

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine  
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine  
et l'admission à l'Institut des Actuares  
le 8 février 2021

Par : Damien PRIMEL

Titre : Comparaison de différents modèles de provisionnement ligne à ligne et discussions dans le cadre d'une application en non-vie

Confidentialité :  Non     Oui    (Durée :  1 an     2 ans)

---

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus*


*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuares :*

*Membres présents du Jury du Certificat  
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

*Entreprise :*

Nom : KPMG

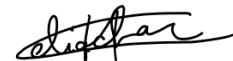
Signature :



*Directeurs de Mémoire en entreprise :*

Nom : Charles-Erwin ELIACHAR

Signature :



Nom : Damien FABRE RUDELLE

Signature :




---

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*


*Secrétariat :*

*Bibliothèque :*

*Signature du responsable entreprise*



*Signature du candidat*





## Résumé

---

Le cycle de production inversé propre au secteur de l'assurance impose aux acteurs du marché la constitution de provisions afin de garantir le règlement des prestations auquel ils sont contractuellement engagés. Dans le secteur de l'assurance non-vie, la juste estimation des provisions pour sinistres à payer représente un enjeu majeur. Pour le moment, l'estimation de ces provisions est très majoritairement fondée sur l'utilisation de données agrégées. Néanmoins, la disponibilité sans cesse croissante de données individuelles et la capacité en constante amélioration des ordinateurs à traiter efficacement une grande quantité de données induisent une réflexion de plus en plus poussée de la part des assureurs quant à la mise en place de modèles de provisionnement ligne à ligne.

Ce mémoire a pour objectif la mise en œuvre de plusieurs modèles de provisionnement individuel prenant en compte, à la fois les sinistres connus de l'assureur, mais également les sinistres survenus non encore déclarés.

Deux modèles sont implémentés et leur qualité analysée. Ils sont confrontés non seulement aux données par un processus de *backtesting* mais également à différentes valeurs de référence obtenues par des modèles classiques ou par consultation d'experts. Une recherche détaillée des dépendances propres à la base de données est ensuite effectuée permettant des tentatives de raffinement des modèles initiaux.

Les multiples variantes de modèles et de valeurs de référence permettent de mener durant tout le mémoire, une réflexion portant non seulement sur les résultats et les limites des modèles mais également sur les problématiques de provisionnement d'un point de vue plus général.

---

*Mots-clés : Assurance non-vie, Provisionnement ligne à ligne / individuel, Chain-Ladder, Bootstrapping, Backtesting, Corrélation, Copule.*

## Abstract

---

The characteristic reversal of the insurance production cycle forces the insurers to book provisions in order to be able to pay the benefits contractually agreed with the customers. In the P&C insurance field, the precision of the estimated amount of claims provisions represents a major issue. Until now, this estimation is mainly obtained by the use of aggregated data. However, the continuous improvement in individual data availability as well as the progresses made by the computers in the efficient treatment of large databases stimulate a strong thinking from the insurers about micro-reserving models.

The objective of this thesis is to implement some complete micro-reserving models which aim at taking into account claims which are known by the insurers as well as the incurred but not reported claims.

Two different models are implemented and tested. Not only are they challenged by real data thanks to a backtesting process but also to results obtained by classical reserving methods or by some experts of the P&C insurance field. Then, a detailed analysis about correlations in our database is performed and is used to try to improve the initial models.

The numerous versions of models and of reference values allow to engage reflections and discussions about the results and the limits of the implemented and classical models, but also about reserving in a more general way.

---

*Keywords : P&C Insurance, Micro-reserving, Chain-Ladder, Bootstrap, Backtesting, Correlation, Copula.*



# Note de Synthèse

## Contexte et objectifs

L'inversion du cycle de production spécifique au secteur de l'assurance contraint les assureurs à déterminer le prix de vente d'un contrat avant même que les coûts qui y sont relatifs ne soient connus. Ainsi, peu importe les sinistres subis par les assurés couverts, si ceux-ci rentrent dans le cadre du contrat souscrit, il est obligatoire pour l'assureur d'être en mesure d'indemniser les sinistrés au niveau convenu dans le contrat. Il convient alors pour l'assureur d'estimer le plus précisément possible le montant de ces coûts attendus afin de conserver à tous moments un montant suffisant disponible. Il s'agit des provisions techniques, et plus particulièrement des provisions pour sinistres à payer (PSAP). Une mauvaise estimation de celles-ci peut être très problématique pour l'assureur : si le montant de provisions techniques est trop élevé, il subit une perte correspondant aux gains qu'aurait pu lui rapporter le placement de cette somme supplémentaire sur des actifs risqués et peut-être accusé de vouloir diminuer son niveau d'imposition. A l'inverse, si le montant est sous-estimé, l'assureur encourt le risque de ne plus disposer d'assez de liquidités pour honorer les engagements pris et donc de faire faillite. En plus de ces considérations, l'estimation des provisions pour sinistres à payer revêt aussi un enjeu réglementaire, notamment dans le cadre de la directive Solvabilité 2 et du calcul du risque de réserve qu'elle impose.

L'estimation de ces montants de provisions est donc un élément sur lequel la recherche actuarielle s'est rapidement penchée. Ainsi, dans le but d'évaluer les PSAP, plusieurs méthodes ont été créées s'appuyant la plupart sur des données dites « agrégées » : les règlements sont regroupés par année de survenance du sinistre et par année de développement correspondant aux règlements. La représentation communément utilisée par ces méthodes d'estimation est appelée triangle de développement et est présentée en table 1. L'objectif est alors de compléter les zones vides du triangle pour obtenir un montant de charge ultime. En soustrayant ce montant ultime aux règlements déjà effectués, le montant de réserve est obtenu. Ces méthodes peuvent ensuite être divisées en deux groupes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Les premières nommées, parmi lesquelles les méthodes les plus populaires sont celles de Chain-Ladder et de Borhuetter-Ferguson, visent à obtenir un montant d'ultime en utilisant l'historique des règlements disponibles. Les secondes nommées, plus complexes visent à donner accès à des informations supplémentaires concernant les provisions. Ainsi, la méthode de Mack propose une estimation de l'erreur quadratique du montant estimé, tandis que la méthode bootstrap offre en sortie une distribution du montant de provisions permettant notamment la visualisation de situations plus extrêmes.

Année de survenance	Année de développement				
	0	1	...	$n - 1$	$n$
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...		
$n - 1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$			?
$n$	$C_{n,0}$				

TABLE 1: Représentation d'un triangle de développement avec  $(n + 1)$  années de survenance et  $(n + 1)$  années de développement, vu en fin d'année  $n$

Ces méthodes, bien que plutôt simples à mettre en place et ayant déjà fait leurs preuves sont relativement anciennes : 1938 pour la méthode de Chain-ladder, 1972 pour celle de Bornhuetter-Ferguson ou 1993 pour la méthode de Mack. Ainsi, les capacités des ordinateurs actuellement sont absolument incomparables à ce qu'elles étaient au moment de l'élaboration de ces travaux. Cette amélioration des qualités de traitement des données par les ordinateurs ouvre la voie à de nouvelles utilisations des données qu'ont à disposition les assureurs sur les assurés et les sinistres. C'est dans cette optique que s'inscrivent de nombreuses recherches actuellement. Plutôt que de travailler sur des données agrégées et d'estimer un niveau de réserve propre à chaque année de survenance, il serait envisageable d'utiliser des données individuelles détaillées pour obtenir un niveau de réserve adapté à chaque sinistre. Ce principe est appelé provisionnement « individuel » ou provisionnement « ligne à ligne ».

Deux types de sinistres sont susceptibles de nécessiter la constitution de provisions pour l'assureur. Il s'agit d'une part, des sinistres ouverts dont l'assureur a connaissance et pour lesquels un ou plusieurs développements ont déjà eu lieu, et d'autre part, les sinistres survenus mais non encore connus pour l'assureur. Ces derniers sont appelés sinistres « tardifs », et l'assureur ne dispose d'aucune information les concernant. L'objectif des présents travaux a alors consisté en la mise en place sur une base de données réelles, de plusieurs modèles de provisionnement ligne à ligne complets, c'est-à-dire prenant en considération à la fois les sinistres connus mais également les sinistres tardifs, tout en développant les réflexions en découlant. Chacun des modèles proposés permet en outre d'obtenir une distribution du montant de charge ultime estimé.

## Modélisation

La modélisation des sinistres tardifs s'est appuyée sur les travaux de Riffaud (RIFFAUD, 2019) et a consisté en la mise en place d'un modèle fréquence-sévérité, supposant l'indépendance entre fréquence et sévérité. Ainsi, le nombre de sinistres survenus mais non encore connus par l'assureur est estimé en utilisant une variante de la méthode de bootstrap sur triangle de nombres. La méthode est alors appliquée non pas sur un triangle où chaque valeur représente un montant de règlements effectués, mais sur un triangle comportant des nombres de sinistres. Ainsi, chaque ligne correspond à une année de survenance et chaque colonne à une année de développement comme précédemment. Dans une case du tableau sont présents les sinistres survenus l'année considérée et déclarés durant l'année de développement correspondant à la colonne. Contrairement au cadre classique, dans cette variante, les résidus ne sont pas ré-échantillonnés dans la partie supérieure du tableau de développement mais dans son intégralité. Nous avons alors ensuite, de manière indépendante, estimé une charge ultime, sensiblement de la même façon pour les sinistres connus que pour les sinistres tardifs.

Les deux types de modèles mis en place pour l'estimation de la charge ultime s'appuyaient sur la notion de durée de vie d'un sinistre qui correspond au nombre de développements durant lesquels le sinistre demeure ouvert. En effet, tous les sinistres traités sont des sinistres dont la date de clôture est inconnue et est donc à estimer. Pour estimer cette durée de vie propre à chacun des sinistres, l'estimateur de la fonction de survie de Kaplan-Meier a été utilisé afin de pouvoir apprécier, développement après développement, la survie ou non des sinistres.

Le premier modèle mis en place afin d'obtenir un montant ultime pour chaque sinistre est un modèle dit « additif ». Ce modèle consiste à considérer le montant ultime comme une somme de règlements incrémentaux effectués tout au long de la durée de vie du sinistre. Ainsi, un processus de paiement incrémental est défini prenant en compte à la fois la survie du sinistre à traiter, la probabilité de paiement historique selon les années de développement et l'historique disponible des montants réglés dans les données. Selon l'avancement connu du sinistre, des montants (pouvant être nuls du fait de la probabilité de paiement différente de 1 à chaque développement) sont affectés au sinistre parmi ceux présents dans les données et sommés jusqu'à sa clôture pour atteindre le montant ultime. Concernant les sinistres tardifs, l'historique des données est restreint aux seuls sinistres déclarés tardivement, et l'avancement connu étant nul, le paiement effectué en développement 0 est lui aussi simulé.

Le second type de modèle implémenté est un modèle « multiplicatif ». Ce modèle se veut être une adaptation au provisionnement ligne à ligne du modèle de Chain-Ladder. Le montant ultime n'est alors plus considéré comme une somme de règlements incrémentaux mais comme un montant initial de règlements (ou de charge) sur lequel est appliquée, jusqu'à la clôture du sinistre, une série de facteurs de développement individuels ici, contrairement à la méthode Chain-Ladder classique. Ainsi, pour chaque sinistre connu, des facteurs de développement individuels ont été calculés et ont constitué l'historique sur lequel s'est appuyé le modèle. Cette détermination des facteurs de développement s'avère plus complexe que dans le cas Chain-Ladder. En effet, dans le cas individuel, de nombreux cas particuliers sont à isoler et traiter. C'est le cas des sinistres pour lesquels un règlement (ou une charge) n'est indiqué qu'après plusieurs développements, ou pour lesquels aucun mouvement n'a lieu jusqu'à la clôture (les *Nil Claims*), il faut donc retirer de l'analyse ces facteurs de la forme « 0/0 ». De la même manière, il faut retirer les facteurs nuls ou négatifs qui, s'ils étaient affectés à un sinistre ouvert poseraient problème.

Une fois l'historique déterminé, pour chaque sinistre à traiter et chaque développement, partant du niveau connu de règlements ou de charges, un facteur de développement individuel est tiré dans la base jusqu'à la clôture du sinistre, toujours déterminée en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier. Le cas des sinistres tardifs a été traité légèrement différemment. Ce modèle s'appuyant sur un montant connu, il n'était pas directement applicable sur les sinistres tardifs. L'historique a donc, comme pour le modèle additif été restreint aux seuls sinistres tardifs et un montant initial a pu être tiré parmi cet historique avant d'ensuite dérouler la méthode présentée. Néanmoins, des cas particuliers apparaissent encore : les sinistres ouverts pour lesquels aucun règlement n'a été effectué (ou aucune charge estimée). Pour ces sinistres, un montant ultime parmi ceux des sinistres clos et n'ayant pas connus de mouvements après le premier développement est directement affecté. Le nombre de cas particuliers à traiter se pose d'ores et déjà comme une faiblesse majeure de ce type de modèles.

## Mise en place des modèles et premiers résultats

Les données utilisées sont issues d'une base Responsabilité Civile médicale contenant les sinistres survenus entre 2000 et 2018, soit environ 70000 lignes. Cette branche présente plusieurs particularités parmi lesquelles figurent une longueur élevée et un nombre de sinistres tardifs important. Ces particularités ont permis d'effectuer des analyses sur la base de données prouvant la pertinence notamment de séparer l'historique des sinistres tardifs de celui des sinistres normaux. De la même manière, le faible nombre de règlements en année de développement 0 a rendu compliqué l'utilisation des règlements pour le modèle multiplicatif et imposé celle des montants de charges.

De plus, les données utilisées s'étendant sur près de deux décennies, un effet d'inflation devait être traité en parallèle pour le modèle additif. En effet, si un modèle multiplicatif intériorise ce phénomène, ce n'est pas le cas pour un modèle additif. Alors, pour ce modèle, une base prenant en compte l'inflation a été créée. L'utilisation d'un indice général d'inflation ou même de celui d'un secteur spécifique apparaît comme réducteur. Alors, afin de placer l'intégralité des montants déjà réglés, et les montants projetés ensuite en vision 2018, la méthode de Verbeek a été utilisée. Cette méthode a donc permis d'identifier l'inflation dans les données de règlements de principal et de frais ainsi que de projeter celle-ci pour les années postérieures à 2018.

Avant d'évoquer les premiers résultats obtenus, il convient de présenter les moyens de comparer ces résultats qui ont été mis en œuvre. En premier lieu, et assez naturellement, les résultats ont été mis en relief avec ceux proposés par la méthode de Chain-Ladder (à la fois sur le triangle de règlements et sur celui de charges). En second lieu, les modèles mis en œuvre permettant l'obtention d'une distribution du montant ultime, une comparaison à une approche de type bootstrap similaire à celle mise en place pour l'estimation de la survenance des sinistres tardifs s'est également avérée pertinente (là aussi sur les triangles de paiements et de charges). Enfin, une consultation d'un groupe de neuf experts de l'assurance non-vie a été effectuée. Chacun a reçu les triangles de données agrégées et effectué une estimation *Best-Estimate* du niveau de charges ultimes utilisant la méthode de son choix. Cet échantillon de neuf valeurs a alors été utilisé pour situer les résultats proposés par les modèles. Outre le fait d'être de simples éléments de comparaison, ces valeurs permettent de nourrir une discussion sur les résultats dans leur ensemble mais également sur la notion même de provisionnement *Best-Estimate*, notamment en observant les différentes hypothèses prises par les experts.

Les résultats obtenus par le modèle additif semblent en première approche relativement satisfaisants et s'inscrivent légèrement en dessous de la valeur proposée par la méthode de Chain-Ladder sur le triangle de règlements. Ils prennent également place dans le bas de la distribution bootstrap (sur le même triangle de règlements), et très légèrement en-dessous de la médiane des estimations des experts. A l'inverse, les résultats du modèle multiplicatif initial sont mauvais. L'analyse des facteurs de développement a révélé la présence de nombreux facteurs très extrêmes qui, appliqués à des sinistres déjà importants font exploser les résultats. Un facteur proche de 25 est obtenu entre la valeur Chain-Ladder et la médiane de la distribution du montant ultime proposée par le modèle. Ces premiers résultats, bien que relativement satisfaisants pour le modèle additif, incitent à tenter de faire progresser ces modèles. L'objectif majeur étant de rendre le modèle multiplicatif utilisable.

## Prise en compte des dépendances

Dans cette optique, une analyse des dépendances entre les variables (d'années, de survie, et de montants) de la base de données a été menée. Ainsi, des corrélations ont été recherchées notamment entre les montants de règlements successifs, les probabilités de paiements successives, la survie des sinistres conditionnellement aux paiements réalisés sur l'année précédente, la durée de vie des sinistres et la charge estimée en année 0 ou encore entre les facteurs de développement et la charge précédente. Si plusieurs de ces corrélations se sont avérées trop faibles pour être utilisées prioritairement, deux d'entre elles ont été assez marquées et une tentative de prise en compte par les modèles a été effectuée. Il s'agit des dépendances entre la charge estimée en année de développement 0 et la durée de vie ainsi qu'entre les charges estimées et les facteurs de développement qui les succèdent. La première nommée a été appliquée aux deux modèles, quand la seconde n'est pertinente que pour le modèle multiplicatif.

La prise en compte de ces corrélations a été effectuée en utilisant la notion de copule, et plus particulièrement celle de copule empirique. En premier lieu, la seconde dépendance évoquée a été incorporée de la manière suivante au modèle multiplicatif :

- Pour chaque développement, récupération des données historiques permettant d'obtenir la copule empirique associée aux deux variables pertinentes,
- Pour chaque sinistre et chaque développement jusqu'à la clôture, classement de la charge connue (ou estimée) à cet instant parmi celles présentes dans l'historique,
- Tirage d'un facteur de développement parmi ceux associés à des niveaux de charges historiques proches (au sens d'un paramètre à choisir) du niveau de charges du sinistre.

Les résultats du modèle multiplicatif prenant en compte cette corrélation se sont avérés bien plus satisfaisants que ceux du modèle dans sa version initiale. En effet, selon le paramètre retenu, le niveau estimé varie sensiblement, mais pour des valeurs assez faibles du paramètre, le niveau ultime estimé prend place légèrement au dessus de la valeur estimée par la méthode de Chain Ladder sur le triangle de charges. De plus, la moyenne du niveau ultime estimé se situe dans le haut de la distribution *Best-Estimate* proposée par les experts. L'amélioration très importante obtenue avec cette méthode prouve la nécessité de prendre en compte un maximum de dépendances entre les variables pour permettre à ce type de méthodes de s'adapter aux branches les plus particulières.

Dans un second temps, une méthode similaire a été mise en place pour incorporer aux deux modèles le lien entre charge en développement 0 et durée de vie. Le principe a donc été non plus de déterminer la survie du sinistre progressivement mais de définir dès le début du traitement, une date de clôture du sinistre en lien avec la charge initiale estimée par le gestionnaire en première période. Le mécanisme a donc été le même que celui présenté dans le paragraphe précédent, aux deux nuances près que cette fois-ci, un unique tirage a lieu et donc la notion d'années de développement disparaît, et que ce tirage n'a été effectué que parmi les sinistres ayant été clos avec une durée de vie supérieure ou égale au temps écoulé depuis l'ouverture du sinistre à traiter.

Les résultats obtenus en appliquant ce processus aux deux modèles ne sont pas pleinement satisfaisants. En effet, le principe de n'utiliser que les sinistres clos pour déterminer une durée de vie pose problème et crée une sous-représentation des sinistres à longue durée de vie, ainsi en contrepartie, qu'une sur-représentation de ceux ayant une clôture rapide. Ce problème pourrait être potentiellement corrigé en utilisant seulement les sinistres issus d'années de survenance pour lesquelles tous les sinistres sont clos. Néanmoins, pour une branche comme celle étudiée cela n'a pas été possible. Ainsi, le modèle

additif augmenté de ce processus conduit à une importante sous-estimation du montant ultime, sous-estimation moins marquée pour le modèle multiplicatif du fait de l'utilisation de données de charges, plus stables en développements élevés. L'amélioration des résultats observée pour ce second modèle n'est finalement qu'en trompe l'œil.

## Bilan

Nous présentons ici, en table 2, la synthèse des montants ultimes estimés selon les différents modèles.

Modèle utilisé	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
<b>Additif initial</b>	804	794	803	814
<b>Additif « durée de vie »</b>	701	708	707	715
<b>Multiplicatif initial</b>	152 071	12 327	21 850	54 473
<b>Multiplicatif « facteurs »</b>	877	889	888	899
<b>Multiplicatif « facteurs et durée de vie »</b>	847	855	855	863
<b>Bootstrap sur règlements</b>	831	796	827	862
<b>Bootstrap sur charges</b>	855	833	857	877
<b>Avis d'experts</b>	[771 ; 921]			
<b>Chain-Ladder sur règlements</b>	831			
<b>Chain-Ladder sur charges</b>	864			

TABLE 2: Statistiques descriptives concernant les montants ultimes estimés par tous les modèles de provisionnement mis en place

Deux modèles se sont donc dégagés comme étant plus fiables que les autres mis en place : le modèle additif initial et le modèle multiplicatif « facteurs ». Afin de confronter ces deux modèles à la réalité, un processus de *backtesting* a été effectué. Les bases de données ont alors été placées en vision 2016 et 2017 et les prédictions sur les années connues ont été réalisées (2017-2018 et 2018 uniquement) et ont été comparées aux montants réellement réglés (ou aux montants de charge réellement estimé) sur ces périodes. Le modèle additif initial a alors proposé des résultats satisfaisants. Du côté du modèle multiplicatif prenant en compte la corrélation entre charge et facteur de développement, cette étape a également permis de sélectionner le paramètre retenu. Les résultats se sont avérés moins proches du niveau de charge réellement estimé par les gestionnaires. Néanmoins, ceux-ci se sont positionnés à des niveaux proches de l'estimation proposée par la méthode de Chain-Ladder. Cette remarque laisse penser que ce type de modèles, adaptés de Chain-Ladder à tendance à embarquer les défauts propres à cette méthode.

Enfin, pour prolonger cette étude, une analyse supplémentaire a été réalisée sur le modèle additif afin de tester la stabilité du montant ultime prédit selon le niveau d'information disponible sur le périmètre des sinistres survenus antérieurement à 2016. Les résultats ont permis de visualiser une stabilité satisfaisante du modèle, même supérieure à ce que propose la méthode de Chain-Ladder. L'analyse de ces résultats a alors permis de pointer la raison de ce manque de stabilité de la méthode Chain-Ladder et de pointer une force intéressante du modèle additif.

Ces travaux ont ainsi permis de proposer des modèles relativement fiables et rapides dans une optique de provisionnement individuel. L'application de ces modèles à des données réelles et particulières ainsi que les discussions menées ont débouché sur une bonne compréhension des mécanismes et enjeux en action. Dans une optique plus large consistant à la mise en œuvre opérationnelle de ce type de modèle, des travaux supplémentaires demeurent nécessaires. Parmi ceux-ci, l'application à des bases

de données différentes afin de potentiellement observer d'autres dépendances et les capacités d'adaptation des modèles ainsi que la possibilité d'améliorer la prise en compte de la corrélation entre charge initiale et durée de vie qui s'avère prometteuse. Enfin, des prolongements de ces modèles utilisant un plus grand nombre de variables propres aux sinistres telles que des variables de garanties ou de litiges pourraient permettre une segmentation en amont des sinistres et potentiellement un gain de précision non négligeable.





# Synthesis note

## Context and objectives

The characteristic reversal of the insurance production cycle forces the insurers to set the price of a contract before having any concrete information about the costs related to it. Therefore, no matter what kind of claim is suffered by the client, at the condition that those are part of the contract, his insurer is legally forced to indemnify him for the portion covered by the coverage taken out. It is thus necessary for the insurer to estimate as precisely as possible the expected costs of a contract in order to keep available a sufficient amount of money. This amount corresponds to the technical provisions, and especially claims reserves. A wrong estimation of this amount can raise several issues for the insurer. If the estimated amount is too high, the insurer suffers a loss corresponding to the profit he could have expected from the investment of the excess amount in some risky assets and he can be accused of trying to pay less taxes. At the opposite, if the claims reserve is underestimated the insurer can be unable to meet his financial commitments and be forced to go bankrupt. Moreover, the estimation of claims reserves is legally important, especially with the new Solvency 2 framework which imposes the estimation of the reserves risk.

Consequently, the estimation of claims reserves is quickly became one of the most important subjects in the actuarial research. To meet this objective, lots of methods have been created. Most of these methods are based on aggregated data : the amounts paid to insurers are grouped by occurrence and development years related to each payment. The most commonly used representation for these estimation methods is called development triangle and is illustrated by the table 3. The objective is to fill in empty areas of the triangle in order to reach an ultimate loss amount. The reserve amount is then obtained by subtracting this ultimate amount to payments already achieved. These methods can be divided in two groups : the deterministic ones and the stochastic ones. Deterministic methods, among which the most popular ones are the Chain-Ladder and the Bornhuetter-Ferguson's methods, aim at estimating ultimate loss amount by the use of historical payments data. The stochastic methods, which are more complex, aim at giving access to complementary results about reserves. As an example, Mack's method proposes an estimation of the quadratic error made during the process, while the bootstrap method provides a distribution of the reserves amount thanks to which extreme scenarios can be visualised.

Occurrence year	Development year				
	0	1	...	$n - 1$	$n$
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...		
$n - 1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$			?
$n$	$C_{n,0}$				

TABLE 3: Representation of a development triangle composed of  $n + 1$  occurrence years and  $n + 1$  development years observed after  $n$  years

The previous methods even if they are pretty easy to implement and are known for the relative quality of the results they provide are pretty old : the Chain-Ladder method has been created in 1938, the Bornhuetter-Ferguson's one is born in 1972, and the Mack's method has first been used in 1993. However, the potential of computers is constantly becoming stronger and has quickly evolved since the birth of these methods. This improvement in data management by computers creates new uses of data about claims and clients which are already available for the insurers. This observation opened new perspectives for actuarial science. Instead of working with aggregated data and estimating an amount of reserves for each occurrence year, individual data can be used to determine a reserve amount adapted for each claim. This concept is called "micro-reserving".

Two different kinds of claims can force an insurer to build reserves. The first category is composed of claims which are already opened and present in the database. One or several development years and the associated payments are known. These claims compose the Incurred But Not Enough Reported reserve (IBNER). The second category is made of claims which already occurred but are not yet reported by the client or not opened by the claims manager. These are called "late" claims. The insurer does not have any information regarding these claims. This category is responsible for the Incurred But Not Yet Reported reserve (IBNYR). The objective of this thesis consists in the implementation and the application on real data of several complete micro-reserving tools. It also aims at having a relevant discussion about them and the concept of reserving. The adjective "complete" underlines the fact that these models need to be able to develop known claims but also late claims. It is important to note that all models implemented can provide a distribution of the estimated ultimate loss in output.

## Modelling

The modelling of late claims used the work realised by Riffaud (RIFFAUD, 2019) and consisted in the implementation of a frequency-severity method for which frequency and severity are supposed to be independent. The number of incurred but not opened claims is estimated by the use of an alternative version of the bootstrap method on the triangle of numbers. The method is not applied to a triangle in which every number represents a paid amount but to a triangle composed of number of claims. In this latter every line corresponds, as previously, to an occurrence year and every column symbolises a development year. Each number in the triangle represents the number of claims occurred during the year corresponding to the line and declared during the development year represented by the column. The difference between the variation of the bootstrap method used in the thesis and the classic one lies in the fact that residuals are not re-sampled in the upper part but in both the upper and lower parts of the triangle. Then, we independently estimated an ultimate loss by a method relatively similar than the one used for opened claims.

The two kinds of models implemented for the estimation of the ultimate loss relied on the notion of the duration of a claim which is equivalent to the number of development years during which the claim remains opened. Indeed, every claim which need to be developed by the models have an unknown closure date. This date has to be determined. To estimate the duration of every claim, the Kaplan-Meier estimator of the survival function is used in order to appreciate the survival of the claim development year after development year.

The first model implemented to determine an ultimate loss amount for every claim is called "additive". This model consists in considering the ultimate loss as an addition of incremental payments made all along the duration of the claim. An incremental payment process is defined using all the duration of the considered claim, the historical payment probability and the historical paid amounts. According to the amounts already paid, payments (which can be nulls because the payment probability is different from 1 for each development year) are affected to the claim among those available in the data. These payments are then summed until the closure to reach the ultimate loss amount related to the single claim. The process needs to be slightly adapted : the historical database is restricted to contain only claims opened lately, and the first development year, which is unknown, has to be simulated too.

The second model implemented is a "multiplicative" one. It consists in an adaptation of the Chain-Ladder method to individual data. The ultimate loss is not considered as a sum of incremental payments anymore but as an initial payments (or losses incurred) on which individual development factors are applied until the closure of the claims. The difference with the Chain-Ladder method is that here development factors are not determined on aggregated but on individual data. For each known claim, individual factors are thus calculated and then represent the historical data on which the model relies. The determination of factors is much more complex than in the classical Chain-Ladder framework. Indeed, in the individual point of view, lots of particular cases need to be isolated and treated. This is for instance the case of claims for which no payments have been realised (or a null losses incurred) after several development years, or for which nothing is paid until the closure (the so-called "nil claims"). These factors of the "0/0" shape need to be excluded of the analysis. Moreover, negative or null factors have to be excluded too because it would be complex to apply them to an opened claim.

Once the historical database is determined, for each claim and each development period, starting from the known paid or losses incurred, a development factor is drawn in the base until the closure of the claim (still determined by the Kaplan-Meier estimator in this model). The estimation on late claims is slightly different. This model is based on a known amount and thus, it needs to be adapted to the case of late claims. As in the additive model, the historical database has been restricted to the late claims and a payment (or losses incurred) which can be zero has been drawn on this historic database. Then the method presented above is applied identically. However, some other special cases exist : opened claims for which no payment has been made (or losses incurred estimated). For these claims, an ultimate loss amount between the ones of closed claims for which no payment (or losses incurred) was known after first development period. The number of these particular cases is one of the major weaknesses of this kind of models.

## **Implementation of the models and first results**

The data used in this thesis come from a medical liability insurance database which contains claims occurred between 2000 and 2018 with approximately 70000 lines. This line of business has several particular characteristics among which a long duration and an important number of late claims. These specific features made possible some detailed analysis which justified the separation of historical data

for late and regular claims. Moreover, the low number of positive payments during the first development year made impossible the use of payment data for the multiplicative model and incurred data have been used instead.

Another important point is that data used represent nearly two decades. This makes absolutely necessary the treatment of an inflation effect for the additive model. Indeed, if a multiplicative model is automatically adapted to this phenomenon, this is not the case for an additive model. A database taking inflation into account has thus been created for the implementation of this model. The use of a general inflation indicator or even an inflation indicator specific to a particular economic sector did not seem appropriated to the presented case. In order to convert all the amounts already paid and to be paid in the future in an "as if 2018" point of view, Verbeek's method has been used. This method presents a way to identify inflation in principal and fees payments data and then to project this inflation to years after 2018.

Before talking about the first results, it is necessary to present the ways used to compare these results. First, it seems natural to compare results with the ones proposed by the Chain-Ladder method (on both paid and incurred triangles). Then, the used models propose a distribution of ultimate loss, the use of a bootstrap method similar to the one implemented for the estimation of the occurrence of late claims seemed interesting (on both paid and incurred triangles too). Finally, a group of nine P&C insurance experts has been consulted. The nine experts received the aggregated triangles and individually performed a Best-Estimate estimation of the ultimate loss by using any of the known aggregated methods. This sample composed of nine values has then been used to compare the results given by the micro-reserving models. More than being simple comparison values, these latter are used to lead a discussion about global results but also about the Best-Estimate notion by, for instance, having a look at hypothesis took by the experts.

The results provided by the additive model seem at the first look to be relatively satisfying and take position just below the value proposed by the Chain-Ladder method performed on the paid triangle. The results also rely on the lower part of the distribution obtained when using the bootstrap method on the same paid triangle and very near the median of the estimations realised by the experts. At the opposite, the results of the multiplicative model are clearly bad. The analysis of development factors showed many extremes factors. When these factors are applied to claims which already caused serious payments (or large estimated incurred), the results go through the roof. For instance, the results provided are 25 times higher than than the Chain-Ladder value and the median of the ultimate loss sample given by the experts. These first results, even if they are quiet satisfying for the additive model encourage research in order to improve the performance of both models. The main objective consisting in the improvement of the multiplicative model in order to make it usable.

### **Complexification of models : dependencies**

To reach this objective, an analysis of correlations between variables (years, amounts and duration) from the database has been performed. Dependencies between successive payments, successive payment probability, duration of claims conditionally to payments made during the considered year, duration of claims and estimated losses incurred during the first development year or even between individual development factors and the previous losses incurred. Even if several of these dependencies were not strong enough to be added to the models, two have been estimated strong enough to be taken into account by the models. It concerns dependencies between the estimated losses incurred at the end of the first development year and the duration of the claims and between successive losses

incurred and the next individual development factor. The first one have been applied to both additive and multiplicative model while the second one was appropriated only for the multiplicative model.

The inclusion of these dependencies has been made by using the concept of copula, and more specifically the concept of empirical copula. First, we add the correlation between losses incurred and factors in the multiplicative model using following these steps :

- For each development period, collect of historical data in order to obtain the empirical copula associated to these variables,
- For each claim and development year until the closure of the claim, the know or estimated losses incurred is ranked between the historical ones,
- A development factor is drawn between the historical ones associated to losses incurred close (to the sens of a parameter to choose) to the losses incurred associated to the claim to be developed.

The results provided by the improved multiplicative model were much more coherent than the ones form the initial version. Indeed, depending on the chosen parameter the values change significantly, but for small enough values of the parameter, the estimated ultimate loss distribution is just above the value provided by the Chain-Ladder method (on the incurred triangle). Moreover, the mean of the distribution takes place between some of the highest Best-Estimate estimations made by the nine experts. The improvement of the model obtained by this method proves the absolute necessity of taking into account as much as possible dependencies between variables. It helps the model to be much more adapted to particular lines of business.

After this strong improvement, a similar method has been used in order to incorporate in both models the correlation between initial losses incurred estimated and the duration of the claims. The idea was not to determine the duration of a claim progressively anymore but to define it as a first step of the method. The duration is estimated by using the losses incurred estimated by the claims manager during the first development year of the claim. The mechanism used has been relatively similar to the one presented above with two differences. This time, a unique draw is made and the notion of development year disappear, and the duration is drawn only among claims closed with a duration greater or equal than the time elapsed since the opening of the concerned claim.

The results provided by the use of this process to both models are not fully satisfying. Indeed, the idea of using only closed claims to draw a duration raises an issue and creates an under-representation of claims with a long duration and an over-representation of claims quickly closed. This issue could potentially be corrected by using only claims occurred during years for which every claim occurred is closed. However, for the studied line of business, this adaptation has not been possible. Consequently, the additive model using this mechanism leads to a very important under-estimation of the ultimate losses. This under-estimation is less important for the multiplicative model because of the use of losses incurred data which are more stable in higher development periods than payments data. The observed improvement in this second model is finally just an illusion.

## Results and conclusion

Here, in table 4 a synthesis of the ultimate losses estimated by the different models used is presented.

Model used	Mean	Quantile 25%	Median	Quantile 75%
Additive "initial"	804	794	803	814
Additive "duration"	701	708	707	715
Multiplicative "initial"	152 071	12 327	21 850	54 473
Multiplicative "factors"	877	889	888	899
Multiplicative "duration and factors"	847	855	855	863
Bootstrap on paid	831	796	827	862
Bootstrap on losses incurred	855	833	857	877
Experts	[771 ; 921]			
Chain-Ladder on paid	831			
Chain-Ladder on losses incurred	864			

TABLE 4: Descriptive statistics about the ultimate losses estimated by all reserving methods used in the thesis

Two models seemed to be more relevant than the others : the additive "initial one" and the multiplicative "factors" one. In order to challenge these two models, a "backtesting" process has been performed. Databases have been put in "as if" 2016 and 2017 visions and the predictions about known years (2017-2018 and 2017 only) have been performed and compared to the payments effectively realised (or the estimated incurred amount) during these periods. The initial additive model gave satisfying results. The results of this backtesting on the multiplicative model which uses the dependence between losses incurred and development factors were also useful to select the parameter of the model. The results on losses incurred have been less accurate with this model. However the estimations were close to the one proposed by the Chain-Ladder method. This remark shows that this kind of multiplicative models adapted from the Chain-Ladder framework have the same kind of defaults than this classical method.

Finally, in order to go forward with this work, a complementary analysis aiming at controlling the stability of the predicted ultimate losses with different level of available information has been performed on the additive model. To this objective, claims occurred before 2016 were used. The results showed that the model was more stable than the Chain-Ladder method. A detailed analysis of the results allowed to explain this lack of stability from the Chain-Ladder method and to bring to light an interesting strength of the additive model.

This thesis allowed to propose some relatively reliable and fast models for a micro-reserving approach. The use of the implemented models to real and particular data and the consecutive discussions led to a strong understanding of mechanisms and challenges linked with this subject. In order to be able to concretely use these models, some more research could be performed among which the use of different lines of business to challenge the adaptability of the models, to look for different dependencies between variables, and to try to take into account the link between initial losses incurred and duration of claim which seemed to be promising. Lastly, more sophisticated versions of this model using more variables directly linked to the claim or the client could represent a way to create clusters of claims and potentially reach more precision in the results.

# Remerciements

Ce mémoire doit énormément à mes deux tuteurs Charles-Erwin Eliachar et Damien Fabre Rudelle. Je les remercie tout d'abord de m'avoir fait confiance pour prolonger les travaux de provisionnement individuels chers à KPMG. Leur disponibilité permanente et les conseils quotidiens on ne peut plus précieux qu'ils m'ont apporté, en présentiel parfois et à distance souvent, ceci malgré la période sanitaire compliquée durant laquelle ce travail a été réalisé.

J'adresse de sincères remerciements à l'ensemble de l'équipe d'actuariat non-vie de KPMG pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et l'apport de leur expertise en matière de provisionnement. J'adresse des remerciements particuliers à Jérémy Riffaud pour son aide accordée afin d'assurer la bonne continuité du travail brillamment entamé.

Je remercie également mon tuteur académique Christophe Dutang pour sa disponibilité en amont de ce stage afin d'en adapter les modalités au contexte très particulier ainsi que pour son aide précieuse régulièrement apporté pendant ce projet.

Enfin, je remercie chaleureusement mes proches pour leur relecture consciencieuse et les conditions de travail optimales qu'ils ont su m'apporter durant ces travaux.





# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Note de Synthèse</b>	<b>5</b>
<b>Synthesis note</b>	<b>13</b>
<b>Remerciements</b>	<b>19</b>
<b>Table des matières</b>	<b>21</b>
<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>1 Contexte, enjeux et état de l'art</b>	<b>27</b>
1.1 Contexte général . . . . .	27
1.1.1 Le contrat d'assurance non-vie . . . . .	27
1.1.2 Le cycle de vie des sinistres . . . . .	29
1.1.3 Cycle de production inversé et nécessité d'établir des provisions . . . . .	30
1.1.4 Les principales provisions techniques en assurance non-vie . . . . .	31
1.2 Enjeux réglementaires du provisionnement en assurance non-vie . . . . .	33
1.2.1 La directive Solvabilité 2 : les trois piliers . . . . .	33
1.2.2 La directive Solvabilité 2 : le SCR . . . . .	35
1.2.3 La directive Solvabilité 2 : le risque de réserve . . . . .	37
1.2.4 La norme IFRS 17 et le calcul de réserves . . . . .	38
1.3 Les principales méthodes de provisionnement en assurance non-vie . . . . .	39
1.3.1 La notion de triangle de développement . . . . .	39

1.3.2	Les méthodes de provisionnement déterministes classiques . . . . .	41
1.3.3	Les méthodes de provisionnement stochastiques classiques . . . . .	45
1.4	Bilan sur les modèles agrégés et intérêts du provisionnement individuel . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Les modèles de provisionnement individuel mis en œuvre</b>	<b>53</b>
2.1	Génération des sinistres non encore connus . . . . .	54
2.2	Éléments communs aux deux modèles . . . . .	54
2.2.1	Définition des processus mis en jeu . . . . .	54
2.2.2	Processus d'état et durée de vie d'un sinistre . . . . .	55
2.2.3	Estimation de la charge à 1 an . . . . .	57
2.3	Présentation du modèle additif . . . . .	59
2.3.1	Présentation générale . . . . .	59
2.3.2	Mise en œuvre pratique . . . . .	60
2.4	Présentation du modèle multiplicatif . . . . .	62
2.4.1	Présentation générale . . . . .	62
2.4.2	Mise en œuvre pratique . . . . .	64
2.4.3	Les cas particuliers . . . . .	65
2.5	Raffinements des modèles . . . . .	67
2.5.1	Séparation entre sinistres graves et attritionnels . . . . .	67
2.5.2	Tirage dans une copule empirique . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Application des modèles et analyse des résultats</b>	<b>73</b>
3.1	Présentation de la base de données . . . . .	73
3.1.1	Présentation générale . . . . .	73
3.1.2	Quelques statistiques descriptives . . . . .	75
3.1.3	Traitement de l'inflation . . . . .	80
3.2	Le modèle additif . . . . .	84
3.2.1	Résultats du premier modèle et comparaison à Chain-Ladder . . . . .	84
3.2.2	Recherche de corrélations et raffinements . . . . .	86
3.2.3	Résultats du modèle raffiné . . . . .	96
3.2.4	Comparaisons . . . . .	97
3.3	Le modèle multiplicatif . . . . .	101

3.3.1	Résultats du premier modèle et comparaison à Chain-Ladder . . . . .	101
3.3.2	Recherche de corrélations et raffinements . . . . .	104
3.3.3	Résultats des modèles raffinés et comparaisons . . . . .	109
3.4	Un moyen de tester la robustesse de modèles : le <i>backtesting</i> . . . . .	115
3.4.1	Traitement des bases . . . . .	115
3.4.2	Résultats . . . . .	116
3.5	Bilan . . . . .	126
<b>Conclusion</b>		<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>132</b>
<b>A Annexes</b>		<b>135</b>
A.1	Valeurs de charge ultime proposées par les experts . . . . .	135
A.2	Représentation des coefficients de corrélation . . . . .	135
A.3	Paiement incrémental $j$ vs paiement incrémental $j + 1$ . . . . .	137
A.4	Réserve $j$ vs paiement incrémental $j + 1$ . . . . .	138
A.5	Paiement incrémental $j + 1$ vs paiement cumulé $j$ . . . . .	139
A.6	Paiement incrémental $j + 1$ vs charge $j$ . . . . .	140
A.7	Facteurs de développement et charge précédente . . . . .	141



# Introduction

Le secteur de l'assurance est un secteur particulier à bien des égards. Une des spécificités les plus importantes vient du fait qu'un contrat d'assurance est vendu par un assureur avant même que les coûts qui y sont relatifs ne soient connus. Cette situation ne permet pas aux acteurs du marché de jouir librement des montants de primes versés par les assurés. Pour faire face aux différents coûts engendrés par un contrat, les assureurs doivent donc placer des provisions. Une part de ces provisions est destinée au règlement de sinistres survenus mais non encore totalement réglés ou non encore connus par l'assureur, il s'agit des provisions pour sinistres à payer.

L'estimation de ces provisions pour sinistres à payer est un enjeu crucial pour le secteur de l'assurance. En effet, une sous-estimation de ce montant peut conduire l'assureur à être dans l'impossibilité d'honorer les règlements auxquels il est contractuellement engagé, alors qu'une sur-estimation, si elle est trop prudente, constitue un manque à gagner pour l'assureur qui ne peut placer ce montant sur des actifs risqués. Dans ce cas, le régulateur peut même estimer qu'il s'agit d'une volonté de diminuer le niveau d'imposition.

Actuellement, l'estimation des provisions pour sinistres à payer en assurance non-vie s'effectue au moyen de méthodes dites « agrégées ». Relativement simples et rapides à mettre en œuvre, elles s'appuient sur le regroupement des montants de règlements connus par survenance et par développement. Néanmoins, l'application de ces méthodes induit un non-usage d'une quantité importante d'informations disponibles sans collecte supplémentaire : informations détaillées sur le développement individuel des sinistres, données sur le sinistre en lui-même ou bien sur l'assuré par exemple. Ces données pourraient permettre de ne plus estimer une réserve pour l'ensemble d'un portefeuille mais plutôt une réserve adaptée à chaque sinistre de manière individuelle.

Ces méthodes dites « individuelles » ou « ligne à ligne » ne sont pas encore mises en place mais permettent d'envisager à terme une vision différente des résultats, un gain en précision, une segmentation plus poussée des portefeuilles ou encore une prise en compte facilitée des traités de réassurance non-proportionnelle.

L'objectif du présent mémoire consiste en l'implémentation de modèles complets de provisionnement individuel. Par complet, nous entendons le fait que les modèles que nous allons mettre en place prendront en compte à la fois les sinistres ouverts dont les caractéristiques et les premiers développements sont connus de l'assureur mais également les sinistres survenus et non encore déclarés par l'assuré (ces sinistres sont dits « tardifs ») pour lesquels aucune information n'est disponible. Les modèles présentés seront ensuite enrichis grâce à un travail sur les dépendances entre les variables disponibles.

Nous entamerons ce mémoire par une revue rapide du secteur de l'assurance non-vie dans son ensemble ainsi que du provisionnement en assurance. Nous présenterons ensuite les deux différents types de modèles qui seront mis en place ainsi que la façon dont les éventuelles dépendances entre variables seront traitées. Enfin, nous appliquerons ces modèles à une base de données réelle, sur laquelle nous effectuerons une analyse complète des dépendances permettant alors de raffiner les modèles. Nous serons donc en mesure de comparer les différents résultats obtenus entre eux ainsi qu'à d'autres valeurs de référence et une discussion sera continûment menée sur les faiblesses des modèles ainsi que sur le provisionnement en lui-même.

# Chapitre 1

## Contexte général et état de l'art sur le provisionnement en assurance non-vie

L'objectif de cette première partie est de poser un cadre général au présent mémoire en définissant les principales notions liées à l'assurance non-vie. Ces notions permettront d'introduire le principe de provisions pour sinistres à payer et les enjeux notamment réglementaires qui en découlent. Nous serons alors en mesure de présenter les principales méthodes de provisionnement mises en place par les assureurs à l'heure d'aujourd'hui.

### 1.1 Contexte général

#### 1.1.1 Le contrat d'assurance non-vie

##### **Définition générale**

L'assurance non-vie, également connue sous le nom d'assurance dommages ou d'assurance I.A.R.D (Incendie, Accidents et Risques Divers) met à disposition des personnes, qu'elles soient morales ou physiques, une possibilité (parfois rendue obligatoire par la loi comme dans le cadre de l'assurance automobile) de protection et de prévoyance face aux aléas qu'elles pourraient subir. Par opposition à l'activité d'assurance vie, l'objet de l'assurance non-vie est la protection de l'assuré face à toutes les conséquences ne relevant pas de la vie humaine. Sont ainsi généralement couvertes, les pertes financières dues à des dommages subis par les biens de l'assuré (ou par l'assuré lui-même) ou causées par ce dernier aux biens d'une tierce personne.

##### **Les intervenants du contrat d'assurance non-vie**

Le contrat d'assurance non-vie se caractérise par une interaction entre les trois différentes parties prenantes que sont le bénéficiaire, l'assuré et l'assureur. En effet, en échange d'une prime réglée par l'assuré à l'assureur, le bénéficiaire reçoit de la part de l'assureur une prestation en cas de survenance d'un événement spécifié dans le contrat. Le bénéficiaire et l'assuré peuvent tout à fait être la même personne (le propriétaire de la maison pour un contrat habitation par exemple) ou bien deux personnes différentes (la victime dans le cas où l'assuré est responsable des dommages). Deux types de flux monétaires sont donc réalisables dans le cadre d'un contrat d'assurance et sont résumés dans la figure

1.1. Le règlement d'une prestation n'est ici que potentiel et n'intervient finalement que rarement. C'est le principe de mutualisation : un grand nombre d'assurés paient une prime relativement faible pour que les quelques assurés qui subissent un sinistre soient indemnisés à hauteur de ce préjudice.



FIGURE 1.1: Schéma simplifié des flux entre les 3 parties prenantes d'un contrat d'assurance non-vie

### Le principe indemnitaire

Une autre caractéristique importante du contrat d'assurance non-vie est le principe indemnitaire qui régit son fonctionnement. Ce principe prévoit que les dommages subis dans le cadre du contrat doivent être réparés sans entraîner d'enrichissement ou d'appauvrissement du bénéficiaire. Le montant d'indemnisation ne peut alors pas être connu avant la survenance d'un sinistre et l'évaluation des dommages subis. Par exemple, dans le cadre d'une assurance habitation, le montant réglé en cas d'inondation par l'assureur au titre de l'indemnisation n'est pas connu à l'avance et ne sera déterminé qu'après évaluation du sinistre. Ce principe s'oppose au principe forfaitaire, souvent présent en assurance vie dans le cadre par exemple du versement de rentes dont le montant est déterminé à l'avance lors de la signature du contrat. De plus, dans le cadre de dommages matériels, cette notion d'indemnisation conduit l'assureur non pas à rendre au bénéficiaire l'objet réparé ou à lui fournir un modèle équivalent mais à lui verser une somme d'argent correspondant au préjudice. L'objectif étant de restaurer le patrimoine du bénéficiaire, ce dernier n'a alors aucune obligation quant à l'utilisation de cette somme d'argent. Ainsi, dans le cadre d'un contrat couvrant un bateau de plaisance en cas de tempête, l'assureur versera une somme qui correspond à la valeur du préjudice, que l'assuré peut finalement tout à fait utiliser pour acheter une nouvelle voiture en lieu et place de son bateau ou bien épargner.

### Antisélection et aléa moral

Par essence, l'assurance non-vie fait face à deux phénomènes qu'elle doit tenter de limiter au maximum : l'antisélection et l'aléa moral. En effet, la mise en place d'un tarif unique fait fuir les bons risques pour qui le tarif est dissuasif, et fait accourir les mauvais risques pour qui le tarif est très attractif. Cela a donc pour effet une augmentation de la part de mauvais risques dans le portefeuille de l'assureur : c'est l'antisélection. Pour y faire face, l'assureur tente d'adapter ses tarifs et ses prestations aux différents profils de risque auxquels il peut être confronté. L'aléa moral quant à lui se présente comme l'incitation faite à l'assuré intégralement couvert de ne pas se prémunir suffisamment contre les risques et peut donc conduire l'assureur à observer des sinistres en plus grand nombre ou de gravité supérieure à ce qu'il pouvait espérer attendre. Pour lutter contre l'aléa moral, différentes méthodes peuvent être utilisées. On peut ainsi citer l'obligation d'installation de dispositifs préventifs (détecteur de fumée dans une habitation par exemple), l'obligation d'une visite de risque, la mise en place d'exclusions dans les contrats en cas de négligence de l'assuré, ou la définition d'une franchise qui conduit l'assuré à conserver à sa charge un certain montant du préjudice. Ce dernier phénomène n'est absolument pas présent en assurance vie où par principe, chacun cherche à éviter la mort.



## Conditions d'assurabilité et diversification

Dans les paragraphes précédents, nous avons évoqué en guise d'exemple, des biens assurés tels qu'une maison, une automobile ou un bateau. Ces biens sont assurés face à des risques qui sont des événements indépendants de la volonté de l'assuré et face auxquels l'assuré cherche donc à se couvrir. Les risques ne sont pas tous assurables et doivent, pour l'être, respecter les points suivants :

- Il doit présenter un caractère aléatoire : une assurance ne peut être souscrite contre un événement qui se réalisera de manière certaine à une date connue,
- Le montant de la perte subie par l'assuré doit être quantifiable et la perte doit être subie durant une période bien définie,
- L'aléa moral et l'antisélection doivent pouvoir être contrôlés,
- Le risque doit pouvoir être mutualisé entre plusieurs assurés,
- Une probabilité de survenance peut être estimée, c'est-à-dire que le risque doit se produire suffisamment fréquemment,
- Les pertes potentielles liées au risque ne doivent pas être trop importantes.

La plupart des risques auxquels nous pensons spontanément vérifient toutes ces conditions et sont assurables. En guise de contre-exemple, on peut citer le risque de mourir un jour (le risque n'est pas aléatoire), les pertes d'exploitation de l'économie américaine en cas de guerre (le montant assuré est trop important).

Au moment de la création d'un produit d'assurance non-vie, l'assureur doit déterminer la place du produit parmi les 18 branches de l'assurance non-vie énoncées par l'article R 321-1 du code des assurances [ETAT FRANÇAIS, 2020] et doit disposer d'un agrément correspondant à la branche sollicitée. En plus des principes énoncés jusqu'ici, un assureur se doit également de respecter le principe de diversification : il convient de couvrir des risques suffisamment divers et relativement indépendants entre eux afin de se protéger contre la survenance éventuelle d'une sinistralité exceptionnelle dans une branche particulière.

### 1.1.2 Le cycle de vie des sinistres

Après la signature du contrat et le versement de la prime à l'assureur, l'assuré est couvert contre les risques spécifiés durant une période précise (généralement une année) appelée période de couverture. Si un événement prévu par le contrat survient durant cette période, il sera indemnisé dans les conditions prévues par le contrat. Néanmoins, de sa survenance à sa clôture définitive par le gestionnaire, le cycle de vie d'un sinistre est jalonné de plusieurs étapes qu'il est nécessaire d'avoir en tête au moment d'aborder une réflexion sur les paiements et réserves associés à un sinistre. Nous exposons donc ici les étapes du cycle de vie d'un sinistre et les résumons dans la figure 1.2 :

1. **La Survenance du sinistre.** Il s'agit du moment même où le sinistre se réalise. Pour que le sinistre soit couvert par un contrat, cette date doit se situer durant la période de couverture stipulée par le dit-contrat,
2. **La déclaration par la victime à l'assureur.** Si cette déclaration est effectuée après la clôture comptable de l'exercice de survenance, le sinistre est qualifié de tardif,
3. **Le montant d'indemnisation est estimé.** Ce montant peut être réévalué à tout moment, que ce soit à la hausse ou à la baisse,
4. **Le paiement de l'indemnité décidée à l'assuré.** Ce paiement peut être effectué en une seule fois ou bien en plusieurs versements si le montant est réévalué,

5. **Les recours éventuels.** L'indemnisation versée dans le cadre du sinistre peut être récupérée par l'assureur si un tiers responsable est identifié. Ce sera ce tiers (ou son assureur) qui devra alors rembourser les sommes versées par l'assureur,
6. **La clôture du sinistre** une fois le processus d'indemnisation complété,
7. **La ré-ouverture potentielle du sinistre** si de nouveaux éléments sont apportés (aggravation, identification du responsable...),
8. **Les nouveaux paiements et recours** liés aux nouveaux éléments apportés,
9. **La clôture définitive du sinistre.**

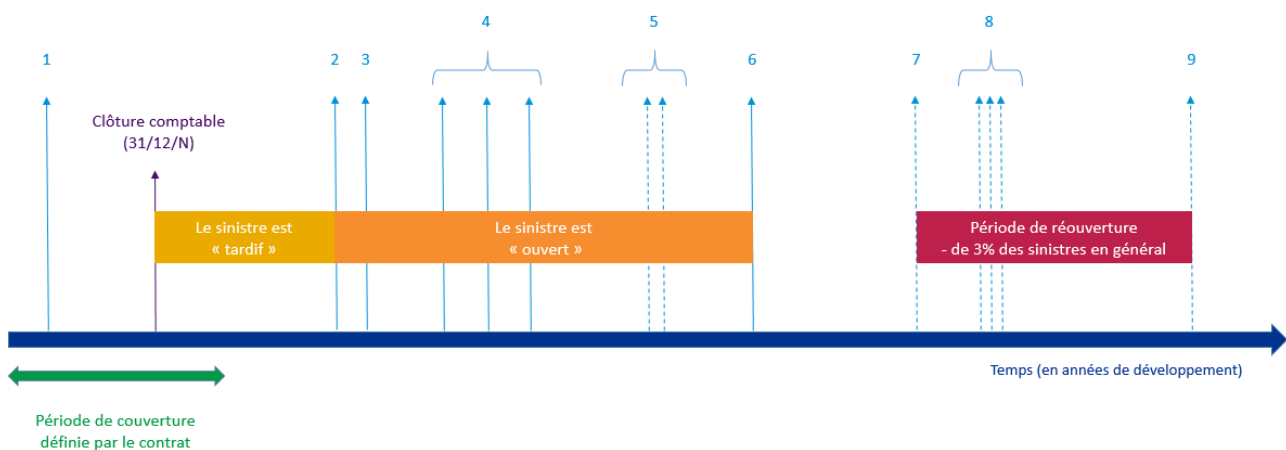


FIGURE 1.2: Cycle de vie d'un sinistre

### 1.1.3 Cycle de production inversé et nécessité d'établir des provisions

Une particularité extrêmement importante dans le cadre de l'assurance non-vie réside dans l'inversion du cycle de production qui est imposée par le fonctionnement de ce secteur d'activité. La temporalité des flux échangés dans le cadre d'un contrat d'assurance non-vie se distingue largement de celle généralement observée dans la plupart des secteurs.

En effet, dans un cadre classique, les coûts engendrés par un produit sont connus avant d'en fixer le prix et d'en percevoir les recettes. Cela permet alors au vendeur d'ajuster le prix de vente au coût de revient pour maximiser les possibilités de résultat positif. Prenons l'exemple d'un constructeur automobile : il connaît les coûts de matière première, de main d'œuvre ou de vente que nécessite une voiture et peut définir le prix de vente public du modèle en fonction des coûts de production dans le but de réaliser une plus-value et de s'enrichir. Pour un assureur, la situation est toute autre. Les coûts de production de notre constructeur automobile peuvent être assimilés aux coûts de sinistres et aux frais de gestion des contrats, et le prix de vente du véhicule peut se présenter comme la prime reçue par l'assureur. Or, comme nous avons pu le constater lors de la présentation du cycle de vie d'un sinistre, la temporalité est bien différente. L'assuré est couvert à partir du règlement de la prime et le sinistre survient donc postérieurement à ce règlement. L'assureur perçoit donc les recettes avant même de connaître les coûts du produit qu'il a vendu à l'assuré. Ces coûts doivent ainsi être estimés par l'assureur afin de permettre, à terme, la réalisation d'une plus-value. Ce phénomène s'appelle le cycle de production inversé.

La première problématique posée aux assureurs relève de la tarification et nous n'aborderons pas celle-ci dans ce mémoire. La seconde problématique posée par ce phénomène réside dans la nécessité, pour l'assureur, d'être capable de faire face aux sinistres futurs pour lesquels il a contractualisé une indemnisation avec l'assuré. Pour ce faire, il va devoir constituer des réserves. Ces réserves sont appelées provisions techniques. A réception des primes, celles-ci sont investies dans des actifs sécurisés et réglementés par l'assureur qui place au bilan les provisions techniques en correspondance côté passif. L'estimation juste des provisions nécessaires est donc une activité essentielle pour les assureurs et réalisée généralement par des équipes d'actuaire dédiées.

#### 1.1.4 Les principales provisions techniques en assurance non-vie

Les provisions techniques telles que nous les avons définies précédemment ne sont pas évaluées dans leur ensemble par les équipes en charge du provisionnement. Celles-ci sont divisées en plusieurs catégories par l'Autorité des Normes Comptables et peuvent être séparées en deux catégories : les provisions de primes et les provisions de sinistres. Nous allons ici définir les principales provisions que doit constituer un assureur non-vie qui sont présentées par l'article R 331-6 du code des assurances [ETAT FRANÇAIS, 2020].

##### Les provisions de primes

- **Provision pour Primes Non Acquises (PPNA)** : le paiement par l'assuré de la prime réclamée par l'assureur est la plupart du temps réalisé en amont de la période de couverture. Cette période de couverture, d'un an généralement, ne coïncide que très rarement avec un exercice comptable unique (pour la majorité des compagnies, du 01 janvier au 31 décembre). Ainsi, au moment d'établir le bilan en fin d'exercice comptable, une part des primes perçues est destinée à couvrir des risques sur une période relative à l'exercice comptable suivant. Ne pouvant demander un complément de prime à l'assuré, l'assureur doit alors doter la PPNA d'un montant équivalent à la partie des primes correspondant à une couverture sur la (ou les) période(s) suivante(s). Ce calcul est effectué au *prorata temporis*. Prenons l'exemple d'un contrat ayant une période de couverture de une année, souscrit au 1er juillet. Seuls 6 mois de couverture concordent avec l'exercice comptable en cours, les 6 mois restants dépendent de l'exercice comptable suivant. L'assureur doit alors placer un montant équivalent à la moitié de la prime perçue en PPNA,
- **La Provision Globale de Gestion (PGG)** : dans les cas où les frais de gestion d'un contrat ne sont pas complètement compensés par des frais prélevés sur les contrats, le montant non couvert doit être provisionné en PGG,
- **Provision pour Risque En Cours (PREC)** : suite à une estimation erronée des montants attendus de sinistres, un assureur peut se rendre compte en cours de période de couverture que le contrat a été sous-tarifé. Cela signifie que la prime reçue de la part de l'assuré est insuffisante par rapport au montant de sinistres réellement observés récemment sur le portefeuille en question. L'assureur doit donc provisionner le décalage afin de disposer d'un montant correspondant au coût réel attendu. C'est ce montant de provisions qui est appelé PREC. Ainsi, si le rapport entre le montant de charges (frais y compris) réellement observé sur les deux derniers exercices et le montant des primes acquises, que l'on appelle le ratio combiné est supérieur à 1, l'écart est à provisionner en PREC.

## Les provisions de sinistres

- **Provision d'Egalisation (PE)** : elle est destinée à permettre à l'assureur de faire face à des sinistres de gravité exceptionnelle et en lien avec des risques naturels, nucléaires, avec le terrorisme, etc,
- **La Provision pour Sinistre A Payer (PSAP)** : il s'agit ici de la principale provision en assurance non-vie. Elle est constituée pour permettre à l'assureur de faire face aux règlements à effectuer concernant des sinistres survenus et non encore payés dans leur intégralité. Nous avons pu constater au moment de présenter le cycle de vie d'un sinistre la présence d'un décalage pouvant être plus ou moins important entre la survenance d'un sinistre et les derniers règlements qu'il implique. La PSAP a donc pour objectif de prendre comptablement en compte les règlements estimés malgré ce décalage. Cette provision se décompose en trois blocs :
  1. **La provision dossier-dossier** : Lorsque l'assureur prend connaissance d'un sinistre, une estimation du coût attendu est effectuée soit en fonction des informations fournies par l'assuré soit en fonction des retours d'un expert mandaté par une des parties. Cette estimation peut même être forfaitaire quand il s'agit de risques de masses très bien compris. Le montant correspondant à cette estimation est alors mis en provision dossier-dossier. Cette provision est évaluée au niveau du sinistre.
  2. **La provision Incurred But Not Enough Reported (IBNER)** : Le coût engendré par un sinistre peut évoluer à plusieurs reprises que ce soit à la hausse ou à la baisse jusqu'à la clôture du sinistre. Par exemple dans le cadre d'une tempête, un bâtiment peut sembler n'avoir été que peu touché (fenêtre brisée à cause d'un tremblement de terre, ou dégât des eaux lié à une inondation) avant de s'effondrer plusieurs mois après des suites d'une autre avarie invisible causée par la tempête. La provision IBNER sert alors à tenter d'anticiper au global ces évolutions de coût liées aux estimations erronées du coût des sinistres. Elle peut ainsi être positive ou négative (selon si l'estimation dossier-dossier a été trop peu ou bien trop prudente),
  3. **La provision Incurred But Not Yet Reported (IBNYR)** : Cette provision est destinée à permettre à l'assureur de faire face aux sinistres que nous avons précédemment qualifiés de tardifs. En effet, tous les sinistres ne sont pas déclarés immédiatement après leur survenance, et peuvent même l'être plusieurs années après. Cependant, le sinistre étant survenu durant la période de couverture, il est toujours couvert par le contrat et l'assuré doit être indemnisé. Un couple ne pourra par exemple découvrir un sinistre ayant frappé leur résidence secondaire en septembre 2020 que lors de leur prochain passage sur place en août 2021. L'assureur prendra donc connaissance du sinistre durant l'exercice comptable qui suit l'année de survenance. La provision IBNYR est alors destinée à couvrir le coût de ces sinistres survenus mais dont l'assureur n'a pas encore connaissance.

La sommes des provisions IBNER et IBNYR est communément appelée IBNR.

La charge ultime associée à un sinistre correspond finalement au montant qui a été réglé pour l'indemnisation de ce sinistre une fois tous les versements effectués et le sinistre définitivement clos. Cette charge ultime peut être étendue à l'échelle d'une année de survenance. La charge ultime n'est alors connue que quand tous les sinistres survenus durant ladite année sont clos définitivement. Cette charge ultime peut se décomposer de plusieurs façons différentes à l'aide des notions de provisions pour sinistres que nous venons de définir. Nous représentons ces possibilités dans la figure 1.3 pour le cas où les provisions IBNER sont positives (sous-estimation de la réserve dossier-dossier). La somme des paiements et des provisions dossier-dossier liés à un même sinistre est dénommée «Charge dossier/dossier».

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons tout particulièrement à la PSAP et notamment aux provisions IBNER et IBNYR.

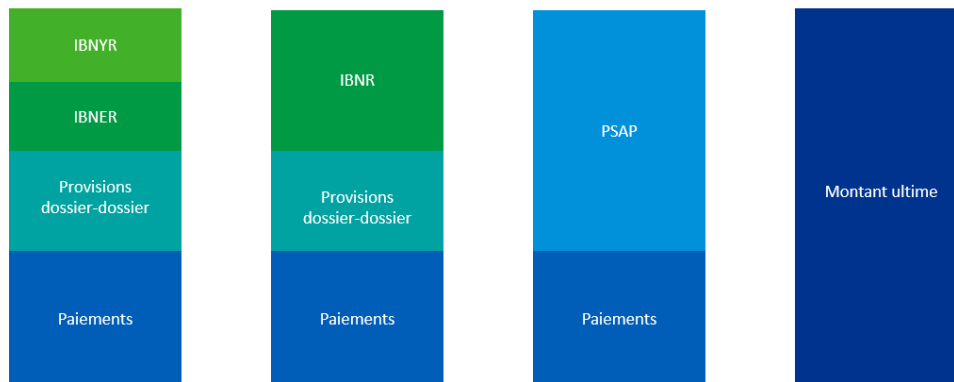


FIGURE 1.3: Décomposition de la charge ultime

## 1.2 Enjeux réglementaires du provisionnement en assurance non-vie

Le secteur de l'assurance est un secteur très fortement réglementé et les assureurs font face à différentes normes qui leur imposent d'adapter leurs manières de procéder. Nous avons compris grâce aux explications précédentes qu'il était absolument nécessaire pour un assureur de réaliser une estimation de la charge ultime liée à chaque année de survenance afin de déterminer le montant de provision adéquat. Ce montant devra lui permettre d'être en capacité d'honorer ses engagements envers ses clients. Si en normes comptables françaises dictées par l'Autorité des Normes Comptables, l'estimation des réserves doit être réalisée de manière « prudente » (i.e. être supérieures ou égales à l'espérance des montants restants à régler) et donc que l'assureur peut se contenter d'un calcul d'espérance augmenté d'un certain montant, ce n'est pas complètement le cas dans les autres normes auxquelles il est confronté. Nous proposons alors dans cette section une brève introduction à la directive Solvabilité 2 ainsi qu'à la norme IFRS 17.

### 1.2.1 La directive Solvabilité 2 : les trois piliers

La directive Solvabilité 2, publiée en 2009 [PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009] et entrée en application au 1er janvier 2016, a notamment pour objectif une harmonisation réglementaire du marché de l'assurance à l'échelle européenne ainsi qu'une meilleure protection des assurés. Elle s'applique ainsi à tous les assureurs et réassureurs de l'Union Européenne (exception faite des très petits acteurs). Les principaux points d'attention s'articulent autour d'une exigence de niveaux de fonds propres et de marge de solvabilité suffisants afin de garantir la bonne exécution des engagements pris envers les assurés. Les assureurs sont alors invités à comprendre et analyser en profondeur les risques inhérents à l'activité d'assurance, gérer au mieux ceux auxquels ils sont exposés et proposer une communication suffisante et adéquate sur ces risques. La directive se décompose en trois piliers présentant chacun des exigences et objectifs différents.

Le premier pilier est un pilier qui fixe des exigences quantitatives et propose une harmonisation des

standards d'évaluation des actifs et des passifs. Il impose également des normes de calcul concernant deux grandeurs qui sont depuis au cœur des préoccupations des assureurs : Le *Solvency Capital Requirement* (SCR par la suite) ainsi que le *Minimum Capital Requirement* (MCR par la suite). Le ratio de couverture du SCR par les fonds propres sert souvent de baromètre notamment pour les différents régulateurs pour évaluer la bonne santé d'une compagnie. Le MCR quant à lui représente le montant minimum dont doit disposer en permanence l'assureur sous peine de se voir retirer sa licence et donc son droit d'exercer. Ce premier pilier impose alors une vision standardisée du bilan des assureurs (voir figure 1.4). Les actifs doivent être évalués en valeur de marché et coté passif, trois éléments doivent figurer :

- **Le montant des provisions techniques** dont le calcul doit être effectué en vision dite *Best-Estimate* et calculé par groupes de risques homogènes. L'estimation des provisions doit ainsi être précise et sans prise en compte de la notion de prudence, il s'agit donc de l'espérance des flux comptables futurs.
- **Le niveau de fonds propres** disponibles répartis entre le SCR (dont les modalités de calcul seront détaillées dans le paragraphe suivant) et le montant de capital excédentaire que possède la compagnie, c'est-à-dire le montant de capital disponible en plus du SCR.
- **La marge pour risque.** Il s'agit du montant qu'exigerait un potentiel repreneur du portefeuille pour honorer les engagements d'assurance déjà pris. Une méthode de calcul dite « *Cost of Capital* » est prescrite par la directive.

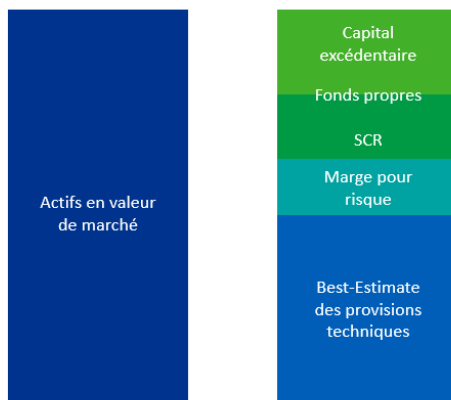


FIGURE 1.4: Bilan comptable simplifié en vision Solvabilité 2

Le pilier 2 vient compléter le pilier 1 par l'apport d'exigences qualitatives afin de renforcer la gouvernance et la gestion des risques des assureurs. Les assureurs doivent alors réaliser leur *Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA) afin d'avoir une connaissance parfaite et fine de leur propre profil de risques ainsi que prévoir des modes de gestion de ces risques. L'assureur doit être capable de déterminer et quantifier les risques qui pourraient nuire à sa solvabilité et leur apporter des réponses adaptées. Ce pilier impose également que quatre fonctions clés soient présentes au sein des entités (conformité, audit interne, gestion des risques et actuariat) afin de s'assurer que l'organisme possède des moyens opérationnels suffisants pour l'exécution de tâches identifiées comme indispensables d'un point de vue prudentiel. De plus, deux dirigeants effectifs (au minimum) doivent être nommés, c'est le principe des « quatre yeux ». Ainsi, ce pilier formalise la politique de gestion des risques de la compagnie.

Enfin, le pilier 3 détaille les obligations en termes de *reporting* et de diffusion d'information au public, au marché, ainsi qu'aux régulateurs que doivent respecter les acteurs du marché. L'objectif est encore une fois d'harmoniser ces communications et d'imposer un certain niveau de transparence. Les

assureurs doivent donc mettre à disposition du régulateur des états quantitatifs trimestriels. Ces nouvelles exigences de reporting ont obligé les assureurs à une refonte totale de leur chaîne de production de l'information financière.

Ainsi, nous pouvons noter que le calcul du *Best-Estimate* de la charge ultime (et donc des réserves) est nécessaire pour pouvoir proposer un bilan Solvabilité 2. L'estimation précise des PSAP est donc un enjeu important dans le cadre de cette directive.

### 1.2.2 La directive Solvabilité 2 : le SCR

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le SCR est un des points primordiaux de la directive Solvabilité 2. Sous Solvabilité 1, l'exigence de capital réglementaire se calculait très simplement mais ne prenait qu'imparfaitement en compte les risques auxquels les assureurs sont soumis. Le SCR tel que présenté dans la directive Solvabilité 2 se veut plus complexe mais également plus complet dans la prise en compte des risques. Le SCR se définit ainsi comme le montant de fonds propres que doit avoir à disposition la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon un an et au niveau 99,5%. En d'autres termes, il s'agit du montant de fonds propres nécessaires à l'assureur pour absorber, à horizon un an, une perte exceptionnelle et donc être insolvable dans au plus 1 scénario sur 200.

Le SCR se doit, en cas de ratio de couverture suffisant, de garantir le niveau de solvabilité présenté précédemment. Il doit alors s'appuyer sur une prise en compte la plus complète possible des risques auxquels sont soumis les assureurs. Les différents risques devant être inclus et évalués dans le calcul du SCR sont représentés par une cartographie des risques représentée en figure 1.5 et fournie par l'EIOPA (le régulateur européen).

Le pilier 1 propose aux assureurs et réassureurs deux méthodes différentes de calcul du SCR.

La première est dite « standard ». Elle est mise entièrement à disposition par l'EIOPA [EIOPA, 2014] et est appliquée par la grande majorité des assureurs. Cette approche adopte une vision modulaire. Pour chaque module de risque présent dans la cartographie des risques (voir figure 1.5), un niveau de SCR doit être calculé. Cette méthode générique que chaque assureur peut mettre en œuvre repose sur l'application de chocs marginaux pour chaque module de risque et le calcul global se réalise alors en quatre grandes étapes :

1. Application d'un choc (dont l'amplitude est imposée) sur le facteur de risque pour chaque sous-risque et calcul du besoin en capital par différence entre la *Net Asset Value* (NAV) centrale et la NAV choquée,
2. Agrégation des besoins en capital pour chaque sous-risque issu d'un même module de risque en utilisant des corrélations fournies afin d'obtenir le SCR propre au module,
3. Agrégation des besoins en capital pour chaque risque, toujours en utilisant des corrélations fournies afin d'obtenir le *Basic SCR* (BSCR),
4. Détermination du SCR global en calculant le risque opérationnel et en effectuant les ajustements dictés par la directive.

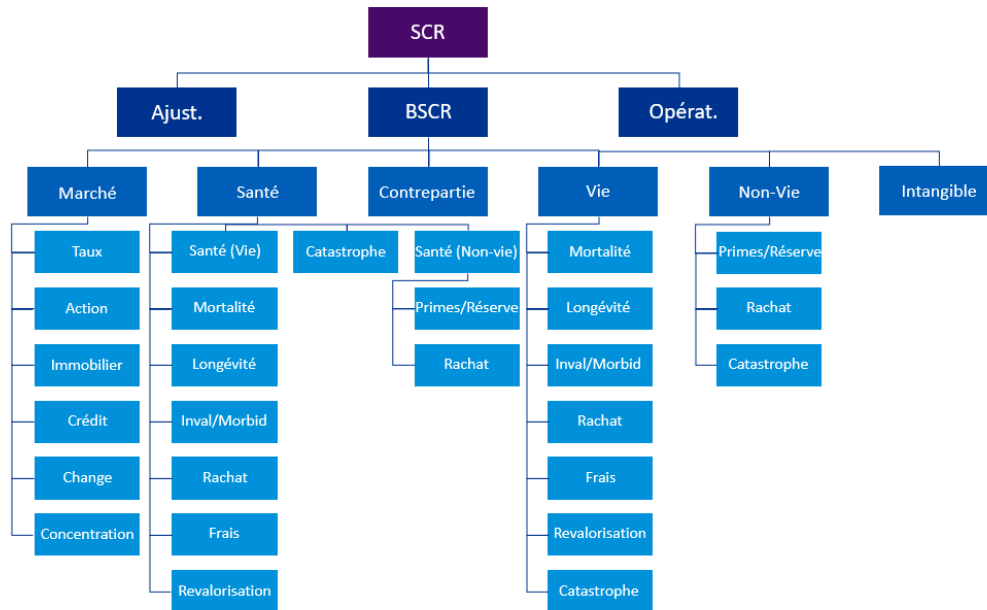


FIGURE 1.5: Décomposition modulaire du calcul du SCR

Cette méthode doit être appliquée indépendamment pour chaque ligne d'activité de l'assureur.

Si cette méthode présente l'avantage d'être facilement applicable, le caractère général qu'elle véhicule en imposant les mêmes risques et ampleurs de chocs à tous les acteurs lui fait inévitablement perdre en précision. Pour pallier cette faiblesse dans la prise en compte des spécificités individuelles, la directive laisse la possibilité aux assureurs d'utiliser, s'ils le souhaitent, un modèle de calcul dit « interne ». Dans ce cadre, les assureurs qui ont recours à cette méthode définissent leurs propres calculs en essayant de les adapter à leur profil de risque particulier. Afin de pouvoir utiliser leur modèle interne, les compagnies doivent auparavant justifier et démontrer l'intégralité de leurs choix de méthodes ou de paramètres au régulateur qui décidera ou non d'autoriser le modèle. Peu d'assureurs et réassureurs ont recours à cette deuxième méthode à cause des coûts de recherche et de mise en place très importants qu'elle représente. Calculatoirement, le calcul du SCR par modèle interne est bien plus complexe et nécessite une compréhension très fine des risques. Si la directive laisse la possibilité aux assureurs de procéder comme ils le souhaitent, l'article R.352-2 du code des assurances [ETAT FRANÇAIS, 2020] impose que :

« Le capital de solvabilité requis couvre au minimum les risques suivants :

- Le risque de souscription en non-vie,
- Le risque de souscription en vie,
- Le risque de souscription en santé,
- Le risque de marché,
- Le risque de crédit,
- Le risque opérationnel, qui comprend les risques juridiques, mais ne comprend ni les risques découlant des décisions stratégiques, ni les risques de réputation».

Tous les modules de risques présents sur la cartographie doivent donc être abordés et pris en compte. Cette autorisation de procéder par modèle interne n'est ainsi pas une possibilité offerte par



le régulateur de prendre des raccourcis ou simplifications dans l'analyse des risques. Les compagnies utilisant un modèle interne doivent donc, en prenant en compte tous les risques, calibrer une distribution de l'évolution des fonds propres sur l'année et en déduire le SCR via la détermination du quantile 0.05% de cette distribution et de son écart par rapport au niveau de pertes/gains en fonds propres attendu (voir figure 1.6). L'intérêt pour des compagnies de faire ce choix coûteux est d'obtenir un SCR plus en ligne avec leurs risques propres qui, s'il est inférieur à ce que propose la formule standard, autorise, pour un ratio de couverture similaire, une immobilisation moindre de capital.

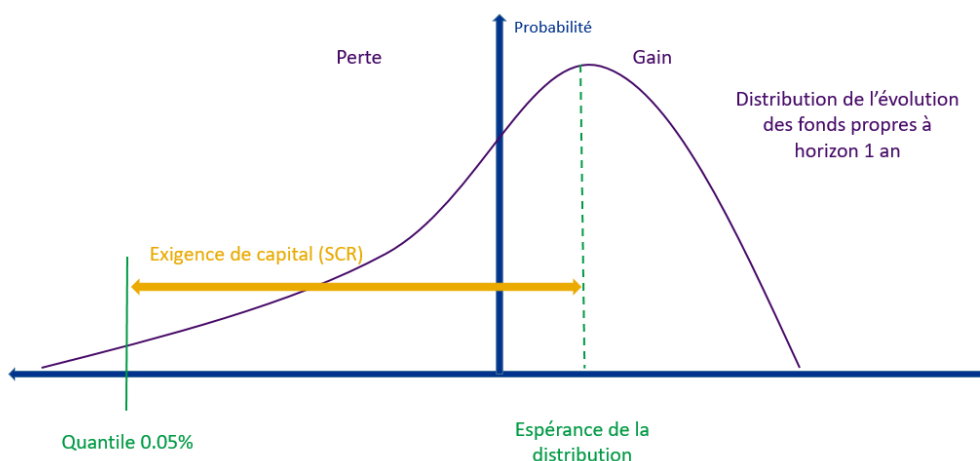


FIGURE 1.6: Représentation graphique du calcul du SCR

### 1.2.3 La directive Solvabilité 2 : le risque de réserve

Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes intéressés particulièrement au risque de réserve du module de souscription non-vie.

Le risque de réserve se définit comme le risque dû à la mauvaise évaluation des sinistres et donc aux pertes liées à la constitution de réserves insuffisantes pour faire face aux engagements auxquels l'assureur est contractuellement engagé auprès de ses clients. Ce risque découle grandement de la méthode de calcul des provisions imposée par la directive Solvabilité 2. En effet, le calcul en vision *Best-Estimate* et donc la non prise en compte d'une marge de prudence fait peser un risque sur les assureurs. Une mauvaise estimation du niveau des sinistres et donc des provisions, ou même l'occurrence d'un quelconque facteur aggravant sur les montants des sinistres peut entraîner un important risque de solvabilité pour l'assureur qu'il convient de prendre en compte dans le calcul du SCR.

Dans une approche de type formule standard, le risque de provision est estimé simultanément avec le risque de primes au sein d'un même bloc dans le module souscription non-vie et le montant est donc défini à l'aide d'une formule fermée.

A l'inverse, dans le cas de l'utilisation d'un modèle interne, il convient d'estimer ce risque et de calculer le besoin en capital réglementaire qu'il représente via la modélisation d'une distribution de pertes. C'est à cette estimation que nous nous sommes intéressés plus tard dans ce mémoire.

Nous comprenons donc que pour le calcul du SCR dans le cadre du modèle interne, une distribution complète de la charge à un an doit pouvoir être produite. Cette distribution doit donc prendre en compte les PSAP à un an dont l'estimation est par conséquent un point crucial pour l'estimation du SCR réserves.

#### 1.2.4 La norme IFRS 17 et le calcul de réserves

Le 18 mai 2017 l'International Accounting Standards Board (IASB) a publié la norme comptable internationale IFRS 17 « Contrats d'assurance » qui vient prendre le relais de la norme provisoire IFRS 4 « Contrats d'assurance » publiée en 2004. Cette dernière autorisait les compagnies à utiliser des normes nationales au moment de comptabiliser les contrats d'assurance. Cette possibilité a donné lieu à un grand nombre d'approches différentes, rendant complexe la comparaison des performances financières pour les investisseurs. IFRS 17 a pour ambition de créer une norme de comptabilisation unique qui résoudra ce problème majeur de comparaison. Cette norme doit notamment être obligatoirement appliquée par toutes les sociétés d'assurance de l'Union Européenne cotées ou émettant de la dette. Repoussée à plusieurs reprises, la mise en application effective est à ce jour prévue pour le 1er janvier 2023.

En termes de bilan (voir figure 1.7), les actifs sont, comme dans la directive Solvabilité 2, évalués à leur valeur de marché. La norme impose le découpage du passif en quatre blocs :

- L'estimation des flux de trésorerie futurs en valeur actuelle qui peut être vue comme une provision *Best-Estimate* des engagements de l'assureur envers les assurés calculé par groupe homogène de contrats,
- L'ajustement pour le risque non-financier qui représente une marge d'erreur prise par l'assureur par rapport à l'estimation des flux futurs qui se veut la plus précise possible et sans marge de prudence. Il est calculé par groupe homogène de contrats,
- La marge sur les services contractuels qui représente les profits futurs non encore acquis liés à des contrats déjà signés que l'assureur reconnaîtra au moment où il fournira le service associé et qui est aussi calculé par groupe homogène de contrats,
- Les fonds propres qui représentent le capital de l'assureur investi dans des actifs non risqués.

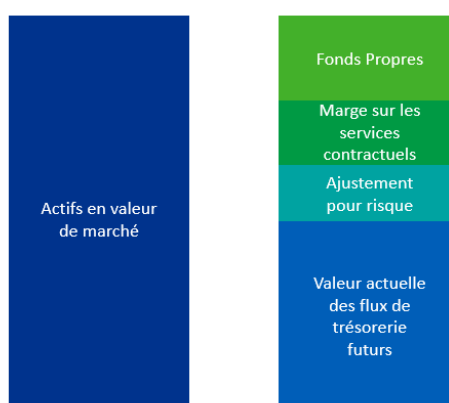


FIGURE 1.7: Bilan comptable simplifié en vision IFRS 17

Les flux de trésorerie futurs estimés peuvent être considérés comme le pendant en vision flux de trésorerie du *Best-Estimate* des provisions techniques de la directive Solvabilité 2 qui propose une vision flux comptables.

L'ajustement pour risque non-financier présent dans ce bilan vient prendre la place de la marge pour risque dans le bilan Solvabilité 2. L'objectif de cet ajustement est d'apporter une marge de prudence à l'estimation des flux futurs de trésorerie. Ainsi, ce montant se calcule de sorte que la somme de l'ajustement et de l'estimation Best-Estimate des flux soit égale à un quantile de la distribution estimée de la charge ultime dont le niveau est choisi par l'assureur comme étant suffisamment prudent. L'estimation de la charge ultime (et *a fortiori* des réserves) représente donc également un enjeu très important également pour la mise en place de cette norme.

## Bilan

Nous avons donc pu constater à travers les rapides présentations des normes auxquelles font face les assureurs plusieurs quantités dont le calcul est absolument nécessaire et pour lesquelles une estimation précise des provisions (de sinistres particulièrement) est requise, à savoir :

- Le *Best-Estimate* de la charge ultime (bilan Solvabilité 2),
- La distribution de la charge à un an (calcul du SCR),
- La distribution de la charge ultime (bilan IFRS 17).

## 1.3 Les principales méthodes de provisionnement en assurance non-vie

Le provisionnement représentant un enjeu capital pour le secteur de l'assurance non-vie, le développement de méthodes les plus précises et performantes possibles a été et est toujours aujourd'hui un objectif important pour les actuaires. Depuis plus d'un siècle, ces derniers ont utilisé des triangles de développement, le plus souvent sur des données agrégées afin de projeter les coûts futurs liés aux sinistres. Dans cette section, nous allons commencer par expliciter la notion de triangle de développement avant de passer en revue les principales méthodes agrégées, qu'elles soient déterministes ou stochastiques, avant de poser quelques-unes de leur limites et d'introduire des méthodes individuelles. Ce panorama des méthodes de provisionnement est une première étape nécessaire afin d'appréhender très clairement les avantages et inconvénients des méthodes actuelles et de pouvoir ensuite construire une méthode différente.

### 1.3.1 La notion de triangle de développement

La grande majorité des méthodes de provisionnement ayant cours aujourd'hui se base sur des données agrégées par année de survenance et année de développement. Ces données sont représentées dans un tableau appelé triangle de développement (ou run-off triangle). La notion d'année de développement d'un sinistre correspond au nombre d'années (ou de périodes si l'on a un découpage qui n'est pas en années) écoulées depuis la survenance du sinistre. Par exemple, un sinistre survenu le 8 juillet 2014 et toujours ouvert en 2020 est dans sa 6<sup>ème</sup> année de développement. Chaque case du triangle correspond alors à un couple (année de survenance, année de développement) et contient les montants réglés par l'assureur pour chaque sinistre de l'année de survenance en question jusqu'à l'année de développement correspondante incluse.

Fixons quelques notations qui seront utiles tout au long de cette section :

- $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , l'année de survenance du sinistre,
- $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , l'année de développement du sinistre,

- $C_{i,j}$ , le cumul des paiements réalisés pour les sinistres survenus en année  $i$  jusqu'à l'année de développement  $j$  incluse.

Nous illustrons le concept de triangle de développement dans la table 1.1 :

Le triangle ainsi présenté est construit en fin d'année  $n$  et permet de représenter toute l'information dont dispose l'assureur à cet instant-là et plusieurs lectures s'offrent alors à lui :

- En sommant les termes de la dernière diagonale, il dispose du montant total déjà réglé pour les sinistres du portefeuille considéré,
- En lisant une ligne, il dispose de l'évolution des paiements totaux relatifs à une année de survenance particulière,
- En lisant une colonne, il dispose de l'information sur les paiements cumulés selon les années de survenance et pour une année de développement précise.

Année de survenance	Année de développement				
	0	1	...	$n-1$	$n$
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...		
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$			?
$n$	$C_{n,0}$				

TABLE 1.1: Représentation d'un triangle de développement avec  $(n+1)$  années de survenance et  $(n+1)$  années de développement, vu en fin d'année  $n$

Une autre version du triangle peut être utile pour l'assureur et découle de la première. Il s'agit de la version non-cumulée du précédent en notant  $I_{i,j}$  le montant incrémental réglé en année de développement  $j$  pour la survenance  $i$ . On a alors  $I_{i,0} = C_{i,0}$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $I_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$ . En procédant aux mêmes lectures que celles présentées précédemment, l'assureur peut disposer :

- En sommant les termes d'une quelconque diagonale, du montant réglé durant l'année comptable correspondante,
- En lisant les termes d'une ligne, de la chronique des paiements pour une année de survenance quelconque,
- En lisant les termes d'une colonne, des règlements effectués pour une année de développement précise.

Le triangle représentant toute l'information connue à sa date de construction, la zone vide du triangle correspond à des sommes futures dont l'assureur n'a pas encore connaissance. L'estimation de ces montants est donc ce qui permettra de prédire un montant de provision adapté à la sinistralité.

Une simplification importante et commune va être effectuée pour la suite de ces travaux : nous allons faire l'hypothèse que les sinistres sont tous clos au plus tard après la dernière année de développement connue (l'année  $n$  dans notre cas). Ainsi, nous pourrions conclure que la charge ultime associée à une quelconque année de survenance  $i$  correspond au dernier montant de la ligne associée, à savoir  $C_{i,n}$ .

### 1.3.2 Les méthodes de provisionnement déterministes classiques

La première catégorie de méthodes à laquelle nous nous intéressons est celle des méthodes dites déterministes. Celles-ci considèrent que le montant à l'ultime peut être directement déterminé à partir de l'historique des données à disposition de l'assureur à la date d'estimation.

#### La méthode de Chain-Ladder

La méthode de Chain-Ladder se présente à la fois comme une des méthodes de provisionnement les plus simples connues mais également comme une des plus utilisées par les actuaires encore aujourd'hui.

La méthode repose sur une idée relativement simple : les sinistres, peu importe leur année de survenance se développent de manière similaire. Ainsi, nous supposons que les comportements observés par le passé se répéteront dans le futur. En appliquant cette idée, il est possible d'atteindre la dernière colonne du triangle en appliquant successivement des coefficients de passage déterminés grâce aux données disponibles. Pour un couple  $(i, j)$ , ces coefficients portent le nom de facteurs de développement, se notent  $f_{i,j}$  et sont définis par

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}.$$

Formellement, l'hypothèse que nous avons développée précédemment quant au développement des sinistres devient alors :

*Hypothèse* : Les facteurs de développement sont indépendants de l'année de survenance.

Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f_{i,j} = f_j = \frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \frac{C_{n,j+1}}{C_{n,j}},$$

On peut alors estimer le facteur de développement relatif à l'année de développement  $j$  de la manière suivante, pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}},$$

Ces facteurs de développement nous permettent alors facilement d'obtenir un estimateur de la charge cumulée issue d'une année de survenance  $i$  et d'une année de développement non encore réalisée  $j$ , à savoir, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket n-i+1, n \rrbracket$

$$\widehat{C}_{i,j} = \prod_{k=n-i}^{j-1} \widehat{f}_k \times C_{i,n-i}.$$

Le triangle peut alors être complété et les réserves estimées sont simplement obtenues en soustrayant le montant ultime de chaque année de survenance au dernier montant réellement connu,

c'est-à-dire, en appelant  $R_i$  les réserves générées par l'année de survenance  $i$

\*

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i},$$

Le montant total de PSAP à l'ultime est finalement donné par

$$PSAP_{ultime} = \sum_{i=1}^n \widehat{R}_i$$

Nous pouvons alors visualiser le triangle totalement complété :

Année de survenance	Année de développement					$\widehat{PSAP}$
	0	1	...	$n-1$	$n$	
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$	0
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$	$\widehat{C}_{1,n} - C_{1,n-1}$
...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	...	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$	$\widehat{C}_{n-1,n} - C_{n-1,1}$
$n$	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	...	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$	$\widehat{C}_{n,n} - C_{n,0}$

TABLE 1.2: Triangle de développement complété avec estimation des PSAP

Revenons à présent sur l'hypothèse que nous avons présentée précédemment et qui sous-tend cette méthode d'estimation. Pour être certain de pouvoir appliquer ce modèle, il convient de vérifier que celle-ci est suffisamment adaptée aux données en présence. Une façon de s'en assurer est de tracer sur un repère les  $(n-j)$  couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  disponibles pour  $i \in 0, 1, \dots, n-j-1$ . Ceux-ci doivent alors être relativement alignés le long d'une droite passant par l'origine.

Cette hypothèse est à l'origine des principales **limites** du modèle de Chain-Ladder :

- Le passé ne doit pas comporter d'irrégularités significatives : tout changement majeur dans la gestion de sinistres peut rendre le modèle imprécis,
- La branche doit être peu volatile et ne pas comporter une minorité de sinistres particulièrement graves qui fausseraient l'estimation des facteurs de développement,
- Les données disponibles doivent être nombreuses et fiables.

D'autres **limites** sans liens avec cette hypothèse peuvent également être pointées :

- La valeur de PSAP obtenue est unique et ne permet donc pas l'obtention d'une distribution comme cela est nécessaire pour répondre aux réglementations que nous avons présentées,
- Les derniers facteurs de développement sont calculés avec un nombre très limité d'années de survenance et donc de données, ce qui rend les facteurs obtenus moins fiables : une valeur anormale sur la dernière année de développement de la première survenance se répercutera sur toutes les survenances suivantes.

Nous comprenons ainsi que la qualité des données est primordiale pour l'utilisation de la méthode de Chain-Ladder et donc qu'une profonde analyse doit être réalisée préalablement afin de repérer et corriger d'éventuelles anomalies. Plusieurs prolongements de cette méthode ont été proposés au fil du temps, et notamment le modèle de London-Chain (BENJAMIN et EAGLES, 1986). Ce modèle propose une relation affine entre les règlements cumulés définis par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j} + \alpha_j.$$

L'estimation des paramètres  $f_j$  et  $\alpha_j$  permet ensuite le développement du triangle. Ce modèle peut s'avérer pertinent lorsqu'une relation non purement proportionnelle est supposée entre les charges cumulées des années de développement. De la même manière que pour Chain-Ladder, cette hypothèse peut se vérifier en traçant les couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  disponibles pour  $i \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$ . Ceux-ci doivent alors être relativement alignés le long d'une droite ne passant cette fois-ci pas par l'origine.

### La méthode de Bornhuetter-Ferguson

Une autre méthode largement répandue en assurance non-vie est celle de Bornhuetter-Ferguson proposée en 1972 (BORNHUETTER et FERGUSON, 1972). Comme la méthode de Chain-Ladder présentée précédemment, celle-ci s'appuie sur des triangles de développement. Cette méthode ne se fonde plus sur le comportement d'une année à l'autre des sinistres mais sur une estimation exogène de la charge ultime par année de survenance notée  $\alpha_i$  et sur l'évolution des montants de règlements pour atteindre cette charge estimée. Nous n'utilisons donc plus des facteurs de développement mais les cadences de développement notées  $\gamma_{i,j}$  qui expriment la part de la charge ultime liée à la survenance  $i$  déjà payée en fin d'année  $j$ . Cette façon de procéder rend les estimations de paiements pour les années de développement élevées moins dépendantes des premiers règlements. La méthode propose également une meilleure stabilité des estimations et est plus adaptée aux triangles dont les règlements incrémentaux présentent des instabilités. La cadence de développement  $\gamma_{i,j}$  se définit alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \gamma_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}.$$

Une hypothèse similaire à celle formulée pour la méthode de Chain-Ladder est prise, à savoir :

*Hypothèse* : Les cadences de développement sont indépendantes de l'année de survenance.

Et de la même manière que précédemment, nous avons

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \gamma_{i,j} = \gamma_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}.$$

Ces coefficients doivent alors être estimés. Plusieurs méthodes ont été proposées, mais la plus commune consiste à s'appuyer sur les estimateurs de Chain-Ladder

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \hat{\gamma}_j = \prod_{k=j}^{n-1} \frac{1}{f_k}.$$

Comme nous l'avons précisé, une estimation du montant de la charge à l'ultime est nécessaire pour chaque année de survenance afin de pouvoir compléter le triangle. Cette estimation peut par exemple

provenir d'un jugement d'expert ou bien de toute autre méthode (notamment une méthode de type loss ratio que nous présenterons par la suite).

Ces estimations permettent, en les couplant avec les données présentes sur la dernière diagonale connue du triangle de proposer un niveau de charge pour l'année survenance  $i$  et la période de développement  $j$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket n+1-i, n \rrbracket, \widehat{C}_{i,j} = C_{i,i} + \widehat{\alpha}_i \times (\widehat{\gamma}_j - \widehat{\gamma}_i).$$

Nous pouvons alors obtenir le niveau de réserve anticipé pour une année de survenance  $i$  par l'expression suivante

$$\widehat{R}_i = (1 - \widehat{\gamma}_{n+1-i}) \times \widehat{\alpha}_i,$$

et ensuite, de la même manière que pour la méthode Chain-Ladder,

$$PSAP_{ultime} = \sum_{i=1}^n \widehat{R}_i.$$

Si l'application de cette méthode présente des avantages que nous avons décrits précédemment, sa principale **limite**, en plus du fait de ne fournir qu'une valeur unique et pas une distribution du montant de réserve, provient de l'estimation exogène des charges ultimes. En effet, les dires d'experts sont, par nature, subjectifs, tout comme le choix d'utiliser une méthode particulière pour fixer le niveau de charge ultime fait embarquer le biais de la méthode choisie.

### La méthode loss ratio

Le montant à l'ultime d'une année de survenance  $i$  peut être déterminé en utilisant une valeur attendue de loss ratio pour l'année notée  $LR_i$  ainsi que le montant des primes  $P_i$  collectées sur la même période. La valeur attendue de loss ratio peut par exemple provenir de l'observation des loss ratio connus à date ou bien d'experts se basant sur les données à leur disposition. On peut ainsi déduire un montant de charge ultime via la formule suivante

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \widehat{C}_{i,n} = LR_i \times P_i.$$

Le montant de provisions à constituer pour l'année ainsi que le montant total de PSAP sont ensuite obtenus de la même manière que dans la méthode de Chain-Ladder.

Les **limites** de cette approche sont similaires à celles de la méthode de Bornhuetter-Ferguson. En effet, il est impossible d'obtenir une distribution de la charge ultime et la subjectivité au moment de déterminer le loss ratio de l'année est évidente. A celles-ci s'ajoute le fait que le triangle n'est pas rempli dans son intégralité et donc que nous ne disposons que du montant ultime. On ne peut alors pas utiliser cette méthode pour l'estimation de la charge à un an.



## Bilan

En guise de bilan concernant les méthodes déterministes de provisionnement, nous proposons la figure 1.8. Cette carte représente, pour les pays pour lesquels les données sont disponibles [ASTIN, 2016], la méthode déterministe la plus utilisée par les compagnies d'assurance afin d'établir un montant de provisions. Nous pouvons remarquer la domination sans partage des deux premières méthodes que nous avons présentées, à savoir Chain-Ladder et Bornhuetter-Ferguson. Si Chain-Ladder est la méthode la plus utilisée dans bon nombre de pays, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est souvent également mise en œuvre en complément pour renforcer la confiance accordée aux résultats. Seul le Vietnam utilise majoritairement la méthode du loss ratio, bien que celle-ci soit régulièrement employée comme contrôle dans d'autres pays. Ces méthodes déterministes sont de manières générales les plus fréquemment mises en œuvre par les compagnies. Elles se sont imposées comme des méthodes au rapport complexité/efficacité intéressant malgré les limites que nous avons pu évoquer.

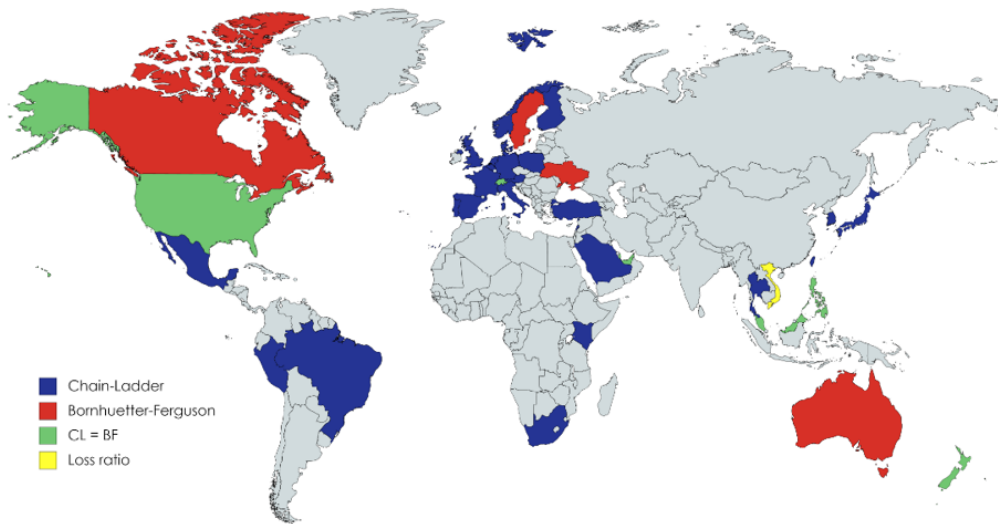


FIGURE 1.8: Carte représentant la méthode déterministe la plus utilisée par pays

### 1.3.3 Les méthodes de provisionnement stochastiques classiques

Nous nous intéressons dorénavant aux méthodes stochastiques et allons présenter les deux plus utilisées. Celles-ci interprètent les données  $C_{i,j}$  du triangle supérieur comme des réalisations de variables aléatoires, ce qui permet d'émettre des hypothèses sur leur comportement, le but étant de pouvoir proposer des mesures liées à la réserve allant plus loin que le montant brut proposé par les méthodes déterministes.

#### Le modèle de Mack

Ce modèle proposé par Mack en 1993 [MACK, 1993] permet, en plus de proposer une valeur du montant de PSAP, d'obtenir une estimation de l'erreur quadratique de prédiction sur ce montant et se veut être le pendant stochastique de la méthode de Chain-Ladder. Ce modèle est couramment appelé *Distribution free Chain-Ladder*. En effet, la principale faiblesse du modèle de Chain-Ladder reposait

sur la constance assumée du facteur de développement d'une année de survénance à l'autre, hypothèse relâchée dans le cadre du modèle de Mack.

Ce modèle s'appuie sur trois hypothèses centrales :

*Hypothèse 1* : Les années de survénance sont indépendantes les unes des autres. Autrement dit, pour deux années de survénance  $i$  et  $i'$ , nous avons indépendance entre les vecteurs de paiements cumulés  $(C_{i,0}, \dots, C_{i,n})$  et  $(C_{i',0}, \dots, C_{i',n})$ .

*Hypothèse 2* : Connaissant toute l'information disponible jusqu'à l'année de développement précédente, l'espérance de la charge cumulée pour une année de développement donnée ne dépend que de la charge totale connue l'année précédente. Mathématiquement,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists f_j \mid \mathbb{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}.$$

*Hypothèse 3* : Connaissant toute l'information disponible jusqu'à l'année de développement précédente, la variance de la charge cumulée pour une année de développement donnée ne dépend que de la charge totale connue l'année précédente. Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists \sigma_j \mid \mathbb{V}[C_{i,j+1} \mid C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

A partir notamment de ces hypothèses et des propriétés de l'espérance conditionnelle, Mack prouve que les estimateurs de Chain-Ladder présentés précédemment  $\widehat{f}_j, \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont des estimateurs sans biais de  $f_j$  non corrélés les uns aux autres. Cela se traduit par

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{E}[\widehat{f}_j] = f_j,$$

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2, \text{Cov}(\widehat{f}_j, \widehat{f}_k) = 0.$$

On peut ainsi estimer de manière non biaisée le montant espéré de la charge cumulée à l'ultime  $\mathbb{E}[C_{i,n} \mid C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}]$  de la même manière que dans la méthode de Chain-Ladder via l'expression

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket n+1-j, n \rrbracket, \widehat{C}_{i,n} = \prod_{k=n-i}^{j-1} \widehat{f}_k \times C_{i,n-i}.$$

Et le montant de réserves estimé pour une année de survénance  $i$  vaut alors encore une fois

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i};$$

Enfin, un estimateur sans biais de  $\sigma_j^2$  est présenté

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2,$$

et,

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \min \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}; \min(\widehat{\sigma}_{n-1}^2, \widehat{\sigma}_{n-1}^2) \right);$$

ou alors,

$$\widehat{\sigma}_j^2 = 0, \text{ si } \widehat{f}_k = 0$$

L'apport majeur de cette méthode réside dans l'estimation de l'erreur de prédiction de la réserve ultime prédite. Cette mesure est effectuée par l'intermédiaire du calcul de l'erreur quadratique moyenne (MSEP; *Mean Square Error Prediction*) conditionnellement à l'information disponible au moment de l'estimation que nous appelons désormais  $H$  par mesure de clarté. On a

$$MSEP(\widehat{R}_i) = \mathbb{E}[(\widehat{R}_i - R_i)^2 | H] = \mathbb{E}[(\widehat{C}_{i,n} - C_{I,n})^2 | H] = \mathbb{V}[\widehat{C}_{i,n} | H] + (\mathbb{E}[\widehat{C}_{i,n} | H] - \widehat{C}_{i,n})^2.$$

Nous avons donc pu décomposer la MSEP en deux termes quadratiques. Le premier mesure l'erreur de modèle, c'est-à-dire la variabilité du modèle stochastique et le second, l'erreur d'estimation des paramètres provenant de l'estimation des  $f_j$  par les  $\widehat{f}_j$ . En utilisant les estimateurs énoncés précédemment, on peut obtenir un estimateur de la MSEP pour la survenance  $i$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2} \left( \frac{1}{\widehat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{l=0}^{n-j-1} C_{l,k}} \right)$$

Et donc, pour l'erreur sur la PSAP à l'ultime

$$\widehat{MSEP}(PSAP_{ultime}) = \sum_{i=0}^n \left( \widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{i,n} \sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{p,n} \sum_{l=n-i}^{n-1} \frac{2\widehat{\sigma}_l^2}{\widehat{f}_l^2 \sum_{m=0}^{n-j-1} C_{m,l}} \right)$$

Comme pour les modèles déterministes, il convient de vérifier si les hypothèses prises concernant les données sont relativement réalistes. De la même manière que pour le modèle de Chain-Ladder, on peut tracer les  $(n - j)$  couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  disponibles pour  $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$ . Ceux-ci doivent alors être relativement alignés le long d'une droite passant par l'origine. De plus, afin de vérifier la troisième hypothèse, il peut être intéressant de fixer une année de développement  $j$  et de vérifier qu'aucune tendance forte n'apparaît dans le nuage de points composé des paiements cumulés et des résidus.

La principale **limite** du modèle de Mack est encore une fois le fait qu'une distribution du montant de PSAP n'est pas obtenue (à moins de supposer que celui-ci suit une certaine loi et d'utiliser la méthode des moments). Le principal **avantage** demeure la mesure de l'incertitude de l'estimation de proposée.

### Méthode par ré-échantillonnage Bootstrap

Jusqu'à présent, nous avons été en mesure d'obtenir à la fois une estimation du montant de PSAP et un indicateur de risque, la variance. Cela n'est cependant pas suffisant et nous allons dorénavant présenter une méthode qui permet d'obtenir une distribution complète de la charge ultime et donc  $a$

*fortiori* du montant de PSAP après avoir retranché les paiements connus. Il s'agit de l'approche par ré-échantillonnage Bootstrap.

Dans le but d'obtenir une distribution, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre  $G$  de simulations de la charge ultime et donc d'un grand nombre de triangles de développement différents.

Pour ce faire, le modèle s'appuie sur la notion de résidus de Pearson que nous définissons de la manière suivante pour la survenance  $i$  et l'année de développement  $j$

$$r_{i,j} = \frac{I_{i,j} - \mathbb{E}[\widehat{I}_{i,j}]}{\sqrt{\mathbb{V}[\widehat{I}_{i,j}]}}$$

où  $I_{i,j}$  désigne, rappelons le, le montant incrémental réglé pour l'année de développement  $j$  liée à la survenance  $i$ .

L'hypothèse suivante quant aux résidus est alors posée :

*Hypothèse* : Les résidus sont des tirages indépendants et identiquement distribués de variables aléatoires. C'est pour respecter cette hypothèse que la notion de paiement cumulé a cédé sa place à celle de paiement incrémental.

La méthode Bootstrap se déroule ensuite selon 3 étapes majeures :

1. Nous calculons à l'aide de la définition précédente et du modèle choisi les valeurs des résidus à partir du triangle de développement,
2. Nous répétons  $G$  fois les étapes suivantes :
  - Ré-échantillonnage dans le triangle supérieur des résidus avec remise, qui permet d'obtenir une nouvelle version du triangle des résidus  $r'_{i,j}$ ,
  - Détermination des montants décumulés  $I'_{i,j}$  en utilisant la définition des résidus précédente ( $I'_{i,j} = r'_{i,j} \sqrt{\mathbb{V}[\widehat{I'_{i,j}}]} + \mathbb{E}[\widehat{I'_{i,j}}]$ ),
  - Nous cumulons le triangle ainsi obtenu.
3. On construit une distribution du montant de PSAP grâce aux  $G$  valeurs obtenues en étape 2.

Un choix fréquent pour cette méthode est de considérer les montants décumulés  $I_{i,j}$  comme suivant une loi de Poisson de paramètre  $\widehat{m}_{i,j}$  estimé via le triangle (cette approche conduit aux résultats de Chain-Ladder), ce qui modifie et simplifie le résidu et la relation utilisée en étape 2 qui se réécrit alors

$$I'_{i,j} = r'_{i,j} \sqrt{\widehat{m}_{i,j}} + \widehat{m}_{i,j}$$

Le fait d'obtenir une distribution est un **avantage** certain de cette méthode au regard des exigences des directives que nous avons déjà pu évoquer. La **limite** principale réside dans le choix des lois suivies par le paiement incrémental qui est subjectif et peut être restrictif. Par exemple, le choix d'une loi de poisson communément effectué exclu de l'analyse de potentiels incréments négatifs.

## Bilan

Nous avons ici présenté les deux méthodes de provisionnement stochastiques majeures. Ces méthodes, bien que plus complexes opérationnellement présentent l'avantage d'apporter des informations plus détaillées qu'un montant unique comme le proposaient les méthodes déterministes. Il

convient également de noter que d'autres modèles peuvent être utilisés mais le sont encore moins fréquemment. Nous pensons notamment à la modélisation des paiements non cumulés par un modèle linéaire généralisé (GLM) prenant comme variables explicatives les données disponibles telles que l'année de survenance, de développement, l'inflation ou encore les paiements connus.

Comme concernant les méthodes déterministes, nous présentons en figure 1.9 une carte permettant de retrouver la méthode stochastique la plus utilisée par les compagnies des différents pays pour lesquels l'information est disponible [ASTIN, 2016]. Nous constatons qu'un nombre légèrement plus important de pays a davantage recours au bootstrap qu'au modèle de Mack mais que cette domination n'est pas aussi forte que celle de Chain-Ladder côté déterministe. De plus, un nombre non négligeable de pays ne permet pas de discerner une préférence pour l'une ou l'autre méthode. D'une manière générale, ces méthodes stochastiques sont utilisées dans des proportions bien moins larges que les modèles déterministes du fait de la complexité opérationnelle plus importante qu'ils embarquent et l'on constate même que certains pays de taille plus réduite (en orange sur la carte) n'ont recours à aucune méthode stochastique et que d'autres n'y ont que très peu recours. Ainsi, si l'on regroupait les deux cartes présentées pour obtenir la méthode la plus utilisée par les compagnies, qu'elle soit stochastique ou déterministes, nous retrouverions une carte quasiment similaire à celle concernant les méthodes déterministes (hormis pour l'Espagne où Chain-Ladder est aussi utilisé que le bootstrap et le Mexique où le bootstrap domine) .

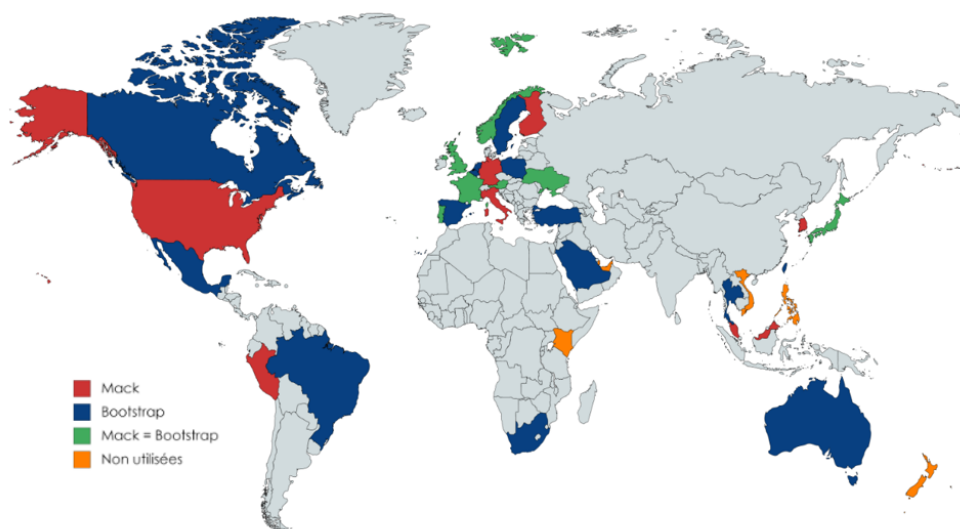


FIGURE 1.9: Carte représentant la méthode stochastique la plus utilisée par pays

Enfin, nous avons évoqué précédemment la nécessité pour les assureurs de déterminer le risque de réserve et donc d'être en capacité de proposer une estimation de la charge à un an. Toutes les méthodes que nous avons présentées précédemment, qu'elles soient déterministes ou stochastiques peuvent être adaptées à cette vision « 1 an » (hormis l'approche loss ratio). On peut par exemple imaginer une simulation de la première diagonale inconnue du triangle avec une méthode de Chain-Ladder classique, une ré-estimation des coefficients avec cette nouvelle information et un déroulement du triangle qui offrira un montant de PSAP qui sera soustrait au résultat obtenu avec la méthode initiale. Nous reviendrons sur ce point précis de la charge à 1 an dans la section consacrée à l'estimation du risque de réserve sur notre portefeuille et rentrerons plus en détail concernant une méthode proposée par Merz, Wüthrich et Lysenko [MERZ et al., 2009].

## 1.4 Bilan sur les modèles agrégés et intérêts du provisionnement individuel

L'utilisation des méthodes agrégées s'est imposée au fil du temps du fait des avantages, notamment pratiques qu'elles possèdent. En effet, ces méthodes sont parfaitement documentées et établies dans le paysage actuariel depuis leur introduction. Elles ont fait l'objet de nombreuses études et sont assez facilement compréhensibles et transmissibles, ce qui les rend très appréciées en audit et en comptabilité. Leur facilité de mise en œuvre et leur robustesse issue de la loi des grands nombres sont également des arguments de poids qui ont renforcé leur utilisation. Enfin, le niveau de granularité requis concernant les données est faible, ce qui réduit encore la complexité de ces méthodes.

Néanmoins, ces méthodes aux avantages certains et incontestables font perdre un grand nombre d'informations concernant les sinistres et les contrats qui sont pourtant maintenant systématiquement collectées. La question de l'utilisation de ces données pour améliorer la qualité de prédiction peut alors se poser et a notamment été soulevée par England Verral dès 2002 [ENGLAND et VERRAL, 2002] que l'on peut citer : « il faut garder à l'esprit que les techniques traditionnelles ont été développées avant l'arrivée des ordinateurs, en utilisant des méthodes qui pouvaient être évaluées avec un crayon et du papier. Avec l'accroissement permanent de la puissance de calcul des ordinateurs, il faut s'interroger s'il ne serait pas plus pertinent d'utiliser des données individuelles plutôt qu'agrégées ». En effet, un grand nombre de données est aujourd'hui, grâce aux qualités des ordinateurs, utilisé pour l'établissement d'un tarif et sont laissées de côté au moment d'estimer les provisions. Cette pratique conduit notamment au niveau de granularité faible des méthodes agrégées.

Ce qui était présenté comme un avantage devient finalement un inconvénient à l'aune des nouvelles réglementations. Pour satisfaire la directive Solvabilité 2, les provisions techniques doivent par exemple être estimées par groupe de risques homogènes et le SCR doit, en formule standard, être évalué à l'échelle de la ligne d'activité. Cette segmentation demeure envisageable avec les méthodes agrégées mais peut rapidement s'avérer chronophage. Les méthodes agrégées présentent également le désavantage de ne pas permettre le traitement de la réassurance non proportionnelle puisque celle-ci se réfléchit à l'échelle du sinistre. Enfin, les hypothèses nécessaires à l'application de la majorité des modèles peuvent s'avérer difficiles à retrouver dans les données quand la branche est relativement longue et/ou volatile. Ces inconvénients liés à la trop grande agrégation des données associés à la puissance toujours en progrès des ordinateurs ouvrent donc en grand la porte à des méthodes utilisant directement les données disponibles et permettant la granularité souhaitée par la réglementation.

Consciente de tous ces éléments, la recherche actuarielle concernant le provisionnement individuel s'est développée en étant dans un premier temps très théorique puis, profitant de la puissance des ordinateurs, a pu être appliquée sur des bases de données réelles. Une part importante des modèles proposés s'appuie sur la notion de processus de Poisson marqué introduite par Norberg [NORBERG, 1993 et NORBERG, 1999] (et ses prolongements comme le processus de Cox [BADESCU et al., 2019]), et l'on peut également citer Devineau et Boumezoued qui ont en 2017 revisité ce cadre théorique [DEVINEAU et BOUMEZOUED, 2017]. De nombreuses autres méthodes d'estimation ont également été mises en œuvre comme les modèles linéaires généralisés [TAYLOR et al., 2008], la théorie des copules associée à des méthodes de survie [ZHAO et ZHOU, 2010], ou encore les méthodes Bootstrap [ROSELUND, 2012].

Actuellement, une part non négligeable des recherches sur le sujet utilise la puissance accrue des ordinateurs non seulement pour la prise en compte de données individuelles mais également pour la mise en place de méthodes de *Machine Learning*. Des méthodes utilisant notamment des arbres de régression (BAUDRY et ROBERT, 2019, LOPEZ et al., 2019, WÜTHRICH, 2018), des réseaux de neurones

(KUO, 2019), ou des descentes de gradient (PIGEON et DUVAL, 2019) ont été développées récemment. L'objectif commun, peu importe la méthode retenue est alors de créer non pas une réserve pour une année de survenance quelconque mais une réserve propre à chaque sinistre en s'appuyant sur le maximum d'informations disponibles.

La prise en compte des informations individuelles sur les sinistres devrait a priori conduire à une amélioration de la précision des estimations *Best-Estimate* du niveau de provisions ainsi que du SCR réserve, point primordial des directives présentées. Il a par exemple été montré par Huang, Qiu et Wu en 2015 [HUANG et al., 2015] que la précision de l'estimation des réserves est considérablement augmentée par l'utilisation d'un modèle individuel par rapport aux modèles de Chain-Ladder et Bornhuetter-Ferguson dans le cas où les montants de sinistres n'ont pas une distribution à queue trop lourde. En 2014, Antonio et Plat [ANTONIO et PLAT, 2014] étaient arrivés à une conclusion similaire en appliquant un modèle individuel aux données spécifiques d'un assureur européen et en le comparant à trois modèles stochastiques : l'estimation du *Best-Estimate* par le modèle individuel est plus précise que celles effectuées par les autres modèles qui ont tendance à surestimer le niveau de provisions.

Si de nombreux mémoires traitent actuellement de ce sujet, une grande partie d'entre eux ne s'intéressent qu'à l'estimation des provisions concernant les sinistres ouverts et ne prédisent rien concernant les sinistres survenus et non encore ouverts (IBNYR). Cette approche de modélisation a été développée récemment par Riffaud [RIFFAUD, 2019]. Nous avons donc pour ambition ici, en nous appuyant notamment sur ces travaux, couplés à ceux de Fridhi [FRIDHI, 2019] de développer des modèles complets de provisionnement individuel utilisant les données mises à disposition par un assureur français. Modèles que nous pourrons alors par la suite comparer aux méthodes classiques.





## Chapitre 2

# Les modèles de provisionnement individuel mis en œuvre

Comme nous l'avons expliqué en introduction, notre objectif est l'estimation d'un montant de PSAP en utilisant les données individuelles. Pour ce faire, nous devons, comme présenté dans le premier chapitre, déterminer plusieurs éléments parmi lesquels la charge ultime des sinistres connus à date. Néanmoins, la connaissance uniquement de ce montant ultime ne serait pas satisfaisante pour plusieurs raisons :

- Cela ne permettrait pas de déterminer par la suite la charge à un an et donc le SCR réserve,
- Il serait compliqué d'obtenir une représentation prenant en compte correctement l'inflation. En effet, puisque le montant ultime sera prédit sans connaître l'année de clôture du sinistre ni même les différents règlements intermédiaires, il sera alors impossible d'appliquer une quelconque mesure cohérente de l'inflation,
- Disposer des projections par pas de temps est nécessaire pour connaître les *cashflows* et pouvoir ensuite actualiser ceux-ci et obtenir la vision économique recherchée par les directives IFRS17 et Solvabilité 2,
- Des informations importantes sur les sinistres et le comportement de la branche sont souvent décelables dans la façon dont se déroulent les règlements au cours du temps. Ainsi, les projections par pas de temps peuvent ouvrir des axes d'analyse supplémentaires sur la branche considérée.

Nos modèles devront finalement permettre, en plus de cela, d'affecter une date de clôture aux sinistres non clos ainsi qu'une cadence de règlements jusqu'à atteindre l'ultime. Enfin, l'objectif de notre modèle étant de proposer un montant complet de PSAP, la prise en compte seulement des sinistres déjà présents dans la base n'est pas suffisante. Cela ne nous permettrait pas de prédire le montant de provisions lié aux sinistres tardifs non encore connus par l'assureur. C'est pourquoi nous devons être capable également de pouvoir traiter le cas de ces sinistres, que ce soit la prédiction de leur survenance, ou les règlements qui y sont associés.

La suite de ce chapitre est donc consacrée à la présentation générale des deux modèles que nous utiliserons pour prédire le montant de provisions pour sinistres ainsi que la charge à un an quand ce calcul sera possible. Nous commençons par présenter brièvement la manière dont sont générés les sinistres tardifs non encore connus dans la base avant de rentrer en détail dans la présentation des modèles additifs et multiplicatifs.

## 2.1 Génération des sinistres non encore connus

Notre approche concernant les sinistres non encore connus par l'assureur et donc des règlements qui composeront le montant d'IBNYR s'appuie sur celle réalisée par Riffaud [RIFFAUD, 2019]. Nous mettons donc en place une adaptation des modèles fréquence-sévérité régulièrement utilisés en actuariat par laquelle nous prédirons d'une part un nombre de sinistres non encore ouverts relatifs à chacune des survenances et ensuite, de manière dissociée, une cadence de règlements et donc *in fine* un montant ultime pour chacun de ces sinistres. Cette manière de procéder nécessite de supposer l'indépendance entre la fréquence et la sévérité des sinistres tardifs, hypothèse que nous faisons le choix de conserver.

### Hypothèses de modélisation retenues

Dans les travaux que nous avons évoqués, plusieurs méthodes ont été envisagées et éprouvées (un calibrage de lois de fréquence parmi les lois usuelles connues et trois variantes de bootstrap). Le modèle retenu pour la simulation du nombre de sinistres tardifs et donc celui que nous avons utilisé dans nos travaux est une variante de la méthode bootstrap présentée en chapitre 1 dans laquelle les résidus ne sont pas ré-échantillonnés dans le triangle supérieur mais dans l'intégralité du tableau de développement. Pour la suite de la présentation des modèles, nous considérerons cette méthode comme appliquée et donc le nombre de sinistres tardifs comme connu afin de pouvoir nous concentrer alors sur la prédiction des montants et cadences de règlements.

## 2.2 Eléments communs aux deux modèles

### 2.2.1 Définition des processus mis en jeu

Un sinistre  $S_i$ , peu importe ses caractéristiques, peut mathématiquement se représenter comme un quadruplet  $(n_i, I_i, Ch_i, D_i)$  où :

- $n_i \in \mathbb{N}$  est l'**année de survenance** du sinistre,
- $I_i$  est le **processus de règlements incrémentaux** associé au sinistre. Ainsi, il se définit comme une suite de variables aléatoires  $(I_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$  qui représentent le paiement incrémental relatif au sinistre  $S_i$  réalisé durant son année de développement  $j$ ,
- $Ch_i$  est le **processus de charge** associé au sinistre. Ainsi, il se définit comme une suite de variables aléatoires  $(Ch_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$  qui représentent (voir chapitre 1) la somme des règlements effectués concernant ce sinistre et des réserves estimées par le gestionnaire de sinistre en fin d'année de développement  $j$ ,
- $D_i$  est le **processus d'état du sinistre**. Ainsi, il se définit comme une suite de variables aléatoires  $(D_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$  qui représentent l'état du sinistre en période de développement  $j$ . C'est-à-dire qu'il s'agit d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli telles que

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ si le sinistre } S_i \text{ est ouvert en année de développement } j \\ 0 & , \text{ si le sinistre } S_i \text{ est clos en année de développement } j \end{cases}$$

### 2.2.2 Processus d'état et durée de vie d'un sinistre

Le processus représentant l'état du sinistre tel que nous l'avons défini est finalement un indicateur de la durée de vie du sinistre. C'est un élément primordial dont nous disposons intégralement concernant les sinistres déjà clos et que nous allons chercher à prédire concernant les sinistres non encore clos et même les sinistres tardifs non encore ouverts. La façon de procéder sera similaire concernant le modèle additif et le modèle multiplicatif.

#### Hypothèses et définitions

Ce processus est, dans la littérature, très généralement adossé à deux hypothèses rendant le modèle plus simple et permettant une mise en œuvre satisfaisante.

*Hypothèse 1* : Tous les sinistres sont ouverts en année de développement 0. Mathématiquement parlant,

$$\mathbb{P}(D_{i,0} = 1) = 1.$$

Il s'agit d'une hypothèse assez naturelle qui correspond finalement à la notion même d'année de développement. Néanmoins, la poser mathématiquement est nécessaire pour que le processus respecte ce qui semble clair heuristiquement.

*Hypothèse 2* : Les cas de réouverture ne sont pas pris en compte dans notre modèle. C'est-à-dire,

$$\forall j \geq 0, \forall l \geq j, \mathbb{P}(D_{i,l} = 1 | D_{i,j} = 0) = 0.$$

Il s'agit ici d'une hypothèse simplificatrice plus forte et qui peut poser problème si le nombre de sinistres subissant une réouverture était important. Cependant, ce n'est que peu le cas (voir Chapitre 1) et nous acceptons cette hypothèse qui évite de devoir travailler avec un processus à plusieurs états (ouvert, clos, rouvert...) qui serait plus compliqué à manipuler.

Comme expliqué, ce processus d'état du sinistre est très étroitement lié à la notion de durée de vie du sinistre. On représente celle-ci par la variable aléatoire  $\Gamma_i$  pour le sinistre  $S_i$  et on la définit ainsi :

**Définition** : La durée de vie  $\Gamma_i$  du sinistre  $S_i$  correspond au numéro de la dernière année de développement avant la clôture du sinistre, c'est-à-dire

$$\Gamma_i = \inf(j \geq 0 | D_{i,j+1} = 0).$$

#### Estimation

L'estimation de cette durée de vie est un élément central dans la mise en œuvre des deux modèles. Pour ce faire, nous allons avoir recours aux modèles de durées et plus particulièrement à l'estimateur de Kaplan-Meier qui permet une estimation de la fonction de survie. Nous définissons cette fonction ainsi

**Fonction de survie :**

$$S_{\Gamma_i}(j) = \mathbb{P}(\Gamma_i > j) = 1 - F_{\Gamma_i}(j).$$

Cet estimateur se base sur un découpage du temps selon les informations disponibles (à l'échelle de l'année dans notre cas) ainsi que sur des probabilités conditionnelles. L'idée de départ est la suivante : pour qu'un sinistre reste ouvert en année de développement  $j$ , il doit à la fois être ouvert en année de développement  $j - 1$  et ne pas être clôturé entre les années  $j - 1$  et  $j$ . Ainsi, en guise d'exemple et en appliquant les probabilités conditionnelles et les hypothèses posées précédemment, la probabilité pour un sinistre  $S_i$  d'être encore ouvert en année de développement 2 vaut

$$\mathbb{P}(D_{i,2} = 1) = \mathbb{P}(D_{i,2} = 1 | D_{i,1} = 1) \times \mathbb{P}(D_{i,1} = 1 | D_{i,0} = 1) \times \mathbb{P}(D_{i,0} = 1) = \mathbb{P}(D_{i,2} = 1 | D_{i,1} = 1) \times \mathbb{P}(D_{i,1} = 1).$$

Nous pouvons alors définir comme suit un estimateur de cette fonction de survie.

**Estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie :**

Soient :

- $r_j$  le nombre de sinistres encourant la clôture entre les années de développement  $j - 1$  et  $j$ , c'est-à-dire le nombre de sinistre encore ouverts en année de développement  $j - 1$  et qui risquent la fermeture sur l'intervalle  $]j - 1, j]$ , et  $r_0 = 1$ ,
- $d_j$  le nombre de sinistres qui étaient ouverts en année de développement  $j - 1$  et qui apparaissent comme clos en année de développement  $j$ , et  $d_0 = 0$ .

$$\widehat{S_{\Gamma_i}}(t) = \prod_{j=0}^t \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right).$$

C'est donc à cet estimateur que nous aurons recours afin de déterminer les dates de clôtures des sinistres sur lesquels nous travaillerons.

**En pratique**

La **durée de vie du sinistre** est donc déterminée en s'appuyant sur les notions que nous venons de présenter. Nous avons finalement estimé celle-ci en plusieurs étapes que nous résumons ici :

1. Nous avons calculé les valeurs de l'estimateur de Kaplan-Meier  $KM_j$  de la fonction de survie sur notre base de données pour chacune des années de développement notées  $j$ ,
2. Nous avons affecté à chacun des sinistres  $S_i$  nécessitant un traitement (non encore clos ou tardifs simulés par le modèle de fréquence), et à chaque nouveau développement  $j$ , une réalisation  $U_{i,j}$  d'une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,
3. Nous avons alors affecté à chacun des sinistres  $S_i$  une estimation de la durée de vie  $\widehat{\Gamma}_i$  qui, en nous appuyant sur la définition que nous en avons donnée correspondait à

$$\widehat{\Gamma}_i = \min(j \geq 0 | U_{i,j} \geq KM_j).$$

### 2.2.3 Estimation de la charge à 1 an

Un autre élément commun aux deux modèles sera notre volonté de déterminer le montant de charge à un an dans le but de calculer le SCR réserve.

Comme nous l'avons évoqué durant la première partie, le risque de réserve est une composante importante du module « souscription non-vie » nécessaire à l'établissement du SCR. Rappelons en premier lieu la définition de ce risque de réserve : il s'agit d'un risque engendré par une estimation erronée du montant de provisions techniques liée à une sous-estimation des provisions de sinistres et/ou à un écart entre le montant de règlement effectué au titre des sinistres observé et l'estimation moyenne effectuée. On peut par exemple penser, non seulement à une imprécision de la part de la personne en charge de l'estimation mais aussi potentiellement à un événement extérieur (décision de justice destinée à faire jurisprudence, changement brutal de l'inflation notamment) qui impactera le niveau général d'une certaine catégorie de sinistres.

Afin de déterminer ce montant de SCR, nous allons utiliser la notion de *Claims Development Result* (CDR) introduite en 2008 et publiée en 2009 par Merz, Wüthrich et Lysenko [MERZ et al., 2009]. Cette grandeur peut se comprendre comme la différence entre deux estimations de la charge ultime effectuée avec un an d'intervalle. Afin de poser une définition plus formelle, nous avons besoin d'introduire les notations suivantes :

- $D^t$ , l'information disponible jusqu'en date  $t$ ,
- $D^{t+1}$ , l'information disponible jusqu'en date  $t + 1$ ,
- $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}[R_i^t | D^t]$ , l'estimation du montant de PSAP effectuée en fin d'année  $t$  concernant la survenance  $i$ , et connaissant donc l'information jusqu'en date  $t$ ,
- $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}[R_i^{t+1} | D^{t+1}]$ , l'estimation du montant de PSAP effectuée en fin d'année  $t + 1$  concernant la survenance  $i$ , et connaissant donc l'information jusqu'en date  $t + 1$ ,
- Et, en adaptant une notation déjà posée,  $I_i^{t,t+1}$ , le montant du paiement incrémental concernant l'année de survenance  $i$  réalisé durant l'année  $t + 1$ .

Nous pouvons alors définir ce que les auteurs appellent le « vrai CDR » lié à une survenance  $i$  comme

$$\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, CDR_i(t + 1) = \mathbb{E}[R_i^t | D^t] - (I_i^{t,t+1} + \mathbb{E}[R_i^{t+1} | D^{t+1}]).$$

Et donc, pour la totalité des années de survenance, nous pouvons agréger pour obtenir

$$CDR(t + 1) = \sum_{i=0}^n CDR_i(t + 1).$$

Néanmoins, ces montants ne sont pas réellement observables à la date d'évaluation, et donc, nous allons, comme les auteurs, utiliser finalement le « CDR observable », qui correspond à une estimation du CDR réel par une méthode au choix. Les auteurs utilisent une estimation faite par la méthode de Chain-Ladder tandis que nous utilisons notre modèle de provisionnement individuel. Nous posons donc les notations suivantes :

- $\widehat{R}_i^t$ , l'estimation de  $\mathbb{E}[R_i^t | D^t]$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,
- $\widehat{R}_i^{t+1}$ , l'estimation de  $\mathbb{E}[R_i^{t+1} | D^{t+1}]$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Et l'on a alors

$$CDR_i(t+1) = R_i^t - (I_i^{t,t+1} + R_i^{t+1}).$$

En agrégeant :

$$CDR(t+1) = \sum_{i=0}^n CDR_i(t+1).$$

Nous ne sommes donc en mesure d'évaluer  $CDR(t+1)$  qu'à la fin de l'année  $t+1$  ou du moins qu'en disposant des paiements réalisés durant l'année  $t+1$ .

Dans l'article que nous avons cité précédemment, les auteurs adaptent le modèle de Mack pour obtenir une mesure de risque relative à cette quantité. Ici, dans une optique de calcul du SCR, nous sommes plutôt intéressés par la création d'une distribution de ce montant. Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode appelée méthode de *re-reserving* présentée par Ohlsson et Lauzeningks en 2008 (et publiée en 2009) [OHLSSON et LAUZENINGKS, 2009].

Cette approche permet d'obtenir une distribution de l'augmentation (ou de la diminution) des réserves engendrée par la connaissance des règlements effectués sur une année supplémentaire. Deux étapes sont nécessaires pour aboutir à la distribution voulue :

1. L'estimation des réserves finales  $\widehat{R}_i^t$  par une méthode de provisionnement choisie en fin d'année  $t$ ,
2. Répéter un grand nombre  $G$  de fois les étapes suivantes :
  - Simulation des règlements futurs  $I_i^{t,t+1}$  qui seront effectués durant l'année  $t+1$  par une méthode là aussi choisie ?
  - Estimation des réserves finales  $\widehat{R}_i^{t+1}$  toujours par une méthode de provisionnement choisie en fin d'année  $t+1$  en ajoutant la connaissance des règlements effectués durant l'année  $t+1$ .

Dans notre contexte, nous choisissons d'obtenir  $\widehat{R}_i^t$  en utilisant les modèles que nous allons présenter quand cela sera possible. Nous avons choisi de retenir comme valeur de  $\widehat{R}_i^t$  l'espérance des réserves simulées par l'algorithme pour  $G = 1000$  scénarios. De plus, nous avons adapté notre algorithme des deux modèles pour pouvoir isoler les paiements réalisés durant l'année  $t+1$  et ainsi obtenir  $G = 1000$  valeurs de  $I_i^{t,t+1}$ . Enfin, pour obtenir  $G = 1000$  valeurs de  $\widehat{R}_i^{t+1}$  nous avons mis en oeuvre la méthode de Chain-Ladder sur le triangle de sinistralité d'origine augmenté de la diagonale supplémentaire simulée par les modèles (les  $I_i^{t,t+1}$ ). Pour chaque simulation  $k \in \llbracket 1, G \rrbracket$ , nous obtenons alors  $CDR_k(t+1)$  qui représente donc l'augmentation (ou la diminution si positif) du besoin de provision dû à la connaissance des paiements sur une année supplémentaire dans le scénario  $k$ . Nous sommes finalement en mesure d'obtenir une distribution  $D$  de cette valeur.

Enfin, rappelons-le, le SCR est le montant de fonds propres qui doit permettre de faire face à une ruine économique au niveau 99,5%. Dans notre cas, cela correspond au fait d'être capable d'assumer une hausse du niveau des réserves se produisant 1 fois sur 200. Pour déterminer ce montant et répondre aux exigences de la directive Solvabilité 2, nous devons avoir recours à la notion de quantile et avons alors

$$SCR_{réserve} = -q_{0,5\%}(D).$$

## 2.3 Présentation du modèle additif

### 2.3.1 Présentation générale

Comme évoqué précédemment, afin d'aboutir à un montant de PSAP, un montant ultime doit être associé à chaque sinistre  $S_i$  non encore clos (y compris les sinistres tardifs simulés par le modèle de fréquence). Pour obtenir ceci, le modèle additif utilise la relation suivante qui lie charge ultime et paiements incrémentaux

$$CU_i = \sum_{j=0}^{\infty} I_{i,j},$$

L'idée du modèle est donc, durant la vie du sinistre, de prédire, pour chaque année de développement, un montant de règlement incrémental. Une fois le sinistre clos, ces montants seront sommés et la charge ultime du sinistre ainsi définie. Afin d'obtenir ce résultat, les différents processus que nous avons présentés en début de section rentrent en jeu et doivent être simulés.

En effet, cette relation peut en fait être réécrite grâce aux processus définis et aux informations déjà disponibles. Pour les sinistres connus, un montant de règlements cumulés est déjà présent dans la base, c'est-à-dire que les premières composantes du processus des paiements incrémentaux (disons les  $k$  premières) sont connues. De plus, nous supposons que nos sinistres ont une durée de vie finie inférieure ou égale à  $z$  années, ce qui est une hypothèse nécessaire à la mise en œuvre des méthodes de provisionnement sur laquelle nous reviendrons plus loin. Alors, nous savons pour chaque sinistre  $S_i$  que  $\forall i, \forall j \geq z, I_{i,j} = 0$  et même  $\forall i, \forall j \geq \Gamma_i, I_{i,j} = 0$ .

On peut alors réécrire, avec  $C_{0,i}$  la somme des règlements déjà effectués :

$$CU_i = C_{0,i} + \sum_{j=k}^{\Gamma_i} I_{i,j},$$

Le modèle additif consiste donc en la prédiction des éléments de la somme ci-dessus pour chacun des sinistres concernés.

Le processus de paiement incrémental que nous voulons simuler peut en fait se décomposer en 3 éléments distincts qui seront ensuite primordiaux dans les analyses de corrélations que nous voulons mettre en place. En effet, le règlement associé à un sinistre et une année de développement dépend à la fois du fait que le sinistre soit encore ouvert à cette période de développement, au fait qu'un règlement soit effectivement effectué durant cette période et enfin du montant du règlement en question. Nous pouvons alors écrire, pour un quelconque sinistre  $S_i$  et une année de développement  $j$  :

$$I_{i,j} = D_{i,j} \times P_{i,j} \times X_{i,j}. \quad (2.1)$$

Avec,

- $D_{i,j}$ , la probabilité de survie du sinistre jusqu'en développement  $j$ ,
- $P_{i,j}$ , la probabilité d'effectivement réaliser un règlement sur la période de développement  $j$ ,
- $X_{i,j}$ , le montant de règlement estimé sur la période.

Ce processus sera par la suite simulé en nous appuyant sur les données. Le montant de PSAP sera finalement obtenu en sommant, pour tous les sinistres encore ouverts (connus ou non), l'intégralité des paiements incrémentaux simulés par le modèle, et alors, pour un sinistre  $S_i$  encore ouvert, dont la dernière année de développement connue est  $k - 1$

$$\widehat{R}_i = \sum_{j=k}^{\Gamma_i} \widehat{I}_{i,j}.$$

De plus, notre modèle se veut stochastique, ce qui signifie qu'un grand nombre de simulations sera réalisé et permettra d'obtenir *in fine* une distribution des PSAP sur laquelle nous appuyer.

### 2.3.2 Mise en œuvre pratique

Maintenant que les contours et fondements du modèle sont posés, il convient, avant de pouvoir appliquer celui-ci, de développer les aspects et étapes relatifs à sa mise en place pratique.

Nous nous plaçons au point où la durée de vie du sinistre a été déterminée de la manière présentée précédemment. Nous connaissons alors exactement le nombre d'éléments du processus de paiements incrémentaux  $I_i$  qui sont à prédire. Ainsi, nous n'avons pas à nous préoccuper de la probabilité de survie du sinistre présentée en 2.1. Ces **simulations des paiements incrémentaux**, au nombre donc de  $\widehat{\Gamma}_i - k + 1$  sont réalisées comme suit pour un sinistre  $S_i$  :

1. Nous isolons, pour chaque année de développement  $j$  les  $N_j$  sinistres connus de la base (même non encore clos) qui étaient encore ouverts en année de développement  $j$  et extrayons les montants réglés durant cette période,
2. Nous affectons, encore une fois, une réalisation  $W_i$  d'une nouvelle variable aléatoire uniforme  $W$  à support  $[[1, N_j]]$ ,
3. Nous prenons alors  $\widehat{I}_{i,j}$  comme le paiement associé au  $N_j - \text{ème}$  sinistre par ordre d'apparition dans la base.

Ainsi, nous ne simulons pas à proprement parler la probabilité de paiement  $P_{i,j}$  : Nous nous appuyons sur les données pour l'estimer. En effet, la probabilité de réaliser un paiement incrémental positif doit être calibrée sur les données dont nous disposons et correspondre à la part de règlements non nuls réalisés pour chaque année de développement. Au lieu d'estimer, pour chaque année de développement, ce montant « à part », et d'ensuite tirer un montant positif, nous tirons un montant parmi tous les montants présents dans la base, y compris les montants nuls et l'affectons au sinistre.

Par mesure de clarté, nous présentons en table 2.1 un exemple simulé de l'étape 1 décrite ci-dessus pour l'année de développement  $j = 5$ . En bleu, les lignes correspondant aux sinistres encore ouverts en année 5, et donc, encadrés en rouge, les montants parmi lesquels nous tirons. Il s'agit alors des montants réglés en développement 5 pour les sinistres connus et encore ouverts en développement 5.



Année de survenance	Année d'ouverture	Tardif	Année de clôture	Indice sinistre	Année de développement				
					0	1	...	5	...
2000	2000	Non	2012	1	12	23	...	450	...
2001	2001	Non	2017	126	452	234	...	98	...
2002	2003	Oui	2014	1763	31	1876	...	100	...
2002	2002	Non	2004	1778	120	120	...		
2008	2009	Oui	2016	12753	132	678	...	125	...
2010	2010	Non	2017	13987	1	10	...	100	...
2010	2010	Non	?	14000	250	250	...	250	...
2013	2013	Non	2017	20253	1000	1500	...		
2017	2017	Non	?	61372	100	1000	...		
2018	2018	Non	?	65942	1250		...		

TABLE 2.1: Illustration de l'étape 1 dans le cadre général

Une fois ces étapes répétées pour atteindre la clôture du sinistre, nous connaissons entièrement l'estimation du processus de paiements incrémentaux  $I_i$  et par conséquent la charge ultime associée à ce sinistre. La réalisation de ces travaux pour chacun des sinistres à traiter conduit à la connaissance de la charge ultime totale et par conséquent du montant de PSAP.

### Traitement des sinistres tardifs

Dans le cadre de ce modèle, une attention particulière doit-être accordée aux **sinistres tardifs** non encore connus dans la base. Leur nombre est simulé par la variante du modèle bootstrap que nous avons déjà évoquée. Si la détermination de leur durée de vie s'effectue de manière similaire à ce qui est fait concernant les sinistres connus, ce n'est pas le cas des montants de paiements incrémentaux.

En effet, nous évoquerons au moment de présenter les données et cela a été montré plus en détails par Riffaud [RIFFAUD, 2019] que les règlements associés à ces sinistres tardifs semblent suivre une loi différente de celle suivie par l'ensemble des autres sinistres. Ainsi, nous adaptons la première étape présentée ci-dessus : au lieu d'isoler tous les sinistres connus pour lesquels un paiement a été réalisé pour l'année de développement concernée, nous isolons uniquement les sinistres de la base ayant été déclarés tardivement et tirons le paiement parmi ceux-ci (aucun paiement n'étant connu pour ces sinistres, nous tirons également le règlement réalisé durant l'année initiale). Cette manière de procéder permet de prendre en compte la différence non négligeable entre les deux types de sinistres que nous traitons sans pour autant devoir changer de méthodologie.

De la même façon que précédemment, nous présentons en table 2.2, une illustration de la sélection opérée sur les sinistres et les montants dans le cas particulier des sinistres tardifs pour le développement  $j = 5$ . Les sinistres conservés sont alors uniquement ceux déclarés tardivement et les montants sont ceux qui y sont associés.

Année de survenance	Année d'ouverture	Tardif	Année de clôture	Indice sinistre	Année de développement				
					0	1	...	5	...
2000	2000	Non	2012	1	12	23	...	450	...
2001	2001	Non	2017	126	452	234	...	98	...
2002	2003	Oui	2014	1763	31	1876	...	100	...
2002	2002	Non	2004	1778	120	120	...		
2008	2009	Oui	2016	12753	132	678	...	125	...
2010	2010	Non	2017	13987	1	10	...	100	...
2010	2010	Non	?	14000	250	250	...	250	...
2013	2013	Non	2017	20253	1000	1500	...		
2017	2017	Non	?	61372	100	1000	...		
2018	2018	Non	?	65942	1250		...		

TABLE 2.2: Illustration de l'étape 1 dans le cadre des sinistres tardifs

## 2.4 Présentation du modèle multiplicatif

### 2.4.1 Présentation générale

Le second modèle que nous voulons mettre en place est un modèle multiplicatif, au même titre que ceux de Chain-Ladder ou de Mack. Ce modèle, contrairement au modèle additif présenté précédemment ne vise pas à étudier directement les paiements incrémentaux  $I_i$ , mais s'appuiera plutôt sur la notion de paiement cumulé (duquel il est bien sûr facile de retrouver les paiements incrémentaux si besoin en est) ou de charge cumulée. Pour un sinistre  $S_i$ , le processus de paiement cumulé sera noté  $C_i$  de la même manière qu'au niveau agrégé et se définit comme une suite de variables aléatoires  $(C_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$  qui représentent le paiement cumulé relatif au sinistre  $S_i$  connu à chaque année de développement  $j$ . Cette méthode s'applique également de manière similaire au processus de charges  $Ch_i$  défini de la même façon que précédemment. Le choix d'appliquer ce modèle à l'un ou l'autre de ces processus représentera un sujet de réflexion abordé par la suite.

Le modèle consiste à prendre certaines hypothèses permettant de nous ramener à l'étude de facteurs de développement individuels. Cette manière de modéliser le développement des sinistres à l'échelle individuelle en s'inspirant des méthodes agrégées a été proposée pour la première fois par McLennan et Murphy en 2006 [MCLENNAN et MURPHY, 2006]. Il s'agit d'une version individuelle et stochastique de la méthode de Chain-Ladder pour laquelle les facteurs de développement individuels simulés sont extraits parmi ceux déjà connus présents dans la base de données d'intérêt.

Ces facteurs de développement individuels se définissent de manière similaire aux facteurs de développement que nous avons présentés pour la méthode de Chain-Ladder durant le chapitre 1 mais modélisent cette fois-ci une évolution à l'échelle d'un sinistre plutôt qu'à l'échelle d'une année de survenance. Il s'agit donc d'un coefficient représentant l'évolution de la charge ou du paiement cumulé d'une année de développement à l'autre.

#### Facteur de développement individuel :

$F_{i,j}$ , le facteur de développement individuel relatif au sinistre  $S_i$  et à l'année de développement  $j$  est le réel vérifiant

$$C_{i,j+1} = F_{i,j} \times C_{i,j},$$

Ou bien, si nous souhaitons estimer les charges,

$$Ch_{i,j+1} = F_{i,j} \times Ch_{i,j}.$$

Ce facteur vaut alors 1 dans les cas où la charge ou le paiement cumulé demeure constant (aucun règlement effectué ni évolution de la réserve), est supérieur à 1 si la grandeur concernée a augmenté et enfin est inférieur à 1 si le niveau de charge ou le règlement cumulé a diminué.

A noter qu'après la clôture du sinistre, ce coefficient vaut indéfiniment 1 et donc que le choix peut-être effectué soit de conserver ces facteurs 1 correspondant aux sinistres clos soit de considérer que ces facteurs ne sont pas à prendre en compte dans la base. Comme nous prédisons en amont une durée de vie pour chacun des sinistres, il serait erroné de conserver ces facteurs liés à des sinistres clos. Nous choisirons donc de ne pas conserver ces coefficients dans la base.

Pour cette première approche générale, nous ne nous attardons pas sur le traitement particuliers des sinistres comportant des règlements ou des montants de charge non positifs pour lesquels le calcul des (ou de certains) facteurs de développement ne peut se faire de la même manière. Ces cas seront bien entendu abordés par la suite.

L'idée générale n'est donc plus ici de prédire pour chaque année de développement un montant de règlements, mais plutôt de prédire un facteur de développement pour le sinistre afin de faire progresser le niveau de règlements (ou de charges) dans le temps et d'atteindre l'ultime en utilisant la relation suivante valable pour tous les sinistres  $S_i$ .

Soit  $C_{0,i}$ , le premier paiement réalisé concernant le sinistre  $S_i$  alors, on obtient la charge ultime  $Cu_i$  comme

$$Cu_i = C_{0,i} \times \prod_{k \leq \Gamma_i} f_{i,k}.$$

Cette relation demeure valable pour le processus de charges. En effet, si l'on reprend la définition de charge donnée dans le premier chapitre, on comprend tout à fait qu'à l'ultime, montant de charge et paiement cumulé total sont équivalents du fait de la nullité de la réserve estimée à la clôture du sinistre. Le montant de charge à la clôture du sinistre n'est finalement que la somme des paiements incrémentaux effectués et il est donc totalement équivalent de travailler avec l'un ou l'autre des processus si l'on considère seulement la vision ultime. Néanmoins, dans une optique de calcul du SCR et de visualisation des règlements, si cela demeure possible, il reste préférable de travailler sur les montants de règlements.

De la même manière que pour le modèle de Chain-Ladder, le montant de réserve associé au sinistre  $S_i$  sera donc estimé par la relation qui suit.

Soit  $C_{0,i}$ , le montant de paiement cumulé connu pour le sinistre, le montant de réserve estimé associé au sinistre  $S_i$  vaut

$$\widehat{R}_i = \widehat{Cu}_i - C_{0,i}.$$

Il est important de noter que même si les estimations sont effectuées sur le processus de charge, il faut bien s'appuyer sur le paiement cumulé connu pour retrouver le montant de provisions.

### 2.4.2 Mise en œuvre pratique

Ainsi, nous sommes maintenant en mesure de présenter de manière pratique la mise en application de ce modèle. Ce modèle étant stochastique, un grand nombre de simulations sont à réaliser afin d'obtenir une distribution des provisions. Comme pour le modèle additif, nous nous plaçons au point où, pour chaque simulation, la durée de vie a été déterminée et donc où nous connaissons précisément le nombre d'années durant lesquels le sinistre doit être développé. Alors, pour chaque simulation, et pour chaque sinistre  $S_i$  à traiter à partir de l'année de développement  $j$ , la procédure est la suivante :

1. Nous isolons, pour chaque année de développement  $j$  les  $N_j$  sinistres connus de la base (même non encore clos) qui étaient encore ouverts en année de développement  $j$  et extrayons les facteurs de développement relatifs à cette période (méthode similaire à celle présentée en figure 2.1),
2. Nous affectons, toujours de la même manière, une réalisation  $Z_i$  d'une nouvelle variable aléatoire uniforme  $Z$  à support  $\llbracket 1, N_j \rrbracket$ ,
3. Nous prenons alors  $\widehat{f}_{i,j}$  comme le facteur de développement associé au  $N_j$  -*ème* sinistre par ordre d'apparition dans la base,
4. Répétition des étapes précédentes jusqu'à avoir obtenu le montant ultime associé au sinistre,
5. Détermination de la charge ultime associée au sinistre  $S_i$  pour cette simulation, avec  $C_{0,i}$  le montant (de paiement cumulé ou de charge) connu associé au sinistre, par la formule

$$\widehat{Cu}_i = C_{0,i} \times \prod_{k=j}^{\Gamma_i} \widehat{f}_{i,k}.$$

Raisonnement ainsi suppose que l'on considère que les facteurs de développement présents dans la base représentent toutes les possibilités offertes aux sinistres. C'est de toute évidence réducteur si nous ne nous intéressons qu'à une seule période comportant un faible nombre de sinistres connus parmi lesquels tirer le facteur de développement. Néanmoins, sur plusieurs périodes comme c'est le cas ici, le nombre de valeurs que peut prendre le facteur ultime (le produit de tous les facteurs de développement simulés) devient tout à fait satisfaisant et cette hypothèse est alors moins dérangeante.

Cette approche pourra être malgré tout handicapante pour les sinistres toujours ouverts pour lesquels il ne restera qu'un ou deux développements à prédire pour des périodes de développement avancées. En effet, le faible nombre de sinistres présents dans la base dans les développements très élevés réduit drastiquement le nombre de facteurs disponibles, et le fait de ne tirer qu'une ou deux années de développement ne permet pas de profiter de l'effet de répétition que nous avons évoqué. C'est une des premières limites de ce modèle.

Comme pour le modèle additif, le suivi de cette procédure pour chacun des sinistres permet de connaître, pour chaque simulation, la totalité des montants à l'ultime et par conséquent le montant estimé de PSAP. En répétant les simulations, nous sommes donc en mesure d'obtenir une distribution du montant estimé de PSAP.

### Traitement des sinistres tardifs

Pour des raisons similaires à celles que nous avons évoquées dans le cadre du modèle additif, un traitement particulier doit être effectué concernant les sinistres tardifs que nous simulons. En effet, la formule permettant d'atteindre le montant ultime en utilisant les facteurs de développement s'appuie

sur un montant déjà connu (au minimum un montant en année de développement initiale) à faire évoluer. Dans le cadre des sinistres tardifs, et par conséquent pour lesquels aucun règlement n'a eu lieu (ni estimation de la charge si l'on s'intéresse à la charge), cette façon de procéder n'est pas applicable. Pour contourner ce problème, nous ajoutons une étape « 0 » en préambule du processus défini dans le cadre général :

0. Isoler les paiements (ou montants de charge) réalisés (ou estimés) dans le cadre de l'année de développement initiale des sinistres tardifs de la base et en affecter aléatoirement un (en utilisant la même méthode que pour affecter un facteur de développement) à chacun des sinistres tardifs non encore connus simulés par bootstrap.

### 2.4.3 Les cas particuliers

Dans notre processus d'estimation, nous pouvons faire face à plusieurs valeurs particulières, pour lesquelles il convient de mettre en place un traitement spécifique afin d'éviter que celles-ci ne posent de problèmes au modèle.

#### Valeurs négatives pour les montants de charges ou paiements cumulés

C'est tout d'abord le cas des paiements cumulés ou charges négatives qui peuvent apparaître dans la base, que ce soit en en début de vie du sinistre, ou bien en dernière date connue. Ceux-ci peuvent provenir de réévaluations par le gestionnaire ou de recours par exemple. En effet, on peut imaginer que notre assureur indemnise une année donnée un assuré pour un sinistre dont il apprendra des années plus tard que celui-ci relève de la responsabilité d'un autre assureur. Alors, du fait de l'inflation et/ou des procédures entre assureurs, le second règlement peut apparaître comme plus élevé que le premier. Leur présence pose problème sur deux aspects :

- Ils vont faire apparaître des facteurs de développement négatifs dans notre « base de tirage ». Ainsi, un sinistre dont le premier paiement vaut 100 et le second  $-110$  (et donc le paiement cumulé en année 1 vaut  $-10$ ) fera apparaître un premier facteur de développement de  $-0,1$ . De la même manière, même si cela s'avère plus rare, un montant de charge estimé peut-être négatif du fait de certains recours notamment. Si, au moment de nos prédictions, nous tirons ce facteur de développement pour un sinistre de plus grande ampleur, nous risquons très probablement de sous-estimer largement les réserves. C'est pourquoi, quand ce cas se présente, nous excluons de notre base de facteurs de développement le facteur en question,
- Si cette observation est la dernière disponible dans le cadre d'un sinistre pour lequel des paiements ou charges restent à prédire, l'écrasante majorité des facteurs de développement de la base étant positifs, nous allons quasi-sûrement continuer dans cette voie et sous-estimer là encore largement le montant de provisions. Nous faisons alors ici le choix de « bloquer » le montant à cette valeur négative et de considérer alors l'ultime comme atteint à ce moment-là. Nous verrons par la suite qu'un très faible nombre de sinistres est concerné et que cette hypothèse, bien que discutable ne devrait pas influencer significativement notre travail.

### Sinistres néants ou *Nil Claims*

En plus des valeurs négatives, ce sont les valeurs nulles qui nécessitent un traitement particulier. Des sinistres, appelés « *nil claims* » sont des sinistres pour lesquels aucun paiement ni charge n'ont lieu sur l'ensemble de la vie du sinistre. Ce sont des sinistres ouverts mais clos sans suite, pour diverses raisons pouvant être la déchéance suite à une fausse déclaration par exemple ou encore la même explication que concernant les montants négatifs que nous venons d'évoquer : l'assureur découvre, avant d'effectuer un quelconque règlement qu'il n'a pas à indemniser l'assuré. Concernant la charge, cela sera encore une fois moins fréquent mais tout à fait envisageable : à l'ouverture du sinistre, aucun paiement n'est réalisé, et le gestionnaire anticipe par exemple un cas de fausse déclaration. Il choisit alors de ne pas estimer de réserves mais le sinistre reste ouvert sur la durée de la procédure.

Ces sinistres, même lorsqu'on les sait fermés et donc qu'aucune prédiction n'est à effectuer pourraient faire apparaître des facteurs de développement nuls puis de type « 0/0 », ce qui est impossible. Pour ces sinistres, nous n'avons alors pas calculé de facteurs de développement et les avons laissés de côté, ils ne participent pas à notre travail d'estimation.

### Montants nuls de charges ou de règlements cumulés sur sinistres clos

Pour d'autres raisons (temps d'évaluation, de recours, etc), un sinistre peut ne pas connaître de paiements ni de charges durant les premières années de son développement et donc conduire aussi à l'estimation de facteurs de développement nuls ou de type « 0/0 » bien que des paiements soient réalisés par la suite. Ce phénomène peut même survenir en cours de vie du sinistre si finalement l'indemnité doit être restituée (fausse déclaration par exemple).

Nous avons alors, pour les sinistres concernés, retiré de la base les coefficients concernés mais conservé ceux qui ne sont ni nuls ni de la forme « 0/0 ». A la différence des « *nil claims* », nous n'excluons donc pas ces sinistres de la base. Il est en effet important d'exclure de nos possibilités tous les facteurs de développement qui valent 0 puisqu'une fois un de ces facteurs tirés, le sinistre serait bloqué jusqu'à l'ultime, ce qui ne reflète pas forcément la réalité.

La nécessité de ces traitements particuliers en nombre relativement important est une des faiblesses importantes du modèle multiplicatif. Néanmoins, nous vérifierons par la suite sur nos données que ces choix ne réduisent pas trop drastiquement le nombre de facteurs conservés dans le modèle.

### Montants nuls de charges ou de règlements cumulés sur sinistres à traiter

Enfin, ces problèmes de « 0 » peuvent tout à fait apparaître sur des sinistres non clos et que nous devons donc traiter. Si la dernière charge ou le dernier paiement cumulé observé concernant un sinistre non clos est nul, le traiter via des facteurs comme nous traitons les autres sinistres reviendrait finalement à prédire une charge ultime nulle et donc le considérer, si aucun règlement n'a été effectué, comme « *nil claims* ». Cependant, nous n'avons pas d'information qui nous permettent de savoir si le sinistre est effectivement un « *nil claims* » ou bien si des paiements auront lieu dans le futur. Pour prendre en compte ceci, nous allons adopter une stratégie simple qui pourrait éventuellement être raffinée par la suite.

Pour chaque sinistre présentant cette caractéristique, nous allons attribuer directement un montant ultime parmi ceux atteints par les sinistres clos n'ayant occasionné aucun paiement sur la première période de développement. Cette catégorie étant composée de sinistres avec une charge finale positive

ou de « *nil claims* », cela permet de couvrir les deux possibilités. Cette approche pose cependant soucis dans une optique d'estimation de la charge à un an car elle ne permet pas d'affecter une chronique de paiements au sinistre.

Nous aurions également pu envisager d'affecter un montant ultime tiré parmi les sinistres dont le paiement cumulé (ou la charge) était nul à la même année de développement que la dernière information disponible sur le sinistre à traiter. Pour des raisons de facilité d'implémentation, ce n'est pas cette méthode que nous retenons dans un premier temps.

### Remarque

Nous avons pu constater, lors de la précédente énumération des cas particuliers du modèle ainsi que lors du travail d'implémentation que la forme du modèle multiplicatif force à de nombreuses adaptations. Nous seulement nous verrons par la suite que nous avons été contraints de travailler sur les charges et donc de perdre la facilité d'estimation de la charge à un an ou la visualisation des règlements mais nous avons également dû effectuer un travail d'implémentation bien plus complexe que concernant le modèle additif. Le nombre de cas particuliers que le modèle ne peut traiter sans adaptations est ainsi une énorme faiblesse de ce modèle dans sa vision individuelle, qui conduit à un approche très modulaire et coûteuse à la fois en temps et en précision.

## 2.5 Raffinements des modèles

Ces modèles, bien que s'inspirant des modèles historiques comme Chain-Ladder ou Mack peuvent sembler quelque peu brutaux sur plusieurs aspects et bien que nous souhaitions dans un premier temps tester les modèles tels que nous les avons présentés, il peut aussi être intéressant d'y apporter quelques modifications et de voir leur impact sur les montants de provisions prédits.

### 2.5.1 Séparation entre sinistres graves et attritionnels

Un premier raffinement du modèle multiplicatif qu'il peut sembler intéressant d'étudier consiste une séparation selon la gravité du sinistre. En effet, il paraît légitime d'envisager une variété et une volatilité bien plus importante des facteurs de développement (que cela concerne les charges ou les règlements cumulés) pour les sinistres attritionnels que pour les sinistres plus graves.

Par exemple, il semble possible et même relativement probable qu'un sinistre très peu grave dont le premier règlement (ou le premier montant de charge estimé) est de  $10 UM$  (Unités Monétaires) évolue d'un facteur 50 pour atteindre  $500 UM$  l'année de développement suivante. Cela correspondrait à une aggravation forte du sinistre mais qui n'entraîne pas de fortes pertes. A l'inverse, il semble totalement improbable, pour ne pas dire impossible, qu'un sinistre entraînant un premier paiement de  $1\,000\,000 UM$  évolue vers un paiement cumulé de  $50\,000\,000 UM$  l'année de développement suivante.

Une séparation totale des sinistres sur un critère à choisir peut être envisagée dans l'idée d'avoir deux « sous-bases » sur lesquelles travailler indépendamment. La première avec uniquement des sinistres attritionnels qui permettrait d'estimer des coefficients relatifs aux petits sinistres et dans laquelle serait tiré le facteur quand un sinistre de ce type sera à prédire. La seconde comporterait elle uniquement des sinistres classés comme graves.

L'objectif étant d'effectuer cette segmentation sur la même base pour tous les sinistres ouverts ou

clos, un choix raisonnable se porterait sur le premier montant de charge et donc celui déterminé à l'ouverture du sinistre. Une des limites de cette approche concerne les sinistres qui « deviendraient » graves avec le temps et après plusieurs années de développement. En effet, supposons un sinistre à la charge initiale faible, qui subit une très forte aggravation après trois années de développement et encore ouvert ensuite. Des montants le concernant sont donc à prédire. Il sera alors considéré comme un sinistre grave aux yeux de l'assureur. Néanmoins, avec ce type de segmentation, il ne sera pas perçu comme tel. Alors, il sera soumis à la variabilité des facteurs de développement des sinistres attritionnels et risque donc de se voir appliquer un facteur de développement énorme relativement à sa taille.

Finalement, bien que déjà appliquée dans certains mémoires (LE et VIROT, 2013 par exemple), cette méthode présente des limites évidentes et nous allons donc tenter d'utiliser d'autres outils pour prendre en compte cette séparation entre sinistres.

### 2.5.2 Tirage dans une copule empirique

Notre objectif premier, pour améliorer les modèles consistera en la prise en compte par ceux-ci de liens entre les variables là où une forme d'indépendance était implicitement supposée. Dans ce but, et selon les liens que nous observerons dans les données, nous aurons potentiellement recours à des notions assez simples en lien avec les probabilités conditionnelles mais nous nous appuierons également sur la notion de copule. Nous serons notamment intéressés par les représentations graphiques de copules empiriques. Dans cette partie, nous présentons alors brièvement les principaux points mis en jeu.

#### Visualisation de la corrélation par les copules

Introduite en 1959 par Sklar comme solution à un problème probabiliste, la notion de copule est longtemps restée inutilisée. Ce n'est qu'à partir des années 1980 qu'elles ont été étudiées en détails et se sont progressivement imposées dans la représentation des distributions multivariées notamment en assurance. Elles permettent la représentation de lois conjointes lorsque celles-ci sont inconnues. Les copules sont aujourd'hui un outil central pour l'analyse des dépendances entre variables aléatoires. Dans le cadre de notre étude, cette notion, et plus particulièrement celle de copule empirique pourra servir au raffinement des modèles dont nous disposons. Dans la réflexion qui va suivre, nous nous intéresserons uniquement au cas bivarié et c'est donc dans ce cadre que nous allons poser les premières définitions pertinentes.

Commençons par définir de manière générale une copule :

**Définition :** Une fonction  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  est une **copule** si et seulement si :

1.  $\forall u \in [0, 1]$ , on a

$$C(u, 0) = C(0, u) = 0 \text{ et } C(u, 1) = C(1, u) = u,$$

2.  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$  tels que  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ , on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Nous présentons maintenant le théorème fondamental de la théorie des copules :



**Théorème de Sklar :** Si  $H$  est une fonction de répartition bivariée de lois marginales  $F$  et  $G$ , alors il existe une copule  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}$ ,

$$H(u, v) = C(F(u), G(v)),$$

et cette copule est unique lorsque les lois marginales sont continues.

Ce résultat nous permet de mettre en lumière l'intérêt de travailler avec des copules dans le cadre de prise en compte de dépendances entre variables. En effet, nous pouvons comprendre grâce à ce théorème que la loi  $H$  d'un couple de deux variables aléatoires  $U$  et  $V$  est influencée par trois éléments : les lois marginales  $F$  et  $G$  des deux variables aléatoires, ainsi que la fonction copule qui vient lier ces variables aléatoires. Alors que les lois marginales décrivent les comportements individuels des deux variables aléatoires, la copule  $C$  représente le phénomène de dépendance qui les lie. Elle permet alors de représenter une fonction de répartition multivariée (bivariée ici) comme fonction des fonctions de répartition marginales.

Nous pouvons également, avec ces premières définitions, remarquer que le travail avec la notion de copule implique de disposer de données uniquement sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous ne travaillons alors plus avec des montants, ou des nombres mais avec des rangs normalisés. Il convient alors, dans la pratique de transformer linéairement les réalisations  $u_1, u_2, \dots, u_n$  en uniformes empiriques  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par la relation

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\text{Rang}(u_i)}{n+1}.$$

Une approche fréquemment utilisée lors d'un travail sur les dépendances consiste en la calibration sur les données (remises sur l'intervalle  $[0, 1]$ ) d'une copule connue afin de modéliser la structure de dépendance. Ce n'est pas celle-ci que nous utiliserons pour nos travaux. Nous allons plutôt nous appuyer sur les copules empiriques, et plus particulièrement les représentations graphiques de celles-ci afin en premier lieu de visualiser les liens de dépendances entre les variables que nous allons étudier.

L'enjeu, en présence de données pour lesquelles les lois marginales sont inconnues est d'être capable d'estimer cette structure de dépendance représentée par la copule. C'est ainsi que nous allons nous appuyer sur les notions de fonctions de répartition empiriques qui permettront alors d'estimer naturellement une copule pour un couple de variables.

Rappelons d'abord la définition de la fonction de répartition empirique associée à une variable aléatoire de loi  $F$ .

**Définition :** Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_K)$ , un échantillon de taille  $K$  de tirage d'une variable aléatoire suivant une loi  $F$ . La **fonction de répartition empirique** de la variable aléatoire au point  $x$  se définit alors comme :

$$F_K(x) = \frac{1}{K} \times \sum_{i=1}^K 1_{u_i \leq x}.$$

Nous pouvons ensuite définir la fonction de répartition empirique d'un couple de variables aléatoires de lois  $F$  et  $G$  inconnues :

**Définition :** Soit un échantillon de taille  $K$  de la forme  $(u_i, v_i)_{i=1, \dots, K}$  représentant  $K$  observations des variables aléatoires  $U$  et  $V$ . La **fonction de répartition empirique bivariée** au point  $(x_1, x_2)$  s'écrit alors

$$F_K(x_1, x_2) = \frac{1}{K} \times \sum_{i=1}^K 1_{u_i \leq x_1, v_i \leq x_2}.$$

Cette fonction de répartition du couple est finalement un estimateur naturel de la copule empirique associée aux deux variables aléatoires de lois  $F$  et  $G$ . Cette copule a été introduite sous le nom de « Fonction empirique de dépendance » par Deheuvels [P.DEHEUVELS, 1979] en 1979 et s'estime ainsi :

**Définition :** Soit un échantillon de taille  $n$  de la forme  $(u_i, v_i)_{i=1, \dots, n}$  représentant  $n$  observations des variables aléatoires  $U$  et  $V$ . La **copule empirique**  $C_n$  se calcule en  $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$  comme la part d'observations dont les deux éléments sont inférieurs respectivement aux observations des variables  $U$  et  $V$  en  $i$ -ème et  $j$ -ème rangs. Il s'agit donc de la fonction  $C_n$  définie par

$$C_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n 1_{u_k \leq u_i, v_k \leq v_j}.$$

Néanmoins, dans les recherches de corrélations qui nous intéressent pour la suite, la copule en elle-même ne sera pas utilisée. Nous utiliserons une visualisation de cette copule empirique. Celle-ci se présente finalement comme la représentation graphique des rangs d'une des variables en fonction des rangs de l'autre. Cette façon de voir les données est commune afin d'obtenir des allures typiques sur lesquelles calibrer des copules connues ou bien observer une « corrélation empirique » qu'il sera possible de répliquer dans des prédictions.

Nous proposons ici en figure 2.1 un exemple de tracés que nous venons d'évoquer obtenu avec des données simulées. Sur le premier graphique, nous remarquons clairement un lien croissant entre les variables sur lequel une copule connue (de Joe en l'occurrence) pourra être facilement calibrée. Sur le second, aucune structure particulière n'est observable. Les points se répartissent uniformément sur  $[0, 1]^2$ . Ce nuage dépourvu de structure est une preuve de l'absence de lien entre les deux variables qui sont en fait simulées comme des variables indépendantes.

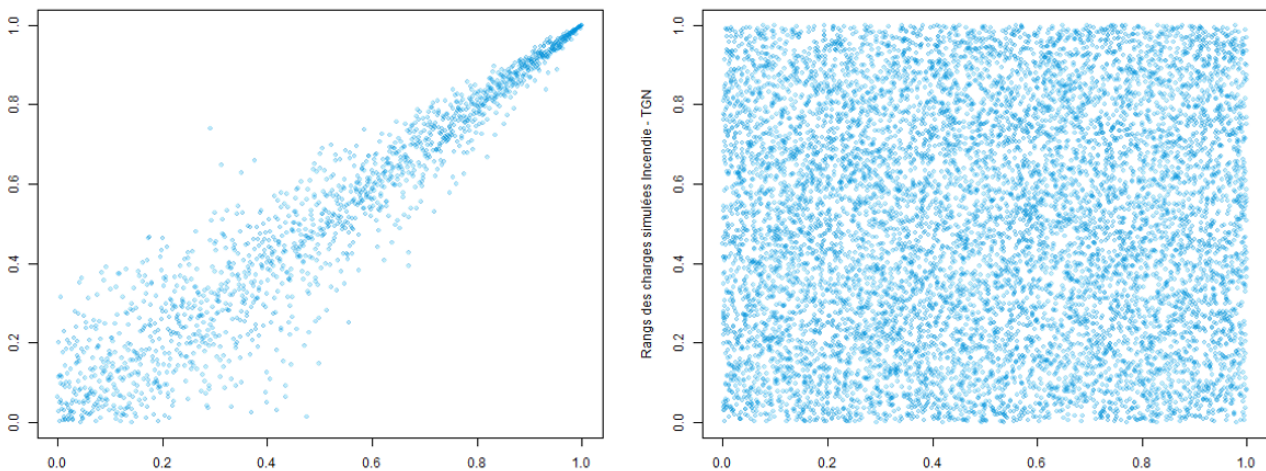


FIGURE 2.1: Exemple de la méthode de visualisation du lien empirique entre deux variables.

### Prise en compte des corrélations

Après les liens détectés et leur intensité visualisée, il sera nécessaire de les prendre en compte et de mettre à jour les points concernés dans le modèle. Pour certaines corrélations, un tirage indexé sur des probabilités conditionnelles sera une solution parfaitement adaptée (notamment dans le cadre du tirage de la survie des sinistres par exemple). Dans d'autres cas, et particulièrement pour les liens concernant les montants dans le modèle additif où les facteurs de développement individuels dans le cadre du modèle multiplicatif, nous devons nous appuyer sur les représentations graphiques précédentes. Dans ce cas, nous décrivons dans ce paragraphe l'approche que nous allons adopter.

L'objectif sera de choisir la variable à prédire en fonction d'une autre variable connue dans la base de données ou bien simulée à une étape précédente. Nous aurons alors à disposition les représentations graphique similaires à celles que nous avons présentées en figure 2.1. Ces représentations associent donc le rang normalisé d'une variable connue à celui de la variable que nous allons vouloir prédire. Une première idée consisterait donc, pour l'observation à simuler, à déterminer le rang de la variable connue et lui associer directement le rang (et donc la valeur ensuite) qui y est associé dans nos données ou à défaut la valeur la plus proche. Néanmoins, cette approche nous a paru trop brutale et nous avons préféré une méthode différente.

L'approche retenue consiste donc en un conditionnement du tirage de la variable à simuler par rapport à la position de l'observation de la variable connue parmi celles de la base. Pour chaque tirage à effectuer, nous situons le rang de la variable connue dans le vecteur à disposition. Ensuite, nous définissons un rectangle de longueur 1 et de largeur correspond à un pourcentage choisi d'observations (un exemple sera développé après ce paragraphe). Nous tirerons alors le niveau de la variable à prédire parmi ceux dans le rectangle. En pratique, et en lien avec les graphiques en exemple, cela revient à effectuer les opérations suivantes :

1. Situer le sinistre à traiter sur l'axe des abscisses grâce à l'observation de la variable,
2. Choisir un pourcentage d'observations parmi lesquelles tirer,
3. Déterminer un intervalle de rang centré en l'observation qui comporte le pourcentage voulu de sinistres,
4. Choisir aléatoirement un point parmi ceux présents dans le rectangle alors délimité,
5. Affecter pour le sinistre et la variable en question, le rang associé au point tiré,
6. Utiliser les données pour remettre ce point à l'échelle de la variable en question.

Prenons un exemple concret, en utilisant la copule de gauche de la figure 2.1 : Considérons 1000 sinistres disponibles sur ce graphique, un pourcentage choisi de 10, et un rang observé pour le sinistre à prédire de 0,3 sur la variable disponible (en abscisse). Pour obtenir un intervalle regroupant 10% des observations, il doit contenir 100 observations, et donc 50 de chaque côté du sinistre à prédire pour que l'intervalle soit centré. Alors, nous prenons comme intervalle de rangs  $[0, 25; 0, 35]$ . Nous pouvons alors choisir aléatoirement un sinistre parmi ceux occupants ces rangs et ensuite affecter le niveau correspondant pour la variable à prédire (en ordonnée). Nous illustrons cet intervalle en figure 2.2. En bleu, nous trouvons la ligne correspondant au rang de la charge du sinistre à traiter et en rouge, les bornes de l'intervalle sur lequel nous allons nous autoriser à effectuer le tirage du facteur.

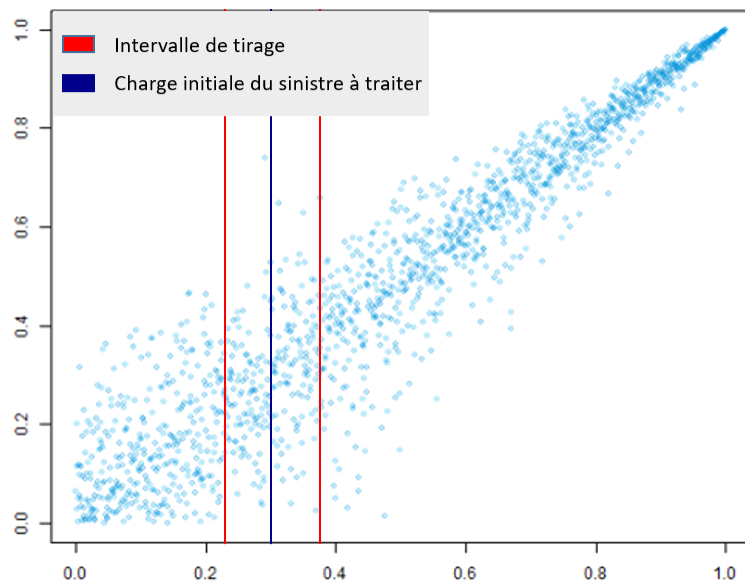


FIGURE 2.2: Illustration du processus de sélection d'un intervalle de tirage

## Bilan

Dans ce chapitre, nous avons pu présenter l'architecture des deux modèles que nous allons mettre en place dans l'objectif d'estimer les provisions pour sinistres. Les différences fondamentales existantes entre ces deux modèles vont nous permettre à la fois de tester une approche uniquement ligne à ligne (modèle additif) ainsi qu'une approche dérivée des méthodes agrégées (modèle multiplicatif). Nous serons alors en mesure de comparer la façon dont les deux modèles s'adaptent aux données en présence et tirer des enseignements intéressants sur le traitement de données individuelles. Dans un second temps, nous utiliserons les méthodes que nous avons décrites afin d'adapter encore plus nos modèles aux données et d'essayer d'obtenir un gain de précision de l'estimation.

## Chapitre 3

# Application des modèles et analyse des résultats

### 3.1 Présentation de la base de données

#### 3.1.1 Présentation générale

Nous avons précédemment présenté les différents modèles que nous souhaitons mettre en œuvre afin de prédire un montant global de PSAP. Ces modèles, développés de manière théorique jusqu'à maintenant doivent désormais être mis en application. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser une base de données réelle. La base sur laquelle nous allons éprouver nos modèles a été fournie par un grand assureur français et concerne la branche Responsabilité Civile Médicale (RC MED par la suite). Il s'agit d'une assurance obligatoire pour tous les praticiens libéraux qui couvre ces derniers lorsque leur responsabilité est mise en cause dans le cadre de leur activité professionnelle. Cette branche possède certaines caractéristiques spécifiques que nous allons évoquer et qui permettront de visualiser le comportement des modèles face à ces particularités et d'expliquer certains résultats.

Cette base de données a servi de support aux travaux de Riffaud (RIFFAUD, 2019) et de Fridhi (FRIDHI, 2019) et nous avons alors pu travailler directement avec une base retraitée et donc sans incohérences ou valeurs manquantes. Plusieurs vérifications et traitements avaient été effectués afin d'exclure les observations qui semblaient erronées (cohérence entre les dates de survenance, d'ouverture ou de clôture, cohérence entre montants de charges, de réserve et de règlements, ...). Ces contrôles avaient abouti à la suppression d'un nombre restreint de lignes (0,2% du nombre total de sinistres qui représentaient 0,35% de la charge connue).

La base de données retraitée et utilisée comporte ainsi près de 70 000 lignes et de nombreuses variables donnant des informations sur les sinistres. Les sinistres présents dans la base couvrent une période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2018. Pour chaque ligne de la base, nous disposons d'informations diverses concernant le sinistres. Nous avons d'abord accès aux dates « clés » du sinistre :

- Sa date de survenance (voir ci-après) ,
- Sa date d'ouverture,
- Son éventuelle date de réouverture,
- Sa date de clôture si le sinistre est clos en fin d'année 2018.

Nous remarquons ici que la date de déclaration du sinistre par l'assuré n'est pas présente et

que nous ne disposons donc que de la date d'ouverture par le gestionnaire. Nous allons considérer alors que ces deux dates sont équivalentes. Seront ainsi considérés comme tardifs les sinistres dont l'année d'ouverture est postérieure à celle de survenance. De plus, le nombre de sinistres subissant une réouverture étant marginal, nous allons faire abstraction de la variable concernant la potentielle date de réouverture (voir hypothèse sur le processus d'état dans le chapitre 2) et allons simplement considérer comme date de clôture, la dernière date de fermeture connue (après les réouvertures s'il y en a eu).

Enfin, la notion de survenance est particulière dans la branche RC MED. En effet, cette branche peut couvrir des sinistres dont la survenance est totalement dissociée de la date de manifestation (la date à laquelle l'assuré découvre le sinistre). On peut citer un exemple fréquemment utilisé : un chirurgien oublie une compresse dans le corps d'un patient lors d'une opération. Les conséquences de cet oubli peuvent apparaître plusieurs mois, voire années après l'opération. C'est alors cette date à laquelle les conséquences apparaissent aux yeux de l'assuré qui est comptabilisée comme date de survenance dans ce travail.

Cette notion de date de manifestation est d'ailleurs un point d'attention important qui a été soulevé par la loi dite About du 30 décembre 2002 et qui cristallisait les tensions entre assureurs et assurés (loi numéro 2002-1577). Cette loi dispose, en résumé, qu'en échange d'une garantie subséquente (10 ans en cas de départ à la retraite) après résiliation du contrat, l'assureur n'est tenu de réparer le sinistre que si une réclamation a été effectuée pendant la période de couverture. Ainsi, soit un praticien couvert par un assureur A entre 2005 et 2010 et par un assureur B par la suite mis en cause par un patient en 2012 pour des soins réalisés en 2009. C'est l'assureur B qui prendra en charge le sinistre. Si par contre, le praticien part à la retraite en 2010, c'est l'assureur A qui aura la charge du sinistre. On dit alors que l'on passe d'une base « survenance » à une base « déclaration ». Ce changement sera à garder à l'esprit lors de l'analyse et des réflexions concernant les résultats. Nous illustrons ce changement de point de vue à l'aide du schéma en figure 3.1.

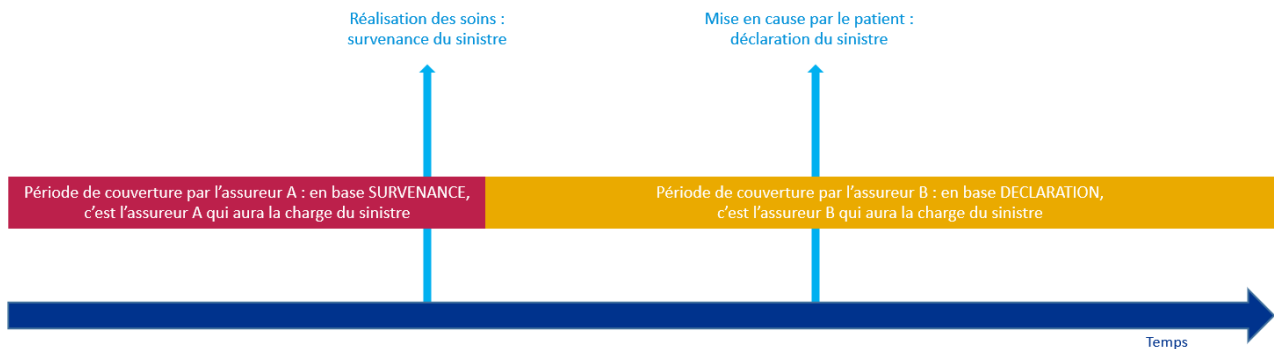


FIGURE 3.1: Illustration des visions « survenance » et « déclaration »

Des informations concernant le sinistre en lui-même sont également disponibles, parmi lesquelles nous pouvons citer :

- Le type de contrat appelé catégorie ministérielle (autres contrats ou contrats «*pools*» dans notre base),
- Le réseau de distribution du contrat (courtier, agent général ou salarié),
- Si le sinistre a été réglé à l'amiable ou si il a donné lieu à un litige (sans information sur la nature de celui-ci),
- Si le sinistre est considéré comme tardif ou non,

- La nature du sinistre (corporelle ou matérielle).

D'autres variables (département de survenance, code postal de survenance par exemple) sont présentes mais jugées peu pertinentes pour notre travail.

Enfin, des variables numériques correspondant à divers montants sont présentes, pour chaque sinistre et pour chaque année de développement  $j$  entre 0 et 18, à savoir :

- Les règlements en frais,
- Les règlements en principal,
- Les règlements totaux,
- Le montant de réserve estimé par le gestionnaire de sinistres,
- Le montant de charge.

C'est sur ces montants que va porter notre travail de prédiction. Nous utiliserons tantôt les règlements (frais, principaux et totaux) sur lesquels nous appliquerons ou non l'inflation, et tantôt les montants de charges et de réserves selon le modèle et sa capacité à embarquer ou non l'inflation latente. Nous détaillerons dans un paragraphe suivant la manière dont l'inflation a été traitée dans ce travail.

### 3.1.2 Quelques statistiques descriptives

**Remarque :** Avant toute chose, nous précisons que les modèles et statistiques proposés dans la suite de ces travaux ont été obtenus et implémentés en utilisant le logiciel libre R [R CORE TEAM, 2019]. De plus, les valeurs numériques présentées ont subi une transformation afin de préserver la confidentialité des données et permettre à ce mémoire dans son intégralité de ne pas se voir attribuer de délai de confidentialité. C'est pour cette raison que nous parlerons d'Unités Monétaires (UM) et non d'Euros lors de la présentation des différents résultats.

Comme première prise en main de la base de données, nous proposons de présenter ici quelques statistiques purement descriptives nous permettant de mettre en exergue quelques caractéristiques intéressantes quant à la base elle-même et donc la garantie qu'elle concerne.

#### Homogénéité du portefeuille

Il est intéressant en premier lieu de vérifier la relative homogénéité du portefeuille dans le temps. En effet, nous allons utiliser, comme nous l'avons évoqué durant la présentation des modèles, un modèle de fréquence basé sur une méthode de bootstrap sur triangles de nombres pour prédire le nombre de sinistres tardifs qui seront déclarés dans le futur. L'homogénéité du portefeuille est alors une condition importante pour pouvoir procéder ainsi. Nous nous intéressons donc au nombre de sinistres survenus selon les années calendaires. Nous présentons alors en figure 3.2 le nombre de sinistres survenus selon les années calendaires :

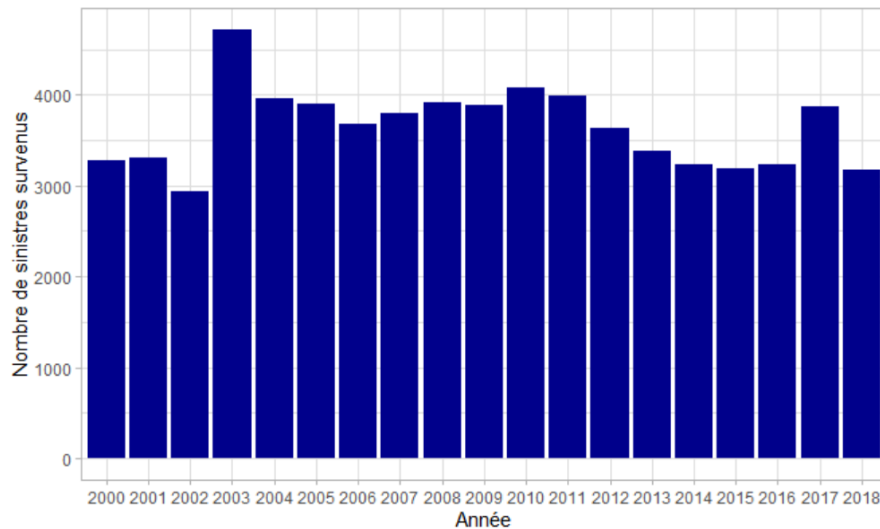


FIGURE 3.2: Nombre de sinistres survenus par année calendaire

Nous validons alors visuellement l'homogénéité satisfaisante du portefeuille autour de la moyenne qui vaut 3641 puisqu'aucune valeur ne semble être complètement déconnectée des autres. A noter que le décalage visible entre les années 2000-2002 et les suivantes s'explique aisément par le changement de loi que nous venons d'évoquer. Ce décalage ne nous paraît pas suffisamment marqué pour invalider ce point.

### Longueur de la branche

Une autre caractéristique intéressante à observer est la longueur de la branche RC MED. Pour ce faire, nous allons nous concentrer sur les sinistres ouverts en 2000. Il s'agit en effet de la seule année pour laquelle nous sommes certains que l'ensemble des sinistres est clos (par hypothèse). Nous représentons donc en figure 3.3, la part de sinistres encore ouverts parmi ceux ouverts en 2000 selon les années de développement. Nous remarquons qu'une part non négligeable de sinistres reste ouverte un grand nombre d'années. Par exemple, 4,8% des sinistres ouverts en 2000 le sont encore en année de développement 8, ce qui est bien au dessus d'une branche comme l'automobile où le niveau se situerait très proche de 0.

La branche que nous étudions ici est donc une branche longue, ce qui peut rendre plus complexe l'estimation des PSAP du fait de la plus grande incertitude sur la date de clôture ainsi que le nombre en moyenne plus important de règlements par sinistre. De plus, cette longueur de branche nous conduit à observer un nombre (certes mineur) de sinistres encore ouverts après les dix-huit années de développement que nous sommes en capacité d'observer. Or, comme nous l'avons compris en présentant les modèles, nous devons supposer inévitablement une durée maximum de développement de nos sinistres afin de pouvoir appliquer des modèles, que ce soit les nôtres, ou même les plus classiques comme Chain-Ladder.

Cette durée a été placée au niveau du nombre d'années de développement maximal que nous sommes en mesure d'observer, c'est-à-dire dix-huit. Nous devons alors considérer comme clos tous les sinistres ouverts en 2000. Ce choix contraint doit être gardé à l'esprit comme une limite du modèle, et la prise en compte d'un facteur de queue après application des modèles afin de pallier ce manquement



pourrait légitimement se poser, bien que nous ne l’abordions pas plus en profondeur dans le présent mémoire. Ce point peut expliquer notre choix de ne pas nous séparer des données précédant la loi About. Les supprimer aurait rendu indispensable l’estimation d’un facteur de queue.

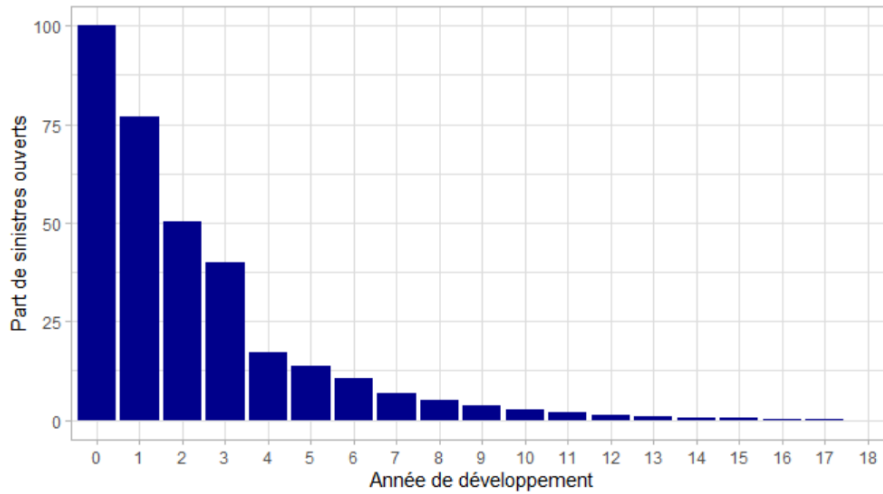


FIGURE 3.3: Part des sinistres ouverts en 2000 et non clos selon les années de survenance

Si cette branche semble donc se présenter comme une branche particulièrement longue, il peut s’avérer intéressant dans la compréhension de celle-ci, de regarder les particularités que présentent les sinistres encore ouverts après un grand nombre de périodes de développement. Pour ce faire, nous avons isolé dans notre base les sinistres encore ouverts après au moins huit années de développement. Ce choix est complètement arbitraire et correspond à des sinistres que nous considérons comme longs. Nous avons alors pu constater certains phénomènes pertinents.

Tout d’abord, nous comprenons qu’il existe une typologie particulière du sinistre à la longue durée de vie, notamment concernant le mode de règlement du sinistre et son type. En effet, comme le montre le tableau 3.1, la part de sinistres corporels et réglés au tribunal est bien plus importante parmi les sinistres « vieux » que dans la base entière.

Cette sur-représentation est somme toute compréhensible. Un sinistre réglé au tribunal mettra de manière quasiment inévitable plus de temps à être refermé qu’un sinistre réglé à l’amiable. De la même manière, un sinistre corporel est par nature plus complexe à estimer et régler qu’un sinistre matériel et il semble donc normal de trouver plus de ces sinistres parmi les sinistres les plus anciens. Cette réflexion faite, nous nous sommes intéressés aux règlements associés à ces sinistres longs selon leur type. Nous avons ensuite échangé avec des experts afin d’interpréter les écarts observés.

Base	Part de sinistres corporels	Part de sinistres réglés en contentieux
Base complète	63%	12%
Base sinistres anciens	93%	42%

TABLE 3.1: Part représentée par les sinistres corporels et contentieux dans le nombre total de sinistres et le nombre total de sinistres ouverts depuis au moins 8 années

Une première remarque concerne le nombre de flux de frais et leurs montants. Sur les sinistres réglés par contentieux, nous remarquons un montant de frais réglés bien plus élevé que pour les

sinistres amiables : les sinistres qui ne sont pas réglés à l'amiable génèrent en moyenne 1,6 fois plus de frais que les sinistres amiables. Ces frais sont également issus d'un nombre de flux plus important, de l'ordre de 3,4 pour les sinistres amiables contre 4,6 pour les sinistres contentieux. Après les échanges avec les experts nous avons aboutis à la conclusion que ce surplus de frais correspondait pour une grande partie à des frais de justice et d'expertise impliqués par un passage devant le tribunal.

Du côté du principal, nous pouvons observer le même phénomène avec cependant une ampleur un petit peu moins importante puisque le nombre moyen de flux de principal est de 2,4 pour les sinistres litigieux contre 2,1 pour les sinistres contentieux.

Au global, le coût ultime moyen des sinistres litigieux est quasiment deux fois plus élevé que le coût des sinistres amiables. Si l'écart de frais explique en partie cet écart, le principal joue aussi un rôle. Lorsqu'un sinistre doit être réglé au tribunal, cela signifie souvent que les tentatives d'accord ont échouées et donc que les propositions de l'assureur ont été refusées. Or, si l'assureur s'attendait à ce que le tribunal rende un verdict moins coûteux (frais y compris) que les propositions d'arrangement qu'il a l'habitude de mettre en place, il ne ferait même plus de propositions et se rendrait au tribunal pour une immense part des dossiers. Il est donc compréhensible que le coût moyen d'un dossier réglé par le juge soit nettement supérieur au coût d'un dossier réglé à l'amiable.

En effectuant les mêmes recherches concernant les sinistres corporels et matériels nous nous sommes rendus compte que le nombre de flux de frais est bien plus important pour les sinistres corporels que pour les sinistres matériels (4 contre 2 en moyenne), ce qui peut s'expliquer par la nécessité de plus d'expertise ou de réévaluations du fait de montants plus importants en jeu ou de situations plus complexes. Assez étonnamment, le nombre de flux de principal est quasiment similaire entre sinistres corporels et matériels, et on ne retrouve pas, dans notre portefeuille, de sinistres débouchant sur une forme de rente pour la victime du sinistre. Ce type de sinistre est compté dans un autre portefeuille de notre assureur partenaire. En termes de montant cette fois-ci, il est nettement supérieur pour les sinistres corporels comme l'on pouvait s'y attendre. Ainsi, en moyenne un sinistre corporel coûte à l'assureur trois fois plus qu'un sinistre matériel.

Ces analyses, si elles ne servent pas directement dans nos modèles nous permettent d'en apprendre plus concernant la base de données sur laquelle nous travaillons et nous donnent d'éventuelles pistes à explorer lorsque nous chercherons à améliorer nos modèles.

### Saisonnalité des clôtures de sinistres

Un autre aspect potentiellement intéressant à développer concerne les périodes de fermeture dans l'année des sinistres. En effet, instinctivement, nous pouvons imaginer un nombre de fermetures de sinistres plus important en début d'année (janvier ou février). Cette vague serait l'effet d'un phénomène souvent observé : après une ou plusieurs périodes sans règlements, le gestionnaire de sinistres prend la décision, en début de période suivante de clôturer le sinistre à la lumière des informations recueillies sur la période précédente. L'observation de ce phénomène pourrait notamment nous conduire à directement envisager certaines adaptations à nos modèles. Nous présentons alors ici en figure 3.4, sur l'ensemble de notre base, le nombre de sinistres clôturés en fonction du mois de l'année. Contrairement à notre première intuition, nous observons une relative stabilité du nombre de fermetures sur l'année, et donc pas de sur-représentation du mois de janvier ou février.

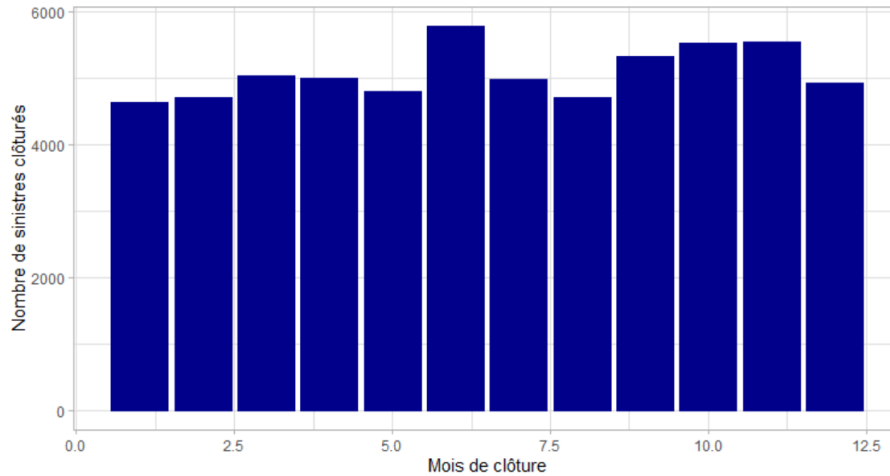


FIGURE 3.4: Histogramme du nombre de sinistres clôturés par mois de l'année

### Analyse des sinistres tardifs

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la proportion de sinistres tardifs (en nombre et en règlements connus) présents dans la base, en table 3.2. Les règlements connus représentent la somme des règlements effectués pour tous les sinistres entre 2000 et 2018. Cette part occupée par les sinistres tardifs est, dans une branche « classique », relativement faible (autour de 5% en auto par exemple).

Nombre de sinistres		Montant de règlement connu	
Sinistres tardifs	Sinistres non tardifs	Sinistres tardifs	Sinistres non tardifs
17%	83%	17,6%	82,4%

TABLE 3.2: Part représentée par les sinistres tardifs dans le nombre total de sinistres connus ainsi que dans le montant de règlement connu

Nous constatons ici des valeurs bien supérieures à 5% et pouvons alors pointer une autre particularité de la branche RCMED qui est la présence d'un nombre conséquent de sinistres tardifs. De plus, ces valeurs sont sous-estimées. En effet, si tous les sinistres « non tardifs » de la base sont connus au moment de la clôture, les sinistres tardifs ne le sont pas tous (ceux liés à la survenance de 2018 sont inconnus, tout comme ceux liés aux survenances antérieures et non encore déclarés) et par conséquent, les premiers règlements qui y sont associés non plus. Le nombre et le montant réels de sinistres tardifs sont donc supérieurs aux proportions que nous venons de présenter.

En guise d'exemple, un sinistre non tardif survenu et déclaré en 2017 s'est déjà développé durant deux périodes, tandis que le même sinistre mais ouvert tardivement n'a pas encore nécessité de règlements. Ceci nous montre l'importance des sinistres tardifs dans cette branche et donc la nécessité de réfléchir à la prédiction et au traitement de ces sinistres. Cette nécessité est encore renforcée si l'on s'intéresse, pour l'année la plus complète dont nous disposons (c'est-à-dire les sinistres survenus en 2000), aux parts du montant à l'ultime représentées par les sinistres tardifs et non tardifs (table 3.3).

Nous remarquons alors, qu'en plus de représenter un nombre et une charge connue importante, les sinistres tardifs sont responsables d'une part encore plus élevée de charge ultime (part d'autant

	Sinistres tardifs	Sinistres non tardifs
Part dans la charge ultime	40,3%	59,7%

TABLE 3.3: Part représentée par les sinistres tardifs dans le montant ultime relatif à l'année de surveillance 2000

plus élevée sachant qu'une poignée de sinistres tardifs survenus en 2000 ne sont pas encore clos en fin d'année 2018). Cette information nous conforte définitivement dans l'idée de traiter différemment les sinistres tardifs que nous allons simuler.

### 3.1.3 Traitement de l'inflation

#### Nécessité du traitement de l'inflation

Comme nous avons pu le constater lors de la présentation des données, nous avons à disposition tous les sinistres survenus sur une période allant de 2000 à 2018, soit dix-neuf ans. C'est une période relativement longue. Cette profondeur de la base de données rend *a priori* complexe la comparaison entre différents montants réglés à des moments éloignés. En effet, à cause du phénomène d'inflation, il n'est pas possible de considérer qu'un euro réglé en 2000 a la même valeur qu'un euro réglé 19 ans plus tard.

Cette différence n'est que peu problématique dans le cadre d'un modèle multiplicatif. En effet, le fait d'utiliser des facteurs de développement individuels et non globaux permet de prendre en compte implicitement cet effet dû à l'inflation. On peut sans nul doute supposer que les évolutions de l'inflation ont de toute évidence un impact sur les montants bruts mais pas sur les évolutions « en pourcentage » de ceux-ci au cours des années de développement et donc que facteurs de développement individuels et inflation sont indépendants. Lorsque nous appliquons un facteur individuel pris parmi ceux connus à un sinistre pour lequel nous souhaitons effectuer des prédictions, c'est en quelque sorte un facteur d'aggravation qui n'a que peu de raisons d'avoir un lien avec l'inflation.

Par exemple, si deux sinistres « identiques » surviennent avec 5 années d'écart, le montant à régler sera logiquement différent à cause de l'inflation, mais si le sinistre le plus ancien nécessite un doublement des règlements après 2 ans, le doublement sera également présent sur le second sinistre, toutes choses étant égales par ailleurs. Ainsi, nous pouvons travailler directement avec notre base de données sans en passer par un traitement de l'inflation pour utiliser le modèle multiplicatif.

Néanmoins, dans le cadre du modèle additif que nous avons présenté, nous n'appliquons pas de facteurs aux sinistres, mais des montants bruts parmi ceux déjà rencontrés. Cette manière de procéder est bien plus problématique si aucun traitement de l'inflation n'est effectué. Ce n'est donc plus un facteur d'aggravation mais un montant d'aggravation. Ainsi, si nous prenons l'exemple d'un sinistre nécessitant, plusieurs années après son ouverture un acte médical, l'inflation médicale aura un impact conséquent. Le même acte effectué avec plusieurs années d'écart aura un coût monétaire bien plus élevé pour l'acte le plus récent du fait de l'inflation continue. Ainsi, on comprend très facilement la nécessité de prendre en compte l'inflation dans le cadre du modèle additif présenté précédemment. Deux aspects sont alors à considérer :

- Il faut remettre en vision « actuelle » (2018) les paiements déjà effectués dans le passé afin que tous les montants présents adoptent une vision commune,
- Les paiements futurs que nous allons simuler doivent également être mis en vision 2018 car le

montant de PSAP est estimé à cette date.

Nous présentons dans le schéma suivant (figure 3.5) une version plus visuelle de la liste précédente :

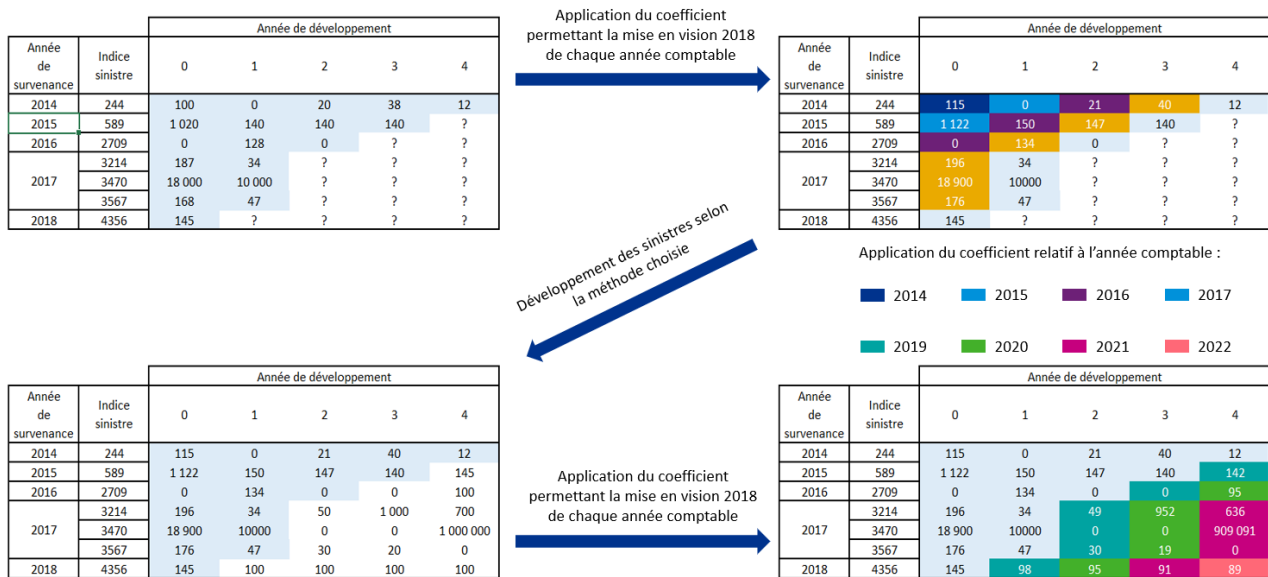


FIGURE 3.5: Illustration du processus de mise en vision 2018 des règlements

Pour ce faire, il nous a semblé très réducteur d'utiliser un indice général ou même celui d'un secteur spécifique. Nous n'avons en effet aucune raison de penser que tous nos sinistres répondent à un même secteur d'inflation, ni à l'opposé, que les secteurs sont assez divers pour considérer l'indice général. Nous choisissons alors d'utiliser nos données pour déterminer l'évolution intrinsèque de l'inflation et la méthode de Verbeek qui est connue pour être efficace lorsque l'inflation est non constante.

### Méthode de Verbeek

Cette méthode dite « de séparation » développée par Verbeek en 1972 [VERBEEK, 1972] et appliquée à un nombre de sinistres dans un contexte de réassurance a été adaptée en 1977 par Taylor [TAYLOR, 1977] afin d'appliquer l'inflation aux montants de règlements. Elle consiste en la séparation de l'effet produit par un facteur exogène (l'inflation dans notre cas) afin de pouvoir le gommer et ainsi rapprocher encore plus le triangle des hypothèses de Chain-Ladder que nous avons évoquées précédemment. Notre objectif comporte alors deux aspects :

- Identifier l'inflation dans les données dont nous disposons,
- Réaliser une projection de cette inflation pour les années futures.

En premier lieu, et avant de rentrer plus en détail dans le fonctionnement de la méthode, nous précisons que le travail s'effectue ici avec les données de règlements incrémentaux, c'est-à-dire les  $I_{i,j}$ . De plus, nous considérerons, par soucis de simplification, des années de survenance allant de 0 à  $n$ , tout comme les années de développement.

L'idée principale derrière cette méthode consiste en la distinction de deux effets influençant les données :

1. Un effet lié à l'année de développement du règlement, que l'on retrouve sur les colonnes du triangle de développement,
2. Un effet lié à l'année calendaire du règlement, que l'on observe sur les diagonales du triangle de développement.

Une hypothèse est posée :

*Hypothèse* : Les deux effets sont indépendants.

En plus de s'appuyer sur la notion de triangle décumulé, la méthode nécessite également de représenter dans le triangle non pas les montants décumulés totaux payés mais le montant moyen incrémental. Il s'agit alors d'un triangle composé des valeurs  $M_{i,j} = \frac{I_{i,j}}{n_{i,j}}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ici, les  $n_{i,j}$  représentent le nombre de sinistres « concernés » par chacune des cases du triangle, c'est-à-dire ceux ouverts survenus l'année  $i$  et encore ouverts en année de développement  $j$ . L'hypothèse suivante est alors prise :

*Hypothèse* : Les  $M_{i,j}$  se décomposent en un facteur  $r_j$  dépendant uniquement de l'année de développement, et un facteur exogène emportant l'inflation et dépendant de l'année calendaire du règlement,  $\lambda_{i+j}$ , c'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, M_{i,j} = r_j \times \lambda_{i+j},$$

Sous la contrainte  $\sum_{j=0}^n r_j = 1$ .

Sous cette hypothèse, le triangle se présente alors sous la forme de la table 3.4.

Année de survenance	Année de développement				
	0	1	...	$n-1$	$n$
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	...	$r_{n-1}\lambda_{n-1}$	$r_n\lambda_n$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	...	$r_{n-1}\lambda_n$	
...	...	...	...		
$n-1$	$r_0\lambda_{n-1}$	$r_1\lambda_n$		?	
$n$	$r_0\lambda_n$				

TABLE 3.4: Représentation du triangle de développement sous les hypothèses de la méthode de Verbeek

Il convient ensuite d'estimer les paramètres du modèle. Pour ce faire, nous procédons comme suit :

1. Nous sommions la dernière diagonale connue du triangle des  $M_{i,j}$  et appelons cette somme  $D_n$ . On a alors, en utilisant la contrainte énoncée

$$D_n = \lambda_n \times (r_0 + r_1 + \dots + r_n) = \lambda_n.$$

Et alors, un estimateur de  $\lambda_n$  est

$$\widehat{\lambda}_n = D_n.$$

Très simplement, nous obtenons également grâce au triangle un estimateur de  $r_n$ , en appelant  $v_n$  la somme de la dernière colonne du triangle (finalement juste la valeur de la case correspond à la dernière année de développement de l'année de survenance 0 ici)

$$\widehat{r}_n = \frac{v_n}{\widehat{\lambda}_n}.$$

2. Nous utilisons ces résultats et sommons la diagonale précédente pour obtenir de la même manière

$$D_{n-1} = \lambda_{n-1} \times (r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1}) = \lambda_{n-1} \times (1-r_n).$$

Alors, on obtient, en utilisant la première étape

$$\widehat{\lambda}_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{(1 - \widehat{r}_n)}.$$

3. Enfin, nous répétons de proche en proche l'étape 2 pour obtenir chacun des estimateurs, et, avec  $v_k$ , la somme de la colonne  $k$  du triangle, ainsi que  $D_k$ , la somme de la  $k$ -ème diagonale, nous obtenons les solutions générales suivantes

$$\widehat{\lambda}_k = \frac{D_k}{1 - \widehat{r}_n - \widehat{r}_{n-1} - \dots - \widehat{r}_{k+1}},$$

$$\widehat{r}_k = \frac{v_k}{\widehat{\lambda}_k + \widehat{\lambda}_{k+1} + \dots + \widehat{\lambda}_n}.$$

Une fois ces étapes réalisées, nous disposons donc des coefficients  $\lambda$  embarquant le phénomène d'inflation pour les paiements effectués et connus. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué plus haut, il est nécessaire pour nous d'obtenir une projection de ces coefficients puisque pour estimer les réserves, nous allons simuler des paiements futurs. Aucune méthode spécifique n'est imposée dans la littérature et nous allons simplement mettre en place une régression linéaire des coefficients  $\lambda_k$  qui nous permettra alors d'obtenir une extrapolation linéaire de ces coefficients. En guise d'illustration, nous présentons en figure 3.6, la droite de régression ainsi que les projections concernant les années futures concernant les règlements en frais de notre base RC MED.

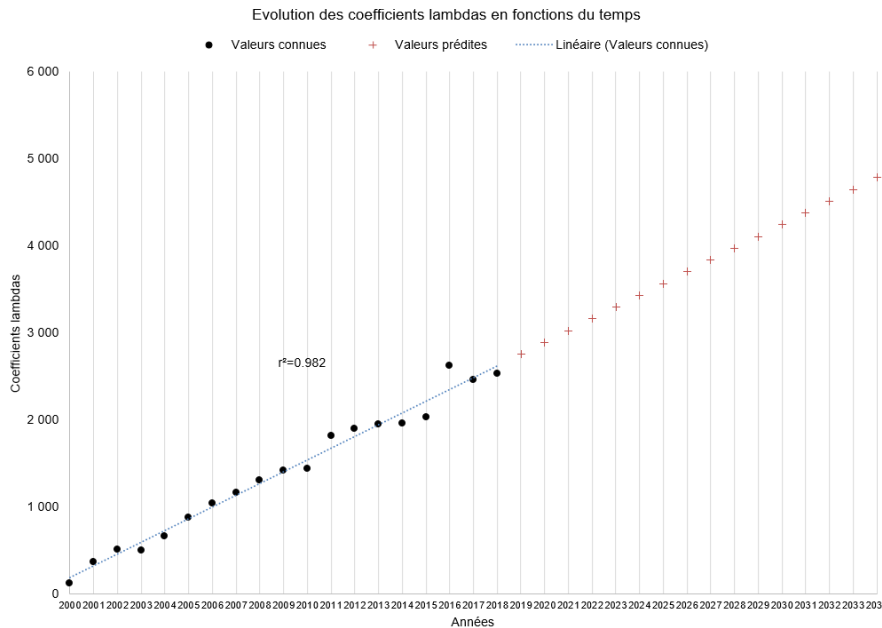


FIGURE 3.6: Evolution et régression des coefficients  $\lambda$  relatifs aux paiements de frais

Le coefficient d'inflation à appliquer pour chaque année est ensuite obtenu en prenant une année de référence et en divisant par le coefficient associé à cette année de référence.

Nos données nous permettent d'utiliser cette méthode de manière encore plus précise. En effet, nous disposons, pour chaque règlement effectué, de la répartition entre frais et principal. Nous pouvons alors appliquer deux fois cette méthode : une fois au triangle ne comportant que les règlements de principaux et une fois au triangle ne comportant que les frais réglés. En prenant comme année de référence 2018 (la dernière année connue), nous pouvons alors obtenir les paiements déjà effectués ainsi que ceux simulés par le modèle en vision 2018. Nous illustrons ceci avec un exemple inventé en table 3.5. Ceci nous permettra donc d'obtenir une estimation des PSAP prenant en compte l'inflation dans le cadre du modèle additif.

Année du paiement	Coefficient d'inflation obtenu	Montant réglé	Montant en vision 2018
2015	0,8	1000 UM	$1000/0,8 = 1250$ UM
2018	1 (référence)	1000 UM	1000 UM
2022	1,25	1000 UM	$1000/1,25 = 800$ UM

TABLE 3.5: Exemple d'application des résultats de la méthode de Verbeek

## 3.2 Le modèle additif

### 3.2.1 Résultats du premier modèle et comparaison à Chain-Ladder

#### Montant ultime

Nous proposons dans cette sous-section de présenter succinctement les résultats obtenus par le modèle additif dans sa version la plus simple que nous appellerons par la suite modèle additif initial. Cette première distribution des estimations du montant ultime, que nous mettrons pour le moment uniquement en relief avec l'estimation proposée par le modèle de Chain-Ladder naïf nous servira de base pour ensuite établir la discussion lors de la comparaison plus complète que nous réaliserons entre le modèle additif raffiné, ce modèle, les modèles multiplicatifs et d'autres axes que nous présenterons par la suite.

En figure 3.7, nous présentons donc la distribution des montants ultimes estimés par le modèle additif ainsi que la position relative de l'estimation par la méthode de Chain-Ladder. En table 3.6, nous proposons les principales statistiques descriptives de la distribution et le montant estimé par Chain-Ladder.



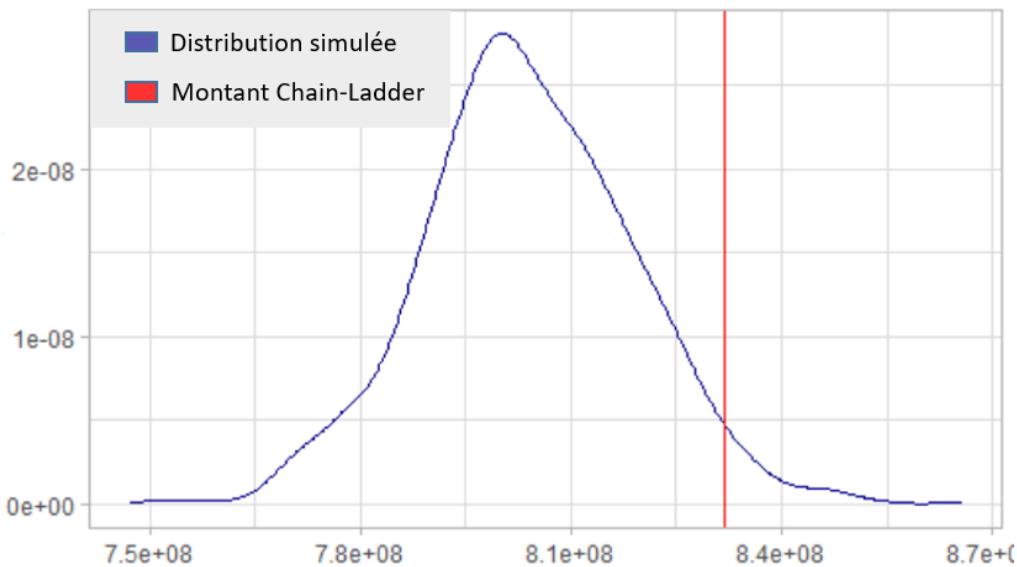


FIGURE 3.7: Distribution du montant ultime simulée par le modèle additif (en bleu) et par Chain-Ladder (en rouge)

Moyenne	Ecart type	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur Chain-Ladder
804	15,1	794,4	803,3	813,9	831

TABLE 3.6: Statistiques descriptives de la distribution du montant ultime simulée par le modèle additif et montant estimé par Chain-Ladder (en millions d'UM)

En premier lieu nous remarquons que le niveau d'ultime estimé par Chain-Ladder correspond à une probabilité non nulle dans la distribution estimée par le modèle additif. Néanmoins, cette valeur proposée par Chain-Ladder se situe largement sur la droite de la distribution ce qui signifie que le modèle additif propose au global une estimation inférieure à celle de Chain-Ladder. Bien que Chain-Ladder soit une méthode de référence très utilisée par les équipes de provisionnement (cf. Chapitre 1), la méthode à laquelle nous comparons ici est la version la plus naïve de cette approche. Ainsi, bien que le modèle additif semble sous-estimer légèrement l'ultime, cette simple comparaison ne suffit pas à présumer de la qualité globale du modèle.

### Charge à 1 an

En appliquant la méthode décrite dans le chapitre 2 pour l'estimation de la charge à un an à notre base de données, nous obtenons alors la figure 3.8 et un  $SCR_{réserve}$  de environ 97 millions d'UM.

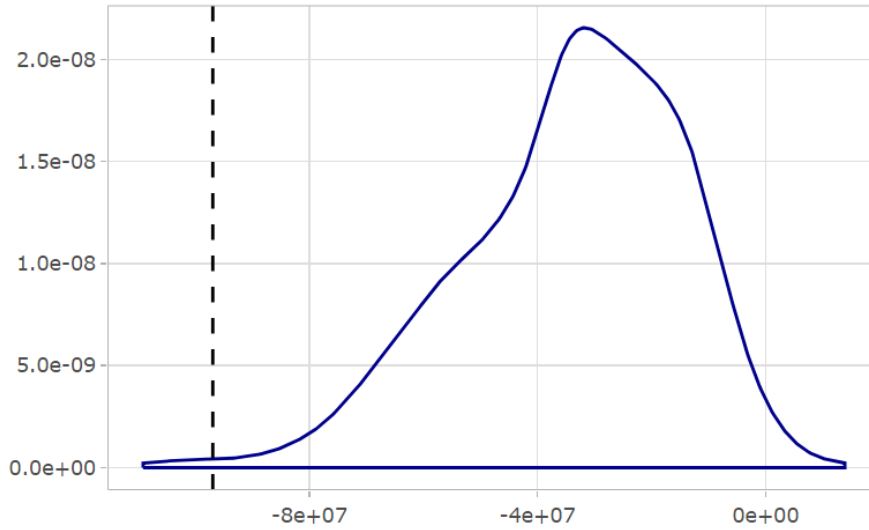


FIGURE 3.8: Distribution de  $\widehat{CDR}(t+1)$  pour 1000 simulations, en noir, le quantile 5%

Dans nos données, nous ne disposons pas du niveau de  $SCR_{réserve}$  retenu par l'assureur et ne pouvons alors pas fournir d'interprétation précise de ce résultat ni même le comparer à une valeur référence proposée par une autre méthode. Nous ne développons donc pas plus ce point.

### 3.2.2 Recherche de corrélations et raffinements

La mise en place d'un modèle de provisionnement individuel permet d'envisager des segmentations bien plus fines des sinistres. Cette possibilité offerte peut alors autoriser la prise en considération des liens entre les différentes données disponibles afin d'améliorer la précision de l'estimation des PSAP. En effet, si nous reprenons à la fois l'équation 2.1 et la façon dont nous simulons les règlements, nous comprenons que nous ignorons ces liens en première approche et supposons finalement une indépendance.

Nous ne prenons par exemple pas en compte la présence ou non d'un règlement pour estimer la survie du sinistre, ni même la présence d'un règlement sur une période pour prédire le règlement sur la prochaine période. Ce choix est acceptable en première approche mais doit être confronté aux données afin d'espérer améliorer le modèle. Nous envisageons alors des corrélations entre montants de règlements successifs (qu'ils soient cumulés ou incrémentaux) ou des liens entre les différentes probabilités de paiements ou de survie. La réflexion peut à la fois porter sur les successions d'une même variable parmi les 3 présentées dans l'équation 2.1 ou bien sur les corrélations durant une même période entre deux de ces variables.

L'objet de cette section est donc de tenter de déceler dans nos données des comportements comme ceux-ci pouvant ensuite être adaptés et permettre l'amélioration du modèle. Pour ce faire, nous aurons recours aux notions que nous avons développées dans le chapitre précédent.

### Corrélations entre montants

Dans sa version initiale, le modèle de provisionnement additif présenté précédemment ne prenait en compte aucune potentielle corrélation lors du tirage des montants de paiements incrémentaux. En effet, comme nous l'avons expliqué lors de la présentation du modèle, le paiement effectué pour une quelconque année de développement pour un sinistre est choisi parmi tous ceux réalisés et connus (qu'ils soient nuls ou non) dans la base pour cette même année de développement sans aucune restriction ou précision supplémentaire. Cette façon de procéder peut ainsi paraître réductrice et manquer la prise en compte d'un ou plusieurs phénomènes de corrélation entre montants éventuellement présents lors du tirage des paiements.

Nous avons alors listé des éléments pouvant potentiellement être corrélés et impactant pour notre modèle et avons analysé la présence ou non de liens entre les variables. Pour chacun des corrélations étudiées, nous rappelons, quand cela est pertinent, les variables correspondantes dans l'équation 2.1. Nous nous sommes donc intéressés aux éventuelles corrélations entre :

- Le paiement incrémental réalisé lors d'une année de développement  $j$  et le paiement incrémental réalisé durant l'année de développement  $j + 1$  ( $X_{i,j}$  et  $X_{i,j+1}$ ),
- Le paiement total cumulé réalisé jusqu'à l'année de développement  $j$  et le paiement incrémental réalisé durant l'année de développement  $j + 1$  ( $\sum_{k=0}^j I_{i,k}$  et  $X_{i,j+1}$ ),
- Le montant de réserves connu en fin d'année de développement  $j$  et le paiement incrémental réalisé durant l'année de développement  $j + 1$ ,
- Le montant des charges dossier/dossier connu en fin d'année de développement  $j$  et le paiement incrémental réalisé durant l'année de développement  $j + 1$ .

Pour le reste de la présentation de la méthode utilisée, nous évoquerons comme variables les paiements incrémentaux réalisés en années  $j$  et  $j + 1$  par souci de simplicité. Aucune différence de traitement autre que celle que nous évoquerons par la suite n'a été mise en place selon le couple de variables considérées.

Pour visualiser ces éventuelles corrélations, nous avons fait le choix de raisonner par années de développement. Ainsi, pour chaque année de développement entre 0 et 18, nous avons isolé les sinistres pour lesquels la variable à analyser est pertinente. Cela signifie ici que pour chaque couple d'années de développement  $(j ; j + 1)$ , nous avons sélectionné seulement les sinistres encore ouverts en année  $j + 1$  et dont le paiement incrémental réalisé durant l'année  $j + 1$  est strictement positif. Par exemple, pour le couple d'années de développement  $(4, 5)$ , nous avons uniquement conservé les sinistres dont la différence entre l'année d'ouverture et de clôture est supérieure ou égale à 5 ainsi que ceux encore ouverts et survenus avant ou durant l'année 2013 (on rappelle que notre base s'étend sur la période 2000-2018). Nous avons ensuite retiré de l'analyse les sinistres vérifiant cette condition mais pour lesquels un paiement nul (ou négatif) avait été réalisé.

Cette manière de procéder nous a conduits à restreindre de manière assez importante le nombre de sinistres considérés. En effet, pour chaque année de développement, un nombre non négligeable de sinistres est associé à un paiement nul. Cet effet, combiné au nombre de sinistres connus encore ouverts qui se réduit avec le temps diminue drastiquement le nombre de sinistres étudiés et fait donc baisser la significativité des corrélations (ou de leur absence) observée durant les années de développement élevées.

Une fois cette sélection de sinistres réalisée, nous avons à disposition, pour chacun des sinistres, des triplets (*Numéro de sinistre ; Paiement incrémental année  $j$  ; Paiement incrémental année  $j + 1$* ), et ceci pour chaque année  $j$  comprise entre 0 et l'avant dernière année de développement connue. Nous sommes alors en mesure d'utiliser la méthode de visualisation des corrélations que nous avons pu décrire précédemment. Nous avons alors considéré, pour chacune des années  $j$  et chacune des deux variables de paiement incrémental, non plus les montants mais les valeurs de la fonction de répartition empirique en ces montants.

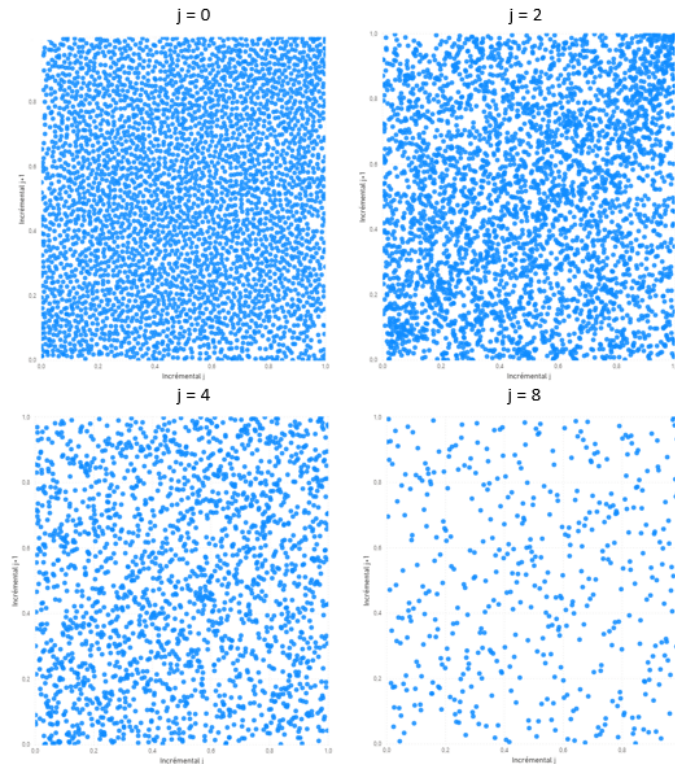


FIGURE 3.9: Représentation graphique des QQ-plots du paiement incrémental en année  $j + 1$  par rapport à celui réalisé en année  $j$  pour  $j = 0, 2, 4, 8$

Sur la figure précédente, nous pouvons observer les résultats graphiques concernant le paiement incrémental réalisé durant l'année  $j$  et celui réalisé durant l'année  $j + 1$  pour quelques années de développement (les autres années de développement sont présentées en annexe).

Nous remarquons facilement l'absence de structure de corrélation forte entre ces deux variables, peu importe l'année de développement  $j$  considérée. Nous pouvons même visuellement envisager en premier lieu la totale indépendance entre ces variables. Il semble donc qu'il serait peu intéressant de tenter l'ajustement d'une copule sur ces données. Pour conforter cette idée purement visuelle, nous avons réalisé des tests d'indépendance à l'aide des indicateurs de corrélations classiques que sont le coefficient de Pearson et le Tau de Kendall. Nous les présentons brièvement :

- Le coefficient de Pearson permet de mesurer l'ajustement d'une variable vis-à-vis d'une autre par une relation affine. Ce coefficient tend vers 1 lorsque les deux variables tendent à être liées par une fonction affine croissante, vers  $-1$  quand la fonction est affine décroissante et vers 0 lorsqu'il n'y a pas de lien ou bien que celui-ci ne se matérialise pas par une fonction linéaire,
- Le Tau de Kendall permet de son côté de capter une relation non linéaire monotone entre les variables. Il tend vers 1 quand le lien entre les variables tend à se rapprocher d'une fonction

croissante, vers  $-1$  quand celle-ci tend à être décroissante et vers  $0$  quand le lien ne se rapproche pas d'une fonction monotone.

En appliquant les tests d'indépendance proposés par le logiciel R (fonction *cor.test*) et que nous avons résumés dans la figure 3.10 en proposant les coefficients de corrélation en sortie, nous constatons qu'il existe finalement bien une forme de dépendance entre le paiement incrémental réalisé durant l'année de développement  $j$  et celui réalisé durant l'année de développement  $j + 1$  et donc qu'il n'y a pas d'indépendance stricte. Néanmoins, les coefficients de corrélations sont relativement faibles. Cette faiblesse des coefficients de corrélation renforce l'idée qui avait émanée des graphiques : il serait complexe et sans doute peu fructueux de tenter de calibrer une copule connue sur ce couple de variables. Néanmoins, utiliser la notion de copule empirique pour tenter de prendre en compte ce lien demeure tout à fait envisageable.

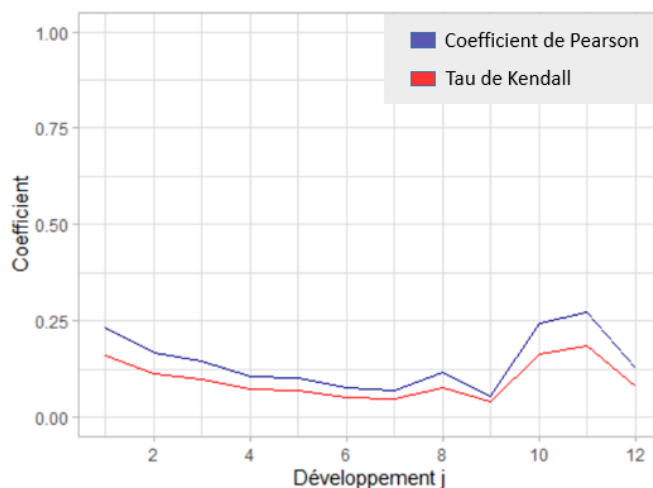


FIGURE 3.10: Représentation graphique des coefficients de corrélation entre paiements incrémentaux en années de développement  $j$  et  $j + 1$

Les méthodes, résultats et conclusions concernant le lien potentiel entre paiement cumulé jusqu'à l'année de développement  $j$  et paiement incrémental réalisé durant l'année  $j + 1$  sont en tous points similaires et les graphiques sont présentés en annexe pour le lecteur intéressé.

### Particularités concernant les données de réserves et de charges

Comme cela a été présenté précédemment, la longueur de la branche étudiée nous a conduits à prendre en compte et à modéliser un phénomène d'inflation sur nos données de règlements incrémentaux. Cette modélisation prenait en compte la destination du règlement (frais ou principal) ainsi que la date à laquelle celui-ci était effectué. Néanmoins, cette vision de l'inflation ne peut s'appliquer telle quelle aux montants de réserves et de charges associés aux sinistres.

En effet, le montant de réserves estimé par le gestionnaire de sinistres (et donc a fortiori celui de charge) n'est, comme son nom l'indique, pas un montant effectivement réglé mais une estimation du montant des règlements à venir concernant le sinistre jusqu'à sa clôture. Ce montant estimé peut donc

être étalé à des dates futures s'échelonnant sur plusieurs années, et la répartition frais/principal est totalement inconnue dans la base étudiée. Cela rend incohérent de tenter d'appliquer notre modèle d'inflation pour nous placer en vision 2018. Ainsi, pour tout de même obtenir une visualisation des corrélations éventuelles, nous avons fait le choix de nous appuyer sur les paiements disponibles dans la base avant traitement de l'inflation. Nous observons alors des couples (*réserve année de développement  $j$ , paiement incrémental année  $j + 1$  avant inflation*) pour les sinistres pour lesquels ces variables vérifient les conditions énoncées précédemment.

Ici, bien qu'encore une fois aucune structure de corrélation claire ne semble se dégager, nous observons dès la première année sur la figure 3.11 que la densité de points semble moins forte dans les coins haut-gauche et bas-droit du graphique. Cette tendance visuelle s'accroît, particulièrement pour le coin haut-gauche, avec les années de développement symbolisant un semblant de corrélation qui se renforcerait avec la durée de vie des sinistres. Nos impressions sont confirmées après application des tests de corrélation (voir figure 3.12), puisque l'indépendance est toujours rejetée et que le coefficient de Pearson calculé oscille entre 0,29 et 0,37, qui sont des valeurs sensiblement plus élevées que celles observées dans les cas précédents.

Néanmoins, ici aussi, la force de corrélation s'avère moins importante qu'attendue et nous conduit à ne pas tenter de la modéliser telle quelle pour améliorer notre modèle. En effet, même si un lien entre ces variables est bien visible, la prise en compte de ce lien s'avérerait complexe en terme d'implémentation. Le modèle additif n'a *a priori* vocation à ne simuler que des montants de règlements. Or, pour prendre en compte cette corrélation, le montant de réserve doit être disponible à tout moment et alors être lui aussi simulé par le modèle. Cela reviendrait à simuler un montant en plus et donc à ralentir le modèle ainsi qu'à rajouter de l'incertitude. Après arbitrage, l'impact de la prise en compte de ce lien nous a semblé trop incertain et il n'a alors pas été retenu pour la suite. Il existe cependant bien et pourra néanmoins servir de piste de réflexion dans des modèles plus poussés dans le futur.

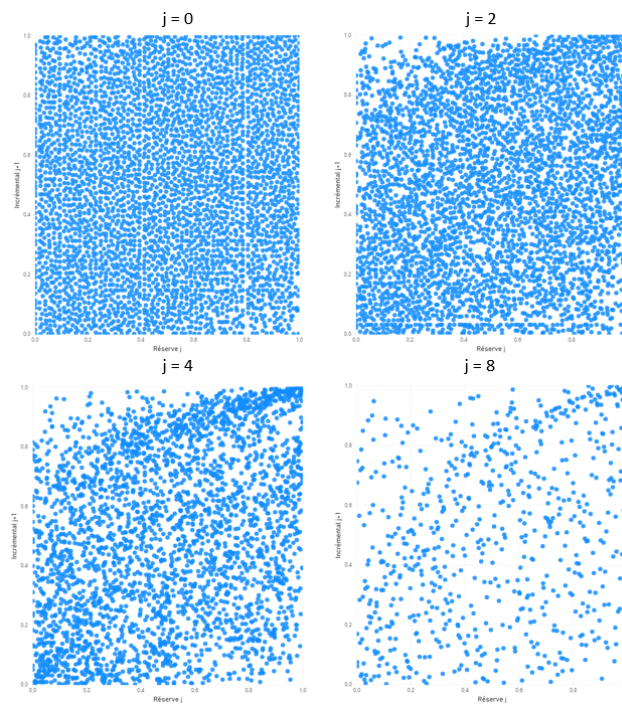


FIGURE 3.11: Représentation graphique des QQ-plots du montant de réserves en année  $j + 1$  par rapport au paiement incrémental non inflaté réalisé en année  $j$  pour  $j = 0, 2, 4, 8$

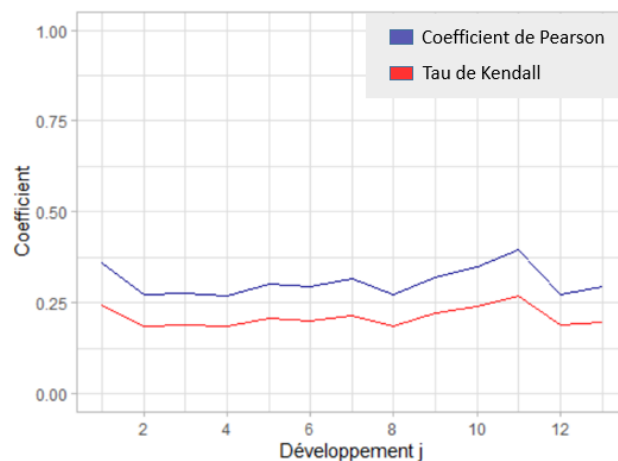


FIGURE 3.12: Représentation graphique des coefficients de corrélation entre réserve en année de développement  $j$  et paiement incrémental en année  $j + 1$

Concernant les corrélations entre charges et paiement incrémental, les remarques concernant l'inflation ainsi que les résultats sont largement similaires et présentés en annexe.

### Lien entre probabilités successives de paiement positif ( $P_{i,j}$ et $P_{i,j+1}$ )

Si nous avons, comme expliqué précédemment exclu de l'analyse des corrélations entre montants les sinistres présentant des montants nuls, ceux-ci peuvent apporter une information concernant le lien entre probabilités de règlement positif selon les années de développement. En effet, parmi les sinistres encore ouverts, lorsque l'on observe les couples (*paiement incrémental année  $j$ , paiement incrémental  $j + 1$* ), 4 groupes se forment selon l'existence ou non de montants positifs :

- Un paiement strictement positif est réalisé en année de développement  $j$  et en année de développement  $j + 1$ ,
- Un paiement strictement positif est réalisé en année de développement  $j$  et pas en année de développement  $j + 1$ ,
- Un paiement strictement positif est réalisé en année de développement  $j + 1$  et pas en année de développement  $j$ ,
- Un paiement strictement positif n'est réalisé ni en année de développement  $j$  ni en année de développement  $j + 1$ .

Nous nous sommes alors intéressés aux proportions occupées par ces différents groupes parmi les sinistres encore ouverts en fonction des années de développement afin de déceler un comportement persistant qui pourrait être pris en compte dans le modèle. L'idée serait ici d'adapter la façon dont les montants incrémentaux sont tirés pour chaque année de développement. En premier lieu, nous observons en figure 3.13 les proportions occupées par chaque groupe parmi la totalité des sinistres encore ouverts en année de développement  $j + 1$  qui nous permet de déceler une certaine stabilité.



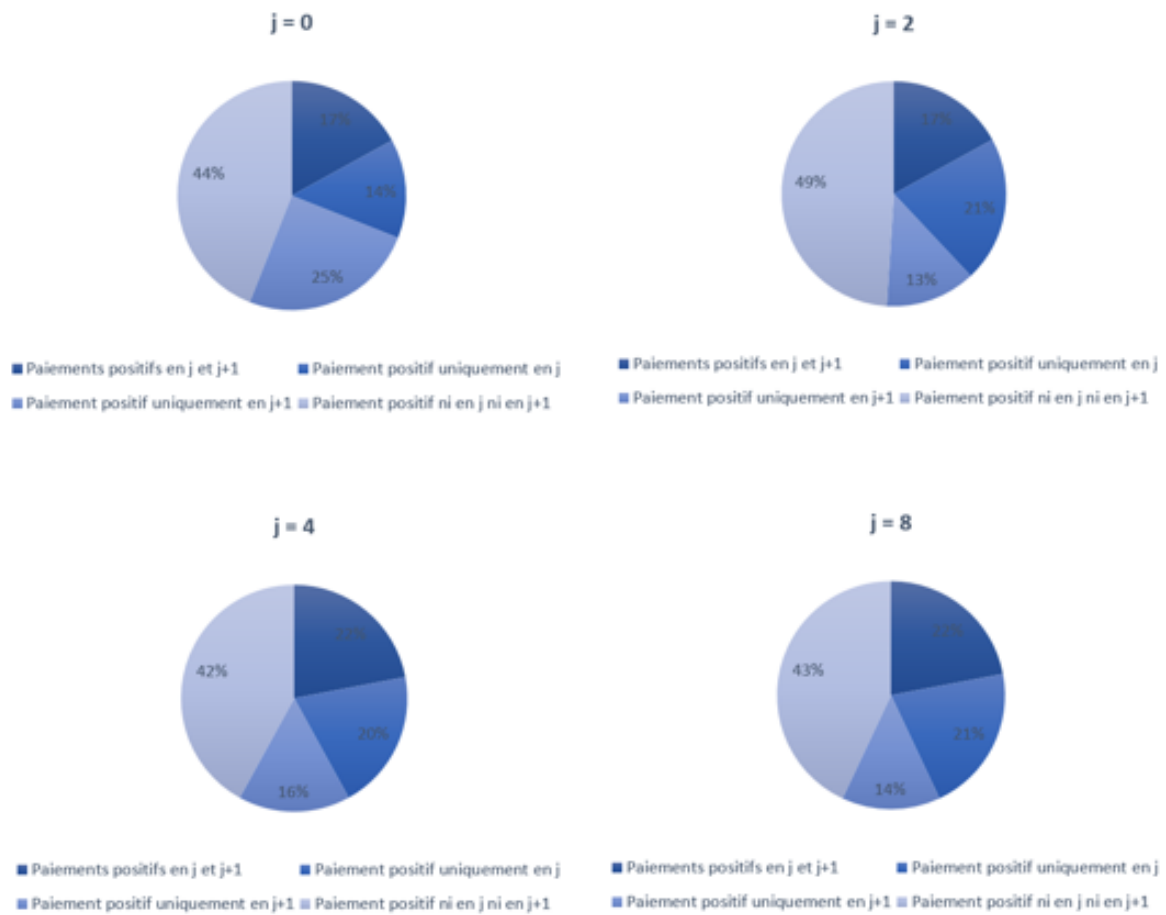


FIGURE 3.13: Proportion des différents groupes de sinistres pour les années  $j = 0, 2, 4, 8$

Nous voulons alors vérifier si dans nos données, nous observons une différence notable dans la proportion de sinistres nécessitant un règlement positif en année de développement  $j + 1$  selon les sinistres ayant, en année de développement  $j$ , subi ou non un règlement positif. Nous utilisons alors les probabilités conditionnelles afin de caractériser de possibles comportements redondants selon les années de développement. Nous calculons alors, pour chaque année de développement  $j$  la probabilité de réaliser un paiement strictement positif en année de développement  $j + 1$  sachant le paiement réalisé en année  $j$  strictement positif (resp. négatif ou nul). Cette probabilité se définit par

$$P(X_{j+1} = 1 | X_j = 1) = \frac{P(X_{j+1} = 1, X_j = 1)}{P(X_{j+1} = 1, X_j = 1) + P(X_{j+1} = 0, X_j = 1)}, \text{ (resp. } X_j = 0),$$

Avec  $X_j$  la variable aléatoire valant 1 si un paiement strictement positif a été réalisé en année de développement  $j$  et 0 sinon.

Nous constatons alors (voir figure 3.14) dès les premières années, un écart significatif entre ces deux probabilités : la probabilité de réalisation d'un paiement strictement positif en année de développement  $j + 1$  semble plus élevée sachant qu'un paiement strictement positif a été réalisé l'année précédente que sachant que cela n'a pas été le cas. Sur cet histogramme, nous constatons que cette tendance semble se maintenir dans le temps et que la différence entre les deux probabilités reste stable sur la durée.



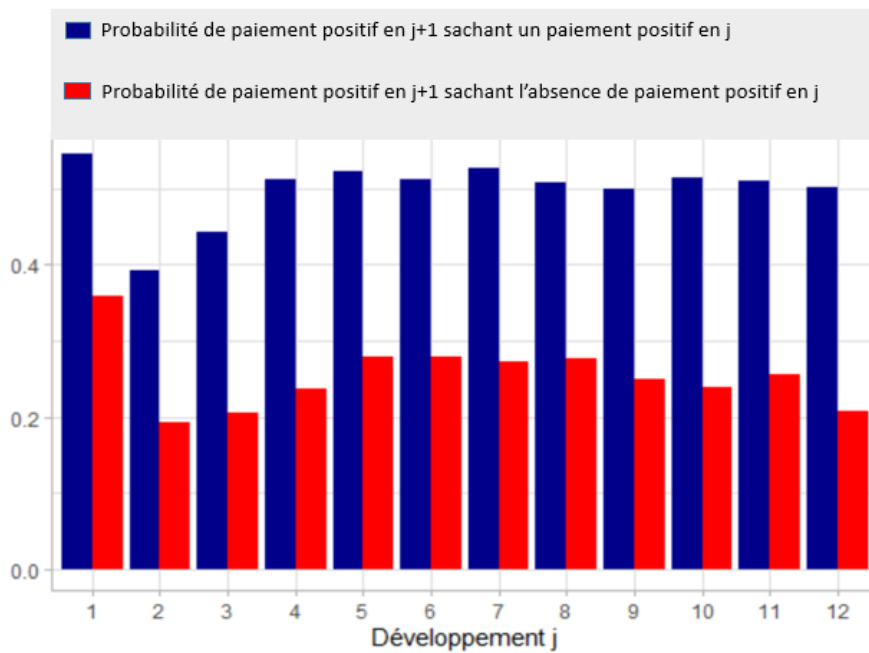


FIGURE 3.14: Histogramme des probabilités de paiement positif en année  $j + 1$  sachant la réalisation ou non d'un paiement positif en année  $j$

Cette information montre bien une des limites sur la façon dont procède ce modèle additif et pointe un axe clair d'amélioration afin d'augmenter potentiellement la précision des résultats.

### Lien entre règlement et probabilité de survie du sinistre ( $P_{i,j}$ et $D_{i,j+1}$ )

Parmi les autres dépendances susceptibles d'améliorer notre modèle, on trouve également celle entre la présence d'un règlement positif durant l'année  $j$  et la fermeture ou non du sinistre durant la même année. En effet, dans le modèle originel, l'état du sinistre au cours du temps est déterminé grâce à un estimateur de survie de Kaplan-Meier calibré sur la base complète des sinistres. On peut pourtant imaginer qu'un sinistre a plus de chance d'être fermé l'année suivant un règlement qu'après une année sans règlement.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons raisonné de manière tout à fait similaire à ce qui a été réalisé concernant les probabilités de paiement incrémental positif. Nous avons créé 4 groupes selon l'existence ou non d'un règlement positif en année  $j$  et selon l'état du sinistre en fin d'année. Nous avons ensuite comparé les probabilités de survie conditionnées au fait d'avoir généré un règlement strictement positif que l'on définit comme suit

$$P(Y_j = 1 | X_j = 1) = \frac{P(Y_j = 1, X_j = 1)}{P(Y_j = 1, X_j = 1) + P(Y_j = 0, X_j = 1)}, \quad (\text{resp. } X_j = 0),$$

Avec  $X_j$  et  $Y_j$  les variables aléatoires valant 1 respectivement si un paiement strictement positif a été réalisé en année de développement  $j$  ou si le sinistre reste ouvert à la fin de l'année de développement  $j$  et 0 sinon.

Encore une fois ici, une tendance claire se dégage de la figure 3.15, et l'on remarque bien pour chaque année de développement, une survie plus importante des sinistres ayant engendré un paiement positif sur l'année. L'écart entre les deux probabilités semble aussi être relativement stable au fil du temps. La seule exception concerne l'année d'ouverture des sinistres pour laquelle cette tendance est assez largement inversée. Cette forme de dépendance se présente alors comme une piste d'affinement du modèle qui pourrait améliorer sa précision.

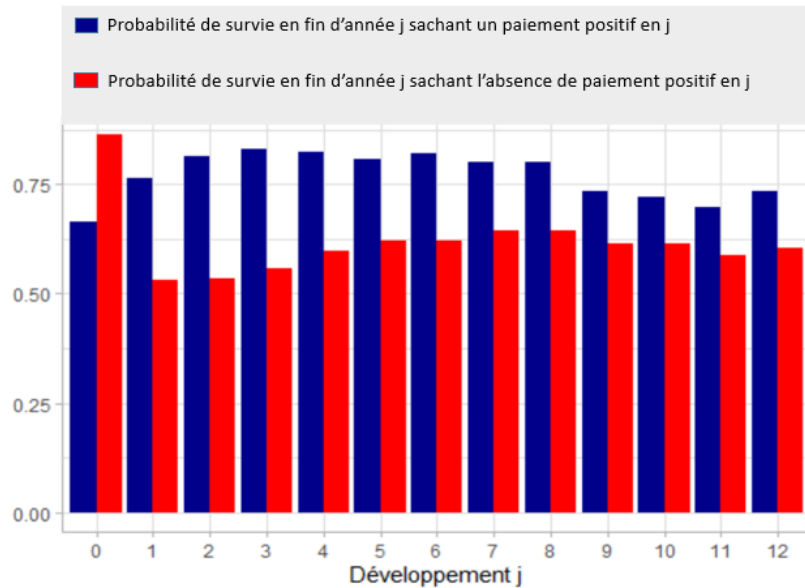


FIGURE 3.15: Histogramme des probabilités de survie en fin d'année  $j$  sachant la réalisation ou non d'un paiement positif en année  $j$

### Lien entre paiement strictement positif en année $j$ et montant réglé en année $j + 1$ ( $P_{i,j}$ et $X_{i,j+1}$ )

Un autre lien qui pourrait s'avérer utile dans le cadre du modèle serait celui entre le montant du paiement réalisé en année de développement  $j$  et la présence ou non d'un paiement strictement positif en année de développement  $j + 1$ . En effet, si une relation forte apparaît, nous pourrions alors, à partir du montant réglé en  $j$ , adapter, dans le modèle, la probabilité de subir un paiement strictement positif l'année suivante.

Nous proposons donc en figure 3.16, une représentation du montant moyen réglé en année de développement  $j$  selon la présence ou non d'un paiement en année  $j + 1$ . Nous pouvons observer un niveau beaucoup plus élevé pour les sinistres qui subissent un paiement en année  $j + 1$ , ce qui, de prime abord, peut sembler intéressant.

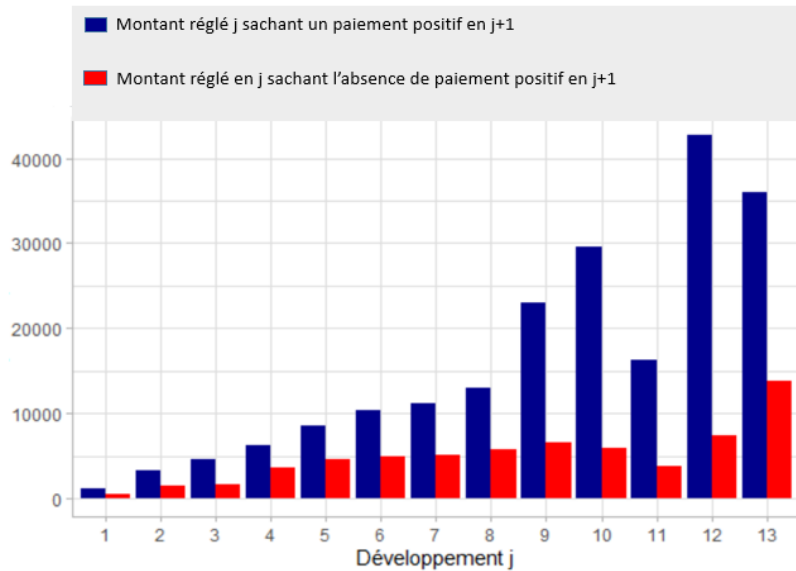


FIGURE 3.16: Histogramme des montants moyens réglés en année  $j$  sachant la réalisation ou non d'un paiement positif en année  $j + 1$

Néanmoins, cette observation peut être biaisée par la présence de paiements nuls ou négatifs en année  $j$  plus nombreux dans le cas où il n'y a pas de paiement en année  $j + 1$  comme l'a suggérée notre réflexion sur le lien entre les probabilités de paiements successifs strictement positifs précédemment. Nous faisons alors le choix de tracer à nouveau le même graphique en retirant cette fois-ci de l'analyse les sinistres dont le paiement incrémental réalisé en année  $j$  n'est pas strictement positif et présentons le résultat en figure 3.17.

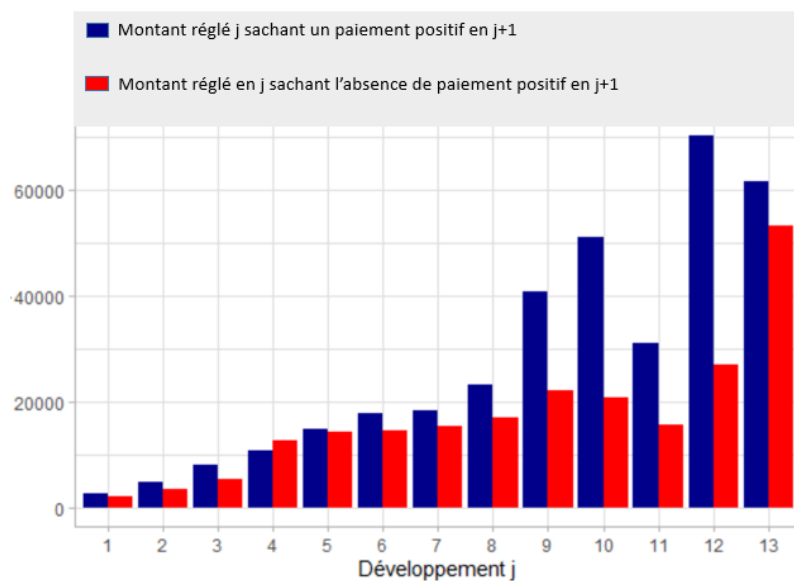


FIGURE 3.17: Histogramme des montants moyens réglés en année  $j$  sachant la réalisation ou non d'un paiement positif en année  $j + 1$

Nous constatons clairement une réduction de la tendance précédente. Si le montant réglé en  $j$  demeure légèrement supérieur pour les sinistres qui subissent un règlement l'année suivante, l'écart est trop faible pour qu'il soit prioritaire de prendre en compte cette corrélation dans le modèle.

Afin d'écartier définitivement ce lien, nous choisissons de tracer la distribution des montants réglés en année  $j$  en échelle logarithmique selon la présence ou non d'un paiement l'année suivante. En effet, l'histogramme représentant une valeur moyenne, il peut être utile de visualiser les densités dans leur entièreté afin de ne pas manquer des éventuelles distorsions qui ne seraient pas visibles en moyenne. Les résultats sont présentés en figure 3.18 pour les premières années de développement. Bien qu'un test de Kolmogorov-Smirnov rejette l'hypothèse selon laquelle les distributions suivent la même loi, nous constatons des densités tout de même proches et à l'allure similaire avec simplement un mode légèrement plus haut pour les sinistres qui nécessitent un paiement en année  $j + 1$ . Cet écart semble expliquer la différence observée sur l'histogramme. Ainsi, non seulement le montant moyen est proche, mais la répartition l'est aussi et nous choisissons alors de considérer que bien que ce lien existe, il n'est pas assez marqué et nous l'écartons alors de l'analyse.

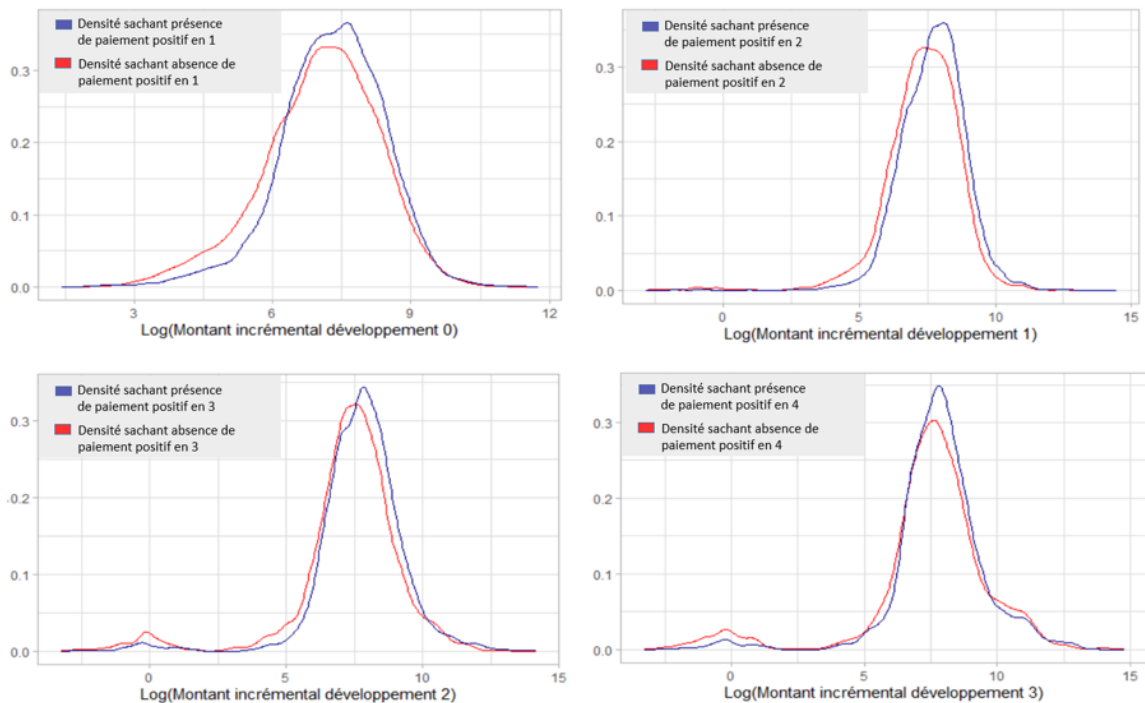


FIGURE 3.18: Densités des montants réglés en année de développement  $j$  selon la présence ou non d'un règlement en année  $j + 1$

### 3.2.3 Résultats du modèle raffiné

Comme nous avons pu le constater précédemment, la plupart des dépendances entre les variables que nous avons choisies d'analyser ne se sont pas avérées assez marquantes pour être prise en compte de manière prioritaire. La piste qui semble la plus prometteuse consiste en une nouvelle méthode de tirage de la durée de vie des sinistres ne s'appuyant plus sur un estimateur de Kaplan-Meier. Nous avons remarqué que cette durée était impactée par la réalisation ou non d'un paiement positif l'année précédente. Néanmoins, dans une analyse liée au modèle multiplicatif et que nous présenterons par la suite (3.3.2), nous constaterons une dépendance également de cette grandeur au niveau de charge

initial.

Nous allons donc utiliser cette dernière analyse pour tenter de raffiner le modèle. Ainsi, nous allons nous appuyer sur les notions que nous avons définies dans le chapitre 2 pour proposer un tirage de la durée de vie des sinistres encore ouverts (et même non encore ouverts) qui dépende du niveau de charge estimé par le gestionnaire (ou par le modèle pour les tardifs) en année de développement 0. La méthode de tirage sera présentée plus précisément par la suite (3.3.3). Ce modèle sera nommé par la suite comme modèle additif « durée de vie ».

Nous présentons en table 3.7 les statistiques descriptives concernant les montants ultimes prédits pour plusieurs valeurs différentes du paramètre de largeur autorisée et un nombre réduit de 100 simulations.

Paramètre	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur Chain-Ladder
0,2%	704	697	704	711	831
0,5%	708	701	707	715	831
1%	718	712	718	724	831

TABLE 3.7: Statistiques descriptives de la distribution du montant ultime simulée par le modèle additif « durée de vie » selon différents niveaux de paramètre et montant estimé par Chain-Ladder

Nous constatons une sous-estimation très importante du niveau d'ultime simulé avec cette approche. En effet, peu importe la valeur du paramètre, la probabilité associée au niveau estimé par la méthode de Chain-Ladder est nulle et le niveau global de la distribution est bien en-deçà de ce que nous avons déjà pu observer. Bien que, comme nous l'avons déjà évoqué, une comparaison uniquement à la valeur proposée par la méthode de Chain-Ladder n'est pas suffisante, il est évident que cette méthode ne peut être considérée comme satisfaisante, et nous allons tenter de pointer la raison de cette sous-estimation dans la discussion qui suivra.

Pour le tableau bilan, nous retiendrons, sans test supplémentaire du fait de la mauvaise qualité des résultats, le paramètre 0,5%.

### 3.2.4 Comparaisons

Jusqu'ici, nous avons procédé au déroulement de nos modèles et proposé une rapide comparaison que l'on peut qualifier de brutale au modèle de Chain-Ladder. Cette première comparaison, certes informative ne nous satisfait pas. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, le modèle de Chain-Ladder n'offre qu'un résultat unique et si cette méthode est une méthode de référence, elle est souvent adaptée aux données et pas forcément utilisée aussi directement qu'ici. Pour palier ces faiblesses inhérentes à cette méthode, nous avons choisi deux axes importants afin de mettre en relief les résultats des différents modèles.

#### Avis d'experts

Le premier élément auquel nous avons recours consiste en la consultation d'un panel d'experts.

L'idée était la suivante : dans le cadre d'un projet de provisionnement, spécialement avec une volonté *Best-Estimate* comme celle que essayons d'adopter ici, nous ne pouvions pas nous contenter

de comparer nos résultats à Chain-Ladder ou à une seule valeur. Les données agrégées ont alors été transmises à l'équipe d'actuaire provisionnement de KPMG. Chacun a ainsi reçu un triangle de nombres, un triangle de règlements sans inflation et un triangle de charges. En plus de cela, nous avons exposé à chacun la provenance des données, à savoir un portefeuille RC MED. Il a alors été proposé à chacun de dérouler ces triangles selon une méthode libre, en effectuant des choix ou ajustements absolument personnels et de fournir, *in fine* le montant ultime estimé, en précisant et justifiant les potentiels choix forts réalisés. Nous escomptions alors disposer d'un nombre satisfaisant (neuf) de résultats et méthodes potentiellement différentes auxquelles confronter nos résultats.

Avant de comparer les différents résultats, il semble intéressant, encore une fois dans une optique de compréhension du portefeuille et des potentielles faiblesses des modèles, de détailler quelques choix réalisés par l'équipe d'experts. Tout d'abord, il est important de souligner que les neuf résultats proposés par les participants sont différents. Ainsi, cette diversité des résultats montre la subjectivité inévitable dans la réalisation de ce type d'exercice et donc de la difficulté certaine de réaliser une estimation non pas prudente mais réaliste. Chacun effectue des choix qui lui sont propres à la lecture des données et qui impactent nécessairement les résultats. La variabilité des résultats obtenus auraient néanmoins probablement été réduite si des discussions avaient été organisées entre les actuaires. Par exemple, la valeur maximum proposée semble finalement trop prudente pour être considérée comme réellement *Best-Estimate* et les discussions auraient pu conduire son auteur à revoir quelques hypothèses.

Parmi les hypothèses prises nous pouvons citer :

- L'utilisation par l'immense majorité des actuaires du triangle de charges pour effectuer l'analyse. Ce choix se justifie par la longueur et la relative volatilité de ce type de branche. L'utilisation des charges est alors recommandée par rapport aux règlements par soucis de stabilité,
- La non prise en compte des premières années de la base. La connaissance de la loi About associée aux graphiques de facteurs ont conduit une bonne partie des experts à tout simplement retirer de la base les 3, 4 ou même 5 premières années de survenance,
- L'incorporation d'un facteur de queue, en premier lieu pour compenser la suppression de certaines survenances, et également pour prendre en compte la longueur excessive de la branche,
- La suppression de certains facteurs entre années jugés déconnectés des autres afin de ne pas leur accorder d'influence sur le reste des prévisions,
- La prise en compte pour le calibrage uniquement des diagonales les plus récentes du triangle pour avoir une vision du portefeuille qui colle plus à l'actualité de celui-ci. De plus, les changements dans le mode de gestion des sinistres se remarquent plus fortement sur le montant de réserve et donc de charge, ce qui conduit ce type de choix à être fréquemment réalisé lorsque le travail s'effectue sur les charges.

Les principales informations concernant les résultats obtenus sont présentées dans le tableau 3.8 ci-dessous, les neuf estimations sont présentées en annexe. Nous rappelons également la valeur Chain-Ladder « naïve » obtenue sur le triangle fourni aux experts sans prise en compte de l'inflation.

Valeur C-L naïf	Moyenne	Minimum	Médiane	Maximum	Amplitude des estimations en %
831	823, 8	770, 9	812, 6	921, 3	19%

TABLE 3.8: Statistiques descriptives des résultats proposés par le groupe d'experts (en Millions d'UM)

Ainsi, plus que l'adéquation à la valeur Chain-Ladder, c'est la position de la distribution du montant ultime prédit par le modèle dans cette pseudo-distribution qui va nous intéresser.

### Remarque

Notons également que cette confrontation des données aux experts permet une réflexion intéressante sur cette notion de *Best-Estimate*. En effet, avec l'avènement de la norme IFRS 17, cette évaluation *Best-Estimate* des provisions va prendre une place de plus en plus importante et sera inévitablement source de débats internes. Ici, nous constatons bien que, partant des mêmes données, avec une consigne similaire, un groupe d'experts propose des estimations de réserves pouvant varier assez sensiblement. Après échanges et discussions avec ceux-ci, tous les choix effectués et les hypothèses prises sont largement justifiables et correspondent à différentes prises en compte de la même information. Ce sont finalement des estimations plus ou moins agressives qui peuvent pourtant être pratiquement toutes qualifiées de *Best-Estimate*.

### Méthode bootstrap

Une autre méthode de comparaison à laquelle nous allons avoir recours est une méthode assez régulièrement utilisée en provisionnement et qui permet d'obtenir une distribution du montant ultime estimé. Il s'agit de la méthode bootstrap que nous avons présentée dans le premier chapitre. Cette méthode, ou plutôt une de ses variantes a été utilisée pour la simulation des sinistres tardifs non encore connus. Ici, nous proposons alors de comparer les résultats du modèle additif à ceux fournis par l'adaptation de la méthode bootstrap que nous avons utilisée dans le cadre du triangle de nombre. Nous rappelons ici que cette adaptation consistait à ne pas ré-échantillonner les résidus seulement dans le triangle supérieur mais dans l'intégralité du tableau. Nous avons mis en place cette méthode à la fois sur le triangle des règlements et le triangle des charges afin de multiplier les comparaisons possibles.

Nous présentons alors en figure 3.19 les distributions des montants ultimes simulés par cette méthode ainsi qu'en table 3.9, les principales statistiques descriptives de la distribution.

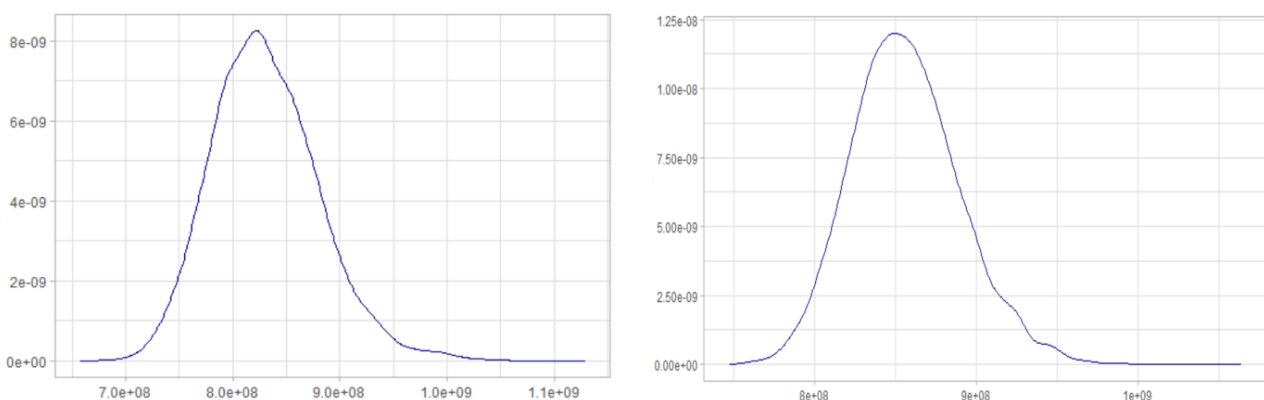


FIGURE 3.19: Distribution du montant ultime simulé par bootstrap sur triangle de règlements (à gauche) et de charges (à droite), en millions d'UM

Triangle	Ecart type	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
Règlements	50	830,8	795,6	827	861,8
Charges	34	855	833	857	877

TABLE 3.9: Statistiques descriptives du montant ultime simulé par bootstrap (en millions d'UM)

Nous observons ici une estimation sensiblement plus haute dans le cas de l'utilisation du triangle de charges. Nous comprenons par là que le choix des triangles aura un impact important sur les estimations.

### Comparaisons et discussions

Les premières comparaisons et discussions que nous proposons d'effectuer concernent le modèle additif de départ, sans raffinement et les autres méthodes de simulations que nous avons présentées.

Comme déjà évoqué, le modèle additif offre une distribution qui se situe majoritairement à gauche de la valeur prédite par la méthode de Chain-Ladder naïve. Néanmoins, la mise en relief de la distribution simulée avec les autres méthodes nous permet de réaliser des comparaisons plus complètes. En effet, par rapport aux avis d'experts, l'estimation Chain-Ladder se situe là encore parmi les valeurs les plus élevées (il occupe la troisième place si nous classons les valeurs), ce qui semble indiquer une tendance légère à la sur-estimation. A l'inverse, la moyenne de la distribution produite par le modèle se situe en dessous de la médiane, en sixième position (sur 10) et il est intéressant de noter que finalement, les avis donnés par les experts sont pour l'immense majorité associés à des probabilités très positives dans la distribution du modèle (hormis la plus prudente). Il s'agit d'un signe de bon comportement du modèle. Si l'on revient à la remarque concernant la notion de *Best-Estimate*, nous pouvons noter le fait que le modèle présente finalement une distribution de valeurs que l'on peut légitimement accepter comme étant *Best-Estimate*. De ce point de vue, le comportement du modèle semble être satisfaisant.

D'autre part, mettons en relief la distribution du modèle aux distributions proposées par la méthode bootstrap. Tout d'abord, notons, comme attendu qu'en moyenne, la méthode bootstrap converge globalement vers la valeur proposée par la méthode de Chain-Ladder (sur les deux triangles). Ensuite, nous constatons une distribution beaucoup plus volatile concernant la méthode bootstrap sur règlements que sur le modèle, et finalement, ce modèle additif semble proposer une distribution plus resserrée se situant sur la partie gauche de la distribution bootstrap sur règlements. Dans une optique *Best-Estimate*, ce surplus de volatilité de la méthode bootstrap semble assez dérangeant. Là encore, le modèle semble donc se comporter de manière satisfaisante. Néanmoins, la distribution du modèle est bien inférieure à celle obtenue par bootstrap sur le triangle de charges. Compte-tenu des écarts observés entre les deux distributions bootstrap, la comparaison du modèle additif à la distribution de bootstrap sur charges semble néanmoins peu pertinente, les données utilisées étant différentes.

Nous nous devons maintenant de revenir sur la tentative d'amélioration du tirage de la durée de vie que nous avons mis en place. La comparaison plus complète des valeurs présentées en table 3.7 confirme la lourde sous-estimation du montant ultime proposée par cette approche. L'approche additive simple étant relativement satisfaisante, le problème de cette méthode réside alors dans la façon dont une durée de vie est affectée à chaque sinistre.

Cette idée s'est confirmée en décomposant les étapes du modèle puisque le niveau moyen de réserve affecté par sinistre et par année de développement reste similaire selon les deux approches. La différence s'observe finalement dans la décroissance du nombre de sinistres toujours ouverts après chaque année



de développement. Avec la méthode initiale utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier, un nombre bien plus important de sinistres demeure ouvert pour les années de développement élevées. De plus, cet écart entre les deux méthodes semble s'accroître sur les années élevées. Par exemple, quand en moyenne, le modèle additif initial conserve, en année de développement 17 environ 400 sinistres ouverts, l'utilisation de la copule fait tomber ce nombre à moins de 100.

Une explication peut être apportée à ce phénomène. En effet, la copule utilisée pour déterminer la durée de vie des sinistres encore ouverts n'est obtenue qu'à l'aide des sinistres dont la durée de vie est connue, c'est à dire des sinistres clos. En procédant de la sorte, les sinistres anciens encore ouverts ne sont pas pris en compte dans cette copule. Une sous-représentation des sinistres ayant une durée de vie élevée est donc inévitable. Par exemple, les sinistres étant restés ouverts jusqu'en développement 17 inclus ne sont présents dans la copule que grâce aux sinistres ouverts en 2000 et clos après 2017. A l'inverse, les sinistres clos après l'année de développement 0 sont déjà tous connus à fin 2018, et les 19 survenances sont alors prises en compte. Un autre exemple peut s'avérer intéressant : si l'on veut affecter une durée de vie à un sinistre ouvert en 2018, un sinistre ouvert en 2002 et clos la même année apparaîtra dans les tirages possibles quand un sinistre ouvert en 2002 et non encore clos à fin 2018 n'apparaîtra pas. On diminue ainsi la probabilité pour ce sinistre de se voir affecter une durée de vie élevée. Ce phénomène est plus marqué quand les observations deviennent rares, c'est-à-dire pour les années de développement élevées.

Cette non-représentativité de la copule conduit donc à réduire largement le nombre de sinistres encore ouverts en développement élevé. Alors, le nombre de développement à effectuer en moyenne pour les sinistres est lui aussi réduit, et inévitablement le montant ultime prédit diminue.

Ce problème lié à la façon dont est construite la copule pourrait potentiellement être corrigé. En effet, pour éviter le décalage que nous avons évoqué dans la prise en compte des sinistres, il pourrait s'avérer efficace de n'utiliser pour estimer la durée de vie, que les sinistres associés à des survenances « complètes », c'est-à-dire, dont tous les sinistres sont clos. Dans notre cas, ce n'est pas envisageable car nous ne disposons d'aucune survenance vérifiant ceci (même la survenance 2000 a encore quelques sinistres ouverts, que nous ne développons pas après l'année 18). Cependant, pour une branche moins longue (Dommages Automobiles par exemple), une historique aussi profond que celui dont nous disposons ici pourrait permettre d'utiliser plusieurs années pour effectuer ensuite le tirage de la durée de vie et de contrôler réellement la pertinence de cette méthode.

### 3.3 Le modèle multiplicatif

#### 3.3.1 Résultats du premier modèle et comparaison à Chain-Ladder

##### Choix de la variable d'intérêt

Lors de la présentation du modèle, nous avons évoqué la possibilité de l'utiliser sur les montants de paiements cumulés comme sur les montants de charges. Si les deux approches conduisent en théorie à une estimation satisfaisante du montant à l'ultime, les faiblesses que nous avons évoquées peuvent nous conduire à largement en privilégier une des deux. En effet, selon le type de branche, et la variable choisie, la part des « cas particuliers » que nous avons détaillés précédemment peut être plus ou moins importante. Si elle l'est, cela peut faire perdre de l'intérêt au modèle. Nous nous intéressons alors ici en figure 3.20 au nombre et à la part, parmi les sinistres de la base, représentés par les sinistres dont le paiement cumulé ou la charge sont encore nuls selon les années de développement (et qui imposeront donc de supprimer des facteurs de développement ou de subir un traitement particulier

pour les simulations).

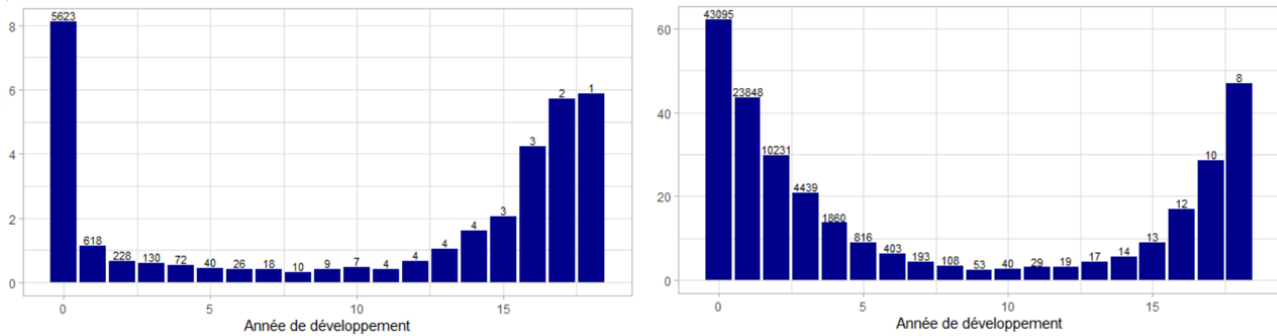


FIGURE 3.20: Part et nombre de sinistres dont la charge (à gauche) ou le paiement cumulé (à droite) est nul selon les années de développement

Pour des questions de facilité de visualisation, notons que l'échelle de l'axe des ordonnées n'est pas le même sur ces deux graphiques. Nous remarquons ainsi que la part de sinistres toujours « nuls » est très importante concernant le paiement cumulé. Cette part apparaît comme encore plus importante comparativement lorsqu'on met cette donnée en relief avec la même information concernant le montant de charge. Le nombre de coefficients utilisables serait donc bien plus faible en utilisant le paiement cumulé. En plus de cela, après étude de la base, nous faisons face à 8183 sinistres encore ouverts et qui sont donc à traiter par notre modèle. Si nous analysons un peu plus en détail ces sinistres sur lesquels nous devons effectuer des prédictions, 2798, soit environ 35% présentent un dernier montant de paiement cumulé connu nul. Ce sont donc des sinistres pour lesquels nous devrions utiliser notre méthode des cas particuliers et pour lesquels nous projeterions alors directement un montant ultime sans passer par des facteurs de développement. En regardant encore plus en détail, plus de la moitié des sinistres ouverts en 2018 et non clos la même année sont dans cette situation. Nous devrions alors projeter directement à l'ultime une part gigantesque de sinistres.

Devoir appliquer à une part aussi importante de sinistres une méthode censée servir aux cas « particuliers » ferait perdre grandement le modèle en pertinence. Un modèle étant incapable de gérer plus d'un tiers des observations ne peut pas être satisfaisant dans notre situation. Ce pourcentage est à l'inverse très faible concernant les charges. Le nombre de facteurs de développement disponibles est alors bien plus grand et le nombre de sinistres à traiter « particulièrement » bien plus faible concernant la variable de charge que la variable de paiement cumulé. Cette réflexion appuie celle que nous avons effectuée durant le chapitre précédent concernant le nombre d'adaptations que nécessite ce type de modèle à l'échelle individuelle et qui est une des faiblesses évidente de celui-ci avant même d'en observer les résultats.

Ainsi, appliquer le modèle sur les paiements cumulés ne semble pas adapté à la branche Responsabilité Civile Médicale que nous étudions ici. Nous avons donc fait le choix, pour le modèle multiplicatif, de travailler en utilisant les charges. Néanmoins, nous devons garder en tête que le fait de s'appuyer sur des montants de charges nous expose à un autre potentiel biais. Comme nous l'avons expliqué durant le premier chapitre, le niveau de charges est constitué à la fois des règlements déjà effectués concernant le sinistre mais également du niveau de réserve estimé par le gestionnaire de sinistres. Ce niveau étant une estimation, nous exposons notre modèle à de potentielles mauvaises estimations de la part du gestionnaire, ce qui n'aurait pas été le cas en utilisant les règlements cumulés. Nous n'aurons également plus d'informations sur le déroulé des règlements ni sur la charge à 1 an. Nous estimons cependant que les arguments que nous avons déjà évoqués en faveur de l'utilisation du montant de

charge contrebalancent largement ce point.

Nous pouvons également noter que le nombre de facteurs de développement négatifs, et que nous avons donc dû écarter est extrêmement faible (moins de 0,5% des facteurs de développement peu importe l'année de développement considérée). Enfin, le nombre de sinistres à traiter présentant un dernier montant négatif de charges connues est également très faible (seulement deux dans notre base), et nous rappelons que ces sinistres seront considérés comme ayant déjà atteint l'ultime. Au regard de la faible fréquence d'apparition des ces deux cas particuliers, nous ne revenons pas sur notre méthode de traitement, bien que celle-ci présente d'évidentes faiblesses.

### Premiers résultats

Avant de nous intéresser aux résultats complets du modèle, intéressons-nous à ce qui constitue la pierre angulaire de celui-ci, à savoir les facteurs de développement. En effet, cette première visualisation des coefficients nous permettra potentiellement d'anticiper quelques problèmes auquel fera face notre modèle, ou même sera une clé de compréhension face aux résultats. Nous présentons alors en table 3.10 quelques statistiques descriptives des facteurs de développement individuels selon une sélection d'années de développement. Notons que le facteur de développement  $j$  correspond à celui qui permet le passage de l'année de développement  $j - 1$  à l'année de développement  $j$ .

$j$	Moyenne	Maximum	Facteurs < 1	Facteur = 1	Facteur > 1	Nombre de facteurs
1	8,8	40 306	14 659	13 370	13 283	41 312
3	15,3	117 611	7 154	4 736	6 343	18 233
6	1,84	1 035	2 010	1 607	2 403	6 020
9	6,7	10 000	769	628	743	2 140
12	1,3	34	186	208	184	578

TABLE 3.10: Statistiques descriptives des facteurs de développement selon différentes années de développement

Comme attendu, ce tableau nous donne des informations plutôt intéressantes. Tout d'abord, nous remarquons que les parts de facteurs inférieurs, supérieurs ou égaux à 1 restent relativement stables durant les premières années. Par la suite, la part de facteurs égaux à 1 prend de plus en plus d'importance. Cela signifie que des sinistres anciens ne subissent que peu de réévaluations durant les années élevées. Soit les règlements suivent les anticipations de réserve du gestionnaire, soit le sinistre n'évolue plus du tout. Information plus importante encore, nous observons des facteurs de développement maximum très élevés, atteignant même plus de 100 000. Les facteurs de développement extrêmes demeurent même extrêmement élevés pour des années de développement avancées : un facteur 10 000 est appliqué en développement 9.

Cette caractéristique de notre base de données risque de poser problème pour l'obtention de résultats satisfaisants. En effet, en nous attardant sur les sinistres étant responsables de ces facteurs extrêmes, nous ne décelons que peu de similarités dans le déroulement de ces derniers. Ces facteurs extrêmes apparaissent pour des années de développement différentes et le déroulé des sinistres ne présente que peu de points communs. Nous pouvons par exemple observer :

- Des sinistres avec un premier niveau de charge très faible, qui augmente ensuite brusquement avant de rester stable jusqu'à la clôture,
- Des sinistres estimés très haut en début de vie, revus à la baisse ensuite et finalement remis à un niveau extrême en cours de vie et clôturés à un niveau toujours extrême,

- Des sinistres estimés bas, rehaussés en cours de vie, et finalement clôturés à un niveau bas,
- ...

Nous remarquons néanmoins que les facteurs extrêmes présentent la particularité d'être appliqués uniquement sur des montants de charges très faibles (allant de 1 à 10  $UM$ ). C'est somme toute relativement logique et correspond à notre première analyse concernant la pertinence d'une éventuelle séparation en amont selon la gravité du sinistre. Nous pouvons anticiper le fait que le tirage d'un (ou plusieurs) de ces facteurs pour un montant de charge plus élevé aura un impact considérable sur le montant ultime prédit et nous pouvons donc très certainement nous attendre à une sur-estimation globale et importante du montant ultime dans cette version initiale du modèle. Une réflexion sera donc forcément à aborder concernant ce point dans la suite de notre travail.

Comme pour le modèle additif, nous présentons ici très brièvement les résultats du modèle multiplicatif dans sa version initiale. Notons qu'au moment de soustraire les règlements connus à la charge ultime simulée, nous utilisons les règlements sans prise en compte de l'inflation pour rester en cohérence avec les niveaux de charge pour lesquels l'inflation ne peut pas être traitée. Les statistiques descriptives associées à la distribution en question sont présentées en table 3.11. Les conclusions ici sont beaucoup plus simples à effectuer que concernant le modèle additif puisque l'on remarque clairement une explosion des valeurs proposées par cette méthode. Comme l'on pouvait s'y attendre, les spécificités liées aux facteurs de développement de notre base de données conduisent d'immenses facteurs à être appliqués sans distinction sur de gros ou de petits sinistres et créent alors une sur-estimation énorme du montant ultime. Les valeurs et la volatilité sont alors énormes. Ainsi, restent deux possibilités sur lesquelles vont porter notre réflexion :

- La méthode de tirage que nous avons retenue n'est pas satisfaisante et un raffinement de celle-ci pourra faire largement progresser le modèle et le conduire à des estimations acceptables,
- Nous ne parvenons pas à faire progresser suffisamment le modèle, et donc nous pourrions conclure que celui-ci n'était visiblement pas adapté aux données que nous avons à disposition.

Ecart type	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
876 000	152 071	12 327	21 850	54 473

TABLE 3.11: Statistiques descriptives du montant ultime simulé par le modèle multiplicatif (en millions d'UM)

Si ce constat peut apparaître comme décevant, il permet néanmoins une réflexion intéressante. En effet, ce type de modèle de provisionnement individuel multiplicatif a déjà été mis en place dans certains mémoires (LE et VIROT, 2013 notamment) et fournissait des résultats acceptables. C'est très loin d'être le cas ici. Nous comprenons alors un aspect important qui peut freiner le développement des méthodes individuelles : la sensibilité exacerbée aux données. Si les méthodes agrégées étaient déjà relativement dépendantes des données en présence, les méthodes individuelles semblent être encore plus sensibles aux données utilisées et rendre l'application d'une méthode aussi générale que celle de Chain-Ladder complexe.

### 3.3.2 Recherche de corrélations et raffinements

Nous venons de constater que les résultats du modèle multiplicatif dans sa version naïve ne peuvent être considérés comme satisfaisants et conduisent à une très importante sur-estimation du niveau

d'ultime et donc du niveau de PSAP. De la même manière que concernant le modèle additif, nous avons ici pour objectif de chercher des informations présentes dans les données qui pourraient nous permettre de raffiner et améliorer le modèle initial. Nous allons alors nous intéresser à plusieurs pistes que nous avons tenté d'explorer durant ces travaux.

### Corrélation entre durée de vie et charge initiale

Le premier lien que nous choisissons d'étudier, pourrait non seulement servir à améliorer le modèle multiplicatif mais pourrait également être pris en compte dans le cadre du modèle additif puisque celui-ci permettrait de gagner éventuellement en précision concernant le tirage de la durée de vie. En effet, lorsque nous tirons la durée de vie du sinistre, nous nous appuyons sur l'estimateur de Kaplan-Meier sans prendre d'autres données en compte. Néanmoins, il semble naturel de penser que le niveau de charge à la fin du développement 0 est en lien avec la durée de vie. Le niveau de réserve estimé par le gestionnaire de sinistres peut tout à fait être perçu comme un indicateur de la complexité du sinistre et donc potentiellement de sa durée de vie. Notre première idée consisterait à envisager la durée de vie comme étant plus importante dans le cadre d'un sinistre pour lequel la première estimation de la charge se situe à un niveau élevé. Pour ce faire, nous avons en premier lieu analysé la moyenne et la médiane de la première charge par rapport à la durée de vie des sinistres en année. Pour éviter de potentiels problème d'échelles, nous avons utilisé les statistiques de rang afin de pouvoir ramener le niveau de charge entre 0 et 1. Les résultats sont présentés en figure 3.21.

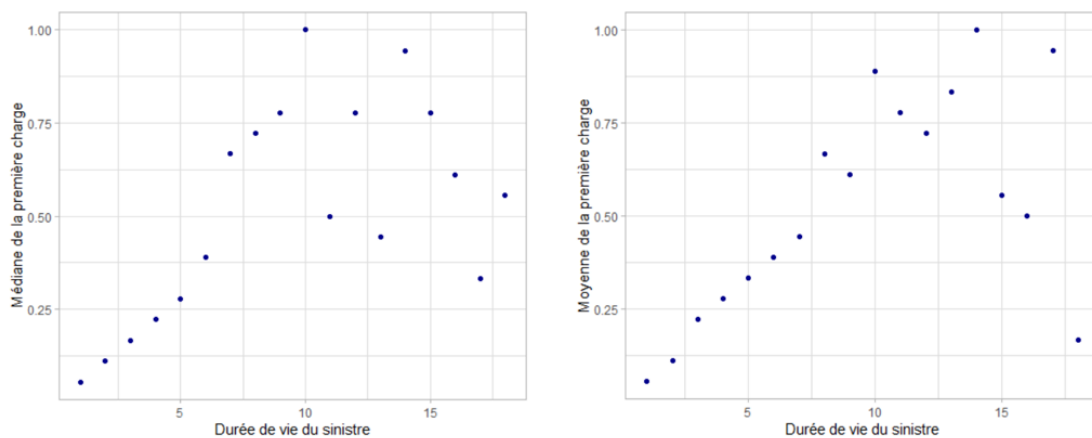


FIGURE 3.21: Médiane et moyenne de la charge initiale en fonction de la durée de vie des sinistres

Nous remarquons sur le graphique concernant la moyenne un lien clairement croissant entre durée de vie et montant de la première charge. Hormis sur les dernières années, pour lesquelles nous disposons de bien moins de données, ce lien semble clair. Néanmoins, en observant le graphique concernant la médiane, la clarté de ce lien disparaît après un peu moins de 10 années de développement. Ainsi, il semble bien y avoir un lien entre la durée de vie et le montant de charge initiale qu'il pourrait être intéressant de prendre en compte. Cependant, nous avons remarqué, en nous plaçant non plus en moyenne ou en médiane mais au niveau individuel que ce lien semblait finalement bien moins marqué, et même absent comme nous pouvons le remarquer en figure 3.22, et le coefficient de corrélation de Pearson n'est que de 0,17.

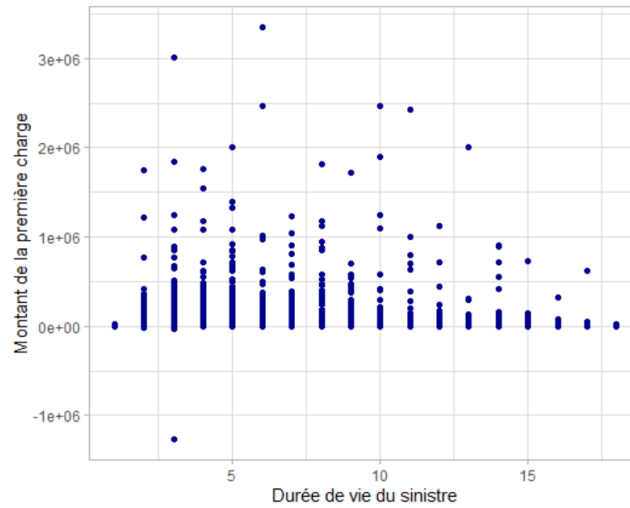


FIGURE 3.22: Montant de la charge initiale en fonction de la durée de vie des sinistres

Ce résultat nous a en premier lieu surpris et nous avons décidé de continuer à chercher dans cette direction. Sur cette figure, chaque point représente un sinistre et il apparaît compliqué de lire réellement ce dernier du fait du découpage en année de la durée de vie. Une piste intéressante nous a alors semblé être d'ajouter plus de variabilité à la notion de durée de vie. Pour ce faire, nous avons choisi de retravailler sur nos données de sorte à utiliser une granularité aussi précise que possible concernant la durée de vie des sinistres. Nous avons donc choisi d'exprimer cette dernière non plus en années mais en jours cette fois-ci afin de disposer de plus de points et de quelque chose de plus visible que sur le graphique précédent. Encore une fois, pour éviter les problèmes d'échelle, nous avons remplacé nos deux variables entre 0 et 1 en utilisant des statistiques de rang. Les résultats sont présentés en figure 3.23.

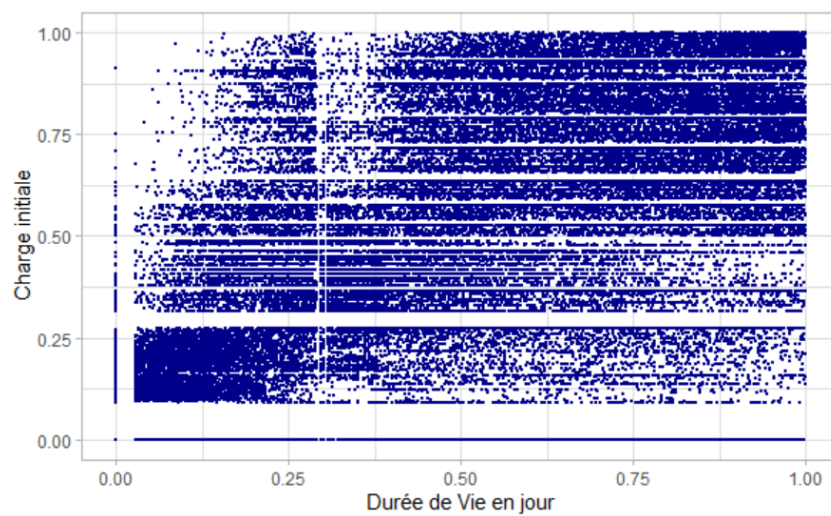


FIGURE 3.23: Montant de la charge initiale en fonction de la durée de vie des sinistres exprimée en jours

Nous observons alors cette fois-ci des résultats plus concluants et en accord avec les deux premiers graphiques. En effet, nous constatons une densité de points beaucoup moins forte dans les coins haut-gauche et bas-droite que dans la diagonale du graphique. Ainsi, les sinistres à la charge initiale élevée n'ont que peu de chances d'être associés à une durée de vie faible et inversement (même si cela semble moins marqué), un faible montant de charge initiale débouche plus rarement sur une durée de vie longue que sur une durée de vie courte. Cette analyse purement graphique est confirmée lorsque l'on calcule le coefficient de corrélation entre ces deux variables puisque le coefficient de Pearson vaut 0,57. Ainsi, nous considérons ce résultat comme très intéressant.

Une idée d'amélioration des deux modèles pourrait donc consister en un tirage de la durée de vie du sinistre selon une copule liant durée de vie et charge initiale calibrée sur les données. A noter sur ce graphe que les « strates » horizontales correspondent à des cas d'égalité du niveau de charge initiale, à 1 pour la plus importante d'entre elles. Ces niveaux sont des valeurs fréquemment attribuées par le gestionnaire de sinistres, on peut dans certains cas parler « d'ouverture au forfait » (première charge à 1000 par exemple). Verticalement, nous en observons beaucoup moins, mais une paraît aussi relativement importante. Nous avons donc choisi de vérifier à quelle durée de vie celle-ci correspondait. Nous avons alors pu observer qu'il s'agissait de la valeur 365 jours correspondant à une fermeture après 1 an. Ainsi, si nous n'observons pas de vague de fermeture en janvier ou février, un léger surnombre de sinistres se voit clôt par le gestionnaire après exactement un an de vie.

Cette information, non essentielle pour nos modèles, nous permet d'avancer encore plus dans la compréhension de notre base de données. En échangeant avec nos partenaires, nous avons compris que ce pic provenait d'une procédure automatique de fermeture présente au niveau de la gestion de sinistres.

### **Corrélation entre facteurs de développement et niveau de charge précédente**

Nous avons par la suite cherché à comprendre le lien entre les facteurs de développement et la charge précédente. C'est-à-dire entre le facteur de développement permettant le passage d'une année de développement  $j$  à une année  $j + 1$  et le montant de charge en année de développement  $j$ . Si ce lien existe de toute évidence puisque la charge précédente n'est autre que le dénominateur du facteur de développement, il nous semble primordial de comprendre plus en profondeur celui-ci pour essayer de l'incorporer au modèle. Il pourrait permettre une ségrégation des coefficients possiblement selon le montant de la dernière charge connue et ainsi en quelques sortes raisonner notre modèle et empêcher le tirage d'un facteur extrême pour un sinistre dont la charge est déjà estimée à un niveau élevé. Cela permettrait alors de ne pas effectuer concrètement la séparation des sinistres entre graves et attritionnels mais d'envisager une forme plus fine de prise en compte des montants de charge dans le tirage du facteur. Nous avons donc décidé d'observer l'ensemble des facteurs de développement individuels toutes années de développement confondues en fonction du niveau de charge précédent sur un même graphique. Pour plus de visibilité, nous avons exprimé ces deux grandeurs en échelle logarithmique.

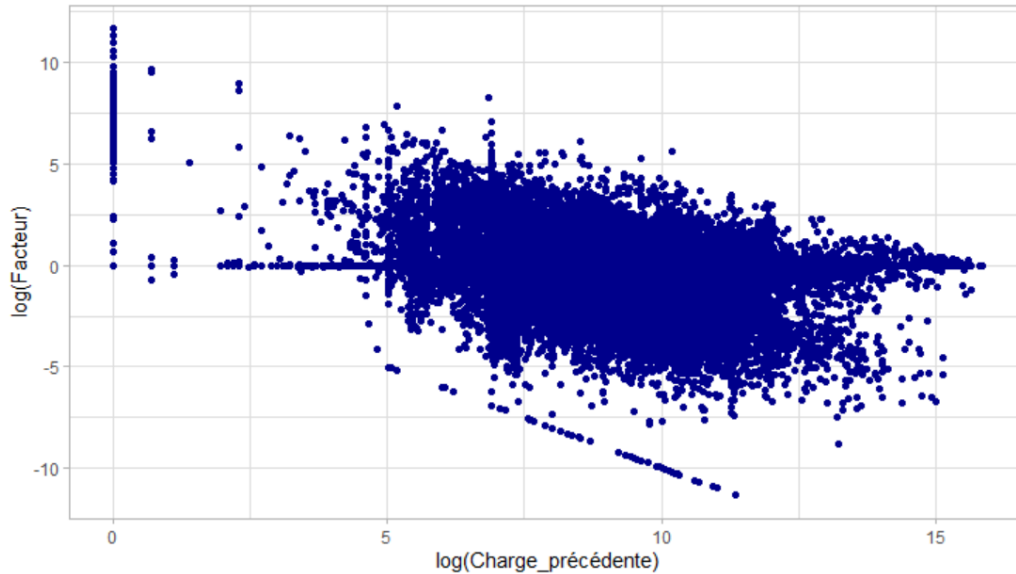


FIGURE 3.24: Logarithme du facteur de développement par rapport à celui de la charge précédente

Les résultats sont ici très intéressants. Tout d'abord, les facteurs de développement les plus extrêmes sont observés pour une charge précédente très faible et même égale à 1 dans la majorité des cas, comme nous l'avons avancé après une première réflexion sur ces facteurs. La ligne diagonale qui se dessine sur la partie basse du graphique correspond à une remise à 0 des sinistres concernés : il n'y a pas encore eu de règlements et la réserve est remise à 0 par exemple.

Sur la partie supérieure du graphique, nous observons le résultat le plus intéressant. Nous remarquons ce qui s'apparente à un triangle. Alors, si nous nous concentrons sur les facteurs supérieurs à 1, nous comprenons donc que lorsqu'une charge est élevée, la possibilité de tirer un facteur extrême est faible, voire nulle et que finalement l'intervalle sur lesquels les facteurs peuvent être tirés se réduit rapidement. Plus la charge associée à un sinistre est forte, moins l'occurrence d'un facteur de développement fort est faible. Même, la hauteur maximale de facteurs envisageables se réduit rapidement.

Ce phénomène ne s'observe pas sur les facteurs de développement inférieurs à 1. Si un facteur inférieur à 1 est tiré, ce qui correspond à une baisse de la charge estimée, il n'y a pas de réduction de l'intervalle sur lequel le facteur peut se situer. Nous avons alors, sur les plus gros sinistres plutôt tendance à observer une diminution forte de la charge qu'une augmentation de celle-ci, ce qui symbolise une forme de prudence de la part des gestionnaires concernant les sinistres importants. A l'inverse, sur de plus petits sinistres, nous n'observons pas cette tendance mettant en exergue une précision d'estimation moins grande ou bien un niveau de prudence moins fort.

Il s'agit ici d'un axe d'amélioration très important du modèle multiplicatif. Un moyen de le prendre en compte consisterait à réaliser un tirage non pas dans une base de tous les facteurs de développement mais plutôt un tirage influencé par une copule empirique comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent.

Nous présentons alors en figure 3.25, la représentation graphique correspondante (toutes survenances confondues) pour quelques années de développement  $j$  (les autres sont présentées en annexe). On remarque bien pour toutes les années présentées (les autres qui comportent un nombre suffisant de points le sont en annexes) une densité de points plus faible dans le coin haut-droit du graphique que



dans le coin haut-gauche. Ainsi, nous allons appliquer la méthode présentée dans le chapitre 2 pour réaliser un tirage de facteur de développement conditionné à la charge précédente.

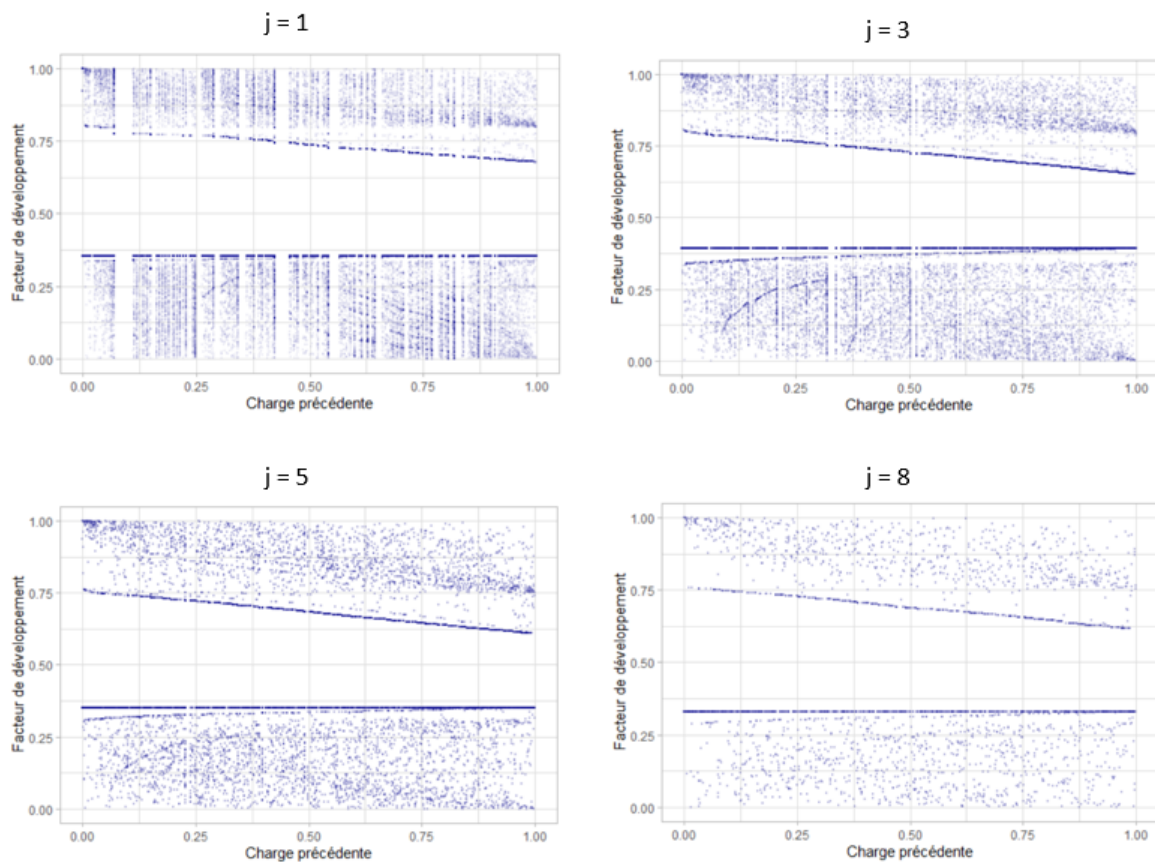


FIGURE 3.25: Facteur de développement  $j$  en fonction de la charge précédente (connue en  $j - 1$ )

### 3.3.3 Résultats des modèles raffinés et comparaisons

En premier lieu, rappelons ici que les résultats du modèle multiplicatif naïf n'étaient pas acceptables. Bien que la méthode utilisée en première approche ait été mise en place dans d'autres travaux et ait fourni des résultats satisfaisants, les spécificités de la base sur laquelle nous avons travaillé ne semblent pas compatibles avec ce processus. Une sur-estimation spectaculaire des niveaux d'ultime était observée. Ainsi, faire progresser ce modèle s'est imposé comme une priorité.

#### Charge estimée et facteur de développement suivant

Dans cet objectif, nous avons choisi de mettre en œuvre une variante du modèle prenant en compte le lien que nous avons pu observer entre niveau de charge et facteur de développement suivant qui sera nommée par la suite modèle multiplicatif « facteurs ». Pour ce faire, nous avons appliqué la méthode présentée en chapitre 2 utilisant les copules. Le fonctionnement est alors le suivant :

- Pour chaque année de développement  $j$  après la première de la base (18 en l'occurrence), nous utilisons les sinistres connus pour obtenir un copule empirique liant charge en développement

- $j - 1$  et facteur de développement individuel  $j$ ,
- Les sinistres sont déroulés développement par développement jusqu'à la clôture : Pour chaque développement de chaque sinistre à traiter, le tirage du facteur est effectué comme illustré sur la figure que nous présentons ici à nouveau 3.26.

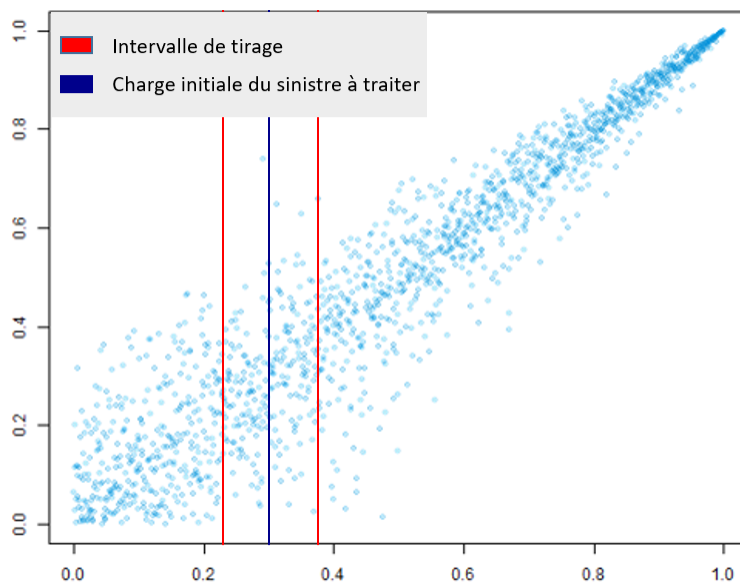


FIGURE 3.26: Illustration du processus de sélection d'un intervalle de tirage

Si ce processus peut permettre de toute évidence de prendre en compte les liens entre les deux variables, la question de la largeur de la bande rouge n'est pas automatique et son choix peut avoir des impacts clairs sur les résultats. En effet, une largeur de 1 revient finalement à ne pas prendre en compte la corrélation puisque le tirage s'effectue parmi tous les points. A l'inverse, une largeur de 0 conduit à simplement placer le niveau de charge parmi l'historique et à ensuite prendre le facteur correspondant. L'aléa est alors totalement retiré. Cela pose par exemple problème pour les sinistres tardifs : pour chaque sinistre, étant donné qu'un niveau de charge initial est affecté parmi l'historique, les facteurs successifs tirés seront exactement les mêmes que ceux du sinistre initial et l'on supposerait alors implicitement que le sinistre se comporterait de manière parfaitement similaire au sinistre dont la charge initiale est issue.

Trois approches ont alors été envisagées pour le tirage, chacune permettant de réduire progressivement le nombre de tirages possibles avec la diminution du nombre d'observations disponibles :

- Choisir une largeur fixe en pourcentage d'observations disponibles pour chaque développement,
- Choisir un vecteur de nombres de taille 18 (le nombre de développements) indiquant le nombre d'observations autorisées pour le tirage autour du sinistre à traiter,
- Choisir un vecteur de pourcentages taille 18 (le nombre de développements) indiquant le pourcentage d'observations autorisées pour le tirage autour du sinistre à traiter,

Si les deux dernières méthodes évoquées présentent des qualités indéniables, notamment celle de pouvoir ajuster plus précisément développement par développement la quantité d'aléa autorisée, elles nous ont paru moins paramétrables pour un utilisateur voulant appliquer le modèle à une base quelconque. Il lui serait plus facile de choisir uniquement un pourcentage fixe et c'est donc cette approche que nous avons retenue.

La dernière question en suspens concerne donc la valeur de ce pourcentage autorisé. Nécessairement, ce choix comporte une inévitable part d'arbitraire et une part d'adaptation aux données en présence. Il est clair que pour une base présentant des coefficients très volatils comme la nôtre, ce niveau doit être faible avant d'éviter absolument qu'un facteur extrême soit affecté à un niveau trop élevé de charge. Après avoir qualifié cette valeur de « faible », un choix reste à faire. Pour rendre cette part d'arbitraire la plus marginale possible, nous avons fait le choix de tester sur un nombre réduit de simulations (100) le modèle avec différentes valeurs pour observer son comportement. Pour faire un choix définitif, nous nous appuyerons à la fois sur les résultats fournis et leur proximité avec les valeurs de référence et du modèle additif ainsi que sur le processus de *backtesting* que nous mettrons en place. Les largeurs testées ont donc été les suivantes, et s'expriment en pourcentage d'observations disponibles pour chaque développement : 0, 2 ; 0, 5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10.

Nous présentons alors ici, en figure 3.27, les distributions de montant ultime obtenues selon les différentes valeurs de ce paramètre, ainsi qu'en table 3.12, les statistiques descriptives associées, mises en relief avec la valeur obtenue par la méthode de Chain-Ladder sur le triangle de charges.

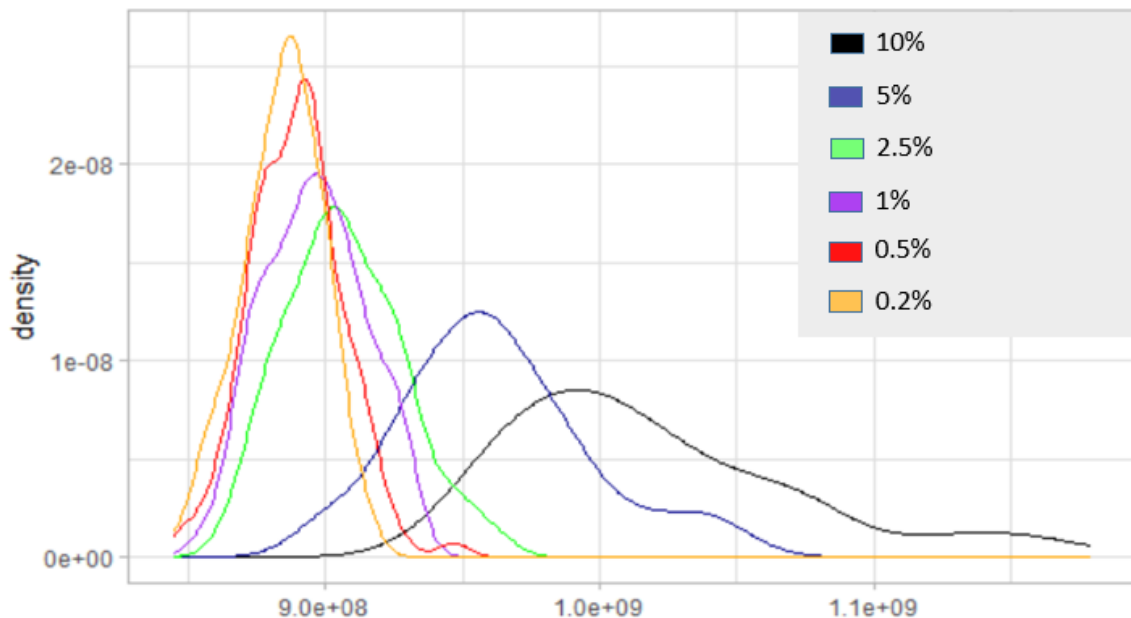


FIGURE 3.27: Densité du montant ultime obtenu par le modèle multiplicatif raffiné selon différentes largeurs autorisées pour le tirage des facteurs de développement (exprimées en pourcentage des observations disponibles)

Paramètre	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
0,2	884	874	885	894
0,5	889	877	890	899
1	893	882	893	904
2	906	892	906	922
5	962	938	958	983
10	1019	980	1005	1049
Chain-Ladder sur charges	864			

TABLE 3.12: Tableau récapitulatif des principales statistiques descriptives des montants ultimes obtenus par différents niveaux de paramètres et sur 100 simulations (en millions d'UM)

Avant même d'analyser les niveaux précis obtenus, nous constatons que ce procédé améliore très efficacement le modèle multiplicatif naïf puisque les résultats se situent dans un ordre de grandeur correspondant à ce qui est attendu, ce qui n'était pas le cas initialement. De plus, il est très intéressant de constater que la diminution de la largeur autorisée induit un déplacement de la densité vers la gauche et une réduction claire de la volatilité. Nous observons, pour les plus petites largeurs, une diminution moins marquée des valeurs et même une quasi stabilité de la distribution pour les deux largeurs les plus faibles. Rappelons qu'il ne s'agit que de 100 simulations et que l'on peut tout à fait supposer que deux densités proches le seraient moins avec plus de simulations ou inversement.

En nous intéressant de plus près aux valeurs obtenues, nous constatons un rapprochement très net des résultats obtenus avec ceux du modèle de Chain-Ladder ou même proposés par les experts. En effet, les valeurs moyennes proposées par les modèles sont légèrement supérieures à ce que prévoit Chain-Ladder sur le triangle de charges, et demeurent dans le haut de la distribution des estimations *Best-estimate* des experts. Les distributions se sont également rapprochées de la distribution bootstrap sur charges tout en restant légèrement supérieures à celle-ci (la comparaison à la distribution bootstrap paiements ne semble pas pertinente ici). Autre élément intéressant, pour les largeurs faibles, l'écart entre les quantiles 25% et 75% est relativement stable et comparable avec ce qui a été observé pour le modèle additif initial. Ces éléments de comparaison permettent de voir que l'amélioration des résultats obtenue par la prise en compte de la dépendance entre niveau de charge et facteur de développement est très importante. Cette prise en compte de la dépendance forte entre charge et facteur de développement se présente alors comme un moyen d'adapter cette forme de modèle à des bases de données dont les facteurs peuvent être extrêmes.

Avec ces résultats, nous comprenons aisément que pour que le modèle soit le plus performant possible, la largeur autorisée doit être relativement faible et vraisemblablement inférieure à 2%. Nous constatons en effet que la distribution opère un déplacement assez fort entre les valeurs 1% et 2% des paramètres. Ce sont maintenant les étapes de *backtesting* qui vont nous permettre de mettre en relief ces résultats et de retenir une largeur adaptée aux données afin d'effectuer une comparaison finale entre tous les modèles. Nous avons donc fait le choix de présenter ici, en figure 3.28, les distributions obtenues avec 1000 simulations pour les trois paramètres les plus pertinents parmi lesquels nous allons opérer un choix ensuite. Les statistiques descriptives sont présentées dans le tableau 3.13. Il ne nous a pas semblé utile de réaliser ce grand nombre de simulations pour d'autres valeurs. Nous ne constatons pas de changements majeurs en augmentant le nombre de simulations, hormis, en moyenne, un léger éloignement entre les distributions pour les valeurs de paramètres 0,2% et 0,5%.

Paramètre	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
0,2	882	870	881	893
0,5	889	877	888	899
1	896	884	895	907
Chain-Ladder sur charges	864			

TABLE 3.13: Tableau récapitulatif des principales statistiques descriptives des montants ultimes obtenus par différents niveaux de paramètres et sur 1000 simulations (en millions d'UM)

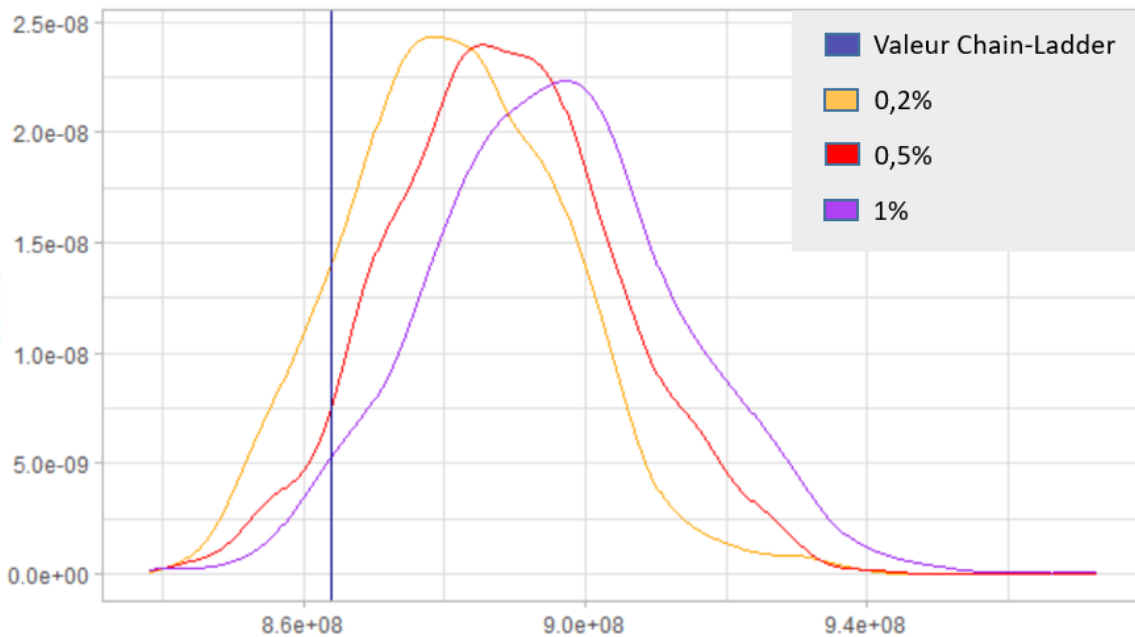


FIGURE 3.28: Densité du montant ultime obtenu par le modèle multiplicatif raffiné selon différentes largeurs autorisées pour le tirage des facteurs de développement (exprimées en pourcentage des observations disponibles), et 1000 simulations

### Charge initiale et durée de vie

La seconde variante du modèle que nous souhaitons mettre en place est celle que nous avons déjà appliquée pour le modèle additif concernant la durée de vie des sinistres. Nous appliquerons cette variante sur le modèle multiplicatif « facteurs » et l'appellerons par la suite modèle multiplicatif « facteurs et durée de vie ». Le mécanisme mis en place est similaire à celui concernant les facteurs de développement à une différence près. En effet, si le même processus est strictement appliqué, une durée de vie sera choisie pour chaque sinistre parmi les sinistres dont la charge initiale est proche. Or, pour les sinistres déjà connus de l'assureur et encore ouverts, un certain temps s'est déjà écoulé depuis l'ouverture. Il serait alors possible d'affecter à un sinistre une durée de vie inférieure au temps déjà passé depuis l'ouverture du sinistre. Alors, pour chaque sinistre, nous n'utiliserons que les sinistres CLOS dont la durée de vie a été supérieure au temps écoulé depuis l'ouverture du sinistre à traiter. La largeur ne s'exprimera donc plus en pourcentage du nombre d'observations disponibles mais des observations dont la durée de vie est assez élevée. Cette étape est nécessaire bien que source de

ralentissement du processus. Nous illustrons ce procédé toujours à l'aide du même exemple en figure 3.29.

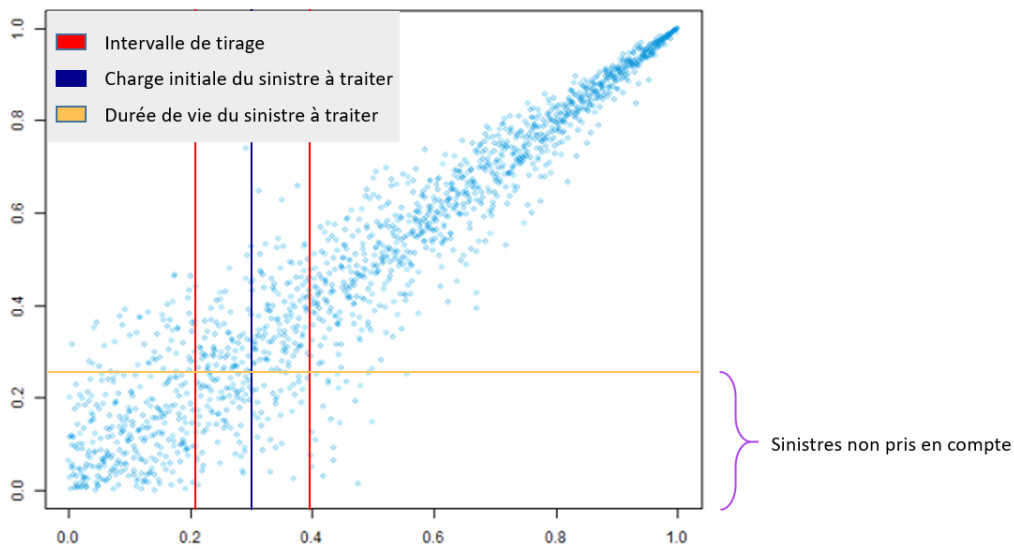


FIGURE 3.29: Illustration du processus de sélection d'un intervalle de tirage pour la durée de vie

Nous présentons alors ici en table 3.14 statistiques descriptives concernant l'ultime obtenues en faisant varier les paramètres de largeurs autorisées lors du tirage de la durée de vie et des facteurs successifs.

Paramètre « vie »	Paramètre « facteurs »	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
0, 2	0, 2	845	837	846	853
0, 2	1	852	842	849	862
1	0, 2	844	837	844	851
1	1	855	847	855	863
C-L sur charges		864			

TABLE 3.14: Tableau récapitulatif des principales statistiques descriptives des montants ultimes obtenus par différents niveaux de paramètres et sur 100 simulations (en millions d'UM)

Nous constatons ici une diminution du niveau global d'ultime estimé par rapport au modèle précédent ne prenant en compte que le lien entre facteurs de développement et charge précédente. Il serait tentant d'être pleinement satisfaits de ceux-ci dont les moyennes viennent prendre place entre les valeurs proposées par la méthode de Chain-Ladder sur règlements et celle sur charges.

Cependant, avoir appliqué en amont ce traitement de la durée de vie au modèle additif nous permet de totalement relativiser ces résultats qui sont finalement « faussement » corrects (3.2.4). En effet, nous avons compris que ce procédé sous-estime assez globalement la durée de vie des sinistres. La question qui persiste est la suivante : pourquoi, en appliquant ce procédé au modèle multiplicatif, la chute du niveau d'ultime n'est pas aussi marquée que sur le modèle additif ?

Une explication semble finalement assez logique. Il est certain, comme nous l'avons déjà expliqué que nous manquons de prendre en compte un grand nombre de facteurs (en développement élevés par-

ticulièrement). Cependant, le modèle multiplicatif est appliqué sur les charges et non sur les règlements successifs. Les charges prenant en compte une estimation de la réserve, elles demeurent plus stables dans le temps, et, finalement, sur les années de développement très élevées, une grande part de facteurs individuels vaut 1. Alors, cette version du modèle propose certes une diminution de la charge ultime par rapport à la version précédente, mais qui est moins marquée que sur le modèle additif car les facteurs manqués ici sont moins importants que les règlements manqués dans le cadre du modèle additif. Il n'est donc pas possible de considérer les résultats obtenus comme pertinents et satisfaisants.

Pour cette raison, nous ne proposerons pas de processus de sélection de paramètres pour ce modèle et retenons arbitrairement la valeur 1 pour le paramètre de durée de vie et 1 pour celui de facteurs pour le bilan que nous effectuerons par la suite.

### 3.4 Un moyen de tester la robustesse de modèles : le *backtesting*

Pour tester la qualité d'un modèle, le comparer à des modèles de référence (Chain-Ladder, bootstrap et avis d'experts en l'occurrence) est une étape essentielle. Cependant, pouvoir confronter le modèle aux données historiques quand cela est possible et donc à la réalité plutôt qu'à un autre modèle peut permettre de grandement renforcer la confiance en un modèle, de parvenir à une compréhension plus fine des phénomènes en jeu, ou même de valider un choix de paramètres. C'est ce que nous allons tenter de réaliser dans cette section par un procédé appelé *backtesting*.

Pour ce faire, nous allons utiliser les bases de données et les modèles pour simuler les règlements réalisés durant une période connue en réalité (donc s'étendant au maximum jusqu'en 2018). L'idée étant d'appliquer les modèles sur les bases de données telles qu'elles étaient à une date antérieure à la dernière date connue. En faisant ceci, nous prédirons donc une période s'étant déjà déroulée dans la réalité et pourrons voir si les prédictions des modèles s'inscrivent en cohérence avec les événements. Si tel n'est pas le cas, nous pourrons alors tenter d'expliquer les divergences soit par des particularités sur les données historiques, soit pas des défaillances de nos modèles. Peu importe le résultat, ce processus nous permettra une réflexion sur notre modèle et offrira des enseignements non négligeables. Une méthode fréquemment utilisée consiste à reculer la vision des bases de données de une ou plusieurs années puis de simuler les années qui suivent jusqu'à la dernière année initialement connue voire même dans notre cas, de simuler les années jusqu'à l'ultime pour réaliser une nouvelle comparaison avec le modèle de Chain-Ladder. Nous avons fait le choix d'appliquer cette méthode en nous plaçant en vision 2017 ainsi qu'en vision 2016.

#### 3.4.1 Traitement des bases

En premier lieu, il est important d'adapter soigneusement les bases de données à la vision que l'on souhaite adopter. L'objectif est ici de modifier les bases de données en retirant les informations accumulées durant les années qui suivent la vision que l'on souhaite adopter afin de retrouver les bases telle qu'elles étaient en fin d'année 2016 ou 2017 selon le choix réalisé. Des modifications sont donc à effectuer sur toutes les bases utilisées.

Nous allons ici exposer succinctement les traitements réalisés pour remettre les bases en vision 2016 (la méthode est identique pour la vision 2017).

Tout d'abord, le triangle de nombre de sinistres déclarés est amputé des lignes correspondant aux années 2017 et 2018 ainsi que des colonnes correspondant aux deux dernières années de développement. En effet, l'ancienneté de la base de données est telle que les sinistres déclarés durant les deux dernières

années de développement le sont en 2017 et 2018 et étaient donc inconnus à fin 2016. Nous sommes contraints de supprimer complètement les colonnes car en retirant ces sinistres, plus aucune information n'est disponible pour ces deux années de développement et donc les modèles de fréquence ne sont plus applicables. Néanmoins, aucun sinistre n'était déclaré si tard après sa survenance parmi les informations disponibles en 2018.

Le second traitement à réaliser concernait les données d'inflation. En reculant dans le temps la vision, il est nécessaire de changer le référentiel utilisé pour calculer les coefficients d'inflation et de le remplacer par la dernière date connue, à savoir 2016. Nous avons donc effectué des calculs d'inflation similaires à ceux présentés précédemment afin de disposer d'une inflation cohérente avec la vision adoptée.

Enfin, les traitements majeurs à réaliser concernaient les bases de sinistres. Pour retirer l'information postérieure à 2016, la première approche consistait d'abord à supprimer de la base tous les sinistres ouverts après 2016 car inconnus à la date de vision du *backtesting*. Néanmoins, procéder ainsi conduit à la perte d'un élément intéressant de comparaison. En effet, parmi les sinistres ouverts après 2016, certains sont des tardifs et sont survenus en 2016 ou avant. Ce sont donc des sinistres, certes inconnus en 2016 mais que le modèle relatif aux sinistres tardifs doit pouvoir prédire. Ainsi, les règlements réalisés en 2017 et 2018 qui découlent de ces sinistres représentent d'une certaine manière l'objectif de prédiction du modèle sur les IBNYR et pourront servir d'éléments de comparaison. Nous conservons et isolons ensuite ces sinistres dans la base et simulerons leur développement de manière similaire à celui d'un sinistre connu afin de voir si le montant observé est proche de celui réellement réglé.

Nous aurons donc deux comparaisons possibles concernant ces sinistres tardifs. Le premier relativement au montant d'IBNYR que nous aurons simulé, et le second relativement aux montants simulés pour ces sinistres dorénavant « connus » par le modèle d'IBNER. Ces deux visions permettront d'obtenir différentes conclusions quant aux modèles utilisés. Ensuite, il convient de supprimer les règlements effectués pour tous les sinistres durant les années calendaires 2017 et 2018, peu importe la survenance. Durant cette étape, nous devons en particulier supprimer l'équivalent des deux dernières colonnes d'un triangle agrégé. Ainsi, nous ne disposons plus que de 16 années de développement dans notre base retraitée. Au moment d'effectuer des comparaisons avec la base originelle, il faudra donc veiller à supprimer des règlements effectués en 2017 et 2018 ceux correspondant aux années de développement 17 et 18 qui ne pourront de toute manière pas être prédits par le modèle. Rigoureusement, cette action contribuerait à augmenter le facteur de queue que nous avons déjà évoqué. Néanmoins, l'objectif ici est simplement d'observer le comportement du modèle et non d'obtenir une estimation parfaite. Le modèle de Chain-Ladder étant lui aussi amputé des deux derniers développements, bien qu'imparfaits, les résultats seront tout à fait comparables.

Finalement, en 2016, les sinistres qui ont été clos en 2017 ou 2018 sont encore ouverts et leur date de clôture est alors inconnue. Ainsi, nous remettons les sinistres dans l'état qui était le leur à fin 2016 afin de poursuivre leur développement sans information concernant leur clôture.

### 3.4.2 Résultats

Plusieurs axes de comparaison ont été utilisés afin de pouvoir contrôler la performance des modèles sur différents aspects de la prédiction.



### Modèle additif initial

En premier lieu, nous nous sommes intéressés à un résultat qui ne rentre pas tout à fait dans le cadre du *backtesting* puisque nous ne comparons pas nos résultats à un montant réel. En effet, nous avons souhaité regarder la performance globale des modèles après cette adaptation des données. Pour ce faire, nous avons déroulé la méthode jusqu'à compléter entièrement le triangle et avons comparé les distributions ainsi obtenues au niveau de PSAP estimé par une méthode de Chain-Ladder classique appliquée au triangle de développement pris respectivement en vision 2016 et 2017. Nous présentons alors ces deux résultats en figure 3.30, accompagnés en table 3.15 des principales statistiques descriptives des distributions.

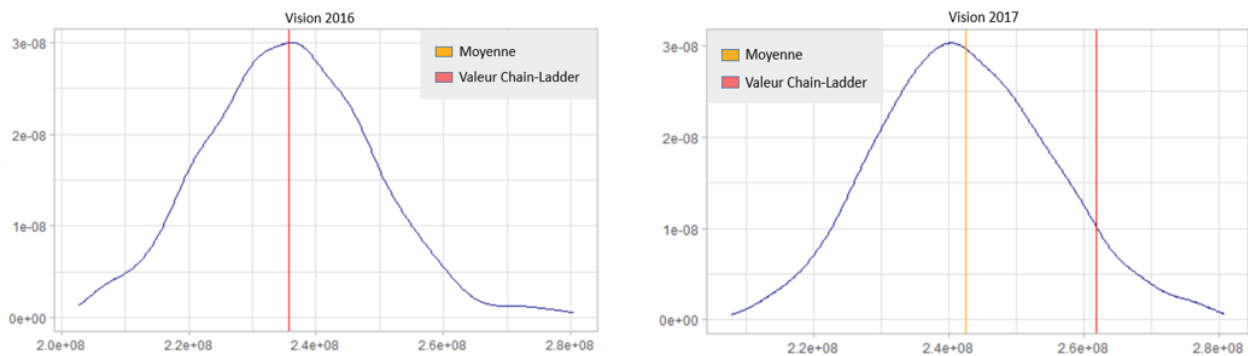


FIGURE 3.30: Distributions des montants totaux de PSAP simulés selon les différentes visions

Vision	Moyenne	Ecart type	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur Chain-Ladder
2016	235,8	13,1	226,9	235,9	244,4	235,8
2017	242,4	12,9	233,4	241,8	251,1	261,8

TABLE 3.15: Statistiques descriptives des distributions des montants totaux de PSAP simulés selon différents horizons (en millions d'UM)

Il est en premier lieu très intéressant de remarquer que le niveau de PSAP estimé par la méthode de Chain-Ladder est associé à une probabilité strictement positive par les deux distributions présentées. Celle-ci est même très élevée pour la vision 2016 où moyenne et valeur Chain-Ladder sont quasiment égales. Cela montre un comportement plutôt satisfaisant du modèle complet même après ce travail sur les données. La valeur Chain-Ladder en vision 2017 se situe bien à droite de la distribution, après le quantile 75% sans pour autant que la probabilité associée ne soit nulle. Ces observations sont satisfaisantes et montrent que le modèle fait preuve d'une certaine adaptabilité.

Rentrons à présent dans ce qui concerne le *backtesting* à proprement parler et intéressons-nous aux montants de règlements simulés par le modèle sur les périodes connues dans la base d'origine. Nous présentons ainsi en figure 3.31 les montants de paiements réalisés sur la période 2018 par le modèle en vision 2017, en 2017 et 2017-2018 par le modèle par le modèle en vision 2016 ainsi qu'en table 3.16, les statistiques descriptives associées aux distributions. Cette fois-ci, les distributions ne sont pas comparées à la valeur estimée par le modèle de Chain-Ladder, mais directement au montant qui a effectivement été réglé sur les périodes en question. Là aussi, pour chaque distribution, une probabilité relativement élevée est associée au montant empirique ce qui est un élément très positif pour le modèle. Bien que le comportement semble être un peu moins bon en vision 2017, la probabilité associée au

montant empirique se situe malgré tout à un niveau toujours satisfaisant. On remarque que la valeur observée se situe, pour la vision 2016 et les horizons 2017 ou 2018, entre la moyenne et le quantile (inférieur ou supérieur selon l'horizon), ce qui démontre une bonne adéquation entre l'observation et les simulations. Concernant la vision 2017, la valeur observée se situe à droite du quantile 75%, et sur l'extrémité droite du cœur de la distribution, ce qui n'est pas parfait, mais correspond tout de même à une probabilité significative. On ne constate pas ici de régularité quant à la position de la valeur empirique sur la distribution, qui semble se placer à gauche ou à droite selon les circonstances, ce qui ne nous incite pas à penser que le modèle a une tendance générale à sous ou sur-estimer les réserves.

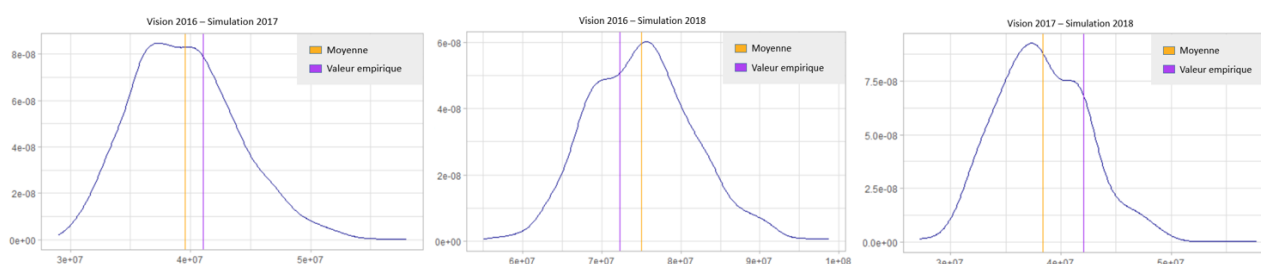


FIGURE 3.31: Distributions des montants de paiements simulés pour les différentes visions et différents horizons de simulation

Vision-Simulation	Moyenne	Ecart type	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur réelle
2016-2017	39,6	4,5	36,3	39,2	42,5	41,1
2016-2018	75	6,6	70	75	79,3	72,2
2017-2018	38,3	4,2	35,3	38	41,3	42,1

TABLE 3.16: Statistiques descriptives des distributions des montants de paiements simulés pour les différentes visions et différents horizons de simulation (en millions d'UM)

Enfin, un dernier point intéressant sur lequel s'attarder est celui de la simulation des sinistres tardifs. En effet, nous venons de constater que le montant total simulé par notre modèle est plutôt satisfaisant en comparaison à la fois aux valeurs estimées par Chain-Ladder et aux valeurs empiriques. Cependant, cette adéquation satisfaisante pourrait masquer une faiblesse du modèle sur la partie concernant les tardifs. Ces sinistres représentant une part plutôt faible de la réserve, une mauvaise estimation pourrait être noyée dans l'agrégation que nous avons présentée précédemment. Nous proposons alors d'observer les distributions du montant de réserve simulé relatif aux tardifs pour chaque période. Nous avons également jugé intéressant de présenter la distribution relative aux tardifs simulés comme des sinistres connus, point que nous avons évoqué lors du traitement des bases. Ces distributions sont comparées au montant effectivement réglé au titre des tardifs sur la période en question. Les distributions et statistiques descriptives sont présentées respectivement en figure 3.31 et table 3.32 .

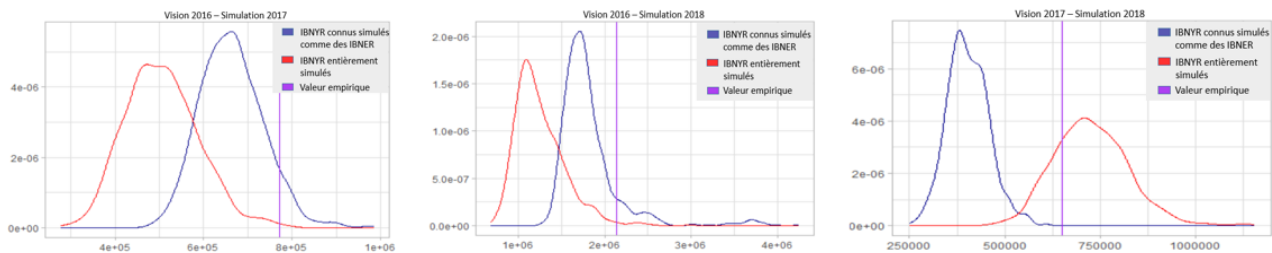


FIGURE 3.32: Distributions des montants de réserve liés à des sinistres tardifs simulés pour les différentes visions et différents horizons de simulation

Vision-Simulation	Moyenne	Ecart type	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur réelle
2016-2017 bleue	663, 7	71, 8	612, 7	661, 3	709, 2	772, 1
2016-2017 rouge	505, 4	82, 7	447, 4	501	560	772, 1
2016-2018 bleue	1 819, 1	370, 1	1 620	1 736, 7	1 890, 5	2 140, 4
2016-2018 rouge	1 255, 5	286, 3	1 057	1 199, 4	1 418, 6	2 140, 4
2017-2018 bleue	403, 8	54, 5	366, 8	400	439, 6	649, 8
2017-2018 rouge	726, 4	98, 5	658, 1	720, 2	787, 9	649, 9

TABLE 3.17: Statistiques descriptives des distributions des montants de réserve liés à des sinistres tardifs simulés pour les différentes visions et différents horizons de simulation (en millions d'UM)

Plusieurs analyses peuvent découler de ces résultats. Tout d'abord, on constate, pour la vision 2017, une bonne adéquation du niveau d'IBNYR simulé avec le montant empirique puisque ce dernier se situe proche du quantile 25% de la distribution. *A contrario*, la simulation de ces sinistres de la même manière que s'ils étaient connus laisse à désirer. Ainsi, malgré le nombre exact de sinistres, cette façon de simuler les montants sous-estime largement le montant réel. Cette tendance persiste sur les 3 différents niveaux que nous avons simulés puisque la distribution bleue demeure à chaque fois à distance et à gauche du niveau empirique.

Cette sous-estimation globale semble donner raison au fait de simuler différemment les sinistres tardifs en ne tirant les montants que parmi ce type de sinistres. Néanmoins, en vision 2017 et pour les deux horizons simulés, la simulation des tardifs par notre modèle sous-estime encore plus largement le niveau réel, ce qui peut sembler extrêmement surprenant. Après vérification, cet écart s'explique finalement assez simplement. Si l'estimation des montants semble être correcte (elle l'est en vision 2017), c'est l'estimation de la fréquence qui est particulièrement mauvaise en vision 2016. En effet, se placer en vision 2016 nous conduit à tenter de simuler le nombre de tardifs ouverts en 2017. Ce nombre a été tout particulièrement élevé sur cette période qui est donc exceptionnelle. On y a recensé l'ouverture de 810 sinistres tardifs quand la moyenne se situe autour de 550. Ainsi, cette valeur correspond à une probabilité extrêmement faible dans le modèle de fréquence et donc il est compréhensible que le cœur de la distribution des montants IBNYR simulés en vision 2016 soit très éloigné du montant observé. Dans ces cas-là, la distribution bleue est plus proche du montant observé du fait de la fréquence déjà connue mais continue à sous-estimer les montants. Sur une année « classique » de déclaration de tardifs, la performance de notre simulation de ces sinistres demeure satisfaisante.

### Stabilité du modèle

En plus des aspects purement numériques que nous venons de tester, la stabilité du modèle est également un point très important qu'une méthode proche du *backtesting* peut permettre de vérifier. En effet, en nous plaçant sur un périmètre défini, et en déroulant nos sinistres jusqu'à l'ultime selon différents niveaux d'information disponibles, nous pouvons voir la façon dont le modèle reçoit et s'accommode de l'information accumulée en plus au fur et à mesure du temps. Si les prévisions du modèle demeurent relativement stables dans le temps, cela peut être interprété comme le fait que l'information supplémentaire apparue correspond à ce que le modèle anticipait et c'est alors un gage de qualité.

Pour effectuer ce contrôle, nous avons donc choisi de nous placer sur une vision 2016 et de comparer les niveaux d'ultime estimés par notre modèle complet avec l'information disponible concernant les sinistres ouverts en 2016 ou antérieurement en fin d'années 2016, 2017 et 2018. Nous comparons à la fois les distributions entre elles mais également celles-ci aux montants obtenus par la méthode de Chain-Ladder classique. Nous obtenons ainsi la figure 3.33 et le tableau 3.18 de statistiques descriptives.

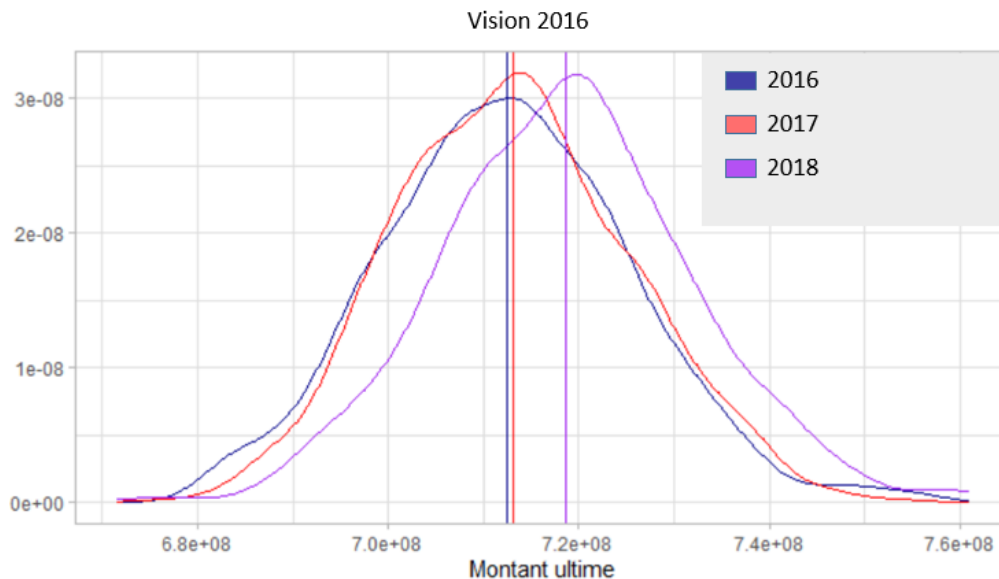


FIGURE 3.33: Distributions et moyennes associées des montants ultimes liés au périmètre 2016 pour différents niveaux d'information disponibles

Vision	Moyenne	Ecart type	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur Chain-Ladder
2016	712	13	704	713	721	712
2017	713	12	704	713	721	727
2018	719	13	710	719	727	727

TABLE 3.18: Statistiques descriptives des distributions des montants ultimes simulés sur les survenances de 2000 à 2016 selon différents niveaux d'information disponibles (en millions d'UM)

Les résultats sont particulièrement intéressants. En effet, nous constatons tout d'abord des distributions à l'allure similaire peu importe le niveau d'information que nous choisissons d'apporter au

modèle. De plus, entre les visions 2016 et 2017, en plus d'une allure similaire, nous observons que les deux distributions sont quasiment superposées, avec des moyennes extrêmement proches. Nous pouvons alors dire que l'information acquise durant l'année 2017 sur les sinistres survenus entre 2000 et 2016 correspond globalement à celle prédite par le modèle ou du moins que cette acquisition d'information ne déstabilise pas les prédictions de celui-ci. C'est un point qui renforce l'idée de stabilité du modèle que nous recherchions en effectuant cette analyse.

En ce qui concerne la vision 2018, pour la partie centrale, la courbe semble avoir opéré une translation de 5 à 6 millions d'UM. Ce décalage, bien que relativement faible (moins de 1% du total à l'ultime) démontre que l'information acquise en 2018 (peut-être associée à celle de 2017) a conduit le modèle à augmenter sensiblement le niveau d'ultime estimé. Néanmoins, ce décalage ne semble pas remettre véritablement en cause la stabilité recherchée du modèle tant les 3 distributions apparaissent similaires. Au contraire, une stabilité trop prononcée du modèle pourrait être perçue comme une faiblesse de celui-ci qui serait finalement incapable justement de procéder à une quelconque adaptation aux données reçues.

Un autre aspect remarquable apparaît lorsque l'on met ces distributions en relief avec la vision Chain-Ladder agrégée naïve traditionnellement utilisée. En effet, si en 2016, les estimations étaient absolument similaires entre la prévision ultime du modèle additif et Chain-Ladder, l'ajout de l'information acquise en 2017 conduit Chain-Ladder à revoir fortement à la hausse les prévisions. Ainsi, là où en vision 2017, le modèle demeurait très stable, Chain-Ladder effectue un bond de près de 15 millions d'UM avant de rester stable en subissant l'ajout de l'information de 2018. Alors, non seulement le bond de Chain-Ladder s'effectue avec une vision antérieure au bond effectué par le modèle, mais l'intensité de celui-ci est bien plus forte, conduisant, en vision 2018, le niveau prédit par Chain-Ladder à se situer à hauteur du quantile 75% de la distribution là où en 2016 il se situait au niveau de la moyenne. On voit ici une différence intéressante dans le comportement des deux modèles. L'écart avec la méthode de référence de Chain-Ladder ne semble finalement pas énorme en termes de montants, et nous ne pouvons donc pas préjuger de la qualité du modèle additif avec cette comparaison. En effet, bien que très utilisée, la méthode de Chain-Ladder, surtout dans sa vision brute, ne peut pas être assimilée à la réalité et être un « objectif » pour le modèle. Il convient, bien évidemment de s'en approcher, ce qui semble bien être le cas ici.

Pendant, cette hausse relativement brutale et ce décalage d'horizon d'impact entre les deux modèles ont fortement attiré notre attention. Nous avons alors émis deux hypothèses que nous avons ensuite confrontées aux données. Les hypothèses sont les suivantes :

1. La hausse de Chain-Ladder correspond à une tendance globale dans les données et donc la non-réponse du modèle additif est un défaut de prise en compte d'une information importante. Là où nous voyions de la stabilité, il s'agit finalement d'un retard sur l'évolution du montant.
2. La hausse de Chain-Ladder dans sa version naïve correspond à une sur-réaction face à l'apparition de sinistres exceptionnels. Le modèle additif lui, accorde moins de poids à un énorme sinistre que Chain-Ladder car les montants associés à ce sinistre ne sont tirés que ponctuellement. C'est alors un point positif pour notre modèle qui pondère l'importance accordée à ce genre de données extrêmes.

Pour vérifier si une de ces hypothèses était satisfaisante, une analyse détaillée des données a été réalisée. La hausse brutale de la vision Chain-Ladder naïve apparaissant lorsque l'information relative à l'année 2017 est ajoutée, l'analyse portera sur l'information apparue en 2017. Cela correspond, sur la base placée sur le périmètre 2016, à l'ajout d'une diagonale au triangle des règlements utilisé par Chain-Ladder, et à l'ajout d'un montant de règlement en plus pour chaque sinistre pour le modèle individuel. Nous présentons en table 3.19 et 3.20 un extrait des triangles comportant les coefficients de passages et les règlements incrémentaux. En gras, nous mettons en évidence les valeurs ajoutées

avec l'information de l'année 2017. La diagonale qui suit celle en gras correspond à l'information qui arrivera en 2018 et n'est donc pas disponible en 2017.

Année de survenance	Année de développement					
	13	14	15	16	17	18
2000	2762	1236	301	138	<b>381</b>	383
2001	128	663	172	<b>1640</b>	3156	
2002	661	907	<b>466</b>	1687		
2003	1199	<b>552</b>	615			

TABLE 3.19: Extrait du triangle de paiements incrémentaux avec mise en évidence de l'information acquise en 2017

Année de survenance	Année de développement				
	13 – 14	14 – 15	15 – 16	16 – 17	17 – 18
2000	1,045	1,011	1,005	<b>1,013</b>	1,013
2001	1,027	1,007	<b>1,065</b>	1,117	
2002	1,037	<b>1,016</b>	1,066		

TABLE 3.20: Extrait du triangle de coefficients de développement avec mise en évidence de l'information acquise en 2017

Tout d'abord, nous avons pu remarquer sur le triangle de règlements que les paiements effectués sur l'année de développement 16 pour la survenance 2001 semblaient extrêmement élevés compte tenu de l'état d'avancement des sinistres et des règlements précédents. Nous observons en effet un règlement plus de 10 fois supérieur à la survenance précédente et également au développement précédent pour la même survenance. Ce niveau extrême de règlements conduit alors à l'apparition d'un facteur surprenant de 1,065 dans le triangle des coefficients, de loin supérieur aux autres. Ce coefficient apparaissant tard dans le développement, il a un impact certain sur l'estimation des montants que réalise le modèle.

Nous avons donc analysé individuellement les sinistres survenus durant cette année et encore ouverts en années de développement très hautes. Les conclusions de cette analyse confirment clairement la seconde hypothèse que nous avons énoncée.

En effet, dans le détail, un peu plus de 50 sinistres survenus en 2001 sont encore ouverts après 16 années de développement. Sur ces cinquante sinistres, l'immense majorité ne connaît aucun règlement sur la période et sont même clos par la suite. D'autres connaissent un règlement mineur (quelques centaines ou milliers d'UM). Enfin, un seul et unique sinistre subit un règlement très important, de l'ordre de 1,5 millions d'UM sur la période et est responsable de la plus grande partie des règlements incrémentaux sur la période. Comme le calcul du facteur de développement de Chain-Ladder se base à ce moment-là uniquement sur deux survenances, l'impact de ce sinistre est fort et augmente de manière significative ce coefficient. La hausse brutale de l'estimation réalisée par Chain-Ladder est donc l'effet d'un unique sinistre aux caractéristiques exceptionnelles. Il est commun lors d'un travail par Chain-Ladder d'exclure certaines valeurs qui semblent aberrantes. Néanmoins, ici, l'avancement du triangle et donc le peu de données face auxquelles comparer cette valeur rend compliqué ce type d'analyse. Sans utiliser les données individuelles, il est possible que ce coefficient aurait finalement été conservé, faute d'information suffisante.

Cet unique sinistre impacte donc fortement le niveau ultime estimé et le conduit à augmenter de près de 2%. A l'inverse, le modèle additif ne répercute pas de la même façon ce type de valeur puisque

sa fréquence d'apparition et donc de tirage est très faible. Cette analyse pointe donc une faiblesse du modèle de Chain-Ladder et met en valeur un force du modèle que nous avons mis en œuvre.

A noter qu'un phénomène similaire semble se produire en 2018. Des règlements incrémentaux forts apparaissent et sont là aussi le fait de sinistres exceptionnels. Pour l'année 2001, il s'agit d'ailleurs encore du même sinistre pour lequel un règlement très élevé est effectué. Le modèle de Chain-Ladder n'augmente pas plus du fait de compensations qui ont lieu en amont dans le triangle. A l'inverse notre modèle augmente cette fois-ci en partie ses estimations à cause de l'augmentation du nombre de sinistres surprenants.

Les résultats du modèle additif « durée de vie » n'étant pas au niveau attendu, le *backtesting* concernant ce modèle n'a pas été considéré comme prioritaire et n'est pas présenté dans ce mémoire.

### Bilan sur le modèle additif

Ces étapes de *backtesting* ont permis de confronter le modèle additif à la réalité et de percevoir à la fois le bon comportement global du modèle, de pointer encore une fois la nécessité de simuler différemment les sinistres classiques et tardifs, mais également quelques faiblesses dans la simulation d'années exceptionnelles notamment en termes de sinistres tardifs. Plus important encore, le test sur la stabilité du modèle a permis de mettre en avant une faiblesse forte de Chain-Ladder qui est moins marquée dans le modèle proposé. Ce dernier semble offrir une stabilité plus importante et moins prendre en compte la présence de rares sinistres très exceptionnels.

### Modèle multiplicatif

Les résultats que nous avons déjà présentés concernant le modèle multiplicatif initial ne sont pas du tout satisfaisants et il s'avère inutile de réaliser ces étapes de *backtesting* sur les résultats fournis par ce modèle. Nous proposons donc ici d'effectuer cette analyse concernant le modèle multiplicatif « facteurs ». Celle-ci va nous permettre de retenir une valeur du paramètre de largeur de tirage autorisée parmi celles sur lesquelles portait notre hésitation. Ce choix va se baser sur les montants de charge prédits à fin 2018 pour une base remise en vision 2017 et pour une base remise en vision 2016 ainsi qu'à fin 2017 pour la seconde base.

Nous proposons, comme précédemment, en figures 3.34 et 3.35 ainsi qu'en table 3.21, les distributions et statistiques descriptives relatives à ces montants pour les 3 paramètres que nous avons testés, à savoir 0,2%, 0,5% et 1% ainsi que pour les visions proposées. Nous comparons ceux-ci aux vraies valeurs présentes dans la base originelle ainsi qu'à la valeur proposée par le modèle de Chain-Ladder simple.

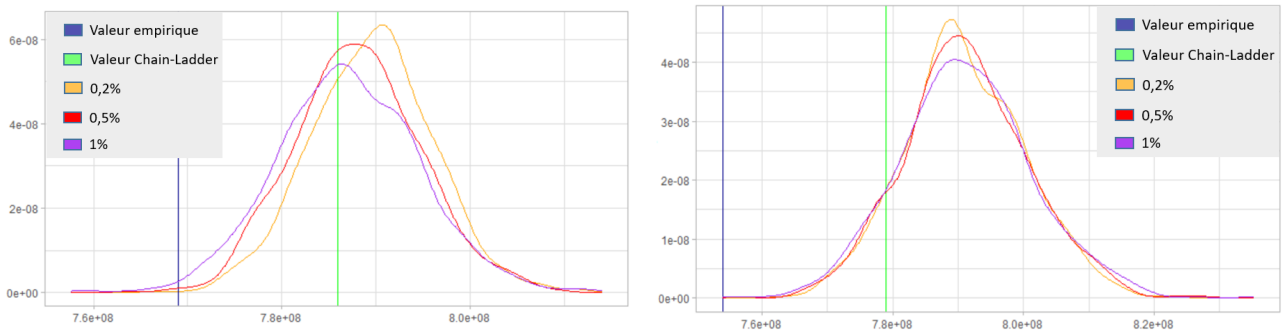


FIGURE 3.34: Montants de charges estimés par le modèle pour les années 2017 (à gauche) et 2018 (à droite) pour une base en vision 2016

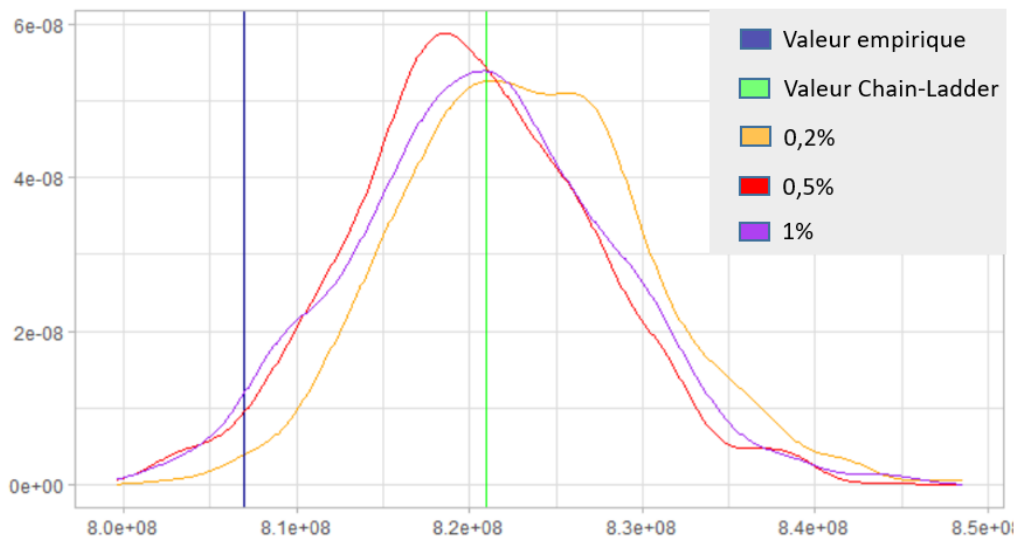


FIGURE 3.35: Distributions, valeurs empirique et Chain-Ladder associés au montant de charge estimé à fin 2018 pour des bases en vision 2017

Nous constatons ici un comportement relativement similaire pour les trois valeurs de paramètres exploitées. La tendance est à une sur-estimation en moyenne de la valeur réelle, qui, malgré tout, est affectée à une probabilité strictement positive dans deux des trois distributions. Le fait que cette probabilité soit positive est, malgré la tendance à la sur-estimation, un point positif pour le modèle. Il est d'ailleurs très intéressant de constater que cette sur-estimation a lieu dans des proportions du même ordre que ce que propose la valeur estimée par Chain-Ladder quand la projection se déroule sur une année. Un éloignement de la valeur réelle apparaît lors de la projection sur l'horizon 2016-2018, néanmoins, la valeur Chain-Ladder continue d'être au centre de la distribution et l'on peut imaginer un comportement atypique dans les données causant une baisse du niveau de charge sur la période. Ainsi, le modèle multiplicatif qui, rappelons-le se veut être une adaptation à l'échelle individuelle de la méthode Chain-Ladder, adopte un comportement relativement similaire à ce dernier. Les défauts véhiculés par la version agrégée semblent ne pas s'effacer avec l'individualisation du processus.



Vision-Simulation	Largeur	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%	Valeur réelle
2016-2017	<b>0, 2%</b>	790	785	790	794	769
2016-2018	<b>0, 2%</b>	791	785	790	797	754
2017-2018	<b>0, 2%</b>	823	818	823	828	807
2016-2017	<b>0, 5%</b>	788	784	788	792	769
2016-2018	<b>0, 5%</b>	791	785	790	797	754
2017-2018	<b>0, 5%</b>	820	816	820	825	807
2016-2017	<b>1%</b>	787	782	787	792	786
2016-2018	<b>1%</b>	791	785	791	798	754
2017-2018	<b>1%</b>	821	816	821	826	807

TABLE 3.21: Statistiques descriptives des distributions des montants de charges simulés pour différentes visions, différents horizons de simulation et différentes largeurs de tirage autorisées (en millions d'UM)

Bien qu'aucune différence très marquée ne soit obtenue entre les valeurs de paramètres par ce processus, le *backtesting* est le seul moment où les résultats obtenus peuvent être comparés aux données réelles, c'est ainsi en associant ces résultats à ceux déjà présentés quand le modèle est déroulé entièrement (3.3.3, que nous déterminerons le paramètre que nous allons retenir. Ainsi, nous choisissons de retenir comme valeur pour le paramètre, celle donnant à la fois des résultats proches de la réalité dans la table 3.21 et relativement peu éloignés des valeurs de référence quand le modèle est déroulé dans son intégralité. Il s'agit donc de 0,5% qui semble permettre un compromis intéressant. C'est cette version du modèle que nous ferons apparaître dans le tableau bilan final. Néanmoins, il conviendra de garder à l'esprit que peu de différences étaient observées lors du *backtesting* et donc que ce choix de paramètre n'est pas indiscutable et pourrait être revu si une autre base de données était utilisée ou si une réflexion de validation différente était menée.

### 3.5 Bilan

Nous proposons dans cette sous-section de reprendre les résultats obtenus par les modèles testés (avec le paramètre finalement retenu) ainsi que les différentes valeurs utiles à la comparaison. Ces résultats sont présentés en table 3.22.

Modèle utilisé	Moyenne	Quantile 25%	Médiane	Quantile 75%
<b>Additif initial</b>	804	794	803	814
<b>Additif « durée de vie »</b>	708	701	707	715
<b>Multiplicatif initial</b>	152 071	12 327	21 850	54 473
<b>Multiplicatif « facteurs »</b>	889	877	888	899
<b>Multiplicatif « facteurs et durée de vie »</b>	855	847	855	863
<b>Bootstrap sur règlements</b>	831	796	827	862
<b>Bootstrap sur charges</b>	855	833	857	877
<b>Avis d'experts</b>	[771 ; 921]			
<b>Chain-Ladder sur règlements</b>	831			
<b>Chain-Ladder sur charges</b>	864			

TABLE 3.22: Statistiques descriptives concernant les montants ultimes estimés par tous les modèles de provisionnement mis en place

Nous pouvons observer ici l'ensemble des résultats obtenus sur la base de données traitée. Cette vision globale nous permet de mettre en relief les résultats de tous les modèles implémentés, chose que nous n'avons pas faite jusqu'à présent. Nous proposons ici quelques rappels concernant des analyses déjà effectuées au fur et à mesure de la présentation des modèles ainsi que quelques analyses complémentaires.

Le premier point concerne les résultats obtenus en appliquant la méthode de Chain-Ladder classique et bootstrap à deux triangles différents. Les résultats sont assez différents et éloignés d'un peu plus de 30 millions d'UM l'un de l'autre pour Chain-Ladder et l'on observe une distribution décalée vers la droite et moins volatile pour le bootstrap sur triangle de charges. Cet écart nous permet de prendre conscience, tout comme les choix des experts, de l'importance d'une réflexion forte sur le choix des triangles et des données utilisés lors de l'application de ce type de méthodes agrégées. Ce constat nous renvoie également à la remarque effectuée sur la notion de *Best-Estimate* (3.2.4). Ces écarts fournissent un constat permettant de relativiser l'écart observé entre les modèles additif et multiplicatif du fait des données différentes utilisées. Ainsi, si nous avons montré la difficulté d'appliquer le modèle multiplicatif aux données de règlements, il pourrait s'avérer intéressant d'appliquer le modèle additif aux variations de charges plutôt qu'aux paiements incrémentaux afin d'observer son comportement.

La différence énorme entre les modèles multiplicatifs « initial » et « facteurs » montre la pertinence forte du choix de modéliser la corrélation entre charge et facteur de développement individuel pour la branche étudiée. Si le modèle « initial » peut être satisfaisant pour certaines branches, ce n'était absolument pas le cas ici et cette adaptation offre un moyen qui semble fiable de rendre utilisable le modèle pour de plus diverses branches. La façon utilisée pour modéliser le lien présente ainsi l'avantage d'être facilement adaptable à toutes les bases de données et de laisser à l'utilisateur le choix du paramètre de largeur optimal pour la branche traitée et d'effectuer différents essais par exemple.

Sur les cinq modèles différents que nous avons eu l'opportunité de mettre en place, nous constatons

que trois proposent une valeur moyenne (et médiane) dans la distribution des valeurs *Best-estimate* des experts. Dans le bas de la distribution pour le modèle additif initial, dans le haut pour les deux versions raffinées du modèle multiplicatif. Néanmoins, dans le cadre de la version multiplicatif « facteurs et durée de vie », nous rappelons qu'il s'agit d'un résultat faussement bon, puisque nous avons pu comprendre que la durée de vie était largement sous-estimée dans ce cadre du fait du manque de profondeur de la base qui nous a empêché d'avoir accès à des survenances complètes. La présence de la moyenne de ces modèles dans la distribution nous conduit à juger satisfaisantes les estimations effectuées par les modèles concernés.



# Conclusion

La présence d'une quantité de plus en plus importante de données disponibles ainsi que la progression rapide de la capacité des ordinateurs à traiter ces bases de données très volumineuses influencent fortement la recherche actuarielle. Dans le cadre de l'assurance non-vie, l'estimation des provisions pour sinistres à payer est un enjeu majeur. S'appuyant sur ces constats, les recherches actuelles visent à étudier la possibilité de mettre en place des modèles de provisionnement individuels, en complément des modèles de provisionnement agrégés. Ces modèles, en utilisant les données disponibles, ont pour objectif l'estimation d'une réserve non plus à l'échelle d'une année de survenance mais à l'échelle du sinistre. Les caractéristiques et informations utilisables sont nombreuses et doivent permettre d'estimer une réserve adaptée à chaque sinistre. Les professionnels attendent de cette approche, si elle aboutit, un gain de précision sur l'estimation des réserves ainsi que des possibilités accrues d'automatisation des processus.

C'est dans ce cadre que ce mémoire a pris place. L'objectif que nous avons poursuivi, en partant de travaux déjà effectués, a été l'implémentation de modèles complets de provisionnement ligne à ligne. Nous nous sommes donc intéressés à la fois aux sinistres déjà ouverts et connus de l'assureur ainsi qu'aux sinistres survenus mais non encore ouverts, les sinistres dits « tardifs ». Nous avons souhaité associer à ces implémentations, une compréhension fine des données utilisées afin de proposer non pas un modèle dont la mise en place pourrait être immédiate, mais deux modèles initiaux que nous comprenions parfaitement et que nous pourrions améliorer grâce à cette compréhension des mécanismes en jeu. Dans une prochaine étape, un prochain mémoire, ces modèles pourront être encore améliorés et généralisés. Ce mémoire se voulait finalement être une étape intermédiaire entre la découverte du sujet, les premiers travaux, et la mise en place opérationnelle d'un modèle très raffiné.

Afin d'obtenir un montant de réserve pour chacun des sinistres connus de l'assureur, il fallait associer à chacun d'eux une charge ultime. Pour les sinistres tardifs, un modèle fréquence-sévérité a été mis en place. Notre modélisation de la survenance des sinistres tardifs s'est appuyée sur des travaux déjà effectués par Riffaud (RIFFAUD, 2019) tandis que la modélisation de leur sévérité a pris place dans le cadre général des modèles présentés.

Nous avons implémenté en premier lieu un modèle additif où chacun des sinistres était déroulé jusqu'à sa clôture estimée en utilisant les montants de règlements historiques. Ainsi, pour chaque année de développement, un montant de règlements historique prenant en compte l'inflation présente dans les données était affecté à chacun des sinistres encore ouverts. L'application répétée de ce procédé a permis l'obtention d'une distribution des charges ultimes totales ainsi simulées. Le niveau estimé s'est avéré satisfaisant et les différents tests effectués ont permis de mettre en évidence cette validité ainsi qu'une stabilité du modèle supérieure au modèle agrégé de référence.

Nous avons, dans un second temps mis en place un modèle multiplicatif se voulant être un équivalent individuel de la méthode de Chain-Ladder. Les premiers résultats obtenus, loin d'être satisfaisants, ont néanmoins permis de mettre en avant la sensibilité de ce type de méthode aux données utilisées. Une analyse approfondie des corrélations entre les variables de la base de données a alors été effectuée, dans le but tout d'abord de comprendre les liens présents dans les données, mais également de faire progresser les deux premiers modèles présentés.

Si certaines des corrélations envisagées se sont avérées quasiment inexistantes, cette analyse a permis de mettre en exergue tout d'abord une dépendance entre la durée de vie des sinistres et la charge initiale estimée par le gestionnaire. Une tentative de raffinement des deux modèles s'appuyant sur ce constat et utilisant la notion de copule a alors été implémentée. Les résultats ont été décevants en raison d'un défaut intrinsèque à la méthode mise en place et compliqué à corriger du fait de la faible profondeur de la base de données relativement à la longueur de la branche. De la même façon, une amélioration du modèle multiplicatif se basant sur le lien fort entre facteur de développement individuel et charge précédente a été exécutée. Celle-ci a permis d'obtenir des résultats bien plus satisfaisants que le modèle initial est s'est présentée comme un moyen efficace d'adapter ce type de modèle à des données particulières comportant des facteurs extrêmes.

La comparaison des différents résultats obtenus à des valeurs de référence ainsi qu'à des estimations effectuées par des experts a rendu possible la confrontation de ceux-ci à un large éventail de valeurs. Ce panel de valeurs, qu'elles proviennent des modèles mis en place, d'experts, ou de modèles agrégés de référence a permis, en plus de comparer les résultats entre eux, de mener tout au long du travail une discussion sur les faiblesses de chacun des modèles ainsi que sur le provisionnement en général. Les défauts de la méthode de Chain-Ladder ont par exemple pu être observés, et leur correction par les modèles individuels vérifiée, de même que la complexité de la notion de *Best-Estimate* présente dans les normes a pu être discutée.

Ce travail prenant place dans un cadre plus général de provisionnement individuel, plusieurs axes d'amélioration et de prolongement des travaux présentés semblent évidents. Ainsi, la prise en compte du lien entre la charge initiale et la durée de vie du sinistre paraît très intéressante malgré son non aboutissement ici. Tenter d'appliquer le processus que nous avons décrit à une base de données plus profonde pourrait permettre d'en vérifier l'efficacité plus précisément. De plus, une estimation de la distribution de la charge à un an et de son quantile 99,5% dans une optique de calcul de SCR est rendue complexe par certains choix de modélisation effectués, il conviendrait alors d'aboutir à une façon de calculer celle-ci, sans quoi les modèles manquent un aspect important des réglementations actuelles. De la même manière, les méthodes individuelles doivent permettre de prendre en compte la réassurance non-proportionnelle, axe que nous n'avons pas exploité dans ce mémoire.

Enfin, et il s'agit là de l'axe d'amélioration le plus fort, toutes les données disponibles ne sont pas utilisées. En effet, les modèles présentés s'appuient pour le moment uniquement sur les dates disponibles ainsi que sur les règlements connus. Or, comme déjà évoqué, les données disponibles sont bien plus larges et pourraient permettre de complexifier le modèle et d'individualiser plus largement les prédictions. Nous pourrions ainsi envisager la création en amont de catégories de sinistres se basant sur les caractéristiques disponibles et traiter chacune des catégories de sinistres différemment à partir de l'historique connu. La mise en place de méthodes de *Machine Learning*, bien que moins lisibles et souvent longues en temps de calcul peut également être envisagée afin d'intégrer un maximum de variables au processus.

Des travaux restent donc à effectuer avant la mise en application concrète de ces modèles de provisionnement individuels. Néanmoins, les travaux réalisés ont permis à la fois de présenter plusieurs modèles prenant en compte des corrélations entre variables, point encore rarement abordé dans

les recherches, et d'aboutir à une compréhension fine des mécanismes en jeu dans ces modèles. Les prochains travaux devront donc s'axer sur les points que nous avons évoqués ainsi que sur l'application des modèles à des données issues de différentes branches afin d'en contrôler l'adaptabilité et d'éventuellement faire apparaître d'autres mécanismes que la base étudiée n'aurait pas permis de mettre en avant.





# Bibliographie

- ANTONIO, K. et PLAT, R. (2014). Micro-Level Stochastic Loss Reserving for General Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* 2014, p. 649-669.
- ASTIN (2016). 2016 ASTIN Working party on non-life reserving practices. Rapp. tech. International Actuarial Association.
- BADESCU, L., CHEN, T., LIN, X. S. et TANG, D. (2019). A marked Cox model for the number of IBNR claims: estimation and application. *ASTIN Bulletin* 49, p. 709-739.
- BAUDRY, M. et ROBERT, C. (2019). A machine learning approach for individual claims reserving in insurance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 35, p. 1127-1155.
- BENJAMIN, S. et EAGLES, L. (1986). Reserves in lloyd's and the london market. *Journal of the Institute of Actuaries* 113, p. 197-256.
- BORNHUETTER, R. et FERGUSON, R. (1972). The actuary and ibnr. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* LIX, p. 181-195.
- DEVINEAU, L. et BOUMEZOUED, A. (2017). Bootstrapping Individual Claim Histories. *Preprint, hal-01643929*, Individual Claims reserving : a survey.
- EIOPA (2014). The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation. Rapp. tech. EIOPA.
- ENGLAND, P. et VERRAL, R. (2002). Stochastic Claims Reserving in General Insurance. *British Actuarial Journal* 8, p. 443-518.
- ETAT FRANÇAIS (2020). Code des assurances.
- FRIDHI, S. (2019). Provisionnement individuel en Non-Vie. Mém. de mast. Université Paris-Dauphine.
- HUANG, J., QIU, C. et WU, X. (2015). Stochastic Loss Reserving in Discrete Time: Individual vs. Aggregate Data Models. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 44, p. 2180-2206.
- KUO, K. (sept. 2019). DeepTriangle: A Deep Learning Approach to Loss Reserving. *Risks* 7, p. 97.
- LE, P. et VIROT, G. (2013). Méthode d'évaluation stochastique des provisions techniques d'une entreprise d'assurance dommages par une approche ligne à ligne. Mém. de mast. ENSAE Paristech.
- LOPEZ, O., MILHAUD, X. et THÉRON, P. (2019). A tree-based algorithm adapted to microlevel reserving and long development claims. *ASTIN Bulletin* 49, p. 741-762.
- MACK, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimate. *ASTIN Bulletin* 23, p. 213-225.
- MCLENNAN, A. et MURPHY, K. (2006). A Method For Projecting Individual Large Claims. *Causality Actuarial Society Forum* 2006, p. 205-236.
- MERZ, M., WÜTHRICH, M. et LYSSENKO, L. (2009). Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal* 2009, p. 63-84.
- NORBERG, R. (1993). Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *ASTIN Bulletin* 23, p. 93-114.
- NORBERG, R. (1999). Prediction of outstanding liabilities : II Model variations and extensions. *ASTIN Bulletin* 29, p. 5-25.

- OHLSSON, E. et LAUZENINGKS, J. (2009). The one-year non-life insurance risk. *Insurance: Mathematics and Economics* 45, p. 203-208.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- P. DEHEUVELS (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés Un test non paramétrique d'indépendance. *Académie Royale de Belgique Bulletin de la Classe des Sciences 5e Série*, p. 274-292.
- PIGEON, M. et DUVAL, F. (2019). Individual Loss Reserving Using a Gradient Boosting-Based Approach. *Risks* 7, p. 79.
- R CORE TEAM (2019). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL : <http://www.R-project.org>.
- RIFFAUD, J. (2019). Modélisation de la charge IBNYR dans le cadre d'un modèle de provisionnement individuel en assurance non-vie. Mém. de mast. Université Paris-Dauphine.
- ROSELUND, S. (2012). Bootstrapping Individual Claim Histories. *ASTIN Bulletin* 42, p. 291-324.
- TAYLOR, G., MCGUIRE, G. et SULLIVAN, J. (2008). Individual Claim Loss Reserving Conditioned by Case Estimates. *Annals of Actuarial science* 3, p. 215-256.
- TAYLOR, G. (1977). Separation of Inflation and other Effects from the Distribution of Non-Life Insurance Claim Delays. *ASTIN Bulletin* 9, 219-230.
- VERBEEK, H. (1972). An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance. *ASTIN Bulletin* 6, 195-202.
- WÜTHRICH, M. (2018). Machine learning in individual claims reserving. *Scandinavian Actuarial Journal* 2018, p. 1-16.
- ZHAO, X. et ZHOU, X. (2010). Applying copula models to individual claim loss reserving methods. *Insurance: Mathematics and Economics* 46, p. 290-299.

# Annexe A

## Annexes

### A.1 Valeurs de charge ultime proposées par les experts

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	Médiane	Moyenne
813	771	795	864	921	819	804	803	826	813	824

TABLE A.1: Montants de charge ultime estimés par les différents experts sollicités (en millions d'UM)

### A.2 Représentation des coefficients de corrélation

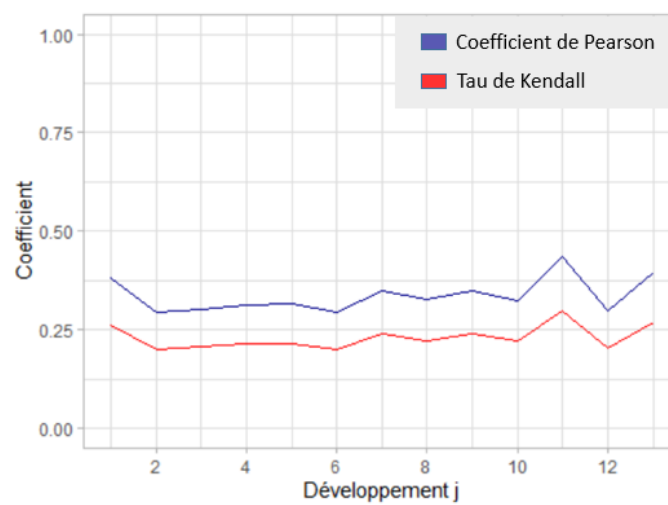


FIGURE A.1: Représentation graphique des coefficients de corrélation entre charge en année de développement  $j$  et paiement incrémental en année  $j + 1$ .

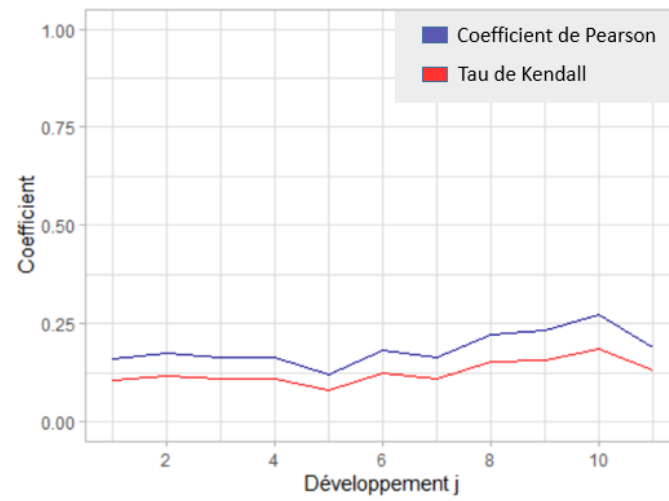


FIGURE A.2: Représentation graphique des coefficients de corrélation entre charge en année de développement  $j$  et paiement incrémental en année  $j + 1$ .

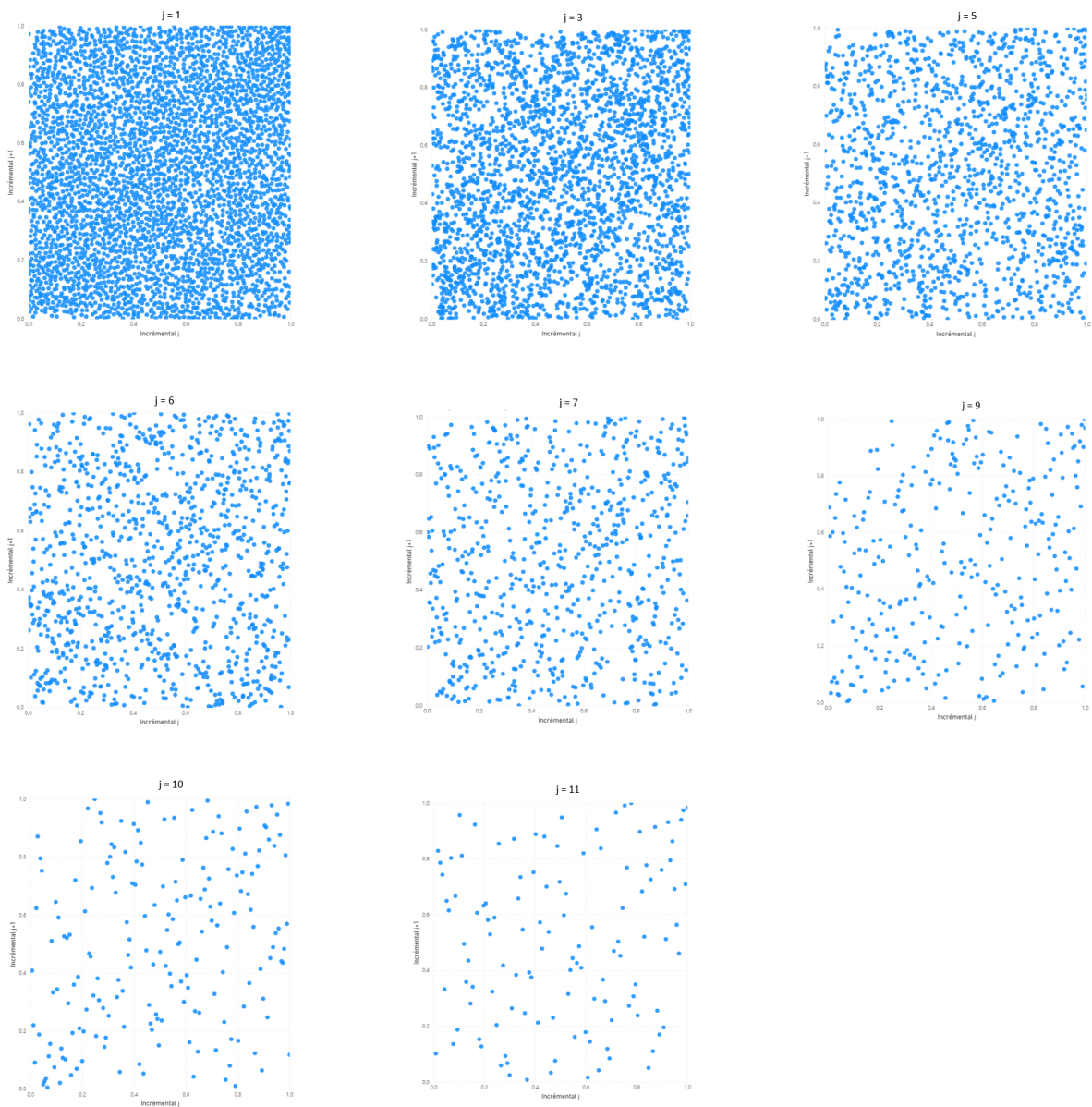
**A.3 Paiement incrémental  $j$  vs paiement incrémental  $j + 1$** 

FIGURE A.3: Paiements incrémentaux réalisés en développement  $j + 1$  par rapport aux paiements incrémentaux réalisés développement  $j$

## A.4 Réserve $j$ vs paiement incrémental $j + 1$

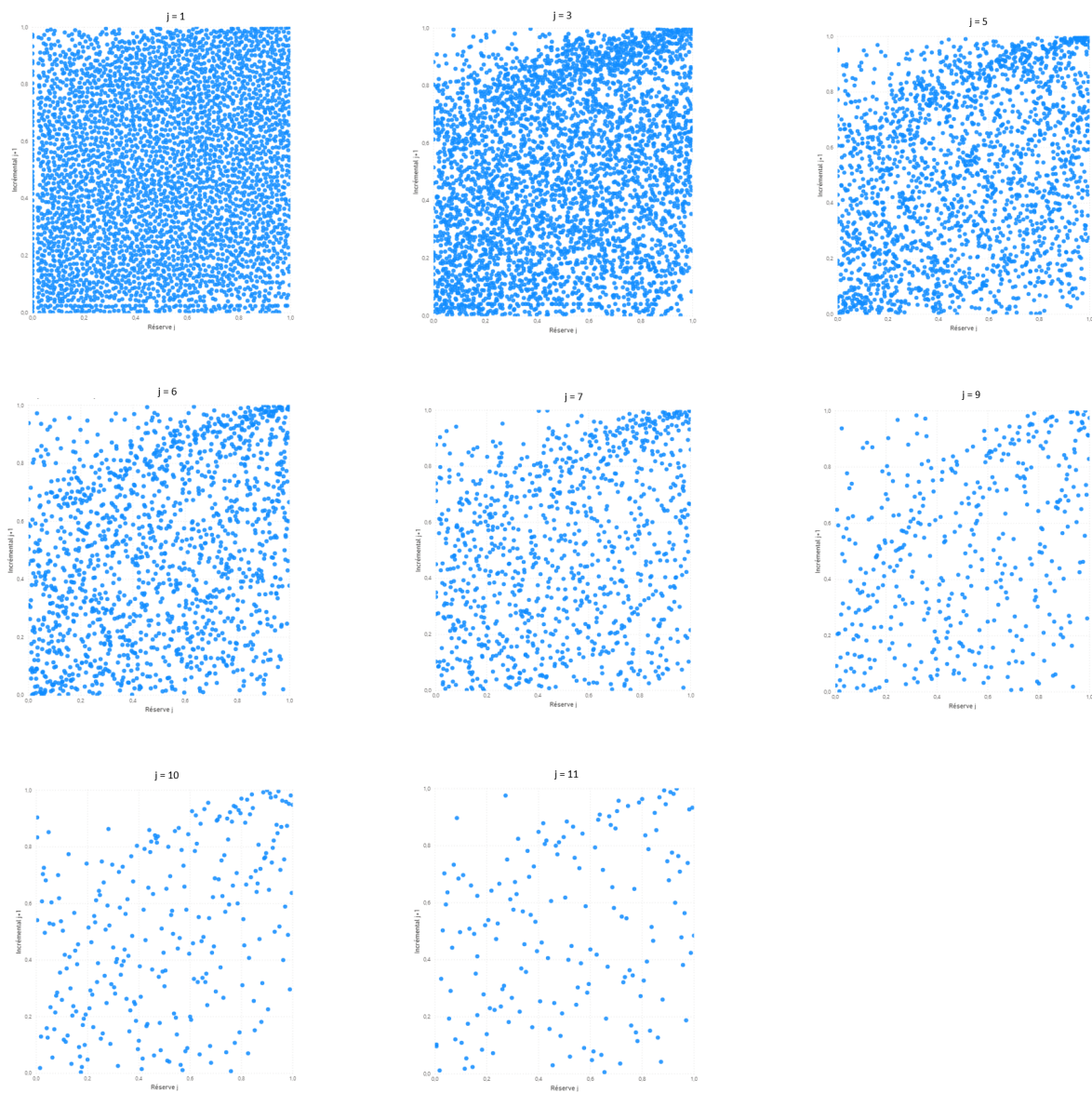


FIGURE A.4: Paiements incrémentaux réalisés en développement  $j + 1$  par rapport aux montants de réserve connus en fin de développement  $j$

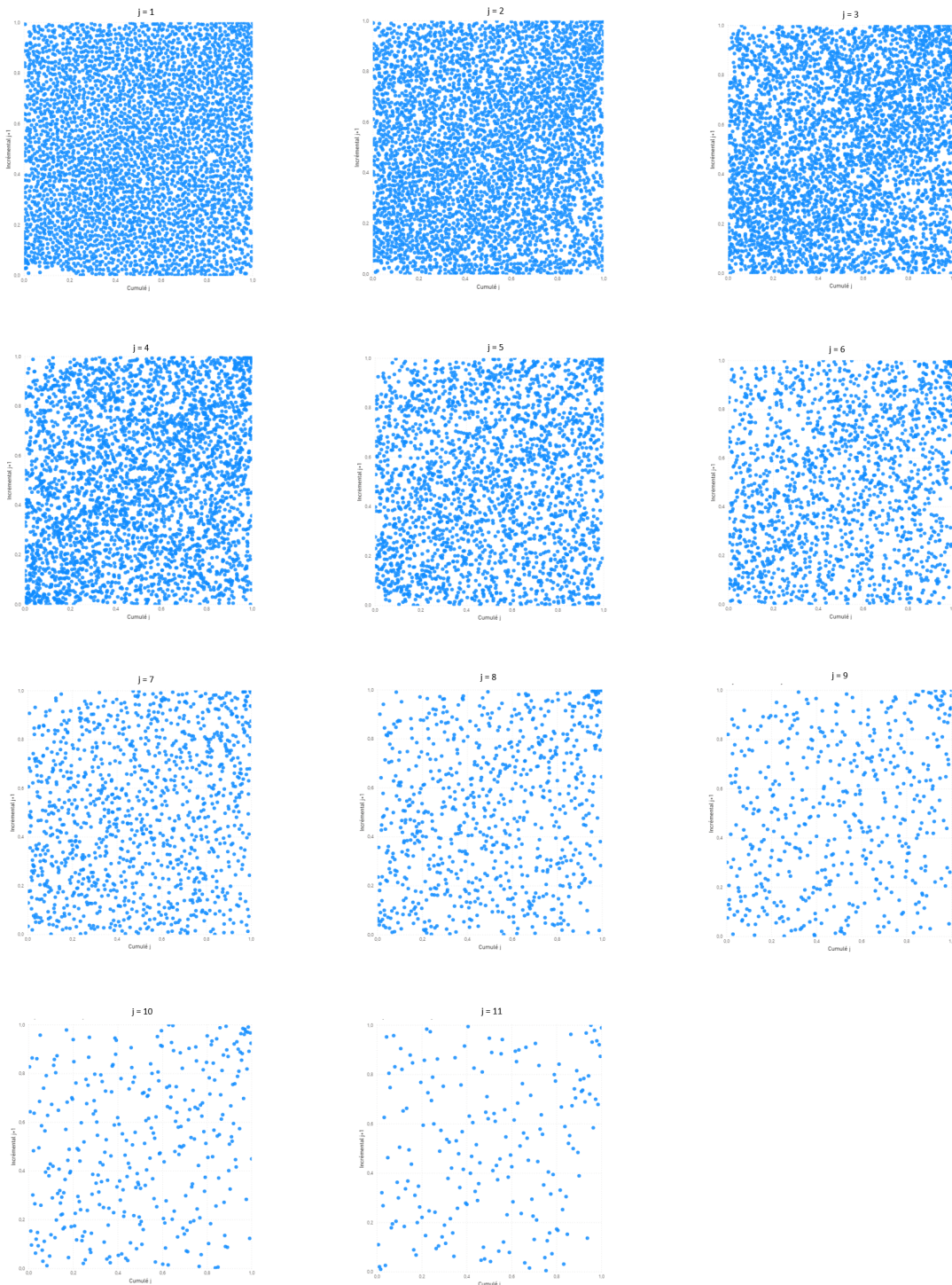
**A.5 Paiement incrémental  $j + 1$  vs paiement cumulé  $j$** 

FIGURE A.5: Paiements incrémentaux réalisés en développement  $j + 1$  par rapport aux paiements cumulés connus en fin de développement  $j$



## A.6 Paiement incrémental $j + 1$ vs charge $j$

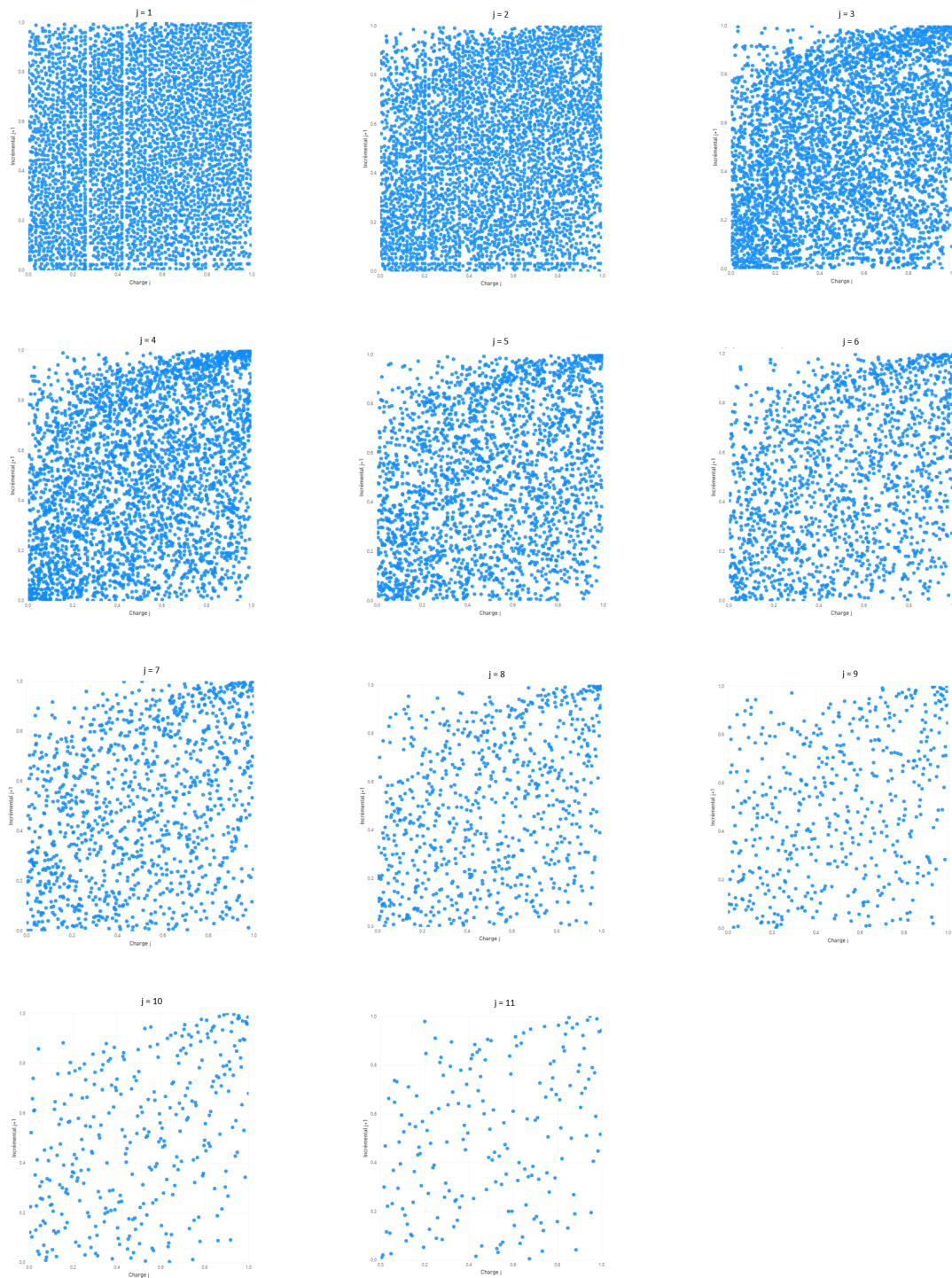
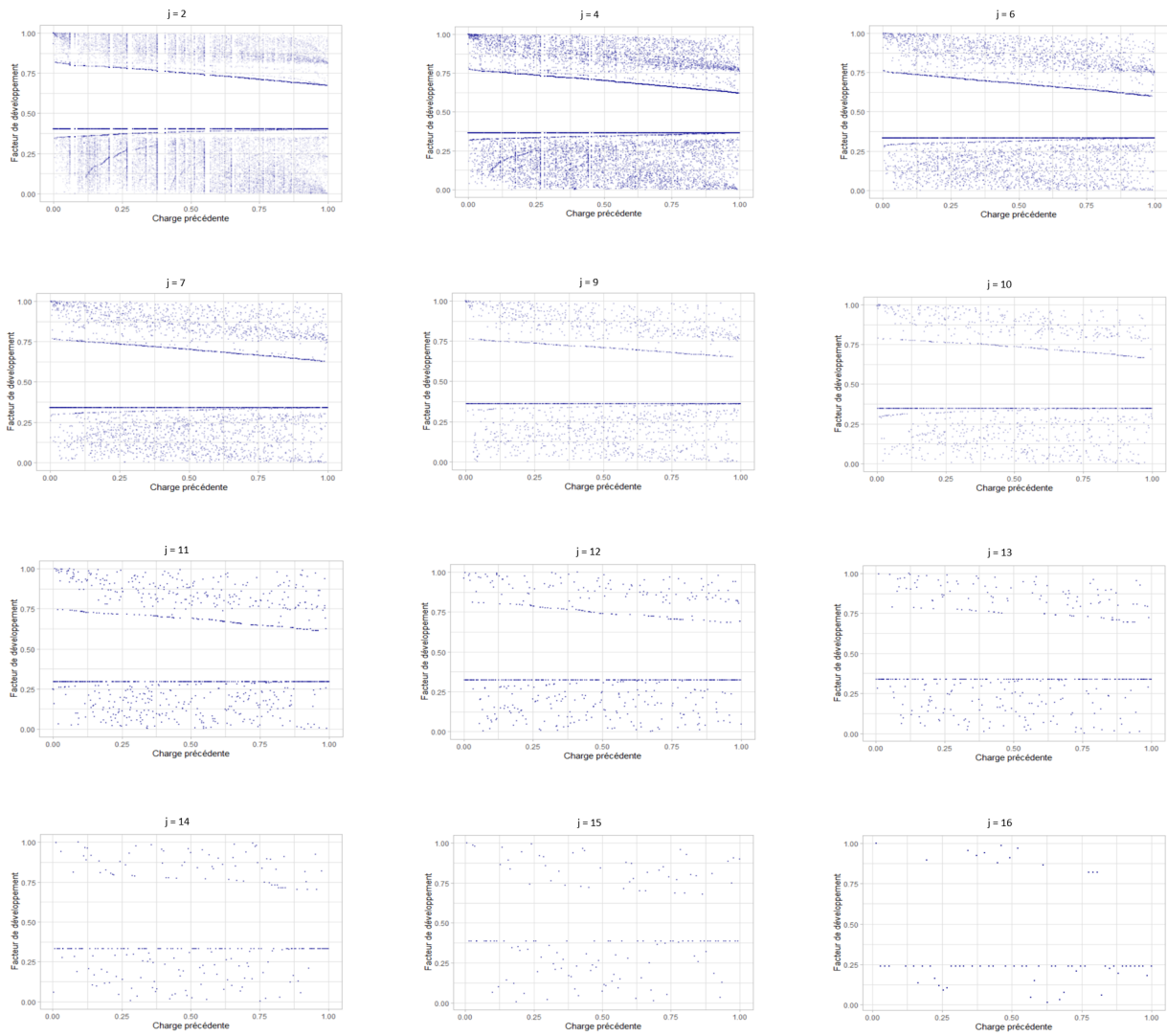


FIGURE A.6: Paiements incrémentaux réalisés en développement  $j + 1$  par rapport à la charge connue en année  $j$



## A.7 Facteurs de développement et charge précédente

FIGURE A.7: Facteurs de développement  $j$  en fonction de la charge connue en  $j - 1$