

Mémoire présenté le : 14 septembre 2021

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Sorelle Léonie MBANTA MFUPA

Titre Loi de mortalité des individus en état d'invalidité

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires Signature Entreprise :

Mme Rita EI-SOKHON
M. Guillaume BIESSY
M. Jean MODRY

Nom : Malakoff Humanis

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

M. Pierre THEROND

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Pierre MARTEL

Signature :

Invité :

Nom :


Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

La couverture du risque invalidité par l'assureur se décompose en deux parties notamment la provision pour rente d'invalidité et la provision de maintien de la garantie décès. Le calcul de cette dernière fait appel à l'utilisation d'une table de mortalité. Ce mémoire s'intéresse principalement à la mortalité des individus en invalidité du groupe Malakoff Humanis. Une bonne appréciation de ce risque constitue un élément-clé au pilotage.

Le contenu présenté ci-dessous se décline en trois grandes parties. La première partie de ce mémoire contient une présentation globale de la prévoyance en France et son fonctionnement. Dans la seconde partie, on rappelle les fondamentaux sur la théorie des modèles de durée pour élaborer une table de mortalité notamment les estimateurs de taux bruts et les méthodes d'ajustement ou de lissage des taux bruts. La dernière partie quant à elle permet de mettre en application les différentes étapes pour l'élaboration de la table de mortalité et d'avoir une comparaison chiffrée entre la table d'expérience et la table utilisée en inventaire (BCAC).

Différentes approches ont été implémentées pour mettre en oeuvre une table de mortalité à doubles entrées. Dans la première approche, il était question dans un premier temps, de construire une table de mortalité similaire à la TD 88-90. Pour cela, les taux bruts de mortalité ont été calculés en utilisant deux estimateurs (Hoem et Kaplan-Meier) conduisant à des résultats similaires. Différentes méthodes de lissage ont été explorées notamment les modèles de Makeham, de Thatcher et de Whittaker-Henderson. Le modèle de Makeham a été retenu pour ses différentes performances statistiques (test de khi-deux, test de fidélité, test de régularité ...) et la possibilité d'avoir une expression analytique de la courbe lissée (idéal pour extrapoler le lissage aux âges peu représentatif). Une comparaison graphique entre la table d'expérience et la TD 88-90 montre une surmortalité à certains tranches d'âge et ancienneté. Dans un second temps, il était question de reconstituer une table à deux entrées à l'aide des coefficients de surmortalité obtenues par tranche d'âge et tranche d'ancienneté après optimisation.

La deuxième approche consistait quant à elle à calculer les taux bruts de mortalité par âge d'entrée et ancienneté en invalidité. Par la suite, la méthode de Whittaker-Henderson a été utilisée pour uniformiser les irrégularités présentes sur les taux bruts.

La difficulté présente dans l'estimation des paramètres optimaux de lissage de whittaker-Henderson nous a conduit à varier les paramètres les uns après les autres et tester les performances des différents modèles au travers des tests statistiques.

Un backtesting a été effectué entre les deux tables pour choisir la table la mieux adaptée aux données. Il a permis de retenir la table qui se rapproche le plus aux réalisations et d'évaluer l'impact du changement de table de mortalité dans le cadre de l'inventaire.

Mots clés : estimateur de Kaplan-Meier, estimateur de Hoem, modèle de Whittaker-Henderson, Backtesting, modèle de Thatcher, modèle de Makeham.

Abstract

Disability risk coverage is broken down into two parts, namely the provision for disability annuities and the provision for the continuation of the death benefit. The calculation of the latter requires the use of a mortality table. This memorandum focuses on the mortality of disabled individuals in the Malakoff Humanis group. A good assessment of this risk is a key element in management.

Within the framework of the inventory, the mortality table proposed by the BCAC is the one used. We will develop a mortality table based on the portfolio data. A comparison between this table and the BCAC table will be important in order to verify the adequacy of its use to cover the mortality risk of invalids.

The objective of this thesis is to verify the adequacy of the BCAC mortality table to cover the risk of disability mortality. To do so, we constructed a mortality table from our data that reflects the risk present in our portfolio.

The content presented below is divided into three main parts. The first part of this paper contains a global presentation of the pension system in France and its functioning. In the second part, we recall the fundamentals on the theory of the duration models to elaborate a mortality table in particular the estimators of gross rates and the methods of adjustment or smoothing of the gross rates. The last part allows to apply the various stages for the development of the mortality table and to have a comparison between the experience table and the table used in inventory (BCAC).

Different approaches were implemented to implement a double entry mortality table. In the first approach, it was initially a question of building a mortality table similar to the TD 88-90. For this, crude mortality rates were calculated using two estimators (Hoem and Kaplan-Meier) leading to similar results. Different smoothing methods were explored, including the Makeham, Thatcher and Whittaker-Henderson models. The Makeham model was chosen for its different performances (fidelity test, regularity test...) and the possibility to have an analytical expression of the smoothed curve (ideal to extrapolate the smoothing to unrepresentative ages). A graphical comparison between the experience table and the TD 88-90 shows an overmortality at certain age groups and seniority. In a second step, we reconstructed a two-entry table using the coefficients of excess mortality obtained by age group and seniority group after optimi-

zation.

The second approach consisted in calculating the crude mortality rates by age of entry and disability seniority. The Whittaker-Henderson method was then used to standardize the irregularities in the crude rates. The difficulty in estimating the optimal parameters for Whittaker-Henderson smoothing led to varying the parameters one after the other and testing the performance of the different models through statistical tests.

A backtesting was performed between the two tables to choose the table best adapted to the data. The two tables obtained are conservative and allow us to obtain results that are not very far from reality. This backtesting made it possible to retain the table which is closer to the realizations and to evaluate the impact of the change of mortality table within the framework of the inventory.

Keywords : Kaplan-Meier estimator, Hoem estimator, Whittaker-Henderson model, Backtesting, Thatcher model, Makeham model.

Remerciements

J'adresse tout d'abord mes remerciements à l'ensemble de mon équipe, qui m'a accueilli dans une ambiance de travail, qui a su se rendre disponible pour répondre à mes interrogations et pour les conseils qu'ils m'ont donnée.

Je tiens vivement à remercier mon manager, Pierre MARTEL ainsi que mes collègues Touhaut SILUE et Etienne PASSE pour m'avoir formée et encadrée durant cette alternance et dans la rédaction de ce mémoire.

Je souhaiterais aussi remercier les enseignants de l'ISFA pour la transmission de leurs connaissances, leurs conseils, tout particulièrement M. Alexis BIENVENU, mon encadreur académique, sans toutefois oublier de remercier M. PLANCHET et M. LOISEL pour la bonne coordination de ce master.

Je tiens à dédier ce travail à toute ma famille, particulièrement à mes parents M. MFUPA Roger et Mme MFUPA Léonie. Je les remercie pour avoir pris le devoir de parents au sérieux. Grâce à leur amour, leur présence, leur réconfort et ceci malgré la distance qui nous sépare, ils ont fait de moi la femme que je suis devenue.

Enfin, je remercie les personnes qui m'ont accompagnée et soutenue tout au long de mon parcours académique et professionnel notamment Manuella MFUPA, Stephane KAPAWA sans toutefois oublier Mélissa WETIE.

Table des matières

Introduction	1
I Contexte de l'étude	3
1 Présentation de l'arrêt de travail	5
1.1 Le marché de la prévoyance en France	5
1.2 Les intervenants d'un contrat de prévoyance	6
1.3 Les acteurs du marché	7
1.4 Les garanties prévues dans un contrat de prévoyance	7
1.5 L'arrêt de travail	8
1.5.1 L'incapacité	8
1.5.2 L'invalidité	9
1.5.3 Maintien du salaire	10
1.6 Le Maintien garantie décès	11
2 La réglementation en vigueur	13
2.1 Convention Collective Nationale de retraite et de prévoyance des Cadres du 14 mars 1947	13
2.2 La loi EVIN : 31 décembre 1989 (n°89-1009)	14
2.3 La loi du 8 août 1994 (n° 94-678)	15
2.4 L'arrêté du 28 mars 1996 (article A331-22)	16
2.5 Loi du 17 juillet 2001	17
3 Provisions techniques	19

3.1	Provisions pour sinistres à payer	19
3.2	Provision pour risque croissant	21
3.3	La provision Maintien Garantie Décès (PMDC)	21
II	Elaboration de la table de mortalité	23
4	Modèles de durée	25
4.1	Principes et notations	25
4.1.1	La fonction de repartition et de survie	25
4.1.2	Fonction de hasard	26
4.1.3	Censures	26
4.1.4	Troncatures	26
4.2	Les types de tables de mortalité	27
4.2.1	Les tables règlementaires	27
4.2.2	Les tables d'expérience	27
4.3	Estimation des taux bruts de mortalité	28
4.3.1	Estimateur de HOEM	28
4.3.2	Estimateur de Kaplan-Meier	30
4.4	Ajustements des taux bruts de mortalité	31
4.4.1	Ajustement de Makeham	31
4.4.2	Ajustement de Thatcher	32
4.4.3	Le modèle de Brass	33
4.4.4	Le modèle de Whittaker-Henderson	33
III	Application	37
5	Les données	39
5.1	Présentation des données	39
5.1.1	Base de prestations invalidité	39
5.1.2	Base des prestations de décès	40
5.1.3	Informations requises pour l'étude	40

5.2	Le traitement des données	41
5.3	La période d’observation	41
5.4	Statistiques descriptives	42
5.4.1	Statistiques démographiques	42
5.4.2	Effet de l’ancienneté dans l’arrêt de travail	44
6	Présentation de l’étude	47
6.1	Mise en place de la table d’expérience	47
6.1.1	Approche 1 : Modèle basé sur la variable âge	48
6.1.2	Approche 2 : Modèle basé sur les variables âge et ancienneté	56
6.2	Validation des approches : Backtesting	65
6.2.1	Formule analytique du nombre de décès	65
6.2.2	Comparaison du ratio "sorties observées / sorties théoriques"	66
6.2.3	Comparaison du ratio "charge réelle/charge prévisionnelle"	66
6.3	Impact du changement de table sur les provisions	67
6.3.1	Comparaison du nombre de décès estimé	68
6.3.2	Comparaison des provisions de maintien de la garantie décès	68
6.4	Impact du changement de table sur le SCR vie	69
6.4.1	Qu’est-ce que Solvabilité II?	69
6.4.2	Le contexte historique	69
6.4.3	Les piliers fondamentaux	70
6.4.4	Etudes quantitatives d’impact (QIS)	71
6.4.5	Le SCR	71
	Conclusion	77
A	Calcul de la provision de maintien de la garantie décès	81
A.1	Notations	81
A.2	Méthode de calcul proposée par le BCAC	82
A.2.1	Expression des provisions en fonction du capital sous risque	82
A.2.2	Expression des provisions en fonction du capital sous risque et des barèmes de provisionnement du risque arret de travail	83

A.2.3	Provisionnement de la prime exonérée	83
A.3	Provision de maintien de la garantie décès et capitaux constitutifs	83
A.3.1	Cas n°1 : Zone " Montant de la couverture décès" est renseignée	84
A.3.2	Cas n°2 : Zone " Montant de la couverture décès" n'est pas renseigné	84
A.3.3	Capital décès	84
A.3.4	Capital constitutif des rentes	86
B	Traitements des données	91
C	Critère de Cochran en dimension 2	93
D	Taux bruts et lissage aux âges	95
D.1	Taux bruts dans la plage choisie	95
D.2	Présentation du lissage retenu	96
E	Table obtenue dans la première approche	97
F	Table obtenue dans la deuxième approche	101

Table des figures

1.1	Cotisation en assurance prévoyance en 2018	6
5.1	Répartition de la population par date de naissance	43
5.2	Temps passé dans la période d'observation (en années)	43
5.3	Taux de mortalité par année	43
5.4	Répartition du nombre d'individus par tranche d'âge à la sortie de l'étude et ancienneté en invalidité	45
5.5	Répartition des décès par tranche d'âge au décès et ancienneté en invalidité	45
5.6	Taux de mortalité par tranche d'âge au décès et ancienneté en invalidité .	45
6.1	Taux bruts de mortalité	48
6.2	Résultats du critère de Cochran	49
6.3	Lissage de Makeham	50
6.4	Régression linéaire de $\ln q_{x+1} - q_x $	51
6.5	Lissage de Thatcher	51
6.6	Lissage de Whittaker Henderson	52
6.7	Distance calculée entre les taux bruts et les taux lissés	53
6.8	Régularité des taux lissés	53
6.9	Comparaison des taux lissés	54
6.10	Coefficients de surmortalité	55
6.11	Taux bruts de mortalité par âge d'entrée et ancienneté	57
6.12	Lissage 1	58
6.13	Lissage 2	58
6.14	Lissage 3	58

6.15 Lissage 4	58
6.16 Lissage 5	59
6.17 Lissage 6	59
6.18 Lissage 7	59
6.19 Lissage 8	59
6.20 Test de Khi-deux	60
6.21 Lissage 9	61
6.22 Surface 9	61
6.23 Lissage 9	62
6.24 Surface 9	62
6.25 Lissage 11	62
6.26 Surface 11	62
6.27 Lissage 12	63
6.28 Surface 12	63
6.29 Test Khi-deux	63
6.30 Autres critères de validation	64
6.31 comparaison du nombre de décès en 2020	66
6.32 comparaison du ratio charge réelle/ charge prévisionnelle en 2020	67
6.33 Estimation du nombre de décès	68
6.34 PMGDC calculées avec la table d'expérience VS PMGDC calculées avec la table du BCAC	68
6.35 Matrice de corrélation du risque souscription vie	74
6.36 SCR Life en 2020	75
B.1 Schéma récapitulant le traitement des données	91
C.1 Résultat du critère de cochrane	93
D.1 Taux bruts de mortalité sur la plage choisie	95
D.2 Taux bruts de mortalité sur la plage choisie	96

Introduction

L'assurance est l'un des secteurs ayant subi de nombreux changements réglementaires depuis sa création. Ces changements plus ou moins lourds peuvent pousser les assureurs à modifier leurs procédés et notamment ceux liés à quantification des risques encourus (révision des tables de mortalité, taux technique...). C'est ainsi que la mise en vigueur de la loi Evin a permis de protéger les assurés ayant des contrats en prévoyance collective, en incluant une clause de maintien de la garantie décès en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité dans la couverture du risque décès sur laquelle la résiliation ou le non-renouvellement est sans effet. Cette loi fait donc naître un nouvel engagement (le maintien de la garantie décès) qui doit être à tout moment couvert par des provisions mathématiques. Le calcul de ces dernières fait appel à l'utilisation d'une table de mortalité.

La réglementation actuelle demande aux assureurs d'utiliser des tables de mortalité « prudentes » (Art. A335-1 C. Ass.). La loi n'impose pas de table mais le BCAC propose des tables de mortalités pour les personnes en arrêt de travail, régulièrement utilisées par les assureurs. L'hypothèse de mortalité se révèle être un paramètre essentiel dans le calcul des provisions de maintien de la garantie décès. Une bonne appréciation du niveau de mortalité est donc primordial pour piloter au mieux ce risque.

C'est ainsi que nous pouvons nous poser la question suivante : la table utilisée pour le provisionnement (BCAC) de ce risque dans le cadre de l'inventaire est-elle adaptée à notre portefeuille? Répondre à cette problématique en utilisant les données du portefeuille des invalides de Malakoff Humanis constitue l'objectif de ce mémoire.

La première partie aura pour objectif de contextualiser l'ensemble des travaux qui seront effectués. On présentera le marché de la prévoyance en France ainsi que le fonctionnement des garanties liées à l'arrêt de travail.

La seconde partie reviendra sur la théorie des modèles de durée. On exposera les avantages et les limites des estimateurs les plus utilisés dans la construction des tables d'expérience.

La troisième partie détaillera la construction des tables de mortalité d'expérience. Dans un premier temps, On présentera les données utilisées ainsi que les différents

retraitements effectués sur ces dernières. Deux approches seront explorés par la suite. La première approche s'appuyera sur un modèle paramétrique basé sur le lissage de Makeham. La seconde approche quant à elle se veut non paramétrique et s'appuyera sur le lissage de Whittaker Henderson. Une comparaison finalement des tables d'expérience entre elles mais également avec la table réglementaire sera faite et on reviendra en détail sur l'impact qu'aura le changement de la table de mortalité sur le calcul des provisions de maintien de la garantie décès et le SCR Life.

Première partie
Contexte de l'étude

Chapitre 1

Présentation de l'arrêt de travail

1.1 Le marché de la prévoyance en France

La prévoyance représente un marché à fort potentiel mais qui comporte également des risques importants. Il est composé de la prévoyance collective, individuelle et de l'assurance emprunteur réparties globalement en parts égales.

En 2018, le marché de la prévoyance a augmenté de 3,2 %, à 22,1 Mds€ de cotisations¹. Cette hausse des cotisations est portée par les contrats individuels (à 9,9 Md€ en 2018, soit +4,5 %) tandis que pour les contrats collectifs, la croissance est plus contenue (à 12,1 Md€, soit +2,1 %). Les contrats collectifs restent prépondérants et représentent 55 % des cotisations.

En France, trois familles d'assureurs proposent des garanties de prévoyance : les institutions de prévoyance régies par le code de la sécurité sociale, les sociétés d'assurance régies par le code des assurances et les mutuelles régies par le code de la mutualité. Ces familles n'ont pas les mêmes domaines d'intervention. Les instituts de prévoyance gèrent principalement les contrats de prévoyance collectifs et couvrent les risques de chômage, liés aux accidents et à la santé. Contrairement aux instituts de prévoyance, les assurances couvrent à la fois les contrats collectifs et individuels de prévoyance. Les mutuelles quant à elles couvrent principalement les frais de santé.

En 2018, La croissance des cotisations est dynamique pour les mutuelles et les sociétés d'assurance (respectivement +5,5 % et +4,2 %). Cette croissance peut s'expliquer par l'appétit de nouveaux entrants, l'augmentation des cotisations et la présence des contrats labellisés. Pour les institutions de prévoyance, les cotisations restent quasi stables (+0,1 %). Les parts de marché (individuel et collectif) s'élèvent à 65,2 % pour

1. ffa-assurance.fr/presse/communiqué-de-presse/le-marché-de-la-santé-et-de-la-prévoyance-progresse-de-28-en-2018

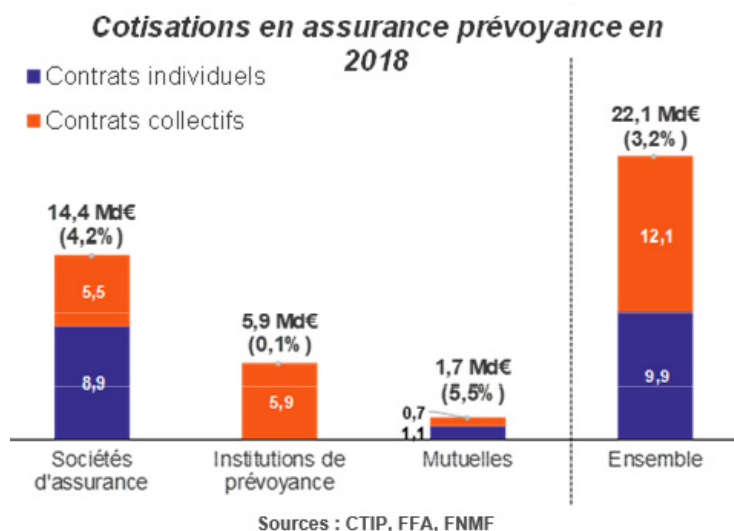


FIGURE 1.1 – Cotisation en assurance prévoyance en 2018

les sociétés d'assurance, 26,9 % pour les institutions de prévoyance et 7,9 % pour les mutuelles

1.2 Les intervenants d'un contrat de prévoyance

Les intervenants d'un contrat collectif sont :

- Le souscripteur : le souscripteur est la personne morale ou physique qui conclut le contrat. Il s'agit généralement d'une entreprise, d'une association ou d'un organisme professionnel ;
- Les adhérents : les adhérents constituent le groupe de personnes assurables. Ils doivent avoir un lien de même nature avec le souscripteur (par exemple les salariés d'une entreprise ou les membres d'une association) ;
- L'assuré : l'assuré est la personne physique sur la tête de laquelle repose le risque. Il peut être distinct de l'adhérent (par exemple les ayants droits d'un adhérent en assurance maladie) ;
- Les bénéficiaires : les bénéficiaires sont les personnes contractuellement désignées à percevoir la prestation d'assurance. Ils ne se confondent pas nécessairement à l'assuré ou l'adhérent comme par exemple les bénéficiaires d'une prestation en cas de décès de l'assuré.

1.3 Les acteurs du marché

Le régime de protection sociale français se compose de deux parties :

- Le régime général de la Sécurité sociale qui assure l'essentiel du financement des garanties de prévoyance. Créée en 1945, la sécurité sociale a pour objectif d'assurer la protection des individus quel que soit leur statut professionnel devant les conséquences financières de certains événements (maladie, accident...).
- Les organismes complémentaires dont les prestations viennent en complément de celles du régime général de la sécurité sociale. Les organismes habilités à proposer des garanties prévoyance sont :
 - Les compagnies d'assurances : il peut s'agir de sociétés anonymes ou de sociétés d'assurances mutuelles. Elles sont régies par le code des assurances ;
 - Les institutions de prévoyance : il s'agit de personnes morales de droit privé à but non lucratif administrées paritairement. Elles sont régies par le code de la sécurité sociale ;
 - Les mutuelles : il s'agit de sociétés de personnes, à but non lucratif, dont les cotisants élisent les responsables. Elles sont destinées à assurer la couverture complémentaire des frais de santé mais peuvent à titre accessoire attribuer à leurs adhérents des capitaux décès, des indemnités journalières et des rentes d'invalidité. Elles sont régies par le code de la mutualité.

1.4 Les garanties prévues dans un contrat de prévoyance

La prévoyance consiste très généralement à se couvrir contre tous les aléas liés à la personne. Il existe deux formes de contrats de prévoyance notamment le contrat individuel et le contrat collectif. Un contrat de prévoyance couvre généralement deux grands domaines de risques :

- La santé : la garantie complémentaire frais de santé (souvent appelée « mutuelle » par les assurés) intervient en complément de la sécurité sociale, voire dans certains cas en l'absence de remboursement de ladite sécurité sociale. La forme majoritaire est le contrat d'entreprise, quel que soit le type d'organisme auprès duquel la couverture est souscrite ;
- La prévoyance lourde : elle regroupe les garanties liées au décès (capitaux décès, rente conjointe, rente éducation) ainsi que les garanties liées à l'arrêt de travail (maintien de salaire, incapacité/invalidité de travail, accident ou maladie de la vie professionnelle).

Dans la suite de ce mémoire, il sera question de faire un focus sur les garanties liées à l'arrêt de travail.

1.5 L'arrêt de travail

L'arrêt de travail désigne très généralement une interruption du travail prescrite par un médecin à un salarié dû à une maladie, un accident de la vie privée, un accident de travail ou une maladie professionnelle. La sécurité sociale scinde ce risque en deux catégories : l'incapacité temporaire et l'invalidité.

1.5.1 L'incapacité

Est considéré comme victime d'une incapacité temporaire (ou usuellement incapacité), l'assuré obligé de cesser son travail en raison d'une incapacité médicalement constatée par une prescription d'arrêt de travail émise par le médecin et indiquant la durée probable de l'arrêt. La date de début de l'arrêt considéré se définit comme celle du jour de constatation de l'incapacité. Ceci ouvre droit pour le salarié à la perception de prestations en espèce de la part de la sécurité sociale, versées sous forme d'indemnités journalières. Les prestations sont versées jusqu'au jour où le salarié est reconnu apte à reprendre le travail, avec une limite maximale de trois ans. Au delà de cette période, l'individu est considéré comme invalide.

Toutefois, l'action de la sécurité sociale peut être différente en fonction de la cause comme le montre le schéma suivant :

Cause	Maladie ou Accident de la vie privée	Maladie Professionnelle ou accident de travail
Date de début	Le 4 ^e jour après la date de l'arrêt (franchise de trois jours)	Le lendemain de l'arrêt de travail
Date de fin	Date de mise en invalidité ou le 67 ^{me} anniversaire ou le décès	Date de mise en IPP ou le décès
Montant	50% de la tranche A (limitée à 1.8 du SMIC depuis le 01/01/2013) et 66,66% de la tranche A si au moins trois enfants à charge à partir du 31 ^e jour	- Du 1 ^{er} au 28 ^e jour : 60% du Salaire Journalier Brut (SJB) limité à 193.23 € - A partir du 29 ^e jour : 80% du SJB limité à 257.64 €
Régime fiscal	Soumis à l'impôt sur le revenu (sauf pour les affections longues durées)	Non soumis à l'impôt sur le revenu

1.5.2 L'invalidité

Est considéré comme étant en état d'invalidité, l'assuré social âgé de moins de 62 ans victime d'une réduction, supposée définitive, des deux tiers de sa capacité de travail, c'est-à-dire hors d'état de se procurer un salaire supérieur au tiers de la rémunération normale de la profession qu'il exerçait. Si l'invalidité a été causée à la suite d'une maladie ou d'accident de la vie privée, elle prendra l'appellation d'invalidité permanente. Dans le cas où la cause de l'invalidité est une maladie professionnelle ou un accident de travail, elle prendra l'appellation d'incapacité professionnelle permanente. Selon l'article L. 341-4 du code de la Sécurité sociale, les invalides sont classés en trois catégories :

- **Invalidité 1^{ère} catégorie** : si l'assuré peut exercer une activité rémunérée malgré son invalidité, alors il est placé en invalidité 1^{ère} catégorie. Les invalides relevant de cette catégorie perçoivent une rente de la Sécurité de Sociale de 30% du salaire de référence.
- **Invalidité 2^{ème} catégorie** : si suite à un accident ou à une maladie, l'assuré est dans l'impossibilité d'exercer une profession quelconque, alors il est placé en invalidité 2^{ème} catégorie. Les invalides relevant de cette catégorie perçoivent une rente de la Sécurité de Sociale de 50% du salaire de référence.
- **Invalidité 3^{ème} catégorie** : si à la suite d'un accident ou d'une maladie, l'assuré est dans l'impossibilité d'exercer une profession quelconque et que son état nécessite l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie courante, alors l'assuré est placé en invalidité 3^{ème} catégorie. Les invalides relevant de cette catégorie perçoivent une rente de la Sécurité de sociale de 50% du salaire de référence plus une majoration pour une tierce personne².

Lorsque l'arrêt résulte d'un accident du travail ou d'une maladie professionnelle, les invalidités ne sont pas classées en 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} catégories. L'état d'incapacité permanente est défini par un taux d'infirmité (IP) de l'assuré fixé par barème de la Sécurité Sociale :

- Si le taux d'infirmité permanente est inférieur à 10%, l'assuré a le droit à une indemnité en capital forfaitaire fonction de son taux d'incapacité permanente ;
- Si le taux d'infirmité permanente est supérieur à 10%, l'assuré percevra une rente viagère calculée sur la base du salaire des 12 derniers mois avant l'arrêt de travail.

2. Personne qui vient assister la victime dans ses tâches de base

Toutefois, l'action de la sécurité sociale peut être différente en fonction de la cause comme le montre le schéma suivant :

Cause	Maladie ou Accident de la vie privée	Maladie Professionnelle ou accident de travail
Type d'invalidité	Invalidité Permanente	Incapacité Professionnelle Permanente (IPP)
Durée	Passage à la retraite ou le décès	Passage à la retraite ou le décès
Montant	- 1e catégorie : 30% de la tranche A - 2e catégorie : 50% de la tranche A - 3e catégorie : 50% de la tranche A + majoration pour l'assistance (Tierce personne)	- Si le taux d'invalidité < 10% : versement d'un capital compris entre 411.12 € et 4110.06 € - Si le taux d'invalidité > 10% : versement rente égale au salaire multiplié par le taux d'incapacité réduit de moitié pour la partie de taux ne dépassant pas 50% et aug menté de moitié pour la partie supérieure à 50% + prestation complémentaire pour recours à une tierce personne
Régime fiscal	Soumis à l'impôt sur le revenu (sauf majoration pour la tierce personne)	Non soumis à l'impôt sur le revenu

A la retraite, La pension d'invalidité est remplacée par la pension de retraite qui prend le relais :

- Automatiquement si le salarié ne travaille pas (entre 60 ans et 4 mois et 62 ans pour les personnes nées avant 1951);
- Sur demande si le salarié continue de travailler malgré son invalidité;
- Dès lors que l'assuré peut prétendre à la liquidation de ses droits à taux plein.

1.5.3 Maintien du salaire

L'Employeur est tenu sous certaines de conditions de verser un **maintien de salaire** à un salarié en arrêt de travail. Cette obligation a été mise en place par la loi n°78-49 du 19 janvier 1978 relative à la mensualisation puis complétée par l'accord national interprofessionnel (ANI) du 11 janvier 2008.

La convention collective dont relève l'entreprise peut prévoir par ailleurs l'amélioration du maintien de salaire minimum prévu légalement. Le financement du maintien de salaire est à la charge exclusive de l'Employeur. L'Employeur peut financer ce complément d'indemnisation sur sa propre trésorerie ou confier à un Organisme Assureur

la gestion de cet engagement en souscrivant un contrat de mensualisation ou inclure cette prestation dans les prestations garanties par le contrat de Prévoyance.

Pour avoir accès à cette garantie, certaines conditions sont requises notamment une ancienneté d'au moins un an, être pris en charge par la sécurité sociale, justifier l'absence dans les 48h, être soigné sur le territoire français ou dans un autre pays de la Communauté Economique Européenne. Le maintien de salaire intervient 7 jours après l'arrêt de travail (aucune franchise en cas d'arrêt consécutif à un accident du travail ou une maladie professionnelle). L'Employeur complète les indemnités versées par la Sécurité sociale à hauteur de 90 %, puis de 66,66 % de la rémunération brute que le salarié aurait gagnée s'il avait continué à travailler, et ce pour les durées définies ci-après.

Salaire	90% du salaire brut	66.66% du salaire brut
1 à 6 ans	30 jours	30 jours
6 à 11 ans	40 jours	40 jours
11 à 16 ans	50 jours	50 jours
16 à 21 ans	60 jours	60 jours
21 à 26 ans	70 jours	70 jours
26 à 31 ans	80 jours	80 jours
supérieur à 31 ans	90 jours	90 jours

1.6 Le Maintien garantie décès

Dans le cadre d'un contrat de prévoyance, comportant la couverture des risques décès, incapacité de travail et invalidité, la couverture du risque décès doit inclure une clause de maintien de la garantie décès en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité. Ce dispositif vise à préserver la couverture du décès pour les salariés en arrêt de travail notamment dans deux cas spécifiques : le salarié en arrêt de travail ne fait plus partie des effectifs de l'entreprise ; il ne cotise donc pas pendant toute la durée de son arrêt pour sa couverture décès. Le contrat de prévoyance est résilié et la garantie n'est pas reprise par le nouvel assureur. La résiliation ou le non-renouvellement du contrat sont donc sans effet sur les prestations à naître au titre du maintien de garantie en cas de survenance du décès avant le terme de la période d'incapacité de travail ou d'invalidité telle que définie dans le contrat couvrant le risque décès. Ces dispositions ont été imposées par deux textes majeurs : la loi du 8 août 1994 et la loi du 17 juillet 2001 (Art7-1 de la loi Evin).

Chapitre 2

La réglementation en vigueur

Le risque d'arrêt de travail ayant été clairement défini, il convient de bien situer le contexte juridique qui entoure ce risque et plus particulièrement aux obligations de provisionnement qui incombent aux organismes assureurs pour le couvrir. Pour cela, cette partie vise donc à décrire les différentes étapes qui ont permis d'aboutir à la législation en vigueur aujourd'hui.

2.1 Convention Collective Nationale de retraite et de prévoyance des Cadres du 14 mars 1947

La Convention Collective Nationale des Cadres a instauré une obligation de cotisation à un régime de prévoyance pour les salariés Cadres et Assimilés Cadres : « Le régime de prévoyance et de retraite institué par la présente convention s'applique obligatoirement aux ingénieurs et cadres définis par les arrêtés de mise en ordre des salaires (...). Il s'applique également aux voyageurs et représentants travaillant pour un seul employeur et ayant la qualification et les prérogatives d'ingénieurs ou de cadres. »

Cette convention vient instaurer une obligation portant sur le taux de cotisation : « Les employeurs s'engagent à verser, pour tout bénéficiaire visé aux articles 4 et 4 bis de la Convention ou à l'annexe IV à cette Convention, une cotisation à leur charge exclusive, égale à 1,50 % de la tranche de rémunération inférieure au plafond fixé pour les cotisations de Sécurité sociale ». En d'autres termes, l'employeur a une obligation de cotisation à la hauteur de 1,50 % de la Tranche A du salaire. Le financement des garanties est affecté prioritairement au risque décès (au moins égale à 0.75% de la tranche A du salaire). En cas de défaillance, la sanction prévue est le versement de trois plafonds annuels de la sécurité sociale (123 408€ en 2020) à la charge de l'Employeur.

La fusion des régimes de retraite complémentaire « AGIRC » et « ARRCO » au 01/01/19 ayant entraîné la disparition de la CCN du 14 mars 1947, un accord national interprofessionnel du 17/11/17¹ relatif à la prévoyance des cadres a été conclu, permettant le maintien du dispositif tel qu'issu de l'article 7 de la CCN du 14 mars 1947 dans l'attente d'un accord entre les partenaires sociaux sur la notion d'encadrement.

2.2 La loi EVIN : 31 décembre 1989 (n°89-1009)

C'est le premier texte juridique en matière de prévoyance complémentaire. Cette loi vient renforcer les garanties offertes aux personnes assurées contre certains risques. Elle s'articule autour de deux grands axes :

1. La désignation des organismes habilités à mettre en œuvre des opérations de prévoyance. Ce sont :
 - Les entreprises régies par le code des assurances ;
 - Les institutions de prévoyance relevant du code de la Sécurité Sociale ;
 - Les institutions de prévoyance relevant du code rural ;
 - les mutuelles régies par le code de la mutualité.
2. La définition des principales obligations telles que :
 - Prise en charge des suites de pathologies antérieures :
 - En cas de garanties collectives, l'organisme qui délivre sa garantie doit prendre en charge les suites des états pathologiques survenus antérieurement à la souscription ;
 - Aucune pathologie ouvrant droit aux prestations de l'assurance maladie ne peut être exclue du champ d'application des contrats.
 - La poursuite de la couverture santé doit être proposée par les organismes assureurs au bénéfice :
 - Des anciens salariés qui bénéficiaient d'un contrat groupe s'ils deviennent invalides, s'ils sont privés d'emploi ou s'ils partent en retraite ;
 - Des personnes garanties du chef de l'assuré décédé qui bénéficiait d'un contrat groupe.
 - Le maintien du paiement des rentes au niveau atteint en cas de résiliation du contrat :
 - Pour tous les contrats collectifs, les prestations en cours de service lors de la résiliation (indemnités journalières, rentes d'invalidité, de conjoint, rentes éducation) doivent être maintenues à un niveau au moins égal à celui atteint lors de la résiliation ;

1. étendu et élargi par arrêté du 27 juillet 2018.

- Cet engagement de l'assureur doit être couvert à tout moment par des provisions mathématiques.
- L'employeur ne peut imposer unilatéralement une quote-part de cotisation aux salariés :
 - Lorsque le régime de prévoyance est mis en place unilatéralement par l'employeur, celui-ci ne peut imposer à un salarié présent avant la mise en place du régime de cotiser contre son gré ;
 - Par contre, les salariés embauchés postérieurement à la mise en place pourront se voir imposer la cotisation.
- La remise d'une notice résumant les garanties :
 - Le souscripteur d'un contrat groupe (= en général l'employeur) est tenu de remettre à l'adhérent (= en général le salarié) une notice d'information détaillée qui définit notamment les garanties et leurs modalités d'application ;
 - Il est également tenu d'informer de la même façon les adhérents en cas de réduction des garanties.
- La consultation du Comité d'Entreprise :
 - Il doit être consulté avant toute mise en place ou modification d'un régime de prévoyance ou de frais de santé ;
 - Cette disposition figure depuis dans le Code du Travail (art. L. 432-3).
- Le rapport sur les résultats du contrat :
 - Pour tous les contrats collectifs, l'organisme assureur doit remettre chaque année au chef d'entreprise un rapport sur les comptes, dont le contenu est fixé par décret ;
 - Sur demande du Comité d'entreprise, ou à défaut des Délégués du personnel, le chef d'entreprise leur présente ledit rapport.

2.3 La loi du 8 août 1994 (n° 94-678)

Poursuivant le mouvement amorcé par la loi EVIN, cette nouvelle loi franchit une étape supplémentaire par l'établissement d'un droit du régime de prévoyance. La loi du 8 août 1994 est la transposition des directives européennes des 18 juin et 10 novembre 1992 relatives à la protection sociale complémentaire avec l'instauration des nouvelles obligations à la charge de l'employeur qui sont :

- La poursuite des revalorisations futures :

- La convention, l'accord ou la décision unilatérale qui mettent en œuvre des garanties incapacité, invalidité, rentes de conjoint ou d'éducation doivent prévoir la poursuite de la revalorisation des prestations en cas de changement d'organisme assureur ;
 - Ce n'est donc pas l'assureur qui porte cette obligation mais bien l'entreprise ou le souscripteur.
- Le « maintien de la garantie décès » :
- La convention, l'accord ou la décision unilatérale qui mettent en œuvre des garanties décès doivent par ailleurs prévoir les modalités de maintien de ces garanties pour les bénéficiaires de rentes d'incapacité ou d'invalidité en cas de changement d'organisme assureur ;
 - En juillet 2001 (Art. 7-1 de la Loi Evin), cette obligation de maintien a été transférée aux assureurs.

2.4 L'arrêté du 28 mars 1996 (article A331-22)

Publié en application de la loi EVIN, qui avait émis des dispositions transitoires, il vient désormais fixer les règles de provisionnement des garanties d'incapacité et d'invalidité :

- Les provisions techniques des prestations d'incapacité et d'invalidité sont la somme :
1. Des provisions correspondant aux prestations d'incapacité de travail, à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres en cours à cette date, majorées des provisions dites pour rentes en attente relatives aux rentes d'invalidité, susceptibles d'intervenir ultérieurement au titre des sinistres d'incapacité en cours au 31 décembre de l'exercice ;
 2. Des provisions correspondant aux prestations d'invalidité, à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres d'invalidité en cours à cette date.
- Le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité de travail et d'invalidité est effectué à partir des éléments suivants :
1. Les lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité indiquées en annexe. Toutefois, il est possible pour une entreprise d'assurances d'utiliser une loi de maintien établie par ses soins et certifiée par un actuaire indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaire reconnues par la commission de contrôle des assurances ;
 2. Un taux d'actualisation qui ne peut excéder 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur base semestrielle, sans pouvoir dépasser 4,5 %.

2.5 Loi du 17 juillet 2001

La loi du 17 juillet 2001 a introduit un article 7.1 dans la Loi EVIN qui oblige les assureurs à continuer de maintenir aux salariés en incapacité de travail ou invalidité et percevant des prestations de la Sécurité Sociale, à ce titre, le bénéfice de la garantie décès même au-delà de la résiliation du contrat par l'entreprise. Les assureurs doivent donc constituer des provisions dans leurs comptes (dites provisions de « maintien de la garantie décès »).

Pour les sinistres nés après le 1er janvier 2002, la mesure est immédiate et sans conséquence pour l'entreprise (hormis quelques hausses de cotisations qui ont eu lieu...). Pour les sinistres décès consécutifs à des arrêts de travail en cours au 31/12/2001, les assureurs disposent d'un délai de 10 ans pour constituer les provisions nécessaires (à raison d'au moins 10 % par an). Ils peuvent demander une indemnité de résiliation si l'entreprise résilie son contrat pendant cette période de 10 ans.

Chapitre 3

Provisions techniques

Travaillant dans un cycle économiquement inversé, l'assureur doit régulièrement constituer des réserves communément appelées provisions pour faire face à ses engagements. Une provision représente la dette probable de l'assureur vis à vis de ses assurés. Par ailleurs, la réglementation précise dans l'article R 343-1 du code des assurances, que les provisions doivent être suffisantes pour pouvoir régler intégralement leurs engagements vis-à-vis de l'assuré. En d'autres termes, elles doivent être au moins égale à l'espérance de la somme des flux futurs actualisés. Les arrêts de travail font partir des risques de dommages corporels liés aux accidents et à la maladie ; ils sont soumis à un contrôle de l'Etat pour préserver les assurés (article L310-1). Ces risques font l'objet d'une gestion distincte organisée de sorte à séparer l'activité de l'assurance vie et l'activité d'assurance non vie (article R321-1).

Dans ce chapitre, il sera question de revenir en profondeur sur les différentes provisions techniques notamment les provisions pour sinistres à payer, les provisions pour risque croissant et la provision de maintien garantie décès.

3.1 Provisions pour sinistres à payer

Elles représentent la valeur estimative des dépenses tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise.

Pour chaque incapacité de travail, doivent être calculées :

- **La provision pour incapacité en cours** : Cette provision couvre le risque du maintien de l'assuré en incapacité temporaire pendant une période maximale de 36 mois au-delà de laquelle il passe automatiquement en invalidité permanente. L'ex-

pression mathématique est la suivante :

$$PM_1^{INC}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{36-1} \frac{1}{(1+t)^{\frac{k-anc}{12}}} * \frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)}$$

- **La provision pour invalidité en attente** : Cette provision matérialise l'engagement qui correspond au risque pour une personne en incapacité de passer en invalidité et donc de voir le paiement de l'indemnité perdurer. L'expression mathématique est la suivante :

$$PM_2^{INC}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{36-1} \frac{1}{(1+t)^{\frac{k-anc}{12}}} * \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} * PM^{INV}(age + \frac{k}{12}, 0)$$

avec :

- age = âge d'entrée dans l'état d'incapacité
- anc = nombre de mois écoulés depuis l'entrée en incapacité
- t = taux technique annuel
- $l^{INC}(x, k)$ = loi de maintien en incapacité pour un individu entré en incapacité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k
- $s(x, k)$ = loi de passage en invalidité pour un individu entré en incapacité à l'âge x et d'ancienneté k dans cet état
- $PM^{INV}(x, k)$ = provision de maintien de la garantie décès aux invalides pour un individu entré en invalidité à l'âge x et d'ancienneté k

Pour chaque invalidité de travail, doivent être calculées :

- **La provision pour rente d'invalidité en cours jusqu'à l'âge de départ à la retraite** constituée pour les invalides n'étant pas encore à la retraite. L'expression mathématique est suivante :

$$PM^{INV}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{62-age-1} \frac{1}{(1+t)^{k-anc}} * \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)}$$

avec :

- age = âge d'entrée dans l'état d'incapacité
 - anc = nombre de mois écoulés depuis l'entrée en incapacité
 - t = taux technique annuel
 - $l^{INV}(x, k)$ = loi de maintien en invalidité pour un individu entré en invalidité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k
- **La provision pour rente d'invalidité en cours temporaire au-delà de l'âge de départ à la retraite** constituée pour les invalides dont le versement de la rente peut se poursuivre au-delà de l'âge de départ à la retraite pour une durée déterminée à l'avance ;

- **La provision pour rente d'invalidité en cours viagère** constituée pour les invalides ayant souscrit le versement d'une rente d'invalidité viagère ;
- **La provision pour rente ATP** (Allocation pour Tierce Personne) constituée pour les invalides passés en 3ème catégorie d'invalidité avant l'âge de départ à la retraite ;
- **La provision pour rente ACR** (Allocation Complément Retraite) constituée pour les invalides de 2ème et 3ème catégorie, ayant pris leur retraite et bénéficiant de l'ACR ;
- **La provision pour ACR latente** (Allocation Complément Retraite) constituée pour les invalides susceptibles de percevoir une allocation complémentaire de retraite lors de la liquidation des droits AGIRC.

3.2 Provision pour risque croissant

Cette provision est égale à la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés (voir 5° de l'article R. 343-7). Elle peut être exigée pour les opérations d'assurance contre les risques de maladie et d'invalidité.

3.3 La provision Maintien Garantie Décès (PMDC)

La provision mathématique au titre du maintien des garanties décès s'obtient par la somme de deux composantes :

- la provision mathématique pour le maintien des garanties décès des invalides issue des données individuelles des invalides (date de naissance, date d'entrée en invalidité, garanties décès...). La formule s'écrit :

$$P^{INV}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{62-age-1} \frac{1}{(1+t)^{k+1/2-anc}} * \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} * q^{INV}(age, k)$$

avec :

- age = âge d'entrée dans l'état d'incapacité
- anc = nombre de mois écoulés depuis l'entrée en incapacité
- t = taux technique annuel
- $l^{INV}(x, k)$ = loi de maintien en invalidité pour un individu entré en invalidité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k
- $q^{INV}(x, k)$ = taux de mortalité annuel pour un individu entré en invalidité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k

- la provision mathématique pour le maintien des garanties décès des assurés en incapacité temporaire. Elle est obtenue en sommant la provision mathématique pour le maintien des garanties décès obtenue pour l'incapacité en cours et l'invalidité en attente dont les expressions sont les suivants :

1. Cas de l'incapacité en cours

$$P_1^{INC}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{36-1} \frac{1}{(1+t)^{k+1/2-anc}} * \frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} * q^{INC}(age, k)$$

2. Cas de l'invalidité en attente

$$P_2^{INC}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{36-1} \frac{1}{(1+t)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} * \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} * P^{INV}(age + \frac{k}{12}, 0)$$

avec :

- age = âge d'entrée dans l'état d'incapacité
- anc = nombre de mois écoulés depuis l'entrée en incapacité
- t = taux technique annuel
- $l^{INC}(x, k)$ = loi de maintien en incapacité pour un individu entré en incapacité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k
- $q^{INC}(x, k)$ = taux de mortalité mensuel pour un individu entré en incapacité à l'âge x et d'ancienneté dans l'état k
- $s(x, k)$ = loi de passage en invalidité pour un individu entré en incapacité à l'âge x et d'ancienneté k dans l'état
- $P^{INV}(x, k)$ = provision de maintien de la garantie décès aux invalides pour un individu entré en invalidité à l'âge x et d'ancienneté k

Deuxième partie

Elaboration de la table de mortalité

Chapitre 4

Modèles de durée

Les modèles de durée sont des outils utilisés dans nombreux domaines. Ils constituent une base théorique de toute étude portant sur la période de temps qui s'écoule avant l'apparition d'un évènement durée. Ils sont employés dans de nombreux domaines de l'assurance : durée de vie humaine, durée de l'arrêt de travail, durée de chômage mais aussi durée d'attente entre deux sinistres, durée avant la ruine.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principaux modèles de durée tout en détaillant les concepts fondamentaux issus de la théorie des probabilités.

4.1 Principes et notations

4.1.1 La fonction de repartition et de survie

Considérons une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$. On définira sa fonction de repartition notée F de la façon suivante :

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$$

F est une fonction croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

La fonction de survie généralement notée S par convention est définie par :

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

On appelle fonction de survie conditionnelle généralement notée $S_x(t)$, la probabilité de survivre pendant t années sachant qu'on a atteint l'âge x . Elle se définit comme suit :

$$S_x(t) = \frac{S(t)}{S(x)}$$

4.1.2 Fonction de hasard

La fonction de hasard correspond à la probabilité de sortie instantanée pour les individus présents à t fixé. Pour une variable T , elle se définit comme suit :

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq u + t | T > t)}{u} \\ &= \frac{S(t) - S(u + t)}{u S(t)} \\ &= \frac{-S'(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

En simplifiant le résultat précédent, on obtient :

$$h(t) = \frac{-d}{dt} [\ln(S(t))] = \frac{f(t)}{S(t)}$$

où $f(t)$ est la fonction de repartition de la variable T

4.1.3 Censures

Elles sont observées lorsque la variable d'intérêt X se produit après l'observation de la censure C (censure droite) ou lorsque la variable d'intérêt X se produit avant l'observation de la censure C (censure gauche). L'exemple suivant permet d'illustrer cette notion : On veut savoir à quel âge les individus d'un groupe sont capables d'effectuer une tâche. Lorsque l'expérience débute, on observe des personnes qui sont déjà capables d'effectuer la tâche ($X \leq C$) et des personnes qui n'en sont pas capables ($X \geq C$).

4.1.4 Troncatures

Elles sont observées lorsque la variable d'intérêt n'est pas observable c'est-à-dire qu'elle est inférieure à un seuil (troncature gauche) ou qu'elle est supérieure à un seuil (troncature droite). L'exemple suivant permet d'illustrer cette notion : dans un contrat d'arrêt de travail avec une franchise, les arrêts de durée inférieure à la franchise ne sont pas observés.

Les notions de censure et troncature sont très différentes. Dans le cas d'une troncature, on assiste à une perte d'information (on perd l'information sur les observations en dehors de la plage) mais en cas de censure, on a connaissance qu'il existe une information mais on ne connaît pas sa valeur précise.

4.2 Les types de tables de mortalité

Dans la valorisation des engagements de l'assureur, certaines garanties de prévoyance telles que les arrêts de travail nécessitent l'utilisation des tables de mortalité. D'un point de vue assureur, il existe deux catégories de tables : les tables règlementaires et les tables d'expérience.

4.2.1 Les tables règlementaires

En France, elles sont établies par l'INSEE¹ et sont basées sur des observations de la population française sur une période donnée. Elles se présentent sous la forme d'un tableau avec diverses informations notamment le taux de mortalité, le nombre d'individus en vie à l'âge x ainsi que l'espérance de vie résiduelle.

Selon l'INSEE, la construction d'une table de mortalité suit le cheminement de 10000 nouveaux nés à qui l'ont fait subir à des divers âges les conditions de mortalités observés sur diverses générations réelles durant l'année étudiée. Il en existe 2 types :

- Les tables de mortalité du moment : Ces tables ont été déterminées à partir de la mortalité d'une population observée sur une période, en général courte (quelques années). Parmi ces tables, on retrouve la TH00-02 et la TF00-02. Il s'agit respectivement de la mortalité observée chez les hommes et les femmes entre les années 2000 et 2002 ;
- Les tables de mortalité générationnelles : Appelées également tables prospectives, la période d'observation est beaucoup plus longue car la mortalité dépend aussi de la date de naissance de l'individu. Les tables générationnelles les plus courantes sont la TGH05 et TGF05.

4.2.2 Les tables d'expérience

Elles sont construites par les compagnies d'assurance sur la base de la mortalité de leurs portefeuilles et doivent être certifiées et suivies par un actuair indépendant agréé.

La rédaction de ce mémoire se poursuivra par l'analyse de la mortalité des individus en invalidité avec l'objectif de construire une table d'expérience.

1. Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

4.3 Estimation des taux bruts de mortalité

Dans cette section, il sera question de présenter les différents estimateurs de calcul des taux bruts de mortalité qui constitueront la base de cette étude. Il existe plusieurs types estimateurs du taux brut qui sont repartis en deux grands types d'estimateurs : les estimateurs paramétriques et les estimateurs non paramétriques.

Parlant des estimateurs paramétriques, on suppose qu'ils suivent une distribution a priori. Ainsi, l'estimateur binomial est couramment utilisé pour estimer la mortalité; C'est estimateur fait l'hypothèse d'une distribution binomiale de la mortalité à chaque âge x . En général, cet estimateur donne de bons résultats de par le caractère binaire du décès (individu est vivant ou est décédé à un âge donné). Cependant, il oblige à étudier une population où toutes les personnes entrent et sortent du portefeuille au même moment. Cet estimateur ne semble donc pas être adéquat pour prendre en compte les notions de censures et de troncatures. En vue de palier aux limites présentes dans ce modèle, Hoem a proposé un modèle permettant de prendre en compte les censures et les troncatures. Afin de pouvoir utiliser cet estimateur, il faut disposer des dates d'entrée et de sortie afin de calculer une exposition au risque et du nombre de décès durant la période d'observation. Néanmoins cet estimateur suppose une distribution de la loi de mortalité. Ce dernier point est corrigé dans les estimateurs non paramétriques.

C'est ainsi que l'on peut citer l'estimateur de Nelson-Aalen qui donne une estimation de la fonction de hasard cumulative. Cependant, il a tendance à sous-estimer la fonction de hasard cumulée. Ainsi, l'estimateur couramment utilisé aujourd'hui en actuariat et en recherche médicale est celui de Kaplan-Meier.

4.3.1 Estimateur de HOEM

L'estimateur de Hoem est un estimateur paramétrique qui permet de prendre en compte les censures et les troncatures. Il consiste à découper la plage des données en intervalles d'âges entiers $[x; x+1[$ afin de calculer l'exposition au risque dans chaque intervalle. Dans ce modèle, chaque individu est pondéré par son temps d'exposition au risque dans l'intervalle $[x; x+1[$.

Les notations

Nous adopterons les notations suivantes :

- N_x le nombre d'individus vivants à l'âge x ;
- D_x une variable aléatoire modélisant le nombre de mort dans l'intervalles $[x; x+1[$;
- d_x la valeur prise par D_x ;

- $[\alpha_i; \beta_i] \in [x; x+1[$ un intervalle durant lequel l'individu est exposé au risque;
- X_i une variable aléatoire modélisant le décès dans l'année de l'individu i .

Les hypothèses du modèle

Ce modèle respecte les hypothèses suivantes :

- Les décès sont supposés indépendants entre eux;
- La probabilité de décéder entre x et $x+1$ pour $t \in [0, 1]$ est une fonction linéaire du temps telle que ${}_tq_x = tq_x$. Cette hypothèse nous permet de faire l'approximation suivante :

$${}_{s-t}q_{x+t} \approx {}_t p_x - {}_s p_x$$

Ce qui entraîne que la probabilité de décéder à l'âge $x + \alpha_i$ dans l'intervalle $[\alpha_i; \beta_i]$ est $(\beta_i - \alpha_i)q_x$;

- Chaque individu d'âge $x + \alpha_i$ a une probabilité $\beta_i - \alpha_i q_x$ de décéder pendant l'année et X_i des variables aléatoire de bernouilli de paramètre $\beta_i - \alpha_i q_x$. De cette hypothèse, on a :

$$\mathbb{E}(X_i) = \beta_i - \alpha_i q_x \approx \beta_i p_x - \alpha_i p_x = (\beta_i - \alpha_i)q_x$$

$D_x = \sum_{i=1}^{N_x} X_i$ suit donc une loi binomiale de paramètres $(N_x, (\beta_i - \alpha_i)q_x)$.

On a donc :

$$\mathbb{E}(D_x) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_x} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N_x} (\beta_i - \alpha_i)q_x$$

De ce résultat, on conclut que :

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (\beta_i - \alpha_i)}$$

Intervalle de confiance

Après avoir donné une expression de l'estimateur, il est primordial de trouver un intervalle de confiance à cet estimateur à partir des \hat{q}_x observés. Grâce aux hypothèses qui ont été faites sur la loi de décès de chaque individu (modélisation à l'aide d'une loi de Bernoulli) et à l'approximation de la probabilité de décès d'un individu entre e_i et t_i dans le cas où l'on dispose de suffisamment d'informations, le taux brut peut s'approximer à une loi gaussienne² de moyenne estimée \hat{q}_x et de variance estimée $\sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{N_x}}$ où

2. Utilisation du critère de Cochran

N_x étant l'effectif sous risque calculé à l'âge x .

Une estimation de l'intervalle de confiance de niveau α est donc :

$$I_\alpha = [\hat{q}_x \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{N_x}}]$$

Avec $u_{\alpha/2}$ le quantile d'ordre $\alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite.

4.3.2 Estimateur de Kaplan-Meier

Présentation de l'estimateur

L'estimateur de Kaplan-Meier est généralement utilisé pour estimer la fonction de survie à partir des données recueillies (nombre de décès, date d'entrée, date de sortie, etc). Il consiste à calculer la probabilité de survie des individus à chaque instant de décès en comptabilisant le nombre exact de personnes présentes dans le portefeuille. Ainsi, ce modèle est un modèle non paramétrique c'est-à-dire qu'il permet de ne faire aucune hypothèse sur la loi sous-jacente des décès. De plus, ce modèle présente l'avantage de prendre en compte les censures et les troncatures.

Considérons une période d'observation $[x; x+1[$. Les notations utilisées seront les suivantes :

- T_x la durée de vie résiduelle d'un individu vivant en x ;
- q_i la probabilité de décéder à la date t_i ;
- n_i le nombre de personnes vivantes à la date t_i ;
- d_i le nombre de personnes décédées à la date t_i ;
- c_{i-1} le nombre de personnes censurées sur $[t_{i-1}; t_i[$;
- tr_{i-1} le nombre de personnes tronquées sur $[t_{i-1}; t_i[$.

une estimation de q_i à la date $[t_{i-1}; t_i[$ est donnée par :

$$q_i = \frac{d_i}{n_i}$$

avec $n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1} + tr_{i-1}$

L'estimateur de Kaplan-Meier est obtenu en faisant le produit des probabilités de survie à chaque instant. On obtient donc :

$$\hat{S}_x = \prod_{i \geq 1} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Intervalle de confiance

Afin d'estimer l'intervalle de confiance de l'estimateur de Kaplan-Meier, nous avons utilisé l'estimateur de la variance de Greenwood qui nous permet d'obtenir l'intervalle de confiance suivant :

$$I_{\alpha} = [1 - (1 - \hat{q}_x)(1 \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}}]$$

4.4 Ajustements des taux bruts de mortalité

Dans cette section, il sera question de présenter les méthodes d'ajustement et de lissage utilisées pour lisser les taux bruts obtenus. La méthode utilisée dépendra de la quantité d'individus présents par âge.

Ainsi pour les âges représentatifs, les méthodes de lissage et d'ajustement à partir des taux bruts sont privilégiées. Elles sont réparties en deux catégories : les modèles paramétriques et les modèles non paramétriques.

Très utilisé parmi les modèles paramétriques, le modèle de Makeham permet de prendre en compte les risques liés au vieillissement et aux accidents. Cependant ce modèle suppose une tendance linéaire de la courbe $\ln |q_{x+1} - q_x|$. Outre ce modèle, il est possible de faire un ajustement logistique qui présente l'avantage de s'adapter aux changements d'incidence des courbes, puis nous exposerons la méthode de Whittaker-Henderson.

Pour les âges pas assez représentatifs, il est préférable d'utiliser des ajustements par rapport à la table de référence. Cette méthode consiste à positionner la courbe de mortalité obtenue par rapport à une courbe de référence.

4.4.1 Ajustement de Makeham

Le modèle de Makeham est un modèle basé sur trois paramètres reliant l'âge et le taux instantanés de mortalité par la relation suivante :

$$\mu_x = \alpha + \beta \cdot c^x$$

avec $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $c > 1$.

Dans cette formule, le premier terme α permet de prendre en compte les décès accidentels et le second terme βc^y reflète un processus de vieillissement de Gompertz.

A partir de la formule de μ_x , on peut retrouver la formule de q_x . En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 q_x &= 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_y dy\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \alpha + \beta c^y dy\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-[\alpha y + \beta c^y]_x^{x+1}\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\alpha(x+1) - \frac{\beta c^{x+1}}{\ln c} + \alpha x + \frac{\beta c^x}{\ln c}\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\alpha - \frac{\beta}{\ln c} c^x (c-1)\right)
 \end{aligned}$$

La loi de Makeham permet ainsi d'obtenir une forme simplifiée de $\ln p_x$

$$\ln p_x = -\alpha - \frac{\beta}{\ln c} c^x (c-1)$$

Or en utilisant le développement limité à l'ordre 1 lorsque q_x est proche de 0

$$\ln p_x = \ln(1 - q_x) \approx -q_x$$

De cette approximation découle le résultat suivant :

$$q_{x+1} - q_x = \frac{-\beta}{\ln c} c^x (c-1)^2$$

D'où

$$\ln|q_{x+1} - q_x| = x \ln c + \ln((c-1)^2 \left(\frac{-\beta}{\ln c}\right))$$

De cette dernière équation, on retrouve l'équation d'une droite affine de pente $\ln c$. En pratique, l'ajustement de Makeham consiste à faire une regression linéaire suivie d'un test de Fisher sur la relation de dépendance ou d'indépendance entre l'âge x et $\ln|q_{x+1} - q_x|$ pour justifier l'ajustement de nos taux bruts par un ajustement de Makeham.

4.4.2 Ajustement de Thatcher

En pratique, le modèle de Makeham surestime le taux de décès aux âges élevés. Afin de corriger cette surestimation, Thatcher proposa en 1999 un modèle proche en posant :

$$\mu(t) = \alpha + \frac{\beta e^{\gamma t}}{1 + \beta e^{\gamma t}}$$

Les taux ajustés s'obtiennent en résolvant le calcul suivant :

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_t dt\right)$$

qui conduit finalement à :
$$q_x = 1 - e^{-\alpha \left[\frac{1 + \beta e^{\gamma x}}{1 + \beta e^{\gamma(x+1)}} \right]}$$

4.4.3 Le modèle de Brass

Le modèle de Brass appartient à la famille des modèles dits relationnels. Il permet d'établir un lien entre les taux de sortie d'expérience et les taux de sortie de référence en se basant sur la fonction Logit.

Pour rappel, la fonction Logit est définie de la manière suivante :

$$\forall x \in]0; 1[, \text{Logit}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

L'hypothèse du modèle repose sur l'existence d'une relation affine entre les Logits des taux de sortie d'expérience et ceux des taux de référence.

Ainsi, le modèle s'écrira comme suit :

$$\text{Logit}(Q_x^{\text{exp}}) = a * \text{Logit}(Q_x^{\text{BCAC}}) + b$$

4.4.4 Le modèle de Whittaker-Henderson

Le principe de cette méthode est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité et de rechercher les valeurs ajustées qui minimisent la somme de ces deux critères.

Cas de la dimension un

On note q_x le taux brut et \hat{q}_x une estimation de q_x . On se fixe des poids (w_i) et on pose le critère de fidélité :

$$F = \sum_{i=1}^p w_i (q_i - \hat{q}_i)^2$$

et pour le critère de régularité :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

z étant un paramètre du modèle. Le critère à minimiser est une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun étant contrôlé par un second paramètre h tel que $M = F + h \times S$.

On pose par la suite $q = (q_i)_{1 \leq i \leq p}$, $\Delta^z q = (\Delta^z q_i)_{1 \leq i \leq p-z}$ et $W = \text{diag}(w_i)_{1 \leq i \leq p}$. Avec ces notations, on peut écrire $F = (q - \hat{q})' w (q - \hat{q})$ et $S = (\Delta^z q)' (\Delta^z q)$. Pour détailler la dernière écriture de S , on introduit la matrice K_z de taille $(p-z, p)$, dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre z dont le signe alterne et commence positivement pour z pair :

$$\Delta^z q = \sum_{j=0}^z \binom{z}{j} (-1)^{z-j} q(j+i).$$

Cette dernière expression permet finalement d'écrire M sous la forme :

$$M = (q - \hat{q})' w (q - \hat{q}) + h q' K_z' K_z q \quad (4.1)$$

Il suffit de résoudre le problème d'optimisation suivant $\frac{\partial M}{\partial q} = 0$ pour trouver l'expression des taux ajustés. En développant l'expression 4.1, On obtient :

$$q^* = (w + h K_z' K_z)^{-1} w \hat{q}$$

Extension en dimension deux

L'extension de la méthode de Whittaker-Henderson en dimension 2 (ou plus) ne pose pas de problème majeur. On dispose donc d'estimations $\hat{q} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$; le critère de fidélité s'écrit :

$$F = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} (q_{ij} - \hat{q}_{ij})^2$$

L'extension en dimension 2 du critère de régularité est un peu plus délicate. On distingue d'abord la régularité verticale qui permet de calculer un indice de régularité verticale :

$$S_v = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta_v^z q_{ij})^2$$

De la même manière, on calcule l'indice de régularité horizontale S_h , puis on pose :

$$M = F + \alpha S_v + \beta S_h$$

La résolution de ce problème d'optimisation s'effectue en réarrangeant les éléments pour se ramener au cas unidimensionnel. Pour cela, on définit le vecteur de taille pxq , u tel que : $u_{q(i-1)+j} = q_{ij}$. On fabrique une matrice de poids en copiant sur la diagonale les lignes de la matrice (w_{ij}) . On pose donc $w_{q(i-1)+j, q(i-1)+j}^* = w_{ij}$. On procède de la même

manière pour les matrices K_z^v et K_y^h . Les valeurs lissées sont obtenues par la formule suivante :

$$q^* = (w^* + \alpha K_z^{v'} K_z^v + \beta K_y^{h'} K_y^h)^{-1} w^* u$$

Troisième partie

Application

Chapitre 5

Les données

Les données ont été obtenues suite à des extractions effectuées pour récupérer les listes de prestations invalidité et décès des entités du groupe Malakoff Humanis enregistrés avant le 01/06/2019. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter la structure des données utilisées dans le cadre de ce mémoire, corriger les valeurs aberrantes et représenter l'information contenue dans les données.

5.1 Présentation des données

Deux bases ont été utilisées dans le cadre de ce mémoire notamment :

5.1.1 Base de prestations invalidité

Contenant 127 604 dossiers d'individus en invalidité, elle contient les prestations versées aux arrêts survenus avant le 01/06/2019 (encours et clos). Les arrêts n'ayant pas reçus d'indemnisation sont absents de notre étude. Elle renferme les informations suivantes :

- numéro de dossier
- informations relatives à l'assuré (nom, prénom, date de naissance, numéro de sécurité sociale, sexe)
- état du contrat (en cours, mise en retraite, décès, âge limite atteint, fin contrat, garantie terminée, changement de catégorie d'invalidité, dossier annulé, dossier clos ...)
- informations relatives à l'invalidité (date d'entrée en invalidité, montant de la rente versée, date de début d'indemnisation, date de dernier règlement)
- date de fermeture du contrat

Cette base permet de suivre dans le temps les différents changements apportés à chaque contrat d'assuré en invalidité. Un contrat peut donc apparaître plusieurs fois dans cette base. Par exemple, un assuré peut quitter du statut d'invalidé de type 1 à invalide de type 2. Dans ce cas, le montant de rente versée est différente.

C'est ainsi que dans les travaux menés, un retraitement a été effectué sur les données pour conserver une ligne par contrat de préférence la ligne ayant la date d'entrée en invalidité la plus ancienne et la date de dernier règlement la plus récente. L'information du numéro de sécurité social pouvant être considéré comme clé primaire n'est pas toujours renseigné. Pour contourner ce problème, une nouvelle clé primaire a été créée en concaténant le nom, le prénom et la date de naissance.

5.1.2 Base des prestations de décès

Contenant environ 32 080 lignes, elle renferme les informations suivantes :

- numéro de dossier de sinistre
- informations relatives à l'assuré (nom, prénom, date de naissance)
- informations relatives au décès (date de survenance)

Cette base permettra de compléter les informations déjà présentes dans la base des prestations invalidité en créant une clé primaire identique à cette dernière. Néanmoins, certaines lignes de cette base ne pourront pas être utiles puisqu'elles ne contiennent pas les informations nécessaires pour créer une clé primaire (date de naissance manquante).

5.1.3 Informations requises pour l'étude

Pour cette étude, il faudra calculer les variables suivantes :

- âge au fait générateur : âge de l'assuré à la survenance du sinistre
- âge à l'entrée : âge de l'assuré en début de période d'observation
- âge à la sortie : âge de l'assuré en fin de période d'observation
- ancienneté à l'entrée : différence entre l'âge à l'entrée et la date de survenance du sinistre
- ancienneté : différence entre l'âge à la sortie et l'âge au fait générateur

5.2 Le traitement des données

Après la présentation du contenu des bases à utiliser dans notre étude, il est important de parler des différents traitements appliqués aux bases. Cette étape est primordiale et permet de vérifier la validité des données. Il sera donc question d'expliquer les différentes étapes qui ont permis de corriger les valeurs aberrantes, manquantes et en doublon afin d'obtenir une base finale.

Les principaux points retenus pendant le traitement des données sont listés ci-dessous :

1. Date de naissance : information essentielle dans l'étude de la sinistralité et la mise en oeuvre des tables, la date de naissance est souvent non renseignée dans la base. Pour ces arrêts, on ne pourra pas calculer les informations nécessaires (âge d'entrée en invalidité, âge de sortie, ...) pour estimer les taux bruts de mortalité.
2. Doublon : étape la plus longue et exigeante dans le traitement des données, il était question de conserver une ligne unique parmi les doublons de contrats. Ces doublons peuvent s'expliquer par le changement de catégorie d'invalidité, des avenants sur le contrat. Cette étape peut souvent nécessiter d'établir des choix de priorité dans la sélection de l'arrêt à choisir. Dans cette étape par exemple, le critère qui a été privilégié est celui de retenir les lignes ayant une date de dernier paiement la plus récente.
3. Tests de cohérence : étape technique nécessitant du bon sens, elle permet de vérifier qu'il n'existe pas d'anomalies dans la base. Dans l'étude, cette étape s'est matérialisée par une vérification si l'âge d'entrée en invalidité est inférieure à l'âge à la sortie et une suppression des dossiers dont l'âge à l'entrée est supérieur à 62 ans pour rester dans un cadre standard.

Les différentes corrections apportées à notre table brute ont permis d'obtenir une base plus saine. Le tableau suivant récapitule les différents traitements.

Retraitements	Nombre de données	Taux d'informations
Nombre de lignes initiales	127 604	100%
Dates de naissance manquantes	67	-0,05%
Doublons	34 311	-26,88%
Tests de cohérence	349	-0,27%
Nombre de lignes restantes	92 877	72,78%

5.3 La période d'observation

Le choix de la plage d'observation est extrêmement important pour l'élaboration de la table, car elle impacte la proportion de censures et de troncatures de l'étude. La plage

d'observation fixée doit avoir une durée assez longue pour pouvoir capturer une quantité importante d'arrêts de travail, mais assez courte pour assurer l'homogénéité dans les données. En effet, les données très éloignées dans le temps peuvent ne plus être comparables entre elles, la sinistralité ayant pu changer dans le temps suite aux améliorations des conditions médicales, des conditions sociales ou apparition d'une pandémie. Une période d'observation de trois ou cinq ans est recommandée dans les règles professionnelles de la commission d'agrément de l'institut des actuaires¹. La période d'observation choisie est celle allant de **01/01/2014** au **31/12/2018**.

La période étant définie, il est maintenant possible de calculer les dates de début d'observation et de fin d'observation. Pour rappel, la date de début d'observation représente l'instant où l'individu entre dans notre plage d'observation. En pratique, elle est déterminée en calculant le maximum entre la date d'entrée en arrêt de travail et la date de début d'observation. la date de fin d'observation quant à elle représente l'instant où l'individu sort dans la plage d'observation. En pratique, elle est déterminée en calculant le minimum entre la date de sortie de l'arrêt de travail et la date de début d'observation. Si la date de sortie est absente (invalidité en cours), on affectera la date de fin d'observation par défaut. Cette plage permet d'obtenir une base contenant 71 061 individus. Le graphique B.1 présent en annexe récapitule les différents traitements qui ont permis d'aboutir à cette table.

5.4 Statistiques descriptives

Dans la section 5.4, il sera question de faire une étude statistique de la population observée dans la plage d'observation choisie. Cette évaluation sera très utile dans la lecture et l'interprétation des résultats, mais aussi permettra de savoir dans quelles conditions la table construite pourra être utilisée pour des travaux futurs.

5.4.1 Statistiques démographiques

Dans cette partie, il sera question d'identifier les différentes caractéristiques de la population observée dans le but de déceler ou pas une tendance due à l'évolution de la composition de base dans le temps pouvant ainsi entraîner un risque de biais lors d'une utilisation future des travaux réalisés. Les différents travaux effectués sont développés ci-dessous.

1. https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=173&fg=1

Répartition de la population observée

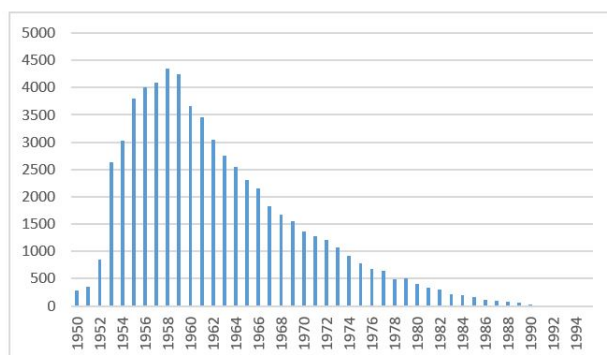


FIGURE 5.1 – Répartition de la population par date de naissance

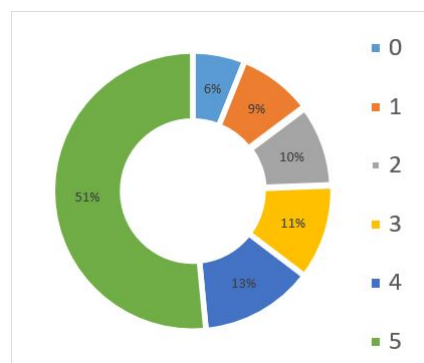


FIGURE 5.2 – Temps passé dans la période d'observation (en années)

La plage d'observation choisie permet d'obtenir une courbe à l'allure tronquée assez cohérente. Elle capture tous les invalides ayant une année de naissance supérieure à 1951. Près de la moitié des individus de la population sont observés tout au long de l'étude. A cette maille, il est compliqué d'émettre des conclusions sur l'évolution de la composition de la population dans le temps.

Taux de décès sur la période d'observation

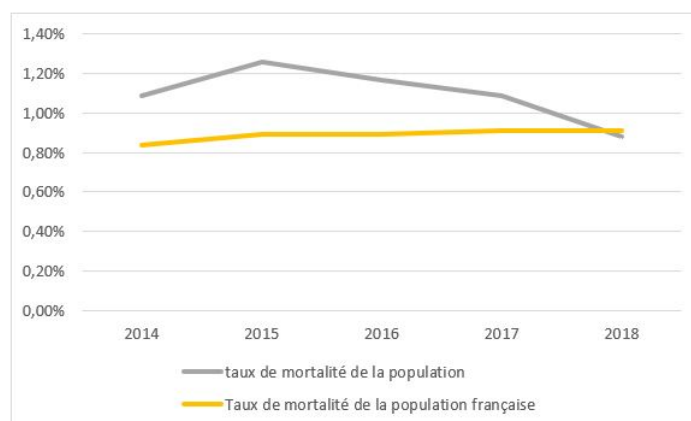


FIGURE 5.3 – Taux de mortalité par année

Dans la figure ci-contre, les taux de mortalité observés sont présentés sur chaque année de la période d'observation. Tout au long de cette plage, le taux de décès des invalides diminue légèrement et reste supérieure à celui de la population française²

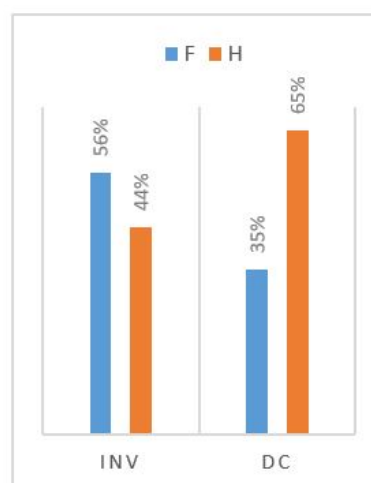
2. <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2383440tableau-figure1>

excepté en 2018. Néanmoins, il n'est pas possible de conclure avec exactitude que taux de décès des invalides de la population décroît au fil du temps car ils pourraient avoir des sinistres survenus mais pas encore déclarés.

Répartition par sexe

La population étudiée est constituée de 56% de femmes et 44% d'hommes. Les décès quant à eux sont constitués majoritairement des hommes. La probabilité de décès des hommes est donc supérieure à celle des femmes; le comportement du risque décès est identique à celui de la population générale.

La suite des travaux consistera à analyser en profondeur l'effet de l'ancienneté dans l'évolution de la mortalité des invalides.

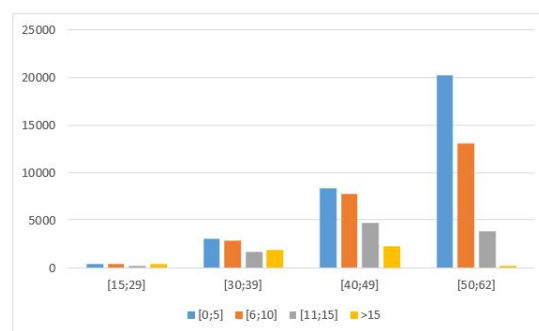


5.4.2 Effet de l'ancienneté dans l'arrêt de travail

Dans la construction d'une table de mortalité pour des individus en arrêt de travail, la notion d'ancienneté est très capitale dans l'estimation de la loi de mortalité. Dans la section 5.4.2, il sera question de faire un focus sur cette notion.

Répartition des individus à l'âge d'entrée en invalidité

La population observée est constituée majoritairement des individus ayant plus de 40 ans. Le nombre d'individus invalides à chaque tranche d'âge décroît par ancienneté. Le volume des individus devant invalides entre 15 ans et 29 ans étant très faible, il sera question dans le chapitre 6 d'effectuer un test de Cochran pour vérifier la suffisance des données à chaque tranche d'âge.



Taux de mortalité par tranche d'âge et ancienneté

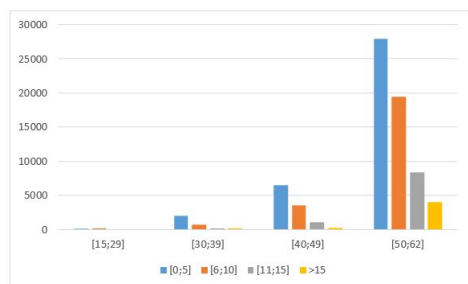


FIGURE 5.4 – Répartition du nombre d'individus par tranche d'âge à la sortie de l'étude et ancienneté en invalidité

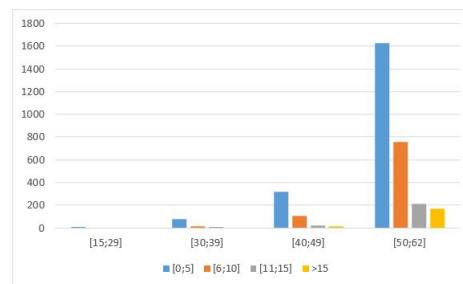


FIGURE 5.5 – Répartition des décès par tranche d'âge au décès et ancienneté en invalidité

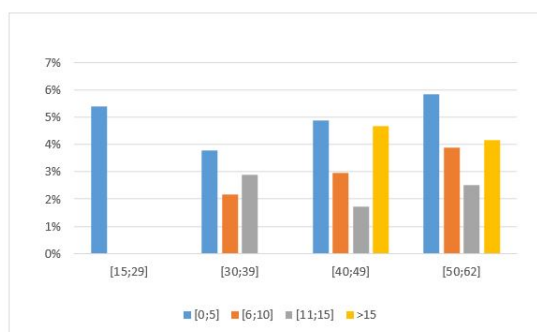


FIGURE 5.6 – Taux de mortalité par tranche d'âge au décès et ancienneté en invalidité

Pour obtenir les taux de mortalité présentés dans la figure 5.6, il suffit de faire un rapport entre le nombre d'individus décédés et le nombre d'individus exposés par âge et ancienneté. Avant d'interpréter la figure 5.6, il est primordial donc de représenter les figures 5.4 et 5.5 afin de prendre en compte la volumétrie des données dans les différentes interprétations qui seront données. En faisant abstraction des tranches d'ancienneté peu représentatives (par exemple la tranche d'ancienneté ">15" pour la tranche d'âge [40,49] n'est pas prise en compte dans l'interprétation), le risque de décès est croissant avec l'âge et semble décroître avec l'ancienneté.

Chapitre 6

Présentation de l'étude

Afin d'étudier idéalement la mortalité de façon précise, il faudrait pouvoir observer chaque individu sur la période allant de sa date d'entrée dans le portefeuille jusqu'à sa sortie du portefeuille. En pratique, cela n'est pas possible dans la mesure où le portefeuille évolue constamment. L'étude est donc réalisée sur une période d'observation définie. Sur cette période, il sera nécessaire de définir les taux de mortalité observés qui dépendent d'une part de la population sous risque et d'autre part de la période d'observation. Pour chaque adhérent, les estimateurs sont construits en fonction de leur date de début d'observation et leur date de fin d'observation.

L'élaboration de la table de mortalité se fera en appliquant les mêmes fondamentaux utilisés dans la création des tables de références en fonction des variables discriminantes repérées. Avant d'effectuer les différents travaux, il faudra toutefois vérifier le critère de Cochran afin de s'assurer de la suffisance des données.

6.1 Mise en place de la table d'expérience

La mise en oeuvre d'une table d'expérience repose sur les trois étapes suivantes :

- Estimation de taux bruts : cette étape permet d'avoir une base pour pouvoir construire une table d'expérience ; plusieurs estimateurs ont été présentés au chapitre 4, les différents estimateurs choisis seront justifiés dans les paragraphes suivants ;
- Lissage des taux bruts : cette étape permet de corriger les irrégularités présentes sur la courbe des taux bruts ;
- Fermeture de table : aux âges élevés et présentant un faible volume de données, il sera question d'extrapoler les données afin d'obtenir une estimation des taux de mortalité à ces âges.

Il sera question dans la suite d'explorer différentes approches afin de choisir la table qui s'adapte le mieux à nos données. Les variables explicatives utiles pour la suite des travaux sont l'âge d'entrée et l'ancienneté.

6.1.1 Approche 1 : Modèle basé sur la variable âge

A- Taux bruts de décès

La figure 6.1 présente les taux bruts de mortalité par âge ainsi que l'intervalle de confiance sur la population étudiée. Les taux bruts de mortalité ont été calculés en utilisant les estimateurs de Hoem et de Kaplan-Meier. Les courbes obtenues sont presque confondues (voir courbes noire et rouge) et révèlent une tendance exponentielle, se prêtant *a priori* à un ajustement par loi analytique. Avant 40 ans, l'estimation obtenue du taux de mortalité n'est pas très stable; plusieurs fluctuations sont notées et s'explique essentiellement par une volumétrie des données faibles à ces âges.

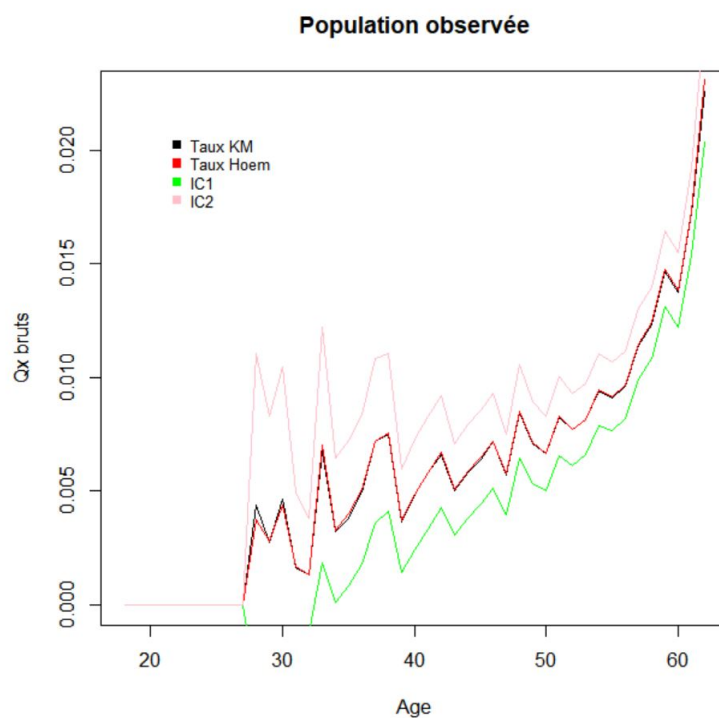


FIGURE 6.1 – Taux bruts de mortalité

B- Critère de Cochran

Le critère de *Cochran* sera utilisé pour vérifier si les données sont suffisantes pour construire la table d'expérience. Il consiste à vérifier que :

$$N_x \cdot \hat{q}_x > 5 \text{ et } N_x \cdot (1 - \hat{q}_x) > 5, \text{ où}$$

N_x : Effectif sous le risque en début d'année à l'âge x ;

D_x : Le nombre de décès à l'âge x ;

$q_x = \frac{D_x}{N_x}$: Estimateur empirique du taux de mortalité à l'âge x .

En appliquant le critère de Cochran aux données, une insuffisance de données est relevée sur la tranche d'âge [19, 35] ans. En effet, le premier critère de Cochran ($N_x \cdot (1 - \hat{q}_x) > 5$) n'est pas respecté. Des traitements spécifiques seront appliqués aux âges ayant peu de données.

âge	$N_x \cdot \hat{q}_x$	$N_x \cdot (1 - \hat{q}_x)$
19	0	0
20	0	0
21	0	0
22	0	0
23	0	7
24	0	18
25	0	34
26	0	60
27	0	116
28	0	178
29	1	267
30	1	355
31	2	453

âge	$N_x \cdot \hat{q}_x$	$N_x \cdot (1 - \hat{q}_x)$
31	2	453
32	1	597
33	1	779
34	7	990
35	4	1220
36	6	1488
37	9	1775
38	15	2069
39	18	2358
40	10	2697
41	15	3080
42	21	3586
43	28	4136

âge	$N_x \cdot \hat{q}_x$	$N_x \cdot (1 - \hat{q}_x)$
44	24	4725
45	31	5265
46	38	5815
47	46	6339
48	40	6948
49	65	7584
50	60	8367
51	62	9273
52	86	10286
53	88	11340
54	103	12527
55	132	13836
56	142	15354

âge	$N_x \cdot \hat{q}_x$	$N_x \cdot (1 - \hat{q}_x)$
57	164	16785
58	210	18056
59	242	19253
60	296	19754
61	268	19105
62	311	17675
63	266	11236
64	215	8599
65	145	6280
66	56	4137
67	24	2202
68	8	1144
69	10	681

FIGURE 6.2 – Résultats du critère de Cochran

C- Ajustement des taux bruts

Le critère de Cochran a permis de déceler la plage d'âge contenant suffisamment de données (entre 36 ans et 65 ans). Elle constituera la plage d'étude dans cette approche. Différents lissages ont été testés pour corriger les irrégularités présentes dans la figure 6.1 ainsi que leur adéquation aux données.

Ajustement de Makeham

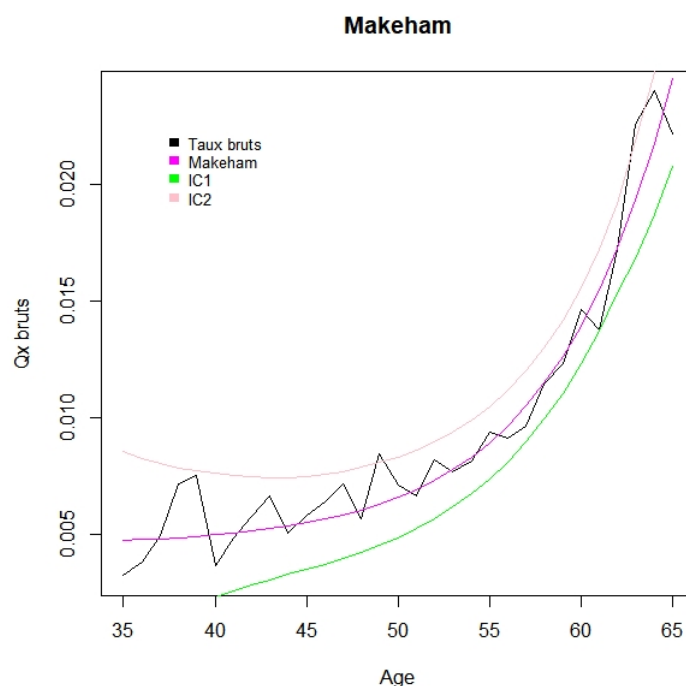


FIGURE 6.3 – Lissage de Makeham

La méthode du maximum de vraisemblance a été utilisée pour retrouver les paramètres du modèle Makeham et aboutir à la courbe obtenue ci-dessus :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot \hat{C}^x, \text{ avec :}$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 4.533189e - 03 \\ \hat{\beta} = 1.104472e - 06 \\ \hat{C} = 1.164435 \end{cases}$$

A partir de ces éléments et des approximations développées dans la section 4.4.1, l'expression analytique de \hat{q}_x est donnée par :

$$\hat{q}_x = 1 - \hat{p}_x = \alpha + \frac{\beta}{\ln c} c^x (c - 1)$$

On remarque que la courbe lissée est proche des taux bruts. Cependant, la courbure du modèle de Makeham fait que les taux soient légèrement sous-estimés pour les âges compris entre 62 ans et 65 ans.

Pour vérifier l'adéquation de ce lissage aux données, il faudra effectuer une régression linéaire de $\ln|q_{x+1} - q_x|$ en fonction de x . Si le nuage de points $(x, \ln|q_{x+1} - q_x|)$ est aligné sur une droite, alors le modèle de Makeham peut être utilisé pour ajuster les taux bruts. Les résultats sont présentés dans la figure ci-dessous :

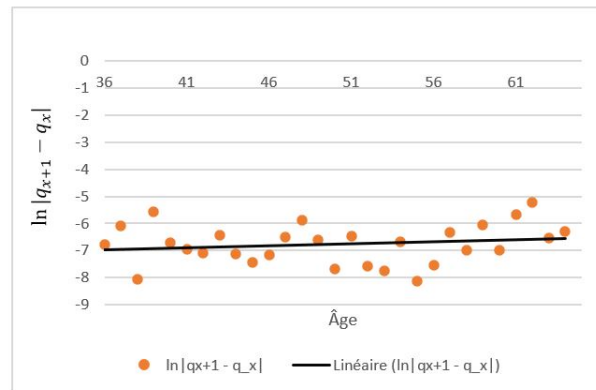


FIGURE 6.4 – Régression linéaire de $\ln|q_{x+1} - q_x|$

Ajustement de Thatcher

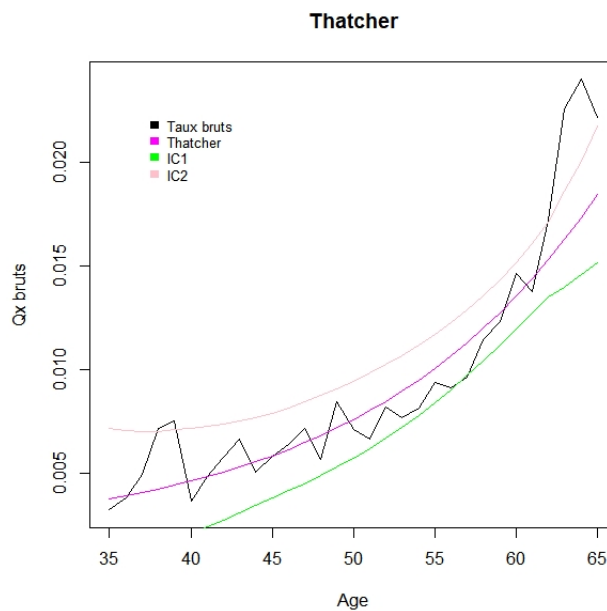


FIGURE 6.5 – Lissage de Thatcher

Contraire au lissage précédent, la courbe lissée se détache des taux bruts brutalement à partir de 60 ans. La méthode du maximum de vraisemblance a été utilisée pour

retrouver les paramètres du modèle Thatcher et aboutir à la courbe obtenue ci-dessus :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\alpha} + \frac{\hat{\beta} \cdot \hat{C}^x}{1 + \beta \hat{C}^x}, \text{ avec :}$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 0.0017251341 \\ \hat{\beta} = 0.0001760065 \\ \hat{C} = 0.0710306177 \end{cases}$$

Méthode de lissage de Whittaker Henderson

Les deux méthodes de lissage présentées précédemment sont des méthodes paramétriques. Pour confronter ces deux lissages, il sera présenté dans ce paragraphe la méthode de lissage non paramétrique de Whittaker-Henderson. La figure ci-dessous présente les résultats obtenus sur Excel en prenant un paramètre de régularité $h=50$.

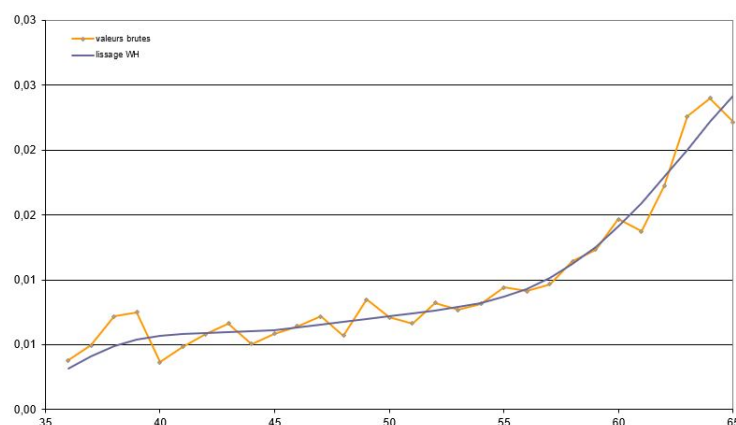


FIGURE 6.6 – Lissage de Whittaker Henderson

D- Choix de la méthode de lissage

Plusieurs outils seront présentés pour analyser la qualité des méthodes de lissage présentés sur la plage d'étude (i.e [36; 65]ans). Ces outils serviront à choisir le lissage le plus adapté au portefeuille.

Fidélité des taux lissés aux données

Tester la fidélité des taux bruts aux données consistera à calculer la distance en valeur absolue entre les taux bruts et les taux lissés. Le but est de vérifier que la somme

des distances entre les taux bruts et les taux ajustés est proche de 0.

$$\sum_{x=36}^{65} |q_x^* - \hat{q}_x| \rightarrow 0$$

Avec q_x^* représentant les taux bruts et \hat{q}_x représentant les taux lissés.

Les valeurs obtenues sont récapitulées dans le tableau suivant :

Lissage	Distance
Modèle de Makeham	0,0379
Modèle de Thatcher	0,0440
Modèle de Whittaker Henderson	0,0290

FIGURE 6.7 – Distance calculée entre les taux bruts et les taux lissés

Le lissage obtenu par la méthode de Whittaker Henderson permet d'obtenir des taux lissés plus fidèle aux taux bruts.

Régularité de la courbe lissée

Tester la régularité de la courbe lissée consistera à vérifier si la somme des carrés des différences d'ordre z des taux ajustés sur la plage retenue est proche de 0 c'est-à-dire $\sum_{x=36}^{65} (\Delta^z \hat{q}_x)^2 \rightarrow 0$.

Pour $z = 1$ et $z = 2$, il faudrait vérifier :

$$\sum_{x=36}^{65} (q_{x+1}^{\hat{}} - \hat{q}_x)^2 \rightarrow 0 \text{ et } \sum_{x=36}^{65} (q_{x+2}^{\hat{}} - 2 * q_{x+1}^{\hat{}} + \hat{q}_x)^2 \rightarrow 0$$

Les valeurs obtenues sont récapitulées dans la tableau suivant :

Lissage	$z = 1$	$z = 2$
Modèle de Makeham	0,00084	0,00179
Modèle de Thatcher	0,00035	0,00072
Modèle de Whittaker Henderson	0,00063	0,00131

FIGURE 6.8 – Régularité des taux lissés

A partir de ce tableau, on peut conclure que le modèle de Thatcher permet d'obtenir des taux lissés plus régulier que les autres modèles testés.

Au vu de ces différents résultats, nous privilègerons le critère de fidélité au critère de régularité. De même, il serait préférable dans notre étude de retenir un modèle permettant d'obtenir une expression analytique des q_x . Le modèle retenue et respectant l'ensemble de nos critères est le **modèle de Makeham**.

E- Comparaison la table de mortalité

Nous faisons un rapprochement entre la courbe lissée retenue et les tables de référence suivantes :

- TH 00-02 : table de mortalité de la population de sexe masculin établie suite aux observations réalisées entre 2000 et 2002
- TF 00-02 : table de mortalité de la population de sexe féminin établie suite aux observations réalisées entre 2000 et 2002
- TD 88-90 : table de mortalité établie suite aux observations réalisées entre 1988 et 1990.

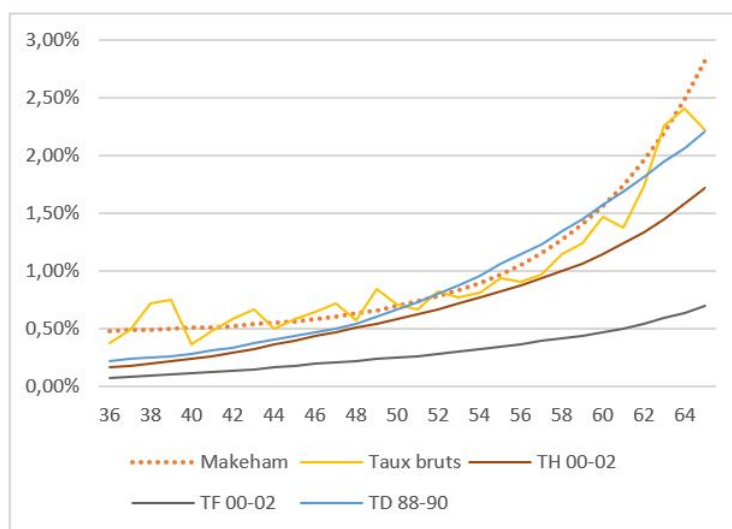


FIGURE 6.9 – Comparaison des taux lissés

Les taux de mortalité lissés obtenus par le modèle de Makeham se positionnent au dessus des taux de mortalité présents dans la TF 00-02 et la TH 00-02. Les taux de mortalité de la table TD 88-90 quant à eux sont légèrement supérieurs à nos taux lissés retenus entre 52 ans et 60 ans. Le risque de décéder des individus invalides est donc plus élevé que celui de la population générale.

Dans notre étude, l'ancienneté n'a pas encore été prise en compte. Pour remédier à ce constat, nous allons emprunter la méthode utilisée par le BCAC lors de l'élaboration des tables de mortalité suite à arrêt de travail à partir de la table de mortalité standard ayant servi de référence la TD 88-90. La méthode décrite permet de comparer les quotients de mortalité obtenus à ceux issus d'une table de mortalité standard et d'estimer les coefficients de surmortalité.

Notations :

- x : âge moyen du groupe à l'entrée du risque
- l_t^x : estimation de la loi de mortalité du groupe d'âge x en fonction de l'ancienneté t dans le risque
- l_x^{STD} : table de mortalité standard
- $l_x^{STD,x}$: loi de mortalité construite par récurrence à partir de la table standard telle que :
 - $l_0^{STD,x} = 10000$,
 - $l_{t+1}^{STD,x} = l_t^{STD,x} \cdot \frac{l_{x+t+1}^{STD}}{l_{x+t}^{STD}}$,
- a, b, c : paramètres d'ajustement, chacun correspondant à une période d'ancienneté ([0, 3], [4,9], [10,20])
- $l_t^{*x}(a,b,c)$ ou simplement l_t^{*x} : loi de mortalité obtenue par majoration (ou minoration) des taux annuels de mortalité de la TD.

Ainsi,

$$l_0^{*x} = 10000;$$

$$l_{t+1}^{*x} = l_t^{*x} \left[1 - \left(1 - \frac{l_t^{STD,x}}{l_{t-1}^{STD,x}} \right) a \right] \text{ si } 0 \leq t \leq 3;$$

$$l_{t+1}^{*x} = l_t^{*x} \left[1 - \left(1 - \frac{l_t^{STD,x}}{l_{t-1}^{STD,x}} \right) b \right] \text{ si } 4 \leq t \leq 9;$$

$$l_{t+1}^{*x} = l_t^{*x} \left[1 - \left(1 - \frac{l_t^{STD,x}}{l_{t-1}^{STD,x}} \right) c \right] \text{ si } 10 \leq t \leq 20.$$

Le critère de choix de a, b et c est celui des moindres carrés, c'est à dire que u, v et w réalisent le minimum de la quantité suivante lorsque $u = a, v = b$ et $w = c$:

$$\sum_{t>0} \left(\frac{l_t^x - l_t^{*x}(u, v, w)}{l_t^x} \right)^2$$

Les résultats de l'ajustement sont présents dans le tableau ci-dessous, les valeurs indiquées entre parenthèses correspondent aux coefficients obtenus par le BCAC :

Périodes d'ancienneté	Paramètres	Classes d'âge		
		20/40	41/50	51/60
0-3	a	3,19 (6,28)	2,01 (4,00)	1,62 (1,02)
4-9	b	2,67 (2,70)	1,72 (1,66)	1,52 (0,75)
10-20	c	1,14 (1,43)	1,17 (1,23)	-

FIGURE 6.10 – Coefficients de surmortalité

Les coefficients de surmortalité obtenus nous permettront de reconstituer une table à double entrée. Ils sont du même ordre de grandeur que ceux du BCAC et décroissent avec l'âge et l'ancienneté. Pour les personnes de plus de 51 ans, l'effet de l'ancienneté n'est pas très significatif et les coefficients de surmortalité sont moindres.

F- Fermeture de table

Afin de pouvoir extrapoler les résultats obtenus précédemment à tous les anciennetés, nous allons ajuster les taux de mortalité relatifs aux invalides par des fonctions de polynômes du premier degré. Ainsi, les taux lissés (q_j^x) à l'âge x et ancienneté j s'écrivent :

$$q_j^x = aj + b, \text{ pour } j > 20 \text{ pour chaque } x$$

Conclusion de l'approche 1

Différents travaux ont été effectués dans cette section ; ce qu'il faut retenir de ces travaux est la méthodologie utilisée. Dans un premier temps nous avons construit une table de mortalité à une dimension, ensuite testé différents lissages pour régulariser les courbes. Il nous a fallu des tests de régularité et de fidélité, ainsi que du bon sens pour retenir le lissage approprié pour notre étude. Enfin, nous avons extrapolé nos données pour obtenir des taux bruts aux âges élevés.

6.1.2 Approche 2 : Modèle basé sur les variables âge et ancienneté

Dans cette approche, il sera question de reprendre la méthodologie de l'approche 1 c'est-à-dire calculer les taux bruts de mortalité, vérifier le critère de Cochran et lissés les taux bruts. La seule différence résidente entre ces deux approches est l'aspect bi-dimensionnel des calculs.

A- Taux bruts

La figure 6.11 présente les taux bruts de mortalité par âge d'entrée et ancienneté. Nous avons déterminé les estimations obtenues en utilisant l'estimateur de Hoem. Graphiquement, On observe une forte volatilité à des anciennetés élevées due à la faible volumétrie des données à ces anciennetés. Par la suite, nous effectuerons le test de Cochran pour déterminer la plage de données à lisser.

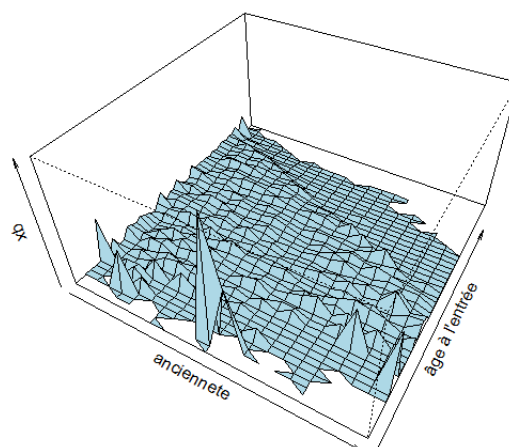


FIGURE 6.11 – Taux bruts de mortalité par âge d'entrée et ancienneté

B- Test de Cochran

Pour vérifier la suffisance des données pour construire notre table, nous avons appliqué le critère de *Cochran*. Le critère de Cochran consiste à vérifier que

$$N_{xt} \cdot \hat{q}_{xt} > 5 \text{ et } N_{xt} \cdot (1 - \hat{q}_{xt}) > 5, \text{ où}$$

N_{xt} : Effectif sous le risque en début d'année à l'âge d'entrée x et ancienneté t

D_{xt} : Le nombre de décès à l'âge d'entrée x et ancienneté t

$\hat{q}_{xt} = \frac{D_{xt}}{N_{xt}}$: Estimateur empirique du taux de mortalité à l'âge d'entrée x et ancienneté t

Pour les contrats, nous appliquons les critères de Cochran aux données par âge d'entrée et ancienneté. Les résultats sont présentés en annexe C.1. Nous décidons de retenir la plage $[0; 8] \times [39; 58]$ pour effectuer un lissage.

C- Ajustement des taux bruts

La méthode utilisée ici pour corriger les irrégularités présentes dans la figure D.1 en Annexe D.1 est la méthode de Whittaker-Henderson. Elle est décrite dans la sous-section 4.4.4 et permet de prendre en compte les critères de régularités et de fidélité.

Compte tenu de la dispersion des données étudiées, nous allons essayer de jouer au maximum sur le critère de régularité pour obtenir la courbe la plus adaptée à nos

données.

Paramètre de régularité fixe $h = 50$:

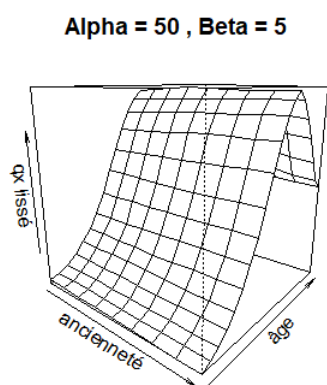


FIGURE 6.12 – Lissage 1

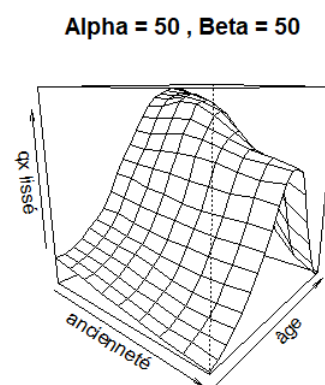


FIGURE 6.13 – Lissage 2

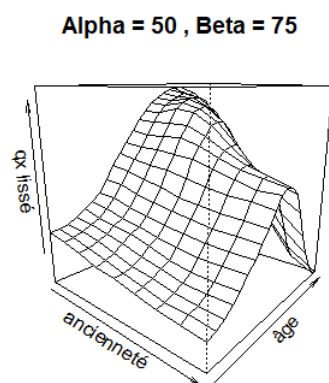


FIGURE 6.14 – Lissage 3

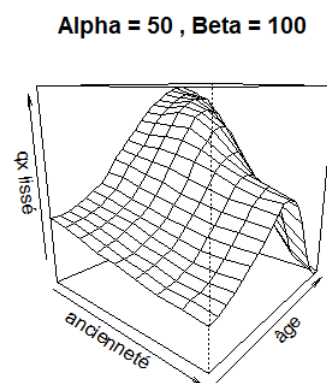


FIGURE 6.15 – Lissage 4

Paramètre de regularité h variant :

Alpha = 5 , Beta = 50

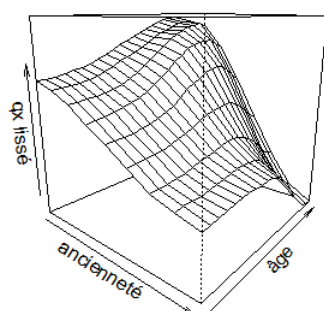


FIGURE 6.16 – Lissage 5

Alpha = 25 , Beta = 50

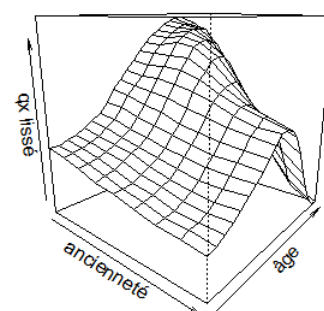


FIGURE 6.17 – Lissage 6

Alpha = 75 , Beta = 50

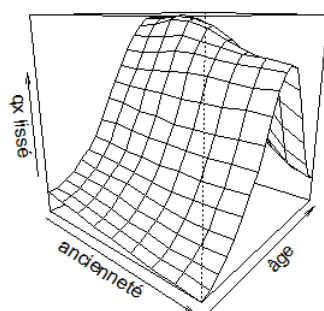


FIGURE 6.18 – Lissage 7

Alpha = 100 , Beta = 50

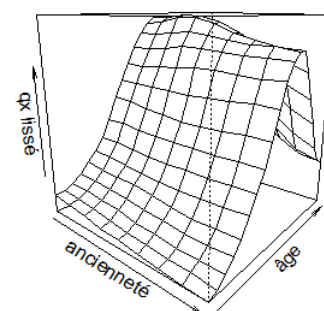


FIGURE 6.19 – Lissage 8

L'ensemble des lissages effectués se présentent sous forme de cloche. Au âges élevés, les taux de mortalité lissés chutent brusquement. Dans un premier temps, nous allons choisir les paramètres α et β puis nous allons refaire des tests similaires pour choisir les ordres horizontal (h) et vertical (v).

D- Choix de la courbe la plus adaptée

Pour nous aider dans le choix de la courbe la plus adaptée à nos données, nous allons mettre en oeuvre un test de Khi-deux. Proposé en 1900 par le statisticien Karl Pearson,

le test de Khi-deux est l'un des plus utilisés pour effectuer des test d'adéquation, d'homogénéité et d'indépendance.

Dans notre cas, il sera question d'élaborer un test d'adéquation afin de vérifier si la loi de mortalité observée suit la même loi que celle prédite par notre loi d'expérience .

Ce test suppose que les données considérées proviennent de variables aléatoires qui suivent une loi de probabilité donnée et l'on souhaiterait tester la validité de cette hypothèse. Ce test est basé sur l'hypothèse nulle (H0) suivante :

H0 : " La loi de mortalité observée est identique à la loi de mortalité prédite "

Pour élaborer ce test, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- Calculer la statistique $S = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$ où o_{ij} , e_{ij} représentent respectivement les observations et estimations à l'âge d'entrée i et ancienneté j ;
- Se donner a priori un seuil de significativité;
- Déterminer le nombre de degré de liberté(df) du problème à partir du nombre de lignes l et le nombre de colonnes c .

$$df = (l - 1) * (c - 1)$$

- Déterminer le quantile de Khi-deux à partir du nombre de degré de liberté et du seuil de significativité. Si df est entre 30 et 100 mais n'est pas un multiple de 10, on utilise la table en annexe et on fait une interpolation linéaire. Si $df > 100$ on peut, grâce au théorème limite central, approximer la loi $\chi^2(df)$ par la loi normale $N(df, 2df)$.

Si la statistique calculée est supérieure au quantile observé, on conclut que l'hypothèse H0 est rejetée. En effectuant ce test, on obtient les résultats suivants :

	df	statistique	quantile	décision
Lissage 1	152	541,3714	652,0355	H0 acceptée
Lissage 2	152	542,6817	652,0355	H0 acceptée
Lissage 3	152	542,7438	652,0355	H0 acceptée
Lissage 4	152	542,7780	652,0355	H0 acceptée
Lissage 5	152	542,8882	652,0355	H0 acceptée
Lissage 6	152	542,5597	652,0355	H0 acceptée
Lissage 7	152	542,7300	652,0355	H0 acceptée
Lissage 8	152	542,7566	652,0355	H0 acceptée

FIGURE 6.20 – Test de Khi-deux

Bien que tous les lissages testés permettent de valider l'hypothèse H0, nous ne retiendrons que le lissage 1 car il présente la plus faible statistique calculée. Les valeurs retenues sont $\alpha = 50$ et $\beta = 5$.

Comme annoncé précédemment, nous allons refaire ce travail en variant les paramètres h et v en présentant d'autres axes de décision notamment la surface de confiance, l'analyse des résidus et le critère MAPE.

L'étude de la surface de confiance sera utilisée pour déterminer de la pertinence des lissages obtenues. Elle permettra d'évaluer si la surface lissée a une tendance globale à rester dans l'intervalle de confiance ou pas. Pour cela, nous regarderons la surface S définie comme étant :

$$S(x, t) = \max(0, S_{lissée} - S_{IC+}) - \max(0, S_{IC-} - S_{lissée})$$

D.1- Choix 1 : $h = 2$ et $v = 1$

Représentation graphique

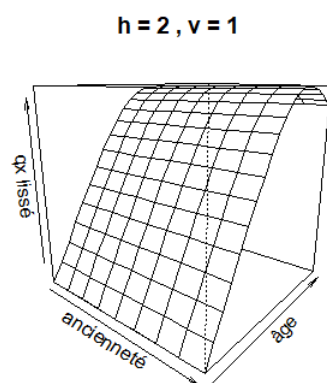


FIGURE 6.21 – Lissage 9

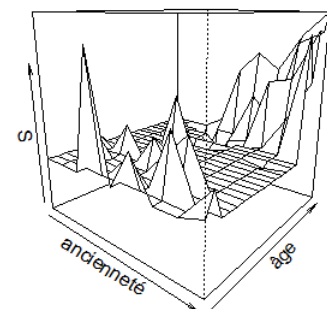


FIGURE 6.22 – Surface 9

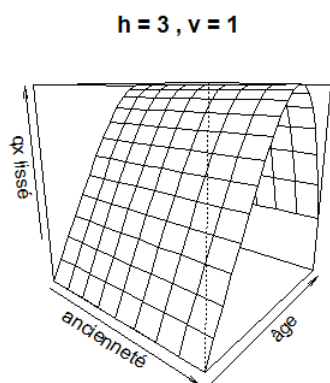
D.2- Choix 2 : $h = 3$ et $v = 1$ Représentation graphique

FIGURE 6.23 – Lissage 9

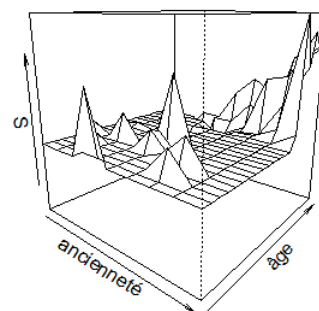


FIGURE 6.24 – Surface 9

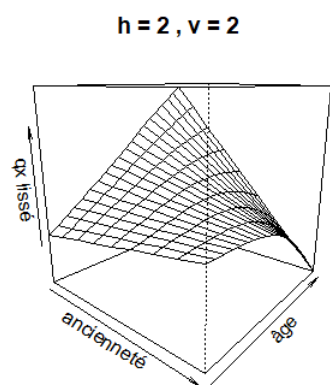
D.3- Choix 3 : $h = 2$ et $v = 2$ Représentation graphique

FIGURE 6.25 – Lissage 11

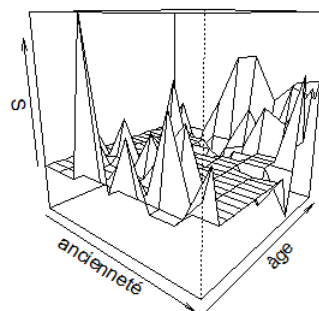


FIGURE 6.26 – Surface 11

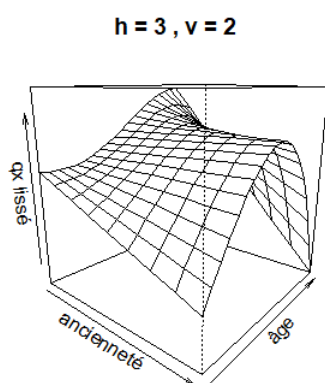
D.4- Choix 4 : $h = 3$ et $v = 2$ Représentation graphique

FIGURE 6.27 – Lissage 12

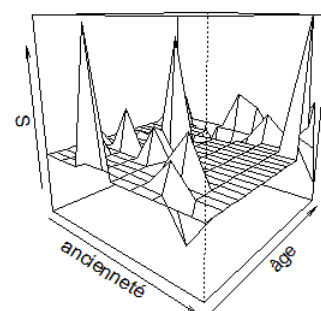


FIGURE 6.28 – Surface 12

L'analyse graphique des surfaces nous permet d'exclure le choix 3 (lissage 11). On remarque que la surface obtenue présente un certain nombre de fluctuations qui semblent non négligeables dans ce cas.

Dans les deux autres choix, On constate que la surface lissée reste globalement dans l'intervalle de confiance des taux bruts à certains endroits même si l'on constate aussi quelques fluctuations. Un deuxième test de Khi-deux, nous permettra de justifier notre choix. Les résultats présentés dans le tableau ci-dessous nous permettent de retenir le Lissage 12.

	df	statistique	quantile	décision
Lissage 9	152	513,27	652,0355	H0 acceptée
Lissage 10	152	483,14	652,0355	H0 acceptée
Lissage 11	152	435,67	652,0355	H0 acceptée
Lissage 12	152	312,79	652,0355	H0 acceptée

FIGURE 6.29 – Test Khi-deux

Outre ce test, nous allons présenter une analyse des résidus de pearson et présenter les résultats du MAPE. Cette analyse aura pour but de vérifier si le lissage effectué modélise correctement la variabilité des données (valeur comprise entre -2 et 2). Le MAPE quant à lui correspond à la moyenne des écarts en valeur absolue par rapport

aux valeurs observées. Son expression (MAPE) est donnée dans l'équation suivante :

$$MAPE = \frac{\sum_{(x,t)} |(D_{x,t}/E_{x,t} - q_{lissée}(x,t))/(D_{x,t}/E_{x,t})|}{\sum_{(x,t)} D_{x,t}},$$

$$\text{où } \begin{cases} D_{x,t} : \text{décès observés par âge } x \text{ et ancienneté } t \\ E_{x,t} : \text{Exposition par âge } x \text{ et ancienneté } t, \\ q_{lissée}(x,t) : \text{Taux lissés par âge } x \text{ et ancienneté } t. \end{cases}$$

Le tableau suivant récapitule le nombre de résidus de Pearson supérieur à 2 et le résultat du MAPE.

	Lissage 9	Lissage 10	Lissage 11	Lissage 12
Residus de Pearson (> 2)	18	15	15	9
MAPE (%)	7,4	6,5	5,6	3,9

FIGURE 6.30 – Autres critères de validation

Au vu de tous ces résultats, nous conservons le Lissage 12.

E- Fermeture de table

Afin de pouvoir extrapoler les résultats obtenus précédemment à tous les anciennetés, nous allons ajuster les taux de mortalité relatifs aux invalides par des fonctions de polynômes du second degré. Ainsi, les taux lissés ($q_{x,t}$) à l'âge x et ancienneté t s'écrivent :

$$q_{x,t} = at^2 + bt + c, \text{ pour } t > 20 \text{ pour tout } x.$$

Conclusion de l'approche 2

La méthodologie utilisée est identique à celle employée dans l'approche 1. Le coté bi-dimensionnel de cette approche nous a amené à nous poser des questions sur les paramètres du lissage optimal de Whittaker-Henderson à choisir pour obtenir la courbe la plus adaptée à nos données. En pratique, il est toutefois difficile de trouver les paramètres du lissage optimal. La solution que nous avons trouvée pour contourner cette difficulté est de varier les paramètres les uns après les autres, puis d'effectuer des tests statistiques qui nous ont aidé à sélectionner le lissage le plus adapté.

6.2 Validation des approches : Backtesting

Le backtesting (test rétro-actif de validité) consiste à tester la pertinence d'une modélisation en comparant les réalisations constatées et les prédictions de la table à partir d'un large ensemble de données historiques réelles. Cette section aura donc pour but d'apprécier les estimations obtenues à partir de la loi d'expérience et ainsi que son niveau de prudence.

Les résultats présentés ci-dessous sont observés sur l'année d'inventaire 2020. Nous avons choisi l'année 2020 car elle n'est pas présente dans la période d'observation et elle nous permettra de tester si les tables d'expérience construites s'adaptent aux années futures.

6.2.1 Formule analytique du nombre de décès

La démarche utilisée ici sera de comparer le nombre de sorties observées et le nombre de sorties estimées par le modèle sur un intervalle $[X, X+1[$ ou un pavé $[X, X+1[\times [t, t+1[$. Le décompte des sorties observé nécessitera de définir la convention d'arrondi à utiliser (par défaut comme choix). Le nombre de sorties estimé par le modèle est simplement l'espérance de la variable aléatoire "nombre de décès" que l'on notera par D par la suite.

Sur un intervalle $[X, X+1[$, on a :

$$P(D_i = 1) = \int_e^{X+1} \left(1 - \frac{S_X(c)}{S_X(e)}\right) F_c(dc)$$

En supposant une constance de la fonction de hasard sur cet intervalle,

$$1 - \frac{S_X(c)}{S_X(e)} = 1 - \exp(-\mu_X \cdot (c - e))$$

Pour éviter l'intervention explicite de la loi de censure dans le calcul, on va supposer μ_X assez petit pour que $1 - \exp(-\mu_X \cdot (c - e)) = \mu_X(c - e)$. On obtient alors :

$$P(D_i = 1) = \mu_X \cdot \int_e^{X+1} (c - e) F_c(dc)$$

En supposant la constance de la fonction de hasard et en utilisant une approximation affine de la fonction de survie valide lorsque le taux de hasard μ_X est petit ,

$$E(D) = \sum_{i=1}^n P(D_i = 1) = \mu_X \cdot E(X)$$

où $E(X)$ représente l'exposition A l'aide de la probabilité ajustée d sortie, on a donc

$$E(D) = \sum_{i=1}^n P(D_i = 1) = -\ln(1 - q(x)).E(X)$$

Lorsque la probabilité de sortie est très petite, cette expression devient $E(D) = q(x). E(X)$.

6.2.2 Comparaison du ratio "sorties observées / sorties théoriques"

Le calcul du ratio "sorties observées / sorties théoriques" nous permettra de sélectionner la table ayant une bonne capacité de prédiction des sorties réelles. Nous retiendrons la table ayant un ratio plus proche de 1, permettant ainsi d'avoir de meilleurs prédictions.

Approche 1							
Tranche d'âge	Effectif sous	poids de la tranche	Sorties théoriques	Sorties observées	Sorties observées / Sorties théoriques	Différence	
25 - 30	239	3,9%	1,67	4	240%	2,33	139,8%
31-35	467	7,7%	3,68	3	81%	-0,68	-18,6%
36-45	727	12,0%	7,12	3	42%	-4,12	-57,9%
41-45	1045	17,2%	11,33	7	62%	-4,33	-38,2%
46-50	1365	22,4%	16,41	10	61%	-6,41	-39,1%
50 et plus	2240	36,8%	37,57	50	133%	12,43	33,1%
Total	6083	100,0%	77,78	77	99%	-0,78	-1,0%

Approche 2							
Tranche d'âge	Effectif sous	poids de la tranche	Sorties théoriques	Sorties observées	Sorties observées / Sorties théoriques	Différence	
25 - 30	347	6,2%	2,48	4	161%	1,52	61,3%
31-35	559	10,0%	5,38	3	56%	-2,38	-44,2%
36-45	744	13,3%	12,46	3	24%	-9,46	-75,9%
41-45	1052	18,8%	22,96	7	30%	-15,96	-69,5%
46-50	1152	20,6%	25,74	10	39%	-15,74	-61,2%
50 et plus	1744	31,2%	28,78	50	174%	21,22	73,7%
Total	5598	100,0%	97,80	77	79%	-20,80	-21,3%

FIGURE 6.31 – comparaison du nombre de décès en 2020

La variation du nombre de décès obtenus est identique dans les deux approches mais l'amplitude diffère. En effet dans les deux approches, le nombre de décès est surestimé entre 31 ans et 50 ans et sous-estimé au delà de 50 ans.

6.2.3 Comparaison du ratio "charge réelle/charge prévisionnelle"

La provision mathématique a pour but de couvrir les engagements futurs de l'assureur vis-à-vis de l'assuré. Dans notre étude, on appellera **Charge prévisionnelle** la

différence entre une provision ouverture et une provision de clôture. Le but de cette section est de comparer notre indicateur "charge prévisionnelle" à la valeur de la charge réellement observée .

Dans le cas où l'une de nos tables reflèterait réellement notre portefeuille, l'équation suivante devrait être vérifiée :

$$PM_{ouv} + IT_{PM} = PM_{clot} + Charge_{reelle}$$

Dans le cas où $PM_{ouv} + IT_{PM} > PM_{clot} + Charge_{reelle}$, on observera un surprovisionnement ; Ce qui nous permettra de dégager un boni de prestation. Dans le cas contraire, on relèvera un mali de prestation.

Dans notre analyse, nous avons pas pris en compte les contrats ayant une provision d'ouverture nulle. Il s'agit des contrats dont l'année d'entrée en invalidité est 2020. En pratique, notre calcul est simplifié par un taux technique nul. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

	PM Ouv	IT PM	PM Clot	Charge Prev	Charge réelle	Ratio
Table App 1	89 796 269	0	81 166 517	8 629 752	6 155 126	71,3%
Table App 2	158 281 123	0	143 282 555	14 998 568	6 155 126	41,0%

FIGURE 6.32 – comparaison du ratio charge réelle/ charge prévisionnelle en 2020

Dans les deux approches, on note un boni de prestation et donc une prudence dans l'évaluation des provisions. La table de l'approche 2 fournit des résultats largement supérieurs aux réalisations.

Au vu des différents indicateurs présentés, la table obtenue après les travaux effectués dans l'approche 1 semble plus adéquate pour nos données.

6.3 Impact du changement de table sur les provisions

Les différents travaux effectués ci-dessus ont permis de retenir une table de mortalité utilisable pour provisionner le risque décès des individus en invalidité. L'utilisation de cette nouvelle table nous permettra d'avoir des provisions plus justes au sens best estimate que celles calculées actuellement en utilisant la table proposée par le BCAC.

Il sera question dans cette section de mesurer l'impact d'un changement de table dans l'activité quotidienne de la direction ; ce qui nous permettra de mettre sur pied des actions qui nous aideront à mieux assurer notre engagement vis-à-vis de l'assuré.

6.3.1 Comparaison du nombre de décès estimé

Table du BCAC							
Tranche d'âge	Effectif sous	poids de la tranche	Sorties théoriques	Sorties observées	Sorties observées / Sorties théoriques	Différence	
25 - 30	347	6,2%	3,82	4	105%	0,18	4,6%
31-35	559	10,0%	5,58	3	54%	-2,58	-46,3%
36-45	744	13,3%	8,68	3	35%	-5,68	-65,4%
41-45	1052	18,8%	13,87	7	50%	-6,87	-49,5%
46-50	1152	20,6%	16,61	10	60%	-6,61	-39,8%
50 et plus	1744	31,2%	24,35	50	205%	25,65	105,3%
Total	5598	100,0%	72,90	77	106%	4,10	5,6%

FIGURE 6.33 – Estimation du nombre de décès

Comme dans les différentes approches, nous essayons de comparer le nombre de décès prédits par la table du BCAC et nos réalisations. On remarque au travers de ce tableau qu'en utilisant la table du BCAC, le nombre de décès est légèrement en dessous des observations.

6.3.2 Comparaison des provisions de maintien de la garantie décès

Inventaire	PMGDC Exp	PMGDC BCAC
31/12/2019	89 796 269	97 208 690
<i>dont</i>		
<i>Femmes</i>	48 486 374	53 892 597
<i>Hommes</i>	41 309 895	43 316 093
31/12/2020	100 163 914	109 660 331
<i>dont</i>		
<i>Femmes</i>	53 360 508	60 318 869
<i>Hommes</i>	46 803 406	49 341 461

FIGURE 6.34 – PMGDC calculées avec la table d'expérience VS PMGDC calculées avec la table du BCAC

Globalement, les provisions obtenues en utilisant la table de mortalité du BCAC pour les individus en invalidité se positionnent au dessus des en utilisant la table interne. L'utilisation de la table du BCAC nous permet donc de surprovisionner notre engagement vis-à-vis des assurés en dégagant une marge de prudence.

6.4 Impact du changement de table sur le SCR vie

6.4.1 Qu'est-ce que Solvabilité II ?

La réforme prudentielle du secteur bancaire, Bâle II, a poussé les instances européennes à revoir également les systèmes de solvabilité des compagnies d'assurance. Dès lors, un nouveau système de solvabilité, nommé Solvabilité II, a été mis en place dans les domaines de l'assurance vie, l'assurance non-vie et la réassurance afin de mieux protéger les assurés et d'harmoniser les normes et des pratiques au niveau européen. Basée sur trois piliers, cette nouvelle norme pousse aussi les assureurs à s'interroger sur la culture du risque ainsi qu'à leurs stratégies pour mieux piloter leurs activités afin de garantir une gestion saine, prudente et efficace.

6.4.2 Le contexte historique

Domaine ayant évolué au fil des années, l'assurance européenne est aujourd'hui soumise à un régime prudentiel entré en vigueur au 1er janvier 2016. Issu de la directive européenne 2009/138/CE appelée Solvabilité 2, il vient ainsi remplacer les directives des années 1970 : Solvabilité 1. Bien qu'ayant été révisée en 2002, la norme Solvabilité 1 ne semblait plus être adaptée aux enjeux économiques, financiers et juridiques de l'assurance. Elle a montré quelques faiblesses à l'occasion de la crise financière de 2008, notamment :

- Manque d'harmonisation des normes et des pratiques au niveau européen ;
- Manque de sensibilité aux risques (par exemple, les nouveaux risques) ;
- Vision purement quantitative, peu d'incitations ;
- Arbitrage réglementaire entre les secteurs financiers ;
- Pas de prise en compte des risques économiques inhérents à l'activité ;
- Un contrôle des groupes critiqués.

Dès l'année suivante, la directive-cadre de Solvabilité 2 a été adoptée, visant à renforcer les règles européennes sur les garanties apportées par les compagnies d'assurance. Cette directive vient renforcer les directives de Solvabilité 1 et modifier en profondeur la réglementation. Elle a pour objectif d'harmoniser et de soutenir le marché de l'assurance européen, en garantissant la solvabilité des assureurs, c'est-à-dire leur aptitude à faire face à leurs engagements envers les assurés. Elle introduit une approche nouvelle par rapport à la directive Solvabilité 1, sur la mise en place d'un système global de gestion des risques et la manière de valoriser le bilan.

6.4.3 Les piliers fondamentaux

La directive Solvabilité II s'appuie sur trois piliers :

1. Pilier 1 : Exigences quantitatives

Ce pilier définit l'ensemble de règles de valorisation des actifs et des passifs ainsi que les exigences de capital et leur mode de calcul. Il existe deux grandes exigences de capital :

- minimum Capital Requirement (MCR) : c'est le niveau minimum de fond propre en dessous duquel l'autorité de contrôle intervient automatiquement ;
- Le Solvency Capital Requirement (SCR) : c'est le capital minimum dont l'assureur doit disposer pour absorber les pertes potentielles à l'horizon un an avec une probabilité de 99.5%.

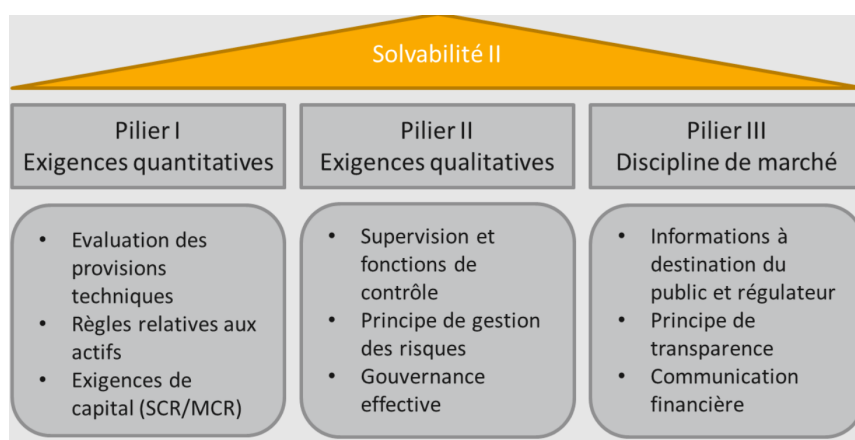
2. Pilier 2 : Exigences qualitatives

Ce pilier a pour objectif de définir les dispositifs de suivi des risques en interne et de surveillance de l'activité afin de s'assurer que la compagnie est bien gérée et en mesure de calculer et maîtriser ses risques, et d'autre part, de s'assurer de sa solvabilité à n'importe quel moment. Le pilier 2 encourage les compagnies à adopter la démarche ERM (Enterprise Risk Management) qui consiste à identifier les risques, mesurer leur impact, apporter des solutions contrôlées et faire un compte rendu.

3. Pilier 3 : Exigences en matière d'informations prudentielles et de publication.

Ce pilier définit l'ensemble des informations accessibles au public ainsi qu'aux autorités de contrôle qui pourront les utiliser pour exercer leur pouvoir de surveillance. En pratique, ce pilier se matérialise par la production et la revue des rapports narratifs (RSR, FSCR), de Quantitative Report Templates (QRT), ...

Voici un schéma qui synthétise le contenu des trois piliers :



6.4.4 Etudes quantitatives d'impact (QIS)

La mise en place de Solvabilité II s'est faite progressivement. Il était question pour l'EIOPA¹ de quantifier l'impact des réformes, de calibrer les paramètres et par conséquent de fournir un point de départ au dialogue entre les différents acteurs de la réforme. Ces mesures d'impact se basent sur des QIS² parmi lesquels :

- Le QIS1, effectué au dernier trimestre 2005, avait pour but d'évaluer le niveau de prudence en provisions techniques.
- Le QIS2, effectué en mai 2006, avait pour but d'évaluer le besoin en capital par le biais des calculs du MCR et SCR.
- Le QIS3, effectué en avril 2007, avait pour but d'affiner le calcul des formules standards utilisées dans l'évaluation des provisions techniques, du MCR et du SCR.
- Le QIS4, lancé en avril 2008 avait pour but de corriger l'hétérogénéité et la difficulté d'exploitation des résultats lors du QIS3. Ainsi, Il a permis d'évaluer l'impact quantitatif de l'exigence en capital pour une compagnie, ainsi que les effets de la diversification et le fait que les fonds propres soient transférables.
- Le QIS5 lancé en août 2010 a pour objet de recalibrer la formule standard.

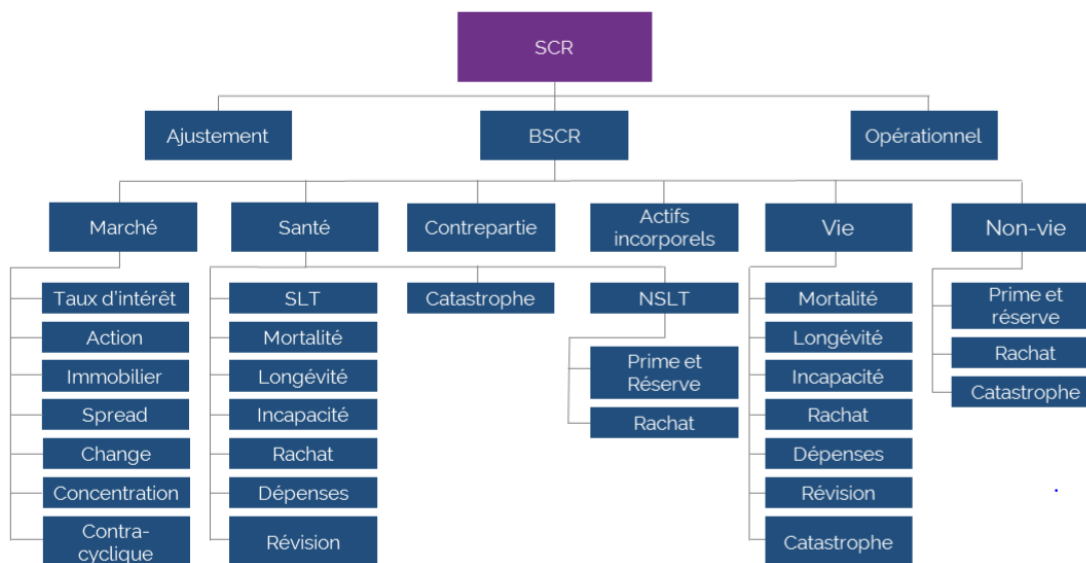
6.4.5 Le SCR

A - Le SCR global

Le SCR comme défini dans la section 6.4.3 représente le niveau de fonds propres souhaitable dont l'assureur doit disposer pour absorber les pertes potentielles à l'horizon un an avec une probabilité de 99.5%. Il permet de couvrir divers risques tels que le risque de marché, le risque de contrepartie, le risque opérationnel, le risque vie ...Son calcul en utilisant la formule standard s'organise par modules :

1. EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority anciennement appelé Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS)

2. QIS : Quantitative Impact Studies



Le SCR global est donné par la formule suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Dans la suite, on détaillera chaque terme de cette formule.

SCR Op (SCR opérationnel)

Composante directe de la formule standard, le SCR opérationnel est une fonction simple du SCR de base dont la formule est la suivante :

$$SCR_{Op} = \min(0.3 * BSCR; Op) + 0.25 * pul$$

- BSCR : capital de solvabilité requis de base ;
- Op : capital de base pour risque opérationnel (hors UC), calculé comme étant le max du capital de base pour risque opérationnel des primes et des provisions ;
- Expul : dépenses UC annuelles (12 derniers mois).

Ce SCR permet de couvrir les risques liés au système d'information (défaillance matérielle, bug de matériel,...), les risques liés au processus (données erronées,...), les risques liés aux événements (catastrophes naturelles, terrorisme,...), les risques juridiques exceptés les risques de réputation et ceux liés aux décisions stratégiques.

BSCR (Basic Solvency Capital Requirement)

Il est obtenu par agrégation de SCR tels que les SCR de défaut, SCR non-vie, SCR marché, SCR vie, SCR santé et SCR incorporel. Il s'obtient en appliquant la formule

suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} corr_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{incorporel}$$

où $i, j \in (\text{Marché, Santé, Défaut, Vie, Non-Vie})$ et Corr est la matrice de corrélation des modules de risques.

Adj (Ajustement)

Il représente l'ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéficiaires et des impôts différés.

Dans ce mémoire, le risque prépondérant est le risque de mortalité . Dans la suite, nous détaillerons en profondeur le calcul du SCR vie.

B - Le SCR vie

Un zoom sur la formule standard, nous permet de déceller les différentes composantes du SCR life :

- Le SCR de mortalité : il découle d'incertitudes liées à la volatilité des taux de mortalité.
- Le SCR de longévité : Il découle du fait que la durée de vie des souscripteurs augmente.
- Le SCR d'invalidité/morbidité : Il découle du fait que les assurés en incapacité ou invalidité mettent plus de temps pour se rétablir
- Le SCR de rachat
- Le SCR de frais
- Le SCR de révision
- Le SCR catastrophe

L'agrégation de ces différents SCR en utilisant la formule suivante $\sqrt{\sum_{i,j} corr_{i,j} SCR_i SCR_j}$ et la matrice de corrélation suivante permet d'obtenir le SCR Life.

Chaque composante du SCR Life s'obtient après calcul du Best Estimate.

La méthode utilisée pour le calcul du Best estimate est celle préconisée par les orientations nationales complémentaires (ONC). Elle se déroule en trois étapes :

1. Calcul du Best Estimate Garanti (BEG) :

Dans cette étape, il faudra évaluer les flux futurs de prestations découlant de l'engagement contractuel minimal grâce aux données du portefeuille et à l'utilisation

	Mortalité	Longévité	invalidité/morbidité	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe
Mortalité	100%	-25%	25%	0%	25%	0%	25%
Longévité	-25%	100%	0%	25%	25%	25%	0%
invalidité/morbidité	25%	0%	100%	0%	50%	0%	25%
Rachats	0%	25%	0%	100%	50%	0%	25%
Frais	25%	25%	50%	50%	100%	50%	25%
Révision	0%	25%	0%	0%	50%	100%	0%
Catastrophe	25%	0%	25%	25%	25%	0%	100%

FIGURE 6.35 – Matrice de corrélation du risque souscription vie

des méthodes actuarielles adaptées aux statistiques d'expérience du portefeuille. L'actualisation de ces flux futurs avec la courbe de taux fournie par l'ACP donnera la partie garantie du Best Estimate.

2. Calcul du Best Estimate total (avec la FDB³) :

Une fois le Best Estimate Garanti calculé, le Best Estimate total s'obtient en incluant la valeur actualisée des suppléments de prestations futures qui seront versées à titre *discrétionnaire* au sens de Solvabilité II si les hypothèses techniques et financières qui ont sous-tendu les calculs se vérifient, et notamment en l'absence de "Stress"

3. Détermination de la FDB :

La différence entre le Best Estimate total et le Best Estimate Garanti représente la valeur actuelle des FDB.

En pratique, nous utilisons le logiciel Modeling d'Addactis qui effectue des chocs pour reconstituer le SCR Life. En effet, ce logiciel permet d'avoir des Best Estimate Garantis sans choc et des Best Estimate Garantis choqués de chaque module du SCR Life présenté ci-dessus. La différence entre le Best Estimate Garanti choqué et le Best Estimate Garanti sans choc représente le SCR du sous risque.

Les chocs effectués sont ceux de la formule standard et les suivants :

- Mortalité : hausse de 15 % de la mortalité
- Longévité : baisse de 20 % de la mortalité
- Morbidité : hausse des entrées en invalidité-morbidité de 35 % pour 12 mois puis de 25 % ensuite, et baisse (sur toute la projection) de 20 % des recouvrements en invalidité-morbidité
- Frais : hausse de 10 % des dépenses, et hausse de 1 % de l'inflation utilisée pour le calcul des dépenses
- Révision : hausse de 3 % des prestations de rente

3. Future Discretionary Benefits

- Rachat : hausse de 50 % des rachats (rachat hausse), baisse de 50 % des rachats (rachat baisse) et rachats de 40 % (rachat massif)
- Catastrophe : hausse de 0,15 point de pourcentage de la mortalité sur 12 mois

Le tableau suivant récapitule les différents résultats par module du SCR Life en 2020.

Modules du SCR Life

	SCR_Mortalite	SCR_Longevite	SCR_Morbidite	SCR_Rachat	SCR_Frais	SCR_Revision	SCR_Catastrophe
Table BCAC	55 232 891	264 700 479	83 769 106	9 487 307	66 699 310	9 296 494	26 718 997
Table exp 1	55 659 662	264 700 479	83 415 836	9 487 307	66 607 383	9 344 243	26 718 997



SCR Life	
Table BCAC	321 477 001
Table exp 1	321 328 067

FIGURE 6.36 – SCR Life en 2020

Les modules impactés par le changement de table de mortalité sont les SCR de mortalité, morbidité, frais et révision. L'écart entre nos deux calculs est assez faible. Le changement de table de mortalité n'a donc pas d'influence majeur sur le SCR Life.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la mortalité des individus en état d'invalidité de notre portefeuille. Il était question pour nous de vérifier si la table de mortalité du BCAC utilisée lors de l'inventaire est adéquate pour couvrir les engagements vis-à-vis des assurés. Les travaux effectués dans le cadre de ce mémoire pourront être utilisés lors de l'inventaire dans le calcul des provisions de maintien de la garantie décès ou lors du calcul des SCR et apporteront des informations quant au niveau de mortalité par rapport à la table du BCAC.

Nous avons implémenté deux approches différentes pour construire notre table expérience. Dans la première approche, nous avons construit une table de mortalité similaire à la TD 88-90. Les taux bruts de mortalité ont été calculés en utilisant l'estimateur de Hoem et de Kaplan-Meier. Les résultats obtenus sont identiques d'un estimateur à un autre. Nous avons comparé différents lissages et retenu le lissage de Makeham pour ses différentes performances statistiques (test de Khi-Deux, test de régularité, test de fidélité ...). A partir des coefficients de surmortalité par rapport à la TD 88-90 obtenus par tranche d'âge et ancienneté, nous avons reconstitué une table à deux entrées (âge et l'ancienneté).

Dans la seconde approche, nous avons calculé les taux bruts par âge et ancienneté en utilisant la méthode de Hoem. Nous avons appliqué un lissage de Whittaker-Henderson sur une plage représentative de données. La difficulté présente dans l'estimation des paramètres optimaux de ce lissage, nous a poussé à varier les paramètres les uns après les autres et tester les performances des différents modèles au travers des tests statistiques.

Disposant de deux tables d'expérience, nous avons effectué une retrospection entre nos tables et les réalisations. Cette retrospection nous a permis de retenir la table d'expérience la mieux adaptée à nos données. Ensuite, nous avons évalué l'impact du changement de table de mortalité dans le calcul des provisions de maintien de la garantie décès en invalidité et dans le calcul du SCR Life. Les résultats obtenues par la table de mortalité du BCAC sont légèrement au dessus de ceux de notre table d'expérience. Dans le cadre de l'inventaire, nous trouvons adéquat de conserver la table du BCAC car elle est plus prudente.

Dans nos travaux, nous avons retenu la table obtenue dans l'approche 1 après le Backtesting. Nous pouvons nous poser des questions sur le plus de prudence présent dans la table de l'approche 2 notamment sur la qualité de nos prédictions. Comme axe d'amélioration aux travaux menés, nous pouvons nous interroger sur une méthode d'estimation statistique appropriée pour les faibles échantillons.

Bibliographie

Cours et ouvrages

- [1] Tomas Julien and Planchet Frédéric (2014), *Critères de validation : Aspects méthodologiques*.
- [2] Julliard M. , R et les modèles de durée
- [3] Planchet F. et Thérond P. (2011), *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*, Economica Paris

Mémoires

- [4] Zhang (2011), *Construction des tables de mortalité d'expérience en cas de décès*, Mémoire présenté devant l'institut des actuaires
- [5] A. CURTAL (2009), *Etude de la mortalité des personnes en arrêt de travail*, Mémoire présenté devant l'institut des actuaires
- [6] A. MERCIER (2002), *Le maintien des garanties décès aux personnes en arrêt de travail*, Mémoire présenté devant l'institut des actuaires
- [7] CLEMENT Olivier (2003), *Elaboration d'une table d'expérience : comparaison de méthodes de lissage analytique et d'ajustement statistique*, Mémoire présenté devant l'institut des actuaires

Sites internet

- [8] <https://guidesurvie.com/techniques-survie/analyse-de-survie-dans-r/>
- [9] <https://www.legifrance.gouv.fr> : site officiel du gouvernement pour la diffusion du droit
- [10] <https://www.ffa-assurance.fr> : site de la fédération française des assurances

Annexe A

Calcul de la provision de maintien de la garantie décès

A.1 Notations

Nom du champ	Variable associée	Modalités
Capital décès		
Situation familiale	SF	M ou CVDS
Nombre d'enfants	N	Tout entier positif
Montant de la couverture décès	MCD	Tout réel positif
CVDS sans enfant	Cap-C0	Tout pourcentage positif
CVDS avec 1 enfant	Cap-C1	Tout pourcentage positif
Marié sans enfant	Cap-M0	Tout pourcentage positif
Marié avec 1 enfant	Cap-M1	Tout pourcentage positif
Majoration supplémentaire par enfant	Cap-Majo	Tout pourcentage positif
Rente de conjoint		
Montant rente viagère	Mt-RC-Viag	Tout pourcentage positif
Montant rente temporaire	Mt-RC-Temp	Tout pourcentage positif
Age limite	AgeLim-RC	[25 ans, 65ans]
Fractionnement Rente conjoint	Fract-RC	Mensuel, trimestriel semestriel, annuel

Nom du champ	Variable associée	Modalités
Rente de conjoint		
Terme Rente conjoint	Terme-RC	Echu ou à échoir
Rente éducation		
Montant rente viagère	Mt-RE-Viag	Tout pourcentage positif
Montant rente temporaire	Mt-RE-Temp	Tout pourcentage positif
Age limite	AgeLim-RE	[25 ans, 65ans]
Fractionnement Rente Education	Fract-RC	Mensuel, trimestriel semestriel, annuel
Terme Rente Education	Terme-RE	Echu ou à échoir

Outre ces notations, on utilisera les notations du chapitre 3.

A.2 Méthode de calcul proposée par le BCAC

En utilisant les quotients de mortalité des personnes en invalidité, il est théoriquement possible de déterminer le montant de la provision mathématique correspondant au maintien de la garantie décès. Ce calcul fait normalement intervenir le montant des capitaux sous risque, capitaux eux-mêmes et capitaux constitutifs des rentes éducation ou de conjoint survivant à l'échéant, à la date du décès de l'assuré. Un tel calcul ne peut être mené faute de disposer de l'ensemble des éléments nécessaires. C'est ainsi que le BCAC a mis sur pied deux familles de méthodes pouvant être utilisées : celle qui considère que le capital sous risque est constant dans le futur et égal au capital au jour du calcul de la provision, et celle qui consiste à provisionner la prime que devrait payer une personne en arrêt de travail pour bénéficiaire de la couverture décès, le risque étant mutualisé sur l'ensemble du portefeuille.

A.2.1 Expression des provisions en fonction du capital sous risque

Si x désigne l'âge de l'assuré, k son ancienneté dans le risque (incapacité temporaire ou invalidité) et C le capital décès garanti, la provision mathématique notée $PM(x,k)$ s'écrit alors :

$$PM(x,k) = \text{coef}f1(x,k) * C$$

Remarque : Cette méthode nécessite la connaissance de la situation de famille de l'assuré et ne permet pas d'utiliser les lois de maintien en arrêt de travail ou les taux techniques spécifiques sans avoir à refaire de nouveaux barèmes.

A.2.2 Expression des provisions en fonction du capital sous risque et des barèmes de provisionnement du risque arrêt de travail

Selon cette modalité, les provisions s'obtiennent par la formule suivante :

$$PM(x,k) = \text{coeff}1(x,k) * \text{coeff}IncapInval(x,k) * C$$

où $\text{coeff}IncapInval(x,k)$ désigne le coefficient de provisionnement du risque incapacité/invalidité pour l'âge x et l'ancienneté k .

Ces deux méthodes sont équivalentes et sont peu sensibles à un changement de taux technique. Par ailleurs si on utilise les lois de maintien réglementaires, les deux calculs ci-dessus conduisent au même résultat.

A.2.3 Provisionnement de la prime exonérée

Lorsque le portefeuille d'un organisme d'assurance est suffisamment large, il est possible de provisionner la prime exonérée plutôt que le capital sous risque. Deux approches sont envisageables :

- soit on considère que la mortalité d'une personne en arrêt de travail ne dépend pas de la mortalité du groupe dont elle est issue. En d'autres termes, un invalide de l'enseignement privé présente un même risque de mortalité qu'un invalide des travaux publics. Dans ce cas, il suffit de reprendre les méthodes décrites précédemment en remplaçant le capital sous risque par le taux de prime appliqué aux actifs du groupe divisé par le taux de mortalité moyen ;
- soit on a admis que la mortalité des invalides dépend du secteur professionnel et dans ce cas on peut raisonner en terme de surmortalité en fonction de l'âge et de l'ancienneté dans l'arrêt de travail. Dans ce cas, on rapporte les barèmes des points A.2.1 et A.2.2 au taux de mortalité moyen observé sur les portefeuilles ayant servi de support de l'étude.

A.3 Provision de maintien de la garantie décès et capitaux constitutifs

Pour calculer la provision de maintien de la garantie décès, il est nécessaire de renseigner le montant de la couverture décès ou des informations relatives à l'assuré (situation familiale, nombre d'enfants, salaire ...). Ainsi lorsque le montant de couverture est renseigné au niveau individuel on l'utilisera dans le calcul de cette provision ; sinon

on prendra une valeur moyenne ou on essaiera de la reconstituer grâce aux différentes informations collectées.

A.3.1 Cas n°1 : Zone " Montant de la couverture décès" est renseignée

La provision est donnée par :

* En incapacité

$$P^{INC}(age, anc) = MCD \times \left[\sum_{k=anc}^{ANC\ INCAP\ MAX-1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \times \left(\frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times P^{INC}(age, k) + \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times P^{INV}(age + \frac{k}{12}, 0) \right) \right]$$

* En invalidité

$$P^{INV}(age, anc) = MCD \times \sum_{k=anc}^{AGE\ INVAL\ MAX - age - 1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \times \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} \times q^{INV}(age, k)$$

A.3.2 Cas n°2 : Zone " Montant de la couverture décès" n'est pas renseigné

Lorsque le montant de la couverture décès n'est pas renseigné, il est nécessaire d'estimer les capitaux constitutifs de décès, de rentes éducation et de conjoint.

A.3.3 Capital décès

Dans ce cas, le montant du capital décès noté C_D sera exprimé en fonction du pourcentage du salaire correspondant à la situation de famille et au nombre d'enfants de l'assuré.

Soit g le taux de chargement.

Hypothèse n°1 : les données individuelles sont toutes disponibles

1. Si $SF = M$

$$(a) \text{ Si } N = 0 : C_D = \text{Cap-M0} \times S \times (1+g)$$

$$(b) \text{ Si } N > 0 : C_D = [\text{Cap-M1} + (N-1) \times \text{Cap-Majo}] \times S \times (1+g)$$

2. Si SF = C

$$(a) \text{ Si } N = 0 : C_D = \text{Cap-C0} \times S \times (1+g)$$

$$(b) \text{ Si } N > 0 : C_D = [\text{Cap-C1} + (N-1) \times \text{Cap-Majo}] \times S \times (1+g)$$

Hypothèse n°2 : les données individuelles ne sont pas toutes disponibles

1. La situation familiale n'est pas renseignée

Dans ce cas, on lira le pourcentage de mariés avant de l'appliquer au calcul du capital décès.

$$(a) \text{ Si } N=0 : C_D = [P_M \times \text{Cap-M0} + (1-P_M) \times \text{Cap-C0}] \times S \times (1+g)$$

$$(b) \text{ Si } N > 0 : C_D = [P_M \times \text{Cap-M1} + (1-P_M) \times \text{Cap-C1} + (N-1) \times \text{Cap-Majo}] \times S \times (1+g)$$

2. Le nombre d'enfants n'est pas renseigné :

Dans ce cas, on lira le nombre moyen avant de l'intégrer dans le calcul du capital décès au moyen d'une interpolation linéaire.

(a) Si SF = M

$$\text{— Si } N_{moy} < 1 : C_D = [(1-N_{moy}) \times \text{Cap-M0} + N_{moy} \times \text{Cap-M1}] \times S \times (1+g)$$

$$\text{— Si } N_{moy} \geq 1 : C_D = [\text{Cap-M1} + (N_{moy} - 1) \times \text{Cap-Majo}] \times S \times (1+g)$$

(b) Si SF = C

$$\text{— Si } N_{moy} < 1 : C_D = [(1-N_{moy}) \times \text{Cap-C0} + N_{moy} \times \text{Cap-M1}] \times S \times (1+g)$$

$$\text{— Si } N_{moy} \geq 1 : C_D = [\text{Cap-C1} + (N_{moy} - 1) \times \text{Cap-Majo}] \times S \times (1+g)$$

3. Le salaire n'est pas renseigné

Dans ce cas, on lira le salaire moyen avant l'utilisé dans le calcul

(a) Si SF = M

$$\text{— Si } N = 0 : C_D = [S_{moy} \times \text{Cap-M0} \times (1+g)]$$

$$\text{— Si } N > 0 : C_D = [\text{Cap-M1} + (N-1) \times \text{Cap-Majo}] \times S_{moy} \times (1+g)$$

(b) Si SF = C

$$\text{— Si } N = 0 : C_D = [S_{moy} \times \text{Cap-C0} \times (1+g)]$$

$$\text{— Si } N > 0 : C_D = [\text{Cap-C1} + (N-1) \times \text{Cap-Majo}] \times S_{moy} \times (1+g)$$

Une fois C_D déterminé, la provision correspondante à la couverture décès est déterminée par :

* En incapacité

* En invalidité

$$P^{INC}(age, anc) = C_D \times \left[\sum_{k=anc}^{ANC\ INCAP\ MAX-1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \times \left(\frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times q^{INC}(age, k) + \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times P^{INV}(age + \frac{k}{12}, 0) \right) \right]$$

$$P^{INV}(age, anc) = C_D \times \sum_{k=anc}^{AGE\ INVALID\ MAX-age-1} \frac{1}{(1+tx)^{k+1/2-anc}} \times \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} \times q^{INV}(age, k)$$

A.3.4 Capital constitutif des rentes

Afin de ne pas alourdir inutilement les notations, le salaire sera désormais noté S et représentera le salaire individuel si l'information est renseignée ou le salaire moyen si l'information n'est pas renseignée. De même N désignera le nombre d'enfants (eventuellement moyen) de l'assuré. Enfin P représentera le pourcentage de mariés (valant 0 si SF = C, 1 si SF = M et P_M si la situation familiale individuelle n'est pas renseignée).

* En cas d'incapacité

Soit x l'âge d'entrée en arrêt de travail

Soit k le nombre d'années écoulées jusqu'à la date du décès, tel que x+k/12 soit l'âge de la personne invalide au moment du décès.

On fait l'hypothèse que le conjoint de l'assuré a le même âge que ce dernier.

Rente conjointe

Le capital constitutif de la rente de conjoint est donné par :

1. Partie viagère

$$(a) C_V(x, k, P) = P \times RC_V(x, k) \times a_{x+k/12}^{(m)} \text{ si terme échu ;}$$

$$(b) C_V(x, k, P) = P \times RC_V(x, k) \times \ddot{a}_{x+k/12}^{(m)} \text{ si terme anticipé.}$$

2. Partie temporaire

$$(a) C_T(x, k, P) = P \times RC_T(x, k) \times a_{x+k/12:Agelim-RC-(x+k/12)}^{(m)} \text{ si terme échu ;}$$

$$(b) C_T(x, k, P) = P \times RC_T(x, k) \times \ddot{a}_{x+k/12:Agelim-RC-(x+k/12)}^{(m)} \text{ si terme anticipé.}$$

La provision correspondante est donnée par :

Rente education

Pour calculer le capital constitutif d'une rente éducation, on utilisera la table de repartition des enfants par âge des enfants en fonction du nombre N et de l'âge de l'assuré x+anc/12 au moment de l'évaluation.

$$P^{INC}(age, anc) = \left[\begin{array}{l} \sum_{k=anc}^{ANC\ INCAP\ MAX-1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \\ \left([C_v(age, k, P) + C_T(age, k, P)] \times \frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times q^{INC}(age, k) + \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \right) \\ \sum_{j=0}^{ANC\ INTAL\ MAX - age + k/12 - 1} \frac{[C_v(age + k/12, j, P) + C_T(age + k/12, j, P)]}{(1+tx)^{j+1/2-anc}} \\ \times \frac{l^{INV}(age + k/12, j)}{l^{INV}(age + k/12, 0)} \times q^{INV}(age + k/12, j) \end{array} \right]$$

Le montant total d'une rente éducation pour 1 € sera notée $_{palier}a_{zp}^{(m)}$ associé à l'âge Z_p à terme échu, avec m le fractionnement, p variant de 1 à N et le palier variant de 1 à 4. Ce montant sera nul si la condition $_{palier}Z_p \leq AgeLim_RE_{palier}$ n'est pas satisfaite.

De manière générale, pour obtenir le capital constitutif de rente, On applique la formule suivante :

— Si $N \leq 1$, le capital constitutif de rente éducation s'écrit :

$$C_E(x, k, N) = RE * N * {}_{|paliers}a_{z1}^{(m)} ;$$

— Si $N > 1$, le capital constitutif d'une rente s'écrit :

$$C_E(x, k, N) = RE * [([N] + 1 - N) * \sum_{p=1}^{[N]} {}_{|paliers}a_{zp}^{(m)} + (N - [N]) * \sum_{p=1}^{[N]+1} {}_{|paliers}a_{zp}^{(m)}] .$$

Remarque

— Tous les calculs sont présentés à terme échu. Pour obtenir les résultats à terme anticipé, il suffit de remplacer les a_x par des \ddot{a}_x ;

— Dans la suite , comme k commence par prendre ses valeurs à partir de anc et non 0, on pose : $C_E(x, k, N) = C_E(x, k - anc, N)$.

La provision correspondante à la couverture du capital constitutif de le rente éducation est alors donnée par :

En conclusion, la provision pour couvrir l'ensemble de la couverture décès est donc la somme des provisions relatives au capital décès et aux capitaux constitutifs des rentes de conjoint et éducation. Elle s'écrit :

* En cas d'invalidité

Rente conjointe

Soit x l'âge de la personne invalide à son entrée dans cet état. Soit k , le nombre d'années écoulées jusqu'au décès tel que $x+k$ soit l'âge de la personne invalide au moment du décès. On fait l'hypothèse que le conjoint de l'assuré a le même âge que ce dernier.

1. Partie viagère

$$P^{INC}(age, anc) = \left[\begin{array}{l} \sum_{k=anc}^{ANC\ INCAP\ MAX-1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \\ \times \left([C_E(age, k, N)] \times \frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times q^{INC}(age, k) + \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \right) \\ \sum_{j=0}^{AGE\ INVAL\ MAX-age+\frac{k}{12}-1} \frac{[C_E(age, k/12, j, N)]}{(1+tx)^{j+1/2-anc}} \\ \times \frac{l^{INV}(age+k/12, j)}{l^{INV}(age+k/12, 0)} \times q^{INV}(age+k/12, j) \end{array} \right]$$

$$P^{INC}(age, anc) = \left[\begin{array}{l} \sum_{k=anc}^{ANC\ INCAP\ MAX-1} \frac{1}{(1+tx)^{\frac{k+1/2-anc}{12}}} \\ \times \left([C_V(age, k, P) + C_T(age, k, P) + C_E(age, k, N)] \times \frac{l^{INC}(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \times q^{INC}(age, k) + \frac{s(age, k)}{l^{INC}(age, anc)} \right) \\ \sum_{j=0}^{AGE\ INVAL\ MAX-age+\frac{k}{12}-1} \frac{[C_V(age+k/12, j, P) + C_T(age+k/12, j, P) + C_E(age+k/12, j, N)]}{(1+tx)^{j+1/2-anc}} \\ \times \frac{l^{INV}(age+k/12, j)}{l^{INV}(age+k/12, 0)} \times q^{INV}(age+k/12, j) \end{array} \right]$$

(a) $C_V(x, k, P) = P \times RC_V(x, k) \times a_{x+k}^{(m)}$ si terme échu ;

(b) $C_V(x, k, P) = P \times RC_V(x, k) \times \ddot{a}_{x+k}^{(m)}$ si terme anticipé.

2. Partie temporaire

(a) $C_T(x, k, P) = P \times RC_T(x, k) \times {}_{|Age\ lim-RC-(x+k)}a_{x+k}^{(m)}$ si terme échu ;

(b) $C_T(x, k, P) = P \times RC_T(x, k) \times {}_{|Age\ lim-RC-(x+k)}\ddot{a}_{x+k}^{(m)}$ si terme anticipé.

La provision est donnée par :

$$P^{INV}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{AGE\ INVAL\ MAX-age-1} \left(\frac{C_V(age, k, P) + C_T(age, k, P)}{(1+tx)^{k+1/2-anc}} \times \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} \right) \times q^{INV}(age, k)$$

Rente éducation

La provision correspondante à la couverture de la rente éducation est donnée par (voir partie sur incapacité pour plus de détails) :

$$P^{INV}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{AGE\ INVAL\ MAX - age - 1} \left(\frac{C_E(age, k, N)}{(1+tx)^{k+1/2-anc}} \times \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} \right) \times q^{INV}(age, k)$$

En conclusion, la provision pour couvrir l'ensemble de la couverture décès est donc la somme des provisions relatives au capital décès et aux capitaux constitutifs des rentes de conjoint et éducation. Elle s'écrit :

$$P^{INV}(age, anc) = \sum_{k=anc}^{AGE\ INVAL\ MAX - age - 1} \left(\frac{C_D + C_V(age, k, P) + C_T(age, k, P) + C_E(age, k, N)}{(1+tx)^{k+1/2-anc}} \right) \times \frac{l^{INV}(age, k)}{l^{INV}(age, anc)} \times q^{INV}(age, k)$$

Annexe B

Traitements des données

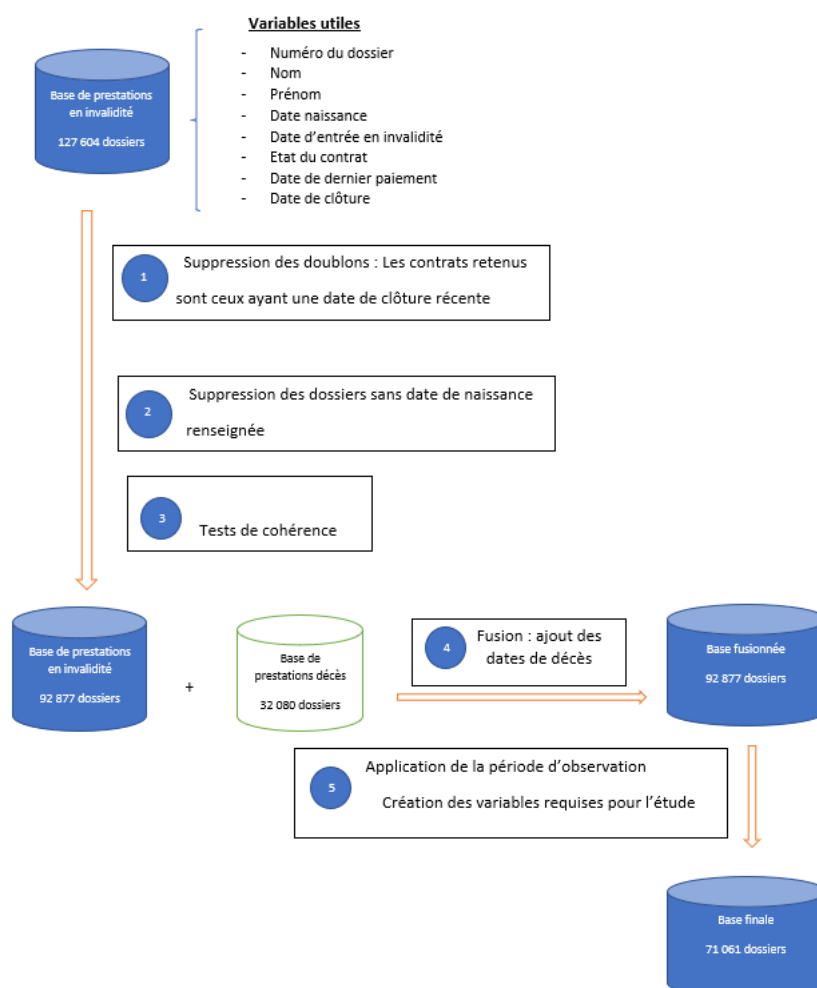


FIGURE B.1 – Schéma récapitulant le traitement des données

Annexe C

Critère de Cochran en dimension 2

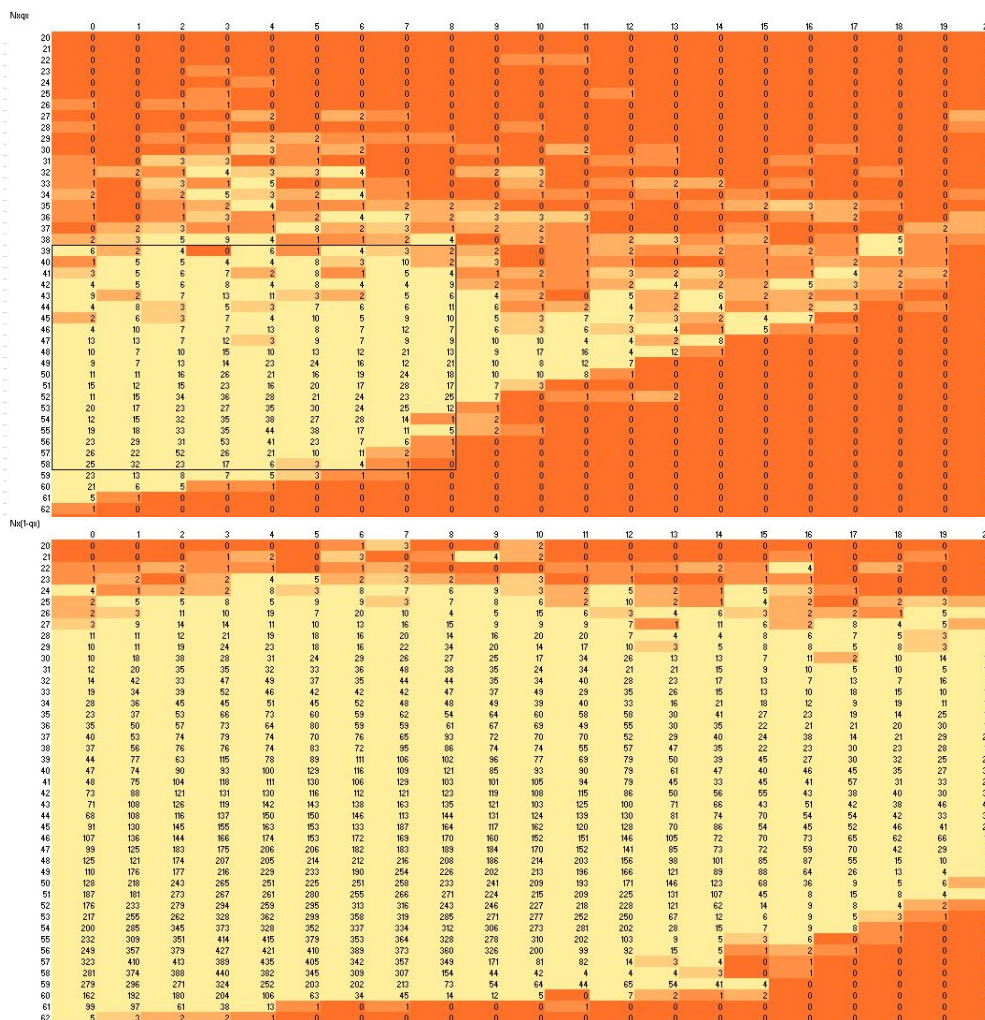


FIGURE C.1 – Résultat du critère de Cochran

Annexe D

Taux bruts et lissage aux âges

D.1 Taux bruts dans la plage choisie

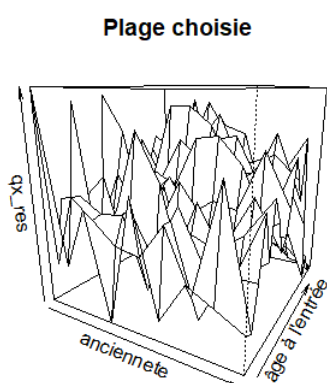


FIGURE D.1 – Taux bruts de mortalité sur la plage choisie

D.2 Présentation du lissage retenu

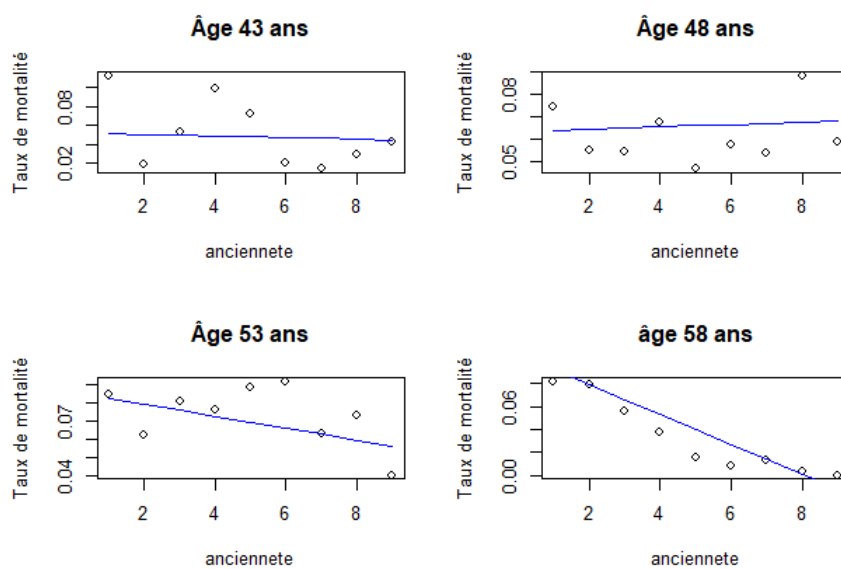


FIGURE D.2 – Taux bruts de mortalité sur la plage choisie

Annexe E

Table obtenue dans la première approche

	0	1	2	3	4	5	6
25	10000	9950	9900	9850	9808	9765	9721
26	10000	9950	9900	9849	9806	9762	9716
27	10000	9950	9899	9847	9802	9756	9708
28	10000	9949	9897	9844	9798	9750	9700
29	10000	9948	9894	9839	9791	9741	9688
30	10000	9946	9890	9833	9782	9729	9674
31	10000	9944	9886	9825	9772	9717	9659
32	10000	9942	9881	9817	9761	9702	9640
33	10000	9939	9875	9808	9749	9687	9621
34	10000	9935	9868	9797	9735	9669	9600
35	10000	9932	9861	9786	9720	9651	9577
36	10000	9928	9853	9773	9704	9630	9549
37	10000	9924	9844	9761	9686	9605	9519
38	10000	9919	9835	9745	9664	9577	9480
39	10000	9915	9824	9726	9639	9542	9437
40	10000	9909	9810	9705	9607	9502	9391
41	10000	9937	9870	9795	9726	9653	9575
42	10000	9932	9856	9775	9701	9623	9540
43	10000	9924	9842	9755	9676	9592	9501
44	10000	9917	9830	9737	9653	9562	9462
45	10000	9912	9819	9720	9628	9527	9417
46	10000	9906	9806	9698	9596	9485	9365
47	10000	9899	9790	9670	9558	9437	9306
48	10000	9890	9769	9637	9515	9383	9241
49	10000	9878	9745	9601	9468	9324	9169
50	10000	9865	9719	9561	9416	9260	9091
51	10000	9881	9752	9613	9463	9300	9127
52	10000	9869	9728	9576	9411	9236	9052
53	10000	9857	9703	9536	9359	9173	8973
54	10000	9844	9674	9495	9306	9104	8891
55	10000	9828	9646	9454	9248	9031	8801
56	10000	9814	9619	9410	9190	8956	8676
57	10000	9801	9588	9363	9125	8840	
58	10000	9783	9554	9311	9020		
59	10000	9766	9518	9258			
60	10000	9746	9479				
61	10000	9726					
62	10000						

7	8	9	10	11	12	13	14
9675	9628	9578	9556	9533	9508	9482	9454
9669	9619	9567	9544	9519	9493	9465	9436
9658	9606	9551	9526	9500	9472	9443	9412
9647	9592	9534	9508	9480	9451	9420	9386
9633	9575	9514	9486	9457	9426	9392	9356
9616	9555	9490	9461	9430	9396	9360	9319
9597	9532	9464	9433	9399	9363	9322	9278
9575	9507	9434	9400	9364	9323	9279	9232
9553	9480	9401	9365	9324	9280	9233	9183
9526	9446	9361	9320	9276	9229	9179	9126
9497	9412	9317	9273	9226	9177	9124	9067
9463	9367	9264	9217	9168	9115	9058	8995
9423	9320	9211	9162	9109	9052	8989	8920
9376	9266	9150	9097	9040	8977	8908	8833
9327	9210	9086	9029	8966	8897	8822	8741
9274	9150	9016	8953	8884	8809	8728	8640
9492	9402	9303	9230	9150	9063	8969	8868
9450	9351	9243	9163	9076	8982	8880	8769
9401	9292	9175	9088	8994	8892	8781	8663
9353	9235	9107	9013	8911	8800	8682	8557
9298	9169	9030	8928	8817	8699	8574	8439
9235	9095	8944	8833	8714	8589	8454	8311
9165	9013	8848	8729	8603	8468	8325	8172
9088	8922	8746	8620	8484	8340	8187	8013
9001	8824	8637	8501	8357	8203	8029	
8912	8724	8523	8379	8225	8050		
8945	8750	8545	8341	8164			
8855	8647	8427	8248				
8763	8540	8273					
8665	8394						
8526							

15	16	17	18	19	20	21	22
9425	9394	9360	9324	9284	9240	9195	9159
9405	9371	9335	9294	9250	9204	9162	9124
9378	9342	9301	9257	9210	9161	9120	9080
9350	9309	9265	9218	9169	9116	9077	9034
9315	9271	9224	9175	9122	9065	9026	8982
9275	9228	9178	9125	9068	9005	8968	8921
9231	9181	9128	9071	9008	8939	8904	8853
9182	9129	9072	9009	8940	8865	8832	8778
9130	9073	9010	8941	8866	8784	8753	8695
9069	9006	8937	8862	8780	8692	8661	8599
9004	8935	8860	8778	8690	8594	8565	8497
8926	8851	8769	8681	8585	8481	8451	8377
8845	8763	8675	8579	8475	8364	8332	8253
8752	8664	8569	8465	8354	8237	8199	8114
8653	8558	8454	8343	8226	8100	8057	7965
8545	8441	8331	8214	8088	7954	7905	7805
8758	8640	8516	8382	8240	8089	8153	
8651	8526	8392	8250	8098	7926		
8538	8404	8262	8110	7938			
8422	8279	8127	7954				
8296	8144	7971					
8158	7985						
7998							
23	24	25	26	27	28	29	30
9123	9087	9051	9015	8979	8943	8907	8871
9086	9049	9011	8973	8935	8897	8859	8822
9040	9000	8960	8920	8880	8840	8800	8760
8992	8950	8907	8865	8823	8781	8738	8696
8937	8892	8847	8802	8757	8713	8668	8623
8873	8825	8778	8730	8682	8635	8587	8539
8803	8752	8701	8650	8599	8548	8497	8447
8723	8669	8614	8560	8505	8451	8397	8342
8637	8578	8520	8462	8403	8345	8287	
8536	8473	8410	8347	8285	8222		
8429	8362	8294	8227	8159			
8304	8231	8158	8085				
8174	8095	8016					
8029	7943						
7873							
31	32	33	34	35	36	37	
8835	8799	8763	8727	8691	8655	8619	
8784	8746	8708	8670	8632	8595		
8720	8680	8640	8600	8560			
8654	8611	8569	8527				
8578	8533	8489					
8491	8444						
8396							

Annexe F

Table obtenue dans la deuxième approche

	0	1	2	3	4	5	6
25	10000	9944	9938	9932	9685	9669	9519
26	10000	9918	9914	9910	9819	9814	9691
27	10000	9891	9777	9665	9661	9659	9584
28	10000	9864	9765	9667	9614	9556	9434
29	10000	9838	9759	9680	9677	9589	9584
30	10000	9811	9803	9777	9742	9675	9537
31	10000	9785	9774	9750	9704	9639	9501
32	10000	9758	9712	9677	9632	9523	9401
33	10000	9731	9722	9699	9648	9583	9525
34	10000	9705	9698	9657	9645	9579	9509
35	10000	9678	9672	9640	9613	9582	9501
36	10000	9652	9624	9599	9528	9489	9442
37	10000	9625	9621	9609	9585	9568	9533
38	10000	9598	9595	9568	9521	9461	9370
39	10000	9496	9491	9440	9406	9369	9320
40	10000	9502	9485	9401	9363	9292	9240
41	10000	9504	9501	9473	9425	9377	9311
42	10000	9499	9496	9452	9404	9344	9232
43	10000	9489	9449	9410	9390	9321	9220
44	10000	9473	9437	9408	9387	9337	9258
45	10000	9452	9434	9366	9322	9251	9192
46	10000	9426	9394	9358	9321	9246	9162
47	10000	9396	9331	9269	9179	9144	9066
48	10000	9362	9317	9270	9208	9118	9031
49	10000	9326	9251	9195	9117	9022	8947
50	10000	9288	9201	9143	9080	9004	8898
51	10000	9249	9196	9151	9079	8987	8879
52	10000	9212	9140	9076	9006	8898	8753
53	10000	9178	9042	8957	8893	8766	8640
54	10000	9147	9046	8956	8876	8715	8518
55	10000	9121	8999	8920	8810	8689	8531
56	10000	9100	8990	8882	8785	8635	8484
57	10000	9085	8960	8860	8739	8601	
58	10000	9077	8766	8613	8483		
59	10000	9040	8914	8875			
60	10000	9013	8923				
61	10000	8987					
62	10000						

7	8	9	10	11	12	13	14
9502	9032	8790	8601	8462	8369	8322	8319
9335	8875	8642	8456	8314	8214	8154	8133
9342	8882	8652	8464	8316	8206	8132	8093
9426	8963	8733	8542	8387	8266	8178	8121
9477	9013	8784	8589	8427	8296	8194	8120
9477	9014	8785	8587	8418	8277	8162	8072
9472	9010	8781	8580	8404	8253	8125	8019
9337	8883	8656	8453	8273	8114	7975	7855
9429	8972	8741	8531	8341	8170	8017	7881
9340	8888	8656	8443	8247	8068	7904	7755
9381	8928	8691	8471	8266	8076	7900	7737
9328	8879	8639	8414	8202	8003	7817	7642
9376	8926	8679	8445	8224	8014	7816	7628
9312	8866	8614	8374	8146	7928	7720	7522
9283	9124	9011	8698	8400	8115	7843	7584
9133	8906	8716	8402	8104	7821	7552	7297
9225	8928	8663	8339	8034	7746	7475	7219
9197	8838	8507	8177	7869	7581	7311	7059
9085	8673	8287	7954	7646	7361	7097	6853
9208	8737	8292	7949	7635	7348	7085	6845
9090	8577	8091	7748	7438	7157	6904	6676
9048	8497	7975	7631	7323	7049	6805	6589
9001	8419	7869	7526	7224	6959	6727	6526
8952	8348	7780	7442	7149	6896	6680	6498
8830	8220	7650	7323	7044	6808	6612	
8725	8120	7559	7247	6986	6771		
8760	8165	7619	7321	7078			
8605	8049	7545	7274				
8478	7974	7526					
8353	7918						
8372							

15	16	17	18	19	20	21	22
8316	8313	8310	8307	8304	8301	8298	8295
8112	8091	8070	8049	8028	8007	7986	7965
8088	8083	8078	8073	8068	8063	8058	8053
8095	8069	8043	8017	7991	7965	7939	7914
8073	8053	8033	8013	7993	7973	7953	7933
8006	7963	7943	7923	7903	7883	7863	7843
7934	7869	7824	7799	7793	7787	7781	7775
7753	7669	7602	7551	7516	7497	7494	7486
7761	7657	7567	7492	7431	7383	7348	7316
7620	7499	7390	7294	7210	7137	7075	7023
7587	7448	7321	7204	7098	7002	6915	6844
7478	7325	7182	7048	6923	6807	6699	6612
7450	7282	7123	6972	6829	6694	6567	6466
7333	7153	6981	6817	6661	6512	6370	6258
7336	7099	6873	6656	6449	6251	6061	5891
7055	6825	6606	6398	6200	6011	5831	5668
6977	6749	6534	6331	6139	5958	5787	
6823	6603	6397	6204	6024	5855		
6627	6418	6225	6047	5883			
6625	6425	6243	6078				
6471	6287	6123					
6399	6233						
6354							
23	24	25	26	27	28	29	30
8292	8289	8286	8283	8280	8277	8274	8271
7944	7923	7902	7881	7860	7839	7819	7799
8048	8043	8038	8033	8028	8023	8018	8013
7889	7864	7839	7814	7789	7764	7739	7714
7913	7893	7874	7855	7836	7817	7798	7779
7823	7803	7783	7763	7743	7724	7705	7686
7769	7763	7757	7751	7745	7739	7733	7727
7478	7470	7462	7454	7446	7438	7430	7422
7297	7291	7285	7279	7273	7267	7261	
6983	6954	6937	6931	6925	6919		
6784	6735	6697	6670	6653			
6536	6471	6416	6371				
6376	6296	6226					
6157	6066						
5728							
31	32	33	34	35	36	37	
8268	8265	8262	8259	8256	8253	8250	
7779	7759	7739	7719	7699	7679		
8008	8003	7998	7993	7988			
7689	7664	7639	7615				
7760	7741	7722					
7667	7648						
7721							
