Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

<table>
<tr><td colspan="2">Par : Madame FIANT Emma</td></tr>
<tr><td colspan="2">Titre du mémoire : La Tarification d'une garantie en cas de vie</td></tr>
<tr><td colspan="2">Confidentialité : ☐ NON ☑OUI (Durée : ☐ 1 an ☑2 ans)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><u>Membres présents du jury de la filière :</u> Signature :</td><td><u>Entreprise :</u>
Nom : Generali
Signature :</td></tr>
<tr><td><u>Directeur de mémoire en entreprise</u>
Nom : MOUGEY Manon
Signature :</td></tr>
<tr><td rowspan="3"><u>Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :</u> Signature :</td><td><u>Invité</u> :
Nom :
Signature :</td></tr>
<tr><td>Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)
<u>Signature du responsable entreprise :</u>
Elvire Fougea
Fougea
<u>Signature du candidat</u> :
Fiant</td></tr>
</table>

Résumé

Pour faire face à la baisse de rendement des fonds euros, une des solutions envisagées par les assureurs repose sur la garantie en cas de vie. En effet, même si les contrats en unités de compte présentent un réel intérêt pour l'assureur, les assurés acceptent parfois difficilement l'absence de garantie sur leur capital et sur le rendement de leur contrat. En outre, en cas de hausse des taux sur les marchés financiers le rendement apporté peut être largement supérieur à ceux des contrats en euros. Le risque de perte peut alors rendre les assurés réticents. L'objectif des assureurs dans le contexte économique que nous traversons est d'orienter les assurés vers les fonds en unités de compte. La garantie en cas de vie représente ainsi un bon moyen d'allier performance et sécurité. Elle propose une protection des unités de compte qui permet aux assurés de bénéficier d'une garantie contre le risque de baisse de rendement.

Dans ce cadre, l'assureur fait face à un nouveau risque et doit réaliser une tarification. Ce mémoire a pour objectif de tarifer ce type de garantie. Grâce aux différentes méthodes de tarification employées, il s'agira de montrer que la tarification obtenue est très sensible aux différents paramètres pris en compte dans les modèles utilisés. À travers un compte de résultat et des indicateurs de rentabilité, il conviendra également de vérifier la pertinence des résultats obtenus.

Mots clés : Tarification, Rentabilité, Unités de compte, Garantie plancher, Black and Scholes, Vasicek, Arbres binomiaux

Abstract

One of the solutions considered by insurers to face the decrease of efficiency of euro funds is a guarantee in case of life. Indeed, even if unit-linked contracts still are very interesting for insurers, policyholders sometimes find it difficult to accept the lack of a guarantee on their capital and on the efficiency on their contract. Moreover, in case of an increase in rates on the financial markets, the return may be much higher than those on euro contracts, but the risk of loss may make policyholders reluctant. The aim of insurers in this economic context is to guide policyholders to unit-linked funds. The guarantee in case of life represents a good way to combine performance and security. It offers a protection on unit-linked contracts which allows policyholders to benefit a guarantee against the risk of a decrease in return

In this context, the insurer faces a new risk and has to price it. The goal of this paper is to price this type of guarantee. Through the different methods used, it will be shown that the price obtained is linked to the different parameters taken in the models. Finally, through a profit and loss statement and profitability indicators, the relevance of the results obtained will be verified.

Key words: Pricing, Profitability, Unit-linked, Guarantee in case of life, Black and Scholes, Vasicek, Binomial trees

Synthèse

Contexte

Le présent mémoire s'inscrit dans le contexte des taux durablement bas auquel est actuellement confronté l'assurance vie. Ce contexte amène les assureurs à repenser le mode de fonctionnement sur lequel est basée l'assurance vie. En effet, les fonds euros, considérés de longue date comme pilier de l'assurance vie pour leurs caractéristiques attrayantes ne garantissent plus de rendements satisfaisants. L'objectif des assureurs est alors de renforcer l'attrait des fonds unités de compte. Ce mémoire repose sur l'étude d'alternatives aux fonds euros qui restent attractives et sécurisantes pour les assurés. Une des solutions envisagées par les assureurs est la mise en place d'une garantie plancher en cas de vie. Elle représente une avancée commerciale qui permet de convaincre plus facilement un grand nombre d'assurés en offrant la possibilité de dynamiser leur épargne tout en conservant la sécurité d'un capital garanti. Ce mémoire aborde ainsi des problématiques de tarification et de rentabilité. En effet, en s'intéressant à ce type de garantie, il est nécessaire de se questionner sur les différentes manières de les modéliser de façon actuarielle et sur les différentes techniques permettant de les évaluer. Ainsi, tous les risques liés à la création de ce type de garantie doivent être pris en compte.

Présentation de la garantie plancher

L'objectif de la garantie plancher est de protéger les assurés contre les fluctuations à la baisse des marchés financiers sur lesquels les primes sont investies. À travers cette garantie, l'assureur s'engage à ce que la prestation totale ne soit pas inférieure à un certain seuil, bien qu'elle soit indexée sur la valeur de l'unité de compte. Cette garantie plancher joue en cas de décès mais aussi en cas de vie. Précisions que dans le cadre de ce mémoire, seule la garantie en cas de vie est étudiée, avec le versement d'une prime unique et sur des contrats uniquement en supports unités de compte. La figure ci-dessous présente de façon schématique le fonctionnement d'une garantie plancher classique.

Cette dernière garantit le versement d'un capital minimum en cas de vie à l'échéance, quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au terme. Elle permet d'assurer au bénéficiaire le versement d'un capital pouvant aller jusqu'à 100% du montant net investi à une échéance définie. En revanche, en cas de décès ou de rachat avant l'échéance, la garantie ne s'applique pas. Quelles que soient les fluctuations boursières, le bénéficiaire du contrat recevra une somme minimum. Ainsi, la garantie permet aux assurés de dynamiser et sécuriser leur épargne en profitant des performances de marché tout en se protégeant contre les risques de moins-values.

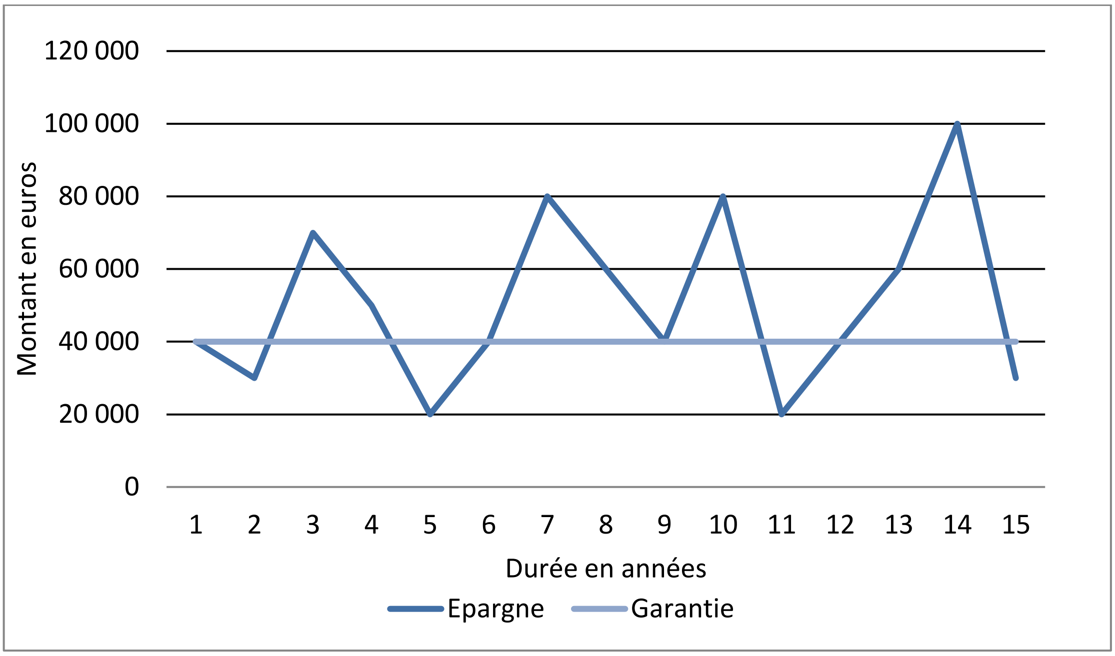


Schéma d'une garantie plancher classique

La tarification d'une garantie en cas de vie

Dans le but d'étudier la tarification d'une garantie en cas de vie, une sélection des unités de compte les plus souscrites depuis 2015 au sein de deux produits est effectuée pour former un portefeuille de données. Les études préliminaires et statistiques descriptives du portefeuille sélectionné constituent une étape cruciale. En effet, la qualité et l'exhaustivité des données représentent un enjeu majeur pour l'assureur puisqu'elles permettent notamment une bonne compréhension des produits proposés aux assurés. Ici, les statistiques confirment qu'au sein du portefeuille étudié, les supports en unités de compte sur lesquels est investie l'épargne des assurés sont diversifiés. L'étude de l'indicateur SRRI (Synthetic Risk and Reward Indicator) permet également de déduire qu'il s'agit de fonds à volatilité variée.

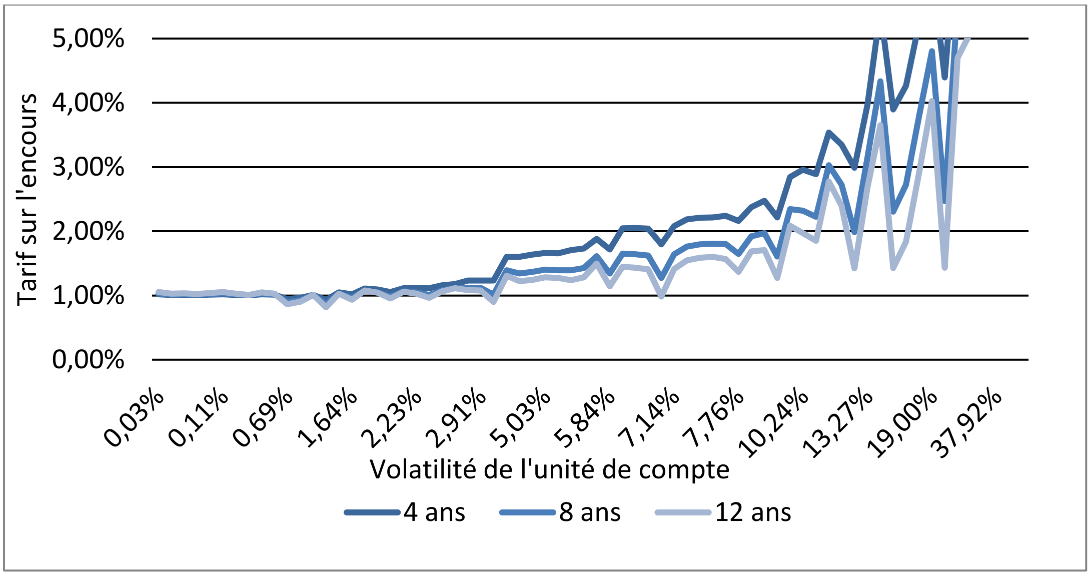
Dans le but d'obtenir un tarif pertinent, différentes méthodes de tarification sont appliquées et, sur chacune d'entre elle, des études de sensibilités sur le pourcentage garanti, l'âge de l'assuré au moment de la souscription et sur l'échéance de la garantie sont effectuées.

La première méthode appliquée est une méthode déterministe. Il s'agit de modéliser les engagements respectifs de l'assureur et de l'assuré et de projeter sur une période donnée un scénario déterministe préalablement choisi; ici c'est un scénario de baisse qui est choisi. L'intérêt de la méthode consiste à choisir un scénario spécifique et prudent de l'évolution des cours de chaque support. Les résultats des sensibilités obtenus montrent que la volatilité de l'unité de compte considérée a une forte incidence sur le tarif de la garantie en cas de vie. Plus la volatilité est grande, plus le tarif augmente.

Même si cette méthode présente l'avantage d'être simple à appréhender, il n'est pas envisageable de limiter la tarification à cette méthode qui base l'évolution de l'unité de compte sur un unique chemin, alors qu'elle est aléatoire et instable. Du fait des limites qu'elle présente, il est décidé de l'exclure de l'étude. Il est alors nécessaire d'avoir recours à la théorie des options, plus proche de la finance. Cette démarche consiste alors à adopter une optique de tarification stochastique qui décrira mieux l'évolution incertaine des cours des unités de compte. C'est ce qui est réalisé avec la méthode de Black and Scholes.

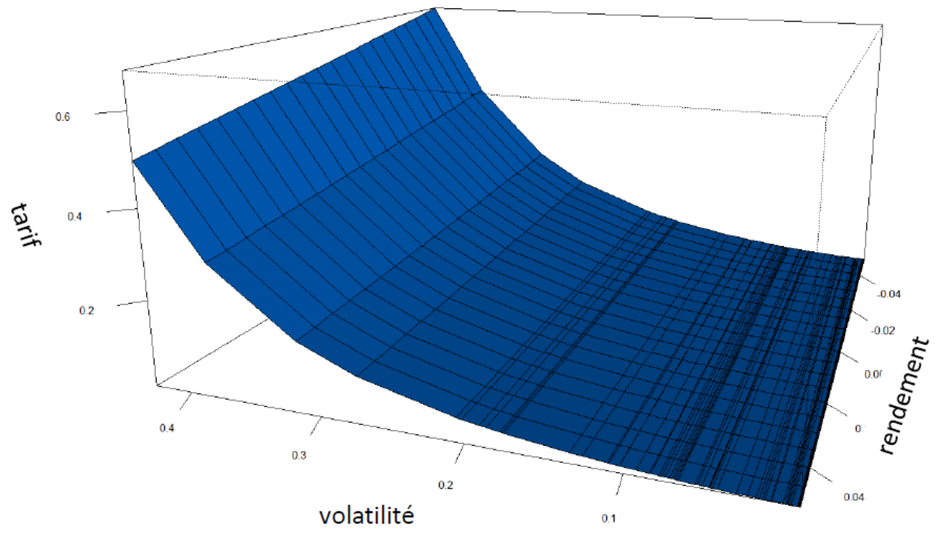
La méthode stochastique du modèle de Black and Scholes consiste à assimiler la garantie en cas de vie à une option de vente : un put européen. L'assureur est considéré comme un vendeur d'options de vente (put) accordée à l'assuré. Cette méthode représente la vision financière de l'engagement.

Ainsi, comme dans la méthode déterministe, les engagements jusqu'à échéance sont projetés, la tarification correspond alors à la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par l'assuré. Comme le préconise l'ACPR des hypothèses prudentes ont été utilisées.



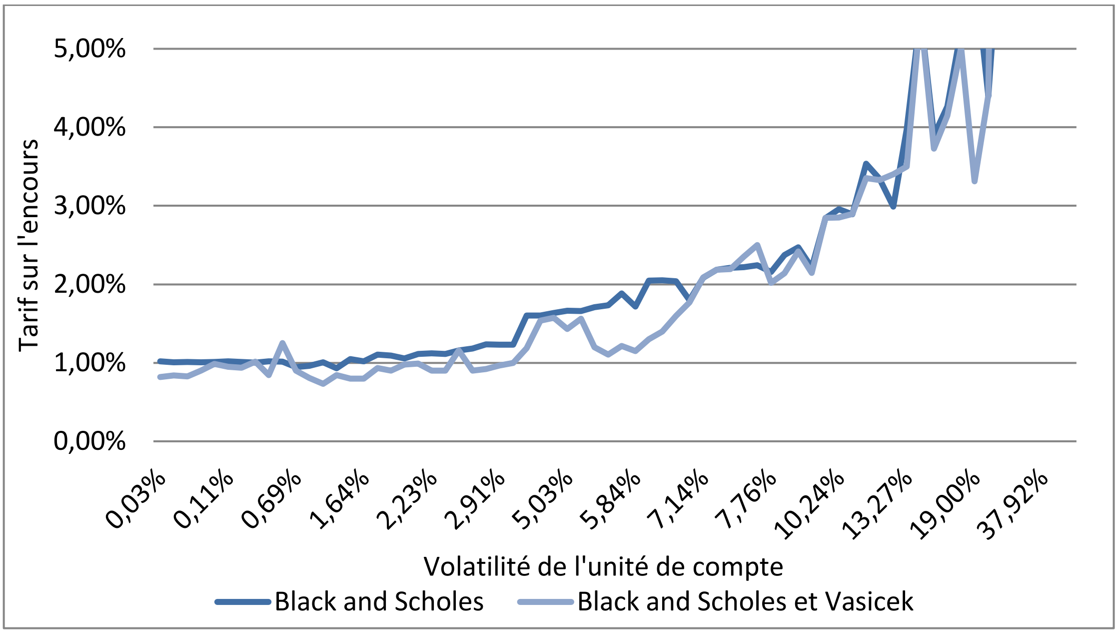
Tarification obtenue avec la méthode Black and Scholes pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 100%

La figure ci-dessus présente un exemple type de graphique obtenu. Il témoigne du fait qu'à partir d'une certaine volatilité d'unité de compte les tarifs obtenus deviennent trop importants et ne sont alors pas représentatifs de ce qui peut être proposé aux assurés. Les autres sensibilités effectuées aboutissent à la même conclusion : la volatilité de l'unité de compte est le paramètre qui joue un rôle essentiel sur l'augmentation du tarif. C'est également ce que l'on peut constater sur la figure ci-dessous :



Graphique en 3D du tarif avec la méthode de Black and Scholes en fonction de la volatilité et du rendement

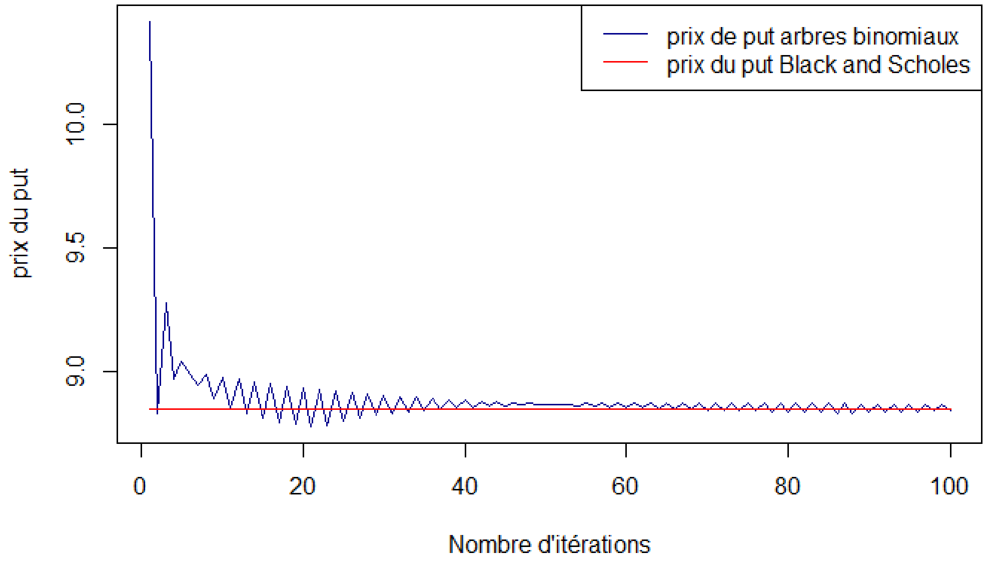
Néanmoins, l'inconvénient majeur de ce modèle réside dans l'utilisation d'une volatilité constante alors qu'en fait il existe une nappe de volatilité. En effet, dans la réalité, les cours présentent des discontinuités dans leurs trajectoires. De plus, une hypothèse forte est envisagée puisque le taux sans risque était fixé à zéro. Pour pallier à ce problème, le modèle de Vasicek est appliqué dans le but de faire varier ce taux sans risque : des trajectoires de taux ont été simulées. C'est ce qui permet d'obtenir pour chacune des sensibilités testées un taux sans risque pertinent, alors intégré dans le modèle de Black and Scholes.



Tarifications obtenues avec la méthode Black and Scholes et Vasicek pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 100%, échéance de 4 ans

Les effets recherchés sont confirmés : l'enrichissement du modèle de Black and Scholes avec le modèle de Vasicek fait diminuer le tarif estimé à prélever au titre de la garantie plancher. Comme l'atteste la figure ci-dessus qui permet de comparer les deux méthodes, la même allure de courbe oscillante est observée mais se situant en-dessous de celle basée sur le modèle de Black and Scholes qui fixait le taux sans risque à zéro.

Ensuite, les résultats obtenus sont confirmés puisque l'application des arbres binomiaux issus du modèle de Cox Ross et Rubinstein, qui valorisent le put, montre que le put obtenu tend bien vers celui obtenu avec le modèle de Black and Scholes à partir d'un certain nombre d'itérations.



Convergence prix du put avec la méthode des arbres binomiaux vers le prix Black and Scholes, pour un cas de volatilité de 10,26%, pour un assuré de 55 ans, un capital garanti 100% et une échéance de 4 ans

Enfin, une étude de cas basée uniquement sur des fonds commercialisés en 2021 et sur trois profils types d'assurés plus ou moins averses au risque (défensif, équilibré, dynamique) est menée. Elle permet de choisir quelle méthode conserver au titre de la garantie en cas de vie et a pour but de vérifier la fiabilité des méthodes employées. Elle permet de déterminer quel profil type de client pourrait être le plus intéressé par la souscription d'une garantie en cas de vie. En complément, l'étude de l'indicateur de Value-At-Risk (VaR) prouve que les unités de compte à fortes volatilités sont à l'origine de VaR plus importantes. Elles provoquent donc des pertes potentielles plus fortes, ce qui explique l'obtention de tarifs beaucoup plus hauts pour ces fonds. Ce sont donc les tarifs obtenus avec le modèle de Black and Scholes enrichis avec celui de Vasicek qui sont conservés au titre de la garantie en cas de vie.

Analyse et impact des méthodes de tarification via les indicateurs de rentabilité

Une fois la tarification réalisée, et avant la commercialisation d'une nouvelle garantie comme celle-ci, il convient d'étudier la rentabilité de la garantie en cas de vie sur le marché à long terme. Les principaux indicateurs de rentabilité sont présentés dans le mémoire, notamment le taux de marge sur affaires nouvelles ou NBM (New Business Margin). Cet indicateur mesure la rentabilité de l'activité de l'assurance vie. Il permet d'évaluer les perspectives de rentabilité des affaires souscrites dans l'année.

Une maquette de rentabilité est utilisée dans le mémoire. Elle est construite sur la base d'une comparaison d'un scénario central et la simulation de mille scénarios stochastiques. Les résultats sont projetés sur vingt ans. Cette étape permet de vérifier les effets de la commercialisation d'un tel produit. Pour chaque sensibilité une comparaison est alors effectuée entre les résultats obtenus lorsque la garantie est activée et lorsqu'elle ne l'est pas : le delta permet donc d'analyser l'impact de l'activation de cette garantie. Les résultats obtenus coïncident avec ceux obtenus lors de la tarification de la garantie. De plus, les tarifs dépendent beaucoup du choix de l'unité de compte.

Conclusion

Au cours de cette étude, la réflexion se porte sur une façon de mettre en place une garantie plancher en cas de vie. Proposer une garantie en cas de vie au sein de contrats en unités de compte fournit une solution intéressante en tant qu'alternative aux fonds euros. Elle représente une avancée commerciale qui permet de convaincre plus facilement un grand nombre d'assurés de s'orienter vers des fonds unités de compte. Néanmoins, les risques liés à la commercialisation d'une telle garantie obligent les assureurs à mettre en place une tarification prudente. En effet, la garantie étant uniquement proposée sur des fonds en unités de compte, le risque de baisse des marchés financiers n'est pas négligeable.

Différentes méthodes de tarification sont appliquées, certaines plus concluantes que d'autres puisque des limites sont parfois rencontrées. Le modèle retenu pour la tarification de la garantie en cas de vie repose sur celui de Black and Scholes enrichi par le modèle de Vasicek, qui permet d'estimer un taux sans risque. Les modèles appliqués confirment que le paramètre le plus influent sur le tarif obtenu est la volatilité de l'unité de compte considérée. En effet, l'âge de l'assuré à la souscription ainsi que l'échéance de la garantie sont des paramètres qui ont peu d'impact sur les tarifs obtenus, quel que soit le modèle considéré.

Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte le fait que ce mémoire ne se limite qu'à l'utilisation de certains modèles et que des méthodes plus complexes peuvent être exécutées pour compléter voire complexifier la recherche effectuée au cours de ce mémoire. Les conclusions tirées restent donc limitées aux enseignements exploités. Dans ce cadre, on peut affirmer que la garantie en cas de vie ne peut, avec ces éléments, être proposée que sur des unités de compte à volatilité limitée. L'objectif de la problématique est néanmoins respecté puisqu'il consiste à renforcer l'attrait des unités de compte.

La garantie en cas de vie est donc une garantie complexe à mettre en place mais possédant des attraits certains. Elle propose une perspective intéressante de renouveau au sein de l'assurance vie en offrant sécurité et dynamisme sur les supports en unités de compte.

Synthesis

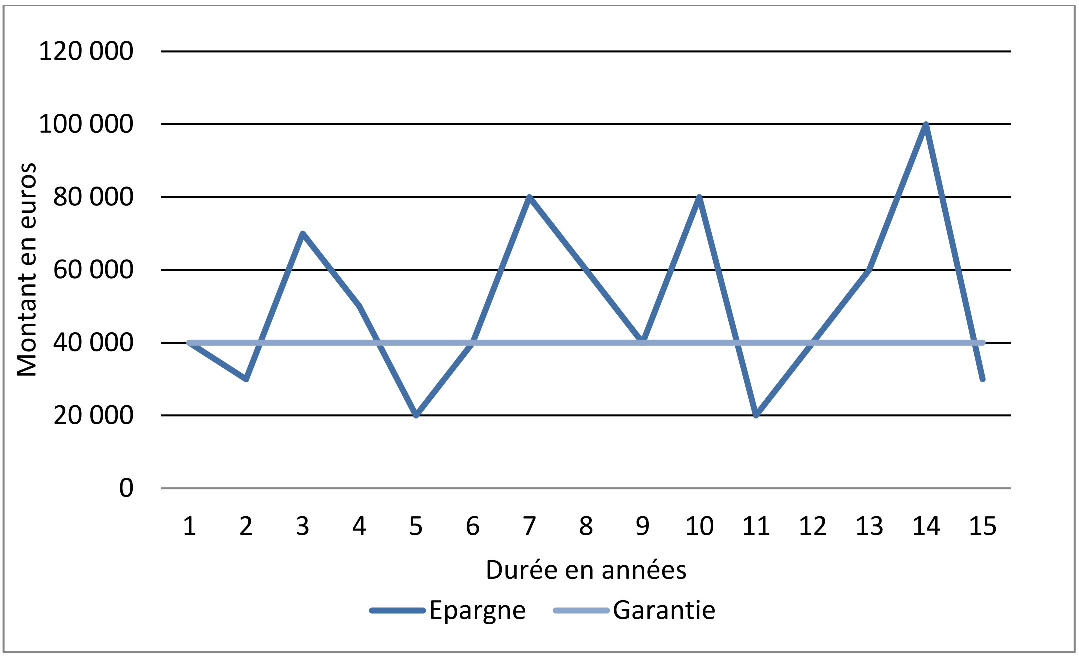
Context

This paper is written in the low interest rate environment that faces life insurance currently. This context is leading insurers to rethink the way life insurance has operated for a long time. Indeed, euro funds, considered since a long time as the mainstay of life insurance because of their attractive characteristics, no longer provide satisfactory returns. The objective of insurers is therefore to reinforce the attractiveness of unit-linked funds. The purpose of this paper is to study alternatives to euro funds that remain attractive and safe for policyholders. One of the solutions considered by insurers is the introduction of a floor guarantee in case of life. This represents a commercial advance that makes it easier to convince a large number of policyholders by offering the possibility of boosting their savings while keeping the security of a guaranteed capital. This brief addresses pricing and profitability issues. Indeed, by focusing on this type of guarantee, it is necessary to consider how to model these guarantees actuarially and which techniques to use to evaluate them. All the risks associated with the creation of this type of guarantee must be taken into account.

Presentation of the floor guarantee

The aim of the floor guarantee is to protect policyholders against downward fluctuations in the financial markets in which the premiums are invested. Through this guarantee, the insurer undertakes to ensure that the total benefit will not fall below a certain threshold, despite the fact that it is indexed to the value of the unit of account. This floor guarantee applies in the event of death but also in the event of life. It should be noted that in the context of this brief, only the life cover is studied, with the payment of a single premium and on unit-linked policies only. The figure below outlines the operation of a conventional floor guarantee.

It guarantees the payment of a minimum capital in case of life at maturity, whatever the value of the units of account held at maturity. It ensures that the beneficiary receives a capital sum of up to 100% of the net amount invested at a defined date. However, in the event of death or redemption before maturity, the guarantee does not apply. Regardless of stock market fluctuations, the beneficiary of the contract will receive a minimum sum. Thus, the guarantee allows policyholders to boost and secure their savings by taking advantage of market performance while protecting themselves against the risk of capital losses.



Scheme for a classic floor guarantee

The pricing of a floor guarantee in case of life

In order to study the pricing of a floor guarantee in case of life, a selection of the most subscribed units of account since 2015 within two products is made to form a data portfolio. Preliminary studies and descriptive statistics of the selected portfolio are a crucial step. Indeed, the quality and completeness of the data is a major issue for the insurer since they allow a good understanding of its products. In this case, the statistics confirm that within the selected portfolio, the supports in which the policyholders' savings invested in the units of account are diversified. The study of the SRRI (Synthetic Risk and Reward Indicator) also makes it possible to deduce that these are funds with various volatility.

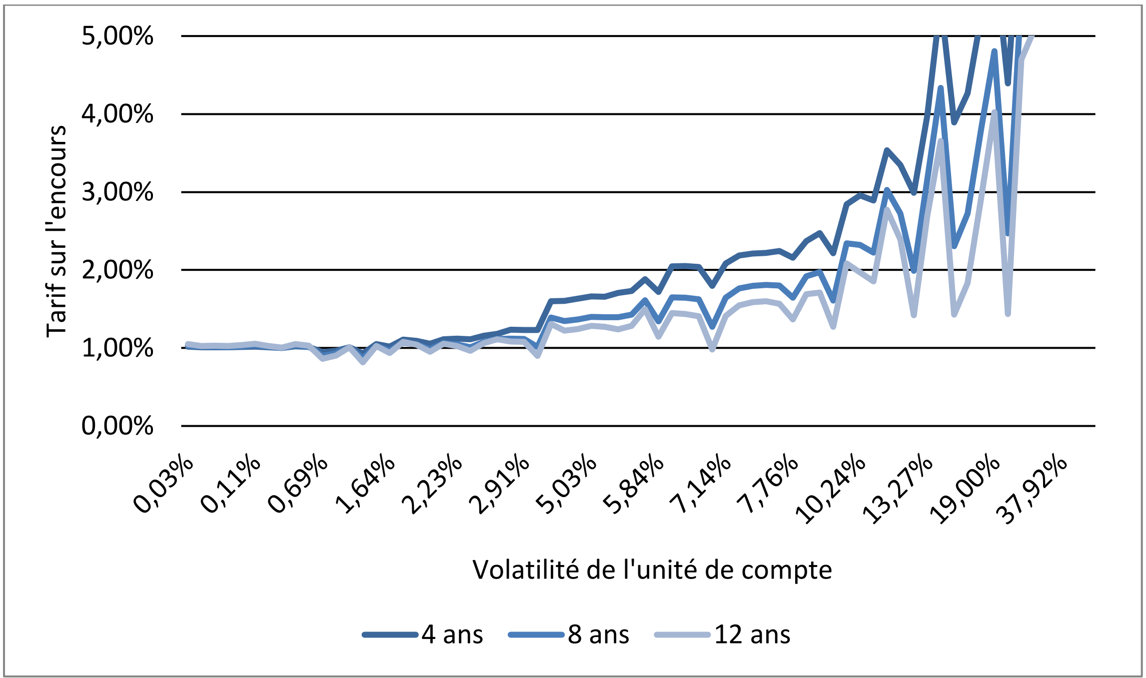
In order to obtain a relevant tariff, different pricing methods are applied and, for each of them, sensitivity studies on the percentage guaranteed, the age of the insured at the time of subscription and the maturity of the guarantee are carried out.

The first method applied is a deterministic method. It involves modelling the respective commitments of the insurer and the insured and projecting over a given period a deterministic scenario previously chosen: here a scenario of decline is chosen. The interest of the method consists in choosing a specific and prudent scenario of the evolution of the prices of each support. The results of the sensitivities obtained show that the volatility of the unit of account considered has a strong impact on the rate of the guarantee in case of life. The higher the volatility, the higher the tariff.

Even if this method has the advantage of being simple to understand, it is not conceivable to limit pricing to this single method which bases the evolution of the unit of account on a single path, whereas it is random and unstable. Because of its limitations, it was decided to remove it from the study. It is then necessary to resort to the theory of options, closer to finance. This approach consists in adopting a stochastic pricing approach, which will better describe the uncertain evolution of the prices of the units of account. This is what is achieved with the Black and Scholes method.

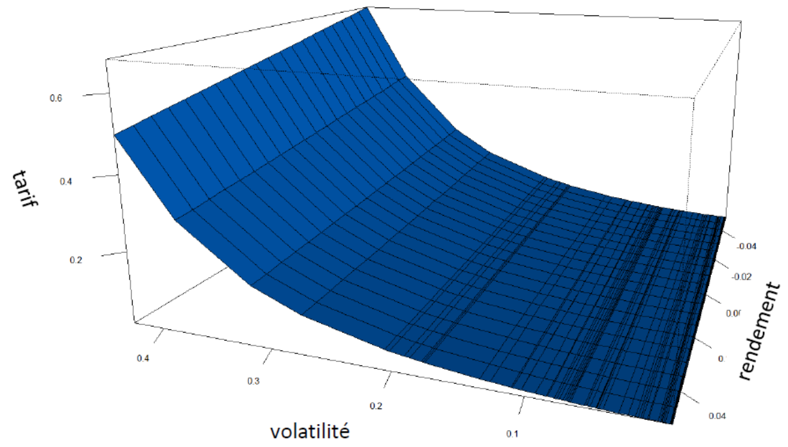
The stochastic method of the Black and Scholes model consists in assimilating the guarantee in case of life to a put option: a European put. The insurer is considered to be a put option seller granted to the insured. This method represents the financial vision of the commitment.

Thus, as in the deterministic method, the commitments to maturity are projected, the pricing then corresponds to the difference between the present values of the commitments respectively taken by the insurer and the insured. Prudent assumptions have been taken as recommended by the ACPR.



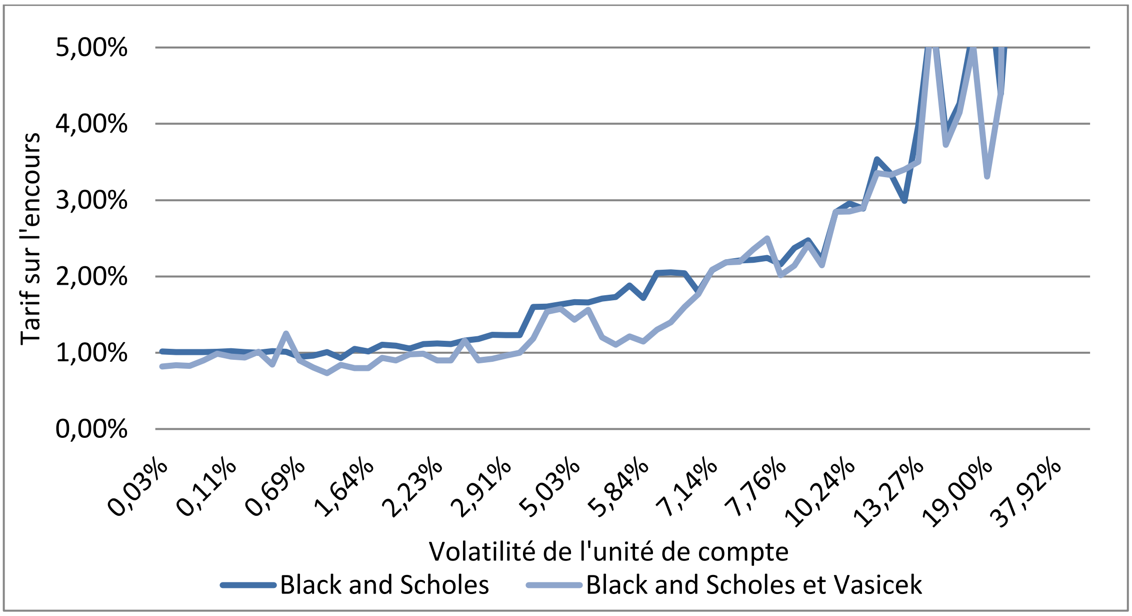
Pricing obtained with the Black and Scholes method for a 55 year old insured and a 100% guaranteed capital

The figure above shows a typical example of the graph obtained. It shows that above a certain volatility of the unit of account, the prices obtained become too high and are not representative of what can be offered to policyholders. The other sensitivities demonstrated the same conclusion: the volatility of the unit of account is the parameter that plays an essential role in the tariff increase. This is also shown in the figure below:



3D graph of the Black and Scholes rate based on volatility and yield

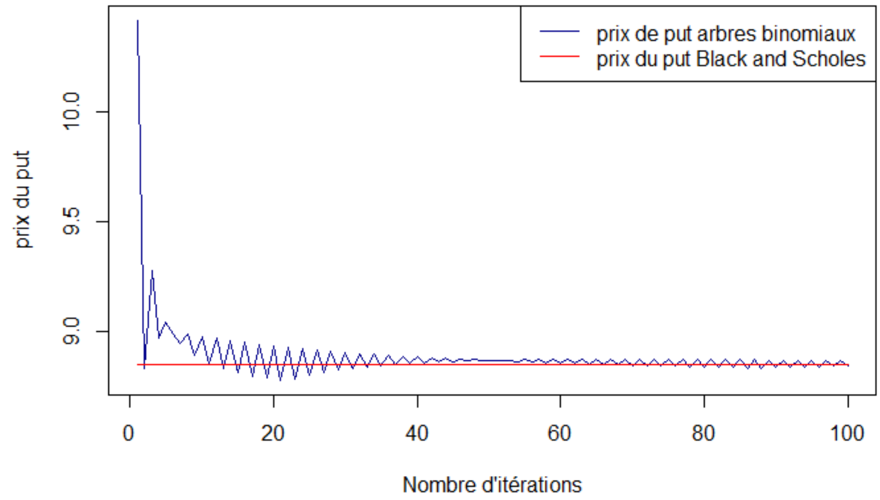
However, the major disadvantage of this model lies is the use of a constant volatility when in reality there is a volatility slick. Indeed, in reality, prices show discontinuities in their trajectories. Moreover, a strong assumption had been considered since the risk-free rate was set to zero. To overcome this problem, the Vasicek model was applied in order to vary this risk-free rate: rate trajectories were simulated. This resulted in a relevant risk-free rate for each of the tested sensitivities, which was then incorporated into the Black and Scholes model.



Tarifications obtained with the Black and Scholes and Vasicek method for a 55-year-old insured and a guaranteed capital of 100%, maturity of 4 years

The desired effects are confirmed: the enrichment of the Black and Scholes model with the Vasicek model reduced the estimated price to be charged under the floor guarantee. As shown in the figure comparing the two methods above, the same oscillating curve pattern is observed but below.

Then, the results obtained were confirmed since the application of the binomial trees from the Cox Ross and Rubinstein model, which value the put, shows that the put obtained tends towards that obtained with the Black and Scholes model after a certain number of iterations.



Convergence of the put price with the binomial tree method towards the Black and Scholes price, for a case of volatility of 10.26%, for a 55-year-old insured, a 100% guaranteed capital and a maturity of 4 years

Finally, a case study only based on funds marketed in 2021 and on three typical profiles of more or less risk averse policyholders (defensive, balanced, dynamic) is conducted. It allows to choose which method to keep for the life guarantee and aims to verify the reliability of the methods used. It allows us to determine which typical customer profile might be most interested in taking out a guarantee in case of life. In addition, the study of the Value-At-Risk (VaR) indicator shows that units of account with high volatility are the source of higher VaR. As a result, they are the source of higher potential losses, which explains the much higher rates obtained for these funds. It is therefore the rates obtained with the model of Black and Scholes enriched with the Vasicek model which are kept for the guarantee in case of life.

Analysis and impact of pricing methods via profitability indicators

Once pricing has been completed, and before a new guarantee such as this is marketed, the profitability of the guarantee in the market over the long term should be studied. The main profitability indicators are presented, including the New Business Margin (NBM). This indicator measures the profitability of the life insurance activity. It enables the profitability prospects of the business subscribed during the year.

A profitability model is used, which is built on the basis of a comparison of a central scenario and the simulation of 1,000 stochastic scenarios, the results are projected over 20 years. This step verifies the effects of marketing such a product. For each sensitivity, a comparison is then made between the results obtained when the guarantee is activated and when it is not: the delta thus makes it possible to analyse the impact of activating this guarantee. The results obtained coincide with those obtained when pricing the guarantee, the rates obtained depend a lot on the choice of the unit of account.

Conclusion

Throughout this study, consideration has been given to a way of implementing a guarantee in case of life. Offering a guarantee in case of life within a unit-linked contract provides an interesting solution as an alternative to the euro funds. It represents a commercial advance that makes it easier to convince a large number of policyholders to switch to unit-linked policies. Nevertheless, the risks associated with the marketing of such a guarantee require insurers to introduce prudent pricing. Indeed, as the guarantee is only offered on unit-linked funds, the risk of a drop in the financial markets is not negligible.

Different pricing methods are applied, some more conclusive than others since limits have sometimes been encountered. The model chosen for pricing the guarantee in case of life is based on the Black and Scholes model enriched by the Vasicek model, which allowed an estimate of a risk-free rate. The applied models confirm that the most influential parameter on the obtained rate is the volatility of the considered unit of account. Indeed, the age of the insured at subscription as well as the maturity of the guarantee are parameters that have little impact on the rates obtained whatever the model considered.

Thus, it is necessary to take into account that this paper is limited to the use of certain models and that more complex methods can be performed to complete or even complicate the research carried out in this paper. The conclusions drawn are therefore limited to the lessons learned. In this context, it can be stated that the guarantee in case of life can, with these elements, only be proposed on units of account with limited volatilities. The objective of the problem is nevertheless respected since it consists in reinforcing the attractiveness of units of account.

The guarantee in case of life is thus a complex guarantee to set up but has certain attractions. It offers an interesting prospect of renewal within life insurance by providing security and dynamism on unit-linked products.

Remerciements

Pour commencer, je tiens à adresser mes remerciements à ma tutrice, Manon Mougey, pour son encadrement dans le cadre de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Elvire Fougea de m'avoir accueillie au sein de son équipe dans le service Epargne – Rentabilité et Suivi du Portefeuille à Generali durant mon alternance, expérience qui a été très enrichissante. Je remercie Sandra Quinol, Minal Calard et Caroline Grandhomme-Le Bihan pour leurs conseils et leur écoute.

Mes remerciements vont à l'ensemble des alternants et stagiaires du service avec lesquels j'ai collaboré durant cette année, en particulier à Ilan Assayag avec lequel j'ai travaillé et pour ses accompagnements. Aussi, je tiens à remercier Damien Du Grand Placitre pour le temps qu'il a consacré à m'aider dans le cadre de la rédaction de ce mémoire et pour ses encouragements.

J'adresse également mes remerciements à Idris Kharroubi, mon tuteur académique pour ses précieux conseils et sa disponibilité.

Je remercie Olivier Lopez, directeur de l'ISUP ainsi que le corps enseignant pour la qualité de la formation proposée au sein du Master Actuariat.

Enfin, je tiens à remercier mes parents et ma sœur, Alice, pour leur soutien depuis le tout début et le courage qu'ils m'ont donné, mais aussi pour leurs relectures attentives. Enfin, mes derniers remerciements vont à Gaël pour son aide, sa présence et son soutien sans faille.

Sommaire

Introduction et contexte

Le contexte économique actuel des taux durablement bas bouleverse le secteur de l'assurance vie. En effet, les fonds euros, depuis longtemps considérés comme pilier de l'assurance vie française et connus pour être sécurisants, sont dorénavant trop coûteux et ne produisent plus de rendements satisfaisants. Il est devenu nécessaire pour les compagnies d'assurance de faire évoluer les offres et de s'adapter en proposant de nouveaux aménagements.

À l'inverse des fonds en unités de compte, qui font supporter aux assurés un risque lié aux fluctuations des marchés, les fonds en euros garantissent aux assurés un rendement minimum puisqu'ils sont principalement investis sur des actifs obligataires. Dans le cas des unités de compte, le contrat ne garantit pas une valeur en euros mais un nombre d'unités de compte, dont la valeur dépend des évolutions de la bourse[1].

Des mesures d'incitations, parfois radicales, ont d'ores et déjà été prises par certains assureurs comme Generali ou Swiss-Life qui ont dès la fin 2019 diminué le taux de rendement des fonds euros à 1%. Le graphique ci-dessous montre que la part des investissements au sein du portefeuille Generali sur les fonds euros était prédominante en 2015 et 2016, puis que l'écart s'est amoindri et enfin que ce sont les investissements sur les unités de compte qui ont pris le dessus depuis 2020.

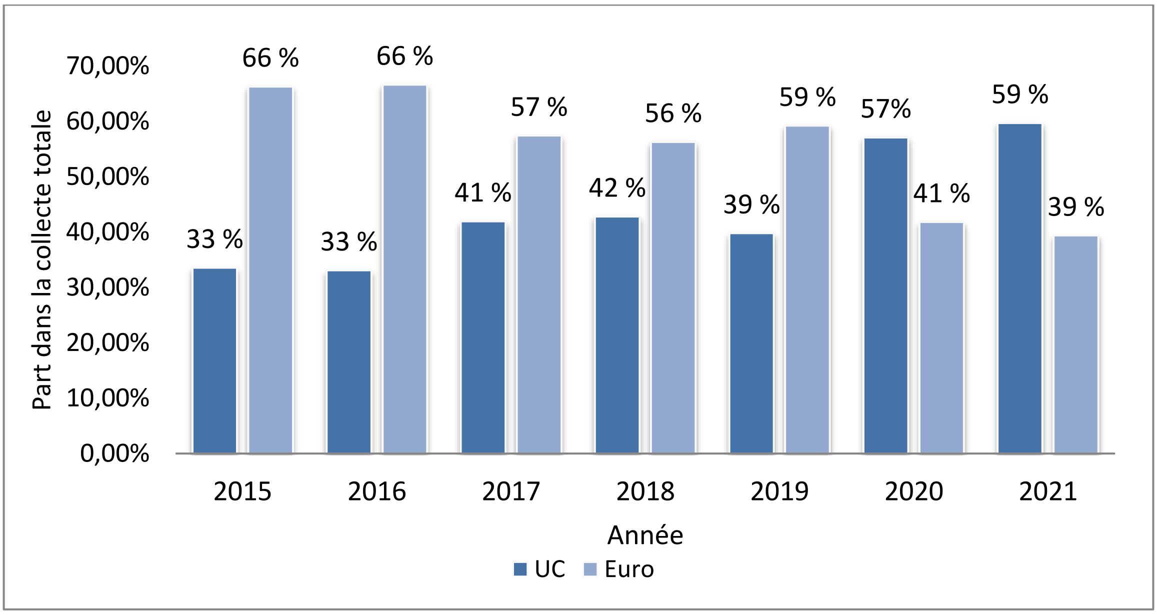


Figure 1 : Évolution de la collecte Euro-UC depuis 2015

La Fédération Française de l'Assurance (FFA) a récemment publié ses chiffres pour 2020 concernant la collecte nette de l'assurance vie. Celle-ci représente l'ensemble des versements effectués sur les contrats (aussi appelés cotisations) auquel sont retirés les retraits et les versements des capitaux décès (aussi appelés prestations). La FFA indique donc que contrairement à l'année 2019,

[1] Selon [4].

durant laquelle la collecte nette de l’assurance vie a été positive (21,9 milliards d’euros), l’année 2020 affiche, elle, une collecte nette négative de - 6,5 milliards d’euros, comme en témoigne le graphique ci-dessous. Un mouvement qui a surtout touché les fonds euros avec des cotisations en baisse de plus de 30%, et un rendement qui a diminué : 1,46% en 2019 contre 1,10% en 2020.

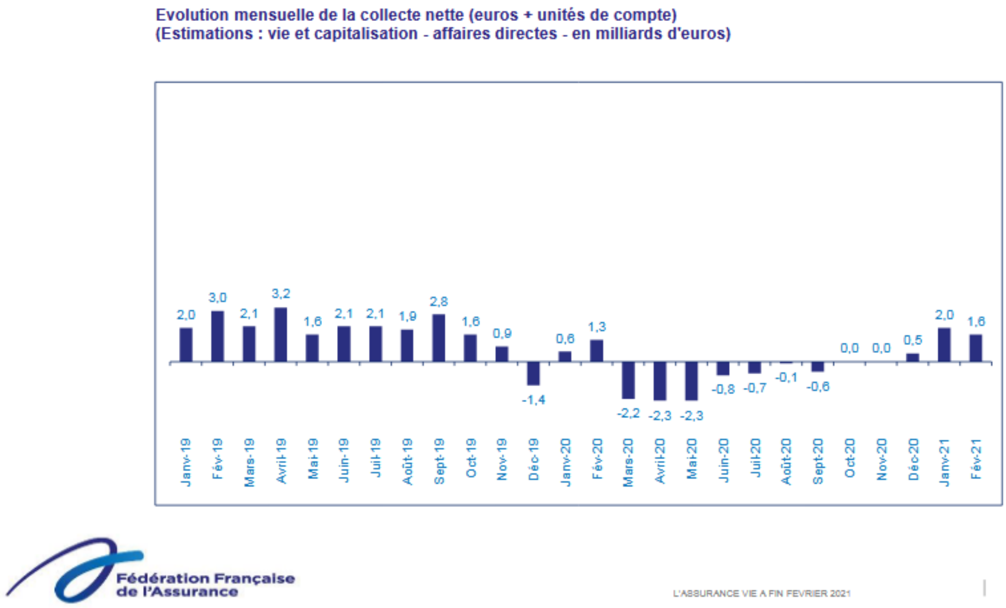


Figure 2: Évolution mensuelle de la collecte nette (euro + unités de compte) Source : FFA

Cette diminution de la collecte s’explique en grande partie par les fluctuations de marché dues aux différentes crises économiques et financières. En effet, les contrats en unités de compte se sont beaucoup développés mais les marchés financiers ont connu de fortes fluctuations, par exemple lors de la crise de 2008 qui a fortement fait baisser la collecte nette des fonds euros. Plus récemment, en 2020, la crise sanitaire du Covid-19, à l’origine d’une forte récession, a également beaucoup impacté l’assurance vie : en augmentant la part des revenus des ménages allouée à l’épargne. Un coût économique majeur principalement dû aux confinements successifs est observé. La performance des fonds euros devient alors très limitée. Les risques liés à ce type de placement poussent les assureurs à étudier des garanties qu’ils peuvent proposer sur les contrats des souscripteurs.

La nouvelle politique des assureurs est alors la suivante : les contrats comportant des fonds euros étant considérés comme obsolètes, il est aujourd’hui nécessaire de trouver de nouvelles solutions. Comme précisé ci-avant, cela s’explique par la chute considérable des rendements et le coût important en capital des fonds euros pour l’assureur. En réponse à cette situation, les compagnies d’assurance ont à leur disposition différents leviers et différentes formes d’incitation. Ainsi, elles peuvent proposer des bonus sur le rendement des fonds euros si une partie du contrat est investie en unités de compte ; c’est le principe du boost. Une autre possibilité est la mise en place de contraintes d’investissement sur les unités de compte pour pouvoir accéder aux fonds euros. Ces incitations dépendent également de la volonté des réseaux de distribution d’accompagner les assurés. Une bonne compréhension par les commerciaux du contexte des taux bas et de son influence sur les fonds euros est nécessaire.

Les solutions proposées par les assureurs pour remédier à ce problème reposent donc sur l'orientation de la collecte vers des produits plus diversifiés comme les fonds euro-croissance, qui représentent un juste milieu entre fonds euros et unités de compte, notamment pour les investisseurs averses au risque puisqu'ils offrent au terme du contrat au minimum 80% du capital investi. Il existe aussi de plus en plus d'unités de compte comme par exemple des fonds Investissements Socialement Responsables (ISR) qui permettent de sensibiliser davantage les assurés sur leur investissement, ou encore les fonds structurés avec des supports financiers innovants. Ces produits permettent alors aux assureurs de maintenir un niveau de risque confortable.

L'État a lui aussi un rôle à jouer dans la mise en place de solutions pour faire face à la baisse de rendement des fonds euros. Ainsi, récemment, des évolutions réglementaires ont vu le jour, notamment concernant la fiscalité (d'ordinaire avantageuse pour les assurés), ou encore avec la mise en place des fonds euro-croissance et de la loi Pacte. Cette dernière, publiée le 23 mai 2019, offre la possibilité à l'assuré de transférer l'épargne atteinte de son contrat d'assurance vie vers un autre contrat. Cette opportunité lui permet donc de continuer à bénéficier de ses avantages en termes de fiscalité tout en pouvant opter pour de nouveaux supports d'investissement comprenant diverses options par exemple.

Comme vu précédemment, la baisse des taux marque la fin des fonds euros. L'objectif des assureurs est ainsi de renforcer l'attrait des fonds unités de comptes pour que des arbitrages des fonds euros vers les unités de compte soient effectués. C'est ce qu'on appelle la décollecte des fonds euros. Mais l'assureur fait alors à face à une difficulté supplémentaire, avec un produit plus complexe que le fonds euro. Il paraît nécessaire de familiariser l'assuré avec ce type de support car il peut manquer de repères sur son investissement. Ces garanties étant encore nouvelles pour les assureurs, elles sont parfois mal comprises par les assurés qui ont eux aussi besoin d'une garantie sur leurs investissements et recherchent la sécurité.

Ce mémoire a ainsi pour objet d'étudier des alternatives aux fonds euros qui restent attractives et sécurisantes pour les assurés. L'origine de la problématique qu'il conviendra de résoudre est en effet issue d'un besoin commercial : comment convaincre plus facilement les assurés de s'orienter vers des fonds en unités de compte ? Il est tout d'abord nécessaire de prendre en compte et de continuer à anticiper une baisse progressive du rendement d'une partie des actifs des assureurs dans les années à venir. Une solution envisagée par Generali est l'introduction d'une garantie plancher en cas de vie sur des fonds en unités de compte. Cette solution représente un moyen pour les assurés d'obtenir une couverture sur leur épargne tout en investissant sur des fonds en unités de compte. Elle offre ainsi des perspectives de rendement intéressantes et une volatilité maîtrisée.

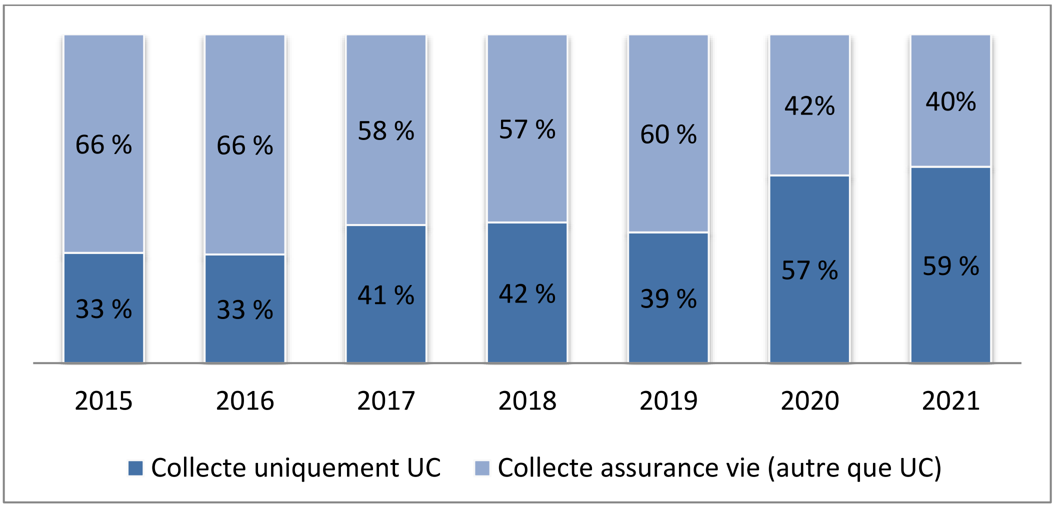


Figure 3: Évolution de la part unités de compte au sein de la collecte totale depuis 2015

Ce graphique illustre bien une progression de la part des unités de compte et une chute importante de l'euro depuis 2019, expliquant ainsi le besoin de la garantie. L'assureur, en s'intéressant à ce type de garantie doit alors étudier leur tarification. Il est important de se demander comment modéliser ces garanties de façon actuarielle, et quelles techniques utiliser pour les évaluer. Tous les risques liés à la création de ce type de garantie doivent être pris en compte.

Problématique : Comment tarifer et mettre en place une garantie plancher en cas de vie pour renforcer l'attrait des fonds en unités de compte ?

Ce mémoire aborde des problématiques de tarification et de rentabilité. Il s'agira de préciser le cadre dans lequel l'ensemble de ce mémoire s'inscrit. L'étude est limitée à l'évaluation d'une garantie en cas de vie, avec le versement d'une prime unique et sur des contrats uniquement en support unités de compte.

Dans une première partie, il conviendra de décrire le fonctionnement général de l'assurance vie, de présenter la garantie plancher, ainsi que de proposer certains éléments de finance. En effet, ce type de garantie pouvant être considéré comme un produit optionnel, les mathématiques financières, et plus particulièrement la théorie des options sont utilisées pour déterminer le tarif de ces garanties. Sur un portefeuille d'unités de compte sélectionné, différentes méthodes de tarification seront appliquées au cours de la deuxième partie : une méthode déterministe et une méthode stochastique avec l'utilisation du modèle de Black and Scholes, par la suite enrichie du modèle de Vasicek dans le but d'estimer un taux sans risque. Enfin, le modèle de Cox, Ross et Rubinstein sera appliqué. De plus, des tests de sensibilité seront réalisés au cours de l'étude afin de tester l'impact des différents paramètres pris en compte. Dans le but de déterminer quelle méthode est la plus adéquate pour déterminer le tarif de la garantie en cas de vie, une étude de cas basée sur trois profils d'assurés plus ou moins averses au risque et sur des unités de compte commercialisées en 2021 sera réalisée. Enfin, la troisième partie permet d'étudier l'impact des tarifs obtenus sur les indicateurs de rentabilité grâce à un compte de résultat.

PARTIE 1 : Présentation générale

I- Comment fonctionne un contrat d'assurance vie ?

Un contrat d'assurance vie répond à un besoin de sécurité en proposant à l'assuré, s'il est en vie au terme du contrat, le versement d'un capital ou d'une rente. La fiscalité très avantageuse proposée par les contrats d'assurance vie lui permet de se positionner parmi les modes d'épargne dominants en France. Les principaux supports d'investissement sur lesquels il est possible d'investir son épargne seront décrits dans cette partie.

Cette partie s'appuie sur les travaux [4], [12], [15], [16], [18] et [19] référencés en bibliographie.

I.1) Les fonds euros

Le fonds euros, support financier sécuritaire, est connu pour ses caractéristiques attrayantes. Il offre sécurité, liquidité et fiscalité intéressantes. Ce fonds est plutôt destiné à des assurés souhaitant investir sans prendre de risque, car le risque financier y est uniquement porté par l'assureur. Ces contrats sont principalement investis en obligations, leur rendement est donc lié aux taux obligataires : ils sont peu sensibles aux aléas de la bourse. De plus, un des avantages en assurance vie est de pouvoir disposer de son épargne à tout moment grâce à la possibilité de rachat partiel ou total sur le contrat. En outre, les sommes qui restent investies continuent à générer des intérêts. L'assureur réinvestit cet argent sur les marchés financiers dans différents actifs et les sommes versées par l'assuré sur un contrat en euros sont garanties par l'assureur à tout moment. Quelle que soit la performance réalisée sur les marchés, le capital des assurés est alors garanti.

Ainsi, elles ne peuvent pas baisser et sont revalorisées chaque année selon les performances réalisées sur les marchés par l'assureur. Dans le cas où l'assureur est en perte et n'a pas tiré profit de ses placements, les assurés auront un taux minimum garanti (TMG) de 0%. Ainsi, il n'y aura pas de performance mais simplement la garantie de conserver le capital investi. L'assureur est alors le seul à supporter le risque, et devra utiliser ses fonds propres pour pallier aux pertes. En revanche, dans le cas où l'assureur a réalisé des bénéfices grâce à ses placements, il doit reverser 85% des bénéfices aux assurés. Il s'agit de la participation aux bénéfices. L'assureur a alors 8 ans au maximum pour la redistribuer aux assurés, et peut ainsi constituer une provision pour participation aux bénéfices, c'est-à-dire les mettre sous réserve, ce qui permet le lissage de la rémunération des contrats. La provision pour participation aux bénéfices a augmenté ces dernières années, passant de 1,6% en 2011 à 4,7% en 2019 d'après l'ACPR.

Les inconvénients actuels de ce type de support sont liés à des performances très faibles, voire nulles, dues à de faibles rendements obligataires. Ces fonds sont devenus coûteux pour les assureurs car malgré le fait que les nouvelles obligations ont des taux très bas voire même négatifs, ils doivent continuer à servir au minimum 85% du Taux de Rendement des Actifs (TRA) qui diminue à cause de ces nouvelles obligations.

I.2) Les fonds unités de compte

À la différence des fonds euros, lorsque le client investit sur un support en unité de compte, la somme versée correspond en fait à l'achat d'un nombre de parts d'un support défini. Il en existe de différents types, dont certains sont cités et expliqués ci-dessous :

- Une obligation : c'est un titre représentant un emprunt effectué par une entreprise publique, une société commerciale ou par l'État, qui donne droit au versement d'un intérêt. Elle est donc cessible et peut faire l'objet d'une cotation sur une bourse ou un marché secondaire. Les volumes échangés se négocient principalement de gré à gré. Les horizons sont à moyen et long termes, voire à durée indéterminée (obligations perpétuelles). La dénomination d'obligation est réservée aux titres de maturité supérieure à 2 ans.

- Une action : c'est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une société, auquel sont attachés éventuellement des droits de vote aux assemblées et un droit aux bénéfices réalisés. Les détenteurs des actions peuvent décider à tout moment d'en vendre à d'autres investisseurs. Les actions sont donc négociables soit en bourse soit de gré à gré. Le prix auquel s'échange les actions sur les bourses varie selon l'offre et la demande.

- Des produits monétaires : il s'agit d'un ensemble d'actifs ayant une échéance allant de 12 à 24 mois. Ce sont des produits liquides et peu risqués.

- Des matières premières : cette classe d'actifs réunit des sous-jacents très variés avec des dynamiques et des logiques d'investissement très différentes d'un actif à l'autre. Par exemple, l'or est un placement refuge par excellence en temps de crise puisqu'il est corrélé négativement à l'énergie qui bénéficie de la croissance économique. Ces sous-jacents ont une volatilité importante : leurs valeurs varient beaucoup selon le contexte économique.

- Des actions de SICAV (Sociétés d'Investissement à Capital Variable) : une Sicav a pour objet de gérer un portefeuille collectif de valeurs mobilières pour le compte d'actionnaires. Le capital est divisé en un certain nombre d'actions variant en fonction des souscriptions et des retraits.

- Des parts de FCP (Fonds Communs de Placement) : le FCP est une copropriété de valeurs mobilières gérée par une société de gestion pour le compte de porteurs de parts.

- Des parts de SCI (Société Civile Immobilière) : une SCI est un contrat de société par lequel plusieurs personnes (les associés) décident de mettre en commun un ou plusieurs biens immobiliers afin d'en partager les bénéfices ou de profiter de l'économie qui pourrait en résulter, tout en s'engageant à contribuer aux pertes.

- Des parts de SCPI (Société Civile de Placement Immobilière) : une SCPI est un support immobilier qui revient à se porter acquéreur de parts d'une société ayant pour but d'investir pour ses associés dans l'immobilier, en direct (en achetant des biens immobiliers) ou de manière indirecte (en absorbant d'autres sociétés chargées d'investir dans des actifs immobiliers).

- EMTN : expression anglaise pour Euro Medium Term Notes. Il s'agit de produits structurés qui doivent répondre à la définition juridique d'obligation pour être éligibles au sein des contrats d'assurance vie. Ce sont des titres de créance émis par des banques de financement et d'investissement à destination d'investisseurs professionnels et contreparties éligibles, institutionnels ou banques privées. Ces produits sont qualifiés d'instruments financiers complexes par l'ACPR du fait de leur fonctionnement et nécessitent ainsi une commercialisation adaptée.

Les contrats d'assurance vie en unités de compte permettent un investissement diversifié sur les marchés financiers et immobiliers. Ainsi, l'engagement de l'assureur fluctue selon l'évolution de la valeur sur le marché de ces actifs. L'assureur détient le nombre de parts d'unités de compte correspondant au nombre garanti de parts aux assurés mais ne garantit pas leur valeur. L'assuré, quant à lui, supporte le risque de baisse de l'unité de compte. En effet, ces supports ne sont pas garantis et comportent un risque de perte en capital, car leur valeur peut fluctuer à la hausse comme à la baisse, en fonction notamment des marchés financiers. Ce nombre d'unité de compte peut ensuite diminuer ou augmenter selon les mouvements effectués sur le support : rachat partiel, frais de gestion ou d'arbitrages, dividendes… L'avantage du mécanisme de l'unité de compte est qu'il offre à l'assuré la diversité souhaitée de différents supports d'investissement tout en pouvant modifier librement sa structure à tout moment. Si ce support peut sembler moins attractif et sécurisant pour l'assuré c'est parce qu'il n'est pas certain d'une perspective de rendement minimale.

L'avantage de ce type de fonds est qu'il offre une grande diversité de placements et ainsi une certaine liberté dans les choix d'investissement. L'assuré peut modifier la répartition grâce à des arbitrages selon ses objectifs et les évolutions de marchés financiers. Pour l'assureur, les unités de compte représentent un réel avantage puisqu'il est désengagé face au risque.

Du point de vue des assurés, leurs avis sont contrastés, entre des perspectives de rendement largement supérieur à ce que peuvent proposer des fonds euros et l'absence de garantie de performance qui peut alors représenter un élément dissuasif pour ce type d'investissement.

Pour rendre ces contrats en unités de compte plus attractifs, les assureurs mettent en place des garanties. Cependant, ces garanties sont à l'origine d'un risque supplémentaire à supporter. Il est alors nécessaire d'évaluer ce risque et de le provisionner.

I.3) Les fonds multi-supports

Les fonds multi-supports proposent une combinaison entre les fonds euros et les fonds en unités de compte. Ce type de fonds offre au souscripteur différents profils de gestion :

- la gestion pilotée, où le souscripteur confie au gérant l'allocation des versements en fonction du profil choisi :

    - Un profil prudent : principalement composé de produits obligataires et monétaires
    - Un profil dynamique : principalement en actions
    - Un profil équilibré entre prudence (produits obligataires et monétaires) et rentabilité (actions)

    La gestion pilotée propose ainsi confort et simplicité de gestion pour l'investisseur puisque c'est le gérant de fonds qui arbitre les placements selon les évolutions de marché.

- la gestion libre qui s'adresse à des assurés ayant une bonne connaissance des marchés financiers puisqu'il choisit lui-même ses unités de compte.

I.4) Les fonds euro-croissance

Les fonds euro-croissance constituent un bon intermédiaire entre les deux premiers fonds car ils offrent une espérance de gain supérieure à celle des fonds euros tout en présentant une prise de risque plus faible que les unités de compte. Avec ce type de contrat, le capital est garanti seulement après une échéance au minimum de 8 années et au maximum de 30, selon les objectifs de l'assuré. Ce type de fonds constitue alors également une solution de diversification de long terme, en réponse aux enjeux actuels du marché de l'épargne.

Avec leurs nombreux atouts, les contrats d'assurance vie permettent de répondre aux divers besoins des clients en proposant des combinaisons de solutions pour la gestion de long terme. Les assets-managers jouent un rôle important dans la création des produits : leur rôle consiste à proposer aux clients une gamme de fonds diversifiée, de plus en plus orientée sur des fonds durables (ISR…) et avec différents modes de gestion possibles.

Le contexte actuel des taux bas amène à transformer le modèle de l'épargne. L'étude de la garantie en cas de vie offre pour cela une solution intéressante.

II- Présentation de la garantie plancher

Les sociétés d'assurance cherchent à proposer de nouveaux produits à leurs assurés qui leur permettent d'investir sur des fonds unités de compte. Pour orienter les épargnants vers ces supports en alliant rentabilité et sécurité, la garantie plancher est un moyen efficace pour l'assureur d'offrir une sécurité sur l'investissement. En effet, elle propose la garantie d'un montant minimum à échéance, quel que soit le niveau d'épargne à cette date. Elle permet ainsi de protéger les assurés contre un environnement défavorable de baisse des marchés financiers sur lesquels sont investies les primes versées.

Cette partie se base sur les travaux [3], [4], [5], [7], [9], [10], [11] et [19] référencés en bibliographie.

II.1) Définition de la garantie plancher

La garantie plancher, présente dans de nombreux contrats multi-supports, permet de protéger les assurés contre les fluctuations à la baisse des marchés financiers sur lesquels les primes sont investies. À travers cette garantie, l'assureur s'engage à ce que la prestation totale ne soit pas inférieure à un certain seuil, bien qu'elle soit indexée sur la valeur de l'unité de compte. Cette garantie plancher joue en cas de décès mais parfois aussi en cas de vie. Elles peuvent être obligatoires dès la souscription, optionnelles à la souscription, ou encore optionnelles pouvant être souscrites pendant la vie du contrat. Ces garanties ne sont la plupart du temps résiliables ni par l'assureur ni par l'assuré. Certaines font l'objet d'une réassurance.

Il existe deux grands types de garanties plancher :

- Celle en cas de décès qui garantit en cas de décès de l'assuré un capital minimum, quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment du décès. Elle est plus répandue que celle en cas de vie et a fait l'objet de plus d'études.

- Celle en cas de vie qui garantit en cas de vie de l'assuré à l'échéance, le versement d'un capital minimum, quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au terme. Elle est plus rare sur le marché mais tend à se développer.

Ainsi, quelles que soient les fluctuations boursières, le bénéficiaire du contrat recevra une somme minimum.

La garantie étudiée dans ce mémoire est une garantie en cas de vie, valable uniquement sur des supports en unité de compte, et permet d'assurer au bénéficiaire le versement d'un capital pouvant aller jusqu'à 100% du montant net qui a été investi à une échéance définie. En revanche, en cas de décès ou de rachat avant l'échéance, la garantie ne s'applique pas. Cette garantie permet aux assurés de dynamiser et sécuriser leur épargne. Elle s'adresse aux personnes qui ont pour objectif de mener à bien un projet de vie, comme un achat immobilier. Le fonctionnement de la garantie en cas de vie se rapproche des mécanismes des fonds structurés et des garanties planchers.

Au moment du fort succès des unités de compte dans les années 1990, c'est-à-dire à l'époque où les marchés financiers étaient en plein essor, les sociétés d'assurance n'ont pas mis en œuvre de méthode de tarification ou de provisionnement pour ce type de garantie. C'est la raison pour laquelle, le risque de cette garantie est trop souvent négligé. En revanche, depuis les années 2000, les marchés financiers ont entamé un déclin qui a bien modifié la situation. C'est la raison pour laquelle aucune règle spécifique ne figure dans le code des assurances. L'ACPR préconise simplement l'utilisation de paramètres prudents et la constitution de provisions prudentes à travers l'utilisation d'une multitude de méthodes.

Le contexte de taux bas, de crise et de marchés financiers instables est tout à fait propice au développement et à la mise en place d'une garantie en cas de vie. En effet, les contrats en unités de compte ont souffert des très mauvaises performances boursières. La garantie en cas de vie permet de dynamiser cette activité et permet aux assurés de s'orienter vers des supports qui lui permettent de profiter des performances de marché tout en se protégeant contre les risques de moins-values.

II.2) Garantie plancher classique

La garantie plancher dite classique correspond à la somme des primes versées diminuées des éventuels rachats partiels. Ainsi, elle permet au bénéficiaire de recevoir un capital minimal à échéance, quelle que soit la valeur des unités de compte à cette date. Le capital versé ne peut être inférieur à la somme des versements nets de frais (de gestion et d'acquisition), non encore rachetés, investis sur le support en unité de compte. Le plus souvent, le capital garanti minimal correspond au total des cotisations versées.

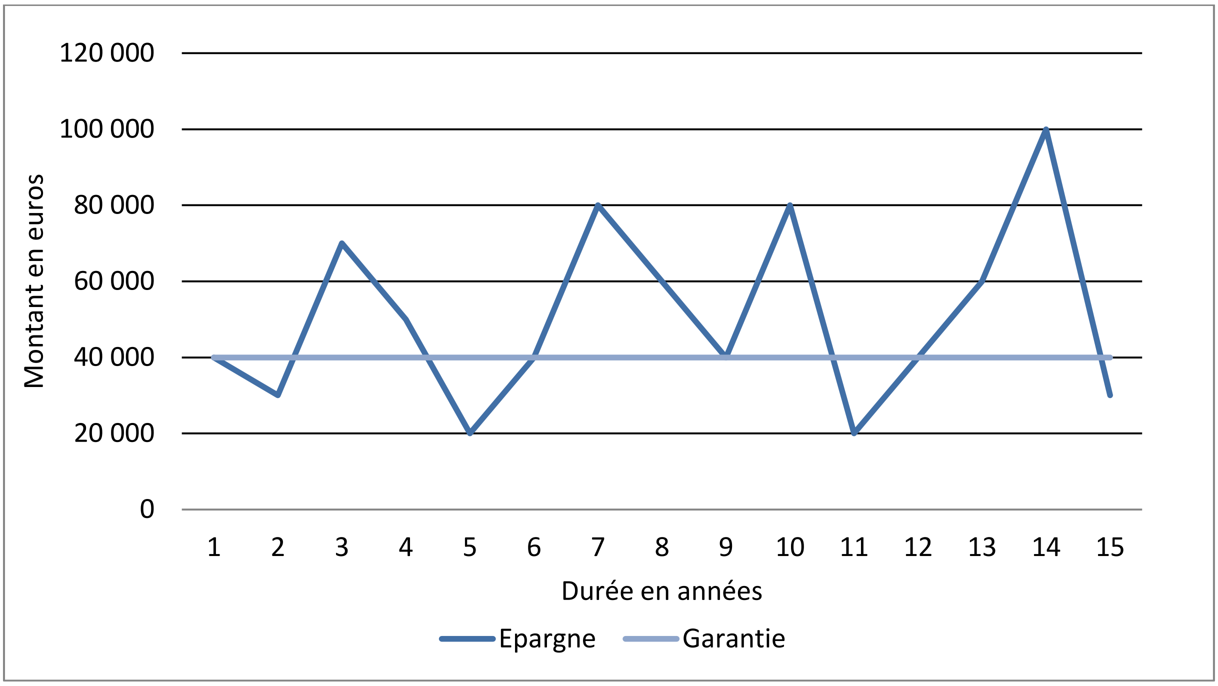


Figure 4 : Schéma d'une garantie plancher classique

Exemple illustratif : Soit un assuré qui verse une prime unique de 40 000 € sur un contrat en unités de compte qui comporte une garantie plancher en cas de vie classique. En supposant que l'évolution de l'épargne sur son contrat est conforme à la figure 4 et qu'il ne fait pas de rachat.

- Si l'échéance est de trois ans et que l'assuré est toujours en vie, l'assureur versera au bénéficiaire la valeur de l'épargne atteinte à cette date, soit 70 000 €. En effet, cette valeur est supérieure au capital minimum garanti de 40 000 € : la garantie ne se déclenche pas.

- En revanche, si l'échéance est de cinq ans et que l'assuré est toujours en vie, la valeur de l'épargne atteinte est inférieure au capital minimum garanti : 20 000 €. L'assureur devra utiliser sur ses fonds propres la différence de 20 000 €, pour être en capacité de verser au bénéficiaire les 40 000 € garantis.

II.3) Garantie plancher majorée

Le souscripteur détermine le capital minimum garanti à transmettre au bénéficiaire à l'avance. Le capital sous risque est égal à la différence positive entre le cumul des primes versées et le capital assuré fixe. Plus la différence est grande, plus le coût de la garantie sera élevé. À l'inverse, plus la différence est faible, plus le coût sera élevé.

La figure 5 indique que les bénéficiaires récupéreront au minimum 80 000 € à échéance, quelle que soit l'évolution de l'épargne.

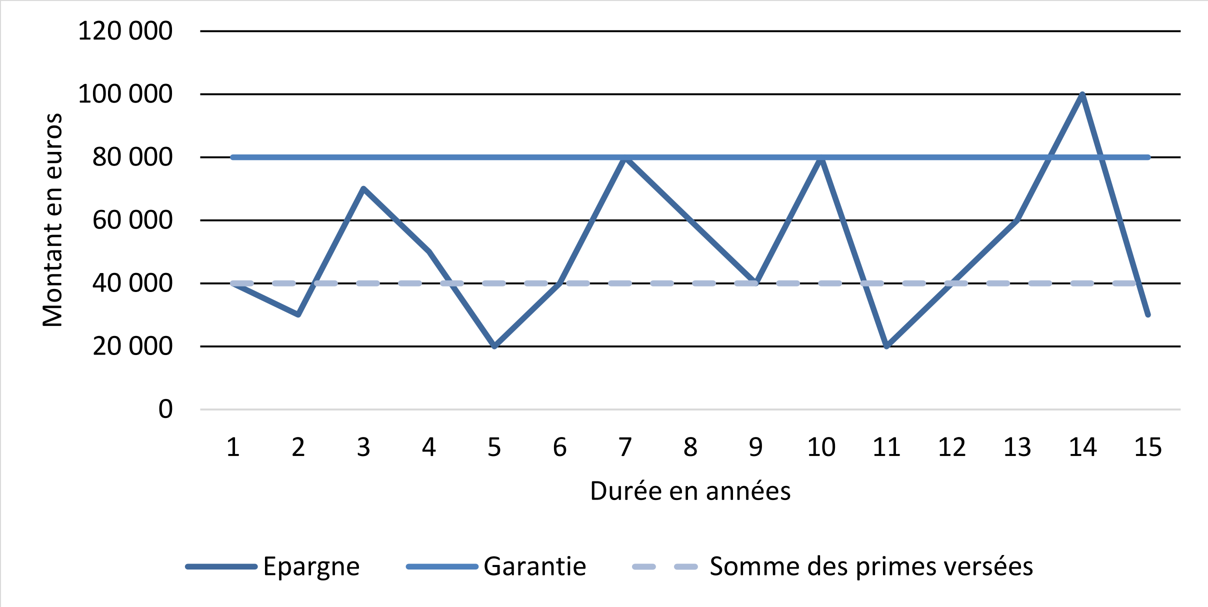


Figure 5 : Schéma d'une garantie plancher majorée

II.4) Garantie plancher indexée

La garantie plancher dite indexée correspond à la somme des primes revalorisées suivant un indice. Le bénéficiaire recevra alors au minimum le capital investi, diminué des frais et rachats revalorisés chaque année selon un taux variable fixé par le contrat. Le taux de revalorisation peut être fixe ou suivre un indice financier.

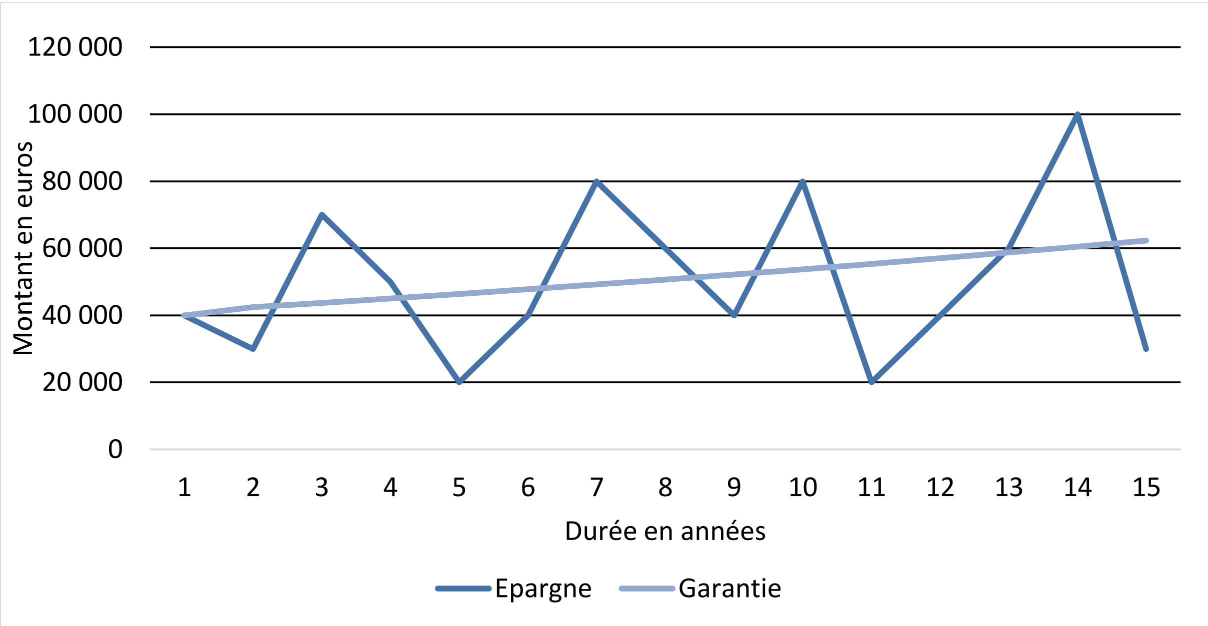


Figure 6 : Schéma d'une garantie plancher indexée

Exemple illustratif : sur la figure 6, la garantie plancher est une garantie de rendement annuel de 3%. Dans le cas où l'échéance de la garantie est de cinq ans, et que l'assuré est toujours en vie, les bénéficiaires recevront 46 370,96 € = 40 000 x $(1+3\%)^{5}$. Ce type de garantie peut être plus intéressant pour les bénéficiaires mais elle est également plus coûteuse.

II.5) Garantie plancher cliquet

La garantie plancher dite cliquet permet au bénéficiaire de recevoir au minimum le niveau atteint par le capital à un certain moment. Elle correspond au plus haut cours atteint depuis la souscription (diminué des éventuels rachats, avances ou taxes diverses). Par conséquent, cette garantie immobilise les plus-values générées par le contrat. Ce type de garantie est très avantageux pour l'assuré mais est aussi beaucoup plus coûteuse. C'est également une garantie fortement risquée pour les assureurs et particulièrement en période de forte volatilité des marchés financiers comme en périodes de crise.

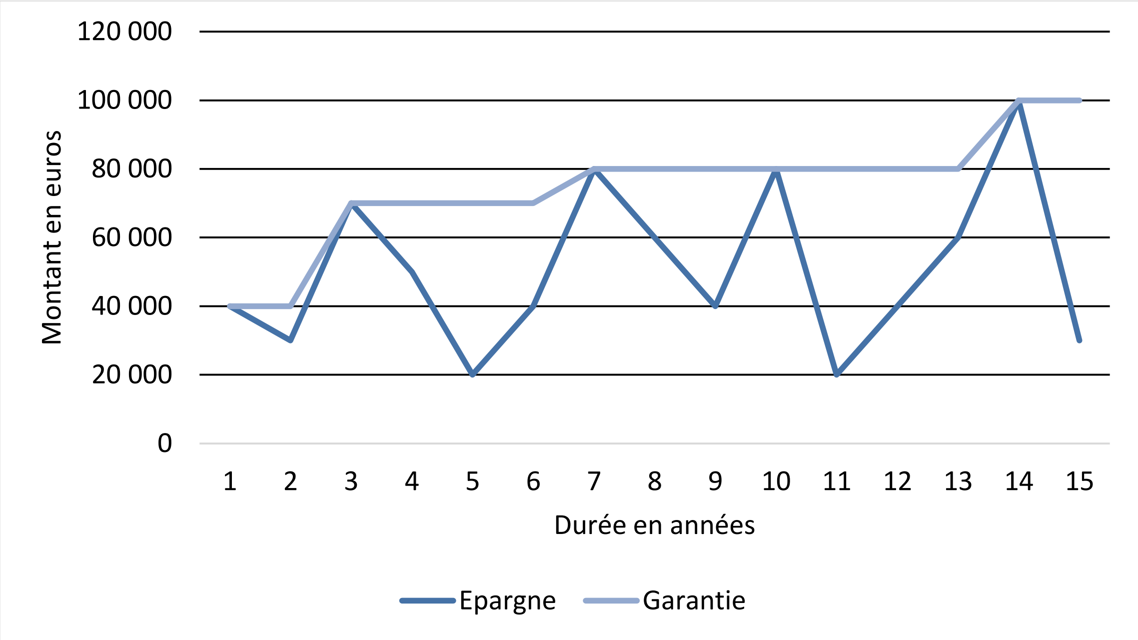


Figure 7 : Schéma d'une garantie plancher cliquet

Dans le cas de la garantie cliquet, si l'échéance du contrat est de cinq ans et que l'assuré est toujours en vie, les bénéficiaires sont certains de toucher 70 000 €.

II.6) Les risques liés à la garantie plancher

La garantie en cas de vie au sein d'un produit d'épargne composé d'unités de compte propose aux assurés de profiter pleinement des performances à la hausse des marchés financiers tout en garantissant un montant minimum en cas de baisse des marchés. En revanche, elle expose l'assureur à plusieurs risques. Il est alors indispensable pour lui de déterminer, quantifier et maitriser ces risques.

En effet, la garantie n'est exercée que si l'évènement couvert se réalise c'est-à-dire : la survie de l'assuré.

Premièrement, le risque de marché est le principal risque auquel fait face l'assureur. Il résulte du contexte de hausse ou de baisse des marchés financiers. Les contrats comportant des supports en unités de compte sont alors touchés. Ce risque peut ainsi engendrer une chute de l'épargne sous la valeur plancher, d'où l'intervention de la garantie et une perte pour l'assureur. C'est un risque difficile à maitriser car il est difficile de prédire l'évolution des supports financiers. L'assureur a néanmoins des possibilités de couverture face à ce genre de phénomène, par exemple en faisant appel à un réassureur, le risque est alors cédé au réassureur. Il s'agit néanmoins d'un phénomène rare car c'est un risque difficilement maitrisable.

Ensuite, le risque assurantiel viager, dans le cas de la garantie en cas de vie : le risque de longévité. Ce risque peut intervenir dans les hypothèses prises en compte pour la tarification, en cas de mauvaise estimation des taux de survie. C'est un risque qui peut être géré correctement avec les tables de mortalité réglementaires ou avec des tables d'expériences certifiées. En posant certaines hypothèses comme une limite d'âge à la souscription par exemple, ce risque peut être facilement réduit, ou encore en mutualisant ce risque dans un portefeuille d'une taille plus importante grâce à la loi forte des grands nombres. C'est un risque auquel les assureurs ont l'habitude de faire face et qui peut être maitrisé avec des statistiques fiables et un portefeuille d'assurés suffisamment important.

Enfin, le taux de rachat représente une variable importante dans la tarification de la garantie en cas de vie. C'est la raison pour laquelle il est primordial de prendre en compte de bonnes hypothèses pour les probabilités de rachats partiels et totaux en termes de lois de rachat. Cette tâche peut s'avérer difficile car les rachats peuvent être dus à différents facteurs parfois exogènes : le comportement des assurés, des facteurs économiques, la fiscalité en vigueur... Néanmoins, dans le cadre de la garantie en cas de vie étudiée dans ce mémoire, le paiement se faisant uniquement à échéance, donc au terme de la garantie, les rachats devraient se faire plus rares. En effet, les assurés devraient préférer rester jusqu'à échéance plutôt que de quitter plus tôt que le terme sans bénéficier du paiement de la garantie, sauf s'ils ont un réel besoin de liquidité par exemple.

Pour réduire les différents risques liés à la garantie plancher, l'assureur dispose de diverses solutions, en ajoutant des contraintes. Par exemple une limite de durée (échéance), un âge minimum à la souscription, une limite de la prestation à un certain pourcentage du capital investi.

III- Eléments de finance

Cette partie s'appuie sur les travaux [5], [13] et [21] référencés en bibliographie.

Pour la suite du mémoire, et comme indiqué précédemment, les mathématiques financières seront utilisées pour la tarification de la garantie en cas de vie. La partie suivante permet de reprendre certaines bases, un vocabulaire et des notions de finance utiles pour une bonne compréhension des parties ultérieures.

La garantie plancher en cas de vie présentée dans ce mémoire assure au bénéficiaire d'un contrat comportant des fonds en unités de compte, le versement d'un capital minimum fixé au préalable, quelles que soient les fluctuations de l'épargne sur le contrat. En utilisant la théorie des options financières, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie peut être considéré comme une option de vente (put) que le bénéficiaire possède vis-à-vis de la compagnie d'assurance. C'est la raison pour laquelle la tarification du risque est liée au choix du modèle d'évaluation de prix des actifs financiers.

Pour commencer, une option représente un engagement entre un acheteur et un vendeur d'option. Le détenteur de l'option a le droit d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent (une quantité d'actifs financiers, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'un produit dérivé…) à un prix fixé à l'avance jusqu'à une certaine date appelée échéance. Ce prix convenu dans le contrat s'appelle le strike ou prix d'exercice. Il existe deux types d'options :

- Les call sont des options d'achat qui permettent à leur détenteur d'acheter l'actif (appelé sous-jacent) au prix d'exercice fixé à l'avance contre le paiement d'une prime. Ils permettent de se couvrir contre la hausse du prix de l'actif.

- Les put sont des options de vente qui donnent le droit à leur détenteur de vendre l'actif (appelé sous-jacent) au prix d'exercice fixé à l'avance. Ils permettent de se couvrir contre la baisse du prix de l'actif.

La valeur de l'option représente le coût du risque, c'est-à-dire soit acheter à un prix supérieur au prix d'exercice, soit vendre à un prix inférieur au prix d'exercice.

L'expression d'option européenne est employée lorsque ce droit ne peut être exercé qu'à échéance. En revanche, si ce droit peut être exercé à tout moment et ce jusqu'à échéance il s'agit alors d'option américaine.

À la date d'échéance, la valeur intrinsèque d'un put de prix d'exercice K, sur un sous-jacent dont le cours vaut S :

- Si $S < K$, le détenteur de l'option a alors intérêt à exercer l'option et réalise un profit égal à $K - S$

- Si $S > K$, le détenteur de l'option n'a alors pas intérêt à exercer l'option, la valeur du put est égale au $Max(0, K - S)$

Une notion importante utilisée dans les techniques de valorisation d'options est la volatilité. Elle correspond à l'instabilité du cours d'un actif financier et permet de mesurer le niveau d'incertitude sur l'évolution future de ce cours[2]. Plus la volatilité augmente, plus les probabilités que le cours augmente et baisse fortement sont grandes et donc plus le coût de couverture du fonds est élevé : c'est la contrepartie du risque augmenté supporté par le vendeur. De même, plus la corrélation du fonds à son marché est forte, moins le coût est élevé. Le détenteur d'une action devra donc arbitrer les risques symétriques entre des opportunités de gains plus importantes (volatilité élevée) et des pertes limitées en cas de baisse du cours (volatilité faible). La volatilité considérée correspond à l'écart-type du rendement continu du sous-jacent sur une année. Il est alors possible de la calculer selon une approche historique en se basant sur l'évolution des cours passés. Cette approche reste assez risquée du fait que la volatilité n'est pas une donnée figée et évolue au cours du temps. Elle reste néanmoins une approche intéressante lors de l'étude du prix d'une option.

Il existe deux types d'approches en théorie de l'option :

- Une approche financière avec la probabilité risque-neutre : l'hypothèse forte est supposée selon laquelle il existe un taux sans risque sur les marchés financiers et que l'option est valorisée dans un univers risque-neutre. En revanche, s'il s'agit plutôt d'une logique d'évaluation d'engagement et de calcul de provision, il peut sembler plus cohérent d'utiliser une probabilité historique avec une approche plus actuarielle.

- Une approche actuarielle avec la probabilité historique : dans le cadre de cette approche, l'objectif est de déterminer la prime pure du contrat. Le principe d'équivalence actuarielle est utilisé selon lequel la prime pure est égale à la valeur moyenne des coûts futurs actualisés.

En théorie financière, une hypothèse souvent utilisée et qui représente une notion de base est l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Cela signifie qu'au sein du marché considéré il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive et un investissement nul.

Dans le cadre d'un contrat d'assurance vie, le mécanisme de l'option de vente est assimilé à la garantie plancher en cas de vie. Le souscripteur de la garantie verse une prime qui lui donne le droit de récupérer au moins les versements effectués sur son contrat à échéance. La prime exigible pour la garantie plancher est la somme à exiger à la souscription de la garantie pour que l'assureur puisse couvrir exactement sa perte s'il y a exercice de l'option. L'unité de compte est assimilée à l'actif sous-jacent détenu par l'assureur. Sa stratégie consiste alors à protéger cet actif contre une baisse de sa valeur. Il achète donc une option de vente : un put européen sur cet actif.

[2] Selon [13].

Exemple illustratif : À l'instar de ce qui a été fait dans le mémoire de Tristan Palerm [13], le phénomène est illustré avec la figure 8. Dans le cadre de la garantie en cas de vie, l'assureur est considéré comme le vendeur d'un put, et l'assuré comme l'acheteur d'un put. Le cours du sous-jacent correspond à l'évolution des unités de compte sur lequel l'assuré a investi. Le strike est le capital garanti. Soit un prix d'exercice à 25 et une prime de 2 :

- En dessous de 25 (partie gauche du graphique), le put est intéressant : l'acheteur exerce le put. Il l'achète à 25 et le vend moins cher sur le marché, mais la prime vient réduire la perte. En d'autres termes, la garantie en cas de vie a un rôle à jouer.

- Au-dessus de 25 (partie droite du graphique), le put n'est pas intéressant : l'acheteur ne l'exerce pas, et le vendeur conserve la prime de 2. Autrement dit, le montant proposé par la garantie en cas de vie est inférieur à l'évolution du cours de l'unité de compte : elle n'est pas utile.

- Le « point mort » se situe ici à 23.

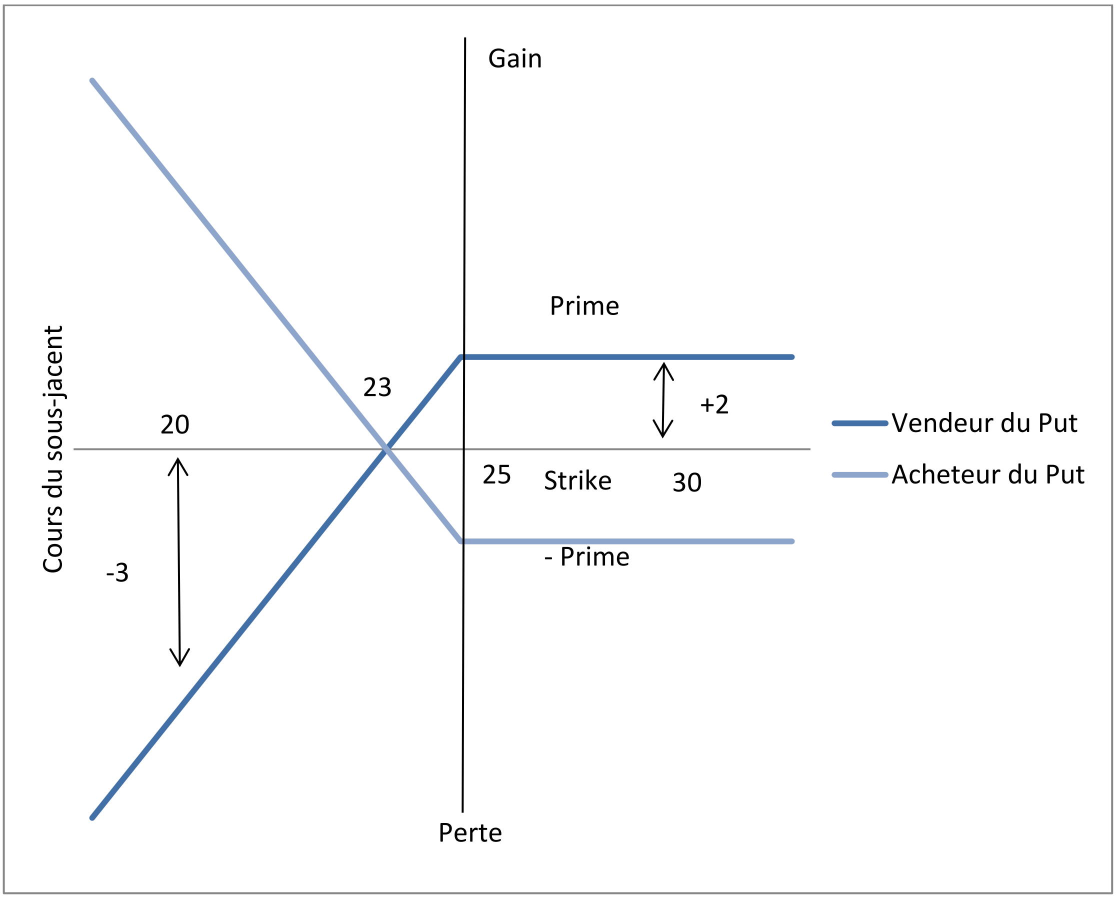


Figure 8 : Schéma explicatif du put et du call

La lecture de la figure 8 indique que le vendeur du put (l'assureur dans ce cas) endosse des risques importants. En effet, il fait le pari que l'option ne sera pas exercée et espère enregistrer ses gains grâce aux primes payées par l'acheteur (l'assuré). Ainsi, pour l'acheteur du put, le risque se limite au fait que en cas de hausse du cours, il perd sa prime. À contrario pour le vendeur du put, en cas de forte baisse des cours, la perte peut être considérable.

IV- La tarification

Le risque lié aux garanties plancher s'analyse de manière très différente selon le mode de tarification. Il existe deux types de tarification qui seront décrits dans cette partie.

Cette partie s'appuie sur les travaux [3], [5], [7], [9], [10] et [15] référencés en bibliographie.

IV.1) Tarification a priori

La tarification a priori consiste en un prélèvement périodique en pourcentage des encours (tarification forfaitaire). Cette tarification, peut être explicite si le prélèvement au titre de la garantie plancher est distingué des autres frais, sinon il s'agira d'une tarification implicite, avec une conséquence sur le calcul de la provision. [3]Ce type de tarification expose les assureurs à un risque financier important, dans la mesure où la baisse de l'encours entraîne également mécaniquement une baisse des prélèvements destinés à couvrir un risque accru. De plus, le risque financier n'étant pas mutualisable (un risque mutualisable en assurance signifie qu'il y a indépendance entre les contrats d'assurance), en cas de forte baisse du cours des unités de compte, c'est l'ensemble des assurés qui sera touché. Ce mode de tarification est néanmoins plus clair pour l'assuré, car il sait exactement le montant du paiement qu'il devra effectuer et à quelle date. Il peut être désavantageux pour ce dernier, lorsque la provision mathématique (rappelons qu'il s'agit d'une réserve constituée par l'assureur afin de pouvoir garantir à tout moment le règlement de ses engagements) est élevée par rapport au capital garanti, car le prélèvement sera aussi élevé alors que les capitaux sous risque seront faibles.

[3] Selon [3].

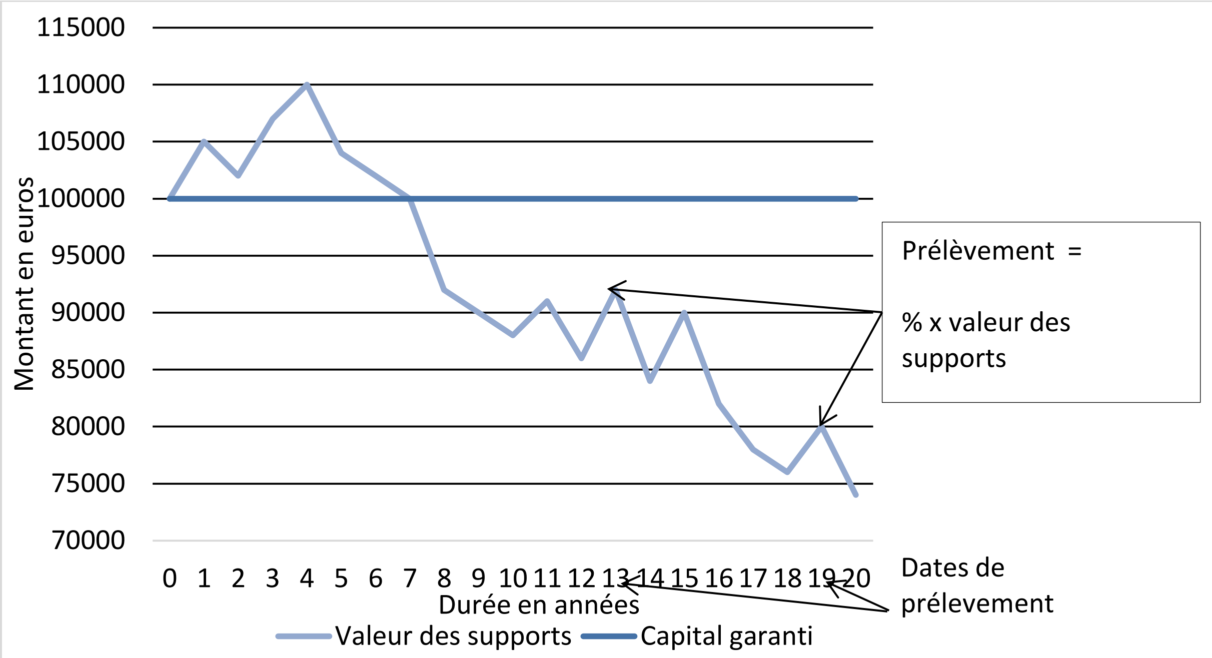


Figure 9 : Schéma de la tarification a priori

Les sociétés d'assurance qui tarifient a priori, c'est-à-dire indépendamment de l'évolution du risque, prélèvent périodiquement ou par un prélèvement unique une proportion fixe de la provision mathématique, par exemple 0,4% par an.

IV.2) Tarification a posteriori

Le mode de tarification a posteriori est une tarification en fonction du risque, aussi appelée, tarification à la prime. Lorsque l'assureur tarifie a posteriori, il prélève périodiquement sur la provision mathématique le capital sous risque (c'est la part du capital garanti qui dépasse la provision mathématique) multiplié par la probabilité de décès ou de survie. En effet, plus le cours diminue plus le capital sous risque et donc les prélèvements augmentent. Pour les assurés, la contrepartie est que les prélèvements sont d'autant plus élevés que leur épargne diminue du fait de la baisse de valeur des unités de compte. La prime de risque est calculée périodiquement en fonction de :

- la probabilité de survenance du risque (vie, décès)

- du $Capital\ sous\ risque = Max\ (0\,; capital\ garanti - valeur\ des\ supports)$
  Avec $Prélèvement = capital\ sous\ risque\ \times Probabilité\ de\ survance\ du\ risque$

Cette tarification présente des avantages : premièrement elle s'adapte au risque, ensuite, la prime perçue peut couvrir correctement le risque financier si la fréquence de calcul choisie est suffisamment importante. En revanche, elle peut également présenter des inconvénients comme la difficulté de mise en place d'une tarification sur le plan commercial. En effet, le taux de prélèvement n’est pas lissé dans le temps et peut varier d’une période à l’autre, ce qui peut s’avérer être difficile à appréhender par le souscripteur.

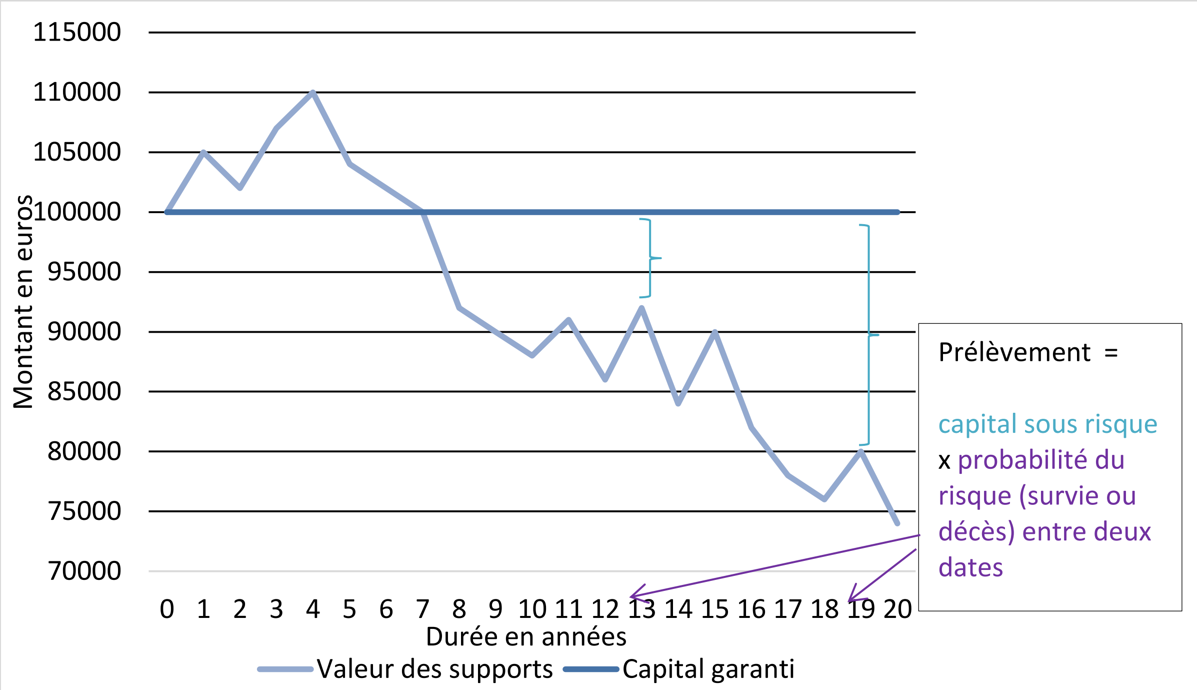


Figure 10 : Schéma de la tarification a posteriori

Conclusion de la première partie

Au cours de cette première partie, la présentation du fonctionnement général de l'assurance vie ainsi que les principales caractéristiques des garanties planchers et des risques associés ont montré l'utilité d'une garantie en cas de vie dans le contexte économique actuel. Il s’agit d’un engagement non négligeable pour l’assureur, notamment pour une garantie qui pourrait être amenée à être souscrite de plus en plus souvent, et à s’ancrer dans l’assurance vie, d’où l’importante de bien étudier la tarification qui en découle. Dans la partie suivante, il s’agira d’aborder la tarification d’une garantie en cas de vie à travers différentes méthodes.

PARTIE 2 : La tarification d'une garantie en cas de vie

La seconde partie de l'étude abordera la tarification d'une garantie en cas de vie. La première étape de ce processus consiste à récupérer des données qui formeront un portefeuille d'unités de compte, sur lequel il conviendra d'appliquer différentes méthodes de tarification. La première consiste en une méthode déterministe mais elle connaît certaines limites, ce qui justifie l'application d'une méthode stochastique avec le modèle de Black and Scholes enrichi par la suite avec le modèle de Vasicek. La méthode de Cox, Ross et Rubinstein sera également appliquée. Enfin, il conviendra de comparer les tarifs obtenus avec les différentes méthodes grâce à une étude de cas. Pour l'intégralité des méthodes abordées, les sensibilités testées seront les suivantes :

Âge de l'assuré au moment de la souscription	Durée de la garantie (échéance)	Pourcentage de capital garanti
35 ans	4 ans	80%
55 ans	8 ans	90%
75 ans	12 ans	100%

Tableau 1 : Sensibilités

I- Description du portefeuille sélectionné et études préliminaires

La première étape du processus de tarification est l'étude des données. Il s'agit d'une étape indispensable pour avoir une bonne connaissance de celles-ci et de leurs spécificités. En effet, la qualité et l'exhaustivité des données représentent un enjeu majeur pour l'assureur puisqu'elles permettent notamment une bonne compréhension de ses produits.

Pour commencer, la sélection des informations générales sur l'ensemble des unités de compte souscrites depuis 2015 est une étape fondamentale. L'étude portera uniquement sur les deux produits les plus souscrits. En effet, c'est au sein de ces deux produits que Generali souhaite développer et proposer aux assurés la garantie en cas de vie, c'est donc eux qui seront éligibles à cette garantie. Pour chacune des années les vingt unités de compte les plus souscrites seront étudiées. Pour être certains que la tarification est bonne et afin de s'assurer que le portefeuille sélectionné est bien représentatif de la collecte, il s'agira d'effectuer des statistiques descriptives sur le portefeuille dans le but de bien comprendre ce dernier.

I.1) Part du portefeuille sélectionné dans la collecte totale pour chaque année

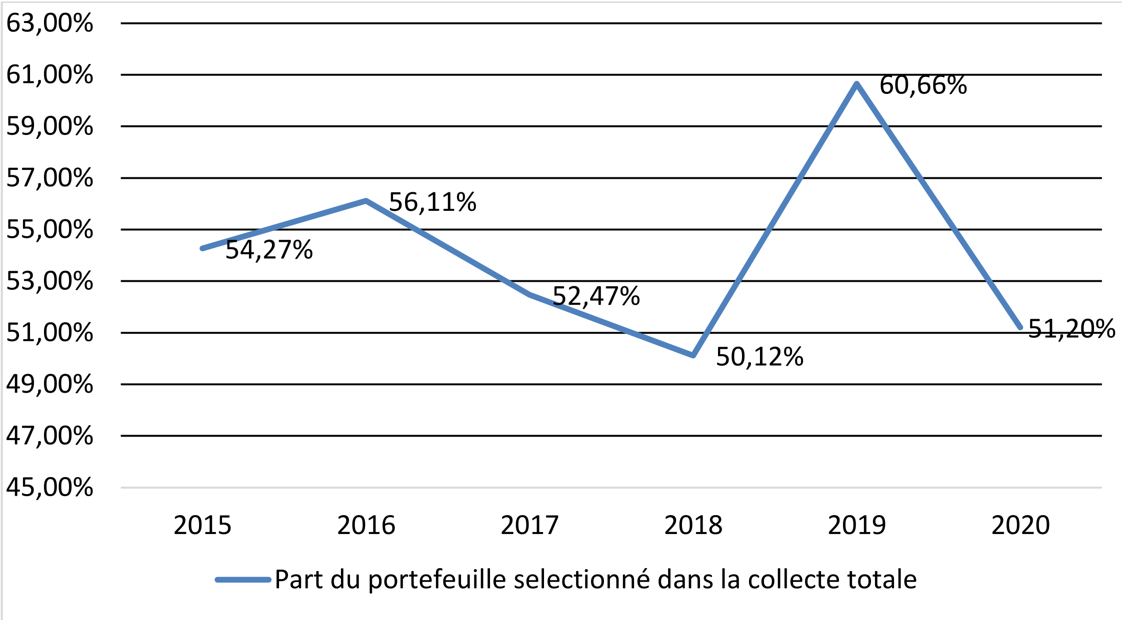


Figure 11 : Représentation graphique de la part du portefeuille sélectionné dans la collecte totale pour chaque année

L'étude de la part du portefeuille sélectionné au sein de la collecte totale est une étape indispensable pour valider la sélection de données et vérifier leur cohérence. La figure 11 témoigne du fait que le portefeuille sélectionné est représentatif de la collecte totale pour toutes les années. En effet, pour chacune des années il prend en compte au minimum la moitié de la collecte totale. Ainsi, l'étude se basera sur une portion conséquente et considérée comme suffisante.

I.2) Collecte moyenne des unités de compte

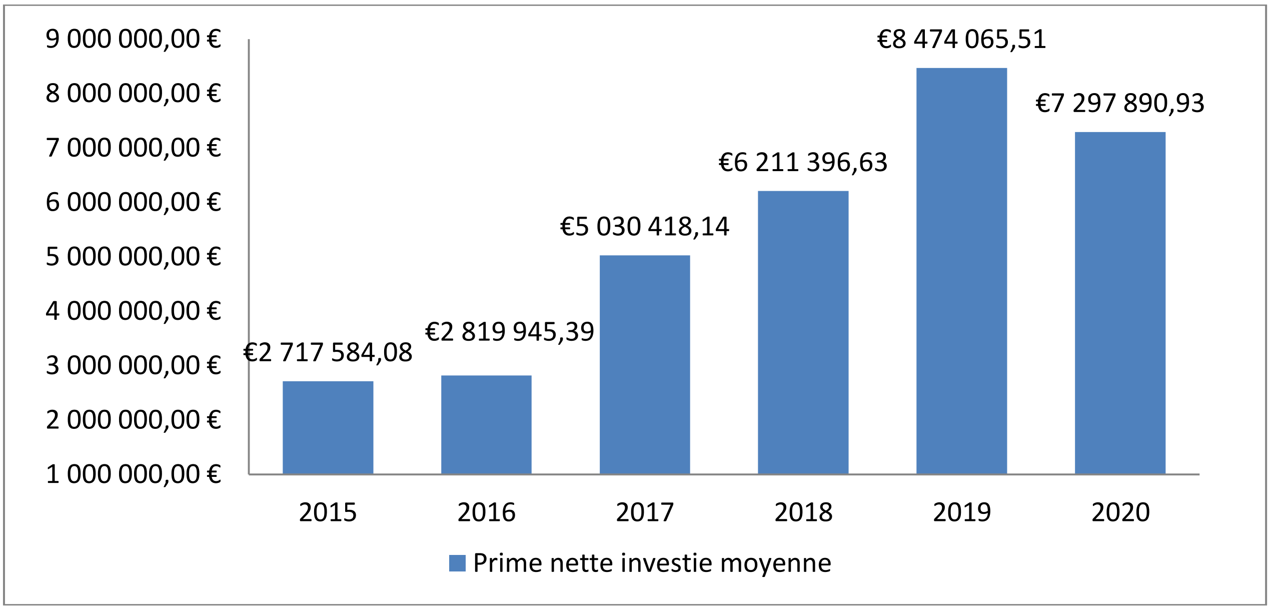


Figure 12 : Moyenne de la prime nette investie dans le portefeuille sélectionné pour chaque année

Sur la figure 12 est étudié le montant de la prime moyenne au sein du portefeuille sélectionné entre 2015 et 2020. La collecte moyenne des unités de compte est de 5 425 216,78 €. Ce montant observé évolue à la hausse, plus particulièrement depuis 2017.

I.3) Statistiques sur les SRRI des fonds sélectionnés

Le SRRI (Synthetic Risk and Reward Indicator) est un indicateur qui représente le niveau de risque d'un fonds d'investissement. Il doit figurer dans le document d'information clé pour l'investisseur : Key Investor Information Document (KIID). Il s'agit d'un nombre entier compris entre 1, pour les fonds les moins risqués, et 7 pour les fonds les plus volatiles. Cet outil connu du grand public permet de comparer facilement des risques induits par différents placements, y compris de nature différente. Le portefeuille semble homogène en termes de risque, avec une part un peu plus importante pour les SRRI moyens 3 et 4. Le 0 correspond à un manque d'information à ce sujet.

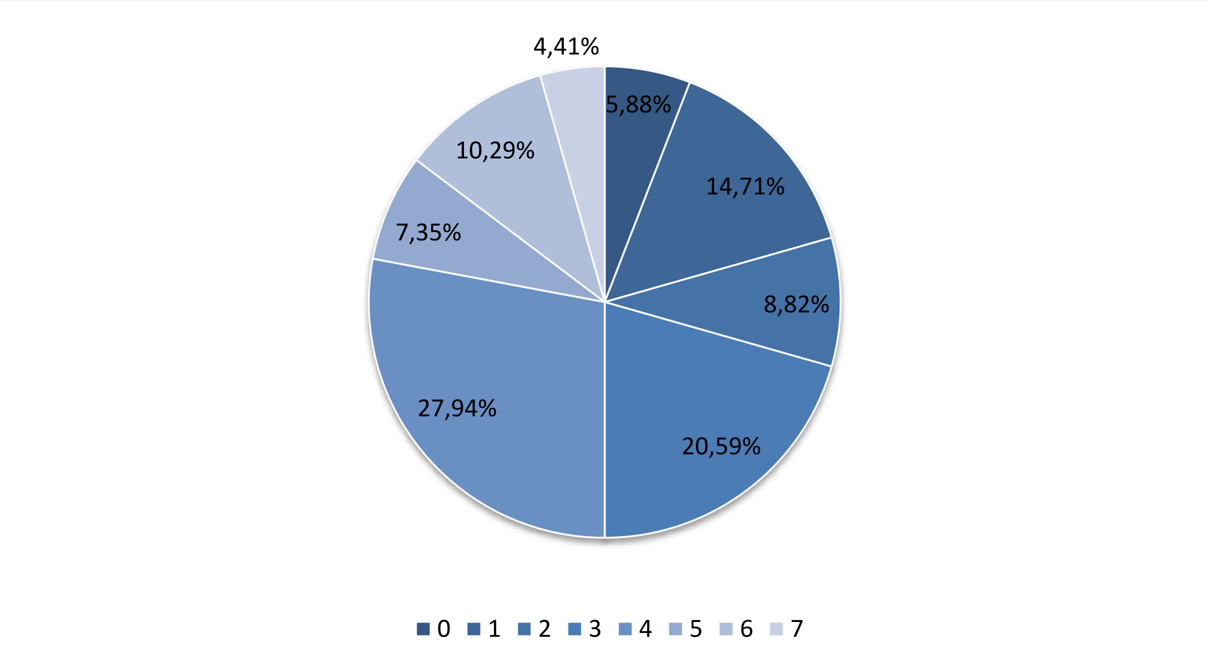


Figure 13 : Représentation graphique des SRRI des fonds au sein du portefeuille sélectionné

I.4) Statistiques sur les types d'investissement des fonds

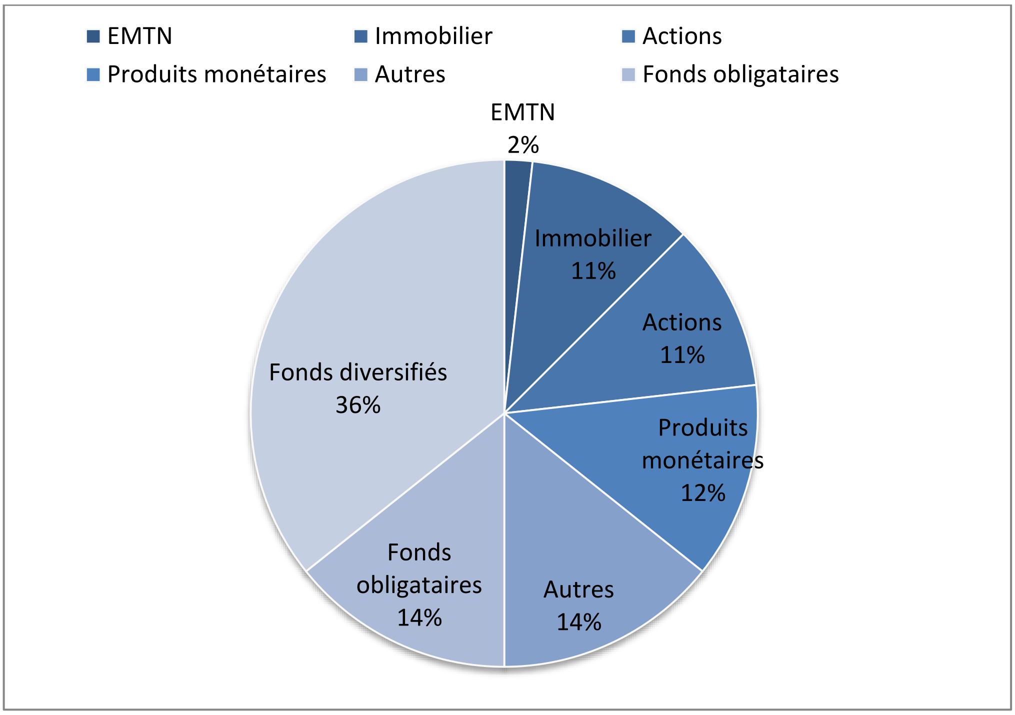


Figure 14 : Représentation graphique des supports sur lesquels est investie l'épargne placée sur les unités de compte du portefeuille sélectionné

La figure 14 montre sur quels supports est investie l'épargne placée sur les unités de compte contenues dans le portefeuille de cette étude. Les descriptions et les explications des fonds d'investissements ont été faites dans la première partie du mémoire (I.2). Ce graphique révèle une part beaucoup plus importante de fonds diversifiés, les autres types d'investissements étant globalement répartis de façon homogène avec néanmoins une part plus faible d'EMTN. Par ailleurs, en immobilier, la part est peu importante notamment car il s'agit d'un actif peu liquide.

I.5) Volatilité et rendement du portefeuille

Dans le but de pouvoir appliquer les différents modèles dans la suite du mémoire, des paramètres importants doivent être déterminés : la volatilité et le rendement du portefeuille. L'objectif premier est de déterminer la volatilité de chaque unité de compte. Pour ce faire, les valeurs liquidatives des unités de compte sélectionnées depuis 2015 jusqu'à 2021 sont extraites du logiciel interne GB Prod, de façon mensuelle et hebdomadaire, le rendement induit par l'unité de compte d'une date à l'autre est alors calculé. Ces calculs permettront de déterminer le rendement de chaque unité de compte depuis 2015 et donc le rendement annualisé du portefeuille selon que l'on ait utilisé les valeurs liquidatives pour calculer le rendement aux dates évoluant de façon mensuelle ou hebdomadaire. Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau 2 ci-dessous.

Ensuite, les rendements obtenus permettront de réaliser une matrice de variance-covariance du portefeuille sélectionné, matrice qui permet de déduire la volatilité annualisée. En effet, la variance entre les différents actifs d'un portefeuille permet d'estimer la variance d'un portefeuille et donc son risque.

	Données mensuelles	Données hebdomadaires
Volatilité annualisée du portefeuille	8,58%	8,91%
Rendement annualisé du portefeuille	3,18%	3,25%

Tableau 2 : Descriptif de la volatilité et du rendement du portefeuille

Dans le but d'appliquer des modèles, les données mensuelles seront conservées pour l'application des modèles. En effet, les données mensuelles donnent des résultats suffisamment proches des données hebdomadaires, rendant ainsi inutile l'utilisation d'une granularité plus fine.

Cette première partie confirme la qualité de la sélection du portefeuille d'unités de compte et permet la vérification des statistiques pertinentes. La partie suivante de l'étude consiste à appliquer des modèles de tarification d'une garantie en cas de vie sur ces données. Ces méthodes sont sensibles aux hypothèses retenues et doivent être confrontées et analysées. Elles génèrent des avantages et inconvénients qu'il s'agit de présenter.

II- Tarification déterministe

Cette partie s'appuie sur les travaux [5], [9] et [15] référencés en bibliographie

II.1) Présentation de la méthode

La méthode déterministe est une méthode simple et très répandue, notamment aux États-Unis où elle est réglementaire. Il s'agit de modéliser les engagements respectifs de l'assureur et de l'assuré et de projeter sur une période donnée un scénario déterministe préalablement choisi. L'intérêt de la méthode consiste à choisir un scénario spécifique et prudent de l'évolution des cours de chaque support. Le graphique ci-dessous illustre les différents scénarios qui peuvent être envisagés. En effet, cette méthode s'inscrit dans une logique d'appréciation du risque sur la base de scénarios pessimistes. En utilisant ces scénarios défavorables, le tarif obtenu est supposé suffisant pour pallier aux pertes que pourrait engendrer la garantie plancher en cas de vie. En revanche, l'assureur devra continuer à exercer une gestion raisonnable de son engagement envers l'assuré. En effet, malgré une bonne évaluation du tarif, la garantie en cas de vie reste très sensible aux évolutions des marchés qui sont, eux, volatiles.

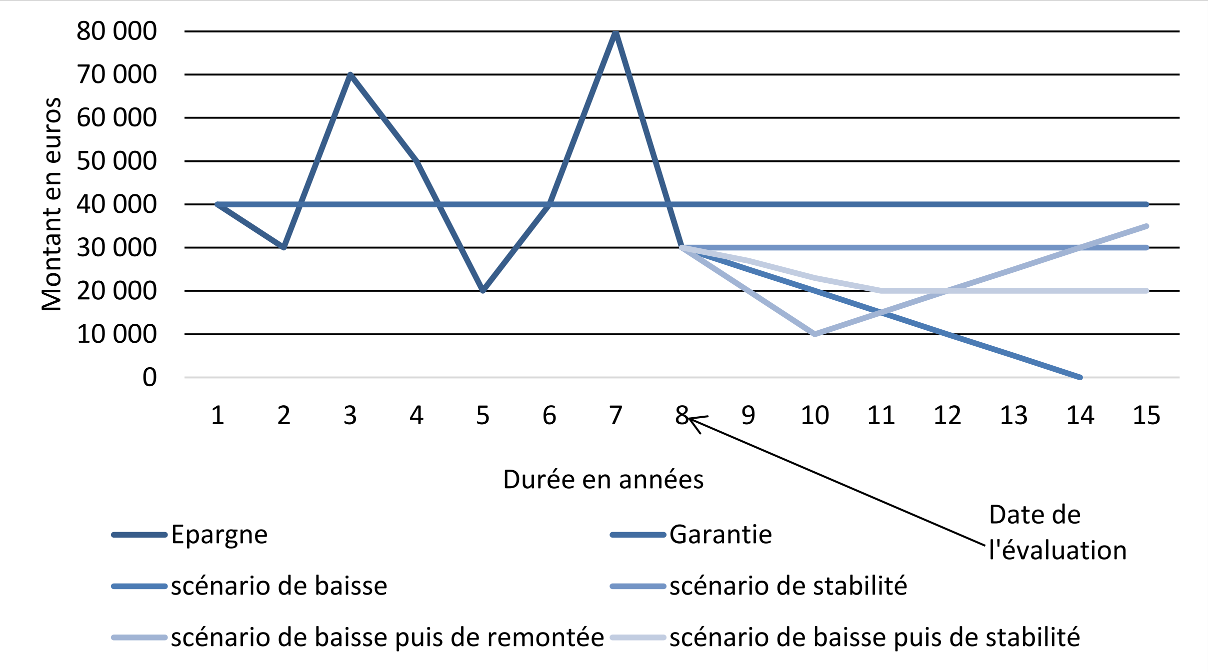


Figure 15 : Scénarios envisageables par la méthode déterministe

Bien qu'il n'existe pas de réglementation précise pour la tarification de la garantie en cas de vie, il existe des recommandations concernant le choix des hypothèses proposées par l'ACPR. Cette dernière incite à considérer une chute des unités de compte annuelle progressive de 15% jusqu'à un plancher maximum de 50% de baisse. De plus, le taux d'actualisation qu'elle préconise d'utiliser est le taux sans risque qui est égal au minimum entre 3,5% et 60% du TME (Taux Moyen des Emprunts d'Etat). Au 30 juillet 2021, il est par exemple de 0,00%. Ainsi, les recommandations appellent à retenir des scénarios prudents.

La méthode consiste à enregistrer chaque année un capital sous risque multiplié par la probabilité que l'assuré soit toujours en vie dans l'année et actualisé par le taux sans risque décrit précédemment. En sommant les valeurs actuelles obtenues, il en résulte le coût de la garantie plancher en cas de vie.

II.2) Application de la méthode sur le portefeuille de données

Une maquette sur Excel ainsi qu'un code VBA sont réalisés afin d'appliquer la première méthode décrite préalablement. Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

Frais de gestion	1 %
Variation de la volatilité	-15 %
Limite de la baisse de la volatilité	-50 %
Taux de rachat au terme	100 %
Probabilité de vie	Table TF00-02 avec décalage d'âge
Taux d'actualisation	Déflateur New Business au premier trimestre 2020

Tableau 3 : Hypothèses utilisées pour la méthode déterministe

L'étude se basera sur un unique scénario de baisse. Pour les frais de gestion, le même taux que celui utilisé pour les deux produits sélectionnés pour l'étude sera considéré. Pour les hypothèses de volatilité celles préconisées par l'ACPR seront utilisées. Pour chaque volatilité d'unité de compte et pour chaque échéance testée, elles permettent d'obtenir un taux de rendement brut annuel. Concernant l'hypothèse de taux de rachat au terme se sont les lois de rachat total et partiel du premier trimestre 2020 situées en annexe 1 qui seront exploitées.

La maquette réalisée se décompose en plusieurs parties qui effectuent les calculs selon l'évolution de l'âge de l'assuré et jusqu'à échéance Tde la garantie, pour chaque année t.

On commence par calculer pour chaque échéance t, la provision mathématique après revalorisation au deuxième semestre. Les PM_t sont évaluées sur les T années de la projection de la façon suivante (il s'agit de l'évolution de l'unité de compte) :

$$PM_t = (\underbrace{PM_{t-1} \times (1 + tren_t)^{0,5}}_{\textit{Revalorisation du premier semestre}} - RT_t - RP_t) \times \underbrace{(1 + tren_t)^{0,5}}_{\textit{Revalorisation du deuxième semestre}}$$

Et le taux de rendement net :

$$tren_t = (1 + treb_t) \times (1 - \theta - g) - 1$$

Avec le taux de rendement brut :

$treb_1 = \sigma \times -15\%$

$treb_t = 0$ si $\frac{1-50\% \times \sigma}{1-15\% \times \sigma^{(t-1)-1}} > 0$

$treb_t = \sigma \times -15\%$ si $\frac{1-50\% \times \sigma}{1-15\% \times \sigma^{(t-1)-1}} < -15\% \times \sigma$

$treb_t = -\frac{1-50\% \times \sigma}{1-15\% \times \sigma^{(t-1)-1}}$ sinon

On peut alors déterminer pour chaque échéance t l'engagement de l'assureur et l'engagement de l'assuré :

- L'engagement de l'assureur représente la valeur actuelle probable du capital sous risque.

Ainsi, pour un assuré d'âge x, l'engagement de l'assureur sera le suivant :

$$Engagement\ assureur = \sum_{t=0}^{t=T} ta_t \times {}_tp_x \times CASR_t \times tr$$

Avec le capital sous risque :

$$CASR_t = MAX(0; K_t - PM_t)$$

Et le capital garanti au temps t, évalué de la façon suivante :

$$K_t = (K_0 - RT_t - RP_t) \times \%\ de\ capital\ garanti$$

- L'engagement de l'assuré correspond à la valeur actuelle probable du coût de la garantie plancher.

$$Engagement\ assuré = \sum_{t=1}^{t=T} ta \times \left(\theta \times (1 + treb_t) \times PM_{t-1} \times \left(\frac{{}_tp_x + {}_{t-1}p_x}{2}\right) + \theta \times \frac{RT_t \times {}_tp_x}{2}\right)$$

Auquel sont également rajoutés les nouveaux assurés entrants dans le portefeuille chaque année.

Avec :

PM_t : provision mathématique de l'unité de compte au temps t (avec $PM_0 = 100$)
tr : taux de rachat au terme (100%)

ta_t : taux d'actualisation au temps t

${}_tp_x$: probabilité à l'âge x, d'être vivant à l'âge $x+t$
σ : volatilité de l'unité de compte
g : frais de gestion (1%)
θ : coût de la garantie plancher en cas de vie
$treb_t$: taux de rendement brut au temps t
K_t : capital garanti à la fin avec $K_0 = 100$
RT_t : rachats totaux au temps t
RP_t : rachats partiels au temps t

Finalement, le tarif à prélever annuellement sur l'encours de l'assuré au titre de la garantie plancher θ sera celui qui permet d'obtenir :

$$Engagement\ de\ l'assuré = Engagement\ de\ l'assureur$$

II.3) Résultats et sensibilités

Les calculs précédemment décrits sont appliqués sur les différents cas à tester, conformément aux sensibilités citées.

Premièrement, les sensibilités sur l'âge de l'assuré au moment de la souscription sont effectuées :

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 100% :

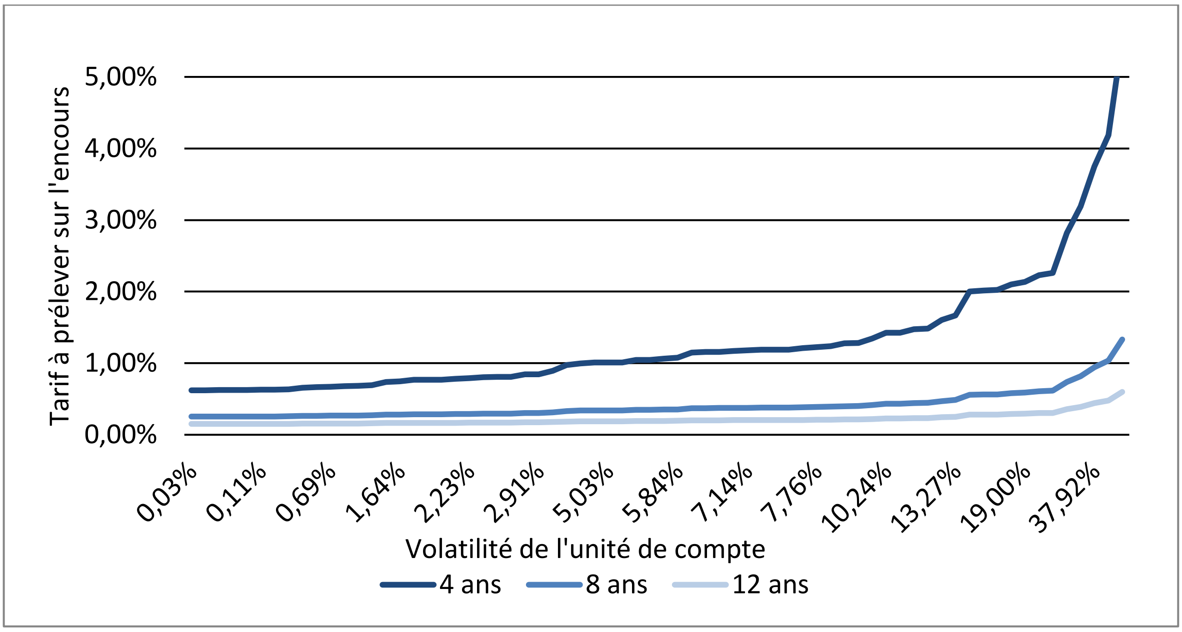


Figure 16 : Tarification obtenue avec la méthode déterministe pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 100%

On observe un coût plus important lorsque l'échéance de la garantie est de 4 ans, et une courbe qui évolue fortement à la hausse. Tandis que pour les échéances 8 ans et 12 ans, hormis pour les volatilités très fortes, le tarif obtenu reste constant et sous 1%. La lecture de la figure 16 permet de conclure que des échéances plus longues semblent plus intéressantes en termes de tarifs.

- Cas d'un assuré de 35 ans pour un capital garanti de 100% :

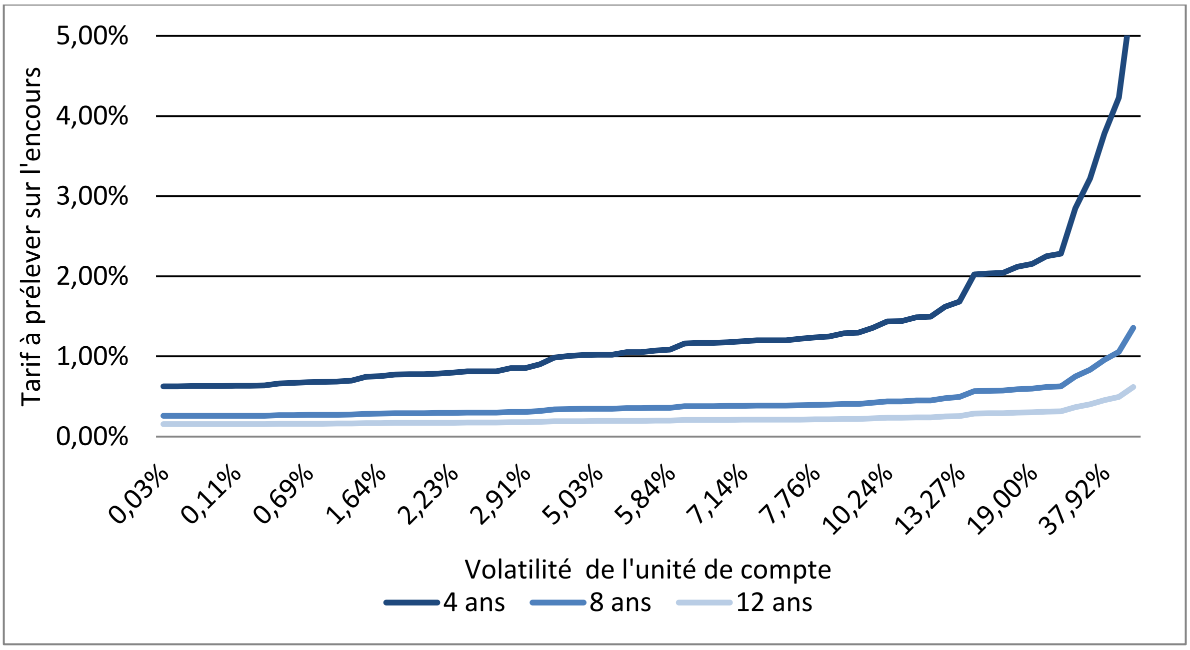


Figure 17 : Tarification obtenue avec la méthode déterministe pour un assuré de 35 ans et un capital garanti de 100%

Les mêmes allures de courbes sont observées quel que soit l'âge testé (35 ans, 55 ans ou 75 ans) : il en est déduit qu'avec la méthode déterministe l'âge n'impacte pas le tarif de la garantie en cas de vie.

Les sensibilités sont ensuite effectuées sur le pourcentage de capital garanti :

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 90% :

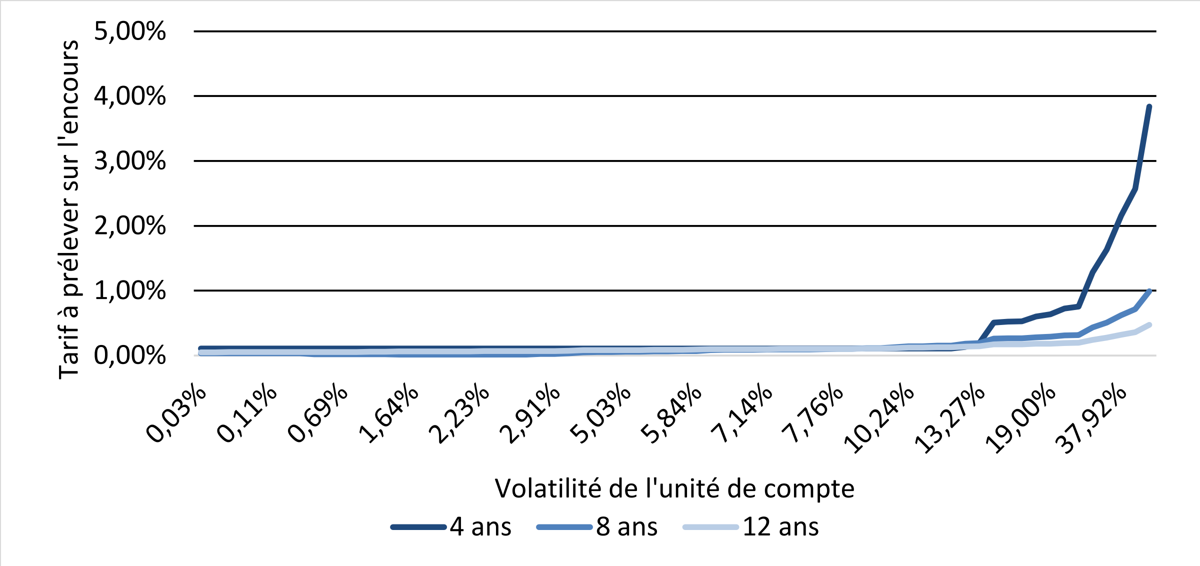


Figure 18 : Tarification obtenue avec la méthode déterministe pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 90%

Le pourcentage garanti à échéance a un impact sur le tarif de la garantie en cas de vie. En effet, les allures des courbes ne sont pas les mêmes que lorsque le pourcentage garanti est de 100%. De même, les trois échéances présentées sont constantes pour les premières volatilités puis subissent une vive augmentation, plus particulièrement pour la courbe d'échéance 4 ans, à partir de volatilités plus fortes autour de 13%.

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 80% :

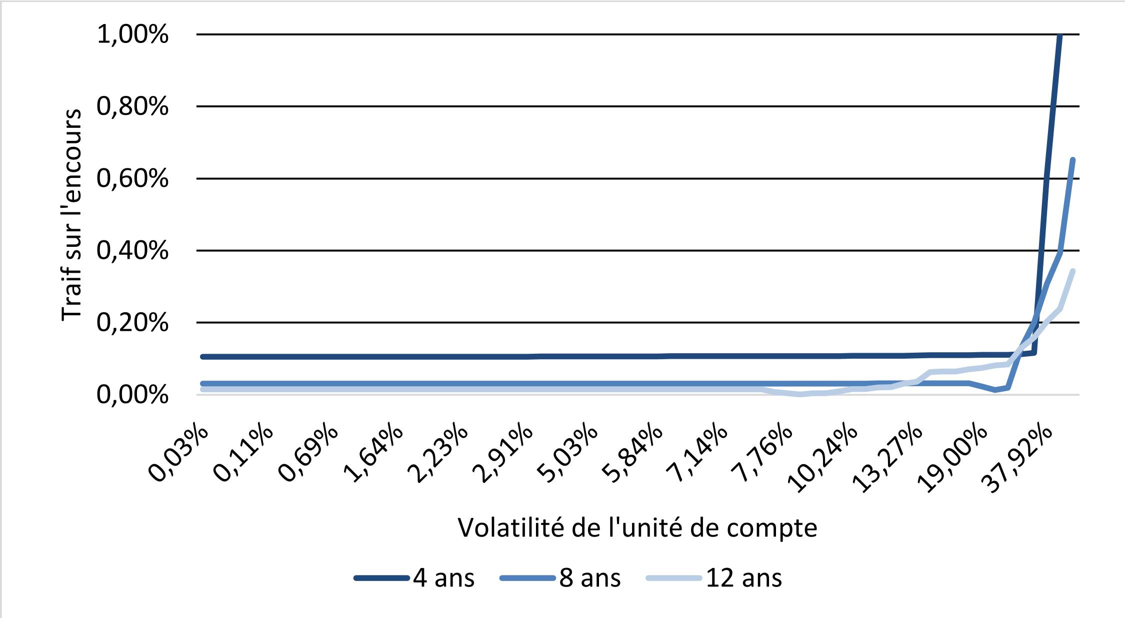


Figure 19 : Tarification obtenue avec la méthode déterministe pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 80%

La figure 19 présentant un capital garanti de 80%, le poids du tarif est plus faible et l'échelle du graphique a été modifiée par rapport aux figures 16, 17 et 18, afin d'avoir une meilleure visibilité des tarifs obtenus.

De la même façon, des allures de courbes constantes sont observées, jusqu'à un certain seuil de volatilité plus important que précédemment : environ 20%, seuil à partir duquel les courbes s'envolent à la hausse et plus particulièrement pour l'échéance la plus courte.

Ainsi, les sensibilités obtenues permettent de dire que l'âge de l'assuré au moment de la souscription n'a pas d'impact sur les tarifs. En revanche, le pourcentage garanti à échéance a un effet. Les tarifs obtenus sont plus faibles, ce qui s'explique par le fait qu'une somme moins importante est assurée, un pourcentage plus faible est donc prélevé sur l'encours. Enfin, les graphiques précédents montrent que la volatilité de l'unité de compte considérée a une forte incidence sur le tarif de la garantie en cas de vie obtenu.

II.5) Limites de cette méthode

Une limite a été rencontrée dans la réalisation de la méthode déterministe. En effet, pour certains fonds testés, notamment lorsque le capital garanti est de 90% ou 80%, les hypothèses prises en compte et les caractéristiques de certaines unités de compte sont à l'origine de l'évolution d'un faible rendement, accentué par le contexte des taux bas. Dans ces cas, le capital sous risque est tellement faible que l'engagement de l'assureur est nul : commercialiser cette garantie en cas de vie, ne coûterait quasiment rien à l'assureur pour ces fonds. Ainsi, pour ces fonds l'équation a été résolue manuellement pour proposer un tarif prudent qui permet de respecter les engagements de l'assureur et, le plus proche possible de 100% tout étant en faveur de l'assuré. Dans ces cas, les tarifs obtenus sont donc très proches de 0%.

La méthode déterministe appliquée présente l'avantage d'être aisée et simple à appréhender. Elle utilise des paramètres facilement accessibles. En revanche, limiter la tarification à cette unique méthode qui considère des scénarios catastrophes n'est pas envisageable. Il est difficile d'envisager une baisse pertinente et exacte du cours. En effet, la tarification déterministe ne prend pas en compte la multiplicité des scénarios possibles qui peuvent varier selon la nature des actifs. La méthode déterministe place l'évolution de l'unité de compte sur un unique chemin qui en réalité est aléatoire et instable. Or, même avec une bonne connaissance des marchés financiers, estimer le bon scénario représente une tâche complexe.

Ce sont les raisons pour lesquelles l'utilisation exclusive de cette méthode pose problème. De par les limites rencontrées, cette méthode ne couvre pas l'ensemble du périmètre étudié, elle ne peut donc pas être conservée pour tarifer la garantie en cas de vie. Il est alors nécessaire d'avoir recours à la théorie des options, plus proche de la finance. Cette démarche consiste alors à adopter une optique de tarification stochastique, qui décrira mieux l'évolution incertaine des cours des unités de compte. L'objectif est de refléter au mieux les observations de l'historique des prix d'un point de vue statistique. C'est ce qui est réalisé avec la méthode de Black and Scholes.

III- Le modèle de Black and Scholes

Cette partie s'appuie sur les travaux [7], [9], [10], [13] et [14] référencés en bibliographie.

III.1) Présentation de la méthode

Le modèle de Black and Scholes est un modèle couramment utilisé, notamment en finance de marché. C'est une méthode cohérente avec la pratique de marché, qui se base sur des hypothèses de théorie financière solide. C'est une référence en assurance et notamment en ce qui concerne les garanties plancher.

La méthode stochastique du modèle de Black and Scholes consiste à assimiler la garantie en cas de vie à une option de vente : un put européen. L'assureur est considéré comme un vendeur d'option de vente (put) accordée à l'assuré. Cette méthode représente la vision financière de l'engagement. Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique, en supposant que le cours d'une unité de compte suive un mouvement brownien géométrique.

Ainsi, comme dans la méthode déterministe, les engagements jusqu'à échéance sont projetés, la tarification correspond alors à la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par l'assuré.

Les hypothèses du modèle et du marché financier sont les suivantes :

- Les options européennes ne versent pas de dividendes durant la durée de l'option
- L'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec un taux de rendement moyen et une volatilité constants dans le temps
- Le marché financier est parfait : il n'y a pas d'investisseur dominant ni de coût de transaction, tous les investisseurs ont accès à toutes les informations concernant les titres et sont rationnels
- Le marché est complet : il existe une stratégie pour dupliquer tout actif
- Il existe un taux sans risque r constant dans le temps
- Absence d'opportunité d'arbitrage : deux actifs engendrant les mêmes flux ont le même prix. C'est-à-dire qu'il n'est pas possible de construire un portefeuille qui génère un profit certain pour un coût négatif ou nul
- Les rendements doivent suivre une distribution log-normale

III.2) Application de la méthode sur le portefeuille de données

Premièrement, pour appliquer correctement le modèle de Black and Scholes, il est nécessaire de vérifier que la base de données suit un mouvement brownien.

Un mouvement brownien (standard) est défini comme un processus B vérifiant :

- $B_0 = 0, P - ps$
- B est continu, soit $t \rightarrow B_t(w)$ est C^0 pour presque tout w
- B est à accroissements indépendants, soit $B_t - B_s$ est indépendant de $F_s^B = \sigma(B_s, s \leq t)$
- Les accroissements sont stationnaires, gaussiens et pour $s \leq t$:$B_t - B_s \sim N(0, t - s)$

Il est nécessaire de s'assurer que :

- les accroissements sont indépendants
- les accroissements sont stationnaires et gaussiens
- les accroissements sont continus

Pour ce faire, les valeurs liquidatives mensuelles de chaque unité de compte sont utilisées et deux tests de normalité sur les accroissements sont effectués.

Le premier est le test de Lilliefors, il s'agit d'un test de Kolmogorov-Smirnov adapté au cas gaussien, c'est un test de normalité, non paramétrique. Il est utilisé pour comparer des fonctions de répartition, c'est-à-dire pour vérifier que les données observées sont compatibles avec le modèle théorique donné.

Le second est test de Shapiro-Wilk est également un test de normalité, sa statistique de test (W) se base sur le rapport de deux estimations de la variance. Dans le cas d'une variable normale, les estimations coïncident et le rapport est proche de 1, au contraire si la variable n'est pas normale le rapport est plus petit que 1.

Tous deux se basent sur les hypothèses suivantes :

$$H_0: la\ distribution\ suit\ une\ loi\ normale$$

$$H_1: la\ distribution\ ne\ suit\ pas\ une\ loi\ normale$$

Ainsi, deux cas sont possibles :

- la p-value obtenue est inférieure à 0,05, la conclusion indique que le test rejette l'hypothèse nulle selon laquelle la distribution suit une loi normale.

- À contrario si la p-value est supérieure à 0,05 le test accepte l'hypothèse nulle.

Ci-dessous deux résultats obtenus pour des unités de compte du portefeuille sélectionné :

```
> lillie.test(UC1)

        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  UC1
D = 0.083082, p-value = 0.2345

> shapiro.test(UC1)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  UC1
W = 0.977, p-value = 0.1956
```

Figure 20 : Premier exemple de tests de normalité effectué sur une unité de compte

```
> shapiro.test(UC2)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  UC2
W = 0.96805, p-value = 0.05777

> lillie.test(UC2)

        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  UC2
D = 0.082045, p-value = 0.2509
```

Figure 21 : Deuxième exemple de tests de normalité effectué sur une unité de compte

Comme les captures d’écran ci-dessus l’indiquent les tests confirment que les accroissements des unités de compte suivent une loi normale.

Le prix d’une option dans ce modèle dépend de plusieurs paramètres :

- Le prix de l’actif sous-jacent
- Le prix d’exercice (le montant garanti, c’est le strike)
- Le taux d’intérêt sans risque (taux auquel un investisseur peut investir sur le marché sans prendre de risque. Il est défini à partir des emprunts d’état (obligations gouvernementales) : l’emprunt de l’état est considéré sans risque)
- La durée (échéance de la garantie plancher)
- La volatilité de l’actif sous-jacent (volatilité de l’unité de compte)

Comme évoqué précédemment, des paramètres prudents doivent être utilisés. Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

Frais de gestion	1 %
Variation de la volatilité	-15 %
Limite de la baisse de la volatilité	-50 %
Taux de rachat au terme	50 %
Probabilité de vie	Table TF00-02 avec décalage d'âge
Taux d'actualisation	Déflateur New Business au premier trimestre 2020
Versement initial	100€
Taux sans risque	0%
Taux de dividende annualisé	0%

Tableau 4 : Hypothèses méthode de Black and Scholes

Concernant les frais de gestion, le même taux que dans la méthode déterministe est utilisé, il s'agit du taux de frais de gestion des deux produits sélectionnés pour l'étude. Pour les hypothèses de volatilité celles préconisées par l'ACPR sont utilisées. À nouveau, ce sont les lois de rachat total et partiel du premier trimestre 2020 qui sont utilisées.

De la même façon que pour la méthode déterministe, une maquette est réalisée en distinguant l'engagement de l'assureur et l'engagement de l'assuré décrits ci-dessous :

- <u>L'engagement de l'assureur :</u>

L'engagement de l'assureur se détermine support par support. Pour chaque support, et pour chaque année de projection t, le prix des puts est calculé, pondéré par les taux de sortie.

D'après le modèle de Black and Scholes, le prix à la date t d'un put européen permettant de vendre un actif S_t au strike K est la suivante, c'est celle qui est appliquée dans la maquette :

$$Put(t, K_t, S_t) = e^{-rt} \times K_t \times N(-d_2) - e^{-qt} \times S_t \times N(-d_1)$$

Avec :

S_t : le prix de l'actif sous-jacent. Le prix de l'option de vente est fonction inverse du prix de l'actif sous-jacent. C'est-à-dire que plus le cours de l'actif diminue, plus la valeur du put augmente et inversement pour le call.
K_t : le prix d'exercice de l'option (strike). La valeur du put augmente avec son prix d'exercice. C'est le raisonnement inverse lorsqu'il s'agit d'un call.
r : le taux sans risque. Lorsque ce taux est élevé, la valeur du put tend à diminuer, dans la mesure où, l'investisseur préfère effectuer sa vente pour replacer son capital au taux sans risque plutôt que de conserver son actif risqué jusqu'à échéance (0%).
q : le taux de dividende annualisé (0%).

$$d1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \times \left[\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

$$d2 = d_1 - \sigma \times \sqrt{t}$$

σ : la volatilité du sous-jacent. Le put est une fonction croissante de la volatilité. Cette augmentation du prix de l'option est due à l'accroissement du risque supporté par le vendeur lorsque les fluctuations du cours de l'actif sont importantes.
$N(d)$: la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Comme pour la maquette déterministe, la provision mathématique est valorisée au cours du temps de la façon suivante :

$$PM_t = (PM_{t-1} \times (1 + tren_t)^{0,5} - RT_t - RP_t) \times (1 + tren_t)^{0,5}$$

Il a été fixé $PM_0 = 100$

$tren_t = (1 + treb_t) \times (1 - g) - 1 = -1\%$ pour tout t
$treb_t = 0\%$ pour tout t

Ainsi, le sous-jacent S_t qui correspond au cours du support est assimilé pour chaque t à la provision mathématique de l'unité de compte calculée au temps t.

Le strike K_t est assimilé au capital garanti au temps t :

$$K_t = (K_0 - RT_t - RP_t) \times \%\ de\ capital\ garanti$$

Avec $K_0 = 100$

Ainsi à échéance T, et pour un assuré d'âge x :

$$Engagement\ assureur_T = ta_T \times Put(T, K_T, S_T) \times {}_T p_{\ x}$$

- <u>L'engagement de l'assuré [4]:</u>

L'engagement de l'assuré se calcule comme la valeur actuelle des primes restant à payer par l'assuré. Il se détermine également support par support, en utilisant la méthode dite de la courbe au pire. Le niveau de la prime est determiné par un seuil de probabilité préalablement fixé, la courbe au pire est calculée selon la méthode de la perte maximale, ce qui signifie qu'à une date t donnée, la probabilité que les cours futurs atteignent des niveaux inférieurs à la courbe au pire est inférieure ou égale au seuil de probabilité fixé.

La courbe au pire à l'instant t et pour un niveau de probabilié p donné se note donc de la façon suivante :

$$C_{p_t} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma \alpha_p \sqrt{t}}$$

Avec :

[4] Formules issues des mémoires [9] et [10].

μ : le rendement moyen de l'unité de compte

σ : la volatilité moyenne de l'unité de compte considérée

$\alpha_p : N^{-1}(p),\ p = 5\%$ alors $\alpha_p =\ 1{,}65$ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

À l'instar de la maquette déterministe développée plus haut, les formules suivantes sont ensuite utilisées :

$$PM_t = \ (PM_{t-1} \times (1 + tren_t)^{0{,}5} - RT_t - RP_t) \times (1 + tren_t)^{0{,}5}$$

Avec le taux de rendement net :

$$tren_t = (1 + treb_t) \times (1 - \theta - g) - 1$$

Et le taux de rendement brut :

$$treb_t = \frac{C_{p_t}}{C_{p_{t-1}}} - 1$$

Ainsi,

$$Engagement\ assuré = \sum_{t=1}^{t=T} ta \times \left(\theta \times (1 + treb_t) \times PM_{t-1} \times \left(\frac{{}_tp_x + {}_{t-1}p_x}{2}\right) + \theta \times \frac{RT_t \times {}_tp_x}{2}\right)$$

Avec cette méthode, le prix θ de la garantie en cas de vie correspond donc au pourcentage qui donnera le ratio suivant :

$$\frac{Valeur\ actuelle\ probable\ du\ prix\ global\ du\ put}{Valeur\ actuelle\ probable\ de\ la\ PM} = 1$$

Soit $Engagement\ de\ l'assureur = Engagement\ de\ l'assuré$

C'est donc ce pourcentage qui sera prélevé au client sur son encours au titre de la garantie en cas de vie, en plus des frais de gestion sur encours prévus au contrat.

III.3) Résultats obtenus et sensibilités

L'étude de cette garantie en cas de vie fait suite à une demande du service commercial. Ainsi, sa rentabilité devra être testée sur le marché. Une bonne tendance des marchés est nécessaire pour que la garantie soit intéressante à commercialiser, c'est pourquoi des incertitudes persistent. Pour affiner au mieux les hypothèses pour que la garantie soit attrayante pour le client, les différentes sensibilités sont testées. Chacune des hypothèses présentes dans la maquette a finalement un poids important dans le pourcentage qui sera proposé au client.

Conformément aux hypothèses de sensibilités citées précédemment, les paramètres suivants seront testés.

Premièrement, c'est l'impact de la variable âge de l'assuré au moment de la souscription qui est testé :

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 100% :

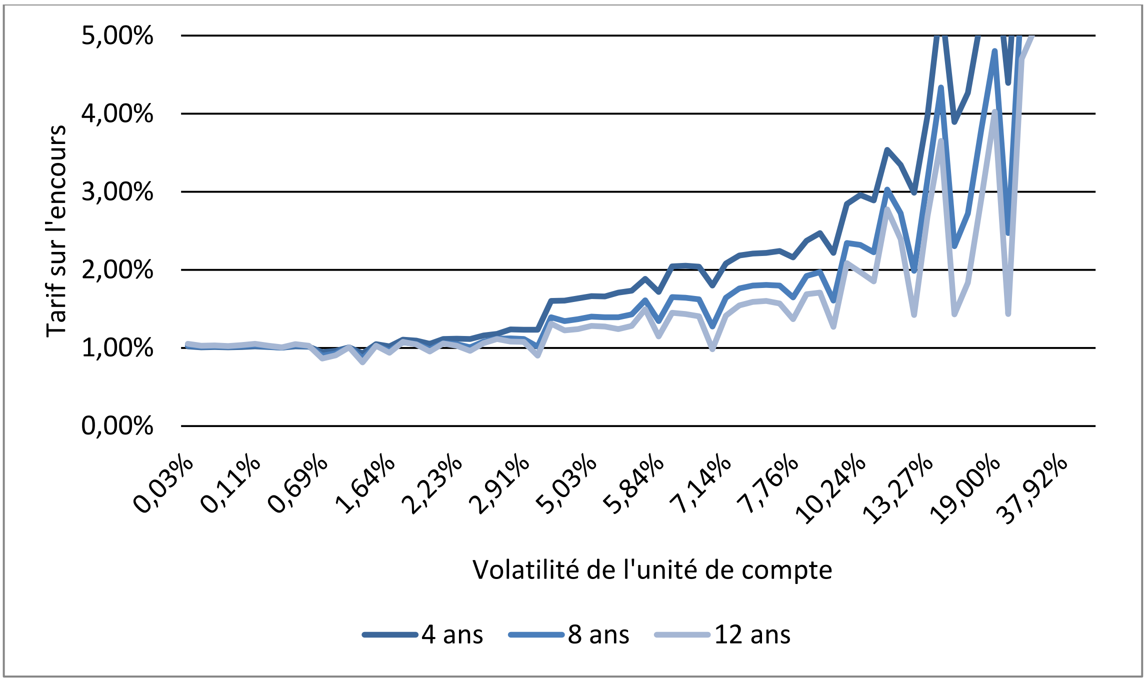


Figure 22: Tarification obtenue avec la méthode Black and Scholes pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 100%

La figure 23 présente les tarifs obtenus avec le modèle de Black and Scholes. Avec un capital garanti de 100%, lorsque l'échéance de la garantie est la plus courte (4 ans), les tarifs suivent une courbe qui se situe un peu au-dessus des autres échéances. Pour les volatilités des unités de compte les plus faibles, les tarifs débutent à 1% pour toute échéance et augmentent ensuite. Pour les volatilités les plus grandes, les tarifs deviennent très importants, l'axe des tarifs du graphique a néanmoins été placé à 5%, les tarifs situés au-delà étant considérés comme trop importants. En effet, pour ces unités de compte il sera considéré qu'il n'est pas prudent de proposer la garantie en cas de vie : le risque de perte est trop élevé.

- Cas d'un assuré de 35 ans pour un capital garanti de 100% :

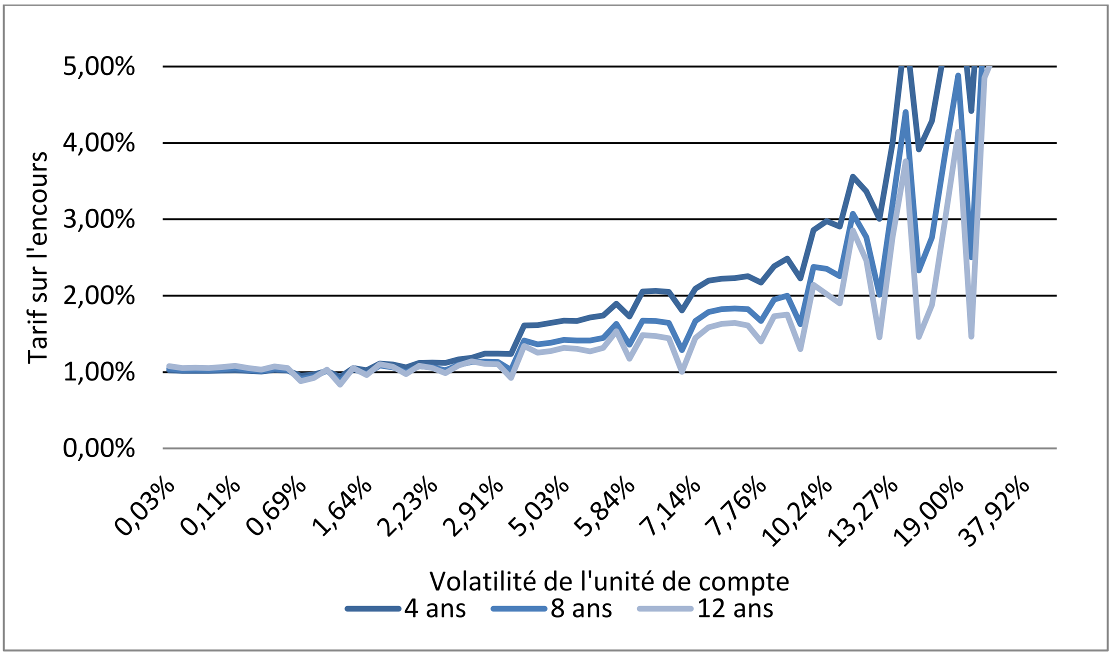


Figure 23 : Tarification obtenue avec la méthode Black and Scholes pour un assuré de 35 ans, et un capital garanti de 100%

Les différents graphiques obtenus à trois âges différents montrent que l'âge impacte peu la tarification : les allures des courbes sont similaires.

Ensuite, c'est l'impact qu'a le pourcentage de capital garanti sur le tarif qui est étudié:

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 90% :

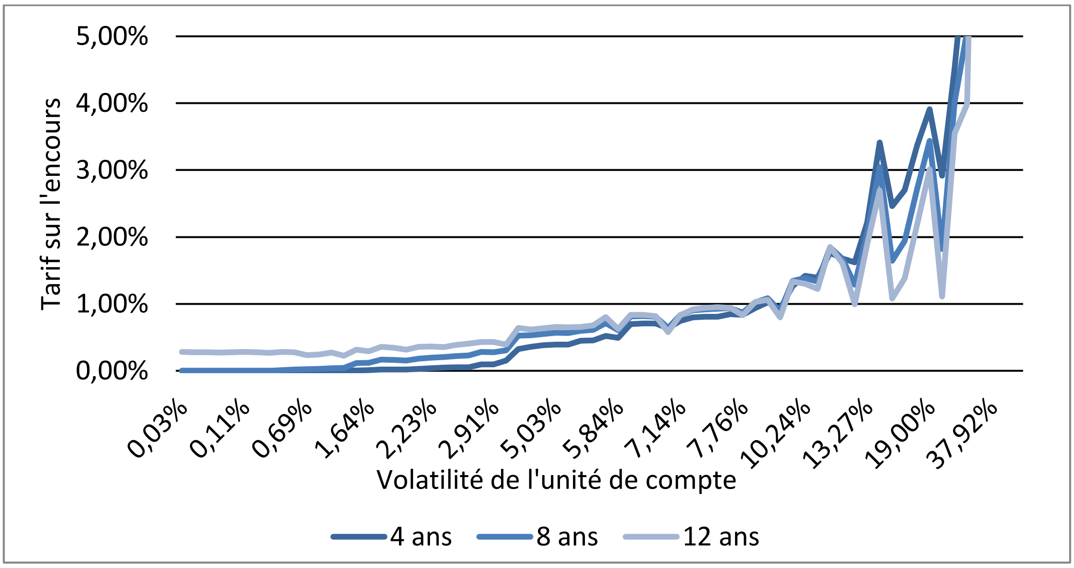


Figure 24 : Tarification obtenue avec la méthode Black and Scholes pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 90%

Lorsque le pourcentage de capital garanti est plus faible, sur la figure 25, 90%, des courbes de tarifs moins élevées sont observées et qui restent plus longtemps sous le seuil de 1%. De plus, elles décollent avec la volatilité de l'unité de compte plus tardivement que lorsque le pourcentage de capital garanti est de 100%. Ainsi, les allures des courbes obtenues sont moins oscillantes.

- Cas d'un assuré de 55 ans pour un capital garanti de 80% :

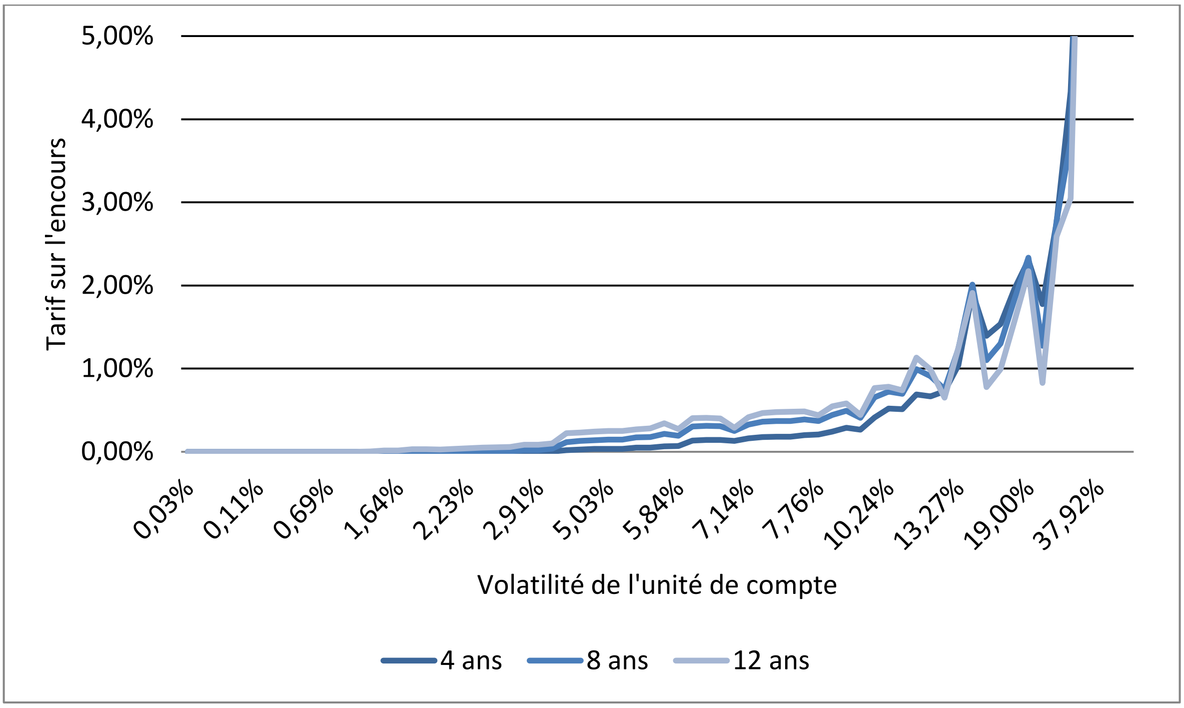


Figure 25 : Tarification obtenue avec la méthode Black and Scholes pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 80%

À nouveau et de façon encore accentuée, lorsque le pourcentage de capital garanti est plus faible, les tarifs obtenus sont peu significatifs pendant longtemps : la volatilité correspondant à l'explosion des tarifs est plus grande. De plus, contrairement aux cas précédents, ce n'est pas toujours le cas de l'échéance à 4 ans, qui est la courbe située au-dessus de celles correspondant aux autres échéances.

III.4) Grille de tarif volatilité – rendement

Les sensibilités effectuées dépendent de nombreux facteurs. Pour avoir une vision plus globale du tarif, une grille de tarif est réalisée selon le modèle de Black and Scholes. Ce sont les valeurs des volatilités des unités de compte de la base de données qui sont utilisées tout en se basant sur des rendements variant entre -5% et 5%. L'objectif est alors de comparer l'influence de ces deux paramètres sur les tarifs. Ainsi, un tarif à prélever au titre de la garantie en cas de vie est obtenu pour chaque couple volatilité-rendement. Un graphique en trois dimensions est alors tracé sur R :

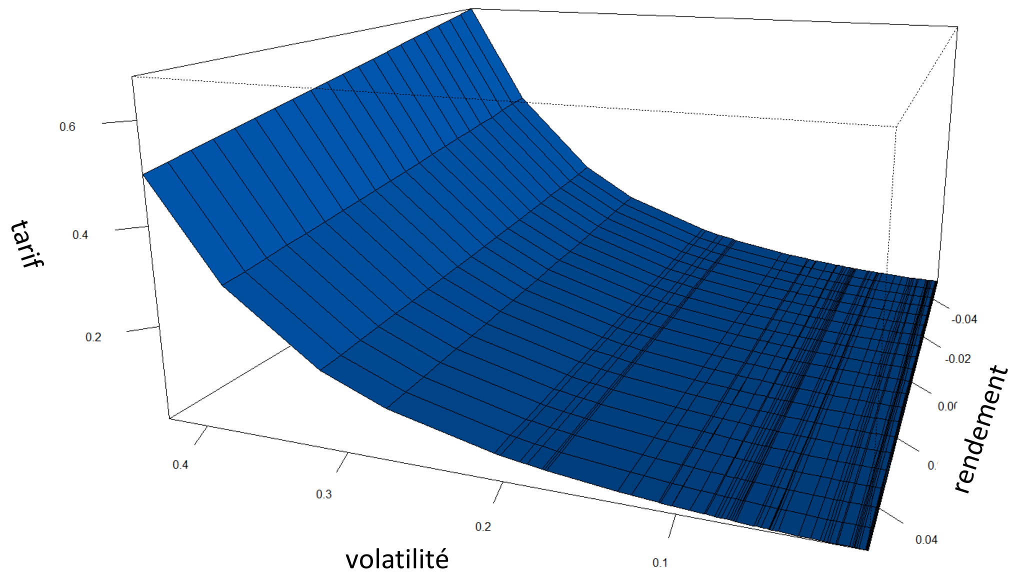


Figure 26 : Graphique en 3D du tarif avec la méthode de Black and Scholes en fonction de la volatilité et du rendement

La figure 27 montre que la volatilité de l'unité de compte est le paramètre qui joue un rôle essentiel sur l'augmentation du tarif. À contrario, le rendement de l'unité de compte ne fait pas décoller le tarif de la garantie en cas de vie.

III.5) Limites de cette méthode

Le modèle de Black and Scholes est souvent utilisé pour modéliser les cours d'actifs financiers. Il présente néanmoins certaines limites.

Premièrement, une limite rencontrée dans la réalisation de la maquette du modèle de Black and Scholes correspond au phénomène précédemment décrit. En effet, pour les volatilités des unités de compte trop importantes, les tarifs explosent : il n'est pas prudent de proposer la garantie en cas de vie sur ce type de support.

Cette méthode nécessite de disposer de la volatilité des supports unités de compte, ce qui peut parfois être difficile lorsqu'il s'agit de nouveaux supports par exemple.

Enfin, l'inconvénient majeur de ce modèle réside dans l'utilisation d'une volatilité constante alors qu'en réalité il y a une nappe de volatilité. En effet, dans la réalité, les cours présentent des discontinuités dans leurs trajectoires, notamment dans les périodes de crise où l'on peut observer des sauts d'évolution des prix des actifs. C'est donc un modèle inapproprié lorsque l'on veut modéliser finement l'évolution des cours d'actifs risqués.

Pour pallier à ce problème de volatilité implicite, il existe plusieurs modèles. Il existe des modèles qui calibrent le smile de volatilité (représenté sur la figure 27 à l'instar de ce qui a été fait dans le mémoire [10] de Marine Cottin) comme des modèles à volatilité locale où la volatilité est exprimée par une fonction déterministe du cours de l'actif et du temps. Le modèle de Dupire par exemple est un modèle qui calibre parfaite le smile de la volatilité qui est observée sur le marché. Ou encore des modèles à volatilité stochastique comme le modèle de Heston où la volatilité est estimée comme une variable aléatoire.

Cependant, dans le cadre de ce mémoire, l'application de ces modèles ne sera pas effectuée car l'échelle de temps choisie est considérée comme raisonnable pour se limiter au modèle de Black and Scholes. En effet, les échéances étudiées sont de 4 ans, 8 ans, 12 ans. Les périodes de temps ne varient pas beaucoup, ce qui justifie l'utilisation et l'application du modèle simple de Black and Scholes.

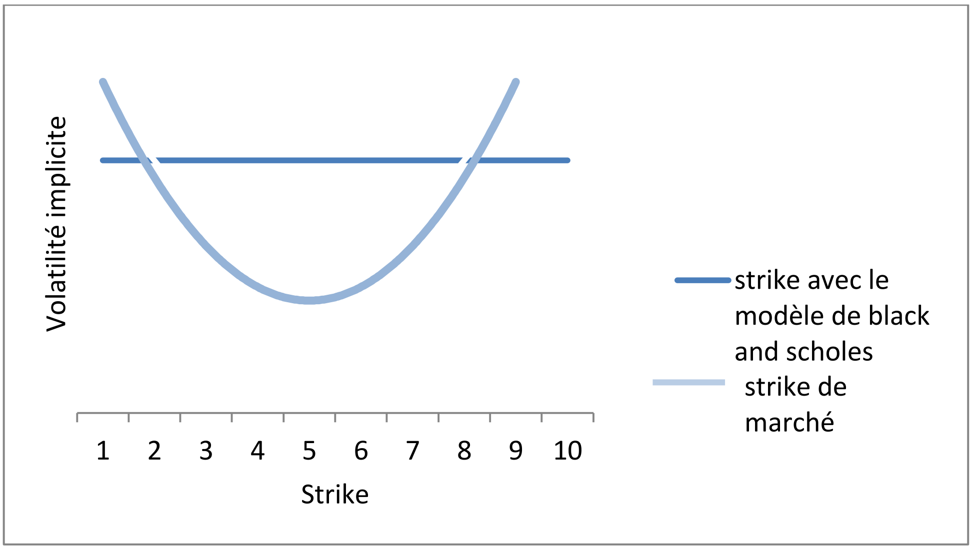


Figure 27 : Schéma du smile de volatilité

Le modèle stochastique de Black and Scholes qui a été appliqué prend comme paramètre un taux sans risque r égal à zéro, ce qui ne reflète pas correctement la réalité. Pour se rapprocher le plus possible de la réalité, enrichir le modèle, et éviter d'utiliser cette hypothèse forte, la partie suivante propose de faire évoluer ce taux sans risque r dans le temps grâce au modèle de Vasicek.

IV- Le modèle de Vasicek

Cette partie s'appuie sur les travaux [1], [2], [6] et [14] référencés en bibliographie.

IV.1) Présentation du modèle

Le modèle de Vasicek est un modèle qui évalue le taux d'intérêt instantané suivant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (développé en annexe 3). L'utilisation de ce modèle, de par son caractère aléatoire, permet une bonne modélisation du comportement incertain du taux sans risque. Il est défini par la formule suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Avec :

r_t : le taux au temps t
a : une constante positive représentant la vitesse de retour à la moyenne à long terme, avec $a > 0$ cela assure la stabilité autour de la valeur à long terme.
b : une constante positive, la moyenne à la long terme du taux
$a(b - r_t)$: l'évolution attendue du taux d'intérêt au moment t
σ : la volatilité qui donne un certain poids à W et mesure l'amplitude du caractère aléatoire
W : un mouvement Brownien

Pour résoudre cette équation différentielle stochastique le processus suivant est utilisé:

$$Y_t = r_t e^{-at}$$

Auquel, le lemme d'Itô est appliqué :

$$dY_t = e^{-at}dr_t - ae^{-at}r_t dt = e^{-at}(dr_t - ar_t dt) = e^{-at}(abdt + \sigma dWt)$$

La formule de Y_t est alors obtenue :

$$Y_t = r_0 + \int_0^t abe^{-as}\, ds + \int_0^t \sigma e^{-as}\, dW_s$$

La solution de l'équation différentielle stochastique avec r_0 le taux à l'instant 0 est donc la suivante :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} + \int_0^t e^{as} dWs$$

Avec $E[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$ et $Var[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$

Ce modèle présente l'avantage de s'appliquer simplement car il s'agit d'un modèle à un facteur. Il fournit des expressions analytiques pour le pricing des produits de taux standards : zéro-coupons, obligations à coupons, swaptions… et permet ainsi d'obtenir des solutions analytiques des taux. De plus, il ne nécessite que peu de paramètres pour calculer les taux, ce qui permet une simulation informatique relativement aisée. En revanche, ce modèle ne reproduit pas exactement toutes les formes prises par la courbe des taux dans la réalité : la courbe obtenue avec le modèle de Vasicek ne reflète pas exactement les évolutions et formes que peuvent prendre la courbe réelle.

Le phénomène que met en évidence le modèle de Vasicek est le phénomène de retour à la moyenne. b représente le taux d'intérêt moyen à long terme et le modèle décrit une baisse autour de cette valeur moyenne. Ainsi, deux cas peuvent se présenter, ils seront illustrés avec le graphique suivant :

- si le taux d'intérêt est supérieur à b, une baisse de $r_t$vers b sera observée car le premier terme de l'équation différentielle $a(b - r_t)$ est négatif.

- si le taux d'intérêt est inférieur à b, alors le premier terme de l'équation différentielle est positif et r_t aura tendance à augmenter pour se rapprocher de la valeur moyenne à long terme.

C'est la raison pour laquelle a représente la vitesse d'ajustement de r_t vers la valeur moyenne à long terme.

Pour expliquer ce phénomène, l'inflation étant inversement proportionnelle aux taux d'intérêt, lorsque les taux sont élevés alors les emprunts sont moins nombreux, ce qui tend à ralentir l'économie et réduire l'inflation. À contrario, lorsque les taux sont faibles, les emprunts ont tendance à augmenter ce qui fait augmenter les taux. Ce phénomène est représenté sur la figure 28 ci-dessous, comme ce qui a été fait dans le mémoire de Geoffroy Beuil [6].

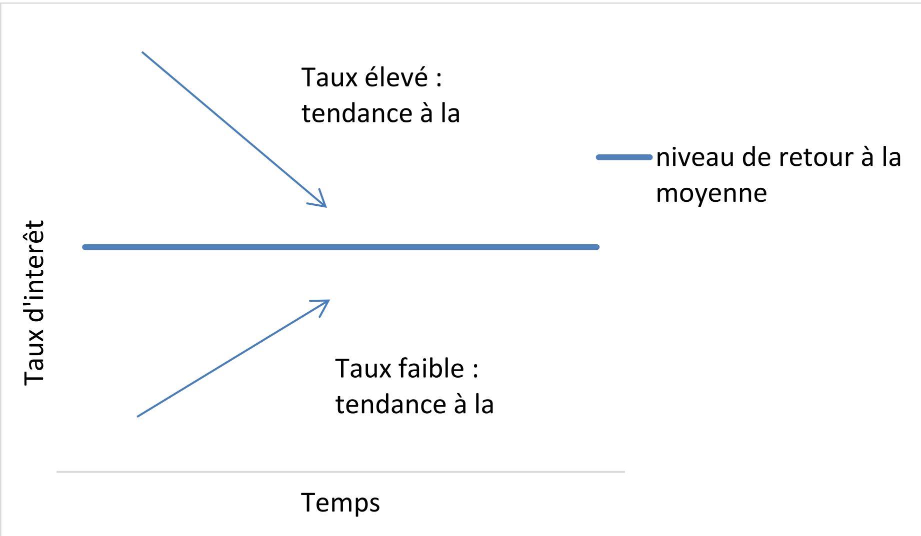


Figure 28 : Illustration du phénomène de retour à la moyenne

IV.2) Estimation des paramètres et application du modèle

La calibration des paramètres du modèle de Vasicek s'effectue avec la solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessous :

$$r_{t+1} = e^{-a} r_t + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a})}{2a}} \varepsilon_t$$

Avec ε_t une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite

$$r_t - r_{t-1} = b(1 - e^{-a}) + (1 - e^{-a}) r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}))$

Il existe différentes méthodes pour estimer les paramètres (séries temporelles, maximum de vraisemblance…). À l'instar de la méthode employée dans le mémoire de Beuil Geoffroy [6], la méthode appliquée dans le cadre de ce mémoire est issue de l'équation qui permet d'appliquer une régression linéaire sur chaque historique d'unité de compte qui est divisé en deux jeux de données

$$r_{t+1} = \beta_{1 r_t} + \beta_0 + \varepsilon$$

Avec β_1 et β_0 les coefficients de la régression linéaire et ε les erreurs.

Les données de la régression permettent alors d'estimer les paramètres manquants du modèle de la façon suivante :

$a = -\ln(\beta_1)$

$b = \dfrac{\beta_0}{1 - \beta_1}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{var(\varepsilon)}{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}}$

Sur R, les paramètres des unités de comptes étudiées sont obtenus en divisant l'historique des taux de rendement en deux parties.

Une limite a été rencontrée à cette étape pour certaines unités de compte. En effet, le coefficient β_1 de la régression linéaire obtenu était négatif, ce qui empêchait d'appliquer correctement les formules préalablement citées pour estimer les paramètres et ainsi appliquer la formule du modèle de Vasicek. Lorsque le β_1(coefficient directeur de la droite) obtenu est négatif, cela signifie que la tendance de l'historique des variations de l'unité de compte est à la baisse. Face à cette contrainte, et constatant que les pentes estimées négatives ne sont pas très élevées, il peut être considéré qu'elles sont proches de 0+, c'est-à-dire que l'on considère alors qu'elles ont une force de rappel très grande. Il s'agit d'une hypothèse forte mais qui permet de poursuivre l'application du modèle de Vasicek.

Une fois les paramètres estimés, la formule de Vasicek est appliquée pour chaque cas, et la méthode de Monte-Carlo est utilisée. Pour chaque cas, la trajectoire débute au taux $r_0$et jusqu'à la maturité maximale du modèle : 12 ans. Pour chaque maturité allant de 1 à 12 ans, ce sont 10 000 trajectoires qui sont simulées (seuil à partir duquel plus d'écart important n'est observé entre les résultats obtenus) la moyenne des valeurs est récupérée dans une matrice.

En effet, d'après la loi des grands nombres :

Soient $X_{1,}X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, alors quand n est suffisamment grand :

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow E(X)$$

Et

$$\frac{g(X_1) + g(X_2) + \cdots + g(X_n)}{n} \rightarrow E(g(X))$$

Ainsi, la moyenne des trajectoires de taux d'intérêts simulés converge vers l'espérance de trajectoires simulées.

Les taux partent de leur valeur initiale r_0 pour tendre vers une valeur finale : la moyenne du taux à long terme dans l'intervalle de temps prévu, comme l'illustre le graphique ci-dessous :

La méthode de Monte-Carlo est une méthode numérique qui permet d'estimer les caractéristiques de la loi de probabilité de $F(X)$ (telle que la moyenne, l'écart-type, les quantiles …) à partir de la densité de probabilité de X. Elle consiste à générer des tirages aléatoires indépendants $x1, x2, x3, \dots, xn$ en fonction de la densité de probabilité de $F(X)$ à partir de statistiques établies sur l'échantillon des n résultats $F(x1), F(x2), F(x3), \dots, F(xn)$.

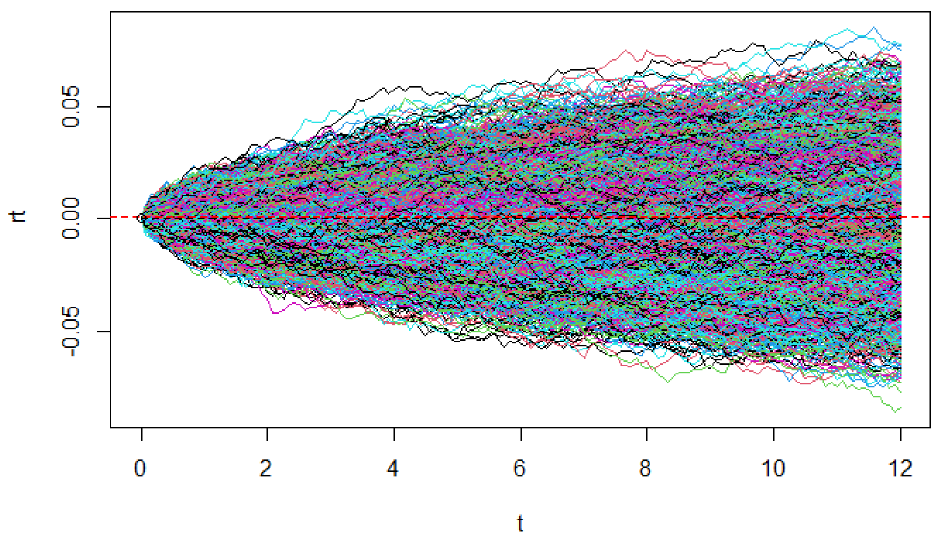


Figure 29 : Simulations de trajectoires de taux d'intérêt avec le modèle de Vasicek

IV.3) Résultats obtenus et sensibilités

Une fois le modèle appliqué, l'objectif est d'enrichir le modèle de Black and Sholes, en faisant évoluer le paramètre r taux sans risque, précédemment fixé à 0%. La maquette est donc réutilisée avec une hypothèse différente : les résultats obtenus par le modèle de Vasicek sont introduits. L'objectif étant de faire diminuer les tarifs de la garantie en cas de vie.

Par exemple, le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus pour une unité de compte, avec la simulation du modèle de Vasicek. Il s'agit de l'évolution du taux sans risque r, pour chaque échéance étudiée :

Paramètres	Résultats
β_1	0,118
β_0	0,012
$\sqrt{Var(\varepsilon)}$	0,052
a	2,135
b	0,013
σ	0,052

Tableau 5 : Exemple pour un cas de l'estimation des paramètres du modèle de Vasicek

Ainsi pour ce fonds, pour chaque échéance la moyenne des 10 000 simulations effectuées donne :

R0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4,33%	1,62%	1,31%	1,40%	1,39%	1,28%	1,42%	1,31%	1,34%	1,37%	1,34%	1,33%	1,42%

Tableau 6 : Exemple pour un cas des résultats obtenus par le modèle de Vasicek

Quelques résultats des sensibilités obtenues sont présentés ci-dessous, en comparaison avec ceux obtenus avec le modèle de Black and Scholes :

- Cas d'un assuré de 55 ans pour une garantie d'échéance de 4 ans et 100% de capital garanti :

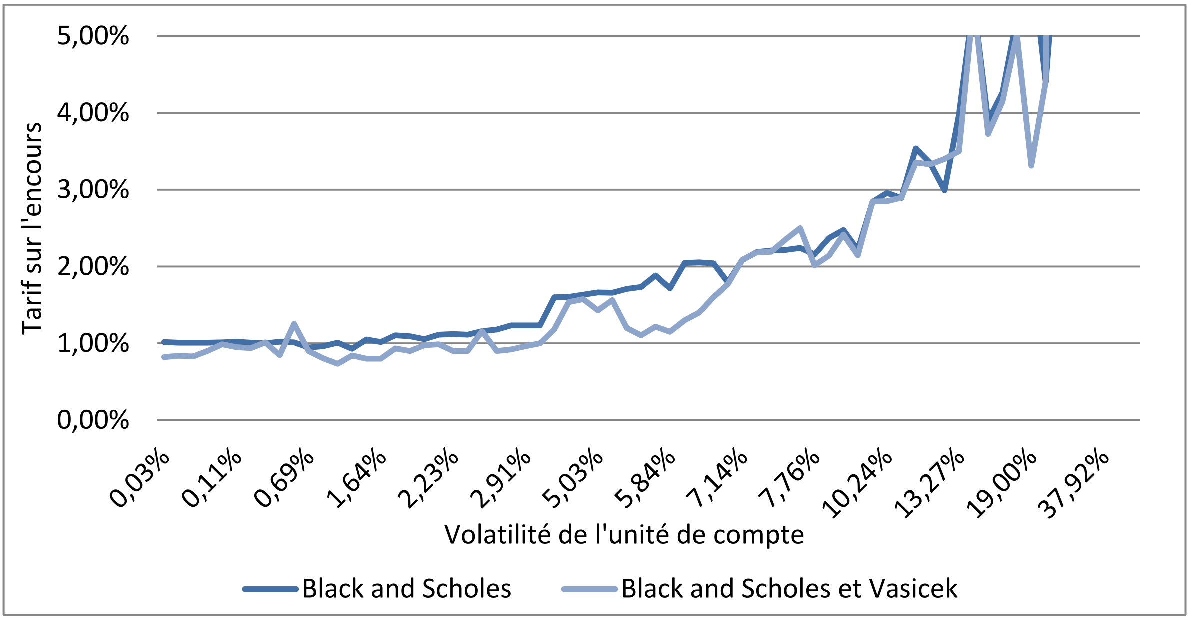


Figure 30 : Tarifications obtenues avec la méthode Black and Scholes et Vasicek pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 100%, échéance de 4 ans

L'enrichissement du modèle de Black and Scholes avec le modèle de Vasicek a bien fait diminuer le tarif estimé. La même allure de courbe oscillante est observée mais se situant en-dessous : c'est ce qui était recherché. Puis, à partir d'un certain seuil, autour de 10% de volatilité d'unité de compte, une explosion du tarif est observée.

- Cas d’un assuré de 35 ans, pour une garantie d’échéance de 4 ans et 100% de capital garanti :

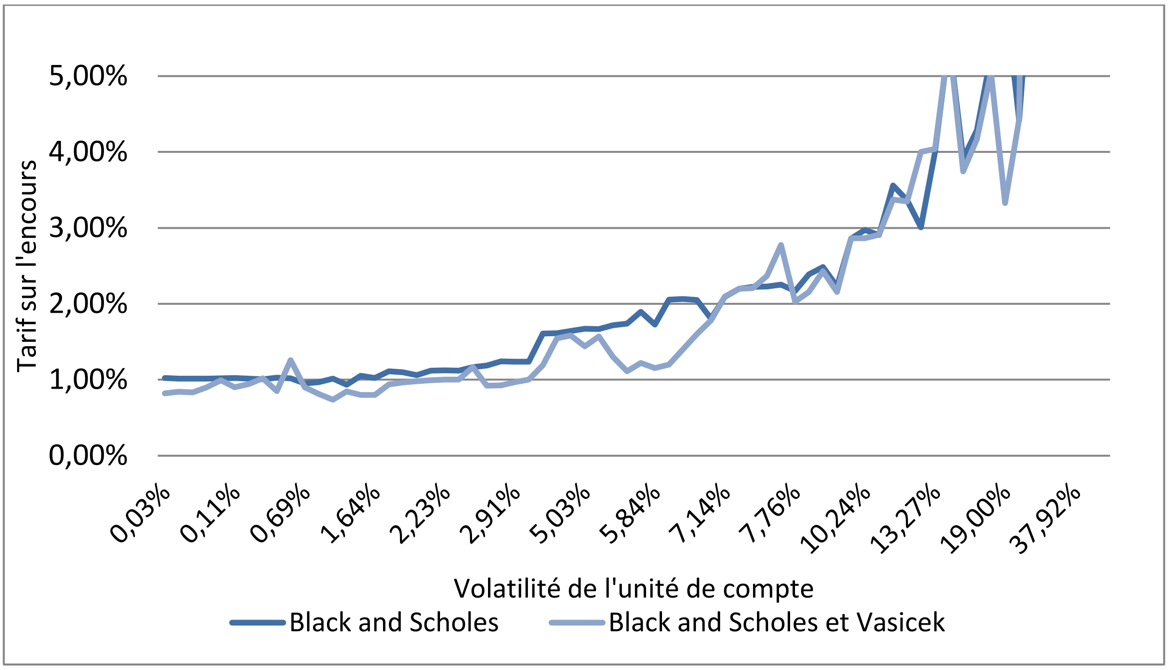


Figure 31 : Tarifications obtenues avec la méthode Black and Scholes et Vasicek pour un assuré de 35 ans et un capital garanti de 100%, échéance de 4 ans

Comme pour le modèle de Black and Scholes l’âge a très peu d’impact, les mêmes trajectoires de courbes sont observées pour 35 ans, 55 ans et 75 ans.

- Cas d’un assuré de 55 ans pour une garantie d’échéance de 4 ans et 80% de capital garanti :

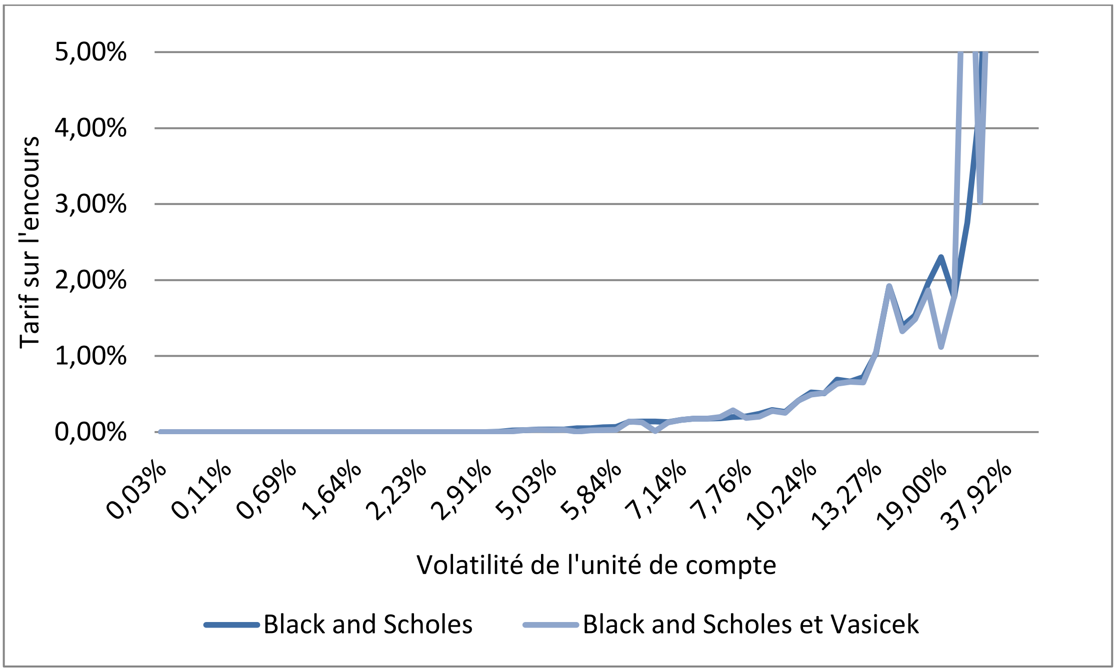


Figure 32 : Tarifications obtenues avec la méthode Black and Scholes et Vasicek pour un assuré de 55 ans et un capital garanti de 80%, échéance de 4 ans

Lorsque le capital garanti est moins important, les tarifs sont faibles et ne dépassent le seuil de 1% de tarif qu’à partir d’environ 13% de volatilité. L’impact du modèle de Vasicek sur le tarif est moins intéressant lorsque le capital garanti est plus faible : l’écart entre les deux courbes est beaucoup moins important.

V- Arbres binomiaux

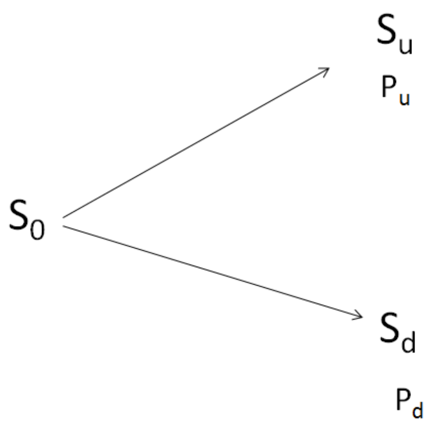
Cette partie s'appuie sur les travaux [13] et [20] référencés en bibliographie.

V.1) Présentation de la méthode

Une autre méthode d'estimation du tarif de la garantie en cas de vie va être maintenant appliquée. Il s'agit d'une méthode d'algorithme des arbres binomiaux développée par Cox, Ross et Rubinstein.

Le principe est le même que celui précédemment développé pour le modèle de Black and Scholes : évaluer le prix d'un put européen, mais il s'agit ici d'une méthode analytique et non numérique. L'idée est de construire un arbre qui représente les différents chemins que l'actif peut suivre jusqu'à une certaine échéance. Alors, en considérant qu'à chaque date il existe deux chemins possibles, le sous-jacent peut :

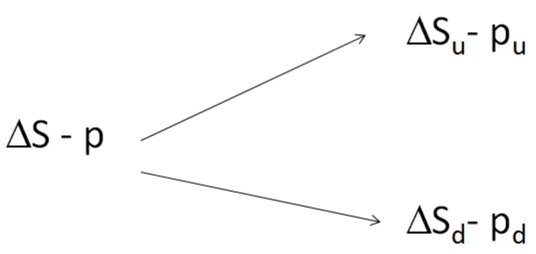
- augmenter au prix $S_u = S_0 \times u$
- diminuer au prix $S_d = S_0 \times d$



Le flux de l'option sera C_u ou C_d pour un call et P_u ou P_d lorsqu'il s'agit d'un Put.

Ainsi, pour une option européenne, deux issues sont possibles, chacune étant caractérisée par un payoff spécifique. En partant d'un sous-jacent de cours S_0 à l'instant $t = 0$, soit la durée de l'option T, le sous-jacent a pu augmenter d'un facteur u (payoff P_u) ou bien diminuer d'un facteur d (payoff P_d) comme sur le schéma ci-dessous.

On cherche donc à construire, le portefeuille sans risque de la forme :



La valeur recherchée est le Δ qui permet d'avoir un portefeuille sans risque, qui rapporte le taux d'intérêt sans risque : $S_u\Delta - p_u = S_d\Delta - p_d$

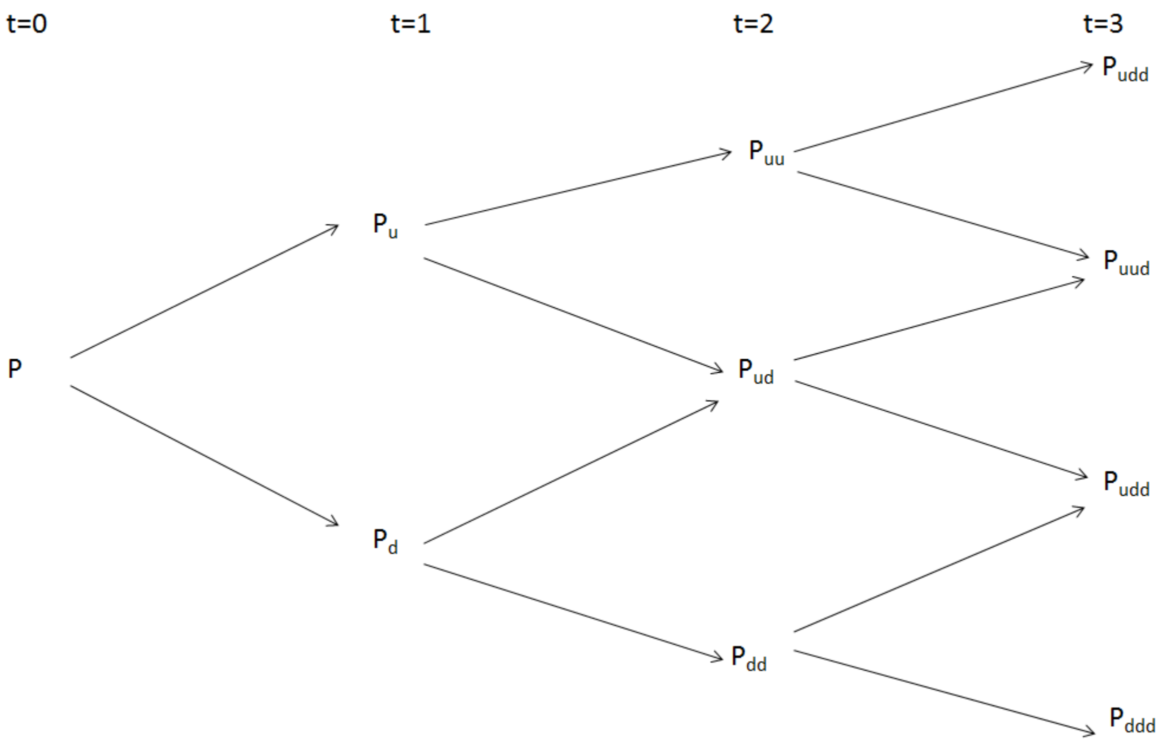
Soit $\Delta = \frac{p_u - p_d}{S_u - S_d}$

Donc la valeur présente du portefeuille sans risque est:

$$S_u\Delta - p_u = (S_u\Delta - p_u)e^{-rT}$$

En remplaçant Δ par la formule préalablement citée et en posant $p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d}$, alors :

$$p = e^{-rT}[p \times p_u + (1 - p) \times p_d]$$



Il est ainsi possible de construire une palette de chemins possibles pour le cours du sous-jacent. Cette méthode permet de valider les résultats obtenus par le modèle de Black and Scholes.

À chaque nœud de l'arbre de coordonnées (i, j), la valeur du support est $S_0 u^j d^{i-j}$ et le nombre de chemins possibles pour atteindre cette valeur est C_j^i.

Pour ajouter de la précision, il faut prendre en compte suffisamment de nœuds mais aussi la volatilité σ :

$$\text{Avec } u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ et d} = \frac{1}{u}$$

V.2) Résultats obtenus et convergence vers le modèle de Black and Scholes

Pour confirmer les résultats obtenus avec le modèle de Black and Scholes, des arbres binomiaux sont utilisés, lesquels valorisent le put. Pour chaque cas testé, un code sous R est utilisé, il utilise le même sous-jacent S_t et le même strike K que dans la maquette de Black and Scholes. Les autres paramètres nécessaires sont l'échéance T et la volatilité σ de l'unité de compte considérée. En appliquant les formules de Black and Scholes, la même valeur que le put de la maquette est bien retrouvée.

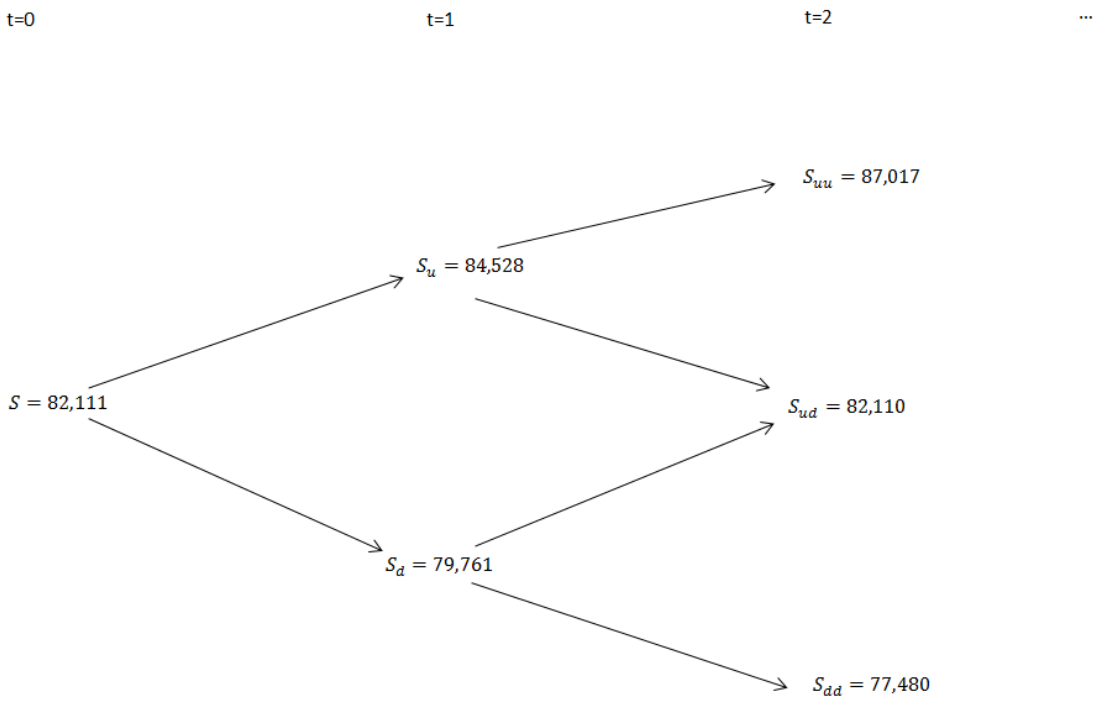
Exemple illustratif pour un cas avec les hypothèses suivantes :

- Échéance $t = 4\ ans$
- Sous-jacent B&S $S_4 = 82{,}111$
- Strike B&S $K_4 = 85{,}778$
- Volatilité $\sigma = 0{,}1026$
- Taux sans risque $r = 0\%$

Premièrement, en appliquant les formules de Black and Scholes, un put de 8,849 est obtenu. L'objectif est de montrer que la méthode d'algorithme des arbres binomiaux va converger vers cette valeur.

Avec les mêmes hypothèses, et en fixant le nombre d'itérations $N = 1\,000$, alors, $u = 1{,}029$ et $d = 0{,}971$. Ce qui permet d'appliquer : $p = \frac{e^{-rT}-d}{u-d}$ Soit $p = \frac{e^{0\times4}-0{,}971}{1{,}029-0{,}971} = 0{,}493$

L'arbre binomial du prix du sous-jacent est tracé, en voici un extrait pour les trois premiers nœuds :



À partir de cet arbre, l'arbre recherché est tracé, celui d'un put européen. En partant de la dernière branche, le calcul du $Max(85{,}778 - S_T; 0)$ est effectué avec S_T les différents résultats obtenus en dernière branche de l'arbre précédent. Il reste ensuite à appliquer la formule ci-dessous et remonter l'arbre jusqu'à l'origine.

$$p = e^{-rT}[p \times p_u + (1 - p) \times p_d]$$

Avec $N = 100$ itérations, la valeur du put européen est obtenue soit 8,866.

Les graphiques suivants présentent la convergence des résultats obtenus avec la méthode d'algorithme des arbres binomiaux vers le put de Black and Scholes en fonction du nombre d'itérations :

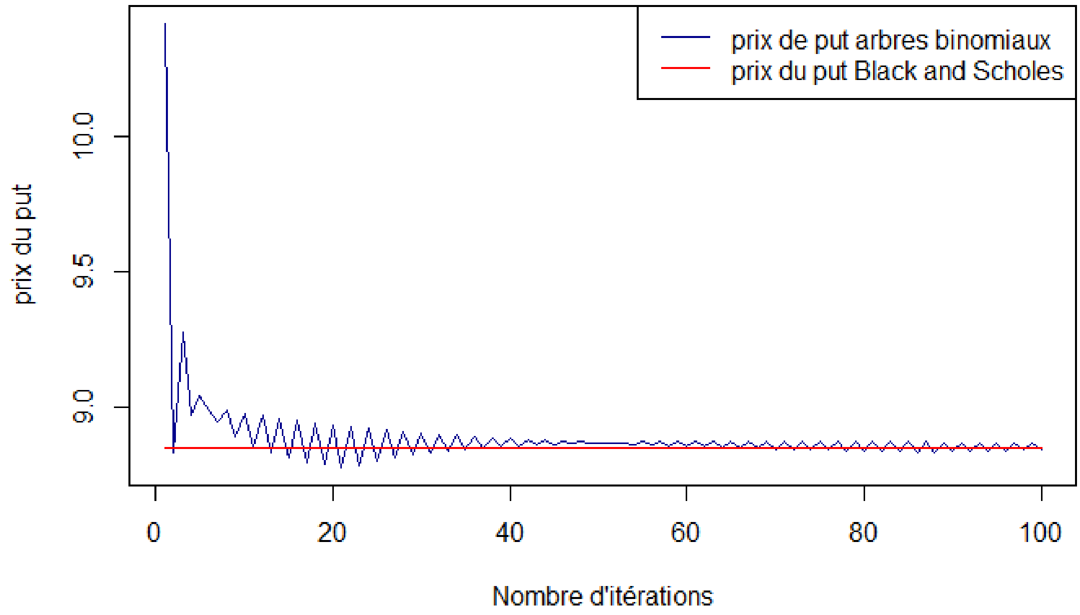


Figure 33 : Convergence prix du put avec la méthode des arbres binomiaux vers le prix Black and Scholes, pour un cas de volatilité de 10,26%, pour un assuré de 55 ans, un capital garanti 100% et une échéance de 4 ans

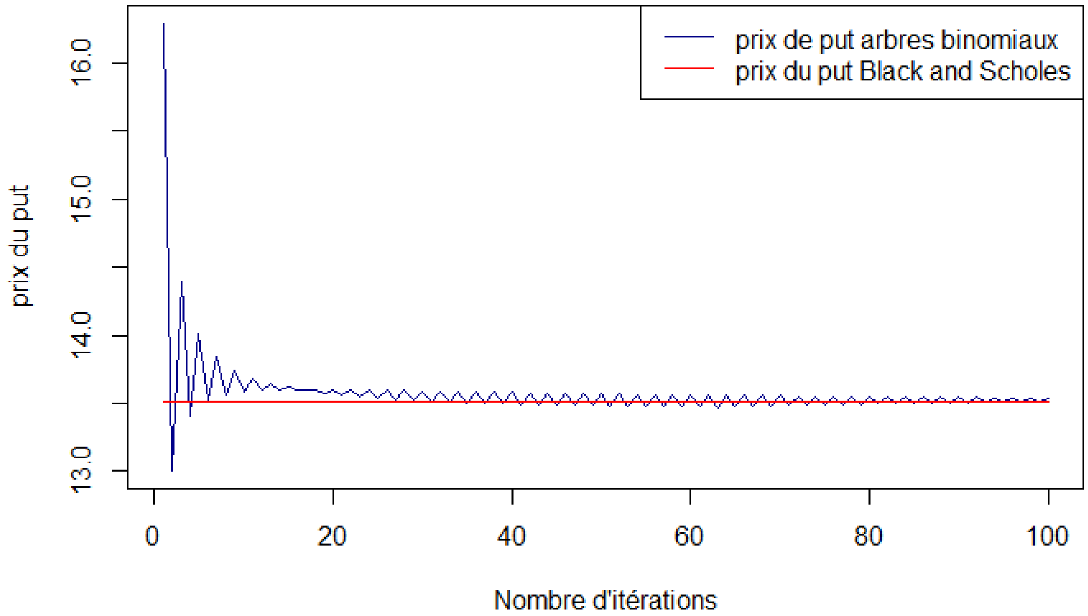


Figure 34 : Convergence prix du put avec la méthode des arbres binomiaux vers le prix Black and Scholes, pour un cas de volatilité de 17,39%, pour un assuré de 55 ans, un capital garanti 100% et une échéance de 4 ans

Lorsque la volatilité de l'unité de compte est plus faible, la convergence vers le prix du put avec Black and Scholes est plus rapide : elle nécessite moins d'itérations.

VI- Etude de cas

Dans cette partie, un exemple concret va être présenté en effectuant une étude de cas des méthodes de tarification appliquées. En effet, à partir d'une étude statistique, il est obtenu que sur les deux produits étudiés dans le cadre de la garantie en cas de vie, en moyenne les assurés investissent au sein de leur contrat sur 5,7 unités de compte.

Pour vérifier la fiabilité des méthodes utilisées, l'étude de cas va uniquement se baser sur des fonds en unités de compte référencés en 2021. L'objectif est ainsi d'étudier trois profils types de clients, plus ou moins averses au risque et ainsi d'étudier quel profil type de client pourrait être le plus intéressé par la souscription d'une garantie en cas de vie.

VII.1) Validation du tarif obtenu

Pour réaliser cette étude de cas, trois contrats ayant investi sur des unités de compte et ayant des profils différents ont été sélectionnés :

- Le premier, que l'on qualifiera de défensif, ayant investi sur des unités de compte présentant des SRRI entre 2 et 3.

- Le deuxième, que l'on qualifiera d'équilibré, ayant investi sur des unités de compte présentant des SRRI entre 4 et 5.

- Le troisième, que l'on qualifiera de dynamique, ayant investi sur des unités de compte présentant des SRRI entre 6 et 7.

Profil défensif		Profil équilibré		Profil dynamique	
SRRI	Montant investi	SRRI	Montant investi	SRRI	Montant investi
2	6 367,96 €	5	525,00 €	6	682,50 €
3	6 367,96 €	5	525,00 €	7	682,50 €
3	6 367,96 €	4	525,00 €	7	1 365,00 €
2	6 367,96 €	4	525,00 €		
3	6 367,96 €				

Tableau 7 : Descriptif du portefeuille étude de cas

De la même façon que précédemment, une matrice de variance-covariance est réalisée, se basant sur les valeurs liquidatives des unités de compte sélectionnées de façon mensuelle :

	Volatilité moyenne annualisée	Rendement moyen annualisé
PROFIL DEFENSIF	2,96%	1,56%
PROFIL EQUILIBRE	17,34%	2,88%
PROFIL DYNAMIQUE	33,12%	3,81%

Tableau 8 : Descriptif de la volatilité et du rendement de l'étude de cas

Conformément aux SRRI des unités de compte des trois profils, les volatilités moyennes annualisées sont plus importantes lorsque le profil est dynamique. Dans le cadre de l'étude de cas, ceci s'accompagne également d'un plus fort rendement.

Pour chaque méthode, chaque sensibilité et chaque profil, des grilles de tarifs de la forme suivantes sont créées :

- Profil défensif :

Durée	4 ans		
Âge de l'assuré	55		
Taux garanti	100%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
2	2,36%	1,15%	1,08%
3	2,55%	1,16%	1,01%
2	2,81%	1,23%	1,30%
3	2,91%	1,19%	0,59%
3	4,18%	1,46%	1,36%

Tableau 9 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 55 ans, 100% garanti, échéance de 4 ans, profil défensif

Durée	8 ans		
Âge de l'assuré	35 ans		
Taux garanti	90%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
2	2,36%	0,22%	0,18%
3	2,55%	0,23%	0,17%
2	2,81%	0,28%	0,31%
3	2,91%	0,26%	0,05%
3	4,18%	0,45%	0,38%

Tableau 10 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 35 ans, 90% garanti, échéance de 8 ans, profil défensif

Premièrement pour le profil défensif, l'enrichissement du modèle de Black and Scholes avec celui de Vasicek a bien fait diminuer le tarif. L'échéance et le pourcentage de capital garanti ont un réel effet sur le tarif : dans le tableau 10 les tarifs à prélever sur l'encours de l'assuré sont supérieurs à 1% tandis qu'ils ne dépassent pas ce seuil dans le tableau 11. Ces tarifs semblent cohérents avec les volatilités des profils défensifs, il paraît envisageable de proposer des tarifs de cet ordre de grandeur aux assurés.

- <u>Profil équilibré :</u>

Durée	4 ans		
Âge de l'assuré	55 ans		
Taux garanti	100%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
4	6,26%	1,88%	1,67%
5	11,88%	3,21%	2,77%
5	12,21%	2,91%	2,36%
4	38,99%	40,62%	40,72%

Tableau 11 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 55 ans, 100% garanti, échéance de 4 ans, profil équilibré

Durée	8 ans		
Âge de l'assuré	35 ans		
Taux garanti	90%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
4	6,26%	0,71%	0,60%
5	11,88%	1,52%	1,21%
5	12,21%	1,26%	0,86%
4	38,99%	42,52%	44,74%

Tableau 12 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 35 ans, 90% garanti, échéance de 8 ans, profil équilibré

Deuxièmement, l'écart important de volatilité entre 12,21% et 38,99% a un impact très conséquent sur les tarifs obtenus. À partir de ce seuil, les tarifs ne sont plus en concordance avec ce qui peut être envisagé de proposer aux assurés.

- Profil dynamique :

Durée	4 ans		
Âge de l'assuré	55 ans		
taux garantie	100%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
6	17,65%	5,51%	5,11%
7	35,56%	22,31%	21,38%
7	46,16%	49,51%	47,37%

Tableau 13 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 55 ans, 100% garanti, échéance de 4 ans, profil dynamique

Durée	8 ans		
Âge de l'assuré	35 ans		
taux garantie	90%		
SRRI	Volatilité	B&S	B&S et Vasicek
6	17,65%	3,12%	2,73%
7	35,56%	19,43%	18,94%
7	46,16%	53,44%	47,21%

Tableau 14 : Comparaison des méthodes pour un assuré de 35 ans, 90% garanti, échéance de 8 ans, profil dynamique

Finalement, pour le profil dynamique et comme l'utilisation de ces méthodes de tarification en a témoigné, les tarifs explosent lorsque la volatilité augmente. Pour ce type de profil, et avec ces résultats, il ne semble pas envisageable de proposer la garantie en cas de vie.

Pour mieux comprendre et justifier la raison de cette forte augmentation des tarifs lorsque les volatilités sont hautes, une étude d'indicateur de risque va être réalisée.

VII.2) Etude des Value-at-Risk (VaR)

Cette sous-partie s'appuie sur les travaux [10], [14], [17] et [22] référencés en bibliographie.

Les résultats de l'étude de cas sur les trois profils de risque prouvent une fois encore que la volatilité de l'unité de compte considérée joue un rôle primordial dans les résultats de tarifs obtenus. L'étude de la Value-at-Risk sur chacun des profils traduit pour chacun d'entre eux le maximum de perte potentielle pour un intervalle de confiance et un horizon temporel donnés. Cet indicateur répandu donne directement aux investisseurs une indication simple et compréhensible d'un risque de perte. Il donne une idée de la queue de distribution, c'est donc une mesure de risque extrême. Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine. C'est d'ailleurs à ce titre qu'elle est utilisée dans les accords de Bâle et Solvabilité II.

La Value-at-Risk notée VaR est définie comme suit:

$$VaR_\alpha = inf\{x \in R|\ F_X(x) \geq \alpha\}$$

Avec :

- X une distribution de probabilité
- F_X sa fonction de répartition
- α le seuil ou niveau de la VaR (ici 95%, 99% puis 99,5%)

Ainsi, dans le cadre de ce mémoire, X représente la distribution des cours d'une unité de compte, la VaR représente alors une limite que les cours n'atteindront ou ne dépasseront pas avec une probabilité α : pire perte attendue.

De plus, si la distribution de $X \sim P$ est continue et inversible, alors:

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = q_\alpha^P$$

F^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de X et q_α^P est le quantile de niveau α de la distribution P.

Enfin, pour modifier l'horizon temporel souhaité, il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$VaR \text{ à } N\ jours = VaR \text{ à } 1 jour\ \times \sqrt{N}$$

Il existe trois méthodes pour calculer les Value-at-Risk qui seront décrites ci-dessous:

La méthode historique est une méthode fortement utilisée, c'est la plus simple à mettre en œuvre. En effet, un tri par ordre croissant des rendements obtenus permet de retrouver selon le seuil défini la Value-at-Risk correspondante.

Exemple illustratif : la première unité de compte du profil défensif a une volatilité annualisée de 2,36% et un historique de 2421 valeurs. L'objectif est de trouver la valeur correspondant à 99% du total des performances. La Value-at-Risk au seuil de 99% à 1 jour, sélectionne donc 24ème pire valeur, soit -0,21%. C'est-à-dire qu'il s'agit de la perte maximale attendue à 1 jour à 99%. Cette valeur étant peu élevée elle est en concordance avec la volatilité faible de l'unité de compte et donc de son profil défensif.

La méthode paramétrique part de l'hypothèse que la distribution des rendements suit une loi normale. Elle se base sur différents estimateurs statistiques dont la moyenne, la variance et l'écart-type. Il suffit alors d'appliquer la formule suivante :

$$VaR = \mu - (z) \times \sigma$$

Avec :

- μ : la moyenne des rendements de l'unité de compte
- σ : la volatilité de l'unité de compte
- z : correspond au nombre de déviations en termes d'écart-type depuis la valeur moyenne. Il dépend du seuil choisi et se lit dans la table d'une loi normale centrée réduite

<u>Exemple illustratif :</u> en se basant sur la même unité de compte que précédemment, le calcul se fait sur la base de la loi normale prenant comme paramètres :

- $p = 0{,}01$ la probabilité considérée
- $\mu = 0{,}0026\%$ la moyenne des rendements de l'unité de compte
- $\sigma = 0{,}075\%$ la volatilité de l'unité de compte

La valeur trouvée par la méthode paramétrique pour la VaR à 1 jour à 99% est de -0,17%.

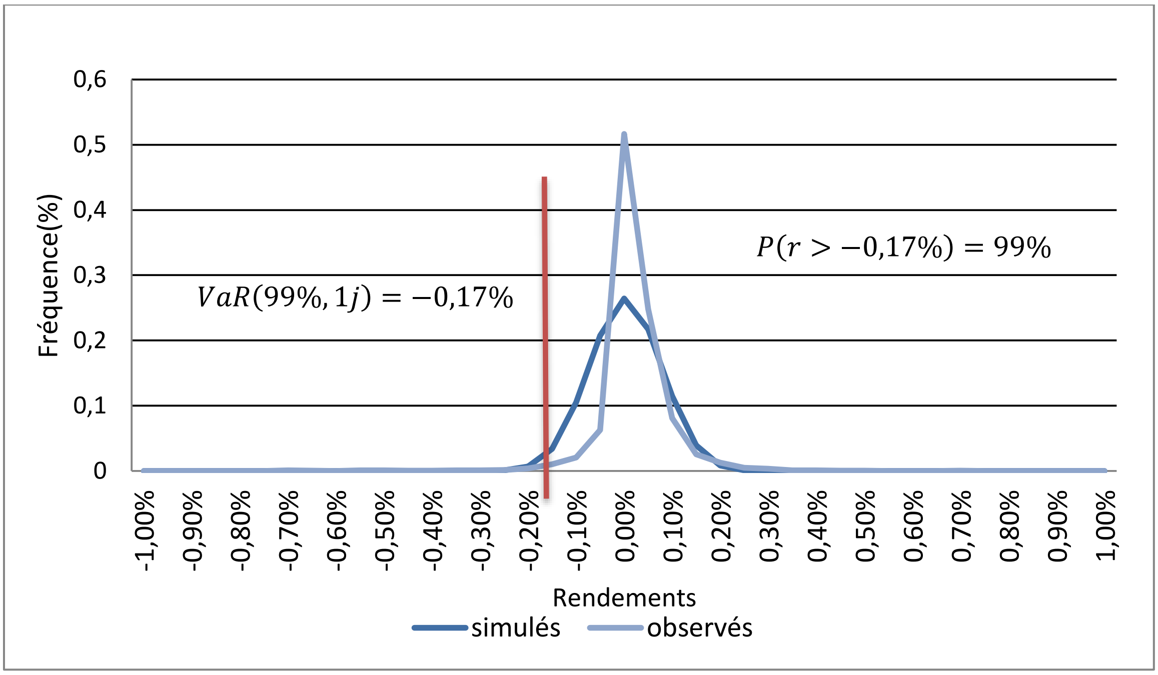


Figure 35 : Comparaison des rendements simulés et observés pour l'exemple d'application de la Value-at-Risk

Il existe d'autres méthodes d'estimation des Value-at-Risk comme celle de Monte-Carlo qui n'a pas été appliquée ici. Il s'agit d'une méthode plus complexe qui représente un bon intermédiaire entre la méthode paramétrique et la méthode historique. Les rendements des unités de compte doivent être simulés un grand nombre de fois suivant une certaine distribution (la loi normale). C'est alors que les résultats obtenus (en grand nombre) sont classés par ordre croissant afin de procéder de la même manière que la méthode historique et sélectionner la valeur souhaitée selon le seuil de probabilité fixé. C'est une méthode plus coûteuse en temps et en modélisation ce qui n'est pas forcément recherché ici.

	Volatilité	VaR historique 99,5%	VaR paramétrique 99,5%	VaR historique 99%	VaR paramétrique 99%	VaR historique 95%	VaR paramétrique 95%
Profil défensif	**2,36%**	-0,35%	-0,19%	-0,21%	-0,17%	-0,09%	-0,12%
	2,55%	-0,28%	-0,17%	-0,17%	-0,16%	-0,06%	-0,11%
	2,81%	-0,13%	-0,15%	-0,08%	-0,14%	-0,03%	-0,10%
	2,91%	-0,27%	-0,28%	-0,15%	-0,26%	0,00%	-0,18%
	4,18%	-0,83%	-0,54%	-0,64%	-0,48%	-0,33%	-0,34%
Profil équilibre	**6,26%**	-1,15%	-0,72%	-0,88%	-0,65%	-0,43%	-3,38%
	11,88%	-2,23%	-1,61%	-0,94%	-1,45%	-0,07%	-1,02%
	12,21%	-2,77%	-1,79%	-2,12%	-1,62%	-1,07%	-1,13%
	38,99%	-1,25%	-5,28%	-0,94%	-4,77%	-0,41%	-3,38%
Profil dynamique	**17,65%**	-3,80%	-2,45%	-3,01%	-2,21%	-1,40%	-1,56%
	35,56%	-5,94%	-4,93%	-3,32%	-4,45%	-0,77%	-3,14%
	46,16%	-5,42%	-5,74%	-3,69%	-5,19%	-1,00%	-3,67%

Tableau 15 : Présentation des résultats obtenus des VaR

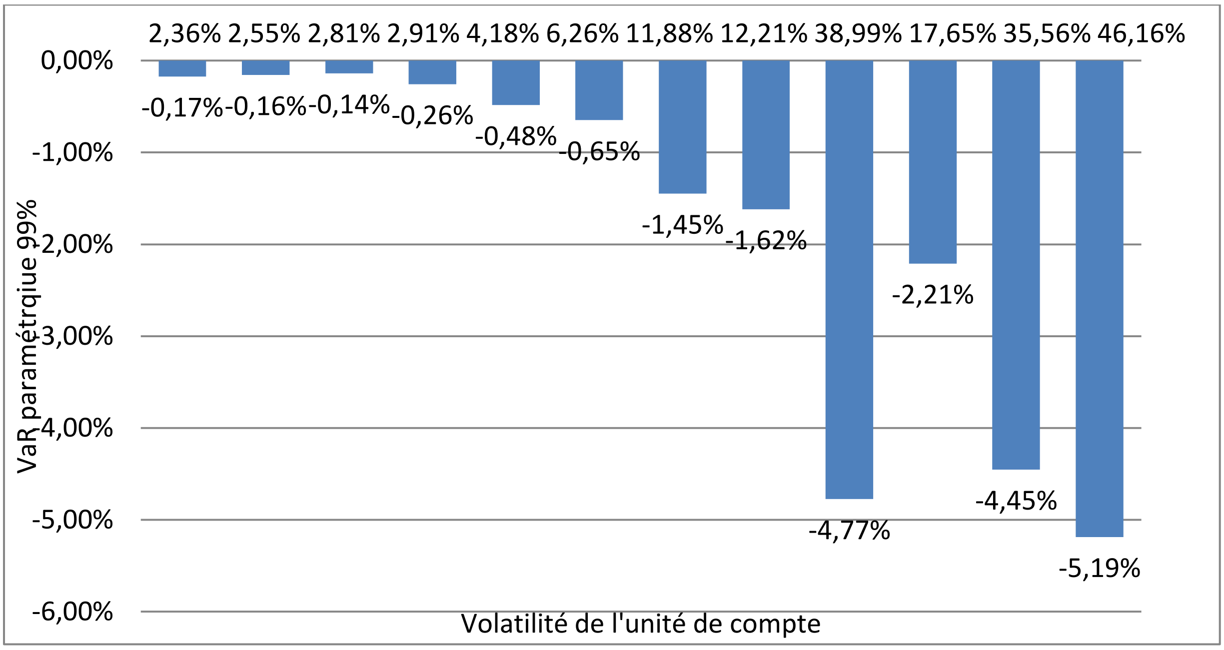


Figure 36 : Value-at-Risk obtenues à 99% à 1 jour pour le profil défensif

Le tableau 16 et la figure 37 montrent bien que les unités de compte à fortes volatilités sont à l'origine de value-at-risk plus importantes. Cela signifie que celles-ci sont à l'origine de pertes potentielles plus fortes ce qui explique l'obtention de tarif beaucoup plus hauts pour ces fonds.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, différentes méthodes de tarification de la garantie en cas de vie ont été présentées, certaines plus concluantes que d'autres. La méthode déterministe n'a pas été conservée du fait des limites qu'elle présente. Le modèle de Black and Scholes, plus proche des pratiques des marchés financiers, a été appliqué. Puis, pour l'enrichir et obtenir un taux sans risque pertinent, le modèle de Vasicek a été utilisé. C'est ce modèle qui sera conservé dans le cadre de ce mémoire. Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein a permis de vérifier la pertinence des résultats obtenus. Quelles que soient les méthodes employées, ce sont des paramètres prudents qui ont été utilisés. L'étude de cas sur un portefeuille d'unités de compte commercialisées en 2021, ainsi que l'étude des différents profils de risque confirment que les résultats sont en accord. Ils attestent que l'âge de l'assuré au moment de la souscription est un paramètre qui a peu d'impact sur les résultats de tarif obtenu. En revanche, le pourcentage du capital garanti joue un rôle non négligeable sur le tarif à prélever annuellement sur l'encours de l'assuré. Enfin, et surtout, le paramètre le plus influent est la volatilité de l'unité de compte considérée. En se limitant uniquement aux modèles présentés au cours du mémoire, il faudrait définir un seuil de volatilité maximale au-delà duquel la garantie ne pourrait pas s'intégrer au sein des produits à unités de compte étudiés.

Une fois la tarification réalisée, et avant la commercialisation d'une nouvelle garantie comme celle-ci, il convient d'étudier la rentabilité de la garantie en cas de vie sur le marché. C'est ce qui est réalisé dans la partie suivante.

PARTIE 3 : Analyse et impact des méthodes de tarification via des indicateurs de rentabilité

Les produits d'assurance vie sont des produits dits de long terme. Par exemple la garantie en cas de vie étudiée dans ce mémoire possède une échéance pouvant atteindre 12 ans. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de s'assurer de leur rentabilité sur le long terme. Il s'agit d'une problématique spécifique à l'assurance vie, les investissements de long terme nécessitant une modélisation prospective des contrats.

En effet, le fonctionnement de l'assurance se base sur une inversion du cycle de production. L'assureur perçoit aujourd'hui une prime qui servira à payer les sinistres futurs dont la valeur n'est pas encore connue. En d'autres dermes, le prix d'achat (les prestations) est connu après le prix de vente (les primes). De ce fait, il est primordial de projeter les résultats futurs sur la base d'hypothèses les plus réalistes possibles. L'analyse de la rentabilité est une étape indispensable avant la commercialisation d'un produit pour s'assurer de sa profitabilité. C'est l'objet de cette partie.

Tout d'abord, rappelons que la rentabilité d'une entreprise[5] représente sa capacité à générer des bénéfices. C'est le rapport entre les résultats obtenus par une entreprise et les moyens utilisés pour arriver à ce résultat. Cette notion intéresse particulièrement les actionnaires de la compagnie d'assurance. En effet, lorsqu'un actionnaire prend la décision d'investir dans un projet, il apporte le capital à la compagnie d'assurance et espère un retour sur investissement. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'évaluer la rentabilité des produits de l'assureur.

L'étude de la rentabilité d'un produit d'assurance se fait à travers plusieurs indicateurs qui permettent d'évaluer la capacité du produit à générer de la richesse pour l'assureur[6]. Ces derniers seront définis dans la première sous-partie.

[5] Selon [12].
[6] Selon [5].

I- Présentation des indicateurs

Cette partie s'appuie sur les travaux [5], [8], [12] et [23] référencés en bibliographie.

I.1) New Business Margin (NBM)

Le taux de marge sur affaires nouvelles ou NBM (New Business Margin) est un indicateur qui mesure la rentabilité de l'activité de l'assurance vie. Il permet d'évaluer les perspectives de rentabilité des affaires souscrites dans l'année. Il s'agit du ratio : valeur de la production nouvelle divisé par son volume. Ce taux mesure la création de valeur engendrée par les nouveaux contrats.

$$NBM = \frac{NBV}{PVNBP}$$

Avec :

NBV (New Business Value) c'est la valeur de la production nouvelle, c'est-à-dire ce que rapportent et ce que vont rapporter les nouveaux contrats d'assurance de leur souscription à leur dénouement. C'est ce qui est appelé la vision prospective, elle consiste à évaluer les résultats actuels et futurs à la date d'aujourd'hui. Or un montant perçu aujourd'hui a plus de valeur que ce même montant perçu dans dix ans, c'est la valeur temps de l'argent. Ainsi, la NBV n'est pas constituée par la somme des flux des résultats futurs mais par la somme actualisée des flux des résultats futurs.

La première année, les contrats coûtent plus qu'ils ne rapportent en raison des frais supportés par l'assureur, il y a donc un déficit (comme l'illustre la figure 35). Les années suivantes les résultats sont positifs mais diminuent au fil des rachats ou des règlements aux assurés. En actualisant ces résultats, c'est-à-dire en les ramenant à la valeur d'aujourd'hui et en les cumulant avec le déficit de la première année, la valeur de la production nouvelle est obtenue. Ces prévisions sont réalisées à partir d'éléments comme les prévisions macroéconomiques, les tables de mortalité, les hypothèses portant sur la part des bénéfices portées aux assurés…

Elle se calcule ainsi :

$$NBV = Strain + VIF$$

Avec :

VIF (Value of Inforce)[7] c'est la valeur générée par le stock de contrats. C'est une mesure de richesse de l'assureur. Il permet de prendre en compte les bénéfices ou les pertes futures sur toute la durée du contrat. Il prend également en compte le coût lié à l'immobilisation des fonds propres.

[7] Selon [12].

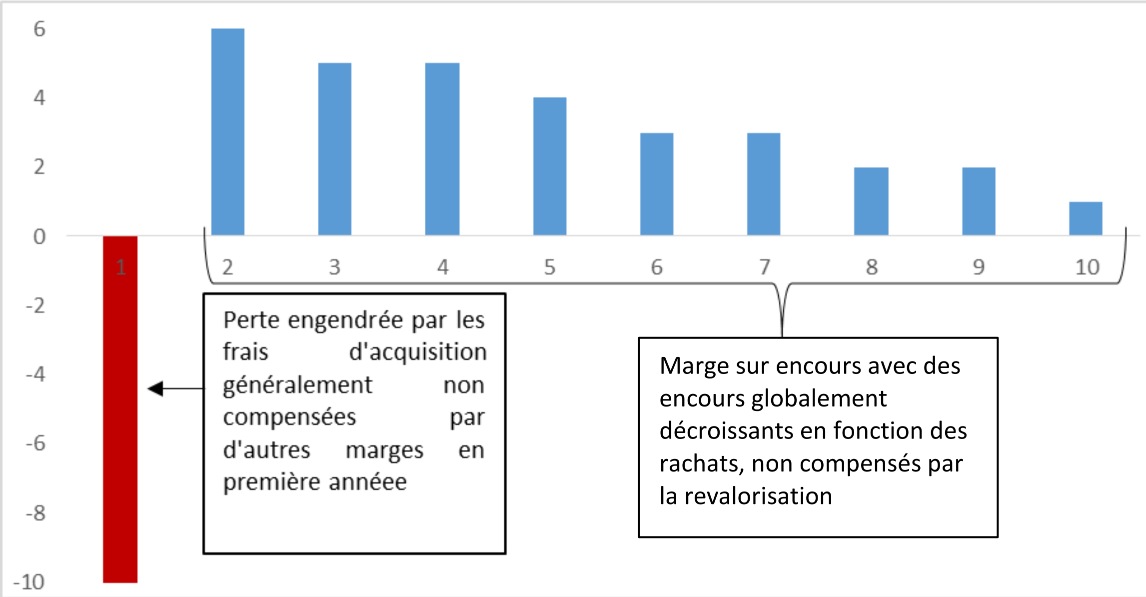


Figure 37 : Profil des marges pour un contrat type d'assurance classique

$Le\ strain$, il correspond à la valeur du new business la première année. En effet, la souscription de nouveaux contrats engendre des coûts pour l'entreprise appelés frais d'acquisition. En assurance vie, lors du lancement d'un nouveau contrat le résultat comptable de la première année est fortement négatif comme l'illustre la figure 35.

Le CFO Forum est un groupement des directeurs financiers (CFO) des principales compagnies d'assurance européenne. Il a été créé en 2002 et a pour objectif de progresser dans l'harmonisation des normes comptables et l'information financière. C'est le CFO Forum qui fixe depuis 2008 les règles de calcul de la MCEV (Market Consistent Embedded Value) et il définit la NBV comme suit :

$$NBV = Strain + PVFP - coût\ du\ capital\ (non\ financial\ risk) - TVOG$$

Ainsi, le ratio NBV divisé par $PVNBP$ donne le taux de marge sur affaires nouvelles c'est un indicateur très sensible aux variations des marchés financiers : il doit être comparé avec la concurrence et il est particulièrement suivi par les agences de notation. Il s'agit d'un indicateur de référence sur le marché financier pour la mesure de rentabilité de l'activité vie.

I.2) Present Value of New Business Premium (PVNBP)

La PVNBP (Present Value of New Business Premium) c'est le volume de la production nouvelle de l'année (APE : Annual Premium Equivalent) et il correspond au chiffre d'affaire en épargne. Il correspond à la somme entre les primes périodiques perçues dans le courant de année + 1/10 des primes uniques souscrites dans l'année en partant de l'hypothèse qu'un contrat a une durée de vie moyenne de 10 ans. C'est donc la valeur actuelle des primes allouées aux affaires nouvelles de l'année.

I.3) Present Value of Futurs Profits (PVFP)

La PVFP est égale à la valeur actuelle des profits ou pertes futurs, nets d'impôts, générés par le portefeuille de contrats en cours. C'est la valeur actualisée des résultats futurs.

Soient un contrat prenant fin à la date n, R_k le résultat de l'année k sur le portefeuille observé et i le taux d'actualisation (il représente le taux de retour attendu par l'investisseur). Alors la PVFP peut est calculée de la façon suivante :

$$PVFP = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}$$

I.4) Best Estimate (BE)

Le Best Estimate (BE) correspond à la moyenne des flux de trésorerie futurs pondérée par leur probabilité, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs) estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinent. Les hypothèses sont définies à partir des prix d'instruments sur les marchés financiers à la date à laquelle le BE est calculé. De plus, lorsque l'évaluation est menée dans un objectif de tarification, les calculs sont réalisés sur la base d'hypothèses prudentes afin d'estimer la valeur des prestations.

I.5) La Time Value of Financial Guarantees and Options (TVOG)

La TVOG correspond à la valeur temps des options et garanties financières. Elle s'interprète comme le coût des options et garanties et se calcule par différence entre la PVFP déterministe et la PVFP moyenne obtenue à partir des scénarios stochastiques.

- Exemples d'options : rachats/ réduction des versements, arbitrages entre les fonds, versements libres …

- Exemples de garanties : participation aux bénéfices, garantie plancher des contrats en unités de compte, taux minimum garanti …

Le CFO Forum indique que la valeur temps de l'ensemble des options et garanties financières doit être calculée sur la base de modèles « market consistent ». Ces modèles doivent prendre en compte le comportement rationnel des assurés en termes de rachat et taux de reconduction des primes périodiques (taux évoluant en fonction de l'écart entre le taux servi par la compagnie et le taux de marché).

$$TVOG = PVFP\ déterministe - Moyenne\ PVFP\ stochatsiques$$

L'approche « market consistent » repose sur le principe de valorisation de flux de l'activité d'assurance de la même façon que dans le cadre d'un instrument financier portant les mêmes risques et côté sur un marché financier.

À l'inverse l'approche « real world » est basée sur une hypothèse qui indique que les actifs rapportent le taux sans risque auquel une prime de risque est ajoutée. Alors, plus la volatilité de l'actif est grande plus l'investisseur s'attend à une rémunération proportionnelle au risque supporté.

II- Maquette compte de résultat

II.1) Le compte de résultat : définition

Le compte de résultat est un document comptable qui regroupe pour chaque année l'ensemble des produits et charges de tout organisme ayant une activité marchande au cours de l'exercice comptable.

En assurance vie, il se découpe en trois composantes principales :

	Positif	Négatif
Marge technique	Prime nettes	Prestations
	Reprise de provisions	Dotations de Provisions
Marge financière	Produits financiers	TMG
		TMA
		PB
Marge de gestion	Chargements d'acquisition	Commissions d'acquisition
	Chargements de gestion	Commissions de gestion
	Rétrocessions sur les UC	Frais généraux
Somme de toutes les marges = Résultat brut -Réassurance-Impôts **Résultat Net**		

Tableau 16 : Schéma d'un compte de résultat à un instant t

Dans le cadre de ce mémoire, la garantie en cas de vie n'étant proposée que sur des fonds en unités de compte, la marge financière sera nulle.

Précisons que les frais généraux représentent le coût de l'activité. De plus, les commissions d'acquisition et de gestion correspondent aux coûts de commercialisation et de gestion des contrats. Il s'agit donc de la partie des versements effectués par les assurés ayant pour but de subvenir aux financements des frais générés par la souscription des contrats.

II.2) Les hypothèses considérées

Une maquette de rentabilité est utilisée, elle est construite sur la base d'une comparaison d'un scénario central et la simulation de 1 000 scénarios stochastiques, les résultats sont projetés sur 20 ans. L'objectif de cette maquette est de répliquer sur Excel les calculs effectués par Prophet Passif.

Les hypothèses qu'elle utilise sont les tables de rachats et de mortalité internes au groupe. Pour les 1 000 scénarios stochastiques ce sont les scénarios économiques du groupe qui sont utilisés.

Le scénario central ou déterministe permet de simuler l'interaction actif/passif des produits d'assurance. Il connaît néanmoins des limites notamment lors de simulations de scénarios extrêmes, une asymétrie des résultats résultant des options et garanties est observée. C'est-à-dire que le gain de l'assureur dans un bon scénario n'est pas symétrique à la perte dans un mauvais scénario en raison des options et garanties. Ainsi, pour savoir quel poids attribuer à un scénario, l'utilisation d'une modélisation stochastique est préférable.

La modélisation stochastique considère que les variables économiques et financières peuvent être représentées par des processus stochastiques, c'est-à-dire par des variables aléatoires indexées par le temps.

II.3) Résultats obtenus

Deux exemples de résultats obtenus seront présentés ci-dessous :

- <u>Hypothèses sensibilité 1:</u>

Investissement : 100% UC (Actions cotées)
Hypothèses financières : Trimestre 2 2020 New Business (vu au 31/03/20)
Chargements : 1%
Pourcentage garanti : 90%
Durée garantie : 8 ans
Durée contrat : 8 ans
Prime : 30 000€ (Prime moyenne =30 000€, nombre de contrat = 1)
Coût unitaire : 31,22 € / contrat
Âge de l'assuré au moment de la souscription: 55 ans

Avec ces hypothèses, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 18. La première colonne correspond aux résultats donnés par la maquette lorsque la garantie en cas de vie n'est pas activée, la deuxième lorsqu'elle est activée, ce qui permet d'obtenir dans la troisième colonne le delta entre ces deux colonnes qui correspond donc à l'impact de la garantie à terme.

Pour calculer la duration de la garantie proposée le calcul suivant est effectué :

$$duration = \frac{valeur\ actuelle\ des\ provisions}{primes}$$

Dans le cadre de cette sensibilité, la duration obtenue est $duration = \frac{205\ 717}{30\ 038} = 6{,}8\ années$

		Sans garantie à terme	Avec garantie à terme	Impact Garantie à terme
Avant répartition du leakage	**BE scénario central**	29 667	29 667	0
	BE stochastique	29 372	33 858	4 486
	PVFP scenario central brute d'IS*	333	333	0
	PVFP stochastique brute d'IS*	332	-4 155	-4 486,2
	PVFP scenario central nette d'IS*	262	262	0,0
	PVFP stochastique nette d'IS*	261	-3 009	-3 269,9
	PVNBP	30 000	30 000	
	NBM= NBV/PVNBP	**0,87%**	**-10,03%**	**-10,90%**
	Leakage central	*0,0*	*0,0*	*0*
	Leakage sto	*-296,7*	*-296,7*	*0*
Après répartition du leakage (répartition au prorata entre BE et PVFP)	**BE scénario central**	29 667	29 667	0
	BE stochastique	29078	33520	4 441
	PVFP scénario central (nette)	262,5	262,5	0,0
	PVFP stochastique (nette)	258,5	-2 978,7	-3 237,2
	TVOG	-4,0	-3 241,2	-3 237,2
	NBV	258	-2979	-3 237,2
	PVNBP	30 000	30 000	
	NBM= NBV/PVNBP	**0,86%**	**-9,93%**	**-10,79%**
	dont PVFP	*0,85%*	*0,87%*	*0,03%*
	dont TVOG	*-0,01%*	*-10,80%*	*-10,79%*

**IS : impôts sur les sociétés*

Tableau 17 : Résultats étude de rentabilité sensibilité 1

Le leakage représente la différence entre le résultat obtenu avec le scénario central et la moyenne des 1 000 scénarios stochastiques. Cette différence est distillée de façon prudente au prorata entre la PVFP et le BE selon leurs valeurs initiales. Il est alors préférable de détériorer ces indicateurs proportionnellement, et donc se pénaliser, cela correspond à l'approche prudente souhaitée.

$$Leakage = BE\ stochastique - PVFP\ brute\ d'impôts$$

Après répartition du leakage et conformément à ce qui a été expliqué, le coût de la garantie en cas de vie en termes de NBM est de -10,79%. En revanche, il s'agit du coût au global. Ainsi, pour coïncider aux résultats obtenus par les méthodes de tarification il est nécessaire de diviser cet impact par la duration, le coût annuel obtenu est alors de -1,59%. Ce qui semble être en concordance avec les méthodes de tarification obtenues puisqu'en moyenne pour ces hypothèses les méthodes de tarification proposent un tarif de l'ordre de : 1,79%.

Pour trouver l'impact NBM du tarif, le calcul est le suivant :

$$tarif \times échéance \times (1 - impôts)$$

Soit, $1{,}79\% \times 8 \times (1 - 28{,}82\%) = 10{,}19\%$

Ce qui est bien du même ordre de grandeur que ce qui a été obtenu avec la maquette : - 10,79%.

- Hypothèses sensibilité 2 :

Investissement : 100% UC (Actions cotées)
Hypothèses financières Trimestre2 2020 New Business (vu au 31/03/20)
Chargements : 1%
Pourcentage garanti : 80%
Durée garantie : 12 ans
Durée contrat : 20 ans
Prime : 30 000€ (Prime moyenne =30 000€, nombre de contrat = 1)
Coût unitaire : 31,22 € / contrat
Âge de l'assuré au moment de la souscription: 75 ans

		Sans garantie à terme	Avec garantie à terme	Impact Garantie à terme
Avant répartition du leakage	BE scénario central	29 109	29 109	0
	BE stochastique	28 709	31 066	2 357
	PVFP scenario central brute d'IS*	891	891	0,0
	PVFP stochastique brute d'IS*	873	-1 484	-2 356,6
	PVFP scenario central nette d'IS*	676	676	0,0
	PVFP stochastique nette d'IS*	663	-1 059	-1 721,7
	PVNBP	30 000	30 000	
	NBM= NBV/PVNBP	**2,21%**	**-3,53%**	**-5,74%**
	Leakage central	*0,0*	*0,0*	0
	Leakage sto	*-417,9*	*-417,9*	0
Après répartition du leakage (répartition au prorata entre BE et PVFP)	BE scenario central	29 109	29 109	0
	BE stochastique	28304	29530	1 226
	PVFP scenario central (nette)	675,8	675,8	0,0
	PVFP stochastique (nette)	653,2	-1 044,2	-1 697,4
	TVOG	-22,5	-1 719,9	-1 697,4
	NBV	653,2	-1044,2	-1697,4
	PVNBP	30 000	30 000	
	NBM= NBV/PVNBP	2,18%	-3,48%	-5,66%
	dont PVFP	*2,25%*	*2,25%*	*0,00%*
	dont TVOG	*-0,08%*	*-5,73%*	*-5,66%*

**IS : impôts sur les sociétés*

Tableau 18 : Résultats étude de rentabilité sensibilité 2

Avec ces hypothèses, le coût de la garantie en cas de vie en termes de NBM obtenu est de -5,66%. De la même manière que dans la sensibilité 1, la duration calculée est de 11,23 années. Le coût annuel obtenu est alors de -0,50%. En moyenne, les méthodes de tarification pour ces hypothèses donnent 0,76%.

Pour trouver l'impact NBM, le calcul suivant est effectué : $0{,}76\% \times 12 \times (1 - 28{,}82\%) = 6{,}49\%$

Les résultats de la tarification et de la rentabilité sont du même ordre de grandeur et donc en accord.

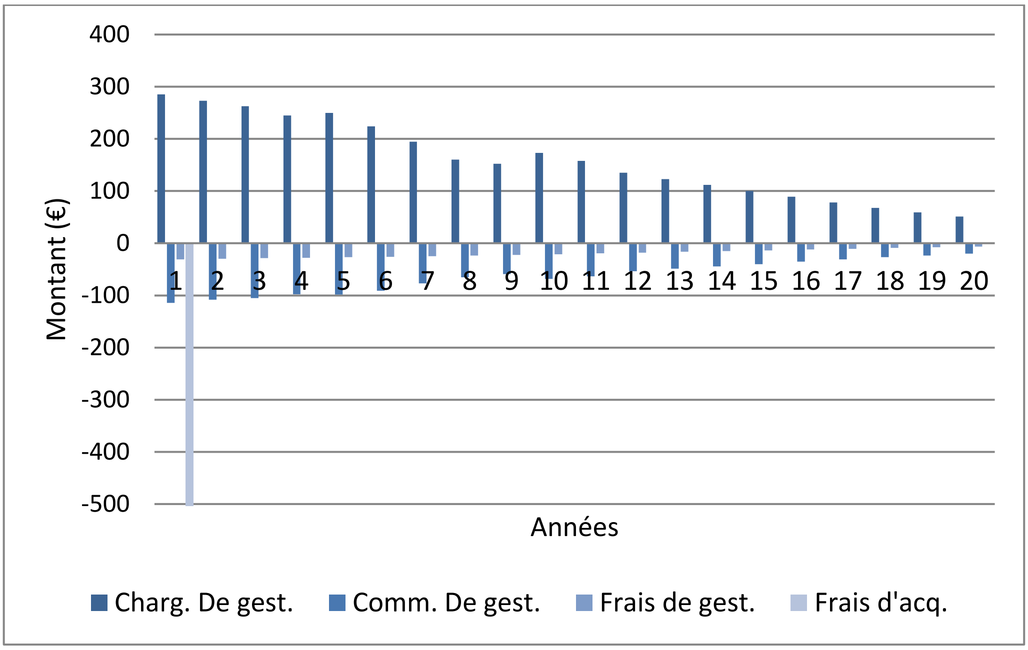


Figure 38 : Frais sensibilité 2 sur 20 ans

Un graphique de la forme attendue est obtenu, avec pour la première année une forte baisse.

	Scénario central		Stochastique		
	VA	% PVNBP	VA	% PVNBP	% PV PM
Prestations garantie à terme	0,0	0,00%	-2 428,3	-8,09%	-0,72%
Variations PGT	0,0	0,00%	-1,1	0,00%	0,00%
Résultat Technique	**0,00%**	**0,00%**	**-2429,41**	**-8,10%**	**-0,72%**
Résultat Financier	**0,00%**	**0,00%**	**0,00**	**0,00%**	**0,00%**
Chargements d'acquisition	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Commissions d'acquisition	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Coûts d'acquisition	-707,3	-2,36%	-707,3	-2,36%	-0,21%
Chargements de gestion	3 306,6	11,02%	3 397,0	11,32%	1,01%
Commissions de gestion	-1 316,6	-4,39%	-1 352,0	-4,51%	-0,40%
Coûts unitaires de gestion	-392,2	-1,31%	-392,2	-1,31%	-0,12%
Résultat Administratif	**890,54**	**2,97%**	**945,57**	**3,15%**	**0,28%**
Taxes	**-214,77**	**-0,72%**	**424,71**	**1,42%**	**0,13%**
PVFP	**675,76**	**2,25%**	**-1059,14**	**-3,53%**	**-0,32%**

Tableau 19 : Résumés comptes de résultat obtenus - sensibilité 2 avec la garantie activée

Le tableau 19 présente un récapitulatif des résultats obtenus lorsque la garantie est activée dans la maquette. Comme expliqué précédemment, le résultat financier est nul puisque l'investissement ne se fait que sur des unités de compte.

La moyenne des scénarios stochastiques propose un résultat technique puisque sur les 1 000 scénarios, certains déclenchent la garantie plancher : il s'agit alors du coût de la garantie.

	Scénario central		**Stochastique**		
	VA	**% PVNBP**	**VA**	**% PVNBP**	**% PV PM**
Prestations garantie à terme	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Variations PGT	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Résultat Technique	**0,00%**	**0,00%**	**0,00**	**0,00%**	**0,00%**
Résultat Financier	**0,00%**	**0,00%**	**0,00**	**0,00%**	**0,00%**
Chargements d'acquisition	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Commissions d'acquisition	0,0	0,00%	0,0	0,00%	0,00%
Coûts d'acquisition	-707,3	-2,36%	-707,3	-2,36%	-0,22%
Chargements de gestion	3 306,6	11,02%	3 277,4	10,92%	1,01%
Commissions de gestion	-1 316,6	-4,39%	-1 305,2	-4,35%	-0,40%
Coûts unitaires de gestion	-392,2	-1,31%	-392,2	-1,31%	-0,12%
Résultat Administratif	**890,54**	**2,97%**	**872,74**	**2,91%**	**0,27%**
Taxes	**-214,77**	**-0,72%**	**-210,15**	**-0,70%**	**-0,06%**
PVFP	**675,76**	**2,25%**	**662,59**	**2,21%**	**0,20%**

Tableau 20 : Résumés comptes de résultat obtenus - sensibilité 2 avec la garantie désactivée

Les mêmes tableaux sont présentés lorsque la garantie est désactivée. Les résultats obtenus sont effectivement similaires pour le scénario central que la garantie soit activée ou désactivée. À l'inverse ils varient sur les scénarios stochastiques puisque dans un cas la garantie est activée et dans l'autre non.

Conclusion de la troisième partie

Cette dernière partie présente une étape cruciale lors de la mise en place d'une nouvelle garantie. Il s'est agi d'analyser la rentabilité et les coûts liés à la commercialisation d'une telle garantie sur le long terme. De nombreux indicateurs de rentabilité sont à la disposition des assureurs pour pouvoir prendre cette décision finale. Ici, les résultats des tarifs obtenus dépendent beaucoup du choix de l'unité de compte. Cette partie nous permet de conclure que les résultats obtenus grâce l'étude de la rentabilité de la garantie en cas de vie sur le marché concordent avec ceux obtenus dans la deuxième partie avec les études de tarification : cela permet donc de confirmer les résultats.

Par rapport à d'autres études réalisées et d'après un benchmark effectué sur la concurrence, la garantie en cas de vie étudiée dans ce mémoire se base sur un investissement 100% sur les supports unités de compte. C'est la raison pour laquelle, sans la présence d'un minimum de fonds euros qui permet de baisser le tarif, le coût obtenu de la garantie est ici plus fort. En effet, deux tiers des scénarios stochastiques ont tendance à activer la garantie.

Conclusion

Les récentes crises financières ont plongé le monde de l'assurance vie dans un contexte de taux durablement bas qui oblige les assureurs à repenser le mode de fonctionnement en place depuis longtemps. Différentes solutions ont d'ores et déjà vu le jour comme les fonds euro-croissance et autres fonds structurés. Ainsi, proposer une garantie en cas de vie au sein de contrat en unités de compte fournit une solution intéressante étudiée au cours de ce mémoire. Elle représente une avancée commerciale qui permet de convaincre un grand nombre d'assurés en offrant la possibilité de dynamiser leur épargne tout en ayant la sécurité d'un capital garanti. Néanmoins, les risques liés à la commercialisation d'une telle garantie obligent les assureurs à mettre en place une tarification prudente. En effet, la garantie étant uniquement proposée sur des fonds en unités de compte, le risque de baisse des marchés financiers n'est pas négligeable. Au cours de cette étude, la réflexion s'est portée sur une façon de mettre en place une garantie plancher en cas de vie dans le but de faciliter l'orientation des assurés vers des fonds en unités de compte.

La première partie de ce mémoire reprend le fonctionnement général de l'assurance vie en justifiant la nécessité d'une telle garantie. La baisse du rendement des fonds euros prouve le besoin de renouveler l'attractivité de l'assurance en diversifiant les possibilités d'investissement, tout en prenant en compte les besoins des assurés (souvent synonymes de simplicité et de sécurité). La mise en place d'une tarification est alors nécessaire pour aboutir à cette solution.

C'est ce sur quoi repose de la deuxième partie de ce mémoire. En effet, différentes méthodes de tarification sont alors appliquées. La première, est une méthode déterministe, connaissant de nombreuses limites et ne répliquant pas de façon suffisamment pertinente la réalité : il a été décidé de l'exclure de l'étude. Ensuite, c'est le modèle de Black and Scholes qui a été appliqué en utilisant les mathématiques financières. Il s'agit d'assimiler la garantie en cas de vie à un put vendu par l'assureur. Néanmoins, cette étude se basant sur une hypothèse simple selon laquelle le taux sans risque est nul, elle non plus ne réplique pas suffisamment la réalité. Pour enrichir ce modèle, des trajectoires de taux ont été simulées avec le modèle de Vasicek, ce qui a permis d'obtenir pour chacune des sensibilités testées un taux sans risque pertinent alors intégré dans le modèle de Black and Scholes. Cette opération a bien permis de diminuer les tarifs à prélever au titre de la garantie plancher, et c'est cette méthode qui est conservée pour tarifer la garantie en cas de vie. Pour vérifier la pertinence des résultats obtenus dans le modèle de Black and Scholes c'est le modèle de Cox, Ross et Rubinstein qui a été utilisé grâce à la technique des arbres binomiaux étendue : les puts similaires ont été obtenus à partir d'un certain nombre d'itérations. Enfin, pour vérifier la viabilité des résultats obtenus par les modèles conservés, une étude de cas sur des unités de compte commercialisés en 2021 a été réalisée. Elle prend en compte le profil de risque des assurés (défensif, équilibré ou dynamique), c'est-à-dire le SRRI des unités de compte considérées, en d'autres termes leur volatilité. Les modèles appliqués confirment que le paramètre le plus influent sur le tarif obtenu est la volatilité de l'unité de compte considérée. En effet, l'âge de l'assuré à la souscription a peu d'impact sur les tarifs obtenus quel que soit le modèle considéré.

Enfin la dernière étape avant de commercialiser un nouveau produit est de vérifier sa rentabilité sur le marché : c'est ce qui est effectué dans la troisième et dernière partie de ce mémoire. Différents indicateurs de rentabilité permettent de vérifier, à travers une maquette de rentabilité, les effets de la commercialisation d'un tel produit. La rentabilité est testée en effectuant une projection des résultats sur vingt années en utilisant à la fois un scénario central et 1 000 scénarios stochastiques internes au groupe. Les résultats obtenus se révèlent être en concordance avec ceux évoqués précédemment.

L'étude réalisée au cours de ce mémoire permet de conclure qu'au vu des sensibilités testées les paramètres les plus influents sur le tarif obtenu sont le pourcentage de capital garanti (même s'il apparaît évident qu'en garantissant une somme plus faible l'assureur ne peut pas exiger le même pourcentage annuellement), ainsi que la volatilité de l'unité de compte.

En revanche, il est nécessaire de prendre en compte le fait que seuls certains modèles ont été appliqués. Des méthodes plus complexes peuvent être exécutées pour compléter voire complexifier la recherche effectuée au cours de ce mémoire, notamment en prenant en compte une volatilité stochastique ou locale. Ainsi, les conclusions tirées restent limitées aux enseignements exploités de l'application des modèles choisis dans ce cadre en adéquation avec la base de données choisie et les sensibilités testées.

Cette étude permet donc d'affirmer que la garantie en cas de vie ne peut, avec ces éléments, être proposée que sur des unités de compte à volatilités limitées. Néanmoins, l'objectif initial de la problématique est respecté, puisqu'il consiste à orienter les assurés vers les fonds en unités de compte. En effet, la garantie s'adressant à des assurés ayant investi sur des fonds euros, ils peuvent être considérés comme averses au risque. Ces assurés recherchent la sécurité en investissant leur épargne sur des fonds euros et ne vont donc certainement pas s'orienter vers des fonds à forte volatilité. L'idée est alors de les orienter vers des fonds à petites ou moyennes volatilités (SRRI situés entre 2 et 4) tout en leur proposant une garantie sans laquelle ils n'auraient certainement pas été intéressés par ce type d'investissement.

Ainsi et pour finir, ces travaux se limitent aux méthodes appliquées avec parfois l'utilisation d'hypothèses fortes mais pourraient être enrichis sur certains points, comme exposé précédemment. Un point laissé en suspens et qui pourrait faire l'objet de pistes d'exploration concerne le tarif obtenu. Deux possibilités s'offrent à l'assureur :

- proposer un tarif à l'unité de compte, comme étudié au cours de ce mémoire. Dans ce cas, le tarif dépend de différents paramètres liés à l'unité de compte (comme son rendement et sa volatilité) dont il est très dépendant. Les méthodes appliquées ne permettent alors pas de proposer un tarif si la volatilité est considérée comme trop importante.

- proposer un tarif unique et commun à tous les fonds en unité de compte, auquel cas il sera nécessaire de bien encadrer la souscription. En effet, le risque est alors que les assurés s'orientent vers des unités de compte très volatiles puisqu'ils seront couverts par la garantie, ce qui positionnerait l'assureur face à un risque important.

La garantie en cas de vie est donc une garantie complexe à mettre en place mais possédant des attraits certains. Elle propose une perspective intéressante de renouveau au sein de l'assurance vie en offrant sécurité et dynamisme sur les supports en unités de compte.

Liste des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

Documents et ouvrages

[1] Bouyacoub Jihane (2016) : *Modélisation de la courbe des taux et valorisation des produits dérivés de taux*

[2] Lekhal Mostafa, Ait Cheikh Mohsine, Koraich Almahdi (2016) : *Modélisation de la courbe des taux d'intérêt marocaine à travers le modèle de Vasicek*

[3] Mantel Antoine et Merlus Sylvain (2003): *Rapport sur les contrats en unités de compte à garantie plancher*

[4] Planchet Frédéric (2020) : *Modèles financiers en assurance et analyses dynamiques - Les garanties «plancher » sur les contrats en unités de compte (GMDB)*

[5] Zotefe Ayaovi Eyram et Marzouk Kaoutar (2019) : *Tarification - Provisionnement et Rentabilité des produits en Unités de Compte*

Mémoires

[6] Beuil Geoffrey (2010) : *Estimation du taux d'actualisation : cas particulier du très long terme*

[7] Brochard Florence (2009) : *Etude du coût de la couverture de la garantie plancher en cas de décès*

[8] Cescutti Vincent (2017) : *Estimés de solvabilité par méta-modélisation*

[9] Corre Mélanie (2005) : *Description de la garantie plancher et méthodes de calcul du provisionnement de la garantie plancher en cas de vie*

[10] Cottin Marine (2014) : *Provisionnement de la garantie plancher : alternatives de modélisations*

[11] Doullaye Ousseini Issaka (2016) : *Étude sous Solvabilité 2 d'un contrat d'assurance-vie en unités de compte avec garantie plancher en cas de décès et en cas de vie*

[12] Martinez Manon (2018) *: Conséquences de la garantie en capital brute de chargements d'un contrat d'assurance vie en euros sur la rentabilité et la solvabilité d'un assureur épargne*

[13] Palerm Tristan (2006) : *Tarification de garanties plancher en cas de vie*

[14] Perez Damien (2009) : *Modélisation et Etude d'un Produit Variable Annuity*

[15] Tennenhäuser Michaëlla (2012) : *Gestion dynamique d'un contrat en unité de comptes à garantie plancher : modèle simple d'allocation d'actifs et de mesure de risques induits*

Sites internet

[16] https://www.seabirdconseil.com/nos-decryptages/on-en-parle/laffaiblissement-du-fonds-euros-conduit-lassurance-vie-a-repenser-son-modele/ *(Article « Repenser le modèle de l'assurance vie avec l'affaiblissement du fonds euros »)*

[17] https://core.ac.uk/download/pdf/20643976.pdf *(« La Value at Risk, un outil de gestion du risque discutable ? »)*

[18] https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/201705-as78-taux-bas-version-3_0.pdf *(« Assurance vie en France et environnement de taux bas »)*

[19] https://www.ffa-assurance.fr/infos-assures/les-contrats-assurance-en-cas-de-vie *(« Les contrats d'assurance en cas de vie »)*
[20] https://slideplayer.fr/slide/3695299/ («*Arbres Binomiaux Chapitre 12 Hull, 8 éd. »)*
[21]https://www.vuibert.fr/system/files/ressources/9782311401745-les-options.pdf *(« Les options »)*

Cours

[22] Appert-Raullin Yannick (2021) Cours ISUP - Entreprise Risk Management (ERM)
[23] Garotin Mathilde (2021) Cours ISUP - Market Consistent Embedded Value (MCEV)

Abréviations

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution
APE : Annual Premium Equivalent
BE : Best Estimate
EMTN : Euro Medium Term Notes
FFA : Fédération Française de l'Assurance
FCP : Fonds Communs de Placement
IS : Impôts sur les sociétés
ISR : Investissement Socialement Responsable
KIID : Key Investor Information Document
NBM : New Business Margin
NBV : New Business Value
PB : Participation aux Bénéfices
PPE : Provision Pour Excédent
PVFP : Present Value of Futurs Profits
PVNBP : Present Value of New Business Premium
SCI : Société Civile Immobilière
SCPI : Société Civile de Placement Immobilière
SICAV : Sociétés d'Investissement à Capital Variable
SRRI : Synthetic Risk and Reward Indicator
TME : Taux Moyen des emprunts d'Etat
TMG : Taux Minimum Garanti
TRA : Taux de Rendement des Actifs
TVOG : Time Value of Financial Guarantees and Options
UC : Unité de Compte
VaR : Value-at-Risk
VIF : Value of Inforce

Liste des annexes

Annexe 1 : Lois de rachat total et partiel utilisées pour la méthode déterministe et le modèle de Black and Scholes

Loi de rachat **partiel** T1 2020

Année	Taux de rachat
1	1,2356%
2	2,8188%
3	2,4568%
4	1,9518%
5	1,9172%
6	1,8163%
7	1,6157%
8	1,3365%
9	2,1850%
10	2,2517%
11	2,1942%
12	2,3758%
13	2,1782%
14	1,9087%
15	1,6556%
16	1,3164%
17	1,5066%
18	1,0085%
19	0,9984%
20	0,9335%
21	0,6421%

Loi de rachat **total** du T1 2020

Année	Taux de rachat
1	0,9108%
2	2,5842%
3	2,5465%
4	2,3191%
5	2,0538%
6	2,2113%
7	2,1910%
8	2,0494%
9	3,1780%
10	3,1985%
11	3,3327%
12	3,1139%
13	3,2533%
14	3,7195%
15	3,9570%
16	4,5673%
17	4,1823%
18	3,8549%
19	3,2949%
20	3,1440%
21	3,6175%

Annexe 2 : Le lemme d'Itô

Cette annexe est issue de la source [1] référencée en bibliographie.

Le lemme d'Itô est utilisé dans le processus stochastique. Soit X et la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s$$

Le processus d'Itô s'écrit :

$$dX_t = \mu(X_t, t) + \sigma(X_t, t)dB_t$$

Avec :

- B_t un mouvement brownien
- μ drift
- σ volatilité

Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant :

$$dG = \left[\frac{\delta G}{\delta x}\mu(x,t) + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 G}{\delta x^2}\sigma^2(x,t)\right]dt + \frac{\delta G}{\delta x}\sigma(x,t)dz$$

Où z est le même processus Wiener standard que dans dx.

Ainsi, G suit également un processus d'Itô de paramètres :

$$\frac{\delta G}{\delta x}\mu(x,t) + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 G}{\delta x^2}\sigma^2(x,t) \text{ et } \frac{\delta G}{\delta x}\sigma(x,t)$$

Annexe 3 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Cette annexe est issue de la source [1] référencée en bibliographie.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck caractérise un processus de retour à la moyenne grâce à un processus stochastique décrit par l'équation stochastique ci-dessous :

$$dr_t = \theta(\mu - r_t)) + \sigma W_t$$

Avec :

θ, μ et σ des paramètres déterministes

W_t le processus de Wiener

Pour résoudre cette équation, le lemme d'Itô décrit en annexe 2 est appliqué à la fonction suivante : $f(r_{t)} = r_t e^{\theta}$

Alors,

$$df(r_{t,}t) = \theta r_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dr_t$$

$$df(r_{t,}t) = \theta \mu e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$$

En intégrant de 0 à t, $r_t = r_0 e^{-\theta t} + \mu\left(1 - e^{-\theta t}\right) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$

En supposant que r_0 est déterministe :

L'espérance obtenue est : $E(r_t) = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t})$

La variance obtenue est : $V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t})$

Alors, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus gaussien à variance bornée. À la différence du processus de Wiener, il admet une distribution de probabilité stationnaire.