



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 7 septembre 2023

Par : Corentin Vandenbroucke

Titre : Impact de la modélisation du crédit stochastique sur le bilan d'un assureur, au vu de l'évolution du contexte économique

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire :**

Faris ROUCHATI

Florentine TSAYEM

Amine CHERQUAOU

Signature :

Entreprise :

ADDACTIS FRANCE

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : **Directeur de mémoire en entreprise :**

Rainer BUCKDAHNS

Elie MERYGLOD

Signature :

Invité :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

RÉSUMÉ

Ces dernières années, les assureurs ont investi de manière importante dans des titres obligataires ayant un risque de crédit plus important. En effet, la longue période économique de taux bas les a incités à faire évoluer leur grille d'investissement. Aujourd'hui, la remontée des taux et l'écartement des spreads constatés sur les marchés financiers ont conduit à l'observation d'un risque de défaut sur ces titres de plus en plus matériel.

L'objectif de ce mémoire est donc de modéliser le risque de crédit stochastique d'actifs obligataires risqués afin d'en tenir compte dans leur processus de valorisation, puis d'étudier les impacts d'une telle modélisation sur l'actif et le passif d'un assureur vie. Ces impacts seront d'autant plus intéressants à étudier en tenant compte de l'évolution du contexte économique.

De manière fonctionnelle, le modèle de crédit implémenté permet de diffuser des taux d'intérêts risqués ainsi que des probabilités de survie par rating. Puis, les jeux obtenus sont intégrés au sein du modèle de valorisation choisi pour la projection des actifs obligataires. Cette modélisation du crédit de manière stochastique déforme les flux financiers des titres en impactant le processus de risque-neutralisation, elle permet également d'intégrer la notion de la survie du titre, et vient modifier les taux de coupon des investissements réalisés en cours de projection.

En cohérence avec les retours de différents assureurs ayant déjà intégré ce modèle, l'impact de la modélisation reste aujourd'hui marginal. Différents axes d'analyses ont permis de comprendre comment cette modélisation déforme la dynamique des produits financiers, entraînant au global une hausse du Best Estimate et une diminution du ratio de solvabilité.

Des études complémentaires sur la grille de réinvestissement et sur la modification du contexte économique entre 2021 et 2022 ont permis de mettre en exergue une sensibilité matérielle au comportement des spreads. On en déduit qu'un écartement important des spreads pourraient impacter de manière plus significative la solvabilité des compagnies d'assurances.

Mots clefs: Assurance Vie, Crédit, Défaut, Spread, Générateur de Scénarios Economiques, ALM, LMN, Solvabilité 2, Stochastique, Taux d'intérêt, Best Estimate, Ratio de couverture, Obligations, Risque Neutre, Epargne

ABSTRACT

In recent years, insurers have invested heavily in bonds with a higher credit risk. Indeed, the long period of low interest rates prompted them to change their investment strategy. Today, the rise in interest rates and the widening of credit spreads on financial markets have led to the observation of an increasingly material risk of default on these securities.

The aim of this thesis is therefore to model the stochastic credit risk of risky bond assets in order to take it into account in their valuation process, and then to study the impact of such modelisation on the assets and liabilities of a life insurer. These impacts will be all the more interesting to study as the economic context evolves.

Functionally, the credit model implemented enables us to disseminate risky interest rates and survival probabilities by rating. The resulting sets are then integrated into the valuation model used to project bond assets. This stochastic credit modelling distorts the financial flows of securities, impacting the risk-neutralization process. It also enables the notion of security survival to be integrated, and modifies the coupon rates of investments during projection.

In line with feedback from various insurers who have already integrated this model, the impact of modeling remains marginal today. Various lines of analysis have enabled us to understand how this modelling distorts the dynamics of financial income, leading to an overall increase of the Best Estimate and a reduction in the solvency ratio.

Additional studies on the reinvestment grid and on changes in the economic context between 2021 and 2022 have highlighted a material sensitivity to the dynamic of credit spreads. This suggests that a significant widening of spreads could have a more significant impact on insurance company solvency.

Keywords: Life Insurance, Credit, Default, Rate Spread, Economic Scenario Generator, ALM, LMN, Solvability 2, Stochastic, Interest Rates, Best Estimates, Coverage Ratio, Bonds, Risk-Neutral, Savings Account

NOTE DE SYNTHÈSE

Contexte

Après un long contexte de taux bas ayant démarré au cours des années 2013 et 2014, la BCE (Banque Centrale Européenne) a mis en place une politique de remontée des taux afin de lutter contre un fort contexte inflationniste induit par différents événements politiques.

Encore négatifs à la fin de l'année 2021, les taux directeurs de la BCE ont atteint 2% à la fin de l'année 2022 et ont continué à augmenter au cours de l'année 2023. Les investisseurs présents sur le marché, incluant les assureurs, ont durant cette longue période de taux bas, fait évoluer leurs politiques d'investissement afin de s'adapter à la conjoncture macroéconomique. Les obligations souveraines jusqu'alors considérées comme des titres de très bonne qualité, mais générateurs de peu de rendement, ont laissé plus de place aux obligations d'entreprises, dites corporates, rapportant des rendements plus intéressants. Cette stratégie d'investissement a rendu le portefeuille moyen d'un assureur plus sensible au risque de défaut - et plus largement de crédit - qu'il ne l'était il y a encore quelques années.

Dans l'optique d'un contrôle toujours plus prudent des institutions par le régulateur, cette évolution au sein des portefeuilles d'actif des assureurs a poussé l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) à s'interroger sur l'état de l'art des modèles de crédit. Ainsi, depuis maintenant 5 ans, celle-ci a ajouté dans ses recommandations relatives à la conception des GSE (Générateurs de scénarios économiques), l'intégration d'un modèle de crédit afin de prendre en compte ce risque dans la valorisation des actifs obligataires. La situation économique actuelle a finalement poussé le régulateur à transformer ces recommandations en exigence à destination des assureurs.

C'est dans ce contexte économique et réglementaire que ce mémoire s'inscrit. En effet, l'étude développée vise à présenter une méthode d'implémentation d'un modèle de crédit stochastique au sein d'un outil de projection actif/passif, dit modèle ALM. L'objectif sera alors de comprendre, au regard du contexte économique changeant et des différentes politiques d'allocation d'actif choisies, les impacts d'une telle évolution de modèle sur l'actif et le passif d'un assureur vie.

Modélisation

Dans le cadre de cette étude, la modélisation du crédit stochastique passe par la diffusion de taux risqués et de probabilités de survie par classe de rating. Les taux risqués permettent d'un côté de prendre en compte les spreads qui s'ajoutent à la courbe de taux sans risque, tandis que la probabilité de survie permet de matérialiser la survie du titre au cours de sa détention. Un dernier paramètre s'ajoute à la modélisation, il s'agit du Loss Given Default (LGD). Il permet de caractériser la part des coupons et du remboursement que l'assureur perdra en cas de défaut de l'émetteur de l'obligation.

Une obligation est initialement évaluée de la manière suivante :

$$VM(0, t) = N * \left(\sum_{i=t+1}^T \frac{c * (1 - p)^i}{(1 + r_N(t, i))^{i-t}} + \frac{(1 - p)^T}{(1 + r_N(t, T))^{T-t}} \right)$$

Elle sera désormais évaluée à l'aide d'une jambe risquée, tant que l'obligation ne fait pas défaut, et d'une jambe non risquée si l'obligation fait défaut. Le modèle considère que si l'émetteur fait défaut, il remboursera au moins de manière certaine une part de l'obligation, à savoir $1 - LGD$, ce qui explique la branche non risquée. La probabilité de survie permet de probabiliser les deux jambes.

Le coefficient d'ajustement de risque neutralisation p sert à déformer les flux de l'obligation, afin que la valeur initiale de l'obligation corresponde à celle déterminée par le marché. Par effet de spreads sur les courbes de taux, le coefficient est plus faible avec l'ajout du modèle de crédit. Cependant, les flux sont cette fois-ci probabilisés, pour prendre en compte le défaut potentiel de l'émetteur de l'obligation.¹

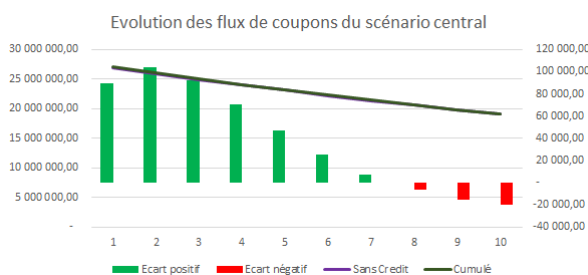


FIGURE 1 – Déformation des flux des obligations en stock

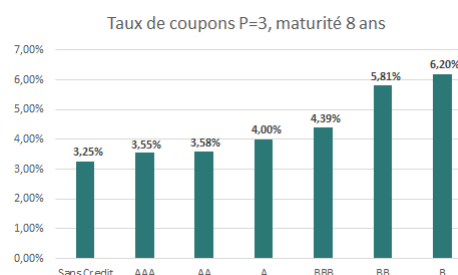


FIGURE 2 – Taux de coupon en fonction du rating

1. Les écarts étant petits par rapport au montant total, les écarts se lisent avec l'axe secondaire à droite du graphique. C'est pourquoi les courbes de montants sont confondues. Cette lecture sera identique pour tous les graphiques de comparaison qui suivent.

La diminution du coefficient d'ajustement a pour effet d'augmenter les flux en début de projection, tandis que la probabilité de survie vient au fur et à mesure effacer cet écart en diminuant les flux dans la suite de la projection. Une autre modification, due à l'intégration des courbes de taux risqués, est l'adaptation des taux de coupon des obligations achetées en cours de projection en fonction de la notation sur laquelle l'assureur souhaite investir.

Analyse de référence

La modélisation a été appliquée sur le portefeuille d'un assureur fictif distribuant uniquement des contrats d'épargne. L'analyse de référence est effectuée au vu des conditions de marché au 31/12/2022 et pour une politique de réinvestissement obligatoire portant sur les ratings AA, A et BBB (réparties selon l'allocation initiale du portefeuille).

Le Best Estimate est impacté à la hausse mais cet impact est marginal. En effet, il n'évolue que de 0,03% et est porté à moitié par l'aspect structurel (montré par le calcul déterministe) et à moitié par le coût des options (calcul stochastique).

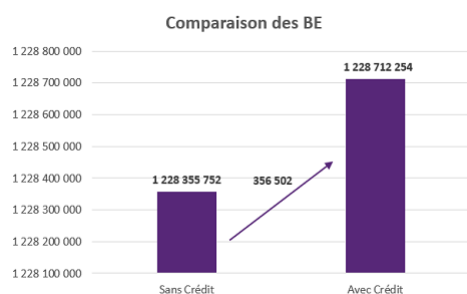


FIGURE 3 – Impact sur le BE

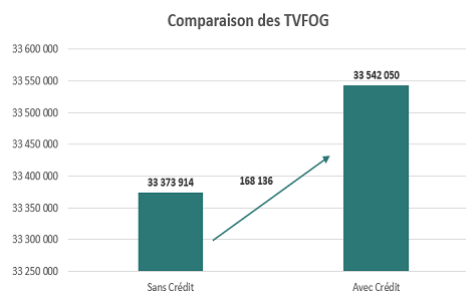


FIGURE 4 – Impact sur la TVFOG

Une analyse en vision déterministe permet de comprendre les effets de la modélisation du crédit sans perdre de la compréhension avec une compensation des simulations. Les produits financiers sont d'abord impactés à la hausse grâce à l'effet sur la risque neutralisation des titres. Ensuite, l'effet de la probabilité de survie diminue rapidement cet écart. Dans la projection, les écarts sur les défauts se compensent avec des meilleurs coupons versés. L'effet du *LGD* a tout de même un fort impact, car il joue un rôle de plafond des pertes modélisées via la probabilité de survie. En effet le modèle fait l'hypothèse, qu'en cas de défaut l'assureur se verra payer 65% ($1 - LGD$).

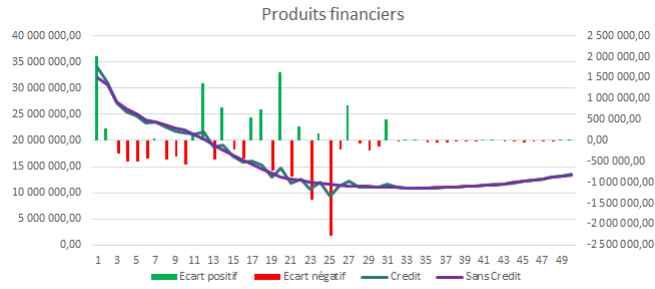


FIGURE 5 – Evolution des produits financiers

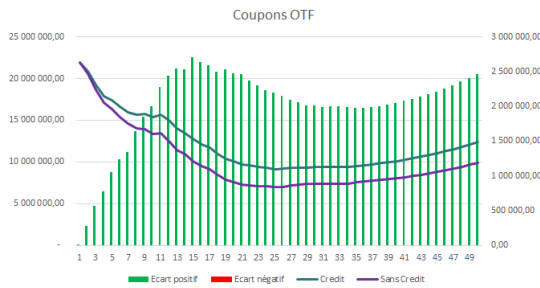


FIGURE 6 – Evolution des coupons

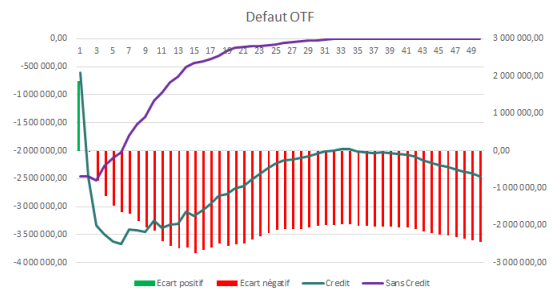


FIGURE 7 – Défaut des OTF

Les écarts observés en milieu de projection sont dus au delta de surcôte/décôte. En effet, à l'achat de nouvelles obligations, les obligations sont mieux valorisées et en fin de vie elles sont en pertes par rapport à la modélisation sans crédit.

Les impacts à l'actif permettent d'expliquer ce qui se passe au passif. Le surplus de produits financiers en début de projection a pour effet d'augmenter la participation aux bénéfices et donc augmenter les provisions mathématiques de chaque contrat [Figure 8], par revalorisation. Par effet d'assiette, les décès et les rachats structurels augmentent [Figure 9]. Ensuite, cette forte revalorisation prend quelques années à se résorber.

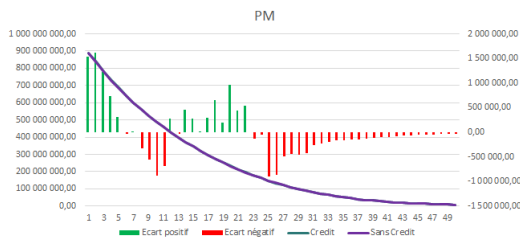


FIGURE 8 – Evolution de la PM

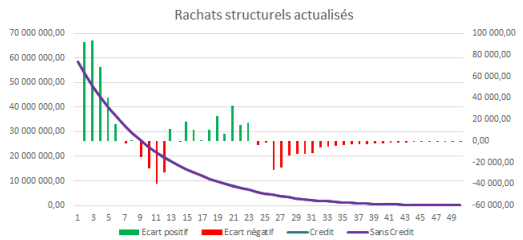


FIGURE 9 – Evolution des rachats

Dans la suite de la projection, les écarts étant beaucoup moins importants sur l'actif,

les effets de seuil de l'algorithme de PB (Participations aux Bénéfices) limitent les écarts observés sur le passif. Ainsi, au global la forte évolution en début de projection et l'effet d'actualisation, ont pour conséquence d'augmenter le Best Estimate.

La vision stochastique permet d'évaluer le surplus d'impact lié aux options des contrats. La déformation observée en vision déterministe est accentuée dans de nombreux scénarios. Cependant, de nombreux autres scénarios sont impactés différemment. En effet, l'impact est très dépendant de la manière dont les probabilités de survie évoluent, ainsi, dans certains scénarios, l'impact du défaut est bien plus important. Le surplus de flux financiers en première année est très faible et les gains de taux de coupon sont bien moins importants.

Au global la modélisation du crédit ne provoque pas de forte évolution dans la distribution des BE. Les surplus de produits financiers dû à la risque neutralisation et aux taux de coupon plus élevés, sont compensés par la probabilité de survie. Cependant, le surplus de produits financiers en début de projection est défavorable car il pousse à verser plus de PB en début de projection. L'assureur n'arrive cependant pas à prélever plus de marge financière, ainsi, au global l'effet est tout de même marginalement défavorable pour l'assureur.

Sensibilités sur le ratio de solvabilité

Les impacts observés ont ensuite été confrontés à deux types de sensibilité, le contexte économique et la politique de réinvestissements. Ainsi, il a été question d'observer la différence d'impact entre fin 2021 et fin 2022, et d'y ajouter une seconde dimension à travers deux nouvelles politiques de réinvestissements, uniquement sur du AA et sur du BBB.

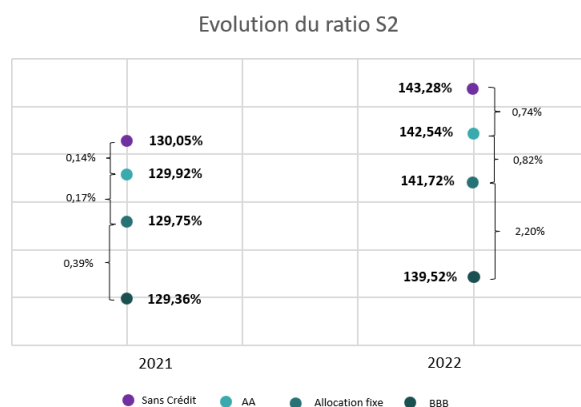


FIGURE 10 – Evolution du SCR en fonction du contexte économique et des réinvestissements

L'évolution du contexte économique entre fin 2021 et fin 2022 a pour effet d'augmenter le ratio de couverture de +13% sans modélisation du crédit et +12% avec crédit. L'effet d'un début d'écartement des spreads sur la modélisation du crédit a donc un impact qui se matérialise ici, cependant cet impact reste faible à l'échelle des ratios. Le modèle est également sensible à la politique de réinvestissement. En effet, entre 2021 et 2022, une politique en investissement BBB crée une perte plus importante de ratio en 2022 en comparaison à 2021.

Conclusion

Les travaux de ce mémoire ont permis de présenter une méthode d'implémentation du crédit stochastique dans un modèle ALM. L'objectif de ce mémoire a été d'analyser les impacts de la modélisation de ce nouveau risque sur la solvabilité d'un assureur compte tenu de l'évolution du contexte économique.

Les impacts sur le portefeuille étudié sont très marginaux. Les provisions Best Estimate évoluent à la hausse, mais l'écart est très faible. Le ratio de solvabilité diminue également très faiblement avec une baisse de 150bps. Les effets plafond du LGD limitent grandement les impacts sur les flux financiers, ainsi les écarts observés sont surtout présents en début de projection.

L'évolution du contexte économique dans le futur pourrait apporter plus d'impact sur le bilan, mais comme expliqué précédemment, les hypothèses de modélisation (principalement le LGD) limitent fortement les impacts. Compte tenu du contexte actuel, la déformation des flux reste limitée.

Il est important de retenir que ces résultats sont dépendants des hypothèses du modèle, et qu'une autre structure de portefeuille pourrait être plus impactée par cette modélisation. Une prise en compte plus fine du LGD en fonction de l'émetteur pourrait être une piste d'amélioration, cependant ce paramètre étant intégré dans la diffusion des taux risquées, la diffusion devrait être multipliée autant de fois qu'il y a de LGD différents. Cette piste est donc théoriquement intéressante, mais dans la pratique elle est difficilement réalisable. Un calibrage des modèles, spécifiques aux obligations souveraines et aux obligations non notées, permettrait également d'affiner le modèle.

Une hausse de l'écartement des spreads dans le futur pourrait avoir un impact plus important sur le modèle, une sensibilité à la réserve de capitalisation serait alors un axe important d'analyse. En effet, un modèle acceptant la vente d'obligation avant échéance pourrait être plus exposé et l'impact de la réserve de capitalisation pourrait se révéler très important.

SUMMARY NOTE

Context

After a long period of low rates starting in 2013-2014, inflation due to a number of political events prompted the ECB to launch a campaign to raise rates. Still negative at the end of 2021, the ECB's key rates reached 2% at the end of 2022 and continue to rise throughout 2023.

However, during this long period of low interest rates, market investors, including insurers, have changed their investment policies. Sovereign bonds, considered to be of very high quality, but with very low yields, have given way to corporate bonds with more attractive yields. As a result, the average insurer's portfolio is now more sensitive to default risk than it was just a few years ago.

This evolution in portfolios has prompted the ACPR (French Prudential Control and Resolution Authority) to question the modeling techniques already present in the literature on the subject of credit. Thus, 5 years ago, the ACPR added a credit model to its recommendations on ESGs (Economic Scenario Generators), so that it could be implemented in valuation models. Given the current economic situation, the ACPR is increasingly transforming its recommendations into requirements.

This thesis is part of this approach, presenting a method for implementing a stochastic credit model within an ALM model. The main objective is to gain a detailed understanding of the impact, and compare by changing economic conditions and allocation policies on different bond rating classes.

Modelisation

Stochastic credit modeling involves the distribution of risky rates and survival probabilities by rating class. On the one hand, risky rates take into account the spreads added to the risk-free yield curve, while on the other, survival probabilities reflect the survival of a security over the course of its holding. A final parameter is added to the model : Loss Given Default (LGD). This characterizes the proportion of coupons and repayments that the insurer will lose in the event of default by the bond issuer.

So a bond initially valued as follows :

$$VM(0, t) = N * \left(\sum_{i=t+1}^T \frac{c * (1 - p)^i}{(1 + r_N(t, i))^{i-t}} + \frac{(1 - p)^T}{(1 + r_N(t, T))^{T-t}} \right)$$

Is now valued using a risky leg, as long as the issuer survive, and a non-risky leg if the issuer is lacking. The model assumes that if the issuer defaults, it will at least certainly repay a portion of the bond, i.e. $1 - LGD$, which explains the non-risky leg. The survival probability probabilizes both legs.

The risk neutralization adjustment coefficient p is used to distort the bond's flows, so that the bond's initial value matches that determined by the market. Due to the spread effect on yield curves, the coefficient is lower with the addition of the credit model. However, this time the flows are probabilized, to take into account the potential default of the bond issuer.

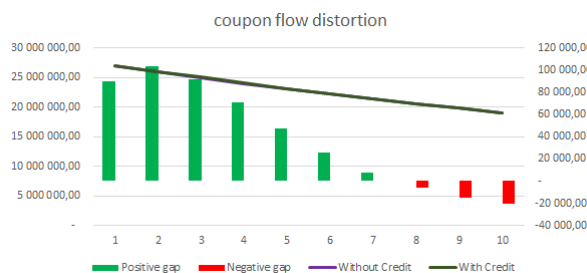


FIGURE 11 – Stock bond flow deformation

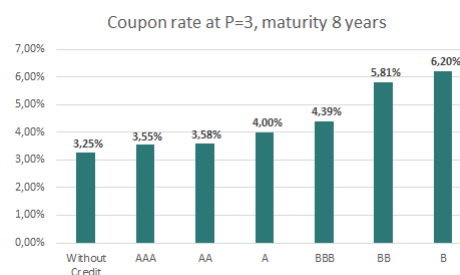


FIGURE 12 – Coupon rates by rating

The decrease in the adjustment coefficient has the effect of increasing flows at the start of the projection, while the probability of survival progressively erases this difference and makes flows lower at the end of the projection. Another modification, due to the integration of risky yield curves, is the adaptation of coupon rates on bonds purchased during the projection period according to the rating on which the insurer wishes to invest.

Reference analysis

Modeling was carried out on the portfolio of a fictitious insurer distributing savings contracts only. The benchmark analysis is based on market conditions at 12/31/2022 and a bond reinvestment policy with ratings of AA, A and BBB (allocated according to the initial portfolio allocation).

Best Estimate is impacted upwards, but this impact is marginal. In fact, it is up by only 0.03%, half of which is due to the structural aspect (shown by the deterministic calculation) and half to the cost of options (stochastic calculation).

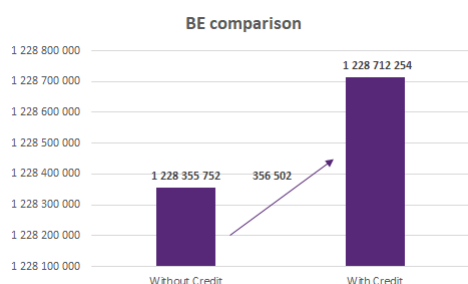


FIGURE 13 – Impact on BE

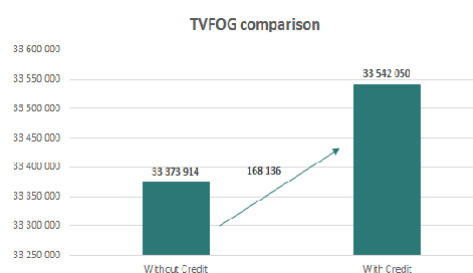


FIGURE 14 – Impact on TVFOG

Deterministic analysis shows that flows are first impacted upwards by the effect on the risk neutralization of securities. Then, the effect of the probability of survival rapidly reduces this gap. In the projection, spreads on defaults are offset by better coupons paid. The *LGD* effect still has a strong impact, as it acts as a cap on losses modeled by the probability of survival.

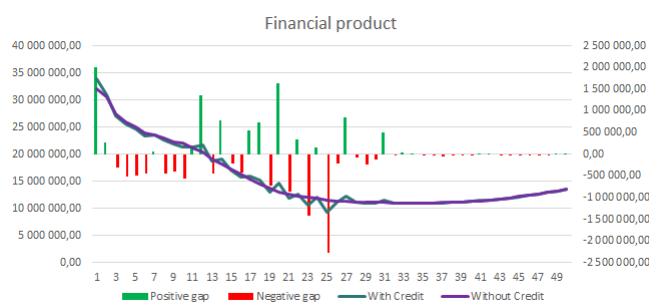


FIGURE 15 – Evolution of financial products

The discrepancies observed in the middle of the projection are due to the over/undercut delta. When new bonds are purchased, they are better valued, and at the end of their life, bonds are at a loss compared to the non-credit model.

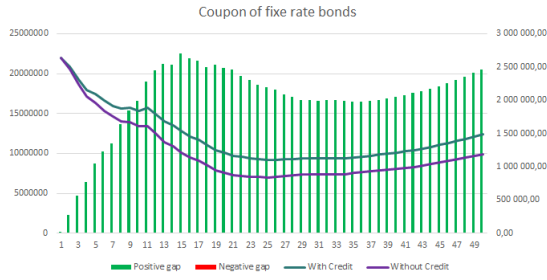


FIGURE 16 – Coupon evolution

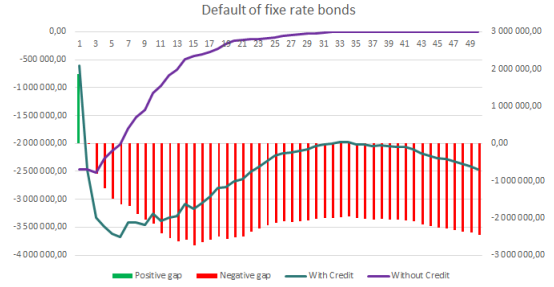


FIGURE 17 – Default OTF

The impact on assets then explains what happens on the liabilities side. The surplus in financial income at the start of the projection period has the effect of increasing participation in profits, and therefore increasing the mathematical provision (MP) of each contract [Figure 18], through revaluation. As a result, death and structural redemption increase [Figure 19]. It then takes a few years for this sharp increase in value to be absorbed.

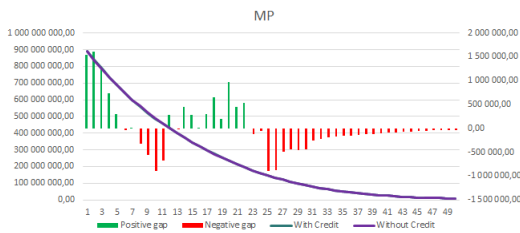


FIGURE 18 – MP evolution

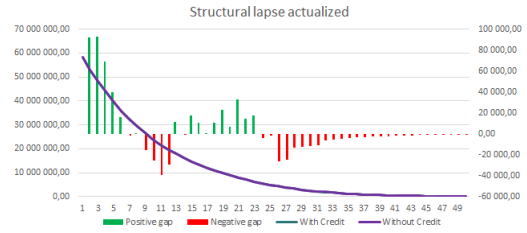


FIGURE 19 – Lapse evolution

In the remainder of the projection, as the differences are much smaller on the assets side, the threshold effects of the profit-sharing algorithm limit the differences observed on the liabilities side. So, overall, the strong evolution at the beginning of the projection and the discounting effect have the effect of increasing the Best Estimate.

The stochastic view enables us to assess the additional impact of the stochastic effect. The deformation observed in the deterministic view is accentuated in many scenarios. However, many other scenarios are impacted differently. Indeed, the impact is highly dependent on the way survival probabilities evolve, so in some scenarios, the impact of default is much greater. The surplus of cash flow in the first year is very small, and coupon rate gains are much smaller.

Overall, the credit model does not cause any major changes in the distribution of BEs. The financial income excess due to risk-neutralization and higher coupon rate, are offset by the survival probability. However, the financial income excess at the start of the

projection is unfavorable, as it encourages the insurer to pay out more profit sharing at the beginning of the projection. On the other hand, it does not manage to collect more financial margin, so the overall effect is still marginally negative.

Sensitivity on solvency ratio

The impacts observed were then compared with two types of sensitivity : the economic context and the reinvestment policy. We observed the difference in impact between the end of 2021 and the end of 2022, and added a second dimension through two new reinvestment policies : AA only and BBB only.

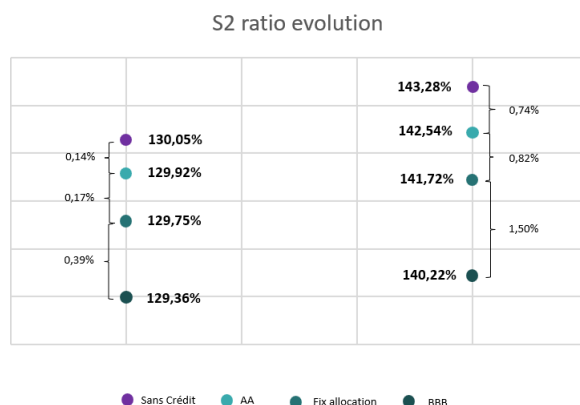


FIGURE 20 – Evolution of SCR as a function of economic context and reinvestments

The evolution of the economic context between the end of 2021 and the end of 2022 has the effect of increasing the coverage ratio by +13% without credit modeling, and +12% with credit. The effect of the beginning of a spread widening, on credit modeling, therefore has an impact that materializes here, although this impact remains low on the scale of the ratios. The model is also sensitive to the reinvestment policy. Between 2021 and 2022, a BBB investment policy creates a greater loss of ratio in 2022 than in 2021.

Conclusion

The work in this dissertation has enabled us to present a method for valuing stochastic credit in an ALM model. The aim of this dissertation was to analyze the impact of modeling this new risk on an insurer's solvency, taking into account changes in the economic context.

The impact on the portfolio studied is very marginal. Best Estimate provisions have risen, but the difference is very small, and the solvency ratio has also fallen very slightly, by 150 bps. The ceiling effects of the LGD greatly limit the impact on financial flows, so the differences observed are mainly present at the start of the projection.

Changes in the economic context in the future could have a greater impact on the balance sheet, but as explained above, the modeling assumptions (mainly the LGD) strongly limit the impact. Given the current context, the deformation of flows remains limited.

It's important to keep in mind that these results depend on the model's assumptions, and that a different portfolio structure could be more affected by this modeling. However, as this parameter is integrated into the diffusion of risky rates, the diffusion would have to be multiplied as many times as there are different LGDs. Theoretically, this is an interesting approach, but in practice it is difficult to implement. A calibration of the models, specific to sovereign bonds, would also enable to refine the model.

An increase in spread widening in the future could have a bigger impact on the model, and sensitivity to the capitalization reserve would be an important area of analysis. Indeed, a model that accepts bond sales before maturity could be more exposed, and the impact of the capitalization reserve could prove very significant.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je souhaite remercier mon manager Elie MERYGLOD pour son encadrement, sa disponibilité et sa très bonne humeur. Ses connaissances et sa confiance ont été précieuses pour le bon déroulement de mon mémoire.

Ensuite, je remercie David MARIUZZA, responsable de la practice Modeling & Finance, pour sa grande confiance et ces nombreux soutiens.

Un grand merci également à Eve ZURFLUH pour son soutien sur la partie logicielle interne de modélisation. J'ai découvert une très belle personne, toujours disponible, avec une très grande curiosité et avec une forte envie d'aider les autres.

Durant ce mémoire, j'ai également pu bénéficier de l'expertise de plusieurs collègues tel que Lionel MOUYOPA, François MALIGOT, Yann DELVIGNE, Thibaud LOPEZ ou encore Simon THIBAUT. Je les remercie très chaleureusement.

Je remercie également Pauline SALAUN et Rainer BUCKDAHN, mes tuteurs académiques, pour leurs conseils et leurs relectures.

Merci également aux nombreux collègues d'Addactis qui m'ont permis de passer une très agréable année au sein de l'entreprise. Notamment Johanna et Tomas mes lecteurs, Floriane pour son aide sur l'outil, Brahim pour son soutien IT, Miguel pour son sourire et la grande équipe de jeunes consultants et stagiaires.

Pour terminer, je remercie ma famille et mes amis qui ont été un grand soutien moral durant le déroulement de ce mémoire.

Table des matières

RÉSUMÉ	i
ABSTRACT	iii
NOTE DE SYNTHÈSE	v
SUMMARY NOTE	xi
REMERCIEMENTS	xvii
INTRODUCTION	1
1 LE CADRE RÉGLEMENTAIRE ET ÉCONOMIQUE	3
1.1 Présentation des trois piliers de S2	4
1.2 Les exigences quantitatives	5
1.2.1 Valorisation économique du bilan	5
1.2.2 Le Best Estimate	6
1.2.3 Exigence de capital : SCR et MCR	8
1.3 Contexte économique	12
2 THÉORIE ET MARCHÉ	15
2.1 Notions stochastiques	15
2.2 Simulation d'un mouvement brownien	17
2.2.1 Mouvement brownien simple	17
2.2.2 Mouvement brownien reconstruit par un pont brownien	17
2.3 Théorie des taux d'intérêts	19
2.3.1 Facteur d'actualisation	19
2.3.2 Prix Zéro-Coupons	20
2.3.3 Les taux spots et forwards	21
2.3.4 Le taux swap	22
2.3.5 Taux marché et taux implicites	24
2.4 Marché obligataire	25
2.4.1 La courbe EIOPA	25
2.4.2 Les obligations	26

3	MODÉLISATION STOCHASTIQUE	31
3.1	Les Générateurs de Scénarios Économiques	32
3.1.1	Intérêt	32
3.1.2	Définition	32
3.1.3	Les données	34
3.1.4	Calibrage	35
3.1.5	Diffusion	36
3.1.6	Validation	37
3.1.7	Corrélation	38
3.1.8	Construction du scénario équivalent-certain	38
3.2	Présentation des modèles utilisés dans le cadre de ce mémoire	40
3.2.1	Le modèle DDLMM pour les taux nominaux	40
3.2.2	Le modèle TVDV pour les indices actions	41
3.2.3	Le modèle de Black-Scholes pour l'immobilier	41
3.2.4	Le modèle de Vasicek à 2 facteurs pour l'inflation	41
3.3	Modélisation du risque de crédit par le modèle LMN	42
3.3.1	Présentation du modèle	42
3.3.2	Modèle à surplus d'intensité	44
3.3.3	Calibration	45
3.3.4	Diffusion	50
3.3.5	Corrélation des spreads avec les autres facteurs	52
3.3.6	Validation	53
3.3.7	Scénario de choc up/down	55
4	IMPLÉMENTATION DU CRÉDIT DANS L'ALM	57
4.1	Modélisation Actif/Passif	57
4.1.1	Projection de l'actif et du passif	58
4.1.2	Réallocation de l'actif	62
4.1.3	Calcul de la PB	63
4.1.4	Calcul du résultat	64
4.2	Intégration du crédit stochastique dans la valorisation des obligations	66
4.2.1	La risque neutralisation	66
4.2.2	Valorisation et ajustement des flux	67
4.2.3	Gestion des flux tombant en cours d'année	68
4.3	Focus sur les fuites de modèles	69
4.4	Présentation du portefeuille	70
4.4.1	L'actif initial	70
4.4.2	Le passif	73
5	ANALYSE D'IMPACT DU CRÉDIT DANS LE MODELE ALM	77
5.1	Analyse d'impact au 31/12/2022 avec réinvestissement sur une allocation fixe	77
5.1.1	Impact sur les flux d'actifs	77
5.1.2	Impact sur le Best Estimate	80

5.1.3	Analyse du ratio de solvabilité	93
5.2	Etude de sensibilité	95
5.2.1	Impact du réinvestissement au 31/12/2022	95
5.2.2	Impact du contexte économique	96
5.2.3	Impact du contexte économique et du réinvestissement	98
CONCLUSION		99
LEXIQUE DES ACRONYMES		103
A	Démonstration du flux \tilde{F}_T	105
A.1	Portefeuille initial	105
A.2	Achat ALM	106

INTRODUCTION

La réglementation Solvabilité II, en vigueur depuis janvier 2016, a permis une refonte de la méthode de calcul des engagements futurs d'un assureur. Cette réglementation inclut une modélisation de chacun des risques susceptibles d'impacter l'assureur (tels que les risques de marché, les risques liés à la souscription en non-vie, santé et vie). Cette réglementation a également permis d'uniformiser les règles prudentielles d'évaluation du besoin en fonds propres au niveau européen.

Une compagnie d'assurance-vie a la spécificité d'avoir des options et garanties financières au sein de ses contrats. Ces caractéristiques obligent l'assureur à modéliser de manière stochastique les différents facteurs de risques de marché (taux, actions, immobiliers, spreads de crédit), pour capter la valeur des coûts de ces options et garanties.

Le portefeuille d'un assureur-vie est constitué en grande majorité de titres obligataires (plus de deux tiers en général). En effet, les titres obligataires ont un horizon connu à moyen-long terme que l'assureur peut aligner sur la durée des engagements au passif. De plus, avec des obligations à taux fixes, l'assureur connaît en amont le rendement du titre et lorsqu'ils sont émis par des états ou par des entreprises en bonne santé, ces titres sont peu risqués. Cependant, avec l'expérience des dernières années, il est possible d'observer des périodes de taux bas comme des périodes de taux élevés. Dans un contexte de taux bas, l'assureur aura du mal à financer les garanties des contrats (taux minimum garanti et garantie en capital) et à prélever des marges sur un horizon moyen terme. Dans ce contexte, la recherche de rendement est essentielle, les assureurs se tournent alors vers des obligations plus risquées. À l'inverse, lorsque les taux sont élevés, l'assureur peut être amené à réinvestir vers des obligations moins risquées pour atténuer son exposition, tout en faisant attention au comportement des assurés qui pourraient être amenés à racheter leurs contrats. Ainsi, les assureurs adaptent leur allocation d'actifs au regard de la situation économique.

Dans les modèles de projection, les obligations risquées sont souvent modélisées avec un spread de crédit fixe, calculé à la date de valorisation compte tenu de l'évolution des taux et du spread de l'émetteur. Toutefois, l'ACPR (l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) a jugé que cette méthode n'était pas suffisante au regard de l'évolution des taux sur ces dernières années. Les taux durablement bas ont poussé les assureurs à investir dans des titres obligataires avec plus de risques et la brusque remontée des

taux renforce la nécessité de mesurer plus finement ce risque. Ainsi, l'ACPR a imposé à plusieurs acteurs la prise en compte du crédit sous forme stochastique.

De par l'importance du portefeuille obligataire, ce changement de méthode peut avoir un impact significatif sur la solvabilité de l'assureur. En effet, le contexte de remontée des taux actuels peut amener les entreprises à avoir plus de difficultés à se financer ce qui peut provoquer un phénomène d'écartement des spreads. L'objectif de ce mémoire est d'étudier les impacts de l'intégration du crédit stochastique au sein du modèle ALM au vu de la situation économique actuelle, via la mise en place d'un modèle au sein du GSE, et d'étudier sa sensibilité à d'autres situations économiques.

Dans un premier temps, il sera question de présenter la réglementation en place, puis il sera important d'introduire les outils nécessaires à la bonne compréhension de la modélisation. Ensuite, une partie consistera à présenter la génération des scénarios de crédit, puis il conviendra de décrire l'implémentation dans le modèle ALM. La dernière partie comprendra l'étude d'impacts au vu de la situation à fin 2022, celle à fin 2021, ainsi qu'une étude de sensibilité sur l'hypothèse de réinvestissement.

Chapitre 1

LE CADRE RÉGLEMENTAIRE ET ÉCONOMIQUE

Dans tous les secteurs économiques, le cadre de travail évolue au cours du temps. La réglementation permet d'établir un environnement dans lequel les entreprises peuvent fonctionner correctement entre elles, mais également avec leurs clients. La modification de la réglementation est souvent due à l'apparition de nouveaux éléments dont l'existence n'était pas connue ou bien non pris en compte auparavant. Ce sont souvent des événements importants qui permettent de mettre en lumière ces nouveaux éléments. Par exemple, la crise des sub-primes de 2008 a apporté une refonte de la réglementation avec le passage de Bâle II à Bâle III. En effet, les bilans ne cessaient de croître tandis que la couverture par les fonds propres se dégradait.

Dans le monde spécifique de l'assurance, c'est le même procédé, des nouveaux risques peuvent apparaître pour une compagnie d'assurance et une mauvaise valorisation de la solvabilité d'une compagnie peut l'amener à faire faillite. C'est dans ce contexte que la norme Solvabilité II (S2) a été conçue sur pas moins de dix années pour rentrer en vigueur au 1er Janvier 2016. D'un côté, elle permet d'améliorer la santé des compagnies d'assurances en renforçant les exigences de solvabilité de ces organismes et en améliorant la prise en compte des différents risques qui peuvent l'impacter. D'un autre côté, cette norme permet d'intensifier le contrôle des autorités de surveillance ainsi que d'exiger une transparence envers ses assurés avec la publication de rapports.

Cette norme a également la particularité d'être respectée à l'échelle européenne, elle permet ainsi de simplifier la mise en place des bilans pour des compagnies d'assurances travaillant dans plusieurs pays européens.

À l'échelle française, c'est l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) qui est chargée de contrôler le secteur de l'assurance. Elle fait partie de la Banque de France et joue le rôle d'autorité de surveillance dans le cadre de la norme S2. Elle a un rôle de protection pour les assurés dans le sens où elle vérifie que la transparence des

compagnies d'assurances est suffisante et que sa stabilité lui permettra de satisfaire ses engagements.

Afin de bien comprendre comment se structure cette norme, il est intéressant d'avoir une vue globale des trois piliers qui la composent pour ensuite se focaliser sur le pilier 1. En effet, ce mémoire porte sur les impacts sur la solvabilité d'une compagnie d'assurance et ceci régit du pilier 1.

Dans une dernière partie, il sera intéressant de s'arrêter rapidement sur le contexte économique actuel qui pousse les travaux sur la modélisation du crédit stochastique au sein des modèles de valorisation.

1.1 Présentation des trois piliers de S2

La norme S2 est composée de trois piliers permettant de diviser les directives en trois types d'exigences.

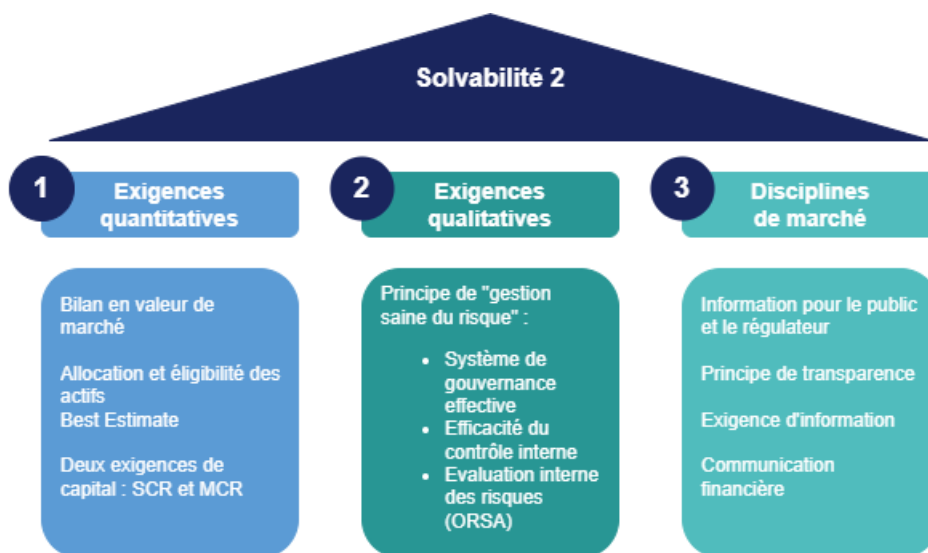


FIGURE 1.1 – Les trois piliers de la norme S2

Le premier pilier se focalise sur la méthode de valorisation de l'actif et du passif et le calcul d'une exigence en fonds propres en appliquant une formule standard proposée par S2 ou bien un modèle interne complet ou partiel.

Le second pilier concerne les règles de gouvernance et de gestion des risques ainsi qu'une évaluation sur un horizon de temps moyen terme des risques et de la solvabilité de l'organisme d'assurance. Cette évaluation est appelée ORSA (Own Risk and Solvency Assesment).

Le troisième et dernier pilier concerne le partage d'information avec le superviseur et le public. Ce pilier permet de développer les exigences en termes de transparence et de publication de la situation financière de l'organisme d'assurance.

Ces trois piliers sont essentiels pour la bonne compréhension du cadre réglementaire du monde de l'assurance. Cependant, dans le cas de ce mémoire qui a pour impact principal la valorisation de l'actif, la section suivante se concentre sur le pilier I.

1.2 Les exigences quantitatives

1.2.1 Valorisation économique du bilan

Dans le cadre de S2, la valorisation du bilan doit se faire en valeur économique (ou valeur marché). Pour l'actif, un marché existe et permet de calibrer des modèles permettant de valoriser correctement l'actif. Cette méthode permet ainsi de prendre en compte les plus ou moins-values latentes des actifs au contraire d'une valorisation comptable. Pour les provisions au passif, ceci est plus complexe, car il n'est pas possible d'avoir la même approche dans le sens où il n'existe pas un marché d'échange des contrats d'assurance ni de formule fermée au même titre que les actifs. Les provisions sont ainsi évaluées par une méthode basée sur des données de marché, mais calculées par des modèles. Les provisions de l'assureur sont ainsi nommées, dans le cas de la norme S2, BEL (Best Estimate of Liabilities).

Le passif d'un assureur est composé de ses provisions ainsi que de ses fonds propres. Les fonds propres se déterminent par différence entre l'actif en valeur de marché et les provisions techniques (correspondant au BEL auquel est rajoutée une marge pour risque qui sera spécifiée dans la sous-section suivante).

Remarque : Dans la décomposition du bilan présenté ci-après, les fonds propres sont divisés en deux parties, l'exigence en capital ainsi que l'excédent. Ces deux éléments ne sont pas en soit des éléments du bilan, mais ils permettent de comprendre que les fonds propres de l'assureur doivent être supérieurs à l'exigence de capital pour respecter la réglementation.

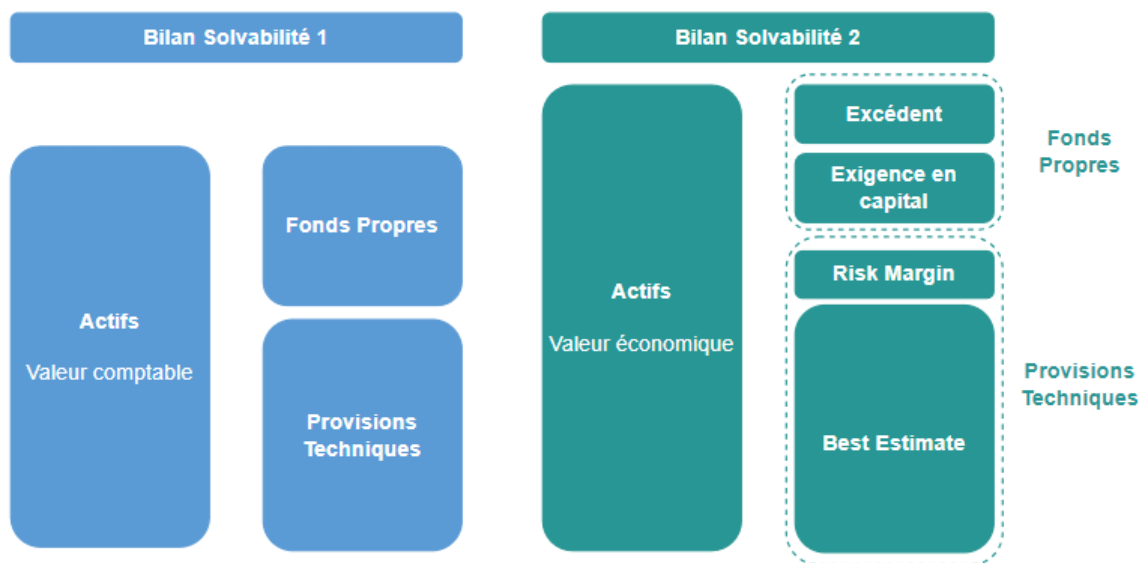


FIGURE 1.2 – Comparaison des bilans S1 et S2

Les deux prochaines sous-sections vont permettre d'expliquer comment calculer et bien comprendre la valorisation Best Estimate des provisions ainsi que l'exigence en capital.

1.2.2 Le Best Estimate

Le Best Estimate, autrement appelé meilleure estimation des provisions techniques, correspond à la moyenne des flux de trésorerie qui parviendront dans le futur en prenant en compte la valeur temps en les actualisant et leur probabilité de survenir. Ce Best Estimate peut se décomposer en deux parties, une partie garantie (BEG) ainsi qu'une partie discrétionnaire (FDB).

Ainsi, lors du calcul du Best Estimate en épargne, les éléments suivants doivent être ventilés entre le BEG et la FDB¹ :

- Les provisions permettant de couvrir les engagements de l'assureur vis-à-vis des taux minimums garantis (TMG) ;
- Les provisions permettant de respecter son engagement réglementaire vis-à-vis de la participation aux bénéfices (PB) ;
- Les provisions permettant d'atteindre les clauses de PB supplémentaire ;
- Les provisions constituées dans le passé pour la PB.

Pour ventiler correctement le BE, l'ACPR conseille de calculer dans un premier temps

1. ONC ACPR

le Best Estimate Global, puis de déterminer le Best Estimate Garanti en proposant une méthode simplifiée et enfin trouver la partie discrétionnaire par soustraction.

Le Best Estimate est déterminé en projetant le bilan de l'assureur sur un horizon long terme, en prenant en compte des variables d'intérêts spécifiques qui seront définies dans la suite de ce mémoire. La structure des contrats en assurance-vie contraint l'assureur à effectuer cette projection sur un grand nombre de trajectoires possibles du bilan. En effet, l'assureur s'engage à servir un minimum de rendement quelles que soient les conditions du marché, une seule trajectoire ne permet pas de prendre en compte correctement cette optionnalité. Ce concept sera redéfini plus précisément dans le chapitre sur les générateurs de scénarios économiques.

Le Best Estimate est ainsi déterminé par des méthodes de Monte-Carlo, et doit s'effectuer dans un univers particulier, l'univers risque-neutre [6].

1.2.2.1 Univers risque-neutre

Cet univers est un environnement théorique dans lequel chaque actif rapporte en moyenne le taux sans risque. Dans cet univers seule la volatilité diffère d'un actif à l'autre. Il est utilisé pour le calcul du BE, car il permet d'évaluer facilement la valeur actuelle d'un portefeuille permettant de se couvrir par rapport à la valeur future de l'actif.

Ce cadre de calcul est basé sur deux grandes hypothèses, l'absence d'opportunité d'arbitrage ainsi que la complétude du marché.

- **L'absence d'opportunité d'arbitrage** considère qu'avec un investissement nul, il n'est pas possible d'obtenir, à un instant futur, un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive. Ainsi, deux stratégies ayant la même valeur à un instant T auront forcément la même valeur à un instant S futur et à un instant passé t ;
- **La complétude du marché** considère que chaque chronique de flux financiers peut être répliquée par un actif composé d'une part sans risque et d'une autre part risquée.

Avec ces deux hypothèses, l'existence et l'unicité de la mesure risque neutre est vérifiée. Dans la suite, cette mesure sera notée P^* . Sous cette mesure chaque actif S actualisé est une martingale, cette propriété sera définie plus précisément dans la section sur les notions stochastiques.

Avec ces hypothèses, le prix d'un actif complexe peut être déterminé en trouvant un portefeuille de couverture composé d'actifs dont il est facile de déterminer le prix. Le prix des actifs simples est déterminé grâce à des modèles stochastiques risque-neutre. Ensuite le prix de l'actif complexe est déterminé en prenant la moyenne des flux futurs actualisés du portefeuille de couverture. Cette méthode est par exemple appliquée pour calculer la valeur d'une option américaine (exercice de l'option d'achat ou de vente à n'importe quel instant jusqu'à la maturité).

1.2.2.2 Calcul empirique

Pour calculer le Best Estimate en vision pilier 1, la projection du bilan doit être effectuée impérativement en Run-Off. Cette méthode de projection élimine la possibilité d'estimer la souscription de nouveaux contrats au cours de la projection. Les seuls flux considérés sont ceux dus aux contrats déjà souscrits. Cela permet d'évaluer correctement la provision nécessaire pour les contrats détenus à la date d'aujourd'hui.

En revenant à la définition du Best Estimate, son expression peut ainsi s'écrire de la manière suivante :

$$BEL = \mathbb{E}^* \left[\sum_{i=0}^T D(0, i) \cdot CF(i) \right] \quad (1.1)$$

Avec, $D(0, i)$ le coefficient d'actualisation, également appelé déflateur, et $CF(i)$ le flux tombant au pas de projection i . T correspond quant à lui au pas de projection maximal.

Pour chaque simulation du bilan, une chronique de flux et de déflateurs est créée. La moyenne empirique sur chaque simulation permet ensuite de converger vers la valeur théorique du BEL.

1.2.2.3 Marge pour risque

En plus du Best Estimate, la compagnie d'assurance doit y ajouter une marge pour risque qui permet de compléter les provisions techniques afin d'obtenir la somme qu'un autre assureur demanderait pour racheter tous les contrats de l'assureur et ainsi être capable de satisfaire ses engagements.

Son calcul dépend d'un élément qui va être présenté dans la section suivante, il s'agit du SCR (Solvency Capital Requirement).

1.2.3 Exigence de capital : SCR et MCR

1.2.3.1 Le SCR

Une fois que l'actif a été évalué en valeur économique et que les provisions ont été déterminées, les fonds propres se déduisent par soustraction. Ces fonds propres sont ensuite comparés à une exigence en capital, le SCR (Solvency Capital Requirement). Il s'agit du montant seuil que doit posséder la compagnie d'assurance en fonds propres afin d'être capable de se préserver d'une ruine dans l'année qui suit dans 99,5% des cas.

Le SCR se décompose en trois parties, le BSCR (SCR de base), le risque opérationnel et un ajustement. Le BSCR est une agrégation par corrélation de différents modules de risque. Ces modules de risques sont eux-mêmes des agrégations par corrélation de sous-modules. Cette structure en pieuvre est présentée ci-après.

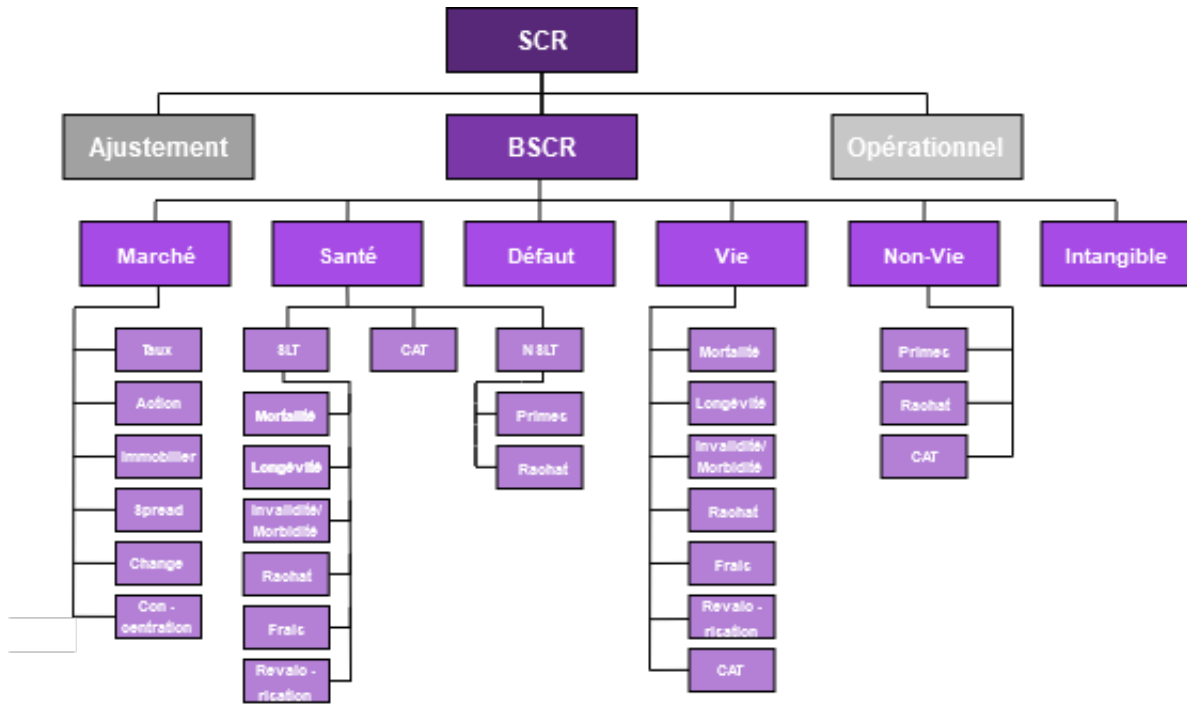


FIGURE 1.3 – Pieuvre du SCR

Chaque sous-module correspond à un risque et son SCR correspond à la baisse mesurée sur les fonds propres après l'application d'un choc spécifique à chaque risque. S'il s'avère que le choc entraîne une augmentation des fonds propres, le SCR est fixé à 0. En notant R_m le sous module m du module R , le SCR sous-modulaire est :

$$SCR_{R_m} = FP_{Base} - FP_{Choc_{R_m}} \quad (1.2)$$

Ensuite tous les SCR sous-modulaires d'un même module sont agrégés à l'aide d'une matrice de corrélation $(\alpha_{i,j})$, afin d'obtenir les SCR modulaires :

$$SCR_R = \sqrt{\sum_{m,l} \alpha_{m,l} SCR_{R_m} SCR_{R_l}} \quad (1.3)$$

Enfin, le BSCR est obtenu en agrégeant tous les SCR modulaires à l'aide également d'une matrice de corrélation $(\beta_{i,j})$:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{S,R} \beta_{S,R} SCR_S SCR_R} \quad (1.4)$$

1.2.3.2 SCR Spread

Il est important de se concentrer sur le SCR spread pour évaluer les différences entre ce calcul et la modélisation du crédit stochastique.

Le choc mesuré dépend de trois paramètres, la duration de l'obligation, sa notation ainsi que la nature du titre (obligation, titrisation, dérivés de taux). La duration mesure la sensibilité d'une obligation à la variation des taux d'intérêts. Il s'agit de la moyenne actualisée et pondérée (par le temps) des cash-flows de l'obligation.

Le choc de spread s'écrit de la manière suivante :

$$Choc_{Spread} = a + b \cdot (Duration\ Modifiée - k) \quad (1.5)$$

Les paramètres a et b dépendent de la duration, de la notation et de la nature du titre et le paramètre k diminue la duration appliquée au coefficient b . Cet ajustement permet d'éviter un double comptage avec le choc de taux d'intérêts. Pour les obligations non notées, les paramètres sont proches de ceux d'une obligation notée BBB.

Ce choc est ensuite appliqué à la valeur de marché initiale des obligations. Le choc sur la valeur initiale aura ainsi un impact dans le futur à cause de la politique de l'allocation cible. Ce choc est spot, contrairement à la modélisation du crédit qui impacte la valeur de marché des titres sur l'ensemble de la projection.

1.2.3.3 SCR opérationnel et ajustements

En plus du BSCR, un SCR opérationnel et un ajustement s'ajoutent pour obtenir le SCR global.

Le SCR Opérationnel

Le SCR opérationnel doit permettre d'évaluer le risque de perte lié à des erreurs de pratiques internes, des événements extérieurs ou des systèmes défectueux². Il se calcule grâce à une formule faisant intervenir le BSCR, les dépenses sur les fonds UC des douze derniers mois (Dep_{uc}) et le capital requis pour le risque opérationnel (Op) :

$$SCR_{Op} = \min(30\%.BSCR; Op) + 250\%.Dep_{uc} \quad (1.6)$$

Le capital requis pour le risque opérationnel est le maximum entre le capital requis sur la base des primes acquises Op_{primes} et le capital requis sur la base des provisions $Op_{provisions}$.

$$Op_{primes} = 4\%.Primes\ Brutes\ Vie + 3\%.Primes\ Brutes\ Non-Vie \quad (1.7)$$

2. Directive 2009/138/CE : <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138>

$$Op_{provisions} = 0,45\% \cdot Provisions\ techniques\ Vie + 3\% \cdot Provisions\ techniques\ Non-Vie \quad (1.8)$$

L'ajustement

L'ajustement prend en compte deux sources d'atténuation de la valeur du SCR, l'absorption par la FDB (Future Discretionary Benefits) et l'absorption par les impôts différés.

Ajustement par la FDB

La FDB correspond à la partie du BEL qui va au-delà des engagements garantis par le contrat. Pour le déterminer, il est nécessaire d'évaluer la part des provisions destinées uniquement à couvrir les engagements contractuels (appelés BEG - "Best Estimate Garantie") et ensuite de le soustraire au BEL.

La FDB permet d'absorber des pertes liées aux différents chocs de la formule standard. En effet, la part de FDB est une partie d'engagement non garantie, donc dans un contexte de choc elle peut être diminuée permettant ainsi de partager les pertes entre l'assureur et l'assuré. L'ajustement par la FDB se calcule ainsi de la manière suivante :

$$Aj_{FDB} = -\max(0; \min(BSCR - nBSCR; FDB)) \quad (1.9)$$

Le calcul a besoin d'un BSCR avec prise en compte de l'absorption $nBSCR$ (le calcul sous-modulaire est donc effectué deux fois, avec et sans absorption). Ensuite, la formule permet de vérifier que l'écart global ne dépasse pas le montant de FDB au global.

Ajustement par l'impôt différé

L'impôt différé notionnel correspond, d'après la réglementation S2, à la valeur de réduction du SCR liée à la baisse des impôts suite à une perte égale au niveau de BSCR (y compris ajustement par la FDB et SCR opérationnel). Cependant, l'assureur doit être capable de prouver que ses bénéfices futurs seront suffisants pour couvrir ce montant.

La valeur retenue est donc le minimum entre la somme définie précédemment et la somme d'impôts futurs dont l'assureur peut prouver la couverture. Le montant obtenu vient ensuite réduire le SCR global.

1.2.3.4 Plan de résolution

L'article L311-5 de l'ordonnance n° 2017/1608, concernant les pratiques de résolution de l'assurance, propose l'élaboration de plans préventifs. Les organismes doivent simuler une situation de crise (proche de la faillite) et concevoir un plan pour résoudre les problèmes liés à cette crise. Ce plan doit donc expliquer aussi bien les solutions permettant de restaurer l'équilibre prudentiel et financier que la manière d'arrêter son activité en cas d'échec.

Si le montant calculé de SCR est plus élevé que les fonds propres, l'ACPR sera dans l'obligation de fixer un plan de redressement. Ce plan de redressement se basera en partie sur le plan préventif qui aurait pu être rédigé par l'organisme en question.

Cependant, un second seuil de solvabilité existe, il s'agit du MCR (Minimum Capital Requirement).

1.2.3.5 MCR

Le MCR (Minimum Capital Requirement), est le seuil minimum de fonds propres que les organismes d'assurances doivent détenir. Là où le SCR est un seuil de vigilance, le MCR est le seuil extrême. Si un organisme ne couvre pas le MCR ou s'il prévoit qu'il ne sera pas capable de le couvrir dans les trois prochains mois, l'intervention de l'ACPR est automatique, l'organisme perd alors son agrément.

Sa méthode de calcul se base sur un premier calcul linéaire prenant en compte la meilleure estimation des primes en non-vie et des provisions techniques en vie. Ensuite, cette valeur doit vérifier qu'elle se situe bien entre 25% et 45% du SCR. Enfin, la valeur obtenue est comparée à un plancher absolu appelé AMCR (Absolute Floor of MCR) valant 3,7 millions pour la partie vie et 2,5 millions pour la partie non-vie.

1.3 Contexte économique

Au niveau européen, l'un des rôles de la BCE est de maintenir une stabilité de l'économie globale des pays européens. C'est donc la BCE qui met en place des leviers pour stabiliser les prix et le pouvoir d'achat à travers la variation des taux directeurs. Ce taux est celui qu'elle accorde aux banques commerciales dans le cas de prêt, il influence donc grandement le taux que les banques commerciales proposent à leur tour à leurs clients.

Ces taux sont sur une tendance à la baisse depuis maintenant 40 ans, en effet en 1985 les taux étaient situés autour de 15% et en 2021, ils sont de 0%. Cette tendance à la baisse a cependant été accentuée à la suite de la crise de 2008.

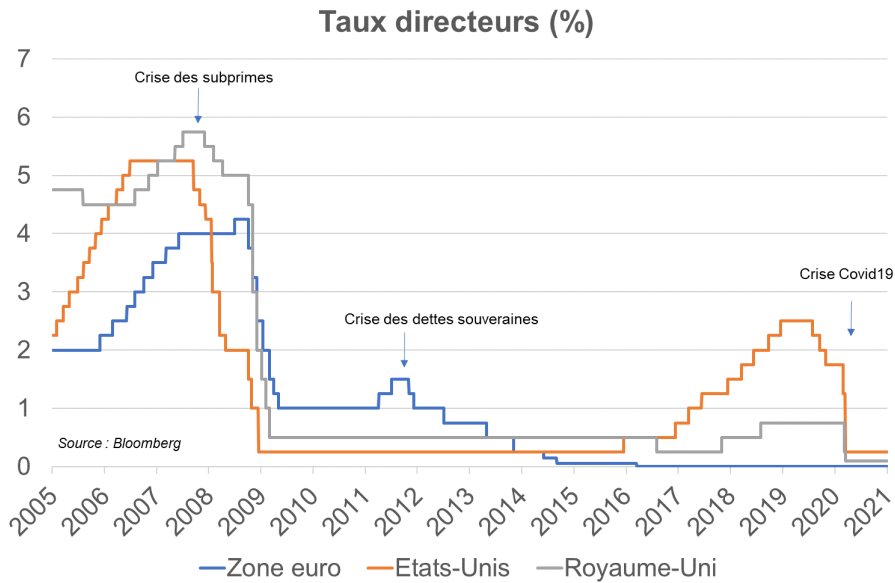


FIGURE 1.4 – Evolution des taux directeurs

Cette baisse des taux a obligé les assureurs à se tourner vers des investissements proposant des meilleurs rendements, et aujourd’hui le portefeuille d’un assureur contient de plus en plus d’obligations corporate. Le contexte de taux bas ayant duré une longue période, cela a donné raison aux assureurs de se tourner davantage vers ce type d’investissement.

Cependant, depuis 2022, la zone euro connaît une forte inflation avec l’accumulation de la hausse du prix de l’énergie dû au conflit entre l’Ukraine et la Russie. L’inflation n’avait jamais été aussi élevée depuis les années 80 avec une moyenne de 5,2% sur l’année 2022 en France. Dans ce contexte, la BCE a adopté une politique de remontée des taux directeurs, ces derniers ont atteint 2% à fin 2022.

Ainsi, le contexte de taux n’est plus du tout le même que celui à fin 2021. Comme les taux sont très élevés, les entreprises vont avoir tendance à augmenter leurs taux de rendements pour continuer d’attirer les assureurs, accentuant ainsi le risque de défaut. Le portefeuille des assureurs à fin 2022 est donc fortement exposé aux risques de crédit dans l’avenir.

Au regard de ce contexte, l’ACPR a publié des recommandations auprès des compagnies, pour qu’elles modélisent de manière stochastique le risque de crédit. Dans un premier temps, il s’agissait de recommandations, mais aujourd’hui, l’ACPR commence à exiger cette modélisation. [6]

C’est dans ce cadre que ce mémoire s’intègre. Le risque de hausse des taux et d’écartement des spreads renforçant le risque de crédit, il apparaît nécessaire d’intégrer ces

paramètres, et ainsi la modélisation stochastique des spreads de crédit, dans l'évaluation économique des engagements de l'assureur.

Ce premier chapitre a permis de présenter en quelques pages les exigences de la norme Solvabilité II en termes d'évaluation du bilan et de la solvabilité d'un organisme d'assurance. Il a également permis de présenter rapidement les exigences en termes de gestion des risques, de contrôle interne ainsi qu'en termes de transparence vis-à-vis du public et de l'ACPR. Pour conclure ce chapitre, une présentation du contexte économique a été effectuée pour comprendre les enjeux de ce mémoire.

Le chapitre suivant consiste à présenter la théorie stochastique qui sera utile lors de l'élaboration du modèle de crédit. Il sert également à présenter le marché obligataire et ainsi le risque de crédit.

Chapitre 2

THÉORIE STOCHASTIQUE ET MARCHÉ OBLIGATAIRE

Afin d'avoir une bonne compréhension de la modélisation des taux d'intérêts et du spread de crédit, il est important d'introduire succinctement le cadre théorique. L'objectif de ce chapitre consiste également à présenter le marché obligataire et définir le risque de défaut.

Dans un premier temps, un rapide rappel de quelques notions stochastiques est nécessaire [10].

2.1 Notions stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet pourvu d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions usuelles.

Définition 1 : Martingale

Un processus stochastique X est une **martingale** par rapport à \mathbb{F} si :

1. X_t est \mathcal{F}_t – mesurable, $\forall t \geq 0$;
2. X_t est intégrable, $\forall t \geq 0$;
3. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, \mathbb{P} -p.s. et pour tout $0 \leq s \leq t$,

Définition 2 : Mouvement Brownien

Un mouvement brownien (réel standard) B est un processus stochastique si :

1. Il est \mathbb{P} presque sûrement continu par rapport au temps et nul en $t = 0$, i.e.

$$P[\{\omega : t \mapsto B_t(\omega) \text{ continue, } B_0(\omega) = 0\}] = 1;$$

2. Il est doté d'accroissements indépendants ;
3. Ses accroissements sont gaussiens : $\forall t, h \geq 0 : B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$.

Notation : Intégrale stochastique

Sous la condition qu'un processus stochastique M est \mathbb{P} presque sûrement de carré intégrable sur $[0, T]$: $P\left[\int_0^T M_s^2 ds < \infty\right] = 1$, la notation $\int_0^t M_s dB_s$ est introduite. Elle est appelée intégrale stochastique d'un processus M par rapport à un mouvement brownien B .

Définition 3 : Processus d'Itô

Un **processus d'Itô simple** est un processus pouvant s'écrire de la manière suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t L_s ds + \int_0^t M_s dB_s, t \in [0, T] \quad (2.1)$$

où $X_0 \in \mathbb{R}$, L et M deux processus \mathbb{F} -adaptés tel que

$$P\left[\int_0^T |L_s| ds < \infty\right] = P\left[\int_0^T M_s^2 ds < \infty\right] = 1 \quad (2.2)$$

Pour conclure cette section, il est nécessaire d'introduire la formule centrale de la théorie stochastique. Une formule sur laquelle se base toute résolution d'équation différentielle stochastique, il s'agit de la formule d'Itô.

Théorème : Formule d'Itô simple

Soient X un processus d'Itô simple et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) M_t^2 dt \quad (2.3)$$

Une fois ces quelques notions clés présentées, il est important de se focaliser rapidement sur la manière de simuler un mouvement brownien. En effet, cet objet est l'élément clé sur lequel se base tous les modèles de diffusions stochastiques.

2.2 Simulation d'un mouvement brownien

Dans un cadre classique, la simulation d'un mouvement brownien simple est suffisante.

2.2.1 Mouvement brownien simple

Pour simuler un mouvement brownien il est possible de repartir de sa définition. Les accroissements sont gaussiens et sont indépendants. Il est ainsi possible de simuler un mouvement brownien en construisant des lois normales.

La simulation d'un mouvement brownien $(B_t)_{t < T}$ jusqu'à un instant T avec un pas de temps $h = \frac{T}{n}$ peut ainsi être réalisée de la manière suivante :

1. Simulation de n variables aléatoires indépendantes $X_i = \mathcal{N}(0, h)$;
2. Somme des variables aléatoires pour obtenir des mouvements browniens :

$$B_0 = 0, B_{t_i} = \sum_{j=0}^i X_j, t_i = i * h, i \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

Par construction cette méthode permet bien d'obtenir des accroissements indépendants et gaussiens. En effet :

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} = \sum_{j=0}^{i+1} X_j - \sum_{j=0}^i X_j = X_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, h) \quad (2.4)$$

Dans certains cas, il peut-être nécessaire d'affiner le pas de temps d'un mouvement brownien. C'est-à-dire construire un mouvement brownien avec un pas de temps plus fin, mais passant bien par les valeurs du mouvement brownien simple.

Cette méthode peut être par exemple utile lorsqu'il est souhaité de corrélérer différents modèles alors qu'ils n'ont pas le même pas de temps. Ce phénomène sera expliqué plus précisément dans la partie 3.3.5.

2.2.2 Mouvement brownien reconstruit par un pont brownien

A partir d'un mouvement brownien avec un pas de temps h et un horizon $T = n * h$, où n est entier, non nul, il est possible de construire un mouvement brownien avec un pas de temps $l = \frac{h}{m}$, où m est un entier non nul.

Pour cela, il est possible de passer par un pont brownien afin de construire un mouvement brownien plus fin à partir d'un mouvement brownien de base.

1) La première étape consiste à construire un mouvement brownien simple W dont le pas de temps est h , il s'agira du mouvement brownien qui sera affiné. Un second mouvement brownien simple B avec cette fois-ci un pas de temps $l = \frac{h}{m}$ doit également être construit.

2) La seconde étape est de construire un pont brownien classique à partir de B , c'est-à-dire un mouvement brownien nul en 0 et à l'échéance T avec un pas de temps $l = \frac{h}{m}$:

$$PB0_t = B_t - \frac{t}{T}B_T, \forall t \in \{j * l : j \in \llbracket 0, n * m \rrbracket\} \quad (2.5)$$

3) L'étape suivante est un pont brownien nul à chaque instant $i * h$:

$$PB0_t = B_t - B_{t_i} - \left(\frac{t - t_i}{h} \right) \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (2.6)$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], t_i = i * h, i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$$

4) La dernière étape est un pont brownien égal aux valeurs du mouvement brownien W à chaque instant $i * h$:

$$PB_t = PB0_t + \left(1 + \frac{t_i - t}{h} \right) \cdot W_{t_i} + \left(\frac{t - t_i}{h} \right) \cdot W_{t_{i+1}}$$

$$= B_t + \left(1 + \frac{t_i - t}{h} \right) \cdot (W_{t_i} - B_{t_i}) + \left(\frac{t - t_i}{h} \right) \cdot (W_{t_{i+1}} - B_{t_{i+1}}) \quad (2.7)$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], t_i = i * h, i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$$

Construction d'un pont brownien

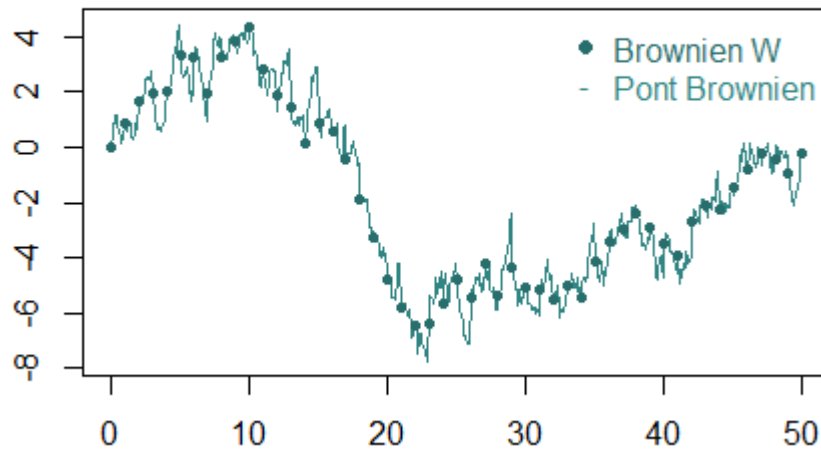


FIGURE 2.1 – Affinage d'un mouvement brownien

Dans la section suivante, il est question de faire le lien entre la théorie stochastique et la théorie des taux d'intérêts. Elle permet également de présenter le contexte du marché obligataire afin de comprendre les enjeux de la modélisation des spreads de crédit.

2.3 Théorie des taux d'intérêts

Les notions présentées dans cette section sont issues du livre de Brigo, D. et Mercurio, F. [9].

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet. Cet espace dispose d'un mouvement brownien B défini jusqu'à un horizon S convenablement grand. La filtration utilisée est celle engendrée par $B : \mathbb{F} = \mathbb{F}^B \vee \mathcal{N}_p$ où \mathcal{N}_p est l'ensemble des négligeables. Les instants t, T et S , tel que $t \leq T \leq S$, sont introduits et $r = (r_t)_{t \in [0, S]}$ représente le taux court stochastique. Il s'agit d'un processus \mathbb{F} -adapté tel que $P[\int_0^S |r_t| dt < \infty] = 1$.

2.3.1 Facteur d'actualisation

Pour bien comprendre comment s'articule la théorie des taux d'intérêts, il est important de commencer par le facteur d'actualisation.

Définition 1 : Valeur d'un compte de marché

N_t est défini comme la valeur d'un compte de marché, d'une compagnie, à l'instant t . Il est supposé qu'il évolue de manière continue par rapport au taux court r stochastique. Il évolue en suivant l'équation différentielle suivante :

$$dN_t = r_t N_t dt, \quad N_0 = 1 \quad (2.8)$$

Par résolution de cette équation, il vient :

$$N_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (2.9)$$

Une fois que la valeur d'un compte a été définie, il est possible d'en déduire l'expression du facteur d'actualisation.

Définition 2 : Facteur d'actualisation

Le facteur d'actualisation permet d'évaluer la valeur en date t d'une unité monétaire qui sera payée en une date ultérieure T . Il est noté $D(t, T)$ et se détermine de la manière suivante :

$$D(t, T) = \frac{N_t}{N_T} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (2.10)$$

En effet en notant K la valeur initiale sur un compte et en supposant que la valeur de ce compte en T est de 1 alors :

$$KN_T = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{N_T}$$

La valeur du compte vu de t est donc

$$KN_t = \frac{N_t}{N_T}$$

.

Une fois le facteur d'actualisation stochastique (autrement appelé déflateur) déterminé, il est possible de définir les principaux éléments composants la théorie des taux d'intérêts, à commencer par le prix zéro-coupons.

2.3.2 Prix Zéro-Coupons

Définition 3 : Prix zéro-coupon

Un zéro-coupon est une obligation qui ne sert aucun coupon à son détenteur, mais seulement une unité monétaire à maturité. Le prix de ce zéro-coupon, abrégé en prix ZC, à l'instant t pour une maturité de T , est noté $P(t, T)$. Comme il verse une unité à maturité, par définition $P(T, T) = 1$.

Sous la mesure risque neutre P^* , le prix d'un zéro coupon n'est rien d'autre que l'espérance conditionnelle du facteur d'actualisation :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^*[D(t, T) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.11)$$

$$P(t, T) = \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.12)$$

Les prix ZC sont des éléments centraux dans la théorie des taux d'intérêts, car il s'agit d'un objet simple à modéliser et qui permet ensuite de déterminer un grand nombre d'autres objets plus complexes.

Parmi les taux importants à connaître, il est possible de définir les taux spots ainsi que les taux forwards.

2.3.3 Les taux spots et forwards

Définition 4 : Taux spot

Le taux spot $R(t, T)$, également nommé taux au comptant, est un taux de change pour un achat immédiat. Pour faire le lien avec les prix ZC, il correspond au taux proposé à une date t afin qu'une épargne de $P(t, T)$ à l'instant t rapporte à l'instant T une unité de monnaie. Avec l'hypothèse d'une composition annuelle, le taux spot peut être déterminé de la manière suivante :

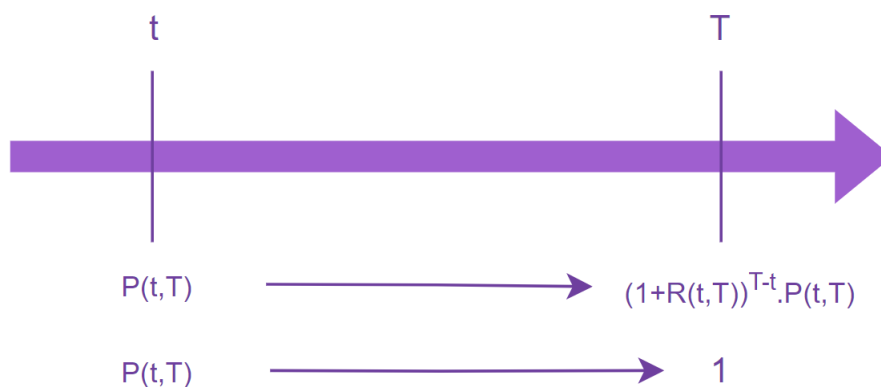


FIGURE 2.2 – Taux Spot

La mesure risque neutre exige une absence d'opportunité d'arbitrage, donc comme ces deux investissements sont égaux à l'initiale, alors ils le sont également forcément à maturité T . En isolant $R(T)$ de l'égalité, l'expression donne :

$$R(t, T) = \left(\frac{1}{P(t, T)} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1 \quad (2.13)$$

Remarque : Par inversion de l'expression, il est possible d'exprimer les prix ZC en fonction des taux spots :

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^T} \quad (2.14)$$

Cependant le taux spot à un instant t futur n'est pas connu aujourd'hui, donc pour cela, il faut passer par le taux forward.

Définition 4 : Taux forward

Le taux forward $F(t, T, S)$, également nommé taux à terme, est un taux de change proposé à instant t par le marché, mais pour un achat dans le futur. De nouveau, pour faire le lien avec les prix ZC, il correspond au taux proposé en t afin qu'une épargne de $P(t, S)$ à l'instant futur T rapporte à l'instant S une unité de monnaie. Avec l'hypothèse d'une composition annuelle, le taux forward peut être déterminé de la manière suivante :

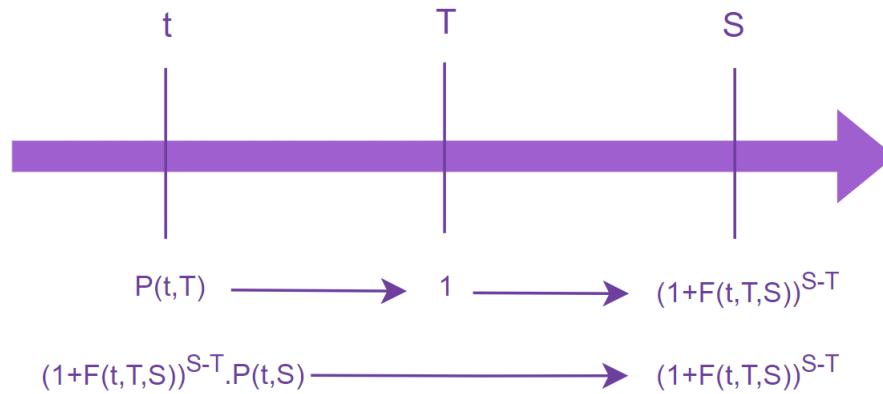


FIGURE 2.3 – Taux Forward

L'absence d'opportunité d'arbitrage exige une nouvelle fois que ces deux investissements égaux en T le soit également en t , donc en isolant $R(t, T)$:

$$F(t, T, S) = \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} \right)^{\frac{1}{S-T}} - 1 \quad (2.15)$$

Remarque : Il est ainsi possible de considérer dans une vision équivalent-certain que le taux forward calculé en 0 pour un achat en t et une maturité T correspond à la valeur du taux spot en t de maturité T .

$$F(0, t, T) \stackrel{EC}{=} R(t, T) \quad (2.16)$$

Cette considération est essentielle dans la construction du scénario équivalent-certain présenté dans la fin du chapitre suivant.

Un dernier taux est nécessaire pour bien comprendre la théorie, il s'agit du taux swap.

2.3.4 Le taux swap

Pour comprendre ce qu'est le taux swap, il peut être d'abord plus simple de définir les contrats forwards et les contrats swaps.

Définition 5 : Contrat forward

Le contrat forward, est un contrat de couverture contre la baisse du taux forward. Son propriétaire est sûr de recevoir un taux d'intérêt fixe K à l'instant S en l'échange du taux forward $F(t, T, S)$. En considérant un nominal de N , le prix de ce contrat $FRA(t, T, S, N, K)$ a pour valeur :

$$\begin{aligned} FRA(t, T, S, N, K) &= N * P(t, S) * (S - T) * (K - F(t, T, S)) \\ &= N \cdot [K * P(t, S) * (S - T) - P(t, T) + P(t, S)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Un second type de contrat existe sur le marché, il s'agit du contrat swap qui est une généralisation du contrat forward.

Pour introduire ce contrat, il est important d'introduire les éléments suivants : $\mathcal{T} = (T_\alpha, \dots, T_\beta)$ une suite de dates et $\tau = (\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta)$ avec $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ pour $i \in [\alpha+1, \beta]$.

Définition 6 : Contrat swap

Ce contrat de couverture assure à son propriétaire de recevoir un taux fixe K sur un ensemble de date prévu à l'avance, en échange du taux forward entre ses différentes dates. Il peut donc être vu comme une somme de contrat forward. Le prix de ce contrat $RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K)$ a pour valeur :

$$\begin{aligned} RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) &= N * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i) \\ &= N * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (\tau_i P(t, T_i) K - P(t, T_{i-1}) + P(t, T_i)) \\ &= N * [K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) - P(t, T_\alpha) + P(t, T_\beta)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Remarque : Le taux fixe K qui est échangé dans ce contrat est appelé le taux swap forward et est déterminé de manière à annuler la valeur du contrat à l'instant actuel t . Sa valeur est ainsi :

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (2.19)$$

Une fois que ces deux contrats sont définis, ainsi que le taux swap forward, il est maintenant possible de définir le taux swap simple.

Définition 8 : Taux swap

Le taux swap est le taux swap forward évalué en $t = T_\alpha$:

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (2.20)$$

Il correspond donc au taux annulant la valeur d'un contrat swap démarrant aujourd'hui à $t = T_\alpha$.

Maintenant, que toutes ces notions ont été définies, il est intéressant de faire le lien entre la théorie et la pratique, c'est-à-dire le marché obligataire.

Pour faire ce lien, il est intéressant de différencier les taux entre ceux qui sont observables sur le marché et les taux implicites.

2.3.5 Taux marché et taux implicites

Les taux présentés précédemment ne sont pas forcément tous observables sur le marché. Les taux de marché sont ceux qui sont observables, et les taux implicites sont ceux qui se déterminent en fonction des taux de marché.

Les taux swaps sont des taux de marché alors que les taux zéro-coupons sont des taux implicites. Dans le cas des modèles de diffusion de taux, il est important de calculer les taux zéro-coupons. Des méthodes existent pour les calculer en fonction de taux de marché tel que les taux swaps.

Méthodologie : Bootstrapping de la courbe de taux swaps

À partir d'une courbe de taux swaps interpolés voire extrapolés sur certaines maturités, il est possible de reconstruire les taux zéro-coupons. Cette méthode est appelée Bootstrapping de la courbe de taux, ou encore dé-couponnage.

En repartant de la formule du taux swap, il est possible, pas à pas, de calculer la valeur des prix ZC :

Pour la première maturité :

$$S_1(0) = \frac{1 - P(0, T_1)}{\tau_1 P(0, T_1)} \Leftrightarrow P(0, T_1) = \frac{1}{1 + \tau_1 S_1(0)} \quad (2.21)$$

Pour les maturités suivantes :

$$P(0, T_i) = \frac{1 - S_i(0) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P(0, T_j)}{1 + \tau_i S_i(0)} \quad (2.22)$$

Les courbes de taux spots et de taux forwards peuvent ensuite être retrouvées à l'aide des prix ZC.

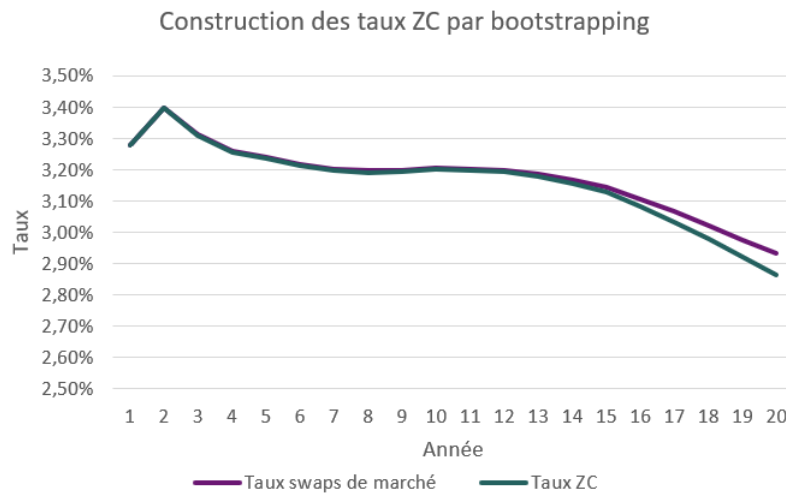


FIGURE 2.4 – Bootstrapping de la courbe des taux swaps au 31/12/2022

Ces taux swaps permettent de faire le lien avec le marché obligataire. En effet, ils servent à construire la courbe de taux sans risque, aussi appelée courbe EIOPA.

2.4 Marché obligataire

L'objectif de cette section est de définir la structure du marché obligataire, à travers la présentation de la courbe de taux sans risque EIOPA et un focus sur les caractéristiques des obligations.

2.4.1 La courbe EIOPA

Dans le cadre d'un besoin d'une méthode centrale au niveau européen, l'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles (EIOPA en anglais) publie tous les mois une courbe de taux.

Cette courbe de taux est appelée courbe de taux sans risque et est construite à partir des taux swaps de marché. Plusieurs ajustements sont effectués sur la courbe des taux swaps afin de capter certaines informations prudentielles que la courbe de marché ne prend pas en compte :

- Un ajustement de CRA (Credit Risk Adjustment), afin d'éliminer le risque de crédit ;

- Un ajustement de VA (Volatility Adjustment), afin de limiter les impacts de la volatilité sur les fonds propres des assureurs ;

Le manque de liquidité des courbes de marché après 20 ans, oblige l'EIOPA à extrapoler la courbe de manière à faire converger les taux forwards à un horizon long terme vers un taux ultime appelé UFR (Ultimate Forward Rate). Il est de 3,45% au 31.12.2022 et prend en compte deux éléments : un taux d'inflation espéré à long terme basé sur la cible des banques centrales (2% pour l'EURO) et un taux réel attendu calculé sur un historique de 60 ans après ajustement (1,4% au 31/12/2022). Le résultat obtenu est de 3,4%, mais pour ne pas rendre ce taux trop volatile d'une année à l'autre, il ne varie que de 150bps par rapport à fin 2021. Partant de 3,6% à fin 2021, il est donc de 3,45% à fin 2022.

Cette courbe est utile à de nombreuses étapes de calcul prudentiel pour une assurance ou une mutuelle. En effet, elle est utilisée pour actualiser les flux dans le calcul du Best Estimate, mais également dans la valorisation des obligations (définition abordée dans le chapitre suivant). La valorisation étant effectuée en univers risque-neutre, aucune création ou perte de richesse ne doit être perçue. Dans le cadre de l'intégration du crédit stochastique, la valorisation des obligations ne s'effectuant plus avec la courbe EIOPA, la modélisation de crédit doit posséder les bonnes caractéristiques afin de respecter ce caractère risque-neutre.

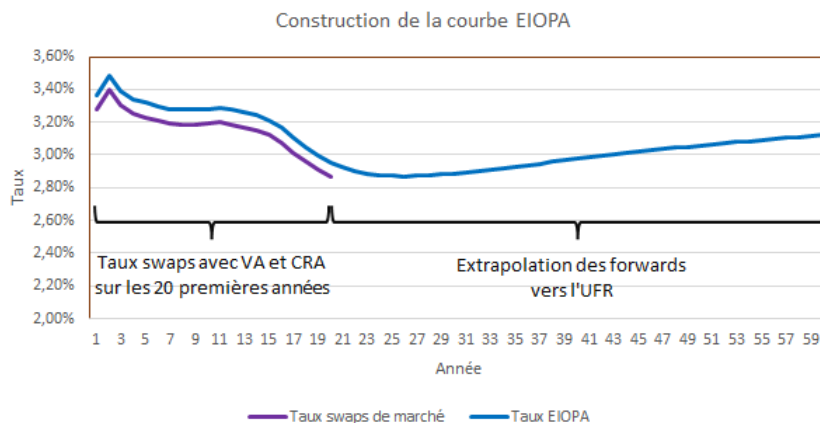


FIGURE 2.5 – Construction de la courbe de taux sans risque au 31/12/2022

2.4.2 Les obligations

2.4.2.1 Définition

Une obligation est un contrat de dette entre deux contreparties : un émetteur et un investisseur. L'émetteur utilise ce moyen pour se financer sur le marché primaire, tandis que l'investisseur (une compagnie d'assurance par exemple) l'utilise pour placer

son argent et obtenir du rendement. Les termes du contrat sont décidés lors de l'émission de l'obligation :

- Le nominal : il s'agit du montant que l'investisseur prête à l'émetteur ;
- La valeur de remboursement : il s'agit du montant que l'émetteur remboursera à l'échéance ;
- L'échéance (autrement appelée maturité) : il s'agit de la date à laquelle l'émetteur remboursera la somme convenue ;
- La fréquence de coupon : il s'agit d'une indication permettant de déterminer les dates des versements des intérêts et du remboursement ;
- Le taux de coupon : il s'agit du taux d'intérêt que va verser l'émetteur à l'investisseur sur l'échéancier convenu, il peut être fixe ou bien indexé sur un indice de marché (courbe EURIBOR, taux d'inflation) ;

Une obligation est un titre qui peut être coté en bourse et qui est échangeable sur le marché secondaire.

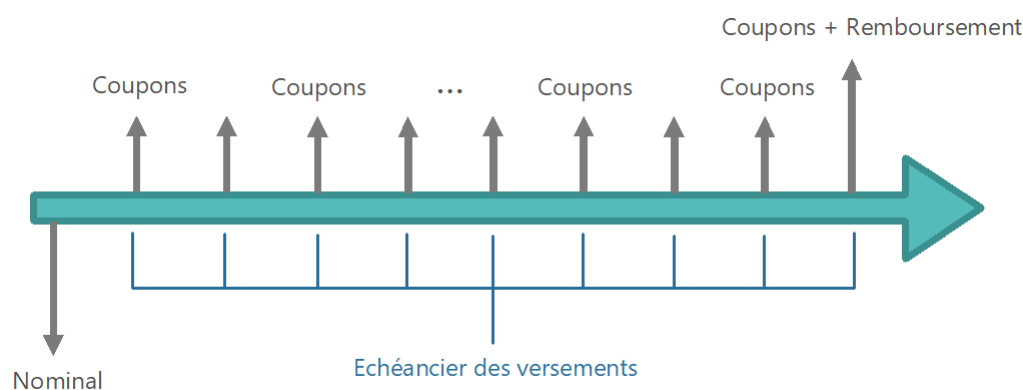


FIGURE 2.6 – Schéma d'une obligation à taux fixe

2.4.2.2 Notation d'une obligation

Une obligation possède également des caractéristiques plus implicites liées à la qualité de crédit de l'émetteur. En effet pour un même nominal et une même valeur de remboursement, un investisseur voudra prendre une obligation avec le plus haut taux de coupon.

La qualité d'un émetteur est évaluée sur sa capacité à satisfaire ses engagements, soit, payer les intérêts et rembourser son investisseur. Plusieurs méthodes sont prises en compte pour évaluer cette qualité, c'est pourquoi plusieurs agences de notation sont en place sur le marché pour les évaluer. Les méthodes mènent cependant sensiblement aux mêmes résultats.

Les trois principales grandes agences sont : Moody's, S&P ainsi que Fitch. Cette notation est un élément clé pour l'investisseur afin d'estimer si l'investissement est trop risqué, il est encore davantage important pour évaluer le coût en capital (SCR).

Cet élément est par conséquent une caractéristique implicite d'une obligation, ce qui oblige les émetteurs à adapter leurs taux de coupon afin d'attirer les investisseurs. L'écart entre les taux de coupon et les taux sans risque correspond au spread de crédit. Ainsi un acteur A ayant une notation plus basse qu'un acteur B, aura tendance à proposer un spread plus élevé.

Pour se faire une idée du système de notation, voici ci-dessous un résumé sous forme de tableau des notations et de leur signification en fonction des 3 agences de notations.

Classe	Qualité	Notation des agences			Autres Notations	
		S&P	Fitch	Moody's	Notation S2	Notation CQS
Investment Grade	Première qualité	AAA		Aaa	AAA	0
		AA+		Aa1		
	Haute qualité	AA		Aa2	AA	1
		AA-		Aa3		
	Qualité moyenne supérieur	A+		A1	A	2
		A		A2		
		A-		A3		
	Qualité moyenne inférieur	BBB+		Baa1	BBB	3
BBB			Baa2			
BBB-			Baa3			
Sub-Investment Grade	Spéculatif	BB+		Ba1	BB	4
		BB		Ba2		
		BB-		Ba3		
	Très spéculatif	B+		B1	B	5
		B		B2		
		B-		B3		
	Risque très élevé	CCC		Caa	C	6
		CC		Ca		
C			C			
Défaut		Non noté ou non disponible	NN ou ND	NN ou ND	7	

FIGURE 2.7 – Classification des notations des émetteurs

Sous S2, la méthodologie consiste à garder la deuxième meilleure notation en cas de différence entre les agences :

2.4.2.3 État des lieux du marché

Il existe principalement deux catégories d'obligations, celles émises par les États et celles émises par des entreprises :

- Les obligations d'États, appelées également obligations souveraines, sont globalement des obligations peu risquées. Les États se financent en grande partie de cette manière et sur des grosses sommes. Il est supposé (à juste titre en général) qu'un état ne fera jamais défaut et donc que sa notation est très élevée. Cette affirmation n'est cependant pas une vérité absolue, au regard de la situation de

la Grèce dans les années 2010. Il est ainsi possible de distinguer les obligations souveraines très peu risquées, des obligations souveraines plus risquées.

- Les obligations d'entreprises, appelées également obligation corporate, peuvent également être très bien notées en fonction de leur situation. En règle générale, elles restent plus risquées que les obligations d'États, mais en contrepartie elles offrent de meilleurs taux de coupon. Il est cependant possible d'observer des entreprises mieux notées que certains États.

Certaines anticipations des agences de notation, peuvent les amener à faire évoluer la notation d'un émetteur alors que d'autres agences n'en ont pas l'intention. Par exemple, en Décembre 2022, S&P a annoncé qu'elle n'excluait pas de baisser la notation de l'état français à cause d'une récession de l'économie du pays et les aides versées aux entreprises et aux ménages suite à la hausse de l'inflation (en grande partie dû à la hausse du prix de l'énergie) [15] Finalement, cette agence n'est pas passé à l'action, contrairement à l'agence Fitch [17].

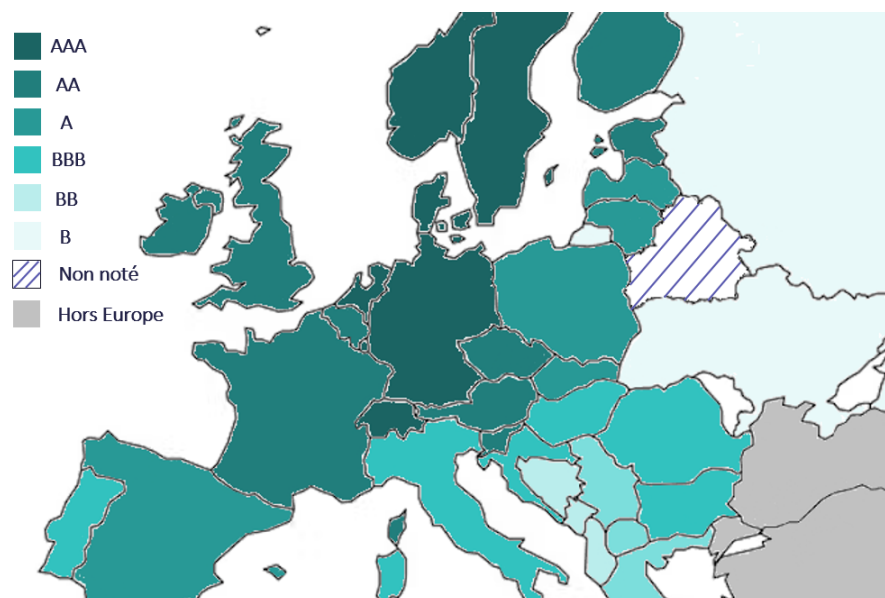


FIGURE 2.8 – Carte de notation des États Européens par l'agence S&P

2.4.2.4 Le risque de crédit

Le risque lié à la qualité de crédit d'un émetteur est appelé risque de crédit. Comme vu précédemment, ils peuvent se décliner sous plusieurs formes :

- Le risque de défaut : l'émetteur n'est plus capable de rembourser le principal (et/ou les intérêts). C'est cette catégorie qui est souvent appelée à tort risque de crédit alors qu'elle n'en est qu'une des déclinaisons ;
- Le risque de défaut partiel : l'estimation de la part que l'émetteur sera capable de rembourser s'il fait défaut est également sensible à des évolutions ;
- Le risque de dégradation de la notation : l'émetteur ne garde pas forcément la même qualité de crédit tout le long de sa vie, sa notation peut donc être amenée à évoluer à la hausse, mais également surtout à la baisse. Cette variation aura pour impact une variation de la valeur de marché du titre et donc un impact sur les cessions anticipées éventuelles.

Ce risque peut ensuite être causé par plusieurs facteurs :

- Le risque de liquidité : l'emprunteur ne possède pas de liquidité sur une certaine période, ce qui lui empêche de payer ce qu'il doit ;
- Le risque sectoriel : l'emprunteur n'est pas assez diversifié, il est très fortement exposé à certains secteurs d'activités particuliers ;
- Le risque politique : les modifications de la réglementation dues à un changement de l'univers économique peuvent dégrader la solvabilité d'une entreprise et donc être la cause d'une difficulté à payer ses dettes ;
- Le risque financier : les crises économiques mondiales ou plus locales sont également des facteurs importants du risque de crédit des entreprises.

Ce chapitre a permis de faire un tour d'horizon de la théorie des taux d'intérêts et sur la manière dont se caractérisent les obligations.

Le chapitre suivant a lui pour objectif d'expliquer la nécessité d'utiliser un générateur de scénarios économiques. Il aura pour but d'en apporter une définition et une méthodologie précise. Ensuite, il sera question de présenter le modèle qui a été utilisé pour la modélisation du risque de crédit.

Chapitre 3

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DU RISQUE DE CRÉDIT

Afin d'avoir une meilleure prise en compte de l'impact du risque de crédit sur le bilan d'une société d'assurance (comptable, SII), l'ACPR a exigé auprès de nombreux acteurs d'intégrer la modélisation stochastique du crédit dans le calcul des fonds propres économiques et de l'exigence en capital. Cela passe par la diffusion des spreads de crédits via le générateur de scénarios économiques [6]. Afin de comprendre les enjeux et la manière de mettre cela en place, le premier point consistera à expliquer ce qu'est un générateur de scénarios économiques afin ensuite de se focaliser sur la modélisation du risque de crédit en tant que tel.

À première vue, l'assureur pourrait se contenter d'une prévision déterministe de ces facteurs de risque. Cependant, les assureurs vie possèdent des options et garanties financières dans leur contrat, qui les obligent à être très exposés dans des cas de scénarios défavorables. Ce phénomène s'appelle le coût caché des options. Pour donner un exemple, le principe de taux minimal garanti, oblige l'assureur à servir un certain niveau de taux, quelque soit l'évolution du marché, donc en particulier dans un environnement où les taux sur le marché sont nettement plus bas. A contrario si les taux de marché sont très élevés, les assurés auront tendance à vouloir racheter leur contrat, car leur taux garanti est trop bas.

En considérant un unique scénario, il n'est pas possible de capter cette asymétrie liée aux spécificités des contrats en assurance-vie. C'est pourquoi les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) sont utilisés afin d'apporter une projection de l'ensemble des scénarios possibles. L'intérêt est de pouvoir observer la sensibilité à différentes conditions de marché, et également d'évaluer le coût des options et garanties financières pour l'assureur. Cette mesure s'appelle la TVFOG (Time Value of Financial Options and Guarantees) et correspond à la différence entre le Best Estimate Stochastique et le Best

Estimate Déterministe.

3.1 Les Générateurs de Scénarios Économiques

3.1.1 Intérêt

Une société d'assurance a besoin d'une prévision d'évolution de différents facteurs de risques afin de projeter son actif dans un cadre pilier 1 comme dans un cadre pilier 2. En effet, son actif est composé d'actions, d'obligations (souveraines et corporate), d'immobiliers, de monétaires ainsi que de fonds (OPCVM¹ et OPCVM UC²). Avec une vision future de différents indices actions, des taux d'intérêts, des taux de loyers ou encore de l'indice inflation, l'assureur peut ensuite évaluer la valeur de son portefeuille dans le temps.

D'un point de vue plus global, le GSE permet, dans le cadre d'une modélisation ALM, d'évaluer aussi bien l'actif que le passif de l'assureur, et ainsi en fonction des scénarios, d'activer certaines stratégies d'investissements et/ou de désinvestissements.

3.1.2 Définition

Le générateur de scénarios économiques est un ensemble de modèles de diffusions permettant de simuler des trajectoires de différents facteurs de risques dont il a été question dans la section précédente. Afin d'également prendre en compte le risque de crédit de manière plus fine, les GSE contiennent également de plus en plus des modèles pour simuler les courbes de taux risqués par notation. Un GSE a donc en général autour de 5 facteurs de risques différents :

- Les taux d'intérêts nominaux ;
- Les rendements de différents indices actions (avec ou sans prise en compte de dividende) ;
- Les rendements immobiliers (avec ou sans prise en compte des taux de loyer) ;
- Les taux d'inflations ou les taux réels ;
- Les taux d'obligations risqués par notation.

Sur le marché, il existe deux structures de GSE, les GSE dits "Monde-Réel" et les GSE dits "Risque-Neutre". Ils ne se basent pas sur les mêmes hypothèses, sur les mêmes données, sur les mêmes modèles, et surtout, ils ne sont pas utilisés pour les mêmes raisons.

Les GSE Monde-Réel (MR) permettent d'avoir une vision fidèle du marché. Les modèles se basent principalement sur les historiques de données et ils proposent d'y ajouter

1. OPCM : Organisme de Placement Collectif de Valeurs Mobilières
2. UC : Unité de compte

des hypothèses afin d'y introduire des avis d'experts quant au contexte actuel et futur du marché économique.

Les GSE MR ont vocation à être utilisés dans une optique d'évaluation des risques futurs de l'assureur.

Les GSE Risque-Neutre (RN) sont quant à eux utilisés dans un cadre réglementaire afin d'évaluer le Best Estimate ainsi que le SCR d'une compagnie d'assurance. Ces modèles ne prennent pas en compte l'aversion au risque d'un investisseur, il est supposé que chaque actif évolue avec un rendement en moyenne égal au taux sans risque. Afin de capter les informations du marché, les paramètres des modèles sont calibrés non pas sur un historique, mais sur des données spots (c'est-à-dire des données observées à la date du calibrage).

De plus, comme les différents facteurs de risque n'évoluent pas de la même manière, les modèles doivent être adaptés à chaque facteur de risque. Ainsi, un indice action sera modélisé avec un modèle différent que celui pour les taux nominaux. Le choix des modèles est primordial.

Enfin, dans le but de structurer et d'harmoniser les méthodes, l'ACPR publie régulièrement des articles pour sensibiliser les assureurs sur différents sujets. Les modèles de taux nominaux doivent obligatoirement s'appuyer sur la courbe des taux publiée par l'EIOPA, le calcul du Best Estimate doit s'effectuer avec un GSE Risque-Neutre, la diffusion des modèles doit permettre d'obtenir des prix "Market Consistent" (cohérents avec le marché) et vérifier l'absence d'opportunité d'arbitrage (martingalité). Il s'agit de quatre exigences spécifiées par l'ACPR.

Le cadre de ce mémoire est l'étude de l'impact de l'implémentation du crédit stochastique dans la valeur du ratio S2. Par conséquent, ce mémoire se concentrera sur les GSE Risque-Neutre.

La génération de scénarios économiques se déroule en quatre étapes clés :

- La collecte de données de marché à la date de calcul ;
- Le calibrage qui permet de déterminer les paramètres du modèle ;
- La diffusion permettant la simulation des trajectoires ;
- La validation permettant de s'assurer que les jeux de scénarios vérifient les contraintes risque neutre (market-consistency et martingalité principalement).

Avant toutes ces étapes, il est nécessaire de choisir les modèles utilisés pour diffuser chacun des facteurs de risque. Ce modèle nécessitera un type de donnée précise et une méthode de calibrage spécifique. Ainsi, une fois ce choix effectué, il est possible de passer à la collecte des données.

3.1.3 Les données

Cette première étape consiste à collecter les données qui vont ensuite permettre aux modèles utilisés de capter les informations du marché. Il est possible de distinguer deux types de données :

- Les données propres à l'assureur : le portefeuille de l'assureur est une source de donnée à part entière, car il permet de faire ressortir certains indicateurs comme le taux de dividende moyen des actions qu'il possède.
- Les données de marché : les fournisseurs permettent de collecter des courbes de taux spots, des données spots de volatilité, des taux d'inflation ou encore des données d'indices actions.

Les données disponibles chez les fournisseurs sont des données macro-économiques qui agrègent elles-mêmes un certain nombre de données de différents acteurs du marché. Par exemple, une courbe de taux de marché est en réalité une courbe construite à l'aide d'un ensemble des taux échangés sur le marché.

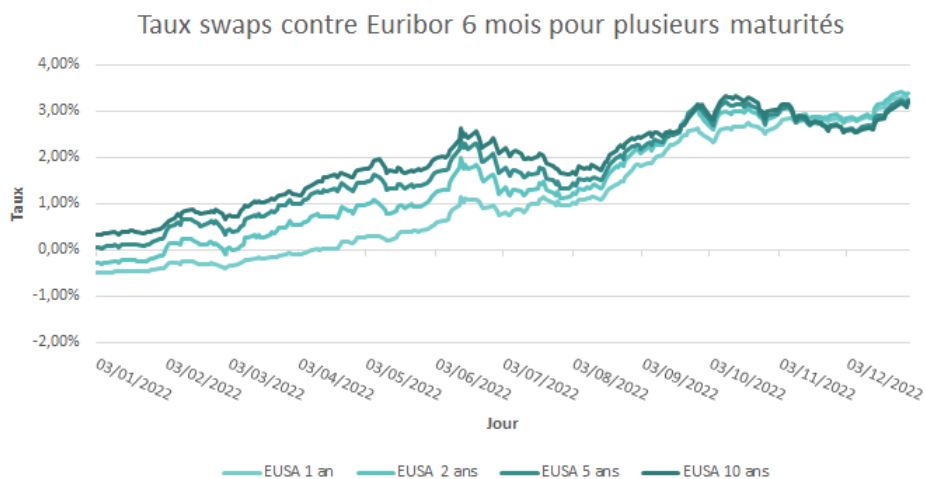


FIGURE 3.1 – Exemple de courbe de taux de marché

Le choix des données utilisées est essentiel, plusieurs critères sont à prendre en compte :

- Fiabilité : La méthode d'agrégation pour la construction de la donnée doit être connue et satisfaisante.
- Liquidité : L'agrégation des données permettant la construction de l'indice doit se baser sur un nombre suffisant de données pour être qualifiée de liquide.
- Granularité : La donnée doit être disponible pour un nombre suffisant de maturités ou encore un nombre suffisant de rating (les différents taux risqués pour le crédit, les différents indices pour l'action)

3.1.4 Calibrage

Cette seconde étape est l'une des plus cruciales. C'est elle qui permet aux trajectoires de projection de capter les informations du marché (taux Eiopa, spread des obligations risqués, volatilité d'indices actions ...) et les caractéristiques propres du portefeuille de l'assureur (rendement de ces actions, taux de loyer, ...).

Le calibrage consiste à déterminer les paramètres du modèle qui vont minimiser l'écart entre les valeurs du modèle et les valeurs sur le marché. Au vu de l'indice à projeter et la complexité des modèles choisis, il est nécessaire de calibrer un certain nombre de paramètres. Dans certains cas, il s'agira de déterminer les paramètres permettant de répliquer une courbe, et dans d'autres cas, le modèle permet par formule fermée de calculer le prix d'options. Le calibrage permettra de minimiser l'écart entre les prix calculés par le modèle et ceux observables sur le marché.

Les deux figures suivantes représentent respectivement un calibrage sur une courbe de taux et un calibrage sur une matrice de prix d'un dérivé de taux :

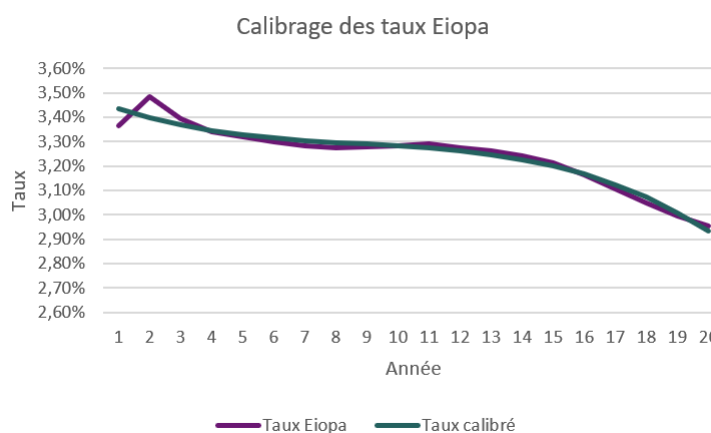


FIGURE 3.2 – Calibrage sur une courbe de taux

Maturité/Ténon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0,10%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,03%	0,04%	0,03%	0,00%	-0,05%	-0,10%
2	-0,01%	-0,04%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,01%	-0,03%	-0,08%	-0,13%
3	-0,03%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,00%	-0,04%	-0,08%	-0,12%
4	-0,04%	-0,04%	-0,02%	0,00%	0,01%	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%	0,03%	0,01%	-0,02%	-0,07%	-0,10%
5	-0,04%	-0,04%	-0,02%	0,01%	0,03%	0,03%	0,04%	0,04%	0,04%	0,04%	0,02%	-0,01%	-0,05%	-0,08%
7	-0,03%	-0,02%	0,01%	0,03%	0,04%	0,05%	0,05%	0,05%	0,05%	0,04%	0,03%	0,00%	-0,03%	-0,05%
10	0,00%	-0,02%	0,00%	0,02%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,03%	0,01%	-0,01%	-0,04%
15	-0,06%	-0,07%	-0,07%	-0,06%	-0,05%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,02%	0,01%	-0,01%	-0,02%
20	-0,08%	-0,09%	-0,07%	-0,05%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,02%	0,04%	0,02%	0,00%	-0,01%
25	-0,06%	-0,08%	-0,06%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,01%	0,02%	0,03%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%
30	-0,07%	-0,09%	-0,07%	-0,06%	-0,03%	-0,02%	-0,01%	0,01%	0,02%	0,02%	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%

FIGURE 3.3 – Calibrage sur une matrice de prix

Un calibrage peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation de la manière suivante :

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{Argmin}} F(\operatorname{ValeurModele}(\theta), \operatorname{ValeurMarche}) \quad (3.1)$$

où

- θ^* est le vecteur des paramètres calibrés ;
- $\operatorname{ValeurMarche}$ correspond au vecteur des valeurs observables sur le marché (les valeurs d'une courbe, ou un ensemble de prix d'une matrice) ;
- $\operatorname{ValeurModele}$ est le vecteur des valeurs calculées par le modèle pour un jeu de paramètre θ ;
- F est une fonction mesurant l'écart entre les deux vecteurs.

Le plus souvent, la fonction d'écart F est une fonction d'écart quadratique :

$$\text{Absolue} : F(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2 \quad (3.2)$$

$$\text{Relatif} : F(X, Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - Y_i}{Y_i} \right)^2 \quad (3.3)$$

Le calibrage est finalement un problème d'optimisation dans un espace de dimension plus ou moins grande. Plus il y a de paramètres à calibrer plus le nombre de minimums locaux augmentent et peut poser des problèmes pour le calibrage. Le choix du modèle est donc essentiel pour allier précision et simplicité. Une méthode souvent adoptée pour garder des modèles plus complexes est de mettre en place un calibrage multi-start. Il s'agit de lancer le calibrage un grand nombre de fois afin d'éliminer les minimums locaux et de s'approcher le plus possible du minimum global.

3.1.5 Diffusion

Une fois que les paramètres du modèle sont calibrés, le modèle stochastique choisi permet de simuler différentes trajectoires du facteur de risque considéré. D'un point de vue théorique, les modèles stochastiques sont sous forme d'équations stochastiques, cette équation est ensuite discrétisée afin d'avoir une diffusion à une maille temporelle convenable.

Discrétisation du modèle de Vasicek à un facteur grâce au schéma d'Euler :

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t \implies r_{t+1} - r_t = \kappa(\mu - r_t) + \sigma \cdot \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.4)$$

Selon les modèles, le pas de discrétisation est un élément déterminant dans la diffusion. Le plus souvent, les modèles sont diffusés annuellement, mais certains modèles ne sont pas assez précis et doivent impérativement être discrétisés à un pas de temps au minimum

mensuel. Par la suite, cet élément sera déterminant, en effet si les modèles ne sont pas diffusés avec le même pas de projection, la corrélation entre les différents facteurs peut s'avérer plus complexe.

Le nombre de simulations est également important, d'un point de vue purement théorique, le nombre de simulations doit être très élevé pour garantir la convergence des modèles. Seulement, le temps de calcul est un élément à prendre en compte. Ces scénarios permettent entre autres le calcul du Best Estimate, un assureur ne peut se permettre d'avoir un jeu de scénario dépassant 2000 simulations (en règle général, 1000 simulations sont utilisées). Les modèles choisis doivent donc être capables de converger rapidement et de fournir une gamme suffisamment large de situations économiques différentes en un nombre limité de simulations.

3.1.6 Validation

Plusieurs tests doivent être effectués afin de valider les jeux de scénarios produits pour la réalisation des calculs du BE et du SCR. Dans l'univers RN, les scénarios doivent être Market Consistent (cohérent avec le marché) et les prix des actifs actualisés doivent être martingales. Ces deux tests peuvent se formaliser de la manière suivante :

Market Consistency : La diffusion doit répliquer correctement les données de marché sur lequel le modèle a été calibré. Par exemple, pour un modèle de taux, le test consiste à vérifier que la matrice des volatilités des swaptions marchés est bien répliquée en moyenne par le modèle lors de la diffusion. Cet écart, mesuré entre le marché et la diffusion, est dû à deux choses : le calibrage apportant un premier biais et la convergence des modèles sur un nombre limité de simulations apporte un second biais.

Martingalité : Sous la mesure RN, tout actif actualisé est martingale, i.e. :

$$\mathbb{E}^*[S_T * D(0, T) \mid \mathcal{F}_t] = S_t * D(0, t) \quad (3.5)$$

Avec S le prix de l'actif considéré et D le déflateur stochastique.

Cette hypothèse doit absolument être vérifiée dans les modèles pour assurer qu'en moyenne il n'y a pas de création/destruction de richesse. Pour les modèles de taux, le plus souvent, ce sont les prix ZC pour toutes les maturités qui sont testés, pour les modèles d'inflation les prix ZC réels et pour les modèles de crédit les prix ZC risqués. Dans notre cas, le test est effectué par rapport à l'instant initial :

$$\mathbb{E}^*[S_T * D(0, T)] = S_0 \quad (3.6)$$

Un autre type de test peut également être ajouté afin de vérifier la **convergence des simulations**, par exemple la réplcation de la moyenne théorique ou bien encore de l'écart-type théorique du processus stochastique.

3.1.7 Corrélation

Il ne suffit pas de considérer individuellement chaque facteur de risque pour obtenir un jeu de scénarios cohérents. Les facteurs de risque possèdent une structure de dépendance entre eux. Le GSE doit prendre en compte cet élément. Le plus souvent, c'est la corrélation entre les mouvements browniens de chaque modèle qui va permettre de répliquer une corrélation observable sur le marché. Ce processus se déroule en plusieurs étapes :

- Observation des corrélations historiques bruts entre les différents facteurs de risque ;
- Construction d'une matrice semi-définie positive à l'aide d'un algorithme ;
- Corrélation des mouvements browniens des modèles de diffusion ;
- Validation après diffusion du respect des corrélations.

Cette méthode peut être mise en place grâce à la factorisation de Cholesky. En effet, afin de simuler des lois normales multidimensionnelles avec une matrice de corrélation donnée, il est nécessaire de pouvoir décomposer cette matrice avec la factorisation de Cholesky.

Simulation d'une loi multinormale : Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ avec μ le vecteur des moyennes et C la matrice de corrélation. Pour simuler ce vecteur gaussien, il est possible de simuler des variables normales standards i.i.d. Y_i et ensuite de simuler X de la manière suivante :

$$X = \mu + BY \tag{3.7}$$

avec B tel que $C = BB^T$

La décomposition de Cholesky correspond exactement à ce cas de figure. Elle permet de déterminer une matrice triangulaire inférieure B vérifiant exactement cette contrainte.

Ce résultat permet très facilement de corréler deux lois normales. Soient η_1 et η_2 deux variables gaussiennes standards et i.i.d.. Soient également deux variables gaussiennes ϵ_1 et ϵ_2 vérifiant :

$$\begin{cases} \epsilon_1 &= \eta_1 \\ \epsilon_2 &= \rho \cdot \eta_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \eta_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Alors ϵ_1 et ϵ_2 sont corrélés avec pour coefficient de corrélation ρ .

3.1.8 Construction du scénario équivalent-certain

Afin de mesurer l'impact des options et garanties financières, l'assureur mesure l'écart entre le BE calculé avec un ensemble de scénarios stochastiques et un BE calculé sur une seule simulation, autrement appelée "équivalent certain".

Ce scénario équivalent certain est le scénario permettant d'obtenir le montant que l'assureur est prêt à provisionner, sans risque, afin de couvrir ses flux futurs attendus. Dans ce cas dans un univers risque neutre, il faut que le scénario soit parfaitement martingale pour chacun des facteurs de risque.

Pour le scénario équivalent-certain des taux sans risque, il faut considérer les taux forwards (cf. partie 2.3.3). Avec cette considération, il est ainsi possible d'écrire les prix ZC de la manière suivante :

$$P^{EC}(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{T-t}} = \frac{1}{(1 + F(0, t, T))^{T-t}} \quad (3.9)$$

Avec ici :

- R la courbe des taux spots EIOPA
- F les taux forwards de la courbe EIOPA

Ainsi comme :

$$F(0, t, T) = \left(\frac{P^{EC}(0, t)}{P^{EC}(0, T)} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1 \quad (3.10)$$

Alors :

$$P^{EC}(t, T) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{P^{EC}(0, t)}{P^{EC}(0, T)} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1 \right)^{T-t}} = \frac{P^{EC}(0, T)}{P^{EC}(0, t)} \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow P^{EC}(0, T) = P^{EC}(t, T).P^{EC}(0, t)$$

Cette dernière égalité est équivalente à la propriété de martingalité. En effet, le test martingale s'écrit sous la forme suivante :

$$\Leftrightarrow P^{EC}(0, T) = P^{EC}(t, T).D^{EC}(0, t)$$

Or

$$D^{EC}(0, t) = \prod_{i=0}^{t-1} P^{EC}(i-1, i) = P^{EC}(0, 1).P^{EC}(1, 2) \dots P^{EC}(t-1, t)$$

Donc d'après (3.11) :

$$D^{EC}(0, t) = P^{EC}(0, 2).P^{EC}(2, 3) \dots P^{EC}(t-1, t) = \dots = P^{EC}(0, t-1).P^{EC}(t-1, t) = P^{EC}(0, t)$$

Ainsi en considérant les taux forwards, la martingalité est vérifiée, c'est donc ce scénario qui est appelé scénario équivalent-certain. Pour les taux réels, la même méthode est utilisée en considérant cette fois-ci les forwards de la courbe de taux réels spots.

Pour les indices actions et l'immobilier, le rendement est égal au taux 1 an, en effet avec ce choix, le test martingale est bien vérifié. Dans ce cas le taux d'actualisation étant le même que le taux de rendement, il y a une compensation permettant bien de retomber sur la valeur initiale de l'actif.

3.2 Présentation des modèles utilisés dans le cadre de ce mémoire

L'objectif de cette partie consiste à faire un tour rapide des modèles déjà implémentés dans le GSE. Elle permet de comprendre la diversité des modèles en fonction des facteurs de risques qui sont modélisés.

3.2.1 Le modèle DDLMM pour les taux nominaux

Le modèle de taux DDLMM (Displaced Diffusion Libor Market Model) permet de répliquer la dynamique des taux forwards, quantités observables directement sur le marché. Il est préféré à des modèles plus simples comme les modèles Hull-White ou Vasicek, car il réplique plus fidèlement les volatilités des swaptions et l'effet de smile de la volatilité. La dynamique du modèle s'écrit de la manière suivante :

$$dF(t, T_i, T_{i+1}) = (F(t, T_i, T_{i+1}) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dB_i^q(t) \quad (3.12)$$

Avec :

- $F(t, T_i, T_{i+1})$: le taux forward calculé en t pour la période $[T_i, T_{i+1}]$
- δ : le niveau de déplacement fixé à 10%
- N_f : le nombre de facteurs du modèle ici fixé à 2
- $\xi_i^q(t)$: la volatilité du i -ième taux forward pour le q -ième facteur
- B_i^q : un mouvement brownien sous la mesure T_{i+1} -Forward

Cependant, dans cet état, il n'est pas possible de diffuser le modèle de manière simple. En effet, chaque forward est déterminé dans un univers différent. Il existe pour cela une mesure appelée "Mesure spot Libor" permettant d'écrire chaque équation stochastique dans le même univers :

$$dF(t, T_i, T_{i+1}) = (F(t, T_i, T_{i+1}) + \delta) \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^k \frac{(F(t, T_j, T_{j+1}) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t) \xi_k^q(t)}{1 + F(t, T_j, T_{j+1})} \right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dB^q(t) \right] \quad (3.13)$$

Avec $m(t)$ l'indice de la prochaine maturité, c'est-à-dire défini par :

$$\begin{cases} m(0) &= 1 \\ m(t) &= i, \text{ pour } t \in]T_{i-1}, T_i] \end{cases} \quad (3.14)$$

D'autres hypothèses doivent être prises afin de diffuser correctement le modèle, notamment sur la structure des volatilités, mais ces hypothèses ne seront pas explicitées ici, car ce n'est pas le sujet de ce mémoire.

3.2.2 Le modèle TVDV pour les indices actions

Le modèle TVDV (Time-Varying Deterministic Volatility) est un modèle spécifique à la dynamique des indices actions. Dans ce modèle, l'indice action suit la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right).dt + \sigma_t.dB_t \quad (3.15)$$

Avec

- S_t la valeur de l'indice action à l'instant t
- r_t le taux sans risque à l'instant t
- σ_t la volatilité de l'indice action à l'instant t
- B un mouvement brownien standard sous la mesure risque neutre

3.2.3 Le modèle de Black-Scholes pour l'immobilier

Pour l'immobilier, c'est le modèle de Black-Scholes simple qui est utilisé. La volatilité qui est choisie est calibrée historiquement sur le portefeuille de la compagnie d'assurance.

3.2.4 Le modèle de Vasicek à 2 facteurs pour l'inflation

Pour simuler l'inflation, il est décidé de diffuser les taux réels et ensuite par la relation de Fisher d'en déduire l'inflation. La relation de Fisher dit que les taux nominaux sont égaux aux taux réels auxquels est ajoutée l'inflation.

Le modèle de Vasicek à 2 Facteurs se décompose en deux équations stochastiques, une pour le taux réel lui-même et une autre pour sa moyenne long terme stochastique. Le modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} dr_t = \alpha_1.(m_t - r_t).dt + \sigma_1.dB_t^1 \\ dm_t = \alpha_2.(\mu - m_t).dt + \sigma_2.dB_t^2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Avec

- α_1 et α_2 les vitesses de retour à la moyenne de r et m
- μ la limite de la moyenne long terme m
- σ_1 et σ_2 les volatilités de r et m
- B^1 et B^2 deux mouvements browniens standards i.i.d.

3.3 Modélisation du risque de crédit par le modèle LMN

Pour la modélisation du risque de crédit, deux modèles sont utilisés sur le marché : le modèle LMN (Longstaff, Mithal et Neis) et le modèle JLT (Jarrow, Lando et Turnbull).

Le modèle JLT permet de modéliser la transition entre les ratings, mais le modèle ne dépend que d'une seule prime de risque. Le nombre limité de paramètres ne permet pas correctement de répliquer les spreads de crédit observés sur le marché. De plus dans un but de valorisation S2, la transition de rating n'est pas un élément utilisé par le modèle. Le modèle a besoin d'avoir une vision moyenne du défaut qui va survenir durant la projection. De son côté, le modèle LMN permet de projeter l'effet de défaut des titres. La réplcation est plus précise malgré une démultiplication du processus de calibrage. Le modèle LMN est ainsi privilégié pour sa meilleure intégration dans le processus actuel de modélisation.

C'est pourquoi le modèle qui a été choisi dans le cadre de ces travaux est le modèle LMN.

3.3.1 Présentation du modèle

Le modèle LMN (Longstaff, Mithal et Neis) est un modèle à intensité de défaut. Cela veut dire, que l'objectif du modèle n'est pas d'explicitier la cause du défaut, mais de modéliser la probabilité qu'un émetteur puisse faire défaut à un instant futur. La probabilité de survie est modélisée par un processus stochastique :

$$S_R(t, T) = E^* \left[e^{-\int_t^T \lambda_R(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (3.17)$$

Avec : λ_R le processus stochastique d'intensité de défaut du rating R.

Remarque : Lorsque le modèle sera diffusé, la probabilité de survie sera calculée comme une moyenne par scénario de l'exponentielle des intensités de défaut. Pour chaque scénario, la même notation sera gardé $S_R(t, T)$, mais on parlera de coefficient de survie par simulation.

Le processus d'intensité de défaut est modélisé par un processus CIR (Cox–Ingersoll–Ross) afin d'assurer la positivité des intensités de défaut :

$$d\lambda_R(t) = \kappa.(\theta - \lambda_t).dt + \sigma.\sqrt{\lambda_R(t)}.dB_t \quad (3.18)$$

Avec :

- κ la vitesse de retour à la moyenne de λ_R
- θ la moyenne long terme de λ_R
- σ la volatilité de λ_R

Ce modèle a quatre paramètres avec l'intensité de défaut initiale λ_0 et une condition est à vérifier pour garantir la positivité du processus. Il s'agit de la condition de Feller :

$$2\kappa\theta > \sigma^2 \quad (3.19)$$

Le modèle permet ensuite de construire une courbe de taux risqués intégrant le taux nominal, l'intensité de défaut ainsi qu'une prime de liquidité :

$$r_{risque,t} = r_{sans\ risque,t} + \lambda_t + \gamma_t \quad (3.20)$$

Dans la suite, la prime de liquidité est considérée nulle. En effet, l'objectif de notre modèle est de capter le risque de défaut, il est considéré qu'une modélisation de la prime de liquidité par un bruit blanc n'est pas nécessaire dans le cadre de ce travail.

L'hypothèse de modélisation de ce modèle est d'estimer qu'en cas de défaut, l'émetteur remboursera une fraction fixe des intérêts et de la valeur de remboursement. Cette fraction est appelée taux de recouvrement, elle est le complémentaire du LGD (Loss Given Default) correspondant à la fraction non remboursée.

La modélisation des prix zéro-coupon risqués est évaluée en deux branches, une branche qui ne fait pas défaut et donc avec un remboursement total, et une branche qui fait défaut avec un taux de recouvrement $1 - LGD$:

$$P_R(t, T) = E^* \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \cdot e^{-\int_t^T \lambda_R(s)ds} + (1 - LGD) \cdot e^{-\int_t^T r(s)ds} \cdot (1 - e^{-\int_t^T \lambda_R(s)ds}) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (3.21)$$

Avec R le rating de l'obligation. Le LGD est fixé à 35%, il a été calibré par une étude de marché interne sur un ensemble d'assureurs et banques assureurs.

Le modèle fait l'hypothèse que l'intensité de défaut et le taux nominal sont des processus indépendants. En notant que :

$$P_N(t, T) = E^* \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (3.22)$$

et

$$\mathcal{Q}_R(\tau > T \mid \tau > t) = E^* \left[e^{-\int_t^T \lambda_R(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (3.23)$$

L'expression du prix risqué d'un ZC est alors :

$$P_R(t, T) = P_N(t, T) \cdot [\mathcal{Q}_R(\tau > T \mid \tau > t) + (1 - LGD) \cdot (1 - \mathcal{Q}_R(\tau > T \mid \tau > t))]$$

$$= P_N(t, T) \cdot [1 - LGD \cdot (1 - Q_R(\tau > T | \tau > t))] \quad (3.24)$$

Comme il a été spécifié précédemment, l'intensité de défaut est modélisée par un processus CIR. Une formule permet de calculer l'espérance conditionnelle du processus d'intensité de défaut :

$$Q_R(\tau > T | \tau > t) = E^* \left[e^{-\int_t^T \lambda_R(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T) \lambda_R(t)} \quad (3.25)$$

Avec

$$A(t, T) = \left[\frac{2 \cdot h \cdot e^{\frac{(\kappa+h) \cdot (T-t)}{2}}}{2 \cdot h + (\kappa + h) \cdot (e^{(T-t) \cdot h} - 1)} \right]^{\frac{2 \cdot \kappa \cdot \theta}{\sigma^2}} \quad (3.26)$$

$$B(t, T) = \frac{2 (e^{(T-t) \cdot h} - 1)}{2 \cdot h + (\kappa + h) \cdot (e^{(T-t) \cdot h} - 1)} \quad (3.27)$$

$$h = \sqrt{\kappa^2 + 2 \cdot \sigma^2} \quad (3.28)$$

Le prix risqué d'un ZC peut alors s'écrire :

$$P_R(t, T) = P_N(t, T) \cdot \left[1 - LGD \cdot \left(1 - A(t, T) \cdot e^{-B(t, T) \lambda_R(t)} \right) \right] \quad (3.29)$$

L'objectif de la modélisation stochastique du risque de crédit, s'est qu'il puisse se granulariser en fonction de la notation de l'émetteur. Autrement dit, la modélisation du risque de crédit peut s'effectuer pour un ensemble de rating choisis à l'avance. Dans notre cas, le modèle permettra de simuler un jeu de scénario pour l'ensemble des ratings suivants : AAA, AA, A, BBB, BB et B.

Cependant, avec le modèle présenté précédemment, aucune contrainte ne permet de maintenir une cohérence entre les ratings, c'est-à-dire qu'il serait tout à fait possible que pour certaines simulations les intensités de défaut d'un rating AAA soient supérieures à ceux d'un rating BBB à cause de l'effet de la volatilité.

3.3.2 Modèle à surplus d'intensité

Afin d'assurer l'ordre entre les ratings, le modèle LMN existe dans une seconde version, appelée modèle LMN à surplus d'intensité. Dans ce modèle, c'est le surplus d'intensité d'un rating R à un rating $R + 1$ qui est modélisé. Ainsi le processus de surplus d'intensité de défaut est noté π_R de sorte que :

$$\lambda_R(t) = \sum_{r=1}^R \pi_r(t), \forall t \in \mathbb{R}^* \quad (3.30)$$

avec

$$\forall r : d\pi_r(t) = \kappa_r \cdot (\theta_r - \pi_r(t)) \cdot dt + \sigma_r \cdot \sqrt{\pi_r(t)} \cdot dB_r(t) \quad (3.31)$$

C'est ainsi le surplus d'intensité de défaut qui est modélisé par le processus CIR. La fonction de survie du rating R s'écrit ainsi :

$$S_R(0, T) = E^* \left[e^{-\int_0^T \lambda_R(s) ds} \right] = E^* \left[e^{-\int_0^T \sum_{r=1}^R \pi_r(s) ds} \right] = E^* \left[e^{-\sum_{r=1}^R \int_0^T \pi_r(s) ds} \right] = E^* \left[\prod_{r=1}^R e^{-\int_0^T \pi_r(s) ds} \right] \quad (3.32)$$

Par conséquent, en faisant l'hypothèse que les surplus d'intensités sont indépendants, l'espérance conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_R(\tau > T \mid \tau > t) &= E^* \left[e^{-\int_t^T \lambda_R(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^* \left[\prod_{r=1}^R e^{-\int_0^t \pi_r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = \prod_{r=1}^R E^* \left[e^{-\int_0^t \pi_r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \prod_{r=1}^R A_r(t, T) \cdot e^{-B_r(t, T) \pi_t} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ainsi, le prix d'un ZC risqué s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_R(t, T) &= P_N(t, T) \cdot [1 - LGD \cdot (1 - Q_R(\tau > T \mid \tau > t))] \\ &= P_N(t, T) \cdot \left[1 - LGD \cdot \left(1 - \prod_{r=1}^R A_r(t, T) \cdot e^{-B_r(t, T) \cdot \pi_r(t)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3.3 Calibration

3.3.3.1 Les données de marché

Afin d'effectuer le calibrage des modèles pour chaque rating, il a été nécessaire de trouver des données disponibles pour chacun de ces ratings et pour un nombre de maturités satisfaisant. Le fournisseur de données Bloomberg a construit ses propres indices de taux risqués pour les différentes notations :

Ces données permettent d'avoir une courbe de taux risqués par rating pour les maturités suivantes : 1 à 10, 12, 15, 20, 25 et 30 ans. Une interpolation par splines cubiques permet ensuite de construire la courbe entière. Cependant, la calibration sera effectuée seulement sur les points disponibles sur le marché et non sur l'ensemble des maturités.

De ces courbes, il est ensuite possible d'en extraire les spreads avec la courbe de taux sans risque de l'Éiopa.

Rating	Indice
AAA	BVSC0545
AA	BVSC0543
A	BVSC0548
BBB	BVSC0551
BB	BVSC0554
B	BVSC0557

FIGURE 3.4 – Données Bloomberg

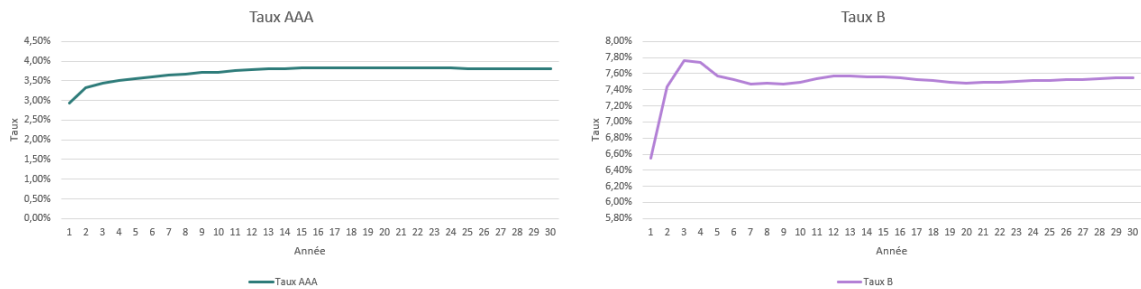


FIGURE 3.5 – Les taux de marché par rating

Les courbes de taux étant des courbes de taux swaps, il est nécessaire d'utiliser la méthode de Bootstrapping présenté dans le chapitre précédent pour obtenir les prix ZC :

$$P_R(0, T_i) = \frac{1 - S_{i,R}(0) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P_R(0, T_j)}{1 + \tau_i S_{i,R}(0)} \quad (3.35)$$

avec $S_{i,R}(0)$ représentant le taux swap du rating R de maturité i .

Les spreads peuvent ensuite être déterminés par différences des taux ZC risqués r_R avec les taux ZC sans risque r_N :

$$\begin{aligned} Spread_R^{marche}(0, T) &= r_R(0, T) - r_N(0, T) \\ &= -\frac{1}{T} \ln(P_R(0, T)) + \frac{1}{T} \ln(P_N(0, T)) \\ &= -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{P_R(0, T)}{P_N(0, T)}\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

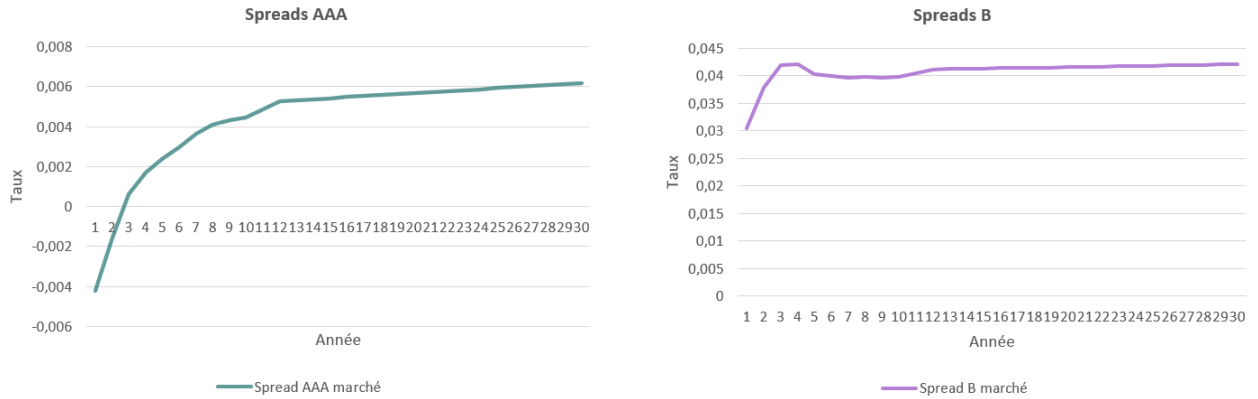


FIGURE 3.6 – Les spreads de marché par rating

Sur les ratings élevés, les spreads sont négatifs sur les premières années. Cela peut sembler contre intuitif, car par définition le spread représente le surplus de rendement d'une obligation de par son risque. Cependant, au vu du contexte récent de remonter rapide des taux, les entreprises de très bonne qualité de crédit n'ont pas forcément remonté leurs taux assez rapidement et de manière assez importante. Ce décalage temporel peut donc avoir par conséquence des spreads négatifs sur des paniers d'obligations avec des bonnes notations.

Toutefois, le modèle CIR n'est pas capable de diffuser des intensités de défaut négatives. Il n'est donc pas possible de calibrer parfaitement les courbes initiales. Donc, dans ce cas, la valeur initiale du processus sera limitée à 0 pour éviter ce problème.

3.3.3.2 Calibrage risque-neutre

Le calibrage des modèles de crédit par rating doit s'effectuer en cascade, c'est-à-dire que le calibrage du modèle du AAA permettra ensuite de calibrer les paramètres du AA et ainsi de suite.

L'objectif du calibrage est de reproduire les spreads de marché grâce aux différents paramètres des modèles.

Pour la valorisation des spreads avec le modèle CIR, étant donné que les taux sont sous forme continue, il est possible de réécrire les spreads avec les prix de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 Spread_R^{modele}(0, T) &= -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{P_R(0, T)}{P_N(0, T)} \right) \\
 &= -\frac{1}{T} \ln \left(1 - LGD \cdot \left(1 - \prod_{r=1}^R A_r(0, T) \cdot e^{-B_r(0, T) \cdot \pi_r(0)} \right) \right) \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Le calibrage permet de minimiser, grâce aux paramètres du modèle, l'écart entre les spreads marchés et les spreads calculés par le modèle.

Ainsi pour le rating AAA les 4 paramètres $\hat{\kappa}_1, \hat{\theta}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\pi}_1(0)$ sont déterminés par minimisation :

$$\hat{\Theta}_1 = \left(\hat{\kappa}_1, \hat{\theta}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\pi}_1(0) \right) = \underset{\Theta_1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{k=1}^T \left(\operatorname{Spread}_1^{\text{marche}}(0, k) - \operatorname{Spread}_1^{\text{modele}}(0, k, \Theta_1) \right)^2 \right\} \quad (3.38)$$

Ensuite pour le rating AA, les paramètres du rating AAA sont réutilisés, et en plus les quatre paramètres propres au surplus d'intensité du AA sont calibrés :

$$\hat{\Theta}_2 = \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\kappa}_2, \hat{\theta}_2, \hat{\sigma}_2, \hat{\pi}_2(0) \right) = \underset{\kappa_2, \theta_2, \sigma_2, \pi_2(0)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{k=1}^T \left(\operatorname{Spread}_2^{\text{marche}}(0, k) - \operatorname{Spread}_2^{\text{modele}}(0, k, \Theta_2) \right)^2 \right\} \quad (3.39)$$

Ainsi de suite jusqu'au rating B qui utilisera tous les paramètres des calibrages précédents.

Le calibrage d'un rating est donc dépendant des calibrages précédents. Les paramètres fixés par les calibrages précédents ont moins d'importance que le calibrage du surplus d'intensité considéré, car c'est lui qui permettra réellement de répliquer la courbe, cependant, elles auront un impact important sur la valeur des paramètres. Ce processus peut par conséquent rapidement amener les paramètres à exploser et prendre des valeurs extrêmes.

Afin de garder des paramètres cohérents, des contraintes ont été ajoutées :

- $\kappa_m \in [0, 01\%; 70\%]$
- $\theta_m \in [0, 01\%; 30\%]$
- $\sigma_m \in [0, 01\%; 20\%]$
- $\pi_m(0) \in [0\%; 10\%]$

Il n'est pas souhaitable d'avoir des paramètres κ , θ et σ qui soient négatifs, mais il n'est pas non plus souhaitable que ces paramètres prennent des valeurs trop importantes (en particulier la volatilité σ). Pour le surplus d'intensité de défaut initiale, il a été décidé de le bloquer à 0 dans les cas où le spread initial est négatif.

En procédant à une minimisation avec ces contraintes sur les données au 31/12/2022, les résultats obtenus donnent :

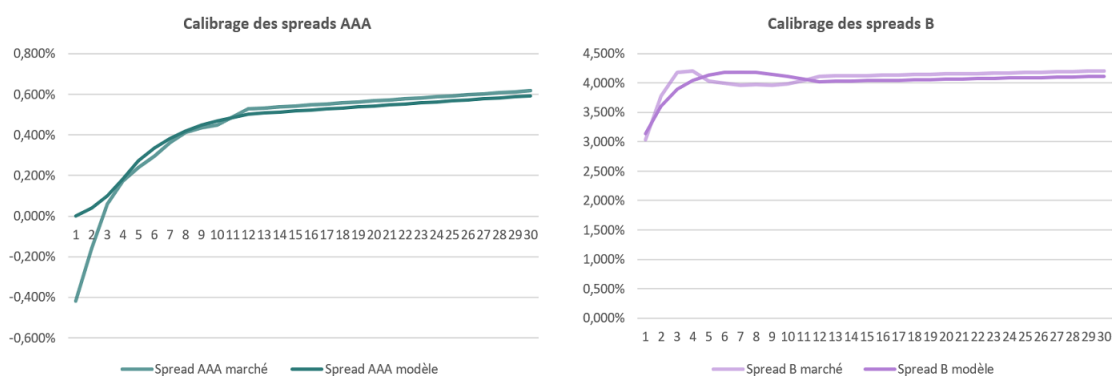


FIGURE 3.7 – Calibrage des spreads marchés

À première vue, le calibrage est satisfaisant, malgré une légère difficulté à reproduire certaines dynamiques de courbe (le rating B principalement). Le calibrage n'est pas optimal, car certains paramètres se collent aux frontières de contraintes. De plus, il y a un manque de contrôle sur la condition de Feller.

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B
κ	69,58%	0,80%	70,00%	53,42%	70,00%	69,96%
θ	1,10%	2,20%	1,25%	1,10%	5,50%	2,70%
σ	20,00%	14,37%	20,00%	1,69%	20,00%	19,99%
π_0	0,00%	0,00%	0,00%	0,42%	1,41%	5,01%
Feller	-2,46%	-2,03%	-2,24%	1,15%	3,70%	-0,23%

FIGURE 3.8 – Paramètres du calibrage au 31/12/2022

Plusieurs solutions ont été testées pour éviter d'avoir une variation trop importante des paramètres et de la condition de Feller. Celle qui donne les meilleurs résultats est présentée dans la section suivante.

3.3.3.3 Calibrage sur historique et risque-neutre

Une manière de limiter l'instabilité des paramètres est de calibrer certains des paramètres sur un historique et ensuite calibrer les derniers paramètres en risque neutre afin de reproduire les courbes de taux spots. Plusieurs méthodes de calibrage sur historique, comme la méthode des moments ou bien la régression linéaire, existent. Cependant, dans le cas de ce mémoire, une autre méthode a été mise en place, il s'agit d'une méthode d'estimation propre aux modèles de diffusion stochastique se basant sur des estimateurs martingales.[13]. Cette méthode permet d'obtenir les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\kappa} = -\ln \left(\frac{n \sum_{i=1}^n X_i / X_{i-1} - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n X_{i-1}^{-1})}{n^2 - (\sum_{i=1}^n X_{i-1})(\sum_{i=1}^n X_{i-1}^{-1})} \right) \\ \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{e^{-\hat{\kappa}}}{n(1-e^{-\hat{\kappa}})} (X_n - X_0) \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^{-1} (X_i - X_{(i-1)} e^{-\hat{\kappa}} - \theta(1-e^{-\hat{\kappa}}))^2}{\frac{1}{\hat{\kappa}} \sum_{i=1}^n X_{i-1}^{-1} \left(\left(\frac{\hat{\theta}}{2} - X_{i-1} \right) e^{-2\hat{\kappa}} - (\hat{\theta} - X_{i-1}) e^{-\hat{\kappa}} + \frac{\hat{\theta}}{2} \right)} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Cette méthode d'estimation a été utilisée sur une chronique d'intensité de défaut 1 an. Pour cela une chronique de taux risqués 1 an par rating est nécessaire. Il s'agit des mêmes données que pour le calibrage risque-neutre, mais cette fois-ci uniquement le taux 1 an et pour un ensemble de dates.

Les paramètres κ et θ sont alors calibrés sur cet historique et ensuite σ et λ_0 sont calibrés sur les données spots afin de minimiser l'écart quadratique. Cette méthode a pour avantage de stabiliser les paramètres dans le temps, mais n'est pas forcément adaptée dans tous les cas de figure. Au vu de la forme des courbes de taux au 31/12/2022, cette méthode n'est pas utilisée.

Une fois le calibrage effectué, les modèles peuvent être diffusés.

3.3.4 Diffusion

3.3.4.1 Discrétisation

Afin d'obtenir les prix risqués ainsi que les probabilités de survie par rating, il faut tout d'abord construire les processus de surplus d'intensités de défauts. Pour ce faire, l'équation stochastique du CIR doit être discrétisée. Grâce au schéma d'Euler, l'équation discrétisée devient :

$$\pi_r(0) = \pi_0, \quad \pi_r(t + \Delta) = \kappa_r \cdot (\theta_r - \pi_r(t)) \cdot \Delta + \sigma_r \cdot \sqrt{\pi_r(t)^+} \cdot \Delta \cdot \epsilon_r(t + \Delta), \quad \forall t \in [0 ; T - \Delta] \quad (3.41)$$

Avec T le nombre d'année de diffusion du processus, Δ le pas de temps de la discrétisation et $\epsilon_r = (\epsilon_r(\Delta), \dots, \epsilon_r(T))$ des variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes entre elles (mais corrélées avec les variables aléatoires des autres facteurs de risque).

Remarque : Pour éviter les problèmes de calcul, il est nécessaire de mettre la partie positive et non la valeur de base de $\pi_r(t)$ dans la racine carrée. Pour rappel $x^+ = \max(0, x)$.

De cette diffusion, il est ensuite possible de construire les courbes de taux risqués ainsi que les fonctions de survie :

- $P_R(t, T) = P_{sans\ risque}(t, T) \cdot \left[1 - LGD \cdot \left(1 - \prod_{r=1}^R A_r(t, T) \cdot e^{-B_r(t, T) \cdot \pi_r(t)} \right) \right]$
- $r_R(t, T) = P_R(t, T)^{\frac{1}{T-t}} - 1$
- $S_R(0, T) = \prod_{r=1}^R e^{-\sum_{i=0}^T \pi_r(i)}$
- $S_R(t, T) = \frac{S_R(0, T)}{S_R(0, t)}$

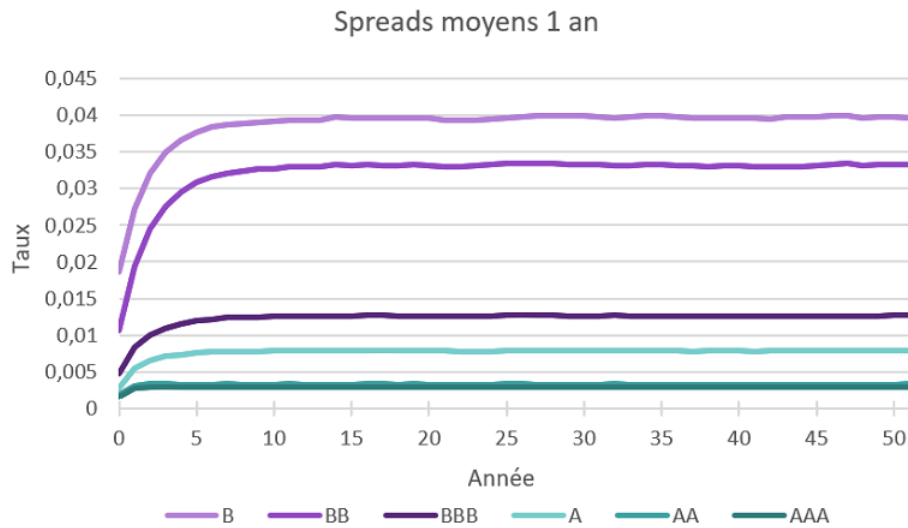


FIGURE 3.9 – Diffusion des spreads 1 an

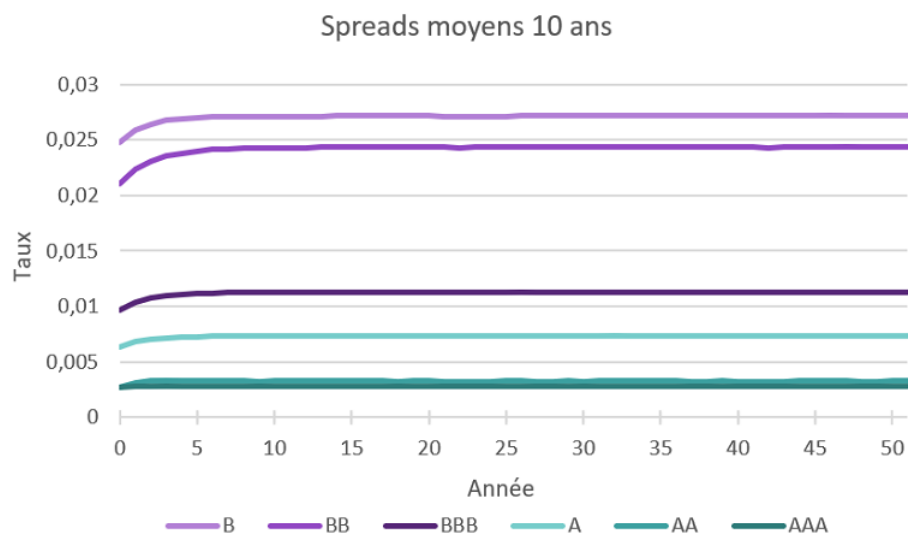


FIGURE 3.10 – Diffusion des spreads 10 ans

Les spreads des ratings AAA et AA sont très proches et très faibles, à l'image des données de marché. Il est également possible de remarquer que les spreads des ratings BB et B sont quant à eux nettement supérieurs aux autres ratings.

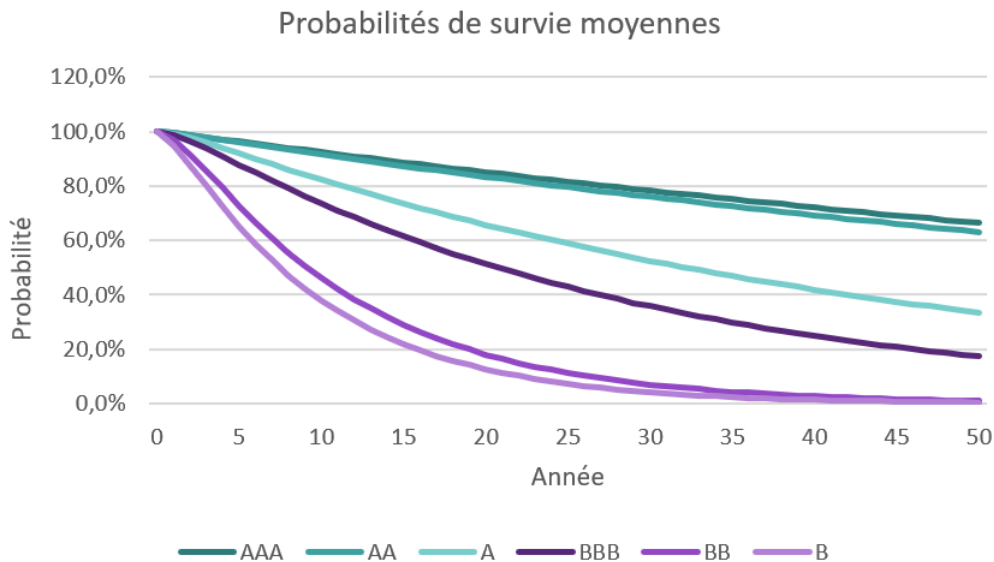


FIGURE 3.11 – Diffusion des probabilités de survie

Quant aux probabilités de survie, les ratings AAA et AA sont de nouveaux très proches et baissent raisonnablement pour atteindre les 60% au bout de 50 ans. Les probabilités de survie des ratings intermédiaires (A et BBB) baissent plus significativement vers 40% et 20%. Pour les deux derniers ratings, les probabilités chutent rapidement en dessous des 10% en moins de 30 ans et sont très proches de 0% au bout de 50 ans.

3.3.5 Corrélation des spreads avec les autres facteurs

Comme expliqué dans la partie 3.1.5, la diffusion des modèles se fait avec un pas annuel pour les autres modèles (taux, inflation, immobilier, action) mais pour le processus CIR la diffusion annuelle ne convient pas. Le modèle est donc diffusé mensuellement et ensuite les valeurs annuelles en sont extraites.

Ce changement de pas de discrétisation entre le modèle de crédit et les autres modèles posent un problème pour la corrélation entre les différents facteurs de risque.

En utilisant la méthode présentée en partie 2.2.2, il est ainsi possible à partir d'un mouvement brownien W à pas de temps annuel, de construire un mouvement brownien B à pas de temps mensuel passant par les valeurs du mouvement brownien à pas de temps annuel.

Ainsi en corrélant les mouvements browniens W avec les autres mouvements browniens des autres facteurs de risque, puis en utilisant la méthode des ponts browniens, il est possible d'obtenir un mouvement brownien mensuel B corrélé annuellement avec les autres facteurs de risque.

3.3.6 Validation

Deux types de tests sont effectués sur la diffusion des taux risqués, une première partie sur la convergence et une seconde partie sur la martingalité des prix ZC risqués.

3.3.6.1 Convergence

L'objectif de ce test est de vérifier que la moyenne et l'écart-type des processus de surplus d'intensité π_r convergent correctement vers la moyenne et l'écart-type théorique :

$$E^* [\pi_r(t)] = \pi_r(0).e^{-\kappa_r t} + \theta_r.(1 - e^{-\kappa_r t}) \quad (3.42)$$

$$Var^* [\pi_r(t)] = \pi_r(0).\frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa_r t} - e^{-2\kappa_r t}) + \theta_r.\frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa_r t})^2 \quad (3.43)$$



FIGURE 3.12 – Tests des moyennes et des écarts-types du AAA et du B

Les tests sont satisfaisants, l'écart-type du surplus d'intensité du rating AA semble avoir un peu plus de difficulté à converger, cependant le nombre de simulation restant limité, les résultats restent cohérents.

3.3.6.2 Martingalité

Les tests de martingalité sont effectués sur les déflateurs risqués ainsi que sur deux maturités de prix ZC risqués modifiés, les prix 5 ans et 10 ans.

Le déflateur risqué s'écrit de la manière suivante :

$$D_R(0, t) = D(0, t) * [1 - LGD * (1 - S_R(0, t))] \quad (3.44)$$

Ainsi le test sur le déflateur s'écrit :

$$E^* [D_R(0, t)] = P_R(0, t) \quad (3.45)$$

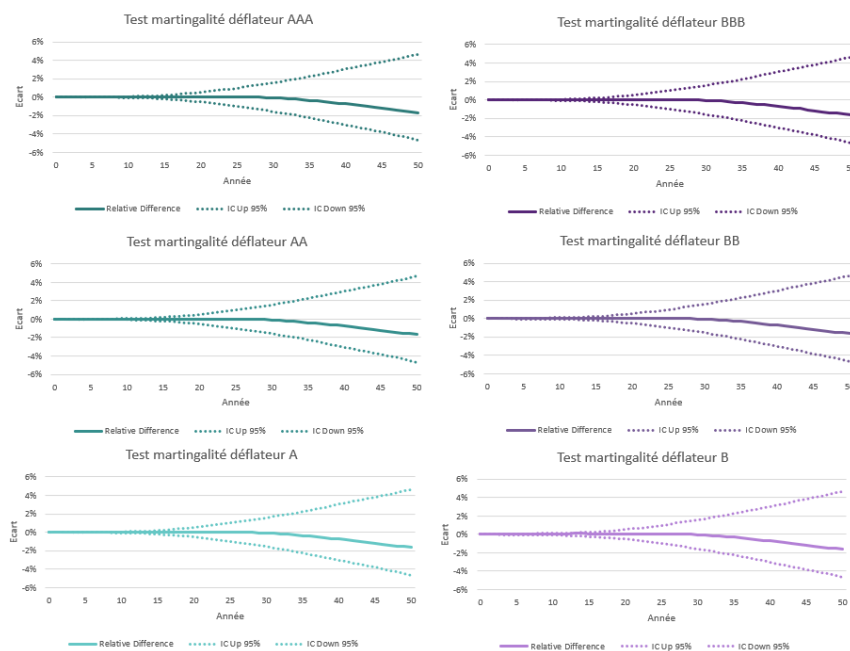


FIGURE 3.13 – Test de martingalité des déflateurs risqués

Pour le test sur les prix, le test ne se fait pas directement sur les prix risqués, mais sur les prix risqués intégrant la survie (appelés précédemment prix ZC risqués modifiés). En effet dans le cadre de la valorisation du crédit pour les obligations, c'est cet élément qui doit être Martingale. Dans le chapitre suivant, cet élément sera expliqué plus en détail :

$$P_{RS}(t, T) = P_R(t, T) * S_R(0, t) + P_N(t, T) * (1 - LGD) * (1 - S_R(0, t))$$

Le test de martingalité s'écrit ainsi, pour une maturité T :

$$E^* [P_{RS}(t, T) \cdot D(0, t)] = P_R(0, T) \quad (3.46)$$

3.3.7 Scénario de choc up/down

Dans le cadre du calcul du SCR de taux, il est nécessaire d'avoir des scénarios de taux risqués choqués. Dans le cadre de ce mémoire, le choix a été décidé que les intensités de défaut ne bougent pas et donc le choc sur les taux risqués n'est dû qu'au choc sur la courbe de taux sans risque. Ainsi :

$$P_R^{up/down}(t, T) = P_N^{up/down}(t, T) \cdot (1 - LGD \cdot (1 - S_R(t, T))) \quad (3.47)$$

Comme seule la courbe de taux sans risque est modifiée, les probabilités de survie ne sont pas impactées par ce choc.

Ce chapitre a permis de comprendre les enjeux du générateur de scénarios économiques ainsi que sa manière de fonctionner. Il a également permis de présenter le modèle de diffusion du crédit et toutes ses particularités.

Le chapitre suivant a pour objectif de présenter le fonctionnement du modèle ALM. Il sera ensuite question d'illustrer l'implémentation de la valorisation des obligations avec le modèle de crédit. Enfin une dernière partie permettra de présenter le portefeuille sur lequel se base cette étude.

Chapitre 4

IMPLÉMENTATION DU CRÉDIT STOCHASTIQUE AU SEIN DU MODÈLE ALM

Ce chapitre présente dans un premier temps le principe de la modélisation actif/passif. Ensuite, la modification de la modélisation des obligations sera présentée. Enfin, la dernière partie présentera la structure du portefeuille de l'assureur.

4.1 Modélisation Actif/Passif

L'actif et le passif de l'assureur sont modélisés simultanément. L'actif évolue grâce au GSE et le passif évolue lui à l'aide des lois de mortalités, de rachats et des frais. À chaque fin de pas de projection, la politique de participation aux bénéfices entraîne une évolution du portefeuille de passif et l'allocation cible fait évoluer le portefeuille d'actifs.

La modélisation est effectuée en **Run-Off**, c'est-à-dire qu'il n'est pas considéré au cours de la projection la souscription de nouveaux contrats.

Pour comprendre comment fonctionne la modélisation simultanée de l'actif et du passif, cette section sera divisée en 4 parties :

1. La projection de l'actif et des encours
2. Le rebalancement de l'actif
3. Le calcul de la PB
4. Les comptes de résultat

4.1.1 Projection de l'actif et du passif

4.1.1.1 Projection de l'actif

Chaque classe d'actif a ses propres caractéristiques qui rendent sa modélisation spécifique. La modélisation s'effectue grâce à la diffusion des différents facteurs de risque du générateur de scénarios économiques.

Projection des actions et de l'immobilier

Pour les actions, la valeur de marché est revalorisée tous les ans avec le taux de rendement diffusé par le GSE et un taux de dividendes :

$$VM_t^s = VM_{t-1}^s * (1 + \text{rendement}^s(t) - \text{dividendes}(t)), \forall s \in \llbracket 1, 1500 \rrbracket, \forall t \in \llbracket 1, 50 \rrbracket \quad (4.1)$$

Pour l'immobilier, la valorisation est sensiblement la même, à la différence que les loyers de chaque année sont supposés réinvestis :

$$VM_t^s = VM_{t-1}^s * (1 + \text{rendement}^s(t)), \forall s \in \llbracket 1, 1500 \rrbracket, \forall t \in \llbracket 1, 50 \rrbracket \quad (4.2)$$

Étant donné que la valorisation s'effectue en risque neutre, il est important de vérifier que les rendements moyens des actions ainsi que de l'immobilier convergent bien vers les taux 1 an diffusés également par le GSE.

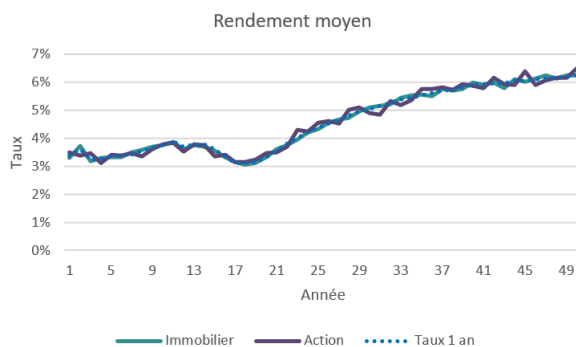


FIGURE 4.1 – Comparaison des rendements moyens

Le caractère risque-neutre des jeux est bien vérifié, en effet les rendements moyens répliquent les taux nominaux 1 an. Il est possible de remarquer que les rendements de l'action sont plus volatiles, ce qui s'explique par les volatilités renseignées en entrée des modèles de diffusion. En effet sur le marché, les volatilités actions sont globalement plus élevées que celles de l'immobilier.

Remarque : Cette vérification est incluse dans le test de martingalité effectué dans le GSE. Cette vérification ici permet uniquement d'illustrer la valorisation moyenne des actions et de l'immobilier.

Projection des obligations

Pour les obligations, la valorisation est plus complexe. En effet, elle se fait en deux étapes, une première étape préliminaire dite de risque-neutralisation et une seconde étape d'évolution de la valorisation pendant la projection en fonction de l'évolution des taux.

1) La risque-neutralisation

Une obligation est valorisée au moment de son émission à l'aide d'une courbe de taux propre à l'émetteur de l'obligation. Pour une obligation à taux fixe de coupon c , de nominal N avec une tombée de coupon annuelle et une maturité T , sa valeur de marché vaut :

$$VM_{marche} = N * \left(\sum_{i=0}^T \frac{c}{(1+r_i)^i} + \frac{1}{(1+r_T)^T} \right) \quad (4.3)$$

Cependant comme l'assureur n'a pas accès à cette courbe de taux, il est obligé de passer par sa propre courbe de taux (celle diffusée par son GSE) pour valoriser l'obligation. L'écart entre les deux courbes entraîne un écart lors du calcul de la valeur de marché. La risque-neutralisation consiste à déformer les coupons et la valeur de remboursement pour que la valeur de marché initiale recalculée soit bien la même que la vraie valeur marchée.

Pour cela, deux grandes méthodes existent :

L'ajustement proportionnel qui consiste à abattre la valeur du nominal afin que la valeur de marché obtenue soit bien celle de marché :

$$N' = N * \frac{VM_{marche}}{\sum_{i=0}^T \frac{c}{(1+r_N(0,i))^i} + \frac{1}{(1+r_N(0,T))^T}} \quad (4.4)$$

Avec : $r_N(0, i)$ le taux nominal de maturité i au pas de projection 0 (donc le taux EIOPA de maturité i).

L'ajustement par un coefficient qui consiste à pondérer l'impact de l'ajustement des flux avec la maturité :

$$\text{Recherche de } p \text{ tel que : } VM_{marche} = N * \left(\sum_{i=0}^T \frac{c * (1-p)^i}{(1+r_N(0,i))^i} + \frac{(1-p)^T}{(1+r_N(0,T))^T} \right) \quad (4.5)$$

Dans le cas de notre modélisation, c'est la seconde méthode qui est appliquée pour la risque-neutralisation. L'avantage de la seconde méthode est qu'elle permet de mieux capturer l'effet de spread entre la courbe de taux marché et celle utilisée dans le modèle.

2) Valorisation et flux

Pour les pas de projections suivants, la valorisation de l'obligation s'effectue de la manière suivante :

$$VM(0, t)^s = N * \left(\sum_{i=t+1}^T \frac{c * (1-p)^i}{(1+r_N^s(t, i))^{i-t}} + \frac{(1-p)^T}{(1+r_N^s(t, T))^{T-t}} \right) \quad (4.6)$$

Avec s représentant le scénario stochastique considéré. Au pas de temps 0, il n'y a qu'une valorisation, mais sur les pas de temps suivants, il y en a autant que de simulations.

L'ajustement calculé au pas de temps 0 pour la risque-neutralisation a également un impact sur les flux, c'est-à-dire sur la valeur des coupons et du remboursement à terme. En fonction du signe du coefficient d'ajustement, l'ajustement augmentera ou diminuera la valeur des flux :

$$Coupons(t) = c * N * (1-p)^i, Rbst(T) = N * (1-p)^T \quad (4.7)$$

L'ajustement a donc un effet important sur le processus ALM dans le sens où il affecte la valeur des flux d'actifs qui tombent tous les ans.

Dans une grande majorité des cas l'ajustement a tendance à faire perdre de la valeur aux flux, ce n'est cependant pas toujours le cas. Certaines obligations ont des coefficients d'ajustements négatifs ce qui augmente la valeur des flux.

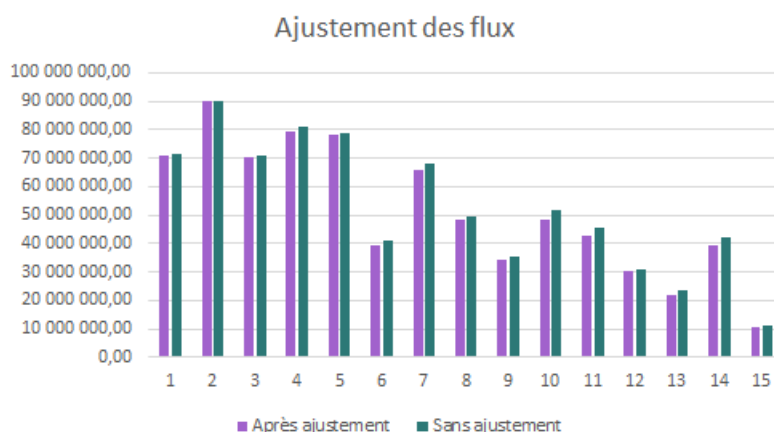


FIGURE 4.2 – Risque-neutralisation des flux

Cette méthode de valorisation des obligations n'est cependant pas suffisante d'après l'ACPR. En effet, ce coefficient d'ajustement peut être assimilé à une représentation du spread de crédit d'une obligation, mais il souffre d'être déterministe et constant dans le temps. C'est dans ce contexte que l'ACPR suggère d'intégrer des scénarios de spreads stochastiques dans la valorisation des obligations.

4.1.1.2 Projection du passif

Le passif de son côté est modélisé grâce à des lois de mortalité, des lois de rachats ainsi que des hypothèses de frais. En fonction de ces différents facteurs, l'encours évolue au cours du temps.

Pour chaque ligne de contrat, il y a un encours qui lui correspond. À chaque pas de temps, l'encours va dans un premier temps évoluer en fonction des décès. Le taux de décès peut dépendre de l'âge, de l'année ou bien encore de l'ancienneté du contrat. En fonction du taux de décès, la provision mathématique diminue et les prestations versées augmentent.

Ensuite, s'ajoutent les rachats. Le rachat peut être évalué en deux composantes, les rachats structurels et les rachats dynamiques. Les rachats structurels correspondent aux rachats qui ont lieu quel que soit le contexte économique, les rachats dynamiques permettent de prendre en compte l'effet comportemental des assurés par rapport au contexte économique. Ainsi, si les garanties de l'assuré sont très intéressantes par rapport au contexte économique, les rachats dynamiques peuvent être négatifs et ainsi diminuer les rachats globaux, et inversement, ils peuvent augmenter les rachats globaux. Les rachats structurels sont modélisés comme un taux appliqué à l'assiette d'encours, tandis que le taux de rachat dynamique est calculé en fonction du contexte économique.

Pour calculer le taux de rachat dynamique, il faut repartir du taux que l'assureur a servi l'année précédente. Ce dernier a également pour impact de revaloriser l'encours pour les pas de projection suivant. À travers ce mécanisme, il est possible d'observer une interaction actif/passif. Ce point sera complété dans l'étape 3 de la modélisation actif/passif.

4.1.2 Réallocation de l'actif

La réallocation de l'actif consiste à effectuer des achats et ventes afin que la répartition des placements corresponde à une allocation précise à chaque pas de temps. Cette allocation peut être fixe au cours du temps ou bien évolutive. De plus, elle peut s'effectuer avec une marge de manœuvre ou bien par une allocation précise.


Classe ALM : Afin de bien comprendre comment fonctionne l'allocation, il faut tout d'abord définir ce qu'est une classe ALM. Au sein d'une même classe d'actif, il est possible de séparer les actifs dans une sous-classe qui est appelée classe ALM. Elle permet de construire une allocation cible plus spécifique qu'au niveau de l'actif. Par exemple parmi les obligations à taux fixes (OTF), il est possible de distinguer les obligations souveraines des obligations d'entreprises. Pour les actions, il est possible de séparer les actions stratégiques, qui sont des actions qui ne sont jamais vendues lors de la projection, des autres actions.

L'allocation cible souhaitée par l'assureur dépend de sa vision du futur, est-ce qu'il souhaite garder la même proportion qu'au début de la projection ou bien souhaite-t-il faire évoluer sa répartition en fonction d'une politique particulière. Dans le cadre de ces travaux, une allocation gardée fixe au cours de la projection a été choisi.

Une fois les classes ALM bien définies et une allocation à chaque pas de projection choisi, il est ensuite possible de mettre en place une méthode de réinvestissement.

La méthode retenue est l'allocation cible des stocks en valeur de marché :

Allocation cible des stocks en VM : Dans le cas de cette méthode, tous les ans des achats-ventes sont effectués afin que tous les ans la valeur marché de chaque classe ALM colle à l'allocation cible de l'année en question. Pour cela, il faut partir de la valeur marché avant ALM et des flux actifs passifs.

	VM 1 avant ALM	Flux	Total	Total en %		VM 1 après ALM
Action stratégique	50	5,0	55,0	5,27%	 Achat-vente	52,18
Autres actions	105	-1,0	104,0	9,97%		104,35
Obligations corporates à taux fixes	490	3,0	493,0	47,24%		480,01
Obligations souveraines à taux fixes	370	-2,0	368,0	35,27%		375,66
Immobilier	18	-0,5	17,5	1,68%		20,87
Monétaire	5	1,0	6,0	0,57%		10,44
Total	1038	5,5	1043,5	100,00%		1043,50

Allocation cible Année 1	
	5%
	10%
	46%
	36%
	2%
	1%

FIGURE 4.3 – Allocation des stocks

Ensuite, il est important de bien comprendre comment sont effectués les achats et les ventes en fonction des classes d'actifs voire des classes ALM. Pour la poche hors obligataire les achats et les ventes se font en proportionnelle. Pour la poche obligataire, les ventes sont en proportionnelle, en revanche les achats se font sur des nouvelles obligations. En effet à contrario d'une action où il est possible d'acheter plus de parts, pour une obligation, il n'est pas possible de faire ce même processus. Cependant, l'assureur peut tout à fait vendre une partie de l'obligation à un second investisseur.

L'allocation présentée précédemment donne les achats-ventes suivants au pas de temps 1 :

	Achat	Vente
Action stratégique	2,18	0,00
Autres actions	0,00	0,65
Obligations corporates à taux fixes	0,00	9,99
Obligations souveraines à taux fixes	5,66	0,00
Immobilier	2,87	0,00
Monétaire	5,44	0,00
Total	5,50	0,00

FIGURE 4.4 – Achat-Vente

Donc pour les actions stratégiques, l'immobilier et le monétaire, chaque actif aura une augmentation proportionnellement à sa valeur de marché. Il en va de même des ventes des autres actions et des obligations corporates à taux fixes. Cependant, pour les obligations souveraines, des nouvelles obligations d'états seront achetées à hauteur de 5,66 M€ de valeur de marché.

4.1.3 Calcul de la PB

À chaque fin de pas de projection, l'actif est source de produits financiers. Ces produits financiers doivent être ensuite partagés avec les assurés : 90% des résultats techniques et 85 % des résultats financiers.

Un premier montant de PB est calculé en fonction du résultat de l'assureur, noté PB_{ini} . Ensuite, deux taux cibles sont calculés en fonction d'un taux de référence de marché, un taux cible minimum et maximum. Ces deux taux sont ensuite transformés en montants en appliquant les taux à chaque ligne de contrats. La PB cible correspond ainsi à la valeur de la PB initiale avec pour plancher et plafond les montants cible min et max :

$$PB_{cible} = \max(\min(PB_{ini}; PB_{max}); PB_{min}) \quad (4.8)$$

Ensuite, deux leviers peuvent être mis en place pour verser la PB cible. Le 1er levier est celui de la PPE (Provisions pour Participations aux Excédents). Si la PB cible est plus élevée que la PB initiale, le montant nécessaire pour compléter est reprise à la PPE. A l'inverse, si la PB cible, est moins élevée que la PB initiale, la PPE est dotée de l'écart.

- $PB_{ini} < PB_{cible}$: l'écart est repris à la PPE (à hauteur de 50%)
- $PB_{cible} = PB_{ini}$: aucune action n'est effectuée.
- $PB_{cible} < PB_{ini}$: l'écart est doté à la PPE (sans dépasser 5% de la PM)

Cependant, si la PPE n'est pas suffisante pour compléter la PB, ou bien si la PPE atteint son plafond (5% de l'encours total), un autre levier existe. La réalisation de PMVL (Plus ou Moins Values Latentes) est activée. Si la PB cible, est trop élevée, alors des ventes d'actif en PVL sont activées, inversement si la PB initiale est trop élevée, des ventes d'actifs en MVL sont effectuées.

Une fois que tous les leviers ont été mis en place, la PB obtenue est calculée net de chargements. Cette somme est ensuite distribuée aux différents contrats par taux minimum garanti croissants. Les taux faibles sont revalorisés en premier à la valeur du taux technique, et ceci jusqu'à épuisement du montant de PB net de chargement.

Le processus de PB a deux impacts, une évolution de l'encours par la revalorisation des contrats et une influence sur les rachats dynamiques de l'année de projection suivante au vu du taux servi par rapport au taux de référence du marché.

4.1.4 Calcul du résultat

La dernière étape est de constituer les comptes de résultat de la compagnie.

4.1.4.1 Compte Technique Vie

Le compte technique vie se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \text{Résultat Technique Vie} = \text{Cotisations} \\
& \quad + \text{Produits de Placements} \\
& \quad + \text{Ajustements ACAV plus value} \\
& \quad + \text{Autres Produits Techniques} \\
& \quad \quad - \text{Charges Sinistres} \\
& \quad - \text{Charge Provisions Techniques} \\
& \quad - \text{Participation aux Résultats} \\
& - \text{Frais d'Acquisition et d'Administration} \\
& \quad - \text{Charges de Placements} \\
& \quad - \text{Ajustements ACAV moins value} \\
& \quad - \text{Autres Charges Techniques}
\end{aligned}$$

Parmi les éléments importants du compte, se trouvent les revenus de placements calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \text{Produits placements} = \text{Dividendes Actions/OPCVM} \\
& \quad + \text{Coupons OTF/OTV} \\
& \quad \quad + \text{Loyer} \\
& \quad + \text{Intérêts Fond Monétaire} \\
& \quad \quad + \text{PMVR}
\end{aligned}$$

À cela, s'ajoutent les ajustements ACAV sur la partie UC, c'est-à-dire les plus ou moins values enregistrées d'un pas de projection à l'autre.

Les charges de sinistres viennent ensuite se soustraire aux revenus financiers. Dans ces charges, se trouvent les prestations payées pendant l'année (décès, rachats) ainsi que les frais qui s'ajoutent au processus. Mais en face de ces charges, les provisions permettent d'atténuer l'effet des charges de sinistres. Les charges de provisions correspondent au delta de provision mathématique auquel sont soustraits les intérêts techniques et la PB versée (comptabilisées à la ligne E7 Participations Résultats).

Pour pouvoir obtenir le résultat technique net, il ne reste plus qu'à soustraire les frais d'administration (calculés sur l'assiette de provision) ainsi que les charges sur les placements.

4.1.4.2 Compte Non Technique

Pour obtenir le résultat net, il faut ensuite établir le compte non technique, c'est-à-dire les produits et charges de placements des fonds propres, les produits et charges exceptionnels ou encore les impôts sur les bénéfices.

$$\begin{aligned}
\text{Résultat Net} &= \text{Résultat Technique Vie} \\
&+ \text{Produits de Placements} \\
&+ \text{Autres Produits Non Techniques} \\
&- \text{Charges de Placements} \\
&- \text{Autres Charges Non Techniques} \\
&+ \text{Résultat Exceptionnel} \\
&- \text{Impôts sur les Bénéfices}
\end{aligned}$$

Remarque : Le compte de résultat non vie n'est pas spécifié car dans le cadre de ces travaux, seule l'assurance vie est intéressante.

Ces comptes de résultats sont effectués à chaque fin de pas de projection. La construction de ces comptes permet ensuite de calculer le BE ainsi que la VIF, c'est-à-dire la valeur actualisée des résultats futurs.

4.2 Intégration du crédit stochastique dans la valorisation des obligations

Afin de valoriser une obligation d'un rating donné, le modèle nécessite deux types de données :

- Les fonctions de survie par pas de temps, par pas de projection et par simulation : $S_R^s(0, t)$
- Les taux ZC risqués par pas de temps, par maturité et par simulation : $r_R^s(t, T)$

Les taux risqués permettent d'actualiser les flux de l'obligation, tandis que les probabilités de survie permettent d'évaluer à chaque instant si l'obligation fait défaut. Comme pour le cas sans crédit, la valorisation se déroule en deux étapes avec une première étape de risque-neutralisation.

4.2.1 La risque neutralisation

La risque neutralisation reste une étape essentielle avec le crédit stochastique. La seule différence réside dans le fait que cette fois-ci, ce sont les taux risqués qui sont utilisés au lieu des taux nominaux. De nouveau, c'est la méthode avec le coefficient d'ajustement qui est utilisée :

$$\text{Recherche de } p \text{ tel que : } VM_{marche} = N * \left(\sum_{i=0}^T \frac{c * (1-p)^i}{(1+r_R(0,i))^i} + \frac{(1-p)^T}{(1+r_R(0,T))^T} \right) \quad (4.9)$$

Les coefficients d'ajustements sont logiquement différents de ceux qui avaient été calculées avec les taux nominaux. Les taux risqués étant d'autant plus élevés que les taux nominaux, les coefficients d'ajustements sont plus faibles. Cependant, la valorisation avec crédit stochastique intègre un second ajustement, cet ajustement prend en compte les probabilités de survie simulées par le GSE. Cet ajustement sera spécifié dans la sous-section suivante.

4.2.2 Valorisation et ajustement des flux

4.2.2.1 Portefeuille initiale

La valorisation d'une obligation, avec le crédit stochastique se décompose en deux branches. Une première branche dans le cas où l'obligation ne fait pas défaut et une seconde branche où l'obligation fait défaut et rembourse alors seulement une partie de ses engagements. La probabilité de survie générée par le GSE permet de probabiliser les deux branches tandis que le Loss Given Default (LGD) permet d'exprimer la part que l'émetteur ne remboursera pas en cas de défaut.

La valeur de marché se calcule avec deux branches, une branche actualisée à la courbe de taux risqués et prenant donc en compte le risque de défaut du titre, et une seconde branche actualisée à la courbe de taux sans risque. Cette seconde branche permet d'exprimer la part que l'émetteur remboursera de manière certaine en cas de défaut de celui-ci. Le paramètre LGD permet d'exprimer la part de perte et la probabilité de survie s'ajoute dans la valorisation afin de probabiliser les deux branches et d'exprimer la survie du titre.

Cette modification de la valorisation d'une obligation a un impact sur la valeur des flux (coupons et remboursements) qui tombent tous les ans. Notons F_T la valeur du flux qui tombe à la fin de l'année T avec application du coefficient d'ajustement. L'actualisation des flux s'effectue avec la courbe des taux nominaux alors que la valorisation s'effectue également avec la courbe de taux risqués. Un ajustement des flux doit donc être effectué :

$$\tilde{F}_T = F_T * [1 - LGD * (1 - S_R(0, T))] \quad (4.10)$$

En effet dans le cas risque neutre, il y a unicité du prix donc \tilde{F}_T doit vérifier l'égalité :

$$F_T * P_R(0, T) = E^* \left[\tilde{F}_T * D(0, T) \right] \quad (4.11)$$

La démonstration de cette expression de \tilde{F}_T est en annexe.

4.2.2.2 Achat ALM

D'autres obligations peuvent également être achetées en cours de projection en raison du processus ALM. Pour ces obligations, la valorisation et l'ajustement des flux sont un peu différents. La valorisation est équivalente à celle d'une obligation en stock :

Les probabilités de survie vues d'un instant futur sont déterminées en fonction des probabilités de survie vues de 0 :

$$S_R(m, t + m) = \frac{S_R(0, t + m)}{S_R(0, m)} \quad (4.12)$$

Pour l'ajustement des flux, de la même manière qu'il faut prendre en compte les probabilités de survie vues à l'instant de l'achat de l'obligation :

$$\tilde{F}_T = F_T * [1 - LGD * (1 - S_R(t, T))] \quad (4.13)$$

Cette expression est également démontrée en annexe.

De plus, le taux de coupon de l'obligation acheté en cours de projection, dépend du rating. Là où le coefficient d'ajustement de risque neutralisation avait pour impact de déformer les flux, ici, c'est le taux de coupons qui joue ce rôle. La probabilité de survie joue de nouveau un rôle de contre balancier.

4.2.3 Gestion des flux tombant en cours d'année

Lors de la définition d'une obligation, la manière la plus simple de la définir est avec des coupons annuels tombant exactement tous les ans à compter de la date de la valorisation. Ce n'est cependant pas le cas la plupart du temps, les échéances de coupon ne tombent pas exactement le jour de la valorisation et les coupons peuvent être mensuels au lieu d'annuels par exemple.

Il est ainsi nécessaire de gérer ce biais dans la valorisation et la tombée des flux. En effet, le modèle ne fait des réinvestissements qu'à la fin de chaque année tandis que les flux peuvent tomber à n'importe quel instant entre deux pas de projection. Ces flux sont alors capitalisés sur le reste de l'année avant d'être réinvestis.

Cette problématique avait déjà un impact avant l'ajout du crédit stochastique, ainsi les taux nominaux doivent être interpolés pour l'actualisation des flux dans la valorisation, et également pour la capitalisation des tombées de flux.

Le crédit stochastique apporte une seconde contrainte, l'interpolation des probabilités de survie $S_R^s(0, T)$ et $S_R^s(m, T)$ apparaissant dans l'ajustement des flux. La méthode qui a été considérée et qui permet de contenir au maximum la fuite du modèle est la suivante :

Soit T un instant non-entier et α la fraction d'année :

$$\alpha = T - |T|$$

Les probabilités de survie qui sortent du GSE sont discrétisées à pas de temps annuel, leur expression à chaque instant t , entier, s'écrit :

$$S_R^s(0, t) = e^{-\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_R^s(i)} \quad (4.14)$$

Avec $\lambda_R^s(i)$ l'intensité de défaut du rating R à l'instant i .

L'interpolation qui a été considérée est une interpolation linéaire dans l'exponentielle :

$$S_R^s(0, T) = e^{(1-\alpha) \left(-\sum_{i=0}^{|T|-1} \lambda_R^s(i)\right) + \alpha \left(-\sum_{i=0}^{|T|} \lambda_R^s(i)\right)} = S_R^s(0, |T|)^{1-\alpha} * S_R^s(0, |T| + 1)^\alpha \quad (4.15)$$

Il s'agit finalement d'un produit pondéré des probabilités de survie des parties entières.

Une fois que cette méthode a été appliquée, la fuite du modèle a été évalué à moins de 0,1% de la valeur marché initiale. En comparaison, en appliquant une interpolation linéaire sur les probabilités de survie directement, la fuite du modèle était évaluée autour de 0,4%. La méthode qui a été adoptée est donc mieux adaptée.

Maintenant, que la modélisation de l'actif et du passif a été présentée, il est intéressant de regarder le portefeuille sur lequel se portera l'étude.

4.3 Focus sur les fuites de modèles

Dans le cadre de la projection de l'actif et d'une valorisation, risque-neutre, le modèle ne doit pas en moyenne créer ou détruire de la richesse. Un test est donc effectué au niveau de l'actif afin de vérifier cela.

À chaque pas de temps la valeur marché globale de chaque classe d'actif à laquelle est ajouté les tombées de flux, est comparé à la valeur de marché de l'année précédente capitalisée sur l'année qui s'est déroulée. La fuite totale par classe d'actif est ensuite obtenue en actualisant les écarts à chaque pas de projection.

$$Fuite(i) = VM(i) + Flux(i) - VM(i-1) * (1 + r(i-1, i)) \quad (4.16)$$

$$Fuite_{Globale} = \sum_{i=1}^{50} Fuite(i) \cdot D(0, i) \quad (4.17)$$

La fuite globale sur tous les actifs doit être limité, l'ACPR préconise qu'elle soit inférieure à 0,5% de la valeur de marché initiale, et inférieure à 0,2% pour être très acceptable [6].

4.4 Présentation du portefeuille

Les analyses seront effectuées avec les conditions du marché au 31/12/2022, sur 1500 simulations et pour 50 ans de projection à un pas de temps annuel.

Dans le cadre de cette étude, le travail est effectué sur un portefeuille fictif d'un assureur vie vendant uniquement des contrats d'épargnes.

4.4.1 L'actif initial

La présentation de l'actif du portefeuille permet une bonne compréhension de sa sensibilité par rapport à l'implémentation du crédit stochastique au sein du modèle.

L'actif du portefeuille qui a été construit est évalué à 1.320 Mds € en valeur de marché. Il est composé d'obligations à taux fixe (OTF), d'obligations à taux variable (OTV), d'actions, d'immobiliers, d'OPCVM et d'un fonds monétaire :

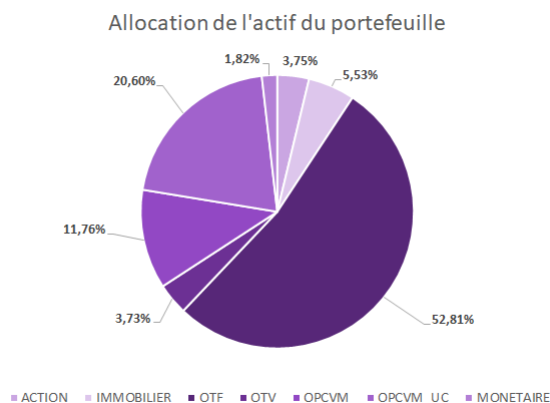


FIGURE 4.5 – Présentation de l'actif du portefeuille

L'actif est donc principalement investi dans des obligations et dans des fonds OPCVM (en actions, immobilier et obligations).

Puisque la poche obligataire est celle qui intéresse le plus dans le cadre de l'implémentation du crédit, il est pertinent de faire un focus sur sa structure.

La durée moyenne de la poche obligataire (évaluée avec la courbe Eiopa) est de 6,4 ans. Cet indicateur permet d'évaluer la sensibilité par rapport à une hausse ou une baisse des taux. Elle permet également d'évaluer le risque de liquidité vis-à-vis des flux de passif en comparant celle-ci avec la durée du passif. Plus la durée est basse et moins l'obligation sera sensible à des mouvements de taux. Cet indicateur devient moins précis

lorsque les mouvements de taux sont trop importants en cas de changement notable de la situation économique.

Il est également pertinent d'avoir un aperçu de la répartition des taux de coupon ainsi que de l'échéancier des remboursements. En effet, il permet en plus de la durée de voir si les rendements de la poche obligataire sont intéressants par rapport au niveau des taux actuels et quand est-ce que ces obligations vont arriver à échéance.

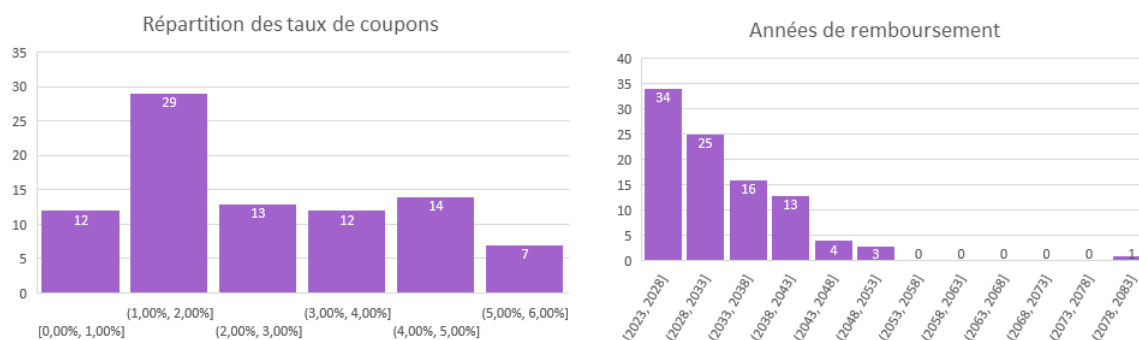


FIGURE 4.6 – Répartition des taux de coupon et des années de remboursement

Les taux de coupon sont situés entre 0% et 6%. Le taux de coupon moyen (pondéré par la valeur marché) est de 3,2%. Pour les remboursements des obligations en stock, une grande partie s'écoule les 10 premières années ce qui correspond globalement à ce qui se passe sur le marché. Ce portefeuille possède néanmoins une obligation qu'il détient à très long terme, car elle a pour année de maturité 2081.

Remarque : Les obligations à taux de coupon 0% sont en fait des OAT française démembrés. Elles permettent de séparer les flux de paiements des intérêts et les flux de remboursements, en découpant l'obligation en plusieurs obligations zéro-coupon. La France est le premier émetteur à l'échelle européenne à avoir autorisé le démembrement de ses titres [16].

Un autre élément qui est important d'analyser avec l'implémentation du crédit stochastique est la répartition des obligations par groupe de rating. Outre le choc de la formule standard pour le calcul du SCR, le rating n'a pas d'impact dans la projection sans modélisation du crédit stochastique. Avec cette modélisation, le rating devient une caractéristique essentielle, il est ainsi important d'avoir un aperçu de la répartition de la poche obligataire :

Répartition de la valeur marché par rating

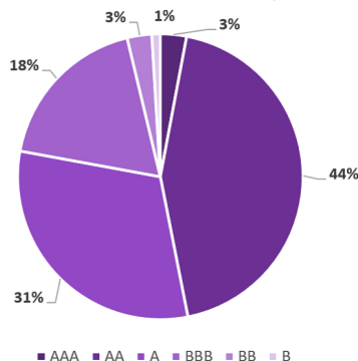


FIGURE 4.7 – Répartition des ratings

Le portefeuille est principalement composé d'obligations de rating AA, A et BBB. Cette répartition est cohérente avec le marché, en effet la part importante d'obligations notées BBB est observable chez un grand nombre d'acteurs. Les obligations de notations inférieures sont quant à elles souvent peu présentes.

Remarque 1 : Les obligations notées en dessous de BBB sont souvent des obligations d'émetteurs ayant connu une baisse de leur notation pendant la détention du titre. En effet, ces notations ne font pas partie de la grille d'investissement moyenne des assureurs.

Remarque 2 : Les obligations non notées sont évaluées comme des obligations BBB. Ce choix est cohérent avec les chocs de la formule standard.

Lors de l'achat de nouvelles obligations au cours de la projection, il est nécessaire de choisir sur quel rating il est intéressant d'investir. Dans ce cadre d'étude, le choix de référence est de réinvestir uniquement sur les ratings AA à BBB au prorata de leur répartition initiale.

Ce choix sera ensuite comparé à d'autres hypothèses, un réinvestissement moins risqué uniquement sur du AA et un réinvestissement plus risqué uniquement sur du BBB.

Hypothèse de réserve de capitalisation

La réserve de capitalisation (RC) permet d'enregistrer les plus ou moins values réalisées sur les obligations vendues en cours de projection. Elle a pour rôle de compenser les moins-values réalisées grâce à une dotation des plus-values. Dans cette modélisation, les obligations sont détenues jusqu'à échéance dans la plupart des cas. L'effet de la RC est ainsi minime dans le cas de cette modélisation. Une hypothèse de réserve nulle à l'état initial permet d'éviter les légers impacts dans l'analyse et n'est donc pas dérangeante d'un point de vue cohérence de par la détention jusqu'à échéance de la plupart des titres.

4.4.2 Le passif

Le passif est composé de 50% d'assurés hommes et 50% d'assurées femmes. Il est uniquement constitué de contrats d'épargne multisupports en Euro et UC avec une forte dominance en Euro (77% contre 23%). La provision mathématique globale est de 1,222 Mds € (945M€ en Euro et 277M€ en UC). De plus, la PPE de l'assureur est dotée à hauteur de 19M€.

L'âge moyen du portefeuille (pondéré par la PM) est de 67 ans, c'est un âge moyen qu'il est possible d'observer sur les portefeuilles des assureurs en épargne.

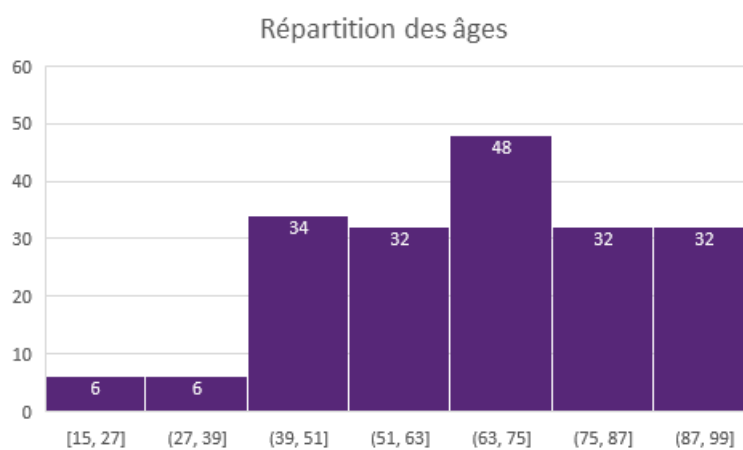


FIGURE 4.8 – Répartition des âges

Le portefeuille est constitué de quelques jeunes clients, mais dans la globalité, les assurés sont situés entre 40 et 80 ans.

4.4.2.1 Répartition des TMG

Parmi les éléments importants à connaître sur le passif, il y a la répartition des TMG. Le TMG est un élément important du portefeuille d'un assureur, car il permet d'avoir une première idée de la sensibilité au comportement du marché. Plus le portefeuille contient des contrats avec des TMG important et plus il est sensible. En effet, cela l'oblige à servir un certain niveau de taux dans n'importe quel contexte économique, qu'il soit favorable ou défavorable.

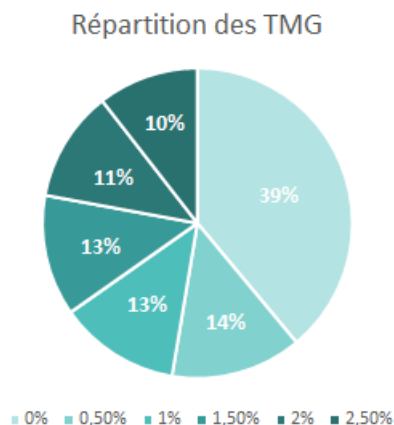


FIGURE 4.9 – Répartition des taux minimums garantis

Les TMG sont en grande partie inférieurs à 1%, cependant une part non-négligeable de ceux-ci sont supérieurs à 1,5% mais ne dépassent pas 2,5%. Le TMG moyen pondéré par la PM est évalué à 0,68%. Le TMG moyen est donc nettement inférieur au niveau de taux de coupon moyens qui a été présenté dans la section sur l'actif. Il est également nettement inférieur au niveau des taux d'intérêts (qui régit en moyenne le rendement global de l'actif du fait de la valorisation risque neutre). Le portefeuille est donc moyennement sensible au comportement du marché par rapport à ses engagements de taux à servir.

4.4.2.2 Modélisation des rachats

Les rachats structurels sont fixés à 6,5% de l'encours sur l'ensemble de la projection. Ce taux a été calibré en fonction du niveau de taux d'un certain nombre d'acteurs sur le marché.

Pour les rachats dynamiques, la loi qui a été considérée est la loi avec le minimum de rachat proposé par l'ONC (Orientations Nationales Complémentaires).

Le graphique représente le taux de rachat en fonction de l'écart entre le taux servi et un taux de référence de marché. Ce taux de référence est, dans le cas de cet assureur, le niveau du taux sans risque 10 ans à chaque pas de projection.

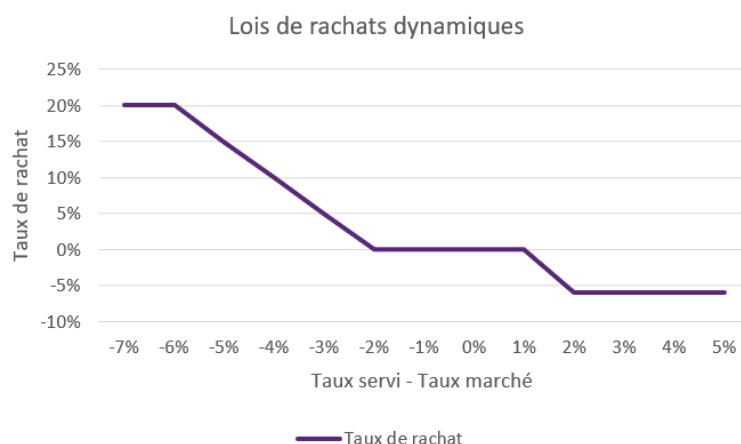


FIGURE 4.10 – Loi de rachat dynamique

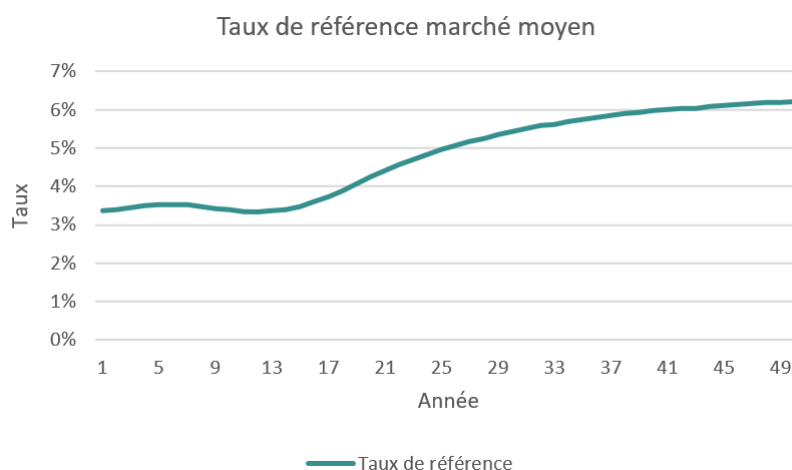


FIGURE 4.11 – Taux de référence de marché

4.4.2.3 Les hypothèses de frais

Trois types de frais sont à considérer dans le cadre d'un modèle d'épargne : les frais d'administration, les frais de prestations et les frais de gestion des placements.

Dans un contexte de modélisation en Run-Off, et en considérant que les assurés ne versent pas de primes au cours de la projection, il n'y a donc pas de frais sur les cotisations.

Les frais de prestations servent à couvrir la gestion des contrats (ouverture-fermeture de contrat, modification d'un contrat, rachat partiel, ...). Dans ce modèle, il est fait l'hypothèse que les frais sont indexés sur le montant de prestation versé chaque année. Le taux est de 0,5% pour l'Euro et 0,66% pour les UC.

Les frais d'administration servent entre autres à payer les salaires des compagnies d'assurance. Dans ce modèle, il est fait l'hypothèse que les frais sont indexés sur l'inflation cumulée. Le taux de coût unitaire a été calibré de manière à ce que les frais de première année collent avec ceux obtenus avant l'intégration du coût unitaire. Il en résulte des coûts unitaires de 11,92 pour l'Euro et 4,56 pour les UC.

Les frais de gestion des placements sont quant à eux calculés sur la valeur nette comptable de l'ensemble des placements.

Avant de présenter l'implémentation du modèle de crédit stochastique, il est important d'apporter des précisions sur un élément important du modèle, les fuites.

Ce chapitre a permis de présenter dans sa globalité le modèle ALM. Dans un premier temps, une présentation de la modélisation actif/passif a été effectuée. Ensuite, une seconde partie a servi à présenter la méthode de valorisation des obligations à l'aide du modèle de crédit stochastique. Enfin, la dernière partie a permis de présenter la structure du portefeuille sur lequel se porte les travaux.

Le dernier chapitre consiste à analyser les impacts de la modélisation du crédit stochastique dans différents contextes économiques et avec différentes politiques d'investissements obligataires.

Chapitre 5

ANALYSE DE L'IMPACT DANS DIFFÉRENTS CONTEXTES ECONOMIQUES

Ce dernier chapitre a pour objectif de présenter et d'analyser les impacts de la modélisation du crédit stochastique sur la valorisation du bilan S2. L'étude se porte ainsi sur la sensibilité des indicateurs de solvabilité au risque de crédit. Cette sensibilité sera réalisée dans différentes situations économiques et avec diverses hypothèses de réinvestissements.

5.1 Analyse d'impact au 31/12/2022 avec réinvestissement sur une allocation fixe

Afin de comprendre correctement les impacts du crédit stochastique sur les indicateurs S2, il est intéressant d'étudier dans un premier temps l'impact sur les flux d'actifs.

5.1.1 Impact sur les flux d'actifs

Comme il a pu être présenté dans le chapitre précédent, l'intégration du crédit stochastique a un double impact sur les flux obligataires. Les coefficients d'ajustements de risque neutralisation sont modifiés à la baisse et des probabilités de survie viennent s'ajouter à l'ajustement.

Pour comprendre l'impact sur les flux d'actifs, on considère d'un côté une obligation sans risque dont la valeur marché correspond à la valeur marché total des OTF du portefeuille. De l'autre côté, on considère 6 obligations valorisées avec les six courbes de taux risqués au prorata de la répartition initiale par rating. Pour chacune des 7 obligations, la risque neutralisation est effectuée, ensuite le cumule des 7 obligations est comparé avec l'obligation valorisée sans crédit (Figure 5.1).

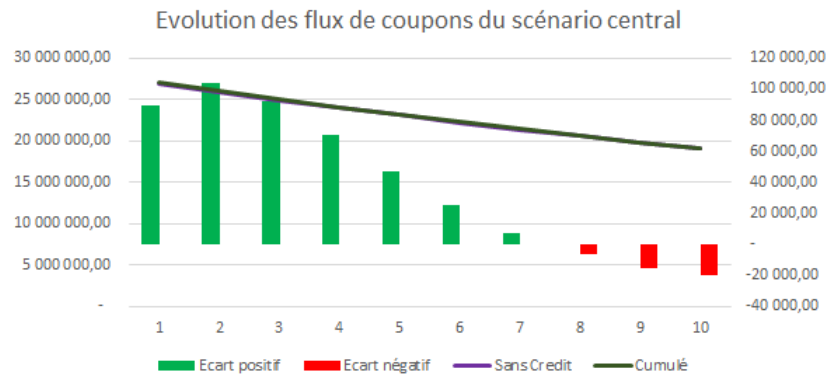


FIGURE 5.1 – Evolution des flux de coupons

Les écarts sont globalement marginaux, les premières années le coefficient d'ajustement plus faible fait évoluer à la hausse les flux et ensuite la probabilité de survie compense au fur et à mesure cet effet. L'effet de la probabilité de survie est cependant limité, en effet comme le modèle fait l'hypothèse que l'assureur touchera 65% (1-LGD) des intérêts en cas de défaut, l'effet est ainsi plafonné. Au même titre que le dernier coupon, la valeur de remboursement est légèrement plus basse, mais l'impact reste marginal.

Pour les obligations en stock, l'ajout du crédit stochastique a une tendance à améliorer les valeurs des coupons en début de projection. Cet écart diminue ensuite sur la suite de la projection et devient légèrement négatif.

Ensuite, il est intéressant de regarder une obligation achetée en cours de projection avec le processus ALM. Selon le choix de rating de réinvestissement, les obligations ne seront pas achetées avec le même taux de coupon. Le taux de coupon est déterminé par rapport à la courbe de taux du rating associé, la maturité choisie pour le taux correspond à la maturité de l'obligation qui est achetée.

Par exemple, pour un achat d'une obligation au pas de temps $P = 3$ pour une maturité 8 ans, les taux de coupon proposés pour les différents ratings sont les suivants :

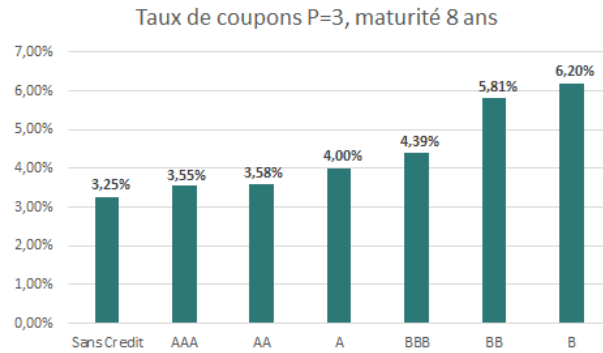


FIGURE 5.2 – Taux de coupon en fonction du rating

Il est possible de constater une croissance du taux de coupon avec la dégradation de la notation.

Dans le cadre de l'analyse de référence, les investissements sont effectués sur les rating AA, A et BBB. Les spreads de coupon sont ainsi situés entre 33 et 115bps. La comparaison des flux de l'obligation entre une valorisation sans risque et une valorisation AA et BBB donnent les résultats suivants :

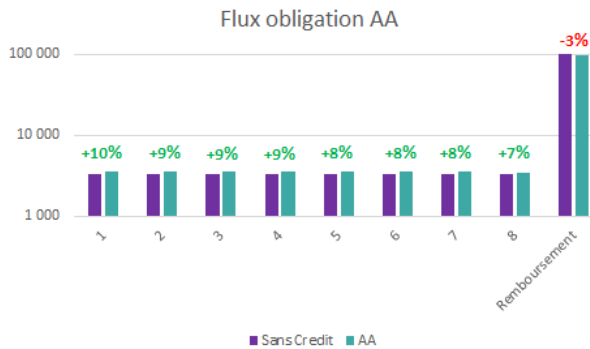


FIGURE 5.3 – Coupons AA

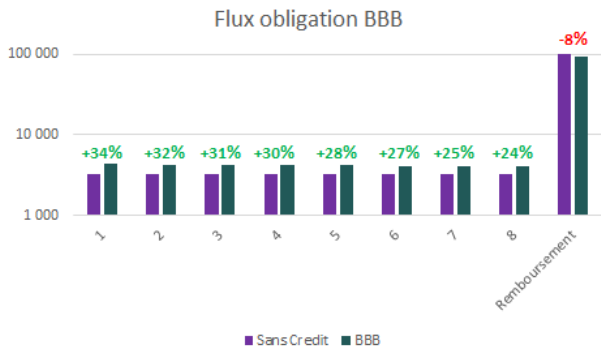


FIGURE 5.4 – Coupons BBB

L'effet du spread de coupon est plus important que celui de la probabilité de survie, cependant contrairement à l'effet du coefficient d'ajustement sur les obligations en stock, la valeur de remboursement est impactée de manière importante. En effet, là où le coefficient d'ajustement a un impact sur la valeur de remboursement, le taux de coupon n'en a pas. Ainsi, pour ces obligations, les flux de coupons sont globalement supérieurs, mais lorsque les obligations arrivent à maturité, une perte est observée par rapport à la modélisation sans crédit sur la valeur de remboursement. Les effets observés sont d'autant plus marqués que la notation est risquée.

De ces deux analyses, il est possible d'avoir une première intuition des effets de la

modélisation du crédit stochastique. Une déformation de la dynamique des flux est observable. En début de projection, les flux sont plus importants de par l'effet de l'ajustement de risque neutralisation plus faible et un réinvestissement à des taux de coupon plus élevés. Ensuite, en milieu de projection, lorsque les échéances d'obligation se font de plus en plus fréquentes, le défaut des obligations (à travers la probabilité de survie) entraîne une diminution des flux financiers. Cependant le réinvestissement sur des coupons plus élevés limite l'effet négatif sur les produits financiers.

Après cette première analyse, il est intéressant de regarder l'impact de cette analyse sur la valorisation Best Estimate des provisions de l'assureur.

5.1.2 Impact sur le Best Estimate

La modélisation du crédit stochastique a un impact à la hausse sur le Best Estimate (+356K€ soit 0,03%). Cet effet est marginal, mais il est important d'analyser sa provenance. Cette modélisation n'impacte que la partie Euro et non la partie UC du portefeuille. Dans la suite de l'étude, les résultats porteront uniquement sur la part Euro du portefeuille.

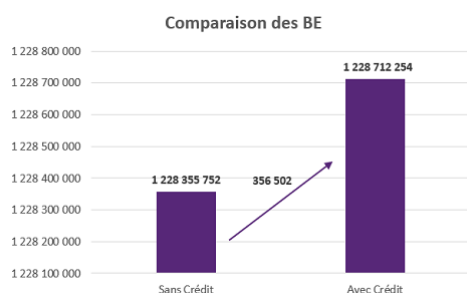


FIGURE 5.5 – Impact sur le BE

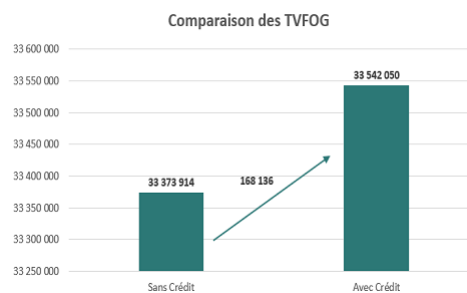


FIGURE 5.6 – Impact sur la TVFOG

Cet écart est en partie structurel, c'est-à-dire lié à la nouvelle structure de modélisation. Cet écart peut s'observer à travers le scénario déterministe. L'effet structurel est ici responsable à 50% de l'écart global observé. Ensuite s'ajoute l'effet du coût des options et garanties financières matérialisé par le surplus entre le scénario déterministe et la moyenne des scénarios stochastiques. Ce surplus est responsable des 50% restants.

Avant de commencer cette analyse, il est possible d'observer quels éléments du BE sont impactés et lesquels ne le sont pas.

	Sans Crédit	Avec Crédit	Ecart	Variation
Frais	62 527 539,52	62 519 223,68	-8 315,84	-0,01%
Prestations	881 480 995,35	881 857 223,90	376 228,55	0,04%
PM Fin	1 605 202,35	1 593 956,79	-11 245,56	-0,70%
PPE Fin	36 051,16	35 885,99	-165,16	-0,46%
Total BE	945 649 788,37	946 006 290,36	356 501,99	0,04%

FIGURE 5.7 – Décomposition du BE

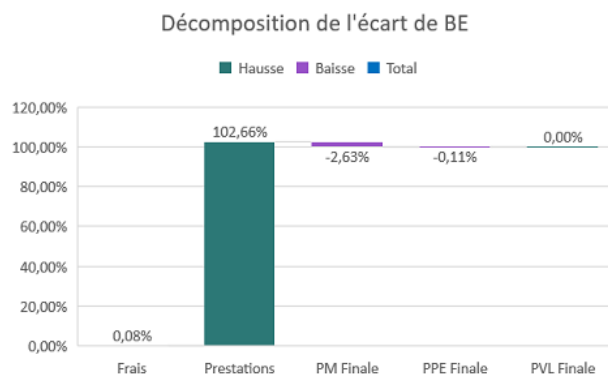


FIGURE 5.8 – Décomposition de l'écart de BE

L'écart est globalement porté par le BE de prestations. Les provisions à l'échéance (PM et PPE) n'ont pas un impact très significatif, car l'effet d'actualisation réduit grandement les effets potentiels. Le BE de frais n'est également pas impacté, en effet, les frais d'administration sont évalués en coût unitaire donc ne dépendent que du taux d'inflation, et les frais de prestations et de gestion de placements ont des taux de frais trop bas pour que l'impact soit significatif.

Une première étude en vision déterministe permet d'observer les impacts sans avoir un effet de compensation entre les simulations. Une décomposition des flux permet d'avoir tous les éléments pour reconstruire le BE, au contraire d'une vision moyenne.

5.1.2.1 Analyse en vision déterministe

En vision déterministe, l'écart positif est observé principalement sur le début de la projection. Une seconde période à partir de l'année 13 est observée avec des prestations plus importantes.

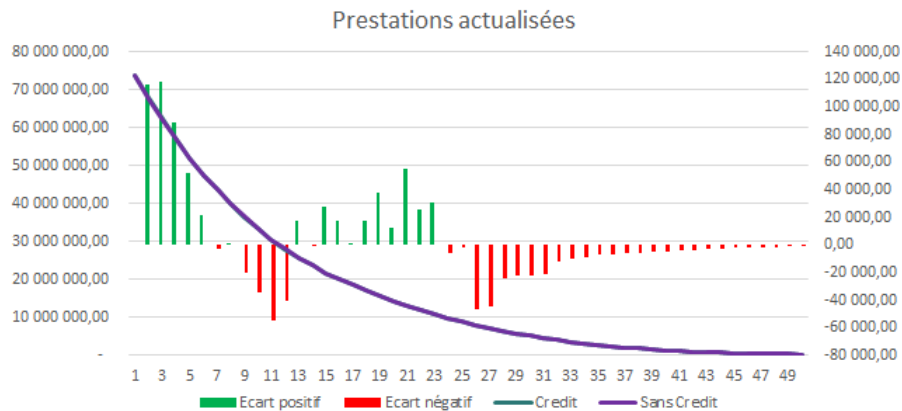


FIGURE 5.9 – Evolution des prestations

Pour comprendre les effets, une analyse des produits financiers est essentielle, car c'est à travers les modifications à l'actif, qu'ensuite les écarts au passif se forme.

Les produits financiers

Les premières analyses sur les flux d'obligations permettent de faire le lien avec l'impact observé ici. En effet, les flux des obligations dans le stock et des nouvelles obligations sont plus importants sur les premières années, ainsi les produits financiers globaux sont plus importants :

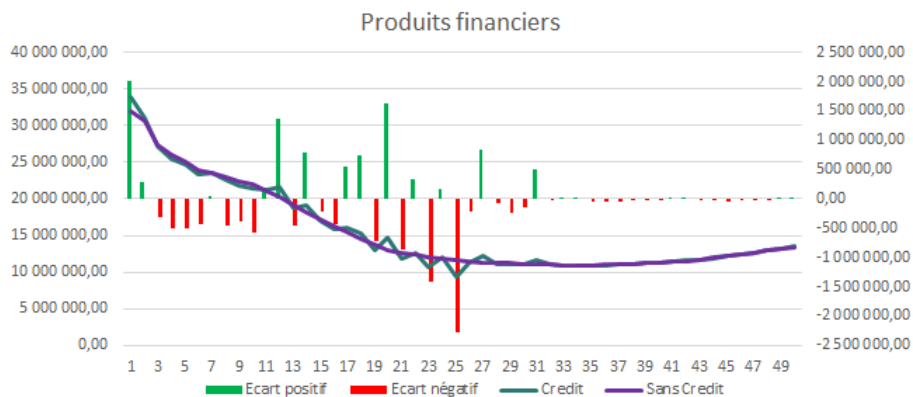


FIGURE 5.10 – Evolution des produits financiers

L'effet est cependant atténué, car seules les deux premières années enregistrent un écart positif sur les produits financiers de début de projection. L'analyse sur les flux de coupons n'est donc pas suffisante pour conclure, un autre élément créé de l'écart sur

les produits financiers. Pour cela, regardons uniquement les produits financiers des OTF (principale source des écarts).

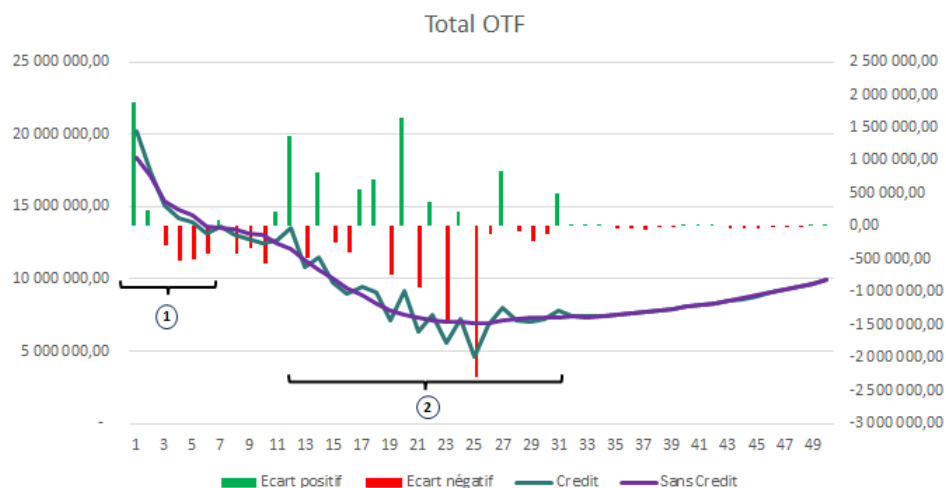


FIGURE 5.11 – Produits financiers des OTF

La décomposition du résultat entre les flux de coupons et les surcôtes/décôtes ne suffisent pas à expliquer l'ensemble de la dynamique. En effet, comme observé dans la première analyse, les flux de coupons sont toujours nettement supérieurs sur l'ensemble de la projection. Les surcôtes/décôtes sont quant à elles beaucoup plus volatile. Les valeurs de marché augmentent en début de projection puis diminuent, ainsi les achats successifs d'obligation à travers le processus ALM entraînent ses écarts volatiles observés en milieu de projection.

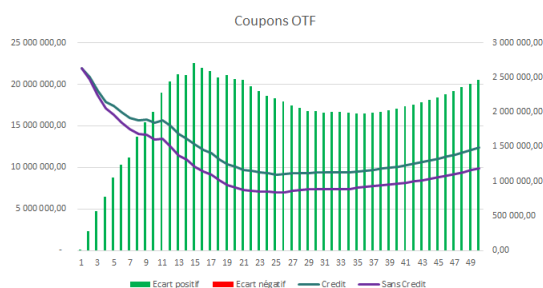


FIGURE 5.12 – Evolution des coupons

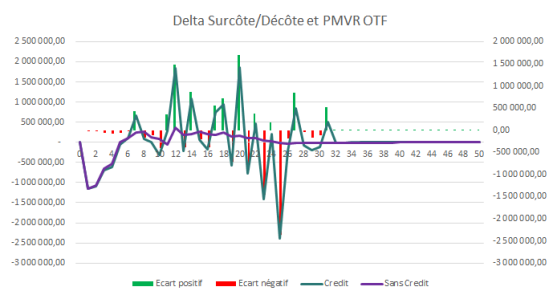


FIGURE 5.13 – Evolution des delta de Surcôte/Décôte et des PMVR

Pourtant, ces deux informations, n'expliquent pas le choc élevé en année 1, ni la chute rapide des produits financiers dès le pas de temps 3. En effet, une autre variable vient s'ajouter pour former les produits financiers. Il s'agit de la mesure d'un pas de temps à

l'autre des pertes liées à l'effet de l'ajustement risque-neutre et la probabilité de survie sur la valeur de l'obligation.

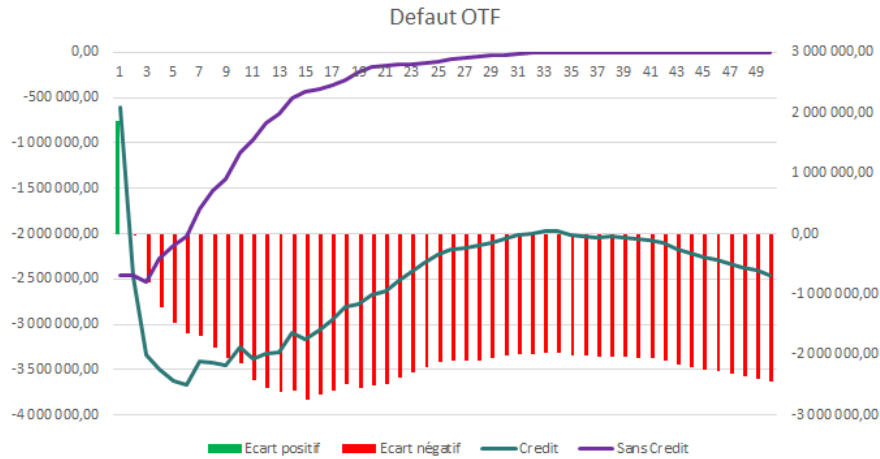


FIGURE 5.14 – Défaut des OTF

En première année l'effet de la diminution des coefficients d'ajustements risque neutre (au même titre que ce qui est observé sur les coupons), ensuite l'effet de la probabilité de survie prend le pas et augmente les pertes. En mettant cette variable en parallèle des flux de coupons, il est possible de remarquer qu'au cours de la projection ces deux variables tendent à se compenser.

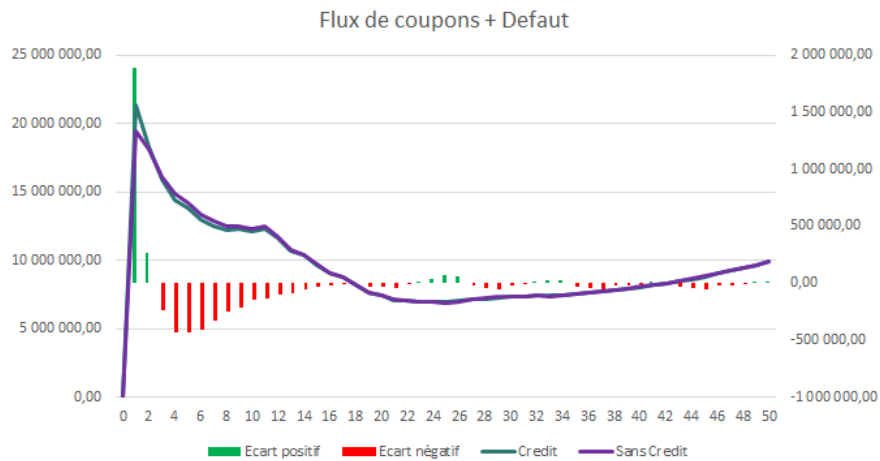


FIGURE 5.15 – Compensation des flux et du défaut

Ainsi sur la première année, l'effet de la baisse des coefficients d'ajustement de risque neutralisation ont pour impact une baisse importante de l'ajustement (donc une hausse importante des produits financiers) et ensuite une forte hausse de l'effet de l'ajustement

par la probabilité de survie entre deux pas de temps. Sur la suite de la projection, l'effet de cette variable est compensé par l'amélioration de la valeur des coupons.

Maintenant, que les effets sur les produits financiers sont expliqués, il est possible d'en voir les impacts sur le passif de l'assureur et donc sur la valorisation Best Estimate des provisions techniques.

L'évolution du passif

Les produits financiers viennent directement impacter l'encours à travers la revalorisation des contrats par la PB. La PB versée aux assurés est directement expliquée par les produits financiers modulo les leviers présentés dans le chapitre précédent, soit la PPE et les PVL réalisées. Les PVL réalisées dans l'algorithme de PB ne concernent cependant pas les obligations et donc interfèrent peu avec les résultats.

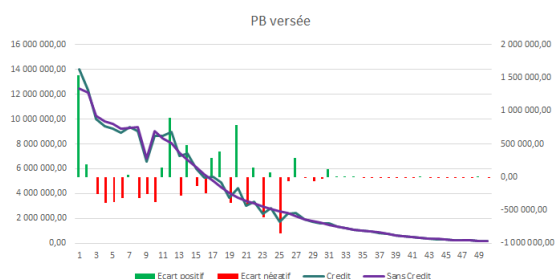


FIGURE 5.16 – Evolution de la PB versée nette de chargement

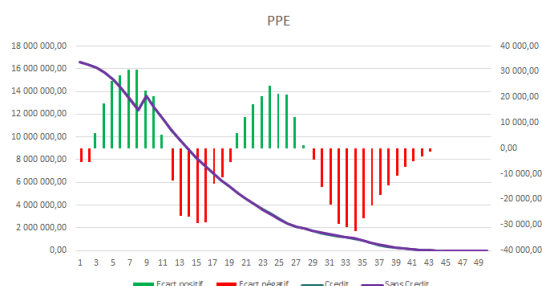


FIGURE 5.17 – Evolution de la PPE

La PPE est très peu impactée, ainsi ce qui avait été observé sur les produits financiers se retrouvent directement sur la PB versée. Elle est nettement supérieure la première année puis devient rapidement plus basse et en milieu de projection des variations apparaissent.

Cette PB versée, nettement plus élevée en première année, a pour effet de revaloriser de manière plus importante l'encours. Sur les années suivantes, l'effet de la première année prend quelques années à se résorber entraînant ainsi une assiette de PM plus importante pour les rachats dynamiques sur les 6 premières années.

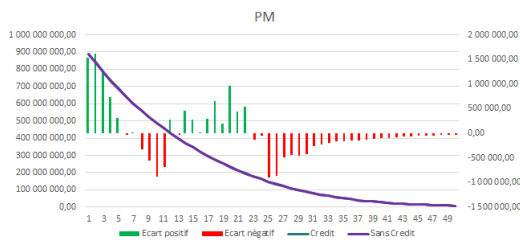


FIGURE 5.18 – Evolution de la PM

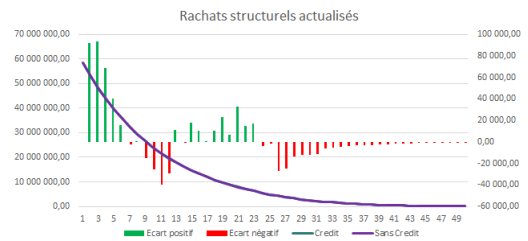


FIGURE 5.19 – Evolution des rachats structurels

Ce phénomène, observé sur les rachats structurels, est également identifié de la même manière sur les décès (même effet d'assiette). Les rachats dynamiques ne s'activent pas, l'assureur arrive à verser un taux servi suffisant à chaque pas de temps dans l'intervalle fixé. La déformation des flux en début de projection est bénéfique pour les assurés, ce qui se matérialise par une augmentation des flux de prestations.

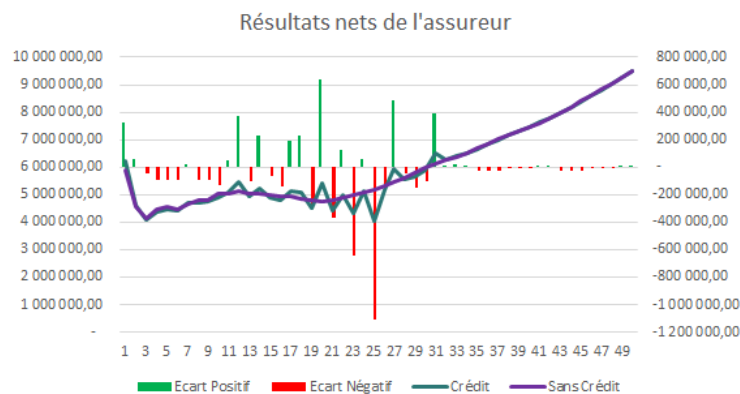


FIGURE 5.20 – Evolution du résultat net de l'assureur

Face à cela, l'assureur n'arrive pas à prélever un surplus de marge équivalent en début de projection. L'algorithme de PB transfère le surplus aux assurés, car la elle n'atteignait pas le taux cible maximum. Sur la suite de la projection, à l'image des surcôtes/décôtes, les résultats sont tantôt meilleurs et tantôt moins bons. Par effet d'actualisation et de compensation, l'assureur verse plus de prestations qu'il ne fait de gains grâce à la déformation des flux financiers. Cela entraîne au global une augmentation du BE et ainsi une diminution des fonds propres (à travers la VIF correspondant à la valeur actualisée des résultats futurs).

Cette analyse déterministe a permis de comprendre comment les effets de la modélisation du crédit, à travers une déformation des flux obligataires et du défaut, entraînent ainsi une augmentation modérée des provisions techniques de l'assureur. Il est maintenant

possible de s'intéresser aux coûts d'options.

5.1.2.2 Analyse de la distribution des scénarios de BE

Pour avoir une vision plus précise des conséquences de l'intégration du crédit stochastique, il est judicieux d'étudier l'impact dans les simulations. Une première information est l'ordre des simulations entre le modèle avec crédit et sans crédit.

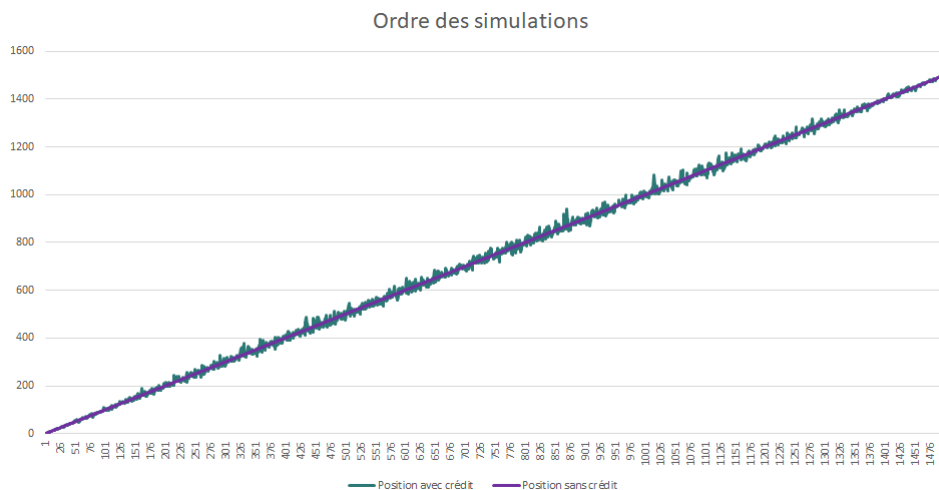


FIGURE 5.21 – Ordre des simulations

La figure 5.21 représente le trie des Best Estimate calculés dans chacune des simulations dans le cas avec crédit et sans crédit. Les positions des scénarios avec crédit sont ensuite comparées à ceux sans crédit.

Les scénarios extrêmes (à la hausse et à la baisse) ne bougent pas et restent les mêmes avec et sans crédit. C'est dans la partie centrale que les décalages se forment. Ces décalages se compensent, ce qui est cohérent avec l'impact mesuré de la modélisation du crédit. La modélisation du crédit a donc un effet sur les scénarios, mais cet impact reste maîtrisé. Globalement, un scénario défavorable sans crédit reste défavorable avec le crédit et inversement.

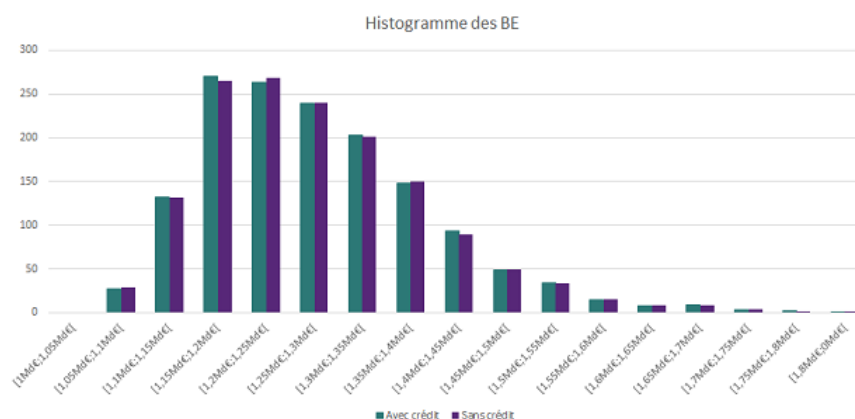


FIGURE 5.22 – Ordre des simulations

Le constat effectué sur l'ordre des simulations se retrouve ainsi dans l'analyse de la distribution des BE. En se concentrant uniquement sur la partie dense de l'histogramme, c'est-à-dire entre 1,1Mds € et 1,4Mds €, il y a exactement le même nombre de simulations. De légers écarts apparaissent, mais sont au global compensés entre eux. De même en se concentrant sur les valeurs extrêmes, le même nombre de simulation est sensiblement retrouvé dans chaque intervalle.

Un autre élément important à souligner est que les scénarios pour lesquels on observe le plus d'impact (à la hausse et la baisse) sont tous des scénarios situés dans le premier tiers des scénarios avec le plus fort BE. Cela s'explique par une plus forte volatilité de l'impact sur des scénarios déjà extrêmes dans la modélisation sans crédit.

Les simulations n'ont donc pas fortement évolués, étant donné l'effet marginal observé en moyenne, il est ainsi logique de n'observer que très peu d'impact sur la distribution des BE. Le modèle de crédit n'a donc pas pour effet de changer la structure des simulations.

Une dernière étude sur deux scénarios particuliers permet de comprendre si l'impact est marginal sur l'ensemble des simulations, ou bien si c'est un effet de compensation qui au global donne un choc limité.

5.1.2.3 Analyse de deux scénarios particuliers

La dernière partie de l'étude de BE consiste en une analyse de deux scénarios avec les d'écarts de BE les plus importants (à la hausse et à la baisse).

1^{er} scénario : Hausse du BE

Dans ce 1^{er} scénario, le BE augmente de 10M €, soit une hausse de 0,7%. Il est positionné respectivement 214^e et 237^e dans l'ordre des BE décroissants avec crédit et

sans crédit. Cette hausse a donc un effet modéré sur l'ordre des simulations. Il s'agit d'un scénario où les provisions sont donc relativement élevées même avant l'intégration du crédit (quantile à 85%).

L'analyse effectuée sur les flux obligataires dans ce scénario est un peu différente. L'effet est accentué : les flux de coupons sont supérieurs sur l'ensemble de la vie des obligations en stock, contrairement à la vision déterministe.

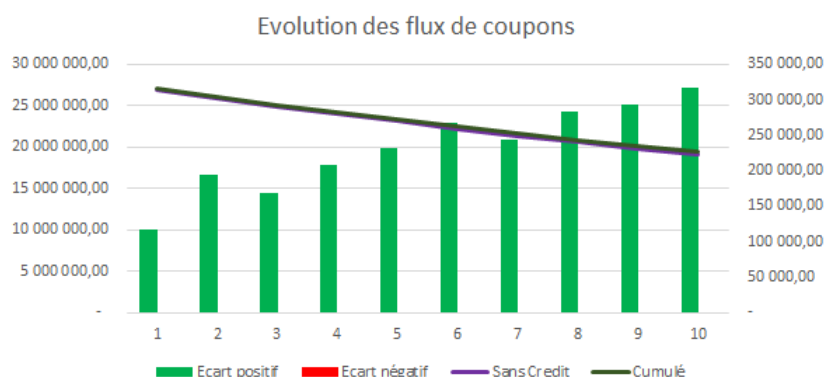


FIGURE 5.23 – Flux de coupons des obligations en stock

L'écart sur les flux de coupons des nouvelles obligations est également plus important dans ce scénario :

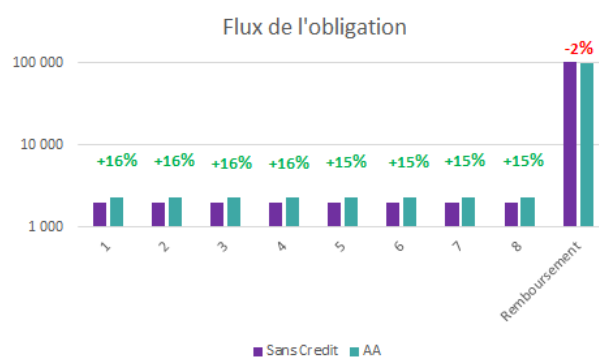


FIGURE 5.24 – Coupons AA

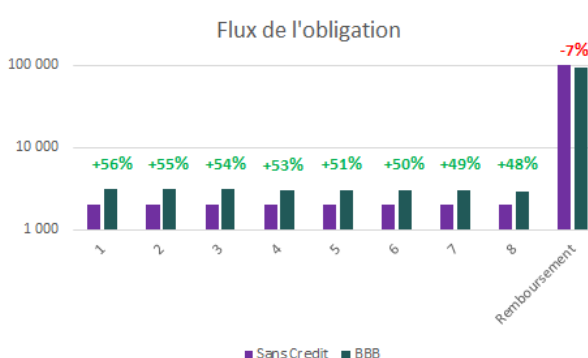


FIGURE 5.25 – Coupons BBB

Dans ce scénario, la déformation des flux obligataires est plus forte en début de projection contrairement au scénario déterministe. Ainsi, dans ce scénario, les prestations versées sont supérieures sur la totalité de la projection. En effet, en observant les produits financiers, ils sont plus importants avec le crédit sur l'ensemble de la projection.

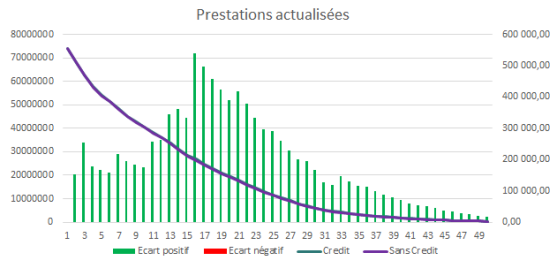


FIGURE 5.26 – Evolution des prestations actualisées

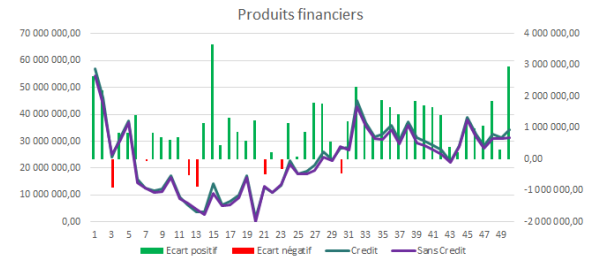


FIGURE 5.27 – Evolution des produits financiers

Ces surplus de produits financiers ne permettent toujours pas de prélever plus de marge financière. Ainsi, les produits financiers supérieurs ont seulement pour effet d'augmenter la PB servie, et par effet de revalorisation et d'assiette, d'augmenter de manière plus importante les prestations versées tout le long de l'année. Le BE augmente alors en conséquence.

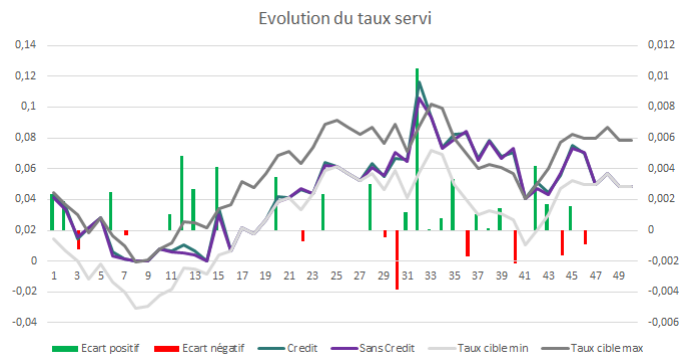


FIGURE 5.28 – Evolution du taux servi

Cependant, l'amélioration des flux de coupons n'est pas la seule explication de ces produits financiers supérieurs sur l'ensemble de la projection. Contrairement au scénario déterministe, dans ce scénario, la modélisation du crédit stochastique a pour effet d'augmenter les PMVR sur l'ensemble de la projection.

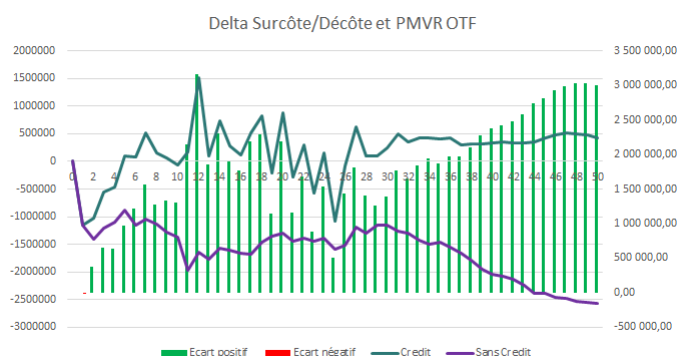


FIGURE 5.29 – Evolution des delta de Surcôte/Décôte et des PMVR

Ainsi, dans ce scénario, les produits financiers sont plus élevés avec crédit, ce qui a pour effet d'avoir des prestations également plus élevées sur l'ensemble de la projection. Le surplus de produits financiers ne rapportent que peu de marge financière supplémentaire. L'écart est dû à un creusement de l'écart des flux de coupons ainsi qu'une valorisation plus avantageuse permettant de réaliser des plus ou moins-values plus importantes.

2nd scénario : La baisse du BE

Dans ce second scénario, le BE baisse de -14M €, soit une baisse de -0,9%. Il est positionné respectivement 13^e et 12^e dans l'ordre des BE décroissants avec crédit et sans crédit. Il s'agit d'un scénario extrême avec des provisions au-delà du quantile à 99% de la distribution sans et avec modélisation du crédit

De nouveau, il peut être intéressant d'analyser les flux obligataires des obligations en stock et celles achetées pendant la projection. Au contraire du scénario précédent, les flux de coupons des obligations en stock deviennent rapidement moins importants avec l'intégration du crédit. Pour les obligations achetées en cours de projection, les gains de flux sont moins importants et l'impact sur les remboursements est plus fort.

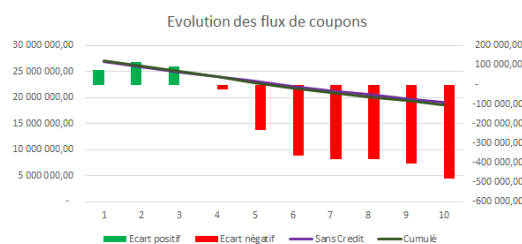


FIGURE 5.30 – Evolution des flux de coupons

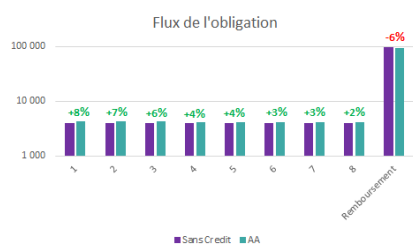


FIGURE 5.31 – Coupons AA

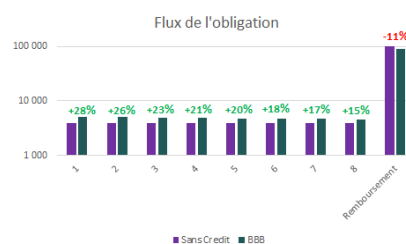


FIGURE 5.32 – Coupons BBB

La déformation des flux financiers est donc ici sensiblement différente. Les gains en flux obligataire sont très marginaux en début de projection, elles deviennent rapidement inférieures à la valorisation sans crédit. Cela a donc pour impact de diminuer la revalorisation de l'encours rapidement et donc par effet d'assiette limiter les prestations de décès et de rachats.

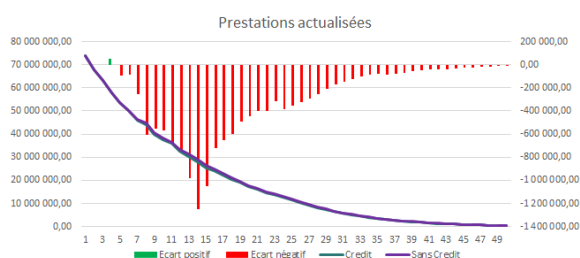


FIGURE 5.33 – Evolution des prestations actualisées

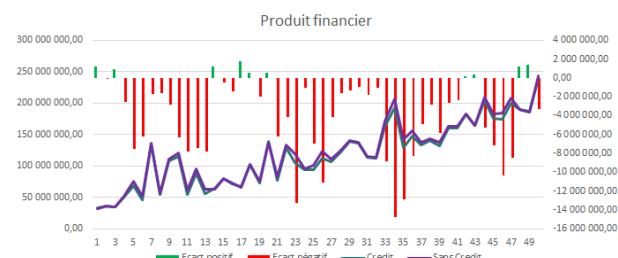


FIGURE 5.34 – Evolution des produits financiers

Dans ce second scénario, la situation est très défavorable avant l'intégration du crédit stochastique. Les produits financiers sont inférieurs sur l'ensemble de la projection, ce qui a pour effet d'avoir des prestations également moins élevées. Ce scénario montre que la valorisation avec prise en compte du crédit stochastique ajoute un surplus de volatilité. Ici, les flux obligataires sont rapidement dégradés alors que dans d'autres scénarios, les flux obligataires sont meilleurs sur l'ensemble de la projection.

Cette analyse a permis de mettre en lumière les impacts tant positifs que négatifs de l'intégration du crédit sur le calcul S2 des provisions techniques. En effet, il augmente à travers une diminution du coefficient d'ajustement gonflant ainsi les produits financiers et donc l'assiette de PM par la revalorisation. Mais d'un autre côté, il diminue également à travers la probabilité de survie qui a pour effet de rendre les produits financiers plus volatiles à la baisse surtout dans des scénarios extrêmes ou celles-ci baissent fortement.

Les scénarios de hausse importante sont plus présents (60%) que les scénarios de forte baisse (20%), ce qui explique au global une hausse du BE, mais compensé par des

scénarios de forte baisse. Maintenant, que le BE est analysé, il est ensuite essentiel de regarder comment se comporte les fonds propres et le ratio de solvabilité.

5.1.3 Analyse du ratio de solvabilité

Comme le BE a légèrement augmenté avec l'intégration du crédit, les fonds propres ont donc diminué de la même hauteur. L'assureur ayant moins de fonds propres, il peut s'attendre à être moins solvable si le SCR reste stable ou augmente. En effet, l'application de la formule standard donne un SCR plus élevé avec le crédit. L'impact est porté par le choc de spread :

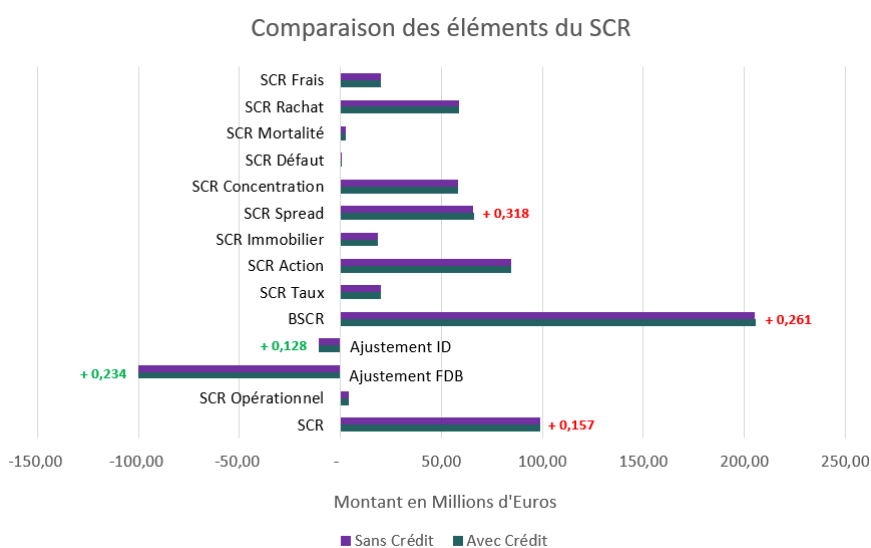


FIGURE 5.35 – Evolution des sous modules du SCR

Avec l'effet de l'ajustement par la FDB, l'écart observé sur les spreads est atténué, au global le SCR n'augmente que de 157K€. Le SCR, est donc légèrement supérieur et les fonds propres sont légèrement inférieurs. Au global le ratio de couverture perd donc 56 points de base et passe de 142,28% à 141,72%.

Choc de spread

Le choc de spread amplifie les effets démontrés dans les analyses précédentes. En effet, comme les VM initiales sont choquées à la baisse, les écarts formés sur les coefficients d'ajustements sont accentués. Il en résulte une intensification de l'effet sur les produits financiers en début de projection sans impacter de manière significative la suite de la projection. En effet, ce choc ne touche que les obligations en stock et non les nouvelles obligations.

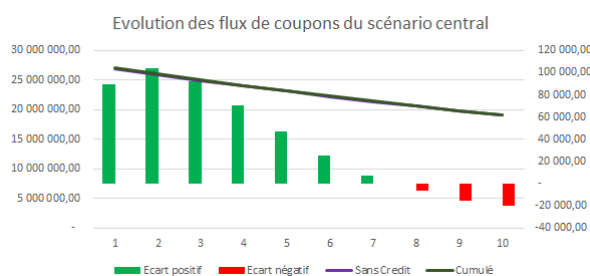


FIGURE 5.36 – Evolution des flux de coupons du scénario central

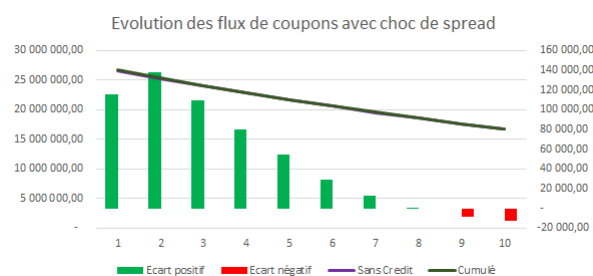


FIGURE 5.37 – Evolution des flux de coupons du scénario de choc de spread

Pour les autres chocs, il est plus logique de n'observer aucun changement. En effet pour les chocs de taux (12K€ de hausse), les spreads de taux ne bougent pas, car par construction, les taux risqués sont choqués uniquement à hauteur du choc sur les taux sans risque. Pour les autres chocs, le coefficient d'ajustement n'est pas impacté, le choc n'est donc pas amplifié avec la modélisation du crédit.

Ajustement par la FDB

La FDB est supérieure avec le modèle crédit, cela est cohérent avec nos analyses. En effet, une FDB plus importante veut dire que le modèle de crédit permet de verser plus de PB en moyenne. De par nos analyses, nous avons observés qu'effectivement la PB versée est nettement supérieure en première année. Cela permet à l'assureur d'avoir une plus forte capacité d'absorption.

L'analyse au 31/12/2022 avec un réinvestissement, sur des obligations de AA à BBB, permet de conclure que l'impact du crédit stochastique sur le bilan de l'assureur est marginal, mais exprime tout de même une meilleure prise en compte des spreads de crédit par rating. Les flux financiers sont déformés plus fortement en début de projection et moins sur la suite de la projection. La présence du plafond du Loss Given Default limite l'impact sur la projection des obligations.

Cette légère hausse est accentuée avec le choc de spread entraînant également une légère augmentation du SCR et ainsi une diminution du ratio de solvabilité. L'impact sur le ratio n'est pas significatif, cependant il est important de voir si cet impact est sensible ou non au contexte économique et à la méthode de réinvestissement.

5.2 Etude de sensibilité

Deux axes de sensibilité ont été effectués, la date d'analyse (2021/2022) et les ratings sur lesquels est réinvesti la poche obligataire. La date d'analyse permet de comprendre les effets de la hausse des taux et du léger écartement des spreads. Le choix de réinvestissement permet d'analyser la sensibilité à la gestion des risques à travers l'optimisation de l'allocation d'actif.

Pour obtenir un écart assez large, des réinvestissements uniquement sur du AA et BBB ont été considérés séparément.

5.2.1 Impact du réinvestissement au 31/12/2022

Plus le réinvestissement est risqué, et plus le ratio baisse. Ce phénomène est intuitif. En effet, l'assureur est de plus en plus exposé au risque de défaut avec des ratings plus faibles. L'effet reste limité, le choc de spread étant sensiblement le même quelle que soit la méthode de réinvestissement, car celui-ci touche seulement les obligations en stock qui ne bougent pas d'une méthode à l'autre. Les ratios sont dégradés principalement par les fonds propres qui baissent avec la méthode de réinvestissement.

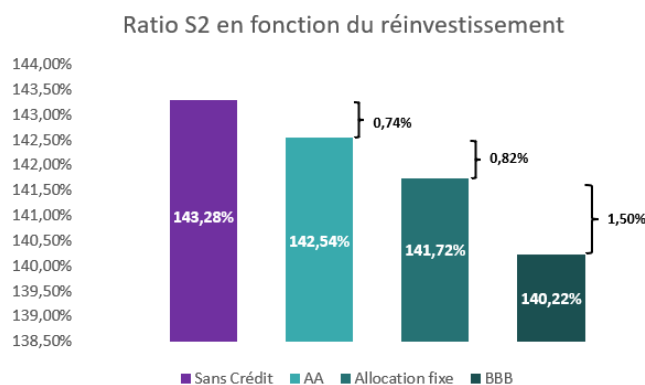


FIGURE 5.38 – Evolution du ratio S2

Une dernière observation est la hausse des écarts de ratio se formant d'une méthode de réinvestissement à une plus risquée. Plus la politique de réinvestissement est risquée et plus l'écart de ratio évolue rapidement.

5.2.2 Impact du contexte économique

Cette seconde analyse de sensibilité s'effectue pour un réinvestissement fixe sur les ratings AA, A et BBB. Cependant, ici, nous comparons l'évolution du ratio entre fin 2021 et fin 2022.

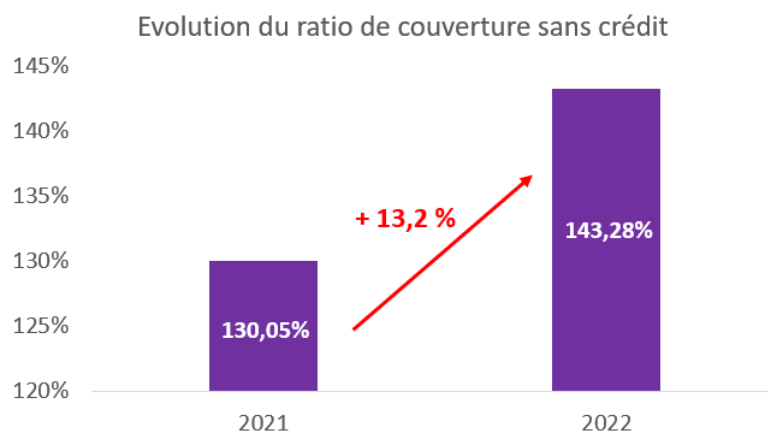


FIGURE 5.39 – Evolution sur SCR

Sans modélisation du crédit, le ratio de couverture augmente de 13,2%. Cela s'explique par un contexte de taux en forte hausse permettant à l'assureur d'avoir des rendements plus importants. Ces rendements lui permettent ainsi de garantir d'un côté plus facilement ses exigences de taux garanties pour ses assurés et de l'autre des versements de marges financières.

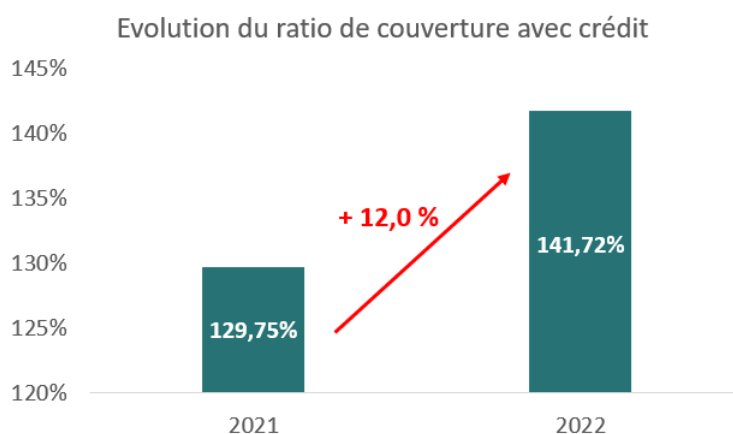


FIGURE 5.40 – Evolution sur SCR

Le contexte de hausse des taux améliore le ratio de couverture de 12% avec l'intégration du crédit. La hausse perd 120bps par rapport à une analyse sans crédit stochastique. Les prémices d'écartement des spreads ont donc un effet négatif, mais il reste modéré par rapport au phénomène de hausse des taux. Pour bien comprendre pourquoi cet effet est modéré, il est intéressant de comparer les niveaux des spreads entre 2021 et 2022.

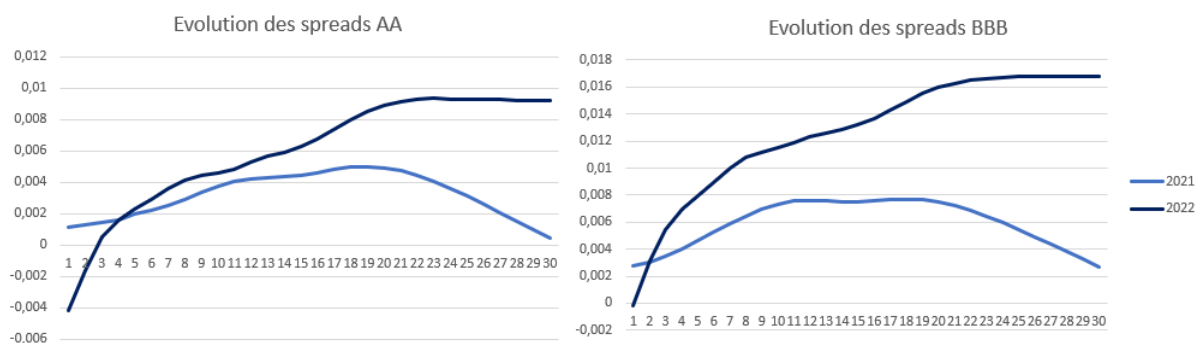


FIGURE 5.41 – Evolution des spreads entre 2021 et 2022

La hausse brutale des taux a provoqué l'apparition de spreads négatifs sur les premières maturités, ce qui n'était pas le cas en 2021. Cet effet est cependant atténué par les contraintes de modèle empêchant l'existence de spreads négatifs. Sur les maturités suivantes, l'écartement est bien plus marqué, mais cette fois-ci l'effet plafond par le Loss Given Default limite les effets.

Il est donc logique que l'effet des spreads soit limité entre 2021 et 2022 sur le scénario de référence, c'est-à-dire avec un réinvestissement entre AA et BBB. L'écartement des spreads du BBB est cependant plus marqué, une politique de réinvestissement BBB semble donc d'autant plus risqué à fin 2022 par rapport à fin 2021.

5.2.3 Impact du contexte économique et du réinvestissement

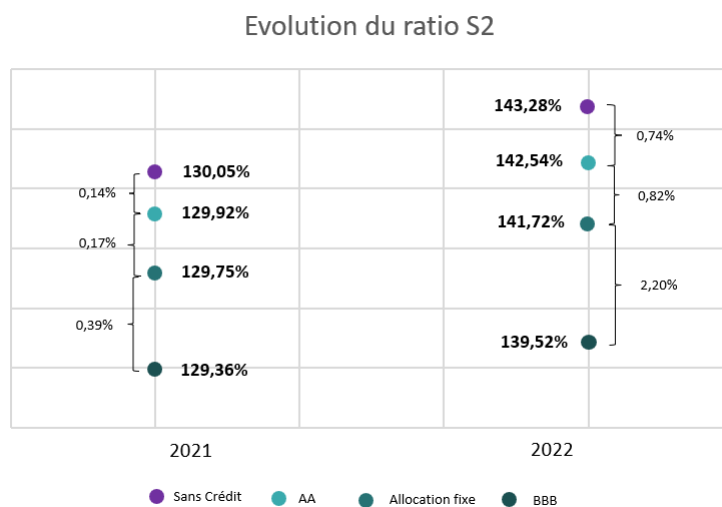


FIGURE 5.42 – Evolution du SCR en fonction du contexte économique et des réinvestissements

Lorsque l'on compare les résultats entre 2021 et 2022, on observe un écartement des ratios entre les différentes stratégies de réinvestissement. En effet un réinvestissement uniquement sur des obligations BBB au regard du contexte économique dégrade plus fortement le ratio en 2022 qu'en 2021.

Les prémices d'écartement des spreads semblent ainsi commencer à se matérialiser sur la modélisation du crédit stochastique du bilan. L'écartement plus important des spreads BBB entre les deux arrêtés se matérialise par un écart plus important de ratio. Cela démontre qu'un choc important sur les écarts de spreads pourraient se montrer fortement impactant sur la solvabilité des assureurs avec la prise en compte de ce modèle.

Les impacts sont aujourd'hui encore marginaux, mais ce dernier graphique permet de comprendre les enjeux futurs de l'intégration de cette nouvelle métrique au sein de la modélisation des compagnies d'assurance. La prise en compte du défaut à travers le choc de spread n'est pas suffisante, car il n'impacte que les obligations en stock et ne permet pas une prise en compte assez fine du défaut au cours de la projection.

CONCLUSION

Les travaux de ce mémoire s'intègrent dans un contexte de hausse des taux après une longue période de taux bas. Durant cette longue période de taux bas, les assureurs ont modifié leur grille d'investissement pour obtenir plus de rendement sur des titres obligataires plus risqués. À travers les années, ce phénomène est devenu une règle chez les compagnies d'assurance. Cependant, avec le contexte de hausse des taux, le phénomène d'écartement des spreads pourrait être de plus en plus visible dans les prochaines années si les taux continuent d'augmenter de cette manière.

L'ACPR a démarré depuis quelques années une campagne de recommandations pour inciter les compagnies à intégrer un modèle de crédit stochastique au sein de leur processus de valorisation pour le calcul de leur solvabilité. Au vu du contexte actuel, les recommandations deviennent de plus en plus des exigences. En effet, le choc de spread de la formule standard ne semble pas assez précis pour capter le risque de défaut.

L'objectif de ce mémoire a été d'identifier les impacts d'un modèle de crédit sur le bilan d'un assureur. Ce mémoire a permis de présenter une méthode permettant d'intégrer le modèle de crédit stochastique au sein du modèle de valorisation utilisant le modèle LMN à surplus. Ce modèle permet de valoriser les obligations en prenant en compte l'effet d'une actualisation avec des taux risqués intégrant les spreads de crédits, et les probabilités de survie des titres au cours de la projection. Ce modèle fait de plus l'hypothèse que si l'obligation fait défaut, seule une partie ne sera pas remboursée, et cela est matérialisé par le Loss Given Default.

Les analyses ont permis de comprendre comment cette modélisation affecte le ratio de couverture de l'assureur. Une analyse déterministe a permis d'identifier une déformation des flux financiers due aux effets cumulés de l'ajustement de la risque neutralisation au pas de temps initial et de celle de la probabilité de survie. Selon les scénarios analysés, cette déformation est plus ou moins marquée. Elle affecte l'assureur en début de projection à travers une revalorisation plus importante, l'assureur n'arrive ensuite pas à prélever plus de marge. Au global le BE est impacté à la hausse, mais sur ce portefeuille les impacts restent aujourd'hui marginaux .

Les analyses de sensibilité ont permis, de plus, d'identifier l'effet des prémices d'écartement des spreads sur la modélisation du crédit stochastique. La méthode de réinvestissement est également un élément important à prendre en compte. Ainsi, dans un contexte

de gestion des risques, l'assureur peut être impacté à l'avenir par cette modélisation lors de l'optimisation de son allocation.

Les résultats obtenus dans le cas de ce portefeuille sont cependant très sensibles aux hypothèses du modèle. Les assureurs l'ayant déjà intégré dans leurs modèles observent également des effets mineurs de l'intégration du crédit, cependant les résultats obtenus ici semblent être encore plus marginaux. Parmi les éléments qui permettraient d'avoir des impacts normalement plus importants, il y a le calibrage du Loss Given Default. En effet, en l'adaptant plus finement aux types d'émetteurs, cela permettrait d'affiner les résultats. Cependant, au vu de la structure du modèle LMN, et étant donné que le Loss Given Default est intégré dans la diffusion des taux, cela démultiplierait les jeux de scénarios en fonction du rating et du LGD. Un calibrage spécifique aux obligations souveraines et aux obligations non notées pourrait être également deux pistes supplémentaires pour rendre le modèle plus précis.

Dans un contexte d'écartement important des spreads, et donc un impact significatif avec cette modélisation, une sensibilité à la réserve de capitalisation serait un axe intéressant d'analyse. Le modèle pourrait très bien être utilisé avec une hypothèse de vente des obligations avant échéance et dans ce cas-là l'impact du crédit pourrait se matérialiser de manière plus importante.

Bibliographie

Mémoires

Bennouna, M. (2017) Calibrage du Libor Market Model dans le cadre d'un Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre [Mémoire EURIA]

Boccaro, J. (2021) Pilotage du ratio de couverture dans un contexte de taux bas [Mémoire ISUP]

Sabourin, E. (2019) Intégration du spread de crédit stochastique dans la modélisation ALM d'un assureur Vie [Mémoire ISUP]

Sabourin, E. (2022) Modélisation du risque de crédit et impacts sur le Bilan Prudentiel [Mémoire ISFA]

Articles

ACPR (2013) Orientations Nationales Complémentaires aux spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité 2

ACPR (2020) Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques

Armel, K. et Planchet, F. (2020) Evaluer la valeur économique des contrats s'assurance vie avec des déflateurs stochastiques

Armel, K. et Planchet, F. (2020) Utilisation de modèles de taux CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatifs ?

Brigo, D. and Mercurio, F. (2001) Interest Rate Models Theory and Practice [Springer]

Buckdahn, R. (2022) Cours de calculs stochastiques

Institut des actuaires (2018) Les Générateurs de scénarios économiques

Longstaff, F. A. , Mithal, S. et Neis, E. (2005) Corporate Yield Spreads : Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market

Sorensen, M. (1995) Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes

Liens URL

<https://www.professionsfinancieres.com/sites/professionsfinancieres.com/files/art%205%20cahiers%2045.pdf>

<https://www.lesechos.fr/finance-marches/marches-financiers/sp-pourrait-baisser-la-notation-de-la-dette-francaise-a-moyen-terme-1885666>

<https://www.aft.gouv.fr/fr/oat-demembrees-strips>

<https://presse.economie.gouv.fr/29042023-cp-notation-fitch-de-la-dette-francaise/>

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138>

LEXIQUE DES ACRONYMES

ACPR : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution
ALM : Asset Liability Management
BCE : Banque Centrale Européenne
BEL : Best Estimate Liability
CRA : Credit Risk Adjustment
EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority
FDB : Future Discretionary Benefits
GSE : Générateur de Scénarios Economique
LGD : Loss Given Default
LMN : Longstaff, Mithal et Neis
MCR : Minimum Capital Requirements
OPCVM : Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
OTF : Obligation à Taux Fixes
OTV : Obligation à Taux Variables
PB : Participation aux Bénéfices
PM : Provision Mathématique
PPE : Provision pour Participations aux Excédents
RC : Réserve de Capitalisation
RN : Risque Neutre
SCR : Solvency Capital Requirements
TVFOG : Time Value of Financial Options and Guarantees
UFR : Ultimate Forward Rate
VA : Volatility Adjustment
RR : Réserve de Réconciliation
VIF : Value In Force
ZC : Zéro Coupon

Annexe A

Démonstration du flux \tilde{F}_T

A.1 Portefeuille initial

Afin de passer à la démonstration, il est important de faire des rappels des différentes notations et hypothèses permettant d'effectuer la preuve :

- Les taux nominaux r et les intensités de défaut λ sont indépendants
- $D^s(0, T) = e^{-\int_0^T r_t^s dt}$
- $P_N(0, T) = E^* [D^s(0, T)] = E^* \left[e^{-\int_0^T r_t^s dt} \right]$
- $S_R^s(0, T) = e^{-\int_0^T \lambda_t^s dt} = e^{-\int_0^T \sum_{r=1}^R \pi_t^s dt}$
- $\mathcal{Q}_R(\tau > T) = E^* [S_R^s(0, T)]$
- $P_R(0, T) = P_N(0, T) * [1 - LGD * (1 - \mathcal{Q}_R(\tau > T))]$

Démonstration :

$$\mathbf{E}^* \left[\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}} * \mathbf{D}(0, \mathbf{T}) \right] = \mathbf{F}_{\mathbf{T}} * \mathbf{P}_{\mathbf{R}}(0, \mathbf{T})$$

$$\begin{aligned} E^* \left[\tilde{F}_T * D(0, T) \right] &= E^* \left[F_T * [1 - LGD * (1 - S_R^s(0, T))] * e^{-\int_0^T r_t^s dt} \right] \\ &= F_T * [1 - LGD * (1 - E^* [S_R^s(0, T)])] * E^* \left[e^{-\int_0^T r_t^s dt} \right] \text{ car indépendance} \\ &= F_T * [1 - LGD * (1 - \mathcal{Q}_R(\tau > T))] * P_N(0, T) \\ &= F_T * P_R(0, T) \end{aligned}$$

A.2 Achat ALM

De la même façon, il est nécessaire de rappeler certaines notations et relations :

- $P_N^s(m, T) = E^* \left[e^{-\int_m^T r_t^s dt} \mid \mathcal{F}_m \right]$
- $S_R^s(m, T) = \frac{S_R(0, T)}{S_R(0, m)} = e^{-\int_m^T \sum_{r=1}^R \pi_t^s dt}$
- $\mathcal{Q}_R(\tau > T \mid \mathcal{F}_m) = E^* [S_R^s(m, T) \mid \mathcal{F}_m]$
- $P_R^s(m, T) = P_N^s(m, T) * [1 - LGD * (1 - \mathcal{Q}_R(\tau > T \mid \mathcal{F}_m))]$

Démonstration :

Un assureur investit au pas de projection m dans un zéro-coupon de rating R avec une maturité T un montant de 1€. Ce montant de 1€ est détenu depuis l'instant 0, il est donc capitalisé au taux sans risque jusqu'à m .

La valeur du titre est donc :

$$1 * e^{\int_0^m r_t^s dt} = F_T * P_R^s(m, T)$$

avec $F_T = \frac{e^{\int_0^m r_t^s dt}}{P_R^s(m, T)}$

Le flux final de cette obligation (i.e. le remboursement) \tilde{F}_T doit vérifier la risque-neutralité, c'est-à-dire la non-création ou perte de richesse :

$$\mathbf{E}^* \left[\tilde{\mathbf{F}}_T * \mathbf{D}(0, T) \right] = \mathbf{1}$$

Il faut ainsi montrer qu'en prenant :

$$\tilde{F}_T^s = F_T * [1 - LGD * (1 - S_R^s(m, T))]$$

on obtient bien le résultat attendu.

$$\begin{aligned} E^* \left[\tilde{F}_T * D(0, T) \right] &= E^* \left[\frac{e^{\int_0^m r_t^s dt}}{P_R^s(m, T)} * [1 - LGD * (1 - S_R^s(m, T))] * e^{-\int_0^T r_t^s dt} \right] \\ &= E^* \left[\frac{[1 - LGD * (1 - S_R^s(m, T))] * e^{-\int_m^T r_t^s dt}}{P_R^s(m, T)} \right] \\ &= E^* \left[E^* \left[\frac{[1 - LGD * (1 - S_R^s(m, T))] * e^{-\int_m^T r_t^s dt}}{P_R^s(m, T)} \mid \mathcal{F}_m \right] \right] \text{ (espérance totale)} \\ &= E^* \left[\frac{1}{P_R^s(m, T)} [1 - LGD * (1 - E^* [S_R^s(m, T) \mid \mathcal{F}_m])] * E^* \left[e^{-\int_m^T r_t^s dt} \mid \mathcal{F}_m \right] \right] \end{aligned}$$

(indépendance)

$$\begin{aligned} &= E^* \left[\frac{1}{P_R^s(m, T)} [1 - LGD * (1 - Q_R(\tau > T | \mathcal{F}_m)) * P_N^s(m, T)] \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$