EURIA — EURo Institut d'Actuariat

Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 21 Septembre 2018

Par : Romain MENIER
Titre : Modélisation des impacts des programmes de couverture sur les indicateurs ALM

Confidentialité : Oui : 2 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :
François LEPRINCE
Fabrice HAMON
Pierre CORRÉGÉ

Entreprise :
BNP Paribas Cardif

Membre présent du jury de l'EURIA :
Rainer BUCKDAHN

Directeur de mémoire en entreprise :
Samy COLLIER

Invité :
...

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Secrétariat :

Bibliothèque :

EURIA
EURo Institut
d'Actuariat

6, avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3

T +33 (0)2 98 01 66 55
F +33 (0)2 98 01 66 57
euria@univ-brest.fr

Résumé

Mots clefs: Stratégie de couverture, Black&Scholes, Bachelier, Produits dérivés, Risques ALM, GSE, Amortissement financier, Prophet, OPCVM.

Dans un contexte de taux bas, une hausse des taux ou une baisse des marchés action représentent un réel danger pour les assureurs. Il peut s'avérer compliqué de maintenir un taux servi compétitif, et donc d'éviter le déclenchement des rachats dynamiques.

Afin de se protéger contre une baisse des marchés action, nous avons déterminé des stratégies de couverture consistant à acheter un Put de maturité 1Y tous les ans pendant 10 ans (Roll de Puts). En ce qui concerne la protection contre une hausse des taux, nous avons mis en place des stratégies de couverture consistant à acheter des Swaptions 10Y/10Y tous les ans pendant 10 ans (Roll de Swaptions).
De plus, nous avons testé un Roll de Swaptions avec barrière, afin de limiter le coût de la couverture, mais aussi des stratégies autofinancées par la vente d'autres options.

Nous avons tout d'abord déterminé quels étaient les modèles de valorisation les plus pertinents en se basant sur 2 critères : la stabilité du modèle (par le biais de la minimisation des grecques) et l'adéquation des distributions historiques avec les dynamiques des modèles. Nous avons ainsi conclu que le modèle de Black&Scholes était le plus adapté pour les actions, et celui de Bachelier, le plus pertinent pour les taux.

Nous avons ensuite projeté l'ensemble des variables économiques de BNP Paribas Cardif en prenant en compte ces stratégies de couverture, à l'aide de Prophet ALS. Suite à cela, nous en avons conclu que les résultats obtenus dépendaient fortement de la confiance que l'on accordait aux GSE : en univers Monde-Réel, les stratégies basées sur l'autofinancement se révèlent très efficaces en termes de gain de TRA (taux de rendement de l'actif). Elles nous permettent également d'éviter beaucoup de scénarios avec un taux servi non compétitif, et donc par ce biais, le déclenchement de rachats dynamiques.
En univers Risque-Neutre, les résultats sont totalement différents, les stratégies avec autofinancement nous font perdre du profit, tandis que les stratégies sans autofinancement nous en font gagner.

En dernier lieu, nous avons pu constater que le fait d'incorporer nos couvertures dans un indice composite provoquait des impacts sur la PRE (prov. risque d'exigibilité) et la PDD (prov. dépréciation durable) qui sont différents, et qu'il était possible de répliquer ces indices composites par des indices à volatilité réduite pour certaines stratégies.

Abstract

Keywords: Hedging strategy, Black&Scholes, Bachelier, Derivatives, ALM risks, ESG, Financial amortization, Prophet, UCITS.

In a context of low interest rates, rising interest rates or falling equity markets represent a real danger for insurers. It can be difficult to maintain a competitive paid rate, and thus to avoid the triggering of dynamic redemptions.

In order to protect ourselves against a downturn in equity markets, we determined hedging strategies of buying a 1Y-Put every year for 10 years (Roll of Puts). With regard to the protection against a rate hike, we established hedging strategies of buying 10Y/10Y-Swaptions every year for 10 years (Roll of Swaptions).
Moreover, we introduced a Roll of Swaptions with barrier, to limit the hedging cost. We also implemented self-financing strategies through the sale of other options.

Firstly, we determined what the most valuable valuation models based on two criteria were : the stability of the model (through minimization of the Greeks), and the adequacy of historical distributions with the dynamics of models. We concluded that the Black& Scholes' model was the most suitable for equities, and Bachelier's one proved to be the most relevant for rates.

Then, we projected all the economic variables of BNP Paribas Cardif taking into account these hedging strategies, using Prophet ALS. Following this, we concluded that the results obtained depends heavily on the confidence granted to the ESG : in the Real-World universe, strategies based on self-financing are proving to be very effective in terms of RRA gain (rate return on assets). Moreover, these strategies enable to avoid many scenarios with a non-competitive paid rate, and thus the triggering of dynamic redemptions.
In the Risk-Neutral universe, results are totally different, self-financing strategies lead to loss of profit, whereas strategies without self-financing lead to benefits.

Finally, we found that incorporating our hedging strategies into a composite index had different impacts on LRR (liquidity risk reserve) and LLDR (long-lasting depreciation reserve), and that it was possible to replicate these composite index by index with reduced volatility for some strategies.

Note de synthèse

▷ **Problématique et contexte :**

Dans un contexte de taux bas, les assureurs ont tendance à augmenter leur exposition sur les marchés actions afin d'augmenter le rendement généré par leur actif. Cette stratégie permet ainsi une hausse du taux servi et garantit aux assureurs de rester compétitifs. Cependant, les contraintes règlementaires liées à Solvabilité 2 limitent cette hausse d'exposition : augmenter son exposition sur les marchés action provoque une hausse du coût de capital règlementaire, ainsi qu'une diminution des fonds propres économiques, en raison d'une volatilité plus élevée. Par conséquent, BNP Paribas Cardif cherche à développer des stratégies de couverture asymétriques lui permettant de respecter ces contraintes, tout en ayant une exposition sur les marchés actions suffisante pour satisfaire ses clients.

Par ailleurs, les économistes de BNP Paribas Cardif anticipent une remontée des taux dans les années à venir, ce qui peut s'avérer très dangereux pour un assureur. En effet, l'inertie du portefeuille ne permettra pas de traduire immédiatement ces nouvelles conditions de marchés dans le rendement du fonds. Ainsi nous ne pourrons pas participer aux rebonds des marchés, et il sera donc impossible de servir un taux compétitif : c'est pourquoi des rachats dynamiques seront déclenchés. De plus, ces rachats obligeront Cardif à réaliser des MVL obligataires qui creuseront encore davantage le déficit financier.
Afin d'éviter cette situation, deux solutions sont envisageables : réduire le gap de duration, ou alors mettre en place des stratégies de couverture asymétriques nous permettant de pouvoir bénéficier d'une éventuelle remontée des taux. C'est cette méthode que nous avons décidé d'analyser au sein de ce mémoire.

▷ **Choix des modèles de valorisation :**

Afin de réaliser notre étude, il a tout d'abord été nécessaire de mettre en place des modèles de valorisation pour nos options : un modèle pour les actions, et un modèle pour les taux. Nous nous sommes donc demandés si les actions et les taux suivaient une dynamique log-normale (Black&Scholes) ou une dynamique normale (Bachelier). Pour faire notre choix, nous nous sommes appuyés sur 2 critères :

- **Stabilité :** Nous avons sélectionné le modèle avec les grecques les plus faibles, afin que les valorisations soient les plus stables possible.

– **Distributions historiques :** Nous avons déterminé si les distributions historiques des indices actions / taux majeurs suivaient une loi normale ou une loi log-normale.

Pour ce faire, nous avons établi un espace dans lequel il est possible de réconcilier ces 2 modèles à l'aide de la volatilité implicite. Ainsi, nous avons pu comparer les rapports des grecques des 2 modèles, en fonction du strike et de la maturité de l'option.

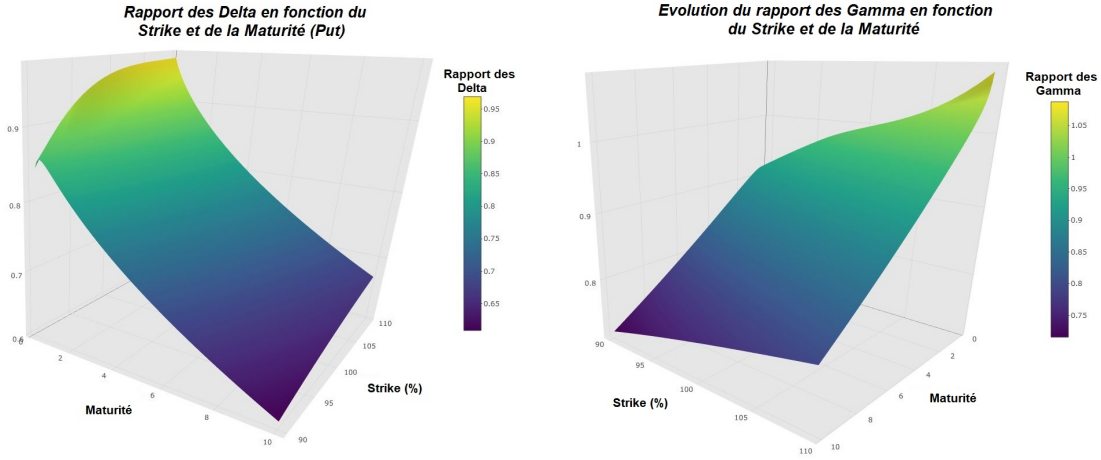


FIGURE 1 – Evolution de $\frac{\Delta_{Put}^{BS}}{\Delta_{Put}^{B}}$ et $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ en fonction de la maturité et du strike

BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une baisse des actions en établissant des stratégies basées sur l'achat de Puts. Or nous pouvons voir que le modèle de Black&Scholes a une vitesse (Delta) et une accélération (Gamma) inférieures à celles de Bachelier pour les Puts. Nous pouvons donc affirmer que la valorisation des Puts sera plus stable avec le modèle de Black&Scholes qu'avec celui de Bachelier.

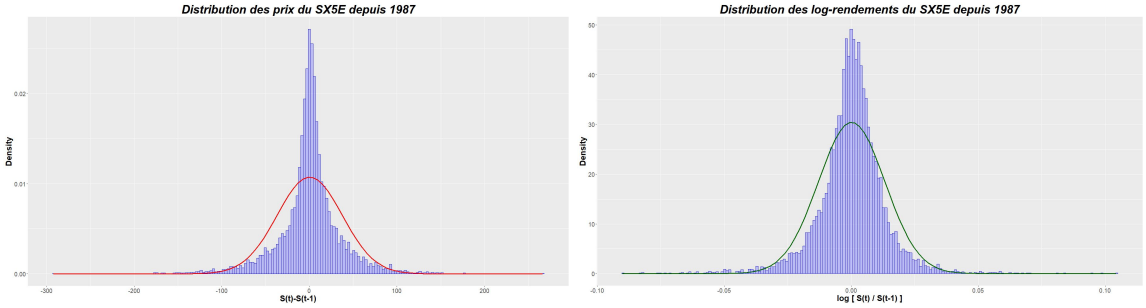


FIGURE 2 – Distribution historique du SX5E et de son log-rendement associé

Par ailleurs, nous pouvons aussi remarquer que la distribution historique de l'EuroStoxx semble plutôt suivre une dynamique log-normale. Ainsi le modèle de Black&Scholes répond aux 2 critères : nous avons donc choisi ce modèle pour les actions.

Pour les taux, nous avons appliqué la même méthode : BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une hausse des taux, en établissant des stratégies basées sur l'achat de Swaptions. Premièrement, nous avons pu constater que le modèle de Bachelier a une vitesse inférieure à celle du modèle de Black-76. Ensuite, le fait que le modèle de Bachelier ait une accélération supérieure à celle de Black-76 est négligeable, car, dans le cadre de la valorisation des options sur des taux, le terme du second ordre va être dérisoire par rapport au terme du premier ordre : les taux sont de l'ordre de 10^{-2}, ils seront donc de l'ordre de 10^{-4} au second ordre. Rappelons l'approximation du second ordre :

$$V_{t_1} - V_{t_0} = \Delta_{(t_0,r_{0,T})} \cdot (r_{t_1,T} - r_{t_0,T}) + \Gamma_{(t_0,r_{0,T})} \cdot \frac{(r_{t_1,T} - r_{t_0,T})^2}{2} + o(|r_{t_1,T} - r_{t_0,T}|^2)$$

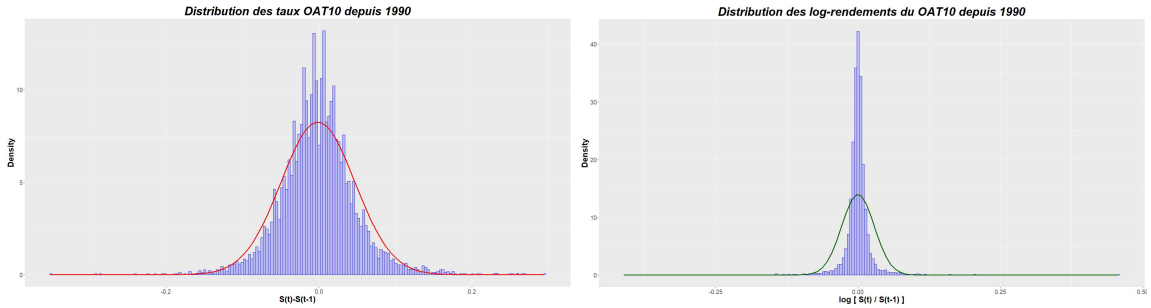


FIGURE 3 – Distribution historique des taux OAT 10Y et de son log-rendement associé

Par ailleurs, les distributions des taux de référence semblent suivre une dynamique normale plutôt qu'une dynamique log-normale. Par conséquent, nous avons choisi le modèle de Bachelier afin de valoriser nos options sur taux.

▷ **Stratégies de couverture Action :**

Afin de nous protéger contre une baisse de l'indice action, nous avons établi une stratégie de base : Roll de Puts de maturité 1 an pendant 10 ans. Ainsi, chaque année, du 31/12/2017 au 31/12/2027, nous achetons un Put de maturité 1 an. Nous avons donc testé cette stratégie pour différentes valeurs de strikes : 60%, 70%, 80%, 90%, 100%. Le strike est en pourcentage de l'indice action au moment de l'achat du Put.

Par ailleurs, nous avons aussi effectué des stratégies plus élaborées : des stratégies autofinançantes. Le principe étant de financer l'achat du Put par la vente d'une autre option. Ainsi, nous avons testé un autofinancement par :

- **La vente d'un Call :** On mise sur l'effet inverse, on se protège à la baisse et on s'expose à la hausse.
- **La vente d'un Put avec nominal x10 :** On vend un Put avec un nominal 10 fois plus important. Ainsi, le strike de ce Put sera beaucoup plus éloigné de la monnaie que le Put autofinancé. Nous misons donc sur la survenance des scénarios très rares, en s'exposant avec un effet de levier.

Nous avons développé un outil nous permettant de projeter ces stratégies de couvertures sur les tables stochastiques générées par les GSE RW et RN de BNP Paribas Cardif. L'ensemble des variables économiques de la compagnie a été projeté à l'aide du progiciel Prophet ALS, afin d'étudier l'impact de ces couvertures.

▷ **Univers Monde-Réel (RW) :** Nous avons analysé successivement le TRA (taux de rendement de l'actif), le taux servi, puis la satisfaction client par le biais du respect de la compétitivité des taux servis afin d'éviter au maximum les rachats dynamiques. Nous utilisons une nappe de volatilité de marché extraite de Bloomberg afin de valoriser les options (prise en compte du smile).

Nous en avons conclu que les meilleures stratégies étaient les stratégies consistant à autofinancer l'achat de nos Puts par d'autres Puts avec un nominal 10 fois supérieur. Avec la stratégie 100% (ATM), dès que l'indice action baisse, nous gagnons du TRA : grâce au smile de volatilité, un choc action d'au moins 31% est nécessaire pour que le Put autofinançant soit exercé. Ainsi, nous avons pu constater que la stratégie 100% ne génère que 4 scénarios sur 1000 dans lesquels nous perdions des points de TRA par rapport à la référence (sans couverture). Par ailleurs, en adoptant la stratégie 90%, nous surpassons la référence dans tous les cas. Cependant, bien que cette stratégie nous permette d'éviter les 4 scénarios dans lesquels nous avions un TRA inférieur à celui de la référence avec la stratégie 100%, la stratégie 90% a un impact légèrement moins important. De manière globale, le gain de TRA est légèrement inférieur et l'impact sur la suppression des taux servis non compétitifs est moindre que pour la stratégie ATM.

▷ **Univers Risque-Neutre (RN) :** Nous avons étudié la répartition de la richesse projetée ainsi que l'impact des différentes stratégies sur la VIF (valeur actualisée des résultats nets futurs) via l'analyse de sa distribution. Nous avons par la suite décomposé les variables économiques par année de projection en nous intéressant au profit, au mécanisme reliant la PB (participation aux bénéfices) et le TRA, et enfin à la TVOG (valeur temps des options et garanties financières). Dans ce cadre, nous n'utilisons plus des volatilités de marché, mais des volatilités qui permettent de rendre les options martingales : aucune création ou destruction de valeur ne doit avoir lieu. Cependant, nous ne prenons plus en compte le smile de volatilité : l'exposition à l'effet de levier est ainsi plus rapide (à partir d'un choc de 20% au lieu de 31%).

Les résultats obtenus diffèrent grandement de ceux concernant l'univers Monde-Réel : en effet, les meilleures stratégies sont ici les stratégies de Roll de Puts seuls, ou alors les Rolls de Puts autofinancés par des Calls avec le même nominal (sans effet de levier). Nous avons observé que ces 2 stratégies permettent, toutes deux, de réduire l'écart-type de notre VIF, tout en augmentant notre VIF moyenne : l'obtention un meilleur couple rendement/risque est donc favorisée. Un élément nous a néanmoins interpellé : l'augmentation du profit sur chaque année de projection malgré une diminution de notre TRA. Ce phénomène a permis de mettre en exergue le mécanisme reliant le TRA et la PB : nous

faisons face à moins de scénarios catastrophiques où nous supportons les pertes à 100%. Ainsi, réduire notre TRA va certes réduire nos produits financiers, mais cette perte sera compensée par un plus grand gain sur la PB, que nous aurions dû reverser à nos assurés dans les scénarios très haussiers. Enfin, l'analyse de la TVOG nous a permis de voir que les stratégies sans autofinancement étaient les stratégies permettant de réduire le plus le coût de notre TVOG. Cependant, nous avons observé que les stratégies autofinancées par des Calls nous permettent d'obtenir un meilleur TRA que celles sans autofinancement, et que ce gain en TRA surpasse le gain en TVOG. Les meilleures stratégies en univers Risque-Neutre sont donc celles autofinancées par des Calls.

▷ **Comparaison :** Ces différences de résultats entre les 2 univers sont dues aux disparités entre les GSE. En effet, comme nous pouvons le voir sur les 2 cônes de diffusion des log-rendements, les queues de distribution des log-rendements en univers Risque-Neutre sont beaucoup plus lourdes qu'en univers Monde-Réel. Ainsi les stratégies autofinancées par des Puts avec nominal x10 rencontreront beaucoup plus de scénarios dans lesquels le Put autofinançant sera exercé en univers RN qu'en univers RW (phénomène amplifié par la non prise en compte du smile de volatilité). Par conséquent, l'effet de levier va fortement impacter nos résultats en univers RN dans les scénarios de fortes baisses.

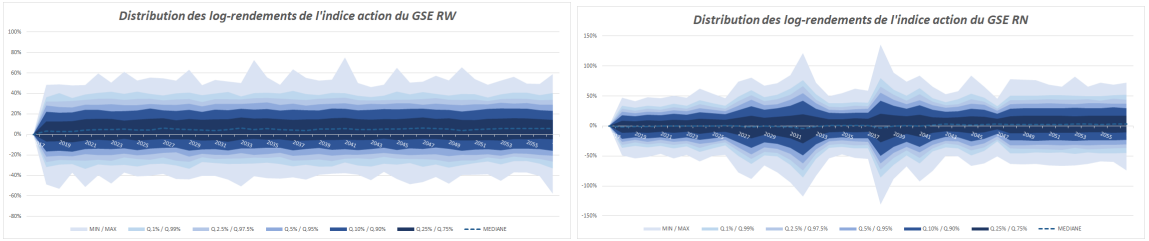


FIGURE 4 – Distribution des log-rendements de l'indice action en univers RW et RN

De plus, le GSE RW comprend une prime de risque dans la modélisation de l'indice action, non prise en compte lorsque nous valorisons des options sur cet indice. Ainsi, nous allons sur-valoriser les Puts et sous-valoriser les Calls dans cet univers. Nous pouvons interpréter ce phénomène en disant que BNP Paribas Cardif a une vision prospective plus positive des actions que le marché. C'est pourquoi les stratégies autofinancées par des Calls ne génèrent pas de bons résultats en univers RW.

Enfin, nous pouvons donc attester que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé, ainsi le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision sont relatifs à la confiance dans les générateurs. En univers Monde-Réel, les stratégies de Roll de Puts autofinancés par d'autres Puts avec un nominal 10 fois supérieur seront les plus performantes, alors qu'en univers Risque-Neutre ce seront les stratégies de Roll de Puts autofinancées par des Calls qui seront les meilleures.

▷ **Stratégies de couverture Taux :**

La stratégie de base mise en place pour nous protéger contre une hausse des taux consiste en un Roll de Swaptions de maturité/ténor 10Y/10Y pendant 10 ans. Nous avons testé cette stratégie pour différentes valeurs de strikes définis grâce à une marge additive appliquée au taux swap 10Y forward : ATM, $ATM + 0.5\%$, $ATM + 1.0\%$, $ATM + 1.5\%$, $ATM + 2.0\%$. En outre, nous avons effectué des stratégies plus élaborées :

- **Ajout d'une barrière de niveau strike $+2.0\%$:** Limitation de notre protection, mais réduction du coût de financement de nos couvertures.
- **Autofinancement avec Swaption nominal x10 :** Nous misons sur la survenance des scénarios très rares, en s'exposant avec un effet de levier.
- **Autofinancement avec Floor Forward :** Le floor va commencer dans 10Y et durera 10Y (le même schéma de couverture que la Swaption). On mise sur l'effet inverse : on se protège à la hausse et on s'expose à la baisse.

Comme pour les stratégies action, nous avons d'abord projeté ces stratégies à l'aide de notre outil de couverture sur les univers RW et RN, puis nous avons projeté l'ensemble des variables économiques sur Prophet ALS.

▷ **Univers Monde-Réel :** Nous avons effectué les mêmes analyses que pour les stratégies action, en utilisant aussi une nappe de volatilités de marché extraite de Bloomberg.

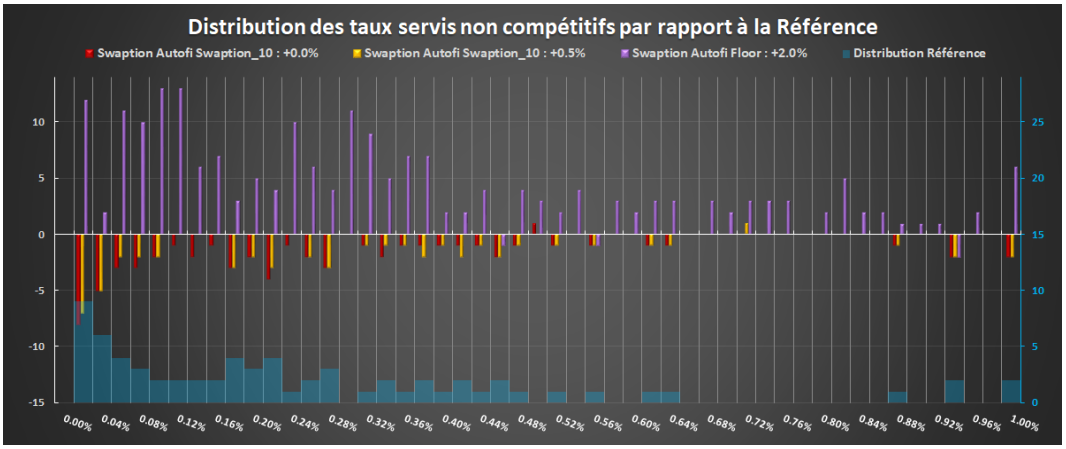


FIGURE 5 – Différence de la distribution des taux servis non compétitifs

Nous avons pu voir que les meilleures stratégies étaient les stratégies consistant à autofinancer l'achat de nos Swaptions par d'autres Swaptions avec un nominal 10 fois supérieur. De ce fait, nous nous exposions à un effet de levier, en misant sur le fait que les scénarios catastrophiques étaient suffisamment rares pour ne pas impacter significativement nos rendements.

En effet, en termes de gain de TRA, la stratégie consistant à autofinancer l'achat des Swaptions par des Floors forward avec un nominal 10 fois supérieur peut sembler très intéressante, mais nous nous sommes finalement rendu compte que cette stratégie provoque beaucoup de scénarios avec un taux servi non compétitif, donc des rachats dynamiques. Nous avons ainsi pu constater que les stratégies autofinancées par des Swaptions de nominal 10 fois supérieur sont les meilleures : en effet, elles nous permettent d'éviter un grand nombre de scénarios où le taux servi n'était pas compétitif, et donc un grand nombre de rachats dynamiques. Par ailleurs, nous avons pu remarquer que la valeur du strike n'influait pas beaucoup sur la suppression des taux servis non compétitifs, les stratégies ATM et $ATM + 0.5\%$ sont toutes les deux très efficaces. Néanmoins, nous avons noté que la stratégie ATM nous permet, en général, de gagner plus de TRA que la stratégie $ATM + 0.5\%$, sauf pour pour les 10 pires scénarios (quantile à 1%), où le TRA de la stratégie ATM est légèrement inférieur à celui de la stratégie $ATM + 0.5\%$ (mais reste toujours supérieur à celui de la référence). De manière générale, la stratégie ATM semble donc meilleure.

▷ **Univers Risque-Neutre :** Nous avons aussi soulevé le fait que les volatilités martingales ne prennent plus en compte le smile de volatilité, et ainsi nous sommes plus rapidement exposés à l'effet de levier (à partir d'un choc de +2.49% au lieu de +3.86%)

Suite à cette analyse, nous avons pu constater que les résultats sont très différents de ceux obtenus en univers RW. En effet, les meilleures stratégies sont ici les stratégies de Roll de Swaptions avec et sans barrière. Premièrement, nous avons vu que ces stratégies sans autofinancement nous permettent d'augmenter notre VIF pour un strike au moins égal à $ATM + 1.0\%$. Cependant, ces stratégies ne permettent pas de réduire l'écart-type de la VIF : au contraire, toutes l'augmentent. Enfin, lorsque nous avons décomposé nos variables économiques par année de projection, nous avons pu constater que la stratégie avec barrière était supérieure à celle sans barrière. En effet, ajouter une barrière à la swaption nous permet de réduire son coût. Or nous avons remarqué que lorsque nous n'ajoutons pas de barrière à nos swaptions, le gain de profit lors du paiement des primes est supérieur au gain de profit obtenu lors de la réception des cash-flows. En effet, les barrières vont certes réduire notre gain dans les scénarios très haussiers, mais nous reverserons aussi moins de PB aux assurés. Les stratégies de Swaptions avec barrière sont donc les meilleures en univers RN.

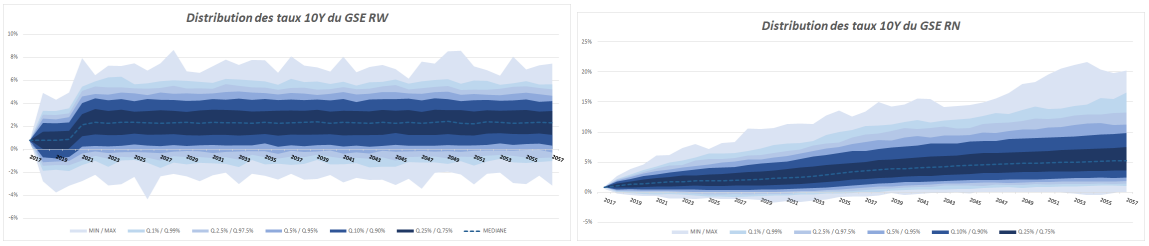


FIGURE 6 – Distribution des taux 10Y en univers RW et RN

▷ **Comparaison :** Comme pour les stratégies Action, ces différences de résultats entre les 2 univers sont dues aux disparités entre les GSE. En effet, comme nous pouvons le voir sur les 2 cônes de diffusion des taux 10Y, les queues de distribution des taux sont beaucoup plus lourdes en univers Risque-Neutre qu'en univers Monde-Réel. Ainsi les stratégies autofinancées par des Swaptions avec nominal x10 rencontreront beaucoup plus de scénarios dans lesquels la Swaption autofinançante sera exercée en univers RN qu'en univers RW (phénomène amplifié par la non prise en compte du smile de volatilité). Par conséquent, l'effet de levier va fortement impacter nos résultats en univers RN dans les scénarios de fortes hausses.

Enfin, nous pouvons donc affirmer que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé : le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision est relatif à la confiance dans les générateurs. En univers RW, les stratégies de Roll de Swaptions autofinancées par d'autres Swaptions avec nominal x10 seront les plus performantes, alors qu'en univers RN ce seront les stratégies de Roll de Swaptions avec barrière qui seront les meilleures.

▷ **OPCVM :**

Nous avons essayé d'établir une nouvelle méthode de prise en compte des stratégies de couverture action.

Tout d'abord, plutôt que de prendre en compte les cash-flows réels des stratégies de couverture, c'est-à-dire des flux de trésorerie qui viennent alimenter nos produits financiers, nous avons créé un indice composite, qui serait un OPCVM incorporant l'indice action et les cash-flows générés par les stratégies de couverture. Nous avons pu constater que les différences entre ces 2 méthodes de comptabilisation étaient des impacts sur la PRE (provision pour risque d'exigibilité) et la PDD (provision pour dépréciation durable) qui sont différents. Ce phénomène est amplifié par la richesse latente de BNP Paribas Cardif qui est très importante.

Ensuite, nous avons essayé de répliquer ces indices composites par des indices avec volatilité réduite. Ainsi, chaque stratégie de couverture correspondra à un facteur de réduction de volatilité, et, une fois ces facteurs obtenus, nous n'aurons plus besoin de projeter de nouveau nos stratégies de couverture pour d'autres études. De ce fait nous gagnerons du temps, et nous limiterons aussi le risque opérationnel. Afin de déterminer si ces réplications étaient possibles, nous avons extrait les diffusions browniennes annuelles réalisées sur la table stochastique du GSE Risque-Neutre. Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus avec ce nouvel indice aux résultats obtenus avec les indices composites associés. Nous avons ainsi pu constater que les réplications étaient excellentes pour les stratégies de Puts seuls ou autofinancés par des Calls, mais que la réplication des stratégies de Puts autofinancés par d'autres Puts avec nominal x10 n'étaient pas satisfaisantes à cause d'une asymétrie importante des rendements de l'indice composite.

▷ **Conclusion finale :**

Pour conclure, nous pouvons donc affirmer que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé : le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision est relatif à la confiance dans les générateurs. Rappelons tout de même que l'univers RW représente la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif.
Le choix de la stratégie de couverture à appliquer dépendra aussi des objectifs de l'assureur :

- **Univers RW :** Maximiser son résultat et sa remontée de dividendes (optique court-terme)
- **Univers RN :** Minimiser son financement du capital réglementaire (SCR - VIF), et donc ses fonds propres économiques (optique long-terme)

Univers	**Marché**	**Stratégie sélectionnée**
RW	Actions	Roll de Puts autofinancés par des Puts de nominal x10
	Taux	Roll de Swaptions autofinancées par des Swaptions de nominal x10
RN	Actions	Roll de Puts autofinancés par des Calls
	Taux	Roll de Swaptions avec barrière

TABLE 1 – Stratégies à sélectionner en fonction des objectifs désirés

Executive summary

In a context of low interest rates, insurers tend to increase their equity market exposure in order to increase the yield of their assets. This will lead to an increase of the paid rate, which will allow insurers to remain competitive.
However, regulatory requirements related to Solvency 2 limit this exposure : increasing its equity market exposure raise the cost of regulatory capital, as well as a decrease in economic capital, due to higher volatility. Consequently, BNP Paribas Cardif seeks to develop asymmetric hedging strategies to satisfy these requirements, while having sufficient equity market exposure to satisfy its clients.

Also, BNP Paribas Cardif's economists forecast a rate hike in the coming years, which can be very dangerous for an insurer. Indeed, the inertia of the portfolio won't immediately translate these new market conditions into the fund's performance. So we won't be able to participate in market rebounds, and it will therefore be impossible to pay a competitive rate : that is why dynamic redemptions will be triggered. Moreover, these redemptions will force BNP Paribas Cardif to realize bond MVLs, which will further deepen the financial deficit.
To avoid this situation, it's possible to reduce the duration gap, or to establish asymmetric hedging strategies, allowing us to benefit from a possible rate hike. This is this method that we decided to analyze within this memory.

▷ **Valuation models :**

In order to carry out our study, it was first necessary to set up valuation models for options : a model for equities, and a model for rates. We therefore wondered whether stocks and rates followed a log-normal dynamic (Black&Scholes) or a normal dynamic (Bachelier). To make our choice, we relied on 2 criteria :

- **Stability :** We selected the model with the lowest greeks, so that valuations are as stable as possible.
- **Historical Distributions :** We determined whether the historical distributions of equities / major rate indices fit a normal distribution or a log-normal one.

To do this, we established a space in which models could be reconciled using implicit volatility. Thus, we were able to compare the Greek ratios of the two models, according to the strike and the maturity of the option.

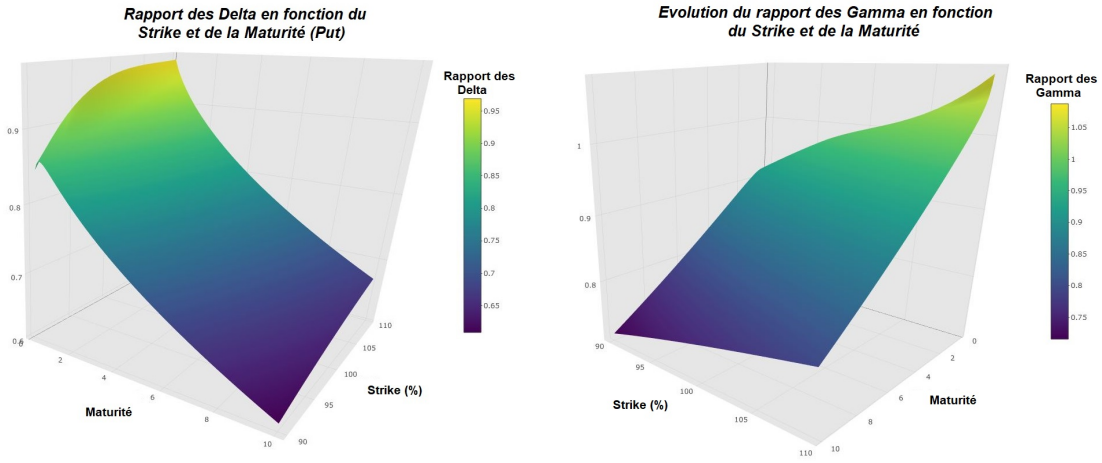


FIGURE 7 – Evolution of $\frac{\Delta^{BS}_{Put}}{\Delta^{B}_{Put}}$ and $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ according to maturity and strike

BNP Paribas Cardif wants to protect itself against a downturn in equity market by establishing strategies based on the purchase of Puts. Now we saw the model of Black&Scholes has a speed (Delta) and an acceleration (Gamma) lower than those of Bachelier for the Puts. We can therefore say that the valuation of Puts will be more stable with the model of Black&Scholes than with Bachelier's one.

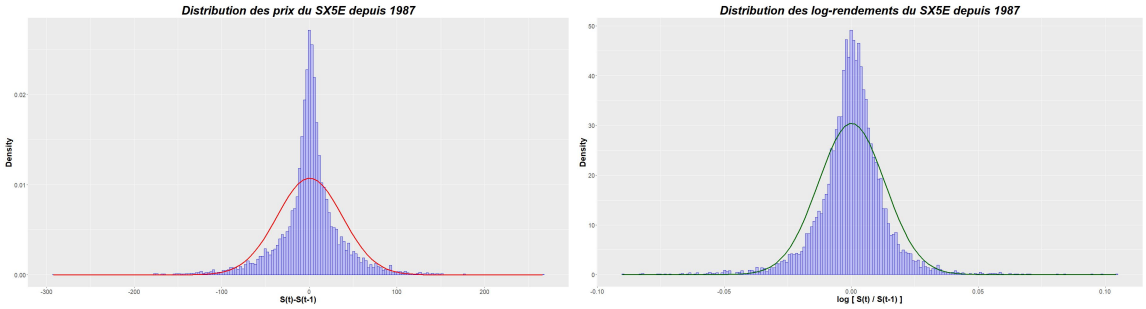


FIGURE 8 – Historical distribution of the SX5E and its associated log-yield

Moreover, we can also notice that the historical distribution of the EuroStoxx seems rather to fit a log-normal dynamic. Thus, the Black&Scholes model meets both criteria : we've chosen this model for equities.

For interest rates, we applied the same method : BNP Paribas Cardif wants to protect against a rate hike, by establishing strategies based on the purchase of Swaptions. First, we found that Bachelier's model has a lower speed than the Black-76 model. Secondly, the fact that the Bachelier's model has a higher acceleration than Black-76's one is negligible, because, as part of the valuation of options on interest rates, the term of the second order will be derisory compared to the term of the first order : interest rates are of the order

of 10^{-2}, so they will be of the order of 10^{-4} in the second order. Reminder of the second order approximation :

$$V_{t_1} - V_{t_0} = \Delta_{(t_0,r_{0,T})} \cdot (r_{t_1,T} - r_{t_0,T}) + \Gamma_{(t_0,r_{0,T})} \cdot \frac{(r_{t_1,T} - r_{t_0,T})^2}{2} + o(|r_{t_1,T} - r_{t_0,T}|^2)$$

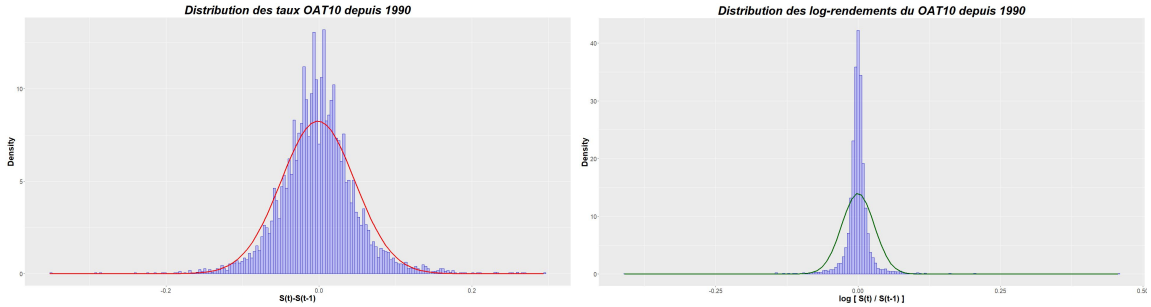


FIGURE 9 – Historical distribution of OAT 10Y rates and associated log-yield

Also, reference rate distributions seem to fit a normal dynamic rather than a lognormal one. Therefore, we've chosen the Bachelier's model to value interest rate options.

▷ **Equity hedging strategies :**

In order to protect ourselves against a downturn of the equity market, we've established a basic strategy : Roll of 1Y-Puts for 10 years. Thus, every year, from 31/12/2017 to 31/12/2027, we will buy a Put of maturity 1 year. So we tested this strategy for different strikes values : 60%, 70%, 80%, 90%, 100%. The strike is as a percentage of the stock index at the time of purchasing the Put.

Moreover, we also carried out more elaborate strategies : self-financing strategies. The principle is to finance the purchase of the Put by selling another option. Thus, we tested self-financing by :

- **Selling Call :** We bet on the opposite effect, we protect ourselves on the downturn and we expose ourselves to the rise.
- **Selling Put with notional x10 :** We sell a Put with a notional 10 times higher. Thus, the strike of this Put will be much further of the money than the self-financed Put. We therefore bet on the occurrence of very rare scenarios, exposing ourselves to a leverage effect.

We've developed a tool allowing us to project these hedging strategies on the stochastic tables generated by BNP Paribas Cardif's RW and BN ESGs. Then, we projected all of the company's economic variables using the Prophet ALS software to study the impact of these hedging strategies.

▷ **Real-World Universe (RW) :** We analyzed the RRA (rate return on assets), then the paid rate, and finally customer satisfaction through respect for the competitiveness of paid rates to avoid dynamic redemptions. We used a table of market volatilities extracted from Bloomberg to value the options (taking into account the volatility smile).

We could see the best strategies were the strategies of self-financing the purchase of our Puts by selling other Puts with a notional 10 times higher. With the 100% strategy (ATM), as soon as the equity index fall down, we earn RRA : thanks to the volatility smile, a downturn of at least 31% is necessary for the Put self-financing to be exercised. Thus, we found that the 100% strategy generated only 4 out of 1000 scenarios in which we lost RRA points compared to the reference (without hedging). Moreover, by adopting the 90% strategy, we overcome the reference in all cases. However, while this strategy allowed us to avoid the 4 scenarios in which we had a lower RRA than the benchmark with the 100% strategy, the 90% strategy had a slightly smaller impact. Overall, we earned slightly less RRA, and it had less impact on the removal of non-competitive paid rates than the ATM strategy.

▷ **Risk-Neutral Universe (RN) :** We studied the distribution of the projected wealth, then we analyzed strategies that have the greatest impacts on the VIF, in particular on its distribution. Then, we broke down the economic variables by projection year, and we studied the profit, especially the mechanism linking the PB and the TRA, and finally the TVOG. In this universe, we no longer use market volatilities, but martingale volatilities : no creation or destruction of value should take place in this universe. However, we no longer consider the volatility smile, and so we're exposed to leverage more quickly (downturn of 20% instead of 31%).

Following this analysis, we were able to observe that the results are very different from those obtained in real-world universe. Indeed, the best strategies here are the strategies of Rolling Puts alone, or Rolling Puts self-financed by Calls with the same notional (no leverage). First, we could see that these two strategies allowed us to reduce the volatility of the VIF, while increasing our average VIF : this allowed us to obtain a better risk / return ratio. Then, we were surprised that these strategies allowed us to earn profit in each year of projection, while the RRA decreased. This phenomenon has highlighted the mechanism linking the TRA and the PB : we face fewer catastrophic scenarios where we endure losses at 100%. Thus, reducing our RRA will certainly reduce our financial products, but this loss will be offset by a greater benefit on the PB, which we should have paid to our policyholders in very bullish scenarios. Finally, TVOG's analysis allowed us to see that strategies without self-financing were the strategies enabling to reduce the most the cost of the TVOG. However, we were able to deduce from this that self-financed strategies by Calls allowed us to obtain a better TRA than those without self-financing, and that this gain in TRA exceed the gain in TVOG. The best strategies in the risk-neutral universe were those self-financed by Calls.

▷ **Comparing :** These differences the two universes are due to disparities between ESGs. Indeed, as we can see on the 2 log-yield diffusion cones, the log-yield distribution tails in the Risk-Neutral universe are much heavier than in the Real-World universe. Thus self-financed strategies by selling Puts with notional x10 will have many more scenarios in which the self-financing Put will be exercised in the RN universe than in the RW universe (a phenomenon amplified by not taking into account the volatility smile). Consequently, the leverage effect will lower our results in the RN universe in the cases of sharp declines.

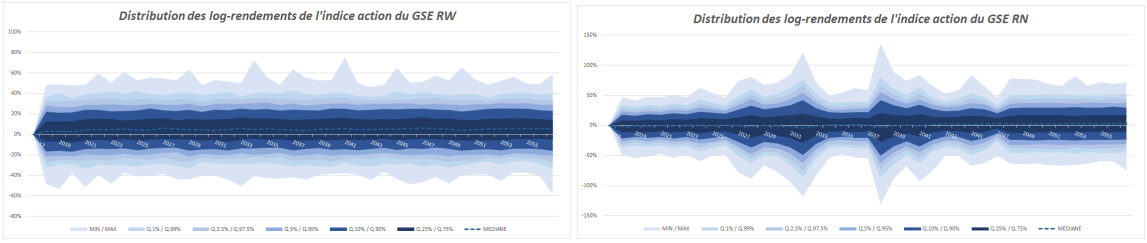


FIGURE 10 – Log-yield distribution of the equity index in the RW and RN universe

Moreover, the RW ESG includes a risk premium in the equity index modeling, which is not taken into account when we value options on this index. Thus, we will over-value the Puts and under-value the Calls in this universe. We can interpret this phenomenon by saying that BNP Paribas Cardif has a more positive outlook on equities than the market. This is why self-financed strategies by Calls do not generate interesting results in RW universe.

Finally, we can say that our analyzes are strongly dependent on the ESG used, so the significance to be attributed to the results RN and RW in the decision-making are relative to the confidence in these generators. In Real-World universe, the strategies of Rolling Puts self-financed by other Puts with a notional 10 times higher will be the most efficient, while in the Risk-Neutral universe, it will be the strategies of Rolling Puts self-financed by Calls that will be the best.

▷ **Interest Rate Hedging Strategies :**

The basic strategy setting up to protect us against a rate hike is a 10Y/10Y maturity/tenor Swaption Roll for 10 years. We've tested this strategy for different strikes values : they're defined thanks to an additive margin applied to the Swap Rate 10Y forward : ATM, $ATM + 0.5\%$, $ATM + 1.0\%$, $ATM + 1.5\%$, $ATM + 2.0\%$. Moreover, we established more elaborate strategies :

- **Adding a barrier of level strike+2.0% :** We limit our protection, but this allows us to reduce the cost of our hedging strategies.
- **Self-financing with Floor Forward 10Y/10Y :** The floor will start in 10Y and last 10Y (the same cover scheme as the Swaption). We bet on the opposite effect : we protect ourselves against rate hike and we're exposed to a downturn.

– **Self-financing with Swaption of notional x10 :** We bet on the occurrence of very rare scenarios, exposing ourselves to a leverage effect.

As with equity hedging strategies, we first projected these strategies using our RW and RN universe hedging tool, and then we projected all the economic variables on Prophet ALS.

▷ **Real-World Universe :** We performed the same analyzes as for the equity hedging strategies, using a table of market volatilities extracted from Bloomberg.

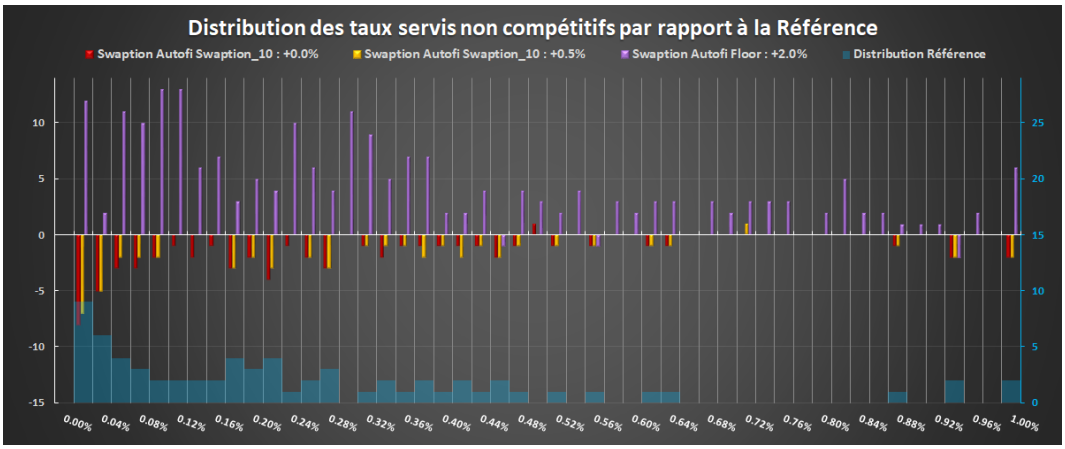


FIGURE 11 – Difference in the distribution of uncompetitive paid rates

We were able to see that the best strategies were the strategies of self-financing the purchase of our Swaptions by selling other Swaptions with a notional 10 times higher. As a result, we were exposed to a leverage effect, betting on the fact that catastrophic scenarios were sufficiently rare not to significantly impact our returns.
Indeed, in terms of gain of RRA, the strategy of self-financing the purchase of Swaptions by Forward Floors with a notional 10 times higher seemed very interesting, but we finally realized that this strategy was provoking many scenarios with a paid rate uncompetitive, so dynamic redemptions were triggered.
We were able to observe that the self-financed strategies with Swaptions of notional 10 times higher were the best. They allowed us to avoid a large number of cases in which the paid rate was not competitive. These strategies allowed us to avoid a large number of dynamic redemptions. On the other hand, we were able to notice that the value of the strike didn't have much effect on the deletion of the non-competitive paid rates, the ATM and $ATM + 0.5\%$ strategies were both very effective. Nevertheless, we noticed that the ATM strategy allowed us, in general, to gain more RRA than the $ATM + 0.5\%$ strategy, except for the 10 worst scenarios (1% percentile), where the ATM strategy was slightly lower than the $ATM + 0.5\%$ strategy (but still higher than the benchmark). In general, the ATM strategy seems better.

▷ **Risk-Neutral Universe :** We also raised the fact that martingale volatilities no longer take into account volatility smile, and so we're more quickly exposed to leverage (hike of +2.49% instead of +3.86%).

Following this analysis, we've seen that the results are very different from those obtained in the RW universe. Indeed, the best strategies here are the strategies of Swaptions Roll with and without barrier. First, we saw that these non-self-financing strategies allowed us to increase our VIF for a strike at least equal to $ATM + 1.0\%$. Secondly, we observed that these strategies did not allow us to reduce the volatility of the VIF : all strategies increased its volatility. Finally, when we break down our economic variables by projection year, we found that the barrier strategy was superior to the one without it. Indeed, adding a barrier to swaption allows us to reduce its cost. However, we've noticed that this gain in the payment of premiums is greater than the profit gain obtained when receiving cash-flows, when we don't add a barrier to our swaptions. Indeed, barriers will certainly reduce our gain in very bullish scenarios, but we will also pay less PB to policyholders. Barrier Swaptions strategies are therefore the best in RN universe.

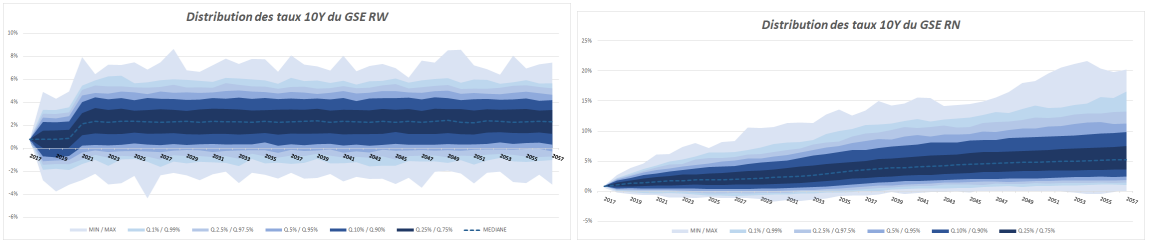


FIGURE 12 – 10Y rate distribution in the RW and RN universe

▷ **Comparing :** As with equity hedging strategies, these differences between the two universes are due to disparities between ESGs. Indeed, as we can see on the 2 10Y rate diffusion cones, the tails of the rate distribution are much heavier in the Risk-Neutral universe than in the Real-World universe. Thus, strategies self-financed by Swaptions with notional x10 will have many more cases in which the self-financing Swaption will be exercised in the RN universe than in the RW universe (a phenomenon amplified by the fact that the volatility smile is not taken into account). As a result, the leverage effect will lower our results in the RN universe in the cases of sharp increases.

Finally, we can say that our analyzes are strongly dependent on the ESG used in the decision-making process. In RW universe, the strategies of the Swaptions Roll self-financed by other Swaptions with notional x10 will be the most efficient, whereas in the RN universe, it will be the Barrier Swaptions Roll the best strategy.

▷ **OPCVM :**

We tried to establish a new method for taking into account equity hedging strategies.

First of all, rather than taking into account the actual cash-flows of the hedging strategies, i.e. the cash-flows that put money into our financial products, we created a composite index, which would be a UCITS incorporating the equity index and the cash-flows generated by the hedging strategies. We were able to note that the differences between these two accounting methods were impacts on LRR (liquidity risk reserve) and LLDR (long-lasting depreciation reserve) that are different. This phenomenon is amplified by the latent wealth of BNP Paribas Cardif which is very important.

Then, we tried to replicate these composite index by index with reduced volatility. Thus, each hedging strategy will match to a volatility reduction factor, and once these factors obtained, we will no longer need to re-project our hedging strategies for other studies. As a result, we will save time and limit operational risk. In order to determine if these replications were possible, we extracted the annual Brownian scatterings carried out on the stochastic table of the Risk-Neutral ESG. We then compared the results obtained with this new index to the results obtained with the associated composite index. We were able to observe that the replications were excellent for Puts alone or Call-self-financed strategies. Moreover, the replication of self-financed strategies by other Puts with nominal x10 was unsatisfactory due to a significant asymmetry in returns of the composite index.

▷ **Final conclusion :**

To conclude, we can argue that our analyzes are strongly dependent on the ESG used. The choice of the hedging strategy to be applied will also depend on the insurer's objectives :

- **RW universe :** Maximize profit and dividend yield (short-term view)
- **RN universe :** Minimize its financing of regulatory capital (SCR - VIF), and thus its economic capital (long-term view)

Universe	**Market**	**Selected Stratégy**
RW	Equity	Rolling Puts self-financed by other Puts notional x10
	Rate	Rolling Swaptions self-financed by other Swaptions notional x10
RN	Equity	Rolling Puts self-financed by Calls
	Rate	Rolling Swaptions with barrier

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant de stage, Samy COLLIER, actuaire ALM sénior chez BNP Paribas Cardif. Sa disponibilité, sa pédagogie, et son investissement sans limite m'ont permis d'apprendre énormément à ses côtés. Ses compétences très pointues dans une multitude de domaines m'ont non seulement permis de développer des connaissances en actuariat, en ALM, mais aussi en programmation.

Je remercie aussi toute l'équipe ALM pour son ambiance chaleureuse et tous les conseils qu'ils ont pu me prodiguer durant ces 6 mois. Ce fut un réel plaisir d'effectuer ce stage à leurs côtés.

Je tiens aussi à remercier Richard PERERA, consultant ALM sénior chez Milliman, qui m'aura beaucoup appris sur VBA lors du développement de l'outil de couverture.

Je remercie également Laurent DEVINEAU, directeur de la mesure des risques chez Allianz, pour ses précieux conseils sur la valorisation au sein des GSE.

De plus, je remercie tout particulièrement Fabrice HAMON, consultant fondateur de Britsk, ainsi que Rainer BUCKDAHN, enseignant-chercheur membre du corpus du LMBA, pour leur disponibilité, leur suivi tout au long de la réalisation de ce mémoire, et leurs précieux conseils prodigués.

Enfin, je remercie toute l'équipe enseignante de l'EURIA pour les connaissances qu'ils m'ont apportées et sans lesquelles la réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Sommaire

INTRODUCTION **1**

I PILIERS FONDAMENTAUX DE LA MODÉLISATION **3**

1 Univers d'évaluation **5**
1.1 Absence d'opportunité d'arbitrage 5
1.2 Complétude du marché 5
1.3 Risque-neutralité 6
1.4 Liens et conséquences 6

2 Modèles fondateurs **9**
2.1 Préludes 9
2.2 Modèle de Bachelier 10
2.3 Modèle de Black&Scholes 11
2.4 Limites 11
2.5 Modélisation d'options 12
2.5.1 Portefeuille de couverture 12
2.5.2 Prix d'un call/put avec Black&Scholes 15
2.5.3 Prix d'un call/put avec Bachelier 17

II MODÈLES ADAPTÉS ET COMPARAISON **19**

3 Modèles de dynamique spot (actions) **21**
3.1 Modèle de Bachelier avec ajout d'un drift et de la valeur temps 22
3.2 Modèle de Black&Scholes 23
3.3 Comparaison 23
3.3.1 Maturité 24
3.3.2 Volatilité 25
3.3.3 Volatilité implicite 26
3.3.3.1 Maturité : 27
3.3.3.2 Strike : 28
3.3.3.3 Maturité + Strike : 29

3.3.3.4 Conclusion : . . . 30
3.3.4 Delta . . . 30
3.3.5 Gamma . . . 33
3.3.6 Thêta . . . 35
3.3.7 Distributions historiques et Conclusion . . . 37

4 Modèles de dynamique forward (taux) 39
4.1 Préambule . . . 39
4.2 Modèle de Black-76 . . . 43
4.3 Modèle de Bachelier avec ajout de la valeur temps . . . 45
4.4 Comparaison . . . 47
4.4.1 Maturité . . . 47
4.4.2 Volatilité . . . 48
4.4.3 Distributions historiques et Conclusion . . . 49

III MODÉLISATION DES INSTRUMENTS DE COUVERTURE ET RISQUES ALM 53

5 Description du GSE ALM RW de BNP Paribas Cardif 55
5.1 Taux et inflation . . . 57
5.2 Actions . . . 60

6 Description du GSE RN de BNP Paribas Cardif 63
6.1 Taux et inflation . . . 64
6.2 Actions . . . 66
6.3 Tests de martingalité . . . 67
6.3.1 Déflateur . . . 67
6.3.2 Taux . . . 68
6.3.3 Actions . . . 69

7 Couverture Action 71
7.1 Call / Put . . . 71
7.2 Contrat forward / Contrat à terme . . . 72

8 Couverture Taux 75
8.1 Caplet / Floorlet . . . 75
8.2 Cap / Floor . . . 76
8.3 Contrat FRA . . . 77
8.4 Interest Rate Swap (IRS) . . . 78
8.5 Swaption . . . 80

9 Amortissement financier **83**
9.1 French Gaap : Amortissement au TRE . . . 83
9.2 French Gaap : Amortissement linéaire . . . 84
9.3 Comparaison des méthodes d'amortissement French Gaap . . . 85
9.4 Comptabilité IFRS . . . 86
9.5 Différence FGAAP / IFRS . . . 87

10 Modélisation et description des risques ALM **89**
10.1 Prophet . . . 89
10.2 Profits et TRA . . . 90
10.3 Taux technique, TMG, PB et PPB . . . 91
10.4 Corridor de compétitivité et taux servi . . . 92
10.5 RC, PDD, PRE . . . 94
10.6 Gap de duration . . . 95
10.7 VIF, BEL, NAV, SCR, PVFP, TVOG, CoC . . . 96
10.8 Convergence . . . 98
10.9 Préambule aux stratégies de couverture : TVOG . . . 98

IV STRATÉGIES DE COUVERTURE : ACTIONS **101**

11 Présentation des stratégies Action **103**

12 Univers Monde-Réel **105**
12.1 Volatilité . . . 105
12.2 Distribution du TRA . . . 107
12.3 Distribution des gains/pertes de TRA . . . 109
12.4 Taux servi et satisfaction client . . . 112
12.4.1 Analyse des simulations atypiques . . . 112
12.4.2 Taux servi non compétitif . . . 115
12.4.3 Taux servi inférieur au taux cible . . . 117

13 Univers Risque-Neutre **119**
13.1 Correctifs de martingalité . . . 119
13.2 Projection de la richesse . . . 121
13.3 Distribution VIF . . . 122
13.4 Mécanisme entre Profits, TRA et PB . . . 123
13.5 TVOG . . . 127

14 Conclusion des analyses RW et RN **129**

15 OPCVM **133**
15.1 Indice composite . . . 134
15.1.1 Création de l'indice composite . . . 134
15.1.2 Répartition de la richesse projetée . . . 136

15.1.3 Distribution VIF . . . 136
15.1.4 Profit . . . 138
15.1.5 TRA et PB . . . 138
15.1.6 TVOG . . . 140
15.1.7 PRE et PDD . . . 141
15.2 Indice avec volatilité réduite . . . 142
15.2.1 Extraction des diffusions browniennes . . . 143
15.2.2 Création de l'indice avec volatilité réduite . . . 145
15.2.3 Répartition de la richesse projetée . . . 148
15.2.4 Distribution VIF . . . 148
15.2.5 Comparaison Profit, TRA, PB et TVOG . . . 150
15.2.6 Conclusion de la réplication . . . 153

V STRATÉGIES DE COUVERTURE : TAUX 155

16 Présentation des stratégies 157

17 Univers Monde-Réel 161
17.1 Volatilité . . . 161
17.2 Distribution du TRA . . . 163
17.3 Distribution des gains/pertes de TRA . . . 165
17.4 Taux servi et satisfaction client . . . 169
17.4.1 Analyse des simulations atypiques . . . 169
17.4.2 Taux servi non compétitif . . . 175

18 Univers Risque-Neutre 177
18.1 Correctifs de martingalité . . . 177
18.2 Projection de la richesse . . . 179
18.3 Distribution VIF . . . 181
18.4 Mécanisme entre Profits, TRA et PB . . . 182
18.5 TVOG . . . 184

19 Conclusion des analyses RW et RN 187

CONCLUSION 191

Table des figures 195

Liste des abréviations 199

ANNEXE **203**

A Développements mathématiques **203**
A.1 Partie 2.5.2 : Modèle originel : Pricing avec Black&Scholes 203
A.1.1 Valorisation : 203
A.1.2 Contenu du portefeuille de couverture : 204
A.2 Partie 2.5.3 : Modèle originel : Pricing avec Bachelier 204
A.2.1 Valorisation : 204
A.3 Partie 3.1 : Modèle action : Bachelier spot 205
A.3.1 Valorisation : 205
A.4 Partie 3.3 : Comparaison modèles action 205
A.4.1 Maturité : 205
A.4.2 Volatilité : 206
A.4.3 Volatilité implicite : 207
A.4.4 Thêta : 208
A.5 Partie 4.2 : Modèle taux : Black-76 210
A.5.1 Valorisation : 210
A.6 Partie 3.3 : Comparaison modèles taux 210
A.6.1 Maturité : 210
A.6.2 Volatilité : 211
A.7 Partie 5.2 : GSE ALM RW : Actions 212
A.7.1 Valorisation indice retraité : 212

B Lemme d'Itô **213**

C Théorème de Girsanov **215**

D Formule de Feynman-Kac **217**

E Distributions historiques des taux swaps forward **219**

Bibliographie **221**

Introduction

Dans un contexte de taux bas, les assureurs ont tendance à augmenter leur exposition sur les marchés actions afin d'augmenter le rendement généré par leur actif. Cette stratégie permet d'engendrer une hausse du taux servi, garantissant ainsi aux assureurs de rester compétitifs. Cependant, les contraintes règlementaires liées à Solvabilité 2 limitent cette hausse d'exposition. Par conséquent, BNP Paribas Cardif cherche à développer des stratégies de couverture asymétriques lui permettant de respecter ces contraintes, tout en ayant une exposition sur les marchés actions suffisante pour satisfaire ses clients.

Les économistes de BNP Paribas Cardif anticipent une remontée des taux dans les années à venir, événement s'avérant être potentiellement très dangereux pour un assureur. En effet, l'inertie du portefeuille ne permettra pas de traduire immédiatement ces nouvelles conditions de marchés dans le rendement du fonds. La participation aux rebonds des marchés devenant limitée, il sera donc impossible de servir un taux compétitif : c'est pourquoi des rachats dynamiques seront déclenchés. De plus, ces rachats obligeront BNP Paribas Cardif à réaliser des MVL obligataires, ce qui creusera encore davantage le déficit financier.
Afin d'éviter cette situation, deux attitudes sont envisageables : réduire le gap de duration, ou alors mettre en place des stratégies de couverture asymétriques nous permettant de pouvoir bénéficier d'une éventuelle remontée des taux. C'est cette dernière méthode qui fera l'objet de notre analyse dans ce présent mémoire.

Dans un premier temps, notre objectif sera de déterminer quelles stratégies de couverture pourraient être mises en place afin de faire face à ces risques. Il sera ainsi nécessaire de déterminer la manière dont nous allons valoriser et comptabiliser les options associées.

Par la suite nous devrons définir comment tester l'efficacité de la mise en place de ces stratégies, notamment en nous demandant sous quel univers de projection nous effectuerons ces tests, mais aussi quelles variables économiques nous étudierons.

Enfin, nous nous questionnerons quant à la possibilité de mettre en place de nouvelles méthodes de prise en compte des stratégies de couverture via des OPCVM. Nous étudierons tout d'abord une nouvelle méthode de comptabilisation via un indice composite, c'est-à-dire en incorporant les cash-flows de nos stratégies de couverture au sein de l'indice action. Ensuite, nous nous demanderons s'il est possible de répliquer ces indices composites par des indices avec volatilité réduite, afin de ne plus avoir besoin de projeter de nouveau nos stratégies de couverture à l'avenir pour d'autres études.

Première partie

PILIERS FONDAMENTAUX DE LA MODÉLISATION

Chapitre 1

Univers d'évaluation

La théorie financière nous permet de poser un cadre afin d'évaluer les actifs financiers, c'est-à-dire déterminer leur prix sur un marché supposé parfait, à savoir un marché où il n'y a ni coûts de transaction, ni taxes, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports.

1.1 Absence d'opportunité d'arbitrage

Cette théorie repose sur une loi fondamentale de la finance de marché : *"Dans un marché supposé parfait, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il est impossible de gagner de l'argent avec certitude à partir d'un investissement nul."*
Ainsi, des personnes que l'on appelle des arbitragistes vont détecter les actifs financiers dont le prix n'est pas celui qu'il devrait être (étant donné les autres prix du marché), et vont les utiliser afin de faire des profits sans prendre de risque. Ils vont donc contraindre les prix à respecter certaines relations, et vont alors conduire à l'unicité des prix des produits dérivés : deux stratégies donnant le même flux à maturité ont la même valeur à n'importe quelle date intermédiaire.

1.2 Complétude du marché

Un marché est dit complet si tout flux financier peut être répliqué exactement par un portefeuille autofinancé composé de l'actif sans risque et et des actifs risqués. Ainsi, ce portefeuille autofinancé va nous permettre de générer exactement le même flux à l'échéance que le support que nous répliquons.

Un marché respectant les hypothèses d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) et de complétude du marché est considéré comme un marché **parfait**.
Aussi, un prix est dit viable s'il ne crée pas d'opportunité d'arbitrage. On parle ainsi de marché **viable**.

1.3 Risque-neutralité

La risque-neutralité implique que tous les actifs et toutes les stratégies d'investissement rapportent exactement le taux sans risque. Autrement dit, aucun actif ne comporte de prime de risque, d'où le terme risque-neutre.
Une probabilité risque-neutre (ou mesure martingale) est une probabilité telle que tous les actifs actualisés soient des martingales sous cette probabilité :

Nous pouvons introduire$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace filtré satisfaisant les conditions usuelles, donc $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet.
$S = (S_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$ le prix d'une action, $S_t \in \mathbb{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et S est $\mathbb{F}$-adaptée, i.e. S_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable, $\forall t \in [0, T]$.
On dit que $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque-neutre si et seulement si :

1. $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$
2. S est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale (i.e. $S_t \in \mathbb{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*), \forall t \in [0, T]$, et $\mathbb{E}^*[S_t|\mathcal{F}_s] = S_s$, $\mathbb{P} - ps$, $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$).

Nous verrons ensuite que sous certaines conditions cette mesure existe et est unique. L'introduction de cette probabilité nous permet de simuler un cadre où les agents du marché seraient neutres au risque, mais bien évidemment ce n'est pas le cas en réalité.

En outre, nous savons que les rendements des actifs ne sont pas tous égaux au taux sans risque, mais pour valoriser un dérivé, nous faisons comme si le marché dans lequel se font les transactions était risque-neutre.
Mathématiquement, cela revient à considérer que dans l'estimation du prix d'un produit dérivé, le marché fait un calcul d'espérance avec des poids différents de ceux induits par la probabilité historique. En d'autres termes, il respecte la règle que le prix est une espérance du flux terminal actualisé, sous une probabilité pour laquelle la prime de risque est nulle. Nous noterons $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{P}^*$ cette probabilité risque neutre (ou mesure martingale).

1.4 Liens et conséquences

Nous pouvons relier ces 3 notions qui ne sont pas totalement analogues. Voici les équivalences qui sont véridiques :

1. AOA $\Leftrightarrow$ Il existe au moins une probabilité risque-neutre.
2. Soit un marché respectant l'hypothèse d'AOA :
   Le marché est complet. $\Leftrightarrow$ Il existe une **unique** probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$.

Ainsi, il est nécessaire que le marché vérifie l'hypothèse d'AOA **ET** l'hypothèse de complétude du marché afin d'affirmer qu'il existe une unique probabilité risque neutre, l'hypothèse d'AOA seule n'est pas suffisante pour certifier l'unicité de la probabilité risque neutre.

Par conséquent, l'unique mesure risque-neutre, notée $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{P}^*$, va nous permettre de définir l'unique prix viable. Pour un flux F en T, on obtient son prix en 0 grâce au calcul de l'espérance du flux actualisé : $P[F] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B(0,T) \cdot F]$, avec $B(0,T)$ le facteur d'actualisation. Nous pouvons donc affirmer que le processus des prix actualisés doit être une martingale sous la mesure risque-neutre. Ainsi, sous cette mesure, le prix du flux F peut se comprendre comme le montant à investir en 0 afin d'obtenir le montant F à maturité (montant aléatoire), à l'aide d'une stratégie financière autofinancée. Le portefeuille d'arbitrage doit être recomposé à chaque période afin de gérer la couverture de F sur $[0,T]$.

Chapitre 2

Modèles fondateurs

Afin de valoriser une option, il est nécessaire de pouvoir modéliser le comportement de son sous-jacent. Nous allons nous placer dans un univers d'évaluation comme décrit précédemment, c'est-à-dire dans un marché complet, sans opportunité d'arbitrage, respectant la risque-neutralité.

2.1 Préludes

Nous allons premièrement présenter le théorème de représentation des martingales browniennes qui est un théorème fondamental du calcul différentiel stochastique.

Définition : Soit B un mouvement brownien.
$\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ est appelée filtration brownienne, avec $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ représentant toute l'information disponible à l'instant t.
Cependant, nous devons nous placer dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complet, donc nous devons compléter cette filtration en ajoutant tous les ensembles de probabilité nulle :
$\mathcal{N}_{\mathbb{P}} = \{A \subset \Omega \,/\, \exists\, B \in \mathcal{F} \text{ avec } A \subset B \text{ et } \mathbb{P}[B] = 0\}$

Ainsi, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ avec $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$

Définition : Une martingale adaptée à la filtration brownienne est appelée une martingale brownienne.

Théorème (Représentation des martingales browniennes) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé complet avec $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ une martingale locale brownienne sur cet espace. Alors cette martingale locale est continue, et il existe un unique processus mesurable $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$, $\mathbb{F}$-adapté et localement de carré intégrable : $\mathbb{P}\{\int_0^T |H_t|^2 dt < +\infty\} = 1$ (on notera cet espace $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^{2,loc}(0,T)$; $\mathcal{L}^2(0,T)$ étant l'espace des fonctions boréliennes de carré intégrables), tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t H(s) \cdot dB_s \quad , \, t \in [0,T] \quad , \, \mathbb{P} - p.s.$$

Par conséquent, nous pouvons en déduire que toute martingale locale brownienne peut être représentée par un processus d'Itô.

Or selon Black, Scholes, Merton, ou Bachelier, les cours des actions peuvent être modélisés par un mouvement brownien. Ce théorème est donc un résultat fort qui va nous permettre de modéliser les cours, et ainsi déterminer le prix des options associées. Ce théorème pourra aussi nous permettre d'établir l'existence d'une stratégie de couverture.

Nous allons maintenant pouvoir présenter les modèles de valorisation fondateurs, en nous plaçant dans notre espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.2 Modèle de Bachelier

Le premier modèle de prix d'action a été développé par Louis Bachelier en 1900 dans sa thèse d'habilitation [Bachelier, 1900]. Il est aujourd'hui reconnu pour être le précurseur de la modélisation du cours des actifs boursiers. Il considère que les prix d'un actif sont normalement distribués. Son approche pour le pricing d'options s'appuie sur le fait que *"l'espérance mathématique du spéculateur est nulle"*. C'est le fondement élémentaire de l'approche de Bachelier. Cette espérance nulle serait dû à un équilibre imposé par le marché : dans sa théorie, Louis Bachelier affirme que *"le marché, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs, ne doit croire à un instant donné ni à la hausse ni à la baisse puisque, pour chaque cours coté, il y a autant d'acheteurs que de vendeurs"*. Ainsi ces considérations se rapprochent à ce que nous qualifions aujourd'hui d'hypothèse d'efficience des marchés, et le caractère aléatoire des mouvements des prix de marché, avec l'utilisation de martingales pour décrire leurs évolutions.
Cependant, nous pouvons remarquer que les hypothèses de taux sans risque et de risque-neutralité ne sont pas présentes dans son modèle, alors qu'elles sont primordiales pour l'hypothèse d'AOA comme nous l'avons décrit antérieurement. Pour cela, Bachelier utilise les taux forwards, et tous les paiements se font à maturité de l'option, y compris le paiement de la prime de l'option. Ainsi il contourne le problème lié au fait que le processus des prix actualisés doit être martingale sous la mesure risque neutre.
L'approche de Bachelier propose alors de modéliser les prix par :

$$\begin{aligned} S_t^B &= S_0 + \sigma^B B_t \\ dS_t^B &= \sigma^B dB_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

$S_0 > 0$: la valeur actuelle de l'action,
$\sigma^B > 0$: la volatilité du modèle de Bachelier,
$B = (B_t)_{t \geq 0}$: un mouvement brownien standard

Le principal problème de ce modèle est la possibilité que le prix de l'action devienne négatif, ce qui est en pratique impossible. C'est pourquoi ce modèle ne s'est pas développé lorsque Bachelier l'a proposé. Soit $t > 0$:

$$\mathbb{P}(S_t < 0) = \mathbb{P}(B_t < {}^{-S_0}/_{\sigma}) = \mathbb{P}(B_1 < {}^{-S_0}/_{\sigma\sqrt{t}}) = \Phi_{0,1}({}^{-S_0}/_{\sigma\sqrt{t}}) \ > 0 \ \ , \ B_t \overset{L}{=} \sqrt{t} B_1$$

2.3 Modèle de Black&Scholes (ou Black-Scholes-Merton)

Le second modèle a été mis en place en 1973 par Robert C.Merton, Myron Scholes et Fischer Black suite aux développements proposés par Paul Samuelson (1965). Selon eux, ce sont les rendements de l'actif, plutôt que ses prix, qui sont normalement distribués. Ainsi, les prix d'un actif sont log-normalement distribués :

$$\begin{aligned} S_t^{BS} &= S_0 \cdot \exp(\sigma^{BS} B_t + (\mu - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2) \cdot t) \\ dS_t^{BS} &= S_t^{BS} \cdot (\mu dt + \sigma^{BS} dB_t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$S_0 > 0$: la valeur actuelle de l'action,
$\mu \in \mathbb{R}$: tendance,
$\sigma^{BS} > 0$: la volatilité du modèle de Black&Scholes,
$B = (B_t)_{t \geq 0}$: un mouvement brownien standard

Ainsi le prix de l'actif est ici un mouvement brownien géométrique.

Les rendements logarithmiques de ce modèle sont gaussiens. Soit $0 \leq t \leq t+h \leq T$:

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= ln(S_0) + \sigma B_t + (\mu - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2) \cdot t \\ \ln(S_{t+h}) - \ln(S_t) &= \sigma(B_{t+h} - B_t) + (\mu - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2) \cdot h \\ &\sim \mathcal{N}((\mu - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2 \cdot h)\,,\ (\sigma^{BS})^2 h) \end{aligned}$$

Bien que Mandelbrot ait montré (à l'aide de tests statistiques) en 1973 que les rendements ne sont pas gaussiens en réalité, le modèle de Black&Scholes est devenu la référence dans le contexte de pricing d'options sur les marchés financiers.

2.4 Limites

Outre le problème de normalité des rendements, ces modèles ont aussi été vivement critiqués du fait qu'ils ne soient pas assez réalistes, particulièrement lors des krachs boursiers. En effet, comme les modèles sont basées sur des distributions normales, les évènement rares sont très fortement sous-estimés.

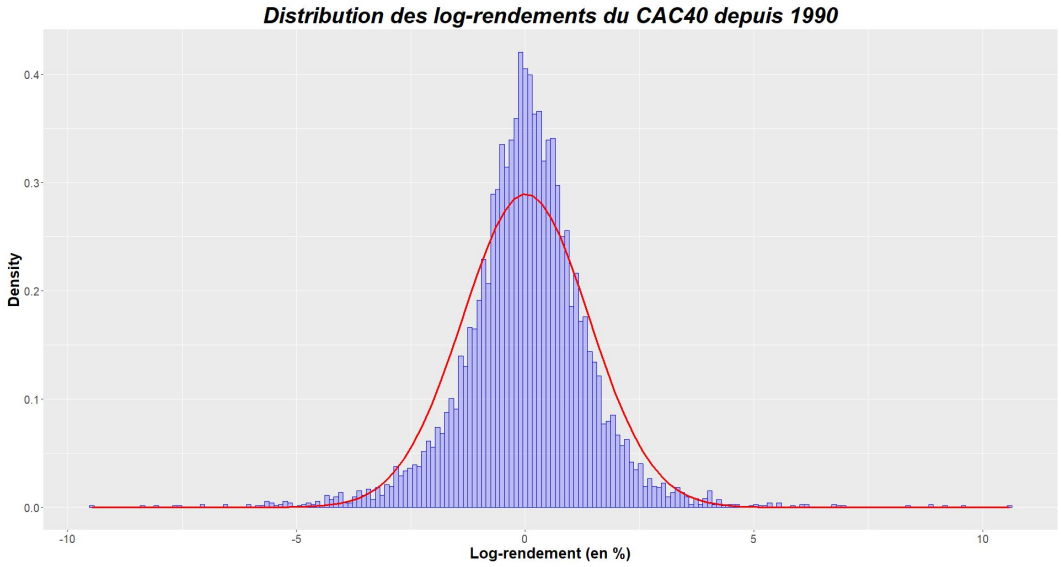


FIGURE 2.1 – Distribution des log-rendements du CAC40 depuis 1990

Sur ce graphique nous pouvons observer un histogramme des log-rendements journaliers du CAC40 depuis le 1er Janvier 1990. La courbe rouge est la densité de la loi normale que suit cet échantillon. Ainsi, nous pouvons remarquer que cette courbe rouge (la loi normale sous-jacente) sous-estime les cas extrêmes (en-deçà/au-delà de -4/+4%). Malgré ces reproches, le modèle de Black&Scholes demeure toujours la référence sur les marchés financiers, car les calculs avec ce modèle sont relativement simples, mais aussi car il existe un consensus autour de son utilisation.

2.5 Modélisation d'options

2.5.1 Portefeuille de couverture

Fisher Black et Myron Scholes ont créé le concept de portefeuille de couverture. C'est une notion fondamentale dans le pricing de produits dérivés. En effet, ce portefeuille va nous permettre de déterminer le prix en en $t \in [0, T]$ de n'importe quelle couverture de payoff ξ. Supposons un marché sur lequel il y aurait 2 fonds disponibles :

- ▷ Fonds action (risqué) : prix d'une action à l'instant $t \in [0, T]$:
  $S_t = S_0 \cdot \exp(\sigma B_t + (\mu - {}^{\sigma^2}/_2) \cdot t)$
  $dS_t = S_t \cdot (\mu dt + \sigma dB_t)$

- ▷ Fonds sans risque (obligation) : taux sans risque $r \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$:
  $P_t = e^{rt}$
  $dP_t = rP_t dt$

Composition du portefeuille : $\Pi = (\Theta, \theta)$
$\Theta = (\Theta_t)_{t\in[0,T]}$, Θ_t : nombre d'actions dans le portefeuille à l'instant t
$\theta = (\theta_t)_{t\in[0,T]}$, θ_t : nombre de titres sans risque à l'instant t

Filtration : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$ avec $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_u, u \leq t\}$: toute l'information disponible sur le marché à l'instant t. Θ_t et θ_t doivent être $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Valeur du portefeuille à l'instant $t \in [0,T]$: $V_t^\Pi = \Theta_t S_t + \theta_t P_t$
Dynamique de la valeur du portefeuille : $dV_t^\Pi = \Theta_t dS_t + \theta_t dP_t$

V_0^Π représente l'investissement initial (le prix de l'option). De plus, aucun investissement (ni prélèvement) supplémentaire ne sera effectué sur $]0,T[$. On dit que le portefeuille $\Pi = (\Theta, \theta)$ est autofinançant si et seulement si $dV_t^\Pi = \Theta_t dS_t + \theta_t dP_t$, $t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned} dV_t^\Pi &= \Theta_t dS_t + \theta_t dP_t && (2.3)\\ &= \Theta_t S_t(\mu dt + \sigma dB_t) + r\theta_t P_t dt && (2.4)\\ &= \sigma\Theta_t S_t(dB_t + {}^{\mu-r}/_{\sigma} dt) + rV_t^\Pi dt && (2.5)\end{aligned}$$

$B_t^* \coloneqq B_t + \gamma t$, $\quad \gamma = {}^{\mu-r}/_{\sigma}$ $\qquad (\sim \mathcal{N}(\gamma t,\ t)$ sous $\mathbb{P})$
$L_t^\gamma \coloneqq \exp(-\gamma B_t - {}^1/_2 \cdot \gamma^2 t)$

$L_T^\gamma > 0$, $\quad \mathbb{E}[L_T^\gamma] = 1$ $\quad :$ $\quad L_T^\gamma$ est une densité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Donc $\mathbb{P}^* \coloneqq L_T^\gamma \cdot \mathbb{P}$ est une probabilité. De plus d'après le théorème de Girsanov ([Appendix C]), $B^* = (B_t^*)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$. Nous pouvons remarquer que $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ et donc $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t$, car :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_t^{B*} = \sigma\{S_u^*, u \leq t\} = \sigma\{S_u, u \leq t\} = \mathcal{F}_t^B \\ \mathcal{N}_{\mathbb{P}^*} = \mathcal{N}_{\mathbb{P}} \quad \text{car} : \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}[A] = 0 \leftrightarrow \mathbb{P}^*[A] = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} dV_t^\Pi &\overset{(2.5)}{=} \sigma\Theta_t S_t dB_t^* + rV_t^\Pi dt, \quad t \in [0,T], \quad \mathbb{P}-ps\ \ (\mathbb{P}^*-ps) && (2.7)\\ V_t^{\Pi*} &= e^{-rt}V_t^\Pi, \quad S_t^* = e^{-rt}S_t, \quad t \in [0,T] && (2.8)\\ dV_t^{\Pi*} &= d(e^{-rt}V_t^\Pi) = e^{-rt}dV_t^\Pi + V_t^\Pi de^{-rt} && (2.9)\\ &\overset{(2.7)}{=} e^{-rt}(\sigma\Theta_t S_t dB_t^* + rV_t^\Pi dt) - re^{-rt}V_t^\Pi dt && (2.10)\\ &= \sigma\Theta_t S_t^* dB_t^*, \quad t \in [0,T], \quad \mathbb{P}-ps\ \ (\mathbb{P}^*-ps) && (2.11)\end{aligned}$$

$$V_t^{\Pi*} = V_0^\Pi + \int_0^t \sigma \cdot \Theta_u \cdot S_u^* \cdot dB_u^* \ , \qquad t \in [0,T] \ , \qquad (\mathbb{P}^*-ps)$$

Pour que cette intégrale soit bien définie, une condition suffisante est :
$\int_0^T |\sigma \cdot \Theta_u \cdot S_u^*|^2 \, du < +\infty \quad (\mathbb{P}^* - ps)$
Pour que $\int_0^t \sigma \cdot \Theta_u . S_u^* \cdot dB_u^*,\ t \in [0,T]$, forme une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale, il faut :
$\mathbb{E}^*[(\int_0^T |\sigma \cdot \Theta_u \cdot S_u^*|^2 du)^{1/2}] < +\infty$

On obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes de l'ensemble des portefeuilles admissibles pour nos portefeuilles de couverture :

$$\mathcal{A}_{adm} := \begin{cases} \Pi = (\Theta, \theta) \text{ tels que : } & \text{i) } \Theta, \theta \ \mathbb{F}\text{-adaptés} \\ & \text{ii) } \Pi \text{ autofinançant} \\ & \text{iii) } \mathbb{E}^*[(\int_0^T |\sigma \cdot \Theta_u \cdot S_u^*|^2 du)^{1/2}] < +\infty \end{cases}$$

Soit $\xi \in \mathbb{L}_2^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. ξ représente le payoff de notre option à maturité ($(S_T - K)^+$ pour un Call par exemple).
$\Pi(\xi) = \min \left\{ V_0^\Pi \,/\, \Pi \in \mathcal{A}_{adm},\ V_T^\Pi \geq \xi,\ \mathbb{P} - ps \right\}$

On suppose : $\exists\, \bar{\Pi} \in \mathcal{A}_{adm}$ portefeuille de couverture. Alors $V_T^{\bar{\Pi}} = \xi,\ \mathbb{P} - ps$.
De plus, $\Pi(\xi) = V_0^{\bar{\Pi}}$, c'est-à-dire le prix de couverture de ξ en 0.

Afin de déterminer $\Pi(\xi)$, il suffit de déterminer le portefeuille de couverture Π et le prix de couverture V_0^Π. Nous allons donc chercher $V^\Pi = (V_t^\Pi)_{t\in[0,T]}$ de la forme suivante : $V_t^\Pi = V(t, S_t),\ t \in [0,T]$, avec $V(T, S_T) = \xi$.

Pour $h \in \left\{V, \partial_t V, \partial_x V, \partial_{xx}^2 V\right\}$, $\exists\ C_p \in \mathbb{R}_+$, $\forall p \geq 1 : |h(t,x)| \leq C(1 + |x|^p)$, $\forall (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
dV_t^{\Pi *} &= \sigma \Theta_t S_t^* dB_t^*, \quad t \in [0,T] && (2.12)\\
&= d(e^{-rt} V(t, S_t)) && (2.13)\\
&= e^{-rt} dV(t, S_t) - r e^{-rt} V(t, S_t) dt && (2.14)\\
&= \left\{ \left[(\partial_t V)(t, S_t) + (\partial_x V)(t, S_t) \mu S_t + 1/2 \cdot (\partial_{xx}^2 V)(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right] dt \right. \\
&\quad \left. + (\partial_x V)(t, S_t) \sigma S_t dB_t - r V(t, S_t) dt \right\} \cdot e^{-rt} && (2.15)\\
&= \sigma S_t^* (\partial_x V)(t, S_t) dB_t^* + e^{-rt} \left\{ (\partial_t V)(t, S_t) + (\partial_x V)(t, S_t) r S_t \right. \\
&\quad \left. + 1/2 \cdot (\partial_{xx}^2 V)(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 - r V(t, S_t) \right\} dt && (2.16)
\end{aligned}$$

En utilisant la première égalité, on obtient : $\Theta_t = (\partial_x V)(t, S_t)$, $t \in [0,T]$. Ainsi, nous savons que l'option de payoff ξ est réplicable par un portefeuille autofinançant de valeur initiale $V_0^\Pi = V(0, S_t)$, qui contient $\Theta_t = (\partial_x V)(t, S_t)$ unités du fonds action $\forall t \in [0,T]$.

De plus, pour $S_t = x$, nous obtenons l'EDP d'évaluation (unicité de la solution V) :

$$\begin{cases} (\partial_t V)(t,x) + (\partial_x V)(t,x) rx + 1/2 \cdot (\partial^2_{xx} V)(t,x)\sigma^2 x^2 - rV(t,x) = 0 \\ V(T,x) = \xi(x) \quad , \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \xi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ la fonction du payoff de l'option} \end{cases}$$

En utilisant la formule de Feynman-Kac ([Appendix D]), on obtient alors :
$V(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\, \xi \,|\, S_t = x] \quad , \quad x > 0$

Ainsi, nous pouvons calculer le prix de n'importe quelle couverture de payoff ξ, à tout instant $t \in [0,T]$. Dans un premier temps, nous allons seulement étudier les Calls et les Puts, car ce sont les options les plus simples, et elles nous permettent de reconstituer une grande partie des options plus complexes en les combinant.

2.5.2 Prix d'un call/put avec Black&Scholes

Grâce à la formule de Feynman-Kac obtenue ci-dessus, nous pouvons calculer le prix en $t \in [0,T[$ d'un Call de maturité $T > 0$, avec prix d'exercice $K > 0$, en sachant que $S_t = x > 0$. Payoff en T : $\xi = (S_T - K)^+$.

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\, (S_T - K)^+ \,|\, S_t = x] \tag{2.17}$$

$$= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\, (x \cdot \exp[\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \,|\, S_t = x] \tag{2.18}$$

Posons $B^*_t = B_t + \dfrac{\mu - r}{\sigma}.t \qquad , t \in [0,T]$, Mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\, (x \cdot \exp[\sigma(B^*_T - B^*_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \,|\, S_t = x] \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\overset{[A.1.1]}{=} x \cdot \mathbb{P}\Big[B_1 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\ln(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\,]\Big] \\ &\quad - Ke^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{P}\Big[B_1 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\,]\Big] \end{aligned} \tag{2.20}$$

Posons :
$$\begin{cases} d_1(t,x,y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot [\ln(\frac{x}{y}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t\,] & , \text{ avec } t,x,y > 0 \\ d_2(t,x,y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot [\ln(\frac{x}{y}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\,] \;=\; d_1(t,x,y) - \sigma.\sqrt{t} & \\ \Phi_{0,1}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \qquad , y \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons le prix de Black&Scholes pour un call $C_T = (S_T - K)^+$ de maturité T avec strike K à l'instant $t < T$, lorsque $S_t = x$:

$C^{BS}_t = V(t,x) = S_t.\Phi_{0,1}(d_1(T-t, S_t, K)) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{0,1}(d_2(T-t, S_t, K))$

Nous savons que $\Pi = (\Theta, \theta)$, et nous avons démontré dans la partie précédente que $\Theta_t = \partial_x V(t, S_t)$. Nous pouvons donc calculer le nombre d'actions et de titres sans risque dans le portefeuille de couverture à l'instant t, lorsque $S_t = x$:

$$\begin{cases} \Theta_t \overset{[A.1.2]}{=} \Phi_{0,1}(d_1(T-t, x, K)) \\ \theta_t \quad = e^{-rt} \cdot (V(t,x) - x.\Theta_t) = -e^{-rT} K.\Phi_{0,1}(d_2(T-t, x, K)) \end{cases} \tag{2.21}$$

Nous allons maintenant pouvoir calculer le prix en t d'un Put de maturité T, avec prix d'exercice K, en sachant que $S_t = x$. Payoff en T : $\xi = (S_T - K)^-$. Nous allons utiliser la même méthode de construction du portefeuille de couverture, mais la parité Call-Put va nous permettre de réduire grandement nos calculs : $\begin{cases} \Pi^C = (\Theta^C, \theta^C) \\ \Pi^P = (\Theta^P, \theta^P) \end{cases}$

$\forall\ \Pi \in \mathcal{A}_{adm}$: $V^{\Pi,*} = (V_t^{\Pi,*})_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale.

$$\begin{cases} V_t^{\Pi^C,*} = \mathbb{E}^*[\ V_t^{\Pi^C,*} \mid \mathcal{F}_t\ ] & ,\ t \in [0,T] \\ V_t^{\Pi^P,*} = \mathbb{E}^*[\ V_t^{\Pi^P,*} \mid \mathcal{F}_t\ ] & ,\ t \in [0,T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_t^{\Pi^C} - V_t^{\Pi^P} &= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\ V_t^{\Pi^C} - V_t^{\Pi^P} \mid \mathcal{F}_t\ ] && (2.22) \\ &= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\ S_T \mid \mathcal{F}_t\ ] - e^{-r(T-t)}K && (2.23) \\ &= e^{-r(T-t)} \cdot S_t \cdot \mathbb{E}^*[\ \frac{S_T}{S_t} \mid \mathcal{F}_t\ ] - e^{-r(T-t)}K && (2.24) \end{aligned}$$

$\frac{S_T}{S_t} = \exp[\sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$.

Donc $V_t^{\Pi^C} - V_t^{\Pi^P} = S_t - e^{-r(T-t)}K = S_t - e^{-rT}K.P_t$

$$\begin{aligned} V_t^{\Pi^P} &= V_t^{\Pi^C} - (S_t - e^{-rT}K.P_t) && (2.25) \\ &= (\Theta_t^C - 1) \cdot S_t + (e^{-rT}K + \theta_t^C) \cdot P_t && (2.26) \\ &= (\Phi_{0,1}(d_1(\cdot)) - 1) \cdot S_t + [e^{-rT}K - e^{-rT}K.\Phi_{0,1}(d_2(\cdot))] \cdot P_t && (2.27) \\ &= -\Phi_{0,1}(-d_1(\cdot)) \cdot S_t + [e^{-rT}K.\Phi_{0,1}(-d_2(\cdot))] \cdot P_t && (2.28) \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons le prix de Black&Scholes pour un put $P_T = (S_T - K)^-$ de maturité T avec strike K à l'instant $t < T$:

$$P_t^{BS} = e^{-r(T-t)}K.\Phi_{0,1}(-d_2(\cdot)) - S_t \cdot \Phi_{0,1}(-d_1(\cdot))$$

De plus : $\begin{cases} \Theta_t^P & = -\Phi_{0,1}(-d_1(\cdot)) : \text{nombre d'actions dans le portefeuille à l'instant } t \\ \theta_t^P & = e^{-rT}K.\Phi_{0,1}(-d_2(\cdot)) : \text{nombre de titres sans risque à l'instant } t \end{cases}$

2.5.3 Prix d'un call/put avec Bachelier

Comme nous l'avons décrit auparavant dans la description du modèle de Bachelier, ce dernier n'utilise pas de facteur d'actualisation, car il considère que tous les paiements sont effectués à maturité (y compris la prime). Ainsi nous pouvons apparenter $P_t = e^{rt}$ du portefeuille de couverture de Black&Scholes à $P_t = 1$. Posons l'espace habituel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappelons le modèle de Bachelier :

$$\begin{cases} S_t^B &= S_0 + \sigma^B B_t \\ dS_t^B &= \sigma^B dB_t \end{cases}$$

$S_0 > 0$: la valeur actuelle de l'action,
$\sigma^B > 0$: la volatilité du modèle de Bachelier,
$B = (B_t)_{t \geq 0}$: un mouvement brownien standard

Nous allons maintenant pouvoir déterminer le prix d'un Call de maturité T, avec prix d'exercice K. Payoff en T : $\xi(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$, avec $\xi \in \mathbb{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Posons $\Pi = (\Theta, \theta)$ le portefeuille de couverture correspondant. Nous savons :
Valeur du portefeuille à l'instant $t \in [0, T]$: $V_t^\Pi = \Theta_t S_t + \theta_t P_t = \Theta_t S_t + \theta_t$
Dynamique de la valeur du portefeuille : $dV_t^\Pi = \Theta_t dS_t$

Nous pouvons donc obtenir le prix du call en $t \in [0, T[$:

$$C(t, S_t) = V(t, S_t) = \mathbb{E}[\,\xi \,|\, \mathcal{F}_t\,] = \mathbb{E}[\,(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,] \tag{2.29}$$

$$\overset{[A.2.1]}{=} (S_t - K) \cdot \Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \tag{2.30}$$

Nous avons démontré précédemment que $\Theta_t = \partial_x V(t, S_t)$. Nous pouvons donc calculer le nombre d'actions dans le portefeuille de couverture à l'instant t :

$$\Theta_t = \partial_x V(t, S_t) = \Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \tag{2.31}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \Theta_t^C &= \Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \\ \theta_t^C &= V(t, S_t) - \Theta_t^C . S_t = -K.\Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \end{cases}$$

Afin d'obtenir le prix du Put équivalent, nous pouvons utiliser la relation de parité Call-Put, qui est ici simplifiée car Bachelier ne prend pas en compte l'actualisation : $C(t, S_t) - P(t, S_t) = S_t - K$. Ainsi, $\forall\, t \in [0, T[$:

$$P(t, S_t) = C(t, S_t) - S_t + K \tag{2.32}$$

$$= (S_t - K) \cdot \Big[\Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - 1\Big] + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \tag{2.33}$$

$$= -(S_t - K) \cdot \Phi_{0,1}\Big(\frac{-(S_t - K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \tag{2.34}$$

$$\text{De plus } \begin{cases} \Theta_t^P & = -\Phi_{0,1}\Big(\dfrac{-(S_t-K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \\ \theta_t^P & = P(t,S_t) - \Theta_t^P.S_t = K.\Phi_{0,1}\Big(\dfrac{-(S_t-K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{0,1}\Big(\dfrac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \end{cases}$$

Deuxième partie

MODÈLES ADAPTÉS ET COMPARAISON

Chapitre 3

Modèles de dynamique spot (actions)

Les modèles de Bachelier et de Black&Scholes permettent de modéliser le cours d'une action. Ainsi, ils permettent de valoriser des options telles que des Calls ou des Puts. Cependant, ils diffèrent sur plusieurs critères. Ces modèles fondamentaux requièrent donc quelques modifications afin que leur comparaison soit réellement effective.

Pour que la comparaison soit cohérente, nous allons ajouter un drift au modèle de Bachelier précédemment présenté, et nous allons prendre en compte la valeur-temps de l'argent en considérant le taux sans risque r. Ainsi, nous allons donc comparer un modèle de valorisation considérant que le prix de l'action sous-jacente soit normalement distribué (Bachelier), avec un modèle considérant que le prix soit log-normalement distribué (Black&Scholes).

L'objectif de ce chapitre va être de déterminer quel modèle de valorisation nous devons sélectionner afin de modéliser l'indice action. Nous verrons dans la suite de l'étude que BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une baisse des actions, en établissant des stratégies basées sur l'achat de Puts. Pour faire notre choix, nous choisirons le modèle avec les grecques les plus faibles, afin que la valorisation de nos options soient le plus stable possible. De plus, à l'aide des distributions historiques des plus grands indices boursiers, nous déterminerons si ces indices suivent une dynamique normale ou une dynamique log-normale.

3.1 Modèle de Bachelier avec ajout d'un drift et de la valeur temps

Premièrement, nous allons donc modifier la dynamique proposée par Bachelier en lui ajoutant un drift μ. Ensuite, nous ajouterons la valeur-temps dans le calcul du prix de l'option grâce au facteur d'actualisation $e^{r(T-t)}$.
Plaçons-nous dans l'univers risque-neutre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$, avec $\sigma^B > 0$: la volatilité du modèle de Bachelier :

$$dS_t^B = r.S_t^B.dt + \sigma^B dB_t^*, \qquad t \in [0,T] \tag{3.1}$$

$$\text{Donc } \forall\, t \in [0,T[: S_T^B = S_t^B e^{r(T-t)} + \sigma^B \cdot \int_t^T e^{r(T-s)} dB_s^* \tag{3.2}$$

$$\text{D'où } S_T^B \,|\, S_t^B \sim S_t^B.e^{r(T-t)} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)}-1)} \cdot \varepsilon \qquad \text{avec } \begin{cases} \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \varepsilon \text{ indépendant de } \mathcal{F}_t \end{cases}$$

Nous allons maintenant pouvoir déterminer le prix d'un Call de maturité T, avec prix d'exercice K. Payoff en T : $\xi(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$, avec $\xi \in \mathbb{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Nous rajoutons la valeur temps en actualisant l'espérance du payoff. Soit $t \in [0,T[$:

$$C^B(t,S_t) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}[\,\xi \,|\, \mathcal{F}_t\,] = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}[\,(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,] \tag{3.3}$$

Posons $v(t,T) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})}$

$$C^B(t,S_t) \overset{[A.3.1]}{=} (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)$$

De plus, grâce à la parité Call-Put "$C(t,S_t) - P(t,S_t) = S_t - K.e^{-r(T-t)}$", nous pouvons en déduire le prix du Put associé :

$$\begin{aligned} P^B(t,S_t) &= C^B(t,S_t) - (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \\ &= (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \Big[\Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) - 1\Big] + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) \\ &= (K.e^{-r(T-t)} - S_t) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{K.e^{-r(T-t)} - S_t}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) \end{aligned}$$

3.2 Modèle de Black&Scholes

Rappelons le modèle de Black&Scholes :

$$\begin{aligned} S_t^{BS} &= S_0 \cdot \exp(\sigma^{BS} B_t + (\mu - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2) \cdot t) \\ dS_t^{BS} &= S_t^{BS} \cdot (\mu dt + \sigma^{BS} dB_t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$S_0 > 0$: la valeur actuelle de l'action,
$\mu \in \mathbb{R}$: tendance,
$\sigma^{BS} > 0$: la volatilité du modèle de Black&Scholes,
$B = (B_t)_{t \geq 0}$: un mouvement brownien standard

Rappelons aussi le prix de Black&Scholes pour un call $C_T = (S_T - K)^+$ de maturité T avec strike K à l'instant $t < T$, lorsque $S_t = x$:

Posons $\begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \left[\ln(\dfrac{S_t}{K}) + (r + \dfrac{\sigma^2}{2})(T-t) \right] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$

$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2)$

Et le prix du Put associé :

$P_t^{BS} = Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - S_t \cdot \Phi_{[0,1]}(-d_1)$

3.3 Comparaison

Maintenant que nous avons effectué les ajustements nécessaires, nous pouvons comparer les formules de valorisation des 2 modèles. Cette section va donc consister à comparer un modèle considérant que les prix de l'action sous-jacente sont normalement distribués (Bachelier avec drift et valeur-temps), avec le modèle classique de Black&Scholes, qui considère que les prix de l'action sous-jacente sont log-normalement distribués (i.e. les log-rendements sont gaussiens). Pour ce faire, nous allons comparer l'évolution de la valorisation des calls et des puts en fonction des paramètres régissant cette valorisation.
Dans un premier temps, nous vérifierons les valorisations des 2 modèles dans des cas simples où nous pouvons estimer à l'avance la valeur des options (limites à l'extrême de certains paramètres), puis nous comparerons les volatilités implicites des 2 modèles, et enfin nous étudierons les grecques des modèles afin d'évaluer l'impact d'un paramètre sur la valorisation. Rappelons que nous voulons déterminer le modèle de valorisation le plus stable pour les Puts, et qui correspond le mieux aux distributions historiques.

3.3.1 Maturité

Premièrement nous allons étudier les valorisations de ces options lorsque nous faisons tendre la date de valorisation de l'option t vers sa maturité T. Soient $r \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $S_t \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, T[$:

Nous nous attendons à ce que la valorisation de l'option soit égale à son payoff, puisque dans un futur très proche c'est le montant que nous allons toucher.

▷ **CALL :**

$$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \quad \underset{t\to T}{\overset{[A.4.1]}{\longrightarrow}} \quad \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t \leq K \end{cases} \tag{3.5}$$

Rappelons $v(t,T) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})} \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0^+$

$$C_t^B = (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)$$

$$\underset{t\to T}{\overset{[A.4.1]}{\longrightarrow}} \quad \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t \leq K \end{cases}$$

Lorsque $t \longrightarrow T$, les 2 modèles renvoient la même valorisation, qui est bien celle attendue, puisque c'est le payoff que nous allons toucher dans un futur très proche.

▷ **PUT :**

$$P_t^{BS} = Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - S_t.\Phi_{[0,1]}(-d_1) \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} K - S_t & \text{si } S_t < K \\ 0 & \text{si } S_t \geq K \end{cases} \tag{3.6}$$

$$P_t^B = (K.e^{-r(T-t)} - S_t) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{K.e^{-r(T-t)} - S_t}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)$$

$$\underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} K - S_t & \text{si } K > S_t \\ 0 & \text{si } K \leq S_t \end{cases}$$

Pour le put, nous obtenons aussi la valorisation attendue avec les 2 modèles.

3.3.2 Volatilité

Nous allons maintenant étudier les valorisations de ces options lorsque nous faisons tendre la volatilité vers 0. Supposons que le taux sans risque r soit positif. Soient $r \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $S_t \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, T[$:

Lorsque la volatilité est nulle, nous nous attendons à ce que l'indice sous-jacent n'évolue pas de manière aléatoire, et donc S_t évoluerait seulement selon le taux sans risque r : $S_T = S_t.e^{r(T-t)}$. Ainsi nous pouvons d'ores et déjà prédire le payoff, et donc la valorisation de l'option devrait correspondre à ce payoff actualisé.

▷ **CALL :**

$$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \underset{\sigma \to 0^+}{\overset{[A.4.2]}{\longrightarrow}} \begin{cases} S_t - Ke^{-r(T-t)} & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t \leq K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

Rappelons $v(t,T) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})} \underset{\sigma \to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$

$$C_t^B = (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)$$

$$\underset{\sigma \to 0^+}{\overset{[A.4.2]}{\longrightarrow}} \begin{cases} S_t - Ke^{-r(T-t)} & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t \leq K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

Les 2 modèles renvoient bien la valorisation attendue avec une volatilité nulle, c'est-à-dire le payoff actualisé :
$e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ = e^{-r(T-t)}(S_t.e^{r(T-t)} - K)^+ = (S_t - K.e^{-r(T-t)})^+$

▷ **PUT :**

$$P_t^{BS} = Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - S_t.\Phi_{[0,1]}(-d_1) \underset{\sigma \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \geq K.e^{-r(T-t)} \\ Ke^{-r(T-t)} - S_t & \text{si } S_t < K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

$$P_t^B = (K.e^{-r(T-t)}\Phi_{[0,1]}\Big(\frac{K.e^{-r(T-t)} - S_t}{v(t,T)}\Big) + v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)$$

$$\underset{\sigma \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} Ke^{-r(T-t)} - S_t & \text{si } K.e^{-r(T-t)} > S_t \\ 0 & \text{si } K.e^{-r(T-t)} \leq S_t \end{cases}$$

Avec le put, les 2 valorisations sont bien celles attendues.

Dans un premier temps, nous pouvons donc affirmer que dans ces cas simples (maturité très courte ou volatilité quasi nulle), nos 2 modèles de valorisation se comportent comme nous l'attendions.

3.3.3 Volatilité implicite

Pour valoriser une option, nous avons besoin de plusieurs paramètres : la maturité $T > 0$ de l'option, son strike $K \in \mathbb{R}^+$, le cours actuel du sous-jacent $S_t \in \mathbb{R}^{+*}$, sa volatilité σ_t ($\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T]}$: structure par terme des volatilités implicites) et le taux sans risque $r > 0$. Ces paramètres peuvent être facilement obtenus, exceptée la volatilité. On appelle alors « volatilité implicite » la volatilité qui va nous permettre de vérifier l'égalité entre le prix réel de l'option sur le marché et la valorisation de l'option avec notre modèle. La volatilité du modèle de Black&Scholes est appelé volatilité log-normale, et celle de Bachelier volatilité normale (de par la distribution du prix du sous-jacent).

Rappelons les dynamiques sous-jacentes à ces modèles de valorisation :

$$dS_t^B = \mu.S_t.dt + \sigma_t^B.dB_t \tag{3.7}$$
$$dS_t^{BS} = \mu.S_t.dt + \sigma_t^{BS}.S_t.dB_t \tag{3.8}$$

Afin de comparer nos 2 modèles à l'aide des grecques, il est nécessaire d'obtenir une relation entre les 2 volatilités implicites (seul paramètre non commun entre les modèles). Pour ce faire, supposons connue la volatilité implicite log-normale. Nous allons donc devoir calculer la volatilité implicite normale, c'est-à-dire celle qui va nous permettre d'égaliser le prix calculé avec Black&Scholes, et donc le prix réellement constaté sur le marché.
Ainsi, en observant les dynamiques, il conviendrait que $\sigma_t^B = \sigma_t^{BS} \cdot S_t$ afin que les prix délivrés par ces modèles soient égaux. Cependant, nous allons voir que cette égalité n'est pas suffisante pour que les valorisations des 2 modèles soient égales.

Exemple : Considérons un call et un put ATM (à la monnaie) de maturité 5 ans, avec $S_0 = 100\%$ et un taux sans risque de 2%. La volatilité implicite log-normale est de 25%. Ainsi, en utilisant l'approximation, $\sigma_0^B = \sigma_0^{BS} S_0 = 25\%.1 = 25\%$. Calculons les prix du call et du put pour les 2 modèles :

[A.4.3]	**Black&Scholes**	**Bachelier**
Call	0.261	0.263
Put	0.165	0.168

TABLE 3.1 – Exemple de pricing ATM modèles spot

En respectant l'égalité $\sigma_t^B = \sigma_t^{BS} \cdot S_t$, nous pouvons observer que les 2 valorisations ne sont pas exactement les mêmes. En effet, afin que les valorisations du call (et du put) soient égales avec les 2 modèles, la volatilité normale implicite doit être égale à 24.67%, et non 25%. Nous allons donc observer comment évolue l'erreur d'estimation de la volatilité normale implicite avec cette approximation.

Pour ce faire, nous allons étudier l'évolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction des différents paramètres de valorisation. Dans la suite de l'étude, nous nous placerons en $t = 0$, et nous noterons $\sigma^{BS}_{implicite} = \sigma^{BS}_0$ et $\sigma^{B}_{implicite} = \sigma^{B}_0$.

3.3.3.1 Maturité :

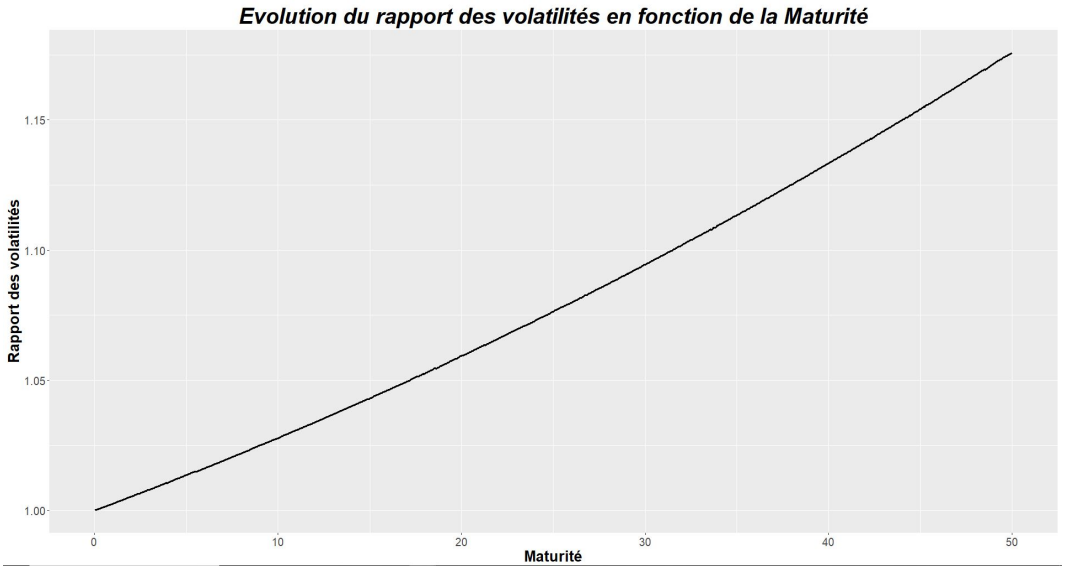


FIGURE 3.1 – Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction de la maturité

L'option associée est un call ATM avec $S_0 = 100\%$ et un taux sans risque de 2%. Bien évidemment, si l'option associée était un put, nous obtiendrions exactement la même évolution puisque les volatilités implicites utilisées seraient les mêmes.

La volatilité implicite log-normale est de 25%. Nous avons fait évoluer la maturité jusq'à 50 ans afin d'étudier l'évolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$. Ainsi, nous pouvons remarquer que plus la maturité est lointaine, plus la volatilité normale calculée grâce à l'approximation $\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0$ est sur-estimée. Par exemple, pour une maturité de 50 ans, la volatilité normale est sur-estimée d'environ 20%.

3.3.3.2 Strike :

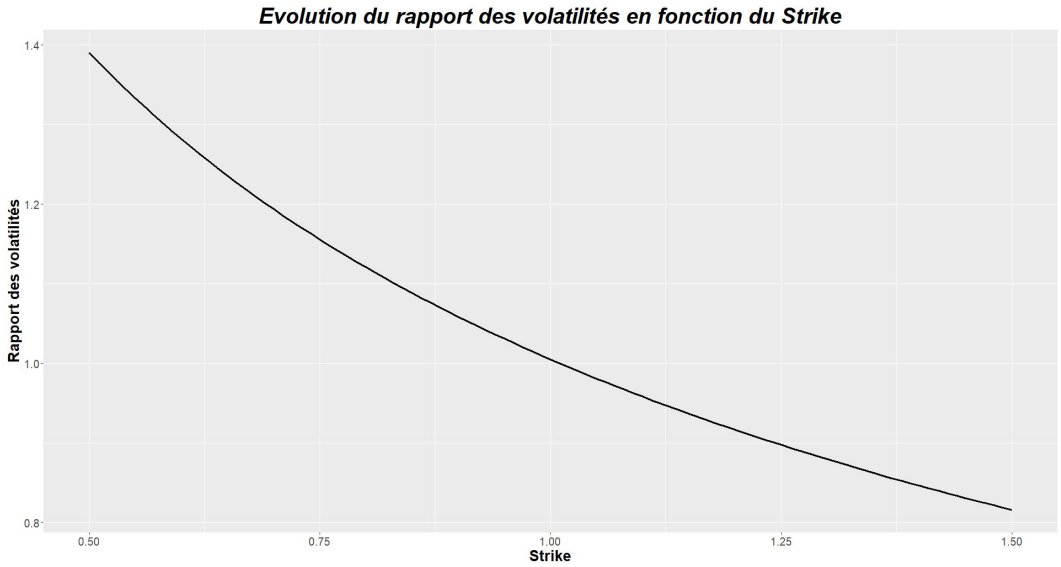


FIGURE 3.2 – Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction du strike

Ici nous fixons la maturité à 2 ans et nous faisons évoluer le strike de 50% à 150% de S_0. Nous pouvons observer que plus le strike est petit par rapport à S_0, plus la volatilité normale calculée avec l'égalité est sur-estimée (jusqu'à 40% pour un strike égal à 50% de S_0). A contrario, plus le strike est grand par rapport à S_0, plus la volatilité est sous-estimée (jusqu'à 20% pour un strike égal à 150% de S_0). Nous pouvons donc remarquer que le rapport des 2 volatilités est une fonction décroissante du strike, et qui atteint 1 lorsque nous sommes ATM environ.

3.3.3.3 Maturité + Strike :

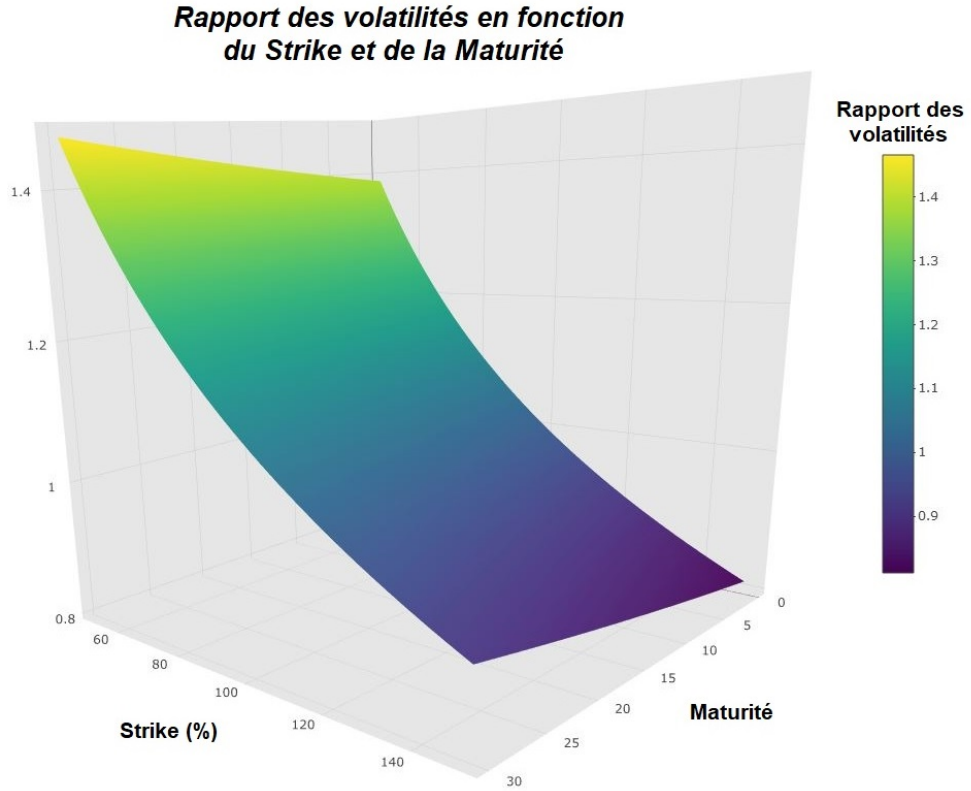


FIGURE 3.3 – Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction de la maturité et du strike

Toujours avec la même option, nous faisons ici évoluer le strike de 50% à 150% de S_0, et la maturité jusqu'à 30 ans. Nous pouvons remarquer que l'éloignement du strike de la monnaie a un impact beaucoup plus important que la maturité sur l'erreur d'estimation de la volatilité normale implicite : la volatilité normale est sur-estimée de 38 à 46% pour un strike de l'ordre de 50%, mais elle est sous-estimée de 10 à 20% pour un strike de 150%.

Nous pouvons observer que, pour n'importe quel niveau de strike, le fait de passer d'une maturité très courte (moins d'un an) à une maturité longue (plus de 30 ans) provoquera une hausse du rapport des volatilités de 10% environ. Cette hausse sera donc bénéfique dans le cas où nous sommes OTM (hors de la monnaie), puisque le rapport est dans ce cas sous-estimé, mais dans le cas où nous sommes ITM (dans la monnaie), l'erreur de calcul liée à l'égalité $\sigma^{B}_{implicite} = \sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0$ sera donc renforcée : jusqu'à 10% d'erreur en plus si nous passons d'une maturité de moins d'un an à une maturité de plus de 30 ans.

La figure 3D étant interactive, il est possible de bouger la nappe de volatilité sur R afin d'observer d'autres valeurs.

3.3.3.4 Conclusion :

Nous pouvons tout de même remarquer que pour une maturité suffisamment courte (inférieure à 10 ans) et un strike assez proche de la monnaie (± 10%), l'estimation de la volatilité normale implicite grâce à l'égalité $\sigma^{B}_{implicite} = \sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0$ est assez convaincante. C'est pourquoi dans la suite de la comparaison nous approximerons la volatilité normale implicite par $\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0$. Cela va nous permettre de comparer les grecques des modèles entre eux, dans les limites décrites ci-dessus.

Exemple : Considérons un call et un put ATM, de maturité 2 ans, avec $S_0 = 100\%$ et un taux sans risque de 2%. La volatilité implicite log-normale est de 25%. Ainsi $\sigma^B = \sigma^{BS} S_t = 25\%.1 = 25\%$. Nous pouvons observer que les valorisations des 2 modèles sont quasi-équivalentes :

$$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-rT}.\Phi_{[0,1]}(d_2) = 0.1580$$
$$C_t^{B} = (S_t - K.e^{-rT}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) + v(0,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) = 0.1588$$
$$P_t^{BS} = Ke^{-rT}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - S_t.\Phi_{[0,1]}(-d_1) = 0.1188$$
$$P_t^{B} = (K.e^{-rT} - S_t) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{K.e^{-rT} - S_t}{v(0,T)}\Big) + v(0,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) = 0.1196$$

En calculant le rapport $\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0 / \sigma^{B}_{implicite} = {}^{0.25}/_{0.2486802} = 1.005307$, nous pouvons observer que la volatilité normale implicite calculée avec l'égalité est sur-estimée de seulement 0.5%. Nous utiliserons donc ces paramètres afin de comparer les grecques des modèles dans la suite de l'étude.

3.3.4 Delta

Le Delta d'une option est la dérivée du prix de l'option par rapport à son sous-jacent. Il nous permet de mesurer la sensibilité du prix de l'option pour une variation donnée du sous-jacent. Ainsi, pour une petite variation du cours, le delta nous permet de calculer la variation du prix de l'option (développement de Taylor du premier ordre) :
$V_{t_1} - V_{t_0} = \Delta_{(t_0,S_0)} \cdot (S_{t_1} - S_{t_0}) + o(|S_{t_1} - S_{t_0}|)$

Ce calcul ne donne pas un résultat très précis du mouvement du prix de l'option, mais il est tout de même couramment utilisé pour sa simplicité et sa rapidité.

▷ **CALL :**

$$\Delta^{BS}_{Call}(t,S_t) = \partial_x C^{BS}_t = \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big]\Big) \quad \in]0,1[\tag{3.9}$$

$$\Delta^{B}_{Call}(t,S_t) = \partial_x C^{B}_t = \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1-e^{-2r(T-t)})}}\Big) \qquad \in]0,1[\tag{3.10}$$

▷ **PUT :**
On utilise la relation de parité afin de déduire les Delta pour le Put :

$$\Delta^{BS}_{Put}(t,S_t) = \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big]\Big) - 1 \qquad \in]-1,0[\tag{3.11}$$

$$\Delta^{B}_{Put}(t,S_t) = \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1-e^{-2r(T-t)})}}\Big) - 1 \qquad \in]-1,0[\tag{3.12}$$

Nous pouvons en déduire que, pour les 2 modèles, la prime d'un call est strictement croissante en fonction du prix du sous-jacent (strictement décroissante pour le put). Ce résultat est intuitif, car plus le prix de l'actif est élevé, plus les chances d'exercer le call sont grandes (et inversement pour le put).

Les Delta ont été calculés pour chacun des modèles dans le tableau ci-dessous, pour une option avec les paramètres décrits dans la section précédente, c'est-à-dire une option ATM de maturité 2 ans, avec $S_0 = 100\%$, un taux sans risque $r = 2\%$, et une volatilité log-normale implicite $\sigma^{BS}_{implicite} = 25\%$, et donc une volatilité normale implicite $\sigma^{B}_{implicite} = 25\%$ (avec l'approximation).

	Black&Scholes	**Bachelier**
Call	0.614	0.545
Put	-0.386	-0.455

TABLE 3.2 – Comparaison des Delta pour une option ATM

Nous pouvons donc remarquer que le modèle de Black&Scholes sera plus sensible à un mouvement du sous-jacent que le modèle de Bachelier pour le call, et inversement pour le put : Pour une hausse de 1% du sous-jacent, le prix du call ATM va augmenter de 0.61% avec Black&Scholes, alors qu'il augmentera de 0.55% avec Bachelier. Inversement, pour une baisse de 1% du sous-jacent, le prix du put va augmenter de 0.39% avec Black&Scholes, alors qu'il augmentera de 0.46% avec Bachelier.

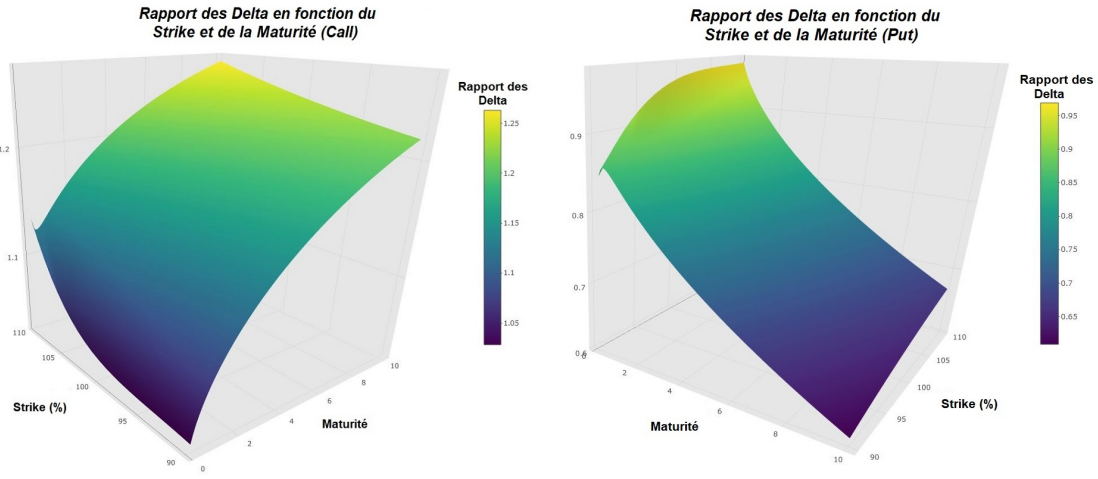


FIGURE 3.4 – Evolution du rapport $\frac{\Delta^{BS}_{C/P}}{\Delta^{B}_{C/P}}$ en fonction de la maturité et du strike

Nous avons tracé l'évolution du rapport des delta pour un call : ${}^{\Delta^{BS}_{Call}}/_{\Delta^{B}_{Call}}$, et pour un put : ${}^{\Delta^{BS}_{Put}}/_{\Delta^{B}_{Put}}$. Nous avons vu précédemment que, pour un strike compris entre 90% et 110% de S_0 et pour une maturité comprise entre 0 et 10 ans, l'approximation de la volatilité normale implicite par l'égalité $\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0$ est à peu près correcte : ce sont donc les limites de notre surface.

Nous pouvons remarquer que la maturité a un impact beaucoup plus important que l'écart du strike de la monnaie, que ce soit pour le call ou pour le put.
Ainsi, pour un mouvement donné du cours du sous-jacent, plus la maturité résiduelle du call sera importante, plus le modèle de Black&Scholes va réagir de manière agressive par rapport au modèle de Bachelier. Par exemple, si nous utilisons l'approximation de variation du prix de l'option du premier ordre, pour une maturité résiduelle de 10 ans, le call prendra 25% de valeur en plus avec le modèle de Black&Scholes qu'avec le modèle de Bachelier.
Cependant, nous pouvons remarquer que c'est l'inverse qui se produit pour le put : plus la maturité résiduelle du put sera importante, plus le modèle de Bachelier va réagir de manière agressive par rapport au modèle de Black&Scholes : pour une maturité résiduelle de 10 ans, le put prendra presque 40% de valeur en plus avec la valorisation de Bachelier qu'avec celle de Black&Scholes.

3.3.5 Gamma

Le Gamma d'une option est la dérivée seconde du prix de l'option par rapport à son sous-jacent. Il nous permet de mesurer la convexité du prix de l'option en fonction du cours du sous-jacent. Nous pouvons donc déterminer si le prix de l'option évolue plus ou moins vite que le cours du sous-jacent. Ainsi, nous pouvons apparenter le Delta à la vitesse du prix, et le Gamma à son accélération. Nous pouvons calculer la variation du prix de l'option de manière plus précise qu'en connaissant juste le Delta (approximation de Taylor du second ordre) :

$$V_{t_1} - V_{t_0} = \Delta_{(t_0,S_0)} \cdot (S_{t_1} - S_{t_0}) + \Gamma_{(t_0,S_0)} \cdot \frac{(S_{t_1} - S_{t_0})^2}{2} + o(|S_{t_1} - S_{t_0}|^2)$$

$$\Gamma^{BS}(t,S_t) = \partial_x \Delta^{BS}(t,S_t) = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \cdot \varphi_{[0,1]}\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big]\Big)$$

$$\Gamma^{B}(t,S_t) = \partial_x \Delta^{B}(t,S_t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})}} \cdot \varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})}}\Big)$$

	Black&Scholes	**Bachelier**
Call / Put	1.08	1.14

TABLE 3.3 – Comparaison des Gamma pour une option ATM

Le Gamma est identique pour le Call et le Put. Pour l'option ATM décrite précédemment, nous pouvons observer que le modèle de Bachelier a une accélération plus grande. En reprenant les Delta calculés précédemment, nous pouvons calculer la variation des prix des options pour un mouvement du cours du sous-jacent de ±1% (approximation du second ordre) :

▷ **CALL :**
Black&Scholes : $V_{t_1} - V_{t_0} = 0.6141 * 1\% + 1.0819 * {1\%}^2/2 = 0.6141\% + 0.0054\% = 0.62\%$
Bachelier : $V_{t_1} - V_{t_0} = 0.5450 * 1\% + 1.1437 * {1\%}^2/2 = 0.5450\% + 0.0057\% = 0.55\%$

▷ **PUT :**
Black&Scholes : $V_{t_1} - V_{t_0} = 0.3859 * 1\% + 1.0819 * {1\%}^2/2 = 0.3859\% + 0.0054\% = 0.39\%$
Bachelier : $V_{t_1} - V_{t_0} = 0.4550 * 1\% + 1.1437 * {1\%}^2/2 = 0.4550\% + 0.0057\% = 0.46\%$

↪ Le Gamma a donc un impact minime par rapport au Delta.

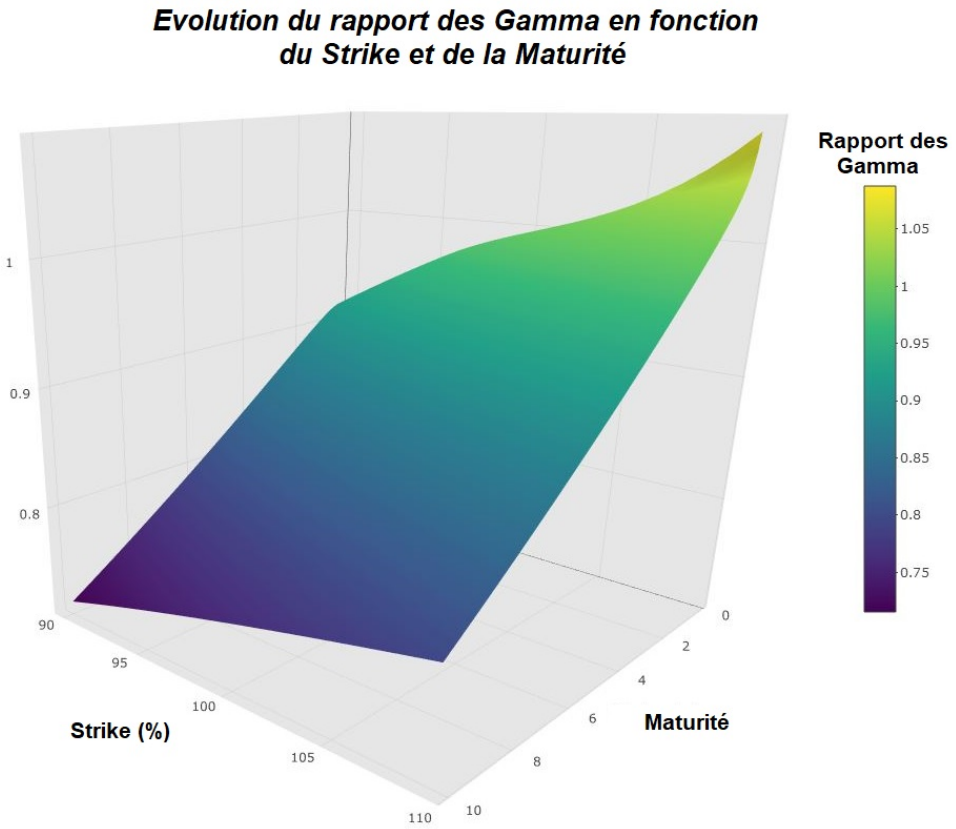


FIGURE 3.5 – Evolution du rapport $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ en fonction de la maturité et du strike

Nous pouvons remarquer que la maturité à un impact plus important que le strike, mais aussi que l'écart du strike de la monnaie a un impact plus important lorsque la maturité est faible. Par exemple, pour une maturité de 10 ans, si le strike est égal à 90% de S_0, alors le Gamma de Black&Scholes sera inférieur à celui de Bachelier d'environ 30%, et pour un strike égal à 110% de S_0, il sera inférieur de 20%, soit une différence de 10%. Mais lorsque nous prenons une maturité courte (moins d'un an), pour un strike égal à 90% de S_0, le Gamma de Black&Scholes est inférieur de 10% à celui de Bachelier, mais pour un strike égal à 110% de S_0, il est supérieur de 7%, soit une fourchette de 17%. Ainsi la différence est presque doublée : l'écart du strike de la monnaie a donc un impact plus important lorsque la maturité est faible.

En se rappelant les surfaces obtenues pour le rapport des Delta, nous pouvons affirmer :

- **Call** : le modèle de Black&Scholes a une vitesse supérieure à celui de Bachelier (Delta), mais a cependant une accélération inférieure (Gamma).
- **Put** : le modèle de Bachelier a une vitesse et une accélération supérieures à celles de Black&Scholes.

3.3.6 Thêta

Le Thêta d'une option est la dérivée du prix de l'option par rapport au temps. Il représente la valeur du temps qui passe sur la valeur de l'option. Ainsi, nous pouvons approximer la variation de la valeur d'une option due au temps qui s'écoule :
$dV = \Theta_{(t,S_t)}dt$.

▷ **CALL :**

$$\Theta^{BS}_{Call}(t,S_t) = \partial_t C^{BS}(t,S_t) \overset{[A.4.4]}{=} -K.e^{-r(T-t)} \cdot \left[\frac{\sigma.\varphi_{[0,1]}(d_2)}{2\sqrt{T-t}} + r.\Phi_{[0,1]}(d_2)\right] < 0 \quad (3.13)$$

$$\Theta^{B}_{Call}(t,S_t) = \partial_t C^{B}(t,S_t) \quad (3.14)$$

$$\overset{[A.4.4]}{=} -r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d) - \frac{\sigma\sqrt{r}\cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \cdot \varphi_{[0,1]}(d) \quad < 0 \quad (3.15)$$

▷ **PUT :**
On utilise la relation de parité afin de déduire les Thêta pour le Put :

$$\Theta^{BS}_{Put}(t,S_t) = -K.e^{-r(T-t)} \cdot \left[\frac{\sigma.\varphi_{[0,1]}(d_2)}{2\sqrt{T-t}} + r.\Phi_{[0,1]}(d_2)\right] + r.K.e^{-r(T-t)} \quad (3.16)$$

$$= -K.e^{-r(T-t)} \cdot \left[\frac{\sigma.\varphi_{[0,1]}(d_2)}{2\sqrt{T-t}} - r.\Phi_{[0,1]}(-d_2)\right] \quad (3.17)$$

$$\Theta^{B}_{Put}(t,S_t) = -r.K.e^{-r(T-t)}.(\Phi_{[0,1]}(d) - 1) - \frac{\sigma\sqrt{r}\cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \cdot \varphi_{[0,1]}(d) \quad (3.18)$$

$$= r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(-d) - \frac{\sigma\sqrt{r}\cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \cdot \varphi_{[0,1]}(d) \quad (3.19)$$

Le thêta pour un Put peut donc être positif, contrairement au Call où plus le temps passe, plus le Call perd de la valeur (toutes choses égales par ailleurs).

	Black&Scholes	**Bachelier**
Call	-0.0429	-0.0435
Put	-0.0237	-0.0242

TABLE 3.4 – Comparaison des Thêta pour une option ATM

Ainsi, pour l'option ATM que nous avons décrite précédemment, nous pouvons remarquer que le temps qui passe a un impact presque 2 fois plus important sur la valorisation du Call que sur celle du Put. Par ailleurs, nous pouvons dire que le temps qui passe à un impact similaire sur les 2 modèles.

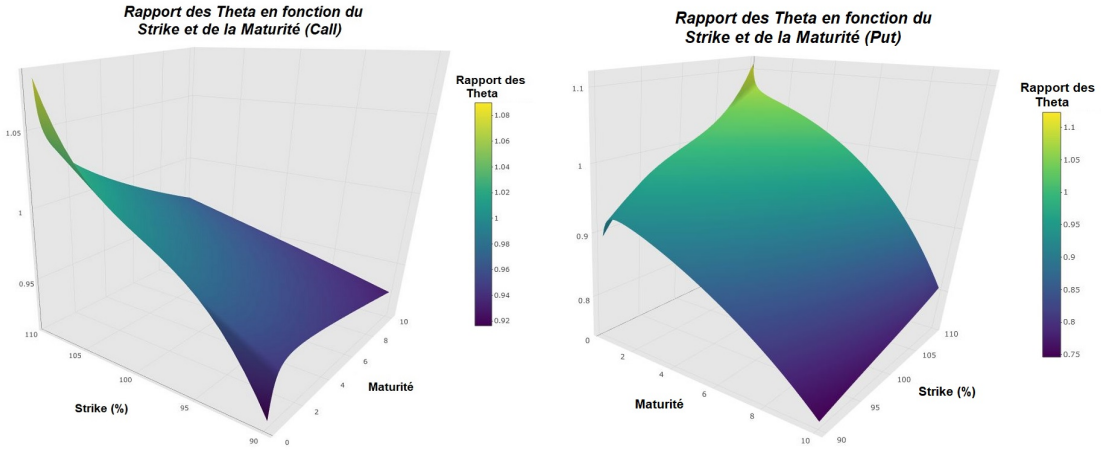


FIGURE 3.6 – Evolution du rapport $\frac{\Theta^{BS}_{C/P}}{\Theta^{B}_{C/P}}$ en fonction de la maturité et du strike

Dans le cas du call, la surface que nous obtenons confirme ce que nous avions trouvé pour l'option ATM : les 2 modèles ont un Thêta très similaire ($\pm 5\%$ en moyenne). Nous pouvons tout de même remarquer que pour une maturité très courte (moins de 6 mois), l'écart du strike de la monnaie impacte très fortement la surface :
Pour un strike de 110% de S_0, le Thêta (Call ou Put) de Black&Scholes est supérieur de 10% à celui de Bachelier, mais pour un strike de l'ordre de 90% de S_0, il est alors inférieur de 10% à celui de Bachelier.

Dans le cas du put, nous pouvons observer exactement le même effet pour une maturité très courte, mais nous pouvons aussi ajouter que la maturité résiduelle joue un rôle très important dans ce cas : plus la maturité résiduelle du put sera importante, plus le Theta de Bachelier sera important par rapport à celui de Black&Scholes, jusqu'à 25% plus important pour une maturité résiduelle de 10 ans.

Ainsi, le temps qui passe impactera plus le modèle de Black&Scholes lorsque le strike sera supérieur à S_0 et que la maturité sera courte, mais, à contrario, il impactera plus le modèle de Bachelier dans les autres cas. Par ailleurs, plus la maturité sera longue et plus le Theta de Bachelier sera important par rapport à celui de Black&Scholes, surtout pour le put.

Finalement, en rassemblant les approximations précédentes, nous pouvons maintenant établir une formule qui va nous permettre de déterminer les variations de prix des options, en fonction des variations du cours du sous-jacent, et du temps qui passe. Ces paramètres étant ceux impactant le plus la valorisation :

$$dV = \Delta_{(t,S_t)}.dS + 1/2 \cdot \Gamma_{(t,S_t)}.(dS)^2 + \Theta_{(t,S_t)}.dt \tag{3.20}$$

3.3.7 Distributions historiques et Conclusion

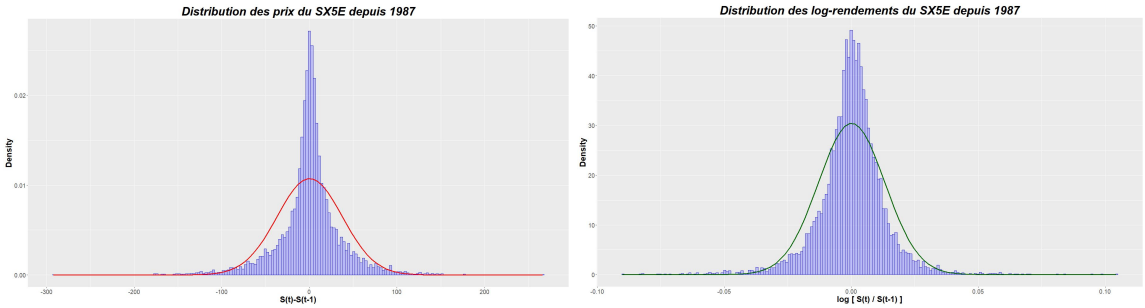


FIGURE 3.7 – Distribution historique du SX5E et de son log-rendement associé

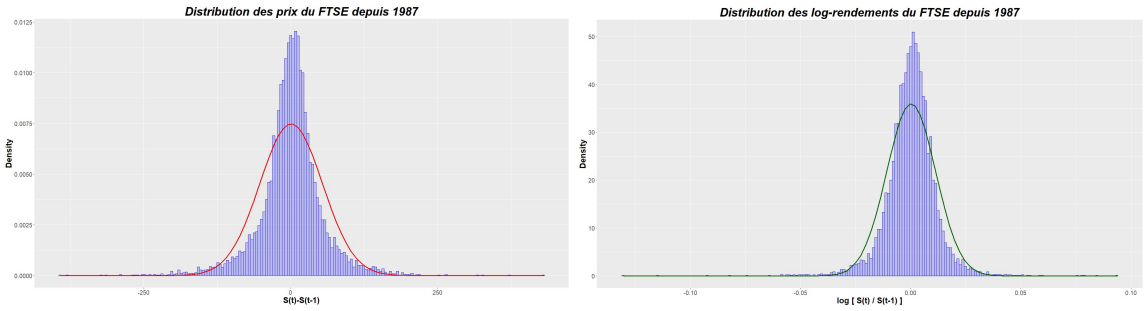


FIGURE 3.8 – Distribution historique du FTSE et de son log-rendement

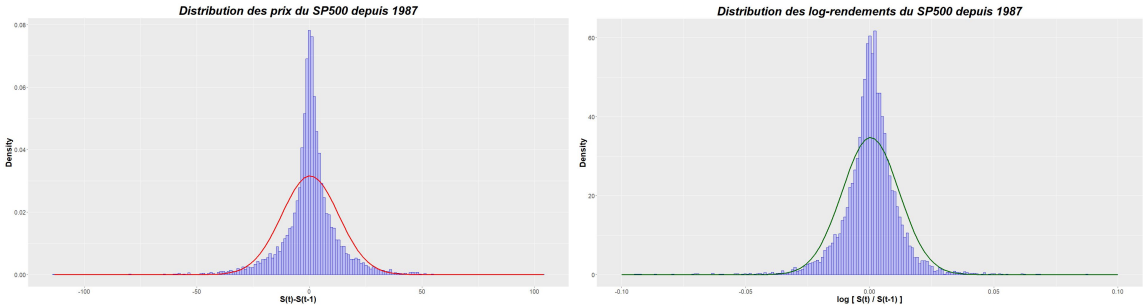


FIGURE 3.9 – Distribution historique du S&P500 et de son log-rendement

Nous avons sélectionné 3 indices actions afin de pouvoir étudier leurs distributions historiques.
Le graphe situé à gauche représente la distribution historique de l'évolution absolue de l'indice : $S_t - S_{t-1}$. Le graphe situé à droite représente quant à lui la distribution des log-rendements de l'indice.
L'objectif est de savoir quelle dynamique est la plus adéquate afin de modéliser ces indices actions : une dynamique normale (Bachelier), ou une dynamique log-normale, c'est-à-dire des log-rendements gaussiens (Black&Scholes). Ainsi, nous avons fait correspondre une loi normale à chacun de ces graphes à l'aide de R.

Premièrement, nous avons étudié le SX5E, c'est-à-dire l'EuroStoxx50 dividendes exclus, puis le FTSE, qui est l'indice boursier de Londres, et enfin le S&P500, qui est un indice boursier américain.
Nous pouvons remarquer que la courbe verte s'ajuste beaucoup mieux à la distribution sous-jacente que la courbe rouge dans ces 3 cas. Ainsi, nous pouvons affirmer que les prix d'actions semblent suivre une dynamique log-normale plutôt qu'une dynamique normale.

▷ CHOIX DU MODÈLE :

Nous verrons dans la suite de l'étude que BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une baisse des actions, en établissant des stratégies basées sur l'achat de Puts. Or nous avons démontré précédemment que le modèle de Black&Scholes a une vitesse et une accélération inférieures à celles de Bachelier pour les Puts, mais aussi un Thêta plus faible dans la majorité des cas. Nous pouvons donc affirmer que la valorisation de Black&Scholes sera plus stable pour les Puts que le modèle de Bachelier.

Ainsi, la stabilité apportée par le modèle de Black&Scholes et l'adéquation de son hypothèse de dynamique log-normale avec les distributions historiques des indices actions nous poussent donc à choisir ce modèle afin de valoriser nos options sur actions.

Chapitre 4

Modèles de dynamique forward (taux)

Les modèles que nous avons vu précédemment sont des modèles qui sont adaptés aux actions. En effet, les marchés étant supposés efficients, le cours d'une action à un instant t recueille toutes les informations dont le marché dispose à cet instant. Pour valoriser une option sur action, nous utilisons le prix spot, c'est pourquoi la dynamique du prix d'action comprend un drift.

Cependant, dans le cadre du marché des commodités et des taux, de nouveaux modèles ont été créés afin de pouvoir valoriser une option directement à l'aide du prix forward, et donc ne pas utiliser de drift dans la modélisation de la dynamique. Nous allons voir par la suite comment sont développés ces modèles.

L'objectif de ce chapitre va être d'introduire ces modèles particuliers, puis de déterminer quel modèle nous devons sélectionner afin de valoriser nos options sur le marché des taux. Nous verrons dans la suite de l'étude que BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une hausse des taux, en établissant des stratégies basées sur l'achat de Swaptions. Pour faire notre choix, nous choisirons le modèle avec les grecques les plus faibles, afin que la valorisation de nos options soient le plus stable possible. De plus, à l'aide des distributions historiques des taux de référence, nous déterminerons si ces taux suivent une dynamique normale ou log-normale.

4.1 Préambule

Lorsque nous nous intéressons au marché des taux, la structure par terme des taux d'intérêts nous permet de calculer des taux forward : à un instant t nous disposons du taux 1 an actuel, mais nous pouvons aussi calculer l'estimation du taux 1 an dans 10 ans. Nous allons introduire plusieurs notions spécifiques aux taux au sein de ce préambule.

Posons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ notre espace probabilisé complet habituel, avec B un mouvement brownien sur cet espace. Soit $V > T > 0$, et $t \in [0, T]$. Rappelons $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ la probabilité risque-neutre, et $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$.

Supposons $r = (r_t)_{t\in[0,V]}$ un processus stochastique, $\mathbb{F}$-adapté, avec $\mathbb{P}(\int_0^V |r_s| ds < +\infty) = 1$. Nous pouvons alors introduire la notion de déflateur : c'est le montant que l'on doit investir initialement afin d'obtenir une unité monétaire en t.

$$D_t = \exp(-\int_0^t r_s.ds) \tag{4.1}$$

Notons $B(t,T)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui mature en T. Ainsi $B(T,T) = 1$, et $B^*(t,T) = D_t \cdot B(t,T)$ est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale.

$$B^*(t,T) = \mathbb{E}^*[\, B^*(T,T) \,|\, \mathcal{F}_t \,] \tag{4.2}$$
$$D_t \cdot B(t,T) = \mathbb{E}^*[\, D_T \,|\, \mathcal{F}_t \,] \tag{4.3}$$
$$B(t,T) = \mathbb{E}^*[\, \frac{D_T}{D_t} \,|\, \mathcal{F}_t \,] \tag{4.4}$$
$$B(t,T) = \mathbb{E}^*[\, \exp(-\int_t^T r_s.ds) \,|\, \mathcal{F}_t \,] \tag{4.5}$$

Notons $r_t(T, T+d)$ le taux d'intérêt forward ,déterminé en t, entre T et $T+d$ $(d \geq 0)$.
Ainsi : $\begin{cases} \text{Si } t = T : \text{taux spot} \\ \text{Si } t < T : \text{taux forward} \end{cases}$

Les taux forwards doivent être calculés en respectant le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage. Les taux d'intérêts peuvent être calculés de plusieurs manières. Posons $\tau(t,T)$ la base de décompte des jours retenus entre t et T :

▷ **Intérêts simples :**

$$\text{Taux spot} : r_T(T, T+d) = \frac{1}{\tau(T,T+d)} \cdot \Big(\frac{1}{B(T,T+d)} - 1\Big) \tag{4.6}$$
$$\text{Taux forward} : r_t(T, T+d) = \frac{1}{\tau(T,T+d)} \cdot \Big(\frac{B(t,T)}{B(t,T+d)} - 1\Big) \tag{4.7}$$

▷ **Intérêts composés :**

$$\text{Taux spot} : r_T(T, T+d) = \frac{1}{B(T,T+d)^{1/\tau(T,T+d)}} - 1 \tag{4.8}$$
$$\text{Taux forward} : r_t(T, T+d) = \Big(\frac{B(t,T)^{1/\tau(t,T)}}{B(t,T+d)^{1/\tau(t,T+d)}}\Big)^{1/\tau(T,T+d)} - 1 \tag{4.9}$$

▷ **Intérêts continus :**

$$\text{Taux spot} : r_T(T, T+d) = -\frac{1}{\tau(T, T+d)} \cdot \ln\Big[B(T, T+d)\Big] \tag{4.10}$$

$$\text{Taux forward} : r_t(T, T+d) = \frac{1}{\tau(T, T+d)} \cdot \ln\Big[\frac{B(t,T)}{B(t, T+d)}\Big] \tag{4.11}$$

Par ailleurs nous pouvons associer les taux forwards aux prix forwards : notons $B_t(T, T+d)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon commençant en T et qui mature en $T+d$.

Précisions sur l'utilisation des différentes méthodes de calcul des taux d'intérêt dans la réalité : Les intérêts simples sont majoritairement utilisés sur le marché monétaire, marché sur lequel la maturité des obligations est en général inférieure à 1 an. La base monétaire est $^{Exact}/_{360}$.
Sur les autres marchés, pour des maturités supérieures à 1 an en général, ce sont les intérêts composés ou les intérêts continus qui sont utilisés. Pour les intérêts continus, la base actuarielle ($^{Exact}/_{Exact}$) est généralement utilisée, mais pour les intérêts composés, la Bond Basis ($^{30}/_{360}$) est aussi parfois employée.

Nous avons vu que la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ est la probabilité associée au numéraire $D(\cdot) = (D(t))_{t\in[0,T]}$. Nous pouvons maintenant généraliser en calculant la probabilité associée à d'autres numéraires, c'est-à-dire la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^N$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ associée au numéraire N telle que :

$$\begin{cases} \bullet\ \mathbb{P}^N \sim \mathbb{P} \\ \bullet\ \forall X = (X_t)_{t\in[0,T]} \text{ prix d'un actif :} \\ \qquad \dfrac{X}{N} := \Big(\dfrac{X_t}{N_t}\Big)_{t\in[0,T]} \text{ est une } (\mathbb{F}, \mathbb{P}^N)\text{-martingale} \end{cases} \tag{4.12}$$

Soit $\zeta \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F})$ représentant un paiement aléatoire à l'instant T. Posons X^ζ_t le prix de couverture de ζ à l'instant $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} \bullet\ \dfrac{X^\zeta}{D} := \Big(\dfrac{X^\zeta_t}{D_t}\Big)_{t\in[0,T]} \text{ est une } (\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)\text{-martingale} \\ \bullet\ \dfrac{X^\zeta}{N} := \Big(\dfrac{X^\zeta_t}{N_t}\Big)_{t\in[0,T]} \text{ est une } (\mathbb{F}, \mathbb{P}^N)\text{-martingale} \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\mathbb{E}^N[\frac{\zeta}{N_T} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^N[\frac{X^\zeta_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{X^\zeta_T}{N_T} = \frac{D_t}{N_T} \cdot \frac{X^\zeta_T}{D_T} = \frac{D_t}{N_T} \cdot \mathbb{E}^*[\frac{X^\zeta_T}{D_T} \mid \mathcal{F}_t] \tag{4.14}$$

$$= \mathbb{E}^*[\zeta \cdot \frac{D_t}{D_T.N_t} \mid \mathcal{F}_t] \qquad , \forall \zeta \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T) \tag{4.15}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{E}^N[\eta \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\eta \cdot \frac{D_t.N_T}{D_T.N_t} \mid \mathcal{F}_t] \qquad \text{, avec } \eta := \frac{\zeta}{N_T} \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T) \tag{4.16}$$

En $t = 0$, en utilisant F_0 (augmentée de $\mathcal{N}_{\mathbb{P}}$), on obtient :

$$\mathbb{E}^N[\,\eta\,] = \mathbb{E}^*[\eta \cdot \frac{N_T}{D_T.N_0}] \qquad , \forall \eta \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T) \tag{4.17}$$

Ainsi : $L^N_t := \dfrac{N_t}{D_t.N_0}$, $t \in [0,T]$ et $L^N_T := \dfrac{N_T}{D_T.N_0} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbb{P}^N}{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}$

Par ailleurs, $\forall \eta \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T)$: $\mathbb{E}^N[\,\eta \mid \mathcal{F}_t] = \dfrac{1}{L^N_t} \cdot \mathbb{E}^*[\eta.L^N_T \mid \mathcal{F}_t]$

Donc pour $\eta = 1$: $L^N_t = \mathbb{E}^*[L^N_T \mid F_t] \quad , t \in [0,T]$

Enfin : $\mathbb{E}^N[\eta \mid \mathcal{F}_t] = \dfrac{\mathbb{E}^*[\eta.L^N_T \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}^*[L^N_T \mid \mathcal{F}_t]} \qquad t \in [0,T], \eta \in \mathbb{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F})$

Grâce à cela, nous pourrons obtenir de nouveaux couples probabilité/numéraire, comme par exemple la probabilité T-forward neutre associée au numéraire $B(\,\cdot\,, T)$ que nous utiliserons par la suite.

Avant de poursuivre ce chapitre, rappelons ce qu'est la volatilité locale : la volatilité devient une fonction déterministe afin de pouvoir rester market-consistent, mais aussi de prendre en compte l'effet volatilité forward.

- Modèle TVDV (Time Varying Deterministic Volatility) : la volatilité va dépendre de la maturité seulement.
- Modèle SJVD (Stochastic Volatility Jump Diffusion) : c'est un modèle plus complexe qui va prendre en compte le niveau du sous-jacent en plus de la maturité. Ainsi le smile de volatilité sera beaucoup mieux modélisé.

Dans la suite de notre chapitre, nous allons utiliser une modélisation TVDV. La volatilité locale à l'instant t et de maturité T sera notée $\sigma(t,T) > 0$.

Afin de prendre en compte cet aspect forward, de nouveaux modèles ont été créés afin d'utiliser la modélisation de la dynamique du prix forward plutôt que celle du prix spot. Dans la suite de ce chapitre, nous allons décrire le modèle de Black-76, qui est une adaptation du modèle de Black&Scholes pour le marché des commodités et des taux, puis nous ajusterons le modèle de Bachelier en ajoutant la valeur-temps, afin que la comparaison des modèles soit cohérente. Cela revient donc à comparer un modèle considérant que les taux forward suivent une dynamique log-normale (Black-76), avec un autre modèle considérant une dynamique normale (Bachelier).

Par ailleurs, dans un contexte de taux négatifs, le modèle de Bachelier s'est beaucoup développé sur les marchés financiers ces dernières années, prenant peu à peu la place du modèle de Black-76, car ce dernier est incapable de valoriser une option avec des taux négatifs.

4.2 Modèle de Black-76 (ou modèle de Black)

Le modèle de Black-76 (ou modèle de Black) a été créé en 1976 par Fischer Black. Il a premièrement été développé pour le marché des commodités. En effet, le prix des matières premières fluctue au cours d'une année : par exemple le prix du blé est assez faible lorsque nous nous situons juste après la récolte, et il atteint en général son maximum juste avant cette récolte. Ainsi nous pouvons anticiper ces mouvements de prix, en fonction par exemple des prévisions de récolte, de la demande en blé, du coût de stockage, et donc estimer des prix forwards pour ces matières premières. Les prix anticipés ne s'obtiennent donc plus grâce à une simple capitalisation au taux sans risque comme nous le pratiquons pour les actions. Black a donc développé un modèle prenant en compte le prix forward du sous-jacent plutôt que son prix spot, c'est-à-dire le prix du sous-jacent anticipé par le marché à la date de maturité. Son modèle est alors rapidement devenu une référence pour valoriser les options sur le marché des commodités, mais il s'est aussi adapté pour les options sur des taux, tels que les caps, les floors, ou bien les swaptions.

Afin d'établir la formule de valorisation de Black-76, nous allons calculer la valeur d'un caplet, c'est-à-dire un call sur le taux Euribor spot. Comme les taux Euribor sont de maturité inférieure à 1 an, nous utilisons les intérêts simples avec la base monétaire $^{Exact}/_{360}$. Le payoff d'un caplet à l'instant $T+d$ est représenté par $C_{T+d}(T,T+d) = d \cdot (r_T(T,T+d) - K)^+$, ce qui correspond à obtenir un taux in fine de $Min(r_T(T,T+d),K)$.

Soit $t \in [0,T]$. Posons $X_t := B(t,T) - B(t,T+d)$ et rappelons la valeur du taux Euribor forward :

$$r_t(T,T+d) = \frac{1}{d} \cdot \Big(\frac{B(t,T)}{B(t,T+d)} - 1 \Big) = \frac{1}{d} \cdot \frac{X_t}{B(t,T+d)} \tag{4.18}$$

Grâce au calcul que nous avons effectué précédemment, nous savons que $r.(T,T+d) = (r_t(T,T+d))_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathbb{F},\mathbb{P}^{T+d})$-martingale :

$$r_t(T,T+d) = \mathbb{E}^{T+d}\Big[r_T(T,T+d) \mid \mathcal{F}_t \Big] \tag{4.19}$$

Ainsi $\Big(\frac{C_t(T,T+d)}{B(t,T+d)} \Big)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathbb{F},\mathbb{P}^{T+d})$-martingale :

$$C_t(T,T+d) = B(t,T+d) \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[\frac{C_{T+d}(T,T+d)}{B(T+d,T+d)} \mid \mathcal{F}_t \Big] \tag{4.20}$$

$$= B(t,T+d) \cdot d \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[(r_T(T,T+d) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \Big] \tag{4.21}$$

Afin de calculer cette espérance, nous devons calculer le MB B^{T+d} sous $\mathbb{P}^{T+d}$:

$$\begin{cases} P^{T+d} = L^{T+d}_{T+d} \cdot \mathbb{P}^* & \Big(L^{T+d}_{T+d} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{T+d}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^*} \Big) \\ L^{T+d}_t = \dfrac{B(t,T+d)}{P_t \cdot B(0,T+d)} & L^{T+d}_{T+d} = \dfrac{1}{P_{T+d} \cdot B(0,T+d)} \end{cases} \tag{4.22}$$

Notons $\sigma(t, T+d) \in \mathcal{F}_t$ la volatilité locale de $B(t, T+d)$, nous obtenons :

$$\mathrm{d}B(t,T+d) = r_t.B(t,T+d).\mathrm{d}t + \sigma(t,T+d).B(t,T+d).\mathrm{d}B_t^* \tag{4.23}$$

Puis, en appliquant le théorème de Girsanov ([Appendix C]) :

$$B_t^{T+d} = B_t^* - \int_0^t \sigma(s,T+d).ds \qquad \text{un } (\mathbb{F}, \mathbb{P}^{T+d}) \text{ - MB} \tag{4.24}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} X_t &= B(t,T) - B(t,T+d) \\ \mathrm{d}X_t &= r_t.X_t.\mathrm{d}t + \sigma_t^X.X_t.\mathrm{d}B_t^* \end{cases} \qquad \text{avec } \sigma_t^X = \frac{\sigma(t,T).B(t,T) - \sigma(t,T+d).B(t,T+d)}{B(t,T) - B(t,T+d)}$$

En appliquant la formule d'Itô au taux stochastique ([Appendix B]) :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r_t(T,T+d) &= \frac{1}{d} \cdot \mathrm{d}\Big(\frac{X_t}{B(t,T+d)}\Big) \\ &= \rho_t(T,T+d).r_t(T,T+d).\mathrm{d}B_t^{T+d} \end{aligned}$$

$\rho.(T,T+d) = (\rho_t(T,T+d))_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^2([0,T])$ est la volatilité du caplet associé. Nous la supposons déterministe, et donc :

$$r_T(T,T+d) = r_t(T,T+d) \cdot e^{\int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d} - \frac{1}{2}\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} C_t(T,T+d) &= B(t,T+d) \cdot d \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[(r_T(T,T+d) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \Big] \\ &\overset{[A.5.1]}{=} B(t,T+d) \cdot d \cdot \\ &\quad \mathbb{E}\Big[\Big(x \cdot exp\Big[\widehat{\rho}_t(T,T+d) \cdot (B_T - B_t) - \frac{1}{2} \cdot \widehat{\rho}_t(T,T+d)^2 \cdot (T-t) \Big] - K \Big)^+ \Big] \end{aligned}$$

Nous remarquons que le calcul de l'espérance devient identique au calcul effectué pour Black&Scholes : la différence réside dans l'absence de drift. Notons $\widehat{\sigma} = \widehat{\rho}_t(T,T+d)$. Nous obtenons ainsi la formule de Black-76, dans laquelle le sous-jacent n'est plus le taux spot, mais le taux forward :

$$\begin{cases} d_1(t,x,y) = \dfrac{1}{\widehat{\sigma}\sqrt{t}} \cdot [\, \ln(\dfrac{x}{y}) + \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{2} t \,] & \text{, avec } t,x,y > 0 \\ d_2(t,x,y) = \dfrac{1}{\widehat{\sigma}\sqrt{t}} \cdot [\, \ln(\dfrac{x}{y}) - \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{2} t \,] \;=\; d_1(t,x,y) - \widehat{\sigma}.\sqrt{t} \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons le prix de Black-76 à l'instant t pour le caplet décrit précédemment, avec $x = r_t(T,T+d)$:

$$C_t^{B76}(T,T+d) = B(t,T+d) \cdot d \cdot \Big[r_t(T,T+d).\Phi_{0,1}(d_1(T-t,x,K)) - K.\Phi_{0,1}(d_2(T-t,x,K)) \Big]$$

Un floorlet est un put sur le taux Euribor spot. Le payoff d'un floorlet à l'instant $T+d$ est représenté par $P_{T+d}(T,T+d) = d \cdot (r_T(T,T+d) - K)^-$, ce qui correspond à obtenir un taux in fine de $Max(r_T(T,T+d),K)$. Par parité Caplet-Floorlet, nous obtenons :

$$C_t^{B76}(T,T+d) - P_t^{B76}(T,T+d) = B(t,T) - B(t,T+d) - B(t,T+d) \cdot d \cdot K$$
$$P_t^{B76}(T,T+d) = B(t,T+d) \cdot d \cdot \Big[K.\Phi_{0,1}(-d_2(T-t,x,K)) - r_t(T,T+d).\Phi_{0,1}(-d_1(T-t,x,K))\Big]$$

Comme nous pouvons le remarquer, il est impossible de valoriser une option avec des taux négatifs, car Black considère que les taux forwards sont log-normalement distribués.

4.3 Modèle de Bachelier avec ajout de la valeur temps

Dans un contexte de taux négatifs, le modèle de Bachelier s'est beaucoup développé ces dernières années : il suppose que les prix sont normalement distribués, il est ainsi possible que les taux soient négatifs, contrairement au modèle de Black-76. Nous allons donc effectuer une légère adaptation du modèle de Bachelier décrit dans le chapitre précédent, afin qu'il utilise lui aussi les taux forwards pour valoriser l'option, tout en rajoutant la valeur-temps dans la modélisation, car Bachelier ne la prenait pas en compte historiquement (tous les paiements étant effectués à maturité, y compris la prime).

Rappelons que $\Big(\dfrac{C_t(T,T+d)}{B(t,T+d)}\Big)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathbb{F},\mathbb{P}^{T+d})$-martingale, et :

$$C_t(T,T+d) = B(t,T+d) \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[\frac{C_{T+d}(T,T+d)}{B(T+d,T+d)} \mid \mathcal{F}_t\Big] \tag{4.26}$$
$$= B(t,T+d) \cdot d \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[(r_T(T,T+d) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\Big] \tag{4.27}$$

Nous supposons que la dynamique des taux forwards est gaussienne ([Appendix E]) :

$$\mathrm{d}r_t(T,T+d) = \rho_t(T,T+d).\mathrm{d}B_t^{T+d} \tag{4.28}$$

avec : $\rho.(T,T+d) = (\rho_t(T,T+d))_{t\in[0,T]} \in \mathbb{L}^2([0,T])$ la volatilité du caplet associé, supposée déterministe

Nous obtenons donc :

$$r_T(T,T+d) = r_t(T,T+d) + \int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d} \tag{4.29}$$

Nous pouvons maintenant poursuivre le calcul de l'espérance (4.27) :

$$C_t(T,T+d) = B(t,T+d) \cdot d \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[(r_T(T,T+d) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\Big] \tag{4.30}$$
$$= B(t,T+d) \cdot d \cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[\Big(x + \int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d} - K\Big)^+ \mid x = r_t(T,T+d)\Big] \tag{4.31}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}^{T+d}_{\int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d}} & = \mathcal{N}\Big(0, \displaystyle\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s\Big) = \mathbb{P}_{\widehat{\rho}_t(T,T+d)\cdot(B_T-B_t)} \\ \widehat{\rho}_t(T,T+d) & = \Big(\dfrac{1}{T-t}\cdot\displaystyle\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \end{cases}$$

$$C_t(T,T+d) = B(t,T+d)\cdot d\cdot \mathbb{E}\Big[\Big(x+\widehat{\rho}_s(T,T+d).\sqrt{T-t}.\varepsilon - K\Big)^+\Big] \qquad \text{avec : } \varepsilon\sim\mathcal{N}(0,1)$$

Nous remarquons que le calcul de l'espérance devient identique au calcul effectué pour Bachelier à la fin du chapitre 2. Notons $\widehat{\sigma} = \widehat{\rho}_t(T,T+d)$. Nous obtenons ainsi la formule de Bachelier, dans laquelle le sous-jacent n'est plus le taux spot, mais le taux forward :

$$\begin{aligned} C_t^B(T,T+d) = B(t,T+d)\cdot d\cdot \Big[&(r_t(T,T+d)-K)\cdot\Phi_{0,1}\Big(\frac{r_t(T,T+d)-K}{\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}}\Big) \\ &+\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{0,1}\Big(\frac{r_t(T,T+d)-K}{\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}}\Big)\Big] \end{aligned}$$

Par parité Caplet-Floorlet, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} P_t^B(T,T+d) &= C_t^B(T,T+d) - \Big(B(t,T) - B(t,T+d) - B(t,T+d)\cdot d\cdot K\Big) \\ &= B(t,T+d)\cdot d\cdot \Big[(K-r_t(T,T+d))\cdot\Phi_{0,1}\Big(\frac{K-r_t(T,T+d)}{\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}}\Big) \\ &\quad +\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{0,1}\Big(\frac{r_t(T,T+d)-K}{\widehat{\sigma}\sqrt{T-t}}\Big)\Big] \end{aligned}$$

4.4 Comparaison

Cette section va donc consister à comparer la valorisation d'un modèle qui suppose que les taux forwards sont log-normalement distribués (Black-76), avec un autre modèle qui suppose que les taux forwards sont normalement distribués (Bachelier adapté).

Pour ce faire, nous allons procéder de la même manière que pour les modèles de valorisation des options sur actions : nous allons comparer l'évolution de la valorisation des Caplets et des Floorlets en fonction des paramètres régissant cette valorisation.

Dans un premier temps, nous vérifierons les valorisations des 2 modèles dans des cas simples où nous pouvons estimer à l'avance la valeur des options (limites à l'extrême de certains paramètres). Nous n'effectuerons pas le calcul des grecques pour les modèles de taux : les modèles action étant très semblables aux modèles de taux (dynamique normale ou log-normale), leurs grecques le seront aussi. C'est pourquoi nous nous servirons des résultats obtenus pour les modèles action afin d'obtenir les grecques les plus faibles. Rappelons que BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une hausse des taux grâce à l'achat de Swaptions. Nous clôturerons notre choix à l'aide de la distribution historique de plusieurs taux de référence.

Afin d'alléger la suite de cette partie, nous supposons que la durée de placement est égale à 1 an : $d = 1$, et nous noterons $r_t(T, T+d) = r_{t,T}$.

4.4.1 Maturité

Premièrement nous allons étudier les valorisations de ces options lorsque nous faisons tendre la date de valorisation de l'option t vers sa maturité T. Soient $B(t, T+d) \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $r_{t,T} \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, T[$:

Nous nous attendons à ce que la valorisation de l'option soit égale à son payoff, puisque dans un futur très proche c'est le montant que nous allons toucher.

▷ **CAPLET :**

$$C_t^{B76} = B(t, T+d) \cdot \Big[r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(d_1) - K.\Phi_{[0,1]}(d_2) \Big] \quad \underset{t \to T}{\overset{[A.6.1]}{\longrightarrow}} \quad \begin{cases} r_{t,T} - K & \text{si } r_{t,T} > K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \leq K \end{cases}$$

$$C_t^{B} = B(t, T+d) \cdot \Big[(r_{t,T} - K) \cdot \Phi_{0,1}\Big(\frac{r_{t,T} - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T} - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$

$$\underset{t \to T}{\overset{[A.6.1]}{\longrightarrow}} \quad \begin{cases} r_{t,T} - K & \text{si } r_{t,T} > K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \leq K \end{cases}$$

Lorsque $t \longrightarrow T$, les 2 modèles renvoient la même valorisation, qui est bien celle attendue, puisque c'est le payoff que nous allons toucher dans un futur très proche.

▷ **FLOORLET :**

$$P_t^{B76} = B(t,T+d)\cdot\Big[K.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(-d_1)\Big] \underset{t\to T}{\longrightarrow} \begin{cases} K - r_{t,T} & \text{si } r_{t,T} < K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \geq K \end{cases}$$

$$P_t^{B} = B(t,T+d)\cdot\Big[(K-r_{t,T})\cdot\Phi_{0,1}\Big(\frac{K-r_{t,T}}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$
$$\underset{t\to T}{\longrightarrow} \begin{cases} K - r_{t,T} & \text{si } r_{t,T} < K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \geq K \end{cases}$$

Pour le put, nous obtenons aussi la valorisation attendue avec les 2 modèles.

4.4.2 Volatilité

Nous allons maintenant étudier les valorisations de ces options lorsque nous faisons tendre la volatilité vers 0. Soient $B(t,T+d) \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $r_{t,T} \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0,T[$:

Lorsque la volatilité est nulle, nous nous attendons à ce que le taux forward soit fixe, et donc $r_{t,T} = r_{T,T}$. Ainsi nous connaissons le futur payoff, et donc la valorisation de l'option devrait correspondre à ce payoff actualisé.

▷ **CAPLET :**

$$C_t^{B76} = B(t,T+d)\cdot\Big[r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(d_1) - K.\Phi_{[0,1]}(d_2)\Big] \underset{\sigma\to 0^+}{\overset{[A.6.2]}{\longrightarrow}} \begin{cases} B(t,T+d)(r_{t,T}-K) & \text{si } r_{t,T} > K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \leq K \end{cases}$$

$$C_t^{B} = B(t,T+d)\cdot\Big[(r_{t,T}-K)\cdot\Phi_{0,1}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$
$$\underset{\sigma\to 0^+}{\overset{[A.6.2]}{\longrightarrow}} \begin{cases} B(t,T+d)(r_{t,T}-K) & \text{si } r_{t,T} > K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \leq K \end{cases}$$

Les 2 modèles renvoient bien la valorisation attendue avec une volatilité nulle, c'est-à-dire le payoff actualisé : $B(t,T+d)\cdot(r_{t,T}-K)^+$.

▷ **FLOORLET :**

$$P_t^{B76} = B(t,T+d)\Big[K.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(-d_1)\Big] \underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} B(t,T+d)(K-r_{t,T}) & \text{si } r_{t,T} < K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \geq K \end{cases}$$

$$P_t^{B} = B(t,T+d)\cdot\Big[(K-r_{t,T})\cdot\Phi_{0,1}\Big(\frac{K-r_{t,T}}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$
$$\underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} B(t,T+d)(K-r_{t,T}) & \text{si } r_{t,T} < K \\ 0 & \text{si } r_{t,T} \geq K \end{cases}$$

Avec le floorlet, les 2 valorisations sont aussi bien celles attendues.

Nous pouvons donc affirmer que dans ces cas simples (maturité très courte ou volatilité quasi nulle), nos 2 modèles de valorisation se comportent comme nous l'attendions.

4.4.3 Distributions historiques et Conclusion

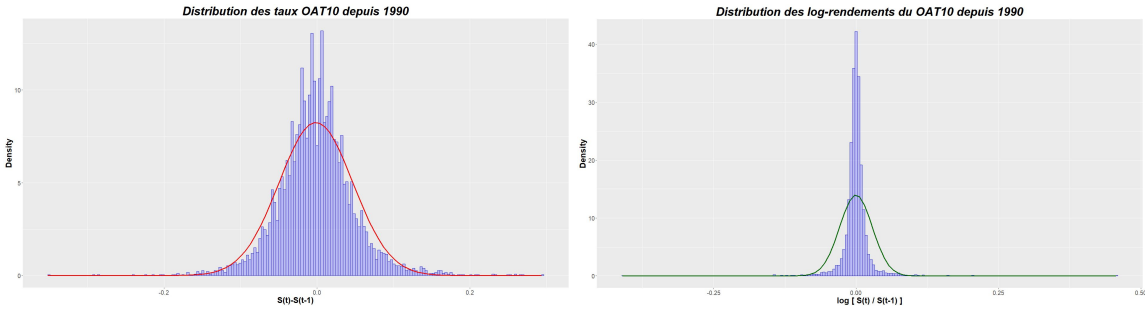


FIGURE 4.1 – Distribution historique des taux OAT 10Y et de son log-rendement associé

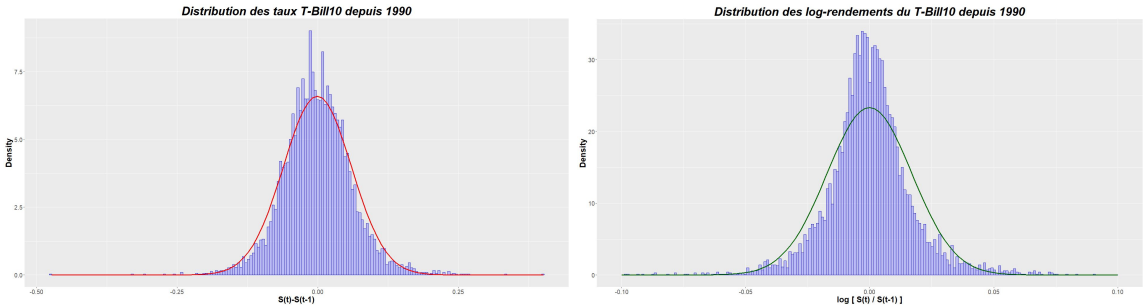


FIGURE 4.2 – Distribution historique des taux T-Bill 10Y et de son log-rendement

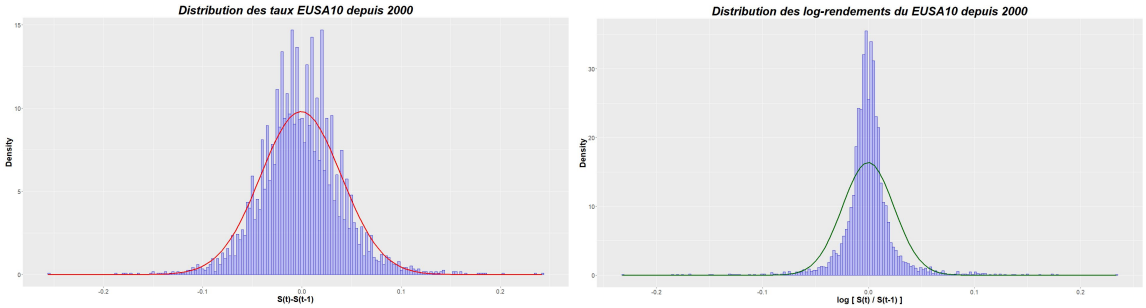


FIGURE 4.3 – Distribution historique des taux EUSA 10Y et de son log-rendement

Nous avons sélectionné 3 indices de taux afin de pouvoir étudier leurs distributions historiques. Ce sont des taux de référence sur les marchés.
Le graphe situé à gauche représente la distribution historique de l'évolution absolue de l'indice : $r_t - r_{t-1}$. Le graphe situé à droite représente quant à lui la distribution des log-rendements de l'indice.
Rappelons que l'objectif est de savoir quelle dynamique est la plus adéquate afin de modéliser ces indices de taux : une dynamique normale (Bachelier), ou une dynamique log-normale, c'est-à-dire des log-rendements gaussiens (Black-76). Ainsi, nous avons fait correspondre une loi normale à chacun de ces graphes à l'aide de R.

Premièrement, nous avons étudié l'OAT 10Y, qui représente le taux 10 ans français, puis le T-Bill 10Y, qui représente quant à lui les taux 10 ans américains, et enfin l'EUSA 10Y, qui est le taux swap 10 ans contre un Euribor 6 mois.
Nous pouvons remarquer que la courbe rouge s'ajuste beaucoup mieux à la distribution sous-jacente que la courbe verte dans ces 3 cas. Ainsi, nous pouvons affirmer que les taux semblent suivre une dynamique normale plutôt qu'une dynamique log-normale.

▷ CHOIX DU MODÈLE :

Comme annoncé au début de la section « Comparaison », nous n'avons pas calculer les grecques des modèles de taux comme nous l'avions fait pour les actions : les modèles actions et taux étant très semblables (dynamique normale ou log-normale), leurs grecques le sont aussi. Ainsi nous avons décidé d'approximer les grecques des modèles de taux par ceux des modèles actions.

Par ailleurs, nous verrons par la suite de l'étude que BNP Paribas Cardif souhaite se protéger contre une hausse des taux, en établissant des stratégies basées sur l'achat de Swaptions. Les grecques (Delta, Gamma et Thêta) d'une Swaption avec nos modèles de taux sont semblables à ceux calculés pour le Call avec nos modèles actions. A l'aide de la figure 3D représentant le rapport des Delta des modèles actions (Figure 3.4), nous pouvons en déduire que le modèle de Bachelier a une vitesse inférieure à celle du modèle de Black-76. Le modèle de Bachelier sera donc plus stable que le modèle de Black-76 pour ces options.

Le fait que le modèle de Bachelier ait une accélération supérieure à celle de Black-76 est négligeable (Figure 3.5), car, dans le cadre de la valorisation des options sur des taux, le terme du second ordre va être dérisoire par rapport au terme du premier ordre. Etant donné que les taux sont de l'ordre de 10^{-2}, ils seront de l'ordre de 10^{-4} au second ordre. Rappelons l'approximation du second ordre :

$$V_{t_1} - V_{t_0} = \Delta_{(t_0, r_{0,T})} \cdot (r_{t_1,T} - r_{t_0,T}) + \Gamma_{(t_0, r_{0,T})} \cdot \frac{(r_{t_1,T} - r_{t_0,T})^2}{2} + o(|r_{t_1,T} - r_{t_0,T}|^2)$$

Par conséquent, l'adéquation de l'hypothèse de dynamique normale des taux avec leurs distributions historiques, ainsi que la stabilité procurée dans le cadre de nos stratégies, nous conduisent à choisir le modèle de Bachelier afin de valoriser nos options sur taux.

Troisième partie

MODÉLISATION DES INSTRUMENTS DE COUVERTURE ET RISQUES ALM

Chapitre 5

Description du GSE ALM RW de BNP Paribas Cardif

Cette section est destinée à fournir une description brève et synthétique du générateur de scénarios économiques Monde Réel (GSE RW) ALM de BNP Paribas Cardif. Un GSE est un outil qui nous permet de projeter des variables économiques telles que la courbe des taux ou les rendements actions. Nous pouvons remarquer qu'il nous fournit énormément d'informations, notamment les rendements immobiliers ou les courbes des taux en fonction des différents ratings. Le GSE effectue une projection de ces variables sur 40 ans, du 31/12/2017 au 31/12/2057. Nous obtenons, pour chaque variable, une valeur annuelle au 31 Décembre.

Le GSE utilisé en ALM est en univers « Monde Réel » (RW), puisque l'objectif de l'équipe ALM est d'observer l'efficacité de différentes stratégies si elles étaient vraiment mises en place. L'ensemble des simulations stochastiques RW va donc nous permettre d'obtenir une distribution nous renseignant sur l'efficacité de nos stratégies.

Nous allons décrire le fonctionnement du GSE RW utilisé par BNP Paribas Cardif, mais, pour des raisons de confidentialité, nous ne détaillerons pas les différents calibrages.

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	OS_TERM	2017	2018	2019	2020	2055	2056	2057
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	1.0205	1.0185	1.0094	1.0140	0.9929	1.0164	1.0143
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	1.0371	1.0344	1.0048	1.0375	0.9818	1.0471	1.0021
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	1.0513	1.0366	1.0082	1.0563	0.9748	1.0566	0.9944
1	EUR	ILZCB	PRICE	4	1.0633	1.0474	1.0078	1.0724	0.9479	1.0769	0.9945
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	1.0742	1.0544	1.0040	1.0854	0.9320	1.1108	0.9690
1	EUR	ILZCB	PRICE	6	1.0847	1.0598	0.9987	1.1018	0.9282	1.1183	0.9463
1	EUR	ILZCB	PRICE	7	1.0875	1.0576	0.9906	1.1117	0.9038	1.1298	0.9248
1	EUR	ILZCB	PRICE	8	1.0891	1.0565	0.9806	1.1131	0.8834	1.1431	0.8927
1	EUR	ILZCB	PRICE	9	1.0845	1.0493	0.9600	1.1178	0.8651	1.1424	0.8650
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	1.0820	1.0383	0.9486	1.1057	0.8372	1.1464	0.8415
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	1.1091	1.0212	0.8772	1.1236	0.7169	1.1489	0.7140
1	EUR	ILZCB	PRICE	20	1.1063	0.9879	0.8290	1.1604	0.6256	1.1852	0.6199
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	1.0684	0.9215	0.6860	1.1248	0.4984	1.3150	0.4800
1	EUR	ZCB	PRICE	1	1.0064	1.0068	0.9976	1.0133	0.9773	1.0068	0.9955
1	EUR	ZCB	PRICE	2	1.0098	1.0106	0.9922	1.0236	0.9573	1.0179	0.9812
1	EUR	ZCB	PRICE	3	1.0092	1.0103	0.9830	1.0302	0.9332	1.0246	0.9574
1	EUR	ZCB	PRICE	4	1.0062	1.0076	0.9715	1.0347	0.9054	1.0265	0.9276
1	EUR	ZCB	PRICE	5	1.0005	1.0023	0.9577	1.0367	0.8755	1.0249	0.8950
1	EUR	ZCB	PRICE	6	0.9939	0.9960	0.9431	1.0379	0.8450	1.0212	0.8614
1	EUR	ZCB	PRICE	7	0.9809	0.9833	0.9228	1.0324	0.8146	1.0164	0.8280
1	EUR	ZCB	PRICE	8	0.9657	0.9684	0.9007	1.0244	0.7848	1.0109	0.7954
1	EUR	ZCB	PRICE	9	0.9450	0.9480	0.8739	1.0103	0.7558	1.0051	0.7638
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0.9253	0.9285	0.8483	0.9970	0.7278	0.9992	0.7333
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0.8569	0.8614	0.7525	0.9603	0.6022	0.9695	0.5979
1	EUR	ZCB	PRICE	20	0.7644	0.7698	0.6432	0.8909	0.4982	0.9405	0.4875
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0.5921	0.5983	0.4575	0.7460	0.3410	0.8852	0.3241
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1.0000	1.0041	1.0211	1.0244	1.5531	1.5542	1.5828
1	EUR	VALN	DEF	0	1.0000	1.0064	1.0133	1.0109	0.8750	0.8551	0.8610
1	EUR	EQUITIES_GF	RET_IDX	0	100.00	77.70	98.10	106.84	768.34	703.96	530.53
1	EUR	EQUITIES_GF	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	REAL_ESTATE_GF	RET_IDX	0	100.00	103.06	92.63	80.65	466.37	556.87	424.61
1	EUR	REAL_ESTATE_GF	RNY_PC	0	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80
1	EUR	EQUITIES_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	77.70	98.10	106.84	768.34	703.96	530.53
1	EUR	EQUITIES_FUND_GF	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	EQUITIES_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	77.70	98.10	106.84	768.34	703.96	530.53
1	EUR	EQUITIES_FUND_UL	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	REAL_ESTATE_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	103.06	92.63	80.65	466.37	556.87	424.61
1	EUR	REAL_ESTATE_FUND_UL	RNY_PC	0	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80
1	EUR	BOND_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	100.84	97.02	106.50	217.42	262.95	231.10
1	EUR	BOND_FUND_UL	RNY_PC	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	EUR	BOND_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	100.25	98.20	103.00	166.70	184.49	174.96
1	EUR	BOND_FUND_GF	RNY_PC	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	94.10	99.53	102.83	201.64	203.35	188.38
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_GF	RNY_PC	0	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	92.92	99.34	107.22	362.41	390.69	335.96
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_UL	RNY_PC	0	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
1	EUR	EQUITY_EQL	RET_IDX	0	100.00	77.70	98.10	106.84	768.34	703.96	530.53
1	EUR	EQUITY_SPOT	RET_IDX	0	100.00	77.70	98.10	106.84	768.34	703.96	530.53
1	EUR	LIVRET_A	RNY_PC	0	0.75	0.75	2.00	0.50	1.50	0.25	2.00
1	EUR	TME	RNY_PC	0	0.7797	0.7441	1.6584	0.0303	3.2284	0.0082	3.1500
1	EUR	OAT10	RNY_PC	0	0.7797	0.7441	1.6584	0.0303	3.2284	0.0082	3.1500
1	EUR	OAT1	RNY_PC	0	-0.6401	-0.6757	0.2386	-1.3164	2.3196	-0.6766	0.4496
1	EUR	ZCB_A	PRICE	1	0.9977	0.9858	0.9904	1.0076	0.9751	1.0032	0.9863
1	EUR	ZCB_A	PRICE	2	0.9924	0.9688	0.9779	1.0120	0.9529	1.0106	0.9631
1	EUR	ZCB_A	PRICE	30	0.4561	0.3176	0.3680	0.6288	0.3183	0.7953	0.2452
1	EUR	ZCB_AA	PRICE	1	1.0009	0.9941	0.9933	1.0099	0.9760	1.0047	0.9900
1	EUR	ZCB_AA	PRICE	2	0.9988	0.9852	0.9836	1.0166	0.9547	1.0135	0.9703
1	EUR	ZCB_AA	PRICE	30	0.5020	0.4087	0.4014	0.6733	0.3272	0.8301	0.2741
1	EUR	ZCB_AAA	PRICE	1	1.0016	0.9982	0.9947	1.0110	0.9764	1.0054	0.9918
1	EUR	ZCB_AAA	PRICE	2	1.0002	0.9933	0.9864	1.0189	0.9556	1.0150	0.9740
1	EUR	ZCB_AAA	PRICE	30	0.5127	0.4621	0.4190	0.6966	0.3317	0.8481	0.2899
1	EUR	ZCB_B	PRICE	1	0.9794	0.9208	0.9711	0.9927	0.9700	0.9946	0.9606
1	EUR	ZCB_B	PRICE	2	0.9564	0.8453	0.9402	0.9822	0.9431	0.9933	0.9135
1	EUR	ZCB_B	PRICE	30	0.2618	0.0411	0.2040	0.4018	0.2725	0.6138	0.1109
1	EUR	ZCB_BB	PRICE	1	0.9857	0.9496	0.9803	0.9998	0.9726	0.9989	0.9727
1	EUR	ZCB_BB	PRICE	2	0.9687	0.8989	0.9580	0.9965	0.9481	1.0018	0.9367
1	EUR	ZCB_BB	PRICE	30	0.3172	0.1034	0.2701	0.4989	0.2948	0.6977	0.1614
1	EUR	ZCB_BBB	PRICE	1	0.9960	0.9758	0.9869	1.0047	0.9740	1.0014	0.9817
1	EUR	ZCB_BBB	PRICE	2	0.9890	0.9492	0.9710	1.0063	0.9507	1.0070	0.9542
1	EUR	ZCB_BBB	PRICE	30	0.4334	0.2338	0.3307	0.5774	0.3074	0.7539	0.2133
1	EUR	ZCB_CCC	PRICE	1	0.9451	0.8060	0.9328	0.9624	0.9592	0.9766	0.9104
1	EUR	ZCB_CCC	PRICE	2	0.8905	0.6476	0.8675	0.9233	0.9222	0.9576	0.8206
1	EUR	ZCB_CCC	PRICE	30	0.0897	0.0008	0.0610	0.1589	0.1946	0.3544	0.0222
1	EUR	SURV_FACT_AAA	DEFAULT	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	EUR	SURV_FACT_AA	DEFAULT	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	EUR	SURV_FACT_A	DEFAULT	0	1.0000	0.9997	0.9994	0.9991	0.9887	0.9884	0.9881
1	EUR	SURV_FACT_BBB	DEFAULT	0	1.0000	0.9989	0.9978	0.9967	0.9590	0.9580	0.9569
1	EUR	SURV_FACT_BB	DEFAULT	0	1.0000	0.9956	0.9912	0.9869	0.8457	0.8420	0.8383
1	EUR	SURV_FACT_B	DEFAULT	0	1.0000	0.9576	0.9170	0.8781	0.1928	0.1846	0.1768
1	EUR	SURV_FACT_CCC	DEFAULT	0	1.0000	0.7231	0.5229	0.3781	0.0000	0.0000	0.0000

FIGURE 5.1 – Exemple d'une simulation du GSE RW

5.1 Taux et inflation

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	OS_TERM	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2056	2057
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	1,0219	1,0219	1,0219	1,0219	1,0060	1,0060	1,0060	1,0060
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	1,0410	1,0410	1,0410	1,0410	0,9979	0,9979	0,9979	0,9979
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	0,9896	0,9896	0,9896	0,9896
1	EUR	ILZCB	PRICE	4	1,0688	1,0688	1,0688	1,0688	0,9810	0,9810	0,9810	0,9810
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	1,0790	1,0790	1,0790	1,0790	0,9721	0,9721	0,9721	0,9721
1	EUR	ILZCB	PRICE	6	1,0883	1,0883	1,0883	1,0883	0,9629	0,9629	0,9629	0,9629
1	EUR	ILZCB	PRICE	7	1,0897	1,0897	1,0897	1,0897	0,9535	0,9535	0,9535	0,9535
1	EUR	ILZCB	PRICE	8	1,0890	1,0890	1,0890	1,0890	0,9437	0,9437	0,9437	0,9437
1	EUR	ILZCB	PRICE	9	1,0818	1,0818	1,0818	1,0818	0,9337	0,9337	0,9337	0,9337
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	1,0749	1,0749	1,0749	1,0749	0,9234	0,9234	0,9234	0,9234
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	1,0716	1,0716	1,0716	1,0716	0,8741	0,8741	0,8741	0,8741
1	EUR	ILZCB	PRICE	20	1,0305	1,0305	1,0305	1,0305	0,8173	0,8173	0,8173	0,8173
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0,9251	0,9251	0,9251	0,9251	0,6788	0,6788	0,6788	0,6788
1	EUR	ZCB	PRICE	1	1,0064	1,0064	1,0064	1,0064	0,9911	0,9911	0,9911	0,9911
1	EUR	ZCB	PRICE	2	1,0099	1,0099	1,0099	1,0099	0,9687	0,9687	0,9687	0,9687
1	EUR	ZCB	PRICE	3	1,0094	1,0094	1,0094	1,0094	0,9465	0,9465	0,9465	0,9465
1	EUR	ZCB	PRICE	4	1,0060	1,0060	1,0060	1,0060	0,9245	0,9245	0,9245	0,9245
1	EUR	ZCB	PRICE	5	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	0,9027	0,9027	0,9027	0,9027
1	EUR	ZCB	PRICE	6	0,9940	0,9940	0,9940	0,9940	0,8811	0,8811	0,8811	0,8811
1	EUR	ZCB	PRICE	7	0,9806	0,9806	0,9806	0,9806	0,8597	0,8597	0,8597	0,8597
1	EUR	ZCB	PRICE	8	0,9655	0,9655	0,9655	0,9655	0,8385	0,8385	0,8385	0,8385
1	EUR	ZCB	PRICE	9	0,9450	0,9450	0,9450	0,9450	0,8174	0,8174	0,8174	0,8174
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0,9252	0,9252	0,9252	0,9252	0,7966	0,7966	0,7966	0,7966
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0,8562	0,8562	0,8562	0,8562	0,7005	0,7005	0,7005	0,7005
1	EUR	ZCB	PRICE	20	0,7648	0,7648	0,7648	0,7648	0,6086	0,6086	0,6086	0,6086
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0,5925	0,5925	0,5925	0,5925	0,4367	0,4367	0,4367	0,4367
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1,0000	1,0120	1,0272	1,0426	1,0582	1,0741	1,7819	1,8087
1	EUR	VALN	DEF	0	1,0000	1,0064	1,0099	1,0094	1,0060	1,0005	0,5064	0,4976

FIGURE 5.2 – Scénario central pour les taux

La première composante modélisée par le GSE RW est l'inflation, et donc l'indice des prix à la consommation :

$$I_t : \text{Taux d'inflation annuel entre t et t+1Y} \tag{5.1}$$

$$CPI_{t+1} : \text{Indice des prix à la consommation} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} CPI_0 = 1 \\ CPI_{t+1} = CPI_t \cdot (1 + I_t) \end{cases} \tag{5.3}$$

La dynamique de l'inflation est représentée par (les paramètres et le calibrage ne sont pas détaillés pour des raisons de confidentialité) :

$$dI = \lambda \cdot (\Theta - I) \cdot dt + \sigma dW_t \tag{5.4}$$

La seconde composante modélisée par le GSE RW est la courbe des taux d'intérêts nominaux (ZCB : Zero-Coupon Bonds). Elle est reliée à l'inflation avec le modèle DNS (Dynamic Nelson-Siegel). Il est très utilisé par les banques centrales car il permet d'être très fidèle à la réalité. Il permet notamment de générer une grande variété de courbes de taux, et il permet aussi de capter l'essentiel des sources de déformation (translation, pente et courbure). Posons $R_t(\tau_i)$ une série de taux d'intérêts nominaux en $t > 0$ pour différentes maturités $\tau_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$:

$$R_t(\tau_i) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - \beta_{3,t} \cdot (\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \tag{5.5}$$

Les facteurs, que nous ne pourrons détailler par soucis de confidentialité, ont chacun un rôle particulier :

- $\beta_{1,t}$: Facteur de translation
- $\beta_{2,t}$: Pente ou prime de long terme
- $\beta_{3,t}$: Courbure

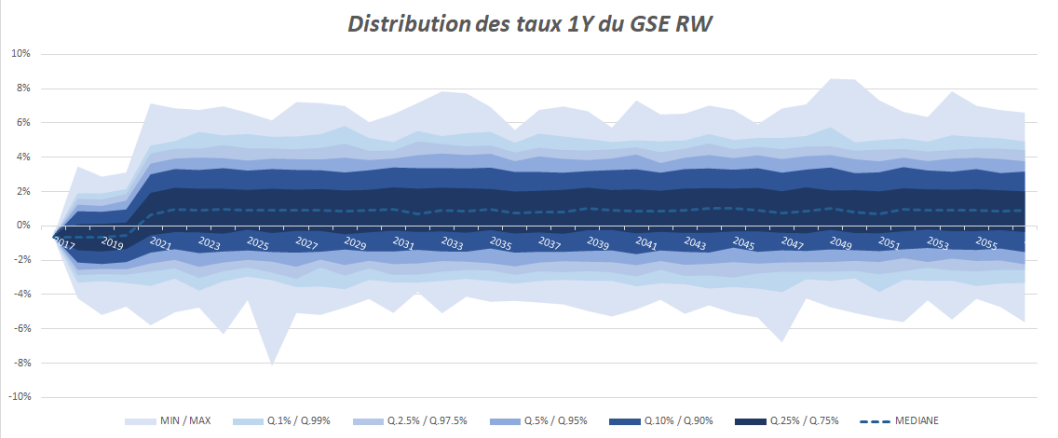


FIGURE 5.3 – Distribution des taux 1Y du GSE RW

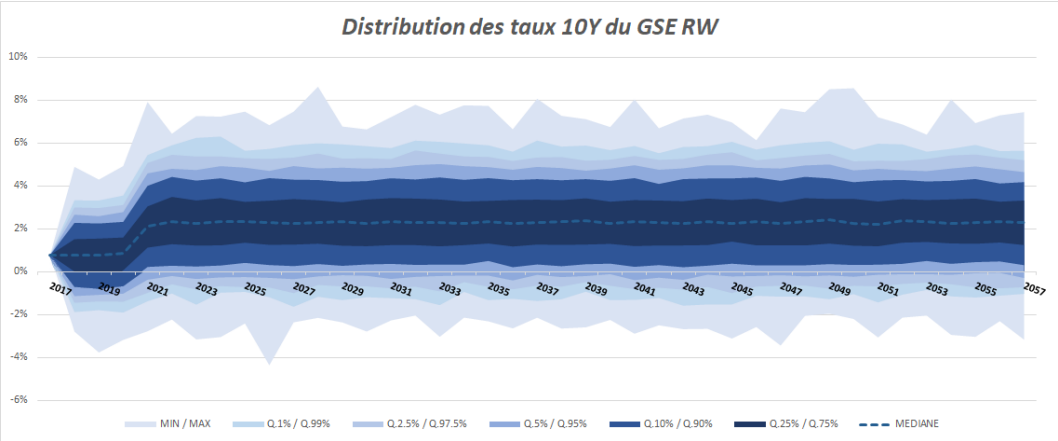


FIGURE 5.4 – Distribution des taux 10Y du GSE RW

Le GSE ALM nous fournit la structure par terme des taux d'intérêts pour chaque année de projection. Cette structure est développée à partir de l'inflation :
Premièrement, un outil va permettre de modéliser l'inflation pour chaque maturité et sur chaque année de projection. Ensuite, à partir de ces inflations modélisées, il en est déduit une structure par terme des taux d'intérêts sur chaque année de projection.

Les ILZCB (Inflation-Linked Zero-Coupon Bonds) correspondent aux taux réels, c'est-à-dire aux taux actuariels d'obligations indexées à l'inflation. Le GSE RW suppose que les marchés anticipent parfaitement l'inflation future de l'économie :

$$\text{Taux réel} = \text{Taux nominal - Inflation anticipée des marchés} \tag{5.6}$$

$$\text{Taux réel}(t,\tau) = \text{Taux nominal}(t,\tau) - \left[\left(\frac{CPI_{t+\tau_i}}{CPI_t}\right)^{1/\tau} - 1\right] \tag{5.7}$$

Pour le scénario central (le scénario anticipé avec la plus grande probabilité par les économistes de BNP Paribas Cardif), nous pouvons observer que la structure par terme des taux d'intérêts est identique de 2017 à 2020, puis elle est translatée d'environ +150bps pour chaque maturité en 2021 et reste identique jusqu'en 2057. Les taux 10 ans passent de 0.78% à 2.30%. Nous pouvons aussi remarquer que l'interpolation effectuée par Prophet (progiciel ALM utilisé par BNP Paribas Cardif que nous détaillerons dans le chapitre suivant) pour les taux inférieurs à 1 an provoque une cassure dans la structure par terme des taux d'intérêts : les taux inférieurs à 1 an sont égaux au taux 1 an. Une extrapolation est ensuite effectuée en convergeant les taux vers l'UFR (Ultimate Forward Rate) défini par l'ACPR.

Le risque de crédit est modélisé à l'aide de l'ajout de spreads positifs. Nous modélisons de manière déterministe les probabilités de défaut et les taux de recouvrement. Comme nous n'utiliserons pas les courbes de taux modélisant les risques de crédit, nous ne détaillerons pas leurs modélisations.

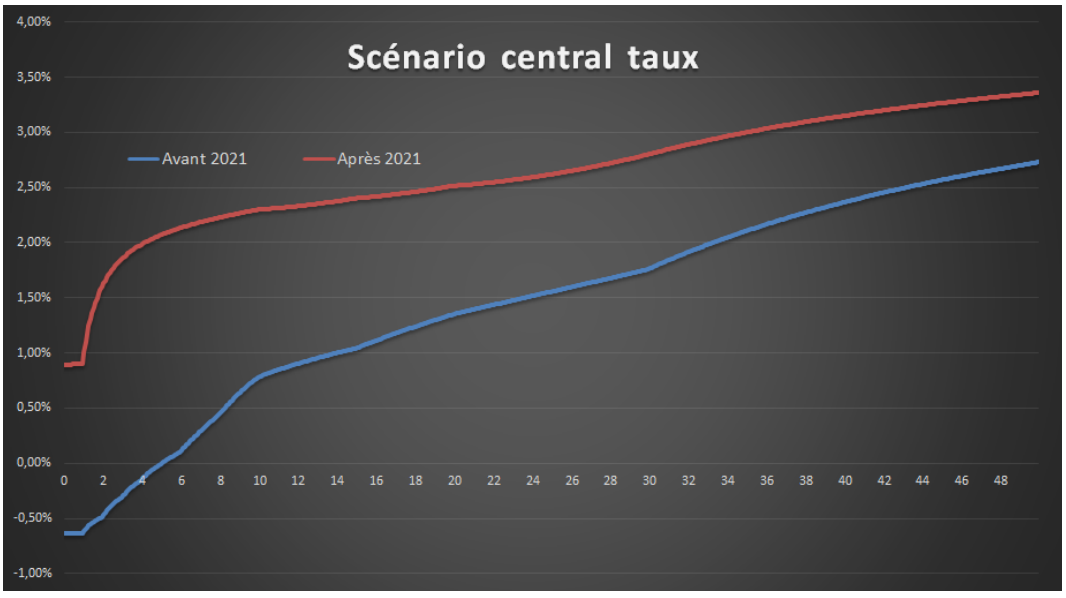


FIGURE 5.5 – Scénario central pour les taux

5.2 Actions

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	OS_TERM	2017	2018	2019	2020	2055	2056	2057
1	EUR	EQUITIES_GF	RET_IDX	0	100,0000	105,0000	110,2500	115,7625	638,5477	670,4751	703,9989
1	EUR	EQUITIES_GF	RNY_PC	0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
1	EUR	EQUITIES_GF	ADJUST	0	100,0000	103,1000	106,2961	109,5913	319,0284	328,9182	339,1147

FIGURE 5.6 – Scénario central pour les actions + indice ajusté des dividendes

BNP Paribas Cardif suppose que le taux d'intérêts nominal long terme est une bonne approximation du taux de croissance du PIB. En effet, lors d'un cycle économique complet, les rendements des rentiers (proxy taux long souverain, sans risque) et des travailleurs/entrepreneurs (proxy PIB nominal) s'équilibrent, sinon il y aurait trop d'épargne d'un côté, et trop de projets de l'autre. C'est pourquoi le rendement des actions est directement modélisé à partir de la courbe des taux d'intérêts nominaux :

$$\text{Rendement Actions} = \text{Taux nominal } x\text{Y} + \text{Prime de risque} \tag{5.8}$$

Le lien entre taux et actions est aussi contrôlé à l'aide d'un indicateur de cycle. Il mesure le ratio de la richesse des travailleurs/entrepeneurs par rapport à la richesse des rentiers :

$$C_t = \frac{Actions_t}{exp\Big(\int_0^t \text{Taux nominal}_{xY}(u)\,\mathrm{d}u + \text{Prime de risque}\Big)} \tag{5.9}$$

Cet indicateur de cycle suit le modèle Exponential-Vasicek : il est log-normal et possède un retour à l'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}C_t}{C_t} = \Big(-\frac{\sigma^2}{4} - \lambda.ln(C_t)\Big)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W \tag{5.10}$$

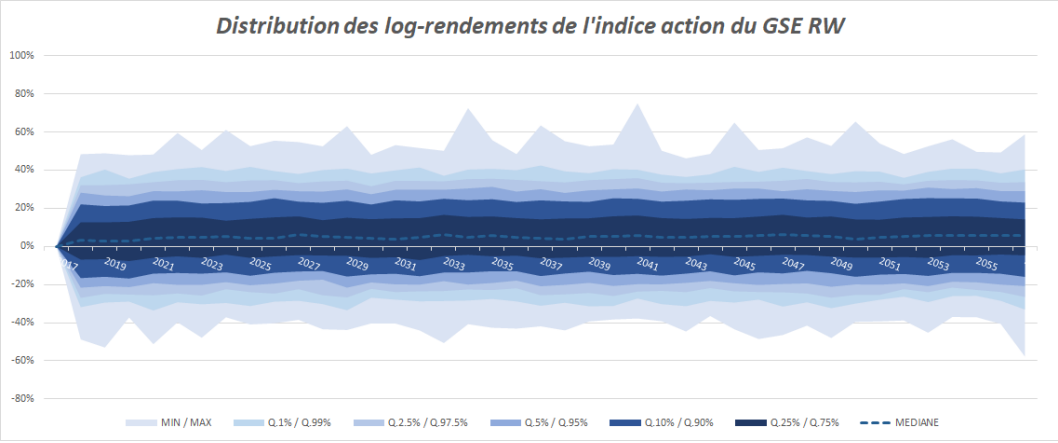


FIGURE 5.7 – Distribution des log-rendements action du GSE RW

Comme pour les taux, l'hypothèse forte du modèle est que la volatilité est supposée constante. Bien évidemment ce n'est pas le cas en réalité : en cas de krach boursier, les volatilités risquent de s'envoler, or ce modèle ne prend pas en compte ce phénomène.

BNP Paribas Cardif fait l'hypothèse qu'un dividende de 1.9% est versé chaque année. Par ailleurs, le sous-jacent des options sur actions est le SX5E, c'est-à-dire l'EuroStoxx50 Net Return. Or l'indice action qui est modélisé par le GSE correspond au SX5T, c'est-à-dire l'EuroStoxx 50 Total Return. Dans notre outil de couverture, nous avons donc recréé un indice excluant les dividendes, afin d'observer au mieux sur quels niveaux réels de strike nous achetons nos options. Nous pouvons observer qu'en scénario central, l'indice action augmente de 5% chaque année, et relâche un dividende de 1.9%.

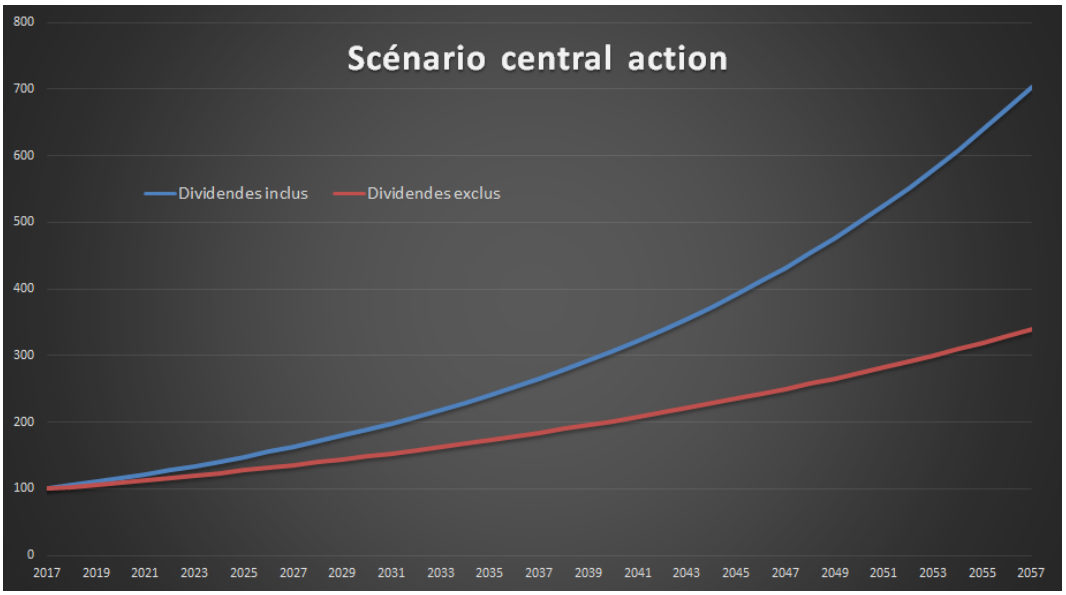


FIGURE 5.8 – Scénario central pour les actions

De ce fait, nous allons devoir modifier notre modèle de valorisation sur les actions, afin de prendre en compte le fait que l'indice action est ajusté d'un taux de dividende de 1.9% chaque année. Comme les achats de dérivés actions à BNP Paribas Cardif sont majoritairement placés sur l'EuroStoxx50, donc sur un panier d'actions, nous considérerons un taux de dividende continu $e^{-q(T-t)}$. Plaçons-nous dans notre espace probabilisé complet habituel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Voici la dynamique suivie par l'indice retraité :

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t^{BS} &= S_0 \cdot \exp(\sigma^{BS} B_t + (\mu - q - {}^{(\sigma^{BS})^2}/_2) \cdot t) \\ \widetilde{dS}_t^{BS} &= \widetilde{S}_t^{BS} \cdot \Big((\mu - q)dt + \sigma^{BS} dB_t \Big) \end{aligned} \tag{5.11}$$

$S_0 > 0$: la valeur de l'indice action en t_0 du GSE : 100%,
$\mu \in \mathbb{R}$: tendance,

$q \in [0,1[$: taux de dividende,
$\sigma^{BS} > 0$: la volatilité du modèle de Black&Scholes,
$B = (B_t)_{t\geq 0}$: un mouvement brownien standard

Soit $T > 0$. Nous allons calculer le prix en $t \in [0,T[$ d'un Call sur notre indice retraité, de maturité T, avec prix d'exercice $K > 0$, en sachant que $\widetilde{S}_t = x > 0$. Payoff en T : $\xi = (\widetilde{S}_T - K)^+$. Rappelons que $C^* = (C_t^*)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale.

$$C(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(\widetilde{S}_T - K)^+ \,|\, \widetilde{S}_t = x]$$
$$\overset{[A.7.1]}{=} e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(x.e^{-q(T-t)} \exp[\sigma(B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \,|\, \widetilde{S}_t = x]$$

Nous pouvons donc observer que nous avons donc juste à utiliser la formule de Black&Scholes établie dans la partie précédente, en remplaçant $\widetilde{S}_t$ par $\widetilde{S}_t.e^{-q(T-t)}$.

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\dfrac{\widetilde{S}_t.e^{-q(T-t)}}{K}) + (r + \dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases} \tag{5.12}$$

$$C_t^{BS} = \widetilde{S}_t.e^{-q(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_1) - K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \tag{5.13}$$

Et nous pouvons en déduire le prix du Put associé :

$$C_t^{BS} - P_t^{BS} = \widetilde{S}_t.e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}.K \tag{5.14}$$
$$\hookrightarrow P_t^{BS} = K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - \widetilde{S}_t.e^{-q(T-t)} \cdot \Phi_{[0,1]}(-d_1) \tag{5.15}$$

Le rendement immobilier est modélisé de manière très similaire aux rendements action, et comme nous n'utiliserons pas cet indice, nous ne détaillerons pas sa modélisation.

Chapitre 6

Description du GSE RN de BNP Paribas Cardif

Maintenant que nous avons présenté le GSE RW de BNP Paribas Cardif, nous allons décrire le GSE Risque-Neutre (RN) qui est utilisé afin d'effectuer les calculs de SCR. Comme pour le GSE RW, la description du GSE RN sera brève et synthétique : nous ne pourrons pas rentrer dans les détails du calibrage pour des raisons de confidentialité.

Nous pouvons remarquer que les variables générées sont les mêmes que celles du GSE RW, à l'exception du risque de crédit : ce qui est normal, puisqu'en univers risque-neutre, tous les actifs rapportent le taux sans risque.

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	OS_TERM	2017	2018	2019	2020	2055	2056	2057
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	1.0172	1.0126	1.0047	1.0094	1.0115	1.0054	1.0028
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	1.0313	1.0228	1.0066	1.0180	1.0220	1.0095	1.0050
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	1.0430	1.0303	1.0077	1.0243	1.0313	1.0130	1.0063
1	EUR	ILZCB	PRICE	4	1.0520	1.0369	1.0066	1.0284	1.0400	1.0157	1.0072
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	1.0602	1.0413	1.0034	1.0317	1.0479	1.0179	1.0069
1	EUR	ILZCB	PRICE	6	1.0661	1.0435	0.9995	1.0336	1.0554	1.0189	1.0065
1	EUR	ILZCB	PRICE	7	1.0698	1.0449	0.9943	1.0349	1.0616	1.0198	1.0054
1	EUR	ILZCB	PRICE	8	1.0728	1.0450	0.9887	1.0356	1.0677	1.0200	1.0042
1	EUR	ILZCB	PRICE	9	1.0743	1.0445	0.9827	1.0363	1.0731	1.0200	1.0019
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	1.0753	1.0436	0.9768	1.0364	1.0783	1.0189	0.9995
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	1.0791	1.0422	0.9542	1.0488	1.0842	0.9957	0.9649
1	EUR	ILZCB	PRICE	20	1.0964	1.0460	0.9273	1.0385	1.0690	0.9561	0.9198
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0.9981	0.9263	0.7764	0.9017	0.9979	0.8516	0.8080
1	EUR	ZCB	PRICE	1	1.0032	1.0004	0.9880	0.9888	0.8972	0.8815	0.8610
1	EUR	ZCB	PRICE	2	1.0042	0.9970	0.9733	0.9756	0.8046	0.7770	0.7415
1	EUR	ZCB	PRICE	3	1.0014	0.9905	0.9565	0.9599	0.7216	0.6851	0.6385
1	EUR	ZCB	PRICE	4	0.9957	0.9819	0.9376	0.9428	0.6472	0.6040	0.5502
1	EUR	ZCB	PRICE	5	0.9876	0.9707	0.9177	0.9243	0.5804	0.5327	0.4740
1	EUR	ZCB	PRICE	6	0.9771	0.9580	0.8964	0.9046	0.5208	0.4697	0.4088
1	EUR	ZCB	PRICE	7	0.9651	0.9437	0.8741	0.8836	0.4671	0.4145	0.3527
1	EUR	ZCB	PRICE	8	0.9514	0.9280	0.8509	0.8624	0.4191	0.3659	0.3046
1	EUR	ZCB	PRICE	9	0.9362	0.9107	0.8276	0.8411	0.3763	0.3233	0.2632
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0.9196	0.8931	0.8045	0.8198	0.3380	0.2857	0.2278
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0.8341	0.8069	0.7003	0.7261	0.1993	0.1561	0.1122
1	EUR	ZCB	PRICE	20	0.7577	0.7254	0.6022	0.6269	0.1199	0.0874	0.0572
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0.5539	0.5186	0.4005	0.4225	0.0469	0.0303	0.0169
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1.0000	0.9953	1.0156	1.0369	9.3631	10.5216	11.9790
1	EUR	VALN	DEF	0	1.0000	1.0032	1.0036	0.9916	0.1506	0.1351	0.1191
1	EUR	EQUITIES_GF	RET_IDX	0	100.00	115.66	131.38	124.93	93.81	86.97	100.80
1	EUR	EQUITIES_GF	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	REAL_ESTATE_GF	RET_IDX	0	100.00	104.74	80.76	91.43	347.80	399.51	441.88
1	EUR	REAL_ESTATE_GF	RNY_PC	0	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80
1	EUR	EQUITIES_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	115.66	131.38	124.93	93.81	86.97	100.80
1	EUR	EQUITIES_FUND_GF	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	EQUITIES_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	115.66	131.38	124.93	93.81	86.97	100.80
1	EUR	EQUITIES_FUND_UL	RNY_PC	0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	EUR	REAL_ESTATE_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	104.74	80.76	91.43	347.80	399.51	441.88
1	EUR	REAL_ESTATE_FUND_UL	RNY_PC	0	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80
1	EUR	BOND_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	99.34	95.16	98.12	479.24	490.22	494.74
1	EUR	BOND_FUND_UL	RNY_PC	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	EUR	BOND_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	99.52	97.37	99.49	566.22	604.48	646.62
1	EUR	BOND_FUND_GF	RNY_PC	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_GF	RET_IDX	0	100.00	103.64	106.64	106.53	457.02	483.02	543.74
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_GF	RNY_PC	0	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_UL	RET_IDX	0	100.00	104.93	108.07	107.92	368.24	374.63	410.43
1	EUR	DIVERSIFIED_FUND_UL	RNY_PC	0	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
1	EUR	EQUITY_EQL	RET_IDX	0	100.00	115.66	131.38	124.93	93.81	86.97	100.80
1	EUR	EQUITY_SPOT	RET_IDX	0	100.00	115.66	131.38	124.93	93.81	86.97	100.80
1	EUR	LIVRET_A	RNY_PC	0	0.75	0.00	2.25	2.25	11.25	12.00	13.75
1	EUR	TME	RNY_PC	0	0.8420	1.1370	2.1987	2.0066	11.4562	13.3467	15.9453
1	EUR	OAT10	RNY_PC	0	0.8420	1.1370	2.1987	2.0066	11.4562	13.3467	15.9453
1	EUR	OAT1	RNY_PC	0	-0.3180	-0.0380	1.2120	1.1283	11.4528	13.4472	16.1479

FIGURE 6.1 – Exemple d'une simulation du GSE RN

6.1 Taux et inflation

Les taux (nominaux et réels) sont diffusés selon un modèle CIR2++, qui est une extension du modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross). Le taux court est une somme de 2 processus CIR et d'une fonction φ déterministe :

$$\begin{cases} r(t) & = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t) \\ \mathrm{d}x_i(t) & = k_i(\theta_i - x_i(t)).\mathrm{d}t + \sigma_i\sqrt{x_i(t)}.\mathrm{d}W_i(t) \qquad i = 1, 2 \end{cases} \tag{6.1}$$

Avec $k_i, \theta_i, \sigma_i > 0$, tels que $2.k_i.\theta_i > \sigma_i^2$. W_1 et W_2 sont des mouvements browniens indépendants sous la mesure risque-neutre. Les paramètres θ_i représentent les valeurs vers lesquelles vont converger les taux courts à long terme, pour chacun des processus CIR. Les paramètres k_i nous renseignent sur la vitesse de ces convergences.

Le prix et la dynamique du prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T à l'instant $t \in [0, T]$ (ZCB) sont donnés par :

$$\begin{cases} P(t,T) & = A_1(t,T).A_2(t,T).exp\Big(- x_1(t).C_1(t,T) - x_2(t).C_2(t,T) - \displaystyle\int_t^T \varphi(u)\mathrm{d}u \Big) \\ \mathrm{d}P(t,T) & = exp\Big(- \displaystyle\int_t^T \varphi(u)\mathrm{d}u \Big) \cdot \Big[r(t).P(t,T)\mathrm{d}t - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sigma_i \sqrt{x_i(t)}.C_i(t,T).P(t,T).\mathrm{d}W_i(t) \Big] \end{cases}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A_i(t,T) & = \Big(\dfrac{2.h_i.e^{(h_i+k_i)(T-t)/2}}{2.h_i + (h_i+k_i)(e^{h_i(T-t)}-1)} \Big)^{2.k_i.\theta_i/\sigma_i^2} \\ C_i(t,T) & = \dfrac{2 \cdot (e^{h_i(T-t)}-1)}{2.h_i + (h_i+k_i)(e^{h_i(T-t)}-1)} \\ h_i & = \sqrt{k_i^2 + 2.\sigma_i^2} \end{cases} \tag{6.2}$$

Avec la fonction déterministe, le modèle CIR2++ va nous permettre d'obtenir une calibration parfaite avec la courbe des taux initiales. Ce modèle nous permet aussi d'obtenir des taux négatifs. Cependant, comme nous pouvons le remarquer dans les équations ci-dessus, la principale faiblesse du modèle vient du fait que la volatilité utilisée est constante sur tout l'horizon de projection.

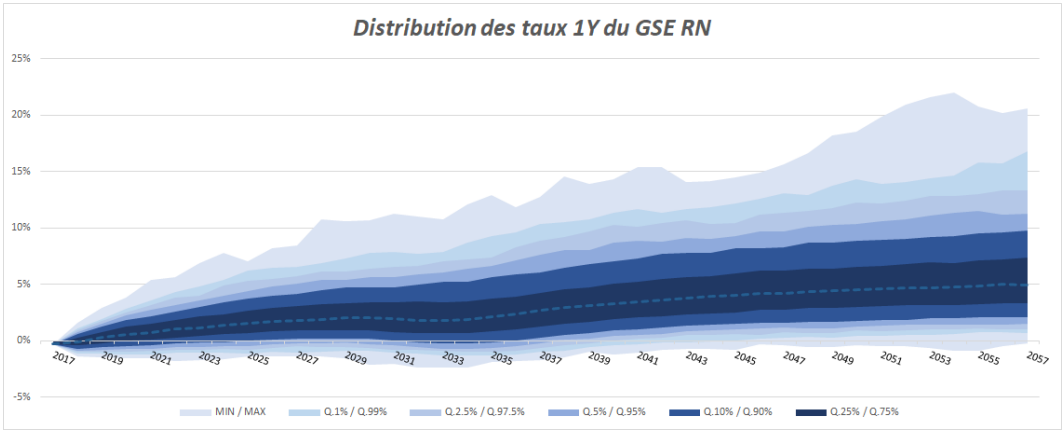


FIGURE 6.2 – Distribution des taux 1Y du GSE RN

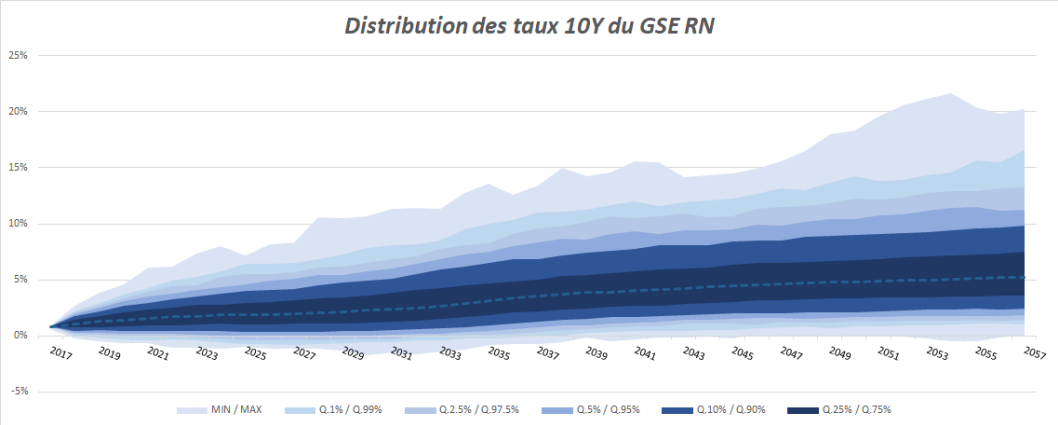


FIGURE 6.3 – Distribution des taux 10Y du GSE RN

L'inflation est quant à elle obtenue grâce aux anticipations d'inflation du marché, via les swaps d'inflation sur Bloomberg. Elle est de l'ordre de 1.40% au 31/12/2017, et elle converge vers 2% au-delà de 25 ans.

La courbe des taux réels (ILZCB) est déduite de la courbe des taux nominaux et de l'inflation anticipée :

$$\text{Taux réel} = \text{Taux nominal - Inflation anticipée des marchés} \tag{6.3}$$

6.2 Actions

Afin de modéliser l'indice action dans le GSE RN, BNP Paribas Cardif utilise un modèle de Black&Scholes. C'est un modèle TVDV : « Time Varying Deterministic Volatility ». L'indice action va donc être projeté selon la dynamique log-normale proposée par Black et Scholes, avec une structure par termes de volatilité qui ne va pas dépendre du niveau du sous-jacent, mais seulement du temps.

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r_t.\mathrm{d}t + \sigma_t.\mathrm{d}W_t^* \tag{6.4}$$

Par soucis de confidentialité, il m'est impossible de détailler la matrice de corrélation entre les différentes variables générées, on peut estimer que les taux sont approximativement corrélés aux actions à hauteur de 60%.

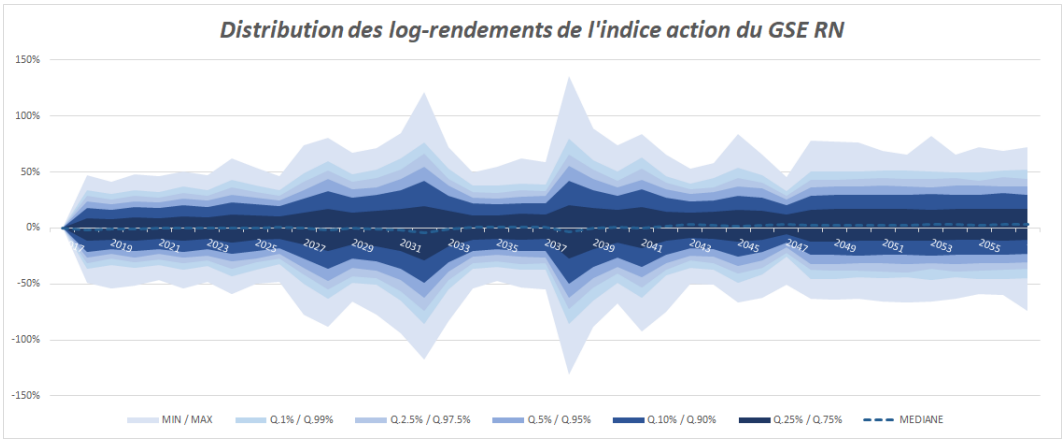


FIGURE 6.4 – Distribution des log-rendements action du GSE RN

6.3 Tests de martingalité

Afin de vérifier la risque-neutralité des scénarios économiques, nous avons effectué des tests de martingalité sur chacune des variables. C'est un indicateur de la qualité de nos projections : le modèle ne doit pas créer de valeur, ni en détruire.

6.3.1 Déflateur

Premièrement, nous devons vérifier que les déflateurs soient bien tous centrés sur la chronique des prix ZC initiaux, c'est-à-dire vérifier qu'en moyenne nous actualisons bien au taux sans risque. Soit $T > 0$:

$$\mathbb{E}^*[D_T] = B(0,T) \tag{6.5}$$

Nous avons tracé l'erreur relative $\dfrac{\mathbb{E}^*[D_T]}{B(0,T)} - 1$ en fonction de l'année de projection. L'erreur reste très faible jusqu'en 2047 (inférieure à $\pm 0.25\%$), mais nous pouvons remarquer que l'erreur augmente grandement ensuite. Rappelons que le GSE ne nous fournit que les taux de 1 à 10 ans, puis 15, 20 et 30 ans. Ainsi, nous utilisons l'interpolation/extrapolation implémentée dans Prophet afin d'obtenir les taux pour les années manquantes. Au-delà de 30 ans (2047), Prophet extrapole la courbe des taux en convergeant vers l'UFR : c'est la raison pour laquelle nous obtenons une distorsion de l'erreur à partir de 2047 (qui reste faible puisqu'elle est inférieure à 2.00%).

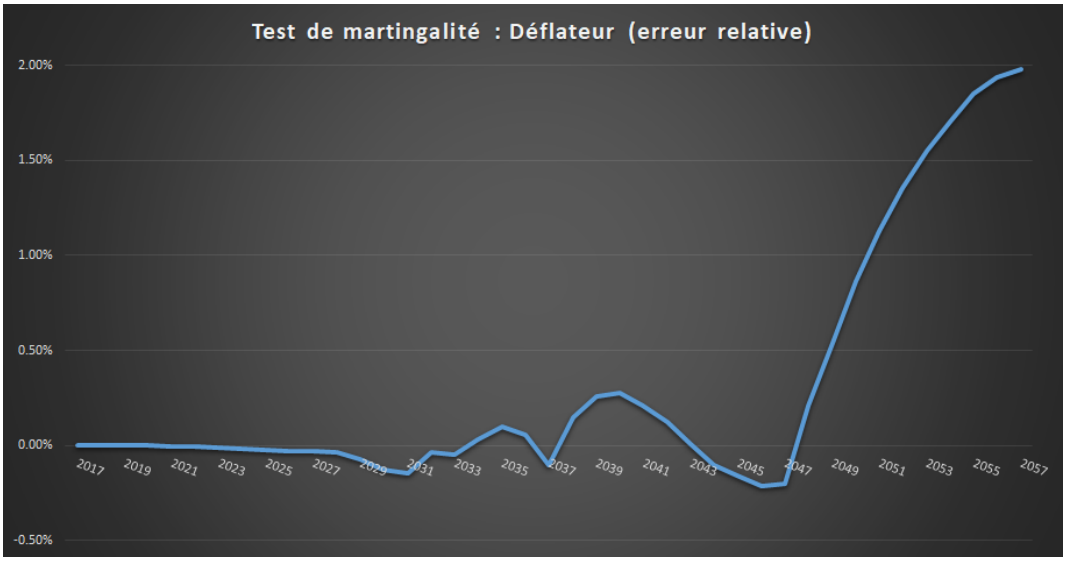


FIGURE 6.5 – Test de Martingalité : Déflateur

6.3.2 Taux

Ensuite, nous vérifions que toute stratégie de taux de maturité $t+T$ équivaut en moyenne à avoir investi directement dans un ZC de maturité $t+T$. Ainsi nous vérifions le critère de risque-neutralité, mais aussi d'absence d'opportunité d'arbitrage. Soient $t, T > 0$:

$$\mathbb{E}^*[D_t \cdot B(t,T)] = B(0,t+T) \tag{6.6}$$

Nous avons tracé l'erreur relative $\dfrac{\mathbb{E}^*[D_t \cdot B(t,T)]}{B(0,t+T)} - 1$ en faisant varier :

- $t \in [0, 40]$: l'année de projection
- $T \in [1, 40]$: la maturité du ZC en t

Nous pouvons remarquer que l'erreur reste très faible ($\pm 2\%$). Elle est même quasi-nulle pour des stratégies de taux inférieures à 20 ans : or comme les stratégies de couverture que nous allons mettre en place sur les taux s'étaleront sur les 20 premières années, nous sommes très satisfaits de ce résultat. Nous pouvons donc confirmer la qualité des projections générées par le GSE en termes de risque-neutralité pour les taux.

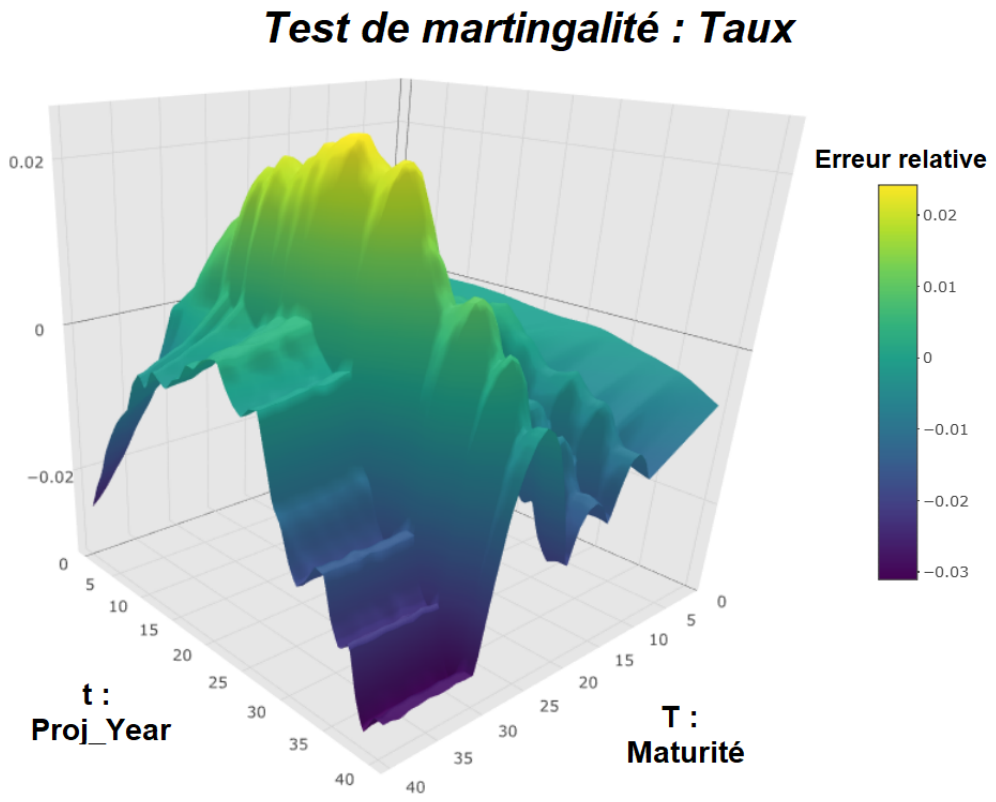


FIGURE 6.6 – Test de Martingalité : Taux

6.3.3 Actions

En dernier lieu, il est nécessaire de vérifier qu'en moyenne un investissement sur l'indice action rapporte le taux sans risque. Soit $T > 0$:

$$\mathbb{E}^*[D_T \cdot S_T] = S_0 \tag{6.7}$$

Nous avons tracé l'erreur relative $\dfrac{\mathbb{E}^*[D_T \cdot S_T]}{S_0} - 1$. Nous pouvons noter que la risque-neutralité semble bien respectée sur les 20 premières années, mais se dégrade nettement au-delà, surtout après 2047 (30 ans). Comme nos stratégies action se basent seulement sur les 10 premières années, cela n'impactera pas notre étude.

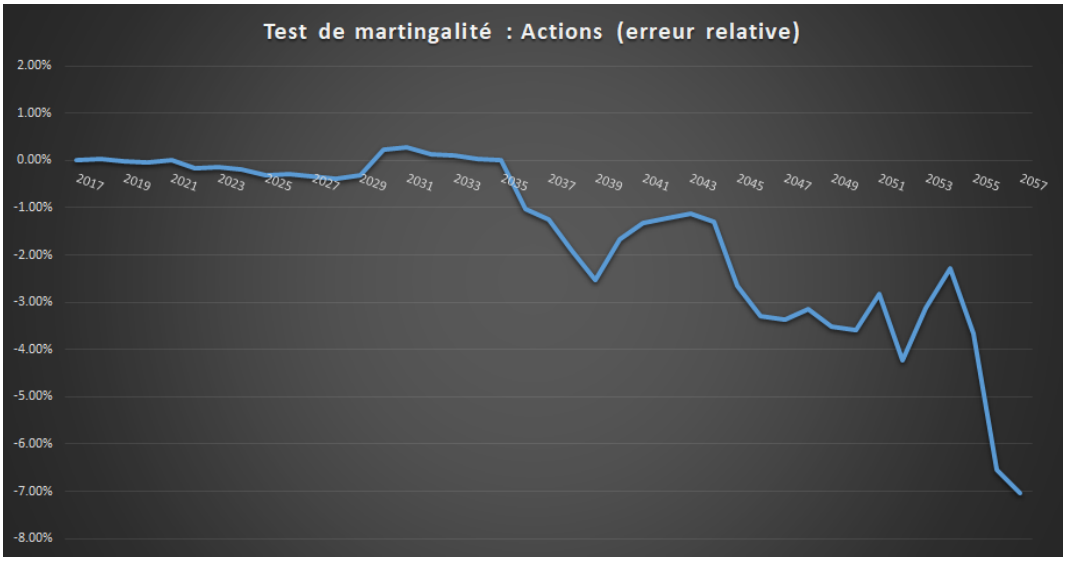


FIGURE 6.7 – Test de Martingalité : Actions

Chapitre 7

Couverture Action

Comme nous l'avons vu dans la section descriptive des modèles, nous avons sélectionné le modèle de Black&Scholes pour modéliser la dynamique log-normale du prix d'action. Nous allons maintenant décrire les rôles des différentes options sur actions régulièrement utilisées à BNP Paribas Cardif. De plus, nous allons aussi établir leurs formules de valorisation. Nous serons dans le cas d'options européennes, c'est-à-dire que les options ne pourront être exercées qu'à maturité.

Rappelons que, pour générer l'indice action, le GSE RW a une volatilité constante, et le GSE RN utilise une structure par termes de volatilité. Dans les formules de valorisation qui suivent, nous utiliserons une volatilité constante, mais nous verrons par la suite qu'en fonction de l'univers de projection (RW ou RN), nous utiliserons des volatilités différentes.

7.1 Call / Put

Un call est une option d'achat, il permet à son acheteur de pouvoir obtenir, à maturité T de l'option, un sous-jacent à un prix K fixé au préalable (strike).
Ainsi, le call permet de se protéger contre une éventuelle hausse du cours du sous-jacent supérieure à K. Par exemple, il permet de limiter le coût d'approvisionnement pour une compagnie.

Un put est une option de vente, il va permettre à son acheteur non pas d'obtenir, mais de vendre à maturité T de l'option un sous-jacent à un prix K fixé au préalable (strike).
Il permet donc de se protéger contre une éventuelle baisse du cours du sous-jacent inférieure à K. Ainsi son rôle sera de permettre à une compagnie d'être sûre de pouvoir vendre sa production à un prix minimal (le strike).

▷ **Caractéristiques Call / Put :**

- Maturité : $T > 0$
- Date de valorisation : $t \in [0, T[$
- Prix actuel du sous-jacent (ajusté des dividendes) : $\widetilde{S}_t$
- Strike : $K > 0$
- Volatilité du sous-jacent : $\sigma \geq 0$
- Taux sans risque : $r_t(t,T) = -\dfrac{1}{\tau(t,T)} \cdot \ln\Big[B(t,T)\Big]$

▷ **Payoff du call en T :**

$$Call_T = (\,\widetilde{S}_T - K\,)^+ \tag{7.1}$$

▷ **Payoff du put en T :**

$$Put_T = (\,\widetilde{S}_T - K\,)^- \tag{7.2}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\tau(t,T)}} \cdot \Big[\ln(\dfrac{\widetilde{S}_t}{K}) + (r_t(t,T) - q + \dfrac{\sigma^2}{2}) \cdot \tau(t,T)\Big] \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau(t,T)} \end{cases}$$

▷ **Valorisation du call en t :**

$$Call_t^{BS} = \widetilde{S}_t \cdot e^{-q.\tau(t,T)} \cdot \Phi_{[0,1]}(d_1) - K \cdot B(t,T) \cdot \Phi_{[0,1]}(d_2) \tag{7.3}$$

▷ **Valorisation du put en t :**

$$Put_t^{BS} = K \cdot B(t,T) \cdot \Phi_{[0,1]}(-d_2) - \widetilde{S}_t \cdot e^{-q.\tau(t,T)} \cdot \Phi_{[0,1]}(-d_1) \tag{7.4}$$

7.2 Contrat forward / Contrat à terme

Un contrat forward est un accord d'achat ou de vente, entre 2 personnes, d'un actif à un prix K et à une date T préalablement définis. Au moment de l'accord, le prix K est choisi tel que le contrat n'ait pas de valeur. Ainsi le prix K est le prix anticipé par le marché à la maturité T. Ces contrats sont négociés de gré à gré (OTC) : la transaction est directement conclue entre l'acheteur et le vendeur, sans intermédiaire. De plus, aucun transfert d'argent n'est effectué avant maturité du contrat.
Ainsi, ce type de contrat est fortement exposé au risque de défaut, mais aussi au risque de liquidité, car les contrats sont effectués sur-mesure, selon les besoins de l'acheteur et du vendeur au moment de la création du contrat. Ce manque de normalisation rend donc plus difficile la vente du contrat.

Un futures (ou contrat à terme) est le descendant du contrat forward. Le principe est exactement le même, mais c'est un contrat standardisé, négocié sur un marché organisé entre 3 personnes : l'acheteur A, le vendeur B, et une tierce personne appelée Chambre de Compensation.

La Chambre de Compensation va agir comme un intermédiaire : elle va devenir le vendeur pour l'acheteur A, et l'acheteur pour le vendeur B. Lorsque le contrat est créé, la Chambre de Compensation va demander un dépôt initial à chacune des parties, qui correspondra à la « perte maximale possible » sur une journée. Si la fluctuation journalière de la cotation atteint une certaine limite (hausse ou basse), alors les cotations sont interrompues et la Chambre de Compensation requiert un nouveau dépôt auprès de A (ou B) afin de reprendre les cotations de la journée.
Chaque jour, après la clôture du marché, un appel de marge est effectué : en fonction des fluctuations du marché, la Chambre de Compensation va réclamer à A (ou B) les pertes constatées sur la journée, et verser sur le compte de A (ou B) les gains constatés sur cette même journée. Ainsi, après chaque clôture de marché, la valeur du futures est nulle. Si A ou B ne peut pas payer cet appel de marge (ou le dépôt), alors le contrat est dénoué.
Cet intermédiaire va donc permettre d'éviter les risques de contrepartie entre A et B. De plus, la normalisation des contrats permet d'obtenir une liquidité nettement supérieure à celle de son « ancêtre », le contrat forward.

Notons que ces contrats ne sont pas des options : l'échange se fera forcément à maturité, au prix préalablement défini. Ainsi, nous savons dès la création du contrat le montant exact que nous allons toucher à maturité. Si nous anticipons une hausse de l'actif, alors nous pouvons acheter un futures et espérer réaliser un gain à maturité. A contrario, si nous anticipons une baisse de l'actif, nous pouvons vendre un futures.
De ce fait, ces contrats peuvent être définis comme des produits de spéculation plutôt que comme des produits de couverture, car si l'actif ne se comporte pas comme nous l'attendions, nous allons enregistrer une perte.

▷ **Caractéristiques Contrat forward / Futures :**

- Date de valorisation : $t \in [0, T[$
- Prix actuel du sous-jacent (ajusté des dividendes) : $\widetilde{S}_t$
- Prix forward au moment de la création du contrat : $K > 0$
- Maturité : $T > 0$
- Volatilité du sous-jacent : $\sigma \geq 0$
- Taux sans risque : $r_t(t,T) = -\dfrac{1}{\tau(t,T)} \cdot \ln\Big[B(t,T)\Big]$

▷ **Payoff du contrat forward en T :**

$$\widetilde{S}_T - K \tag{7.5}$$

▷ **Payoff du futures :**

Après chaque clôture de marché, la fluctuation du sous-jacent sur la journée $(\widetilde{S}_t - \widetilde{S}_{t-1})$ est versée par l'acheteur au vendeur si elle est négative, sinon, c'est le vendeur qui verse la fluctuation de la journée à l'acheteur.

▷ **Valorisation du contrat forward en t :**

Le payoff de l'option à maturité est $\widetilde{S}_T - K$, ainsi nous pouvons aisément calculer sa valorisation en $t \in [0, T[$. Posons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ notre espace probabilisé complet habituel, avec $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ la probabilité risque-neutre. :

$$\begin{aligned} ContratFwd_t^{BS} &= B(t,T) \cdot \mathbb{E}^*[\,\widetilde{S}_T - K \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= B(t,T).\widetilde{S}_t.\mathbb{E}^*[\,\frac{\widetilde{S}_T}{\widetilde{S}_t} \,|\, \mathcal{F}_t] - B(t,T).K \qquad (\frac{\widetilde{S}_T}{\widetilde{S}_t} \text{ indépendant de } \mathcal{F}_t) \\ &= \widetilde{S}_t.e^{-q.\tau(t,T)} - B(t,T)K \end{aligned}$$

▷ **Valorisation du futures en t :**

$$Futures_t^{BS} = 0 \qquad \text{après chaque clôture de marché} \tag{7.6}$$

Chapitre 8

Couverture Taux

Comme nous l'avons vu dans la section descriptive des modèles, nous avons sélectionné le modèle de Bachelier ajusté de la valeur-temps pour modéliser la dynamique normale des taux. Nous allons maintenant décrire les rôles des différentes options sur taux d'intérêts régulièrement utilisées à BNP Paribas Cardif. De plus, nous allons aussi établir leurs formules de valorisation.

Rappelons que les GSE utilisés dans cette compagnie ont une volatilité constante, c'est pourquoi nous utiliserons aussi une volatilité constante dans nos formules de valorisation. Nous détaillerons par la suite quelle volatilité nous utilisons réellement dans notre outil de couverture, en fonction de l'univers de projection.

8.1 Caplet / Floorlet

Un caplet est l'équivalent d'une option d'achat sur des taux, donc d'un call sur le marché action. De plus, un floorlet est l'équivalent d'une option de vente sur des taux, donc d'un put sur le marché action.
Un caplet permet donc d'obtenir, à maturité T, la différence entre le taux sous-jacent et le strike K si ce montant est positif. A l'inverse, un floorlet permet d'obtenir, à maturité T, la différence entre le strike K et le taux sous-jacent si ce montant est positif.
Ainsi, un caplet permet de se protéger contre une hausse des taux d'intérêts, il nous assure de pouvoir emprunter au niveau maximum du strike. De même, un floorlet protège contre une baisse des taux d'intérêts, et donc assure un investisseur de pouvoir prêter son argent au niveau minimum du strike.

Les caplets ou floorlets sur l'Euribor sont généralement de maturités plutôt courtes (inférieures à 1 an), ce sont donc les intérêts simples avec la base monétaire qui sont utilisés : $^{Exact}/_{360}$. Dans le cas de maturités plus longues, ce sont les intérêts continus avec la base actuarielle qui sont utilisés.

▷ **Caractéristiques Caplet / Floorlet :**

- Maturité : $T > 0$
- Date de valorisation : $t \in [0, T[$
- Durée de placement : $d > 0$
- Taux forward du sous-jacent en t : $r_t(T, T+d)$
- Strike : $K > 0$
- Volatilité du sous-jacent : $\sigma \geq 0$

▷ **Payoff du caplet en T :**

$$Caplet_T = d \cdot (\, r_T(T, T+d) - K \,)^+ \tag{8.1}$$

▷ **Payoff du floorlet en T :**

$$Floorlet_T = d \cdot (\, r_T(T, T+d) - K \,)^- \tag{8.2}$$

Posons $d_1 = \dfrac{r_t(T, T+d) - K}{\sigma\sqrt{\tau(t,T)}}$

▷ **Valorisation du caplet en t :**

$$Caplet_t^B = B(t,T) \cdot \tau(t,T) \cdot \Big[(r_t(T, T+d) - K) \cdot \Phi_{0,1}(d_1) + \sigma\sqrt{\tau(t,T)} \cdot \varphi_{0,1}(d_1) \Big]$$

▷ **Valorisation du floorlet en t :**

$$Floorlet_t^B = B(t,T) \cdot \tau(t,T) \cdot \Big[(K - r_t(T, T+d)) \Phi_{0,1}(-d_1) + \sigma\sqrt{\tau(t,T)} \cdot \varphi_{0,1}(d_1) \Big]$$

8.2 Cap / Floor

Un cap est un portefeuille de caplets qui se succèdent, tandis qu'un floor est un portefeuille de floorlets.
La fréquence d'un cap (floor) correspond à la durée entre 2 caplets (floorlets) constituants ce cap (floor). Ainsi, une fréquence de 0.25 correspondra à un cap comprenant des caplets qui arrivent à maturité tous les 3 mois.

Un cap va donc nous protéger contre une hausse des taux d'intérêts sur plusieurs horizons de temps. Ainsi, une compagnie qui doit rembourser un emprunt avec un taux variable (indexé sur l'Euribor par exemple) peut s'assurer de ne devoir payer qu'un niveau maximum K à chaque date de paiement de l'emprunt. De plus, un cap permettra toujours à cette compagnie de pouvoir bénéficier d'une éventuelle baisse des taux pour engendrer des bénéfices.
Par suite, un floor va nous protéger contre une baisse des taux d'intérêts sur plusieurs horizons de temps. Un investisseur pourra donc sécuriser un niveau minimum auquel il prête son argent sur plusieurs dates.

▷ **Caractéristiques Cap / Floor :**

- Maturité : $T > 0$
- Fréquence : $\alpha > 0$
- Date de valorisation : $t \in [0, T[$
- Taux forward du sous-jacent en t : $r_t(T, T+d)$
- Strike : $K > 0$
- Nombre de caplets (floorlets) : $N = \alpha^{-1} \cdot T$
- Volatilité du sous-jacent pour la maturité du caplet i : $\sigma_i \geq 0\ , \quad i \in [\![1, N]\!]$

▷ **Payoff du cap en T_i , avec $T_i = i \cdot \alpha$ et $i \in [\![1, N]\!]$:**

$$Cap_{T_i} = \alpha \cdot (\, r_{T_i}(T_i, T_i + \alpha) - K\,)^+ \tag{8.3}$$

▷ **Payoff du floor en T_i , avec $T_i = i \cdot \alpha$ et $i \in [\![1, N]\!]$:**

$$Floor_{T_i} = \alpha \cdot (\, r_{T_i}(T_i, T_i + \alpha) - K\,)^- \tag{8.4}$$

Posons $d_i = \dfrac{r_t(T_i, T_i + \alpha) - K}{\sigma_i \sqrt{\tau(t, T_i)}}$

▷ **Valorisation du cap en t :**

$$Cap_t^B = \alpha \sum_{\substack{i=1 \\ t<T_i}}^{N} B(t, T_i) \cdot \Big[(r_t(T_i, T_i + \alpha) - K) \cdot \Phi_{0,1}(d_i) + \sigma_i \sqrt{\tau(t, T_i)} \cdot \varphi_{0,1}(d_i) \Big]$$

▷ **Valorisation du floor en t :**

$$Floor_t^B = \alpha \sum_{\substack{i=1 \\ t<T_i}}^{N} B(t, T_i) \cdot \Big[(K - r_t(T_i, T_i + \alpha)) \cdot \Phi_{0,1}(-d_i) + \sigma_i \sqrt{\tau(t, T_i)} \cdot \varphi_{0,1}(d_i) \Big]$$

8.3 Contrat FRA

Un contrat FRA est un contrat forward, comme nous l'avons décrit dans la section précédente. Le sous-jacent est un taux pré-déterminé (Euribor par exemple). Ainsi, l'acheteur d'un FRA s'engage à effectuer un emprunt en T, d'une durée d, au niveau établi lors de la création du contrat. Or, rappelons-nous que la valeur d'un contrat forward est nul à sa création. Ainsi, pour respecter le principe d'AOA, le taux du contrat FRA $K_t(T, T+d)$ doit être égal au taux forward en t entre T et $T+d$. Pour ces contrats, ce sont les intérêts simples et la base monétaire qui est utilisée.

Ainsi $K_t(T, T+d) = r_t(T, T+d) = \dfrac{1}{\tau(T, T+d)} \cdot \Big(\dfrac{B(t,T)}{B(t, T+d)} - 1 \Big)$

Un contrat FRA permet à son acheteur de se protéger contre une hausse des taux, car il limitera alors son taux d'emprunt. A l'inverse, vendre un contrat FRA permet de se protéger contre une baisse des taux : il nous permet de pouvoir prêter notre argent à un taux minimum.

▷ **Caractéristiques du contrat FRA :**

- Date de création du contrat FRA : $t_0 \geq 0$
- Début de l'emprunt : $T > t_0$
- Durée de l'emprunt : $d > 0$

▷ **Payoff du contrat FRA en T :**

$$FRA_T(t_0, T, T+d) = B(T, T+d) \cdot \tau(T, T+d) \cdot (r_T(T, T+d) - K_{t_0}(T, T+d))$$

Le paiement a lieu en T, or les intérêts sont censés être payés en $T+d$, c'est pourquoi nous actualisons le payoff initialement prévu.

▷ **Valorisation du contrat FRA en $t \in [t_0, T[$:**

$$FRA_t(t_0, T, T+d) = B(t, T+d) \cdot \tau(T, T+d) \cdot (r_t(T, T+d) - K_{t_0}(T, T+d))$$

8.4 Interest Rate Swap (IRS)

Un swap de taux d'intérêts est un accord, entre 2 personnes (A et B), d'échanger des paiements d'intérêts sur une période donnée. A va alors payer des intérêts à B à un taux fixe, appelé le taux swap, et en échange, B va lui verser des intérêts variables, indexés sur un taux sous-jacent (Euribor par exemple). A est appelé la "jambe fixe" et B la "jambe variable". Par conséquent, A va rentrer dans un IRS payeur, puisqu'il paie le taux fixe, et B va rentrer dans un IRS receveur, puisqu'il reçoit le taux fixe.
Cette opération va alors permettre au payeur du taux fixe de se protéger contre une hausse des taux, ou bien de sécuriser une éventuelle marge. Notons cependant que cet instrument n'est pas une option, ainsi, lorsque les taux baissent, le payeur du taux fixe verse un montant supérieur à ce qu'il aurait dû payer initialement sans couverture. Ce désavantage se traduit par un coût plus faible à l'achat par rapport à un cap.

Le taux swap est le taux permettant d'égaliser la jambe variable et la jambe fixe : la valeur d'un IRS est donc nulle lors de sa création. Ainsi, nous pouvons interpréter un IRS comme une somme de plusieurs contrats FRA sur différentes dates de paiement, avec un taux fixe unique sur l'ensemble de ces contrats, le taux swap, permettant de rendre nulle la somme de ces contrats. Ainsi, il est possible que certains contrats FRA aient une valeur positive, et que d'autres aient une valeur négative.

▷ **Caractéristiques de l'IRS :**

- Début de l'IRS : $T_0 \geq 0$
- Fin de l'IRS : $T > T_0$
- Fréquence des paiements : $\alpha > 0$
- Nombre de paiements : $N = \alpha^{-1} \cdot T$

$T - T_0$ est appelé le ténor du swap.
Soit $t \in [0, T_0]$. Notons $SwapRate_t(T_0, T, \alpha)$ le taux swap en t pour un IRS entre T_0 et T, avec une fréquence α. Ainsi, si $t = T_0$, nous parlerons de taux swap spot, mais si $t < T_0$, nous parlerons de taux swap forward.
Notons T_i les différentes dates de paiement de l'IRS : $T_i = T_0 + i \cdot \alpha$ et $i \in [\![1, N]\!]$.

▷ **Calcul du taux swap spot en $t = T_0$:**

$$\begin{aligned}
\textbf{Jambe variable} \ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} B(T_0, T_i) \cdot r_{T_0}(T_{i-1}, T_i) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} B(T_0, T_i) \cdot \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \cdot \Big(\frac{B(T_0, T_{i-1})}{B(T_0, T_i)} - 1 \Big) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \cdot \Big(B(T_0, T_{i-1}) - B(T_0, T_i) \Big) \\
&= 1 - B(T_0, T_N) \quad \text{car } B(T_0, T_0) = 1
\end{aligned}$$

$$\textbf{Jambe fixe} \ = \alpha \cdot SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha) \cdot \sum_{i=1}^{N} B(T_0, T_i)$$

$$\hookrightarrow \ SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha) = \frac{1 - B(T_0, T_N)}{\alpha \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} B(T_0, T_i)}$$

▷ **Calcul du taux swap forward en $t \in [0, T_0[$:**

$$\begin{aligned}
\textbf{Jambe variable} \ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i) \cdot r_t(T_{i-1}, T_i) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i) \cdot \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \cdot \Big(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \Big) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \cdot \Big(B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i) \Big) \\
&= B(t, T_0) - B(t, T_N)
\end{aligned}$$

$$\textbf{Jambe fixe } = \alpha \cdot SwapRate_t(T_0, T, \alpha) \cdot \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i)$$

$$\hookrightarrow \ SwapRate_t(T_0, T, \alpha) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_N)}{\alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i)}$$

▷ **Payoff de l'IRS en T_i :**

La formule présente le payoff reçu par le payeur du taux fixe (IRS payeur). Le payoff reçu par le receveur du taux fixe sera l'opposé, puisque ce n'est pas une option.

$$IRSpayeur_{T_i} = \alpha \cdot (r_{T_i}(T_i, T_{i+1}) - SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha)) \tag{8.5}$$

▷ **Valorisation d'un IRS en $t \in [0, T[$:**

Pour valoriser un IRS payeur, on calcule la différence de valeur entre la jambe variable et la jambe fixe. La valeur d'un IRS receveur sera bien évidemment l'opposé de cette valeur.

$$IRS_t(T_0, T, \alpha) = Jambe\,variable - Jambe\,fixe$$

$$= \begin{cases} B(t, T_0) - B(t, T) - \alpha \cdot SwapRate_t(T_0, T, \alpha) \cdot \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i) & \text{si } t < T_0 \\ \underbrace{B(t, T_j)}_{j\,:\,T_{j-1} < t \leq T_j} - \ B(t, T) - \alpha \cdot SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha) \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ t<T_i}}^{N} B(t, T_i) & \text{si } t \geq T_0 \end{cases}$$

8.5 Swaption

Une swaption payeuse (receveuse) est une option sur un IRS : elle donne le droit, à maturité de la swaption, de rentrer dans un IRS payeur (receveur).

Les swaptions sont très couramment utilisées, car elles permettent aux entreprises de se couvrir sur de longues durées. Ainsi, une swaption acheteuse permet de se protéger contre une éventuelle remontée des taux : à maturité, si une hausse des taux a été constatée, alors l'option sera exercée et l'entreprise bénéficiera d'un swap avantageux, mais dans le cas où les taux baissent, la swaption ne sera tout simplement pas exercée, et un IRS pourra éventuellement être directement contracté à maturité.

Lorsque la swaption est exercée, soit le swap est réellement mis en place (swap-settlement), soit l'ensemble des paiements actualisés de la swaption est versé au moment de l'exercice (cash-settlement). En général, c'est le cash-settlement qui est très majoritairement utilisé sur les marchés, et c'est aussi ce qui est utilisé à BNP Paribas Cardif.

▷ **Caractéristiques de la swaption :**

- Début de l'IRS : $T_0 \geq 0$
- Fin de l'IRS : $T > T_0$
- Date de valorisation : $t \in [0, T_0[$
- Strike : $K > 0$
- Fréquence des paiements : $\alpha > 0$
- Nombre de paiements : $N = \alpha^{-1} \cdot T$
- Volatilité du taux swap forward : $\sigma \geq 0$

▷ **Payoff de la swaption payeuse en T_0 :**

$$SwptPay_{T_0}(T_0, T, \alpha) = \alpha \cdot (\, SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha) - K \,)^+ \cdot \sum_{i=1}^{N} B(T_0, T_i) \tag{8.6}$$

▷ **Payoff de la swaption receveuse en T_0 :**

$$SwptRec_{T_0}(T_0, T, \alpha) = \alpha \cdot (\, SwapRate_{T_0}(T_0, T, \alpha) - K \,)^- \cdot \sum_{i=1}^{N} B(T_0, T_i) \tag{8.7}$$

Posons $d_1 = \dfrac{SwapRate_t(T_0, T, \alpha) - K}{\sigma\sqrt{\tau(t, T_0)}}$

▷ **Valorisation de la swaption payeuse en $t \in [0, T_0[$:**

$$SwptPay_t(T_0, T, \alpha) = \alpha \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i) \Big[(SwapRate_t(T_0, T, \alpha) - K)\Phi_{0,1}(d_1) + \sigma\sqrt{\tau(t, T_0)}.\varphi_{0,1}(d_1) \Big]$$

▷ **Valorisation de la swaption receveuse en $t \in [0, T_0[$:**

$$SwptRec_t(T_0, T, \alpha) = \alpha \sum_{i=1}^{N} B(t, T_i) \Big[(K - SwapRate_t(T_0, T, \alpha))\Phi_{0,1}(-d_1) + \sigma\sqrt{\tau(t, T_0)}.\varphi_{0,1}(d_1) \Big]$$

Par ailleurs, le taux swap spot est souvent appelé taux CMS (Constant Maturity Swap). Dans la suite de l'étude, le taux CMS10Y de fréquence annuelle correspondra donc à $SwapRate_T(T, T + 10, 12)$.

Chapitre 9

Amortissement financier

Dans cette partie nous allons détailler les principes de valorisation comptable utilisés pour comptabiliser les options dans les produits financiers. L'objectif de cet amortissement va être de lisser l'impact de la couverture sur un horizon donné, que ce soit l'impact de la prime, ou bien l'impact des payoffs générés par cette option.

9.1 French Gaap : Amortissement au TRE

Nous avons établi une première méthode d'amortissement : il s'agit de la méthode d'amortissement au TRE (taux de rendement effectif). Le montant que nous passerons au résultat chaque année dépendra des cash-flows espérés, en vision forward et non probabilisée. Ainsi, le montant amorti chaque année va dépendre de l'évolution du niveau des actions (ou de la structure par terme des taux d'intérêts).

Nous avons établi une formule unique qui peut s'appliquer à tous les instruments. Dans notre outil de couverture, les amortissements sont effectués les 31 Décembre de chaque année.

Posons $\begin{cases} T = \text{ Année de maturité de l'option - Année d'achat de l'option } + 1 \\ t \in [\![1, T]\!] : \text{Année d'amortissement} \end{cases}$

▷ **Lorsque** $t \in [\![1, T-1]\!]$ **:**

$$Nom + \sum_{k=1}^{t} \Big[CF_{payés}(k) - CF_{recus}(k) + AP(k-1) \Big] = \sum_{k=t+1}^{T} \Big[\frac{CF_{espérés}(k)}{(1+TRE(t))^{k-t}} + \frac{Nom}{(1+TRE(t))^{T-t}} \Big]$$

$$\text{Avec} \begin{cases} Nom = Nominal \\ CF_{payés}(k) = \text{ Les CF payés sur l'année } k \text{ (généralement la prime en } k = 1) \\ CF_{recus}(k) = \text{ Les CF reçus sur l'année } k \\ CF_{espérés}(k) = \text{ Les CF espérés sur l'année } k \text{ (taux ou prix forward)} \\ AP(k) = \text{ Amortissements passés sur l'année } k \ (AP(0) = 0) \end{cases}$$

Le TRE est le taux qui permet de résoudre cette équation. Dans notre outil, nous le calculons à l'aide d'une méthode de dichotomie. Ainsi, voici l'amortissement qui est passé au bilan en année t :

$$Amortissement(t) = TRE(t) \cdot \Big[\sum_{k=0}^{t} \Big(Nominal + CF_{payés}(k) - CF_{recus}(k) + AP(k-1) \Big) \Big]$$

▷ **Lorsque $t = T$:**

Pour la dernière année d'amortissement ($t = T$), nous passons en résultat ce qu'il reste à amortir :

$$Amortissement(T) = \sum_{k=1}^{T} \Big(CF_{recus}(k) - CF_{payés}(k) \Big) - \sum_{k=1}^{T-1} AP(k)$$

9.2 French Gaap : Amortissement linéaire

Nous avons développé une deuxième méthode d'amortissement, qui se révèle être plus simple à mettre en place, et plus rapide à exécuter. Cette méthode reposera toujours sur les cash-flows espérés, mais nous n'aurons plus besoin d'effectuer une dichotomie pour calculer le montant à passer au résultat chaque année.

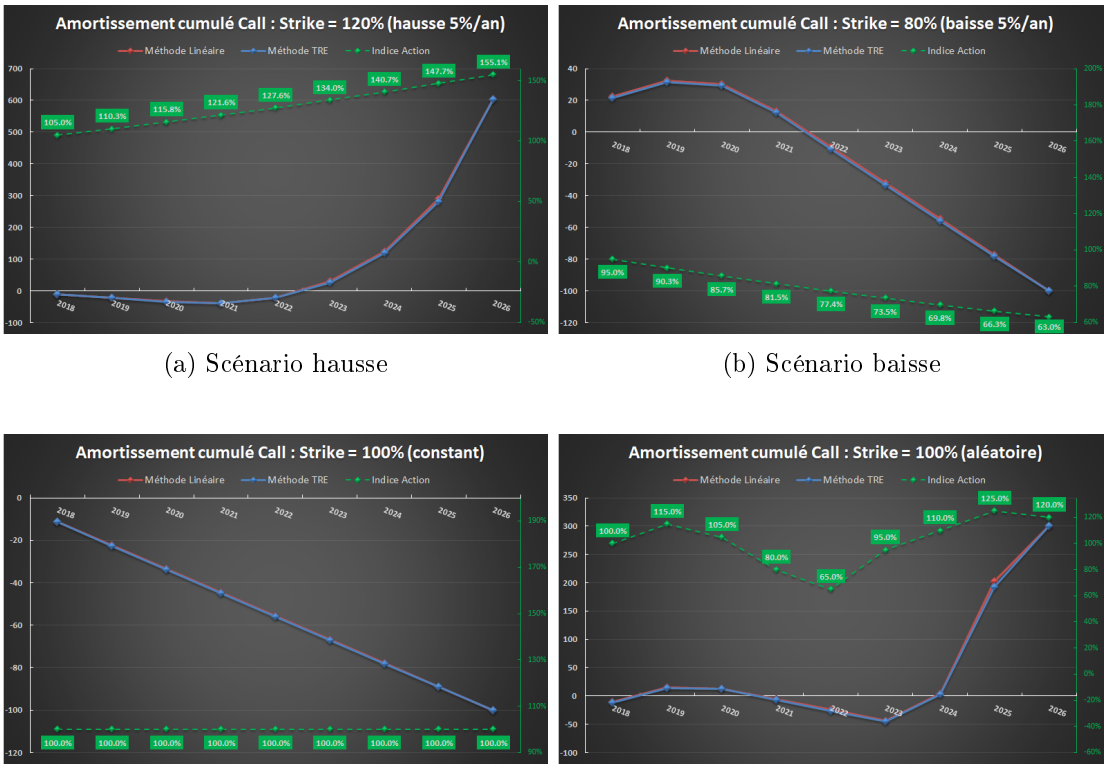
$$\text{Posons} \begin{cases} T : \text{Date de maturité de l'option} \\ t : \text{Date d'amortissement (les 31/12/N dans notre outil)} \\ t' = Year(t) \in [1, Year(T)] : \text{Année d'amortissement} \end{cases}$$

$$Amortissement(t') = \frac{\sum_{k=1}^{t'} \Big(CF_{recus}(k) - CF_{payés}(k) - AP(k-1) \Big) + \sum_{k=t'+1}^{T} CF_{espérés}(k)}{Max\Big(0, \tau(t,T)\Big) + 1}$$

$$\text{Avec} \begin{cases} CF_{payés}(k) = \text{ Les CF payés sur l'année } k \text{ (généralement la prime en } k = 1) \\ CF_{recus}(k) = \text{ Les CF reçus sur l'année } k \\ CF_{espérés}(k) = \text{ Les CF espérés sur l'année } k \text{ (taux ou prix forward)} \\ AP(k) = \text{ Amortissements passés sur l'année } k \ (AP(0) = 0) \\ \tau : \text{ base actuarielle} \end{cases}$$

9.3 Comparaison des méthodes d'amortissement French Gaap

Afin de comparer les 2 méthodes d'amortissement décrites précédemment, nous allons simuler l'évolution de l'amortissement cumulé sur 4 scénarios différents de l'indice sous-jacent : hausse, baisse, constant, aléatoire. Nous représenterons l'amortissement pour 2 options différentes : un Call et une Swaption.



(a) Scénario hausse

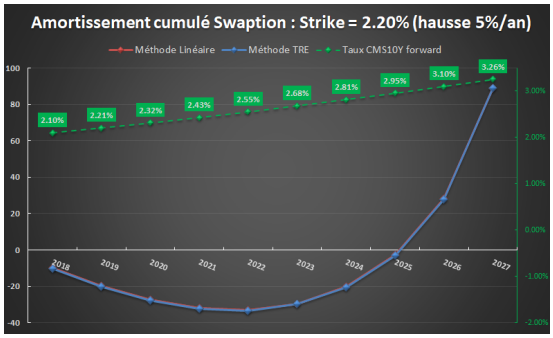
(b) Scénario baisse

(c) Scénario constant

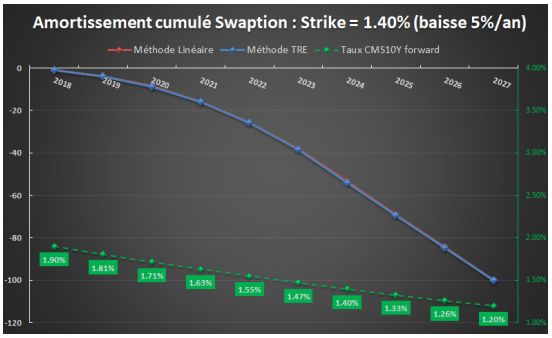
(d) Scénario aléatoire

FIGURE 9.1 – Amortissements cumulés d'un Call

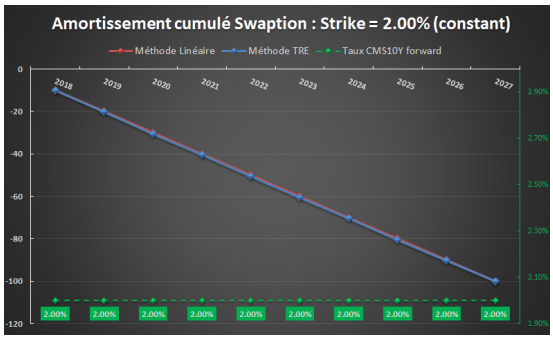
Nous pouvons donc remarquer que dans le cas d'un Call, l'amortissement avec les 2 méthodes est quasiment identique. Observons maintenant l'évolution de l'amortissement cumulé avec une Swaption :



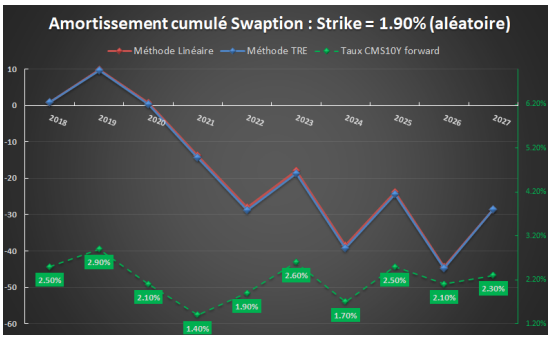
(a) Scénario hausse



(b) Scénario baisse



(c) Scénario constant



(d) Scénario aléatoire

FIGURE 9.2 – Amortissements cumulés d'une Swaption

Nous constatons donc que l'amortissement est aussi identique quelle que soit la méthode dans le cas d'une Swaption.

La méthode au TRE nécessite de faire une dichotomie sur chaque année de projection et pour chaque option, il s'agit donc d'une méthode coûteuse en temps. Ainsi, comme nous avons pu remarquer que l'amortissement linéaire et l'amortissement TRE sont très semblables, nous avons sélectionné la méthode linéaire dans notre outil de couverture.

9.4 Comptabilité IFRS

La comptabilisation en IFRS est une comptabilisation en trading.
Selon la norme IAS 39, nous nous situons dans la catégorie des instruments financiers dérivés. Un instrument financier est défini par cette norme comme étant soit *"un engagement ferme pour lequel les deux parties au contrat s'engagent à régler/livrer un sous-jacent aux échéances prévues dans le contrat"*, soit *"un contrat optionnel par lequel l'acheteur de l'option a le droit de régler/livrer un sous-jacent aux échéances prévues au contrat"*. Cela correspond donc exactement aux produits de couverture décrits dans précédemment.

En pratique, nous passerons chaque année en résultat la différence de juste valeur du dérivé. La comptabilisation IFRS correspondra donc simplement à la différence de valeur de marché de l'option entre l'année précédente et l'année actuelle.

9.5 Différence FGAAP / IFRS

La comptabilisation IFRS comporte un avantage conséquent par rapport aux amortissements FGAAP présentés ci-dessus.

Afin de constater l'amortissement à passer sur l'année N, la méthode linéaire calcule le taux (ou prix) forward, et estime ainsi le CF espéré en vision forward, auquel nous ajoutons la prime payée. Cette méthode se heurte à un effet « palier » : en effet, lorsque le taux (ou prix) forward se situe juste en-dessous du niveau nécessaire afin que l'option soit exercée, nous amortissons seulement la prime, nous ne prenons pas du tout en compte l'éloignement du strike à la monnaie lorsque nous sommes OTM.

Dans le cas de la méthode IFRS, en amortissant la différence de valeur de marché, nous avons une vision probabilisée du CF futur, c'est-à-dire que nous prenons en compte le fait que, bien qu'avec les taux actuels nous n'allons pas exercer l'option, il est tout de même probable que l'option soit exercée en cas d'un léger mouvement de taux. L'effet palier disparaît donc grâce à cette méthode en valeur de marché. Une vision probabiliste permet donc d'obtenir un amortissement nettement mieux lissé qu'avec une vision forward.

Chapitre 10

Modélisation et description des risques ALM

10.1 Prophet

Le progiciel utilisé en ALM à BNP Paribas Cardif est Prophet ALS. Il est très couramment utilisé par les assureurs. Il permet notamment de projeter toutes les éléments qui constituent le bilan et le compte de résultat d'un assureur. Nous pouvons ensuite reconstruire le bilan économique grâce à ces variables. Les projections peuvent être déterministes, pour étudier le scénario central ou des scénarios choqués par exemple, mais aussi ils peuvent aussi être stochastiques, comme dans le cadre de notre étude. La fréquence de revalorisation est annuelle, au 31 décembre de chaque année.

Plus précisément, les variables projetées vont nous permettre de déterminer avec exactitude :

- **Le passif :** Tous les contrats détenus par l'assureur vont être projetés (contrats Euro et UC). De plus, une hypothèse de collecte pourra être définie au préalable :
  - En univers RN : Nous nous placerons en run-off, c'est-à-dire la collecte brute est nulle, aucun nouveau contrat ne sera souscrit.
  - En univers RW : Nous nous placerons en collecte nette annuelle nulle. Cela signifie une continuité d'activité avec autant d'entrées que de sorties (Collecte nette = Collecte brute - Décès - Rachats).

- **L'actif :** Tous les actifs financiers possédés seront projetés. Par ailleurs, une politique d'allocation cible est définie au sein de ce modèle, et, au 31 décembre de chaque année, Prophet appliquera une stratégie financière visant à respecter cette allocation.

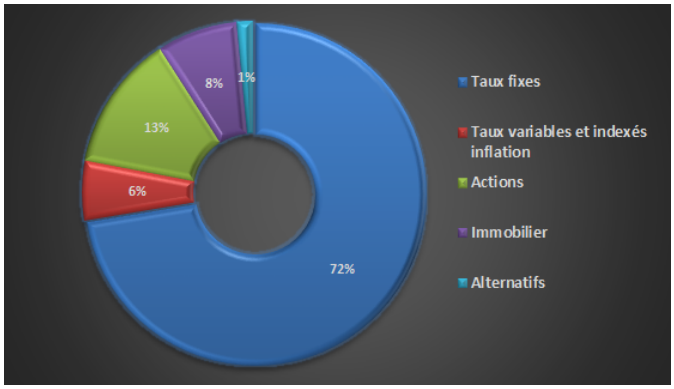


FIGURE 10.1 – Allocation cible

Par ailleurs, Prophet va aussi nous permettre de prendre en compte les interactions actifs/passifs, que ce soit via la PB (Participation aux Bénéfices que nous décrirons ci-après), ou bien via les rachats dynamiques qui seront déclenchés à l'aide du corridor de compétitivité que nous détaillerons dans ce chapitre.

Notons que l'ensemble des flux perçus sur l'année doivent être capitalisés au 31 Décembre. Nous rappellerons ce détail lors de l'achat d'options au 1er janvier dans nos stratégies.

10.2 Profits et TRA

Prophet va calculer le TRA (Taux de rendement de l'actif) pour chaque année de projection. Ce taux va représenter le rendement de l'entreprise, il comprend les rendements récurrents obligataire, action, et monétaire, auxquels s'ajoutent d'éventuels gains exceptionnels (réalisation de Plus-Values action) :

$$TRA = \frac{\text{Produits financiers nets}}{\text{Valeur nette comptable moyenne}} \tag{10.1}$$

Afin de calculer le TRA, nous devons sélectionner notre méthode d'amortissement (comptabilisation) : FGAAP ou IFRS. Dans notre étude, nous avons calculé le TRA à partir de l'amortissement linéaire (section 9.2), car ce sont les produits financiers FGAAP qui sont redistribués entre l'assureur et ses assurés.

A partir du TRA, Prophet nous permet d'obtenir le profit FGAAP et IFRS pour chaque année de projection. Bien évidemment, la différence entre les 2 profits réside dans le fait que le profit IFRS va comptabiliser les actifs en valeur de marché dans le résultat, alors que le profit FGAAP les comptabilisera en valeur historique .
Par ailleurs, le profit IFRS correspondra au profit FGAAP auquel nous ajouterons 7.5% des variations de valeur de marché des actifs comptabilisés en Trading (c'est le cas des stratégies de couverture).

(+)	(−)
Reprises à la RC	Dotations à la RC
Reprises à la PDD	Dotations à la PDD
Dividendes / Loyers	
Amortissement	
PMVR (Plus ou moins-values réalisées)	
Coupons courus / encaissés	

TABLE 10.1 – Décomposition du TRA

Le TRA est donc un indicateur très important, car il nous permet d'obtenir le profit de l'entreprise, et donc la richesse qu'elle aura produite.

10.3 Taux technique, TMG, PB et PPB

Le taux d'intérêt technique correspond au taux de revalorisation minimum garanti par le contrat, sans limite de durée. Il est utilisé par les assureurs afin de calculer leurs tarifs et leurs provisions. Il ne peut pas dépasser 75% du TME (60% au-delà de 8 ans). Il s'agit donc d'un taux réglementé. C'est ce taux qui oblige les assureurs à revaloriser d'anciens contrats avec des taux très importants.

Le taux minimum garanti (TMG) est très semblable au taux d'intérêt technique. Cependant il n'est valable que pour une durée allant de 6 à 24 mois maximum. Il est constitué du taux d'intérêt technique, et il est possible qu'une certaine quantité de participation aux bénéfices s'y ajoute (impossible pour le taux d'intérêt technique).

Les assureurs doivent partager les gains techniques et financiers qu'ils génèrent avec leurs assurés. La participation aux bénéfices (PB) a été créée afin de répondre à cette problématique : l'assureur va servir les intérêts techniques à ses assurés (minimum obligatoire), puis, s'il reste du bénéfice, il sera soit verser directement aux assurés sous forme de PB, soit il sera conserver par l'assureur sous la forme de provisions pour participation aux bénéfices (PPB). Notons cependant que la PB est réglementée, elle doit obligatoirement être supérieure à 85% des résultats financiers (en abattant les intérêts techniques).

La PPB appartient aux assurés : elle doit obligatoirement être distribuée aux assurés dans les 8 prochaines années. C'est un outil de pilotage très important pour les assureurs. Il permet notamment de lisser les revalorisations des contrats en fonction de la performance sur l'exercice : on dote de la PPB sur les bonnes années, et on en reprend sur les mauvaises années. La reprise de PPB va nous permettre de rester concurrentiel en cas de mauvaise performance sur une année donnée.

Si l'entreprise n'arrive pas à générer suffisamment de produits financiers afin de revaloriser ses contrats aux taux minimum garantis (TMG ou taux d'intérêt technique), et qu'elle ne possède pas assez de PPB, elle sera obligée de puiser dans ses fonds propres le montant nécessaire. Une telle injection de capital aura donc un impact très négatif sur son résultat. Nous pouvons approximer le résultat avec la formule ci-dessous (notons $P.Fi$ les produits financiers) :

$$Résultat \approx 10\% \cdot P.Fi + Chargements - Commissions - Coûts + P.Fi\ autres\ réserves$$

10.4 Corridor de compétitivité et taux servi

Le taux servi (ou taux net de charges) est le taux auquel les contrats sont réellement revalorisés. Il est fixé en fin d'exercice, au cours du mois de décembre, en fonction des objectifs économiques et commerciaux de BNP Paribas Cardif. De manière économique, il est obtenu via une transformation affine du TRA. Nous pouvons l'approximer par :

$$Taux\ servi \approx 91\% \cdot TRA - Chargements \tag{10.2}$$

Cependant, afin de prendre en compte les aspects concurrentiels et satisfaction client, BNP Paribas Cardif a mis en place une méthode se basant sur un corridor de compétitivité :

- Si la transformation affine du TRA se situe **dans** le corridor de compétitivité, alors nous ne modifions pas le taux servi.

- Si la transformation affine du TRA se situe **au-dessus** du corridor de compétitivité, alors nous allons servir la borne supérieure du corridor, et nous allons doter en PPB le surplus de bénéfices.

- Si la transformation affine du TRA se situe **en-dessous** du corridor de compétitivité, alors nous allons servir la borne inférieure du corridor en effectuant une reprise de PPB. Si la PPB n'est pas suffisante, nous la liquidons complètement.

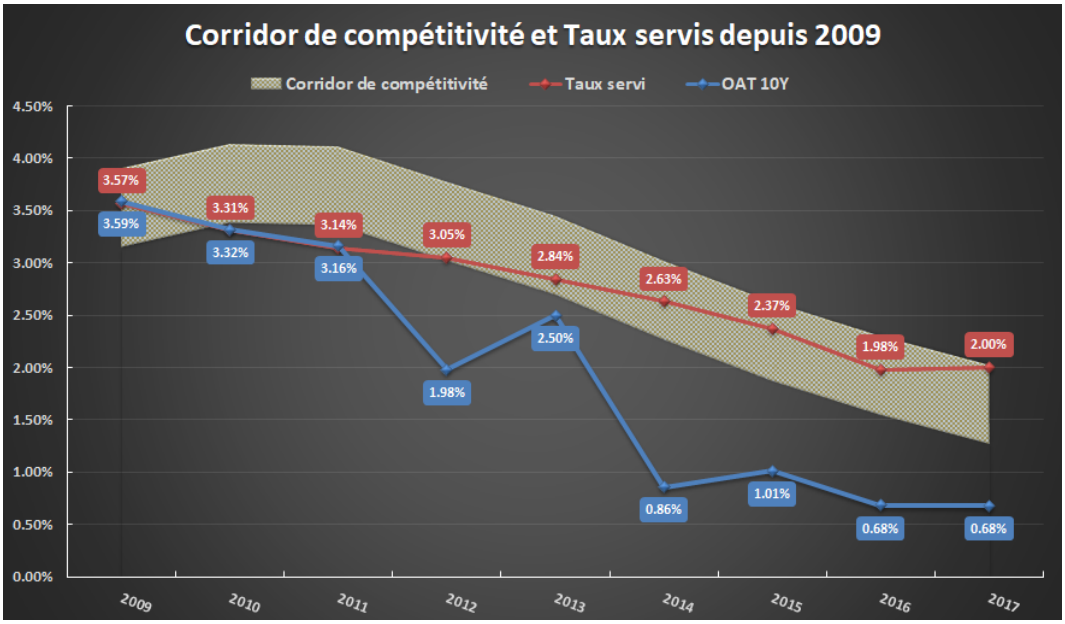


FIGURE 10.2 – Corridor de compétitivité et taux servi depuis 2009

BNP Paribas Cardif suppose que l'attente des clients se basent sur une vision moyennée de l'OAT 10Y. Ainsi le corridor de compétitivité va se situer autour de la moyenne mobile 6 ans de l'OAT 10Y. La borne inférieure va être obtenue en retirant 30 bps, et la borne supérieure en ajoutant 45 bps (auparavant 30 bps, mais la borne a été augmentée afin de se caler sur les anticipations de taux servis à moyen terme).

Par ailleurs, BNP Paribas Cardif a souhaité limiter la déviation du corridor de compétitivité entre 2 années : la déviation annuelle ne peut excéder 15%.

Si nous n'arrivons pas à servir au minimum la borne inférieure du corridor de compétitivité, alors des rachats dynamiques vont être déclenchés. Ces rachats peuvent déclencher la réalisation de MVL, ce qui impactera fortement les résultats financiers. A cause de ce cercle vicieux, c'est une situation que nous souhaitons fortement éviter. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la réserve de PPB n'était pas suffisante en 2010 et en 2011 afin de servir un taux concurrentiel.

A l'aide du graphique représentant la modélisation des rachats, nous pouvons remarquer qu'un taux de rachat structurel de 0.5% est présent. Si le taux servi est inférieur de plus de 5% à la borne inférieure du corridor, le taux de rachats atteint 10%.

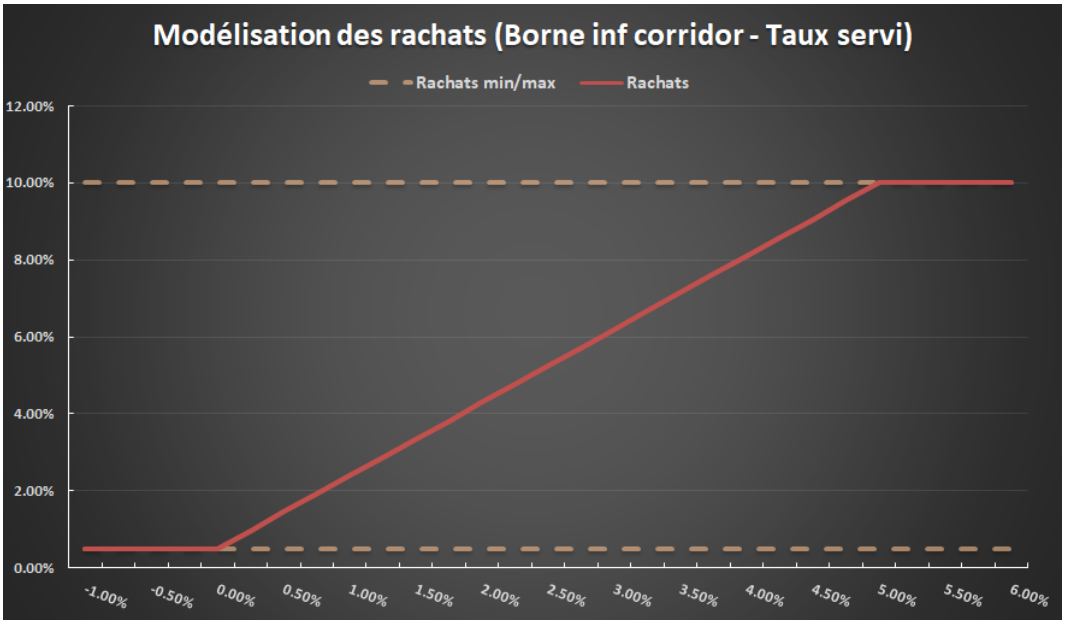


FIGURE 10.3 – Modélisation des rachats

10.5 RC, PDD, PRE

Outre la PPB, d'autres provisions jouent le rôle d'outil de pilotage entre l'actif et le passif des assureurs. Les provisions représentent des charges probables, l'objectif étant de pouvoir amortir les variations des marchés financiers, et de pouvoir d'ores et déjà constater d'éventuels gains ou pertes futures. Les réserves sont différentes, elles vont permettre de constituer une marge de sécurité financière pour la compagnie, elles ne représentent pas des charges anticipées.

- **Réserve de capitalisation (RC) :** C'est un compte qui va nous permettre de prendre en compte les réalisations de PMVL obligataires (Plus ou moins-values latentes), ce n'est donc pas une provision mais une réserve. Ainsi, si nous réalisons une plus-value lors de la vente d'obligations, cette PVR (plus-value réalisée) viendra augmenter la RC. Inversement, si nous réalisons une moins-value, elle viendra baisser la RC. Cette réserve permet donc d'annuler les impacts sur les produits financiers des ventes des obligations : mécanisme règlementaire. Notons cependant que les obligations à taux variables ne sont pas prises en compte dans la RC.

- **Provision pour dépréciation durable (PDD) :** C'est une provision qui doit être constatée si la valeur de marché d'un actif a été inférieure à 80% de sa valeur comptable pendant plus de 6 mois (70% en cas marchés volatils, statué par l'AMF), et si cette baisse de valeur est considérée comme durable. Il s'agit donc d'une provision ligne à ligne, contrairement à la PRE que nous verrons ci-dessous. Si la valeur de marché de l'actif venait à ré-augmenter, alors l'assureur pourra effectuer une reprise de cette provision.

– **Provision pour risque d'exigibilité (PRE) :** Cette provision est un complément à la PDD, elle va permettre à l'assureur de faire face à un éventuel risque de rachats massifs de ses contrats, qui pourrait engendrer un risque de liquidité. Contrairement à la PDD qui est une provision ligne à ligne, la PRE est une provision globale : nous allons doter la PRE en cas de MVL nette globale de l'ensemble de nos titres amortissables (ne concerne pas les obligations). Si, sans dotation de PRE, l'assureur peut honorer ses engagements et respecte l'exigence de couverture de sa marge de solvabilité, alors la dotation de PRE correspondra au tiers de cette MVL nette globale. Dans le cas contraire, la dotation correspondra à l'intégralité de la MVL nette globale.

  BNP Paribas Cardif dote la PRE de manière asymétrique entre son compte de résultat et ses assurés : la perte n'est donc pas totalement assumée par l'assureur. Cependant, toute reprise de PRE doit être donnée aux assurés, donc nous essayons au maximum d'éviter de doter cette provision.

10.6 Gap de duration

On définit la duration d'un instrument financier comme la durée de vie moyenne des flux financiers actualisés, pondérée par leur valeur probable actualisée :

$$Duration = \frac{\sum\limits_{t\geq 1} t \cdot F_t \cdot p_{F_t} \cdot D_t}{\sum\limits_{t\geq 1} F_t \cdot p_{F_t} \cdot D_t} = \frac{1}{VM} \sum_{t\geq 1} t \cdot F_t \cdot p_{F_t} \cdot D_t \tag{10.3}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} F_t & : \text{ Flux de l'instrument financier en date } t \\ p_{F_t} & : \text{ Probabilité d'occurence du flux } F_t \\ D_t & : \text{ Déflateur entre 0 et t} \\ VM & : \text{ Valeur de marché de l'instrument financier} \end{cases}$$

Ainsi la duration du passif d'une compagnie d'assurance est un indicateur précieux, car il permet d'estimer l'échéance moyenne pondérée des paiements que l'assureur devra honorer pour faire face à ses engagements :
Lorsque les taux montent, nous savons que la valeur de marché des obligations baisse. Cependant, plus la duration du compartiment obligataire d'un assureur est importante, plus l'impact d'une hausse des taux sera négatif. Ainsi, si nous anticipons une hausse des taux, il faut réduire sa duration. Dans le cas d'une anticipation de baisse des taux, c'est bien évidemment l'inverse : il vaut mieux avoir une duration longue.

Par ailleurs, les assureurs prêtent une attention particulière à ce qu'on appelle le gap de duration : duration actif - duration passif.

Il s'agit d'un indicateur qui nous permet notamment de coordonner le timing des versements : l'assureur essaiera généralement d'avoir une duration à l'actif plus courte, afin de se garantir une meilleure réactivité. En effet, en cas d'augmentation imprévue des prestations, le gap de duration négatif assurera une plus grande liquidité de l'actif. Par ailleurs, le gap de duration permet aussi d'estimer, de manière approximative, les variations de son actif et de son passif en fonction des mouvements de taux.

Notons qu'une duration plus courte à l'actif permet d'offrir à l'assureur une couverture naturelle contre une hausse des taux. Par exemple, avec une duration actif de 8, et une duration passif de 10 (gap de duration = -2), si une hausse des taux de 1% survient, la valeur de l'actif baissera de 8%, et la valeur du passif baissera de 10%. Donc si la valeur du passif est égale à celle de l'actif, l'assureur fera un gain de 2% (approximativement).

La duration du passif de BNP Paribas Cardif est d'approximativement 10 ans, et celle de l'actif est d'environ 6 ans. Nous avons donc un gap de duration négatif.

10.7 VIF, BEL, NAV, SCR, PVFP, TVOG, CoC

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions étroitement liées, primordiales à la compréhension des mécanismes assurantiels :

- **VIF (Value of In-Force) :** Elle s'exprime comme la valeur actualisée des résultats futurs distribués aux actionnaires. Il s'agit donc d'un indicateur de la profitabilité du portefeuille détenu par l'assureur.
- **BEL (Best Estimate Liabilities) :** Il correspond à la valeur actualisée la plus réaliste et probable possible que l'assureur devra verser à ses assurés, c'est-à-dire la valeur économique des passifs. Il s'agit donc du montant de réserves que l'assureur doit détenir afin de pouvoir honorer ses engagements.
- **NAV (Net Asset Value, ou Actif Net) :** Elle correspond à la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur économique des passifs (le BEL). L'actif net est souvent considéré comme la valeur économique des fonds propres (en l'absence de fonds propres, la NAV peut être assimilée à la VIF). Par ailleurs, la NAV est l'indicateur clé de la réglementation Solvabilité 2, qui vise à limiter le risque de faillite économique (NAV$<$0) à 1 an à une occurrence tous les 200 ans.
- **SCR (Solvency Capital Requirement) :** Il se définit comme le capital minimum à immobiliser afin de limiter les risques de faillite à cette occurrence. En formule standard (méthode choisie par BNP Paribas Cardif), on agrège des risques sous-modulaires constitués de la variation entre une NAV centrale et une NAV dans un scénario choqué pour obtenir le SCR.

Rappelons que, dans l'optique des valorisations et des calculs règlementaires, le calcul des postes du bilan économique doit se faire sous la probabilité risque-neutre, en absence d'opportunité d'arbitrage, et dans un univers market consistent. Par ailleurs, le référentiel Solvabilité 2 impose l'utilisation d'hypothèses «Best Estimate» dans le calcul des provisions. Ces dernières doivent être calibrées sur des valeurs historiques, et ainsi représenter au mieux la réalité.
Par conséquent, le référentiel à utiliser pour calculer ces valeurs est double, il doit prendre en compte à la fois la probabilité risque-neutre et la probabilité historique. Ainsi, $CF_t^{assurés}$ représente les flux versés aux assurés, et doit prendre en compte les 2 probabilités :

$$BEL = \mathbb{E}^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}\Big(\sum_{t\geq 1} D_t \cdot CF_t^{assurés}\Big) \tag{10.4}$$

Le BEL pourra donc être approximé grâce à une méthode Monte-Carlo avec l'aide des GSE présentés précédemment. De même, nous pouvons calculer la VIF :

$$VIF = \mathbb{E}^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}\Big(\sum_{t\geq 1} D_t \cdot Résultat_t\Big) \tag{10.5}$$

Notons que la VIF est calculée en Run-Off. La VIF peut être scindée en 3 parties distinctes :

$$VIF = PVFP - TVOG - CoC \tag{10.6}$$

- **PVFP (Present Value of Future Profits) :** Elle représente la valeur actualisée des résultats nets d'impôts générés par les contrats (déjà possédés car hypothèse de Run-Off). Ainsi nous pouvons interpréter la PVFP comme la valeur actuelle nette des résultats futurs, soit la différence entre la VAN des marges futures et la VAN des frais futurs :

$$\sum_{t\geq 1} D_t \cdot Résultat\,net_t \tag{10.7}$$

- **TVOG (Time Value of Options and Guarantees) :** Description détaillée dans la dernière section de ce chapitre : (section 10.9).
- **CoC (Cost of Capital) :** Ce montant représente le coût de d'immobilisation du capital pour la marge de solvabilité. Il ne peut pas être reversé aux actionnaires.

10.8 Convergence

Les modèles ALM étant très complexes, il est possible qu'une fuite de valeur économique survienne. Il faut donc s'assurer de la bonne prise en compte de la capitalisation de chacun des flux, en s'assurant du timing de versement. Par exemple, il est nécessaire de vérifier sur quelles assiettes nous appliquons nos taux de rachat, d'arbitrage, ou même de décès. Aussi, il est nécessaire de vérifier que les flux issus des actifs soient cohérents avec ceux considérés lors de la valorisation.

Nous avons vu lors de la présentation du GSE RN qu'il est possible que les variables générées ne soient pas tout à fait martingales (section 6.3). Ainsi, une certaine quantité de valeur va être créée, ou détruite. Dès lors, il ne sera pas possible de retrouver avec exactitude la valeur de marché des actifs à partir de leurs cash-flows générés :

$$MV \neq \sum_{s=1}^{N} \sum_{t \geq 1} D_t^s \cdot CF_t^s \tag{10.8}$$

En sortie de modèle, l'écart de convergence est définie par l'écart entre la richesse projetée et la richesse initiale :

$$EC = BEL + VIF - MV_0 \tag{10.9}$$

Afin de s'assurer que le bon niveau de richesse soit projeté, l'écart de convergence est généralement réalloué entre le BEL et la VIF. Cependant, l'ACPR a statué qu'il doit systématiquement être réalloué dans le sens d'une augmentation du BEL :

- **EC $>$ 0 :** Le modèle crée de la richesse, donc $\begin{cases} BEL^{new} = BEL \\ VIF^{new} = VIF - EC \end{cases}$
- **EC $<$ 0 :** Le modèle détruit de la richesse, donc $\begin{cases} BEL^{new} = BEL - EC \\ VIF^{new} = VIF \end{cases}$

10.9 Préambule aux stratégies de couverture : TVOG

La plupart des contrats d'assurance-vie contiennent des options financières «cachées» :

Les fonds en euro des contrats d'assurance-vie offrent une garantie en capital : le TMG (ou taux d'intérêt technique) est forcément positif, ainsi ce taux va représenter le strike d'une option sur le taux de rendement de l'actif du portefeuille. En effet, les assurés ne peuvent avoir un taux servi négatif, leur capital est protégé, cela correspond donc à un floor de strike 0% (en absence de TMG $> 0\%$).

En plus de la garantie de taux, la règlementation sur la participation aux bénéfices impose aux assureurs de partager leurs résultats financiers avec leurs assurés. Ainsi nous pouvons affirmer que ces derniers possèdent un call sur le rendement des actifs, s'il est supérieur au TMG.

Par ailleurs, la possibilité de rachat d'un contrat constitue également une option, car un rachat va réduire la duration du passif : nous pouvons associer cela à une obligation callable. Rappelons le modèle de rachats dynamiques (Figure 10.3) qui dépend du taux servi face à la concurrence.

Les prestations payées aux assurés dépendent donc du rendement futur du portefeuille, qui est inconnu à la date d'évaluation. Ainsi, pour déterminer la valeur économique des prestations, on considère le rendement comme une variable r_t. Le taux de rachat va dépendre de ce taux, puisque nous avons vu que le taux de rachat dépend de la compétitivité du taux servi (Figure 10.3). Le BEL peut alors être représenté comme une espérance :

$$BEL = \mathbb{E}\Big[\sum_{t\geq 1} D_t \cdot PM_{t-1} \cdot Taux_{rachat}(r_t) \cdot [1 + TMG + (Taux_{PB} \cdot r_t - TMG)^+]\Big]$$

Nous pouvons séparer la partie déterministe et la partie aléatoire. La partie aléatoire est appelée FDB (Future Discretionary Benefits), et la partie déterministe est appelée BEG (Best Estimate Garanti) :

$$FDB = BEL - BEG = BEL - \mathbb{E}\Big[\sum_{t\geq 1} D_t \cdot PM_{t-1} \cdot Taux_{rachat}(r_t) \cdot [1 + TMG]\Big]$$

La complexité et la multitude des options financières nous poussent à utiliser des méthodes Monte-Carlo afin de pouvoir les valoriser. C'est pourquoi les assureurs utilisent des GSE afin de pouvoir projeter toutes ces variables.

La TVOG va correspondre à la différence entre l'espérance des profits futurs actualisés sur les scénarios stochastiques du GSE et les profits futurs actualisés sur le scénario déterministe équivalent certain. Le scénario équivalent certain est obtenu en projetant les variables économiques selon la courbe des taux initiale. Ainsi, l'indice action évoluera selon les taux sans risque de la courbe initiale, et les taux constatés sur les années de projection correspondront aux taux forwards calculés avec la courbe des taux initiale :

$$TVOG = BEL - BEC^{EC}$$

La TVOG (Time Value of Options and Guarantees) va alors représenter le coût de toutes les options et garanties financières qui sont « cachées » dans les contrats.

Par conséquent, nous pouvons en déduire qu'il n'est pas forcément intéressant pour un assureur de maximiser l'espérance du taux de rendement de ses actifs. Les options « cachées » le poussent plutôt à faire en sorte de ne jamais avoir un taux de rendement négatif, car, dans le cas des fonds euro, il assumera seul la perte. Par exemple, si l'assureur fait un gain de 3%, il devra en partager une partie avec ses assurés avec la PB. Cependant, s'il fait une perte de 1%, ses assurés auront tout de même un taux servi de 0%, et l'assureur devra donc assurer seul la perte de 1%. Un assureur a donc tout intérêt à lisser son taux de rendement, de sorte qu'il soit au moins supérieur au TMG. Cela démontre tout l'intérêt de mettre en place des stratégies de couverture afin d'éviter au maximum les situations dans lesquelles l'assureur devrait assumer ces pertes.

Quatrième partie

STRATÉGIES DE COUVERTURE : ACTIONS

Chapitre 11

Présentation des stratégies Action

Dans un contexte de taux bas, BNP Paribas Cardif a souhaité augmenter son exposition sur les marchés actions. En effet, augmenter son exposition sur ces marchés permet d'augmenter le rendement généré par son actif. Cette hausse du TRA va donc engendrer une hausse du taux servi, ce qui va permettre à BNP Paribas Cardif de satisfaire ses clients.
Cependant, les contraintes règlementaires liées à Solvabilité 2 limitent cette hausse d'exposition. En effet, augmenter son exposition sur les marchés action provoque une hausse du coût de capital règlementaire, ainsi qu'une diminution des fonds propres économiques, en raison d'une volatilité plus élevée. Par conséquent, BNP Paribas Cardif cherche à développer des stratégies de couverture asymétriques lui permettant de respecter ces contraintes, tout en ayant une exposition sur les marchés actions suffisante pour satisfaire ses clients.

L'objectif de BNP Paribas Cardif est donc principalement de se protéger contre une baisse de l'indice action. C'est pourquoi nous avons établi une stratégie de base en conséquent : Roll de Puts de maturité 1 an pendant 10 ans. Ainsi, chaque année, du 31/12/2017 au 31/12/2027, nous achetons un Put de maturité 1 an.

Afin de pouvoir tester cette stratégie, nous avons créé un outil permettant de projeter une stratégie de couverture sur une table de scénarios stochastiques générés par un GSE. C'est un outil très flexible qui permet notamment de simuler des stratégies statiques, dynamiques, ou même de prendre en compte un stock d'options déjà possédé par l'entreprise. Vous pourrez trouver plus de détails sur cet outil au sein de mon rapport de stage.

Grâce à cet outil, nous avons pu simuler la mise en place des stratégies sur l'ensemble des scénarios. Nous obtenions donc, pour chaque année de projection, la valeur des primes payées pour les options désirées, la valeur de marché de ces options jusqu'à maturité, les cash-flows qu'elles généraient (bruts, déflatés en fin d'année, ou actualisés en t_0), le nominal couvert ou bien l'amortissement comptabilisé.

Nous avons pu ensuite extraire un certain nombre de ces variables, telles que les cash-flows générés déflatés en fin d'année, l'amortissement enregistré chaque année, la valeur de marché de nos options, ou le nominal couvert.
Ensuite, nous avons transféré ces variables dans le modèle Prophet ALS présenté précédemment (section 10.1). Ainsi, nous avons pu simuler l'impact de la prise en compte de nos stratégies de couverture sur le bilan économique de BNP Paribas Cardif.

Nous avons donc testé cette stratégie pour différentes valeurs de strikes : 60%, 70%, 80%, 90%, 100%. Le strike est en pourcentage de l'indice action (SX5E : dividendes exclus) au moment de l'achat du Put. Notons que nous avons choisi de couvrir 10% de la poche action, donc le nominal du Put acheté chaque année correspond à 10% de la poche action.

Par ailleurs, nous avons aussi effectué des stratégies plus élaborées : des stratégies autofinançantes. Le principe étant de financer l'achat du Put par la vente d'une autre option. Ainsi, nous avons testé un autofinancement par :

- **La vente d'un Call :** On mise sur l'effet inverse, on se protège à la baisse et on s'expose à la hausse.
- **La vente d'un Put avec nominal x10 :** On vend un Put avec un nominal 10 fois plus important. Ainsi, le strike de ce Put sera beaucoup plus éloigné de la monnaie que le Put autofinancé. Nous misons donc sur la survenance des scénarios très rares, en s'exposant avec un effet de levier.

Pour résumer, nous avons testé 3 types de stratégies différentes pour les actions :

1. Roll de Puts de maturité 1 an : 60% / 70% / 80% / 90% / 100%
2. Roll de Puts de maturité 1 an, autofinancés par la vente de Calls : 60% / 70% / 80% / 90% / 100%
3. Roll de Puts de maturité 1 an, autofinancés par la vente de Puts avec nominal x10 : 60% / 70% / 80% / 90% / 100%

Chapitre 12

Univers Monde-Réel

Dans un premier temps, nous avons testé nos stratégies en univers RW. Pour ce faire, nous avons utilisé la table stochastique fournie par le GSE RW. Vous pourrez trouver la description des scénarios générés précédemment (chapter 5). Rappelons que les scénarios qui ont été générés par ce GSE représentent la vision prospective des marchés par les économistes de BNP Paribas Cardif.

Dans cet univers, nous allons donc pouvoir étudier les impacts de nos stratégies de couverture sur le TRA, mais aussi sur le taux servi, et donc la satisfaction client et les rachats dynamiques associés.

12.1 Volatilité

Afin de valoriser les Puts en univers RW, nous avons utilisé la nappe de volatilités implicites log-normales fournie par Bloomberg. Il s'agit d'une structure par termes de volatilité qui prend en compte le smile de volatilité. Il s'agit donc des volatilités réellement utilisées sur le marché. Nous avons donc extrait les volatilités implicites sur l'indice SX5E en date du 31/12/2017 (date de notre table stochastique).

Par ailleurs, comme les Puts que nous achetons peuvent être très éloignés de la monnaie (autofinancement d'un Put avec un strike à 60% par un autre Put avec un nominal x10), nous avons prolongé la nappe de volatilité pour la maturité 1 an à l'aide de Bloomberg. Il n'est pas nécessaire de la prolonger pour les autres maturités, puisque la fréquence de revalorisation de Prophet est annuelle, et nous n'achetons que des Puts de maturité 1 an.

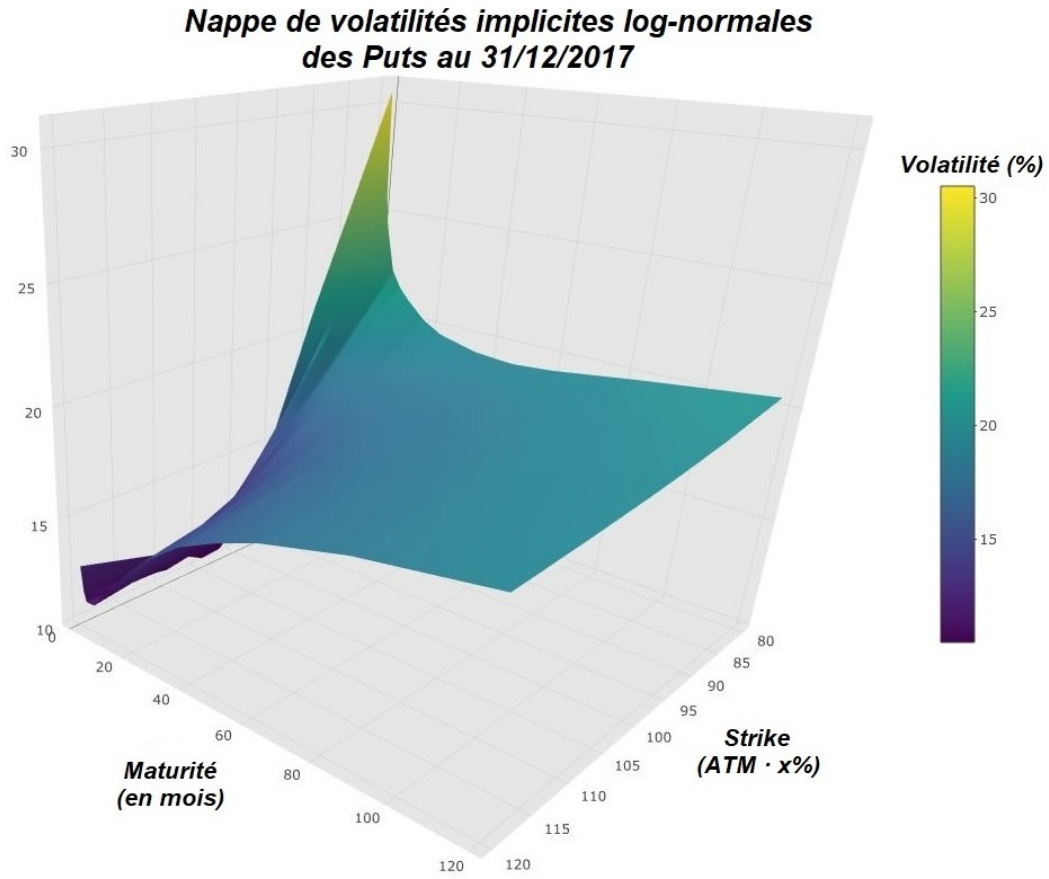


FIGURE 12.1 – Nappe de volatilités implicites log-normales des Puts

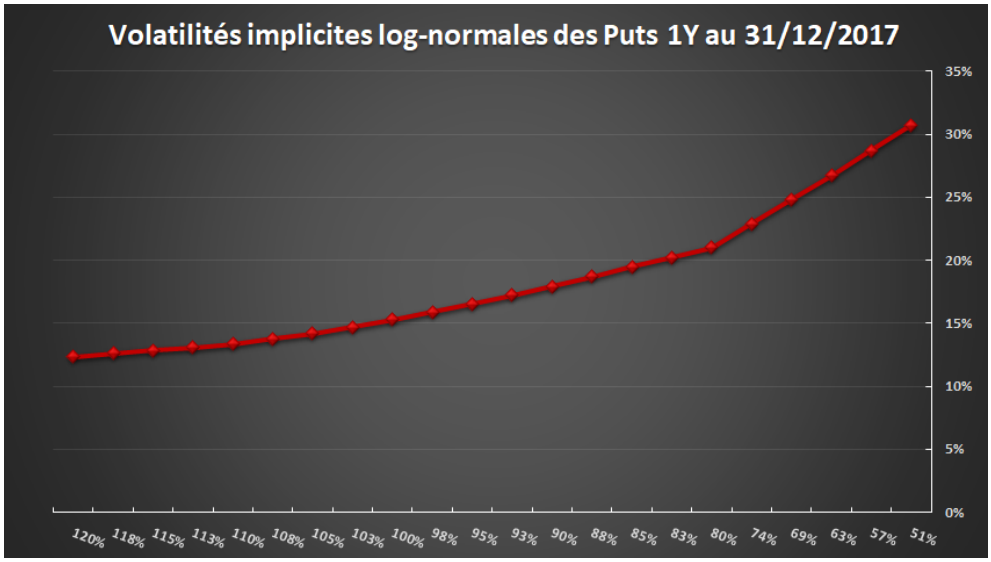


FIGURE 12.2 – Volatilités implicites log-normales des Puts 1Y

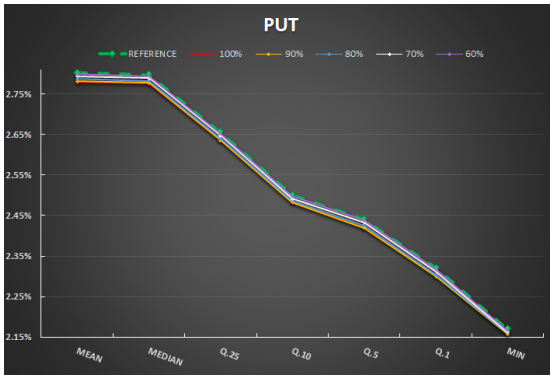
12.2 Distribution du TRA

Dans un premier temps nous allons observer l'impact de nos stratégies de couverture sur la distribution du TRA. Pour un soucis de lisibilité des graphiques, nous avons décidé de seulement représenter la queue inférieure de la distribution, à savoir la médiane, les quantiles 25%, 10%, 5%, 1%, et le minimum. Nous avons aussi représenté la moyenne afin de nous donner une idée de l'évolution sur la queue supérieure. Malgré tout, nous avons vu précédemment (section 10.9) que l'assureur souhaite avant tout se couvrir pour des TRA faibles, puisque nous pouvons dire qu'il partage ses gains avec ses assurés, mais pas ses pertes, qu'il doit entièrement assumer.

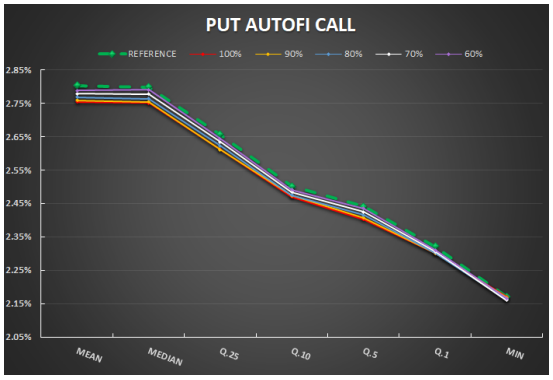
Afin d'effectuer une comparaison des stratégies, nous avons calculé la moyenne des TRA générés par chacune des stratégies sur les 10 premières années (de 2018 à 2027). Cet horizon temporel correspond à la période d'application de nos stratégies de couverture action : aucun cash-flow ne sera généré par les couvertures au-delà de cette période.

Premièrement, nous pouvons remarquer que les stratégies consistant à acheter des Puts (seuls) ou des Puts autofinancés par des Calls n'ont pas l'air intéressantes (Figure 12.3a et Figure 12.3b). En effet, la distribution du TRA avec ces couvertures est toujours inférieure à celle sans couverture.
Cette observation met en exergue le fait que le GSE RW comprend une prime de risque positive dans la modélisation de l'indice action (section 5.2) : comme l'indice action va toujours monter en moyenne, nous allons très peu exercer les Puts, alors que les Calls seront très souvent exercés. Par conséquent, ne pas prendre en compte cette prime de risque dans la valorisation de nos options nous oblige à « sur-valoriser » les Puts, et à l'inverse, à « sous-valoriser » les Calls. Ce phénomène peut être interprété en disant que la BNP a une vision plus positive des actions que le marché, et donc la BNP suppose que le marché sous-estime le prix des Calls / sur-estime le prix des Puts.

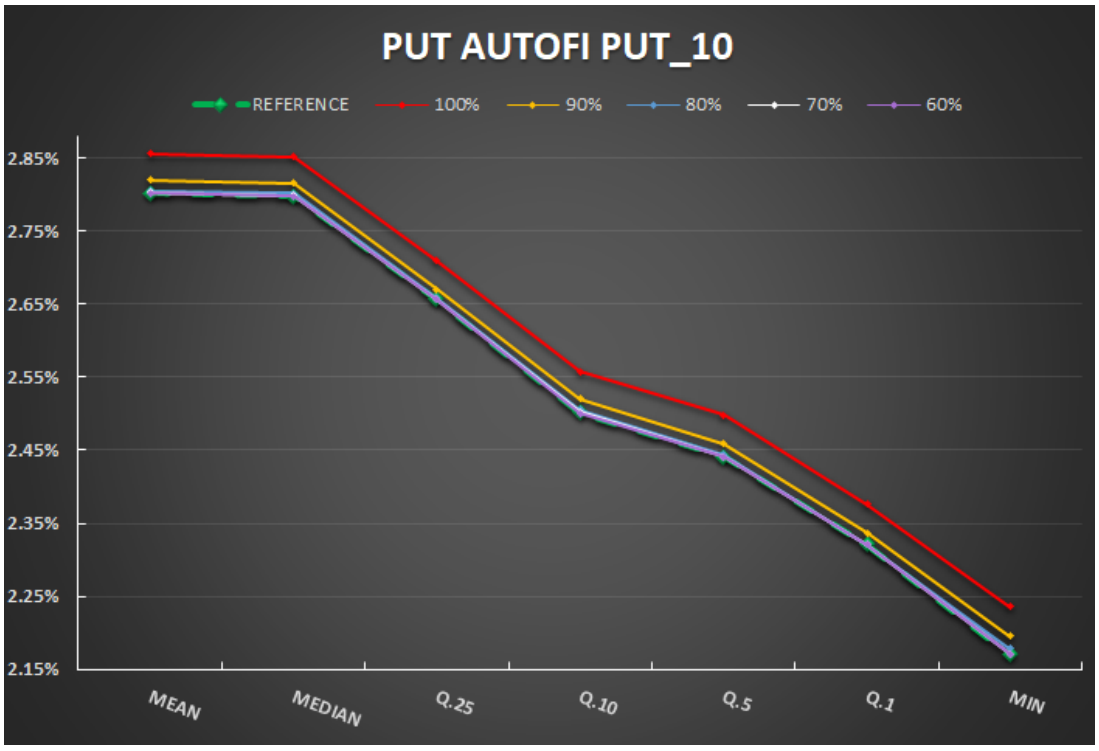
Par ailleurs, nous pouvons affirmer que les stratégies consistant à acheter des Puts autofinancés par des Puts avec un nominal 10 fois supérieur semblent très intéressantes (Figure 12.3c), surtout celles avec un strike à 90% et 100% (ATM). En effet, les distributions des TRA sont toujours supérieures à celle de référence.



(a) Put



(b) Put autofinancé par Call



(c) Put autofinancé par Put x10

FIGURE 12.3 – Impact des stratégies de couverture sur la distribution des TRA

12.3 Distribution des gains/pertes de TRA

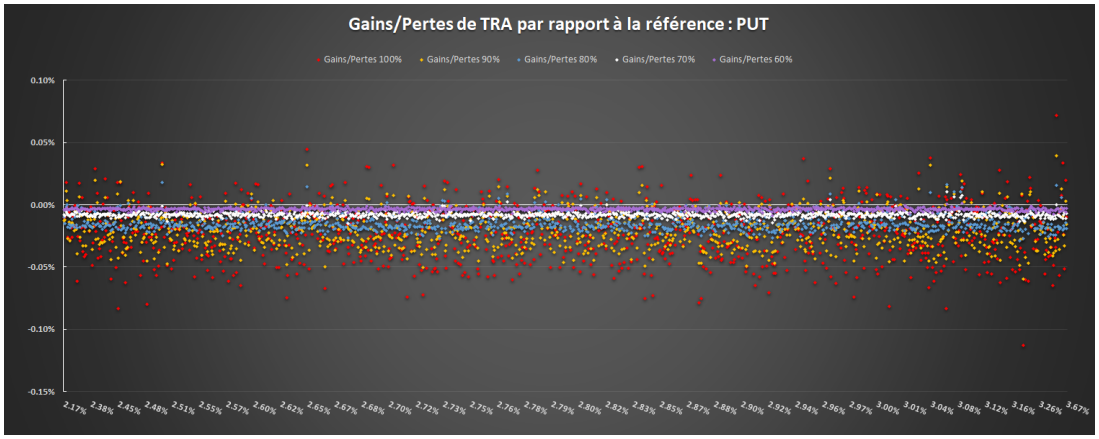
Même si la distribution du TRA nous semble moins intéressante pour les stratégies consistant à acheter des Puts seuls ou autofinancés par des Calls, nous pouvons tout de même nous demander si ces stratégies nous font gagner du TRA par rapport à la référence dans des cas précis (surtout dans les scénarios défavorables). Pour les stratégies autofinancées par des Puts, nous pouvons aussi nous demander si elles ne nous aident pas seulement lorsque le TRA est déjà suffisamment important et pas lorsque nous le souhaitons le plus : en cas de TRA faibles.

Pour ce faire, nous avons trié les simulations par TRA croissant (toujours le même TRA moyenné sur les 10 premières années de la section précédente). Ainsi à gauche du graphique nous pouvons observer les pires scénarios de référence, et sur la droite, les meilleurs scénarios.

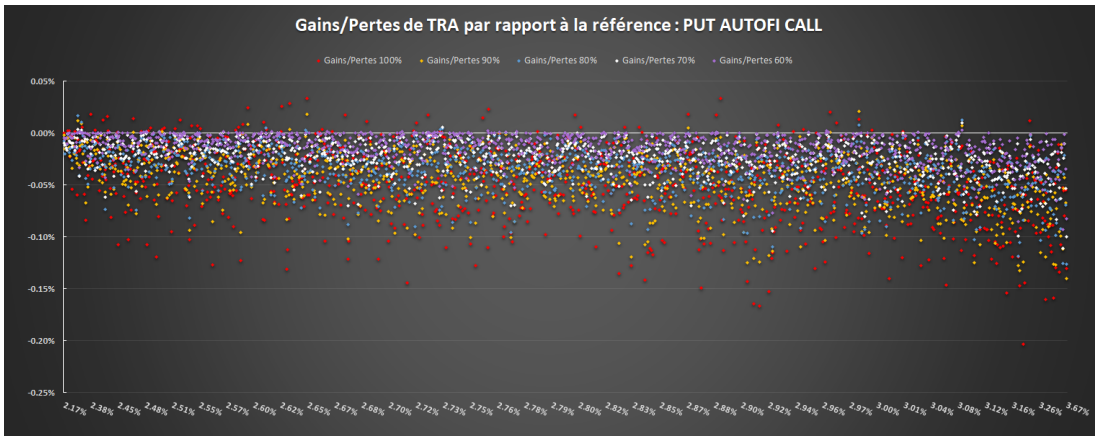
Les résultats sont clairs : les stratégies consistant à acheter des Puts sans autofinancement (Figure 12.4a), ou autofinancés par des Calls (Figure 12.4b), avec un strike compris entre 60% et 80%, ne génèrent presque aucun scénario dans lequel la stratégie de couverture nous aura permis d'obtenir un meilleur TRA. Les stratégies avec strike plus proche de la monnaie (90% et 100%) nous permettent d'obtenir certains scénarios avec un TRA plus élevé que sans couverture, mais en échange de beaucoup de scénarios où nous perdons beaucoup de TRA.
Nous pouvons donc affirmer que ces 2 stratégies ne sont pas intéressantes en termes de gain de TRA.

Les stratégies autofinancées par des Puts avec nominal 10 fois supérieurs semblent cependant très intéressantes (Figure 12.4c). En particulier les stratégies avec strike à 90% et 100%. Nous allons donc séparer ces 2 stratégies afin d'obtenir des graphiques plus nets (Figure 12.5a et Figure 12.5b).

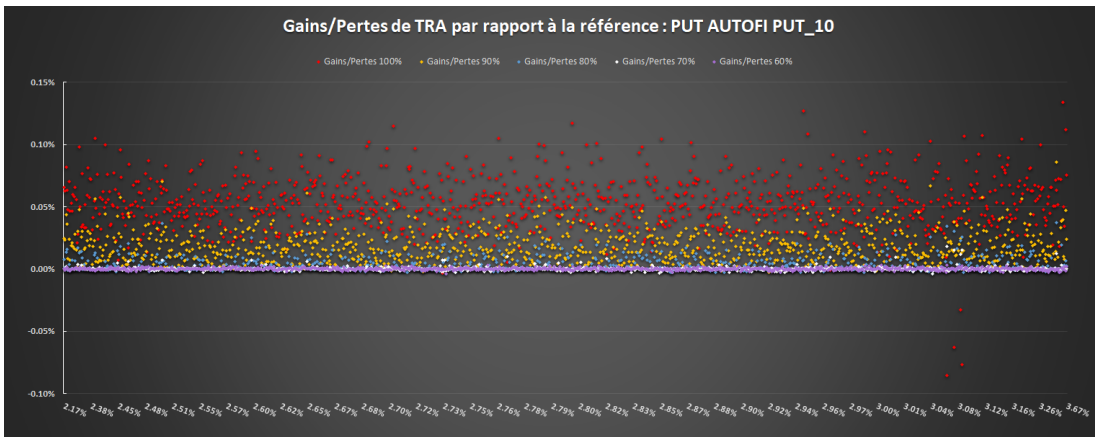
Nous pouvons donc affirmer que ces stratégies ne nous aident pas seulement en cas de scénarios défavorables, mais dans tous les scénarios ! Nous pouvons cependant remarquer que la stratégie avec strike à 100% génère 4 scénarios (sur 1000) dans lesquels nous perdons des points de TRA par rapport à la référence. Nous pouvons éviter cela en prenant la stratégie avec strike à 90% : nos gains sont légèrement réduits, mais nous n'obtenons aucun scénario avec un TRA inférieur à celui obtenu sans appliquer de stratégie.



(a) Put

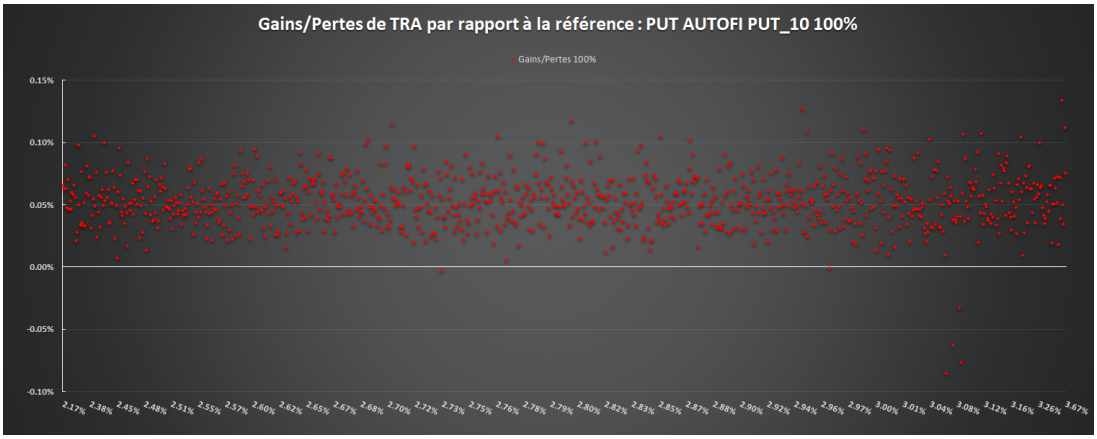


(b) Put autofinancé par Call

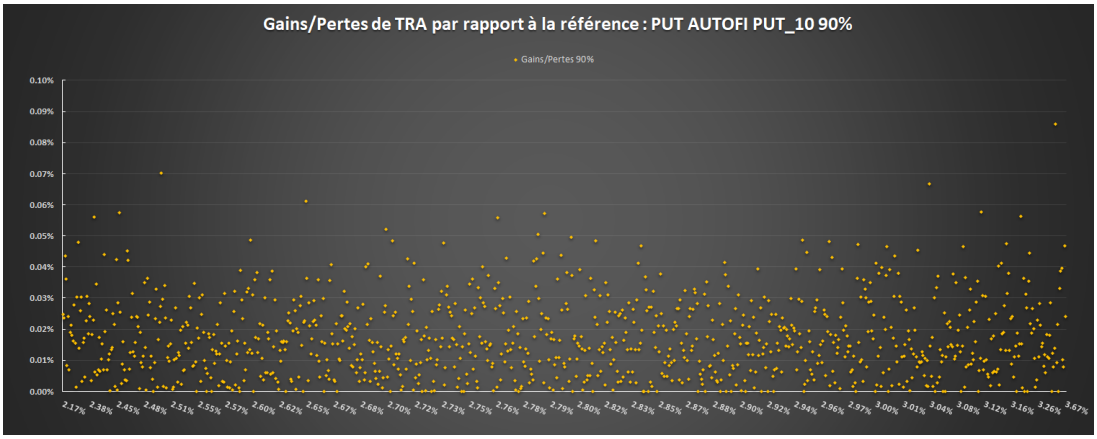


(c) Put autofinancé par Put x10

FIGURE 12.4 – Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture



(a) Put autofinancé par Put x10 : 100%



(b) Put autofinancé par Put x10 : 90%

FIGURE 12.5 – Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture : Zoom

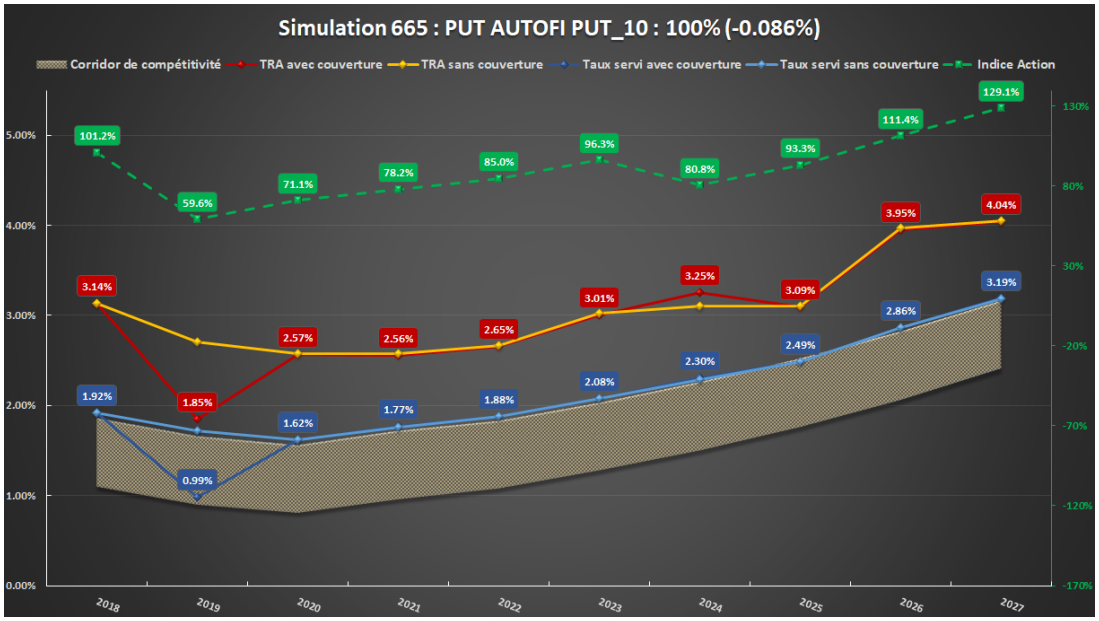
12.4 Taux servi et satisfaction client

12.4.1 Analyse des simulations atypiques

Grâce aux sections précédentes, nous avons pu extraire les stratégies qui nous semblaient être les plus efficaces :

- Roll de Puts 1Y avec strike 100%, autofinancés par des Puts avec nominal x10
- Roll de Puts 1Y avec strike 90%, autofinancés par des Puts avec nominal x10

Nous allons donc maintenant analyser de manière plus approfondie ces 2 stratégies. Commençons avec celle comprenant un strike ATM (100%). A l'aide des graphiques précédemment obtenus, nous avons pu extraire la simulation qui nous fait perdre le plus de TRA par rapport à la référence (-0.086%), ainsi que la meilleure simulation ($+0.134\%$).



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Strike	100.0%	99.3%	56.6%	66.5%	71.8%	76.7%	85.5%	70.1%	79.6%	93.5%
Strike autofinancement	69.0%	68.7%	39.0%	45.9%	49.6%	53.0%	59.4%	48.6%	55.0%	65.1%
Prime (payée au 1er Janvier)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (reçu le 31 Décembre)	0.7%	-78.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	15.4%	0.0%	0.0%	0.0%

(b) Options associées

FIGURE 12.6 – Stratégie Put 100% Autofinancé par Put x10 : Simulation 665

▷ **Pire simulation (665) : -0.086% (Figure 12.6) :** Nous pouvons observer que la perte en TRA est concentrée sur une année seulement, lors d'un choc de plus de 40%

sur l'indice action (101% à 59%). Malgré la grosse perte en TRA sur cette année, nous pouvons observer que le taux servi reste correct, puisqu'il est toujours dans le corridor de compétitivité. Cela est dû à la réserve de PPB (section 10.3) qui est très importante sur les premières années : grâce à cette réserve, nous pouvons servir un taux compétitif dans presque n'importe quelle situation :

Politique de dotation à la PPB : Sur le graphe suivant (Figure 12.7), nous pouvons remarquer que la baisse du taux servi a été plus rapide que la baisse du TRA sur ces dernières années. Cette diminution volontariste du taux servi est due à une politique de dotation à la PPB depuis 2012. Cette politique a permis à BNP Paribas Cardif d'atteindre un niveau de PPB atteignant presque 5% des PM. Ainsi, cette réserve nous permet de servir un taux compétitif en cas de scénario défavorable.

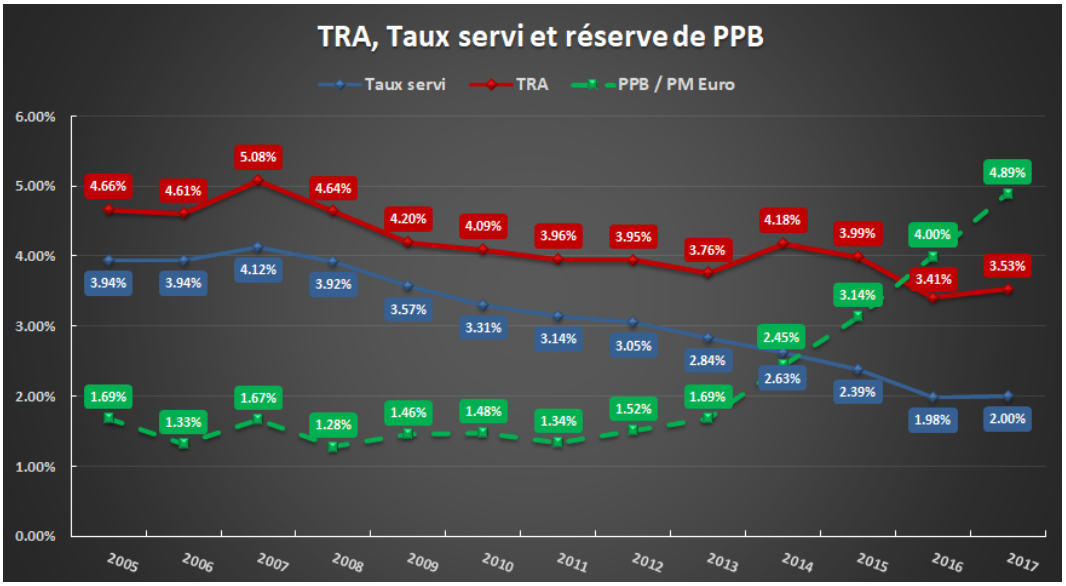
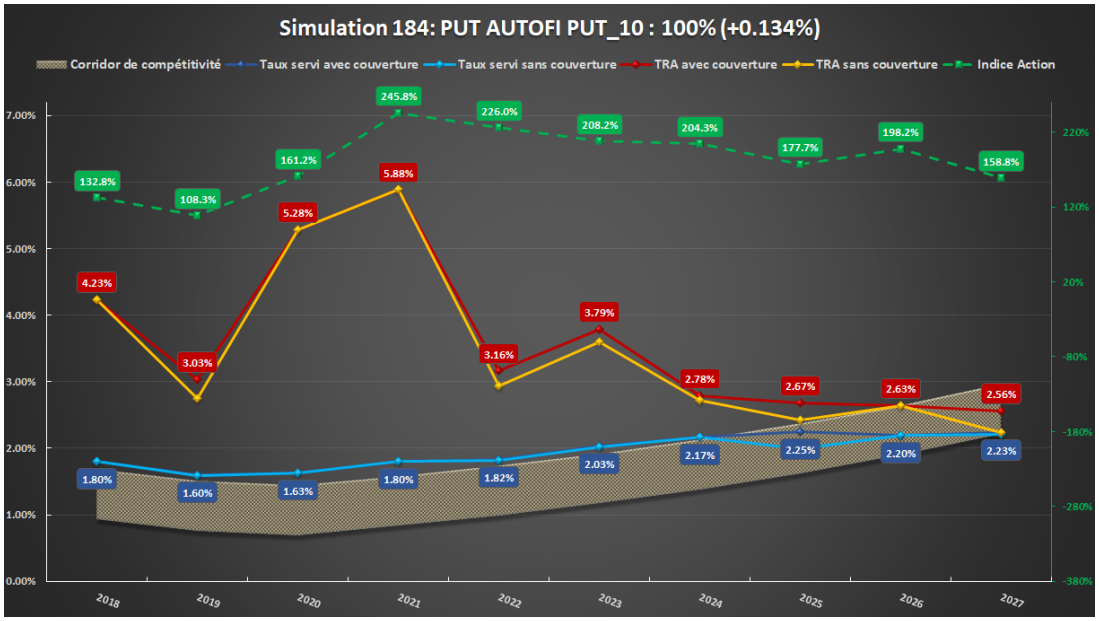


FIGURE 12.7 – Diminution volontariste du taux servi et politique de dotation à la PPB

▷ **Meilleure simulation (184) : +0.134% (Figure 12.8) :** Nous gagnons du TRA à chaque fois que l'indice action baisse. Les baisses ne sont pas suffisantes pour activer le Put avec un nominal x10, donc nous gagnons de l'argent avec le Put x1, sans en perdre avec le Put x10. Nous pouvons voir que, de manière générale, pour que le Put x10 soit exercé, il faut qu'il y ait un choc d'environ 30% sur l'indice action. Or ces chocs sont très rares : comme nous pouvons le voir sur le cône de diffusion des log-rendements action (Figure 5.7), le quantile 1% est de l'ordre de -30%, et le minimum fluctue entre -40 et -50%. Notons cependant que le cône de diffusion représente les log-rendements, ainsi un choc de -30% équivaut à un log-rendement de -36%. Les chocs de -30% correspondent donc à moins de 1% des rendements générés par le GSE RW.



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

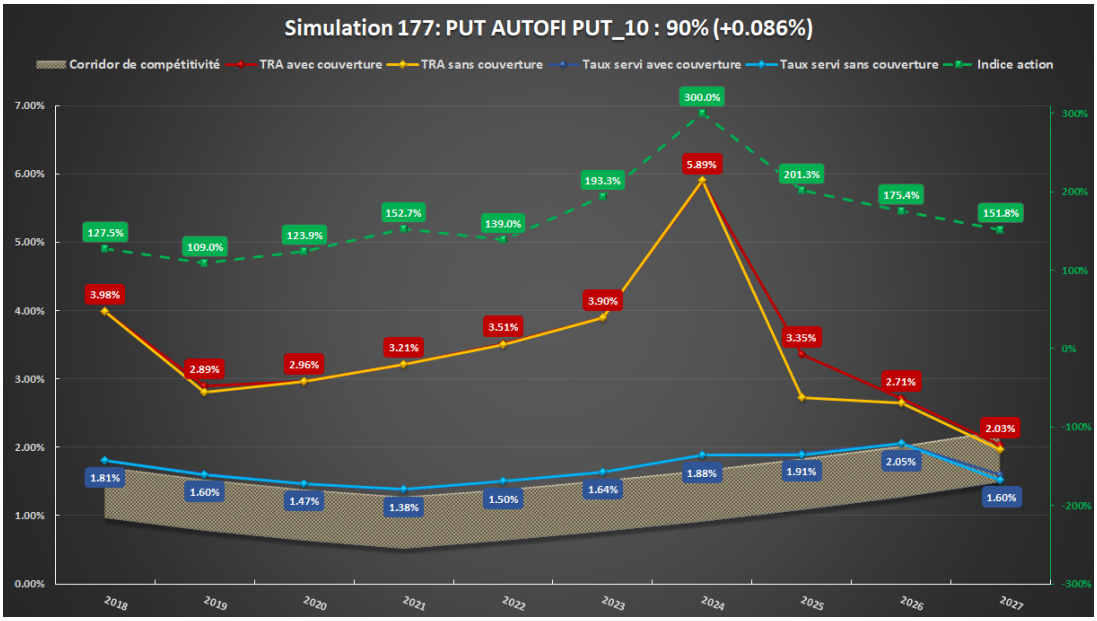
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Strike	100.0%	130.9%	104.3%	153.2%	230.7%	207.7%	184.5%	180.3%	153.5%	168.2%
Strike autofinancement	69.0%	90.3%	71.8%	106.0%	160.2%	144.0%	130.1%	124.7%	106.5%	116.1%
Prime (payée au 1er Janvier)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (reçu le 31 Décembre)	0.0%	26.6%	0.0%	0.0%	23.0%	20.3%	7.1%	26.9%	0.0%	36.6%

(b) Options associées

FIGURE 12.8 – Stratégie Put 100% Autofinancé par Put x10 : Simulation 184

Afin d'éviter les scénarios dans lesquels le Put x10 est exercé, nous pouvons observer la stratégie consistant à acheter des Puts avec un strike à 90%. Avec cette stratégie, le Put x10 qui va permettre d'autofinancer le Put x1 va avoir un strike encore plus hors de la monnaie. Afin que le Put x10 soit exercé, il est nécessaire qu'un choc d'environ 40% survienne, soit un log-rendement de -50%. Or comme nous l'avons vu sur le cône de diffusion des log-rendements de l'indice action (Figure 5.7), le minimum n'atteint jamais -50% : ainsi le Put x10 ne sera jamais exercé sur les scénarios fournis par notre GSE RW.

Grâce au nuage de points ci-dessus (Figure 12.5b), nous avons pu extraire la meilleure simulation. Il n'y a pas de « pire » simulation, car nous ne faisons jamais de perte : au pire nous payons la prime du Put x1, mais elle est autofinancée par la vente du Put x10, qui lui ne sera jamais exercé.



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Strike	90.0%	113.1%	94.5%	105.6%	128.2%	114.3%	156.7%	240.2%	156.6%	133.5%
Strike autofinancement	60.7%	76.3%	63.7%	71.2%	86.6%	77.2%	105.9%	162.3%	105.6%	90.0%
Prime (payée au 1er Janvier)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (reçu le 31 Décembre)	0.0%	8.1%	0.0%	0.0%	1.3%	0.0%	0.0%	66.2%	8.3%	8.0%

(b) Options associées

FIGURE 12.9 – Stratégie Put 90% Autofinancé par Put x10 : Simulation 177

▷ **Meilleure simulation (177) : +0.086% (Figure 12.9) :** Comme pour la stratégie avec un strike à 100%, nous gagnons du TRA lors des baisses de l'indice action (minimum 10% avec cette stratégie). Par ailleurs, aucune baisse n'est suffisamment conséquente pour que le Put x10 soit exercé.

12.4.2 Taux servi non compétitif

A présent, nous pouvons nous demander si ces stratégies nous permettent d'éviter les scénarios dans lesquels nous avons des taux servis non compétitifs, c'est-à-dire des taux servis strictement inférieurs à la borne basse du corridor de compétitivité. Lorsque le taux servi est inférieur à cette valeur, des rachats dynamiques vont être déclenchés. Or ces rachats peuvent provoquer la réalisation de MVL, ce qui impactera fortement les résultats financiers. Il s'agit donc d'un cercle vicieux que nous souhaiterions éviter : l'objectif sera donc d'éviter ces rachats.

Par ailleurs, BNP Paribas ajoute un spread de 8bps au taux cible lors des analyses sur les 10 premières années. Ce spread est lié aux gammes de contrats, et, à titre indicatif, il représente 10% de l'OAT10Y qui est la référence du taux cible (10.4).

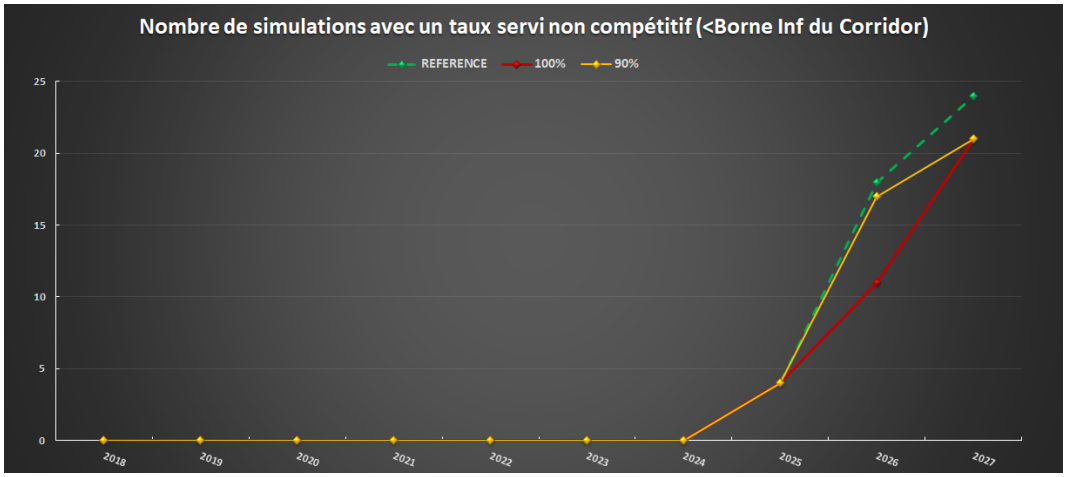


FIGURE 12.10 – Nombre de simulations avec un taux servi non compétitif

Sans stratégie, sur les 10 premières années, nous pouvons remarquer que nous rencontrons que très peu de scénarios dans lesquels nous servons des taux non compétitifs : 46 années avec un taux servi non compétitif, réparties sur 36 scénarios différents. Nous pouvons d'ailleurs remarquer qu'aucune simulation ne génère un taux servi non compétitif sur les premières années : cela est dû à la réserve de PPB qui est très importante sur les premières années : grâce à cette réserve, nous pouvons servir un taux compétitif dans presque n'importe quelle situation (cf politique de dotation de PPB depuis 2012 : Figure 12.7). La stratégie avec un strike à 100% nous permet d'éviter 10 années avec un taux servi non compétitif (sur 46), ainsi nous passons de 36 à 29 scénarios avec un taux servi non compétitif. Quant à la stratégie avec un strike à 90%, elle est moins efficace puisqu'elle ne nous permet d'éviter que 4 années avec un taux servi non compétitif, ce qui nous fait passer de 36 à 33 scénarios avec un taux servi non compétitif.

Nous pouvons aussi nous demander si ces stratégies nous permettent d'éviter des années avec un taux servi très nettement inférieur à la borne basse du corridor (années qui auraient provoqué beaucoup de rachats dynamiques), ou bien si ces stratégies nous permettent seulement d'éviter des années avec un taux servi très proche de la borne basse du corridor, sans avoir d'impact pour les années les plus défavorables.

Pour ce faire, nous allons observer la distribution de la différence entre le taux servi et la borne basse du corridor lors des années non compétitives. Nous pouvons remarquer que nous sommes juste très légèrement en-dessous du seuil de compétitivité (2.8bps au maximum sur la pire année). Les stratégies ne semblent pas nous aider dans un cas spécifique, elles nous aident aussi bien dans les cas les plus défavorables que dans les années avec un taux servi très proche du corridor.

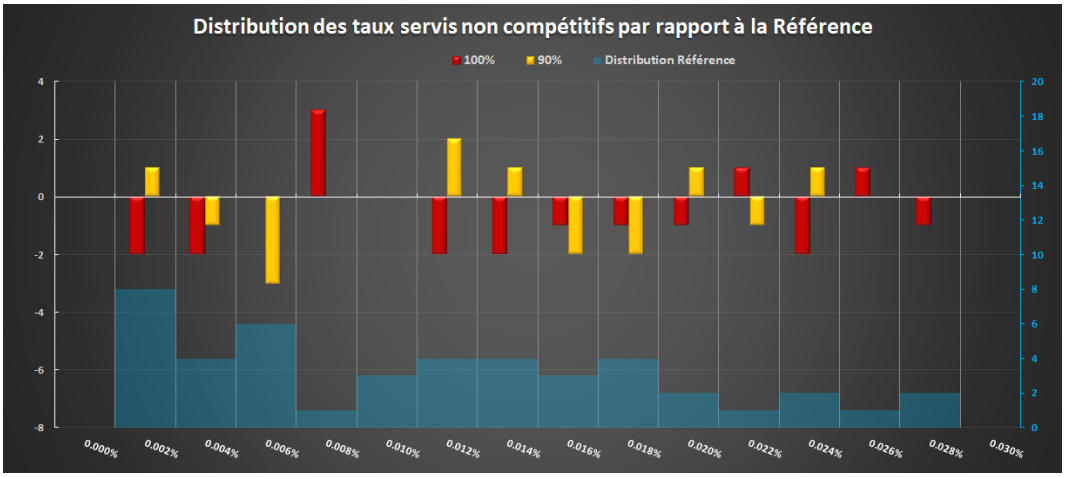


FIGURE 12.11 – Différence de la distribution des taux servis non compétitifs

12.4.3 Taux servi inférieur au taux cible

Comme il y a très peu de scénarios avec un taux servi non compétitif, et qu'en plus le déficit de compétitivité est très léger (2.8bps au maximum), nous avons décidé d'observer les scénarios avec un taux servi inférieur au taux cible. Ainsi, nous allons observer les scénarios dans lesquels nous sommes « moins bons » que le marché.

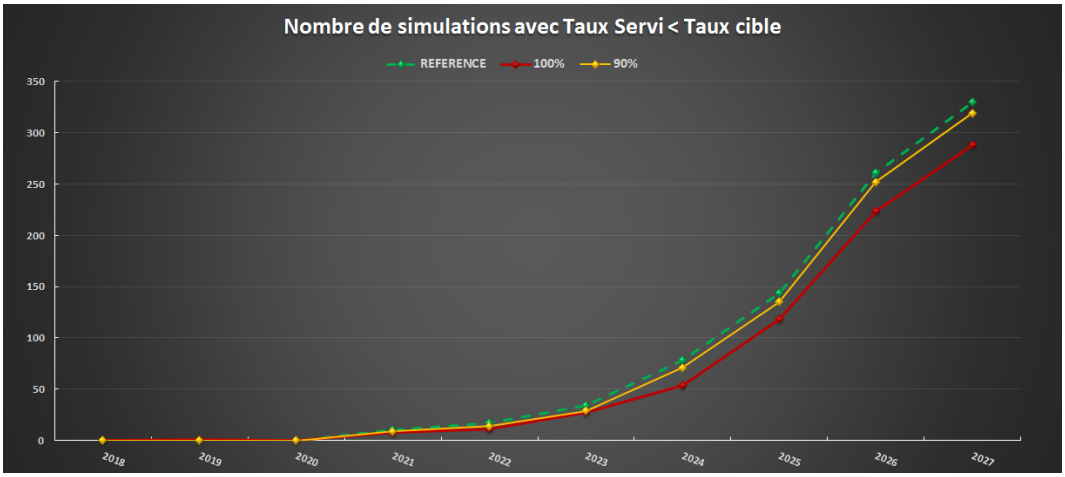


FIGURE 12.12 – Nombre de simulations avec un taux servi inférieur au taux cible

Sans stratégie, sur les 10 premières années, nous pouvons remarquer que nous rencontrons beaucoup de scénarios dans lesquels le taux servi est inférieur au taux de marché moyen :

- **Référence :** 874 années avec un taux servi non compétitif, réparties sur 487 scénarios différents.

- **Strike à 100% :** 731 (-143) années avec un taux servi non compétitif, réparties sur 416 (-71) scénarios différents.
- **Strike à 90% :** 829 (-45) années avec un taux servi non compétitif, réparties sur 469 (-18) scénarios différents.

La stratégie avec un strike à 100% est donc toujours plus efficace que la stratégie avec un strike à 90% en termes de nombre d'années avec un taux servi qui bat le marché.

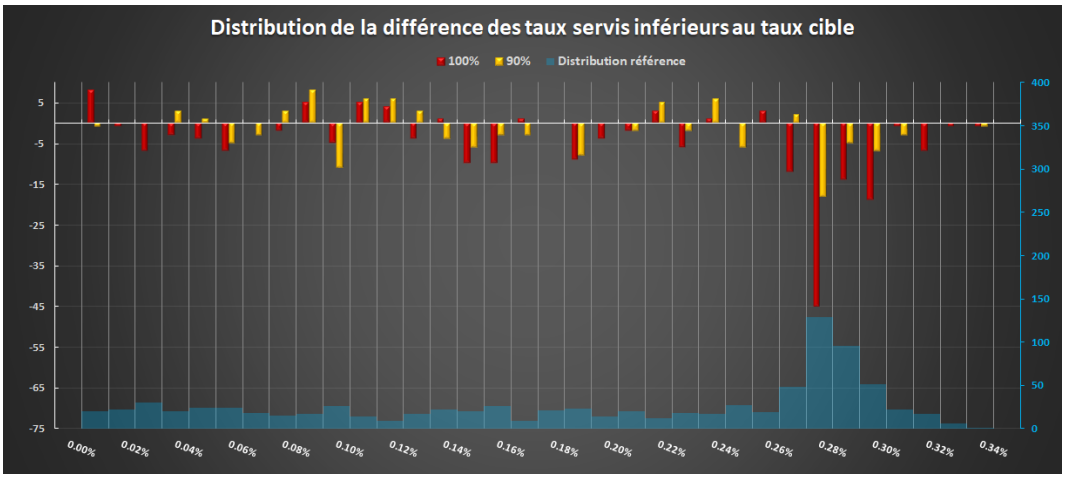


FIGURE 12.13 – Différence de la distribution des taux servis inférieurs au taux cible

Nous pouvons observer que le déficit de compétitivité maximal est de l'ordre de 35bps. Les stratégies nous permettent surtout d'éviter les années avec un déficit de compétitivité compris entre 25bps et 30bps, ce qui est très bien puisque ce sont les pires années.

Rappelons que la borne inférieure du corridor se situe à -30bps du taux cible. Or les stratégies de couverture nous permettent justement de gagner des points de TRA entre -25bps et -30bps. Nous pouvons donc affirmer que les couvertures nous permettent de rester plus longtemps dans le corridor sans avoir à effectuer de reprise de PPB.

Chapitre 13

Univers Risque-Neutre

Maintenant que nous avons pu analyser nos stratégies de couverture en univers RW, qui représente la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif, nous allons analyser nos stratégies en univers RN. Nous allons donc projeter nos stratégies de couverture sur la table stochastique fournie par le GSE RN décrit précédemment (chapter 6).

Cet univers va nous permettre d'étudier les engagements que BNP Paribas Cardif devra honorer (BEL), mais aussi la valeur de l'activité d'assurance (VIF). Par ailleurs, nous vérifierons les éventuels écarts de convergence de notre modèle ALM, afin qu'il n'y ait pas de création ou de destruction de richesse lors de la projection.

Nous pourrons aussi analyser de manière plus détaillée la VIF, qui représente la valeur actualisée des résultats futurs distribués aux actionnaires, en étudiant les variables économiques qui la composent : PVFP et TVOG.

13.1 Correctifs de martingalité

En univers RN, il est nécessaire que les actifs projetés soient martingales. Ainsi, aucune richesse ne sera créée ou détruite.

Pour ce faire, nous avons dû appliquer 2 correctifs :

1. Premièrement, les scénarios produits par le GSE RN ne permettent pas à toutes les options possibles d'être exercées (Figure 6.4). Par exemple, nous pouvons voir que le log-rendement annuel minimal jusqu'en 2026 n'atteint pas -70% (soit un rendement de -50%). Ainsi, un Put 1Y de strike 50% ne sera jamais exercé sur ces premières années : afin que cette option soit martingale, son prix devrait être nul. Par conséquent, nous avons limité les possibilités d'achats d'options : les options pouvant être achetées sont celles qui peuvent être exercées sur une simulation au moins.

2. Deuxièmement, nous avons dû calculer une nouvelle nappe de volatilité. En effet, si nous utilisons la nappe de volatilité de marché décrite précédemment (Figure 12.1), les options ne pourront pas être martingales. Nous avons donc calculé une nappe de volatilité permettant de rendre toutes les options martingales sur notre table de scénarios stochastiques :

$$Prix = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{s=1}^{1000} \sum_{t \geq 1} D_t^s \cdot CF_t^s \tag{13.1}$$

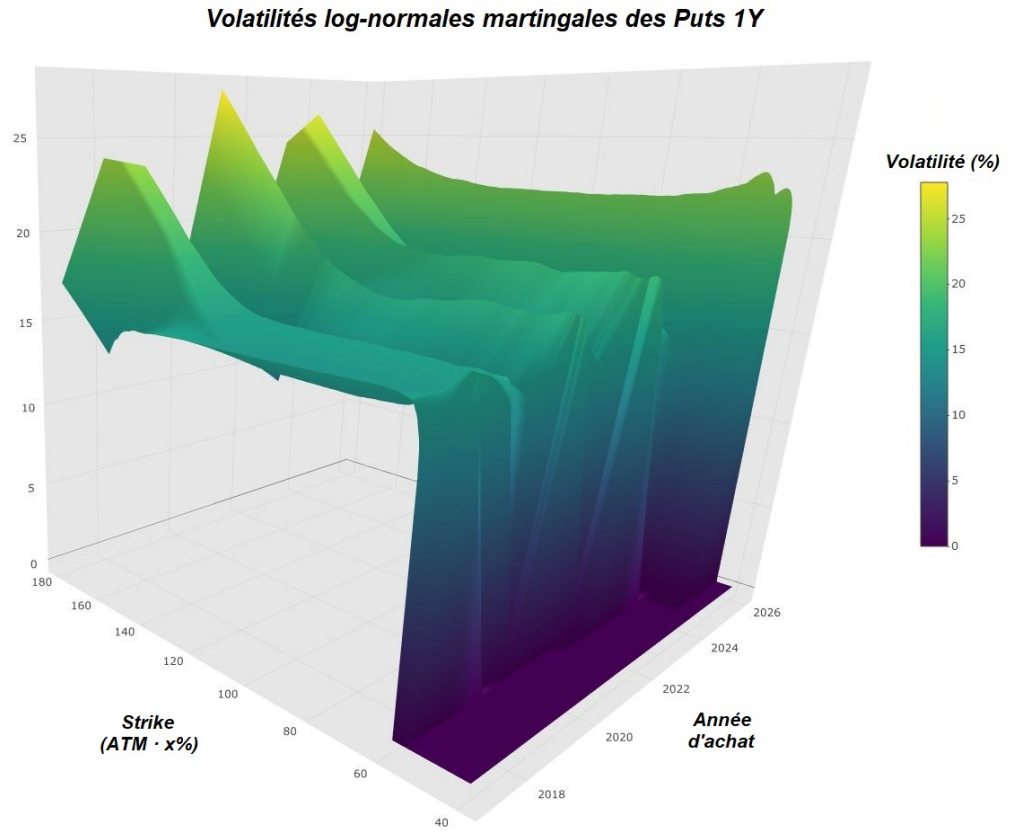


FIGURE 13.1 – Nappe de volatilités martingales log-normales des Puts 1Y

Nous pouvons donc bien observer la structure par termes des volatilités. En effet, lorsque nous sommes ATM, la volatilité correspond à celle utilisée par le GSE.

Par conséquent, nous pouvons remarquer que le smile de volatilité n'est plus pris en compte. Cela aura donc pour effet de relever le strike du Put autofinançant. Par exemple, pour la stratégie 100%, le strike autofinançant valait 69% en univers RW, alors qu'en univers RN, il vaudra 80% : nous serons plus facilement exposés à l'effet de levier.

13.2 Projection de la richesse

Dans un premier temps, nous allons analyser la richesse projetée par Prophet. Nous allons donc pouvoir observer comment est répartie cette richesse, mais aussi vérifier qu'aucune richesse n'ait été créée ou détruite lors de la projection. Pour des raisons de confidentialité, nous exprimerons les variables en pourcentage ou elles seront retraitées.

	VIF	BEL	EC	BEL + EC	MV en t0
REFERENCE	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT 60%	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT 70%	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT 80%	2.86%	97.05%	0.09%	97.14%	100.00%
PUT 90%	2.87%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
PUT 100%	2.89%	97.02%	0.09%	97.11%	100.00%
PUT AUTOCALL 60%	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT AUTOCALL 70%	2.86%	97.06%	0.09%	97.14%	100.00%
PUT AUTOCALL 80%	2.87%	97.05%	0.09%	97.13%	100.00%
PUT AUTOCALL 90%	2.89%	97.02%	0.09%	97.11%	100.00%
PUT AUTOCALL 100%	2.92%	96.99%	0.09%	97.08%	100.00%
PUT AUTOPUT 60%	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT AUTOPUT 70%	2.85%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
PUT AUTOPUT 80%	2.84%	97.07%	0.09%	97.16%	100.00%
PUT AUTOPUT 90%	2.82%	97.09%	0.09%	97.18%	100.00%
PUT AUTOPUT 100%	2.77%	97.14%	0.09%	97.23%	100.00%

FIGURE 13.2 – Répartition de la richesse projetée

Tout d'abord, rappelons que la valeur de marché de l'actif en t_0 est représentée par $BEL+VIF$ (chapter 10). Il ne faut cependant pas oublier l'éventuel écart de convergence que nous devons réallouer entre le BEL et la VIF (section 10.8), afin de s'assurer que le bon niveau de richesse soit projeté.

Sans appliquer de stratégie de couverture (référence), nous pouvons remarquer qu'un léger écart de convergence est constaté : 0.09%.
Ainsi, comme $EC > 0$, nous devons réallouer l'écart de convergence dans le BEL (en respect du choix de l'ACPR). Nous obtenons ainsi un nouveau BEL correspondant à 97.15% de la valeur de marché de l'actif en t_0, et une VIF à 2.85%.

Premièrement, nous pouvons affirmer que l'application de nos stratégies de couverture ne crée aucune fuite de valeur lors de la projection, l'écart de convergence est inchangée par rapport à la référence : 0.09%.

Ensuite, nous pouvons remarquer que les stratégies ont des impacts différents sur la répartition de la richesse entre le BEL et la VIF. Rappelons que le BEL représente la valeur actualisée la plus probable des engagements de l'assureur, alors que la VIF correspond à la valeur actualisée des résultats futurs de l'entreprise. L'objectif sera donc de maximiser la VIF, et ainsi minimiser le BEL.

- **Put :** Pour les stratégies consistant à acheter des Puts, nous pouvons remarquer que plus le strike se rapproche de la monnaie, plus les Puts auront un impact positif sur la répartition de la richesse entre le BEL et la VIF. En effet, pour la stratégie de couverture avec des Puts ATM, notre VIF passe de 2.85% à 2.89%, soit une augmentation relative de 1.4% des résultats futurs actualisés.

- **Autofinancement Call :** Ces stratégies ont le même effet que celles sans autofinancement : plus le strike est proche de la monnaie, plus le gain en VIF est important. Le gain maximal est atteint avec la stratégie ATM : 2.92%. Cet autofinancement nous permet d'augmenter encore plus la VIF, nous obtenons une hausse relative de 2.5% des résultats futurs actualisés.

- **Autofinancement Put nominal x10 :** Ces stratégies ont un impact négatif sur notre bilan : plus le strike est proche de la monnaie, plus notre VIF diminue, jusqu'à 2.77%, soit une perte relative de 2.80% des résultats futurs actualisés.

Dans la suite de cette partie, nous allons analyser de manière plus détaillée les stratégies qui impactent le plus la répartition de la richesse entre le BEL et la VIF, afin de comprendre les mécanismes qui engendrent ces gains ou ces pertes.

13.3 Distribution VIF

Nous avons vu précédemment quelles sont les stratégies ayant le plus d'impact sur la répartition de notre richesse, qu'il soit positif ou négatif. Ainsi, nous allons étudier en profondeur ces stratégies :

- Roll de Puts 1Y avec strike 100%
- Roll de Puts 1Y avec strike 100%, autofinancés par des Calls
- Roll de Puts 1Y avec strike 100%, autofinancés par des Puts avec nominal x10

Nous pouvons remarquer que les stratégies ont des impacts différents sur la distribution de la VIF (Figure 13.3). En effet, les stratégies consistant à acheter des Puts sans autofinancement ou autofinancés par des Calls semblent similaires : elles réduisent l'écart-type de la VIF, nous perdons moins de VIF lors des scénarios catastrophes, mais nous en gagnons moins lors des scénarios très haussiers.

La stratégie autofinancée par des Puts avec nominal x10 provoque l'effet inverse : l'écart-type de la VIF devient plus important, ses mouvements sont amplifiés dans les extrêmes. Ainsi, nous perdons plus de VIF dans les scénarios catastrophes, mais nous en gagnons plus dans les scénarios très haussiers.

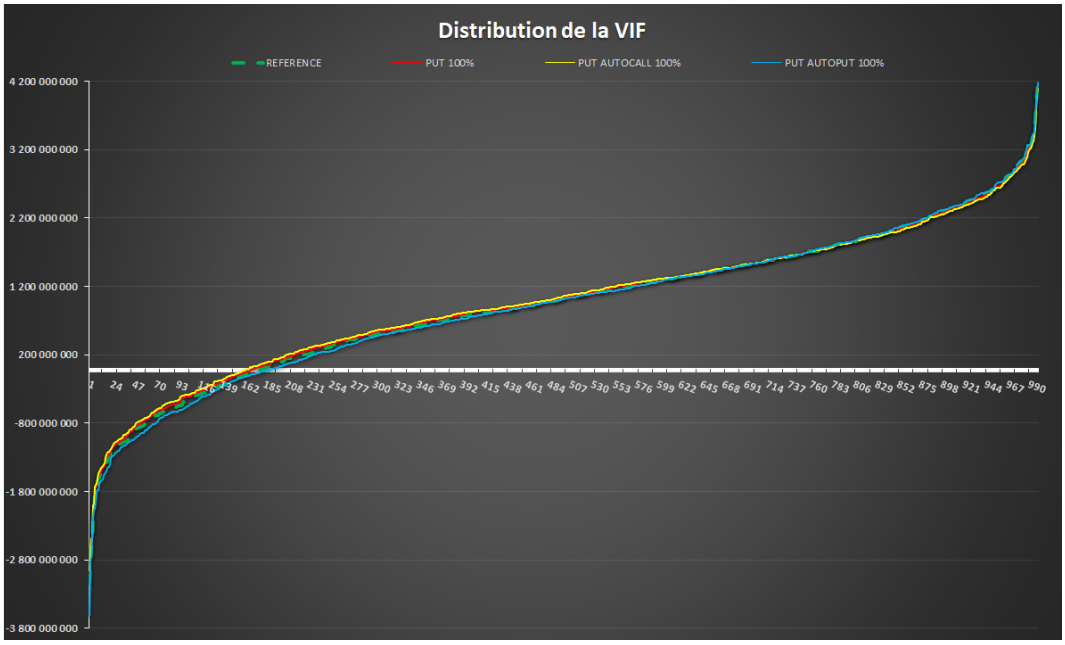
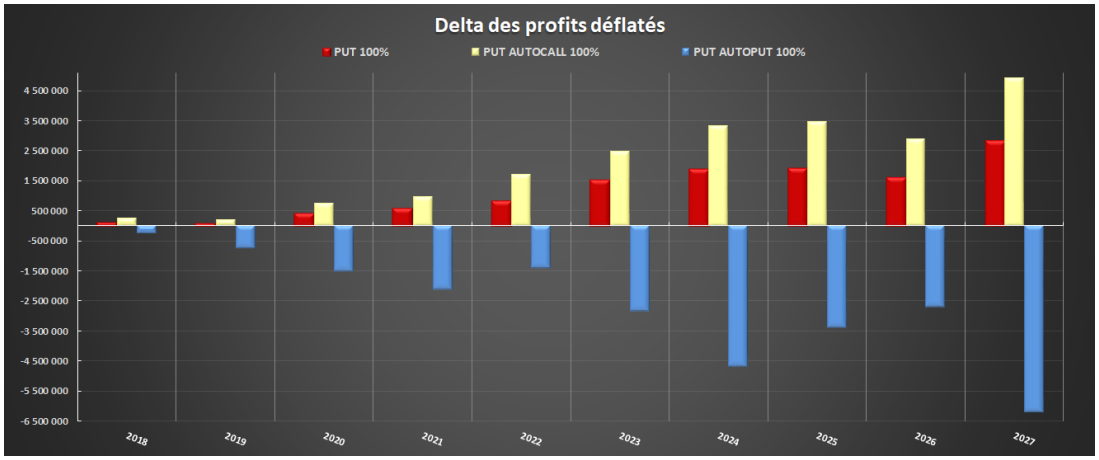


FIGURE 13.3 – Distribution de la VIF des stratégies sélectionnées

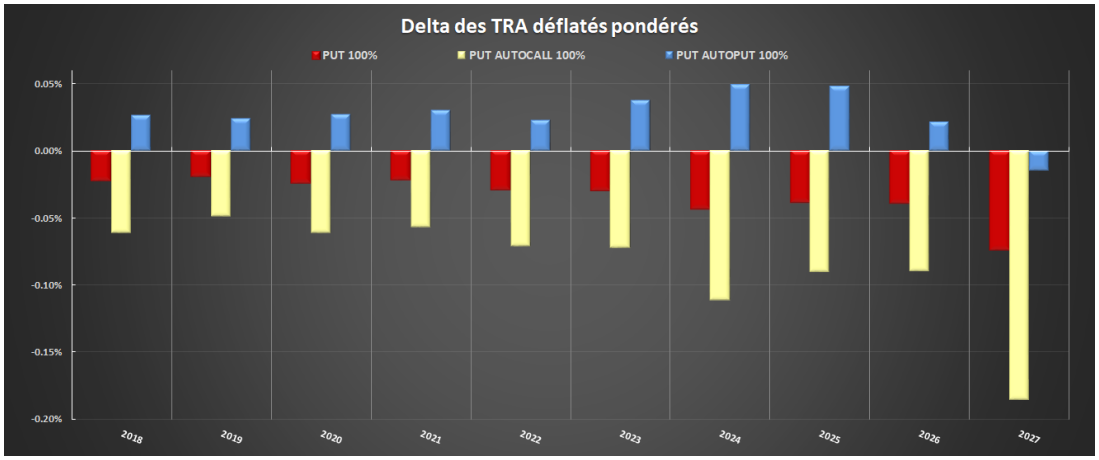
Rappelons que l'objectif d'un assureur est de lisser au maximum la distribution de sa VIF : à VIF moyenne égale, les investisseurs préfèreront toujours investir dans une entreprise où la VIF est plus stable, ce qui signifiera qu'ils obtiendront un rendement plus stable sur leur investissement, on parle de couple rendement/risque. Certains investisseurs préfèrent même obtenir moins de rendement mais avoir un rendement plus stable. A l'aide de la théorie de Markowitz sur la frontière efficiente, nous pouvons illustrer nos propos : la frontière efficiente va représenter tous les meilleurs couples rendement/risque. "Meilleur couple" signifie le meilleur rendement possible pour une volatilité (risque) donnée. Ainsi les investisseurs vont viser le rendement maximal en ayant la volatilité la plus faible possible.

13.4 Mécanisme entre Profits, TRA et PB

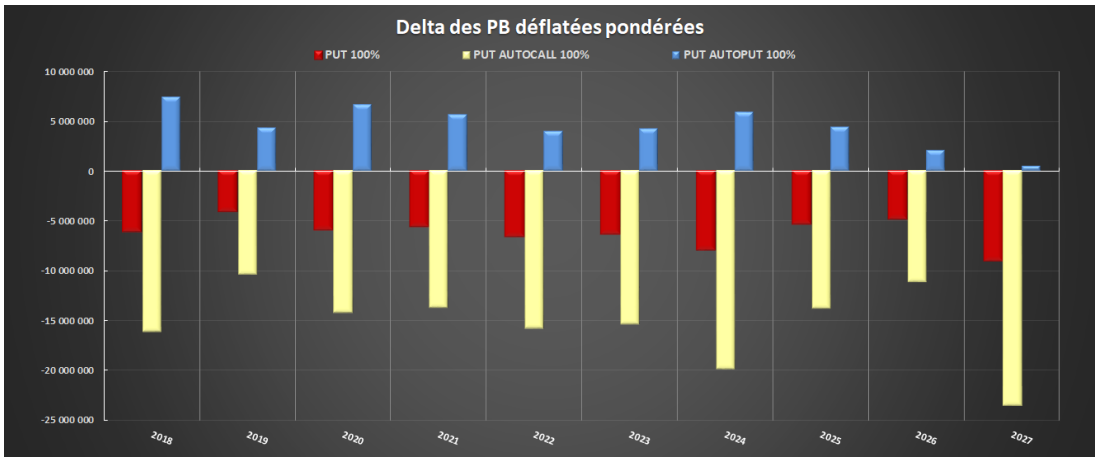
Maintenant que nous avons pu analyser de manière globale l'impact des stratégies, nous allons observer leurs impacts par année de projection. Rappelons que les stratégies Actions s'appliquent seulement sur les 10 premières années, de 2017 à 2027. Vous trouverez, sur la page suivant les graphiques, une explication détaillée de leur construction.



(a) Variation des profits déflatés



(b) Variation des TRA déflatés pondérés



(c) Variation des PB déflatées pondérées

FIGURE 13.4 – Impacts des stratégies sur le profit, le TRA et la PB

Tout d'abord, détaillons ce que représentent ces graphiques :

1. Le premier graphique représente la variation du profit déflaté moyen par rapport à la Référence sur chaque année de projection. Le profit déflaté moyen pour une année de projection t est défini par :

$$ProfitDef_t = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{s=1}^{1000} D_t^s \cdot Profit_t^s \tag{13.2}$$

2. Le second graphique représente la variation du TRA déflaté pondéré moyen par rapport à la Référence sur chaque année de projection. La pondération nous permet de prendre en compte l'effet assiette de la valeur des actifs sur laquelle s'applique le TRA. Le TRA déflaté pondéré moyen pour une année de projection t est défini par :

$$TRADef_t = \frac{\sum_{s=1}^{1000} D_t^s \cdot |ProdFi_t^s| \cdot TRA_t^s}{\sum_{s=1}^{1000} D_t^s \cdot |ProdFi_t^s|} \tag{13.3}$$

3. Le troisième graphique représente la variation de la PB déflatée pondérée moyenne par rapport à la Référence sur chaque année de projection. La pondération a le même objectif que pour le 2ème graphique. Elle est définie par :

$$PBDef_t = \frac{\sum_{s=1}^{1000} D_t^s \cdot |ProdFi_t^s| \cdot PB_t^s}{\sum_{s=1}^{1000} D_t^s \cdot |ProdFi_t^s|} \tag{13.4}$$

Premièrement, nous pouvons dire que les stratégies de Puts sans autofinancement ou autofinancés par des Calls semblent avoir les mêmes conséquences : elles vont avoir pour effet d'augmenter le profit, mais de réduire le TRA et la PB. La stratégie autofinancée par des Calls amplifie ces effets, ils sont même presque doublés.

Le gain de profit s'explique aisément car nous avons vu que l'application de ces stratégies augmentait la VIF, mais la réduction de TRA est assez étonnante à première vue : comment pouvons-nous gagner plus de profit alors que le rendement de nos actifs a baissé ? Cela s'explique par un mécanisme que nous avons évoqué précédemment lors de l'observation de la distribution de la VIF : nous avions affirmé que ces 2 stratégies réduisaient l'écart-type de la VIF.
En effet, ces stratégies vont nous permettre de compenser la perte en produits financiers par un plus grand gain sur la PB. Rappelons que l'assureur doit partager ses bénéfices, mais pas ses pertes, et donc réduire la volatilité va enclencher plusieurs mécanismes :

- **Scénarios positifs :** Nous obtiendrons moins de profit, car notre TRA sera plus faible, mais nous reverserons moins de PB aux assurés.
- **Scénarios négatifs :** Nous obtiendrons un TRA supérieur, et ainsi nous limiterons le montant de fonds propres que nous devrons verser aux assurés afin d'honorer nos engagements (TMG).

Ce phénomène met donc en exergue le mécanisme entre le TRA et la PB : la perte en produits financiers est compensée par un plus grand gain sur la PB reversée aux assurés.

Pour la stratégie autofinancée par des Puts avec nominal x10, c'est exactement l'inverse qui se produit : nous perdons du profit alors que nous gagnons du TRA. Ainsi le mécanisme décrit précédemment est renversé : notre gain en TRA est inférieur à la hausse de PB que nous devons verser aux assurés. Par conséquent nous perdons du profit.
Par ailleurs, nous pouvons remarquer que la stratégie diminue notre TRA en 2027 : cela s'explique par le fait que le Put autofinançant va être exercé de manière significative sur plusieurs scénarios. En effet, comme nous pouvons le voir sur le cône de diffusion des log-rendements du GSE RN (Figure 6.4), la volatilité de l'indice action augmente subitement en 2027, ce qui va provoquer de plus lourdes pertes à cause du Put autofinançant.

Sur cette même année 2027, nous pouvons remarquer que la stratégie autofinancée par des Calls va nous permettre de gagner beaucoup de profit : cette stratégie va nous permettre de conserver notre indice action dans un certain corridor : entre le strike du Put et celui du Call. Ainsi nous optimiserons au maximum le gain de profit via le mécanisme TRA/PB. Cette stratégie se relève donc très efficace lors des années volatiles.

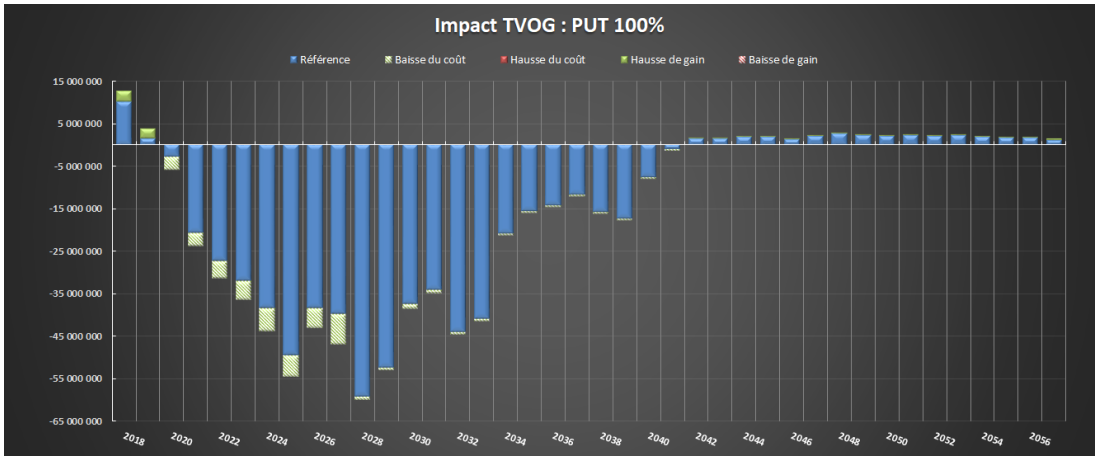
13.5 TVOG

Nous avons vu précédemment que les stratégies de couverture qui nous permettent d'augmenter notre profit ne sont pas nécessairement celles qui vont augmenter le rendement de nos actifs (TRA), mais celles qui vont permettre de réduire l'impact des scénarios catastrophes sur notre VIF, à l'aide du mécanisme entre le TRA et la PB.

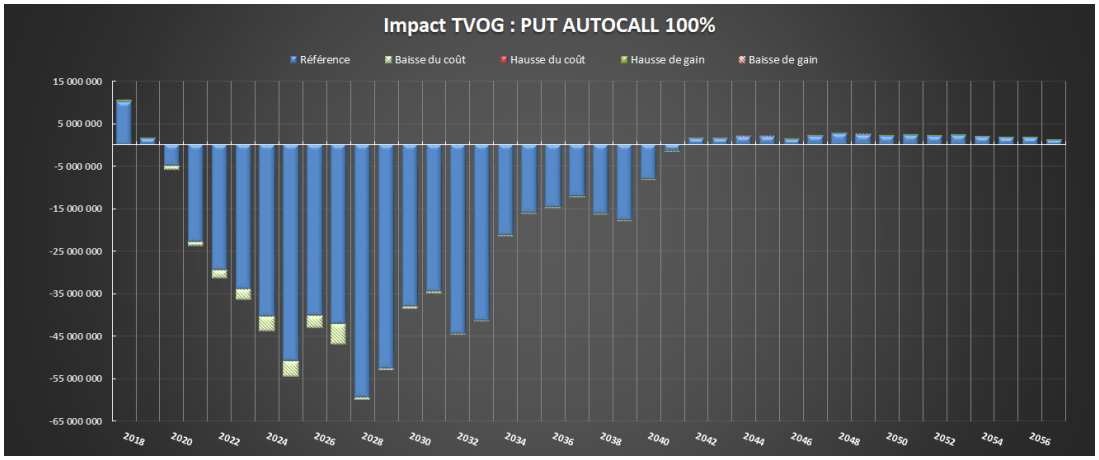
Rappelons que $VIF = PVFP - TVOG$.
Nous savons que les stratégies de Put sans autofinancement et autofinancés par un Call réduisent notre TRA moyen, mais pourtant elles nous permettent d'obtenir un meilleur profit moyen (Figure 13.4). Nous allons donc observer l'impact de ces stratégies sur la TVOG, qui représente le coût des "options cachées" liées aux contrats (Figure 13.5).

Premièrement, nous pouvons remarquer que la stratégie nous permettant d'améliorer le plus la TVOG est la stratégie consistant à acheter des Puts sans autofinancement. Pourtant, nous avions vu que la stratégie autofinancée par un Call nous permettait d'augmenter légèrement plus notre VIF (Figure 13.2).
Cela signifie que la stratégie sans autofinancement nous permet de mieux faire face aux "options cachées", comme le TMG par exemple, mais la perte en TRA sera supérieure à la stratégie avec autofinancement par des Calls. Ainsi, lorsque nous comparons ces 2 stratégies, nous pouvons affirmer que le gain en TVOG de la stratégie sans autofinancement par rapport à la stratégie autofinancée par des Calls n'est pas suffisant pour compenser la perte en TRA. Les meilleures stratégies en univers Monde-Réel semblent donc être les stratégies de Roll de Puts autofinancés par des Calls.

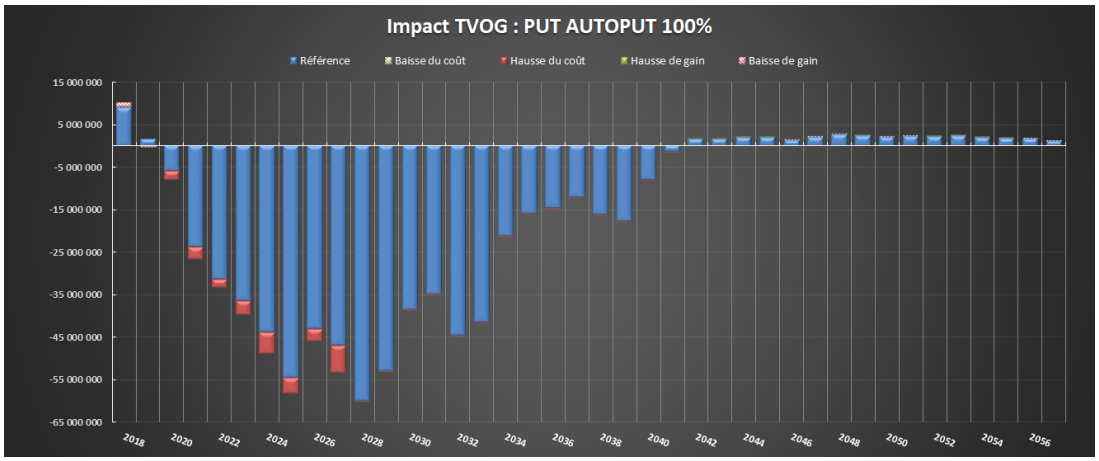
Comme nous l'avions prédit, la stratégie autofinancée par des Puts voit sa TVOG augmenter : notre profit diminue car le gain en TRA ne compense pas la perte en TVOG.



(a) Put 100%



(b) Put 100% autofinancé par un Call



(c) Put 100% autofinancé par un Put nominal x10

FIGURE 13.5 – Impacts des stratégies sur la TVOG

Chapitre 14

Conclusion des analyses RW et RN

Comme nous avons pu le constater, les résultats de nos analyses Monde-Réel et Risque-Neutre sont très différents :

▷ En univers Monde-Réel, nous avons analysé le TRA, puis le taux servi, et enfin la satisfaction client par le biais du respect de la compétitivité des taux servis afin d'éviter au maximum les rachats dynamiques.

Nous avons pu voir que les meilleures stratégies étaient les stratégies consistant à autofinancer l'achat de nos Puts par d'autres Puts avec un nominal 10 fois supérieur. De ce fait, nous nous exposions à un effet de levier, en misant sur le fait que les scénarios catastrophiques étaient suffisamment rares pour ne pas impacter significativement nos rendements.
Ainsi, nous avons pu constater que la stratégie 100% (ATM) ne générait que 4 scénarios sur 1000 dans lesquels nous perdions des points de TRA par rapport à la référence (sans couverture). Par ailleurs, en adoptant la stratégie 90%, nous surpassions la référence dans tous les cas. Cependant, bien que cette stratégie nous permettait d'éviter les 4 scénarios dans lesquels nous avions un TRA inférieur à celui de la référence avec la stratégie 100%, la stratégie 90% avait un impact légèrement moins important. En effet, de manière globale, nous gagnions légèrement moins de TRA, et elle avait moins d'impact sur la suppression des taux servis non compétitifs que la stratégie ATM.

▷ En univers Risque-Neutre, nous avons étudié la répartition de la richesse projetée, puis nous avons analysé les stratégies qui impactaient le plus la VIF, en observant notamment sa distribution. Ensuite, nous avons décomposé les variables économiques par année de projection, et nous nous sommes intéressés au profit, au mécanisme reliant la PB et le TRA, et enfin à la TVOG. Nous avons aussi soulevé le fait que les volatilités martingales ne prennent plus en compte le smile de volatilité, et ainsi nous sommes plus rapidement exposés à l'effet de levier.

Suite à cette analyse, nous avons pu constater que les résultats sont très différents de ceux obtenus en univers Monde-Réel. En effet, les meilleures stratégies sont ici les stratégies de Roll de Puts seuls, ou alors les Rolls de Puts autofinancés par des Calls avec le même nominal (sans effet de levier). Premièrement, nous avons pu voir que ces 2 stratégies nous permettaient de réduire l'écart-type de notre VIF, tout en augmentant notre VIF moyenne : cela nous permettait donc d'obtenir un meilleur couple rendement/risque. Ensuite, nous avons été étonnés que ces stratégies nous permettent de gagner du profit sur chaque année de projection, alors que notre TRA diminuait. Ce phénomène a pu mettre en exergue le mécanisme reliant le TRA et la PB : nous faisons face à moins de scénarios catastrophiques où nous supportons les pertes à 100%. Ainsi, réduire notre TRA va certes réduire nos produits financiers, mais cette perte sera compensée par un plus grand gain sur la PB, que nous aurions dû reverser à nos assurés dans les scénarios très haussiers. Enfin, l'analyse de la TVOG nous a permis de voir que les stratégies sans autofinancement étaient les stratégies qui nous permettaient de réduire le plus le coût de notre TVOG. Cependant, nous avons pu en déduire que les stratégies autofinancées par des Calls nous permettaient d'obtenir un meilleur TRA que celles sans autofinancement, et que ce gain en TRA surpassait le gain en TVOG. Les meilleures stratégies en univers Risque-Neutre étaient donc celles autofinancées par des Calls.

Ces différences de résultats entre les 2 univers sont dues aux disparités entre les GSE. En effet, comme nous pouvons le voir sur les 2 cônes de diffusion des log-rendements (Figure 5.7) et (Figure 6.4), les queues de distribution des log-rendements en univers Risque-Neutre sont beaucoup plus lourdes qu'en univers Monde-Réel. En univers RW, les log-rendements sont globalement compris entre -50 et $+50\%$ lors des 10 premières années, alors qu'en univers RN ils sont compris entre -70 et $+70\%$. Ainsi les stratégies autofinancées par des Puts avec nominal x10 rencontreront beaucoup plus de scénarios dans lesquels le Put autofinançant sera exercé en univers RN qu'en univers RW (phénomène amplifié par la non prise en compte du smile de volatilité). Par conséquent, l'effet de levier va fortement impacter nos résultats en univers RN dans les scénarios de fortes baisses.

De plus, le GSE RW comprend une prime de risque dans la modélisation de l'indice action, qui n'est pas prise en compte lorsque nous valorisons des options sur cet indice. Ainsi, nous allons sur-valoriser les Puts et sous-valoriser les Calls dans cet univers. Nous pouvons interpréter ce phénomène en disant que BNP Paribas Cardif a une vision prospective plus positive des actions que le marché. C'est pourquoi les stratégies autofinancées par des Calls ne génèrent pas de bons résultats en univers RW.

Enfin, nous pouvons donc affirmer que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé : le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision est relatif à la confiance dans les générateurs. Rappelons tout de même que l'univers RW représente la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif.
Le choix de la stratégie de couverture à appliquer dépendra aussi des objectifs de l'assureur :

- **Univers RW :** Maximiser son résultat et sa remontée de dividendes (optique court-terme) ⇒ Roll de Puts autofinancés par d'autres Puts avec nominal x10
- **Univers RN :** Minimiser son financement du capital réglementaire (SCR - VIF), et donc ses fonds propres économiques (optique long-terme) ⇒ Roll de Puts autofinancés par des Calls

Chapitre 15

OPCVM

Nous avons pu constater que la mise en place et la projection d'une stratégie de couverture est un processus long et compliqué. Il faut tout d'abord simuler la stratégie dans un outil de couverture, en extraire certaines variables, puis les incorporer dans le modèle Prophet ALS, pour enfin effectuer la projection de l'ensemble des variables économiques de BNP Paribas Cardif. Ce processus requiert beaucoup de temps, et il nous expose aussi à des risques opérationnels.

C'est pourquoi nous nous sommes demandés s'il était possible de développer de nouvelles méthodes de prises en compte des stratégies de couverture. Nous avons alors pensé à créer un nouvel indice action (OPCVM) qui prendrait en compte les stratégies de couverture. Nous pouvons donc considérer 3 méthodes afin de prendre en compte les stratégies de couvertures :

1. **Stratégie de couverture :** Prise en compte des cash-flows réels des stratégies de couverture : il s'agit de la méthode que nous avons analysée précédemment. Ce sont des flux de trésorerie qui viennent alimenter les produits financiers.

2. **Indice composite :** Prise en compte des cash-flows de la stratégie de couverture au sein d'un OPCVM. Ainsi, l'indice action serait remplacé par un OPCVM qui incorporerait les cash-flows générés par la stratégie de couverture.

3. **Indice avec volatilité réduite :** Nous pourrions essayer de répliquer l'indice composite par un indice action avec volatilité réduite (OPCVM). Nous n'aurions donc plus besoin de calculer les cash-flows générés par la stratégie de couverture. Chaque stratégie de couverture correspondra à un facteur de réduction de volatilité.

Premièrement, la méthode consistant à créer un indice composite contenant les cash-flows générés par la stratégie de couverture change la manière comptable de considérer les couvertures. En effet, nous n'allons plus être dans une optique de flux de trésorerie qui viendrait augmenter les produits financiers en cas de baisse des marchés action, puisque les cash-flows seront directement incorporés dans l'indice action. Nous allons donc déterminer quelles sont les différences entre ces 2 méthodes de comptabilisation.

Ensuite, nous allons nous demander s'il est possible de répliquer cet indice composite en simulant un indice action avec volatilité réduite. Ainsi, chaque stratégie de couverture correspondrait à un facteur de réduction de volatilité à appliquer lors de la projection de l'indice action. Nous obtiendrions alors un OPCVM qui approximerait nos stratégies de couverture. A l'avenir, il ne serait ainsi plus nécessaire de déterminer de nouveau les cash-flows générés par les stratégies de couverture : le facteur de réduction de volatilité à appliquer pourrait servir dans le cadre d'autres études, notamment sur l'optimisation de couverture. La réduction de volatilité de l'indice action représenterait donc une approximation de nos stratégies de couverture. Nous allons donc observer s'il est possible de remplacer l'indice composite par un indice à volatilité réduite.

15.1 Indice composite

La première comparaison va consister à déterminer les différences entre les 2 méthodes de comptabilisation :

- **Méthode 1 :** Prise en compte réelle des stratégies de couverture
- **Méthode 2 :** Indice composite : cash-flows incorporés dans l'indice action

15.1.1 Création de l'indice composite

Tout d'abord nous avons établi l'indice composite $\hat{S} = (\hat{S}_t)_{t\in[0,T]}$ (rappelons que le nominal des options représente 10% de notre poche action). Soit $t \in [1, T]$:

$$\hat{S}_t = \hat{S}_{t-1} \cdot \frac{S_t}{S_{t-1}} + CF_t \qquad \text{avec : } \hat{S}_0 = 1 \tag{15.1}$$

CF_t représente les cash-flows déflatés en fin d'année de l'option associée à la stratégie de couverture pour l'année de projection t.

Nous allons maintenant calculer les écarts-types des log-rendements des indices composites en fonction de la stratégie de couverture associée, puis, nous les comparerons à ceux de l'indice de référence (sans couverture).

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	MOYENNE SUR 10 ANS
NO HEDGING	15.26%	13.64%	15.21%	14.03%	16.25%	14.93%	18.29%	16.25%	14.37%	21.20%	15.89%
PUT 60%	100.00%	99.98%	99.99%	100.00%	99.99%	100.00%	99.97%	100.00%	100.00%	99.87%	99.97%
PUT 70%	99.81%	99.88%	99.84%	99.91%	99.80%	99.88%	99.67%	99.84%	99.93%	99.45%	99.76%
PUT 80%	98.88%	99.16%	98.99%	99.24%	98.97%	99.17%	98.75%	99.09%	99.36%	98.47%	98.98%
PUT 90%	96.77%	97.11%	97.02%	97.35%	97.14%	97.41%	97.08%	97.44%	97.76%	97.01%	97.29%
PUT 100%	94.12%	94.24%	94.48%	94.69%	94.85%	94.99%	95.11%	95.32%	95.48%	95.40%	95.02%
PUT AUTOCALL 60%	100.00%	99.98%	99.99%	100.00%	99.97%	100.00%	99.95%	99.99%	100.00%	99.82%	99.96%
PUT AUTOCALL 70%	99.71%	99.82%	99.76%	99.87%	99.65%	99.80%	99.52%	99.76%	99.88%	99.17%	99.63%
PUT AUTOCALL 80%	98.14%	98.63%	98.35%	98.74%	98.10%	98.62%	97.95%	98.49%	98.95%	97.53%	98.31%
PUT AUTOCALL 90%	94.14%	94.79%	94.66%	95.22%	94.63%	95.37%	94.78%	95.46%	95.99%	94.76%	95.09%
PUT AUTOCALL 100%	88.59%	88.83%	89.37%	89.77%	90.02%	90.48%	90.74%	91.09%	91.38%	91.43%	90.43%
PUT AUTOPUT 60%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.01%	100.00%	100.00%	100.10%	100.03%
PUT AUTOPUT 70%	100.05%	100.06%	100.07%	100.02%	100.01%	100.04%	100.15%	100.03%	100.03%	100.38%	100.13%
PUT AUTOPUT 80%	100.73%	100.74%	100.75%	100.49%	100.62%	100.48%	100.93%	100.75%	100.56%	101.42%	100.93%
PUT AUTOPUT 90%	103.41%	103.29%	103.27%	102.47%	102.47%	102.48%	103.59%	103.01%	102.41%	103.79%	103.10%
PUT AUTOPUT 100%	109.11%	109.23%	108.58%	107.59%	106.26%	107.14%	108.14%	107.30%	106.37%	107.70%	107.44%

FIGURE 15.1 – Impact des stratégies de couverture sur la volatilité des indices composites

La première ligne du tableau représente l'écart-type réalisé de l'indice action sans couverture : nous pouvons donc observer la structure par termes des volatilités utilisée au sein du GSE RN afin de modéliser l'indice action.
Les lignes suivantes représentent le facteur par lequel la volatilité a été modifiée grâce aux couvertures. Bien évidemment, nous pouvons remarquer que les stratégies impactant le plus la volatilité de l'indice composite sont les stratégies ATM (100%), ce qui est normal puisque les cash-flows sont plus importants. Nous étudierons donc les 3 stratégies ATM dans la suite de l'étude.

Ensuite, nous pouvons remarquer que les stratégies consistant à acheter des Puts seuls ou autofinancés par des Calls nous permettent de réduire la volatilité de l'indice, alors que les stratégies consistant à autofinancer l'achat des Puts par d'autres Puts avec un nominal 10 fois supérieur augmentent la volatilité de l'indice. Nous retrouvons ainsi les mêmes impacts des stratégies de couvertures que sur la distribution de la VIF en termes de hausse et de réduction de la volatilité (Figure 13.3).

Il est bien évidemment possible de réduire ou d'augmenter l'impact des stratégies de couverture sur la volatilité de l'indice composite : il suffit de choisir un nominal couvert plus important.

La dernière colonne représente l'impact moyen des stratégies de couverture sur la volatilité de l'indice composite pendant ces 10 années. Nous verrons par la suite que ce sont ces facteurs qui nous permettront de créer les nouveaux indices action avec volatilité réduite.

Avant de poursuivre notre étude, nous pouvons vérifier que les indices composites que nous allons utiliser respectent l'erreur de martingalité. Nous pouvons voir ci-après que les erreurs de martingalité des différentes stratégies sont pratiquement identiques à celles de l'indice original.

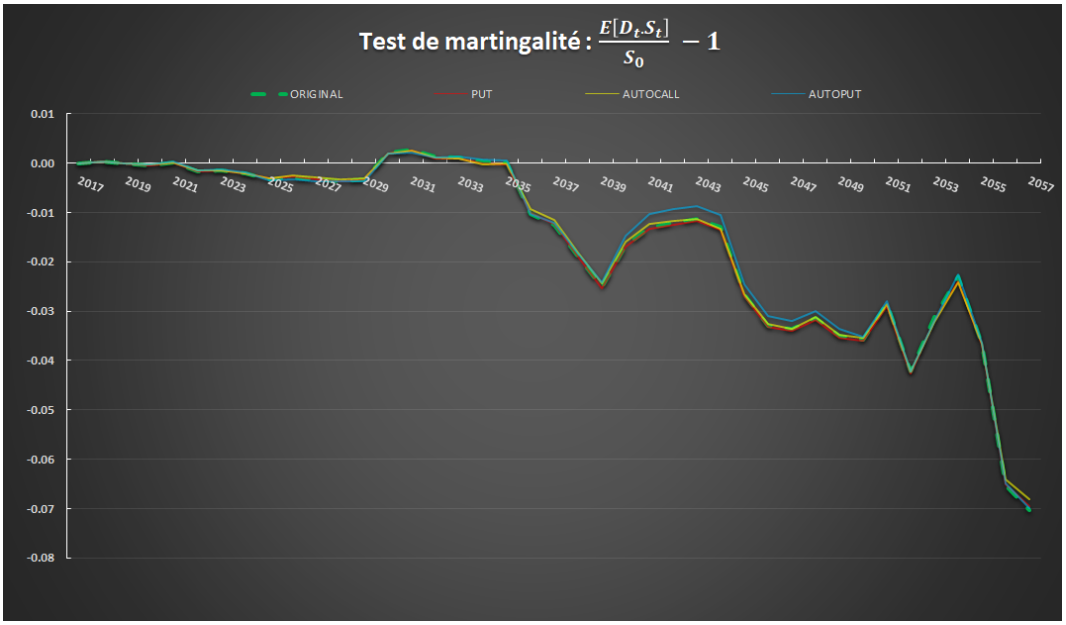


FIGURE 15.2 – Tests de martingalité des indices composites

15.1.2 Répartition de la richesse projetée

Maintenant que nous avons créé les tables stochastiques contenant les indices composites à la place de l'indice action de référence, nous allons projeter les variables économiques de BNP Paribas Cardif dans Prophet ALS. Nous allons ainsi pouvoir déterminer les différences entre les 2 méthodes de comptabilisation :

- **Méthode 1 :** Prise en compte réelle des stratégies de couverture
- **Méthode 2 :** Indice composite : cash-flows incorporés dans l'indice action

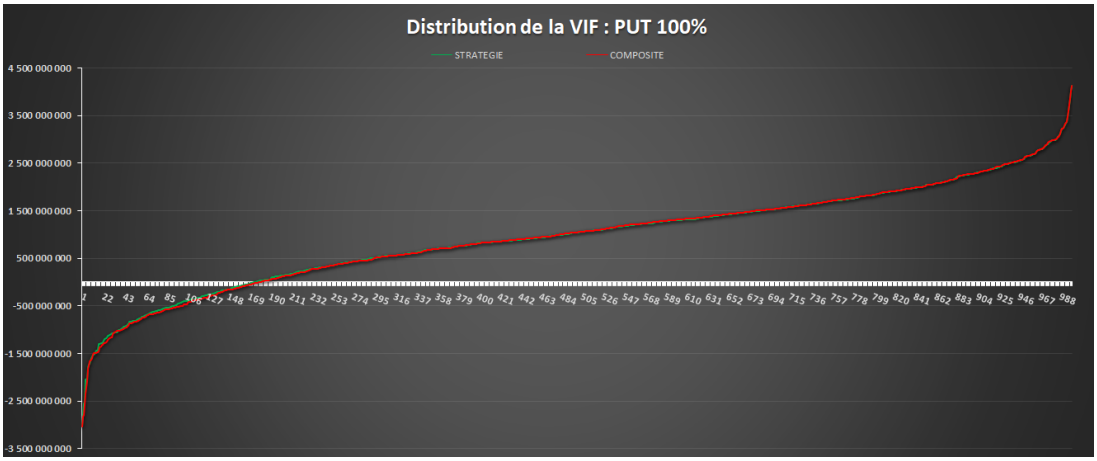
	VIF	BEL	EC	BEL + EC	MV en t0
PUT 100%	2.89%	97.02%	0.09%	97.11%	100.00%
COMPOSITE : PUT 100%	2.87%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
AUTOCALL 100%	2.92%	96.99%	0.09%	97.08%	100.00%
COMPOSITE : AUTOCALL 100%	2.90%	97.02%	0.08%	97.10%	100.00%
AUTOPUT 100%	2.77%	97.14%	0.09%	97.23%	100.00%
COMPOSITE : AUTOPUT 100%	2.82%	97.09%	0.08%	97.18%	100.00%

FIGURE 15.3 – Répartition de la richesse projetée des indices composites

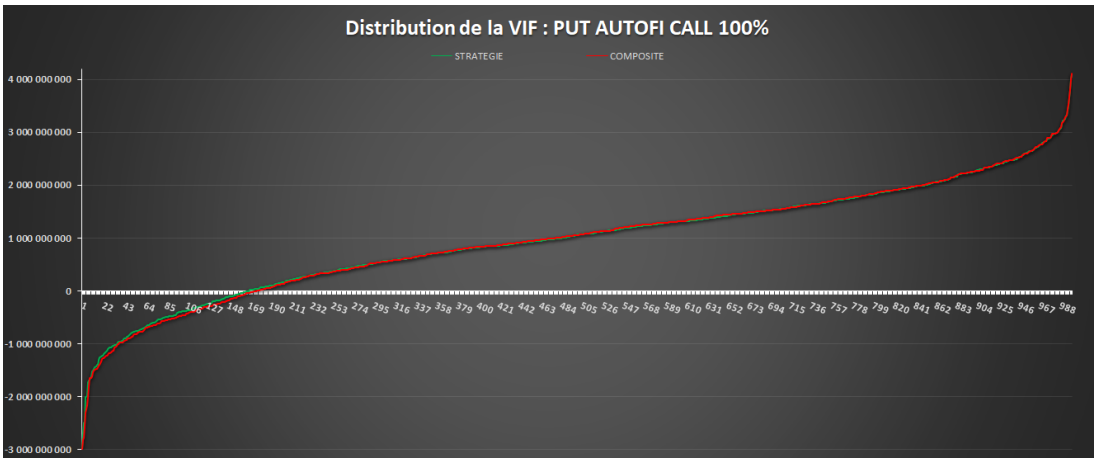
Nous pouvons donc voir que la richesse projetée est répartie de manière très similaire, sauf pour la stratégie autofinancée par des Puts, puisqu'il y a tout de même un écart de 5 bps pour la VIF.

15.1.3 Distribution VIF

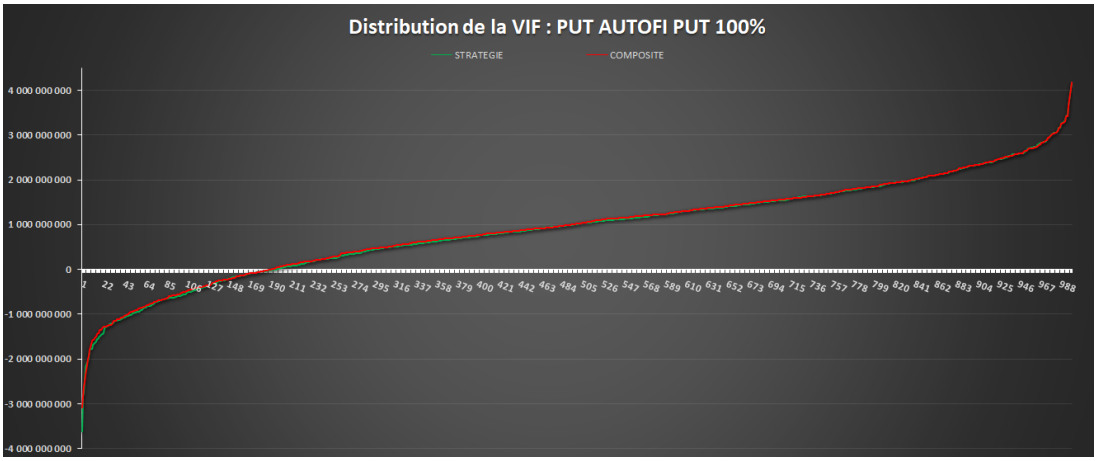
Sur la page suivante, nous pouvons voir que les distributions de VIF sont presque identiques, il n'y a pas vraiment de différence entre les 2 méthodes de comptabilisation.



(a) Put



(b) Put autofinancé par Call



(c) Put autofinancé par Put avec nominal x10

FIGURE 15.4 – Distribution de la VIF des indices composites

15.1.4 Profit

Après avoir étudié les différences entre les 2 méthodes comptabilisation de manière globale, nous allons maintenant pouvoir analyser les différences sur chaque année de projection. Nous allons commencer par le profit, puis le TRA et la PB, et enfin nous étudierons la TVOG.

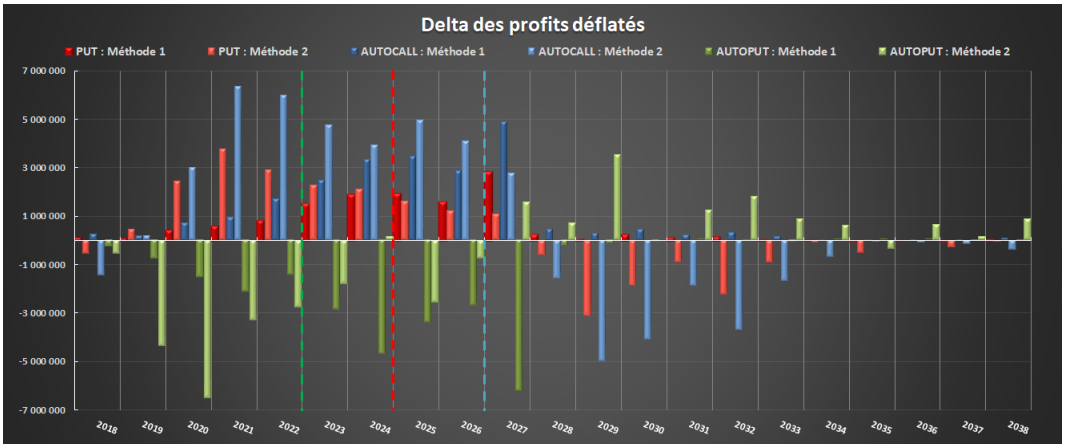


FIGURE 15.5 – Différences d'impacts sur le profit

Entre 2018 et 2027, nous pouvons clairement distinguer 2 périodes pour chacune des stratégies (séparées par un trait de la couleur correspondante). Nous pouvons voir que sur la première période, c'est la méthode 2 (indice composite) qui génère les plus gros impacts sur le profit. Mais pour la seconde période, c'est la méthode 1 qui génère les plus gros impacts sur le profit (prise en compte réelle des flux de trésorerie).

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que la méthode de l'indice composite impacte toujours le profit après 2027, alors que nous ne possédons pourtant plus d'options sur ces années. Ces impacts post 2027 viennent équilibrer le profit généré, c'est ce qui explique le fait que les distributions de VIF vues précédemment soient presque identiques : au global les impacts semblent identiques, mais si l'on zoome, les impacts sont différents.

15.1.5 TRA et PB

Pour expliquer les différences d'impacts sur le profit, nous pouvons étudier le mécanisme ALM entre le TRA et la PB.

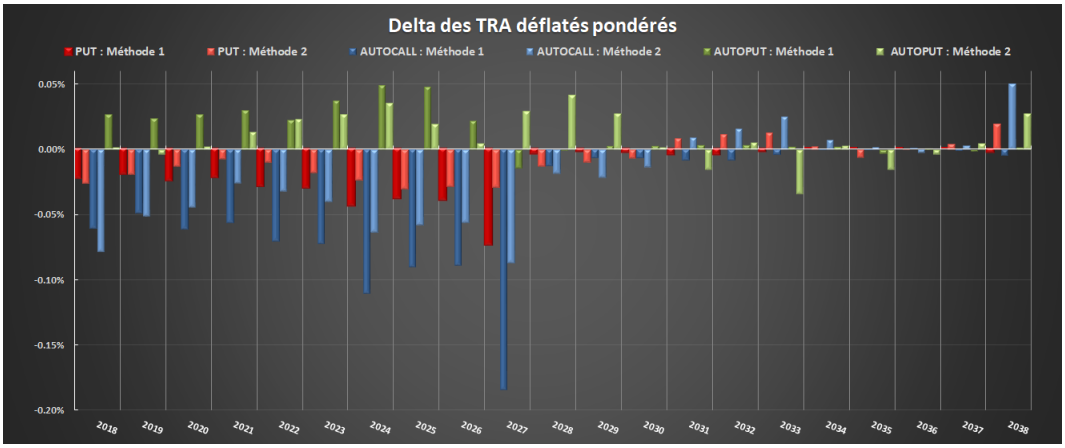


FIGURE 15.6 – Différences d'impacts sur le TRA

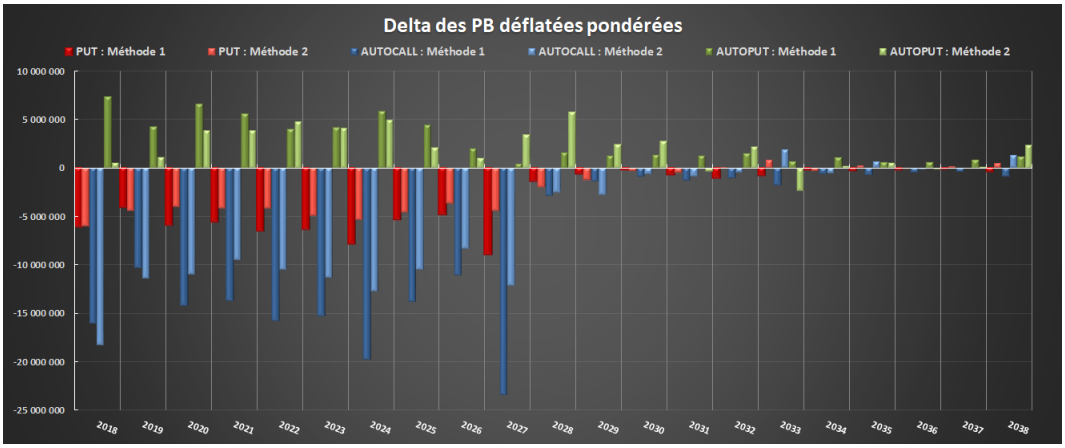
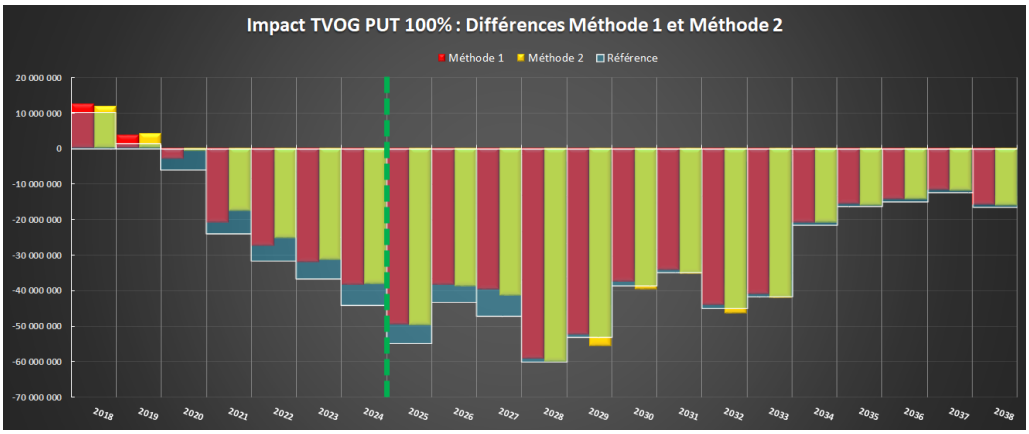


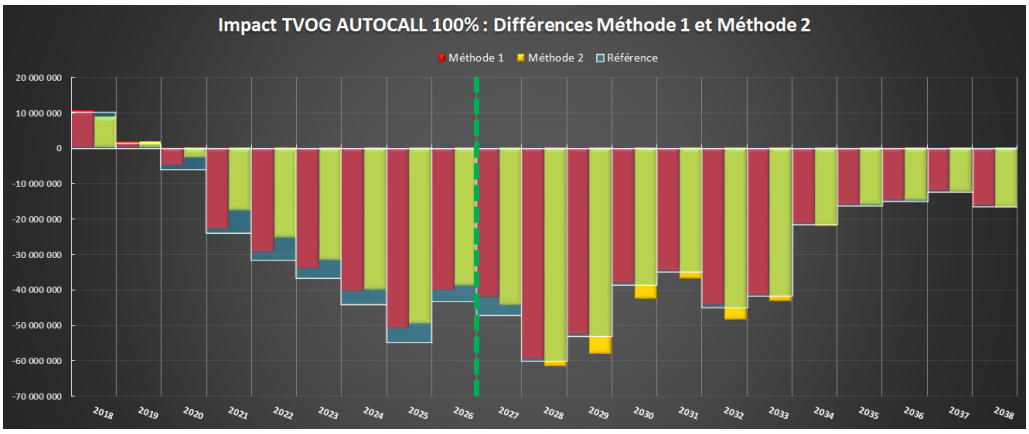
FIGURE 15.7 – Différences d'impacts sur la PB

Nous pouvons donc voir que ces différences ne s'expliquent pas grâce au mécanisme ALM entre le TRA et la PB. Nous ne pouvons pas distinguer 2 périodes sur ces graphiques, et nous pouvons aussi remarquer que c'est toujours la méthode 1 qui impacte le plus le TRA et la PB.

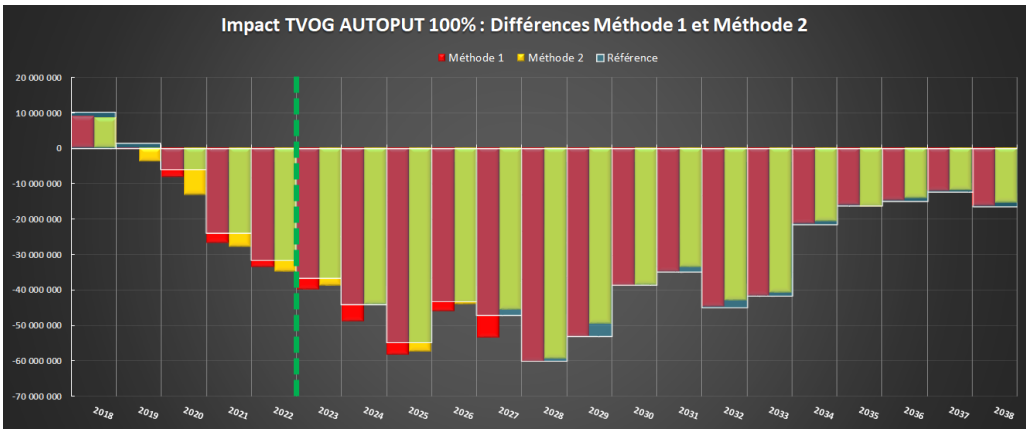
15.1.6 TVOG



(a) Put



(b) Put autofinancé par Call



(c) Put autofinancé par Put x10

FIGURE 15.8 – TVOG des indices composites

Avec les graphiques représentant l'impact des stratégies sur la TVOG, nous pouvons observer les 2 mêmes périodes que celles pour le profit, la séparation entre les 2 périodes s'effectuant sur la même année que pour le profit :

- Puts seuls : 2018-2024 → 2025-2027
- Puts autofinancés par des Calls : 2018-2026 → 2027-2027
- Puts autofinancés par des Puts avec nominal x10 : 2018-2022 → 2023-2027

Par ailleurs, nous pouvons aussi remarquer que la méthode 2 (indice composite) génère des impacts post 2027, comme pour le profit.

De plus, nous pouvons aussi remarquer que les différences d'impact entre les 2 méthodes de comptabilisation conservent une certaine proportionnalité entre les différences sur le profit et les différences sur la TVOG. Plus précisément, nous pouvons voir qu'une grande différence d'impact entre les 2 méthodes de comptabilisation sur une année de projection pour le profit correspondra aussi à une grande différence d'impact entre les 2 méthodes de comptabilisation sur cette même année pour la TVOG.

Enfin, nous pouvons affirmer que les différences d'impact entre les 2 méthodes de comptabilisation sont donc identiques sur le profit et sur la TVOG.

15.1.7 PRE et PDD

En fait, ces différences d'impact entre les 2 méthodes de comptabilisation sont dues à la PRE et la PDD. En effet, les 2 méthodes ne vont pas avoir le même impact sur ces deux provisions. Expliquons ces différences à l'aide d'un exemple, lors d'un choc action à la baisse, avec la stratégie de Puts seuls :

Avec la méthode 1, lorsque l'indice action va subir un choc action à la baisse, nous allons devoir enregistrer de fortes moins-values dans la PRE et la PDD. Aussi, les Puts vont être exercés et donc nous obtiendrons des flux de trésorerie qui vont venir augmenter nos produits financiers.

Avec la méthode 2, c'est différent, nous n'aurons plus de flux de trésorerie venant alimenter nos produits financiers, ces flux seront directement incorporés dans l'indice action. Ainsi, cette méthode limitera les moins-values que nous devrons enregistrer dans la PRE et la PDD.

Sur le graphique suivant, nous avons représenté l'évolution de la PRE et de la PDD lors d'une simulation où l'indice action est choqué à la baisse. Nous avons aussi représenté l'évolution de la richesse latente de BNP Paribas Cardif (PMVL).

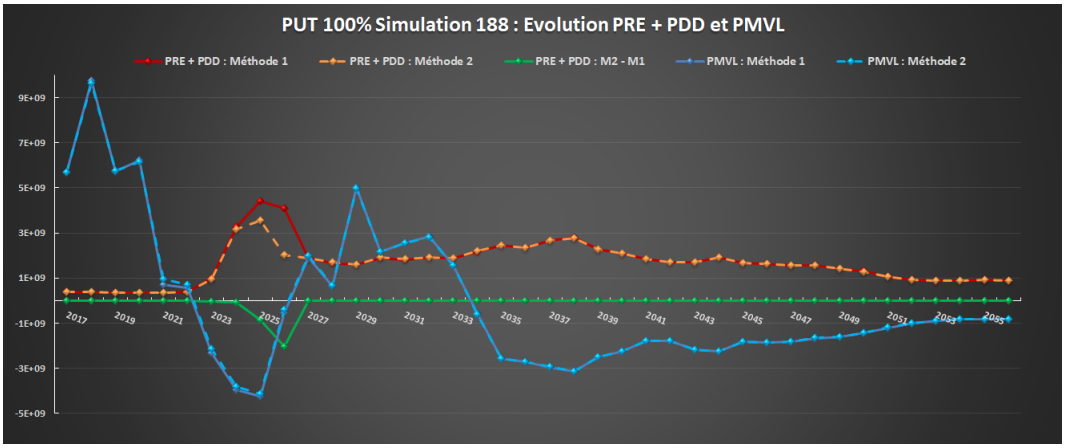


FIGURE 15.9 – PRE et PDD en fonction de la méthode de comptabilisation

Nous pouvons voir qu'en fonction de la méthode de comptabilisation retenue, la PRE et la PDD enregistrées sont différentes, à cause du mécanisme décrit précédemment.

Cependant, on peut remarquer que la PRE et la PDD sont identiques sur les premières années : cela est dû à la richesse latente. En effet, BNP Paribas Cardif possède une forte richesse latente, presque 30% de la poche action en 2017. Ainsi, cette richesse latente va jouer un rôle tampon pour la méthode 1 sur les premières années. C'est ce qui explique les 2 périodes différentes entre la méthode 1 et la méthode 2 pour le profit et la TVOG.

Nous avons donc déterminé les différences entre les 2 méthodes de comptabilisation : elles ont des impacts sur la PRE et la PDD différents.

15.2 Indice avec volatilité réduite

Maintenant que nous avons pu déterminer les différences lorsque nous incorporons directement les cash-flows des couvertures dans un indice composite, nous allons essayer de répliquer cet indice composite par un indice avec volatilité réduite.

Rappelons que chaque stratégie correspond à un facteur de réduction de volatilité, et qu'une fois ce facteur obtenu, il ne sera plus nécessaire de déterminer les cash-flows générés par la stratégie de couverture, nous pourrons donc gagner beaucoup de temps lors de prochaines études, mais aussi limiter le risque opérationnel causé par la projection des stratégies de couverture. L'indice action à volatilité réduite représenterait donc une approximation de notre stratégie de couverture.

15.2.1 Extraction des diffusions browniennes

Tout d'abord, nous allons extraire les diffusions browniennes réalisées lors des projections de l'indice action dans la table stochastique du GSE RN. Il sera ainsi possible de projeter un nouvel indice action utilisant les mêmes diffusions browniennes, mais avec une volatilité réduite, pour simuler l'application d'une stratégie de couverture. Ainsi nous pourrons comparer efficacement la méthode 2 (indice composite) et la méthode 3 (indice avec volatilité réduite).

En univers Risque-Neutre, nous avons vu que l'indice action est diffusé selon un modèle TVDV « Time Varying Deterministic Volatility » (Figure 6.4). Ainsi l'indice action est diffusé selon la dynamique log-normale proposée par Black&Scholes :

$$\begin{cases} S_t & = S_0.exp\Big(\int_0^t (r_s - \frac{\sigma_s^2}{2})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s.\mathrm{d}W_s^* \Big) \\ \mathrm{d}S_t & = r_t.S_t.\mathrm{d}t + \sigma_t.S_t.\mathrm{d}W_t^* \end{cases} \tag{15.2}$$

Nous pouvons alors exprimer les log-rendements actualisés de l'indice action :

$$\ln\Big[\frac{S_t.D_t}{S_{t-1}.D_{t-1}}\Big] + \int_{t-1}^t \frac{\sigma_s^2}{2} \cdot \mathrm{d}s \; = \int_{t-1}^t \sigma_s \cdot \mathrm{d}W_s^* \tag{15.3}$$

Or la structure par termes de volatilités que nous utilisons est annuelle, nous utilisons une volatilité constante par année de projection. Ainsi, la volatilité utilisée entre $t-1$ et t sera constante, elle sera égale à σ_t. Nous pouvons donc estimer le processus $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ en établissant :

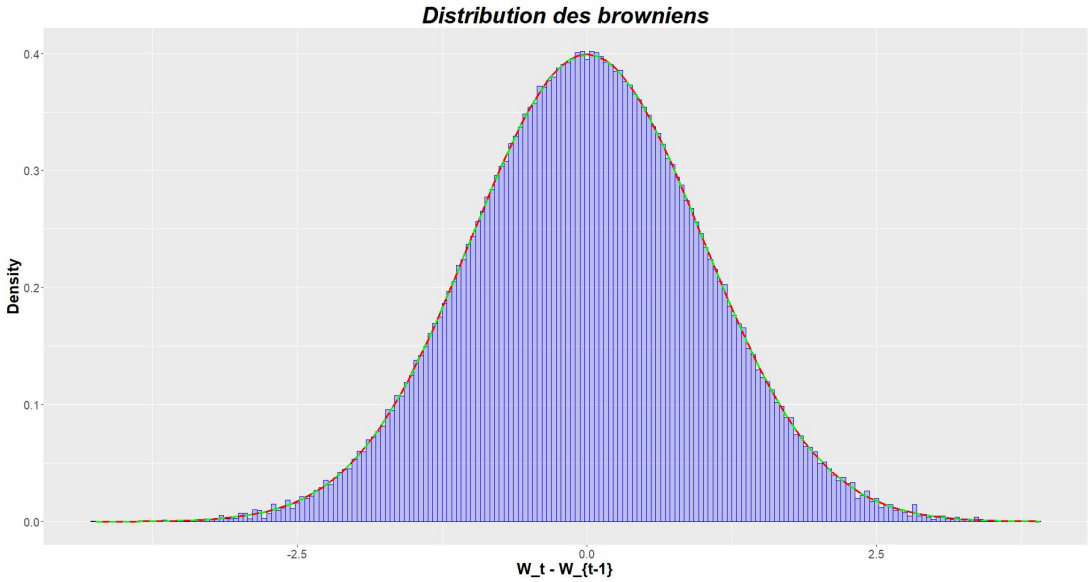
$$\mathbb{E}^*\Big[\ln\Big(\frac{S_t.D_t}{S_{t-1}.D_{t-1}}\Big)\Big] = \mathbb{E}^*\Big[-\frac{\sigma_t^2}{2} + \sigma_t \cdot (W_t^* - W_{t-1}^*)\Big] = -\frac{\sigma_t^2}{2} \tag{15.4}$$

$$\hookrightarrow \quad \sigma_t = \sqrt{-2 \cdot \mathbb{E}^*\Big[\ln\Big(\frac{S_t.D_t}{S_{t-1}.D_{t-1}}\Big)\Big]} \tag{15.5}$$

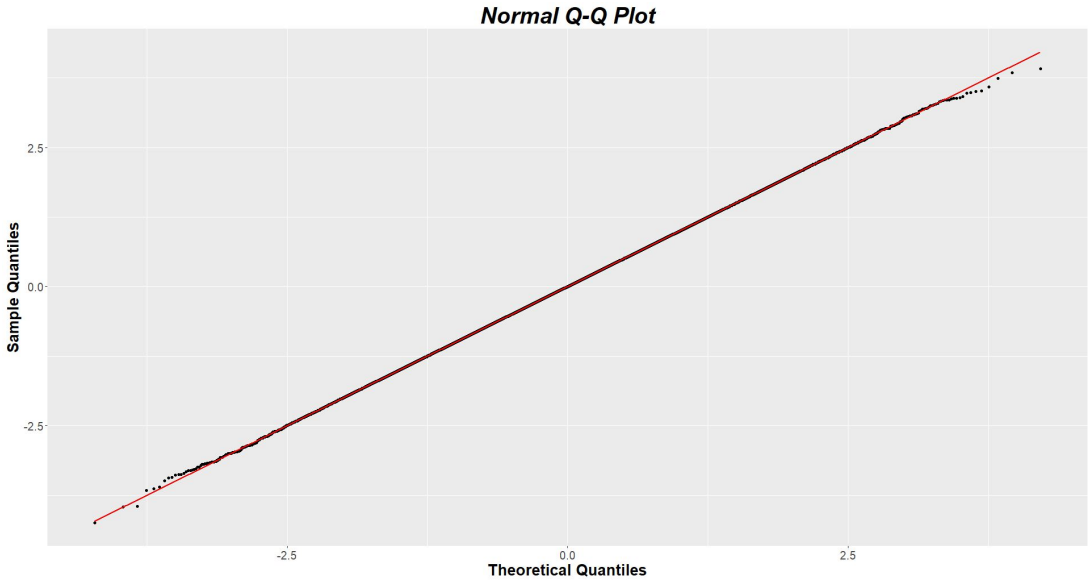
Nous pouvons maintenant déterminer les diffusions browniennes annuelles simplement :

$$\frac{1}{\sigma_t} \cdot \Big(\ln\Big[\frac{S_t.D_t}{S_{t-1}.D_{t-1}}\Big] + \frac{\sigma_t^2}{2}\Big) = W_t^* - W_{t-1}^* \tag{15.6}$$

Nous allons maintenant vérifier que les diffusions browniennes annuelles extraites de la table stochastique RN suivent bien une loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. L'échantillon que nous obtenons est de grande taille : nous avons 40 années de projection sur 1000 simulations, donc nous obtenons un échantillon de 40 000 valeurs.

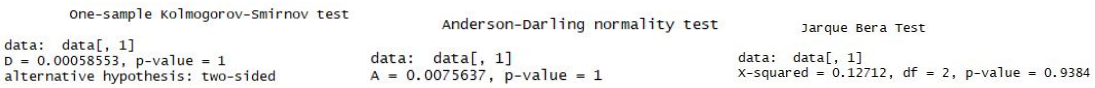


(a) Distribution des browniens



(b) Q-Q Plot des browniens

FIGURE 15.10 – Vérification graphique de la normalité des Browniens



(a) Kolmogorow-Smirnov (b) Anderson-Darling (c) Jarque-Bera

FIGURE 15.11 – Tests statistiques de normalité des Browniens

Nous pouvons remarquer que les tests graphiques de normalité sont très concluants (Figure 15.10) :

- Le premier graphique représente la distribution des 40 000 browniens. La courbe rouge représente la densité de l'échantillon, et la courbe en pointillés verts représente la densité d'une loi normale centrée-réduite. Nous pouvons donc observer que les 2 courbes correspondent parfaitement.

- Le deuxième graphique représente le QQ-Plot des browniens : nous comparons les quantiles de l'échantillon aux quantiles d'une loi normale centrée-réduite. Nous pouvons ainsi affirmer que ce QQ-Plot semble valider l'hypothèse de normalité.

Enfin, nous avons réalisé des tests statistiques de normalité afin d'appuyer nos propos (Figure 15.11). Nous avons appliqué 3 tests : Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, et Jarque-Bera. Vous pourrez trouver les explications théoriques de ces tests dans l'ouvrage [Rakotomalala, 2011]. A l'aide de ces résultats, nous pouvons voir que les p-values sont proches de 1, donc nous validons l'hypothèse de normalité centrée-réduite des browniens.

15.2.2 Création de l'indice avec volatilité réduite

Nous avons vu que les stratégies ATM sont les stratégies qui ont le plus d'impact sur la volatilité de l'indice composite. Nous allons donc créer un nouvel indice action avec volatilité réduite pour chacune de ces stratégies.

Le nouvel indice action sera donc diffusé avec la même structure par termes de volatilités que l'indice de référence, mais à laquelle nous appliquerons le facteur moyen des 10 premières années calculé précédemment (Figure 15.1). Rappelons qu'une fois ces facteurs obtenus, il ne sera pas nécessaire de les déterminer de nouveau à l'avenir : ils pourront servir dans le cadre d'autres études, notamment sur l'optimisation de couverture :

1. Put 100% : $\beta_1 = 95.02\%$
2. Put 100% autofinancé par Call : $\beta_2 = 90.43\%$
3. Put 100% autofinancé par Put nominal x10 : $\beta_3 = 107.44\%$

Les indices action avec volatilité réduite vont donc suivre une nouvelle dynamique, la volatilité utilisée dépendra de la stratégie de couverture approximée, $j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} \widetilde{S}_t^j & = S_0 \cdot exp\Big(\displaystyle\int_0^t (r_s - \frac{(\beta_j \cdot \sigma_s)^2}{2}) \cdot \mathrm{d}s + \int_0^t (\beta_j \cdot \sigma_s) \cdot \mathrm{d}W_s^* \Big) \\ \mathrm{d}\widetilde{S}_t^j & = r_t.\widetilde{S}_t^j.\mathrm{d}t + \beta_j.\sigma_t.S_t.\mathrm{d}W_t^* \end{cases} \tag{15.7}$$

Nous allons donc créer 3 nouvelles tables stochastiques à partir de la table de référence. Chaque table stochastique aura un nouvel indice action, le facteur que nous appliquerons à la structure par termes de volatilité dépendra de la stratégie approximée.

Afin de pouvoir comparer au mieux la méthode 2 (indice composite) et la méthode 3 (indice avec volatilité réduite), nous allons utiliser les diffusions browniennes réalisées

sur la table stochastique du GSE RN, que nous avons précédemment extraites. Notons $W_t^{i,*} - W_{t-1}^{i,*}$ la diffusion entre $t-1$ et t pour la simulation i. Ainsi, pour $t \in [\![1, 40]\!]$:

$$\begin{cases} \widetilde{S}_0^j & = 1 \\ \widetilde{S}_t^j & = \widetilde{S}_{t-1}^j \cdot \dfrac{D_{t-1}}{D_t} \cdot exp\Big(\beta_j \cdot \sigma_t \cdot (W_t^{i,*} - W_{t-1}^{i,*}) - \dfrac{(\beta_j \cdot \sigma_t)^2}{2}\Big) \end{cases} \tag{15.8}$$

Une fois la projection de ces nouveaux indices effectuée, nous avons premièrement vérifié que la structure par termes des volatilités des log-rendements actualisés était bien celle attendue. Ensuite, nous avons vérifié que les rendements moyens des indices venant d'être créés étaient égaux à ceux de l'indice de référence. Aussi, nous avons représenté l'évolution des quantiles à 1% des log-rendements actualisés, afin d'observer l'impact du changement de volatilité sur la distribution des log-rendements.

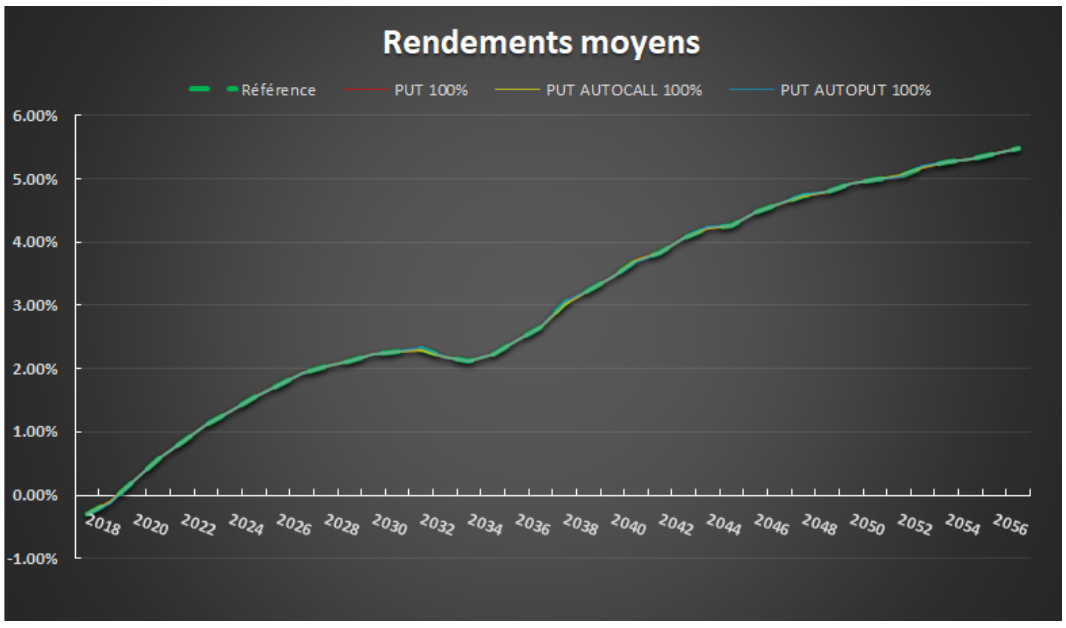


FIGURE 15.12 – Rendements moyens des indices avec volatilité réduite

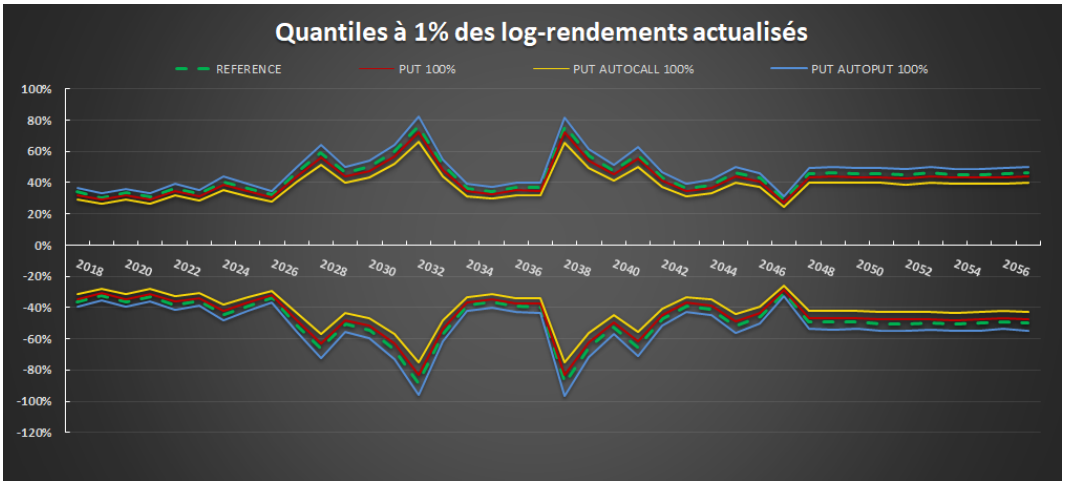


FIGURE 15.13 – Quantiles à 1% des log-rendements actualisés

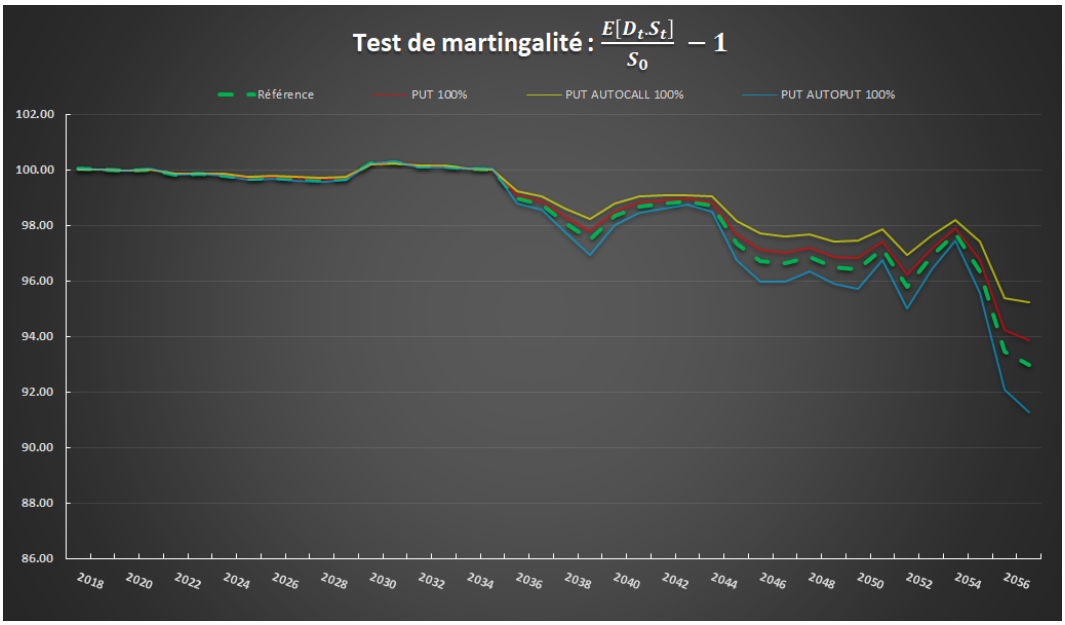


FIGURE 15.14 – Test de martingalité des nouveaux indices par rapport à la référence

Nous pouvons remarquer que plus la volatilité de l'indice est réduite, plus l'erreur de martingalité est réduite. Rappelons tout de même que nos statégies action s'appliquent sur les 10 premières années, de 2017 à 2027, et les erreurs de martingalité sont très faibles pour cette période.

15.2.3 Répartition de la richesse projetée

Maintenant que nous avons obtenu les tables stochastiques contenant les indices action avec volatilité réduite à la place de l'indice action de référence, nous allons projeter les variables économiques de BNP Paribas Cardif dans Prophet ALS. Nous allons ainsi pouvoir déterminer s'il est possible de répliquer l'indice composite par un indice avec volatilité réduite.

Dans un premier temps, nous allons analyser la richesse projetée par Prophet. Nous allons donc pouvoir observer comment est répartie cette richesse, mais aussi vérifier qu'aucune richesse n'ait été créée ou détruite lors de la projection.

	VIF	BEL	EC	BEL + EC	MV en t0
COMPOSITE : PUT 100%	2.87%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
VOL REDUITE : PUT 100%	2.88%	97.04%	0.08%	97.12%	100.00%
COMPOSITE : AUTOCALL 100%	2.90%	97.02%	0.08%	97.10%	100.00%
VOL REDUITE : AUTOCALL 100%	2.90%	97.02%	0.08%	97.10%	100.00%
COMPOSITE : AUTOPUT 100%	2.82%	97.09%	0.08%	97.18%	100.00%
VOL REDUITE : AUTOPUT 100%	2.81%	97.09%	0.09%	97.19%	100.00%

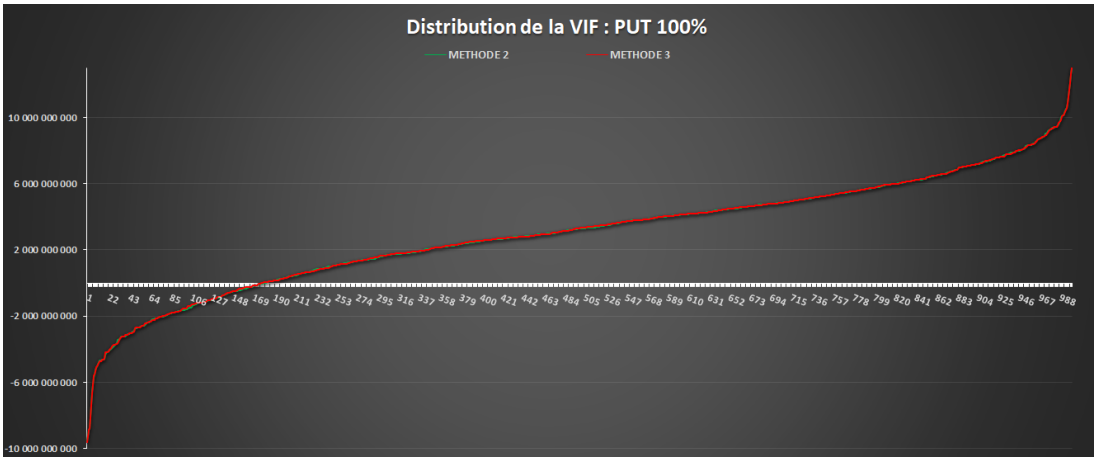
FIGURE 15.15 – Comparaison de la répartition de la richesse projetée

Nous pouvons constater que la répartition de la richesse projetée est très bien répliquée par l'indice avec volatilité réduite.

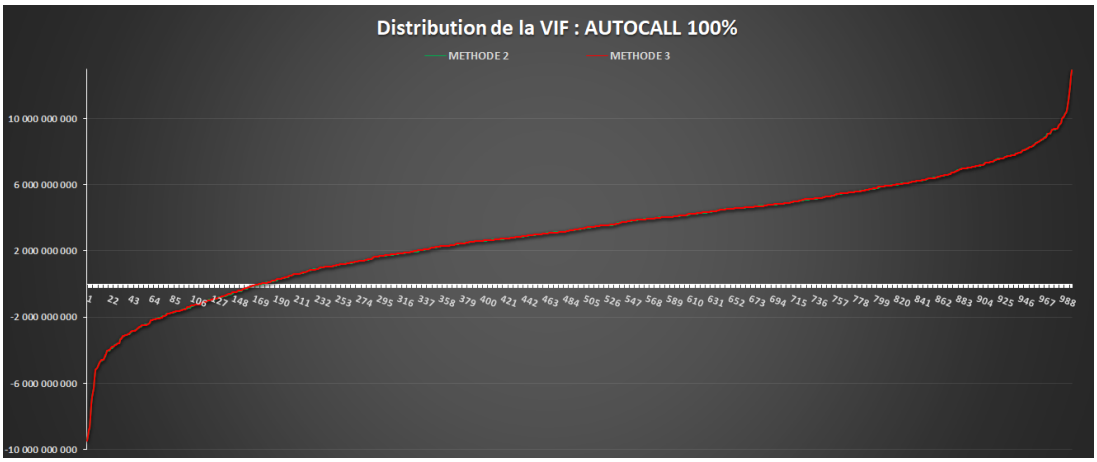
15.2.4 Distribution VIF

Sur les graphiques suivants (Figure 15.16), nous pouvons observer que l'indice avec volatilité réplique presque parfaitement la distribution de la VIF de l'indice composite.

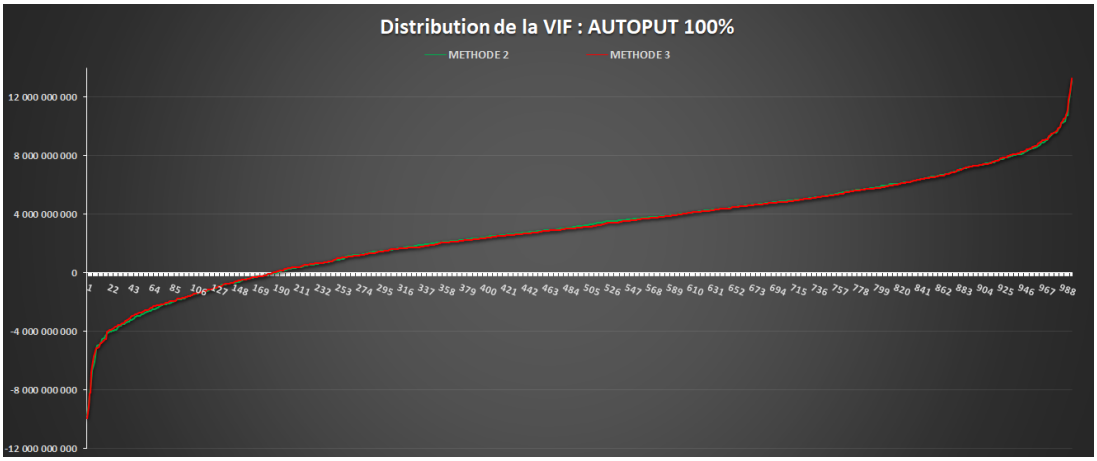
Nous pouvons donc affirmer que l'indice avec volatilité réduite semble bien répliquer l'indice composite lorsque nous observons les variables économiques de manière globale. Nous allons ensuite décomposer la VIF sur chaque année de projection, afin de vérifier que la réplication est toujours satisfaisante.



(a) Put



(b) Put autofinancé par Call



(c) Put autofinancé par Put avec nominal x10

FIGURE 15.16 – Comparaison de la distribution de la VIF : composite / volatilité réduite

15.2.5 Comparaison Profit, TRA, PB et TVOG

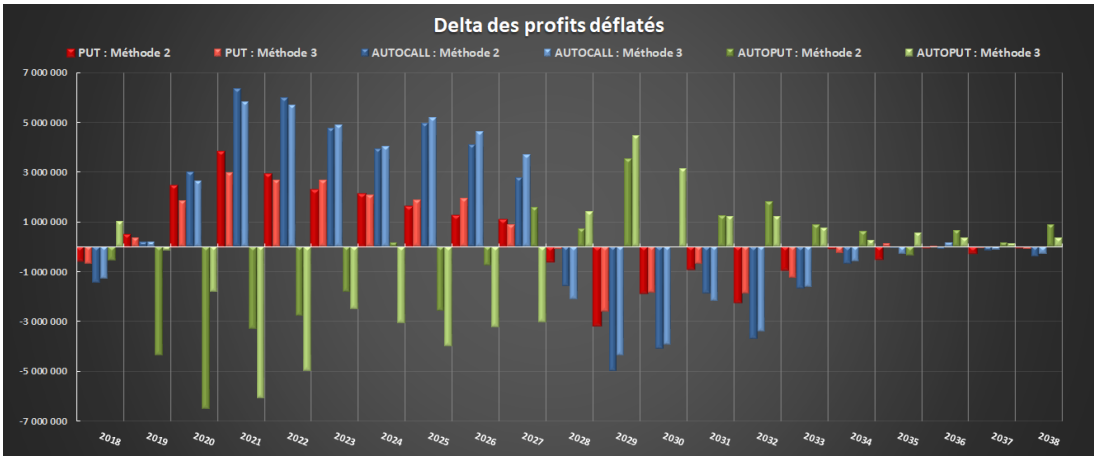
Sur les graphiques de la page suivante (Figure 15.17), nous pouvons observer les impacts de nos stratégies de couverture en utilisant l'indice composite ou l'indice avec volatilité réduite associé.

Pour les stratégies de Puts seuls ou autofinancés par des Calls (respectivement en rouge et en bleu), nous pouvons voir que les impacts sur le profit, le TRA, ou la PB sont très bien répliqués.

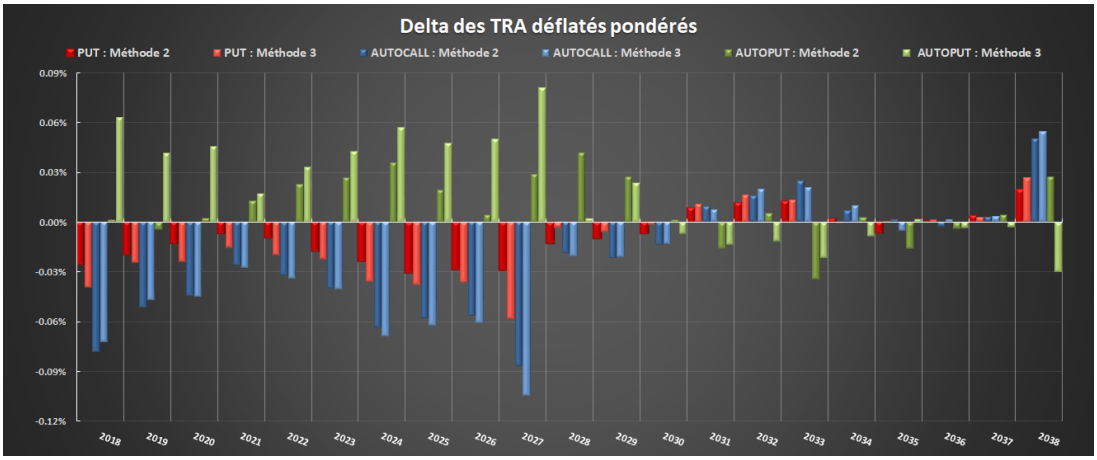
Cependant, pour la stratégie autofinancée par des Puts avec nominal x10 (en vert), nous pouvons voir que la réplication n'est pas satisfaisante. En effet, on peut voir que les impacts sur le profit sont assez différents sur certaines années, comme en 2020 par exemple. Aussi, nous pouvons remarquer que l'indice avec volatilité réduite à tendance à amplifier les impacts sur le TRA et la PB.

Sur les autres graphiques (Figure 15.18), nous avons représenté l'impact de l'indice avec volatilité réduite par rapport à l'indice composite sur la TVOG. Ainsi, en bleu on peut voir la distribution de la TVOG pour l'indice composite, et les rajouts en vert ou en rouge représentent respectivement une réduction ou une augmentation du coût de la TVOG lorsque nous utilisons l'indice avec volatilité réduite.

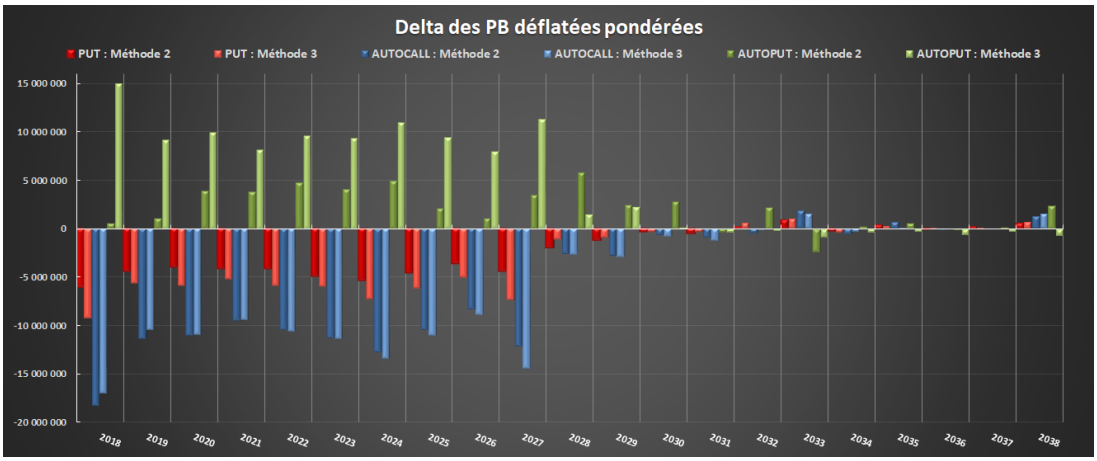
Nous pouvons donc faire les mêmes constats : la réplication est excellente pour les stratégies de Puts seuls ou autofinancés par des Calls, mais pour la stratégie autofinancée par des Puts avec nominal x10, la réplication n'est pas satisfaisante : on peut voir que l'indice avec volatilité réduite réduit le coût de la TVOG sur les premières années, puis l'augmente ensuite.



(a) Variation des profits déflatés

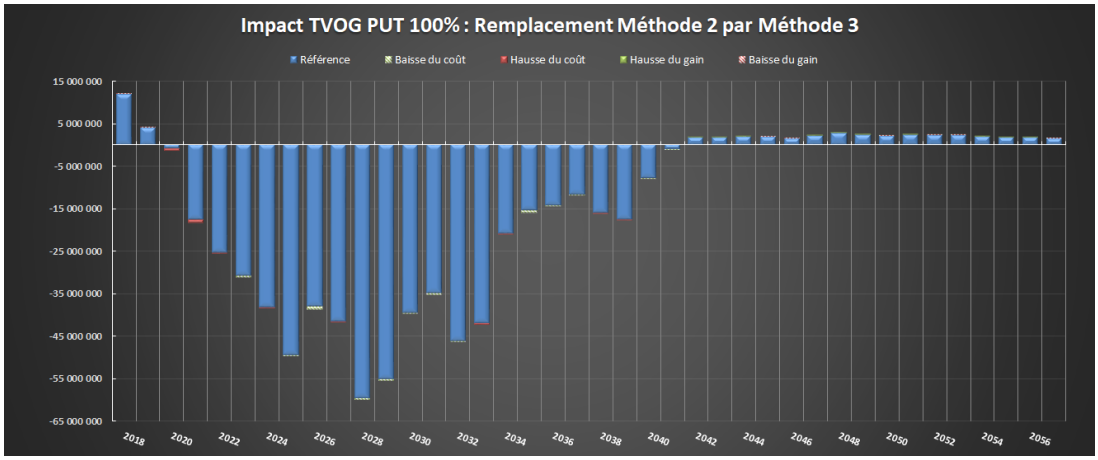


(b) Variation des TRA déflatés pondérés

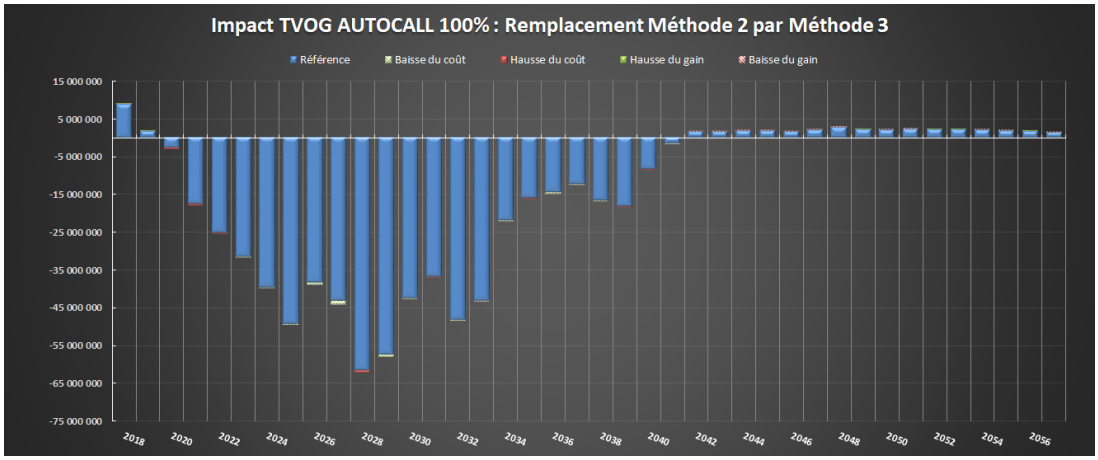


(c) Variation des PB déflatées pondérées

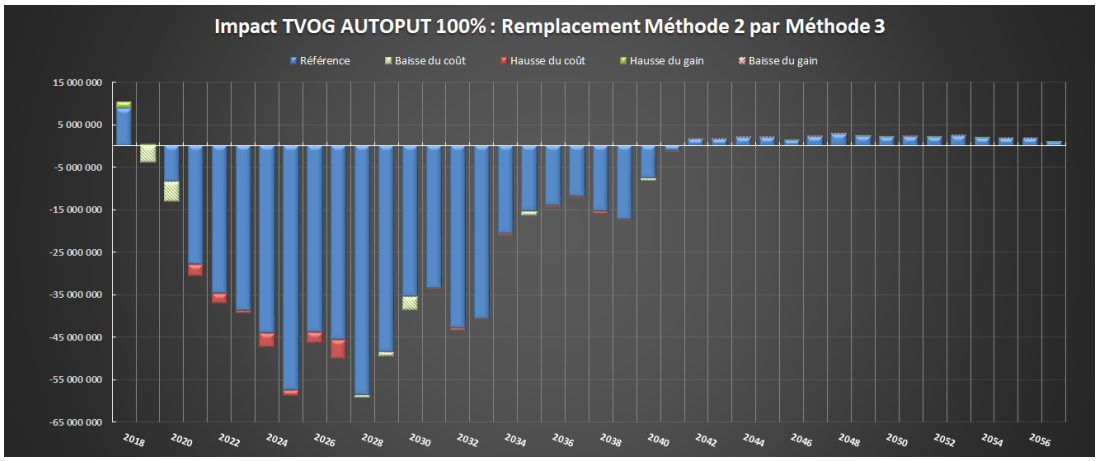
FIGURE 15.17 – Comparaison des impacts sur le profit, le TRA et la PB



(a) Put



(b) Put autofinancé par Call



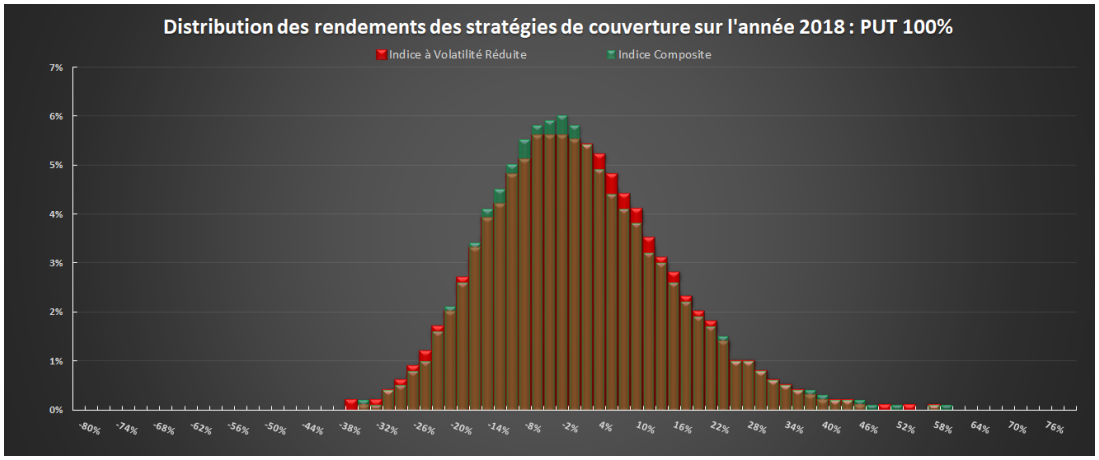
(c) Put autofinancé par Put avec nominal x10

FIGURE 15.18 – Comparaison des impacts sur la TVOG

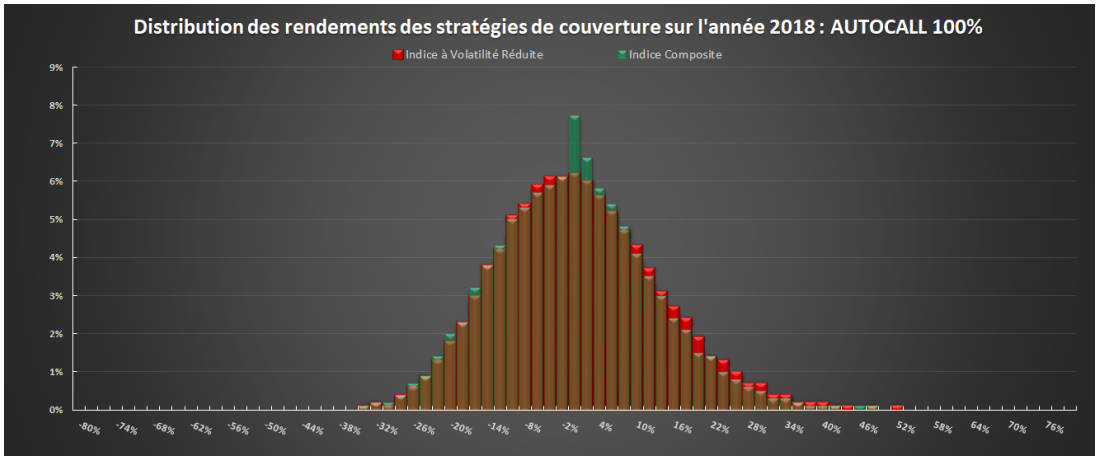
15.2.6 Conclusion de la réplication

Nous pouvons donc conclure en disant que les indices composites des stratégies de Puts seuls ou autofinancés par des Calls sont parfaitement répliqués par l'indice à volatilité réduite.
Cependant, l'indice composite de la stratégie autofinancée par des Puts n'est pas bien répliqué par l'indice à volatilité réduite. Cela est dû au fait que cette stratégie de couverture génère une importante asymétrie des rendements de l'indice action.

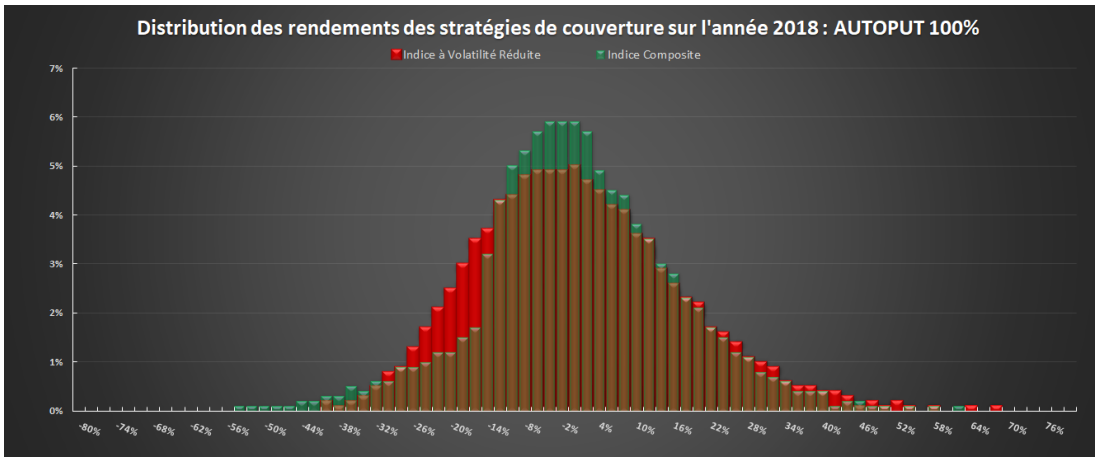
Sur les graphiques de la page suivante (Figure 15.19), nous pouvons observer les rendements générés par l'indice à volatilité réduite, en rouge, et les rendements générés par l'indice composite en vert, pour l'année 2018. Nous pouvons voir que les rendements des stratégies de Puts seuls ou autofinancés par des Calls sont semblables, mais pour la stratégie de Puts autofinancés par des Puts avec nominal x10, nous pouvons voir que l'asymétrie des rendements de l'indice composite n'est pas bien répliquée, ce qui explique les différences.



(a) Put 100%



(b) Put 100% autofinancé par un Call



(c) Put 100% autofinancé par un Put nominal x10

FIGURE 15.19 – Comparaison de la distribution des rendements sur l'année 2018

Cinquième partie

STRATÉGIES DE COUVERTURE : TAUX

Chapitre 16

Présentation des stratégies

Les économistes de BNP Paribas Cardif anticipent une remontée des taux dans les années à venir. Or une remontée des taux peut être très dangereuse pour un assureur. En effet, l'inertie du portefeuille ne permettra pas de traduire immédiatement ces nouvelles conditions de marchés dans le rendement du fonds. Ainsi nous ne pourrons pas participer aux rebonds des marchés. Il sera donc impossible de servir un taux compétitif, c'est pourquoi des rachats seront effectués : les assurés privilégieront les concurrents qui servent des taux plus intéressants.

De plus, ces rachats dynamiques obligeront BNP Paribas Cardif à réaliser des MVL obligataires, ce qui creusera encore plus le déficit financier. Il s'agit donc d'un cercle vicieux que nous souhaiterions éviter à tout prix.

Afin d'éviter cette situation, nous pourrions réduire le gap de duration (section 10.6). Rappelons que la duration du passif d'une compagnie d'assurance est un indicateur qui permet d'estimer l'échéance moyenne pondérée des paiements que l'assureur devra honorer pour faire face à ses engagements. Ainsi, réduire la duration de l'actif, sans réduire celle du passif, permettra à l'assureur d'être plus réactif en cas de remontée des taux.
Sinon, nous pouvons mettre en place des stratégies de couverture asymétriques nous permettant de pouvoir bénéficier d'une éventuelle remontée des taux. C'est cette méthode que nous avons décidé d'analyser au sein de ce mémoire.

L'objectif de BNP Paribas Cardif étant de se protéger contre une hausse des taux, nous avons établi une stratégie de base en conséquent : Roll de Swaptions de maturité/ténor 10Y/10Y pendant 10 ans (Possibilité de contracter un Swap dans 10 ans, qui durera 10 ans, avec une fréquence annuelle). Ainsi, chaque année, du 31/12/2017 au 31/12/2027, nous achèterons une Swaption 10Y/10Y. Par ailleurs, nous avons sélectionné le Cash-Settlement dans notre modélisation, car c'est le mode qui est le plus couramment utilisé sur les marchés.

Nous aurions pu choisir de se couvrir avec des Caps plutôt qu'avec des Swaptions : en effet, si nous achetions des Caps avec le taux CMS10Y comme sous-jacent, cela serait très semblable à des Swaptions.
Cependant, un tel Cap coutera plus cher qu'une Swaption, car le Cap nous permettra d'exercer chaque année un Caplet si le taux est avantageux, alors que la Swaption ne pourra être exercée qu'une seule fois. Le taux de swap est un taux moyenné : dans le cas où nous sommes en Swap-Settlement (contraction du Swap), bien que le taux de swap soit avantageux, il est possible de rencontrer quelques années sur les 10 années du Swap sous-jacent où le taux ne sera pas avantageux. Ainsi il est possible que nous devions payer des CF certaines années, alors qu'avec un Cap nous n'aurions pas eu à payer ces CF, puisque nous pouvons exercer de manière individuelle les Caplets chaque année. Comme nous sommes en Cash-Settlement, le Cap permet donc d'optimiser le gain forward estimé à la maturité de la Swaption.
Nous avons donc sélectionné les Swaptions plutôt que les Caps afin de réduire le coût de nos couvertures.

Afin de pouvoir tester cette stratégie, nous avons utilisé l'outil de couverture que nous avons développé lors de ce stage, qui permet de projeter une stratégie de couverture sur une table de scénarios stochastiques.
Nous avons ensuite transféré les variables extraites par l'outil dans le modèle Prophet ALS de BNP Paribas Cardif (section 10.1). Ainsi, nous avons pu simuler l'impact de l'application de stratégies de couverture sur le bilan économique de BNP Paribas Cardif.

Nous avons donc testé cette stratégie de Roll de Swaptions pour différentes valeurs de strikes : ils sont définis grâce à une marge additive appliquée au taux swap 10Y forward :

- ATM
- $ATM + 0.5\%$
- $ATM + 1.0\%$
- $ATM + 1.5\%$
- $ATM + 2.0\%$

Par exemple, si nous achetons une Swaption pour la stratégie +1.0% le 31/12/2024, et que le taux swap 10Y forward est estimé à 2.5% à maturité de l'option (31/12/2034), alors le strike sera de 2.5% + 1.0% = 3.5%. Notons que nous avons choisi de couvrir 10% de la poche obligataire, donc le nominal de la Swaption achetée correspondra à 10% de la poche obligataire.

En outre, nous avons effectué cette même stratégie mais en ajoutant une barrière aux Swaptions. La barrière sera égale au strike +2.0%. Ainsi nous limiterons notre protection, mais cette technique va nous permettre de réduire le coût de financement de nos couvertures.

Comme pour les stratégies actions, nous avons aussi effectué des stratégies autofinançantes. Le principe étant de financer l'achat de la Swaption par la vente d'une autre option. Ainsi, nous avons testé un autofinancement par :

- **La vente d'une Swaption avec nominal x10 :** On vend une Swaption avec un nominal 10 fois plus important, le strike de cette Swaption sera donc beaucoup plus éloigné de la monnaie que celui de la Swaption autofinancée. Nous misons donc sur la survenance des scénarios très rares, en s'exposant avec un effet de levier.
- **La vente d'un Floor Forward :** Le floor va commencer dans 10Y et durera 10Y (le même schéma de couverture que la Swaption). On mise sur l'effet inverse, on se protège à la hausse et on s'expose à la baisse.

Pour résumer, nous avons testé 4 types de stratégies différentes pour les taux :

1. Roll de Swaptions 10Y/10Y : +0.0% / +0.5% / +1.0% / +1.5% / +2.0%
2. Roll de Swaptions 10Y/10Y, avec une barrière à K+2.0% : +0.0% / +0.5% / +1.0% / +1.5% / +2.0% (K représentant le strike de la Swaption)
3. Roll de Swaptions 10Y/10Y, autofinancées par la vente de Floors Fwd : +0.0% / +0.5% / +1.0% / +1.5% / +2.0%
4. Roll de Swaptions 10Y/10Y, autofinancées par la vente de Swpt avec nominal x10 : +0.0% / +0.5% / +1.0% / +1.5% / +2.0%

Chapitre 17

Univers Monde-Réel

Dans un premier temps, nous avons testé nos stratégies en univers RW. Pour ce faire, nous avons utilisé la table stochastique fournie par le GSE RW. Vous pourrez trouver la description des scénarios générés précédemment (chapter 5). Rappelons que les scénarios qui ont été générés par ce GSE représentent la vision prospective des marchés par les économistes de BNP Paribas Cardif.

Dans cet univers, nous allons donc pouvoir étudier les impacts de nos stratégies de couverture sur le TRA, mais aussi sur le taux servi, et donc la satisfaction client et les rachats dynamiques associés.

17.1 Volatilité

Afin de valoriser les Swaptions en univers RW, nous avons utilisé la nappe de volatilités implicites normales fournie par Bloomberg. Il s'agit d'une structure par termes de volatilité qui prend en compte le smile de volatilité. Il s'agit donc des volatilités réellement utilisées sur le marché. Nous avons donc extrait les volatilités implicites en date du 31/12/2017 (date de notre table stochastique).

Par ailleurs, Bloomberg ne fournit pas une volatilité pour tous les couples Maturité/Ténor, nous avons donc dû interpoler les volatilités pour les couples manquants. La capture d'écran ci-dessous représente la façon dont Bloomberg présente la structure par termes de volatilités en fonction du Ténor et de la Moneyness. Une dimension supplémentaire vient donc s'ajouter à notre tableau par rapport à la volatilité des Puts.

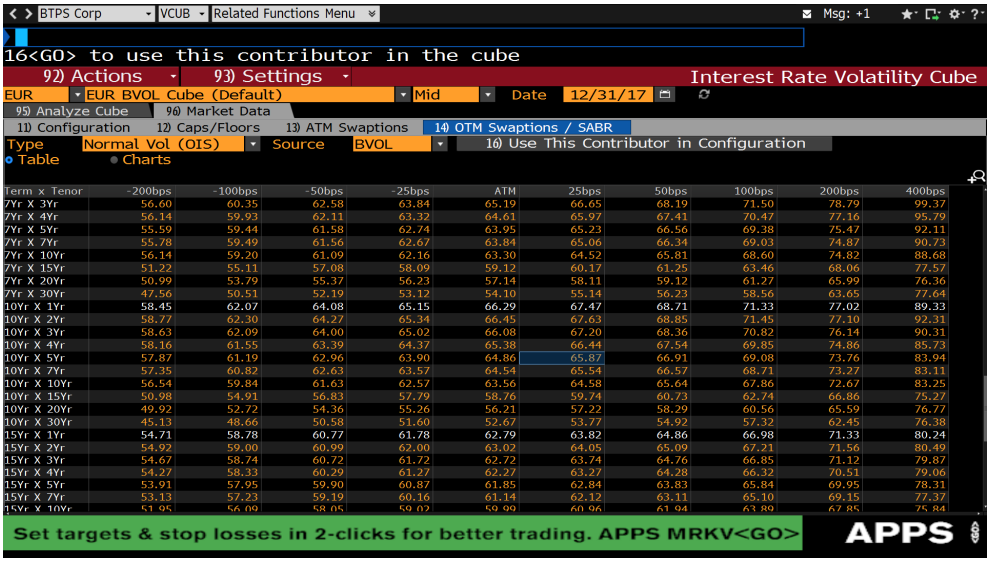


FIGURE 17.1 – Présentation des volatilités de marché pour les Swaptions sur Bloomberg

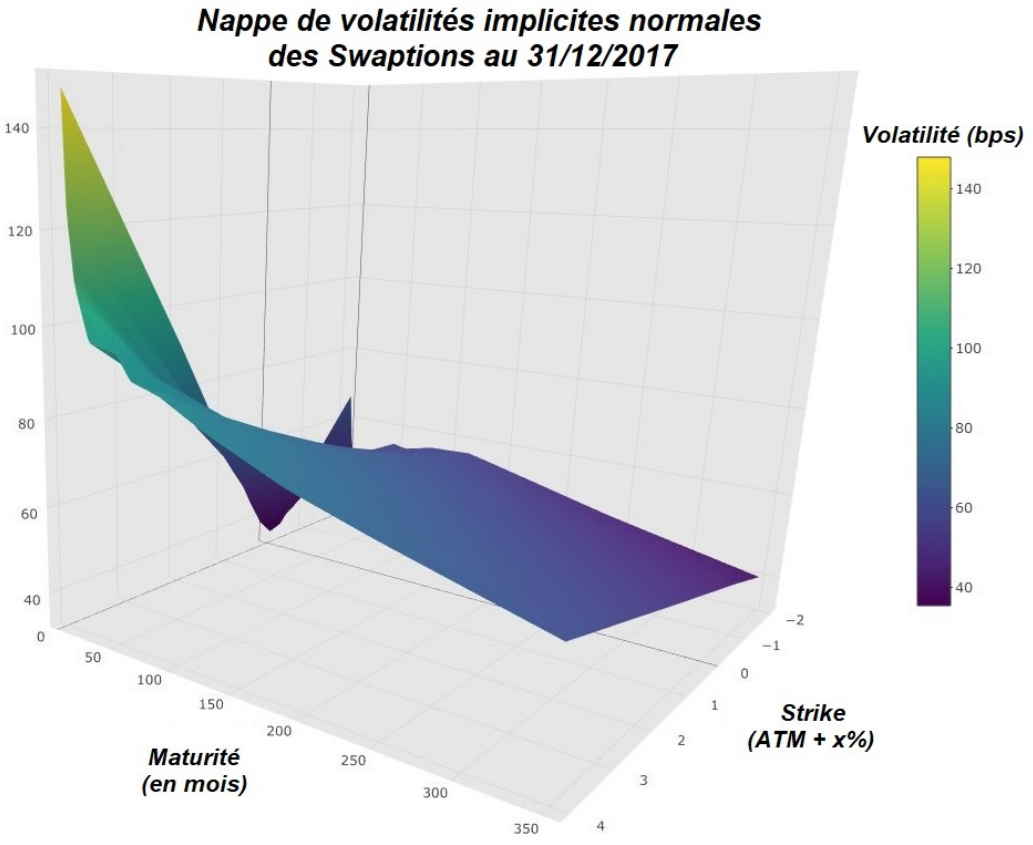


FIGURE 17.2 – Nappe de volatilités implicites normales des Swaptions de ténor 10Y

17.2 Distribution du TRA

Dans un premier temps nous allons observer l'impact de nos stratégies de couverture sur la distribution du TRA. Pour un soucis de lisibilité des graphiques, nous avons décidé de seulement représenter la queue inférieure de la distribution, à savoir la médiane, les quantiles 25%, 10%, 5%, 1%, et le minimum. Nous avons aussi représenter la moyenne afin de nous donner une idée de l'évolution sur la queue supérieure. Malgré tout, nous avons vu précédemment (section 10.9) que l'assureur souhaite avant tout se couvrir pour des TRA faibles, puisque nous pouvons dire qu'il partage ses gains avec ses assurés, mais pas ses pertes, qu'il doit entièrement assumer.

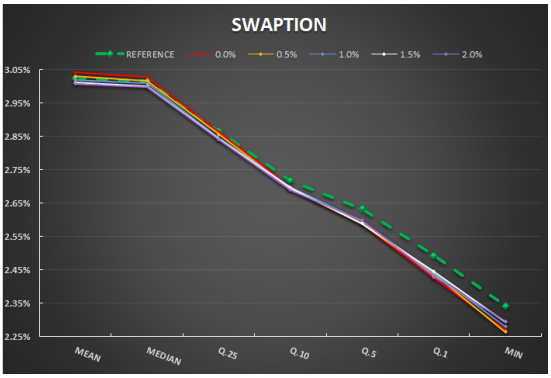
Afin d'effectuer une comparaison des stratégies, nous avons calculé la moyenne des TRA générés par chacune des stratégies sur les 30 premières années (de 2018 à 2047). Cet horizon temporel correspond à la période d'application de nos stratégies de couverture taux : aucun cash-flow ne sera généré par les couvertures au-delà de cette période.

Les stratégies avec autofinancement semblent être les plus intéressantes (Figure 17.3). En effet, tous les quantiles sont supérieurs à celui de référence pour toutes les stratégies autofinancées par une Swaption avec effet de levier. Pour les stratégies autofinancées par un Floor, les stratégies les plus intéressantes semblent être celles avec un strike égal à $ATM + 1.5\%$ et $ATM + 2.0\%$.

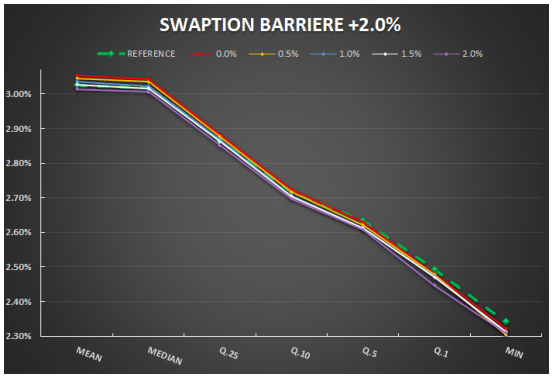
- **Autofi Swaption (Figure 17.3c) :** Nous pouvons remarquer que la meilleure stratégie semble être celle ATM, mais en-dessous du quantile à 1%, c'est la stratégie avec un strike égal à $ATM + 0.5\%$ qui est la plus intéressante.

- **Autofi Floor (Figure 17.3d) :** C'est la stratégie avec strike $ATM + 2.0\%$ qui est la meilleure, sur tous les quantiles.

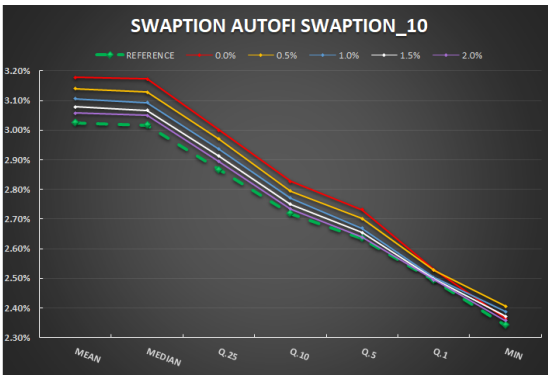
Ces stratégies sont intéressantes car notre GSE a une tendance haussière comme nous avons pu le voir sur le cône de diffusion des taux 1Y et 10Y dans la partie descriptive du GSE RW (Figure 5.4) : les taux augmentent de manière singulière entre 2020 et 2022. Cette hausse des taux entre 2020 et 2022 est cohérente avec la vision des économistes de BNP Paribas Cardif.
Pour les Swaptions avec nominal x10 : cette tendance haussière n'est pas assez importante pour aller activer les Swaptions vendues significativement et de manière répétitive.
Pour les Floors : plus le strike de la Swaption achetée est élevé, plus le strike du Floor autofinançant sera faible, et donc moins il sera exercé.



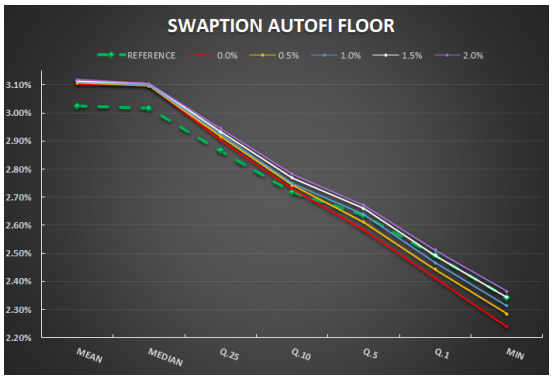
(a) Swaption



(b) Swaption avec barrière +2.0%



(c) Swaption autofinancée par Swaption x10



(d) Swaption autofinancée par Floor

FIGURE 17.3 – Impact des stratégies de couverture sur la distribution des TRA

17.3 Distribution des gains/pertes de TRA

Même si la distribution du TRA nous semble moins intéressante pour les stratégies consistant à acheter des Swaptions vanilles ou avec barrière, nous pouvons tout de même nous demander si ces stratégies nous font gagner du TRA par rapport à la référence dans des cas précis (surtout dans les scénarios défavorables). Pour les stratégies autofinancées par des Swaptions ou des Floors, nous pouvons aussi nous demander si elles ne nous aident pas seulement lorsque le TRA est déjà suffisamment important et pas lorsque nous le souhaitons le plus : en cas de TRA faible.

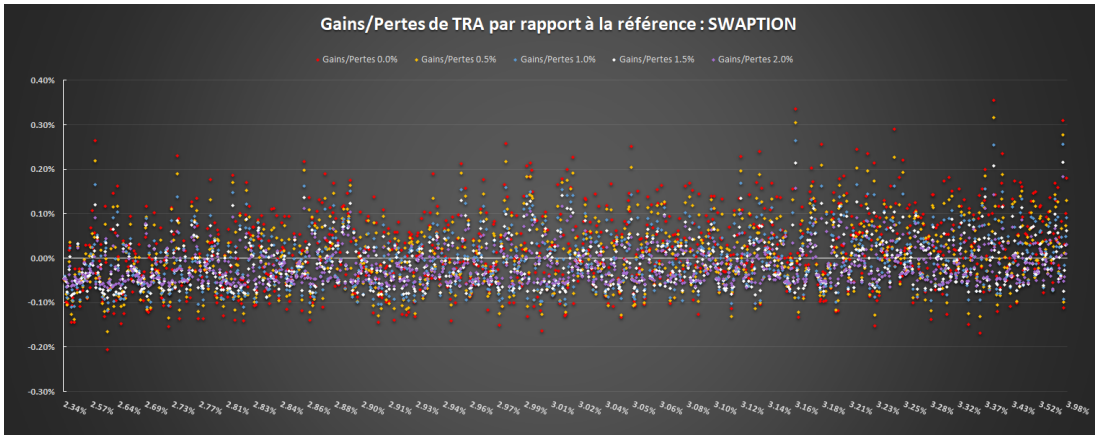
Pour ce faire, nous avons trié les simulations par TRA croissant (toujours le même TRA moyenné sur les 30 premières années de la section précédente). Ainsi à gauche du graphique nous pouvons observer les pires scénarios de référence, et sur la droite, les meilleurs scénarios.

Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de tendance apparente, les stratégies semblent aussi bien nous aider en cas de scénario défavorable qu'en cas de scénario favorable.
Pour les stratégies autofinancées par des Swaptions, le niveau du TRA n'a pas l'air d'influer sur le bénéfice de notre couverture : la couverture nous aide aussi bien dans les scénarios favorables que défavorables.
Nous pouvons cependant remarquer que, pour la stratégie autofinancée avec des Floors, la couverture semble plus nous aider lorsque le TRA de référence est important : la couverture nous aide plus dans les scénarios favorables que défavorables. Cela signifie que les TRA faibles sont plutôt générés lorsque les taux sont bas, et donc l'exercice du floor vendu vient accentuer notre perte financière.

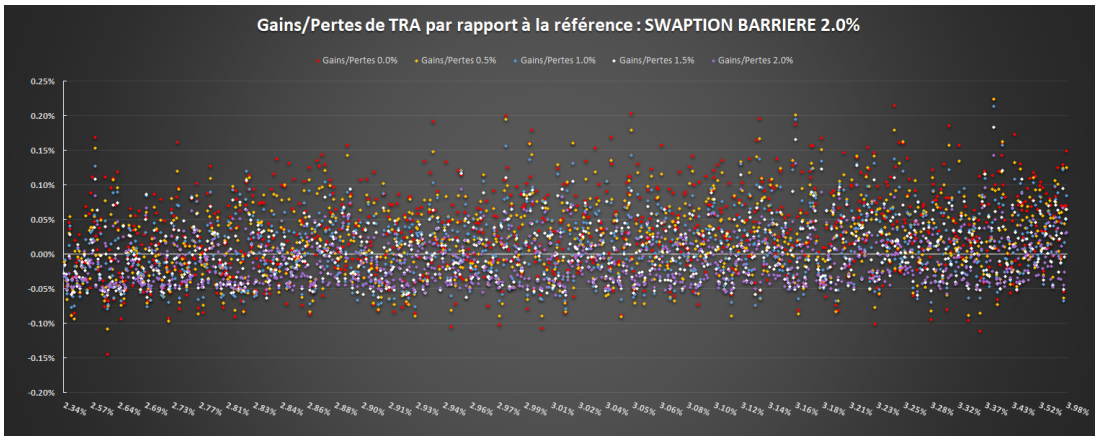
Nous allons donc analyser les meilleures stratégies :

- **Swaption $ATM + 0.0\%$ autofinancée par Swaption avec nominal x10 :** On se protège contre une hausse des taux contenue, mais on s'expose de manière importante à une forte hausse des taux.
- **Swaption $ATM + 0.5\%$ autofinancée par Swaption avec nominal x10 :** On se protège contre une hausse des taux un peu plus importante, en s'exposant de manière importante à une très forte hausse des taux.
- **Swaption $ATM + 2.0\%$ autofinancée par Floor :** On se protège contre une hausse de plus de 2% en s'exposant à la baisse.

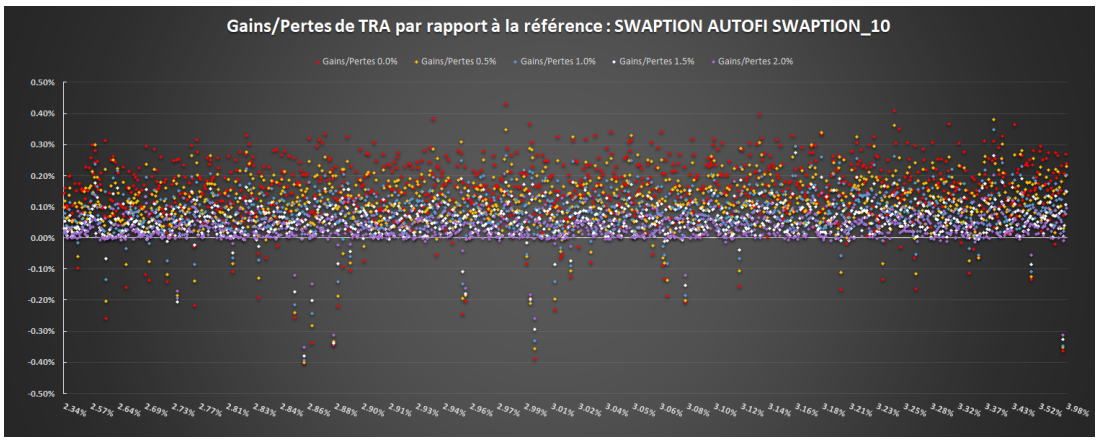
Nous effectuons donc un zoom sur ces 3 stratégies dans les graphiques suivants (Figure 17.5). La différence entre les 2 stratégies d'autofinancement de Swaptions est très légère : nous obtenons un léger resserrement vers la référence des TRA lorsque nous augmentons le strike.



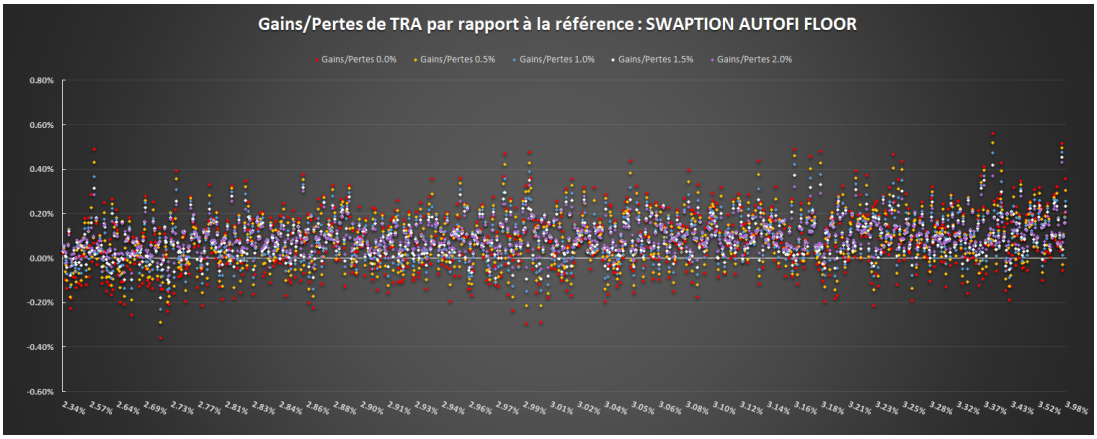
(a) Swaption



(b) Swaption avec barrière +2.0%

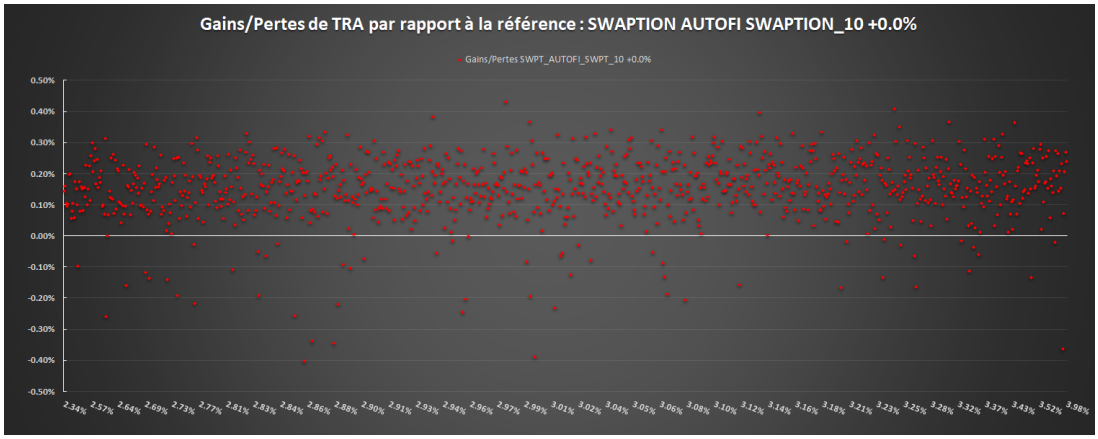


(c) Swaption autofinancée par Swaption x10

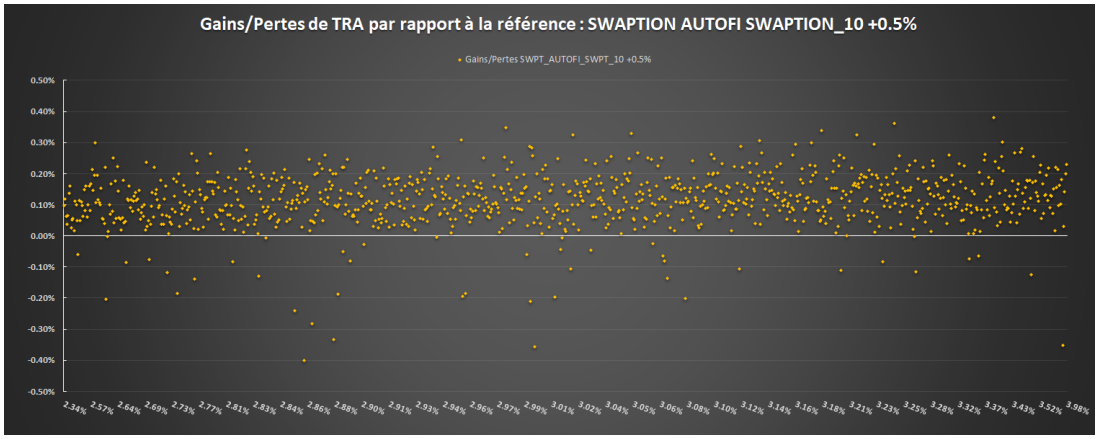


(d) Swaption autofinancée par Floor

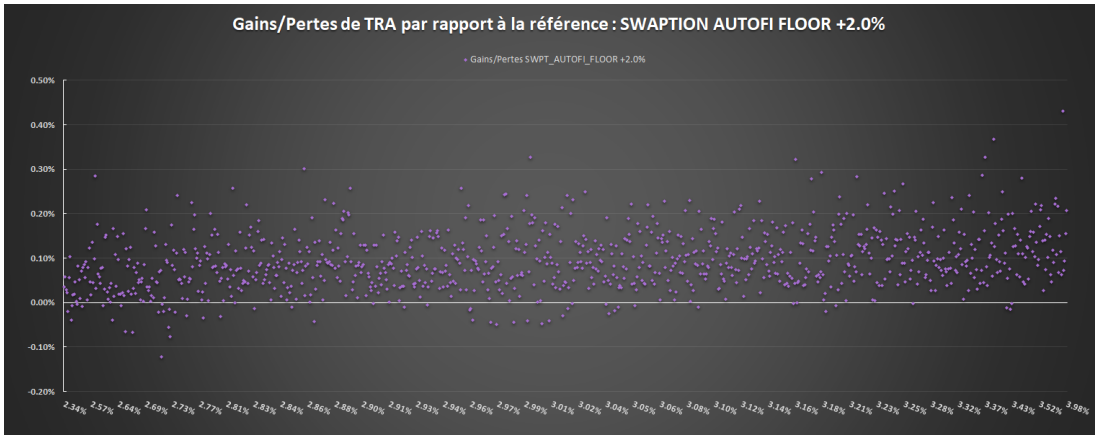
FIGURE 17.4 – Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture



(a) Swaption autofinancée par Swaption x10 : +0.0%



(b) Swapton autofinancée par Swaption x10 : +0.5%



(c) Swaption autofinancée par Floor : +2.0%

FIGURE 17.5 – Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture : Zoom

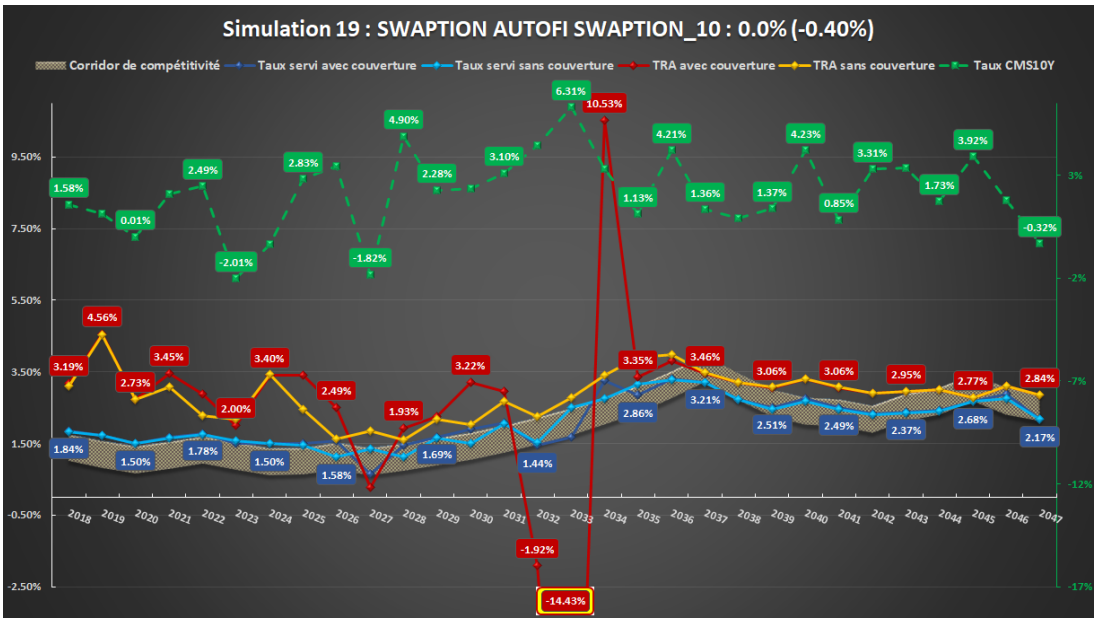
17.4 Taux servi et satisfaction client

17.4.1 Analyse des simulations atypiques

Grâce aux sections précédentes, nous avons pu extraire les stratégies qui nous semblaient être les plus efficaces :

- Roll de Swaptions 10Y/10Y avec strike $ATM+0.0\%$ ou $ATM+0.5\%$, autofinancées par la vente de Swpt avec nominal x10
- Roll de Swaptions 10Y/10Y avec strike $ATM + 2.0\%$, autofinancées par la vente de Floors Fwd

Nous allons donc maintenant analyser de manière plus approfondie ces 3 stratégies. Commençons avec celle autofinancée par des swaptions avec nominal x10 et comprenant un strike ATM. A l'aide des graphiques précédemment obtenus, nous avons pu extraire la simulation qui nous fait perdre le plus de TRA par rapport à la référence (-0.40%), ainsi que la meilleure simulation ($+0.43\%$). Rappelons que cela représente le gain ou la perte moyenne sur les 30 premières années de projection.



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	1.91%	2.74%	2.27%	1.08%	2.95%	3.45%	-1.09%	0.29%	3.94%	4.29%
Strike autofinancement	5.77%	6.60%	6.13%	4.94%	6.81%	7.31%	2.77%	4.15%	7.80%	8.15%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	0.0%	16.9%	0.1%	11.6%	1.3%	8.1%	-200.6%	25.9%	0.0%	0.0%

(b) Options associées

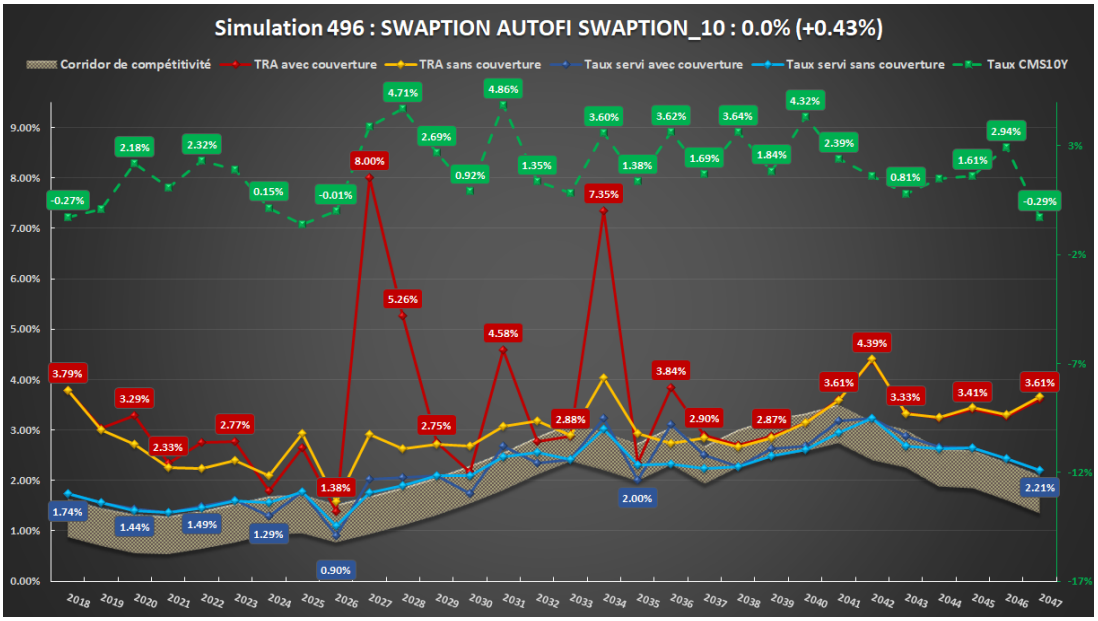
FIGURE 17.6 – Stratégie Swaption +0.0% autofinancée par Swaption x10 : Simulation 19

▷ **Pire simulation (19) : -0.40% (Figure 17.6) :** Nous pouvons observer que le strike de la swaption finançante se situe toujours à +3.86% du taux swap 10Y forward au moment de l'achat. Ainsi nous sommes protégés contre une hausse maximale de 3.86%, au-delà nous nous exposons à l'effet de levier.
Nous pouvons remarquer que la perte en TRA est principalement concentrée sur 2 années : 2032 et 2033. La perte en 2033 est due à la swaption finançante achetée en 2023. En effet, les taux étaient très bas cette année (CMS10Y = −2.01%), donc les 2 swaptions achetées sur cette année ont des strikes très faibles. Or juste avant que ces swaptions n'arrivent à maturité, les taux augmentent beaucoup : en 2033, CMS10Y = 6.31%. C'est pourquoi lorsque ces swaptions sont arrivées à maturité nous avons dû payer un énorme CF pour la swaption finançante : nous faisons face à l'effet de levier de la swaption vendue avec nominal x10.

A la différence des Puts qui arrivent à maturité chaque année, nous détenons les swaptions pendant 10 ans. Nous devons donc prendre en compte l'amortissement de nos options. Rappelons que nous avons choisi la méthode linéaire comme méthode d'amortissement FGAAP des options (section 9.2). Cette méthode d'amortissement a cependant un désavantage par rapport à la méthode IFRS : l'effet de palier. En effet, avec la méthode linéaire nous avons une vision forward du CF, et non une vision probabiliste. Ainsi, si nous possédons une swaption avec un strike à 2%, et que le taux swap 10Y forward est égal à 1.99%, nous amortirons juste la prime de la swaption, alors qu'en méthode IFRS, nous avons une vision probabilisée, et donc nous n'amortirons pas juste la prime dans ce cas, mais aussi un CF avec une certaine probabilité. Nous pouvons clairement observer cet « effet palier » en 2032 : les taux montent de sorte que la swaption vendue en 2023 avec un nominal x10 va être exercée en vision forward. C'est pourquoi nous avons une grosse perte sur cette année et non sur les années précédentes malgré la hausse des taux déjà constatée, le palier n'ayant pas encore été franchi.

En 2027 nous avons une légère perte due à la baisse des taux : les CF anticipés deviennent nuls. Ainsi nous n'amortissons donc plus que la prime, et nous devons en plus « rattraper » les amortissements passés, donc nous passons un amortissement négatif sur cette année.

Malgré la grosse perte en TRA en 2033, nous pouvons observer que le taux servi reste toujours dans le corridor de compétitivité. Cela est dû à la réserve de PPB : nous pouvons voir que nous avons pu doter beaucoup de PPB les années précédentes (taux servi = borne sup du corridor). A cela nous pouvons ajouter la politique de dotation à la PPB de BNP Paribas Cardif depuis 2012 (Figure 12.7).



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	1.91%	0.86%	1.23%	3.31%	1.85%	2.80%	2.55%	0.94%	0.30%	0.98%
Strike autofinancement	5.77%	4.72%	5.09%	7.16%	5.71%	6.66%	6.41%	4.80%	4.15%	4.84%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	16.4%	30.6%	12.8%	0.0%	23.7%	0.0%	0.0%	22.6%	10.3%	22.1%

(b) Options associées

FIGURE 17.7 – Stratégie Swaption +0.0% autofinancée par Swpt x10 : Simulation 496

▷ **Meilleure simulation (496) : +0.43% (Figure 17.7) :** Premièrement, nous pouvons remarquer que le strike de la swaption finançante se situe toujours à +3.86% du taux swap 10Y forward au moment de l'achat, comme pour la simulation 19. Ainsi nous sommes protégés contre une hausse maximale de 3.86%, au-delà nous nous exposons à l'effet de levier.
Nous gagnons du TRA à chaque fois que les taux montent. Les hausses ne sont pas suffisantes pour activer la swaption avec nominal x10, donc nous gagnons de l'argent avec la swaption x1, sans en perdre avec la swaption x10. Nous pouvons remarquer que dans certains cas nous perdons quelques points de TRA, cela est dû à la méthode d'amortissement : lorsque les taux montent puis rebaissent, nous devons « rattraper » l'amortissement passé les années précédentes. Les gains en TRA sont tout de même énormes, grâce à la montée des taux qui ne dépassent pas les strikes des swaptions finançantes.

Afin d'éviter les scénarios dans lesquels la swaption avec nominal x10 est exercée, nous pouvons observer la stratégie avec un strike $ATM+0.5\%$ (Figure 17.8). Ainsi le strike de la swaption finançante sera encore plus grand, et donc une hausse des taux encore plus

importante sera nécessaire pour s'exposer à l'effet de levier. Nous pouvons observer que nous serons protégés contre une hausse des taux comprise entre 0.5% et 4.23%, au-delà nous nous exposerons à l'effet de levier. Par ailleurs, nous pouvons affirmer que les CF sont amoindris dans tous les cas, qu'ils soient négatifs ou positifs.

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	1.91%	2.74%	2.27%	1.08%	2.95%	3.45%	-1.09%	0.29%	3.94%	4.29%
Strike autofinancement	5.77%	6.60%	6.13%	4.94%	6.81%	7.31%	2.77%	4.15%	7.80%	8.15%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	0.0%	16.9%	0.1%	11.6%	1.3%	8.1%	-200.6%	25.9%	0.0%	0.0%

(a) Options associées : Stratégie Swaption +0.0% autofinancée par Swpt x10

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	2.41%	3.24%	2.77%	1.58%	3.45%	3.95%	-0.59%	0.79%	4.44%	4.79%
Strike autofinancement	6.14%	6.97%	6.50%	5.31%	7.18%	7.68%	3.14%	4.52%	8.17%	8.52%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	0.0%	13.0%	0.0%	7.1%	0.0%	4.0%	-182.6%	21.6%	0.0%	0.0%

(b) Options associées : Stratégie Swaption +0.5% autofinancée par Swpt x10

FIGURE 17.8 – Comparaison stratégies Swaption autofinancées par Swpt x10 : Simu 19

Bien sûr, nous pourrions encore plus limiter l'exposition à l'effet de levier en autofinançant des swaptions encore plus OTM, mais alors nos gains en TRA vont aussi se réduire comme nous pouvons le voir sur le graphiques des quantiles (Figure 17.3c). Nous verrons par la suite quelle couverture nous permet de rester le plus souvent possible dans le corridor de compétitivité, afin d'éviter les rachats conjoncturels.

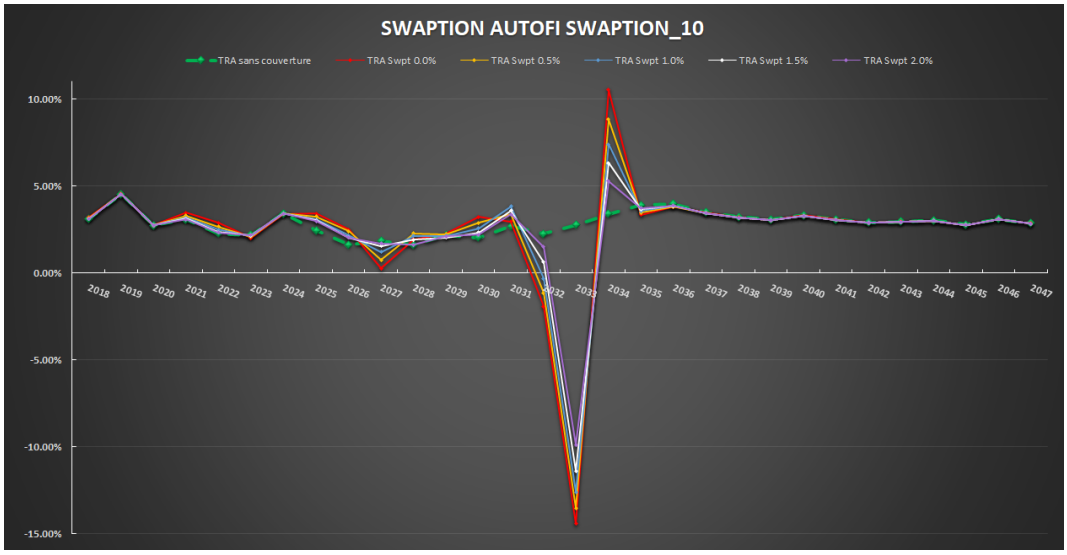
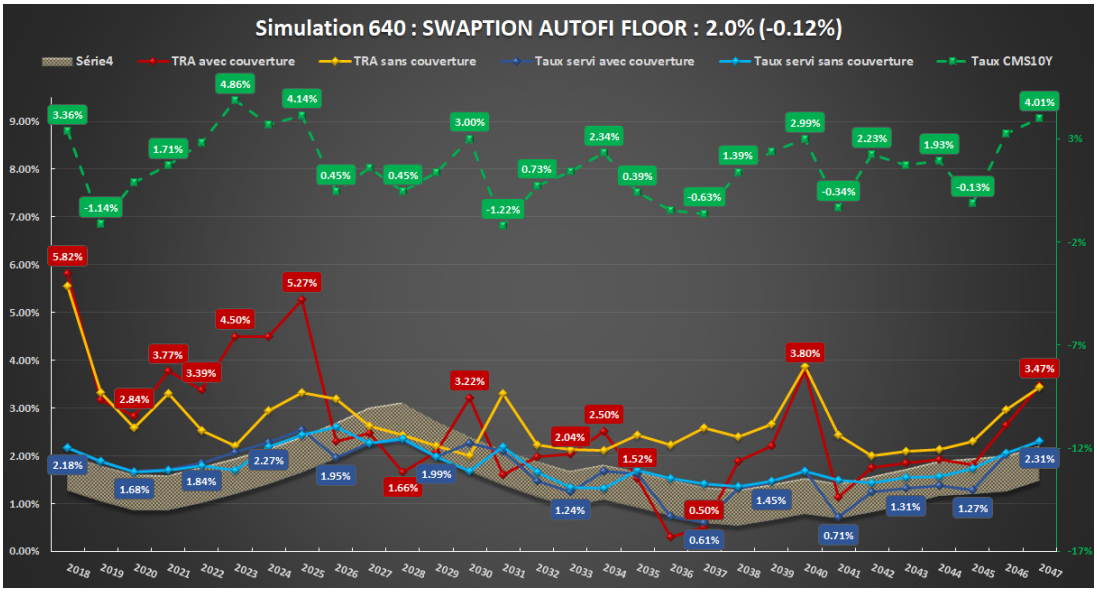


FIGURE 17.9 – Stratégies Swaption autofinancées par Swaption x10 : Simulation 19

Contrairement aux stratégies de Puts avec levier, nous pouvons remarquer qu'aucune stratégie de Swaptions avec levier ne nous permet d'éviter totalement une perte en TRA par rapport à la référence (Figure 17.4c) : acheter des swaptions plus OTM va juste rapprocher le TRA avec stratégie du TRA de référence (sans couverture). Voici un exemple sur la simulation 19, la pire simulation pour toutes ces stratégies (Figure 17.9) : plus la swaption que nous achetons est OTM, plus le TRA avec couverture se rapproche du TRA sans couverture.

Analysons maintenant la stratégie consistant à acheter des Swaptions $ATM + 2.0\%$ autofinancées par la vente de Floors forward. Grâce au graphique précédemment obtenu (Figure 17.5c), nous avons pu extraire la simulation qui nous fait perdre le plus de TRA sur 30 ans (en moyenne) par rapport à la référence (640 : -0.12%), ainsi que la meilleure simulation (230 : $+0.43\%$).



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

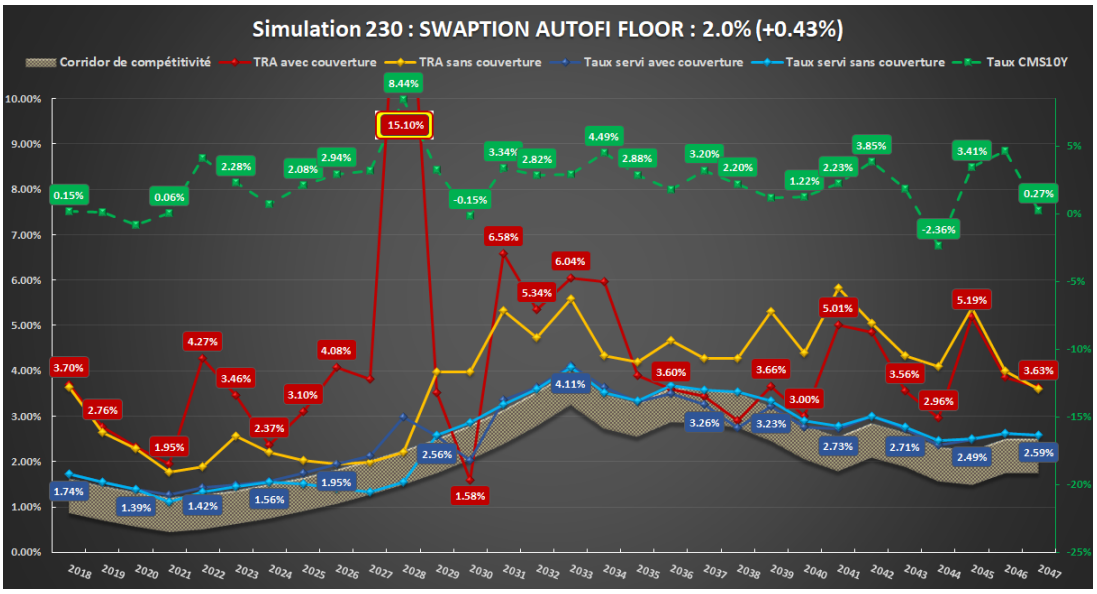
	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	3.91%	6.54%	1.98%	4.01%	4.65%	5.61%	7.67%	6.75%	7.17%	3.34%
Strike autofinancement	0.36%	2.20%	-1.37%	0.44%	0.62%	1.26%	2.70%	2.06%	2.35%	-0.48%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	-3.4%	30.6%	12.8%	0.0%	23.7%	0.0%	0.0%	22.6%	10.3%	22.1%

(b) Options associées

FIGURE 17.10 – Stratégie Swaption +2.0% autofinancée par Floor : Simulation 640

▷ **Pire simulation (640) : -0.12% (Figure 17.10) :** Comme nous pouvons le voir, nous avons un très bon TRA de 2020 à 2025, cela est dû à la montée des taux : en effet, les swaptions que nous avons achetées vont alors prendre de la valeur, et les floors que nous avons vendus vont quant à eux perdre de la valeur, donc nous allons amortir des CF assez importants sur ces premières années.

Cependant, après cette montée des taux jusqu'en 2025, les taux vont ensuite chuter. L'effet inverse va alors se passer : nous allons devoir amortir des CF négatifs très importants. De plus, nous avons acheté nos options lorsque les taux étaient hauts, et comme les taux se stabilisent ensuite à un niveau beaucoup plus bas, nous allons ensuite payer des CF pour les floors que nous avons vendus, et les swaptions ne seront pas exercées. Néanmoins, nous pouvons remarquer que nous ne sortons jamais du corridor de compétitivité grâce aux dotations en PPB que nous avons effectuées sur les premières années.



(a) TRA, taux servi, corridor de compétitivité

	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Strike	3.91%	3.29%	3.25%	2.32%	2.83%	7.16%	5.24%	3.53%	5.17%	6.11%
Strike autofinancement	0.36%	-0.08%	-0.11%	-1.03%	-0.92%	235.00%	0.99%	-0.26%	0.94%	1.61%
Prime	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CF (non actualisés)	-0.5%	34.3%	0.0%	0.0%	4.3%	-3.1%	1.6%	5.6%	-3.2%	-4.7%

(b) Options associées

FIGURE 17.11 – Stratégie Swaption +2.0% autofinancée par Floor : Simulation 230

▷ **Meilleure simulation (230) : +0.43% (Figure 17.11) :** Nous pouvons voir que, sur un scénario où les taux sont globalement en hausse, nous gagnons énormément de TRA, surtout sur les années avec une forte hausse comme en 2027, où notre TRA atteint plus de 15% (contre 2.20% sans couverture). Suite à cette importante hausse des taux, les taux chutent sur les 2 années suivantes (2029 et 2030), mais à un niveau semblable à celui des premières années, donc l'amortissement des floors ne prend pas cette baisse en compte : en vision forward, ils ne seront pas exercés.

17.4.2 Taux servi non compétitif

Jusqu'ici nous avons étudié le TRA qui représente le rendement de BNP Paribas Cardif, et donc l'impact sur le résultat.
Maintenant, nous allons nous concentrer encore plus sur l'aspect de la satisfaction client en étudiant la distribution des taux servis. Nous allons donc nous demander si ces stratégies nous permettent d'éviter les scénarios dans lesquels nous avons des taux servis non compétitifs, c'est-à-dire des taux servis strictement inférieurs à la borne basse du corridor de compétitivité. Lorsque le taux servi est inférieur à cette valeur, des rachats dynamiques vont être déclenchés. Or ces rachats peuvent provoquer la réalisation de MVL obligataires, ce qui impactera fortement les résultats financiers. Il s'agit donc d'un cercle vicieux que nous souhaiterions éviter : l'objectif sera donc d'éviter ces rachats.

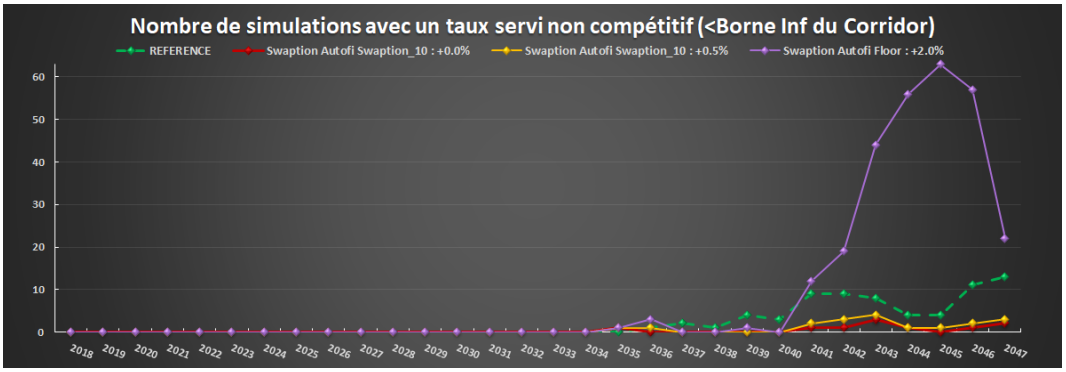


FIGURE 17.12 – Nombre de simulations avec un taux servi non compétitif

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que la stratégie consistant à autofinancer des Swaptions avec des Floors semblent finalement être une mauvaise idée : à partir de 2041, cette stratégie génère énormément de scénarios dans lesquels nous ne pouvons pas servir un taux compétitif, et donc nous devrons faire face à un nombre important de rachats dynamiques. Ce phénomène peut s'expliquer par la politique d'exposition de BNP Paribas Cardif à une baisse des taux. En effet, sur les scénarios où les taux baissent, nous devons faire face à une chute du TRA. Or avec cette stratégie nous nous couvrons contre une hausse des taux et nous nous exposons à la baisse, ce qui a pour effet d'amplifier la baisse du TRA en cas de scénarios de baisse des taux.

Ensuite, nous pouvons affirmer que les stratégies autofinancées par des Swaptions semblent intéressantes. En effet, elles nous permettent de limiter le nombre de scénarios avec un taux servi non compétitif (réduit leur nombre de plus de 50%).

Cependant, nous pouvons nous demander si ces stratégies nous permettent d'éviter (ou génèrent) des années avec un taux servi très nettement inférieur à la borne basse du corridor (années qui auraient provoqué beaucoup de rachats dynamiques), ou bien si

ces stratégies nous permettent seulement d'éviter (ou génèrent) des années avec un taux servi très proche de la borne basse du corridor.

Pour ce faire, nous allons observer la distribution de la différence entre le taux servi et la borne basse du corridor lors des années non compétitives (Figure 17.13) :

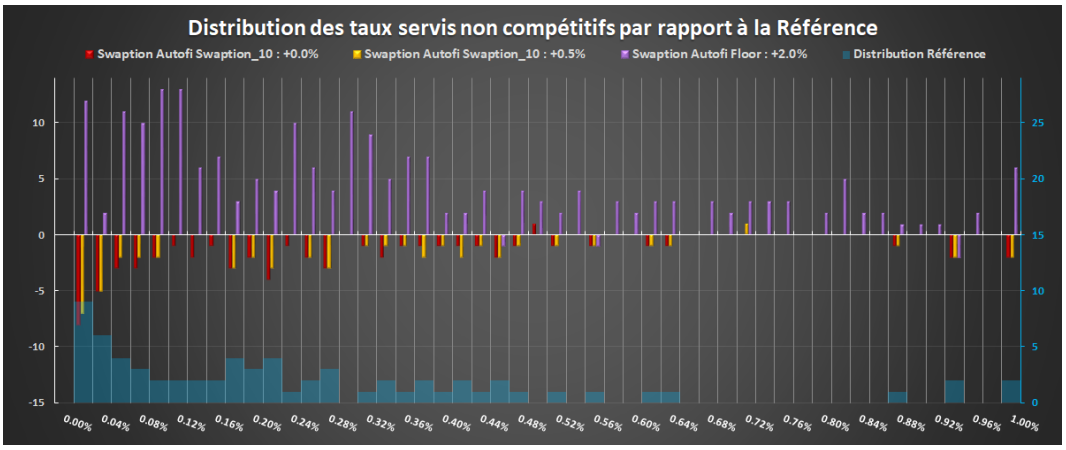


FIGURE 17.13 – Différence de la distribution des taux servis non compétitifs

Remarquons que les 2 axes verticaux partagent la même échelle, ainsi la comparaison entre la distribution de référence (sans couverture) et les accroissements/suppressions de taux servis non compétitifs via les stratégies de couverture est simplifiée.

Premièrement, nous pouvons maintenant affirmer que la stratégie autofinancée par des Floors n'est pas intéressante : elle génère beaucoup de taux non compétitifs, mais surtout elle génère 6 scénarios de plus que la référence avec un taux servi non compétitif de plus de 1% ! Or ces taux très éloignés de la borne basse du corridor de compétitivité sont à éviter absolument, car ils génèreront d'importants rachats dynamiques. Nous pouvons donc négliger cette stratégie.

Enfin, nous pouvons conclure en affirmant que les stratégies autofinancées par des Swaptions sont excellentes, puisqu'elles permettent d'éviter presque tous les scénarios avec un taux non compétitif important :

- La stratégie avec un strike à $ATM + 0.0\%$ nous permet d'éviter tous les taux servis non compétitifs de plus de 0.50%, et limite grandement le nombre de taux servis non compétitifs inférieurs à 0.50%.
- La stratégie avec un strike à $ATM + 0.5\%$ génère 1 scénario avec un taux servi non compétitif de 0.72%, mais à part cela, elle permet d'éviter tous les scénarios avec un taux servi non compétitif supérieur à 0.34%. Bien sûr, elle permet aussi de réduire drastiquement le nombre de scénarios avec un taux servi non compétitif inférieur à 0.34%.

Chapitre 18

Univers Risque-Neutre

Nous allons maintenant pouvoir passer à l'analyse de nos stratégies de couverture Taux en univers Risque-Neutre. Pour ce faire, nous allons projeter nos stratégies sur la table stochastique fournie par le GSE RN décrit précédemment (chapter 6).

Nous allons ainsi pouvoir étudier les engagements que BNP Paribas Cardif devra honorer (BEL), mais aussi la valeur de l'activité d'assurance (VIF). Par ailleurs, nous vérifierons les éventuels écarts de convergence de notre modèle ALM, afin qu'il n'y ait pas de création ou de destruction de richesse lors de la projection.

Enfin, nous pourrons aussi analyser de manière plus détaillée la VIF, qui représente la valeur actualisée des résultats futurs distribués aux actionnaires, en étudiant les variables économiques qui la composent : PVFP et TVOG.

18.1 Correctifs de martingalité

En univers RN, il est nécessaire que les actifs projetés soient martingales. En respectant ce principe, aucune richesse ne sera créée ou détruite.

Pour ce faire, nous avons dû appliquer les mêmes correctifs que pour les actions :

1. Premièrement, rappelons que les scénarios produits par le GSE RN ne permettent pas à toutes les options possibles d'être exercées (Figure 6.3). Or pour que ces options soient martingales, leurs prix doivent être nul.
   Par conséquent, nous avons effectué la même restriction que pour les actions, nous avons limité les possibilités d'achats d'options : les options pouvant être achetées sont celles qui peuvent être exercées sur une simulation au moins.

2. Deuxièmement, nous avons dû calculer une nouvelle nappe de volatilité. En effet, si nous utilisons la nappe de volatilité de marché décrite précédemment (Figure 17.2),

les options ne pourront pas être martingales. Nous avons donc calculer une nappe de volatilité permettant de rendre toutes les options martingales sur notre table de scénarios stochastiques :

$$Prix = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{s=1}^{1000} \sum_{t \geq 1} D_t^s \cdot CF_t^s \tag{18.1}$$

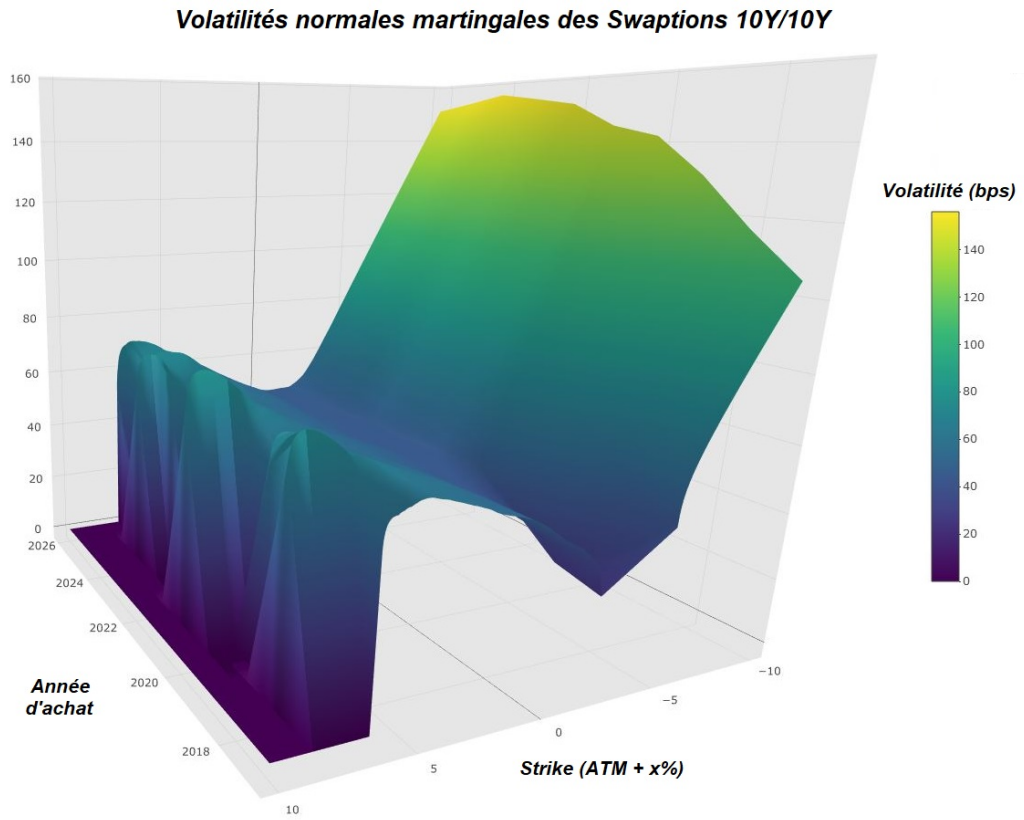


FIGURE 18.1 – Nappe de volatilités martingales normales des Swaptions 10Y/10Y

Nous pouvons donc bien observer la structure par termes des volatilités. De manière générale, nous pouvons dire que les swaptions 10Y/10Y avec un strike à $ATM - 6\%$ ne seront jamais exercées.

Nous pouvons aussi remarquer que le smile de volatilité n'est plus pris en compte. Cela aura donc pour effet de baisser le strike de la Swaption autofinançante. Par exemple, pour la stratégie ATM, le strike autofinançant valait $ATM + 3.86\%$ en univers RW, alors qu'en univers RN, il vaudra $ATM + 2.49\%$: nous serons plus facilement exposés à l'effet de levier.

18.2 Projection de la richesse

Comme pour les stratégies de couverture Action, nous allons tout d'abord analyser la richesse projetée par Prophet. Ainsi nous pourrons observer la répartition de la richesse projetée, mais aussi vérifier qu'aucune richesse n'ait été créée ou détruite lors de la projection. Pour des raisons de confidentialité, nous exprimerons les variables en pourcentage ou elles seront retraitées.

	VIF	BEL	EC	BEL + EC	MV en t0
REFERENCE	2.852%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
SWPT 0.0%	2.533%	98.09%	-0.62%	97.47%	100.00%
SWPT 0.5%	2.700%	97.66%	-0.36%	97.30%	100.00%
SWPT 1.0%	2.779%	97.41%	-0.19%	97.22%	100.00%
SWPT 1.5%	2.819%	97.26%	-0.08%	97.18%	100.00%
SWPT 2.0%	2.836%	97.17%	-0.01%	97.16%	100.00%
SWPT BARR 0.0%	2.617%	97.91%	-0.52%	97.38%	100.00%
SWPT BARR 0.5%	2.741%	97.57%	-0.31%	97.26%	100.00%
SWPT BARR 1.0%	2.800%	97.36%	-0.16%	97.20%	100.00%
SWPT BARR 1.5%	2.828%	97.23%	-0.06%	97.17%	100.00%
SWPT BARR 2.0%	2.841%	97.16%	0.00%	97.16%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 0.0%	0.850%	99.20%	-0.04%	99.15%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 0.5%	1.615%	98.38%	0.01%	98.39%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 1.0%	2.098%	97.86%	0.05%	97.90%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 1.5%	2.403%	97.53%	0.07%	97.60%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 2.0%	2.601%	97.32%	0.07%	97.40%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 0.0%	-0.161%	114.63%	-14.47%	100.16%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 0.5%	0.777%	109.52%	-10.30%	99.22%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 1.0%	1.291%	106.19%	-7.48%	98.71%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 1.5%	1.515%	104.20%	-5.72%	98.49%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 2.0%	1.493%	103.21%	-4.70%	98.51%	100.00%

FIGURE 18.2 – Répartition de la richesse projetée avec la variable Amortissement

Nous avons rencontré un léger problème lors de la projection de nos stratégies de couverture Taux sur Prophet. En effet, comme nous pouvons le constater ci-dessus, l'écart de convergence est très important. Cette fuite de valeur est due à la variable amortissement. Nous ne rencontrons pas ce problème pour les stratégies Action car la variable amortissement est nulle sur toute la projection. En effet, les options des stratégies Action ont une maturité d'un an, et donc nous achetons l'option et recevons son cash-flow sur la même année.
Le modèle Prophet ALS ne prend donc pas bien en compte les amortissements en univers Risque-Neutre : l'équipe qui a conçu l'add-on des stratégies de couverture sur Prophet n'a pas encore eu le temps d'effectuer la recette de l'outil en univers risque-neutre avec des options de maturités supérieures à un an. Pour faire face à ce problème, nous avons décider de supprimer la variable amortissement, et donc seuls les cash-flows de nos options viendront impacter notre bilan économique.

	VIF	BEL	EC	BEL + EC	MV en t0
REFERENCE	2.852%	97.06%	0.09%	97.15%	100.00%
SWPT 0.0%	2.726%	97.18%	0.10%	97.27%	100.00%
SWPT 0.5%	2.825%	97.08%	0.09%	97.17%	100.00%
SWPT 1.0%	2.863%	97.05%	0.09%	97.14%	100.00%
SWPT 1.5%	2.871%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
SWPT 2.0%	2.867%	97.05%	0.09%	97.13%	100.00%
SWPT BARR 0.0%	2.828%	97.08%	0.10%	97.17%	100.00%
SWPT BARR 0.5%	2.870%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
SWPT BARR 1.0%	2.882%	97.03%	0.09%	97.12%	100.00%
SWPT BARR 1.5%	2.878%	97.03%	0.09%	97.12%	100.00%
SWPT BARR 2.0%	2.868%	97.04%	0.09%	97.13%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 0.0%	1.357%	98.55%	0.09%	98.64%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 0.5%	1.887%	98.02%	0.09%	98.11%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 1.0%	2.250%	97.66%	0.09%	97.75%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 1.5%	2.481%	97.43%	0.09%	97.52%	100.00%
SWPT AUTOSWPT 2.0%	2.629%	97.28%	0.09%	97.37%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 0.0%	0.700%	98.97%	0.33%	99.30%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 0.5%	1.449%	98.27%	0.28%	98.55%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 1.0%	1.950%	97.81%	0.24%	98.05%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 1.5%	2.276%	97.50%	0.22%	97.72%	100.00%
SWPT AUTOFLOOR 2.0%	2.483%	97.32%	0.20%	97.52%	100.00%

FIGURE 18.3 – Répartition de la richesse projetée sans variable Amortissement

En supprimant la variable amortissement, nous pouvons constater que les écarts de convergence dus aux couvertures ont été presque entièrement supprimés. Nous pouvons cependant remarquer que les écarts de convergence avec les stratégies de Swaptions autofinancées par des Floors ont été drastiquement réduits, mais sont toujours importants. Ainsi, nous avons décidé de ne pas analyser en détail les stratégies autofinancées par des Floors.

Pour la stratégie consistant à acheter des Swaptions sans autofinancement, nous pouvons voir que notre VIF diminue par rapport à la référence pour des strikes ATM ou $ATM + 0.5\%$. Au-delà, notre VIF est légèrement augmentée.

Si nous ajoutons une barrière aux Swaptions que nous achetons, nous pouvons remarquer que notre VIF augmente pour tous les strikes, sauf lorsque nous sommes ATM. Par ailleurs, nous pouvons remarquer qu'appliquer une barrière à nos Swaptions nous permet toujours d'avoir une VIF supérieure à la même stratégie sans barrière.

Enfin, pour les stratégies consistant à autofinancer l'achat des Swaptions par d'autres Swaptions avec un nominal 10 fois plus important, nous voyons que notre VIF diminue dans tous les cas. Aussi, plus nous nous rapprochons de la monnaie, plus notre VIF diminue de manière importante.

Dans la suite de cette partie, nous allons analyser les stratégies avec un strike $ATM + 1.0\%$. Il s'agit du strike qui impacte le plus la stratégie des Swaptions avec barrière. Bien que ce n'est pas le strike qui impacte le plus les stratégies de Swaptions sans autofi-

nancement ou avec autofinancement par d'autres Swaptions, nous choisirons aussi ce strike pour analyser ces stratégies, ainsi nous pourrons comparer l'impact des différentes stratégies entre elles.

18.3 Distribution VIF

Nous allons donc étudier en profondeur les stratégies :

- Roll de Swaptions 10Y/10Y avec strike $ATM + 1.0\%$
- Roll de Swaptions 10Y/10Y avec strike $ATM + 1.0\%$, avec ajout d'une barrière $ATM + 3.0\%$
- Roll de Swaptions 10Y/10Y avec strike $ATM + 1.0\%$, autofinancées par des Swaptions avec nominal x10

Tout d'abord, nous allons étudier l'impact des stratégies de couverture sur la distribution de la VIF (Figure 18.4).

Premièrement, nous pouvons remarquer que la stratégie autofinancée par des Swaptions provoque un énorme décrochage de la VIF en-dessous du quantile à 5%. Nous pouvons expliquer ce phénomène par l'exercice de la swaption autofinançante : le nominal étant très important (100% de la poche obligataire), lorsqu'elle sera exercée, elle aura un très gros impact sur le bilan économique.

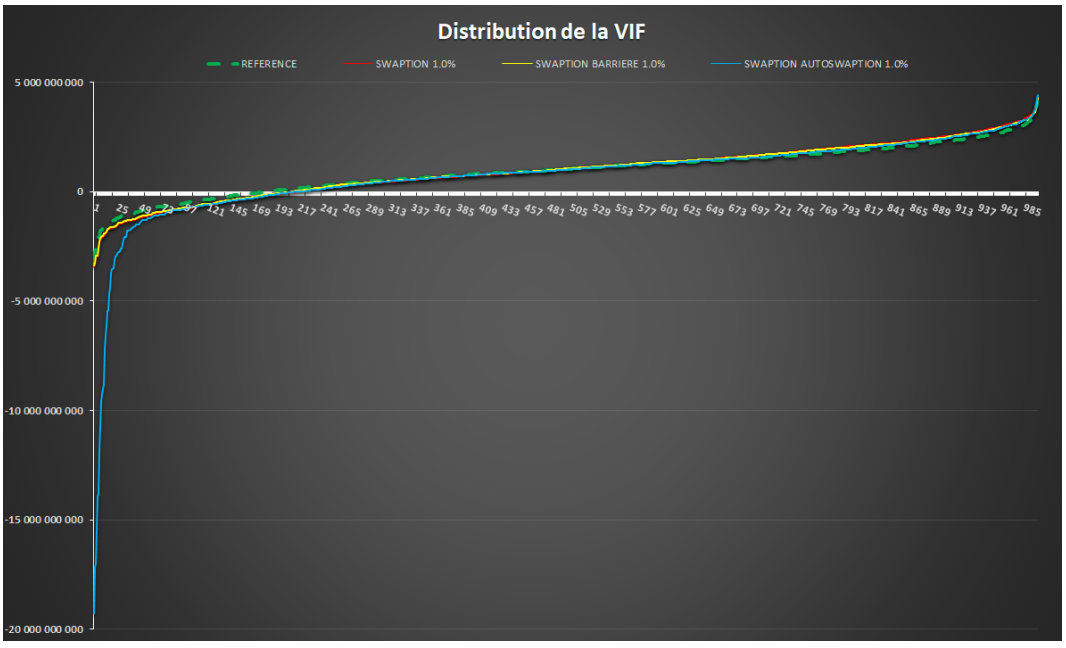


FIGURE 18.4 – Distribution de la VIF des stratégies sélectionnées

Sinon, nous pouvons remarquer que, contrairement aux stratégies Action, aucune stratégie Taux ne nous permet de réduire l'écart-type de la VIF, elles l'augmentent même. Nous pouvons voir que la VIF est diminuée dans les scénarios négatifs, et augmentée dans les scénarios positifs.

Cependant ce n'est pas l'objectif d'un assureur : son but est de réduire l'écart-type de sa VIF au maximum, afin d'optimiser son couple rendement/risque (frontière efficiente).

18.4 Mécanisme entre Profits, TRA et PB

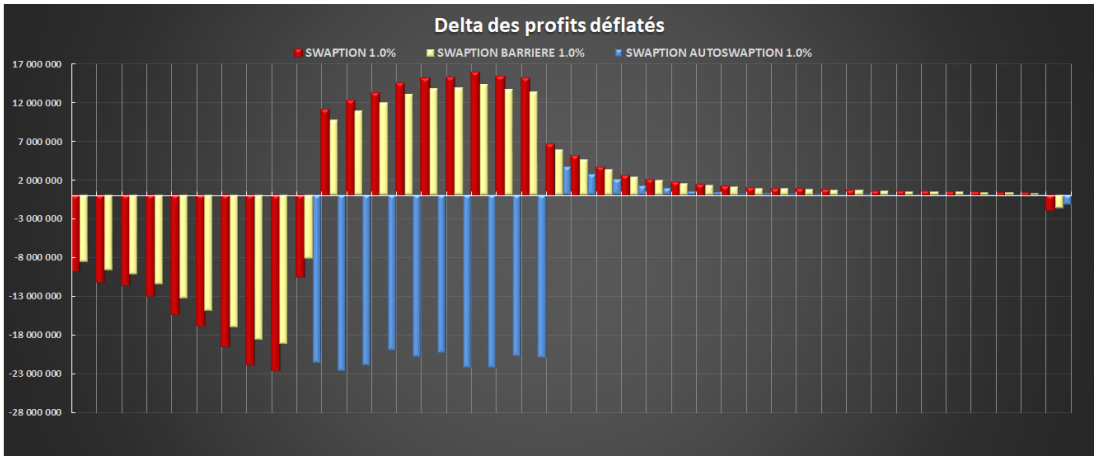
Nous allons maintenant pouvoir analyser de manière plus détaillée ces stratégies. Pour ce faire, nous allons observer l'évolution de différentes variables sur chaque année de projection. Vous trouverez l'explication détaillée des graphiques suivants dans la partie sur les stratégies Action (Equation 13.2).

Le fait de ne pas avoir intégré la variable "Amortissement" dans Prophet est donc bien préjudiciable. En effet, nous voyons clairement les 2 périodes de nos stratégies :

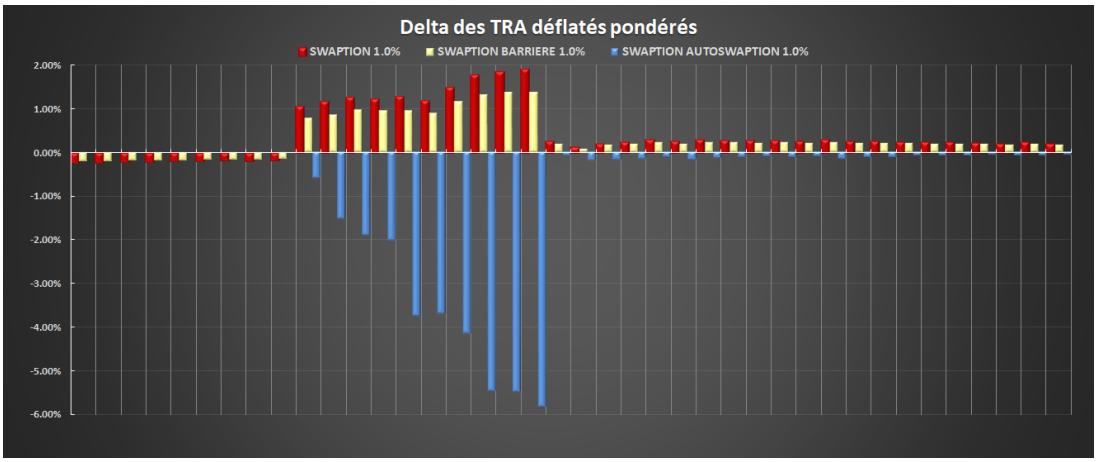
- Pour les stratégies sans autofinancement, nous pouvons clairement voir le paiement des primes de 2018 à 2027, puis la tombée des cash-flows de 2027 à 2036. Ainsi, sur les 10 premières années, nous ne faisons que perdre du profit et du TRA (et donc de la PB), car seules les primes sont comptabilisées. Puis, de 2027 à 2037, nous comptabilisons tous les cash-flows que nous recevons.

- Nous pouvons aussi vérifier que la stratégie autofinancée par des Swaptions n'impacte pas du tout les variables économiques sur les 10 premières années. En effet, comme l'amortissement n'est pas pris en compte et que nous ne payons pas de prime (puisqu'elle est autofinancée), cette stratégie n'a aucun impact sur les 10 premières années. Les 10 années suivantes, de 2027 à 2036, correspondent à la tombée des cash-flows des swaptions, et impactent donc les variables économiques.

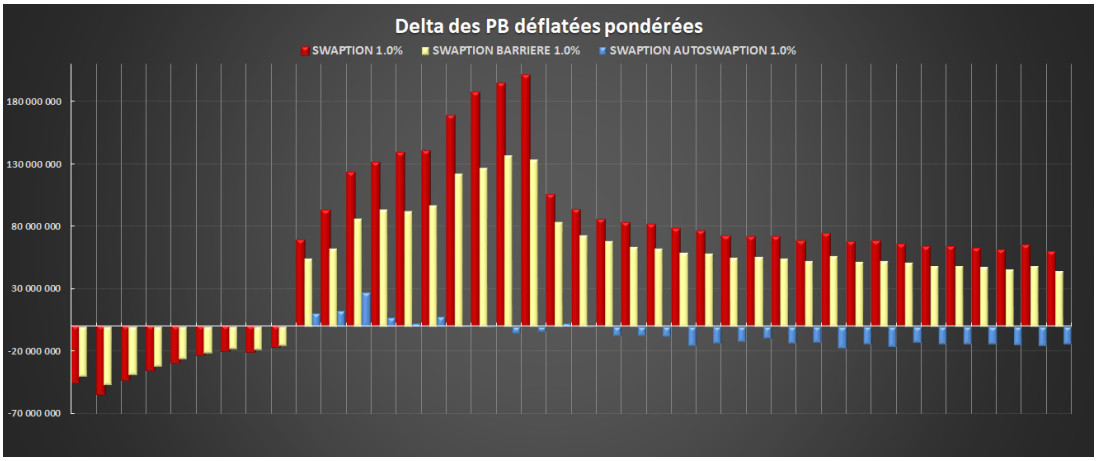
Premièrement, analysons les stratégies sans autofinancement : nous pouvons voir que le profit généré sur chaque année de projection est décroissant, alors que le coût des Swaptions achetées chaque année est fixe (la volatilité martingale ne varie pas beaucoup selon l'année de projection : Figure 18.1). Ceci s'explique par le fait que l'achat de nos Swaptions va baisser l'assiette de produits financiers sur laquelle nous appliquons notre TRA, et cette assiette va de plus en plus diminuer sur les 10 premières années. Ainsi, notre TRA sera de plus en plus faible et nous reverserons moins de PB aux assurés.
Nous pouvons aussi remarquer que le fait de rajouter une barrière à la swaption nous permet de limiter son coût, et ainsi d'optimiser l'impact sur le profit : le gain obtenu sur le profit lors du paiement des primes est supérieur à celui obtenu lors de la réception des cash-flows, car nous reversons moins de PB aux assurés lors des scénarios très haussiers. Sur les 10 années suivantes, nous pouvons voir que les Swaptions vont venir booster notre profit, mais aussi notre TRA, ce qui est normal puisque nous ne payons plus de prime et les options ne peuvent être exercées qu'en notre faveur.



(a) Variation des profits déflatés



(b) Variation des TRA déflatés pondérés



(c) Variation des PB déflatées pondérées

FIGURE 18.5 – Impacts des stratégies sur le profit, le TRA et la PB

Enfin, nous pouvons remarquer que la stratégie autofinancée par des Swaptions avec nominal x10 ne semble pas intéressante. En effet, cette stratégie nous fait perdre du profit et du TRA. Elle ne semble donc pas avoir de point positif. Ces pertes s'expliquent par le fait que le GSE RN est très volatil. En effet, à l'aide du cône de diffusion des taux 10Y du GSE RN (Figure 6.3), nous pouvons voir que ces taux oscillent entre -1% et presque 15% lors de la tombée des cash-flows. Ainsi la swaption avec nominal x10 va être très souvent exercée. Or ce nominal représente 100% de la poche obligataire, donc lorsque les taux vont énormément monter (jusqu'à 15%), nous allons devoir payer des cash-flows énormes, ce qui va fortement impacter notre profit et notre TRA.
Comme nous avons pondéré notre TRA, les années avec de gros produits financiers (positifs ou négatifs) ont un fort impact sur le TRA moyen pondéré affiché. Ainsi nous pouvons voir que cette stratégie nous réduit ce TRA de plus de 5% pour les 3 dernières Swaptions, car plus l'année de projection est lointaine, plus la courbe des taux est volatile.

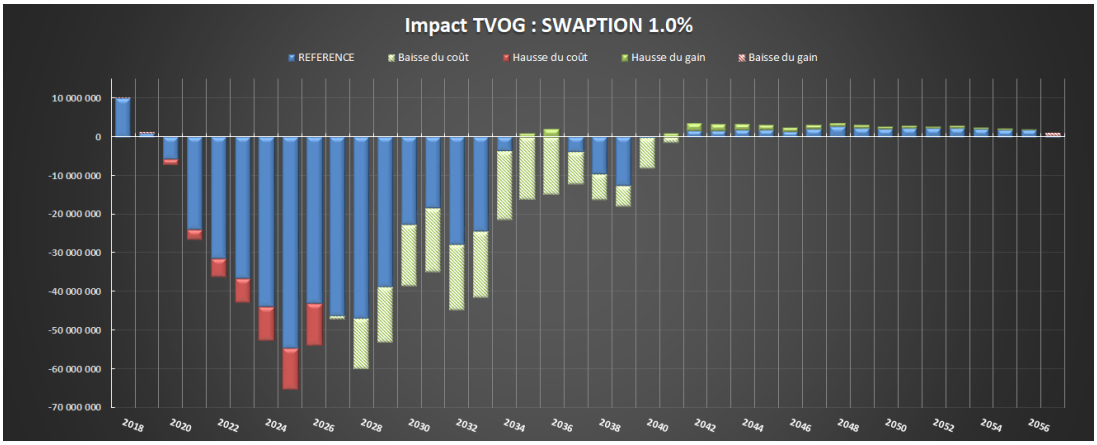
18.5 TVOG

En dernier lieu, nous allons observer l'impact de ces stratégies sur la TVOG, qui représente le coût des "options cachées" liées aux contrats. Nous allons décomposer la TVOG par année de projection. (Figure 13.5)

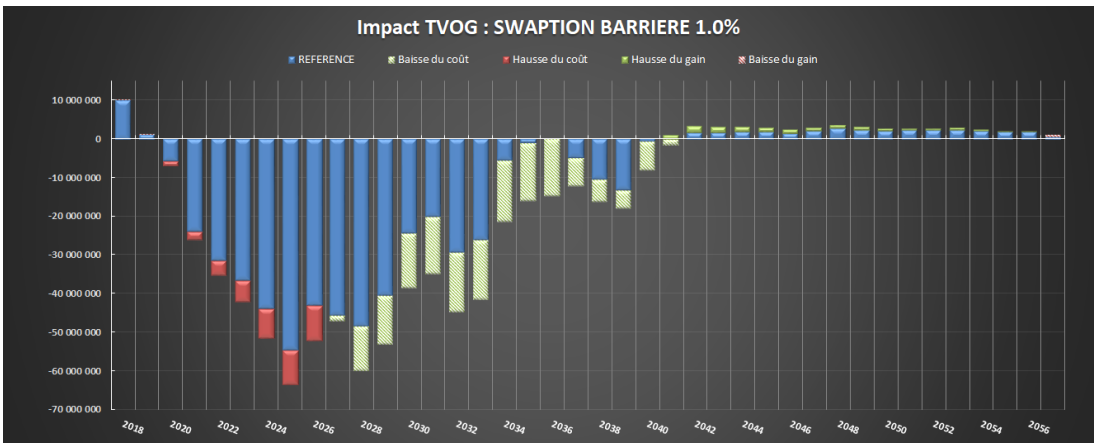
Nous pouvons remarquer que les stratégies consistant à acheter des Swaptions vanilles ou des Swaptions barrières sont très semblables. Les impacts sur la TVOG de la Swaption barrière sont presque identiques à ceux de la Swaption vanille, ils sont juste légèrement de moindre ampleur.

Nous pouvons néanmoins remarquer que ces swaptions ont un impact positif sur la TVOG globale. En effet, les hausses de coût sur la TVOG lors des premières années (paiement des primes) a un impact nettement moindre que les cash-flows lors des 10 années suivantes. Ainsi la TVOG globale sera impactée positivement.

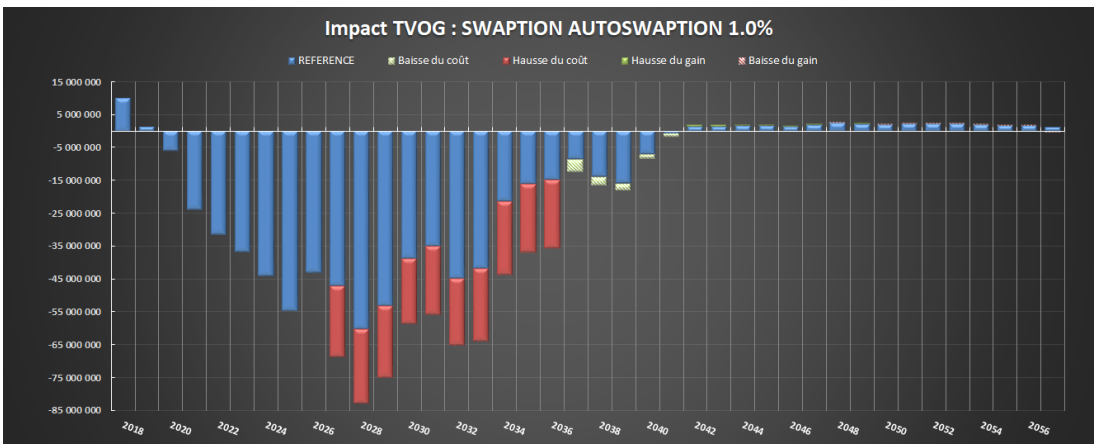
En ce qui concerne la stratégie autofinancée par des Swaptions avec nominal x10, nous pouvons voir que les impacts sur la TVOG sont fortement négatifs. Lors des 10 premières années, comme nous ne prenons pas en compte l'amortissement, la TVOG n'est pas impactée, mais dès que les cash-flows commencent à être payés, à partir de 2027, nous pouvons voir que le coût de la TVOG augmente drastiquement. Ces pertes sont toujours dues à la swaption autofinançante avec un nominal équivalent à la poche obligataire. Comme les courbes des taux générées par le GSE RN sont très volatiles, la swaption autofinançante va être très souvent exercée, et cela engendrera parfois un coût très élevé en termes "d'options cachées" (TVOG).



(a) Swaption 1.0%



(b) Swaption 1.0% avec barrière 3.0%



(c) Swaption 1.0% autofinancée par une Swaption avec nominal x10

FIGURE 18.6 – Impacts des stratégies sur la TVOG

Chapitre 19

Conclusion des analyses RW et RN

Comme nous avons pu le constater, les résultats de nos analyses Monde-Réel et Risque-Neutre sont très différents :

▷ En univers Monde-Réel, nous avons analysé le TRA, puis le taux servi, et enfin la satisfaction client par le biais du respect de la compétitivité des taux servis afin d'éviter au maximum les rachats dynamiques.

Nous avons vu que les meilleures stratégies sont les stratégies consistant à autofinancer l'achat de nos Swaptions par d'autres Swaptions avec un nominal 10 fois supérieur. De ce fait, nous nous exposions à un effet de levier, en misant sur le fait que les scénarios catastrophiques étaient suffisamment rares pour ne pas impacter significativement nos rendements.
En effet, en termes de gain de TRA, la stratégie consistant à autofinancer l'achat des Swaptions par des Floors forward avec un nominal 10 fois supérieur peut sembler très intéressante, mais nous nous sommes finalement rendu compte que cette stratégie provoquait beaucoup de scénarios avec un taux servi non compétitif, donc des rachats dynamiques.
Nous avons ainsi pu constater que les stratégies autofinancées par des Swaptions de nominal 10 fois supérieur étaient les meilleures. Elles nous permettaient d'éviter un grand nombre de scénarios où le taux servi n'était pas compétitif. Ces stratégies nous permettaient donc d'éviter un grand nombre de rachats dynamiques. Par ailleurs, nous avons pu remarquer que la valeur du strike n'influait pas beaucoup sur la suppression des taux servis non compétitifs, les stratégies ATM et $ATM + 0.5\%$ étaient toutes les deux très efficaces. Néanmoins, nous avons pu remarquer que la stratégie ATM nous permettait, en général, de gagner plus de TRA que la stratégie $ATM + 0.5\%$, sauf pour pour les 10 pires scénarios (quantile à 1%), où le TRA de la stratégie ATM était légèrement inférieur à celui de la stratégie $ATM + 0.5\%$ (mais restait toujours supérieur à celui de la référence). De manière générale, la stratégie ATM semble donc meilleure.

▷ En univers Risque-Neutre, nous avons étudié la répartition de la richesse projetée, puis nous avons analysé les stratégies qui impactaient le plus la VIF, en observant notamment sa distribution. Ensuite, nous avons décomposé les variables économiques par année de projection, et nous nous sommes intéressés au profit, au mécanisme reliant la PB et le TRA, et enfin à la TVOG. Nous avons aussi soulevé le fait que les volatilités martingales ne prennent plus en compte le smile de volatilité, et ainsi nous sommes plus rapidement exposés à l'effet de levier.

Suite à cette analyse, nous avons pu constater que les résultats sont très différents de ceux obtenus en univers RW. En effet, les meilleures stratégies sont ici les stratégies de Roll de Swaptions avec et sans barrière. Premièrement, nous avons vu que ces stratégies sans autofinancement nous permettaient d'augmenter notre VIF pour un strike au moins égal à $ATM + 1.0\%$. Ensuite, nous avons pu remarquer que ces stratégies ne nous permettaient cependant pas de réduire l'écart-type de la VIF : toutes les stratégies l'augmentaient. Enfin, lorsque nous décomposions nos variables économiques par année de projection, nous avons pu observer les 2 périodes différentes de nos stratégies, car nous ne prenons pas en compte la variable amortissement dans nos projections (fuite de richesse à cause de Prophet). La première période correspond au paiement des primes, jusqu'à 2027, puis ensuite à la réception des cash-flows des options, jusqu'à 2036. Nous avons alors pu constater que la stratégie avec barrière était supérieure à celle sans barrière. En effet, ajouter une barrière à la swaption nous permet de réduire son coût. Or nous avons pu remarquer que ce gain de profit lors du paiement des primes est supérieur au gain de profit obtenu lors de la réception des cash-flows, lorsque nous n'ajoutons pas de barrière à nos swaptions. En effet, les barrières vont certes réduire notre gain dans les scénarios très haussiers, mais nous reverserons aussi moins de PB aux assurés. Les stratégies de Swaptions avec barrière sont donc les meilleures en univers RN.

Comme pour les stratégies Action, ces différences de résultats entre les 2 univers sont dues aux disparités entre les GSE. En effet, comme nous pouvons le voir sur les 2 cônes de diffusion des taux 10Y (Figure 5.4) et (Figure 6.3), les queues de distribution des taux sont beaucoup plus lourdes en univers Risque-Neutre qu'en univers Monde-Réel. En univers RW, les taux 10Y sont globalement compris entre -3 et 7% lors des 10 premières années, contre -1 et 13% en univers RN. Ainsi les stratégies autofinancées par des Swaptions avec nominal x10 rencontreront beaucoup plus de scénarios dans lesquels la Swaption autofinançante sera exercée en univers RN qu'en univers RW (phénomène amplifié par la non prise en compte du smile de volatilité). Par conséquent, l'effet de levier va fortement impacter nos résultats en univers RN dans les scénarios de fortes hausses.

Enfin, nous pouvons donc affirmer que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé : le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision est relatif à la confiance dans les générateurs. Rappelons tout de même que l'univers RW représente la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif.
Le choix de la stratégie de couverture à appliquer dépendra aussi des objectifs de l'assureur :

- **Univers RW :** Maximiser son résultat et sa remontée de dividendes (optique court-terme) ⇒ Roll de Swaptions autofinancées par d'autres Swaptions avec nominal x10
- **Univers RN :** Minimiser son financement du capital réglementaire (SCR - VIF), et donc ses fonds propres économiques (optique long-terme) ⇒ Roll de Swaption avec barrière

Conclusion

Dans notre étude, nous avons envisagé plusieurs types de stratégies dont l'objectif est de se couvrir contre une hausse des taux ou contre une baisse des marchés action.
Afin de se protéger contre une baisse des marchés action, nous avons déterminé des stratégies de couverture consistant à acheter un Put de maturité 1Y tous les ans pendant 10 ans (Roll de Puts). Nous avons étudié ce type de stratégie pour des strikes égaux à 60, 70, 80, 90 ou 100% de l'indice action au moment de l'achat. Par ailleurs, nous avons aussi étudier l'autofinancement de cette stratégie par 2 méthodes :

- Vente de Calls, en s'exposant à la hausse des marchés action.
- Vente de Puts de nominal 10 fois supérieur, en s'exposant à un effet de levier.

En ce qui concerne la protection contre une hausse des taux, nous avons mis en place des stratégies de couverture consistant à acheter des Swaptions 10Y/10Y tous les ans pendant 10 ans (Roll de Swaptions). Nous avons étudié ce type de stratégie pour des strikes égaux à ATM, $ATM + 0.5\%$, $ATM + 1.0\%$, $ATM + 1.5\%$, $ATM + 2.0\%$ (marge additive du taux swap 10Y forward). Par ailleurs, nous avons de plus analysé ces Rolls de Swaptions en leur ajoutant une barrière (Strike+2.0%), afin de limiter le coût de la couverture. Comme pour les Puts, nous avons aussi étudié l'autofinancement de cette stratégie par 2 méthodes distinctes :

- Vente de Floors forward 10Y/10Y, en s'exposant à la baisse des taux.
- Vente de Swaptions de nominal 10 fois supérieur, en s'exposant à un effet de levier.

La première étape de notre démarche a consisté à déterminer quels modèles de valorisation seraient les plus pertinents afin de valoriser ces options. Pour ce faire, nous nous sommes intéressés à 2 critères principaux : la stabilité du modèle (par le biais de la minimisation des grecques) et l'adéquation des distributions historiques avec les dynamiques des modèles.
Nous avons conclu que le modèle de Black&Scholes était le modèle le plus adapté quant à la valorisation des options sur actions, tandis que le modèle de Bachelier s'est révélé être le modèle le plus pertinent pour les taux.

Dans un second temps, nous avons créé un outil nous permettant de projeter les stratégies de couverture sur des tables stochastiques fournies par un GSE. Nous avons décidé de comptabiliser les options dans les produits financiers en utilisant la méthode linéaire FGAAP. Une fois les couvertures projetées à l'aide de l'outil, nous avons ainsi projeté l'ensemble des variables économiques de BNP Paribas Cardif à l'aide de Prophet ALS.

Nous avons, par la suite, analysé nos stratégies en univers Monde-Réel, qui correspond à la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif, puis secondairement en Univers Risque-Neutre, afin de prendre en compte les problématiques liées à Solvabilité 2. Nous avons constaté que les résultats obtenus sont fortement dépendants du GSE utilisé, et donc de l'univers utilisé, que ce soit pour les marchés action ou le marché des taux.

En univers Monde-Réel, nous avons observé que les stratégies avec autofinancement étaient très efficaces, permettant ainsi de gagner un montant conséquent de TRA. Cette approche permet par ailleurs d'éviter un nombre important de scénarios avec un taux servi non compétitif, réduisant ainsi les rachats dynamiques.

L'intérêt des stratégies avec autofinancement, précédemment évoqué dans le cadre d'un Univers Monde-Réel, ne peut pas être étendu à l'Univers Risque-Neutre. En effet, un déclin du profit est observé : une des causes étant la hausse du coût de la TVOG. L'explication réside dans le fait que nous ne prenons plus en compte de smile de volatilité en univers Risque-Neutre, et que les extrêmes des cônes de diffusion sont beaucoup plus éloignés qu'en univers Monde-Réel.
Nous avons cependant remarqué que les stratégies sans autofinancement s'avèrent très intéressantes : elles nous permettent de réduire le coût de la TVOG et de déclencher le mécanisme reliant la PB et le TRA, augmentant ainsi notre VIF.

Pour conclure, nous pouvons donc affirmer que nos analyses sont fortement dépendantes du GSE utilisé : le poids à attribuer aux résultats RN et RW dans la prise de décision est relatif à la confiance dans les générateurs. Rappelons tout de même que l'univers RW représente la vision prospective des économistes de BNP Paribas Cardif.
Le choix de la stratégie de couverture à appliquer dépendra aussi des objectifs de l'assureur :

- **Univers RW :** Maximiser son résultat et sa remontée de dividendes (optique court-terme)
- **Univers RN :** Minimiser son financement du capital réglementaire (SCR - VIF), et donc ses fonds propres économiques (optique long-terme)

Univers	Marché	Stratégie sélectionnée
RW	Actions	Roll de Puts autofinancés par des Puts de nominal x10
	Taux	Roll de Swaptions autofinancées par des Swaptions de nominal x10
RN	Actions	Roll de Puts autofinancés par des Calls
	Taux	Roll de Swaptions avec barrière

TABLE 19.1 – Stratégies à sélectionner en fonction des objectifs désirés

Enfin, nous avons étudié de nouvelles méthodes de prise en compte des stratégies de couverture via des OPCVM. Premièrement nous avons déterminé quelles étaient les différences lorsque nous incorporons directement les cash-flows générés par nos stratégies de couverture au sein de l'indice action, c'est-à-dire lorsque nous créons un indice composite. Nous avons ainsi pu constater que les différences entre les 2 méthodes de comptabilisation des stratégies de couverture reposaient sur des impacts sur la PRE et la PDD qui étaient différents.
Ensuite, nous nous sommes demandés s'il était possible de répliquer ces indices composites par des indices avec volatilité réduite, afin de ne plus avoir besoin de projeter de nouveau nos stratégies de couverture à l'avenir pour d'autres études. Nous avons ainsi pu voir que la réplication des indices composites pour la stratégie de Puts seuls ou autofinancés par des Calls était excellente, mais que pour la stratégie de Puts autofinancés par d'autres Puts avec nominal x10, la réplication n'était pas satisfaisante à cause d'une forte asymétrie des rendements de l'indice composite.

Un axe de développement supplémentaire de ce mémoire pourrait être l'étude de l'impact de nos stratégies de couverture sur le SCR. Pour les actions, l'étude de l'impact de l'option achetée en première année sur le SCR pourrait constituer un axe de réflexion préalable intéressant. En effet, seule l'option achetée en première année viendra impacter le SCR, puisque les chocs S2 afin d'obtenir le SCR sont appliqués en t_{0^+}, puis l'indice action évolue normalement. Cependant, le strike de nos options dépend du niveau de l'indice sous-jacent, donc les options se seraient "adaptées" aux indices choqués les années suivant le choc. Pour les taux, il serait néanmoins intéressant d'étudier la stratégie complète, puisque la courbure des taux est aussi modifiée.

Table des figures

1 Evolution de $\frac{\Delta^{BS}_{Put}}{\Delta^{B}_{Put}}$ et $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ en fonction de la maturité et du strike vi
2 Distribution historique du SX5E et de son log-rendement associé vi
3 Distribution historique des taux OAT 10Y et de son log-rendement associé vii
4 Distribution des log-rendements de l'indice action en univers RW et RN . ix
5 Différence de la distribution des taux servis non compétitifs x
6 Distribution des taux 10Y en univers RW et RN xi
7 Evolution of $\frac{\Delta^{BS}_{Put}}{\Delta^{B}_{Put}}$ and $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ according to maturity and strike xvi
8 Historical distribution of the SX5E and its associated log-yield xvi
9 Historical distribution of OAT 10Y rates and associated log-yield xvii
10 Log-yield distribution of the equity index in the RW and RN universe . . xix
11 Difference in the distribution of uncompetitive paid rates xx
12 10Y rate distribution in the RW and RN universe xxi

2.1 Distribution des log-rendements du CAC40 depuis 1990 12

3.1 Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction de la maturité 27
3.2 Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction du strike 28
3.3 Evolution du rapport $\frac{\sigma^{BS}_{implicite} \cdot S_0}{\sigma^{B}_{implicite}}$ en fonction de la maturité et du strike 29
3.4 Evolution du rapport $\frac{\Delta^{BS}_{C/P}}{\Delta^{B}_{C/P}}$ en fonction de la maturité et du strike 32
3.5 Evolution du rapport $\frac{\Gamma^{BS}}{\Gamma^{B}}$ en fonction de la maturité et du strike 34
3.6 Evolution du rapport $\frac{\Theta^{BS}_{C/P}}{\Theta^{B}_{C/P}}$ en fonction de la maturité et du strike 36
3.7 Distribution historique du SX5E et de son log-rendement associé 37
3.8 Distribution historique du FTSE et de son log-rendement 37
3.9 Distribution historique du S&P500 et de son log-rendement 37

4.1 Distribution historique des taux OAT 10Y et de son log-rendement associé 49
4.2 Distribution historique des taux T-Bill 10Y et de son log-rendement . . . 49
4.3 Distribution historique des taux EUSA 10Y et de son log-rendement . . . 50

5.1 Exemple d'une simulation du GSE RW 56
5.2 Scénario central pour les taux 57
5.3 Distribution des taux 1Y du GSE RW 58
5.4 Distribution des taux 10Y du GSE RW 58
5.5 Scénario central pour les taux 59
5.6 Scénario central pour les actions + indice ajusté des dividendes 60
5.7 Distribution des log-rendements action du GSE RW 60
5.8 Scénario central pour les actions 61

6.1 Exemple d'une simulation du GSE RN 64
6.2 Distribution des taux 1Y du GSE RN 65
6.3 Distribution des taux 10Y du GSE RN 66
6.4 Distribution des log-rendements action du GSE RN 67
6.5 Test de Martingalité : Déflateur 68
6.6 Test de Martingalité : Taux 69
6.7 Test de Martingalité : Actions 70

9.1 Amortissements cumulés d'un Call 85
9.2 Amortissements cumulés d'une Swaption 86

10.1 Allocation cible 90
10.2 Corridor de compétitivité et taux servi depuis 2009 93
10.3 Modélisation des rachats 94

12.1 Nappe de volatilités implicites log-normales des Puts 106
12.2 Volatilités implicites log-normales des Puts 1Y 106
12.3 Impact des stratégies de couverture sur la distribution des TRA 108
12.4 Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture 110
12.5 Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture : Zoom 111
12.6 Stratégie Put 100% Autofinancé par Put x10 : Simulation 665 112
12.7 Diminution volontariste du taux servi et politique de dotation à la PPB . 113
12.8 Stratégie Put 100% Autofinancé par Put x10 : Simulation 184 114
12.9 Stratégie Put 90% Autofinancé par Put x10 : Simulation 177 115
12.10Nombre de simulations avec un taux servi non compétitif 116
12.11Différence de la distribution des taux servis non compétitifs 117
12.12Nombre de simulations avec un taux servi inférieur au taux cible 117
12.13Différence de la distribution des taux servis inférieurs au taux cible 118

13.1 Nappe de volatilités martingales log-normales des Puts 1Y 120
13.2 Répartition de la richesse projetée 121
13.3 Distribution de la VIF des stratégies sélectionnées 123

13.4 Impacts des stratégies sur le profit, le TRA et la PB 124
13.5 Impacts des stratégies sur la TVOG 128

15.1 Impact des stratégies de couverture sur la volatilité des indices composites 135
15.2 Tests de martingalité des indices composites 136
15.3 Répartition de la richesse projetée des indices composites 136
15.4 Distribution de la VIF des indices composites 137
15.5 Différences d'impacts sur le profit 138
15.6 Différences d'impacts sur le TRA 139
15.7 Différences d'impacts sur la PB 139
15.8 TVOG des indices composites 140
15.9 PRE et PDD en fonction de la méthode de comptabilisation 142
15.10Vérification graphique de la normalité des Browniens 144
15.11Tests statistiques de normalité des Browniens 144
15.12Rendements moyens des indices avec volatilité réduite 146
15.13Quantiles à 1% des log-rendements actualisés 147
15.14Test de martingalité des nouveaux indices par rapport à la référence . . . 147
15.15Comparaison de la répartition de la richesse projetée 148
15.16Comparaison de la distribution de la VIF : composite / volatilité réduite . 149
15.17Comparaison des impacts sur le profit, le TRA et la PB 151
15.18Comparaison des impacts sur la TVOG 152
15.19Comparaison de la distribution des rendements sur l'année 2018 154

17.1 Présentation des volatilités de marché pour les Swaptions sur Bloomberg . 162
17.2 Nappe de volatilités implicites normales des Swaptions de ténor 10Y . . . 162
17.3 Impact des stratégies de couverture sur la distribution des TRA 164
17.4 Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture 167
17.5 Gains/Pertes de TRA grâce aux stratégies de couverture : Zoom 168
17.6 Stratégie Swaption +0.0% autofinancée par Swaption x10 : Simulation 19 169
17.7 Stratégie Swaption +0.0% autofinancée par Swpt x10 : Simulation 496 . . 171
17.8 Comparaison stratégies Swaption autofinancées par Swpt x10 : Simu 19 . 172
17.9 Stratégies Swaption autofinancées par Swaption x10 : Simulation 19 . . . 172
17.10Stratégie Swaption +2.0% autofinancée par Floor : Simulation 640 173
17.11Stratégie Swaption +2.0% autofinancée par Floor : Simulation 230 174
17.12Nombre de simulations avec un taux servi non compétitif 175
17.13Différence de la distribution des taux servis non compétitifs 176

18.1 Nappe de volatilités martingales normales des Swaptions 10Y/10Y 178
18.2 Répartition de la richesse projetée avec la variable Amortissement 179
18.3 Répartition de la richesse projetée sans variable Amortissement 180
18.4 Distribution de la VIF des stratégies sélectionnées 181
18.5 Impacts des stratégies sur le profit, le TRA et la PB 183
18.6 Impacts des stratégies sur la TVOG 185

E.1 Distribution historique des taux swaps forward 5Y/5Y et du log-rendement associé 219
E.2 Distribution historique des taux swaps forward 10Y/10Y et du log-rendement associé 219
E.3 Distribution historique des taux swaps forward 15Y/15Y et du log-rendement associé 220
E.4 Distribution historique des taux swaps forward 10Y/5Y et du log-rendement associé 220

Liste des abréviations

ALM : Asset and Liability Management
AMF : Autorité des marchés financiers
ATM : At The Money, A la monnaie
BEL : Best Estimate Liabilities
CoC : Cost of Capital
EC : Ecart de Convergence ou Equivalent-Certain (selon situation)
EDP : Equation aux dérivées partielles
EDS : Equation différentielle stochastique
FGAAP : French Generally Accepted Accounting
GSE : Générateur de scénarios économiques
IFRS : International Financial Reporting Standards
ITM : In The Money, Dans la monnaie
NAV : Net Asset Value, Actif Net
OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
OTM : Out The Money, Hors de la monnaie
PB : Participation aux Bénéfices
PDD : Provision pour Dépréciation Durable
PMVL : Plus ou Moins-Values Latentes
PMVR : Plus ou Moins-Values Réalisées
PPB : Provision pour Participation aux Bénéfices
PRE : Provision pour risque d'exigibilité
PVFP : Present Value of Future Profits
RC : Réserve de Capitalisation
RN : Risk-Neutral, Risque-Neutre
RW : Real-World, Monde-Réel
SCR : Solvency Capital Requirement
TMG : Taux Minimum Garanti

TRA : Taux de rendement de l'actif

TRE : Taux de rendement effectif

TVOG : Time Value of Options and Guarantees

VAN : Valeur Actuelle Nette

VIF : Value of In-Force

ANNEXE

Annexe A

Développements mathématiques

A.1 Partie 2.5.2 : Modèle originel : Pricing avec Black&Scholes

A.1.1 Valorisation :

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(x \cdot \exp[\sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \mid S_t = x] \qquad \text{(A.1)}$$

En posant $Z = x \cdot \exp[\sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$:

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \mathbb{E}^*\Big[\, x \exp[\,\sigma(B_T^* - B_t^*) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\,] \cdot \mathbb{1}_{Z \geq K}\Big] \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{P}^*[\,Z \geq K\,] \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

Sachant que sous $\mathbb{P}^*$, $B_T^* - B_t^*$ suit la même loi que $\sqrt{T-t}.B_1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= x \int_{x \cdot \exp[\sigma\sqrt{T-t} \cdot y + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] \geq K} \exp[\sigma\sqrt{T-t}.y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)] \cdot \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot dy \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{P}[x \cdot \exp[-\sigma\sqrt{T-t}.B_1 + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] \geq K] \\ &= x \int_{x \cdot \exp[\sigma\sqrt{T-t} \cdot y + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] \geq K} \frac{\exp\Big[\frac{-(y - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}\Big]}{\sqrt{2\pi}} dy \quad \text{(densité de } -B_1 \text{ sous } \mathbb{P}) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{P}\Big[B_1 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\,\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\,]\Big] \\ &= x \cdot \mathbb{P}\Big[B_1 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\,\ln(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\,]\Big] \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{P}\Big[B_1 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\,\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\,]\Big] \end{aligned}$$

A.1.2 Contenu du portefeuille de couverture :

Nous savons que $\Pi = (\Theta, \theta)$, et nous avons démontré dans la partie précédente que $\Theta_t = \partial_x V(t, S_t)$. Nous pouvons donc calculer le nombre d'actions dans le portefeuille de couverture à l'instant t, lorsque $S_t = x$:

$$\Theta_t = \partial_x V(t,x) \tag{A.3}$$
$$= \Phi_{0,1}(d_1(\cdot)) + x.\varphi_{0,1}(d_1(\cdot)).\partial_x[d_1(\cdot)] - e^{-r(T-t)}K.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot)).\partial_x[d_2(\cdot)] \tag{A.4}$$
$$= \Phi_{0,1}(d_1(\cdot)) + \partial_x[d_1(\cdot)] \cdot \underbrace{\Big[x.\varphi_{0,1}(d_1(\cdot)) - e^{-r(T-t)}K.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot))\Big]}_{= \mathbf{0 \text{ car :}}} \tag{A.5}$$

$$x.\varphi_{0,1}(d_1(\cdot)) = x.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot) + \sigma\sqrt{T-t}) \tag{A.6}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} \cdot (d_2(\cdot) + \sigma\sqrt{T-t})^2] \tag{A.7}$$
$$= x.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot)).\exp[-d_2(\cdot)\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)] \tag{A.8}$$
$$= x.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot)).\exp[-[\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)] \tag{A.9}$$
$$= x.\varphi_{0,1}(d_2(\cdot)).e^{-r(T-t)}\frac{K}{x} \tag{A.10}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \Theta_t &= \Phi_{0,1}(d_1(T-t,x,K)) \\ \theta_t &= e^{-rt} \cdot (V(t,x) - x.\Theta_t) = -e^{-rT}K.\Phi_{0,1}(d_2(T-t,x,K)) \end{cases}$$

A.2 Partie 2.5.3 : Modèle originel : Pricing avec Bachelier

A.2.1 Valorisation :

Nous pouvons donc obtenir le prix du call en $t \in [0, T[$:

$$C(t,S_t) = V(t,S_t) = \mathbb{E}[\,\xi \,|\, \mathcal{F}_t\,] = \mathbb{E}[\,(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,] \tag{A.11}$$
$$= \mathbb{E}[\,[\,(S_t - K) + (S_T - S_t)\,]^+ \mid \mathcal{F}_t] \qquad \text{(indépendant de } \mathcal{F}_t) \tag{A.12}$$
$$= \mathbb{E}[\,a + b.\varepsilon\,]^+ \quad \text{avec } a = S_t - K\ ,\ b = \sigma\sqrt{T-t} \text{ et } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{A.13}$$
$$= \int_{-a/b}^{\infty} (a + b.u) \cdot \varphi_{0,1}(u)du \tag{A.14}$$
$$= a \cdot \int_{-a/b}^{\infty} \varphi_{0,1}(u)du + b \cdot \int_{-a/b}^{\infty} u \cdot \varphi_{0,1}(u)du \tag{A.15}$$
$$= a \cdot \Phi_{0,1}(\frac{a}{b}) + b \cdot \varphi_{0,1}(\frac{a}{b}) \tag{A.16}$$
$$= (S_t - K) \cdot \Phi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot \varphi_{0,1}\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) \tag{A.17}$$

A.3 Partie 3.1 : Modèle action : Bachelier spot

A.3.1 Valorisation :

Nous allons maintenant pouvoir déterminer le prix d'un Call de maturité T, avec prix d'exercice K. Payoff en T : $\xi(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$, avec $\xi \in \mathbb{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Nous rajoutons la valeur temps en actualisant l'espérance du payoff. Soit $t \in [0, T[$:

$$C^B(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}[\,\xi \,|\, \mathcal{F}_t\,] = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}[\,(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,] \tag{A.18}$$

$$= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}\Big[\,\Big(S_t^B.e^{r(T-t)} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \cdot \varepsilon - K\Big)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,\Big] \tag{A.19}$$

$$= e^{-r(T-t)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \cdot \mathbb{E}\Big[\,\Big(\varepsilon - \underbrace{\frac{K - S_t.e^{r(T-t)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)}}}_{=L}\Big)^+ \,|\, \mathcal{F}_t\,\Big] \tag{A.20}$$

$$= e^{-r(T-t)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \cdot \int_L^{+\infty} (u - L) \cdot \frac{e^{-u^2/2}}{2\pi} \cdot du \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-r(T-t)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \\ &\quad \cdot \Big[\int_L^{+\infty} u \cdot \frac{e^{-u^2/2}}{2\pi} \cdot du - L \cdot \int_L^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{2\pi} \cdot du\Big] \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$= e^{-r(T-t)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \cdot \Big[\varphi_{[0,1]}(L) - L.\Phi_{[0,1]}(-L)\Big] \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-r(T-t)} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(e^{2r(T-t)} - 1)} \cdot \varphi_{[0,1]}(-L) \\ &\quad + (S_t - K.e^{-r(T-t)}).\Phi_{[0,1]}(-L) \end{aligned} \tag{A.24}$$

A.4 Partie 3.3 : Comparaison modèles action

A.4.1 Maturité :

▷ **CALL :**

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big] \quad \underset{t \to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t = K \\ -\infty & \text{si } S_t < K \end{cases} \tag{A.25}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big] \quad \underset{t \to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t = K \\ -\infty & \text{si } S_t < K \end{cases} \tag{A.26}$$

$$\text{Notons que } \begin{cases} \Phi_{[0,1]}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 & \varphi_{[0,1]}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Phi_{[0,1]}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 & \varphi_{[0,1]}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Phi_{[0,1]}(0) = 0.5 & \varphi_{[0,1]}(0) = 1/\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t \leq K \end{cases} \tag{A.27}$$

$$\text{Rappelons } v(t,T) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1-e^{-2r(T-t)})} \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0^+$$

$$C_t^B = (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \underbrace{\Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)}_{\longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } S_t > K \\ 0.5 & \text{si } S_t = K \\ 0 & \text{si } S_t < K \end{cases}} + v(t,T).\underbrace{\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)}_{\longrightarrow \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & \text{si } S_t = K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} S_t - K & \text{si } S_t > K \\ 0 & \text{si } S_t \leq K \end{cases}$$

A.4.2 Volatilité :

▷ **CALL :**

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big] \quad \underset{\sigma\to0^+}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t = K.e^{-r(T-t)} \\ -\infty & \text{si } S_t < K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big] \quad \underset{\sigma\to0^+}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t = K.e^{-r(T-t)} \\ -\infty & \text{si } S_t < K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

$$C_t^{BS} = S_t.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d_2)$$
$$\underset{\sigma\to0^+}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} S_t - Ke^{-r(T-t)} & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t \leq K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

$$\text{Rappelons } v(t,T) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1-e^{-2r(T-t)})} \quad \underset{\sigma\to0^+}{\longrightarrow} 0^+$$

$$C_t^B = (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \underbrace{\Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)}_{\longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0.5 & \text{si } S_t = K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t \leq K.e^{-r(t-t)} \end{cases}} + \underbrace{v(t,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)}\Big)}_{\longrightarrow \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & \text{si } S_t = K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\underset{\sigma \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} S_t - Ke^{-r(T-t)} & \text{si } S_t > K.e^{-r(T-t)} \\ 0 & \text{si } S_t \leq K.e^{-r(T-t)} \end{cases}$$

A.4.3 Volatilité implicite :

Exemple : Considérons un call et un put ATM (à la monnaie) de maturité 5 ans, avec $S_0 = 100\%$ et un taux sans risque de 2%. La volatilité implicite log-normale est de 25%. Ainsi $\sigma^B = \sigma^{BS} S_0 = 25\%.1 = 25\%$. Calculons les prix du call et du put pour les 2 modèles :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \cdot \Big[\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) * T\Big] = \frac{1}{25\%\sqrt{5}}\Big[\ln(\frac{1}{1}) + (2\% + \frac{25\%^2}{2}) * 5\Big] \tag{A.28}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = d_1 - 25\% * \sqrt{5} \tag{A.29}$$

$$C_0^{BS} = S_0.\Phi_{[0,1]}(d_1) - Ke^{-rT}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \tag{A.30}$$

$$= 1.\Phi_{[0,1]}(d_1) - 1.e^{-2\%*5}.\Phi_{[0,1]}(d_2) \tag{A.31}$$

$$= 0.261 \tag{A.32}$$

$$P_0^{BS} = Ke^{-rT}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - S_0.\Phi_{[0,1]}(-d_1) \tag{A.33}$$

$$= 1.e^{-2\%*5}.\Phi_{[0,1]}(-d_2) - 1.\Phi_{[0,1]}(-d_1) \tag{A.34}$$

$$= 0.165 \tag{A.35}$$

$$v(0,5) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2rT})} = \sqrt{\frac{25\%^2}{2 * 2\%}(1 - e^{-2*2\%*5})} \tag{A.36}$$

$$C_0^B = (S_0 - K.e^{-rT}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{S_0 - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) + v(0,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_0 - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) \tag{A.37}$$

$$= (1 - 1.e^{-2\%*5}) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{1 - 1.e^{-2\%*5}}{v(0,5)}\Big) + v(0,5).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{1 - 1.e^{-2\%*5}}{v(0,5)}\Big) \tag{A.38}$$

$$= 0.263 \tag{A.39}$$

$$P_0^B = (K.e^{-rT} - S_0) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{K.e^{-rT} - S_0}{v(0,T)}\Big) + v(0,T).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{S_0 - K.e^{-rT}}{v(0,T)}\Big) \tag{A.40}$$

$$= (1.e^{-2\%*5} - 1) \cdot \Phi_{[0,1]}\Big(\frac{1.e^{-2\%*5} - 1}{v(0,5)}\Big) + v(0,5).\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{1 - 1.e^{-2\%*5}}{v(0,5)}\Big) \tag{A.41}$$

$$= 0.168 \tag{A.42}$$

A.4.4 Thêta :

▷ **CALL :**

$$\begin{aligned}\Theta_{Call}^{BS}(t,S_t) &= \partial_t C^{BS}(t,S_t) = S_t.\varphi_{[0,1]}(d_1).\partial_t(d_1) \\ &\quad - K.e^{-r(T-t)}.\varphi_{[0,1]}(d_2).\partial_t(d_2) - rK.e^{-r(T-t)}\Phi_{[0,1]}(d_2)\end{aligned} \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}&= \Big[S_t.\varphi_{[0,1]}(d_1) - K.e^{-r(T-t)}.\varphi_{[0,1]}(d_2)\Big] \cdot \partial_t(d_1) \\ &\quad + K.e^{-r(T-t)}.\varphi_{[0,1]}(d_2).\partial_t(d_1 - d_2) - rK.e^{-r(T-t)}\Phi_{[0,1]}(d_2)\end{aligned} \tag{A.44}$$

$$[\cdots] = 0 \quad \text{car :} \tag{A.45}$$

$$S_t.\varphi_{[0,1]}(d_1) = S_t.\varphi_{[0,1]}(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\cdot(d_2+\sigma\sqrt{T-t})^2} \tag{A.46}$$

$$= S_t.\varphi_{[0,1]}(d_2).e^{-d_2.\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2/2\,(T-t)} \tag{A.47}$$

$$= S_t.\varphi_{[0,1]}(d_2).e^{-[ln(S_t/K)+(r-\sigma^2/2)\,(T-t)] - \sigma^2/2\,(T-t)} \tag{A.48}$$

$$= S_t.\varphi_{[0,1]}(d_2).\frac{K}{S_t}.e^{-r(T-t)} \tag{A.49}$$

$$\Theta_{Call}^{BS}(t,S_t) = K.e^{-r(T-t)}.\varphi_{[0,1]}(d_2).\partial_t(\sigma\sqrt{T-t}) - rK.e^{-r(T-t)}\Phi_{[0,1]}(d_2) \tag{A.50}$$

$$= -K.e^{-r(T-t)} \cdot \Big[\frac{\sigma.\varphi_{[0,1]}(d_2)}{2\sqrt{T-t}} + r.\Phi_{[0,1]}(d_2)\Big] \qquad < 0 \tag{A.51}$$

Rappelons $v(t,T) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2r(T-t)})} \quad \rightsquigarrow \quad v'(t,T) = \dfrac{-\sigma\sqrt{r} \cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - e^{-2r(T-t)}}}$

Posons $d = \dfrac{S_t - K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)} \rightsquigarrow \partial_t(d) = \dfrac{-r.K.e^{-r(T-t)}.v(t,T) - (S_t - K.e^{-r(T-t)}).v'(t,T)}{v(t,T)^2}$

$$= \frac{-r.K.e^{-r(T-t)}}{v(t,T)} - \frac{(S_t - K.e^{-r(T-t)}).v'(t,T)}{v(t,T)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}.r^{3/2}.K.e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{1 - e^{-2r(T-t)}}} + \frac{(S_t - K.e^{-r(T-t)}).\sqrt{2}.r^{3/2}.e^{-2r(T-t)}}{\sigma(1 - e^{-2r(T-t)})^{3/2}}$$

$$\Theta^B_{Call}(t,S_t) = \partial_t C^B(t,S_t) \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned} &= (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\partial_t(d) - r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d) \\ &\quad + v(t,T).\partial_t(\varphi_{[0,1]}(d)) + v'(t,T).\varphi_{[0,1]}(d) \end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\varphi_{[0,1]}(d) = \frac{\exp\Big[-\dfrac{(S_t - K.e^{-r(T-t)})^2}{2\cdot v(t,T)^2}\Big]}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp\Big[-\dfrac{r\cdot(S_t - K.e^{-r(T-t)})^2}{\sigma^2\cdot(1-e^{-2r(T-t)})}\Big]}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{\partial_t(\varphi_{[0,1]}(d))}{\varphi_{[0,1]}(d)} = \frac{r}{\sigma^2}\Big[\frac{2.r.K.e^{-r(T-t)}(S_t - K.e^{-r(T-t)})}{(1-e^{-2r(T-t)})} - \frac{2.r.e^{-2r(T-t)}.(S_t - K.e^{-r(T-t)})^2}{(1-e^{-2r(T-t)})^2}\Big]$$

$$\begin{aligned} \Theta^B_{Call}(t,S_t) &= (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\partial_t(d) - r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d) \\ &\quad + v(t,T).\partial_t(\varphi_{[0,1]}(d)) + v'(t,T).\varphi_{[0,1]}(d) \end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned} &= -(S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\frac{\sqrt{2}.r^{3/2}.K.e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \\ &\quad + (S_t - K.e^{-r(T-t)})^2 \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\frac{\sqrt{2}.r^{3/2}.e^{-2r(T-t)}}{\sigma(1-e^{-2r(T-t)})^{3/2}} \\ &\quad - r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d) \\ &\quad + (S_t - K.e^{-r(T-t)}) \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\frac{\sqrt{2}.r^{3/2}.K.e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \\ &\quad - (S_t - K.e^{-r(T-t)})^2 \cdot \varphi_{[0,1]}(d).\frac{\sqrt{2}.r^{3/2}.e^{-2r(T-t)}}{\sigma(1-e^{-2r(T-t)})^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\sigma\sqrt{r}\cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \cdot \varphi_{[0,1]}(d) \end{aligned} \tag{A.55}$$

$$= -r.K.e^{-r(T-t)}.\Phi_{[0,1]}(d) - \frac{\sigma\sqrt{r}\cdot e^{-2r(T-t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-e^{-2r(T-t)}}} \cdot \varphi_{[0,1]}(d) \qquad < 0 \tag{A.56}$$

A.5 Partie 4.2 : Modèle taux : Black-76

A.5.1 Valorisation :

$$C_t(T,T+d) = B(t,T+d)\cdot d\cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[\,(r_T(T,T+d)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\Big] \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned} &= B(t,T+d)\cdot d\cdot \mathbb{E}^{T+d}\Big[\,\Big(x\cdot exp\Big[\int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d} \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s\Big]-K\Big)^+ \mid x = r_t(T,T+d)\Big] \end{aligned} \tag{A.58}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}^{T+d}_{\int_t^T \rho_s(T,T+d).\mathrm{d}B_s^{T+d}} &= \mathcal{N}\Big(0,\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s\Big) = \mathbb{P}_{\widehat{\rho}_t(T,T+d)\cdot(B_T-B_t)} \\ \widehat{\rho}_t(T,T+d) &= \Big(\frac{1}{T-t}\cdot\int_t^T \rho_s(T,T+d)^2.\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_t(T,T+d) &= B(t,T+d)\cdot d\cdot \\ &\mathbb{E}\Big[\,\Big(x\cdot exp\Big[\widehat{\rho}_t(T,T+d)\cdot(B_T-B_t)-\frac{1}{2}\cdot\widehat{\rho}_t(T,T+d)^2\cdot(T-t)\Big]-K\Big)^+\Big] \end{aligned}$$

A.6 Partie 3.3 : Comparaison modèles taux

A.6.1 Maturité :

▷ **CAPLET :**

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\cdot\Big[\,\ln(\frac{r_{t,T}}{K})+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big] \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } r_{t,T}>K \\ 0 & \text{si } r_{t,T}=K \\ -\infty & \text{si } r_{t,T}<K \end{cases} \tag{A.59}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\cdot\Big[\,\ln(\frac{r_{t,T}}{K})-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big] \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } r_{t,T}>K \\ 0 & \text{si } r_{t,T}=K \\ -\infty & \text{si } r_{t,T}<K \end{cases} \tag{A.60}$$

$$\text{Notons que } \begin{cases} \Phi_{[0,1]}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 & \varphi_{[0,1]}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Phi_{[0,1]}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 & \varphi_{[0,1]}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Phi_{[0,1]}(0)=0.5 & \varphi_{[0,1]}(0)={}^1\!/\!\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$C_t^{B76} = B(t,T+d)\cdot\Big[r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(d_1)-K.\Phi_{[0,1]}(d_2)\Big] \quad \underset{t\to T}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} r_{t,T}-K & \text{si } r_{t,T}>K \\ 0 & \text{si } r_{t,T}\le K \end{cases}$$

$$C_t^B = B(t,T+d)\cdot\Big[(r_{t,T}-K)\cdot \underbrace{\Phi_{0,1}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)}_{\longrightarrow\begin{cases}1 & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0.5 & \text{si } r_{t,T}=K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}<K\end{cases}} + \sigma\sqrt{T-t}\cdot \underbrace{\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)}_{\longrightarrow\begin{cases}1/\sqrt{2\pi} & \text{si } r_{t,T}=K\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}\Big]$$

$$\underset{t\to T}{\longrightarrow}\quad\begin{cases} r_{t,T}-K & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}\le K\end{cases}$$

A.6.2 Volatilité :

▷ **CAPLET :**

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\cdot\Big[\ \ln(\frac{r_{t,T}}{K})+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big] \quad\underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow}\quad\begin{cases}+\infty & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}=K\\ -\infty & \text{si } r_{t,T}<K\end{cases}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\cdot\Big[\ \ln(\frac{r_{t,T}}{K})-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big] \quad\underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow}\quad\begin{cases}+\infty & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}=K\\ -\infty & \text{si } r_{t,T}<K\end{cases}$$

$$C_t^{B76} = B(t,T+d)\cdot\Big[r_{t,T}.\Phi_{[0,1]}(d_1)-K.\Phi_{[0,1]}(d_2)\Big] \quad\underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow}\quad\begin{cases}B(t,T+d)(r_{t,T}-K) & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}\le K\end{cases}$$

$$C_t^B = B(t,T+d)\cdot\Big[(r_{t,T}-K)\cdot \underbrace{\Phi_{0,1}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)}_{\longrightarrow\begin{cases}1 & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0.5 & \text{si } r_{t,T}=K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}<K\end{cases}} + \sigma\sqrt{T-t}\cdot \underbrace{\varphi_{[0,1]}\Big(\frac{r_{t,T}-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)}_{\longrightarrow\begin{cases}1/\sqrt{2\pi} & \text{si } r_{t,T}=K\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}\Big]$$

$$\underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow}\quad\begin{cases} B(t,T+d)(r_{t,T}-K) & \text{si } r_{t,T}>K\\ 0 & \text{si } r_{t,T}\le K\end{cases}$$

A.7 Partie 5.2 : GSE ALM RW : Actions

A.7.1 Valorisation indice retraité :

$$
\begin{aligned}
C(t,x) &= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(\widetilde{S}_T - K)^+ \mid \widetilde{S}_t = x] \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(\widetilde{S}_t . \frac{\widetilde{S}_T}{\widetilde{S}_t} - K)^+ \mid \widetilde{S}_t = x] \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(x . \exp[\sigma(B_T - B_t) + (\mu - q - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \mid \widetilde{S}_t = x] \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(x \exp[\sigma(B_T^* - B_t^*) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \mid \widetilde{S}_t = x]
\end{aligned}
$$

Nous avons posé $B_t^* = B_t + \dfrac{\mu - r}{\sigma} t$.
Sous $\mathbb{P}^*$, $B_T^* - B_t^*$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$, et rappelons que $B_T^* - B_t^*$ suit la même loi que $\sqrt{T-t}.B_1$.

$$
C(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^*[\,(x.e^{-q(T-t)} \exp[\sigma(B_T - B_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)] - K)^+ \mid \widetilde{S}_t = x]
$$

Annexe B

Lemme d'Itô

La formule d'Itô est un élément fondamental du calcul stochastique, il nous permet d'effectuer un grand nombre de manipulations sur les intégrales stochastiques.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien sur cet espace.
Posons $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus d'Itô solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t \qquad , \text{ avec } X_0 = x \tag{B.1}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]} \text{ un processus } \mathcal{F}\text{-adapté avec } \displaystyle\int_0^t |\mu_s| \cdot ds \quad \mathbb{P} - p.s. \\ \sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T]} \text{ un processus } \mathcal{F}\text{-adapté càdlàg avec } \mathbb{E}[\displaystyle\int_0^t \sigma_s^2 \cdot ds] < +\infty \end{cases}$$

Soit $f : (t, x) \to f(t, x)$ une fonction $\mathcal{C}^{1,2}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Le lemme d'Itô nous donne :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t).dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t).dX_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t)\sigma_t^2.dt \tag{B.2}$$

Annexe C

Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov nous permet d'effectuer un changement de mesure lors de nos calculs stochastiques. Il permet notamment de passer de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre qui nous permet d'effectuer le pricing d'options.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien sur cet espace.
Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté, continu à gauche, respectant la condition de Novikov, avec $\int_0^T X_s^2 ds < +\infty$ afin que l'intégrale stochastique $X.B_t$ soit définie pour tout $t \in [0, T]$. Posons :

$$Y_t = 1 + \int_0^t X_s Y_s . dB_s \tag{C.1}$$

L'unique solution de cette EDS, appelée exponentielle stochastique de X, est :

$$Y_t = \exp\Big[\int_0^t X_s . dB_s - \frac{1}{2} \cdot \int_0^t X_s^2 . ds\Big] \tag{C.2}$$

Ainsi $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale. Sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ posons la mesure :

$$\mathbb{Q}_T(d\omega) = \mathbb{P}(d\omega).Y_T(\omega) \tag{C.3}$$

Cette mesure est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$. Posons $B^* = (B_t^*)_{t\in[0,T]}$:

$$B_t^* = B_t - \int_0^t X_s . ds \tag{C.4}$$

Sous la mesure $\mathbb{Q}_T$, B^* est un mouvement brownien.

Annexe D

Formule de Feynman-Kac

La formule de Feynman-Kac permet de donner une interprétation stochastique à une solution d'une EDP de second ordre. Considérons l'EDP suivante : $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} (\partial_t V)(t,x) + (\partial_x V)(t,x)\mu(t,x) + 1/2 \cdot (\partial^2_{xx} V)(t,x)\sigma^2(t,x) - \alpha(t,x)V(t,x) + f(t,x) = 0 \\ V(T,x) = \xi(x) \end{cases}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien sur cet espace.
Posons $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ un processus d'Itô solution de l'EDS suivante :
$dS_t = \mu(t,S_t)dt + \sigma(t,S_t)dB_t \quad , \quad \text{avec } S_t = x$

Supposons $V(t,x)$ solution de cette EDP. Nous pouvons appliquer le lemme d'Itô au processus ([Appendix B]) :

$$X_s = e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} \cdot V(s,S_s) + \int_t^s e^{-\int_t^r \alpha(u,S_u)du} \cdot f(r,S_r)dr \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned} dX_s = {} & d\Big(e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du}\Big) \cdot V(s,S_s) + e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} dV(s,S_s) \\ & + d\Big(e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du}\Big) dV(s,S_s) + d\Big(\int_t^s e^{-\int_t^r \alpha(u,S_u)du} \cdot f(r,S_r)dr\Big) \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned} = {} & -\alpha(s,S_s)e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} ds \cdot V(s,S_s) + e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} dV(s,S_s) \\ & \underbrace{- \alpha(s,S_s)e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} ds.dV(s,S_s)}_{\textbf{négligeable}} + e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} \cdot f(s,S_s)ds \end{aligned} \tag{D.3}$$

Nous pouvons appliquer le lemme d'Itô à $dV(s, S_s)$ ([Appendix B]) :

$$dX_s = e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} \cdot \Big[\Big(-\alpha(s,S_s)V(s,S_s) + \frac{\partial V}{\partial s} + \mu(s,S_s)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2(s,S_s) + f(s,S_s)\Big)\cdot ds + \sigma(s,S_s)\frac{\partial V}{\partial S}\cdot dB_s\Big] \tag{D.4}$$

Or le terme compris dans les grandes parenthèses est nul selon notre EDP de départ :

$$dX_s = e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} \cdot \sigma(s,S_s)\frac{\partial V}{\partial S}\cdot dB_s \tag{D.5}$$

Ainsi, en intégrant nous obtenons :

$$X_T - X_t = \int_t^T e^{-\int_t^s \alpha(u,S_u)du} \cdot \sigma(s,S_s)\frac{\partial V}{\partial S}\cdot dB_s \tag{D.6}$$

Enfin, en prenant l'espérance conditionnée par $S_t = x$, l'intégrale stochastique devient nulle et nous obtenons :

$$\mathbb{E}[X_T \mid S_t = x] = \mathbb{E}[X_t \mid S_t = x] = V(t,x) \tag{D.7}$$

On sait que $V(T,x) = \xi(x)$, la solution $V(t,x)$ de l'EDP est donc :

$$V(t,x) = \mathbb{E}\Big[e^{-\int_t^T \alpha(u,S_u)du}\xi(x) + \int_t^T e^{-\int_t^r \alpha(u,S_u)du}\cdot f(r,S_r).dr \mid S_t = x\Big] \tag{D.8}$$

Annexe E

Distributions historiques des taux swaps forward

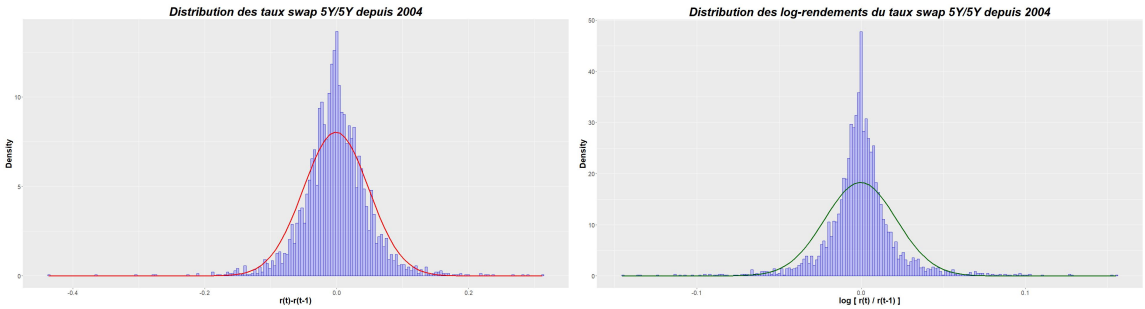


FIGURE E.1 – Distribution historique des taux swaps forward 5Y/5Y et du log-rendement associé

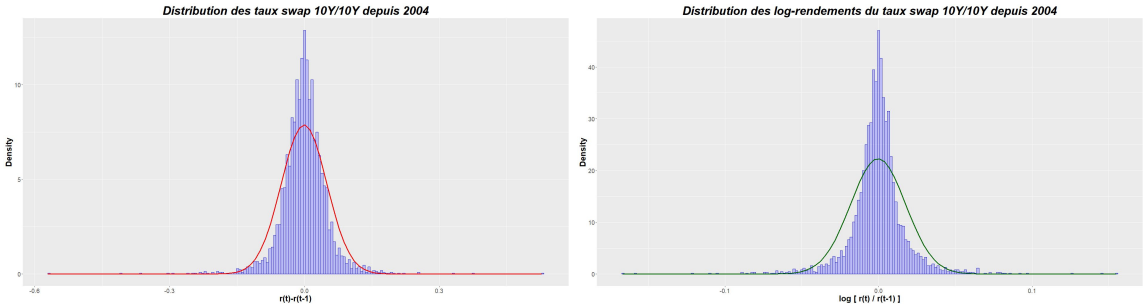


FIGURE E.2 – Distribution historique des taux swaps forward 10Y/10Y et du log-rendement associé

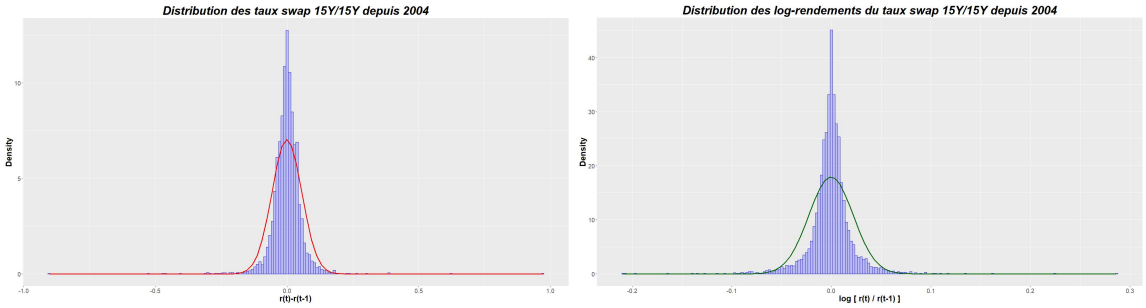


FIGURE E.3 – Distribution historique des taux swaps forward 15Y/15Y et du log-rendement associé

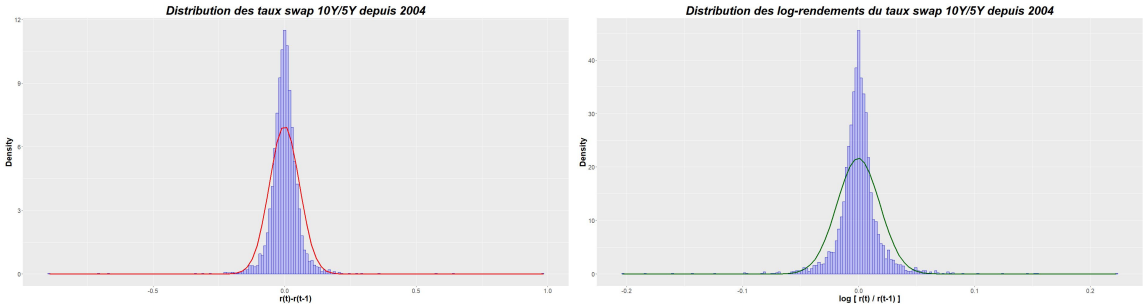


FIGURE E.4 – Distribution historique des taux swaps forward 10Y/5Y et du log-rendement associé

Ces graphiques nous permettent de constater que les taux swaps forward semblent suivre une dynamique normale plutôt qu'une dynamique log-normale.

Bibliographie

[Bachelier, 1900] Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. Numdam.

[Black, 1975] Black, F. (1975). The Pricing of Commodity Contracts. Sloan School of Management, M.I.T.

[Brigo et Mercurio, 2006] Brigo, D. et Mercurio, F. (2006). Interest Rate Models - Theory and Practice. Springer Finance.

[Collier, 2018] Collier, S. (2018). ALM : Cours 1 à 3. ISFA.

[Delbaen et Schachermayer, 2005] Delbaen, F. et Schachermayer, W. (2005). The Mathematics of Arbitrage. Springer Finance.

[Donio et Mourens, 2017] Donio, M. et Mourens, A. (2017). Les Générateurs de Scénarios Economiques. Institut des Actuaires.

[El Karoui, 2004] El Karoui, N. (2004). Couverture des risques dans les marchés financiers. Ecole Polytechnique.

[Pedersen et al., 2016] Pedersen, H., Pat Campbell, M., Christiansen, S., Cox, S., Finn, D., Griffin, K., Hooker, N., Lightwood, M., Sonlin, S. et Suchar, C. (2016). Economic Scenario Generators : A Practical Guide. Society of Actuaries.

[Planchet, 2017] Planchet, F. (2017). Construction et utilisation de générateurs de scénarios économiques dans le contexte de Solvabilité 2. Ressources-Actuarielles.

[Rakotomalala, 2011] Rakotomalala, R. (2011). Tests de normalité : Techniques empiriques et tests statistiques. Université Lumière Lyon 2.

[Schachermayer et Teichmann, 2007] Schachermayer, W. et Teichmann, J. (2007). How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes ? Institute of Mathematical Methods in Economics, Vienna University of Technology.

[Shiryaev, 1997] Shiryaev, A. (1997). Essentials of Stochastic Finance : Facts, Models, Theory. World Scientific.