

**Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le 30/01/ 2025**

Par : Alban KAMGA
Titre : Impact d'une stratégie par collar dynamique sur le portefeuille d'un assureur-vie.

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire*

Entreprise :

SIAPARTNERS

Nom :

Michaël Donio

Signature :

*Membres présents du jury du Certificat
d'Actuariat de Paris-Dauphine*

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Eric DAUPLEY

Signature :



***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)***

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Michaël Donio

Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

La directive Solvabilité 2 a considérablement modifié le cadre réglementaire appliqué aux activités d'assurance. Aujourd'hui, les assureurs-vie doivent satisfaire à de nombreuses conditions pour pouvoir exercer leur activité. L'une de ces conditions, la plus contraignante, est liée aux fonds propres. En effet, avec Solvabilité 2, les assureurs doivent tenir compte du Capital Requis de Solvabilité (SCR) dans la constitution de leurs fonds propres, ce qui peut rendre l'activité de l'assureur plus contraignante et réduire ses marges de manœuvre.

Le calcul du SCR est basé sur plusieurs facteurs de risque, l'un des plus importants étant le SCR marché. Cependant, avec le contexte économique actuel et le fait que, sous Solvabilité 2, les actifs sont évalués à leur valeur de marché, le SCR marché est amené à croître, contraignant ainsi les assureurs à immobiliser davantage de fonds propres. L'objectif de ce mémoire est de présenter une stratégie de couverture appelée « Collar », qui vise à réduire de manière significative le risque lié aux actions, ce qui permettra de diminuer le SCR global.

Ainsi, dans le cadre de ce mémoire, nous présenterons, dans une première partie, l'assurance-vie en France. Ensuite, après une présentation de la directive Solvabilité 2, nous aborderons les différents outils utilisés pour le calcul du SCR, en mettant particulièrement l'accent sur le modèle ALM et le GSE que nous avons utilisés pour effectuer ce calcul. Enfin, nous exposerons la stratégie de Collar dynamique et montrerons pourquoi il est intéressant d'utiliser une telle stratégie pour protéger ses actifs. Nous étudierons également l'impact de la couverture sur le SCR pour l'assureur.

Mots-clés : ALM, Stratégie de couverture, GSE, SCR.

Abstract

The Solvency 2 directive has significantly modified the regulatory framework applied to life insurance activities. Today, life-insurers must meet numerous conditions to operate their business. One of these conditions, the most restrictive, is related to own funds. Indeed, with Solvency 2, insurers must take into account the Solvency Capital Requirement (SCR) in the constitution of their own funds, making the insurer's activity more restrictive and reducing its room for maneuver.

The calculation of the SCR is based on several risk factors, one of the most important being the market SCR. However, given the current economic context and the fact that, under Solvency 2, assets are valued at their market value, the market SCR is expected to increase, thereby forcing insurers to immobilize more own funds. The objective of this thesis is to present a hedging strategy called "Collar," which aims to significantly reduce equity-related risk, thus reducing the overall SCR.

Thus, in the context of this thesis, we will present, in a first part, life insurance in France . Then, after presenting the Solvency 2 directive, we will discuss the different tools used for calculating the SCR, with a particular focus on the ALM model and the GSE that we used for this calculation. Following this, we will expose the dynamic Collar strategy and demonstrate why it is interesting to use such a strategy to protect assets. Finally, we will study the impact of the coverage on the SCR for the insurer.

Keywords : ALM, hedging strategy, ESG, SCR.

Note de Synthèse

Introduction

L'instabilité qui règne sur les marchés financiers, notamment sur les actions, exerce une influence significative sur la situation financière des assureurs, surtout dans le contexte des normes réglementaires telles que Solvabilité 2 (S2) et IFRS 17. La détention d'actions dans les portefeuilles d'investissement sous Solvabilité 2 impose des exigences de fonds propres plus élevées en raison du risque accru, impactant directement le calcul du Capital Requis de Solvabilité (SCR). En période de volatilité accrue, le SCR peut augmenter, affectant la solvabilité globale de l'assureur et sa capacité à respecter ses engagements envers les assurés. L'introduction de la norme comptable IFRS 17 ajoute une dimension aux conséquences de la volatilité des actions, influant sur la valorisation des passifs d'assurance, les résultats financiers et la présentation des états financiers. Pour faire face à ces défis, les assureurs peuvent être amenés à concevoir des stratégies d'atténuation telles que la mise en place de mécanismes de couverture, l'utilisation d'instruments dérivés ou la diversification du portefeuille. Ces approches visent à stabiliser les résultats financiers tout en optimisant le portefeuille d'actions.

Ce mémoire suggère ainsi une solution axée sur l'optimisation du portefeuille d'actions par le biais d'une stratégie de couverture, permettant une flexibilité d'investissement tout en maîtrisant le SCR, en vue d'optimiser les contrats en euros dans un cadre réglementaire rigoureux et une conjoncture économique incertaine.

La mise en place d'un Collar comme stratégie de couverture

Le **collar dynamique** est une stratégie sophistiquée de gestion des risques qui peut être utilisée par les assureurs pour protéger leurs portefeuilles d'actions contre les fluctuations du marché tout en cherchant à générer des revenus. Cette approche combine l'achat d'options de vente, qui offrent une protection à la baisse en permettant à l'assureur de vendre un actif à un prix prédéterminé, avec la vente d'options d'achat, générant ainsi des revenus sous forme de primes.

L'idée sous-jacente est de limiter les pertes potentielles tout en générant des liquidités pour compenser une partie des coûts associés à la protection. Ce qui distingue le collar dynamique des stratégies statiques est sa capacité à s'ajuster en temps réel aux changements de marché.

Par exemple, si le marché monte, l'assureur peut ajuster la stratégie en rachetant des options de vente devenues moins nécessaires ou en vendant des options d'achat à des niveaux plus élevés pour maintenir la protection tout en bénéficiant d'une partie des gains potentiels. Différentes formes de collar existent, chacune adaptée à des objectifs spécifiques. Le **collar asymétrique**, par exemple, peut privilégier la protection à la baisse tout en sacrifiant une partie des gains potentiels à la hausse.

Cadre de l'analyse

Afin d'évaluer les répercussions de la mise en place de la stratégie de couverture, nous nous sommes interrogés sur le choix de l'organisme d'assurance à prendre en considération. Nous avons opté pour la prise en compte d'un assureur-type, dont les caractéristiques ont été spécifiées en utilisant des données de marché. Nous avons pris soin de nous assurer que cet assureur soit représentatif du marché français, garantissant ainsi la représentativité de notre étude pour la majorité des assureurs du secteur.

Ainsi, afin de mesurer l'impact de la stratégie de collar dynamique, nous avons choisi le portefeuille d'un assureur-vie constitué de contrats d'épargne avec un support en euros. Nous avons implémenté une stratégie de collar composée de puts et calls à strike fixe, à savoir 95% pour nos puts et 105% pour nos calls, avec des maturités respectives d'un mois pour les puts et d'une semaine pour les calls, et un renouvellement qui s'effectue de façon hebdomadaire. Les principaux coûts liés à la stratégie proviennent de l'achat des puts et de sa mise en place opérationnelle, en considérant que l'assureur gère directement la stratégie sans intermédiaire extérieur.

La table 1 présente les principales caractéristiques de cet assureur-type ainsi défini. Il est toutefois important de noter que certains assureurs peuvent présenter des structures et des caractéristiques divergentes par rapport à cet « assureur représentatif », notamment en termes de solvabilité et de structure des investissements.

Actif		Passif	
Poste	Montant (en M€)	Poste	Montant (en M€)
Action	100	Capitaux propres	130
Obligation	800	Réserve de capitalisation	2
Immobilier	80	PPE	30
Monétaire	20	PM	838

TABLE 1 : Bilan initial de l'assureur-type

Ensuite, il a fallu initier la création de notre outil dédié au calcul des prix des produits dérivés. L'objectif primordial était de pouvoir reproduire les tarifs des options d'achat (call) et de vente (put) observés sur les marchés financiers. Nous avons examiné divers modèles, mais finalement, notre choix s'est porté sur une approche de type Black-Scholes avec une volatilité déterministe. La détermination de cette volatilité a été réalisée en utilisant la formule fermée fournie par le modèle SABR. Une fois cette phase achevée, nous avons mis en œuvre le modèle de gestion actif-passif (ALM) élaboré au sein de Sia-Partners pour modéliser l'évolution de notre bilan et les interactions

entre l'actif et le passif. L'objectif final de cette démarche était de pouvoir calculer nos indicateurs clés, à savoir le SCR et les Fonds Propres.

Analyse de l'impact de la stratégie

Dans un premier temps, nous sommes partis de la répartition initiale du portefeuille de notre assureur-type et avons mis en place la stratégie de couverture sur l'ensemble du portefeuille actions. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 1.

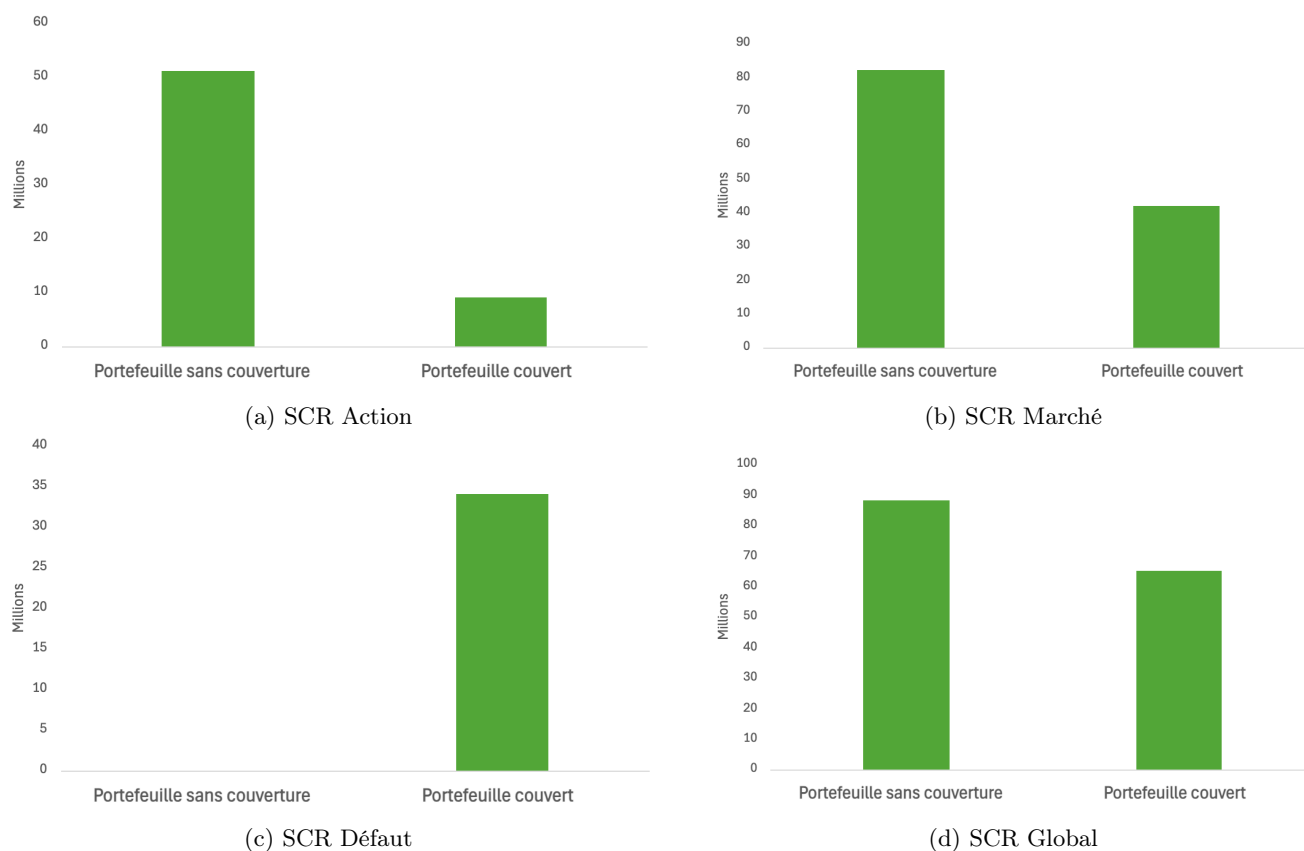


FIGURE 1 : Répartition des différentes composantes du SCR

Comme indiqué par ces résultats, notre couverture sur la partie actions des actifs a permis de réaliser un gain d'environ 20 millions d'euros au niveau du SCR. Bien que l'impact de la stratégie sur le SCR des actions aurait pu laisser présager un gain plus important, l'inclusion du SCR Défaut dans le calcul total du SCR, en présence de produits dérivés, a abouti à un résultat moins élevé. De plus, comme souligné dans notre analyse de la stratégie de collar dynamique, en période de marché haussier, le rendement du portefeuille couvert a tendance à être inférieur à celui du portefeuille non couvert.

Nous avons ensuite modifié la répartition du portefeuille couvert comme présenté dans le tableau 2.

Poste	Répartition 1 (en M€)	Répartition 2 (en M€)
Action	324	450
Obligation	576	450
Immobilier	80	80
Monétaire	20	20

TABLE 2 : Comparaison des répartitions des actifs de l'assureur-type

On a constaté qu'en augmentant la valeur du portefeuille d'actions dans le cadre de la stratégie du collar dynamique, la couverture reste proportionnelle à l'exposition, indépendamment de la situation du marché. Cependant, sur le plan financier, cette démarche présente des nuances importantes. Bien que la stratégie ait un impact constant, son efficacité se manifeste surtout en période de marché baissier. En période haussière, augmenter l'allocation aux actions tout en réduisant l'investissement en obligations crée un risque financier accru. Cette stratégie expose le portefeuille à des pertes potentielles, tant en termes de rendement qu'en raison de la diminution de l'exposition aux actions. Le gain réalisé au niveau du SCR ne compense pas nécessairement ces pertes, faisant de cette approche une stratégie plus risquée par rapport à la configuration initiale, surtout étant donné que le niveau de protection du SCR reste inchangé.

Ensuite, l'autre étape a été l'exploration d'une stratégie dans laquelle tout notre portefeuille n'est pas couvert. Plusieurs configurations ont été mises en place, et nous avons obtenu les résultats présentés sur la Figure 2.

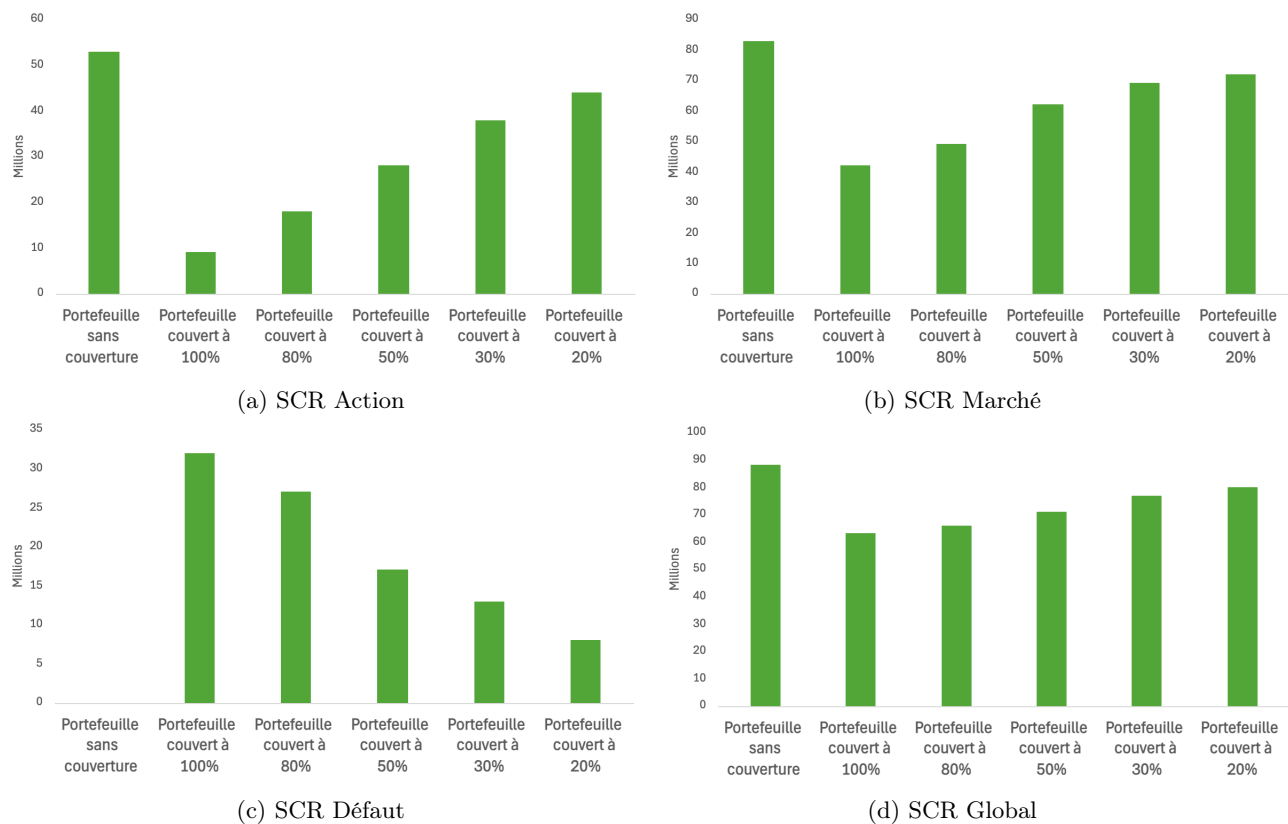
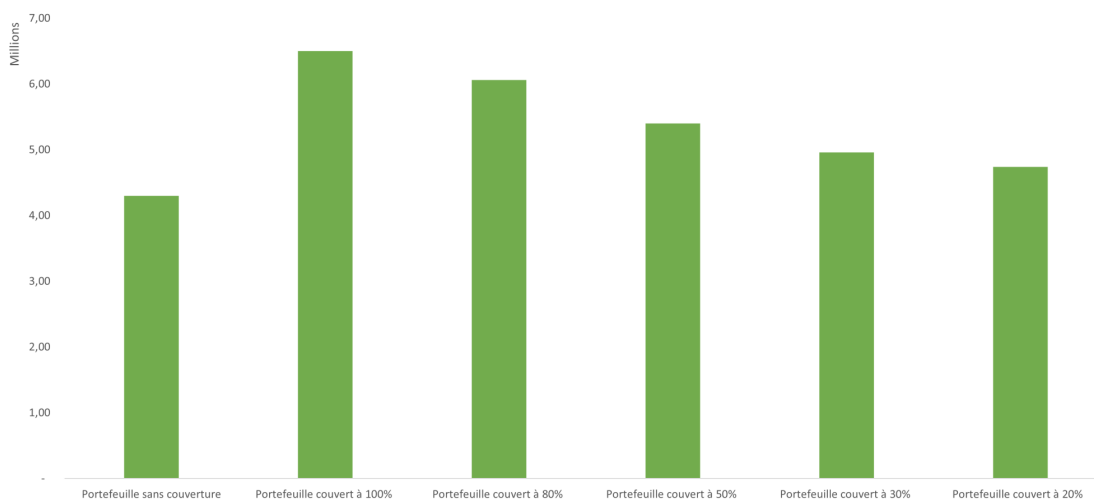
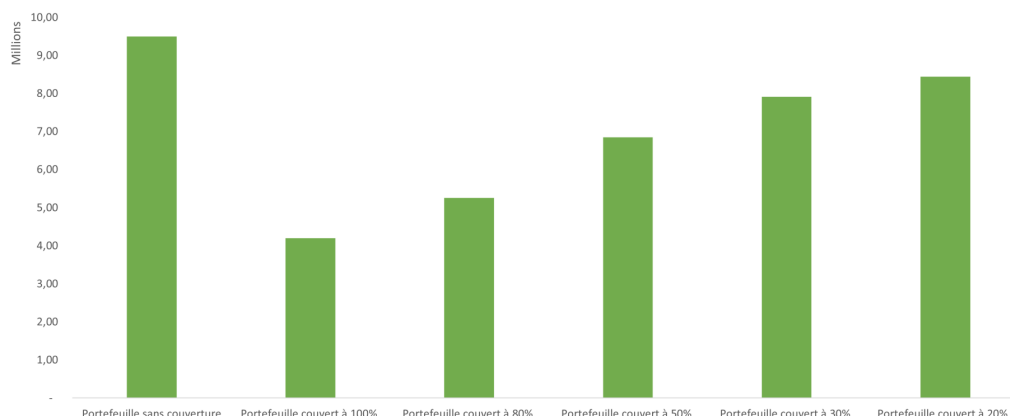


FIGURE 2 : Répartition des différentes composantes du SCR

Pour une meilleure analyse de nos résultats, une combinaison avec les résultats liés au rendement de notre portefeuille actions est nécessaire. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 3.



(a) Rendement en marché baissier



(b) Rendement en marché haussier

FIGURE 3 : Présentation de l'évolution des rendements suivant différentes conditions de marché

La réduction de la proportion du portefeuille couvert entraîne une augmentation du SCR en raison de la diminution du risque de défaut associé à la couverture réduite sur le portefeuille d'actions et de l'augmentation du risque en actions, conduisant à une augmentation globale du SCR. Cependant, il est crucial de considérer également le rendement, car l'objectif est de se prémunir contre les risques sans compromettre excessivement le rendement du portefeuille d'actions. L'analyse révèle que, pour différentes répartitions entre actions couvertes et non couvertes, le rendement varie de manière favorable selon les conditions du marché, avec une tendance générale où le portefeuille non couvert affiche le meilleur rendement. Ainsi, le rendement manifeste une évolution opposée à la réduction du SCR en fonction de la proportion allouée au portefeuille d'actions couvertes et non couvertes. Une répartition de 54/46 (54 % couvert et 46 % non couvert) apparaît comme la plus optimale, permettant d'obtenir un SCR modéré par rapport à un portefeuille entièrement couvert tout en maintenant un rendement généralement proche du meilleur rendement observé dans diverses conditions de marché, offrant ainsi un compromis judicieux entre la réduction du SCR et le maintien d'un rendement satisfaisant du portefeuille d'actions.

À la suite de ces remarques, plusieurs extensions ont été apportées.

Un premier volet, à porté sur le backtesting des crises de 2008 et de mars 2020. Les simulations montrent que, lors de la chute rapide des marchés en mars 2020, la perte mensuelle passe de $-22,2\%$ à $-14,5\%$ et le drawdown maximal est réduit de $-25,6\%$ à $-15,9\%$. Pour la crise de 2008, l'effet de convexité des puts permet de limiter la perte cumulée de -35% à -22% et le drawdown de -43% à -28% , malgré la dégradation de la liquidité.

Le coût économique annuel de la couverture a ensuite été quantifié par Monte Carlo hebdomadaire (10 000 trajectoires). Pour un encours de 100 M€, la prime reçue sur les calls dépasse en moyenne la prime payée sur les puts net des frais de 29,5 M€ (coût moyen négatif), avec une médiane de $-10,7$ M€ et un écart-type très élevé de 400 M€. L'histogramme de la distribution des coûts révèle une large dispersion et quelques scénarios extrêmes de dépassement. Pour pallier ce risque, nous avons introduit les notions de VaR à 95% du coût, qui indique le seuil à ne pas dépasser dans 95% des cas, ainsi que la CVaR à 95%, qui mesure la perte moyenne au-delà de ce seuil. Ces indicateurs sont indispensables pour dimensionner une provision ou un capital interne, et ils doivent être intégrés comme paramètre clé de gestion du risque opérationnel.

L'effet sur le SCR actions est substantiel (réduction de l'ordre de 80%), tout comme sur le SCR marché (environ 65%). L'application de la couverture modifie également l'effet de la diversification lié à l'achat d'action, ce qui réduit l'impact de la couverture sur le SCR globale.

Conclusion et limites de l'étude

L'évaluation de l'impact de la stratégie sur les indicateurs liés à Solvabilité 2 a révélé une réduction significative du SCR actions (en moyenne 85%) et du SCR marché (en moyenne 65%) avec un portefeuille couvert. Cependant, l'effet sur le SCR global était mitigé, avec une réduction moyenne de 25%, principalement due à un SCR défaut supérieur à 0 dans le cas du portefeuille couvert. De plus, une baisse moyenne du rendement de 2% a été observée pour le portefeuille couvert, bien que ce dernier ait affiché le meilleur rendement en marché baissier. En conclusion, nous avons cherché un compromis entre la réduction du ratio de solvabilité et la dégradation limitée du rendement du portefeuille d'actions. Une répartition de 54% d'actions couvertes et de 46% d'actions non couvertes a été identifiée comme permettant de limiter la perte de rendement tout en améliorant le ratio de solvabilité, mais cette recommandation dépend fortement de la stratégie globale de l'assureur.

Cependant, notre étude présente des limites et des simplifications importantes qui peuvent impacter certains résultats, notamment le fait de supposer un impact négligeable de la stratégie sur le passif de l'assureur et l'absence d'un module SCR défaut pour le portefeuille sans couverture. De plus, des contraintes de données ont limité notre étude. Également, les limites liées à la distinction entre la stratégie et notre moteur ALM, ainsi que les contraintes associées à sa mise en œuvre, peuvent influencer de manière significative l'évaluation du SCR et la précision des résultats de l'ALM. Bien que la non-intégration de la stratégie dans le modèle ALM puisse introduire de l'incertitude en ne prenant pas en compte les interactions entre la stratégie et les autres composantes de l'ALM, un avis d'expert a estimé que cet impact serait minime, justifiant ainsi le maintien

de notre approche. De plus, la dépendance à l'égard d'une banque partenaire et les contraintes réglementaires liées à l'acceptation de la stratégie par l'ACPR comme méthode de réduction du risque, ainsi que les exigences en matière d'expertise pour la construction d'un indice cohérent avec les actions, peuvent compliquer la mise en œuvre de la stratégie, voire réduire significativement son impact. Les frais associés à la maintenance de la couverture peuvent également affecter la rentabilité globale de la stratégie et son impact sur les résultats de l'ALM. Il est aussi important de préciser qu'à l'état actuel, nos résultats ne peuvent être directement utilisables par l'assureur, certaines améliorations doivent encore être faites, en particulier concernant l'impact de la stratégie sur le passif de l'assureur, afin d'obtenir des résultats plus exploitables.

En dépit de ces limitations, cette première étude montre que le collar dynamique émerge comme une stratégie permettant à l'assureur de gérer son risque actions, bien que le coût de mise en place puisse parfois être prohibitif, dépendant ainsi de l'appétence au risque de l'assureur et du contexte économique.

Synthesis note

Introduction

Financial market instability, especially in stocks, significantly influences insurers' financial situations, particularly under regulatory standards like Solvency 2 (S2) and IFRS17. Holding stocks in investment portfolios under Solvency 2 imposes higher capital requirements due to increased risk, directly impacting the calculation of the Required Solvency Capital (SCR). In times of heightened volatility, SCR may increase, affecting the overall solvency of insurers and their ability to meet commitments to policyholders. The introduction of the accounting standard IFRS17 adds a dimension to the consequences of stock volatility, influencing the valuation of insurance liabilities, financial results, and financial statement presentation. To address these challenges, insurers may need to design mitigation strategies, such as implementing hedging mechanisms, using derivative instruments, or diversifying portfolios. These approaches aim to stabilize financial results while optimizing the stock portfolio.

This thesis suggests a solution focused on optimizing the stock portfolio through a hedging strategy, allowing investment flexibility while controlling SCR to optimize euro-denominated contracts in a stringent regulatory framework and uncertain economic conditions.

Implementation of a collar as a hedging strategy

The **dynamic collar** is a sophisticated risk management strategy that insurers can use to protect their equity portfolios from market fluctuations while seeking to generate income. This approach combines the purchase of put options, which provide downside protection by allowing the insurer to sell an asset at a predetermined price, with the sale of call options, thereby generating income in the form of premiums.

The underlying idea is to limit potential losses while generating cash flows to offset some of the costs associated with the protection. What distinguishes the dynamic collar from static strategies is its ability to adjust in real-time to market changes. For example, if the market rises, the insurer can adjust the strategy by buying back put options that have become less necessary or by selling puts at higher levels to maintain protection while capturing part of the potential gains. Different forms of collars exist, each tailored to specific objectives. The **asymmetric collar**, for instance,

may prioritize downside protection while sacrificing some of the potential upside gains.

Analysis framework

To assess the consequences of implementing the hedging strategy, we considered the choice of the insurance entity to take into account. We opted for the inclusion of a representative insurer, whose characteristics were specified using market data, ensuring representativeness for the majority of insurers in the French market.

So, to measure the impact of the dynamic collar strategy, we chose the portfolio of a life insurer, consisting of savings contracts with a euro-denominated support. We implemented a collar strategy composed of puts and calls with fixed strikes, specifically 95% for our puts and 105% for our calls, with maturities of one month for the puts and one week for the calls, and with a weekly renewal. The main costs associated with the strategy arise from the purchase of puts and its operational setup, considering that the insurer manages the strategy directly without an external intermediary.

Table 3 presents the main characteristics of this representative insurer. However, it is essential to note that some insurers may have divergent structures and characteristics compared to this "representative insurer," especially in terms of solvency and investment structure.

Assets		Liabilities	
Type	Amount (in M€)	Type	Amount (in M€)
Stock	100	Equity	130
Bond	800	Capitalization Reserve	2
Real Estate	80	PPE	30
Monetary	20	PM	838

Table 3: Balance Sheet of the Representative Insurer: Initial Composition of Assets and Liabilities

Subsequently, we initiated the creation of our dedicated derivatives pricing model. The primary objective was to replicate call and put option prices observed in financial markets. We examined various models, ultimately choosing a Black-Scholes approach with deterministic volatility. Determining this volatility was done using the closed-form formula provided by the SABR model. Once this phase was completed, we implemented the Asset-Liability Management (ALM) model developed at Sia-Partners to model the evolution of our balance sheet and interactions between assets and liabilities. The ultimate goal of this process was to calculate our key indicators, namely the Solvency Capital Requirement (SCR) and Equity.

Analysis of the impact of the strategy

Initially, we started with the initial allocation of our typical insurer's portfolio and implemented the coverage strategy across the entire equity portfolio. The obtained results are presented in Figure. 4

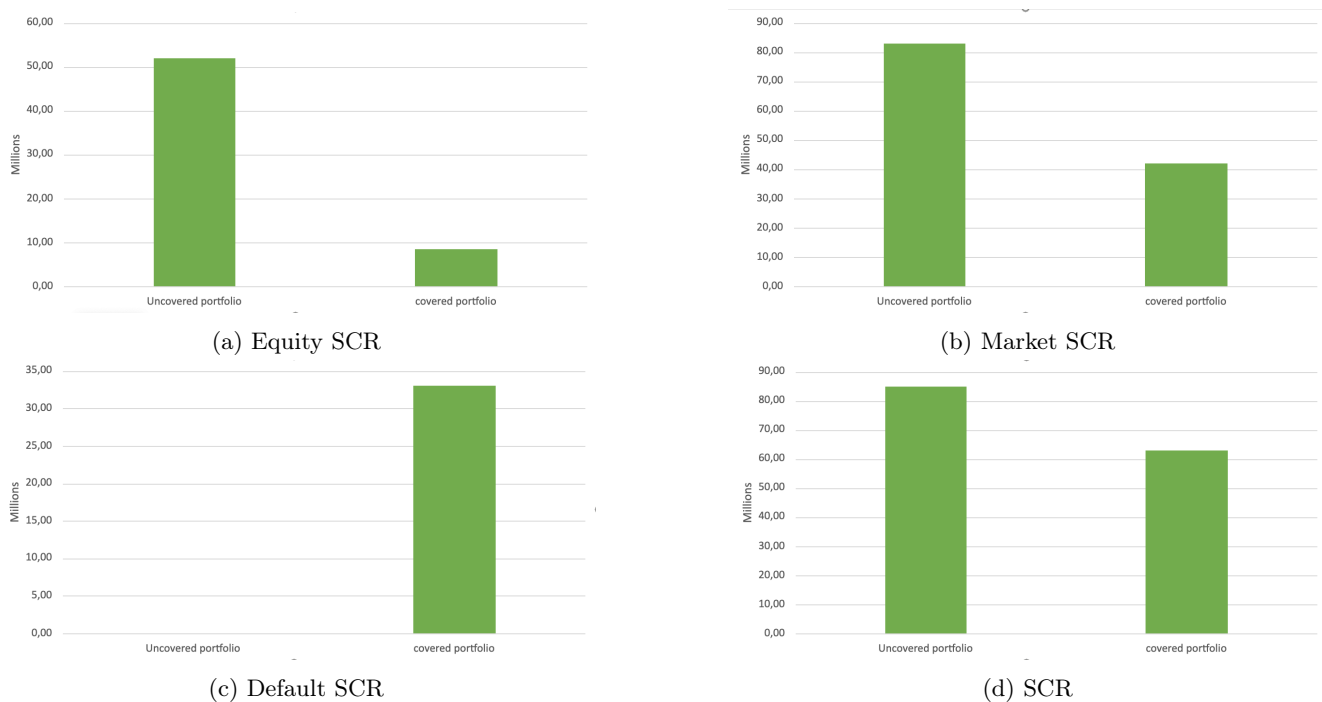


Figure 4: Impact of the strategy on various SCR

As indicated by these results, our coverage on the equity portion of the assets led to a gain of approximately 20 million euros in the SCR. Although the impact of the strategy on the equity SCR could have suggested a more substantial gain, the inclusion of the default SCR in the total SCR calculation, in the presence of derivatives, resulted in a lower outcome. Additionally, as highlighted in our analysis of the dynamic collar strategy, in a bullish market period, the covered portfolio tends to have a lower return compared to the uncovered portfolio.

Next, we adjusted the allocation of the covered portfolio as presented in Table 4 and 5.

Asset	Amount (in M€)
Equity	324
Bond	576
Real Estate	80
Monetary	20

Table 4: Allocation 1

Asset	Amount (in M€)
Equity	450
Bond	450
Real Estate	80
Monetary	20

Table 5: Allocation 2

We observed that by increasing the value of the equity portfolio in the dynamic collar strategy, the coverage remains proportional to the exposure, regardless of the market situation. However, financially, this approach presents significant nuances. Although the strategy has a consistent impact, its effectiveness is most pronounced in a bearish market period. In a bullish market, increasing the allocation to equities while reducing the investment in bonds creates an increased financial risk. This strategy exposes the portfolio to potential losses, both in terms of returns and due to the reduced exposure to equities. The gain realized in the SCR may not necessarily offset

these losses, making this approach riskier

Next, we explored a strategy where our entire portfolio is not covered. Several configurations were implemented, and the results are presented in Figure 5.

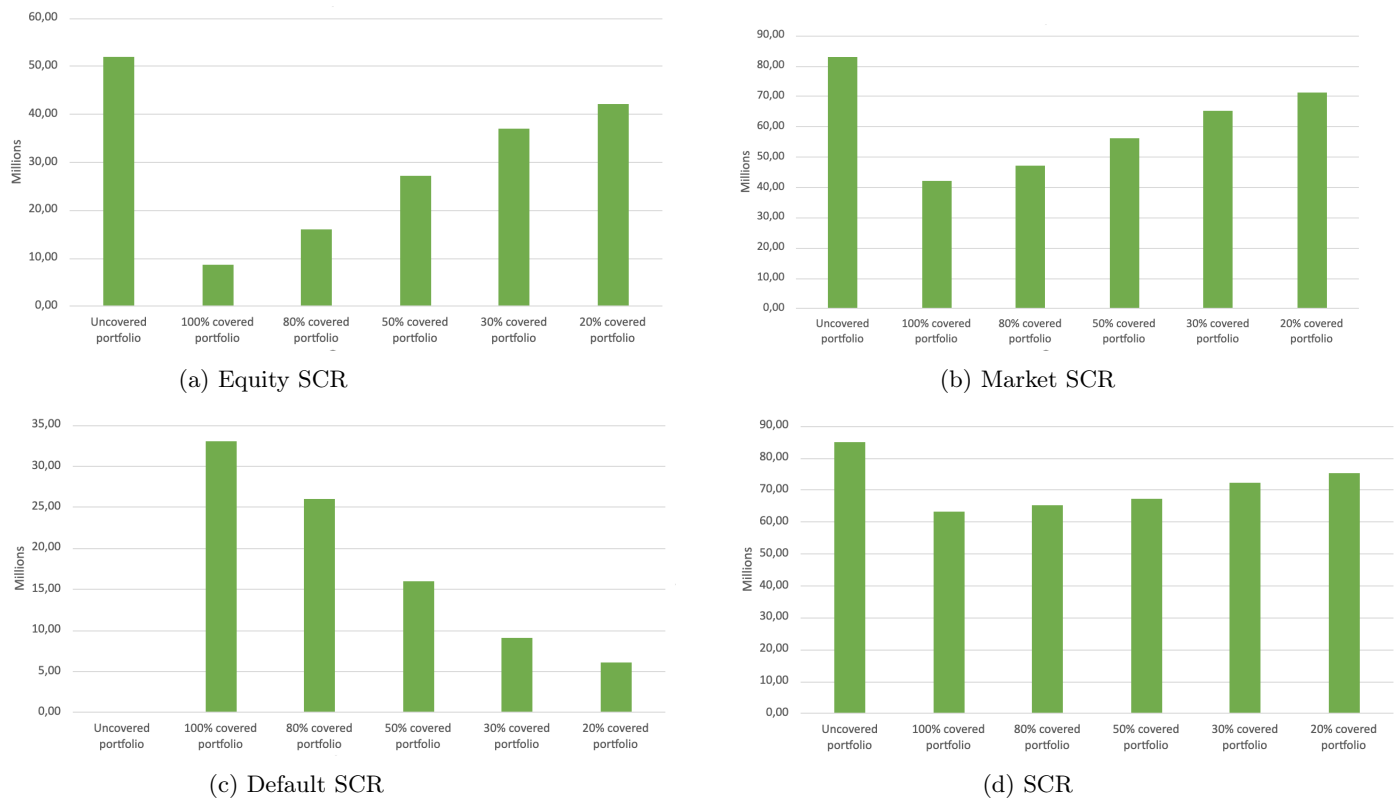


Figure 5: Impact of the strategy on various SCR

For a better analysis of our results, a combination with the results related to the return of our equity portfolio is necessary. The obtained results are presented in Figure 6.

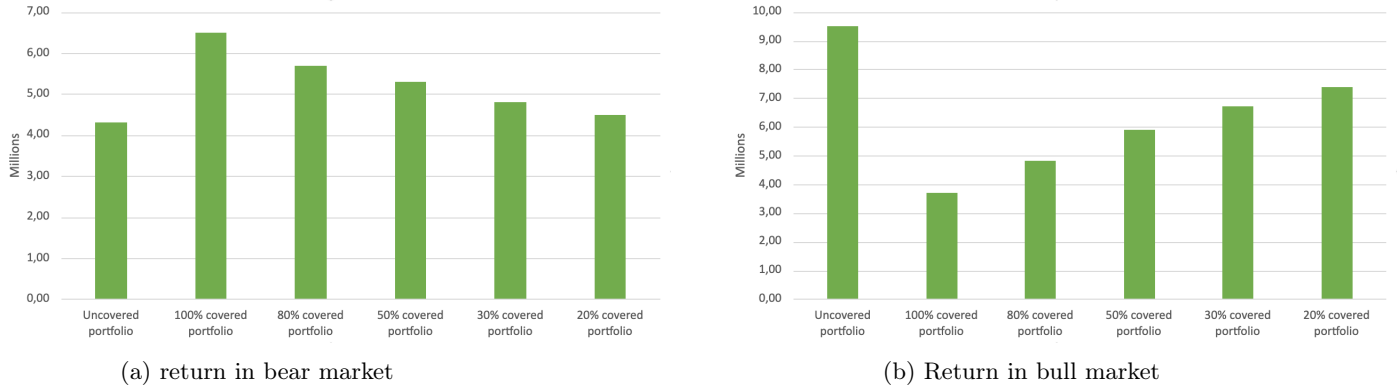


Figure 6: Presentation of Returns Evolution Under Different Market Conditions

Reducing the portion of the portfolio covered results in an increase in the Solvency Capital Requirement (SCR) due to both the decrease in default risk associated with reduced coverage on the equity portfolio and the increase in equity risk, leading to an overall SCR increase. However, it is crucial to also consider yield, as the objective is not only to hedge against risks but also to avoid excessively compromising the equity portfolio's yield with this strategy. Our analysis reveals that, for different allocations between covered and uncovered equities, yield varies favorably depending on market conditions, with a general trend where the uncovered portfolio exhibits the best yield. Thus, yield shows an opposite trend to SCR reduction based on the proportion allocated to covered and uncovered equity portfolios. Depending on risk appetite, an insurer might prefer one allocation over another. However, our study indicates that a 54/46 allocation (54% covered and 46% uncovered) appears to be the most optimal, allowing for a relatively moderate SCR compared to that resulting from a fully covered equity portfolio. Regarding equity yield, depending on various market conditions, this allocation achieves a yield generally close to the best yield observed under diverse market conditions. Therefore, this allocation presents itself as a prudent compromise between SCR reduction and maintaining a satisfactory equity portfolio yield.

Following these remarks, several extensions were made.

The first part focused on backtesting the 2008 and March 2020 crises. The simulations show that, during the rapid market decline in March 2020, the monthly loss decreases from -22.2% to -14.5% , and the maximum drawdown is reduced from -25.6% to -15.9% . For the 2008 crisis, the convexity effect of the puts limits the cumulative loss from -35% to -22% and the drawdown from -43% to -28% , despite the deterioration in liquidity.

The annual economic cost of the hedge was then quantified through weekly Monte Carlo simulations (10 000 trajectories). For an initial notional of 100 M€, the premium received on the calls exceeds on average the premium paid on the puts, net of fees, by 29.5 M€ (negative average cost), with a median of -10.7 M€ and a very high standard deviation of 400 M€. The histogram of the cost distribution reveals a wide dispersion and some extreme overrun scenarios. To mitigate this risk, we introduced the notions of 95% cost VaR, which indicates the threshold not to be exceeded in

95% of cases, as well as 95% CVaR, which measures the average loss beyond this threshold. These indicators are essential for sizing a provision or internal capital and must be integrated as key operational risk management parameters.

The effect on the equity SCR is substantial (a reduction on the order of 80%), as is the effect on the market SCR (around 65%). The application of the hedge also modifies the diversification benefit related to the equity position, thereby reducing the overall impact of the hedge on the total SCR.

Conclusion and study limitations

The evaluation of the impact of the strategy on Solvency 2 indicators revealed a significant reduction in the SCR for equities (on average 85%) and the SCR for market risk (on average 65%) with a covered portfolio. However, the effect on the overall SCR was mixed, with an average reduction of 25%, mainly due to a non-zero SCR for default in the case of the covered portfolio. Additionally, an average decrease in yield of 2% was observed for the covered portfolio, although the latter showed the best performance in a bearish market. In conclusion, we sought a compromise between reducing the solvency ratio and limiting the degradation of the equity portfolio's yield. A distribution of 54% covered equities and 46% uncovered equities was identified as allowing for a reduction in yield loss while improving the solvency ratio, but this recommendation heavily depends on the insurer's overall strategy.

However, our study has significant limitations and simplifications that may impact certain results, notably the assumption of a negligible impact of the strategy on the insurer's liabilities and the absence of a default SCR module for the uncovered portfolio. Additionally, data constraints limited our study. Furthermore, the limitations related to the distinction between the strategy and our ALM engine, as well as the constraints associated with its implementation, can significantly influence the SCR evaluation and the accuracy of the ALM results. Although the non-integration of the strategy into the ALM model might introduce uncertainty by not fully capturing the interactions between the strategy and other ALM components, an expert opinion estimated that this impact would be minimal, justifying the maintenance of our approach. Moreover, reliance on a partner bank and regulatory constraints related to the acceptance of the strategy by the ACPR as a risk reduction method, as well as the expertise required for constructing a coherent index with equities, can complicate the implementation of the strategy and possibly significantly reduce its impact. The costs associated with maintaining the coverage can also affect the overall profitability of the strategy and its impact on ALM results. It is also important to note that, at present, our results cannot be directly used by the insurer; further improvements are needed, particularly regarding the impact of the strategy on the insurer's liabilities, in order to obtain more actionable results.

Despite these limitations, this initial study indicates that the dynamic collar emerges as a strategy that allows the insurer to manage its equity risk, although the setup cost can sometimes be prohibitive, depending on the insurer's risk appetite and the economic context.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma sincère gratitude envers Monsieur Michael Donio, directeur du département Actuariat chez Sia Partners, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'effectuer mon stage et mon mémoire au sein de son cabinet.

Pendant la réalisation de ce mémoire, le soutien de mes tuteurs en entreprise, Messieurs Éric Daupley et Michael Donio, a été précieux, de même que celui de mes tuteurs académiques, Messieurs David Crespine et Quentin Guibert. Je les remercie sincèrement pour leur disponibilité, leurs conseils, leurs relectures et leur appui.

Je tiens également à adresser mes remerciements à mes collègues de l'équipe Actuariat de Sia Partners, qu'ils soient managers, consultants ou stagiaires, pour leur collaboration et leur présence.

Les derniers mois ont été une période d'apprentissage intense, tant sur le plan technique que sur des compétences plus générales, et cela a largement été possible grâce à l'aide de nombreuses personnes. Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers toutes celles et ceux qui ont contribué à ce parcours. Je souhaite également souligner l'impact de ma formation académique à l'INSA de Rouen et à Paris-Dauphine, en remerciant particulièrement Monsieur Nicolas Forcadel pour m'avoir offert l'opportunité de suivre ce double diplôme.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers ma famille et mes amis pour leurs conseils et leur soutien tout au long de mes études. Ces années et ces mois n'auraient pas été aussi significatifs sans votre présence.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	1
Note de Synthèse	5
Synthesis note	14
Remerciements	20
Introduction	25
1 Assurance-vie : problématique et réglementation	27
1.1 L'assurance-vie en France	27
1.2 Problématique des contrats d'assurance-vie	29
1.3 Description de l'environnement réglementaire	32
1.4 Contraintes réglementaires applicables à l'utilisation d'une stratégie de couverture dynamique	40
2 Présentation du cadre de notre étude	43
2.1 Le modèle ALM	43
2.2 Présentation du GSE utilisé	54
3 Le Collar comme stratégie de couverture	74
3.1 Pourquoi utiliser un collar ?	74

3.2	Principe d'une stratégie de collar dynamique	78
3.3	Présentation d'une stratégie proposée par une banque d'investissement comme JP Morgan	79
3.4	Impact du choix du strike	87
3.5	Explication du choix des maturités des calls et puts	96
3.6	Gestion de la couverture	101
3.7	Backtesting de la stratégie	103
4	Simulation et analyse des résultats	113
4.1	Construction de notre société-type	113
4.2	Les KPIs d'analyse	115
4.3	Analyse des résultats	118
4.4	Exploration de stratégies alternatives de couverture	131
	Conclusion	137
A		140
A.1	Quelques détails concernant le GSE utilisé	140
B		142
B.1	Rappels sur les provisions techniques	142
C		144
C.1	Rappels de quelques notions en finance de marché	144
	Bibliographie	151

Introduction

Depuis son entrée en vigueur en janvier 2016, la directive Solvabilité 2 a apporté des changements à la façon dont les assureurs gèrent leur activité. Basée sur trois principaux piliers, cette directive impose aux assureurs de respecter chacun des éléments de ces piliers. L'objectif de la directive est de renforcer la solidité financière des assureurs.

L'un des piliers les plus contraignants est le pilier 1, qui traite des exigences quantitatives. Il est principalement caractérisé par l'évaluation des actifs et des passifs de l'assureur à la valeur de marché, ainsi que par la mise en place d'un capital requis de solvabilité, qui devra être immobilisé par l'assureur. L'objectif du SCR (Capital Requis de Solvabilité) est de permettre à l'assureur de détenir dans son portefeuille suffisamment de capital pour pouvoir honorer ses engagements envers ses assurés en cas de réalisation d'un sinistre qui survient une fois tous les 200 ans.

Étant donné l'importance du SCR dans la constitution des fonds propres de l'assureur, il est aujourd'hui pertinent, dans un contexte économique incertain comme celui que nous connaissons actuellement, de trouver des solutions permettant à l'assureur de contrôler voire de réduire son SCR, et ainsi lui offrir plus de flexibilité dans sa stratégie d'investissement, en particulier en période de hausse des taux comme c'est le cas actuellement.

Ce sera l'objectif de notre mémoire. Pour y parvenir, nous concentrerons notre étude sur le SCR marché en général et le SCR actions en particulier. Nous construirons une stratégie de couverture pour les actions et montrerons l'impact de cette stratégie sur le SCR en utilisant certains KPIs sélectionnés à cet effet. Il nous faudra également créer une compagnie d'assurance-vie qui devra être la plus représentative possible des compagnies d'assurance présentes sur le marché, afin de pouvoir mesurer l'impact de la couverture. Pour cela, certaines hypothèses devront être établies.

L'étude a été divisée en quatre parties distinctes. Dans la première partie, nous aborderons l'assurance-vie de façon générale en France et explorerons le fonds euro, avec pour objectif de justifier pourquoi l'assureur a aujourd'hui tout intérêt à mettre en place une stratégie de couverture et à contrôler son SCR. Dans la deuxième partie, nous présenterons le cadre réglementaire, en détaillant la norme française et la directive Solvabilité 2, ce qui nous permettra de mettre en exergue les différences entre ces deux réglementations et leur impact pour l'assureur. La troisième partie sera consacrée aux outils nécessaires au calcul du SCR. Nous commencerons par présenter le GSE, un outil utilisé pour la projection des actifs, puis nous introduirons notre outil ALM, qui nous permettra de modéliser et de faire évoluer le bilan, l'objectif final étant le calcul du SCR. Enfin, dans la quatrième partie, nous présenterons la stratégie de couverture appelée « collar dynamique », que nous mettrons en place pour couvrir notre portefeuille d'actions. Nous étudierons également son impact sur différents KPIs, à savoir le ratio de solvabilité, le SCR, le rendement de la couverture, ainsi que le SCR marché et actions.

Chapitre 1

Assurance-vie : problématique et réglementation

Dans cette section, nous explorerons l'univers réglementaire complexe qui encadre l'assurance-vie en France. En mettant l'accent sur Solvabilité 2 et son impact sur la gestion des portefeuilles d'actions, nous examinerons également les interactions avec des normes comptables telles que l'IFRS 17. Cette exploration abordera comment les assureurs concilient la conformité réglementaire avec la recherche de rendements optimaux, mettant en lumière les stratégies de couverture comme une réponse à la volatilité des actions. Enfin, nous jetterons un regard sur l'avenir, en anticipant les évolutions réglementaires à venir et en offrant des perspectives pour guider les assureurs dans cet environnement en constante évolution. Cette analyse approfondie prépare le terrain pour la proposition d'une stratégie d'optimisation du portefeuille d'actions.

1.1 L'assurance-vie en France

1.1.1 L'assurance-vie

L'assurance-vie peut être définie comme une branche de l'assurance qui fait naître des engagements dont l'exécution dépend de la durée de vie humaine. Ainsi, l'assureur devra verser une rente ou un capital au bénéficiaire du contrat si un sinistre lié à la vie de l'assuré survient.

On distingue deux principales sortes de garanties proposées par ce type d'assurance :

- **Les garanties en cas de vie** : dans ce type de contrat, l'assureur s'engage à verser au bénéficiaire du contrat une rente ou un capital si l'assuré est toujours en vie à une période donnée. Ce type de garantie se retrouve dans les contrats du type **retraite, épargne, etc.** Aujourd'hui, ce sont principalement les contrats de type retraite ou épargne qui proposent ce type de garantie.
- La seconde sorte de garantie concerne **les garanties liées au décès** de l'assuré. Dans ce cas, l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente au bénéficiaire du contrat si l'assuré

décède à une période donnée. Parmi les contrats qui comportent ce type de garantie, nous avons **les contrats vie entière, temporaire décès, etc.**

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons nous intéresser au contrat de type Épargne individuelle.

1.1.2 Le marché de l'assurance-vie en France

La Tontine peut être définie comme un système où plusieurs individus se regroupent et mettent en commun un capital qui sera partagé avec des intérêts entre les survivants à la fin d'une période établie par les membres de la Tontine. Ce système, apparu au XVII^{ème} siècle, fut l'une des premières formes d'assurance-vie en France. Il a évolué pour devenir aujourd'hui l'un des placements préférés des Français. La Fédération Française de l'Assurance de France [2021a] a estimé, fin avril 2023, à **13,8 milliards d'euros** le montant total des cotisations en assurance-vie. Fin janvier 2019, elle estimait l'encours des contrats en assurance-vie à **1 715 milliards d'euros**, en termes de provisions mathématiques et de provisions pour participation aux bénéfices.

Tout cela montre l'engouement des Français pour ce type d'assurance, mais cela n'est pas dû au hasard. En effet, plusieurs éléments ont été mis en place pour inciter les Français à se tourner vers ce type d'assurance, et ce, pour la simple raison que le secteur de l'assurance fait partie des premiers investisseurs privés dans l'économie productive. Selon la Fédération Française des Assureurs de France [2021a], on estime à environ **1 524 milliards d'euros** la somme investie par les assureurs dans l'économie productive, soit 64% des actifs détenus par les assureurs.

Parmi les éléments expliquant cette attractivité, nous pouvons citer :

- **La fiscalité** : En effet, la majorité des contrats d'assurance-vie bénéficient d'une fiscalité avantageuse. Par exemple, pour les contrats ouverts depuis plus de 8 ans, il est possible d'être exonéré d'impôts à hauteur de 4600 euros maximum pour une personne vivant seule et de 9200 euros maximum pour un couple marié.
- Le second avantage est **la diversité des possibilités de sortie**. En effet, l'assuré peut décider d'être payé sous forme de rente ou simplement par versement d'un capital unique à la fin de son contrat.
- Un autre avantage de ce type de contrat est **la triple promesse des assureurs** aux assurés dans le cadre des contrats en support euros (ce type de contrat sera présenté plus tard dans le mémoire). En effet, les assureurs promettent dans ce type de contrat :
 - **Une forte liquidité** : Les assurés ont le droit de racheter leurs contrats à tout moment.
 - **Un rendement minimum garanti** : Lors de l'établissement du contrat, l'assureur, dans les clauses de ce contrat, promet à l'assuré un rendement minimum garanti.

- **Le capital est garanti** : L'assureur promet à l'assuré de lui restituer au moins le capital initial investi. Néanmoins, il est possible que cela diminue si les chargements sont supérieurs aux intérêts techniques dans le cas d'un taux garanti à 0% brut de chargements.
- **Une fiscalité avantageuse en cas de succession** : En effet, l'un des avantages clés des contrats d'assurance-vie en France réside dans leur fiscalité avantageuse en cas de succession. Les bénéficiaires d'un contrat d'assurance-vie peuvent être exonérés d'impôt sur les successions jusqu'à un certain seuil, en fonction de la durée du contrat et de l'âge du souscripteur au moment des versements. Cette exonération rend les contrats d'assurance-vie attrayants pour la transmission de patrimoine, car ils permettent de léguer un capital à ses héritiers tout en minimisant la charge fiscale.

Comme mentionné au début de ce mémoire, l'assurance-vie repose sur deux types de contrats principaux : les contrats de type retraite et épargne. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser aux contrats de type épargne. L'une des particularités de ce type de contrat est qu'il repose sur trois principaux supports :

- **Les contrats en Fonds Euros** : Dans ce type de contrat, toutes les garanties et les éventuelles primes sont exprimées en euros. Le principal avantage pour l'assuré est qu'il ne porte pas le risque, tout le risque étant supporté par l'assureur.
- **Les contrats en Unités de Compte (UC)** : À la différence des contrats en euros, dans ce type de contrat, les garanties et les primes sont estimées en une unité généralement appelée **UC (unité de compte)**, et l'assureur s'engage sur cette unité. Dans ce contrat, c'est l'assuré qui porte tout le risque, mais les rendements sont généralement supérieurs à ceux des fonds en euros, car l'assureur a plus de flexibilité dans ses choix d'investissement. Il peut investir dans des produits risqués, mais avec un rendement élevé.
- **Les contrats multi-supports** : Il s'agit d'un mélange de supports en UC et en Fonds Euros. Dans ce type de contrat, le risque est partagé entre l'assureur et l'assuré.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons nous intéresser aux contrats de type épargne avec support en euros et taux minimum garanti.

1.2 Problématique des contrats d'assurance-vie

Les éléments ci-dessous sont extraits du mémoire de Picard [2021], du mémoire de Ravelonandro [2019] ainsi que de quelques notes du groupe d'étude ALM de Sia Partners et al. [2022].

1.2.1 Le Risque action

Dans le cadre de Solvabilité 2, les compagnies d'assurances sont tenues de maintenir des niveaux adéquats de capital pour couvrir les risques associés à leurs activités.

Les actions, en tant qu'actifs, présentent des défis particuliers pour les assureurs en raison de leur volatilité inhérente, généralement plus élevée que celle d'autres classes d'actifs, comme les obligations. Cette volatilité signifie que le prix des actions peut fluctuer considérablement sur de courtes périodes, augmentant ainsi le risque de perte pour l'investisseur. Sous Solvabilité 2, la détention d'actions peut entraîner des exigences de capital plus élevées pour l'assureur, en reconnaissance de ce risque accru. Par conséquent, bien que les actions puissent offrir des rendements potentiellement plus élevés, elles imposent également aux assureurs une réflexion approfondie sur la manière de gérer et de mitiger les risques associés, tout en respectant les contraintes réglementaires de Solvabilité 2.

Une solution envisageable pour les assureurs serait l'utilisation de stratégies de couverture, comme les stratégies de type *collar*, pour se protéger contre ces éventuelles fluctuations du marché.

1.2.2 La liquidité

L'assurance-vie offre une combinaison de protection et d'investissement à long terme. Cependant, cette forme d'investissement soulève des préoccupations concernant la liquidité, c'est-à-dire la capacité de convertir rapidement des actifs en liquidités sans perte significative de valeur. Les contraintes de liquidité sont particulièrement pertinentes dans le contexte de l'assurance-vie en raison des caractéristiques spécifiques de ce produit.

Le défi principal réside dans l'équilibre entre la nécessité de garantir des prestations futures aux assurés et la gestion des flux de trésorerie courants. Les assureurs vie doivent maintenir un équilibre entre les engagements futurs envers les assurés et les flux de trésorerie actuels, tout en tenant compte des aléas potentiels du marché financier. Cette équation est complexe, car elle implique la gestion simultanée de portefeuilles d'actifs à long terme et la disponibilité de liquidités immédiates pour répondre aux retraits et aux prestations des assurés.

Les mesures prises pour faire face à cette problématique peuvent varier, allant de la constitution de réserves de liquidités à la mise en œuvre de stratégies d'investissement plus flexibles. Cependant, ces solutions peuvent également impacter les rendements à long terme et la rentabilité des produits d'assurance-vie.

1.2.3 La couverture du capital réglementaire

Sous Solvabilité 2 (cette notion sera abordée plus tard dans le mémoire), le dispositif de couverture du capital réglementaire est une composante essentielle pour les compagnies d'assurance, visant à garantir leur solidité financière et leur capacité à faire face aux risques ainsi qu'à leurs engagements envers leurs assurés.

L'une des principales contraintes réside dans l'exigence de maintenir un niveau adéquat de capital réglementaire pour couvrir les risques encourus par l'entreprise. Cette exigence vise à assurer que l'assureur est en mesure de faire face à d'éventuelles pertes imprévues et de garantir le paiement des obligations envers les assurés. Cependant, équilibrer cette nécessité de capital avec les activités commerciales et les objectifs de croissance peut parfois s'avérer difficile.

Une autre contrainte provient de la complexité des risques auxquels les assureurs sont exposés. Le coût en capital, calculé par les différentes méthodes de calcul du capital requis pour couvrir ces risques, notamment le risque de marché, le risque de crédit, et d'autres types de risques spécifiques à l'assurance, peut être onéreux pour l'assureur. Ainsi, l'assureur peut vouloir privilégier des stratégies d'investissement qui lui permettront de réduire son besoin en SCR, même si le rendement est plus faible.

De plus, la variabilité des taux de marché, des conditions économiques et des scénarios de risque peut également constituer une contrainte majeure. Les assureurs doivent s'assurer qu'ils disposent d'une marge de sécurité suffisante pour faire face aux variations potentielles des conditions de marché, tout en maintenant un niveau de capital approprié pour les risques identifiés.

Il sera donc intéressant pour un assureur de mettre en place une stratégie d'investissement qui lui permette de respecter cette réglementation, d'avoir une protection contre les éventuelles fluctuations du marché et de bénéficier d'un rendement important.

1.2.4 Il est important pour les assureurs de trouver une solution

La volatilité des marchés financiers, en particulier celle observée sur les actions, exerce une influence significative sur la situation financière des assureurs, notamment dans le cadre des normes réglementaires Solvabilité 2 (S2) et IFRS17.

En effet, sous le régime de Solvabilité 2, la volatilité des actions peut avoir des répercussions directes sur le calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR) de l'assureur. La détention d'actions dans le portefeuille d'investissement est soumise à des exigences de fonds propres plus élevées en raison du risque accru associé. En période de volatilité accrue, le SCR peut augmenter, entraînant des implications financières majeures pour l'assureur.

Cette augmentation du SCR peut potentiellement affecter la solvabilité globale de l'assureur, impactant ainsi sa capacité à remplir ses obligations envers les assurés. Il est donc crucial de comprendre comment la volatilité des actions peut amplifier les défis de solvabilité et d'adapter la stratégie d'investissement en conséquence.

De plus, avec l'adoption de la norme comptable IFRS17, une autre dimension s'ajoute aux effets de la volatilité des actions pour l'assureur. Les fluctuations de la valeur de marché des actifs, notamment des actions, peuvent influencer la valorisation des passifs d'assurance et avoir un impact sur les résultats financiers et la présentation des états financiers.

La volatilité des actions peut entraîner des ajustements fréquents des évaluations, introduisant ainsi une incertitude dans la comptabilité des contrats d'assurance. Les assureurs doivent être

conscients de ces fluctuations et prendre des mesures pour atténuer les risques comptables tout en cherchant des opportunités d’optimisation.

Compte tenu de ces défis, il peut être judicieux pour les assureurs de développer des stratégies d’atténuation de la volatilité des actions. Cela peut inclure la mise en place de mécanismes de couverture, l’utilisation d’instruments dérivés, ou encore la diversification du portefeuille. Ces approches visent à stabiliser les résultats financiers dans un contexte de volatilité accrue.

L’optimisation du portefeuille d’actions, en tenant compte des contraintes réglementaires et comptables, devient ainsi une priorité. Les assureurs doivent trouver un équilibre entre la recherche de rendements attractifs et la gestion des risques associés, en portant une attention particulière aux exigences de Solvabilité 2 et aux nouvelles obligations imposées par IFRS17.

Ainsi, l’impact de la volatilité des actions sur l’assureur, dans le contexte des normes réglementaires S2 et IFRS17, nécessite une approche stratégique et proactive. Les assureurs doivent être prêts à ajuster leurs politiques d’investissement et à adopter des solutions innovantes pour garantir une gestion efficace des risques et une performance financière stable.

L’objectif de ce mémoire sera donc de proposer une solution basée sur l’optimisation du portefeuille d’actions de l’assureur par la mise en place d’une stratégie de couverture. Cela permettra à l’assureur d’investir de façon plus flexible tout en contrôlant son SCR, optimisant ainsi ses contrats en euros dans un environnement réglementaire de plus en plus strict et dans un contexte économique de plus en plus incertain.

1.3 Description de l’environnement réglementaire

1.3.1 La Norme Française

La comptabilité aux normes françaises, également connue sous le nom de French GAAP (Principes comptables généralement reconnus) ou comptabilité sociale, a pour principale visée l’évaluation des engagements de la compagnie d’assurance. Elle s’occupe également du calcul des provisions, de l’incorporation des impôts et de la valorisation des actifs financiers. Les éléments ci-dessous sont extraits du cours de Donio [2023], du mémoire de Picard [2021], ainsi que du Code des assurances.

L’actif, c’est-à-dire les possessions de l’entité, est principalement constitué de placements financiers tels que des obligations, des actions et des biens immobiliers. Il est important de noter que, dans le cadre de la comptabilité aux normes françaises, la valorisation des actifs est basée sur la Valeur Historique (VH), c’est-à-dire le coût d’achat, avec quelques ajustements qui conduisent à la Valeur Nette Comptable (VNC).

Concernant le passif, c’est-à-dire les obligations de la compagnie, il peut être subdivisé en deux parties distinctes. La première partie concerne ce qui est potentiellement dû aux actionnaires, à savoir les Fonds Propres (FP), tandis que la seconde partie concerne ce qui est probablement dû aux assurés, représentés par les Provisions Techniques (PT). Il existe plusieurs types de provisions

techniques, et dans le graphe ci-dessous, nous avons présenté brièvement des exemples (un rappel des provisions techniques est fait en annexe de ce mémoire).

Le bilan peut alors être représenté comme illustré à la figure 1.1.

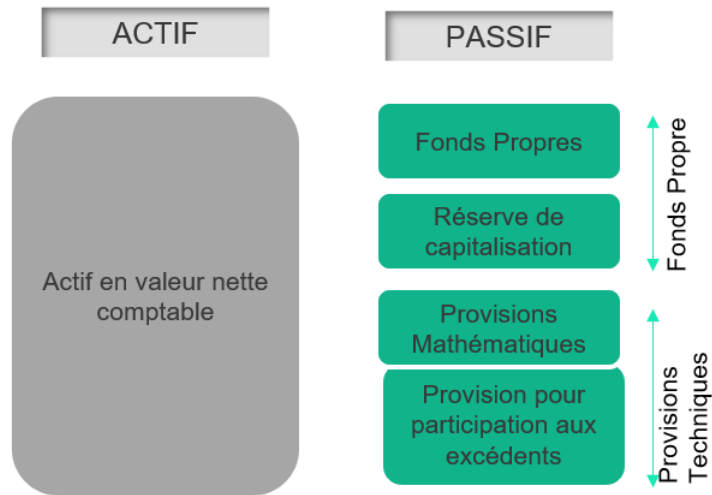


FIGURE 1.1 : Représentation d'un bilan en normes françaises

1.3.2 Solvabilité 2

Présentation de la directive

La directive Solvabilité 2 a été mise en place dans le but de moderniser et unifier les règles relatives à la solvabilité applicables aux entreprises d'assurance européennes. Son objectif est d'améliorer la sécurité des assurés, d'encourager une gestion plus efficace des risques au sein des sociétés, et de garantir une application cohérente de la réglementation au sein de l'Union européenne. L'entrée en vigueur, en janvier 2016, de la directive cadre Solvabilité 2 (Union européenne. (2009). Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès à l'activité des établissements de crédit et son exercice (refonte). Journal officiel de l'Union européenne, L 335, 1-155.) a profondément transformé le paysage de l'assurance. Cette directive a entraîné des changements substantiels dans la manière dont les risques sont gérés au sein des compagnies d'assurance. Les nouvelles mesures englobent divers domaines, allant de la structure de gouvernance à la communication interne des entreprises. Cependant, le point le plus prégnant pour les assureurs concerne les normes quantitatives régissant les provisions techniques et les fonds propres.

Ce cadre législatif marque une évolution majeure par rapport à Solvabilité I, qui se contentait d'une évaluation de la solvabilité basée sur des pourcentages appliqués aux primes et/ou aux sinistres. Désormais, la nouvelle réglementation intègre des règles plus complexes, prenant en compte une vaste gamme de risques (risques de marché, de crédit, de souscription en vie et non-vie, et

risques opérationnels). Elle repose sur une évaluation des actifs et des passifs à leur juste valeur marchande, en accord avec les principes des normes IFRS.

Les anciennes marges de solvabilité ont été remplacées par deux concepts clés : le MCR (Minimum Capital Requirement), qui fixe le niveau minimal de capitaux propres en dessous duquel l'agrément de l'assureur peut être révoqué, et le SCR (Solvabilité Capital Requirement), qui représente l'objectif de capitaux propres. Le calcul du SCR peut se faire à partir d'un modèle standard proposé par l'organisme régulateur ou d'un modèle interne validé par ce dernier. Les entreprises ont également la possibilité de combiner ces deux approches en fonction de leurs caractéristiques spécifiques.

Le bilan peut alors être représenté comme illustré à la figure 1.2.

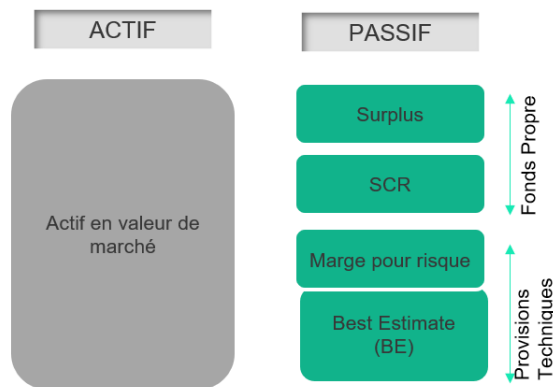


FIGURE 1.2 : Représentation d'un bilan sous Solvabilité 2

À l'instar du cadre réglementaire "Bâle II" dans le domaine bancaire, Solvabilité 2 repose sur trois piliers fondamentaux :

1. Le Pilier I établit des exigences quantitatives à respecter, y compris l'harmonisation du calcul des provisions techniques ainsi que des MCR et SCR. Nous allons nous concentrer sur les exigences liées à la valorisation des actifs/passifs, au calcul des provisions techniques, ainsi qu'aux exigences de capital.

Calcul des provisions techniques

La réglementation Solvabilité 2 définit les provisions techniques comme la somme de deux composantes essentielles : l'estimation la plus précise des engagements (Best Estimate) et la marge de risque. Plus précisément, elle stipule que "la valeur des provisions techniques est la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque". Le concept de Best Estimate repose sur l'évaluation probabiliste des engagements entre les assurés et les assureurs, matérialisés par les flux financiers anticipés (cash flows) issus des contrats.

Cette "meilleure estimation" représente la moyenne pondérée des futurs flux de trésorerie, en tenant compte de leur probabilité, ajustée pour la valeur temporelle de l'argent (c'est-à-dire la valeur actualisée attendue des flux futurs). Cette estimation est faite en se basant sur les taux sans risque appropriés.

Valorisation des actifs et passifs

Désormais, les actifs sont évalués en fonction de leur valeur de marché plutôt que leur valeur comptable. Selon les termes de Solvabilité 2 : "Les actifs sont valorisés à un montant qui reflète leur valeur dans le cadre d'une transaction hypothétique réalisée dans des conditions normales de concurrence, entre des parties informées et consentantes". De même, les passifs sont évalués sur la base de la valeur de marché des engagements qu'ils représentent : "Les passifs sont évalués à un montant correspondant à la valeur pour laquelle ils pourraient être transférés ou réglés dans une transaction hypothétique conclue entre des parties informées et consentantes, dans des conditions normales de concurrence".

Ces changements d'évaluation entraînent une volatilité accrue du bilan ainsi que des fonds propres. Les actifs, qui étaient auparavant évalués en valeur comptable avec des variations minimales, deviennent désormais plus sensibles aux fluctuations de marché, lesquelles peuvent être brusques et temporaires.

Le SCR

Le Solvabilité Capital Requirement (SCR) représente le montant de capital économique que l'entreprise doit détenir pour éviter une situation de ruine sur un horizon d'un an, avec une probabilité de 99,5%, soit l'équivalent d'un événement survenant une fois tous les 200 ans. En d'autres termes, il s'agit de la Value at Risk (VaR) des fonds propres sur une période d'un an avec une confiance de 99,5%.

Mathématiquement, le SCR est défini comme :

$$SCR = FP_0 - D(0, 1) \times q_{0.5\%}(FP_1), \quad (1.1)$$

avec :

- FP_0 représente les fonds propres à $t = 0$;
- $D(0, 1)$ représente le déflateur, c'est-à-dire la valeur d'un zéro-coupon de maturité un an à l'instant initial, pour l'actualisation ;
- $q_{0.5\%}(FP_1)$ représente le quantile à 0,5% de la distribution des fonds propres à $t = 1$.

La réglementation propose deux approches de calcul pour le SCR : la formule standard, dont les détails sont spécifiés, ou un modèle interne personnalisé propre à chaque entreprise. La formule standard est plus facile à appliquer et accessible à toutes les entreprises, mais elle peut être moins adaptée aux profils de risques spécifiques. À l'inverse, un modèle interne est conçu sur mesure, mais son utilisation nécessite l'approbation de l'autorité de contrôle.

Il est également possible d'ajuster le cadre de la formule standard aux caractéristiques propres de l'entreprise via les "Paramètres spécifiques à l'entreprise", ou encore d'utiliser un modèle interne partiel. Dans ce cadre, le calcul du SCR se décompose en plusieurs modules et sous-modules.

La figure 1.3 représente la décomposition des différents modules du SCR.

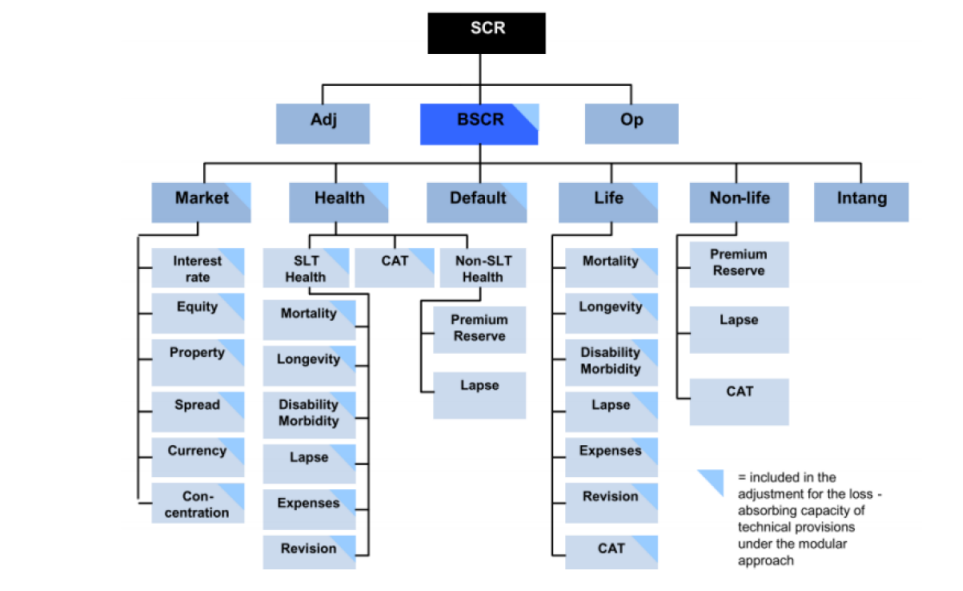


FIGURE 1.3 : Décomposition du calcul du SCR pour un organisme vie. Source : EIOPA [2016]

Il est important de préciser que, dans le cas des contrats d'épargne, les modules santé, non-vie et intangibles ne sont pas pris en compte. De plus, dans le cadre de notre modélisation, le SCR obtenu est un SCR net de l'effet absorbeur des provisions technique, notre modèle ALM a été construit pour fournir en résultat final un SCR qui tient compte de cet effet.

Le MCR

Le Minimum Capital Requirements (MCR) représente le niveau minimum de capitaux propres qu'une société d'assurance doit maintenir pour éviter une intervention automatique des autorités réglementaires pouvant aboutir au retrait de son agrément. Cette mesure est basée sur la Value at Risk (VaR) des capitaux propres, avec un niveau de confiance de 85%, établi sur une période d'un an. Le MCR est plafonné à 45% du Solvabilité Capital Requirement (SCR) de l'entreprise et ne peut descendre en dessous de 25% de cette même valeur, tout en étant soumis à une limite minimale absolue.

2. Le Pilier II exige la mise en place de dispositifs de gouvernance des risques, couvrant les processus, les responsabilités, la production et le suivi d'indicateurs.
3. Le Pilier III édicte des règles visant à accroître la transparence des informations transmises aux assurés et aux autorités de contrôle.

1.3.3 Focus sur le SCR marché

Une grande partie de notre étude repose sur le SCR de marché, qui constitue la provision de capital nécessaire pour faire face aux fluctuations des marchés financiers. Ces mouvements ont une incidence directe sur la valorisation des actifs de l'entreprise ainsi que sur celle de ses engagements, en particulier dans le cas de l'assurance vie.

Le SCR de marché occupe une position majeure au sein du Bilan Standardisé des Risques (BSR), et donc au sein du SCR global. C'est particulièrement le cas pour les compagnies d'assurance vie, ce qui explique l'attention qui lui est portée et la pertinence de sa couverture.

Dans le cadre de la formule standard, le SCR marché est constitué de plusieurs sous-modules qui sont : le SCR action, le SCR taux, le SCR immobilier, le SCR de concentration, et le SCR spread (voir le schéma du graphe pieuvre du SCR). Comme mentionné ci-dessus, le SCR marché a un impact important sur la valeur finale du SCR, et l'un de ses éléments constitutifs, le SCR action, joue un rôle crucial dans la détermination de sa valeur. Il sera donc intéressant dans la suite de notre étude de porter une attention particulière à ces deux éléments.

Le graphique 1.4 représente la décomposition des différents modules du SCR.

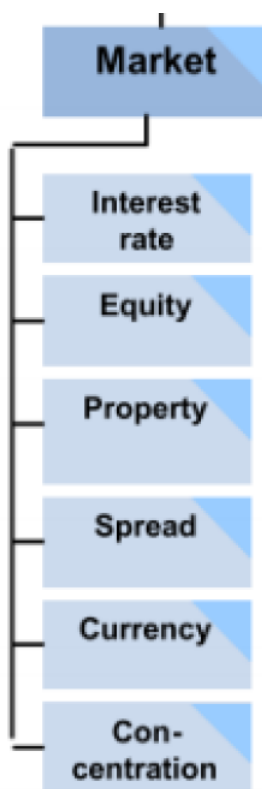


FIGURE 1.4 : Pieuvre du Calcul du SCR marché pour un organisme vie. Source : EIOPA [2016]

1.3.4 Focus SCR défaut

Le montant de capital de solvabilité requis dédié au risque de défaut vise à prévenir l'entreprise contre les éventuelles pertes découlant de créances non recouvrables. Ce phénomène concerne aussi bien les créances inscrites du côté de l'actif du bilan comptable, que celle des cessionnaires dans les provisions techniques, par exemple le Best Estimate de réassurance en conformité avec les normes de Solvabilité 2.

Le règlement délégué émis par l'EIOPA divise en deux catégories distinctes les types de contreparties auxquelles les entreprises opérant dans le domaine de l'assurance ou de la réassurance sont exposées :

1. Les expositions dites de type 1

Ces contraintes s'appliquent principalement aux contreparties non diversifiables qui ont pour objectif de réduire les risques. Parmi ces expositions, on peut identifier les contrats de réassurance, les structures de titrisation, les avoirs déposés en banque, ainsi que les dépôts auprès des entreprises cédantes.

2. Les expositions dites de type 2

Ces entités rassemblent l'ensemble des risques de crédit qui ne sont pas couverts dans le sous-module dédié au "risque de marge" du capital de solvabilité requis pour le risque de marché, et qui ne sont pas de nature de type 1. Dans ce contexte, on fait référence aux contreparties diversifiables, comprenant notamment les créances envers les preneurs d'assurance, les assurés, et d'autres.

En formule standard, le SCR défaut se calcule de la façon suivante :

$$SCR_{def} = \sqrt{SCR_{def,1}^2 + 1,5 \times SCR_{def,1} \times SCR_{def,2} + SCR_{def,2}^2}$$

Nous allons présenter dans les parties suivantes comment chaque composante de ce SCR est calculée :

1. Le SCR défaut pour les expositions de type 1

Pour ce type d'exposition, selon le règlement délégué de l'EIOPA, la formule utilisée est la suivante :

$$SCR_{def,1} = \begin{cases} 3\sqrt{V} & \text{si } \sqrt{V} \leq 7\% \cdot \sum_i LGD_i, \\ 5\sqrt{V} & \text{si } 7\% \cdot \sum_i LGD_i < \sqrt{V} \leq 20\% \cdot \sum_i LGD_i, \\ \text{sinon } \sum_i LGD_i. & \end{cases} \quad (1.2)$$

avec :

- LGD_i représente la perte en cas de défaut d'une des contreparties de type 1 dans le cas de perte sur des dérivés non couverts :

$$LGD_i = \max(90\% \cdot (Derivative + RM_{fin}) - F.Collateral; 0),$$

où :

- **Derivative** représente la valeur du dérivé ;
- RM_{fin} représente l'effet d'atténuation du dérivé sur le risque de marché, donné par la formule suivante :

$$RM_{fin} = \max(0; (SCR^{hpy} - SCR^{without})), \quad (1.3)$$

avec :

- * SCR^{hpy} : la valeur du SCR marché sans tenir compte de l'effet du produit dérivé ;
- * $SCR^{without}$: le SCR marché en tenant compte de l'effet du produit dérivé.
- **Collateral** représente la valeur pondérée des sûretés liées au dérivé ;
- F représente un facteur tenant compte de l'effet économique du contrat de sûreté lié en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.
- V représente la variance de la distribution des pertes d'expositions de type 1. Elle est donnée par la somme de la variance inter et de la variance intra :

$$V = V_{inter} + V_{intra},$$

$$V = \sum_{j,k} \frac{PD_k(1 - PD_k)PD_j(1 - PD_j)}{1.25(PD_k + PD_j) - PD_kPD_j} TLGD_j TLGD_k + \sum_j \frac{1.5PD_j(1 - PD_j)}{2.5 - PD_j} \sum_i LGD_i^2,$$

où : PD_i représente la probabilité de défaut de la contrepartie i , données par une table de rating fournie par l'EIOPA. $TLGD_i$ représente la somme des pertes en cas de défaut sur un type d'exposition de type 1 ayant la probabilité de défaut PD_i .

Concernant la réassurance, l'exigence en capital pour le risque de défaut diffère légèrement de ce qu'on a présenté ci-dessus mais peut être consultée sur le site de l'EIOPA.

2. Le SCR pour les expositions de type 2

La formule de calcul pour ce type d'exposition est moins complexe que pour les expositions de type 1. L'objectif est de différencier les créances selon des dates de +/- 3 mois. On a la formule suivante :

$$SCR_{def,2} = 15\% \sum_i LGD_i + 90\% \cdot LGD_{receivables>3months},$$

où : LGD_i est la perte en cas de défaut des expositions de type 2 ; $LGD_{receivables>3months}$ représente les pertes totales pour un défaut sur la somme totale des créances de plus de 3 mois.

1.4 Contraintes réglementaires applicables à l'utilisation d'une stratégie de couverture dynamique

Dans le cadre de Solvabilité 2, la mise en œuvre d'une stratégie de couverture à l'aide d'instruments dérivés, telle qu'un collar dynamique, est soumise à un ensemble de conditions strictes afin de pouvoir bénéficier d'une réduction effective du Capital de Solvabilité Requis (SCR). Ces exigences sont précisées dans le Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014, qui complète la directive 2009/138/CE en ce qui concerne les normes techniques de réglementation sur les exigences de Solvabilité 2 [reg, 2015], ainsi que dans les orientations de l'EIOPA sur le système de gouvernance [EIOPA, 2014].

Conditions d'admissibilité de la couverture

- **Principe d'atténuation effective du risque** : le dérivé utilisé doit permettre une réduction identifiable et quantifiable de l'exposition au risque sous-jacent. Dans le cas du collar dynamique, cela implique une baisse mesurable du SCR actions, sans introduction d'un risque net supérieur.
- **Intégration comptable et prudentielle** : la couverture doit être intégrée dans le portefeuille d'actifs prudentiel, valorisée à la juste valeur de marché, et reflétée de manière cohérente dans les simulations du bilan projeté. L'assureur doit notamment modéliser correctement l'impact du collar dans le moteur ALM utilisé pour le calcul du SCR.
- **Documentation et gouvernance** : la stratégie de couverture doit être formalisée et validée en interne. Une documentation claire doit décrire les objectifs, les modalités de mise à jour du collar (dans le cas d'une stratégie dynamique), les instruments utilisés, ainsi que la gestion des risques associés (liquidité, contrepartie, opérationnel).
- **Modélisation conforme dans le cadre du modèle standard** : dans le cas où l'assureur utilise le modèle standard de Solvabilité 2, l'effet des dérivés est pris en compte uniquement si :
 - Les instruments sont liquides et valorisables de façon fiable ;
 - L'impact sur les actifs est intégré dans les chocs de marché définis par l'EIOPA (notamment sur le module SCR marché) ;
 - Les positions sont correctement identifiées et suivies dans le portefeuille.
- **Effet sur le SCR de défaut** : l'introduction de produits dérivés dans le bilan implique l'apparition d'un risque de contrepartie supplémentaire. Cela augmente le module de SCR défaut (via la formule de type 1 définie dans le règlement), et doit donc être intégré dans l'évaluation du gain net apporté par la couverture.
- **Absence de risque de base** : Afin de garantir l'efficacité de la couverture et sa reconnaissance par l'Autorité de Contrôle, il est impératif que le sous-jacent économique de l'instrument choisi corresponde exactement à celui du portefeuille exposé. Cela implique :

- Une parfaite adéquation du sous-jacent (même indice, même teneur sectorielle, même maturité) pour limiter toute divergence de performance ;
- Des études de corrélation historiques approfondies (ratio de corrélation supérieur à 0,9 sur l’horizon de couverture) et un suivi régulier du tracking-error, dont les écarts doivent rester inférieurs au seuil validé par le modèle interne ;
- L’utilisation d’instruments standardisés (plain vanilla) sans clauses exotiques ou barrières dissimulées, afin d’éviter toute optionnalité cachée pouvant introduire un risque supplémentaire.

Remarques de supervision

L’ACPR, dans le cadre de ses missions de contrôle, est particulièrement attentive à la cohérence entre la stratégie de couverture revendiquée et sa modélisation effective dans le processus ORSA ou dans un modèle interne. Une stratégie dynamique de type collar, si elle n’est pas modélisée de façon rigoureuse et transparente, peut voir son effet neutralisé ou désapprouvé dans les calculs de SCR. Il est donc impératif d’en assurer la traçabilité, la robustesse, et la documentation.

Chapitre 2

Présentation du cadre de notre étude

L’objectif de ce chapitre est de présenter le moteur ALM, un outil essentiel pour évaluer l’impact de notre stratégie de couverture. Cette démarche nous permettra de mettre en évidence les diverses hypothèses sous-jacentes à son utilisation.

Par ailleurs, une présentation détaillée du GSE utilisé sera effectuée, car il constitue un élément fondamental de notre modélisation. Une part significative du temps dédié à ce mémoire a été consacrée à l’amélioration du GSE afin d’enrichir notre étude et à l’implémentation de la stratégie de collar dynamique. Pour cela, il a fallu développer notre propre outil afin de pouvoir évaluer nos options.

2.1 Le modèle ALM

2.1.1 Présentation du modèle ALM

Description du modèle ALM

Pour évaluer et comprendre l’impact de notre stratégie sur le bilan d’un assureur vie, il est crucial d’acquérir une compréhension précise du modèle ALM employé. En effet, ce modèle est mis en œuvre à l’aide du langage de programmation R. L’objectif de cette section est donc de présenter en détail le modèle ALM. De nombreux éléments d’explication sont tirés du mémoire de Tichit [2019], qui a initié la première version du modèle ALM, ainsi que du mémoire de Ravelonandro [2019], et du mémoire de Picard [2021] qui ont également contribué à l’outil. Les aspects plus généraux sont inspirés d’une formation en ALM dispensée en interne chez Sia Partners, mise en place par Mazurie [2020].

Généralités

En ce qui concerne l'assurance vie, et plus particulièrement dans le contexte des contrats d'épargne en euros, il existe une étroite corrélation entre l'actif et le passif. Les performances financières exercent une influence directe sur le passif. À titre d'exemple, la valorisation des contrats à travers la politique de Participation aux Bénéfices est intrinsèquement liée aux rendements financiers. De plus, les retraits ponctuels dépendent également de la valorisation des contrats. D'autres aspects tels que les décès, les frais et la réaffectation des actifs doivent également être modélisés. Les modèles de gestion d'actifs et de passifs (ALM), notamment celui employé par le cabinet Sia Partners, permettent d'aborder ces problématiques en projetant divers flux. Grâce à ce type de modélisation, il devient possible d'estimer les engagements futurs de la compagnie envers ses souscripteurs (le BE, ou Best Estimate) et de quantifier la solvabilité de l'entreprise à travers le calcul du ratio de solvabilité.

Le graphe 2.1 tiré du mémoire de Picard [2021] résume le fonctionnement général d'un modèle ALM :

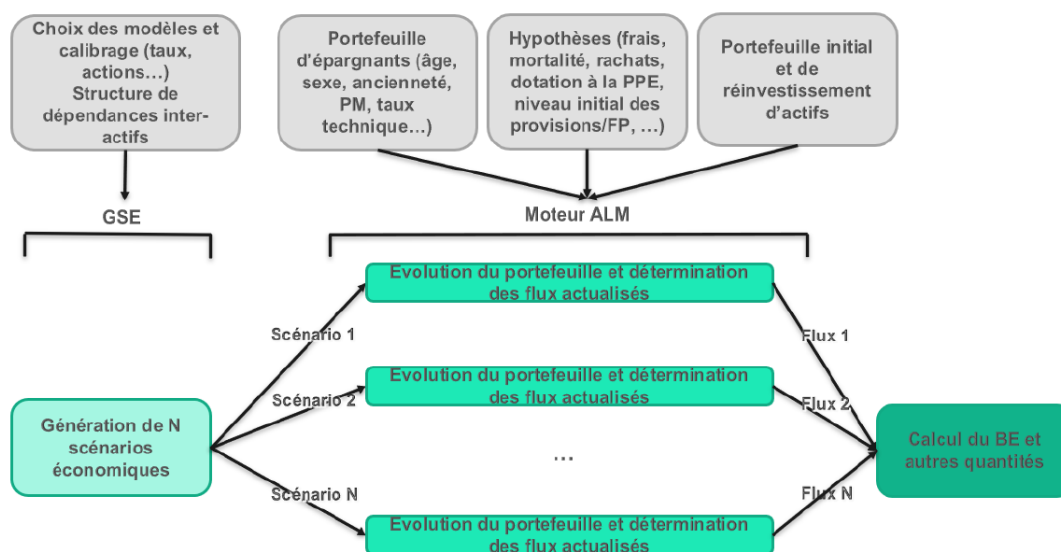


FIGURE 2.1 : Structure d'un modèle ALM. Source : Mémoire Picard [2021]

Pour alimenter le modèle ALM en données, il reçoit en premier lieu des scénarios économiques générés par le Générateur de Scénarios Économiques (GSE). Ce dernier élabore des hypothèses sur les évolutions potentielles des marchés financiers. Nous présenterons le GSE utilisé dans la partie suivante de ce mémoire. En parallèle, le modèle ALM est également alimenté par le portefeuille des épargnants, ainsi que par les portefeuilles initiaux et de réinvestissement d'actifs. De plus, il intègre de multiples hypothèses, comme les frais, les tables de mortalité, les lois régissant les rachats, les parts de produits financiers attribuées aux assurés au-delà du taux technique, et les contributions aux provisions, entre autres.

Avec ces diverses données en entrée, le modèle ALM effectue des projections concernant les flux

(tels que les rachats, les décès, les frais) et réalise des calculs liés à des métriques clés telles que la valeur actuarielle des engagements (Best Estimate). Ces résultats sont ensuite obtenus en sortie du modèle ALM. Grâce à ces sorties et à la méthode de Monte-Carlo, nous sommes capables d'obtenir une estimation du BE , la formule mathématique étant la suivante :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T F_{i,j} \times D_{i,j}.$$

avec :

- N représente le nombre de simulations ;
- T représente l'horizon de projection ;
- $F_{i,j}$ représente le flux de l'année j pour le scénario i ;
- $D_{i,j}$ représente la valeur du déflateur de l'année j pour le scénario noté i .

Il convient de noter qu'au lieu de projeter les flux sur l'ensemble des actifs et de tous les épargnants, ces flux sont regroupés en fonction de caractéristiques similaires ou identiques. Ce regroupement est désigné sous le terme de "Model Points" pour les actifs et les passifs. Cependant, afin d'assurer une convergence adéquate, il est essentiel de prendre un nombre N de scénarios suffisamment conséquent. Dans ce contexte, il a été observé que pour $N = 1000$, une convergence est atteinte. Cela a été démontré dans le mémoire de Tichit [2019], page 69, qui expose une convergence adéquate obtenue avec ce même modèle. Pour notre étude, les projections sont effectuées sur une période de $T = 50$ ans.

Hypothèses du modèle

Hypothèses sur l'actif

Les actifs sont considérés comme divisibles à l'infini, ce qui signifie que des portions minuscules de chaque actif peuvent être achetées ou vendues à volonté. De plus, le marché est supposé liquide, ce qui implique que chaque actif peut être négocié à tout moment. En ce qui concerne les produits financiers générés par ces actifs, pour les obligations, il s'agit des coupons (et des remboursements à échéance), pour les actions, des dividendes (établis à 4 % dans les GSE), pour l'immobilier, des loyers (également fixés à 4 % dans les GSE), et pour les instruments monétaires, des intérêts résultant du placement au taux sans risque d'une maturité d'un an. Les projections sont élaborées dans le cadre d'un univers de Risque-Neutre, en supposant qu'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage. Les évolutions des indicateurs économiques projetés sont celles obtenues grâce au GSE.

Hypothèses sur le passif

La division du passif s'opère en deux parties distinctes : les fonds propres et les provisions techniques. Les fonds propres représentent la part de la compagnie détenue par les actionnaires. Ils sont composés des capitaux apportés par les actionnaires, soit les capitaux propres, ainsi que des bénéfices qui n'ont pas encore été distribués aux actionnaires, connus sous le nom de report à nouveau. En cas de report à nouveau négatif, c'est son complément à zéro qui aura un impact sur les fonds propres. Le résultat de l'exercice comptable est également une composante des fonds propres.

Les projections sont réalisées en mode de gestion au fil du temps, c'est-à-dire que nous ne prenons pas en compte de nouvelles affaires ni de paiements périodiques de primes futures sur les contrats existants au moment $t = 0$. Les contrats prennent fin lors du décès ou du rachat total (sans date de fin contractuelle spécifiée). Aucune réassurance n'est prise en considération. Le taux de distribution des résultats est fixé à 30 %, ce qui implique que 30 % du bénéfice est versé sous forme de dividendes aux actionnaires (ou est utilisé pour renforcer les fonds propres en cas de bénéfice négatif), tandis que 70 % du bénéfice est reporté à nouveau.

En dehors de cela, trois autres hypothèses ont été utilisées pour la conception du modèle, à savoir :

- Lorsque cela est possible, des chargements dits d'administration seront prélevés à l'assuré dans le cadre des frais de gestion de son contrat ;
- Les frais dits de gestion, qui représentent ce que dépense l'assureur dans le cadre de la gestion des contrats ;
- D'autres frais, associés aux prestations, représentant les dépenses de l'assureur lorsqu'un contrat est terminé ou racheté.

Ce qui a été retenu dans le cadre du modèle comme frais est :

- La valeur des chargements des frais d'administration représentera 0,3 % de l'encours ;
- La valeur des frais de gestion sera de 20 euros par contrat ;
- La valeur des frais de prestation sera de 70 euros par contrat.

Modélisation de notre modèle ALM

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur les différents calculs effectués à chaque étape de l'algorithme pour une simulation donnée.

Projection de l'actif

L'étape initiale de la projection implique la projection de l'actif, qui est subdivisée en trois sous-étapes. Pour commencer, une revalorisation des actifs est effectuée, suivie de l'encaissement des produits financiers, puis enfin le décaissement des frais financiers est pris en compte. Nous allons détailler chaque étape de façon précise.

La sous-étape de revalorisation consiste à évaluer l'évolution des actifs en fonction des comportements des marchés fournis par le GSE, qui sera présenté dans la seconde partie de ce mémoire.

Lors de la revalorisation du portefeuille obligataire, qui comprend des obligations à taux fixe, il est nécessaire de recalculer les Valeurs de Marché (VM) et les Valeurs Nette Comptables (VNC) à chaque clôture d'exercice.

En ce qui concerne les VM, leur détermination s'effectue en utilisant les taux fournis par le GSE de la manière suivante :

$$VM_t = \sum_{i=t+1}^M F_i \times e^{-(r(t,i-t)+s)(i-t)}.$$

avec :

- s le spread ;
- $r(t, i)$ le taux zéro coupon de maturité i en année t ;
- F_i valeur du coupon ou remboursement en cas de maturité à l'année i ;
- M la maturité des obligations.

Le spread représente une mesure du risque de crédit associé. Lorsque l'émetteur d'une obligation affiche une solvabilité réduite, le spread augmente. La méthode de neutralisation du risque est mise en œuvre en utilisant le concept de neutralité au risque et repose sur l'estimation d'un spread déterministe au début de la projection. Cela simplifie la procédure en supprimant la nécessité de modéliser la probabilité de défaut. Lors de la neutralisation du risque dans le cas d'une obligation avec un spread déterministe s (supposé constant pendant toute la durée de vie de l'obligation), un coefficient de défaut est appliqué à chaque intervalle de temps. Ainsi, le paramètre s est intégré dans le calcul de la réévaluation de la Valeur Marchande (VM).

S'agissant de la valeur nette comptable, elle est donnée par la formule suivante :

$$VNC_t = \sum_{i=t+1}^M F_i \times e^{-r_a(i-t)}.$$

avec :

- r_a représente le taux actuariel ;
- M représente la maturité ;
- F_i représente la valeur du coupon à l'année i ou le nominal à maturité.

Il convient de souligner que l'amortissement d'une obligation implique une réévaluation de sa valeur suite au paiement du coupon. Le taux actuariel, également connu sous le nom de taux d'amortissement, est déterminé lors de l'acquisition de l'obligation de manière à ce que la Valeur Nette Comptable (VNC) converge vers la valeur de remboursement à l'échéance de l'obligation.

Il est important de préciser également que les VM des actions et de l'immobilier sont revalorisées selon les rendements rdt_t^x , le x représentant l'action ou l'immobilier. Cela s'effectue suivant la formule suivante :

$$VM_t = VM_{t-1} \times e^{rdt_t^x}.$$

Concernant les VNC des actions et de l'immobilier, elles correspondent aux valeurs d'achat.

Une fois la revalorisation effectuée, il faut maintenant déterminer la valeur des **produits financiers**. On utilisera encore les résultats fournis par notre GSE.

Pour les obligations, la valeur des coupons est donnée par la formule suivante :

$$Coupon = \sum_{i=1}^K Tx_{coupon,k} \times Nominal_k.$$

avec :

- $Nominal_k$ le nominal de l'obligation k ;
- $Tx_{coupon,k}$ le taux du coupon de l'obligation k ;
- K le nombre de coupons.

Pour la partie action, immobilier et monétaire, le calcul est effectué suivant les formules suivantes :

$$\begin{cases} \text{Dividendes}_t = VM_t \times \text{taux}_{dividendes}(t), \\ \text{Loyer}_t = VM_t \times \text{taux}_{loyers}(t), \\ \text{Intérêt}_t = \text{solde}_t \times r(t, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Après l'encaissement des produits financiers vient ensuite la phase de décaissement, qui engendre des **frais financiers**. Dans le modèle ALM, on distingue deux types de frais qui coexistent : les

frais sur les produits financiers dégagés et les frais dits de garde, calculés grâce aux valeurs de marché (VM). Ces frais ont été définis par avis d'experts et selon la répartition suivante :

- Pour les actions, 0,120% du résultat financier est accordé aux frais sur produits financiers et 0,010% est destiné aux frais de garde.
- Pour les obligations, 0,035% du résultat financier est accordé aux frais sur produits financiers et 0,010% est destiné aux frais de garde.
- Pour l'immobilier, 0,000% du résultat financier est accordé aux frais sur produits financiers et 1,520% est destiné aux frais de garde.

Paiement et prestation

La projection du portefeuille étant faite, l'étape suivante implique la modélisation des évolutions du passif, en particulier les paiements des prestations. Ces prestations sont influencées par les comportements des assurés. Dans le contexte de notre produit, le contrat d'Épargne avec support euros, on distingue deux principaux comportements : les décès et les rachats. En ce qui concerne les rachats, ils se divisent en rachats partiels, où une partie seulement de l'encours est retirée par l'assuré, et en rachats totaux, où la totalité de l'encours est retirée. De plus, les rachats peuvent être de nature structurelle (liés à des comportements habituels) ou conjoncturelle (influencés par la situation économique). L'objectif de cette section est de présenter les approches adoptées pour modéliser ces divers comportements.

Le montant des paiements de prestations attribuables aux décès survenant en année t et associés à un Model Point de passifs p donné peut être exprimé de la manière suivante :

$$Dcs_t^p = PM_t^p \times q_x^p. \quad (2.2)$$

avec :

- PM_t^p représentant la provision mathématique d'ouverture de l'année t du model point de passifs p ;
- q_x^p représentant la probabilité de décès pour le model point p d'âge x , les tables de référence utilisées sont la TH00-02 pour les hommes et l'équivalent pour les femmes.

Dans la structure du modèle employé, les rachats structurels sont modélisés de manière déterministe à travers deux tableaux distincts (un pour les rachats partiels et un pour les rachats totaux). Comme souvent observé dans les modèles ALM, ces tableaux varient en fonction de l'âge et de l'ancienneté de l'assuré. Chaque assureur élabore ces tableaux en examinant l'historique de ses rachats. Il est important de souligner que les tableaux de rachats structurels présentent un pic lorsque l'ancienneté atteint 8 ans. Cette particularité s'explique par les avantages fiscaux liés

à ce type de contrat. Les tableaux utilisés dans ce modèle proviennent d'un assureur actif sur le marché.

Les rachats conjoncturels, quant à eux, suivent la loi de rachats établie par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR). Cette loi est représentée par une fonction par morceaux qui tient compte de l'écart (représenté par Δ_{taux}) entre le taux de rendement servi et un taux reflétant les conditions économiques, le taux auquel l'assuré souhaiterait bénéficier. Dans le modèle utilisé, ce dernier taux est un taux concurrentiel. Voici l'expression mathématique du taux de rachats conjoncturels :

$$Rachats_{conjoncturels} = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } \alpha \geq \Delta_{taux}, \\ RC_{max} \times \frac{\Delta_{taux} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < \Delta_{taux} \leq \beta, \\ 0 & \text{si } \beta < \Delta_{taux} \leq \gamma, \\ RC_{min} \times \frac{\Delta_{taux} - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < \Delta_{taux} \leq \delta, \\ RC_{min} & \text{si } \delta < \Delta_{taux}. \end{cases} \quad (2.3)$$

L'ACPR fournit également des valeurs estimées des différents paramètres de l'équation, qui sont présentées par le graphe 2.2.

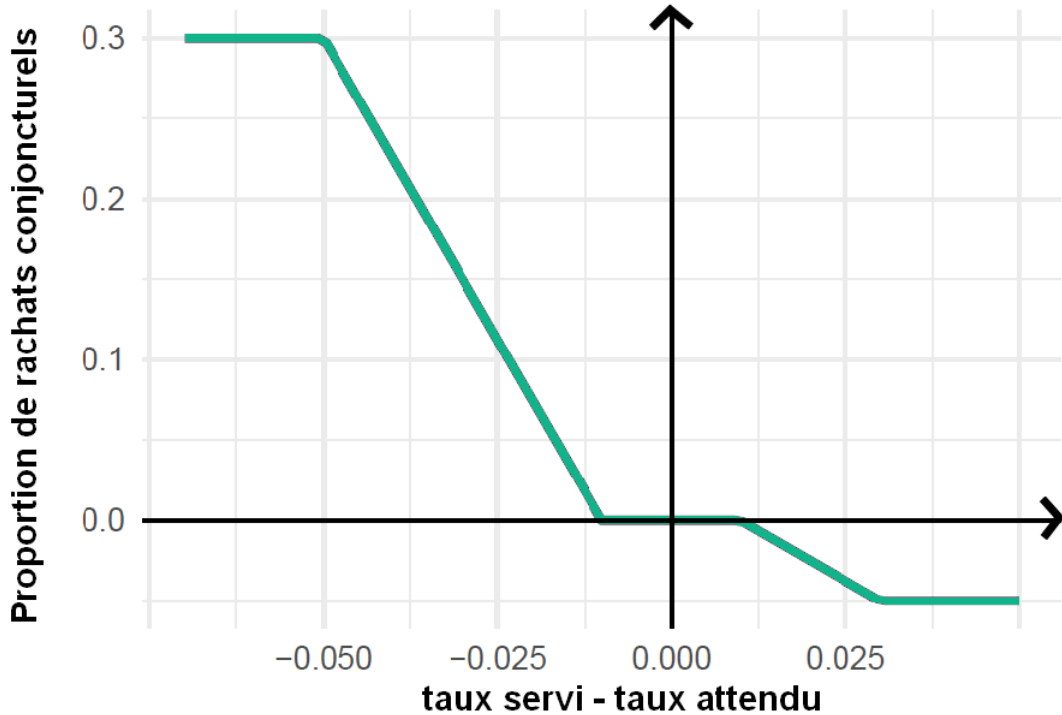


FIGURE 2.2 : Courbe modélisant les rachats conjoncturels Source : Picard [2021]

Dans notre modèle ALM, il a été considéré que 25% des rachats sont conjoncturels partiels et

75% des rachats sont conjoncturels totaux.

Une fois cette partie définie, on peut déterminer les provisions mathématiques liées aux rachats en gardant toujours la répartition en model point. On a alors la formule suivante :

$$Rachat_t^p = PM_t^p \times \max(0; Rachat_{structurel,t}^p + Rachat_{conjoncturel,t}^p). \quad (2.4)$$

avec :

- $Rachat_{structurel,t}^p$ représentant le taux de rachat structurel de l'année t pour le model point p ;
- $Rachat_{conjoncturel,t}^p$ représentant le taux de rachat conjoncturel de l'année t pour le model point p ;
- PM_t^p représentant la provision mathématique de l'année t pour le model point p .

Une clarification importante peut être apportée concernant la présence d'une limite maximale à zéro dans notre formule ci-dessus. Cette limite intervient lorsque le taux de rachat conjoncturel présente une valeur négative. D'après la fonction modélisant les rachats conjoncturels présentée plus haut, cette situation se produit lorsque les taux de rendement offerts dépassent les attentes des assurés. En conséquence, les assurés ont tendance à ne pas effectuer de rachats anticipés de leurs contrats, ce qui influence le comportement structurel. Lorsque le taux de rachat conjoncturel est négatif, mais sa valeur absolue est supérieure aux taux de rachat structurels, il est impossible que nos prestations liées aux rachats soient négatives (ce qui augmenterait la Provision mathématique). C'est pourquoi nous observons la présence d'une limite maximale à zéro, destinée à contrer cette situation.

Ayant les formules représentant les prestations liées aux décès et aux rachats, on peut établir le montant final à décaisser par l'assureur pour leurs financements. Cela s'exprime de la manière suivante :

$$Prestations_t = \sum_{p=1}^P (Dcs_t^p + Rachats_t^p) \times (1 + tx^p). \quad (2.5)$$

avec :

- $Rachats_t^p$ le montant total lié aux rachats de l'année t ;
- Dcs_t^p le montant total des décès de l'année t ;
- tx^p le taux technique lié au model point p ;
- P représente le nombre total de model points de passifs.

Rebalancement de l'actif

Les étapes précédentes exercent une influence sur l'actif. En effet, des revenus financiers ont été enregistrés, tout comme des frais et des prestations ont été décaissés. Avant même ces opérations, l'actif a été soumis à une réévaluation. La phase de rééquilibrage de l'actif nécessite d'adapter l'allocation en fonction de la nouvelle base de richesse détenue par l'assureur. Pour obtenir cette base, les encaissements sont ajoutés à la base réévaluée et les décaissements en sont soustraits. Cette base est ensuite soumise à une stratégie de réinvestissement. Au sein du modèle, la composition du portefeuille réinvesti, également appelé portefeuille cible, est identique à la composition initiale du portefeuille. On parle de stratégie de réinvestissement de nature statique.

Afin d'allouer les actifs conformément au portefeuille cible, des mécanismes d'achat/vente sont instaurés pour chaque actif. Pour les actions et l'immobilier, cette opération est effectuée simplement en actualisant leurs valeurs de marché (VM) et valeurs nettes comptables (VNC). Cependant, pour les obligations, cela se révèle plus complexe car il est nécessaire de s'aligner avec le portefeuille obligataire de réinvestissement. ainsi, la stratégie adoptée a été celle qui consiste à vendre une proportion uniforme de chaque obligation. Cette stratégie permet de préserver l'intégrité du profil de risque du portefeuille obligataire.

Gestion des provisions

Il est maintenant nécessaire de prendre en charge la gestion des provisions au sein du modèle, notamment la Provision pour Risques et Engagements (PRE) ainsi que la Réserve de Capitalisation. Une compréhension approfondie de la gestion de la Réserve de Capitalisation revêt une importance capitale pour la mesure qui lui est associée. La gestion de la Provision pour Participation aux Excédents (PPE) est effectuée au sein de la fonction de Participation aux Bénéfices.

la PRE est établie dans le cas où les actifs non amortissables (telles que les actions et les biens immobiliers dans ce contexte) présentent une moins-value latente globale. Étant donné que ces actifs ont été réévalués lors de l'étape 1 et rééquilibrés lors de l'étape 3, il est impératif de mettre à jour la PRE afin qu'elle reflète les nouvelles moins-values latentes. À noter qu'au niveau réglementaire (conformément à l'Article R331-5-1 du Code des assurances), la dotation annuelle à la PRE ne peut pas dépasser un tiers du montant total de la moins-value latente globale. Cependant, cette règle n'a pas été intégrée dans le moteur ALM.

Si, au cours de l'étape de rééquilibrage des actifs, des plus ou moins-values sont réalisées sur les obligations, elles auront une incidence sur la Réserve de Capitalisation. Il convient de préciser que, étant donné que la Réserve de Capitalisation ne peut pas avoir une valeur négative, la réalisation de moins-values excédant son montant affectera le résultat de l'exercice.

Revalorisation des contrats-fonction de participation au bénéfice

La fonction de Participations aux Bénéfices (PB) consiste à répartir entre l'assureur et les assurés la base des produits pouvant être distribués (base financière correspondant aux produits monétaires et base technique), tout en respectant diverses contraintes. À l'intérieur de la fonction de PB, on identifie plusieurs strates : une couche contractuelle (définie par les taux techniques), une couche réglementaire (qui inclut la restriction de 8 ans sur la PPE ainsi que la règle 85/90) et enfin une couche discrétionnaire.

Ainsi notre algorithme de PB fonctionnera suivant quatre étapes à savoir :

- Etape 1 : Réalisation des paiements des engagements contractuels, avec la possibilité d'exécuter des Plus-Values Latentes (PVL) admissibles si nécessaire.
- Etape 2 : Prélèvement de la marge assureur au niveau du portefeuille, suivi éventuellement de la réalisation de PVL admissibles si requis.
- Etape 3 : Distribution de la revalorisation conforme au taux cible en utilisant les produits restants du portefeuille. Cette étape inclut également la reprise de la Participation aux Produits Excédentaires (PPE), la réalisation de PVL admissibles, et une éventuelle réduction de la marge assureur. Ensuite, le rajeunissement de la Provision pour Participation aux Bénéfices (PB) est réalisé et la PB cible est incorporée au niveau du portefeuille.
- Etape 4 : Vérification de la conformité au minimum réglementaire de la participation aux bénéfices au niveau de l'entité.

Les éléments comptables

La phase finale de la projection pour une année et une simulation données implique la création des éléments comptables essentiels : le compte de résultat, le compte de trésorerie et le bilan. Dans notre modèle, ces trois composants sont élaborés conformément aux pratiques classiques que l'on retrouve dans des documents réels, toutefois, des simplifications sont apportées en raison des contraintes liées à notre modèle.

La Gestion de la fin de projection

L'un des paramètres essentiels du modèle de gestion actif-passif (ALM) réside dans son horizon de projection. Ce choix doit être judicieusement établi afin de trouver un équilibre satisfaisant entre la durée de calcul nécessaire et la pertinence des informations fournies. Étant donné que le portefeuille évolue vers sa fermeture (run-off), après un certain nombre d'années, compte tenu du niveau limité des provisions et de l'impact de l'actualisation, interrompre la projection (sans attendre l'extinction totale du portefeuille) n'affecte pas de manière significative la Valeur d'Engagement (BE), tout en offrant un gain substantiel en termes de temps de calcul.

Dans le cadre de ce modèle, l’horizon de projection est fixé à 50 ans, tout en restant ajustable selon les besoins. À la fin de la projection, toutes les provisions ne sont pas nécessairement liquidées, ce qui nécessite une gestion appropriée de la liquidation du bilan de la compagnie. À cet effet, la répartition des différentes composantes du passif doit être effectuée entre les assurés (flux comptabilisés dans le BEL) et les assureurs (flux comptabilisés dans la NAV).

La gestion de la phase finale de projection est prise en charge par la fonction appelée **gestion fin projection actif**, qui sépare la gestion de l’actif et du passif comme suit :

Au cours de cette étape, le portefeuille d’actifs est entièrement liquidé. Cela implique la comptabilisation des ventes au niveau des différentes poches en utilisant les valeurs de marché (VM) et le solde de trésorerie pour les actifs monétaires. Les Plus et Moins-Values Réalisées (PMVR) sont ensuite calculées par différence entre les VM et les Valeurs Nette Comptable (VNC). Les portefeuilles d’actifs sont ensuite remis à zéro, et les flux sont répartis directement entre les assurés et les assureurs. En cas de moins-value totale du portefeuille, l’assureur en assume la perte. Cependant, si une plus-value est réalisée, elle est partagée entre les assureurs et les assurés Euro, en fonction d’un taux paramétrable en entrée (qui peut différer du minimum réglementaire de participation aux bénéfices).

Cette étape vise à distribuer les diverses provisions entre les assurés et l’assureur. En fin de projection, les fonds propres sont recalculés en fonction de l’état du portefeuille.

En résumé, la gestion des contraintes de liquidité au sein du modèle ALM engage la réflexion sur la manière optimale de clôturer le portefeuille, en équilibrant les flux de trésorerie entrants et sortants, tout en considérant les impacts sur les engagements vis-à-vis des assurés et la stabilité financière globale.

2.2 Présentation du GSE utilisé

2.2.1 Les éléments du GSE

Dans cette partie, nous allons vous présenter le fonctionnement de notre GSE et les autres éléments qui le composent. Le principal intérêt de sa mise en place est sa capacité à projeter des conditions économiques de manière stochastique, avec 1000 simulations dans notre cas, sur une période spécifique de 50 ans.

La forte corrélation entre une modélisation actif-passif et l’environnement économique, ainsi que l’asymétrie des résultats en fonction du contexte financier, justifient le recours à des simulations stochastiques générées par le biais d’un GSE. Il convient de noter que l’environnement économique influe sur les rendements financiers, qui, à leur tour, impactent des éléments tels que le taux de rachat, avec des conséquences sur les retraits effectués dans des contextes conjoncturels.

Le développement du GSE a été effectué au sein du cabinet Sia Partners, en utilisant des données datées du 31/12/2022 pour la calibration. L’objectif présent est d’acquérir une compréhension

globale de ce générateur et de présenter ses éléments principaux.

Le modèle GSE utilisé est en environnement risque neutre. Ainsi, de par sa conception, il doit être capable de reproduire des conditions de marché à l’instant initial. Les distributions qui servent à projeter les variables économiques sont formulées en fonction de la probabilité risque-neutre. Cette approche se déroule dans un environnement probabiliste où l’espérance de rendement des actifs correspond au taux sans risque, sans qu’aucune prime ne soit attribuée pour la prise de risque. Le processus des prix actualisés des actifs évolue en tant que martingale sous cette probabilité. En outre, le modèle GSE risque-neutre vise également à obtenir la cohérence avec le marché, signifiant qu’il cherche à retrouver les prix des instruments financiers employés pour le calibrage.

Dans notre GSE, les principaux éléments modélisés sont : l’inflation, l’immobilier, les taux et l’évolution des actions. Ainsi, il a été nécessaire de trouver des modèles de diffusion pour chaque élément ainsi que les données qui seront utilisées pour le calibrage, en veillant à ce que notre GSE respecte les hypothèses de market consistency et de martingalité. Les éléments qui suivent sont inspirés d’une note interne du GT ALM de Sia Partners Mazurie [2020] et corroborés par le mémoire de Ravelonandro [2019] et Tichit [2019].

Ci-dessous les modèles et les données choisis pour chaque élément modélisé :

Taux d’intérêt

Le modèle retenu dans le GSE est le G2++ (une présentation détaillée est en annexe A.1 du mémoire). Les données utilisées pour le calibrage sont : la volatilité des swaptions à la monnaie, le taux swaps sur Euribor 3 mois et la courbe de taux sans risque de l’EIOPA.

Action

Le modèle retenu dans le GSE est celui de Black-Scholes. Pour le calibrage, ce sont les puts à la monnaie sur l’Eurostoxx 50 qui ont été utilisés.

Immobilier

Le modèle retenu dans le GSE est celui de Black-Scholes. Pour le calibrage, nous avons utilisé les données de l’INSEE sur l’indice des prix des logements pour la période de 2000 à 2022.

Inflation

Le modèle retenu dans le GSE est celui de Vasicek. Pour le calibrage, nous avons utilisé les données de l’INSEE sur l’indice de l’inflation pour la période de 2000 à 2022.

Dans la suite, on se placera dans un espace de probabilité filtré, à savoir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, où :

- Ω représente l'ensemble des événements possibles ;
- \mathcal{F} la tribu ;
- \mathbb{F} la filtration adaptée ;
- \mathbb{P} la mesure de probabilité.

Avec l'hypothèse selon laquelle les variables aléatoires sont adaptées à \mathcal{F}_t .

Étant donné que notre mémoire se focalise sur la proposition d'une approche de couverture pour le portefeuille actions d'une compagnie d'assurance, nous dirigerons notre attention vers le modèle de diffusion employé pour la prévision des performances des actions dans la section suivante.

2.2.2 Présentation des modèles de diffusion

Le Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes, l'un des plus anciens et des plus utilisés en salle de marché, est formulé sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} comme suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (2.6)$$

où S_t désigne le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t , r est le taux d'intérêt sans risque (constant et connu), σ est la volatilité supposée constante, et $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses fondamentales. Le temps est considéré comme continu et l'évolution du prix du sous-jacent est modélisée par une diffusion continue. Il n'existe aucune stratégie permettant de réaliser un gain certain sans investissement initial et sans risque, ce qui constitue l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. La vente à découvert est autorisée, les coûts de transaction sont supposés nuls, l'actif sous-jacent est parfaitement divisible, il ne distribue pas de dividendes, et le taux sans risque est constant et disponible pour tous les agents économiques.

Sous ces hypothèses, le rendement du sous-jacent suit une loi log-normale. On obtient ainsi la formule suivante pour la valeur du sous-jacent à maturité :

$$S_T = S_t \times \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \epsilon \right), \quad (2.7)$$

où ϵ est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

L'une des principales limites de ce modèle réside dans l'hypothèse de volatilité constante, qui rend difficile l'ajustement aux prix observés sur les marchés. Une réponse classique à cette limite

consiste à calibrer le modèle via la volatilité implicite, de manière à reproduire les prix de marché des options. Cette approche a été adoptée dans le cadre de ce mémoire pour déterminer les prix des calls et puts. Toutefois, cette volatilité implicite dépend du prix d'exercice, phénomène connu sous le nom de « smile de volatilité », et cette configuration varie dans le temps, donnant lieu à une surface de volatilité, ou « nappe de volatilité ».

Le Modèle d'Heston

Le modèle d'Heston, qui prolonge celui de Black-Scholes, introduit une volatilité stochastique au lieu d'une volatilité constante. Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , la dynamique du modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^{\mathbb{Q}}, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^{\mathbb{Q}}, \end{cases} \quad (2.8)$$

où v_t désigne le processus de variance instantanée, et $(W_{1,t}^{\mathbb{Q}}, W_{2,t}^{\mathbb{Q}})$ sont deux mouvements browniens corrélés sous \mathbb{Q} , avec un coefficient de corrélation ρ . Le processus de variance suit une dynamique de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross).

Ce modèle permet de mieux capturer les phénomènes observés sur les marchés, notamment le smile de volatilité. Grâce à un processus de calibration, il reproduit la surface de volatilité observée, ce qui le rend plus réaliste que le modèle de Black-Scholes. Il existe cependant d'autres modèles, comme celui de Dupire à volatilité locale, qui permettent également de capturer cette surface ; dans le cas de Dupire, la volatilité est déterministe et dépend du temps et du niveau du sous-jacent.

Dans le cadre de ce mémoire, une première approche a consisté à utiliser le modèle d'Heston pour simuler la dynamique des actions et calculer les prix de produits vanilles. Pour des raisons de performance computationnelle, une seconde méthode donnant des résultats similaires a été privilégiée. Les deux approches sont présentées dans la suite.

2.2.3 Le modèle de diffusion utilisé pour le calcul des prix des options

Présentation du premier modèle utilisé : celui d'Heston

Introduction

La volatilité constante, telle que présente dans le modèle de Black-Scholes, ne permet pas de reproduire fidèlement les prix du marché, car, en réalité, la volatilité dépend à la fois de la maturité et du niveau du sous-jacent.

Les modèles basés sur la volatilité locale, comme celui de Dupire, sont en mesure de reproduire le smile de volatilité, mais ils ne prennent pas en considération la corrélation entre le niveau du sous-jacent et la volatilité, ni leurs variations.

Ainsi, le modèle de Heston, qui incorpore une volatilité stochastique, comble ces lacunes en introduisant une dynamique stochastique spécifique à la volatilité, étroitement corrélée à celle du sous-jacent. Cette caractéristique devient particulièrement intéressante en raison de la croissance des produits dérivés et structurés dépendant de la relation entre la dynamique du sous-jacent et celle de la volatilité.

Cependant, contrairement aux modèles comme Black-Scholes ou Dupire, le modèle de Heston ne permet pas de maintenir la complétude du marché. En effet, l'introduction d'une source de risque supplémentaire — la volatilité — qui n'est pas directement tradable, empêche la réplication parfaite de tout produit. Cela reflète une propriété plus réaliste des marchés financiers, qui sont généralement incomplets.

Une partie des éléments de cette section est inspirée du mémoire de Zaghla [2018], du mémoire de Picard [2021] et du livre de Hull [2021], 11^e édition.

Le modèle de Heston

La dynamique du modèle de Heston est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec $d\langle W_{1,t}, W_{2,t} \rangle = \rho dt$ pour deux mouvements browniens corrélés.

Où :

- μ est la tendance de retour à la moyenne ;
- k est la vitesse de retour à la moyenne ;
- θ représente la limite asymptotique de la variance ;
- σ représente la volatilité constante ;
- ρ est la corrélation entre les deux mouvements browniens.

On constate que la dynamique de la volatilité suit un modèle CIR, et celle du sous-jacent est basée sur le modèle de Black-Scholes.

La condition de Feller

Comme mentionné plus haut, notre volatilité suit un modèle CIR et doit rester positive.

La condition de Feller nous garantit l'existence d'une solution strictement positive pour la variance si $2k\theta > \sigma^2$ et $v_0 > 0$. Toutefois, cette condition n'implique pas que v_t est uniformément minorée strictement au-dessus de zéro ; elle garantit simplement que la trajectoire ne touche pas zéro, ce qui est suffisant pour assurer certaines propriétés comme l'applicabilité du théorème de Girsanov dans notre cadre.

D'après le théorème de Choleski, on peut représenter W_2 comme une combinaison linéaire d'un brownien W_1 et d'un autre brownien indépendant W_3 :

$$W_2 = \rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3.$$

L'univers risque neutre

Pour déterminer le prix d'un produit vanille, il est nécessaire de travailler dans un environnement risque neutre. Sous cette probabilité, dite probabilité martingale, la valeur actualisée du sous-jacent devient une martingale, ce qui garantit l'absence d'opportunité d'arbitrage.

On construit cette mesure à l'aide du théorème de Girsanov, qui permet de transformer la mesure physique \mathbb{P} en une mesure \mathbb{Q} , sous laquelle les dynamiques des actifs financiers sont modifiées pour refléter un taux d'intérêt sans risque r au lieu du rendement attendu μ .

La dynamique du sous-jacent sous \mathbb{Q} est :

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{v_t}{2} \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^*,$$

$$\text{où } W_{1,t}^* = W_{1,t} + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{v_s}} ds.$$

La probabilité \mathbb{Q} est alors définie par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T = \exp \left(\int_0^T \frac{r - \mu}{\sqrt{v_s}} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r - \mu}{\sqrt{v_s}} \right)^2 ds \right).$$

Pour que cette densité de changement de mesure soit bien définie, il faut s'assurer que la condition de Novikov est vérifiée :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r - \mu}{\sqrt{v_s}} \right)^2 ds \right) \right] < \infty. \quad (2.10)$$

Dans notre cas, bien que la volatilité soit positive, elle n'est pas forcément minorée strictement. Cependant, en pratique, pour des paramètres admissibles du modèle de Heston satisfaisant la

condition de Feller, cette condition est généralement vérifiée, ce qui nous autorise à appliquer Girsanov.

Sous la mesure \mathbb{Q} , en utilisant la représentation de W_2 par W_1 et W_3 , on obtient :

$$W_2^* = \rho W_1^* + \sqrt{1 - \rho^2} W_3.$$

La dynamique de la volatilité devient alors :

$$dv_t = k(\theta^* - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^*,$$

où $\theta^* = \theta - \rho \frac{\sigma(\mu - r)}{k}$.

La dynamique du modèle de Heston sous \mathbb{Q} est donc :

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \left(r - \frac{v_t}{2} \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^*, \\ dv_t &= k(\theta^* - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^*, \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec :

$$\begin{aligned} dW_{1,t}^* &= dW_{1,t} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt, \\ dW_{2,t}^* &= dW_{2,t} + \rho \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt. \end{aligned}$$

Présentation du modèle retenu celui de Black-Scholes et SABR

Le modèle SABR

Les éléments présentés dans cette partie sont en grande partie issus du livre de P. Hagan sur le modèle SABR Hagan et al. [2001].

L'aspect remarquable de ce modèle réside dans sa capacité à fournir une formule fermée, bien que approximative, pour la volatilité implicite d'un call/put sur un sous-jacent F . En notant T la maturité, K le strike, et $\sigma_B(F_0, K)$ la volatilité implicite associée à ce call, cette formule a été élaborée en se basant sur des travaux liés aux équations aux dérivées partielles (Feynman-KAC). Il est à noter que cette formule est valable uniquement pour les options proches de la monnaie.

Cependant, comme pour le modèle d'Heston, la présence de volatilité stochastique rend le marché incomplet, rendant impossible le travail avec une probabilité martingale unique, comme c'est le cas avec le modèle de Black-Scholes. Ainsi, dans le cadre de ce modèle et grâce à la

calibration, nous pouvons choisir une probabilité martingale et travailler avec elle pour le calcul du prix des produits vanilles.

Dynamique du modèle

Le modèle SABR est un modèle de marché qui modélise le sous-jacent F (qui représente ici le taux forward) sous la probabilité qui le rend martingale, de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t F_t^{\beta-1} dW_t, \\ F_0 \text{ connue}, \\ \frac{d\alpha_t}{\alpha_t} = v dB_t, \\ \text{et } \alpha_0 = \alpha. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

avec

- $d\langle W_t, B_t \rangle = \rho dt$ avec $\rho \in (-1, 1)$;
- $\beta \in [0, 1]$ et $v > 0$;
- (α_t) suit un modèle log-normal ;
- $\rho \neq 1$ et $\rho \neq -1$ pour que les deux browniens ne soient pas totalement corrélés.

Remarque 2.1 Si $\beta = 0$, la dynamique de F est normale, et si $\beta = 1$, la dynamique de F est log-normale.

Comme mentionné plus haut, l'un des principaux avantages de ce modèle est sa formule fermée pour la volatilité implicite. Elle est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma(F_0, K) \approx & \frac{\alpha}{\sqrt{F_0 K}^{(1-\beta)}} \times \frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2 \ln\left(\frac{F_0}{K}\right)^2}{24} + \frac{(1-\beta)^4 \ln\left(\frac{F_0}{K}\right)^4}{1920} + \dots} \\ & \times \frac{y}{\ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho y + y^2} - \rho + y}{1-\rho}\right)} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{(\beta-1)^2}{24\sqrt{F_0 K}^{(2-2\beta)}} + \frac{\rho\mu\beta}{4\alpha\sqrt{F_0 K}^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) T \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec $y = \frac{\nu}{\alpha} (F_0 K)^{(1-\beta)/2} \ln\left(\frac{F_0}{K}\right)$.

Cette expression est valable lorsque $F_0 \neq K$; sinon, on a :

$$\sigma_{ATM} \approx \frac{\alpha}{F_0^{1-\beta}} \left(1 + \left[\frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24 F_0^{2-2\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \nu \alpha \beta}{F_0^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right] T + \dots \right). \quad (2.14)$$

Comme on peut le constater, le modèle SABR possède quatre paramètres principaux, et il est crucial de bien calibrer chacun de ces paramètres.

Calibrage des différents paramètres

Les paramètres de calibration

Comme nous l'avons vu ci-dessus, les paramètres β et ρ ont un impact similaire sur la courbe de volatilité. Ainsi, pour le processus de calibration, il est important de faire un choix parmi ces deux paramètres pour éviter le problème de surparamétrisation évoqué plus haut. Dans notre cas, nous avons choisi de ne pas inclure β parmi les paramètres à calibrer. En effet, comme mentionné au début de cette partie, β nous fournit des informations sur la dynamique de F ; ainsi, si nous avons une idée de la distribution, nous pouvons fixer ce paramètre et calibrer avec les deux autres.

Dans le cadre de ce mémoire, β est choisi dans $[-1, 1]$. Pour chaque valeur de β , nous calibrons les paramètres (α, ρ, ν) et, en fonction de la qualité de la calibration, nous déterminons le paramètre β le plus adapté.

Il est également possible d'utiliser certains types de produits financiers pour optimiser le choix de β .

Comment la calibration est effectuée

Comme mentionné en première partie, dans un premier temps, nous fixons le paramètre β , puis nous calibrons les paramètres (α, ρ, ν) .

Pour ce faire, nous avons utilisé des calls de maturité d'une semaine sur l'Eurostoxx 50. Nous avons ainsi récupéré directement sur Bloomberg, pour différents strikes et pour un sous-jacent fixé à $S = 4200$, la valeur de la volatilité implicite de ces calls. Les données utilisées sont représentées dans le tableau 2.1.

Strike	Ticker	Bid	Ask	Dern	VIM	Vol.
3850	SX5E 1/20/23 P3850	0,4	0,6	0,5	32,2	2170
3875	SX5E 1/20/23 P3875	0,5	0,6	0,5	30,2	3009
3900	SX5E 1/20/23 P3900	0,5	0,7	0,6	28,2	5929
3925	SX5E 1/20/23 P3925	0,6	0,7	0,6	26,0	2803
3950	SX5E 1/20/23 P3950	0,6	0,8	0,7	23,9	4030
3975	SX5E 1/20/23 P3975	0,8	0,9	0,8	22,0	4470
4000	SX5E 1/20/23 P4000	1,0	1,2	1,1	20,3	7684
4025	SX5E 1/20/23 P4025	1,6	1,7	1,6	19,0	4444
4050	SX5E 1/20/23 P4050	2,5	2,7	2,5	17,9	8806
4075	SX5E 1/20/23 P4075	4,2	4,4	4,2	16,9	3379
4100	SX5E 1/20/23 P4100	7,3	7,7	7,3	16,2	14982
4125	SX5E 1/20/23 P4125	12,3	12,8	12,3	15,4	7069
4150	SX5E 1/20/23 P4150	20,1	20,7	20,1	14,6	7255
4175	SX5E 1/20/23 P4175	31,9	32,5	32,0	14,0	912
4200	SX5E 1/20/23 P4200	47,7	49,4	50,3	13,7	9
4225	SX5E 1/20/23 P4225	67,4	69,3	0,0	13,4	0
4250	SX5E 1/20/23 P4250	89,8	91,8	0,0	13,2	0
4275	SX5E 1/20/23 P4275	113,6	115,7	0,0	12,8	0
4300	SX5E 1/20/23 P4300	138,2	140,3	0,0	11,7	0

TABLE 2.1 : Données Puts sur Eurostock50 issues de Bloomberg

Une fois cela effectué, nous avons utilisé la formule donnant une expression fermée pour la volatilité implicite dans le cadre du modèle SABR. L'objectif était de déterminer, pour différentes valeurs des paramètres, la volatilité implicite théorique.

Ensuite, il a suffi de minimiser la fonction suivante :

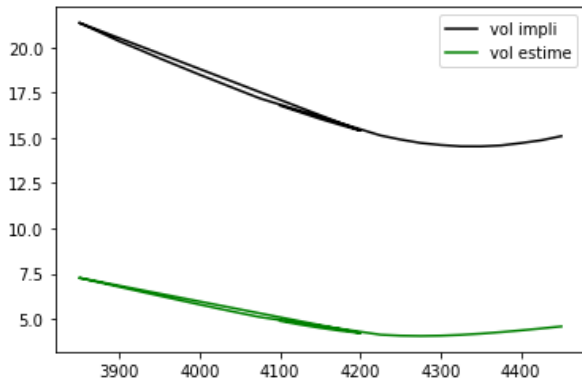
$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \left(VI^{Modle}(K_i, \alpha, \rho, \nu) - VI^{March}(K_i) \right)^2, \quad (2.15)$$

L'objectif était de faire varier (α, ρ, ν) dans leurs intervalles de valeurs possibles et de choisir le triplet de paramètres qui minimise cette expression.

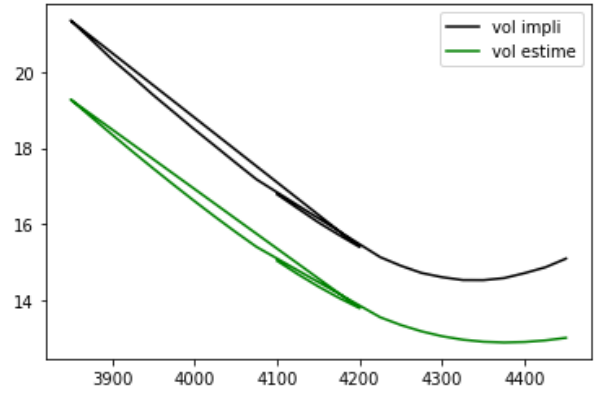
Dans cette fonction de minimisation, λ_i est une pondération utilisée pour ajuster les valeurs autour de la monnaie.

Il est important de préciser que si la maturité du produit dérivé change, il est nécessaire de recalibrer le modèle car les paramètres optimaux sont liés à la maturité. De plus, pour un call et un put sur un même sous-jacent et une même maturité, les paramètres obtenus sont les mêmes.

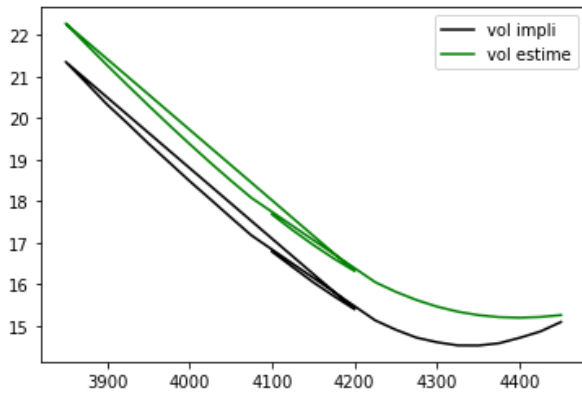
Nous avons obtenu les résultats suivants, présentés sur la figure 2.3 (la volatilité implicite en % sur l'axe des ordonnées et le strike en abscisse) :



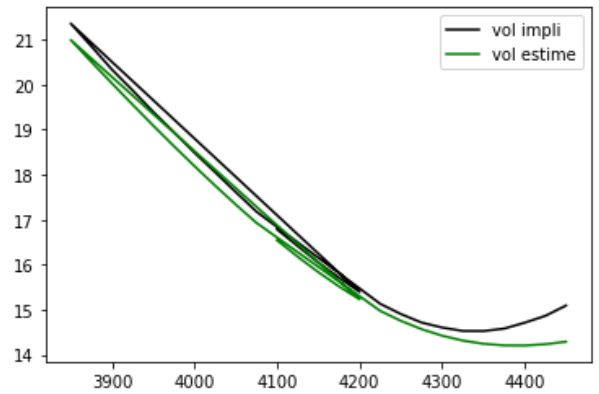
(a) Smile de volatilité pour $\beta = 0,50$



(b) Smile de volatilité pour $\beta = 0,57$



(c) Smile de volatilité pour $\beta = 0,58$



(d) Smile de volatilité pour $\beta = 0,5759$

FIGURE 2.3 : Evolution du smile de volatilité suivant Beta

Ainsi, nous avons pu obtenir une fonction pour déterminer la volatilité implicite pour le pricing d'un call et d'un put. Cependant, lorsque nous avons lancé le modèle, nous nous sommes rendu compte qu'en raison du manque de profondeur des options call de maturité d'une semaine, notre modèle avait tendance à surestimer la volatilité implicite à certains moments. La conséquence directe était une surestimation du prix des options call à ces instants.

Remarque 2.2 L'effet visuel de « doublement » observé sur certaines courbes de la figure 2.3 provient d'un manque de granularité dans les données sous-jacentes. En effet, les options utilisées pour estimer la surface de volatilité présentent une faible profondeur en termes de strikes et de maturités, ce qui induit une interpolation moins précise lors de la génération des courbes simulées.

Dans les zones de discontinuité de marché (maturités courtes ou strikes extrêmes), plusieurs valeurs interpolées peuvent converger vers des niveaux très proches, ce qui se traduit visuellement par des courbes quasi superposées ou semblant se « dédoubler ». Ce phénomène n'est pas une erreur de calcul mais une limite liée à la structure des données de marché disponibles pour cette étude.

Dans le cas où plusieurs valeurs étaient possibles pour un strike, une moyenne des volatilités, pondérées par les volumes de transaction des options est utilisée pour déterminer la volatilité cor-

respondante.

Une solution envisagée pour des travaux futurs consisterait à enrichir la base de données d'options ou à lisser les courbes via des techniques plus avancées de calibration (ex. spline cubique régularisée, projection sur une base de fonctions orthogonales).

Nous avons donc choisi de définir une fonction de volatilité unique, qui sera une moyenne des deux volatilités, pondérées par les volumes de transaction des options. La volatilité obtenue sera utilisée pour le pricing des options à chaque instant t .

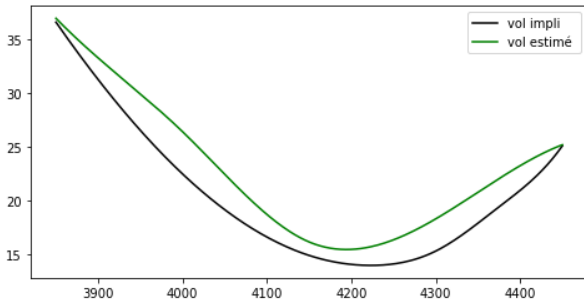
La formule est la suivante :

$$\sigma(S_t, K) = \frac{V^{call}(K) \times \sigma(S_t, K, T^{call}) + V^{put}(K) \times \sigma(S_t, K, T^{put})}{V^{call}(K) + V^{put}(K)}, \quad (2.16)$$

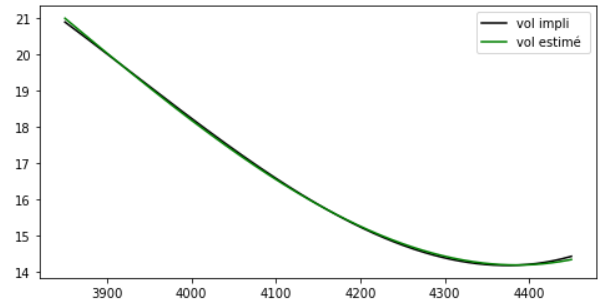
avec :

- $V^{call}(K)$, volume d'options call de maturité K échangées sur les marchés financiers ;
- $V^{put}(K)$, volume d'options put de maturité K échangées sur les marchés financiers ;
- T^{call} et T^{put} , respectivement 1 semaine et 1 mois.

Ensuite, nous avons comparé la courbe obtenue à celle observée sur les marchés financiers, représentée sur le graphique 2.4 :



(a) Smile de volatilité pour le call



(b) Smile de volatilité pour le put

FIGURE 2.4 : Evolution du smile de volatilité avec la nouvelle formule

Comme on peut le constater sur ces deux graphiques, dans les deux cas, l'approximation du smile de volatilité est plutôt bonne. Cependant, dans le cas des options d'achat, en raison du manque de profondeur des données sur le marché pour ce type de maturité, l'estimation n'est pas très précise mais reste dans une marge acceptable.

Détermination du prix d'un call

Dans cette section, nous avons retenu une approche combinant le modèle SABR et la formule fermée de Black-Scholes afin de valoriser les options utilisées dans la mise en place de la stratégie de collar dynamique. Plus précisément, la volatilité implicite utilisée dans la formule de Black-Scholes est déterminée à partir du modèle SABR à l'aide de la formule fermée issue du modèle SABR. Ainsi, bien que la volatilité soit stochastique dans sa dynamique (modélisée par le processus SABR), elle est traitée ici comme une surface implicite déterministe au moment du pricing, permettant l'utilisation d'une formule analytique. Ce choix se justifie par des considérations de stabilité numérique, de rapidité de calcul et de compatibilité avec le cadre ALM utilisé.

Par ailleurs, le taux d'intérêt est supposé constant et fixé à un niveau représentatif du taux sans risque observé sur le marché, correspondant à la maturité des options considérées (courtes : une semaine pour les calls et un mois pour les puts). Cette hypothèse, bien qu'elle simplifie la modélisation, reste raisonnable compte tenu de l'horizon très court des instruments dérivés utilisés dans la stratégie. Le recours à la formule fermée de Black-Scholes permet ainsi d'évaluer efficacement les prix des options tout en tenant compte de la complexité du comportement de la volatilité à travers la calibration SABR.

Enfin, dans le cadre de cette étude, la corrélation entre les taux d'intérêt et les actions a été supposée nulle. Cette hypothèse a été retenue dans un souci de simplification, notamment dans la mesure où la stratégie de couverture s'applique exclusivement à la composante actions du portefeuille et que les maturités des options sont courtes. Il est néanmoins reconnu que cette corrélation pourrait être prise en compte dans des développements futurs, notamment via l'utilisation d'un modèle joint de type Heston-Hull-White, afin de capturer plus finement les effets d'interdépendance entre les marchés de taux et d'actions.

Présentation du modèle

Comme présenté plus haut, le modèle de Black-Scholes a pour dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

avec :

- μ représentant la tendance du sous-jacent ;
- σ représentant la volatilité ;
- W étant un mouvement brownien.

Utiliser le modèle de Black-Scholes revient à admettre que le rendement du sous-jacent suit une loi log-normale.

Passage dans l'univers risque neutre

Initialement, nous avons :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t,$$

Posons :

$$\lambda_t = \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)},$$

où $r(t)$ est le taux sans risque.

Ainsi, on peut définir :

$$dW = dW^* + \lambda_t dt,$$

Avec ce changement de variable, nous obtenons la nouvelle dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t) dt + \sigma(t) dW_t^*, \quad (2.17)$$

Il ne reste plus qu'à trouver la probabilité risque neutre sous laquelle W_t^* est un mouvement brownien.

En utilisant le théorème de Girsanov, la probabilité risque neutre adaptée est $Q = L_t \mathbb{P}$ définie de la manière suivante :

$$\left. \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^T \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} \right)^2 dt \right), \quad (2.18)$$

$$\text{avec } L_t = \exp \left(\int_0^T \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} \right)^2 dt \right).$$

Sous cette nouvelle probabilité, $S_t^* = e^{-\int_0^t r(u) du} S_t$ est une martingale et W_t^* est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre Q .

Évaluation du call

Sous notre probabilité risque neutre et en utilisant le théorème de Feynman-Kac, la formule suivante est utilisée pour le prix d'un call à un instant t (en supposant que le taux sans risque est constant) :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[(S_T - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

avec :

- T la maturité du call ;
- r le taux sans risque ;
- K le strike.

À l'instant initial, la formule est la suivante :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(S_T - K)_+]$$

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(S_T - K) \cdot 1_{S_T > K}]$$

$$C_0 = e^{-rT} (\mathbb{E}^Q [S_T \cdot 1_{S_T > K}] - K \cdot \mathbb{E}^Q [1_{S_T > K}])$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (2.19)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

En utilisant la parité call-put, nous obtenons l'expression du prix d'un put à l'instant initial :

$$P_0 = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1), \quad (2.20)$$

Expressions utilisées pour le calcul des prix d'options dans notre modèle

Comme mentionné plus haut, l'un des inconvénients du modèle de Black-Scholes est que la volatilité est supposée constante. Il est donc difficile de répliquer le smile de volatilité avec ce modèle. Pour pallier cela, nous avons décidé de combiner le modèle de Black-Scholes, qui fournit des formules simples pour le pricing, avec le modèle SABR. L'intérêt du modèle SABR est qu'il offre une formule fermée pour la volatilité implicite, que nous pouvons utiliser pour déterminer la volatilité à chaque instant.

Ainsi, nous obtenons les formules suivantes :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma(S_T, K, T)/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma(S_T, K, T)/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

avec :

$$\sigma(S_T, K) = \frac{V^{call}(K) \times \sigma(S_T, K, T^{call}) + V^{put}(K) \times \sigma(S_T, K, T^{put})}{V^{call}(K) + V^{put}(K)},$$

Ensuite, nous réutilisons les formules pour le call et le put précédemment établies pour déterminer les prix.

Ainsi, dans notre modèle, à chaque instant où l'on souhaite calculer le prix d'un call ou d'un put, il est nécessaire de d'abord déterminer la volatilité implicite. Ensuite, nous pouvons procéder au pricing de l'option.

Dans le cadre de ce mémoire, les maturités des calls et des puts étant différentes, deux processus de calibration ont dû être effectués pour déterminer les paramètres du modèle SABR dans chaque cas. Comme mentionné précédemment, lorsque la maturité change pour un même sous-jacent, les paramètres permettant de reproduire le smile de volatilité ne sont plus les mêmes.

Simplifications et approximations utilisées pour relier la volatilité du modèle SABR à celle du modèle de Black-Scholes

Dans le cadre de cette étude, la volatilité implicite extraite du modèle SABR a été utilisée comme entrée directe dans la formule fermée de Black-Scholes. Cette approche repose sur une approximation bien connue : la formule de Hagan (2.13) permet, pour un couple (strike, maturité), de dériver une volatilité équivalente à insérer dans la formule de Black-Scholes afin de répliquer le prix d'une option sous-jacente au modèle SABR.

Cette méthode, largement utilisée en pratique (cf [Hagan et al., 2002] et [Gatheral, 2006]), suppose que la volatilité extraite capture localement l'effet des dynamiques stochastiques du modèle SABR et peut être interprétée comme une volatilité implicite locale. Le recours à Black-Scholes avec cette volatilité équivalente constitue donc une approximation semi-analytique, qui permet :

- d'éviter le recours à une simulation Monte Carlo du modèle complet,
- de conserver une rapidité d'exécution compatible avec les contraintes d'un moteur ALM.

Toutefois, cette méthode implique une perte d'information sur la dynamique temporelle de la volatilité et suppose que le marché reste proche de l'équilibre à chaque instant de recalibration. Elle est donc davantage adaptée à une évaluation ponctuelle des prix (par exemple hebdomadaire ou mensuelle), et non à la projection de scénarios de PnL sous une dynamique stochastique complète.

Remarque 2.3 *L'association du modèle SABR avec le modèle de Black-Scholes a été envisagée afin de tirer parti des avantages respectifs de chaque modèle. La logique derrière cette approche réside dans la volonté de capturer la précision des mouvements de la volatilité implicite fournie par le modèle SABR, tout en conservant la simplicité et la facilité de calibrage du modèle de Black-Scholes.*

Le modèle SABR excelle dans la modélisation de la volatilité, offrant une meilleure représentation des smiles et des skews de volatilité observés sur le marché. En l'incorporant dans le cadre du modèle Black-Scholes, il est possible de bénéficier de cette précision accrue pour les instruments financiers complexes, tout en maintenant la simplicité et la transparence du modèle Black-Scholes pour les instruments standards, comme le montre le graphique 2.5, qui compare le prix obtenu grâce à notre modèle pour un put à celui observé sur le marché.

Cependant, il est important de reconnaître que cette approche n'est pas sans défis ni limitations. L'hybridation de deux modèles introduit une complexité supplémentaire dans le processus d'évaluation et de calibration. En particulier, on n'obtient plus une formule fermée en l'incorporant dans le modèle de Black-Scholes. Malgré cela, dans le cadre de notre étude, nous avons fait l'hypothèse que les formules de Black-Scholes restaient valables dans ce contexte. Une comparaison avec les résultats observés sur les marchés financiers nous a permis de continuer à travailler sous cette hypothèse.

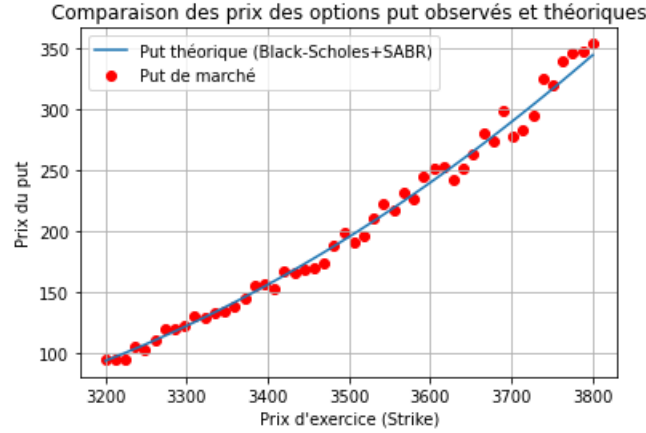


FIGURE 2.5 : Prix théorique obtenu vs prix de marché observé

Comparaison de notre modèle avec un B&S à recalibration journalière

Afin d'évaluer la pertinence de l'approche hybride adoptée dans cette étude, consistant à utiliser les volatilités implicites issues du modèle SABR injectées dans la formule de Black-Scholes, une comparaison a été menée avec un modèle de type Black-Scholes pur, recalibré quotidiennement à la surface de volatilité implicite observée sur le marché.

Dans le modèle Black-Scholes recalibré, la volatilité est estimée chaque jour en fonction du niveau de moneyness et de la maturité de l'option, sans modélisation explicite de sa dynamique dans le temps. Cette approche permet d'obtenir des prix cohérents avec les conditions de marché à un instant donné, mais n'intègre pas de structure stochastique sous-jacente. À l'inverse, l'utilisation du modèle SABR, même dans sa forme réduite via la formule fermée de Hagan, permet de capter de manière plus cohérente les déformations de la surface de volatilité en fonction des paramètres du marché (taux, skew, niveau de vol), ce qui confère une meilleure stabilité inter-temporelle aux volatilités générées.

Les résultats de cette comparaison ont mis en évidence que :

- Le modèle SABR/B&S permet une meilleure cohérence temporelle des prix, en particulier sur les strikes éloignés de l'at-the-money (effet de skew).

La Table 2.2 présente, pour chaque catégorie de moneyness, la *variation absolue moyenne quotidienne* des prix des options entre deux jours consécutifs sur la période d'étude (100 jours de bourse). Autrement dit, pour chaque option de strike K et maturité fixés, nous avons calculé

$$\Delta P_t = |P_t - P_{t-1}|$$

à la fois pour le modèle SABR/B&S et pour le modèle B&S recalibré, puis moyenné sur $t = 1, \dots, 100$. Les colonnes « proche ATM » correspondent aux strikes $K/S \in [0,95, 1,05]$, tandis que « éloigné » regroupe les moneyness extrêmes ($K/S < 0,95$ ou $K/S > 1,05$), c'est-à-dire les options profondes ITM ou OTM.

Modèle	Moneyness proche ATM	Moneyness éloigné
SABR / Black-Scholes	0.55 %	0.95 %
Black-Scholes recalibré J+1	1.40 %	2.70 %

TABLE 2.2 : Variation absolue moyenne entre deux jours de marché consécutifs (volatilité des prix)

Ainsi, le modèle SABR induit une meilleure régularité inter-temporelle, ce qui est critique pour une stratégie dynamique.

- Les écarts de prix entre les deux modèles restent généralement contenus dans une bande de $\pm 2\%$ pour des options de maturité inférieure à un mois,

Moneyness (K/S)	Maturité 1 semaine	Maturité 2 semaines	Maturité 1 mois
0.90 (deep ITM put)	+1.95 %	+1.62 %	+1.34 %
0.95	+1.25 %	+1.08 %	+0.95 %
1.00 (ATM)	+0.75 %	+0.60 %	+0.45 %
1.05	-0.80 %	-1.00 %	-1.15 %
1.10 (deep ITM call)	-1.90 %	-2.20 %	-2.50 %

TABLE 2.3 : Écart relatif moyen des prix (en %) entre SABR/B&S et B&S recalibré quotidiennement, selon le moneyness

Ainsi, les écarts restent généralement dans une bande $\pm 2\%$, mais SABR capture mieux l'asymétrie de la surface (skew), surtout loin de l'ATM.

- le modèle SABR/B&S, en fournissant une volatilité implicite plus stable, permet une couverture plus efficace avec un ajustement de delta moins erratique, ce qui diminue les coûts de gestion dynamique.

Modèle	Erreur de couverture moyenne (PnL)	Variation moyenne du delta (en pts)
SABR / Black-Scholes	0.45 %	3.2
Black-Scholes recalibré J+1	0.85 %	6.5

TABLE 2.4 : Erreur de couverture moyenne et variation moyenne du delta selon le modèle utilisé

L'erreur de couverture est définie comme la différence entre le gain théorique du portefeuille d'options et le PnL observé en backtest.

La variation du delta mesure la sensibilité du portefeuille à l'évolution du sous-jacent et traduit les coûts de rééquilibrage dynamique.

En conclusion, l'approche combinant SABR et Black-Scholes, tout en restant relativement simple à implémenter, offre un compromis pertinent entre réalisme de la dynamique de marché et robustesse numérique, ce qui en fait une méthode adaptée au cadre opérationnel d'un assureur souhaitant mettre en œuvre une stratégie dynamique de couverture avec options vanilles.

Chapitre 3

Le Collar comme stratégie de couverture

Après avoir présenté les différents outils que nous utiliserons pour mettre en place notre stratégie de couverture et mesurer son impact, nous allons dans cette partie présenter de manière plus détaillée la stratégie choisie pour couvrir le portefeuille d’actions de l’assureur, ainsi que la manière dont les différents paramètres de notre stratégie ont été déterminés.

Les éléments présentés ci-dessous sont extraits des notes du groupe d’étude ALM de Sia Partners [et al., 2022].

Pour une meilleure compréhension de cette partie, nous avons ajouté en annexe C.1 un chapitre rappelant les notions de finance de marché utilisées dans cette partie.

3.1 Pourquoi utiliser un collar ?

Lorsqu’on décide d’investir sur les marchés financiers, en particulier dans les actions, on est confronté au risque que nos actions perdent de la valeur du jour au lendemain. En effet, lorsqu’un investisseur choisit d’investir dans une action, c’est souvent pour profiter des dividendes et de la plus-value éventuelle de cette action à la revente.

Certains investisseurs, averse au risque, sont parfois prêts à payer un certain montant pour se protéger contre la perte de valeur de leurs actions.

C’est dans ce contexte que plusieurs banques d’investissement ont développé des produits financiers destinés à fournir une telle protection aux investisseurs. Les produits les plus connus sont le Call (option d’achat) et le Put (option de vente). Nous nous intéresserons, dans le cadre de ce mémoire, au Call et au Put européens.

Un Call Européen

C’est un contrat établi entre un investisseur et une banque. Ce contrat donne le droit, et non l’obligation, à l’investisseur d’acheter un produit à un prix donné et à une date précise, en contrepartie d’une prime qu’il paiera à la banque au début du contrat. L’intérêt de ce type de contrat est de permettre à un investisseur qui pense que, dans le futur, la valeur d’un produit financier va fortement augmenter, de se garantir d’acheter ce produit à un prix fixé aujourd’hui. Le payoff (c’est un graphique montrant à partir de quel moment

l'investisseur est "dans la monnaie", c'est-à-dire que la stratégie est gagnante et qu'il a tout intérêt à exercer son option) d'un tel contrat est représenté sur le graphique 3.1.

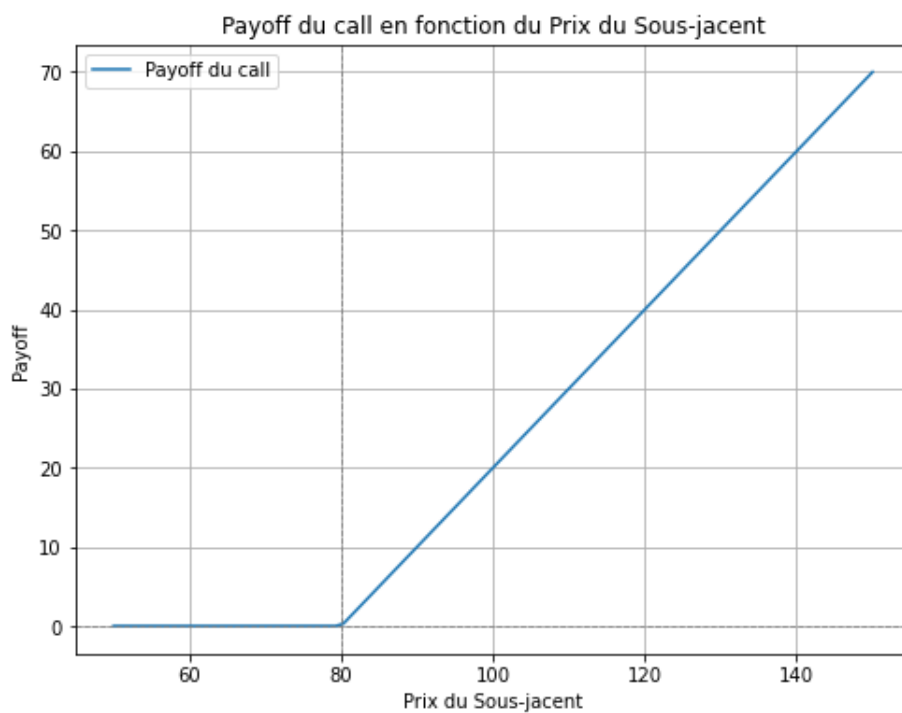


FIGURE 3.1 : Payoff d'un Call de strike 80

Un Put Européen

C'est également un contrat établi entre un investisseur et une banque. Toutefois, à la différence du Call, il donne le droit, mais pas l'obligation, à un investisseur de vendre un produit à un prix donné et à une date déterminée, en échange d'une prime payée à la banque. L'intérêt de ce type de produit est de permettre à un investisseur, qui anticipe une baisse importante du prix de ses actions, de se protéger contre cette baisse en ayant la possibilité de vendre ses actions à un prix fixé à l'avance.

Le payoff d'une telle stratégie est représenté sur le graphique 3.2.

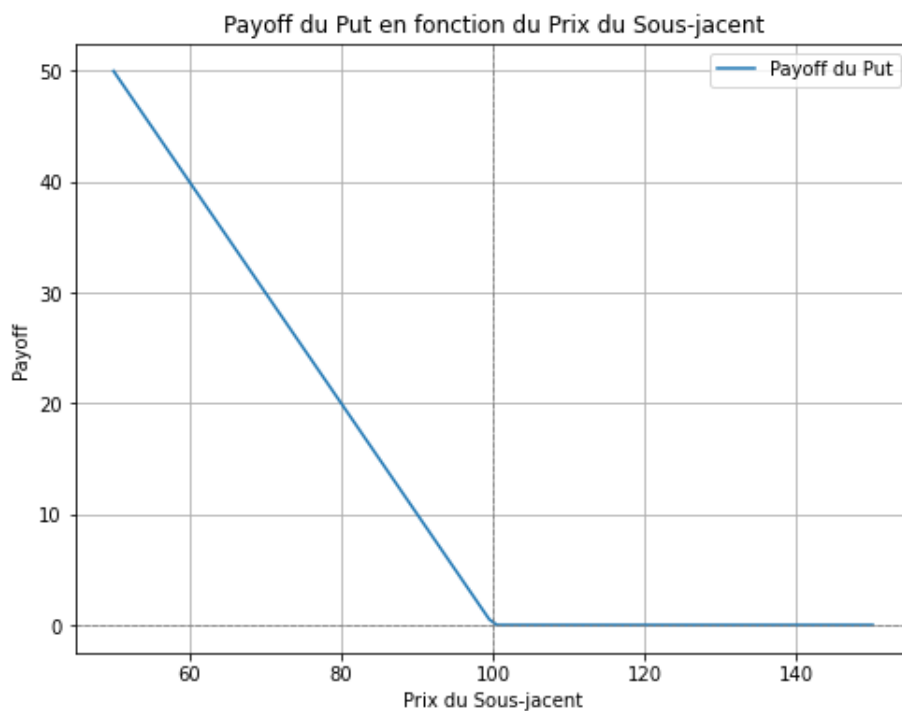


FIGURE 3.2 : Payoff d'un Put de strike 100

Comme on peut le voir ci-dessus, posséder un Put européen dans son portefeuille est un bon moyen de se protéger contre la baisse de la valeur de ses actions. Cependant, il y a une prime à payer, et plus le montant que l'on souhaite couvrir est élevé, plus la prime sera importante. Dans ce contexte, des banques d'investissement ont développé un nouveau produit permettant à l'investisseur de financer une partie de sa protection ; ce type de contrat est appelé **collar**.

Le Collar est donc une stratégie financière permettant de limiter les risques de perte sur une action grâce à l'achat d'une option de vente (option Put) et à la vente d'un Call pour financer la prime du Put. Il est important de noter que la stratégie peut être effectuée dans le sens inverse, selon l'objectif de l'investisseur. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous concentrerons sur la première stratégie, qui consiste à acheter un Put et vendre un Call.

Le payoff de la stratégie est représenté sur la figure 3.3.

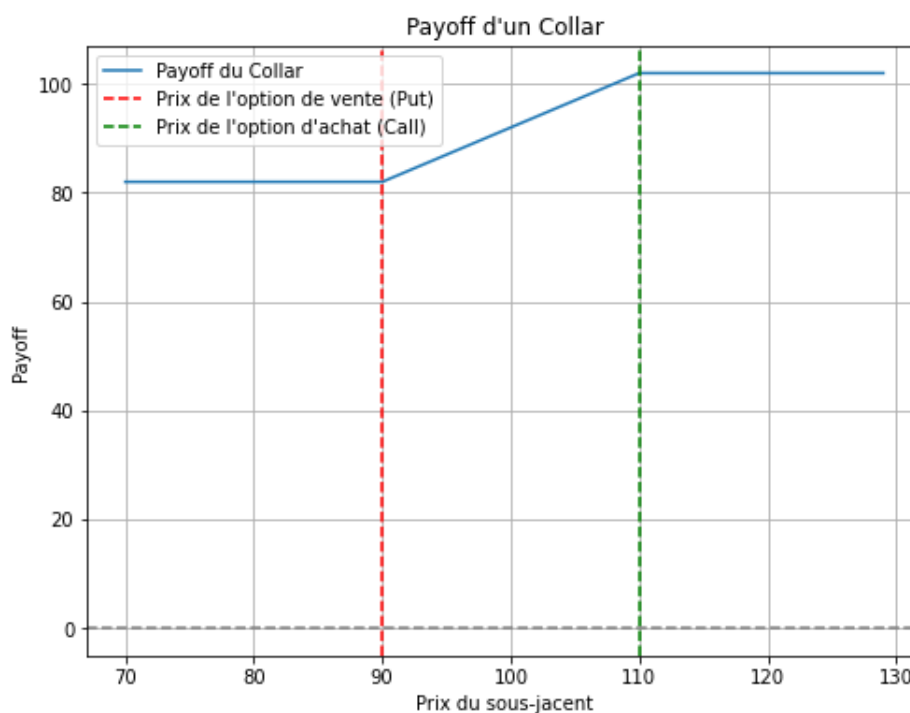


FIGURE 3.3 : Payoff d'un Collar (Strike Put 90 et Strike Call 110)

Comme on peut le voir sur ce graphique, l'investisseur est bien protégé contre la baisse de la valeur de ses actions. Cependant, contrairement à une protection uniquement avec un Put, son gain est limité en cas de forte hausse de la valeur de ses actions. En effet, en vendant un Call sur les marchés financiers, lorsque le marché est haussier, le détenteur du Call exerce son option, et, selon le prix d'exercice fixé initialement, l'investisseur devra partager une partie de ses gains.

On constate ainsi l'importance du choix du strike pour l'investisseur (prix d'exercice du contrat), tant pour les options d'achat (Call) que pour les options de vente (Put).

Voici une présentation de l'utilisation d'une stratégie Collar par rapport à un simple Put :

Exemple

Nous considérons le cas d'un assureur qui achète 100 actions Unilever à 39,26€ chacune et achète également un Put avec un strike de 36, échéance 16 décembre 2023, à 0,44€ pour protéger sa position.

Quelle que soit la valeur du cours d'Unilever à l'expiration des options (16 décembre), la perte maximale pour l'assureur ne pourra pas dépasser 370€. En effet, il est protégé à partir de 36€ et cette protection lui a coûté 44€.

La perte maximale pour une action est donc : prix d'achat - protection + coût de l'assurance = $39,26 - 36 + 0,44 = 3,70$ €.

Si l'assureur décide de financer une partie de cette protection en vendant un Call avec un strike de 41 à 0,42€, il est maintenant protégé à la baisse mais « bloqué » à la hausse. Même si le cours d'Unilever monte au-delà de 41€, il ne pourra pas bénéficier de gains supplémentaires. En revanche, il a financé en grande partie l'achat de son Put, puisqu'il a reçu 0,42€ pour la vente du Call, tandis que l'achat du Put lui a coûté 0,44€.

Ainsi, la perte maximale pour une action est : prix d'achat - protection + coût de l'assurance - vente du Call = $39,26 - 36 + 0,44 - 0,42 = 3,28$ €. La position de l'assureur ne pourra pas perdre plus que 328€, mais elle est limitée en cas de forte hausse.

3.2 Principe d'une stratégie de collar dynamique

Comme mentionné dans la section précédente, le Collar est une stratégie efficace permettant de se protéger à moindre coût contre la baisse de la valeur des actions dans un portefeuille. La seule contrepartie est la limitation des gains en période de marché haussier. De plus, la stratégie décrite ci-dessus est mise en place à un moment donné t , ce qui peut s'avérer risqué pour l'investisseur.

En effet, lorsqu'on met en place une stratégie de collar classique, il est crucial de déterminer le bon moment pour la mise en place de la stratégie et de choisir les paramètres optimaux (date d'échéance, strike du put et strike du call). Sinon, en cas de marché haussier, les pertes peuvent être importantes. De plus, si le marché devient haussier, l'investisseur peut vouloir se débarrasser du contrat call qu'il a vendu en le rachetant. Il se trouve alors confronté à un autre risque, celui du **timing**.

Le risque de timing réside dans le fait que la valeur des options diminue avec le temps. Si l'on souhaite vendre une option avant la date d'échéance pour éviter une perte, il est essentiel de bien gérer le timing pour vendre au moment opportun. Le graphique 3.4 illustre le concept de décote temporelle d'une option.

L'un des objectifs de la mise en place d'un Collar dynamique est de se protéger contre ce risque en ajustant la stratégie de manière quotidienne ou hebdomadaire en fonction des informations

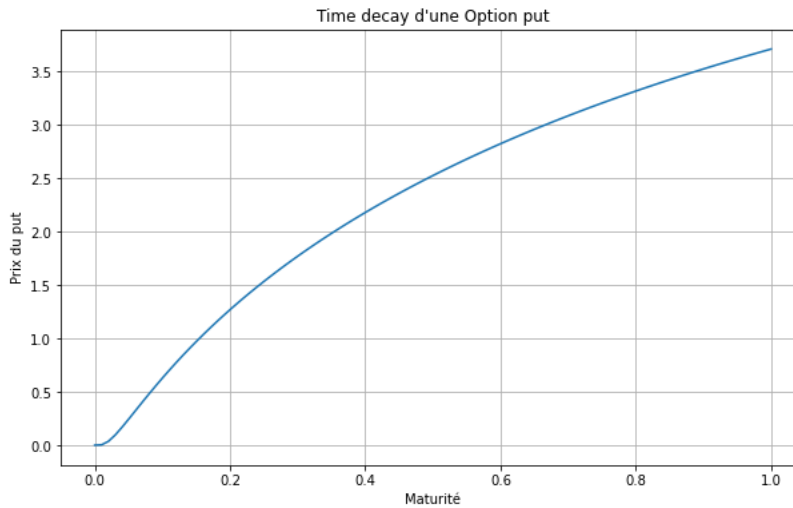


FIGURE 3.4 : Représentation du Time decay d'une option put

du marché. Ainsi, au lieu de suivre une stratégie aux paramètres fixes, on adopte une stratégie qui se renouvelle chaque jour avec des paramètres ajustables à tout moment.

Ce type de stratégie, bien qu'efficace et protecteur, nécessite une gestion du Roll (c'est-à-dire déterminer la stratégie à mettre en place lors du renouvellement des options) et du Timing (c'est-à-dire décider s'il faut vendre une option ou non). Cependant, pour certains assureurs, gérer ce type de stratégie peut représenter un risque trop élevé en termes de market timing et de gestion opérationnelle. Ils pourraient alors se tourner vers des banques d'investissement, comme JP Morgan, pour mettre en place ce type de stratégie de couverture.

3.3 Présentation d'une stratégie proposée par une banque d'investissement comme JP Morgan

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre Sia Partners et JP Morgan. Dans ce contexte, la stratégie présentée ci-dessous découle de cette collaboration, et le nom de JP Morgan sera parfois mentionné au cours de cette section.

3.3.1 Objectif de la stratégie

Comme mentionné précédemment, l'objectif de la banque d'investissement, en l'occurrence JP Morgan dans notre cas, sera de gérer le risque de timing et le roll de la stratégie de collar dynamique pour les assureurs. Pour ce faire, la banque d'investissement mettra en place la stratégie sur les bases suivantes :

- La stratégie est implémentée de façon quotidienne ou hebdomadaire avec l'achat d'un Put ou d'un Put Spread (un produit financier composé d'un put acheté et d'un put vendu) de maturité comprise entre 1 ou 2 ans, et la vente de calls de maturité comprise entre 1 semaine et 1 mois.

- Les options d’achat (calls) sont achetées pour lisser l’achat de la protection quotidienne, et le notionnel utilisé est une petite partie du notionnel couvert par la stratégie.
- Les options de vente achetées sont des options à long terme, ce qui réduit la nécessité de nombreux rollings. Avec la vente quotidienne de calls, on maximise les primes qui permettent de financer l’achat des puts.

Ainsi, en fonction du notionnel que l’assureur souhaite protéger, la banque d’investissement mettra en place la stratégie en utilisant des options listées avec des prix observables sur le marché, comme l’EuroStoxx 50. Ceci vise à garantir la transparence et à rester sur un marché très liquide.

L’assureur, en fonction de son intérêt et du type de risque contre lequel il souhaite se protéger, pourra choisir parmi différentes stratégies. Les sections suivantes présenteront ces différentes options.

3.3.2 Les différentes stratégies sur le Put

Comme mentionné précédemment, la maturité des puts est généralement de 1 à 2 ans, et le notionnel choisi correspond généralement à 100% de la valeur du portefeuille d’actions de l’assureur. Cependant, pour le choix du strike, une banque d’investissement pourra proposer diverses stratégies, présentées ci-dessous :

1. Put à strike fixe

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un strike listé proche d’un niveau prédéfini (par exemple, 85%). Ce niveau peut être lié au niveau du sous-jacent ou à son forward.

2. Put-Spread à strikes fixes

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un put-spread dont les strikes correspondent à des options listées proches de niveaux prédéfinis (par exemple, 90% / 70%). Ces niveaux peuvent être liés au niveau du sous-jacent ou à son forward.

3. Put à prime fixe

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un strike listé dont le niveau de prime est le plus proche d’un budget prédéfini (par exemple, 4

4. Put à delta fixe

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un strike listé dont le delta est le plus proche d’un niveau prédéfini (par exemple, -20%). Le delta d’une option mesure la sensibilité de l’option ou d’un portefeuille d’options au mouvement du prix de l’actif sous-jacent.

5. Implémentation "Solvabilité Cible"

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un strike listé de manière à ce que cette option, combinée au portefeuille d’options déjà achetées, donne un gain de SCR le plus proche d’une cible donnée.

6. Put-Spread Dynamique

Chaque jour, la stratégie achète synthétiquement un strike listé proche d’un niveau prédéfini (par exemple, 90%). Si la prime de cette option dépasse une limite prédéfinie, la

stratégie vendra une autre option put avec un strike plus bas pour limiter le coût de la protection. Par exemple, si la prime maximale est fixée à 4,5% par an et que le coût de l'option de strike 90% est de 6%, la stratégie achètera un put-spread 90% / XX, où XX sera choisi pour que la prime totale soit la plus proche possible de 1,5%, afin d'atteindre la limite de 4,5%.

Ainsi, pour la mise en place de sa jambe de protection (put), l'assureur aura le choix entre ces différentes stratégies, avec la possibilité de modifier ou d'ajuster la stratégie à tout moment. Cependant, d'après l'expérience, la stratégie recommandée est celle du **Put-Spread Dynamique**. Cette approche présente plusieurs avantages pour l'assureur :

1. Le Put-Spread dynamique permet de contrôler le coût de la protection en se fixant un budget limite.
2. La protection est efficace pour des corrections modérées ou des hausses du marché grâce à un strike pour la partie longue généralement autour de 90
3. La protection offre également un haut niveau de couverture en période de volatilité faible, grâce à la non-activation de la partie short du Put-Spread. Cela permet un gain de SCR élevé lorsque l'ajustement symétrique réduit le choc sur actions de 39% à 40%. La protection est également efficace en début de périodes de stress, car la protection achetée l'année précédente aura été acquise en période de volatilité faible.

3.3.3 Les différentes stratégies sur le Call

Comme pour la partie protection (put), plusieurs stratégies pourront être proposées à l'assureur par JP Morgan pour la partie Jambe de financement (call). La maturité des calls est en général d'1 semaine à 3 mois, et le notionnel est une proportion de la valeur du portefeuille actions de l'assureur au moment de la structuration. Pour le choix du strike, J.P. Morgan pourra proposer différentes stratégies présentées ci-dessous :

1. Call à strike fixe

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un strike listé étant le plus proche d'un niveau prédéfini (par exemple 105%). Ce niveau peut être lié au niveau du sous-jacent ou à son forward.

2. Call Spread à strike fixe

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un call-spread dont les strikes correspondent à des options listées étant les plus proches de niveaux prédéfinis (par exemple 103% /107%). Ces niveaux peuvent être liés au niveau du sous-jacent ou à son forward.

3. Call à prime fixe

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un strike listé dont le niveau de prime est le plus proche d'un budget prédéfini (par exemple 4% par an).

4. Call à delta fixe

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un strike listé dont le niveau de delta est le plus proche d'un niveau prédéfini (par exemple 20%).

5. Implémentation "Zero Cost"

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un strike listé de telle sorte que la prime de cette option compense la prime dépensée sur la jambe de protection (put).

6. Call-Spread Dynamique

Tous les jours, la stratégie va vendre synthétiquement un strike listé étant le plus proche d'un niveau prédéfini (par exemple 105%). Ce niveau peut être lié au niveau du sous-jacent ou à son forward. Si la prime de cette option est plus grande qu'une limite prédéfinie, la stratégie va, pour ce jour, acheter une autre option call avec un strike plus haut pour limiter le risque à la hausse du marché.

Comme dans le cas du put, l'assureur a le droit de choisir n'importe laquelle de ces stratégies pour la structuration de sa couverture pendant toute la vie du produit. Cependant, la stratégie recommandée est celle du **Call à Delta fixe** car elle offre l'avantage d'adapter ses strikes en fonction de la volatilité implicite. Cela offre un niveau de prime minimum en régime de basse volatilité en vendant des calls plus proches de la monnaie et un risque réduit vis-à-vis des scénarios en forme de V (forte baisse suivie d'une forte hausse) grâce à des strikes plus éloignés de la monnaie.

En dehors des recommandations mentionnées plus haut, pour bénéficier d'une stratégie efficace, il est recommandé à l'assureur d'inclure des éléments supplémentaires lors de la structuration de la stratégie sur la jambe de financement (call). Nous avons :

1. **L'inclusion d'une prime minimale** : si la prime de l'option choisie est inférieure à X points de base (bps), on ne vend pas l'option, mais on préfère plutôt collecter une prime très faible pour compenser le risque de hausse du prix.
2. **Un strike minimum** : plutôt que de laisser la stratégie choisir le strike dont le delta est le plus proche de la cible parmi tous les strikes listés disponibles, restreindre cet univers aux strikes plus grands que Y% du spot où Y sera plus grand que 100% (102% par exemple) pour ne pas vendre des options trop proches de la monnaie en régime de volatilité faible.
3. À l'opposé, en régime de volatilité élevée, limiter les strikes à être moins élevés que Z% du spot (110% par exemple) pour pouvoir maximiser la prime reçue tout en ayant un coussin à la hausse suffisant.

Dans le cadre de ce mémoire la stratégie qui a été retenue pour mener notre étude est celle d'un collar avec un Put et call de Strike fixe.

3.3.4 Illustration de la stratégie sur quelques exemples

Dans cette partie, nous montrons l'impact de la protection par un collar sur l'évolution d'un sous-jacent calibré sur l'Eurostoxx50 (SX5E). Nous allons examiner différentes conditions de marché et comparer la performance d'un portefeuille couvert à celle d'un portefeuille sans couverture.

La stratégie de collar choisie est celle d'un call à strike fixe de 105% et d'un put à strike fixe de 95%. Les options d'achat ont une maturité d'une semaine, et les options de put une maturité d'un mois. La stratégie est mise en place de façon hebdomadaire : chaque semaine,

nous achetons un put et vendons un call. Nous recevons alors les gains et pertes liés au payoff des options achetées et vendues la semaine précédente.

Les résultats obtenus sont les suivants : en abscisse, nous avons les semaines, et en ordonnée, les valeurs du sous-jacent pour un notionnel initial de 100 M €.

Cas d'une forte baisse suivie d'une forte hausse

Dans ce cas, la figure 3.5 résume la situation.

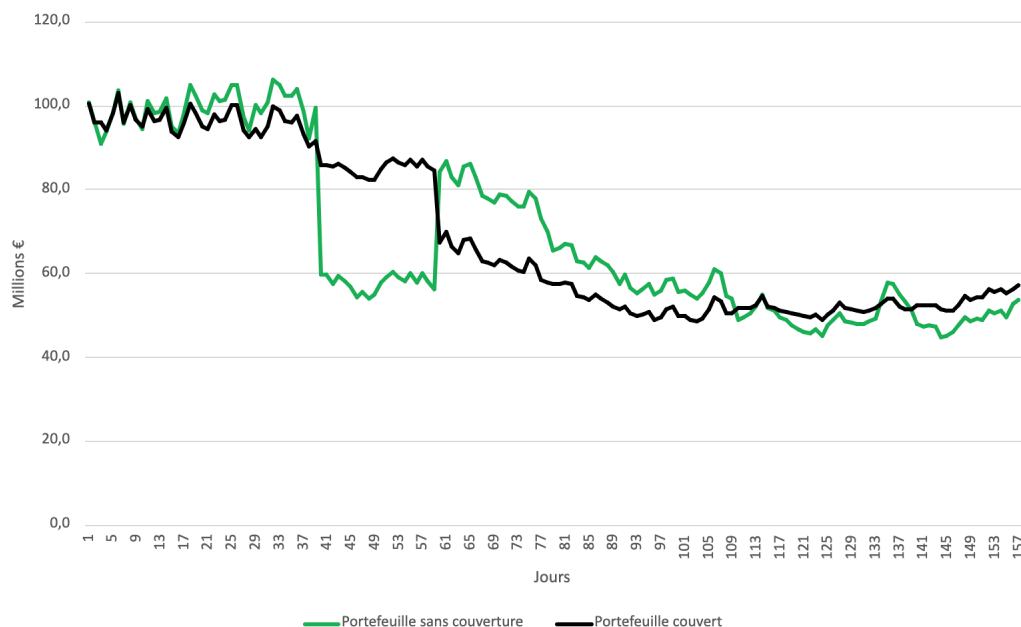


FIGURE 3.5 : Impact de la couverture en cas de forte baisse suivie d'une forte hausse

Sur ce graphique, lors de la semaine 41, la valeur de l'action a subi une baisse de 39%. Le portefeuille couvert est moins affecté par cette baisse. Cependant, lors de la 129e semaine, l'action connaît une hausse de 39%. On constate que le portefeuille couvert ne bénéficie pas totalement de cette hausse, perdant plutôt en valeur en raison du payoff du call vendu. Ainsi, en période de baisse, l'achat du put permet une protection, mais lors d'une forte hausse, les gains sont limités par le call vendu. Le renouvellement hebdomadaire de la couverture permet de bénéficier du gain de la baisse pendant toute la durée de la stratégie, et on observe qu'à la 156e semaine (fin de la projection), le portefeuille couvert a une valorisation supérieure à celui sans couverture.

Cas d'une hausse suivie d'une forte baisse

Dans ce cas, la figure 3.6 résume la situation.

Sur ce graphique, lors de la semaine 41, la valeur de l'action a subi une hausse de 39%. Le portefeuille couvert ne profite pas de cette hausse. Cependant, lors de la 61e semaine, l'action chute de 39%. Le portefeuille couvert est moins impacté par cette chute. Comme dans le

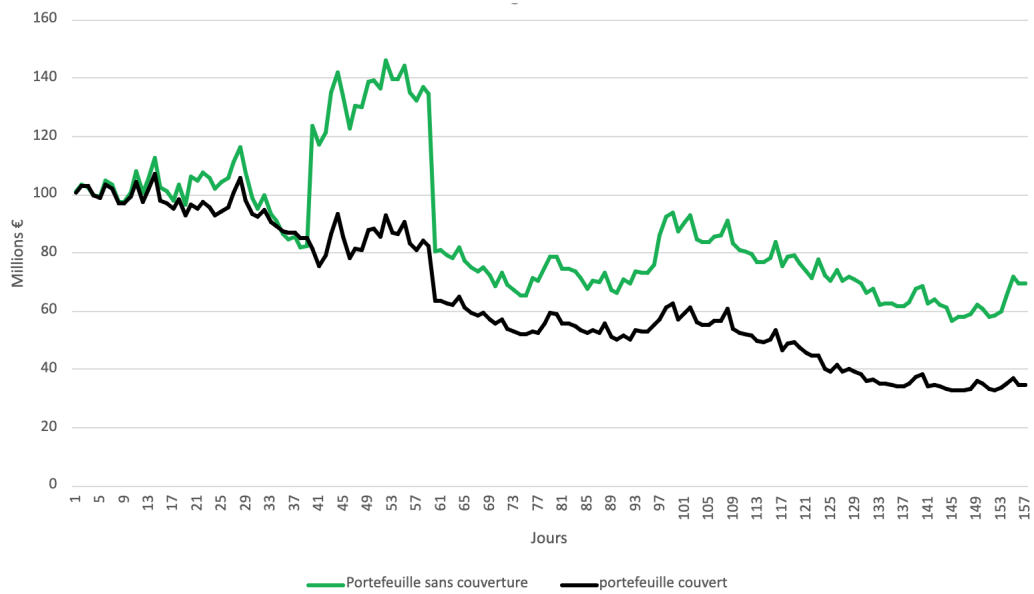


FIGURE 3.6 : Impact de la couverture en cas de hausse suivie d'une forte baisse

cas précédent, en période de baisse, l'achat du put offre une protection, mais lors d'une forte hausse, les gains sont limités par le call vendu. Le renouvellement hebdomadaire de la stratégie subit l'effet de la forte hausse pendant toute la durée de vie de la stratégie, mais cet effet est atténué lorsqu'une forte baisse intervient à la 61e semaine. Globalement, le portefeuille couvert a eu une valorisation inférieure à celui sans couverture.

Cas d'un marché en stagnation

Dans ce cas, la figure 3.7 résume la situation.

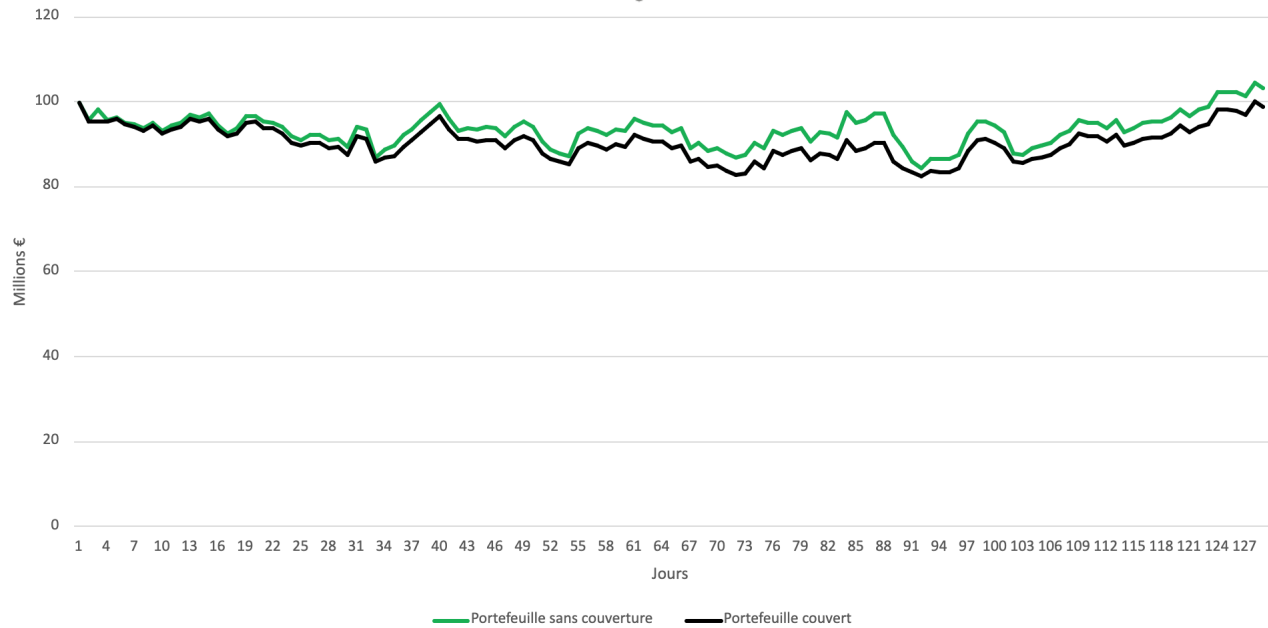


FIGURE 3.7 : Impact de la couverture dans un marché sans tendance particulière

Dans un marché sans tendance particulière, le graphique montre qu'en période de baisse du sous-jacent, le portefeuille couvert est plus performant que celui sans couverture. En période de hausse, il n'y a pas de tendance particulière, mais le portefeuille non couvert est légèrement plus performant.

Cas d'un marché baissier

Dans ce cas, la figure 3.8 résume la situation.



FIGURE 3.8 : Impact de la couverture dans un marché baissier

Dans un marché à tendance baissière, on constate que tout au long des semaines, le portefeuille couvert est plus performant et moins volatil que le portefeuille sans couverture. Ce résultat était attendu, car l'objectif de notre stratégie est d'offrir une protection à la baisse.

Cas d'un marché haussier

Dans ce cas, la figure 3.9 résume la situation.

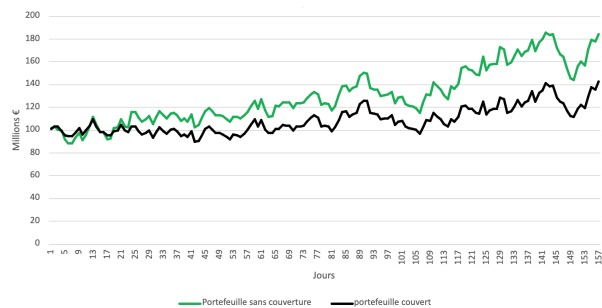


FIGURE 3.9 : Impact de la couverture dans un marché haussier

En général, le portefeuille non couvert est le plus performant dans un marché haussier. La stratégie n'est pas efficace dans ce contexte car l'effet de la vente des calls (c'est-à-dire l'exercice de l'option par le détenteur du contrat) limite les gains. Cependant, comme le montre le graphique, les moments où la valeur diminue permettent à la stratégie de ne pas être trop sous-performante par rapport au portefeuille non couvert.

Synthèse : Comme constaté dans les différents scénarios ci-dessus, en cas de baisse de la valeur de l'action, la stratégie du collar permet de limiter les pertes. Cependant, en cas de hausse, les gains ne sont pas pleinement réalisés. Lorsque le marché est stable (c'est-à-dire lorsque la valeur de l'action ne s'écarte pas trop du sous-jacent au fil du temps), la volatilité du portefeuille couvert est plus faible que celle du portefeuille non couvert.

On observe également que dans les différents scénarios, le portefeuille couvert est plus performant en période de baisse de la valeur du portefeuille. Sinon, c'est le portefeuille sans couverture qui est le plus performant. Cependant, la réduction de la volatilité permet de mieux contrôler les pertes éventuelles, ce qui constitue un autre avantage de la stratégie.

3.4 Impact du choix du strike

3.4.1 Présentation des indicateurs utilisés

Pour cette étude, quatre indicateurs ont été choisis pour pouvoir comparer les différentes stratégies.

Nous avons ainsi :

- **La volatilité**

La volatilité est un indicateur clé utilisé pour évaluer le risque d'une stratégie d'investissement ou de trading. Elle mesure la variation des rendements d'un actif ou d'un portefeuille sur une période donnée. Une volatilité élevée indique que les rendements fluctuent fortement, tandis qu'une volatilité faible suggère des rendements plus stables.

La volatilité peut être exprimée de différentes manières, mais la mesure utilisée pour notre étude est l'écart-type. L'écart-type mesure la dispersion des rendements par rapport à leur moyenne sur une période donnée. Plus l'écart-type est élevé, plus la volatilité est grande.

- **Le ratio de Sharpe**

Le ratio de Sharpe est un indicateur financier largement utilisé pour évaluer le rendement ajusté au risque d'une stratégie d'investissement ou de trading. Il a été développé par William F. Sharpe et est utilisé pour mesurer si le rendement supplémentaire généré par une stratégie est suffisant pour compenser le niveau de risque pris.

Le ratio de Sharpe est calculé en divisant le rendement excédentaire moyen de la stratégie par sa volatilité (mesure du risque). Formellement, le ratio de Sharpe peut être exprimé comme suit :

$$\frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

- * R_p → représente le rendement moyen de la stratégie
- * R_f → représente le taux de rendement sans risque
- * σ_p → représente la volatilité des rendements de la stratégie

Le ratio de Sharpe mesure donc le rendement excédentaire par unité de risque. Plus le ratio de Sharpe est élevé, meilleure est la performance ajustée au risque de la stratégie. Un ratio de Sharpe élevé indique que la stratégie génère des rendements supérieurs à ceux du taux sans risque pour chaque unité de risque prise.

Le ratio de Sharpe est donc particulièrement utile pour comparer différentes stratégies d'investissement ou de trading, car il permet de prendre en compte à la fois le rendement et le risque.

– **Le rendement**

Le rendement total est un indicateur important pour évaluer la performance globale d'une stratégie d'investissement ou de trading sur une période donnée. Contrairement au ratio de Sharpe, qui mesure le rendement ajusté au risque, le rendement total se concentre uniquement sur les gains ou pertes bruts réalisés par la stratégie, sans prendre en compte la volatilité ou le niveau de risque associé.

Le rendement total est simplement la somme de tous les rendements générés par la stratégie sur la période donnée. Il peut être exprimé sous forme de pourcentage ou de valeur monétaire.

Le rendement total peut être utilisé pour évaluer la performance brute de la stratégie, sans tenir compte des fluctuations du marché ou du niveau de risque pris. Il est particulièrement utile pour les investisseurs qui s'intéressent principalement aux gains ou aux pertes réalisés et qui peuvent tolérer une volatilité plus élevée.

– **Le max Drawdown**

Le "max drawdown" (ou "drawdown maximal" en français) est un indicateur couramment utilisé pour évaluer le risque d'une stratégie d'investissement ou de trading. Il mesure la perte maximale subie par un investisseur ou un trader depuis le sommet (pic) jusqu'au creux (creux le plus bas) d'une série de rendements ou de valeur de portefeuille sur une période donnée.

En d'autres termes, le max drawdown représente la baisse maximale en pourcentage entre le plus haut niveau atteint par la stratégie et le point le plus bas qu'elle a atteint avant de se redresser. Il mesure ainsi le risque de perte maximale que l'investisseur aurait pu subir s'il avait investi au sommet et vendu au creux.

Le max drawdown est un indicateur essentiel pour évaluer la résilience d'une stratégie d'investissement. Plus le max drawdown est élevé, plus la stratégie est sujette aux fluctuations du marché et aux pertes potentielles importantes.

3.4.2 Cas du put

Dans cette section, nous allons faire varier le strike de la partie put de la stratégie et mesurer l'impact de cette variation grâce aux indicateurs définis plus haut. Nous avons utilisé l'historique de l'Eurostock50 sur la période 2008-2011 pour effectuer nos différents tests.

– **Cas d'un call 105% et un Put 80%**

Ici, nous avons mis en place une stratégie de collar avec un strike pour le call de 105% et un strike pour le put de 80%. La maturité du call étant d'une semaine et celle du put d'un mois. La stratégie est renouvelée chaque semaine.

Dans ce cas, la figure 3.10 résume la situation (En abscisse, nous sommes en nombre de jours, et en ordonnée, en millions d'euros.)

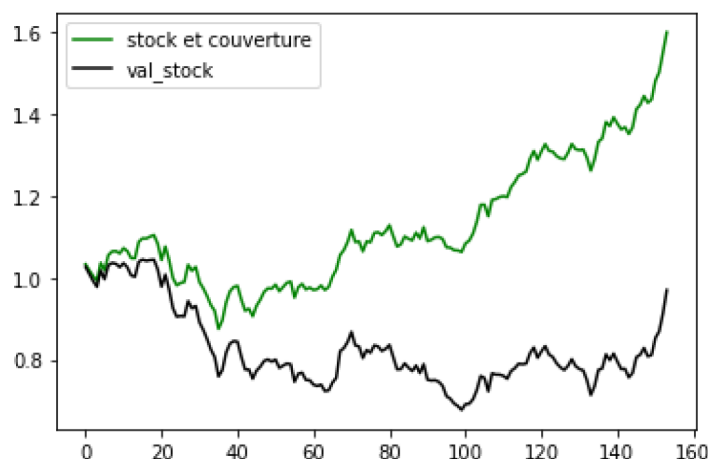


FIGURE 3.10 : Cas d'un call 105% et un Put 80%

Les résultats obtenus avec nos indicateurs sont présentés dans le tableau suivant 3.1

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille avec couverture
Volatilité	18,16%	13,54%
Rendement annuel	-0,1%	17%
Ratio de Sharpe	80,50%	68,21%
Max Drawdown	-35,10%	-20,3%

TABLE 3.1 : Indicateurs pour un call 105% et un Put 80%

Le scénario utilisé ici présente une tendance globalement baissière. On peut observer sur le graphique ci-dessus que le portefeuille avec couverture surperforme. En effet, nous avons un strike assez éloigné de la monnaie, ce qui nous permet d'acheter des puts à moindre coût. Le scénario étant baissier, les calls vendus avec un strike de 105% ne sont quasiment jamais exercés. Cependant, lorsqu'ils le sont, ils limitent notre gain en raison de l'exercice de l'option par son détenteur. Ainsi, avec cette configuration de nos strikes et dans un tel scénario, notre rentabilité est améliorée et cela à moindre coût. Cette conclusion peut également être déduite en examinant les indicateurs du tableau 3.1. On observe une réduction de la volatilité et un rendement annuel exceptionnel pour le portefeuille couvert, ce qui n'est pas le cas pour le portefeuille sans couverture qui affiche une moins-value.

– Cas d'un call 105% et un Put 90%

Nous avons mis en place une stratégie de collar avec un strike pour le call de 105% et un strike pour le put de 90%. La maturité du call étant d'une semaine et celle du put d'un mois. La stratégie est renouvelée chaque semaine. La figure 3.11 représente les résultats obtenus (En abscisse, nous sommes en nombre de jours, et en ordonnée, en millions d'euros).

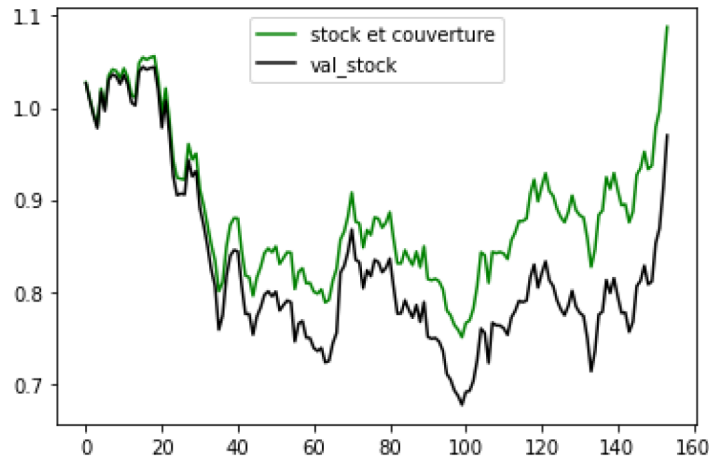


FIGURE 3.11 : Cas d'un call 105% et un Put 90%

Les résultats obtenus avec nos indicateurs sont présentés dans le tableau 3.2

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille avec couverture
Volatilité	18,16%	13,90%
Rendement annuel	-0,1%	3%
Ratio de Sharpe	80,50%	72%
Max Drawdown	-35,10%	-28,9%

TABLE 3.2 : Indicateurs pour un call 105% et un Put 90%

Nous avons conservé le même scénario et nous avons légèrement augmenté la valeur du strike de la jambe de protection (put). Étant plus proche de la monnaie, les puts que nous achetons coûtent plus cher que précédemment, et les gains réalisés grâce à leur exercice ne viennent pas compenser cette hausse du prix des options que nous achetons. Le strike de la jambe de financement n'ayant pas été modifié, on peut observer sur notre graphique que la performance de notre stratégie a diminué. En regardant les indicateurs du tableau 3.2 et en les comparant aux indicateurs précédents, on constate qu'en général, les indicateurs se sont dégradés, et le plus flagrant est le rendement annuel, qui a été réduit de plus de 90%.

Ainsi, en modifiant le strike de la jambe de protection en le rapprochant de la monnaie, tout en gardant le strike de la jambe de financement fixe, on réduit notre protection car elle nous coûte plus cher à mettre en place. Il est important de préciser que cette conclusion a été établie sur un scénario baissier particulier et que, selon le scénario, la conclusion peut varier. Dans la partie qui suit, nous allons définir un autre scénario pour observer comment notre stratégie de couverture se comporte.

3.4.3 Cas du call

Dans cette section, nous allons faire varier le strike de la partie call de la stratégie et mesurer l'impact de cette variation grâce aux indicateurs définis plus haut. Nous avons utilisé

l'historique de l'Eurostock50 sur la période 2008-2011 pour effectuer nos différents tests.

– Cas d'un call 110% et d'un put 95%

Nous avons mis en place une stratégie de collar avec un strike pour le call de 110% et un strike pour le put de 95%. La maturité du call étant d'une semaine et celle du put d'un mois. La stratégie est renouvelée chaque semaine. La figure 3.12 représente les résultats obtenus (en abscisse, nous sommes en nombre de jours, et en ordonnée, en millions d'euros).

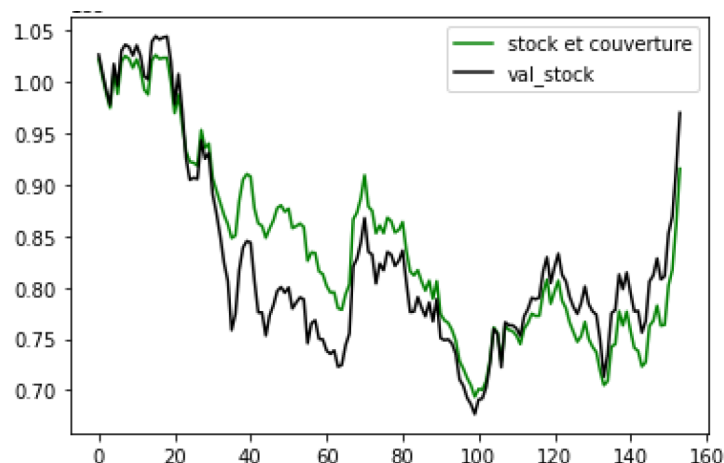


FIGURE 3.12 : Cas d'un call 110% et d'un put 95%

Les résultats obtenus avec nos indicateurs sont présentés dans le tableau 3.3.

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille avec couverture
Volatilité	18,16%	15,3%
Rendement annuel	-0,1%	-0,2%
Ratio de Sharpe	80,50%	67%
Max Drawdown	-35,10%	-32,41%

TABLE 3.3 : Indicateurs pour un call 110% et un put 95%

– Cas d'un call 105% et d'un put 95%

Nous avons mis en place une stratégie de collar avec un strike pour le call de 105% et un strike pour le put de 95%. La maturité du call étant d'une semaine et celle du put d'un mois. La stratégie est renouvelée chaque semaine. La figure 3.13 représente les résultats obtenus (en abscisse, nous sommes en nombre de jours, et en ordonnée, en millions d'euros).

Les résultats obtenus avec nos indicateurs sont présentés dans le tableau 3.4.

Nous avons conservé le même scénario mais modifié le strike de notre stratégie, passant de 110% à 105% pour la jambe de financement, tandis que la jambe de protection reste inchangée.

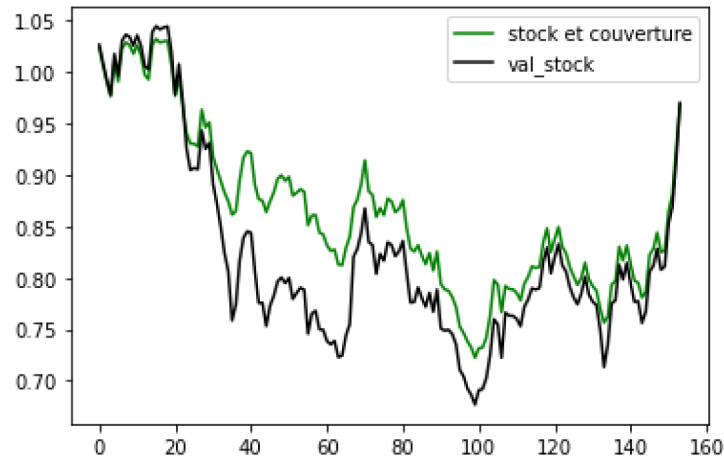


FIGURE 3.13 : Cas d'un call 105% et d'un put 95%

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille avec couverture
Volatilité	18,16%	14,1%
Rendement annuel	-0,1%	0,1%
Ratio de Sharpe	80,50%	75%
Max Drawdown	-35,10%	-29%

TABLE 3.4 : Indicateurs pour un call 105% et un put 95%

L'une des conséquences de la diminution du strike de la jambe de financement est la baisse du prix des calls que nous vendons. Cette réduction du prix des calls se traduit par une couverture moins efficace en période baissière, comme le montrent les indicateurs du tableau 3.4 qui se sont dégradés par rapport à la situation précédente.

3.4.4 Présentation des encours couverts et du coût monétaire de la stratégie

Dans cette section, nous analysons le coût associé à la mise en place d'une stratégie de *collar dynamique* sur un portefeuille actions d'un encours initial de **100 millions d'euros**. Cette stratégie repose sur l'achat mensuel d'options de vente (puts) et la vente hebdomadaire d'options d'achat (calls). L'objectif est de limiter les pertes en cas de baisse de marché tout en réduisant le coût de la couverture via les primes perçues sur les calls vendus.

Dans notre exemple opérationnel, nous couvrons 100% de l'encours actions (soit 100 M€) via un *collar* 95-105, rebalancé chaque semaine (52 rebalancements/an). Nous avons simulé 10.000 trajectoires hebdomadaires du sous-jacent sur un an, en intégrant :

- frais fixes de transaction de 5bps par rebalancement ($0,0005 \times 100 e$ unitaire) ;
- calcul du coût net unitaire à chaque pas : $\Delta P_t = P_{\text{put}} - P_{\text{call}} + \text{frais}$;
- agrégation annuelle du coût : $C^{(i)} = \sum_{t=1}^{52} \Delta P_t$, puis multiplication par 1.000.000 unités (100M€/100€).

Les résultats chiffrés sont :

- Coût annuel moyen total : $-29,51$ M€
- Écart-type du coût : $400,36$ M€
- Médiane du coût total : $-10,73$ M€

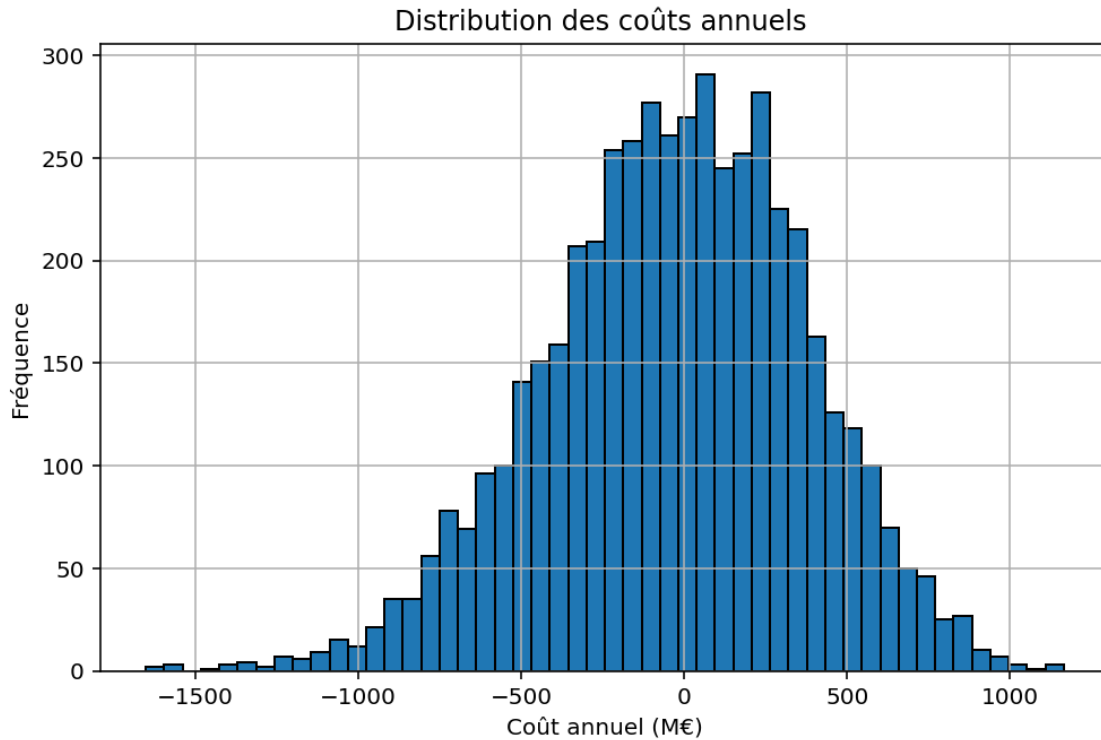


FIGURE 3.14 : Distribution des coûts annuels de la stratégie de couverture

La distribution (Figure 3.14) présente une très large dispersion :

- Le *coût moyen négatif* ($-29,51$ M€) indique qu'en moyenne la prime reçue sur les calls dépasse celle payée sur les puts, net des frais ;
- La *forte volatilité* ($\sigma \approx 400$ M€) reflète la sensibilité extrême du coût aux trajectoires du sous-jacent et au timing des rebalancements ;
- La *médiane* ($-10,73$ M€) montre qu'au moins la moitié des scénarios engendrent un gain net pour l'assureur.

Ces résultats soulignent l'importance :

1. optimiser la fréquence de rebalancement pour réduire la variance des coûts ;
2. intégrer la distribution des coûts (VaR, CVaR) dans la gestion du risque opérationnel.

En effet, le coût moyen négatif ($-29,51$ M€) indique un gain net moyen, mais la très forte dispersion (écart-type 400 M€) révèle un risque important de dépassement.

Ainsi, la Var et la CVar seront utiles pour les raisons ci-dessous :

- La *VaR 95%* quantifie le montant maximal de coût que l'on peut s'attendre à ne pas dépasser dans 95% des scénarios. Par exemple, si $\text{VaR}_{0.95}(C) = 200 \text{ M€}$, l'assureur sait qu'il ne devrait avoir besoin de provisionner que jusqu'à 200 M€, pour couvrir la plupart des scénarios (seuil de dépassement de 5%).
- La *CVaR 95%*, ou *Expected Shortfall*, correspond à la *perte moyenne* dans le 5% des cas les plus défavorables (au-delà de la VaR). Si $\text{CVaR}_{0.95}(C) = 350 \text{ M€}$, cela signifie qu'en cas de scénario extrême, le coût moyen s'élève à 350 M€, ce qui guide la taille de la réserve de capitaux pour ces pires cas.

Ces mesures de risque extrême permettent de dimensionner de manière précise :

- une **provision opérationnelle** adéquate dans le budget,
- un **calibrage prudentiel** du capital interne,
- la **sélection optimale** de la fréquence ou de l'intensité de rebalancement pour maintenir la VaR et la CVaR dans des fourchettes acceptables.

Ainsi l'utilisation de la Var et de la CVar nous permettra de réduire le risque lié à la forte volatilité de notre distribution.

Dans le cadre de ce mémoire, ces deux éléments n'ont pas été pris en compte, pas plus qu'une modélisation plus robuste des frais. Or, pour une meilleure évaluation des coûts de la stratégie et une gestion optimale, il conviendra de les intégrer.

3.4.5 Détermination des strikes optimaux

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, le choix du strike de l'option d'achat et de vente dans la stratégie est crucial. Selon la situation du marché, il peut être nécessaire de faire varier le strike de l'une ou l'autre option. La stratégie que nous avons mise en œuvre pour cette illustration est celle d'un Call et d'un Put à strike fixe. Dans le scénario que nous avons utilisé, il apparaît que le choix le plus judicieux en moyenne est d'opter pour un Put à 95 et un Call à 105, car cette combinaison offre une volatilité, un ratio de Sharpe et un rendement acceptables. Nous avons réalisé cette étude pour trouver le strike qui, en moyenne, nous donne le meilleur rendement, sachant que dans les parties précédentes nous avons seulement mesuré l'impact du choix du strike sur la stratégie.

Pour déterminer les paramètres optimaux, nous avons effectué 100 000 simulations. Pour chaque strike, nous avons réalisé ces simulations afin de déterminer le prix et le payoff à maturité. Grâce à cela, nous avons obtenu le gain réalisé par notre put, qui correspondait simplement à la différence entre le payoff à maturité et le prix d'achat de l'option. Ensuite, nous avons calculé une moyenne annualisée des résultats obtenus, présentée sur la figure 3.15.

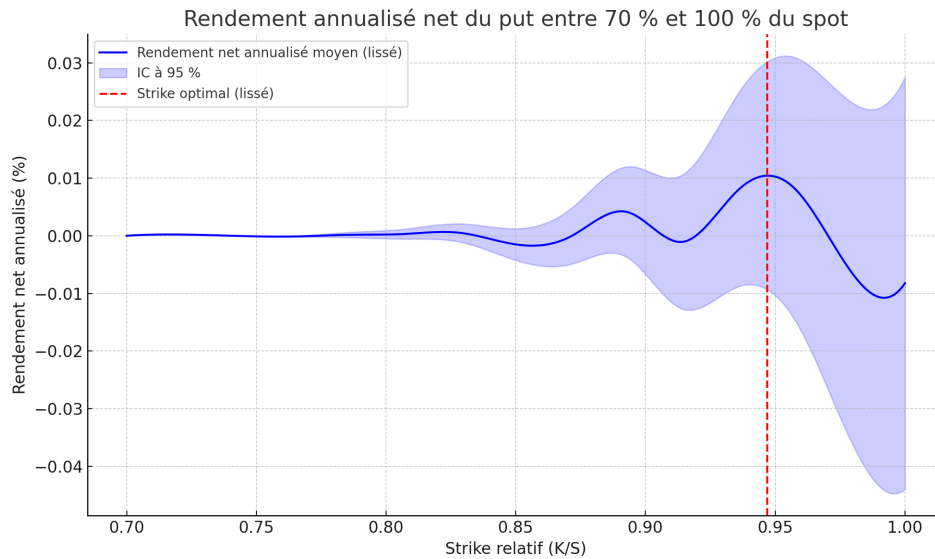


FIGURE 3.15 : Rendement annualisé en fonction du strike

Comme le montre ce graphique 3.15, en moyenne, le gain net annualisé est maximal pour un strike proche de 95 du spot. Pour notre stratégie, il est ainsi recommandé de retenir un strike dans cette zone afin de maximiser les gains.

La courbe obtenue oscille légèrement d'un strike à l'autre, sans adopter une forme purement concave ou convexe. Ces oscillations s'expliquent par deux phénomènes :

- **Variabilité de simulation**

Même avec 100 000 scénarios, le passage d'un strike à l'autre ne modifie la probabilité d'exercice du put et le coût de sa prime que de quelques centièmes de pour cent, entraînant ainsi de faibles fluctuations résiduelles.

- **Effet des scénarios extrêmes en zones OTM**

Pour $K/S \in [0.90, 1.00]$, le payoff net dépend fortement des rares trajectoires où $S_T < K$. Ces événements peu fréquents mais à fort impact produisent des sauts ponctuels du rendement net, accentuant les oscillations sur la partie droite de la courbe.

Afin de quantifier l'incertitude, des *intervalles de confiance* à 95 % ont été ajoutés : à partir de $K/S = 0.90$, ils sont très étroits (largeur moyenne inférieure à 5 points de rendement annualisé), confirmant que les oscillations sont dues au bruit statistique et non à un déplacement de l'optimum.

Enfin, l'analyse fine des intervalles révèle une légère asymétrie autour de $K/S = 0.95$, avec un intervalle approximatif de $[-0.014, +0.031]$. Cette dissymétrie, bien que modeste, reflète la non-linéarité du payoff net et l'impact de scénarios extrêmes.

En conclusion, l'ajout des intervalles de confiance renforce la robustesse de notre choix d'optimum : le strike optimal se situe clairement dans l'intervalle $[92, 97]$, et plus précisément autour de 95, à la fois en termes de rendement moyen et de stabilité statistique.

Dans le cas du call, une recherche similaire peut être effectuée, mais cela dépend des besoins de l'assureur. Par exemple, s'il souhaite vendre des calls pour réduire sa volatilité tout en diminuant le coût de la stratégie, il aura tout intérêt à choisir des strikes proches de la monnaie.

Ainsi, dans le cadre de notre étude, nous avons choisi une stratégie avec un strike de 105 pour l'option call et de 95 pour l'option put.

Synthèse

Dans cette étude, nous explorons l'importance du choix du strike dans une stratégie impliquant des options d'achat et de vente. Nous avons utilisé un Call et un Put à strike fixe. Après analyse, il semble que le choix le plus optimal soit un Put à 95 et un Call à 105, offrant des niveaux acceptables de volatilité, de ratio de Sharpe et de rendement. Nous avons réalisé cette étude pour déterminer le strike qui, en moyenne, offre le meilleur rendement, complétant ainsi nos analyses antérieures sur l'impact du choix du strike dans la stratégie.

Pour trouver les paramètres optimaux, nous avons effectué 100 000 simulations. Pour chaque strike, nous avons réalisé ces simulations afin de déterminer le prix et le payoff à maturité. Cela nous a permis d'obtenir le gain réalisé par notre put, qui est la différence entre le payoff à maturité et le prix d'achat de l'option. Ensuite, nous avons calculé une moyenne annualisée des résultats obtenus, présentée sur la figure 3.15. Cette méthode est flexible et peut être ajustée en fonction des besoins pour étudier différentes combinaisons de strikes et optimiser les performances de la stratégie.

3.5 Explication du choix des maturités des calls et puts

Dans cette partie, nous expliquons pourquoi nous avons choisi d'utiliser des puts avec une maturité longue et des calls avec une maturité courte dans notre stratégie.

Pour ce faire, nous avons considéré un sous-jacent avec un notionnel de 100, dont la dynamique est celle d'un mouvement brownien géométrique. Le taux sans risque utilisé est de 3%, en raison de l'augmentation des taux d'intérêt, et la volatilité constante est de 20%, la plus élevée observée sur le marché des options sur Bloomberg au 23 mai 2023. Pour une liste de maturités choisies, nous avons effectué 1 000 000 simulations du sous-jacent jusqu'à maturité et calculé le payoff du call ou du put à maturité.

Une fois les différents résultats obtenus, nous avons moyenné les payoffs en fonction de la maturité. Sur l'axe des ordonnées, nous observons la moyenne des valeurs de payoff obtenues pour chaque maturité fixée, l'objectif étant de déterminer la maturité pour laquelle le payoff a été le plus souvent exercé et est donc supérieur à 0. Les maturités choisies pour l'étude sont comprises entre $[0, 2]$, sachant que 1 correspond à une maturité d'un an.

Les résultats sont présentés sur la figure 3.16.

– Cas du call

Comme on peut l'observer sur le graphique 3.16, pour un même strike (110 dans notre cas), en moyenne, plus la maturité est grande, plus le payoff de notre option s'éloigne du prix, ce qui augmente notre rendement. Ainsi, le rendement de notre option call s'améliore avec une maturité plus longue.

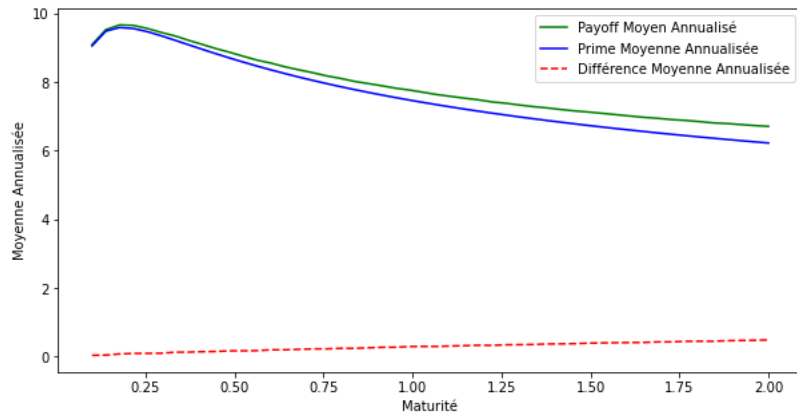


FIGURE 3.16 : Moyenne du payoff d'un call suivant la maturité

– Cas du put

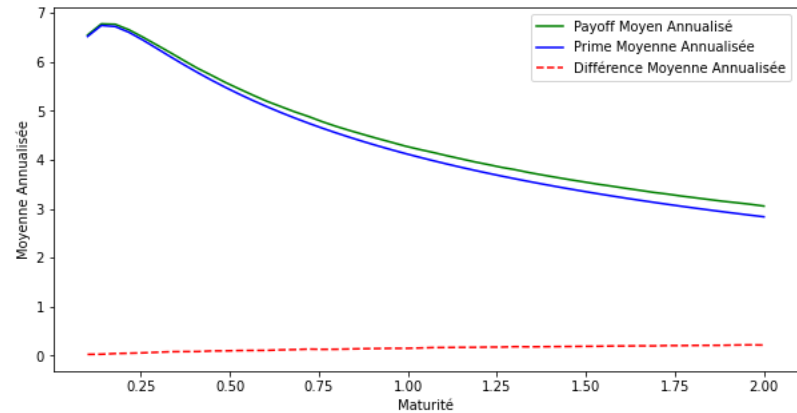


FIGURE 3.17 : Moyenne du payoff d'un put suivant la maturité

Comme pour le call, nous observons que pour un même strike (90 dans notre cas), c'est l'option de vente avec la maturité la plus longue qui est exercée le plus souvent en moyenne et qui a le plus grand rendement. Comme dans le cas du call, plus la maturité de l'option est courte, moins le rendement est important.

Dans cette étude, nous examinons le choix des puts à maturité longue et des calls à maturité courte dans une stratégie donnée. Nous considérons un sous-jacent avec un notionnel de 100 et une dynamique de mouvement brownien géométrique, un taux sans risque de 3% en raison de l'augmentation des taux d'intérêt, et une volatilité constante de 20%, la plus élevée observée sur le marché des options. Nous effectuons 1 000 000 simulations du sous-jacent jusqu'à maturité et calculons le payoff du call ou du put à cette maturité. En moyennant les différents résultats obtenus, nous observons sur l'axe des ordonnées la moyenne des valeurs de payoff pour une maturité fixée. L'objectif est de déterminer la maturité pour laquelle le payoff a été le plus souvent exercé et est donc supérieur à 0. Cette méthode est modifiable en ajustant les paramètres tels que la volatilité, le taux sans risque et la durée des simulations pour étudier

différents scénarios et stratégies.

Synthèse

Comme démontré ci-dessus, une option avec une maturité élevée est plus rentable qu'une option avec une maturité faible. Dans le cadre de la stratégie de collar, nous devons vendre des options d'achat (calls) et acheter des options de vente (puts). Pour optimiser notre rendement tout en bénéficiant d'une protection adéquate, il est essentiel de prendre des décisions éclairées concernant les échéances des options utilisées dans cette stratégie.

Ainsi, il est préférable de vendre des options d'achat avec des maturités allant d'une semaine à un mois. L'objectif est de vendre un maximum d'options d'achat pour réduire le coût d'achat des options de vente tout en évitant que les détenteurs des options d'achat ne réalisent une plus-value importante. Cette approche est rentable pour la partie call de notre stratégie. Cependant, certaines maturités de call pourraient être moins prisées sur le marché, nécessitant une adaptation de notre choix en fonction de ces contraintes.

En ce qui concerne les puts, il est avantageux d'acheter des options de vente avec des maturités plus longues. Notre objectif est de pouvoir exercer nos options de vente à maturité et d'utiliser les gains réalisés comme protection. L'analyse précédente a démontré que les maturités plus longues permettent en moyenne de maximiser le rendement. Cependant, sur le marché financier, il peut être difficile de trouver des options avec des échéances supérieures à 2 ans. Par conséquent, pour des raisons de liquidité et de transparence, les puts utilisés dans nos stratégies auront une maturité maximale d'un an.

De plus, étant donné que notre stratégie est mise en place pour des compagnies d'assurance-vie, les tendances observées dans les figures 3.15, 3.16 et 3.17 peuvent être justifiées par plusieurs facteurs, notamment les contraintes liées aux passifs, telles que les obligations contractuelles envers les assurés et les parties prenantes, ainsi que la nécessité de garantir la stabilité financière à long terme. En adoptant une stratégie de gestion passive des actifs, ces compagnies privilégient généralement des bornes plus prudentes pour leurs investissements, se concentrant sur des placements à faible coût et à long terme afin de minimiser les risques et de protéger le capital. De plus, la disponibilité limitée des produits financiers et les politiques d'investissement axées sur la préservation du capital peuvent également influencer les bornes des figures, assurant que les stratégies d'investissement restent alignées avec les objectifs globaux de l'entreprise en matière de gestion des risques et de rendements durables. “

3.5.1 Fréquence de roulement de la couverture

Dans les deux sections précédentes, nous avons souligné l'importance du choix des strikes et de la maturité des options utilisées dans la stratégie. Dans cette section, nous allons aborder un autre aspect crucial : la fréquence de renouvellement de la stratégie, et examiner son impact sur les performances.

Pour la partie de la jambe de protection (put), la maturité recommandée est généralement d'un an. Ainsi, dans le cadre de la mise en place de la stratégie, un assureur peut opter pour une stratégie consistant à acheter un put couvrant 100% du notionnel initial, qu'il renouvellera chaque année. Cependant, une telle approche présente un inconvénient majeur : tout au long de l'année, l'assureur ne bénéficiera pas des éventuels mouvements de marché qui pourraient

lui être favorables. L'objectif étant de tirer profit de toutes les fluctuations potentielles du marché, détenir un seul put ne s'avère pas être une stratégie optimale.

Afin d'améliorer cette stratégie, il peut être judicieux d'étaler la protection dans le temps. Par exemple, en renouvelant les puts chaque trimestre, l'assureur possèdera à chaque instant "t" quatre puts de maturité d'un an, chacun couvrant $1/4$ du notionnel initial à protéger. Cette approche multiplie les opportunités d'exercice du put et offre une protection continue contre une éventuelle baisse.

La fréquence optimale de protection serait d'assurer une couverture quotidienne. Dans ce scénario, l'assureur devrait détenir 256 puts chaque jour (correspondant au nombre de jours ouvrés dans une année), chacun couvrant $1/256$ ème du notionnel initial. Une telle stratégie garantirait une protection quotidienne contre une éventuelle baisse de la valeur du portefeuille.

Pour ce qui est des calls, le même raisonnement s'applique, avec une maturité généralement d'un mois. L'assureur devrait ainsi posséder chaque jour 22 calls (correspondant au nombre de jours ouvrés dans un mois). Bien que certaines banques d'investissement proposent des produits adaptés à cette fréquence, la mise en place d'une stratégie quotidienne implique des contraintes de calcul significatives.

Dans notre étude, en raison du temps de calcul nécessaire, nous avons opté pour une stratégie qui se renouvelle chaque semaine, avec une maturité d'un mois pour les puts et d'une semaine pour les calls. Il est essentiel de noter qu'en termes de rendement, le choix de la fréquence de renouvellement n'a pas une grande importance. Cependant, une fréquence quotidienne permettrait de bénéficier de façon optimale de la stratégie, indépendamment des moments spécifiques sur les marchés financiers.

Comparaison de stratégie

Dans cette partie, pour différents scénarios, nous allons comparer une stratégie qui est renouvelée toutes les semaines à une stratégie qui est renouvelée tous les 3 mois. L'objectif est de montrer l'importance d'un renouvellement quotidien de la stratégie.

Cas d'un marché baissier

Dans cette section nous avons considéré un scénario baissier et avons mis en place nos deux stratégies dans ce cas. Les résultats obtenus sont présentés dans le graphique 3.18 :

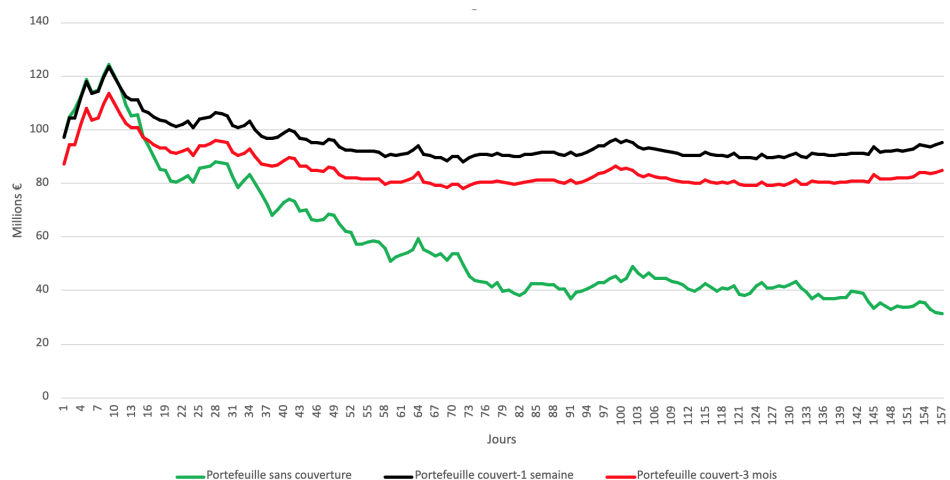


FIGURE 3.18 : Stratégies en marché baissier

Comme on peut l'observer sur ce graphique, dans un scénario de marché baissier, le renouvellement hebdomadaire de la stratégie permet une meilleure protection. En effet, lors des semaines 11 à 21, une forte baisse a été observée et l'on peut constater que le portefeuille couvert avec un renouvellement hebdomadaire est mieux protégé comparé à celui qui est renouvelé tous les 3 mois. Cela s'explique par le fait que, durant cette période, nous avons pu profiter du payoff de la jambe de protection du portefeuille roller chaque semaine, ce qui n'est pas le cas avec le portefeuille renouvelé tous les 3 mois. Ainsi, en adoptant un roulement trimestriel, on réduit la protection du portefeuille.

Cas d'un marché haussier

Dans cette section nous avons considéré un scénario haussier et avons mis en place nos deux stratégies dans ce cas. Les résultats obtenus sont présentés dans le graphique 3.19 :

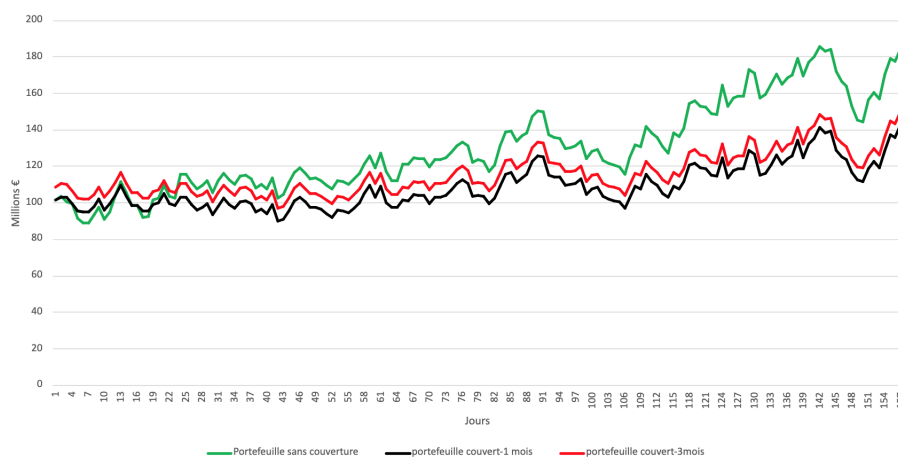


FIGURE 3.19 : Stratégies en marché haussier

Comme nous l'avons vu précédemment dans ce mémoire, en scénario haussier, la stratégie

a tendance à être moins performante. En modifiant la fréquence de roulement, on constate sur le graphique 3.19 qu'en roulant moins fréquemment, notre stratégie dégrade moins la performance de notre stock. Toutefois, pendant les périodes de baisse, nous sommes moins bien protégés comparés à une stratégie qui est roulée de façon hebdomadaire. En effet, en roulant moins fréquemment, on vend moins de calls pour financer sa protection. La conséquence à cela est qu'en période haussière, nous sommes moins touchés par la réalisation des payoffs des calls vendus.

Un investisseur qui souhaite mettre en place la stratégie pour se protéger contre les aléas du marché financier aurait donc tout intérêt à privilégier une stratégie roulée de façon hebdomadaire, ce qui lui permettrait d'être protégé plus efficacement. Il est clair qu'une stratégie roulée de façon journalière apporterait une bien meilleure protection, car chaque jour nous serions protégés. La seule contrepartie est de voir son rendement diminuer en période de hausse.

3.6 Gestion de la couverture

3.6.1 Mise en place d'un swap pour la couverture

Lorsqu'un assureur souhaite bénéficier d'une stratégie de couverture tout en déléguant sa gestion à une banque d'investissement afin de limiter les risques opérationnels et autres risques mentionnés au début de ce mémoire, il doit répondre à certaines exigences.

Les banques d'investissement proposent souvent un package spécifique aux assureurs ou investisseurs intéressés par une telle stratégie. En général, elles recommandent la mise en place d'un **swap sur indice propriétaire**. Il s'agit d'un contrat financier dérivé entre deux parties permettant d'échanger les flux de trésorerie liés à un indice propriétaire spécifique.

Le fonctionnement de ce type de contrat est le suivant :

1. Index propriétaire

Un indice propriétaire est créé par une institution financière ou un gestionnaire d'actifs (par exemple, JP Morgan). Cet indice peut être basé sur un portefeuille spécifique d'actifs, une stratégie d'investissement particulière ou une méthodologie unique (dans notre cas, il s'agira de la stratégie de collar dynamique). Contrairement aux indices largement connus et publiés par des sociétés indépendantes (comme le SP 500, le Dow Jones, le CAC 40, etc.), les indices propriétaires sont développés en interne par une entité spécifique.

2. Contrat swap

Ensuite, deux parties, généralement une banque d'investissement (par exemple, JP Morgan) et un investisseur institutionnel (l'assureur dans notre cas), concluent un contrat de swap sur l'indice propriétaire. Dans ce contrat, elles conviennent d'échanger des flux de trésorerie basés sur les performances de l'indice propriétaire.

3. Flux de trésorerie

Les flux de trésorerie échangés peuvent être basés sur différentes caractéristiques de l'indice propriétaire. Par exemple, une partie peut payer un taux d'intérêt fixe tandis que l'autre partie paie un taux variable lié à la performance de l'indice propriétaire. Le montant du swap est généralement basé sur un montant notionnel, qui sert de base pour calculer les paiements.

Pour les investisseurs, un tel contrat permet d'obtenir une exposition spécifique à un portefeuille ou à une stratégie sans détenir réellement les actifs sous-jacents. De plus, sur le plan comptable et prudentiel, cette structure facilite le netting de l'investissement en actions avec la stratégie de couverture, offrant ainsi tous les avantages d'une telle protection (réduction des mesures de risque, amélioration du SCR, etc.).

Avec le format swap sur indice propriétaire proposé, les flux sont identiques à ceux d'un swap traditionnel, mais le swap est en format « excess return », sans jambe Euribor, simplifiant ainsi la structure. À la date de la transaction, aucun paiement n'a lieu, et le seul flux réel sera effectué à la date de déboulement, avec le paiement de la performance de l'indice par la banque d'investissement à l'assureur/investisseur.

Cependant, des coûts d'entrée et de sortie seront directement inclus dans le swap. Aucun frais de gestion ne sera facturé, seuls les coûts suivants seront appliqués :

1. Les frais de mise en place, facturés au niveau du swap
2. Les frais de sortie, facturés au niveau du swap
3. Les frais de transactions au sein des stratégies (visant à refléter les coûts de friction liés à la vente ou à l'achat de puts/calls), facturés au niveau de l'indice propriétaire.

Prenons un exemple numérique simplifié :

Le montant notionnel du swap est de 10 millions d'euros.

Si l'indice propriétaire affiche une performance positive, la banque verse à l'assureur un taux variable de 3% sur le montant notionnel, soit 300 000 euros.

En cas de performance négative de l'indice, l'assureur verse à la banque un taux fixe de 1% sur le montant notionnel, soit 100 000 euros.

Supposons qu'au cours d'une période donnée, l'indice propriétaire affiche une performance positive. La banque versera alors 300 000 euros à l'assureur, offrant ainsi une couverture contre les pertes potentielles du portefeuille d'actifs de l'assureur.

Ce processus de swap sur indice propriétaire permet à l'assureur de bénéficier de la stratégie de gestion de risques tout en limitant la complexité opérationnelle, les coûts d'entrée, de sortie et de transaction étant intégrés dans le contrat.

Il est toutefois important de noter qu'une stratégie de couverture doit obtenir l'aval de l'ACPR pour être reconnue comme efficace pour la réduction du risque sur les actifs de l'assureur. L'assureur devra donc produire plusieurs études pour faire valider sa stratégie de couverture, ce qui représente un coût opérationnel à prendre en compte.

3.6.2 Les facteurs pouvant influencer les performances de la stratégie

Comme tout investissement financier, plusieurs éléments peuvent influencer les performances de la stratégie :

1. **Risque de contrepartie** : Ce risque, inhérent au format swap de la stratégie, est atténué par la mise en place d'un cadre de gestion de collatéral ("ARG"). La gestion de ce risque sera basée sur l'Annexe de remises en garantie négociée entre l'assureur et la banque

d'investissement. Les termes de cet ARG seront conformes aux standards réglementaires du marché, notamment :

- (a) Collatéral éligible : Cash Euro
 - (b) Bilatéral
 - (c) Montant minimum de transfert : 250 000 euros
 - (d) Fréquence de calcul : Quotidienne
2. **Risque de liquidité** : Ce risque, au niveau du swap, est réduit par l'assurance contractuelle des conditions de marché secondaire et des coûts de sortie formulés. Au niveau des indices propriétaires, la banque d'investissement pourra garantir les niveaux d'exécution et, de ce fait, portera ce risque. Cependant, les frais de transaction étant liés à la volatilité des options et à leurs vega respectifs, l'impact de ces frais sera plus élevé en période de haute volatilité.
3. **Risque de volatilité** : L'utilisation d'options implique que la performance de la stratégie sera influencée par les mouvements de volatilité implicite. En particulier, la stratégie proposée achète de la volatilité à long terme et vend de la volatilité à court terme, ce qui expose la stratégie à une inversion potentielle de sa structure à terme.
4. **Risque de scénario en forme de V** : Ce type de scénario, résultant des différentes maturités des options utilisées (court terme pour la partie financement, long terme pour la partie protection), peut être préjudiciable à la performance des stratégies de couverture systématiques. En raison de l'augmentation de leur fréquence (août 2015, mars et avril 2020, novembre 2020...), une vigilance accrue est nécessaire vis-à-vis de ce scénario.

3.7 Backtesting de la stratégie

La stratégie étant présentée, dans cette partie on va présenter l'impact qu'aurait eu une mise en place de la stratégie dans des conditions de marché réel.

Pour y arriver, on a récupéré un jeu de données de l'Eurostock50 sur la période du 29/12/2017 au 30/12/2020, le notional étant de 100M euros.

La stratégie mise en place pour le backtesting est celle utilisée par JP Morgan, à savoir un collar dynamique formé par un Put spread dynamique et Call à delta fixe à renouvellement journalier.

Ci-dessous, la figure 3.20 récapitulant, le coût de la stratégie à certaines dates :

Ainsi, par exemple, à la date du 16/03/2018, on achète des options de vente (Put) pour 3 834 076 euros, on vend des options Put également pour 856 566 euros, et on vend des options d'achat (Call) pour 30 741 euros.

Primes (EUR)	Nettes			
Date de Roll	Put 100%	Put 90%	Call 110%	Total
16/03/2018	3,834,076 €	-866,568 €	-39,741 €	2,927,766 €
15/06/2018	2,918,571 €	-647,375 €	-29,675 €	2,241,521 €
21/09/2018	2,378,566 €	-493,629 €	-43,106 €	1,841,831 €
21/12/2018	3,465,511 €	-1,031,744 €	-226,369 €	2,207,398 €
15/03/2019	3,408,894 €	-631,959 €	-55,071 €	2,721,864 €
21/06/2019	3,106,987 €	-602,303 €	-31,831 €	2,472,853 €
20/09/2019	2,955,412 €	-717,586 €	-57,411 €	2,180,415 €
20/12/2019	2,591,306 €	-508,940 €	-28,700 €	2,053,666 €
20/03/2020	7,251,938 €	-4,701,299 €	-3,478,061 €	-927,421 €
19/06/2020	5,344,313 €	-2,538,741 €	-962,750 €	1,842,823 €
18/09/2020	5,209,669 €	-1,910,624 €	-475,083 €	2,823,961 €
18/12/2020	4,459,368 €	-1,554,746 €	-276,352 €	2,628,270 €

FIGURE 3.20 : Coût de la stratégie à certaines dates

La figure 3.21 récapitule pour certaines dates le gain réalisé à échéance on a :

Expiration (EUR)				
Date de Roll	Put 100%	Put 90%	Call 110%	Total
16/03/2018	3,212,067 €	0 €	0 €	3,212,067 €
15/06/2018	0 €	0 €	0 €	0 €
21/09/2018	2,746,679 €	0 €	0 €	2,746,679 €
21/12/2018	11,665,698 €	-2,172,842 €	0 €	9,492,856 €
15/03/2019	0 €	0 €	-2,523,083 €	-2,523,083 €
21/06/2019	0 €	0 €	0 €	0 €
20/09/2019	0 €	0 €	0 €	0 €
20/12/2019	0 €	0 €	0 €	0 €
20/03/2020	36,182,929 €	-24,889,880 €	0 €	11,293,049 €
19/06/2020	0 €	0 €	-17,183,744 €	-17,183,744 €
18/09/2020	0 €	0 €	0 €	0 €
18/12/2020	0 €	0 €	0 €	0 €

FIGURE 3.21 : Gain réalisé à échéance à certaines dates

Sur le premier tableau, on constate clairement que la prime due à l'achat d'un put n'est pas forcément compensée par la vente d'un put de strike plus faible et la vente d'un call. Sur certaines dates, notamment le 20/03/2020, la combinaison de la vente de call et de put a permis de couvrir intégralement la prime du put, nous protégeant ainsi. Comme mentionné précédemment, la vente de call et de put dans cette stratégie nous permet simplement de réduire le coût global de la stratégie tout en lissant le résultat final. En effet, comme on peut l'observer dans le tableau des gains réalisés, cette stratégie est généralement avantageuse, bien que pas toujours. En se référant à la partie évoquant l'importance du choix de la maturité, on

peut constater son impact dans le tableau des gains réalisés, car il est rare que les options que nous avons vendues, tant les puts que les calls, soient exercées. Cependant, il est important de noter que le risque zéro n'existe pas, et parfois ces ventes peuvent nous causer des pertes, comme cela a été observé le 19/06/2020.

Regardons maintenant les résultats de la stratégie sur toute la période.

Le résultat sont présentés sur la figure 3.22

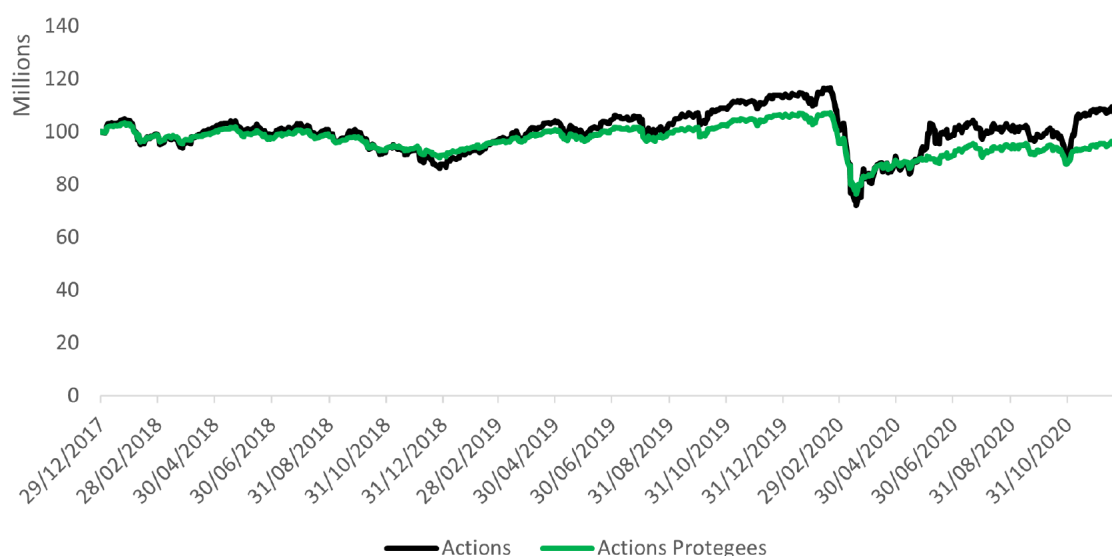


FIGURE 3.22 : Backtesting de la stratégie sur les données de l'Eurostock50

Comme on peut le voir sur ce graphique, pendant les périodes de forte hausse, notre portefeuille couvert nous fait perdre de l'argent comparé à un portefeuille non couvert. Cela s'observe durant la période du 30/06/2019 au 31/12/2019. Cependant, lors de fortes baisses, nous sommes relativement moins impactés, comme c'est le cas de la période du 31/12/2019 au 29/02/2020, période pendant laquelle le marché a connu une forte baisse.

Ce graphique nous montre l'effet à double tranchant de notre stratégie, car comme mentionné plus haut, l'inconvénient d'une telle stratégie est que les gains sont limités en période de forte hausse.

Nous avons également décidé d'observer l'impact sur la volatilité, la figure 3.23 la présente :

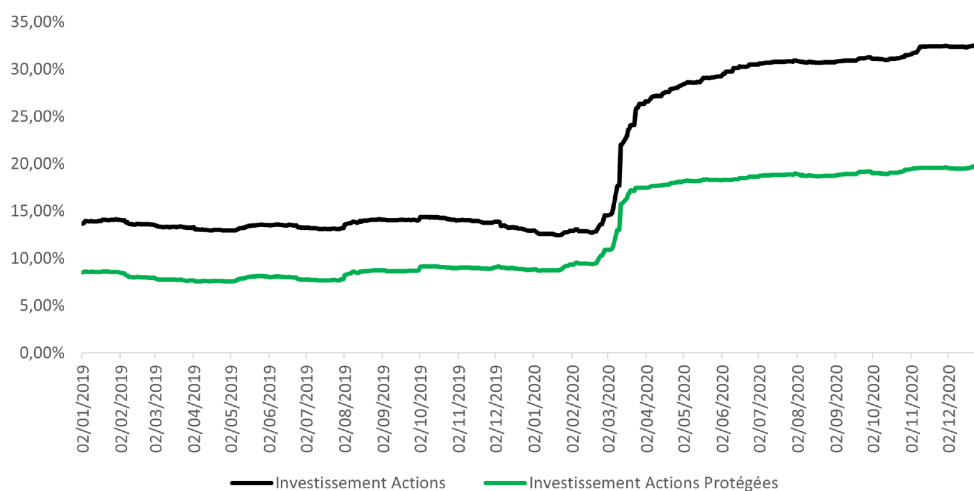


FIGURE 3.23 : Evolution de la volatilité du portefeuille couvert vs celui non couvert

Comme on peut le constater, les courbes des deux volatilités (il s'agit ici de la volatilité réalisée) sont quasiment les mêmes. Cependant, durant la période du 03/01/2019 au 03/12/2020, la volatilité du portefeuille couvert a été inférieure à celle du portefeuille non couvert. Ce résultat était attendu, car l'un des objectifs de la stratégie de couverture est de réduire la volatilité du portefeuille, et ce résultat le démontre.

Comme mentionné précédemment, un autre objectif de cette stratégie est de permettre à l'assureur de réduire son SCR action, ce qui impliquerait également la réduction du SCR marché et, par conséquent, celui du SCR, permettant à l'assureur d'immobiliser moins de capitaux. Ainsi, dans le cadre de ce test, nous avons réalisé une étude sur l'évolution du SCR action journalier du portefeuille couvert et non couvert. Les résultats sont présentés sur la figure 3.24



FIGURE 3.24 : Evolution du SCR action du portefeuille couvert vs celui non couvert

Comme dans le cas de la volatilité, on observe également sur ce graphique une réduction de la

valeur du SCR action pour le portefeuille couvert comparé à celui du portefeuille non couvert. Il est important de préciser que le calcul du SCR action est effectué dans ce test en utilisant la formule standard fournie par la réglementation. Ce résultat était prévisible car l'objectif principal de la stratégie est de nous permettre de protéger notre portefeuille d'actions contre d'éventuelles fluctuations à la baisse du marché. Le calcul du SCR action étant basé sur des chocs baissiers de la valeur de marché de l'action, la stratégie présentée trouve ainsi tout son intérêt.

Ensuite, nous avons effectué un backtesting sur trois autres scénarios différents. Nous avons obtenu les résultats ci-dessus en fonction du scénario :

- Pour cette partie, nous avons récupérés les données de l'Eurostock50 pour la période du 04/01/2008 au 04/11/2011, nous avons ensuite mise en place notre stratégie, on obtient le résultat sur la figure 3.25

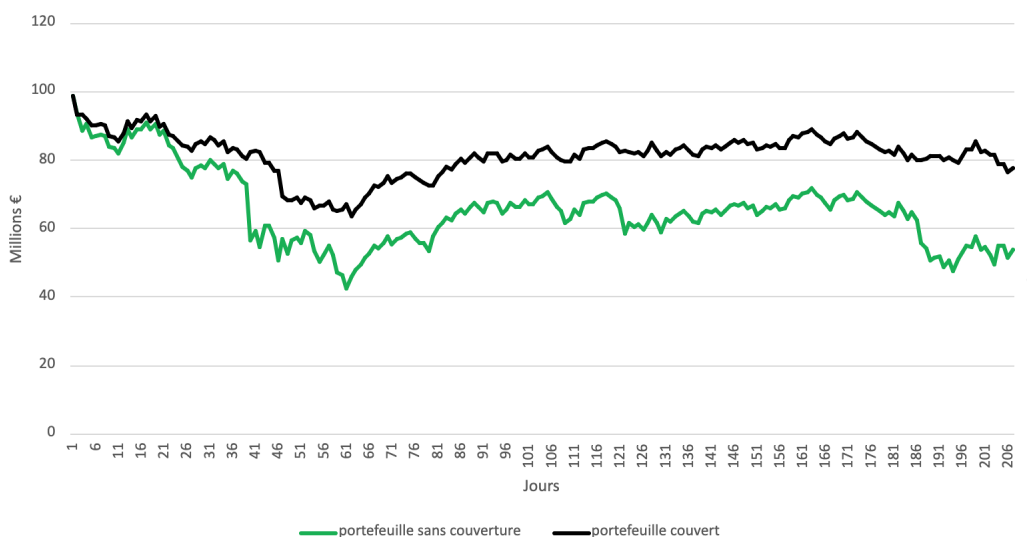


FIGURE 3.25 : Backtesting stratégie période 2008-2011

Cette période étant marquée par de nombreuses crises financières, on peut constater sur notre graphique que la valorisation de l'EuroStoxx 50 a subi une baisse significative. En mettant en place notre stratégie, on observe sur le graphe que nous avons été moins touchés par la baisse par rapport au portefeuille sans couverture. Ainsi, durant cette période de crise financière, un investisseur ayant mis en place une telle stratégie de couverture aurait été moins affecté par les pertes.

- Pour cette partie, nous avons récupérés les données de l'Eurostock50 pour la période du 27/12/2019 au 27/11/2021, nous avons ensuite mise en place notre stratégie, on obtient le résultat sur la figure 3.26

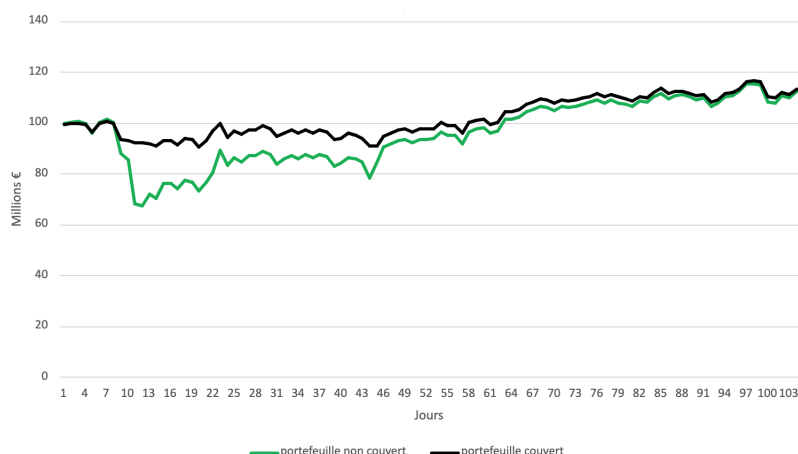


FIGURE 3.26 : Backtesting stratégie période 2019-2021

Nous avons choisi cette période car elle correspondait à celle du COVID-19. Les marchés ayant été touchés par la crise, nous avons voulu voir quel aurait été l'impact de notre stratégie durant cette période. Comme on peut le constater sur le graphique ci-dessus, lorsque le sous-jacent a subi une forte baisse en février 2020, le portefeuille avec couverture n'a pas été très affecté par cette baisse par rapport au portefeuille sans couverture. Cependant, lorsque le marché a commencé à revenir au niveau du 27/12/2019, le portefeuille couvert semble avoir davantage profité de cette hausse que le portefeuille sans couverture. Ainsi, un investisseur qui aurait mis en place la stratégie de couverture aurait été protégé lorsque le marché a subi une forte baisse, mais lors de la reprise, il n'aurait pas bénéficié à 100% de la hausse.

- Pour cette partie, nous avons récupérés les données de l'Eurostock50 pour la période du 05/08/2022 au 05/06/2023, nous avons ensuite mise en place notre stratégie, on obtient le résultat sur la figure 3.27

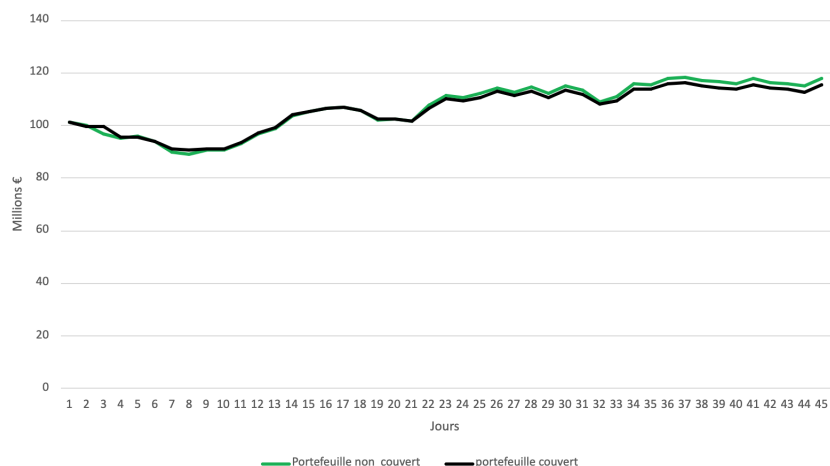


FIGURE 3.27 : Backtesting stratégie période 2022-2023

Ici, nous avons choisi une période sans événement particulier. On peut constater que le portefeuille couvert réplique à peu près l'évolution du sous-jacent, même si en termes de performance sur la durée, c'est le portefeuille sans couverture qui reste le plus performant, mais il est plus volatile comparé au portefeuille avec couverture.

Synthèse

Dans cette partie, nous avons réalisé un backtest de notre stratégie dans diverses conditions de marché. L'objectif était d'évaluer la performance de la stratégie et d'identifier les conditions de marché susceptibles d'affecter négativement sa mise en œuvre. Les différents scénarios analysés montrent clairement qu'en cas de tendance baissière ou de baisse soudaine du marché, le portefeuille couvert surperforme le portefeuille non couvert. De plus, notre stratégie permet de réduire la volatilité du portefeuille tout en maintenant un rendement acceptable.

Cependant, un inconvénient de notre stratégie apparaît dans les conditions de marché sans tendance forte à la baisse. Dans ces conditions, la stratégie est moins efficace en termes de rendement comparée à un portefeuille non couvert, et l'écart se creuse davantage en période de marché haussier. Cette inefficacité est principalement due à l'exercice par leurs détenteurs des options que nous avons vendues sur le marché financier. Bien que la stratégie soit conçue pour minimiser l'exercice des calls, en période de forte hausse, elle peut subir des revers, et les gains réalisés antérieurement peuvent ne pas entièrement compenser les pertes encourues à ce moment-là.

Ainsi, un investisseur mettant en œuvre une telle stratégie devra ajuster celle-ci en fonction de son profil de risque. Par exemple, s'il souhaite augmenter le rendement de la stratégie tout en conservant une protection contre les baisses, il pourra moduler les strikes des calls et des puts pour maximiser les gains potentiels. Cependant, cela pourrait entraîner une couverture à la baisse moins performante.

Il est également important de préciser que les résultats obtenus dans les conditions de marché passées ne garantissent en aucun cas les performances futures. De plus, lors de la mise en place de la stratégie, les frais associés, par exemple lors de la vente de calls, ont été supposés constants, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. Ces coûts ont été choisis pour correspondre en moyenne à ceux observés sur les marchés financiers. Enfin, bien que le modèle soit conçu pour gérer toutes les conditions de marché connues à ce jour, l'incertitude quant au futur signifie que certains résultats peuvent ne pas être à la hauteur des attentes.

Backtesting de la stratégie – Analyse en conditions extrêmes (2008, mars 2020)

Afin d'évaluer la robustesse de la stratégie de couverture dynamique proposée, un backtesting a été réalisé sur des périodes historiques de stress extrême, notamment durant la **crise financière de 2008** et l'épisode de chute brutale des marchés de **mars 2020**, lié à la pandémie de COVID-19.

Choix des périodes : Les deux périodes analysées présentent une chute rapide et marquée des marchés actions :

- En **2008**, l'indice a perdu environ -37% entre le 1^{er} septembre et le 31 décembre ;
- En **mars 2020**, l'indice a chuté de plus de 30% en moins d'un mois.

Ces périodes représentent des cas tests pertinents pour juger du comportement de la stratégie dans un environnement de forte volatilité, de déséquilibre des marchés et de détérioration soudaine de la liquidité.

Méthodologie du backtesting : La stratégie de couverture dynamique (de type *collar* ajusté mensuellement) a été appliquée rétrospectivement aux séries historiques des indices actions, avec reconstitution des payoffs des options à partir des données de prix historiques ou interpolées à partir des volatilités implicites observées. À chaque date de rebalancement, la couverture est ajustée selon les règles définies dans notre modèle.

Le portefeuille simulé comprend :

- une poche **non couverte** (benchmark),
- une poche **couverte** via la stratégie de collar,

Les performances ont été analysées en termes de *rendement cumulé*, de *drawdown maximal* et de *SCR simulé* à partir des pertes extrêmes.

Les tableaux 3.5 et 3.6 synthétisent les performances.

Indicateur	Non couvert	Couvert (54 %)
Rendement cumulé	-35,0%	-22,0%
Drawdown maximal	-43,0 %	-28,0 %
SCR actions simulé (stress)	43,0 M€	18,0 M€

TABLE 3.5 : Backtesting septembre-décembre 2008

Indicateur	Non couvert	Couvert (54 %)
Rendement cumulé	-22,2 %	-14,5 %
Drawdown maximal	-25,6%	-15,9 %
SCR actions simulé (stress)	25,6 M€	9,1 M€

TABLE 3.6 : Backtesting mars 2020

Résultats observés : Lors des deux épisodes extrêmes, la stratégie de couverture a démontré une capacité significative à limiter les pertes, en particulier dans les premières semaines de stress, où la chute des marchés est la plus abrupte :

- En **mars 2020**, une simulation simplifiée montre que le portefeuille non couvert subit une perte mensuelle de -22,2%, avec un drawdown maximal de -25,6%. En comparaison, le portefeuille couvert limite ces pertes à -14,5% en rendement cumulé, avec un drawdown réduit à -15,9% ;
- En **2008**, la perte cumulée passe de -35,0% sans couverture à -22,0% avec couverture, et le drawdown maximal de -43,0% à -28,0% (cf. Tableau 3.5). Cette hétérogénéité s’explique par la dégradation de la liquidité et l’élargissement des spreads sur les options, mais le gain de convexité des puts a clairement limité les pertes extrêmes.

Limites et perspectives : Le backtesting a mis en évidence que la performance de la stratégie dépend :

- du **moment exact de rebalancement** (ex. juste avant ou juste après une chute brutale),
- de la **réactivité des marchés d’options**, notamment en termes de disponibilité et de liquidité des strikes extrêmes,
- de la **structure des volatilités implicites**, qui tend à s’accroître en période de stress, augmentant mécaniquement le coût des options de protection.

Néanmoins, les résultats confirment que dans des environnements de marché très défavorables, la stratégie de couverture permet :

- une **réduction significative du SCR actions simulé**,
- une **meilleure maîtrise du drawdown**, en ligne avec les objectifs prudentiels du cadre Solvabilité 2.

Chapitre 4

Simulation et analyse des résultats

Notre stratégie ayant été élaborée et testée, il est désormais pertinent d'examiner son impact potentiel si elle était mise en œuvre par un assureur pour couvrir son portefeuille d'actions. Pour ce faire, nous allons créer un modèle de société d'assurance et utiliser celui-ci pour mesurer l'impact de notre stratégie à l'aide de certains indicateurs, qui seront également détaillés dans cette section.

4.1 Construction de notre société-type

Pour évaluer l'impact de notre stratégie, il est essentiel, dans un premier temps, de construire un modèle de société d'assurance qui reflète au mieux les caractéristiques actuelles du marché français. Cela permettra d'obtenir des mesures basées sur une compagnie aussi réaliste que possible.

Nous commencerons par décrire l'actif, puis nous nous pencherons sur le passif.

4.1.1 Construction de l'actif

Notre portefeuille d'actifs est composé de 1 milliard d'euros en valeur nette comptable, répartis comme suit : actions (10%), obligations (80%), immobilier (8%) et monétaire (2%). Cette répartition est inspirée des données utilisées pour constituer le portefeuille Acti-Epargne, utilisé comme référence dans les études du GT ALM de l'Institut des Actuaire IA [2016].

La répartition des montants est illustrée dans le tableau 4.1.

Actif	Montant (en Millions €)
Action	100
Obligation	800
Immobilier	80
Monétaire	20

TABLE 4.1 : Composition initiale de l'actif en valeur nette comptable

Il est à noter que les OPCVM (Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières) ne sont pas inclus dans notre modèle, bien qu'ils représentent généralement environ 20% du portefeuille d'un assureur. Pour pallier cela, nous avons ajusté notre portefeuille en redistribuant la part d'OPCVM entre les autres catégories d'actifs. Ainsi, la proportion des obligations est passée à 80%, alors qu'elle est généralement de l'ordre de 70% dans les portefeuilles des assureurs.

Concernant le portefeuille obligataire, il se compose uniquement d'obligations à taux fixe, en conformité avec les pratiques des compagnies d'assurance françaises. Il inclut 42 obligations, avec des taux coupons variant de 0,5% à 5,5% et une moyenne pondérée de 2,6%. Les maturités varient de 1 à 15 ans, avec une moyenne pondérée de 7 ans. En valeur nette comptable (VNC), il est composé de 41% d'obligations souveraines et de 59% d'obligations d'entreprises. À noter que les montants nominaux sont considérés égaux aux valeurs de marché.

Pour le portefeuille d'actions, nous avons divisé les actions en deux catégories pour tenir compte des chocs liés aux actions imposés par la formule standard de Solvabilité 2 lors du calcul du SCR action. Les actions de type 1 comprennent les indices d'actions d'entreprises de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Économiques) ou de l'EEE (Espace Économique Européen), tandis que les actions de type 2 englobent les actions émergentes ou non cotées. Les actions de type 1 représentent 90% du portefeuille d'actions, tandis que les actions de type 2 constituent les 10% restants. De plus, les actions de type 1 et de type 2 sont subdivisées en deux catégories : 8% d'actions stratégiques et 92% d'actions non stratégiques. La justification de cette distinction est détaillée dans la section 2.1.1 du mémoire.

Le tableau 4.2 présente les taux des plus ou moins-values latentes appliqués aux actifs, sachant que la valeur de marché (VM) est la somme de la VNC (valeur nette comptable) et de la PMVL (plus ou moins-value latente).

Actif	Taux
Action	25%
Obligation	-8,50%
Immobilier	30%
Monétaire	0%

TABLE 4.2 : Taux des plus ou moins-values latentes selon l'actif

On observe une prépondérance du taux de plus ou moins-value latente (PMVL) dans le secteur immobilier, en raison de la hausse significative des prix de l'immobilier ces dernières années. D'après les données de l'INSEE, les prix des logements ont augmenté d'environ 26% entre 2011 et 2023.

Le taux de PMVL des actions découle de l'appréciation générale des indices boursiers ces dernières années, notamment sur le long terme. Par exemple, l'Eurostoxx 50 (SX5E) a enregistré une hausse d'environ 50% entre le 1er janvier 2020 et le 1er mars 2023.

Le taux de PMVL des obligations est influencé par le fait que les assureurs détiennent des obligations acquises lorsque les taux d'intérêt étaient plus bas. Ces obligations offrent désormais des rendements moins attractifs et ne sont plus recherchées sur le marché, ce qui se traduit par une valeur de marché inférieure à leur valeur nette comptable.

4.1.2 Construction du passif

Le passif total est également de l'ordre de 1 milliard d'euros, réparti entre les capitaux propres, la provision pour participation aux excédents (PPE), la réserve de capitalisation et les provisions mathématiques (PM). La répartition est récapitulée dans le tableau 4.3.

Passif	Montant (en Millions €)
Capitaux propres	130
Réserve de capitalisation	2
PPE	30
PM	838

TABLE 4.3 : Composition initiale du passif

On constate que la réserve de capitalisation est très faible. Les capitaux propres ont été augmentés par rapport aux données sources pour refléter la bonne santé économique initiale de la société. Le niveau de la provision pour participation aux excédents (PPE) témoigne également d'une stabilité économique.

Il convient de rappeler que seuls les contrats en euros sont inclus dans notre étude. Par conséquent, les provisions mathématiques sont exclusivement liées à ces contrats et non aux supports en unités de compte (UC).

En examinant plus en détail les provisions mathématiques, qui représentent notre portefeuille d'épargnants, nous constatons qu'il est composé à parts égales d'hommes et de femmes. Ce portefeuille est en mode run-off, ce qui signifie qu'aucune nouvelle affaire, souscription ou versement libre n'est prévu sur les contrats déjà souscrits. De plus, il est structuré en Model Points, regroupant les épargnants selon des caractéristiques communes telles que le taux technique du contrat et le sexe.

L'âge moyen lors de la souscription est fixé à 50 ans, et la durée des contrats est définie en fonction du taux technique. Face à la remontée des taux, nous avons ajusté notre base de contrats pour refléter cette tendance. Ainsi, les taux techniques situés entre 0,5% et 1% demeureront prédominants, car l'assureur détient encore de tels contrats. Cependant, la part des taux techniques oscillant entre 2% et 4% sera accrue pour tenir compte de la revalorisation due à la hausse des taux. Les taux techniques, déduits des frais de gestion, varient entre 0% et 4%.

D'autres paramètres, tels que les hypothèses relatives à la mortalité ou aux rachats, sont détaillés dans la section 2.1.1 de ce document.

4.2 Les KPIs d'analyse

Dans le cadre de notre étude, nous avons sélectionné plusieurs KPIs pour analyser l'impact de la mise en place d'un collar sur le portefeuille d'un assureur.

4.2.1 Le gain de l'assureur

Deux autres indicateurs pertinents pour évaluer l'intérêt des actions pour un assureur ont été identifiés : les fonds propres finaux obtenus à l'horizon de 50 ans dans le scénario de référence et le gain final de l'assureur résultant de son activité d'assurance tout au long de la simulation.

L'indicateur choisi est le gain net de l'assureur, défini comme la somme actualisée des flux de trésorerie spécifiques à l'assureur, incluant ses profits et pertes. Cela comprend 15 % des plus-values non redistribuées aux assurés via la participation aux bénéfices (PB), 100 % des pertes, ainsi que tout endettement éventuel.

$$G_{\text{assureur}_i} = \sum_{t=i}^T \frac{CF_t}{(1+r)^{t-i}},$$

où :

- G_{assureur} représente le gain net de l'assureur,
- CF_t désigne les flux de trésorerie à chaque instant t (qui sont constitués des plus-values non redistribuées via la participation aux bénéfices (PB), les pertes subies par l'assureur, telles que les coûts liés à la stratégie et d'éventuel endettement),
- r est le taux d'actualisation.

Il est nécessaire de discuter l'univers de modélisation pour cet indicateur. Le ratio de solvabilité est défini dans le cadre de Solvabilité 2 et doit être calculé en utilisant un modèle en univers risque neutre. Cependant, les gains calculés n'entrent pas dans ce cadre, ce qui soulève des interrogations sur la pertinence de l'évaluation en risque neutre. L'intérêt d'un assureur pour l'inclusion d'actions dans son bilan repose sur plusieurs considérations. Si le rendement de la poche obligataire est suffisant pour atteindre ses objectifs, l'ajout d'actions pourrait augmenter les risques sans réel bénéfice. Les avantages des actions ne sont pas capturés dans ce contexte, car la valorisation des actions est effectuée en univers risque neutre, ce qui signifie que le rendement des actions est équivalent à celui du taux sans risque et ne dépasse pas celui des obligations. Toutefois, dans la réalité et en utilisant une approche basée sur des probabilités historiques, le rendement des actions est généralement supérieur à celui des obligations. Par conséquent, l'ajout d'actions à l'allocation d'actifs pourrait améliorer le rendement de l'actif dans une perspective historique.

4.2.2 SCR marché

Un autre indicateur utilisé dans le cadre de notre étude est le SCR Marché, présenté plus tôt dans ce mémoire. Il représente une part importante dans le calcul du BSCR (Besoin de Capital de Base) et a donc un grand impact sur la valeur finale du SCR. L'objectif de notre couverture étant de réduire le besoin en capital, il sera intéressant de voir l'impact de notre stratégie sur le SCR Marché.

Il est également important de noter que dans notre modèle ALM, le SCR net est équivalent au SCR brut, car nous n'avons pas pris en compte la réassurance. Ainsi, dans la présentation de nos résultats, le SCR du portefeuille sans couverture reste identique en net et en brut. En

revanche, lorsque nous ajoutons notre couverture, le SCR obtenu est net, car la couverture est prise en compte dans le calcul.

4.2.3 SCR action

Nous avons également choisi le SCR action comme indicateur, avec l'objectif de démontrer que, grâce à notre stratégie de couverture, l'assureur est moins impacté au niveau de ce sous-module du SCR, qui est généralement le deuxième plus important après le SCR taux.

4.2.4 SCR

Le SCR Global est également un bon indicateur, car il est des éléments essentiel dans le calcul du ratio de solvabilité de l'assureur. Dans le cadre de notre modélisation, le SCR obtenu est un SCR net de l'effet absorbeur des provisions technique, notre modèle ALM a été construit pour fournir en résultat final un SCR qui tient compte de cet effet.

4.2.5 Le rendement

Le rendement de l'action, dans le contexte d'une stratégie de couverture, est un indicateur crucial pour plusieurs raisons. Il est donné par la formule suivante :

$$R_{\text{action}_t}(\%) = \left(\frac{\text{Revenus} - \text{Pertes}}{S_t} \right) \times 100$$

- $R_{\text{action}}(\%)$: rendement de l'action exprimé en pourcentage,
- Revenus : revenus générés par l'assureur (vente de call, payoff du put, etc.),
- Pertes : pertes subies par l'assureur, telles que les coûts liés à la mise en place de la stratégie (achat de put, perte éventuelle liée au payoff du call, coûts de gestion, etc.),
- S_t : valeur de l'action à l'instant t .

Premièrement, il offre une mesure concrète de la performance financière globale de l'entreprise. En évaluant le rendement de l'action, nous obtenons une indication directe de la rentabilité des investissements réalisés par l'assureur, en prenant en compte à la fois les revenus générés et les pertes éventuelles.

Deuxièmement, le rendement de l'action constitue un baromètre de la sensibilité de l'entreprise aux fluctuations du marché. Une stratégie de couverture efficace devrait se traduire par une réduction de la volatilité du rendement de l'action, indiquant ainsi une meilleure protection contre les variations soudaines du marché. Un rendement plus stable peut être considéré comme le signe d'une gestion des risques plus solide.

Troisièmement, en se concentrant sur le rendement de l'action, nous pouvons évaluer l'impact de la stratégie de couverture sur la création de valeur pour les actionnaires. Si la stratégie permet de maintenir ou d'améliorer le rendement de l'action, cela peut être interprété comme une création de valeur réussie, renforçant la confiance des investisseurs.

En résumé, le rendement de l'action, en tant qu'indicateur, offre une vision holistique de la santé financière de l'entreprise et de l'efficacité de sa stratégie de couverture. Il permet de mesurer la résilience de l'entreprise face aux mouvements du marché et de déterminer si la mise en place de la couverture atteint ses objectifs de préservation de la valeur pour les actionnaires.

4.3 Analyse des résultats

4.3.1 Analyse du scénario initial

Dans l'analyse initiale du scénario, nous avons commencé avec un portefeuille dont la répartition est présentée dans le Tableau 4.4 pour sa partie d'actif en valeur nette comptable.

Actif	Montant (en millions €)
Action	100
Obligation	800
Immobilier	80
Monétaire	20

TABLE 4.4 : Répartition initiale de l'actif

Ensuite, avec cette allocation d'actifs, nous avons voulu observer l'impact de la stratégie sur le portefeuille de l'assureur.

La stratégie mise en place est celle d'un collar dynamique, combinant un put et un call à strikes fixes. Les strikes choisis sont les niveaux optimaux déterminés précédemment, soit 95% pour le put et 105% pour le call. En ce qui concerne la maturité des options, nous avons également retenu les maturités optimales : une semaine pour les calls et un mois pour les puts. Nous considérons également que c'est l'assureur qui gère sa stratégie et qu'il ne fait pas appel à une structure externe ; ce coût opérationnel est imputé sur le rendement des actions. Cette stratégie sera utilisée tout au long de nos différentes analyses.

Nous avons ensuite envisagé deux situations : dans la première, le portefeuille d'actions n'est pas couvert par la stratégie, tandis que dans le second scénario, il l'est.

Au début de notre étude, nous avons défini des indicateurs clés de performance (KPI) d'analyse, à savoir : le SCR actions, le SCR marché, et le SCR global. Nous avons ensuite lancé notre modèle ALM et obtenu divers résultats, présentés sur le graphique 4.1 :

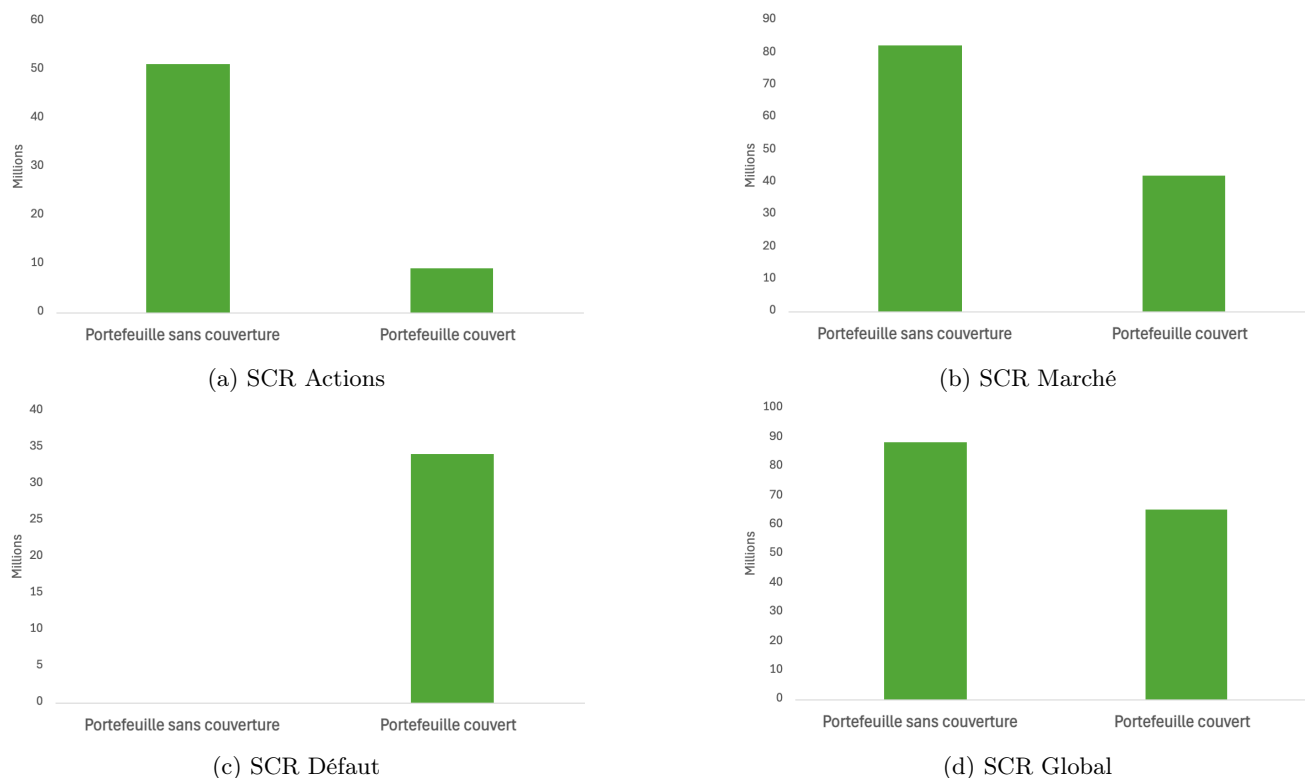


FIGURE 4.1 : Répartition des différentes composantes du SCR

1. SCR Actions

Comme prévu, le SCR Actions couvert est bien inférieur à celui du portefeuille non couvert. Cela s'explique notamment par la détention de puts avec un strike à 95% et les gains réalisés grâce à la vente de calls.

2. SCR Marché

De même, il y a une diminution du SCR Marché avec le portefeuille couvert. Cette réduction est due à la forte diminution du SCR pour les actions grâce à la protection mise en place.

3. SCR Global

Nous avons ensuite voulu évaluer l'impact global sur le SCR. Le calcul du SCR nécessite d'abord de calculer le BSCR. La possession d'un produit dérivé dans notre portefeuille lorsque nous sommes couverts aura un impact sur le calcul du BSCR pour le portefeuille couvert. Comme le montre le graphique, nous avons un SCR Défaut pour le portefeuille couvert d'environ 33M€. On observe qu'en ajoutant le SCR Défaut au calcul du SCR global, nous obtenons une valeur différente du SCR du portefeuille non couvert (une différence de 10M€). Ainsi, le SCR Défaut réduit l'impact de la couverture sur notre portefeuille couvert.

Les autres composantes affectant le SCR sont présentées dans le Tableau 4.5.

Composante SCR	Portefeuille sans couverture (en millions €)
SCR Marché	83,8
SCR Taux	1,1
SCR Actions	51,1
SCR Immobilier	23,1
SCR Spread	18,1
SCR Vie	1,3
SCR Mortalité	0,5
SCR Longévité	0,07
SCR Rachat	1,2
SCR Frais	0,02
SCR Cat	0
BSCR	84,2

TABLE 4.5 : Composantes du SCR pour le portefeuille sans couverture

Avec ces résultats, nous observons que, grâce à notre couverture sur la partie actions, nous parvenons à réaliser un gain au niveau du SCR d'environ 20M€. Bien que l'impact de la stratégie sur le SCR Actions aurait pu entraîner un gain beaucoup plus important, le SCR Défaut, qui influence le calcul du SCR lors de la possession d'un produit dérivé, donne un résultat inférieur.

De plus, comme mentionné lors de l'étude de la stratégie de collar dynamique, dans un marché haussier, le rendement du portefeuille couvert a tendance à être inférieur à celui du portefeuille non couvert.

Par exemple, dans le cas d'un marché haussier comme présenté à la section 3.3.4 de ce mémoire, nous avons un rendement annuel de 10,1% pour le portefeuille non couvert et de 6,8% pour le portefeuille couvert. Dans notre cas, à la fin de la première année, le portefeuille non couvert rapporterait 10 100 000 € et le portefeuille couvert 6 800 000 €, entraînant une perte de 3 300 000 €. Cette perte réduirait encore le gain du SCR avec un impact sur les passifs, notamment sur la participation aux bénéfices. Ainsi, notre stratégie devient vraiment attrayante en période de marché baissier car, en plus de gagner au niveau du SCR, nous gagnons également en termes de performance des actions. Cependant, dans le scénario inverse, l'impact de la stratégie est atténué.

4.3.2 Analyse des résultats avec une nouvelle répartition des actifs

Dans cette partie, nous avons souhaité modifier le portefeuille d'actifs initial en augmentant la part en actions et en réduisant la part en obligations. L'objectif était de voir si une telle répartition permettait de meilleures performances par rapport à celle de la section précédente. Nous avons utilisé les deux répartitions suivantes :

Actif	Montant (en Millions €)
Action	324
Obligation	576
Immobilier	80
Monétaire	20

TABLE 4.6 : Répartition 1 : Actions

Actif	Montant (en Millions €)
Action	450
Obligation	450
Immobilier	80
Monétaire	20

TABLE 4.7 : Répartition 2 : Actions

Nous avons réalisé les mêmes analyses que dans la section précédente et avons obtenu les résultats présentés sur la figure 4.2.

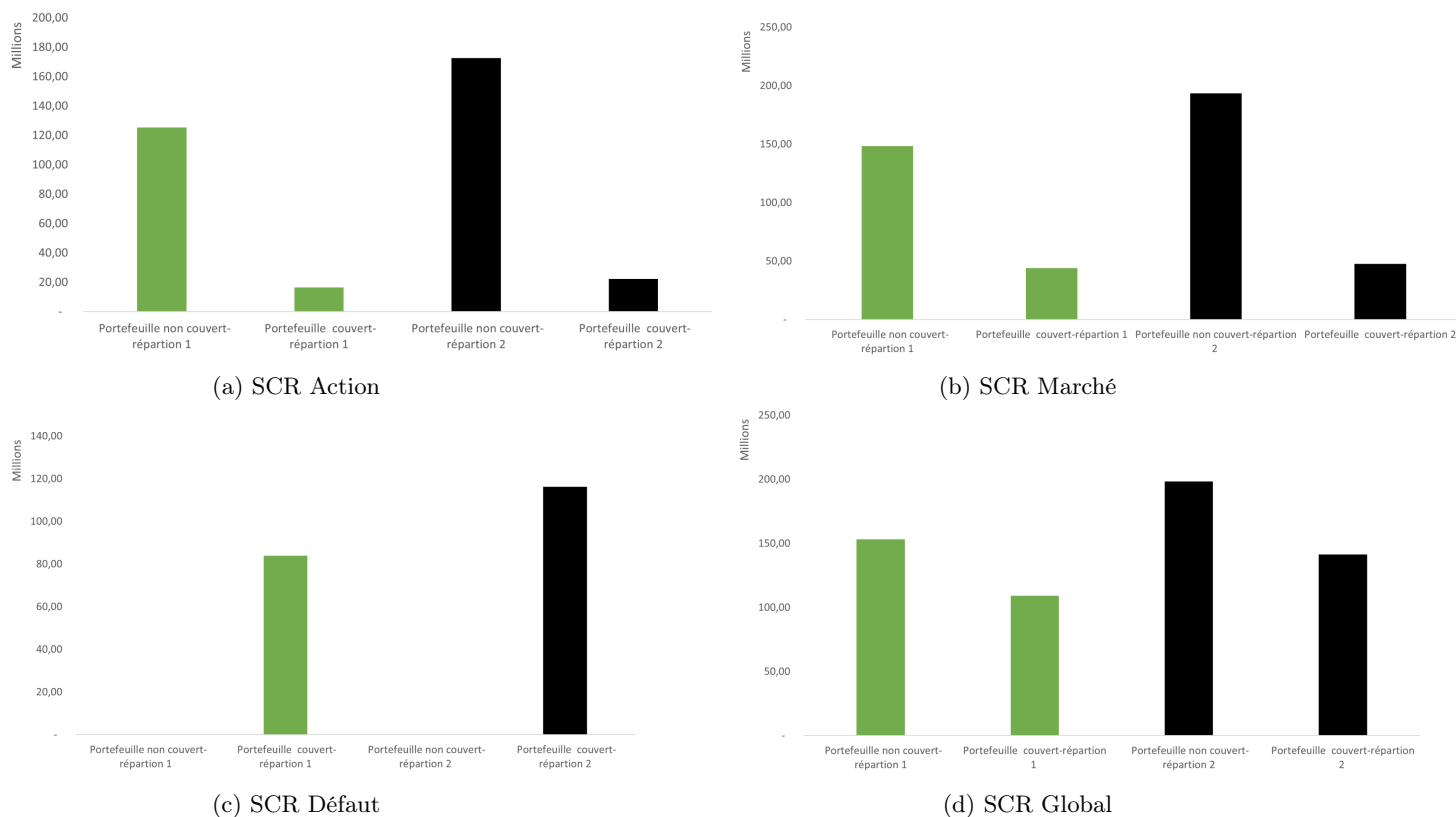


FIGURE 4.2 : Répartition des différentes composantes du SCR

1. Le SCR Action

Comme on peut le constater, dans les deux cas, il y a une forte réduction du SCR Action pour le portefeuille couvert. Cependant, lorsque l'on calcule le ratio SCR Action du portefeuille couvert sur le SCR Action du portefeuille non couvert, ce ratio est d'environ 0,13 dans les deux cas. Ce ratio est également identique à celui obtenu pour le portefeuille initial. Ainsi, l'augmentation de la proportion d'actions dans le portefeuille n'a pas d'impact significatif sur la couverture ; on ne bénéficie pas d'une meilleure couverture en augmentant la part d'actions.

Cependant, une conséquence de cette augmentation de la valeur attribuée au portefeuille actions est l'augmentation du SCR Action, que ce soit pour le portefeuille couvert ou celui non couvert.

2. Le SCR Marché

Au niveau du SCR Marché, le constat est un peu différent. En effet, par rapport à la situation initiale où le ratio SCR Marché du portefeuille couvert sur le SCR Marché du portefeuille non couvert était de 50%, dans nos deux cas, nous obtenons un ratio d'environ 27%. Ainsi, avec une augmentation de la valeur attribuée à la partie actions, le SCR Marché est réduit de manière plus significative.

3. Le SCR Global

Comme dans la section 4.3.1, le calcul du SCR dépend de celui du SCR Défaut. Nous avons donc souhaité évaluer l'impact de cette modification de la répartition des actifs sur le SCR Global. De plus, le SCR obtenu est un SCR net de l'effet absorbeur des provisions technique, notre modèle ALM a été construit pour fournir en résultat final un SCR qui tient compte de cet effet.

Les autres composantes du SCR sont représentées dans les tableaux 4.8 et 4.9.

Composante SCR	Portefeuille sans couverture (en Millions €)	Portefeuille avec couverture (en Millions €)
SCR Marché	148,3	43,9
SCR Taux	4,4	6,2
SCR Action	125,2	16,5
SCR Immobilier	20,1	20,1
SCR Spread	9,6	9,6
SCR Vie	2,9	2,9
SCR Mortalité	0,8	0,8
SCR Longévité	0,1	0,1
SCR Rachat	2,7	2,7
SCR Frais	0,2	0,2
SCR Catastrophe	0	0
BSCR	149,1	104,9

TABLE 4.8 : Composantes du SCR pour la Répartition 1

Composante SCR	Portefeuille sans couverture (en Millions €)	Portefeuille avec couverture (en Millions €)
SCR Marché	193,4	47,6
SCR Taux	5,5	7,3
SCR Action	172,6	22,2
SCR Immobilier	19,5	19,5
SCR Spread	7,4	7,4
SCR Vie	2,8	2,8
SCR Mortalité	0,7	0,7
SCR Longévité	0,2	0,2
SCR Rachat	2,5	2,5
SCR Frais	0,01	0,01
SCR Catastrophe	0	0
BSCR	194,1	137,1

TABLE 4.9 : Composantes du SCR pour la Répartition 2

Comme le montre le graphique 4.2, plus la valeur attribuée à la partie actions du portefeuille est élevée, plus le SCR Défaut est important. Comme observé dans la section précédente, cela

tend à réduire l'impact de la stratégie sur le SCR Marché et, par conséquent, sur le SCR Global.

Concernant le SCR Global, comme on pouvait s'y attendre, le SCR Défaut a réduit l'impact de la stratégie sur le SCR. En comparant le ratio SCR du portefeuille couvert sur le SCR du portefeuille non couvert dans les deux cas, nous obtenons une valeur d'environ 70%, similaire à celle observée avec le portefeuille initial.

Ainsi, augmenter la valeur attribuée aux actions n'améliore pas significativement la couverture ; la stratégie a un impact similaire quel que soit le cas. En termes de rendement financier, toutefois, la situation est différente. En augmentant le montant initial attribué aux actions et en mettant en place la stratégie, on prend un risque sur le rendement financier futur. Comme nous l'avons vu précédemment, la stratégie du collar dynamique est particulièrement avantageuse en période baissière. En dehors de ce scénario, cette stratégie peut réduire le rendement des actions. En modifiant la répartition du portefeuille d'actifs, nous avons attribué une plus grande valeur aux actions et réduit notre investissement en obligations. Ainsi, en période haussière, nous pourrions subir une perte liée au rendement et une autre liée à la diminution de l'investissement en obligations. Le gain en SCR ne compensera pas nécessairement cette perte. Par conséquent, augmenter la valeur attribuée aux actions en réduisant l'investissement en obligations peut être une stratégie potentiellement risquée par rapport à la stratégie initiale, sachant que cette augmentation n'a pas d'effet concret sur le SCR. La stratégie à adopter dépendra donc des objectifs d'investissement de l'assureur.

4.3.3 Analyse des résultats avec une portion du portefeuille action couvert

Comme on l'a vu dans la section précédente, augmenter la valeur du portefeuille action au détriment du portefeuille obligataire n'est pas forcément la meilleure stratégie.

Dans cette partie, nous utilisons à nouveau le portefeuille actif de la section 4.3.1, mais nous n'allons pas totalement couvrir le portefeuille action. Ainsi, une partie du portefeuille action sera couverte, et une autre partie n'aura pas de protection.

Les répartitions choisies sont les suivantes :

N	Répartition
0	100% du portefeuille action n'est pas couvert
1	100% du portefeuille action couvert
2	20% du portefeuille couvert
3	30% du portefeuille couvert
4	50% du portefeuille couvert
5	80% du portefeuille couvert

TABLE 4.10 : Répartition action

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.3.

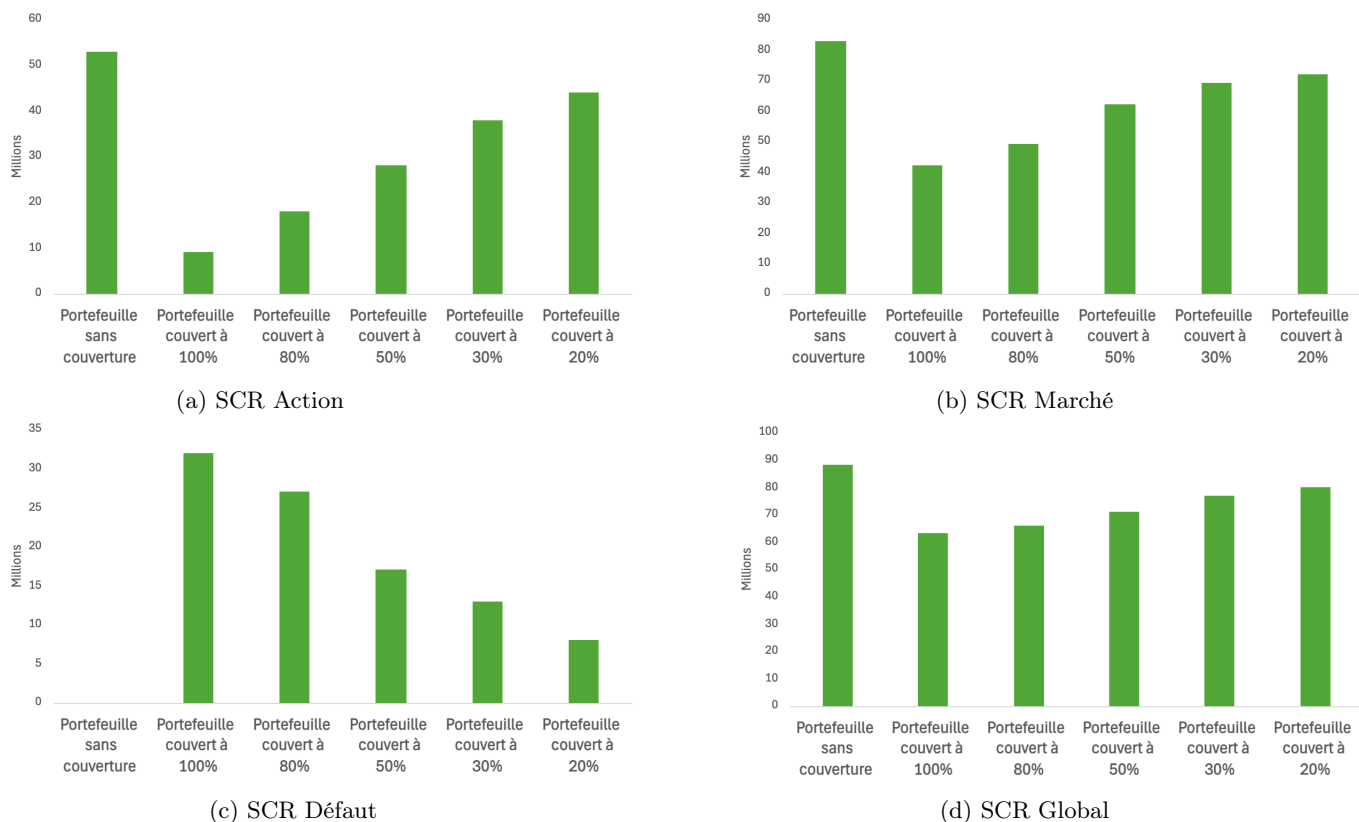


FIGURE 4.3 : Répartition des différentes composantes du SCR

1. Le SCR action

Les résultats obtenus sur le graphique 4.3 étaient prévisibles. En effet, plus la proportion d'actions couvertes diminue, plus le SCR action augmente, ce qui est logique car en réduisant le pourcentage du portefeuille d'actions couvert, on réduit sa protection.

2. Le SCR marché

Le calcul du SCR marché dépend du SCR action. On peut constater sur la figure 4.3 qu'en réduisant notre protection sur le portefeuille action, l'augmentation de la valeur du SCR action entraîne également celle du SCR marché. Ainsi, sur notre graphique, on peut constater qu'en réduisant notre couverture, notre SCR marché augmente.

3. Le SCR Global

Le calcul du SCR dépend de celui du SCR Défaut. Nous avons voulu voir l'impact de notre répartition sur ce module dans un premier temps.

Comme on peut le constater sur le graphique 4.3, plus la proportion du portefeuille non couvert est importante, plus le SCR Défaut diminue. Ce résultat s'explique par le fait qu'en réduisant la partie couverte, on réduit notre protection, et nous sommes ainsi moins impactés par un risque de défaut car la somme investie pour la protection est réduite. Le SCR Défaut ayant un impact sur la valeur du SCR, il est intéressant de voir quel est l'impact suivant les différentes répartitions (proportion d'actions couvertes et non

couvertes).

On observe ainsi sur la figure 4.3 qu'une réduction de la proportion du portefeuille action couvert a tendance à augmenter la valeur du SCR. En effet, la réduction de la valeur du SCR due à la réduction de la protection est compensée par l'augmentation du SCR marché due à l'augmentation du SCR action.

Les résultats ci-dessus ont tendance à nous encourager à privilégier une stratégie de couverture à 100%, car elle entraîne une forte réduction du SCR. Cependant, comme nous avons pu le voir dans les sections précédentes, il est également important d'examiner l'impact de la stratégie sur le rendement futur de notre portefeuille d'actions. Ainsi, nous nous sommes placés dans différentes conditions de marché et avons étudié l'impact de la stratégie selon la proportion du portefeuille couvert sur le rendement.

Nous avons obtenu les résultats ci-dessous :

1. Cas d'un marché baissier

La figure 4.4 résume les résultats obtenus suivant la proportion de portefeuille couvert.

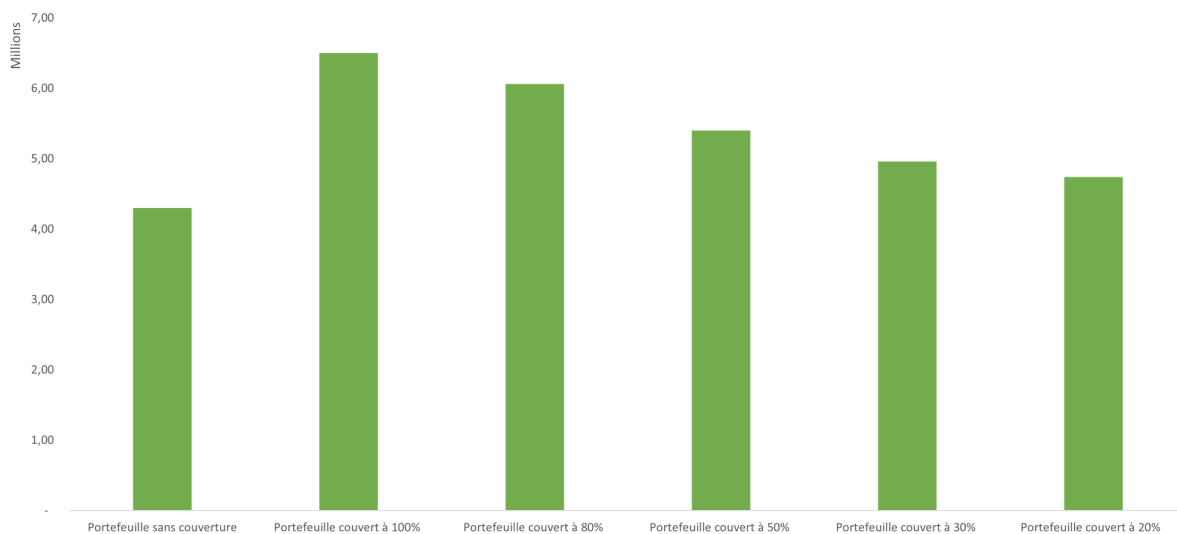


FIGURE 4.4 : Rendement en marché baissier

Comme on aurait pu le prévoir, en cas de marché baissier, c'est le portefeuille avec une couverture à 100% en actions qui a le meilleur rendement, et plus on réduit la couverture, plus le rendement diminue.

2. Cas d'un marché haussier

La figure 4.5 résume les résultats obtenus suivant la proportion de portefeuille couvert.

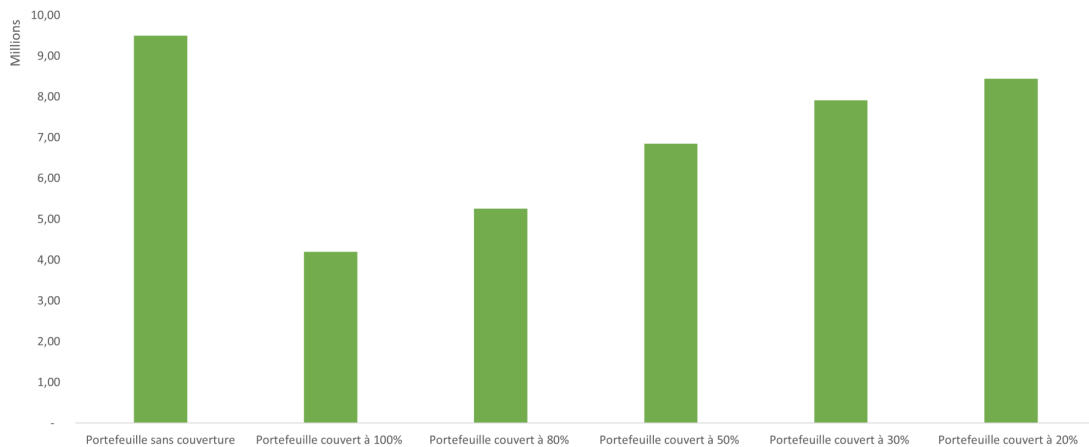


FIGURE 4.5 : Rendement en marché haussier

En marché haussier, c'est la tendance inverse qui est observée. En effet, plus le portefeuille d'actions est couvert, plus il est impacté par la sous-performance de la stratégie dans ce type de marché, et la conséquence est une diminution du rendement.

3. Cas d'un marché en stagnation

La figure 4.6 résume les résultats obtenus suivant la proportion de portefeuille couvert.

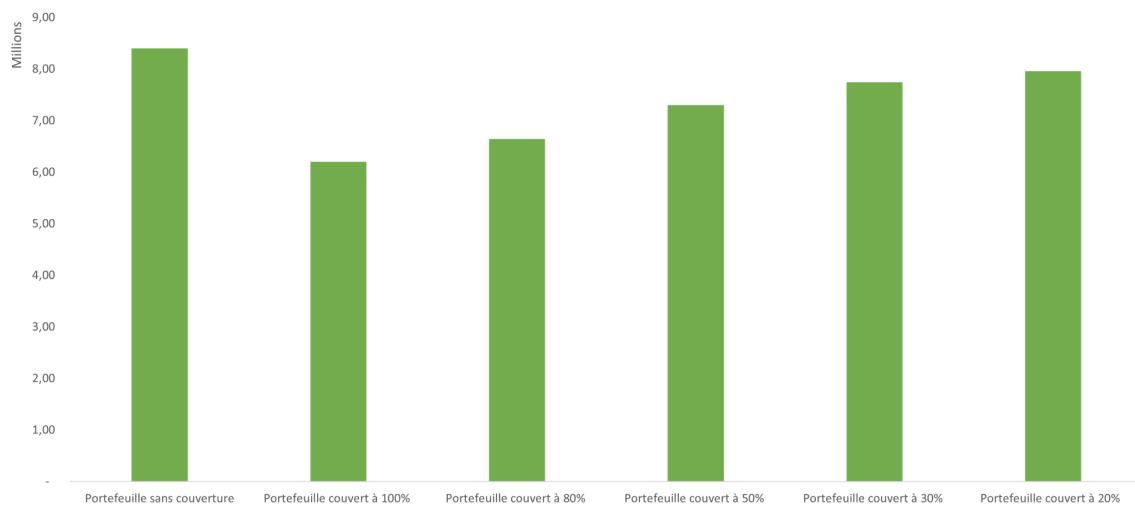


FIGURE 4.6 : Rendement dans un marché sans tendance

Dans ce type de marché, le rendement du portefeuille sans couverture étant généralement supérieur à celui du portefeuille couvert, on obtient des résultats semblables à un marché haussier. Ainsi, plus on aura une part importante du portefeuille d'actions qui sera couverte, plus le rendement du portefeuille d'actions sera réduit.

À la suite de ces résultats, nous avons souhaité déterminer en moyenne si notre stratégie était rentable. Comme on peut l'observer dans les différents résultats ci-dessus, cela est le cas lorsque nous nous trouvons dans une situation de marché baissier en général.

Pour vérifier cela, nous avons mis en place un algorithme qui nous permettait de simuler 6000 trajectoires différentes pour notre sous-jacent en utilisant un modèle de Black-Scholes. La volatilité était de 20%, la plus élevée observée sur le marché lié à l'Eurostoxx à la date du 23 mai 2023 (donnée provenant de Bloomberg). Le taux d'intérêt sans risque était de 3%, et la projection s'effectuait sur trois années avec un pas de temps d'une semaine.

Nous avons obtenu divers résultats, l'objectif étant de les comparer à la fin de la troisième année pour déterminer si le portefeuille couvert a été le plus performant. Nous avons défini une variable aléatoire X qui représente la différence entre le portefeuille couvert et celui qui ne bénéficie pas de la couverture.

Nous avons déterminé la fonction de répartition et de densité de la variable aléatoire X . On obtient les résultats présentés sur la figure 4.7.

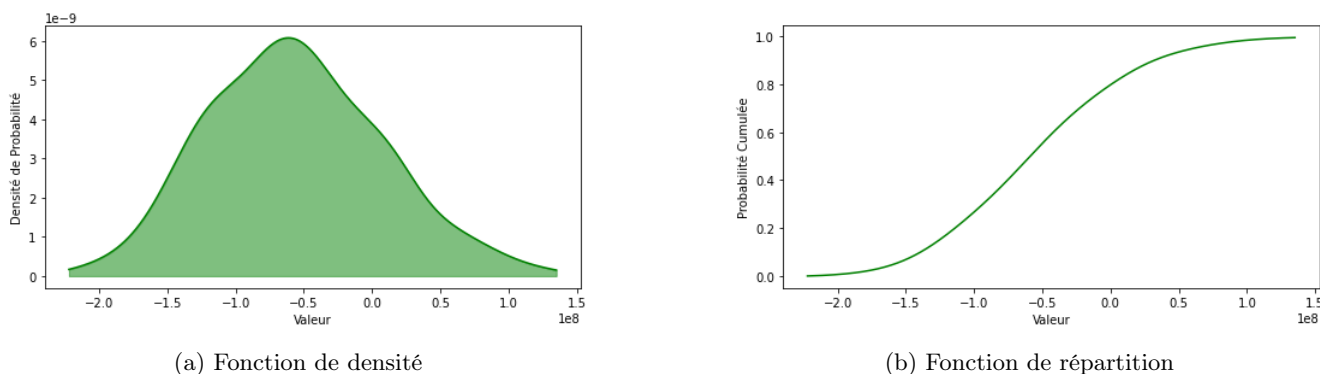


FIGURE 4.7 : Fonction de densité et de répartition

Comme on peut l'observer sur ces graphiques, la probabilité d'avoir un gain inférieur à zéro est d'environ 0.70. En général, en mettant en place notre stratégie, nous sommes moins performants qu'un portefeuille couvert en moyenne dans 70% des cas.

Ce résultat nous a permis de confirmer à nouveau les résultats qui étaient déjà observables dans nos stratégies de backtesting et également dans les stratégies présentées précédemment dans ce mémoire.

4.3.4 Détermination d'une couverture optimale

À la suite de ces considérations, nous avons entrepris de déterminer quelle pourrait être la couverture optimale. En effet, comme nous l'avons exposé dans les sections précédentes, une couverture accrue de notre portefeuille se traduit par une réduction moyenne de notre rendement, malgré les gains réalisés au niveau du SCR. Dans cette phase, notre objectif était d'établir la proportion optimale du portefeuille à couvrir, conciliant la stabilité du rendement, la protection et les gains en SCR.

Afin d’atteindre cet objectif, nous avons généré 6000 trajectoires pour différentes proportions de couverture du portefeuille, puis déterminé le rendement moyen, en prenant en considération le coût associé à la mise en place de la stratégie.

Nous avons obtenu les résultats présentés sur la figure 4.8 (sur l’axe des ordonnées, les rendements sont en % et ont été divisés par 10 pour une meilleure lisibilité).

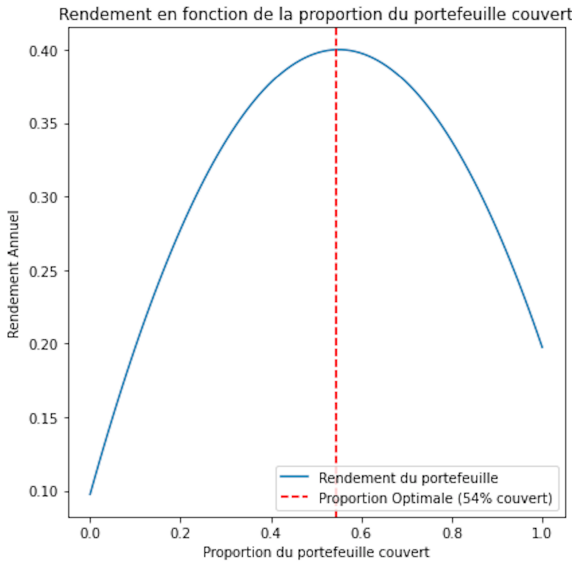


FIGURE 4.8 : Rendement Optimal

Comme illustré sur la figure 4.8, le portefeuille couvert à hauteur de 54% présente le meilleur rendement moyen. En conséquence, nous avons choisi d’explorer plus en détail le comportement de ce portefeuille optimal dans deux scénarios distincts, en le comparant à un portefeuille sans couverture.

Le tableau 4.13 résume les résultats obtenus.

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille couvert
Rendement	4.3%	5.6%

TABLE 4.11 : Rendement en marché baissier

	Portefeuille sans couverture	Portefeuille couvert
Rendement	9%	6.8%

TABLE 4.12 : Rendement en marché haussier

TABLE 4.13 : Comparaison des rendements en marché baissier et haussier

Impact de la stratégie de couverture sur les modules du SCR et la diversification

L'application d'une stratégie de *collar* dynamique sur la poche actions du portefeuille (d'un montant initial de 100 M€) modifie sensiblement la répartition des risques dans le calcul du SCR selon la formule standard. Le portefeuille analysé comprend également 800 M€ investis en obligations souveraines de haute qualité, faiblement sensibles au risque de crédit ou de spread.

Effet sur le SCR actions La couverture optionnelle a permis de limiter fortement l'exposition aux pertes extrêmes du marché actions, entraînant une **réduction significative du SCR actions**. À titre illustratif, en supposant un choc de 39 % sur les actions avant couverture (scénario standard pour les actions de type I), le SCR actions initial s'élevait à 39 M€. Après application de la stratégie de couverture, les pertes simulées dans le worst-case sont amorties, ramenant le SCR actions à environ 22 M€, soit une réduction de près de 44 %.

Effet sur le SCR taux Le SCR taux, principalement porté par la poche obligataire (800 M€), n'est pas affecté par la stratégie de couverture, car celle-ci cible exclusivement les actions. Il reste estimé à environ 1,1 M€, correspondant à un stress parallèle des taux selon la courbe standard EIOPA.

Effet sur la diversification Dans le cadre de la formule standard, les différents modules de risque sont agrégés via une matrice de corrélation définie par la réglementation. En particulier, la corrélation entre les modules actions et taux est de -25% , ce qui crée un **effet de diversification** favorable lorsque les deux risques sont significatifs. En réduisant fortement le SCR actions, la stratégie amoindrit ce mécanisme de diversification croisée.

Composant	Avant couverture	Après couverture	Variation
SCR actions	39,0 M€	22,0 M€	-43,6 %
SCR taux	1,10 M€	1,10 M€	0 %
SCR total brut	57,0 M€	40,0 M€	-29,8 %
Diversification (Action/Taux)	-8,8 M€	-5,4 M€	-38,6 %
SCR net	84,2 M€	63,6 M€	-24,5 %

TABLE 4.14 : Impact de la stratégie de couverture sur le SCR et la diversification

Comme on le voit dans le tableau 4.14, la réduction du module *actions* ($-43,6\%$) se traduit par une baisse du SCR net de $28,3\%$. Le module *taux* reste inchangé, la stratégie ne portant pas sur cette poche.

En revanche, la *diversification*, c'est-à-dire l'effet de corrélation négative (-25%) entre SCR actions et SCR taux défini par la réglementation diminue également en valeur absolue ($-38,6\%$). Cette évolution correspond à une réduction de la compensation permise par la matrice de corrélation entre ces deux modules.

Conclusion : L'effet principal de la stratégie se traduit par une nette réduction du SCR actions et, en conséquence, une baisse du SCR net global. Cependant, cette diminution s'accompagne d'une baisse de la diversification intermodulaire, ce qui atténue partiellement le bénéfice global. Ce constat souligne l'importance de considérer non seulement les modules

individuels, mais aussi la structure de corrélation qui régit leur agrégation dans le cadre réglementaire Solvabilité 2.

Synthèse

Comme précédemment exposé, la diminution de la proportion du portefeuille couvert entraîne une augmentation du SCR. Cette augmentation découle de la réduction du niveau de protection contre les pertes extrêmes sur le portefeuille d'actions, ce qui accroît le risque actions, mais également de la diminution de l'effet de couverture contre le risque de défaut implicite. En l'absence de compensation suffisante entre ces risques, le SCR global s'accroît. Toutefois, il est essentiel de considérer également la dimension rendement, car l'objectif n'est pas seulement de se prémunir contre les risques, mais aussi de préserver une performance satisfaisante du portefeuille.

Notre analyse révèle que, pour diverses répartitions entre actions couvertes et non couvertes, le rendement varie favorablement selon les conditions de marché. En l'absence de tendance marquée (marché horizontal), un portefeuille d'actions non couvertes présente généralement le rendement moyen le plus élevé. Cela traduit une corrélation positive entre le taux d'exposition au marché actions et le rendement potentiel, ce qui est intuitif mais doit être pondéré par la prise de risque induite.

Ainsi, le rendement évolue de manière opposée au SCR en fonction de la proportion d'actions couvertes. L'arbitrage entre rendement et capital réglementaire devient alors central dans le choix de la stratégie.

Un aspect complémentaire, concerne l'effet de la couverture sur la **diversification réglementaire entre modules de risque**. En particulier, la formule standard Solvabilité 2 agrège le SCR actions et le SCR taux à l'aide d'une matrice de corrélation dans laquelle une corrélation négative (-25%) est appliquée entre ces deux modules. Or, la réduction significative du SCR actions par la stratégie de couverture a pour effet secondaire d'*atténuer l'effet de diversification intermodulaire*, ce qui limite mécaniquement la baisse du SCR net agrégé.

En d'autres termes, si la couverture réduit le risque actions, elle réduit aussi le potentiel de compensation entre modules dans la formule d'agrégation. Cela suggère qu'il pourrait être pertinent, dans une logique d'optimisation du capital, de **ne pas couvrir intégralement** la poche actions mais de rechercher un équilibre permettant à la fois une réduction ciblée du risque actions et un maintien d'un certain effet de diversification avec le risque taux.

Dans cette perspective, une allocation intermédiaire de **54 % couvert / 46 % non couvert** apparaît comme la plus efficiente. Elle permet de maintenir un niveau de SCR modéré par rapport à un portefeuille entièrement couvert, tout en assurant un rendement global qui reste compétitif, même en l'absence de tendance haussière marquée. Par ailleurs, elle préserve une contribution non négligeable du SCR actions, qui continue de jouer un rôle dans la diversification avec le SCR taux.

Ainsi, cette répartition se présente comme un **compromis optimal** entre réduction du capital requis, maintien du rendement, et conservation partielle de l'effet de diversification réglementaire au sein du SCR global.

4.4 Exploration de stratégies alternatives de couverture

En complément de la stratégie principale de type *collar dynamique*, plusieurs stratégies alternatives ont été testées afin d'examiner leur capacité à réduire efficacement le SCR actions tout en préservant un rendement satisfaisant. Ces stratégies visent à répondre à la nature non-linéaire du risque actions dans le cadre de Solvabilité 2, qui rend parfois insuffisante une simple couverture directionnelle ou delta-neutre.

Le **SCR actions** représente le capital requis pour absorber les pertes du portefeuille actions en cas de choc de marché. Sous Solvabilité 2, ce choc est défini de manière **déterministe et uniforme** : une baisse instantanée de -39% (type I) ou -49% (type II) est appliquée à la valeur du portefeuille, puis la perte résultante est mesurée.

Un choc appliqué sur la valeur totale du portefeuille, y compris les dérivés

Le stress est appliqué sur la *valeur de marché* du portefeuille complet, incluant les options ou instruments dérivés utilisés pour se couvrir. Or, les options possèdent un profil de gain/perte **non-linéaire** : leur valeur ne varie pas proportionnellement au sous-jacent. Cela implique que la perte finale du portefeuille ne suit pas une simple règle proportionnelle à l'exposition en actions.

Une stratégie delta-neutre est ainsi insuffisante dans un choc extrême

Une stratégie dite *delta-neutre* annule la sensibilité immédiate du portefeuille aux petites variations du marché, mais ne tient pas compte de la **courbure** du payoff (gamma). Lors d'un choc important comme celui utilisé pour calculer le SCR, le delta du portefeuille évolue fortement, et la couverture devient inopérante.

Exemple illustratif : réponse non-linéaire d'un portefeuille

Stratégie	Choc marché	Perte simulée	SCR actions
Sans couverture	-39%	-39 M€	39 M€
Put	-39%	-5 M€	5 M€
Collar	-39%	-15 M€	15 M€
Delta-neutre	-39%	-30 M€	30 M€

Ainsi, Le SCR actions est une mesure **non-linéaire**, car il évalue l'impact d'un stress extrême sur un portefeuille contenant potentiellement des instruments à payoff non-linéaire. Pour le réduire efficacement, il ne suffit pas d'annuler la sensibilité directionnelle (delta), il faut **introduire de la convexité** via des options comme des puts ou des collars.

4.4.1 Les stratégie mise en place

En complément de la stratégie principale de type *collar dynamique*, plusieurs stratégies alternatives ont été testées afin d'examiner leur capacité à réduire efficacement le SCR actions tout en préservant un rendement satisfaisant. Ces stratégies visent à répondre à la nature non-linéaire du risque actions dans le cadre de Solvabilité 2, qui rend parfois insuffisante une simple couverture directionnelle ou delta-neutre.

Stratégie put seul : L'achat d'un put (sans vente de call) représente la forme la plus directe de protection, permettant de caper la perte maximale. Bien que très efficace pour réduire le SCR actions dans les scénarios extrêmes, cette stratégie présente un **coût important**, ce qui détériore significativement le rendement du portefeuille, surtout en l'absence de stress effectif sur les marchés. Elle reste toutefois une référence utile pour comparer d'autres approches plus économiques.

Stratégie put spread : Le put spread consiste à acheter un put avec un strike élevé (ex. 95 % du spot) et à vendre un put avec un strike plus bas (ex. 85 %). Cette stratégie permet de réduire le coût de protection tout en conservant une barrière de protection partielle contre les pertes importantes. Elle offre un bon compromis entre réduction du SCR et coût supporté, mais ne protège pas contre les pertes extrêmes au-delà du strike du put vendu.

Stratégie put spread collar :

Cette variante combine le put spread avec la vente d'un call OTM, réduisant encore davantage le coût net de la couverture. Elle permet de construire une protection budgétairement neutre dans certains cas, au prix d'un plafonnement du gain sur actions en cas de rebond important. Cette stratégie est apparue comme l'une des plus performantes en termes de **réduction du SCR net rapportée au coût de mise en place**, tout en préservant un rendement globalement stable dans des conditions de marché modérées à haussières.

Stratégie delta-neutre : Des simulations ont également été menées avec des portefeuilles rendus *delta-neutres*, en combinant exposition actions et positions optionnelles de manière à annuler la sensibilité de premier ordre à de petites variations du sous-jacent. Bien que cette approche soit efficace pour des mouvements faibles du marché, elle se révèle **insuffisante face à des chocs extrêmes**, en raison de l'absence de convexité implicite dans la position. Le SCR actions, étant défini par un stress de grande amplitude, n'est que marginalement réduit par cette stratégie.

Stratégies gamma-neutres ou exotiques : En l'absence d'un marché suffisamment liquide pour construire des stratégies explicitement gamma-neutres (par ex. combinaison fine de straddles, butterfly spreads, ou options exotiques type options lookback/barrier), ces solutions n'ont pas été retenues dans l'implémentation actuelle. Leur complexité, leur coût élevé et leur faible disponibilité sur des portefeuilles institutionnels limitent leur intérêt opérationnel dans le cadre prudentiel testé ici.

4.4.2 Résultats obtenus

Le coût de chacune de ces stratégies est calculé comme la *somme des primes nettes* payées à l'achat des options moins les primes reçues à la vente, annualisée en pourcentage de l'encours couvert :

$$\text{Coût annuel} = \frac{1}{V_{\text{couv}}} \times \sum_{t=1}^{54} \left(\text{Primes}_{\text{achetées},t} - \text{Primes}_{\text{vendues},t} \right) \times 100 \%$$

où V_{couv} est la valeur moyenne mensuelle des actions couvertes, et l'on suppose 54 rebalancements par an, les frais, étant incorporés dans la prime, représentent 5points de base du notionnel.

Nous avons obtenus les résultats suivant dans le tableau 4.15 :

Stratégie	Rendement espéré (%)	SCR actions (M€)	Coût annuel (%)
Aucune couverture	6.0	39.0	0.0
Put	3.5	5.0	2.5
Put spread	4.5	12.0	1.2
Put spread collar	5.0	14.0	0.8
Collar dynamique	5.2	15.5	0.7
Delta-neutre	5.5	30.0	0.2

TABLE 4.15 : Comparatif des stratégies de couverture-Rendement, coût et SCR actions

Graphiquement nous avons le résultat présenté sur la figure 4.9 :

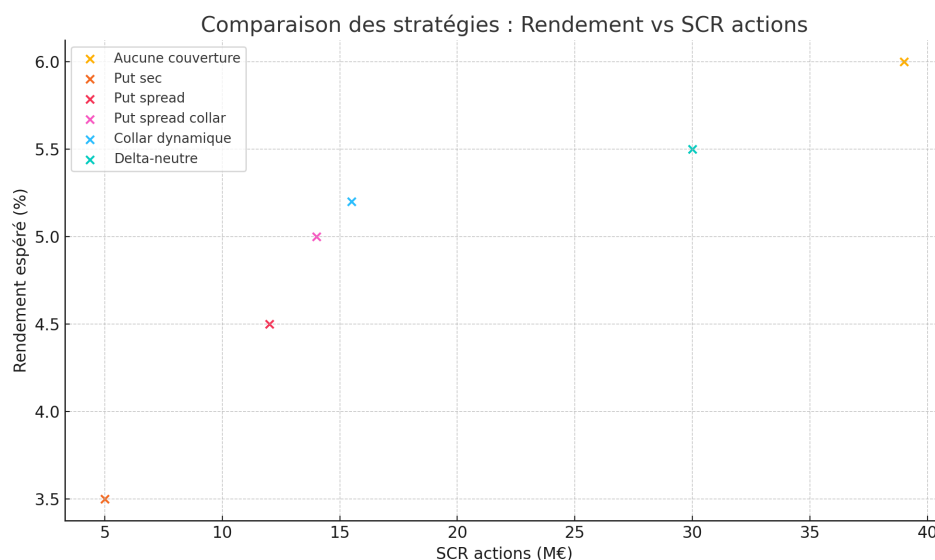


FIGURE 4.9 : Comparaison des stratégies : Rendement vs SCR actions

L'analyse comparative des différentes stratégies de couverture met en lumière des compromis importants entre **efficacité de réduction du SCR actions**, **rendement espéré** et **coût de mise en œuvre**. Les résultats peuvent être synthétisés comme suit :

- **La couverture par put**, offre la meilleure protection en termes de SCR (réduction jusqu'à 85%), mais au prix d'un coût élevé, qui pénalise significativement le rendement. Elle peut être envisagée dans des contextes de forte aversion au risque ou lorsque le portefeuille présente des engagements très longs.
- **Le put spread**, représente un compromis efficace, limitant les pertes au-delà d'un certain seuil tout en réduisant le coût global de la couverture. Il protège contre les chocs modérés à sévères, mais expose le portefeuille à des pertes extrêmes au-delà du put vendu.

- **Le put spread collar**, en combinant un put spread avec la vente d'un call OTM, ont parvient à réduire le coût net de la stratégie tout en conservant une convexité utile. Il s'agit de la stratégie la plus équilibrée testée dans cette étude, en termes de SCR, de coût et de maintien du rendement.
- **La stratégie delta-neutre**, bien qu'intuitivement séduisante, s'avère insuffisante dans le cadre prudentiel Solvabilité 2. Elle neutralise les petites variations du marché mais ne protège pas efficacement contre un stress de grande amplitude, ce qui limite son impact sur le SCR.

Élément déterminant la convexité du profil de payoff : Les stratégies offrant une *convexité implicite*, comme le put ou le collar, se révèlent structurellement plus efficaces pour atténuer le SCR actions, du fait de la non-linéarité de ce dernier. À l'inverse, les stratégies purement directionnelles ou linéaires (comme les positions delta-neutres) ne permettent pas de capturer cet effet.

Recommandation

À la lumière de ces éléments, la stratégie de **put spread collar dynamique** constitue la meilleure alternative testée, alliant :

- une **réduction substantielle du SCR actions**,
- un **coût modéré voire nul** en fonction des strikes sélectionnés,
- et un **rendement espéré compétitif** dans différents régimes de marché.

Elle constitue ainsi un compromis optimal entre **robustesse réglementaire**, **efficacité de la couverture**, et **implémentation réaliste**, parfaitement adapté à un gestionnaire prudentiel soucieux de contenir son capital réglementaire sans sacrifier la performance.

4.4.3 Limites de notre étude

Il convient de reconnaître plusieurs limites qui affectent la portée et la précision de nos résultats. Premièrement, nous avons supposé que l'impact de la couverture sur le passif était négligeable, en maintenant les fonds propres constants. Or, la mise en place d'une stratégie de type collar modifie le Best Estimate (BE) et donc les provisions techniques, ce qui influe directement sur le ratio de solvabilité. De surcroît, sans validation formelle de l'ACPR, seule une prise en compte partielle au niveau du passif peut être retenue, limitant temporairement l'effet complet de la couverture dans le bilan.

Deuxièmement, notre étude a omis le module SCR défaut pour le portefeuille non couvert, en négligeant toute réassurance. En réalité, un SCR défaut positif sur la poche non protégée viendrait réduire l'effet relatif de la couverture sur le SCR global et modifie la hiérarchie des contributions entre modules de risque.

Troisièmement, les contraintes de capacité de nos machines et la disponibilité des données de marché ont impacté notre étude, en particulier les données sur les calls de maturité inférieure à un mois, car ces données sont très peu exhaustives sur le marché. Travaillant avec des données

prises à jour en mars 2023, il aurait été intéressant d'utiliser des données plus récentes pour un calibrage optimal, offrant une meilleure représentation du smile de volatilité actuel et des prix d'options plus proches des valeurs actuelles du marché.

Quatrièmement, l'hybridation des modèles SABR et Black-Scholes introduit une complexité additionnelle : la formule fermée de Black-Scholes n'est plus rigoureusement valide lorsque la volatilité devient stochastique. Nous avons néanmoins validé a posteriori la cohérence des prix avec les cotations de marché. Un modèle alternatif, tel que Heston ou un modèle local-stochastique complet, offrirait une meilleure adéquation aux dynamiques observées.

Cinquièmement, si la stratégie de couverture réduit le SCR actions, elle atténue simultanément l'effet de diversification avec le SCR taux (corrélation réglementaire de 25%, ce qui n'est pas toujours explicité dans les moteurs ALM standards. L'oubli de cette interaction structurelle peut conduire à une estimation biaisée du gain de capital total.

Sixièmement, notre portefeuille a été protégé exclusivement par un collar à strikes fixes. Nous n'avons pas implémenté de stratégies exotiques (barrier, lookback) ni de couvertures gamma-neutres, dont la mise en œuvre est freinée par le coût élevé et la faible liquidité. De même, une simple couverture delta-neutre, bien qu'économique, s'avère insuffisante pour réduire le SCR actions sous choc extrême, en raison de la non-linéarité du capital requis.

Enfin, le coût de la stratégie a été estimé en additionnant les primes nettes sur 54 rebalancements annuels et en les ramenant à l'encours couvert. Cette méthode ne tient pas compte de l'évolution de la volatilité implicite ni des spreads bid-ask en période de stress, qui peuvent multiplier par deux ou trois le coût effectif. Les frais opérationnels liés à la fréquence de rebalancement (commissions, slippage) ne sont pas non plus modélisés.

En somme, nos résultats constituent une vision simplifiée de l'impact de la couverture sur le bilan d'un assureur-vie. Pour une application opérationnelle, il sera nécessaire d'intégrer ces limites de données, de modélisation, de coût et de gouvernance afin de disposer d'estimations robustes et réalistes du SCR et des indicateurs financiers associés.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de quantifier l'impact d'une stratégie de *collar dynamique* sur le portefeuille d'actions d'un assureur-vie dans le cadre du régime prudentiel Solvabilité 2.

Pour y parvenir, nous avons d'abord construit un modèle de tarification des produits dérivés, capable de reproduire les prix observés sur les marchés. Après avoir étudié différents cadres théoriques, nous avons retenu un modèle de type Black-Scholes, enrichi par une volatilité déterministe issue du modèle SABR. Ce couplage nous a permis d'accéder à une approximation fermée des prix des options, tout en prenant partiellement en compte la structure de volatilité observée.

Par la suite, nous avons intégré cette modélisation au sein du moteur de projection actif-passif (ALM) développé par Sia Partners, dans le but d'évaluer l'impact de différentes stratégies sur les indicateurs de solvabilité : SCR, fonds propres, et ratio de solvabilité.

Nous avons alors formalisé et testé une stratégie de *collar dynamique*, ajustée mensuellement, visant à protéger le portefeuille actions contre les pertes extrêmes tout en maintenant un rendement acceptable. Nous avons mis en évidence que le calibrage (strike, maturité, fréquence de roulement) a un effet déterminant sur la performance de la stratégie. En période de stress, la couverture permet de préserver le rendement du portefeuille, alors qu'en marché haussier, elle peut être coûteuse. Néanmoins, la dimension dynamique permet de limiter cette perte d'opportunité.

Nos simulations ont montré que la mise en œuvre de cette stratégie permet une réduction importante du SCR actions (**jusqu'à 85 %**), et une diminution du SCR marché globale (**en moyenne 65 %**). Toutefois, la réduction du SCR global est plus modérée (environ **25 %**), car l'application de la stratégie fait apparaître un SCR défaut, lié au risque de contrepartie sur les instruments dérivés.

En parallèle, nous avons également évalué l'impact de la stratégie sur la *diversification entre modules* dans le calcul du SCR global. En effet, la corrélation fixée dans la matrice de Solvabilité 2 entre le risque actions et le risque de taux (en général 0,25) permet de réduire le capital requis agrégé. Nous avons observé que la modification de la composition du portefeuille (ex. couverture partielle à 54 %) impacte cette diversification de manière non linéaire : si la couverture diminue le SCR actions, elle augmente le SCR défaut, ce qui altère la synergie de diversification globale. Ainsi, l'optimisation du portefeuille doit tenir compte **non seulement de la réduction marginale des SCR individuels, mais aussi de leur contribution conjointe au SCR global**.

Pour affiner notre compréhension des possibilités de couverture, nous avons testé plusieurs **stratégies alternatives**, incluant le *put seul*, le *put spread*, le *put spread collar*, ainsi qu'une approche *delta-neutre*. Nos analyses révèlent que seules les stratégies introduisant une **convexité dans le profil de rendement** (puts, collars) permettent une réduction substantielle du SCR actions. Les stratégies linéaires comme le delta-neutre s'avèrent inefficaces face à un stress de type Solvabilité 2, en raison du caractère **non-linéaire du SCR actions**, défini comme une

perte sous un choc extrême de 39 % appliqué instantanément.

La stratégie la plus efficace identifiée est le **put spread collar dynamique**, qui présente un bon compromis entre coût, efficacité de réduction du SCR, et maintien du rendement. Elle combine une protection asymétrique contre les baisses avec un plafonnement du rendement haussier, à un coût net modéré.

Nous avons également réalisé un **backtesting en conditions extrêmes** (crises de 2008 et mars 2020), confirmant la capacité des stratégies optionnelles à réduire significativement les pertes (réduction du drawdown de 40 à 60 %) tout en améliorant la stabilité des résultats. Cela démontre leur intérêt pour gérer la résilience du portefeuille dans une logique d'ORSA.

En conclusion, le collar dynamique et ses variantes constituent des outils puissants permettant à un assureur de **piloter son exposition au risque actions** tout en modulant le ratio de solvabilité. Cependant, leur utilisation réglementaire suppose une validation par l'ACPR, notamment pour la reconnaissance de la stratégie dans le bilan. En l'absence de cet aval, seuls les effets sur le passif peuvent être comptabilisés, limitant ainsi leur plein effet. La question se pose alors de la pertinence d'engager les ressources nécessaires pour obtenir cette reconnaissance.

En définitive, la stratégie de couverture ne doit pas être pensée uniquement comme un outil de réduction du SCR, mais comme un levier stratégique permettant à l'assureur de mieux gérer sa trajectoire de solvabilité, d'adapter sa politique d'investissement, et de renforcer sa résilience. Dans cette perspective, l'étude de son impact sur l'ORSA, la liquidité et les coûts opérationnels serait un prolongement naturel de ce travail.

Annexe A

A.1 Quelques détails concernant le GSE utilisé

Dans cette partie, nous allons présenter les modèles de diffusion utilisés pour la construction de notre GSE. Les éléments qui suivent sont inspirés de Picard [2021], du GT GSE de Sia Partners et al. [2022], du cours de D.Heath [1992] et de et K.Armel [2018].

A.1.1 Le modèle G2++ pour le risque de taux

Le modèle de taux utilisé est basé sur le modèle gaussien à deux facteurs. Il s'agit d'un modèle qui suit une distribution normale, où le taux court est exprimé comme la combinaison de deux facteurs gaussiens corrélés, ainsi qu'une fonction déterministe permettant de reproduire la structure par terme de la courbe des taux sans risque.

Ce choix de modèle est justifié par sa capacité à mieux reproduire la volatilité des taux sur le marché par rapport à un modèle à un seul facteur, tout en maintenant une certaine simplicité lors de la calibration des paramètres. Ce modèle offre une flexibilité analytique qui facilite l'évaluation des produits dérivés de taux, tels que les Caps ou les Swaptions, à l'aide de formules fermées. De plus, il permet d'introduire une corrélation entre les taux pour différentes maturités et de modéliser des taux négatifs (en raison de sa nature normale), ce qui est nécessaire étant donné le niveau actuel des taux sur le marché.

Le modèle est défini comme suit :

$$r_t = x_t + y_t + \Psi_t, \tag{A.1}$$

avec :

- $dx_t = -\alpha_1 x_t dt + \sigma_1 dW_{1,t}$, avec $x_0 = 0$;
- $dy_t = -\alpha_2 y_t dt + \sigma_2 dW_{2,t}$, avec $y_0 = 0$;
- α_1 et α_2 : coefficients de retour à la moyenne ;
- σ_1 et σ_2 : volatilités ;
- $W_{1,t}$ et $W_{2,t}$: mouvements browniens corrélés ;
- Ψ_t : fonction déterministe avec $\Psi_0 = r_0$.

Le processus de calibration du modèle a pour objectif d'assigner des valeurs aux paramètres de l'équation de diffusion, de manière à ce que les facteurs simulés reflètent le comportement du marché tout en respectant les propriétés de market-consistency et de martingalité.

Les paramètres à calibrer dans ce contexte sont les constantes α_1 , α_2 , σ_1 , σ_2 , et r_0 . La calibration du modèle G2++ est basée sur les prix de marché des swaptions européennes à la monnaie. L'objectif est d'estimer ces cinq constantes en minimisant la somme des carrés des écarts relatifs entre les prix observés sur le marché des swaptions (étant donné que leurs prix dépendent de la corrélation entre les taux forward, ce qui nécessite une traduction au niveau du modèle sous la forme d'une valeur non triviale de ρ) et les prix théoriques. Ce processus de calibration se base sur les prix observés des swaptions, lesquels sont obtenus à partir de la volatilité implicite en utilisant la formule de Black (ce qui nécessite un changement de probabilité).

Les données sources pour la calibration sont constituées d'une nappe de volatilités implicites des swaptions cotées sur le marché, extraites via Bloomberg (à la date du 31 décembre 2021). Cette nappe couvre des maturités allant de 1 an à 20 ans et des termes allant de 1 an à 30 ans, pour des swaptions basées sur l'Euribor à 3 mois.

Il est important de noter que le modèle G2++ présente certaines limites, notamment la complexité d'interprétation due à l'utilisation de deux facteurs (x et y), ainsi que l'absence de taux explosifs (contrairement au modèle LMM+).

Cependant, en contrepartie, l'utilisation des deux facteurs x et y permet une meilleure reproduction de la volatilité des taux de marché par rapport à un modèle à un seul facteur, sans pour autant compliquer la calibration des paramètres.

Le choix d'un modèle G2++ se justifie par ses nombreux avantages, malgré son niveau de développement inférieur à celui d'un modèle LMM+, dont l'implémentation est plus complexe (augmentant ainsi le risque de modèle). Le modèle G2++ s'impose donc comme un choix pertinent.

A.1.2 Le modèle de Vasicek pour le risque d'inflation

Dans notre modèle GSE, le risque d'inflation est projeté selon un modèle de Vasicek.

Ainsi, l'évolution du taux d'inflation est donnée par la dynamique suivante :

$$dI_t = -k(\mu - I_t) dt + \sigma dW_t, \quad (\text{A.2})$$

avec :

- k : vitesse de retour à la moyenne ;
- μ : moyenne à long terme, fixée à 1,3% selon les hypothèses ;
- W_t : mouvement brownien ;
- σ : volatilité.

Pour effectuer la calibration, un changement de variable est d'abord nécessaire, suivi d'une régression linéaire. Ensuite, par changement de variable inverse, on retrouve les paramètres optimaux. Les données de calibration sont celles fournies par l'INSEE.

Annexe B

B.1 Rappels sur les provisions techniques

B.1.1 La réserve de capitalisation (RC)

Elle est constituée lors de la réalisation de plus-values lors de la cession d'obligations et est reprise en cas de réalisation de moins-values. L'objectif principal de cette réserve est de rendre notre résultat lisse, mais elle a également pour vocation de dissuader les compagnies d'assurance de vendre leurs obligations en cas de baisse des taux. Cette mesure vise ainsi à éviter la réalisation de profits ponctuels en vendant des obligations avant d'acquérir ultérieurement d'autres obligations moins performantes. Bien que cela puisse engendrer des gains à court terme, cette stratégie se révèle peu fructueuse à long terme.

B.1.2 La provision pour participation aux excédents (PPE)

La Provision pour Participation aux Excédents (PPE), ou encore Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB), est définie par le Code des assurances de la manière suivante : "le montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas distribués immédiatement après la clôture de l'exercice au cours duquel ils ont été générés". Cette définition indique que la Participation aux Bénéfices (PB), qui constitue une forme de richesse appartenant à l'assuré, peut être allouée à l'assuré de manière différée via la constitution de la PPE. Dans de tels cas, il est nécessaire de redistribuer cette réserve de richesse sur une période de 8 ans conformément à la règle FIFO (First In, First Out). Cela signifie que cette réserve de richesse appartient bel et bien aux assurés.

La PPE offre aux assureurs la possibilité de lisser le taux de rendement distribué sur plusieurs années. Ces dernières années, la PPE a été largement utilisée en raison de la hausse des taux d'intérêt, l'objectif étant d'augmenter le taux de rendement servi, afin d'éviter des rachats massifs qui pourraient résulter du fait que les assurés pourraient se tourner vers des produits plus rentables.

B.1.3 La provision pour risque d'exigibilité (PRE)

Selon l'Article R343-3 du Code des assurances, cette réserve a pour but de faire face aux engagements en cas de dépréciation de l'ensemble des actifs énoncés à l'Article R343-10. Les actifs

mentionnés à l'Article R343-10 englobent les actifs non amortissables, tels que les actions. En d'autres termes, la Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) est constituée lorsque les actifs non amortissables connaissent une dépréciation latente globale (contrairement à la Provision pour Dépréciation Durable, ou PDD, qui est évaluée titre par titre). Cela se produit lorsque la valeur comptable nette de ces actifs dépasse leur valeur de marché. Cet écart est la valeur de la PRE et elle agit comme un coussin de sécurité.

Annexe C

C.1 Rappels de quelques notions en finance de marché

C.1.1 Les types de marché financier

Les marchés financiers peuvent être définis comme un espace de rencontre entre des agents économiques (en général, ce sont des ménages, des fonds d'investissement, etc.) et des pourvoyeurs de fonds (en général, ce sont des entreprises ou encore les États d'un pays). Grâce à ce type de marché, les agents économiques ont la capacité d'optimiser leurs gains, mais ils peuvent aussi tout perdre. Selon la situation dans laquelle on se trouve, on peut gagner ou perdre de l'argent.

Les marchés financiers se divisent en plusieurs catégories. Nous avons :

- Les marchés organisés : Ce sont des marchés réglementés où les prix des actifs sont fixés et connus à l'avance ;
- Les marchés de gré à gré : Ce sont des marchés qui ne sont pas localisés sur une plateforme physique particulière. À la différence des marchés organisés, il n'y a aucune réglementation sur ces derniers. Les négociations s'effectuent entre les différents acteurs du marché ;

Dans ces deux marchés, plusieurs types de produits peuvent être échangés. Nous avons, par exemple :

- Les actions (equity en anglais) : Ce sont généralement des titres émis par des entreprises dans la plupart des cas, et qui représentent une fraction du capital de ces dernières ;
- Les obligations : Ce sont des titres émis par des entreprises ou encore des États. Elles sont une reconnaissance de dette de l'État ou de l'entreprise envers le détenteur de ce titre. Les obligations sont généralement remboursées sur 2 ans lorsqu'il s'agit de l'État et 5 ans pour les entreprises ;
- Les contrats à terme : Ce sont des contrats qui permettent à leur détenteur d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à une date future, mais à un prix fixé dès aujourd'hui. Parmi ces contrats, on distingue les *forward*, les *futures* ou encore les *options*.

C.1.2 Qu'est-ce qu'un portefeuille ?

Un portefeuille peut être défini comme une collection d'actifs financiers détenus par un individu ou une institution dans le but de gagner de l'argent grâce à ces différents investissements.

C.1.3 Les options

C.1.3.1 Définition

Une option, selon le livre de Jason Hull sur "Les Options, Futures et autres produits dérivés", peut être définie comme un contrat effectué entre un client et une institution financière (la plupart du temps). Ce contrat donne le droit, mais pas l'obligation, à son détenteur de vendre ou d'acheter une quantité d'un actif financier à une date fixée à l'avance, encore appelée "échéance", pour un prix également fixé à l'avance, encore appelé "prix d'exercice". On distingue deux grands types d'options, à savoir :

- Les options américaines ;
- Les options européennes.

De façon stricte, il n'y a aucune différence entre ces deux types d'options. La seule grande différence entre les deux réside dans le droit d'exercice de notre option. En effet, pour une option américaine, le détenteur a le droit d'exercer son contrat avant la date d'échéance, ce qui n'est pas le cas pour une option européenne où il ne peut l'exercer qu'à l'échéance du contrat.

Dans le cas d'une option européenne, nous définissons également le *call européen* comme le droit d'acheter une action au prix d'exercice K , encore appelé Strike, à la date T , encore appelée maturité. Dans le cadre d'un *call*, le détenteur du *call* réalisera un bénéfice de $(S_T - K)_+$ (Ceci est encore appelé payoff de l'option). Quant au *put européen*, c'est le droit de vendre à une date T , une action au prix d'exercice K ; le détenteur gagnera $(K - S_T)_+$.

C.1.3.2 Évaluation des options

La banque qui s'engage à établir un tel contrat avec un client prend un certain risque. Il peut arriver qu'à la date d'échéance, par exemple pour un *call*, le prix de l'actif sous-jacent soit très élevé et si le prix d'exercice n'a pas été bien estimé, la banque peut perdre énormément. D'où la notion de "pricing" d'une option. En effet, le client paie une prime à l'entreprise au moment de la signature du contrat, et ce prix est en général calculé pour permettre à la banque d'avoir le moins de pertes possible.

Plusieurs facteurs sont indispensables pour réussir à calculer le prix d'une option. Nous allons vous présenter les principaux :

1. La valeur du sous-jacent et le strike

Selon que l'on soit du côté du client ou de la banque, la courbe d'évolution de notre gain n'est pas la même. Si nous sommes clients, nous aurons intérêt, dans le cadre d'un *call* par exemple, à ce que le prix K de l'actif à l'échéance de notre contrat soit le plus grand

possible, tandis que la banque souhaitera avoir un résultat différent de cette situation. Dans le cadre d'un *put*, c'est le cas contraire qui est souhaité par les différents intervenants. Ainsi, lors de l'évaluation du prix d'une option, le Strike et la valeur du sous-jacent joueront un rôle important.

2. Le taux d'intérêt sans risque r

Si l'on achète un *call*, on retarde l'achat du support, ce qui permet de disposer de la somme $S - r$, durant la vie de l'option. Cette somme peut être placée au taux sans risque. Plus ce taux est élevé, plus la demande pour le *call* augmente. Par conséquent, le *call* est une fonction croissante de r . Pour le *put*, le raisonnement est inverse : le détenteur du *put* n'est pas obligé de vendre immédiatement le support. Il perd donc la possibilité de placer le produit de la vente.

3. La maturité de l'option

La maturité mesure l'importance de la durée de vie d'une option. De façon générale, elle a une double conséquence sur le gain possible que l'on pourra se faire :

- L'effet d'échéance, en effet, plus la date d'échéance de notre contrat est éloignée, plus il est probable que l'on exerce notre option à maturité. Ainsi, la courbe de notre gain est croissante suivant la durée de vie de notre option. Il est important de préciser qu'un effet inverse n'influence pas le détenteur de l'action car il n'est pas obligé d'exercer son droit de vente ou encore d'achat. Au pire des cas, il perdra la prime qu'il a payée à la banque pour l'établissement de son contrat.
- L'effet d'intérêt, qui a de façon générale un effet positif lorsqu'on parle d'un *call*, mais a l'effet inverse lorsqu'il s'agit d'un *put*. De façon générale, on constate qu'une maturité assez éloignée de l'option est plutôt favorable lors d'un *call*, mais dans le cadre d'un *put*, on ne peut pas encore se prononcer.

4. La volatilité de l'actif support à l'option

Généralement, elle est notée par σ et nous permet de mesurer comment le prix d'un actif peut varier sur les marchés financiers. Plus la volatilité est élevée, plus le prix de l'actif est susceptible d'augmenter ou de diminuer de façon exponentielle. Dans le premier cas, cela implique que le détenteur de l'option peut réaliser un énorme bénéfice, et dans le second cas, il ne perd rien, car il n'est pas obligé d'exercer son droit d'achat/vente, comme nous l'avons mentionné plus haut.

C.1.3.3 La complétude des marchés

Il s'agit ici d'une hypothèse importante et généralement utilisée dans le cadre du pricing de produits vanilles ou exotiques.

- **Les marchés viables** : Un marché sera dit viable lorsque, dans ce marché, il n'existe aucune opportunité d'arbitrage.

- **Les marchés complets** : Un marché sera considéré comme complet lorsque nous serons en mesure de prédire le prix de l'actif sous-jacent à notre option à différentes dates. Ainsi, nous serons capables d'avoir une courbe descriptive de l'évolution de S_t ou encore du gain éventuel du détenteur du contrat.

C.1.3.4 Arbitrage et parité sur les marchés financiers

Comme mentionné plus haut, il s'agit d'une hypothèse importante et généralement utilisée pour établir des formules de pricing et dans le cadre de mémoire, elles ont été utilisées.

- **Opportunité d'arbitrage** : La notion d'arbitrage est un concept financier très facile à comprendre. En effet, dire qu'il existe une opportunité d'arbitrage sur un marché financier signifie qu'il est possible de gagner de l'argent sans risque. Ainsi, un investisseur lambda peut générer des profits sans craindre de perdre de l'argent. Cependant, la structure des marchés financiers empêcherait qu'une telle action se produise et même si une situation semblable venait à se produire, cela ne durerait pas longtemps, car le principe de l'offre et de la demande viendrait réguler ce type d'événement.
Pour la construction des modèles mathématiques visant à évaluer les options, on suppose que de telles opportunités n'existent quasiment pas sur nos marchés.

Un petit exemple d'une opportunité d'arbitrage est le suivant : On considère un trader qui opère sur deux marchés différents, c'est-à-dire sur le marché européen et britannique, par exemple. Cependant, à un moment donné, il constate que le prix d'une action Tesla est de 20 livres à Londres et 20 euros à Paris. Ainsi, étant donné la notion de taux de change, s'il achète l'option

• La Parité Call-Put

L'hypothèse de non-existence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers impose une relation entre le Call et le Put d'une option. Cette relation, appelée *parité Call-Put*, s'écrit :

$$C - P = S_0 - Ke^{-r(T-t)},$$

avec :

- C : le prix du Call ;
- P : le prix du Put ;
- S_0 : la valeur du sous-jacent à l'instant initial ;
- K : le prix d'exercice (ou strike) ;
- r : le taux sans risque ;
- T : la maturité.

C.1.4 Les différents types de stratégie de couverture

Dans cette section, nous présentons plusieurs stratégies de couverture construites à partir de produits vanille. De nombreux éléments sont issus du mémoire de ?. Les options considérées sont de type européen.

C.1.4.1 Couverture par Put

Il s'agit de la stratégie de couverture la plus simple. Elle vise à se protéger contre une baisse éventuelle de la valeur des actions par l'achat de puts sur le marché. Le payoff d'une telle stratégie est : $(K - S)_+$.

Le graphique C.1 illustre ce payoff :

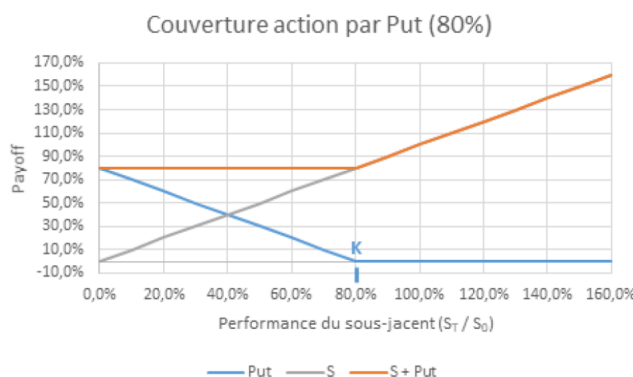


FIGURE C.1 : Couverture action par Put (Strike 80%) — source : Zaghla [2018]

C.1.4.2 Couverture par Put Spread

Dans la stratégie précédente, une prime doit être payée pour détenir le contrat, ce qui peut affecter le rendement final. Pour y remédier, on utilise les *Put Spreads*. Cette stratégie consiste à acheter un put protecteur et à vendre un put de strike plus faible. La prime reçue améliore ainsi le rendement global.

Si K_1 est le strike du put acheté (protecteur) et $K_2 < K_1$ celui du put vendu, alors le gain maximal est $K_1 - K_2$.

Le graphique C.2 présente le payoff associé :

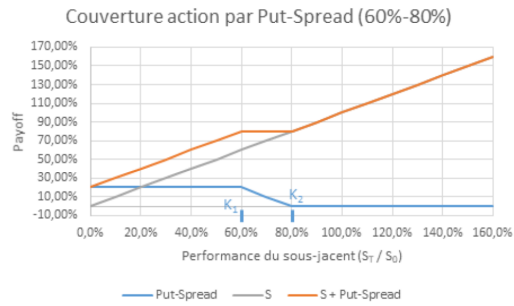


FIGURE C.2 : Couverture action par Put Spread (Strike 80% – Strike 60%) — source : Zaghla [2018]

C.1.4.3 Couverture par Zero-Cost Collar

Un *collar* est une combinaison d'un put acheté et d'un call vendu, tous deux de même échéance. Il offre une protection complète contre la baisse de l'actif sous-jacent, même en situation extrême, en finançant l'achat du put par la vente du call. Toutefois, en cas de forte hausse de l'actif, cette stratégie limite les gains.

Les strikes peuvent être choisis librement. Le strike du put fixe le seuil de couverture à la baisse, tandis que celui du call détermine la limite de gain à la hausse.

Le graphique C.3 illustre le payoff correspondant :

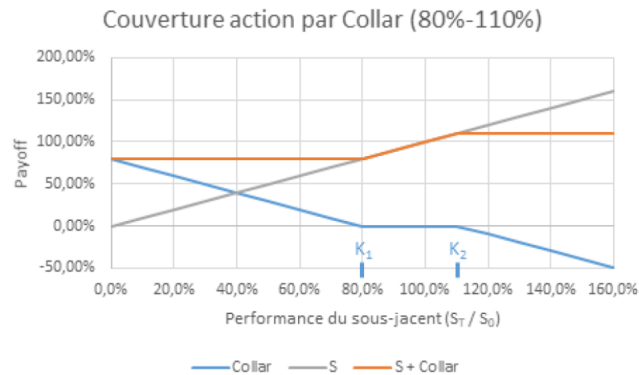


FIGURE C.3 : Couverture action par Zero-Cost Collar (Strike 80% – Strike 110%) — source : Zaghla [2018]

C.1.4.4 Couverture par Put Spread Collar

Cette stratégie combine les principes du Put Spread et du Collar. L'investisseur achète un put de strike K_1 pour la protection, vend un put de strike $K_2 < K_1$, et vend également un call de strike K_3 .

Le call vendu permet de financer partiellement ou totalement l'achat du put, tout en limitant les gains potentiels en cas de hausse.

Le graphique C.4 illustre cette stratégie :

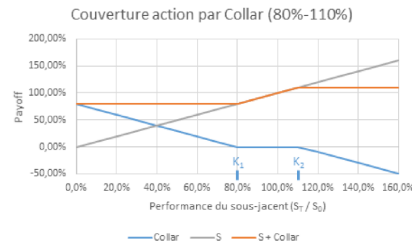


FIGURE C.4 : Couverture action par Put Spread Collar (Strikes 80% – 60% – 110%) — source : Zaghla [2018]

Bibliographie

- Règlement délégué (ue) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/ce du parlement européen et du conseil en ce qui concerne les normes techniques de réglementation sur les exigences de solvabilité ii. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/?uri=CELEX%3A32015R0035>, 2015. Journal officiel de l'Union européenne, L 12/1.
- M. Abramowitz. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards , Applied Mathematics, Series,55, 1964.
- ACPR. Solvabilité 2, 2016. URL <https://acpr.banque-france.fr/international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii>. Visité le 2023-09-06.
- ACPR. Le marché de l'assurance-vie en 2022, 2022. URL https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230320_as146_av_2022_vf.pdf. Visité le 2023-09-06.
- France assureurs. L'assurance française données clés 2022, 2022. URL https://www.franceassureurs.fr/wp-content/uploads/20230830_donnees-cles-2022.pdf. Visité le 2023-09-06.
- A . Brace. *The market model of interest rate dynamics*. Mathematical Finance, Paris, France, 1997.
- Banque de France. La situation des assureurs soumis à solvabilité 2 en france fin 2021, 2021a. URL https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20220713_as139_assureurs_s2_decembre_2021.pdf. Visité le 2023-09-06.
- Banque de France. Les taux monétaires directeurs, 2021b. URL <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-taux-monetaires-directeurs>. Visité le 2023-09-06.
- Banque de France. Evolution économiques,financière et monétaire, 2023. URL <https://publications.banque-france.fr/bulletin-economique-de-la-bce-ndeg12023>. Visité le 2023-09-06.
- Argus de l'assurance. Solvabilité 2 : le chantier de la révision est ouvert!, 2016. URL <https://www.argusdelassurance.com/institutions/solvabilite-2-le-chantier-de-la-revision-est-ouvert.114093>. Visité le 2023-09-06.

- D.Heath. *Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation*. Economecetrica, Paris, France, 1992.
- M. Donio. *Gestion Actif-Passif*. Support de cours, Université Paris Dauphine-PSL, 2023.
- B. Dupire. *Pricing with a smile*. Risk,number 7, 1994.
- EIOPA. Orientations sur le système de gouvernance — solvabilité ii (eiopa-bos-14/177 fr). https://www.eiopa.europa.eu/document-library/guidelines/guidelines-system-governance_fr, 2014. EIOPA-BoS-14/177 FR.
- EIOPA. Eiopa report on the fifth quantitative impact study (qis5) for solvency 2, 2016. URL https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5_Report_Final.pdf. Visité le 2023-09-06.
- A. Mazurie et al. *NOTE GSE Sia Partners*. Sia Partners, 2022. Document privé.
- F. Planchet et K.Armel. Construire un générateur de scénarios économiques risque neutre. assurances et gestion des risques / insurance and risk management, 2018. URL <https://doi.org/10.7202/1051316ar>. Visité le 2023-09-06.
- Jim Gatheral. *The Volatility Surface : A Practitioner’s Guide*. Wiley Finance, 2006.
- Société Générale. Solvency 2 : Tout savoir sur cette directive, 2022. URL <https://www.securities-services.societegenerale.com/fr/insights/views/news/solvabilite-directive-les-regles-solvabilite/#:~:text=La%20directive%20Solvabilit%C3%A9%20II%20a%20pour%20but%20de,application%20harmonis%C3%A9e%20de%20la%20r%C3%A9glementation%20dans%20l%E2%80%99Union%20Europ%C3%A9enne>. Visité le 2023-09-06.
- P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, and D. Woodward. *Managing Volatility Risk*. Finance. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- Patrick S. Hagan, Deep Kumar Kumar, Andrew S. Lesniewski, and Diana E. Woodward. Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, 1(1) :84–108, 2002.
- L. Heston. *A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options*. The Review of Financial Studies,volume 6, 1993.
- J. Hull. *Options,futures et autres actifs dérivés*. Pearson , 11 ième édition, Paris, France, 2021.
- GT ALM IA. Exemples de pratiques actuarielles applicables au march´e fran,cais. institut des actuaires, 2016. URL <https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?newslink=20161107062016133822-npa4-1.pdf&fg=1>. Visité le 2023-09-06.
- A. Levy. *Solvabilité 2 : Exigences quantitatives et impacts comptables sur une société d’assurance mutuelle non-vie*. Mémoire actuariat, Université Paris Dauphine-PSL, 2012.
- H. Mas. *Calibration of Heston pricing Model using for the valuation of employee stock option*. Mémoire actuariat, ISFA, 2012.

- A. Mazurie. *Formation Interne-Alm-Sia Partners*. Sia Partners, 2020.
- A. Moatti. *Le Fonds Euro en contexte de taux bas*. Mémoire d'actuariat, ISUP Paris, 2018.
- Le Nasdaq. Everything you need to know about rolling options, 2022. URL <https://www.nasdaq.com/articles/everything-you-need-to-know-about-rolling-options>. Visité le 2023-09-06.
- M. Picard. *Impacts de mesures comptables sur la pérennité du fonds euro en période de taux bas*. Mémoire actuariat, Université Paris Dauphine-PSL, 2021.
- A. Ratsimbazafy. *Allocation stratégique sous solvabilité 2*. Mémoire d'actuariat, ISFA LYON, 2020.
- M. Ravelonandro. *L'intégration de la modélisation du risque de crédit dans un portefeuille d'un assureur vie*. Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine-PSL, 2019.
- Stephen A. Ross, Randolph W. Westerfield, and Jeffrey Jaffe. *Corporate Finance : Core Principles and Applications*. McGraw-Hill Education, New York, 4th edition, 2018.
- M. Schmelzle. *Option Pricing formula using fourier transform :Theory and application*. 2010.
- D. Tichit. *Construction d'un modèle ALM pour l'analyse de l'impact d'une remontée des taux sur la solvabilité d'un assureur vie*. Mémoire d'actuariat, ENSAE, 2019.
- A. Veerakathy. *Admission de la PPB en fonds propres :quels impacts sur le pilotage des compagnies d'assurance vie ?* Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine-PSL, 2021.
- A. Zaghla. *Etude de l'impact de stratégies de couverture action sur le ratio de Solvabilité*. Mémoire actuariat, EURIA, 2018.