Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : **Rémi JOUBERT**

Titre : **Petit manuel du Private Equity dans le secteur de l'assurance**

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☒ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires *Signature*

Entreprise : Deloitte

Nom : Deloitte
Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : Arnaud MONNIN
Signature :

Invité :
Nom :
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

MÉMOIRE D'ACTUARIAT

Petit manuel du Private Equity dans le secteur de l'assurance

Auteur :
Rémi JOUBERT

Tuteur en entreprise :
Arnaud MONNIN

Tuteur académique :
Didier RULLIÈRE

28 mars 2021

GRANDE ÉCOLE D'ACTUARIAT ET DE GESTION DES RISQUES

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

Deloitte.

« The political problem of mankind is to combine three things: economic efficiency, social justice and individual liberty. »

John Maynard KEYNES

Résumé

Mots-clés : capital investissement, capital risque, capital transmission, capital croissance, LBO, actifs alternatifs, taux bas, LTEI, TRI, TVPI, modélisation, LPs, GP, flux financiers

Dans un contexte de taux d'intérêt historiquement bas, les organismes assureurs se voient contraints d'adapter, voire de renouveler leur modèle d'affaires. Une des manières d'opérer ce changement consiste à repenser la place des actifs dits alternatifs ou illiquides dans les portefeuilles d'investissement. Induisant une plus grande prise de risque, ils semblent offrir, en contrepartie, de meilleurs rendements que les actifs traditionnels que sont, par exemple, les obligations souveraines.

Le capital investissement ou Private Equity est l'une des classes d'actifs pour lesquelles les organismes d'assurance affichent un intérêt de plus en plus grand. Les fonds de Private Equity permettent d'investir dans des entreprises non cotées via des placements de long terme. En outre, il existe de nombreux types de supports d'investissement proposés par les gestionnaires de fonds de Private Equity qui répondent à différentes stratégies. Cette flexibilité ainsi que l'espoir de rendements futurs élevés expliquent, en partie, l'intérêt grandissant des investisseurs institutionnels pour cette classe d'actifs.

Se pose néanmoins la question de la mesure de la performance. Puisque le Private Equity n'est pas un actif traditionnel, les méthodes classiques ne sont pas adaptées. Il existe alors des métriques dédiées aux actifs illiquides, mais celles qui sont plébiscitées par les professionnels ne sont pas toujours les plus appropriées.

Par ailleurs, au-delà des aspects liés aux performances, les environnements réglementaires européen et français montrent une certaine souplesse à l'égard du Private Equity, ce qui vient lever, en partie tout au moins, certains obstacles rencontrés dans le passé par les assureurs. Le fait que le Private Equity rende possible le financement de l'« économie réelle » est souvent mis en avant pour justifier ces assouplissements.

Ce mémoire sera l'occasion de mettre en pratique diverses démarches, récentes et novatrices, sur une base de données professionnelle. Le dernier chapitre proposera l'application d'un modèle de projections de flux d'investissement dans un fonds de Private Equity. Seront alors identifiés les points forts et les axes d'amélioration de ce modèle en vue d'éventuels travaux futurs.

Abstract

Key words: Private Equity, Venture Capital, Buyout, Growth Equity, LBO, alternative assets, low rates, LTEI, IRR, TVPI, modelling, LPs, GP, cash flows

In a context of historically low interest rates, insurers are being forced to adapt or even renew their business model. One of the ways to make this change is to rethink the place of so-called alternative or illiquid assets in investment portfolios. They involve greater risk-taking, but in return, they seem to offer better returns than traditional assets such as sovereign bonds.

Private Equity is one of the asset classes in which insurance companies are showing increasing interest. Private Equity funds allow investors to invest in unlisted companies through long-term investments. In addition, there are many different types of investment vehicles offered by Private Equity firms that meet different strategies. This flexibility and the expectation of high future returns partly explain the growing interest of institutional investors in this asset class.

However, there is the question of how to measure performance. Since Private Equity is not a traditional asset, conventional methods are not adapted. There are therefore metrics dedicated to illiquid assets, but those that are favoured by professionals are not always the most appropriate.

Besides, beyond the aspects linked to performance, the European and French regulatory environments show certain flexibility towards Private Equity, which at least partly removes certain obstacles encountered in the past by insurers. The fact that Private Equity makes it possible to finance the “real economy" is often put forward to justify these relaxations.

This thesis will be an opportunity to put into practice various recent and innovative approaches to a professional database. The last chapter will propose the application of an investment flow projection model in a Private Equity fund. The strengths and areas for improvement of this model will be identified for possible further work.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes vifs remerciements à Claude CHASSAIN, Cyril CHALIN et Baptiste BRECHOT, Associé(e)s du pôle Actuariat Assurance de Deloitte France, pour m'avoir accueilli au sein de Deloitte et rendu possible la rédaction de ce mémoire.

Des remerciements tout particuliers à toi, Arnaud, mon tuteur en entreprise, pour le temps que tu m'as consacré, pour tes précieux conseils, ta bienveillance, ta confiance pleine et entière et pour ton aide qui ne m'a jamais fait défaut. Tu m'as permis de m'intégrer pleinement dans l'équipe et d'évoluer sur de nombreux sujets passionnants. J'ai en effet beaucoup appris à tes côtés.

J'exprime ma gratitude à mon tuteur pédagogique, Didier RULLIÈRE, pour son suivi sans réserve et ses conseils avisés. Plus généralement, je souhaite remercier tout le corps professoral et administratif de l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour la grande qualité des enseignements qui m'ont été dispensés et pour toutes les ressources mises à ma disposition durant mes études, favorisant ainsi mon épanouissement professionnel et personnel.

Enfin, ma profonde reconnaissance envers mes parents pour leur soutien et leur encouragement indéfectibles dans la réalisation de mes projets.

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Remerciements **iv**

Introduction **1**

1 L'étau se resserre **2**
1.1 Situation conjoncturelle et environnement de taux bas . . . 3
1.1.1 Les taux directeurs . . . 3
1.1.2 La situation outre-Atlantique . . . 3
1.1.3 L'environnement européen . . . 4
1.1.4 L'interprétation des taux bas . . . 5
1.2 Une problématique pour les assureurs . . . 6
1.2.1 Diminution du taux de couverture du SCR . . . 6
1.2.2 Baisse du rendement des placements . . . 6
1.2.3 Remontée soudaine des taux d'intérêt . . . 7
1.3 L'assurance vie en première ligne . . . 8
1.3.1 Principe de l'assurance vie . . . 8
1.3.2 Les fonds en euros encore très présents . . . 8
1.4 Les alternatives des assureurs . . . 9
1.4.1 Un nouveau paradigme commercial . . . 9
1.4.2 Un modèle économique optimisé . . . 9
1.4.3 Une plus grande prise de risque sur le portefeuille obligataire . . . 10
1.4.4 L'immobilier et les actifs moins traditionnels . . . 10
1.5 Les spécificités de l'assurance non vie . . . 11

2 Actifs illiquides et capital investissement **12**
2.1 Généralités sur les actifs illiquides . . . 13
2.2 Quelques classes d'actifs alternatifs . . . 15
2.3 Le Private Equity . . . 16
2.3.1 Concepts généraux . . . 16
2.3.2 Le rôle et les perspectives des différents acteurs d'un fonds de Private Equity . . . 17
2.3.3 Frais et flux de trésorerie . . . 20
2.3.4 Les différentes formes de Private Equity . . . 23
2.3.5 Le marché secondaire du Private Equity . . . 27
2.3.6 Le Private Equity coté . . . 30
2.3.7 Les différents types de fonds de capital investissement . . . 32
2.3.8 Environnement économique du Private Equity en France . . . 33
2.4 Mesures de performance . . . 36
2.4.1 La Valeur Actuelle Nette . . . 37
2.4.2 Le Taux de Rentabilité Interne . . . 38

2.4.3 Le Taux de Rendement Interne Modifié . . . 40
2.4.4 Les multiples . . . 41
2.4.5 La *Public Market Equivalent* . . . 42
2.4.6 Synthèse . . . 47

3 Une réglementation et un environnement économique en évolution 49
3.1 Présentation de Solvabilité II . . . 50
3.1.1 Les exigences quantitatives . . . 50
3.1.2 Les exigences qualitatives . . . 52
3.1.3 Les exigences en matière de transmission d'information prudentielle et de publication 52
3.2 Le traitement du Private Equity dans Solvabilité II . . . 53
3.2.1 Le Private Equity comme composante du risque sur actions . . . 53
3.2.2 Amendement du 8 mars 2019 . . . 57
3.3 Les politiques françaises récentes . . . 59
3.3.1 Loi Macron d'août 2015 . . . 60
3.3.2 Loi PACTE . . . 60
3.3.3 Le « rapport TIBI » . . . 61
3.3.4 France Investissement Assureurs . . . 61
3.3.5 Assureurs - Caisse des Dépôts Relance Durable France . . . 62
3.4 Les supports d'investissement en Private Equity proposés par les assureurs . . . 63

4 Analyses exploratoires des données 64
4.1 Les données dans l'univers du Private Equity . . . 65
4.1.1 Sources de données . . . 65
4.1.2 Les indices de Private Equity . . . 67
4.1.3 Les données utilisées dans le cadre de ce mémoire . . . 67
4.2 Description de la base de données et traitements préliminaires . . . 68
4.2.1 Nettoyage des données . . . 69
4.2.2 Regroupement de stratégies . . . 69
4.2.3 Date de naissance et date de fin de vie d'un fonds . . . 71
4.3 Statistiques descriptives de la base de travail . . . 73
4.3.1 Répartition des fonds par millésime et par catégorie . . . 73
4.3.2 Durée de vie des fonds de Private Equity . . . 75
4.3.3 Taille des fonds de Private Equity . . . 78

5 Risques et Performances du Private Equity 80
5.1 Mesures de performance globale . . . 81
5.1.1 Private Equity : quels TRI et quels multiples ? . . . 81
5.1.2 Des mesures de performance plus raffinées . . . 84
5.1.3 Corrélation entre les mesures de performance globale . . . 91
5.2 Performance du Private Equity à court terme . . . 94
5.2.1 Mesurer la performance... . . . 94
5.2.2 ... et mesurer le risque . . . 95
5.2.3 Réplication d'un portefeuille de capital investissement à l'aide de données historiques 96
5.2.4 Algorithme de simulation historique . . . 98
5.2.5 Application à des portefeuilles fictifs . . . 99
5.3 Estimations de la *Value at Risk* . . . 107
5.3.1 Méthode non-paramétrique . . . 107
5.3.2 Approche semi-paramétrique . . . 108
5.3.3 Méthode paramétrique . . . 117
5.3.4 Le *backtesting* . . . 123

5.3.5 Bilan des tentatives d'estimation de la VaR 125

6 Modélisation des flux de Private Equity **127**
6.1 Pourquoi modéliser les *cash flows* futurs ? 128
6.2 Un modèle théorique 129
6.2.1 Quel modèle choisir ? 129
6.2.2 Modéliser les prélèvements 130
6.2.3 Modéliser les distributions 131
6.2.4 Calibration 133
6.2.5 Évaluer la qualité du modèle 139
6.3 Mise en œuvre du modèle 140
6.3.1 Discrétisation d'un processus CIR 140
6.3.2 Traitement des données 145
6.3.3 Calibration 147
6.3.4 Projections et validation du modèle 148
6.3.5 Avantages, inconvénients et pistes d'amélioration 151

Conclusion **153**

A Statistiques descriptives de la base de données et Résultats obtenus **155**

B Éléments théoriques **171**

Table des figures **177**

Liste des tableaux **180**

Abréviations **181**

Bibliographie **183**

Introduction

Le contexte économique actuel pèse sur les engagements des organismes assureurs si bien que les classes d'actifs traditionnelles, comme les obligations et les actions, semblent ne plus donner à ces investisseurs institutionnels totale satisfaction. Une tendance se dessine en effet en direction d'actifs qui ne s'échangent pas sur les marchés financiers cotés, ce sont les actifs illiquides, autrement appelés actifs alternatifs ou actifs privés. Le montant total d'actifs alternatifs sous gestion a été multiplié par 2,7 entre 2010 et 2019, pour atteindre 6 500 milliards de dollars à la fin du premier semestre 2019 [1].

Le Private Equity ou capital investissement fait partie de ces classes d'actifs dites alternatives. Celui-ci permet, comme son nom l'indique, de rentrer au capital d'entreprises non cotées, par le biais de fonds d'investissement. Le Private Equity rend alors possible les investissements dans l'« économie réelle », c'est-à-dire dans des entreprises de taille intermédiaire ou petite, ce qui lui vaut aujourd'hui d'être favorisé par certaines politiques publiques qui mettent en œuvre à l'échelle européenne et française des actions afin d'encourager les investisseurs à se tourner vers cette solution.

Le capital investissement demeure néanmoins aujourd'hui encore méconnu, tant en termes d'opérations menées que du rôle joué par les différentes parties prenantes dans les transactions. Cette méconnaissance peut être imputée à l'opacité qui plane autour de cette classe d'actifs, car si le mot « Private » dans Private Equity est censé s'opposer aux actions échangées sur les marchés cotés, dites Public Equity, il pourrait tout aussi bien se référer à l'information disponible, à savoir une information privée, relayée à la discrétion des sociétés de gestion et réservée à une poignée d'investisseurs déjà actifs sur ce secteur.

Il n'est alors guère aisé d'évaluer les performances et les risques afférents au capital investissement, d'autant que les méthodes classiques d'évaluation ne peuvent pas s'appliquer ici en raison de la nature illiquide de ces actifs.

L'objet de ce mémoire sera donc, dans un premier temps, d'expliquer ce qu'est véritablement le Private Equity, de mettre en lumière les différents types de fonds qui existent et les différentes stratégies qui peuvent être adoptées. Effectivement, le profil des fonds diffère grandement selon les cibles d'investissement définies par la société de gestion. Il s'ensuivra une présentation de mesures de performance, plus ou moins utilisées par les professionnels et les universitaires, afin de déterminer celle(s) qui répondrai(en)t au mieux aux besoins des investisseurs institutionnels, notamment des entités d'assurance. Enfin, une analyse sera proposée à partir de données réelles, issues d'une base de données de référence. Cette analyse aura non seulement pour but de présenter des résultats relatifs à la période étudiée, mais aussi et surtout une méthodologie qu'un institutionnel pourrait reproduire, avec des informations réactualisées par exemple.

En résumé, le propos de ce mémoire est de donner au lecteur une vision générale et synthétique de l'univers du Private Equity, de la place de cette classe d'actifs dans la stratégie des assureurs jusqu'aux approches d'évaluation des risques, sans oublier naturellement les évolutions réglementaires qui ont récemment vu le jour. Ainsi, le lecteur disposera d'outils et de connaissances qui lui permettront d'aborder avec plus de discernement les questions relatives au capital investissement.

1. d'après l'étude suivante *A new decade for private markets : McKinsey Global Private Markets Review* (2020)

1 L'étau se resserre

Sommaire

1.1 Situation conjoncturelle et environnement de taux bas **3**
1.1.1 Les taux directeurs 3
1.1.2 La situation outre-Atlantique 3
1.1.3 L'environnement européen 4
1.1.4 L'interprétation des taux bas 5
1.2 Une problématique pour les assureurs **6**
1.2.1 Diminution du taux de couverture du SCR 6
1.2.2 Baisse du rendement des placements 6
1.2.3 Remontée soudaine des taux d'intérêt 7
1.3 L'assurance vie en première ligne **8**
1.3.1 Principe de l'assurance vie 8
1.3.2 Les fonds en euros encore très présents 8
1.4 Les alternatives des assureurs **9**
1.4.1 Un nouveau paradigme commercial 9
1.4.2 Un modèle économique optimisé 9
1.4.3 Une plus grande prise de risque sur le portefeuille obligataire 10
1.4.4 L'immobilier et les actifs moins traditionnels 10
1.5 Les spécificités de l'assurance non vie **11**

1.1 Situation conjoncturelle et environnement de taux bas

1.1.1 Les taux directeurs

Les banques centrales sont des institutions financières dont le rôle principal est d'assurer la stabilité économique d'un pays, voire d'une zone monétaire. Dans la poursuite de cet objectif, elles peuvent chercher à maintenir un taux d'inflation précis, égal à 2 % pour la Banque Centrale Européenne (BCE) par exemple.

Pour ce faire, le levier de pouvoir majeur dont disposent les banques centrales est le niveau des taux directeurs. Dans un contexte de taux bas, le recours à la dette est moins cher, ce qui favorise les investissements, tant pour les entreprises que pour les particuliers. Or, les investissements permettent de stimuler le développement économique. Le contrôle des taux directeurs permet donc de réguler l'inflation.

Il existe trois taux directeurs différents :

— Le *taux de rémunération des dépôts* est le taux auquel sont rémunérés les dépôts des banques ou autres institutions financières auprès de la banque centrale ;

— Le *taux de refinancement* est le taux auquel peuvent emprunter les différentes institutions financières auprès de la banque centrale ;

— Le *taux d'escompte*, ou taux du prêt marginal, est le taux des prêts à très court terme alloués par la banque centrale aux établissements financiers.

Le taux de refinancement est le principal instrument utilisé par les banques centrales. Ce taux sera donc le point d'attention majeur lors de l'étude de l'évolution des politiques monétaires des banques centrales.

1.1.2 La situation outre-Atlantique

Aux États-Unis les choses sont un peu différentes, la Réserve fédérale des États-Unis (Fed) n'a pas en effet pour taux cible un taux de refinancement à proprement parler, mais un taux appelé *Federal Funds Rate* : c'est le taux d'intérêt auquel les banques s'octroient des prêts au jour le jour. Dès lors, si l'objectif est de confronter les politiques mises en place par la Fed et par la BCE, il conviendra de comparer le *Fed Funds Rate* de la Fed avec le taux de refinancement de la BCE.

Au sortir des Trente Glorieuses, période de prospérité économique entre les années 1946 et 1975, l'inflation croît jusqu'à atteindre 13,29 % en 1979. Bien loin de l'objectif de 2 % fixé par la Fed. Afin d'endiguer cette dynamique, Paul Volcker [1] décide de relever le taux directeur à 20 % en 1981. Cette mesure aura pour effet d'abaisser l'inflation à 3,2 % en 1983, au prix d'une récession.

Depuis cette période, le *Fed Funds Rate* a connu une évolution à la baisse. La Fed a en effet été contrainte de baisser son taux directeur plusieurs fois, notamment à la suite de l'éclatement de la bulle internet en 2000 et lors de la crise des *subprimes* en 2007, jusqu'à son plus bas niveau historique, 0,25 %, en décembre 2008.

À partir de décembre 2015, la Fed entreprend une remontée progressive des taux. Cependant, afin de soutenir l'économie américaine face au ralentissement de la croissance et aux menaces économiques, le taux directeur est abaissé de 0,25 % le 31 juillet 2019, pour la première fois depuis 2008. S'ensuivront deux autres baisses en septembre et octobre 2019, faisant tomber le *Fed Funds Rate* à 1,75 %. En réponse à l'épidémie de Covid-19, la Réserve fédérale des États-Unis abaisse son taux directeur à 0,25 % le 15 mars 2020.

1. Président de la Fed entre 1979 et 1987

1.1.3 L'environnement européen

La Réserve fédérale des États-Unis n'a pas l'apanage des taux bas, le taux de refinancement de la BCE présente également un niveau historiquement bas. Ce taux est en effet nul depuis mars 2016. Alors que la BCE laissait entrevoir, début 2019, une augmentation de son taux directeur avant fin 2019, ses décisions ont été reportées par deux fois lors du premier semestre de la même année.

Avant de relever son taux de refinancement, la BCE souhaite s'assurer d'une croissance durable et d'une inflation proche des 2 %.

Le schéma ci-dessous (1.1) permet de comparer les décisions prises par les principales banques centrales au sujet de leurs taux directeurs respectifs.

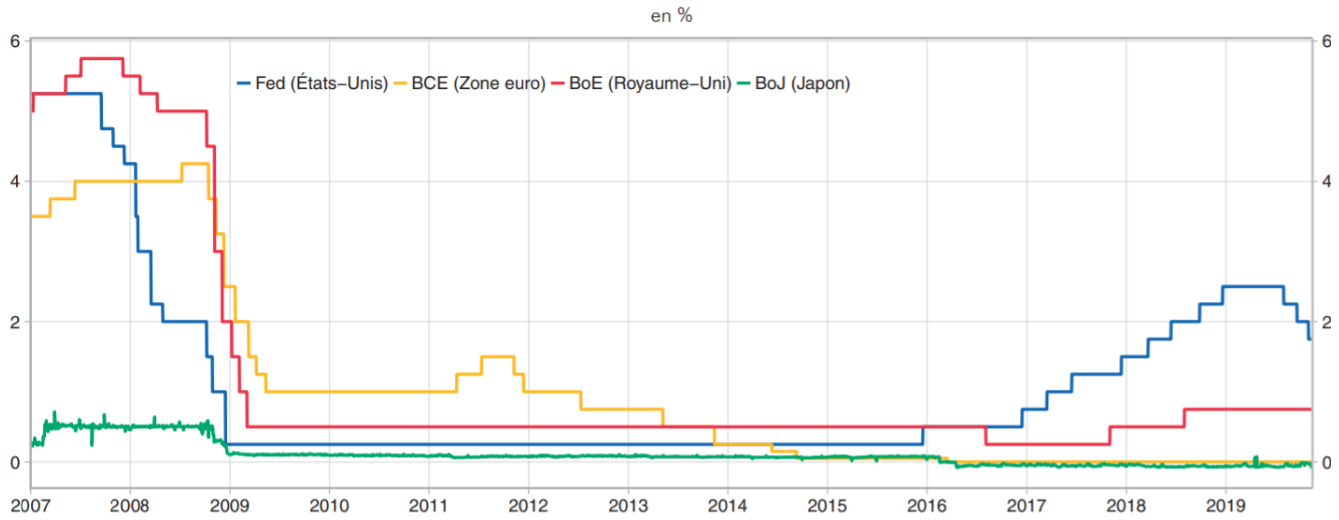


FIGURE 1.1 – Taux directeurs des principales banques centrales, en %

Source : Note de conjoncture Insee décembre 2019

À l'échelle nationale, en France, il est également possible de regarder l'évolution du taux des Obligations assimilables du Trésor (OAT). Ces obligations sont des titres de dette de l'État français, émis pour une durée allant de deux à cinquante ans.

Le taux de l'OAT 10 ans est passé sous la barre des 0 % en juin 2019 (1.2). Cela signifie que la dette française est perçue comme peu risquée par les investisseurs, puisqu'ils sont prêts à payer pour placer leur argent sur cet actif et donc payer pour octroyer un prêt à la France. Cela peut signifier que « dans un environnement mondial de faible investissement et de forte épargne, les taux bas vont durer » comme l'exprimait François Villeroy de Galhau [2] dans un entretien accordé aux Échos en octobre 2019. En outre, un rapport sénatorial *Projet de loi de finances pour 2021 : Le budget de 2021 et son contexte économique et financier* (2020) datant de novembre 2020 précise que « les marchés financiers n'anticipent pas de remontée des taux longs à cet horizon [fin de l'exercice 2021], tandis que le *Consensus forecasts* d'octobre [2020] table sur un scénario de remontée beaucoup plus lent, dans lequel les taux à dix ans n'atteindraient 0,7 % que fin 2023 ».

2. Gouverneur de la Banque de France depuis le 1er novembre 2015

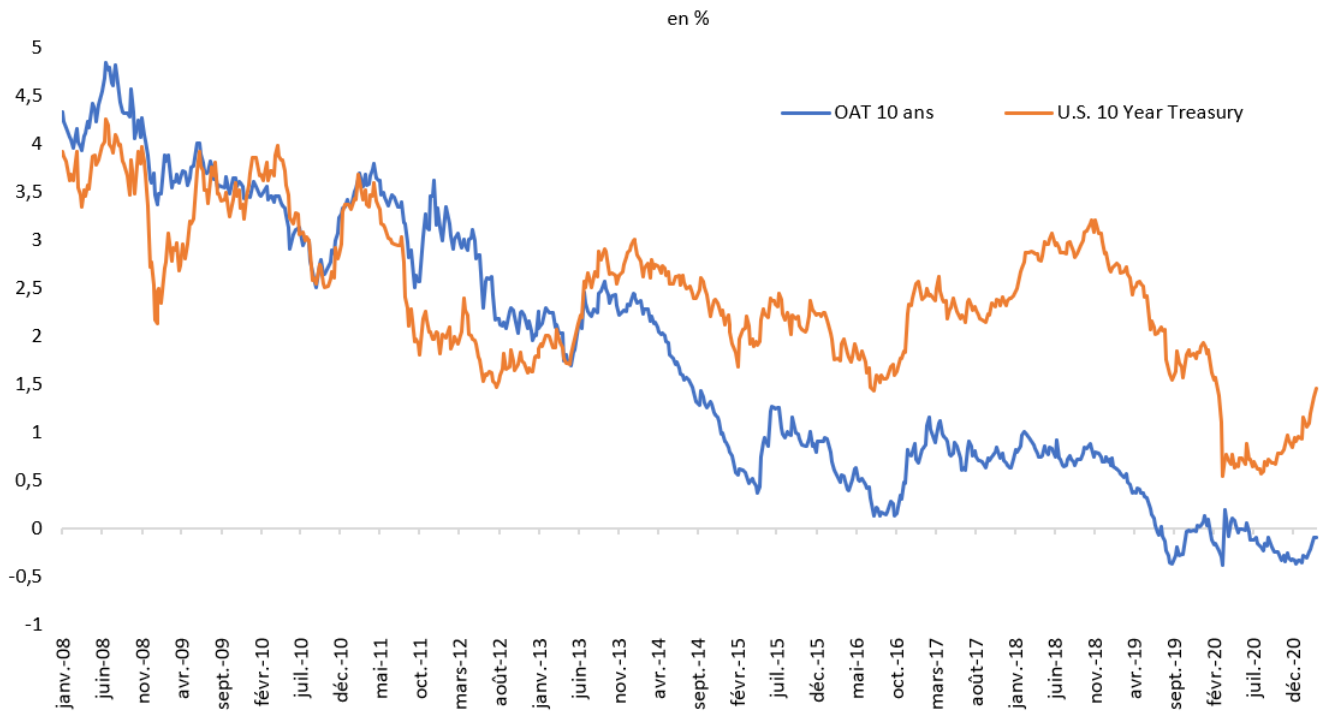


FIGURE 1.2 – Taux 10 ans France et États-Unis, en %

Source : Banque de France - Réserve fédérale des États-Unis

1.1.4 L'interprétation des taux bas

Stanley FISCHER [3] souligne, lors d'une conférence FISCHER (2016), trois raisons de prêter attention aux taux bas.

Tout d'abord, de faibles taux d'intérêt long terme pourraient indiquer une croissance économique future morose. C'est pour Stanley FISCHER l'élément le plus important puisque la croissance économique est au cœur des préoccupations de nombreux pays.

En second lieu, les taux bas rendent l'économie plus vulnérable aux chocs et aux récessions. Comme vu précédemment, baisser les taux directeurs permet aux banques centrales de stimuler l'économie ; or, si les taux sont déjà très bas, la marge de manœuvre dont disposent les banques centrales est réduite et elles doivent se tourner vers des politiques monétaires dites non conventionnelles, comme le *quantitative easing*, la *forward guidance* ou les *targeted longer-term refinancing operations (TLTRO)*.

Enfin, la stabilité financière se trouve menacée car les marges d'intérêts compressées ne permettent plus à certains investisseurs institutionnels de se rémunérer comme à l'accoutumée. Ce point est également capital pour les assureurs, notamment au regard des rendements qu'ils doivent dégager afin de couvrir leurs engagements sur l'assurance vie en euros.

Stanley FISCHER termine son intervention en soulignant qu'il est difficile de déterminer les politiques publiques à employer dans un environnement de taux bas. Selon lui, la mise en œuvre de certaines actions, telles que le développement d'une meilleure éducation, l'amélioration des infrastructures publiques ou l'encouragement à l'investissement privé, pourraient néanmoins contribuer à une croissance plus rapide du niveau de vie et ainsi permettre de sortir de cet environnement de taux bas.

3. ancien vice-président du conseil de la Réserve fédérale des États-Unis

1.2 Une problématique pour les assureurs

Denis KESSLER, Président Directeur Général de Scor et ancien vice-président du MEDEF [4], déclarait en 2014 au *Financial Times* que le maintien des taux d'intérêt à un niveau historiquement bas « ruinait peu à peu le secteur de l'assurance et de la réassurance ». De faibles taux d'intérêt ont en effet de multiples conséquences pour les assureurs.

1.2.1 Diminution du taux de couverture du SCR

Tout d'abord, le taux de couverture du *Solvency Capital Requirement* (SCR) [5] est amené à baisser.

La baisse des taux d'intérêt se répercute en effet sur la courbe des taux sans risque publiée par l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA), utilisée par les organismes d'assurance pour actualiser leurs flux futurs. Cette courbe des taux, sous Solvabilité II, est utilisée pour évaluer les provisions techniques ainsi que pour déterminer le montant du SCR. Dès lors, des taux d'actualisation plus faibles entraînent une augmentation des provisions techniques et du capital de solvabilité requis.

De plus, selon l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR) *La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France au premier semestre 2019* (p. d.), étant donné que la duration de l'actif est en moyenne inférieure à celle du passif au sein du bilan des assureurs, la hausse des provisions techniques induite par la baisse des taux n'est pas totalement compensée par l'augmentation des actifs en valeur de marché, ce qui a pour conséquence la diminution de l'actif net [6] et donc des fonds propres éligibles à la couverture du SCR.

Le taux de couverture du SCR étant le rapport entre fonds propres éligibles et SCR, une baisse des taux a donc un double effet sur la diminution du ratio de solvabilité.

Entre fin 2018 et fin juin 2019, l'ACPR note que le taux moyen de couverture du SCR des assureurs qui ont une part de marché en France est passé de 240 % à 225 %.

Cette diminution du taux de couverture du SCR est davantage marquée chez les organismes vie et mixtes (1.3). Ces institutions sont en effet plus sensibles au contexte de taux bas car le montant de provisions techniques qu'elles doivent inscrire au bilan est supérieur à celui des organismes non vie. Toujours selon l'ACPR, au deuxième trimestre 2019, les provisions techniques liées aux activités vie (hors UC) correspondent en effet à 60 % du bilan des assureurs, tandis que celles concernant les activités non vie ne représentent que 4,6 % du bilan.

Cette baisse du taux moyen de couverture du SCR rend les différents organismes assureurs plus vulnérables à de futurs chocs économiques.

1.2.2 Baisse du rendement des placements

La baisse des taux entraîne également une diminution des rendements des placements financiers des assureurs. Entre 2013 et 2018, toujours selon l'ACPR, le taux moyen de rendement de l'actif est passé de 3,5 % à 2,7 %. Cette tendance risque de perdurer dans le contexte actuel.

En outre, de nombreux titres obligataires dans le portefeuille d'organismes d'assurance avaient, fin 2018, une maturité résiduelle faible. 21 % des obligations des assureurs présentaient effectivement une maturité résiduelle inférieure à trois ans.

4. Le Mouvement des entreprises de France est une organisation patronale qui représente les entreprises françaises.
5. Le *Solvency Capital Requirement* (SCR), ou Capital de Solvabilité Requis, est le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur. C'est un niveau réglementaire défini par Solvabilité II.
6. L'actif net est égal à la différence entre la valeur de marché des actifs et la juste valeur des passifs liés aux contrats d'assurance.

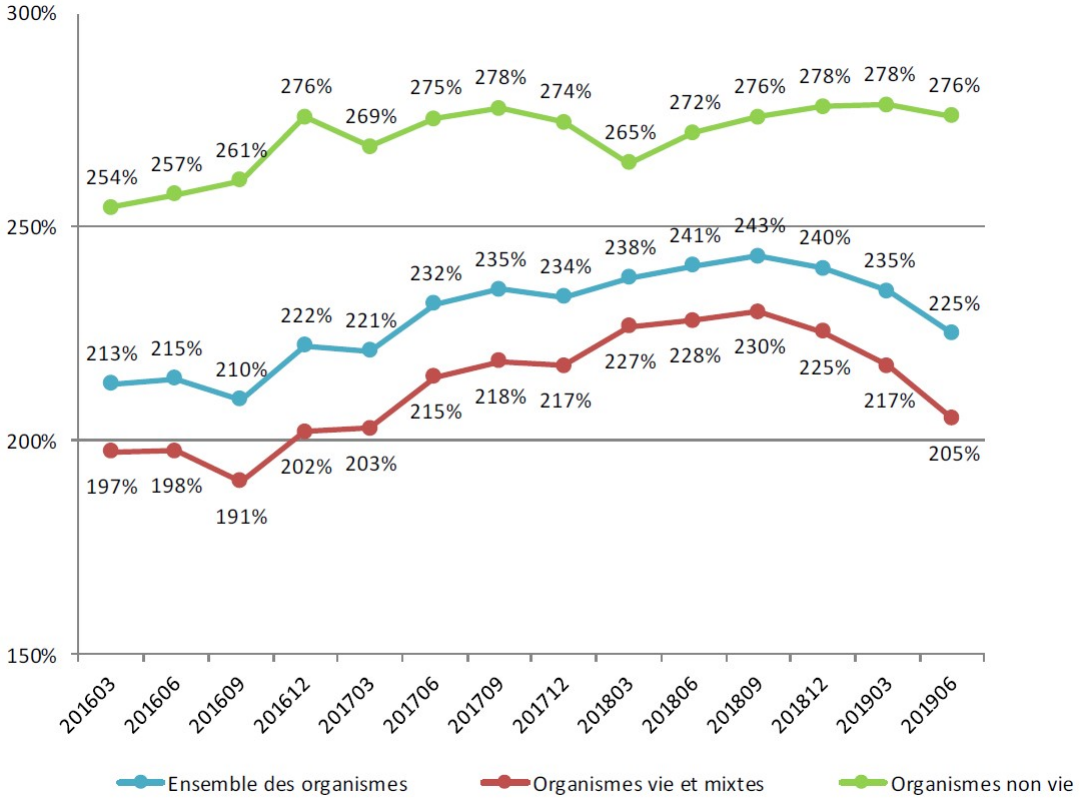


FIGURE 1.3 – Évolution du taux de couverture du SCR au sein des organismes d'assurance français

Source : ACPR

Les organismes d'assurance se verront donc contraints de remplacer ces titres obligataires. Or, les nouvelles obligations devraient présenter des taux de rendement actuariel[7] inférieurs à ceux des anciennes obligations. Cela devrait donc conduire à une baisse du taux moyen de rendement de l'actif des assureurs, toutes choses égales par ailleurs.

1.2.3 Remontée soudaine des taux d'intérêt

Une augmentation abrupte des taux d'intérêt rend les assureurs vulnérables. En cas de rapide hausse des taux, ils pourraient en effet voir de nombreux assurés procéder au rachat de leur contrat d'assurance vie. Si les taux augmentent, les assurés voudront naturellement bénéficier de meilleurs taux d'intérêt pour leur épargne. Or, les assureurs qui auront en portefeuille d'anciennes obligations, à taux faibles, verront le prix de ces actifs obligataires diminuer et ne seront pas en mesure de verser aux assurés les taux qu'ils attendent, sauf s'ils ont recours à la Réserve de Capitalisation (RC) ou à la Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB)[8]. Les assurés pourraient alors se tourner vers de nouveaux organismes d'assurance vie qui pourront honorer les taux attendus puisqu'ils n'auront pas été touchés par la période de taux bas.

Pour cette raison, l'EIOPA prend donc en compte dans les différents *stress test* qu'elle publie un scénario de remontée brutale des taux d'intérêt. Elle a montré dans *EIOPA Insurance Stress Test report* (2018) qu'une hausse des taux entraînerait une diminution du ratio de solvabilité moyen des assureurs.

7. Le taux de rendement actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui permet d'égaliser le prix d'une obligation et la somme de ses flux futurs actualisés.

8. aussi appelée Provision pour Participation aux Excédents (PPE)

1.3 L'assurance vie en première ligne

Parmi les différentes activités assurantielles, c'est le domaine de l'assurance vie qui est le plus touché par la baisse des taux.

1.3.1 Principe de l'assurance vie

Un contrat d'assurance vie lie un assuré à une société d'assurance. En échange du versement d'une prime unique ou de primes périodiques, la compagnie d'assurance s'engage à verser à l'assuré un capital à une date prédéterminée ou une rente [9].

Le marché européen de l'assurance vie est principalement composé de trois types de contrats :

1. les contrats en *euros* ;
2. les contrats en *Unités de Compte (UC)* ;
3. les contrats *multi-supports*.

S'agissant des contrats d'assurance vie en *euros*, le risque est porté par la société d'assurance. L'assuré verse en effet une prime périodique ou un capital à l'assureur qui va ensuite le placer sur les supports de son choix. Ce capital est garanti par l'assureur, c'est à dire que l'assuré retrouvera au minimum ce qu'il a versé, après déduction des frais de gestion. L'assureur peut également proposer un Taux Minimum Garanti (TMG). Afin de couvrir ces engagements, les sociétés d'assurance se sont principalement concentrées sur des portefeuilles d'obligations souveraines ou d'obligations d'entreprises bien notées [10].

Dans le cas des contrats en *UC*, c'est l'assuré qui supporte le risque de marché, car l'assureur ne s'engage qu'à hauteur d'un certain nombre d'unités de comptes (mais pas de leur montant). L'assuré a donc le choix entre différentes allocations d'actifs, plus ou moins risquées.

Les contrats *multi-supports* permettent à l'assuré d'avoir à la fois accès à des contrats en euros et à des contrats UC, comme l'euro-croissance par exemple.

1.3.2 Les fonds en euros encore très présents

En 2017 et 2018, les collectes d'assurance vie étaient principalement orientées vers des supports en Unités de Compte. L'année 2019 a néanmoins marqué un revirement des collectes vers les supports en euros (1.4).

Cette hausse de la collecte sur les produits en euros est problématique dans un contexte de taux bas car les actifs mis en représentation des engagements sur les supports en euros sont majoritairement des titres obligataires. Or, si le rendement des obligations diminue, il devient plus compliqué pour l'organisme assureur de verser à l'assuré le taux garanti.

Au 31 décembre 2018, les encours totaux en assurance vie s'élevaient à 1 700 milliards d'euros, dont environ 80 % en euros (soit 1 354 milliards d'euros) et le reste en UC. Au 1er mars 2019, les encours en euros affichent une progression de 0,5 % pour atteindre les 1 361 milliards d'euros, contre une progression de plus de 6 % pour les UC.

9. Les caractéristiques de la rente peuvent dépendre d'attributs intrinsèques à l'assuré (comme son âge par exemple), ou d'options qu'il choisira (montant du taux technique, réversion, etc.).

10. Les agences de notation sont chargées d'évaluer la solvabilité d'émetteurs de produits financiers, ce qui permet ensuite de classer les différents produits par profil de risque. Les trois principales agences de notation qui exercent aujourd'hui sur le marché sont Standard & Poors, Moody's Investors Service et Fitch Ratings. Connues sous l'appellation *Big Three*, elles détiennent plus de 90 % du marché de la notation d'entreprises.

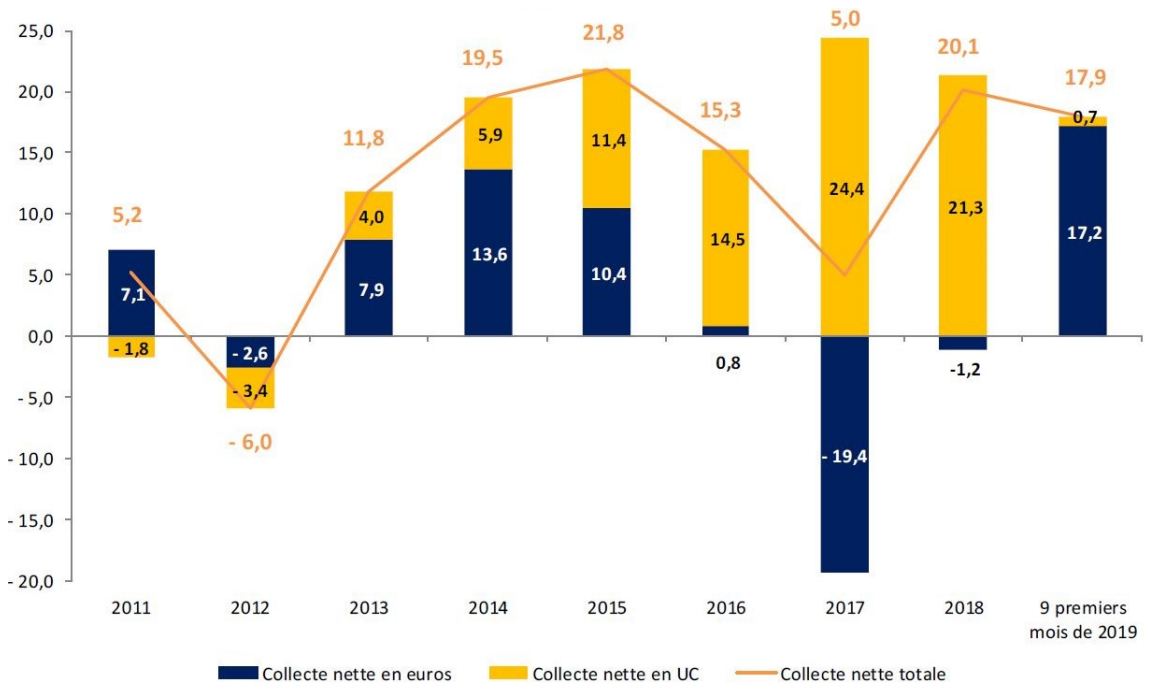


FIGURE 1.4 – Collecte nette sur les supports rachetables (en milliards d'euros)

Source : collecte réglementaire sur les flux d'assurance vie - ACPR

1.4 Les alternatives des assureurs

Plusieurs chercheurs de l'EDHEC Economics Research Centre, ARIAS, DÉDEREN et al. (2016), analysent et proposent des solutions vers lesquelles pourraient se tourner les assureurs dans l'environnement de taux bas actuel.

1.4.1 Un nouveau paradigme commercial

La première réponse envisagée a trait à l'offre commerciale des assureurs. Les compagnies d'assurance peuvent tout d'abord chercher à transférer les contrats en euros existants vers des contrats en UC, afin de se délester d'une partie du risque de marché. L'assuré doit évidemment donner son accord pour une telle opération.

En ce qui concerne les nouveaux contrats, les assureurs souhaitent aujourd'hui réduire leur exposition sur des fonds euros et proposent ainsi davantage de fonds UC. Il s'agit ici de surveiller le risque réputationnel et le risque légal ; un assureur doit faire preuve d'éthique et se doit d'informer l'assuré sur les risques encourus lors de la souscription d'un contrat en Unités de Compte plutôt que d'un contrat en euros.

1.4.2 Un modèle économique optimisé

Les assureurs peuvent également optimiser leur structure de coûts et doter des provisions destinées à couvrir les dépenses futures. Le Code des assurances autorise les compagnies d'assurance à doter une Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB), ce qui leur permet de disposer de huit années pour redistribuer la participation aux bénéfices. Dès lors, l'assureur pourra puiser dans cette provision en cas de difficulté à servir les taux garantis.

1.4.3 Une plus grande prise de risque sur le portefeuille obligataire

Une autre alternative pour les assureurs est l'allongement de la duration des obligations. Cette manipulation permet à la fois d'améliorer le rendement des obligations et de réduire le *gap* de duration entre l'actif et le passif [11]. En effet, plus la duration d'une obligation est élevée, plus le risque qui lui est inhérent est élevé et donc plus le taux de rendement actuariel de celle-ci est élevé.

Néanmoins, cette manœuvre peut être risquée car la sensibilité du prix d'une obligation au taux d'intérêt est proportionnelle, au signe près, à sa duration. La duration est en effet égale à l'élasticité du prix de l'obligation au taux actuariel (au signe près). Soit D la duration de l'obligation, P son prix et r le taux actuariel, alors :

$$D = -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}}$$

Ainsi, investir dans des obligations qui ont de longues durations fait courir le risque d'une plus forte baisse de prix en cas de remontée des taux. Cette stratégie peut en outre être remise en question dans un contexte d'aplatissement de la courbe des taux car, dans un tel cas, l'allongement de la duration d'un portefeuille obligataire ne pourrait avoir qu'un effet minime sur l'augmentation du rendement.

Malgré ce risque d'exposition prolongée à des obligations au rendement faible, certains assureurs ont déjà entrepris la démarche d'allonger la duration de leur portefeuille obligataire, comme l'expliquait le directeur de la politique d'investissement de Generali France en décembre 2019 ABADIE (2019).

L'achat d'obligations moins bien notées peut également contribuer à l'augmentation du rendement d'un portefeuille obligataire. Si les assureurs se concentrent aujourd'hui essentiellement sur des *investment grade*, se tourner vers des obligations *high yield* leur permettrait d'accéder à davantage de rendement, au prix non seulement d'un risque plus élevé, mais aussi d'une plus grande exigence de capital sous Solvabilité II [12].

1.4.4 L'immobilier et les actifs moins traditionnels

Comme vu précédemment, les leviers dont disposent les assureurs sur leur portefeuille obligataire sont limités et se heurtent à de lourds écueils. C'est pourquoi certains acteurs se tournent vers d'autres classes d'actifs qui leur octroient une plus grande liberté d'action.

Parmi ces classes d'actifs se trouve, tout d'abord, l'immobilier. Les assureurs peuvent investir en dette ou en capital dans de tels projets. Cette classe d'actifs est plébiscitée par les assureurs pour plusieurs raisons. L'immobilier permet de se prémunir, au moins partiellement, contre le risque d'inflation, comme l'explique le responsable stratégie investissement immobilier de BNP Paribas Wealth Management TANSENS (2018). De plus, le choc appliqué à des investissements sous forme de dette dans l'immobilier sous Solvabilité II est de 25 %, ce qui est inférieur au choc appliqué à la plupart des actions.

Enfin, des classes d'actifs alternatifs pourraient apporter des solutions aux différentes problématiques rencontrées par les assureurs dans le contexte de taux bas actuel. Qu'il s'agisse d'infrastructure, de dette privée ou de capital investissement [13], ces différentes classes d'actifs permettent l'allongement de la duration du portefeuille et l'accès à davantage de rendement en échange d'une prise de risque supplémentaire [14].

11. différence entre la duration de l'actif et du passif
12. Le SCR_{bonds} sous Solvabilité II est une fonction croissante du risque qui pèse sur les obligations.
13. aussi appelé Private Equity (PE)
14. Ces notions seront plus amplement abordées dans la suite du mémoire.

À ce stade, il est important de noter que des actifs non traditionnels sont aujourd'hui envisagés par les organismes d'assurance afin de faire face aux enjeux qui pèsent notamment sur la rentabilité de la compagnie ou la gestion actif-passif des contrats en euros.

1.5 Les spécificités de l'assurance non vie

Les alternatives évoquées précédemment s'appliquent principalement au cadre de l'assurance vie. La problématique des longues durations est en effet beaucoup moins prégnante dans le domaine de l'assurance non vie, puisque la plupart des contrats reposent sur des durées beaucoup plus courtes. Dès lors, le levier d'action principal dont disposent les organismes d'assurance non vie afin d'affronter l'environnement des taux d'intérêt bas est l'amélioration du ratio combiné.

Le ratio combiné est un indicateur fondamental qui permet à la compagnie d'assurance de déterminer si un produit est rentable ou non [15]. Ce ratio est égal au rapport de la somme des frais généraux, des frais d'acquisition et des coûts de sinistres sur les primes nettes reçues. Plus le ratio combiné est faible, plus le produit est donc rentable. Afin de réduire ce ratio, l'organisme d'assurance peut ainsi jouer sur différents paramètres.

Néanmoins, il peut aujourd'hui s'avérer ardu pour les sociétés d'assurance de manipuler ce ratio combiné, puisqu'il se situe au-dessus de 95 % en moyenne en 2018 (1.5). Selon Fitch *Fitch Ratings 2020 Outlook : French Insurance* (2019), la situation actuelle devrait perdurer puisque le contexte de taux bas pousse les bancassureurs à proposer de plus en plus de produits d'assurance non vie, ce qui crée de la concurrence avec les acteurs traditionnels et réduit donc les marges de manœuvre.

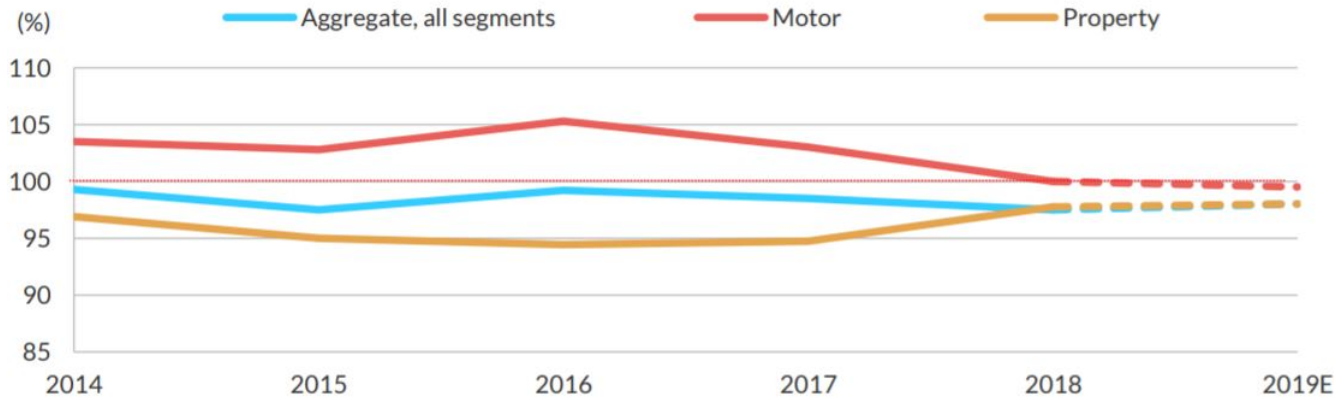


FIGURE 1.5 – Évolution du ratio combiné relatif à l'activité non vie en France

Source : Fitch Ratings, Fitch Estimates, FFA

Ainsi, l'optimisation de la rentabilité demeure tout de même au cœur des objectifs des acteurs de l'assurance non vie, d'autant plus que certains contrats non vie sont assis sur des passifs qui ont de longues durations, comme les produits de dépendance ou de prévoyance.

15. Nous ne rentrerons pas ici dans les subtilités de la définition du ratio combiné puisque ce n'est pas le propos du mémoire. Pour plus de détails, se référer à *Ratio S/P et ratio combiné - Quelle est la définition la plus pertinente ?* (2016).

2 Actifs illiquides et capital investissement

Sommaire

2.1 Généralités sur les actifs illiquides **13**
2.2 Quelques classes d'actifs alternatifs **15**
2.3 Le Private Equity **16**
2.3.1 Concepts généraux 16
2.3.2 Le rôle et les perspectives des différents acteurs d'un fonds de Private Equity 17
2.3.3 Frais et flux de trésorerie 20
2.3.4 Les différentes formes de Private Equity 23
2.3.5 Le marché secondaire du Private Equity 27
2.3.6 Le Private Equity coté 30
2.3.7 Les différents types de fonds de capital investissement 32
2.3.8 Environnement économique du Private Equity en France 33
2.4 Mesures de performance **36**
2.4.1 La Valeur Actuelle Nette 37
2.4.2 Le Taux de Rentabilité Interne 38
2.4.3 Le Taux de Rendement Interne Modifié 40
2.4.4 Les multiples 41
2.4.5 La *Public Market Equivalent* 42
2.4.6 Synthèse 47

2.1 Généralités sur les actifs illiquides

Dans un contexte de taux historiquement bas, les investisseurs institutionnels sont donc à la recherche d'alternatives aux marchés obligataires et actions leur permettant d'avoir accès à un meilleur rendement BIZRI et al. (2018). Les actifs illiquides, ou alternatifs, apparaissent alors comme autant d'opportunités de surperformer le marché. Le taux de rendement interne de ces actifs peut en effet atteindre 25 %, ils présentent cependant un plus grand risque que les actifs cotés.

Cet attrait des assureurs pour les actifs alternatifs se traduit au travers de différentes études *Global Insurance Report* (2019), *Natixis Global Insurance Survey* (2019) qui présentent, entre autres, les objectifs de réallocations des assureurs. Parmi le panel interrogé par Natixis Investment Managers [1], 38 % prévoient d'augmenter leur allocation en immobilier d'ici 2023, évolution qui passe à 41 % concernant le Private Equity et 44 % pour la dette privée (2.1). Les organismes interrogés prévoient *in fine* d'augmenter leur part d'immobilier et d'actifs alternatifs [2] d'1,6 % en 2020 (2.2). En outre, 75 % des assureurs interrogés estiment qu'il est aujourd'hui indispensable d'investir dans des actifs alternatifs afin de diversifier leur portefeuille. Ces actifs sont pour 62 % des assureurs une manière de réduire la corrélation avec le marché, pour 53 % d'entre eux il s'agit de remplacer en partie les obligations et enfin, 51 % des institutions interrogées voient dans les classes d'actifs alternatifs une façon d'améliorer le rendement de leur portefeuille.

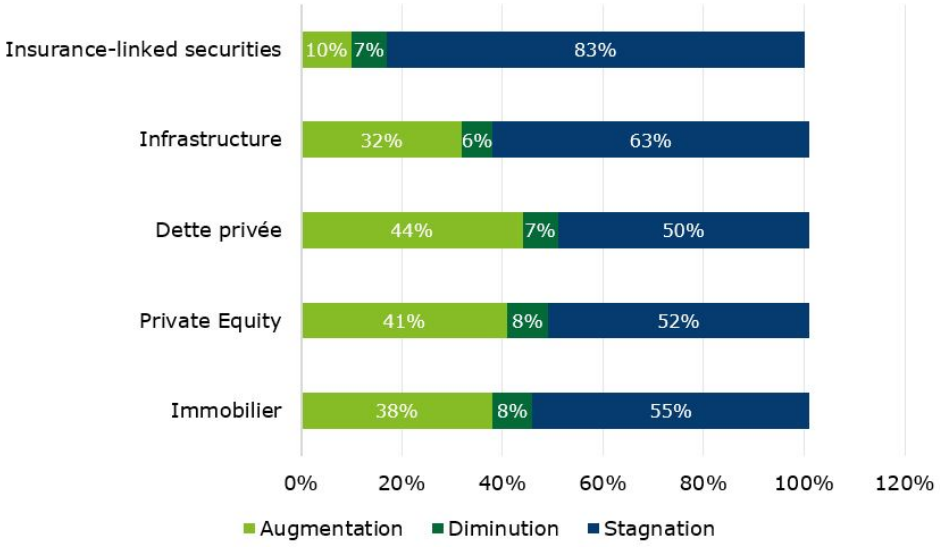


FIGURE 2.1 – Évolution anticipée à 3 ans de l'allocation en actifs alternatifs - *la somme peut être différente de 100 % en raison des arrondis*

Source : Natixis IM

L'EIOPA a également publié un rapport en juillet 2020 *Impact of ultra low yields on the insurance sector, including first effects of COVID-19 crisis* (2020) dans lequel sont évoqués les risques et conséquences liés à la situation macroéconomique de taux bas et à la crise du Covid-19. Parmi les éléments étudiés est présentée l'évolution trimestrielle de l'allocation d'actifs des organismes assureurs de l'Espace Économique Européen entre le premier trimestre de 2016 et le dernier trimestre de 2019. La poche d'actions non cotées est passée de 7,9 % à 9,8 %, soit une augmentation de 24 %.

1. Panel constitué de 200 organismes d'assurance à l'échelle internationale, dont 30 institutions françaises.
2. Les actifs alternatifs englobent les classes d'actifs non traditionnelles, notamment l'infrastructure, la dette privée ou le Private Equity.

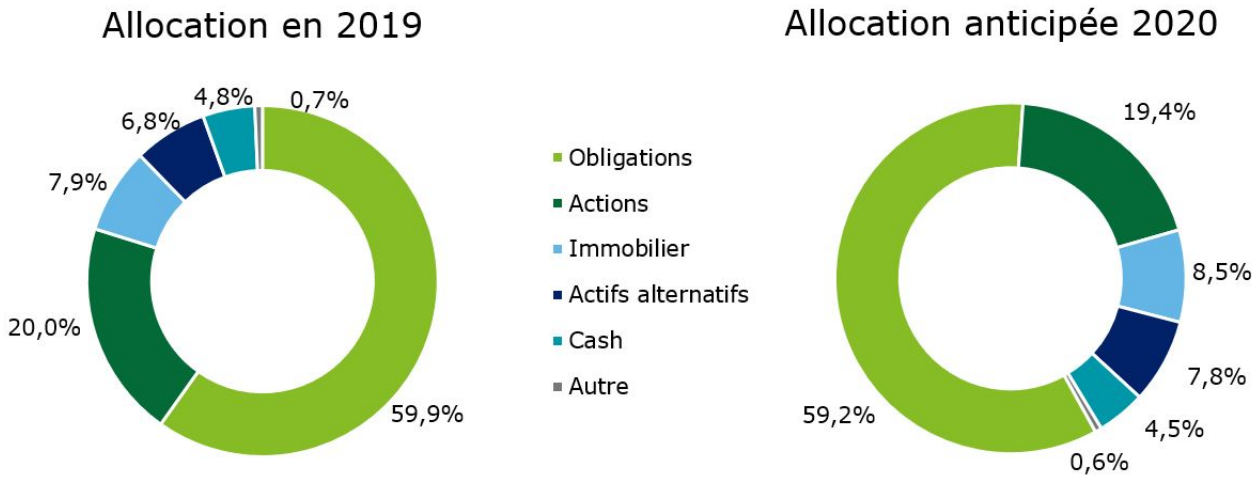


FIGURE 2.2 – Évolution anticipée pour 2020 de l'allocation d'actifs -
la somme peut être différente de 100 % en raison des arrondis

Source : Natixis IM

Tâchons tout d'abord de décrire ce que recouvre le terme d'*actif illiquide*. Il n'existe pas de définition péremptoire des actifs illiquides dans la littérature. Ces actifs recouvrent néanmoins certaines caractéristiques communes, c'est ce qu'explique Axel JAMES, ancien directeur du service actuariat de Deloitte : « La notion d'illiquidité peut se mesurer à la fois sur des critères fondamentaux – il s'agit d'actifs dont la valorisation n'est pas aisée – et des critères de marché – faiblesse des volumes, absence de teneur de marché » SCHAFROTH (2018). La notion d'actif illiquide recouvre donc en réalité plusieurs classes d'actifs, dont le capital investissement, la dette ou encore l'immobilier. Ces actifs sont également appelés actifs alternatifs dans le sens où ce ne sont pas des actifs traditionnels, comme peuvent l'être les actions ou les obligations, du point de vue des investisseurs institutionnels.

Ces actifs, qui s'échangent donc de gré à gré [3], comportent une prime d'illiquidité, liée au fait qu'ils ne sont pas immédiatement échangeables sans perte significative de valeur. C'est cette prime qui confère à ces actifs un rendement particulièrement intéressant.

Les actifs illiquides s'inscrivent ainsi dans une vision à long terme du point de vue de l'investisseur. La durée de détention de tels titres peut en effet s'étaler de trois à plus de quinze ans. De ce fait, il existe un déséquilibre certain entre actifs liquides et illiquides au sein du bilan de l'assureur. Certains assurés seront effectivement conduits à rompre le contrat d'assurance pour des raisons diverses : rachat anticipé d'un contrat d'assurance vie, décès, etc. Ces départs seront financés par la poche d'actifs liquides puisqu'il n'est pas possible de convertir rapidement les actifs illiquides en cash, au vu de leurs caractéristiques intrinsèques. La proportion d'actifs illiquides au bilan de l'assureur risque alors d'augmenter.

Eu égard aux différents points évoqués ci-dessus, il apparaît alors important de développer des méthodes qualitatives et quantitatives destinées à mesurer et contrôler les risques relatifs à ces actifs illiquides afin de mieux les appréhender.

Après avoir évoqué les caractéristiques générales afférentes aux actifs illiquides, il convient de définir plusieurs classes d'actifs alternatifs et d'en étudier leurs singularités. Avant d'exposer un quelconque modèle de valorisation, il est en effet nécessaire de comprendre le fonctionnement de ces classes d'actifs ainsi que le rappelle Peter LYNCH : « *Invest in what you know* » [4].

3. en dehors du marché coté
4. Peter LYNCH a été gestionnaire du fonds Fidelity Magellan entre 1970 et 1990.

2.2 Quelques classes d'actifs alternatifs

L'objectif est ici de présenter, dans les grandes lignes, quelques classes d'actifs privés avant d'étudier avec plus de précision celle qui est au centre de ce mémoire, à savoir le capital investissement.

L'infrastructure

Cette classe d'actifs concerne les installations, ou équipements, qui contribuent aux activités économiques et sociales des individus. Les actifs d'infrastructure sont donc présents dans de nombreux secteurs d'activité, comme le domaine de l'énergie, des télécommunications, de la santé, ou encore des transports pour ne citer qu'eux.

La croissance d'un pays, d'une nation, est supportée par la construction d'infrastructures nouvelles qui lui permettent d'échanger avec les autres États, d'améliorer les conditions de vie de la population et de supporter des projets innovants. Les investissements dans les infrastructures sont donc des éléments clés du développement.

Les projets d'infrastructure sont des actifs de long terme : ils nécessitent des investissements initiaux très importants, mais affichent de grandes durées vie et donc de longues périodes d'exploitation. Par ailleurs, ces projets induisent de nombreux risques, en particulier lors de la phase de construction. Au vu de ces éléments et des caractéristiques liées à l'utilité publique des infrastructures, les États se portent souvent garants lorsqu'il s'agit de financer ces équipements.

Il faut différencier 2 types d'actifs d'infrastructure :

— les actifs *greenfield* sont des projets d'infrastructure en phase de construction, le risque sous-jacent est donc très grand, c'est pourquoi l'État joue la plupart du temps un rôle capital à ce stade ;

— les actifs *brownfield* désignent quant à eux les infrastructures déjà construites, ils offrent donc une meilleure visibilité sur les flux futurs i.e. les revenus d'exploitation.

Les projets d'infrastructure sont généralement financés via des Partenariats Public-Privé (PPP) qui permettent à un organisme public de recourir à un investisseur privé pour financer et exploiter une installation de service public. Ces partenariats permettent aux pouvoirs publics d'avoir accès à l'expertise apportée par l'investisseur privé et de partager les risques entre les différents intervenants.

Le lecteur intéressé pourra se référer aux mémoires de LE GALL (2017) et de TAHRI HASSANI (2015) qui développent le rôle des infrastructures dans la stratégie d'investissement des assureurs.

L'immobilier

Les investissements dans l'immobilier peuvent se répartir en 3 catégories distinctes, parmi 4 sous-secteurs principaux que sont l'immobilier résidentiel, les bureaux, les commerces et les entrepôts.

— La stratégie *core-plus* consiste à acquérir des biens de qualité, qui produisent des flux réguliers. C'est donc une stratégie peu risquée dont les revenus proviennent essentiellement des loyers.

— La stratégie *value-add* repose sur l'achat de biens qui requièrent une importante rénovation avant de pouvoir être exploités. Cette stratégie est donc plus risquée que le *core-plus*, avec l'essentiel des revenus qui ne provient plus de l'exploitation du bien, mais de sa revente après rénovation.

— Enfin, la dernière stratégie, qui est aussi la plus risquée, appelée *opportunistic*, revient à reprendre des projets à l'arrêt, à des prix d'acquisition très bas, dans l'espoir de parvenir à matérialiser tout le potentiel de ces biens.

La dette privée

Les fonds de dette privée viennent en support des prêts bancaires lors du financement de certaines entreprises. Ces fonds octroient en effet des prêts, sous différentes formes, à des sociétés qui ont besoin de financement mais qui ne souhaitent pas céder une partie de leur capital[5] et qui n'ont pas accès à un montant assez important de dette bancaire. Cela peut s'expliquer par le fait que les banques demandent souvent des garanties importantes que les fonds de dette privée n'exigent pas forcément, au prix de taux d'intérêt plus élevés.

L'activité des fonds de dette privée français est en croissance, comme le montre le rapport d'activité des fonds de dette privée en France, publié conjointement, chaque année, par Deloitte et France Invest[6]. Ces fonds jouent de plus un rôle important dans l'univers du Private Equity puisqu'en 2019, 40 % des opérations de dette privée ont eu pour but de financer des opérations de capital investissement[7].

Les Hedge Funds

Il n'existe pas de définition précise d'un Hedge Fund. Il est cependant communément admis que ces véhicules d'investissement cherchent à éliminer le risque de marché, c'est-à-dire à élaborer des stratégies décorrélées des marchés financiers traditionnels. Pour ce faire, les Hedge Funds ont recours à des produits financiers qui peuvent être complexes et mettent en place des stratégies de couverture particulières.

Il est souvent question de « gestion alternative » lorsque ces fonds sont évoqués puisque leur stratégie s'oppose à la « gestion traditionnelle » qui consiste à conserver des positions sur un horizon temporel plus ou moins long, en espérant que la valeur des investissements croisse.

Les ressources naturelles

L'investissement dans les ressources naturelles fait également partie des actifs alternatifs. Les 3 segments les plus actifs sont : le secteur *Oil and Gas*, le secteur des métaux et des mines et, enfin, le secteur de l'agriculture et de l'agroalimentaire. Il est possible d'investir dans différentes phases de ces projets liés aux ressources naturelles, à savoir les stades d'exploration, de développement et d'exploitation.

2.3 Le Private Equity

La majorité des informations présentées dans cette partie proviennent du livre ZEISBERGER, PRAHL et WHITE (2017). Cet ouvrage retrace le rôle, l'évolution et le processus d'investissement relatif au Private Equity. Ce sous-chapitre sera donc un substrat destiné à fournir au lecteur une vision globale et claire de cette classe d'actifs.

2.3.1 Concepts généraux

Aussi appelé capital investissement, le Private Equity désigne l'ensemble des investissements réalisés dans des sociétés non cotées en bourse. Les capitaux investis dans les fonds de Private Equity proviennent la plupart du temps d'investisseurs institutionnels qui s'engagent pour des durées allant généralement de sept à quinze ans. Henry R. KRAVIS, co-fondateur et co-dirigeant de KKR[8], souligne le fait que le Private Equity est une classe d'actifs qui délivre un rendement supérieur au marché et qui est aujourd'hui

5. sinon elles feraient appel à des fonds de capital investissement, comme nous le verrons infra
6. Le rôle de France Invest sera détaillé plus tard dans ce chapitre.
7. Le rôle et l'utilisation de la dette dans le Private Equity seront soulignés et expliqués ultérieurement.
8. KKR (Kohlberg Kravis Roberts & Co.) est l'un des plus grands et plus anciens fonds d'investissement au monde. Au 31 décembre 2019, l'actif sous gestion de KKR s'élevait à 218,4 milliards de dollars. Ce fonds est spécialisé dans les transactions de Private Equity.

omniprésente aux États-Unis puisque les fonds de pensions de millions d'Américains sont par exemple dépendants de ces actifs. En outre, le Private Equity joue, toujours selon H. KRAVIS, un autre rôle : celui de financer, du premier au dernier jour, les entreprises non cotées.

D'un point de vue opérationnel maintenant, un fonds de PE est un véhicule d'investissement autonome géré par une société de Private Equity pour le compte d'un groupe d'investisseurs, nommés *Limited Partners (LPs)*. La société de gestion va tout d'abord effectuer une levée de fonds, à laquelle certains LPs vont participer c'est-à-dire s'engager à investir un certain capital. Une fois cette période achevée, la société de gestion va acquérir, via l'intermédiaire du fonds de Private Equity, des participations dans différentes sociétés non cotées. Les montants engagés par les LPs vont alors être appelés i.e. investis, dans le fonds. Au fil du temps, la société de gestion va céder ses participations et ainsi récupérer du capital pour se rémunérer et rémunérer les LPs. Une partie des employés de la société de gestion, appelée *General Partner (GP)*, est, quant à elle, contrainte de participer également à la levée de fonds afin d'être alignée avec les LPs. La structure d'un fonds de Private Equity est représentée sur la figure (2.3).

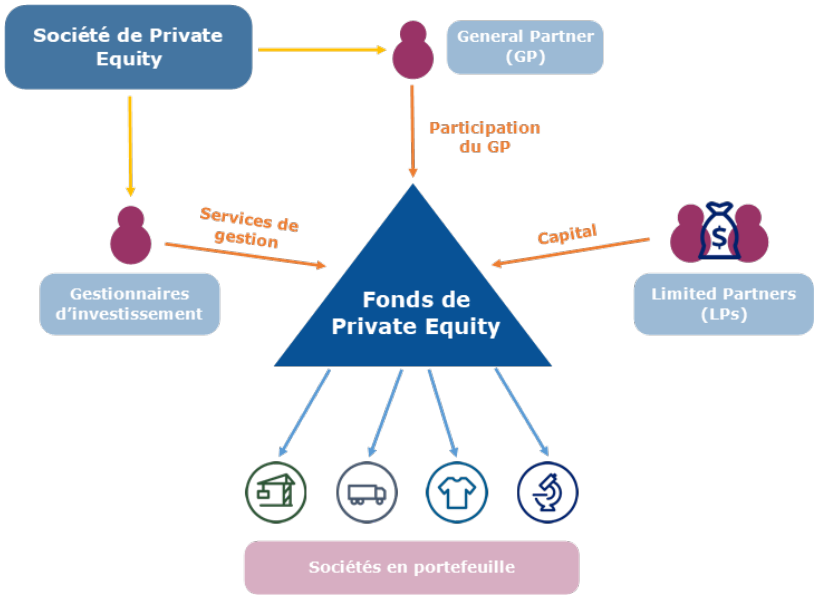


FIGURE 2.3 – Structure d'un fonds de Private Equity

Le Private Equity est donc caractérisé par un fort alignement d'intérêts entre les investisseurs, la société de gestion et les différentes parties prenantes des entreprises dans lesquelles les fonds sont investis. De ce fait, la société de Private Equity n'intervient pas uniquement comme apporteur de capital, son rôle est également d'accompagner des sociétés non cotées dans leur développement.

Le Private Equity répond à un besoin récurrent des entreprises qui ne peut être comblé par les institutions financières classiques. Dans un souci de croissance, certaines sociétés ont en effet parfois recours à une injection de capital et à un avis extérieur afin de tirer pleinement partie de leur potentiel. Cette stratégie peut répondre à différents objectifs : une start-up recherchera par exemple un investisseur afin de concrétiser un concept tandis qu'une entreprise plus mature aspirera à améliorer son processus de production pour devenir plus compétitive.

2.3.2 Le rôle et les perspectives des différents acteurs d'un fonds de Private Equity

La société de Private Equity

C'est une société de gestion qui possède une expertise relative à l'exécution de différentes stratégies d'investissement. Elle est en charge de lever et de gérer différents fonds de PE. En général, deux entités

légales sont créées par la société de capital investissement : le *General Partner* et le gestionnaire d'investissement. Dans la majorité des cas, les membres de la société de gestion font partie de ces deux entités à la fois. La distinction n'est opérée que pour des raisons juridiques qui ne sont pas nécessaires à la compréhension du fonctionnement d'un fonds de PE.

Le *General Partner*

Le GP est en charge des investissements et désinvestissements dans les différentes sociétés non cotées. Il réalise plusieurs études afin de s'assurer de la solidité des entreprises repérées par le gestionnaire d'investissement, émet un appel de fonds [9] et formule la décision d'investissement. Le GP doit respecter les conditions d'investissement qui lui ont été imposées contractuellement [10]. Dans un souci d'alignement d'intérêts, le GP doit aussi s'engager à hauteur d'un certain montant dans le fonds, généralement entre 1 % et 5 % des capitaux levés. Cela signifie que certains employés de la société de gestion doivent investir dans le fonds une partie de leur capital personnel, c'est ce qui s'appelle avoir du « *Skin in the game* », en reprenant les mots de Warren BUFFETT.

La première mission du GP est l'organisation de la levée de fonds. Une taille cible, c'est-à-dire un objectif de capital sous gestion, va être définie pour le fonds. Le GP va alors s'adresser à différents investisseurs qui s'engageront, ou non, à hauteur d'un montant quelconque. Une fois une certaine somme atteinte, le fonds procède à son premier *closing*, ce qui signifie que le GP peut commencer à investir dans différents projets. L'année de ce premier *closing* est appelée le millésime du fonds ou *vintage* [11]. La levée de fonds peut ensuite continuer durant une période définie contractuellement, souvent entre douze et dix-huit mois, avant de procéder au *closing* final une fois que le fonds aura atteint sa taille cible. Le total des fonds levés par la société de gestion est appelé le capital engagé.

La période d'investissement suit la levée de fonds, sa durée est contractuelle et s'étend en général sur quatre ou cinq ans, à partir du premier *closing*. Au début de cette période, le GP ne va pas recevoir la totalité du capital engagé, mais il va procéder à des appels de capitaux, ou prélèvements, au fur et à mesure des différents investissements. Ces appels de capitaux peuvent aussi bien servir à financer de nouvelles sociétés, à refinancer des sociétés en portefeuille ou encore à payer les différents frais de fonctionnements du fonds. Lorsque les appels sont passés par le GP, les LPs sont dans l'obligation d'honorer leur engagement, sous peine de sanctions [12]. La partie du capital engagé non encore appelée par le fonds est le *dry powder*, elle représente la capacité d'investissement du fonds. Par extension, le montant total de capitaux disponibles mais non encore investi par les fonds de PE à l'échelle mondiale est appelé le *dry powder* du Private Equity. Observer l'évolution de ce *dry powder* global permet de se rendre compte de la capacité d'investissement des fonds de PE.

Ces investissements sont suivis d'une période de cessions qui fait partie intégrante de la stratégie du fonds. C'est en effet à ce moment là que les capitaux investis et les profits générés sont redistribués aux LPs et au GP.

Les *Limited Partners*

Les LPs sont les principaux investisseurs d'un fonds de PE. Lors de la période de levée du fonds, les LPs s'engagent à hauteur d'un capital qui sera appelé par le fonds, en tout ou partie, durant la période

9. Les fonds appelés sont ceux constitués par les différents engagements des *Limited Partners*.
10. Ces conditions peuvent être relatives à la zone géographique des sociétés dans lesquelles investir, ou encore à leur secteur d'activité.
11. Cette notion de millésime est importante car la plupart des études de marché réalisées sur le Private Equity regroupent les fonds par millésime.
12. Ces sanctions peuvent être diverses : augmentation des frais de gestion, vente de la participation du LPs via le marché secondaire, etc.

d'investissement, fixée contractuellement. Au cours de la vie du fonds, les LPs sont amenés à recevoir des distributions de capital lorsque des participations seront cédées. Ces investisseurs ne participent donc pas au processus développement des entreprises, leur rôle se limite à apporter du capital. Les LPs sont principalement des investisseurs institutionnels, tels des compagnies d'assurances, des banques, des fonds de pension ou des fonds de fonds [13].

L'une des raisons pour lesquelles certains investisseurs allouent une partie de leur capital au Private Equity est le fait que cette classe d'actifs semble surperformer le marché action et le marché obligataire [14]. Néanmoins, le PE présente également différents risques qui lui sont propres. Le premier de ces écueils est certainement la structure de *cash flows* payés et reçus par les LPs. Un investisseur qui souhaite consacrer pour la première fois une partie de son capital au PE doit en effet s'attendre à faire face à des *cash flows* cumulés négatifs durant plusieurs années, avant qu'un rendement positif ne puisse éventuellement être généré par le portefeuille de PE : c'est la « courbe en J » d'un fonds de capital investissement.

La « courbe en J » représente la somme nette des *cash flows* cumulés du point de vue d'un des LPs. C'est l'évolution des capitaux restitués au LP moins le capital investi dans le fonds, y compris les frais de gestion destinés à la société de Private Equity. Ci-dessous est présenté un exemple fictif de « courbe en J » (2.4) pour un LP investissant dix millions d'euros dans un fonds d'une durée de vie de douze ans. La courbe des *cash flows* cumulés suit, grossièrement, une forme de « J » majuscule penché, d'où le nom donné à cette courbe.

À l'origine, la somme des *cash flows* cumulés décroît au fur et à mesure que les capitaux sont appelés. Le LP investit du capital afin de couvrir les frais de gestion et de financer différents investissements, mais ne reçoit pour l'instant aucune distribution en retour. Quelques années plus tard, lorsque le fonds commence à céder certaines de ses participations, des distributions sont éventuellement versées au LP, c'est pourquoi la somme des *cash flows* cumulés croît petit à petit. Le point le plus bas de la « courbe en J » correspond, en théorie, au montant total de capitaux engagés par le LP. En réalité, ce point n'est que très rarement atteint puisque le fonds réalise en général des cessions et donc des distributions avant que les capitaux engagés ne soient entièrement appelés. Dès lors que la somme des *cash flows* cumulés vaut zéro, c'est-à-dire lorsque la somme des prélèvements est égale à la somme des distributions du point de vue du LP, le fonds atteint son seuil de rentabilité, appelé *breakeven*. Le point final de la « courbe en J » représente donc le profit net total généré par le fonds pour le LP.

Dans l'exemple ci-dessous, le seuil de rentabilité est dépassé au bout de neuf ans et le profit net final du point de vue du LP s'élève à 3,8 millions d'euros.

Le gestionnaire d'investissement

Le gestionnaire d'investissement conduit les activités du fonds de PE au jour le jour. Dans ce cadre, il évalue les différentes opportunités d'investissement, accompagne les entreprises dans lesquelles des fonds ont été investis et gère la communication financière du fonds ainsi que les différents processus de contrôle, comme les audits par exemple. En contrepartie de cette activité, le gestionnaire d'investissement reçoit des frais de gestion de la part du fonds. Ces frais s'élèvent en général à 1,5 % ou 2 % du capital engagé lors de la période de levée.

Le portefeuille de sociétés

Au cours de sa vie, le fonds de PE est amené à investir dans un nombre restreint d'entreprises non cotées, en général entre dix et quinze sociétés. Celles-ci peuvent appartenir à de multiples secteurs géographiques ou industriels et avoir atteint des degrés de maturité différents. Le succès d'un fonds de PE

13. Un fonds de fonds de Private Equity est un véhicule qui investit dans un portefeuille de fonds de Private Equity.
14. Cette assertion sera discutée plus tard dans le mémoire.

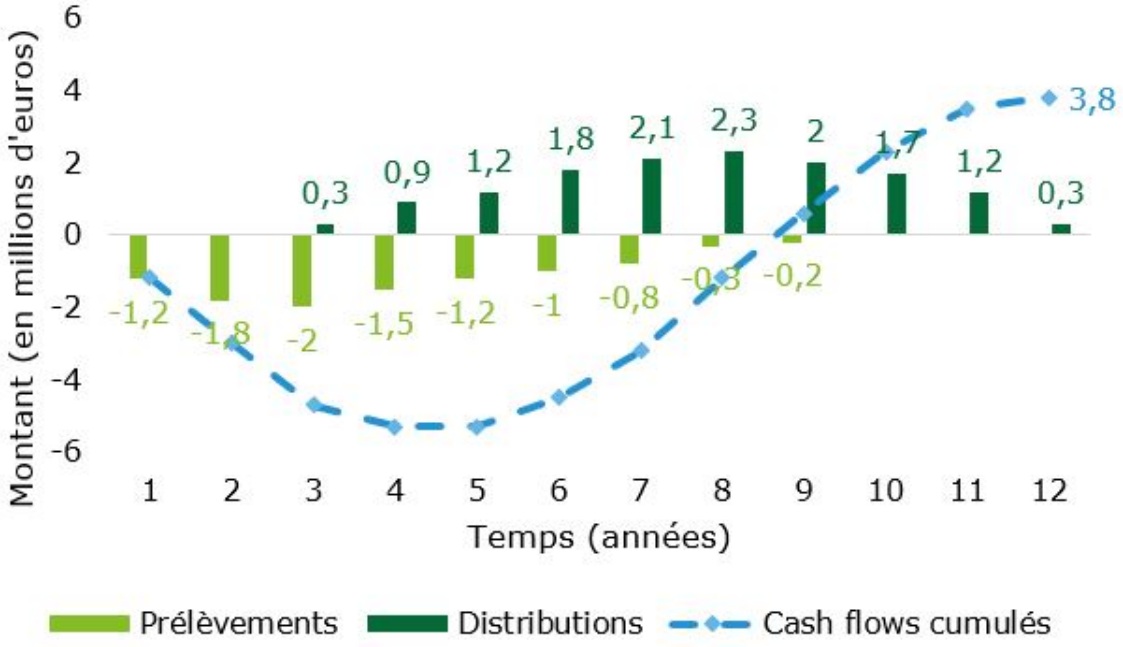


FIGURE 2.4 – Profil de *cash flows* fictif d'un LP

est mesuré par sa capacité à céder, après quelques années de détention, ses positions dans les sociétés qui auront été préalablement financées.

La société de gestion doit donc mener à bien deux types de relations différentes si elle souhaite pérenniser son activité :

— générer du profit pour ses investisseurs afin de conserver la confiance des LPs pour les levées de fonds suivantes ;

— s'engager auprès des entreprises et de leur management pour développer l'activité et créer de la valeur dans le but de bénéficier d'une bonne réputation auprès des entrepreneurs.

2.3.3 Frais et flux de trésorerie

Le Private Equity présente une structure de frais et de paiement de flux particulière, destinée à aligner les intérêts économiques des différentes contreparties.

Les frais

Deux types de revenus sont perçus par la société de Private Equity :

— les frais de gestion ;

— le *carried interest*.

Les frais de gestion, payés par les LPs à la société de Private Equity et imputés aux capitaux engagés, sont destinés à couvrir les dépenses quotidiennes engagées par le fonds : salaires, coûts de recherche des opportunités d'investissement, gestion des investissements, etc. Le taux de frais de gestion annuel est en moyenne égal à 2 %. L'assiette annuelle de frais à payer par les LPs va évoluer en fonction du temps. Lors de la période d'investissement, le taux de frais est appliqué au montant de capital engagé initialement. À l'issue de cette période, le montant des frais de gestion est déterminé en appliquant le taux de frais

au capital net investi [15]. Ainsi, même si le taux de frais de gestion reste constant au cours du temps, le montant des frais décroît lorsque le fonds réalise des cessions.

Le *carried interest* est une composante essentielle du PE. Cet outil met en place un système de participation aux bénéfices entre les LPs et le GP. Dans le cas d'un fonds de PE, la majorité des bénéfices sont effectivement redistribués aux LPs, ce qui représente en général 80 % du profit réalisé. Les 20 % restants sont quant à eux destinés au GP. Ce mécanisme d'incitation permet aux LPs de s'assurer que le GP va se focaliser sur la création de valeur et la rentabilité du fonds. C'est aussi une source importante de motivation pour le GP qui a en effet tout intérêt à dégager du profit.

Le schéma (2.5) ci-dessous présente la structure de frais décrite supra :

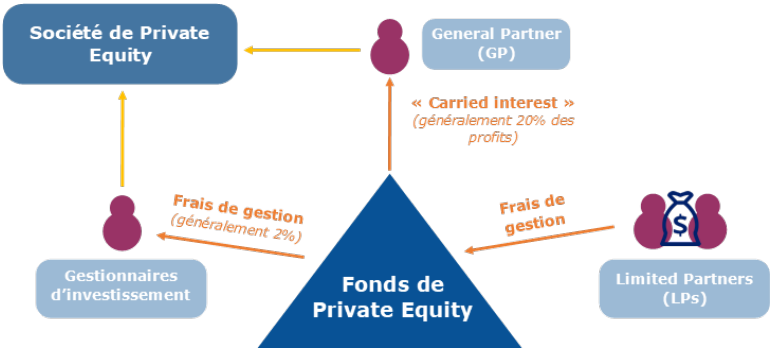


FIGURE 2.5 – Structure de frais d'un fonds de PE

Les paiements

Les versements de capitaux répondent également à des règles bien précises. Cet ensemble de règles est appelé *cash flows waterfall*, il permet de décrire la manière de distribuer les profits entre les LPs et le GP. Cette structure est élaborée, encore une fois, dans un souci d'alignement d'intérêts et de protection des LPs. Elle comprend quatre grandes étapes :

1. En premier lieu, les bénéfices réalisés à la suite des différentes cessions permettent de rembourser les capitaux investis par les LPs et par le GP.
2. Une fois ce capital remboursé, le fonds de PE verse un rendement minimal annuel, contractuel, aux *Limited Partners*. Ce taux de rendement est appelé taux de *hurdle* et vaut en général 8 %.
3. Le GP va dès lors recevoir une partie du profit. Comme évoqué plus haut, 20 % des profits du fonds sont généralement destinés au GP. Or, à la fin de la deuxième étape, le GP n'a encore perçu aucun revenu de ses investissements. Un mécanisme de rattrapage va alors intervenir, appelé *catch-up*. Au delà du taux de *hurdle*, le *General Partner* va en effet se voir verser la majorité des profits [16] jusqu'à ce qu'il ait reçu 20 % des bénéfices totaux reversés jusqu'ici [17].
4. Enfin, une fois la période de *catch-up* terminée, les LPs et le GP se partagent respectivement 80 % et 20 % [18] des bénéfices résiduels.

L'exemple infra permet d'illustrer la *cash flow waterfall* d'un fonds de PE.

15. Le capital net investi est égal au montant de capitaux prélevés duquel est déduit le montant de distributions reversé aux LPs.
16. Souvent 100 %
17. Sont donc prises en compte les sommes versées aux LPs ainsi qu'au GP.
18. Encore une fois, ces proportions sont contractuelles et peuvent varier d'un fonds à l'autre, mais le couple 80/20 fait figure de référence sur la place.

Illustration d'une *cash flow waterfall*

Soit un fonds de PE dans lequel un seul LP est supposé investir. Il apporte 300 millions d'euros et le GP s'engage quant à lui à hauteur de 6 millions. Dans cet exemple, les frais totaux s'élèveront à 2 % des montants engagés par le LP, soit 6 millions d'euros. Avec ce montant de capital engagé, le GP réalise les trois investissements suivants :

— 50 millions d'euros dans l'entreprise A ;
— 75 millions d'euros dans l'entreprise B ;
— 175 millions d'euros dans l'entreprise C.

La somme des montants investis s'élève à $50 + 75 + 175 = 300$ millions, soit la totalité de l'assiette de capitaux disponibles, nette de frais de gestion. Le fonds cèdera ses différentes participations au bout de six années, au prix de :

— 100 millions d'euros pour l'entreprise A ;
— 125 millions d'euros pour l'entreprise B ;
— 320 millions d'euros pour l'entreprise C.

La situation au bout de la sixième année est résumée sur la figure ci-dessous (2.6).

FIGURE 2.6 – Investissements du fonds

Le taux de *hurdle* est supposé valoir 8 % et le *carried interest* s'élève à 20 %.

Initialement, le LP et le GP ont investi 306 millions d'euros, ainsi les 306 premiers millions d'euros de profit vont permettre de rembourser les capitaux investis. Parmi ces 306 millions, 100 vont provenir de la vente de l'entreprise A, 125 millions de la vente de l'entreprise B et 81 millions de la vente de l'entreprise C.

La société de gestion doit ensuite verser au LP le montant correspondant au taux de *hurdle* : $300 \times 1,08^6 - 300 \simeq 176$ millions. Ce montant est retranché du profit issu de la vente de l'entreprise C.

Le GP doit maintenant rattraper son retard, se déroule alors la phase de *catch-up*. Soit Π_{LP} et Π_{GP} les profits réalisés respectivement par le LP et par le GP à l'issue de la période de *catch-up*, il faut que :

$$20\% \times (\Pi_{LP} + \Pi_{GP}) = \Pi_{GP}$$

or $\Pi_{LP} = 176$ millions car il est ici supposé que le GP se voit verser 100 % des profits durant la phase de *catch-up*. Cela implique $\Pi_{GP} = 44$. Le LP et le GP vont maintenant se partager respectivement 80 % et 20 % du bénéfice résiduel provenant de la cession de l'entreprise C, soit $145 + 175 - 81 - 176 - 44 = 19$ millions d'euros. Ainsi, à la fin de l'opération, le LP aura dégagé un bénéfice $\Pi_{LP_{final}} = 176 + 80\% \times 19 = 191,2$ millions d'euros et le GP aura quant à lui réalisé un profit $\Pi_{GP_{final}} = 44 + 20\% \times 19 = 47,8$ millions d'euros. Ce processus est décrit sur la figure (2.7) :

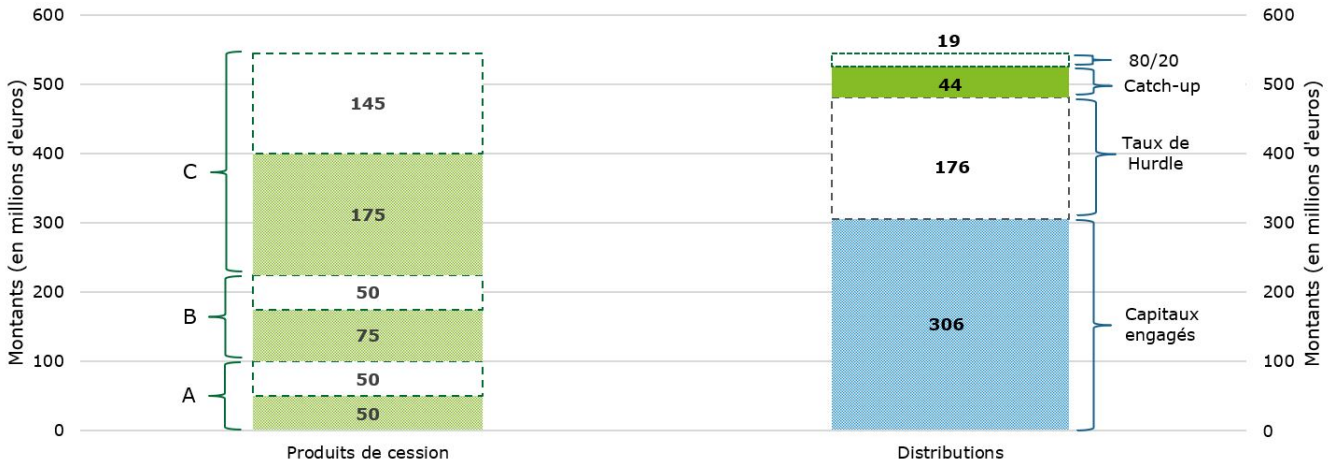


FIGURE 2.7 – *Cash flows* waterfall

Le LP a donc bien récupéré 80 % des bénéfices totaux, contre 20 % pour le GP [19].

2.3.4 Les différentes formes de Private Equity

Le capital investissement joue un rôle important dans le financement de l'économie réelle. Pour cela, les sociétés de gestion sont amenées à prendre des participations dans des entreprises qui connaissent des stades de développement différents. À ces multiples étapes de la vie d'une entreprise sont associées plusieurs stratégies de gestion et d'investissement. Naturellement, le GP n'adoptera pas la même approche s'il doit accompagner une jeune start-up dans le lancement de son premier produit ou s'il intervient auprès d'une entreprise bien installée qui souhaite diversifier son offre. De ce fait, il existe plusieurs formes de financement qui se concentrent sur des entreprises qui connaissent peu ou prou la même phase de développement.

Vous trouverez ci-après un schéma qui récapitule les étapes de développement d'une entreprise ainsi que les catégories de capital investissement qui leur sont associées. (2.8) :

Le capital risque

Aussi appelé *Venture Capital*, le capital risque est consacré à l'investissement dans de très jeunes sociétés qui ne sont pas encore rentables, voire qui n'ont pas encore débuté leur processus de production, mais qui laissent entrevoir des perspectives prometteuses. Au travers des fonds de capital risque, les sociétés de Private Equity prennent des positions minoritaires au capital de ces entreprises puis les accompagnent dans leur développement, grâce à leur expérience et leur expertise.

19. La structure définie ci-dessus est une *cash flows waterfall* dite européenne, dans le sens où le raisonnement est mené sur l'ensemble du fonds. Il est également possible de définir une *cash flows waterfall* américaine, dans ce cas la structure de paiement est appliquée actif par actif, ce qui est plus avantageux pour le GP car il va recevoir du *carried interest* plus tôt.

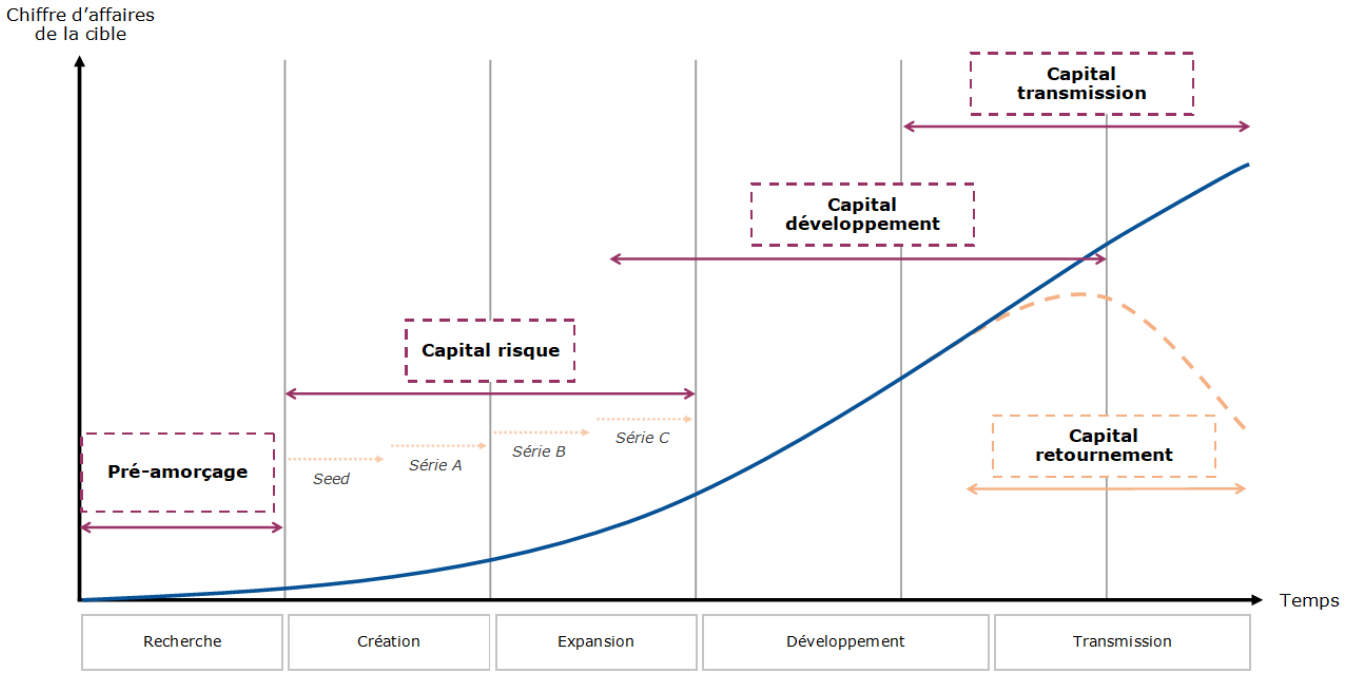


FIGURE 2.8 – Type de fonds en fonction de la maturité

Les fonds de *Venture Capital* sont souvent spécialisés sur un secteur d'activité précis ou une zone géographique particulière. De plus, au sein même du capital risque, il existe des sous-segments auxquels correspondent différents niveaux de maturité.

— L'amorçage, appelé *seed capital*, est la première étape de financement d'une entreprise qui fait appel à des investisseurs extérieurs [20]. Destinés à permettre à la société de développer son produit, d'effectuer les premières études de marché, voire de recruter une première équipe, le capital et l'accompagnement apportés proviennent, la plupart du temps, des fondateurs de l'entreprise, de leur famille, d'un incubateur, de *business angels* [21] ou de fonds de capital risque spécialisés dans ce type d'opération.

— La *Série A* est la phase d'optimisation. Grâce aux capitaux levés, l'entreprise est à même de développer son produit sur de nouveaux marchés. Un plan de croissance à long terme doit être mis en place et la rentabilité de la société doit se dessiner. La plupart des sociétés de *Venture Capital* prennent position lors de ce tour de table.

— Le financement de la croissance de la société passe ensuite par la *Série B*. Les investisseurs accompagnent l'entreprise dans la construction d'un socle de clients solide et ont recours à des équipes de support technique, de commerciaux ou de publicitaires. Cette phase est similaire à la *Série A*, à cette différence près que de nouveaux acteurs du capital risque montent au capital de l'entreprise.

— Enfin, la *Série C* est l'étape de développement à plus grande échelle de l'entreprise. L'objectif est ici de devenir rentable et de s'imposer dans le secteur d'activité via de petites acquisitions. L'investissement étant moins risqué, les sociétés de *Venture Capital* sont rejointes par des sociétés de capital développement ou des banques d'investissement.

Le *Venture Capital*, comme son nom l'indique, est une activité à risque car les injections de capital sont réalisées alors que les entreprises connaissent les prémices de leur développement. Ainsi, une grande partie

20. En réalité, la première phase d'investissement est le pré-amorçage, durant laquelle les fondateurs vont utiliser leur capital pour lancer l'activité : location d'un premier bureau, paiement des dépenses courantes, etc.
21. Individus qui investissent leur argent personnel dans des projets qui leur semblent pérennes.

des investissements ne se révèlent pas rentables pour l'investisseur. Néanmoins, si la société financée parvient à générer du profit et trouve sa place sur le marché, alors l'opération devient très rentable pour les investisseurs, car ils sont rentrés au capital de l'entreprise relativement tôt.

Dès lors, un fonds de capital risque réalise en général plus d'investissements qu'un fonds de capital développement ou de capital transmission [22]. L'objectif des gérants est de trouver la jeune entreprise qui va bousculer le marché, au risque de perdre de l'argent sur les autres positions.

Le capital développement

Le rôle du capital développement ou Growth Equity est de financer des entreprises en croissance, bien établies sur le marché. Les capitaux levés permettent à la société de passer à une étape supérieure dans son activité : intégrer un nouveau marché, commercialiser un nouveau produit, réaliser de la croissance externe via l'acquisition d'autres entreprises, etc.

Tout comme les fonds de capital risque, les fonds de capital développement ne cherchent pas à prendre le contrôle de l'entreprise cible. Dès lors, le GP n'acquiert qu'une part minoritaire dans la société. Une relation de confiance doit donc se tisser entre les investisseurs, les actionnaires actuels et les équipes de la société afin que l'entreprise puisse bénéficier de l'expertise du fonds de Growth Equity.

Le capital injecté peut aussi être employé pour apporter de la liquidité aux fondateurs de l'entreprise et aux actionnaires. Un fonds de Growth Equity peut, par exemple, racheter les parts de certains fonds de *Venture Capital*. En effet, lorsque les entreprises dans lesquelles les fonds de capital risque ont investi deviennent rentables, qu'elles opèrent sur un marché solide et que leur activité a fait ses preuves, elles ne sont plus du ressort du capital risque. Elles ont alors besoin d'un accompagnement différent afin de mettre en œuvre de nouvelles stratégies de croissance.

À l'instar de la majorité des sociétés de gestion de Private Equity, les fonds de capital développement cherchent à céder leur participation après quelques années [23]. Il peut alors être difficile de trouver un investisseur qui, à ce stade, acceptera d'acheter une position minoritaire dans la société. Dans la plupart des cas, la participation est soit revendue via le marché secondaire du PE, soit rachetée par les fondateurs de l'entreprise.

Le capital transmission

La majorité des opérations de capital investissement concernent le capital transmission, également appelé *Buyout*. Un fonds de capital transmission acquiert une participation au capital d'une société avec pour objectif de restructurer certains éléments de celle-ci afin de créer de la valeur, dans l'optique de vendre ensuite l'entreprise et de réaliser une plus-value. Le fonds de capital transmission a donc un pouvoir de contrôle sur ladite entreprise et va prendre des décisions afin d'atteindre des objectifs financiers, de gouvernance et opérationnels.

Bien souvent, ces fonds ont également recours à de la dette lors du rachat de l'entreprise cible. C'est pourquoi il est souvent question de Leverage Buyout (LBO) ou achat à effet de levier. Cette dette provient généralement de fonds de dette privée.

Les différentes tranches qui composent le capital employé par le fonds pour réaliser l'acquisition de l'entreprise sont énumérées ci-dessous.

22. Ces catégories sont détaillées infra.
23. entre 3 et 7 ans généralement.

1. La tranche de dette dite *senior* est généralement émise par une ou plusieurs banques. Cette dette est la source de financement à long terme la moins chère, car c'est aussi la moins risquée. Le remboursement de cette tranche est en effet prioritaire à celui des deux autres lors d'une faillite. De plus, elle affiche la maturité la plus faible en comparaison des autres instruments de dette. Pour toutes ces raisons, la majorité de la dette levée par le fonds de *Buyout* est constituée de dette senior.
2. La dette *junior* est quant à elle plus risquée puisque son remboursement en cas de faillite est subordonné à celui de la dette *senior*. Son taux d'intérêt est donc plus élevé que celui de la dette *senior*.
3. Enfin, les capitaux propres représentent l'instrument le plus risqué. En cas de faillite, seul l'actif résiduel de la société, après paiement des différentes tranches de dette, sera récupéré par l'investisseur. La plus grande partie du capital est constituée d'actions préférentielles qui appartiennent au fonds de capital transmission. L'autre partie du capital est subordonnée à ces actions préférentielles et est détenue par les administrateurs de l'entreprise. Cela permet d'aligner les intérêts des différents acteurs de l'opération.

L'utilisation d'une part de dette dans le financement du rachat d'une entreprise permet à l'investisseur d'accroître sa rentabilité financière, à condition que le coût de l'endettement soit inférieur à la rentabilité économique de la société : c'est la définition de l'effet de levier. Ce mécanisme est illustré ci-dessous. Le recours à de la dette rend également possibles des rachats pour lesquels le montant de capitaux propres n'aurait pas été suffisant pour financer à lui seul toute l'opération.

Les montants levés par le fonds de capital transmission permettent de financer l'acquisition des actions de la société cible, de rembourser la dette existante et de couvrir les frais associés à la mise en œuvre de l'opération.

Illustration d'un LBO

Soit un fonds de *Buyout* qui acquiert une société au début de l'année 2020 pour 700 millions d'euros. Ladite société affiche un *Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization (EBITDA)*[24] initial de 100 millions d'euros. La société est donc valorisée sept fois son EBITDA. Afin de réaliser le rachat, le fonds de LBO a recours à un montant important de dette, égal à 400 millions d'euros, et à 300 millions d'euros de fonds propres. Le multiple $Dette\ /\ EBITDA$ initial vaut donc 4,00x. Afin de simplifier les calculs, le taux d'intérêt de la dette sera supposé égal à 2 % et les dates de remboursements seront laissées à la discrétion de la société.

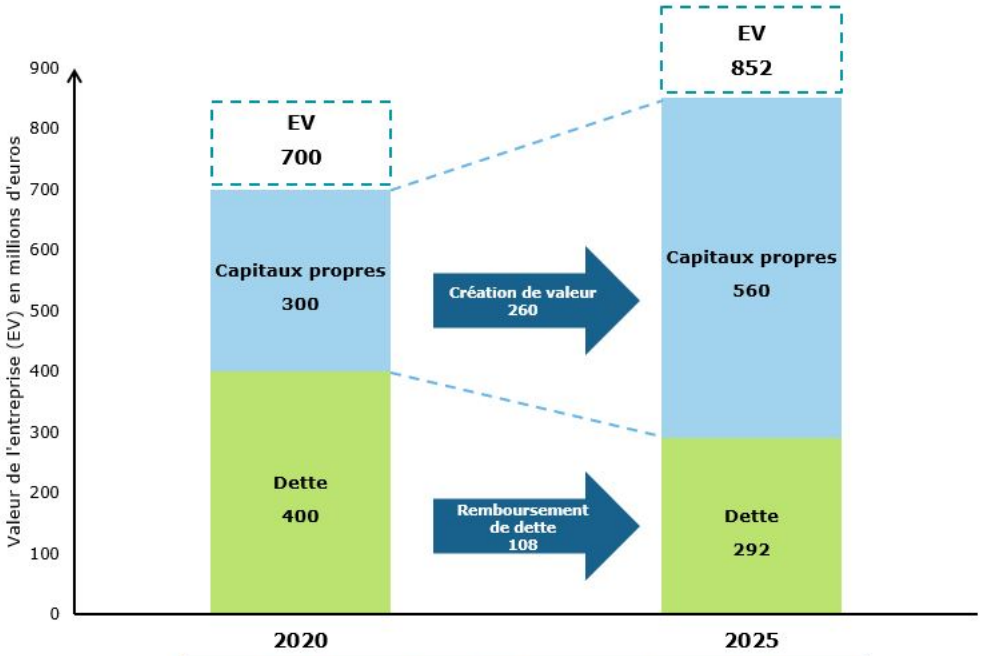
Durant les cinq années suivantes, l'EBITDA de l'entreprise sera sujet à une croissance annuelle de 4 %, atteignant environ 122 millions d'euros en 2025[25]. Sur la même période, la société aura également réussi à dégager 150 millions d'euros de flux de trésorerie excédentaire, destinée à rembourser une partie de la dette.

En 2025, le fonds décide de céder la société. Celle-ci est toujours valorisée sept fois son EBITDA, soit environ 852 millions d'euros, c'est la valeur de l'entreprise[26]. Pour obtenir la somme qui revient aux actionnaires, c'est-à-dire au fonds de *Buyout*, il faut retrancher le montant de dette résiduelle à la valeur de l'entreprise. Or, la dette s'élève à : $400 \times (1 + 2\%)^5 - 150 \simeq 292$ millions d'euros.

Le fonds de capital transmission récupère donc $852 - 292 = 560$ millions d'euros, soit 1,87x le capital investi initialement. Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) d'un tel investissement est égal à 13,30 %, alors que la valeur de l'entreprise n'a connu qu'une croissance annuelle de 4 %. L'endettement a dès lors permis

24. L'EBITDA désigne le bénéfice d'une société avant déduction des intérêts, des impôts et taxes, des dotations aux amortissements et des provisions sur immobilisations. L'EBITDA se rapproche de l'Excédent Brut d'Exploitation (EBE) en France. L'EBITDA est une métrique régulièrement utilisée dans le processus de valorisation d'une entreprise.
25. Les montants sont arrondis, dans le but de rendre l'exemple plus intelligible.
26. Aussi appelée EV pour *Enterprise Value*.

à l'investisseur d'augmenter sa rentabilité, c'est l'effet de levier. La figure (2.9) illustre le raisonnement qui vient d'être détaillé.



2020	Métrique	2025
100	EBITDA	122
7,00x	Multiple EV/EBITDA	7,00x
4,00x	Multiple Dette/EBITDA	2,40x

FIGURE 2.9 – Exemple de LBO

Le capital retournement

Cette branche du Private Equity se concentre sur les entreprises matures qui rencontrent un besoin soudain de financement, voire une restructuration, afin d'échapper à une faillite potentielle. Les raisons qui peuvent amener une société à faire face à ce genre de situations peuvent être multiples et la résolution de ces problèmes nécessite une expertise fine en termes de redressement d'entreprise.

La stratégie des gestionnaires de fonds de capital retournement se concentre alors notamment sur les points suivants : prendre le contrôle de la société en bénéficiant d'un prix d'achat amoindri par la situation de crise et mettre rapidement en place des actions permettant à l'entreprise de dégager des flux de trésorerie et de rester opérationnelle. Les différentes actions menées par les gestionnaires du fonds peuvent aller de la nomination d'un nouveau dirigeant à la vente d'une partie de la société perçue comme moins rentable. Ce type de fonds est donc rare car il nécessite des expertises spécifiques dans le domaine des plans de restructuration.

2.3.5 Le marché secondaire du Private Equity

Seul le marché dit « primaire » du capital investissement a pour l'instant été défini. Ce marché primaire caractérise la manière la plus traditionnelle pour un investisseur d'accéder au marché du Private Equity, c'est-à-dire qu'un GP organise une levée de fonds à laquelle vont participer les investisseurs, i.e. les LPs. Un institutionnel peut néanmoins investir dans un fonds de Private Equity d'une autre manière, via le marché dit « secondaire ».

Le marché secondaire fait référence à l'achat et à la vente de positions pré-existantes dans des investissements liés au Private Equity, qu'il s'agisse de parts de fonds ou d'actions d'entreprises dans lesquels des sociétés de gestion ont investi. Le marché secondaire fournit notamment de la liquidité aux LPs qui souhaitent céder leurs positions et permet à d'autres investisseurs d'intégrer le Private Equity de manière plus flexible, sans avoir besoin de s'engager auprès d'une société de gestion lors d'une levée de fonds.

Le marché du Private Equity secondaire a connu une forte croissance sur les 20 dernières années puisque selon Greenhill Cogent[27] (2.10) le volume de transaction annuel lié au marché secondaire est passé d'1,9 milliards de dollars américains en 2001 à 88 milliards de dollars en 2019[28]. Selon *A new decade for private markets : McKinsey Global Private Markets Review* (2020), ce marché ne représente qu'un peu plus d' 1,3 % des 6 500 milliards de dollars d'actifs alternatifs sous gestion.

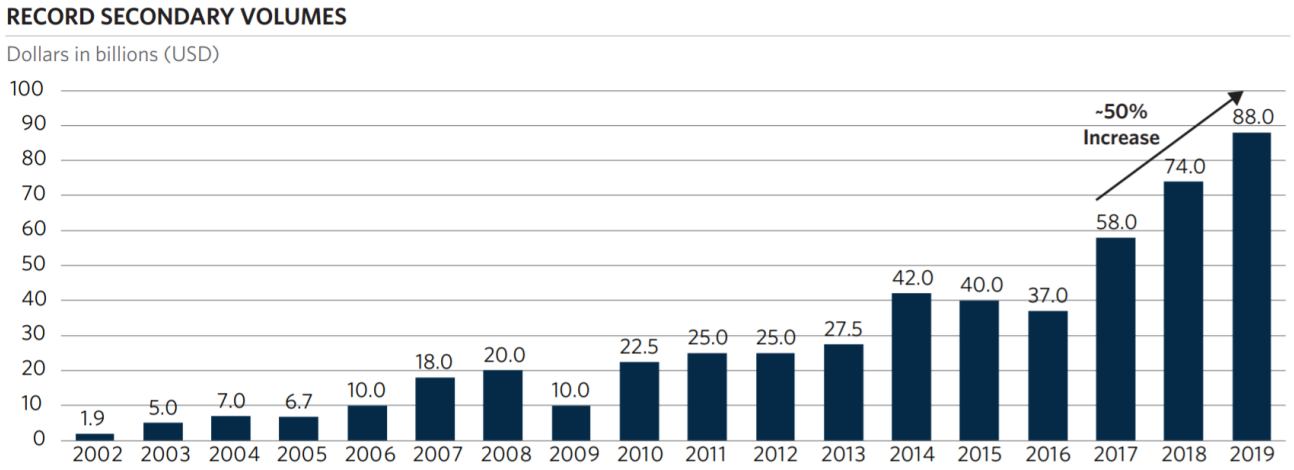


FIGURE 2.10 – Évolution du volume de transaction annuel sur le marché du Private Equity secondaire depuis 2002, en milliards de dollars

Source : Greenhill Cogent

Le développement du marché secondaire du Private Equity est certainement dû au fait que les LPs n'ont pas la main sur les investissements réalisés par le GP. Dès lors, si un des investisseurs a besoin de liquidités, il ne peut pas contraindre la société de gestion à céder une participation et à verser des distributions. La seule solution envisageable pour l'investisseur est de revendre sa participation dans le fonds sur le marché secondaire.

Il existe deux catégories de transactions secondaires :

— les *Limited Partnership Secondaries* concernent l'achat ou la vente de parts de fonds en activité ;

— les *Direct Secondaries* font référence à l'achat ou la vente d'actions d'entreprises détenues par des fonds de Private Equity.

Les *Limited Partnership Secondaries*

Ce sont les opérations principales du marché secondaire, puisque de 2002 à 2015 elles ont représenté entre 72 % et 96 % des transactions, en valeur, selon ZEISBERGER, PRAHL et WHITE (2017). Lorsqu'un LP vend les parts qu'ils possèdent, les obligations et droits liés à cette part de fonds sont entièrement transmis

27. Greenhill & Co. est une banque d'investissement qui a racheté Covent Partners, l'une des banques d'affaires leader dans le domaine du marché secondaire des actifs alternatifs.

28. Des observations similaires sont fournies dans ZEISBERGER, PRAHL et WHITE (2017).

à l'acheteur, c'est-à-dire que l'acheteur devra s'acquitter des appels de fonds réalisés par la société de gestion [29] en contrepartie des distributions futures qui auront lieu.

Plusieurs raisons peuvent inciter un investisseur à céder l'une de ses participations via le marché secondaire. Par exemple, lorsque le prix des actions baisse sur le marché boursier, un investisseur peut se retrouver trop exposé aux actifs alternatifs s'il détient une grande quantité d'actions, ce qui peut être problématique. Ainsi, alléger la poche d'actifs non cotés permet à l'investisseur de réduire cette exposition et de rééquilibrer son portefeuille.

La plupart des acheteurs présents sur le marché secondaire sont des fonds de capital investissement spécialistes de ce segment, il peut également s'agir de fonds de fonds ou d'investisseurs institutionnels classiques qui, au lieu de passer par un fonds de secondaire, rachètent directement des positions à des sociétés de gestion. Ces acteurs s'intéressent au marché secondaire car le prix des parts de fonds échangées est généralement soumis à une décote, c'est-à-dire que l'acheteur acquiert la part de fonds au prix de $x \cdot$ NAV où $x \in]0, 1[$ [30]. La figure (2.11) permet d'observer que depuis 2010 une décote moyenne comprise entre 10 % et 30 % de la NAV est appliquée aux transactions qui ont lieu sur le marché secondaire. Cette décote était nettement plus importante en 2009 puisqu'elle atteignait plus de 60 %. En outre, cela permet d'investir à un cycle plus avancé de la vie d'un fonds et donc d'échapper, ou au moins de réduire l'exposition, à la « courbe en J ».

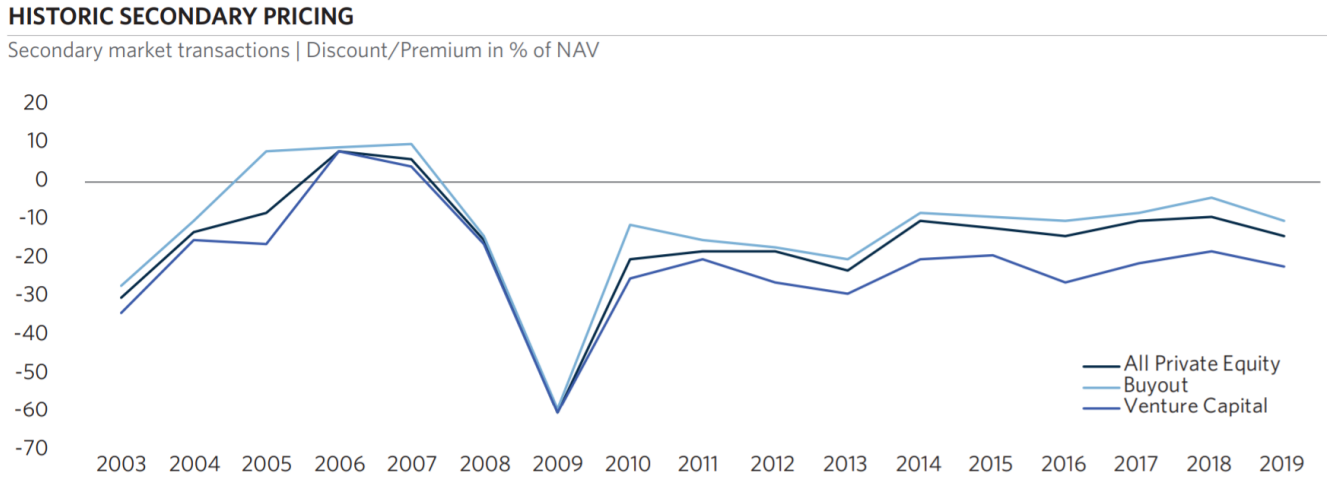


FIGURE 2.11 – Évolution des décotes / surcotes en pourcentage de la NAV sur le marché secondaire depuis 2002

Source : Greenhill Cogent

Les *Direct Secondaries*

Avant de définir ce que recouvre le terme *Direct Secondaries*, il convient d'expliquer ce qu'il n'est pas. Les opérations secondaires directes ne consistent pas à racheter des parts de fonds détenues par des LPs [31]. Les *Direct Secondaries* ne sont pas non plus des opérations de *Buyout* secondaire i.e. cela ne consiste pas à racheter une entreprise détenue par un fonds de capital transmission. Finalement, le secondaire direct fait référence à l'acquisition de positions minoritaires au sein d'entreprises détenues par des fonds de capital investissement.

29. dans le cas où les fonds initialement engagés n'auraient pas déjà été entièrement appelés
30. La valorisation d'une part de fonds est un exercice complexe de finance d'entreprise qui peut reposer sur différentes approches, comme l'utilisation de multiples ou la projection de *cash flows* futurs.
31. C'est normal, puisque ces transactions concernent les « Limited Partnership Secondaries ».

Dès lors, le marché des *Direct Secondaries* permet d'apporter de la liquidité à des actionnaires minoritaires. Il peut par exemple s'agir des fondateurs d'une société qui souhaitent céder tout ou partie de leurs parts. Il peut également être question d'actions détenues par un institutionnel, comme un organisme assureur ou un fonds de pension, qui aurait investi auparavant en direct et de manière minoritaire dans une société.

Ce marché permet à des acteurs spécialisés de rentrer au capital d'entreprises plus ou moins matures, détenues par des fonds de capital investissement, à un prix attractif.

Les montages financiers

La mise en place d'une transaction sur le marché secondaire est relativement flexible et différents montages financiers peuvent être créés afin de satisfaire acheteur et vendeur. Des solutions sur mesure peuvent être développées, mais il existe quelques pratiques usuelles.

Tout d'abord, les parties prenantes d'une transaction secondaire peuvent avoir recours à un Special Purpose Vehicle (SPV), qui est une structure intermédiaire entre l'acheteur, le vendeur et l'investissement concerné. Le recours à un SPV peut également être intéressant lorsqu'il s'agit de titriser un portefeuille d'actifs liés au Private Equity ; dans ce cas, la transaction est similaire à une opération de titrisation classique, c'est-à-dire que différents investisseurs vont avoir accès à des tranches du portefeuille d'actifs cédé, il est alors d'usage de parler de *collateralized fund obligation* footnoteLe fonctionnement est alors similaire à celui d'un Collateralized Debt Obligation (CDO), à la différence près que les sous-jacents sont des parts de fonds de Private Equity ou de Hedge Funds.. Il est aussi possible d'instaurer un *swap* entre acheteur et vendeur, auquel cas l'acheteur s'engage à verser au vendeur un flux fixe, tandis que le vendeur versera les distributions qu'il reçoit à l'acheteur, c'est un fonctionnement similaire à celui d'un swap de taux d'intérêt.

L'objectif de ces paragraphes n'était pas tant de rentrer dans le détail des différents montages financiers possibles que de mettre en exergue le fait que des solutions diverses peuvent être mises en place sur le marché secondaire. Pour davantage d'information, le lecteur pourra se référer au chapitre 24 de ZEISBERGER, PRAHL et WHITE (2017).

2.3.6 Le Private Equity coté

Il peut sembler contre-intuitif de trouver les mots « coté » et « Private Equity » dans la même phrase, puisque le capital investissement concerne le financement de sociétés non cotées. Il faut cependant garder en tête qu'une société de gestion de Private Equity est avant tout une entreprise. Il est dès lors tout à fait possible pour elle de rentrer sur le marché boursier par le biais d'une introduction en bourse ou Initial Public Offering (IPO). Les ressources issues de cette introduction en bourse permettent bien souvent à la société de gestion de se développer plus rapidement et d'accéder à de nouveaux marchés. Les événements macroéconomiques qui affectent le marché auront néanmoins un impact direct sur les actions émises.

Les véhicules d'investissement en Private Equity cotés en bourse se sont développés depuis les années 2000, ils sont de deux types : les sociétés de gestion cotées et les fonds cotés.

Les sociétés de Private Equity cotées

Bien que ne représentant qu'une petite partie de l'univers du Private Equity coté, les sociétés de gestion de capital investissement disponibles sur le marché action ont un rôle important. De grands noms du Private Equity ont en effet décidé, à la fin des années 2000, de rentrer en bourse. Il est possible de citer les IPO de Blackstone en 2007, de KKR en 2010, d'Apollo en 2011 ou encore de Carlyle en 2012.

Les actionnaires de la société de gestion joueront un rôle similaire à celui du *General Partner*. En effet, ceux-ci sont éligibles à toutes les différentes sources de revenus engrangés par la société de gestion, des frais de gestion au *carried interest*. Les actionnaires de sociétés de PE cotées ont donc accès aux investissements classiques réalisés par les sociétés de capital investissement dans des sociétés non cotées, mais ils bénéficient en plus de cela des frais de gestion générés par le GP.

Du côté des dirigeants pré-IPO de la société de gestion, une introduction en bourse présente de nombreux intérêts. Tout d'abord, c'est une manière pour les dirigeants de vendre une partie de la firme qu'ils ont gérée pendant plusieurs années, comme le ferait un chef d'entreprise classique. L'IPO va également permettre à la société de gestion de disposer d'un coussin de capitaux, rendant possibles de nouveaux investissements sans se soucier de l'organisation de levées de fonds. Enfin, à la suite d'une introduction en bourse, la société de gestion pourrait choisir de croître en diversifiant son activité et en ne se concentrant plus uniquement sur le Private Equity.

C'est ce dernier point qui peut remettre en cause la légitimité des indices fondés sur ces sociétés de gestion cotées [32] pour caractériser le comportement du Private Equity. Après une IPO, ces firmes peuvent par exemple décider d'investir dans de nouvelles classes d'actifs, comme l'immobilier ou les Hedge Funds, ou débuter une activité de services, comme conseiller en fusions et acquisitions. C'est ainsi qu'au 31 mars 2020, parmi les 538 milliards de dollars d'actifs sous gestion de Blackstone, seuls 175 milliards de dollars sont dédiés au Private Equity.

Les fonds de Private Equity cotés

La majorité des véhicules d'investissement en capital investissement cotés en bourse sont en fait des fonds de Private Equity, et non des sociétés de gestion. Appelés également fonds *Evergreen*, ces véhicules ont une durée de vie qui n'est pas limitée dans le temps [33] car les montants levés ainsi que les profits réalisés par le fonds sont automatiquement réinvestis dans celui-ci. Ici, les actionnaires n'ont qu'un simple rôle d'apporteurs de capitaux, comme les LPs dans un fonds de Private Eqity traditionnel. Ces fonds cotés en bourse permettent aux acteurs qui n'ont habituellement pas accès au Private Equity, par manque de capitaux suffisants, d'accéder tout de même à cette classe d'actifs.

En outre, quelques années après une IPO, un fonds de Private Equity coté sera composé de multiples participations qui devraient générer des flux de distributions de manière régulière. Ainsi, ces véhicules peuvent permettre aux investisseurs d'échapper à la « courbe en J ».

Les investisseurs institutionnels qui investissent dans des fonds de Private Equity traditionnels et qui disposent de capitaux engagés mais non encore appelés peuvent également placer ces capitaux dans des fonds cotés. Cela leur permet de ne pas avoir à constituer de réserves de cash et d'investir les capitaux disponibles dans un véhicule dont le profil se rapproche de celui du capital investissement. Il est néanmoins nécessaire d'être vigilant puisque les capitaux engagés peuvent être appelés à tout moment par le fonds de Private Equity. En outre, les parts de fonds cotés ne présentent pas une liquidité totale. Afin de bénéficier du potentiel des fonds cotés, les actionnaires décident en effet la plupart du temps de conserver leur position pendant un certain temps. Dès lors, les parts de fonds cotés sont souvent peu échangées sur les marchés boursiers. Une certaine illiquidité est ainsi associée à ces parts.

Les véhicules de capital investissement cotés en bourse présentent donc des opportunités nouvelles par rapport aux fonds de Private Equity traditionnels, mais soulèvent également de nombreuses questions.

32. Comme le LPX 50 par exemple, présenté infra dans le paragraphe 3.2.1.

33. Contrairement aux fonds de capital investissement classiques qui affichent une durée de vie contractuelle d'une dizaine d'années.

2.3.7 Les différents types de fonds de capital investissement

Il est possible d'investir en Private Equity via divers véhicules d'investissement. Dans la règlementation française et européenne, les différents types de fonds de capital investissement évoqués infra sont considérés comme des Fonds d'Investissement Alternatifs (FIA). Cette notion de FIA a été introduite par la directive 2011/61/UE AIFM (Alternative Investment Fund Managers).

Une note de l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) *Les fonds de capital-investissement (FCPR, FCPI, FIP)* (p. d.) présente les FIA qui correspondent à des fonds de capital investissement :

— les Fonds Communs de Placement à Risques (FCPR) dont le portefeuille est constitué d'au moins 50 % de titres d'entreprises non cotées ;

— les Fonds Communs de Placement dans l'Innovation (FCPI) qui affichent un portefeuille composé de 70 % minimum de titres d'entreprises innovantes non cotées en bourse ;

— enfin, les Fonds d'Investissement de Proximité (FIP) sont des fonds investis à hauteur de 70 % ou plus dans des petites ou moyennes entreprises régionales.

Les FIP et les FCPI sont donc des FCPR. Ces trois types de fonds sont ouverts aux investisseurs non professionnels et permettent d'accéder au marché des sociétés non cotées dans un cadre fiscal favorable.

Il existe également des Fonds Professionnels de Capital Investissement (FPCI) qui sont quant à eux réservés à des investisseurs professionnels [34] et qui doivent être composés d'au moins 50 % de titres de sociétés non cotées.

Enfin, un fonds de capital investissement peut également avoir comme structure un Fonds Professionnels Spécialisés (FPS). Ces fonds peuvent en effet investir via des actions non cotées. Comme leur nom l'indique, ces fonds sont principalement destinés à des clients dits « professionnels ».

Il est important de faire la distinction entre ces différents types de fonds car la réglementation qui s'applique à chacun d'eux peut différer en certains points.

Les fonds ELTIF

Le règlement européen 2015/760 entré en application le 9 décembre 2015 a introduit la notion de fonds European Long-Term Investment Funds (ELTIF) ou fonds européens d'investissement de long terme. Cette mesure vise à favoriser les investissements à long terme dans l'économie réelle, par le biais de sociétés non cotées ou de projets d'infrastructure. Pour qu'un fonds soit qualifié ELTIF, il faut qu'un agrément lui soit accordé par l'AMF.

Seuls les Fonds d'Investissement Alternatifs (FIA) fermés européens sont éligibles à l'agrément ELTIF. Un fonds ELTIF doit être investi à hauteur d'au moins 70 % de son capital dans des actifs éligibles tels que des instruments de capitaux propres ou de dette émis par une entreprise non financière et non cotée ou affichant une capitalisation boursière inférieure à 500 millions d'euros ou des parts d'un ou plusieurs autres fonds ELTIF.

D'autres restrictions s'appliquent, comme des obligations de diversification du portefeuille d'investissement ou des limites de concentration, mais celles-ci ne sont a priori pas contraignantes du point de vue d'un fonds de Private Equity [35]. Les FIA de capital investissement de droit français font donc partie des véhicules qui peuvent prétendre à l'agrément ELTIF.

34. Au sens de l'article 423-49 du règlement général de l'AMF.
35. L'AMF a mis a disposition du public un « Guide sur les fonds européens d'investissement à long terme » qui reprend en détail les différents points du règlement européen relatif aux ELTIF.

Certains fonds de Private Equity ont d'ores et déjà obtenu cet agrément. Il est possible de citer le fonds de co-investissement « BlackRock Private Equity Opportunities ELTIF », distribué entre autres par BNP Paribas Banque Privée, qui permet donc à certains des clients particuliers de la banque[36] d'accéder à ce fonds de capital investissement géré par BlackRock, plus grosse société de gestion au monde[37]. Tikehau Capital, société française de gestion d'actifs, a également lancé début 2020 son premier fonds de Private Equity ELTIF, destiné à la clientèle privée de Banca March en Espagne.

2.3.8 Environnement économique du Private Equity en France

L'association France Invest, reconnue par l'Autorité des Marchés Financiers (AMF), est un organisme qui regroupe les sociétés de capital investissement qui exercent leur activité dans l'hexagone. Cette association a également pour rôle la promotion du Private Equity auprès des différents intervenants : entrepreneurs, investisseurs et décideurs politiques. Dans ce cadre, France Invest organise des formations pour les initiés et les non initiés, effectue une veille économique et réglementaire et publie régulièrement des études sur la marché du capital investissement français[38]. En complément des informations présentées infra, le lecteur pourra donc se référer à France Invest s'il souhaite obtenir davantage d'éléments concernant le développement économique du Private Equity en France.

Collecte

De manière semestrielle et annuelle, France Invest publie, en partenariat avec Grant Thornton, un rapport sur l'activité des acteurs français du capital investissement. Les éléments présentés ici sont issus du rapport relatif au premier semestre de 2019 (S1 2019).

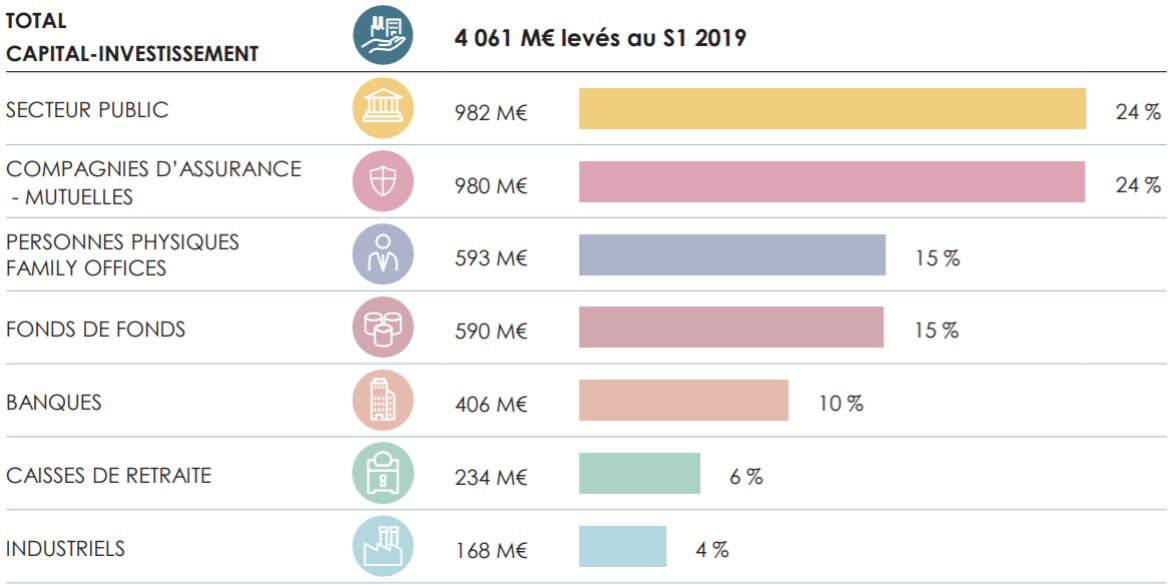


FIGURE 2.12 – Montants levés d'origine française par type de souscripteurs au S1 2019

Source : France Invest / Grant Thornton

Le montant total de capitaux levés au premier semestre 2019 s'élève à 7,981 milliards d'euros. Les investisseurs français représentent 51 % de la collecte. La répartition par type de souscripteurs est présentée sur la figure supra (2.12). Les organismes assureurs occupent la deuxième place du classement, juste après le secteur public, puisqu'ils contribuent à hauteur d'environ 24 % des montants totaux levés d'origine

36. Le montant minimum de souscription s'élève à 125 000 euros.
37. BlackRock possédait plus de 7 400 milliards de dollars sous gestion fin 2019.
38. Ces publications sont disponibles sur le site internet de l'association : `https://www.franceinvest.eu/`.

française, soit 980 millions d'euros. Cela représente une augmentation de plus de 13 % par rapport au S1 2018.

Après regroupement des capitaux d'origine étrangère et d'origine française, le graphique ci-après (2.13) montre que la collecte a augmenté auprès de tous les souscripteurs, exception faite des banques.

Les organismes assureurs ont donc une place importante dans l'univers du capital investissement, car bien que la poche d'investissement accordée au Private Equity par ces organismes soit faible en termes de pourcentage, la taille du bilan des assureurs induit des montants absolus élevés.

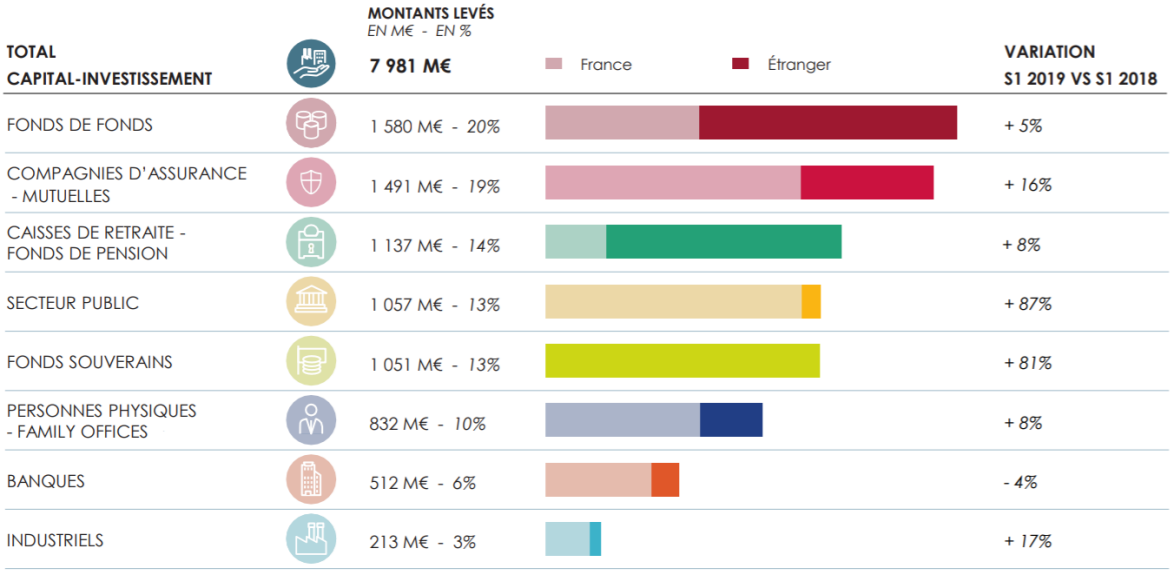


FIGURE 2.13 – Évolution des levées de fonds par type de souscripteurs - S1 2019 vs S1 2018

Source : France Invest / Grant Thornton

Selon le rapport de France Invest établi au sujet de la collecte du premier semestre 2020, le Private Equity a été résilient dans un contexte de crise sanitaire. La collecte globale n'a en effet diminué que de 7 % comparé au premier semestre 2019, s'élevant ainsi à 7,420 milliards d'euros. 29 % des montants levés ont été investis par des compagnies d'assurance ou des mutuelles. Le montant souscrit par ces organismes est donc en hausse de 43 % par rapport au montant investi au premier semestre 2019 (voir figure (2.14)).

Performance nette du capital investissement

France Invest réalise également chaque année, avec le cabinet de conseil EY, une étude de la rentabilité du capital investissement en France. La mesure de performance retenue est le Taux de Rentabilité Interne (TRI), net de frais de gestion et de *carried interest*. Pour chaque fonds, le TRI déterminé dépend donc de la valeur résiduelle du fonds, appelée Valeur Actuelle Nette (VAN), ainsi que de l'échéancier de flux de celui-ci : appels de capitaux et distributions [39].

La figure ci-dessous (2.15), issue du rapport annuel de 2018 sur les performances du Private Equity, présente les TRI du capital investissement français par horizon et par segment. Les TRI depuis l'origine sont estimés en prenant en compte tous les fonds depuis 1987. Ainsi, selon l'étude, le TRI moyen de l'ensemble des fonds de capital investissement, tous segments confondus, entre début 2009 et fin 2018, s'élève à 8,8 %. L'étude précise également que les fonds clos, sans considération de leur ancienneté, affichent un TRI net moyen de 12,9 %.

39. Les notions de TRI et de VAN seront développées ultérieurement.

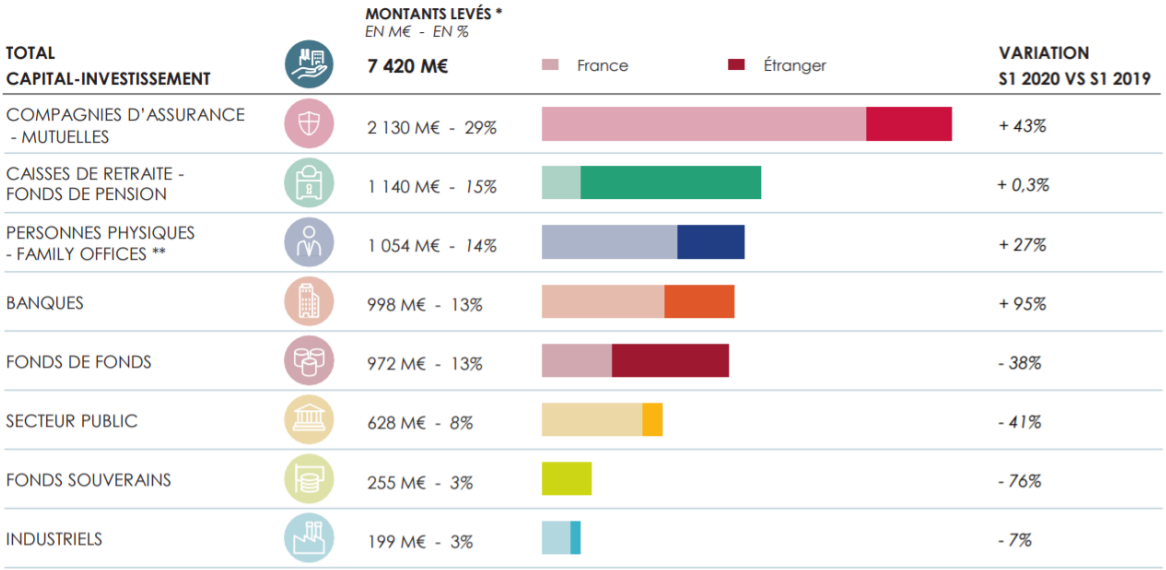


FIGURE 2.14 – Évolution des levées de fonds par type de souscripteurs - S1 2020 vs S1 2019

Source : France Invest / Grant Thornton

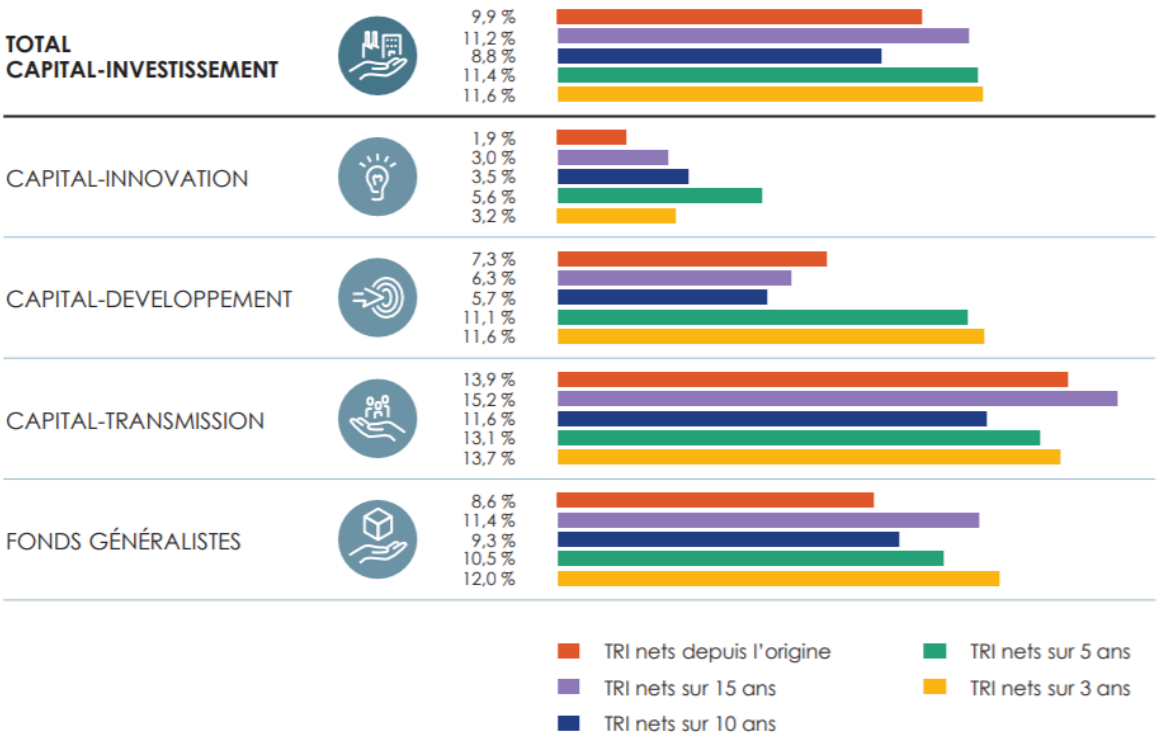


FIGURE 2.15 – Performances moyennes, selon le TRI, des fonds de PE français par horizon et par segment

Source : France Invest / EY

L'étude fournit aussi une comparaison de la performance du capital investissement avec d'autres classes d'actifs, comme l'immobilier, les Hedge Funds ou encore les actions par l'intermédiaire du CAC 40 et du

CAC All-Tradable [40]. Ces analyses sont effectuées sur la base de la méthode *Public Market Equivalent (PME)* qui sera décrite infra. Les résultats de cette comparaison sont détaillés dans la figure suivante (2.16).

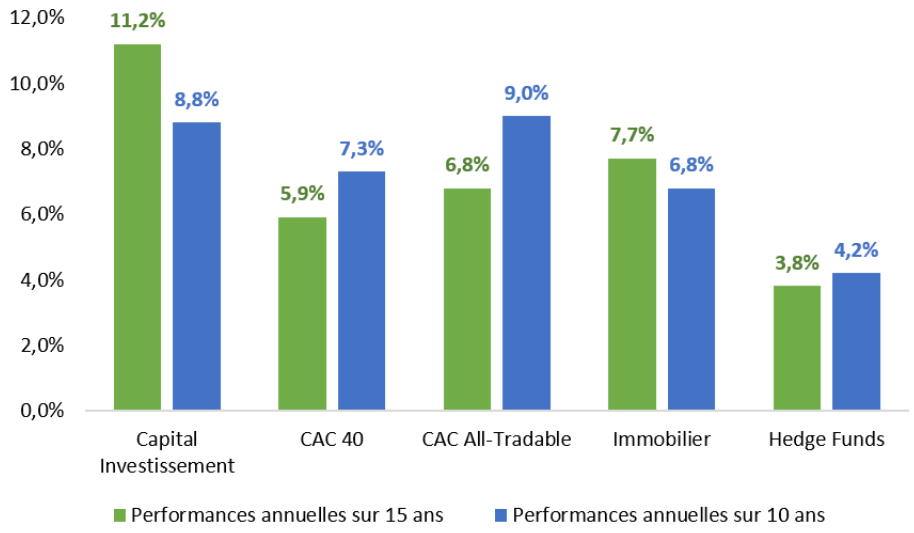


FIGURE 2.16 – Performance des fonds de PE français contre d'autres classes d'actifs

Source : France Invest / EY

Entre début 2004 et fin 2018, le capital investissement a donc en moyenne surperformé l'immobilier, les Hedge Funds [41] ainsi que les deux indices actions. Entre début 2009 et fin 2018, le CAC All-Tradable affiche une meilleure performance que le capital investissement, France Invest explique cela par le fait que la valeur de l'indice en début de période, soit au 31 décembre 2018, était faible.

Ces différentes perspectives de performance peuvent sembler séduisantes et sont une des raisons pour lesquelles certains investisseurs s'intéressent au Private Equity. Il est néanmoins important de garder en tête le fait que France Invest est une association qui a pour vocation la promotion du capital investissement. En outre, les données utilisées pour réaliser les études de performance sont issues de l'*European Data Cooperative (EDC)*, plateforme privée [42] créée à l'initiative d'Invest Europe, l'équivalent européen de France Invest. Cette plateforme de données est aujourd'hui notamment utilisée par l'OCDE ainsi que par BPI France. Les données sont collectées auprès des sociétés de gestion. Ainsi, l'étude de 2018 sur les performances du capital investissement réalisée par France Invest utilise des données issues de 154 sociétés de gestion pour un total de 859 véhicules. Etant donné que les performances sont relevées à la discrétion des fonds eux-mêmes, plutôt que des investisseurs, un biais de publication [43] pourrait survenir. Il convient de porter un regard critique sur ces résultats.

2.4 Mesures de performance

Il est important pour un gestionnaire d'investissement de mesurer la performance des sous-jacents sur lesquels il investit. Une telle démarche permet ensuite de comparer les différents véhicules de placement

40. Le CAC 40 est le principal indice boursier de la Bourse de Paris et regroupe les cotations des 40 sociétés françaises qui affichent les volumes d'échange de titres les plus importants. Le CAC All-Tradable est quant à lui composé de toutes les sociétés françaises cotées dont 20 % au moins du capital flottant est échangé chaque année, il n'est pas limité en nombre de valeurs.

41. Les indices utilisés pour représenter la performance de l'immobilier et des Hegde Funds sont respectivement l'EDHEC IEIF Immobilier d'Entreprise France et le Credit Suisse Hedge Funds Index, de périmètre international.

42. L'accès est essentiellement réservé aux GP et LPs membres d'Invest Europe.

43. Le biais de publication consiste, en science, à ne conserver que des résultats positifs. Ici, cela reviendrait à ne pas déclarer les fonds qui affichent une mauvaise performance.

afin de déterminer de la manière la plus objective possible ceux qui ont permis d'obtenir les meilleurs résultats. Pour ce faire, il est nécessaire de définir des métriques pertinentes, à la fois cohérentes vis-à-vis de la classe étudiée et rendant également possible la comparaison avec d'autres types d'actifs.

La performance d'un fonds de PE est par conséquent un élément capital pour la société de gestion puisque les LPs vont principalement se fonder sur celle-ci pour décider d'investir dans les futurs véhicules levés par la société de gestion.

Cette partie présente différentes mesures de performance, leurs avantages et leurs inconvénients. Les éléments énoncés ici sont essentiellement issus de SCHOENBERG et ZEISBERGER (2019).

2.4.1 La Valeur Actuelle Nette

La première métrique envisagée lorsqu'il s'agit de déterminer la viabilité d'un projet est souvent la VAN. Cette valeur est définie comme la somme des flux actualisés dudit projet :

$$VAN = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

où t désigne la période en cours[44], T est l'horizon d'investissement, r est le taux d'actualisation et CF_t désigne le flux net de trésorerie relatif à la période t. Ce flux peut être négatif si les dépenses ont excédé les recettes ou positif dans le cas inverse.

Afin d'évaluer la VAN d'un investissement il est donc nécessaire d'estimer ou d'avoir accès à la chronique de *cash flows* : montants et dates des flux. En outre, il faut également déterminer un taux d'actualisation r. Le choix de ce taux dépend de l'usage qui veut être fait du calcul de la VAN. S'il s'agit de déterminer si le projet d'investissement va permettre d'augmenter la valeur de la firme, alors il est possible de choisir, pour r, le coût moyen pondéré du capital[45]. Si l'objectif est plutôt de comparer deux opportunités d'investissement, c'est le taux de réinvestissement de l'entreprise[46] qui pourra servir de taux d'actualisation ; dans ce cas, le projet le plus rentable sera celui qui présente la Valeur Actuelle Nette la plus grande.

À partir des informations énoncées ci-dessus, il est possible d'établir une règle lorsque le taux d'actualisation utilisé dans le calcul de la VAN est le coût moyen pondéré du capital. En effet, une entreprise décidera d'investir dans un projet si la valeur actuelle des bénéfices engendrés par celui-ci est supérieure à la valeur actuelle des coûts nécessaires à cet investissement. Dès lors :

— si $VAN < 0$ le projet diminue la valeur de la firme, il devrait donc être rejeté ;
— si $VAN > 0$ l'investissement permet d'accroître la valeur de l'entreprise, il peut donc être réalisé ;
— enfin, si $VAN = 0$, la décision d'investissement doit se concentrer sur des motivations qui ne sont pas financières, mais plutôt stratégiques ou politiques.

La VAN semble donc être une métrique simple qui permet de comparer plusieurs projets d'investissement. Néanmoins, un écueil important réside dans le choix du taux d'actualisation. Celui-ci va fortement impacter le résultat d'une analyse fondée sur la Valeur Actuelle Nette.

44. L'origine $t = 0$ coïncide avec la date à laquelle la décision d'investissement est effectuée ou le premier cash flow versé.
45. Le coût moyen pondéré du capital est le taux de rentabilité annuel moyen attendu par ceux qui apportent du capital : créanciers et actionnaires.
46. Taux de rentabilité moyen de la firme

2.4.2 Le Taux de Rentabilité Interne

Le TRI est une notion voisine de la VAN puisque ce taux est défini comme le taux d'actualisation qui permet d'annuler la Valeur Actuelle Nette (VAN) d'une série de *cash flows*, ce qui donne avec les notations précédentes :

$$VAN = 0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+TRI)^t}$$

Le Taux de Rentabilité Interne permet alors d'évaluer la performance d'un projet lorsque celui-ci est arrivé en fin de vie et qu'aucun cash flow résiduel ne surviendra par la suite. Comme pour le calcul de la VAN, le TRI prend en compte les montants et les dates de versement des flux.

Exemple de TRI pour un fonds de Private Equity

Afin d'illustrer de manière concrète les différentes métriques, le fonds fictif suivant sera étudié. Soit un fonds de Private Equity qui prévoit de réaliser trois investissements à partir du 1er janvier 2020. Les flux de trésorerie des différentes opérations sont présentés sur la figure (2.17) [47]. Tous les flux sont ici supposés connus et certains, il n'est pas ici question de discuter de la projection des flux.

Tableau des flux du projet								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	TRI
Investissement 1	-20			20	6			12,62%
Investissement 2		-15			5	20		14,43%
Investissement 3			-12				18	10,67%
Flux nets de trésorerie	-20	-15	-12	20	11	20	18	**11,08%**

Tableau des flux actualisés du projet								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	VAN
Investissement 1	-20,00			14,00	6,00			0,00
Investissement 2		-13,11			2,92	10,19		0,00
Investissement 3			-9,80				9,80	0,00
Flux nets de trésorerie actualisés	-20,00	-13,50	-9,73	14,59	7,23	11,83	9,58	0,00

FIGURE 2.17 – Flux et premières mesures de performance du fonds

Le fonds de Private Equity présente donc un Taux de Rentabilité Interne de 11,08 %. Cette rentabilité est ici calculée à l'échelle du fonds, c'est-à-dire du point de vue de la société de gestion. Le TRI ne sera donc pas nécessairement identique pour les LPs puisqu'ils ne reçoivent pas forcément les *cash flows* aux mêmes dates, du fait de la structure de *cash flow waterfall* présentée supra.

TRI ou VAN ?

Le TRI est une métrique très couramment utilisée en pratique par les gestionnaires d'investissements, elle recouvre cependant différents problèmes et n'est donc pas la plus adaptée pour évaluer les performances d'un fonds de Private Equity.

47. Les flux négatifs représentent des investissements tandis que les flux positifs sont les revenus des cessions.

Tout d'abord, l'utilisation du TRI comme métrique suppose que les flux reversés avant la fin du projet (ici avant le 1er janvier 2026) sont réinvestis au TRI [48]. En effet, un projet qui présente une faible duration et un TRI important peut être moins intéressant pour l'investisseur qu'un projet avec un plus faible TRI mais une plus grande duration.

Ce phénomène peut s'illustrer par l'exemple suivant. Soit une entreprise qui souhaite se développer, elle peut investir dans deux projets différents dont les *cash flows* futurs ont été déterminés préalablement. La firme souhaite déterminer le projet qui sera le plus rentable financièrement. Pour cela, elle calcule le TRI et la VAN des deux investissements. La Valeur Actuelle Nette est calculée à partir d'un taux d'actualisation de 7 % [49]. Le tableau de la figure ci-après (2.18) permet de synthétiser les résultats.

Si l'entreprise se fonde uniquement sur le TRI, elle devrait choisir d'investir dans le projet 2, tandis que si elle se base sur la VAN elle devrait choisir le projet 1 qui a une plus grande duration. En effet, lorsque l'argent est placé pour une durée de trois ans sur le projet 1 à un TRI de 26 %, il n'est investi que pour une durée moyenne d'un peu plus d'un an et demi sur le projet 2 à un TRI de 30 %, rien ne garantit cependant que le rendement des investissements suivants permettra d'atteindre, à la fin, un TRI supérieur à 26 %. Le TRI apparaît ici comme un indicateur moins pertinent que la VAN. Le graphique ci-dessous permet de constater qu'en fonction du taux d'actualisation choisi pour estimer la Valeur Actuelle Nette des différents projets, le TRI et la VAN peuvent mener à des conclusions différentes.

Tableau des flux des projets							
Période	0	1	2	3	TRI	VAN	Duration
Projet 1	-10	0	0	20	26%	5,91	3,00
Projet 2	-10	10	0	5	30%	3,20	1,61

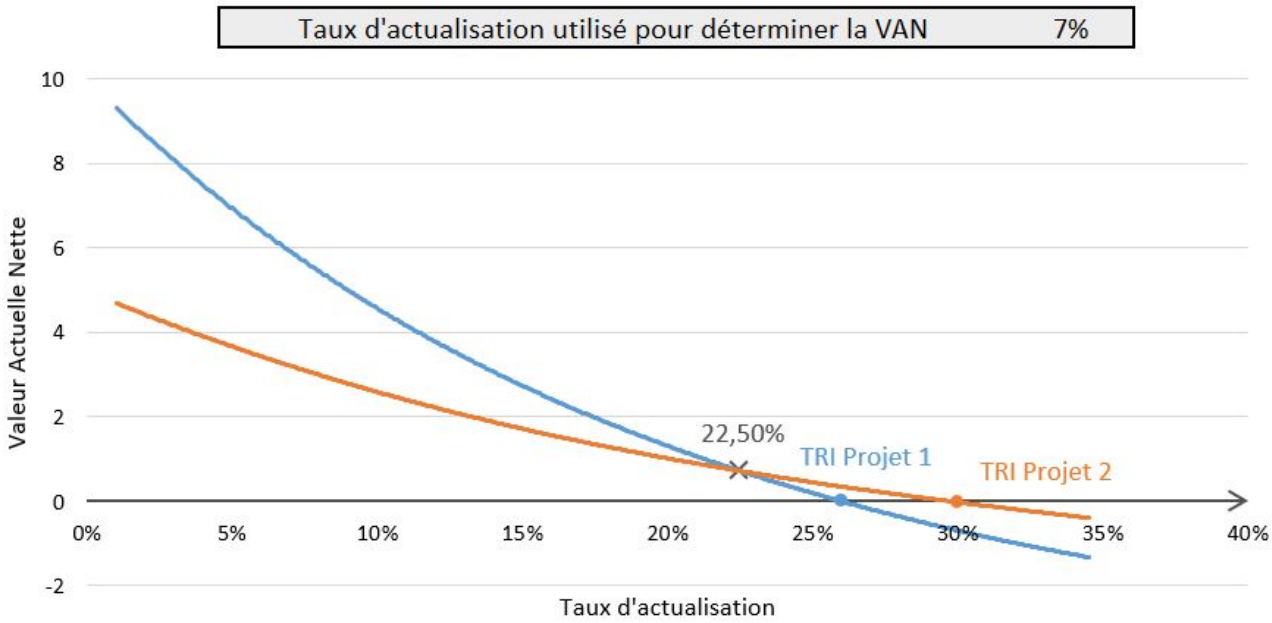


FIGURE 2.18 – Illustration des limites du TRI

L'hypothèse de réinvestissement au Taux de Rentabilité Interne peut se révéler discutable, notamment dans le cas où la rentabilité du projet initial est élevée. Il sera dès lors difficile de trouver une autre opportunité d'investissement présentant la même rentabilité. Un *General Partner* qui ne se fonderait que sur

48. Le fait que le TRI renferme cette hypothèse a été, et est toujours, longuement discuté dans la littérature.
49. Ce taux est ici choisi de manière arbitraire mais pourrait correspondre au taux de réinvestissement de la firme ou au coût moyen pondéré du capital, par exemple.

le TRI du fonds pour évaluer sa performance aurait donc tendance à céder ses participations rapidement afin de sécuriser un TRI plus important.

Un ou des TRI(s) ?

Etant donné que la détermination du TRI d'un projet d'investissement passe par la recherche des racines du problème $VAN(r) = 0$, il peut exister plus d'une solution. A contrario, dans certains cas, aucune valeur de r ne permet de résoudre le problème, le TRI n'existe donc pas. Il est néanmoins avéré, par la règle de signes de DESCARTES, que le nombre de solutions au problème précédent ne peut pas être supérieur au nombre de changements de signe des flux de la structure de *cash flows*.

PHALIPPOU (2008) présente, en détail et par différents exemples, les multiples écueils associés à la notion de TRI comme mesure de performance.

2.4.3 Le Taux de Rendement Interne Modifié

Le Taux de Rendement Interne Modifié (TRIM) a été défini afin de relâcher l'hypothèse de réinvestissement précédemment énoncée. Dans le cas du TRIM, les *cash flows* distribués à l'investisseur avant la fin du projet sont en effet réinvestis à un taux déterminé en amont. Ce taux de réinvestissement doit être en accord avec le rendement moyen du portefeuille de l'investisseur, ainsi il peut par exemple s'agir du taux de rendement d'un indice boursier. Le TRIM permet également de prendre en compte le fait que les capitaux engagés initialement ne sont pas forcément investis immédiatement. Ce taux, contrairement au TRI prend donc en compte le coût d'immobilisation des capitaux. PHALIPPOU (2008) suggère d'utiliser, pour un investissement dans un fonds de Private Equity, un taux de réinvestissement et un taux de financement égaux au taux de *hurdle* du fonds, soit 8 % généralement, ou au taux de rentabilité d'un indice de marché de référence tel que le S&P 500, par exemple.

L'application du Taux de Rendement Interne Modifié à un fonds de Private Equity permet ainsi de mesurer de manière plus réaliste la performance du fonds en assouplissant certaines hypothèses relatives au TRI. Le TRIM est ainsi défini :

$$TRIM = \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=0}^{n} D_{t_i}(1+r_{inv})^{t_n-t_i}}{-\sum_{i=0}^{n}\frac{C_{t_i}}{(1+r_{fin})^{t_i-t_0}}}} - 1$$

où n est le nombre de périodes que compte l'ensemble du projet d'investissement[50], les $t_i, \forall i \in [0, n]$ sont les dates auxquelles ont lieu les *cash flows*, les C_{t_i} sont les capitaux appelés et sont donc négatifs, les D_{t_i} sont les capitaux distribués à l'investisseur, r_{inv} est le taux de réinvestissement et r_{fin} est le taux de financement. Le TRIM est donc le TRI d'un projet qui ne contiendrait que deux flux de trésorerie, séparés par n périodes de temps : un premier flux égal à la valeur actuelle des fonds investis et un second flux égal à la valeur capitalisée des montants perçus par l'investisseur. Dès lors, contrairement au TRI, il ne peut exister qu'un et un seul TRIM.

Application du TRIM à l'exemple précédent

Le taux de réinvestissement et le coût du capital du fonds de PE étudié dans l'exemple ci-dessus seront respectivement supposés égaux à 5 % et 2 %[51]. Le tableau suivant (2.19) donne la valeur du TRIM. Les

50. de la décision d'investissement au versement du dernier flux
51. Ces valeurs sont ici choisies de manière arbitraire.

flux écrits en bleu sont ramenés au 1er janvier 2020 à l'aide du coût du capital tandis que les flux en jaune sont capitalisés, jusqu'au 1er janvier 2026, sur la base du taux de réinvestissement. Étant donné que le TRIM prend en compte des hypothèses plus conservatrices que le TRI, il est normal de trouver un TRIM inférieur au TRI.

Bien que le Taux de Rendement Interne Modifié permette de résoudre un des écueils du Taux de Rentabilité Interne, il n'en est pas pour autant une métrique idéale. Le TRIM est une mesure absolue, il n'est donc pas possible de comparer la performance d'un fonds de Private Equity à celle d'un véhicule d'une autre classe d'actifs en se basant uniquement sur le TRIM. En outre, cette mesure nécessite la connaissance de la structure complète de *cash flows*, passés et futurs, ce qui n'est généralement pas le cas lors de la vie d'un fonds.

Tableau des flux pour le calcul du TRIM							
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26
Investissement 1	-20,00			20	6		29,77
Investissement 2	-14,71	-15			5	20	26,51
Investissement 3	-11,53		-12				18,00
Flux nets de trésorerie pour calcul du TRIM	-46,24	0	0	0	0	0	74,28
TRIM	**8,22%**						

Taux de réinvestissement	5%
Coût du capital	2%

FIGURE 2.19 – Calcul du TRIM

2.4.4 Les multiples

Un fonds de Private Equity communique le plus souvent ses résultats sous la forme de multiples, ou *Multiple of Money (MoM)*[52]. Ce multiple est appelé au « Total Value to Paid-In (TVPI) » et se décompose en un *Residual Value to Paid-In (RVPI)* d'une part et en un *Distributed to Paid-In (DPI)* par ailleurs, de telle sorte que $TVPI = RVPI + DPI$. Ces différentes mesures vont varier au cours de la vie du fonds.

Dans ces différents termes, *Paid-In* signifie le montant de capitaux appelés par le fonds[53] ; *Distributed* représente le capital qui a été distribué aux investisseurs grâce aux différentes cessions opérées par le fonds ; enfin, *Residual Value* est la VAN du fonds de PE i.e. c'est la juste valeur des investissements résiduels du fonds de Private Equity. Ces valeurs évoluent au cours du temps, la valeur du multiple d'un fonds dépend donc de sa date de calcul.

Dès lors, le RVPI est égal à la Valeur Actuelle Nette du portefeuille d'investissements du fonds de PE divisée par le montant total de capitaux appelés par celui-ci.

$$RVPI = \frac{\text{VAN}}{\text{Capitaux appelés}}$$

Cette métrique capte donc la juste valeur des gains futurs qu'anticipe le fonds. Ainsi, le RVPI sera généralement plus important au début de la vie du fonds, lorsque le capital est au travail et que peu de cessions ont eu lieu.

52. Aussi appelé *Multiple on Invested Capital (MOIC)*
53. Ce n'est donc pas le montant total de capitaux engagés par les investisseurs.

Le DPI est quant à lui égal au montant distribué aux investisseurs divisé par les capitaux appelés.

$$DPI = \frac{\text{Distributions}}{\text{Capitaux appelés}}$$

Cette métrique est nulle au début du fonds puisque celui-ci n'a pas encore réalisé de cession et croît avec le temps. En fin de vie du fonds, lorsque le fonds a cédé toutes ses participations, le TVPI est égal au DPI puisque la valeur résiduelle du fonds vaut zéro.

Illustration des multiples

La figure suivante (2.20) présente l'évolution du multiple du fonds exemple présenté ci-dessus. À chaque pas de temps annuel, la VAN a été déterminée en appliquant un taux d'actualisation arbitraire de 13 % aux *cash flows* futurs.

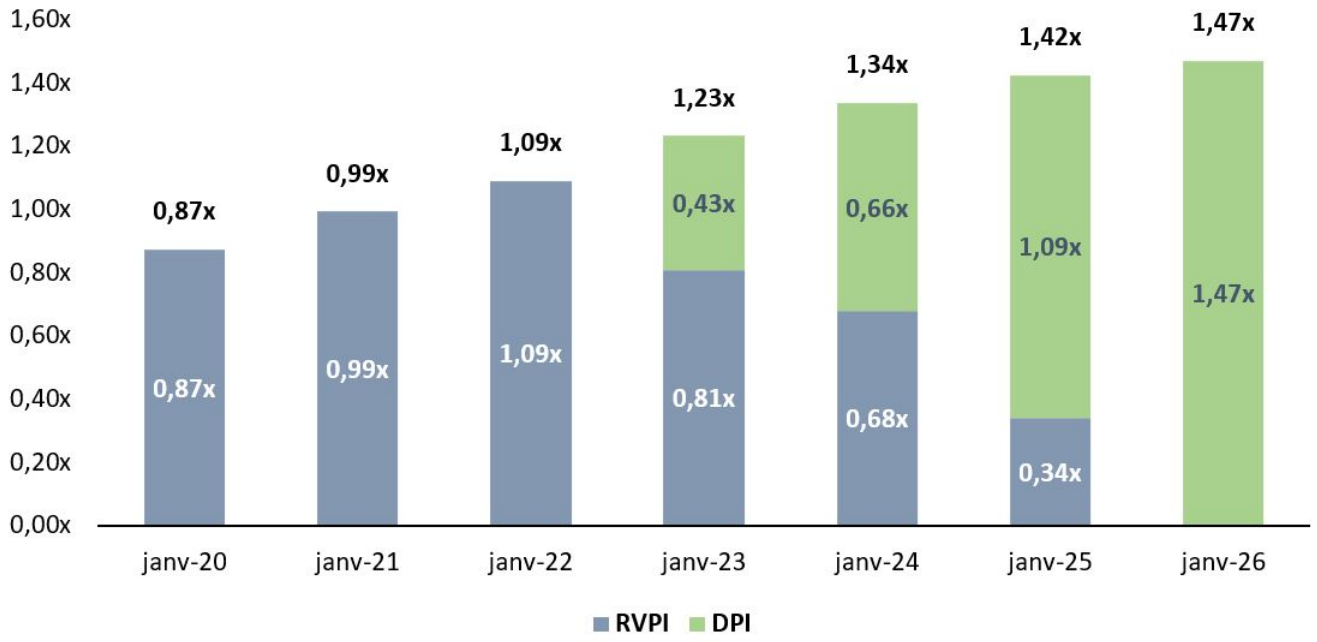


FIGURE 2.20 – Évolution du multiple du fonds

Initialement le DPI est nul, comme prévu. Le RVPI est quant à lui inférieur à 1, ce qui peut être surprenant puisque cela signifie que la VAN de l'investissement dans le fonds de Private Equity est inférieure à la valeur des capitaux qui ont permis cet investissement. Cela est justifié par le fait que les capitaux prélevés ne servent pas uniquement à investir dans les sociétés cibles, mais qu'ils permettent également de payer les frais de gestion de la société de Private Equity, ce qui explique que le RVPI soit inférieur à 1 à l'origine.

2.4.5 La *Public Market Equivalent*

Les métriques évoquées supra présentent l'avantage d'être relativement simples à calculer, c'est pourquoi les fonds de PE les utilisent dans leur communication financière. Ces mesures ne sont néanmoins pas optimales du point de vue des LPs puisqu'elles n'autorisent pas la comparaison avec les performances d'autres classes d'actifs plus traditionnelles. Plusieurs techniques ont dès lors été développées afin de pouvoir comparer de la manière la plus réaliste possible les performances d'un fonds de Private Equity avec celles du marché.

La méthode la plus populaire destinée à cette comparaison est la *Public Market Equivalent (PME)*. Elle permet de confronter un investissement dans un fonds de PE à un investissement similaire dans une valeur mobilière cotée. Il faut signaler à ce stade que le résultat de l'analyse par PME va fortement dépendre de la valeur mobilière de comparaison choisie.

Il existe différentes mesures qui se fondent sur la PME.

LONG-NICKELS PME

LONG et NICKELS (1996) ont développé la première métrique fondée sur la méthode de *Public Market Equivalent*, aussi appelée Index Comparison Method (ICM). L'idée est ici de répliquer les appels et les distributions d'un fonds de Private Equity par, respectivement, l'achat ou la vente d'un même montant de la valeur mobilière de référence. Les TRI des deux stratégies d'investissement sont ensuite comparés, ce qui permet de déterminer si le fonds de PE a surperformé ou sousperformé l'indice de référence.

Lors du calcul des deux TRI, seul le dernier flux change. En effet, le dernier flux du fonds de Private Equity correspond soit à la VAN du fonds, soit au montant de la distribution finale si le fonds est en fin de vie, tandis que le dernier flux du portefeuille action correspond à sa VAN.

En somme, le TRI du portefeuille de référence se calcule à partir des *cash flows* du fonds de PE, en considérant que le dernier flux est :

$$VAN_{\text{LN-PME},T+1} = I_{T+1} \times \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{-CF_t}{I_t} \right)$$

où T est la date de versement de l'avant dernier flux connu [54], $T+1$ est la date de communication de la VAN résiduelle du fonds de Private Equity [55] ou du dernier cash-flow enregistré par les LPs [56] et I_t est la valeur de l'indice de référence en t.

Le fonds introduit précédemment est utilisé pour illustrer le concept de LONG-NICKELS PME (2.21). Ici, le fonds est liquidé au 1er janvier 2026, car aucun flux n'a lieu plus tard. Il est donc virtuellement possible de considérer la distribution finale du fonds comme sa VAN au 1er janvier 2026. Cette manipulation, qui ne change en rien le résultat, permet de mieux comprendre le principe de la LN-PME. Les montants appelés (flux négatifs) ou distribués (flux positifs) par le fonds de PE, encadrés sur le tableau en pointillés jaunes, sont répliqués par des achats et des ventes d'actions. Le portefeuille contient ainsi un certain nombre d'actions qui évolue avec le temps. Le prix des actions dépend aussi du temps, de manière purement arbitraire ici. La Valeur Actuelle Nette (VAN) du portefeuille action au 1er janvier 2026, encadrée en pointillés bleus, est donc égale au nombre d'actions en portefeuille multiplié par le prix d'une action, soit ici 1,3 unité monétaire. Il est dès lors possible de déterminer le Taux de Rentabilité Interne de la seconde stratégie [57].

Finalement, dans le cas de cet exemple le TRI du fonds de PE [58] est supérieur à celui de l'investissement en actions. Dès lors, le fonds de PE a réalisé de meilleures performances que l'action sur la période considérée. Bien évidemment, même si l'exemple a été réalisé en prenant pour valeur de référence une action, il est tout à fait possible de choisir n'importe quel autre indice coté.

54. Par « flux », il est ici entendu « contribution », « distribution » ou « valorisation », même si une VAN n'est pas un flux à proprement parler.
55. si le fonds est encore en vie
56. si le fonds est liquidé
57. Attention, bien que les achats d'actions entraînent une valeur positive du portefeuille action, il s'agit bien de flux négatifs du point de vue de l'investisseur, puisqu'il décaisse de l'argent, et inversement pour les ventes.
58. TRI qui vaut donc 11,08%, comme sur la figure (2.17)

La méthode développée par LONG et NICKELS permet ainsi de comparer directement la rentabilité d'un fonds de PE avec un indice coté. Cependant cette méthode n'est pas idéale car dans le cas d'un fonds de PE qui serait particulièrement performant, le portefeuille action pourrait se trouver en position courte, c'est-à-dire en position de vente. Dans un tel cas, une rentabilité positive de l'action viendrait réduire la valeur du portefeuille action. Afin de résoudre ce problème, deux autres méthodes ont été élaborées : la PME+ et la KAPLAN-SCHOAR PME.

Tableau des flux des différents projets								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	TRI
Cash flow PE	-20,00	-15,00	-12,00	20,00	11,00	20,00	-	11,08%
VAN du fonds de PE	-	-	-	-	-	-	18,00	
-Cash flow PE / prix action	20,00	11,54	15,00	-16,67	-11,00	-18,18	-	
Nombre actions en portefeuille	20,00	31,54	46,54	29,87	18,87	0,69	0,69	
Valeur portfeuille action	20,00	41,00	37,23	35,85	18,87	0,76	0,90	
Cash flow PE + VAN PME	-20,00	-15,00	-12,00	20,00	11,00	20,00	0,90	3,14%

Valeur de l'action	1	1,3	0,8	1,2	1	1,1	1,3

FIGURE 2.21 – Méthode LN PME

PME+

Cette technique décrite par ROUVINEZ (2003) est fondée sur le même principe que la LONG-NICKELS PME, à la différence près qu'ici un coefficient λ est appliqué aux montants distribués afin que la VAN terminale du portefeuille action soit égale à celle du fonds de PE. D'un point de vue plus formel, la VAN du portefeuille action en $T+1$, avec les notations précédentes, est égale à :

$$VAN_{PME+,T+1} = I_{T+1} \times \sum_{t=0}^{T} \frac{(-C_t - \lambda \times D_t)}{I_t}$$

telle que

$$VAN_{PME+,T+1} = VAN_{PE,T+1}$$

où $VAN_{PE,T+1}$ est la VAN du fonds de Private Equity en $T+1$, d'où :

$$\lambda = \frac{-\sum_{t=0}^{T}\left(C_t \cdot \frac{I_{T+1}}{I_t}\right) - VAN_{PE,T+1}}{\sum_{t=0}^{T}\left(D_t \cdot \frac{I_{T+1}}{I_t}\right)}$$

Il est ensuite possible de déterminer la Valeur Actuelle Nette du portefeuille avec les distributions ainsi modifiées à l'aide du coefficient λ.

Dans l'exemple utilisé précédemment, le coefficient à appliquer aux distributions afin d'égaliser la VAN du portefeuille répliquant et la VAN du fonds de PE est $\lambda \simeq 0.7131$. Ainsi, pour déterminer le TRI PME+ il

faut calculer le TRI du portefeuille constitué des mêmes flux de capitaux appelés que le fonds de PE, mais où les distributions ont été corrigées du facteur λ. La VAN du portefeuille action est quant à elle égale à celle du fonds de PE étant donné que le coefficient λ a été choisi ainsi. Ici, le TRI PME+ est inférieur au TRI du fonds de Private Equity, ce qui signifie que sur la période le fonds de PE a été plus performant que la valeur de référence. L'inconvénient de cette méthode est que la structure de *cash flows* a été modifée. De plus, il est impossible de calculer cette métrique pour de jeunes fonds qui n'ont pas encore effectué de distributions aux LPs.

Tableau des flux des différents projets								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	TRI
Cash flow PE	-20,00	-15,00	-12,00	20,00	11,00	20,00	-	11,08%
VAN du fonds de PE	-	-	-	-	-	-	18,00	
-Cash flow PE modifié / prix action	20,00	11,54	15,00	-11,88	-7,84	-12,96	-	
Nombre actions en portefeuille	20,00	31,54	46,54	34,65	26,81	13,85	13,85	
Valeur portfeuille action	20,00	41,00	37,23	41,59	26,81	15,23	18,00	
Cash flow PE modifié	-20,00	-15,00	-12,00	14,26	7,84	14,26	18,00	3,89%

Coefficient multiplicateur distributions	0,7131

Valeur de l'action	1	1,3	0,8	1,2	1	1,1	1,3

FIGURE 2.22 – Méthode PME+

KAPLAN-SCHOAR PME

Cette métrique, introduite par S. N. KAPLAN et SCHOAR (2005), permet d'obtenir le TVPI d'un fonds de PE ajusté sur la performance d'un indice de référence. Pour cela, les *cash flows* du fonds de PE sont tous capitalisés à un certain taux. Ce taux de capitalisation est différent pour chaque flux, puisqu'il est égal à la performance affichée par l'indice de référence entre la date du flux et la date finale. Ainsi, la somme des distributions capitalisées et de la VAN du fonds de PE divisée par la somme des capitaux investis capitalisés fournit un multiple qui représente la performance relative du fonds de PE par rapport à la valeur de référence. Si ce multiple est plus grand que 1, alors le fonds de PE a surperformé l'indice de référence, sinon il l'a sousperformé. Cette métrique peut s'interpréter comme le montant à investir dans l'indice de référence afin que la richesse finale de l'investisseur soit équivalente à celle qu'il aurait enregistrée s'il avait investi une unité monétaire dans le fonds de Private Equity, à condition que les deux opportunités d'investissement affichent le même calendrier de flux. La KS-PME ne fournit cependant aucune information sur le taux de rentabilité excédentaire par période obtenu via l'investissement dans le fonds.

D'un point de vue formel, le multiple de cette méthode se calcule de la manière suivante :

$$\text{KS-PME} = \frac{\sum_{t=0}^{T}\left(D_t \cdot \frac{I_{T+1}}{I_t}\right) + VAN_{PE,T+1}}{-\sum_{t=0}^{T}\left(C_t \cdot \frac{I_{T+1}}{I_t}\right)}$$

ainsi, en reprenant l'exemple précédent, le multiple obtenu par la méthode de KAPLAN-SCHOAR PME vaut environ $1,2827$(2.23).

Tableau des flux								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	TRI
Cash flow PE	-20,00	-15,00	-12,00	20,00	11,00	20,00	-	11,08%
VAN du fonds de PE	-	-	-	-	-	-	18,00	
Cash flows capitalisés	-26,00	-15,00	-19,50	21,67	14,30	23,64	-	

KS-PME	1,2827

Valeur de l'action	1	1,3	0,8	1,2	1	1,1	1,3

FIGURE 2.23 – Méthode KS PME

Il est possible d'établir un lien entre le multiple obtenu par la KAPLAN-SCHOAR PME et la VAN finale du portefeuille action de la méthode de LONG et NICKELS. En effet,

$$\begin{aligned} VAN_{\text{LN-PME},T+1} &= I_{T+1} \times \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{-CF_t}{I_t} \right) \\ &= -\sum_{t}^{T} \left(C_t \cdot \frac{I_T}{I_t} \right) - \sum_{t}^{T} \left(D_t \cdot \frac{I_T}{I_t} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{VAN_{\text{LN-PME},T+1}}{-\sum_{t=0}^{T} \left(C_t \cdot \frac{I_T}{I_t} \right)} = 1 - \text{KS-PME} + \frac{VAN_{PE,T+1}}{-\sum_{t=0}^{T} \left(C_t \cdot \frac{I_T}{I_t} \right)}$$

ce lien est facilement vérifiable sur l'exemple utilisé tout au long de cette partie.

Le Direct Alpha

Enfin, la méthode la plus récente pour évaluer la performance d'un fonds de Private Equity comparativement à un indice de référence est le Direct Alpha. Introduite en 2014 dans GREDIL, GRIFFITHS et STUCKE (2009), cette métrique utilise les *cash flows* capitalisés définis dans le calcul de la KAPLAN-SCHOAR PME. Ici cependant, ce n'est pas le multiple du portefeuille ainsi modifié qui va être déterminé, mais son TRI. Le Direct Alpha se calcule ensuite de la sorte :

$$\alpha = \frac{ln(1+a)}{\Delta}.$$

où a est le TRI du portefeuille qui contient les *cash flows* capitalisés et la valeur liquidative finale du fonds ; Δ est l'intervalle de temps pour lequel le Direct Alpha est calculé [59]. a est donc le taux de rentabilité

59. souvent exprimé en années

excédentaire obtenu grâce à un investissement dans le fonds plutôt que dans l'indice de référence, car il est en fait l'équivalent, en temps discret, de l'alpha de JENSEN calculé dans le cadre du *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* [60]. Puisque c'est ce taux excédentaire discret qui présente un intérêt, le terme Direct Alpha fera référence, dans la suite de ce mémoire, à a et non α. Des spécifications techniques relatives au Direct Alpha sont disponible en annexe (B).

Tableau des flux								
Date	janv-20	janv-21	janv-22	janv-23	janv-24	janv-25	janv-26	TRI
Cash flow PE	-20,00	-15,00	-12,00	20,00	11,00	20,00	-	11,08%
VAN du fonds de PE	-	-	-	-	-	-	18,00	
Portefeuille de cash flows capitalisés	-26,00	-15,00	-19,50	21,67	14,30	23,64	18,00	7,21%

Valeur de *a*	7,21%

Valeur de l'action	1	1,3	0,8	1,2	1	1,1	1,3

FIGURE 2.24 – Méthode Direct Alpha

Dans l'exemple précédent, a est égal à 7,21 % et le TRI du fonds vaut 11,08 %. Cela signifie que sur la période, le marché affiche un TRI fictif [61] de $11,08 - 7,21 = 3,87\%$.

2.4.6 Synthèse

Dans le but de comparer les rentabilités d'investissements non cotés avec celles des marchés boursiers, différentes mesures de performance ont été présentées. Ces métriques ont été illustrées par un fonds de Private Equity fictif mais pourraient s'appliquer à n'importe quel investissement illiquide.

Les mesures les plus couramment utilisées aujourd'hui par les gestionnaires de fonds sont le TRI et la méthode des multiples. Il a néanmoins été montré que ces deux techniques ne permettent pas de comparer rigoureusement les performances d'investissements cotés et non cotés.

A contrario, la KAPLAN-SCHOAR PME ainsi que le *Direct Alpha* semblent remplir ce rôle. D'une part, la KS-PME permet à l'investisseur de savoir, en termes de multiple, quel excédent de richesse il aurait obtenu s'il avait investi dans l'actif illiquide plutôt que dans l'indice de référence. D'autre part, le *Direct Alpha* donne la valeur exacte du taux de rentabilité supplémentaire apporté par l'actif illiquide par rapport au marché.

Le tableau ci-dessous (2.1) regroupe les mesures de performance par type : taux de rentabilité ou multiple ; et par référence : mesure absolue ou mesure relative par rapport à un indice de référence.

	Taux de rentabilité	Multiple
Mesures absolues	TRI TRIM	TVPI
Mesures relatives	LN-PME PME+ Direct Alpha	KS-PME

TABLE 2.1 – Mesures de performance

60. Le CAPM ou Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF) est un modèle qui s'inscrit dans la théorie moderne du portefeuille et permet d'estimer, entre autres, le taux de rentabilité attendu par le marché pour un actif financier.
61. Fictif car la notion de Taux de Rentabilité Interne n'a pas de sens pour un marché coté.

Dès lors, un gestionnaire d'investissement qui souhaite comparer les performances de différents fonds de Private Equity ou de plusieurs actifs non cotés afin de prendre des décisions de gestion doit choisir avec attention les mesures de performance qu'il va étudier. Bien que les acteurs du Private Equity utilisent principalement le TRI et la VAN, des métriques comme le *Direct Alpha* ou la KAPLAN-SCHOAR PME peuvent s'avérer plus pertinentes.

3 Une réglementation et un environnement économique en évolution

Sommaire

3.1 Présentation de Solvabilité II **50**
3.1.1 Les exigences quantitatives 50
3.1.2 Les exigences qualitatives 52
3.1.3 Les exigences en matière de transmission d'information prudentielle et de publication 52
3.2 Le traitement du Private Equity dans Solvabilité II **53**
3.2.1 Le Private Equity comme composante du risque sur actions 53
3.2.2 Amendement du 8 mars 2019 57
3.3 Les politiques françaises récentes **59**
3.3.1 Loi Macron d'août 2015 60
3.3.2 Loi PACTE 60
3.3.3 Le « rapport TIBI » 61
3.3.4 France Investissement Assureurs 61
3.3.5 Assureurs - Caisse des Dépôts Relance Durable France 62
3.4 Les supports d'investissement en Private Equity proposés par les assureurs **63**

Les contraintes réglementaires occupent une place de choix parmi les barrières aux investissements alternatifs dans le domaine de l'assurance. En effet, Natixis souligne [1] que 97 % des organismes d'assurance français estiment que la réglementation les dissuade d'investir dans les classes d'actifs alternatifs. De nombreuses mesures ont néanmoins été récemment mises en place en Europe et en France afin d'assouplir ces contraintes.

3.1 Présentation de Solvabilité II

Solvabilité II est une norme prudentielle européenne mise en place afin d'améliorer la protection de la clientèle. Elle définit un cadre réglementaire qui permet de contrôler la solvabilité des organismes d'assurance, c'est-à-dire leur capacité à faire face à leurs engagements, à l'endroit des assurés notamment.

Adoptée le 25 novembre 2009 par le Parlement Européen et le Conseil, la directive 2009/138/CE entre en vigueur le 1er janvier 2016. L'ensemble, ou presque [2], des organismes assureurs européens sont aujourd'hui concernés par Solvabilité II. Solvabilité II repose sur trois piliers qui ont des objectifs différents.

3.1.1 Les exigences quantitatives

Le premier pilier regroupe les règles de valorisation des actifs et des passifs de l'entreprise d'assurance, les exigences de capital réglementaire ainsi que leur mode de calcul. Dès lors, ce n'est plus le seul bilan économique qui est étudié dans Solvabilité II. Il faut en effet apprécier la situation de l'assureur au regard des risques qu'il encourt, ce qui donne lieu à un bilan dit prudentiel.

Les actifs sont définis comme l'ensemble des biens détenus par l'organisme d'assurance, appelés aussi placements, qui doivent permettre le règlement intégral des engagements pris à l'égard des assurés. Le passif désigne quant à lui l'ensemble des engagements contractés par l'assureur. Le passif est constitué de deux éléments : les provisions techniques et les fonds propres.

La valorisation des actifs et des passifs repose sur une approche d'évaluation économique cohérente avec la valeur de marché, c'est le principe de juste valeur.

Les provisions techniques

Les provisions techniques prudentielles sont la représentation comptable des engagements contractuels pris à l'égard des assurés, souscripteurs et bénéficiaires du contrat. Au sein de ces provisions techniques, une distinction est opérée entre les provisions techniques vie et non-vie. Ces provisions correspondent au montant que les entreprises d'assurance devraient payer s'ils transféraient immédiatement leurs engagements d'assurance à une autre entreprise d'assurance : c'est la valeur de transfert.

Dans le cadre de Solvabilité II, ces provisions techniques sont composées de deux éléments :

— le *Best Estimate (BE)* est la valeur actuelle des flux futurs pondérés par leur probabilité de réalisation, c'est-à-dire la Valeur Actuelle Probable de ces flux ;

— la Marge pour Risque représente le coût d'immobilisation inhérent au transfert du portefeuille d'assurance.

1. Dans l'étude citée supra : *Natixis Global Insurance Survey* (2019).
2. Au nom du principe correcteur de proportionnalité, prévu dans la réglementation, certains acteurs pour qui une application stricte de la norme ne permettrait pas de poursuivre leur activité ont la possibilité d'adapter les contraintes et exigences imposées.

Les fonds propres

Les fonds propres sont les ressources financières disponibles de l'organisme d'assurance. Ce sont celles qui pourraient être appelées pour absorber les pertes financières, le cas échéant. Les fonds propres sont classés en trois niveaux, appelés tiers, qui sont déterminés en fonction de leur capacité à absorber les dettes et de leur qualité [3]. Ils sont également répartis en deux catégories : les fonds propres de base, qui apparaissent de manière explicite au bilan, et les fonds propres auxiliaires, qui sont hors bilan.

Les exigences de capital réglementaire

Le pilier I de Solvabilité II introduit également deux seuils de solvabilité : le capital de solvabilité requis (SCR) et le capital minimum requis (MCR).

— Le SCR est le montant de fonds propres à détenir pour limiter à 0,5 % la probabilité de ruine [4] sur 12 mois. C'est une exigence de fonds propres pour couvrir l'ensemble des risques identifiés au niveau de l'entreprise d'assurance. Le SCR est calculé au moins une fois par an.

— Le MCR, calculé trimestriellement, correspond à un montant de fonds propres de base en deçà duquel les bénéficiaires du contrat d'assurance seraient exposés à un risque inacceptable si l'entreprise poursuivait son activité. C'est un minimum de sécurité. En cas de non respect de ce seuil, l'autorité de contrôle, l'ACPR en France, peut en effet retirer l'agrément de l'organisme assureur.

Ces différents seuils de solvabilité peuvent se calculer de deux manières différentes, soit par l'utilisation de la formule standard de Solvabilité II, soit par le recours à un modèle interne préalablement validé par l'ACPR.

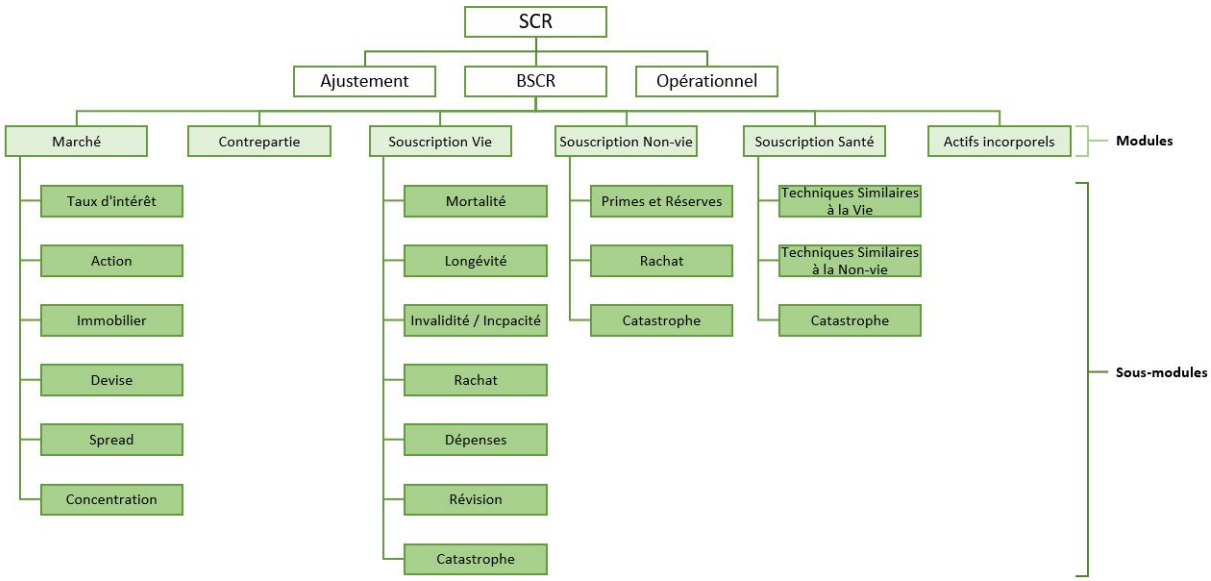


FIGURE 3.1 – Structure Modulaire de la formule standard

La formule standard présente une méthode clé en main fondée sur le regroupement des risques en modules et sous-modules (3.1). Tout d'abord, le SCR de chacun des sous-modules de risque est calculé. Ces différents SCR sont ensuite agrégés à l'aide d'une matrice de corrélation fournie par l'EIOPA, ce qui permet d'obtenir le *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)*. Celui-ci est ensuite complété par un facteur d'ajustement et agrégé au risque opérationnel afin d'obtenir le SCR global.

3. Trois critères sont retenus pour estimer la qualité des fonds propres : la disponibilité, le degré de subordination et la durée.
4. La ruine est définie comme l'événement qui voit la valeur de l'actif net devenir inférieure ou égale à zéro.

L'approche par modèle interne permet quant à elle de mieux prendre en compte les spécificités de la société d'assurance concernée. Dans ce cas, le modèle va se substituer à la formule standard sur tout ou partie des sous-modules de risque. Pour ce faire, des modèles doivent être développés afin de décrire le comportement de l'actif et du passif. Cette méthode est donc plus précise et permet à l'organisme d'assurance de définir des axes de développement stratégiques. Elle est néanmoins bien plus coûteuse et complexe que la formule standard.

La figure ci-dessous (3.2) représente une vision simplifiée [5] du bilan prudentiel d'une entreprise d'assurance sous Solvabilité II.

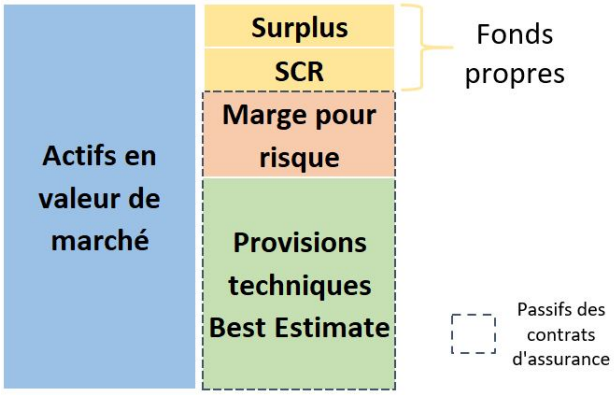


FIGURE 3.2 – Bilan prudentiel simplifié sous Solvabilité II

3.1.2 Les exigences qualitatives

À côté des exigences prudentielles, quantitatives, du pilier I de Solvabilité II, le deuxième pilier présente des contrôles relatifs au système de gouvernance, notamment sur la gestion des risques, afin de garantir la pérennité d'une entreprise d'assurance.

La gouvernance doit permettre de garantir une gestion saine, prudente et efficace de l'activité d'assurance. La mise en place de ces organes de gouvernance au sein des organismes d'assurance est libre mais elle doit répondre à des principes généraux, comme la création de fonctions clés [6].

Enfin, un système de gestion des risques doit être défini. Il vise à déceler, mesurer, contrôler, gérer et déclarer les risques. Un outil a d'ailleurs été développé afin d'établir la liste des risques spécifiques et d'aider à la prise de décision : il s'agit de l'*Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)*.

3.1.3 Les exigences en matière de transmission d'information prudentielle et de publication

Le dernier pilier concerne les obligations relatives à la diffusion d'information, aussi bien à l'ACPR qu'au grand public. Parmi les documents que doivent transmettre les organismes d'assurance il est possible de citer l'ORSA, uniquement transmis à l'ACPR, ou le *Solvency and Financial Conditions Report* [7] (SFCR) » qui doit être, en général, disponible sur le site de l'organisme.

5. sans prise en compte des impôts différés à l'actif et au passif
6. 4 fonctions clés sont à dénombrer : la fonction actuarielle, la fonction vérification de la conformité, la fonction gestion des risques et la fonction audit interne.
7. ou Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière (RSSF)

3.2 Le traitement du Private Equity dans Solvabilité II

La manière de considérer le Private Equity dans la formule standard de Solvabilité II a évolué avec le temps. Néanmoins le cadre général de ce traitement est resté identique, à savoir évaluer le capital investissement au sein du sous-module risque sur actions dans le module de risque de marché.

Pour chacun des sous-modules du module de risque de marché, la méthode de calcul du SCR se fonde sur la comparaison entre le bilan central et le bilan choqué de l'organisme assureur.

Initialement, l'assureur connaît la valeur de l'actif et du BE qui composent son bilan. La valeur liquidative, aussi appelée actif net ou *Net Asset Value (NAV)* de la firme est alors égale à la différence entre l'actif et le BE, c'est-à-dire : $NAV = \text{Actif} - BE$. Afin de déterminer le SCR d'un sous-module, un choc est appliqué au facteur de risque correspondant. Ce choc a un impact sur l'actif ou[8] sur le passif de la compagnie. Ainsi, il est désormais possible de déterminer la NAV choquée de l'organisme assureur : $NAV_{\text{post-choc}} = \text{Actif}_{\text{post-choc}} - BE_{\text{post-choc}}$.

Dès lors, le SCR du sous-module est donnée par la différence, si elle est positive, entre la NAV centrale, non choquée, et la NAV choquée.[9]

$$SCR = max[0, (\text{Actif}_{\text{central}} - BE_{\text{central}}) - (\text{Actif}_{\text{post-choc}} - BE_{\text{post-choc}})]$$

Les différents chocs à appliquer sont fournis par l'EIOPA dans les règlements délégués et dépendent du sous-module considéré.

3.2.1 Le Private Equity comme composante du risque sur actions

Le risque action permet de prendre en compte les variations, dues à la volatilité du marché, de la valeur de titres financiers assimilables à des actions. Les éléments présentés dans cette partie sont relatifs au règlement délégué initial 2015/35. Les évolutions réglementaires postérieures à cette version du règlement délégué sont introduites dans la partie suivante.

Classification des actions

S'agissant du sous-module de risque sur actions, la réglementation définit deux ensembles d'actions : les actions de type 1 et les actions de type 2. Selon l'article 168 de règlement délégué 2015/35 :

— « les actions de type 1 comprennent les actions cotées sur des marchés réglementés dans des pays membres de l'Espace Économique Européen (EEE) ou de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) » ;

— « les actions de type 2 comprennent les actions cotées en bourse dans des pays qui ne sont pas membres de l'EEE ou de l'OCDE, les actions qui ne sont pas cotées, les produits de base et autres investissements alternatifs. » Ce groupe concerne également les organismes de placement collectif (OPC) et les autres investissements sous forme de fonds, lorsqu'il n'est pas possible d'appliquer l'approche par transparence[10].

8. inclusif

9. Ici la marge pour risque n'a pas été retenue dans le calcul du SCR. Il est cependant tout à fait possible de la prendre en compte en plus du BE. Les résultats seront sensibles à ce choix.

10. L'approche par transparence consiste à regarder les actifs sous-jacents du véhicule de placement et non le véhicule dans sa globalité, mais cela n'est pas toujours possible.

Parmi les actions de type 1, il est également possible de considérer :

— les parts ou actions de fonds d'investissement collectifs d'entrepreneuriat social éligibles au sens du règlement (UE) n° 346/2013 dont l'objectif est d'investir plus de 70 % du capital souscrit dans des entreprises éligibles [11] ;

— les parts ou actions détenues dans des fonds de capital risque dont l'intention est d'investir à hauteur d'au moins 70 % du portefeuille dans des sociétés éligibles au titre du règlement (UE) n° 345/2013 [12] ;

— et enfin, les actions ou parts de fonds d'investissement alternatifs de type fermé n'ayant pas recours à l'effet de levier et domiciliés ou commercialisés dans l'Union Européenne.

Les parts de certaines catégories de fonds de Private Equity peuvent donc être considérées comme des actions de type 1.

Calcul du SCR

Pour déterminer le SCR du sous-module risque sur actions il est question de déterminer le SCR relatif aux actions de type 1, $\mathrm{SCR}_{type1equities}$ et celui relatif aux actions de type 2, $\mathrm{SCR}_{type2equities}$.

Hors cas particuliers énoncés dans les articles 169 et 170 du règlement délégué, le choc à appliquer aux actions de type 1, respectivement de type 2, est égal à 39 %, respectivement 49 %. Ces chocs sont ensuite corrigés d'un ajustement symétrique qui peut être compris entre -10 % et $+10$ % et qui dépend de l'historique de valeur d'un indice défini par l'EIOPA qui permet de représenter la structure moyenne des portefeuilles des assureurs et des réassureurs. Le choc à appliquer aux actions peut donc varier entre 29 % et 49 % en ce qui concerne les actions de type 1 et entre 39 % et 59 % pour les actions de type 2.

Il est dès lors possible d'obtenir le SCR relatif aux actions de type 1 et de type 2.

$$\mathrm{SCR}_{typekequities} = \text{Valeur de Marché} \times (\mathrm{Choc}_k + \text{Ajustement Symétrique}); k \in [\![1,2]\!]$$

Il est à noter que lorsque les différentes participations, de type 1 ou de type 2, sont considérées comme des investissements de nature stratégique, au sens du règlement délégué, le choc à appliquer est égal à 22 %. L'ajustement symétrique n'intervient pas dans ce cas.

Le SCR du risque sur actions est ensuite calculé de la manière suivante :

$$\mathrm{SCR}_{equity} = \sqrt{\mathrm{SCR}^2_{type1equities} + 2 \cdot 0.75 \cdot \mathrm{SCR}_{type1equities} \cdot \mathrm{SCR}_{type2equities} + \mathrm{SCR}^2_{type2equities}}$$

Un coefficient de corrélation de 75 % est donc appliqué entre les actions de type 1 et les actions de type 2.

Calibration du choc appliqué au Private Equity dans la formule standard

Comme vu précédemment, la majorité des parts de fonds de capital investissement rentrent dans la catégorie des actions de type 2 et sont ainsi soumises à un choc allant de 39 % à 59 %, compte tenu de l'ajustement symétrique. Afin de comprendre ce choix, il convient de s'intéresser à la méthode de calibration utilisée par l'EIOPA, présentée dans le document CEIOPS-SEC-40-10 publié le 15 avril 2010 [13]. ARIAS, AROURI et al. (2010) discutent de la pertinence de cette calibration.

11. Les conditions d'éligibilité font notamment référence aux objectifs sociaux vers lesquels tendent ces sociétés.
12. Les conditions sont en partie relatives à des limites de chiffre d'affaires, de taille de bilan et de nombre d'employés.
13. Le CEIOPS est l'ancien nom de l'EIOPA.

L'EIOPA a choisi d'utiliser comme indice de référence pour le Private Equity le LPX50. Elle a confronté cet indice au MSCI World [14] et a ensuite étudié le coefficient de corrélation des queues de distribution entre les deux indices. Cette étude a permis de conclure à un coefficient de corrélation de 83,59 %.

Tout d'abord, le choix du LPX50 comme indice représentatif du Private Equity peut être discuté. Cet indice est défini à partir des cours de bourse des cinquante plus grandes sociétés cotées de capital investissement à l'échelle mondiale, en termes de capitalisation boursière. La répartition géographique des entreprises qui composent le LPX50, au 30 juin 2020, est présentée sur la figure ci-dessous (3.3). À titre d'information, il est également possible de voir la diversification géographique de l'indice au 26 février 2010 qui est plus représentative de la situation durant laquelle le risque du Private Equity a été calibré par l'EIOPA. Cet indice est donc plutôt bien diversifié en termes géographiques, même si le poids des sociétés d'Amérique du Nord a nettement augmenté en dix ans.

FIGURE 3.3 – Répartition géographique des sous-jacents qui composent le LPX50

Le tableau (3.1) ci-après donne un aperçu des 10 plus grandes composantes du LPX 50. Toutes ces sociétés de gestion ont une stratégie de capital transmission. Il est également intéressant de noter que ces 10 sociétés de gestion ne sont pas forcément classées dans l'ordre décroissant en termes d'actifs sous gestion. Partners Group AG a par exemple un poids dans l'indice supérieur à celui de KKR & Co. Inc. et pourtant Partners Group AG n'affiche que 94 milliards de dollars d'actifs sous gestion à la fin 2019, contre plus de 200 milliards pour KKR & Co.

En ce qui concerne les stratégies d'investissement des entreprises qui composent le LPX50, la très grande majorité opère sur le marché du capital transmission (3.4).

Il est dès lors pertinent de se demander si la structure de risque présentée par le LPX50 est de même nature que celle du risque que portent les fonds de Private Equity dans lesquels les assureurs européens sont susceptibles d'investir. Selon ARIAS, AROURI et al. (2010), la réponse est non.

Premièrement, le LPX50 surpondère le poids des fonds de capital transmission et des fonds d'Amérique du Nord par rapport aux portefeuilles de Private Equity des assureurs français.

14. Indice régulièrement utilisé comme référence du marché action à l'échelle internationale. Il est composé de 1 644 actions différentes, réparties entre 23 pays développés.

Nom de la société de gestion	Localisation du siège social	Stratégie	Poids dans l'indice
Partners Group AG	Suisse	Buyout	10,9 %
KKR & Co. Inc.	USA	Buyout	10,5 %
The Blackstone Group Inc.	USA	Buyout	9,9 %
Apollo Global Management, Inc.	USA	Buyout	8,7 %
3i Group plc	UK	Buyout	7,6 %
The Carlyle Group	USA	Buyout	7,4 %
Ares Management Corporation	USA	Buyout	4,6 %
Intermediate Capital Group	UK	Buyout	3,6 %
Onex Corporation	Canada	Buyout	3,4 %
Wendel	France	Buyout	3,2 %

TABLE 3.1 – 10 constituants principaux du LPX 50 au 30/06/2020

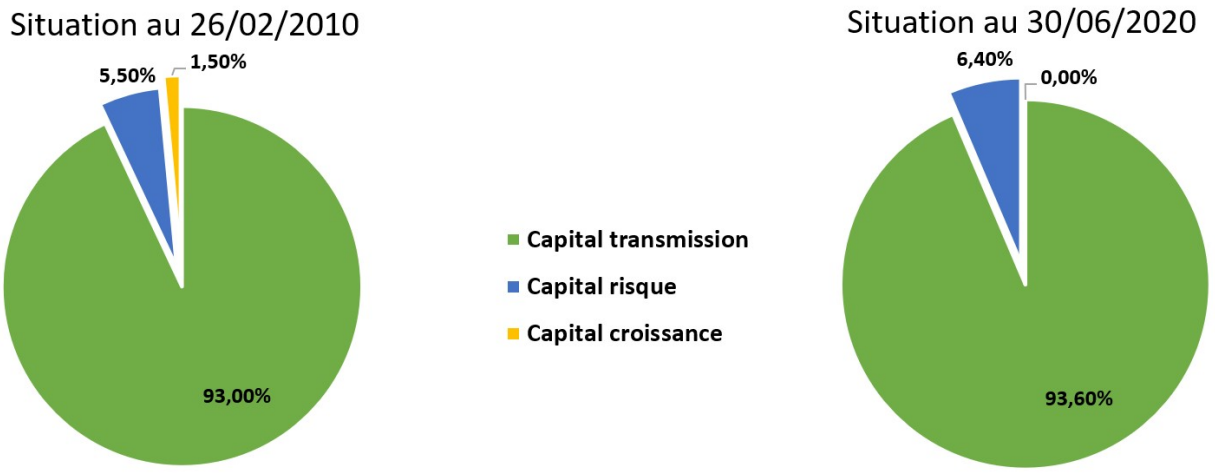


FIGURE 3.4 – Répartition en fonction des stratégies d'investissement des sous-jacents qui composent le LPX50

En outre, les auteurs estiment que le fait d'utiliser un indice coté pour représenter le risque sous-jacent au Private Equity, qui est illiquide de nature, va à l'encontre de la théorie moderne du portefeuille développée par Markowitz. En effet, selon cette théorie, deux composantes définissent le risque d'un titre : le risque spécifique [15] qui n'est la conséquence que des phénomènes qui affectent ledit titre et le risque systématique [16] qui concerne tous les titres. Dès lors, les différents éléments qui pourraient impacter le prix de l'action d'une société de capital investissement cotée mais qui n'auraient pas d'impact sur les fonds d'investissement gérés par l'entreprise viendraient ajouter un risque idiosyncratique auquel ne seraient pas confrontées les sociétés d'assurance qui investissent dans des sociétés de Private Equity classiques, c'est-à-dire non cotées. Il convient en effet de se demander dans quelle mesure le cours de bourse d'une société cotée de capital investissement représente la valeur des fonds de ladite société.

Afin de contourner ces différentes problématiques et de proposer une alternative à l'utilisation du LPX50, les auteurs de l'étude citée supra ont entrepris d'étudier la performance d'un portefeuille de capital investissement fictif, représentatif de l'investissement type d'un assureur. Pour ce faire, ils ont récupéré la base de données Thomson One. Ils ont ensuite mesuré la corrélation, à l'aide du Tau de Kendall [17], entre les TRI

15. aussi appelé risque intrinsèque ou risque idiosyncratique
16. ou risque de marché
17. Statistique qui mesure la corrélation entre les rangs de deux variables.

des différents fonds de Private Equity et les performances du marché, via la méthode PME+. Sur la base de ce travail, ils ont montré une corrélation de 30 % entre les performances du capital investissement et celles du marché. Par stratégie et zone géographique étudiées, les Tau de Kendall entre les performances du Private Equity et le MSCI World sont les suivants :

— 0,54 pour les fonds de capital transmission européens ;

— 0,44 pour les fonds de capital transmission américains ;

— 0,11 pour les fonds de capital risque européens ;

— 0,21 pour les fonds de capital transmission américains.

Commentaires des sociétés de gestion

Plusieurs organisations qui regroupent des sociétés de gestion, notamment de capital investissement, ont émis différentes critiques à l'égard du traitement associé au Private Equity par le règlement 2015/35. Dans ce bulletin, McCrystal (2011), l'*Emerging Markets Private Equity Association (EMPEA)* [18], estime que la réglementation mise en place par Solvabilité II peut décourager les sociétés d'assurance à investir dans le Private Equity, au vu de la charge en capital requise. Les critiques émises font écho aux discussions évoquées supra puisqu'elles concernent la remise en cause de l'indice LPX50 comme référence pour le Private Equity, le coefficient de corrélation de 75 % appliqué entre les actions de type 2 et les actions de type 1, et le fait de regrouper sous une même catégorie les fonds de capital investissement et les actions cotées des pays émergents qui ne supportent a priori pas le même type de risque.

3.2.2 Amendement du 8 mars 2019

Le 8 mars 2019, l'EIOPA a publié un amendement qui a donné lieu au règlement délégué 2019/981 paru le 18 juin 2019 au journal officiel de l'union européenne et qui vient corriger le règlement délégué 2015/35. Ce nouveau règlement délégué est entré en application le 8 juillet 2019. Certaines révisions apportent des éléments nouveaux dans la manière de traiter le capital investissement.

Une nouvelle classe d'actifs : les investissements en actions à long terme

L'une des principales innovations apportées par la révision est l'ajout d'une nouvelle classe d'actifs, appelée *Long-Term Equity Investments (LTEI)*, décrite à l'article 171 bis du règlement révisé. Cette classe bénéficie d'un choc réduit, sous la formule standard, qui est égal à 22 %. Plusieurs conditions doivent être remplies pour qu'un actif soit éligible aux LTEI.

— S'il s'agit d'actions cotées, elles doivent être listées dans l'EEE ; les actions non cotées doivent avoir été émises par une entreprise ayant son siège social dans un des pays de l'EEE.

— Les actions LTEI doivent faire partie d'un portefeuille associé à des activités clairement définies, qui doivent être menées de manière séparée des autres activités d'assurance. Les actifs LTEI ne peuvent donc pas couvrir des pertes issues d'autres branches de la compagnie d'assurance. Les engagements pris en face de ce portefeuille ne doivent pas dépasser plus 50 % de la taille du bilan de l'entité [19]. L'organisme assureur devra de plus exprimer sa volonté de conserver ces actions au travers de sa politique d'investissement, de sa gestion des risques et de sa gestion actif-passif.

— Les actions du sous-portefeuille LTEI doivent afficher une durée de détention moyenne de cinq ans minimum. Si celle-ci est inférieure à cinq ans [20], aucune action du sous-portefeuille ne pourra être

18. Organisation internationale composée d'investisseurs institutionnels et de gérants de fonds qui vise à promouvoir les opérations de capital invetissement et de capital risque dans les marchés émergents.

19. Cette condition porte bien sur la globalité du portefeuille qui contient la poche de LTEI et pas uniquement sur la poche en elle-même.

20. Ce qui peut arriver si l'entité d'assurance souhaite utiliser les LTEI sur des investissements éligibles récents.

vendue tant que la durée de détention moyenne dudit sous-portefeuille n'aura pas dépassé cinq ans.

— L'assureur devra garantir via sa liquidité, sa solvabilité ainsi que la gestion actif-passif qu'il aura mise en place, qu'il n'aura pas à subir de ventes forcées sur l'ensemble des LTEI pendant une durée d'au moins dix ans, même en cas de scénarios stressés.

Les investissements dans les Organismes de Placement Collectif (OPC) [21], les fonds d'entreprenariat social éligibles, les fonds de capital risque éligibles [22], les fonds alternatifs fermés européens sans effet de levier et les fonds ELTIF peuvent également faire l'objet d'un choc réduit à 22 %. Dans ce cas, les conditions évoquées supra s'évaluent à hauteur des parts de fonds et non des sous-jacents qui les composent.

Au vu des contraintes évoquées ci-dessus, sont exclues du périmètre des LTEI les actions qui ne sont pas assises en face de passifs résultant d'activités d'assurance ou de réassurance. Ainsi, les investissements réalisés via les fonds propres ne permettent pas à l'organisme d'assurance de constituer un sous-portefeuille LTEI. L'Institut des Actuaires recommande également, au travers d'une note d'analyse des dispositions introduites par la révision du règlement délégué Solvabilité II en matière d'actions investies à long terme, d'exclure du champ d'application des LTEI les contrats d'assurance vie en UC puisque la durée de détention d'un tel contrat dépend de l'assuré.

Il faut également noter que si un organisme assureur se voit bénéficier d'un sous-portefeuille LTEI mais décide, pour une quelconque raison, de ne plus en respecter les critères, alors il ne pourra plus avoir recours au choc réduit à 22% pendant une durée de trois ans.

La création des *Long-Term Equity Investments* a donc pour objectif d'inciter les organismes d'assurance à investir en actions de l'Espace Économique Européen, notamment en actions non cotées, via des fonds de capital investissement, par exemple.

La majorité des fonds européens de Private Equity peuvent en effet être considérés comme LTEI, y compris les fonds de capital transmission, ou Leverage Buyout, puisque ce sont en général des fonds fermés [23] qui n'ont pas accès à l'effet de levier.

Le fait que les fonds de Leverage Buyout soient considérés sans effet de levier peut sembler contre-intuitif, puisqu'ils ont recours à de la dette pour acquérir une entreprise. Cependant, le règlement délégué de Solvabilité II utilise comme définition de « recours à l'effet de levier » celle évoquée à l'article 8 du règlement délégué (UE) n° 231/2013 de la Commission du 19 décembre 2012 qui fait référence à l'article 6 du même règlement. Celui-ci stipule que « Le levier d'un FIA est exprimé sous la forme d'un ratio entre l'exposition de ce FIA et sa valeur nette d'inventaire » et que « L'exposition attachée aux structures financières ou juridiques impliquant des tiers contrôlées par le FIA concerné est incluse dans le calcul de l'exposition lorsque les structures en question ont été spécifiquement créées pour augmenter l'exposition directement ou indirectement au niveau du FIA. Pour les FIA dont la politique principale en matière d'investissement consiste à acquérir le contrôle de sociétés ou d'émetteurs non cotés, le gestionnaire n'inclut pas, dans le calcul de l'effet de levier, l'exposition existant au niveau de ces sociétés et émetteurs non cotés si le FIA ou le gestionnaire agissant pour le compte du FIA n'est pas tenu de prendre à sa charge les pertes éventuelles au-delà de son investissement dans ces sociétés ou émetteurs. ».

21. Sous le terme OPC sont regroupés les Fonds d'Investissement Alternatifs (FIA) et les Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM)

22. La définition de fonds de capital risque éligible est donnée dans l'article 3 du règlement (UE) n° 345/2013.

23. sauf les fonds *Evergreen*

Or, dans le cas d'une opération de capital transmission, le fonds de Private Equity qui va acheter, grâce à de la dette, la société cible ne va pas s'endetter en son nom propre. L'acquisition passe par la mise en place d'une structure ad hoc, appelée *holding*, qui, elle, va s'endetter. [24] La société de Private Equity n'est ensuite aucunement responsable du non remboursement de la dette, dans le cas où la société cible ferait faillite. Il s'agit donc bien d'un cas dans lequel la société de gestion, dont la politique repose sur l'acquisition de sociétés non cotés, n'est pas responsable des pertes éventuelles au-delà de l'investissement qu'elle a réalisé dans ladite société. Donc, un fonds de LBO n'a vraisemblablement pas recours à l'effet de levier, selon la réglementation en vigueur ici.

Actions non cotées de type 1

La nouvelle version du règlement délégué permet également d'appliquer à certaines actions non listées l'exigence de capital des actions de type 1 plutôt que de type 2. Les actions non cotées qui bénéficient de ce traitement préférentiel doivent avoir été émises par des sociétés :

— domiciliées dans l'EEE ;
— qui n'appartiennent pas au secteur financier [25] ;
— qui affichent un chiffre d'affaires réalisé à hauteur d'au moins 50 % dans une monnaie d'un pays de l'OCDE ou de l'EEE ;
— dont la majorité du personnel est issu de pays de l'EEE ;
— respectant au moins l'un des trois critères de taille suivants
  - plus de 50 employés ;
  - un bilant supérieur à 10 millions d'euros ;
  - un chiffre d'affaires annuel au moins égal à 10 millions d'euros.

En outre, pour bénéficier du choc de type 1 plutôt que de celui de type 2, aucun investissement qui compose le portefeuille d'actions non cotées ne doit représenter plus de 10 % dudit portefeuille. Enfin, une condition porte également sur le coefficient bêta [26] du portefeuille pour que celui-ci puisse bénéficier de l'exigence en capital des actions de type 1.

Ainsi, les investissements réalisés via des fonds de capital investissement ne bénéficient pas de cette mesure puisque les parts de fonds sont émises par une société de gestion qui est une société financière. Cependant, si l'organisme assureur souhaite investir en direct dans des sociétés non cotées, alors les actions non cotées acquises pourraient être considérées comme des actions de type 1 si toutes les conditions sont remplies.

3.3 Les politiques françaises récentes

Différents projets de loi récemment adoptés ont permis au capital investissement de trouver une place dans les contrats d'assurance vie. Par ailleurs, le gouvernement ainsi que certaines entités publiques prônent aujourd'hui le recours au Private Equity pour financer l'économie.

24. Dette qui sera ensuite remboursée grâce aux dividendes versés par la société cible à la *holding*, dividendes qui vont également permettre à la société de gestion de se rémunérer.

25. Cela doit être entendu au sens large, c'est-à-dire y compris les organismes d'assurance ou les institutions de retraite professionnelle.

26. En finance, le coefficient bêta est une mesure de risque utilisée dans le MEDAF. Il ne s'agit pas ici exactement de ce coefficient. La méthode de calcul du bêta est mentionnée dans le règlement délégué 2019/981.

3.3.1 Loi Macron d'août 2015

La loi n° 2015-990 du 6 août 2015 pour la croissance, l'activité et l'égalité des chances économiques, aussi appelée « loi Macron », contient plusieurs mesures qui visent à développer l'activité économique française dans un ensemble de secteurs.

L'une des réformes de cette loi concerne l'assurance vie et le Private Equity. La loi permet en effet aux épargnants d'incorporer une poche de capital investissement dans leur contrat d'assurance vie en Unités de Compte. Cette mesure est néanmoins soumise à différentes restrictions. L'épargnant ne peut investir en Private Equity que par le biais de Fonds Communs de Placement à Risques (FCPR) et le capital alloué au capital investissement ne peut dépasser 10 % de l'encours total du contrat d'assurance vie.

3.3.2 Loi PACTE

La loi relative au Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation de l'Entreprise (PACTE), adoptée par l'Assemblée Nationale le 11 avril 2019, vise à favoriser le développement des entreprises françaises et à améliorer les performances des très petites, petites et moyennes entreprises.

La volonté de réorienter l'épargne vers l'économie réelle sous-tend certaines mesures introduites par la loi PACTE. La loi PACTE vient donc compléter la « loi Macron » du 6 août 2015. Le capital investissement s'est donc retrouvé au cœur de certains échanges puisque le Private Equity permet, comme vu précédemment, de participer au financement de sociétés non cotées.

Le décret n° 2019-1172 publié le 14 novembre 2019 rend possible l'investissement dans les fonds professionnels, notamment les Fonds Professionnels de Capital Investissement (FPCI) et les Fonds Professionnels Spécialisés (FPS), par le biais d'un contrat d'assurance vie en Unités de Compte (UC) [27]. Dorénavant, jusqu'à 50% de l'encours total d'un contrat d'assurance vie en UC pourra être constitué par un investissement dans un FPCI ou dans un FPS, à condition que l'encours du contrat soit au moins égal à 100 000 euros ou que l'investisseur soit considéré comme professionnel, c'est-à-dire détenant au moins 500 000 euros d'instruments financiers et ayant occupé pendant une année ou plus un poste nécessitant des connaissances financières. Si le fonds est agréé ELTIF, l'encours minimal du contrat est ramené à 10 000 euros, et non plus 100 000 euros.

Les Fonds Communs de Placement à Risques (FCPR) sur lesquels il est possible d'investir via un contrat d'assurance vie en UC depuis la loi Macron d'août 2015 voient également les contraintes qui leur sont afférentes se réduire. L'encours d'un contrat UC peut désormais être entièrement investi dans un FCPR et ce sans condition, contre une limite fixée à 10% auparavant.

Bpifrance a par exemple commercialisé son premier FCPR, « BPI Entreprises 1 », le jeudi 1er octobre 2020. Ce produit permet à des épargnants d'investir dans un portefeuille constitué de 1500 entreprises, dont la majorité sont françaises et non cotées en bourse, au travers de 145 fonds d'investissement, puisque ce FCPR est un fonds de fonds. Ce support d'investissement affiche une diversification sectorielle importante car 25% des entreprises sous-jacentes évoluent dans le secteur de la technologie et du digital, 24% appartiennent au secteur des biens de consommation, 21% à l'industrie et 14% au secteur de la santé. Selon le ministre de l'Économie, Bruno LE MAIRE, « Orienter l'épargne des Français vers l'économie réelle et les entreprises est plus que jamais une priorité. Le nouveau fonds de Bpifrance, accessible au grand public, permettra aux Français d'investir plus facilement dans un portefeuille large et diversifié de PME françaises. C'est une étape importante qui prolonge les efforts de diversification des supports d'épargne que nous avons entamés avec la loi PACTE. ». Le seuil de souscription minimal est fixé à 5000 euros et l'argent investi est immobilisé pour une durée de 6 à 7 ans.

27. Avant la loi PACTE, seuls les Fonds Communs de Placement à Risques (FCPR) étaient éligibles. Les fonds professionnels étaient en effet exclus.

La cible de ces différents produits est donc restreinte à des clients affichant un portefeuille important et qui n'ont pas besoin de liquidités immédiates, puisque ces investissements en capital investissement via des contrats d'assurance vie restent des supports de long terme. La durée de détention recommandée s'étend en effet de huit à dix ans.

La réglementation actuelle, tant à l'échelle française qu'à l'échelle européenne, offre ainsi de nombreuses perspectives pour les assureurs en ce qui concerne les investissements en Private Equity. En ouvrant, d'une part, l'accès aux fonds de capital investissement aux investisseurs particuliers par le biais de certains contrats d'assurance vie et en allégeant, d'autre part, dans certains cas la charge en capital relative à cette classe d'actifs pour les assureurs, il est possible que de plus en plus d'organismes d'assurance s'intéressent au Private Equity.

3.3.3 Le « rapport TIBI »

Philippe TIBI, en collaboration avec Philippe ENGLEBERT, a remis au gouvernement français, le 17 juillet 2019, un rapport intitulé « Financer la quatrième révolution industrielle - Lever le verrou du financement des entreprises technologiques » dit « rapport TIBI ». Celui-ci fait état d'une capacité insuffisante de financement des entreprises françaises œuvrant dans le domaine de la technologie. Pour remédier à cette situation, plusieurs investisseurs institutionnels ont fait part de leur volonté d'investir dans des entreprises technologiques. En effet, 21 entités, parmi lesquelles Allianz, Aviva France, AXA France, CNP Assurances, Covéa et plusieurs autres organismes d'assurance, se sont engagés à investir six milliards d'euros dans ce projet d'ici 2023.

La moitié de ce capital sera consacrée à l'investissement dans des entreprises non cotées, par le biais de fonds de capital investissement affichant une stratégie de Growth Equity. Cette décision est liée au fait que certaines start-ups françaises ne parviennent pas à trouver les financements nécessaires, sur le marché français, pour développer leur activité à plus grande échelle durant la phase *Late Stage*. Pour atteindre le statut de « licorne [28] », les start-ups qui ont fait leurs preuves ont effectivement besoin de réaliser des levées de fonds considérables, supérieures à cent millions d'euros, afin de croître. Or, peu d'acteurs français du capital investissement sont aujourd'hui capables de réaliser de telles opérations. C'est pourquoi des start-ups françaises comme Doctolib ou Meero ont eu recours à des fonds étrangers, comme Accel ou Avenir Growth, à différentes phases de leur croissance [29].

Encourager les investisseurs institutionnels, majoritairement des assureurs ici, à investir dans des fonds de Private Equity serait donc une manière d'insuffler de la compétitivité au marché français - et européen - en ce qui concerne les investissements dans le secteur technologique car, comme l'explique Bruno LE MAIRE : « L'Union européenne, c'est près d'un quart du PIB mondial, mais seulement 10% de la technologie mondiale émergente. ».

Le rapport est accompagné d'une charte de gouvernance et d'un cahier des charges visant à définir les fonds éligibles à cette initiative. Au 5 mai 2020, sept fonds de capital investissement sont déjà qualifiés dans le cadre du « rapport Tibi » : Cathay Innovation II, Eurazeo Growth Fund III, InfraVia Growth Fund, Jeito, Korelya K-Fund II, Partech Growth II et Sofinnova Crossover Fund I.

3.3.4 France Investissement Assureurs

« France Investissement Assureurs » est un partenariat initié en 2012 entre Bpifrance et cinq assureurs, à savoir Allianz France, AXA France, BNP Paribas Cardif, CNP Assurances et Crédit Agricole Assurances.

28. expression inventée par Aileen Lee en 2013, qui désigne une start-up dont la valorisation dépasse le milliard de dollars
29. Ce phénomène n'est pas nouveau puisqu'en 2006 Dailymotion, service d'hébergement et de partage de vidéos en ligne, avait déjà eu recours à Atlas Venture et Partech Ventures, deux fonds de capital risque étrangers, afin de recueillir des fonds nécessaires au développement de la société. De plus, l'échec de Dailymotion face à YouTube peut aussi s'expliquer, en partie tout au moins, par le manque de solutions de financement françaises.

Cette initiative commune vise à favoriser le financement de PME indépendantes par l'intermédiaire de fonds d'investissement.

En trois ans seulement, 690 millions d'euros ont été engagés dans 36 fonds. Sur la période 2012-2018, ce sont 4 milliards d'euros qui ont été investis par Bpifrance et les organismes assureurs partenaires, dépassant les objectifs fixés de plusieurs centaines de millions d'euros. Si bien que 18% des montants levés par les fonds d'investissement concernés sur la période 2015-2018 provenaient de « France Investissement Assureurs ». Fort de ce succès, le partenariat devait être reconduit sur la période 2019-2021.

Cette initiative est l'occasion pour les assureurs partenaires d'investir dans l'économie réelle, comme l'explique Antoine LISSOWSKI, Directeur Général de CNP Assurances : « Notre contribution à « France Investissement Assureurs » est en ligne avec notre volonté de soutenir l'économie réelle en contribuant à l'internationalisation et à la croissance de PME françaises innovantes. Elle est par ailleurs en totale cohérence avec nos engagements de long terme vis-à-vis de nos assurés. Pour cette troisième campagne d'investissement, nous allons renforcer notre soutien à la transition énergétique et écologique, un axe émergent dans le domaine du private equity. ».

3.3.5 Assureurs - Caisse des Dépôts Relance Durable France

En juillet 2020, la Fédération Française de l'Assurance (FFA) et la Caisse des Dépôts ont annoncé la création du programme d'investissement « Assureurs - Caisse des Dépôts Relance Durable France ». L'objectif fixé était de financer les PME et les Entreprises de Taille Intermédiaire (ETI) de l'industrie et des services à hauteur d'1,5 milliards d'euros. En fin de compte, le montant a finalement été porté à 2,2 milliards d'euros dont près de 2 milliards devraient provenir des assureurs. Ce programme devait suivre trois axes :

1. débloquer 1,1 milliards d'euros pour les PME et les ETI ;
2. mobiliser plus de 200 millions d'euros à destination des entreprises qui opèrent dans le secteur du tourisme ;
3. financer le secteur de la santé, via la recherche, les infrastructures, les services de santé et la logistique, pour un montant de plus de 800 millions d'euros.

Fin octobre 2020, ces objectifs sont déjà partiellement atteints. En effet, selon la présidente de la FFA, Florence LUSTMAN : « Début juillet [2020], la FFA annonçait la composition du programme et son agenda. Quatre mois plus tard certains fonds sont déjà en train d'être investis et nous avons déployé plus de la moitié du dispositif prévu, tout en renforçant le programme d'investissement pour finalement atteindre 2,2 milliards d'euros. Nous avions exprimé notre volonté de participer à la relance aux côtés des pouvoirs publics, et c'est la tâche à laquelle nous nous attelons, en jouant pleinement notre rôle dans le financement durable de l'économie ».

Il est notamment possible de citer la création de « Nov Impact Actions non cotées » qui est un fonds de 124 millions d'euros dédié au financement, en fonds propres et en quasi-fonds propres [30], des PME et des ETI françaises. Un fonds de 170 millions d'euros dévolu au soutien des PME et ETI françaises du secteur du tourisme, de la restauration et des loisirs a également été créé, il s'agit de « Nov Tourisme Actions non cotées Relance Durable France » qui est géré par Montefiore Investment. Enfin, dans le domaine de la santé, le fonds « NOV Santé Actions Non Cotées » d'un montant de 420 millions d'euros est amené à financer, par les capitaux propres, l'innovation en *late stage* et des opérations de LBO. Ce dernier fonds est géré par Eurazeo.

30. Les quasi-fonds propres ne sont pas des fonds propres d'un point de vue comptable. Néanmoins ce sont des ressources stables qui peuvent parfois être transformées en fonds propres.

Les fonds d'actions non cotées occupent donc une place prépondérante dans ce programme récent puisque ce sont au final plus de 700 millions d'euros qui devraient être mobilisés. Il est également important de noter que les sociétés de gestion désignées pour gérer les différents fonds devront également prendre en compte les critères extra-financiers, comme la création d'emplois, l'empreinte carbone des entreprises financées, la part de femmes dans les équipes dirigeantes ou encore les lieux de productions. Certaines activités sont donc exclues du spectre d'investissement : le tabac, le charbon thermique ou encore le transport ou la commercialisation d'armes chimiques ou biologiques.

3.4 Les supports d'investissement en Private Equity proposés par les assureurs

Certaines compagnies d'assurance offrent la possibilité de sélectionner des supports en capital investissement dans certains contrats d'assurance vie en UC. Les paragraphes suivants dressent une liste non exhaustive de supports d'investissement en Private Equity qui sont déjà disponibles à la souscription.

AXA et la société de gestion NextStage AM ont lancé en 2016 le fonds NextStage Croissance. Destiné aux clients aisés, ce support a été commercialisé dans les contrats d'Axa Gestion Privée et d'Axa Thema. Le montant minimum de souscription s'élève à 25 000 euros et l'assuré peut racheter les UC à tout moment, via un mécanisme de sortie en "titres" mis en place par la société de gestion. La cible d'investissement est constituée de PME et le fonds investit entre 4 millions d'euros et 20 millions d'euros par transaction. Les performances affichées par le fonds en 2018, 2019 et 2020 sont respectivement égales à -13,02 %, +8,29 % et -9,63 %.

CNP Assurances a développé le support CNP PEPS (Private Equity for Personal Savings), distribué par CNP Patrimoine depuis septembre 2016. Ce fonds de fonds, géré par Ardian, dispose d'une enveloppe d'investissement de 50 millions d'euros. Le montant minimum de souscription est égal à 15 000 euros et la liquidité est assurée par la compagnie d'assurance, comme l'explique Laurent JUMELLE, directeur des activités d'épargne patrimoniale du groupe entre 2014 et 2017 : « En plus des avantages fiscaux de l'assurance vie, CNP Assurances offre aux souscripteurs une liquidité à tout moment et de façon inconditionnelle. En cas de cession anticipée, la compagnie sera la contrepartie acheteuse. ».

BNP Paribas Cardif propose également des supports d'investissement en Private Equity éligibles aux UC, dont le fonds FCPR Apax Private Equity Opportunities (APEO), géré par Apax Partners, proposé exclusivement aux clients de BNP Paribas Banque Privée, au vu du ticket d'entrée de 30 000 euros. Ce support fait suite à une offre lancée en 2017, au travers du fonds Amundi Megatendances AV. BNP Paribas Cardif a également créé une autre UC de Private Equity en 2017, dénommée Idinvest Strategic Opportunities, gérée par Idinvest Partners et destinée aux clients de BNP Paribas Banque Privée. Ces produits sont donc destinés à une clientèle « haut de gamme » et affichent des montants minimums de souscription élevés.

Il est également possible de mentionner le support commercialisé par Generali Vie jusqu'au premier décembre 2018, en coopération avec Isatis Capital, au travers du FCPR Isatis Capital Vie & Retraite. Ce fonds éligible à l'assurance vie était disponible à partir d'une souscription minimale de 1 000 euros, soit un montant requis bien plus faible que pour les produits précédents. Cette offre de Generali s'inscrivait en effet dans une volonté de démocratisation de l'investissement en Private Equity.

D'autres produits existent, comme PrimoPacte, lancé par Primonial en septembre 2019 aux côtés d'Oradéa Vie et d'Idinvest Partners, pour lequel le montant de souscription minimum est de 5 000 euros. Même si elle reste aujourd'hui restreinte et destinée à de riches clients, l'offre de supports d'investissement en UC dédiés au Private Equity se développe peu à peu.

4 Analyses exploratoires des données

Sommaire

4.1 Les données dans l'univers du Private Equity . . . 65
4.1.1 Sources de données . . . 65
4.1.2 Les indices de Private Equity . . . 67
4.1.3 Les données utilisées dans le cadre de ce mémoire . . . 67
4.2 Description de la base de données et traitements préliminaires . . . 68
4.2.1 Nettoyage des données . . . 69
4.2.2 Regroupement de stratégies . . . 69
4.2.3 Date de naissance et date de fin de vie d'un fonds . . . 71
4.3 Statistiques descriptives de la base de travail . . . 73
4.3.1 Répartition des fonds par millésime et par catégorie . . . 73
4.3.2 Durée de vie des fonds de Private Equity . . . 75
4.3.3 Taille des fonds de Private Equity . . . 78

Après avoir présenté dans les chapitres précédents quelques éléments généraux et théoriques sur le capital investissement, son environnement économique et les enjeux afférents à cette classe d'actifs, il convient d'approfondir notre étude par l'exploration et l'analyse de données concrètes et réelles.

4.1 Les données dans l'univers du Private Equity

La donnée est aujourd'hui au cœur des processus de prise de décisions stratégiques des organisations, qu'elles soient publiques ou privées, balbutiantes ou bénéficiant d'une position solide sur leur marché. Les évolutions technologiques durant les précédentes décennies ont en effet permis de mettre en place des systèmes de récupération de données afin d'avoir toujours plus d'informations disponibles. Pour exemple, le terme *Big Data*, qui fait écho aux ressources de données trop larges ou trop complexes pour être traitées à l'aide de méthodes classiques, est apparu dans les années 1990. Ainsi, dans certains secteurs, la donnée est devenue omniprésente, simple d'accès et indispensable.

Le domaine des marchés financiers, notamment, est aujourd'hui « inondé » de données. Des fournisseurs comme Bloomberg L.P. ont su se rendre irremplaçables en relevant des défis toujours plus grands pour satisfaire leurs clients. Ces solutions de service sont jugées suffisamment performantes et fiables pour que les différentes parties prenantes intervenant sur les marchés soient prêtes à dépenser plusieurs dizaines de milliers d'euros par an pour y avoir accès [1].

Le constat n'est pas aussi évident lorsqu'il s'agit des actifs alternatifs, notamment du Private Equity. À titre personnel, la question des données a très certainement été le point le plus problématique que j'aie rencontré au cours de la réalisation de ce mémoire. D'un point de vue opérationnel, il est absolument primordial d'étudier la question des données en amont de tout travail, dans le cas contraire les efforts déployés pourraient être vains.

Comme son nom l'indique, les données relatives au Private Equity sont bien souvent privées, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas accessibles au public, même dans une base de données payante. Le capital investissement n'est en effet pas soumis aux mêmes contraintes que les marchés cotés. Ainsi, il est par exemple impossible de contraindre une société de gestion de vous fournir des informations précises sur la performance de ses fonds, la liste des investissements réalisés ou les montants appelés et distribués. Seuls les investisseurs d'un fonds ont accès à ces informations. Il peut alors sembler compliqué, voire impossible, d'obtenir suffisamment d'information sur les fonds de capital investissement pour réaliser des études ou des analyses, puisqu'il faudrait pour cela travailler au sein d'une entité qui aurait elle-même investi dans un nombre important de véhicules. Heureusement, ce n'est pas le cas. Certains fournisseurs de données ont entrepris de recueillir des informations relatives au marché non coté.

4.1.1 Sources de données

Il existe deux types de fournisseurs de données vers lesquels un investisseur institutionnel peut se tourner. Le choix dépendra de l'objectif poursuivi par la firme.

Développement commercial

Si l'investisseur souhaite avoir accès à des informations générales concernant les sociétés de gestion et les fonds de Private Equity, il pourra se tourner vers des bases de données classiques, généralistes, qui officient également sur les marchés cotés - comme Capital IQ, Thomson Reuters ou FactSet - ou vers des solutions plus spécialisées - telles que Pitchbook, CEPRES ou Mergr. Ces logiciels permettent par exemple d'avoir accès à la liste des sociétés de gestion qui ont pour cible un secteur donné, dans une zone géographique précise. D'autres informations sont également disponibles, comme les noms des employés

1. L'utilisation d'un terminal Bloomberg coûte environ 20 000 dollars par an.

des sociétés de gestion, le nombre de sociétés en portefeuille au sein de chaque fonds ou encore le nombre et la taille des fonds levés.

Ces informations, et a fortiori ces bases de données, présentent un intérêt certain lorsqu'il s'agit de faire l'inventaire de la stratégie des différents fonds levés par les sociétés de gestion. Ainsi, un investisseur qui voudrait investir dans un fonds de capital transmission européen dans le domaine des télécommunications aurait tout loisir d'étudier l'offre disponible sur le marché et de choisir celle qui serait le plus en adéquation avec ses objectifs et ses valeurs.

Analyses quantitatives

Lorsqu'il s'agit, pour un institutionnel, d'évaluer de manière quantitative la performance d'un fonds de Private Equity, les solutions évoquées supra sont incomplètes. En effet, un élément capital pour l'investisseur est d'avoir accès à l'échéancier de flux, c'est-à-dire aux montants investis, aux montants distribués et aux dates de ces différents *cash flows*.

Il est aisé de comprendre que cette information est beaucoup plus sensible, du point de vue du fonds, que sa cible sectorielle ou tout autre donnée plus générale mentionnée ci-dessus. L'accès aux capitaux réellement investis et distribués est donc bien plus complexe, mais nécessaire afin d'estimer la performance du véhicule du point de vue de l'investisseur i.e. du point de vue des LPs.

Il existe trois solutions de référence qui fournissent ces historiques de flux : Preqin, Burgiss et Cambridge Associates. Ces bases de données sont celles qui sont le plus utilisées dans les différents papiers de recherche qui traitent du Private Equity. Les actifs alternatifs sont en effet la spécialité de ces fournisseurs de données. Preqin est sans doute l'acteur le plus connu et le plus complet puisqu'il donne également accès à tout un ensemble d'informations générales qui peuvent être utilisées dans le cadre d'un développement commercial. D'autres organisations, plus petites, fournissent aussi des bases de données qui répertorient les échéanciers de flux de certains fonds, comme Invest Europe par exemple.

Il faut cependant noter deux éléments qui peuvent se révéler problématiques, d'un point de vue opérationnel, lorsqu'il s'agit d'utiliser de l'information qui provient d'un des trois grands fournisseurs évoqués ci-dessus.

— Tout d'abord, et c'est le point le plus évident, ces solutions ont un coût[2]. Or, tandis qu'un outil comme Bloomberg peut être utilisé pour tous les travaux qui concernent les marchés financiers cotés, les base de données du type Preqin ou Burgiss ne se concentrent que sur les actifs alternatifs. Ainsi, les entreprises d'assurance ne seront vraisemblablement pas disposées à investir dans de tels outils.

— En second lieu, de manière plus insidieuse, puisque les données issues des fonds de capital investissement sont privées, les différentes bases de données dont il est question recueillent de l'information de manière discrétionnaire auprès des sociétés de gestion et des LPs. Cela introduit donc certainement un biais, puisqu'une société de gestion aura très certainement des réticences à communiquer autour des mauvaises performances d'un véhicule, tandis qu'elle prendra soin de déclarer les métriques d'un fonds performant.

Il est donc nécessaire de garder ces réserves à l'esprit, afin d'avoir une vision critique sur les données utilisées et les analyses qui en découlent.

2. Le prix d'un abonnement Preqin ou Burgiss n'est pas disponible en libre accès sur internet. Néanmoins, au vu du tarif proposé par Preqin pour les rapports de recherche que l'entreprise réalise (il faut compter plusieurs milliers d'euros pour certains documents), il est cohérent de penser que l'accès à leur base de données doit se chiffrer en dizaine de milliers d'euros.

Il faut aussi noter que les différents acteurs évoqués ci-dessus, en plus de fournir des données, proposent différentes solutions liées aux actifs alternatifs, comme des outils d'analyse ou de prévision. Ce sont des services qui peuvent intéresser un organisme d'assurance qui souhaiterait sous-traiter une partie du travail concernant les actifs alternatifs.

4.1.2 Les indices de Private Equity

Partant du constat selon lequel la donnée relative au capital investissement est difficile d'accès, certains acteurs ont entrepris de créer des indices publics, disponibles par le biais de fournisseurs de données traditionnels, comme Bloomberg L.P., Thomsons Reuters ou FactSet, destinés à reproduire les performances de certaines stratégies d'investissement en Private Equity. LPX AG, à l'initiative de l'indice LPX50 et des autres indices LPX [3], en est un exemple. S&P Global a également mis au point son propre indice, créé, comme le LPX50, à partir d'actions de sociétés de Private Equity cotées.

Thomson Reuters a aussi mis au point ses propres indices, mais en suivant cette fois une méthodologie plus élaborée. Ces indices sont le Thomson Reuters Private Equity Buyout Index (TRPEI) et le Thomson Reuters Venture Capital Index (TRVCI) [4]. Ils permettent de répliquer les profils de performance du *Buyout* et du *Venture Capital* américain par le biais de la création de portefeuilles sectoriels composés d'actifs cotés. Cela est possible car Thomson Reuters se fonde, en amont, sur la performance d'entreprises non cotées détenues par des fonds de capital investissement pour créer les différents indices. De ce fait, le TRPEI et le TRVCI répliquent la performance du Private Equity avant prélèvement des frais de gestion et du *carried interest*. Ces indices captent donc la performance du point de vue d'un GP [5].

4.1.3 Les données utilisées dans le cadre de ce mémoire

Comme signalé précédemment, la recherche de données s'est révélée fastidieuse. Je souhaitais en effet utiliser des données relatives aux investissements réalisés par les LPs dans des fonds de capital investissement, mais je n'avais pas à ma disposition de bases de données telles que Preqin ou Burgiss. De plus, aucun acteur français de l'assurance n'a la profondeur suffisante en termes d'investissement en Private Equity pour réaliser des analyses exploitables, de ce fait, un partenariat entre Deloitte et une entité d'assurance ne m'aurait pas permis, avec certitude, d'avoir accès à une quantité satisfaisante d'informations.

J'ai néanmoins été amené à lire, au cours de mes travaux, de nombreux papiers de recherche sur le Private Equity. Certains éléments échappaient parfois à ma compréhension et, dans ce cas, je décidais de contacter les auteurs de ces papiers afin de leur poser des questions. Au cours de mes échanges avec ces différents chercheurs, j'ai pu leur exposer mon projet, mes objectifs et les difficultés que je rencontrais, notamment en termes d'informations. Témoin de la situation complexe dans laquelle je me trouvais, l'un de ces chercheurs, dont je tairai le nom par souci de confidentialité évident, a accepté de me fournir une partie des données sur lesquelles il a travaillé dans le passé. Je l'en remercie chaleureusement, car ce sont ces données, issues de l'une des trois bases mentionnées précédemment, que j'ai utilisées et que je vais décrire par la suite.

Ces quelques paragraphes, qui traitent de la question des données dans l'environnement du capital investissement, appellent une attention particulière pour quiconque voudrait mettre en œuvre des études concernant le Private Equity. La question de la donnée est en effet capitale d'un point de vue opérationnel et la difficulté d'accès à une information de qualité ne doit pas être sous-estimée.

3. parmi lesquels le LPX Europe, le LPX Buyout et d'autres encore
4. Les acronymes sont les tickers Bloomberg de ces indices.
5. Davantage d'informations sont disponibles, en accès libre sur le site internet de Thomson Reuters, sur la méthodologie employée pour créer ces indices.

4.2 Description de la base de données et traitements préliminaires

Les données à disposition contiennent des informations exprimées à l'échelle des fonds d'investissement, et non des sociétés de gestion, du point de vue des LPs. Les flux et montants, tous exprimés en dollars américains, sont en effet ceux effectivement observés par les investisseurs institutionnels, nets de frais de gestion et de *carried interest*. Les informations disponibles sont synthétisées dans le tableau ci-dessous (4.1).

Il m'apparaît primordial, dans le cadre de ce mémoire, de décrire avec attention les données auxquelles j'ai eu accès. Ces informations sont en effet rarement disponibles, c'est pourquoi je souhaite tirer pleinement profit de ces données et expliquer les traitements que j'ai choisi de développer, pour qu'ils puissent être discutés en toute connaissance de cause par la suite et que mes analyses soient au maximum reproductibles, si tant est que le lecteur ait accès à une base de données.

Variable	Définition
Identifiant du fonds	Code unique par fonds
Identifiant de la firme	Code unique par société de gestion
Nom du fonds	Nom du fonds levé par la société de gestion
Nom de la firme	Nom de la société de gestion
Vintage	Millésime du fonds i.e. date à laquelle le fonds a investi pour la première fois dans une société non cotée
Catégorie	Stratégie d'investissement du fonds
Statut	Indique si le fonds est liquidé ou non
Taille	Montants engagés dans le fonds, en dollars américains
Cible géographique	USA / Europe / Reste du Monde
Date de transaction	Date à laquelle la transaction a eu lieu
Type de transaction	Appel de capitaux / Distribution de capitaux / Valeur liquidative du fonds
Montant de la transaction	Montant reçu / Montant distribué / Valeur liquidative
Prélèvements cumulés	Somme des prélèvements à la date de la transaction
Distributions cumulées	Somme des distributions à la date de la transaction
Valeur nette des flux cumulés	Négative si prélèvements cumulés > distributions cumulées / Positive si distributions cumulées > prélèvements cumulés

TABLE 4.1 – Informations disponibles dans la base de données

La variable « Type de transaction » contient la modalité « Valeur liquidative du fonds » qui représente en fait la *Net Asset Value* du fonds à une date donnée. Cette variable est importante car elle peut conduire à surévaluer les performances d'un fonds. A contrario, les variables « Nom du fonds » et « Nom de la firme » ne seront pas utilisées ici, car l'objectif n'est pas d'évaluer la performance de véhicules précis.

4.2.1 Nettoyage des données

Avant de commencer toute analyse, il faut procéder à un nettoyage des données. Les fonds pour lesquels la taille sera manquante ou jugée incohérente seront supprimés de la base. Par exemple, il semble improbable qu'un fonds de *Buyout* puisse avoir une taille inférieure à 10 millions de dollars. La base ainsi constituée comporte 2 861 fonds. La figure suivante (4.1) représente la répartition de ces différents fonds par millésime.

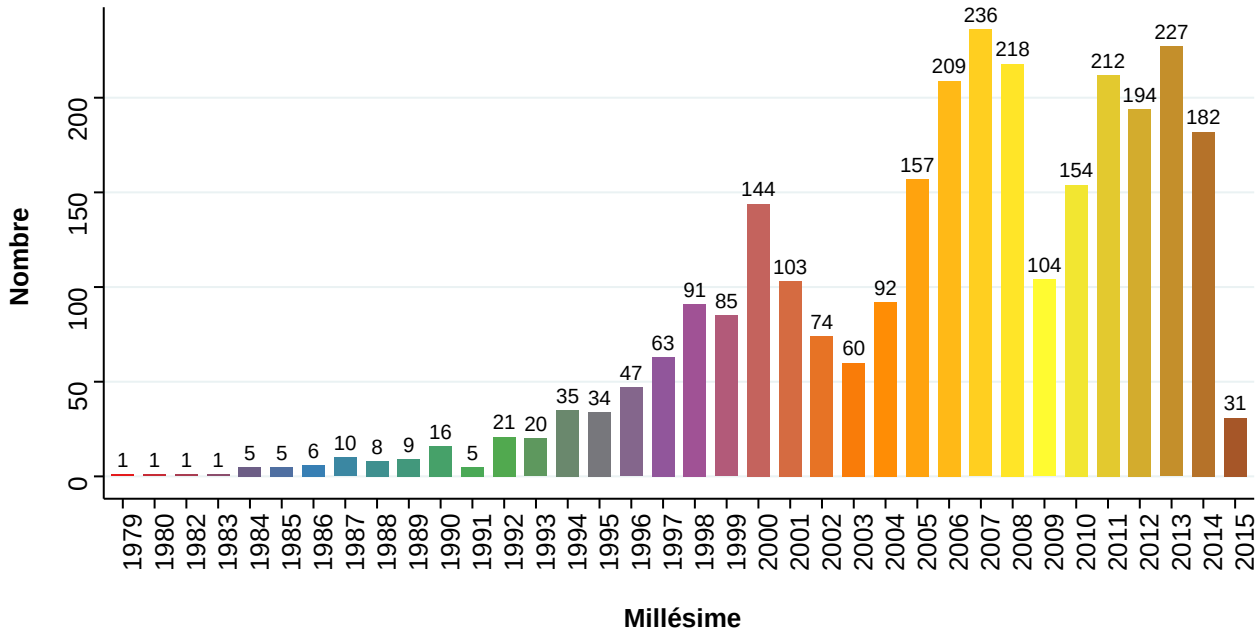


FIGURE 4.1 – Nombre de fonds uniques par millésime

Environ 84 % des fonds présents dans la base de données affichent un millésime postérieur à l'année 2000. Soit le postulat selon lequel la proportion de fonds représentés dans la base est environ la même pour chaque millésime [6], alors le graphique permet d'observer, en moyenne, une augmentation du nombre de véhicules d'investissement levés depuis les années 1980. Certaines périodes ont vu néanmoins l'activité du Private Equity se réduire, notamment à la suite des deux principales crises financières du XXIe siècle, à savoir : l'éclatement de la bulle internet à partir de mars 2001 et la crise des *subprimes* en 2007-2008. L'effet des crises sur le Private Equity se fait donc ressentir un peu après la crise en elle-même, cela vient du fait que cette classe d'actifs possède une inertie que les marchés cotés n'ont pas. En effet, avant de réaliser les premiers investissements d'un véhicule, le *General Partner* procède à une levée de fonds. Une fois cette levée achevée, a lieu le *closing* du fonds, c'est-à-dire que le GP peut procéder aux premiers investissements [7]. Dès lors, les fonds qui ont pour millésime une année N reposent sur les montants engagés les mois, voire les années, précédents. En outre, seulement 31 fonds sont recensés pour le millésime 2015 car les dernières données à notre disposition ont été relevées le 30 septembre 2015.

4.2.2 Regroupement de stratégies

Nous avons ensuite entrepris de regrouper les 26 différentes stratégies présentes dans la base de données dans un ensemble plus restreint de 11 stratégies générales. C'est également l'occasion de constater

6. Cette hypothèse est recevable, car le chercheur m'a fourni des données issues d'une source fiable. De plus, les tendances observées sont corroborées par d'autres études comme : *Global Private Equity Report 2020* (2020).

7. En réalité, un fonds peut compter plusieurs *closing* différents si la cible de montants engagés qu'il s'est fixée n'est pas atteinte lors des *closing* précédents par exemple.

que la base fournie ne traite pas que du Private Equity, puisque sont à disposition, en plus de données relatives aux stratégies traditionnelles du capital investissement, des informations sur des stratégies transversales et sur d'autres classes d'actifs privés comme l'infrastructure, l'immobilier ou encore la dette. Le regroupement effectué est illustré dans le tableau suivant (4.2) [8] :

Ancienne stratégie	Nouvelle stratégie
Buyout	Buyout
Venture Early Stage Early Stage : Seed Early Stage : Start-up	Venture
Growth Expansion / Late Stage	Growth
Fund of Funds	Fund of Funds
Co-investment Co-investment Multi-Manager	Co-investment
Secondaries Direct Secondaries	Secondaries
Infrastructure Infrastructure Funds of Funds Infrastructure Secondaries	Infrastructure
Real Estate Real Estate Co-Investment Real Estate Fund of Funds Real Estate Secondaries	Real Estate
Distressed Debt Mezzanine Venture Debt	Debt
Natural Resources Real Asset Fund of Funds	Natural Resources
Balanced Special Situations Timber Turnaround	Other

TABLE 4.2 – Regroupement des fonds selon leur stratégie

Il est donc possible de s'intéresser également à la répartition des fonds par cible géographique (4.3) et par stratégie (4.2). La base à notre disposition concerne donc principalement le marché américain du capital transmission et du capital risque, puisque plus de 50 % des fonds suivent l'une de ces deux stratégies.

Zone	Nombre	Proportion
USA	2 200	77 %
Europe	401	14%
Reste du Monde	260	9 %

TABLE 4.3 – Répartition des fonds par cible géographique

8. Les noms des stratégies ont été laissés en anglais, car il est d'usage d'utiliser leur versions anglo-saxonnes.

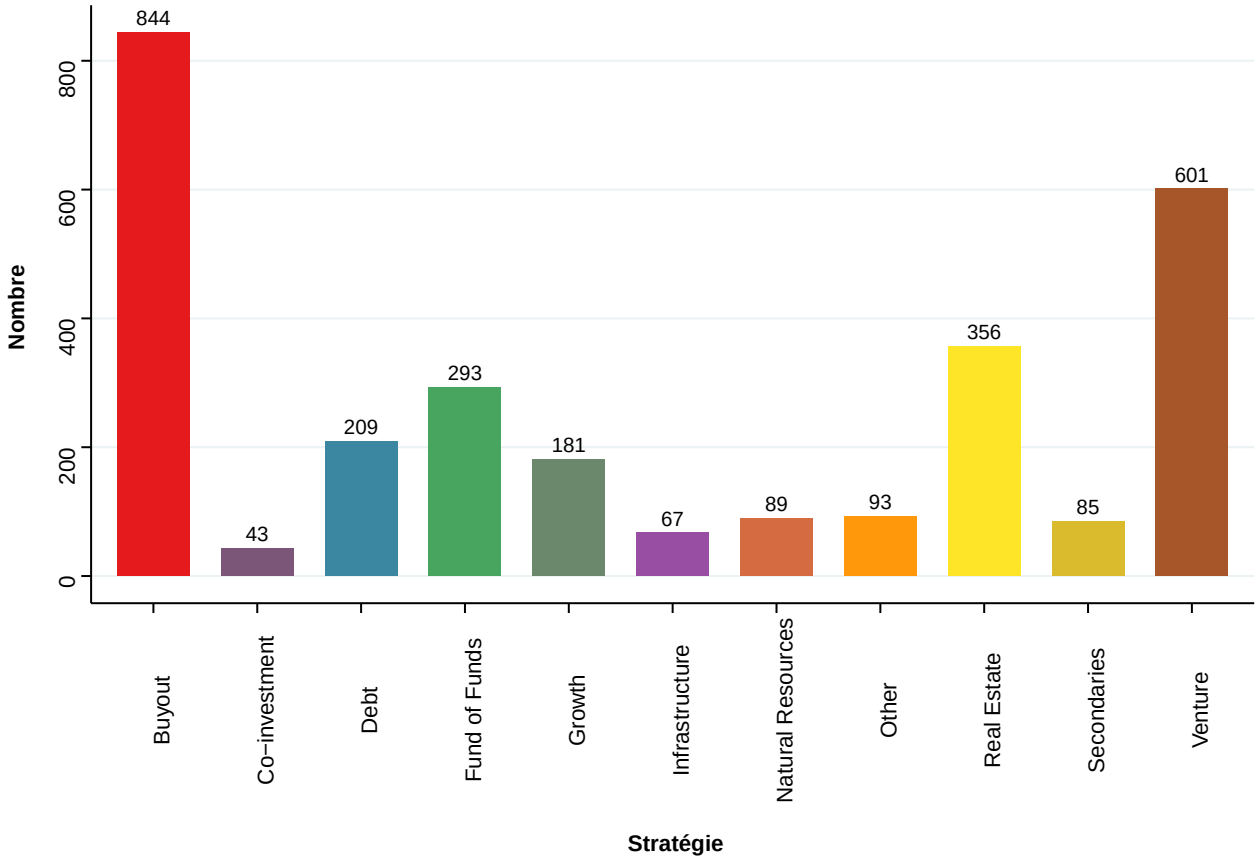


FIGURE 4.2 – Nombre de fonds uniques par stratégie

4.2.3 Date de naissance et date de fin de vie d'un fonds

Une fois ce travail effectué, il convient de s'intéresser à la date de naissance et à la date de fin de vie des fonds. La date de naissance correspond à la date du premier flux enregistré. La détermination de la date de fin de vie d'un fonds est moins directe, car elle nécessite de définir la notion de fonds économiquement mort. Or, cette définition est subjective. Afin de contourner ce problème, la méthode introduite par KASERER et DILLER (2004)[9] sera employée. Celle-ci consiste à considérer que les fonds pour lesquels la valeur liquidative, ou *Net Asset Value*, est faible par rapport à la somme des prélèvements et distributions passés en valeur absolue sont morts. Cela se traduit par :

$$\frac{RNAV_N}{\sum_{t=0}^{N} |CF_t|} \leq q$$

où $RNAV_N$ est la valeur liquidative résiduelle du fonds à la fin de la période N et q est le seuil à partir duquel la valeur liquidative est considérée comme faible par rapport à la somme des *cash flows* en valeur absolue. Kaserer et Diller ont choisi de fixer ce seuil à 10 % puis à 20 %. Dans ce mémoire, celui-ci sera fixé à 5 %, dans un souci de prudence. La condition ci-dessus peut se simplifier en reprenant les notations introduites dans le chapitre 2. En effet,

9. Cette méthode a été employée dans d'autres papiers, comme dans celui écrit par ARIAS, AROURI et al. (2010).

$$\sum_{t=0}^{N} |CF_t| = \sum_{t=0}^{N} |C_t| + \sum_{t=0}^{N} D_t$$

or

$$DPI_N = \frac{\sum_{t=0}^{N} D_t}{\sum_{t=0}^{N} |C_t|} \qquad \text{et} \qquad RVPI_N = \frac{RNAV_N}{\sum_{t=0}^{N} |C_t|}$$

donc la condition précédemment évoquée est équivalente à :

$$\frac{1 + DPI_N}{RVPI_N} \geq q$$

Cette manipulation va permettre d'enrichir la base de travail. En effet, pour réaliser les différentes analyses de ce mémoire, ne seront utilisés que les fonds dits « morts », car cela permet d'éviter d'émettre des hypothèses quant aux flux futurs générés par les fonds encore en vie. Une approche stricte consisterait à n'utiliser que les fonds liquidés i.e. ceux pour lesquels il est certain qu'aucun autre flux ne surviendra. Cependant, notre base de données ne contient que 398 fonds liquidés. Appliquer la méthode de KASERER et DILLER permet donc d'augmenter de manière substantielle, prudente et cohérente le nombre de fonds de la base de travail qui contient désormais 698 fonds, soit $698 - 398 = 300$ fonds qui sont donc considérés comme morts bien qu'ils ne soient pas liquidés. Pour ces 698 fonds, la date de mort est définie comme le maximum entre la date du dernier flux et la dernière date avant laquelle la valeur résiduelle du fonds est définitivement nulle.

Pour les 300 fonds morts mais non liquidés, la valeur liquidative résiduelle sera comptabilisée comme un flux final pour le calcul des TRI et des autres mesures de performance.

D'autres méthodes peuvent être mises en place afin d'augmenter la taille d'une base de travail et de ne pas se restreindre uniquement aux fonds liquidés. Ainsi S. KAPLAN et SCHOAR (2003) suggèrent que si la corrélation entre le TRI(CF) et le TRI(NAV) [10] est élevée, alors les calculs réalisés avec l'une ou l'autre approche devraient conduire au même résultat. Puisque KAPLAN et SCHOAR constatent une corrélation égale à 0.88 [11] entre le TRI(CF) et le TRI(NAV) pour les fonds qui ont au moins 5 ans, ils ont décidé d'inclure dans une partie de leur analyse, en plus des fonds liquidés, tous les fonds dont l'âge était supérieur à 5 ans. Cette méthode n'est pas optimale, car le fait que les deux TRI soient fortement corrélés signifie simplement que l'évolution de ces métriques est corrélée et non que ces deux valeurs sont égales.

Ce phénomène peut s'observer sur la figure suivante (4.3). Le Taux de Rentabilité Interne de chacun des 398 fonds liquidés a été calculé de manière trimestrielle selon les deux méthodes mentionnées supra. La moyenne des TRI pondérée par la taille des fonds a ensuite été déterminée, par trimestre, jusqu'à la fin de vie des fonds. Il est alors possible de représenter ces TRI moyens en fonction de la durée de vie résiduelle des fonds. La figure ci-dessous se concentre sur les 4 dernières années de vie d'un fonds, c'est-à-dire sur les 16 derniers trimestres. Il est alors possible de constater que le TRI(NAV) moyen des fonds est supérieur, même 1 an avant la fin de vie des fonds, au TRI final [12]. Dès lors, appliquer la méthode de KAPLAN et SCHOAR sur notre base de données introduirait certainement un biais, qui conduirait à une

10. Le TRI(CF) d'un fonds est son TRI calculé en ne prenant en compte que les prélèvements et distributions qui sont survenus. Le TRI(NAV) fait quant à lui référence au TRI calculé avec prise en compte de la valeur liquidative du fonds à la date de calcul.

11. Le papier ne précise pas de quelle mesure de corrélation il s'agit, néanmoins c'est certainement un coefficient de corrélation linéaire de PEARSON.

12. La différence est certes faible, mais elle existe et doit donc être signalée.

légère surestimation de la performance du Private Equity. KASERER et DILLER (2004) ont fait le même constat dans leur étude.

L'importance de ce biais dépend fortement de la stratégie employée par les fonds étudiés. Les figures (A.1, A.2 et A.3) présentées en Annexe A permettent d'observer que pour les fonds de capital transmission et de capital croissance le TRI(NAV) est environ égal au TRI final un peu plus de 2 ans avant la fin de vie du fonds. Ce n'est pas le cas pour les fonds de capital risque, pour lesquels le TRI(NAV) est supérieur au TRI final même 1 ou 2 ans avant la fin de vie du fonds. Cela peut signifier que les valeurs liquidatives fournies par les fonds de Venture Capital ont tendance à surestimer la performance future des investissements réalisés.

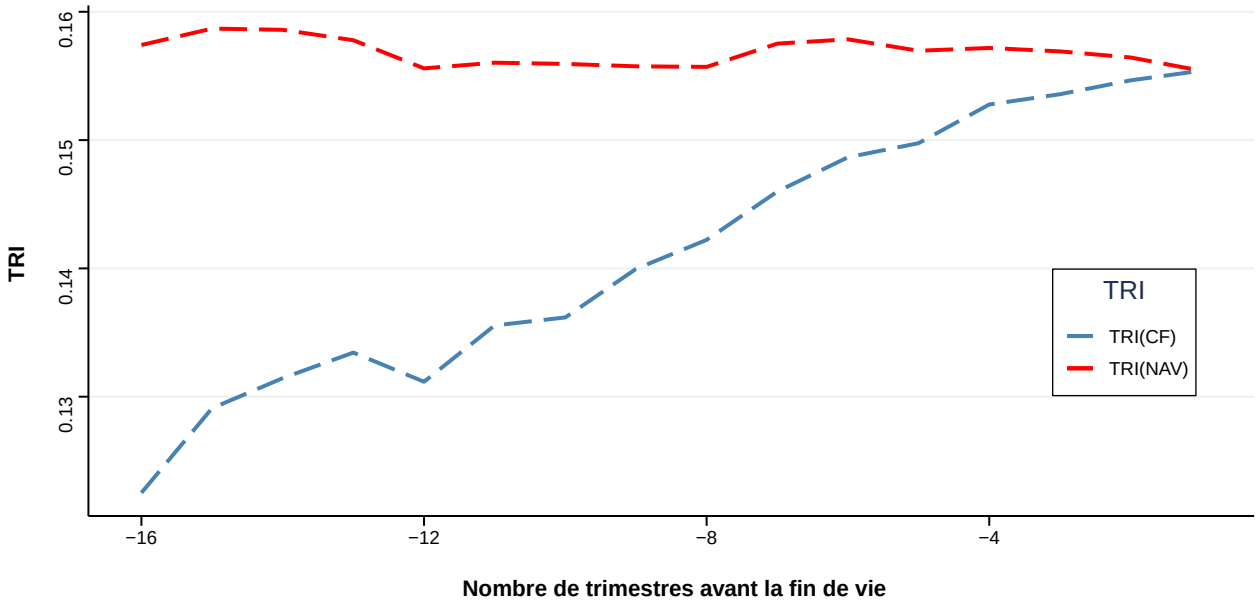


FIGURE 4.3 – Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens

4.3 Statistiques descriptives de la base de travail

Une base qui contient 698 fonds économiquement morts est maintenant à notre disposition. La première étape consiste à décrire le profil des fonds qui constituent cette base de travail.

4.3.1 Répartition des fonds par millésime et par catégorie

La figure (4.4) permet de voir que plus de la moitié des fonds ont un millésime compris entre 1996 et 2001. Cela illustre l'une des premières problématiques qu'il est possible de rencontrer lorsqu'il s'agit d'étudier le Private Equity. En raison de la durée de vie des fonds, la base à notre disposition, bien qu'enregistrant des données allant jusqu'à la fin du troisième trimestre de 2015, ne rend possible le travail, sans hypothèse concernant la dynamique des flux futurs, que pour des fonds dont le millésime est compris entre la fin des années 1980 et le début des années 2000.

De plus, 597 fonds sur 698, soit plus de 85 % des fonds de la base de travail, sont des fonds qui ont pour cible géographique les États-Unis. Il est également possible de constater sur la figure (4.5) que ce sont les fonds de Buyout et de Venture Capital qui sont les plus représentés. Les autres segments sont très peu présents, y compris le capital transmission européen qui ne compte que 42 fonds. Les résultats obtenus dans la suite de ce mémoire doivent donc être analysés avec précaution, puisque nos conclusions seront principalement axées sur le secteur américain.

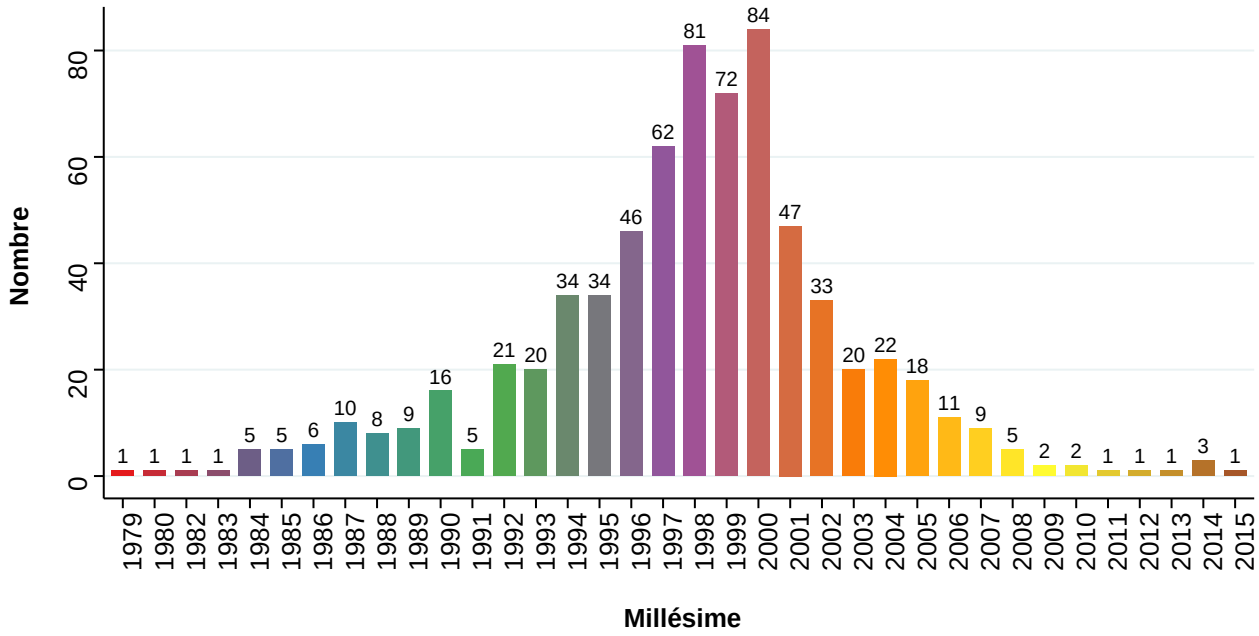


FIGURE 4.4 – Répartition des fonds par millésime dans la base de travail

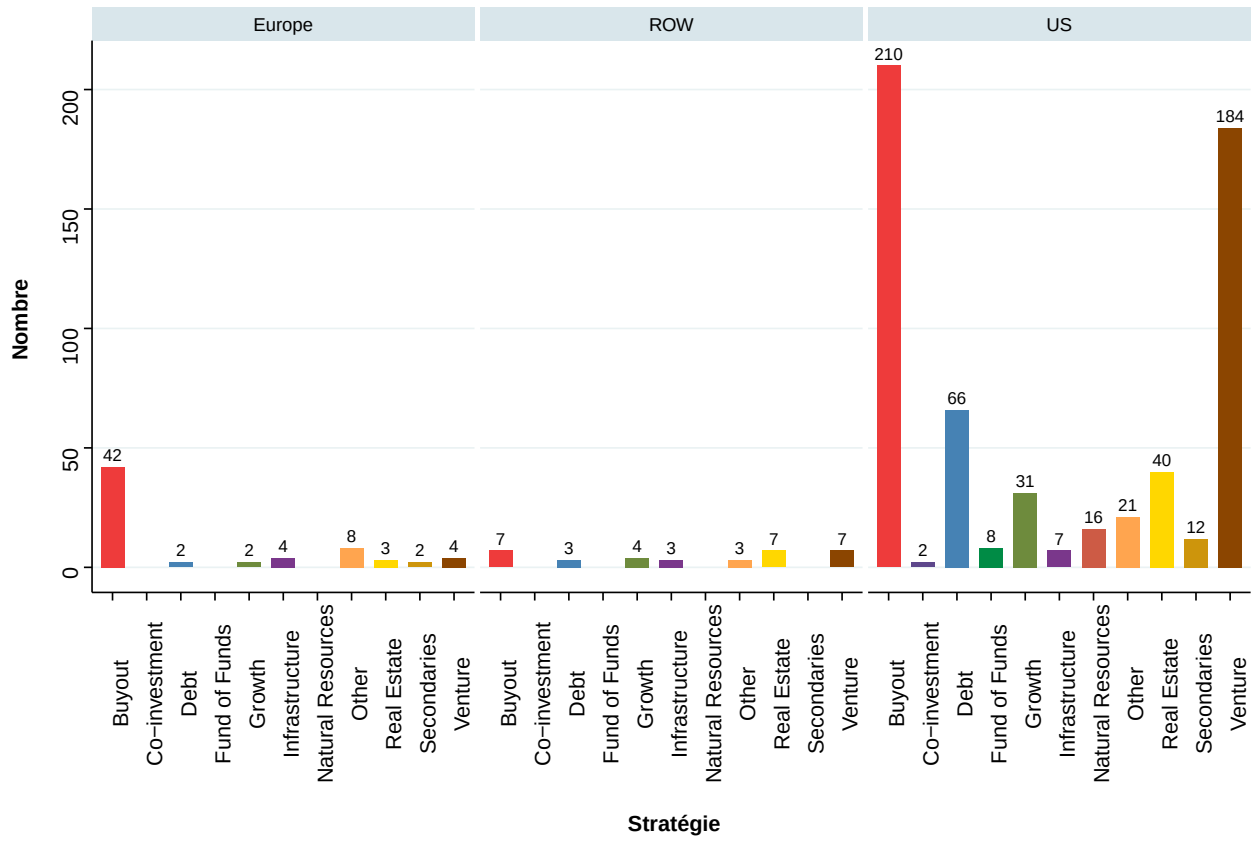


FIGURE 4.5 – Répartition des fonds par stratégie et cible géographique dans la base de travail

Ces observations permettent de comprendre que pour réaliser une étude ciblée et exhaustive sur le capital

investissement il est nécessaire d'avoir accès à une grande quantité de données aussi récentes que possible. Dans le cas contraire il serait alors nécessaire de faire des hypothèses quant aux flux futurs des fonds afin d'élargir autant que possible la base de données, au prix d'approximations qui pourraient introduire un biais dans les résultats.

4.3.2 Durée de vie des fonds de Private Equity

Le Private Equity est un investissement de long terme, c'est un consensus accepté par l'ensemble du marché. Il est donc pertinent de s'intéresser à la durée de vie effective d'un fonds de Private Equity. Celle-ci est égale à la durée qui sépare :

— la date de naissance du fonds, i.e. la date de premier appel de capitaux [13] ;

— et la mort économique dudit fonds, à savoir le maximum entre la date du dernier flux et la dernière date avant laquelle la NAV du fonds est définitivement nulle.

La figure suivante (4.6) présente les durées de vie moyennes [14], médianes ainsi que les quantiles à 25 % et 75 % pour chaque stratégie employée par les fonds. Pour plus de précisions sur l'obtention et l'interprétation des boîtes à moustaches présentées dans ce mémoire, se référer à l'annexe B.

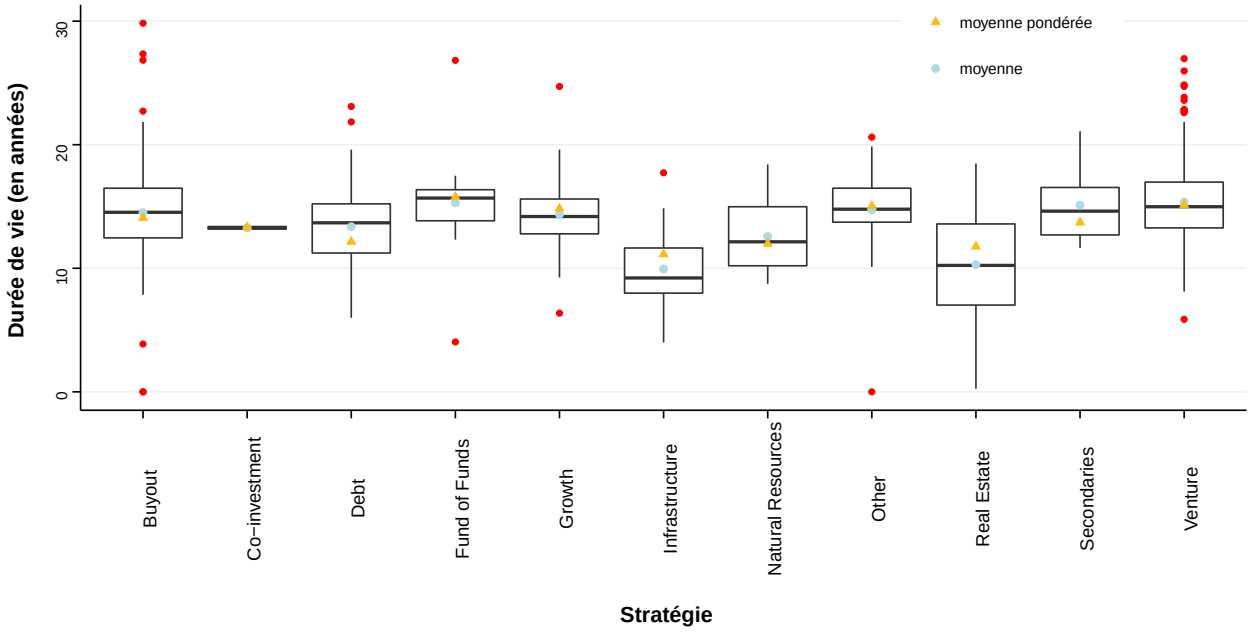


FIGURE 4.6 – Boîtes à moustaches des durées de vie en années par stratégie pour les fonds économiquement morts

Certains fonds, 3 pour être exact, ont une durée de vie nulle. Après une exploration plus détaillée de la base, il s'avère que ces trois fonds, ainsi que 2 autres qui ont une durée de vie inférieure à 1,1 an, ont enregistré des contributions, mais aucune distribution. De plus, les NAV de ces différents fonds sont constantes égales à 0. Il est cohérent de penser que ces entrées de la base correspondent à des erreurs, c'est pourquoi elles seront retirées dans la suite de notre étude. La base de travail contient donc désormais $698 - 5 = 693$ fonds.

13. La base de données à notre disposition ne précise pas l'emploi des capitaux appelés. Ainsi, il est possible que les premiers capitaux appelés par un GP ne servent pas à investir dans une société, mais soient utilisés pour payer des frais de gestion. Puisque nous ne pouvons pas faire cette distinction, il sera considéré que la date de premier appel et la date de premier investissement coïncident.

14. pondérées ou non par la taille des fonds

La médiane de la durée de vie d'un fonds de *Buyout*, respectivement de *Venture Capital*, est 14,53 ans, respectivement 14,98 ans. Les véhicules qui affichent la durée de vie la plus longue sont les fonds de fonds, avec une médiane de 15,68 ans ; il faut tout de même noter que seulement 8 fonds de fonds sont présents dans la base de travail. Ce résultat semble néanmoins cohérent puisque les fonds de fonds investissent eux-mêmes dans des fonds de capital investissement, il paraît alors raisonnable de penser que la durée de vie des fonds de fonds tend à être supérieure à celle de fonds classiques de Private Equity. Les fonds d'Infrastructure et d'Immobilier ont les durées de vie les plus courtes, avec respectivement des médianes de 9,22 et 10,23 années, ce qui peut sembler contre-intuitif puisqu'il s'agit en général de projets à long terme.

Afin de vérifier ces résultats, la même analyse a été réalisée mais avec un seuil fixé à 1 % pour déterminer si un fonds est économiquement mort ou non, contre 5 % précédemment. Les résultats se trouvent quasiment inchangés, les ordres de grandeur sont les mêmes, bien que les durées de vie soient légèrement rallongées, ce qui est tout à fait normal. À titre d'exemple, la médiane de la durée de vie des fonds de *Buyout* passe de 14,53 ans à 14,90 ans, quant aux *Venture Capital* elle passe de 14,98 à 15,10 ans.

Il est également possible de voir sur la figure précédente (4.6) que la taille des fonds semble avoir différents effets en fonction de la stratégie employée. Les moyennes pondérées par la taille des fonds sont parfois inférieures et parfois supérieures aux moyennes qui ne sont pas pondérées. Pour infirmer, ou confirmer, cette hypothèse de non indépendance entre la taille d'un fonds et sa durée de vie, plusieurs mesures de corrélation [15] ont été calculées et sont représentées dans les tableau suivants. Le tableau (4.4) est le résultat du calcul des corrélations sur les seuls fonds de *Buyout* tandis que le tableau (4.5) se fonde uniquement sur les fonds de *Venture Capital*.

Méthode	Corrélation	*p-value*
Pearson	-0,0938	0,1335
Spearman	-0,1219	0,0510
Kendall	-0,0796	0,0579

TABLE 4.4 – Mesures de corrélation entre la taille et la durée de vie des fonds de *Buyout*

Méthode	Corrélation	*p-value*
Pearson	-0,0724	0,3148
Spearman	-0,0306	0,6713
Kendall	-0,0254	0,5998

TABLE 4.5 – Mesures de corrélation entre la taille et la durée de vie des fonds de *Venture Capital*

Les *p-values* sont toutes supérieures à 5 %, c'est-à-dire qu'au seuil de 5 %, il est impossible de rejeter l'hypothèse selon laquelle la durée de vie d'un fonds est indépendante de sa taille, et ce pour tous les tests. La relation entre la taille et la durée de vie des fonds, pour les stratégies *Buyout* et *Venture Capital*, n'est donc pas nette.

En plus des mesures de corrélation, il est également possible de visualiser graphiquement les données. La figure suivante (4.7) représente la durée de vie des fonds en fonction du logarithme de leur taille [16] et ce, pour les deux situations mentionnées précédemment : sur les fonds de capital transmission (à gauche) ou uniquement sur les fonds de capital risque (à droite). Il est alors effectivement possible de constater qu'aucune tendance nette ne se dessine entre la durée de vie d'un fonds et sa taille.

15. Davantage de précisions sont disponibles sur les mesures de corrélation utilisées dans ce mémoire en annexe B.
16. Le logarithme a ici été appliqué afin de réduire les écarts, qui peuvent être grands, entre la taille des différents fonds pour rendre le graphique plus lisible et plus facile à interpréter.

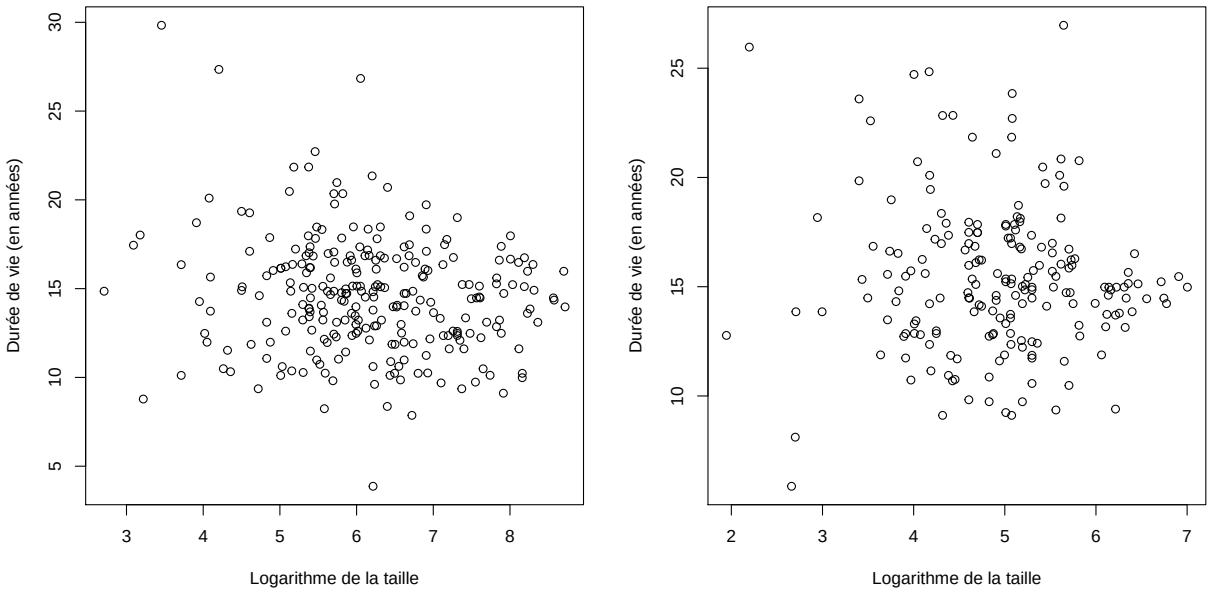


FIGURE 4.7 – Relation entre la durée de vie d'un fonds et le logarithme de sa taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite)

Pour confirmer ou infirmer ce constat, il s'agit de représenter la relation entre les pseudo-observations (4.8). Ces pseudo-observations s'assimilent aux rangs des observations dans l'échantillon. Comparer les rangs des fonds en termes de taille et de durée de vie permet en effet de mieux souligner la relation, ou l'absence de relation, entre ces deux variables. La fonction « pobs » du package R « copula » a été utilisée pour déterminer les pseudo-observations. Pour un vecteur de n observations $(x_1, ..., x_n)$, cette fonction renvoie les valeurs $u_i = \dfrac{r_i}{(n+1)}$ où $i \in [\![1, n]\!]$ et r_i est le rang de l'observation dans l'échantillon. Sur la figure ci-dessous le phénomène observé précédemment est encore plus flagrant.

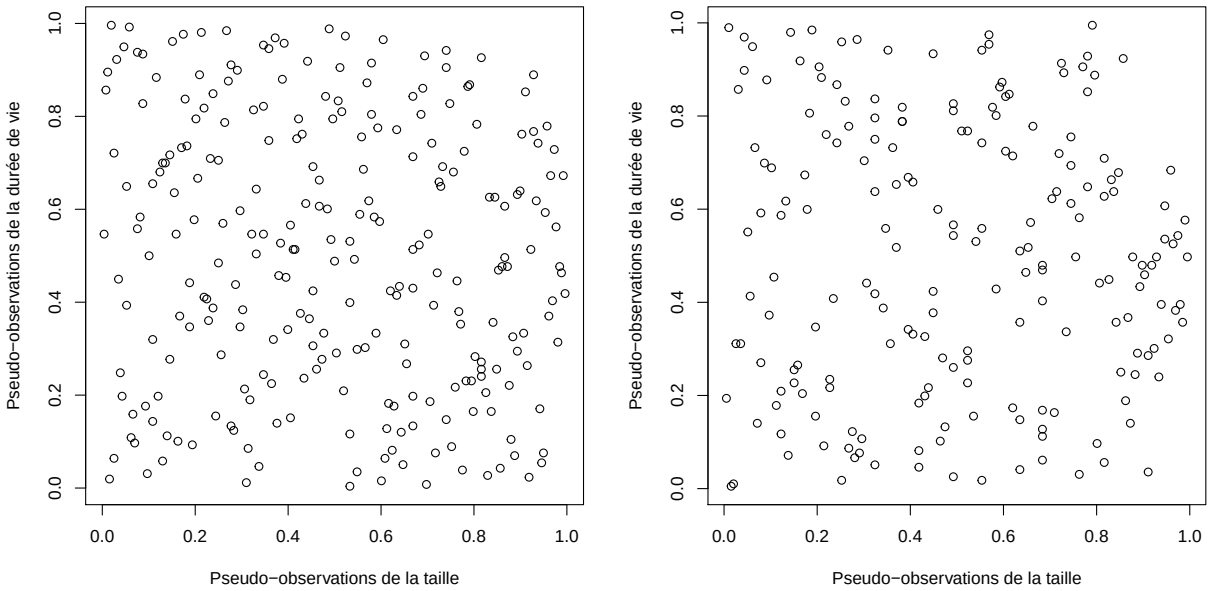


FIGURE 4.8 – Relation entre les pseudo-observations de la durée de vie des fonds et les pseudo-observations de leur taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite)

Dès lors, quelle que soit la taille d'un fonds de *Buyout* ou de *Venture Capital*, la taille ne semble pas être liée à la durée de vie. Cela peut sembler contre-intuitif car plus le fonds est grand, plus il va investir d'argent et donc plus il devrait mettre de temps à réaliser ces investissements. Néanmoins, il est également possible que les fonds de plus grande taille puissent bénéficier d'opportunités auxquelles n'auraient pas accès les fonds de taille plus petite et donc la phase de recherche de cible d'investissement pourrait être plus longue dans le cas de fonds plus petits, mais ce ne sont là que des hypothèses.

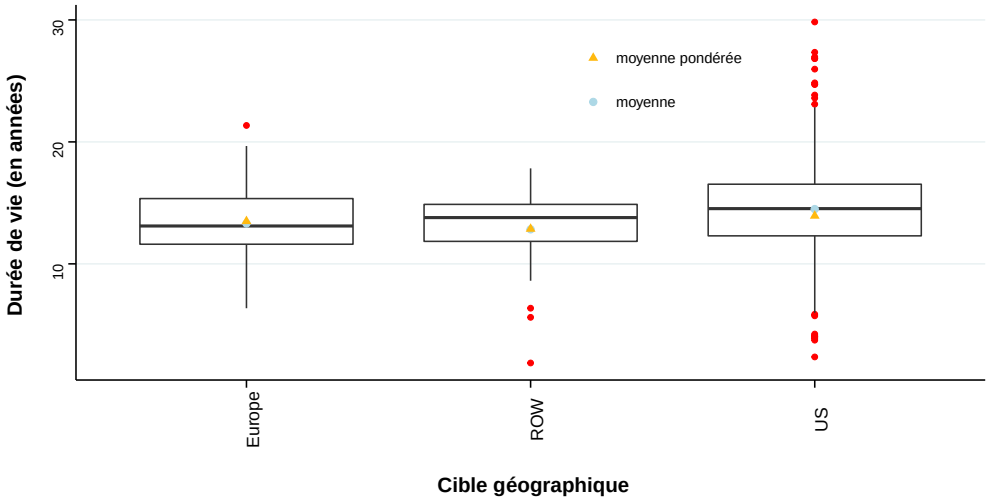


FIGURE 4.9 – Boîtes à moustaches des durées de vie, en années, par cible géographique pour les fonds économiquement morts

La cible géographique des fonds semble avoir un impact sur la durée de vie de ceux-ci. En effet, les fonds qui se concentrent sur le marché européen ont une durée de vie moyenne d'environ 13 ans et demi, contre 14 ans et demi pour les fonds qui investissent sur le marché américain (4.9). En ce qui concerne les fonds de *Buyout* notamment, alors que les fonds européens ont une durée de vie moyenne égale à 13 ans et demi, les fonds américains affichent une moyenne de près de 15 ans. Cela traduit peut-être le fait que le marché américain du Private Equity est plus mature que le marché européen.

4.3.3 Taille des fonds de Private Equity

Après s'être intéressé à la durée de vie des fonds, il convient de prêter attention à leur taille (4.10).

Les fonds de capital risque semblent être les fonds les plus petits, avec une médiane de 150 millions de dollars et une taille moyenne égale à un peu plus de 200 millions de dollars. Le plus grand fonds de *Venture Capital* a néanmoins une taille d'1,1 milliard de dollars, il a été levé en 1999 par une société de capital risque américaine qui a réalisé plusieurs investissements dans des start-ups aujourd'hui mondialement connues. Puisque les fonds de capital risque se concentrent essentiellement sur des jeunes, voire très jeunes, entreprises, il est cohérent de constater des tailles de fonds relativement contenues.

De l'autre côté du spectre, les fonds de capital transmission affichent des tailles plus importantes et beaucoup plus dispersées. En effet, si l'écart-type de la taille des fonds de *Venture Capital* est environ égal à 190 millions de dollars, celui de la taille des fonds de *Buyout* vaut plus d'1,1 milliard de dollars. En outre, la taille moyenne d'un fonds de capital transmission s'élève à un peu plus de 890 millions de dollars et la médiane vaut, quant à elle, 452 millions de dollars. Le plus grand fonds de capital transmission de la base de travail a une taille de 6,1 milliards, c'est le plus grand véhicule de toute la base de travail.

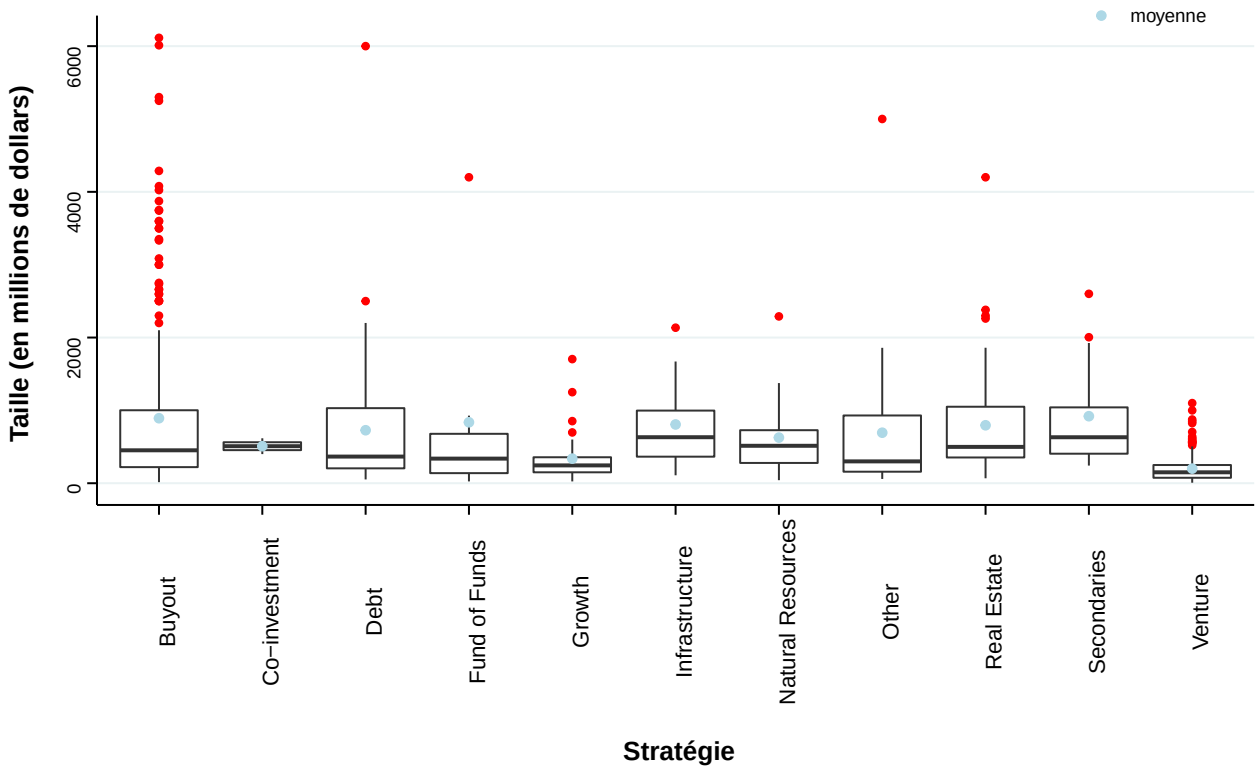


FIGURE 4.10 – Boîtes à moustaches des tailles, en millions de dollars, par stratégie pour les fonds économiquement morts

Il est intéressant de constater que les fonds de capital croissance semblent avoir une taille comprise entre celle des fonds de capital risque et celle des fonds de capital transmission. Effectivement, la médiane de la taille des fonds de *Growth* est égale à 245 millions de dollars, pour une moyenne d'environ 338 millions de dollars et un écart-type de 329 millions de dollars. Cela confirme le statut intermédiaire du capital croissance.

Les stratégies pour lesquelles la médiane et la moyenne des tailles sont les plus grandes sont : l'Infrastructure, avec une moyenne d'environ 806 millions de dollars et une médiane de 631,6 millions ; le Secondaire, qui affiche la plus grande taille moyenne, à savoir plus de 920 millions de dollars et une médiane égale à 631,3 millions de dollars, soit légèrement moins que l'Infrastructure. Que les fonds d'Infrastructure aient une taille importante paraît logique, au vu des coûts importants dédiés à la réalisation de projets d'infrastructure, mais cela est plus surprenant en ce qui concerne les fonds opérant sur le marché secondaire.

5 Risques et Performances du Private Equity

Sommaire

5.1 Mesures de performance globale . . . 81
5.1.1 Private Equity : quels TRI et quels multiples ? . . . 81
5.1.2 Des mesures de performance plus raffinées . . . 84
5.1.3 Corrélation entre les mesures de performance globale . . . 91
5.2 Performance du Private Equity à court terme . . . 94
5.2.1 Mesurer la performance... . . . 94
5.2.2 ... et mesurer le risque . . . 95
5.2.3 Réplication d'un portefeuille de capital investissement à l'aide de données historiques . . . 96
5.2.4 Algorithme de simulation historique . . . 98
5.2.5 Application à des portefeuilles fictifs . . . 99
5.3 Estimations de la *Value at Risk* . . . 107
5.3.1 Méthode non-paramétrique . . . 107
5.3.2 Approche semi-paramétrique . . . 108
5.3.3 Méthode paramétrique . . . 117
5.3.4 Le *backtesting* . . . 123
5.3.5 Bilan des tentatives d'estimation de la VaR . . . 125

Maintenant que différentes statistiques descriptives concernant la base de travail ont été présentées et que le lecteur s'est donc familiarisé avec les données qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire, il s'agit d'éclaircir le point suivant : les fonds de capital investissement sont-ils plus performants que le marché ?

5.1 Mesures de performance globale

Cette vaste question a été explorée dans de nombreux papiers, à l'aide de bases de données différentes et multiples. Il semble tout de même pertinent d'effectuer des analyses sur la base de données qui est à notre disposition afin de voir si les résultats obtenus concorderont avec ceux qui prévalent dans le domaine du Private Equity. Pour évaluer la performance de cette classe d'actifs, nous utiliserons bien évidemment les différentes métriques définies précédemment (2.4). Il conviendra tout d'abord de s'intéresser aux métriques les plus couramment utilisées par les professionnels du secteur, à savoir le Taux de Rentabilité Interne et les multiples.

5.1.1 Private Equity : quels TRI et quels multiples ?

Bien qu'elles ne soient pas optimales, comme expliqué supra, ces mesures sont aujourd'hui très souvent utilisées dans la communication financière des sociétés de gestion de capital investissement auprès de leurs LPs. Il convient donc d'analyser les résultats suggérés par l'utilisation de ces métriques et de les confronter ensuite aux observations fournies par des mesures plus pertinentes.

Les TRI ont ici été calculés, lorsque cela était possible [1], à l'aide de la fonction « irr » du package R « jrvFinance ». De plus, pour rappel, les TRI tiennent compte de la NAV finale des fonds, considérée comme un flux qui aurait lieu à la date de fin de vie du fonds.

La figure suivante (5.1) permet d'observer la répartition des TRI par stratégie de fonds. Seuls les TRI inférieurs à 1,1 sont ici représentés pour un souci de lisibilité, car seuls 8 fonds de *Venture Capital* affichent un TRI supérieur à cette valeur, compris entre 1,23 et 5,64. La figure (A.6) comporte quant à elle tous les TRI. En se focalisant sur les fonds de capital transmission et de capital risque, car ce sont les stratégies pour lesquelles nous disposons du plus de données et donc sur lesquelles nos analyses seront les plus fines, il est également possible de représenter les boîtes à moustaches des TRI par millésime (A.7).

Il faut noter que le fonds de capital risque qui affiche un Taux de Rentabilité Interne exceptionnel de 5,64 ne sera pas représenté dans les graphiques suivants pour des raisons évidentes de lisibilité. Il sera néanmoins, bien sûr, pris en compte lors des calculs de performance moyenne [2].

Le tableau ci-après (5.1) résume les différentes métriques disponibles concernant les TRI par stratégie.

Le TRI moyen du capital transmission est égal à 14,91 %, sans pondération et à 16,26 % après pondération par la taille des fonds. Ces observations sont cohérentes avec celles rapportées dans la littérature scientifique, même si les résultats ne sont pas identiques étant donné le fait que les bases de données utilisées sont différentes et ne couvrent pas forcément la même période [3].

1. Comme évoqué plus haut, d'un point de vue mathématique, il peut exister plusieurs TRI pour une même suite de *cash flows* et de dates associés.

2. Ce fonds illustre parfaitement ce qu'il n'est possible de voir qu'en capital risque : c'est un véhicule de 200 millions de dollars, de millésime 1997, créé par une société de gestion connue pour investir dans des entreprises du numérique et qui a notamment financé des start-ups de renom comme Apple, SanDisk ou encore FedEx. Un investisseur qui se serait engagé à hauteur de 10 millions de dollars dans le fonds en 1997 aurait reçu près de 200 millions de dollars en distributions cumulées environ 13 ans plus tard, soit un TVPI proche de 20x. Ces événements, bien qu'extrêmement rares, peuvent susciter l'intérêt de certains investisseurs pour le *Venture Capital*.

3. La moyenne pondérée des TRI des fonds de *Buyout*, respectivement de *Venture Capital*, vaut 12 %, respectivement 15 %, selon S. N. KAPLAN et SCHOAR (2005) pour qui l'analyse se fonde sur la période 1980-2001.

Les fonds de *Venture Capital* affichent le plus petit TRI médian, égal à 5,64 %, mais l'un des TRI moyens, sans prise en compte de la pondération, les plus élevés. En outre, c'est également la stratégie pour laquelle l'écart-type est le plus grand et donc le risque le plus important. Le capital risque porte donc bien son nom, car même si les performances, en termes de TRI, peuvent être très élevées, il s'avère que les sociétés sous-jacentes sont amenées à faire faillite plus souvent que pour les autres stratégies.

En se concentrant sur la répartition des TRI par millésime pour les fonds de capital transmission et de capital risque, il est possible de constater que pour quasiment chaque millésime les performances des fonds de *Venture Capital* sont plus dispersées que celles des fonds de *Buyout*. En outre, le capital risque tend, en moyenne, à être plus performant que le capital transmission pour les millésimes antérieurs à 1998. À partir de 1999 la tendance s'inverse et les TRI du capital risque deviennent négatifs. Ce phénomène est peut-être dû à la crise de la bulle internet survenue au début des années 2000 qui a certainement eu un plus grand impact sur le capital risque, dont les investissements reposent souvent sur des entreprises technologiques, que sur le capital transmission.

Ces performances peuvent sembler très importantes, il est néanmoins primordial de rappeler que les TRI ne sont absolument pas comparables aux performances d'autres classes d'actifs, comme les actions par exemple.

L'autre métrique régulièrement utilisée par les professionnels du Private Equity est le TVPI, ou multiple. Le graphique (5.2) donne la répartition des mutliples par stratégie pour les fonds économiquement morts pour lesquels le TVPI est inférieur à 11x. En effet, seulement 4 fonds de *Venture Capital* ont un multiple supérieur à 11x, compris entre 19,6x et 32,5x. Ces 4 fonds appartiennent au groupe de 8 fonds dont le TRI est supérieur à 1,1, mais pas dans le même ordre. Par exemple le fonds qui affiche le plus grand multiple, à savoir 32,4x, affiche un TRI « seulement » égal à 1,23. Cela est dû au fait que le multiple ne prend pas en compte les dates des flux ni la durée de la période sur laquelle s'étend l'investissement.

Le multiple médian des fonds de *Buyout* est égal à 1,71x contre 1,31x pour les fonds de *Venture Capital*. La moyenne pondérée des TVPI des fonds de capital transmission est également supérieure à celle des fonds de capital risque : 1,83x contre 1,80x. Si l'intérêt se porte aux moyennes non pondérées par la taille des fonds, cette relation s'inverse puisque le TVPI moyen des fonds de *Buyout* vaut 1,82x contre 2,15x pour les fonds de *Venture Capital*. Les conclusions sont donc similaires à celles qui proviennent de l'analyse des graphiques des TRI : le capital risque donne accès à des performances qui sont parfois sensiblement supérieures à celles offertes par les autres stratégies, y compris le capital transmission, au prix d'un risque beaucoup plus important. Effectivement, environ 38 % des fonds de capital risque ont un multiple inférieur à 1, cela signifie que, sans même prendre en compte la valeur temps des investissements réalisés, plus d'1 fonds de *Venture Capital* sur 3 distribuera aux LPs moins que le capital qu'ils ont investi. Cette proportion tombe à environ 15 % pour les fonds de *Buyout*.

En ce qui concerne la représentation par boîtes à moustaches des multiples des fonds de capital transmission et de capital risque par millésime (A.9), les conclusions sont similaires à celles faites supra à partir du même graphique portant sur les TRI.

Les analyses fondées sur ces différentes métriques sembleraient pencher en faveur des arguments selon lesquels le Private Equity serait plus performant que les actifs traditionnels... En effet, les TRI sont plutôt impressionnants puisqu'en moyenne supérieurs à 10 %, de même que les multiples moyens, proches de 2x. Ces éléments, qui font partie de la communication financière fournie aux *Limited Partners* par les sociétés de gestion, peuvent en effet parfois impressionner les investisseurs institutionnels. Cependant, comme évoqué de nombreuses fois, les métriques comme le TRI et le TVPI ne sont pas comparables aux mesures de performance plus traditionnelles et sont des mesures absolues et non pas relatives, c'est-à-dire qu'elles ne prennent pas en compte le taux sans risque disponible sur le marché.

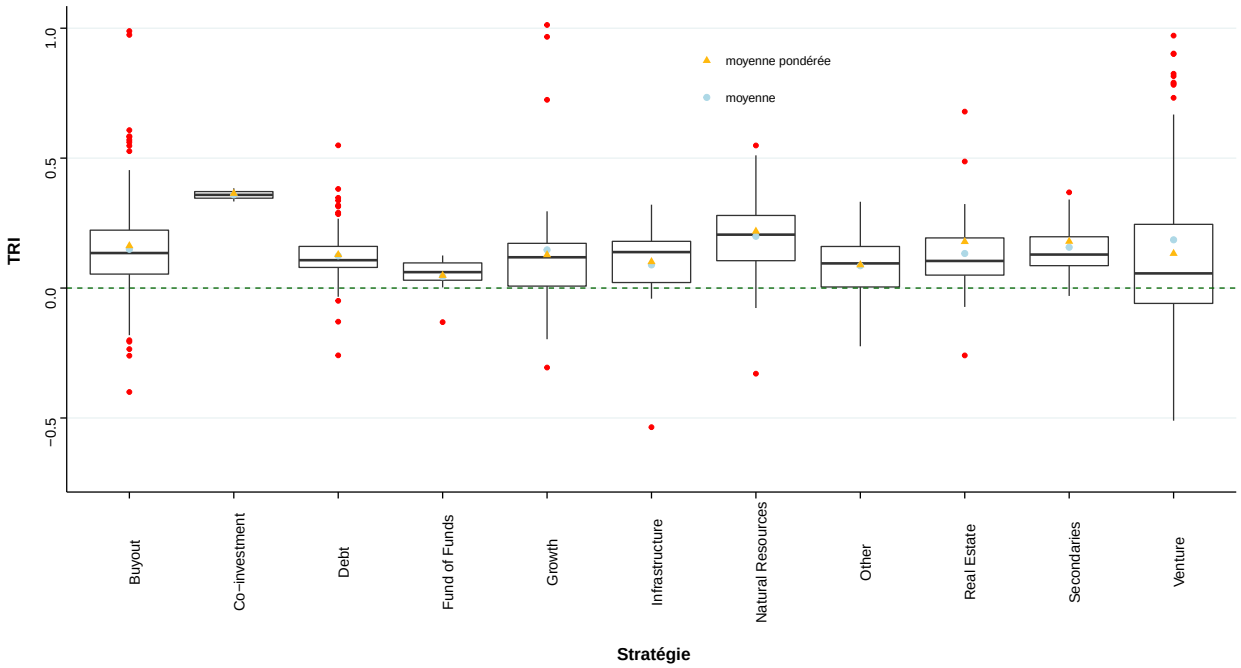


FIGURE 5.1 – Boîtes à moustaches des TRI inférieurs à 1,1 par stratégie pour les fonds économiquement morts

Stratégie	Moyenne	Moyenne pondérée	Médiane	Écart-type
Buyout	14,91 %	16,26 %	13,48 %	16,72 %
Co-investment	35,86 %	36,40 %	35,86 %	3,59 %
Debt	12,39 %	12,85 %	10,73 %	11,76 %
Fund of Funds	4,41 %	4,82 %	6,13 %	8,12 %
Growth	14,70 %	12,78 %	11,85 %	26,73 %
Infrastructure	8,91 %	10,12 %	13,84 %	21,07 %
Natural Resources	19,92 %	21,85 %	20,56 %	22,39 %
Other	8,58 %	8,91 %	9,49 %	11,79 %
Real Estate	13,30 %	17,85 %	10,43 %	14,79 %
Secondaries	15,70 %	17,95 %	12,89 %	11,03 %
Venture	18,56 %	13,29 %	5,64 %	57,01 %

TABLE 5.1 – Statistiques relatives aux TRI des fonds économiquement morts par stratégie

D'un point de vue opérationnel, il est absolument capital de souligner ces dangers puisque de nombreux investisseurs se fondent encore aujourd'hui sur ces métriques biaisées pour évaluer la performance du capital investissement, d'où la nécessité d'insister sur ce point. GOMPERS, S. N. KAPLAN et MUKHARLYAMOV (2016) illustrent cela grâce à une étude de marché réalisée auprès de plusieurs sociétés de gestion. L'une des questions posées par les chercheurs concerne les métriques jugées, selon les sociétés de gestion, comme les plus importantes pour les investisseurs institutionnels i.e. les LPs. Selon ce sondage, auquel 63 GPs ont répondu, la mesure de performance perçue comme la plus importante est le multiple, à plus de 38 %, suivie par le TRI par millésime à 27 % puis par le TRI à 25,4 %. Une mesure de performance relative [4] qui prend donc en compte la performance d'une autre classe d'actifs, comme celle du marché action par exemple, n'arrive qu'en quatrième position avec seulement 7,9 % des votes.

4. comme la PME

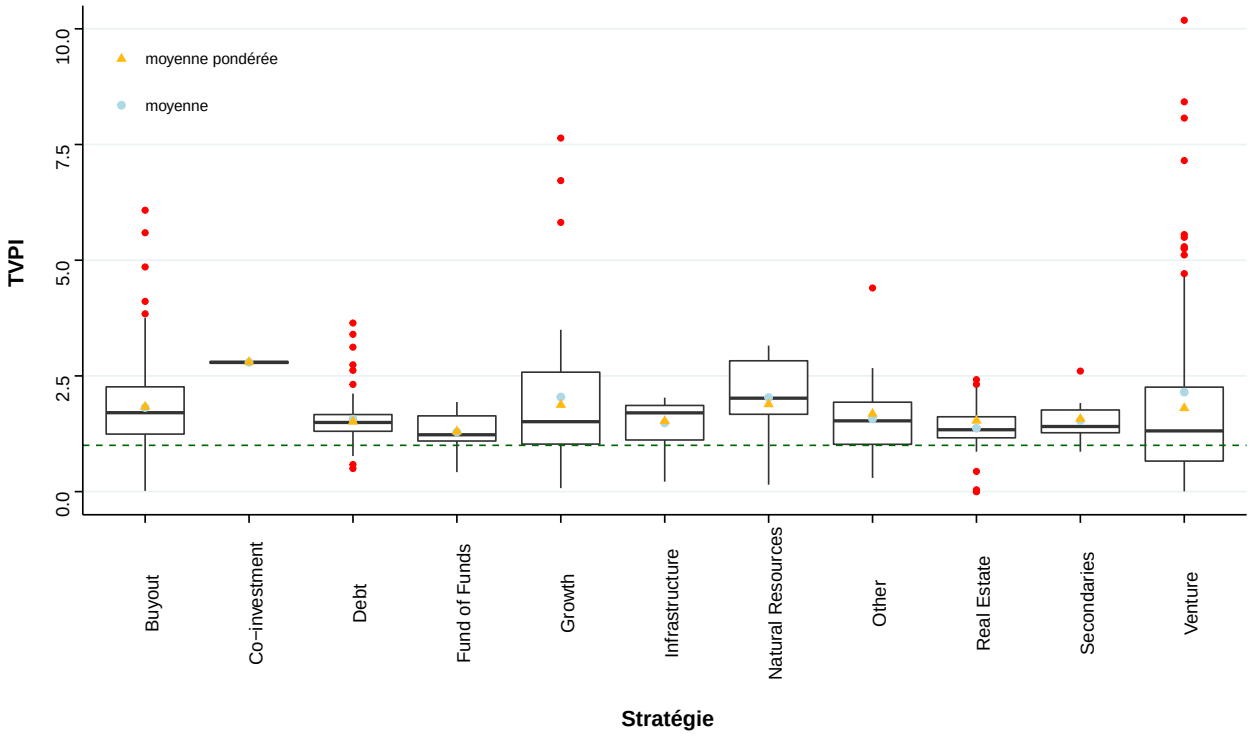


FIGURE 5.2 – Boîtes à moustaches des TVPI inférieurs à 11x par stratégie pour les fonds économiquement morts

5.1.2 Des mesures de performance plus raffinées

Après avoir étudié avec attention les TRI et les multiples des fonds issus de la base de travail, il convient de réaliser le même travail mais en utilisant les autres mesures de performance définies précédemment (2.4).

L'essentiel des analyses de cette sous-partie découleront des graphiques placés en annexe (A).

Le Taux de Rendement Interne Modifié

Les TRIM seront ici calculés en utilisant un taux de réinvestissement égal au taux de financement égal à 8 %, qui est aussi généralement égal au *hurdle rate*, comme suggéré par PHALIPPOU (2008). Enfin, pour rappel, le TRIM ne fait pas intervenir la NAV résiduelle des fonds. De plus, il s'agit également d'une mesure absolue, comme le TRI et le TVPI.

L'utilisation du TRIM (5.2) mène à des conclusions moins hétérogènes en fonction des stratégies adoptées que le recours au TRI. L'utilisation du Taux de Rendement Interne Modifié a en effet tendance à réduire les variations intra et inter-stratégies. Les écarts-types sont tous, à l'exception de celui de la stratégie *Real Estate*, inférieurs à ceux calculés supra (5.1). Ce phénomène s'explique par le fait que le TRIM fait intervenir des taux de financement et de réinvestissement identiques pour chaque stratégie, ici 8 %. Cette hypothèse peut, bien sûr, être discutée et la valeur de ces différents taux devrait être étudiée avec précaution lors d'une étude de cas réelle. C'est d'ailleurs un des inconvénients de cette mesure de performance : tout comme le calcul de la VAN, le TRIM nécessite l'estimation de certaines grandeurs.

Néanmoins, l'objectif ici n'est pas de déterminer les taux de réinvestissement et de financement optimaux, mais d'illustrer les différences d'interprétation qui découlent de l'usage du TRIM plutôt que du TRI.

Un deuxième constat s'impose. Les performances, toutes stratégies confondues, se trouvent assez largement réduites. À titre d'exemple, la performance médiane du capital transmission n'est plus que de 9,42 %, contre 13,48 % auparavant. Cela est dû à l'hypothèse du TRI selon laquelle les flux d'un projet sont réinvestis au TRI. Or, le TRIM permet de relâcher cette hypothèse de réinvestissement. Dès lors, le calcul de la mesure de performance d'un projet n'est pas biaisé par la performance propre de ce même projet. C'est ce qui explique des TRIM moyens inférieurs aux TRI moyens.

Stratégie	Moyenne	Moyenne pondérée	Médiane	Écart-type
Buyout	8,77 %	9,47 %	9,42 %	4,92 %
Co-investment	13,78 %	13,88 %	13,78 %	0,66 %
Debt	8,76 %	8,98 %	8,73 %	2,50 %
Fund of Funds	6,33 %	6,60 %	7,33 %	3,18 %
Growth	7,87 %	7,87 %	8,56 %	7,35 %
Infrastructure	7,02 %	7,85 %	10,03 %	11,38 %
Natural Resources	9,89 %	9,75 %	12,34 %	8,38 %
Other	7,62 %	8,13 %	8,48 %	3,91 %
Real Estate	2,54 %	4,91 %	8,54 %	24,26 %
Secondaries	8,93 %	9,36 %	8,61 %	1,95 %
Venture	6,09 %	5,07 %	6,83 %	9,70 %

TABLE 5.2 – Statistiques relatives aux TRIM des fonds économiquement morts par stratégie

Les fonds de *Venture Capital* apparaissent toujours comme l'un des véhicules les plus risqués, puisque l'écart-type de cette stratégie est le plus grand derrière celui de *Real Estate* et de l'*Infrastructure* [5]. Cependant, il n'est plus possible de dire que le capital risque est en moyenne plus performant que les autres stratégies. S'il est fait abstraction de la catégorie *Real Estate*, le *Venture Capital* affiche les performances (en termes de moyenne, moyenne pondérée et médiane) les plus faibles de la base de travail.

Enfin, la figure (A.11) permet de constater un déclin assez net des performances du capital risque à partir du millésime 1998.

Les mesures de performance relatives

Il temps, à présent, d'évoquer les métriques fondées sur la méthode de Public Market Equivalent. Cela permet de comparer les performances des différents fonds et, de ce fait, des différentes stratégies de capital investissement à des indices de référence. Une attention toute particulière sera portée au *Buyout* et au *Venture Capital* car ce sont les classes d'actifs pour lesquelles nous disposons du plus grand nombre de données et ainsi sur lesquelles nos analyses seront certainement les plus pertinentes.

La première étape consiste à déterminer la valeur de ces indices de référence. Notre choix s'est porté sur le marché des actions, car c'est l'option la plus évidente et la plus courante dans la littérature sur le sujet. 3 indices action ont donc été choisis en fonction de la cible géographique des fonds étudiés. Lorsque le véhicule se concentre sur le marché européen, sa performance sera comparée à celle de l'EURO STOXX 50, indice qui regroupe les 50 plus grandes sociétés de la zone euro au regard de leur capitalisation boursière. Pour le marché américain, le S&P 500 est retenu, indice boursier qui se base sur les 500 plus grandes

5. L'utilisation du TRIM pour les stratégies *Real Estate* et *Infrastructure* n'est peut-être guère judicieuse ici. Les taux de réinvestissement et de financement ont effectivement été fixés à 8 %, le taux de *hurdle* classique proposé par les fonds de capital investissement. Or, l'immobilier et l'infrastructure ne font pas partie des fonds de Private Equity traditionnels, ces stratégies présentent des singularités. Dès lors, la référence à un taux de *hurdle* de 8 % est peut-être abusive dans ces cas précis, ce qui peut conduire à des résultats surprenants pour ces deux stratégies.

sociétés cotées des États-Unis. Enfin, pour les autres fonds qui n'investissent ni en Europe ni aux États-Unis, notre choix s'est porté sur le MSCI World, indice qui permet de mesurer la performance des marchés boursiers de pays développés [6]. Une fois ces indices identifiés, leurs valeurs mensuelles ont ensuite été récupérées via un terminal Bloomberg.

Il s'agit maintenant de déterminer pour chaque fonds, lorsque cela est possible, les 4 différentes mesures de performance fondées sur la PME, à savoir la LN-PME, la PME+, la KS-PME et le Direct Alpha.

Les 2 premières métriques présentées sont la LN-PME et la PME+. Pour rappel, ces mesures doivent être comparées au TRI. Si le TRI d'un fonds est supérieur à sa LN-PME ou à sa PME+, cela signifie que selon ces métriques le fonds a été plus performant que l'indice de référence i.e. le marché actions ici. Les différents graphiques (A.12, A.13, A.14 et A.15) représentent donc la LN-PME et la PME+ diminuées des TRI. À nouveau pour des raisons de lisibilité, le fonds de capital risque qui affiche un TRI supérieur à 550 % n'apparaît pas sur les figures [7].

A priori il est possible de dire, selon les graphiques (A.12 et A.14), que toutes les stratégies ont, en moyenne et en prenant en compte la taille des fonds, battu le marché sur la période considérée.

Les graphiques permettent notamment de constater que, sur la base de travail, le *Buyout* et le *Venture Capital* ont légèrement surperformé le marché. La moyenne pondérée des LN-PME diminuées des TRI est en effet environ égale à -13 % pour les fonds de capital transmission et -10,7 % pour les fonds de capital risque. Attention cependant, ces métriques ne donnent pas d'information quant au taux excédentaire apporté par ces classes d'actifs vis-à-vis du marché i.e. cela ne signifie pas que le capital transmission a une performance supérieure de 13 % à celle du marché. Le *Venture Capital* semble néanmoins plus risqué car il affiche une médiane égale à 1,44 %, cela signifie que plus de 50 % des fonds de la base ont été moins performants que le marché. Pour être plus précis, ce sont près de 57 % des fonds de capital risque qui affichent un TRI supérieur à leur LN-PME. S'agissant des fonds de *Buyout*, cette proportion tombe à un peu plus de 33 % i.e. deux tiers des fonds de capital transmission ont battu le marché selon la LN-PME.

Un constat similaire se dresse à l'aune de la PME+. Pour toutes les stratégies, la moyenne pondérée de la différence entre PME+ et TRI est négative. Cette moyenne pondérée vaut environ -13,4 % pour les fonds de capital transmission et -8,6 % pour les fonds de capital risque. Le *Buyout* semble donc, en moyenne, plus performant que le *Venture Capital*. Cela s'explique ici encore par le fait qu'un nombre important de fonds de capital risque, plus de 53 %, affiche des performances inférieures à celles du marché selon la PME+. Cette proportion n'est que de 23 % dans le cas du capital transmission.

Enfin, les figures (A.13 et A.15) proposent de se concentrer sur les performances, par millésime, pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital*. Selon la LN-PME, le capital transmission semble avoir presque toujours battu le marché, sauf pour les millésimes 1998, 2006 et 2007 [8]. Le *Venture Capital*, quant à lui, a battu le marché pour les millésimes allant de 1987 à 1998. Après cette période, la différence entre LN-PME et TRI est assez nettement positive i.e. le marché a été plus performant. Au regard de la PME+ maintenant, les fonds de *Buyout* semblent avoir été meilleurs que le marché, en considérant les moyennes pondérées bien sûr, depuis le millésime 1993. Pour le *Venture Capital* les conclusions sont similaires aux précédentes, à savoir qu'à partir du millésime 1999 les fonds de capital risque ont moins bien performé que le marché.

6. Bien que nous ne disposions pas d'une granularité nécessaire, au niveau de la base de données, pour déterminer les pays du reste du monde qui font l'objet d'investissements de fonds de Private Equity, il est possible d'imaginer que ces opérations ont lieu dans des pays développés plutôt que dans des pays émergents, auquel cas le MSCI Emerging Markets, par exemple, aurait été préféré au MSCI World.

7. Néanmoins, il a bien été utilisé pour déterminer la valeur des différentes métriques, c'est-à-dire que ce fonds n'a pas été supprimé de la base de travail. Les graphiques présentés sont en fait une version zoomée des graphiques complets. Ce fonds, pour lequel le TRI vaut plus de 550 %, affiche une LN-PME égale à -2,94 % et une PME+ de 10,47 %.

8. Il faut tout de même noter que seuls 2 fonds de capital transmission ont pour millésime 2006, idem pour 2007, ces résultats sont donc discutables.

Il faut enfin noter que pour les millésimes 1988-1998, soit une période de 10 ans, le capital risque a non seulement été plus performant que le marché, mais cela de manière assez nette comparativement au capital transmission. Ainsi, pendant environ une décennie, les fonds de *Venture Capital* ont visiblement très bien performé, ce qui a pu aiguiser l'appétit des investisseurs pour cette classe d'actifs.

Il est dès lors intéressant de remarquer que de légères différences d'interprétation surviennent déjà entre LN-PME et PME+, alors que ces deux mesures se fondent sur des méthodes similaires.

Les deux mesures suivantes, la KS-PME et le Direct Alpha, sont celles qui font aujourd'hui foi dans le domaine scientifique lorsqu'il s'agit d'estimer de manière plus précise et pertinente la performance du capital investissement. Ces métriques n'ont pas besoin d'être comparées aux TRI, elles peuvent s'interpréter telles quelles.

S'agissant des KS-PME par stratégie (5.3), les moyennes pondérées sont toutes supérieures à 1. Cela signifie que, sur la période et en moyenne, toutes les stratégies auraient permis à l'investisseur de s'enrichir davantage que s'il avait investi sur le marché. L'avantage de la KS-PME est qu'elle rend possible la quantification de cette richesse excédentaire générée par le Private Equity. Le tableau (5.3) fournit quelques statistiques intéressantes pour chaque stratégie. Il est dès lors possible de constater que le capital transmission a été sur la période, en considérant la moyenne pondérée des KS-PME, l'une des stratégies les plus performantes car il a permis aux LPs de réaliser un gain 1,61 fois plus important que s'ils avaient investi sur les indices de référence i.e. sur le marché boursier. Le capital risque a aussi permis aux investisseurs de battre le marché, mais moins nettement, puisque la moyenne pondérée des KS-PME n'est « que de » 1,31.

En outre, le *Venture Capital* semble aussi beaucoup plus risqué que le *Buyout* puisque la proportion de fonds qui ont fait moins bien que le marché sur la période est plus de deux fois supérieure dans le cas du capital risque que dans le cas du capital transmission. L'écart-type des KS-PME pour les fonds de *Venture Capital* traduit une dispersion importante des performances de cette stratégie.

Cette dispersion peut s'observer pour la plupart des millésimes (A.17), car l'espace interquartile des boîtes à moustaches est en moyenne plus important pour le capital risque que pour le capital transmission. Enfin, si le *Buyout* a été plus performant que le marché pour quasiment tous les millésimes [9], ce n'est pas le cas des fonds de *Venture*, en effet, à partir du millésime 1999 les moyennes pondérées des KS-PME du capital risque sont toutes inférieures à 1. En ne considérant que les millésimes antérieurs à 1999 les résultats du capital risque sont bien meilleurs puisque la moyenne, la moyenne pondérée par les tailles et la médiane des KS-PME valent respectivement 1,84, 1,56 et 1,24.

Il est possible de réaliser les mêmes analyses à partir du Direct Alpha, le tableau suivant (5.4) présente les statistiques relatives à cette métrique par stratégie. Dès lors, les fonds de *Buyout* de la base de travail semblent avoir réalisé, en moyenne, une performance annuelle excédentaire de 9,79 % par rapport au marché. En pondérant par les tailles des fonds, cette moyenne passe à 13,09 %. Les fonds de *Venture Capital* de la base de données affichent également de très bonnes performances, avec un Direct Alpha moyen de 8,84 % et égal à 6,22 % si l'on prend en compte la taille des fonds.

En outre, il est possible de dégager les mêmes conclusions que précédemment lorsqu'il s'agit d'évaluer les risques induits par chaque stratégie, en effet la KS-PME et le Direct Alpha se basent sur le même principe de calcul. Le *Venture Capital* permet d'avoir accès, dans de rares cas, à des performances très élevées au prix d'une proportion bien plus large que pour les autres classes d'actifs de fonds moins performants que le marché. Enfin, les performances du capital risque sont ici encore très mauvaises pour les millésimes postérieurs à 1999.

9. À l'exception des millésimes 1985 et 1992 pour lesquels la KS-PME vaut respectivement 0,99 et 0, 96.

Stratégie	Moyenne	Moyenne pondérée	Médiane	Écart-type	Proportion KS-PME < 1
Buyout	1,48	1,61	1,47	63,31 %	24 %
Co-investment	2,15	2,17	2,15	16,26 %	NA
Debt	1,35	1,38	1,31	49,52 %	19 %
Fund of Funds	1,00	1,08	1,01	31,58 %	47 %
Growth	1,58	1,53	1,31	103,81 %	27 %
Infrastructure	1,36	1,39	1,43	57,43 %	21 %
Natural Resources	1,66	1,65	1,75	77,27 %	20 %
Other	1,20	1,33	1,16	41,44 %	30 %
Real Estate	1,15	1,31	1,12	44,84 %	31 %
Secondaries	1,33	1,38	1,30	22,15 %	6 %
Venture	1,43	1,31	0,92	204,33 %	54 %

TABLE 5.3 – Statistiques relatives aux KS-PME des fonds économiquement morts par stratégie

Stratégie	Moyenne	Moyenne pondérée	Médiane	Écart-type	Proportion Direct Alpha < 0
Buyout	9,79 %	13,09 %	9,63 %	14,87 %	23 %
Co-investment	27,43 %	28,00 %	27,43 %	3,74 %	NA
Debt	8,51 %	10,62 %	7,76 %	11,50 %	19 %
Fund of Funds	-0.52 %	1,52 %	0,27 %	6,94 %	47 %
Growth	8,79 %	8,33 %	7,13 %	18,82 %	25 %
Infrastructure	5,70 %	7,66 %	12,46 %	21,01 %	19 %
Natural Resources	13,86 %	16,90 %	18,33 %	21,65 %	20 %
Other	3,36 %	5,65 %	3,18 %	9,69 %	30 %
Real Estate	7,08 %	12,72 %	5,54 %	13,14 %	30 %
Secondaries	10,69 %	12,86 %	8,52 %	8,12 %	5 %
Venture	8,84 %	6,22 %	-1,09 %	47,37 %	53 %

TABLE 5.4 – Statistiques relatives aux Direct Alpha des fonds économiquement morts par stratégie

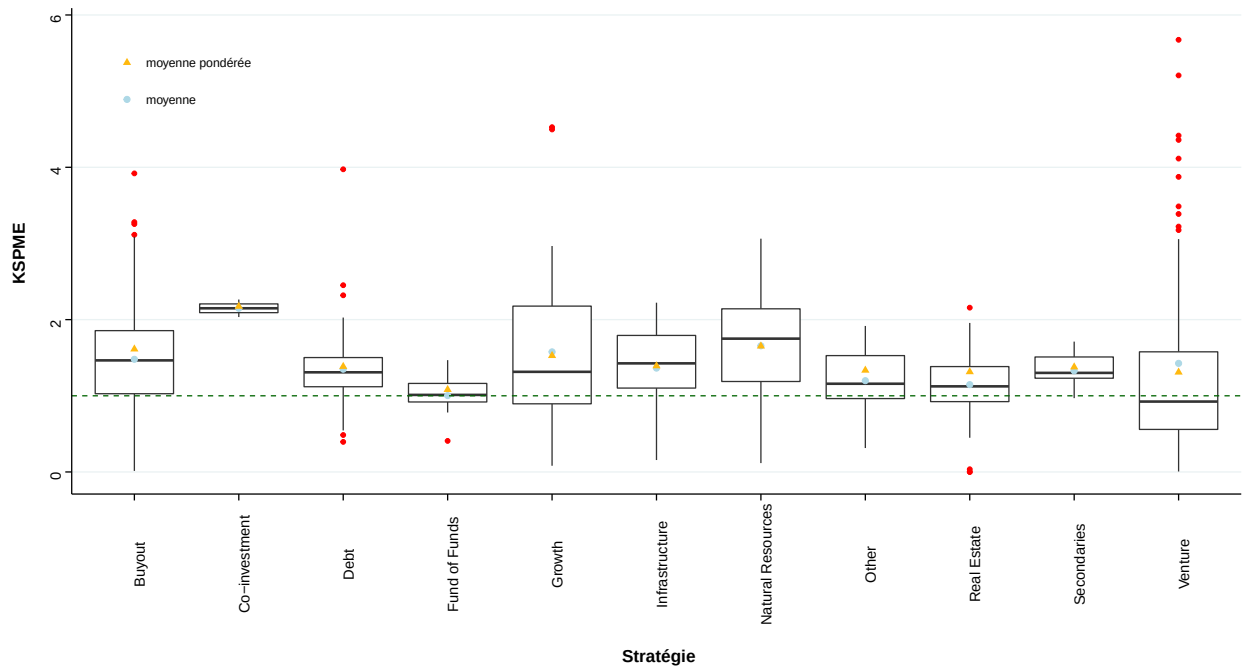


FIGURE 5.3 – Boîtes à moustaches des KS-PME par stratégie pour les fonds économiquement morts (ne sont pas représentés les fonds pour lesquels le KS-PME est supérieur à 6)

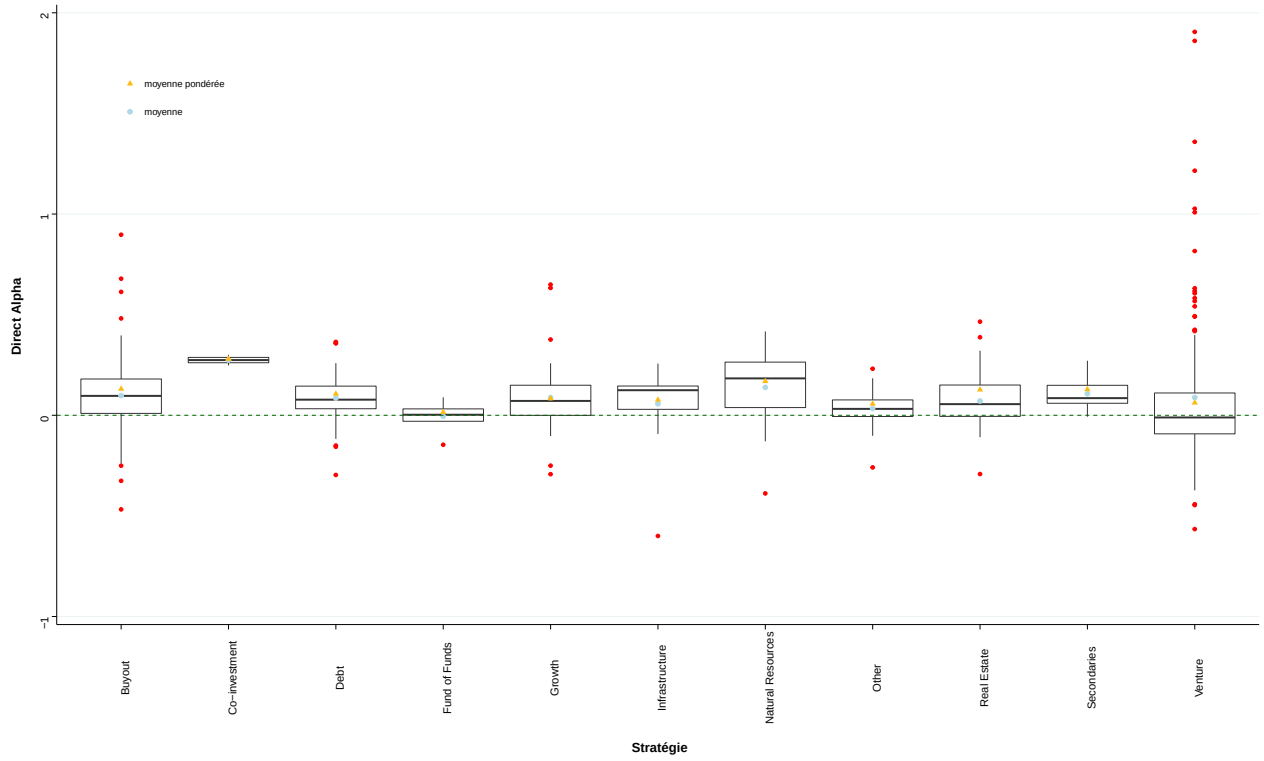


FIGURE 5.4 – Boîtes à moustaches des Direct Alpha par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds qui affiche un Direct Alpha de 4,88)

Avant de conclure, nous souhaitons souligner le lien, si tant est qu'il existe, entre la taille d'un fonds et

sa performance, en utilisant comme métrique la KS-PME [10]. Les tableaux suivants présentent la corrélation entre la taille des fonds et leur KS-PME pour les stratégies de capital transmission (5.5) et de capital risque (5.6). La performance des fonds de *Buyout* semble positivement corrélée à leur taille, car le coefficient de corrélation entre KS-PME et taille est positif pour chacune des méthodes et que les *p-values* sont toutes inférieures à 5 %, donc l'hypothèse d'indépendance entre performance et taille est rejetée au seuil de 5 %. Dans le cas du capital risque les *p-values* sont toutes supérieures à 5 %, ainsi, au seuil de 5 %, il est impossible de rejeter l'hypothèse d'indépendance entre taille et performance pour les fonds de *Venture Capital*. Les figures ci-après (5.5) permettent d'observer de manière graphique la KS-PME en fonction de la taille pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite) [11]. La même figure obtenue à partir des pseudo-observations et non des observations directement est disponible en annexe (A.18).

Méthode	Corrélation	*p-value*
Pearson	0,1715	0,0058
Spearman	0,1843	0,0030
Kendall	0,1263	0,0026

TABLE 5.5 – Mesures de corrélation entre la taille et la KS-PME des fonds de *Buyout*

Méthode	Corrélation	*p-value*
Pearson	-0,0612	0,3955
Spearman	-0,0372	0,6059
Kendall	-0,0275	0,5696

TABLE 5.6 – Mesures de corrélation entre la taille et la KS-PME des fonds de *Venture Capital*

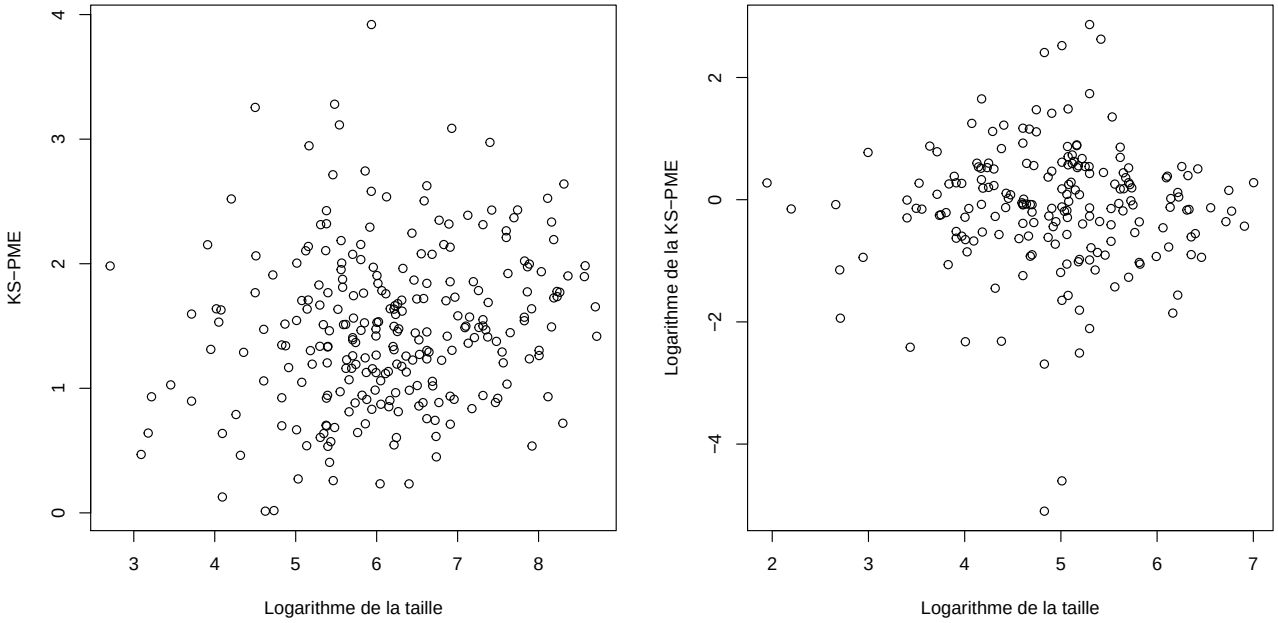


FIGURE 5.5 – Relation entre la taille d'un fonds et sa KS-PME, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et les fonds de *Venture Capital* (à droite)

10. La même analyse peut être réalisée via le Direct Alpha. Les résultats ne sont pas identiques mais sont très proches.

11. Dans le cas du capital risque, nous avons représenté le logarithme de la KS-PME en fonction du logarithme de la taille, car les mesures de performance des fonds de capital risque sont très dispersées.

Les résultats présentés supra doivent être interprétés avec prudence. Tout d'abord, la période couverte ne s'étend que du début des années 1980 au milieu des années 2000. Cependant, la base de données contient un nombre trop faible d'observations issues des périodes 1980-1990 et 2005-2007 pour dresser des conclusions générales. De plus, nous n'avons pas pu contrôler le processus d'obtention des données, dès lors les informations utilisées dans ce mémoire ne reflètent peut-être pas le comportement global du Private Equity sur la période étudiée. En outre, le choix qui a été fait ici pour les indices de référence est aussi discutable. Par exemple, il serait possible de comparer la performance des fonds de Private Equity américains au Russell 2000 [12] plutôt qu'au S&P 500. La littérature n'est cependant pas unanime sur ce sujet. Enfin, les performances obtenues, notamment au regard des KS-PME et des Direct Alpha moyens par stratégie et par millésime, sont supérieures à celles reportées dans des papiers de recherche comme ceux de BROWN et S. N. KAPLAN (2019), de KASERER et DILLER (2004) ou de S. N. KAPLAN et SCHOAR (2005). Les premiers ne constatent par exemple, à partir de données issues de Burgiss pour des fonds de *Buyout* ayant des millésimes compris entre 1986 et 2014, qu'un Direct Alpha moyen égal à 4,8 % et qu'une KS-PME égale à 1,22.

5.1.3 Corrélation entre les mesures de performance globale

Maintenant que les différentes mesures de performance ont été obtenues pour chaque fonds, lorsque cela était possible, il s'agit de s'intéresser à la corrélation entre ces différentes métriques. L'objectif est entre autres de savoir si les fonds performants selon une métrique le sont aussi selon les autres mesures de performance. En somme, il est question de savoir si les différentes métriques permettent de classer les fonds dans le même ordre suivant leur performance, c'est pourquoi les analyses de cette section se baseront essentiellement sur les corrélation de rangs. Les conclusions de cette partie se feront au regard du Tau de KENDALL et du ρ de SPEARMAN, qui sont des mesures de corrélation de rangs. Par souci d'exhaustivité, les corrélations de PEARSON seront également présentées.

La figure présentée en annexe (A.21) présente une approche erronée des différentes matrices de corrélation, pour les performances des fonds de capital transmission et de capital risque, selon les trois mesures de corrélation mentionnées ci-dessus [13].

Cette approche erronée consiste simplement à déterminer les différentes corrélations entre chacune des mesures de performance et ce, pour chaque fonds. Selon cette approche, il est possible de voir que les mesures de performance ne sont pas toutes fortement corrélées. En effet, dans le cas du *Buyout*, quelle que soit la mesure de corrélation choisie, la corrélation entre la LN-PME et les autres mesures de performance est relativement faible, voire non significative. Un constat similaire peut être établi avec la PME+. A contrario, les autres mesures de performance sont fortement corrélées entre elles. De plus, les corrélations sont toutes significatives au seuil de 5%. Ces différentes observations conduiraient à dire que la LN-PME et la PME+ donnent des résultats incohérents... Cependant, cette méthode erronée n'a en fait, selon moi, absolument aucun sens. Bien que ces différentes mesures soient toutes des mesures de performance, elles n'adressent, effectivement, pas le même message. Le Direct Alpha et la KS-PME permettent d'estimer l'excès de performance du Private Equity par rapport au marché, mais ce n'est pas le cas de la LN-PME et de la PME+ qui traduisent la performance apportée par le marché selon un échéancier de flux de Private Equity.

Dès lors, pour comparer les différentes mesures de performance il convient d'appliquer une méthode correcte, c'est-à-dire qui prend en compte ces disparités. La figure ci-dessous (5.6) découle de cette méthode. Les champs LN-PME et PME+ sont ici égaux à la différence entre le TRI et la métrique considérée.

12. Le Russell 2000 est un indice qui se concentre sur les petites capitalisations puisque les valeurs qui le composent sont les 2000 plus petites actions du Russell 3000, indice qui se fonde sur les 3000 plus grandes sociétés américaines cotées en bourse.

13. Sur les matrices de corrélation de PEARSON et de SPEARMAN, les coefficients de corrélation pour lesquels la *p-value* est supérieure à 5 % sont barrés d'une croix noire. Cette option n'est malheureusement pas disponible pour les matrices de corrélation de KENDALL car le package R utilisé ne la propose pas.

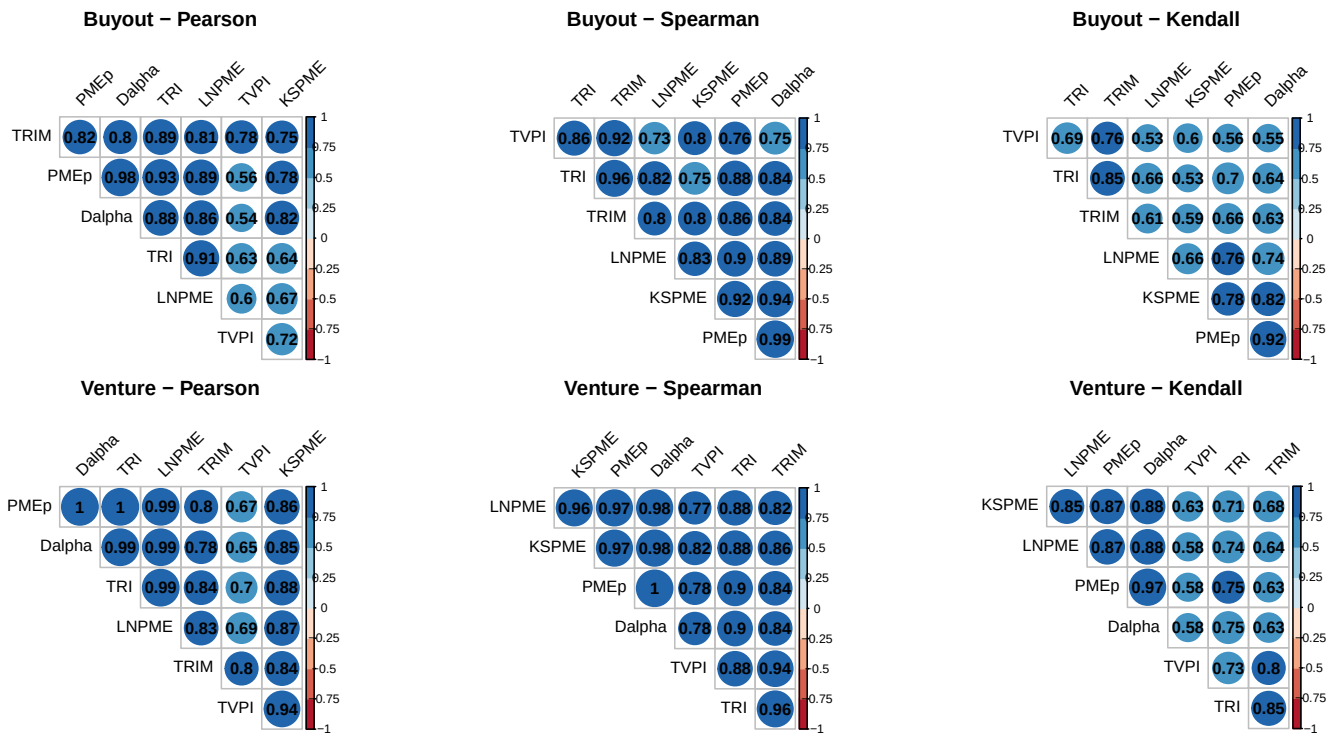


FIGURE 5.6 – Approche correcte - matrices de corrélation des différentes mesures de performance selon plusieurs mesures de corrélation pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital*

Il est alors possible de comparer les différents résultats obtenus puisque toutes les mesures essaient de capter l'excès de performance apporté par les fonds de Private Equity par rapport au marché. Via cette seconde méthode, il est clair que toutes les mesures de performance sont fortement corrélées : aucune ne se distingue particulièrement des autres.

Ensuite, comme le suggèrent ARIAS, AROURI et al. (2010), il est également possible d'évaluer la corrélation entre le Private Equity et le marché boursier à partir des différentes mesures de performance obtenues. Pour ce faire, il s'agit d'estimer la corrélation entre le TRI des fonds et les différentes mesures qui captent la performance du marché. Les métriques les plus évidentes qui traduisent la performance du marché sont la LN-PME et la PME+, en effet ces deux mesures répliquent, en quelque sorte, l'investissement dans un fonds de Private Equity par un investissement dans les indices de référence. Comme l'expliquent GREDIL, GRIFFITHS et STUCKE (2009), la KS-PME et le Direct Alpha donnent également accès à des approximations [14] de la performance enregistrée par le marché :

$$\text{Multiple lié au marché} = \frac{TVPI}{KS - PME}$$

$$\text{Taux de rendement lié au marché} = TRI - Direct\,Alpha$$

La figure (5.7) présente les différentes mesures de corrélation entre le marché et le Private Equity. Le champ KS-PME correspond, naturellement, au ratio entre le TVPI et la KS-PME et le champ Direct Alpha correspond à la différence entre le TRI et le Direct Alpha. Dans le cas du *Buyout*, la corrélation entre le TRI

14. Approximations car la différence de deux TRI n'est pas un TRI.

et les 4 mesures qui captent la performance du marché oscille entre -3 % et 50 %, en fonction des mesures de corrélation choisies. En se basant sur la PME+, ARIAS, AROURI et al. (2010) ont trouvé une corrélation d'environ 55 % entre les fonds de *Buyout* et le marché.

Les résultats sont moins nets pour le *Venture Capital*, car le TRI-Direct Alpha semble fortement corrélé au TRI et ce, pour toutes les mesures de corrélation. Les autres métriques font apparaître une corrélation beaucoup plus faible, notamment lorsque la mesure de corrélation est le Tau de KENDALL. Dans leur étude, ARIAS, AROURI et al. (2010) ont déterminé un coefficient de corrélation de 15 % environ entre le *Venture Capital* et le marché.

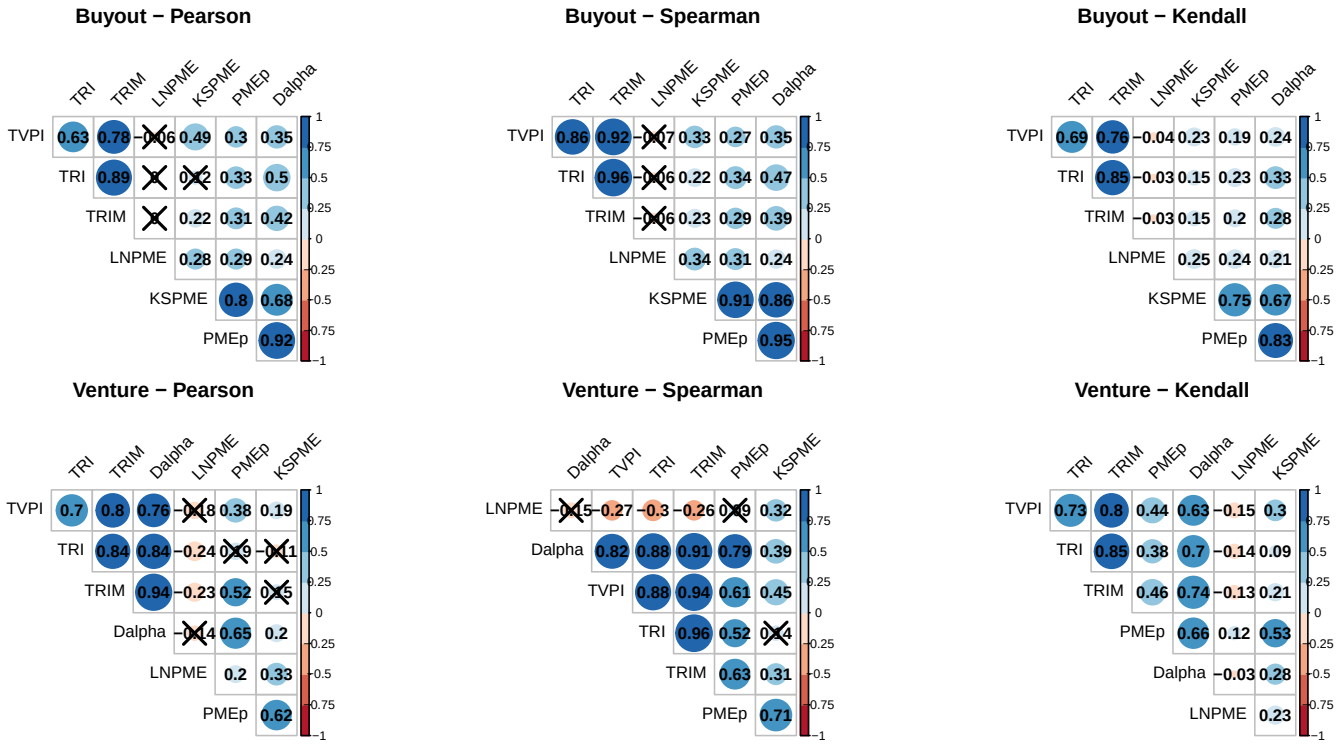


FIGURE 5.7 – Matrices de corrélation entre le Private Equity et le marché, pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital*

Afin de conclure leur étude, ARIAS, AROURI et al. (2010) estiment, en se fondant sur le Tau de KENDALL et la PME+, qu'un coefficient de corrélation de 30 % entre le marché et un portefeuille constitué de fonds de *Buyout* et de *Venture Capital* est cohérent. De notre côté, en effectuant la même analyse que précédemment mais en considérant à la fois les fonds de capital transmission et de capital risque, d'après le Tau de KENDALL, la corrélation entre le TRI et les 4 mesures de performance du marché varie entre -10 % selon la LN-PME et 49 % à partir de la différence entre les TRI et les Direct Alpha. La mesure fondée sur la PME+ donne une corrélation de 30 % et le coefficient de corrélation qui se base sur le ratio entre le TVPI et la KS-PME est égal à 14 %.

En fonction des mesures de performance utilisées, les corrélations peuvent donc être sensiblement différentes. Il semble néanmoins raisonnable, d'après ce qui a été évoqué supra, d'estimer une corrélation de 30 % à 50 % entre les performances du Private Equity sur le long terme et les performances du marché. Il est important de souligner que seules les performances de long terme ont ici été étudiées. Effectivement, les mesures de performance déterminées sont globales, car elles considèrent la performance d'un véhicule sur toute sa durée de vie. Dès lors, il ne semble guère logique de comparer le coefficient de corrélation déterminé ci-dessus au coefficient de corrélation égal à 75 % retenu dans Solvabilité II entre les actions

type 1 et le Private Equity lorsqu'il est considéré comme action de type 2. Solvabilité II porte en effet essentiellement sur la question de la gestion des risques à horizon 1 an. Pour déterminer si le Private Equity et le marché sont corrélés à court terme, il faudrait donc développer une méthode plus granulaire que celle utilisée dans cette section...

5.2 Performance du Private Equity à court terme

Après avoir étudié la performance globale des fonds, il convient désormais d'analyser leur performance à horizon 1 an, dans une perspective de gestion des risques en lien avec Solvabilité II. Il faut pour cela définir une nouvelle mesure de risque. Les méthodes évoquées dans cette partie sont principalement issues des travaux de TAUSCH (2016).

5.2.1 Mesurer la performance...

Plusieurs métriques différentes peuvent être définies afin d'estimer la performance d'un fonds de capital investissement d'une année sur l'autre. La première mesure est celle introduite et utilisée par TAUSCH (2016). Cette mesure se définit ainsi à l'aide des notations introduites auparavant :

$$\begin{aligned} 1 + R_{t,1a}^{NAV} &= \frac{NAV_t + D_t - C_t - (D_{t-1a} - C_{t-1a})}{NAV_{t-1a}} \\ &= \frac{NAV_t + NCF_t - NCF_{t-1a}}{NAV_{t-1a}} \\ &= \frac{NAV_t + \Delta NCF_{t,1a}}{NAV_{t-1a}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $t - k \cdot a$ indique une date antérieure de k années à t et $\Delta X_{t,ka} = X_t - X_{t-k \cdot a}$.

Dès lors, $R_{t,1a}^{NAV}$ est la performance qu'a réalisée un fonds en une année puisque c'est en quelque sorte la richesse qui a été créée par le véhicule dans l'année. Au dénominateur se trouve la valeur liquidative du fonds [15] une année avant t, c'est donc ce que valait le fonds en $t - 1a$. Au numérateur, se trouve la valeur du fonds en t compte tenu des capitaux reçus par les LPs dans l'année i.e. les distributions qui ont eu lieu, et des capitaux appelés par le fonds sur la période. Cette façon d'évaluer la performance d'un fonds se comprend plutôt bien car, par exemple, un fonds qui afficherait une valeur liquidative de X en $t - 1a$, qui distribuerait X à ses investisseurs dans l'année et qui aurait une valeur liquidative nulle en t afficherait une performance $R_{t,1a}^{NAV}$ égale à 0, ce qui est logique puisque le fonds n'aurait créé aucune valeur sur la période.

La spécificité de cette mesure est que $R_{t,1a}^{NAV}$ peut être inférieur à -100 %, sans que cela ne signifie pour autant que le fonds ait fait faillite. En effet, si beaucoup de capitaux ont été appelés dans l'année, mais que cela n'a pas fait augmenter substantiellement la valeur de la NAV du fonds [16] alors $R_{t,1a}^{NAV}$ peut être plus petit que 1. A contrario, si le fonds de Private Equity a réalisé beaucoup de distributions durant la période et que la NAV du fonds n'a pas trop varié, alors $R_{t,1a}^{NAV}$ peut se trouver largement supérieur à 1.

15. du point de vue des LPs
16. Il est par exemple possible d'imaginer que les capitaux aient pu être injectés dans une entreprise sans que la valeur de ladite entreprise s'en trouve augmentée, c'est-à-dire que la société aurait « brûlé du *cash* ».

Cette mesure repose en outre sur les valeurs liquidatives fournies par les fonds. Ce n'est donc pas une métrique idéale, mais elle semble être la plus naturelle lorsqu'il s'agit d'évaluer la performance de supports non cotés.

D'autres mesures de performance peuvent néanmoins être décrites, comme celle utilisée par Preqin pour la création des indices :

$$1 + R_{t,1a}^{Preq} = \frac{NAV_t + D_t - D_{t-1a}}{NAV_{t-1a} + C_t - C_{t-1a}}.$$

Cette mesure ne semble cependant pas très appropriée dans le cadre de la gestion des risques, car elle « lisse » en quelque sorte les mauvaises performances. $1 + R_{t,1a}^{Preq}$ ne peut en effet pas être négatif donc dans le pire des cas $R_{t,1a}^{Preq}$ est égal à -100 %.

5.2.2 ... et mesurer le risque

L'approche choisie par Solvabilité II pour évaluer les différents risques et calibrer les SCR correspondant aux modules de risque évoqués supra repose sur la *Value at Risk (VaR)*, conformément à la directive 2009/138/CE :« Chacun des modules de risque visés au paragraphe 1 est calibré sur la base d'une mesure de la valeur en risque (Value-at-Risk), avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an ».

La VaR permet d'évaluer, sur une période donnée, avec une probabilité donnée, la somme maximale d'argent qu'il est possible de perdre. D'un point de vue mathématique, la VaR au seuil de confiance α où $\alpha \in [0,1]$ [17] pour un horizon T est égale à :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(P_T) &= inf\left\{p \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(P_T > p) \leq 1 - \alpha\right\} \\ &= F_{P_T}^{-1}(\alpha) = inf\left\{p \in \mathbb{R} : F_{P_T}(p) > \alpha\right\} \end{aligned}$$

où F_X^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de la variable aléatoire X définie telle que $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq r)$.

Dans le cas d'un investissement réalisé dans un fonds de Private Equity, la perte [18] entre $t - 1a$ et t est égale à :

$$\begin{aligned} P_{1a}^t &= -(NAV_t + \Delta NCF_{t,1a} - NAV_{t-1a}) \\ &= -NAV_{t-1a} \cdot R_{t,1a}^{NAV}. \end{aligned}$$

Ainsi, déterminer la VaR d'un portefeuille d'investissement en Private Equity, dans le cadre de Solvabilité II, revient à déterminer le taux r tel que $inf\left\{r \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(R_{t,1a}^{NAV} \leq r) \geq 0,5\%\right\}$, c'est ce que TAUSCH (2016) appelle le « *Return at Risk* ».

17. Dans un cadre compatible avec Solvabilité II, $\alpha = 99,5\%$
18. Selon la définition suivante, si P_{1a}^t est positif alors cela constitue bien une perte, tandis que si P_{1a}^t est négatif cela signifie que, du point de vue des LPs, le fonds a réalisé un gain sur l'année.

La VaR, bien que choisie comme mesure de risque de référence dans le cadre de Solvabilité II, fait l'objet de critiques, notamment au regard de la définition de « mesure de risque cohérente » selon ARTZNER et al. (1999) [19]. C'est pourquoi d'autres mesures de risque peuvent être utilisées, comme la Conditional Value at Risk (CVaR) aussi appelée Expected Shortfall. La CVaR au seuil α est égale à l'espérance des pertes supérieures à la VaR au seuil α i.e. :

$$CVaR_\alpha(P_T) = \mathbb{E}(P_T | P_T \geq VaR_\alpha(P_T))$$

La CVaR donne une indication quant à l'épaisseur de la queue de distribution des pertes.

5.2.3 Réplication d'un portefeuille de capital investissement à l'aide de données historiques

Après avoir défini une mesure de performance à court terme et des mesures de risque, il convient de s'intéresser à la manière de répliquer des investissements en Private Equity à l'aide de données historiques.

Soit un portefeuille constitué de N positions dans des fonds de capital investissement. La performance à horizon 1 an de ce portefeuille est alors simplement définie par :

$$R_{PE} = \sum_{n=1}^{N} w_n \cdot R_n \tag{5.2}$$

où les w_n sont les poids respectifs de chacune des N positions dans le portefeuille et les R_n sont les performances annuelles affichées par ces investissements. Il est possible de définir le poids d'une position dans un fonds de Private Equity à l'aide de la valeur liquidative de la part de fonds, au début de la période, par rapport à la valeur liquidative de toutes les parts de fonds, toujours au début de la période. Si la période considérée s'étend de $t - 1a$ à t, alors le poids des différentes positions est :

$$\forall n \in [1, N] \qquad w_n = w_{n,nav} = \frac{NAV_{n,t-1a}}{\sum_{i=1}^{N} NAV_{i,t-1a}}. \tag{5.3}$$

Les performances des différents fonds sont définies à l'aide de l'expression (5.1) :

$$\forall n \in [1, N] \qquad R_n = R_{n,t,1a}^{NAV} = \frac{NAV_{n,t} + \Delta NCF_{n,t,1a}}{NAV_{n,t-1a}} - 1$$

Cela revient à écrire que la performance du portefeuille constitué de parts de N fonds de capital investissement est égale à :

$$1 + R_{PE} = \frac{\sum_{n=1}^{N} (NAV_{n,t} + \Delta NCF_{n,t,1a})}{\sum_{n=1}^{N} NAV_{n,t-1a}} \tag{5.4}$$

19. Ce point n'est pas ici détaillé, puisque c'est une critique classique envers la VaR. Le lecteur intéressé pourra se référer au papier d'ARTZNER et al. (1999) s'il souhaite avoir des détails à propos de la définition de « mesure de risque cohérente »

L'idée sur laquelle repose le principe de simulation historique est la suivante : étant donné un portefeuille d'investissement en Private Equity, l'objectif est de répliquer le plus fidèlement possible ce portefeuille grâce aux fonds qui sont dans la base de données afin d'estimer ensuite les performances historiques du portefeuille. Ces performances historiques sont censées refléter les performances futures du portefeuille réel.

Cet exercice peut sembler très simple. Dans le cas d'un portefeuille d'actions cotées, il n'est en effet pas particulièrement difficile de répliquer, de manière historique, un portefeuille donné. Par exemple, si le portefeuille contient 20 % d'actions X, 40 % d'actions Y et 20 % d'actions Z aujourd'hui, alors le portefeuille qui permet de répliquer ces positions de manière historique est celui constitué des mêmes actions, en mêmes proportions, dans le passé. Cependant, lorsqu'il s'agit de traiter de capital investissement et plus généralement d'actifs non cotés, cela n'est pas si aisé.

Il n'est pas possible de répliquer de manière exacte un portefeuille de Private Equity, tout simplement parce qu'un fonds qui existe aujourd'hui n'existait pas forcément hier et, même si cela peut parfois être le cas, le même fonds serait dans deux phases de vie totalement différentes [20].

De plus, il n'existe pas une seule et unique manière de répliquer approximativement un tel portefeuille. Soit une position appartenant au portefeuille, plusieurs critères peuvent être retenus afin de qualifier d'« acceptable » la réplication de cette position via des données historiques. Dans l'idéal, il faudrait en effet que le fonds de la base de données qui sert à répliquer le fonds réel ait la même taille, le même âge, la même stratégie, la même cible géographique d'investissement, la même valeur liquidative (en proportion des capitaux engagés), le même montant de prélèvements cumulés (en proportion des capitaux engagés) et le même montant de distributions cumulées (toujours en proportion des capitaux engagés). Il est cependant impossible, au vu de la base de données à notre disposition et du nombre de fonds relativement faible qui la composent, de réunir toutes ces conditions en même temps pour signifier que deux fonds sont similaires. C'est pourquoi TAUSCH (2016) propose d'élaguer cette liste de critères pour n'en retenir que deux : l'âge du fonds et sa stratégie. Dès lors, deux fonds seront considérés comme suffisamment similaires s'ils ont environ le même âge et qu'ils appliquent la même stratégie d'investissement [21]. Ce choix aura donc un impact sur la suite de l'étude, puisqu'il sera impossible de distinguer les performances du capital investissement par zone géographique. Cela représente donc une perte d'information regrettable qu'il n'est pas possible d'éviter. Une base de données avec davantage de fonds européens aurait permis de réaliser une distinction par cible géographique.

Cette simplification, qui consiste à ne garder que 2 des critères mentionnés supra, soulève cependant un nouveau problème relatif aux poids des différentes positions au sein du portefeuille. Les fonds qui servent à la simulation n'ont en effet aucune raison d'afficher les mêmes NAV (en proportion des capitaux engagés) que les fonds qui sont réellement en portefeuille. Dès lors, les poids des parts de fonds au sein du portefeuille simulé peuvent être sensiblement différents des poids réels. Se pose alors la question des poids à utiliser pour déterminer la performance du portefeuille simulé.

Comme l'explique TAUSCH (2016), il ne semble pas envisageable d'utiliser les poids du vrai portefeuille avec les performances du portefeuille simulé, car les résultats pourraient être incohérents. Il est possible de l'illustrer simplement. Afin de déterminer la performance d'un portefeuille constitué de parts de fonds de capital investissement, l'expression (5.2) fait intervenir la valeur liquidative à 2 endroits : du côté des poids (5.3) et du côté de la performance annuelle des fonds (5.1). De ce fait, si un fonds affiche une valeur liquidative faible en début de période, alors il se verra attribuer un poids faible également, ce qui est cohérent, puisque la performance d'un tel fonds est plus volatile que celle d'un fonds qui affiche une NAV de début de période élevée. Or, recourir aux poids réels et aux performances simulées aurait pour

20. Il n'est pas aberrant de penser qu'un même fonds aura des profils de performance différents en fonction de son âge.
21. i.e. capital risque, capital transmission, etc.

effet de neutraliser cette « pénalisation » des « petits » fonds. Par ailleurs, utiliser les poids des fonds dans le portefeuille simulé n'aurait pas non plus de sens, car ces poids-là ne sont pas fondés sur le vrai portefeuille.

Le choix qui a donc été fait dans la suite de ce travail, choix qui est bien sûr discutable, est d'utiliser les contributions cumulées afin de pondérer les performances du portefeuille simulé. Il ressort de cette manipulation une version modifiée de l'expression (5.4) telle que :

$$1 + R_{PE} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \left[p_n \cdot (NAV_{n,t} + \Delta NCF_{n,t,1a}) \right]}{\sum_{n=1}^{N} p_n \cdot NAV_{n,t-1a}} \tag{5.5}$$

où les p_n sont des facteurs de pondération qui correspondent, pour chaque fonds, au rapport entre les contributions cumulées du fonds présent dans le portefeuille réel et les contributions cumulées du fonds issu du portefeuille simulé i.e. $\forall n \in [1, N], p_n = \frac{CC_{n,\text{réel}}}{CC_{n,\text{simulé}}}$.

Le raisonnement derrière cet ajustement est le suivant : pour chacun des N fonds et pour chaque date t, $\frac{NAV_{n,t}}{CC_{n,\text{simulé}}}$ représente la valeur liquidative qu'aurait atteinte le fonds n, du point de vue des LPs, si 1 unité monétaire de capital avait été appelée par le GP. Ainsi, $\frac{CC_{n,\text{réel}}}{CC_{n,\text{simulé}}} \cdot NAV_{n,t} = p_n \cdot NAV_{n,t}$ est la valeur liquidative qu'aurait atteinte le fonds utilisé dans le portefeuille de simulation si le montant de capitaux appelés avait été celui issu du vrai portefeuille.

TAUSCH (2016) a choisi d'appliquer une méthode similaire, mais en se basant sur les capitaux engagés et non sur les contributions cumulées. La base de données à notre disposition ne contient cependant pas d'information relative aux capitaux engagés par les fonds. Par ailleurs, ne souhaitant pas émettre d'hypothèse quant à ces montants, nous avons choisi de travailler à partir des contributions cumulées. Le raisonnement sous-jacent demeure cependant identique.

En résumé, il est donc difficile, même à partir d'une base de données, de répliquer fidèlement un portefeuille d'investissement en Private Equity, car cela nécessite de formuler un certain nombre d'hypothèses.

5.2.4 Algorithme de simulation historique

L'algorithme présenté infra découle des travaux de TAUSCH (2016) et des raisonnements développés ci-dessus. Il permet d'obtenir une distribution de performances annuelles pour un portefeuille de Private Equity composé de N positions, à partir de données réelles.

Algorithme 1 : Simulation historique des performances d'un portefeuille de Private Equity

Résultat : *Distribution des performances annuelles historiques du portefeuille*
for $i \leftarrow 1$ **to** I **do**
  déterminer une date de début de période ;
  for $n \leftarrow 1$ **to** N **do**
    choisir un fonds qui n'a encore jamais été choisi et qui est similaire[a] au fonds n du portefeuille réel ;
    évaluer la valeur du facteur p_n utilisé dans l'expression (5.5) ;
  end
  calculer la performance annuelle du portefeuille, en fin de période, soit ici 1 an après le début de la période, via (5.5) ;
end

a. selon les critères d'âge et de stratégie mentionnés précédemment

Cet algorithme permet d'obtenir la distribution empirique des performances historiques du portefeuille, c'est-à-dire un vecteur de I performances, correspondant aux I simulations effectuées.

Au vu de notre base de données, la date de début de période a été fixée entre le 1er janvier 1995 et le 31 décembre 2014. Si le fonds issu du portefeuille réel à répliquer a plus de 10 ans et que la date de début de période est antérieure au 1er janvier 2010, alors tout fonds d'âge plus grand ou égal à 10 ans et de même stratégie sera considéré comme similaire au fonds réel [22]. Dans les autres cas, les âges des fonds réels et simulés doivent être identiques. Le critère d'appartenance aux mêmes stratégies est également assoupli, en effet, lorsque les fonds réels sont des fonds de capital transmission ou de capital risque, alors le fonds simulé devra, pour être considéré comme similaire, avoir la même stratégie. Pour toutes les autres stratégies suivies par les fonds réels, le seul critère auquel le fonds simulé devra répondre sera de n'être ni un fonds de *Buyout* ni un fonds de *Venture Capital*.

Enfin, il est également possible d'estimer, pour un portefeuille constitué de positions dans des fonds de capital investissement, une distribution historique de l'excès de performance du portefeuille par rapport au taux sans risque [23]. Il suffit pour cela, pour chacune des I simulations, de retrancher à la performance annuelle R_{PE} le taux sans risque effectif sur la période de simulation. Le taux sans risque a ici été estimé à partir des taux des Obligations assimilables du Trésor (OAT) 1 an émises par l'État français. Ce choix traduit le fait que ces travaux se placent dans le cadre de Solvabilité II et plus précisément à destination des organismes assureurs français, même si, comme vu précédemment, les données à disposition concernent principalement le marché américain.

Obtenir une distribution des performances excédentaires par rapport au taux sans risque pour un portefeuille de Private Equity donné permettra ensuite de déterminer le SCR associé à ce portefeuille [24]. Le SCR doit effectivement se calculer en tenant compte des performances excédentaires au taux sans risque réalisées par les actifs, puisque le SCR repose sur une différence de NAV calculée à partir d'un scénario central dans lequel l'actif est investi au taux sans risque. Ainsi, le « *Return at Risk* » à 99,5 % des performances excédentaires du portefeuille par rapport au taux sans risque permettra de déterminer la VaR à 99,5 % du portefeuille et ainsi le SCR qui lui est associé.

5.2.5 Application à des portefeuilles fictifs

Cette partie se fonde sur la méthodologie du « *Ten Fund Test Portfolio* » définie par TAUSCH (2016). L'idée est ici de définir des portefeuilles de Private Equity fictifs qu'un assureur pourrait détenir aujourd'hui. Chacun de ces portefeuilles décrit une stratégie d'investissement. Les 6 portefeuilles suivants ont ainsi été définis :

1. le portefeuille « 1b » (5.7) contient uniquement un fonds de capital transmission américain [25] qui a 3 ans ;
2. le portefeuille « 1v » (5.8), similaire au portefeuille « 1b » mais qui comporte un fonds de capital risque plutôt qu'un fonds de capital transmission ;
3. le portefeuille « 5b » (5.9), qui est constitué de 5 fonds de capital transmission avec des âges variables, de 1 à 10 ans ;
4. le portefeuille « 5v » (5.10), identique au portefeuille « 5b » mais avec des fonds de capital risque ;

22. Cet artifice permet d'éviter des problèmes dus au faible nombre de fonds pour certains millésimes anciens.
23. La performance excédentaire par rapport au taux sans risque est ici définie comme la différence entre la performance du portefeuille et le taux sans risque. Cette performance excédentaire peut donc être négative si la performance du portefeuille est inférieure au taux sans risque.
24. comme si un modèle interne était utilisé à la place de la formule standard
25. Pour rappel, les cibles géographiques des fonds ne sont pas prises en compte lors des simulations historiques.

5. le portefeuille « 10bv » (5.11) contient 5 fonds de *Buyout* et 5 fonds de *Venture Capital* d'âges différents ;
6. enfin, le portefeuille « 10bvo » (5.12) comporte 4 véhicules de capital transmission, 3 véhicules de capital risque et 3 fonds dont la stratégie n'est ni du capital transmission ni du capital risque.

Les caractéristiques des fonds, décrites ci-dessous, ont été fixées arbitrairement afin de couvrir le spectre le plus large possible. Un institutionnel qui disposerait d'un portefeuille de capital investissement et qui souhaiterait appliquer la méthodologie décrite ici pourrait bien évidemment concentrer son étude sur son vrai portefeuille.

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Buyout	USA	3	6	3	3	10	1

TABLE 5.7 – Caractéristiques du portefeuille 1b

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Venture Capital	USA	3	6	3	3	10	1

TABLE 5.8 – Caractéristiques du portefeuille 1v

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Buyout	USA	1	1	0	2	5	2
Buyout	Europe	3	4	2	1	10	0,75
Buyout	USA	5	4	1	4	7	1,25
Buyout	Europe	7	18	12	5	20	0,94
Buyout	Reste du Monde	10	2,5	2	1	3	1,2

TABLE 5.9 – Caractéristiques du portefeuille 5b

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Venture Capital	USA	1	1	0	2	5	2
Venture Capital	Europe	3	4	2	1	10	0,75
Venture Capital	USA	5	4	1	4	7	1,25
Venture Capital	Europe	7	18	12	5	20	0,94
Venture Capital	Reste du Monde	10	2,5	2	1	3	1,2

TABLE 5.10 – Caractéristiques du portefeuille 5v

Pour chacun de ces portefeuilles fictifs, il est alors possible de mettre en œuvre la procédure décrite ci-dessus (1). Pour les portefeuilles « 1b » et « 1v » le nombre de simulations a été fixé à 200 000, contre 20 000 pour les autres portefeuilles.

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Buyout	USA	1	1	0	1	5	1
Buyout	Europe	3	3	2	3	10	1,67
Buyout	USA	5	4	1	4	7	1,25
Buyout	Europe	7	13	7	2	20	0,69
Buyout	Reste du Monde	10	2,6	2	2	3	1,54
Venture Capital	USA	2	1	3	0,1	5	3,1
Venture Capital	Europe	4	4	2	4	10	1,5
Venture Capital	USA	6	4	1	2	7	0,75
Venture Capital	Europe	8	16	12	3	20	0,94
Venture Capital	Reste du Monde	9	2,9	3	0,5	3	1,21

TABLE 5.11 – Caractéristiques du portefeuille 10bv

Stratégie	Cible géographique	Âge (années)	CC	DC	NAV	Capitaux engagés	TVPI
Buyout	USA	1	1	0	1	5	1
Autre	Europe	3	3	2	3	10	1,67
Buyout	USA	5	4	1	4	7	1,25
Buyout	Europe	7	13	7	2	20	0,69
Buyout	Reste du Monde	10	2,6	2	2	3	1,54
Autre	USA	2	1	3	0,1	5	3,1
Venture Capital	Europe	4	4	2	4	10	1,5
Venture Capital	USA	6	4	1	2	7	0,75
Autre	Europe	8	16	12	3	20	0,94
Venture Capital	Reste du Monde	9	2,9	3	0,5	3	1,21

TABLE 5.12 – Caractéristiques du portefeuille 10bvo

Analyses graphiques

Les graphiques suivants (5.8) présentent, pour chacun des 6 portefeuilles définis plus haut, deux informations : dans la partie haute se trouve la distribution des performances après déduction du taux sans risque ; dans la partie basse est donné un aperçu de la répartition de ces performances annuelles par trimestre, sachant que chaque trimestre indique le début de la période i.e. un point situé au premier trimestre 2000 donne une information quant à la performance entre le premier trimestre 2000 et le premier trimestre 2001 d'une des simulations. Une approche relative à la gestion des risques revient à se concentrer principalement sur la queue située sur le côté gauche d'une distribution, puisque c'est elle qui contient les plus mauvaises performances.

Il est également possible de voir, sur les graphiques (5.8c, 5.8d, 5.8e et 5.8f), une courbe verte qui correspond à la densité d'une loi normale calibrée à partir de la moyenne et de l'écart-type des performances. D'un point de vue graphique, il est d'ores et déjà possible de voir que les densités des lois normales ne semblent pas correspondre aux distributions empiriques des performances et ce, pour chacun des 4 graphiques concernés. Il est possible d'évaluer la qualité d'ajustement de la loi normale aux données à l'aide de méthodes statistiques plus robustes qui seront détaillées infra.

Les *rug plots*, situés sous les histogrammes, apportent également une information relative à la dispersion des performances historiques des différents portefeuilles simulés. Les figures semblent présenter un point commun, à savoir une masse située un peu au-dessus de zéro, avec une queue beaucoup plus épaisse à droite qu'à gauche [26]. Ce phénomène est remarquable [27] et devra être pris en compte ultérieurement, notamment lors de la calibration des paramètres utilisés dans l'approche fondée sur la Théorie des Valeurs Extrêmes pour déterminer la VaR.

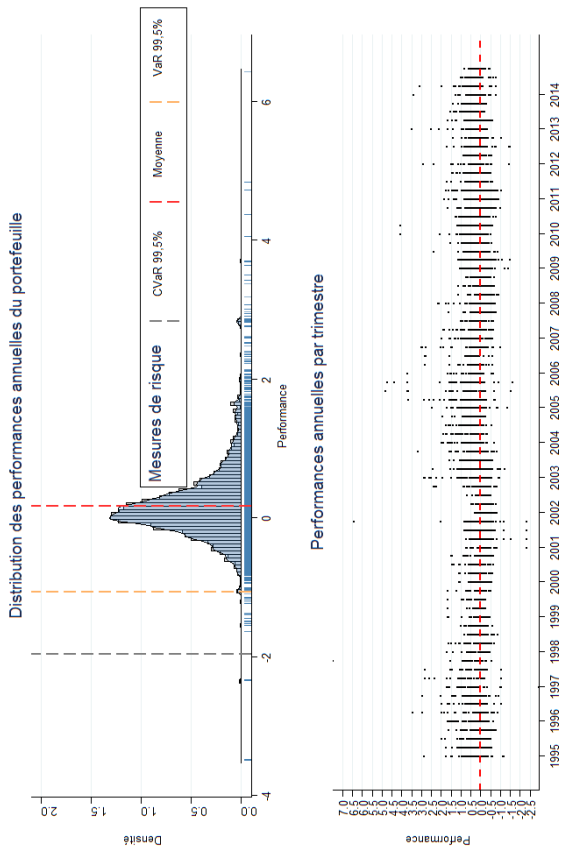
Par ailleurs, les sous-figures qui représentent la distribution des performances par trimestre [28] font apparaître des cycles de performance plus ou moins nets en fonction du portefeuille étudié. En se concentrant sur les portefeuilles « 10bv » et « 10bvo », graphiques (5.8e et 5.8f), la période qui a précédé la crise de la bulle internet, à savoir la fin de l'année 1998 et le début de l'année 1999, semble avoir été synonyme de très bonnes performances pour le marché du capital investissement. Le Private Equity n'a néanmoins pas été épargné par l'éclatement de cette bulle spéculative, puisque les performances ont commencé à décroître au milieu de l'année 1999 et ce, jusqu'à la fin de l'année 2000. Un regain de performance est ensuite visible de 2001 jusqu'au début de l'année 2007, juste avant la crise des *subprimes*, crise qui a fortement impacté, de manière négative, les performances historiques des portefeuilles simulés. De 2009 à 2014, les performances semblent se stabiliser.

Il est intéressant de constater que l'impact des crises diffère selon le portefeuille. Par exemple, pour les portefeuilles « 1v » et « 5v », graphiques (5.8c et 5.8d), dont les sous-jacents sont uniquement des fonds de capital risque, la crise de la bulle internet semble avoir eu davantage d'impact que la crise des *subprimes*. Cela traduit peut être le fait que les fonds de *Venture Capital* investissent plus que les autres véhicules dans des entreprises technologiques.

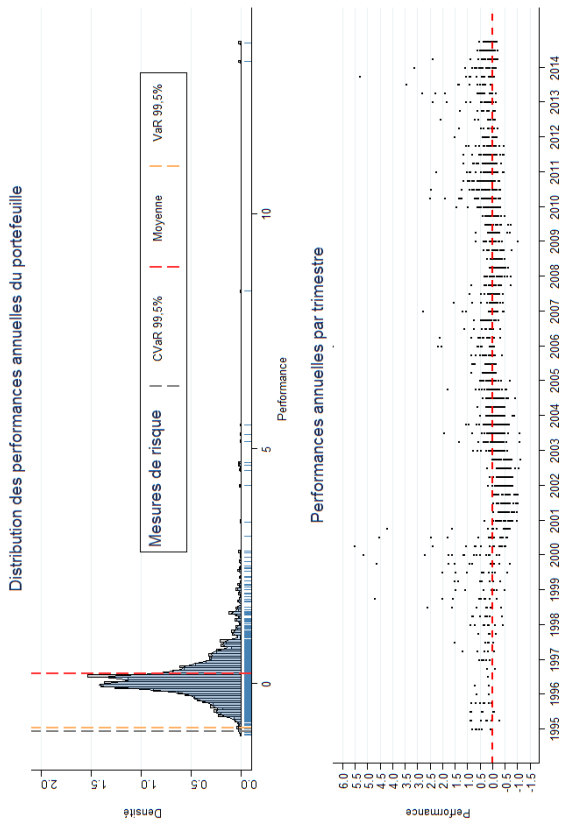
26. Ce constat est beaucoup plus net sur les *rug plots* que sur les histogrammes, là est tout l'intérêt de cette représentation graphique.

27. Le fait que la queue de distribution gauche est plus épaisse que celle de droite pour la plupart des actifs est notamment mentionné dans le mémoire de ZAMOR (2017).

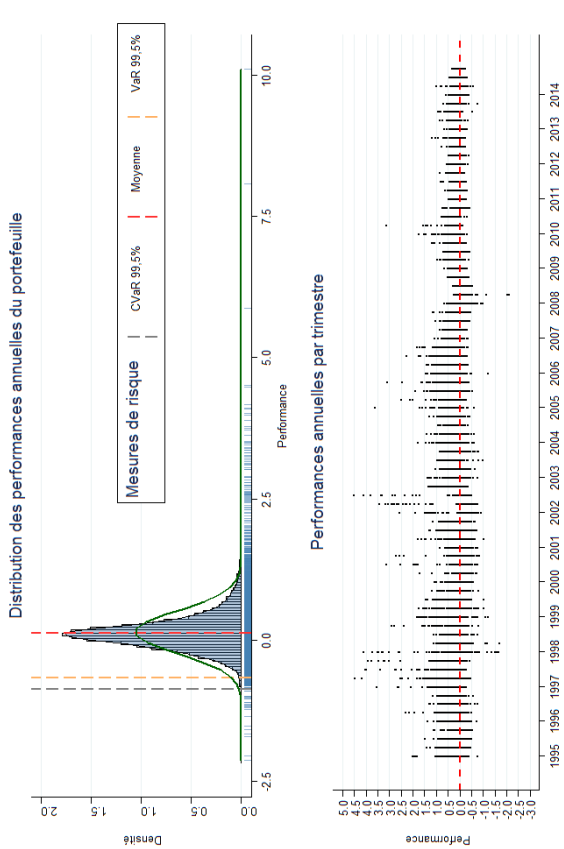
28. Les fenêtres graphiques de ces sous-figures ont été réduites afin que les graphiques soient plus lisibles, c'est-à-dire que certaines valeurs extrêmes ne sont pas représentées, mais cela n'altère en rien les conclusions qui seront ici faites puisque cela concerne moins de 0,1 % des données.



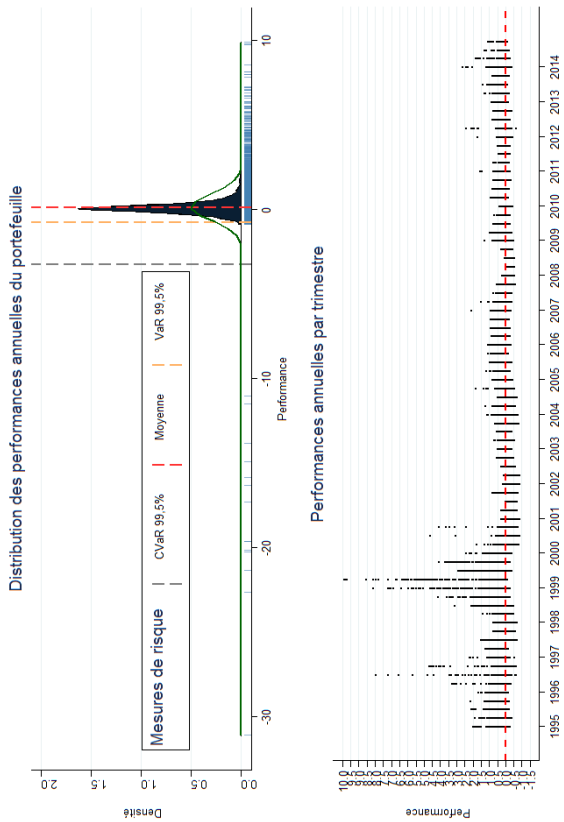
(A) Portefeuille 1b



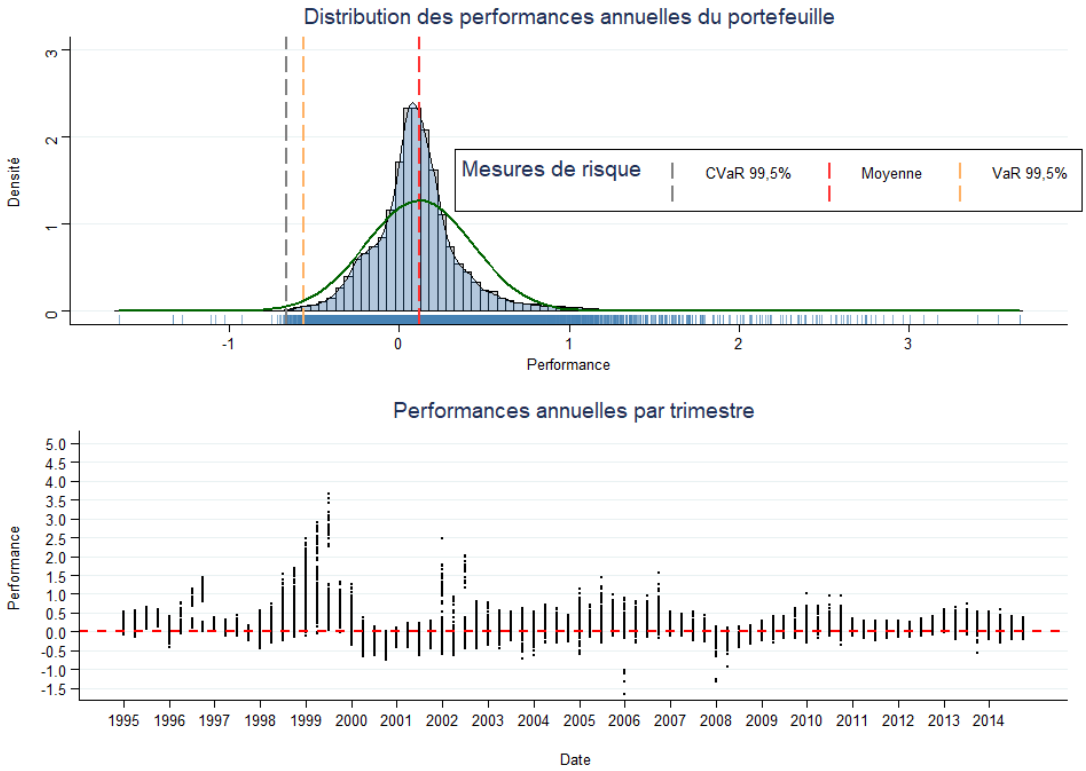
(B) Portefeuille 1v



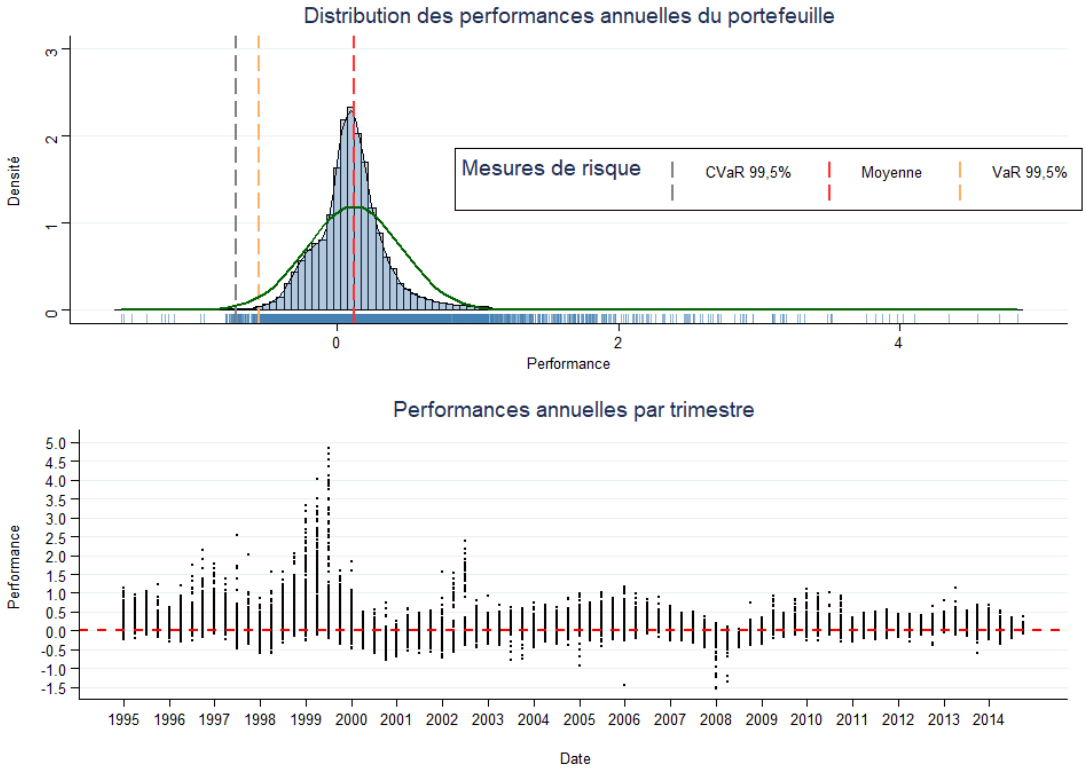
(C) Portefeuille 1b



(D) Portefeuille 1v



(E) Portefeuille 10bv



(F) Portefeuille 10bvo

FIGURE 5.8 – Performances annuelles des différents portefeuilles

En somme, bien que le capital investissement paraisse faiblement corrélé aux principaux marchés boursiers sur le long terme, comme cela a été vu précédemment, cette classe d'actifs ne semble pas avoir échappé aux chocs soudains et aux crises financières passées. Il serait, dès lors, incorrect de dire que le Private Equity n'est pas corrélé au marché des actions, sans préciser la période temporelle étudiée. Ces deux informations peuvent signifier que le Private Equity est bien sujet à des variations significatives de performance lors des crises financières, mais que les fonds semblent faire preuve de résilience face à ces chocs. Cela pourrait s'expliquer par le fait que le GP d'un fonds et, plus généralement, les personnes en charge de la gestion des entreprises dans lesquelles le fonds a investi, parviennent à mobiliser les capitaux disponibles en direction d'axes stratégiques de long terme, quitte à afficher de mauvaises performances pendant plusieurs mois, mais il s'agit là d'une simple hypothèse.

Skewness* et *Kurtosis

Après avoir étudié de manière graphique la figure (5.8), il convient d'utiliser des méthodes statistiques afin de confirmer, ou d'infirmer, les analyses précédentes.

Une distribution est dite symétrique lorsque les profils situés à droite et à gauche du point central de la distribution sont identiques. Le coefficient d'asymétrie, ou *skewness*, permet alors de mesurer la symétrie, ou plutôt l'absence de symétrie, d'une distribution donnée. Une distribution possède une asymétrie positive i.e. une *skewness* positive, si sa queue est plus longue [29] du côté droit que du côté gauche. Ainsi, une distribution dont la *skewness* est positive est décalée vers la gauche de la médiane et possède donc une queue plus étalée vers la droite. Si la *skewness* est négative, c'est l'inverse. Le coefficient d'asymétrie d'une distribution normale est donc nul, puisque c'est une distribution symétrique.

Soit une variable aléatoire X, son coefficient d'asymétrie est défini comme le moment d'ordre 3 de la variable centrée réduite, i.e. la *skewness* de X vaut [30] :

$$skewness = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

où μ est l'espérance de X et σ est son écart-type. Dès lors, à partir d'un échantillon de données qui contient N observations $X_1, ..., X_N$, le coefficient d'asymétrie empirique se calcule ainsi :

$$\widehat{skewness} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^3}{N \cdot s^3}$$

avec $\overline{X}$ la moyenne empirique de l'échantillon et s son écart-type empirique.

Le *kurtosis*, ou coefficient d'aplatissement, permet quant à lui de quantifier l'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire réelle. Cette mesure indique si les masses de probabilité sont plus ou moins éloignées du centre de la distribution. Le *kurtosis* fournit donc des informations quant à l'épaisseur des queues de distribution.

Avec les notations précédentes, le coefficient d'aplatissement est défini comme le moment d'ordre 4 de la variable centrée réduite :

29. et non pas lourde

30. Il s'agit ici de la définition la plus simple du coefficient d'asymétrie. Plusieurs autres définitions existent, comme la *skewness* de GALTON ou la *skewness* ajustée de FISHER-PEARSON. Nous ne décrirons pas ces variantes, puisque l'objectif ici est de rester concis et de se fonder sur des mesures classiques et simples.

$$kurtosis = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

et donc, de manière empirique :

$$\widehat{kurtosis} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^4}{N \cdot s^4}$$

Puisque le *kurtosis* d'une loi normale standard [31] est égal à 3, il est souvent fait référence au *kurtosis* normalisé, à savoir le *kurtosis* non normalisé auquel est retranché 3, de sorte que le coefficient d'aplatissement normalisé d'une loi normale standard est nul. C'est par exemple le *kurtosis* normalisé qui est calculé en utilisant la fonction « kurtosis » du package « PerformanceAnalytics » sous R. Ainsi, lorsqu'il sera question dans la suite du mémoire de *kurtosis*, il s'agira en fait du *kurtosis* normalisé. À partir de cette seconde définition, un coefficient d'aplatissement supérieur à 0 indique une distribution à queue épaisse (ou distribution leptocurtique), tandis qu'un *kurtosis* négatif est le signe d'une distribution à queue fine (ou distribution platicurtique). Une distribution pour laquelle le kurtosis (normalisé donc) est égal à 0 est dite mésokurtique.

Le tableau ci-dessous (5.13) contient, pour chacun des 6 portefeuilles fictifs répliqués de manière historique, plusieurs mesures de risque dont : la *skewness*, le *kurtosis*, la moyenne, l'écart-type ainsi que la VaR historique [32] et la CVaR historique au seuil de 99,5 %.

Presque tous les portefeuilles, à l'exception du « 5v » [33], affichent une *skewness* positive. Cela traduit le fait que les distributions des performances sont décalées à gauche de la médiane et donc que les queues de distribution sont plus étalées vers la droite. C'est effectivement ce que nous avions constaté supra. En outre, les *kurtosis* (normalisés) sont tous supérieurs à 0. Les queues des distributions sont donc beaucoup plus épaisses que celles d'une loi normale, ce qui vient corroborer le fait que l'ajustement des distributions empiriques, par une loi normale, s'avère insatisfaisant.

Portefeuille	*Skewness*	*Kurtosis*	Moyenne	Écart-type	VaR 99,5 %	CVaR 99,5 %
1b	1,84	11,28	21,52 %	53,30 %	-105,87 %	-195,34 %
1v	8,18	95,87	23,93 %	99,30 %	-94,86 %	-101,41 %
5b	4,00	54,55	16,93 %	37,54 %	-65,94 %	-85,60 %
5v	-8,24	319,59	15,94 %	79,40 %	-71,44 %	-322,92 %
10bv	2,48	15,07	14,75 %	31,40 %	-56,13 %	-66,10 %
10bvo	3,38	26,96	15,30 %	33,47 %	-55,00 %	-71,08 %

TABLE 5.13 – Mesures de risque sur les performances excédentaires au taux sans risque pour chacun des 6 portefeuilles fictifs

Il est également intéressant de constater que le nombre de fonds en portefeuille influe nettement sur les VaR et les CVaR historiques. À l'exception du portefeuille « 5v », plus le nombre de fonds en portefeuille est élevé et plus ces 2 mesures de risque sont petites, toutes choses égales par ailleurs. Cela traduit certainement un effet de diversification. Le portefeuille « 10bvo » affiche notamment une VaR au seuil de 99,5 %

31. i.e. centrée réduite
32. la notion de VaR historique sera définie plus tard
33. Ce portefeuille présente en effet un profil particulier, notamment avec des performances très mauvaises i.e. inférieures à -1000 %. Ce portefeuille ne contient que des fonds de capital risque, dès lors, certaines simulations ont dû intégrer des fonds qui ont fait faillite très rapidement.

inférieure à celle du portefeuille « 10bv », sans doute parce que le premier portefeuille contient des fonds dont les stratégies ne sont ni le *Buyout*, ni le *Venture Capital*.

5.3 Estimations de la *Value at Risk*

Les aspects théoriques évoqués dans cette partie sont notamment empruntés à BENSEGHIR (2006), à DEPREY et GODZINSKI (2007), à LE GOISTRE (2009), à BORCHANI (2010) et à LI et CHEN (2013).

Différentes méthodes permettent d'estimer une VaR, notamment les suivantes :

— l'approche non-paramétrique ;
— la méthode semi-paramétrique ;
— l'approche paramétrique.

Il est également possible de déterminer une VaR par la Méthode de Monte-Carlo, via la prise en compte et la modélisation des facteurs de risque qui influent sur les performances d'un portefeuille donné. Cette approche sophistiquée, qui ne sera pas mise en œuvre dans ce mémoire, est celle choisie par TAUSCH (2016) qui a utilisé différentes méthodes économétriques pour réaliser son étude.

5.3.1 Méthode non-paramétrique

L'approche non-paramétrique permet de ne pas faire d'hypothèse quant à la loi suivie par la distribution des pertes. L'approche non-paramétrique la plus utilisée est la méthode historique.

La VaR historique est très simple à estimer, c'est d'ailleurs cette méthode qui a été utilisée dans la partie précédente, car elle se base sur la distribution empirique des pertes observées.

Effectivement, à partir des simulations qui ont précédemment été effectuées en suivant la méthode du « *Ten Fund Test Portfolio* » de TAUSCH (2016) il suffit, pour déterminer la VaR historique au seuil de 99,5 % pour chacun des portefeuilles, de regarder la meilleure performance annuelle affichée par le portefeuille dans les 0,5 % pires cas, cela revient à choisir le quantile à 0,5 % des performances annuelles du portefeuille. Les différents quantiles de performance pour le portefeuille « 10bvo » sont reportés dans le tableau suivant (5.14). La VaR au seuil de 99,5 % présentée dans le tableau précédent (5.13) correspond bien au quantile à 0,5 %.

$q_{0,1\%}$	$q_{0,5\%}$	$q_{1\%}$	$q_{5\%}$	$q_{10\%}$	$q_{25\%}$
-74,34 %	-55,00 %	-46,70%	-29,42 %	-20,88 %	-3,07 %
$q_{50\%}$	$q_{90\%}$	$q_{95\%}$	$q_{99\%}$	$q_{99,5\%}$	$q_{99,9\%}$
9,85 %	40,63 %	60,45 %	133,36 %	182,01 %	317,00 %

TABLE 5.14 – Quantiles de performance pour le portefeuille « 10bvo »

Cette méthode repose néanmoins sur des hypothèses quant au nombre d'observations dont il faut disposer et n'est, en outre, pas très robuste. De plus, il faut que les rendements soient stationnaires, de telle sorte que l'échantillon d'observations historiques présente un profil similaire à la distribution des facteurs de risque sur la période pour laquelle nous souhaitons estimer la VaR. L'approche historique peut donc être utilisée afin d'avoir un aperçu du résultat, mais elle doit être confrontée à d'autres méthodes.

5.3.2 Approche semi-paramétrique

Il est ici question de caractériser une partie de la loi de distribution des pertes afin d'obtenir des résultats plus robustes qu'avec la méthode précédente tout en conservant une certaine simplicité de mise en œuvre. Là encore, différentes approches semi-paramétriques existent. Il sera question, dans la suite de ce travail, des approches qui font intervenir la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE).

La méthode Peaks Over Threshold (POT) est une approche semi-paramétrique classique qui repose sur la TVE. Il convient tout d'abord de définir quelques éléments théoriques avant de rentrer dans le détail de la mise en œuvre de cette méthode [34].

Distribution Pareto Généralisée

La Generalized Pareto Distribution (GPD), ou Distribution Pareto Généralisée, est une famille de lois de probabilité continues. Cette famille est souvent utilisée afin de décrire la queue d'une autre distribution. La famille des GPD est caractérisée par 3 paramètres qui interviennent dans la définition de la fonction de répartition d'une loi PARETO généralisée. Ces paramètres sont : ξ le paramètre de forme, σ le paramètre d'échelle et m le paramètre de position. La fonction de répartition d'une PARETO généralisée s'écrit alors :

$$G_{\xi,\sigma,m}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \cdot \dfrac{x-m}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\dfrac{x-m}{\sigma}} & \text{si} \quad \xi = 0 \end{cases}$$

où $\sigma > 0$, $x \geq m$ quand $\xi \geq 0$ et $m \leq x \leq m - \frac{\sigma}{\xi}$ quand $\xi < 0$. Les paramètres d'attention sont ξ et σ car ce sont eux qui caractérisent l'épaisseur de la queue de distribution. Il est également possible de définir la fonction de densité d'une PARETO généralisée :

$$g_{\xi,\sigma,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\left(1 + \xi \cdot \dfrac{x-m}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sigma} e^{-\dfrac{x-m}{\sigma}} & \text{si} \quad \xi = 0 \end{cases}$$

Le paramètre de forme ξ détermine la convexité, ou la concavité, de la fonction densité. Si $\xi \geq 0$ ou $\xi < -1$, alors la fonction de densité de probabilité est en effet convexe, tandis qu'elle est concave lorsque $-1 \leq \xi < 0$. Lorsque $\xi = 0$, la distribution de la PARETO généralisée est celle de la loi exponentielle. Le paramètre d'échelle σ caractérise quant à lui l'épaisseur de la queue de distribution, c'est-à-dire que plus σ est élevé et plus la queue de distribution est large.

Remarque. *Il convient enfin de souligner que si la variable aléatoire X suit une loi de* PARETO *généralisée de paramètres m_0, σ_0 et ξ_0 i.e. si $X \sim GPD(\xi_0, \sigma_0, m_0)$, alors la variable aléatoire $X|X > m_1$ avec $m_1 > m_0$ suit également une GPD, mais de paramètres $\xi_1 = \xi_0$, $\sigma_1 = \sigma_0 + \xi_0 \cdot (m_1 - m_0)$ et m_1.*

34. L'objet de ce mémoire n'étant pas d'étudier en détail la Théorie des Valeurs Extrêmes, seuls les aspects nécessaires à la compréhension de la méthode POT seront ici évoqués. Pour plus de précisions concernant la TVE et la démonstration de résultats utilisés infra, le lecteur pourra se référer aux quatre sources citées auparavant.

Distribution des extrêmes

Soit l'hypothèse selon laquelle F est la fonction de répartition des pertes du portefeuille étudié. Il est alors possible d'estimer la fonction de répartition des pertes au-delà d'un certain seuil u préalablement défini :

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

où $x \in [0, M-u[$ avec M la perte maximale, définie telle que $M = sup\{p \in \mathbb{R}, F(p) < 1\}$.

Le théorème de PICKANDS III et al. (1975), BALKEMA et DE HAAN (1974) permet de caractériser la loi asymptotique des excès.

Théorème (PICKANDS-BALKEMA-DE HAAN)**.** *Si la fonction de répartition F fait partie du domaine d'attraction de l'une des 3 distributions de valeurs extrêmes, à savoir les lois de* FRÉCHET, GUMBEL *et* WEIBULL, *alors il existe une fonction positive $\sigma(u)$ et un réel ξ tels que :*

$$\lim_{u \to M} \sup_{0<x<M-u} |F_u(x) - G_{\xi,\sigma(u)}(x)| = 0$$

avec $G_{\xi,\sigma(u)}$ la fonction de répartition d'une PARETO *généralisée de paramètre de position m égal à 0.*

L'hypothèse d'appartenance de la fonction de répartition au domaine d'attraction [35] d'une loi de valeurs extrêmes est forte, mais raisonnable, puisque de nombreuses lois ordinaires en font partie [36].

La méthode Peaks Over Threshold repose donc sur l'hypothèse selon laquelle, pour un seuil u suffisamment élevé, la fonction de répartition de la loi des excès s'approche de celle d'une loi PARETO généralisée. Dès lors, il convient de déterminer le seuil u optimal : en effet, plus u est grand, meilleure est la convergence de la loi des excès vers une GPD, mais plus la taille de l'échantillon d'observations supérieures à u se réduit, ce qui nuit à la précision de la méthode.

Détermination du seuil u optimal

Différentes méthodes graphiques peuvent être employées afin de déterminer le seuil u qui convient, c'est-à-dire un seuil qui n'est ni trop grand, ni trop petit.

Le premier outil à notre disposition est le *Mean Excess Plot*. Ce graphique représente la moyenne des excès au-delà du seuil u, notée $e(u)$, en fonction de la valeur de ce seuil. Pour un seuil u défini, $e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u)$ où X est la variable qui représente les pertes. e est appelée fonction moyenne des excès. Un estimateur empirique de e est $\hat{e}$, tel que $\forall u, \hat{e}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{x_i > u}}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{x_i > u}} - u$ où N est le nombre total d'observations dans l'échantillon, les x_i pour $i = 1, ..., N$ sont les observations et $\mathbb{1}_{x_i > u} = 1$ si $x_i > u$ et 0 sinon.

35. Une fois encore, nous n'entrerons pas dans les détails de la définition de domaine d'attraction, le lecteur intéressé pourra se référer aux ressources mentionnées ci-dessus.

36. comme la loi normale, la loi log-normale, la loi gamma ou encore la loi exponentielle

Or, si X suit une PARETO généralisée de paramètres $\xi < 1$, σ et m alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sigma}{1-\xi} + m.$$

Donc, si au-delà d'un certain seuil u il est possible d'approcher la loi des excès par une PARETO généralisée de paramètre de position égal à 0, le résultat suivant devrait se vérifier :

$$\mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\sigma_u}{1-\xi}$$

Dès lors, par la remarque précédente et pour tout seuil $u' > u$:

$$\mathbb{E}(X - u' | X > u') = \frac{\sigma_{u'}}{1-\xi} = \frac{\sigma_u + \xi \cdot u'}{1-\xi}.$$

Cela signifie que la fonction moyenne des excès devrait être linéaire pour toute valeur située au-dessus du seuil u optimal.

Dès lors, la méthode fondée sur le *Mean Excess Plot* consiste à déterminer le seuil à partir duquel la représentation graphique de la fonction moyenne des excès est approximativement linéaire.

Une seconde méthode de détermination graphique du seuil u est le *Threshold Choice Plot*. Cette méthode utilise également la remarque qui a été faite précédemment. Pour rappel, avec les notations et conditions précédentes, si $X \sim GPD(\xi_0, \sigma_0, m_0)$ alors $X|X > m_1 \sim GPD(\xi_1 = \xi_0, \sigma_1 = \sigma_0 + \xi_0 \cdot (m_1 - m0), m_1)$. Dès lors, en notant :

$$\sigma = \sigma_1 - \xi_1 \cdot m_1 = \sigma_0 - \xi_0 \cdot m_0$$

cela signifie que σ est indépendant de m_1, tout comme $\xi_1 = \xi_0 = \xi$.

Dès lors, pour toute valeur u' supérieure à u [37], le seuil à partir duquel la loi des excès peut s'approximer par une loi PARETO généralisée, σ et ξ devraient être constants. La méthode *Threshold Choice Plot* consiste donc à observer 2 graphes : celui de ξ en fonction de u' et celui de σ en fonction de u' également. Si pour tout $u' > u$ les courbes représentées sont des demi-droites horizontales, alors le seuil u convient.

Une autre méthode graphique classique est généralement employée, il s'agit du HILL *plot*, fondée sur l'estimateur de HILL. Cette méthode, bien que fréquemment utilisée, ne sera pas décrite ici. Elle ne s'applique qu'aux distributions à queues épaisses i.e. celles pour lesquelles le paramètre de forme ξ est positif. Néanmoins, nous avons essayé de l'utiliser lors d'applications pratiques, en complément du *Mean Excess Plot* et du *Threshold Choice Plot*, mais les graphiques obtenus ne nous permettaient pas de conclure. C'est pourquoi seules les méthodes générales présentées plus haut ont été retenues.

Estimation des paramètres de la GPD

Là aussi, plusieurs approches peuvent être employées afin d'estimer la valeur des paramètres ξ et σ qui interviennent dans la définition de la GPD [38].

37. avec $u' \leq M$, où M est la plus grande perte observable
38. Par le théorème de PICKANDS-BALKEMA-DE HAAN, le paramètre de position est nul.

La première approche est la méthode des moments. Il est en effet possible de déterminer de manière assez simple, dans certains cas, les valeurs de ξ et σ à partir des observations supérieures à un seuil u donné.

Si $\xi < \frac{1}{2}$, les deux premiers moments [39] de la loi PARETO généralisée sont :

$$\mathbb{E} = \frac{\sigma}{1-\xi}$$
$$\mathbb{V} = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2 \cdot (1-2\xi)}$$

ce qui permet d'obtenir les estimateurs suivants à partir de l'espérance et de la variance empiriques :

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{2} - \frac{\mathbb{E}^2}{2\mathbb{V}}$$
$$\widehat{\sigma} = \mathbb{E} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}}{2\mathbb{V}}).$$

Cette méthode n'est cependant pas très robuste et nécessite une hypothèse forte sur la valeur du paramètre de forme. C'est pourquoi il est également possible de recourir à l'approche qui repose sur le maximum de vraisemblance.

Il s'agit ici de maximiser la fonction de log-vraisemblance. Soit un échantillon de pertes composé de N observations ordonnées, $X_1, ..., X_N$ et un seuil u donné tel que $u = X_{N-k}$ pour un k fixé, $k = 1, ..., N$. Soit $N_{x>u}$ le nombre d'observations strictement supérieures au seuil u. Il est possible de définir Y_j pour tout $j \in [\![1, N_{x>u}]\!]$, la j^{ème} observation dépassant le seuil u telle que $\forall j \in [\![1, N_{x>u}]\!],\ Y_j = X_{N-k+j} - X_{N-k}$. Dès lors, la méthode du maximum de vraisemblance consiste à maximiser l'expression suivante, valable lorsque $\xi \neq 0$ et quand $\forall j,\ (1 + \xi \cdot \frac{Y_j}{\sigma} > 0)$:

$$\begin{aligned} ln\, \mathcal{L}(\xi, \sigma) &= \sum_{j=1}^{N_{x>u}} ln\left(g_{\xi,\sigma}(Y_j)\right) \\ &= -N_{x>u} \cdot ln\, \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_{x>u}} ln\left(1 + \xi \cdot \frac{Y_j}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Dès lors, $\widehat{\xi}^{MV}$ et $\widehat{\sigma}^{MV}$, les estimateurs de ξ et σ par la méthode de maximum de vraisemblance, doivent satisfaire les équations suivantes :

39. à savoir l'espérance et la variance de l'échantillon d'observations

$$\begin{cases} \dfrac{\widehat{\sigma}^{MV}}{\widehat{\xi}^{MV}} - \left(\dfrac{1}{\widehat{\xi}^{MV}} + 1\right) \cdot \dfrac{1}{N_{x>u}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{x>u}} \dfrac{Y_j}{1 + \dfrac{\widehat{\xi}^{MV}}{\widehat{\sigma}^{MV}} \cdot Y_j} = 0 \\ \widehat{\xi}^{MV} = \dfrac{1}{N_{x>u}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{x>u}} ln\left(1 + \dfrac{\widehat{\xi}^{MV}}{\widehat{\sigma}^{MV}} \cdot Y_j\right) \end{cases}$$

Adéquation du modèle

La théorie décrite jusque-là permet de déterminer le meilleur seuil possible et d'estimer ensuite les paramètres de la GPD afin qu'elle s'ajuste au mieux aux données qui composent l'échantillon. Les méthodes évoquées précédemment ne sont cependant pas infaillibles, c'est pourquoi il est important, a posteriori, de vérifier que la distribution théorique obtenue est conforme à la distribution empirique des extrêmes. Plusieurs approches, graphiques ou quantitatives, permettent de vérifier cette adéquation.

En premier lieu, la méthode la plus couramment utilisée pour évaluer la qualité d'ajustement d'une loi à un échantillon réel est le diagramme Quantile-Quantile, ou *Q-Q plot*. Il s'agit de vérifier, de manière graphique, que les quantiles théoriques de la loi ajustée correspondent aux quantiles empiriques i.e. de vérifier que les points $(F^{-1}(p), \widehat{F}^{-1}(p))$ sont alignés avec $p \in [0,1]$, où F est la fonction de répartition de la loi théorique et $\widehat{F}$ est la fonction de répartition empirique i.e. pour tout x réel, avec N le nombre d'observations dans un échantillon :

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{x_i \leq x}.$$

Soit un échantillon de N observations $X_1, ..., X_N$ et les statistiques d'ordre $X_{(1)}, ..., X_{(N)}$ [40]. Il s'agit, dans la pratique, de découper l'échantillon d'observations en $N+1$ tranches égales et de considérer, pour tout $i = 1, ..., N$, que sous l'observation $X_{(i)}$ se trouve une proportion de la population égale à $\frac{i}{N+1}$. Dès lors, le *Q-Q plot* consiste à représenter le graphe des points $(F^{-1}(\frac{i}{N+1}), X_{(i)})$ et à regarder si les points sont alignés, auquel cas le modèle choisi est correct à une transformation affine près.

Le diagramme Quantile-Quantile est particulièrement efficace lorsqu'il s'agit d'évaluer la qualité d'ajustement de la loi théorique à la distribution empirique sur les queues de distribution. En effet, en fonction de la forme de la courbe aux extrémités droite et gauche il est possible de dire si la loi ajustée, donc théorique, présente des queues trop fines ou trop larges par rapport à la distribution empirique.

En second lieu, il est possible d'utiliser le *P-P plot*. C'est un outil moins utilisé que le *Q-Q plot*, mais qui peut tout de même s'avérer utile. Le *P-P plot* est un graphique qui permet de confronter les fonctions de répartition théorique et empirique. Il s'agit donc de vérifier que les points $(F(z), \widehat{F}(z))$ sont alignés sur la première bissectrice [41] où z appartient au support des fonctions de répartition. Le *P-P plot* permet de vérifier l'ajustement au niveau des « ventres » de distribution plutôt qu'au niveau des queues.

40. La statistique d'ordre de rang j d'un échantillon d'observation est la j^{ème} plus petite valeur de l'échantillon i.e.pour un échantillon de N observations, $X_{(1)} = minX_1, ..., X_N$ et $X_{(N)} = maxX_1, ..., X_N$.

41. Contrairement au cas du diagramme Quantile-Quantile, il ne s'agit pas seulement de vérifier que les points sont alignés, il faut vérifier qu'ils sont alignés sur la droite d'équation $y = x$.

Une autre manière de comparer la fonction de répartition théorique à la fonction de répartition empirique consiste simplement à représenter les deux courbes sur le même graphique. L'information fournit par ce graphique devrait correspondre à celle donnée par le *P-P plot*.

Enfin, il est important de définir une mesure quantitative, et non pas graphique comme les autres approches décrites supra, qui permette d'évaluer la qualité d'ajustement du modèle i.e. de la distribution continue théorique à la distribution empirique. Une telle évaluation est rendue possible par le test d'ajustement de KOLMOGOROV-SMIRNOV. Cette métrique teste l'hypothèse H_0 selon laquelle l'échantillon d'observations a la même fonction de répartition que celle d'une loi continue donnée[42]. Le test se fonde pour cela sur les propriétés asymptotiques de la fonction de répartition empirique. Il s'agit d'estimer la plus grande distance, en valeur absolue, entre la fonction de répartition théorique et la fonction de répartition empirique. La statistique de ce test est définie par :

$$D = \sup_x |\widehat{F}(x) - F(x)|.$$

Si la fonction de répartition théorique est « proche »[43] de la fonction de répartition empirique, alors D devrait être proche de 0. Au vu de l'hypothèse du test, pour que les fonctions de répartition soient considérées comme semblables, il faudra que la *p-value* du test soit la plus élevée possible.

Le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV n'est pas sans inconvénient car son application nécessite de connaître, a priori, les paramètres de la loi théorique. Par ailleurs, ce test se concentre sur l'ensemble de la distribution et ne convient pas nécessairement lorsqu'il s'agit de comparer les queues de distribution.

Estimateurs des mesures de risque

À partir des résultats précédents, il est alors possible de déterminer des estimateurs de la VaR et de la CVaR.

Il est en effet possible d'écrire, pour tout $x > u$, avec u le seuil déterminé précédemment :

$$\begin{aligned} F(x) &\simeq (1 - F(u)) \cdot G_{\xi,\sigma}(x-u) + F(u) \\ &= 1 - (1 - F(u)) \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\ &\simeq 1 - \frac{N_{x>u}}{N} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{x-u}{\sigma}\right) \\ &= \hat{F}(x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

où N et $N_{x>u}$ sont respectivement le nombre d'observations et le nombre d'observations supérieures au seuil u, c'est pourquoi $\frac{N_{x>u}}{N}$ permet d'estimer empiriquement la valeur de $1 - F(u)$.

42. Le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV sert également à déterminer si 2 échantillons suivent la même loi.
43. au sens défini par la statistique de test

Or, la VaR au seuil α est égale à $VaR_\alpha(x) = F^{-1}(\alpha)$. Il suffit alors d'inverser l'expression (5.6) pour déterminer une estimation de la VaR :

$$\begin{aligned}\widehat{VaR}_\alpha(x) &= \widehat{F}^{-1}(\alpha) \\ &= u + \frac{\sigma}{\xi} \cdot \left(\left[\frac{N}{N_{x>u}} \cdot (1-\alpha) \right]^{-\xi} - 1 \right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

Remarque. *Pour rappel, $\widehat{F}(x)$ est ici défini seulement lorsque $x > u$, dès lors l'expression (5.7) n'est définie que pour $\widehat{F}^{-1}(\alpha) > u$ i.e. $\alpha > \widehat{F}(u)$.*

Il est également possible de montrer que [44], pour tout $\alpha > u$ et lorsque $\xi < 1$:

$$\widehat{CVaR}_\alpha(x) = \frac{\widehat{VaR}_\alpha(x)}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi \cdot u}{1-\xi}. \tag{5.8}$$

Mise en œuvre

Après avoir évoqué la théorie sur laquelle repose la méthode POT, il convient de la mettre en application. À cet effet, nous utiliserons le package « POT » développé par RIBATET (2006), sous le langage de programmation R, qui contient les outils nécessaires à l'analyse.

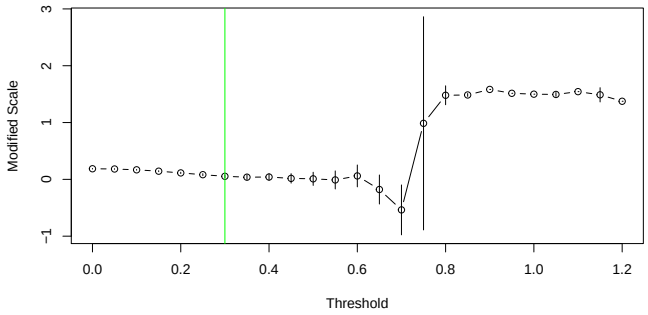
Les éléments présentés ici résultent de l'application de la méthode POT au portefeuille « 10bvo ». Il est bien sûr possible de réaliser la même analyse sur les 5 autres portefeuilles, mais il serait redondant de les présenter dans le corps de ce mémoire.

Pour des raisons de simplicité, la dépendance temporelle entre les performances qui constituent l'échantillon sera négligée. Toutes les observations seront donc utilisées lors de l'application de la méthode POT. C'est une hypothèse forte qui n'est pas vérifiée empiriquement, puisque les facteurs de risque sont en général hétéroscédastiques [45] et autocorrélés. Comme l'objet de ce mémoire est de donner une vision synthétique de la gestion du risque lié au capital investissement, cette hypothèse n'est cependant pas dénuée de sens.

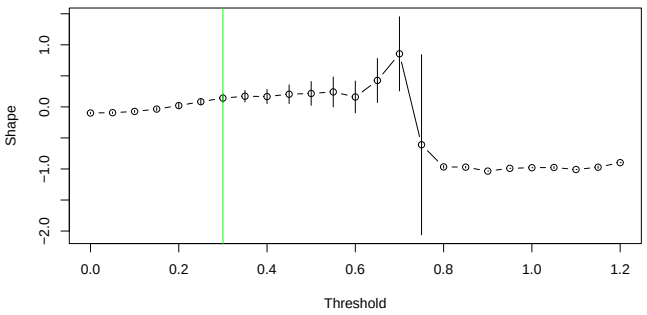
Puisque l'objectif est ici de se concentrer sur la queue gauche de la distribution des performances annuelles excédentaires au taux sans risque affichées par le portefeuille « 10bvo », il s'agit tout d'abord de ne conserver que les performances négatives i.e. les pertes [46]. Nous choisissons également de multiplier par -1 ces performances négatives afin de ne travailler que sur des quantités positives.

Il faut ensuite déterminer le seuil u optimal à partir duquel la fonction de répartition de la loi des excès peut être considérée de manière raisonnable comme une loi PARETO généralisée. La figure ci-dessous (5.9) présente les graphiques qui permettent d'estimer la valeur de ce seuil.

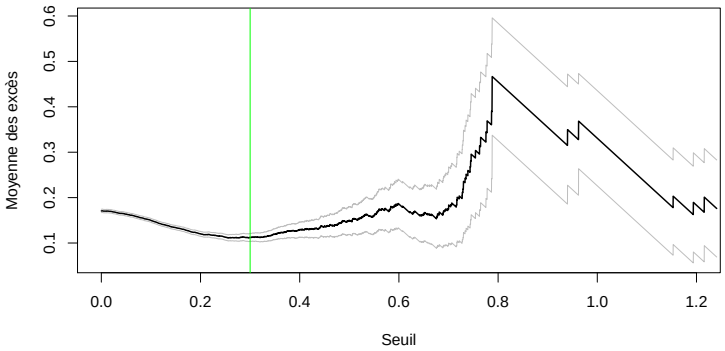
44. La démonstration a été faite par LI et CHEN (2013) et par ZAMOR (2017).
45. i.e. leur variance n'est pas constante
46. Ce choix nous paraît raisonnable puisque plus de 25 % des performances sont négatives. Dès lors, il est légitime de penser que le seuil u sera inférieur à 0.



(A) *Threshold Choice Plot - Paramètre d'échelle*



(B) *Threshold Choice Plot - Paramètre de forme*



(C) *Mean Excess Plot*

FIGURE 5.9 – Graphiques de sélection du seuil pour le portefeuille « 10bvo »

Le choix du seuil n'est pas aisé, car il fait intervenir une certaine subjectivité. En effet, nous sommes face à un arbitrage biais / robustesse : si le seuil u est trop élevé, l'ajustement de la PARETO généralisée aux données sera imprécis, mais s'il est trop petit il risque d'inclure des valeurs qui ne sont pas « extrêmes ». Les *Threshold Choice Plot*, figures (5.9a et 5.9b) semblent indiquer un seuil à peu près égal à 75 %. Même si le *Mean Excess Plot* est un peu moins clair, figure (5.9c), il conduirait également à choisir un seuil fixé entre 75 % et 85 %. Nous choisissons délibérément de ne pas retenir ces valeurs. En effet, celles-ci nous semblent trop élevées, car seulement 0,1 % des pertes dépasse la valeur de 75 %. De plus, au vu de la remarque qui figure sous l'expression (5.7), choisir un seuil supérieur ou égal à 75 % ne nous permettrait pas d'utiliser l'équation pour estimer la VaR. Afin de pallier ces difficultés et de conserver un nombre suffisant d'observations, nous fixons le seuil u égal à 30 %, à savoir au niveau du trait vert sur les sous-figures précédentes. Cela illustre la première difficulté lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre la méthode POT : le choix du seuil n'est pas immédiat et nécessite certaines hypothèses et interprétations.

Une fois le seuil déterminé, il est possible d'estimer les paramètres de la GPD par la méthode du maximum de vraisemblance ainsi que par la méthode des moments. Les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessous (5.15).

Méthode	$\widehat{\xi}$	$\widehat{\sigma}$
Méthode du Maximum de vraisemblance	0,14133	0,09616
Méthode des Moments	0,15752	0,09451

TABLE 5.15 – Estimateurs des paramètres de la GPD calibrée sur le portefeuille « 10bvo »

Quelle que soit la méthode employée, les valeurs des paramètres estimés sont semblables. Par la suite, nous conserverons les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance car c'est une approche plus robuste et plus souvent utilisée que la méthode des moments.

Le paramètre de forme ξ est positif. Cela signifie que la queue du côté gauche de la distribution i.e. du côté des pertes est plus épaisse que celle d'une loi normale.

Dans un second temps, la méthode POT a également été appliquée sur la queue droite de la distribution i.e. celle des « bonnes performances » et il s'avère que le paramètre de forme estimé est à peu près [47] égal à 0,32, c'est-à-dire que la queue droite de la distribution des performances est non seulement plus épaisse que celle d'une loi normale, mais est également plus épaisse que la queue gauche, puisque le paramètre de forme ξ est plus élevé du côté droit que du côté gauche. Cela vient confirmer les observations réalisées supra. Ainsi, le portefeuille « 10bvo », à savoir le portefeuille le plus diversifié des 6 portefeuilles simulés, semble avoir plus de chance d'enregistrer des gains extrêmes plutôt que des pertes extrêmes. Néanmoins, la queue de gauche est tout de même plus épaisse que celle d'une loi normale, c'est-à-dire que la loi normale n'est pas une bonne manière d'estimer les pertes potentielles, puisque cette approche pourrait conduire à une sous-estimation des pertes réelles.

Une fois les paramètres estimés, il convient de vérifier la qualité d'ajustement de la GPD à la distribution des extrêmes. Nous utilisons pour cela la figure (5.10) et le tableau (5.16) suivants qui résultent de l'application des méthodes définies dans la partie théorique.

Statistique du test	*p-value*	Rejet de l'hypothèse H_0
0,027797	0,4551	Non

TABLE 5.16 – Résultats du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV

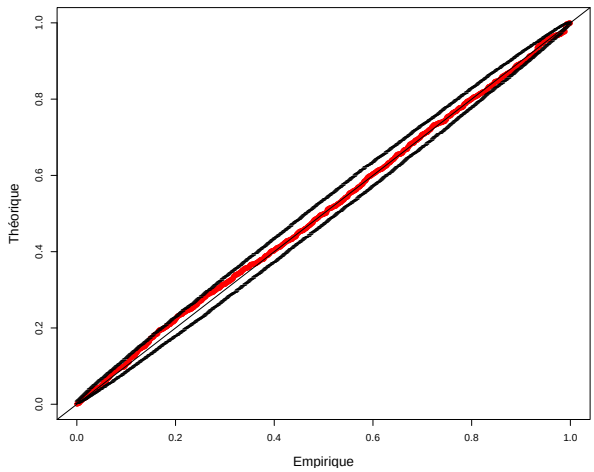
Sur le *Q-Q plot* (5.10b), les points situés au niveau de la queue de gauche sont bien alignés, mais ce n'est pas le cas des points qui se trouvent à droite du graphique. En effet, du côté droit, les points de la courbe se situent au-dessus de la bissectrice, ce qui signifie que pour un même seuil donné, le quantile de la distribution empirique sera supérieur à celui de la distribution théorique i.e. la distribution empirique affiche une queue plus épaisse que la distribution théorique. Ce phénomène s'inverse cependant au bout de la courbe, puisque le dernier point se trouve sous la bissectrice, c'est-à-dire que la GPD atteint des points qui ne sont pas atteints par la distribution empirique.

En considérant les graphiques fondés sur les fonctions de répartition (5.10a et 5.10c), l'ajustement semble correct. En outre, la *p-value* du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV est assez nettement supérieure au seuil de 5 %. Ainsi, l'hypothèse selon laquelle les fonctions de répartition empirique et théorique sont semblables ne peut être rejetée.

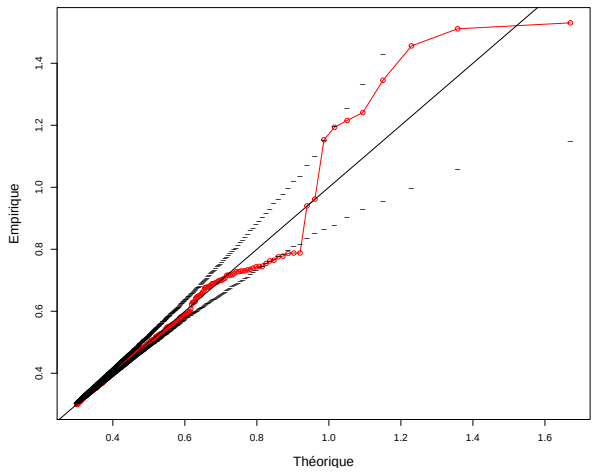
Même si l'ajustement n'est pas parfait, notamment au niveau des queues de distribution, il paraît néanmoins convenable. Nous allons donc pouvoir estimer les VaR et CVaR par la méthode POT grâce aux expressions mentionnées supra (5.7 et 5.8). Les résultats sont présentés dans le tableau suivant (5.17). Nous avons également rappelé les valeurs obtenues par la méthode historique.

L'approche Peaks Over Threshold est donc un peu plus prudente que la méthode historique, puisque les mesures de risque fournies sont légèrement plus élevées. Il est intéressant de noter que ces niveaux de VaR au seuil de 99,5 % semblent conforter le fait que, dans un premier temps, l'EIOPA ait choisi de considérer les positions dans des fonds de capital investissement comme des actions de type 2, avec un choc de 49 %, plus ou moins 10 % provenant de l'ajustement symétrique.

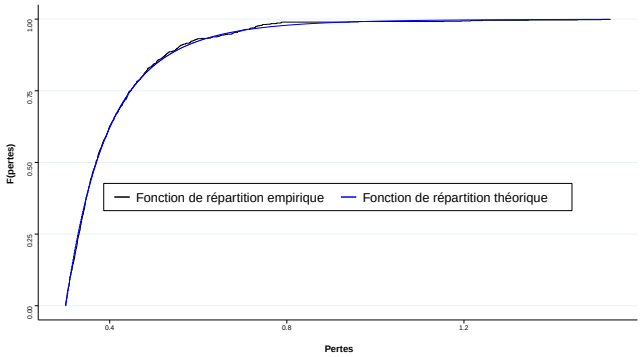
47. cela dépend bien sûr du seuil u fixé



(A) *P-P plot*



(B) *Q-Q plot*



(C) Fonction de répartition empirique vs Fonction de répartition théorique

FIGURE 5.10 – Graphiques d'ajustement de la GPD aux extrêmes pour le portefeuille « 10bvo »

Méthode	VaR 99,5 %	CVaR 99,5 %
POT	-55,54 %	-71,53 %
Historique	-55,00 %	-71,08 %

TABLE 5.17 – VaR 99,5 % et CVaR 99,5 % obtenues par la méthode POT et par la méthode historique

Cette méthode fondée sur la TVE est cependant plus complexe et moins directe que la méthode historique. De plus, elle présente certains défauts. Tout d'abord, la détermination du seuil u ne peut, a priori, pas être automatisée et est laissée à la libre appréciation du preneur de décision, ce qui équivaut en quelque sorte à un « avis d'expert ». La méthode POT nécessite également un grand historique de données, car l'échantillon qui permet d'estimer les paramètres de la GPD par maximum de vraisemblance ne fait intervenir que les observations qui dépassent le seuil.

5.3.3 Méthode paramétrique

Cette dernière approche permettant d'estimer la VaR à partir d'un échantillon fait intervenir des hypothèses plus fortes que les méthodes mentionnées précédemment, puisqu'il s'agit d'introduire une loi qui caractériserait toute la distribution.

À partir des observations, il convient d'estimer les paramètres de différentes lois de distribution. Ces lois sont choisies de manière arbitraire : soit parce que ce sont des lois dites « classiques » i.e. souvent utilisées dans la littérature, soit parce que l'allure de la distribution des observations laisse à penser que telle ou telle loi permettrait d'obtenir des résultats satisfaisants. Une fois les paramètres estimés, il est possible de déterminer la valeur des mesures de risque, soit à l'aide d'une formule explicite, soit par le biais de simulations.

Loi normale

La première loi étudiée est la loi normale. À partir des observations il est possible d'estimer les paramètres de la loi normale par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de vraisemblance [48]. Soit $x_i, i = 1, ..., N$ les observations, les estimateurs de la moyenne et de la variance de la loi normale sont donnés par [49] :

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \widehat{\mu})^2 .$$

Une fois les paramètres de la loi normale estimés, il est aisé d'obtenir la VaR et la CVaR d'une variable aléatoire qui suivrait une telle loi. En effet, soit X et Z deux variables aléatoires indépendantes, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors [50] :

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot VaR_\alpha(Z)$$
$$CVaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot CVaR_\alpha(Z).$$

Il est donc possible de calibrer une loi normale sur les observations du portefeuille « 10bvo » à l'aide de la fonction « fitdist » du package R « fitdistrplus ». Les estimateurs des paramètres obtenus sont les suivants (5.18) :

Méthode	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$
Méthode du Maximum de vraisemblance	0,1234267	0,3340993

TABLE 5.18 – Estimateurs des paramètres de la loi normale calibrée sur le portefeuille « 10bvo »

Il s'agit ensuite d'évaluer la qualité d'ajustement de la loi normale aux observations de manière graphique, à l'aide des méthodes introduites supra. Les figures ci-dessous (5.11 et 5.12) permettent de constater, comme nous pouvions nous en douter, que la loi normale ne s'ajuste pas correctement aux données réelles. La distribution empirique a notamment des queues épaisses, à droite et à gauche. La loi normale qui a été calibrée a, quant à elle, des queues beaucoup plus fines : le constat est flagrant, que ce soit sur le diagramme Quantile-Quantile ou sur le graphique représentant les densités théoriques et empiriques.

48. Ces méthodes ont été brièvement décrites supra.
49. La démonstration de ce résultat ainsi que les explications détaillées de la méthode du maximum de vraisemblance sont disponibles dans le cours de HURLIN (2013).
50. La démonstration est apportée dans le mémoire de LI et CHEN (2013).

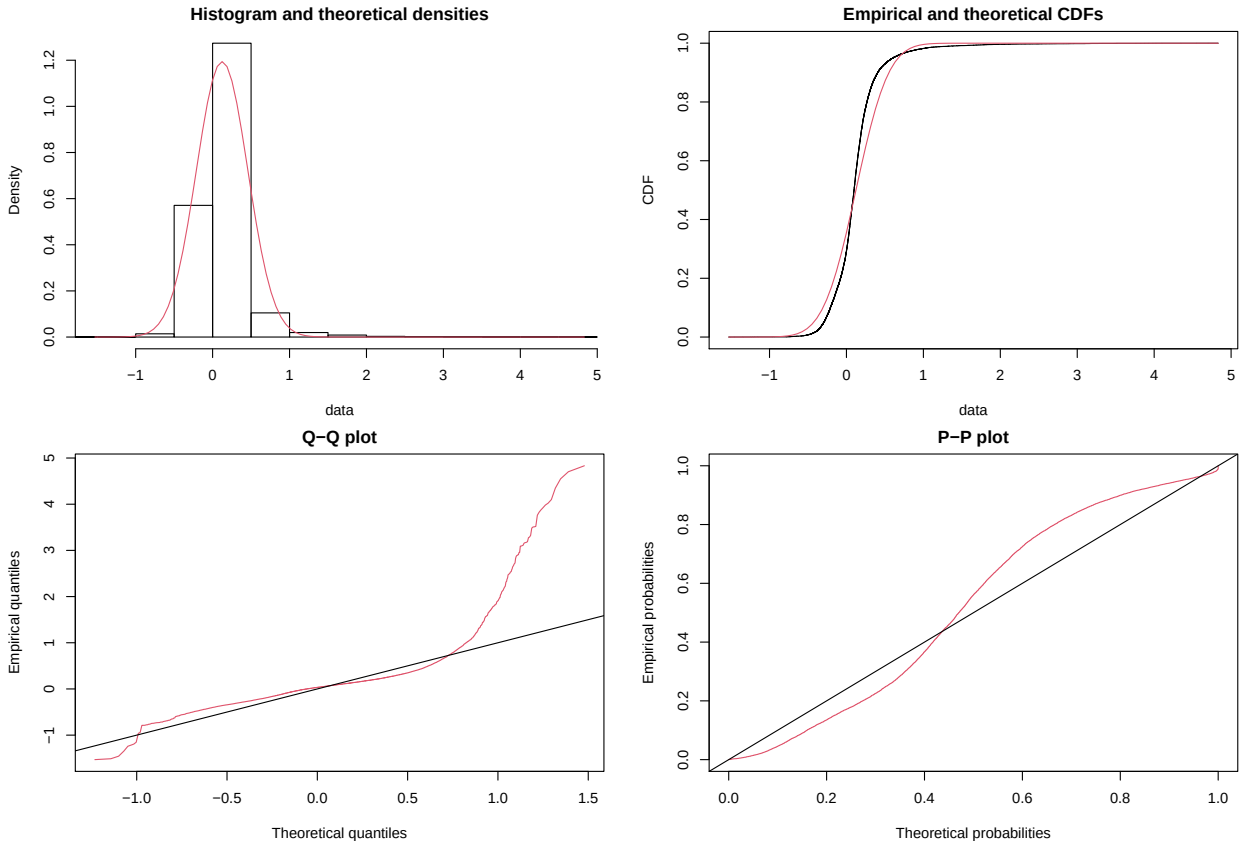


FIGURE 5.11 – Qualité d'ajustement de la loi normale aux observations du portefeuille « 10bvo »

Cela n'est pas surprenant au vu des valeurs du coefficient d'asymétrie empirique et du coefficient d'aplatissement empirique qui ont été trouvées précédemment pour le portefeuille « 10bvo ».

Skewed generalized « t » distribution

Puisque la loi normale ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants, il s'agit maintenant de déterminer une loi plus appropriée. TAUSCH (2016) évoque dans son étude la *Skewed generalized « t » distribution*. Cette loi a été introduite par THEODOSSIOU (1998) dans un papier intitulé « Financial data and the skewed generalized t distribution ».

Selon les mots de l'auteur « cette loi de probabilité est une distribution flexible qui s'adapte à la *skewness* et au *kurtosis* souvent observables dans les données financières » [traduction libre]. La *Skewed generalized « t » distribution* est en quelque sorte un prolongement de la *Generalized « t » distribution* introduite par MCDONALD et NEWEY (1988). De plus, THEODOSSIOU a spécifiquement développé cette distribution de probabilité dans le but de répondre à des problématiques financières, preuve en est le fait qu'il présente dans son papier de recherche des applications concrètes à différents indices financiers, comme le S&P 500 par exemple.

La *Skewed generalized « t » distribution* recouvre ainsi de nombreuses autres distributions. En fonction des valeurs prises par les cinq paramètres de la *Skewed generalized « t » distribution*, il est en effet possible d'obtenir la *Generalized « t » distribution*, la *Skewed Laplace distribution*, la loi uniforme, la loi normale ou encore la loi de Student. DAVIS (2015) passe notamment en revue l'ensemble des distributions « usuelles » qu'il est possible d'obtenir à partir de la *Skewed generalized « t » distribution* ainsi que les valeurs spécifiques des paramètres associées à ces distributions.

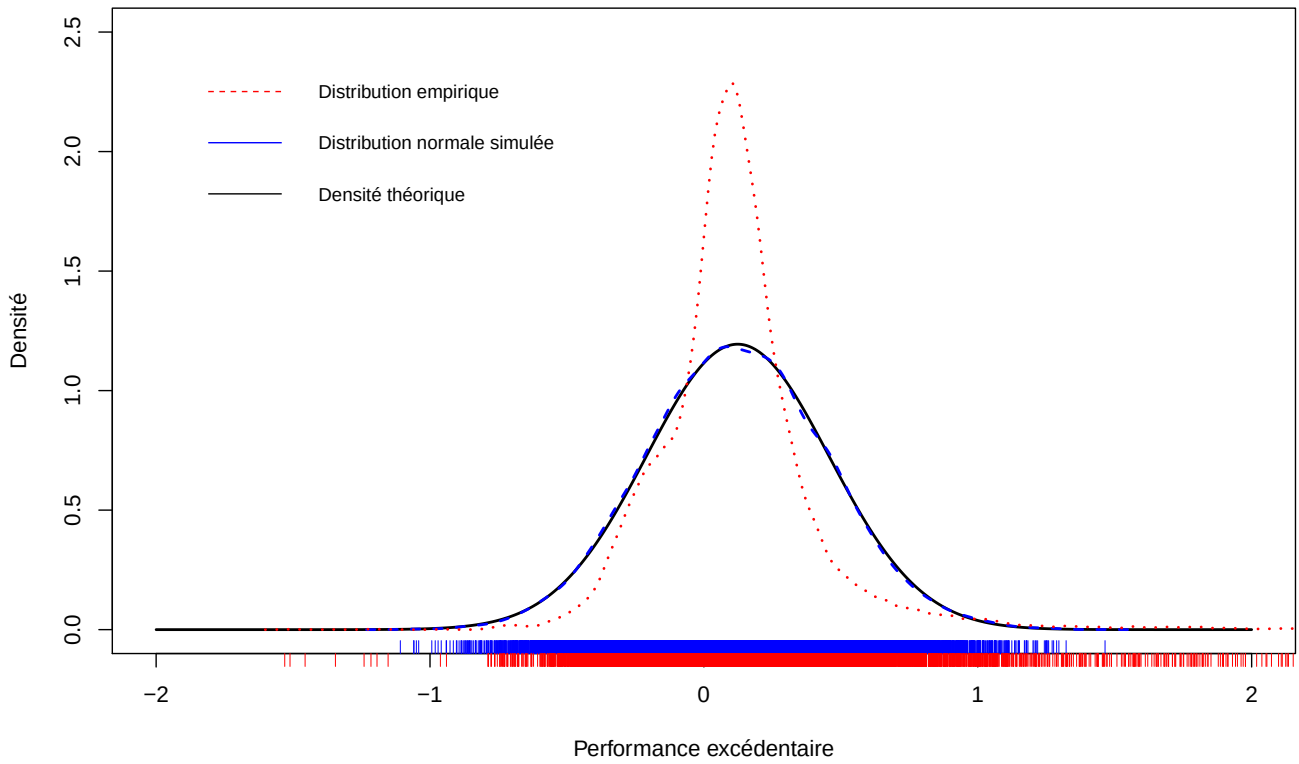


FIGURE 5.12 – Distribution observée vs Distribution Normale calibrée sur les observations du portefeuille « 10bvo »

Puisque la *Skewed generalized « t » distribution* n'est pas une loi de probabilité usuelle, quelques éléments théoriques liés à cette loi de probabilité seront mentionnés ci-après. Néanmoins, pour plus d'information, le lecteur intéressé pourra se référer au papier de recherche écrit par THEODOSSIOU en 1998.

La fonction densité de la *Skewed generalized « t » distribution* a cinq paramètres : μ, σ, λ, p et q. La contrainte suivante doit être respectée pour que la *Skewed generalized « t » distribution* soit bien définie :

$$\{(\sigma, \lambda, p, q) : \sigma > 0, -1 < \lambda < 1, p > 0, q > 0\}.$$

μ est le mode de la distribution i.e. la valeur la plus fréquente observée dans l'échantillon, σ contrôle la variance i.e. plus la valeur de σ est élevée, plus la variance l'est également, λ contrôle la *skewness* de la distribution et enfin les paramètres p et q contrôlent le *kurtosis* de la distribution. Si la contrainte précédente est respectée, alors l'expression de la fonction densité est alors la suivante :

$$f_{SGT}(x; \mu, \sigma, \lambda, p, q) = \frac{p}{2v\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left(\frac{|x-\mu+m|^p}{q(v\sigma)^p(\lambda \cdot sign(x-\mu+m)+1)^p}\right)}$$

où,

$$m = \frac{2v\sigma\lambda q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{2}{p}, q - \frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}$$

et

$$v = \frac{q^{-\frac{1}{p}}}{\sqrt{(3\lambda^2+1)\frac{B\left(\frac{3}{p}, q - \frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - 4\lambda^2 \frac{B\left(\frac{2}{p}, q - \frac{1}{p}\right)^2}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)^2}}}$$

Maintenant que la *Skewed generalized « t » distribution* est définie, il s'agit de savoir si cette distribution est suffisamment « flexible » lorsqu'il s'agit de la calibrer sur les données du portefeuille « 10bvo ». Il n'existe a priori pas d'expression analytique permettant de déterminer les estimateurs des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. En outre, les différents papiers de recherche cités supra ne font pas mention de formule fermée pour trouver la VaR ou la CVaR à un seuil donné, c'est pourquoi les valeurs présentées ci-après seront obtenues grâce à des simulations. Ainsi, la mise en œuvre de cette méthode paramétrique, fondée sur la *Skewed generalized « t » distribution*, a nécessité l'utilisation du package R « sgt », publié et mis à jour par Carter DAVIS [51].

La fonction « sgt.mle » du package « sgt » permet d'obtenir les estimateurs des paramètres de la *Skewed generalized « t » distribution* par la méthode du maximum de vraisemblance, les résultats sont les suivants (5.19) :

Méthode	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{p}$	$\widehat{q}$
Méthode du Maximum de vraisemblance	0,1083	0,3225	0,0743	1,5300	2,1533

TABLE 5.19 – Estimateurs des paramètres de la *Skewed generalized « t » distribution* calibrée sur le portefeuille « 10bvo »

Une fois la distribution calibrée, il faut vérifier l'ajustement de la loi théorique à la distribution empirique. Pour ce faire, des variables aléatoires qui suivent la loi théorique calibrée sont générées à l'aide de plusieurs fonctions du package « sgt ». Les figures (5.13 et 5.14) permettent d'évaluer de manière graphique l'ajustement de la *Skewed generalized « t » distribution* aux observations.

L'ajustement semble ici bien meilleur que dans le cas précédent, où la loi normale avait été utilisée. Ce n'est en rien surprenant. En effet, puisque la loi normale est un cas particulier de la *Skewed generalized « t » distribution*, l'ajustement aux observations par la *Skewed generalized « t » distribution* ne peut être que meilleur, ou au moins aussi bon que celui qui découle de l'utilisation de la loi normale.

51. DAVIS (2015) a notamment publié le papier de recherche évoqué auparavant.

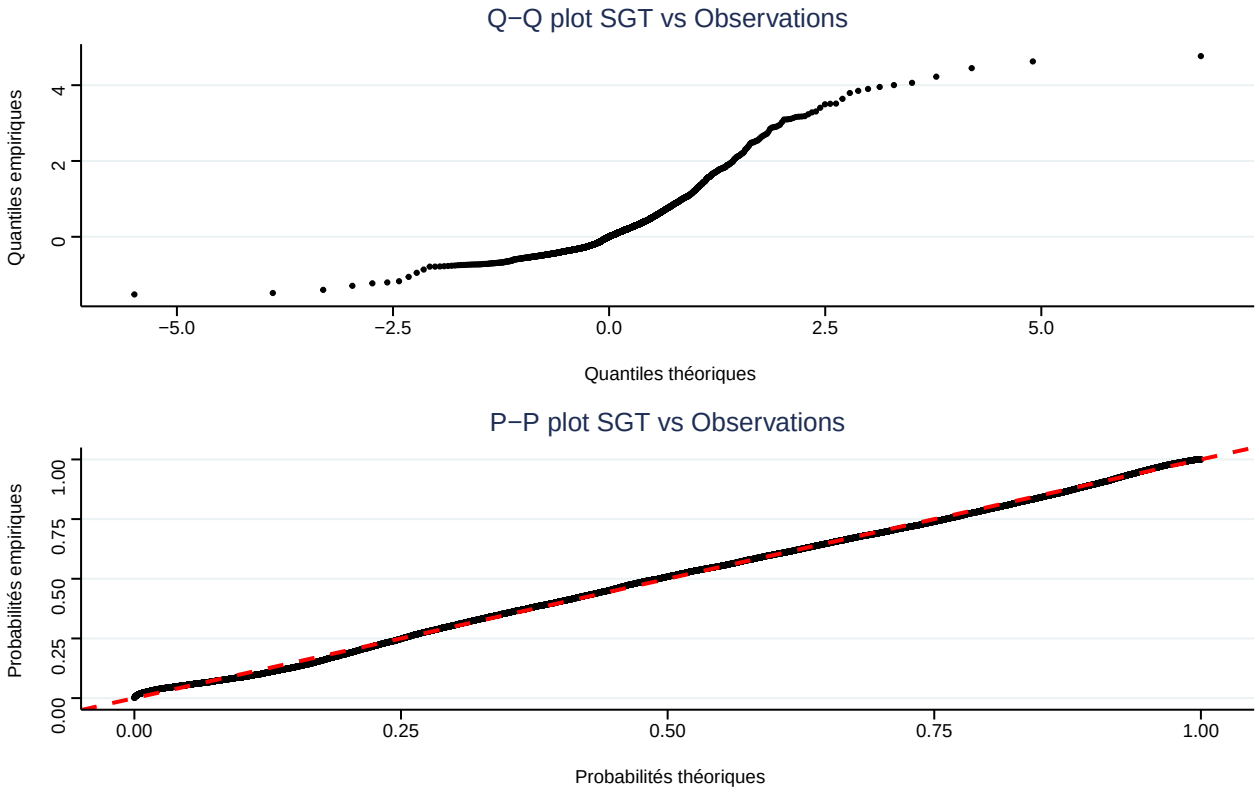


FIGURE 5.13 – *Q-Q plot* et *P-P plot* issus de l'ajustement aux observations du portefeuille « 10bvo » par une SGT

S'agissant de la partie « centrale » de la distribution i.e. celle qui concerne les observations qui ne sont ni dans la queue gauche ni dans la queue droite, l'ajustement semble satisfaisant. Le *P-P plot* permet effectivement de voir que les points sont alignés sur la première bissectrice. Cependant, l'ajustement au niveau des queues de distribution n'est pas bon. Le *Q-Q plot* et les *rug plots* du graphique (5.14) montrent que la *Skewed generalized « t » distribution* calibrée sur les observations a une queue gauche trop épaisse i.e. qui contient trop de points et une queue droite, à l'inverse, trop fine par rapport à l'échantillon d'observations. Or, c'est justement l'ajustement au niveau des queues de distribution, plus précisément de la queue gauche, qui importe pour déterminer la VaR et la CVaR. Enfin, les résultats du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV (5.20) conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la fonction de répartition théorique est similaire à la fonction de répartition empirique.

Statistique du test	*p-value*	Rejet de l'hypothèse H_0
0.021016	4.248e-08	Oui

TABLE 5.20 – Résultats du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV

La *Skewed generalized « t » distribution* n'est donc pas suffisamment « flexible » pour fournir une approximation satisfaisante de la distribution des performances du portefeuille « 10bvo »[52]. Christian TAUSCH a dressé ce même constat dans son étude. Le recours à la *Skewed generalized « t » distribution* conduirait, en effet, à surévaluer les risques de pertes et à sous-évaluer les gains potentiels.

À titre de comparaison avec les méthodes non-paramétrique et semi-paramétrique, les estimations des VaR et CVaR par la méthode paramétrique[53], avec la loi normale et avec la loi *Skewed generalized*

52. Ce constat est le même pour les autres portefeuilles.
53. valeurs obtenues par simulation

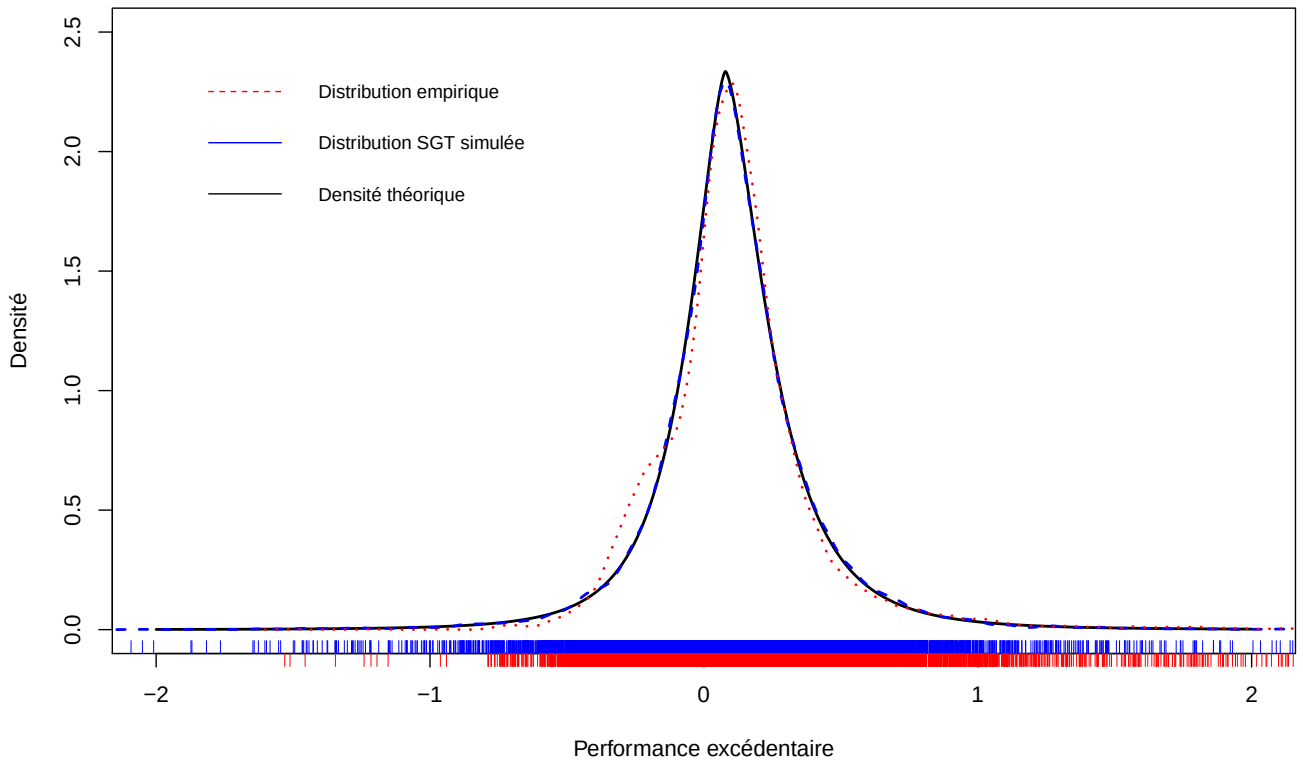


FIGURE 5.14 – Distribution observée vs Distribution SGT calibrée sur les observations du portefeuille « 10bvo »

« *t* » *distribution*, sont présentées dans le tableau ci-après (5.21). L'utilisation de la méthode paramétrique conduit donc à surestimer très largement les mesures de risque, que ce soit dans le cas de l'utilisation de la loi normale ou de la *Skewed generalized « t » distribution*. Ces méthodes paramétriques ne sont donc pas satisfaisantes à ce stade.

Méthode	VaR 99,5 %	CVaR 99,5 %
POT	-55,54 %	-71,53 %
Historique	-55,00 %	-71,08 %
Paramétrique - Loi normale	-73,72 %	-84,29 %
Paramétrique - Loi SGT	-93,66%	-143,47%

TABLE 5.21 – VaR 99,5 % et CVaR 99,5 % obtenues par les différentes méthodes

5.3.4 Le *backtesting*

Les analyses réalisées ci-dessus nous ont permis de comparer les valeurs prises par les mesures de risque selon différentes méthodes, appliquées au portefeuille « 10bvo » dans son ensemble. Néanmoins, la pertinence des VaR obtenues n'a pas été évaluée.

La méthode du *backtesting* propose alors une approche qui revient à confronter les VaR calculées aux pertes réellement constatées sur une période donnée. Cette procédure a été décrite en détail par LI et CHEN (2013) et BENSEGHIR (2006).

L'idée est ici de fixer une fenêtre temporelle, c'est-à-dire une période sur laquelle le test sera effectué. La VaR est alors estimée à partir des observations de la période, selon différentes méthodes [54]. Il s'agit ensuite de relever les pertes réelles sur le jour, le mois, le trimestre ou l'année suivant la fenêtre temporelle et de déterminer le nombre de fois où une perte réelle excède la VaR précédemment estimée. Ce nombre de dépassements peut enfin être utilisé pour évaluer la pertinence de la VaR obtenue et par conséquent la robustesse de la démarche entreprise.

Une procédure de *backtest* similaire peut être mise en place dans le cas de la CVaR, même si les conclusions sont moins directes puisque la « qualité » d'une CVaR ne peut pas s'évaluer au regard d'un nombre de dépassements de seuil. Le *backtesting* ne sera ici réalisé que selon les VaR.

Pour mettre en œuvre le *backtesting*, des portefeuilles ont été créés comme précédemment selon la méthodologie du « *Ten Fund Test Portfolio* » définie par TAUSCH (2016), à la différence près qu'ici ce ne sont pas les performances annuelles qui ont été calculées mais les performances trimestrielles. Dès lors, les performances trimestrielles de 6 portefeuilles [55] fictifs ont été répliquées sur la période qui s'étend du 1er janvier 1998 au 30 septembre 2014 [56]. Le choix de travailler non pas sur des performances annuelles mais sur des performances trimestrielles a été motivé par l'objectif de savoir si les pertes affichées par un portefeuille durant un trimestre permettent, une fois traitées par les approches évoquées précédemment [57], d'anticiper de manière convenable les pertes de ce portefeuille lors du trimestre suivant. Les résultats présentés ci-après sont ceux obtenus sur le portefeuille « 10bvo », puisque c'est le portefeuille pour lequel les différentes approches ont été décrites supra.

Pour chaque trimestre, à compter du premier trimestre de 1998 jusqu'à l'avant-dernier trimestre de 2014, nous disposons d'un certain nombre de performances simulées [58]. À partir de ces simulations, pour un trimestre T donné, une VaR au seuil de 99,5 % est déterminée par les différentes méthodes décrites supra. Ensuite, sur le trimestre suivant $T+1$ nous évaluons le nombre de dépassements de seuil i.e. le nombre de pertes qui excèdent la VaR déterminée précédemment. Étant donné qu'une VaR au seuil de 99,5 % a été déterminée, si les approches sont fiables et pertinentes, le nombre de dépassements de seuil ne devrait pas excéder 0,5 % du nombre de simulations du trimestre $T+1$. Les résultats, par trimestre, sont présentés sur le tableau suivant en annexe (A.1). Les résultats agrégés de la procédure de *backtest* sont quant à eux reportés dans le tableau suivant (5.22) :

Nombre total de simulations	Nombre total de dépassements - méthode historique	Nombre total de dépassements - méthode POT	Nombre total de dépassements - méthode SGT	Nombre maximal attendu de dépassements (0,5 % du nombre de simulations)
9 854	355	299	258	50

TABLE 5.22 – Résultats agrégés du *Backtesting* de la VaR sur les performances trimestrielles du portefeuille « 10bvo »

Le seuil de 50 dépassements est donc très largement franchi, quelle que soit la méthode utilisée. L'approche paramétrique, via l'utilisation de la *Skewed generalized « t » distribution*, apparaît comme plus prudente que la méthode POT, qui est elle-même plus prudente que la méthode historique. En effet, le tableau (A.1) permet de constater que le nombre de dépassements de la VaR obtenue par la méthode POT

54. méthodes non-paramétrique, paramétrique et semi-paramétrique
55. à savoir les portefeuilles « 1b », « 1v », « 5b », « 5v », « 10bv » et « 10bvo »
56. Cette période est plus courte que celle qui avait été considérée lors de la réplication des performances annuelles des 6 portefeuilles, car en dehors de cette période trop peu de données sont disponibles pour calculer des performances trimestrielles.
57. i.e. les approches non-paramétrique, paramétrique et semi-paramétrique
58. Ce nombre peut varier d'un trimestre à l'autre étant donné que toutes les dates de début de période ne sont pas sélectionnées le même nombre de fois par l'algorithme défini auparavant (1).

est presque toujours inférieur à celui de la VaR historique. De même, le nombre de dépassements selon la *Skewed generalized « t » distribution* est presque toujours inférieur à celui qui découle de l'utilisation de la méthode POT. Ces observations corroborent ce qui a été constaté supra, lorsque les performances annuelles du portefeuille « 10bvo » ont été étudiées dans leur ensemble. À partir de cette analyse, il est donc possible de conclure que les pertes affichées par un fonds de Private Equity sur un trimestre ne présagent pas des pertes qui seront subies le trimestre suivant.

Cependant, cette procédure de *backtest* qui a été mise en place est biaisée. Tout d'abord, les performances simulées du trimestre T sur lequel la « calibration » des différentes méthodes est effectuée sont corrélées. En effet, même si les simulations font appel à des véhicules fictifs construits de manière aléatoire [59], il est impossible de considérer ces véhicules comme indépendants : ils sont, par exemple, sujets aux mêmes conditions macroéconomiques. Ensuite, le même argument peut être utilisé s'agissant du trimestre $T+1$ sur lequel le nombre de dépassements de seuil est évalué : certains trimestres sont plutôt « calmes » et donc peu de dépassements de seuil sont observables, tandis que d'autres trimestres plus tumultueux connaissent de nombreux dépassements de seuil. Il est possible de constater ce phénomène dans le tableau (A.1).

BENSEGHIR (2006) et LI et CHEN (2013) présentent une procédure de *backtest* classique, réalisée sur des indices cotés. Il s'agit de fixer une période de calcul d'au moins 90 jours, sur laquelle est estimée la VaR selon plusieurs méthodes, VaR qui est ensuite comparée à la distribution des pertes sur le jour suivant pour déterminer s'il y a eu, ou non, dépassement de seuil. Ainsi, pour réaliser une telle procédure de *backtest* dans le cadre du Private Equity il faudrait en fait disposer d'une « fenêtre de calibration » beaucoup plus large : s'il faut que la période de calcul comporte au moins 90 points, cela signifie que la « fenêtre de calibration » doit s'étendre sur une période de plus de 20 ans. Cette procédure devrait ensuite être reproduite un nombre important de fois en décalant la « fenêtre de calibration » d'un trimestre après l'autre, afin d'évaluer le nombre de dépassements sur plusieurs trimestres. D'un point de vue opérationnel, cela est malheureusement impossible. Afin de prendre en compte une « fenêtre de calibration » plus large, le *backtesting* a tout de même été reproduit en considérant une période de calcul de quatre trimestres (au lieu d'un seul trimestre). Les résultats sont meilleurs, mais le nombre de dépassements de seuil reste trop important puisqu'il est égal à 147 selon la méthode historique, 143 selon la méthode POT et 88 selon la méthode SGT, soit bien supérieur à 50. En considérant une période de calcul de 8 trimestres, le nombre de dépassements est respectivement égal à 88, 95 et 53 selon les méthodes historique, POT et SGT.

5.3.5 Bilan des tentatives d'estimation de la VaR

Trois méthodes ont été décrites et employées afin d'estimer la *Value at Risk* au seuil de 99,5 % d'un portefeuille de Private Equity. Les résultats qui ont été reportés dans cette partie sont ceux observés sur le portefeuille fictif « 10bvo », néanmoins, l'application des mêmes méthodes sur les cinq autres portefeuilles mène à des conclusions similaires.

Chacune des approches mises en œuvre présente des avantages et des inconvénients.

— La méthode historique est simple à mettre en place et ne nécessite aucune hypothèse relative à la forme de la distribution des performances. Néanmoins cette approche n'est pas robuste puisque la VaR obtenue dépend largement de la période de calcul considérée et qu'il est invraisemblable de penser que la distribution de probabilité des performances reste identique au cours du temps. En outre, il faut avoir accès à un historique de données important, ce qui peut se révéler complexe dans le cas du Private Equity.

— La méthode paramétrique présente l'avantage de fournir, à partir des observations, les estimateurs des paramètres d'une loi donnée. La difficulté consiste à déterminer la loi qui « s'approche » le

59. voir l'algorithme (1)

plus de la distribution des performances observée. Comme anticipé, la loi normale ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. C'est pourquoi une distribution de probabilité plus « flexible » a été introduite : la *Skewed generalized « t » distribution*. Malheureusement, les résultats obtenus ne sont guère probants. En effet, si la loi utilisée ne correspond pas à la distribution de probabilité des performances réelles, alors cette approche ne peut pas aboutir à une conclusion positive.

— Enfin, la méthode Peaks Over Threshold est assurément la plus complexe des approches décrites supra. Cette méthode semi-paramétrique permet de caractériser les queues de distribution de l'échantillon de données, ce qui est intéressant lorsque l'objectif est de déterminer une mesure de risque comme la VaR. Néanmoins, la méthode POT présente deux écueils majeurs. Tout d'abord, le choix du seuil u [60] repose sur des méthodes graphiques, dès lors, sa détermination est imprécise et ne peut pas être automatisée de manière simple, or les résultats de la méthode POT varient grandement en fonction du choix de ce seuil u. Enfin, les paramètres de la GPD sont estimés à partir des valeurs de l'échantillon supérieures au seuil u, il est ainsi nécessaire de disposer d'un nombre suffisamment grand d'observations afin de pouvoir estimer de manière précise les paramètres de la GPD.

Aucune de ces trois méthodes ne semble passer l'épreuve du *backtesting* avec succès. Même s'il faut nuancer ce résultat par le fait qu'il est particulièrement complexe de définir une procédure de *backtest* pertinente pour le capital investissement, les trois approches mises en œuvre s'avèrent insatisfaisantes.

Ce constat justifie l'utilisation de méthodes économétriques plus sophistiquées, comme l'approche de simulation de Monte-Carlo proposée par TAUSCH (2016), qui reposent sur des facteurs de risque pour lesquels des informations moins parcellaires sont disponibles. Ces méthodes sont certes robustes, mais sont aussi très complexes à développer, que ce soit d'un point de vue théorique ou d'un point de vue pratique et demandent donc d'importantes ressources informatiques et temporelles.

60. avec les notations précédentes

6 Modélisation des flux de Private Equity

Sommaire

6.1 Pourquoi modéliser les *cash flows* futurs ? . . . 128
6.2 Un modèle théorique . . . 129
6.2.1 Quel modèle choisir ? . . . 129
6.2.2 Modéliser les prélèvements . . . 130
6.2.3 Modéliser les distributions . . . 131
6.2.4 Calibration . . . 133
6.2.5 Évaluer la qualité du modèle . . . 139
6.3 Mise en œuvre du modèle . . . 140
6.3.1 Discrétisation d'un processus CIR . . . 140
6.3.2 Traitement des données . . . 145
6.3.3 Calibration . . . 147
6.3.4 Projections et validation du modèle . . . 148
6.3.5 Avantages, inconvénients et pistes d'amélioration . . . 151

Ce chapitre est dédié à l'étude de la projection de flux d'investissements en Private Equity. À cet effet, un modèle relativement simple sera présenté, étudié et mis en œuvre à partir de la base de données à notre disposition. L'objectif de cette partie n'est pas d'introduire un modèle idéal, très avancé, qui capterait toutes les subtilités du capital investissement, mais d'illustrer un pan de la recherche qui est aujourd'hui en plein développement et de livrer quelques pistes de réflexion.

6.1 Pourquoi modéliser les *cash flows* futurs ?

Les travaux réalisés dans les chapitres précédents ont permis d'avoir un aperçu de la performance globale du capital investissement ainsi que de la gestion du risque induit par cette classe d'actifs à horizon un an. Néanmoins, un investisseur a parfois besoin d'obtenir des informations quant au comportement d'une position sur des horizons supérieurs à une année, pour mettre en place sa stratégie de gestion actif-passif ou pour des questions de gestion des risques par exemple. Cela est d'autant plus vrai dans le cas du Private Equity, et dans le cas des actifs illiquides en général, puisqu'il est important d'anticiper les périodes qui vont demander à l'investisseur d'apporter du *cash* et celles qui, au contraire, vont lui permettre d'encaisser du *cash*. Pour rappel, lorsqu'un investisseur s'engage à hauteur d'un certain montant auprès d'un fonds de Private Equity, la totalité de cette somme ne sera pas investie tout de suite et donc l'investisseur n'aura pas à apporter la totalité du capital dès le départ : ce montant sera effectivement appelé petit à petit par le GP. De même pour les distributions : l'investisseur doit attendre un certain nombre d'années avant de percevoir du *cash*.

HEMPLER (2019) soulève cette problématique et explique que « ne pas avoir de contrôle sur le calendrier des contributions ou des distributions provenant de la réalisation des investissements rend difficile l'estimation de l'exposition future de l'investisseur aux marchés privés » [Traduction libre]. Il souligne également le fait que modéliser les flux futurs générés par une position dans un fonds de Private Equity permettrait à l'investisseur d'atteindre au mieux l'allocation cible qu'il s'est fixée, en répondant à des questions telles que :

— Quel montant dois-je investir et à quel rythme dois-je m'engager auprès des fonds de Private Equity afin d'atteindre mon allocation cible ?

— Quels engagements futurs seront nécessaires pour maintenir l'exposition au capital investissement dans le temps ?

— Quel montant maximal puis-je investir en Private Equity avant que le risque de liquidité ne devienne une menace réelle ?

— Sur quels véhicules et pour quelles durées est-il possible de placer les sommes engagées qui ne sont pas encore appelées par le fonds ?

Ces problématiques d'« exposition » et d'« allocation cible » ne sont en effet pas à négliger dans le cas du Private Equity car, ainsi que l'explique Steve HEMPLER, « En raison de la durée de la période d'investissement [i.e. la phase durant laquelle le GP va investir dans des entreprises], qui dure généralement plusieurs années à partir de la création d'un fonds, les distributions aux LPs commenceront généralement avant que le montant total de l'engagement ne soit appelé. Pour cette raison, même lorsque le total de la somme engagée est prélevée par le GP, l'exposition d'un investisseur au fonds de Private Equity sera bien en deçà du montant initialement engagé. [...] Pour pallier ce phénomène, les investisseurs doivent adopter une stratégie de *surengagement* [1]. » [Traduction libre]. De même, pour maintenir son exposition au Private Equity il est nécessaire de prendre en compte les prélèvements et distributions futurs des positions actuelles et futures.

Enfin, modéliser les *cash flows* futurs d'un investissement permet également de valoriser la position, puisque la valeur d'un actif est égal à la somme des flux futurs actualisés générés par celui-ci.

1. traduction littérale d'*overcommitment*

6.2 Un modèle théorique

6.2.1 Quel modèle choisir ?

Une fois les objectifs de la modélisation des flux futurs générés par un investissement dans un fonds de Private Equity fixés, il convient de définir le modèle à étudier.

Ce modèle doit être capable de décrire la structure de flux d'un fonds de capital investissement i.e. il doit permettre de modéliser les prélèvements et les distributions. Il faut également que ce modèle puisse être calibré à partir des données à notre disposition c'est-à-dire à partir des structures de flux historiques de fonds de Private Equity. Puisque ce modèle a pour objectif d'introduire le lecteur à la problématique de la modélisation des *cash flows* futurs dans le domaine du Private Equity, il serait préférable que ce modèle ne soit pas trop difficile à mettre en œuvre, sous Python ou R : un modèle théorique qui propose des expressions de forme fermée sera donc privilégié. Enfin, ce modèle doit adopter le point de vue des *Limited Partners* car ce mémoire veut livrer une vision générale du capital investissement, pour un organisme assureur notamment.

Si la littérature scientifique qui porte sur la comparaison entre les performances du capital investissement et celles des marchés cotés est aujourd'hui plutôt fournie, il n'en est pas de même pour la littérature qui s'intéresse à la modélisation de la dynamique des *cash flows* générés par les fonds de Private Equity, depuis la perspective des LPs. Peu de papiers de recherche présentent en effet un modèle théorique concret applicable à des données réelles, même si de plus en plus de chercheurs semblent s'intéresser à la question.

Parmi les modèles qui ont été développés dans la littérature mais qui ne seront pas étudiés dans ce mémoire, il est possible de trouver :

— le modèle décrit par TAKAHASHI et ALEXANDER (2002) qui présente l'avantage d'être simple à implémenter et à calibrer, de par son caractère déterministe, mais qui n'est pas assez « flexible » et qui ne peut être utilisé dans une démarche de gestion des risques ;

— celui introduit par SORENSEN, WANG et YANG (2013) qui propose une approche sophistiquée pour valoriser les positions des LPs et du GP dans un fonds de Private Equity donné, à tout moment. Ce modèle se base sur la *cash flow waterfall* d'un fonds de capital investissement pour déterminer la répartition des flux de *cash* au cours du temps. Celui-ci se révèle donc particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit de valoriser une position dans un fonds de Private Equity, néanmoins il ne permet pas de modéliser les flux futurs générés par le fonds du point de vue des LPs, ce qui est notre objectif, et la complexité de l'approche choisie par les trois chercheurs rend la mise en œuvre du modèle particulièrement difficile, puisqu'elle requiert notamment la résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre dépendante du temps et entraîne une perte d'interprétabilité.

Le modèle retenu et qui sera présenté infra est celui de BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014). Ces trois chercheurs ont travaillé sur ce modèle stochastique depuis 2008 et la dernière mise à jour de leur papier de recherche date du 15 janvier 2015. Le modèle décrit dans ce papier a également été étudié par UNGSGÅRD (2020) et par FORSELL et FURENSTAM (2018) qui le comparent au « modèle de Yale », introduit par TAKAHASHI et ALEXANDER (2002).

Ce cadre théorique, proposé par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014), présente les différentes caractéristiques évoquées supra : il permet de modéliser les flux futurs d'un investissement dans un fonds de Private Equity du point de vue des LPs, il peut être calibré à partir des données à notre disposition et sa mise en œuvre n'est pas très complexe. Ce modèle repose sur la séparation en deux périodes d'un investissement dans un fonds de Private Equity : la période d'investissement, durant laquelle les fonds engagés par les LPs sont prélevés, et la période de cession, qui voit les LPs percevoir des distributions [2]. À partir

2. Bien sûr, ces deux périodes se chevauchent généralement i.e. la période de cession débute avant la fin de la période d'investissement.

de ce constat, les trois chercheurs proposent de modéliser de manière indépendante les prélèvements et les distributions de capitaux.

Toutes les variables aléatoires utilisées infra sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toutes les variables aléatoires indexées par la lettre t sont mesurables par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ qui représente l'information à disposition des différentes parties prenantes en t.

6.2.2 Modéliser les prélèvements

Avant d'entrer dans le détail du modèle mathématique, il convient d'introduire quelques notations [3].

Le montant engagé par les LPs dans le fonds de capital investissement i.e. le capital maximal que le GP peut prélever aux LPs est noté C, pour *Commited Capital*, il est défini de manière contractuelle. La durée de la période d'investissement, durant laquelle le GP fait des appels de capitaux, est notée T_c et est également contractuelle. La durée de vie du fonds est quant à elle notée T_l, telle que $T_l \geq T_c$ [4]. Enfin, pour tout $t \in [0, T_c]$, D_t, pour *Drawdowns*, correspond aux capitaux prélevés cumulés jusqu'au temps t i.e. à la somme des prélèvements qui ont eu lieu jusqu'en t et D_t, pour *Undrawn*, est égal aux capitaux engagés mais qui ne sont pas encore appelés au temps t. Dès lors, à l'origine i.e. dès le début de la période d'investissement, en $t = 0$, $D_0 = 0$ et $C_0 = C$, au vu des définitions supra. Il faut également que pour tout $t \in [0, T_c]$, $D_t = C - U_t$.

La première hypothèse du modèle est la suivante :

Hypothèse 1. *Soit $t \in [0, T_c]$, la vitesse de prélèvement des fonds est fonction du capital disponible U_t. Il existe en effet un « taux de prélèvement » δ_t, positif ou nul, tel que la dynamique des prélèvements cumulés D_t peut être décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$dD_t = \delta_t U_t \mathbb{1}_{0 \leq t \leq T_c} dt \tag{6.1}$$

La présence de l'indicatrice indique que les prélèvements de capitaux ne peuvent avoir lieu que durant la période d'investissement T_c. Si $t > T_c$, alors $D_t = D_{T_c}$.

L'équation (6.1) traduit le fait que les prélèvements sont principalement effectués durant les premiers trimestres ou premières années de la vie d'un fonds. Après cette phase de prélèvements massifs, les capitaux disponibles s'amenuisent et la vitesse de prélèvement diminue : le GP a encore besoin de *cash* pour financer certains investissements, mais beaucoup moins qu'au départ. Résoudre l'équation (6.1) permet d'obtenir l'expression des prélèvements cumulés $\forall t \in [0, T_l]$, la solution de cette équation est la suivante [5] :

$$D_t = C - C \cdot exp\left(-\int_0^{t \leq T_c} \delta_u du\right) \tag{6.2}$$

et les prélèvements instantanés, $d_t = \dfrac{dD_t}{dt}$, sont égaux à :

$$d_t = \delta_t \cdot C \cdot exp\left(-\int_0^{t \leq T_c} \delta_u du\right) \mathbb{1}_{0 \leq t \leq T_c}. \tag{6.3}$$

3. Les notations utilisées sont les mêmes que celles définies par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014), afin que le lecteur intéressé puisse se référer à la publication originale.
4. Ce qui est logique puisque la période d'investissement est seulement la première phase de la vie d'un fonds.
5. résultat classique car il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

L'équation (6.2) permet de s'assurer que $\forall t \in [0, T_l]$ et donc que $\forall t \in [0, T_c]$, $D_t \leq C$ i.e. les prélèvements cumulés ne peuvent jamais excéder l'engagement initial C.

Une première limite du modèle apparaît alors : il est impossible de prendre en compte des prélèvements supplémentaires qui s'ajouteraient au montant C engagé à l'origine. Or, en pratique, certains contrats d'investissement stipulent que le GP peut verser aux LPs des *recallable distributions*, c'est-à-dire que le GP distribue un certain montant aux LPs, montant qu'il peut ensuite prélever de nouveau pour effectuer d'autres investissements. Afin de prendre ce phénomène en compte, il est éventuellement possible de multiplier le capital initialement engagé C par un facteur supérieur à 1. Pour fixer la valeur de ce facteur, un investisseur pourrait par exemple recourir à son historique d'investissement en Private Equity. Dans la suite de ce mémoire, nous ignorerons les *recallable distributions*.

Le modèle autorise néanmoins les cas dans lesquels le capital engagé C n'est pas entièrement prélevé. En effet, puisque les prélèvements ne peuvent avoir lieu que durant la période d'investissement i.e. pour $t \in [0, T_c]$, il est possible qu'en T_c, le capital disponible U_{T_c} soit non nul.

Il est enfin nécessaire de faire une seconde hypothèse relative au « taux de prélèvement ». Ce taux ne peut pas être considéré comme constant puisque les opportunités d'investissement ne se présentent pas de manière constante au GP. C'est pourquoi les trois chercheurs ont choisi de modéliser ce taux de prélèvement par un processus stochastique, plus précisément par un processus COX-INGERSOLL-ROSS (CIR), introduit par COX, INGERSOLL JR et ROSS (1985).

Hypothèse 2. *Le « taux de prélèvement » est un processus stochastique $\delta_t, 0 \leq t \leq T_c$, adapté à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, régi par l'expression suivante :*

$$d\delta_t = \kappa(\theta - \delta_t)dt + \sigma_\delta \sqrt{\delta_t} dB_{\delta,t} \tag{6.4}$$

où $\theta > 0$ est la moyenne à long terme du « taux de prélèvement », $\kappa > 0$ correspond à la vitesse de retour à la moyenne θ et $\sigma_\delta > 0$ capte la volatilité de ce « taux de prélèvement ». $B_{\delta,t}$ est un mouvement brownien. Enfin, on supposera que $dB_{\delta,t}dB_{W,t} = \rho_{\delta W}$ où $B_{W,t}$ est un second mouvement brownien qui intervient dans la modélisation des actifs cotés, comme les actions par exemple.

Le coefficient de corrélation $\rho_{\delta W}$ traduit ici le fait que le rythme de prélèvement peut être affecté par les conditions générales du marché boursier. Les paramètres θ, κ et σ_δ seront estimés à partir des données.

Les chercheurs ont choisi de modéliser la dynamique du « taux de prélèvement » par un processus CIR car celui-ci présente des caractéristiques intéressantes : si $\kappa, \theta > 0$, alors $\forall t \in [0, T_c]$ $\delta_t \geq 0$, de plus, si $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$, le « taux de prélèvement » est presque sûrement strictement positif en tout temps t. Le fait que la solution de l'équation différentielle stochastique définie précédemment (6.4) soit toujours positive, voire strictement positive sous une certaine condition, rend le processus CIR particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit de modéliser des taux. Le modèle CIR est d'ailleurs un modèle de taux d'intérêt court terme classique en mathématiques financières. Or, puisque le « taux de prélèvement » doit être positif par définition, l'hypothèse précédente est recevable. En outre, l'équation (6.4) assure que ce « taux de prélèvement » fluctue de manière aléatoire autour de la valeur θ.

6.2.3 Modéliser les distributions

Une fois les prélèvements modélisés, il convient d'étudier la dynamique des distributions. Pour tout $t \in [0, T_l]$, les distributions cumulées en t sont notées P_t. Les capitaux distribués instantanés, qui indiquent la vitesse de distribution des capitaux, seront notés $p_t = \dfrac{dP_t}{dt}$ et sont positifs, ou nuls, pour tout $t \in [0, T_l]$. La troisième hypothèse du modèle est relative à la dynamique de p_t.

Hypothèse 3. *Les distributions instantanées p_t suivent un mouvement brownien géométrique, de telle sorte que la dynamique de* $\ln p_t$ *est la suivante :*

$$d \ln p_t = \mu_t dt + \sigma_P dB_{P,t} \tag{6.5}$$

où μ_t est le drift dépendant du temps et σ_P est la volatilité, considérée constante. Enfin, $B_{P,t}$ est un troisième mouvement brownien standard qui peut également être corrélé à $B_{W,t}$ tel que $dB_{P,t}dB_{W,t} = \rho_{PW}$.

Comme précédemment, le coefficient de corrélation ρ_{PW} permet ici de prendre en compte le fait que les conditions de marché peuvent affecter les distributions. En outre, si $\rho_{\delta W} \neq 0$ et $\rho_{PW} \neq 0$, alors les prélèvements et les distributions sont corrélés.

Spécifier la distribution de $\ln p_t$ plutôt que de p_t permet de s'assurer que les distributions instantanées ne sont jamais négatives, ce qui est nécessaire par définition des distributions.

L'équation (6.5) implique que p_t suit une distribution log-normale. Soit $s \in [0, T_l]$ et une valeur initiale p_s, alors, par intégration, la solution de (6.5) est la suivante :

$$p_t = p_s \cdot exp\left[\int_s^t \mu_u du + \sigma_P \left(B_{P,t} - B_{P,s}\right)\right], \quad t \geq s. \tag{6.6}$$

Soit $\mathbb{E}_s[.]$, l'opérateur qui correspond à l'espérance conditionnelle à l'information disponible au temps s, alors l'espérance conditionnelle de l'équation (6.6) est égale à [6] :

$$\mathbb{E}_s[p_t] = p_s \cdot exp\left[\int_s^t \mu_u du + \frac{1}{2}\sigma_P^2 (t-s)\right], \quad t \geq s. \tag{6.7}$$

Les équations 6.6 et 6.7 font toutes les deux apparaître le terme μ_t. Il convient donc de trouver une manière d'estimer ce paramètre. Pour ce faire, BUCHNER, KASERER et WAGNER définissent un multiple M_t tel que $M_t = \frac{P_t}{C} = \frac{\int_0^t p_u du}{C}$ avec $M_0 = 0$. Ce multiple n'est pas le *Multiple of Money (MoM)* défini précédemment, ici le dénominateur est en effet égal aux capitaux engagés, et non aux capitaux prélevés. Ce multiple, M_t croît avec les distributions. La quatrième hypothèse du modèle concerne la dynamique qui gouverne l'espérance de ce multiple.

Hypothèse 4. *L'espérance du multiple défini supra converge vers un multiple moyen noté m. Soit $\overline{M}_t^s = \mathbb{E}_s[M_t]$ l'espérance conditionnelle du multiple au temps t étant donné l'information disponible au temps $s \leq t$. La dynamique de $\overline{M}_t^s$ est décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$d\overline{M}_t^s = \alpha_t(m - \overline{M}_t^s)dt, \quad t \geq s \tag{6.8}$$

où m est le multiple moyen de long terme et $\alpha_t = \alpha \cdot t$ correspond à la vitesse de retour à la moyenne.

6. L'équation (6.7) provient du résultat suivant : soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[exp(X)] = exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Or, $\int_s^t \mu_u du + \sigma_P (B_{P,t} - B_{P,s}) \sim \mathcal{N}\left(\int_s^t \mu_u du, \sigma_P^2 \cdot (t-s)\right)$. En effet, l'accroissement $B_{P,t} - B_{P,s}$ suit une loi centrée de variance $t - s$, c'est une propriété du mouvement brownien.

En posant la condition initiale $\overline{M}_s^s = M_s$, la solution de l'équation (6.8) est la suivante :

$$\overline{M}_t^s = m - (m - M_s)exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(t^2 - s^2)\right], \quad t \geq s. \tag{6.9}$$

Puisque par définition $p_t = \frac{dM_t}{dt} \cdot C$, alors l'espérance des distributions instantanées est égale à $\mathbb{E}_s[p_t] = \frac{d\overline{M}_t^s}{dt} \cdot C$ et via (6.9) on obtient la relation suivante :

$$\mathbb{E}_s[p_t] = \alpha \cdot t(m \cdot C - P_s)exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(t^2 - s^2)\right], \quad t \geq s. \tag{6.10}$$

Or les équations (6.7) et (6.10) définissent la même quantité, les deux expressions doivent donc être égales i.e. pour tout temps $t \leq s$:

$$p_s \cdot exp\left[\int_s^t \mu_u du + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t-s)\right] = \alpha \cdot t(m \cdot C - P_s)exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(t^2 - s^2)\right] \tag{6.11}$$

ce qui permet de déterminer la valeur de $\int_s^t \mu_u du$. En reportant ce résultat dans l'équation (6.5) il est alors possible d'obtenir une expression analytique des distributions instantanées pour tout temps $t \geq s$:

$$p_t = \alpha \cdot t(m \cdot C - P_s)exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\alpha(t^2 - s^2) + \sigma_P^2(t-s)\right] + \sigma_P \epsilon_t \sqrt{t-s}\right\} \tag{6.12}$$

où $\epsilon_t\sqrt{t-s} \sim (B_{P,t} - B_{P,s})$ et $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette solution suppose que d'importantes distributions passées réduisent, en moyenne, les distributions futures, puisque le terme $(m \cdot C - P_s)$ décroît lorsque P_s, les distributions cumulées au temps s, augmente. Cette hypothèse peut être levée si le multiple moyen de long terme, m, dépend de l'information disponible au temps s. UNGSGÅRD (2020) propose d'ailleurs cette solution dans son mémoire : l'auteur introduit en effet un processus stochastique afin de modéliser la dynamique du multiple m_t qui dépend alors du temps. Nous avons ici fait le choix d'ignorer cette modification afin d'être au plus proche du modèle original proposé par BUCHNER, KASERER et WAGNER.

6.2.4 Calibration

Maintenant que les hypothèses et les modèles mathématiques ont été introduits, il convient de s'intéresser à la manière de calibrer ces modèles à partir de données réelles, c'est-à-dire à la méthode qui permet d'estimer la valeur des paramètres définis précédemment.

Méthode des moindres carrés conditionnels

La calibration du modèle repose sur la méthode des moindres carrés conditionnels, ou *conditional least squares*. Celle-ci est décrite en détail par KLIMKO et NELSON (1978). L'idée sous-jacente à la méthode des moindres carrés conditionnels est la suivante : soit des observations discrètes $\{X_k\}$ d'un processus stochastique, il s'agit de minimiser la somme des carrés des différences entre la valeur observée du processus stochastique en k, X_k et la valeur espérée de X_k au temps $k-1$, $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]$, pour $k = 1, ..., n$, où $\mathcal{F}_{k-1}$ est la tribu engendrée par $\{X_1, ..., X_{k-1}\}$. En termes mathématiques, la méthode des moindres carrés conditionnels consiste à déterminer $\hat{\Lambda}$, l'estimateur du jeu de paramètres Λ qui permet de minimiser la quantité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mathbb{E}\left[X_k | \mathcal{F}_{k-1}, \Lambda \right] \right)^2 . \tag{6.13}$$

Au vu des données à notre disposition, qui présentent à la fois des caractéristiques de séries temporelles [7] et de données transversales [8], les trois chercheurs proposent de remplacer X_k dans l'équation (6.13) par $\overline{X}_k$, la moyenne des X_k dans l'échantillon. En effet, pour un fonds de Private Equity donné, nous disposons d'une suite de *cash flows* et de dates auxquelles ces flux sont versés : il s'agit donc d'une série temporelle. Par ailleurs, nous disposons de ces informations pour chaque fonds de la base de données, d'où le caractère de données transversales. Dès lors, pour chaque trimestre depuis la naissance des fonds, il est possible d'estimer le montant moyen distribué ou prélevé durant le trimestre. Par exemple, il est possible d'estimer le montant moyen prélevé entre les premier et deuxième trimestres après la naissance du fonds, pour les fonds de *Buyout*.

Calibration des prélèvements

Trois paramètres interviennent dans l'expression (6.4) qui donne la dynamique du « taux de prélèvement » : la moyenne à long terme du « taux de prélèvement » θ, la vitesse de retour à la moyenne κ et la volatilité σ_δ. En outre, il faut également déterminer la valeur initiale du processus, δ_0, afin de pouvoir exploiter l'équation (6.4). Une fois ces différents paramètres estimés, il est possible de modéliser le « taux de prélèvement » et ainsi les prélèvements cumulés via l'expression (6.2).

Il s'agit donc d'estimer ces différents paramètres à partir des prélèvements reportés par les fonds qui constituent la base de données. Chaque fonds reporte de manière régulière [9] les prélèvements effectués, dès lors, pour chaque fonds nous disposons du montant de prélèvements cumulés aux points $t_k = k \cdot \Delta t$ [10], où $k = 1, ..., K$ avec $K = \dfrac{T}{\Delta t}$ et T est la durée de la période de prélèvement du fonds concerné.

Or, il est peu probable que les différents fonds utilisés pour la calibration aient la même taille, il est donc important de normaliser les prélèvements de chacun des fonds par rapport au montant total engagé dans le fonds respectif [11] afin de rendre les différents véhicules comparables. Par la suite, pour simplifier les raisonnements, l'échantillon de données utilisé pour calibrer sera supposé contenir des informations relatives à N fonds.

De même, il est improbable que les N fonds affichent des *cash flows* aux mêmes dates, cela supposerait en effet que les N fonds aient été levés au même moment. Cependant, les dates en elles-mêmes ne sont d'aucun intérêt : ce qui importe, c'est le temps écoulé entre la date de naissance du fonds et la date des flux. Pour rendre les fonds comparables, il s'agit alors d'associer, pour chaque véhicule, la suite des *cash flows* à une suite de durées écoulées depuis la naissance du fonds. Ainsi, pour chaque date $t_k = k \cdot \Delta t$ où $k = 1, ..., K'$ avec $K' = \max_j K_j$ où $j = 1, ..., N$, le montant de prélèvements cumulés de chaque fonds est disponible [12].

7. ou *time series*
8. ou *cross-sectional*
9. généralement de manière trimestrielle
10. Δt correspond à une durée de trois mois dans le cas des fonds présents dans la base de données
11. Il s'agit ici de la première différence par rapport au modèle spécifié par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014). Ces trois chercheurs proposent en effet de normaliser les prélèvements des fonds par rapport au montant total investi par le fonds. Or, il nous semble plus pertinent de normaliser les prélèvements par rapport au montant total engagé dans le fonds.
12. Si, pour un fonds j donné et une date t_k, $k > K_j$, alors il suffit de considérer que le montant de prélèvements cumulés du fonds en t_k est égal au montant de prélèvements cumulés du fonds en t_{K_j}, cela ne change pas le résultat de la calibration.

Soit $D_{k,j}^{\Delta t}$ le montant normalisé prélevé par le fonds j dans l'intervalle de temps $(t_{k-1}, t_k]$, alors les prélèvements cumulés normalisés $D_{k,j}$ du fonds j jusqu'au temps t_k sont donnés par l'expression suivante : $D_{k,j} = \sum_{i=1}^{k} D_{i,j}^{\Delta t}$. Les capitaux disponibles, c'est-à-dire les capitaux engagés qui ne sont pas encore appelés, normalisés du fonds j au temps t_k sont quant à eux égaux à : $U_{k,j} = 1 - D_{k,j}$. Dès lors, il est possible de définir $\delta_{k,j}^{\Delta t}$, le taux de prélèvement annualisé du fonds j durant la période $(t_{k-1}, t_k]$ de telle sorte que :

$$\delta_{k,j}^{\Delta t} = \frac{D_{k,j}^{\Delta t}}{U_{k-1,k} \cdot \Delta t}. \tag{6.14}$$

Soit $\overline{U}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} U_{k,j}$ les capitaux moyens disponibles des fonds présents dans l'échantillon au temps t_k. Afin d'estimer les paramètres θ et κ, il convient alors de mettre en œuvre la méthode des moindres carrés conditionnels et de minimiser la quantité suivante :

$$\sum_{k=1}^{K'} \left(\overline{U}_k - \mathbb{E}\left[U_k | \mathcal{F}_{k-1} \right] \right)^2 \tag{6.15}$$

où $\mathcal{F}_{k-1}$ est la tribu engendrée par $\{\overline{U}_1, ..., \overline{U}_{k-1}\}$. Il faut par conséquent déterminer la valeur de la quantité : $\mathbb{E}\left[U_k | \mathcal{F}_{k-1} \right]$. Il convient pour cela de reprendre l'équation (6.1) qui donne $dU_t = -\delta_t U_t dt$. Cela permet d'obtenir la dynamique des capitaux disponibles en temps discret :

$$U_k = U_{k-1} \left(1 - \delta_k^{\Delta t} \cdot \Delta t \right). \tag{6.16}$$

En prenant l'espérance conditionnelle de l'expression précédente (6.16) étant donné l'information disponible en t_{k-1} et en remplaçant U_{k-1} par $\overline{U}_{k-1}$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[U_k | \mathcal{F}_{k-1} \right] = \overline{U}_{k-1} \left(1 - \mathbb{E}\left[\delta_k^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \cdot \Delta t \right). \tag{6.17}$$

Or, la dynamique du « taux de prélèvement » est donnée par l'équation (6.4) et d'après COX, INGERSOLL JR et ROSS (1985) (p. 392) l'espérance conditionnelle d'un tel processus est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\delta_k^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] = \theta \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} \right) + \mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} \cdot \overline{\delta}_{k-1}^{\Delta t}, \tag{6.18}$$

où

$$\overline{\delta}_{k-1}^{\Delta t} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} D_{k,j}^{\Delta t}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} U_{k-1,j} \Delta t} \tag{6.19}$$

car $\overline{\delta}_{k-1}^{\Delta t}$ est la moyenne annualisée des « taux de prélèvement » des fonds dans l'échantillon pour la période $(t_{k-1}, t_k]$.

Il suffit ensuite de reporter les expressions (6.17) et (6.18) dans (6.15) pour obtenir l'expression de la quantité à minimiser pour estimer θ et κ :

$$\sum_{k=1}^{K'} \left\{ \overline{U}_k - \overline{U}_{k-1} \left[1 - \left(\theta \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} \right) + \mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} \, \overline{\delta}_{k-1}^{\Delta t} \right) \Delta t \right] \right\}^2 . \tag{6.20}$$

La quantité (6.20) sera minimisée de manière numérique afin d'obtenir les estimateurs $\hat{\theta}$ et $\hat{\kappa}$ [13]. Par ailleurs, la minimisation numérique de cette quantité nécessite de connaître la valeur initiale du « taux de prélèvement » moyen $\overline{\delta}_0^{\Delta t}$. Cette quantité ne peut pas être observée, donc par hypothèse elle sera fixée à 0 i.e. $\hat{\delta}_0 = \overline{\delta}_0^{\Delta t} = 0$.

Une fois les deux premiers paramètres estimés, il convient de trouver l'estimateur du paramètre de volatilité σ_δ. Pour ce faire, grâce à l'équation (6.14), il est tout d'abord possible de donner l'expression de la variance conditionnelle des prélèvements du fonds j sur la période $(t_{k-1}, t_k]$ [14] :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[D_{k,j}^{\Delta t} - \mathbb{E}\left[D_{k,j}^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \mathcal{F}_{k-1} \right]^2 &= \mathbb{V}\left[\delta_{k,j}^{\Delta t} \cdot U_{k-1,j} \cdot \Delta t | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \left(U_{k-1,j} \cdot \Delta t \right)^2 \mathbb{V}\left[\delta_{k,j}^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Or, de même que précédemment, la dynamique du « taux de prélèvement » est décrite par l'équation (6.4) et Cox, Ingersoll Jr et Ross (1985) (p. 392) démontrent que la variance conditionnelle d'un tel processus est égale à :

$$\mathbb{V}\left[\delta_{k,j}^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] = \sigma_{\delta_{k,j}}^2 \left(\eta_0 + \eta_1 \cdot \delta_{k-1,j}^{\Delta t} \right) \tag{6.22}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\theta}{2\kappa} \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} \right)^2 , \\ \eta_1 &= \frac{1}{\kappa} \left(\mathrm{e}^{-\kappa \cdot \Delta t} - \mathrm{e}^{-2\kappa \cdot \Delta t} \right) . \end{aligned}$$

En outre, il est également possible d'écrire, en temps discret [15] :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[D_{k,j}^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] &= \mathbb{E}\left[\delta_{k,j}^{\Delta t} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \cdot U_{k-1,j} \cdot \Delta t \\ &= \left(\gamma_0 + \gamma_1 \cdot \delta_{k,j}^{\Delta t} \right) \cdot U_{k-1,j} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{6.23}$$

13. Il n'existe donc pas de formule fermée permettant d'obtenir ces deux estimateurs. Le recours à des méthodes numériques est obligatoire.
14. La notation $\mathbb{V}_s[.]$ correspond à la variance conditionnelle à l'information disponible au temps s.
15. via l'équation (6.14)

où, d'après COX, INGERSOLL JR et ROSS (1985) (p. 392) :

$$\gamma_0 = \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa\cdot\Delta t}\right),$$
$$\gamma_1 = \mathrm{e}^{-\kappa\cdot\Delta t}.$$

Dès lors, en reportant les expressions (6.22) et (6.23) dans (6.21), l'estimateur de la variance $\sigma^2_{\delta_j}$ du taux de prélèvement du fonds j se trouve être égal à :

$$\hat{\sigma}^2_{\delta_j} = \frac{1}{K'}\sum_{k=1}^{K'} \frac{\left[D^{\Delta t}_{k,j} - \left(\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \cdot \delta^{\Delta t}_{k-1,j}\right) U_{k-1,j}\cdot\Delta t\right]^2}{\left(U_{k-1,j}\cdot\Delta t\right)^2\left(\hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_1\cdot\delta^{\Delta t}_{k-1,j}\right)} \tag{6.24}$$

où $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\eta}_0$ et $\hat{\eta}_1$ sont obtenus via les expressions supra évaluées en $(\hat{\theta}, \hat{\kappa})$. L'estimateur de la variance du processus qui décrit la dynamique du « taux de prélèvement » est alors égal à la moyenne des variances des N fonds, c'est-à-dire :

$$\hat{\sigma}^2_{\delta} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}^2_{\delta_j}. \tag{6.25}$$

Calibration des distributions

Une fois les paramètres qui interviennent dans la modélisation des prélèvements estimés, il convient de déterminer les estimateurs des paramètres nécessaires à la projection des distributions, à savoir le multiple moyen de long terme m, le coefficient α et la volatilité σ_P.

De la même manière que dans le cadre de la calibration des prélèvements, les trois paramètres précédents seront estimés grâce aux flux de distributions des différents fonds de la base de données. Par simplicité, nous supposerons que N fonds composent l'échantillon de calibration. Comme précédemment, nous disposons des distributions cumulées pour chaque fonds et pour chaque date $t_k = k\cdot\Delta t$, où $k = 1, ..., K'$ avec $K' = \max_j K_j$ où $j = 1, ..., N$ et où pour un fonds j, $K_j = \frac{T_l}{\Delta t}$ [16].

Afin de rendre les fonds comparables, il convient de normaliser les distributions par le montant total engagé dans le fonds [17]. Dès lors $P^{\Delta t}_{k,j}$ représente le montant distribué, normalisé, par le fonds j durant la période (t_{k-1}, t_k). Alors, les distributions cumulées, normalisées, du fonds j jusqu'au temps t_k sont données par : $P_{k,j} = \sum_{i=1}^{K'} P^{\Delta t}_{i,j}$.

Selon cette définition, le multiple [18] final M_j du fonds j à la fin de sa vie est égal à :

16. Ici T_l est bien la durée de vie du fonds et non plus la durée de la période de prélèvement de ce même fonds. Comme précédemment, si pour un fonds j donné et une date t_k donnée, $k > K_j$, alors il suffit de considérer que le montant de distributions cumulées du fonds en t_k est égal au montant de distributions cumulées du fonds en t_{K_j}, cela ne change pas le résultat de la calibration.

17. Pour rappel, BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014) proposent de normaliser les distributions par rapport au montant total investi dans le fonds, mais il nous semble plus cohérent de normaliser les flux par rapport au montant total engagé dans le fonds

18. Pour rappel, ce multiple n'est pas le *Multiple of Money (MoM)*. Il s'agit du multiple défini supra et qui intervient dans la modélisation des distributions.

$$M_j = \sum_{i=1}^{K'} P_{i,j}^{\Delta t}. \tag{6.26}$$

Dès lors, un estimateur sans biais et convergent du multiple moyen de long terme m est donné par la moyenne des multiples finaux M_j des N fonds :

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} M_j. \tag{6.27}$$

S'agissant du paramètre α, celui-ci n'est pas observable à partir des distributions des fonds qui constituent l'échantillon de calibration. Ce paramètre va donc être estimé grâce à la méthode des moindres carrés conditionnels. La quantité à minimiser afin de trouver l'estimateur $\hat{\alpha}$ est la suivante :

$$\sum_{k=1}^{K'} \left(\overline{P}_k - \mathbb{E}\left[P_k | \mathcal{F}_{k-1}\right]\right)^2, \tag{6.28}$$

où $\overline{P}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} P_{k,j}$ est égal aux capitaux moyens distribués par les fonds dans l'échantillon au temps t_k et où $\mathcal{F}_{k-1}$ est la tribu engendrée par $\{\overline{P}_1, ..., \overline{P}_{k-1}\}$.

Or, l'espérance conditionnelle des distributions cumulées est, par définition et via l'équation (6.9), égale à [19] :

$$\mathbb{E}\left[P_k | \mathcal{F}_{k-1}\right] = m - \left(m - \overline{P}_{k-1}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha\left(t_k^2 - t_{k-1}^2\right)\right]. \tag{6.29}$$

Dès lors, la quantité à minimiser devient alors :

$$\sum_{k=1}^{K'} \left\{\overline{P}_k - \hat{m} + \left(\hat{m} - \overline{P}_{k-1}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha\left(t_k^2 - t_{k-1}^2\right)\right]\right\}^2, \tag{6.30}$$

où l'espérance conditionnelle des distributions cumulées est évaluée en considérant l'estimateur $\hat{m}$ du multiple moyen de long terme. Dès lors, l'estimateur $\hat{\alpha}$ est déterminé en minimisant de manière numérique la quantité précédente (6.30).

Enfin, pour estimer la volatilité σ_P qui intervient dans le mouvement brownien géométrique qui décrit la dynamique des distributions instantanées, il convient tout d'abord de déterminer la variance du logarithme népérien des distributions pour chaque intervalle de temps $(t_{k-1}, t_k]$, qui est égale à :

$$\hat{\sigma}_k^2 = \ln\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(P_{k,j}^{\Delta t}\right)^2\right] - 2\ln\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P_{k,j}^{\Delta t}\right]. \tag{6.31}$$

19. Dans le papier de BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014), l'égalité n'est pas la même. En effet, selon eux : $\mathbb{E}\left[P_k | \mathcal{F}_{k-1}\right] = m \cdot C - \left(m \cdot C - \overline{P}_{k-1}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha\left(t_k^2 - t_{k-1}^2\right)\right]$. Or, il s'agit selon nous d'une erreur. En effet, puisque les flux ont été normalisés par rapport aux capitaux engagés, il n'y a pas lieu de multiplier m par C dans l'équation (6.29).

Dès lors, selon BUCHNER, KASERER et WAGNER, la variance σ_p^2 est égale à la moyenne des variances de chaque période individuelle $\hat{\sigma}_k^2$ pour $k \in [\![1, K']\!]$, pondérée par la proportion de capitaux distribués en moyenne au cours de la période par rapport au multiple moyen de long terme i.e. :

$$\hat{\sigma}_P^2 = \sum_{k=1}^{K'} \left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \left(P_{k,j}^{\Delta t} \right)}{\hat{m}} \hat{\sigma}_k^2 \right). \tag{6.32}$$

6.2.5 Évaluer la qualité du modèle

Une fois le modèle calibré aux données réelles et les trajectoires de flux simulées, il sera important d'évaluer la qualité d'ajustement du modèle, c'est-à-dire de savoir si les projections correspondent à ce qui est réellement observé et si le modèle est suffisamment flexible pour anticiper ce qui est susceptible de se produire.

Pour ce faire, une procédure de *backtesting* sera mise en place : après avoir construit un échantillon de fonds sur lequel calibrer et tester le modèle [20], il faudra séparer cet échantillon en deux jeux de données, à savoir un jeu de données d'apprentissage et un jeu de données de validation, le modèle sera alors calibré sur le premier jeu de données et testé sur le second.

Le test d'adéquation reposera alors sur l'utilisation du coefficient de détermination, aussi noté R^2. Ce coefficient permet de mesurer la qualité de prédiction d'une régression linéaire. Le R^2 est souvent interprété comme étant la proportion de la variance de la variable dépendante expliquée par les variables indépendantes. Ici, la variable dépendante est le vecteur constitué des flux réels moyens, observés sur le jeu de données de validation, et la seule variable indépendante est le vecteur qui contient les *cash flows* moyens simulés grâce au modèle calibré sur le jeu de données d'apprentissage.

D'un point de vue mathématique, le coefficient de détermination est défini de la manière suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2}$$

où n est le nombre d'observations, y_i est la valeur prise par la $i^{\text{ème}}$ observation, $\hat{y}_i$ est la valeur prédite par le modèle pour cette $i^{\text{ème}}$ observation et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ est la moyenne empirique des y_i.

Afin de mieux comprendre l'interprétation du R^2, il est possible de définir les trois quantités suivantes :

— ESS $= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$ représente la partie de la variation expliquée par le modèle, c'est la *Explained Sum of Squares*,

— RSS $= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ représente la partie de la variation expliquée par les résidus, c'est la *Residual Sum of Squares*,

20. L'échantillon devra contenir des fonds qui présentent des caractéristiques similaires, en termes de stratégie ou de secteur géographique par exemple.

— enfin, $\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ représente la variation totale autour de la moyenne, c'est la *Total Sum of Squares*[21].

Dès lors, il est effectivement possible d'écrire, comme supra :

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = \frac{\text{TSS} - \text{RSS}}{\text{TSS}} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} \end{aligned}$$

Le R^2 s'entend alors bien comme le rapport entre la somme des carrés des écarts à la moyenne prédits par le modèle et la somme des carrés des écarts à la moyenne réellement observés.

Le R^2 est donc inférieur à 1 : plus il se rapproche de 1, plus cela signifie que le modèle permet de reproduire la distribution des observations i.e. plus le pouvoir de prédiction du modèle est fort. Par exemple, un modèle pour lequel chaque prédiction serait égale à la moyenne des observations $\overline{y}$ aurait un R^2 égal à 0, puisque dans ce cas $\text{ESS} = 0$.

Remarque. *Dans le cas d'une régression linéaire univariée i.e. lorsque le modèle ne compte qu'une seule variable indépendante, le coefficient de détermination est égal au carré du coefficient de corrélation linéaire entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs observées i.e.* $R^2 = \rho_{\text{PEARSON}} (\hat{y}, y)^2$.

6.3 Mise en œuvre du modèle

Maintenant que les éléments théoriques du modèle ont été développés, qu'il s'agisse de la modélisation en tant que telle ou de la calibration, il est possible de projeter les *cash flows* futurs d'un fonds de capital investissement en discrétisant les équations (6.4) et (6.12). Dès lors, pour un fonds et des caractéristiques donnés, un grand nombre de trajectoires de *cash flows* peuvent être obtenues, de par le caractère stochastique du modèle décrit supra. Ces trajectoires permettent alors d'évaluer différentes statistiques qui peuvent être utilisées dans le cadre de la gestion des risques, telles que la trajectoire moyenne ou des estimations des quantiles de trajectoire à un seuil donné : il s'agit en fait d'appliquer la méthode de Monte-Carlo.

6.3.1 Discrétisation d'un processus CIR

Avant d'évoquer le travail effectué sur les données afin de calibrer le modèle et de présenter les résultats de celui-ci, nous souhaitons mettre l'accent sur un point qui pourrait se révéler utile à quiconque entreprendrait d'implémenter le modèle : la discrétisation du processus COX-INGERSOLL-ROSS tel que décrit par l'équation (6.4).

Comme vu précédemment, les processus CIR affichent des caractéristiques intéressantes : en reprenant les notations de l'équation (6.4), si $\kappa, \theta > 0$ le processus est toujours positif (ou nul) et si $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$ alors le processus ne s'annule pas. Il s'agit donc de conserver ces propriétés lors de l'implémentation. Or, les processus CIR n'admettent pas de discrétisation exacte, différentes méthodes d'approximation peuvent alors être employées afin de discrétiser un tel processus.

21. La démonstration de l'équation $\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS}$ se trouve en annexe B.

Les schémas d'EULER et de MILSTEIN

Les schémas de discrétisation d'EULER, ou EULER-MARUYAMA, et de MILSTEIN font partie des approximations les plus utilisées dans la pratique. Les éléments théoriques évoqués dans cette section sont notamment issus de PLANCHET et THÉROND (2010), le lecteur intéressé pourra donc se référer à cet article s'il souhaite obtenir plus d'information au sujet des résultats présentés infra.

Soit un processus défini par l'équation différentielle stochastique suivante où B est un mouvement brownien standard :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

ou sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s. \tag{6.33}$$

Selon le schéma d'EULER, le processus discret $\widetilde{X}$ est l'approximation du processus continu X où :

$$\widetilde{X}_{t+\Delta} = \widetilde{X}_t + \mu(\widetilde{X}_t, t)\Delta + \sigma(\widetilde{X}_t, t)\sqrt{\Delta} \cdot \epsilon$$

où Δ est le pas de temps et ϵ est une vraible aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Selon le schéma d'EULER, une approximation du « taux de prélèvement » solution de l'équation (6.4) est alors fournie par le processus discret suivant :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = \widetilde{\delta}_t + \kappa(\theta - \widetilde{\delta}_t)\Delta + \sigma_\delta \sqrt{\widetilde{\delta}_t \cdot \Delta} \cdot \epsilon. \tag{6.34}$$

Selon le schéma de MILSTEIN maintenant, le processus discret $\widetilde{X}$ est une approximation du processus continu X tel que défini par l'équation (6.33), où

$$\widetilde{X}_{t+\Delta} = \widetilde{X}_t + \mu(\widetilde{X}_t, t)\Delta + \sigma(\widetilde{X}_t, t)\sqrt{\Delta} \cdot \epsilon + \frac{\sigma_x(\widetilde{X}_t, t)\sigma(\widetilde{X}_t, t)}{2}\delta(\epsilon^2 - 1) \tag{6.35}$$

où $\sigma_x(\widetilde{X}_t, t)$ est la dérivée par rapport au premier argument de la fonction $\sigma(.,.)$ évaluée en $(\widetilde{X}_t, t)$. Dès lors, le résultat de cette approximation dans le cas du processus CIR est le suivant :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = \widetilde{\delta}_t + \kappa(\theta - \widetilde{\delta}_t)\Delta + \sigma_\delta \sqrt{\widetilde{\delta}_t \cdot \Delta} \cdot \epsilon + \frac{\sigma_\delta^2}{4}\delta(\epsilon^2 - 1). \tag{6.36}$$

Ces deux schémas de discrétisation présentent l'avantage d'être relativement simples à mettre en œuvre, en outre, comme énoncé précédemment, ce sont des approches « classiques ». Cependant, rien n'interdit à $\widetilde{\delta}_{t+\Delta}$ d'être négatif, ce qui est particulièrement problématique puisque lors de l'itération suivante, il est alors impossible de prendre la racine carrée de $\widetilde{\delta}_t \cdot \Delta$ [22]. Les schémas d'EULER et de MILSTEIN n'ont donc pas été retenus.

22. Δ est en effet positif puisqu'il s'agit d'un pas de temps, donc si $\widetilde{\delta}_t$ est négatif, $\widetilde{\delta}_t \cdot \Delta$ l'est également.

D'autres schémas de discrétisation possibles

Face à ce constat, Aurélien ALFONSI (2005) présente dans un article de recherche d'autres approches qui peuvent être mises en place afin de contourner les problèmes mentionnés supra.

La première approche évoquée est celle introduite par DEELSTRA, DELBAEN et al. (1998) et consiste en l'approximation suivante :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = \widetilde{\delta}_t + \kappa(\theta - \widetilde{\delta}_t)\Delta + \sigma_\delta \sqrt{\widetilde{\delta}_t \mathbb{1}_{\widetilde{\delta}_t > 0} \cdot \Delta} \cdot \epsilon. \tag{6.37}$$

Ce schéma présente l'avantage d'être toujours défini, puisque si le « taux de prélèvement » est négatif en t, alors la racine carrée qui intervient dans l'équation précédente (6.37) est nulle. Néanmoins, il ne garantit pas le caractère positif du processus. Pour remédier à cela, DIOP (2003) a proposé le schéma suivant :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = |\widetilde{\delta}_t + \kappa(\theta - \widetilde{\delta}_t)\Delta + \sigma_\delta \sqrt{\widetilde{\delta}_t \cdot \Delta} \cdot \epsilon|. \tag{6.38}$$

Cette fois, le processus est toujours positif ou nul. Cependant, Aurélien ALFONSI (2005) montre que ce schéma n'est pas optimal, c'est pourquoi il propose le schéma suivant :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = \widetilde{\delta}_t + \left(\kappa \cdot \theta - \frac{\sigma_\delta^2}{2} - \kappa \cdot \widetilde{\delta}_{t+\Delta}\right)\Delta + \sigma_\delta \sqrt{\widetilde{\delta}_{t+\Delta} \cdot \Delta} \cdot \epsilon. \tag{6.39}$$

Il est possible de résoudre l'équation (6.39) de manière explicite si la condition $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$ est respectée. Sous cette condition, $\sqrt{\widetilde{\delta}_{t+\Delta}}$ est en effet la seule racine positive d'un polynôme du second degré [23]. Néanmoins, lorsque $2\kappa\theta < \sigma_\delta^2$, ce schéma « ne converge pas de façon satisfaisante » selon Aurélien ALFONSI (2012). Il mentionne même le fait que « ce problème est réellement ennuyeux pour des applications financières », pour lesquelles il est tout à fait possible d'obtenir des valeurs de paramètres qui ne répondraient pas à la condition $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$.

La solution retenue

Au vu des différents problèmes rencontrés précédemment, nous avons donc décidé d'utiliser le schéma de discrétisation développé et présenté par HEFTER et HERZWURM (2018). Ce schéma, appelé schéma « *truncated* MILSTEIN » par les auteurs, possède de nombreuses propriétés très intéressantes, détaillées et démontrées dans le papier de recherche, entre autres, le comportement de la variable aléatoire au voisinage de zéro qui répond à nos attentes i.e. la variable aléatoire ne peut pas prendre de valeur négative.

Soit la fonction $\Theta_{Mil} : \mathbb{R}_0^+ \times]0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ définie par [24] :

$$\Theta_{Mil}(x, t, w) = \left(\left[\max\left(\sqrt{\frac{\sigma_\delta^2}{4} \cdot t}, \sqrt{\max\left(\frac{\sigma_\delta^2}{4} \cdot t, x\right)} + \frac{\sigma_\delta}{2} \cdot w \right) \right]^2 + \left[\kappa \cdot \theta - \frac{\sigma_\delta^2}{4} - \kappa \cdot x\right] \cdot t \right)^+$$

23. La démonstration est explicitée dans l'article de recherche cité supra.
24. avec les notations précédentes pour les périmètres du processus CIR qui régit l'évolution du « taux de prélèvement »

alors le schéma de discrétisation proposé et retenu dans le cadre de ce mémoire est le suivant :

$$\widetilde{\delta}_{t+\Delta} = \Theta_{Mil}\left(\widetilde{\delta}_t, \Delta, B_{t+\Delta} - B_t\right). \tag{6.40}$$

Les auteurs ont appelé ce schéma « *truncated* MILSTEIN » car « ce schéma coïncide avec le schéma de MILSTEIN tant que la valeur de la variable aléatoire est "loin" de 0 » [traduction libre].

Visualisation des différentes méthodes de discrétisation

Une fois les différents schémas de discrétisation explicités et notre choix motivé, il peut être intéressant de visualiser les trajectoires produites par ces méthodes multiples avec des paramètres choisis de manière totalement arbitraire. Pour cela, une fonction permettant de simuler un processus CIR en utilisant les différents schémas présentés supra a été développée en Python [25].

Afin de pouvoir comparer les différents méthodes, l'aléa a dû être « neutralisé ». En effet, pour que les schémas de discrétisation soient comparables il faut que le mouvement brownien qui est utilisé dans chacun des schémas soit le même. Pour cela, la fonction « np.random.seed » du package « random » est utilisée.

Il faut ensuite définir les paramètres des processus CIR à modéliser. S'agissant des paramètres généraux, définis de manière arbitraire, l'horizon de projection est fixé à 7 unités [26] et le pas de discrétisation est égal à 0.25 unité, soit un total de 28 périodes. La valeur initiale du processus est égale à 0, comme dans le cas de la modélisation du « taux de prélèvement ». Deux jeux de paramètres, correspondant à deux situations, ont alors été introduits.

1. Dans le premier cas, il s'agit de comparer les différents schémas lorsque la condition $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$ est vérifiée [27]. Dès lors, les valeurs des paramètres, fixées arbitrairement, sont : $\kappa = 2$, $\theta = 2$ et $\sigma_\delta = 1$. Puisque $2 \times 2 \times 2 = 8 > 1^2$, la condition est bien remplie.
2. Dans le second cas, l'objectif est de réaliser la même comparaison que précédemment, mais lorsque la condition n'est pas vérifiée. Les paramètres sont ici égaux à : $\kappa = 2$, $\theta = 3$ et $\sigma_\delta = 4$. Puisque $2 \times 2 \times 3 = 12 < 4^2$, la condition précédente n'est ici pas vérifiée.

Les schémas d'EULER, de DIOP, d'ALFONSI, de MILSTEIN et *truncated* MILSTEIN correspondent respectivement aux schémas décrits par les équations (6.34), (6.38), (6.39), (6.36) et (6.40). Les résultats sont présentés sur les figures ci-dessous (6.1) et (6.2).

Dans le premier cas i.e. lorsque la condition est respectée, figure (6.1), les différents schémas de discrétisation semblent valides. En effet, la valeur du processus reste toujours positive et les différents schémas mènent approximativement aux mêmes valeurs pour chaque date. Seule la trajectoire obtenue à partir du schéma introduit par ALFONSI diffère sensiblement des autres. Il est également intéressant de remarquer que les trajectoires issues du schéma d'EULER-MARUYAMA et du schéma de DIOP coïncident : c'est tout à fait logique puisque tant que la variable aléatoire modélisée par un processus CIR est positive ces deux schémas sont les mêmes, comme le montrent les équations (6.34) et (6.38). D'autre part, les trajectoires obtenues via le schéma de MILSTEIN et via le schéma *truncated* MILSTEIN coïncident également à partir du temps 1. Cet élément confirme que si la valeur du processus « s'éloigne de 0 », alors les deux schémas conduisent aux mêmes résultats, ce qui a été explicité et démontré par HEFTER et HERZWURM (2018).

25. Bien que le code relatif au traitement des données ait été développé en R, le modèle de projection stochastique a été implémenté en Python, par simple question d'habitude.
26. jours, mois, années, peu importe ici
27. Les notations utilisées sont celles introduites précédemment i.e. celles qui interviennent dans l'équation (6.4).

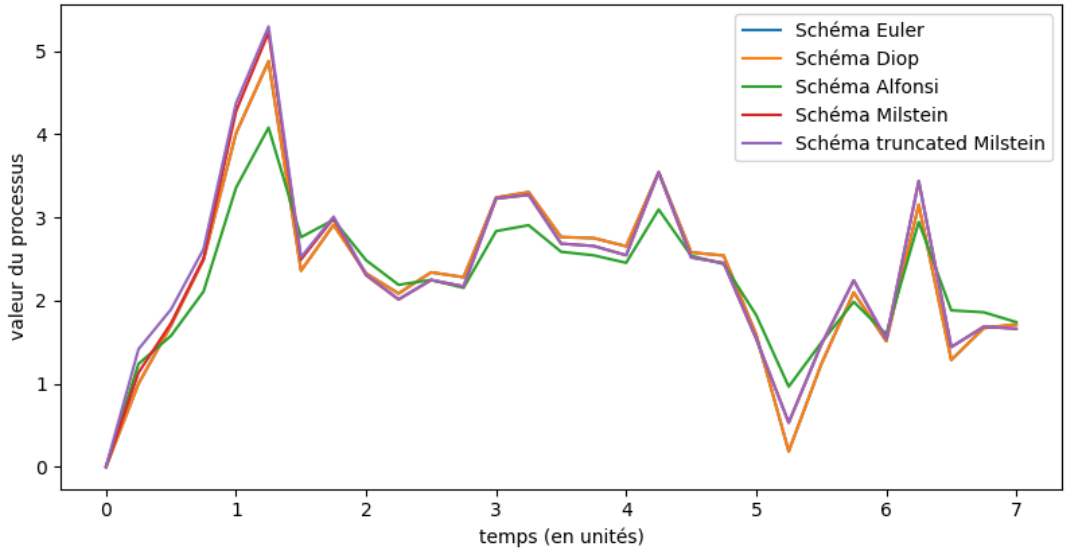


FIGURE 6.1 – Projection d'un processus CIR selon différents schémas de discrétisation
Cas 1 - Condition vérifiée

Dans le second cas i.e. lorsque la condition n'est pas vérifiée, figure (6.2), les conclusions sont différentes. Ici, les schémas d'EULER-MARUYAMA (en bleu), d'ALFONSI (en vert) et de MILSTEIN (en rouge) ne sont pas viables. En effet, juste après la date $t = 5$ unités, les trois trajectoires s'arrêtent : elles ne sont en fait plus définies au-delà de cette date, car le processus prend des valeurs négatives i.e. les trois schémas de discrétisation aboutissent à une erreur. Les schémas de DIOP et *truncated* MILSTEIN garantissent quant à eux le caractère positif du processus : c'est le résultat escompté. En outre, une fois encore, lorsque la valeur du processus « s'éloigne de 0 », les trajectoires issues des schémas de MILSTEIN et *truncated* MILSTEIN coïncident. Néanmoins, quand la valeur du processus est « proche de 0 », les deux trajectoires se séparent.

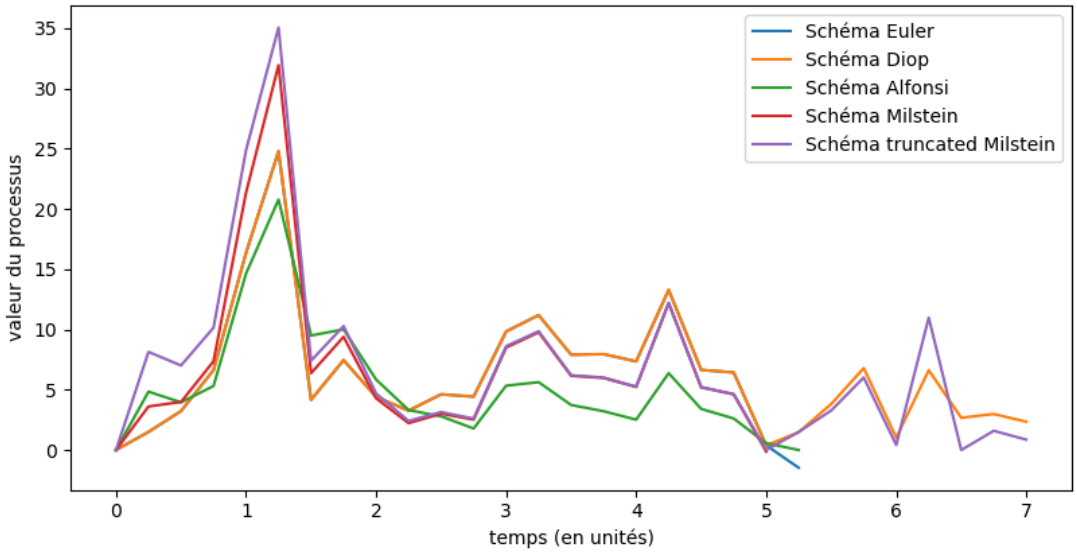


FIGURE 6.2 – Projection d'un processus CIR selon différents schémas de discrétisation
Cas 2 - Condition non vérifiée

Au vu des résultats présentés supra [28], le schéma *truncated* MILSTEIN se révèle donc suffisamment flexible pour permettre de discrétiser un processus CIR dont les paramètres ne vérifient pas la condition $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$. En outre, ce schéma possède des propriétés intéressantes, démontrées par HEFTER et HERZWURM (2018). Ces différents éléments font donc du schéma *truncated* MILSTEIN une méthode appropriée dans le cadre de la discrétisation d'un processus CIR et ont motivé le choix de ce schéma lors de l'implémentation du modèle en Python.

Remarque. *Aurélien* ALFONSI *(2012) rappelle qu'il est possible, au prix d'une grande complexité, de « simuler les incréments du processus CIR sans avoir recours à des approximations ». Ces incréments « suivent [en effet] une loi du chi-deux décentrée qui peut être simulée exactement ». Cette piste n'a pas été envisagée car, comme l'explique* ALFONSI, *« la simulation exacte est [...] bien plus coûteuse en temps de calcul et les schémas de discrétisation s'avèrent être plus efficaces pour générer des trajectoires et faire du calcul par méthode de Monte-Carlo ».*

6.3.2 Traitement des données

Afin de mettre en œuvre le modèle, il faut tout d'abord sélectionner, au sein de la base décrite dans le chapitre 4, les données qui serviront à la calibration et au test du modèle.

Le premier avantage du modèle introduit par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014) est sa « flexibilité » : à condition d'avoir suffisamment de données, il est possible de calibrer le modèle et donc d'obtenir un jeu de paramètres pour chaque stratégie de fonds de capital investissement. Bien qu'appartenant au domaine du Private Equity, les chapitres précédents ont effectivement permis de souligner le fait que les fonds de *Buyout*, de *Venture Capital* ou encore de *Debt* ont des caractéristiques bien spécifiques, dès lors, il semble invraisemblable que les dynamiques de prélèvements et de distributions de ces différents fonds puissent être modélisées à partir du même jeu de paramètres. De même, la cible géographique d'un fonds influe très certainement sur son rythme de prélèvement et de distribution.

Les spécifications et les résultats décrits infra sont ceux obtenus pour les fonds de capital transmission, sans considération de la cible géographique du fonds. Cela signifie que l'objectif est, dorénavant, de modéliser les flux futurs d'un fonds de *Buyout*.

Il faut tout d'abord sélectionner les fonds qui vont constituer la base de travail : dans le cas présent, il s'agit de tous les fonds de *Buyout* économiquement morts, au sens défini dans le chapitre 4. Pour chacun de ces fonds, il s'agit ensuite de déterminer le montant de prélèvements et de distributions cumulés pour chaque trimestre de sa vie : par exemple, si un fonds a une durée de vie de 10 ans, alors pour chaque trimestre t où $t \in [\![1, 40]\!]$, nous disposons des montants de prélèvements et de distributions cumulés.

Une fois cette première étape réalisée, il faut rendre les fonds comparables. Pour cela, chacun des flux déterminés précédemment doit être normalisé par le montant total engagé dans le fonds [29]. Ici survient le premier problème : en effet, le montant de capitaux engagés n'est pas disponible dans la base de données. Deux solutions s'offrent alors à nous : soit considérer que le montant de capital engagé est en fait égal au montant appelé, soit émettre une hypothèse quant au rapport entre les capitaux appelés et les capitaux engagés. Notre choix s'est porté sur cette seconde solution. En effet, dans certains cas, les fonds de Private Equity n'appellent pas la totalité des capitaux engagés initialement par les LPs et ne pas tenir compte de cet élément conduirait à des résultats erronés. LJUNGQVIST et RICHARDSON (2003) estiment qu'en moyenne un fonds de capital investissement appelle 93,6 % des capitaux engagés. Dès lors, pour chacun des fonds de la base de travail, nous avons divisé le montant total appelé par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,85; 1]$ afin d'obtenir le montant engagé dans le fonds. Cette hypothèse est selon nous recevable même si, bien sûr, il eût été préférable d'avoir accès aux montants réellement engagés.

28. Les figures (6.1) et (6.2) montrent les résultats obtenus pour un vecteur d'incréments de brownien donné, mais la réalisation d'un grand nombre de simulations conduit aux mêmes conclusions.

29. Cette normalisation est imposée par la procédure de calibration.

Cette normalisation des flux est également très importante puisque les données à disposition peuvent parfois provenir d'un des LPs et non du fonds directement. De ce fait, les montants prélevés et distribués sont ceux investis et reçus par le LP en question. Néanmoins, puisque les *Limited Partners* font tous face à la même structure de *cash flows* (en proportion du montant engagé dans le fonds bien évidemment), la normalisation des flux permet de dépasser l'hétérogénéité des sources de données.

In fine, la base de travail est constituée de 259 fonds de *Buyout* [30]. L'échantillon d'apprentissage contient alors deux tiers des données, soit 173 fonds déterminés aléatoirement, et l'échantillon de validation est construit à partir des 86 fonds restants.

Dès lors, il est possible de visualiser les trajectoires des prélèvements et des distributions des fonds. Représenter les trajectoires des 259 fonds n'aurait aucun sens, c'est pourquoi nous avons décidé de ne visualiser que les trajectoires correspondant au 5e centile (trajectoire *low* sur la figure ci-dessous), au 95e centile (trajectoire *up*), à la médiane des flux (trajectoire trajectoire *median*) et à la moyenne pondérée des flux par la taille des fonds (trajectoire *mean*). Les résultats sont présentés sur la figure suivante (6.3) :

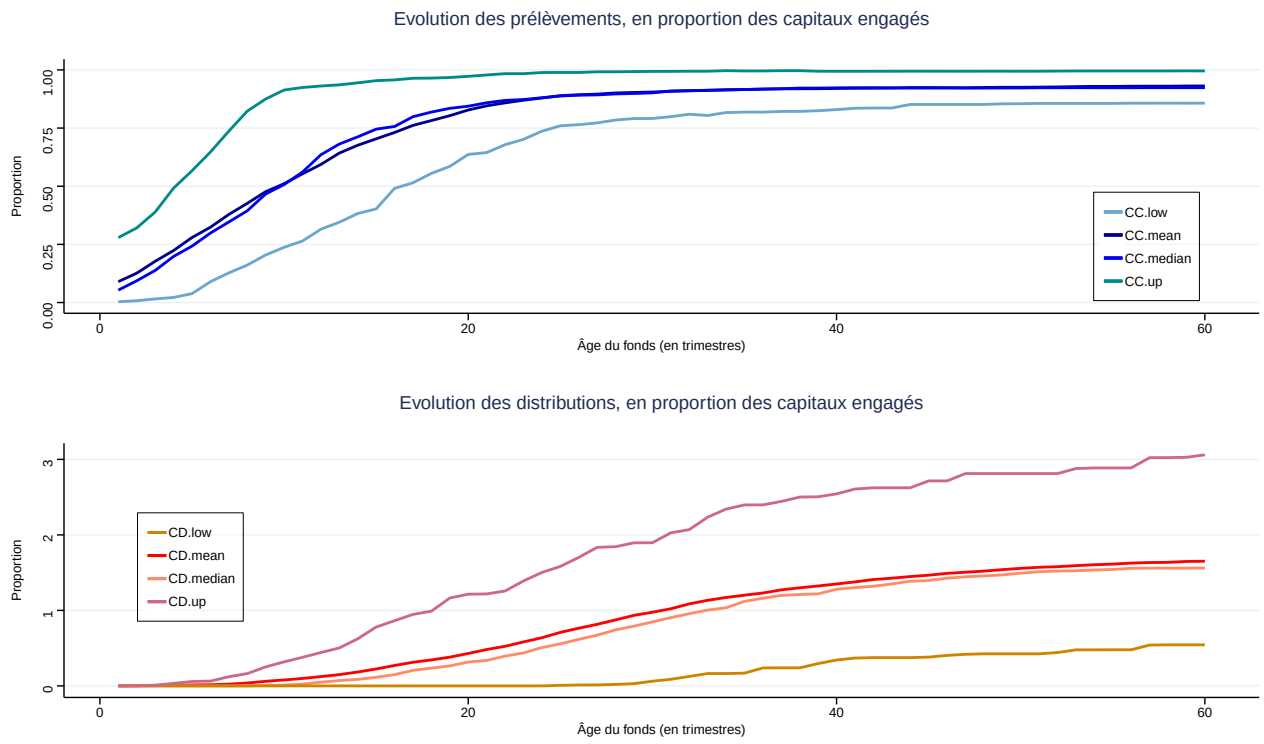


FIGURE 6.3 – Trajectoires des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Buyout* de la base de travail

Certains fonds ont une durée de vie supérieure à 60 trimestres, soit 15 ans, mais les prélèvements et distributions n'évoluent plus de manière significative après ces 60 premiers trimestres, c'est pour cela que l'échelle de temps de la figure ci-dessus s'arrête à 60 trimestres.

Il est également possible de représenter de la même manière l'évolution des *cash flows* cumulés i.e. de la différence entre les montants distribués et les montants prélevés des fonds de la base de travail. La figure ci-dessous (6.4) permet de visualiser la fameuse « courbe en J ». Il faut en moyenne 29 semestres, soit un peu plus de 7 ans, pour que le montant total distribué dépasse le montant total prélevé par le fonds. Dans les 5 % de cas les meilleurs, il suffit de 16 semestres, soit 4 ans, pour que le seuil de rentabilité soit dépassé.

30. nombre qui correspond aux observations faites sur la figure (4.5)

De plus, la figure ci-dessous permet également de constater qu'en moyenne l'exposition maximale des LPs à un fonds de capital investissement est égal à 50 % du montant qu'ils ont engagé dans le fonds et que cette exposition maximale survient, en moyenne, au bout de 13 trimestres [31].

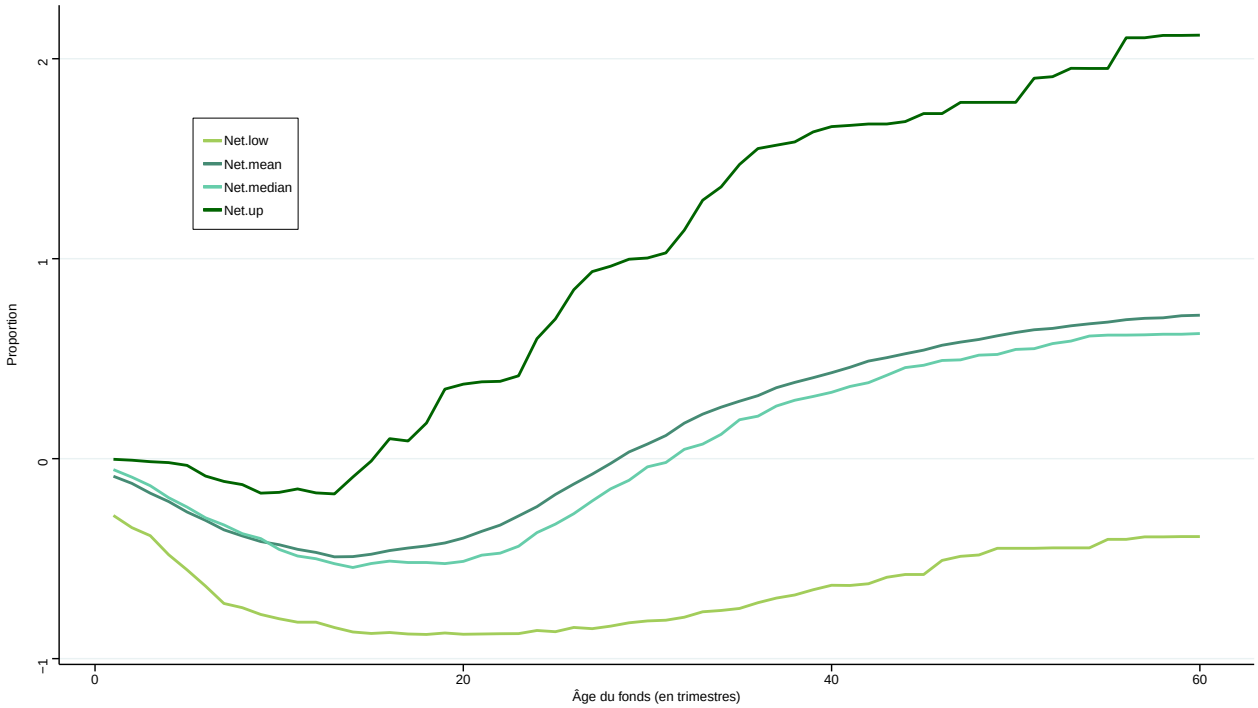


FIGURE 6.4 – Évolution des *cash flows* cumulés des fonds de *Buyout* de la base de travail, en proportion des capitaux engagés dans les fonds

6.3.3 Calibration

Après avoir visualisé l'évolution des flux des fonds dans la base de travail, il s'agit de calibrer le modèle de projection à partir de l'échantillon d'apprentissage. Pour cela, il suffit de suivre la procédure décrite supra : les algorithmes de calibration ont été implémentés, comme le reste du modèle, en Python. Les résultats de la calibration sont présentés dans les deux tableaux suivants (6.1) et (6.2).

$\hat{\theta}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\sigma}_\delta$
0,2867	5,3039	4,7282

TABLE 6.1 – Estimateurs des paramètres intervenant dans la modélisation des prélèvements

$\hat{m}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}_P$
1,5755	0,0316	1,4810

TABLE 6.2 – Estimateurs des paramètres intervenant dans la modélisation des distributions

Puisque la calibration nécessite le recours à la méthode des moindres carrés conditionnels, qui consiste en la minimisation d'une certaine quantité, il est possible de vérifier de manière graphique que l'algorithme mène bien à cette minimisation. La figure (6.5) représente la surface décrite par l'évolution de la quantité

31. C'est la date pour laquelle la « courbe en J » moyenne connaît son minimum.

(6.20) en fonction des paramètres θ et κ. D'après ce qui a été défini précédemment, les estimateurs $\hat{\theta}$ et $\hat{\kappa}$ permettent de minimiser cette quantité. Ce jeu de paramètres est représenté par l'étoile rouge sur la figure et il est alors possible de constater qu'en ce point, la surface connaît bien un minimum.

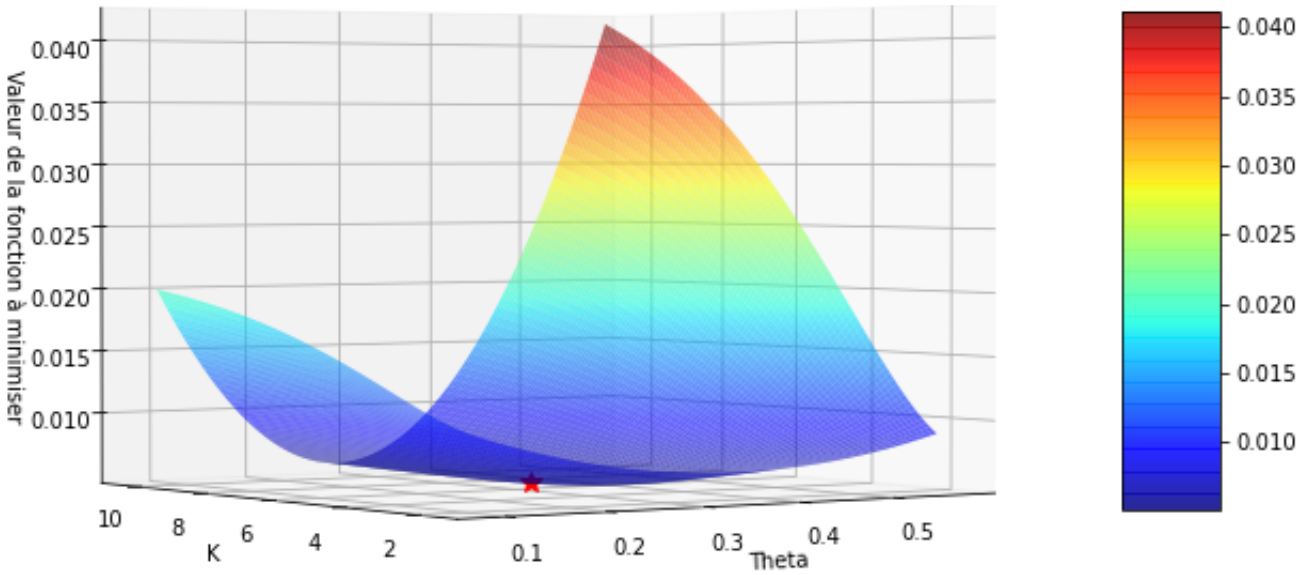


FIGURE 6.5 – Évolution, en fonction de θ et de κ, de la quantité à minimiser qui intervient dans la calibration des prélèvements

Il est également intéressant de noter que $2\hat{\theta}\hat{\kappa} \simeq 3,0413 < \hat{\sigma}_\delta^2 \simeq 22,3559$ i.e. la condition $2\kappa\theta \geq \sigma_\delta^2$ n'est pas vérifiée, d'où l'intérêt d'avoir implémenté le schéma de discrétisation *truncated* MILSTEIN pour modéliser le processus CIR.

6.3.4 Projections et validation du modèle

Une fois les précédentes étapes réalisées, il est enfin possible de projeter une structure de trajectoires de prélèvements et de distributions pour un investissement dans un fonds de *Buyout* fictif qui a des caractéristiques données [32].

Pour illustrer les résultats du modèle, nous supposerons qu'un LP s'engage à hauteur d'un million d'euros [33] dans un fonds de capital transmission dont la durée d'investissement T_C et la durée de vie T_l, fixées de manière contractuelle, sont respectivement égales à 10 ans et 15 ans.

La figure suivante (6.6) présente les résultats obtenus grâce à 100 000 simulations, avec un pas de discrétisation trimestriel, que nous comparons aux données de l'échantillon de validation. Nous avons superposé les trajectoires simulées (en traits discontinus) aux trajectoires réellement observées (en traits pleins), en reprenant les statistiques utilisées supra i.e. les trajectoires qui correspondent au 5e centile, au 95e centile,

32. Précédemment, nous avons mentionné le fait que les mouvements browniens qui interviennent dans la modélisation du « taux de prélèvement » et des distributions instantanées sont corrélés à un mouvement brownien « de marché » $B_{W,t}$. En réalité, pour l'usage que nous souhaitons faire du modèle i.e. obtenir la distribution des trajectoires sur un grand nombre de simulations, cette spécification n'a en fait quasiment aucune influence sur les résultats obtenus, toutes choses égales par ailleurs. De plus, cette spécification n'a de sens que si, en plus de modéliser des flux d'investissement en Private Equity, il est aussi question de modéliser l'évolution d'un « marché actions de référence ». C'est pourquoi, afin de ne pas introduire de complexité supplémentaire et au vu de l'impact négligeable de ces paramètres sur les résultats, nous avons ici considéré que $\rho_{\delta,W} = \rho_{P,W} = 0$.

33. Le montant engagé n'a de toute manière aucune importance puisque les flux seront normalisés, comme précédemment, par les montants engagés dans le fonds.

à la médiane et à la moyenne pondérée[34]. La figure présentée en annexe (A.22) permet quant à elle de comparer les trajectoires des *cash flows* cumulés.

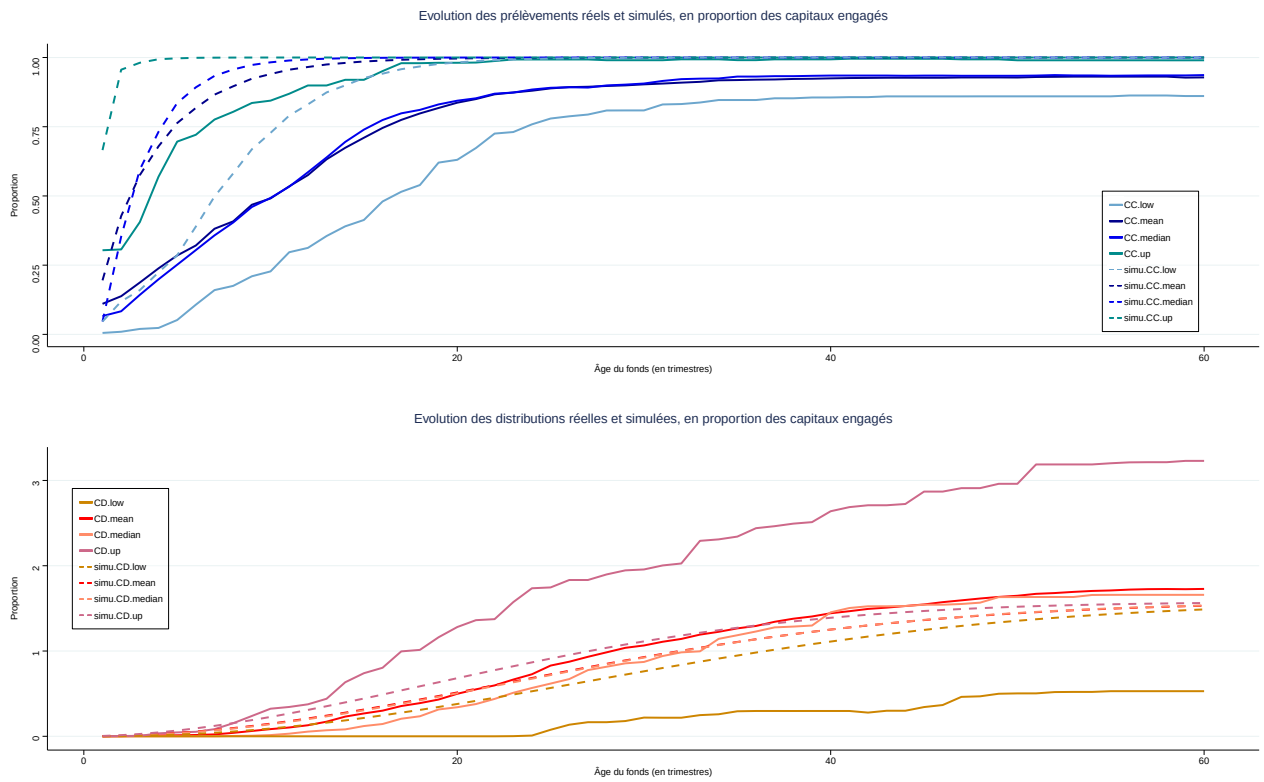


FIGURE 6.6 – Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Buyout* du jeu de données de validation

Avant même de regarder la valeur du coefficient de détermination pour les trajectoires moyennes simulées des prélèvements et des distributions, il est possible de tirer des conclusions à partir des différentes figures.

S'agissant des prélèvements tout d'abord, le constat est immédiat : le modèle ne permet pas du tout de modéliser de manière fiable les flux appelés par le fonds. Toutes les courbes issues de la simulation, qu'il s'agisse des centiles, de la moyenne ou de la médiane, mènent à une surévaluation très importante des montants prélevés : par exemple, tandis que sur les données réelles le montant moyen de prélèvements cumulés est environ égal à 50 % du capital engagé au bout de 10 trimestres, les projections indiquent quant à elles un montant moyen prélevé environ égal à 100 % à la même date, la différence est donc flagrante. Le modèle mène à des prélèvements beaucoup trop rapides par rapport à ce qui se passe réellement. UNGSGÅRD (2020) aboutit à ce même constat lors de son étude. De plus, même dans les 5 % de cas les moins bons, la totalité des capitaux engagés sont prélevés par le fonds, ce qui ne correspond pas aux observations. Le point positif du modèle tient dans la dispersion des prélèvements durant les premiers trimestres de la vie du fonds : un écart relativement important apparaît en effet entre le 5e centile et le 95e centile durant les 15 premiers trimestres.

Se pose alors la question de la piètre qualité de ce modèle : pourquoi les résultats sont-ils si mauvais ? Il est d'autant plus surprenant de voir que les trajectoires moyennes réelles et simulées diffèrent de manière

34. Il faudrait en réalité comparer la trajectoire simulée moyenne à la trajectoire réelle moyenne sans prise en compte des tailles des fonds, car la procédure de calibration ne permet pas de donner plus de « poids » aux fonds plus importants. Néanmoins, ces deux trajectoires réelles i.e. moyennes avec et sans pondération, sont très proches, la comparaison reste donc ici valide.

significative, puisque la calibration des paramètres θ et κ par la méthode des moindres carrés conditionnels devrait mener à un bien meilleur ajustement au vu des résultats présentés sur la figure (6.5) supra. Le problème provient en fait de la discrétisation du processus CIR qui intervient dans la modélisation du « taux de prélèvement ». Malgré l'utilisation de la méthode *truncated* MILSTEIN, le jeu de paramètres de prélèvement (6.1) conduit à des résultats aberrants, à cause de la trop grande valeur de $\hat{\sigma}_\delta$ et de l'écart trop important entre les quantités $2\hat{\theta}\hat{\kappa}$ et $\hat{\sigma}_\delta^2$. À partir des 100 000 simulations réalisées, nous observons un « taux de prélèvement » moyen qui oscille autour de la valeur 1,9, or il devrait osciller autour de $\hat{\theta} = 0,2867$: cela entraîne un rythme de prélèvement beaucoup trop rapide. Le paramètre de volatilité ne devrait cependant pas influer sur l'espérance du processus puisque ce paramètre n'intervient que dans le terme de diffusion dans l'équation (6.4). C'est donc la discrétisation du processus via le schéma *truncated* MILSTEIN qui se révèle imparfaite.

C'est bien le paramètre de volatilité, $\hat{\sigma}_\delta$, qui engendre ce problème, puisque si l'on fixe $\sigma_\delta = 1$ de sorte que $2\hat{\theta}\hat{\kappa} > \sigma_\delta^2$, alors le « taux de prélèvement » oscille autour de la valeur $0,3$ et, en moyenne, les résultats sont beaucoup plus satisfaisants : tant en termes graphiques (6.7) qu'en termes de R^2 (6.3). Cependant, de manière logique, la dispersion des flux simulés devient alors beaucoup plus faible : en somme, un problème est réglé, mais un autre apparaît. Or, tout l'intérêt d'un modèle stochastique est justement d'avoir accès à une distribution de flux pour chaque date : si seule la valeur moyenne correspond, le modèle perd grandement de son intérêt.

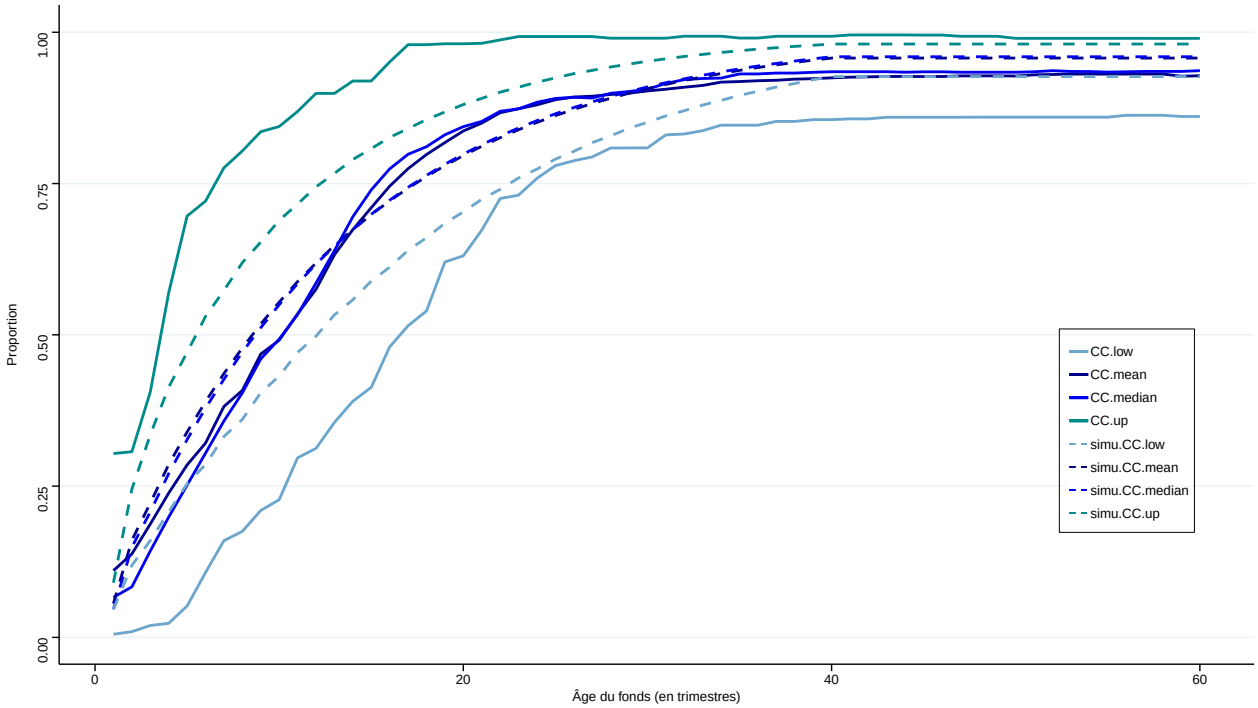


FIGURE 6.7 – Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements pour les fonds de *Buyout* du jeu de données de validation, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$

En résumé, la raison principale pour laquelle la modélisation des prélèvements se révèle être un échec provient de notre incapacité à modéliser de manière fiable un processus COX-INGERSOLL-ROSS, quels que soient ses paramètres.

La modélisation des distributions ne se révèle guère plus fructueuse. Si, en moyenne, les simulations s'ajustent de manière convenable aux observations, en atteste la valeur du R^2 (6.3) [35], la dispersion des distributions simulées est presque nulle. Il est donc impossible d'utiliser ces simulations dans une optique de gestion des risques.

Prélèvements	Prélèvements faible volatilité	Distributions
0,6934	0,9839	0,9976

TABLE 6.3 – Coefficients de détermination, R^2, relatifs aux trajectoires simulées moyennes des prélèvements et des distributions

Finalement, un aspect positif du modèle apparaît tout de même au regard des figures (A.22) et (A.23) : sa capacité à reproduire la « courbe en J ».

6.3.5 Avantages, inconvénients et pistes d'amélioration

En résumé, le modèle introduit par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014) présente plusieurs avantages : son implémentation, hors discrétisation du processus CIR, est relativement simple ; les données nécessaires à la calibration, c'est-à-dire la structure des flux de prélèvements et de distributions, peuvent être issues de bases de données spécialisées dans le domaine du Private Equity, comme Preqin par exemple ; il est possible d'obtenir des jeux de paramètres différents pour chaque stratégie et chaque cible géographique et l'idée sous-jacente au modèle, à savoir projeter de manière séparée les flux de prélèvements et les flux de distributions, permet de reproduire la « courbe en J » caractéristique des fonds de capital investissement.

Néanmoins, les inconvénients du modèle priment sur ses avantages. En l'état, le modèle ne permet effectivement pas de simuler de manière convenable les prélèvements à cause de notre incapacité à discrétiser de manière fiable un processus CIR, quels que soient ses paramètres. UNGSGÅRD (2020) mentionne également le fait que le modèle mathématique ici proposé pour projeter les flux de prélèvements n'est peut-être guère adapté au cas du Private Equity. En effet, la modélisation induit des prélèvements rapides au début de la vie du fonds, lorsque le capital engagé non prélevé est important, qui décroissent au fur et à mesure que ce capital disponible diminue. Les données réelles montrent, quant à elles, un rythme de prélèvement moyen quasiment constant durant les premières années de vie du fonds. En ce qui concerne les distributions, si le modèle permet cette fois-ci d'obtenir une projection moyenne correcte des flux reçus par les LPs, la faible dispersion des flux obtenue empêche toute utilisation du modèle dans une optique de gestion des risques et d'estimation de quantiles par exemple.

Pour résoudre le premier problème, à savoir celui qui concerne la modélisation des flux de prélèvements futurs, il faudrait donc trouver un schéma permettant de discrétiser de manière plus performante et plus fiable un processus CIR ou implémenter la méthode de simulation exacte, mentionnée par Aurélien ALFONSI (2012), au prix d'une complexité très importante. S'agissant des distributions, UNGSGÅRD a suivi une des remarques énoncées par BUCHNER, KASERER et WAGNER et a introduit un processus stochastique afin de décrire l'évolution du multiple global m qui intervient dans la modélisation des distributions. Cette spécification semble résoudre le problème de faible dispersion mentionné précédemment, bien que l'auteur ne fournisse malheureusement pas d'illustration des résultats. Cette piste reste donc à explorer.

35. Les coefficients de détermination pour les distributions et les prélèvements avec faible volatilité, c'est-à-dire lorsque $\sigma_\delta = 1$, sont très élevés puisque la procédure de calibration, qui recourt à la méthode des moindres carrés conditionnels, vise justement à maximiser cette valeur.

S'il est possible de parvenir à dépasser tous ces obstacles, alors le modèle de BUCHNER, KASERER et WAGNER pourrait être utilisé dans une approche de gestion des risques liés aux investissements dans des fonds de Private Equity. De plus, ces trois auteurs mentionnent dans leur papier de recherche de nombreuses applications potentielles, comme la modélisation de l'évolution de la valeur d'un investissement en Private Equity, la gestion du risque de liquidité d'un tel investissement ou encore la mesure de ses performances... autant d'applications qui n'ont de sens que si le modèle permet avant tout de projeter de manière satisfaisante les *cash flows* futurs dudit investissement.

Conclusion

Le capital investissement est donc un outil digne d'intérêt pour les institutionnels et notamment pour les entités d'assurance. Il permet en effet de cibler avec une certaine précision, au travers des stratégies sectorielles et géographiques des fonds choisis, les entreprises qui ont des besoins de financement. Par ailleurs, les organismes assureurs disposent de plusieurs solutions d'investissement : il est effectivement possible de déléguer quasiment toute la gestion via le recours à des fonds de fonds, par exemple, ou au contraire de choisir au cas par cas les entreprises à financer, par le biais d'investissements en direct dans lesdites entreprises. En outre, le marché du Private Equity secondaire, en forte croissance, semble offrir de plus en plus de portes de sortie ou de portes d'entrée dérobées pour des investisseurs en recherche de liquidité.

De plus, de nombreuses politiques publiques favorisent aujourd'hui les investissements dans le non coté grâce, entre autres, à l'assouplissement des contraintes réglementaires afférentes au Private Equity. Il est possible, par exemple, de citer l'évolution de la prise en compte du capital investissement dans Solvabilité II qui propose un choc allégé dans le cas de certaines positions de Private Equity.

Cette trajectoire suivie par les organes décideurs, tant en France qu'en Europe, ne doit cependant pas faire oublier les risques et les dangers liés à cette classe d'actifs particulière. Tout d'abord, dans un monde inondé de données où règne le *Big Data*, le Private Equity fait de la résistance : la difficulté d'accès à une information de qualité relative à cette classe d'actifs, c'est-à-dire une information actuelle et qui traduit fidèlement le comportement de la classe d'actifs, rend complexe l'évaluation pertinente des risques et des performances associés au capital investissement. C'est pourquoi la question de la donnée doit se poser en amont de toute réflexion opérationnelle. Une autre difficulté doit être soulignée : celle du choix des mesures de performance appropriées, quitte à aller à contre-courant des pratiques de marché.

D'après les analyses réalisées, le Private Equity paraît faiblement corrélé, sur le long terme, aux plus importants marchés boursiers. Cependant, lors des périodes de crise étudiées, à savoir la crise de la bulle internet et la crise des *subprimes*, le capital investissement a réagi fortement, parfois même de manière plus extrême que les marchés cotés, avec des *Value at Risk* de performance au seuil de 99,5 % qui dépassent les -55 %, mais semble néanmoins faire preuve d'une certaine résilience. En ce qui concerne les performances, le Private Equity paraît avoir été, en moyenne, plus performant que le marché sur la période 1990-2007. Il est intéressant de noter que le risque supplémentaire induit par le *Venture Capital* par rapport au *Buyout* semble primer l'excès de performance apporté par le capital risque puisque, in fine, le capital transmission a été, en moyenne, plus performant et moins risqué.

Par ailleurs, le domaine de la recherche est très actif sur les questions liées au Private Equity. Si les premières études réalisées il y a de cela quelques décennies se concentraient principalement sur la comparaison des performances du capital investissement et des actifs plus traditionnels, de nouvelles problématiques émergent, comme celle de la modélisation des flux futurs, à l'image du modèle stochastique proposé par BUCHNER, KASERER et WAGNER (2014). Bien que l'implémentation de ce modèle à partir de données réelles n'ait, dans ce mémoire, pas été probante, cette démarche a néanmoins le mérite d'ouvrir des pistes de réflexion.

Le capital investissement est donc aujourd'hui au centre de l'attention, la recherche autour de cette classe d'actifs est en effervescence et il ne fait guère de doute que les différents aspects relatifs au Private

Equity seront étudiés plus en profondeur par bon nombre de chercheurs dans les années à venir. Pour ne citer qu'un seul exemple, Christian TAUSCH poursuit actuellement un doctorat dont le sujet porte sur une méthode d'évaluation fondée sur les facteurs d'actualisation stochastiques, autrement appelés déflateurs.

Enfin, de nombreuses questions qui méritent un intérêt tout particulier n'ont pas été abordées dans ce mémoire, notamment celles d'ordre social et sociétal. Le capital investissement, et en particulier le capital transmission, est en effet souvent associé à des effets négatifs sur l'environnement social, comme des licenciements ou des restructurations. Cependant, plusieurs papiers de recherche montrent que cette réputation n'est pas véritablement fondée et que le Private Equity, au contraire, pourrait être un allié dans la quête d'*impact investing* des grandes compagnies, avec des entreprises qui se préoccupent de plus en plus des contraintes Environnementales, Sociétales et de Gouvernance (ESG).

A Statistiques descriptives de la base de données et Résultats obtenus

Évolution TRI(CF) contre TRI(NAV) pour différentes stratégies

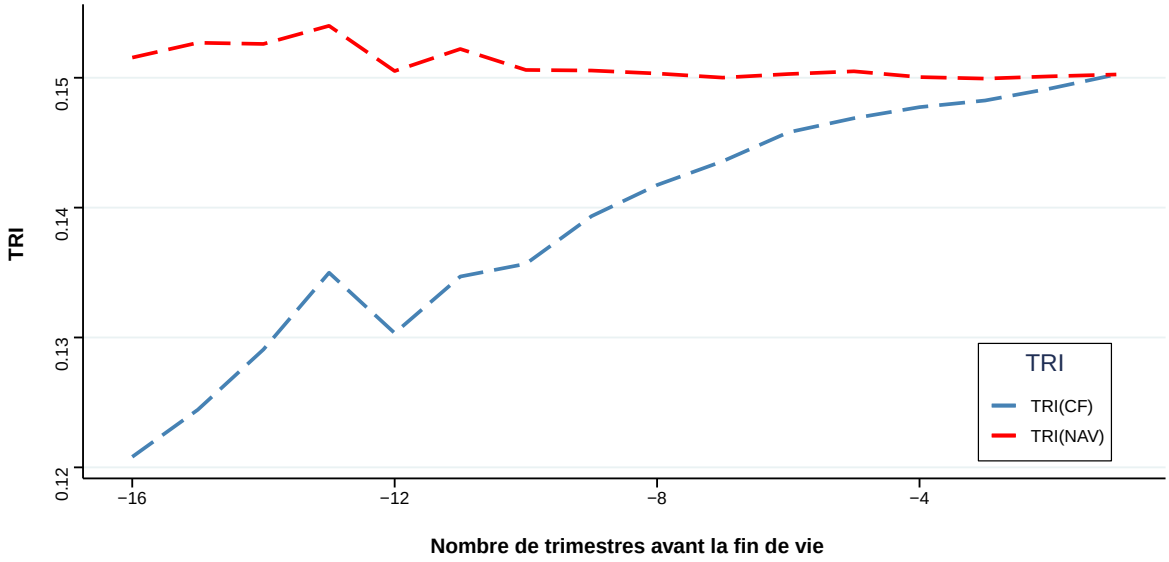


FIGURE A.1 – Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds de *Buyout*

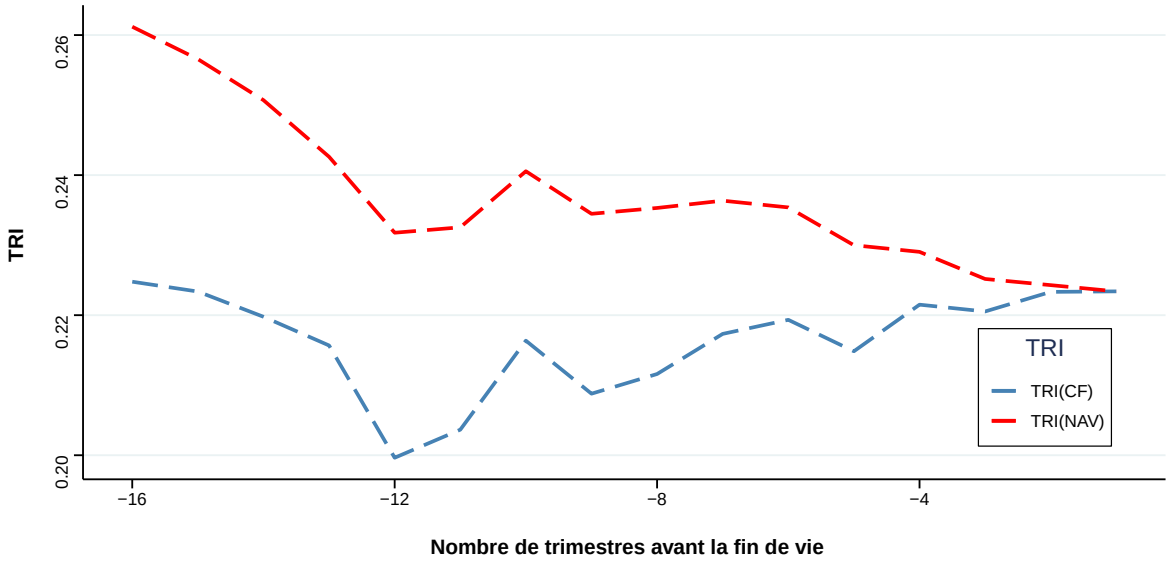


FIGURE A.2 – Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds de *Venture Capital*

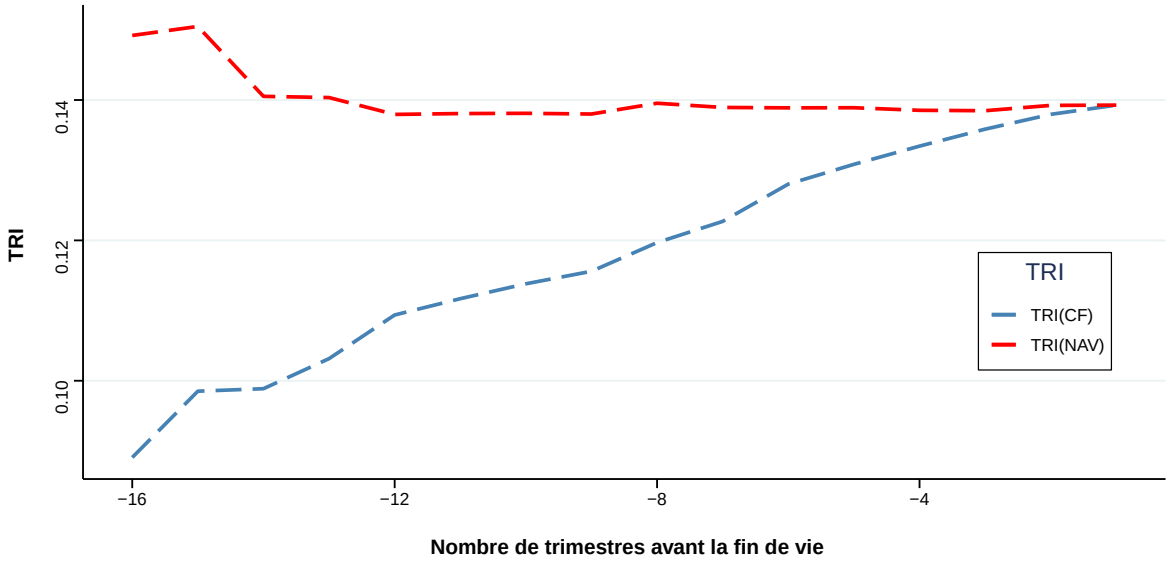


FIGURE A.3 – Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds Growth

Le TRI(CF) moyen a tendance à être croissant car plus le temps passe i.e. moins le nombre de trimestres avant la fin de vie est important, plus le rapport entre montants distribués et capitaux appelés est censé croître. Cela s'observe très bien sur les figures (A.1 et A.3). Dans le cas du capital risque, ce phénomène est moins évident (A.2). Cela pourrait s'expliquer par le fait que les fonds de *Venture Capital* sont susceptibles d'appeler des capitaux relativement tard dans le processus d'investissement.

Ces figures permettent également de constater que les NAV fournies par les sociétés de gestion sont plus volatiles pour le capital risque que pour le capital transmission et le capital croissance, pour lesquels le TRI(NAV) est en moyenne relativement stable sur les 4 dernières années de vie du fonds.

Durée de vie et taille par stratégie et par cible géographique

Selon (A.4), les fonds de *Buyout* qui se concentrent sur le marché américain ont une durée de vie plus grande que ceux qui se concentrent sur le marché européen, les médianes valent en effet respectivement 14,85 ans et 12,84 ans. C'est la relation inverse qui prévaut pour les fonds de capital risque, car la médiane de la durée de vie pour les fonds européens est de 15,54 ans contre 14,98 ans pour les fonds américains ; ce résultat est tout de même discutable car la base de travail ne contient que 4 fonds de *Venture Capital* européens. Il est difficile de tirer des conclusions pour les autres stratégies au vu du faible nombre de fonds que comporte la base pour certaines stratégies et zones géographiques.

Bien que le marché américain du capital investissement soit plus mature que le marché européen, la figure (A.5) permet de constater que les fonds qui se concentrent sur l'Europe n'ont pas nécessairement une plus petite taille que les fonds américains.

En ce qui concerne les fonds de *Buyout* par exemple, la médiane et la moyenne des tailles des fonds européens sont respectivement environ égales à 591 millions et 1,3 milliard de dollars. Sur le marché américain, la médiane et la moyenne, toujours pour les fonds de capital transmission, valent environ 421 millions et 828 millions de dollars. Néanmoins, les plus gros fonds de *Buyout*, c'est-à-dire ceux qui affichent une taille supérieure à 5 milliards de dollars, sont tous des fonds qui ont pour cible géographique les États-Unis.

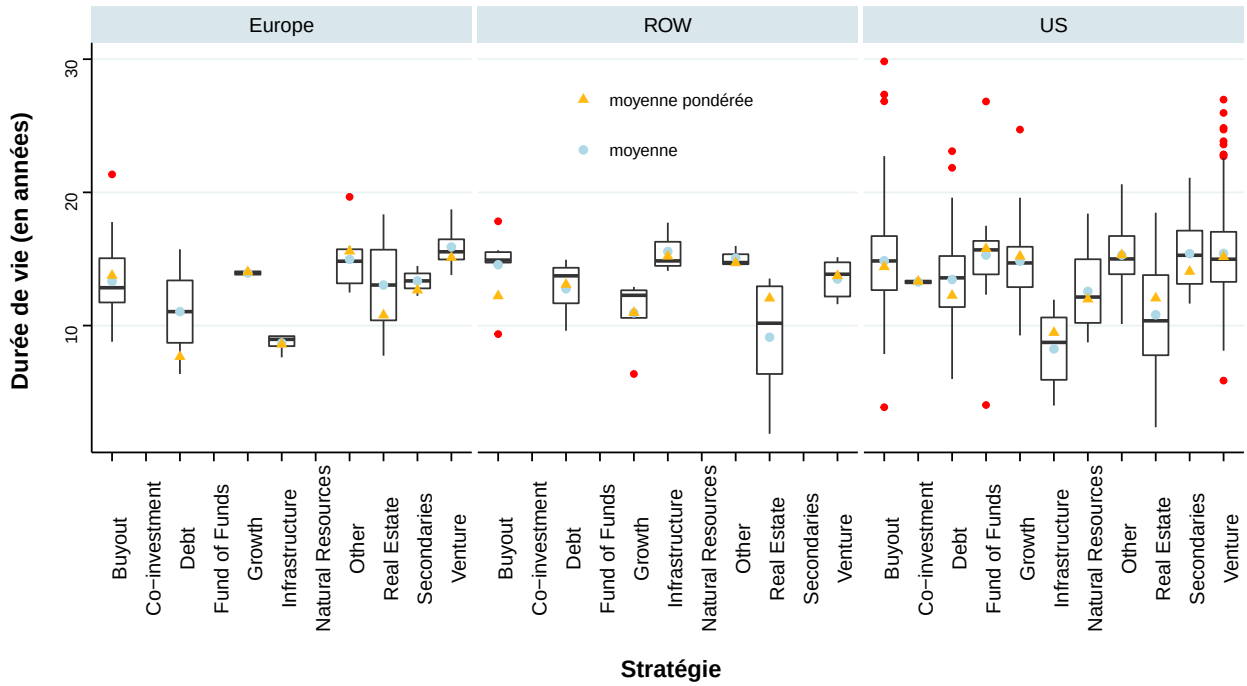


FIGURE A.4 – Durée de vie par stratégie et par cible géographique

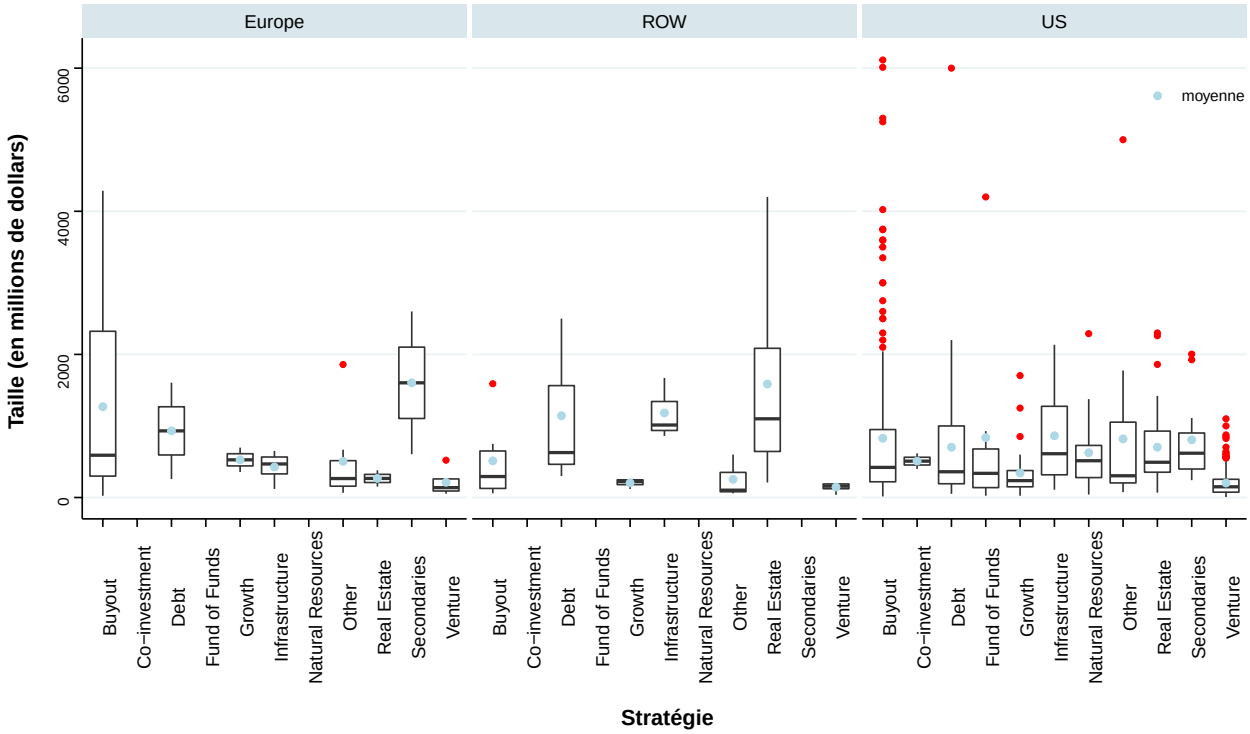


FIGURE A.5 – Taille par stratégie et par cible géographique

Graphiques détaillés des mesures de performance globale

Il est ici clair (A.6) que les fonds de *Venture Capital* sont ceux pour lesquels les TRI peuvent être les plus importants. Néanmoins c'est cette stratégie qui affiche le TRI médian le plus faible, égal à 5,64 %. Un constat similaire peut-être fait à partir du graphique des multiples (A.8).

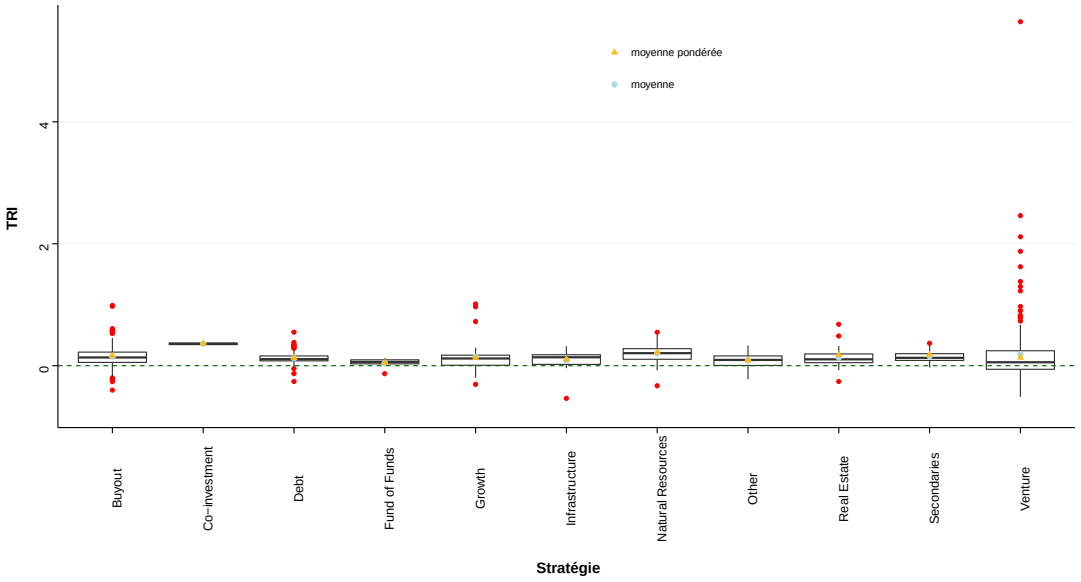


FIGURE A.6 – Boîtes à moustaches des TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts

Les figures qui décrivent l'évolution des TRI et des TVPI par millésime pour les fonds de capital transmission et de capital risque (A.7 et A.9) permettent également de voir que la dispersion des mesures de performance est beaucoup plus prononcée dans le cas du capital risque. C'est un résultat qui n'est pas surprenant.

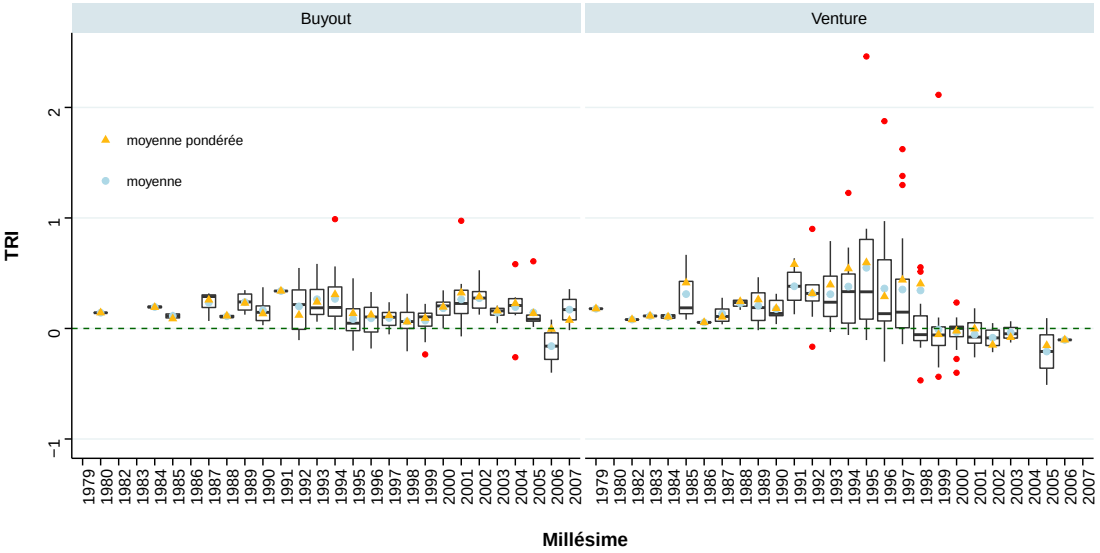


FIGURE A.7 – Boîtes à moustaches des TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds qui affiche un TRI exceptionnel supérieur à 5,5)

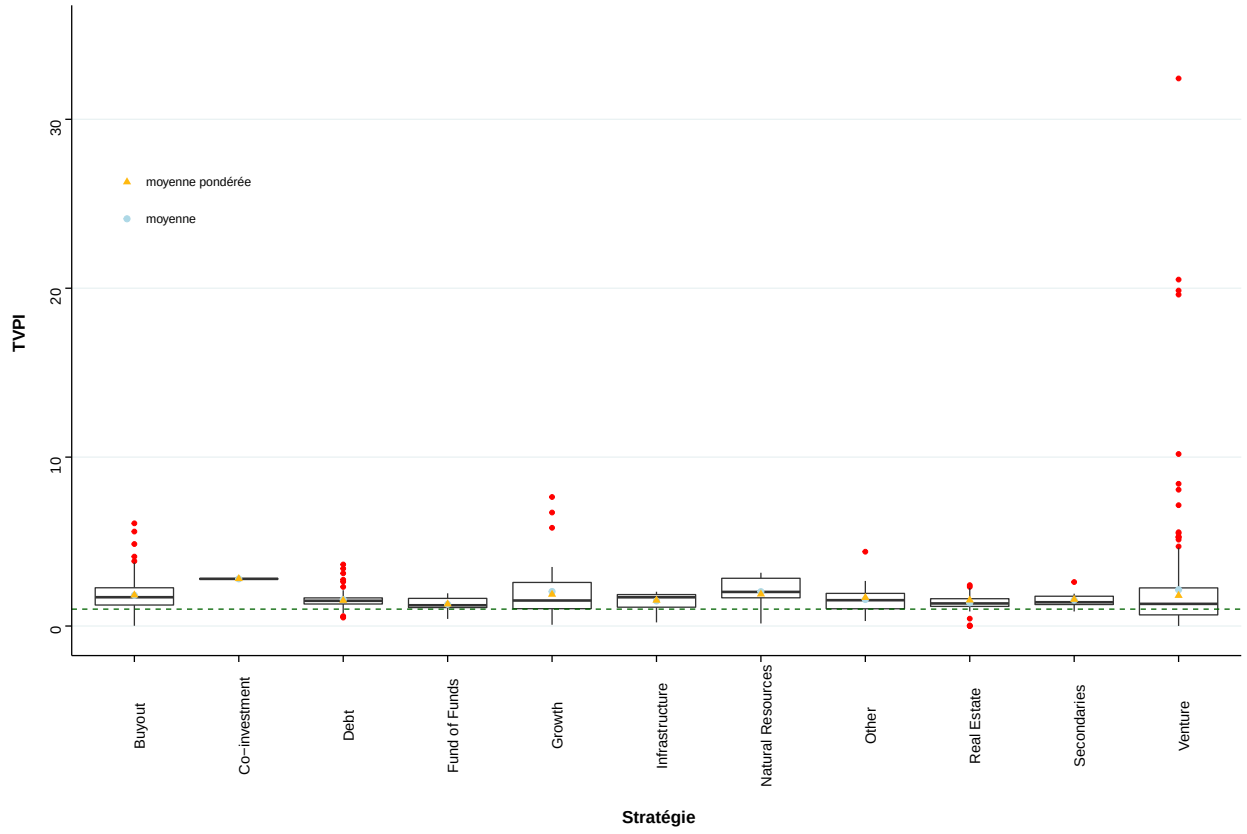


FIGURE A.8 – Boîtes à moustaches des TVPI par stratégie pour les fonds économiquement morts

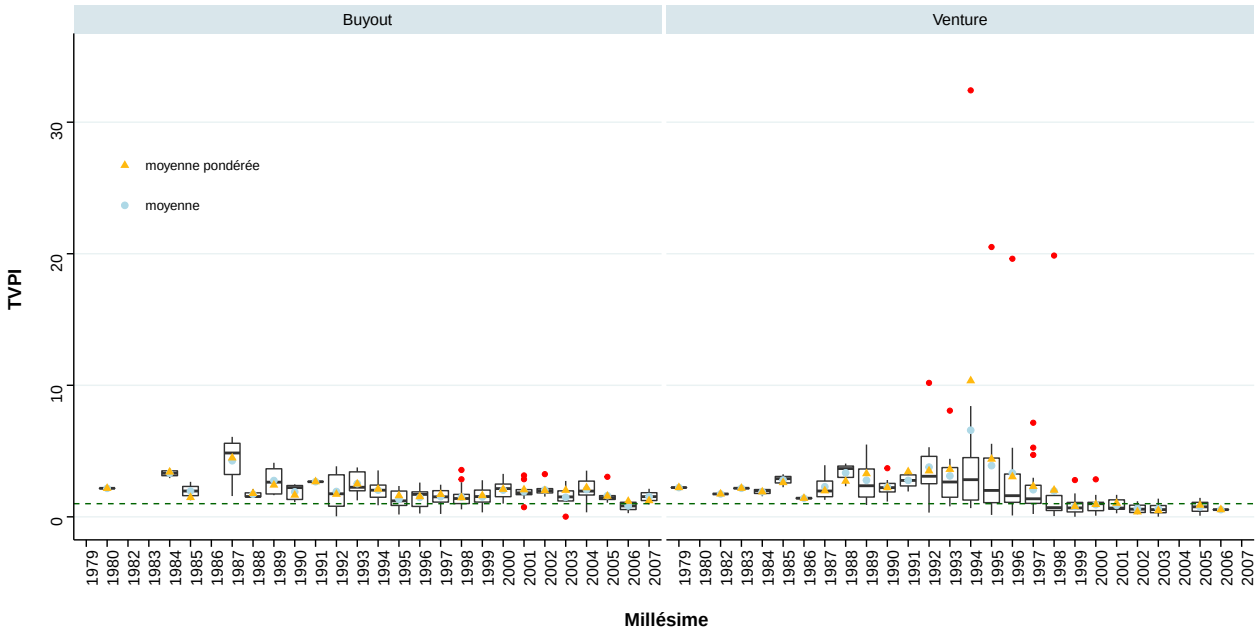


FIGURE A.9 – Boîtes à moustaches des TVPI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts

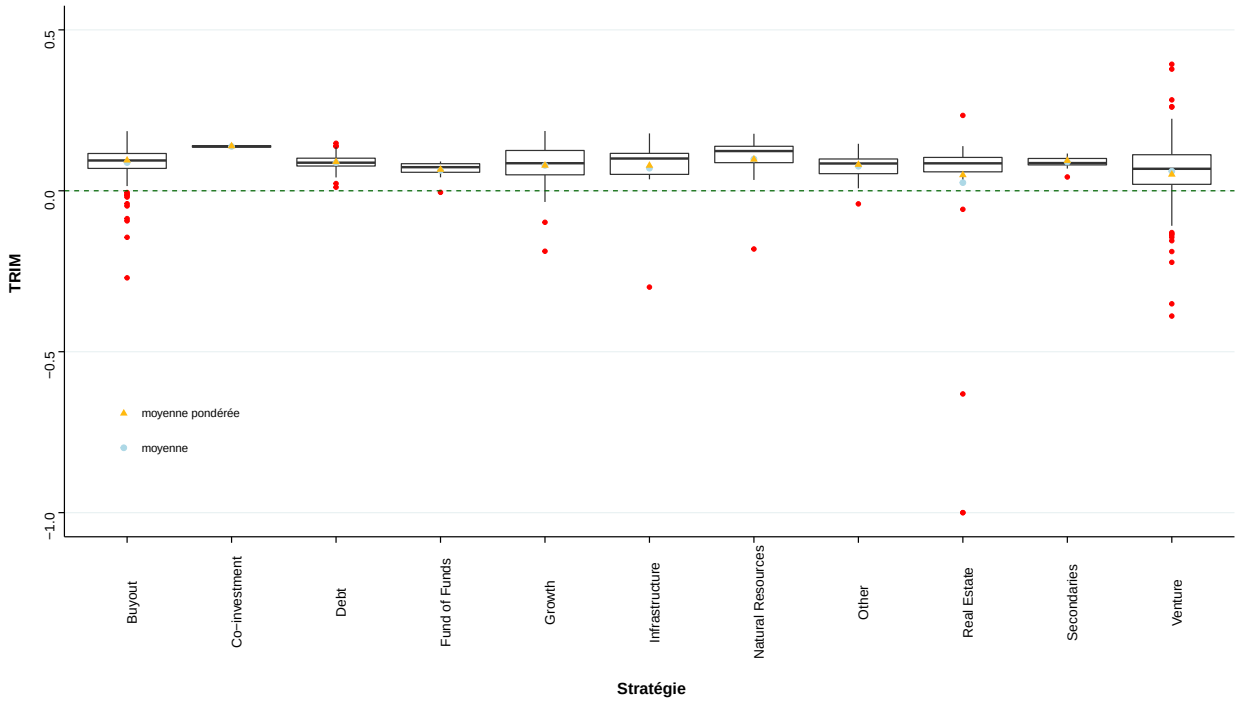


FIGURE A.10 – Boîtes à moustaches des TRIM par stratégie pour les fonds économiquement morts

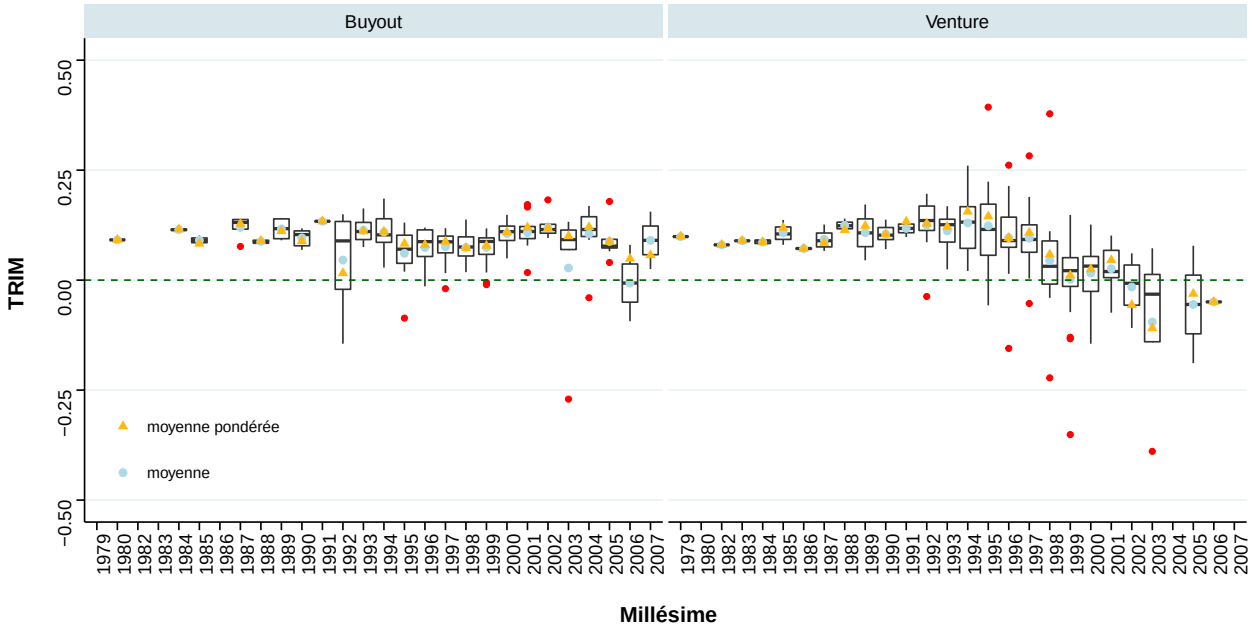


FIGURE A.11 – Boîtes à moustaches des TRIM pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts

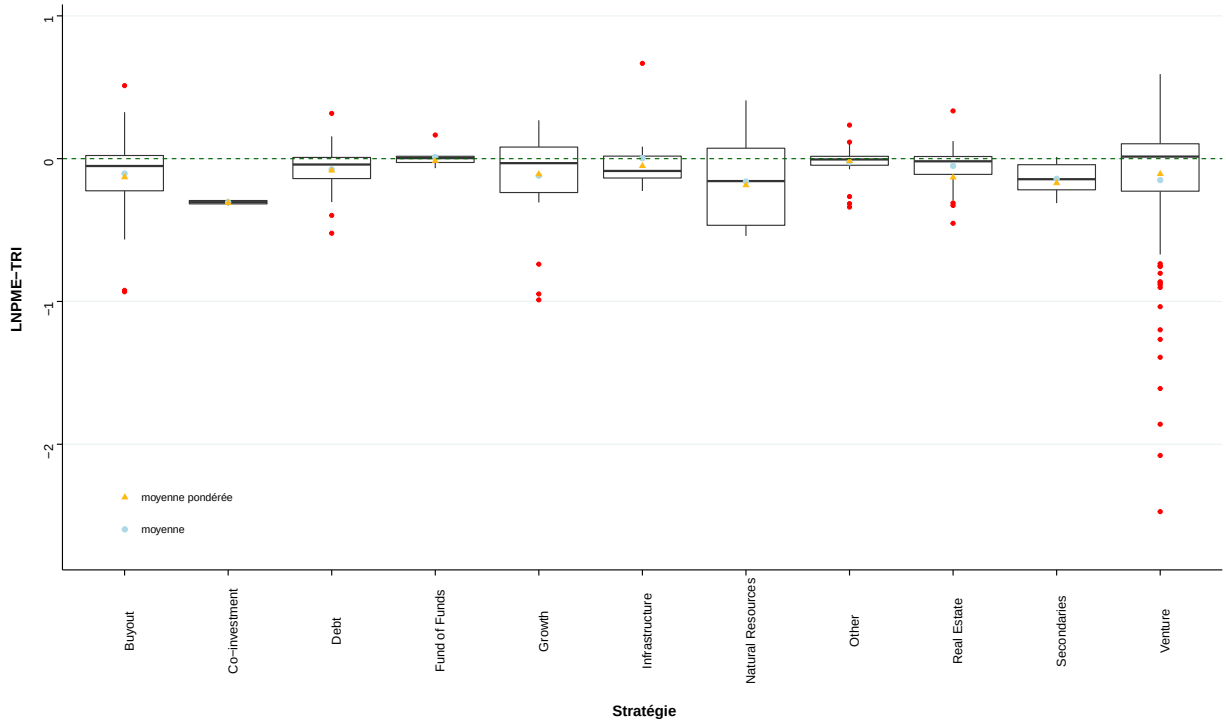


FIGURE A.12 – Boîtes à moustaches des LNPME-TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5)

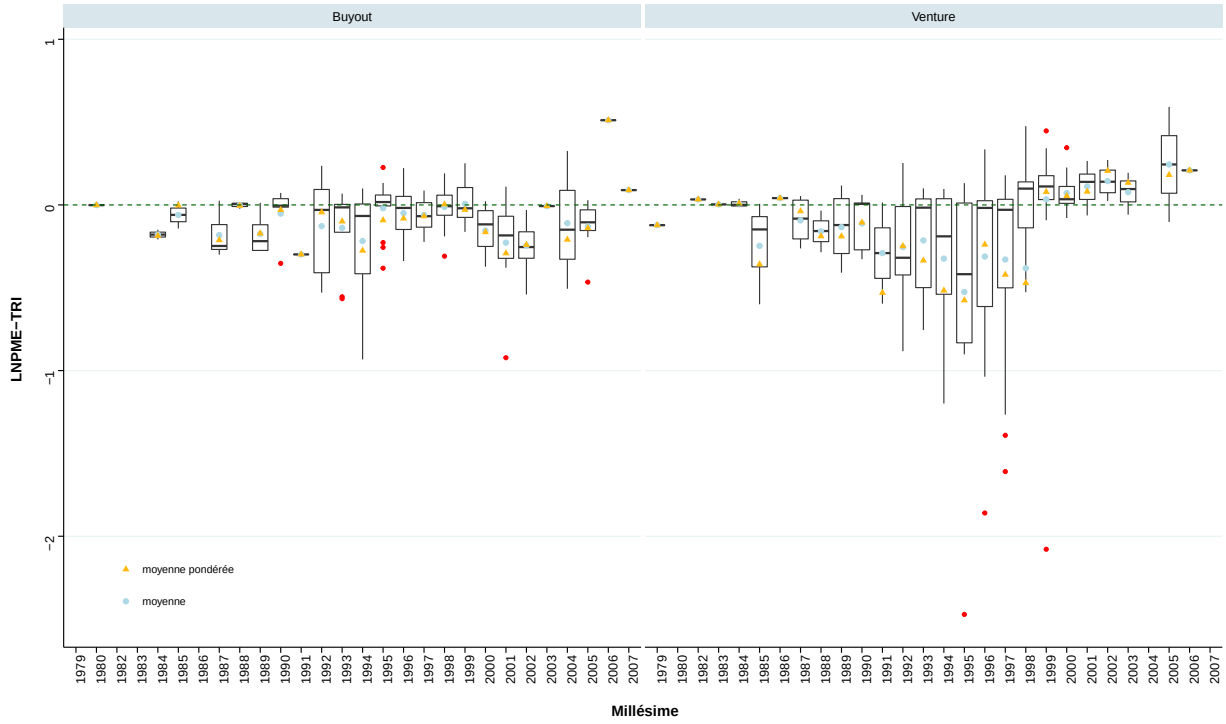


FIGURE A.13 – Boîtes à moustaches des LNPME-TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5)

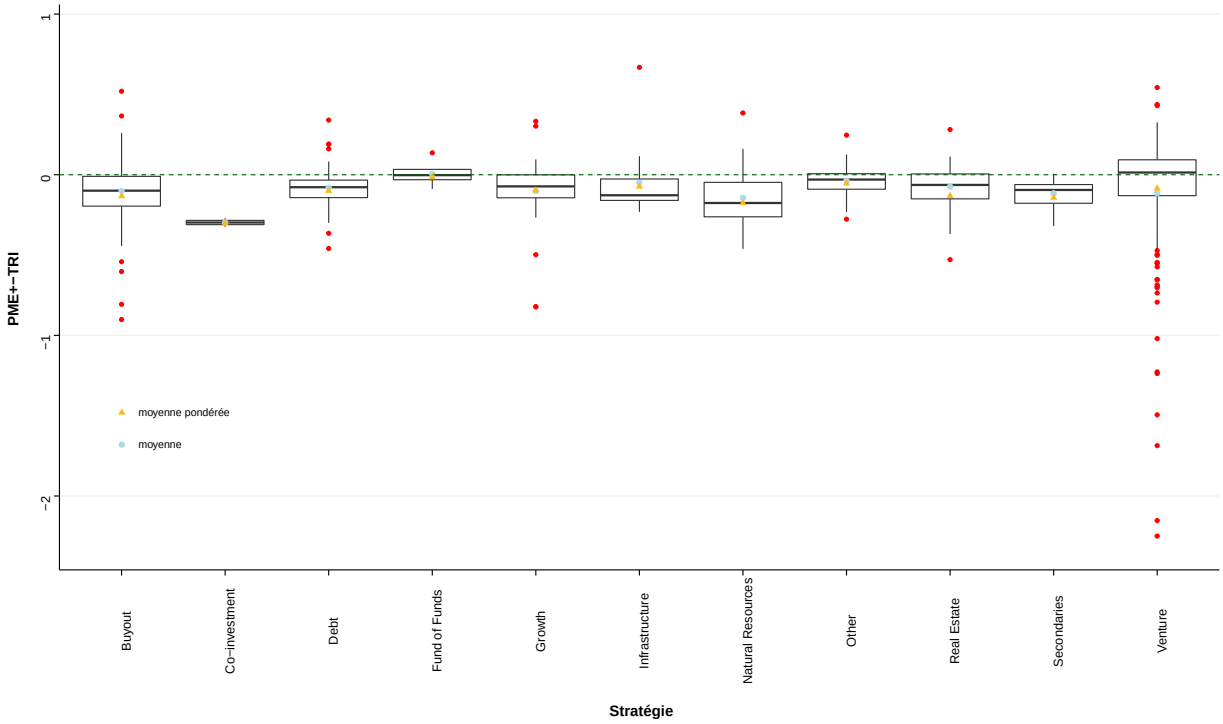


FIGURE A.14 – Boîtes à moustaches des PME+-TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5)

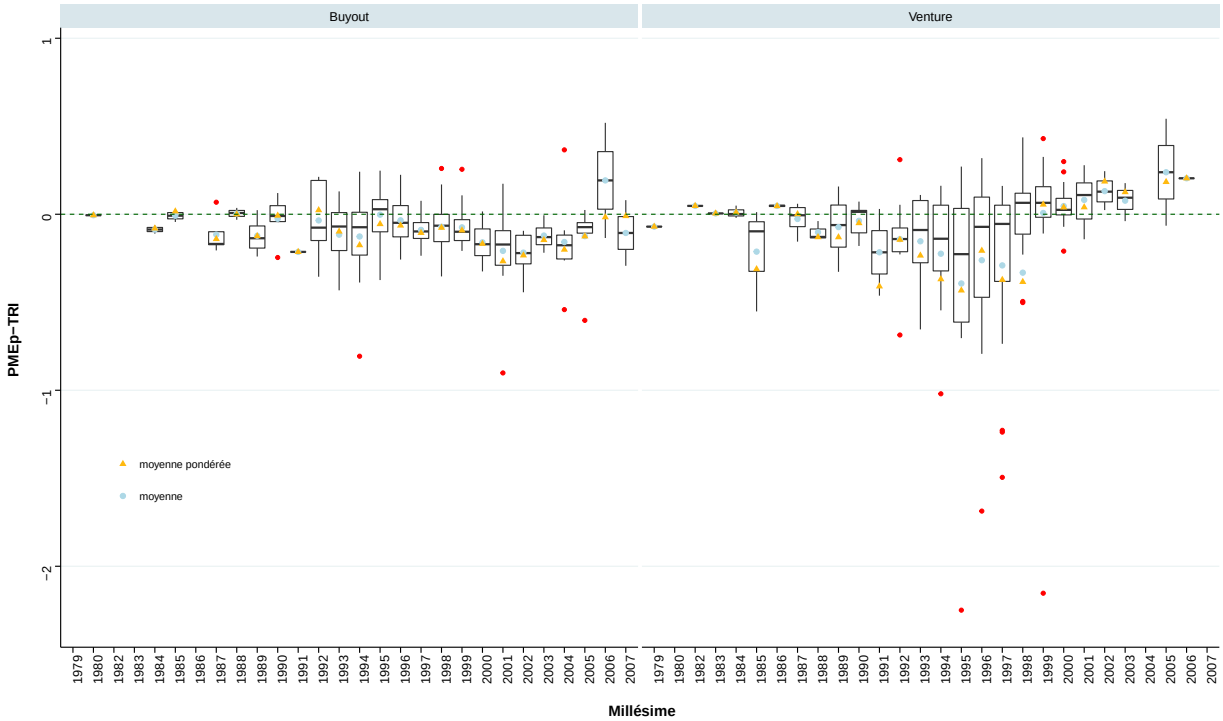


FIGURE A.15 – Boîtes à moustaches des PME+-TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5)

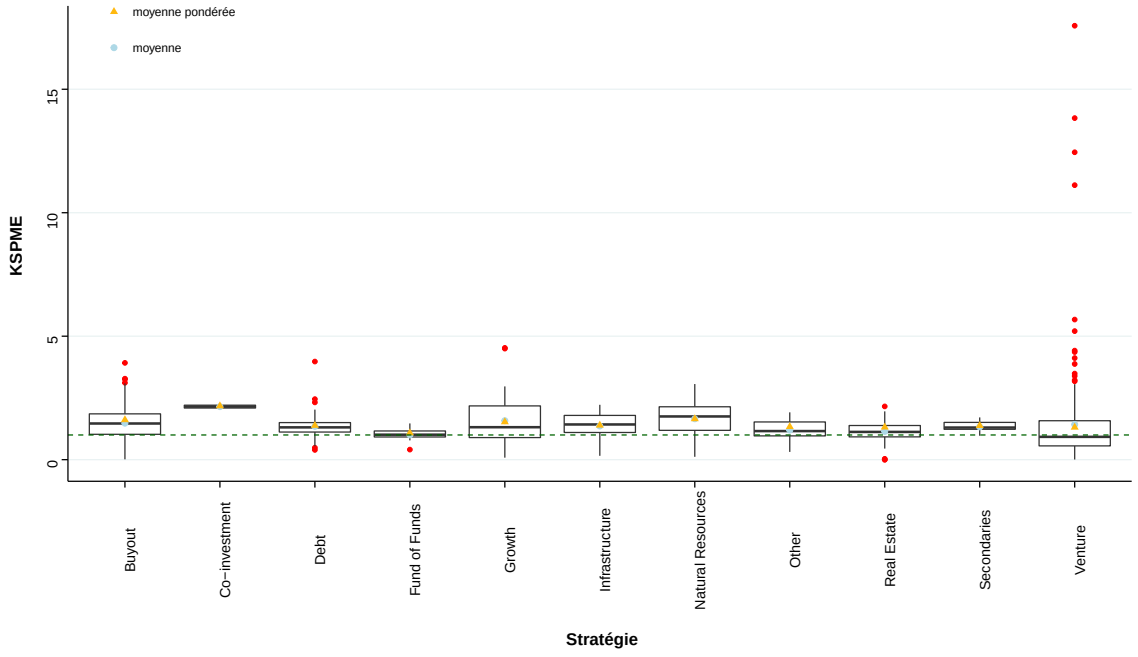


FIGURE A.16 – Boîtes à moustaches des KS-PME par stratégie pour les fonds économiquement morts

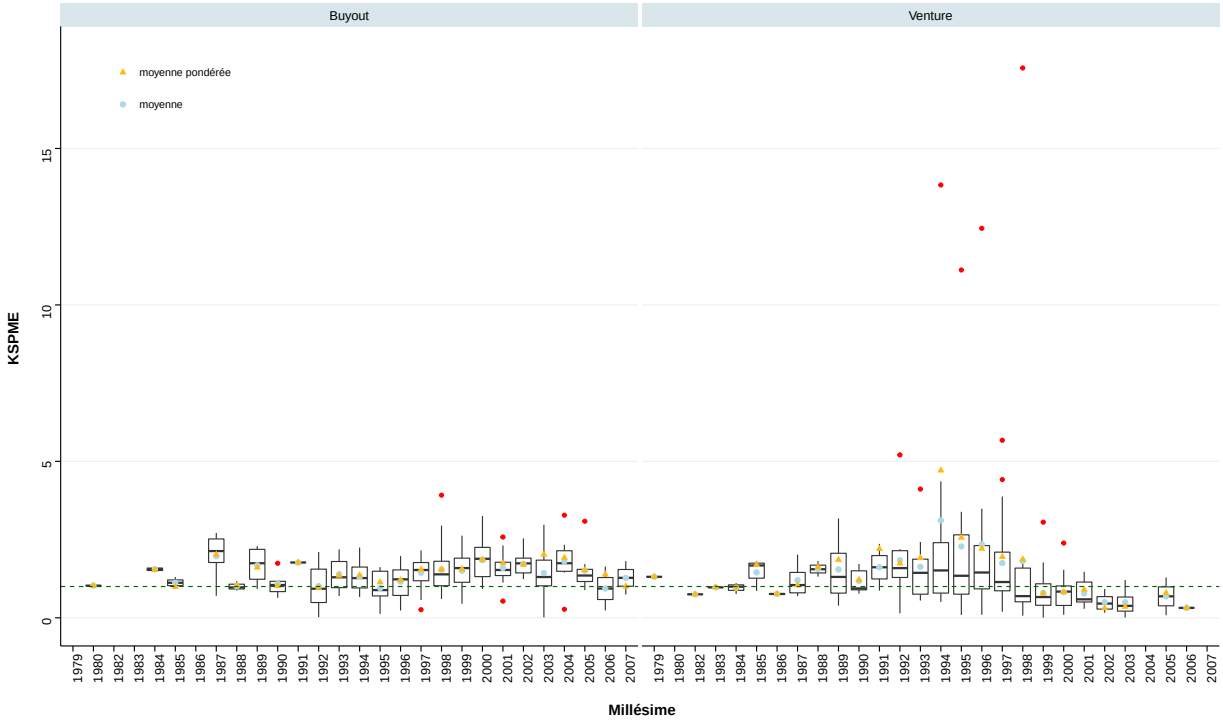


FIGURE A.17 – Boîtes à moustaches des KS-PME pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts

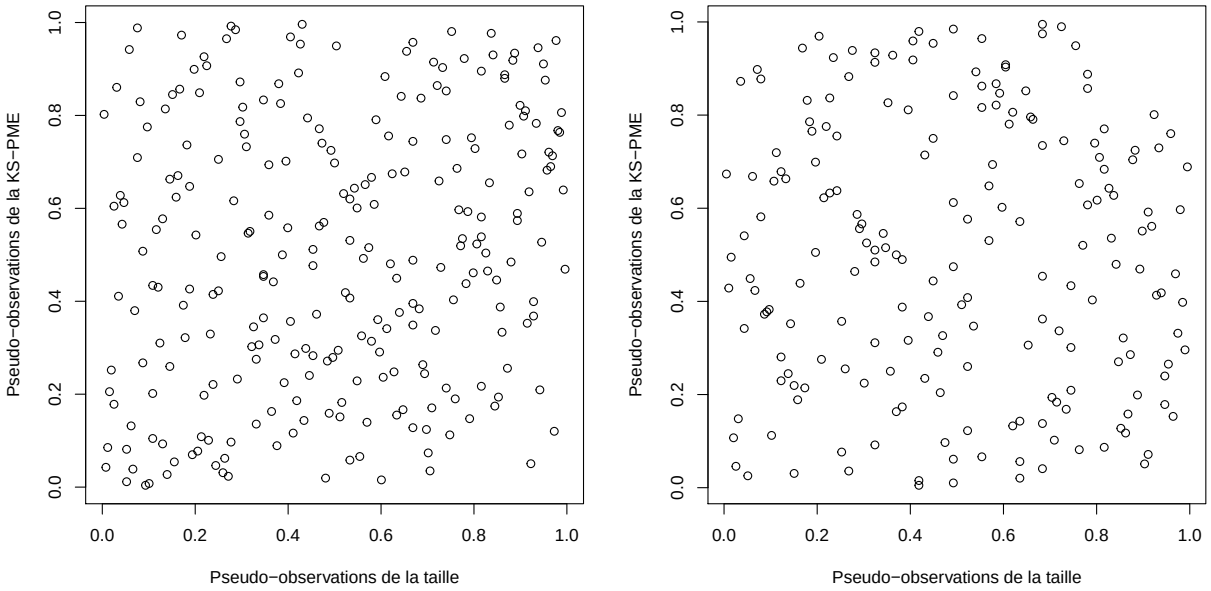


FIGURE A.18 – Relation entre les pseudo-observations de la KS-PME des fonds et les pseudo-observations de leur taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite)

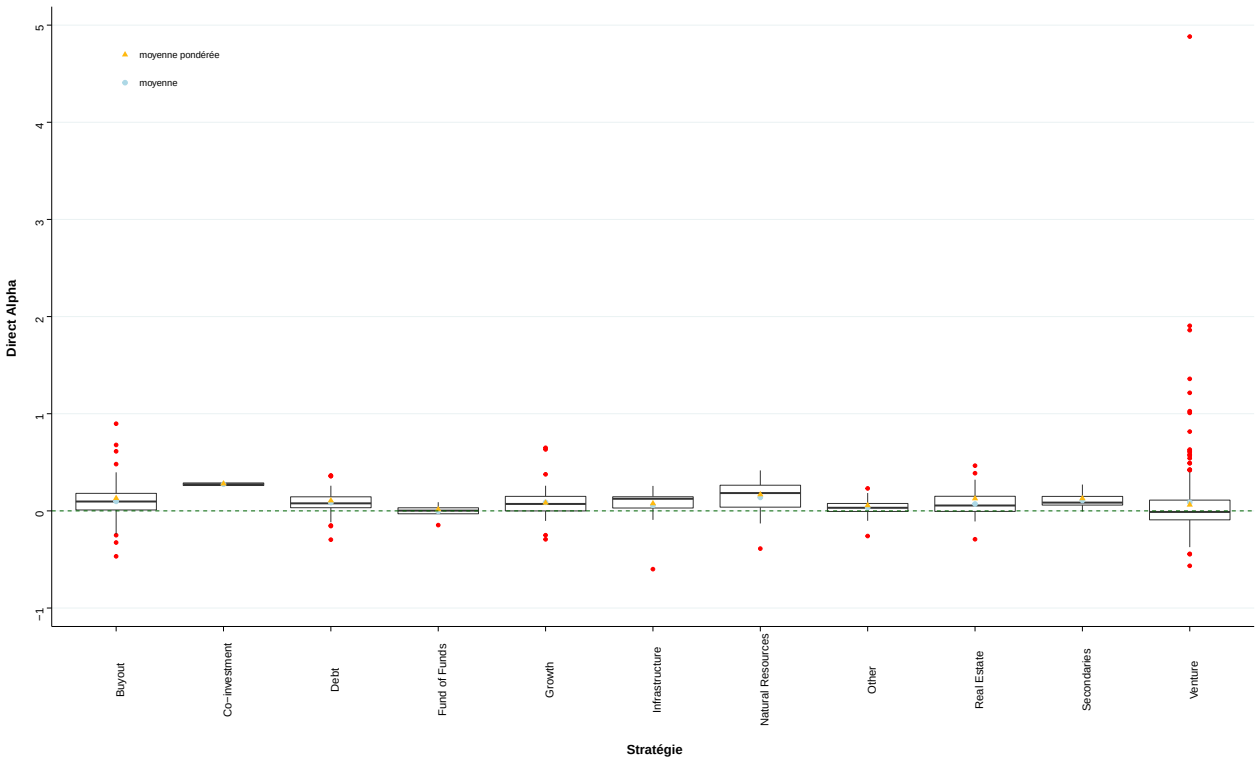


FIGURE A.19 – Boîtes à moustaches des Direct Alpha par stratégie pour les fonds économiquement morts

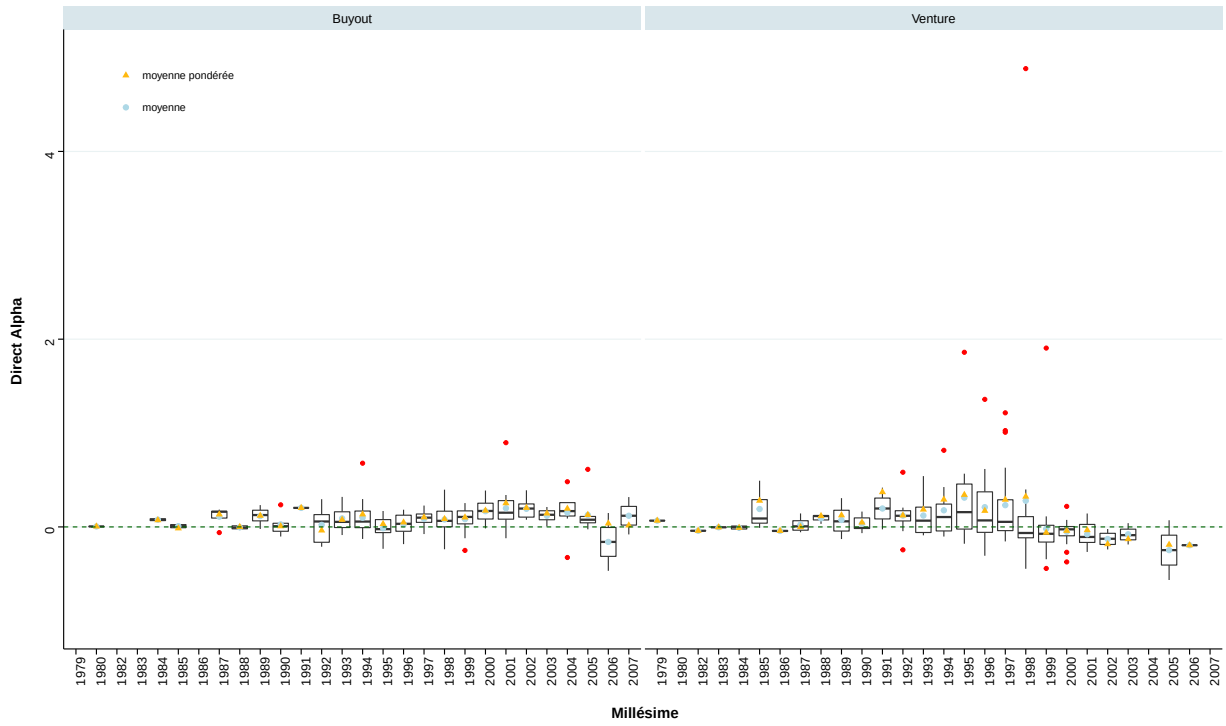


FIGURE A.20 – Boîtes à moustaches des Direct Alpha pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts

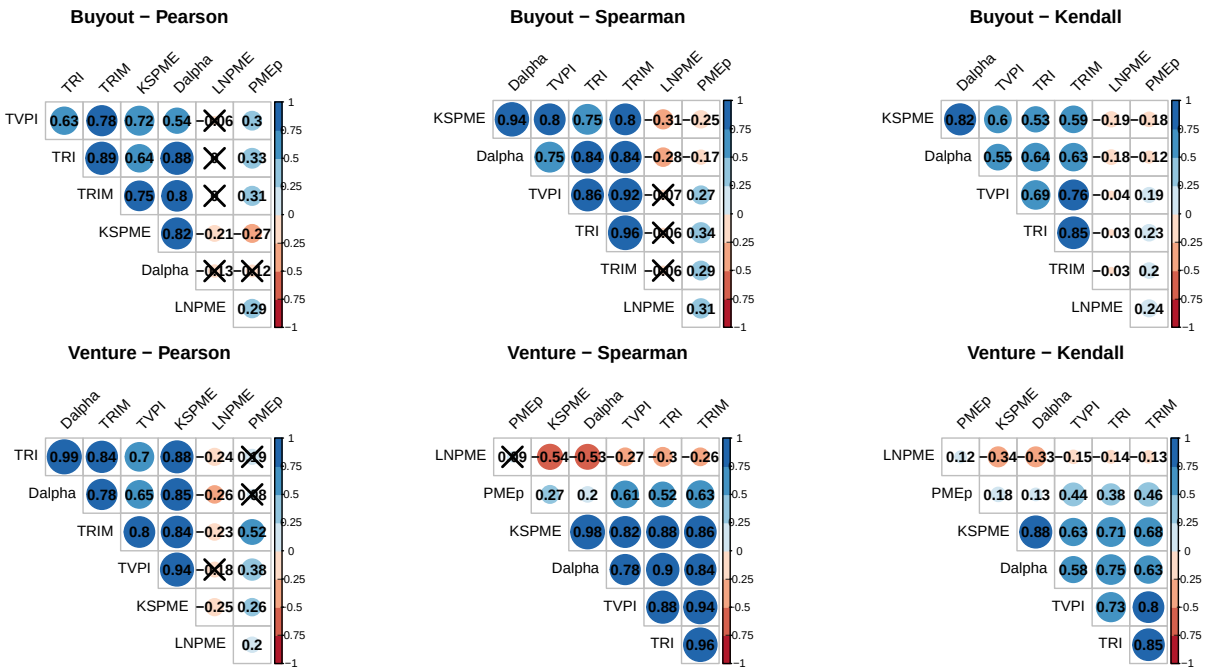


FIGURE A.21 – Approche erronée - Matrices de corrélation des différentes mesures de performance selon plusieurs mesures de corrélation pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital*

Backtesting de la VaR sur les performances trimestrielles du portefeuille « 10bvo »

Date de début du trimestre T	Nombre de simulations sur la période T+1	Nombre de dépassements - méthode historique	Nombre de dépassements - méthode POT	Nombre de dépassements - méthode SGT
1998-01-01	127	7	7	0
1998-04-01	165	0	0	0
1998-07-01	181	0	0	0
1998-10-01	151	14	14	11
1999-01-01	171	0	0	0
1999-04-01	145	17	16	15
1999-07-01	154	0	0	0
1999-10-01	144	1	1	0
2000-01-01	143	21	18	15
2000-04-01	146	12	7	0
2000-07-01	141	23	23	22
2000-10-01	144	0	0	0
2001-01-01	147	5	3	4
2001-04-01	130	0	0	0
2001-07-01	137	5	4	4
2001-10-01	141	0	0	0
2002-01-01	133	3	0	0
2002-04-01	130	4	2	0
2002-07-01	141	9	6	0
2002-10-01	143	2	1	1
2003-01-01	154	0	0	0
2003-04-01	145	0	0	0
2003-07-01	140	6	3	3
2003-10-01	152	4	3	6
2004-01-01	147	0	0	0
2004-04-01	150	0	0	0
2004-07-01	157	39	38	36
2004-10-01	141	0	0	0
2005-01-01	136	8	8	4
2005-04-01	142	0	0	0
2005-07-01	145	3	3	3
2005-10-01	150	0	0	0
2006-01-01	145	10	9	8
2006-04-01	121	0	0	0
2006-07-01	162	3	3	0
2006-10-01	156	0	0	0
2007-01-01	152	0	0	0
2007-04-01	155	1	1	0
2007-07-01	147	3	2	2
2007-10-01	136	19	19	12
2008-01-01	146	3	3	3
2008-04-01	135	0	0	0

2008-07-01	145	12	8	12
2008-10-01	131	0	0	0
2009-01-01	160	0	0	0
2009-04-01	154	5	5	3
2009-07-01	149	0	0	0
2009-10-01	149	8	7	3
2010-01-01	128	7	4	6
2010-04-01	138	0	0	0
2010-07-01	137	2	2	1
2010-10-01	170	2	2	2
2011-01-01	151	0	0	0
2011-04-01	170	52	35	45
2011-07-01	151	2	1	1
2011-10-01	147	0	0	0
2012-01-01	118	5	3	2
2012-04-01	158	0	0	0
2012-07-01	172	12	12	11
2012-10-01	136	0	0	0
2013-01-01	186	0	0	0
2013-04-01	160	3	2	2
2013-07-01	142	4	4	4
2013-10-01	144	5	6	5
2014-01-01	137	5	5	5
2014-04-01	144	0	0	0
2014-07-01	147	9	9	7

TABLE A.1 – *Backtesting* de la VaR sur les performances trimestrielles du portefeuille « 10bvo »

Illustrations des résultats du modèle de projection de flux

La figure ci-après (A.22) présente les trajectoires réelles et simulées, obtenues à partir de 100 000 simulations, des *cash flows* cumulés des fonds de *Buyout* présents dans la base de données de validation.

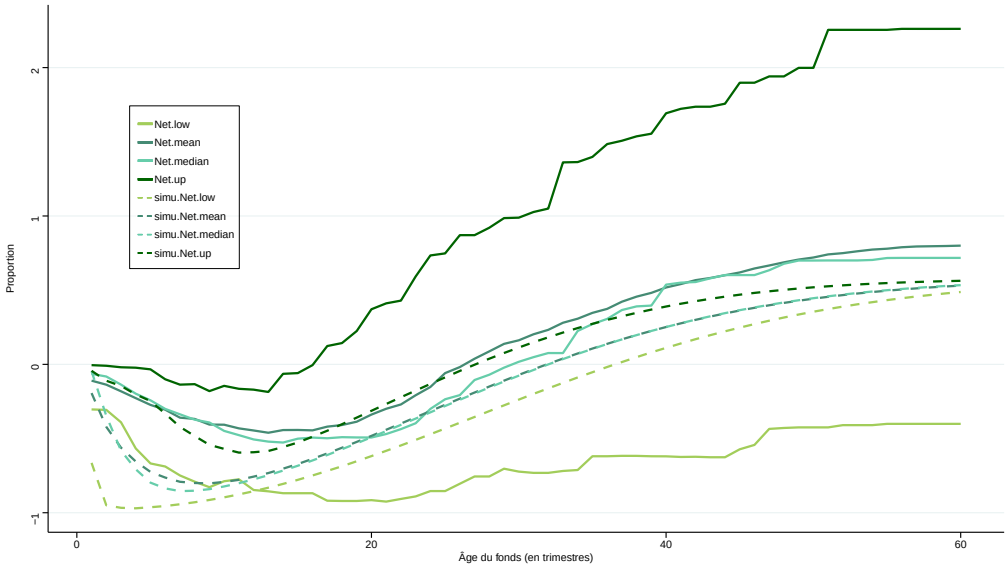


FIGURE A.22 – Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Buyout* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds

La figure ci-dessous (A.23) permet quant à elle d'apprécier la dynamique des *cash flows* cumulés simulés avec un paramètre de volatilité σ_δ plus faible, fixé à 1.

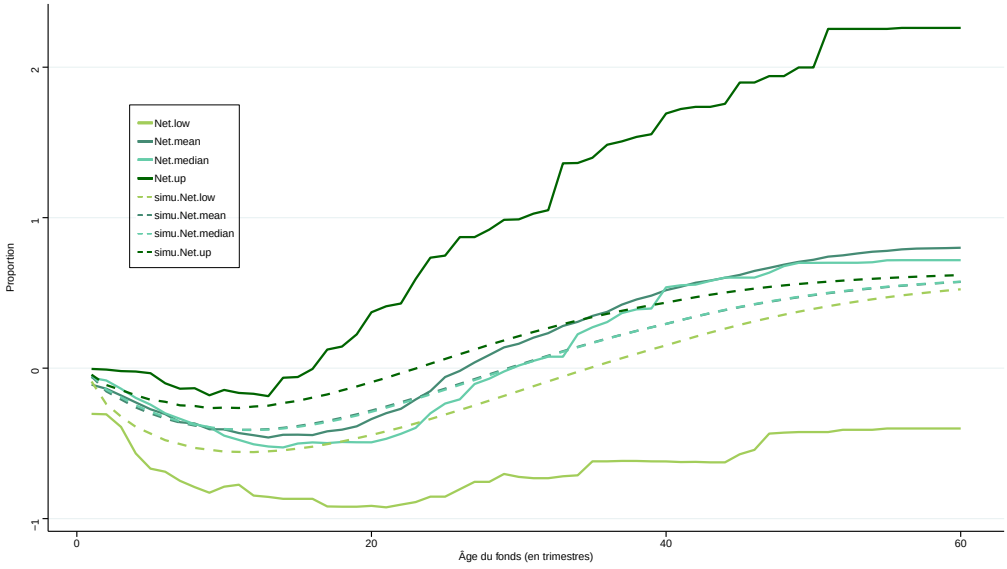


FIGURE A.23 – Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Buyout* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$

Les illustrations des résultats du modèle de projection appliqué aux fonds de *Venture* sont présentées infra (A.24, A.25 et A.26). Les problèmes rencontrés lors de la modélisation des flux de fonds de *Buyout* apparaissent ici également.

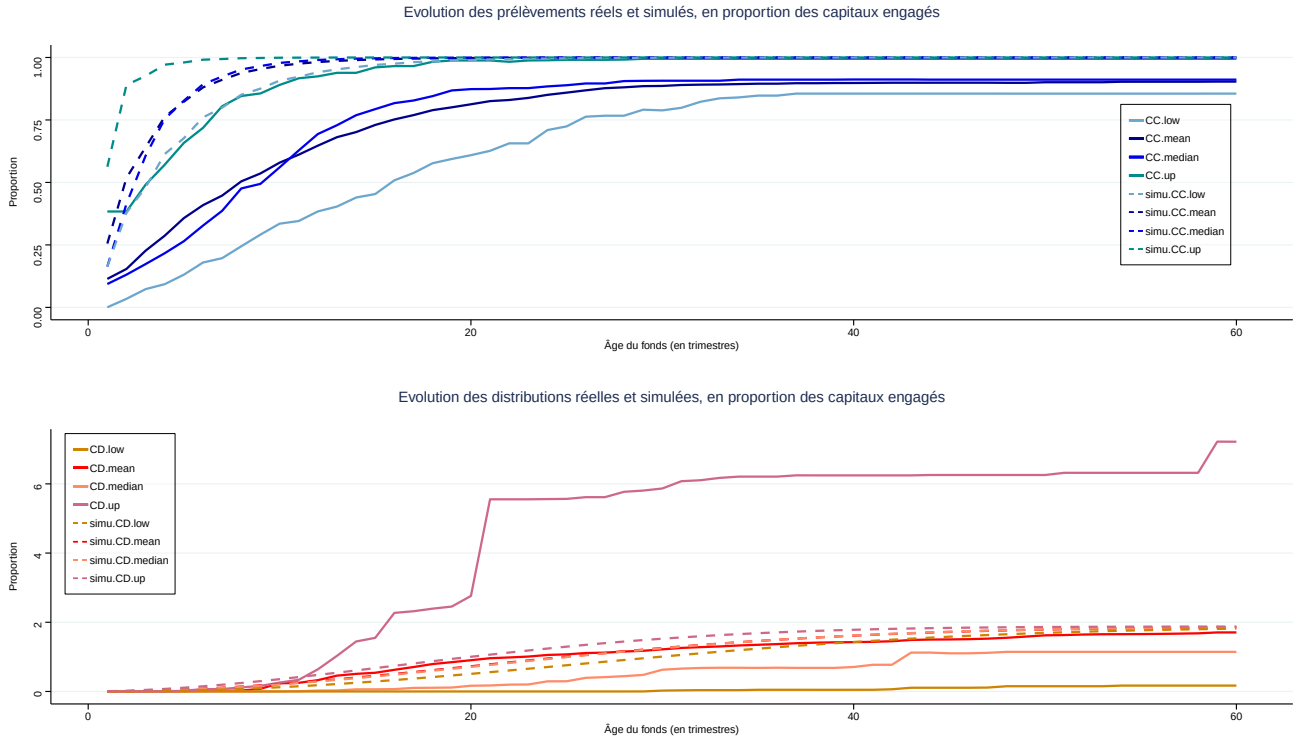


FIGURE A.24 – Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Venture* du jeu de données de validation

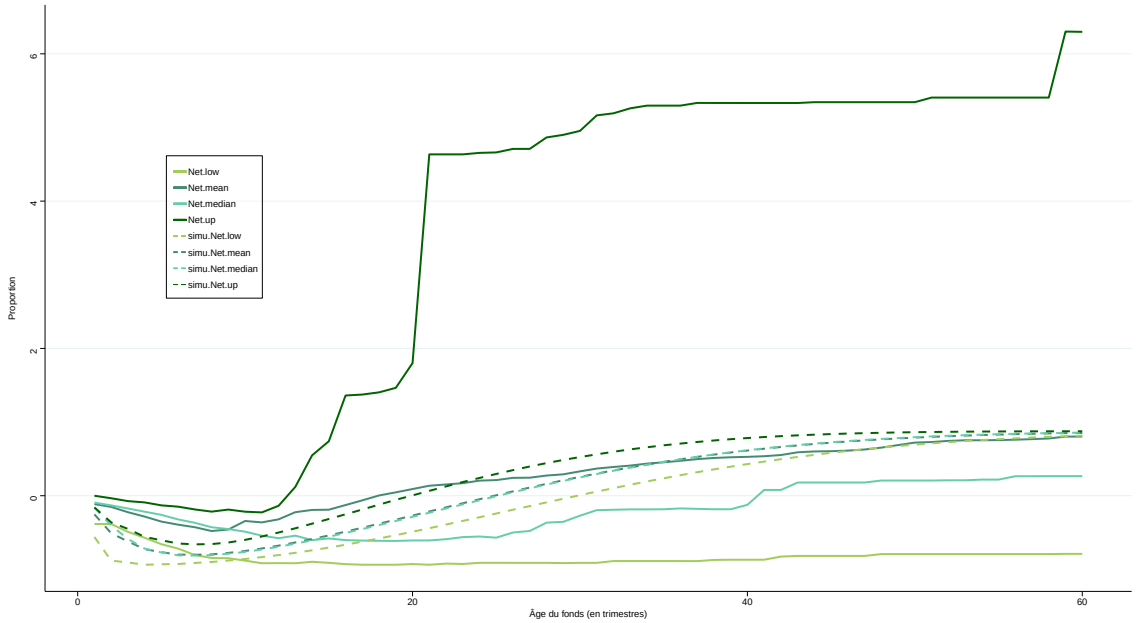


FIGURE A.25 – Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Venture* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds

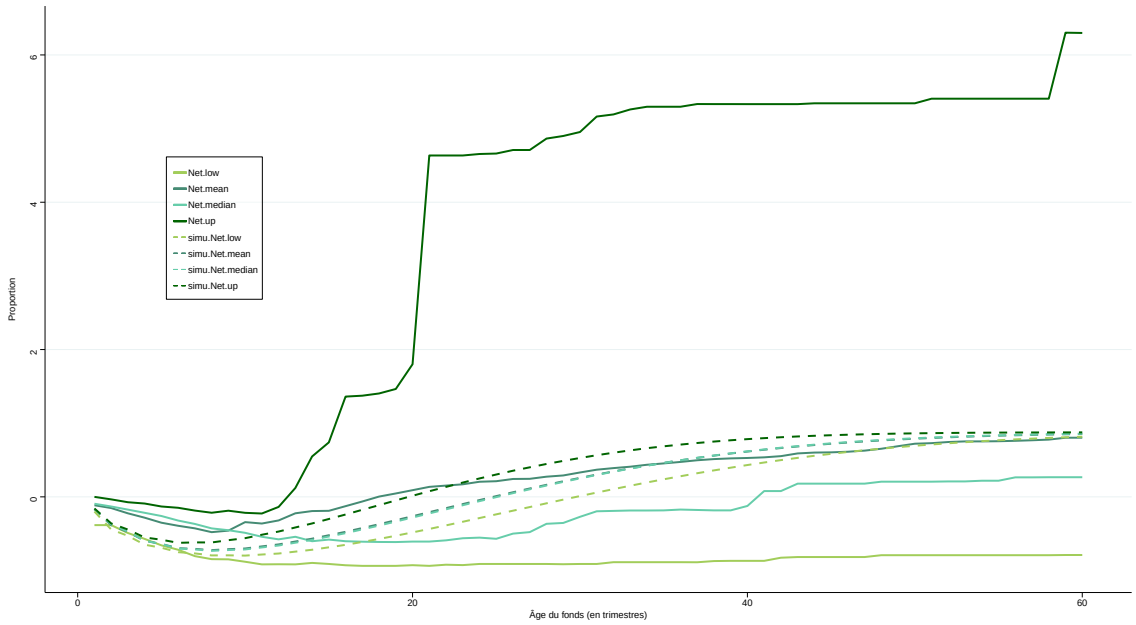


FIGURE A.26 – Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Venture* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$

B Éléments théoriques

Le Direct Alpha

Les éléments évoqués ici sont empruntés à GREDIL, GRIFFITHS et STUCKE (2009) qui eux-mêmes ont pris appui sur l'article de GRIFFITHS (2014).

La méthode du Direct Alpha se fonde sur la théorie moderne du portefeuille. La performance d'un fonds de capital investissement, r, est définie comme la somme de la performance du marché et d'un terme α, donc $\forall t$:

$$r(t) = b(t) + \alpha$$

où $r(t)$ et $b(t)$ sont considérés comme des taux continus. Dès lors, $\forall i < n$, la valeur en t_n d'un flux c_i survenu en t_i est égale à :

$$v_i(t_n) = c_i \exp\left\{\int_{t_i}^{t_n} (b(t) + \alpha)dt\right\}.$$

Or, puisque $b(t)$ est le taux continu qui traduit la performance de l'indice de référence, en notant I_t la valeur de l'indice en t, alors :

$$\frac{I_n}{I_i} = \exp\left\{\int_{t_i}^{t_n} b(t)dt\right\}.$$

Dès lors :

$$v_i(t_n) = c_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot \exp\left\{\int_{t_i}^{t_n} \alpha dt\right\}$$

et en discrétisant selon des intervalles de taille Δ, tels que $t_i = i \cdot \Delta$, on obtient :

$$v_i(t_n) = c_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot \exp\{\alpha(n-i)\Delta\}.$$

En appliquant cette expression à tous les flux du fonds de Private Equity jusqu'à la date n, il est alors possible d'obtenir la valeur liquidative i.e. la NAV du fonds en n :

$$NAV_{PE} = \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot \exp\{\alpha(n-i)\Delta\} - \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot \exp\{\alpha(n-i)\Delta\}$$

où les c_i sont les contributions et les d_i sont les distributions. Enfin en définissant a, le taux discret tel que $1 + a = \exp\{\alpha\Delta\}$, il s'avère que la valeur liquidative du fonds vaut :

$$NAV_{PE} = \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot (1+a)^{(n-i)} - \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \frac{I_n}{I_i} \cdot (1+a)^{(n-i)}.$$

Le calcul de a revient donc à évaluer le TRI du portefeuille constitué des flux capitalisés selon la performance de l'indice de référence et de la valeur liquidative finale du fonds.

Les boîtes à moustaches

Les boîtes à moustaches, aussi appelées boîtes de TUKEY ou *boxplots*, permettent de visualiser rapidement plusieurs métriques statistiques relatives à des données quantitatives.

Les boîtes à moustaches présentées dans ce mémoire ont été obtenues dans R à l'aide du package « ggplot2 ». Le schéma fictif suivant (B.1) illustre les éléments détaillés sur une boîte à moustaches.

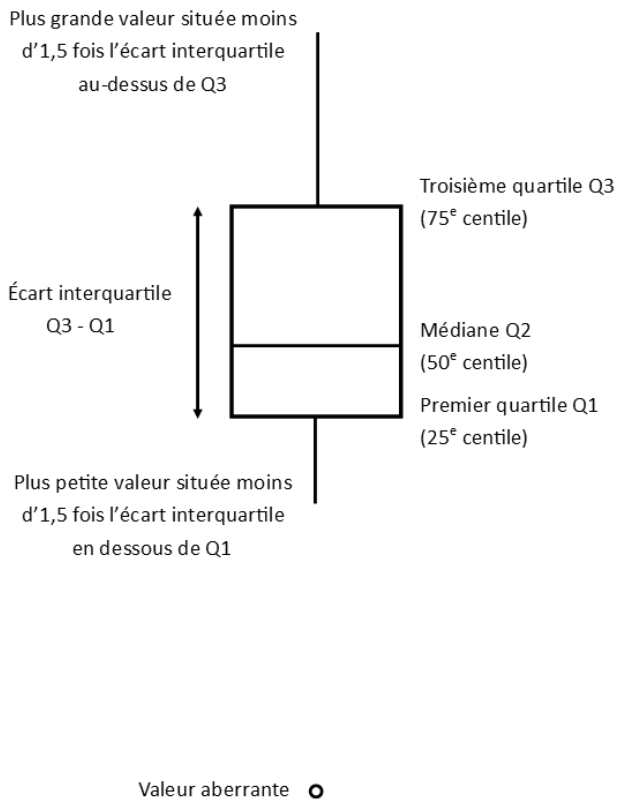


FIGURE B.1 – Schéma de lecture d'une boîte à moustaches

Il existe plusieurs manières de caractériser les valeurs aberrantes et donc la longueur des moustaches. Les boîtes à moustaches présentées dans ce mémoire utilisent la définition introduite par TUKEY, à savoir que les moustaches ont une longueur égale à 1,5 fois l'écart interquartile. Les valeurs aberrantes sont celles qui se situent au-delà des moustaches.

Les mesures de corrélation

Différentes mesures de corrélation peuvent être employées afin d'évaluer la relation entre 2 ou plusieurs variables quantitatives ou ordinales, pour rejeter ou accepter une quelconque indépendance. Il est nécessaire de distinguer la corrélation linéaire des corrélations de rangs.

Les corrélations présentées dans ce mémoire ont été calculées, dans leur grande majorité, sous R grâce à la fonction « cor.test » du package « stats ».

Le coefficient de corrélation linéaire de BRAVAIS-PEARSON

Aussi appelée corrélation de PEARSON, cette mesure donne une estimation de la liaison linéaire qui existe entre 2 variables quantitatives i.e. l'objectif est de réaliser un ajustement linéaire entre les variables. Ce coefficient de corrélation est compris entre -1 et $+1$. S'il vaut 1 ou -1, cela indique que l'une des variables est une fonction affine de l'autre ; s'il vaut 0 alors les deux variables ne sont pas linéairement corrélées [1]. Plus le coefficient est proche de -1 ou de 1, plus l'intensité de corrélation entre les variables sera élevée.

Pour 2 variables aléatoires X et Y réelles de variance finie, le coefficient de corrélation linéaire, noté ρ_{PEARSON}, est le rapport entre la covariance de X et Y, $\text{Cov}(X, Y)$ et le produit des écarts-types de X et Y, σ_X et σ_Y :

$$\begin{aligned}\rho_{\text{PEARSON}} &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \\ &= \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.\end{aligned}$$

Le signe du coefficient de corrélation linéaire indique si les variables évoluent, en moyenne, dans le même sens ou non. Si $\rho_{\text{PEARSON}} > 0$, alors lorsque X augmente, Y aura tendance à augmenter également ; si $\rho_{\text{PEARSON}} < 0$, alors une augmentation de X devrait entraîner une diminution de Y.

La corrélation de PEARSON n'est pas adaptée lorsqu'il s'agit d'évaluer des corrélations qui ne sont pas linéaires. En effet, bien qu'il soit presque toujours possible de calculer ce coefficient de corrélation, celui-ci n'a pas forcément de sens, notamment s'il existe une forte hétérogénéité dans les variables.

Il ne faut pas non plus confondre corrélation et causalité. Deux variables peuvent être fortement dépendantes d'une troisième variable, auquel cas la corrélation sera forte entre les deux premières variables, il n'existera par pour autant un lien de cause à effet entre celles-ci. Cette confusion porte le nom d'effet cigogne.

1. Il faut noter que 2 variables peuvent être corrélées, sans pour autant être linéairement corrélées.

La corrélation de SPEARMAN

Cette mesure de corrélation, aussi appelée ρ de SPEARMAN, peut être utile dès lors que des variables ont l'air corrélées mais que la relation entre celles-ci n'est pas linéaire. La corrélation est ici estimée à partir des rangs des variables plutôt qu'à partir de leur valeur. Le ρ de SPEARMAN permet donc de savoir s'il existe une relation monotone entre 2 ou plusieurs variables.

Soit deux variables aléatoires X et Y pour lesquelles nous disposons de n observations. Il est alors possible de déterminer le rang de chacune des observations. Pour un vecteur aléatoire réel $(Z_1, ..., Z_n)$ et $\forall i \in 1, ..., n$, le rang de Z_i est défini de cette manière :

$$rg_{Z_i} = \text{cardinal}\{j \neq i | X_j \leq X_i\}.$$

Ainsi, pour chaque X_i et Y_i, où $i \in 1, ..., n$, seront estimés rg_{X_i} et rg_{Y_i}. La corrélation de SPEARMAN se calcule de la manière suivante :

$$\rho_{\text{SPEARMAN}} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} (rg_{X_i} - rg_{Y_i})^2}{n \cdot (n^2 - 1)}.$$

Ce coefficient est aussi égal à la corrélation de PEARSON des rangs i.e.

$$\rho_{\text{SPEARMAN}} = \rho_{\text{PEARSON}}(rg_X, rg_Y).$$

Le ρ de SPEARMAN se comporte donc comme la corrélation de PEARSON, mais sur les rangs des variables.

Le Tau de KENDALL

À l'instar du coefficient de corrélation de SPEARMAN, le Tau de Kendall se fonde également sur les rangs des variables.

Soit 2 variables jointes X et Y et un échantillon de n observations $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, tels que les x_i et y_i sont uniques pour tout $i \in 1, ..., n$. Alors, $\forall (k, l) \in (1, ..., n)^2$ une paire d'observations (x_l, y_l) et (x_k, y_k) est dite concordante si $x_l < y_l$ et $x_k < y_k$, ou si $x_l > y_l$ et $x_k > y_k$. Si $x_l < y_l$ et $x_k > y_k$, ou si $x_l > y_l$ et $x_k < y_k$, alors la paire est dite discordante. Autrement, si $x_l = x_k$ ou $y_l = y_k$, la paire n'est ni discordante ni concordante.

Dès lors, le Tau de KENDALL se calcule comme suit :

$$\tau_{\text{KENDALL}} = \frac{\text{nombre de paires concordantes - nombre de paires discordantes}}{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)}.$$

Un estimateur du Tau de KENDALL, à partir d'observations réelles, est donné par :

$$\widehat{\tau}_{\text{KENDALL}}(X, Y) = \frac{2}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{k=2}^{n} \sum_{l=1}^{k-1} signe[(x_k - x_l) \cdot (y_k - y_l)]$$

où $signe(x) = 1$ si $x > 0$ et $signe(x) = -1$ sinon.

Le Tau de KENDALL est donc compris entre -1 et 1 car le dénominateur $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \binom{n}{k}$ est égal au nombre total possible de paires. Si X et Y sont indépendantes, alors le Tau de KENDALL devrait être environ égal à 0.

Démonstration dans le cadre de l'interprétation du R^2

Cette courte section est dédiée à la démonstration, dans le cas d'une régression linéaire simple, de la relation TSS = ESS + RSS où, avec les notations définies dans le corps du mémoire,

— $\text{ESS} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$,

— $\text{RSS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$,

— $\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$.

Soit la relation suivante :

$$(y_i - \overline{y}) = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \overline{y}) .$$

En mettant au carré les deux côtés de l'équation et en sommant sur les n observations, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 (y_i - \hat{y}_i) (\hat{y}_i - \overline{y}) .$$

Or, le dernier terme, $\sum_{i=1}^{n} 2 (\hat{y}_i - \overline{y}) (y_i - \hat{y}_i)$ est égal à 0. Il s'agit maintenant de le montrer. Pour cela on rappelle que dans le cas d'une régression linéaire simple :

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_i,$$

$$\overline{y} = \hat{a} + \hat{b} \cdot \overline{x},$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) (y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \hat{y}_i - \overline{y} &= \hat{b} (x_i - \overline{x}) \\ y_i - \hat{y}_i &= (y_i - \overline{y}) - (\hat{y}_i - \overline{y}) = (y_i - \overline{y}) - \hat{b} (x_i - \overline{x}) . \end{aligned}$$

Ce qui conduit enfin à :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right) &= 2\hat{b}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \hat{y}_i\right) \\
&= 2\hat{b}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left[\left(y_i - \overline{y}\right) - \hat{b}\left(x_i - \overline{x}\right)\right] \\
&= 2\hat{b}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)\left(y_j - \overline{y}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)^2}\right] \\
&= 2\hat{b}\cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La démonstration est ici réalisée dans le cas d'une régression linéaire simple. Il est possible de montrer le même résultat dans le cas d'une régression linéaire multiple, les calculs sont simplement un peu plus complexes et nécessitent de recourir au calcul matriciel.

Table des figures

1.1 Taux directeurs des principales banques centrales, en % 4
1.2 Taux 10 ans France et États-Unis, en % 5
1.3 Évolution du taux de couverture du SCR au sein des organismes d'assurance français . . . 7
1.4 Collecte nette sur les supports rachetables (en milliards d'euros) 9
1.5 Évolution du ratio combiné relatif à l'activité non vie en France 11

2.1 Évolution anticipée à 3 ans de l'allocation en actifs alternatifs - *la somme peut être différente de 100 % en raison des arrondis* 13
2.2 Évolution anticipée pour 2020 de l'allocation d'actifs - *la somme peut être différente de 100 % en raison des arrondis* 14
2.3 Structure d'un fonds de Private Equity 17
2.4 Profil de *cash flows* fictif d'un LP 20
2.5 Structure de frais d'un fonds de PE 21
2.6 Investissements du fonds 22
2.7 *Cash flows* waterfall 23
2.8 Type de fonds en fonction de la maturité 24
2.9 Exemple de LBO 27
2.10 Évolution du volume de transaction annuel sur le marché du Private Equity secondaire depuis 2002, en milliards de dollars 28
2.11 Évolution des décotes / surcotes en pourcentage de la NAV sur le marché secondaire depuis 2002 29
2.12 Montants levés d'origine française par type de souscripteurs au S1 2019 33
2.13 Évolution des levées de fonds par type de souscripteurs - S1 2019 vs S1 2018 34
2.14 Évolution des levées de fonds par type de souscripteurs - S1 2020 vs S1 2019 35
2.15 Performances moyennes, selon le TRI, des fonds de PE français par horizon et par segment 35
2.16 Performance des fonds de PE français contre d'autres classes d'actifs 36
2.17 Flux et premières mesures de performance du fonds 38
2.18 Illustration des limites du TRI 39
2.19 Calcul du TRIM 41
2.20 Évolution du multiple du fonds 42
2.21 Méthode LN PME 44
2.22 Méthode PME+ 45
2.23 Méthode KS PME 46
2.24 Méthode Direct Alpha 47

3.1 Structure Modulaire de la formule standard 51
3.2 Bilan prudentiel simplifié sous Solvabilité II 52
3.3 Répartition géographique des sous-jacents qui composent le LPX50 55
3.4 Répartition en fonction des stratégies d'investissement des sous-jacents qui composent le LPX50 56

4.1 Nombre de fonds uniques par millésime 69
4.2 Nombre de fonds uniques par stratégie 71

4.3 Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens . . . 73
4.4 Répartition des fonds par millésime dans la base de travail . . . 74
4.5 Répartition des fonds par stratégie et cible géographique dans la base de travail . . . 74
4.6 Boîtes à moustaches des durées de vie en années par stratégie pour les fonds économiquement morts . . . 75
4.7 Relation entre la durée de vie d'un fonds et le logarithme de sa taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite) . . . 77
4.8 Relation entre les pseudo-observations de la durée de vie des fonds et les pseudo-observations de leur taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite) . . . 77
4.9 Boîtes à moustaches des durées de vie, en années, par cible géographique pour les fonds économiquement morts . . . 78
4.10 Boîtes à moustaches des tailles, en millions de dollars, par stratégie pour les fonds économiquement morts . . . 79

5.1 Boîtes à moustaches des TRI inférieurs à 1,1 par stratégie pour les fonds économiquement morts . . . 83
5.2 Boîtes à moustaches des TVPI inférieurs à 11x par stratégie pour les fonds économiquement morts . . . 84
5.3 Boîtes à moustaches des KS-PME par stratégie pour les fonds économiquement morts (ne sont pas représentés les fonds pour lesquels le KS-PME est supérieur à 6) . . . 89
5.4 Boîtes à moustaches des Direct Alpha par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds qui affiche un Direct Alpha de 4,88) . . . 89
5.5 Relation entre la taille d'un fonds et sa KS-PME, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et les fonds de *Venture Capital* (à droite) . . . 90
5.6 Approche correcte - matrices de corrélation des différentes mesures de performance selon plusieurs mesures de corrélation pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital* . . . 92
5.7 Matrices de corrélation entre le Private Equity et le marché, pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital* . . . 93
5.8 Performances annuelles des différents portefeuilles . . . 104
5.9 Graphiques de sélection du seuil pour le portefeuille « 10bvo » . . . 115
5.10 Graphiques d'ajustement de la GPD aux extrêmes pour le portefeuille « 10bvo » . . . 117
5.11 Qualité d'ajustement de la loi normale aux observations du portefeuille « 10bvo » . . . 119
5.12 Distribution observée vs Distribution Normale calibrée sur les observations du portefeuille « 10bvo » . . . 120
5.13 *Q-Q plot* et *P-P plot* issus de l'ajustement aux observations du portefeuille « 10bvo » par une SGT . . . 122
5.14 Distribution observée vs Distribution SGT calibrée sur les observations du portefeuille « 10bvo » . . . 123

6.1 Projection d'un processus CIR selon différents schémas de discrétisation Cas 1 - Condition vérifiée . . . 144
6.2 Projection d'un processus CIR selon différents schémas de discrétisation Cas 2 - Condition non vérifiée . . . 144
6.3 Trajectoires des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Buyout* de la base de travail . . . 146
6.4 Évolution des *cash flows* cumulés des fonds de *Buyout* de la base de travail, en proportion des capitaux engagés dans les fonds . . . 147
6.5 Évolution, en fonction de θ et de κ, de la quantité à minimiser qui intervient dans la calibration des prélèvements . . . 148
6.6 Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Buyout* du jeu de données de validation . . . 149

6.7 Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements pour les fonds de *Buyout* du jeu de données de validation, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$ 150

A.1 Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds de *Buyout* 155
A.2 Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds de *Venture Capital* 155
A.3 Évolution des TRI(CF) et TRI(NAV) moyens pour les fonds Growth 156
A.4 Durée de vie par stratégie et par cible géographique 157
A.5 Taille par stratégie et par cible géographique 157
A.6 Boîtes à moustaches des TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts 158
A.7 Boîtes à moustaches des TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds qui affiche un TRI exceptionnel supérieur à 5,5) 158
A.8 Boîtes à moustaches des TVPI par stratégie pour les fonds économiquement morts 159
A.9 Boîtes à moustaches des TVPI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts 159
A.10 Boîtes à moustaches des TRIM par stratégie pour les fonds économiquement morts 160
A.11 Boîtes à moustaches des TRIM pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts 160
A.12 Boîtes à moustaches des LNPME-TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5) 161
A.13 Boîtes à moustaches des LNPME-TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5) 161
A.14 Boîtes à moustaches des PME+-TRI par stratégie pour les fonds économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5) 162
A.15 Boîtes à moustaches des PME+-TRI pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts (n'est pas représenté le fonds de *Venture Capital* qui affiche un TRI supérieur à 5,5) . 162
A.16 Boîtes à moustaches des KS-PME par stratégie pour les fonds économiquement morts . . . 163
A.17 Boîtes à moustaches des KS-PME pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts 163
A.18 Relation entre les pseudo-observations de la KS-PME des fonds et les pseudo-observations de leur taille, pour les fonds de *Buyout* (à gauche) et de *Venture Capital* (à droite) 164
A.19 Boîtes à moustaches des Direct Alpha par stratégie pour les fonds économiquement morts 164
A.20 Boîtes à moustaches des Direct Alpha pour les fonds de *Buyout* et de *Venture* économiquement morts 165
A.21 Approche erronée - Matrices de corrélation des différentes mesures de performance selon plusieurs mesures de corrélation pour les fonds de *Buyout* et de *Venture Capital* 165
A.22 Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Buyout* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds 168
A.23 Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Buyout* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$ 168
A.24 Trajectoires réelles vs simulées des prélèvements et des distributions de capitaux pour les fonds de *Venture* du jeu de données de validation 169
A.25 Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Venture* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds 170
A.26 Évolution des *cash flows* cumulés réels et simulés pour les fonds de *Venture* de la base de données de validation, en proportion des capitaux engagés dans les fonds, avec un paramètre de volatilité $\sigma_\delta = 1$ 170

B.1 Schéma de lecture d'une boîte à moustaches 172

Liste des tableaux

2.1 Mesures de performance 47

3.1 10 constituants principaux du LPX 50 au 30/06/2020 56

4.1 Informations disponibles dans la base de données 68
4.2 Regroupement des fonds selon leur stratégie 70
4.3 Répartition des fonds par cible géographique 70
4.4 Mesures de corrélation entre la taille et la durée de vie des fonds de *Buyout* 76
4.5 Mesures de corrélation entre la taille et la durée de vie des fonds de *Venture Capital* 76

5.1 Statistiques relatives aux TRI des fonds économiquement morts par stratégie 83
5.2 Statistiques relatives aux TRIM des fonds économiquement morts par stratégie 85
5.3 Statistiques relatives aux KS-PME des fonds économiquement morts par stratégie 88
5.4 Statistiques relatives aux Direct Alpha des fonds économiquement morts par stratégie . . . 88
5.5 Mesures de corrélation entre la taille et la KS-PME des fonds de *Buyout* 90
5.6 Mesures de corrélation entre la taille et la KS-PME des fonds de *Venture Capital* 90
5.7 Caractéristiques du portefeuille 1b 100
5.8 Caractéristiques du portefeuille 1v 100
5.9 Caractéristiques du portefeuille 5b 100
5.10 Caractéristiques du portefeuille 5v 100
5.11 Caractéristiques du portefeuille 10bv 101
5.12 Caractéristiques du portefeuille 10bvo 101
5.13 Mesures de risque sur les performances excédentaires au taux sans risque pour chacun des 6 portefeuilles fictifs 106
5.14 Quantiles de performance pour le portefeuille « 10bvo » 107
5.15 Estimateurs des paramètres de la GPD calibrée sur le portefeuille « 10bvo » 115
5.16 Résultats du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV 116
5.17 VaR 99,5 % et CVaR 99,5 % obtenues par la méthode POT et par la méthode historique . . . 117
5.18 Estimateurs des paramètres de la loi normale calibrée sur le portefeuille « 10bvo » 118
5.19 Estimateurs des paramètres de la *Skewed generalized « t » distribution* calibrée sur le portefeuille « 10bvo » 121
5.20 Résultats du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV 122
5.21 VaR 99,5 % et CVaR 99,5 % obtenues par les différentes méthodes 123
5.22 Résultats agrégés du *Backtesting* de la VaR sur les performances trimestrielles du portefeuille « 10bvo » 124

6.1 Estimateurs des paramètres intervenant dans la modélisation des prélèvements 147
6.2 Estimateurs des paramètres intervenant dans la modélisation des distributions 147
6.3 Coefficients de détermination, R^2, relatifs aux trajectoires simulées moyennes des prélèvements et des distributions 151

A.1 *Backtesting* de la VaR sur les performances trimestrielles du portefeuille « 10bvo » 167

Abréviations

ACPR Autorité de contrôle prudentiel et de résolution. 6, 7, 9, 51, 52, 180, 184
AMF Autorité des Marchés Financiers. 32, 33, 180

BCE Banque Centrale Européenne. 3, 4, 180
BSCR Basic Solvency Capital Requirement. 51, 180

CAPM Capital Asset Pricing Model. 47, 180
CDO Collateralized Debt Obligation. 30, 180
CIR COX-INGERSOLL-ROSS. 131, 140–145, 148, 150, 151, 178, 180
CVaR Conditional Value at Risk. 96, 106, 113, 116–118, 121–124, 180

DPI Distributed to Paid-In. 41, 42, 180

EBITDA Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization. 26, 180
EEE Espace Économique Européen. 53, 57–59, 180
EIOPA *European Insurance and Occupational Pensions Authority*. 6, 7, 13, 51, 53–55, 57, 116, 180
ELTIF European Long-Term Investment Funds. 32, 33, 58, 60, 180
ETI Entreprises de Taille Intermédiaire. 62, 180

FCPI Fonds Communs de Placement dans l'Innovation. 32, 180
FCPR Fonds Communs de Placement à Risques. 32, 60, 63, 180
Fed Réserve fédérale des États-Unis. 3–5, 180
FFA Fédération Française de l'Assurance. 62, 180
FIA Fonds d'Investissement Alternatifs. 32, 58, 180
FIP Fonds d'Investissement de Proximité. 32, 180
FPCI Fonds Professionnels de Capital Investissement. 32, 60, 180
FPS Fonds Professionnels Spécialisés. 32, 60, 180

GAAP Generally Accepted Accounting Principles. 180
GP General Partner. 17, 18, 21–23, 25, 27, 28, 31, 36, 39, 67, 69, 75, 98, 105, 128–131, 180
GPD Generalized Pareto Distribution. 108–110, 112, 115–117, 126, 178, 180

ICM Index Comparison Method. 43, 180
IPO Initial Public Offering. 30, 31, 180

LBO Leverage Buyout. 25, 26, 58, 59, 62, 180
LPs Limited Partners. 17–21, 27–29, 31, 36–38, 42, 43, 45, 66–68, 81–83, 87, 94, 95, 98, 128–131, 145–147, 151, 180
LTEI Long-Term Equity Investments. 57, 58, 180

MEDAF Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers. 47, 59, 180

NAV Net Asset Value. 29, 53, 68, 71, 75, 81, 84, 94, 97, 99, 156, 171, 180

OAT Obligations assimilables du Trésor. 4, 99, 180
OCDE Organisation de Coopération et de Développement Économiques. 36, 53, 59, 180
OPC Organismes de Placement Collectif. 58, 180
OPCVM Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières. 58, 180

PACTE Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation de l'Entreprise. 60, 180
PME Petites et Moyennes Entreprises. 60, 62, 63, 180
PME Public Market Equivalent. 36, 43–48, 57, 62, 83, 85–93, 178, 180
POT Peaks Over Threshold. 108, 109, 114–117, 123–126, 166, 180
PPB Provision pour Participation aux Bénéfices. 7, 9, 180
PPE Provision pour Participation aux Excédents. 7, 180
PPP Partenariats Public-Privé. 15, 180

RC Réserve de Capitalisation. 7, 180
RVPI Residual Value to Paid-In. 41, 42, 180

SCR *Solvency Capital Requirement*. 6, 7, 10, 53, 54, 95, 99, 177, 180
SPV Special Purpose Vehicle. 30, 180

TLTRO targeted longer-term refinancing operations. 5, 180
TMG Taux Minimum Garanti. 8, 180
TRI Taux de Rentabilité Interne. 26, 34, 35, 38–41, 43–48, 56, 72, 73, 81–87, 91–93, 156, 158, 172, 177, 180
TRIM Taux de Rendement Interne Modifié. 40, 41, 84, 85, 177, 180
TRPEI Thomson Reuters Private Equity Buyout Index. 67, 180
TRVCI Thomson Reuters Venture Capital Index. 67, 180
TVE Théorie des Valeurs Extrêmes. 102, 108, 117, 180
TVPI Total Value to Paid-In. 41, 42, 45, 81, 82, 84, 92, 93, 158, 180

UC Unités de Compte. 6, 8, 9, 58, 60, 63, 180

VAN Valeur Actuelle Nette. 34, 37–39, 41–46, 48, 84, 180
VaR Value at Risk. 95, 96, 99, 102, 106, 107, 113–118, 121–126, 153, 166, 167, 180

Bibliographie

A new decade for private markets : McKinsey Global Private Markets Review (fév. 2020). McKinsey & Company.

ABADIE, Aurélie (déc. 2019). « Taux bas : les assureurs en quête de la bonne formule ». In : *L'Argus de l'assurance*. URL : https://www.argusdelassurance.com/les-assureurs/taux-bas-les-assureurs-en-quete-de-la-bonne-formule.157559.

ALFONSI, Aurélien (2005). « On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes ». In : *Monte Carlo methods and applications* 11(4), p. 355-384.

ALFONSI, Aurélien (2012). « Discrétisation de processus et modélisation en finance ». Thèse de doct. Université de Paris-Est.

ARIAS, Liliana, Mohamed El Hedi AROURI et al. (2010). *On the Suitability of the Calibration of Private Equity Risk in the Solvency II Standard Formula*. EDHEC Financial Analysis et Accounting Research Centre.

ARIAS, Liliana, Guillaume DÉDEREN et al. (nov. 2016). « Quelles solutions pour le secteur de l'assurance face à l'environnement de taux bas en Europe ? » Rapp. scient. EDHEC Economics Research Centre.

ARTZNER, Philippe et al. (1999). « Coherent measures of risk ». In : *Mathematical finance* 9(3), p. 203-228.

BALKEMA, August A et Laurens DE HAAN (1974). « Residual life time at great age ». In : *The Annals of probability*, p. 792-804.

BENSEGHIR, Sanda (2006). « Calcul de la VaR selon l'approche historique et la théorie des valeurs extrêmes sur un fond alternatif de Dexia Asset Management ». Mém. de mast. Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP).

BIZRI, Mounah et al. (juil. 2018). « Les actifs illiquides : une oasis dans le désert du rendement ? » In : *Revue Banque | House of Finance Days*, p. 25.

BORCHANI, Anis (2010). *Statistiques des valeurs extrêmes dans le cas de lois discretes*. École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales (ESSEC).

BROWN, Gregory W et Steven N KAPLAN (2019). « Have Private Equity Returns Really Declined ? » In : *The Journal of Private Equity* 22(4), p. 11-18.

BUCHNER, Axel, Christoph KASERER et Niklas WAGNER (2014). « Private equity funds : valuation, systematic risk and illiquidity ». In : *Systematic Risk and Illiquidity (September 30, 2014)*.

COX, John C, Jonathan E INGERSOLL JR et Stephen A ROSS (1985). « A theory of the term structure of interest rates ». In : *Theory of valuation*. World Scientific, p. 384-407.

DAVIS, Carter (2015). *The skewed generalized t distribution tree package vignette*.

DEELSTRA, Griselda, Freddy DELBAEN et al. (1998). « Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term ». In : *Applied stochastic models and data analysis* 14(1), p. 77-84.

DEPREY, Émilie et Alexandre GODZINSKI (2007). « Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie ». Mém. de mast. École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE).

DIOP, Awa (2003). « Sur la discrétisation et le comportement à petit bruit d'EDS unidimensionnelles dont les coefficients sont à dérivées singulières ». Thèse de doct. Nice.

EIOPA Insurance Stress Test report (déc. 2018). EIOPA.

FISCHER, Stanley (oct. 2016). « Why Are Interest Rates So Low ? Causes and Implications ». In : *Economic Club of New York*.

Fitch Ratings 2020 Outlook : French Insurance (nov. 2019). Fitch Ratings.

FORSELL, Johannes et Elias FURENSTAM (2018). « Cash Flow Simulation in Private Equity : An evaluation and comparison of two models ». Mém. de mast. Université d'Umeå.

Global Insurance Report (juin 2019). Blackrock, p. 44-57.

Global Private Equity Report 2020 (fév. 2020). Bain & Company.

GOMPERS, Paul, Steven N KAPLAN et Vladimir MUKHARLYAMOV (2016). « What do private equity firms say they do ? » In : *Journal of Financial Economics* 121(3), p. 449-476.

GREDIL, Oleg, Barry E GRIFFITHS et Rüdiger STUCKE (2009). « Benchmarking private equity : The direct alpha method ». In : *Private Equity Mathematics*.

GRIFFITHS, Barry E (2014). « Estimating Alpha in Private Equity ». In : *Available at SSRN 2403521*.

HEFTER, Mario et André HERZWURM (2018). « Strong convergence rates for Cox–Ingersoll–Ross processes—full parameter range ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 459(2), p. 1079-1101.

HEMPLER, Steve (jan. 2019). *Private markets commitment pacing and cash flow modeling*.

HURLIN, Christophe (déc. 2013). *Chapter 2 : Maximum Likelihood Estimation*.

Impact of ultra low yields on the insurance sector, including first effects of COVID-19 crisis (juil. 2020). EIOPA.

KAPLAN, Steven et Antoinette SCHOAR (2003). *Private equity performance : Returns, persistence and capital*. Rapp. tech. National Bureau of Economic Research.

KAPLAN, Steven N et Antoinette SCHOAR (2005). « Private equity performance : Returns, persistence, and capital flows ». In : *The journal of finance* 60(4), p. 1791-1823.

KASERER, Christoph et Christian DILLER (2004). *European private equity funds : A cash flow based performance analysis*. Rapp. tech. CEFS working paper series.

KLIMKO, Lawrence A et Paul I NELSON (1978). « On conditional least squares estimation for stochastic processes ». In : *The Annals of statistics*, p. 629-642.

La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France au premier semestre 2019 (p. d.). Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR).

LE GALL, Gaëtan (2017). « Investissement en infrastructures : identification et modélisation de risques spécifiques ». Mém. de mast. École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE).

LE GOISTRE, Elodie (2009). « La mesure Value-at-Risk (VaR) et ses méthodes alternatives ». Mém. de mast. Diplôme universitaire d'actuariat de Strasbourg.

Les fonds de capital-investissement (FCPR, FCPI, FIP) (p. d.). AMF.

LI, Mingqian et Jianyu CHEN (2013). « VaR Historique et Expected Shortfall ». Mém. de mast. École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE).

LJUNGQVIST, Alexander et Matthew RICHARDSON (2003). « The investment behavior of private equity fund managers ». In :

LONG, Austin M et Craig J NICKELS (1996). « A private investment benchmark ». In : *Working paper*.

MCCRYSTAL, Amanda (2011). *Solvency II and Private Equity*. EMPEA.

MCDONALD, James B et Whitney K NEWEY (1988). « Partially adaptive estimation of regression models via the generalized t distribution ». In : *Econometric theory*, p. 428-457.

Natixis Global Insurance Survey (nov. 2019). Natixis Investment Managers. URL : https://www.im.natixis.com/en-hk/research/insurance-survey-2019-regulatory-challenges.

PHALIPPOU, Ludovic (2008). « The hazards of using IRR to measure performance : The case of private equity ». In : *Available at SSRN 1111796*.

PICKANDS III, James et al. (1975). « Statistical inference using extreme order statistics ». In : *the Annals of Statistics* 3(1), p. 119-131.

PLANCHET, Frédéric et Pierre-Emanuel THÉROND (2010). « Simulation de trajectoires de processus continus ». In : *arXiv preprint arXiv :1001.1909*.

Projet de loi de finances pour 2021 : Le budget de 2021 et son contexte économique et financier (2020). URL : http://www.senat.fr/rap/l20-138-1/l20-138-11.html#fn14. (consulté le : 2021-01-11).

Ratio S/P et ratio combiné - Quelle est la définition la plus pertinente ? (2016). URL : http://beluxfr.addactis.com/wp-content/uploads/sites/4/2016/05/2016_April-issue_Le-monde-de-lassurance_Ratio.pdf.

RIBATET, Mathieu (2006). « A user's guide to the PoT package (version 1.4) ». In : *University of Quebec*.

ROUVINEZ, Christophe (2003). « Private equity benchmarking with PME+ ». In : *Venture Capital Journal* 43(8), p. 34-39.

SCHAFROTH, Emmanuel (déc. 2018). « Actifs illiquides : des classes d'actifs complexes aux atouts indéniables ». In : *Option Finance*.

SCHOENBERG, Alexandra et Claudia ZEISBERGER (mar. 2019). *Measuring Private Equity Fund Performance*. INSEAD.

SORENSEN, Morten, Neng WANG et Jinqiang YANG (2013). *Valuing private equity*. Rapp. tech. National Bureau of Economic Research.

TAHRI HASSANI, Ismaël (2015). « Financement des infrastructures sous Solvabilité 2 ». Mém. de mast. École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE).

TAKAHASHI, Dean et Seth ALEXANDER (2002). « Illiquid alternative asset fund modeling ». In : *The Journal of Portfolio Management* 28(2), p. 90-100.

TANSENS, Pol Robert (nov. 2018). *Real Estate and Inflation : Not necessarily a bad combination*.

TAUSCH, Christian (2016). « Private Capital Fund Risk Modeling ». Mém. de mast. Munich University of Applied Sciences.

THEODOSSIOU, Panayiotis (1998). « Financial data and the skewed generalized t distribution ». In : *Management Science* 44(12-part-1), p. 1650-1661.

UNGSGÅRD, Oscar (2020). « Stochastic Modelling of Cash Flows in Private Equity ». Mém. de mast. Kungliga Tekniska högskolan (KTH).

ZAMOR, Edy junior (2017). « Théorie des valeurs extrêmes et stress tests ». Mém. de mast. Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP).

ZEISBERGER, Claudia, Michael PRAHL et Bowen WHITE (2017). *Mastering Private Equity*. Wiley.