

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Neil YAICHE

Titre : Modélisation du risque de crédit et impacts sur le Bilan Prudentiel

Confidentialité : NON (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

.....

.....

.....

Membres présents du jury de l'ISFA

.....


.....

.....

Entreprise : *Prepa-Vie Assurance*
Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : *HECART Jean-Marc*

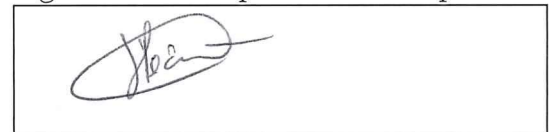
Signature : 

Invité :
Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

Mots-clés : Risque de crédit, LMN, LMN en cascade, Générateur de scénarios économiques, Best Estimate, Solvabilité II

La diminution progressive des taux de rendements des actifs obligataires, pousse les assureurs-vies à investir dans des actifs plus risqués pour réussir à servir le taux garanti aux assurés. Pour pouvoir prendre en compte ce risque supplémentaire, il est recommandé d'avoir une modélisation plus précise de ces titres et notamment des obligations *corporates*.

Pour répondre à ce besoin, cette étude présente l'implémentation du modèle LMN et du LMN en cascade dans le moteur de scénario économique ainsi que l'intégration de ces scénarios dans le module de projection Actif Passif.

Nous présentons dans un premier temps la norme solvabilité II, puis nous exposons les produits de taux, et les produits relatifs au risque de crédit. Nous présentons une modélisation de ces actifs ainsi qu'une méthode pour les projeter dans un environnement risque neutre. Par la suite, nous intégrons ces modifications au moteur de *cash-flows* Actif Passif de manière à ce que le *spread* devienne stochastique. Enfin nous analysons l'impact sur le bilan prudentiel et les principaux indicateurs correspondants.

Abstract

Keywords : Credit risk, LMN, LMN en cascade, economic scenario generator, Best Estimate, Solvency II

The gradual decrease in yields on bond assets pushes life insurers to invest in riskier assets in order to successfully serve the guaranteed rate to policyholders. To be able to take this additional risk into account, it is recommended to have a more precise modeling of these securities and in particular of corporate bonds.

To meet this need, this study presents the implementation of the LMN model and the *LMN en cascade* in the economic scenario engine as well as the integration of these scenarios in the Asset Liability projection module.

We first present the standard, then we present interest rate products, with and without risk of default. We present a modeling of these assets as well as a method to project them in a risk-neutral environment. Then we integrate these modifications to the Active Passive *cash-flows* engine so that the *spread* becomes stochastic. Finally, we analyze the impact on the prudential balance sheet.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Marc Hécart et Kamal Armel pour les échanges que nous avons eu tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également l'ensemble des membres des équipes ALM, Risque et investissements pour leur bienveillance et à Benjamin Tanguy pour sa relecture minutieuse.

Enfin, je souhaite remercier mes parents pour m'avoir soutenu pendant mes études et Alice pour ses attentions.

Table des matières

Note de Synthèse	6
Introduction	10
I Cadre de l'étude	11
I.1 Contexte réglementaire	12
I.1.1 Bilan prudentiel	12
I.1.2 Exigences de capital	13
I.1.3 Sous-module risque de spread	15
I.2 Évaluation <i>Best Estimate</i>	16
I.2.1 Provisions techniques	16
I.2.2 Environnement risque neutre	17
I.2.3 Projection Actif Passif	18
I.2.4 La projection en pratique	18
II Produits de taux et dérivés	21
II.1 Produits de taux classique	22
II.1.1 Le compte de marché	22
II.1.2 Les taux <i>Spot</i>	22
II.1.3 Les taux <i>Forward</i>	23
II.1.4 Les Swaps	24
II.1.5 La courbe des taux	24
II.2 Le risque de crédit	25
II.2.1 Notation de crédit	25
II.2.2 Défaut	26
II.2.3 Changements de notations	27
II.3 Produits relatifs au risque de crédit	28
II.3.1 Les obligations d'entreprise	28
II.3.2 Les dérivés de crédit	29
III Génération de scénarios économiques	31
III.1 Le GSE en place	32
III.1.1 Taux	33
III.1.2 Indice	36
III.2 Introduction du risque de crédit	39

III.2.1	L'instant de défaut	39
III.2.2	Le Zéro coupon risqué	40
III.2.3	Le <i>Spread</i>	42
III.2.4	Les <i>CDS</i>	42
III.3	Le modèle LMN	44
III.3.1	Processus CIR	44
III.3.2	Données de marché	46
III.3.3	Procédure de calibration	50
III.4	Le modèle LMN en cascade	54
III.4.1	Calibration	56
III.4.2	Projection	57
IV	Projection ALM	62
IV.1	Portefeuille de l'assureur	63
IV.1.1	Actif	63
IV.1.2	Passif	64
IV.2	Intégration du risque de crédit	65
IV.2.1	Risque neutralisation	65
IV.2.2	Valorisation	67
IV.2.3	Réinvestissements	69
IV.2.4	Validation	70
IV.3	Impacts	73
IV.3.1	<i>Best Estimate</i>	73
IV.3.2	Analyse du scénario central	74
IV.3.3	SCR	76
Conclusion		78
Bibliographie		79
Table des figures		81
Annexes		83

Note de Synthèse

Le portefeuille d'actifs de l'assureur étudié comporte une part importante d'obligations d'entreprises. Une modélisation déterministe des *spreads* dans les calculs du *Best Estimate* n'est plus suffisante pour tenir compte du risque supporté. Nous proposons une implémentation stochastique du risque de crédit qui permet de projeter six notations de manière cohérente ainsi que l'étude des impacts sur la solvabilité.

Pour ce faire nous projetons des probabilités de défauts par terme ainsi que les taux de hasards à partir d'un modèle LMN. Par la suite nous intégration ces scénarios dans le modèle ALM. Ainsi, nous risque neutralisation les actifs obligataires et les valorisations en cours de la projection. L'introduction de six nouvelles classes d'actif obligera à modifier les règles de gestion future pour tenir compte de la réalité de la politique d'investissement de l'assureur.

Projection des variables économiques

Le générateur de scénarios économiques en place projette le taux sans risque, les actions, l'immobilier et la gestion alternative. Jusqu'à la date de rédaction de ce rapport, pour prendre en compte le surplus de risque des obligations d'entreprise, un terme déterministe était ajouté aux flux de coupon des obligations en stock à l'étape de la risque neutralisation.

Pour prendre en compte la variabilité des *spreads* le modèle LMN est mis en place pour sa capacité à reproduire avec fidélité les conditions de marchés. Ce modèle permet de modéliser l'intensité de défaut de manière analogue au taux court. En particulier, le modèle CIR est utilisé car il permet d'assurer que l'intensité de défaut sera positive. Une première version est testée où chaque projection est indépendante mais conduit à des scénarios où l'ordre des notations n'est parfois plus respecté. Une seconde version, appelé LMN en cascade est étudiée, où la probabilité de défaut instantané de chaque notation est construite comme la somme des précédentes. Ce procédé permet de construire des scénarios prenant en compte implicitement les corrélations.

Pour chacun de ces modèles, une procédure de calibration est proposée. Cette procédure spécifie étape par étape les traitements à suivre pour aboutir aux paramètres du modèle. Le résultat de cette procédure avec le LMN en cascade peut être observé sur la figure 1, en utilisant soit des ZC risqués soit des CDS. La calibration sur les ZC risqués est retenue, notamment du fait de la fiabilité des données sur lequel elle se base.

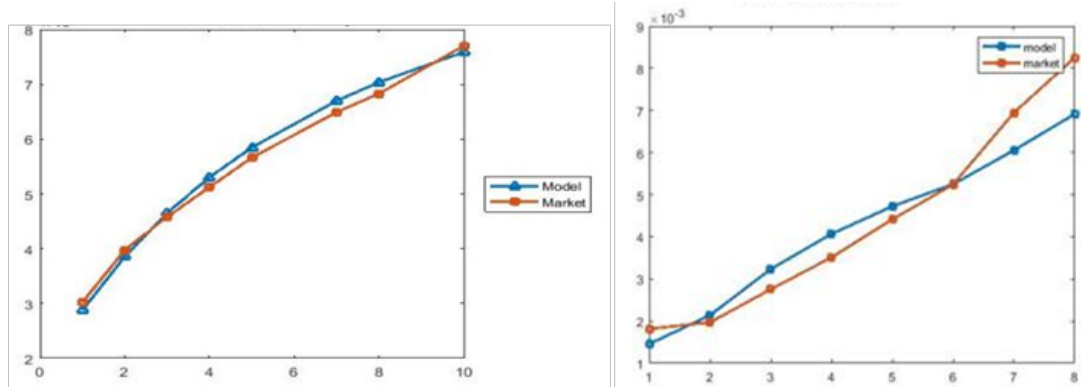


FIGURE 1 – Calibration LMN en cascade sur des ZC risqués et des CDS

Par la suite, pour projeter le défaut instantané la discrétisation d’Euler et une discrétisation exacte obtenue à partir des caractéristiques du processus CIR sont mises en oeuvre. La discrétisation d’Euler offrant des résultats satisfaisant d’un point de vue statistique et opérationnel, elle est retenue. Plusieurs tests sont alors mis en place pour valider les scénarios générés. On vérifie que l’espérance et la variance des scénarios convergent effectivement vers la valeur théorique puis que le critère de martingalité est respecté. Pour la notation BBB on pourra observer sur la figure 2 le cône de projection obtenu.

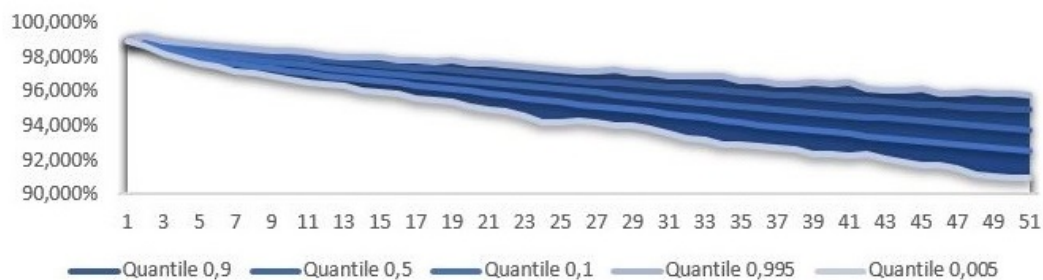


FIGURE 2 – Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an du BBB

Projection ALM et impacts sur la solvabilité

À la date de projection, la valeur de marché observé et la valeur de marché modèle doivent correspondre. Pour ce faire, nous risque neutralisons nos actifs. En effet, les scénarios générés sont produits pour des titres obligataires d’une notation générique et ne sauraient représenter le risque inhérent à chaque obligation. Pour obtenir cette égalité, la valeur des *cash-flows* de coupon sont modifiés pour tenir compte des disparités entre chaque titres.

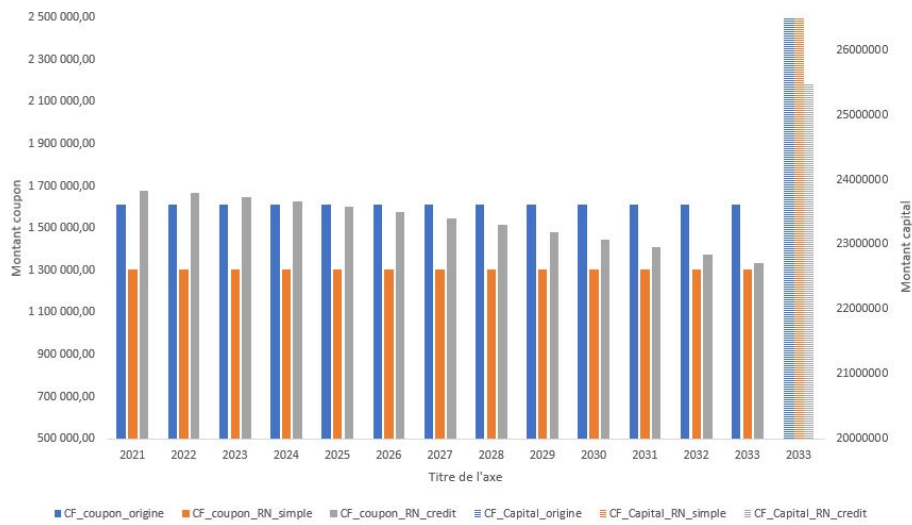


FIGURE 3 – Cash-flows pris en compte lors de la risque neutralisation

Sur la figure 3, il est possible d’observer les flux reçus en fonction de la méthode de risque neutralisation. Ainsi on peut remarquer qu’avec l’introduction du modèle LMN, les flux sont plus importants sur les premiers pas pour être moins important que ceux du titre d’origine sur les derniers. Cette modification dans la manière de recevoir les flux se retranscrit dans les produits financiers. En effet, ils sont plus importants en début de projection pour être brutalement réduit au moment de la réception du nominal.



FIGURE 4 – Produits financiers par année de projection

Les futures décisions de gestion, et les caractéristiques du passif de l’assureur font que cette nouvelle variabilité dans les produits financiers, va augmenter les engagements de l’assureur au travers du taux servi et de la PPE. D’autre part la marge de l’assureur se réduit notamment avec la diminution de la réserve de capitalisation et des plus values

latentes obligataires.

Suite au développement, plusieurs tests sont mis en place pour vérifier la cohérence des bilans projetés. Dans un premier temps, nous vérifions que la valeur de marché modèle et observé sont effectivement égaux. Un test de non-régression consistant à vérifier que l'implémentation n'a pas d'impact lorsque le modèle est utilisé dans des conditions où il ne doit pas en avoir. Enfin, l'écart de convergence est calculé pour vérifier qu'il n'y a pas de fuite ou que de la valeur n'est pas créer.

Conclusion

Ce rapport a permis de présenter l'implémentation de *spreads* stochastique dans le générateur de scénarios économiques, l'implémentation sur les projections ALM ainsi que l'impact sur les indicateurs de solvabilité. Une procédure de calibration a été mis en place pour trouver les paramètres idoines lors de l'utilisation de ZC risqués et de CDS et les scénarios générés validés à partir de tests statistiques conformes aux pratiques préconisés par l'ACPR.

L'intégration dans le modèle ALM a un impact important, traduisant le risque pris par l'assureur en investissant dans des titres *corporates*. Ce risque supplémentaire se traduit par des produits financiers plus volatils qui viennent à modifier le taux servi et la PPE conformément à la politique de souscription. De cette manière les fonds propres potentiels sont diminués d'autant. D'autre part, le besoin en fond propre n'étant que marginalement impacté, la diminution du ratio de solvabilité s'explique essentiellement par la variation de fonds propres.

Introduction

Le contrat d'épargne en euros a des conditions fiscales et comptables avantageuses, qui ont fait son succès auprès des ménages français et les a poussé à une détention de ces produits sur le long terme. Ce produit permet de percevoir un rendement assuré ainsi que la possibilité de racheter son contrat. La perte du capital ne peut survenir qu'en cas de défaut de l'assureur, dans ce cas l'épargne est garantie à hauteur de 70 000€ par le Fonds de Garantie des Assurances de Personnes (FGAP).

Pour répondre aux contraintes de rendement de ce produit, les assureurs-vie investissent une grande portion de la prime dans des actifs avec un rendement assuré, les obligations. Cependant, dans l'économie européenne, la baisse des taux est constante et durable. Les obligations d'état offrent des rendements négatifs jusqu'à des maturités très élevées. En 2019 l'Allemagne a fait sa première émission à 30 ans à taux négatifs. Ces conditions obligent les assureurs à chercher du rendement sur des titres plus risqués. Les obligations d'entreprises offrent un rendement supérieur aux obligations d'état mais la probabilité qu'elles fassent défaut est aussi supérieure. L'augmentation de la représentation de cette classe d'actif dans le portefeuille de l'assureur nécessite l'introduction d'une modélisation dédiée.

Le calcul des provisions techniques *Best Estimate* implique la projection du portefeuille et le recalcul des flux. Jusqu'à présent tous les produits de taux étaient projetés sans tenir compte du risque de défaut. Seul un ajustement en début de projection permet de prendre en compte la valeur de marché du titre. Pour le régulateur cette méthode peut être améliorée et recommande une modélisation dédiée des actifs soumis au risque de défaut. Nous nous proposons dans ce mémoire d'analyser la mise en place sur un portefeuille réel d'une méthode permettant de prendre en compte dans les provisions techniques le risque de crédit.

Le portefeuille de Prépar-Vie est essentiellement constitué de produits d'épargne/retraite en euros. Dans son portefeuille est aussi présent des contrats d'épargne en unités de compte ainsi que des contrats de prévoyance. Nous concentrons notre étude sur les produits d'épargne en euro car ces contrats sont les plus impactés par cette modélisation.

Nous présentons dans un premier temps la directive Solvabilité II qui impose la valorisation du bilan de l'assureur en valeur de marché. Cette méthode de valorisation implique l'introduction de nombreux outils que nous présentons succinctement. Après avoir explicité le risque de crédit, nous présentons le générateur de scénario économique à l'étude et le modèle développé pour prendre en compte le risque de crédit dans les scénarios. Nous détaillerons l'implémentation dans le moteur de projection actif passif de la prise en compte du risque de défaut pour enfin discuter de son impact et de la sensibilité des résultats à la calibration.

Chapitre I

Cadre de l'étude

I.1	Contexte réglementaire	12
I.1.1	Bilan prudentiel	12
I.1.2	Exigences de capital	13
I.1.3	Sous-module risque de spread	15
I.2	Évaluation <i>Best Estimate</i>	16
I.2.1	Provisions techniques	16
I.2.2	Environnement risque neutre	17
I.2.3	Projection Actif Passif	18
I.2.4	La projection en pratique	18

I.1 Contexte réglementaire

La directive Solvabilité est un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicables aux entreprises d'assurances dans l'union européenne [1]. Son objectif est la protection du système financier contre le risque systémique. En 2016 le second volet de cette norme a été mise en application. La norme se concentre autour de trois piliers :

- Pilier 1 : Exigences quantitatives : Provisions en valeur de marché, exigences de fonds propres
- Pilier 2 : Gouvernance et gestion des risques (Own Risk and Solvency Assessment)
- Pilier 3 : Communication avec le public et le régulateur

Les développements de ce mémoire ont pour cadre le premier pilier qui décrit le bilan prudentiel ainsi que la méthode de calcul des différents postes.

I.1.1 Bilan prudentiel

La norme solvabilité 1 possédait de nombreux avantages, comme sa facilité de mise en oeuvre, mais possédait de nombreuses limites, notamment de ne pas correspondre au profil de risque des assureurs. La norme solvabilité II introduit une innovation majeure qui est l'obligation d'évaluer le bilan en valeur de marché.

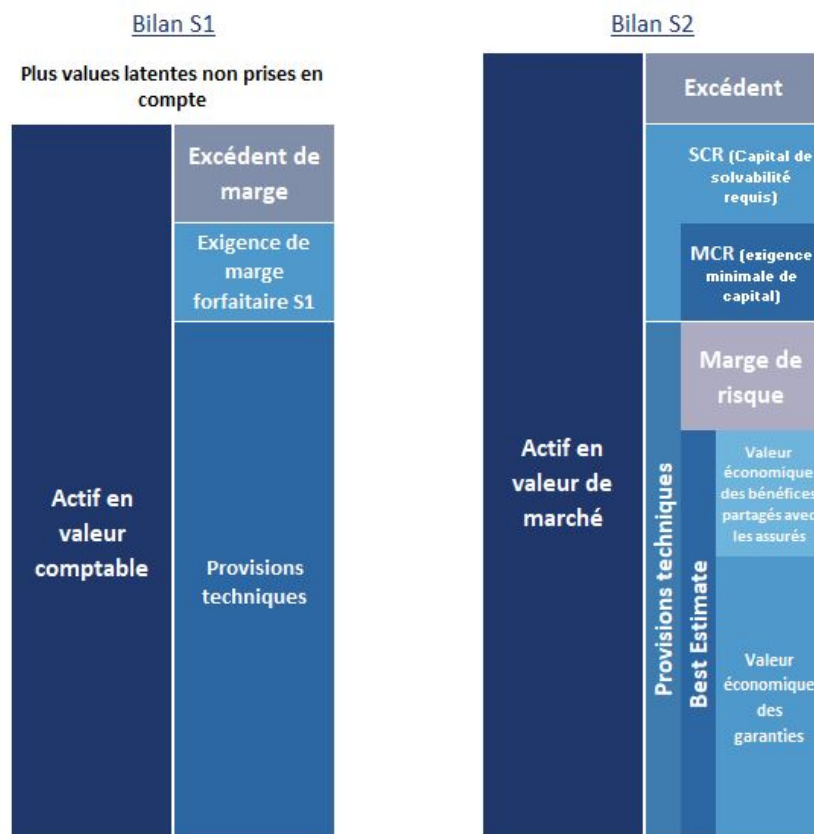


FIGURE I.1 – Comparaison du bilan en norme Solvabilité I et Solvabilité II

Pour les actifs, cette valeur est généralement accessible sur un marché organisé. Cette valorisation est appelée *mark-to-market*. Ceci permet de prendre en compte naturellement les plus ou moins values latentes des actifs en portefeuille. Pour les passifs, il n'existe pas a priori un marché organisé où l'on peut échanger les engagements d'assurance. Une valorisation *mark-to-market* est impossible nous sommes obligés de faire une valorisation *mark-to-model*. Une valorisation *mark-to-model* consiste à donner un prix aux provisions à l'aide d'un modèle et de données de marché. En particulier ceci est vrai pour le prix d'un contrat d'épargne en euros qui n'est pas observable sur un marché avec des caractéristiques satisfaisantes. La valorisation *mark-to-model* des provisions techniques est appelée *Best Estimate of Liabilities*.

L'article R351-2 précise : "*La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie future compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinent, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie future.*"

Le calcul consiste à projeter les flux de prestations puis d'actualiser à la date de calcul. La provision ainsi calculée permet de prendre en compte les options et les garanties offertes à l'assuré qui ne sont pas considérées autrement dans la provision mathématique ou les provisions techniques de solvabilité I. La méthode de calcul du *Best Estimate* sera plus amplement explicitée dans les chapitres suivants.

L'assureur doit ajouter à la provision *Best Estimate (BE)* une marge de risque correspondant au coût d'immobilisation du capital demandé à un éventuel tiers pour reprendre et honorer les engagements.

Les fonds propres sont obtenus par la différence entre l'actif et les provisions en valeur de marché. Ils sont composés du capital social et de dette décomposée en 3 tiers suivant le degré de subordination et de sa disponibilité.

I.1.2 Exigences de capital

Le MCR (Capital Minimum Requis) correspond au montant qui doit être détenu en permanence, sous peine d'une action immédiate de l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR), est calculé à partir d'une formule simple basée sur les provisions Solvabilité I.

Le SCR (Capital de Solvabilité Requis) correspond au montant à détenir pour limiter la probabilité de ruine à un an à 0.5%. Si ce montant n'est pas détenu un plan de redressement devra être établi avec l'ACPR. Dans le cadre de ce mémoire nous évaluons le SCR en formule standard.

Le SCR est la somme du Capital de Solvabilité Requis de Base (BSCR), du module de risque opérationnel, et d'un ajustement pour prestations discrétionnaires et participation aux bénéficiaires. Le *Best Estimate Garanti (BEG)* est défini comme étant le *BE* dans lequel le passif n'est revalorisé qu'à hauteur des intérêts techniques et BSCR le BSCR obtenu à partir du recalcul du BSCR à l'aide du BEG dans chaque sous module de risque. Le BE peut se décomposer en la somme du BEG et des *Future Discretionary Benefits (FDB)* correspondant à la valeur au passif des futures participations aux bénéficiaires à servir. La valeur de l'ajustement est alors :

$$Adj = -\max(\min(BE - BEG, BSCR - BSCR_G), 0)$$

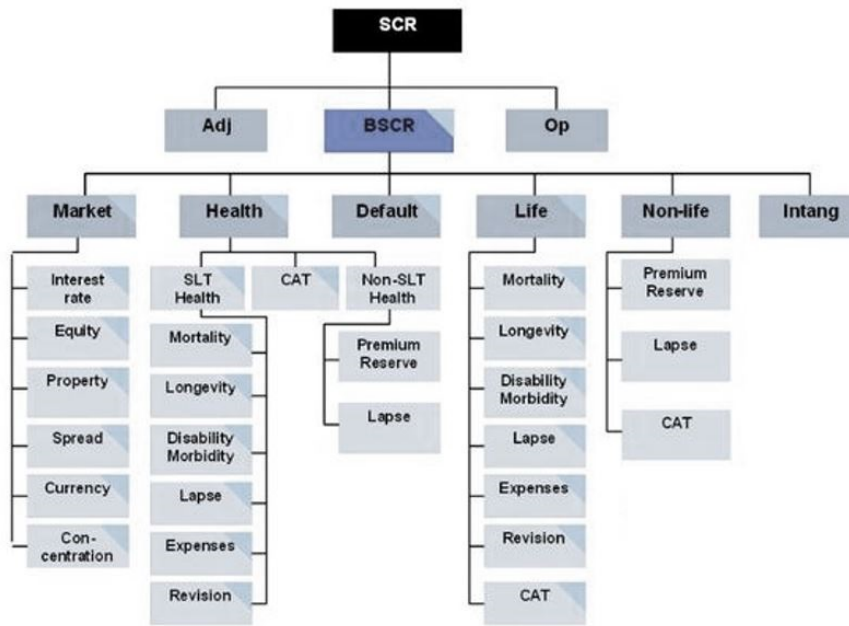


FIGURE I.2 – Sous-modules de risque. Source EIOPA

Le calcul du BSCR se fait en deux étapes : calculs des sous modules de risque puis agrégation. Pour calculer les sous modules de risque, la *Net Asset Value* est définie comme suit : $NAV = Actif - BE$. Ensuite on obtient le SCR du sous-module par la relation suivante :

$$SCR_{sousmodule} = (Actif_{Choc} - BE_{Choc}) - (Actif - BE) = NAV_{Choc} - NAV$$

La relation suivante permet de prendre en compte les effets de diversification entre lignes d'activités :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Correl_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

en utilisant la matrice de corrélations de la figure I.3.

Corrélation	Market	Contrepartie	Vie	Santé	Non vie
Market	100%				
Contrepartie	25%	100%			
Vie	25%	25%	100%		
Santé	25%	25%	25%	100%	
Non vie	25%	50%	0%	25%	100%

FIGURE I.3 – Matrice d'agrégation du BSCR

La méthode d'agrégation des sous modules est analogue à celle d'agrégation des modules. Dans la section suivante, nous détaillons la méthode de calcul du sous module de risque de *spread*.

Une fois la valeur des fonds propres économique et le le SCR à disposition, le ratio de solvabilité peut être défini par la relation suivante :

$$Ratio_{Solvabilite} = \frac{FondsPropres}{SCR}$$

On peut comparer le ratio de solvabilité à la notation de crédit des émissions obligataires des assureurs ne possédant pas de notation. Ainsi l'article 180 de la norme prévoit , une qualité de crédit équivalente aux notations AA, A, BBB et BB pour des ratios de solvabilité égales à 196%, 175%, 122% et 95%.

I.1.3 Sous-module risque de spread

Le calcul de ce sous module consiste à choquer la valeur des actifs sensibles à une variation des *spreads* de crédit. Les actifs correspondants sont les obligations d'entreprise négociées de gré à gré, des véhicules de titrisation (ABS, MBS ..) et des dérivés de crédit comme les CDS qui seront plus amplement présentés par la suite.

Le choc appliqué correspond à la *Value at Risk (VaR)* à 99.5% de la distribution des rendements d'obligation d'entreprise. Ce choc dépend de la qualité de crédit, de la duration et d'autres caractéristiques de la dette comme le collatéral ou la nature du secteur d'investissement est l'infrastructure.

On rappelle la définition de la sensibilité aux taux ou duration modifiée qui est utilisée dans le calcul :

$$DurationModifie = \frac{\sum_{t=0}^N tv^{t+1}CF_t}{\sum_{t=0}^N v^tCF_t}$$

- Avec CF_t le cash flow attendu à la date t
- r le taux actuariel de l'obligation
- $v = \frac{1}{1+r}$

L'EIOPA a choisi de séparer les différentes qualités de crédit ou *Credit quality step (CQS)* en 8 classes allant de AAA, meilleure notation à B et inférieur, la moins bonne notation. La notation retenue est la seconde meilleure notation proposée parmi les trois publiés par les agences de notation.

Pour avoir une idée des chocs appliqués à la valeur de marché nous prenons une obligation émise par une entreprise privé sans collatéral. Pour une obligation de valeur 1€ les valeurs choqués sont exposées dans la figure I.4.

Nous retrouvons, naturellement que le choc est décroissant de la qualité de crédit et croissant de la duration du titre. Nous pouvons remarquer aussi, que le choc appliqué à une obligation BBB est très proche du choc appliqué à une obligation non notée. De plus, nous pouvons noter sur la figure I.4 que les titres notés BB et B demandent de mobiliser un capital sensiblement plus élevés que les autres notations. Enfin, les obligations émises par des États membres et administrations de l'Union Européenne ne sont pas choqués.

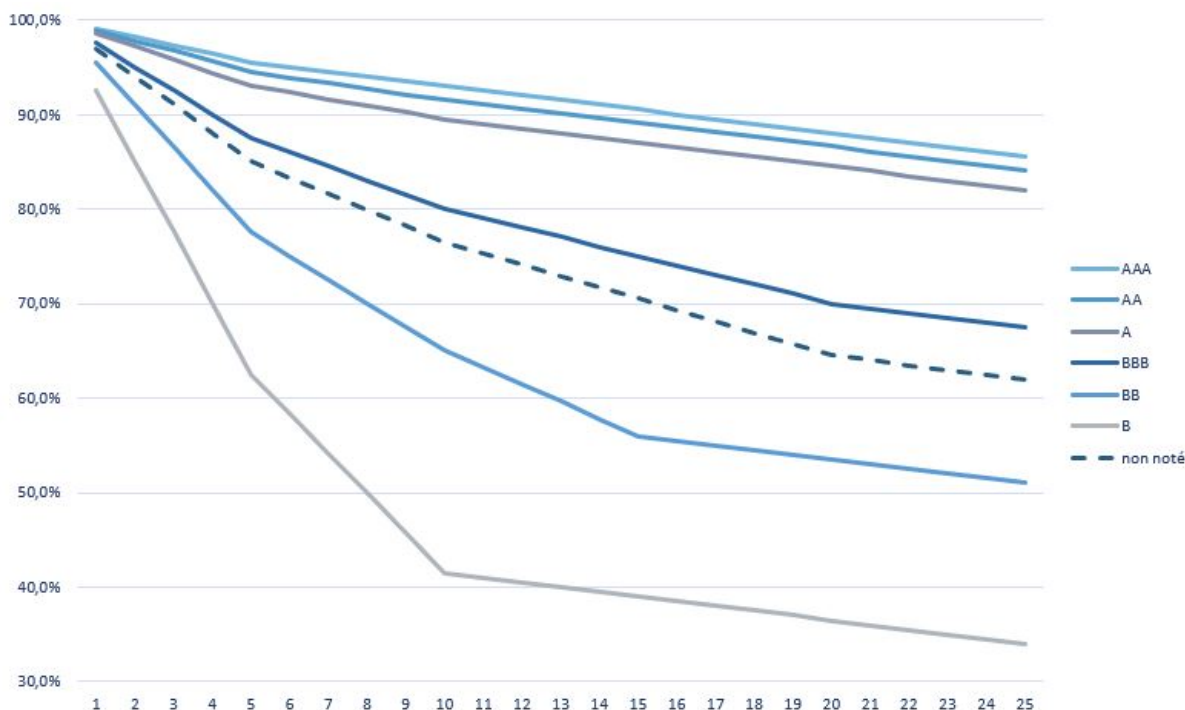


FIGURE I.4 – Choc spread formule standard en fonction de la durée du titre risqué

I.2 Évaluation *Best Estimate*

La meilleure estimation des provisions techniques correspond à la moyenne pondérée par la probabilité des flux de trésorerie future compte tenu de la valeur temps. Nous sommes donc ramenés à projeter le bilan de l'assureur à partir des variables d'intérêts définies dans les sections suivantes puis à actualiser les résultats.

I.2.1 Provisions techniques

Dans le cadre des contrats d'épargne sur les fonds en euro, les provisions techniques des contrats d'épargne constituent l'engagement de l'assureur envers les épargnants. Contre la prime, l'assureur s'engage à valoriser l'épargne de l'assuré au taux contractuel et à partager les sur-rendements avec l'assuré au travers de la participation aux bénéfices. L'épargne constituée ne peut pas être diminuée. On parle d'*"effet cliquet"* sur les engagements de l'assureur.

Pour lisser le taux servi aux assurés, l'assureur a la possibilité de constituer une provision pour participation aux bénéfices qui doit être redistribuée dans les 8 années qui suivent sa constitution. À l'issue de l'exercice, l'assuré a acquis à titre individuel la provision mathématique et à titre collectif la provision pour participation aux bénéfices.

D'autres mécanismes sont à l'oeuvre pour lisser les résultats. La réserve de capitalisation est augmentée lors de la vente d'une obligation en plus value et diminuée lors de la vente d'une obligation en moins value, ou la provision pour dépréciation durable qui est

une provision constituée ligne à ligne lorsque le titre subit une perte de 20% pendant plus de 6 mois. Habituellement on impute de la PDD aux actifs relevant de l'article R343-10 du code des assurances. Il peut arriver qu'elle soit provisionnée sur des obligations comme cela s'est produit en 2011 pour les assureurs détenant de la dette grecque.

En plus de son passif, l'entreprise d'assurance a la possibilité de gérer son allocation d'actifs ainsi que le moment de la réalisation des plus ou moins values latentes pour répondre à ses engagements.

Par conséquent, lors de l'évaluation des provisions en valeur de marché il est nécessaire de prendre en compte les possibilités offertes à l'assureur et à l'assuré de changer son comportement en fonction des scénarios.

D'après [2], la provision *Best Estimate* doit principalement tenir compte de trois garanties :

- Options financières : l'assureur s'engage à payer les intérêts techniques et la participation aux bénéfices réglementaires.
- Options comportementales : l'assureur met à disposition la possibilité de racheter, d'arbitrer entre les produits, de proroger son contrat etc. . .
- Options biométriques : l'assureur garantit ses prestations en fonction de la mortalité.

On peut tenter de répliquer les flux de ces garanties. De cette manière on retrouve des *payoffs* sont similaires à des produits existant par ailleurs sur les marchés financiers [2]. On peut citer les garanties suivantes :

- Les rachats : une *option de vente américaine*
- La revalorisation : une *option vanille européenne*
- La garantie de taux sur les versements libres : une *swaption*.

Le contrat d'épargne en euro propose des garanties complexes qui ne peuvent pas être exprimées à l'aide d'une formule fermée simple, comme il est possible de le faire pour un call ou un put européen dans le cadre du modèle Black-Scholes. Nous sommes contraints à utiliser des méthodes de Monte-Carlo. Pour appliquer ces méthodes il est nécessaire de se placer dans un univers risque neutre.

I.2.2 Environnement risque neutre

Pour l'évaluation des risques financiers il est nécessaire de se placer dans le cadre de l'évaluation des options classique. On suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage et le marché complet. Il existe alors une unique mesure appelée probabilité risque neutre que nous noterons \mathbb{Q} .

Sous cette mesure, la valeur actualisée des stratégies auto-financées est une martingale. Dans ce cadre, les stratégies se distinguent seulement par leurs volatilités.

Par exemple, si nous souhaitons donner un prix à un produit complexe dont la valeur est indexée sur l'euro-stoxx, il suffit de calibrer un modèle action comme Black-Scholes pour retrouver les prix de produits liquides puis à l'aide de ce modèle créer des scénarios où en moyenne les opportunités d'arbitrage sont impossibles et prendre la valeur actualisée moyenne des prix Monte-Carlo pour obtenir le prix du produit.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, (\mathbb{R}, Σ) un espace mesurable et X un actif financier tel que $X : \llbracket 0, T \rrbracket \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On note \mathcal{F}_t la filtration naturelle par rapport à X_t , c'est à dire $\mathcal{F}_T = \sigma\{X_t^{-1}(A) | t \in$

$\llbracket 0, T \rrbracket, t \leq T, A \in \Sigma \}$. Où $\sigma(a)$ signifie la plus petite tribu contenant a . On dit aussi que \mathcal{F}_t est l'ensemble de l'information disponible jusqu'en t ou bien que c'est la tribu engendrée par les prix.

La condition sur un actif financier pour qu'il soit martingale est alors :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t, T)X_T | \mathcal{F}_t] = X_t$$

Où $D(t, T)$ désigne le déflateur qui sera défini dans le chapitre suivante.

I.2.3 Projection Actif Passif

En plus des risques financiers couvrables, l'assureur doit supporter des risques d'assurance non couvrables tels que les rachats ou le risque de table. Ces aléas sont mesurés sous la probabilité historique \mathbb{P} . La valeur du *Best Estimate* est donnée par :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{P}} \left[\sum_{i=0}^T D(0, i) Flux(i) \right]$$

Les flux sont composés des paiements et des frais reçus, retranché des primes et des chargements payés à l'assuré. Dans cette expression i est l'indice qui suit les années de projections.

Pour la majorité des risques non couvrables on peut introduire des flux moyens et simplifier l'expression du BE [2]. En effet notre portefeuille ne comportant pas de garanties complexes portant sur les tables de mortalité, nous limitons la projection aux variables financières.

Par le biais de la participation aux bénéfices le rendement des actifs a un impact important dans l'évolution du passif. Il est difficile de calculer le *Best Estimate* sans une projection stochastique des variables financières. On peut calculer par la méthode Monte-Carlo la provision :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^T D(0, i, n) Flux(i, n)$$

Où, n est l'indice sur le nombre N de scénarios économiques. Pour calculer cette valeur il est nécessaire de projeter le bilan à chaque date de calcul pour être capable de déterminer les flux.

I.2.4 La projection en pratique

Dans le cadre de solvabilité II la projection est faite en *Run-Off*. C'est à dire qu'aucun nouveau contrat n'est souscrit. Il est possible que des primes soient reçus en cours de projection, mais correspondent aux versements des contrats déjà en portefeuille.

La projection du bilan doit tenir compte des *cashes-flows* entrants et sortants futurs. Les flux de passif ne sont pas fixes mais dépendent du comportement des assurés et de la politique de l'assureur. Ceux-ci dépendent de l'environnement économique. Nous avons recours à un modèle de projection actif passif dynamique. Cet outil permet à partir des informations sur le bilan à date ainsi que d'hypothèses de projections, de calculer les

bilans et comptes de résultats projetés en fonction des informations du pas de projection précédent et cela sur l'ensemble des T périodes de la projection.

Le principe de projection est rappelée dans la figure I.5

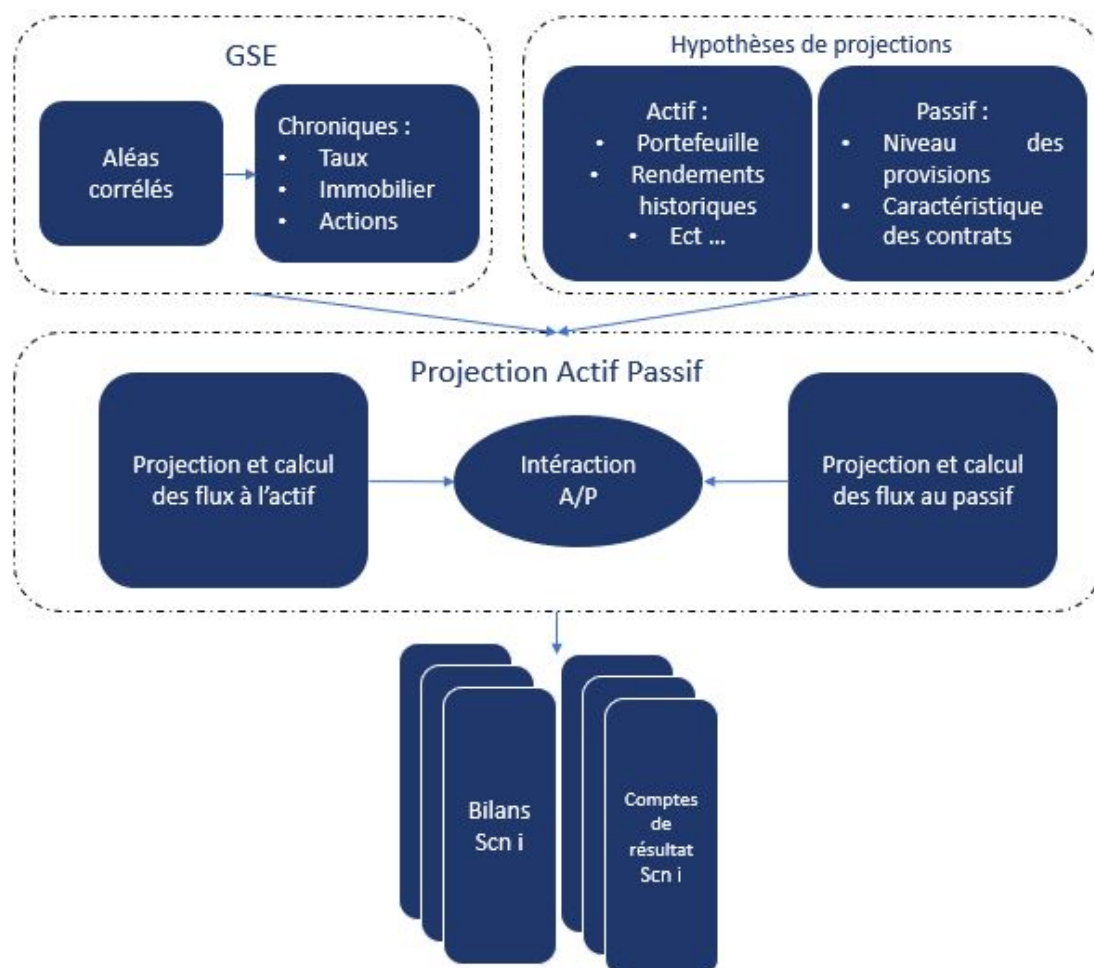


FIGURE I.5 – Principe projection *Best Estimate*

Les interactions actifs-passifs sont gérées par un premier calcul qui fournit un résultat provisoire avant participation qui est ensuite soumis à une politique de taux servis décidée par l'assureur pour être ensuite appliqué aux actifs et passifs.

Un certain nombre d'hypothèses exogène est formulés. On pourra retenir :

- les *models points* de passif de contrats partageant les mêmes caractéristiques telles que la base de prélèvement, le portefeuille de rattachement, le TMG etc..
- les tables de rachats et de mortalités
- les frais, commissions et chargements
- etc..

De la même manière nous avons besoin d'informations sur le portefeuille d'actif, comme la valeur de marché, la valeur comptable, le taux de coupon, et autres.

I.2.5 Écart de convergence

Pour calculer le *BE* nous utilisons des méthodes numériques. Un échantillon de scénarios économiques ne vérifie pas parfaitement le critère de martingalité. Pour origine de ces écarts on peut évoquer le choix d'un pas de temps ou la méthode de discrétisations des processus continus. Lorsque la martingalité est vérifiée, la richesse initiale est parfaitement partagée entre l'assureur et l'assuré. On note *PVFP* la valeur des résultats de l'entreprise, actualisée et *VM* la valeur totale du bilan. On a $VM = BE + PVFP$. Le surplus introduit dans les projections est appelé fuite de modèle et la norme impose qu'elle soit impactée aux provision. En effet si on réécrit la relation précédente, $VM + Fuite = BE + PVFP$, on a alors :

- Si $Fuite > 0$: trop de richesse est projetée, on corrige le *BE* et la *PVFP* comme suit : $BE_{Correction} = BE$ et $PVFP_{Correction} = PVFP - Fuite$
- Si $Fuite < 0$: pas assez de richesse est projetée, alors on corrige le *BE* et la *PVFP* comme suit : $BE_{Correction} = BE - Fuite$ et $PVFP_{Correction} = PVFP$

On peut aussi exprimer la fuite du modèle en pourcentage de la *VM*. On appelle cette quantité écart de convergence. Elle est égale à $Fuite/VM$. Pour limiter l'incertitude sur la valeur du *BE* l'ACPR préconise d'avoir un écart de convergence inférieur à 0.2% ou au moins à 0.5%. Au delà il est recommandé d'investiguer l'origine de cet écart de convergence et de le résoudre.

Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté la réglementation solvabilité II. Cette norme impose aux entreprises d'assurances d'évaluer leur bilan en valeur de marché. Nous avons rappelé ce qu'est une évaluation en valeur de marché ainsi que la mesure risque neutre. Enfin, nous avons observé les éléments essentiels du passif qui doivent être pris en compte pour évaluer l'optionnalité des provisions techniques.

Chapitre II

Produits de taux et dérivés

II.1	Produits de taux classique	22
II.1.1	Le compte de marché	22
II.1.2	Les taux <i>Spot</i>	22
II.1.3	Les taux <i>Forward</i>	23
II.1.4	Les Swaps	24
II.1.5	La courbe des taux	24
II.2	Le risque de crédit	25
II.2.1	Notation de crédit	25
II.2.2	Défaut	26
II.2.3	Changements de notations	27
II.3	Produits relatifs au risque de crédit	28
II.3.1	Les obligations d'entreprise	28
II.3.2	Les dérivés de crédit	29

Ce chapitre présente les instruments de taux classique, les produits relatifs au risque de crédit et leurs dérivés. La présentation de ces instruments a un double objectif, présenter les supports d'investissement de l'assureur et expliciter les instruments utilisés pour calibrer les modèles. La formulation rigoureuse de ces instruments est aussi l'opportunité d'introduire les notations qui sont utilisées tout au long de ce mémoire.

II.1 Produits de taux classique

Cette section présente les instruments qui serviront de base aux définitions de produits plus complexes.

II.1.1 Le compte de marché

On définit le compte de marché comme un placement sans risque dépendant du temps $B(\cdot)$ qui évolue continûment au taux r_t . On appelle taux court ce taux instantané. On suppose dans un premier temps qu'il évolue de manière déterministe. Sa dynamique est régie par l'équation différentielle suivante :

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad B(0) = 1$$

On résout facilement cette relation pour obtenir :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

Le facteur d'actualisation entre les instants t et T avec $t \leq T$ est le montant à l'instant t d'une unité monétaire payable en T . Pour désigner le déflateur, la notation utilisée est :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

Lorsque le taux court est déterministe l'expression du déflateur est semblable à l'expression du prix d'un zéro coupon évalué à la date t et d'échéance T .

Le zéro coupon est un contrat qui garantit à son porteur le paiement d'une unité à la maturité T . On le notera pour $0 \leq t \leq T$, $P(t, T)$ et on a par définition que $P(T, T) = 1$. Lorsque le taux court est stochastique, on a sous la mesure risque neutre, conditionnellement à sa filtration naturelle :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\exp \left[- \int_t^T r_s ds \right] \mid \mathcal{F}_t^r \right)$$

II.1.2 Les taux *Spot*

On désignera par maturité résiduelle le temps qu'il reste avant que le titre n'arrive à maturité. Ce temps vaut $T - t$ et est exprimé en fraction d'année. Le taux d'intérêt composé continûment prévalant à la date t pour maturité T est noté $R(t, T)$. Il correspond

au taux auquel un investissement de $P(t, T)$ se capitalise jusqu'à rapporter une unité à maturité.

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Le taux d'intérêt composé annuellement ou encore de manière actuarielle correspond au taux auquel un investissement se capitalise jusqu'à rapporter une unité à maturité, avec des intérêts comptabilisés annuellement.

$$Y(t, T) = \frac{1}{[P(t, T)]^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

Il est parfois utile d'avoir une relation entre les conventions d'actualisation. À partir du prix il est possible de retrouver cette relation :

$$R(t, T) = \ln(1 + Y(t, T)) \quad (\text{II.1})$$

Le portefeuille d'actif d'un assureur-vie est principalement composé d'obligation à taux fixe. Nous définissons le prix d'une obligation servant un taux de coupon c annuel et remboursant à l'échéance sa valeur faciale F .

$$\sum_{j=t+1}^T cFP(t, j) + FP(t, j)$$

II.1.3 Les taux *Forward*

À l'opposé des taux spots, les contrats forwards désignent des instruments financiers dont la livraison est prévue à une date future $0 \leq t \leq T \leq S$. De cette manière, les contrats forward permettent de verrouiller, au moment du règlement le taux échangé.

On appelle *Forward rate agreement (FRA)* un contrat dont le prix en t pour une livraison en S et une maturité T d'une unité monétaire est :

$$FRA(t, T, S) = P(t, S)(T - t)K - P(t, T) + P(t, S)$$

Où K désigne la quantité qui empêche un arbitrage au moment de la transaction. C'est-à-dire le taux *forward* :

$$K = F(t, T, S) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right)$$

On définit par la suite le taux forward instantané comme la limite :

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

Qui permet une écriture alternative du déflateur à partir des taux forwards instantanés :

$$D(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right)$$

II.1.4 Les Swaps

On appelle swap de taux d'intérêt, le contrat qui lie deux parties, où la première partie paie la quantité fixe $K\tau N$ contre la réception de la quantité variable $Y(T_i, T_j)\tau N$. Où $\tau = T_i - T_j$.

La valeur de ce contrat pour le payeur de la jambe fixe est :

$$-PRS(t, T) = NP(t, T) - N + N \sum_{i=t+1}^T \tau_i K P(t, T_i)$$

Au moment de l'échange de ce contrat il y a absence d'opportunité d'arbitrage. La jambe payeuse et receveuse sont égales on peut déterminer le taux swap K qui annule la relation précédente :

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\sum_{i=t+1}^T \tau_i K P(t, T_i)}$$

Les taux swap étant largement échangés, c'est l'instrument financier utilisé pour définir la courbe des taux sans risque utilisé par l'*EIOPA*.

II.1.5 La courbe des taux

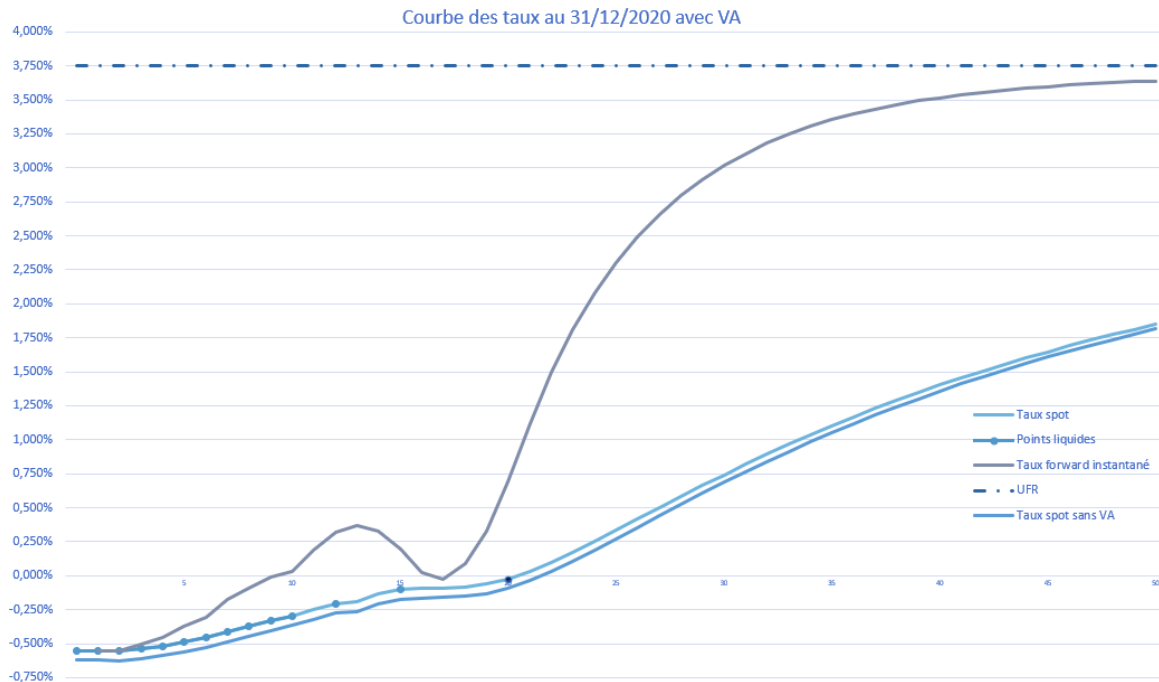
On appelle courbes des taux zéro coupon sans risque la fonction $T \mapsto Y(t, T)$. Le choix de la courbe des taux est important car elle a un grand impact sur la valeur du *Best Estimate* et doit être en adéquation avec les flux qu'elle actualise. La courbe des taux que nous utiliserons est celle imposée par l'*EIOPA* pour la zone européenne.

La courbe des taux sans risque est dérivé des taux swaps pour les maturités jugées suffisamment liquide, profonde et transparente. L'*EIOPA* produit régulièrement une étude définissant ces maturités. Au moment de la rédaction de ce mémoire, 20 ans est la dernière maturité jugée liquide. On appelle cette maturité le *Last Liquide point (LLP)*.

Le passif de l'assureur comprend des engagements longs comme la retraite puis sa réversion, la connaissance des déflateurs jusqu'au *LLP* n'est pas suffisante. Aussi pour dériver les déflateurs suivants, le régulateur propose une méthode d'extrapolation se basant sur la politique d'inflation ainsi que le taux de croissance de la zone euro. À partir de ces informations on déduit un taux forward ultime vers lequel la courbe des taux doit converger. À la date du calcul ce taux vaut 3.75% et la convergence doit se dérouler 40 ans après le dernier point liquide.

Pour tenir compte du risque de crédit inhérent aux taux swaps utilisés, on ajoute une dernière prime de risque appelé *Credit risk adjustment (CRA)*. Cette prime vaut 10 *bps* au moment de la rédaction de ce mémoire.

Enfin pour prendre en compte l'effet contra-cyclique de l'activité d'assurance, notamment du fait de la politique d'investissement de l'assureur *buy and hold*, le régulateur ajoute une prime à la courbe des taux sans risque, aussi appelé *Volatility adjuster (VA)*. Cet ajustement s'obtient à partir du *spread* moyen d'un assureur type dans lequel on retire le risque de défaut de la contrepartie.

FIGURE II.1 – Courbe des taux sans risque de l'*EIOPA*

II.2 Le risque de crédit

Le risque de crédit peut-être défini comme étant la perte liée au non-respect des obligations contractuelles qui lie les parties. Après avoir défini la notation de crédit nous exposons deux événements qui peuvent impacter les titres exposés au risque de crédit.

II.2.1 Notation de crédit

Dans les marchés obligataires on peut distinguer trois acteurs principaux. Les entreprises qui cherchent à lever des fonds pour financer de nouveaux projets, les investisseurs qui cherchent à faire fructifier leurs liquidités et les agences de notations. À l'origine, dans les années 1970, les agences de notations étaient mandatés par les investisseurs pour les aider dans leurs décisions d'investisseur et choisir les émetteurs les plus à même de rembourser leurs dettes. On peut retrouver dans la figure II.2 les notations décernés par chacune des agences de notation ainsi qu'un commentaire sur la qualité de crédit correspondant.

CQS EIOPA	Moody's	S&P	Fitch	Commentaire	Catégorie
0	Aaa	AAA	AAA	Première qualité	Investment Grade
1	Aa1	AA+	AA+	Haute qualité	
1	Aa2	AA	AA		
1	Aa3	AA-	AA-		
2	A1	A+	A+	Qualité moyenne supérieure	
2	A2	A	A		
2	A3	A-	A-		
3	Baa1	BBB+	BBB+	Qualité moyenne à inférieure	
3	Baa2	BBB	BBB		
3	Baa3	BBB-	BBB-		
4	Ba1	BB+	BB+	Spéculatif	High Yield
4	Ba2	BB	BB		
4	Ba3	BB-	BB-		
5	B1	B+	B+	Très spéculatif	
5	B2	B	B		
5	B3	B-	B-		
6	Caaa	CCC	CCC	Risque élevé	
6				Extrêmement spéculatif	
6	Ca	CC	CC	Défaut imminent	
6				C	
6	C	SD	RD	En défaut	
6					

FIGURE II.2 – Notations long terme par agence de notation. Source : Wikipedia

Il peut arriver qu'une obligation ne soit pas notée. Cela se produit lorsque aucune notation n'a été demandée ou alors qu'il n'y avait pas assez d'information pour assigner une notation. On parle de défaut sélectif ou *SD* lorsque l'agence de notation estime qu'il y a défaut sur une émission spécifique mais estime qu'elle sera capable d'honorer ses engagements sur les autres émissions.

II.2.2 Défaut

Le risque de défaut correspond à l'aléa encouru par l'investisseur sur les *cash flows* qu'il reçoit. Lorsque l'entreprise n'est plus en capacité de rembourser la dette et ses intérêts, le titre est en défaut et l'investisseur ne reçoit qu'une fraction de sa mise de départ. On appelle cette fraction perte en cas de défaut ou *Loss Given Default (LGD)*.

À titre d'exemple dans la figure II.3 on retrouve les probabilités de survies de titres obligataires par notation et maturités. On remarquera que la tendance est semblable aux

chocs de spread formulés par l'EIOPA. Notamment les titres BB ont des probabilités de défaut sensiblement plus élevées que le BBB.

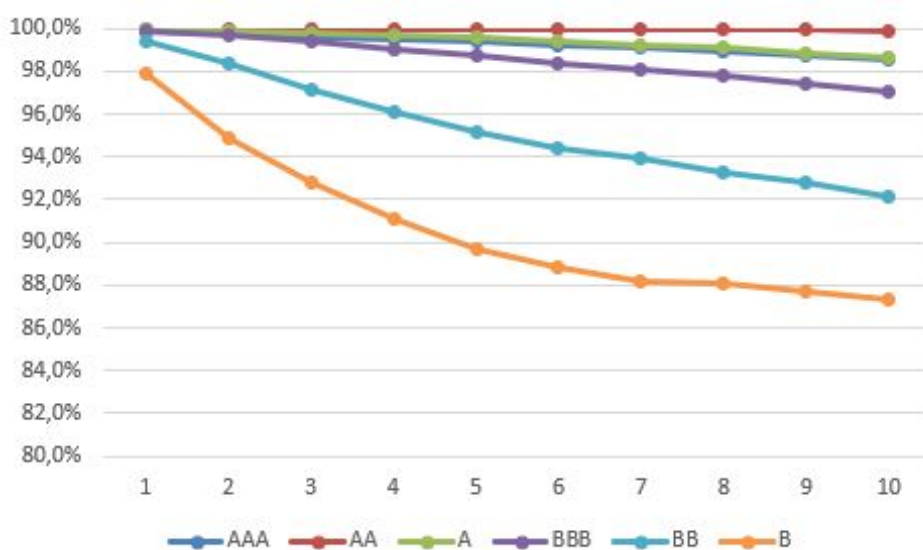


FIGURE II.3 – Probabilités de survie historique (données 1990-2020) par maturité. Source Fitch Ratings

II.2.3 Changements de notations

La notation des titres et des émetteurs est révisée régulièrement pour correspondre à la réalité du titre. Le risque de changement de notation correspond à l'incertitude sur l'évolution de la qualité de crédit du titre lié à ces révisions. Notamment la diminution de la notation correspond à une hausse de la probabilité de défaut. Cela impacte négativement les exigences de fonds propre d'un assureur pour un rendement qui reste celui négocié à l'achat du titre.

(%)	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC to C	D	WD
AAA	89,90	3,84	0,20	-	-	-	-	-	6,06
AA	0,09	87,12	9,09	0,52	-	-	-	0,09	3,09
A	-	1,37	88,44	6,01	0,22	-	0,01	0,07	3,87
BBB	-	0,11	3,52	85,75	4,36	0,28	0,07	0,05	5,86
BB	-	-	0,19	6,33	78,18	6,82	0,60	0,45	7,45
B	-	-	0,11	0,22	5,94	79,42	3,19	1,69	9,43
CCC to C	-	-	-	-	1,37	22,60	45,21	15,75	15,07

FIGURE II.4 – Matrice de transition de rating historique (données 1990-2020) Source Fitch Ratings. Note : *WD* = *withdrawn*

Pour une obligation tirée au hasard entre AAA à B, on obtient à l'aide de la relation des probabilités totales les résultats suivants à horizon un an :

- 90,2% de chance de rester dans le même rating
- 0,5% de chance d'améliorer son rating
- 5,8% de chance de dégrader son rating.
- 3,4% de chance d'être en défaut

II.3 Produits relatifs au risque de crédit

II.3.1 Les obligations d'entreprise

Les obligations d'entreprise ou parfois obligations *Corporate* est une classe d'actif importante des assureur vie. l'EIOPA dans son calcul du *VA* considère qu'en moyenne il représente 40% de son allocation d'actif contre 31% pour les obligations d'états.

En figure II.5 nous exposons l'évolution des *spreads* par notation tel que calculé par les indices Iboxx

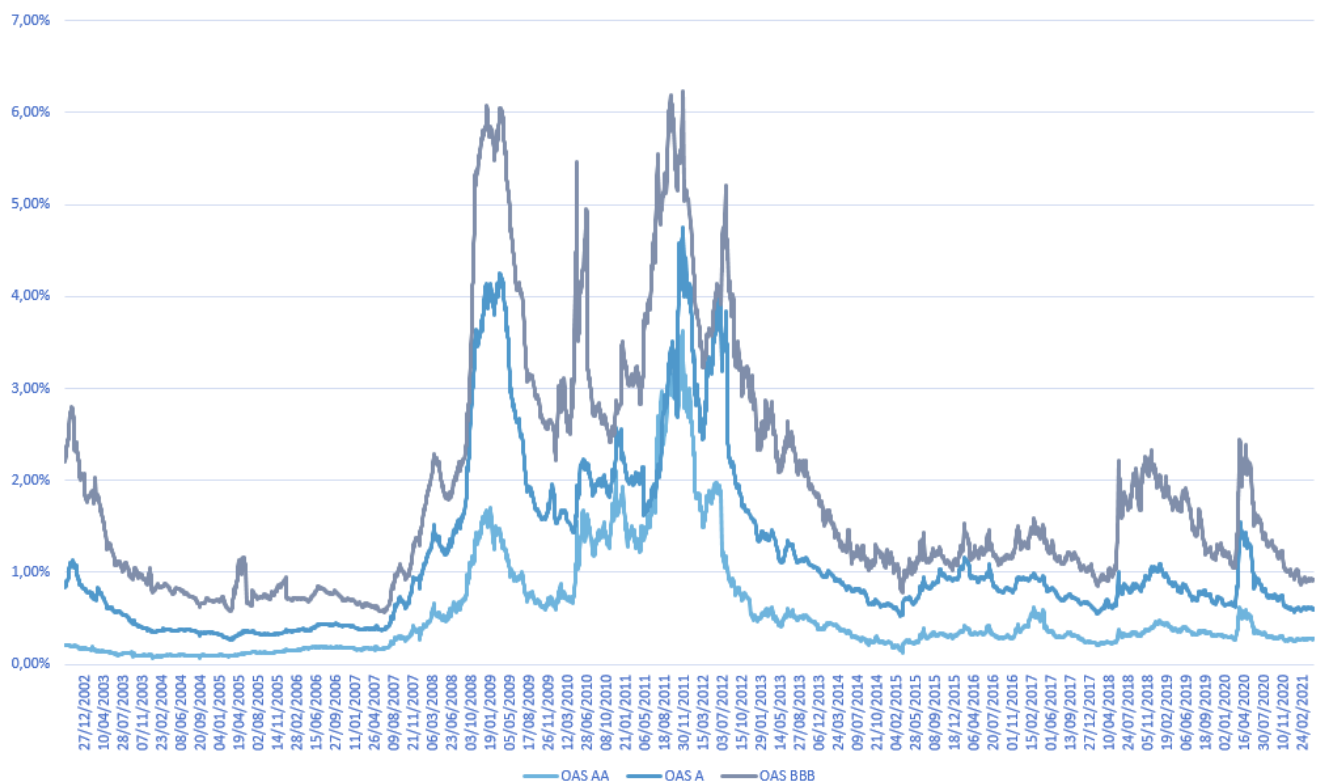


FIGURE II.5 – Historique des *spreads* OIS pour l'Iboxx AA à BBB. Source Bloomberg

En l'échange d'un risque accru, l'investisseur demande un rendement supplémentaire appelé *spread*. Toutes les obligations d'entreprises ne se valant pas plusieurs critères entrent en compte lors de l'évaluation du *spread*. Entre autres on peut noter :

- la notation de crédit, un indicateur synthétique permettant d'apprécier la capacité de l'émetteur à honorer sa dette. Nous avons déjà discuté de la notation dans la partie dédiée à la réglementation.
- la séniorité, l'ordre par lequel les créanciers sont remboursés dans le cas d'un événement de crédit. Dans l'ordre du plus prioritaire au moins prioritaire : Senior sécurisée, Senior non sécurisée, Senior subordonnée, Subordonnée, Junior subordonnée. A chaque grade de subordination l'investisseur est en droit de demander un *spread* supplémentaire.

- le taux de recouvrement espéré, c'est-à-dire le montant de nominal récupéré en cas de défaut. Ce taux de recouvrement dépend de plusieurs facteurs comme le secteur d'activité de l'entreprise.
- la liquidité du titre, c'est à dire la capacité à revendre le titre dans des conditions de marché normale.

Trois événements importants ont eu lieu sur les marchés de crédit. D'abord, en 2007 la crise des sub-primes survenue suite à une évaluation erronée des dérivés de crédit a provoqué un choc brutal sur leurs valeurs ainsi qu'à une méfiance généralisée des acteurs du marché. Ce choc a eu pour résultat la faillite de la banque Lehman brothers.

Le second choc correspond aux répercussions sur l'économie européenne de la crise des sub-prime et notamment sur l'économie grecque. Pour répondre à ce choc la banque centrale européenne a entamé une politique de *quantitative easing*, et rachète des obligations sur les marchés ce qui a eu pour conséquence de diminuer le niveau des spreads.

Le dernier choc moins visible sur le graphique I.8 est celui correspondant à la crise du Corona-virus où les marchés ont anticipé une hausse des événements de défaut.

II.3.2 Les dérivés de crédit

Les *CDS*

Pour se prémunir du risque de défaut d'une contrepartie l'ingénierie financière a développé un contrat qui permet d'avoir une exposition inverse à la détention d'une obligation *Corporate*, le *credit default swap*. Son fonctionnement est semblable à un swap de taux classique. Contre le paiement d'une prime fixe du payeur, le receveur rembourse la perte en cas de défaut du sous-jacent. Les *CDS* sont des produits qui permettent l'alléger les exigences de fonds propres.

À ce titre, ce dérivé était largement échangé avant la crise de 2007, le notionnel en cours était de l'ordre de 45 milliards de dollars soit près de 2 fois la valorisation total des marchés boursiers américains. Aujourd'hui les *CDS* sont moins échangés mais reste un outil utile à notre étude.

Pour éviter les dérives, le marché du crédit est surveillé, par exemple par l'*ISDA*. L'*ISDA* est une organisation professionnel qui contribue à rendre les marchés plus transparents. Depuis la crise des *sub-primes* cette organisation tente de favoriser l'échange des *CDS* par le biais de chambres de compensations de sorte a avoir plus de données sur ce marché. Ainsi on peut observer sur la figure II.6 que depuis 2013 les dérivés de crédit sont de plus en plus échangés. Notamment lorsque le marché anticipe une hausse des défauts des entreprises tel que ça s'est produit au premier trimestre 2020. On notera que les *CDS single-name* ou couvrant le défaut d'une unique entreprise sont largement moins échangés que les *CDS multi-name* couvrant le défaut de plusieurs entreprises.

Les *CDO*

Les *Collateralized Debt Obligation(CDO)* sont des dérivés de crédit, qui par le biais de la titrisation, permettent la vente d'un panier de dette de natures diverses. Sa commercialisation est faite par tranche où les investisseurs suivant leur appétit au risque peuvent choisir des tranches plus ou moins sénior. Les défauts des titres de créance impacteront en

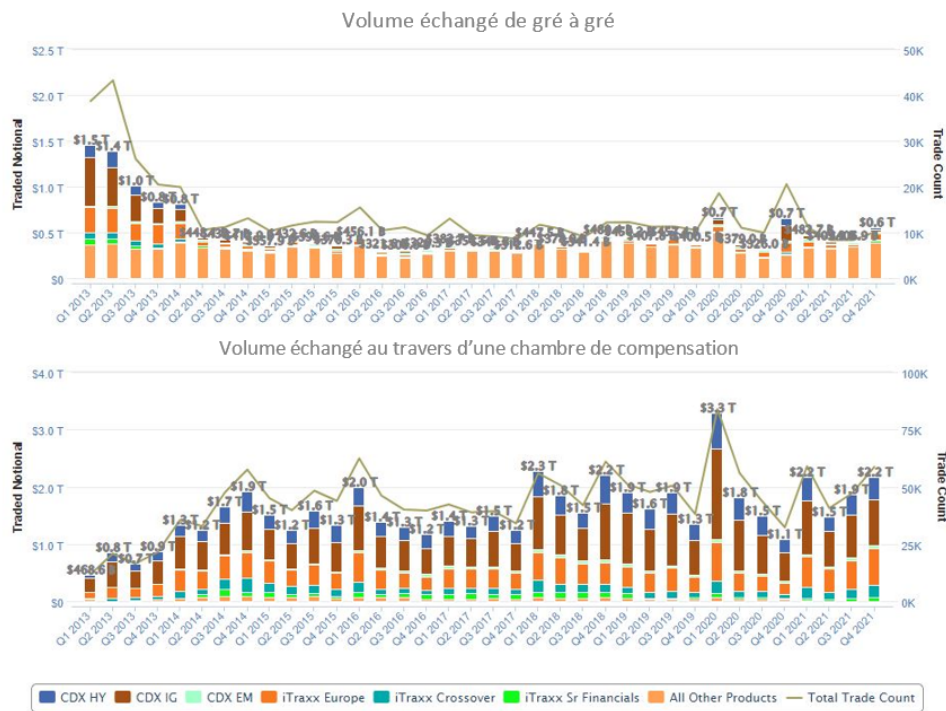


FIGURE II.6 – Volume échangé trimestriel des dérivés de crédit. Source : ISDA

premier les tranches les plus risquées, en contrepartie ces investisseurs peuvent prétendre à des rendements plus attractifs.

Bilan du chapitre

Ce chapitre fait un rappel des principaux produits de taux. Il y est développé une définition du risque de crédit, et des principaux produits échangés autour de ce risque. Cette présentation permet d'introduire la modélisation consacré dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Génération de scénarios économiques

III.1 Le GSE en place	32
III.1.1 Taux	33
III.1.2 Indice	36
III.2 Introduction du risque de crédit	39
III.2.1 L’instant de défaut	39
III.2.2 Le Zéro coupon risqué	40
III.2.3 Le <i>Spread</i>	42
III.2.4 Les <i>CDS</i>	42
III.3 Le modèle LMN	44
III.3.1 Processus CIR	44
III.3.2 Données de marché	46
III.3.3 Procédure de calibration	50
III.4 Le modèle LMN en cascade	54
III.4.1 Calibration	56
III.4.2 Projection	57

Pour calculer le *Best Estimate* il est nécessaire d'avoir un générateur de scénario économique risque neutre c'est-à-dire dans lequel le prix actualisé des actifs est martingale. Il doit refléter le profil de risque de l'assureur ainsi que les conditions de marchés. Nous présentons dans un premier temps le générateur de scénarios économiques déjà en place puis, nous introduisons le risque de crédit et enfin exposons sa modélisation.

III.1 Le GSE en place

Les générateurs de scénarios économiques peuvent être répartis en deux catégories en fonction de leur mode de construction. Les modèles composites qui proposent une projection par classe d'actif qui sont ensuite regroupés à l'aide de l'introduction de corrélations/copules et les modèles intégrés où les classes d'actifs sont projetées de manière structurée autour de variables explicatives. Un exemple historique de ces derniers est le modèle de Wilkie dont les variables économiques sont notamment produits par la simulation de l'inflation. Les modèles intégrés sont particulièrement efficaces lorsqu'une variable projetée a un impact sur l'ensemble des variables à expliquer.

Le modèle étudié est construit de manière intégrée et génère des scénarios pour les taux qui sont ensuite utilisés pour projeter les actions, l'immobilier et la gestion alternative. Le modèle prend en *input* des données de marché *spot* et historique qui vont lui permettre de calibrer les modèles détaillés dans les sections suivantes. En sortie nous obtenons une table de scénarios qui composera l'*input* du modèle ALM pour le calcul des provisions. Mais avant de pouvoir procéder aux calculs réglementaires une série de tests est effectués pour valider les scénarios.

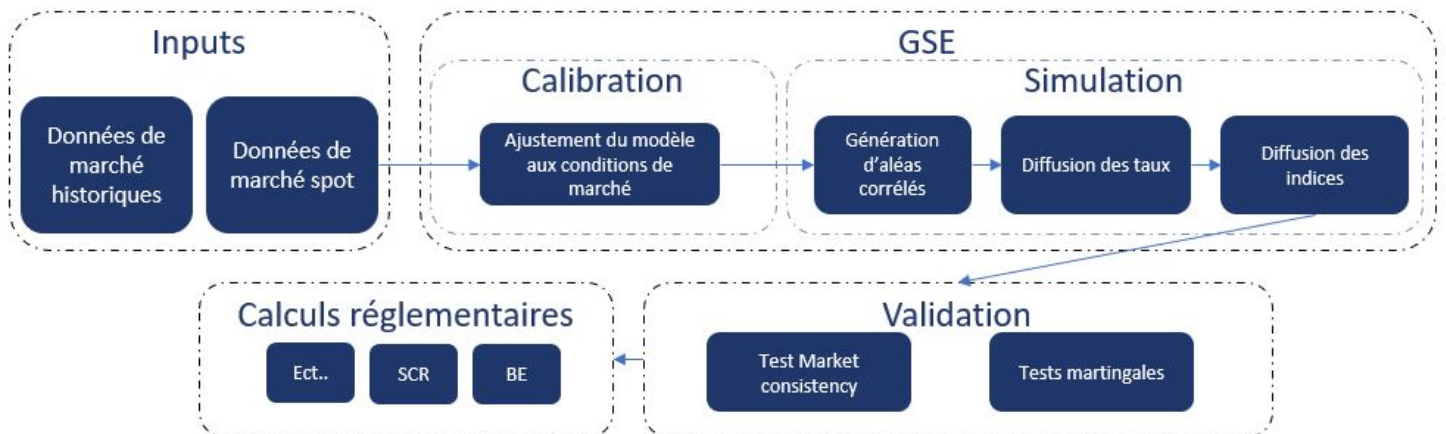


FIGURE III.1 – Schéma de principe du fonctionnement du GSE

III.1.1 Taux

On rappelle que les scénarios générés par le module de taux répondent à un double besoin qui est de fournir les déflateurs pour les flux de passif et les taux pour valoriser les actifs obligataires qui représentent plus de 70% du portefeuille.

Nous exposons succinctement le modèle de taux utilisé ainsi que les principaux tests effectués pour vérifier la qualité des scénarios générés. Le modèle retenu est le G2++, c'est-à-dire qu'il a deux facteurs gaussiens et qu'il y est opéré un ajustement déterministe pour correspondre à la courbe de marché initiale. Ce modèle a de nombreux avantages comme la capacité native à pouvoir simuler des taux négatifs, la présence de formules fermées pour les produits vanilles et la capacité à reproduire parfaitement la courbe des taux sans risque réglementaire. Les seuls inconvénients étant la difficulté à donner une interprétation aux paramètres calibrés et la difficulté à reproduire la surface de volatilité.

Spécification du modèle

Le modèle s'énonce de la manière suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t); r(0) = r_0$$

Avec x et y des processus d'Ornstein-Uhlenbeck tels que :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) & x(0) = 0 \\ dy(t) = -bx(t)dt + \eta dW_2(t) & y(0) = 0 \end{cases} .$$

Les mouvements browniens sont liés par la relation suivante :

$$\forall t, dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$

$$\forall t \neq s, dW_1(t)dW_2(s) = 0$$

Le prix du zéro coupon s'écrit de la manière suivante [3] :

$$P_{ZC}(t, T) = A(t, T)e^{-B(a,t,T)x(t) - B(b,t,T)y(t)}$$

Les fonctions $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont détaillés en annexe.

Calibration et Market-Consistency

Dans ce modèle, le prix du zéro coupon est ajusté pour correspondre à la courbe des taux initiale de l'EIOPA et calibré sur des *swaption* à la monnaie. Un panier de 50 swaptions est sélectionné pour leur représentativité du marché ainsi que leur liquidité. Au moment de la rédaction de ce mémoire, la cotation en volatilité de bachelier du panier est donné dans le tableau figure III.2.

		Ténon									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maturité	1	16,83%	19,03%	22,04%	24,86%	27,41%	29,86%	32,07%	34,05%	35,83%	37,39%
	2	21,70%	24,55%	27,38%	29,96%	32,24%	34,49%	36,52%	38,35%	39,95%	41,36%
	3	27,67%	30,43%	32,78%	34,83%	36,51%	38,37%	40,08%	41,64%	43,02%	44,22%
	4	32,83%	35,15%	36,97%	38,62%	40,07%	41,17%	42,57%	43,84%	44,95%	46,38%
	5	37,66%	39,07%	40,32%	41,55%	42,80%	43,55%	44,70%	45,77%	46,71%	48,00%

FIGURE III.2 – Swaptions ATM par maturité et ténon

Le modèle nécessite la calibration de 5 paramètres : a , b , σ , η et ρ obtenu par le programme de minimisation suivant :

$$\min_{a,b,\sigma,\eta,\rho} \left[\sum_i (P_{Swaption_i}^{Marche} - P_{Swaption_i}^{Modele}) \right]^2$$

Pour éviter que la volatilité du taux fixe n'explose ainsi que pour stabiliser la calibration, les paramètres sont contraints. Les contraintes ainsi que le résultat de la calibration sont disponibles dans le tableau en figure III.3 :

	a	b	sigma	eta	rho
Point de départ	5,00	25,00	0,05	0,03	0,00
Borne Inf	0,10	0,10	0,00	0,00	-1,00
Borne Sup	10,00	50,00	0,07	0,05	1,00
Resultat Calibrage	0,10	0,19	0,03	0,03	-0,99

FIGURE III.3 – Paramètres obtenus à l'issue de la calibration

Pour valider la calibration on vérifie que le rapport suivant est proche de 1 :

$$\frac{|P_{Swaption_i}^{G^{2++}} - P_{swaption_i}^{Marche}|}{P_{swaption_i}^{Marche}}$$

Les écarts sont exposés dans le tableau en figure III.5. La moyenne des écarts relatifs pour l'ensemble des ténors et maturités est de 4,51%. Le document d'orientation sur les GSE [4] conseille de garder cet indicateur sous un seuil de l'ordre de 10 à 20%. Nous pouvons considérer que les scénarios générés sont Market Consistent, c'est à dire que les scénarios générés sont en adéquation avec le marché.

		Ténoir									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maturité	1	52,25%	30,10%	10,26%	0,02%	1,38%	0,13%	1,46%	2,52%	2,90%	2,72%
	2	28,61%	8,37%	2,14%	3,80%	1,96%	0,35%	0,75%	1,17%	1,02%	0,38%
	3	8,55%	3,48%	6,47%	4,47%	1,54%	0,09%	0,69%	0,70%	0,21%	0,49%
	4	0,54%	6,06%	5,56%	3,40%	1,16%	0,98%	1,36%	1,16%	0,70%	1,43%
	5	5,19%	6,19%	4,40%	2,24%	0,68%	1,15%	1,25%	0,94%	0,04%	2,17%

FIGURE III.4 – Écarts relatif prix modèle G2++ et prix de marché des swaptions

Test de martingalité

Il reste à vérifier le caractère risque neutre des scénarios générés. Pour ce faire, le prix des zéros coupons doivent vérifier la relation suivante $\forall 0 \leq u \leq T$:

$$P(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E} \left[P(u, T) e^{-\int_0^u r_s ds} \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

Le membre de droite est calculé par la méthode Monte-Carlo. Le résultat sera noté \bar{X} . Pour valider la martingalité, il est souhaitable de tester que les écarts entre les résultats obtenus et espérés sont suffisamment petits. Pour cela le test suivant est réalisé :

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - \mu \geq \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Avec :

- μ, σ la moyenne et la volatilité théorique de X
- n le nombre de scénarios
- α le quantile d'ordre 0.95 de la loi normale

Le test est vérifié pour l'ensemble des 51*16 couples de dates de projection et maturités, en particulier pour le prix du ZC 10 ans :

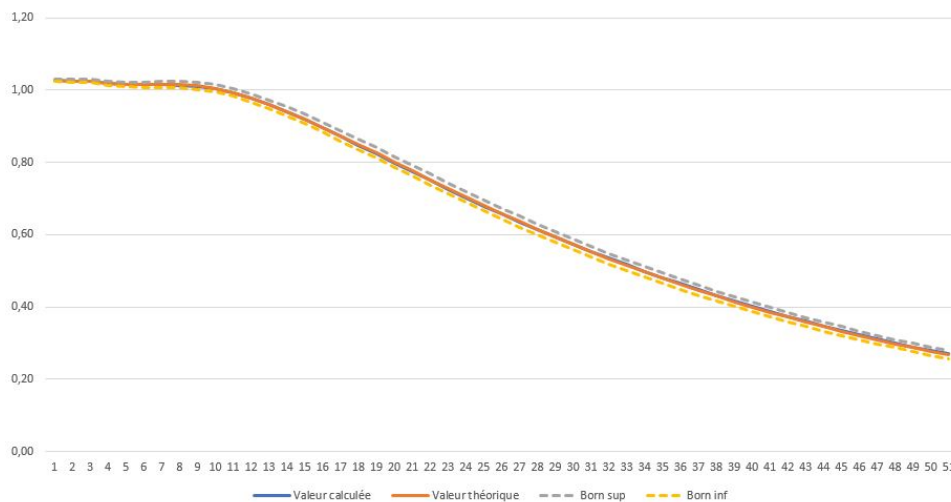


FIGURE III.5 – Martingalité des ZC 10 et son intervalle de confiance

Il est maintenant possible de projeter l'ensemble de la courbe des taux sans risques. Par exemple pour le ZC 10 ans le cône de projection en figure III.25.

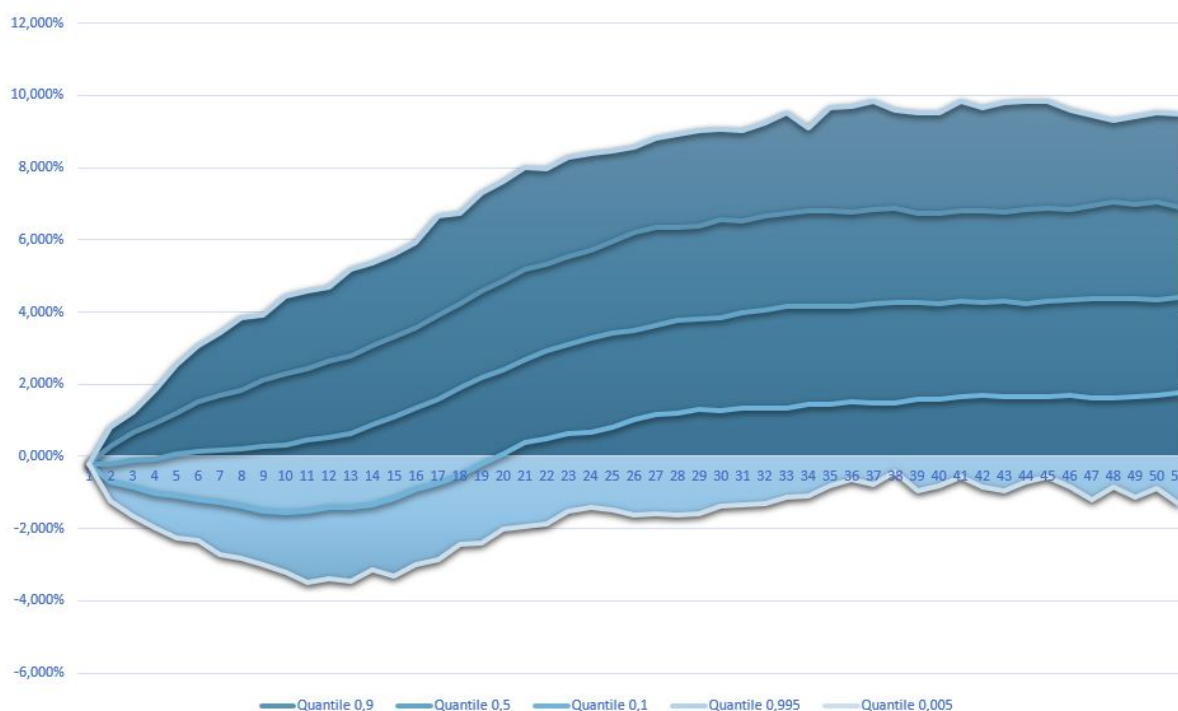


FIGURE III.6 – Quantiles par année de projection du ZC 10 ans du modèle G2++

III.1.2 Indice

Cette section présente succinctement les modules de projections des classes d'actif action, immobilier et gestion alternative, ainsi que les données utilisées pour leurs calibrations.

Action

La dynamique $S(\cdot)$ du modèle action suit un modèle Black & Scholes merton sans dividendes.

$$S(t+1) = S(t)e^{R(t,t+1) - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S \varepsilon_S(t)}$$

Avec

- $R(\cdot)$ le taux généré par le G2++
- σ_S la volatilité action
- ε_S une loi normale centrée réduite

Le modèle est calibré sur un call à la monnaie dont le sous-jacent est l'EuroStoxx 50. La figure III.7 expose le cône de projection. Comme la spécification du modèle le suggère, on retrouve que la volatilité est constante.

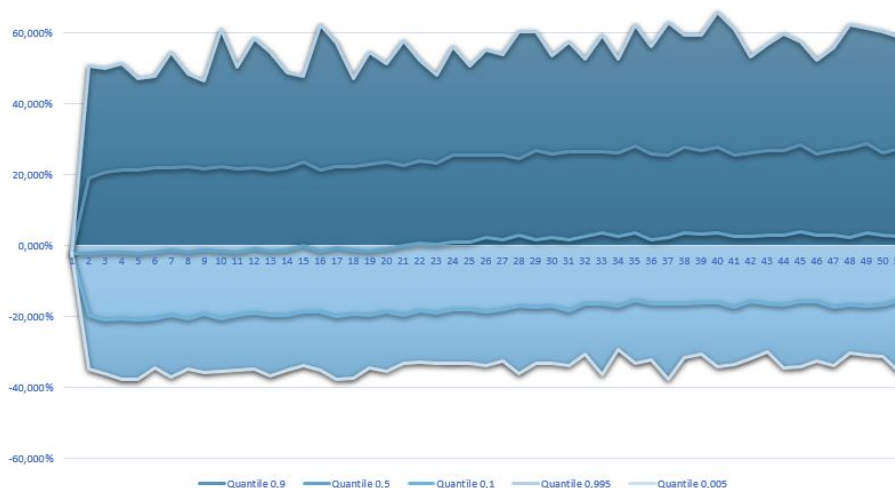


FIGURE III.7 – Quantiles par année de projection des rendements action

Immobilier

La dynamique $I(\cdot)$ du modèle Immobilier suit un modèle Black & Scholes Merton avec dividendes.

$$I(t + 1) = I(t)e^{R(t,t+1) - c - \frac{\sigma_I^2}{2} + \sigma_I \varepsilon_I}$$

- $R(\cdot)$ le taux généré par le G2++
- σ_I la volatilité immobilier
- ε_I une loi normale centrée réduite
- c taux de loyer

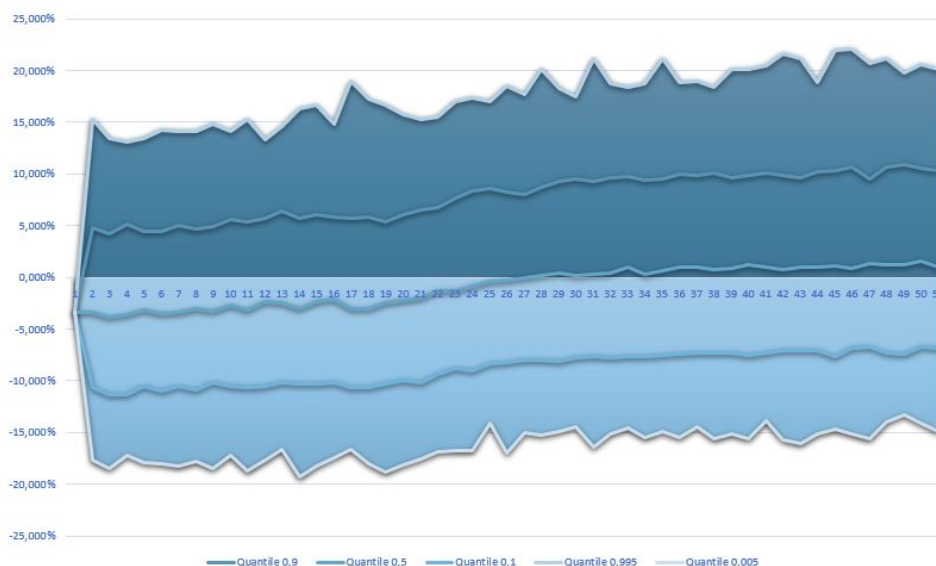


FIGURE III.8 – Quantiles par année de projection des rendements immobilier

Aucun produit dérivé avec de l'immobilier est suffisamment liquide profond et transparent n'est disponible sur les marchés financiers. Le modèle est calibré sur des données historiques. L'indice retenu est publié par La Française AM basé sur l'immobilier de bureaux parisien.

Gestion Alternative

La dynamique $G(\cdot)$ du modèle de gestion alternative suit un modèle de Black & Scholes Merton sans dividendes.

$$G(t+1) = G(t)e^{R(t,t+1) - \frac{\sigma_G^2}{2} + \sigma_G \varepsilon_G}$$

- $R(\cdot)$ le taux généré par le G2++
- σ_G la volatilité gestion alternative
- ε_G une loi normale centrée réduite

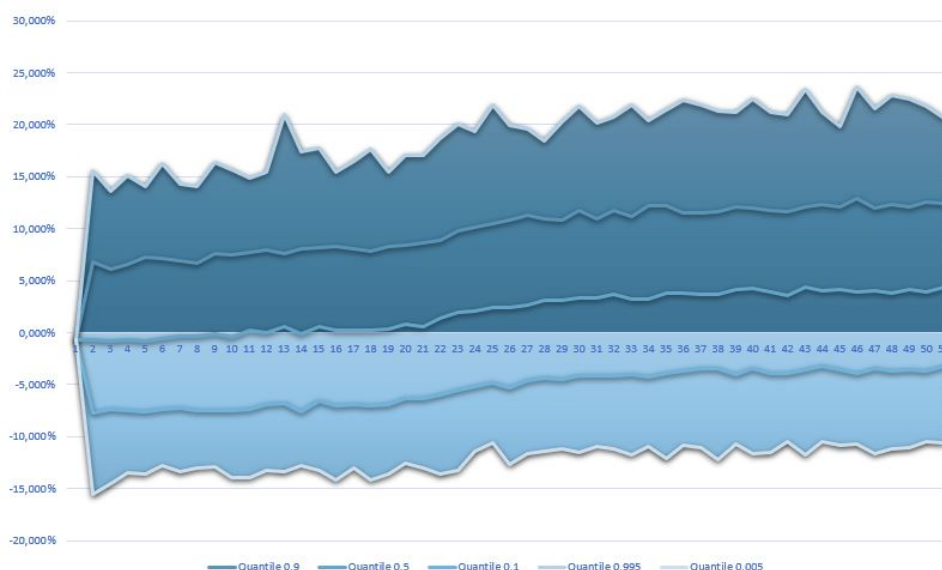


FIGURE III.9 – Quantiles par année de projection des rendements gestion alternatif

Aucun produit dérivé sur des produits de gestion alternatif n'est suffisamment liquide profond et transparent sur les marchés financiers. Le modèle est calibré sur des données historiques. L'indice retenu est le HFRS Global Hedge Fund.

III.2 Introduction du risque de crédit

Pour intégrer le crédit à notre GSE le modèle doit répondre à plusieurs contraintes. Il est nécessaire que les projections soient risque neutre et qu'elles soient cohérentes avec le marché (*Market Consistent*). De plus le modèle doit être capable de modéliser le risque soutenu par l'assureur. Plusieurs paradigmes de modélisation se présentent à nous.

On peut identifier deux familles de modèles. Les modèles structurels qui cherchent à expliquer la cause du défaut à partir de la structure du passif de l'émetteur, et les modèles réduits qui s'intéressent à la probabilité de défaut instantané de l'émetteur sans chercher à expliquer la cause de sa survenance.

D'un point de vue opérationnel les modèles structurels présentent des limites d'ordre pratique qui rendent leur utilisation difficile. En effet, les modèles structurels ont besoin de données difficilement accessibles sur le marché comme la part de fonds propres et la dette de l'émetteur, de plus ils ont une vision court terme du crédit.

Nous nous concentrerons sur une approche par modèles réduits. Dans ces modèles nous établissons un lien entre la probabilité de défaut et le *spread*. Le lien entre ces deux quantités se fait par la spécification d'une fonction de hasard. Dans la section suivante nous introduisons le processus de Cox.

III.2.1 L'instant de défaut

L'événement de défaut est défini comme étant le premier saut d'un processus de poisson doublement stochastique ou processus de Cox. Pour définir cet objet il est possible de procéder par analogie avec le processus de poisson homogène classique.

Processus de poisson Soit $(\omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un processus de poisson est à temps continue, croissant et à valeur dans \mathbf{N} . Il permet de compter un nombre d'événements aléatoires avec $N_0 = 0$ et chaque saut est unitaire. La caractérisation dans le cas où le processus de poisson $(M_t)_{t \geq 0}$ est homogène en temps de paramètre $\gamma \in \mathbb{R}^+$ est défini comme suit :

- Les accroissements $N_t - N_s$ sont indépendant de la tribu \mathcal{G}_s
- $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\gamma(t - s))$ c'est à dire

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k | \mathcal{G}_s) = \mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\gamma(t-s)} \frac{(\gamma(t-s))^k}{k!}$$

En particulier pour le premier événement $\mathbb{P}(N_t = 1) = \gamma e^{-\gamma t}$ et suit donc une loi exponentielle de paramètre γ . On notera τ l'instant du premier événement. τ suit une loi exponentielle de paramètre γ ou encore $\gamma\tau$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Nous avons $\gamma = \mathbb{E}(N_t)/t = Var(N_t)/t$, par conséquent γ représente le taux d'arrivée moyen des événements.

Processus de poisson non homogène en temps

On considère maintenant que le taux d'arrivée des événements est dépendant du temps, non stochastique et strictement positif $\gamma(\cdot)$ que l'on appelle aussi taux de hasard.

On pose : $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(u) du$ appelée aussi fonction de hasard. Le processus de poisson ainsi construit n'est plus stationnaire mais possède des propriétés analogues. Si l'on considère $M_t = N_{\Gamma(t)}$ on a de nouveau que le premier saut survient au temps $\Gamma(\tau)$ et suit une loi exponentielle de paramètre 1 : $\mathcal{E}(1)$. On en déduit alors la relation suivante : $\tau = \Gamma^{-1}(\mathcal{E}(1))$

D'autre part la propriété suivante est remarquable :

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{P}(\Gamma(\tau) > \Gamma(t)) = \mathbb{P}(\mathcal{E}(1) > \Gamma(t)) = e^{-\Gamma(t)}$$

Processus de Cox

Dans la suite de ce mémoire le taux de hasard est stochastique, sa filtration naturelle est notée \mathcal{F}_t^λ . Lorsque le processus de hasard est stochastique on le note : $\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(t) dt$. Ce processus est communément appelé processus de poisson doublement stochastique car deux sources de hasard sont présente, d'une part du taux de hasard et d'autre part de la date de survenance du défaut, comme résumé dans la relation suivante : $\tau = \Lambda^{-1}(\mathcal{E}(1))$. On retrouve les relations présentées ci-avant, notamment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > T) &= \mathbb{P}(\Lambda(\tau) > \Lambda(T)) = \mathbb{P}\left(\mathcal{E}(1) > \int_0^T \lambda(t) dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(\mathcal{E}(1) > \int_0^T \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_t^\lambda)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T \lambda(t) dt} \mid \mathcal{F}_t^\lambda\right] = S(0, T) \end{aligned}$$

La dernière relation permet une expression de la survie qui sera utilisée de manière plus extensive dans les sections suivantes.

D'autre part, le processus de Cox, N_t associé à son compensateur $\Lambda(\cdot)$ est une martingale. En effet, grâce à la propriété sur l'indépendance des accroissements :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t - \Lambda(t) \mid \mathcal{F}_t^\lambda] &= \mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s^\lambda] + N_s - \Lambda(t) \\ &= \mathbb{E}[N_t - N_s] + N_s - \Lambda(t) \\ &= N_s - \Lambda(t) \end{aligned}$$

Une fois le processus par lequel le défaut est régie, nous pouvons nous intéresser au prix du zéro coupon sensible au défaut.

III.2.2 Le Zéro coupon risqué

Le zéro coupon sans recouvrement

En gardant les notations de la section précédente, on note τ l'instant de défaut du titre et $P_d(\cdot)$ le prix d'un contrat qui garantit à son porteur le paiement d'une unité monétaire à maturité et comprenant le risque que la contrepartie fasse défaut. Le porteur du titre n'obtient pas de compensation dans le cas où la contrepartie ferait défaut. On a alors :

$$P_d(t, T) = \mathbb{E}(D(t, T)1_{\tau > T} \mid \mathcal{G}_t)$$

Où :

— $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$ la plus petite tribu comportement les variables du marché et l'information sur le défaut.

Dans le cadre de notre étude, nous supposons que le taux sans risque et l'instant de défaut sont indépendants. En effet, l'introduction de cette dépendance a un impact limité que l'on peut négliger dans un premier temps [5]. Ainsi :

$$P_d(t, T) = P(t, T) \mathbb{E}(1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t)$$

De plus le lemme de Jeulin-Yor permet d'obtenir le prix en fonction de \mathcal{F}_t :

$$\mathbb{E}(1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t) = \frac{1_{\tau > t}}{\mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)} E[1_{\tau > T} | \mathcal{F}_t] = 1_{\tau > t} \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t)$$

Et donc :

$$P_d(t, T) = 1_{\tau > t} \cdot P(t, T) \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t) \quad (\text{III.1})$$

Par conséquent, le prix du zéro coupon risqué est le prix d'un zéro coupon simple, auquel on retranche la probabilité de survie à maturité pour prendre en compte le risque. Dans le cas où l'émetteur aurait déjà fait défaut avant t, le titre vaudrait zéro.

Le zéro coupon risqué avec recouvrement

En cas de défaut le détenteur d'une dette d'entreprise peut espérer recouvrer la "perte en cas de défaut" ou *Loss Given Default (LGD)*. On note $R = 1 - LGD$ la part de la dette qui est recouverte.

La valeur du payoff actualisé avec la prise en compte du défaut à l'instant τ s'écrit :

$$CF_{\text{corp}}(t, T) = D(t, T)1_{\tau > T} + R \cdot D(t, \tau)1_{\tau \leq T}$$

Une unité monétaire est reçue dans sa totalité lorsque le défaut survient après la maturité et seulement le recouvrement lorsque le défaut survient avant. Dans la réalité lorsque le défaut survient le détenteur du titre ne reçoit pas immédiatement le recouvrement. En effet, plusieurs scénarios qui obligerait l'investisseur à attendre le recouvrement peuvent être imaginés. Aussi, il est tout à fait réaliste de supposer que le cash-flow obtenu en cas de défaut sont récupéré à la maturité du titre. En appliquant cette hypothèse au *Pay-Off* CF_{Corp} :

$$\begin{aligned} CF_{\text{corp}}(t, T) &= D(t, T)1_{\tau > T} + R \cdot D(t, T)1_{\tau \leq T} = D(t, T)(1 - 1_{\tau \leq T}) + R \cdot D(t, T)1_{\tau \leq T} \\ &= D(t, T) - LGD \cdot D(t, T)1_{\tau \leq T} = R \cdot D(t, T) + LGD \cdot D(t, T) \cdot 1_{\tau > T} \end{aligned}$$

On note $P_{\text{Corp}}(\cdot)$ le prix d'un contrat qui garantit à son porteur le paiement d'une unité monétaire à maturité et de R unités monétaires en cas de défaut de la contrepartie. Alors :

$$P_{\text{corp}}(t, T) = \mathbb{E}(CF_{\text{corp}}(t, T) | \mathcal{G}_t) = R \cdot P(t, T) + LGD \cdot P_d(t, T)$$

De plus, parce que nous supposons l'indépendance entre le taux sans risque et la survenance du défaut, l'expression précédente peut être développées pour obtenir :

$$P_{\text{corp}}(t, T) = R \cdot P(t, T) + LGD \cdot P(t, T) \cdot \mathbb{E}(1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t) = P(t, T) \cdot (R + LGD \cdot E(1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t))$$

En utilisant le lemme de Jeulin-Yor, nous obtenons le prix du zéro coupon avec recouvrement en fonction de la survie du titre à maturité :

$$P_{\text{corp}}(t, T) = P(t, T) \cdot (R + 1_{\tau > t} \cdot LGD \cdot \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t)) \quad (\text{III.2})$$

Il peut être utile d'observer deux cas en fonction de la valeur du LGD. Lorsque le LGD vaut 1, alors on retrouve bien le prix d'un ZC sans recouvrement. Lorsque le LGD vaut 0, alors on retrouve le prix d'un ZC sans risque. Le LGD agit donc comme un paramètre permettant de moduler le risque du titre.

III.2.3 Le *Spread*

En reprenant la définition du taux spot donnée au chapitre II, nous pouvons trouver le taux associé pour $t < \tau$:

$$R_{\text{corp}}(t, T) = \frac{-\ln(P_{\text{corp}}(t, T))}{T - t}$$

Parce que nous supposons l'indépendance entre le taux court et le défaut nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_{\text{corp}}(t, T) &= \frac{-\ln(P(t, T) \cdot (R + LGD \cdot \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t)))}{T - t} \\ &= R(t, T) - \frac{\ln(1 - LGD(1 - \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t)))}{T - t} \end{aligned}$$

En identifiant le terme de droite comme le *spread*, on a pour $t < \tau$:

$$S_{\text{corp}}(t, T) = -\frac{\ln(1 - LGD(1 - \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t | \mathcal{F}_t)))}{T - t} \quad (\text{III.3})$$

On obtient finalement une expression du *spread* qui ne dépend pas des taux d'intérêts. Cette propriété est particulièrement importante car elle implique que les développements sont réutilisables dans le cadre d'un GSE utilisant une autre structure pour le taux d'intérêt.

En résumé, pour modéliser le prix d'un zéro coupon risqué, les informations suivantes sont suffisantes :

- Le prix des obligations sans risque ,
- La probabilité de survie et les instants de défaut,
- Le taux de recouvrement.

III.2.4 Les *CDS*

Nous introduisons la modélisation d'un dernier actif dont la valeur dépend du défaut, les CDS. Le contrat stipule qu'en échange du LGD au moment du défaut, l'acheteur de la protection paie des primes régulières. De plus nous supposons de la même manière que

pour le zéro coupon risqué que le paiement en cas de défaut n'arrive qu'à la période qui suit. Ce type de CDS est appelé *Postponed payoffs Running CDS (PRCDS)*.

Pour un CDS dont les paiements interviennent entre les dates a et b , le payoff associé est :

$$PRCDS_{a,b}(t, \pi, LGD) = \pi \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i) \alpha_i 1_{\{\tau \geq T_i\}} - LGD \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i) 1_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}}$$

- α_i la durée entre deux paiements. Nous prendrons des paiements trimestriels. $\alpha_i = \frac{1}{4}$
- π la prime payée pour entrer dans le CDS.

De la même manière que nous avons procédé pour le zéro coupon risqué, nous cherchons le prix conditionnellement à la tribu comprenant l'événement de défaut :

$$CDS_{a,b}(t, \pi, LGD) = \mathbb{E} \{ PRCDS_{a,b}(t) \mid \mathcal{G}_t \}$$

Puis en appliquant le lemme de Jeulin-Yor nous obtenons :

$$CDS_{a,b}(t, \pi, LGD) = \frac{1_{\{\tau \geq t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \{ PRCDS_{a,b}(t) \mid \mathcal{F}_t \}$$

En particulier, au moment où le CDS est contracté on a par absence d'opportunité d'arbitrage :

$$CDS_{a,b}(t, \pi, LGD) = 0$$

On obtient enfin :

$$\pi_{a,b}(t) = \frac{LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \{ D(t, T_i) 1_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \}}{\alpha_i \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \{ D(t, T_i) 1_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \}}$$

En particulier pour un CDS acheté aujourd'hui et de maturité M :

$$\pi_{0,M} = \frac{LGD \sum_{i=1}^M P(0, T_i) [\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_0)]}{\alpha_i \sum_{i=1}^M P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_0)} \quad (\text{III.4})$$

On remarque que la prime du CDS ainsi formulé est très proche de la prime du swap de taux présenté dans le deuxième chapitre.

On retiendra que, l'information sur la survie le LGD et les prix des zéro coupon non risqués permettent de calculer cette prime.

Pour spécifier notre modèle, il ne nous reste plus qu'à modéliser la survie.

III.3 Le modèle LMN

Dans la section précédente le défaut a été défini comme étant le premier saut d'un processus de Cox. De plus à partir de la probabilité de défaut, le prix des instruments soumis au défaut a été défini. Il a été observé qu'ils dépendaient essentiellement que de la probabilité de survie :

$$\Lambda(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda(u) du} \right]$$

On a par exemple pour le ZC sans recouvrement :

$$P_d(t, T) = 1_{\tau > t} \cdot P(t, T) \cdot \mathbb{Q}(\tau > T / \tau > t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T (r(u) + \lambda(u)) du} \right]$$

Par conséquent pour un titre risqué, il est possible d'interpréter le prix comme étant la valeur actualisée au taux sans risque plus un *spread*.

Dans leur article, Longstaff, Mithal et Neis proposent d'ajouter au taux de hasard, la liquidité[6]. Cependant la stratégie de l'assureur est de garder ses actifs obligataire jusqu'à maturité. L'assureur n'est pas exposé au risque de liquidité. Nous supposons la prime de de liquidité nulle.

Par conséquent, pour terminer la spécification du modèle il ne reste plus qu'à choisir une modélisation pour λ . Aussi λ doit être positif, dans le cas contraire, la probabilité de survie pourrait être supérieur à 1.

Pour modéliser λ , plusieurs modèles projetant un taux court positif sont à notre disposition. nous pouvons citer Black-Karasinski, Vasicek exponentielle, CIR, etc.. Pour notre étude nous retiendrons le modèle CIR car il possède des formules fermées pour le prix des ZC ainsi que la présence de nombreux articles scientifiques précisant ses propriétés.

III.3.1 Processus CIR

Propriétés et solutions

Nous modélisons d notations de manière indépendante. Nous désignerons chacune des notations par l'indice i tel quel $1 \leq i \leq d$. Le modèle CIR appliqué au taux de hasard λ_i s'énonce comme suit :

$$d\lambda_i(t) = k_i(\theta_i - \lambda_i(t))dt + \sigma_i \sqrt{\lambda_i(t)} dW_i(t)$$

avec k_i , θ_i et σ_i des constantes positives. Pour garantir la positivité des scénarios, les paramètres doivent respecter la condition de Feller :

$$2k\theta_i > \sigma_i^2$$

La moyenne et la variance de $\lambda(t)$ conditionnellement à \mathcal{F}_s sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \lambda(t) \mid \mathcal{F}_s \} &= \lambda(s) e^{-k(t-s)} + \theta (1 - e^{-k(t-s)}) \\ \mathbb{V} \{ \lambda(t) \mid \mathcal{F}_s \} &= \frac{\lambda(s)\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2 \end{aligned}$$

À partir de ces expressions nous pouvons noter que si t est grand devant s alors l'espérance de λ_s simplifie et vaut θ . De la même manière nous pouvons observer sur la variance que si t est grand devant s alors la moyenne asymptotique est $\theta \frac{\sigma^2}{2k}$.

On rappelle l'expression de la fonction de hasard :

$$\Lambda(t, T) = Q(\tau > T/\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left(e^{(-\int_t^T \lambda_u du)} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Le modèle CIR fait partie de la famille des modèles à structure affine. La solution peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Lambda(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}$$

où

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp \left\{ \frac{(k+h)(T-t)}{2} \right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

Probabilités de survie et ZCs risqués

Avec l'expression explicite de la fonction de hasard présenté dans le paragraphe précédent, nous pouvons exprimer le prix du ZC sans et avec recouvrement III.1 et III.2 en fonction des paramètres du CIR pour $t < T$:

$$P_d(t, T) = P(t, T) \cdot 1_{\tau > t} \cdot A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)} \quad (\text{III.5})$$

$$P_{\text{corp}}(t, T) = P(t, T) \cdot (R + 1_{\tau > t} \cdot LGD) \cdot A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}$$

Enfin à partir de III.4, on a pour $0 < T$ le spread et la prime du CDS :

$$S_{\text{corp}}(0, T) = -\frac{\ln(1 - LGD(1 - A(0, T)e^{-B(0, T)\lambda(0)}))}{T} \quad (\text{III.6})$$

$$\pi_{0, T} = \frac{LGD \sum_{i=1}^T P(0, T_i) [A(0, T_{i-1})e^{-B(0, T_{i-1})\lambda(0)} - A(0, T_i)e^{-B(0, T_i)\lambda(0)}]}{\alpha_i \sum_{i=1}^T P(0, T_i) A(0, T_i)e^{-B(0, T_i)\lambda(0)}} \quad (\text{III.7})$$

Flux moyens

On remarque que la relation III.5 fait intervenir une indicatrice et la fonction de hasard. On rappelle que le processus CIR indicé i , permet de projeter l'ensemble des titres en portefeuille de notation d'indice i . Par conséquent lorsque le défaut intervient, l'ensemble des titres font défaut en même temps et pourrait engendrer inutilement de la volatilité dans les scénarios. En effet :

$$\mathbb{V}(1_{\tau < T}) = \mathbb{E}(1_{\tau < T}^2) - \mathbb{E}(1_{\tau < T})^2 = \mathbb{E}(1_{\tau < T}) - \mathbb{E}(1_{\tau < T})^2$$

En particulier pour une probabilité de défaut avant T de 5% on a :

$$\sqrt{\mathbb{V}(1_{\tau < T})} = \sqrt{0.05 - 0.05^2} = 21.79\% = \sigma_{MC}$$

De plus nous savons que l'écart type de l'estimateur Monte-Carlo est $\frac{\sigma_{MC}}{\sqrt{NbrScenarios}}$, c'est à dire que la variance de l'estimateur est d'environ 0.5% lorsque l'on projette 2000 scénarios. C'est plus que la limite que nous nous imposons qui est de 0.3% .

Pour réduire cette variabilité sans augmenter le nombre de scénarios nous proposons d'utiliser le flux moyen. En effet, lorsque l'on a N obligations de même caractéristiques, nous pouvons calculer le prix moyen du zéro-coupon sur ces N obligations :

$$P_d^{mean}(t, T) = P(t, T)A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)} \cdot \sum_i \frac{1_{\tau_i > t}}{N}$$

Or pour N suffisamment grand :

$$\sum_i \frac{1_{\tau_i > t}}{N} \simeq \mathbb{E}(1_{\tau > t}) = \Lambda(0, t)$$

Nous pouvons alors ré-écrire III.5 :

$$P_d(t, T) = P(t, T) \cdot \Lambda(0, t) \cdot A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)} \quad (\text{III.8})$$

Par conséquent, dans nos projections, le défaut sera comptabilisé de manière proportionnel à la fonction de hasard.

III.3.2 Données de marché

La section précédente, a mis en place les outils pour valoriser les instruments financier sensibles au défaut. Pour être en mesure de projeter ces instruments il est nécessaire de trouver les paramètres du modèle cohérent avec les données de marché.

Les instruments financier utilisés pour la calibration du modèle doivent provenir d'un marché :

- transparent, les caractéristiques des actifs sont connues par tous les acteurs du marché
- liquide, les actifs sont achetés et vendus facilement sans que ça n'ai d'impact sur le prix de l'actif
- profond, il y a possibilité sur ce marché d'échanger de grands volumes de titres

Deux sources de données ont été considérées pour calibrer les paramètres des processus CIRs. Les *spreads* obligataires et les primes de *CDS*. Les paragraphes suivants exposent les données considérés pour calibrer un modèle par notations.

Spreads

L'indice Bloomberg barclays est composé d'obligations *corporates* sénior émis en dans la zone euro. Il est possible d'obtenir un taux actuariel par maturité et notation en utilisant les tickers suivants :

Notation	Tickers
AAA	BVSC0545
AA	BVSC0543
A	BVSC0548
BBB	BVSC0551
BB	BVSC0554
B	BVSC0557

FIGURE III.10 – Tickers Bloomberg barclays

On obtient alors les données brutes suivantes :

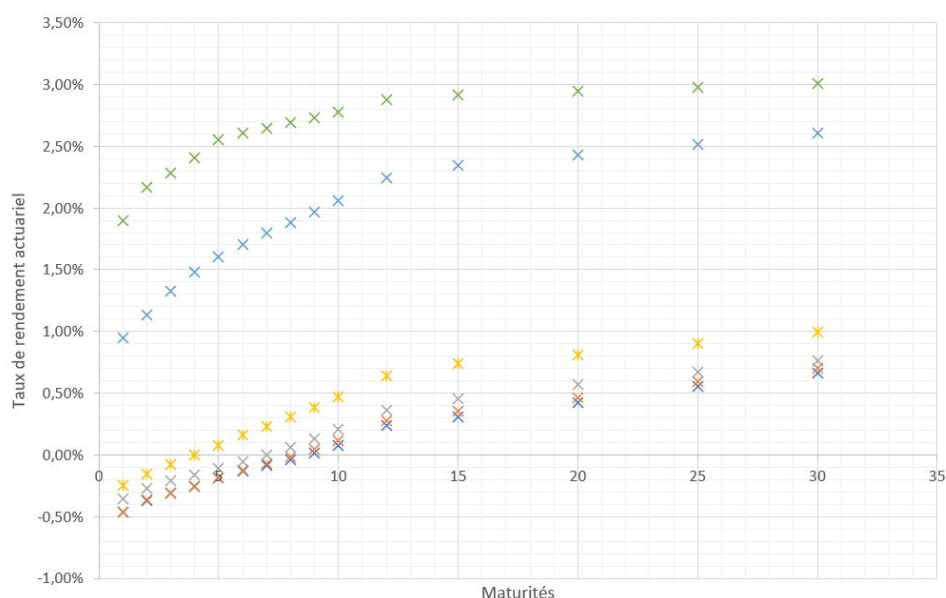


FIGURE III.11 – Indice Bloomberg barclays

Pour rapprocher les données du modèle il est nécessaire de transformer les taux de rendements actuariels de l'indice en zéro coupon. Pour ce faire nous interpolons les données à notre disposition pour obtenir les taux de rendements actuariels pour chacune des maturités. Puis nous appliquons la procédure de découpage suivante :

$$P_d^{Marche}(0, T) = \frac{1}{1 + TRA_d^{Marche}(0, T)} \cdot \left(1 - TRA_d^{Marche}(0, T) \cdot \sum_{k=1}^{T-1} P_d^{Marche}(0, k) \right)$$

Où TRA_d^{Marche} le taux de rendement actuariel d'une obligation soumise au risque de défaut tel qu'observe sur le marché.

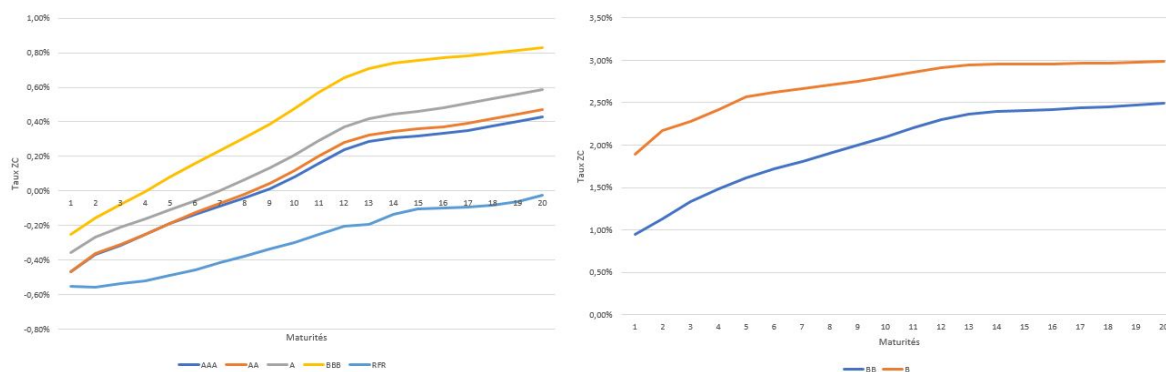


FIGURE III.12 – Taux ZC découponné après interpolation

Enfin pour obtenir le spread nous appliquons la transformation suivante :

$$Spread^{Marche}(0, T) = P_d^{Marche}(0, T)^{\frac{-1}{T}} - 1 - Y(0, T)$$

où $Y(0, T)$ est le taux sans risque de la courbe *EIOPA*.

Les taux du marché sont géométriques. Pour pouvoir les comparer avec les prix de notre modèle, exprimés en convention géométriques, nous les convertissons en utilisant la relation II.1

CDS

Concernant les dérivés de crédit, l'indice de référence est l'iTraxx *Main* et *Crossover*. Pour calculer l'indice, Markit sélectionne une cohorte de 125 entreprises émettrice d'obligation pour le *Main* et 75 pour le *Crossover*. Pour faire partie de cette cohorte, les CDS de ces entreprises doivent être parmi les plus échangés du marché. Le *Main* regroupe les entreprises dont la notation est *Investment Grade*, c'est-à-dire supérieur ou égale à BBB et le *Crossover* celles dont la notation est *High Yield* c'est-à-dire inférieur à BBB. L'indice est recomposé tous les 6 mois à fin septembre et ainsi qu'à fin mars à partir de titres seniors et subordonné.

Dans le cadre de notre étude nous avons besoin de données agrégées par notation. Pour ce faire nous nous proposons de reconstituer l'indice à partir des données disponibles sur chacun de ses constituants.

Nous utilisons la deuxième meilleure notation pour être en accord avec le risque de spread de solvabilité II. Ainsi, à partir des données synthétiques nous pouvons construire une courbe de spreads CDS par notations présenté en figure III.14.



FIGURE III.13 – Comparaison iTraxx Main 10Y et iTraxx 10Y synthétique

Sur les 125 émetteurs que compose l’iTraxx Main, les CDS de 106 émetteurs sont disponibles sur Bloomberg. En respectant la pondération appliquée par l’indice on obtient un écart absolu moyen de 3 bps, avec une nette dégradation de la réplication en Mars 2020, entre l’indice et la réplication que nous en faisons.

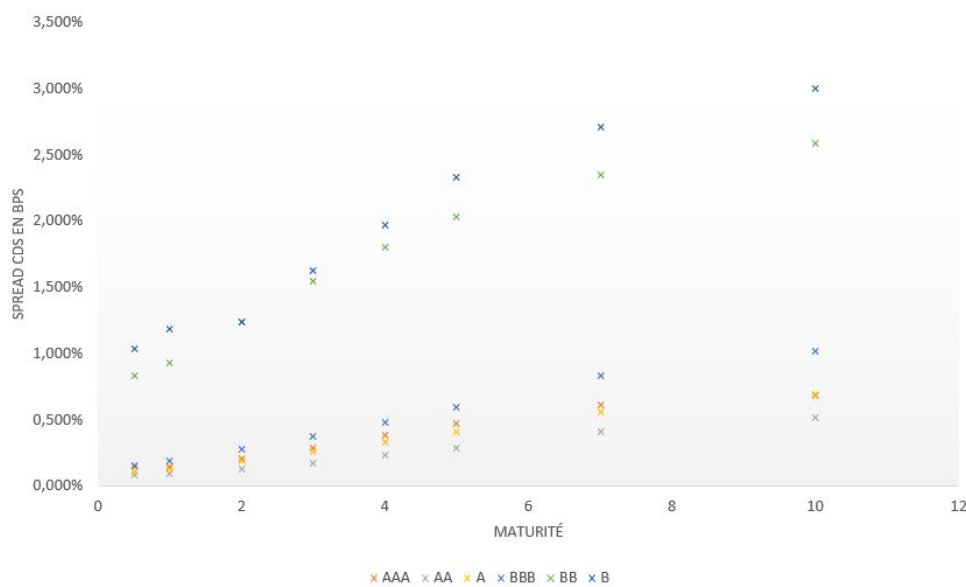


FIGURE III.14 – Courbe des spread CDS synthétique par notation

Loss Given Default

Le LGD est une donnée exogène à notre modèle. Il est nécessaire pour la calibration et la projection. Il est difficile de trouver cette information sur les marchés financiers car il faudrait étudier les dossiers de défaut au cas par cas sur un historique suffisamment profond. Aussi on peut se baser sur la norme de contrôle prudentiel européenne applicable aux banques, Bâle III. L'article 32 alinéa 5 prévoit que en approche fondation les titres obligataires non collateralisés ont une perte en cas de défaut de 45%. C'est la valeur du LGD que nous retiendrons.

III.3.3 Procédure de calibration

La calibration consiste à trouver le paramètre $\hat{\beta}$ qui vérifie le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} (d(P^{\text{Marche}}, P^{\text{CIR}}(\beta))) \\ 2 \cdot k \cdot \theta > \sigma^2 \end{cases}$$

La procédure présentée dans cette section est valable pour le modèle LMN ainsi que pour le modèle LMN en cascade présentée dans la section suivante.

- $\beta = (\lambda(0), k, \theta, \sigma)$
- P^{Marche} le vecteur des prix de marché
- $P^{\text{CIR}}(\beta)$ le vecteur des prix obtenu en utilisant le processus CIR

Fonction objectif

Il existe plusieurs alternatives pour la fonction objectif. Notamment les fonctions suivantes ont été considérées :

- $d_1(\beta) = \sum_{k=1}^N |P_k^{\text{Marche}} - P_k^{\text{CIR}}(\beta)|$
- $d_2(\beta) = \sum_{k=1}^N \left| \frac{P_k^{\text{Marche}} - P_k^{\text{CIR}}(\beta)}{P_k^{\text{Marche}}} \right|$
- $d_3(\beta) = \frac{\sum_{k=1}^N |P_k^{\text{Marche}} - P_k^{\text{CIR}}(\beta)|}{\sum_{k=1}^N P_k^{\text{Marche}}}$

À la vue de ces distances il est possible de faire les remarques suivantes sur ces fonctions objectifs :

- d_1 pénalise fortement les écarts des prix élevés car les écarts absolus y sont généralement plus élevés
- d_2 pénalise fortement les écarts des prix faibles car les écarts relatifs y sont généralement plus élevés
- d_3 pénalise fortement les écarts des prix élevés

La méthode que nous retenons est l'utilisation de d_2 dans le programme d'optimisation, puis l'utilisation de d_1 pour la validation de la calibration. D'autre part, notre programme doit vérifier la condition de Feller. Pour ce faire nous rajoutons à la fonction objectif un terme de pénalisation. C'est-à-dire :

$$d(\beta) = d_2(\beta) + K \cdot 1_{2 \cdot k \cdot \theta > \sigma^2}$$

Où K est un nombre arbitrairement élevé. Nous vérifions que le choix de K n'a pas

d'impact sur la calibration en choisissant plusieurs valeurs puis en vérifiant bien que le résultat de la calibration reste identique.

Bornes calibration

Pour s'assurer que le résultat de la calibration reste cohérent économiquement, nous imposons des contraintes aux paramètres. Pour chaque notation nous avons quatre paramètres, $k, \theta, \sigma, \lambda(0)$.

- θ correspond à la moyenne de long terme du défaut instantané
- k correspond à la vitesse de convergence vers θ
- σ est le terme de volatilité
- $\lambda(0)$ le défaut instantané à la date de projection

Un k à 0 revient à simuler seulement à mouvement brownien, un k à 1 revient à un retour à la moyenne instantanée. D'autre part, un θ à 0.4 revient à un *spread* asymptotique proche de 40%.

Par conséquent, nous fixons les bornes de la calibration comme suit :

- $\theta \in [0; 0.4]$
- $k \in [0; 1]$
- $\sigma \in [0; 0.4]$
- $\lambda \in [0; 0.4]$

Algorithme d'optimisation

Pour résoudre le programme d'optimisation les algorithmes suivants sont considérés :

- Moindre carré
- Moindre carré itérés : en utilisant plusieurs points de départ
- Recuit simulé : méthode globale se basant sur une méthode statistique
- Algorithme génétiques : méthode globale basée sur la génération de solutions par itération

Un premier test de la procédure de calibration est effectué sur les ZC risqués , nous obtenons les résultats suivants :

Moindre carré					Recuit simulé				
	K	Thêta	Sigma	Lambda0		K	Thêta	Sigma	Lambda0
AAA	0,02646	0,03275	0,00887	0,00475	AAA	0,30824	0,01175	0,08512	0,00314
AA	0,02916	0,03614	0,00869	0,00467	AA	0,42390	0,01136	0,09814	0,00610
A	0,03083	0,04023	0,00805	0,00616	A	0,36164	0,01467	0,10123	0,00711
BBB	0,04262	0,05707	0,00556	0,00757	BBB	0,25037	0,02530	0,10009	0,00769
BB	0,00285	0,01372	0,00885	0,05641	BB	0,06094	0,17529	0,05511	0,02902
B	0,00295	0,01380	0,00902	0,07380	B	0,05059	0,24907	0,03760	0,04989

Moindre carré itéré					Algorithme génétique				
	K	Thêta	Sigma	Lambda0		K	Thêta	Sigma	Lambda0
AAA	0,60826	0,01168	0,09038	0,00019	AAA	0,12778	0,04875	0,11162	0,00001
AA	0,23988	0,01697	0,00100	0,00026	AA	0,49189	0,01240	0,10169	0,00034
A	0,01219	0,10289	0,03798	0,00468	A	0,49634	0,01614	0,12652	0,00000
BBB	0,35770	0,02110	0,00746	0,01061	BBB	0,06342	0,05269	0,08175	0,00610
BB	0,03605	0,24281	0,02267	0,02870	BB	0,46989	0,07922	0,03396	0,01294
B	0,09807	0,20749	0,11255	0,04243	B	0,06687	0,19697	0,00726	0,05241

FIGURE III.15 – Paramètres et erreur relative par méthode de calibration

Nous rappelons que la calibration est paramétrée de sorte à minimiser l'écart relatif. À partir des paramètres ainsi obtenus, nous choisissons la méthode qui a permis de minimiser l'écart absolu. Dans notre cas la méthode retenue est le recuit simulé.

Erreur absolue	Recuit	Moindre carré (MC)	MC itéré	Simplex	Génétique
AAA	0,1108	0,1094	0,1077	0,0935	0,1090
AA	0,1078	0,1124	0,1046	0,1062	0,1056
A	0,0988	0,1035	0,0971	0,0984	0,0969
BBB	0,0847	0,0849	0,0836	0,0842	0,0835
BB	0,2558	0,2710	0,2565	0,2523	0,2544
B	0,4260	0,5009	0,4908	0,4894	0,4608
Somme	1,0839	1,1821	1,1403	1,1240	1,1102

FIGURE III.16 – Erreur absolue par méthode de calibration

Point de départ

Nous souhaiterions vérifier que la calibration n'est pas sensible au point de départ choisi. Pour ce faire nous procédons à la calibration à partir de plusieurs points de départ espacés de 0.1. Ensuite nous procédons à la calibration en prenant comme point de départ un noeud formé par le maillage tel qu'explicité dans la figure suivante.

Nous n'observons pas d'écart significatif en changeant de point de départ. Nous prenons par conséquent comme point de départ de l'optimisation, le milieu de l'intervalle d'admissibilité des paramètres.

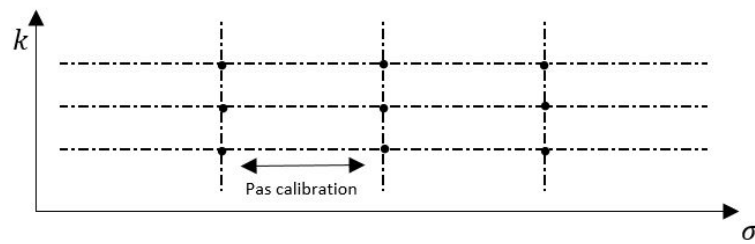


FIGURE III.17 – Principe vérification point de départ

Dépendance entre les notations

Dans la modélisation que nous avons proposée dans cette section, chaque notation est projetée de manière indépendante l'une de l'autre, c'est à dire qu'il existe des scénarios où l'ordre des notations n'est plus respecté. Or comme on peut l'observer sur l'historique des *spread* Iboxx du chapitre 2, les différentes notations sont très dépendantes et restent dans le même ordre que leur notation. Dans la section suivante nous proposons une solution à ce problème.

III.4 Le modèle LMN en cascade

Nous avons vu dans la section précédente que si les notations étaient modélisées de manière indépendante, alors il était possible que la cohérence de certains scénarios ne soit pas assurée. Nous proposons dans cette section une méthode alternative permettant d'assurer que l'intensité de défaut d'une notation plus risquée soit plus élevée que toutes les notations moins risquées. Pour ce faire, nous additionnons les intensités de défaut des notations inférieures à la notation considérée. Cette méthode a plusieurs avantages :

- Introduire de la dépendance entre les différentes lignes obligataires
- Éviter le croisement des spreads de notations différentes

Processus CIR en cascade

Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ d processus CIR indépendants dont l'équation différentielle sous la mesure risque-neutre Q s'écrit pour chaque i :

$$d\lambda_i(t) = k_i(\theta_i - \lambda_i(t)) dt + \sigma_i \sqrt{\lambda_i(t)} dW_i(t)$$

Avec $\lambda_i(0)$, k_i , θ_i et σ_i sont des constantes positives.

Les paramètres du modèle doivent respecter la condition de Feller : $2k_i\theta_i > \sigma_i^2$

Le modèle en cascade suppose que l'intensité de défaut γ_i de la ligne i s'écrit :

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j = \gamma_{i-1} + \lambda_i$$

Cette écriture assure l'interdépendance des intensités de défaut et permet de les ordonner évitant ainsi un recoupement des spreads de deux notations différentes.

Notons par ailleurs que :

- $E\{\lambda_i(t) | F_s\} = \lambda_i(s)e^{-k_i(t-s)} + \theta_i(1 - e^{-k_i(t-s)})$
- $\text{Var}\{\lambda_i(t) | F_s\} = \frac{\lambda_i(s)\sigma_i^2}{k_i}(e^{-k_i(t-s)} - e^{-2k_i(t-s)}) + \theta_i \frac{\sigma_i^2}{2k_i}(1 - e^{-k_i(t-s)})^2$

Probabilité de survie

La probabilité que le groupe d'émetteurs i ne fasse pas défaut à la date T sachant qu'il est en vie à la date t s'écrit :

$$\Lambda_i(t, T) = Q(\tau_i > T / \tau_i > t | F_t) = E\left(\exp\left(-\int_t^T \gamma_i(u) du\right) | F_t\right)$$

Ce qui revient à écrire, compte tenu de l'hypothèse d'indépendance des λ_i :

$$\Lambda_i(t, T) = \prod_{j=1}^i E\left(\exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u) du\right) | F_t\right)$$

Enfin, en utilisant les propriétés analytiques des processus CIR :

$$\Lambda_i(t, T) = \prod_{j=1}^i A(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j)\lambda_j(t)}$$

Le prix d'une obligation risquée

Notons $P(t, T)$ le prix à l'instant t , d'une obligation zéro coupon sans risque de maturité T et $P_{\text{corp}}^{(i)}(t, T)$ la valeur, vue à l'instant t , d'une obligation émise par la contrepartie i et promettant le paiement d'une unité monétaire en cas de survie à l'instant T et $\alpha_i = 1 - LGD_i$ en cas de défaut.

On a :

$$P_{\text{corp}}^{(i)}(t, T) = P(t, T) \cdot (\alpha_i + 1_{\tau_i > t} \cdot LGD_i \cdot \mathbb{Q}(\tau_i > T / \tau_i > t \mid \mathcal{F}_t))$$

La valeur d'une obligation zéro-coupon risquée s'écrit donc :

$$P_{\text{corp}}^{(i)}(t, T) = P(t, T) \cdot \left(\alpha_i + 1_{\tau_i > t} \cdot LGD_i \cdot \prod_{j=1}^i A(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(t)} \right)$$

La diffusion des prix des obligations risquées se déduit donc des prix des obligations sans risque, de la diffusion des processus CIR $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ et de la diffusion des instants de défaut.

Comme évoqué dans la section précédente, on peut s'affranchir de la simulation des instants de défaut en regroupant les obligations qui ont les mêmes caractéristiques.

On peut donc remplacer $1_{\tau_i > t}$ par $\ll \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(u) du\right)$.

$$P_{\text{corp}}^{(i)}(t, T) = P(t, T) \cdot \left(\alpha_i + LGD_i \cdot \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(u) du\right) \cdot \prod_{j=1}^i A(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(t)} \right)$$

Une obligation ZC avec un recouvrement nul peut s'écrire :

$$P_d^{(i)}(t, T) = P(t, T) \cdot \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(u) du\right) \cdot \prod_{j=1}^i A(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(t, T; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(t)}$$

La prime des CDS

Notons $\pi_{0, M}$ la prime pour entrer dans un *Postponed payoffs Running CDS (PRCDS)* à l'instant 0 de maturité M . On a :

$$\pi_{0, M} = \frac{LGD \sum_{i=1}^M P(0, T_i) [\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_0)]}{\alpha_i \sum_{i=1}^M P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_0)}$$

De la même manière que précédemment, on a, α_i la durée entre deux paiements. Nous prendrons des paiements trimestriels. $\alpha_i = \frac{1}{4}$

De plus, dans le cadre du LMN en cascade nous avons une expression de la survie en fonction des paramètres calibrés. Nous obtenons alors la prime du *PRCDS* correspondant :

$$\pi_{0, M} = \frac{LGD \sum_{i=1}^M P(0, T_i) \left[\prod_{j=1}^i A(0, T_{i-1}; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(0, T_{i-1}; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(0)} - \prod_{j=1}^i A(0, T_i; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(0, T_i; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(0)} \right]}{\alpha_i \sum_{i=1}^M P(0, T_i) \prod_{j=1}^i A(0, T_i; k_j, \theta_j, \sigma_j) e^{-B(0, T_i; k_j, \theta_j, \sigma_j) \lambda_j(0)}} \quad (\text{III.9})$$

III.4.1 Calibration

La méthode de calibration du LMN en cascade est similaire à la calibration du LMN. Pour valider le calibrage, nous comparons la courbe de *spread* observée avec celui générée par le modèle. Nous obtenons les résultats suivants :

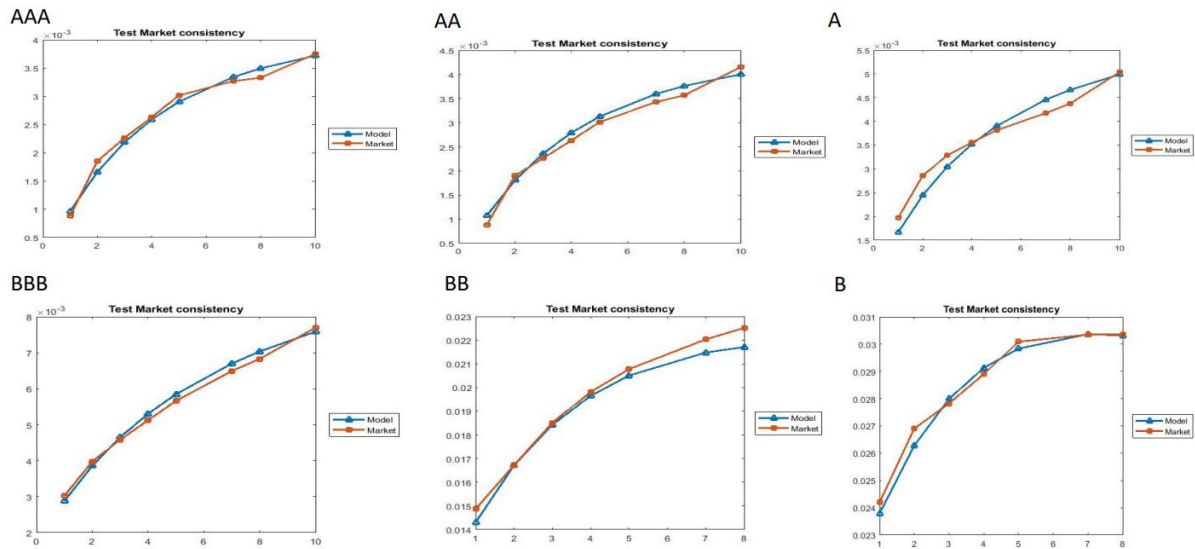


FIGURE III.18 – Validation calibration sur ZC risqué

De même nous effectuons la procédure de calibration en utilisant les CDS et obtenons les résultats suivants :

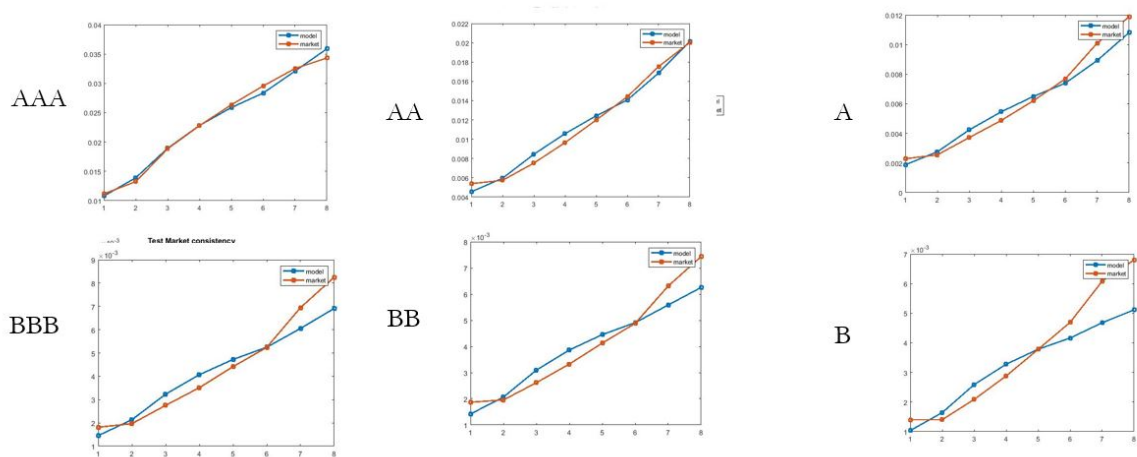


FIGURE III.19 – Validation calibration sur CDS

Les courbes produites ont été obtenues grâce aux paramètres calibrés suivants :

	k	theta	Sigma	lambda0
AAA	0,4358	0,0109	0,0253	0,0001
AA	0,0025	0,0382	0,0137	0,0001
A	0,4680	0,0017	0,0129	0,0023
BBB	0,0032	0,3116	0,0081	0,0017
BB	0,0267	0,2060	0,0442	0,0247
B	0,3581	0,0274	0,1026	0,0211

FIGURE III.20 – Paramètres calibrés sur ZC risqués

	k	theta	Sigma	lambda0
AAA	0,2341	0,0216	0,0004	0,0013
AA	0,9554	0,0006	0,0017	0,0015
A	0,0014	0,3050	0,0014	0,0000
BBB	0,0058	0,3358	0,0129	0,0002
BB	0,0102	0,3345	0,0067	0,0057
B	0,6500	0,0441	0,0007	0,0079

FIGURE III.21 – Paramètres calibrés sur CDS

Dans la suite de cette étude nous utiliserons les paramètres issus des taux d'intérêt risqués. En effet, les primes des CDS sont des *mid* et le *spread bid-ask* des titres considérés sont de plus de 10 *bps*, ce qui est suffisant pour estimer que la donnée est moins fiable que les indices obligataires. De plus, dans son rapport sur l'utilisation des générateurs de scénarios économiques, l'institut des actuaires évoque d'ailleurs un calibrage sur la courbe de taux risqués sans mentionner l'utilisation des CDS. Enfin, les probabilités de défauts produites par la calibration sur les CDS sont plus élevés que celles produites à partir de la calibration sur le ZC risqués.

III.4.2 Projection

Discrétisations

Suivant le niveau de précision que nous attendons des projections, et les contraintes opérationnelles, nous avons plusieurs possibilités de discrétisations du processus CIR.

La première possibilité est la projection exacte du processus. En effet, si λ suit un processus CIR, alors pour tout $t \geq 1$ la variable aléatoire $\lambda(t + \delta)$ conditionnellement à $\lambda(t)$ a la même loi que la variable $\chi^2(u, v_{t+\delta,t})/c_1$ où $\chi^2(u, v_{t+\delta,t})$ suit une loi du Khi-deux non-centrée de paramètres $(u, v_{t+\delta,t})$ tels que :

$$\begin{aligned}
 - \quad c_\delta &= \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-k\delta))}; \\
 - \quad u &= 4k\theta/\sigma^2; \\
 - \quad v_{t+\delta,t} &= c_\delta \lambda_t \exp(-k\delta).
 \end{aligned}$$

La seconde possibilité est d'utiliser la discrétisation d'Euler à partir de lois normales centrées réduites et indépendantes $(r_t)_1$. On peut écrire en effet :

$$\lambda(t + \delta) - \lambda(t) = k(\theta - \lambda(t))\delta + \sigma\sqrt{\lambda(t)}\sqrt{\delta}\varepsilon_1$$

Où : $\varepsilon_1 = \mathcal{W}(t + \delta) - \mathcal{W}(t)$.

En sortie l'écart entre les deux discrétisations n'est pas significatif. De plus le temps de traitement de la discrétisations d'Euler est de quelques minutes contre près de trentes minutes pour la discrétisations. Nous privilégions la discrétion d'Euler. En comparant les quantités théoriques avec les scénarios générés, on obtient les résultats suivants :

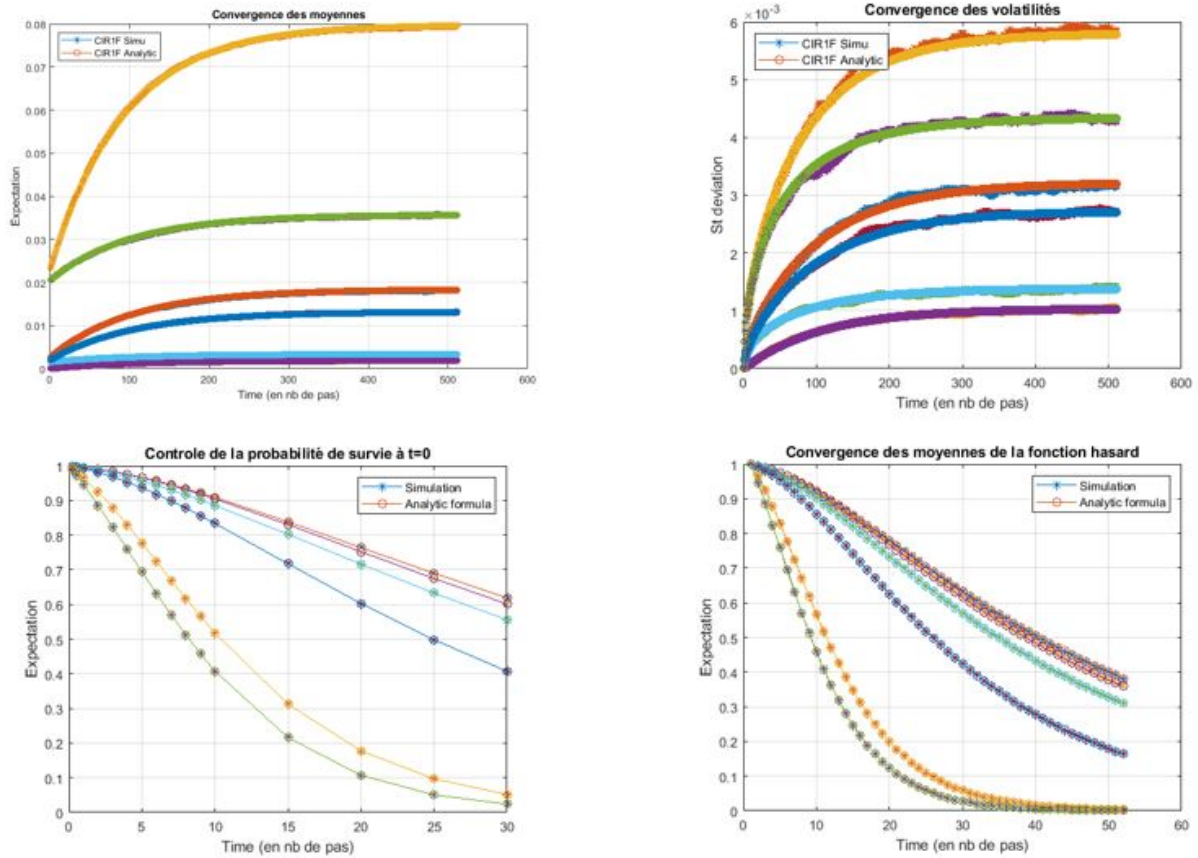


FIGURE III.22 – Convergence des quantités simulés vers leurs valeurs théorique pour le BBB à l'aide de la discrétisation d'Euler

La moyenne et la volatilité des défauts instantanés générés sont en accord avec les formules analytiques du processus CIR.

Martingalité

Nous souhaitons vérifier que les scénarios générés sont bien risque neutre. C'est à dire :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t, T)X_T | \mathcal{F}_t] = X_t$$

Dans notre cas, cela se traduit par :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t) \cdot P_{\text{corp}}(t, T) | \mathcal{F}_t] = P_{\text{corp}}(0, T)$$

En particulier, nous souhaitons vérifier que l'erreur relative globale est suffisamment petite. C'est-à-dire que

$$\frac{1}{T \cdot t} \cdot \sum_t \sum_T \frac{|\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t) \cdot P_{\text{corp}}(t, T) | \mathcal{F}_t] - P_{\text{corp}}(0, T)|}{P_{\text{corp}}(0, T)} < \alpha$$

En accord avec les recommandations de la note de l'ACPR "Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques", nous prenons un α de 0.5%. Pour tous les couples ténor, maturité de la notation BBB, l'écart relatif est le suivant :

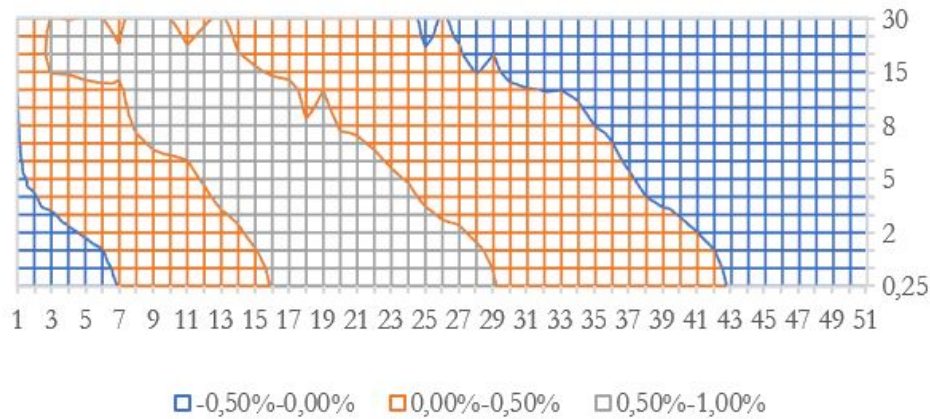


FIGURE III.23 – Erreur de martingalité par maturité ténor

Dans l'ordre des notations de la moins risqué à la plus risqué, nous avons les erreurs relatives suivantes : 0.21%, 0.18%, 0.18%, 0.26%, 0.13%, 0.13%

Enfin, en reprenant les notations du début du chapitre sur le Z-test du G2++, nous faisons le test suivant :

$$\mathbb{P} \left(\bar{X} - \mu \geq \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Nous vérifions que le test est vérifié pour l'ensemble des couples ténors maturités avec un seuil d'acceptation de 5%.

Nous faisons enfin un dernier test graphique sur les probabilités de défaut. En observant les cônes de projection des probabilités de défauts, on remarque que le modèle tel qu'il a été spécifié permet de respecter l'ordre des notations et ainsi projeter des probabilités de défaut plus volatiles pour les notations les plus risquées.

Cône de projection

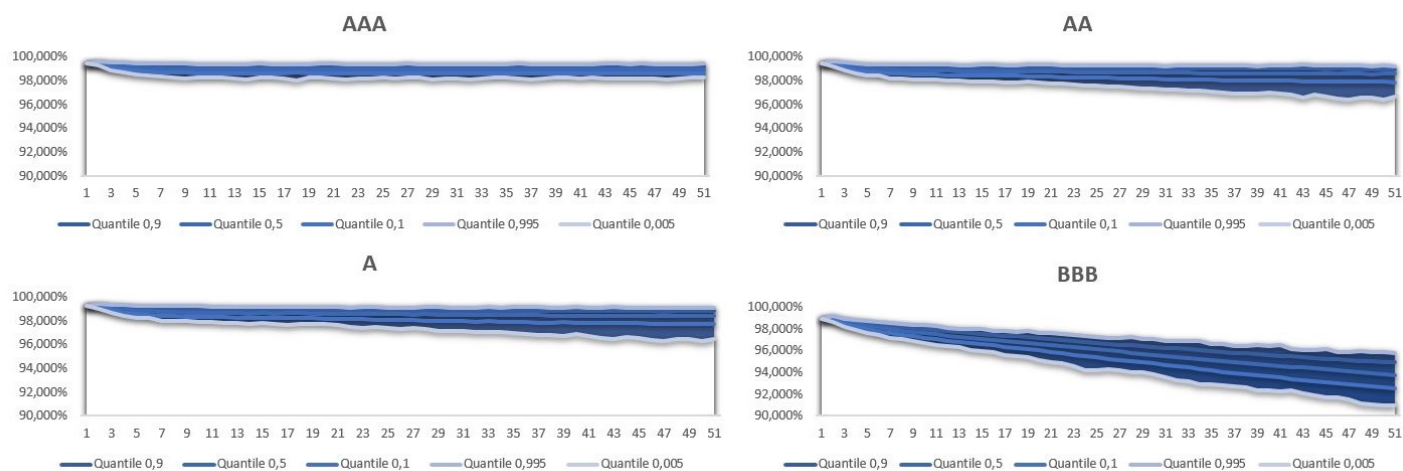


FIGURE III.24 – Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an des notations *Investment Grade*

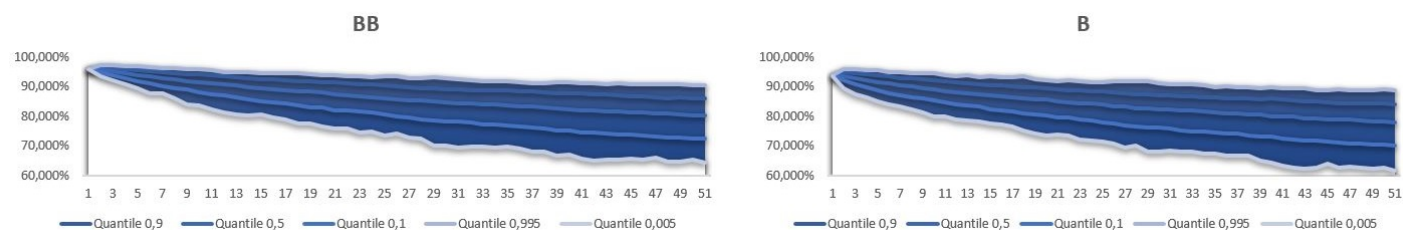


FIGURE III.25 – Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an des notations *High Yield*

Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté le générateur de scénarios économiques en place. Il permet de projeter les actions, l'immobilier, la gestion alternative et le taux sans risque. Une part importante du portefeuille étant les obligations d'entreprise nous avons implémenté une solution qui s'adapte avec le modèle en place. En effet, nous supposons que les probabilités de défauts et le taux sans risque sont indépendants. De cette manière, les deux projections peuvent être faites de manière séparé.

Nous développons la méthode pour projeter le prix du zéro coupon risqué avec et sans recouvrement à partir de la projection des probabilités de défaut ainsi que des taux de hasard. Ensuite, nous développons une procédure de calibration dépendant des instrument et du type de projection. Enfin nous projetons la probabilité de défaut et le hasard et vérifions qu'elles convergent bien vers leur valeur théorique et que le critère de martingalité est bien respecté.

Chapitre IV

Projection ALM

IV.1	Portefeuille de l'assureur	63
IV.1.1	Actif	63
IV.1.2	Passif	64
IV.2	Intégration du risque de crédit	65
IV.2.1	Risque neutralisation	65
IV.2.2	Valorisation	67
IV.2.3	Réinvestissements	69
IV.2.4	Validation	70
IV.3	Impacts	73
IV.3.1	<i>Best Estimate</i>	73
IV.3.2	Analyse du scénario central	74
IV.3.3	SCR	76

Le modèle ALM adopte une approche directe, c'est à dire que les flux d'actif et de passif sont projetés en même temps à chaque pas de temps. Les actifs sont projetés par le GSE de la manière décrite dans le chapitre précédent. Le passif évolue suivant les tables de rachat systématique, de la fonction de rachat dynamique, des frais, des arbitrages et de la mortalité. Les flux obtenus sont agrégés pour obtenir un résultat provisoire. Par la suite, en fonction de la politique de taux servie, le portefeuille d'actif et de passif est ré-établie pour être utilisé dans le pas de projection suivant.

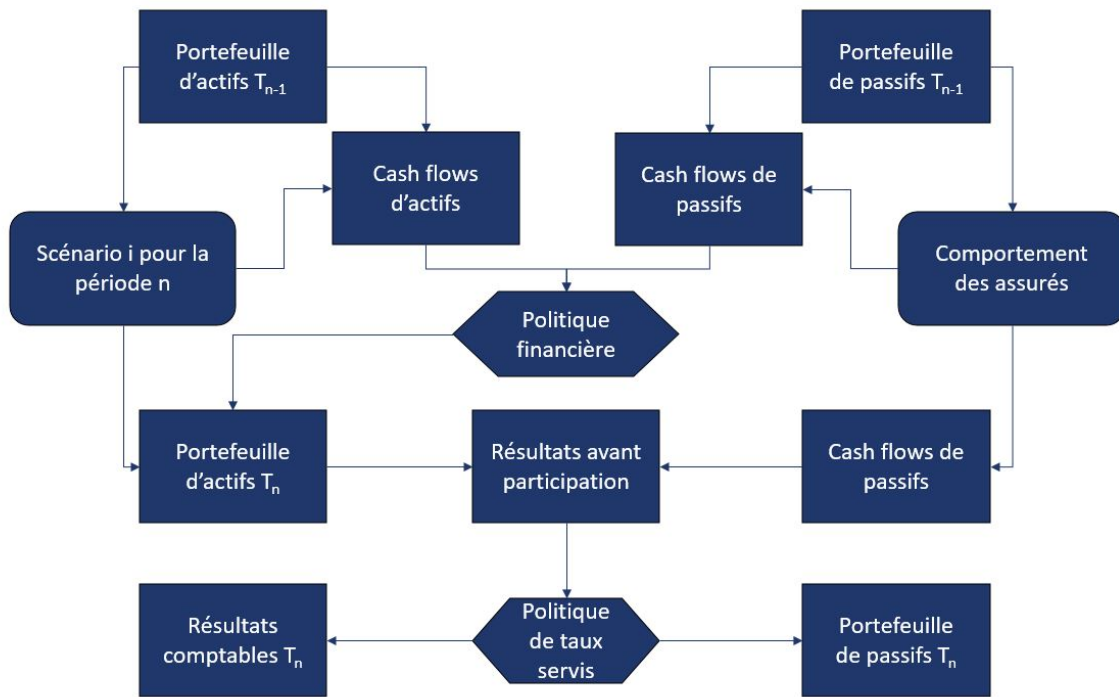


FIGURE IV.1 – Schéma de principe du fonctionnement du modèle ALM

Avant d'entrer plus dans les détails de la projection Actif/Passif, nous exposons plus en détail le portefeuille de l'assureur étudié.

IV.1 Portefeuille de l'assureur

IV.1.1 Actif

Dans cette section nous présentons succinctement les actifs qui viennent en représentation des engagements des contrats d'épargne en euro.

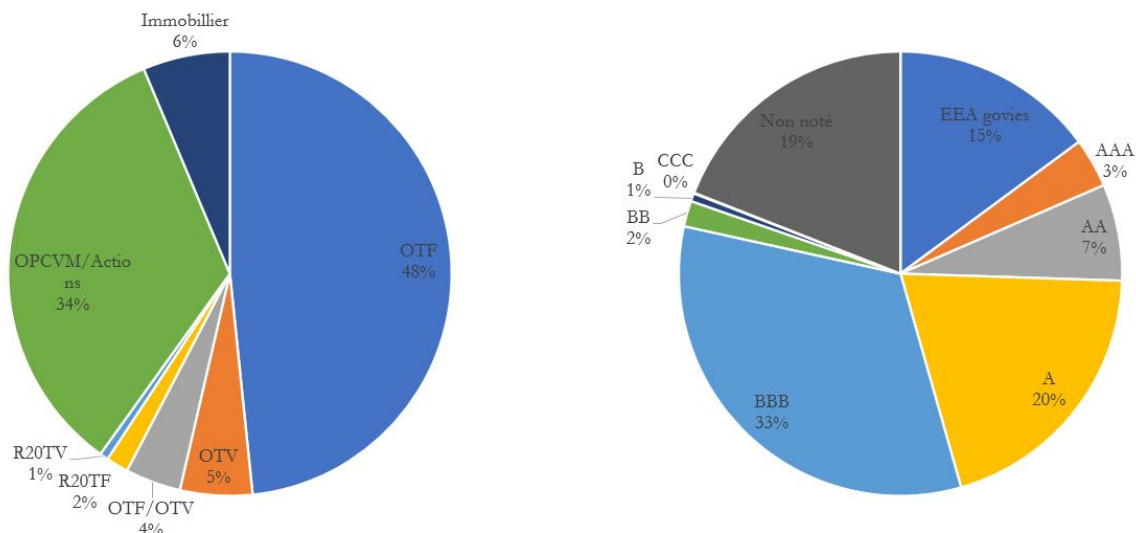


FIGURE IV.2 – Répartition par valeur de marché et par notation du portefeuille

De plus les plus values latentes représentent 17% de la valeur de marché pour les actifs obligataires et 14% de la valeur de valeur de marché pour le reste du portefeuille.

On rappelle que le GSE est calibré sur un panier d'obligation *corporate*. Par conséquent les *spread* simulés sont trop élevés pour être adapté à l'évaluation des *govies* de la zone européenne. De plus le choc de *spread* de la formule standard est nul pour ces titres. Ces éléments nous poussent à valoriser ces titres à l'aide des taux sans risques projetés par le G2++. De plus on observe sur le graphique I.4 que le choc appliqué aux titres de notation BBB et les titres non notés sont très similaires. Nous choisissons donc de valoriser les titres non notés à partir des prix projetés pour le BBB.

IV.1.2 Passif

Le passif de l'assureur est divisé en trois cantons. Le canton 529 représente l'actif générale. Le canton 467 est un canton contractuel. Le canton PEUR correspond au canton réglementaire lié à la vente de produits de retraite.

La grande majorité des produits d'épargne vendue est le contrat en euro. Contre une prime, l'assureur promet de revaloriser l'épargne au taux minimum garantie et de servir une éventuelle participation aux bénéfices correspondant à 90% du résultat technique et 85% du résultat financier.

On remarquera qu'en plus de la participation aux bénéfices réglementaire, les contrats souscrits proposent le versement d'une participation aux bénéfices contractuels. Dans notre cas la moyenne pondéré par les PMs des PBs contractuels est de plus de 96%.

En plus des provisions mathématiques, l'assureur a doté la PPE, respectivement pour 529, 467, et PEUR, à hauteur de 191M€, 40M€ et 1M€ ainsi que de la réserve de capitalisation à hauteur de 32M€, 11M€ et 0.1M€.

	529	467	PEUR	Total
PM en M€	4 546,99	702,65	53,22	5 302,85
PM UC en M€	1 366,25	17,94	12,71	1 396,89
Nombre de contrat	211556	10 410	11478	233444
Âge moyen pondérée par la PM	69,5	73	55,8	69,8
PB contractuelle moyen pondérée par la PM	96,08%	100,00%	89,72%	96,54%

FIGURE IV.3 – Caractéristiques du portefeuille assuré

IV.2 Intégration du risque de crédit

IV.2.1 Risque neutralisation

Les scénarios générés ont été calibrés à partir d'un panier représentatif du marché. Par conséquent, lorsque la valeur de marché des titres en portefeuille est calculée à l'aide de ces scénarios, il est nécessaire d'effectuer un ajustement pour tenir compte des caractères intrinsèques du titre, comme la séniorité ou le secteur économique. Nous appellerons cet ajustement *défaut* et viendra modifier la valeur du taux de coupon.

Dans notre formalisme, la valeur de marché d'une obligation soumise au risque de défaut est :

$$VM_{\text{Modèle}}(0, T) = \sum_{j=1}^T F \cdot (c + \text{défaut}) P_d(0, t_j) + F \cdot P_{\text{Corp}}(0, T) = VM_{\text{Marché}}(0, T)$$

où :

- F la valeur faciale
 - c le taux de coupon
 - $P(., .)$ le prix du zéro coupon sans risque tel que calculé par le modèle G2++
 - P_{Corp} le prix du zéro coupon avec risque de défaut et recouvrement à maturité
 - P_d le prix du zéro coupon avec risque de défaut sans recouvrement à maturité
- Pour risque neutraliser, il suffit de trouver *defaut* de manière à trouver :

$$VM_{\text{Modèle}}(0, T) = VM_{\text{Marché}}(0, T)$$

Aussi, en plus des prix des zéro coupon sans risque, les probabilités de défaut à la date de projection sont nécessaires. À la date de rédaction de ce mémoire, nous avons les résultats suivants :

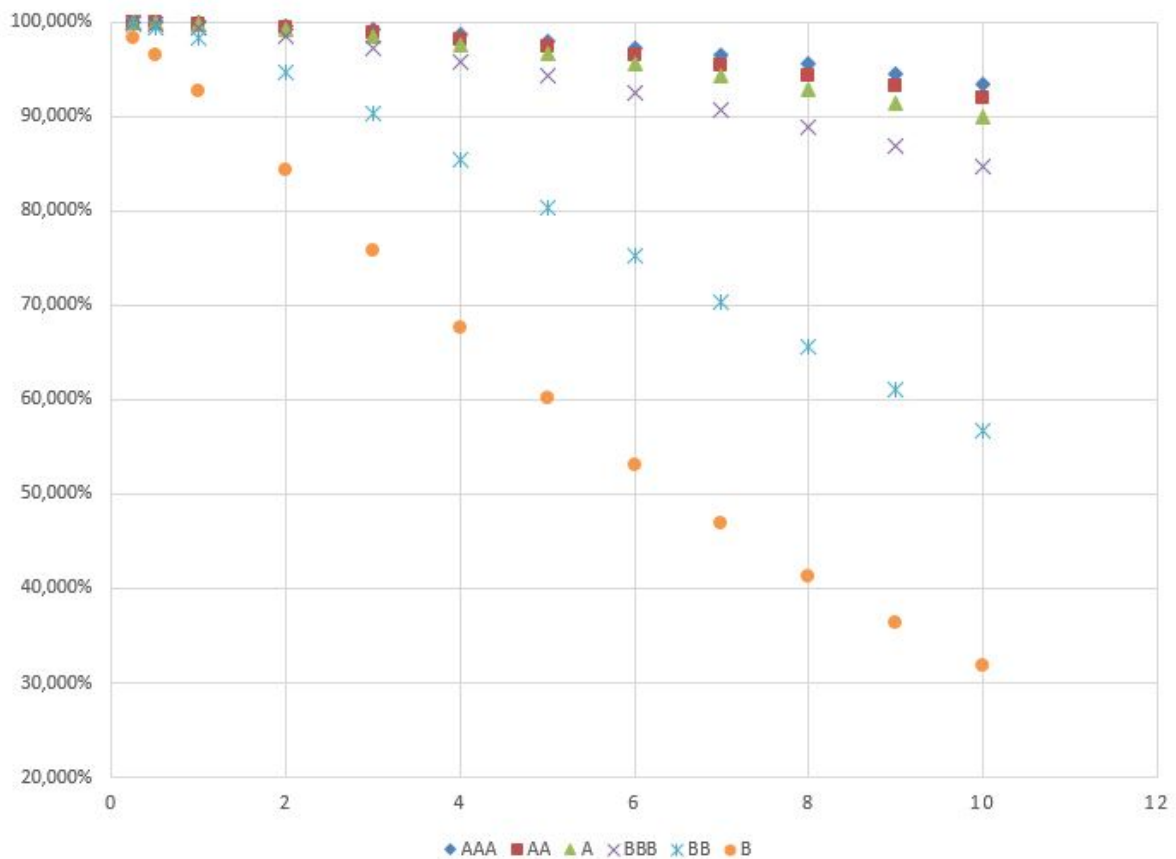
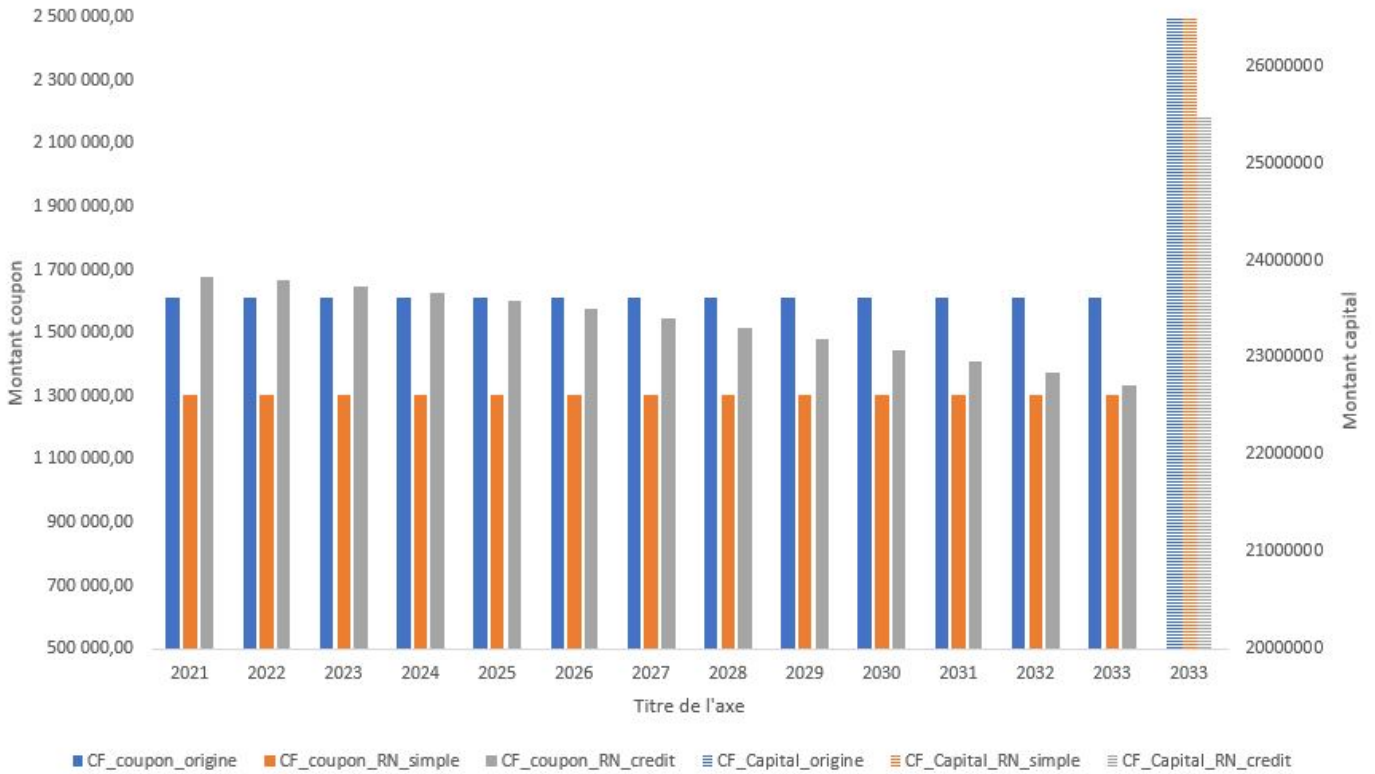


FIGURE IV.4 – Probabilités de défaut entrant en compte dans la risque neutralisation

En particulier, on peut remarquer que les probabilités de défaut sont plus élevés que les probabilités de défaut historiques présentés dans le chapitre II. Aussi, dans le cadre de l'univers risque neutre la prime de risque caractérisant l'aversion au risque est nulle. Pour la probabilité de défaut, cela se traduit par une sur-pondération des événements défavorables et conduit à une augmentation de la probabilité. Par conséquent la probabilité de défaut risque neutre est nettement supérieur à la probabilité historique.

Pour comparer la valorisation avant et après l'introduction du risque de crédit, on peut observer comment chaque *cash-flow* est modifié dans la figure suivante :


 FIGURE IV.5 – *Cash-flows* pris en compte dans le processus de risque neutralisation

CF coupon origine correspond aux *cash-flow* attendu avant la procédure de risque-neutralisation. *CF coupon simple* simple correspond aux *Cash-flow* obtenus avant l'introduction du risque de crédit. *CF coupon credit* correspond aux *Cash-flow* obtenus avec l'introduction du risque de crédit.

On remarque que les flux obtenus avec le modèle de crédit sont plus élevés en début de projection pour être ensuite rattrapé par la méthode d'origine.

On vérifie qu'après le processus de risque neutralisation que la valeur de marché en entré et en sortie sont égalet. Pour ce faire nous vérifions l'écart relatif de ces deux quantités. Dans notre cas, l'écart relatif moyen est de $2 \cdot 10^{-6}$, ce qui est acceptable.

IV.2.2 Valorisation

Par la suite il est nécessaire de valoriser notre portefeuille à chaque date prospective du calcul du *BE*. Nous rappelons la valeur de marché de l'obligation en tenant compte de l'ajustement initial.

$$P_{\text{Modèle}}(t, T) = \sum_{j=t+1}^T F \cdot (c + \text{default}) \cdot P_d(t, t_j) + F \cdot P_{\text{Corp}}(t, T)$$

En particulier pour une obligation de nominal 1€, on a suivant la notation :

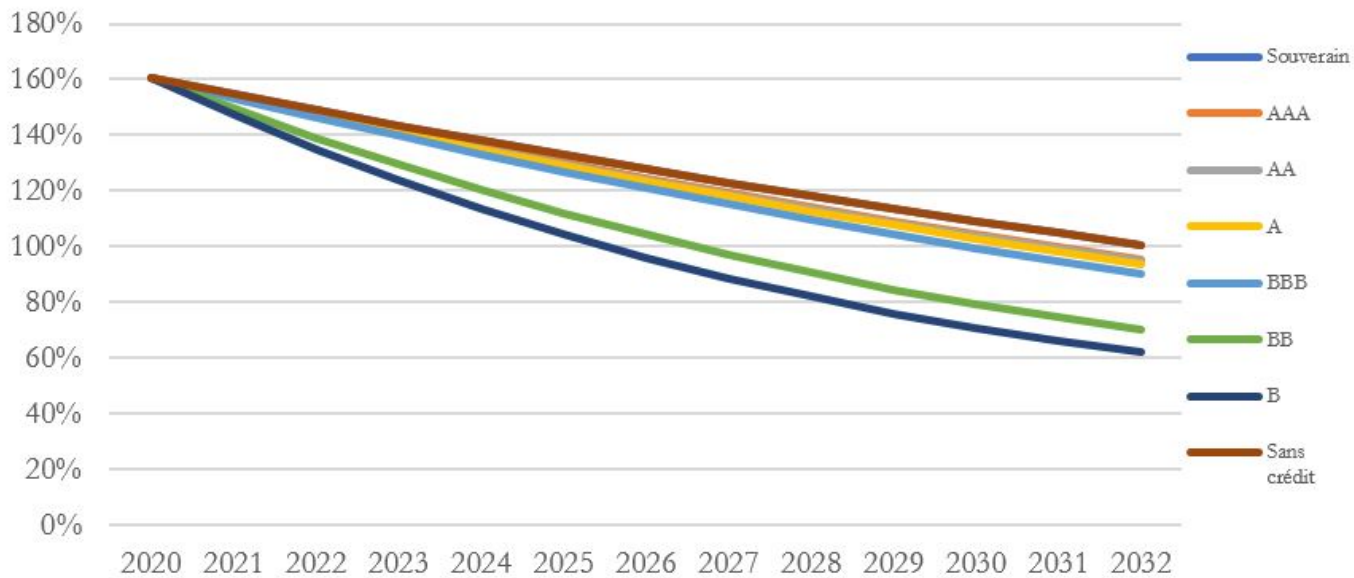


FIGURE IV.6 – Valeur de marché du titre en fonction de sa notation

La valeur de marché de l'actif diminue d'autant plus rapidement que la notation est élevée. En effet plus la notation se dégrade, plus les probabilités de défaut diminuent rapidement comme le montre le graphique de la sous-section précédente. Par conséquent, le titre sert des coupons plus élevés en début de projection, dégradant plus rapidement la valeur de marché.

Comme expliqué dans le chapitre précédent, le défaut est appliqué de manière proportionnelle. La quantité de défaut correspondante est le taux de hasard qui est la somme des défauts instantanés entre les dates où l'on souhaite connaître sa probabilité de survie. Dans cette optique à la place de constater un défaut à la date où il a lieu, le *Cash-flow* est modifié à la date de réception.

Par conséquent, pour un titre présent dans le portefeuille à la date t_a , à la date de réception du coupon t_c , nous recevons $c \cdot F \cdot \Lambda(t_a, t_c)$ et à la date de réception du nominal t_n , nous recevons $F \cdot (\alpha + LGD \cdot \Lambda(t_a, t_c))$

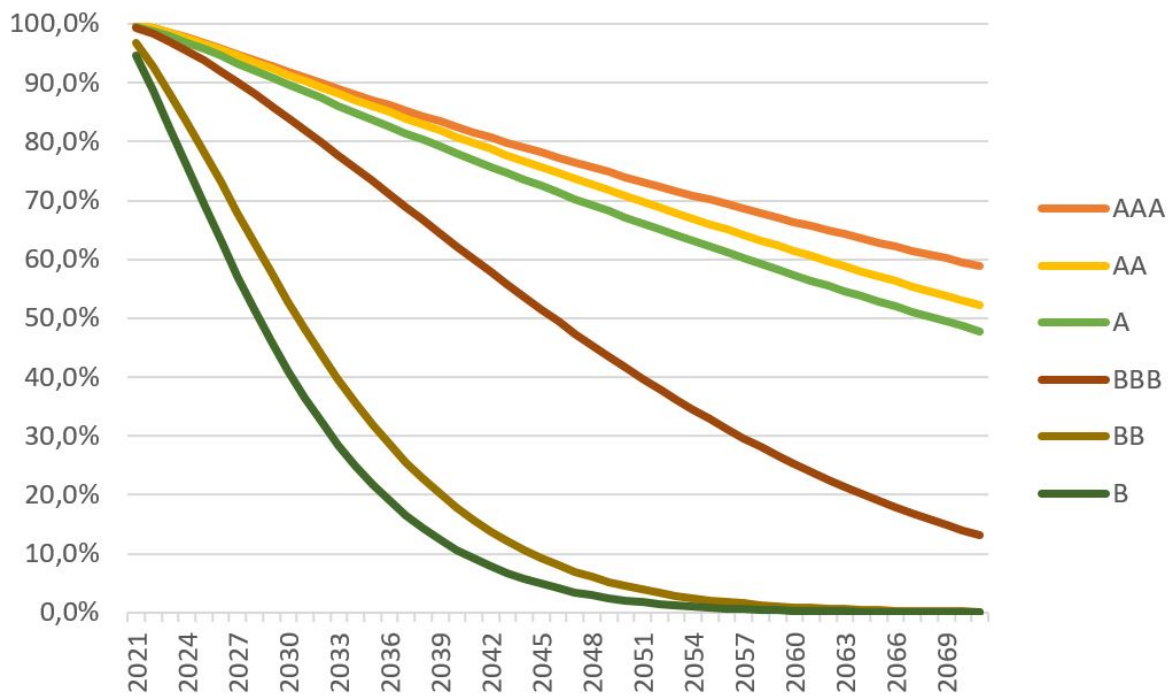


FIGURE IV.7 – Taux de hasard projeté

IV.2.3 Réinvestissements

Lorsque les liquidités du modèle le permettent, nous souhaitons qu'il investisse dans des obligations risqués. En particulier pour un titre acheté au pair de nominal 1 cela revient à ce que le taux de coupon respecte la relation suivante :

$$1 = c \sum_{j=a+1}^b P_d(t_a, t_j) + P_{corp}(t_a, T) \quad (C)$$

On en déduit le taux de coupon :

$$c = \frac{1 - P_{corp}(t_a, T)}{\sum_{j=a+1}^b P_d(t_a, t_j)}$$

En considérant l'environnement de marché au moment de la rédaction de ce mémoire, l'assureur choisi d'investir dans des titres notés BBB. Cette politique d'investissement est en accord avec son historique proche. Pour ces raisons nous choisissons de modéliser l'investissement dans les titres BBB.

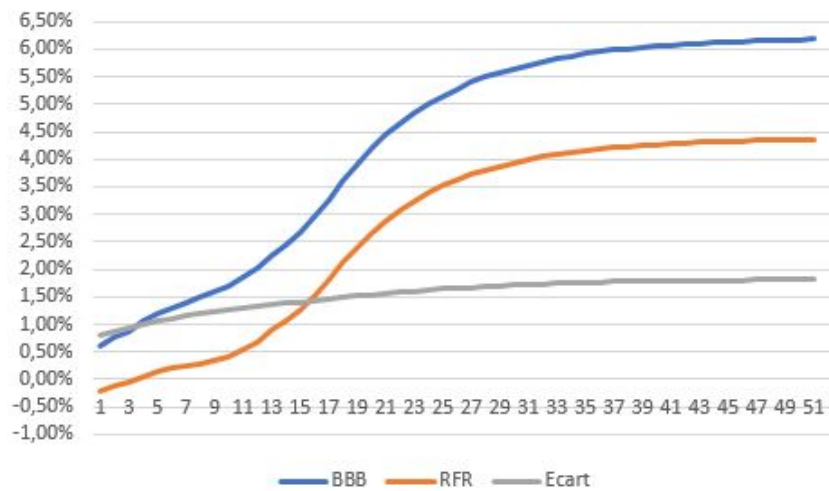


FIGURE IV.8 – Taux coupon titres investi en cours de projetés

Pour vérifier que le taux de coupon calculé par le modèle est correcte, nous vérifions que (C) est respecté à chaque pas de temps. C'est le cas à 10^{-4} en moyenne sur les scénarios.

IV.2.4 Validation

Vérification des *Cash-flows*

Une première vérification est effectuée pour vérifier que la variabilité des flux obligataires est bien pris en compte. On observe bien que dans le cas déterministe les flux de coupon sont constant au cours de la projection, alors que dans le cas du modèle avec intégration du risque de crédit nous avons un flux de coupon différent par scénario.

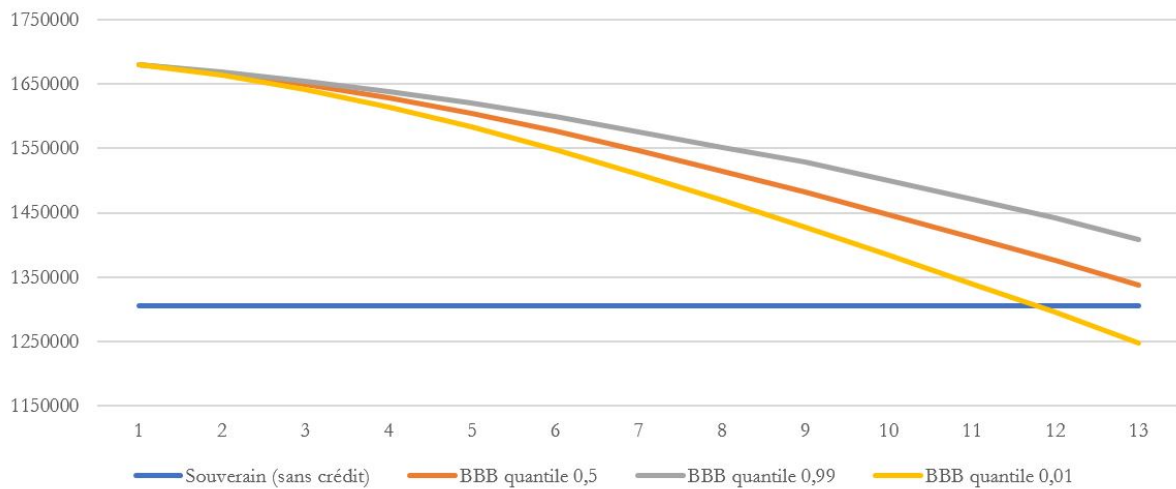


FIGURE IV.9 – Montant de coupon reçu pour un titre BBB

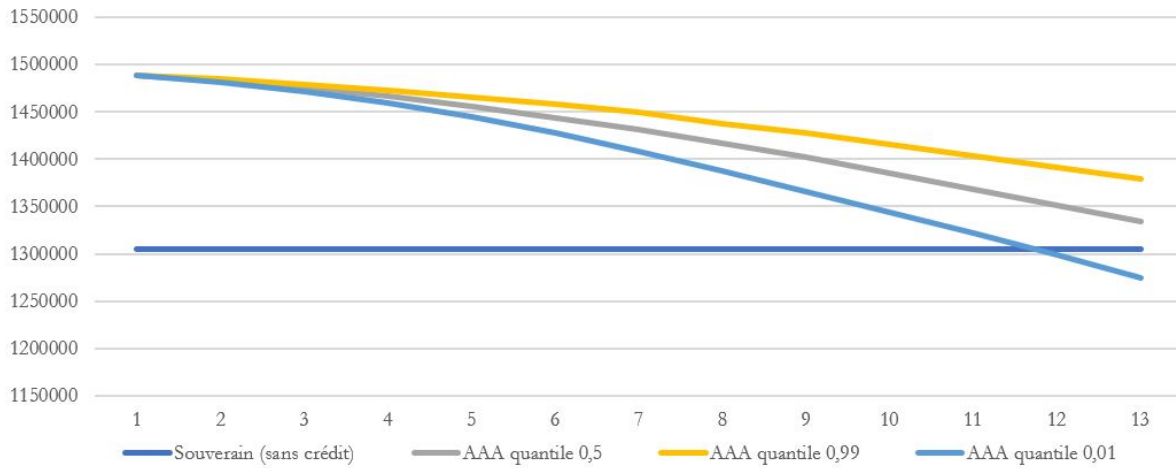


FIGURE IV.10 – Montant de coupon reçu pour un titre AAA

Martingalité

Nous souhaitons vérifier que le critère de martingalité est toujours respecté lorsque le prix d'un zéro coupon risqué est calculé dans le modèle de projection Actif Passif. Par conséquent les actifs valorisés par le modèle doivent respecter la relation suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t, T)X_T | \mathcal{F}_t] = X_t$$

En reprenant les notations introduites dans ce chapitre, la relation se traduit de la manière suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t) \cdot P_{\text{Modèle}}(t, T) | \mathcal{F}_t] = \sum_{j=1}^T F \cdot (c + \text{default}) \cdot P_d(0, t_j) + F \cdot P_{\text{Corp}}(0, T)$$

Dans le tableau suivant est présent le résultat du test pour les premiers pas de projection :

Notation	Pas	D*P_Modèle (PMo)	P_Manuel (PMa)	PMo-PMa <0,5%Mo
BBB	31/12/2020	1 000 001,09	999 977,10	VRAI
BB	31/12/2020	1 000 006,46	999 982,47	VRAI
B	31/12/2020	1 000 003,90	999 979,90	VRAI
AAA	31/12/2020	1 000 004,04	999 980,05	VRAI
AA	31/12/2020	1 000 003,95	999 979,96	VRAI
A	31/12/2020	1 000 005,73	999 981,74	VRAI
BBB	31/12/2021	994 846,19	995 321,75	VRAI
BB	31/12/2021	975 455,60	976 306,53	VRAI
B	31/12/2021	965 740,07	966 319,38	VRAI
AAA	31/12/2021	998 677,94	999 224,53	VRAI
AA	31/12/2021	998 435,58	998 977,76	VRAI
A	31/12/2021	997 648,82	998 176,95	VRAI
BBB	31/12/2023	985 066,00	986 098,18	VRAI
BB	31/12/2023	930 376,44	931 670,37	VRAI
B	31/12/2023	904 020,03	905 065,06	VRAI
AAA	31/12/2023	996 540,62	997 714,64	VRAI
AA	31/12/2023	995 810,74	996 975,71	VRAI
A	31/12/2023	993 434,43	994 582,25	VRAI
BBB	31/12/2025	975 804,47	977 081,53	VRAI
BB	31/12/2025	888 585,78	891 425,79	VRAI
B	31/12/2025	849 393,29	852 526,69	VRAI
AAA	31/12/2025	994 807,79	996 216,62	VRAI
AA	31/12/2025	993 574,45	994 991,09	VRAI
A	31/12/2025	989 625,70	991 031,89	VRAI

FIGURE IV.11 – Test de martingalité à partir des sorties du modèle ALM

Écart de convergence et test non régression

Dans un premier temps, un test de régression est effectué. Ce test consiste à vérifier que dans une situation où le bilan prudentiel ne doit pas être impacté par la modélisation du risque de crédit, il n'est effectivement pas impacté. Pour ce faire, Nous faisons un calcul du BE avec des probabilités de survie et des taux de hasards égaux à 1. Nous retrouvons effectivement le même BE au centime près qu'avec le modèle ne comportant pas les modifications.

Dans la section I.2.5, la définition de l'écart de convergence est rappelé. Aussi, nous

calculons l'écart de convergence avant et après l'intégration du risque de crédit. Celle-ci reste inférieur à 0.5%, c'est à dire inférieur aux bornes prescrites par l'ACPR.

IV.3 Impacts

La section précédente a exposé la manière dont les chroniques de *Cash-flow* des actifs obligataires avaient été modifiés par l'introduction du risque de crédit. Dans cette section, nous analysons les impacts de cette modélisation sur les indicateurs solvabilité II.

IV.3.1 *Best Estimate*

Dans le graphique ci-après est exposé le Best Estimate de l'assureur pour l'ensemble de ses cantons.

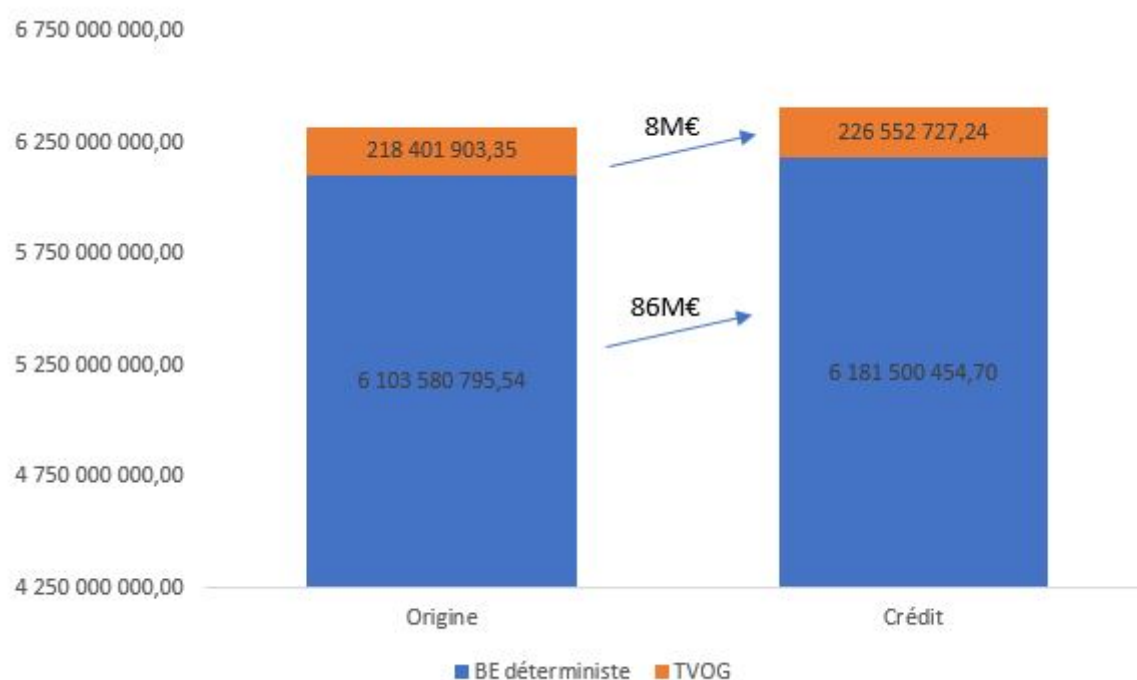


FIGURE IV.12 – Évolution du BE avec l'introduction du risque de crédit

La *TVOG* correspond à la valeur temps des options et garanties. Elle est obtenu par différence entre les *BE* stochastique et déterministe. On peut remarquer que la grande majorité de l'augmentation du *BE* provient de l'augmentation de la partie déterministe du *BE*. En d'autres termes, la modification du comportement moyen du bilan de l'assureur a un plus grand impact que l'introduction d'une variabilité dans les *spreads*.

IV.3.2 Analyse du scénario central

Dans le graphique suivant est présent la chronique des produits financiers à chaque date de calcul prospectif. Ainsi on observe que de la même manière que les *cash-flows* de la risque neutralisation, les produits financiers sont plus élevés en début de projection puis inférieure au moment du remboursement du titre. Dans notre cas, il faut attendre la treizième année pour que les produits financiers du modèle d'origine rejoignent le modèle avec crédit. Aussi, l'investissement dans de nouveaux actifs obligataires risqués, a pour conséquence de répéter le cycle d'augmentation des produits financiers puis de chute l'année où le nominal est reçu. De cette manière les produits financiers deviennent variables comme on peut le constater sur la figure IV.3.



FIGURE IV.13 – Produits financiers par année de projection

Lorsque les conditions lui permettent, l'assureur doit revaloriser les provisions mathématiques. La participation aux bénéfices contractuels étant très élevée une part importante revient à l'assuré. Cela se matérialise par une augmentation du taux servi et du niveau de PPE.

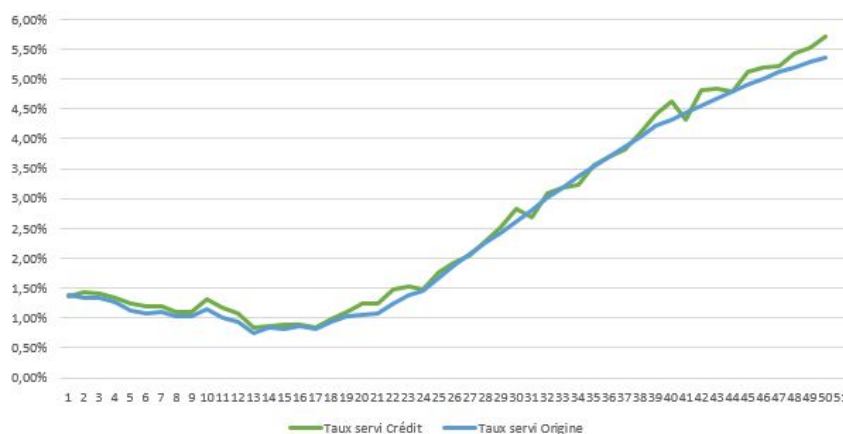


FIGURE IV.14 – Taux servi par année de projection

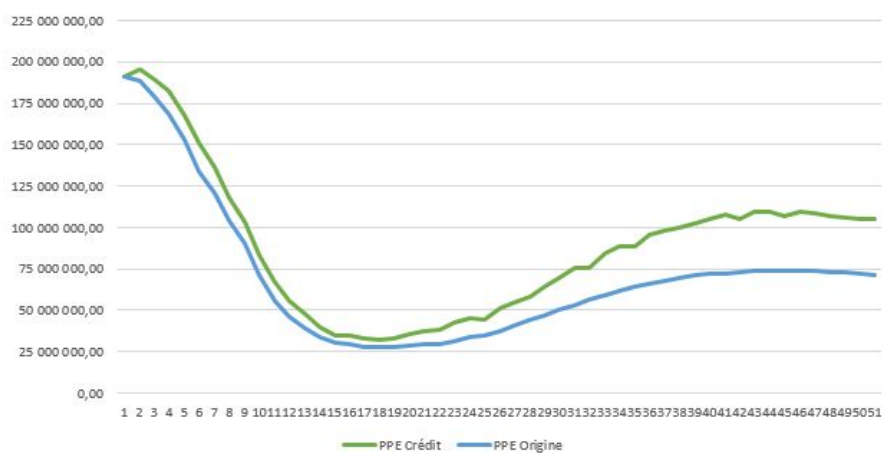


FIGURE IV.15 – Niveau de PPE par année de projection

Enfin, le taux servi restant suffisamment élevé tout au long de la projection, les rachats sont significativement proche de ceux projetés dans le modèle sans risque de crédit. En effet aucun rachat conjoncturel supplémentaire n'est déclenché.

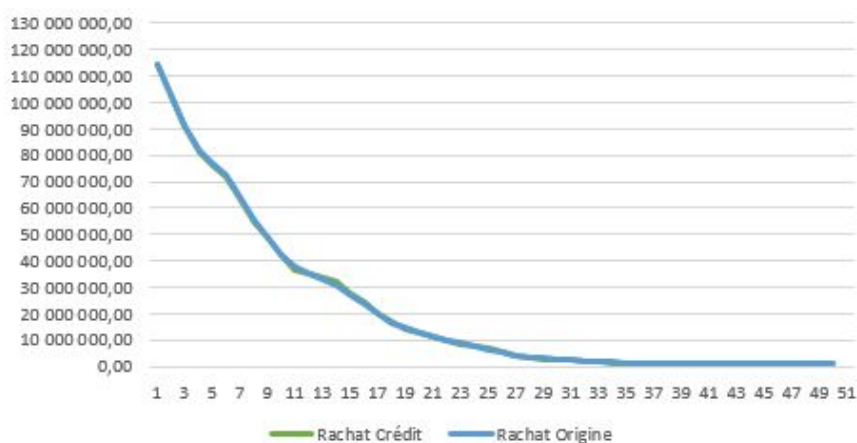


FIGURE IV.16 – Rachat par année de projection

En contrepartie, les résultats actualisés baissent avec l'intégration du risque de crédit. Cette diminution proviens notamment de la diminution de la réserve de capitalisation, et des plus values latentes obligataires.

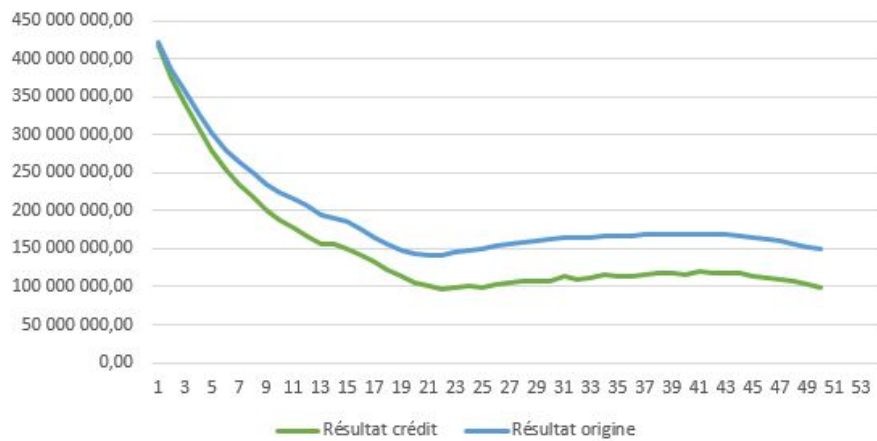


FIGURE IV.17 – Résultats actualisés par année de projection

IV.3.3 SCR

La figure suivante présente les écarts entre la NAV et la NAV choquée pour chaque sous-module de risque pour les modèles avec et sans risque de crédit.

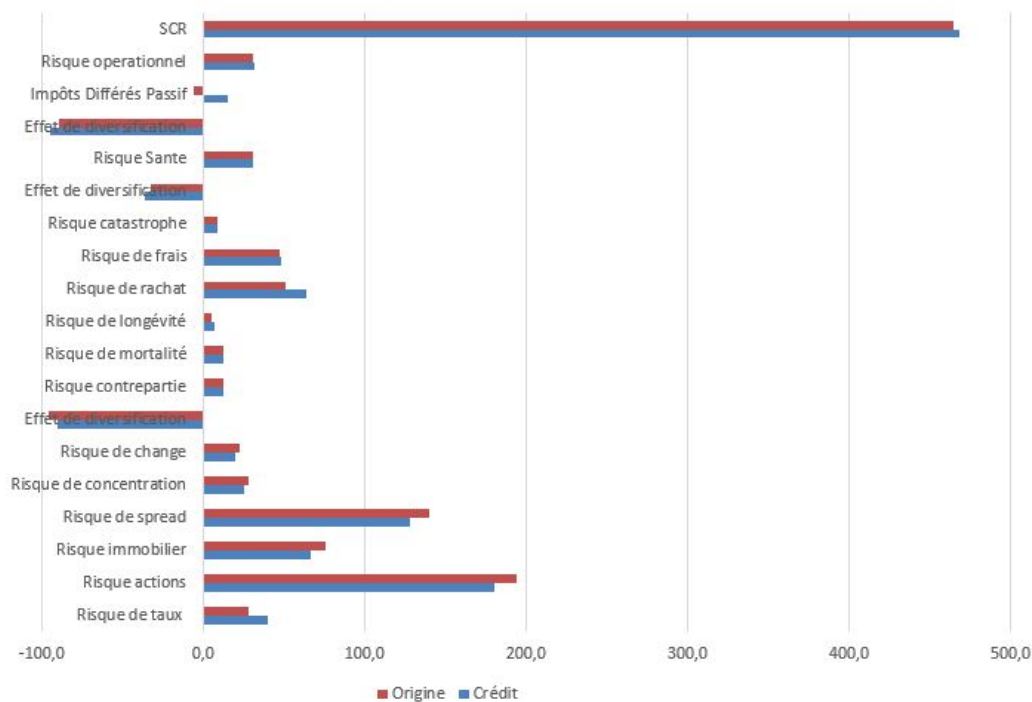


FIGURE IV.18 – Évolution du SCR par sous-module de risque

Globalement, l'implémentation n'a que peu d'impact sur le SCR. Ce dernier n'augmente que de 4M€. Cependant, le ratio diminue de 136,4% à 122%. Cette diminution

s'explique par une perte de 62M€ de fonds propre due à la forte augmentation des provisions techniques. On rappellera que la politique d'investissement modélisé est assez agressive. En effet le modèle continu à investir dans des titres BBB même lorsque le *spread* relatif à cet investissement est très élevé.

Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté le portefeuille d'actif et de passif de l'assureur. Nous avons détaillé les étapes de l'implémentation du risque de crédit dans le moteur de projection Actif Passif et nous avons observé la manière dont les *cash-flow* étaient réorganisés. Pour tenir compte de cette nouvelle classe d'actif dans les règles de gestion du modèle, nous avons modifié les règles de réinvestissements puis nous avons présenté les étapes qui ont permis de valider le modèle.

Enfin nous avons analysé les impacts de l'implémentation sur les indicateurs solvabilité II. Aussi, l'impact important du développement vient de la diminution des fonds propres résultat de l'augmentation du BE. La variabilité des *spreads* est bien prise en compte dans le calcul, en effet, la TVOG augmente par le biais de rachats conjoncturels. Cependant, la politique de taux servie de l'assureur permet de limiter ces rachats et donc l'augmentation de la TVOG.

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'intégration du *spread* stochastique dans le calcul du *Best Estimate*.

Dans un premier temps, la norme Solvabilité II a été introduites à travers la description du bilan prudentiel et de la méthode de calcul de ses principaux éléments. Ensuite, le risque de crédit a été défini et les concepts nécessaires au développement présentés. Nous nous sommes intéressé au GSE en place pour ensuite proposer une implémentation adaptée. En effet, nous supposons l'instant de défaut et les taux sans risque indépendant et nous permet d'effectuer les projections séparément. De plus nous introduisons le LMN en cascade qui est une extension du modèle LMN permettant d'assurer que les *spreads* générés sont cohérents.

Par la suite, nous détaillons une procédure de calibration et l'appliquons aux modèles LMN et LMN en cascade en utilisant des ZC risqués et des CDS et menons un ensemble de tests pour vérifier la cohérence des scénarios.

Enfin, nous introduisons les scénarios créés dans le modèle ALM en modifiant d'abord la risque neutralisation des actifs obligataires, puis en adaptant les modules de valorisations pour être capable de calculer un prix à chaque date de projection et enfin modifions les règles de gestion pour tenir compte de l'introduction d'une nouvelle classe d'actif.

Ces développements ont un impact important sur le ratio de solvabilité notamment dû fait de la nouvelle prise en compte du risque d'investir dans des titres risqués qui permet de se rapprocher de la réalité de la politique d'investissement de l'assureur.

Bibliographie

- [1] ACPR. Réglementation européenne : Solvabilité ii. 2019.
- [2] K. ARMEL Frédéric PLANCHET. Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le best-estimate épargne en €? 2018.
- [3] J.-M. HECART. La place du générateur de scénarios économiques dans les calculs de solvabilité en assurance-vie. 2016.
- [4] Institut des actuaires. Document d'orientation. les générateurs de scénarios économiques. 2018.
- [5] Aurélien Alfonsi Damiano Brigo. Credit default swaps calibration and option pricing with the ssrd stochastic intensity and interest-rate model. 2005.
- [6] Neis E. Longstaff F.A., Mithal S. Corporate yield spreads : Default risk or liquidity? new evidence from the credit default swap market. 2005.
- [7] ARMEL KAMAL. Implémentation du modèle lmn. 2021.
- [8] Laidi & All. Calibrating lmn model to compute best estimates in life insurance. 2015.
- [9] ACPR. Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques. 2020.
- [10] Emilie SABOURIN. Intégration du spread de crédit stochastique dans la modélisation alm d'un assureur vie. 2019.
- [11] F. Mercurio D. Brigo. Interest rate models - theory and practice - with smile, inflation and credit. 2016.
- [12] Robeco. Duration times spreads. 2007.
- [13] Planchet F. Armel K. Use of cir-type interest rate models to assess the economic value of participating savings contracts. 2020.
- [14] Rutkowski M. Jeanblanc M. Modelling of default risk : An overview. 2000.
- [15] A. Kamega F. Planchet, P.Théron. Scénarios économiques en assurance, Modélisation et simulation. ECONOMICA, 2009.

- [16] Wikipedia. en.wikipedia.org bond credit ratings. 2021.
- [17] Frédéric PLANCHET Kamal ARMEL. Utilisation de modèles de taux de type CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatifs? 2020.
- [18] Robeco. Duration times spread. 2007.
- [19] EIOPA. The underlying assumptions in the standard formula for the solvency capital requirement calculation. 2014.
- [20] L. COUSOT D. BRIGO. A comparison between the stochastic intensity SSRD model and the market model for CDS options pricing. 2004.
- [21] Institut des actuaires. Groupe de travail « best estimate liabilities vie ». 2016.

Table des figures

1	Calibration LMN en cascade sur des ZC risqués et des CDS	7
2	Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an du BBB	7
3	<i>Cash-flows</i> pris en compte lors de la risque neutralisation	8
4	Produits financiers par année de projection	8
I.1	Comparaison du bilan en norme Solvabilité I et Solvabilité II	12
I.2	Sous-modules de risque. Source EIOPA	14
I.3	Matrice d'agrégation du BSCR	14
I.4	Choc spread formule standard en fonction de la duration du titre risqué .	16
I.5	Principe projection <i>Best Estimate</i>	19
II.1	Courbe des taux sans risque de l' <i>EIOPA</i>	25
II.2	Notations long terme par agence de notation. Source : Wikipedia	26
II.3	Probabilités de survie historique (données 1990-2020) par maturité. Source Fitch Ratings	27
II.4	Matrice de transition de rating historique (données 1990-2020) Source Fitch Ratings. Note : <i>WD = withdrawn</i>	27
II.5	Historique des <i>spreads</i> OIS pour l'Iboxx AA à BBB. Source Bloomberg .	28
III.1	Schéma de principe du fonctionnement du GSE	32
III.2	Swaptions ATM par maturité et ténor	34
III.3	Paramètres obtenus à l'issue de la calibration	34
III.4	Écarts relatif prix modèle G2++ et prix de marché des swaptions	35
III.5	Martingalité des ZC 10 et son intervalle de confiance	35
III.6	Quantiles par année de projection du ZC 10 ans du modèle G2++	36
III.7	Quantiles par année de projection des rendements action	37
III.8	Quantiles par année de projection des rendements immobilier	37
III.9	Quantiles par année de projection des rendements gestion alternatif	38
III.10	Tickers Bloomberg barclays	47
III.11	Indice Bloomberg barclays	47
III.12	Taux ZC découpponné après interpolation	48
III.13	Comparaison iTraxx Main 10Y et iTraxx 10Y synthétique	49
III.14	Courbe des spread CDS synthétique par notation	49
III.15	Paramètres et erreur relative par méthode de calibration	52
III.16	Erreur absolue par méthode de calibration	52
III.17	Principe vérification point de départ	53

III.18	Validation calibration sur ZC risqué	56
III.19	Validation calibration sur CDS	56
III.20	Paramètres calibrés sur ZC risqués	57
III.21	Paramètres calibrés sur CDS	57
III.22	Convergence des quantités simulés vers leurs valeurs théorique pour le BBB à l'aide de la discrétisation d'Euler	58
III.23	Erreur de martingalité par maturité ténor	59
III.24	Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an des notations <i>Investment Grade</i>	60
III.25	Quantiles par année de projection des probabilités de défaut horizon 1 an des notations <i>High Yield</i>	60
IV.1	Schéma de principe du fonctionnement du modèle ALM	63
IV.2	Répartition par valeur de marché et par notation du portefeuille	64
IV.3	Caractéristiques du portefeuille assuré	65
IV.4	Probabilités de défaut entrant en compte dans la risque neutralisation	66
IV.5	<i>Cash-flows</i> pris en compte dans le processus de risque neutralisation	67
IV.6	Valeur de marché du titre en fonction de sa notation	68
IV.7	Taux de hasard projeté	69
IV.8	Taux coupon titres investi en cours de projetés	70
IV.9	Montant de coupon reçu pour un titre BBB	70
IV.10	Montant de coupon reçu pour un titre AAA	71
IV.11	Test de martingalité à partir des sorties du modèle ALM	72
IV.12	Évolution du BE avec l'introduction du risque de crédit	73
IV.13	Produits financiers par année de projection	74
IV.14	Taux servi par année de projection	74
IV.15	Niveau de PPE par année de projection	75
IV.16	Rachat par année de projection	75
IV.17	Résultats actualisés par année de projection	76
IV.18	Évolution du SCR par sous-module de risque	76

Modèle G2++

Nous détaillons dans cette annexe la valeur du prix d'une obligation zéro-coupon lorsque le taux court est modélisé par le modèle G2++. Nous reprenons les notations de la section II.1.1.

Le prix est donné par [11] :

$$P_{ZC}(t, T) = e^{\left(-\int_t^T \varphi(u)du - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}x(t) - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}y(t) + \frac{1}{2}V(t, T)\right)}$$

avec

$$V(t, T) = \text{Var} \left[\int_t^T r(u)du \mid \mathcal{F}_t \right]$$

En tenant compte de la courbe des taux de marché, on peut réécrire le prix en posant :

$$A(t, T) = \frac{P_{ZC}^{\text{Marche}}(0, T)}{P_{ZC}^{\text{Marche}}(0, t)} e^{-\frac{V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)}{2}}$$

et

$$B(z, t, T) = \frac{1 - e^{z(T-t)}}{z}$$

On obtient :

$$P_{ZC}(t, T) = A(t, T)e^{-B(a, t, T)x(t) - B(b, t, T)y(t)}$$

Pour plus d'informations sur ce modèle on peut se référer à [3] ou alors à [11] page 142. Pour la calibration du modèle nous utilisons des swaptions. Le prix de modèle est donné [11] page 158.

Lemme de Jeulin-Yor

Nous présentons ici une démonstration intuitive du lemme. On rappelle la définition de la tribu grossie des événements de défaut :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\{\tau \leq u\}, u \leq t)$$

Soit X un produit financier \mathcal{G}_∞ mesurable. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t] &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{F}_t \vee \sigma((\tau \leq u), u \leq t)] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{F}_t \vee \{\tau \geq t\}] \end{aligned}$$

Il est utile ici de considérer deux cas. Soit $\tau < t$, alors la quantité est nulle n'apporte aucune contribution au calcul de l'espérance, soit $\tau > t$. Par conséquent la seule information utile dans la tribu est si $\tau \geq t$.

On rappelle que pour un événement quelconque A on a : $\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{E(X \mathbf{1}_{\{A\}})}{\mathbb{Q}(A)}$ par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{F}_t \vee \{\tau \geq t\}] &= \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$