Oblig. Cat	10%	10%	100%

Figure 17: Frontières efficaces de portefeuille avec et sans Cat Bond



## Résultats

- Les *Cat Bonds* dans un portefeuille traditionnel d'obligations et d'actions permettent une optimisation de la frontière efficace. La frontière efficace dans le cas où une obligation catastrophe est ajoutée au portefeuille est abaissée : pour un même niveau de risque (volatilité), le rendement attendu est plus élevé.
- Les rendements sont globalement meilleurs dans le cas du portefeuille contenant une obligation catastrophe.

- L'ajout d'une obligation catastrophe à un portefeuille classique d'actions et d'obligations diminue la volatilité de celui-ci.

### 3.3. Réassurance vs Titrisation

Nous avons vu précédemment les avantages de la réassurance mais aussi quelques-uns de ses inconvénients. Même si la titrisation présente des atouts très intéressants, elle comporte néanmoins quelques limites. Dans le tableau ci-dessous, nous faisons un comparatif entre la réassurance et la titrisation.

Tableau 6: Réassurance vs Titrisation

Réassurance	Titrisation
<b>Pas de risque de base car l'indemnisation dépend le plus souvent de la sinistralité du portefeuille ;</b>	<b>Risque de base potentiellement élevée dans le cas où les pertes indicielles sont différentes des pertes réelles ;</b>
<b>Peu de conditions sur les capacités minimales ;</b>	<b>Capacité élevée pour rentabiliser une titrisation ;</b>
<b>Risque de contrepartie ;</b>	<b>Risque de contrepartie très faible voire inexistant ;</b>
<b>Prix et capacités révisables annuellement ;</b>	<b>Prix et capacités fixés sur la durée de l'opération ;</b>
<b>Risque opérationnel ;</b>	<b>Risque opérationnel et juridique</b>
<b>Faible coût de mise en place.</b>	<b>Coût de mise en place élevé.</b>

Les différents éléments contenus dans le tableau précédent amènent donc les entreprises d'assurance à ne pas substituer la réassurance traditionnelle par la titrisation mais à utiliser la titrisation comme complément à la réassurance.

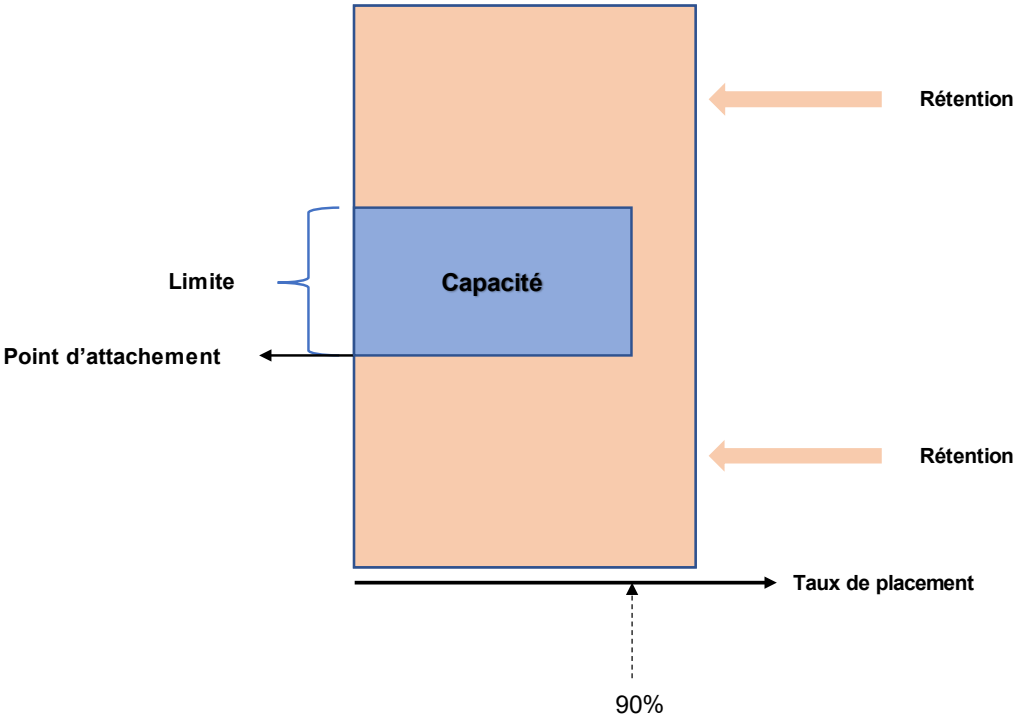
Dans la suite de ce mémoire, nous tenterons de structurer un *Cat Bonds* dans un environnement complexe où cohabitent différents mécanismes de couverture.

# CHAPITRE 2 : DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES D'UN CAT BOND INDICIEL

Les *Cat Bonds* représentent une couverture complémentaire à laquelle font appel les assureurs et les réassureurs afin de se protéger contre les risques catastrophes. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à un *Cat Bond* à déclenchement indiciel. Ce *Cat Bond* a pour but de protéger le Groupe AXA contre des risques catastrophes naturelles dans certaines régions du globe. Comme dans le cas de la réassurance traditionnelle non proportionnelle, il faut avant tout déterminer à partir de quel montant on désire se protéger (point d'attachement) mais également la limite de la couverture puis la capacité. La structure de la couverture est assimilable à celle d'une couverture non proportionnelle (voir chapitre précédent).

Afin de structurer le *Cat Bond*, la méthode adoptée dans ce mémoire est de structurer dans un premier temps le *Cat Bond* sur la base du brut de la cédante (comme si le *Cat Bond* était indemnitaire). Dans un second temps, on calibre les *Payout Factors* afin de minimiser le risque de base.

Figure 18: Structure simplifiée de la couverture d'un Cat Bond



Le *Cat Bond* à structurer interviendra donc en lieu et place d'une couverture annuelle « Limite XS Point d'attachement ».

## 1. Données utilisées

Pour déterminer la capacité optimale mais aussi le point d'attachement, nous nous baserons sur les pertes brutes de la cédante pour les périls et les régions qui seront couvertes par le *Cat Bond*.

Pour des raisons de confidentialité, les bassins et les périls couverts par le *Cat Bond* ne seront pas mentionnés dans ce mémoire. Les couples de bassin et péril couverts seront appelés A, B, C, D, E, F et G et dans la suite nous les désignerons simplement par le terme « Bassin ».

### 1.1. Brut de la Cédante

Pour rappel, afin de structurer le Cat Bond, la méthode adoptée dans ce mémoire est de structurer dans un premier temps le Cat Bond sur la base du brut de la cédante (comme si le Cat Bond n'était pas indiciel). Dans un second temps, on calibre les Payout Factors afin de minimiser le risque de base.

Afin de déterminer la capacité à acheter, nous avons besoin des pertes brutes du portefeuille de la cédante pour chacune des zones couvertes. Ces pertes ont été modélisées à l'aide d'un modèle catastrophe.

Nous disposons des ELT à la granularité du périmètre de couverture du *Cat Bond*.

Avant toute chose, nous allons d'abord analyser les pertes pour avoir une certaine idée du risque supporté par la cédante.

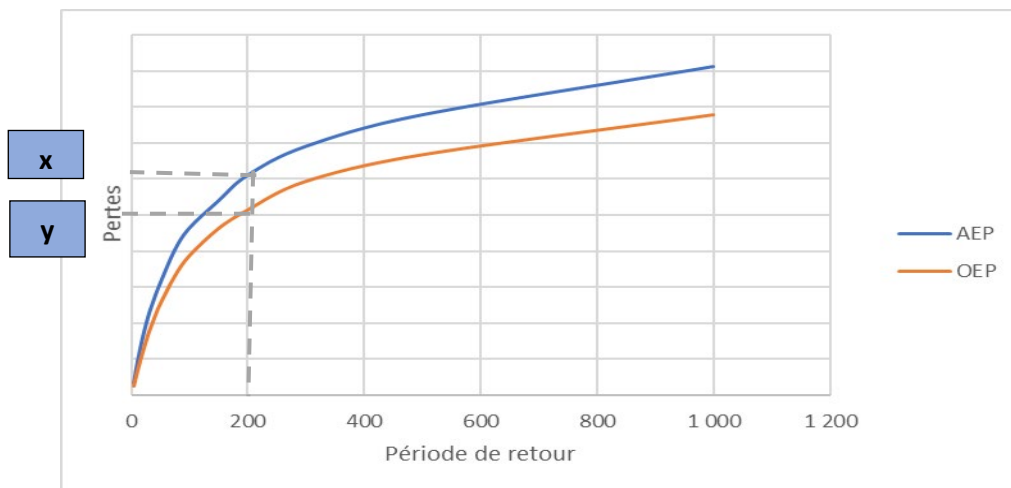
Nous allons nous intéresser aux AEP et OEP pour chaque Bassin et Péril couverts.

Pour des raisons de confidentialité, les graphiques ont été anonymisés. Nous conseillons au lecteur d'apprécier les méthodes utilisées plutôt que les résultats chiffrés.



➤ Bassin : A

Figure 19 : Pertes AEP et OEP du brut de la cédante en fonction de la période de retour (Bassin A)

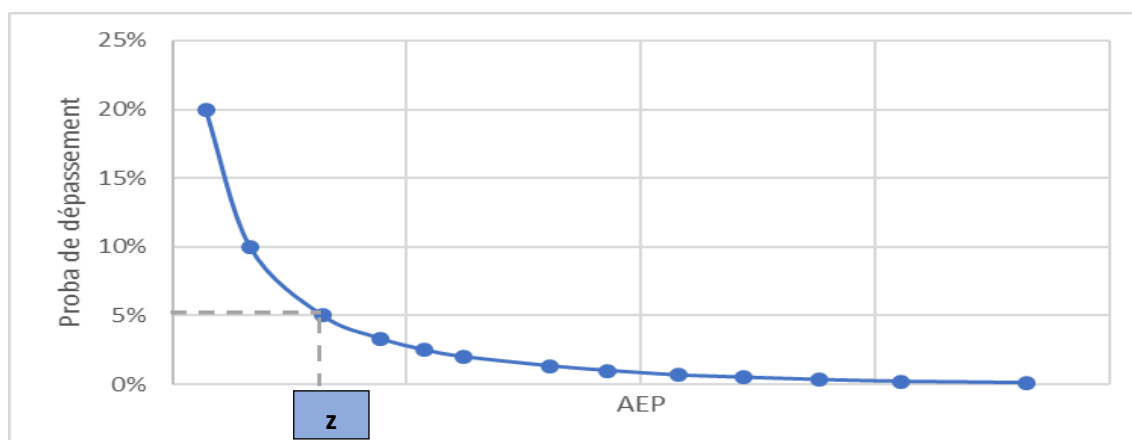


Cette figure nous permet d'avoir une certaine idée de l'exposition de la cédante sur le Bassin A.

Interprétation : A l'aide de la courbe AEP, on peut dire par exemple qu'une fois tous les 200ans, la cédante subira une perte annuelle agrégée de x Milliards €. La courbe OEP (Voir chapitre 1) permet d'avancer que tous les 200 ans, la cédante serait touchée par un évènement causant une perte d'au moins y Milliards €.

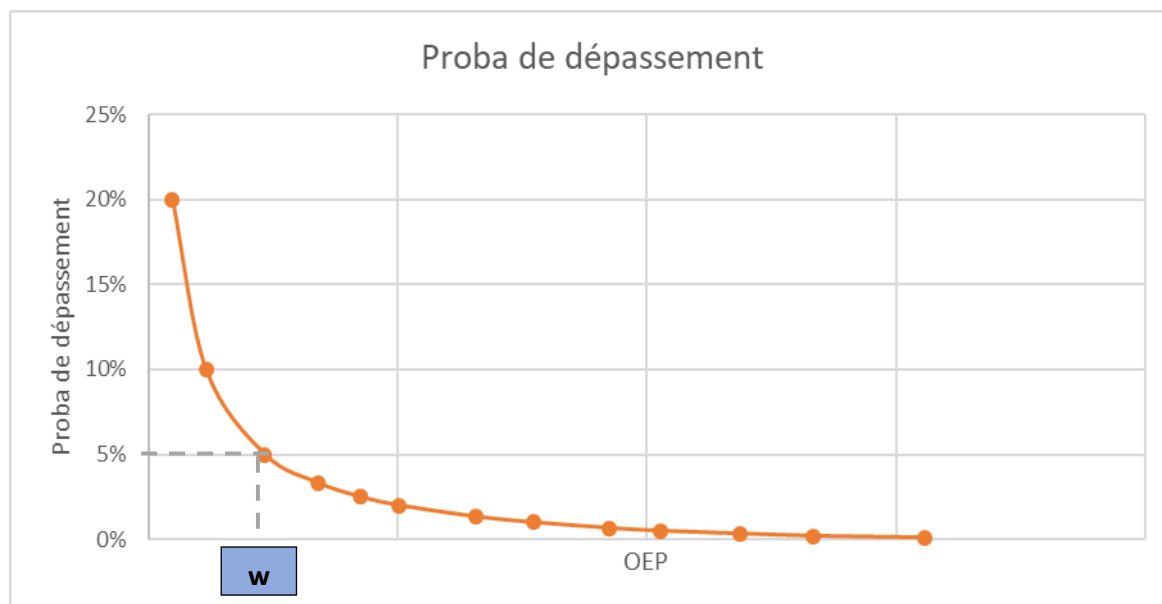
Des courbes équivalentes aux précédentes peuvent également être utilisées. On utiliserait plutôt la probabilité de dépassement (Voir Chapitre 1).

Figure 20 : Probabilité de dépassement en fonction de l'AEP de la cédante (Bassin A)



Interprétation : Cette courbe permettrait de dire par exemple que la probabilité d'avoir une perte annuelle totale d'environ z Milliards€ est de 5%.

Figure 21 : : Probabilité de dépassement en fonction de l'OEP de la cédante (Bassin A)



Interprétation : Cette courbe permettrait d'affirmer que la probabilité d'avoir un évènement causant une perte au moins égale à w Milliards € est de 5%.

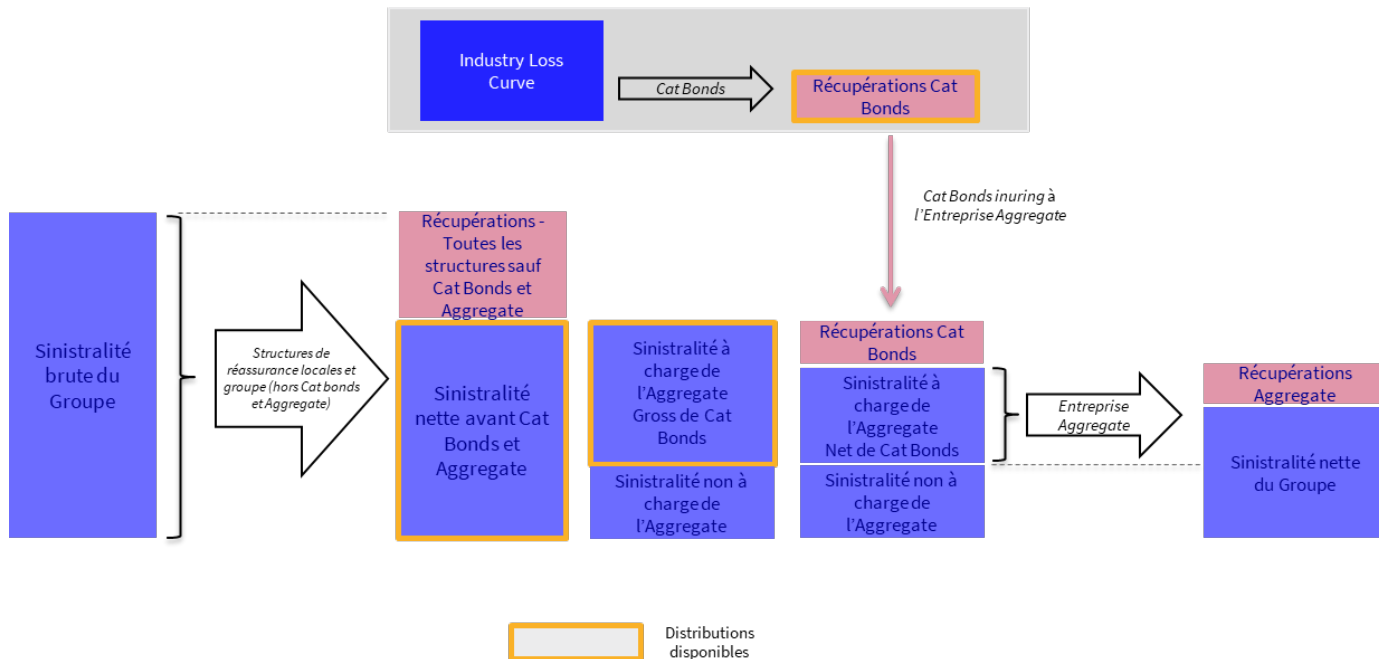
## 1.2. Modélisation du risque catastrophe du groupe

La structuration d'un *Cat Bond* pour le compte d'une compagnie d'assurance ou de réassurance ne se fait pas indépendamment des autres couvertures. Comme nous l'avons vu dans la partie II, les *Cat Bonds* sont généralement utilisés en complément d'autres couvertures classiques (réassurance traditionnelle) et alternatives. La structuration doit donc s'intégrer dans un mécanisme de couverture assez souvent complexe, avec des mécanismes de dépendance et d'ordre d'application entre les différentes structures. C'est notamment le cas dans notre étude : le *Cat Bond* est *inuring* à l'*Entreprise Aggregate* comme on le voit sur le schéma ci-dessous, cela signifie que les récupérations générées par le *Cat Bond* viennent réduire la sinistralité à charge de l'*Entreprise Aggregate*.

Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, l'*Entreprise Aggregate* est la dernière structure de réassurance à être appliquée. Cette couverture a un périmètre de couverture très large et un certain nombre de couvertures lui sont *inuring* (*inuring* signifie intervient avant) et viennent réduire la sinistralité qui lui est à charge.

A noter que toutes les couvertures ne sont pas *inuring* à l'*Entreprise Aggregate* et que tous les risques du Groupe n'y sont pas couverts :

Figure 22: Architecture simplifiée de la sinistralité du Groupe



Comme on le voit en orange sur le schéma ci-dessus, nous disposons des données suivantes :

- Distribution de la sinistralité nette du Groupe avant application des *Cat Bonds* et de *l'Enterprise Aggregate*. Cette distribution prend en compte les récupérations des autres structures de réassurance du Groupe.
- Distribution des récupérations générées par les *Cat Bonds*
- Distribution de l'UNL (*Ultimate Net Loss*, ou sinistralité à charge) de *l'Aggregate* brut des *Cat Bonds*, c'est à dire avant déduction des récupérations générées par les *Cat Bonds*

On dispose également de la distribution des primes des différentes couvertures. Il s'agit d'une distribution et non pas d'un montant fixe car les primes correspondent aux primes *upfront* et aux primes de reconstitutions payées en cours d'année. Les primes *upfront* sont fixes pour toutes les années simulées, mais ce n'est pas le cas des primes de reconstitution, qui dépendent de la sinistralité modélisée.

## 2. Objectifs et contraintes

Pour rappel, l'objectif est ici de déterminer un montant de capacité optimale à émettre puis de structurer par la suite une tranche optimale sur laquelle cette capacité devra être placée.

La structuration du Cat Bond doit permettre d'optimiser la marge cédée au niveau du groupe tout en respectant les contraintes d'appétit au risque.

Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir une vue globale sur les différentes structures de réassurance du groupe et leur ordre d'application.

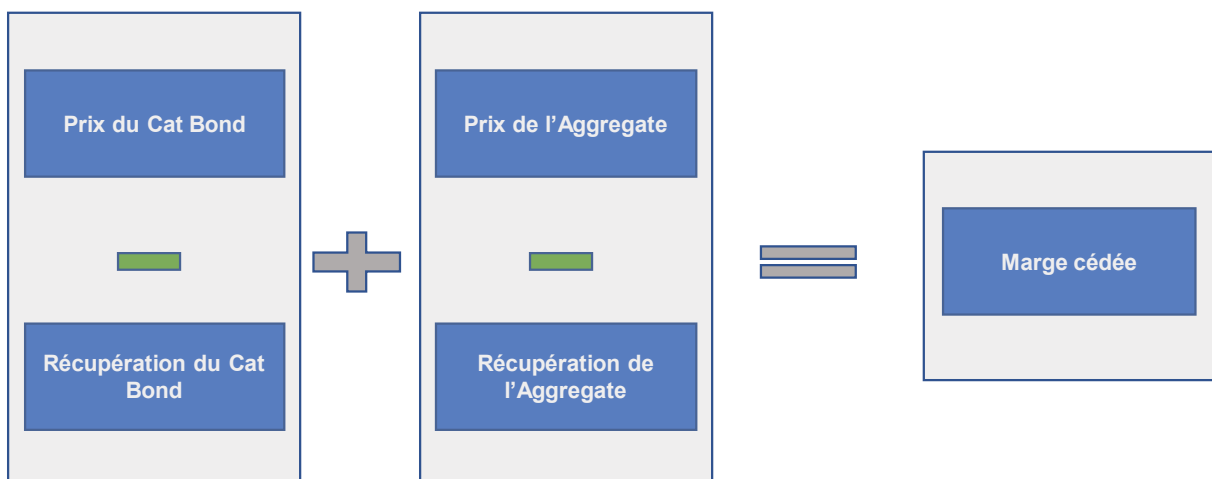
### 2.1. Minimisation de la marge cédée du Groupe

La sinistralité du Groupe in fine dépend de plusieurs structures de réassurance mise en place afin de garantir la résilience des activités au niveau Groupe.

En contrepartie de ces couvertures, le Groupe paie des primes. Dans notre étude, nous nous intéressons spécifiquement aux couvertures Cat Bonds et Enterprise Aggregate du Groupe.

L'un des objectifs de notre étude est de structurer un *Cat Bond* dont l'interaction avec la couverture *Enterprise Aggregate* permette de réduire la marge cédée. Autrement dit, il sera question de choisir une capacité sur le Cat Bond qui permettra de minimiser la marge cédée sur les structures *Cat Bond* et *Enterprise Aggregate* combinées.

Figure 23 : Marge cédée au niveau de l'Enterprise Aggregate et du Cat Bond



Le Cat Bond à émettre devra donc permettre de céder le moins de marge possible.

## 2.2. Respect de l'appétit au risque du Groupe

L'appétit au risque ou *risk appetite* en anglais est le niveau maximal qu'une firme, une entreprise d'assurance ou de réassurance dans notre cas, est prête à accepter afin de réaliser son plan stratégique.

Les compagnies d'assurance et de réassurance ne partagent pas toutes la même vision du risque. Certains assureurs souscrivent des risques que d'autres ne souscrivent pas. Cet appétit de risque dépend de plusieurs facteurs tels que les exigences des actionnaires en termes de rentabilité, la concurrence et la couverture de réassurance et de rétrocession. L'appétit pour le risque dépend de la rentabilité recherchée par les actionnaires. Sur la base des objectifs fixés par ces derniers, le conseil d'administration procède à l'élaboration d'une politique d'acceptation des risques en fonction des montants de fonds propres disponibles. La stratégie élaborée et initiée par l'équipe d'administrateurs doit être menée dans un cadre garantissant la pérennité de l'entreprise et le respect des engagements pris envers les assurés et les bénéficiaires des services.

Des objectifs de rentabilité disproportionnés peuvent entraîner une prise de risque excessive de la part des compagnies d'assurance, ce qui est l'une des causes, entre autres, de la crise financière de 2008.

Le groupe AXA définit son cadre d'appétit au risque en se basant sur son résultat net. Des contraintes sont mises en place sur deux niveaux distincts d'AEP du résultat net qu'on va nommer AEP<sub>a</sub>y et AEP<sub>b</sub>y où  $a, b \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 45, 50, 55, \dots\}$ . Pour des raisons de confidentialité, les niveaux exacts d'AEP ne seront pas spécifiés. Ici y=année. AEP<sub>60</sub>y signifie l'AEP à une période de retour de 60 ans.

La réassurance joue un rôle clé dans le respect des métriques d'appétit au risque. Elle est structurée de telle sorte à garantir le respect de l'appétit au risque du Groupe à tout moment de l'année.

Pour rappel, on peut calculer ces métriques de la façon suivante :

$$AEP_a = \text{Quantile}(\text{Résultat Net}_y; 1/a)$$

$$AEP_b = \text{Quantile}(\text{Résultat Net}_y; 1/b)$$

Avec

$$Résultat Net_y = Résultat Brut - Prime CB + Rec CB - Prime Agg + Rec Agg$$

Où *CB*=*Cat Bond*, *Agg*=*Aggregate* et *Résultat Brut* représente le résultat net avant application des *Cat Bonds* et de l'*Enterprise Aggregate*.

L'AEP à une période de retour élevée est négative ; autrement dit à une période de retour x élevée, le Groupe fait une perte. On souhaite donc que l'AEP soit la moins négative possible.

On souhaite ici structurer les *Cat Bonds* et modifier la couverture *Aggregate* de telle sorte à respecter les contraintes de l'appétit au risque ; autrement dit, on souhaite avoir AEPay et AEPby inférieures aux montants définis par le Groupe.

### 2.3. Maximisation de l'efficacité du *Cat Bond*

L'efficacité est un indicateur de risque. Elle donne une idée de l'efficacité d'une couverture. Ici, on va s'intéresser à l'optimalité de la capacité émise de notre *Cat Bond* au regard de son impact sur l'AEPby. L'efficacité est donc la réduction de l'AEPby induite par le *Cat Bond* divisée par la capacité émise.

$$Efficacité = \frac{AEPby_{central} - AEPby}{Capacité émise}$$

Le scénario central correspond au scénario dans lequel le *Cat Bond* n'est pas émis.

Plus l'efficacité est grande, plus la couverture permet de réduire l'AEP par rapport à la capacité émise.

## 2.4. Minimisation du SCR ou STEC en modèle interne AXA (Short Term Economic Capital)

Le SCR (Solvency Capital Requirement) est le montant de fonds propres que les compagnies d'assurance et de réassurance de l'Union Européenne sont tenues de détenir. Le SCR est fixé à un niveau qui garantit que les assureurs et les réassureurs puissent honorer leurs engagements vis-à-vis des assurés et bénéficiaires en cas de déviation bicentenaire de leur résultat au cours des douze prochains mois. Autrement dit, le SCR correspond au montant de fonds propres nécessaire pour qu'une compagnie d'assurance ne fasse pas faillite dans l'année avec un niveau de confiance de 99,5%.

Dans le modèle interne de AXA, l'équivalent du SCR s'appelle le STEC.

Mathématiquement, le STEC se calcule de la façon suivante :

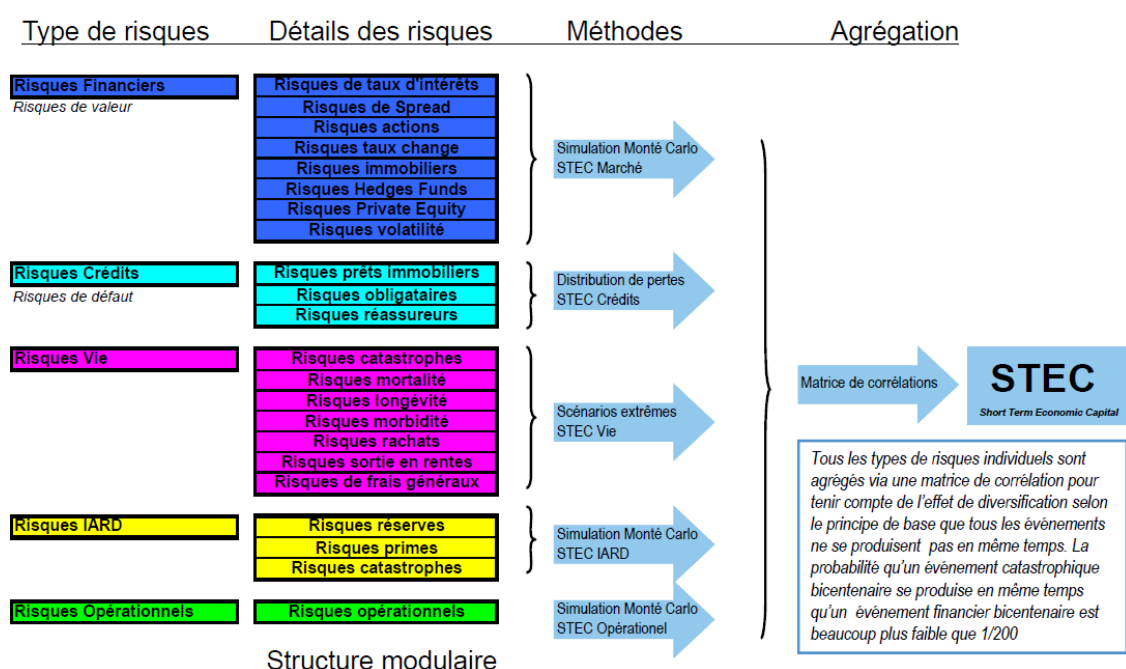
$$\text{STEC} = \text{VaR}_{99,5\%}(X) - \text{Moyenne}(X)$$

Avec X le résultat net.

Le STEC s'interprète comme la déviation bicentenaire du résultat par rapport à la moyenne.

Pour calculer Le STEC, il est nécessaire de modéliser tous les risques du Groupe. Voici ci-dessous l'architecture des différents modules de risque du modèle interne AXA.

Figure 24: Structure modèle interne AXA



Il existe essentiellement deux formes de STEC. Le STEC « Standalone » qui est spécifique à un risque donné et le STEC « diversifié » (il y a plusieurs niveaux de diversification, par exemple une diversification au niveau P&C<sup>3</sup> du groupe puis une diversification au niveau de tout le groupe) qui prend en compte les autres risques/branches. C'est pour cette raison que tous les types de risques individuels sont agrégés via une matrice de corrélation pour tenir compte de l'effet de diversification selon le principe de base que tous les événements ne surviennent pas au même moment. La probabilité qu'un événement catastrophique bicentenaire se produise en même temps qu'un événement financier bicentenaire est beaucoup plus faible que 1/200.

L'objectif recherché ici c'est que le *Cat Bond* minimise le STEC diversifié du Groupe. En effet, plus le STEC est faible, plus le ratio de solvabilité augmente.

### 3. Choix de la capacité

Comme nous l'avons souligné plus haut, la première étape de la structuration d'un *Cat Bond* consiste à déterminer la capacité à émettre.

<sup>3</sup> P&C : Property & Casualty désigne l'activité assurance dommages.



### 3.1. Présentation de l'approche retenue

#### Départ de la vision *as expiring*

Le but de notre étude est de renouveler un *Cat Bond* qui arrive à expiration. Cette protection s'intégrera dans la structure de protection 2021 (Ren2021) du Groupe. Nous avons retenu une approche qui consiste à garder une vision « *as expiring* » c'est-à-dire garder la structure de couverture du groupe telle qu'elle est actuellement (Ren 2020). L'idée ici est de tester plusieurs scénarios en faisant varier le montant de la capacité émise pour le *Cat Bond*. En prenant en compte les contraintes (voir 2.2) et en mettant en place des indicateurs adéquats, nous choisirons la capacité optimale qu'il aurait fallu placer au regard de l'architecture de couverture 2020.

#### Scénarios d'émission de différents niveaux de capacité de *Cat Bonds*

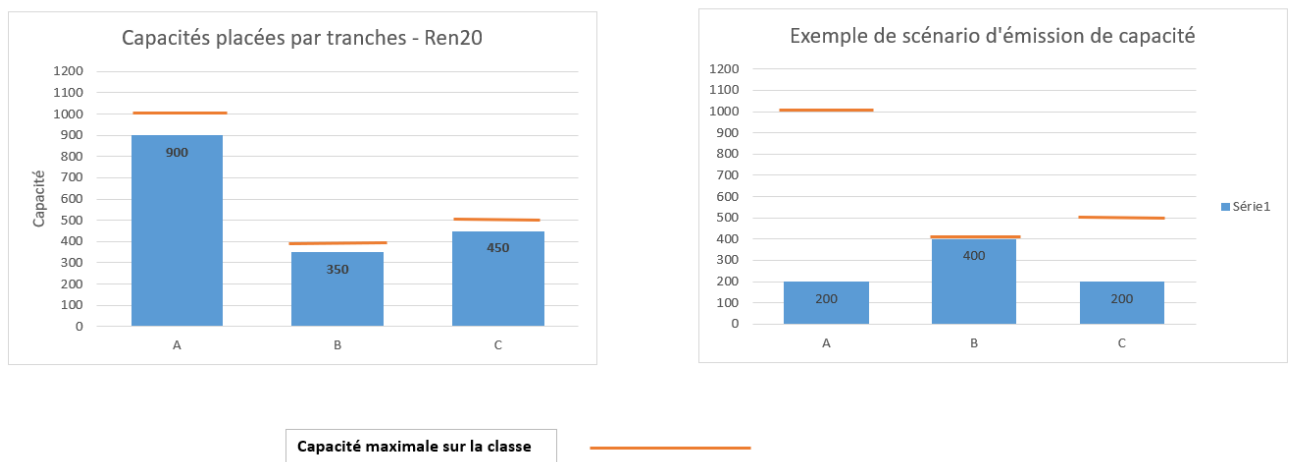
En pratique, nous nous sommes placés dans un premier temps dans le cas où nous souhaiterions renouveler par exemple 3 classes de *Cat Bonds* qui expirent en 2020.

Nous avons ensuite fait varier la capacité placée sur chaque tranche en fonction des montants maximaux qu'il serait possible de placer au regard de l'état actuel du marché des ILS et de l'appétence des investisseurs.

Nous ferons donc varier la capacité sur chaque classe entre 0 et le montant maximal.

Pour illustration, on suppose qu'il est possible de placer au maximum 1000 sur la classe A, 400 sur la classe B et 500 sur la classe C.

Figure 25 : Exemple d'illustration de répartition de capacité par classe



Les récupérations de chaque scénario se calculent donc de la manière suivante, en jouant sur le taux de placement des *Cat Bonds* en vigueur en 2020 :

$$Récup_{scénario\ i} = \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ A}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ A}} * Recup_{Ren2020}^{Classe\ A} + \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ B}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ B}} * Recup_{Ren2020}^{Classe\ B} + \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ C}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ C}} * Recup_{Ren2020}^{Classe\ C}$$

avec  $Recup_{Ren2020}^{Classe\ I}$  la distribution des récupérations de la Classe I des *Cat Bonds* en vigueur en 2020. Récup = Récupérations et Capa = Capacité.

### **Implémentation sur R d'une architecture simplifiée de la sinistralité nette du Groupe**

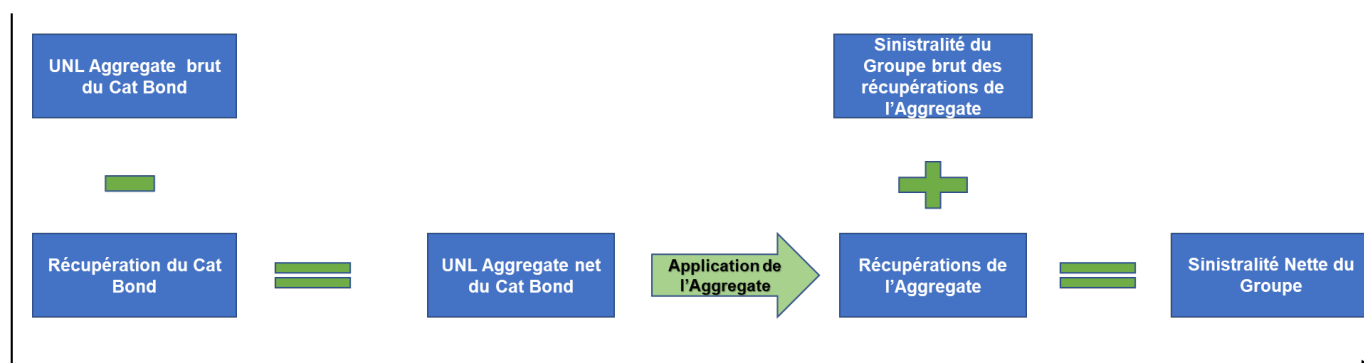
Le risque CAT du Groupe est modélisé avec l'outil ReMetrica. Ce modèle est coûteux en temps de calcul car les pertes de toutes les entités du Groupe y sont modélisées.

Dans notre étude, nous n'avons pas besoin de ce niveau de détail. Nous souhaitons pouvoir quantifier l'impact d'un scénario d'émission de *Cat Bonds* sur l'*Entreprise Aggregate* et sur le résultat net du Groupe.

Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, nous n'avons besoin que des distributions suivantes :

- Récupérations générées par chaque classe des Cat bonds : pour chaque scénario, on calculera les récupérations en jouant sur le taux de placement.
- UNL de l'Aggregate avant Cat Bonds : pour chaque scénario, on déduira les récupérations calculées pour les *Cat Bonds*. On appliquera ensuite les conditions de l'*Aggregate* pour obtenir les récupérations.
- Sinistralité nette du Groupe avant Cat Bonds et Aggregate : pour chaque scénario, on calcule le nouveau résultat net du Groupe en déduisant les récupérations des *Cat Bonds* et de l'*Entreprise Aggregate*.

Figure 26 : Schéma de sinistralité nette Groupe à partir de la sinistralité brute



#### SENS DE LECTURE

Nous avons implémenté cette architecture sous R. De cette manière, nous sommes capables de quantifier l'impact d'un scénario d'émission de Cat Bonds sur la sinistralité nette du groupe en environ 100 fois moins de temps qu'en utilisant le modèle ReMetrica (Machine utilisée : ThinkPad T430 Core i5 2,6 GHz - 8 Go).

Cette architecture simplifiée permet de tester un grand nombre de scénarios d'émission, ce qui n'aurait pas été faisable avec ReMetrica.

#### Passage de la sinistralité nette au résultat net

Pour passer de la sinistralité nette au résultat net, il faudra calculer l'impact sur le prix des *Cat Bonds* et de *l'Enterprise Aggregate*. Pour rappel, nous disposons déjà de la distribution des primes des autres couvertures.

Concernant l'impact sur le prix des *Cat Bonds*, on se base sur le prix des *Cat Bonds* qui arrivent à expiration en jouant sur le taux de placement des capacités.

La prime de chaque scénario se calcule donc de la manière suivante :

$$Prime_{scénario\ i} = \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ A}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ A}} * Prime_{Ren2020}^{Classe\ A} + \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ B}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ B}} * Prime_{Ren2020}^{Classe\ B} + \frac{Capa_{scénario\ i}^{Classe\ C}}{Capa_{Ren2020}^{Classe\ C}} * Prime_{Ren2020}^{Classe\ C}$$

Avec Capa = Capacité.

L'impact sur le prix de *l'Enterprise Aggregate* est lui, moins trivial étant donné que le prix du *Cat Bond* impacte le prix de *l'Enterprise Aggregate*. Ainsi, étant donné que le *Cat Bond* est *inuring*, plus la capacité placée sur les Cat bonds est importante et plus le prix de *l'Enterprise Aggregate* va diminuer.

Il est déterminé en calibrant un *Multiple*.

Il s'agit ici d'effectuer une tarification « marché ». Introduisons quelques notions :

**Définitions :**

- **Le Loss on Line (LoL):**

$$LoL = \frac{Recoveries}{Limit}$$

- **Le Rate on Line (RoL)**

$$RoL = \frac{Premium}{Limit}$$

- **Le Multiple**

$$Multiple = \frac{RoL}{LoL}$$

Finalement,

$$Multiple = \frac{Premium}{Recoveries}$$

Le *Multiple* répond à la question : combien coûte 1€ de perte espérée ?

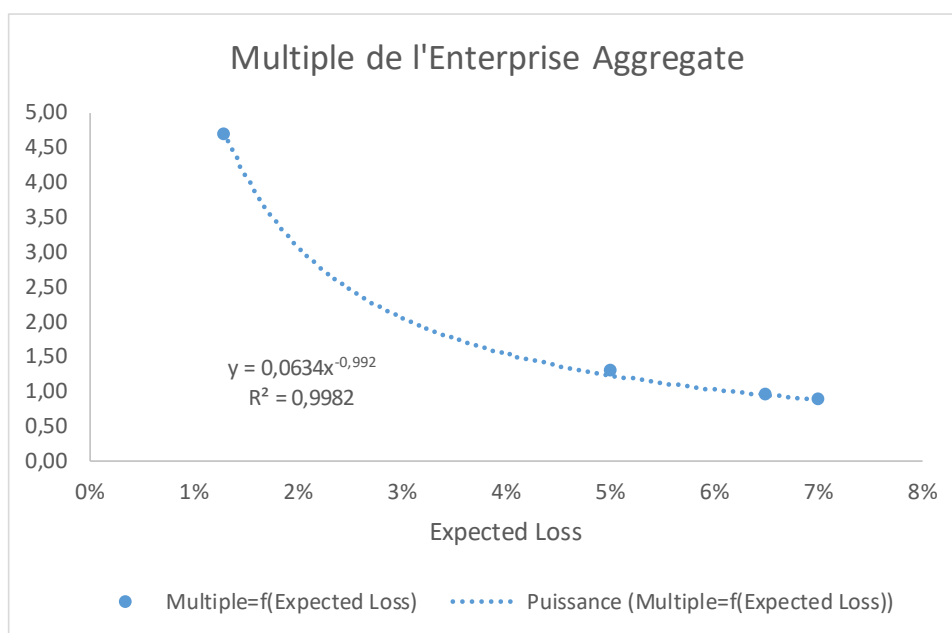
On a donc

$$Prix/Prime = Multiple \times Recoveries$$

$$Prime_{Aggregate} = Multiple \times Récupérations_{Aggregate}$$

En se basant sur un historique d'*Expected Loss* et de *Multiple* de l'*Enterprise Aggregate*, on utilise la régression ci-dessous (pour info les données sont à titre indicatif mais elles illustrent bien la méthodologie ayant permis de déterminer la prime de l'*Aggregate*).

Figure 27: Calibration du Multiple de l'Entreprise Aggregate



### **Impact par rapport à un scénario sans émission de *Cat Bonds***

Nous analyserons enfin l'impact de la capacité sur différentes métriques afin de pouvoir choisir la capacité optimale. Pour ce faire, on procède à la comparaison entre les différents scénarios et le scénario central (scénario dans lequel on n'émet pas de *Cat Bond*). Cela nous permet de quantifier l'impact de l'émission.

### **3.2. Impact de la variation de la capacité sur le *Risk Appetite***

Comme évoqué plus haut, les indicateurs du *risk appetite* de AXA sont l'AEPay et AEPby du résultat net.

Nous avons calculé l'impact de chaque scénario d'émission des *Cat Bonds* sur l'AEPay et l'AEPby. Les résultats obtenus sont présentés dans les graphes ci-dessous. En abscisse, on trouve le montant de capacité émis. En ordonnée, on trouve l'impact marginal de la capacité sur l'AEPay et AEPby par rapport au scénario dans lequel il n'y aurait pas d'émission de *Cat Bonds* (pas d'émission de capacité).

Pas d'émission



Figure 28 : Courbe de la différence entre l'AEPay des scénarios et du scénario central

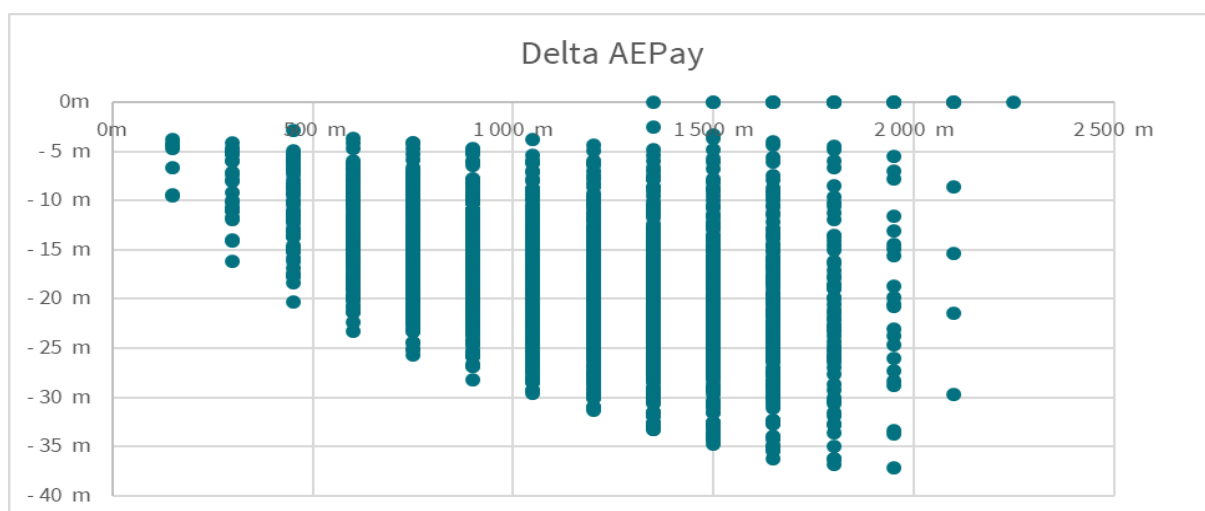
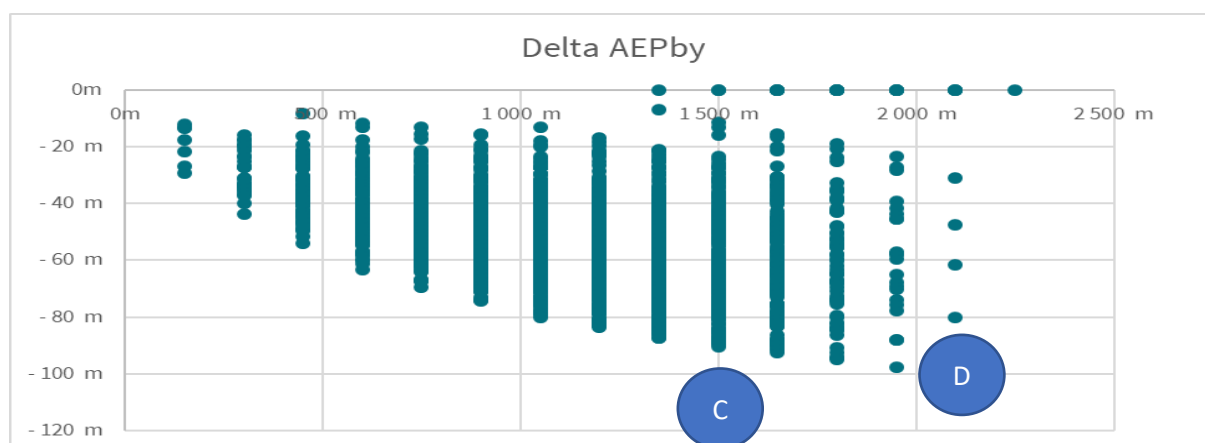


Figure 29: Courbe de la différence entre l'AEPby des scénarios et du scénario central



### Remarques

Pour un même montant de capacité émise, l'impact marginal sur l'AEPay et l'AEPby varie beaucoup entre les scénarios : par exemple, pour C (1,5 milliards) capacité émise, l'impact marginal sur l'AEPby varie entre 0 et 90 millions. Cela s'explique par le fait que pour un même montant de capacité émis, la capacité peut être répartie de différentes manières entre les classes du *Cat Bond*. En fonction des classes sur lesquelles la capacité a été répartie, l'impact sur les AEP va être très différent. Par exemple, si toute la capacité est placée sur la classe la plus haute, l'impact marginal sur les métriques de *Risk Appetite* va être faible car les récupérations générées concernent des périodes de retour beaucoup plus élevées que celle de l'AEPay et AEPby. Inversement, si les capacités sont placées majoritairement sur les tranches qui impactent les périodes de retour des métriques du *Risk Appetite*, on va constater une forte baisse de l'AEPay et AEPby.

Si on regarde l'impact marginal maximal pour chaque montant de capacité émise, on constate que plus la capacité augmente et plus l'AEPay et AEPby diminuent. Intuitivement, cela s'explique par le fait que plus on place de capacité et plus les *Cat Bonds* génèrent de récupérations et permettent de diminuer le risque net du Groupe

Les deltas des AEP augmentent de moins en moins (plafonnement) puis décroissent même pour le point D sur le graphe (2 milliards capacité émise). A partir d'un certain seuil, les récupérations du Cat Bond diminuent la sinistralité à charge de l'*Aggregate* au point qu'il génère moins de récupérations à certaines périodes de retour. Autrement dit, à partir d'un certain seuil, émettre davantage de capacité n'est pas efficace.

L'analyse est donc biaisée par le montant de la capacité émise. Pour pallier cela, nous regarderons donc l'efficacité. Cet indicateur est plus pertinent car il permet de comparer l'efficacité pour des montants de capacités émis différents.

### 3.3. Efficience de la capacité vis-à-vis de l'AEPby

Différentes études de sensibilités nous ont permis de conclure que pour respecter le cadre de l'appétit au risque, il suffit seulement de respecter la contrainte sur l'AEPby.

Pour rappel, dans le contexte du Groupe AXA, nous proposons de calculer l'efficacité du *Cat Bond* via la formule ci-dessous :

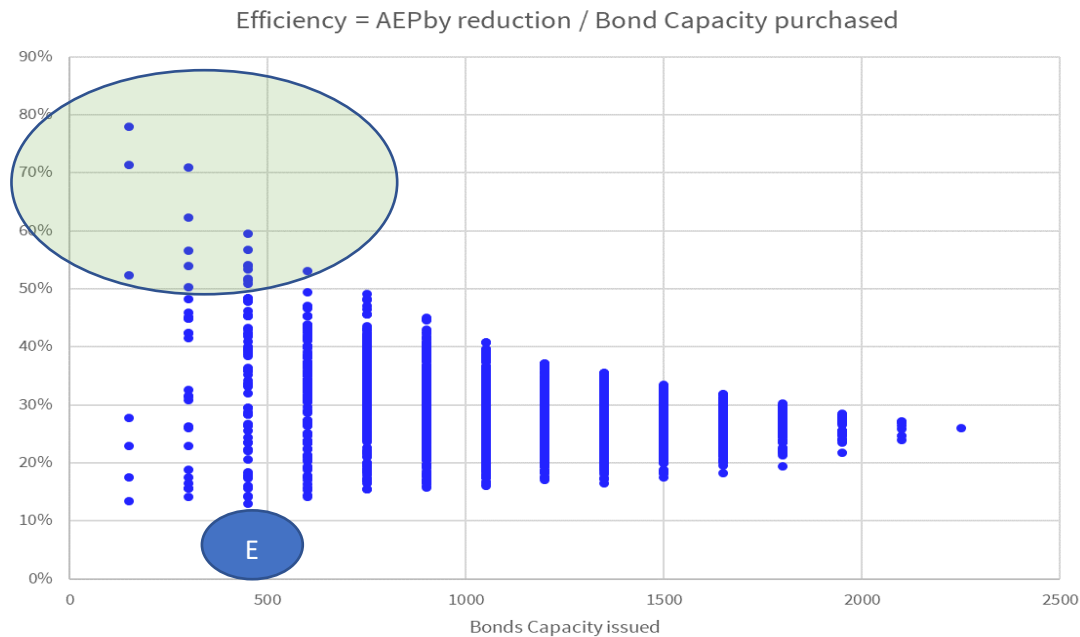
$$Efficience = \frac{AEPby_{central} - AEPby}{Capacité\ émise}$$

Intérêt : permet de comparer des scénarios d'émission avec des montants de capacités différents.

Plus l'efficacité est grande, plus la couverture est intéressante.

En abscisse, on trouve le montant de capacité émis. En ordonnée, on trouve l'efficacité vis-à-vis de l'AEPby par rapport au scénario dans lequel il n'y aurait pas d'émission de *Cat Bonds* (pas d'émission de capacité).

Figure 30: Efficience du Cat Bond en fonction de la capacité



Remarques :

Pour un même montant de capacité émise, l'impact marginal sur l'AEPay et AEPby varie beaucoup entre les scénarios : par exemple, pour E (500 millions) capacité émise, l'efficience vis-à-vis de l'AEPby varie entre 0 et 90 millions. Cela s'explique par le fait que pour un même montant de capacité émis, la capacité peut être répartie de différentes manières entre les classes du *Cat Bond*. En fonction des classes sur lesquelles la capacité a été répartie, l'impact sur les AEP va être très différent

De cette figure, il ressort que plus la capacité augmente, plus l'efficience diminue, c'est-à-dire que les capacités élevées ne sont pas les plus efficaces. Cela confirme l'intuition qu'on avait eu en analysant le graphe de la partie précédente.

A l'aide de cette figure, on peut donc déterminer les classes sur lesquelles il faut placer un certain montant de capacité afin d'avoir une meilleure efficacité au regard de l'AEPby. En plaçant un seuil de 50% sur l'efficience par exemple, les capacités optimales à émettre se trouvent dans la zone verte transparente du graphique.

**3.4. Impact de la variation de la capacité sur les prix du *Cat Bond* et de l'*Enterprise Aggregate***

Différentes études de sensibilités nous ont permis de conclure que pour respecter le cadre de l'appétit au risque, il suffit seulement de respecter la contrainte sur l'AEPby.



## Adaptation du taux de placement de l'Aggregate pour rendre les différents scénarios comparables

Dans les parties précédentes, nous avons constaté que regarder l'impact marginal de chaque scénario de résiliation sur l'AEPby est biaisé car schématiquement, plus on émet de capacité et plus l'AEPby diminue. Par ailleurs, plus on émet de capacité et plus le prix des *Cat Bonds* va augmenter. De ce fait, les différents scénarios d'émission ne sont pas comparables.

Pour rendre les différents scénarios d'émission comparables les uns aux autres, nous allons ramener tous les scénarios au même niveau d'AEPby. Le niveau d'AEPby choisi est celui du scénario central, i.e. du scénario dans lequel il n'y a pas d'émission de *Cat Bonds*.

Pour ramener les scénarios à un niveau équivalent d'AEPby, nous avons joué sur le taux de placement de l'*Enterprise Aggregate*. Pour ce faire, nous avons modulé le taux de placement de la couverture *Enterprise Aggregate*. Comme vu dans la partie **Modélisation du risque Catastrophe du Groupe**, l'*Enterprise Aggregate* est la dernière structure de réassurance à être appliquée. Elle est placée à  $\alpha\%$ . Nous avons donc écrit un programme qui détermine le taux de placement  $\beta\%$  qu'il faudrait dans chaque scénario pour avoir un niveau d'AEPby équivalent à celui du scénario central.

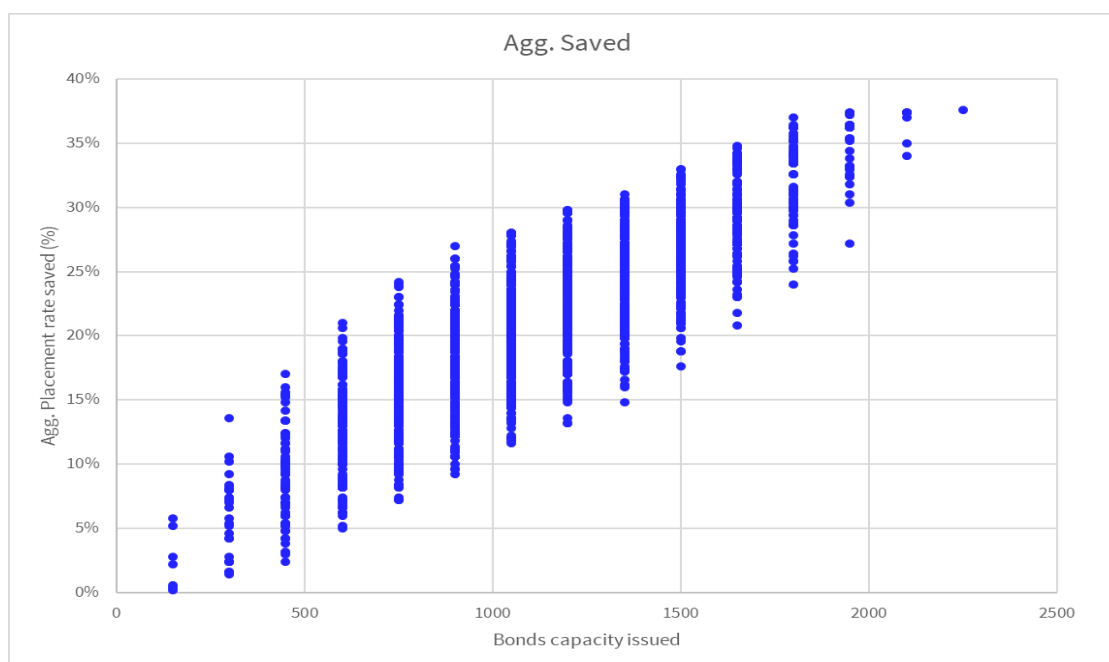
L'idée a consisté à faire ce qui suit tant que  $|AEPby_{scenario} - AEPby_{référence}| > \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  l'erreur :

- Partir de  $\alpha$
- Si  $AEPby_{scenario} \geq AEPby_{référence}$ , alors  $\alpha = \alpha - \eta$ ; sinon  $\alpha = \alpha + \eta$  avec  $\eta$  défini ici à 0,1%.
- Recalculer  $AEPby_{scenario}$  avec la nouvelle valeur de  $\alpha$
- Puis recommencer jusqu'à ce que  $|AEPby_{scenario} - AEPby_{référence}| \leq \varepsilon$

A la fin on a  $\alpha^* = \beta$ .

Nous présentons ci-dessous l'économie faite sur le taux de placement de l'Aggregate selon la capacité de *Cat Bond* qu'on émet. En abscisse, nous observons les capacités émises et en ordonnée les taux de placement de l'*Enterprise Aggregate* économisés correspondants.

Figure 31: Réduction du taux de placement de l'Enterprise Aggregate due à l'émission des Cat Bonds



Cette figure nous permet d'affirmer que plus on place de capacité, plus le taux de placement de l'Enterprise Aggregate diminue. Ce qui est assez intuitif vu que les *Cat Bonds* sont « inuring » à l'Enterprise Aggregate. Un arbitrage est possible en se basant sur cette métrique afin de savoir s'il faut acheter plus ou moins de couverture Enterprise Aggregate. Il faudra pour cela comparer le « coût » de l'Enterprise Aggregate par rapport celui du *Cat Bond*.

### **Sensibilité sur les primes des *Cat Bonds* et de l'Aggregate**

Nous prenons les prix réels des *Cat Bonds* qui arrivent à expiration à partir desquels nous calculons la prime cédée par capacité. Nous déterminons également sur la base des récupérations de l'Enterprise Aggregate le prix de l'Enterprise Aggregate. Grâce à ces deux prix, nous déterminons la prime cédée. Il s'agit de minimiser cette prime cédée.

Compte tenu du contexte particulier de la crise liée à la COVID-19, nous nous attendons à une augmentation du prix des couvertures, cette hausse des prix concernera dans notre étude non seulement l'Enterprise Aggregate mais également les *Cat Bonds*. Nous mettrons donc en place une sensibilité sur les prix de ces couvertures : une hausse comprise entre 0% et 30% par pas de 5% sur le prix de l'Enterprise Aggregate et sur le prix des *Cat Bonds*.

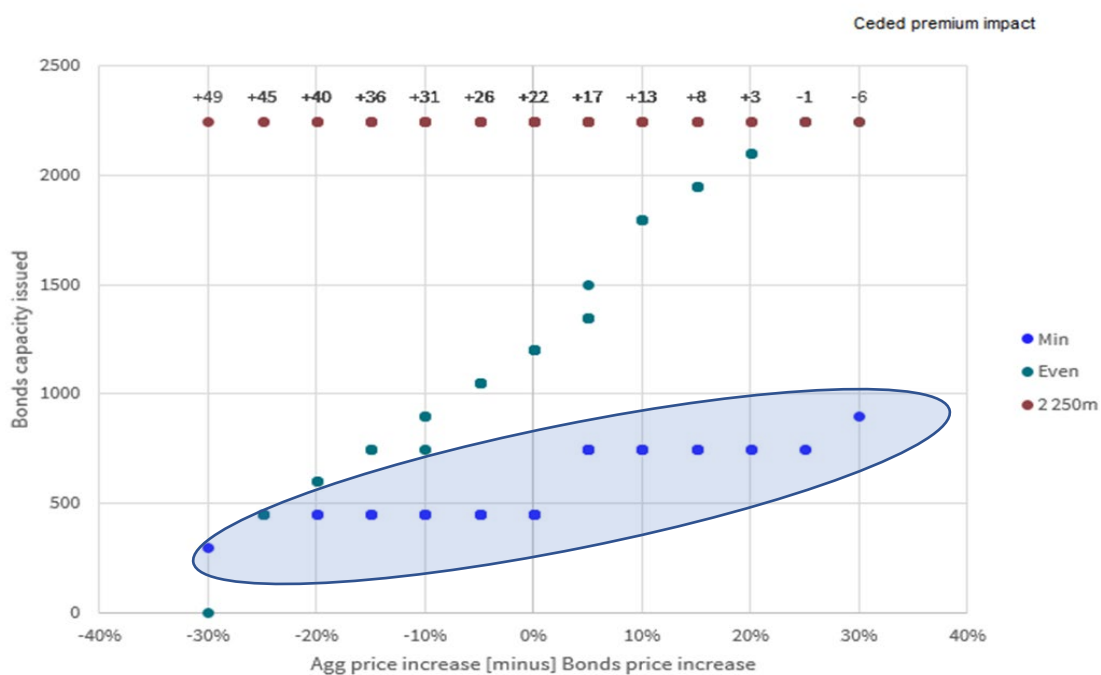
La hausse de prix peut être différente pour l'*Enterprise Aggregate* et les *Cat Bonds* car il n'y a pas forcément les mêmes augmentations sur les prix de la réassurance et des *ILS*.

En abscisse du graphe ci-dessous, on voit la différence entre l'augmentation du prix de l'*Aggregate* et l'augmentation du prix du *Cat Bonds* et en ordonnée les capacités émises.

En faisant varier le prix de l'*Aggregate* et celui du *Cat Bond*, on a un très grand nombre de scénarios. Ici nous ne montrerons que trois scénarios :

- ➔ Min : scénario optimal (minimum de prime cédée)
- ➔ *Even* : émission maximale de capacité de telle sorte que la prime cédée reste stable (+/- 0,5m)
- ➔ 2 250m : émission de la capacité entière.

Figure 32: Impact de la capacité sur la prime cédée



### Scénario 2 250m

Ce scénario correspond au scénario dans lequel la capacité maximale est émise.

Au point d'abscisse -30% (c'est-à-dire 0% de hausse sur l'*Aggregate* et 30% de hausse sur les *Cat Bonds*), on voit qu'on cède 49m de primes. Ce qui fait sens, car plus le *Cat Bond* est cher, plus on cède de prime.

A l'opposé dans les scénarios : (Augmentation du prix de l'*Aggregate* = 30% et Augmentation du prix du *Cat Bonds* = 0%) et (Augmentation du prix de l'*Aggregate* = 30% et Augmentation du prix du *Cat Bonds* = 5%) la prime cédée est négative. Autrement dit dans ces scénarios on économiserait de la prime car les *Cat Bonds* coûtent moins cher que l'*Aggregate*.

### Scénario Even

Dans le scénario Even, on regarde l'émission maximale de telle sorte à garder la prime cédée stable.

Nous remarquons que la courbe verte croît à mesure que le prix du *Cat Bond* augmente.

Pour rester à des niveaux de primes équivalents, si le prix du *Cat Bond* augmente plus que le prix de l'*Aggregate*, il faut placer moins de *Cat Bond*. A contrario, si le prix du *Cat Bond* augmente moins que le prix de l'*Aggregate*, il faut émettre plus de *Cat Bonds* car cela permettrait de céder moins de primes.

### Scénario Min

Le scénario Min représente l'ensemble des scénarios dans lesquels la prime cédée est minimale.

Comme précédemment, la courbe des scénarios Min est croissante. On peut remarquer que pour céder le moins de prime possible, il faudrait émettre moins de 1 milliard de capacité.

Ce constat confirme l'analyse effectuée grâce à l'efficience : il faut privilégier les capacités « basses ».

## **3.5. Impact de la variation de la capacité sur la marge cédée**

La marge cédée peut simplement s'interpréter comme la différence entre la prime payée au titre du *Cat Bond* et de l'*Enterprise Aggregate* et les récupérations générées par ces deux couvertures.

$$\boxed{\text{Marge Cédée} = \text{Primes} - \text{Récupérations}}$$

Où

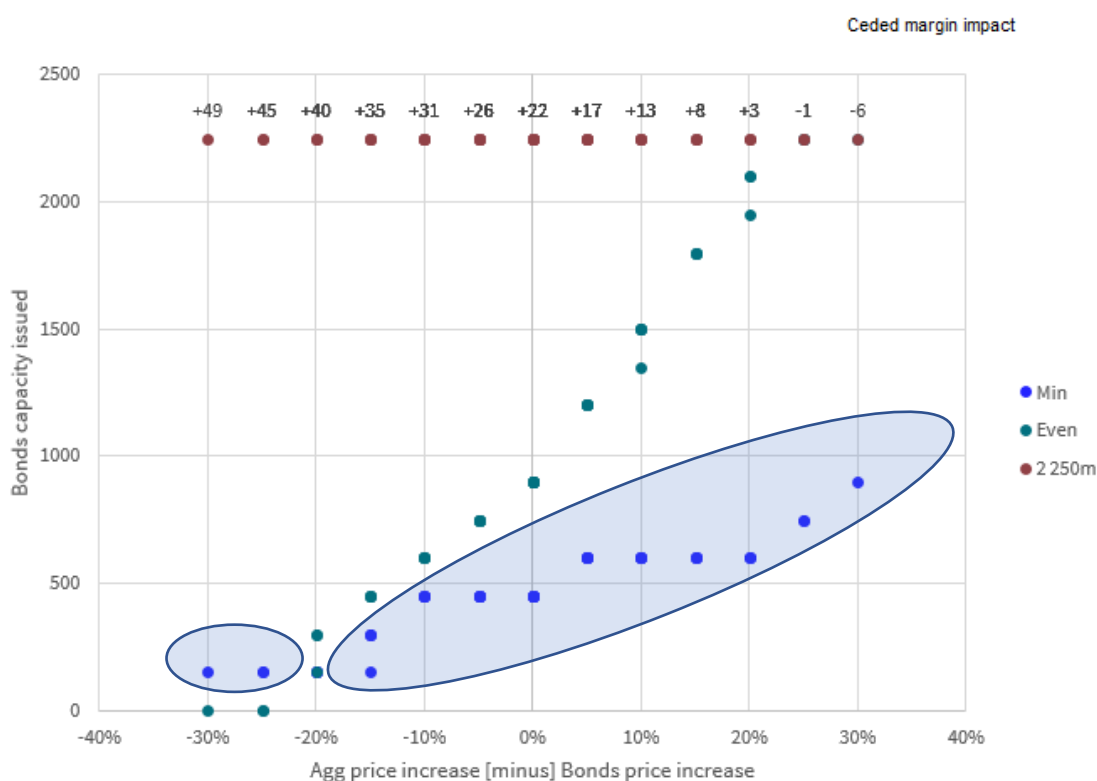
$$\text{Primes} = \text{Prime}_{\text{Cat Bond}} + \text{Prime}_{\text{Enterprise Aggregate}}$$

$$\text{Récupérations} = \text{Récupération}_{\text{Cat Bond}} + \text{Récupération}_{\text{Enterprise Aggregate}}$$

Nous regarderons les mêmes sorties qu'au paragraphe précédent :

- ➔ Min : scénario optimal (minimum de marge cédée)
- ➔ *Even* : émission maximale de capacité de telle sorte que la marge cédée reste stable (+/- 0,5m)
- ➔ 2 250m : émission de la capacité entière.

Figure 33: Impact de la capacité sur la marge cédée



### Scénario 2 250m

Ce scénario correspond au scénario dans lequel la capacité maximale est émise.

Au point d'abscisse -30% (c'est-à-dire 0% de hausse sur l'*Aggregate* et 30% de hausse sur les *Cat Bonds*), on voit qu'on cède 49m de marges. Ce qui fait sens, car plus le *Cat Bond* est cher, plus on cède de marge.

A l'opposé dans les scénarios : (hausse du prix de l'*Aggregate* = 30% et hausse du prix du *Cat Bonds* = 0%) et (hausse du prix de l'*Aggregate* = 30% et hausse du prix du *Cat Bonds* = 5%) la marge cédée est négative. Autrement dit dans ces scénarios on économiserait de la marge.

## Scénario Even

Dans le scénario Even, on regarde l'émission maximale de telle sorte à garder la marge cédée stable.

Nous remarquons que la courbe verte croît à mesure que le prix du *Cat Bond* augmente.

Pour rester à des niveaux de marges équivalents, si le prix du Cat Bond augmente plus que le prix de l'Aggregate, il faut placer moins de *Cat Bond*. A contrario, si le prix du *Cat Bond* augmente moins que le prix de l'Aggregate, il faut émettre plus de Cat Bonds car cela permettrait de céder moins de marges.

## Scénario Min

Le scénario Min représente l'ensemble des scénarios dans lesquels la marge cédée est minimale.

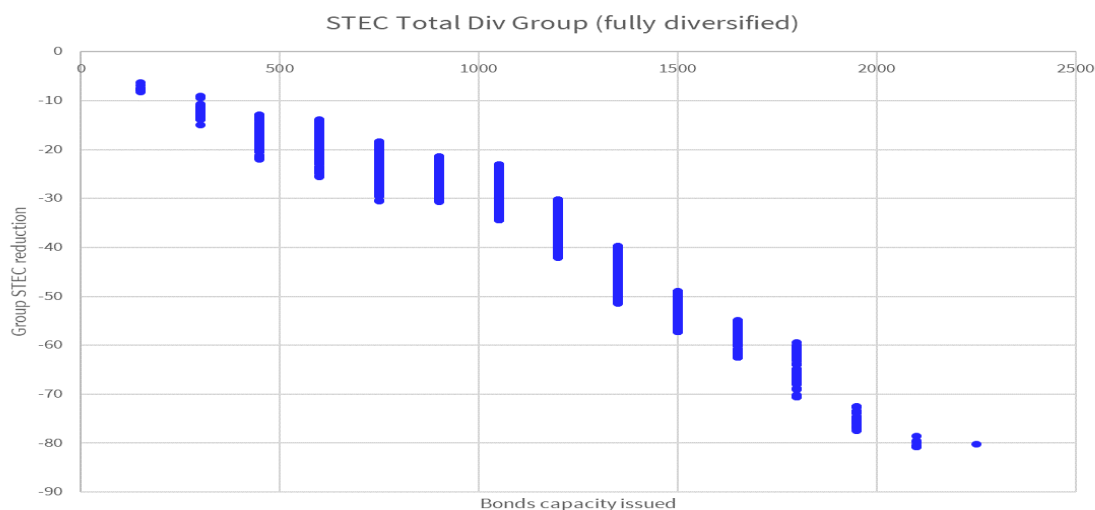
Comme précédemment, la courbe des scénarios Min est croissante. On peut remarquer que pour céder le moins de marges possible, il faudrait émettre moins de 1 milliard de capacité.

Ce constat confirme l'analyse effectuée grâce à l'efficacité et la prime cédée : il faut privilégier les capacités « basses ».

### **3.6. Impact de la variation de la capacité sur le STEC du Groupe (entièrement diversifié)**

Le graphe ci-dessous présente en abscisse la capacité du *Cat Bond* et en ordonnée la réduction induite dans le STEC diversifié par le *Cat Bond*.

Figure 34: Réduction du STEC selon la capacité émise



Il peut être remarqué que pour chaque montant de capacité, la réduction du STEC diversifié varie. Ces variations sont d'amplitudes moindres que celles des AEPay et AEPby. Cela s'explique essentiellement par le fait que le STEC prend d'une part en compte des effets de diversification. D'autre part, le STEC est calculé à une période de retour supérieure aux périodes de retour considérées dans le cadre du *risk appetite*.

Nous remarquons que plus la capacité émise augmente, plus la réduction du STEC est conséquente et par conséquent plus le ratio de solvabilité augmente.

#### **4. Conclusion sur le choix de la capacité**

##### **Choix de la capacité**

Le choix de la capacité résulte d'un arbitrage entre ces différents indicateurs ci-dessus. Dans notre cas, une fois que nous nous sommes assurés de respecter les contraintes du *risk appetite*, nous avons étudié la marge cédée et l'efficacité. Nous retenons au vu des études précédentes que la capacité optimale à émettre doit être inférieure à 1 milliard.

**Dans la suite de notre étude, nous considérons qu'il a été choisi d'émettre des *Cat Bonds* pour une capacité globale de C.**

## 5. Structuration des tranches

Dans la partie précédente, nous avons choisi un montant de capacité à émettre, en nous basant sur des indicateurs de rentabilité et d'appétit au risque. L'objectif de cette partie est de déterminer « où » placer la capacité, c'est-à-dire déterminer une tranche ayant un point d'attachement et une limite.

### 5.1. Définition de la tranche : Cadrage du problème

La forme de la tranche d'un *Cat Bond* dépend de la façon dont intervient la tranche XL assimilable. Nous distinguons essentiellement de formes de tranches de *Cat Bond* : les tranches « *Aggregate* » et les tranches « *Occurrence* ».

#### Cat Bond Aggregate de capacité C


Dans le cas d'un *Cat Bond* basé sur une vision « *Aggregate* », les pertes dues aux événements catastrophe sont agrégées par année avant que la tranche XL ne soit appliquée.

#### Exemple :

Considérons la tranche 800 XS 200 d'un *Cat Bond*. Supposons qu'on a des événements catastrophe. En vision « *Aggregate* », on a :

Tableau 7: Exemple Cat Bond en vision "Aggregate"

Event_ID	Année	Pertes
45124	1	946
54745	1	100
21435	2	234
58452	1	345
84512	2	486



Année	Pertes Annuelles	Cat Bond
1	1 391	800
2	720	520

Le *Cat Bond* structuré ici est de type *Aggregate* et on reprend la capacité optimale déterminée dans la partie précédente.

L'idée est de déterminer un point d'attachement, une limite et un taux de placement de telle sorte à avoir la capacité optimale.



## Calibration d'une tranche unique pour un niveau d'EL donné

Un *Cat Bond* se compose de plusieurs tranches, qui se suivent de manière générale. Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons de calibrer un *Cat Bond* avec une seule tranche.

### Target Expected Loss (EL)

La calibration de la tranche du *Cat Bond* nécessite de fixer au préalable un niveau d'*Expected Loss* (EL). Il s'agit de la perte probable sur cette tranche, c'est-à-dire le montant que les investisseurs devraient s'attendre à perdre. L'*EL* est généralement fournie par le courtier qui possède une bonne connaissance du marché. Il est fixé de sorte à tenir compte des contraintes du marché, de l'appétence des investisseurs et de l'appétence du sponsor.

Par exemple, pour une tranche Limite XS Attachement ayant une capacité notée « Capacité », l'*EL* en montant correspond aux récupérations c'est-à-dire :

$$EL(\text{montant}) = \sum_i \min(\text{Limite}; \max(S_i - \text{Attachement}; 0)) \times \frac{\text{Capacité}}{\text{Limite}}$$

avec  $S_i =$  Somme des sinistres de l'année  $i$

En général, l'*EL* est donnée en pourcentage, on écrira donc :

$$EL(\%) = \frac{EL(\text{montant})}{\text{Capacité}}$$

L'*EL* s'interprète donc comme la proportion de la capacité qui est à risque. Plus l'*EL* est élevée, plus la tranche génère de récupérations relativement à sa limite.

## Détermination d'un ensemble de tranches pour un niveau d'EL donné

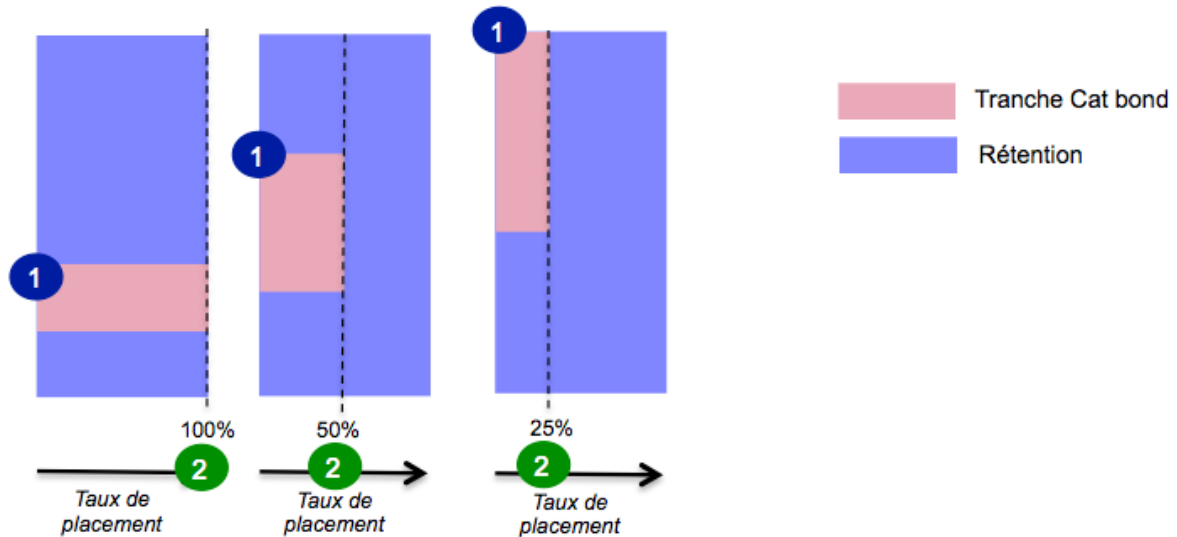
L'idée est de déterminer le couple attachement / limite qui donne le niveau d'*EL* choisi. Cela a été réalisé en deux étapes (voir schéma ci-dessous) :

- 1- Faire varier l'attachement par pas de 50m et déterminer la limite associée. Il faut avoir à l'esprit que plus on attache haut et plus la limite va être petite parce que les récupérations sont concentrées en bas de la tranche.

2- Une fois la tranche déterminée, on joue sur le taux de placement pour obtenir le niveau de capacité C choisi.

Il s'agira de prendre en entrée une limite (ou point d'attachement) et de déterminer le point d'attachement (ou la limite) qui permet de retomber sur le bon niveau d'EL.

Figure 35: Etapes de détermination de tranche de même niveau d'EL



Il faut garder à l'esprit que pour un même niveau d'EL, les récupérations moyennes et les prix sont les mêmes. L'idée ici est de calibrer la tranche au regard de l'Aggregate et du résultat du Groupe dans le but de déterminer la tranche qui aura le meilleur impact sur les objectifs de rentabilité et de Risk Appetite.

## 5.2. Définition de la tranche : Méthodologies retenues

### 5.2.1. Détermination d'une limite en prenant en entrée le point d'attachement

Dans cette partie, on propose une approche afin de déterminer sur la base d'un point d'attachement en entrée, une limite et un taux de placement (grâce à la capacité optimale) de telle sorte à retrouver le niveau d'EL fixé.

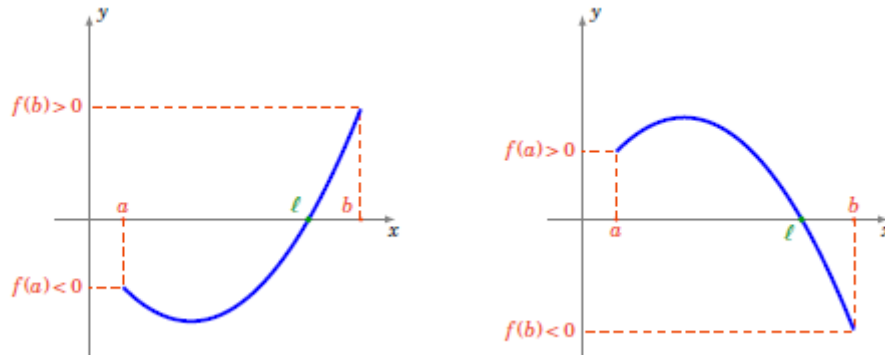
#### Principe de dichotomie

La dichotomie est basée sur la formulation ci-dessous du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) :

**Théorème :**

Considérons  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction supposée continue sur ce segment. Si  $f(a) \times f(b) \leq 0$ , alors  $\exists \ell \in [a, b]$  de sorte que  $f(\ell) = 0$ .

Figure 36: Illustration de la dichotomie



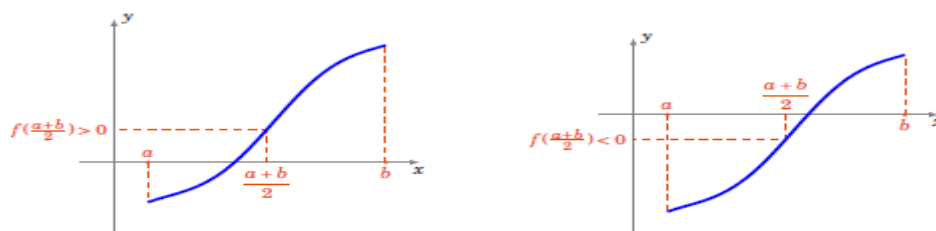
Le théorème garantit l'existence d'une solution de l'équation  $(f(x) = 0)$  sur le segment  $[a, b]$ . Afin de trouver cette solution, il faut réduire successivement cet intervalle. La racine  $\ell$  sera obtenue comme étant la limite d'une certaine suite.

Nous allons voir comment on construit une suite d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers 0. Dans chaque intervalle se trouve une solution de l'équation.

En partant d'une fonction  $f$  comme définie ci-dessus telle que  $f(a) \times f(b) \leq 0$ , la première étape consiste à regarder le signe de la fonction évaluée en  $\frac{a+b}{2}$ .

- Si  $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$ , alors il existe  $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$  tel que  $f(c) = 0$ .
- Si  $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) > 0$ , cela signifie que  $f(b) \times f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$ , d'où il existe  $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

Figure 37: Illustration dichotomie



Il a donc été trouvé un intervalle de longueur moitié à l'intérieur duquel notre équation admet une solution. Ce procédé sera mis en place de façon itérative :

- **Au rang 0 :**

- $a_0 = a, b_0 = b$
- **Au rang 1 :**
    - Si  $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \times f(a_0) \leq 0$ , alors on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$
    - Sinon on pose  $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$
    - Dans les deux cas, il existe  $x_1 \in [a_1, b_1]$  tel que  $f(x_1) = 0$
  - ...
  - **Au rang n :** on suppose avoir construit  $[a_n, b_n]$  de longueur  $\frac{b-a}{2^n}$  et qui contient  $x_n$  tel que  $f(x_n) = 0$ . Alors :
    - Si  $f(a_n) \times f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$ , alors on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
    - Sinon on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$
    - Dans tous les cas, il existe  $x_{n+1} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$  tel que  $f(x_{n+1})=0$

A chaque itération, on a :

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

Le processus est arrêté dès que  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  est inférieur à la précision souhaitée.

Par construction  $(a_n)$  est une suite croissante,  $(b_n)$  quant à elle une suite décroissante et  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et possèdent par conséquent la même limite.

D'après le théorème des gendarmes, c'est aussi la limite notée  $l$  de la suite  $(x_n)$ . La continuité de  $f$  montre  $f(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = 0$ . Donc les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers  $l$  tel que  $f(l) = 0$ .

Dans le cas de notre étude, la fonction  $f$  est définie sur  $[1, 1^e32]$  (on prend une borne supérieure assez large) de telle façon que nous puissions retrouver l' $EL$  (voir 4.1). Nous appelons  $PA$  le point d'attachement compris entre 200m € et 1,4mds €. On désigne par  $EL_i$  l' $EL$  cible.

$$f(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\min(x_i, \max(0; s_i - PA))}{x_i} \right] - EL_i$$

Où  $s_i$  représente la perte totale pour l'année  $i$  et  $N$  le nombre d'années de simulations.

En appliquant l'algorithme de dichotomie à cette fonction, nous obtenons en sortie une limite. Afin de respecter la contrainte de capacité sur cette tranche, nous allons introduire un taux de placement.

$$\text{Taux de placement} = \frac{\text{Capacité}}{\text{Limite}}$$

On applique la tranche Limite XS Attachement aux pertes agrégées par année. On obtient des récupérations qu'on multiplie par la suite par le Taux de placement afin d'avoir la bonne capacité sur la tranche.

Nous prendrons un exemple pour illustrer ce mécanisme :

$$\text{Capacité} = 150\text{m€}$$

$$EL_{\text{cible}} = 6,3\%$$

$$\text{Point d'attachement} = 800\text{m€}$$

Quand on fait tourner notre algorithme sur les données de la cédante (après prise en compte d'une éventuelle franchise), on obtient Limite= 514 875 939 €.

Nous appliquons par la suite la tranche 514 875 939 € XS 800m€ aux pertes agrégées par événements. Nous calculons la moyenne des récupérations et obtenons 32 437 184 €. Cette limite nous permet de matcher l'EL cible ( $32\,437\,184 / 1\,514\,875\,939 = 0,057$ ).

Enfin pour avoir le bon montant de capacité sur cette tranche, il faut multiplier les récupérations par le taux de placement.

$$\text{Taux de Placement} = \frac{150\text{m}}{514\,875\,939} = 29,13\%$$

La récupération moyenne est finalement  $32\,437\,184 \text{ €} \times 29,13\% = 9\,449\,999 \text{ €}$ .

Comme évoqué plus haut, nous ferons varier le point d'attachement entre 200m€ et 2000m € pour un niveau d'EL cible que nous noterons  $\gamma$  (*en pourcentage*). Nous obtiendrons donc plusieurs scénarios et par la suite nous choisirons, en nous basant sur des indicateurs tels que la marge cédée et l'efficience, la tranche optimale (sous-entendu le point d'attachement et la limite). Comme dans la partie 3, nous ferons une sensibilité aux prix des *Cat Bonds* et de l'*Enterprise Aggregate* (0% - 30% par pas de 5%). Cette tranche sera choisie sur la base d'une capacité de C.

## 5.2.2. Modélisation du prix des *Cat Bonds* et de l'*Enterprise Aggregate*

### Prix des *Cat Bonds*

Dans la **partie 3**, nous avons utilisé la structure de base des *Cat Bonds* qui arrivaient à expiration. Nous avons donc repris leurs prix. Dans cette partie, nous testons plusieurs scénarios sur la base d'un nouveau niveau d'*Expected Loss*, qui n'est pas le même que celui des *Cat Bonds* qui expirent. Il nous faut donc tarifier cette nouvelle structure de *Cat Bonds*.

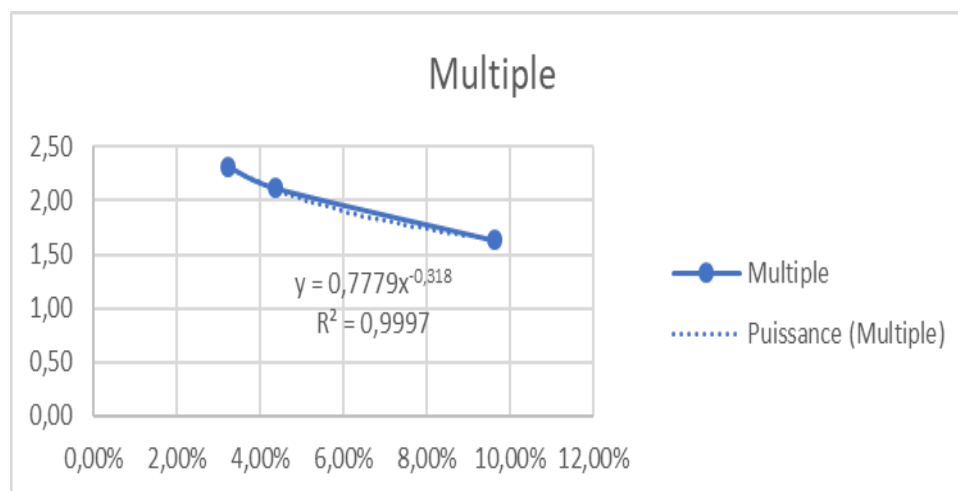
La modélisation du prix des *Cat Bonds* a été faite sur la base de l'*Expected Loss*. Nous nous sommes basés sur les *Cat Bonds* en cours (émis en 2019) pour calibrer une courbe permettant d'avoir les *Multiples*. Ce choix a été effectué afin de tenir compte de l'information marché la plus récente que nous disposons par rapport au portefeuille de la cédante.

Il s'agit ici d'effectuer une tarification « marché ». La méthode retenue est présentée dans la partie 3.1 pour la détermination du prix de l'*Aggregate*.

Nous nous sommes basés sur l'*EL* et les *Multiples* du *Cat Bond* émis en 2019 pour calibrer une courbe. Voici les données utilisées (source : voir [www.artemis.bm](http://www.artemis.bm)) :

Une régression « puissance » est effectuée sur Excel :

Figure 38: Multiple Cat Bond en fonction de l'EL



Nous obtenons la relation suivante :  $Multiple = 0,7779 \times EL^{-0,318}$

Le coefficient de détermination  $R^2$  est très proche de 1 (plus exactement 0,9997). Notre ajustement est donc d'excellente qualité. Nos choix de modélisation sont ainsi corroborés.

Dans notre étude, nous avons retenu un niveau d'EL égal à 6,3%. Le multiple qui sera utilisé pour déterminer le prix des *Cat Bonds* est :

$$Multiple = 0,7779 \times 0,063^{-0,318}$$

$$Multiple = 1,874$$

En reprenant l'exemple de la **partie 5.2.1**, on obtient le tableau suivant :

Tableau 8:Exemple de calcul du prix Cat Bond

EL	Tranche	Capacité	Récupérations	Multiple	Prix
6,30%	514 875 939 € XS 800m€	150m€	9 449 999 €	1,874	17 709 298 €

### **Prix de l'Enterprise Aggregate**

La modélisation du prix de l'Enterprise Aggregate est la même que celle présentée dans la **partie 5.2.1**

### **5.3. Définition de la tranche : résultats**

Pour déterminer la tranche sur laquelle interviendra le *Cat Bond*, nous avons choisi de faire varier le point d'attachement afin de calibrer une limite qui nous permettra d'avoir le bon niveau d'EL. Une fois la limite trouvée, un ajustement sera effectué afin d'avoir la bonne capacité (déterminée dans la **partie 3**) sur la tranche.

Nous avons fait tourner les options suivantes :

- Capacité : C
- Point d'attachement ou rétention : varie entre 200m € et 2 000m € par pas de 50m €
- Les prix de l'Enterprise Aggregate et des *Cat Bonds* : hausse entre 0% et 30%.

En faisant tourner dans un premier temps notre algorithme de dichotomie et en déterminant le taux de placement adéquat, nous obtenons le tableau ci-dessous :

Tableau 9: Limites, rétentions et taux de placement pour niveau d'EL et pour une capacité donnée

Rétention	Limite	Taux de Placement
200 000 000	2 907 719 155	9%
250 000 000	2 656 898 693	10%
300 000 000	2 434 347 941	11%
350 000 000	2 233 706 317	12%
400 000 000	2 051 324 740	13%
450 000 000	1 883 628 409	14%
500 000 000	1 728 913 320	15%

Nous remarquons que plus nous attachons haut (rétention élevée), plus la limite est faible et plus il faut placer la tranche afin de retomber sur la capacité cible.

Ces différentes possibilités de tranches nous permettront de mettre en place différents scénarios de *Cat Bonds* afin de déterminer la tranche optimale. Le choix de la tranche optimale sera basé sur la marge cédée et/ou l'efficacité.

### Marge cédée

L'indicateur que nous regarderons ici dans un premier temps est la différence entre la marge cédée de chaque scénario et la marge cédée du scénario central (scénario où il n'y a pas d'émission de *Cat Bond*).

Sur cette base, nous sélectionnons le scénario dans lequel la marge cédée est minimale (colonne verte du tableau ci-dessous). Les options en ligne dans le tableau sont des options de hausse sur les prix.

Il est possible de tomber sur des tranches optimales ayant une forme « irrégulière » c'est-à-dire des tranches trop larges (2500m € XS 50m € par exemple) ou trop étroites qui ne ressemblent pas aux formes habituelles des tranches sur le marché. Dans ces cas-là, il faut choisir une tranche « régulière » pour laquelle la marge additionnelle cédée (par rapport à la tranche optimale « irrégulière ») est minimale.

Nous proposons donc d'observer dans le tableau ci-dessous la différence en termes de marge cédée entre le scénario optimal et d'autres scénarios, afin d'analyser la marge additionnelle cédée en choisissant une autre tranche en lieu et place de la tranche optimale.

Ci-dessous un zoom sur une partie des résultats :



Tableau 10: Marge cédée des tranches ; scénario optimal comparé d'autres scénarios

Limit	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11
Attach	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Option											
1	0,4m	0,3m	0,2m	0,2m	0,2m	0,2m	0,0m	0,0m	0,1m	0,2m	0,2m
2	0,4m	0,4m	0,2m	0,2m	0,2m	0,2m	0,0m	0,0m	0,1m	0,2m	0,2m
3	0,5m	0,4m	0,3m	0,3m	0,2m	0,3m	0,0m	0,0m	0,2m	0,2m	0,2m
4	0,6m	0,5m	0,3m	0,3m	0,3m	0,3m	0,0m	0,0m	0,2m	0,2m	0,3m
5	0,6m	0,5m	0,3m	0,3m	0,3m	0,3m	0,0m	0,0m	0,2m	0,2m	0,3m
6	0,7m	0,6m	0,3m	0,4m	0,3m	0,4m	0,0m	0,0m	0,2m	0,3m	0,3m
7	0,7m	0,6m	0,4m	0,4m	0,3m	0,4m	0,0m	0,0m	0,2m	0,3m	0,4m
8	0,4m	0,3m	0,2m	0,2m	0,2m	0,2m	0,0m	0,0m	0,1m	0,2m	0,2m
9	0,4m	0,4m	0,2m	0,2m	0,2m	0,2m	0,0m	0,0m	0,1m	0,2m	0,2m
10	0,5m	0,4m	0,3m	0,3m	0,2m	0,3m	0,0m	0,0m	0,2m	0,2m	0,2m

Ce tableau suggère donc que la tranche optimale est L8 XS A8.

Nous pouvons donc choisir cette tranche pour le *Cat Bond* mais un problème se pose.

La tranche optimale d'après le tableau ci-dessus étant « large », on pourrait choisir par exemple la tranche L6 XS A6. Cette tranche est régulière d'un point de vue marché mais son choix nous éloignerait de la tranche optimale. Choisir cette tranche entraînerait une hausse de la marge cédée maximale de 400k€ par rapport à la marge cédée de la tranche optimale.

Il faut retenir de ce qui précède que l'optimalité d'une structure dépend en grande partie d'arguments quantitatifs mais aussi de la prise en compte des pratiques du marché des *Insurance Linked Securities*.

## Efficiences

Ici nous proposons de regarder l'efficiences par rapport à l'AEPby.

Le scénario dans lequel l'efficiences est maximale (colonne verte du tableau ci-dessous).

Il est possible de tomber sur des tranches optimales ayant une forme « irrégulière » c'est-à-dire des tranches trop larges (2500m € XS 50m € par exemple) ou trop étroites qui ne ressemblent pas aux formes habituelles des tranches sur le marché. Dans ces cas-là, il faut choisir une tranche « régulière » pour laquelle la différence d'efficiences par rapport à la tranche optimale « irrégulière » est minimale.

Nous proposons donc d'observer dans le tableau ci-dessous la différence en termes d'efficiences entre le scénario optimal et d'autres scénarios afin d'analyser l'efficiences perdue en choisissant une autre tranche en lieu et place de la tranche optimale.

Ci-dessous un zoom sur une partie des résultats :

Tableau 11: Efficience des tranches

Limit	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11
Attach	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Option											
1	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
2	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
3	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
4	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
5	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
6	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
7	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
8	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
9	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%
10	-1,21%	-0,95%	-0,80%	-0,66%	-0,50%	-0,47%	-0,17%	0,00%	-0,03%	-0,17%	-0,31%

D'après le tableau 15, la tranche L8 XS A8 est celle qui permet de maximiser l'efficience. Mais cette tranche est « irrégulière ». Comme dans le cas de la marge cédée, nous choisirons une tranche « régulière ».

La tranche L6 XS A6 peut une nouvelle fois être choisie. Par rapport à la tranche optimale, cette tranche engendre une baisse maximale de 0,7% de l'efficience.

### Conclusion

Au vu de ce qui précède, et en tenant compte de l'efficience et de la marge cédée, la tranche optimale est L6 XS A6.

## 6. Avantages et limites des approches proposées dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous avons réussi à mettre en place un modèle *proxy* de la réassurance Catastrophe du Groupe. L'implémentation de ce nouveau modèle a permis de tester plusieurs scénarios de façon dynamique et avec des temps d'exécution très faibles.

La détermination de la capacité et de la tranche optimales a été faite dans un environnement challengeant avec des contraintes à la fois opérationnelles et marché. Par exemple, due à la crise de la COVID-19, des hausses étaient anticipées sur les prix des couvertures. Nous avons donc réussi à prendre en compte de façon efficace ces incertitudes sur les prix.

Notre étude a donc permis de mettre en place un *process* innovant qui permettant de choisir un montant de capacité et une tranche qui minimisent la marge cédée, maximise l'efficience et respecte les contraintes d'appétit au risque. Il s'agit d'un outil

d'aide à la décision permettant aux dirigeants de consolider leurs décisions par des éléments quantitatifs précis.

Il faut néanmoins préciser qu'ici nous n'avons structuré qu'une seule tranche. Généralement, la capacité est répartie sur plusieurs tranches. Prendre en compte plusieurs tranches ne présente pas de difficultés particulières. Cela demanderait d'étudier beaucoup plus de scénarios et de structurer plusieurs tranches en même temps mais la méthodologie reste la même. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons choisi de nous limiter à une tranche unique.

Pour finir, il aurait pu être intéressant de combiner plusieurs des indicateurs que nous avons abordés dans ce chapitre afin de mettre en place un seul indicateur synthétique.

# CHAPITRE 3 : OPTIMISATION DES PAYOUT FACTORS

## 1. Présentation du problème

### 1.1. Enjeux et objectifs

Nous avons vu dans la partie 2 du chapitre 1 différents mécanismes de déclenchement des *Cat Bonds*. Le *Cat Bond* que nous structurons est basé sur un indice de marché.

A la survenance d'une catastrophe naturelle, l'indemnisation que reçoit la cédante au titre de sa couverture *Cat Bond* est basée sur les pertes de l'industrie de l'assurance. Des coefficients appelés *Payout Factors* fixés lors de l'émission permettent de passer de la perte totale subie par l'industrie à celle de l'émettrice (le montant de l'indemnisation). Généralement, ces coefficients sont déterminés par type de péril (Tremblement de terre, tempête de vent), ligne d'affaires - *Line of Business* (LoB) et par zone géographique (Europe, Australie etc...).

Comme présenté dans la partie 2 du chapitre 1, ce mode de déclenchement est le deuxième mode de déclenchement le plus répandu. Ce mode de déclenchement a l'avantage d'être transparent pour les investisseurs : il est basé sur des indices de marchés fournis par des agences indépendantes reconnues.

En Europe, l'indice utilisé est celui de l'agence PERILS. Un groupe d'assureurs et de réassureurs européens, dont Allianz, AXA, Munich Re, Swiss Re et Zurich, ont créé PERILS AG, basée à Zurich, pour collecter et fournir des données sur l'assurance catastrophe en Europe.

PERILS propose deux services principaux :

- Des données sur l'exposition, qui seront fournies sur une base annuelle.
- Des estimations des pertes dues à des catastrophes naturelles couvertes.

Les données seront cataloguées par type de risque et par zone CRESTA<sup>4</sup>.

L'équivalent de l'agence PERILS aux Etats-Unis est le PCS : *Property Claims Services*.

Nous avons vu que l'indemnisation de la cédante dans le cadre d'un *Cat Bond* indiciel est basée sur les pertes reportées par les agences de *reporting* (PERILS ou PCS). Ce mécanisme introduit un nouveau risque, celui du risque de base. Le risque de base ici est le risque que le montant de l'indemnisation calculé, à base des *Payout Factors* et

---

<sup>4</sup> CRESTA : Catastrophe Risk Evaluation and Standardising Target Accumulations désigne une zone géographique homogène en termes de risques naturels.

de la perte reportée par l'agence de *reporting* à la suite d'un événement catastrophe, soit différent de la perte réelle subie par le portefeuille de la cédante. L'un des enjeux principaux de l'émission d'un *Cat Bond* indiciel est la gestion du risque de base c'est-à-dire le risque de sous-indemnisation (cas où le montant de l'indemnisation est inférieur aux pertes réelles) et le risque de sur-indemnisation (cas où le montant de l'indemnisation est supérieur aux pertes réelles).

La cédante étant totalement libre de fixer les *Payout Factors*, l'objectif est donc de déterminer les *Payout Factors* qui permettent de minimiser le risque de base.

Un exemple simpliste pour illustrer le fonctionnement d'un *Cat Bond* indiciel à la suite d'un événement catastrophe.

Supposons qu'une tempête survienne en France causant une perte totale de 500m€ en France reportée par l'agence de *reporting* PERILS. Une cédante qu'on va nommer ABC a émis un *Cat Bond* d'une capacité de 100m € et fixé le *Payout Factor*  $PF = 5\%$ . De manière très simpliste, la SPV paierait  $5\% \times 500m \text{ €} = 25m\text{€}$  à la cédante. Le risque de base (ici sur le brut de ABC) est la probabilité que la perte totale subie par le portefeuille de ABC, due à cette tempête, soit différente de 25m €.

Il sera donc question dans cette partie de déterminer les *Payout Factors* qui permettent de minimiser le risque de base sur le brut de la cédante. Les indicateurs seront cependant calculés sur les récupérations.

## 1.2. Présentation des données marché

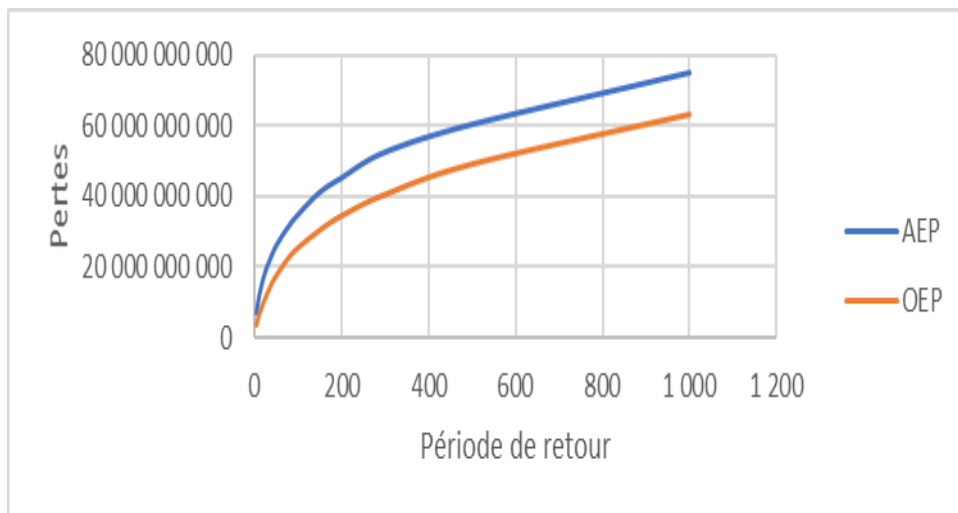
Les pertes marché que nous utiliserons dans notre étude sont fournies par l'agence de modélisation RMS. Ces pertes sont issues de modèles catastrophes et ont été modélisées sur 50 000 années. En sortie de ces modèles, nous récupérons des YELT (Year Event Loss Table) (voir partie 1 du chapitre1).

Ces pertes marché ont été modélisées pour les Bassins A, B, C, D, E, F, G. Ces Bassins sont constitués de Sous Bassins. Les Sous-Bassins du Bassin A seront par exemple notés  $a_1, a_2, a_3$  et ainsi de suite. Il en est de même pour les autres Bassins.

Nous allons représenter des courbes EP comme dans le cas du brut de la cédante.

➤ Bassin A

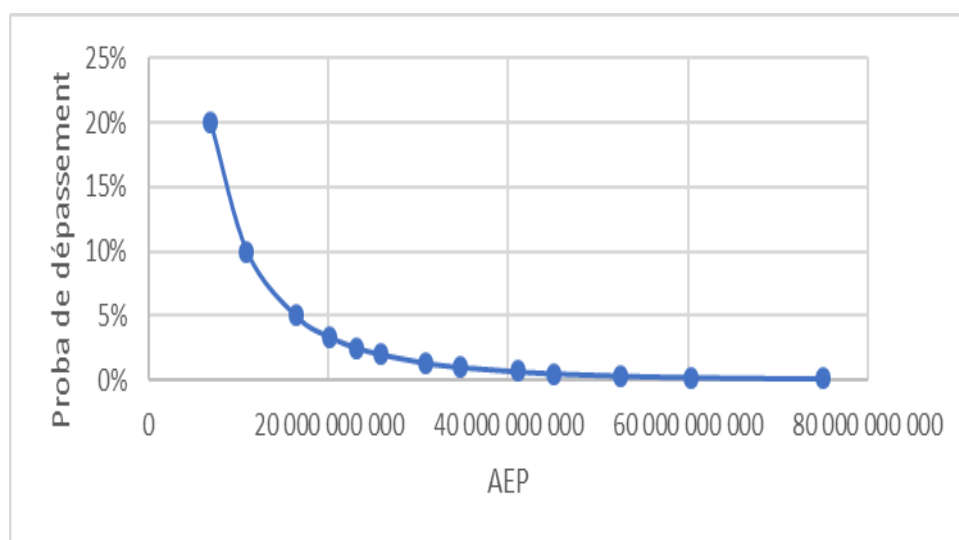
Figure 39 : Pertes AEP et OEP des pertes du marché en fonction de la période de retour (Bassin A)



Interprétation : Cette figure nous permet d'avoir une certaine idée de l'exposition du marché sur le Bassin A.

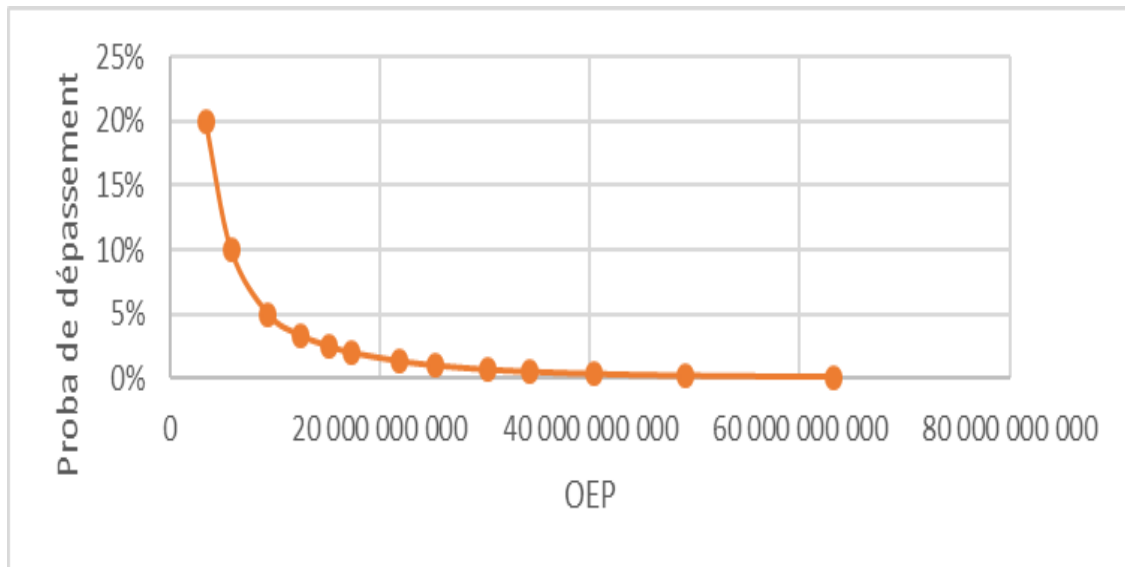
A l'aide de la courbe AEP, on peut dire par exemple qu'une fois tous les 200 ans, le marché subira une perte annuelle agrégée de 45,1 Milliards €. La courbe OEP, permet d'avancer que tous les 200 ans, le marché serait touché par un évènement causant une perte d'au moins 34,3 Milliards €.

Figure 40: Probabilité de dépassement en fonction de la perte annuelle du marché (Bassin A)



**Interprétation** : La probabilité d'avoir une perte annuelle totale d'environ 16,3 Milliards€ est de 5%.

Figure 41: Probabilité de dépassement en fonction de la perte maximale par évènement du marché (Bassin A)



**Interprétation** : La probabilité d'avoir un évènement causant une perte au moins égale à 9,3 Milliards € est de 5%.

## 2. Détermination des *Payout Factors*

### 2.1. Cadrage du problème

Les *Payout Factors* sont déterminés de sorte à ce qu'on puisse répliquer les pertes subies par la cédante à partir des pertes du marché. On appellera « Pertes Répliquées » les pertes estimées de la cédante à partir des pertes marché (fournies par une agence de *reporting*) et des *Payout Factors* à la survenance d'un évènement catastrophe. Les *Payout Factors* doivent être compris entre 0 et 1.

$$\text{Pertes Répliquées} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \times \text{Pertes}_{\text{Marché}_i}$$

Où :

- $\lambda_i$  représente le *Payout Factor* du Sous-Bassin  $i$ ,  $\lambda_i \in [0,1]$
- $p$  le nombre de Sous-Bassin

L'enjeu ici est de choisir les *Payout Factors* de telle sorte que les pertes réelles subies par le portefeuille de la cédante qu'on va appeler « Pertes Réelles » soient (idéalement) égales aux pertes répliquées. C'est-à-dire que :

$$Pertes\ Réelles = Pertes\ Répliquées = \sum_{i=1}^p \lambda_i \times Pertes_{Marché_i}$$

Même si le risque de base « final » est celui obtenu après application de la tranche du *Cat Bond*, nous nous intéresserons ici à la minimisation du risque de base sur le brut de la cédante (pertes réelles de la cédante vs pertes répliquées), avant passage dans la tranche *Aggregate* du *Cat Bond*.

## 2.2. Utilisation des parts de marché d'exposition comme *Payout Factors*

Les parts de marché d'exposition représentent la proportion de montant à risque de la cédante dans l'exposition globale du marché. Il n'est pas insensé d'envisager d'utiliser les parts de marché d'exposition comme *Payout Factors* à condition de supposer que la composition du portefeuille de la cédante et celle du portefeuille du marché soient identiques. Ce qui n'est pas a priori vrai.

En faisant l'hypothèse que la composition du portefeuille de la cédante est celle du portefeuille de marché, on a pour chaque Sous-Bassin  $i$  avec  $i = 1, \dots, p$  :

$$\lambda_i = \frac{Exposition_{Cédante_i}}{Exposition_{Marché_i}} = \frac{Pertes_{Cédante_i}}{Pertes_{Marché_i}}$$

Le risque de base serait :

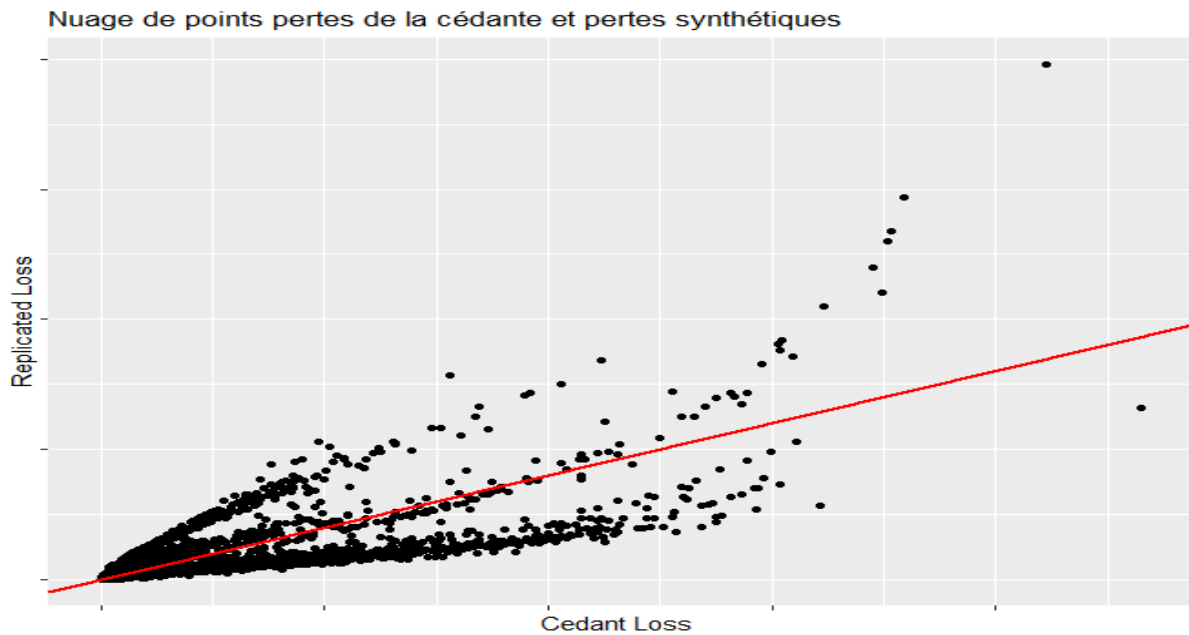
$$\begin{aligned} \text{Risque de base} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \times Pertes_{Marché_i} - Pertes_{Cédante} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{Pertes_{Cédante_i}}{Pertes_{Marché_i}} \times Pertes_{Marché_i} - Pertes_{Cédante} \\ &= \sum_{i=1}^p Pertes_{Cédante_i} - Pertes_{Cédante} = 0 \end{aligned}$$



La valeur du risque de base est donc nulle, ce qui n'est pas vrai en pratique. Cela est dû à l'hypothèse de similarité entre le portefeuille de la cédante et celui du marché qu'on a fait. Regardons dans notre cas ce que nous obtenons en utilisant les parts de marché d'exposition comme *Payout Factors*. Les *Payout Factors* sont calibrés à la granularité des Sous-Bassins mais le risque de base est calculé sur les récupérations à la maille Bassin.

Ici, les pertes synthétiques (ou répliquées) et celles de la cédante sont représentées pour le Bassin B.

Figure 42: Pertes répliquées à l'aide des parts de marché d'exposition comparées aux pertes réelles



Si notre hypothèse sur la composition des portefeuilles marché et de la cédante était vérifiée, les points noirs seraient parfaitement alignés sur la première, ce qui n'est pas le cas.

### 2.3. Modélisation mathématique du risque de base

Nous disposons de données de la cédante par Sous-Bassin sur plusieurs années de simulations comme nous l'avons présenté plus haut.

En notant :

- $n$  le nombre d'années de simulations
- $P$  le nombre de Sous-Bassin

Une modélisation du problème est proposée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} Cédante_1 \\ \vdots \\ Cédante_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Marché_1^1 & \cdots & Marché_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Marché_n^1 & \cdots & Marché_n^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Erreur_1 \\ \vdots \\ Erreur_n \end{pmatrix}$$

Où :

- $Cédante_i$  désigne la perte totale de la cédante l'année i
- $Marché_i^j$  désigne la perte totale du marché l'année i sur le Bassin j
- $\lambda_j$  le *Payout Factor* sur le Sous-Bassin j,  $\lambda_j \in [0,1]$

## 2.4. Modèle de régression linéaire classique

La modélisation de la partie 2.3.1 de ce chapitre peut se réécrire :

$$C = M \times \Lambda + \varepsilon$$

Avec :

$C = (C_i)_{i=1,\dots,n}$  la matrice des pertes de la cédante

$M = M_{ij}$  avec  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, p$  la matrice des pertes marché ( $M_{ij}$  la perte marché totale l'année i et sur le Sous-Bassin j)

$\varepsilon$  la matrice des erreurs (erreurs indépendantes, exogènes et homoscédastiques)

On décèle bien la structure d'un modèle de régression linéaire.

La détermination des *Payout Factors* optimaux pourrait se faire grâce à la méthode des moindres carrés ordinaires.

En reprenant les notations introduites plus haut dans cette partie, la quantité à minimiser serait :

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j M_{ij} - C_i \right)^2$$

En analysant les résultats obtenus, on relève une limite du modèle linéaire pour déterminer les *Payout Factors*. En effet, on obtient un *Payout Factor* **négatif** pour le

Sous-Bassin C. Cette valeur est supérieure à 1 or les Payout Factors doivent être compris entre 0 et 1.

Dans notre modèle, on désire déterminer  $p$  ( $p = 50$ ) *Payout Factors* à l'aide de  $n = 50\ 000$  simulations, ce qui affecte la qualité de la régression.

Nous avons donc choisi de déterminer les *Payout Factors* optimaux en résolvant un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes.

## 2.5. Modèle non linéaire : Algorithme L-BFGS-B

La détermination des différents *Payout Factors* au niveau des différents Sous-Bassin reviendra à minimiser la fonction ci-dessous :

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j M_{ij} - C_i \right)^2$$

Où  $D$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ , a ses composantes qui vérifient les contraintes sur les *Payout Factors*.

Les pertes marché et les pertes de la cédante étant fixées, la fonction  $f$  considérée est polynomiale de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle satisfait donc aux conditions habituelles de régularité des polynômes.

En théorie de l'optimisation, la convexité est un critère de taille. La fonction objectif considérée ici est convexe. En effet :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j M_{ij} - C_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j M_{ij} \right)^2 - 2C_i \sum_{j=1}^p \lambda_j M_{ij} + C_i^2 \right) \end{aligned}$$

La positivité des coefficients des différents termes de degré 2 dans l'expression de  $f$  permet de conclure qu'elle est convexe.

### 2.5.1. Principe général des méthodes de descente

On suppose qu'on cherche à résoudre le problème suivant  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  où  $f$  est à valeurs réelles et différentiable voire même deux fois différentiable. Pour résoudre un problème de maximum, il suffira de changer  $f$  en  $-f$ . Les conditions nécessaires d'optimalité du premier et du second ordre signifient qu'on ne peut « descendre » en partant d'un point de minimum, qu'il soit local ou global. Partant de cette observation, plusieurs méthodes d'optimisation dites de « descente » ont vu le jour.

#### Définition d'une direction de descente

Un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est une direction de descente pour  $f$  à partir d'un point  $x \in \mathbb{R}^n$  si  $t \rightarrow f(x + td)$  décroît en  $t = 0$ , c'est-à-dire s'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in ]0, \eta], f(x + td) < f(x)$$

L'idée derrière un algorithme de descente est de partir d'un point  $x_0$ , choisit de façon arbitraire et de générer une suite d'itérés  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  défini par :

$$x_{k+1} = x_k + s_k d_k$$

et telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

Le vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est une direction de descente de  $f$  au point  $x \in \mathbb{R}^n$  si  $f'(x; d) < 0$

Dans le cas où  $f$  est différentiable, une définition plus intuitive d'une direction de descente est la suivante :

**Proposition :** Supposons  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est appelé direction de descente de  $f$  au point  $x$  si et seulement si :

$$f'(x; d) = \nabla f(x)^T d < 0.$$

De plus pour tout  $\gamma < 1$ , il existe  $\bar{\eta} > 0$  tel que :

$$\forall t \in ]0, \bar{\eta}], f(x + td) < f(x) + t\gamma \nabla f(x)^T d < f(x).$$

La dernière inégalité assure qu'il y aura une décroissance de  $f$  au minimum dans la direction de  $d$ .

L'algorithme de descente est déterminé par deux éléments : le choix de la direction  $d_k$  appelée direction de descente, et le choix de la taille du pas  $s_k$  à faire dans la direction  $d_k$ . Cette étape est appelée *recherche linéaire*. Plusieurs méthodes permettent de définir le choix de la direction et la taille du pas : par recherche linéaire exacte, par la méthode d'Armijo ou de Goldstein et par la méthode de Wolfe. La méthode de Wolfe est présentée en annexe.

### Choix de la direction de descente

Le choix de la direction de descente s'opère selon essentiellement deux méthodes :

- La stratégie de Cauchy  $d_k = -\nabla f(x_k)$ , qui conduit aux algorithmes de gradient.

Il est possible de montrer que  $d_k$  est bien une direction de descente de  $f$  en  $x_k$  et qu'il s'agit de la direction de « plus forte pente » de  $f$  en  $x_k$ .

- La stratégie de Newton :  $d = -H[f](x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$ , avec  $H[f]$  la matrice hessienne de  $f$ , qui permet d'aboutir aux algorithmes de Newton.

L'un des avantages de Newton se trouve dans la convergence quadratique de l'algorithme.

Le passage de l'étape  $k$  à l'étape  $k+1$  s'opère grâce à la relation :

$$x_{k+1} = x_k + d$$

Avec  $d$  (direction de descente) précédemment définie.

Le principal désavantage de cet algorithme se trouve dans le fait qu'il requiert un calcul explicite de la hessienne et la résolution à chaque étape de l'algorithme de l'équation  $d=0$  (direction nulle) c'est-à-dire du système linéaire :

$$H[f](x_k)(x_{k+1} - x_k) = \nabla f(x_k).$$

La convergence de l'algorithme est assurée car un facteur est affecté de telle manière que l'égalité précédente se réécrit de la façon suivante :

$$x_{k+1} = x_k + s_k H_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

Où  $H_k^{-1}$  est une approximation de l'inverse de la hessienne au point  $x_k$  et la suite des pas est déterminée par la méthode de Wolfe par exemple.

## 2.5.2. Algorithme Limited – Broyden Fletcher Goldfarb Shannon – Bounded (L-BFGS-B)

Face aux challenges liés au calcul de la matrice hessienne avec les méthodes de Newton, d'autres méthodes cohérentes et moins coûteuses ont été développées : il s'agit des méthodes de Quasi-Newton. L'approche ici consiste à construire de manière itérative des matrices  $H_k$  approchant la matrice hessienne à l'ordre  $k$  ou de  $B_k$  son inverse sans utiliser les informations de second ordre. L'idée consiste à partir du développement limité de  $\nabla f$  au voisinage de  $x_{k+1}$  en  $x_k$  :

$$\nabla f(x_k) = \nabla f(x_{k+1}) + H[f]f(x_{k+1})(x_k - x_{k+1}) + o(x_k - x_{k+1})$$

D'où :

$$H[f]f(x_{k+1})(x_k - x_{k+1}) \approx \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1})$$

Une approximation  $H_{k+1}$  de la matrice hessienne au point  $x_{k+1}$  comme solution de l'équation :

$$\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) = H_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$$

De façon similaire, l'approximation  $B_{k+1}$  de la matrice hessienne en  $k + 1$  est solution de l'équation :

$$B_{k+1}(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = (x_{k+1} - x_k)$$

Les deux équations ci-dessus sont des systèmes de  $n$  équations et de  $n^2$  inconnues. Il existe donc par conséquent une infinité de solutions.

L'approche pensée et mise en avant par les mathématiciens américains C.G. Broyden, F. Fletcher, D. Goldfarb et D.F. Shannon (BFGS) dans les années 1960 revient à déterminer parmi toutes les solutions des deux équations précédentes celles qui sont le plus proches selon la norme de Frobenius. Ainsi en notant  $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$  et  $\sigma_k = x_{k+1} - x_k$ . L'approximation optimale  $H_{k+1}$  est solution du problème :

$$(S) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|H - H_k\|^2 \\ \text{s. c } y_k = H\sigma_k; H^T = H \end{cases}$$

### Norme de Frobenius :

Elle est définie pour une matrice réelle M de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  par  $\|M\| = \sqrt{\text{trace}(M^T M)}$

La résolution (qui n'est pas l'objet de ce mémoire) de (S) donne les formules suivantes :

Approche de Davidson, Fletcher et Powell (1949-1960) :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k}{y_k^T} \times \frac{y_k^T}{\sigma_k} - H_k \times \frac{\sigma_k}{\sigma_k^T} \times \frac{\sigma_k^T}{H_k} \times \frac{H_k}{\sigma_k}$$

Approche de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shannon (1969-1970) :

$$B_{k+1} = \left( I - \frac{\sigma_k}{y_k^T} \times \frac{y_k^T}{\sigma_k} \right) B_k \left( I - \frac{\sigma_k}{y_k^T} \times \frac{y_k^T}{\sigma_k} \right) B_k + \frac{\sigma_k}{y_k^T} \times \frac{\sigma_k^T}{\sigma_k}$$

Les matrices ci-dessus sont symétriques et vérifient les équations Quasi-Newton et vérifient par définition l'équation  $H_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$ .

Il est possible de montrer que si  $B_k$  est définie positive et  $y_k^T \sigma_k > 0$  alors  $B_{k+1}$  est positive. Ainsi, en initialisant l'algorithme BFGS avec une matrice  $H_0$ , on retrouve une méthode de descente à condition de contraindre l'inégalité  $(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))^T (x_{k+1} - x_k) > 0$  à chaque itération. Cette inégalité est toujours respectée lorsque le choix du pas est effectué en utilisant la méthode de Wolfe.

### Critère d'arrêt

Si  $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$  alors  $x^* = x_k$

L'algorithme BFGS est utilisé afin de résoudre les problèmes d'optimisation non linéaire sans contraintes. Dans le cas de notre étude sur le risque de base, nous avons une contrainte sur les *Payout Factors* (compris entre 0 et 1). Une variante de cet algorithme nous permettra de prendre entre autres cet élément en compte.

### **Passage du BFGS au L-BFGS-B**

L'algorithme L-BFGS fonctionne bien avec les grands ensembles de données car il nécessite moins de mémoire que le BFGS standard. Les deux algorithmes utilisent

l'estimation de la matrice Hessienne inverse pour contrôler la recherche dans l'espace variable. Alors que le BFGS stocke une approximation dense  $n \times n$  du Hessien inverse, le L-BFGS ne stocke que quelques vecteurs qui représentent implicitement l'approximation.

Afin de prendre en compte les contraintes dans l'optimisation, J. Nocedal, C. Zhu, R.H Byrd, P. Lu de Northwestern University ont proposé une extension du L-BFGS appelée L-BFGS-B.

Soient  $y_{i,i=1 \text{ à } n}$  des variables telles que  $y_i \in [l_i; u_i]$ . A l'itération  $k$ , au début le gradient  $\nabla f(y_k)$ , de l'approximation de matrice hessienne  $B_k$  est obtenue grâce à l'algorithme L-BFGS.

La variable auxiliaire suivante est définie :  $y(t) = K(y_k - t\nabla f(y_k), l, u)$  avec

$$K(y, l, u) = \begin{cases} l_i & \text{si } y_i < l_i \\ y_i, & \text{si } y_i \in [l_i; u_i] \\ u_i, & \text{si } y_i > u_i \end{cases}$$

L'approche adoptée dans l'extension L-BFGS-B consiste par la suite à identifier le point de Cauchy  $y^c$  qui est défini comme étant le minimum de  $m$  l'approximation de la série de Taylor d'ordre 2 de  $f$  évalué sur l'ensemble des  $y(t)$ :

$$m_k(y) = f(y_k) + \nabla f(y_k)^T (y - y_k) + \frac{1}{2} (y - y_k)^T B_k (y - y_k)$$

Soit  $E(y^c)$  désignant l'ensemble des composantes pour lesquelles la borne supérieure ou inférieure est atteinte. L'optimisation est par la suite considérée sur l'ensemble des composantes pour lesquelles une borne n'est pas atteinte :

$$\begin{cases} \min e_k(y) : y_i = y_i^c, & \forall i \in E(y^c) \\ \text{sc. } l_i \leq y_i \leq u_i & \forall i \notin E(y^c) \end{cases}$$

Le problème est résolu sans prendre en compte les contraintes puis on tronque la solution au regard des contraintes imposées. Une solution approchée qu'on notera  $\bar{y}_{k+1}$  est obtenue et la nouvelle itération  $y_{k+1}$  est obtenue via la recherche linéaire. La direction de cette recherche linéaire est  $d_k = \bar{y}_{k+1} - y_k$  tout en prenant en compte la condition de décroissance  $f(y_{k+1}) \leq f(y_k) + \alpha s_k \nabla f(y_k)^T d_k$  et de courbure  $|\nabla f(y_{k+1})^T d_k| \leq \beta |\nabla f(y_k)^T d_k|$ .

A chaque itération, la matrice hessienne  $B_k$  est définie positive. Cela implique que  $d_k$  représente une direction de descente de  $f$ . Une nouvelle itération de l'algorithme est par conséquent obtenue.



L'algorithme L-BFGS-B est considéré comme étant l'un des plus performants et est implémenté dans la plupart des logiciels de calculs. Cet algorithme est également utilisable dans l'optimisation de fonctions non convexes ; le seul inconvénient dans le cas de fonctions non convexes c'est que la convergence de l'algorithme n'est pas acquise.

### 3. Présentation des résultats

Dans cette partie, il sera question de présenter les résultats de l'application de l'algorithme L-BFGS-B au risque de base en vue d'optimiser les *Payout Factors*.

Le risque de base est mesuré à la maille Bassin et en pourcentage de la limite de la tranche. Il est plus pertinent de mesurer le risque de base après application de la *Cat Bond* (une tranche L XS A). En effet, ce calcul du risque de base est plus proche de la réalité car elle s'intéresse à la sinistralité nette de la cédante après application de la tranche du *Cat Bond*. On désigne par C la capacité du *Cat Bond*.

Il est proposé ici d'afficher des indicateurs du risque de base via la formule ci-dessous :

$$\text{Risque de base (\%)} = \frac{[\min(L, \max(\text{Perte Cédante} - A, 0)) - \min(L, \max(\text{Perte Répliquées} - A, 0))] \times \frac{C}{L}}{C}$$

D'où :

$$\text{Risque de base (\%)} = \frac{\min(L, \max(\text{Perte Cédante} - A, 0)) - \min(L, \max(\text{Perte Répliquées} - A, 0))}{L}$$

Les indicateurs du risque de base observés sont :

- **Min** : il s'agit du minimum du risque de base
- **Max** : il s'agit du maximum du risque de base
- **Ecart type** : il s'agit de l'écart type du risque de base
- **Moyenne Positive** : cet indicateur traduit la probabilité de surindemnisation de la cédante c'est-à-dire la moyenne du risque de base sachant que le risque de base est positif. La cédante reçoit de la SPV une indemnisation supérieure à ces pertes réelles.
- **Moyenne Négative** : cet indicateur traduit la probabilité de sous-indemnisation de la cédante c'est-à-dire la moyenne du risque de base sachant que le risque de base est négatif. La cédante reçoit de la SPV une indemnisation inférieure à ces pertes réelles.

- **Médiane** : médiane de la distribution du risque de base.
- **Quantile 25, Quantile 75** : Quantiles à 25% et 75% pour analyser la répartition du risque de base.

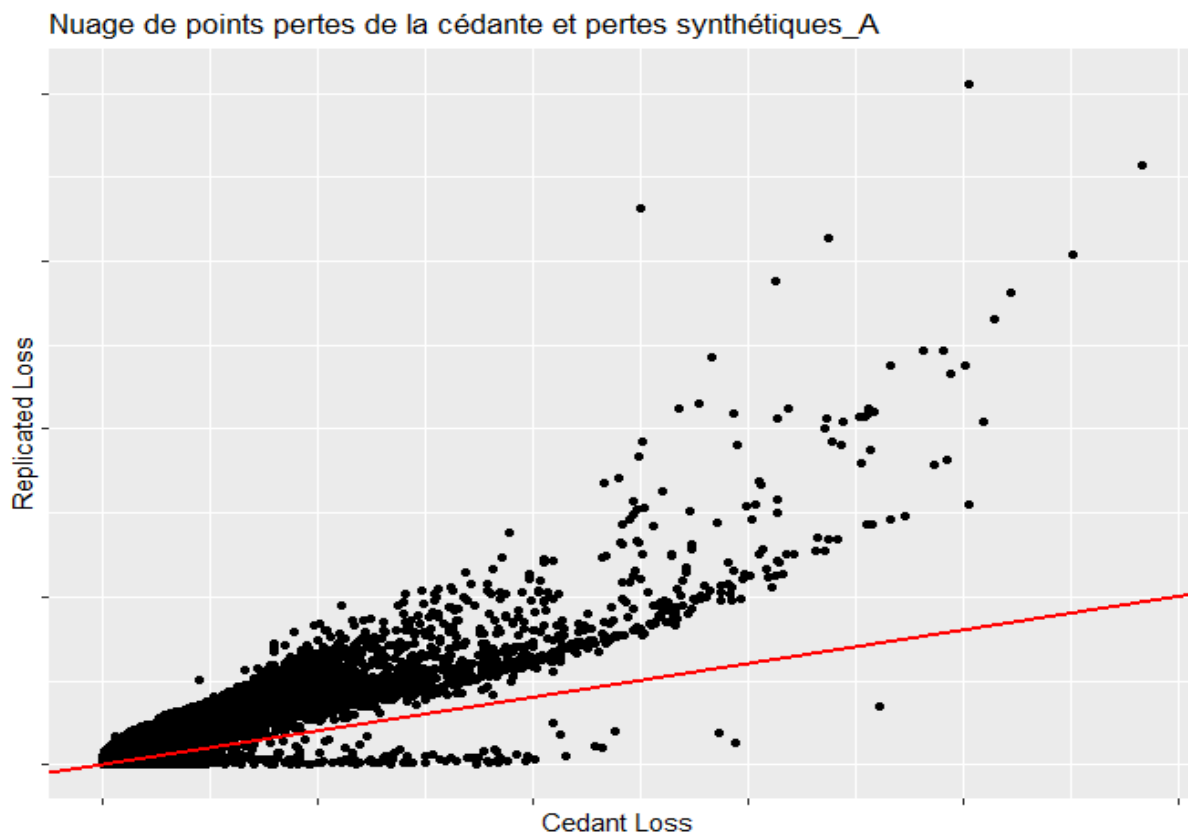
### 3.1. Application de l'algorithme aux pertes strictement positives de la cédante

En appliquant l'algorithme L-BFGS-B, nous obtenons les *Payout Factors* optimisés. Il faut noter que l'optimisation ici a été effectuée Sous-Bassin.

A l'aide des *Payout Factors* optimisé, les pertes répliquées sont calculées. Les pertes réelles de la cédante et les pertes répliquées sont représentées dans les graphes ci-dessous pour chaque Bassin :

#### Bassin A

Figure 43: Pertes réelles vs pertes répliquées Bassin A



Sur la première bissectrice (en rouge) se trouvent les événements pour lesquels les pertes réelles de la cédante coïncident avec les pertes répliquées via les *Payout Factors* optimaux.

Il faut observer que dans le cas du Bassin A, dans la majorité des scénarios, les pertes répliquées sont supérieures aux pertes réelles. La cédante fait donc potentiellement face à un important risque de sur-indemnisation sur ce Bassin.

Des analyses de même nature peuvent être effectuées sur les autres Bassins.

Les *Payout Factors* optimisés permettent de déterminer les pertes répliquées et de calculer les récupérations. Une allocation a ensuite été faite sur la base du brut de la cédante afin de calculer le risque de base à la maille Bassin.

Tableau 12 : Indicateurs du risque de base en gardant que les pertes strictement positives de la cédante.

BassinPeril	Moyenne	Moyenne_Positive	Moyenne_Négative	Ecart_Type	Quantile_25	Mediane	Quantile_75	Min	Max
A	1,7%	1,7%	0,0%	3,5%	0,0%	0,0%	0,0%	-80,0%	100,0%
B	0,0%	0,3%	0,2%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	-100,0%	100,0%
C	1,0%	0,2%	-1,2%	4,6%	0,0%	0,0%	0,0%	-92,4%	57,9%
D	0,1%	0,0%	0,1%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	-100,0%	0,0%
E	0,1%	0,0%	0,1%	5,3%	0,0%	0,0%	0,0%	-68,1%	71,8%
F	0,1%	0,0%	0,1%	3,2%	0,0%	0,0%	0,0%	-54,3%	39,8%
G	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%	0,0%	0,0%	0,0%	-35,1%	35,8%

Il faut remarquer qu'en moyenne, le risque de base est faible pour tous les Bassins. Les écarts types sont relativement faibles et les quantiles permettent d'avancer que le risque de base est très faible sur la majorité des événements issus des simulations.

Néanmoins il y a quelques scénarios extrêmes. En effet, le maximum du risque de base est à 100% sur les Bassins A et B et le minimum à -100% sur les Bassins B et D.

La différence entre ces Bassins est expliquée par le fait que la calibration des *Payout Factors* sur ces Bassins conduit à avoir soit une récupération nulle sur les pertes de la cédante, soit une récupération de l'ordre de la capacité sur les pertes répliquées (cas des scénarios à -100%). Dans le cas des scénarios à +100%, la situation inverse s'est produite.

Dans cette partie, nous avons déterminé les *Payout Factors* en nous basant sur le brut de la cédante. Le risque de base de la cédante étant calculé via les récupérations, il y a des limites à optimiser les *Payout Factors* sur la base du brut.

Nous proposons dans la partie suivante de prendre en compte la tranche du *Cat Bond* en mettant en place une pondération sur le brut de la cédante.

### 3.2. Application de l'algorithme aux pertes pondérées de la cédante

Le but visé dans l'exercice d'optimisation ici est de déterminer des *Payout Factors* qui permettent de minimiser le risque de base au regard des caractéristiques du *Cat Bond* (priorité, portée ...).

L'idée ici est d'appliquer des facteurs aux pertes issues des simulations afin de donner plus de poids à certains événements dans le processus d'optimisation. La pondération permettra de donner plus d'importance aux événements dont les pertes sont proches de la tranche (Limite x Priorité).

La pondération ci-dessous est choisie afin de refléter partiellement le positionnement de la cédante vis-à-vis du risque.

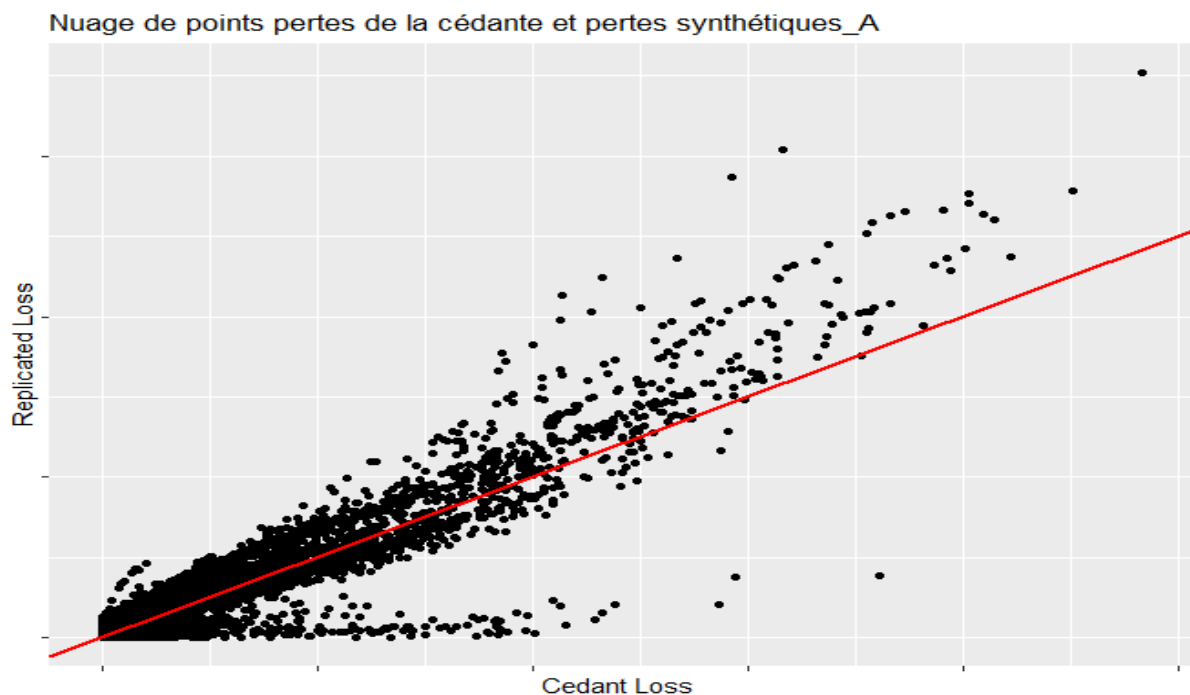
Tableau 13 : Tableau des pondérations appliquées aux pertes de la cédante

Intervalle	Poids
$\text{Pertes} < \text{Priorité}/2$	1
$\text{Priorité}/2 \leq \text{Pertes} < \text{Priorité}$	6
$\text{Priorité} \leq \text{Pertes} < (\text{Priorité} + \text{Limite})$	18
$(\text{Priorité} + \text{Limite}) \leq \text{Pertes} < (\text{Priorité} + \text{Limite}) + \text{Limite}/2$	12
$(\text{Priorité} + \text{Limite}) + \text{Limite}/2 \leq \text{Pertes} < \text{Priorité} + 2 \times \text{Limite}$	1
$\text{Pertes} > \text{Priorité} + 2 \times \text{Limite}$	0

En appliquant à nouveau l'algorithme L-BFGS-B, les résultats ci-dessous sont obtenus

#### Bassin A

Figure 44: Pertes réelles vs pertes répliquées Bassin A : pertes pondérées



Sur la figure ci-dessus, nous pouvons constater que les points sont mieux alignés autour de la première bissectrice. Les pertes répliquées sont donc plus proches des pertes réelles de la cédante.

Les Payout Factors optimaux permettent de calculer les indicateurs du risque de base à la maille Bassin présentés ci-dessous :

Tableau 14: Indicateurs du risque de base en appliquant des poids au brut de la cédante.

BassinPeril	Moyenne	Moyenne_Positive	Moyenne_Négative	Ecart_Type	Quantile_25	Mediane	Quantile_75	Min	Max
A	0,1%	0,2%	0,1%	0,9%	0,0%	0,0%	0,0%	-100,0%	74,4%
B	0,6%	0,6%	0,0%	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	-43,5%	100,0%
C	0,1%	0,4%	0,5%	3,1%	0,0%	0,0%	0,0%	-84,6%	59,8%
D	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	-60,3%	22,8%
E	0,0%	0,0%	0,0%	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,4%	69,5%
F	0,1%	0,0%	0,1%	3,2%	0,0%	0,0%	0,0%	-57,4%	39,8%
G	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,0%	0,0%	-44,5%	34,6%

Les résultats sont meilleurs ici, le risque de base est en moyenne plus faible et les quantiles très faibles. De plus, avec cette nouvelle méthodologie, le maximum sur le Bassin A est passé de 100% à 74,4%. Sur les Bassins B et D, les minimums passent respectivement de 100% à - 43,5% et - 60,3%.

Ils subsistent néanmoins des scénarios extrêmes sur les Bassins A et B. Le minimum du risque de base sur le Bassin A est de -100% et le maximum du risque de base sur le Bassin B est de 100%.

Selon les politiques des cédantes le risque de sous-indemnisation ou de sur-indemnisation peut être toléré. Ici, l'hypothèse de la tolérance du risque de sous-indemnisation est faite ; le sponsor préfère être sous-indemnisé plutôt qu'être sur-indemnisé.

### ***Fine tuning***

Il faut donc modifier et regarder de plus près les *Payout Factors* des Sous-Bassins du Bassin B. Le Sous Bassin à l'origine des scénarios extrêmes est identifié et son *Payout Factor* est remplacé par la part de marché de la cédante sur ce Sous-Bassin.

Les résultats ci-dessous sont obtenus après *fine tuning* :

Tableau 15: Indicateurs du risque de base après application des poids au brut de la cédante et fine tuning sur les Payout Factors

BassinPeril	Moyenne	Moyenne_Positive	Moyenne_Négative	Ecart_Type	Quantile_25	Mediane	Quantile_75	Min	Max
A	0,1%	0,2%	0,1%	0,9%	0,0%	0,0%	0,0%	-100,0%	74,4%
B	0,3%	0,4%	0,0%	3,2%	0,0%	0,0%	0,0%	-43,5%	94,4%
C	0,1%	0,4%	0,5%	3,1%	0,0%	0,0%	0,0%	-84,6%	59,8%
D	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	-60,3%	22,8%
E	0,0%	0,0%	0,0%	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,4%	69,5%
F	0,1%	0,0%	0,1%	3,2%	0,0%	0,0%	0,0%	-57,4%	39,8%
G	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,0%	0,0%	-44,5%	34,6%

Le maximum du risque de base après la modification d'un *Payout Factor* est passé de 100% à 94,4%.

### 3.3. Mise en place d'études de sensibilité

Il est proposé ici d'effectuer des tests de sensibilité sur certains éléments qui interviennent dans la structuration d'un *Cat Bond*. Les sensibilités seront effectuées sur les résultats avant fine tuning.

#### 3.3.1. Sensibilités des indicateurs du risque de base au brut de la cédante

Dans cette partie, il est proposé de tester la sensibilité de la moyenne du risque de base à une variation du brut de la cédante. En effet, le brut de la cédante peut évoluer entre le moment où on structure le *Cat Bond* et le moment où le *Cat Bond* est effectivement émis.

Pour cela, des chocs à +10%, -10%, +15% et -15% seront effectués sur les pertes brutes de la cédante. Ces chocs ne sont pas extrêmes car ils sont avant tout opérationnel. On n'anticipe pas une forte variabilité dans le brut de la cédante.

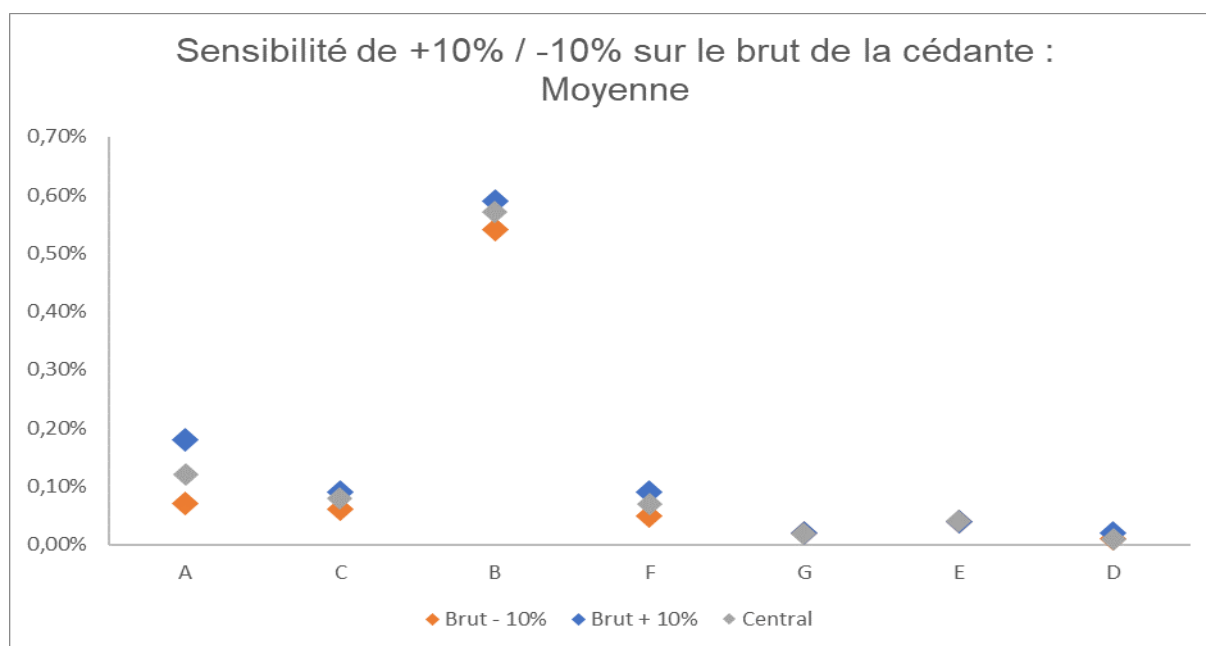
Nous gardons donc la même structure de *Cat Bond* mais faisons varier le brut de la cédante.

#### Brut de la cédante +10%/-10%

Le graphe ci-dessous présente en ordonnée le risque de base moyen (moyenne sur les risques de base positifs comme négatifs) et en abscisse les différents Bassins.

#### Moyenne

Figure 45: Sensibilité sur le brut de la cédante +10%/-10% par Bassin : Moyenne



Les récupérations évoluent dans le même sens que le brut de la cédante. Lorsque le brut de la cédante augmente, les récupérations de la cédante augmentent aussi.

Etant donné la définition du risque de base et étant donné que le montant récupéré via les pertes marché ne change pas, lorsque le brut de la cédante est choqué (à la hausse ou à la baisse), on s'attend à ce que le risque de base moyen évolue dans le même sens.

Sur les Bassins A, C, B, F, G et D, lorsque le brut de la cédante est choqué de +10%, le risque de base moyen augmente. Il s'agit bien du sens attendu. De même, lorsque le brut de la cédante choqué de -10%, le risque de base moyen diminue sur ces mêmes Bassins.

Néanmoins, sur les Bassins E et G, la moyenne du risque de base n'est pas sensible aux chocs de +10% et -10%. Cela s'explique par des effets de seuils liés au calcul des récupérations à partir du brut de la cédante. En effet sur ces Bassins, le brut traverse très largement la tranche du Cat Bond. Ce qui fait que les chocs à la baisse comme à la hausse de 10% n'impactent pas les récupérations de la cédante et donc par conséquent le risque de base.

### Synthèse chocs +10%/-10% sur le brut

Dans le tableau ci-dessous, on récapitule l'impact chiffré des différents chocs par rapport au scénario central

Tableau 16: Risque de base, scénario central et chocs de +/-10% sur le brut de la cédante

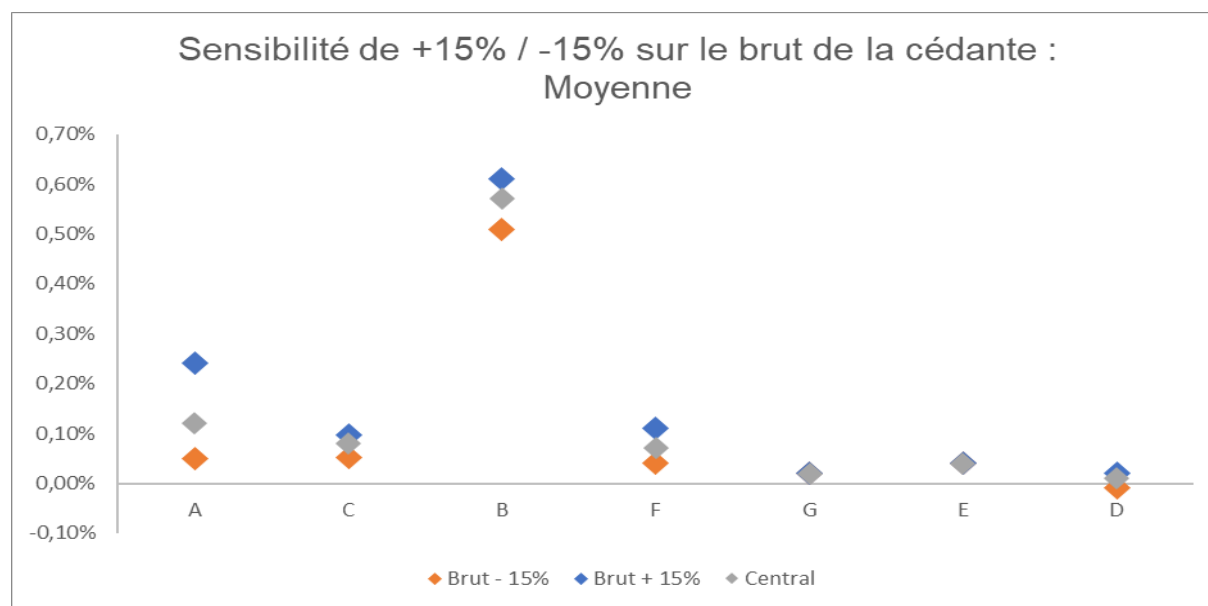
Bassin	Brut - 10%	Central	Brut +10%
	Moyenne	Moyenne	Moyenne
A	0,07%	0,12%	0,18%
C	0,06%	0,08%	0,09%
B	0,54%	0,57%	0,59%
F	0,05%	0,07%	0,09%
G	0,02%	0,02%	0,02%
E	0,04%	0,04%	0,04%
D	0,01%	0,01%	0,02%

### Brut de la cédante +15%/-15%

#### Moyenne

Le graphe ci-dessous présente en ordonnée le risque de base moyen (moyenne sur les risques de base positifs comme négatifs) et en abscisse les différents Bassins.

Figure 46 : Sensibilité sur le brut de la cédante +15%/-15% par Bassin : Moyenne



Nous remarquons que sur les Bassins A, C, B, F, G et D, lorsque le brut de la cédante est choqué de +15%, le risque de base moyen augmente. Il s'agit bien du sens attendu. De même, lorsque le brut de la cédante est choqué de -15%, le risque de base moyen diminue sur ces mêmes Bassin. Les chocs ici vont dans le même sens que les constats réalisés sur les chocs +/-10%.



Il y a toutefois un point d'attention. En effet, sur le Bassin D, le choc de -15% sur le brut conduit à une moyenne du risque de base négative. Dans ce scénario, la cédante est sur-indemnisée : ce qui n'est pas la politique adoptée (on préfère la sous-indemnisation à la sur-indemnisation pour les raisons évoquées plus haut).

Le risque de base sur les Bassins G et E comme dans les scénarios +/-10% sur le brut de la cédante ne sont pas sensibles aux chocs de +/-15% sur le brut.

### Synthèse chocs +15%/-15% sur le brut

Dans le tableau ci-dessous, on récapitule l'impact chiffré des différents chocs par rapport au scénario central.

Tableau 17: Risque de base, scénario central et chocs de +/-15% sur le brut de la cédante

Bassin	Brut - 15%	Central	Brut +15%
	Moyenne	Moyenne	Moyenne
A	0,05%	0,12%	0,24%
C	0,05%	0,08%	0,10%
B	0,51%	0,57%	0,61%
F	0,04%	0,07%	0,11%
G	0,02%	0,02%	0,02%
E	0,04%	0,04%	0,04%
D	-0,01%	0,01%	0,02%

### **3.3.2. Sensibilités sur la granularité à laquelle sont déterminés les *Payout Factors***

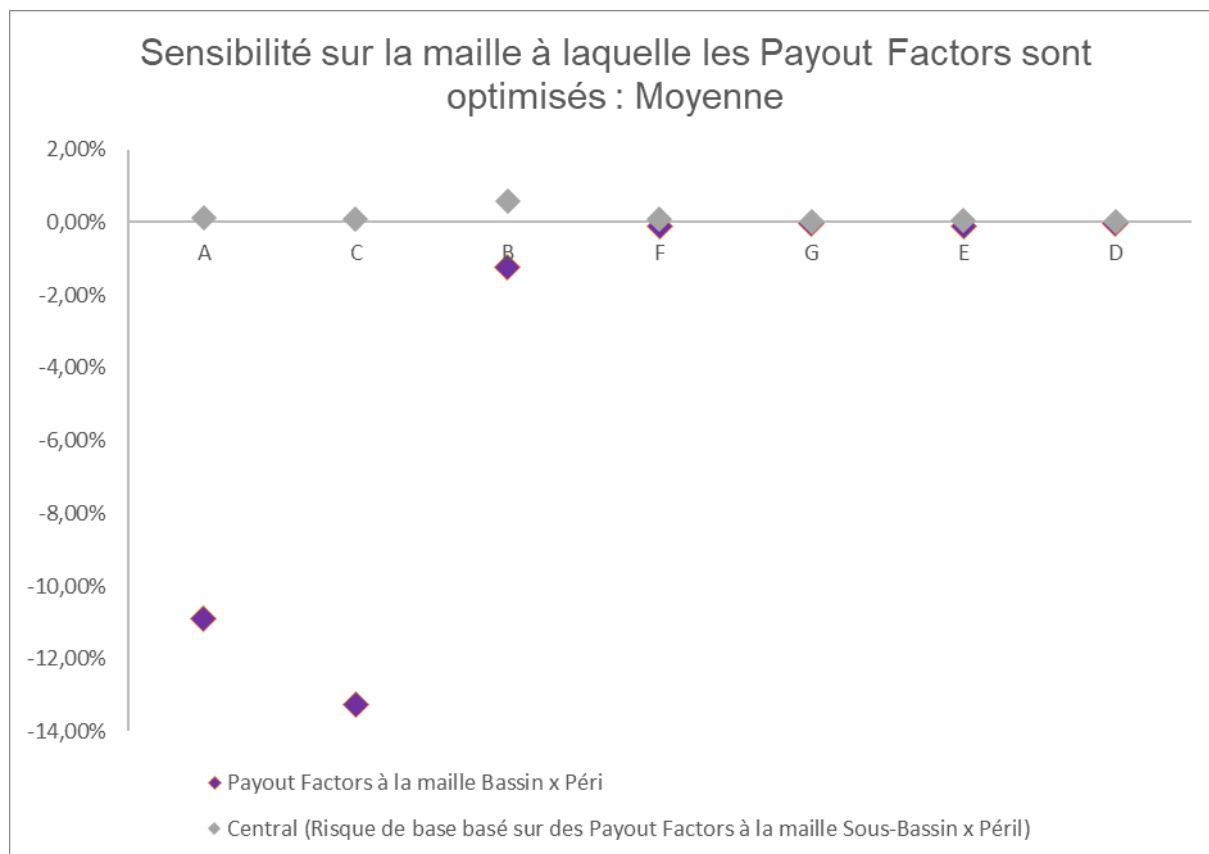
Dans cette partie, nous proposons d'effectuer une étude de sensibilité sur la maille à laquelle les *Payout Factors* ont été calibrés et ainsi voir l'impact sur le risque de base.

Jusqu'à présent, les *Payout Factors* ont été calibrés à la maille Sous-Bassin et le risque de base calculé à la granularité Bassin. Ici, nous proposons d'optimiser les *Payout Factors* directement à la maille Bassin.

L'idée de ce test est de voir si le risque de base est significativement impacté par cette nouvelle évaluation. Si on arrivait à la conclusion que ce n'était pas le cas, on pourrait optimiser directement les *Payout Factors* à la maille Bassin et gagner en simplicité opérationnelle.

Les résultats (moyenne du risque de base par Bassin) sont présentés dans le graphe ci-dessous (en comparaison avec les résultats du scénario central).

Figure 47 : Sensibilité sur la maille à laquelle les Payout Factors sont optimisés



Il peut être remarqué que dans le scénario où les *Payout Factors* sont optimisés à la granularité Bassin, le risque de base moyen est plus important en valeur absolue. De plus, le risque de base est négatif sur tous les Bassins. Dans ce scénario, la cédante est sur-indemnisée.

Au vu des précédentes observations, on peut conclure que pour avoir un risque de base moyen faible, il vaut mieux évaluer les *Payout Factors* à la maille Sous-Bassin plutôt qu'à la maille Bassin.

#### 4. Avantages et limites des approches proposées dans ce chapitre

Dans ce chapitre, nous avons réussi à mettre en place un process d'optimisation qui a permis de déterminer les *Payout Factors* du *Cat Bond*. Grâce à ces *Payout Factors*, nous avons réussi à avoir un risque de base très faible. Nous avons ainsi réussi à relever l'un des challenges important lié à l'émission d'un *Cat Bond* indiciel.

Afin d'optimiser les *Payout Factors*, nous avons appliqué des poids (à dire d'expert) sur le brut de la cédante afin de prendre en compte la structure de la tranche du *Cat Bond*. Il aurait été intéressant de développer une méthode permettant de choisir ces poids quantitativement. De même, on aurait pu envisager de mettre en place une méthodologie permettant d'optimiser les *Payout Factors* directement sur les récupérations et non sur le brut pondéré.

## CONCLUSION

L'une des missions principales de mon alternance a consisté à structurer un *Cat Bond* indiciel devant être émis afin de protéger le Groupe AXA contre le risque catastrophe naturelle.

Dans notre étude nous avons réussi à mettre en place dans un premier temps, un process permettant de définir les caractéristiques de la tranche d'un *Cat Bond*. En effet, les travaux effectués ont permis de définir une capacité et une tranche optimales qui minimisent la marge cédée et maximisent l'efficacité. L'un des axes qu'on aurait pu couvrir ici, c'est de déterminer non pas une tranche unique mais plusieurs tranches différentes afin de prendre en compte les différentes appétences des investisseurs.

Comme vu plus haut, la gestion du risque de base est cruciale dans le cadre de la structuration du *Cat Bond* indiciel. Nous avons donc dans un second temps proposé une modélisation du risque de base et appliqué l'algorithme de quasi-Newton L-BFGS-B afin de déterminer des *Payout Factors* optimaux permettant de minimiser ce risque de base.

L'approche adoptée, bien qu'elle fournisse des résultats intéressants peut être améliorée. En effet, il aurait été intéressant de développer une méthodologie permettant d'optimiser les *Payout Factors* non pas sur le brut de la cédante mais plutôt sur les récupérations du *Cat Bond*.

L'étude sur la sensibilité du risque de base à la maille à laquelle les *Payout Factors* sont optimisés influe grandement sur le risque de base pour la cédante. Il s'agit donc d'un paramètre important qu'il faut bien choisir.

L'ensemble de nos travaux ici ont permis de poser une méthodologie permettant de structurer un *Cat Bond* indiciel de bout en bout, c'est-à-dire de la définition de la capacité à émettre jusqu'à la détermination des *Payout Factors*. Ces travaux peuvent donc être utilisés pour la structuration des *Cat Bonds* dans le futur. Le process mis en place peut également être appliqué dans le cas des *resets*. Dans le cadre des *Cat Bonds* pluriannuels, le reset a lieu toutes les années et permet à la cédante de modifier la tranche (limite et point d'attachement) et/ou les *Payout Factors* tout en respectant certaines contraintes. Ces contraintes peuvent par exemple porter sur le niveau d'*Expected Loss*, qui doit rester relativement stable.

## BIBLIOGRAPHIE

**Gorge G. et al [2013]**, Insurance Risk Management

**Barrieu P. et Albertini L. [2009]**, The Handbook of Insurance-Linked Securities

**Loisel S. [2020]**, « Titrisation des risques d'assurance », *cours Enterprise Risk Management ISFA*

**Thourot P. [2009]**, « Où va la réassurance ? », P. Thourot, *Risques, Les cahiers de l'assurance n°80 (décembre 2009)*

**Lagier S. [2012]**, « Modélisation de la mortalité catastrophe pour la valorisation des *Cat Bonds* », *mémoire actuariat ISUP*

**Djekadom O. [2016]**, « Etude du risque de base d'un *Cat Bond* basé sur un indice de marché », *mémoire actuariat ISUP*

**Cantarella J. [2020]**, <http://www.jasoncantarella.com/downloads/NelderMeadProof.pdf>

**Rondepierre A [2017-2018]**, <http://www.math.univ-toulouse.fr/~rondep/CoursTD/polyGMM4.pdf>

<https://www.air-worldwide.com/SiteAssets/Publications/Brochures/documents/about-catastrophe-models>, 2020

[https://www.researchgate.net/publication/296059840\\_Hybrid\\_Simulated\\_Annealing\\_and\\_Nelder-Mead\\_Algorithm\\_for\\_Solving\\_Large-Scale\\_Global\\_Optimization\\_Problems](https://www.researchgate.net/publication/296059840_Hybrid_Simulated_Annealing_and_Nelder-Mead_Algorithm_for_Solving_Large-Scale_Global_Optimization_Problems), 2020

<https://www.atlas-mag.net/article/reassurance-alternative-formes-evolution-et-impacts-sur-les-reassureurs#:~:text=%20Les%20avantages%20des%20solutions%20alternatives%20de%20r%C3%A9assurance%3A,certains%20cas%2C%20de%20diminuer%20le%20risque...%20M>, 2020

**Carpentier P. [2020]**, [Methodes.pdf \(enpc.fr\)](#)

[www.munichre.com](http://www.munichre.com), 2020

[www.swissre.com](http://www.swissre.com), 2020

[www.aon.com](http://www.aon.com), 2020

[www.artemis.bm](http://www.artemis.bm), 2020

**J. Nocedal et al [1994]**. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. Northwestern University, USA,

## TABLE DES FIGURES

Figure 1: Pertes catastrophes assurées entre 1970 et 2018.....	10
Figure 2:Architecture d'un modèle catastrophe.....	11
Figure 3:Taux de destruction en fonction de l'intensité physique.....	13
Figure 4: Exemple de courbes AEP et OEP.....	16
Figure 5:Exemple de courbe EP.....	17
Figure 6: Exemple traité XS.....	21
Figure 7 : Structure des traités transitant via AXA Global RE.....	24
Figure 8 : Différence entre « pool » et « rétention ».....	25
Figure 9: Evolution des ILS au cours du temps.....	26
Figure 10: Maturité des Cat Bonds.....	28
Figure 11: Schéma d'une structure type de Cat Bond.....	30
Figure 12: Mécanismes de déclenchement des Cat Bonds.....	32
Figure 13: Evolution annuelle du marché des Cat Bonds entre 2011 et 2020.....	33
Figure 15: Emission de Cat Bonds et d'ILS par déclencheur et par année.....	34
Figure 16: Emission Cat Bonds par type de sponsors.....	34
Figure 17: Comparaison d'un indice Cat Bonds à d'autres indices classiques.....	35
Figure 18: Frontières efficientes de portefeuille avec et sans Cat Bond.....	37
Figure 19:Structure simplifiée de la couverture d'un Cat Bond.....	39
Figure 20 : Pertes AEP et OEP du brut de la cédante en fonction de la période de retour (Bassin A).....	41
Figure 21 : Probabilité de dépassement en fonction de l'AEP de la cédante (Bassin A).....	41
Figure 22 : : Probabilité de dépassement en fonction de l'OEP de la cédante (Bassin A).....	42
Figure 23:Architecture simplifiée de la sinistralité du Groupe.....	43
Figure 24 : Marge cédée au niveau de l'Enterprise Aggregate et du Cat Bond.....	44
Figure 25: Structure modèle interne AXA.....	48
Figure 26 : Exemple d'illustration de répartition de capacité par classe.....	49
Figure 27 : Schéma de sinistralité nette Groupe à partir de la sinistralité brute.....	51
Figure 28:Calibration du Multiple de l'Enterprise Aggregate.....	53
Figure 29 : Courbe de la différence entre l'AEPay des scénarios et du scénario central.....	54
Figure 30: Courbe de la différence entre l'AEPby des scénarios et du scénario central.....	54
Figure 31: Efficience du Cat Bond en fonction de la capacité.....	56
Figure 32: Réduction du taux de placement de l'Enterprise Aggregate due à l'émission des Cat Bonds.....	58
Figure 33: Impact de la capacité sur la prime cédée.....	59
Figure 34:Impact de la capacité sur la marge cédée.....	61
Figure 35: Réduction du STEC selon la capacité émise.....	62
Figure 36: Etapes de détermination de tranche de même niveau d'EL.....	66
Figure 37: Illustration de la dichotomie.....	67
Figure 38: Illustration dichotomie.....	67
Figure 39: Multiple Cat Bond en fonction de l'EL.....	70
Figure 40 : Pertes AEP et OEP des pertes du marché en fonction de la période de retour (Bassin A).....	78
Figure 41:Probabilité de dépassement en fonction de la perte annuelle du marché (Bassin A).....	78

Figure 42: Probabilité de dépassement en fonction de la perte maximale par évènement du marché (Bassin A) ..... 79

Figure 43: Pertes répliquées à l'aide des parts de marché d'exposition comparées aux pertes réelles ..... 81

Figure 44: Pertes réelles vs pertes répliquées Bassin A ..... 90

Figure 45: Pertes réelles vs pertes répliquées Bassin A : pertes pondérées ..... 92

Figure 46: Sensibilité sur le brut de la cédante +10%/-10% par Bassin : Moyenne ..... 95

Figure 47 : Sensibilité sur le brut de la cédante +15%/-15% par Bassin : Moyenne ..... 96

Figure 48 : Sensibilité sur la maille à laquelle les Payout Factors sont optimisés ..... 98

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Périls et paramètres physiques ..... 12

Tableau 2: Exemple d'ELT ..... 14

Tableau 3: comparaison rendement et volatilité d'un Cat Bond avec d'autres actifs..... 35

Tableau 4: Matrice de corrélation d'un Cat Bond avec d'autres actifs ..... 36

Tableau 5: Exemple portefeuille..... 37

Tableau 6: Réassurance vs Titrisation..... 38

Tableau 7: Exemple Cat Bond en vison "Aggregate" ..... 64

Tableau 8: Exemple de calcul du prix Cat Bond..... 71

Tableau 9: Limites, rétentions et taux de placement pour niveau d'EL et pour une capacité donnée..... 72

Tableau 10: Marge cédée des tranches ; scénario optimal comparé d'autres scénarios ..... 73

Tableau 11: Efficience des tranches..... 74

Tableau 12 : Indicateurs du risque de base en gardant que les pertes strictement positives de la cédante..... 91

Tableau 13 : Tableau des pondérations appliquées aux pertes de la cédante ..... 92

Tableau 14: Indicateurs du risque de base en appliquant des poids au brut de la cédante... 93

Tableau 15: Indicateurs du risque de base après application des poids au brut de la cédante et fine tuning sur les Payout Factors ..... 94

Tableau 16: Risque de base, scénario central et chocs de +/-10% sur le brut de la cédante 96

Tableau 17: Risque de base, scénario central et chocs de +/-15% sur le brut de la cédante 97



## ANNEXE : Recherche linéaire par la méthode de Wolfe

### A.1. Principes généraux

Considérons  $f$  une fonction à minimiser. On note :

- $x^{(k)}$  le point courant,
- $g^{(k)}$  le gradient de  $f$  en  $x^{(k)}$ ,
- $d^{(k)}$  la direction de descente,
- $\alpha^{(k)}$  le pas de descente

La règle de Wolfe consiste à déterminer un pas  $\alpha^{(k)}$  vérifiant les deux conditions ci-dessous :

- a. La fonction  $f$  doit décroître de manière significative :

$$f(x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \omega_1\alpha^{(k)}g^{(k)T}d^{(k)} \quad (1a)$$

- b. Le pas  $\alpha^{(k)}$  doit être suffisamment grand :

$$(\nabla f(x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}))^T d^{(k)} \geq \omega_2 g^{(k)T} d^{(k)} \quad (1b)$$

Avec  $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$  (généralement  $\omega_1 = 0,1$  ;  $\omega_2 = 0,9$ )

### A.2. Algorithme de résolution

La procédure itérative suivante, que l'on doit à *Fletcher & Lemarchal* permet de façon assez simple de calculer un pas  $\alpha^{(k)}$  vérifiant les deux conditions de Wolfe.

L'initialisation consiste à poser  $\alpha_{inf} = 0$  et  $\alpha_{sup} = +\infty$  et à se donner un pas  $\alpha^{(k,1)} \in ]\alpha_{inf}, \alpha_{sup}[$ . A chaque itération  $l$  de l'algorithme de *Fletcher & Lemarchal*, le test ci-dessous est effectué afin de modifier la valeur de  $\alpha^{(k,l)}$  afin d'obtenir un pas qui satisfait les conditions de Wolfe :

- Si  $\alpha^{(k,l)}$  ne vérifie pas la condition (1a) :
  - La borne supérieure est diminuée :  $\alpha_{sup} = \alpha^{(k,l)}$
  - Un nouveau pas est choisi :  $\alpha^{(k,l+1)} = \frac{1}{2}(\alpha_{inf} + \alpha_{sup})$  ;
- Sinon,
  - ✚ Si  $\alpha^{(k,l)}$  ne vérifie pas la condition (1b) :
    - La borne inférieure est augmentée :  $\alpha_{inf} = \alpha^{(k,l)}$
    - Un nouveau pas est choisi :
      - $\alpha^{(k,l+1)} = 2\alpha_{inf}$  si  $\alpha_{sup} = +\infty$
      - $\alpha^{(k,l+1)} = \frac{1}{2}(\alpha_{inf} + \alpha_{sup})$  sinon
  - ✚ Sinon, le pas  $\alpha^{(k,l)}$  vérifie la règle de Wolfe et servira à se déplacer dans la direction  $d^{(k)}$  :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k,l)} d^{(k)}$$

Il faut noter que les conditions (1a) et (1b) ne sont pas traitées de manière symétrique dans cette procédure. En effet, la seconde condition de Wolfe n'est testée que si la première condition est satisfaite. Cependant, la modification de la borne inférieure  $\alpha_{inf}$  dans le cas où la seconde condition n'est pas vérifiée oblige à refaire le test de la première condition.