

**Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management  
pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire  
de l'Institut du Risk Management  
et l'admission à l'Institut des actuaires  
le**

Par : Anandan LAMARTINE

Titre : Ajustement pour risque sous IFRS 17 : détermination du niveau de confiance  
associé au montant de l'ajustement pour risque

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1an  2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des  
actuaires :

---

---

---

Membres présents du jury de l'Institut du Risk  
Management :

---

---

---

---

---

---

---

---

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : \_\_\_\_\_

Nom : Milliman

Signature et Cachet :

**MILLIMAN SAS**

11, Avenue de la Grande Armée  
75017 PARIS

Tel : +33 1 42 99 15 60  
Fax : +33 1 63 66 53 4

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Bertrand Lespinasse et Alexandre Boumezoued

Signature :

Invité :

Nom : \_\_\_\_\_

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en  
ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature(s) du candidat(s)



## Remerciements

Je remercie Eric Serant et Jérôme Nebout, associés du cabinet Milliman à Paris, de m'avoir permis de suivre la formation CEA, et de m'avoir donné la possibilité de réaliser ce parcours et ce mémoire dans de bonnes conditions.

Je tiens à remercier Bertrand Lespinasse, associé et responsable du département Vie, et Alexandre Boumezoued, directeur du département R&D, de m'avoir guidé et conseillé tout au long de ce mémoire.

Je suis reconnaissant envers Damien Louvet et Amal Elfassihi, membres de l'équipe R&D, pour leurs aides précieuses et leurs disponibilités à répondre à mes différentes questions sur le sujet de mon mémoire.

J'adresse ma gratitude également à Hugo Civel, actuaire dans le département vie, pour ses conseils et sa relecture de mon mémoire. Je remercie aussi Vincent Soulas pour ses conseils sur le périmètre emprunteur.

Je remercie enfin ma famille qui m'a soutenu durant ce projet.



## Résumé

Dans ce mémoire, une méthodologie est étudiée pour déterminer le niveau de confiance associé au montant d'ajustement pour risque donné selon la norme IFRS 17. La méthode de conversion étudiée est particulièrement utile pour les assureurs qui utiliseront la méthodologie du coût du capital pour le calcul de l'ajustement pour risque. Elle s'applique également à la conversion d'autres méthodes qui n'impliquent pas une distribution complète des flux de trésorerie, afin de satisfaire à l'exigence de communication du niveau de confiance lié à l'ajustement pour risque.

La méthodologie étudiée repose sur le calcul des moments d'ordre un à trois (espérance, variance et coefficient d'asymétrie) de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs, induits par des facteurs de risque de souscription vie stochastiques pour les risques de mortalité et de rachat. Les flux de trésorerie sont estimés pour un produit de contrat d'assurance emprunteur comportant la garantie décès uniquement. Ensuite, ces moments sont utilisés dans la formule de Cornish-Fisher pour déterminer le niveau de confiance sous-jacent. La méthode étudiée est une approche dite « formule fermée ». Elle dépend à la fois des caractéristiques du passif et de la modélisation des facteurs de risque. L'approche « formule fermée » est comparée à une approche simulatoire afin d'illustrer la cohérence entre les deux méthodes. La méthode étudiée est particulièrement intéressante car elle permet d'une part de répliquer au mieux le profil de risque du portefeuille à travers un vrai calibrage de risque, mais surtout de trouver le niveau de confiance pour différents horizons de risque et ainsi satisfaire l'exigence de la norme IFRS 17.

Les paramètres du modèle de passif et de facteur de risque inclus dans ce mémoire sont illustratifs.



## **Abstract**

In this thesis, a methodology is studied to derive the confidence level of a given Risk Adjustment amount under IFRS 17. The studied conversion method is particularly useful for practitioners who will use the Cost of Capital methodology for the computation of the Risk Adjustment. It is also applicable for converting other methods which do not involve a full distribution of cashflows, in order to fulfill the requirement to disclose the confidence level related to the Risk Adjustment.

The studied methodology relies on the computation of the moments of orders one to three (expectancy, variance, skewness) of the present value of future cashflows driven by stochastic life underwriting risk factors for mortality, longevity and lapse risks. The cashflows are approximated based on a borrower insurance contract product with death benefit only. Then these moments are used in the Cornish-Fisher formula to retrieve the underlying confidence level. As such, the studied method is a closed-form based approach, and the formula to retrieve the confidence level depends on both the liability characteristics and the risk factor modeling. The closed-form approach is compared with a simulation approach to illustrate the consistency between the two methods. The studied method is particularly interesting because it allows on the one hand to replicate as well as possible the risk profile of the portfolio through a real risk calibration, but above all to find the level of confidence for different risk horizons and thus satisfy the requirement of IFRS 17.

The liability and risk factor model parameters included in this thesis are illustrative.





## Note de synthèse

---

La norme IFRS 17 introduit le concept de l'ajustement pour risque. Ce concept peut être comparé à celui de la marge pour risque introduit dans le référentiel prudentiel Solvabilité 2, c'est-à-dire le montant de compensation qui est ajouté à la valeur actualisée des flux futurs pour capter l'incertitude dans le montant ou l'échéancier des flux. IFRS 17 ne décrit pas une méthode obligatoire que les assureurs doivent utiliser pour calculer l'ajustement pour risque. Néanmoins, elle précise que cet ajustement doit **refléter tous les risques non financiers** découlant de contrats d'assurance et énumère cinq principes à prendre en compte pour l'évaluer.

Aussi, **la norme exige** par ailleurs, quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul de l'ajustement pour risque, **la publication d'un équivalent du niveau de confiance** (associé au montant de l'ajustement pour risque) : « *L'entité doit indiquer le niveau de confiance utilisé dans la détermination de l'ajustement au titre du risque non financier. Si elle a appliqué une méthode autre que celle des niveaux de confiance pour déterminer cet ajustement, elle doit indiquer la méthode appliquée et le niveau de confiance auquel équivaut le résultat de l'application de cette méthode.* » (paragraphe IFRS 17.119). Cette exigence de la norme vise en effet à comparer le niveau d'ajustement pour risque des différentes entités, malgré les différences de méthodologie.

Une enquête menée par Milliman, en fin de l'année 2018, auprès des entreprises européennes et anglaises sur les méthodes qu'elles souhaitent utiliser pour déterminer l'ajustement pour risque a révélé que la plupart d'entre elles opteraient pour celle du coût du capital. Ce choix peut s'expliquer par le fait que les assureurs sont familiers avec la marge pour risque de Solvabilité 2.

### Techniques de calcul de l'ajustement pour risque

Deux familles de techniques sont décrites ci-après pour l'établissement de l'ajustement pour risque pour les passifs d'assurance : « techniques des quantiles » et « coût du capital ».

#### « Techniques des quantiles »

Les deux types de techniques des quantiles couramment utilisées sont décrites ci-après :

##### **Value At Risk (VaR)**

Si une société d'assurance choisit la méthode de Value at Risk pour l'estimation de son ajustement pour risque, elle a besoin de calculer la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate » sous une plage de différents scénarios (dont chacun tient compte de l'incertitude résultant des risques non financiers) pour produire une distribution de la valeur des engagements du risque.

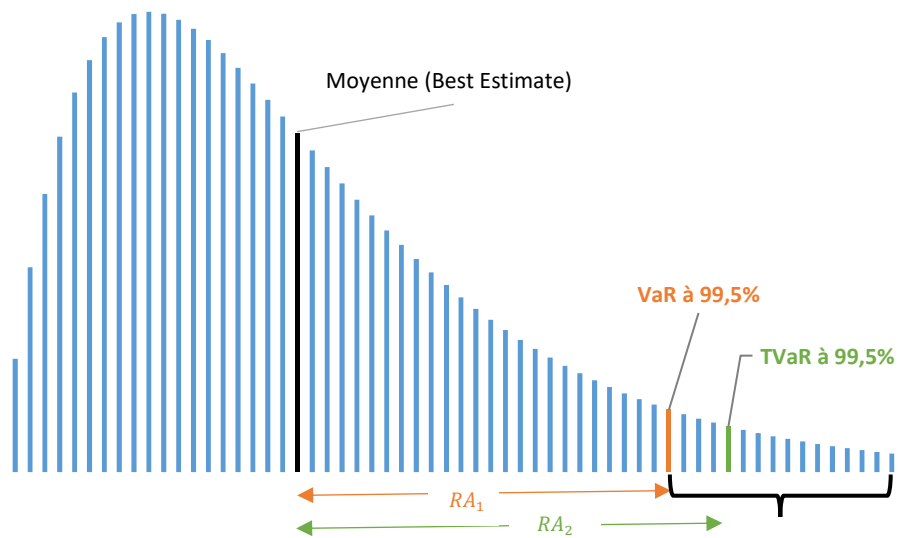
De plus, elle doit fixer le niveau de confiance  $\alpha$  approprié à son portefeuille. L'ajustement pour risque est obtenu par différence entre la  $VaR_\alpha$  et la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate ».

##### **Tail Value At Risk (TVaR)**

La Tail Value At Risk (TVaR) est aussi calculée en fixant un niveau de confiance. Mais elle se distingue de la VaR par le fait qu'elle correspond à la valeur moyenne au-dessus du niveau de confiance. Elle a en effet l'avantage de prendre en compte les valeurs de la variable aléatoire au-delà de la VaR.

De la même manière que la méthode de VaR, pour obtenir l'ajustement pour risque, une société d'assurance doit fixer le niveau de confiance  $\alpha$  approprié à son portefeuille. L'ajustement pour risque (RA) est obtenu par différence entre la  $TVaR_\alpha$  et la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate ».

Le graphe suivant illustre la représentation de l'ajustement pour risque pour  $\alpha = 99,5\%$ , selon la méthode VaR et TVaR, lorsque la répartition du risque suit une loi gamma :



Représentation de RA pour  $\alpha = 99,5\%$  d'une loi gamma selon les méthodes VaR et TVaR

### « Coût du capital »

Le concept du coût du capital peut être exprimé par la formule suivante :

$$RA = \sum_{t \geq 1} \frac{\alpha_t \times C_t}{(1 + d_t)^t},$$

où :

- $C_t$  est le montant en capital, au titre des risques non financiers, à détenir à la date  $t$ ,
- $\alpha_t$  est le taux coût du capital à la date  $t$ ,
- $d_t$  est le taux d'actualisation à la date  $t$ .

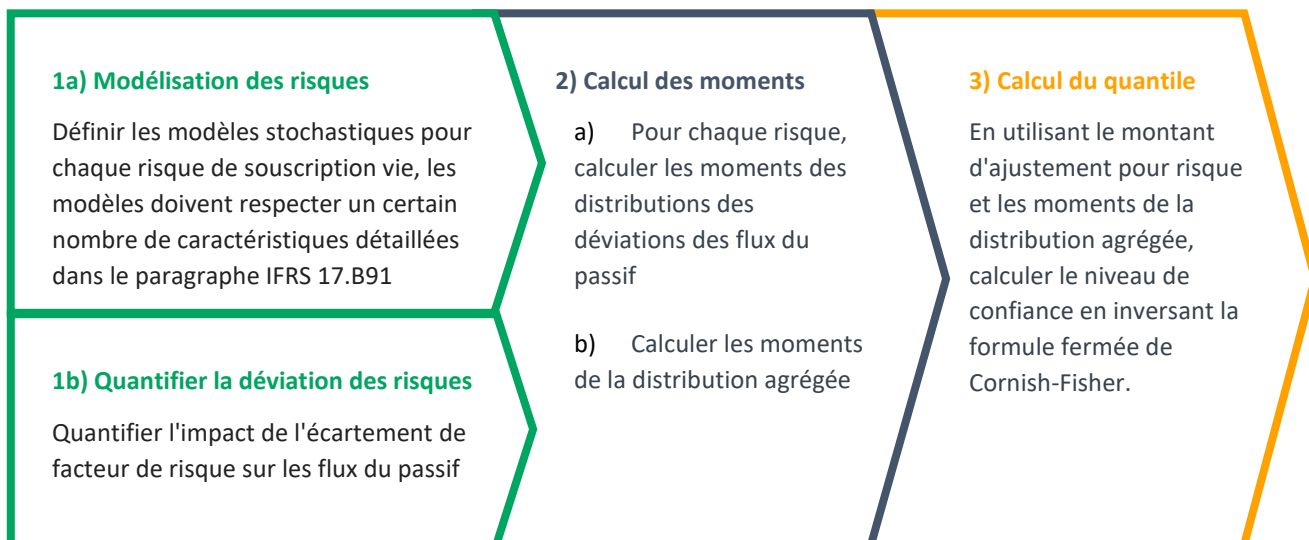
**L'avantage de la méthode VaR est que le niveau de confiance est directement égal au quantile. En revanche, les méthodes TVaR et « coût du capital » nécessitent la mise en place d'une méthode supplémentaire pour déterminer le niveau de confiance équivalent.**

### Méthode supplémentaire nécessaire pour TVaR et « coût du capital »

La méthode du coût du capital n'est pas une mesure cohérente. En effet, elle ne respecte pas la propriété de « sous-additivité ». Le risque global d'un portefeuille n'est donc pas strictement inférieur à la somme des risques des sous-portefeuilles (pas de diversification des risques). Par conséquent, la méthode du coût du capital ne permet pas d'obtenir directement le niveau de confiance associé au montant de RA. Elle nécessite alors une méthode supplémentaire pour l'obtenir.

La TVaR est bien une mesure cohérente. Elle garantit que le niveau de confiance sera supérieur lorsqu'il y a diversification des risques ; mais elle ne permet pas de déterminer de manière précise le niveau de confiance associé. Par conséquent, le calcul de RA obtenu par la méthode de TVaR nécessite également une méthode additionnelle pour déterminer le niveau de confiance associé.

La méthodologie utilisée dans ce mémoire pour obtenir le niveau de quantile équivalent est décrite dans le schéma suivant :



Description de la mise en œuvre de la méthode Cornish-Fisher

Nous nous concentrons dans ce mémoire sur un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur comportant la garantie décès uniquement.

### 1a) Modélisation des risques

Les facteurs de risque retenus dans le cadre de l'étude sont les suivants :

- Risque de niveau de mortalité : ce facteur de risque mesure l'incertitude sur l'estimation initiale des taux de mortalité.
- Risque de tendance de mortalité : ce facteur de risque mesure l'incertitude sur l'évolution future (tendance) des taux de mortalité.
- Risque de volatilité de la mortalité : ce facteur de risque mesure l'incertitude sur le nombre de décès et l'issue des sinistres, compte tenu des taux de mortalité.
- Risque CAT de mortalité : ce facteur de risque mesure le risque d'un événement catastrophique (comme une pandémie) qui conduirait à une augmentation ponctuelle de l'hypothèse de mortalité.
- Risque de rachat : ce facteur de risque mesure l'incertitude sur les taux de rachat.

Ces risques sont les risques non financiers les plus significatifs pour le produit étudié. Pour la mortalité, l'incertitude est divisée en trois composantes, tandis que pour le risque de rachat, nous considérons une unique source d'incertitude.

IFRS 17 exclut les risques opérationnels pour l'évaluation de l'ajustement pour risque. Dans ce mémoire, nous négligeons également le risque de frais.

## 1b) Quantifier la déviation des risques

Nous calculons l'écart (stochastique) des flux par rapport à la meilleure estimation centrale.

La variation des flux de sinistres liés aux décès est définie comme la variation des flux actualisés induite par les sinistres pour la période de projection  $t \geq 1$  selon la formule suivante pour toute catégorie d'assurés d'âge  $x$  et d'ancienneté  $d$  à l'année  $t$  :

$$C_D(x, d, t) = \sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} S(x, d, t-1)_i (I_D(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)),$$

où :

- $N(x, d, t-1)$  est le nombre d'assurés d'âge  $x$ , d'ancienneté  $d$  en  $t$ ,
- $I_D(x, d, t)_i$  est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $q(x, t)$  pour l'assuré  $i$  entre  $t$  et  $t+1$ ,
- $q(x, t)$  est le taux de mortalité de l'assuré d'âge  $x$  en  $t$ ,
- $q_{BE}(x, t)$  est le taux de mortalité du scénario Best Estimate de l'assuré d'âge  $x$  en  $t$ ,
- $S(x, d, t-1)_i$  est l'exposition au risque de mortalité de l'assuré  $i$  d'âge  $x$  en  $t$ .

L'exposition au risque de mortalité est définie comme la potentielle perte liée au décès compte tenu de l'exposition à risque restante par rapport à la trajectoire Best Estimate :

$$S(x, d, t-1)_i = DF(t) \times CapitalSousRisque_{i,t} - \sum_{k>t} DF(k) \times (Sinistres_{i,k} + Frais_{i,k} - Primes_{i,k}),$$

où :

- $Sinistres_{i,t}$  est le montant de prestation payé au titre de la garantie décès de l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $Frais_{i,t}$  les frais de l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $Primes_{i,t}$  les primes payés par l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $DF(t)$  le facteur d'actualisation en  $t$ .

$CapitalSousRisque_{i,t}$  est le capital sous risque de l'assuré  $i$  en  $t$  ; le capital sous risque du produit emprunteur est le capital restant dû (CRD).

L'exposition au risque de rachat est quant à elle définie comme la potentielle perte liée au rachat compte tenu de l'exposition à risque restante par rapport à la trajectoire Best Estimate :

$$L(x, d, t-1)_i = - \sum_{k>t} DF(k) \times (Sinistres_{i,k} + Frais_{i,k} - Primes_{i,k}).$$

## 2) Calcul des moments

Les moments d'ordre 1 (espérance), d'ordre 2 (variance) et d'ordre 3 (coefficient d'asymétrie) des déviations des risques sont calculés.

Le calcul des moments est mis en place en deux étapes :

1. Un calcul par déviation de risque
2. Un calcul sur la distribution agrégée

### 3) Calcul du quantile

La Value at Risk (VaR) de la variable aléatoire  $X$  (ou le risque  $X$ ) de niveau  $\alpha$  peut alors être approchée en utilisant la formule de Cornish-Fisher (à l'ordre 2) comme suit :

$$VaR_{\alpha}(X) \approx \mathbb{E}[X] + \sqrt{Var(X)} \left( z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)S(\tilde{X}) \right),$$

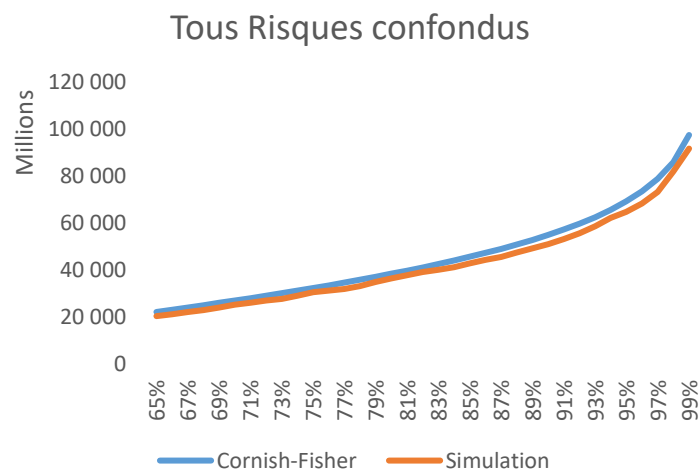
où :

- $\tilde{X}$  est la variable centrée réduite de  $X$ ,
- $z_{\alpha}$  est le quantile normal standard associé au niveau  $\alpha$ ,
- $\mathbb{E}[X]$  (resp.  $Var(X)$ ) désigne l'espérance (resp. variance) de  $X$ ,
- $S(\cdot)$  est la fonction d'asymétrie telle que  $S(\tilde{X}) = \mathbb{E}[\tilde{X}^3] = \frac{M_3(X)}{Var(X)^{3/2}}$ .

Connaissant les trois premiers ordres de la variable  $X$ , le quantile peut être déduit en résolvant une équation du second degré.

#### Comparaison entre approche Cornish-Fisher et « approche simulateur »

La méthode formule fermée de Cornish-Fisher est comparée à la méthode dite « approche simulateur ». Celle-ci consiste à simuler la distribution de Best Estimate puis estimer le montant de RA suivant les quantiles. Les montants de l'ajustement pour risque obtenus suivant les différents quantiles ont été comparés entre les deux méthodes. Les résultats obtenus sont cohérents.



**Distribution de RA, Horizon de risque T = 5**

#### Niveau de confiance associé à la méthode Coût du capital

Nous établissons, en utilisant la méthode formule fermée de Cornish-Fisher, le niveau de confiance associé au montant de RA, calculé avec la méthode « coût du capital ». Nous obtenons alors, en ayant fixé l'horizon de risque T à un an, pour différents taux coût du capital (3%, 4%, 5% et 6%) les niveaux de confiance suivants :

Taux coût du capital	3%	4%	5%	6%
Quantile équivalent	87%	91%	95%	97%

**Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 1**

Nous étudions par ailleurs le niveau de confiance obtenu pour un ajustement pour risque calculé selon une approche VaR (approche « ajustement gaussien »). Les chocs de souscription vie sont basés sur une modélisation gaussienne des facteurs de risque. Ainsi, le calcul est similaire à un calcul de SCR souscription selon la formule standard Solvabilité II mais en modifiant le niveau de quantile sous hypothèse gaussienne. Nous calculons alors les « SCR » en 0 pour les quantiles 99,5%, 90%, 80% et 75% ; puis nous obtenons les niveaux de confiance équivalents en termes d'ajustement pour le risque en utilisant la méthode de Cornish-Fisher, et ce pour différents horizons de risque :

		Quantile initial	99,5%
Cornish-Fisher	T = 1		99,9%
	T = 5		98%
	T = 10		96%

		Quantile initial	90%
Cornish-Fisher	T = 1		97%
	T = 5		83%
	T = 10		75%

		Quantile initial	80%
Cornish-Fisher	T = 1		93%
	T = 5		73%
	T = 10		64%

		Quantile initial	75%
Cornish-Fisher	T = 1		88%
	T = 5		67%
	T = 10		58%

**Quantile équivalent obtenu pour les SCR calculés en approche VaR (approche « ajustement gaussien »)**

Dans notre exemple, les niveaux de confiance obtenus par la méthode Cornish-Fisher sont plus élevés que ceux de la formule standard. Les modèles de risque sous-jacent (mortalité, rachat et CAT) sont en effet calibrés de manière propre, et ce indépendamment de la formule standard. En particulier, certaines études ont pu illustrer le caractère conservateur de la formule standard sur les chocs de mortalité et longévité (Boumezoued A. , Mai 2020), tandis que les calibrage propres du risque de rachat sur des chroniques historiques peuvent faire apparaître des niveaux plus faibles que la formule standard.

Au-delà de bénéficier d'une modélisation propre des risques sous-jacents, l'avantage de cette méthode est aussi de permettre, sans aucun calcul supplémentaire, d'obtenir les niveaux de confiance pour différents horizons de risque.

La méthode Cornish-Fisher a la faculté d'être précise et efficace sur le plan opérationnel. Elle est capable de déterminer les niveaux de confiance pour les différents horizons de risque. Elle répond de ce fait aux exigences de la norme IFRS 17.

## Executive summary

---

IFRS 17 introduces the concept of risk adjustment. This concept can be interpreted as that of the risk margin introduced in Solvency 2, that is to say the amount of compensation which is added to the present value of future cash flows to capture the uncertainty in the amount or the fall of the cash flows. IFRS 17 does not describe a mandatory method that insurers should use to calculate the risk adjustment. But it specifies that this adjustment must **reflect all the non-financial risks** arising from insurance contracts; and lists the five basic and qualitative principles to be considered in estimating it.

Also, **the standard requires**, regardless of the method used to calculate the risk adjustment, **the publication of an equivalent of the confidence level** (associated with the amount of the risk adjustment) : « *An entity shall disclose the confidence level used to determine the risk adjustment for nonfinancial risk. If the entity uses a technique other than the confidence level technique for determining the risk adjustment for non-financial risk, it shall disclose the technique used and the confidence level corresponding to the results of that technique* » (paragraph IFRS 17.119). This requirement of the standard aims to compare the level of risk adjustment of different entities, despite the differences in methodology.

A survey conducted by Milliman, at the end of 2018, with European companies on the methods they want to use to determine the risk adjustment revealed that most of them opt for the cost of capital method. This choice can be explained by the fact that insurers are familiar with the Solvency 2 risk margin.

### Risk adjustment calculation techniques

Two techniques are described here for establishing the risk adjustment for insurance liabilities: “quantile techniques” and “cost of capital”.

#### “Quantile techniques”

The two types of commonly used quantile techniques are described here:

##### Value At Risk (VaR)

If an insurance company chooses the Value at Risk method for estimating its risk adjustment, it needs to calculate the present value of future cash flows from its “best estimate” under a range of different scenarios (each of which takes account of the uncertainty resulting from non-financial risks) to produce a risk allocation.

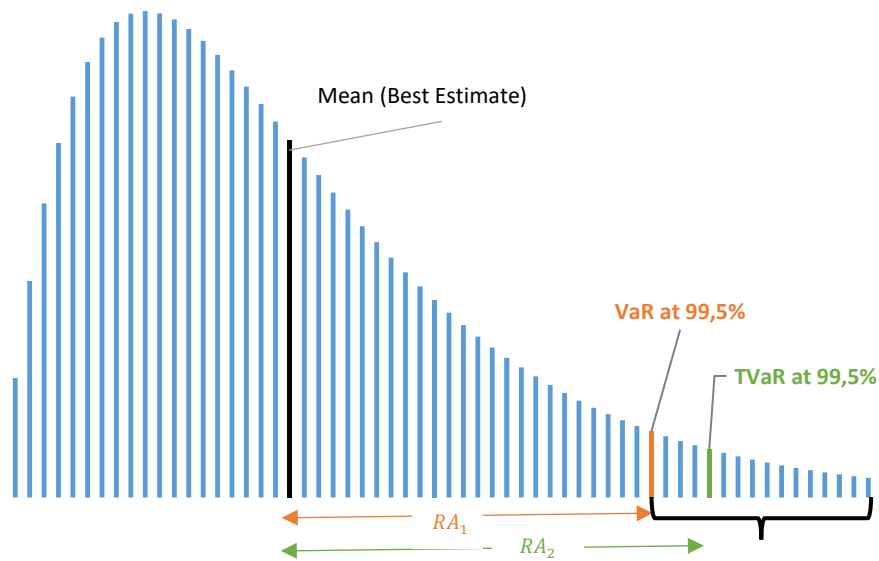
In addition, it must set the confidence level  $\alpha$  appropriate for its business. The risk adjustment is obtained by the difference between  $VaR_\alpha$  and the present value of future flows of its “best estimate”.

##### Tail Value At Risk (TVaR)

The Tail Value At Risk (TVaR) is also calculated by setting a confidence level. But it differs from VaR in that it corresponds to the expected value above the confidence level. It has the advantage of considering the values of the random variable beyond the VaR.

Like the VaR method, to get the risk adjustment, an insurance company must set the appropriate level of confidence  $\alpha$  for its portfolio. The risk adjustment (RA) is obtained by the difference between  $TVaR_\alpha$  and the present value of future flows of its “best estimate”.

The following graph illustrates the representation of the risk adjustment for  $\alpha = 99.5\%$ , according to the VaR and TVaR method, when the risk distribution follows a gamma law:



Representation of RA for  $\alpha = 99.5\%$  of a gamma distribution according to the VaR and TVaR methods

### “Cost of capital”

The concept of the cost of capital can be expressed by the following formula:

$$RA = \sum_{t \geq 1} \frac{\alpha_t \times C_t}{(1 + d_t)^t},$$

where:

- $C_t$  is the amount of capital, resulting from non-financial risks, to be held at date  $t$ ,
- $\alpha_t$  is the cost of capital rate at date  $t$ ,
- $d_t$  is the discount rate at date  $t$ .

**The advantage of the VaR method is that the confidence level is directly equal to the quantile. On the other hand, the TVaR and “cost of capital” methods require the implementation of an additional method to determine the equivalent level of confidence.**

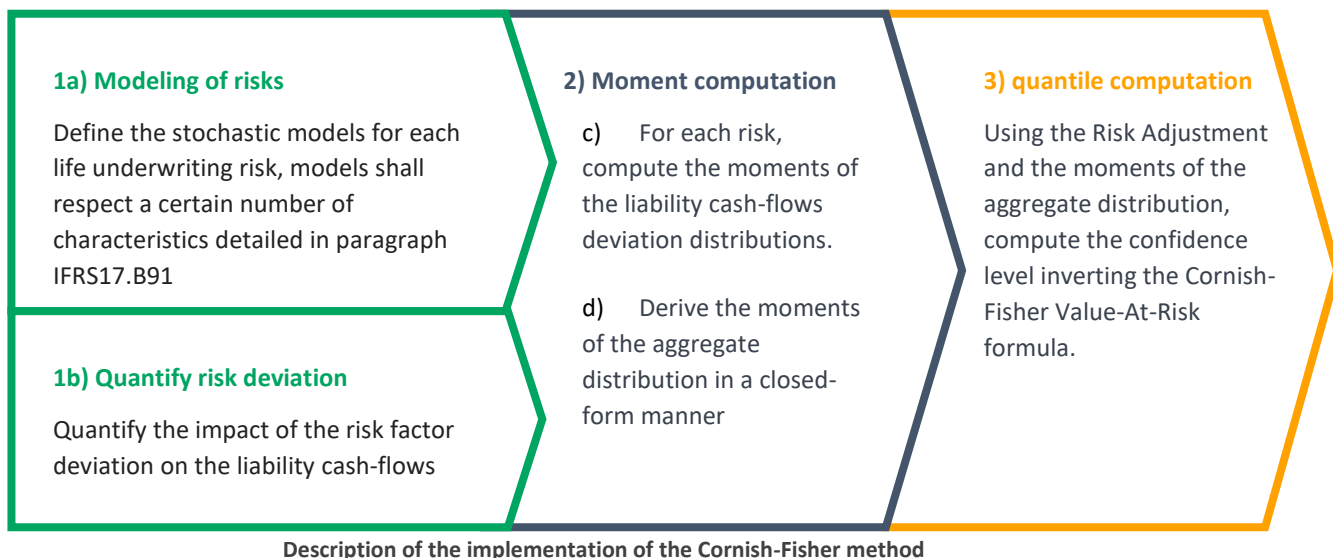
### Additional method required for TVaR and "cost of capital"

The cost of capital method is not a consistent measure. Indeed, it does not respect the property of “sub-additivity”. The overall risk of a portfolio is therefore not strictly less than the sum of the risks of the sub-portfolios (no risk diversification). Therefore, the cost of capital method cannot directly obtain the confidence level associated with the amount of RA. It requires an additional method.

TVaR is indeed a coherent measure. It guarantees that the confidence level will be higher when there is diversification of risks; but it does not allow the associated confidence level to be determined precisely. Therefore, the calculation of RA obtained by the TVaR method also requires an additional method to determine the associated confidence level.

The methodology used in this thesis to obtain the equivalent quantile level is described in the following diagram:





We focus in this thesis on a portfolio of credit insurance contracts with death benefit only.

### 1a) Modeling of risks

The risk factors retained in the framework of the study are as follows:

- Mortality level risk: this risk factor measure the uncertainty on the initial estimate of the mortality rates
- Mortality trend risk: this risk factor measure the uncertainty on the future evolution of mortality rates
- Mortality volatility risk: this risk factor measures the uncertainty of the number of deaths and the outcome of claims, considering mortality rates
- Mortality CAT risk: this risk factor measures the risk of an event catastrophic (such as a pandemic) that would lead to a one-time increase in the mortality assumption.
- Lapse risk: this risk factor measures the uncertainty of lapse rates

These risks are the most significant non-financial risks for the studied product. For mortality, uncertainty is divided into four components, while for lapse risk, a single source of uncertainty is considered.

IFRS 17 excludes operational risks for the assessment of risk adjustment. In this thesis, the risks of costs are also neglected.

### 1b) Quantify risk deviation

We calculate the (stochastic) deviation of the cash flows with respect to their central Best Estimate.

The claim cash flow variation related to death occurrences is defined as the variation of discounted cashflows induced by the claims for projection period  $t \geq 1$  according to the following formula for insured with age  $x$  and duration  $d$  in year  $t$ :

$$C_D(x, d, t) = \sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} S(x, d, t-1)_i (I_D(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)),$$

where:

- $N(x, d, t - 1)$  is the number of policyholders of age  $x$  and duration  $d$  in year  $t$ ,
- $I_D(x, d, t)_i$  is a Bernoulli random variable with value 1 with probability  $q(x, t)$ ,
- $q(x, t)$  is the mortality rate of the insured of age  $x$  in  $t$ ,
- $q_{BE}(x, t)$  is the mortality rate of the Best Estimate scenario of the insured of age  $x$  in  $t$ ,
- $S(x, d, t - 1)_i$  is the mortality exposure at risk for insured number  $i$  with age  $x$  and duration  $d$ , at the beginning of year  $t$ .

The mortality exposure at risk is defined as the potential cost of a claim given the remaining exposure at risk relative to the Best Estimate trajectory:

$$S(x, d, t - 1)_i = DF(t) \times sumAtRisk_{i,t} - \sum_{k>t} DF(k) \times (Claim_{i,k} + Expense_{i,k} - Premium_{i,k}),$$

- $Claim_{i,t}$  is the amount of benefit paid under the insured's death guarantee  $i$  in period  $t$ ,
- $Expense_{i,t}$  the insured's cost  $i$  in period  $t$ ,
- $premium_{i,t}$  is the premium paid in period  $t$  by insured number  $i$ ,
- $DF(t)$  is the discount factor at time  $t$ .

$sumAtRisk_{i,t}$  is the sum at risk for insured number  $i$  with age  $x$  and duration  $d$ , at the beginning of year  $t$ ; the sum at risk of the borrowing product is the outstanding capital.

The exposure to lapse risk is set as the potential loss related to the lapse considering the remaining risk exposure relative to the trajectory Best estimate:

$$L(x, d, t - 1)_i = - \sum_{k>t} DF(k) \times (Claim_{i,k} + Expense_{i,k} - Premium_{i,k}).$$

## 2) Moment computation

The moments of orders one to three (expectancy, variance, skewness) of the liability cash-flows deviation distributions are computed.

The computation of the moments is done in two steps:

1. A computation for each risk
2. A computation for aggregate distribution

## 3) Quantile computation

The Value at Risk (VaR) of the random variable  $X$  (or the risk  $X$ ) of confidence level  $\alpha$  can then be approximated using the Cornish-Fisher formula (at order 2) as follows:

$$VaR_\alpha(X) \approx \mathbb{E}[X] + \sqrt{Var(X)} \left( z_\alpha + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1) S(\tilde{X}) \right),$$

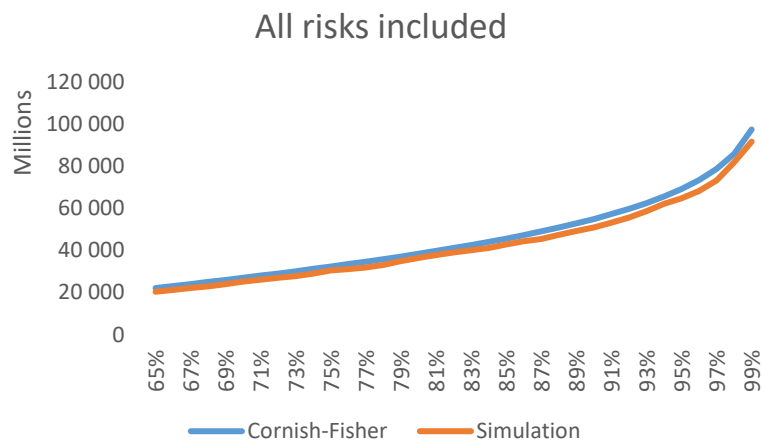
where:

- $\tilde{X}$  is the centered and standardized random variable,
- $z_\alpha$  is the standard normal quantile associated with the level  $\alpha$ ,
- $\mathbb{E}[X]$  (resp.  $Var(X)$ ) denotes the expectation (resp. variance) of  $X$ ,
- $S(\cdot)$  is the skewness such that  $S(\tilde{X}) = \mathbb{E}[\tilde{X}^3] = \frac{M_3(X)}{Var(X)^{3/2}}$ .

Knowing the first three orders of the variable X, the quantile can be deduced by solving a quadratic equation.

### Comparison between Cornish-Fisher closed-form method and “simulation approach”

The Cornish-Fisher closed formula method is compared to the so-called “simulatory approach” method. This consists in simulating the distribution of Best Estimate then estimating the amount of RA according to the quantiles. The amounts of the risk adjustment obtained according to the different quantiles were compared between the two methods. The results obtained are consistent.



Distribution of RA, Risk Horizon T = 5

### Confidence level associated with cost of capital method

We establish, using the Cornish-Fisher closed formula method, the confidence level associated with the amount of RA, calculated with the “cost of capital” method. We then obtain, having set the risk horizon T at one year, for different cost of capital rates (3%, 4%, 5% and 6%) the following confidence levels:

Cost of capital rate	3%	4%	5%	6%
Confidence level	87%	91%	95%	97%

Confidence level obtained for RA calculated with the "cost of capital" method, Risk Horizon T = 1

We are also studying the confidence level obtained for a risk adjustment calculated using a VaR approach (“Gaussian adjustment” approach). Life underwriting shocks are based on a Gaussian model of risk factors. Thus, the calculation is like a calculation of SCR underwriting according to the standard Solvency II formula but by modifying the quantile level under the Gaussian assumption. We then calculate the SCR at 0 for the 99.5%, 90%, 80% and 75% quantiles; then we obtain the equivalent confidence levels in terms of adjustment for risk using the Cornish-Fisher method, for different risk horizons:

		Initial quantile	99,5%
Cornish-Fisher	T = 1		99,9%
	T = 5		98%
	T = 10		96%

		Initial quantile	90%
Cornish-Fisher	T = 1		97%
	T = 5		83%
	T = 10		75%

		Initial quantile	80%
Cornish-Fisher	T = 1		93%
	T = 5		73%
	T = 10		64%

		Initial quantile	75%
Cornish-Fisher	T = 1		88%
	T = 5		67%
	T = 10		58%

**Confidence level obtained for SCR calculated using the VaR approach**

In our example, the confidence levels obtained by the Cornish-Fisher method are higher than those of the standard formula. The underlying risk models (mortality, lapse and CAT) are indeed calibrated properly, and this independently of the standard formula. Some studies have been able to illustrate the conservative nature of the standard formula on mortality and longevity shocks (Boumezoued A. , Mai 2020), while the own calibrations of the risk of lapse on historical chronicles can show levels lower than the standard formula.

Beyond benefiting from own modeling of the underlying risks, the advantage of this method is also that, without any additional calculation, it is possible to obtain confidence levels for different risk horizons.

The Cornish-Fisher method could be precise and operationally efficient. It can determine confidence levels for different risk horizons. It therefore meets the requirements of IFRS 17.

# SOMMAIRE

---

Introduction .....	25
1 Définition et caractéristiques de l'ajustement pour risque .....	27
1.1 Norme IFRS 17 .....	27
1.1.1 Description générale .....	27
1.1.2 Nouveau bilan « simplifié » .....	29
1.1.3 Valorisation initiale.....	31
1.1.4 Valorisation ultérieure.....	33
1.2 Ajustement pour risque selon la norme IFRS 17 .....	36
1.3 Enquête Milliman .....	37
1.4 Techniques de calcul de RA .....	38
1.4.1 « Techniques des quantiles » .....	39
1.4.2 « Coût du capital ».....	42
2 Calcul du niveau de confiance associé à l'ajustement pour risque.....	49
2.1 Techniques de RA nécessitant une méthode additionnelle du calcul du niveau de confiance ....	49
2.1.1 Coût du capital .....	49
2.1.2 Tail Value at Risk.....	50
2.2 Caractérisation du risque .....	51
2.2.1 Description de la mise en œuvre de la méthode de Cornish-Fisher .....	51
2.2.2 Horizon de risque .....	52
2.2.3 Facteurs de risque .....	52
2.2.4 Caractéristiques statistiques .....	57
2.3 Méthodes de calcul du niveau de confiance .....	69
2.3.1 Agrégation des risques .....	69
2.3.2 Approximation Cornish-Fisher de $VaRaX$ .....	71
2.3.3 Inversion de la formule de Cornish-Fisher .....	71
3 Cas d'application sur un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur .....	73
3.1 Description du portefeuille étudié .....	73
3.1.1 Le contrat d'Assurance Emprunteur .....	73
3.1.2 Garanties .....	73
3.1.3 Mode de remboursement .....	74
3.1.4 Caractéristiques du contrat d'Assurance Emprunteur étudié.....	74
3.1.5 Données du Model Point et Hypothèses.....	75
3.1.6 Projection des flux.....	76
3.1.7 Calcul du Best Estimate .....	77
3.1.8 Déviation de risque .....	77
3.2 Simulation .....	79

3.2.1	Caractéristiques du portefeuille étudié.....	79
3.2.2	Architecture du modèle .....	82
3.2.3	Comparaison approche simulateur et approche formule fermée .....	82
3.2.4	Niveau de confiance associé à un RA calculé en méthode « Coût du capital » .....	85
	Conclusion .....	91
	Bibliographie .....	92
	Annexes.....	94
	Table des matières des figures.....	97
	Table des matières des tableaux.....	98

## Glossaire des abréviations

---

<b>BBA</b>	Building Block Approach (Modèle général)
<b>BE</b>	Best Estimate (meilleure estimation)
<b>CAT risk</b>	Risque catastrophe
<b>CoC</b>	Cost of Capital (coût du capital)
<b>CRD</b>	Capital Restant Dû
<b>CSM</b>	Contractual Service Margin (Marge sur services contractuels)
<b>EIOPA</b>	European Insurance and Occupational Pensions Authority
<b>FCF</b>	Fullfilment Cash Flows (provisions techniques)
<b>IFRS</b>	International Financial Reporting Standards
<b>LoB</b>	Line of Business (secteur d'activité)
<b>PAA</b>	Premium Allocation Approach (modèle de répartition des primes)
<b>RA</b>	Risk Adjustment (ajustement pour risque)
<b>SCR</b>	Solvency Capital Requirement (capital de solvabilité requis)
<b>S/P</b>	Ratio Sinistres / Primes
<b>TME</b>	Taux Moyen d'emprunt d'État
<b>TVOG</b>	Time Value of Options and Guarantees (valeur temps des options et garanties)
<b>TVaR</b>	Tail Value At Risk
<b>VaR</b>	Value At Risk
<b>VFA</b>	Variable Fee Approach





## Introduction

---

Initiée à la fin des années 1990, la nouvelle norme comptable internationale IFRS 17 Contrats d'assurance constitue la concrétisation d'une longue réflexion. Elle a été publiée le 18 mai 2017 et entrera en vigueur le 1er Janvier 2023. Cette norme va induire de profonds bouleversements en matière de communication financière des groupes d'assurance. Elle va permettre d'évaluer les passifs d'assurance selon un nouveau modèle comptable qui place les calculs actuariels au cœur de la chaîne de production des états financiers. Elle requiert en effet de développer des modèles de projection des flux de trésorerie futurs, de **calcul de l'ajustement pour risque**, et de la marge sur services contractuels.

La norme IFRS 17 introduit le concept de l'ajustement pour risque (**RA**). Ce concept peut être rapproché de celui de la marge pour risque introduit dans le référentiel prudentiel Solvabilité 2, c'est-à-dire le montant de compensation qui est ajouté à la valeur actualisée des flux futurs pour capter l'incertitude dans le montant ou la tombée des flux. Comme la marge pour risque, l'ajustement pour risque reflète les risques non financiers tels que les risques de mortalité, de rachats et de frais. Mais contrairement à Solvabilité 2, IFRS 17 ne décrit pas une méthode obligatoire que les entreprises doivent utiliser pour calculer l'ajustement pour risque ; chaque entreprise a la liberté sur le choix de la méthode à utiliser.

Le groupe Milliman a mené une enquête, en fin de l'année 2018, pour étudier le degré de préparation des assureurs européens et anglais (trente-six participants au total dont sept en Grande-Bretagne) quant à l'implémentation de cette nouvelle norme de communication financière. En particulier, il a interrogé les entreprises sur les méthodes qu'elles envisagent d'utiliser pour déterminer l'ajustement pour risque.

L'enquête a révélé ainsi que la moitié des assureurs qui ont participé n'ont pas arrêté la méthode à utiliser pour déterminer l'ajustement pour risque. Et parmi ceux qui ont choisi une méthode, un peu plus de la moitié opte pour celle du coût du capital. Ce choix peut s'expliquer par le fait que les assureurs sont familiers avec la marge pour risque de Solvabilité 2.

Selon la même étude menée par Milliman, vingt-trois entreprises ont répondu à la question sur le niveau de confiance à utiliser pour l'ajustement pour risque. 35% d'entre eux (soit huit entreprises) ont l'intention d'utiliser un niveau de confiance entre 70% et 80%.

Parmi les méthodes envisageables pour le calcul de RA, nous pouvons distinguer la famille des méthodes quantiles et la méthode du coût du capital. La méthode quantile tel que *Value at Risk* (VaR) a l'avantage de déterminer le montant de RA à partir d'un niveau de confiance préalablement défini. Mais que dire de la méthode du coût du capital que plus de la moitié des assureurs envisagent d'utiliser ?

La question se pose également pour la méthode quantile *Tail Value at Risk* (TVaR). Quand nous utilisons la méthode TVAR, nous avons un niveau de quantile prédéfini mais nous ne connaissons pas le quantile équivalent au sens de la Value at Risk : d'où la nécessité également de convertir le montant final en niveau de quantile équivalent.

La norme IFRS 17 exige par ailleurs, quelle que soit la méthode utilisée, **la publication d'un équivalent du niveau de confiance (associé au montant de RA) donnée par la VaR**.

Nous cherchons à répondre à cette exigence de la norme dans ce mémoire en étudiant la méthode Cornish-Fisher sur un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur comportant la garantie décès uniquement, et en rapprochant cette méthode avec la formule standard de Solvabilité 2.

Nous aborderons, dans un premier temps, le concept de RA tel qu'il est défini dans la norme IFRS 17 puis nous étudierons les techniques envisageables (méthodes quantiles et la méthode du coût du capital) pour le calcul de RA. Nous étudierons dans un deuxième temps, pour les méthodes « non-quantiles », la méthodologie permettant de déterminer l'équivalent du niveau de confiance pour un montant de RA donné. Nous commencerons, dans cette partie, par définir les caractéristiques de chaque risque servant à

l'étude d'un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur ; puis par établir la formule de Cornish-Fisher permettant de trouver le quantile associé au montant de RA. La troisième partie servira, en premier lieu, à valider l'approche Cornish-Fisher en la comparant avec une approche simulateur. Nous illustrerons enfin le niveau de confiance obtenu pour des calculs d'ajustement pour risque reposant sur des approches VaR et coût du capital telles qu'elles pourraient être mises en œuvre par des assureurs Vie sur base des processus de calcul Solvabilité II d'ores et déjà en place.

# 1 Définition et caractéristiques de l'ajustement pour risque

---

Ce chapitre est consacré, dans un premier temps, à introduire les principales notions de la nouvelle norme IFRS 17 avant de se focaliser sur la notion principale de notre étude qui est l'ajustement pour risque. Ce chapitre traite ensuite des techniques envisageables (méthodes quantiles et la méthode du coût du capital) pour le calcul de l'ajustement pour risque.

## 1.1 Norme IFRS 17

### 1.1.1 Description générale

Depuis 2001, l'IASB (*International Accounting Standard Board*), un organisme privé et successeur de IASC (*International Accounting Standards Committee*), a pour objectif de publier et de promouvoir au niveau mondial des standards de reporting comptable : les normes IFRS (*International Financial Reporting Standards*). Un des premiers objectifs de ces normes est d'établir une « image fidèle » des entreprises : « Une image fidèle communique la substance d'un phénomène économique plutôt que de s'en tenir à la forme juridique. ». Le but est alors de faciliter la comparabilité des sociétés cotées d'un même secteur mais provenant de pays différents. Parmi le corpus IFRS, une norme est dédiée à l'évaluation des passifs d'assurance ; cette norme est actuellement la norme IFRS 4 qui sera remplacée, à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2023, par la norme IFRS 17.

D'après le règlement (CE) n°1606/2002, les sociétés concernées par les normes IFRS, sont les sociétés européennes cotées. Celles-ci doivent présenter pour les exercices ouverts à compter du 1<sup>er</sup> janvier 2005 leurs comptes consolidés conformément aux normes comptables internationales. Selon ce même règlement, les sociétés françaises non cotées présentant des comptes consolidés, ont le choix de présenter leur compte en norme IFRS ou sous les règles habituelles stipulées dans le règlement (ANC 2020-01).

#### IFRS 4 phase 1 :

La norme IFRS 4 phase 1, mis en place depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2005, est une norme comptable « temporaire » pour les passifs d'assurance en attendant la norme IFRS 17 (appelé initialement IFRS 4 phase 2). Lors de cette phase 1, les passifs de l'assureur sont valorisés en utilisant les normes locales (*French GAAP* en France) ; alors que les actifs sont principalement comptabilisés à leur juste valeur. Les écarts qui naissent des différences de valorisation entre l'actif et le passif font l'objet du mécanisme de comptabilité reflet ou *Shadow Accounting* ; la part des assurés dans les plus ou moins-values latentes constatées sur les actifs est comptabilisée en dette (mécanisme de participation aux bénéfices différée) tandis que la part revenant à l'assureur est consolidée dans les capitaux propres. A noter que le recours au référentiel local pour la valorisation des provisions techniques sous IFRS 4 nuit fortement à la comparabilité entre les assureurs de pays différents, ce qui est la principale limite de la norme IFRS 4.

#### IFRS 17 :

La norme IFRS 17, publiée le 18 mai 2017, vise à corriger cette différence observée et propose une évaluation des passifs d'assurance plus cohérente avec celle des actifs. Cette norme va induire de profonds bouleversements en matière de communication financière des groupes d'assurance. Elle va permettre d'évaluer les passifs d'assurance selon un nouveau modèle comptable qui place les calculs actuariels au cœur de la chaîne de production des états financiers.

La frise chronologique suivante illustre les différentes étapes, du démarrage jusqu'à la mise en application du projet IFRS 17 (prévue au 1<sup>er</sup> janvier 2023 contre le 1<sup>er</sup> janvier 2021 initialement) :

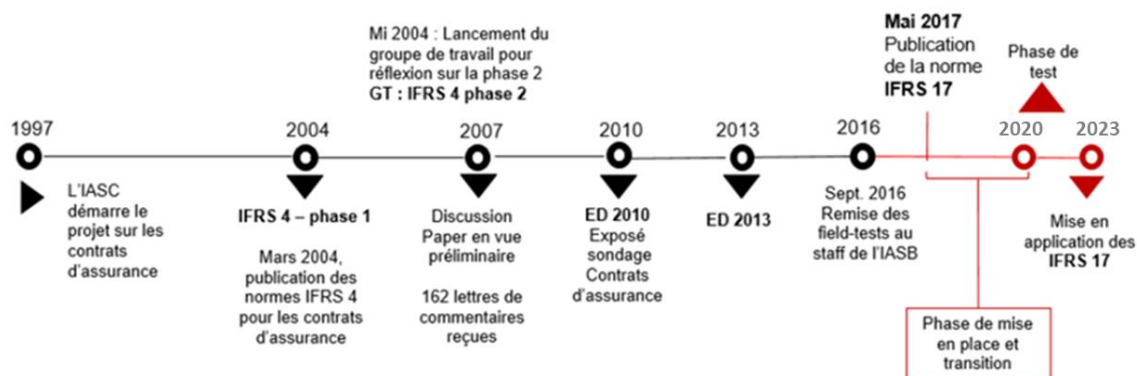


Figure 1 : Etapes de la norme IFRS 17

La phase de gestation de la norme IFRS 17 a donc été très longue, reflétant la difficulté de trouver au sein de l'IASB un modèle de valorisation et de comptabilisation qui représente la grande disparité des contrats d'assurance existant dans le monde. Rappelons que du fait de sa complexité, la norme publiée en mai 2017 a d'ores et déjà fait l'objet de plusieurs amendements portant **principalement** et non exclusivement sur les points suivants :

- Décalage de la date de mise en application
- Traitement de la réassurance portant sur des contrats d'épargne à participation directe
- Comptabilisation de la part du réassureur dans les contrats déficitaires
- Simplification de la présentation bilantielle pour les contrats en situation active / passive
- Traitement des frais d'acquisition
- Simplifications additionnelles pour la première application d'IFRS 17 (Transition)

#### Champ d'application de la norme IFRS 17 :

L'entité doit appliquer IFRS 17 aux éléments suivants :

- (a) les contrats d'assurance et de réassurance qu'elle émet ;
- (b) les traités de réassurance qu'elle détient (cession) ;
- (c) les contrats d'investissement avec participation discrétionnaire qu'elle émet, à condition qu'elle émette aussi des contrats d'assurance.

La norme IFRS 17 ne s'appliquera pas aux :

- (a) garanties fournies sur des marchandises ou services
- (b) régimes d'avantages sociaux
- (c) droits de licences, redevances, paiements de leasing, garantie de valeur résiduelle...
- (d) contrats à garantie financière
- (e) certains contrats de cartes de crédit

#### Concepts clés de la norme IFRS 17 :

Un **contrat d'assurance** est un « contrat selon lequel une partie (l'émetteur) prend en charge un risque d'assurance important pour une autre partie (le titulaire) en convenant d'indemniser le titulaire si un événement futur incertain spécifié (l'événement assuré) porte préjudice au titulaire ».

Le **risque d'assurance** est le « risque autre que le risque financier, transféré du titulaire à l'émetteur d'un contrat ». Il est dit **important** « si et seulement si un événement assuré peut amener l'émetteur à payer des sommes supplémentaires qui sont importantes dans n'importe quel scénario, à l'exclusion des scénarios qui sont dénués de substance commerciale ».

Le **risque financier** est le risque d'une variation future possible d'un ou de plusieurs des éléments suivants : taux d'intérêt spécifié, prix d'un instrument financier, prix d'une marchandise, taux de change, indice de prix ou de taux, notation de crédit ou indice de crédit ou autre variable, à condition que, dans le cas d'une variable non financière, la variable ne soit pas spécifique à une des parties au contrat.

Un contrat d'investissement est un contrat n'ayant pas de risque d'assurance, mais présentant un risque financier. Un **contrat d'investissement avec participation discrétionnaire** est un instrument financier qui confère à un investisseur donné le droit contractuel de recevoir, en supplément d'une somme qui n'est pas à la discrétion de l'émetteur, des sommes additionnelles qui réunissent les caractéristiques suivantes :

- (a) elles sont susceptibles de représenter une part importante du total des prestations prévues au contrat ;
- (b) leur échéancier ou leur montant sont contractuellement laissés à la discrétion de l'émetteur ;
- (c) elles sont contractuellement fondées sur l'une ou l'autre des bases suivantes :
  - i. les rendements tirés d'un ensemble défini de contrats ou d'un type de contrats,
  - ii. les rendements d'investissement réalisés et/ou latents d'un ensemble défini d'actifs détenus par l'émetteur,
  - iii. le résultat de l'entité ou du fonds qui émet le contrat.

Un contrat est qualifié de **contrat avec participation directe** s'il remplit les trois critères suivants :

- a) les modalités contractuelles précisent que le titulaire a droit à une part d'un portefeuille d'éléments sous-jacents clairement défini ;
- b) l'entité s'attend à verser au titulaire une somme correspondant à une part substantielle du rendement obtenu sur la juste valeur des éléments sous-jacents ;
- c) l'entité s'attend à ce que toute variation des sommes à verser au titulaire soit, dans une proportion substantielle, attribuable à la variation de la juste valeur des éléments sous-jacents.

Les contrats d'épargne multisupports français sont généralement des contrats à participation aux bénéfices directe. La norme introduit pour ce type de contrat un modèle de valorisation spécifique, que nous verrons par la suite.

Nous nous intéressons dans un premier temps sur le nouveau bilan « simplifié » de la norme IFRS 17 avant de nous focaliser sur la valorisation initiale et ultérieure des contrats en IFRS 17.

### 1.1.2 Nouveau bilan « simplifié »

Le nouveau bilan simplifié intégrant IFRS 17 peut être représenté par le schéma suivant :

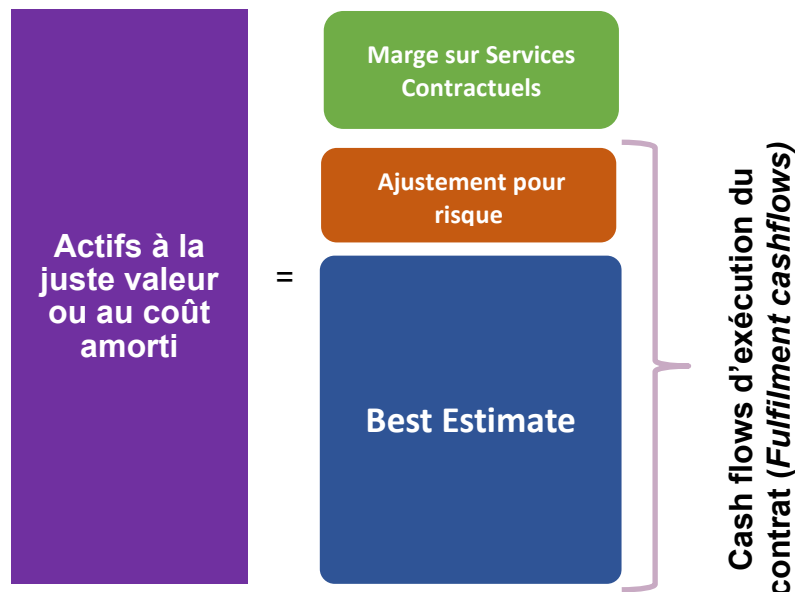


Figure 2 : Bilan simplifié sous IFRS 17

La norme IFRS 17 segmente l'évaluation des passifs des contrats d'assurance en trois principaux composants :

#### Bloc 1 : Best Estimate

Ce premier bloc correspond à la meilleure estimation des passifs d'assurance. Sa définition est très proche de celle définie sous Solvabilité II :

- Prise en compte des **dernières données disponibles** à la date de valorisation,
- Pour les paramètres non financiers, utilisation des hypothèses et de données reflétant **l'expérience propre de la compagnie**,
- Prise en compte d'un effet actualisation basé sur les données de marché observables (**approche Market Consistent**).

Le Best Estimate comprend ainsi la meilleure estimation des **flux de trésorerie d'exécution** des contrats qui se situent dans la **frontière du contrat**.

Les flux de trésorerie d'exécution du contrat comprennent principalement :

- Les primes payées par le titulaire du contrat d'assurance,
- Les indemnités versées par l'assureur en cas de sinistres (y compris les remboursements de composants investissement et les sommes qui résultent de l'exercice des options et garanties financières associées au contrat),
- Les frais et les commissions d'acquisition,
- Les frais et commissions relatifs à l'administration du contrat et à la gestion des sinistres,
- Les frais relatifs à la gestion des actifs dès lors que le contrat est assorti d'un service d'investissement,
- Les taxes transactionnelles,
- Les recours.

Il est rappelé qu'un composant investissement correspond à un montant qui est remboursé par l'assureur en toutes circonstances, que l'évènement assuré se produise ou non.

Pour un contrat d'assurance, les flux de trésorerie d'exécution du contrat seront réputés être à l'intérieur de la frontière du contrat dès lors qu'ils sont payés ou reçus avant la première date à laquelle :

- L'assureur peut revoir le tarif ou le niveau de garantie d'un contrat particulier de manière à refléter intégralement le risque associé au contrat, **ou**
- Les deux conditions suivantes sont remplies :
  - l'assureur a la possibilité de revoir le tarif ou le niveau de garantie du portefeuille dont le contrat fait partie de manière à intégralement refléter le risque du portefeuille ; **et**
  - les primes déjà reçues au moment de la réévaluation ne tiennent pas compte des risques associés aux périodes de couverture post réévaluation.

Les principales différences avec Solvabilité II se situent au niveau :

- Du **taux d'actualisation** : reflet dans le taux d'actualisation de la liquidité des passifs
- De la **frontière des contrats** : il s'agit de la date à partir de laquelle les primes futures et les engagements associés sont considérés appartenir à un nouveau contrat
- Des **frais et commissions** : seuls les frais et commissions rattachables à l'exécution des contrats sont pris en compte dans le Best Estimate.

#### Bloc 2 : RA (Ajustement pour risque)

La prise en compte de la seule vision « Best Estimate » dans la détermination des provisions n'est pas suffisante. Ainsi, un **ajustement pour risque** est ajouté au Best Estimate des flux d'exécution du contrat.

Ce bloc sera détaillé dans la partie 1.2.

#### Bloc 3 : CSM

La Marge sur Services Contractuels (CSM) correspond au profit attendu par l'assureur sur la durée de couverture du contrat d'assurance. Le mécanisme de reconnaissance de ce profit s'effectue tout au long de la durée de couverture d'assurance via un relâchement progressif de la CSM sur base d'unités de couverture.

La reconnaissance du profit en résultat est différée dans le temps et son relâchement doit être en adéquation avec le service rendu par l'assureur sur la période de couverture. Dès lors que la durée de couverture touche à sa fin, alors la CSM doit être intégralement relâchée.

#### 1.1.3 Valorisation initiale

La valorisation initiale pour un groupe de contrats d'assurance s'effectue à la première date parmi (paragraphe 25 de la norme) :

- La date de début de la couverture d'assurance
- La date d'exigibilité de la prime
- La date à laquelle le groupe de contrats devient déficitaire

Le paragraphe 32 de la norme précise que lors de la valorisation initiale, l'entité doit évaluer le groupe de contrats comme la somme **des flux de trésorerie d'exécution** (constitués du Best Estimate et du RA) et de **la marge sur services contractuels**.

La CSM se calcule selon la formule suivante :

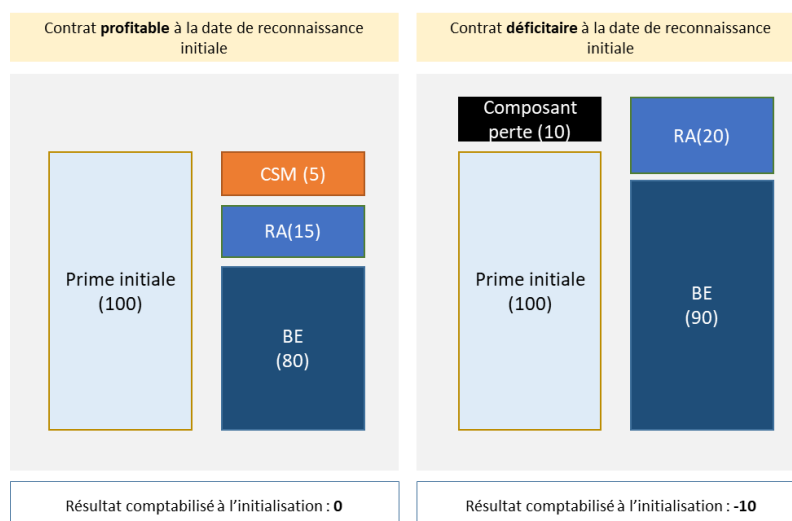
$$CSM = \max(P - (BE + RA), 0),$$

où :

- $P$  : prime initiale,
- $BE$  : les engagements futurs de l'assureur actualisés attachés au contrat, y compris frais rattachables et déduction faite des primes à percevoir dans le futur,
- $RA$  : l'ajustement pour risque.

La CSM est *a fortiori* toujours positive et concerne donc uniquement le profit attendu. Les marges futures négatives sont traitées différemment car elles sont comptabilisées en intégralité dès que l'assureur a connaissance de celles-ci. Ainsi, les profits futurs attendus sont lissés sur la durée de couverture alors que les pertes sont comptabilisées dès la reconnaissance.

Ci-dessous un exemple de reconnaissance à l'initialisation :



**Figure 3 : Exemple d'initialisation de la CSM à la date de reconnaissance**

Sous IFRS 17, les contrats sont subdivisés en groupes, ces groupes étant le croisement des trois axes suivants :

- Axe portefeuille de contrats : un portefeuille est un ensemble de contrats gérés ensemble et présentant des risques similaires
- Axe cohorte annuelle : les groupes ne doivent pas contenir des contrats émis à plus de 12 mois d'intervalle
- Axe signature de profitabilité : IFRS 17 demande de séparer les contrats profitables à l'origine avec risque significatif de devenir déficitaires dans le futur, les contrats profitables à l'origine sans risque significatif de devenir déficitaires dans le futur et les contrats déficitaires à l'origine.

La CSM est calculée au niveau de chaque groupe de contrats alors que le BE et le RA peuvent être calculés à un niveau plus élevé (ex : niveau portefeuille, entité) et ensuite être alloués entre les groupes.



### 1.1.4 Valorisation ultérieure

Le paragraphe 40 de la norme précise que lors de la valorisation ultérieure, l'entité doit évaluer le groupe de contrats, à chaque date de clôture, comme la somme du **passif au titre de la couverture restante** (constitué des flux de trésorerie d'exécution relatifs aux services futurs et de la marge sur services contractuels à cette date de clôture) et du **passif au titre des sinistres survenus** (constitués des flux de trésorerie d'exécution relatifs aux services passés).

Le Best Estimate et le RA doivent donc être scindés en deux parties :

- **Un Best Estimate et un RA relatifs au passif au titre de la couverture restante ou BE LRC et RA LRC** (LRC étant l'acronyme de *Liability for Remaining Coverage*) : ces deux éléments regroupent les flux d'exécution relatifs aux sinistres futurs,
- **Un Best Estimate et un RA relatifs au passif au titre des sinistres survenus ou BE LIC et RA LIC** (LIC étant l'acronyme de *Liability for Incurred Claims*) : ces deux éléments regroupent les flux d'exécution relatifs aux sinistres déjà survenus et non clôturés.

Le BE et le RA sont recalculés explicitement à chaque arrêté. En revanche la CSM est calculée par récurrence. Selon la nature des contrats et les modèles de valorisation associés, toutes les variations de BE LRC et de RA LRC ne viendront pas nécessairement ajuster la CSM. En revanche, les variations de BE LIC et de RA LIC n'impacteront jamais la CSM.

Nous décrivons ci-après brièvement l'évolution de la CSM en fonction des flux de trésorerie d'exécution (notés ci-après FCF) avant de décrire en détail son évolution selon la nature des contrats et les différents modèles de valorisation.

Au cours de la vie d'un contrat d'assurance, la CSM est ajustée des variations des FCF afin de prendre en compte les changements d'estimations et certains écarts d'expérience observés sur la période qui vient de s'écouler. A partir du moment où les variations, aussi bien positives que négatives, des FCF ne consomment pas l'intégralité de la CSM, ces dernières viendront ajuster le profit futur attendu.

Le schéma ci-dessous décrit l'évolution de la CSM et de FCF au cours du temps.

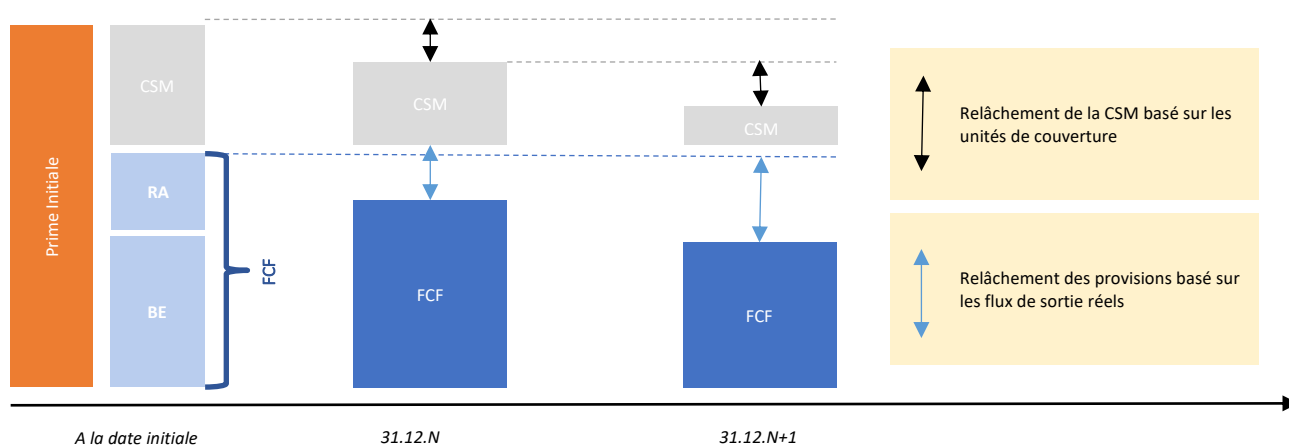


Figure 4 : Evolution de la CSM et de FCF

La reconnaissance en résultat du profit en résultat s'opère par l'intermédiaire d'un relâchement de la CSM basé sur des unités de couvertures qui doivent refléter le service rendu par l'assureur sur la période considérée. Cependant la métrique n'est pas explicitement donnée par la norme.

La norme IFRS 17 propose trois modèles de valorisation suivant la nature des contrats d'assurance : le modèle général ou BBA (Building Block Approach), le modèle VFA (Variable Fee Approach) et le modèle PAA

(Premium Allocation Approach). Les différences entre ces trois modèles sont observées au niveau des règles utilisées pour l'évaluation de la CSM en cours de vie des contrats.

A chaque groupe de contrats est attribué un mode de valorisation. L'enjeu de cette attribution est important car selon le mode de valorisation, la CSM ou le résultat sera impacté.

Nous décrivons les trois modes de valorisation en expliquant leur impact sur le calcul de la CSM.

#### 1.1.4.1 Modèle général ou BBA (*Building Block Approach*)

Le modèle général s'applique par défaut à tous les contrats couverts par IFRS 17, hormis ceux relevant du modèle VFA. Les exemples de contrat d'assurance où le modèle général peut s'appliquer sont les contrats d'assurance emprunteur, les contrats de prévoyance collectifs, les traités de réassurance, etc.

L'évolution de la CSM sous le modèle BBA est décrit dans le schéma suivant :

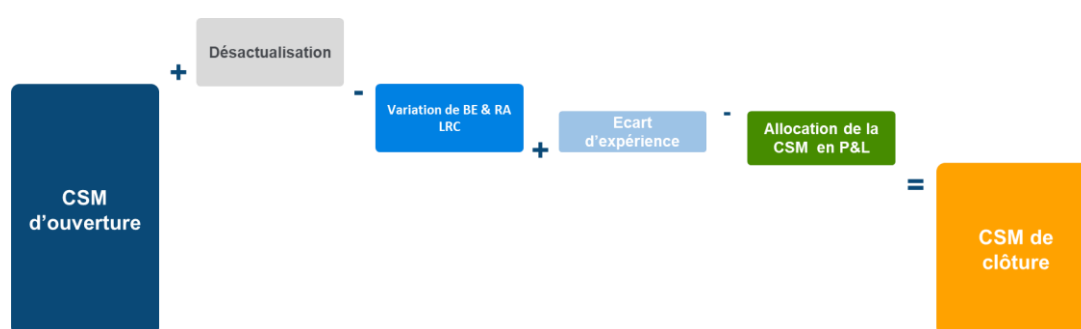


Figure 5 : Evolution de la CSM sous le modèle BBA

La CSM d'ouverture subit une désactualisation en utilisant le taux d'actualisation à la souscription du contrat ; puis elle est ajustée des variations de BE LRC et RA LRC liées aux changements d'hypothèses techniques et actualisés au taux d'actualisation à la souscription du contrat.

Les écarts d'expérience (i.e. écart de la vision attendue et de la vision réelle des flux d'exécution des contrats attachés à la période de couverture séparant l'ouverture et la clôture de l'exercice courant) ajustent normalement le résultat de l'année. La CSM est cependant ajustée des écarts d'expérience suivants :

- Les écarts relatifs aux primes (y compris frais et commissions d'acquisition associés) dès lors que les primes sont associées à des périodes de couverture futures,
- Les écarts sur remboursement de composant investissement

Nous obtenons alors la CSM fin de clôture de l'exercice avant allocation en résultat. Une partie de cette CSM est allouée en résultat (P&L) pour obtenir finalement la CSM de clôture ; l'allocation de la CSM en résultat est obtenue en répartissant uniformément le stock de CSM sur la totalité des unités de couverture relatives aux périodes de couverture résiduelles.

#### 1.1.4.2 Modèle VFA (*Variable Fee Approach*)

Le modèle VFA est une variante du modèle général pour prendre en compte les spécificités des contrats avec participation directe. Ce modèle est d'application obligatoire pour les contrats qui répondent à la définition de contrats avec participation directe ; la philosophie de ces contrats est que l'assureur intervient comme un gestionnaire d'actifs pour le compte du titulaire du contrat ; il reverse au titulaire la juste valeur des éléments sous-jacents au contrat, déduction faite d'un honoraire variable (*Variable Fee*).

A la valorisation initiale, la CSM est identique entre le modèle général et le modèle VFA. Les différences apparaissent lors des valorisations ultérieures.

L'évolution de la CSM sous le modèle VFA est décrite dans le schéma suivant :

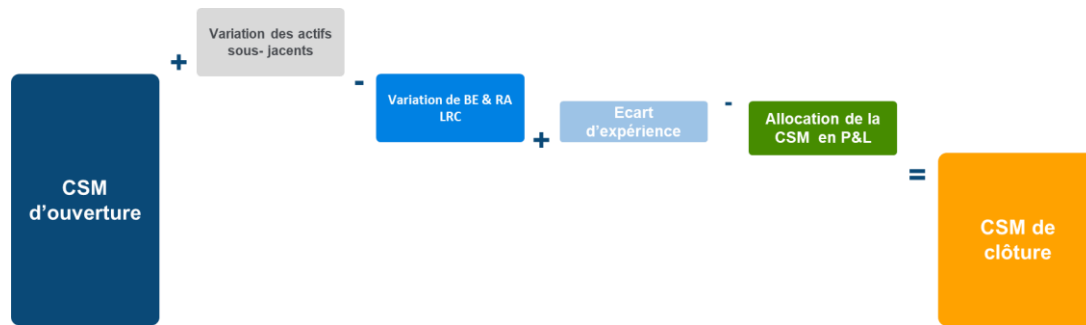


Figure 6 : Evolution de la CSM sous le modèle VFA

La CSM d'ouverture est augmentée de la variation de la juste valeur des éléments sous-jacents (qui sont de manière schématique les actifs financiers en représentation de l'épargne acquise par l'assuré) ; puis elle est déduite des variations de BE LRC et RA LRC liées aux changements d'hypothèses financières et techniques. De la même manière que pour le modèle BBA, les écarts d'expérience relatifs aux remboursements de composants investissements et aux primes (y compris frais et commissions d'acquisition) associées à des périodes de couverture futures viennent ajuster la CSM .

Nous obtenons alors la CSM fin de l'exercice avant allocation. Une partie de cette CSM est allouée en résultat (P&L) pour obtenir finalement la CSM de clôture.

#### 1.1.4.3 Modèle PAA (*Premium Allocation Approach*)

Le modèle PAA est un modèle alternatif du modèle général. Les assureurs ont en effet la possibilité d'utiliser une méthode simplifiée lorsque l'une des deux conditions est remplie :

- Cette méthode permet d'approcher le résultat du modèle général, **ou**
- La période de couverture de chaque contrat est d'un an au plus

Le modèle PAA peut s'appliquer aux contrats de type auto, MRH (multirisque habitation), santé.

Le modèle PAA est proche d'un calcul de Primes Emises Non Acquises tel qu'actuellement pratiqué en normes comptables française. Il n'y a pas de calcul de CSM dans cette approche.

En synthèse, le processus de détermination de modèle de valorisation peut être synthétisé selon l'arbre de décision suivant :

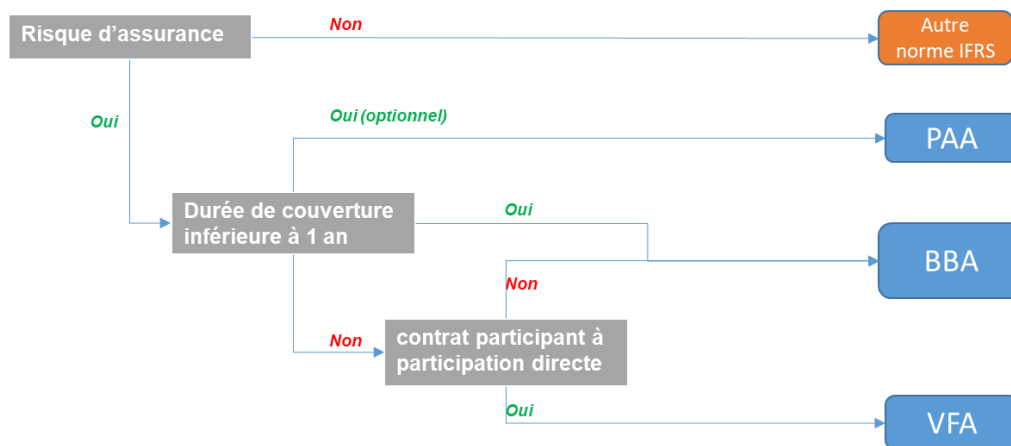


Figure 7 : Classification des contrats d'assurance

## 1.2 Ajustement pour risque selon la norme IFRS 17

La norme IFRS 17 impose l'ajout de l'ajustement pour risque lors de l'évaluation des passifs des contrats d'assurance en vue de prendre en compte les risques et les incertitudes associés aux risques non financiers.

Le paragraphe 37 de la Norme IFRS 17 précise que l'entité doit ajuster les estimations de la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs pour refléter l'indemnité qu'elle exige pour la prise en charge de **l'incertitude entourant le montant et l'échéancier des flux de trésorerie qui est engendrée par le risque non financier**.

L'ajustement au titre du risque non financier vise à évaluer l'effet de l'incertitude, autre que celle relative au risque financier, qui entoure les flux de trésorerie découlant de contrats d'assurance. **Il doit donc refléter tous les risques non financiers découlant de contrats d'assurance, mais ne pas tenir compte des autres risques, tels que le risque général d'exploitation** (cf. B86 et B89 de la norme IFRS 17) ou risque opérationnel.

Le paragraphe B87 précise que l'ajustement pour risque des risques non financiers mesure la compensation qu'une entité doit disposer afin qu'elle soit indifférente entre avoir :

- a) Un passif d'assurance qui génère des flux incertains provenant des risques non financiers
- b) Un passif d'assurance qui génère des flux futurs certains avec la même valeur actualisée que le contrat d'assurance

L'ajustement pour risque correspond, par exemple, au montant qu'une entité exigerait comme indemnité pour qu'il lui soit indifférent de payer le passif dont le montant a une probabilité de 50% d'être de 90€ et une probabilité de 50% d'être de 110€ ou de payer un passif dont le montant est fixé à 100€. Ainsi, l'ajustement au titre du risque non financier fournit aux utilisateurs d'états financiers des informations sur la somme demandée par l'entité pour la prise en charge de l'incertitude entourant le montant et l'échéancier des flux de trésorerie qui est engendrée par le risque non financier.

Le paragraphe B91 identifie les cinq principes suivants à prendre en compte pour évaluer l'ajustement pour risque :

- (a) Il sera d'un montant plus élevé si les risques sont peu fréquents mais graves, que s'ils sont fréquents mais peu graves
- (b) Pour des risques similaires, il sera d'un montant plus élevé si les contrats sont de longue durée que s'ils sont de courte durée

- (c) Il sera d'un montant plus élevé si la distribution de probabilité des risques est large que si elle est étroite
- (d) Il sera d'un montant d'autant plus élevé que l'estimation à jour et la tendance qu'elle présente comportent de nombreuses inconnues
- (e) Il sera d'un montant d'autant moins élevé que les résultats techniques récents réduisent l'incertitude entourant le montant et l'échéancier des flux de trésorerie, et vice-versa

Le paragraphe B92 indique qu'aucune méthode n'est préconisée pour le calcul de RA. Cependant, le montant calculé doit être traduit en niveau de quantile équivalent.

### 1.3 Enquête Milliman

Le groupe Milliman a mené une enquête, en fin de l'année 2018, pour étudier le degré de préparation des assureurs européens et anglais (trente-six participants au total dont sept en Grande-Bretagne) quant à l'implémentation de cette nouvelle norme de communication financière. En particulier, il a interrogé les entreprises sur les méthodes qu'elles envisagent d'utiliser pour déterminer l'ajustement pour risque. Les deux diagrammes circulaires suivants, issus de cette enquête, permettent de répondre à deux questions : la méthode est-elle déjà définie ou non ? Si oui, laquelle ?

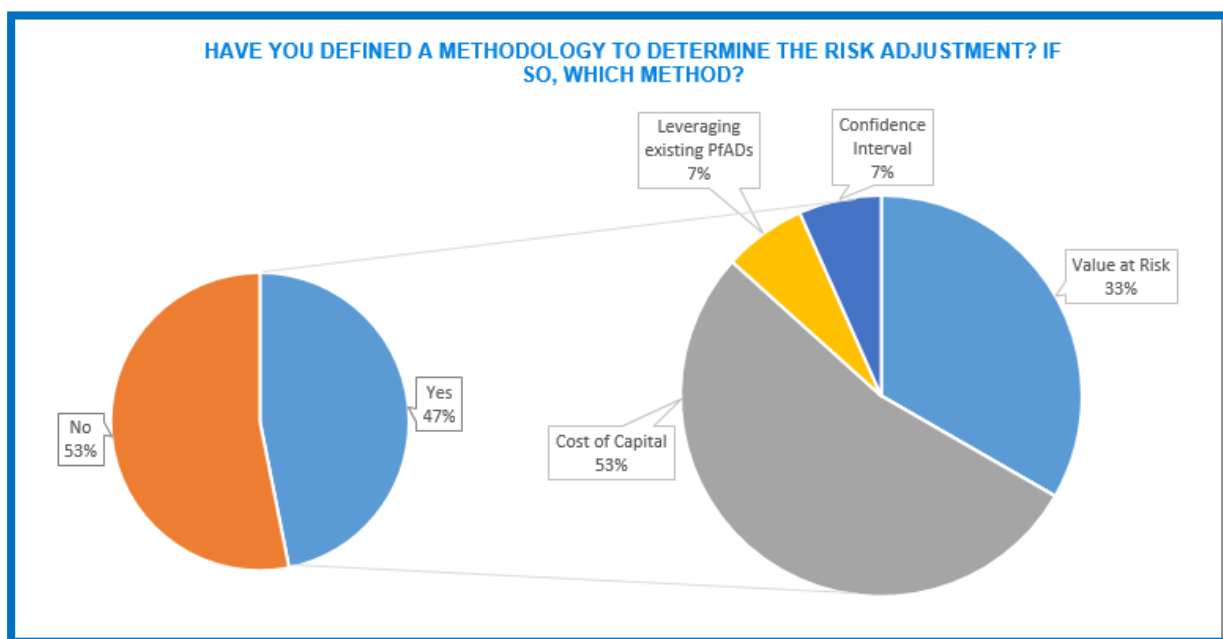


Figure 8 : Répartition du choix des méthodes de l'ajustement pour risque auprès des assureurs européens (Milliman, 2019)

Nous constatons ainsi que la moitié des assureurs qui ont participé à cette enquête, n'ont pas arrêté la méthode à utiliser pour déterminer la marge pour risque. Et parmi ceux qui ont choisi une méthode, un peu plus de la moitié opte pour celle du coût du capital. Ce choix peut s'expliquer par le fait que les assureurs sont familiers avec la marge pour risque de Solvabilité 2.



Figure 9 : choix de la méthode du coût du capital par des assureurs européens (Milliman, 2019)

Selon la même étude menée par Milliman, vingt-trois entreprises ont répondu à la question sur le niveau de confiance à utiliser pour l'ajustement pour risque. 35% d'entre eux (soit huit entreprises) ont l'intention d'utiliser un niveau de confiance entre 70% et 80%.

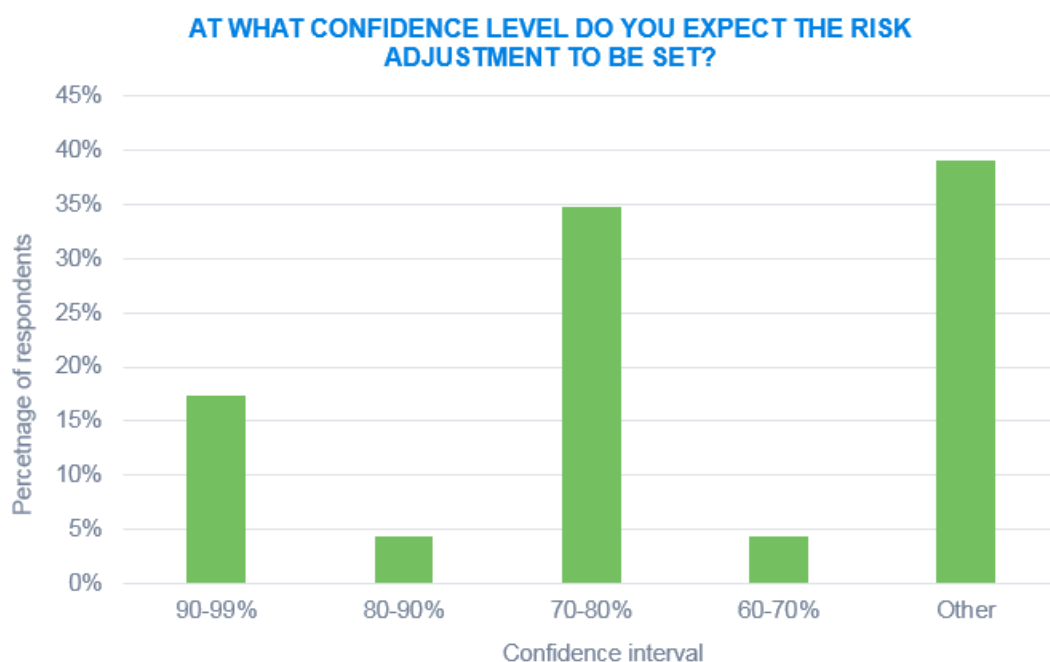


Figure 10 : Orientation du niveau de confiance de RA pour les assureurs européens (Milliman, 2019)

Parmi les méthodes envisageables pour le calcul de RA, nous pouvons distinguer la famille des méthodes quantiles et la méthode du coût du capital, que nous étudierons par la suite.

#### 1.4 Techniques de calcul de RA

Nous rappelons que la norme IFRS 17 ne précise pas de méthodologie à suivre pour le calcul de RA. Les entreprises ont donc la possibilité de calculer le RA avec la méthode souhaitée. La norme exige seulement que les entreprises publient dans leur état financier un descriptif de la méthode utilisée et le niveau de confiance associé à leur RA. De ce fait, lorsque les entreprises utilisent d'autres techniques que celles du niveau de confiance, elles seront contraintes de convertir leurs montants de RA en un niveau de quantile équivalent.

Deux familles de techniques sont décrites ci-après pour l'établissement du RA au titre des passifs d'assurance. La première sous-partie traite des deux méthodes de « techniques des quantiles ». La seconde sous-partie couvre la méthode appelé « coût du capital ».

#### 1.4.1 « Techniques des quantiles »

##### 1.4.1.1 Mesure de risque

Nous appelons mesure de risque une fonction  $\rho$  associant à un risque  $X$  un réel positif  $\rho(X)$ . L'espérance et la variance sont ainsi des mesures de risque.

Lorsqu'il est positif, le nombre  $\rho(X)$  attribué par la mesure  $\rho$  au risque  $X$  sera interprété comme le montant supplémentaire qu'un assureur doit détenir pour faire face à ce risque  $X$ . Cette notion de mesure de risque se rapproche de la définition de l'ajustement pour risque donnée par la norme IFRS 17, si les risques considérés sont des risques non financiers.

Nous allons définir les propriétés qui permettent de rendre cette mesure de risque cohérente.

##### **Monotonie :**

Pour deux risques  $X$  et  $Y$ ,  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ .

Cette propriété traduit le fait que si le risque est élevé alors le capital supplémentaire nécessaire pour faire face à ce risque est élevé également. Il s'agit ici d'une propriété parfaitement naturelle pour une mesure de risque.

##### **Sous-additivité :**

Pour deux risques  $X$  et  $Y$ ,  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

Cette propriété traduit le fait « qu'une fusion ne crée pas de risque supplémentaire ». Elle traduit en effet que le principe de diversification des risques réduit la mesure de risque ; ainsi si les deux risques  $X$  et  $Y$  sont détenus par une même société d'assurance alors ils entraînent de disposer moins de capital supplémentaire que s'ils sont détenus par deux sociétés d'assurance distinctes.

##### **Homogénéité positive :**

Pour toute constante  $h$  positif,  $\rho(hX) = h\rho(X)$ .

Cette propriété traduit l'invariance par rapport à l'unité monétaire.

##### **Invariance par translation :**

Pour toute constante  $c$ ,  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ .

Cette propriété peut être écrite ainsi  $\rho(X - \rho(X)) = 0$ . Elle traduit alors le fait qu'une fois que la société d'assurance dispose de ce capital supplémentaire, alors le risque est nul.

La mesure de risque vérifiant les quatre propriétés (monotonie, sous additivité, homogénéité positive et invariance par translation) est appelée **cohérente**.

Parmi les mesures de risque, la Value At Risk (VaR) et Tail Value At Risk (TVaR), que nous étudierons par la suite, sont basés sur le quantile. La VaR n'est pas une mesure cohérente car elle n'est pas sous additive. Nous détaillerons ce point dans la partie 2.1.1.

La norme IFRS 17 exige par ailleurs, quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul de RA, la publication d'un équivalent du niveau de confiance (associé au montant de RA) donnée par la VaR.

Etant donné  $\alpha \in ]0,1[$ , le nombre  $q$  est un  $\alpha$ -quantile de la variable aléatoire  $X$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  si l'une des trois propriétés est vérifiée :

1.  $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha \geq \mathbb{P}(X < q)$ .
2.  $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$  et  $\mathbb{P}(X < q) \geq 1 - \alpha$ .
3.  $F_X(q) \geq \alpha$  et  $F_X(q^-) \leq \alpha$  avec  $F_X(q^-) = \lim_{x \rightarrow q, x < q} F(x)$ , où  $F_X$  désigne la fonction de répartition de  $X$ .

En d'autres termes, les quantiles sont les valeurs qui divisent un ensemble de données en intervalles contenant le même nombre de données. Les quantiles fréquemment utilisés sont les quartiles (25<sup>ème</sup>, 50<sup>ème</sup>, 75<sup>ème</sup>), les quintiles (20<sup>ème</sup>, 40<sup>ème</sup>, 60<sup>ème</sup>, 80<sup>ème</sup>), les déciles (10<sup>ème</sup>, ..., 90<sup>ème</sup>) et les centiles (par exemple 2%, 3%, 99%). Le principal avantage des techniques de quantiles est que les risques peuvent être représentés graphiquement, permettant ainsi une compréhension facile des résultats. L'inconvénient de ces techniques est de ne pas connaître de manière précise la distribution des résultats incertains.

Les deux types de techniques quantiles décrites ci-dessous (VaR et TVaR) sont couramment utilisées pour quantifier les différences de risque sur la base des connaissances et des analyses qui décrivent l'incertitude des résultats au moyen d'une mesure de probabilité.

#### 1.4.1.2 Value At Risk (VaR)

La Value At Risk (VaR) représente la perte potentielle maximale pour un assureur sur la valeur d'un portefeuille d'actifs qu'il détient ou de passifs qu'il doit et qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné. Elle est, en d'autres termes, la pire perte attendue sur un horizon de temps donné pour un certain niveau de confiance.

La VaR peut être considérée comme un quantile de la distribution de pertes et profits d'un portefeuille d'actifs financiers ou d'un portefeuille de passifs sur une période donnée. A titre d'exemple, le capital de solvabilité requis, sous Solvabilité 2, représente la VaR à 99,5% de niveau de confiance des montants de fonds propres sur un horizon d'un an.

Nous considérons une variable  $X$  représentant le risque assuré par une compagnie d'assurance,  $1 - \alpha$  (compris entre 0 et 1) le niveau de risque pour lequel nous acceptons la perte maximale et  $\alpha$  désignant implicitement le niveau de confiance. La VaR au niveau de confiance  $\alpha$  associé au risque  $X$  est donnée par :

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} ; \mathbb{P}(X > x) \leq (1 - \alpha)\} = \inf\{x \in \mathbb{R} ; \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\},$$

où  $F_X$  désigne la fonction de répartition de  $X$ .

Si  $x$  est le montant de sinistres généré par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$ , alors  $VaR_\alpha(X)$  correspond au montant qu'il faudrait immobiliser pour couvrir le risque  $X$ . Autrement dit, une société détenant le risque  $X$  et disposant un montant de  $VaR_\alpha(X)$  a une probabilité de ruine de  $1 - \alpha$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(X \geq VaR_\alpha(X)) = (1 - \alpha) \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq VaR_\alpha(X)) = \alpha$ .

Si une société d'assurance choisit la méthode de VaR pour l'estimation de son RA, elle a besoin de calculer la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate » sous une plage de différents scénarios (dont chacun tient compte de l'incertitude résultant des risques non financiers) pour produire une distribution du risque.

De plus, elle doit fixer le niveau de confiance  $\alpha$  approprié à son portefeuille. Le RA est donc obtenu par différence entre la  $VaR_\alpha$  et la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate ».



Le graphe suivant illustre la représentation de RA pour  $\alpha = 99,5\%$ , selon la méthode VaR, lorsque la répartition du risque suit une loi gamma :

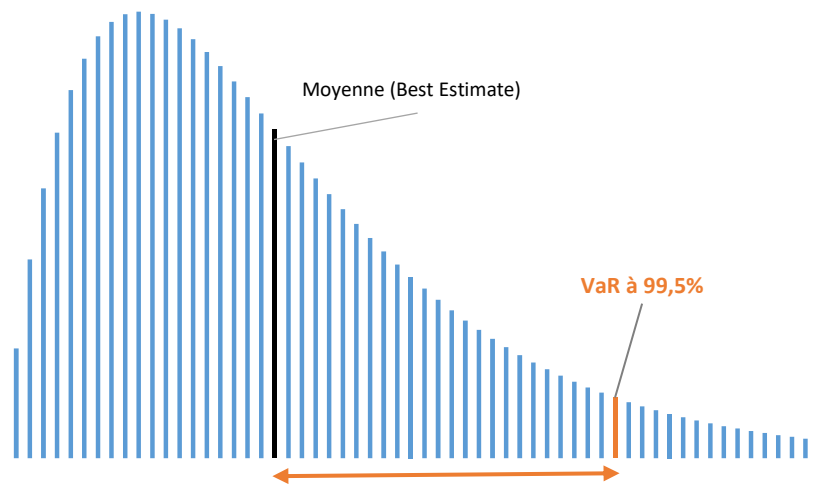


Figure 11 : Représentation de RA pour  $\alpha = 99,5\%$  d'une loi gamma selon la méthode VaR

La VaR présente deux principaux inconvénients :

- Elle n'est pas une mesure cohérente du risque. En effet, elle n'est pas sous-additive, c'est-à-dire, si nous considérons deux risques  $X$  et  $Y$ , alors  $VaR_\alpha(X + Y) \geq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$ . Le non-respect de cette propriété va à l'encontre de la diversification des risques.
- Elle n'est pas non plus adaptée pour une distribution à queue épaisse. Elle sous-estime en effet les risques qui peuvent générer des pertes extrêmes si la queue de distribution est épaisse.

#### 1.4.1.3 Tail Value At Risk (TVaR)

La Tail Value At Risk (TVaR) est aussi calculée en fixant un niveau de confiance. Mais elle se distingue de la VaR par le fait qu'elle correspond à la valeur attendue au-dessus du niveau de confiance. Elle a en effet l'avantage de prendre en compte les valeurs de la variable aléatoire au-delà de la VaR.

La TVaR de niveau  $\alpha$  associé au risque  $X$  est donnée par :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(u) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

La TVaR est donc la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ .

Elle peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[ (X - VaR_\alpha(X))^+ \right].$$

Le deuxième terme du membre de droite  $ES_\alpha(X) := \mathbb{E} \left[ (X - VaR_\alpha(X))^+ \right]$ , appelé l'*expected shortfall* de niveau de probabilité  $\alpha$ , représente la perte moyenne au-delà de la VaR au niveau  $\alpha$ .

La Conditional Tail Expectation (CTE) correspond à la TVaR si la fonction de répartition du risque  $X$  est continue.

De la même manière que la méthode de VaR, pour obtenir le RA, une société d'assurance doit fixer le niveau de confiance  $\alpha$  approprié à son portefeuille. Le RA est donc obtenu par différence entre la  $TVaR_\alpha$  et la valeur actualisée des flux futurs de son « best estimate ».

Le graphe suivant illustre la représentation de RA pour  $\alpha = 99,5\%$ , selon la méthode TVaR, lorsque la répartition du risque suit une loi gamma :

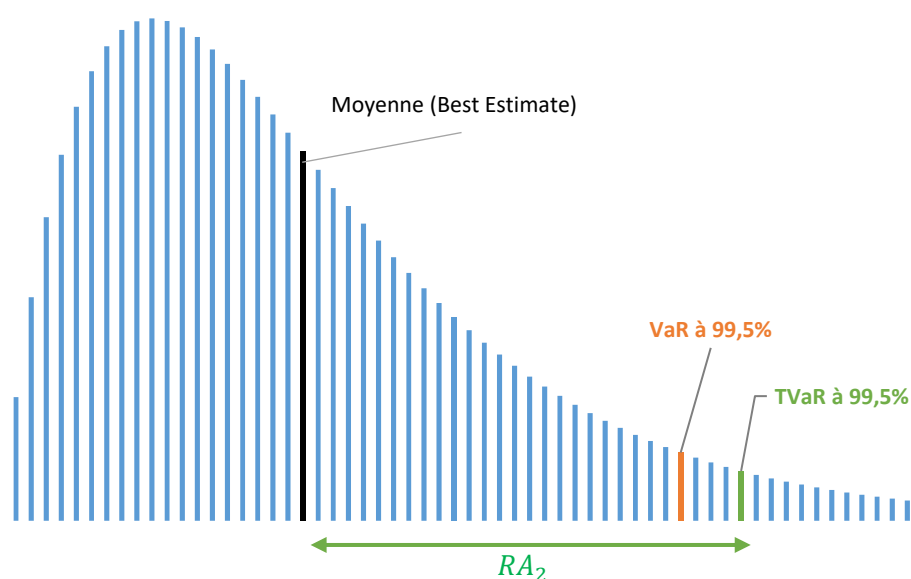


Figure 12 Représentation de RA pour  $\alpha = 99,5\%$  d'une loi gamma selon la méthode TVaR

Nous constatons alors que le  $RA_2$  calculé avec la méthode TVaR est plus grand que le  $RA_1$  calculé avec la méthode VaR. La méthode TVaR est donc plus prudente que celle de VaR pour le calcul de RA.

Aussi, nous visualisons graphiquement que la méthode TVaR est plus adaptée pour les distributions à queue épaisse que celle de la VaR.

## 1.4.2 « Coût du capital »

Nous abordons dans un premier temps la notion de marge pour risque et la méthode « coût du capital » telles qu'elles sont définies dans le référentiel Solvabilité 2. Etant donné que la norme IFRS 17 ne prescrit pas une méthode obligatoire que les sociétés d'assurance doivent utiliser pour calculer l'ajustement pour risque, nous capitalisons alors sur la méthode existante dans le référentiel Solvabilité 2 pour l'adapter à la notion de l'ajustement pour risque.

### 1.4.2.1 Marge pour risque sous le référentiel Solvabilité 2

La directive Solvabilité 2 décrit que la valeur des provisions techniques est égale à la somme d'une meilleure estimation (Best Estimate) et de la marge pour risque. « La marge pour risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance

et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance ».

L'article (Christiansen & Niemeyer, 2012) donne une définition générale de la marge pour risque. Celle-ci est définie comme la différence entre la valeur de marché du passif et la meilleure estimation du passif (Best Estimate). La marge pour risque  $RM_s$  au temps  $s$  est alors définie comme suit :

$$RM_s = L_s - B_s ,$$

avec  $L_s$  la valeur de marché du passif au temps  $s$  ; et  $B_s$  la meilleure estimation du passif au temps  $s$ .

La directive Solvabilité 2 impose la méthode à utiliser pour le calcul de la marge pour risque : la méthode « **coût du capital** ». Elle représente le coût lié à la « mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci ». La méthode coût du capital est basée sur les SCR (*Solvency Capital Requirement*) futurs :

$$RM = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}},$$

où  $SCR_t$  représente les SCR futures en temps  $t$  ;  $CoC$  représente le taux coût du capital ;  $r_t$  est le taux sans risque de maturité  $t$ .

L'article (Christiansen & Niemeyer, 2012) propose une définition théorique de la marge pour risque  $RM_s$  au temps  $s$  en se basant sur les  $SCR_t$ . Mais nous verrons, dans la pratique, que les  $SCR_t$  sont calculés de manière approchée.

Nous détaillons ci-après les trois éléments principaux définissant la marge pour risque :

#### 1. Les « $SCR_t$ futurs »

Les «  $SCR_t$  futurs » représentent le capital de solvabilité requis après  $t$  années.

Les risques à prendre en compte dans le calcul des «  $SCR_t$  futures » sont les suivants :

- le risque de souscription (vie, non vie, santé),
- le risque de marché (autre que le risque de taux), s'il est important,
- le risque de crédit,
- le risque opérationnel.

L'absorption de pertes des impôts différés ne doit pas être considéré dans le calcul des «  $SCR_t$  futurs ».

#### 2. Le taux sans risque $r_t$

Selon la directive Solvabilité 2, « pour chaque monnaie et pour chaque échéance, les taux d'intérêt sans risque de base sont établis à partir des taux des contrats d'échange (swaps) de taux d'intérêt dans cette monnaie, ajustés pour tenir compte du risque de crédit ».

#### 3. Le taux coût du capital $CoC$

Un des éléments important dans la détermination de cette marge pour risque est le taux coût du capital qui est appliqué à la somme actualisée des SCR futurs.

La directive Solvabilité 2 fixe ce taux coût du capital à 6%. Et ce même taux est appliqué pour toutes entreprises d'assurance et de réassurance.

Cependant, différents modèles peuvent être utilisés pour obtenir ce taux coût du capital ; un certain nombre d'entre eux sont décrits dans la thèse (Gatumel, Risk Valuation in Non Life Insurance, 2009). Nous

décrivons brièvement le CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), et le modèle FF2F (*Fama-French à deux facteurs*).

Le CAPM ou le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) permet de calculer la rentabilité attendue d'un actif. Il est populaire pour estimer le coût des fonds propres des sociétés cotées en bourse. Il exprime le taux coût du capital comme la somme du taux sans risque et d'une prime de risque basée sur le risque de marché systématique.

Le second modèle F2FF (Fama-French à deux facteurs) a été développé afin d'améliorer le modèle CAPM. Il intègre en plus la prime de risque liée à l'effet « book to market » (prise en compte du rapport entre la valeur comptable des fonds propres et la valeur de marché des fonds propres).

Les deux modèles CAPM et F2FF permettent d'évaluer le coût des fonds propres des sociétés de manière individuelle. La difficulté est alors de déterminer le coût des fonds propres pour une société de risque moyen opérant dans le secteur de l'assurance-vie ou de l'assurance non-vie. L'approche FIIB (*Full Information Industry Beta*) est alors utilisée et elle permet de décomposer l'estimation individuelle des coûts de la société en des estimations spécifiques des coûts pour chaque ligne de business. Dans la thèse (Gatumel, *Risk Valuation in Non Life Insurance*, 2009), le taux coût du capital calculé avec ces modèles est plus élevé pour les sociétés d'assurance vie que pour celles de non-vie.

Cette thèse répond également à l'interrogation que nous pourrions avoir sur le fait d'appliquer un unique taux pour toutes les entreprises d'assurance et de réassurance, et ceci quel que soit le niveau de risque. En effet, elle explique que, lorsque nous évaluons le risque d'une société d'assurance, ce qui importe ce sont les caractéristiques et les sources de risques de cette société par secteur d'activité. L'article (Gatumel, *Is the Insurance Cost-of-Capital Fair?*, 2011) conclut cependant qu'avec le taux de coût du capital de 6%, il est possible d'obtenir une juste valeur des passifs d'assurance.

Dans la revue 2020 de la norme Solvabilité 2, l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) propose de revoir le calcul de la marge pour risque en expliquant que celle-ci est surestimée. La nouvelle approche consiste à baisser implicitement le taux coût du capital au cours du temps.

#### 1.4.2.2 Ajustement pour risque sous la norme IFRS 17

De manière analogue au référentiel Solvabilité II, la technique du « coût du capital » appliquée dans l'environnement IFRS 17 est fondée sur le principe que le RA correspond au coût d'immobilisation du capital nécessaire pour faire face aux **risques non financiers** générant **l'incertitude sur le montant et l'échéancier des flux de trésorerie**.

Le concept du coût du capital peut être exprimé par la formule suivante, de manière analogue à la marge pour risque sous Solvabilité II :

$$RA = \sum_{t \geq 1} \frac{\alpha_t \times C_t}{(1 + d_t)^t},$$

où,

- $C_t$  est le montant en capital à détenir à la date  $t$  pour couvrir les **risques non financiers**,
- $\alpha_t$  est le taux de coût du capital à la date  $t$ ,
- $d_t$  est le taux d'actualisation à la date  $t$ .

Le taux de coût du capital  $\alpha_t$  peut être interprété comme l'écart entre :

- le **rendement attendu** par l'actionnaire investissant dans la compagnie d'assurance et,

- le **taux de rendement réel** qu'il percevra sur les actifs dans lesquels le capital qu'il apporte dans la compagnie pour la couverture des **risques non financiers** sera investi.

Ainsi, le coût du capital représente le coût d'opportunité induit par l'immobilisation du capital.

L'approche coût du capital permet de prendre en compte les risques extrêmes sur la queue de la distribution de la probabilité dès lors que la compagnie utilise un montant de capital suffisamment important pour refléter toute la distribution.

En revanche, le montant du coût du capital ne doit refléter que les **risques non financiers** aux flux futurs sous-jacents au passif des contrats d'assurance en accord avec les principes IFRS 17 de calcul du RA, **en excluant notamment le capital immobilisé au titre du risque opérationnel**.

L'une des principales difficultés de mise en œuvre de l'approche coût du capital est l'évaluation à une date  $t > 0$  du capital à immobiliser au titre des risques non financiers. C'est pourquoi plusieurs méthodes simplificatrices sont proposées par la suite.

#### 1.4.2.3 Méthodes simplificatrices

Nous utilisons dans cette partie les simplifications proposées par EIOPA dans le cadre de Solvabilité 2.

Dans la suite de cette section, il est supposé que le RA, calculé selon l'approche coût du capital, s'écrit de la manière suivante :

$$RA = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1+r_{t+1})^{t+1}} \quad (E1),$$

où SCR représente le SCR Solvabilité 2 en ne retenant que les sous-modules de risque pertinents pour le calcul du RA.

CoC représente le taux coût du capital ;  $r_t$  est le taux sans risque de maturité  $t$ .

##### 1.4.2.3.1 Méthode « inducteur »

Cette méthode consiste à calculer le  $SCR_t$  de la formule (E1) en approximant chaque sous-module de risque  $SCR_t^i$  pour chaque date future. L'approximation est réalisée de la manière suivante :  $SCR_t^i = SCR_0^i \times Driver^i$ , où  $i$  représente chaque sous module de risque, avec

$$Driver^i = \frac{Driver_t^i}{Driver_0^i}.$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous concentrons sur un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur comportant la garantie décès uniquement, et nous nous intéressons uniquement aux principaux risques auxquels est exposé le portefeuille étudié, à savoir les risques de mortalité et de rachat.

Le SCR à une date  $t$  est ensuite obtenu en agrégeant les différents sous-modules de risque estimés pour chaque date  $t$  avec les matrices de corrélation (voir Annexe 1) de la formule standard Solvabilité II.

Finalement, le RA est obtenu en appliquant (E1).

Nous utiliserons cette méthode dans la partie C.II.4 avec plusieurs primes de risque (taux coût du capital).

#### 1.4.2.3.2 Méthode proportionnelle

Cette méthode consiste à approximer les capitaux de solvabilité requis à chaque  $t$  par une approche proportionnelle. En effet, elle consiste à les approximer comme étant proportionnelle à la meilleure estimation (Best Estimate) des passifs d'assurance à chaque période  $t$ , c'est-à-dire :

$$SCR_t = k \times BE_t.$$

Nous pouvons définir  $k$  en se plaçant à  $t = 0$  :  $k = \frac{SCR_0}{B_0}$ .

Nous obtenons alors en remplaçant dans (E1) :  $RA = CoC \times \frac{SCR_0}{B_0} \times \sum_{t \geq 0} \frac{BE_t}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$  (E 2),

avec :

- $SCR_0$  est le capital de solvabilité requis SCR (Solvency Capital Requirement) à la date  $t = 0$ ,
- $BE_t$  est la meilleure estimation des passifs d'assurance nette de réassurance.

Cette méthode suppose que le profil de risque lié aux engagements est stable dans le temps. Elle peut également s'avérer problématique lorsque le Best Estimate est négatif.

#### 1.4.2.3.3 Méthode par duration

Cette méthode consiste à approximer les capitaux de solvabilité requis à chaque date en une seule fois en utilisant la méthode par duration :

$$RA = \frac{CoC}{1+r_1} \times DurationModifiee_0 \times SCR_0,$$

avec :

- $SCR_0$  est le capital de solvabilité requis SCR (Solvency Capital Requirement) à la date  $t = 0$ ,
- $DurationModifiee_0$  est la duration modifiée des obligations de compagnie nette de réassurance en  $t = 0$ .

Nous calculons la duration modifiée en  $t = 0$  de la manière suivante :

$$DurationModifiee_0 = \frac{\sum_{t=1}^N t \times FluxActualise_t}{\sum_{i=1}^N FluxActualise_t},$$

avec :

- $FluxActualise_t$  est le montant probable des prestations actualisé au taux  $r_t$ ,
- $N$  est la durée maximale de l'engagement.

Cette méthode suppose que la composition et les proportions des risques et sous-risques n'évoluent pas au cours du temps. Comme la précédente, elle peut également s'avérer problématique lorsque le Best Estimate est négatif.

#### 1.4.2.3.4 Méthode simple basée sur le pourcentage de « Best Estimate »

Cette méthode consiste à calculer le RA comme un pourcentage de la meilleure estimation (Best Estimate) des provisions techniques à la date  $t = 0$ , c'est-à-dire :

$$RA = \alpha_{lob} \times BE_0,$$

avec :

- $BE_0$  est la meilleure estimation des passifs d'assurance nette de réassurance à la date  $t = 0$ ,
- $\alpha_{lob}$  est un pourcentage fixe pour chaque ligne d'activité (LoB).

Cette méthode simple n'est utilisée que si la société d'assurance ne dispose que d'une seule ligne d'activité ou si elle prouve qu'elle ne peut utiliser les autres méthodes simplificatrices.





## 2 Calcul du niveau de confiance associé à l'ajustement pour risque

---

Dans ce chapitre, nous supposons qu'une entité est en mesure de calculer le montant d'ajustement pour risque (RA). Nous cherchons à étudier le point crucial de la norme IFRS 17 sur le RA qui consiste à établir l'équivalent du niveau de confiance (associé au montant de RA) donnée par la Value At Risk (VaR).

Nous étudierons dans un premier temps les techniques de RA qui nécessitent une méthode additionnelle au calcul du niveau de confiance. Puis nous nous concentrerons sur la caractérisation du risque par l'étude des caractéristiques statistiques des risques. Enfin, nous terminerons ce chapitre en exposant la méthode de calcul de niveau de confiance.

### 2.1 Techniques de RA nécessitant une méthode additionnelle du calcul du niveau de confiance

Nous avons pu voir dans la partie A II « Techniques de calcul de RA » les principales techniques permettant la mise en place du calcul de RA. La méthode « coût du capital » (CoC) et la méthode « Tail Value At Risk » (TVaR) semblent être des candidats potentiels pour le calcul de RA. Cependant ces méthodes ne peuvent satisfaire directement la norme. En effet, elles nécessitent une méthode additionnelle du calcul de niveau de confiance.

#### 2.1.1 Coût du capital

Plusieurs méthodes ont été détaillées pour le calcul de RA dans la partie A II 2) « Coût du capital » :

- 1) Méthode inducteur
- 2) Méthode proportionnelle
- 3) Méthode par duration
- 4) Méthode simple basée sur le pourcentage de « Best Estimate »

Les trois premières méthodes se basent sur le calcul de SCR et la dernière méthode « simple » se base sur le « Best Estimate » uniquement.

Les trois premières méthodes permettent d'obtenir le RA en calculant le  $SCR_t$  de manière approximative (en se basant sur  $SCR_0$ ) et en utilisant la formule générale  $RA = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$ ,

où,

- CoC : taux coût du capital,
- $r_t$  est le taux sans risque de maturité  $t$ ,
- $SCR_t$  est le capital requis, issu des risques non financiers, à la date  $t$ .

Or le  $SCR_0$  est le montant obtenu par agrégation de  $SCR_0^r$  pour différents sous risques  $r$  ; et chaque  $SCR_0^r$  correspond au montant nécessaire pour faire face au risque  $r$  sur un horizon  $T$  avec une probabilité de  $\alpha$ .

Nous avons alors un montant de RA obtenu par agrégation de différents  $SCR_0^r$  de niveau de confiance  $\alpha$  fixé. Mais ceci ne garantit pas que le niveau de confiance associé au montant de RA est  $\alpha$ .

En effet, une des propriétés importantes de la mesure de risque doit être prise en compte : la **sous-additivité**.

Nous rappelons qu'une mesure de risque est une fonction  $\rho$  associant à un risque  $X$  un réel positif  $\rho(X)$ . Elle est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Monotonie :  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ ,
- (2) Sous-additivité :  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ ,
- (3) Homogénéité positive :  $\rho(hX) = h\rho(X), \forall h \geq 0$ ,
- (4) Invariance par translation pour toute constante  $c$  :  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ .

La méthode du coût du capital n'est donc pas une mesure cohérente. En effet, elle ne respecte pas la deuxième propriété : la sous-additivité. Autrement dit, le risque global d'un portefeuille sera strictement inférieur à la somme de ses risques partiels grâce à la diversification des risques.

Ci-dessous un exemple illustratif - tiré de (Thérond, 2007) - de deux risques  $X$  et  $Y$  indépendants suivant des lois de Pareto de paramètres (2 ; 1) et (2 ; 2) et qui vérifient :

$$\exists \alpha \in ]0; 1[, VaR_\alpha(X + Y) > VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y).$$

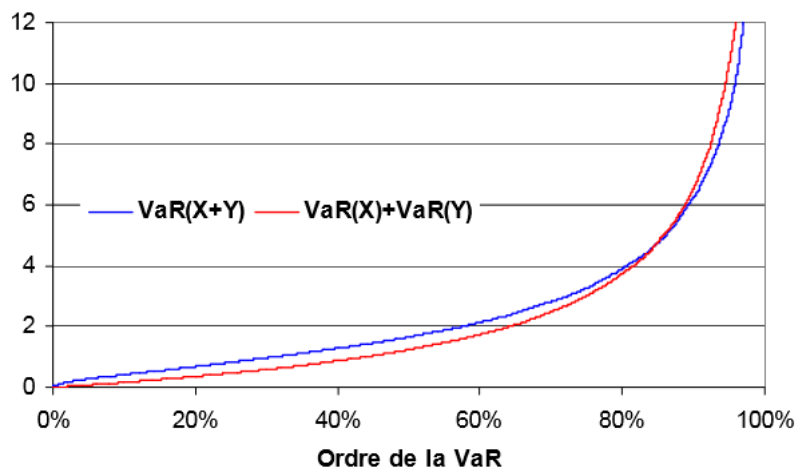


Figure 13 : VaR de la somme de deux variables aléatoires de Pareto - issu de (Thérond, 2007)

Par conséquent, la méthode du coût du capital ne permet pas d'obtenir directement le niveau de confiance associé au montant de RA. Elle nécessite la mise en place d'une méthode additionnelle pour répondre aux exigences IFRS 17 que nous détaillerons dans la dernière partie de ce chapitre.

### 2.1.2 Tail Value at Risk

La Tail value at Risk (TVaR) est une mesure de risque qui se distingue de la VaR par le fait qu'elle correspond à la valeur attendue au-dessus du niveau de confiance. Elle a en effet l'avantage de prendre en compte les valeurs de la variable aléatoire au-delà de la VaR. Elle est la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ .

Aussi, elle se distingue de la VaR par le fait qu'elle vérifie la propriété de sous-additivité. En effet, pour deux risques  $X$  et  $Y$  indépendants, la relation suivante est toujours vérifiée :

$$TVaR_\alpha(X + Y) \leq TVaR_\alpha(X) + TVaR_\alpha(Y)$$

Cette propriété permet de s'assurer que le niveau de confiance associé au risque  $X + Y$  est plus grand que celui associé à  $X$  (ou à  $Y$ ). Elle garantit que le niveau de confiance sera supérieur lorsqu'il y a diversification

des risques ; mais elle ne permet pas de déterminer de manière précise le niveau de confiance associé comme exigé par IFRS 17.

Par conséquent, le calcul de RA obtenu par la méthode TVaR nécessite également la mise en place d'une méthode additionnelle pour déterminer le niveau de confiance associé. Cette méthode sera détaillée dans la dernière partie de ce chapitre.

## 2.2 Caractérisation du risque

### 2.2.1 Description de la mise en œuvre de la méthode de Cornish-Fisher

La méthodologie utilisée dans ce mémoire pour obtenir le niveau de quantile équivalent est décrite dans le schéma suivant :

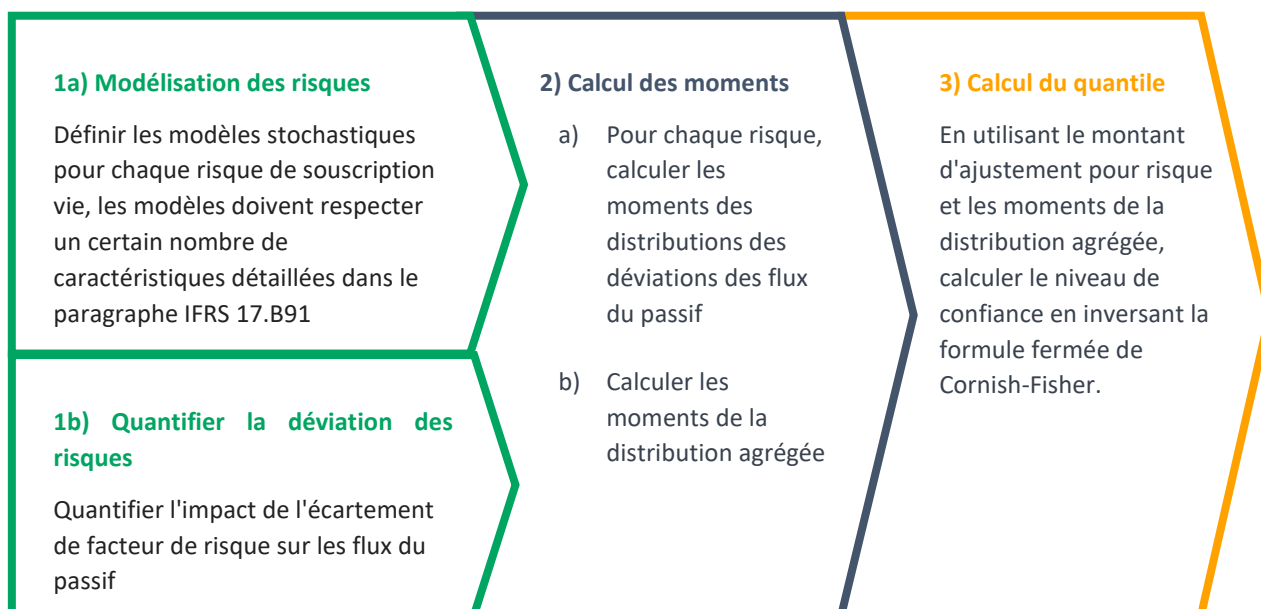


Figure 14 : Description de la mise en œuvre de la méthode Cornish-Fisher

Nous introduisons la notion de l'horizon de risque dans la partie B.II.2.

Nous décrivons la modélisation des risques (1a) dans la partie B.II.3. La notion de déviation de risque (1b) est introduite directement dans la partie de description du portefeuille étudié C.I.8. Le calcul des moments pour chaque risque (2a) est expliqué dans la partie B.II.4. Le calcul des moments de la distribution agrégée (2b) et le calcul du quantile (3) sont étudiés dans la partie B.III.

## 2.2.2 Horizon de risque

Selon (RISK ADJUSTMENTS for Insurance Contracts under IFRS 17, 2018), l'horizon de risque approprié pour le montant du capital pour les ajustements de risque IFRS 17 est la durée de vie de l'incertitude dans les flux de trésorerie des contrats d'assurance.

Ainsi, alors que Solvabilité II considère la vision à un an du risque pour le calcul de l'exigence de fonds propres (SCR), une vision du risque pluriannuelle ou à l'ultime pourrait être jugée comme étant plus appropriée aux exigences IFRS 17.

Nous pouvons illustrer l'horizon de risque à travers le schéma suivant :

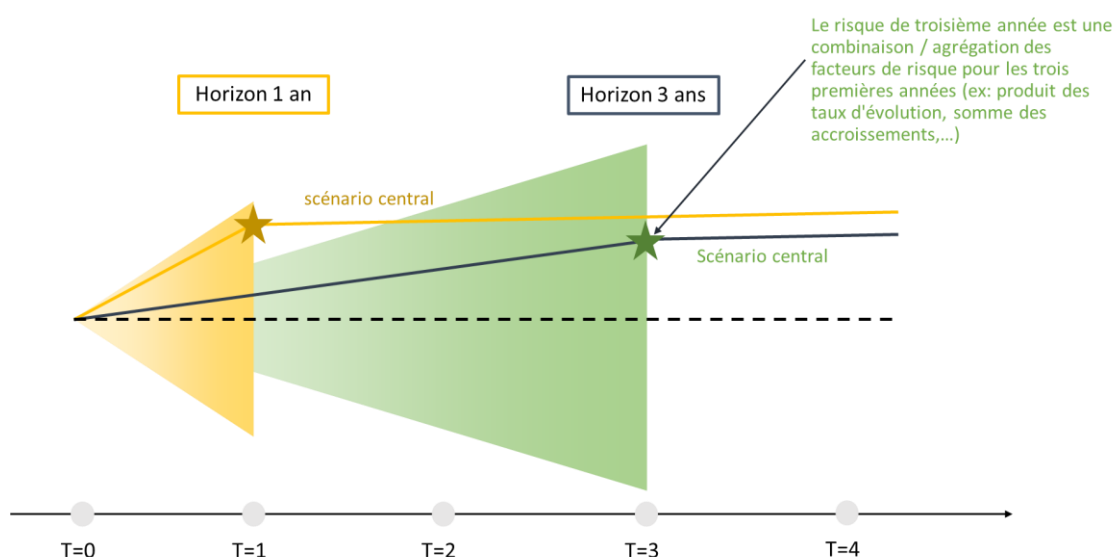


Figure 15 : Illustration de l'horizon de risque

Les facteurs de risque, présentés dans la partie suivante, prennent en compte dans ce mémoire un horizon de risque supérieur ou égal à 1.

Remarque : le fait de retenir T=1 ne signifie pas nécessairement que seuls les flux de première année de projection sont choqués. En effet, hormis pour les chocs de type mortalité CAT ou rachat massif, la déviation relative des facteurs de risque observée à 1 an **persiste** sur toute la durée de projection. Ainsi, même si une déviation des taux de mortalité (par exemple) à 1 an est retenue, tous les taux de mortalité utilisés pour projeter les flux d'exécution des contrats sont déformés. Le fait de retenir un horizon du risque de 1 an n'empêche a priori alors pas de tenir compte de l'incertitude sur l'échéancier et le montant de l'ensemble des flux de trésorerie d'exécution des contrats.

## 2.2.3 Facteurs de risque

Les facteurs de risque retenus dans le cadre de l'étude sont les suivants :

- Risque de niveau de mortalité : mesure l'incertitude sur l'estimation initiale des taux de mortalité

- Risque de tendance de mortalité : mesure l'incertitude sur l'évolution future (tendance) des taux de mortalité
- Risque de volatilité mortalité : mesure l'incertitude sur le nombre de décès et l'issue des sinistres, compte tenu des taux de mortalité
- Risque CAT (catastrophe) de mortalité : mesure le risque d'un événement catastrophique (comme une pandémie) qui conduirait à une augmentation temporaire ponctuelle de l'hypothèse de mortalité.
- Risque de rachat : mesure l'incertitude sur les taux de rachat.

Ces risques sont les risques non financiers les plus significatifs pour le produit qui sera étudié par la suite. Pour la mortalité, l'incertitude est divisée en quatre composantes, tandis que pour les risques de rachat, nous considérons une source unique d'incertitude dans la modélisation intégrant toutes les composantes.

Le tableau ci-dessous synthétise, à titre illustratif, le cadre de modélisation par risque. Les notations sont détaillées par la suite.

Risque	Quantité sous-jacente	Modèle	Description mathématique
Mortalité : Risque de niveau	Estimation initiale des taux de mortalité $q_{BE}^*(x, t_0)$	Poisson	$q_{BE}^*(x, t_0) = \frac{D^*(x, t_0)}{E(x, t_0)}$ avec $D^*(x, t_0) \sim \mathcal{P}(q_{BE}(x, t_0)E(x, t_0))$
Mortalité : Risque de tendance	Améliorations de la mortalité $\frac{q(x, t)}{q(x, t-1)}$	Lee-Carter	$\log\left(\frac{q(x, t)}{q(x, t-1)}\right) = \beta(x)(\mu + \sigma\epsilon(t))$ avec $\epsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Mortalité : Risque de volatilité	Nombre de décès réalisé $D^*(x, t)$	Binomial	$D^*(x, t) \sim \text{Bin}(q_{BE}(x, t), N(x, t - 1))$
Mortalité CAT	Taux de mortalité $q(x, t)$	Fréquence (Bernoulli) / Sévérité (log-normal)	$q(x, t) = q_{BE}(x, t) + I(t)S(t)$ avec $\mathbb{P}(I(t) = 1) = p; \log(S(t)) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
Rachat	Evolution taux du rachat $l(d, t)/l(d, t - 1)$	Gaussien	$\frac{l(d, t)}{l(d, t - 1)} \sim \mathcal{N}(1 + \mu_l, \sigma_l)$

Tableau 1 : Tableau de synthèse de la modélisation des risques

### 2.2.3.1 Risque de mortalité

Nous considérons par la suite le taux de mortalité  $q(x, t)$  comme une fonction de l'âge  $x$  et de l'année  $t$ . Nous notons  $t_0$  l'année d'évaluation de calcul.

Soit  $d(x, t)$  le nombre de décès enregistrés d'individus d'âge  $x$  en l'année  $t$ . Soit de plus  $E(x, t)$  la somme des durées de vie de chaque individu d'âge  $x$  en l'année  $t$ , appelée exposition sous-jacente au risque.

Nous notons  $N(x, t)$  le nombre d'assurés d'âge  $x$  en  $t$ .

Nous notons avec un \* les réalisations stochastiques des variables aléatoires pour les distinguer de leurs espérances dans cette partie.

Les facteurs de risque de mortalité (pertes dues à un effet adverse de l'évolution de taux de mortalité attendu) peuvent se produire à la suite d'une mauvaise estimation, au choix, du niveau ou de la tendance des hypothèses de mortalité, ou de la volatilité intrinsèque des hypothèses. Le risque de mortalité peut également se produire à la suite d'un choc de type catastrophe.

Le risque de mortalité est décomposé en **quatre sous-risques** :

### 2.2.3.2 Risque de niveau (« level »)

Il s'agit du risque sur la mauvaise estimation du paramètre  $q(x, t_0)$ , dû à une mauvaise estimation de la moyenne. Ce facteur de risque peut être séparé en deux composants :

- Risque que l'estimation soit basée sur un nombre insuffisant d'observations comparé à la population théorique. Ce risque peut être estimé en utilisant des méthodes statistiques basées sur des données historiques.
- Risque que l'estimation soit basée sur des données inappropriées (population à étudier présentant des caractéristiques différentes de celle permettant d'obtenir l'estimation). Ce risque ne peut pas être estimé en utilisant des méthodes statistiques. Son évaluation est donc basée sur un jugement d'expert.

Si  $d(x, t)$  est traitée comme une variable aléatoire  $D(x, t)$ , et l'exposition sous-jacente  $E(x, t)$  comme fixée, alors  $D(x, t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $q(x, t_0) \times E(x, t_0)$ .

Les nouvelles réalisations permettant d'évaluer l'incertitude sur ce risque sont alors définies par :

$$q^*(x, t_0) = \frac{D^*(x, t_0)}{E(x, t_0)}.$$

Nous pouvons remarquer que le risque de niveau ne dépend pas de l'horizon de risque car il mesure l'incertitude sur l'estimation initiale.

### 2.2.3.3 Risque de tendance (« trend »)

Il s'agit du risque de la mauvaise estimation de la tendance contenue dans l'hypothèse de Best Estimate sur la durée de projection.

Nous pouvons capter ce risque en utilisant par exemple le modèle de Lee-Carter (Lee & Carter, 1992).

Le modèle de Lee-Carter peut s'écrire de la manière suivante :

$$\ln q(x, t) = \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t),$$

où :

- $\alpha(x)$  est la composante spécifique à l'âge  $x$ , elle s'interprète comme la valeur moyenne des  $\ln q(x, t)$  au cours du temps,
- $\kappa(t)$  décrit l'évolution générale de la mortalité,
- $\beta(x)$  traduit la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge  $x$  par rapport à l'évolution générale  $\kappa(t)$ .

La série  $\kappa(t)$  peut-être modélisée par une marche aléatoire avec dérive comme suit :

$$\kappa(t + 1) = \kappa(t) + \mu + \sigma\epsilon(t + 1),$$

où :

- $\mu$  est le paramètre de dérive (*drift*), appelé également la tendance,
- $\sigma$  est le paramètre de volatilité,
- Les  $\epsilon(t)$  sont indépendantes identiquement distribuées et suivent une loi normale centrée réduite.

Connaissant les réalisations de  $(\epsilon(s))_{s \geq t_0+1}$  la projection du taux de mortalité pour tous les âges  $x$  et pour  $t > t_0$  peut être obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \ln q(x, t) &= \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t) \\ &= \alpha(x) + \beta(x)(\kappa(t-1) + \mu + \sigma\epsilon(t)) \\ &= \alpha(x) + \beta(x) \left( \kappa(t_0) + (t - t_0)\mu + \sigma \sum_{s=t_0+1}^t \epsilon(s) \right) \\ &= \ln q(x, t_0) + \beta(x) \left( (t - t_0)\mu + \sigma \sum_{s=t_0+1}^t \epsilon(s) \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{q(x, t)}{q(x, t_0)} = \exp \left( \beta(x) \left( (t - t_0)\mu + \sigma \sum_{s=t_0+1}^t \epsilon(s) \right) \right)}$$

Le paramétrage et le calibrage des paramètres du modèle de Lee-Carter sont expliqués en Annexe 2.

#### 2.2.3.4 Risque de volatilité

Il s'agit du risque que le nombre de sinistres ou le montant des sinistres soient différents de ceux attendus, dû à la volatilité statistique intrinsèque de ceux-ci. Ce facteur de risque permet alors de couvrir cette déviation par rapport aux valeurs attendues sur un horizon de risque  $T$ , et peut être séparé en deux composantes :

- Nombre de sinistres : couvre l'incertitude lié au nombre de sorties qui est différent de la valeur Best Estimate
- Montant des sinistres est différent de la meilleure estimation (Best Estimate)

Nous considérons que le nombre de décès  $D^*(x, t)$  suit une loi binomiale de paramètre  $(q_{BE}(x, t), N(x, t - 1))$ .

#### 2.2.3.5 Risque catastrophe (CAT)

Il s'agit du risque sur l'année de projection à venir à la suite d'un événement rare engendrant une augmentation soudaine des taux de mortalité. Dans la littérature, nous distinguons deux types d'évènement :

- L'un lié à un choc global (comme la pandémie de COVID-19 de cette année 2020 causant une augmentation des taux de mortalité sur une population donnée)
- L'autre lié à un choc local (comme une catastrophe naturelle (ex : tsunami) ou un crash d'avion entraînant une augmentation soudaine des taux de mortalité sur un groupe d'individus restreint)

Le risque CAT supplémentaire peut être modélisé à l'aide d'une approche fréquence-sévérité. Le pourcentage de surmortalité pour chaque année est noté  $\Delta(t)$ . Ceux-ci sont supposés être indépendants et identiquement distribués. Le taux de mortalité soumis au risque CAT devient ainsi :

$$q(x, t) + \Delta(t).$$

Une structure par âge pourrait être intégrée au modèle. Dans un tel cas, les taux de mortalité stochastiques seraient  $q(x, t) + \lambda(x)\Delta(t)$ , avec  $\lambda$  une fonction déterministe dépendante de l'âge. En effet, le récent événement COVID-19 montre que l'augmentation de la mortalité provoquée par une pandémie peut être fortement dépendante de l'âge.

La composante fréquentielle est donnée par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $p$ , notée  $I(t)$ . La composante de sévérité est saisie par une variable aléatoire  $S(t)$  qui représente le pourcentage d'excès de mortalité en cas de CAT (pandémie). En conséquence, la variable excédentaire écrit :

$$\Delta(t) = I(t)S(t).$$

La variable aléatoire  $S(t)$  à toute année  $t$  est supposée suivre une distribution log-normale :  $\log(S(t)) \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c)$ , et les résultats CAT pour différentes années sont supposés indépendants.

Le choix des paramètres  $p, \mu_c, \sigma_c$  est expliqué dans l'Annexe 3.

### 2.2.3.6 Risque de rachat (« risque comportemental »)

Le risque de rachat provient du fait que le comportement des assurés exerçant le droit de rachat est différent de ce qui a été anticipé par l'assureur. Celui-ci subit par conséquent des sorties de trésorerie plus importantes que prévu.

Ce risque peut être modélisé à titre illustratif en se basant sur un modèle gaussien de l'évolution des taux de rachat. En effet, nous pouvons supposer que le taux de rachat  $l(d, t)$  pour chaque année  $t$  et chaque ancienneté  $d$  évolue au cours du temps en fonction de  $l(d, t - 1)$  ajusté d'un taux d'évolution  $e(t)$  :

$$l(d, t) = e(t)l(d, t - 1) = l(d, t_0) \prod_{s=t_0+1}^t e(s),$$

où les taux d'évolution  $e(t)$  sont indépendants et identiquement distribués et suivent une loi gaussienne de moyenne  $1 + \mu_l$  et de variance  $\sigma_l^2$ .

Étant donnée l'horizon de risque  $T$ , pour les années  $t > T$ , nous obtenons  $e(t) = 1 + \mu_l$ .

Les paramètres  $(\mu_l, \sigma_l)$  utilisés sont les suivants :

- |   |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\mu_l = 0.</math></li> <li>▪ <math>\sigma_l = 0.2.</math></li> </ul> |
|---|

Nous pouvons noter que ces paramètres entraînent un choc annuel (relatif) de 52% à niveau de confiance 99,5%, que nous pourrions comparer au choc de la formule standard à 50% (pour le choc hausse de rachat).

Remarque : la modélisation gaussienne retenue ne garantit a priori pas que le taux de rachat obtenu soit toujours positif ou nul. Dans les faits, compte-tenu des niveaux de paramètres utilisés dans cette étude, un nombre très faible de simulations faisant apparaître des taux de rachat négatifs a dû être écarté. Une approche alternative aurait pu consister à retenir une modélisation log-normale des taux de rachat.



## 2.2.4 Caractéristiques statistiques

La notion de déviation de risque et l'exposition au risque introduites ci-après sont détaillées dans la partie C.I.8.

Nous allons étudier dans ce paragraphe les trois caractéristiques, plus précisément les moments d'ordre 1 (espérance) d'ordre 2 (variance) et d'ordre 3 (coefficient d'asymétrie) de la sinistralité (définie en terme de coût total sur les cash-flows de passifs) qui sont nécessaires pour établir la méthode du niveau de confiance dans la dernière partie de ce chapitre.

Nous rappelons la définition des moments, que nous utilisons par la suite :

- Ordre 1 : espérance (moment d'ordre un)  $M_1(X) = \mathbb{E}[X]$
- Ordre 2 : variance (moment centré d'ordre deux)  $M_2(X) = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- Ordre 3 : coefficient d'asymétrie (moment centré d'ordre trois)  $M_3(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]$

Le tableau suivant résume ces trois moments (obtenus par la suite) par risque. Les notations utilisées sont détaillées dans les paragraphes suivants.

Risque	Espérance (moment d'ordre 1)	Variance (moment d'ordre 2)	Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)
Mortalité Niveau	0	$\sum_{\text{âge } y} A(y)^2 \frac{q_{BE}(y, 0)}{E(y, 0)}$ Où A(y) est en fonction de l'exposition au risque de mortalité	$\sum_{\text{âge } y} A(y)^3 \frac{q_{BE}(y, 0)}{E(y, 0)^2}$
Mortalité Tendence	0	$\sigma^2 \sum_{s=1}^T \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right)^2$ Où $\gamma(t)$ est en fonction de l'exposition au risque de mortalité	0
Mortalité Volatilité	0	$\sum_{x,d,t} [q(x, t)(1 - q(x, t)) \times N(x_0 + t, d_0 + t, t - 1) \times S(x, d, t - 1)_1^2]$	$\sum_{x,d,t} [q(x, t)(1 - q(x, t))(1 - 2q(x, t)) \times N(x_0 + t, d_0 + t, t - 1) \times S(x, d, t - 1)_1^3]$
Mortalité CAT	$pe^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \sum_{t=1}^T B_c(t)$	$(pe^{2\mu + 2\sigma^2} - p^2 e^{2\mu + \sigma^2}) \sum_{t=1}^T B_c(t)^2$ Où $B_c(t)$ est l'exposition total du risque CAT en t	$\left( pe^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3p^2 e^{3\mu + \frac{5}{2}\sigma^2} + 2p^3 e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \right) \sum_{t=1}^T B_c(t)^3$
Rachat	0	$\left( \frac{\sigma_i}{1 + \mu_i} \right)^2 \sum_{s=1}^T \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma_i(t) \right)^2$ Où $\gamma_i(t)$ est en fonction de l'exposition au risque de rachat	0

Tableau 2 : Tableau de synthèse des moments d'ordre un à trois par risque

### 2.2.4.1 Risque de niveau (« level »)

Nous notons avec un \* les réalisations stochastiques des variables aléatoires pour les distinguer de leurs espérances dans cette partie. Nous considérons les assurés d'âge  $x_0$  et de l'ancienneté  $d_0$  à l'année d'évaluation 0.

La variable d'intérêt ne considérant que le risque de niveau est le coût des sinistres  $C(x_0 + t, d_0 + t, t)$  à une certaine période de projection future  $t \geq 1$  conditionnée à la réalisation aléatoire des taux de la meilleure estimation (Best Estimate) :

$$C(x_0 + t, d_0 + t, t) = \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t-1)_i (q^*(x_0 + t, t) - q(x_0 + t, t)),$$

où :

$S(x_0 + t, d_0 + t, t-1)_i$  est l'exposition au risque de mortalité de l'assuré  $i$  en début de l'année  $t$ ,

$$q^*(x_0 + t, t) = q_{BE}^*(x_0 + t, 0) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu),$$

$$q(x_0 + t, t) = q_{BE}(x_0 + t, 0) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu) = q_{BE}(x_0 + t, t).$$

Le coût des sinistres peut donc s'exprimer :

$$C(x_0 + t, d_0 + t, t) = (q_{BE}^*(x_0 + t, 0) - q_{BE}(x_0 + t, 0)) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu) \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1).$$

où l'exposition totale au risque  $\bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1)$  est donnée par :

$$\bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1) = \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t-1)_i.$$

La sinistralité totale est alors obtenue en sommant sur tous les âges et anciennetés  $(x_0, d_0)$  en 0, et en sommant sur toutes les périodes  $t$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \\ &= \sum_{x_0, d_0, t} (q_{BE}^*(x_0 + t, 0) - q_{BE}(x_0 + t, 0)) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu) \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \\ &= \sum_{x_0, t} (q_{BE}^*(x_0 + t, 0) - q_{BE}(x_0 + t, 0)) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu) \sum_{d_0} \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $y = x_0 + t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{x_0, y} (q_{BE}^*(y, 0) - q_{BE}(y, 0)) \exp(\beta(y)(y - x_0)\mu) \sum_{d_0} \bar{S}(y, d_0 + y - x_0, y - x_0 - 1) \\ &= \sum_y (q_{BE}^*(y, 0) - q_{BE}(y, 0)) \sum_{x_0} \exp(\beta(y)(y - x_0)\mu) \sum_{d_0} \bar{S}(y, d_0 + y - x_0, y - x_0 - 1) \\ &= \sum_y (q_{BE}^*(y, 0) - q_{BE}(y, 0)) A(y), \end{aligned}$$

Où :

$$A(y) = \sum_{x_0} \exp(\beta(y)(y - x_0)\mu) \sum_{d_0} \bar{S}(y, d_0 + y - x_0, y - x_0 - 1).$$

### 2.2.4.1.1 Espérance (moment d'ordre 1)

Puisque  $q_{BE}(y, 0) = E[q_{BE}^*(y, 0)]$ , nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = 0.$$

### 2.2.4.1.2 Variance (moment d'ordre 2)

En utilisant l'indépendance de  $q_{BE}^*(x_1, 0)$  et  $q_{BE}^*(x_2, 0)$  lorsque  $x_1 \neq x_2$ , la variance peut être calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) \\ &= \sum_y A(y)^2 \text{Var}(q_{BE}^*(y, 0)) \\ &= \sum_y A(y)^2 \frac{D(y, 0)}{E(y, 0)^2} \text{car } q_{BE}^*(y, 0) = \frac{D^*(y, 0)}{E(y, 0)} \text{ et } D^*(y, 0) \sim \mathcal{P}(q_{BE}(y, 0)E(y, 0)) \\ &= \sum_y A(y)^2 \frac{q_{BE}(y, 0)}{E(y, 0)}, \end{aligned}$$

Où  $q_{BE}(y, 0)$  désigne le taux de mortalité « Best Estimate » à l'âge  $y$ .

$$\text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = \sum_y A(y)^2 \frac{q_{BE}(y, 0)}{E(y, 0)}.$$

### 2.2.4.1.3 Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)

Le moment d'ordre 3 se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_y A(y) \{q_{BE}^*(y, 0) - q_{BE}(y, 0)\} \right)^3 \right] \\ &= \sum_y A(y)^3 \mathbb{E}[\{q_{BE}^*(y, 0) - q_{BE}(y, 0)\}^3] \\ &= \sum_y A(y)^3 \frac{\mathbb{E}[\{D^*(y, 0) - D(y, 0)\}^3]}{E(y, 0)^3}. \end{aligned}$$

Or le coefficient d'asymétrie de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est  $\lambda^{-1/2}$ ,

Alors,

$$\mathbb{E}[\{D^*(y, 0) - D(y, 0)\}^3] = D(y, 0)^{-\frac{1}{2}} \text{Var}(D^*(y, 0))^{\frac{3}{2}} = D(y, 0)^{-\frac{1}{2}} D(y, 0)^{\frac{3}{2}} = D(y, 0).$$

Donc,

$$M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = \sum_y A(y)^3 \frac{D(y, 0)}{E(y, 0)^3} = \sum_y A(y)^3 \frac{q_{BE}(y, 0)}{E(y, 0)^2}.$$

#### 2.2.4.2 Risque de tendance (« trend »)

Nous considérons les assurés d'âge  $x_0$  et de l'ancienneté  $d_0$  à l'année d'évaluation 0.

La variable d'intérêt considérant uniquement le risque de tendance est l'espérance du coût des sinistres à une période de projection future  $t \geq 1$  conditionnée à la réalisation aléatoire des taux d'évolution ultérieurs.

En appliquant la formule de diffusion de Lee-Carter (cf B.II.3.i) et en utilisant les notations du paragraphe précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t-1)_i (q(x_0 + t, t) - q_{BE}(x_0 + t, t)) \\ &= (q(x_0 + t, t) - q_{BE}(x_0 + t, t)) \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t-1)_i \\ &= \left( q_{BE}(x_0 + t, 0) \exp \left( \beta(x_0 + t) \left( t\mu + \sigma \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \right) \right) - q_{BE}(x, t) \right) \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \\ &= q_{BE}(x, t) \left( \exp \left( \sigma\beta(x_0 + t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \right) - 1 \right) \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1). \end{aligned}$$

Nous rappelons que pour les années de projection au-delà de l'horizon de risque, les sources aléatoires sont nulles, c'est-à-dire :

$$\forall s \geq T + 1, \quad \epsilon(s) = 0.$$

Nous introduisons la notation suivante :

$$B(x_0 + t, t) = q_{BE}(x_0 + t, 0) \exp(\beta(x_0 + t)t\mu) \sum_{d_0} \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1).$$

La totalité des sinistres est alors obtenue en sommant sur tous les âges et anciennetés  $(x_0, d_0)$  en 0, et en sommant sur toutes les périodes  $t$  :

$$\begin{aligned} \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{x_0, t} B(x_0 + t, t) \left( \exp \left( \sigma\beta(x_0 + t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \right) - 1 \right) \\ &\approx \sum_{x_0, t} B(x_0 + t, t) \sigma\beta(x_0 + t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \quad \text{en supposant } \sigma\beta(x_0 + t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \text{ proche de } 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \sum_{x_0, t} B(x_0 + t, t) \beta(x_0 + t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s) \\
&= \sigma \sum_{t=1}^{T_{max}} \left( \sum_{x_0} B(x_0 + t, t) \beta(x_0 + t) \right) \sum_{s=1}^{\min(t, T)} \epsilon(s).
\end{aligned}$$

Où  $T$  désigne l'horizon de risque.

Nous notons  $\gamma(t) = \sum_{x_0} B(x_0 + t, t) \beta(x_0 + t)$ .

Nous obtenons alors  $\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) = \sigma \sum_{t=1}^{T_{max}} \gamma(t) \sum_{s=1}^{\min(t, T)} \epsilon(s)$ .

La somme totale du membre de droite de l'égalité est sur tout  $(s, t)$  tel que  $1 \leq s \leq \min(t, T) \leq t \leq T_{max}$  ; alors nous pouvons inverser la sommation en commençant la sommation sur  $s$  pour obtenir l'approximation normale suivante :

$$\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \approx \sigma \sum_{s=1}^T \epsilon(s) \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right).$$

#### 2.2.4.2.1 Espérance (moment d'ordre 1)

Les  $\epsilon(t)$  suivent une loi normale centrée réduite, nous avons alors :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = 0.$$

#### 2.2.4.2.2 Variance (moment d'ordre 2)

Les  $\epsilon(t)$  sont indépendantes et identiquement distribuées, nous avons alors :

$$\text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) \approx \sigma^2 \sum_{s=1}^T \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right)^2.$$

#### 2.2.4.2.3 Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)

Quant au moment centré d'ordre 3, nous nous attendons à ce qu'il soit nul dans l'approximation normale. Nous pouvons le vérifier puisque :

$$\begin{aligned}
M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) &\approx \sigma^3 \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{s=1}^T \epsilon(s) \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right) \right)^3 \right] \\
&= \sigma^3 \mathbb{E} \left[ \sum_{s=1}^T \epsilon(s)^3 \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right)^3 \right]
\end{aligned}$$

$$= \sigma^3 \sum_{s=1}^T \mathbb{E}[\epsilon(s)^3] \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma(t) \right)^3.$$

Alors,

$$M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = 0.$$

### 2.2.4.3 Risque de volatilité

En utilisant les mêmes notations que les paragraphes précédents, nous avons :

$$C(x_0 + t, d_0 + t, t) = \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t - 1)_i (I(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)).$$

Si nous supposons qu'il n'y a pas d'hétérogénéité au sein du portefeuille des assurés, nous avons :

$$\begin{aligned} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} S(x_0 + t, d_0 + t, t - 1)_1 (I(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)) \\ &= S(x_0 + t, d_0 + t, t - 1)_1 \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} (I(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)), \end{aligned}$$

avec  $S(x_0 + t, d_0 + t, t - 1)_1$  l'exposition au risque de mortalité pour un individu.

#### 2.2.4.3.1 Espérance (moment d'ordre 1)

Puisque  $\mathbb{E}[I(x, d, t)_i] = \mathbb{E}[q(x, t)] = q_{BE}(x, t)$ , nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = 0.$$

#### 2.2.4.3.2 Variance (moment d'ordre 2)

La variance de la répartition des sinistres peut être calculée comme suit :

$$Var(C(x, d, t)) = \sum_{i=1}^{N(x, d, t-1)} S(x, d, t - 1)_i^2 Var(I(x, d, t)_i),$$

Or,  $I(x, d, t)_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $q(x, t)$ , d'où :

$$Var(C(x, d, t)) = q(x, t)(1 - q(x, t)) \sum_{i=1}^{N(x, d, t-1)} S(x, d, t - 1)_i^2.$$

Et, en supposant qu'il n'y a pas d'hétérogénéité au sein du portefeuille des assurés :

$$\sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} S(x,d,t-1)_i^2 = N(x_0+t, d_0+t, t-1) \times S(x,d,t-1)_1^2.$$

Nous obtenons finalement :

$$\text{Var}(C(x,d,t)) = q(x,t)(1-q(x,t))N(x_0+t, d_0+t, t-1) \times S(x,d,t-1)_1^2.$$

En supposant l'indépendance de la variable aléatoire des sinistres  $C(x,d,t)$  :

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{x,d,t} C(x,d,t)\right) &= \sum_{x,d,t} \text{Var}(C(x,d,t)) \\ &= \sum_{x,d,t} q(x,t)(1-q(x,t))N(x_0+t, d_0+t, t-1) \times S(x,d,t-1)_1^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons noter que la somme de droite sur la période  $t$  est jusqu'à l'horizon de risque  $T$ . Par construction, la variance est nulle pour les années de projection  $t > T$ .

#### 2.2.4.3.3 Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)

Conditionnellement au nombre d'assurés  $N(x,d,t-1)$ , le coefficient d'asymétrie de la sinistralité totale peut être calculé comme suit :

$$M_3(C(x,d,t)) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} S(x,d,t-1)_i (I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))\right)^3\right].$$

Développer ce moment d'ordre 3 conduit à des sous-termes de la forme :

- pour  $i \neq j \neq k$ , en utilisant l'indépendance de la variable  $I(x,d,t)_i$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))(I(x,d,t)_j - q_{BE}(x,t))(I(x,d,t)_k - q_{BE}(x,t))\right] \\ &= \mathbb{E}[(I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))]\mathbb{E}[(I(x,d,t)_j - q_{BE}(x,t))]\mathbb{E}[(I(x,d,t)_k - q_{BE}(x,t))]. \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}[I(x,d,t)_i] = \mathbb{E}[q(x,t)] = q_{BE}(x,t)$ ,

D'où  $\mathbb{E}\left[(I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))(I(x,d,t)_j - q_{BE}(x,t))(I(x,d,t)_k - q_{BE}(x,t))\right] = 0$ .

- pour  $i \neq j$ , en utilisant toujours l'indépendance de la variable  $I(x,d,t)_i$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))(I(x,d,t)_j - q_{BE}(x,t))^2\right] \\ &= \mathbb{E}[(I(x,d,t)_i - q_{BE}(x,t))]\mathbb{E}\left[(I(x,d,t)_j - q_{BE}(x,t))^2\right]. \end{aligned}$$

Cette espérance est nulle puisque le premier terme du membre de droite est nul.

Donc, le moment d'ordre 3 se réduit à :

$$\begin{aligned} M_3(C(x, d, t)) &= \sum_{i=1}^{N(x, d, t-1)} S(x, d, t-1)_i^3 \mathbb{E} \left[ (I(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t))^3 \right] \\ &= q(x, t)(1 - q(x, t))(1 - 2q(x, t)) \sum_{i=1}^{N(x, d, t-1)} S(x, d, t-1)_i^3 . \end{aligned}$$

Et, en supposant qu'il n'y a pas d'hétérogénéité au sein du portefeuille des assurés :

$$\sum_{i=1}^{N(x, d, t-1)} S(x, d, t-1)_i^3 = N(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \times S(x, d, t-1)_1^3 .$$

Le moment d'ordre 3 peut finalement s'écrire :

$$M_3(C(x, d, t)) = q(x, t)(1 - q(x, t))(1 - 2q(x, t)) \times N(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \times S(x, d, t-1)_1^3 .$$

En supposant l'indépendance de la variable aléatoire des sinistres  $C(x, d, t)$  :

$$M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = \sum_{x, d, t} \mathbb{E}[(C(x, d, t) - \mathbb{E}[C(x, d, t)])^3] .$$

Soit :

$$\begin{aligned} M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) \\ &= \sum_{x, d, t} [q(x, t)(1 - q(x, t))(1 - 2q(x, t)) \times N(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \\ &\quad \times S(x, d, t-1)_1^3] . \end{aligned}$$

#### 2.2.4.4 Risque de catastrophe

La variable d'intérêt considérant uniquement le risque de catastrophe est le montant des sinistres attendu à une période de projection future  $t \geq 1$  induit par une augmentation constante  $\Delta(t)$  des taux de mortalité à tous les âges.

En considérant un portefeuille d'assurés d'âge  $x_0$  et d'ancienneté  $d_0$  et en reprenant les notations des paragraphes précédents, le coût dû à un évènement CAT à la période  $t$  est :

$$\begin{aligned} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1)(q_{BE}(x_0 + t, t) + \Delta(t) - q_{BE}(x_0 + t, t)) \\ &= \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1)\Delta(t) . \end{aligned}$$

Le coût total des sinistres lié au risque CAT à la période  $t$  est donné par :

$$\begin{aligned} \sum_{x_0, d_0} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{x_0, d_0} \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t-1)\Delta(t) \\ &= \Delta(t)B_C(t) . \end{aligned}$$



Avec :  $B_C(t) = \sum_{x_0, d_0} \bar{S}(x_0 + t, d_0 + t, t - 1)$  l'exposition totale du risque CAT en  $t$ .

#### 2.2.4.4.1 Espérance (moment d'ordre 1)

La spécificité du risque de mortalité CAT est qu'il ne mesure qu'une déviation d'un côté de l'hypothèse Best Estimate, c'est-à-dire que nous avons :  $\sum_{x_0, d_0} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \geq 0$ . Par conséquent, la distribution n'est pas centrée. Les composantes fréquence et sévérité étant indépendantes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) \\ &= B_C(t) \mathbb{E}(\Delta(t)) \\ &= B_C(t) \mathbb{E}(I(t)S(t)) \\ &= B_C(t) \mathbb{E}(I(t)) \mathbb{E}(S(t)) \\ &= B_C(t) p e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Où  $(\mu, \sigma)$  désigne les paramètres de la loi log-normale de la composante de sévérité et  $p$  le paramètre de la loi binomiale de la composante de fréquence.

Nous obtenons alors finalement :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = p e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \sum_{t=1}^T B_C(t).$$

Où  $T$  désigne l'horizon de risque.

#### 2.2.4.4.2 Variance (moment d'ordre 2)

Nous rappelons le moment d'ordre  $k$  d'une variable log-normale  $X$  :

$$\mathbb{E}(X^k) = e^{k\mu + \frac{k^2}{2}\sigma^2}.$$

En effet,  $\log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  et  $\log(X^k) = k \times \log(X)$

D'où :  $\log(X^k) \sim \mathcal{N}(k\mu, k\sigma)$ , nous obtenons alors le moment d'ordre  $k$  de la variable log-normale  $X$  en calculant l'espérance de la variable normale de paramètre  $(k\mu, k\sigma)$ .

Nous calculons dans un premier temps la variance de  $\Delta(t)$  :

$$\begin{aligned} & \text{Var}(\Delta(t)) \\ &= \mathbb{E} \left[ (I(t)S(t))^2 \right] - \mathbb{E}[I(t)S(t)]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[ (S(t))^2 1_{I(t)=1} \right] - \mathbb{E}[I(t)]^2 \mathbb{E}[S(t)]^2 \\ &= p \mathbb{E}[S(t)^2] - \left( p e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right)^2 \\ &= p e^{2\mu + 2\sigma^2} - p^2 e^{2\mu + \sigma^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) \\ &= \text{Var}(\Delta(t)B_C(t)) \\ &= (pe^{2\mu+2\sigma^2} - p^2e^{2\mu+\sigma^2})B_C(t)^2. \end{aligned}$$

Et par indépendance des événements CAT pour différentes périodes de projection :

$$\text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = (pe^{2\mu+2\sigma^2} - p^2e^{2\mu+\sigma^2}) \sum_{t=1}^T B_C(t)^2.$$

Où  $T$  désigne l'horizon de risque.

#### 2.2.4.4.3 Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)

Nous calculons dans un premier temps le moment centré d'ordre 3 de  $\Delta(t)$  :

$$\begin{aligned} M_3(\Delta(t)) &= \mathbb{E}[\Delta(t) - \mathbb{E}(\Delta(t))]^3 \\ &= \mathbb{E}[(I(t)S(t))^3] - 3\mathbb{E}[(I(t)S(t))^2] \mathbb{E}[I(t)S(t)] + 3\mathbb{E}[I(t)S(t)]^3 - \mathbb{E}[I(t)S(t)]^3 \\ &= \mathbb{E}[(I(t)S(t))^3] - 3\mathbb{E}[(I(t)S(t))^2] \mathbb{E}[I(t)S(t)] + 2\mathbb{E}[I(t)S(t)]^3 \\ &= p\mathbb{E}[S(t)^3] - 3p^2\mathbb{E}[S(t)^2]\mathbb{E}[S(t)] + 2p^3\mathbb{E}[S(t)]^3 \\ &= pe^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} - 3p^2e^{2\mu+2\sigma^2}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} + 2p^3\left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^3 \\ &= pe^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} - 3p^2e^{3\mu+\frac{5}{2}\sigma^2} + 2p^3e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & M_3 \left( \sum_{x_0, d_0} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) \\ &= M_3(\Delta(t)B_C(t)) \\ &= \left( pe^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} - 3p^2e^{3\mu+\frac{5}{2}\sigma^2} + 2p^3e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2} \right) B_C(t)^3. \end{aligned}$$

Et par indépendance des événements CAT pour différentes périodes de projection :

$$M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = \left( pe^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} - 3p^2e^{3\mu+\frac{5}{2}\sigma^2} + 2p^3e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2} \right) \sum_{t=1}^T B_C(t)^3.$$

Où  $T$  désigne l'horizon de risque.

#### 2.2.4.5 Risque de rachat

Nous considérons les assurés d'âge  $x_0$  et d'ancienneté  $d_0$  à l'année d'évaluation 0.

En reprenant les notations utilisées dans le paragraphe Risque de rachat (« risque comportemental »), le coût dû à un évènement de rachat à la période  $t$  est :

$$C(x_0 + t, d_0 + t, t) = \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} L(x, d, t-1)_i (l(d, t) - l_{BE}(d, t)).$$

Avec  $L(x, d, t-1)_i$  l'exposition au risque de rachat de l'assuré  $i$  en début de l'année  $t$

$$\begin{aligned} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \bar{L}(x, d, t-1)(l(d, t) - l_{BE}(d, t)) \\ &= l_{BE}(d_0 + t, 0)\bar{L}(x, d, t-1) \left( \prod_{s=1}^t e(s) - (1 + \mu_l)^t \right), \end{aligned}$$

où  $l_{BE}(y, t)$  correspond au taux de rachat Best Estimate de référence pour l'ancienneté  $y$ , avec  $l_{BE}(d, t) = l_{BE}(d_0 + t, 0)(1 + \mu_l)^t$ , et  $\bar{L}(x, d, t-1) = \sum_{i=1}^{N(x_0+t, d_0+t, t-1)} L(x, d, t-1)_i$ .

La totalité des sinistres est alors obtenue en sommant sur tous les âges et anciennetés  $(x_0, d_0)$  en 0, et en sommant sur toutes les périodes  $t$  :

$$\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) = \sum_{x_0, d_0, t} l_{BE}(d_0 + t, 0)\bar{L}(x_0 + t, d_0 + t, t-1) \left( \prod_{s=1}^t e(s) - (1 + \mu_l)^t \right).$$

En introduisant la notation :

$$B_l(d_0 + t, t) = l_{BE}(d_0 + t, 0)(1 + \mu_l)^t \sum_{x_0} \bar{L}(x_0 + t, d_0 + t, t-1),$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \left( \prod_{s=1}^t \frac{e(s)}{1 + \mu_l} - 1 \right) \\ &= \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \left( \prod_{s=1}^t \left( 1 + \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \epsilon(s) \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Car  $e(s) = 1 + \mu_l + \sigma_l \times \epsilon(s)$ .

#### 2.2.4.5.1 Espérance (moment d'ordre 1)

Par linéarité, nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \left( \mathbb{E} \left( \prod_{s=1}^t \left( 1 + \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \epsilon(s) \right) \right) - 1 \right).$$

Par indépendance de la variable  $\epsilon$ ,

$$\mathbb{E} \left( \prod_{s=1}^t \left( 1 + \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \epsilon(s) \right) \right) = \prod_{s=1}^t \mathbb{E} \left( 1 + \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \epsilon(s) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{s=1}^t \left( 1 + \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \mathbb{E}(\epsilon(s)) \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) = 0.$$

#### 2.2.4.5.2 Variance (moment d'ordre 2)

Nous linéarisons les coûts :

$$\begin{aligned}
\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) &= \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \left( \prod_{s=1}^t \frac{e(s)}{1 + \mu_l} - 1 \right) \\
&\approx \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \sum_{s=1}^t \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \epsilon(s) \\
&= \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \sum_{d_0, t} B_l(d_0 + t, t) \sum_{s=1}^t \epsilon(s).
\end{aligned}$$

Où nous rappelons que pour  $t \geq T + 1$ ,  $\epsilon(t) = 0$ .

Nous utilisons la notation  $\gamma_l(t) = \sum_{d_0} B_l(d_0 + t, t)$  :

$$\frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \sum_t \gamma_l(t) \sum_{s=1}^{\min(t, T)} \epsilon(s),$$

où la somme de droite est pour tout  $(s, t)$  tels que  $1 \leq s \leq \min(t, T) \leq t \leq T_{max}$ .

Nous pouvons alors inverser la sommation en commençant la sommation sur  $s$  pour obtenir l'approximation suivante :

$$\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \approx \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \sum_{s=1}^T \epsilon(s) \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma_l(t) \right).$$

Par indépendance de la variable  $\epsilon$ , qui suit une loi normale centrée réduite, la variance totale des coûts peut être calculée :

$$\text{Var} \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t) \right) \approx \left( \frac{\sigma_l}{1 + \mu_l} \right)^2 \sum_{s=1}^T \left( \sum_{t=s}^{T_{max}} \gamma_l(t) \right)^2.$$

#### 2.2.4.5.3 Coefficient d'asymétrie (moment d'ordre 3)

Quant au moment centré d'ordre trois, il est nul de la même manière que pour le risque de tendance de mortalité, puisque l'approximation est gaussienne :

$$M_3 \left( \sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t_0 + t) \right) = 0.$$

## 2.3 Méthodes de calcul du niveau de confiance

Dans cette partie, nous allons décrire la méthode permettant d'établir le niveau de confiance à partir du montant de RA d'une entité.

Nous allons dans un premier temps nous concentrer sur l'agrégation de ces différents risques  $X_i$  afin d'estimer une distribution globale  $X$ . Puis nous allons décrire la méthode d'approximation de Cornish-Fisher de  $VaR_\alpha(X)$ , où  $X$  représentant le risque assuré, par les moments d'ordre 1 à 3. Nous allons ensuite inverser la formule de Cornish-Fisher pour obtenir le niveau de confiance associé au montant de RA.

### 2.3.1 Agrégation des risques

Ce paragraphe se concentre sur l'agrégation des caractéristiques ci-dessus (espérance, variance et coefficient d'asymétrie) afin d'estimer une distribution globale du risque, qui prend en compte à la fois les risques de mortalité (niveau, tendance et volatilité) et le risque de rachat.

Les caractéristiques de dépendance suivantes s'appliquent au risque de mortalité :

- Les risques de niveau, de tendance, de volatilité et de CAT sont indépendants
- Pour le risque de tendance, les incréments pour différentes années civiles sont indépendants (comme déjà défini dans le modèle)
- Pour les risques de volatilité et de CAT, les résultats aléatoires pour différentes années civiles sont également indépendants

Pour le risque de rachat, les taux d'évolution entre les différentes années civiles sont indépendants.

Enfin, pour chaque année civile, une structure de corrélation possible s'applique entre l'évolution aléatoire du risque de tendance de mortalité et celle du risque de rachat.

Nous notons  $X_1, X_2, X_3, X_4$  les variables aléatoires de la sinistralité soumis aux composantes de risque suivantes :

- $X_1$ : Risque de niveau de mortalité
- $X_2$ : Risque de tendance de mortalité
- $X_3$ : Risque de volatilité de la mortalité
- $X_4$ : Risque de rachat
- $X_5$ : Risque CAT

Les  $X_i$  sont égaux au coût total des sinistres par risque  $\sum_{x_0, d_0, t} C(x_0 + t, d_0 + t, t)$  calculé dans le paragraphe précédent. La valeur totale des sinistres est supposée être décomposée comme la somme des variables aléatoires des sinistres sous-jacents pour chaque risque :

$$X_{tot} = \sum_{i=1}^5 X_i.$$

La structure de corrélation linéaire suivante s'applique aux différents risques  $X_i$  :

$$\text{correlation} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\rho$  est la corrélation entre le risque de tendance de mortalité et le risque de rachat.

L'objectif est de dériver les trois premiers moments de la distribution de  $X_{tot}$  ; en effet, nous ne supposons pas une distribution symétrique (ce qui impliquerait que le moment centré d'ordre trois est nul) pour la distribution totale des sinistres.

L'espérance totale des sinistres est calculée comme suit :

$$\mathbb{E}(X_{tot}) = \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}(X_i).$$

La variance totale des sinistres est calculée comme suit :

$$\text{Var}(X_{tot}) = \sum_{i=1}^5 \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^5 \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^5 \text{Var}(X_i) + 2\rho\sqrt{\text{Var}(X_2)}\sqrt{\text{Var}(X_4)}.$$

Le coefficient d'asymétrie total des sinistres est défini comme suit :

$$M_3(X_{tot}) = M_3\left(\sum_{i=1}^5 X_i\right) = \sum_{i=1}^5 M_3(X_i) + 3 \sum_{i \neq j} M_3(X_i, X_i, X_j) + 6 \sum_{i \neq j \neq k} M_3(X_i, X_j, X_k),$$

où  $M_3(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])(X_3 - \mathbb{E}[X_3])]$ .

Le premier terme englobe les moments centrés du troisième ordre tels que calculés dans les sections précédentes. Rappelons que tous les termes sont centrés et que seuls  $X_2$  et  $X_4$  sont dépendants (avec corrélation linéaire  $\rho$ ).

Par conséquent, le troisième terme  $\sum_{i \neq j \neq k} M_3(X_i, X_j, X_k)$  est nul, et le second terme se réduit à :

$$\sum_{i \neq j} M_3(X_i, X_i, X_j) = M_3(X_2, X_2, X_4) + M_3(X_4, X_4, X_2).$$

Puisque, sous l'hypothèse d'approximation du second ordre pour le risque de tendance et le risque de rachat, les distributions du modèle (approximées) de  $\tilde{X}_2$  et  $\tilde{X}_4$  sont gaussiennes, le second terme peut être supposé nul. En effet, les moments impairs d'un vecteur gaussien sont nuls, voir Isserlis (1918).

Par conséquent :

$$M_3(X_{tot}) = M_3(X_1) + M_3(X_3).$$

Cependant, dans un cadre général de conversion quantile de l'ajustement au risque, il serait cohérent d'intégrer le calcul des moments croisés à l'ordre 3. Ce serait le cas en particulier, si nous avions affiné l'approximation des risques de rachat et de tendance de mortalité ; dans un tel cas, le coefficient d'asymétrie de mortalité et rachat serait non nul, le calcul de  $M_3(X_2, X_2, X_4)$  et  $M_3(X_4, X_4, X_2)$  serait alors nécessaire. Pour calculer ces termes dans un cadre général, nous pourrions nous baser sur les polynômes dits de Fleishman, voir (Fleishman, 1978).

### 2.3.2 Approximation Cornish-Fisher de $VaR_\alpha(X)$

L'approximation de Cornish-Fisher est dérivée de la série d'expansion de Cornish-Fisher des quantiles d'une variable aléatoire via ses cumulants et les quantiles normaux standard. La dérivation détaillée de l'expansion de Cornish-Fisher est expliquée dans (Fisher & Cornish, The Percentile Points of Distributions Having Known Cumulants, 1960). Dans cette partie, nous supposons que

$VaR_\alpha(X)$  peut être approchée par les moments d'ordre jusqu'à trois de  $X$ .

La Value at Risk (VaR) de la variable aléatoire  $X$  de niveau  $\alpha$  peut alors être approchée utilisant la formule de Cornish-Fisher (à l'ordre 2) comme suit :

$$VaR_\alpha(X) \approx \mathbb{E}[X] + \sqrt{Var(X)} \left( z_\alpha + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1) S(\tilde{X}) \right),$$

où :

- $\tilde{X}$  est la variable centrée réduite de  $X$ ,
- $z_\alpha$  est le quantile normal standard associé au niveau  $\alpha$ ,
- $S(\cdot)$  est la fonction d'asymétrie telle que  $S(\tilde{X}) = \mathbb{E}[\tilde{X}^3] = \frac{M_3(X)}{Var(X)^{3/2}}$ .

Remarque : la formule de Cornish-Fisher définie ci-après à l'ordre 2 peut être étendue à l'ordre 3 en utilisant le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*). Cette extension d'ordre peut donner une meilleure approximation de  $VaR_\alpha(X)$  et par conséquent le niveau de confiance, mais sa mise en œuvre est lourde et non traitée dans ce mémoire.

### 2.3.3 Inversion de la formule de Cornish-Fisher

Dans la formule de Cornish-Fisher définie à l'ordre 2 dans le paragraphe précédent, les valeurs de  $E(X)$ ,  $Var(X)$  et  $S(\tilde{X})$  peuvent être calculées. Sachant que  $VaR_\alpha(X)$  est connu, nous pouvons calculer  $z_\alpha$  en résolvant une équation du second degré, et par conséquent trouver le niveau de quantile  $\alpha$  associé.

De manière précise, nous pouvons obtenir l'équation du second ordre suivant en  $z_\alpha$  à partir de la formule de Cornish-Fisher :

$$az_\alpha^2 + bz_\alpha + c = 0,$$

où :

$$a = \frac{S(\tilde{X})\sqrt{Var(X)}}{6},$$

$$b = \sqrt{\text{Var}(X)},$$

$$c = \mathbb{E}[X] - \text{VaR}_\alpha(X) - \frac{S(\tilde{X})\sqrt{\text{Var}(X)}}{6}.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le quantile est la racine positive (si elle existe,  $\Delta > 0$ ) de l'équation :

$$z_\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le niveau de confiance  $\alpha$  peut alors être obtenu en appliquant la fonction inverse de la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}^{-1}$  à  $z_\alpha$  :

$$\alpha = \mathcal{N}^{-1}(z_\alpha).$$

Remarque : le quantile  $\alpha$  est nécessairement compris entre 0 et 1. Ce critère est bien pris en compte dans la formule de la détermination du quantile équivalent.



## 3 Cas d'application sur un portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur

---

Dans ce chapitre, nous décrivons le portefeuille de contrats d'Assurance Emprunteur que nous allons utiliser par la suite, pour valider l'approche Cornish-Fisher en la comparant avec une approche simulatoire. Puis, nous illustrons, avec le même portefeuille, le niveau de confiance obtenu pour des calculs d'ajustement pour risque reposant sur des approches VaR et coût du capital telles qu'elles pourraient être mises en œuvre par des assureurs Vie sur base des processus de calcul Solvabilité II d'ores et déjà en place.

### 3.1 Description du portefeuille étudié

#### 3.1.1 Le contrat d'Assurance Emprunteur

Le contrat d'Assurance Emprunteur est une assurance temporaire, valable jusqu'au terme de l'emprunt, permettant de protéger à la fois l'assuré et le prêteur. En effet, en cas de réalisation de risque (défini dans le contrat), l'assureur remboursera au prêteur le montant restant à payer (capital restant dû).

Nous pouvons distinguer deux grands types de contrats en assurance emprunteur :

- **Contrats dits « de groupe »**  
Les contrats collectifs reposent sur la mutualisation des risques. Le tarif est identique pour tous les adhérents quel que soit leur âge et leur profession. Ce type de contrat est avantageux pour les « mauvais risques ».
- **Contrats individuels**  
Les contrats individuels prennent en compte les critères propres à l'individu (emprunteur) : notamment son âge, sa catégorie socioprofessionnelle, son état de santé, le montant de son emprunt. Ce type de contrat est donc plus intéressant pour les « bons risques ».

Nous nous intéressons dans ce mémoire uniquement aux contrats **individuels**.

#### 3.1.2 Garanties

Les garanties d'un contrat d'Assurance Emprunteur sont principalement :

- La garantie Décès ;
- La garantie Perte Totale et Irréversible de l'Autonomie (PTIA), généralement conjointement proposée à la garantie Décès ;
- La garantie Incapacité Temporaire de Travail ;
- La garantie Invalidité, partielle ou totale ;
- La garantie Perte d'Emploi.

Nous nous intéressons dans ce mémoire uniquement à **la garantie Décès**.

La garantie décès est obligatoire. En cas de décès de l'assuré, l'assureur prend en charge le capital restant dû (CRD) au jour du décès.

### 3.1.3 Mode de remboursement

Ils existent trois types de mode de remboursement :

- Remboursements constants : l'emprunteur rembourse la même somme d'argent chaque année pendant toute la durée de l'emprunt
- Remboursement *in fine* : l'emprunteur rembourse les intérêts pendant toute la durée du prêt. Le capital initial emprunté n'est quant à lui remboursé qu'à l'échéance du prêt.
- Amortissements constants : l'emprunteur rembourse la même part du capital emprunté annuellement. Le montant total versé chaque année par l'emprunteur n'est pas constant en raison de la valeur des intérêts.

Nous nous intéressons dans ce mémoire au mode de remboursement le plus courant : **remboursements constants**.

### 3.1.4 Caractéristiques du contrat d'Assurance Emprunteur étudié

Dans cette partie, nous allons préciser les principales caractéristiques des contrats constituant le portefeuille étudié : primes, rachats et frais.

#### 3.1.4.1 Primes

Dans le cadre du contrat d'Assurance Emprunteur, l'assureur s'engage à rembourser le capital restant dû en cas de la survenance du risque. En contrepartie, l'assuré s'engage à verser une cotisation, appelée prime d'assurance.

La prime exigée par l'assureur correspond à la prime commerciale. Celle-ci est composée de la prime pure et des chargements.

La prime pure est définie par le produit d'un taux de prime et du nominal (capital décès) ou du capital restant dû, selon les modalités de paiement fixées lors de la souscription du contrat.

Le montant de prime peut alors être déterminé par deux méthodes :

- Par application d'un taux de prime ( $Taux\_prime^{CI}$ ) au nominal : **prime constante** dans le temps
- Par application d'un taux de prime ( $Taux\_prime^{CRD}$ ) au capital restant dû (CRD) : **prime décroissante** dans le temps

La deuxième méthode permet la révision de la prime en cas de remboursement anticipé partiel du capital par l'emprunteur.

Dans le portefeuille étudié dans ce mémoire, la prime est constante dans le temps.

#### 3.1.4.2 Prestations

L'assureur s'engage, en cas de la réalisation du risque (en l'occurrence décès ici), à payer le capital restant dû (CRD) à l'organisme prêteur.

Le rachat dans un contrat d'Assurance emprunteur correspond à un remboursement anticipé de l'emprunt par l'assuré. En cas de tarification selon le taux de prime, l'assureur s'expose dans ce cas à un risque de rachat contrairement à une prime basée sur le CRD.

#### 3.1.4.3 Chargements et frais

Les chargements ont pour but de couvrir les frais engagés par l'assureur au cours de la vie du contrat :

- Les frais d'acquisition, notamment les frais de marketing et de sélection médicale ;
- Les frais de gestion administrative du contrat ;
- Les frais de gestion des sinistres.

Les **chargements sur primes** sont prélevés sur chaque versement et sont exprimés en pourcentage du montant versé. Par simplification l'ensemble des frais est exprimé en pourcentage de la prime à l'aide d'un unique taux. Celui-ci est noté **tauxfraisprime**.

#### 3.1.5 Données du Model Point et Hypothèses

Les données caractéristiques du Model point sont les suivantes :

- **Nombre d'assurés par police** : Correspond au nombre d'assurés regroupés au sein de la police
- **Nominal** : Correspond au capital initial emprunté
- **Date de naissance**
- **Durée accordée du prêt**
- **Taux du prêt** : Exprimé en % et correspond à un taux annuel
- **Montant d'assurance mensuel pour 10 000 € (TauxPrime)**
- **Date d'adhésion**
- **Sexe** : 1 pour les femmes et 0 pour les hommes

Les principales hypothèses utilisées dans le modèle de projection sont détaillées ci-après.

**Des hypothèses biométriques et comportementales** : Ces hypothèses sont utilisées pour la projection des flux probabilisés (primes, sinistres, frais...) et concernent :

- **La survie** : Correspond à une loi de survie par âge annuel (à partir de 18 ans), par sexe (Femme\Homme),
- **Le rachat** : Par ancienneté annuelle,

**Des hypothèses économiques** :

- **Courbe des taux** : Annuelle et correspond à la courbe des taux sans risques fournies par l'EIOPA

**Des paramètres généraux** :

- **Date d'évaluation (DateEvaluation)** : Correspond à la date de début de projection des flux,
- **Date de fin de projection (DateFinProjection)** : Correspond à la date de fin de projection des flux,

Les flux sont projetés sur une période de 40 ans, à pas de temps mensuel.

### 3.1.6 Projection des flux

#### 3.1.6.1 Évolution des effectifs

Nous considérons  $N(x_0, d_0, 0)$  assurés d'âge  $x_0$  et d'ancienneté  $d_0$  à l'année d'évaluation 0.

Le portefeuille évolue comme suit en prenant en compte la mortalité et le rachat (remboursement anticipé du prêt) :

$$\begin{aligned} N(x_0 + t, d_0 + t, t) &= N(x_0 + t - 1, d_0 + t - 1, t - 1)(1 - q(x_0 + t - 1, t) - l(d_0 + t - 1, t)) \\ &= N(x_0, d_0, 0) \prod_{k=1}^t (1 - q(x_0 + k - 1, k) - l(d_0 + k - 1, k)). \end{aligned}$$

#### 3.1.6.2 Détermination des capitaux restant dus (CRD)

Le capital restant dû à la période  $t$  après paiement de l'échéance, hors impact des sorties par décès et rachats depuis  $t = 0$ , s'écrit de la manière suivante :

$$\forall t \geq 0 : CRD_t = \max \left( Nominal \times \frac{1 - v^{(duree_{pret} - (t + duree_{ecoulee}))}}{1 - v^{duree_{pret}}}; 0 \right) \text{ avec } v = \frac{1}{(1 + TauxPret)^{\frac{1}{12}}},$$

où :

- **Nominal** : Correspond au capital initial emprunté,
- **Durée écoulée du prêt** :  $duree_{ecoulee}$
- **Durée du prêt** :  $duree_{pret}$
- **Taux du prêt** :  $TauxPret$

Durée écoulée du prêt depuis la date d'adhésion exprimée en nombre de période :  $duree_{ecoulee}$ ,  
 $duree_{ecoulee} = (Année(DateEvaluation) - Année(DateAdhesion)) * 12 +$   
 $Mois(DateEvaluation) - Mois(DateAdhesion)$

#### 3.1.6.3 Projection des primes

Comme précisé précédemment, les primes sont calculés en appliquant un taux de prime au nominal. La prime perçue est donc constante au cours de la projection.

$$Primes(x_0 + t, d_0 + t, t) = N(x_0 + t, d_0 + t, t) \times Nominal \times \frac{TauxPrime}{10000}.$$

### 3.1.6.4 Projection des prestations

L'évaluation des prestations payées au titre de la garantie décès en fin de période  $t$  s'effectue comme le produit du capital restant dû en fin de période  $t$  par le nombre des assurés en fin de période  $t$  :

$$\text{Sinistres}(x_0 + t, d_0 + t, t) = N(x_0 + t - 1, d_0 + t - 1, t - 1) \times CRD_t \times q(x_0 + t - 1, t).$$

### 3.1.6.5 Projection des frais

Les frais payés sur la période  $t$  au titre de la garantie décès s'évaluent comme le produit du taux de frais sur primes par les primes perçues au titre du décès en fin de période  $t$  :

$$\text{Frais}(x_0 + t, d_0 + t, t) = \text{tauxfraisprime} \times \text{Primes}(x_0 + t, d_0 + t, t).$$

Où le *tauxfraisprime* est défini dans les paramètres généraux (exprimé en pourcentage)

### 3.1.7 Calcul du Best Estimate

Le Best Estimate à  $t = 0$ , pour les assurés d'âge  $x_0$  et de l'ancienneté  $d_0$ , s'évalue comme la somme actualisée au taux forward annuel des éléments suivants auxquels les primes perçues au titre de la garantie décès sont réduites :

- Sinistres payés totaux au titre du décès par période
- Frais totaux au titre du décès par période

$$BE(x_0, d_0) = \sum_{t \geq 1} DF(t) \times \sum_{i=1}^{N(x_0+t-1, d_0+t-1, t-1)} (\text{Sinistres}_{i,t} + \text{Frais}_{i,t} - \text{Primes}_{i,t}),$$

où :

- $\text{Sinistres}_{i,t}$  est le montant de prestation payé au titre de la garantie décès de l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $\text{Frais}_{i,t}$  les frais de l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $\text{Primes}_{i,t}$  les primes payés par l'assuré  $i$  en la période  $t$ ,
- $DF(t)$  le facteur d'actualisation en  $t$ .

### 3.1.8 Déviation de risque

Nous étudions le calcul de l'écart (stochastique) des flux par rapport à la meilleure estimation centrale.

La variation des flux de sinistres liés aux décès est définie comme la variation des flux actualisés induite par les sinistres pour la période de projection  $t \geq 1$  selon la formule suivante pour toute catégorie d'assurés d'âge  $x$  et d'ancienneté  $d$  à l'année  $t$  :

$$C_D(x, d, t) = \sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} S(x, d, t-1)_i (I_D(x, d, t)_i - q_{BE}(x, t)),$$

où :

- $I_D(x, d, t)_i$  est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $q(x, t)$  pour l'assuré  $i$  entre  $t$  et  $t + 1$ ,
- $S(x, d, t-1)_i$  est l'exposition au risque de mortalité de l'assuré  $i$  d'âge  $x$  en  $t$ .

L'exposition au risque de mortalité est définie comme la potentielle perte liée au décès compte tenu de l'exposition à risque restante par rapport à la trajectoire Best Estimate :

$$S(x, d, t-1)_i = DF(t) \times CapitalSousRisque_{i,t} - \sum_{k>t} DF(k) \times (Sinistres_{i,k} + Frais_{i,k} - Primes_{i,k}),$$

$CapitalSousRisque_{i,t}$  est le capital sous risque de l'assuré  $i$  en  $t$  ; le capital sous risque du produit emprunteur est le capital restant dû (CRD).

En d'autres termes, la perte en cas de décès au cours de l'année  $t$  est donnée par le capital sous risque de l'année  $t$ , ainsi que par la perte attendue des primes futures, corrigées des gains dus au fait qu'il ne reste plus les sinistres futurs attendus et les frais futurs.

De manière similaire, la variation des flux de sinistres liés aux rachats est définie pour la période de projection  $t \geq 1$  selon la formule suivante pour toute catégorie d'assurés d'âge  $x$  et d'ancienneté  $d$  à l'année  $t$  :

$$C_L(x, d, t) = \sum_{i=1}^{N(x,d,t-1)} L(x, d, t-1)_i (l(d, t) - l_{BE}(d, t)),$$

où :

- $l(d, t)$  est le taux de rachat pour chaque année  $t$  et chaque ancienneté  $d$ ,
- $L(x, d, t-1)_i$  est l'exposition au risque de rachat de l'assuré  $i$  d'âge  $x$  en  $t$ .

L'exposition au risque de rachat est définie comme la potentielle perte liée au rachat compte tenu de l'exposition à risque restante par rapport à la trajectoire Best Estimate :

$$L(x, d, t-1)_i = - \sum_{k>t} DF(k) \times (Sinistres_{i,k} + Frais_{i,k} - Primes_{i,k}).$$

La perte en cas de rachat au cours de l'année  $t$  est donnée par la perte attendue des primes futures, corrigées des gains dus au fait qu'il ne reste plus les sinistres futurs attendus et les frais futurs.

## 3.2 Simulation

### 3.2.1 Caractéristiques du portefeuille étudié

L'étude porte sur des contrats des prêts immobiliers. Elle est menée en utilisant un portefeuille fictif ; il convient cependant de noter que les caractéristiques des assurés sont issues de l'expérience et des benchmarks des équipes Vie / Prévoyance du cabinet Milliman et sont représentatives d'une clientèle de type bancassureur moyen / haut de gamme vue à fin 2016.

Le Model Point du passif étudié est constitué de trente-cinq lignes ; chaque ligne contenant cinq cents assurés. Comme précisé dans la section « 3.1 Description du portefeuille étudié », seule la garantie décès est modélisée ; ainsi, seuls les assurés valides à la date de calcul sont représentés dans ce Model Point. Aucune Provision pour Sinistre à Payer (correspondant à des sinistres survenus mais non entièrement réglés) n'est prise en compte. Le tableau ci-dessous résume l'âge moyen, le taux de l'emprunt moyen et la durée du prêt moyen du portefeuille d'étude :

Age moyen	Taux du prêt moyen	Durée du prêt moyen (annuelle)
38	2,32%	20

Tableau 3 : caractéristique du portefeuille étudié

Au-delà de ces indicateurs moyens, on peut noter que :

- L'âge des assurés au moment du calcul est distribué entre 23 et 57 ans,
- La durée d'emprunt est distribuée entre 12 et 25 ans.

La prime d'assurance est constante dans le temps. La table de mortalité TH 00-02 est utilisée avec un abattement de 60%. Le taux de rachat employé est croissant dans le temps.

Le ratio S/P global du portefeuille est de 80%.

Nous détaillons par la suite les caractéristiques du portefeuille sur quatre tranches d'âges [20-30[, [30-40[, [40-50[ et [50-60[. La tranche d'âge [20-30[ désigne les jeunes emprunteurs ; celle de [50-60[ représente les emprunteurs « âgés », donc des profils risqués (pour la garantie décès) ; et celles de [30-40[ et [40-50[ décrivent des profils intermédiaires.

Nous commençons par décrire le portefeuille étudié en analysant la répartition des assurés par tranche d'âge :

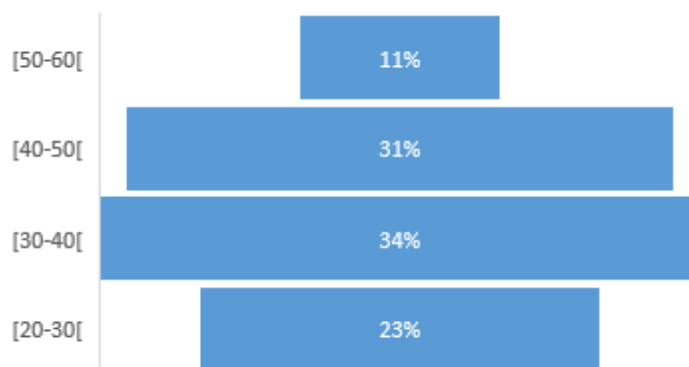


Figure 16 : Répartition des assurés par tranche d'âge

Nous constatons alors que 65% des prêts sont détenus par les profils intermédiaires. Les emprunteurs de catégorie d'âge [50-60[ (profil risqué) sont deux fois moins présents que ceux de la tranche d'âge [20-30[ (jeune).

Nous analysons ensuite la durée des emprunts et la répartition des montants empruntés sur ces catégories d'âges :

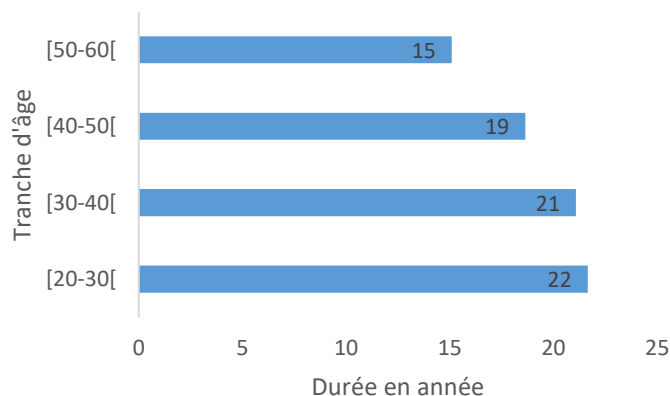


Figure 17 : Durée des emprunts par tranche d'âge

Nous constatons alors que la durée de l'emprunt diminue avec l'âge. Les jeunes emprunteurs ont une durée d'emprunt plus longue (22 ans) que celle des profils risqués (15 ans).

La répartition des CRD, représentée dans la figure ci-dessous, montre que les montants empruntés par les profils intermédiaires constituent 69% des montants totaux. Les montants empruntés par les profils risqués restent très faibles (6%).

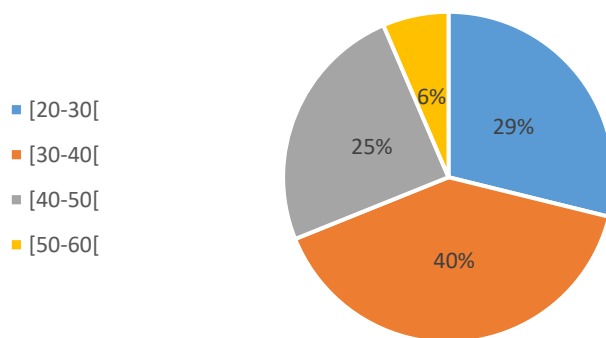


Figure 18 : Répartition des CRD par tranche d'âge

Nous étudions les taux d'emprunt utilisés pour les différentes tranches d'âges. Le graphique suivant permet d'illustrer le fait que le taux d'emprunt augmente comme attendu avec la durée d'emprunt ; cependant, malgré une durée d'emprunt faible pour la tranche d'âge [50-60[, le taux d'emprunt est élevé. Ceci peut être expliqué par le fait que ces contrats ont été souscrits à des périodes où les taux étaient plus élevés.



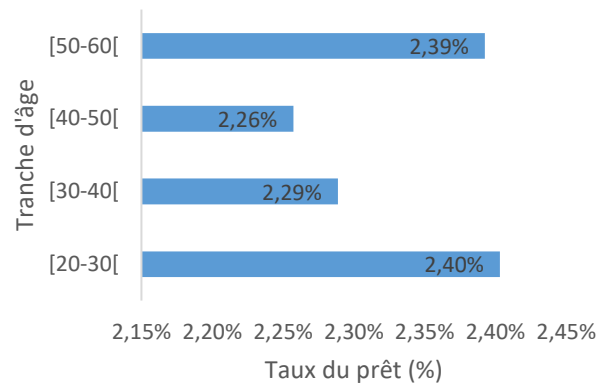


Figure 19 : Taux de l'emprunt par tranche d'âge

Nous représentons dans le graphique suivant le ratio S/P par année de projection sur les différentes tranches d'âge.

Nous pouvons alors constater que, pour chaque tranche d'âge, les cotisations étant constantes, le ratio S/P suit l'évolution de la charge des sinistres et diminue progressivement en cours de projection.

Nous pouvons, par ailleurs, comparer les ratios S/P entre les différentes tranches d'âge et noter que le ratio S/P des jeunes emprunteurs reste presque stable (entre 7% et 44%) par rapport à celui des profils risqués. En effet, le ratio de ces derniers démarre à 150% pour chuter progressivement.

Nous constatons que la courbe du ratio S/P est décroissante. La hausse des taux de mortalité en cours de projection est ainsi secondaire par rapport à la baisse des montants des CRD.

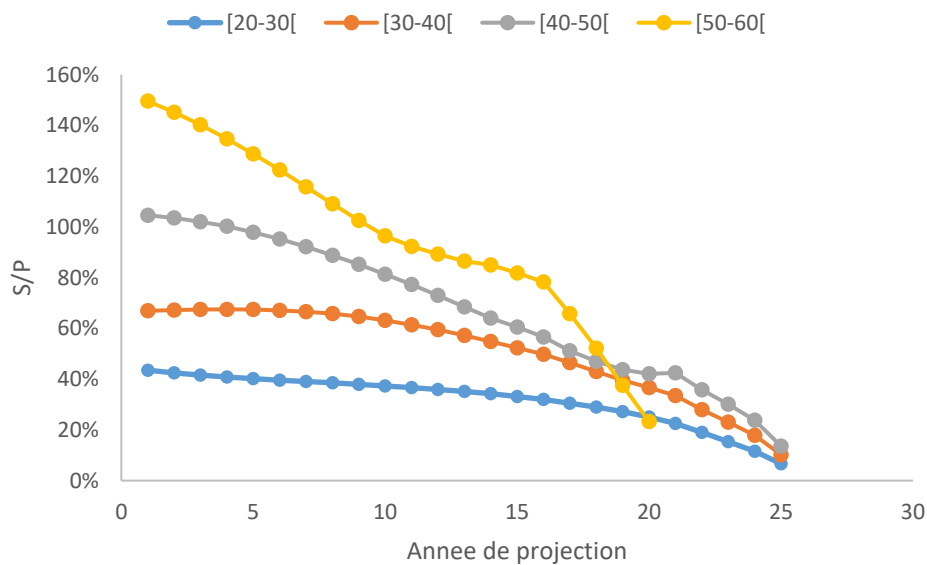


Figure 20 : Ratio S/P par tranche d'âge et par année de projection

### 3.2.2 Architecture du modèle

Le schéma ci-dessous décrit l'architecture mise en place pour établir la méthode de Cornish-Fisher et la méthode simulatoire. La solution proposée utilise « Milliman Mind », un outil interne à Milliman. Cet outil est en effet une extension d'Excel et joue le rôle de « ferme de calcul » dans le sens où il peut effectuer des boucles sur les Model Points et générer plusieurs scénarios stochastiques (volatilité).

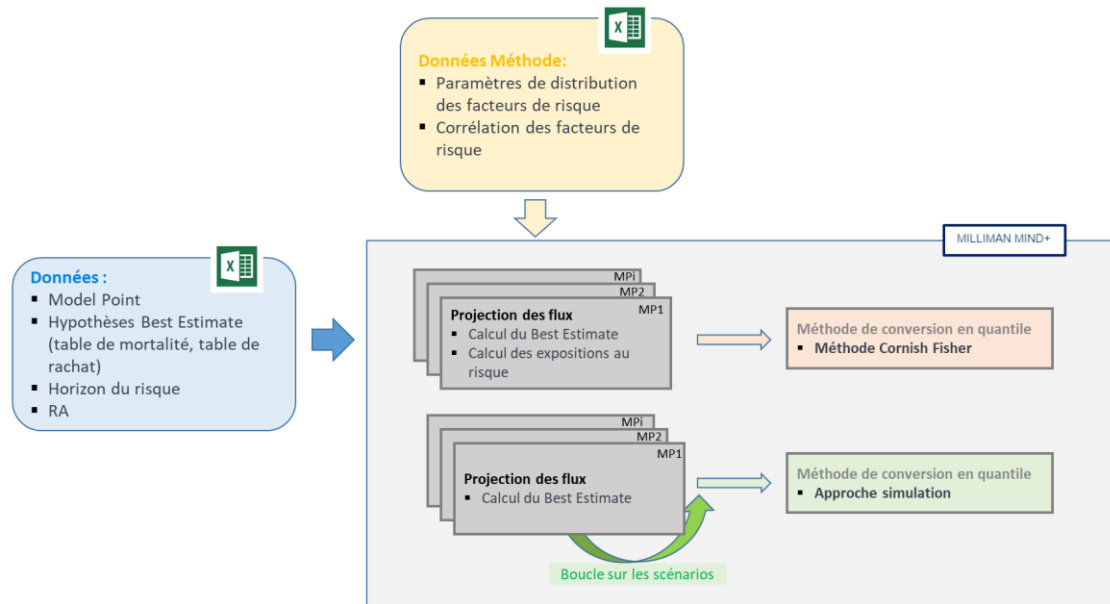


Figure 21 : Architecture du modèle

### 3.2.3 Comparaison approche simulatoire et approche formelle fermée

L'objectif de cette partie est de vérifier la convergence de la méthode de Cornish-Fisher vers la méthode simulatoire. Nous cherchons en effet à comparer le RA obtenu par la méthode de Cornish-Fisher (formule fermée) avec celui de la méthode simulatoire sur une plage de quantiles.

#### 3.2.3.1 Approche simulatoire

L'approche simulatoire consiste à simuler la loi de Best Estimate puis estimer le montant de RA suivant les quantiles. Du point de vue pratique, l'approche simulatoire peut être décrite de manière procédurale comme suit :

- 1) Simuler de manière stochastique les différents risques (afin de construire une distribution de BE) :
  - Risque de niveau : générer plusieurs scénarios de taux de mortalité en utilisant la loi de Poisson de paramètre (moyenne)  $q_{BE}(x, t_0) \times E(x, t_0)$
  - Simuler simultanément les risques de tendance et de rachat : ces deux risques étant en effet corrélés de paramètre  $\rho$ , nous utilisons la loi gaussienne pour générer plusieurs scénarios.
  - Risque CAT : Étant donné que le risque CAT est modélisé à l'aide d'une approche fréquence-sévérité, nous simulons de manière stochastique la fréquence par la loi binomiale de paramètre  $p$  (défini dans l'Annexe 3) et la sévérité par la loi log-normale de

paramètre  $(\mu_c, \sigma_c)$  (défini dans l'Annexe 3); et le pourcentage de surmortalité stochastique est obtenu par le produit de fréquence et sévérité.

- Risque de volatilité : générer plusieurs scénarios de taux de mortalité en utilisant la loi binomiale de paramètre (moyenne)  $q(x, t) \times N(x, t)$
- 2) Projeter les flux puis calculer le montant de BE pour les différentes simulations de différents risques et construire une distribution de BE
  - 3) Calculer la VaR associée au montant de BE pour les différents quantiles
  - 4) Puis comparer la distribution des VaR obtenue avec cette méthode et celle obtenue par Cornish-Fisher décrite ci-après

Dans cette approche, le terme « simulation stochastique » désigne implicitement la génération des nombres aléatoires à plusieurs reprises. Mille simulations ont été lancées ci-après. Le nombre de simulations générées est suffisant compte tenu des niveaux de quantile attendus pour le montant de RA, nettement inférieurs au niveau 99,5% du SCR Solvabilité II.

### 3.2.3.2 Approche formule fermée

Nous rappelons que la Value at Risk (VaR) de la variable aléatoire  $X$  de niveau  $\alpha$  peut-être approchée en utilisant la formule de Cornish-Fisher (à l'ordre 2) comme suit :

$$VaR_\alpha(X) \approx \mathbb{E}[X] + \sqrt{Var(X)} \left( z_\alpha + \frac{1}{6} (z_\alpha^2 - 1) S(\tilde{X}) \right),$$

où :

- $\tilde{X}$  est la variable centrée réduite de  $X$ ,
- $z_\alpha$  est le quantile normal standard associé au niveau  $\alpha$ ,
- $S(\cdot)$  est la fonction d'asymétrie telle que  $S(\tilde{X}) = \mathbb{E}[\tilde{X}^3] = \frac{M_3(X)}{Var(X)^{3/2}}$ .

Cette approche consiste alors à calculer l'espérance, la variance et l'asymétrie de la variable aléatoire  $X$ , puis déterminer la VaR pour chaque quantile donné à partir de la formule de Cornish-Fisher.

### 3.2.3.3 Comparaison de deux méthodes

L'objectif est de vérifier la convergence de ces deux méthodes sur une plage de quantiles.

Nous comparons les deux approches décrites ci-dessus pour chaque risque, puis pour tous les risques confondus. Nous considérons une plage de quantile allant de 65% à 99%. Nous nous fixons dans un premier temps un horizon de risque de cinq ans, puis nous étudions également la sensibilité liée à l'horizon de risque.

Les résultats obtenus par la méthode de Cornish-Fisher sont tracés en couleur bleue et ceux de la méthode par approche simulatoire en couleur orange.

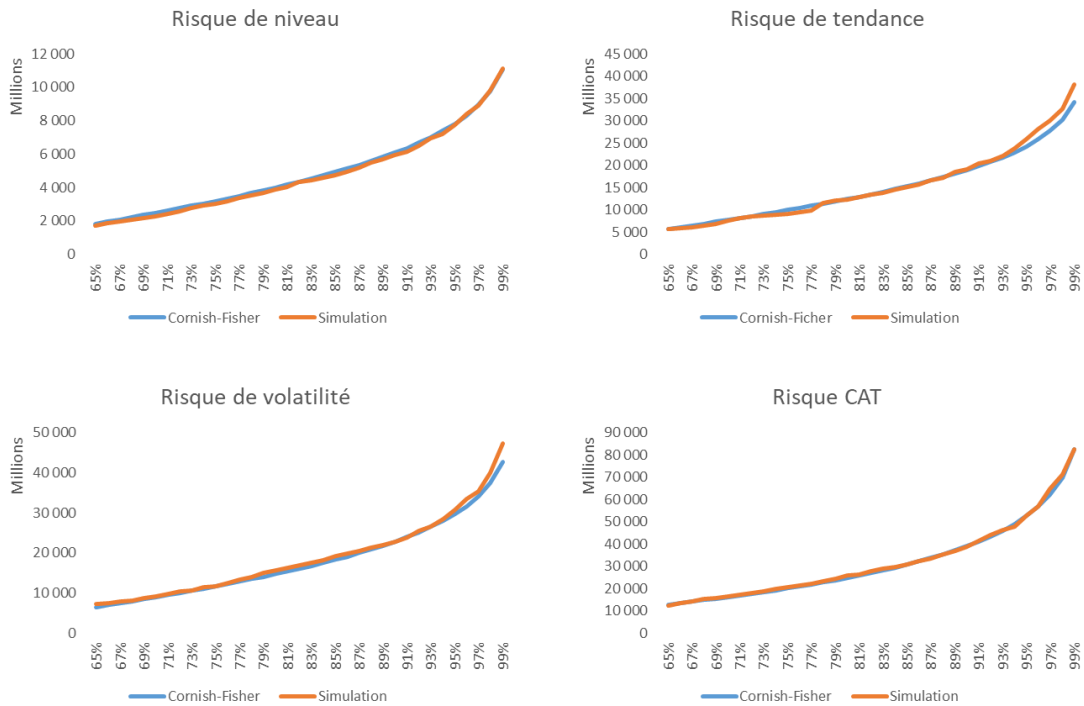


Figure 22 : Distribution RA, Risque de mortalité

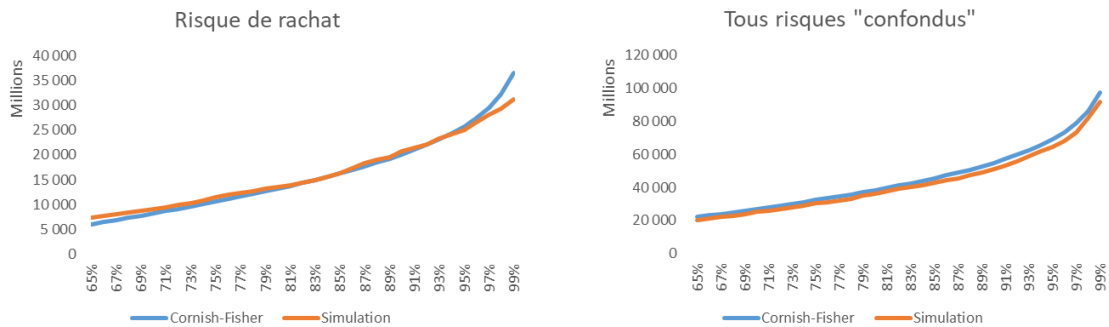


Figure 23 : Distribution RA

Nous constatons alors de manière générale que les deux approches conduisent à des résultats similaires, aussi bien pour chaque risque que pour tous les risques « confondus ».

Nous constatons un écart entre les deux approches pour les quantiles élevés. Cet écart s'explique en partie par le fait que l'approche Cornish-Fisher ne réplique pas parfaitement les quantiles élevés. Aussi, le coefficient d'asymétrie de la distribution a plus d'impact pour les quantiles élevés, et il peut être moins bien répliqué par les formules fermées.

Cependant, cette différence entre les deux approches reste mineure compte tenu des niveaux de confiance observés sur le marché, dans le cadre de l'ajustement pour risque, à savoir des quantiles plutôt compris entre 70% et 80% (Milliman, 2019).

### 3.2.3.4 Sensibilités aux horizons de risque

Une sensibilité par rapport aux différents horizons de risque (T = 1, T = 5 et T = 10) est effectuée. Nous pouvons alors constater dans les graphes suivants que les deux approches conduisent à des résultats similaires. La méthode Cornish-Fisher est donc stable pour les différents horizons.

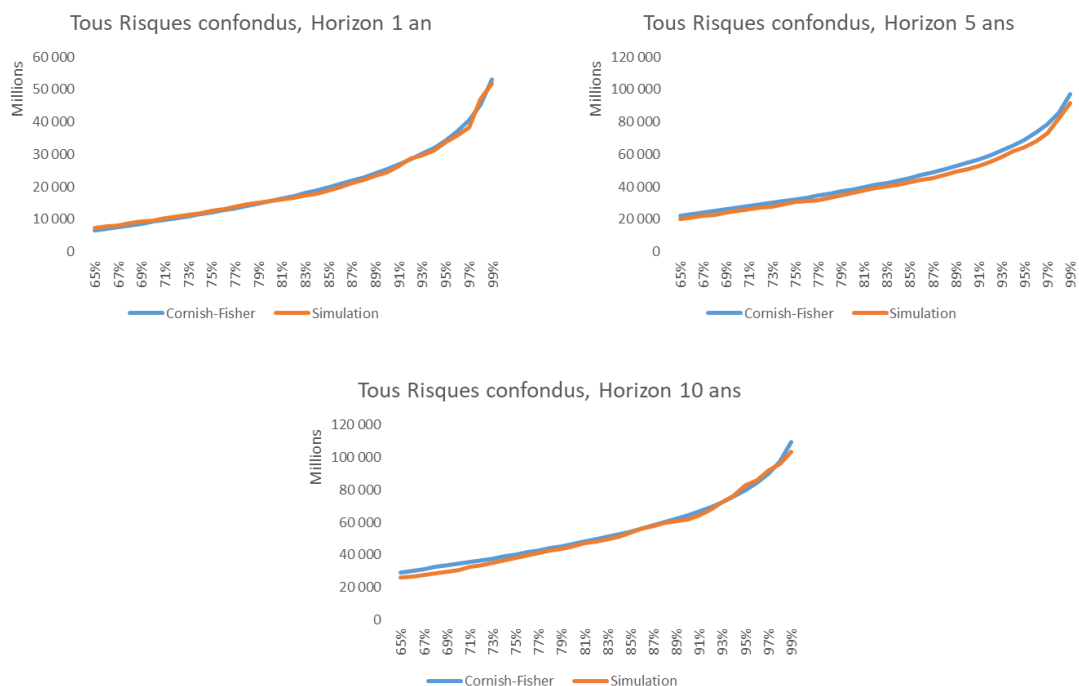


Figure 24 : Distribution RA, sensibilité aux horizons de risque

### 3.2.4 Niveau de confiance associé à un RA calculé en méthode « Coût du capital »

Nous cherchons à établir, en utilisant la méthode formule fermée de Cornish-Fisher, le niveau de confiance associé au montant de RA, calculé avec la méthode « coût du capital ».

#### 3.2.4.1 Calcul de RA par la méthode « inducteur » Coût du capital

La méthode « inducteur » Coût du capital décrite dans la partie A.II.2.b permet de calculer le montant de RA approprié pour le portefeuille étudié.

Nous rappelons ci-après les étapes de calcul afin d'obtenir le montant de RA :

- Nous calculons un  $BE^{Central}$  et des  $BE^{choc}$  à la maille Model Point (choc = choc de mortalité, choc de rachat hausse, choc de rachat baisse, choc de rachat massif, choc mortalité CAT)
- Nous calculons des  $SCR_0^{choc}$  (SCR sous modulaires en 0) à la maille Model Point par différence entre le  $BE^{Central}$  et le  $BE^{choc}$  :  $SCR_0^{choc} = BE^{choc} - BE^{Central}$ .

Le choc est appliqué uniquement aux polices qui sont sensibles au choc, c'est-à-dire :

Si  $BE^{choc} < BE^{Central}$  alors  $BE^{choc} = BE^{Central}$ .

- Nous appliquons la matrice de corrélation et nous obtenons le  $SCR_0$  (SCR en 0) en ayant au préalable déterminé le capital au titre du risque de rachat

$$SCR_0^{Rachat} = \max(SCR_0^{RachatHausse}, SCR_0^{RachatBaisse}, SCR_0^{RachatMassif}) \text{ à la maille portefeuille.}$$

Corrélation	Mortalité	Rachat	CAT
Mortalité	1	0	0,25
Rachat	0	1	0,25
CAT	0,25	0,25	1

Figure 25 : Matrice de corrélation

- Nous avons, par ailleurs, le driver défini à la maille portefeuille pour chaque risque et pour toutes les années de projection. Il permet alors de calculer les SCR modulaires pour toutes les années de projection à la maille portefeuille.

$$SCR_t^{choc} = SCR_0 \times \frac{Driver_t^{choc}}{Driver_0^{choc}} \text{ avec } Driver_t^{choc} = \sum_{k \geq t} \frac{Primes_k^{choc}}{(1+r_k)^{(k-t)}}$$

Le driver « Primes » est choisi pour projeter les SCR dans le temps.

- Nous appliquons de nouveau la matrice de corrélation aux différents SCR modulaires pour obtenir  $SCR_t$ .
- Nous pouvons alors obtenir le RA :  $RA = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1+r_t)^t}$ .

Le schéma ci-dessous représente les SCR sous modulaires obtenus en 0 pour le portefeuille considéré. Le SCR de mortalité est prépondérant sur le SCR global.

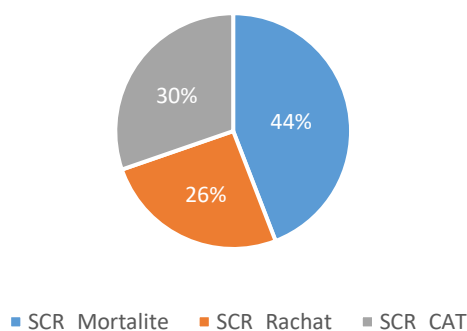


Figure 26 : Représentation des SCR sous modulaires en 0

### 3.2.4.2 Niveau de confiance associé

Le RA est calculé pour différents taux coût du capital : 3%, 4%, 5% et 6%. L'horizon de risque  $T$  est égal à un an. La méthode Cornish-Fisher permet de trouver le niveau de confiance associé au montant de RA.

Taux coût du capital	3%	4%	5%	6%
Quantile équivalent	87%	91%	95%	97%

Tableau 4 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque  $T = 1$

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet également de trouver le niveau de confiance pour différents horizons de risque, comme présenté dans les figures suivantes.

Taux coût du capital	3%	4%	5%	6%
Quantile équivalent	64%	72%	78%	83%

Tableau 5 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 5

Taux coût du capital	3%	4%	5%	6%
Quantile équivalent	56%	63%	69%	75%

Tableau 6 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 10

La représentation graphique du niveau de confiance associé au montant de RA pour différents taux de coût du capital et différents horizons de risque est la suivante :

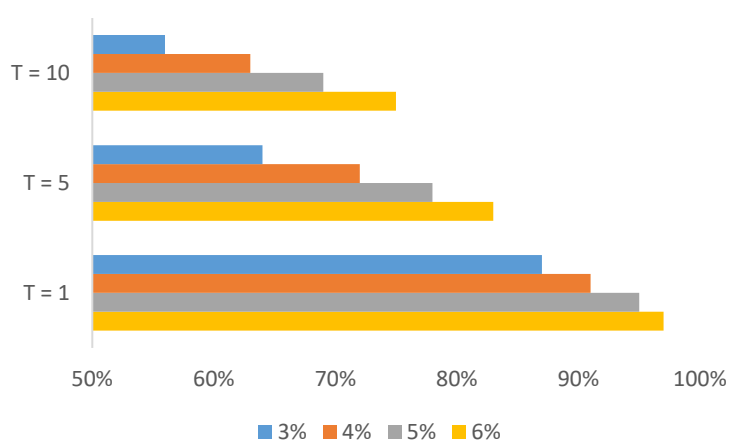


Figure 27 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital

Pour un horizon de risque T fixé :

Le niveau de confiance est d'autant plus élevé que le niveau de prime de risque (CoC) est important.

Pour un niveau de prime de risque (CoC) fixé :

Le niveau de confiance diminue avec l'augmentation de l'horizon de risque.

**Nous pouvons noter que la méthode additionnelle de détermination du niveau de confiance développée dans ce mémoire permet à un assureur de conserver le cadre méthodologique et les outils développés dans le cadre de Solvabilité II pour le calcul de la marge pour risque tout en répondant aux nouvelles exigences de communication financière IFRS 17. Cette approche permet également de s'affranchir, dans la communication financière, de la vision à 1 an du risque sous-jacente à la formule standard Solvabilité II sans impact sur les processus en place au sein de l'entité.**

### 3.2.4.3 Niveau de confiance associé aux SCR calculés en approche VaR (approche « ajustement gaussien »)

Certains assureurs vie envisagent également de calculer le RA selon une approche VaR, c'est-à-dire de considérer que le RA correspond à une grandeur homogène à un SCR de souscription Solvabilité II mais pour un niveau de confiance différent de 99,5%

Or, il est possible de traduire en niveau de choc une modification du niveau de quantile dès lors que l'on connaît la distribution sous-jacente. Les chocs de souscription vie de la formule standard Solvabilité II sont basés sur une modélisation gaussienne des facteurs de risque. Pour ces risques, il est donc possible de modifier le niveau de choc en se basant sur la propriété suivante (propre au cadre gaussien) :

$$choc_{\alpha\%}^{1an} = choc_{99,5\%}^{1an} \times \frac{N_{\alpha\%}(0,1)}{N_{99,5\%}(0,1)}$$

avec  $N(0,1)$  est la loi normale centrée réduite.

Nous allons donc calculer les SCR en 0 pour les quantiles 99,5%, 90%, 80% et 75% ; ensuite, nous déduirons les niveaux de confiance équivalents pour ces différents SCR en utilisant la méthode de Cornish-Fisher, et ce pour différents horizons de risque.

		Quantile initial	99,5%			Quantile initial	90,0%
Cornish-Fisher	T = 1		99,9%	Cornish-Fisher	T = 1		97%
	T = 5		98%		T = 5		83%
	T = 10		96%		T = 10		75%
		Quantile initial	80,0%			Quantile initial	75,0%
Cornish-Fisher	T = 1		93%	Cornish-Fisher	T = 1		88%
	T = 5		73%		T = 5		67%
	T = 10		64%		T = 10		58%

Tableau 7 : Quantile équivalent obtenu pour les SCR calculés en approche VaR (approche « ajustement gaussien »)

Nous pouvons alors constater, pour l'horizon de risque  $T = 1$ , que les niveaux de confiance obtenus par la méthode Cornish-Fisher sont différents de ceux de la formule standard. Cette différence peut s'expliquer par le fait que les modèles de risque sous-jacent (mortalité, rachat et CAT) sont calibrés de manière propre, et ce indépendamment de la formule standard. En particulier, certaines études ont pu illustrer le caractère conservateur de la formule standard sur les chocs de mortalité et longévité (Boumezoued A. , Mai 2020), tandis que les calibrage propres du risque de rachat sur des chroniques historiques peuvent faire apparaître des niveaux plus faibles que la formule standard. Nous avons dans nos travaux, pour les risques de tendance de mortalité et de rachat, reflété des niveaux de calibrage en phase avec ces observations et avec les pratiques de marché.

**Comme précédemment, nous pouvons noter que la méthode additionnelle de détermination du niveau de confiance développée dans ce mémoire permet à un assureur de conserver le cadre méthodologique et les outils développés dans le cadre de Solvabilité II pour le calcul du SCR de souscription tout en répondant aux nouvelles exigences de communication financière IFRS 17. Cette approche permet également de conserver un horizon du risque à 1 an dans la mise en œuvre des calculs, tout en offrant la possibilité de s'affranchir, dans la communication financière, de cette vision annuelle de la déviation du risque. Par ailleurs, cette approche permet de donner une vision plus « réaliste » du niveau de confiance**



sous-jacent au niveau de RA, en s'affranchissant de la prudence inhérente au calibrage de la formule Standard Solvabilité II.



## Conclusion

---

La norme IFRS 17 entrera en vigueur le 1er Janvier 2023. Le concept de l'ajustement pour risque, introduit par la norme, pose de nombreux défis aux assureurs tant sur le plan méthodologique qu'opérationnel. Elle laisse aux assureurs le soin de définir leur propre méthode de calcul pour obtenir l'ajustement pour risque. Mais elle exige surtout, quelle que soit la méthode utilisée, la publication d'un équivalent du niveau de confiance (associé au montant de RA) sur un horizon temporel lié à la durée du passif.

Ce mémoire propose alors d'utiliser les formules fermées de Cornish-Fisher pour répondre à cette exigence. Cette méthode a la faculté d'être précise et efficace sur le plan opérationnel. Elle peut s'adapter également pour différents produits. L'étude menée, dans le cadre de ce mémoire, sur le portefeuille de contrat d'Assurance Emprunteur comportant la garantie décès uniquement est concluante et permet de valider la méthode de Cornish-Fisher.

Par ailleurs, le rapprochement de la formule standard de Solvabilité 2 avec cette méthode montre que cette dernière est particulièrement efficace dans le sens où elle permet de répliquer au mieux le profil du risque du portefeuille à travers le calibrage et la simulation des risques sous-jacents, en s'affranchissant, le cas échéant, du conservatisme inhérent au calibrage de la Formule Standard.

Enfin, le principal avantage de la méthode Cornish-Fisher, combinée à l'établissement des formules présentées dans ce mémoire, est qu'elle offre la possibilité de disposer d'une vision pluriannuelle du risque, tout en conservant le cadre méthodologique et de modélisation développés pour le reporting prudentiel Solvabilité II. Ces synergies avec les processus et modèles d'ores et déjà en production au sein des entreprises sont un véritable atout compte-tenu de la courte période d'implémentation de la norme IFRS 17 et des très faibles délais de production des états financiers.

La méthode Cornish-Fisher que nous avons étudiée sur le portefeuille de contrat d'Assurance Emprunteur est limitée à la seule garantie décès ; elle peut cependant être étendue aux autres garanties classiquement présentes dans ces contrats telles que l'arrêt de travail et le chômage, ce qui nécessite de modéliser d'autres facteurs de risque comme l'incidence et le maintien en arrêt de travail, l'incidence et le maintien en chômage. La méthode peut être également étendue à d'autres portefeuilles comme les contrats d'épargne - retraite : le principal enjeu étant que sur ces contrats, à travers le mécanisme de participation aux bénéfices, il existe une interdépendance entre les risques financiers et les risques techniques ; il serait alors nécessaire de pouvoir reproduire cette interdépendance dans le calcul des moments sous-jacent à Cornish-Fisher, sans que le processus de détermination du niveau de confiance équivalent ne devienne trop complexe. Enfin, la méthode d'agrégation des risques (mise en œuvre en vue d'obtenir une distribution globale) repose aujourd'hui sur une matrice de corrélation ; elle pourrait être élargie en se basant sur les polynômes dits de Fleishman.

## Bibliographie

---

- Andre, B. (2018). *L'allocation de la CSM en P&L pour un contrat d'épargne en euro mono-support*. Memoire ISFA.
- Arnaud, A. (2016). *Utilisation de techniques statistiques pour le calibrage du risque de rachat en assurance vie*. Memoire CEA.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*.
- Bideault, T. (2017). *Calcul de la marge pour risque en assurance non vie*. Memoire ISFA.
- Boumezoued, A. (Mai 2020). Living forever with Solvency II: A closer look at mortality stresses. *MILLIMAN WHITE PAPER*, <https://www.milliman.com/en/insight/living-forever-with-solvency-ii-a-closer-look-at-mortality-stresses>.
- Boumezoued, A., Elfassihi, A., Gleeson, C., Kay, A., Lehane, O., Lespinasse, B., & Louvet, D. (Novembre 2020). IFRS 17: Deriving the confidence level for the Risk Adjustment - a case study for life (re)insurers. *MILLIMAN WHITE PAPER*, <https://www.milliman.com/en/insight/ifrs-17-deriving-the-confidence-level-for-the-risk-adjustment-a-case-study-for-life-reinsurers>.
- Brébisson, H. d. (2018). Le crédit-bail et le principe de substance en France. *ACCRA*.
- Brouhns, N. D. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and economics*.
- Carlo Acerbi, & Dirk Tasche. (2002). Expected Shortfall : A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. *Economic Notes*.
- Charpentier, A. (2010). *Mesures de risque*. Journées d'Études Statistique.
- Chevallier, F., Moro, E. D., Krvavych, Y., & Rudenko, I. (2018). Probability of sufficiency of the risk margin for life companies under IFRS 17. *International Congress of Actuaries*.
- Christiansen, M. C., & Niemeyer, A. (2012). The fundamental definition of the Solvency Capital Requirement in Solvency II. *ASTIN Bulletin*.
- Damas, V. (2017). Cours Assurance Vie - CEA.
- Fisher, R. A., & E. A. Cornish. (1960). The percentile points of distributions having known cumulants. *Technometrics*.
- Fleishman, A. (1978). A method for simulating non-normal distributions. *Psychometrika*.
- Gatumel, M. (2009). *Risk Valuation in Non Life Insurance*. Université Paris Panthéon Sorbonne.
- Gatumel, M. (2011). Is the Insurance Cost-of-Capital Fair? *halshs-00658729*.
- Hymans Robertson. (2017). *Building up to IFRS 17 : Understanding the new reporting standard for insurance contracts*.
- IASB. (Mai 2017). *IFRS 17 Contrats d'assurance*. Normes IFRS.
- Lee, R., & Carter, L. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*.
- Milliman. (2017, décembre). IFRS 17 : Risk Adjustment. <https://www.milliman.com/en/insight/2017/ifrs-17-risk-adjustment/>.

- Milliman. (2019). IFRS 17 Preparedness Survey. *MILLIMAN WHITE PAPER*,  
<https://www.milliman.com/en/insight/milliman-ifs-17-preparedness-survey-2018-uk-and-eu-highlights>.
- Moro, E. D., & Krvavych, Y. (2015). Probability of sufficiency of Solvency II reserve risk margins : Practical approximations. *ASTIN*.
- Peter England, & Matt Facey . (2017). *IFRS 17 Risk Adjustments, and Risk Margins using the Cost-of-Capital approach : Estimating Future Capital Requirements*. Edinburgh: Institute and Faculty of Actuaries.
- Primel, S. (2012). *Tarifification, Rentabilité et Impacts de Solvabilité II sur les contrats Emprunteur - Application aux garanties Décès et Incapacité*. Mémoire DAUPHINE.
- RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35 DE LA COMMISSION . (2014). *Journal officiel de l'Union européenne*.
- RISK ADJUSTMENTS for Insurance Contracts under IFRS 17. (2018, Avril). *Association actuarielle Internationale*.
- Sotona, P. (2018, Août). MORTALITY RISK ASSESSMENT UNDER IFRS 17. *21th International Scientific Conference AMSE*.
- Thérond, P.-E. (2007). *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*. Université Claude Bernard Lyon 1.
- Villegas, A. M., Kaishev, V. K., & Millosovich, P. (2015). StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling.

## Annexes

---

### Annexe 1 : Matrice de corrélation S2

Le tableau ci-dessous précise, dans le cadre d'une agrégation Formule Standard, la matrice de corrélation utilisée pour l'agrégation des besoins en capital élémentaires du module Souscription Vie.

Souscription Vie	Mortalité	Longévité	Incap/invalid	Rachats	Frais	Révision	Cat
Mortalité	100%	-25%	25%	0%	25%	0%	25%
Longévité	-25%	100%	0%	25%	25%	25%	0%
Incap/invalid	25%	0%	100%	0%	50%	0%	25%
Rachats	0%	25%	0%	100%	50%	0%	25%
Frais	25%	25%	50%	50%	100%	50%	25%
Révision	0%	25%	0%	0%	50%	100%	0%
Cat	25%	0%	25%	25%	25%	0%	100%

Figure 28 : - Module de risque Souscription Vie : matrice de corrélation Formule Standard

## Annexe 2 : Calibrage des paramètres du modèle de Lee-Carter

Le modèle de Lee-Carter peut s'écrire de la manière suivante :

$$\ln q(x, t) = \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t),$$

où :

- $\alpha(x)$  est la composante spécifique à l'âge  $x$ , elle s'interprète comme la valeur moyenne des  $\ln q(x, t)$  au cours du temps,
- $\kappa(t)$  décrit l'évolution générale de la mortalité,
- $\beta(x)$  traduit la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge  $x$  par rapport à l'évolution générale  $\kappa(t)$ .

La série  $\kappa(t)$  peut être modélisée par une marche aléatoire avec dérive comme suit :

$$\kappa(t + 1) = \kappa(t) + \mu + \sigma\epsilon(t + 1),$$

où :

- $\mu$  est le paramètre de dérive (*drift*), appelé également la tendance,
- $\sigma$  est le paramètre de volatilité,
- Les  $\epsilon(t)$  sont indépendantes identiquement distribuées et suivent une loi normale centrée réduite.

L'étalonnage du modèle Lee-Carter est réalisé à l'aide du package R StMoMo (Villegas, Kaishev, & Millossovich, 2015), et de l'étalonnage standard log-Poisson (Brouhns, 2002). La tranche d'âge utilisée dans le modèle est de 0 à 99 ans (inclus) et la période temporelle est de 1988 à 2017 (inclus).

Les modèles sont ajustés aux taux de mortalité des populations françaises masculines et féminines, issus de la base de données HMD (« Human Mortality Database »).

Les paramètres calibrés (paramètre de dérive  $\mu$  et paramètre de volatilité  $\sigma$ ) sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Genre	Dérive $\mu$ (drift)	Volatilité $\sigma$
Homme	-2.41	2.23
Femme	-2.03	3.52

Tableau 8 : Paramètres de dérive et de volatilité de  $\kappa(t)$

### Annexe 3 : Justification des paramètres du modèle CAT log-normal

Le risque CAT supplémentaire peut être modélisé à l'aide d'une approche fréquence-sévérité. Le pourcentage de surmortalité pour chaque année est noté  $\Delta(t)$ . Ceux-ci sont supposés être indépendants et identiquement distribués. Le taux de mortalité soumis au risque CAT devient ainsi :

$$q(x, t) + \Delta(t) \text{ avec } \Delta(t) = I(t)S(t).$$

La composante fréquentielle est donnée par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $p$ , notée  $I(t)$ . La composante de sévérité est saisie par une variable aléatoire  $S(t)$  qui, à toute année  $t$ , est supposée suivre une distribution log-normale :  $\log(S(t)) \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c)$ .

Les paramètres suivants sont considérés par défaut :

Paramètre	Valeur
$\mu_c$	-7
$\sigma_c$	0,5
$p$	9%

Tableau 9 : Paramètres du modèle CAT log-normal

Nous cherchons à comparer le choc induit à 99,5%, noté  $y = q_{99,5\%}(IS)$  à celui utilisé en Solvabilité II, i.e. 0,15%.

Nous avons :  $\mathbb{P}(IS \geq y) = 1 - 99.5\%$ .

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(IS \geq y) &= \mathbb{P}(IS \geq y, I = 1) + \mathbb{P}(IS \geq y, I = 0) \\ &= \mathbb{P}(S \geq y, I = 1) + \mathbb{P}(0 \geq y, I = 0) \\ &= P(S \geq y)P(I = 1) \\ &= P(S \geq y)p. \end{aligned}$$

D'où  $y$  correspond également au quantile de  $S$  de niveau de confiance  $\frac{1-99.5\%}{p}$  :

$$P(S \geq y) = \frac{1 - 99.5\%}{p}.$$

Ou encore :  $P(S \leq y) = 1 - \frac{1-99.5\%}{p}$ .

Nous notons  $F_S^{-1}$  la fonction inverse de la fonction de répartition de la variable  $S$ . Le choc  $y$  est alors obtenu par :  $y = F_S^{-1}\left(1 - \frac{1-99.5\%}{p}\right)$ .

Cela permet de calculer le choc à 99,5% avec les paramètres ci-dessus, ce qui conduit à une valeur de 0,20%, ce qui est comparable et prudent par rapport à la valeur de Solvabilité II de 0,15%.



## Table des matières des figures

Figure 1 : Etapes de la norme IFRS 17 .....	28
Figure 2 : Bilan simplifié sous IFRS 17 .....	30
Figure 3 : Exemple d'initialisation de la CSM à la date de reconnaissance .....	32
Figure 4 : Evolution de la CSM et de FCF .....	33
Figure 5 : Evolution de la CSM sous le modèle BBA .....	34
Figure 6 : Evolution de la CSM sous le modèle VFA .....	35
Figure 7 : Classification des contrats d'assurance .....	36
Figure 8 : Répartition du choix des méthodes de l'ajustement pour risque auprès des assureurs européens (Milliman, 2019) .....	37
Figure 9 : choix de la méthode du coût du capital par des assureurs européens (Milliman, 2019) .....	38
Figure 10 : Orientation du niveau de confiance de RA pour les assureurs européens (Milliman, 2019).....	38
Figure 11 : Représentation de RA pour $\alpha = 99,5\%$ d'une loi gamma selon la méthode VaR .....	41
Figure 12 Représentation de RA pour $\alpha = 99,5\%$ d'une loi gamma selon la méthode TVaR .....	42
Figure 13 : VaR de la somme de deux variables aléatoires de Pareto - issu de (Thérond, 2007) .....	50
Figure 14 : Description de la mise en œuvre de la méthode Cornish-Fisher .....	51
Figure 15 : Illustration de l'horizon de risque.....	52
Figure 16 : Répartition des assurés par tranche d'âge.....	79
Figure 17 : Durée des emprunts par tranche d'âge.....	80
Figure 18 : Répartition des CRD par tranche d'âge .....	80
Figure 19 : Taux de l'emprunt par tranche d'âge .....	81
Figure 20 : Ratio S/P par tranche d'âge et par année de projection .....	81
Figure 21 : Architecture du modèle .....	82
Figure 22 : Distribution RA, Risque de mortalité.....	84
Figure 23 : Distribution RA .....	84
Figure 24 : Distribution RA, sensibilité aux horizons de risque .....	85
Figure 25 : Matrice de corrélation.....	86
Figure 26 : Représentation des SCR sous modulaires en 0 .....	86
Figure 27 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital .....	87
Figure 28 : - Module de risque Souscription Vie : matrice de corrélation Formule Standard .....	94

## Table des matières des tableaux

---

Tableau 1 : Tableau de synthèse de la modélisation des risques .....	53
Tableau 2 : Tableau de synthèse des moments d'ordre un à trois par risque .....	57
Tableau 3 : caractéristique du portefeuille étudié.....	79
Tableau 4 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 1 .....	86
Tableau 5 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 5 .....	87
Tableau 6 : Quantile équivalent obtenu pour les RA calculés par la méthode coût du capital, Horizon de risque T = 10 .....	87
Tableau 7 : Quantile équivalent obtenu pour les SCR calculés en approche VaR (approche « ajustement gaussien »).....	88
Tableau 8 : Paramètres de dérive et de volatilité de $\kappa(t)$ .....	95
Tableau 9 : Paramètres du modèle CAT log-normal .....	96