

**Mémoire présenté pour l'obtention du DUAS et l'admission à l'Institut des Actuaires****le 16/12/2022**Par : POUTÇOU ValentineTitre: Calibrage et impacts du modèle G2++ sur le bilan d'une société  
d'assurance vieConfidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans*Membres du jury de l'IA :*C. MOYNE  
D. DUBOIS  
S. BAUMANN*Entreprise : Assurances du Crédit  
Mutuel**Directeur de mémoire (entreprise) :**Membres du jury de l'Unistra :*J. BERARD  
E. BIRMELE  
A. COUSIN  
P.-O. GOFFARD  
M. MAUMY-BERTRAND*Nom : JAEGER Nicolas*

Signature du responsable entreprise



Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Signature du candidat



# Résumé

La modélisation stochastique des taux d'intérêt au sein d'un générateur de scénarios économiques (GSE) est essentielle au calcul des indicateurs clés de solvabilité d'une compagnie d'assurance vie. Le GSE projette les évolutions possibles d'un certain nombre de facteurs de risque via des scénarios aléatoires ; ces derniers permettent alors de valoriser le portefeuille d'actifs et les engagements de l'assureur sur un horizon de projection donné. Les modèles de taux unifactoriels comme celui de Hull & White ne permettent pas de reproduire entièrement les déformations futures de la courbe des taux. Ainsi, considérer non plus une, mais deux sources d'aléa, permet en théorie d'affiner la modélisation des taux d'intérêt. Ce mémoire s'interroge sur les conséquences de la mise en place d'un modèle de taux à deux facteurs sur les indicateurs de solvabilité d'une compagnie d'assurance vie.

Le modèle retenu est le modèle gaussien à deux facteurs : il permet de pallier les limites de Hull & White tout en s'intégrant aisément au modèle de gestion actif-passif utilisé par l'entreprise. L'ajout d'un facteur aléatoire complexifie la construction du modèle de taux. Dès lors, il est nécessaire de recourir à de nouvelles méthodes lors du calibrage et de la corrélation des différents modèles de diffusion (taux, actions, immobilier, gestion alternative, *spread* de crédit).

S'agissant de la propriété de *market consistency*, le modèle gaussien à deux facteurs présente une meilleure capacité de reproduction des prix de marché d'actifs cotés que le modèle de Hull & White. Cependant, ce changement de modèle de taux n'a qu'un impact réduit sur le passif et la solvabilité de la société au 31/12/2021.

Enfin, la qualité de reproduction des prix d'instruments dérivés du modèle gaussien à deux facteurs, bien que supérieure à celle de Hull & White, est imparfaite. Par conséquent, une méthode est proposée pour ajuster la valeur du *Best Estimate*.

**Mots-clés :** Générateur de Scénarios Economiques, Taux d'intérêt, G2++, Hull & White, Solvabilité II, Best Estimate, Calibrage, Corrélations, Ajusteurs d'Hagan

# Abstract

Stochastic interest rates modelling within an Economic Scenario Generator (ESG) is essential to compute life insurance companies' solvency key indicators. The ESG projects possible evolutions of a number of factors through random scenarios. These allow to value the assets portfolio and the insurer's liabilities over a given period of time. One factor rate models such as Hull & White do not fully capture the future distortion of the yield curve. Thus, to consider no longer one but two random processes refines the modelisation. This master thesis examines to what extent does the implementation of a two-factor model impact the solvency indicators of a life insurance company.

The model chosen is the two-factor Gaussian model : it overcomes Hull & White's limitations while being easily integrated into the asset and liability management model used by the company. Still, adding one random factor makes it more complicated to build the G2++ model. New methods are therefore needed when calibrating and correlating the different diffusion models (interest rates, equities, real estate, hedge funds, spread).

With respect to market consistency, the two-factor Gaussian model has a better ability to replicate asset market prices than Hull & White. However, this change in rate model has only a minor impact on the company's liabilities and solvency on 31/12/2021.

Finally, the reproduction quality of derivative prices derived from the two-factor Gaussian model, although superior to Hull & White, is imperfect. Therefore, a method is proposed to adjust the value of the Best Estimate.

**Key-words** : Economic Generator Scenarios, Interest Rates, G2++, Hull & White, Solvency II, Best Estimate, Calibration, Correlation, Hagan adjusters

# Note de synthèse

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2016, la directive européenne Solvabilité II impose aux organismes d'assurance une nouvelle valorisation de leur bilan. À cette fin, l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques (GSE) est essentielle pour valoriser les provisions *Best Estimate* (BE) figurant au passif de ce bilan prudentiel. Le GSE permet de projeter les évolutions aléatoires d'un certain nombre de facteurs de risque. Parmi eux, les taux d'intérêt permettent de valoriser tant le portefeuille d'actifs que les engagements futurs de l'assureur. Aussi, le modèle de taux est-il un des constituants principaux du générateur de scénarios économiques et doit être choisi avec pertinence.

Le modèle de taux unifactoriel de Hull & White, employé jusqu'alors dans le GSE des Assurances du Crédit Mutuel, ne permet pas de reproduire entièrement les déformations futures de la courbe des taux, ainsi que les prix d'instruments financiers cotés. Par conséquent, considérer non plus une, mais plusieurs sources d'aléa, permet en théorie d'affiner la modélisation des taux d'intérêt. Le modèle retenu pour remplacer Hull & White est le modèle gaussien à deux facteurs, ou G2++. Il permet de pallier les limites de Hull & White et s'intègre aisément au modèle de gestion actif-passif utilisé par l'entreprise.

La dynamique du taux court dans le modèle gaussien à deux facteurs s'écrit de la façon suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0$$

où  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$  sont deux processus de dynamiques :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0 \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0 \end{cases}$$

Avec :

- $a, b, \sigma, \eta$  des constantes positives ;
- $W_1, W_2$  deux mouvements browniens standards de corrélation instantanée  $\rho \in [-1; 1]$ , *i.e.*  $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$  ;
- $\varphi$  une fonction déterministe.

Considérer un facteur aléatoire supplémentaire complexifie la construction du modèle de taux. Dès lors, il est nécessaire de recourir à de nouvelles méthodes lors du calibrage de celui-ci et de la corrélation des différents modèles de diffusion du GSE (taux, actions, immobilier, gestion alternative et *spread* de crédit).

## Calibrage des paramètres

Afin que le modèle gaussien à deux facteurs projette des trajectoires fiables et cohérentes avec la réalité, ses cinq paramètres sont calibrés à partir de produits dérivés de taux d'intérêt : les *caps* et les *swaptions*. Pour ce faire, la distance quadratique entre le prix de marché de ces instruments dérivés et leur prix théorique issu du G2++ est minimisée :

$$\operatorname{argmin}_{a,b,\sigma,\eta,\rho} \left\{ \sum_{i=1}^N w_i (\pi_{\text{marché}}(i) - \pi_{\text{G2++},(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i))^2 \right\}$$

où :

- $\pi_{\text{marché}}(i)$  est le prix observé de la *swaption* (resp. du *cap*)  $i$  ;
- $\pi_{\text{G2++},(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i)$  est le prix théorique de la *swaption* (resp. du *cap*)  $i$  ;
- $w_i$  est le poids alloué à la *swaption* (resp. au *cap*)  $i$ .

### Calibrage en référence aux *caps*

Le calibrage des paramètres en référence aux *caps* est aisé car ces derniers sont valorisés par une formule fermée sous la dynamique du G2++. Le calibrage s'effectue sur les instruments à la monnaie. Le jeu de paramètres optimal obtenu au 31/12/2021 est le suivant :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 79,97% | 3,48% | 0,19%    | 0,82%  | -99,03% |

TABLE 1 – Paramètres du G2++ calibrés en référence aux *caps* au 31/12/2021

Les prix théoriques obtenus avec le jeu de paramètres optimal sont superposés à leurs valeurs de marché au 31/12/2021 :

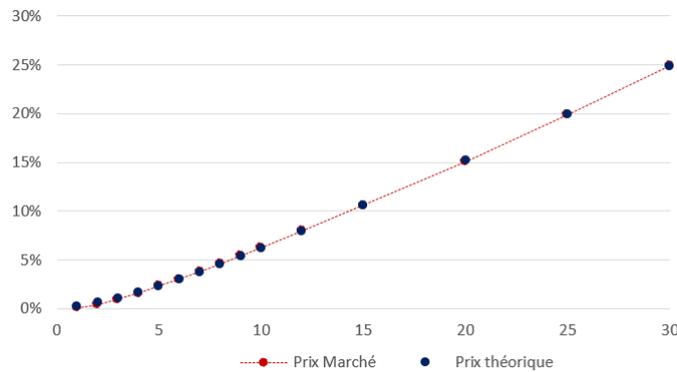


FIGURE 1 – Prix de marché et théoriques des *caps* après calibrage au 31/12/2021

### Calibrage en référence aux *swaptions*

Dans un second temps, le calibrage des cinq paramètres est réalisé sur toute la surface des prix des *swaptions* à la monnaie. L'évaluation de ces dernières dans le modèle G2++

est moins directe que celle des *caps*. Elle nécessite d'employer des techniques d'intégration numérique et de résolution d'équations non linéaires (quadrature de Gauss-Hermite, algorithme de Newton, etc.). Ces méthodes sont complexes et allongent considérablement la recherche de la solution par l'algorithme d'optimisation utilisé. L'approximation de Schragger et Pessler est alors employée afin de calculer plus simplement le prix d'une *swaption* dans le modèle G2++. Elle permet ainsi d'initialiser le problème de minimisation à l'aide d'un jeu de paramètres proche de la solution optimale et ainsi d'accélérer la recherche de l'optimum.

Le jeu de paramètres optimal obtenu au 31/12/2021 est le suivant :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 50,77% | 2,52% | 0,42%    | 0,78%  | -89,70% |

TABLE 2 – Paramètres du G2++ calibrés en référence aux *swaptions* au 31/12/2021

Les paramètres ci-dessus sont ceux retenus pour la suite de l'étude. En effet, le calibrage sur les *swaptions* donne lieu à un résultat plus précis : l'écart quadratique global entre les prix des instruments financiers (*caps* et *swaptions* confondus) observés et théoriques est plus faible lorsque les paramètres sont calibrés à partir des *swaptions*.

| Instrument de calibrage | <i>Caps</i> | <i>Swaptions</i> |
|-------------------------|-------------|------------------|
| Erreur globale          | 0,16%       | 0,09%            |

FIGURE 2 – Erreur quadratique globale au 31/12/2021 selon l'instrument utilisé pour le calibrage

En outre, il est à noter que le modèle G2++ induit une meilleure capacité de reproduction des prix de marché d'instruments dérivés que celle de Hull & White :

|            | G2     | HW     |
|------------|--------|--------|
| 31/12/2021 | 0,002% | 0,006% |
| 31/12/2020 | 0,056% | 0,15%  |
| 31/12/2019 | 0,002% | 0,12%  |

TABLE 3 – Distance quadratique des écarts relatifs entre les deux modèles

## Calibrage des corrélations du GSE

Lorsque le générateur de scénarios économiques allie plusieurs modèles stochastiques, il est essentiel que les trajectoires diffusées reflètent la dépendance existante entre les facteurs de risque. La mesure de dépendance employée est la corrélation linéaire de Pearson. Aussi, les mouvements browniens associés à chaque modèle stochastique sont-ils corrélés à l'aide d'une matrice de corrélation spécifique :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{pmatrix}$$

Telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, 0 < i, j < N, dW^i(t)dW^j(t) &= \rho dt \\ \forall 0 < i < N, \rho_{i,i} &= 1 \\ \forall 0 < i, j < N, \rho_{i,j} &= \rho_{j,i} \end{aligned}$$

L'intégration d'un aléa supplémentaire au sein du modèle de taux augmente la dimension de la matrice  $\Sigma$ . Tout l'enjeu réside alors dans l'estimation des corrélations entre le processus  $x$  (resp.  $y$ ) et les autres facteurs de risque du GSE. Cette étape est moins aisée que pour un modèle unifactoriel, puisqu'à l'abstraction des facteurs s'ajoutent leur rôle symétrique dans la dynamique du taux court, ainsi que leur corrélation  $\rho$  calibrée à l'étape précédente. De ce fait, les deux processus ne sont pas aisément identifiables à des taux observés sur le marché.

Les techniques d'estimation des corrélations proposées dans la littérature étant limitées, une nouvelle méthode, basée sur les travaux de B. Law (2021), est alors employée. Celle-ci permet d'estimer, à partir de corrélations observées, les corrélations théoriques entre les processus gaussiens du G2++ et les facteurs de risque du GSE. Cette démarche a pour avantage principal sa rapidité, car sa mise en œuvre consiste simplement en la résolution d'un système d'équations linéaires de faible dimension.

En effet, le calcul numérique des corrélations instantanées est réalisé à partir des corrélations empiriques entre le log-rendement d'un actif modélisé par Black & Scholes<sup>1</sup> et celui de deux taux zéro-coupon de durées de maturité distinctes  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Il suffit pour ce faire de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} c_1(\tau_1) & c_2(\tau_1) \\ c_1(\tau_2) & c_2(\tau_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{x,s} \\ \rho_{y,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau_1}^R, \Delta^s) \\ \hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau_2}^R, \Delta^s) \end{pmatrix}$$

Où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux fonctions déterministes dépendantes des paramètres du modèle G2++ calibrés précédemment, et :

- $\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau}^R, \Delta^s)$  le coefficient de corrélation empirique entre le rendement du taux zéro-coupon de durée jusqu'à maturité  $\tau$  noté  $\Delta_{\tau}^R$  et le log-rendement actions (respectivement immobilier ou gestion alternative)  $\Delta^s$  ;
- $\rho_{x,s}$  le coefficient de corrélation linéaire entre le processus  $x$  et le risque action (respectivement immobilier ou gestion alternative). Plus précisément, il s'agit du coefficient de corrélation linéaire instantané entre les mouvements browniens associés respectivement au processus  $x$  et au modèle de Black & Scholes ;
- $\rho_{y,s}$  le coefficient de corrélation linéaire entre le processus  $y$  et le risque action (respectivement immobilier ou gestion alternative). Plus précisément, il s'agit du coefficient de corrélation linéaire instantané entre les mouvements browniens associés respectivement au processus  $y$  et au modèle de Black & Scholes.

Lorsque la matrice  $\Sigma$  obtenue n'est pas définie positive, un algorithme de transformation lui est appliqué afin de déterminer la matrice définie positive la plus proche de l'initiale.

---

1. Celui-ci peut représenter un indice action, immobilier ou gestion alternative.

## Impacts sur le bilan prudentiel

Une fois le modèle mis en place et validé à l'aide de différents tests statistiques, les indicateurs de solvabilité de la société d'assurance vie sont calculés au 31/12/2021 à l'aide du modèle gaussien à deux facteurs.

Le passage du modèle unifactoriel de Hull & White au G2++ induit une légère baisse de 0,03% du Best Estimate en scénario central.

|                      | HW     | G2++  | Variation relative |
|----------------------|--------|-------|--------------------|
| <i>Best Estimate</i> | 10 000 | 9 997 | -0,03%             |

TABLE 4 – Valeurs du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 pour les modèles de Hull & White et G2++

Cette variation s'explique par les mouvements des rachats conjoncturels dans un environnement de taux bas. En effet, avec le G2++, le taux cible moyen attendu par les assurés s'écarte davantage du taux servi par l'assureur. La baisse des intérêts servis aux assurés réduit l'attractivité des contrats et entraîne une hausse des rachats. Ces derniers concernent des contrats non rentables pour l'assureur, pour lesquels le taux de rendement financier de l'assureur est inférieur au taux servi aux assurés. Ainsi, la hausse des rachats de contrats non profitables diminue les pertes futures de l'assureur, et induit une diminution de ses engagements.

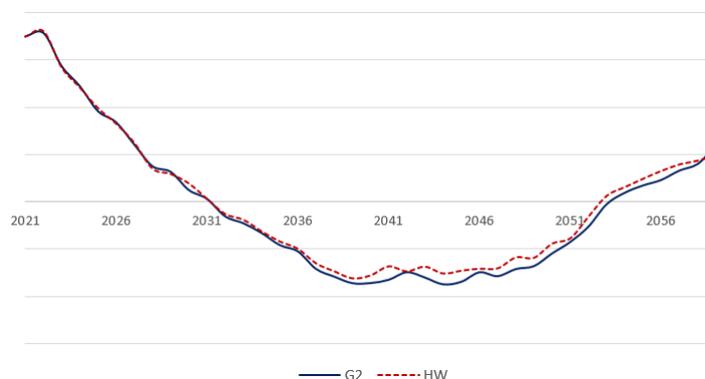


FIGURE 3 – Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux de rendement comptable moyen perçu par l'assureur pour les fonds euros sur les 40 ans de projection

Le passage du modèle de Hull & White au G2++ augmente le ratio de solvabilité de 4 points au 31/12/2021.

|                      | HW   | G2++ | Variation |
|----------------------|------|------|-----------|
| Ratio de solvabilité | 200% | 204% | + 4 pts   |

TABLE 5 – Variation du ratio de solvabilité suite à la mise en place du G2++

Il est à noter que cette analyse n'est valable que pour le portefeuille étudié et le contexte économique en vigueur au 31/12/2021.

---

## Ajustement du *Best Estimate*

Enfin, une méthode d'ajustement est proposée pour prendre en compte les lacunes du G2++. En effet, la qualité de reproduction des prix d'instruments dérivés du modèle gaussien à deux facteurs, bien que supérieure à celle de Hull & White, est imparfaite. De plus, l'évaluation des *caps* par le modèle calibré au 31/12/2021 est peu précise, car le calibrage du modèle n'est pas réalisé simultanément sur les deux produits de taux considérés. Il est donc proposé d'ajuster la valeur des provisions *Best Estimate* calculée avec le modèle G2++ pour tenir compte du calibrage imparfait de la surface des volatilités, ainsi que du manque de précision inhérent aux méthodes d'approximation numériques. Cette étude s'inspire des travaux sur les ajustements de produits financiers développés par Hagan en 2002 et enrichis par Bégot en 2016. Il est proposé ici d'ajuster non pas le prix d'un actif financier, mais la valeur des provisions *Best Estimate*. Cette approche nécessite de construire un portefeuille répliquant simplifié du *Best Estimate*. Un portefeuille répliquant est constitué d'instruments financiers simples générant des flux les plus similaires possible à ceux du passif de l'assureur.

Soit  $H$  le portefeuille répliquant du BE, constitué d'un nombre  $n_H$  d'instruments de couverture  $\{H_1, \dots, H_{n_H}\}$  :

$$H = \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i H_i \quad (1)$$

où  $H_i$  correspond à l'instrument répliquant  $i$ , et  $\alpha_i$  son poids dans le portefeuille  $H$ . Le portefeuille considéré est supposé composé uniquement de *swaptions* et de *caps*. De cette manière, la valeur ajustée du BE tiendra compte de l'erreur liée au fait que le modèle n'a pas été calibré sur les *caps*. Le prix de  $H$  évalué à l'aide du modèle G2++ est noté  $H^m$ .

Hagan définit le prix ajusté du BE de la façon suivante :

$$\text{BE}^{aj} = (\text{BE} - H)^m + H^{\text{marché}} \quad (2)$$

$$= \text{BE}^m + \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i (H_i^{\text{marché}} - H_i^m) \quad (3)$$

où  $\text{BE}^m$  est la valeur du *Best Estimate* calculée à l'aide du G2++.

### Construction du portefeuille répliquant

Le portefeuille répliquant du *Best Estimate* est supposé composé de *caps* de maturités 5, 7, 10, 12 et 15 ans, ainsi que de *swaptions* de maturité  $T_\alpha \in \{5, 7, 10\}$  et de ténor  $T_\beta - T_\alpha \in \{5, 10, 12\}$ . Ce choix est motivé par les caractéristiques du passif d'assurance et par la durée de 9,5 ans du portefeuille d'actifs représentatif du fonds euro au 31/12/2021.

Une fois les instruments composant le portefeuille  $H$  sélectionnés, il s'agit de déterminer leur allocation au sein de celui-ci. Pour ce faire, les poids  $\alpha_i$  de chaque instrument  $H_i$  sont estimés par une régression *ridge* afin de prendre en compte une éventuelle dépendance entre les instruments financiers composant  $H$ .

Il s'agit alors de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\alpha} \sum_{k=1}^s \left( \text{BE}_k - \sum_{i=1}^{n_H} H_i^k \alpha_i \right)^2 + \lambda \|\alpha\|_2$$

où  $H_i^k$  est le prix de l'instrument  $H_i$  pour le jeu de paramètres  $k$ . Le coefficient de pénalisation  $\lambda$  est déterminé à partir d'une validation croisée de type  $k$ -folds.

## Résultat

L'allocation du portefeuille répliquant étant fixée, la valeur ajustée du Best Estimate au 31/12/2021 est la suivante :

| Ajustement | BE Ajusté | BE Central |
|------------|-----------|------------|
| 24         | 10 021    | 9 997      |

TABLE 6 – Valeur ajustée du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021

## Conclusion

L'évaluation des exigences quantitatives imposées par Solvabilité II avec le modèle G2++ n'a qu'un impact réduit par rapport au modèle de Hull & White. Les distributions des taux induites par les deux modèles sont proches : la différence entre les deux modèles est surtout remarquable lors de l'évaluation de produits dérivés.

Il s'avère que l'ajout d'un facteur complexifie la mise en place du modèle de taux, et nécessite de recourir à des méthodes pertinentes et efficaces, et ce notamment lors de la construction de la structure de dépendance au sein du GSE. Une nouvelle méthode, liant corrélations théoriques et empiriques, est alors appliquée. Elle permet de refléter la dépendance observée entre certains taux de référence et les facteurs actions, immobilier et gestion alternative.

Enfin, la méthode d'ajustement du *Best Estimate*, inspirée des travaux d'Hagan et de Bégot, permet de conserver des modèles de taux simples en tenant compte de leurs limites, et ainsi de satisfaire aux exigences grandissantes de communication financière.

# Executive Summary

Since the first of January 2016, the European Solvency II directive requires insurance companies to revalue their balance sheets. To this end, the use of an economic scenario generator (ESG) is essential to value the Best Estimate liability (BEL). The ESG makes it possible to project the random evolutions of a certain number of risk factors. Among these, interest rates are used to value both the assets portfolio and the insurer's future liabilities. Therefore, the interest rate model is one of the main components of the economic scenario generator and must be chosen with relevance.

The one-factor Hull & White rate model used up to now within the company's ESG does not allow a full reproduction of the rate curve, as well as the prices of listed financial instruments. Consequently, considering not one, but several sources of uncertainty, makes it possible to refine the modeling of interest rates. The model chosen to replace Hull & White is the Gaussian two-factor model (G2++). It overcomes the limitations of Hull & White and is easily implemented into the asset and liability management model (ALM) used by the company.

The dynamics of the short rate in the two-factor Gaussian model is given as follows :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0$$

where  $(x(t))_{t \geq 0}$  and  $(y(t))_{t \geq 0}$  are two processes with dynamics :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0 \\ dy(t) = -bx(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0 \end{cases}$$

With :

- $a, b, \sigma, \eta$  positive constants;
- $W_1, W_2$  two brownian motions with instantaneous correlation  $\rho \in [-1; 1]$ , as from  $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ ;
- $\varphi$  a deterministic function.

Considering an additional random factor complicates the construction of the interest rate model. It is therefore necessary to use new methods when calibrating the model and correlating the various diffusion models within the ESG (interest rates, equities, real estate, hedge funds and spread).

## Calibration

In order for the two-factor Gaussian model to project reliable paths, its five parameters are calibrated using interest rate derivatives : caps and swaptions. To do this, the quadratic distance between the market prices of these derivatives and their theoretical prices is minimized :

$$\operatorname{argmin}_{a,b,\sigma,\eta,\rho} \left\{ \sum_{i=1}^N w_i \left( \pi_{\text{market}}(i) - \pi_{\text{G2++},(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i) \right)^2 \right\}$$

where :

- $\pi_{\text{market}}(i)$  is the i-th derivative's market price ;
- $\pi_{\text{G2++},(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i)$  is the theoretical price of the i-th derivative, computed with the G2++ model ;
- $w_i$  is the weight allocated to the i-th derivative.

### Calibration with reference to caps

The calibration of the parameters with reference to caps is easy because these are valued by a closed formula under the dynamics of the G2++. The calibration is carried out on at the money instruments. The optimal set of parameters obtained on 31/12/2021 is as follows :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 79,97% | 3,48% | 0,19%    | 0,82%  | -99,03% |

TABLE 7 – G2++ parameters calibrated with reference to caps on 31/12/2021

The theoretical prices obtained with the optimal parameters are compared to their market values on 31/12/2021 :

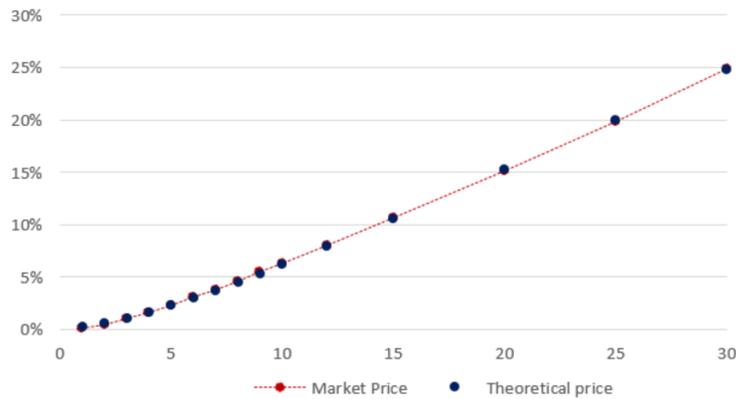


FIGURE 4 – Market and theoretical cap prices after calibration on 31/12/2021

### Calibration with reference to swaptions

In a second step, the calibration of the five parameters is carried out on at the money swaptions' prices. The computation of the latter with the G2++ model is less direct than

for the caps. It requires the use of numerical integration techniques and the resolution of non-linear equations (Gauss-Hermite quadrature, Newton algorithm, etc.). These methods are complex and considerably lengthen the search for the solution by the optimisation algorithm used. The Schrager and Pessler approximation is then used in order to calculate the price of a swaption in the G2++ model. It thus makes it possible to initialise the minimisation problem using a set of parameters close to the optimal solution and thus to accelerate the search for the optimum.

The optimal set of parameters obtained on 31/12/2021 is the following :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 50,77% | 2,52% | 0,42%    | 0,78%  | -89,70% |

TABLE 8 – Calibrated parameters with reference to swaptions on 31/12/2021

The above parameters are those retained for the rest of the study. Indeed, calibration with reference to swaptions gives rise to a more precise result : the overall quadratic difference between the observed and theoretical prices of financial instruments (swaptions and caps combined) is smaller when the parameters are calibrated with reference to swaptions.

| Calibration instrument | Caps  | Swaptions |
|------------------------|-------|-----------|
| Global squared error   | 0,16% | 0,09%     |

FIGURE 5 – Global squared error on 31/12/2021 according to the instrument used for calibration

In addition, it should be noted that the G2++ model induces a better ability to reproduce the market prices of derivative instruments than Hull & White.

|            | G2     | HW     |
|------------|--------|--------|
| 31/12/2021 | 0,002% | 0,006% |
| 31/12/2020 | 0,056% | 0,15%  |
| 31/12/2019 | 0,002% | 0,12%  |

TABLE 9 – Squared distance of the relative differences between the two models

## Calibration of ESG correlations

When the economic scenario generator combines several stochastic models, it is essential that the generated paths reflect the existing dependency between the risk factors. The dependency metrics used is Pearson's linear correlation. Therefore, the Brownian motions associated with each stochastic model are correlated using a specific correlation matrix :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{pmatrix}$$

Such as :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, 0 < i, j < N, dW^i(t)dW^j(t) &= \rho dt \\ \forall 0 < i < N, \rho_{i,i} &= 1 \\ \forall 0 < i, j < N, \rho_{i,j} &= \rho_{j,i} \end{aligned}$$

The integration of an additional process within the rate model increases the dimension of the  $\Sigma$  matrix. The challenge then lies in estimating the correlations between the  $x$  (resp.  $y$ ) process and the other ESG risk factors. This step is harder than for a unifactorial model, since in addition to the factors' abstraction, one must consider their symmetrical role in the dynamics of the short rate, as well as their correlation  $\rho$  calibrated in the previous step. As a result, the two processes are not easily identifiable with rates observed on the market.

As the correlation estimation techniques proposed in the literature are limited, a new method, based on the work of B. Law (2021), is used. This method makes it possible to estimate, from observed correlations, the theoretical correlations between the Gaussian processes of the G2++ and the risk factors within the ESG. The main advantage of this approach is its speed, as its implementation consists simply of solving a system of low-dimensional linear equations.

Indeed, the numerical calculation of instantaneous correlations is carried out on the basis of empirical correlations between the log return of an asset<sup>2</sup> and the return of two zero-coupon rates with distinct maturities  $\tau_1$  and  $\tau_2$ . To do this, it is sufficient to solve the following linear system :

$$\begin{pmatrix} c_1(\tau_1) & c_2(\tau_1) \\ c_1(\tau_2) & c_2(\tau_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{x,s} \\ \rho_{y,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau_1}^R, \Delta^s) \\ \hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau_2}^R, \Delta^s) \end{pmatrix}$$

Where  $c_1$  et  $c_2$  are two deterministic functions dependant of the G2++ parameters, and :

- $\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_{\tau}^R, \Delta^s)$  the empirical correlation coefficient between the zero coupon bond rate return with time to maturity  $\tau$  and the empirical correlation coefficient between the log return of the stock (resp. real estate or hedge fund) price  $\Delta^s$  ;
- $\rho_{x,s}$  the correlation coefficient between process  $x$  and the factor  $s$ . More precisely, it is the coefficient of instantaneous linear correlation between the Brownian motions associated with process  $x$  and Black & Scholes model respectively ;
- $\rho_{y,s}$  the correlation coefficient between process  $y$  and the factor  $s$ . More precisely, it is the coefficient of instantaneous linear correlation between the Brownian motions associated with process  $y$  and Black & Scholes model respectively.

When the resulting matrix is not positive definite, a transformation algorithm is applied to determine the closest positive definite matrix to the initial one.

---

2. Either an equity, real estate or hedge fund index. It is simulated by the Black & Scholes' dynamic.

## Impacts on the prudential balance sheet

Once the model has been set up and validated using various statistical tests, the company's solvency indicators are calculated on 31/12/2021 using the Gaussian two-factor model.

The change from the Hull & White model to G2++ leads to a slight decrease of 0.03% of the Best Estimate in the central scenario.

|                      | HW     | G2++  | Relative variation |
|----------------------|--------|-------|--------------------|
| <i>Best Estimate</i> | 10 000 | 9 997 | -0.03%             |

TABLE 10 – Best Estimate (in millions of euros) on 31/12/2021

This variation is explained by a dynamic surrenders decrease in a low-rate environment. Indeed, with the G2++, the average target rate expected by policyholders deviates more from the rate paid by the insurer. The fall in interest paid to policyholders reduces the attractiveness of contracts and leads to an increase in surrenders. These surrenders concern contracts that are not profitable for the insurer; for which the insurer's financial rate of return is lower than the rate paid by the insurer. Thus, the increase in surrenders of unprofitable contracts reduces the insurer's future losses, and leads to a decrease in its liabilities.

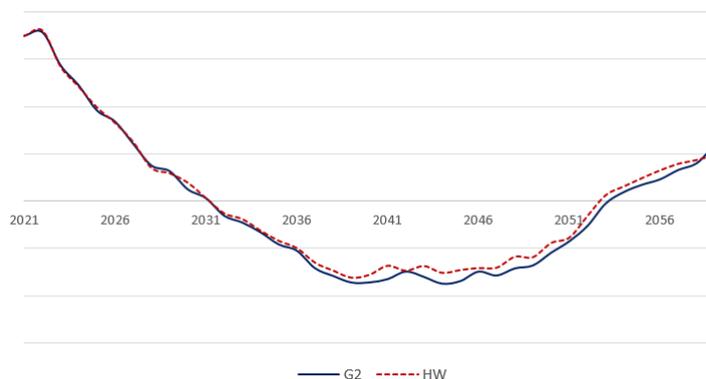


FIGURE 6 – Difference between the average rate paid to policyholders and the one received by the insurer for the euro fund over a 40-year projection period

The change from the Hull & White model to the G2++ one increases the solvency ratio by 4 points on 31/12/2021.

|                | HW   | G2   | Variation |
|----------------|------|------|-----------|
| Solvency ratio | 200% | 204% | + 4 pts   |

TABLE 11 – Change in the solvency ratio following the introduction of G2++

It should be noted that this analysis is only valid for the portfolio studied and the economic context in force on 31/12/2021.

## Adjustment of the Best Estimate liability

Finally, an adjustment method is proposed to take into account the shortcomings of the G2++. Indeed, the quality of reproduction of derivative prices by the two-factor Gaussian

---

model, although superior to Hull & White, is imperfect. Moreover, the valuation of the *caps* by the model calibrated at 31/12/2021 is not very accurate, because the calibration of the model is not carried out simultaneously on the two derivatives considered. It is therefore proposed to adjust the value of the Best Estimate calculated with the G2++ model to take into account the imperfect calibration of the volatility surface, as well as the lack of precision inherent in the numerical approximation methods. This study is inspired by the work on financial adjusters developed by Hagan in 2002 and enriched by Bégot in 2016. It is proposed here to adjust not the price of a financial asset, but the value of the Best Estimate liability. This approach is based on the risk transfer from the one generated by the interest rate model to the risk present on financial markets, and notably requires the construction of a simplified replicating portfolio of the BE. A replicating portfolio is made up of simple financial instruments generating flows as similar as possible to those of the insurer's liabilities.

Let  $H$  be the BEL replicating portfolio, consisting of a number  $n_H$  of hedging instruments  $\{H_1, \dots, H_{n_H}\}$  :

$$H = \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i H_i \quad (4)$$

where  $H_i$  corresponds to the  $i$ -th hedging instrument, and  $\alpha_i$  its weight in the portfolio  $H$ . The portfolio considered is assumed to be composed solely of *swaptions* and *caps*. In this way, the adjusted value of the BEL will take into account the error linked to the fact that the model has not been calibrated on the *caps*. The price of  $H$  evaluated using the G2++ model is noted as  $H^m$ .

Hagan defines the BEL adjusted price as follows :

$$\text{BE}^{adj} = (\text{BE} - H)^m + H^{\text{market}} \quad (5)$$

$$= \text{BE}^m + \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i (H_i^{\text{market}} - H_i^m) \quad (6)$$

where  $\text{BE}^m$  is the value of the *Best Estimate* calculated using the G2++.

## Construction of the replicating portfolio

The Best Estimate's replicating portfolio is assumed to be composed of 5, 7, 10, 12 and 15 year maturity caps, as well as swaptions with maturity  $T_\alpha \in \{5, 7, 10\}$  and tenor  $T_\beta - T_\alpha \in \{5, 10, 12\}$ . This choice is motivated by the characteristics of the insurance liabilities and by the 9.5-year duration of the portfolio of assets representing the euro fund.

Once the replicating instruments have been selected, it is a matter of determining their allocation within the portfolio  $H$ . To do this, the weights  $\alpha_i$  of each instrument  $H_i$  of the portfolio  $H$  are estimated by a ridge regression in order to take into account a possible dependency between the financial instruments composing  $H$ .

It is then necessary to solve the following optimisation problem :

$$\min_{\alpha} \sum_{k=1}^s \left( \text{BE}_k - \sum_{i=1}^{n_H} H_i^k \alpha_i \right)^2 + \lambda \|\alpha\|_2$$

---

where  $H_i^k$  is the price of the instrument  $H_i$  for the parameter set  $k$ . The penalty coefficient  $\lambda$  is determined from a k-folds cross-validation.

## Results

With the allocation of the replicating portfolio fixed, the adjusted Best Estimate value on 31/12/2021 is as follows :

| Adjustment | Adjusted BEL | Central BEL |
|------------|--------------|-------------|
| 24         | 10 021       | 9 997       |

TABLE 12 – Adjusted BEL (in millions of euros) on 31/12/2021

## Conclusion

The assessment of the quantitative requirements imposed by Solvency II with the G2++ model has only a reduced impact compared to the Hull & White model. The rate distributions induced by the two models are close. The difference between these is especially noticeable when valuing derivatives.

It has been found that the addition of a random factor complicates the implementation of the interest rate model, and requires the use of relevant and efficient methods, especially when computing the dependency structure within the ESG. A new method, linking theoretical and empirical correlations, is then applied. It allows to reflect the observed dependency between some reference rates and the equity, real estate and hedge fund factors.

Moreover, the adjusting method applied to the *Best Estimate*, inspired by the work of Hagan and Bégot, makes it possible to keep rate models simple while taking into account their limits, and thus to satisfy the growing requirements of financial communication.

# Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier mon directeur de mémoire, Nicolas JAEGER, pour sa disponibilité, sa bienveillance, ainsi que son aide précieuse tout au long de mon alternance. Ses conseils et son expertise ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Blanche de VILLETTE pour m'avoir accueillie au sein de la Direction Modélisation et Risques des Assurances du Crédit Mutuel.

Mes pensées vont également à toutes les personnes ayant participé de près ou de loin au bon déroulement de mon alternance, notamment les membres du BDS pour leur bonne humeur et leur soutien, ainsi que Delphine MORGANA pour ses relectures et ses remarques pertinentes.

Je souhaite aussi remercier l'équipe pédagogique du DUAS, en particulier mon tuteur académique, M. Areski COUSIN, pour l'attention portée à mon travail. Aussi, merci à mes camarades de promotion pour leur regard critique, spécialement Jonas BUHLER.

Enfin, je n'oublie pas mes proches : un grand merci à eux pour leur patience, leurs encouragements et leurs nombreuses relectures.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>I Contexte de l'étude</b>                              | <b>3</b>  |
| <b>1 Contexte réglementaire</b>                           | <b>4</b>  |
| 1.1 Bilan prudentiel . . . . .                            | 4         |
| 1.2 Provisions techniques . . . . .                       | 5         |
| 1.3 Minimum de Capital Requis . . . . .                   | 6         |
| 1.4 Capital de Solvabilité Requis . . . . .               | 6         |
| <b>2 Périmètre de l'étude</b>                             | <b>9</b>  |
| <b>3 Modèle de gestion actif-passif</b>                   | <b>11</b> |
| 3.1 Hypothèses . . . . .                                  | 12        |
| 3.2 Modélisation de l'actif . . . . .                     | 12        |
| 3.3 Modélisation du passif . . . . .                      | 13        |
| <b>4 Générateurs de scénarios économiques</b>             | <b>15</b> |
| 4.1 Méthode de Monte-Carlo . . . . .                      | 16        |
| 4.2 Contraintes . . . . .                                 | 17        |
| 4.3 Univers de projection . . . . .                       | 17        |
| 4.4 Construction d'un GSE . . . . .                       | 18        |
| 4.5 Facteurs de risque modélisés . . . . .                | 18        |
| <b>II Notions théoriques</b>                              | <b>20</b> |
| <b>5 Concepts mathématiques et financiers</b>             | <b>21</b> |
| 5.1 Produits classiques de taux . . . . .                 | 21        |
| 5.2 Structure par terme des taux d'intérêt . . . . .      | 23        |
| 5.3 Produits dérivés de taux . . . . .                    | 23        |
| 5.4 Notions mathématiques . . . . .                       | 26        |
| <b>6 Généralités sur les modèles de taux</b>              | <b>28</b> |
| 6.1 Modèles factoriels . . . . .                          | 28        |
| 6.2 Caractéristiques des modèles de taux courts . . . . . | 29        |
| 6.3 Choix d'un nouveau modèle de taux . . . . .           | 30        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>7</b>   | <b>Modèles retenus</b>   | <b>32</b>  |
| 7.1        | Modèle de Hull & White . . . . .                                       | 32         |
| 7.2        | Modèle gaussien à deux facteurs . . . . .                              | 36         |
| <b>III</b> | <b>Implémentation du G2++ au sein du GSE</b>                           | <b>40</b>  |
| <b>8</b>   | <b>Construction du modèle gaussien à deux facteurs</b>                 | <b>41</b>  |
| 8.1        | Calibrage des paramètres . . . . .                                     | 41         |
| 8.2        | Diffusion des trajectoires . . . . .                                   | 52         |
| <b>9</b>   | <b>Structure de dépendance du GSE</b>                                  | <b>54</b>  |
| 9.1        | Estimation des corrélations théoriques . . . . .                       | 56         |
| 9.2        | Propriété de définie positivité de la matrice de corrélation . . . . . | 58         |
| 9.3        | Génération des aléas . . . . .   | 60         |
| <b>10</b>  | <b>Validation du modèle de taux</b>                                    | <b>64</b>  |
| 10.1       | Tests de martingalité . . . . .  | 64         |
| 10.2       | Tests de <i>market consistency</i> . . . . .                           | 69         |
| 10.3       | Étude des moments des taux zéro-coupon . . . . .                       | 70         |
| 10.4       | Étude des corrélations . . . . .                                       | 71         |
| 10.5       | Fuite du modèle . . . . .  | 73         |
| <b>IV</b>  | <b>Résultats et impacts</b>  | <b>75</b>  |
| <b>11</b>  | <b>Impacts sur les indicateurs de solvabilité</b>                      | <b>76</b>  |
| 11.1       | Impact sur le <i>Best Estimate</i> . . . . .                           | 76         |
| 11.2       | Impact sur le ratio de solvabilité . . . . .                           | 78         |
| <b>12</b>  | <b>Ajustement des provisions <i>Best Estimate</i></b>                  | <b>80</b>  |
| 12.1       | Construction du portefeuille répliquant . . . . .                      | 81         |
| 12.2       | Allocation des actifs répliquants . . . . .                            | 82         |
| 12.3       | Ajustement du <i>Best Estimate</i> . . . . .                           | 83         |
| 12.4       | Impact sur le ratio de solvabilité . . . . .                           | 84         |
|            | <b>Conclusion</b>  | <b>86</b>  |
|            | <b>Bibliographie</b>   | <b>88</b>  |
|            | <b>Table des figures</b>   | <b>91</b>  |
|            | <b>Liste des tableaux</b>  | <b>92</b>  |
|            | <b>Annexes</b>   | <b>94</b>  |
| <b>A</b>   | <b>Compléments de mathématiques financières</b>                        | <b>94</b>  |
| <b>B</b>   | <b>Compléments sur le modèle G2++</b>                                  | <b>98</b>  |
| <b>C</b>   | <b>Volatilités implicites</b>  | <b>100</b> |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>D Estimation des corrélations théoriques</b>     | <b>103</b> |
| <b>E Tests de martingalité</b>                      | <b>106</b> |
| <b>F Comparaison des trajectoires projetées</b>     | <b>108</b> |
| <b>G Jeux de paramètres choqués et sensibilités</b> | <b>110</b> |

# Introduction

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2016, la directive européenne Solvabilité II impose aux organismes d'assurance et de réassurance une nouvelle valorisation de leur bilan. L'évaluation prudentielle du passif d'assurance nécessite de calculer des provisions techniques *Best Estimate* : elles correspondent à la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs (R351-2 du Code des assurances).

La projection des flux entrants et sortants des contrats d'assurance vie requiert de disposer d'un modèle de gestion actif-passif. Ce dernier projette, à partir d'hypothèses prédictives, l'actif et le passif de la société d'assurance ainsi que les fortes interactions existant entre eux. De plus, les flux de trésorerie futurs associés aux contrats d'épargne étant aléatoires et dépendant des évolutions de certaines grandeurs financières, l'utilisation d'un outil de projection de scénarios financiers s'avère indispensable. Un générateur de scénarios économiques (GSE) est constitué d'un ensemble de modèles destinés à projeter, sur un horizon de temps fini, des quantités financières telles que le rendement des actions, le rendement immobilier, le *spread* de crédit, ou les taux d'intérêt. Les évolutions possibles de ces facteurs de risque sont simulées via des scénarios aléatoires et alimentent le modèle de gestion actif-passif. De cette manière, ils permettent de valoriser l'actif et le passif d'assurance sur toute la durée de projection.

La modélisation des taux d'intérêt constitue l'objet même de ce mémoire. De fait, l'influence du modèle de taux sur les trajectoires projetées, et ainsi sur le *Best Estimate*, est considérable. En effet, la valorisation du portefeuille obligataire, contributeur principal de l'actif de la compagnie, est opérée à l'aide de la courbe des taux zéro-coupon estimée à chaque instant de projection par un modèle stochastique. À ce jour, les Assurances du Crédit Mutuel disposent d'un modèle ALM et d'un GSE entièrement développés en interne. Les taux d'intérêt sont projetés à l'aide du modèle de Hull & White. Ce modèle est standard, populaire, et suppose que les mouvements de la courbe des taux sont causés par une seule source d'aléa. Toutefois, la prise en compte d'une unique source de risque conduit à des limites, motivant la modélisation d'un facteur aléatoire supplémentaire. En outre, afin de s'assurer que les provisions techniques ne soient pas sous-estimées, le régulateur recommande la réalisation ponctuelle de tests de sensibilités utilisant des modèles de taux plus complexes (ACPR, 2020). Dès lors, il convient de construire un modèle à plusieurs facteurs, de façon à modéliser plus fidèlement les mouvements de la courbe des taux, tout en veillant à conserver une simplicité de mise en œuvre.

L'objectif de ces travaux est de quantifier l'impact de la mise en place d'un modèle à deux facteurs, le G2++, sur les indicateurs clés de Solvabilité II : le *Best Estimate* et le ratio de solvabilité.

---

L'ajout d'un facteur aléatoire complexifie la construction de ce nouveau modèle, et plus particulièrement la corrélation des différents modèles de diffusion employés (taux, actions, immobilier, gestion alternative, *spread* de crédit). En effet, les techniques d'estimation des corrélations entre les deux facteurs du G2++ et les autres aléas du GSE proposées dans la littérature sont limitées et peu satisfaisantes au regard de l'abstraction des processus considérés. Dès lors, une nouvelle méthode, liant corrélations observées et théoriques, est proposée.

En outre, bien que plus performant que Hull & White, le modèle G2++ est moins complexe que ses homologues dits "de marché". La capacité de reproduction des prix de certains instruments financiers par le modèle gaussien à deux facteurs, et ainsi sa précision, peuvent alors en être impactés. Une méthode d'ajustement du *Best Estimate*, inspirée des travaux de Hagan et Bégot est mise en place pour tenir compte des limites lors du calibrage du modèle.

La première partie de ce mémoire exposera les notions essentielles de la directive Solvabilité II, ainsi que l'importance du générateur de scénarios économiques et de son interaction avec le modèle de gestion actif-passif pour valoriser des contrats d'épargne à leur juste valeur. Dans une deuxième partie, les fondements théoriques sur lesquels reposent l'ensemble des travaux réalisés seront introduits, puis le choix du modèle gaussien à deux facteurs comme alternative à Hull & White sera justifié. La construction du modèle et tous les questionnements afférents seront détaillés dans une troisième partie. Celle-ci traitera notamment des problématiques liées au calibrage, à la dépendance entre les variables du GSE et à la validation du modèle construit. Enfin, le modèle sera employé dans le cadre de la modélisation de contrats d'assurance vie ; les valeurs du *Best Estimate* et du ratio de solvabilité seront comparées à celles obtenues avec Hull & White au 31/12/2021. La dernière partie s'achèvera par l'application d'une méthode d'ajustement du *Best Estimate* prenant en compte la réplification imparfaite des produits dérivés de taux par le modèle gaussien à deux facteurs.

## Première partie

# Contexte de l'étude

Ce mémoire a pour objet la construction d'un nouveau modèle de projection des taux d'intérêt, dont l'impact sera apprécié au sein du périmètre de l'assurance vie épargne. Cette première partie présente les grands principes de la norme Solvabilité II, ainsi que l'importance du générateur de scénarios économiques et de son interaction avec le modèle de gestion actif-passif pour valoriser des contrats d'épargne à leur juste valeur.

# Chapitre 1

## Contexte réglementaire

La construction d'un modèle de taux au sein d'un générateur de scénarios économiques s'inscrit dans le contexte réglementaire de Solvabilité II. Cette première section rappelle les notions essentielles de la norme.

La directive Solvabilité II, adoptée en 2009 et entrée en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016, est une norme prudentielle européenne ayant pour objectif principal le contrôle de la solvabilité des organismes d'assurance et de réassurance. Succédant à la norme Solvabilité I, sa mise en place vise une meilleure prise en compte des risques, notamment par une réelle adéquation des fonds propres au profil de risque de l'assureur.

S'inspirant de la structure de la norme bancaire Bâle II, la directive s'articule autour de trois piliers :

- Le **Pilier I** définit les exigences quantitatives auxquelles est soumis l'assureur. L'objectif est d'apprécier la capacité de l'organisme d'assurance à respecter les engagements pris envers ses assurés en détenant suffisamment de fonds propres, et de calculer au plus juste les engagements de l'assureur.
- Le **Pilier II** spécifie des exigences qualitatives de gouvernance des risques à travers la mise en place d'un système de gestion des risques. Celui-ci est au cœur de l'identification, de la quantification et du pilotage des risques supportés par l'organisme.
- Le **Pilier III** impose des contraintes de communication au superviseur et de transparence vis-à-vis du public.

### 1.1 Bilan prudentiel

La directive requiert la construction d'un nouveau bilan afin d'apprécier la richesse des organismes au plus proche de la réalité.

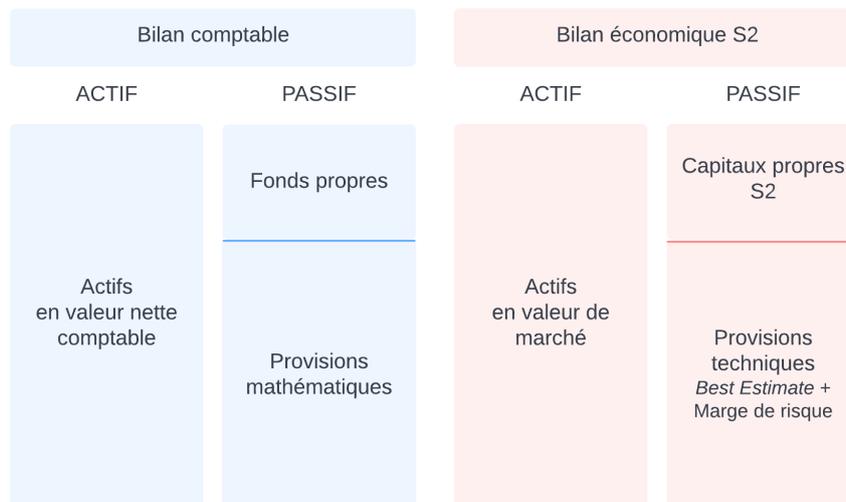


FIGURE 1.1 – Comparaison du bilan comptable sous Solvabilité I au bilan économique sous Solvabilité II

La vision économique imposée par Solvabilité II diffère de la vision sociale comptable. En effet, les actifs et les passifs sont valorisés « au montant pour lequel ils pourraient être échangés (pour des actifs) ou transférés ou réglés (pour des passifs) dans le cadre d’une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes » (considérant 7 du règlement délégué [15]). L’actif de l’entreprise n’est alors plus valorisé en valeur d’acquisition mais en valeur de marché, et l’évaluation du passif nécessite de calculer des provisions techniques *Best Estimate*.

## 1.2 Provisions techniques

L’article R.351-2 du Code des assurances définit les provisions techniques comme la somme des provisions *Best Estimate* et de la marge de risque.

La meilleure estimation, ou *Best Estimate*, correspond à la somme des valeurs actualisées et probabilisées des flux de trésorerie futurs jusqu’à l’extinction des engagements de l’assureur. La courbe des taux utilisée lors de l’actualisation est la courbe des taux sans risque fournie par l’EIOPA<sup>1</sup>. L’expression mathématique du *Best Estimate* est la suivante :

$$BE = \mathbb{E} \left[ \sum_{t>0}^T D(0, t) CF_t \right] \quad (1.1)$$

où :

- $D(0, t)$  est le facteur d’actualisation entre les dates 0 et  $t$ . Il s’agit d’une variable aléatoire, définie dans le deuxième chapitre. Son espérance doit coïncider avec la valeur des prix zéro-coupon de la courbe EIOPA ;
- $T$  est l’horizon de projection des engagements de l’assureur ;
- $CF_t$  correspond à la valeur des flux de trésorerie en date  $t$ . Dans le cas d’un contrat d’épargne, elle intègre les rachats, les prestations versées en cas de décès, ou encore les frais. Il s’agit donc d’une variable aléatoire.

1. L’EIOPA, pour *European Insurance and Occupational Pensions Authority*, est l’autorité européenne de surveillance des assurances et des pensions professionnelles.

Ainsi, l'objectif n'est pas tant de déterminer la valeur exacte du *Best Estimate* mais davantage de l'approcher à l'aide d'un estimateur pertinent.

Le calcul des engagements de l'assureur en assurance vie nécessite de modéliser à la fois le comportement des assurés (rachats, décès, arbitrages) et les évolutions des marchés financiers. Ces points seront détaillés dans la section dédiée au périmètre épargne. En outre, les garanties financières des contrats d'épargne étant dépendantes des conditions de marché, elles donnent lieu à l'utilisation de méthodes par simulations stochastiques pour le calcul des provisions techniques (considérant 15 du règlement délégué [15]). Le *Best Estimate* est ainsi calculé comme l'engagement moyen de l'assureur sur un grand nombre de scénarios économiques.

Enfin, la marge de risque correspond au montant additionnel au *Best Estimate* qu'exigerait un acquéreur pour reprendre les engagements d'assurance. Elle représente ainsi une marge de prudence garantissant que les provisions techniques reflètent bien la valeur de transfert des engagements. La marge de risque se calcule de la façon suivante (article 37 du règlement délégué [15]) :

$$RM = CoC \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + R(0, t + 1))^{t+1}} \quad (1.2)$$

Avec :

- $t$  l'instant de projection considéré ;
- $R(0, t + 1)$  le taux d'intérêt sans risque entre les dates 0 et  $t + 1$  ;
- $SCR(t)$  le capital de solvabilité requis en date  $t$  ;
- $CoC$  le coût du capital.

### 1.3 Minimum de Capital Requis

Le Minimum de Capital Requis (MCR) représente le niveau minimal de fonds propres à détenir par l'organisme d'assurance pour exercer son activité. Il se calcule de la façon suivante (article 248 du règlement délégué [15]) :

$$MCR = \max\{MCR_{\text{combiné}}; AMCR\} \quad (1.3)$$

Où :

- $MCR_{\text{combiné}} = \min(\max(MCR_{\text{linéaire}}; 0, 25 \times SCR); 0, 45 \times SCR)$  où le calcul du  $MCR_{\text{linéaire}}$  est précisé dans le règlement délégué et le  $SCR$  représente le capital de solvabilité requis ;
- $AMCR$  est un seuil plancher.

### 1.4 Capital de Solvabilité Requis

Le Capital de Solvabilité Requis (SCR) représente le montant de fonds propres nécessaire pour limiter la probabilité de faillite de l'organisme à 0,5% sur un horizon d'un an. La métrique imposée par le règlement délégué pour quantifier ce risque est la *Value at Risk*

(VaR) de niveau 99,5%. La VaR de niveau  $\alpha$  d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$  est définie comme le quantile de niveau  $\alpha$  :

$$VaR_\alpha[X] = F_X^{[-1]}(\alpha) = \inf \{x | F_X(x) \geq \alpha\} \quad (1.4)$$

La formule standard propose une décomposition du SCR par familles de risques :

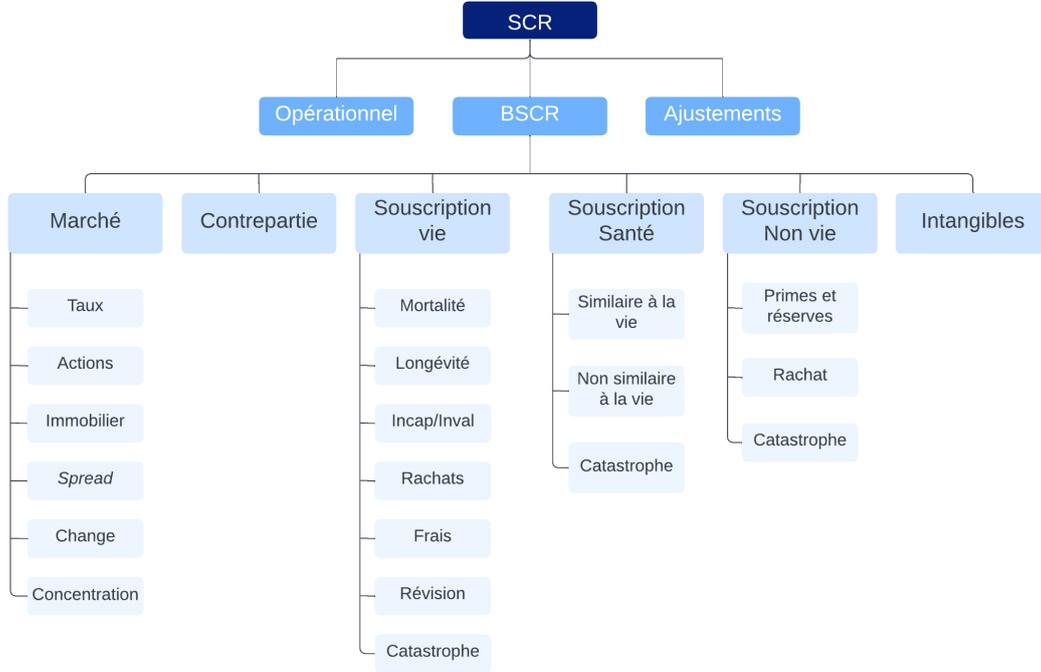


FIGURE 1.2 – Modules de risques nécessaires au calcul du SCR

Le SCR pour chaque sous-module se calcule par variation de l'actif net réévalué (NAV pour *Net Asset Value*). Il se calcule comme la différence entre la valeur de marché des actifs et le *Best Estimate* :

$$NAV = VM(\text{Actifs}) - BE$$

Ainsi, à chaque sous-module de risque est associé un choc impactant l'actif et le passif de l'organisme d'assurance. Celui-ci est calibré de telle manière à correspondre à la VaR de niveau 99,5%. La NAV dans le scénario choqué est alors la suivante :

$$NAV_{\text{choc}} = VM(\text{Actifs})_{\text{choc}} - BE_{\text{choc}}$$

Le scénario dans lequel aucun choc n'est appliqué est appelé le scénario central. La valeur du SCR du sous-module  $i$  se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} SCR_i &= NAV_{\text{central}} - NAV_{\text{choc}}^i \\ &= \Delta VM(\text{Actif}) - \Delta BE \end{aligned}$$

Le SCR s'interprète alors comme la variation de la valeur de marché des actifs suite au choc  $i$ , à laquelle est retranchée la variation du *Best Estimate*. Autrement dit, il représente le besoin en capital de l'organisme après survenance du choc  $i$ .

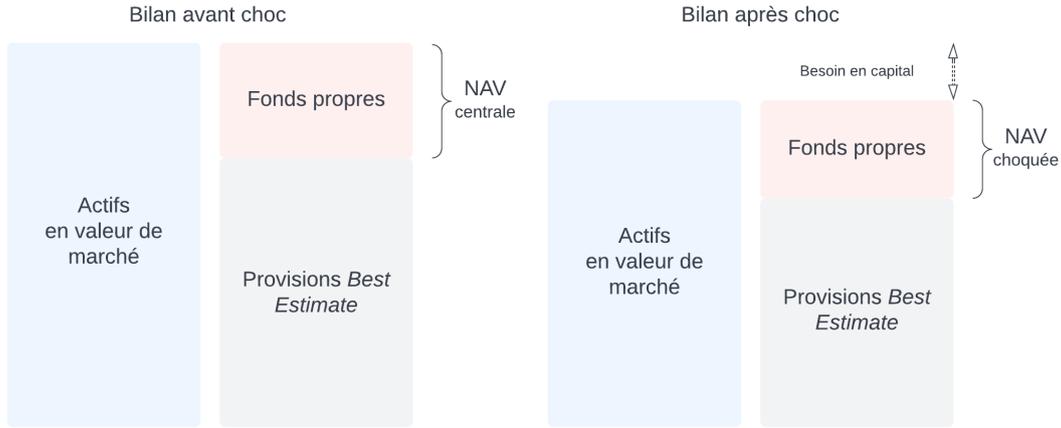


FIGURE 1.3 – Variation de l’actif net réévalué suite à un choc

Les capitaux de solvabilité requis sont ensuite agrégés à l’aide de matrices de corrélation entre les facteurs de risque selon deux niveaux d’agrégation : inter-modulaire et intra-modulaire. Ainsi, le SCR d’un sous-module de risque est obtenu de la façon suivante :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}^m SCR_i^m SCR_j^m} \quad (1.5)$$

Avec :

- $SCR_i^m$  le SCR du sous-module  $i$  ;
- $\rho_{i,j}^m$  le coefficient de corrélation linéaire entre les sous-modules de risque  $i$  et  $j$ .

De même, pour le BSCR :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j} \quad (1.6)$$

Avec :

- $SCR_i$  le SCR du module  $i$  ;
- $\rho_{i,j}$  le coefficient de corrélation linéaire entre les modules de risque  $i$  et  $j$ .

Enfin, le SCR global est obtenu par application de la formule suivante :

$$SCR = BSCR + SCR_{\text{opérationnel}} - \text{Ajustements}$$

où :

- Le SCR opérationnel est défini par la directive comme le risque de pertes résultant de procédures internes, de membres du personnel ou de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d’événements extérieurs (considérant 67 du règlement délégué [15]) ;
- Les ajustements prennent en compte la capacité d’absorption des risques grâce aux mécanismes de participation aux bénéfices et d’impôts différés.

## Chapitre 2

# Périmètre de l'étude

Seuls les contrats d'assurance vie entrent dans le champ d'application de ce mémoire.

En deuxième position derrière le livret A, l'assurance vie fait partie des placements financiers les plus populaires auprès des ménages français (INSEE, 2022 [12]). Le contrat d'épargne permet à son souscripteur de se constituer un capital au cours du temps et de bénéficier d'une fiscalité avantageuse à son échéance. Les primes versées sont réinvesties par l'assureur sur les marchés financiers. Puis, la rémunération des contrats se fait à la fois à travers le versement d'intérêts sur le capital placé, et par le mécanisme de participation aux bénéfices (article A.132-11 du Code des assurances). Le contrat d'épargne intègre une garantie en cas de vie à l'échéance du contrat, et une garantie en cas de décès du souscripteur, prévoyant le versement du capital accumulé au profit des bénéficiaires.

Les contrats d'assurance vie se différencient notamment par leur support d'investissement :

- Les supports en euros garantissent à leur souscripteur la totalité du capital accumulé. Cette garantie en capital constitue l'attrait principal de ce type de contrat. Les primes versées sont investies dans des classes d'actifs relativement peu risquées telles que les emprunts d'Etat, les Bons du Trésor (Obligations Assimilables du Trésor), ou des obligations.
- Les supports en unités de compte (UC) n'assurent pas à leurs souscripteurs de récupérer le capital investi. À la différence du support en euros, la valeur de l'épargne s'exprime en unités de compte. Le contrat garantit à son détenteur un nombre d'UC, converti à la date d'échéance en euros. Le montant servi est donc dépendant de la valeur de l'unité de compte à la date de fin de contrat. Ce support d'investissement plus risqué propose en contrepartie un rendement espéré supérieur au fonds euros. Les primes versées sont principalement investies dans des OPCVM, des *trackers* ou des fonds immobiliers<sup>1</sup>.

Ces deux supports d'investissement se déclinent en différents types de contrats :

- Les contrats monosupport, dont l'épargne est uniquement investie en fonds euros

---

1. Les organismes de placement collectif en valeurs mobilières (OPCVM) sont des intermédiaires financiers offrant à leurs souscripteurs la possibilité d'investir sur des marchés financiers. Un *tracker* est un fonds d'investissement reproduisant, au travers d'un seul titre, les fluctuations d'un indice donné.

(ou en fonds UC) ;

- Les contrats multisupports combinent fonds euros et UC, laissant ainsi libre choix à l'assuré d'arbitrer entre ceux-ci tout au long du contrat. Ils constituent la majorité des contrats d'assurance vie épargne.

Les contrats d'épargne comprennent des garanties spécifiques et des options dont peut user l'assuré :

- L'option de rachat (article L132-21 du Code des assurances) donne droit à l'assuré de récupérer une partie ou la totalité de son épargne capitalisée avant le dénouement du contrat. Le calcul de la valeur de rachat est encadré par le Code des assurances et doit être communiqué annuellement à l'assuré ;
- Le taux minimum garanti, ou TMG (Article 132-3 du Code des assurances), s'il est prévu par les conditions générales du contrat, est le taux de rendement minimal dont bénéficie l'assuré sur son épargne. Il représente un risque supplémentaire porté par l'assureur, et ce particulièrement dans le contexte de taux bas de ces dernières années. En effet, en cas de baisse des taux, les rendements des actifs sur les marchés financiers ne sont plus suffisants pour honorer cette garantie de rémunération. Dans ce cas, le résultat ou les fonds propres sont mis à contribution pour servir le taux minimum garanti ;
- La garantie plancher est une option compensant le risque de perte des supports en unités de compte. Elle prévoit, dans le cadre de contrats multisupports, le versement d'un capital minimal au bénéficiaire en cas de décès de l'assuré ;
- Le mécanisme de participation aux bénéfices donne à l'assuré le droit de bénéficier du résultat généré par le placement de ses primes. L'article A.132-11 du Code des assurances impose aux assureurs de reverser au minimum 85% de leurs résultats financiers et 90% de leurs résultats techniques. Cette redistribution aux assurés peut être immédiate ou différée, sans toutefois outrepasser un délai de 8 ans. L'assureur peut alors affecter le montant de participation aux bénéfices à une provision pour participation aux excédents (PPE).

La valorisation des contrats d'épargne dans le cadre de Solvabilité II nécessite une attention particulière en raison des fortes interactions présentes entre les éléments de l'actif et du passif du bilan. L'article R 351-10 du Code des assurances impose la prise en compte des garanties financières et des options contractuelles dans le calcul du *Best Estimate*. Celles-ci sont fortement dépendantes de la volatilité des rendements des actifs financiers du portefeuille de l'assureur, et peuvent notamment s'apparenter à des options financières. Ces éléments nécessitent alors d'une part de calculer le *Best Estimate* à l'aide d'un modèle de projection actif-passif (ALM), et d'autre part de calibrer le générateur de scénarios économiques à l'aide d'instruments financiers répliquant au mieux l'optionnalité du portefeuille.

## Chapitre 3

# Modèle de gestion actif-passif

Essentiel au calcul du *Best Estimate*, le modèle de gestion actif-passif (ou ALM pour *Asset Liability Management*) projette les flux inhérents aux contrats d'assurance vie et estime l'évolution future des comptes de la société. Il modélise, à partir d'hypothèses prédictives, l'actif et le passif de la société d'assurance ainsi que les interactions entre ceux-ci. Le modèle ALM des Assurances du Crédit Mutuel est entièrement développé en interne sous le langage Excel VBA.

Trois éléments sont nécessaires à son fonctionnement :

- Des scénarios d'hypothèses jusqu'à l'horizon de projection ;
- Des informations relatives à l'actif en date de calcul ;
- Des informations relatives au passif en date de calcul.

En sortie, le modèle génère le compte de résultat et le bilan de la société à chaque date de projection. À partir de ces éléments sont déterminés les provisions techniques ainsi que les capitaux propres économiques sous Solvabilité II.

Les provisions techniques du bilan prudentiel de la société considérée pour l'étude se décomposent de la façon suivante au 31/12/2021<sup>1</sup> :

|               | <i>Best Estimate</i> | Marge pour risque | Provisions SII |
|---------------|----------------------|-------------------|----------------|
| Vie (hors UC) | 7 994                | 109               | 8 103          |
| UC            | 1 634                | 17                | 1 651          |

TABLE 3.1 – Provisions techniques Solvabilité II selon le type de support (en millions d'euros) au 31/12/2021

Le schéma ci-dessous synthétise le fonctionnement du modèle actif-passif :

---

1. Les chiffres présentés ont été retraités.

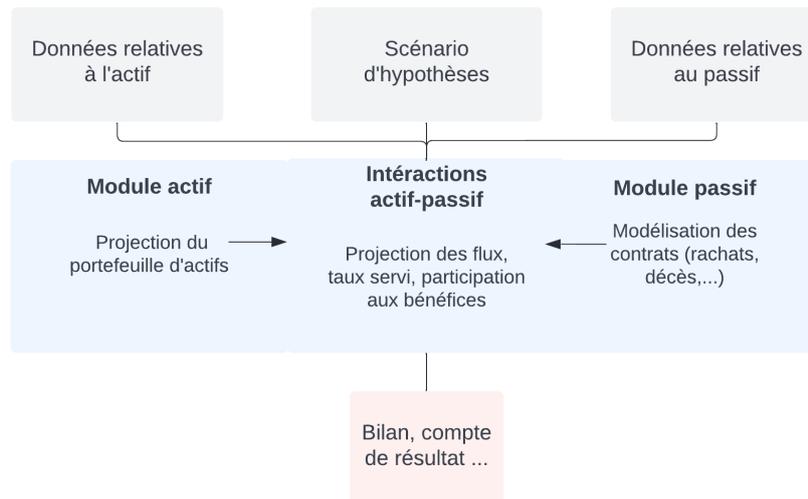


FIGURE 3.1 – Fonctionnement du modèle de gestion actif-passif de l'entreprise

### 3.1 Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont renseignées par l'utilisateur pour toute la durée de projection :

- Les paramètres économiques tels que les frais, les taux des prélèvements sociaux et le taux d'imposition ;
- Les paramètres financiers tels que l'allocation des portefeuilles par classe d'actifs ;
- Les hypothèses concernant les décisions de gestion (politique de dotation et de reprise de la PPE, loi de taux servis...) ;
- Les paramètres nécessaires aux projections en univers risque-neutre tels que la courbe des taux zéro-coupon initiale, les paramètres des modèles stochastiques de diffusion des facteurs de risques et la matrice de corrélation entre ces facteurs.

### 3.2 Modélisation de l'actif

L'information relative à l'actif de la société en date de calcul est contenue dans une base de données dédiée. Celle-ci répertorie ligne à ligne tous les actifs détenus en portefeuille et leurs caractéristiques (valeur de marché, prix de revient, échéance, nominal, notation, etc.). Le modèle de diffusion utilisé est adapté à la nature de l'actif. Il convient donc d'établir une classification de ces valeurs. Aussi, un tel classement peut-il s'établir comme suit :

- Immobilier ;
- Actions ;
- Monétaire ;
- Produits de taux.

Les modèles stochastiques présentés en 4.5 permettent de projeter les rendements et la valeur de marché du portefeuille d'actifs à chaque instant de projection, et ainsi de déterminer le montant de participation aux bénéfices attribué aux assurés.

Le portefeuille d'actifs considéré est composé de la façon suivante au 31/12/2021 :

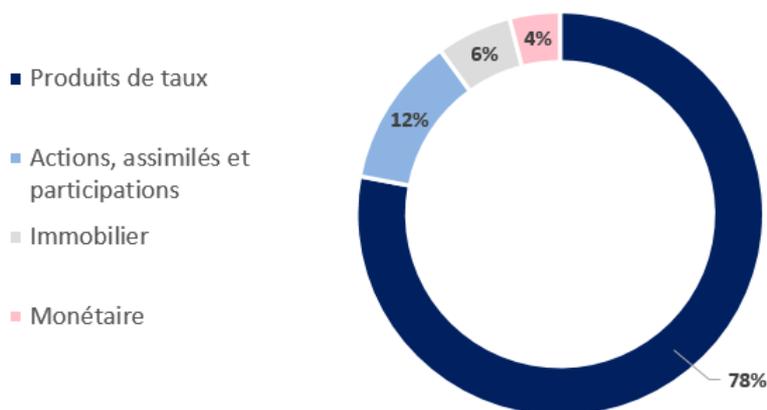


FIGURE 3.2 – Répartition du portefeuille d'actifs au 31/12/2021 en pourcentage de la valeur nette comptable (hors actifs en représentation des contrats en unité de compte)

L'actif est donc principalement composé d'investissements obligataires afin de limiter le risque associé au portefeuille. De plus, la durée moyenne des investissements est de 12 ans. La répartition du portefeuille obligataire selon la notation financière est la suivante :

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| AAA - A                 | 80% |
| BBB ou moins - Non noté | 20% |

TABLE 3.2 – Qualité de crédit du portefeuille obligataire au 31/12/2021

### 3.3 Modélisation du passif

L'information relative au passif de la société d'assurance vie considérée en date de calcul est contenue dans une base de données dédiée. Elle contient les informations relatives aux engagements de l'assureur. Ces derniers font référence pour la grande majorité aux contrats d'épargne en fonds euros et en unités de compte présentés précédemment, mais également à des produits d'épargne retraite, d'assurance emprunteur et de prévoyance. En raison du nombre important de contrats souscrits, ces derniers sont agrégés par *model points*, *i.e.* en groupes de caractéristiques similaires telles que le type de contrat, le taux garanti, l'année de souscription ou la tranche d'âge à la souscription. À chaque *model point* est associée une valeur de provision mathématique, calculée à chaque pas de temps. Les provisions mathématiques de la société étudiée concernent à plus de 90% des contrats d'assurance vie.

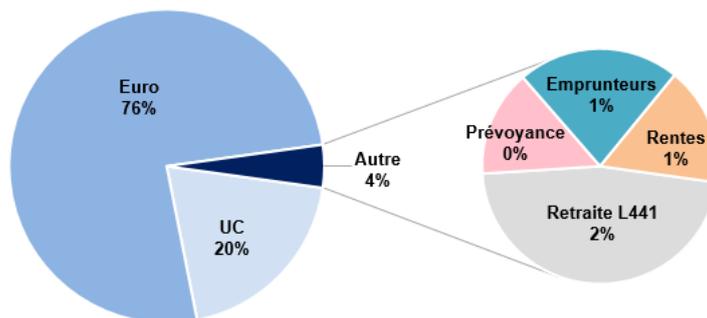


FIGURE 3.3 – Répartition des provisions mathématiques selon le type de produit

Les provisions mathématiques au sein du périmètre épargne sont réparties de la façon suivante au 31/12/2021 :

|                  |     |
|------------------|-----|
| Fonds euros      | 80% |
| Unités de compte | 20% |

TABLE 3.3 – Répartition des provisions mathématiques des contrats d'épargne

La projection des flux de passif nécessite de modéliser le comportement des assurés à travers des lois de mortalité, de rachats et d'arbitrages. Les rachats sont de deux types. Conjoncturels, ils sont opérés par les assurés lorsqu'ils jugent la rémunération de leur contrat insuffisante par rapport aux taux observés sur les marchés. Structurels, ils concernent les rachats survenant naturellement dans la vie d'un contrat.

De surcroît, la modélisation du passif est dépendante de l'évolution de l'actif du bilan, et tout l'intérêt du modèle ALM réside dans l'appréciation de ces interactions. Par exemple, la revalorisation des contrats est fortement dépendante des performances de l'actif, et influe sur l'inclination de l'assuré à racheter son contrat lorsqu'il juge sa rémunération insuffisante. Enfin, le TMG moyen de la société est faible ; celle-ci est représentative d'une société d'assurance vie française.

## Chapitre 4

# Générateurs de scénarios économiques

Comme présenté dans la première partie, la directive Solvabilité II impose aux entreprises d'assurance d'évaluer leurs engagements à leur juste valeur. Ce cadre d'évaluation *Best Estimate* nécessite de projeter, pour chaque contrat, les flux de trésorerie futurs, actualisés au taux sans risque. Or, la valeur économique du passif d'assurance, et notamment le prix des options et des garanties des contrats d'épargne, n'est pas observable sur les marchés financiers. Elle est toutefois sensible aux variations de ces derniers. Les générateurs de scénarios économiques constituent alors un puissant outil de valorisation, car ils permettent d'estimer la valeur de produits non cotés à l'aide du prix d'autres instruments observés sur le marché.

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est constitué d'un ensemble de modèles destinés à projeter, sur un horizon de temps fini, des grandeurs financières et économiques telles que le rendement des actions, le rendement immobilier, le *spread* de crédit, les taux d'intérêt ou encore l'inflation. Les évolutions possibles de ces facteurs de risque sont modélisées via des scénarios aléatoires.

En pratique, le GSE est initialisé de manière à reproduire les prix de marché de différents actifs financiers, à l'aide de la courbe des taux et des prix des instruments cotés. En sortie, un jeu de  $N$  trajectoires d'évolution est obtenu pour chacune des variables modélisées, représentant autant de configurations possibles pour l'économie future. Ces dernières alimentent alors le modèle de projection actif-passif utilisé pour le calcul du *Best Estimate*. Par exemple, la valeur du portefeuille obligataire à chaque date  $t$  est calculée à l'aide de la courbe des taux zéro-coupon diffusée en  $t$  par le modèle de taux. De même, les rentabilités des actions sont simulées à chaque instant de projection à l'aide d'un modèle stochastique. La valeur de l'actif ainsi projetée a notamment un impact sur le comportement des assurés et sur les mécanismes de participation aux bénéfices. Par conséquent, à partir d'un scénario économique, il est possible de projeter, à chaque pas de temps, l'ensemble des flux de trésorerie futurs, ainsi que les bilans et les comptes de résultat associés. Le *Best Estimate* est calculé en agrégeant toutes les trajectoires simulées. Il représente alors l'engagement moyen de l'assureur sur  $N$  scénarios économiques futurs. Le schéma ci-dessous synthétise les interactions entre le GSE et le modèle ALM :

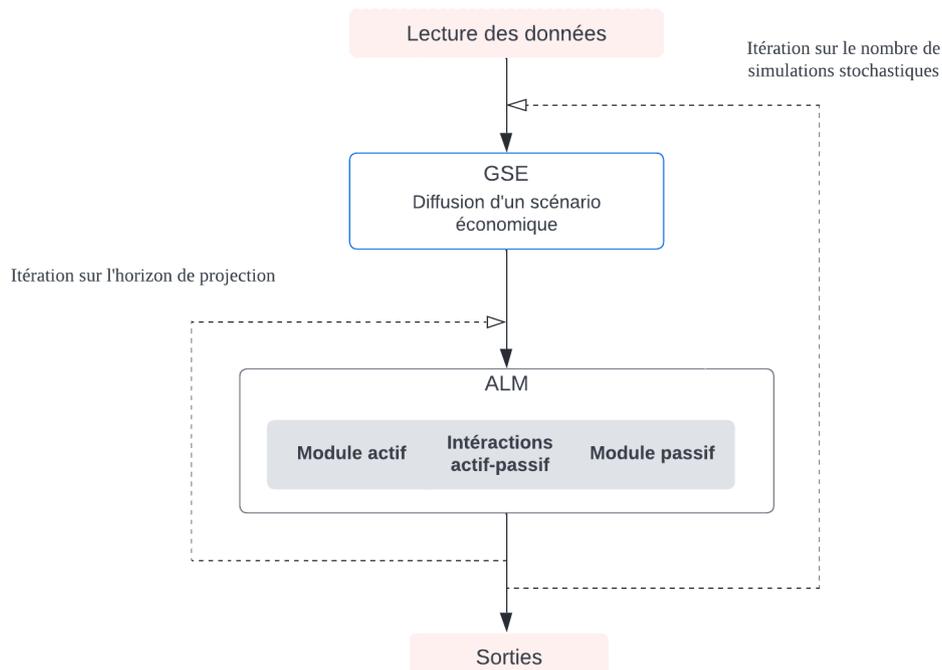


FIGURE 4.1 – Interactions entre le GSE et le modèle ALM

Le modèle de taux est un des constituants principaux du générateur de scénarios économiques. Il permet de tenir compte du risque engendré par la variation de la courbe des taux. En effet, les fluctuations aléatoires du niveau des taux d'intérêt impactent la valeur des flux de trésorerie futurs. La valeur du *Best Estimate* est donc fortement sensible à ces variations, notamment au travers des options et des garanties financières des contrats d'épargne. L'enjeu est de construire un modèle reflétant le plus finement possible les mouvements de la courbe des taux.

## 4.1 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est un outil de simulation utilisé pour évaluer le *Best Estimate*. Elle permet de calculer la valeur approchée d'une quantité d'intérêt à l'aide de simulations aléatoires.

La méthode de Monte-Carlo repose sur la loi forte des grands nombres, qui stipule que pour tout échantillon  $X_1, \dots, X_N$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi qu'une variable aléatoire  $X$  intégrable :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X] \quad (4.1)$$

Ainsi, en générant  $N$  scénarios économiques indépendants, dans lesquels une valeur du BE est calculée, il est possible de construire un estimateur sans biais pour le *Best Estimate* à l'aide de la moyenne empirique.

Naturellement, plus le nombre de simulations est important, meilleure est la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo. En pratique, 2000 simulations constituent un équi-

libre convenable entre la précision recherchée et le temps de calcul nécessaire.

## 4.2 Contraintes

Le générateur de scénarios économiques doit satisfaire à diverses exigences réglementaires.

Selon l'article 22 §3 a. à c. du règlement délégué, les trois règles suivantes doivent être observées :

- Le GSE doit refléter la réalité des marchés financiers. Cette exigence dite de *market consistency*, requiert l'aptitude du modèle à générer des prix d'actifs financiers cohérents avec ceux observés sur le marché ;
- Il doit être construit sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ;
- Les scénarios de taux générés nécessitent d'être cohérents avec la courbe des taux sans risque utilisée dans le calcul du *Best Estimate*.

D'autre part, la notice ACPR « Solvabilité II Provisions techniques » (2015, [1]) précise et complète les obligations supra :

- Le GSE doit être calibré à l'aide de produits financiers issus de marchés profonds, liquides et transparents. Ces instruments sont cohérents avec les caractéristiques des engagements de l'assureur, tels que les options et les garanties financières relatives aux contrats d'épargne.
- À l'issue des simulations, il est nécessaire d'évaluer la précision, la robustesse et la cohérence du GSE. La précision s'apprécie via l'écart de convergence généré par la méthode de Monte-Carlo, tandis que la robustesse du modèle est contrôlée par des tests de sensibilité des résultats aux hypothèses. Enfin, des tests statistiques doivent être réalisés pour valider la cohérence des scénarios générés avec la réalité.

L'ensemble de ces contraintes sera examiné lors de la construction du modèle de taux.

## 4.3 Univers de projection

Lors de la construction d'un GSE, deux cadres de modélisation s'opposent : les projections en monde réel et celles en univers risque-neutre. Ils sont notamment fonction de la mesure de probabilité utilisée.

Les projections en univers monde réel sont réalisées à partir d'un historique de données observées sur les marchés financiers. Les scénarios projetés sont donc représentatifs de l'évolution passée des variables d'intérêt, et prennent en compte des primes de risque rémunérant l'incertitude supportée par les investisseurs. La prime de risque correspond à la différence entre le rendement de l'actif considéré et celui d'un placement sans risque. Les modèles en monde réel sont construits sous la probabilité historique. Cependant, ce cadre de modélisation nécessite d'évaluer correctement la prime de risque attendue par les

investisseurs. Cette démarche est non seulement complexe, mais aussi subjective, car le résultat varie selon l'historique de données utilisé. Ces limites justifient la mise en place d'un cadre de projection indépendant de la prime de risque.

L'univers risque-neutre permet d'évaluer des engagements sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. La mesure de probabilité utilisée pour valoriser les actifs est cette fois une mesure fictive, équivalente à la probabilité historique et obtenue par changement de probabilité de Girsanov. L'existence et l'unicité de cette mesure de probabilité supposent la vérification d'hypothèses de marché. Sous la probabilité risque-neutre, tous les actifs ont pour rendement espéré le taux sans risque, *i.e.* aucune prime de risque n'est contenue dans le rendement des produits financiers. Le risque représenté par chaque actif n'est plus contenu dans le rendement attendu, mais dans sa volatilité. L'univers risque-neutre n'a donc pas de réalité économique ou financière. Il permet néanmoins de modéliser précisément les quantités d'intérêt, à condition que les modèles utilisés soient correctement calibrés. Il sera présenté plus en détail dans le chapitre suivant.

Au vu des limites présentées par l'univers monde réel et de la contrainte d'absence d'opportunité d'arbitrage imposée par la directive, le générateur de scénarios économiques étudié est construit en univers risque-neutre.

#### 4.4 Construction d'un GSE

La construction d'un générateur de scénarios économiques peut être synthétisée en quatre étapes :

1. Dans un premier temps, les variables à projeter (actions, taux, crédit...) ainsi que le cadre de modélisation sont établis. Il convient notamment de retenir une mesure de probabilité : monde réel ou risque-neutre. Dans le cadre de l'étude des taux d'intérêt, il s'agit de choisir le type de modèle utilisé, ainsi que le nombre de sources d'aléas nécessaires pour décrire le niveau des taux. Cette sélection fera l'objet d'une partie détaillée.
2. La deuxième étape consiste à construire les modèles mathématiques de projection des variables d'intérêt, ainsi qu'à établir une structure de dépendance entre celles-ci.
3. Par la suite, les paramètres de chaque modèle sont calibrés à partir des prix de produits financiers dérivés.
4. Enfin, des tests sont réalisés afin de s'assurer de la validité des scénarios projetés. Les plus courants sont des tests de martingalité et de *market consistency*.

La projection des taux d'intérêt fera l'objet d'une étude spécifique selon la méthode décrite supra.

#### 4.5 Facteurs de risque modélisés

Les facteurs de risque modélisés par le GSE des Assurances du Crédit Mutuel sont les actions, l'immobilier, la gestion alternative, les taux d'intérêt, et le risque de crédit. Ces

cinq sources de risque sont simulées à l'aide d'une matrice de corrélation empirique, de façon à reproduire la dépendance existant entre elles.

### Actions, immobilier et gestion alternative

Les rentabilités des classes d'actifs actions, immobilier physique et gestion alternative sont toutes trois simulées par le modèle de Black & Scholes. Ce dernier suppose que le prix de l'actif  $S_t$  est régi par l'équation différentielle suivante sous la probabilité risque-neutre :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Avec :

- $r_t$  le rendement de l'actif sans risque ;
- $\sigma$  un paramètre de volatilité constant, calibré individuellement pour chacune des trois classes d'actifs modélisées ;
- $W_t$  un mouvement brownien standard.

### Taux

La modélisation des taux d'intérêt constitue l'objet même de ce mémoire. À ce jour, les taux d'intérêt sont simulés par l'entreprise à l'aide du modèle de Hull & White, présenté en détail dans les chapitres suivants.

### Risque de crédit

Le risque de crédit correspond au risque de perte suite au défaut d'un emprunteur. Il est modélisé à travers le modèle de Longstaff, Mithal et Neis (LMN). Il s'agit d'un modèle à intensité dans lequel la probabilité de défaut est basée sur les intensités, ou probabilités instantanées, de défaut. Formellement, en notant  $D_t$  l'instant de défaut :

$$\mathbb{P}[D_t \in ]t, t + dt[ | D_t > t] = \lambda_t dt$$

$\lambda_t$  représente ainsi la probabilité instantanée de défaut. Elle est régie par l'équation différentielle suivante :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t$$

Avec :

- $\alpha$  la moyenne long terme ;
- $\beta$  la vitesse de retour à la moyenne ;
- $\sigma$  un paramètre de volatilité ;
- $W_t$  un mouvement brownien standard.

## Deuxième partie

# Notions théoriques

Cette deuxième partie expose les éléments théoriques sur lesquels reposent les travaux réalisés. Dans un premier temps, les notions mathématiques et financières nécessaires à la construction d'un modèle de taux au sein d'un générateur de scénarios économiques sont présentées. Puis, les caractéristiques des modèles de taux ainsi que les critères justifiant le choix d'un nouveau modèle sont décrits. Enfin, le dernier chapitre précise la formalisation mathématique des deux modèles comparés.

## Chapitre 5

# Concepts mathématiques et financiers

Les étapes de construction d'un générateur de scénarios économiques, et notamment la mise en place d'un modèle de projection des taux d'intérêt, font appel à des concepts financiers et mathématiques fondamentaux. Ils sont présentés dans ce chapitre. Les notations utilisées sont principalement reprises de F. Mercurio et D. Brigo (2006 [7]).

### 5.1 Produits classiques de taux

Cette section présente les produits élémentaires de taux d'intérêt. Ils constituent les prémices aux notions développées par la suite.

#### 5.1.1 Actif sans risque

L'actif sans risque, nommé parfois compte d'épargne, correspond au capital accumulé suite au placement d'une unité monétaire au taux sans risque. Sa valeur en date  $t$  est notée  $B(t)$ , et a pour dynamique :

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad B(0) = 1 \quad (5.1)$$

où  $r_t$  est le rendement instantané de l'actif  $B$ . Il s'agit d'un processus aléatoire appelé également taux *spot* instantané ou taux court. Il sera défini plus précisément dans la section 5.1.4.

L'expression de  $B(t)$  en date  $t$  est obtenue en intégrant (5.1) entre 0 et  $t$  :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (5.2)$$

La valeur de l'actif sans risque croît donc continûment au cours du temps au taux  $r_t$ . Ainsi, l'actif  $B$  est en réalité localement sans risque, car sa valeur en  $t$  n'est connue de façon certaine que sur la période  $[t, t + dt]$ .

#### 5.1.2 Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  est un actif financier versant un flux unique d'une unité monétaire à la date  $T$ . Elle ne verse donc aucun coupon intermédiaire. Son prix en date  $t$  est communément nommé le zéro-coupon  $P(t, T)$ , et  $P(T, T) = 1$ .

### 5.1.3 Taux zéro-coupon

Le taux *spot* ou taux zéro-coupon  $R(t, T)$  est le taux de rendement actuariel en date  $t$  de l'obligation zéro-coupon de maturité  $T$ . Autrement dit,  $R(t, T)$  est le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle de l'obligation et son prix en date  $t$ .

En composition continue des taux d'intérêt, le taux *spot* est tel que :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow R(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln[P(t, T)] \quad (5.4)$$

### 5.1.4 Taux court

Le taux court instantané en date  $t$ , ou taux *spot* instantané, est le taux fictif  $r(t)$  portant sur une période de temps infinitésimale. Il est défini comme la limite suivante :

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} R(t, t+h) \quad (5.5)$$

Il s'interprète alors comme le taux d'intérêt en  $t$  d'un emprunt d'une durée infiniment courte. Sa valeur est incertaine et fluctue en fonction des évolutions des marchés financiers. Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, elle coïncide avec le rendement de l'actif sans risque.

Le taux court est ainsi un processus aléatoire  $(r(t))_{t \geq 0}$ , dont la dynamique est utilisée par certaines familles de modèles pour expliquer les variations des taux d'intérêt.

### 5.1.5 Déflateur

Le déflateur  $D(t, T)$ , ou facteur d'actualisation stochastique, est une variable aléatoire représentant la valeur en date  $t$  équivalente à une unité monétaire versée en date  $T$ . Il se calcule comme la valeur actualisée entre les dates  $t$  et  $T$  d'une unité monétaire :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (5.6)$$

où  $r_s$  est la valeur du taux court à une date  $s$  comprise entre  $t$  et  $T$ . Ce dernier étant aléatoire, il en est de même pour la valeur de  $D(t, T)$ .

Le zéro-coupon  $P(t, T)$  et le déflateur  $D(t, T)$  sont deux notions intimement liées et se différencient uniquement par le caractère aléatoire du déflateur en date  $t$ . En effet, ce dernier dépend des évolutions du taux court sur la période  $[t, T]$ , tandis que le prix zéro-coupon, de par sa définition, est connu en  $t$ . Il sera démontré que le prix zéro-coupon correspond à l'espérance du déflateur sous la probabilité risque-neutre, au regard de l'information accumulée à la date de calcul.

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(t, T) | \mathcal{F}_t] \quad (5.7)$$

## 5.2 Structure par terme des taux d'intérêt

Il est à présent possible, à partir des éléments présentés ci-dessus, de définir la structure par terme des taux d'intérêt. Il s'agit de la fonction qui, pour  $t$  fixé, associe à la date de maturité  $T$  le taux spot  $R(t, T)$ . Formellement, il s'agit de la fonction  $R$  telle que :

$$R : T \longrightarrow R(t, T)$$

La représentation graphique de cette fonction est appelée la courbe des taux zéro-coupon, ou structure par terme des taux d'intérêt.

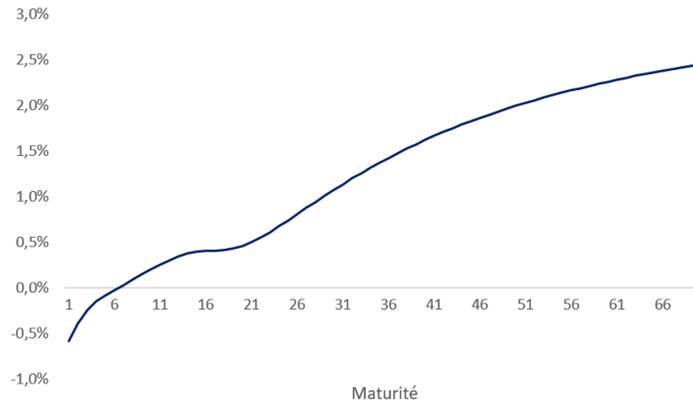


FIGURE 5.1 – Courbe des taux au 31/12/2021 fournie par l'EIOPA, pour des dates de maturité de 1 à 70 ans

Le taux court se situe ainsi à l'intersection de la courbe des taux et de l'axe des ordonnées. Comme le suggère la formule (5.7), la connaissance de la dynamique du taux court permet à elle seule de générer la courbe des taux.

Par ailleurs, les obligations zéro-coupon n'étant pas cotées sur les marchés financiers, des méthodes d'interpolation sont mises en œuvre pour construire la courbe des taux d'intérêt. La courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA est obtenue à partir des *swaps* de taux d'intérêt interbancaires, présentés en 5.3.1, dont les valeurs sont observables sur les marchés financiers.

## 5.3 Produits dérivés de taux

Les produits dérivés sont des contrats financiers négociables donnant à leurs détenteurs des droits sur un actif sous-jacent. Les produits dérivés de taux d'intérêt sont fréquemment utilisés en tant que couverture contre les fluctuations des marchés de taux. Ils sont au cœur du processus de calibrage des générateurs de scénarios économiques.

### 5.3.1 *Swap* de taux d'intérêt

Un *swap* de taux est un contrat établi entre deux parties, le payeur et le receveur, s'engageant chacune à verser des flux d'intérêts sur une période donnée. Le payeur verse au receveur des intérêts fixes, dont le taux est défini à la conclusion du *swap* et reçoit des intérêts variables, dont le taux fluctue dans le temps. Par souci de simplicité, les intérêts fixes et variables sont supposés versés aux mêmes instants.

### Valorisation

Les intérêts fixes sont supposés payés aux dates  $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$  par le payeur, au taux constant  $K$ . Les fractions d'années entre les dates  $T_i$  sont notées  $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_{\beta}\}$  et sont telles que  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Ces périodes étant la plupart du temps inférieures à un an, la convention simple de calcul des intérêts est appliquée. La valeur des intérêts versés en date  $T_i$  par le payeur, appelée *jambe fixe*, s'écrit alors :

$$N\tau_i K$$

où  $N$  est le nominal du *swap*.

Les intérêts variables sont supposés versés aux dates  $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$  par le receveur. Le taux variable  $L(T_i, T_{i+1})$  est connu en date  $T_i$  et payé en date  $T_{i+1}$ . Les dates de révision (ou de réinitialisation) du taux variable sont donc les instants  $T_{\alpha}, \dots, T_{\beta-1}$ . La valeur des intérêts payés par le receveur en date  $T_i$ , appelée *jambe variable*, s'écrit alors :

$$N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$$

En combinant ces deux expressions, le *payoff* actualisé du *swap* payeur en date  $t$  se calcule de la sorte :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N\tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K) \quad (5.8)$$

où  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$ .

La valeur en  $t$  d'un *swap* receveur (noté RFS) se calcule comme l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son *payoff* actualisé (Brigo & Mercurio, 2006, p.14 [7]). Sa valeur est la suivante :

$$RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = N \sum_{i=1}^n \tau_i P(t, T_i) (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \quad (5.9)$$

Et celle du *swap* payeur (PFS) s'obtient à partir de la relation suivante :

$$PFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = -RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) \quad (5.10)$$

### Équilibre des contrats

Le taux *swap* d'équilibre  $S_{\alpha, \beta}(t)$  est le taux fixe pour lequel le contrat est équitable en date  $t$  entre les positions payeuse et receveuse. Il est appelé *taux swap forward* et peut être considéré comme la généralisation du taux *forward* à un échéancier de flux futurs.

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

#### 5.3.2 Caps et Floors

Les *caps* et les *floors* sont des produits dérivés des *swaps* de taux. Ils sont caractérisés par :

- Un montant nominal  $N$  ;
- La durée du *swap* de taux, maturité du *cap* ;
- Le taux fixe du *swap*, appelé le *strike*.

Un *cap* (resp. un *floor*) est assimilable à un *swap* payeur (resp. receveur) pour lequel seuls les flux d'intérêts positifs sont versés.

### Valorisation

Soit un *cap* de nominal  $N$ , débutant en  $T_\alpha$ , et de durée  $T_\beta - T_\alpha$ . Ses intérêts sont payés aux dates  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ . Les fractions d'années entre les dates de  $\mathcal{T}$  sont notées  $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta\}$  et sont telles que  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Le *payoff* actualisé en date  $t$  du *cap* associé est donné par la formule suivante (Brigo & Mercurio, 2006, p.16 [7]) :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} ND(t, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (5.11)$$

Ce dernier peut se décomposer comme une somme de produits indépendants appelés *caplets*.

De même, le *payoff* actualisé du *floor* de mêmes caractéristiques est :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} ND(t, T_i) \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))^+ \quad (5.12)$$

Il se décompose comme une somme de produits indépendants appelés *floorlets*.

Il est à noter que le *payoff* actualisé, aléatoire, ne correspond pas au prix du *cap* (respectivement du *floor*). Celui-ci est obtenu en évaluant l'espérance sous la probabilité risque-neutre de ce *payoff* actualisé.

### Équilibre des contrats

Lorsqu'en date 0, date de conclusion du contrat, le taux fixe  $K$  est égal au taux *swap forward*  $S_{\alpha,\beta}(0)$ , les deux produits sont dits à la monnaie (ATM). En revanche, si le taux d'intérêt fixe  $K$  est inférieur au taux d'équilibre, le *cap* est dans la monnaie (ITM), le *floor* en dehors de la monnaie (OTM), et inversement si  $K$  est supérieur à  $S_{\alpha,\beta}(0)$ .

Pour un indice de taux variable fixé (par exemple l'EURIBOR 6M), les *caps* et les *floors* sont échangés pour différentes maturités et pour différentes valeurs de *strike*  $K$ .

#### 5.3.3 Swaptions

Une *swaption* est une option sur un *swap* de taux. Une *swaption* payeuse (resp. receveuse) est une option donnant droit à son détenteur de contracter une position payeur (resp. receveur) sur un *swap* de taux à une date de maturité fixée, et pour un taux fixe  $K$  établi à la date d'achat de l'option. Une *swaption* est caractérisée par :

- Sa maturité  $T$ , instant auquel elle peut être activée ;

- La durée du *swap* sous-jacent, appelée le ténor de l'option ;
- Le strike  $K$ , taux fixe du *swap* sous-jacent.

### Valorisation

Soit une *swaption* de maturité  $T$ , de nominal  $N$  et de *strike*  $K$ . Elle donne droit à son détenteur d'entrer dans un *swap* de taux en date  $T_\alpha$  pour une durée  $T_\beta - T_\alpha$ . L'ensemble des dates de paiement des intérêts du *swap* est noté  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ . Les dates  $T_i$  sont espacées d'un pas  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Le *payoff* actualisé de l'option en date  $t$  s'écrit :

$$ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \quad (5.13)$$

Et celui d'une *swaption* receveuse :

$$ND(t, T_\alpha) \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (K - F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)) \right)^+ \quad (5.14)$$

Il est à noter que le *payoff*, aléatoire, n'est pas le prix de la *swaption*. Celui-ci est obtenu en évaluant l'espérance sous la probabilité risque-neutre du *payoff* actualisé de la *swaption*.

À la différence des *caps* et des *floors*, le *payoff* des *swaptions* ne peut pas être décomposé en une somme de produits indépendants. La valorisation de ces instruments contient alors implicitement de l'information concernant les corrélations entre les taux *forwards*.

### Équilibre des contrats

Dans le cas où le taux *swap forward* en date initiale  $S_{\alpha,\beta}(0)$  est égal au *strike* de l'option, celle-ci est dite à la monnaie (ATM). Il s'agit d'un équilibre entre les positions payeuse et receveuse. En revanche, si le taux *swap forward*  $S_{\alpha,\beta}(0)$  est supérieur au *strike* de l'option, la *swaption* payeuse est dans la monnaie (ITM) et la position receveuse en dehors de la monnaie (OTM).

Ce caractère dit de *money* des options est central car il motive les choix d'actifs lors du calibrage des modèles du GSE. En effet, les actifs à la monnaie sont considérés comme les plus liquides, car ils ont pour taux fixe le taux d'équilibre.

## 5.4 Notions mathématiques

Il convient désormais de présenter les principales notions mathématiques sur lesquelles repose la construction des modèles de taux d'intérêt.

### 5.4.1 Martingales

Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration, *i.e.* une suite croissante de tribus. Elle représente l'information accumulée à chaque instant  $t$ . Un processus aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si et seulement si (Cousin, 2021 [8]) :

1.  $(X_t)_{t \geq 0}$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , *i.e.*  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t$  ;
2.  $X_t$  est intégrable pour tout  $t$  ;

3. Sa valeur en date  $s$  est égale à son espérance conditionnellement à l'information observée en  $s$  :

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s < t$$

Il s'agit donc d'un processus stochastique ne possédant ni tendance haussière, ni baissière.

### 5.4.2 Probabilité risque-neutre

L'univers risque-neutre permet de valoriser des instruments financiers sans tenir compte de l'appétence au risque des investisseurs. Il repose sur la construction d'une mesure de probabilité fictive, dont l'existence est établie en l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), et l'unicité sous l'hypothèse de complétude des marchés financiers<sup>1</sup>.

Un arbitrage est une stratégie d'investissement engendrant un profit certain sans mise de fonds. En effet, soit un portefeuille dont la valeur  $(X_t)_{t \geq 0}$  est évaluée à chaque instant  $t$ . Il y a arbitrage s'il existe un instant  $T \geq 0$  tel que :

$$X_0 = 0, \mathbb{P}[X_T > 0] > 0 \text{ et } \mathbb{P}[X_T < 0] = 0 \quad (5.15)$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage au sein d'un marché financier requiert l'existence d'une mesure de probabilité équivalente à l'historique, sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Il s'agit de la probabilité risque-neutre, construite à l'aide d'un numéraire<sup>2</sup> bien spécifique. La construction de la probabilité risque-neutre est détaillée en Annexe A.

---

1. Un marché financier est dit complet lorsque chaque actif peut être répliqué à l'aide d'un portefeuille d'actifs sous-jacents.

2. Un numéraire est un instrument financier ne versant aucun dividende et dont le prix est strictement positif.

## Chapitre 6

# Généralités sur les modèles de taux

La modélisation stochastique des taux d'intérêt a pour objectif de prédire les variations de la courbe des taux et de valoriser des instruments financiers dérivés. Si les modèles de projection des variables action ou immobilier prédisent simplement le prix de l'actif considéré, le risque de taux est quant à lui appréhendé à travers plusieurs facteurs stochastiques explicatifs tels que le taux court ou les taux *forward*.

Une classification fréquente consiste à catégoriser les modèles de taux selon qu'ils projettent la dynamique des taux courts ou des taux *forward*.

Les premiers modèles de taux courts, initiés par Vasicek (1977) et étendus par Hull et White (1990), projettent la dynamique d'un processus sous-jacent au prix non observable sur les marchés financiers. Celle-ci est supposée gouvernée par un nombre fini de mouvements browniens standards. Ces modèles reposent sur l'existence d'une relation déterministe entre le taux court et le prix des obligations zéro-coupon. Les scénarios possibles d'évolution de la courbe des taux sont ainsi déduits des trajectoires simulées du taux court.

Plus récents, les modèles de marché, tels que le Libor Market Model (1997), prédisent la dynamique des taux *forward* négociables sur les marchés financiers. Ils se sont notamment imposés du fait de leur grande compatibilité avec les formules de marché. Toutefois, leur complexité reste un obstacle à leur intégration au sein d'un modèle ALM.

Les principales caractéristiques et fondements des modèles de taux seront explicités au début du présent chapitre. Puis, il conviendra de décrire la méthodologie utilisée pour choisir le nouveau modèle de taux du GSE.

### 6.1 Modèles factoriels

Les modèles de taux factoriels supposent que l'évolution de la courbe des taux zéro-coupon résulte des fluctuations de facteurs aléatoires. Les modèles monofactoriels supposent qu'une unique source de risque est à l'origine des variations de la courbe des taux. D'autres modèles, plus complexes, expliquent l'évolution des taux par plusieurs facteurs aléatoires. Si la performance du modèle augmente avec son nombre de facteurs, son interprétabilité en pâtit.

Cette approche factorielle est justifiée statistiquement. En effet, une Analyse en Composante Principale (ACP) sur la courbe des taux française permet de mettre en exergue

trois facteurs de variabilité des taux d'intérêt (Roncalli, 1998, pp. 134-137 [16]). Ces derniers s'interprètent comme un facteur de niveau, un facteur de pente et un facteur de courbure de la structure des taux. Les chiffres et interprétations des axes factoriels présentés ci-dessous sont tirés de l'étude de T. Roncalli.

- La première composante de l'ACP correspond aux mouvements de translation de la courbe des taux. Elle reflète la variabilité d'un taux d'intérêt moyen sur plusieurs maturités. Cette composante explique environ 87% des déformations de la courbe des taux. Ainsi, l'utilisation d'un modèle unifactoriel comme celui de Hull & White est motivée par la grande capacité explicative de cette composante.
- La composante de pente correspond au deuxième axe de variabilité des taux et explique 12% des variations de la courbe des taux.
- La troisième composante possède un pouvoir explicatif nettement moindre, puisqu'elle représente moins d'1% de la variabilité des taux. Elle reflète une concavité plus importante de la courbe des taux aux maturités intermédiaires.

Ainsi, considérer non plus une, mais deux sources d'aléa permettrait d'affiner la modélisation et d'expliquer environ 99% des mouvements de la structure des taux d'intérêt.

## 6.2 Caractéristiques des modèles de taux courts

Dans le cadre de la construction de modèles de taux courts, il convient de présenter les deux cadres de modélisation existants.

### 6.2.1 Modèles d'équilibre général

Les modèles d'équilibre général ont pour ambition de reproduire des phénomènes observés lors de l'étude empirique des taux d'intérêt. Il est par exemple souhaitable de refléter la tendance des taux d'intérêt à converger vers une moyenne à long terme.

La dynamique du taux court pour un modèle unifactoriel de ce type peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r^\gamma(t)dW(t)$$

Avec :

- $\theta$  la valeur de la moyenne long terme ;
- $\kappa$  la vitesse de retour à la moyenne ;
- $\sigma$  le paramètre de volatilité du taux court ;
- $\gamma$  une constante positive.

Le modèle de Vasicek correspond au cas particulier dans lequel  $\gamma = 0$ .

Ce type de modèle ne permet cependant pas de reproduire les prix initiaux des obligations zéro-coupon observés sur le marché, à moins de calibrer ses paramètres dans ce but.

### 6.2.2 Modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage

Les modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) s'attachent à reproduire parfaitement la courbe des taux initiale observée. Ainsi, elle devient une donnée du modèle, et non plus un objectif lors du calibrage de celui-ci.

Certains modèles, comme celui de Hull & White, sont à la fois des modèles d'AOA et d'équilibre général. Ils intègrent le phénomène de retour à la moyenne des taux et reproduisent de façon exacte la courbe des taux initiale.

## 6.3 Choix d'un nouveau modèle de taux

Le modèle de Hull & White, présenté dans la section 7.1, est utilisé à ce jour dans le GSE pour projeter les taux d'intérêt. Cependant, la prise en compte d'une unique source de risque conduit à des limites, motivant la modélisation d'un facteur aléatoire supplémentaire.

Le choix du nouveau modèle de taux utilisé dans le générateur de scénarios économiques est déterminant car ce dernier influe tant sur la valorisation du passif que de l'actif d'assurance. Cette décision se doit d'être un compromis entre la complexité, l'interprétabilité et la facilité de mise en œuvre du modèle.

Bien qu'il en existe une grande variété, aucun modèle ne s'est réellement imposé à ce jour. Plusieurs critères de décision peuvent alors être envisagés pour les départager. Ils font notamment référence aux contraintes énoncées dans la section 4.2.

- Le modèle permet-il de reproduire de façon exacte la courbe initiale observée des taux zéro-coupon ?
- La dynamique des taux modélisés est-elle cohérente avec les caractéristiques empiriques de la courbe des taux ? Par exemple, étant donné l'allure de la courbe des taux de ces dernières années, il est nécessaire que le modèle puisse générer des taux négatifs.
- Existe-t-il des formules fermées, *i.e.* des formules déterministes simples de mise en œuvre, pour calculer le prix des obligations zéro-coupon (et donc des taux *spot* et des taux *forward*) ? De même, existe-t-il des formules fermées pour calculer le prix des produits dérivés utilisés pour le calibrage des paramètres ?
- Le modèle permet-il de valoriser fidèlement certains produits dérivés de taux ?
- La tendance de retour à la moyenne des taux d'intérêt est-elle reflétée par le modèle ?
- Les temps de calcul lors de la diffusion des scénarios et du calibrage des paramètres sont-ils raisonnables ?

Ces questionnements ont permis de confronter les candidats envisagés pour remplacer le modèle de Hull & White. Parmi eux, un modèle de marché, le LMM+, et un modèle de taux court, le modèle gaussien à deux facteurs.

Le LMM+, extension du Libor Market Model, est un modèle de marché développé en 2003 par Joshi et Rebonato. Il génère des taux LIBOR *forward* de distribution log-normale, décalée d'un facteur de déplacement  $\delta$  de telle façon à simuler des taux négatifs. Ces derniers ne pourront néanmoins être inférieurs à la valeur plancher  $\delta$ . De surcroît, le LMM+ intègre une volatilité stochastique, permettant de modéliser de manière réaliste les surfaces de volatilité implicite de différents instruments financiers. Bien que sa complexité le rende populaire auprès des acteurs bancaires et assurantiers, elle n'en demeure pas moins un frein à sa construction. En effet, le calibrage des huit paramètres du modèle doit être réalisé à l'aide d'une méthode d'intégration numérique, engendrant un temps de calcul considérable. Une telle performance est appréciable pour valoriser des options financières, mais n'est pas nécessaire dans le cadre du calcul du *Best Estimate* compte tenu du coût de mise en œuvre associé.

Le modèle gaussien à deux facteurs, ou G2++, est un modèle de taux court capable de générer des taux négatifs sans contrainte. Il s'agit d'un modèle moins complexe que le LMM+, dans lequel les prix des instruments financiers sont calculés à l'aide de formules fermées. Il peut notamment être assimilé à un modèle de Hull & White à deux facteurs, dans lequel la moyenne long terme n'est plus une constante mais un processus stochastique. Toutefois, la formulation de la dynamique du taux court du G2++, plus aisée à mettre en pratique, lui est préférée. Cette analogie entre les deux modèles justifie d'autant plus la construction du G2++ pour pallier les inconvénients du modèle de Hull & White.

Finalement, le modèle G2++ est retenu. En effet, si une plus grande complexité du modèle permet une estimation plus précise de l'évolution des taux, c'est au détriment de sa facilité de mise en œuvre et de son temps de calcul. Le modèle gaussien à deux facteurs représente ainsi un compromis satisfaisant entre ces contraintes antagonistes. Il sera présenté dans le chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Modèles retenus

L'objectif de cette étude est de comparer les performances du modèle de Hull & White unifactoriel au modèle gaussien à deux facteurs. Les sections suivantes énoncent les fondements mathématiques des deux modèles ainsi que les principales formules de valorisation d'instruments financiers découlant de la dynamique du taux court. Ces dernières permettront de générer des trajectoires possibles des taux d'intérêt et de calibrer les paramètres du modèle. Les notations employées sont issues de l'ouvrage de F. Brigo et D. Mercurio.

### 7.1 Modèle de Hull & White

Le modèle de Hull & White est un modèle de taux court à un facteur développé en 1990 par J. Hull et A. White. Il s'agit du modèle initialement employé dans le GSE de l'entreprise pour projeter les taux d'intérêt. Si ce modèle est aisément interprétable et simple à transposer numériquement, il présente toutefois certaines limites.

#### 7.1.1 Dynamique

Le modèle de Hull & White suppose que les mouvements de la courbe des taux sont entraînés par une seule source d'aléa, représentée par un mouvement brownien. La dynamique du taux court  $r(t)$  est la suivante :

$$dr(t) = [v(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (7.1)$$

Avec :

- $a$  et  $\sigma$  des constantes positives. Le paramètre  $a$  correspond à un coefficient de retour à la moyenne, tandis que  $\sigma$  s'interprète comme un paramètre de volatilité ;
- $v(t)$  une fonction déterministe construite de telle façon à reproduire la structure des taux initiale (Brigo & Mercurio, 2006, p.73) ;
- $(W(t))_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard de filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Les paramètres  $a$  et  $\sigma$  sont calibrés à l'aide de produits dérivés de taux cotés sur les marchés financiers.

#### 7.1.2 Distribution du taux court

En appliquant le lemme d'Itô au processus  $Y_t = e^{at}r(t)$ , il vient :

$$dY_t = r(t)ae^{at}dt + e^{at}dr(t) = v(t)e^{at}dt + e^{at}\sigma dW(t) \quad (7.2)$$

L'expression du taux court en date  $t$  s'obtient après intégration de cette expression entre les dates  $s$  et  $t$ , où  $s < t$  :

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}v(u)du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \quad (7.3)$$

Cette expression est celle utilisée pour simuler des trajectoires du taux court.

Ainsi, le taux court est normalement distribué. Il est caractérisé par ses deux premiers moments :

$$\mathbb{E}[r(t)] = r_0e^{-at} + \alpha(t) - \alpha(0)e^{-at} = \alpha(t) \quad (7.4)$$

$$\mathbb{V}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2at}] \quad (7.5)$$

Avec  $\alpha(t)$  la fonction déterministe telle que :

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (7.6)$$

où  $f^M(0, t)$  est la valeur de marché du taux *forward* instantané. Celui-ci est défini en Annexe A.

Enfin, la distribution normale des taux courts garantit la capacité du modèle à générer des scénarios de taux négatifs. Longtemps considérée comme une limite des modèles à facteurs gaussiens, cette propriété s'est avérée essentielle dans le contexte de taux bas de ces dernières années. Il est notamment possible de quantifier, en univers risque-neutre, la probabilité que le taux court soit négatif :

$$\mathbb{Q}[r(t) < 0] = \Phi \left[ -\frac{\mathbb{E}[r(t)]}{\sqrt{\mathbb{V}[r(t)]}} \right] = \Phi \left[ -\frac{\alpha(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2at}]}} \right] \quad (7.7)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

### 7.1.3 Prix d'un zéro-coupon

Dans l'objectif de projeter les courbes des taux futures, il est nécessaire de disposer d'une formule de valorisation des obligations zéro-coupon.

Le prix en  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  s'obtient en calculant l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son *payoff* actualisé, conditionnellement à l'information accumulée en  $t$  :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \right] \quad (7.8)$$

Le taux court suivant une distribution gaussienne, la variable aléatoire  $\int_t^T r(s)ds$  conditionnellement à  $t$  est normalement distribuée (Brigo & Mercurio, 2006, p.75 [7]).

Ainsi, le prix d'un zéro-coupon dans le modèle de Hull & White s'écrit de la façon suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (7.9)$$

Avec :

$$B(t, T) = \frac{1}{a}[1 - e^{-a(T-t)}] \quad (7.10)$$

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp(B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2) \quad (7.11)$$

$$V(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2}[T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}] \quad (7.12)$$

Et  $P^M(0, t)$  le prix de marché de l'obligation zéro-coupon de maturité  $t$ .

Il se démontre aisément à partir de cette expression que, quelles que soient les dates de maturités  $T_1$  et  $T_2$  considérées, les taux zéro-coupon  $R(t, T_1)$  et  $R(t, T_2)$  sont parfaitement corrélés entre eux pour chaque instant  $t$  (Brigo & Mercurio, 2006, p.138 [7]).

#### 7.1.4 Prix d'une *swaption*

Le modèle de Hull & White employé par l'entreprise est calibré sur les *swaptions* à la monnaie. Le prix d'une *swaption* dans le modèle de Hull & White s'obtient par application d'une formule fermée, réduisant considérablement le temps de calcul lors du calibrage des paramètres  $a$  et  $\sigma$ .

Soit une *swaption* payeuse de maturité  $T$ , de nominal  $N$  et de *strike*  $K$ . Elle donne droit à son détenteur d'entrer dans un *swap* de taux en date  $T_\alpha$  pour une durée  $T_\beta - T_\alpha$ . L'ensemble des dates de paiement des intérêts du *swap* est noté  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ . Les fractions d'années entre les dates de  $\mathcal{T}$  sont notées  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  et sont telles que  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Le prix de cette option en date  $t$  est donné par la formule suivante (Brigo & Mercurio, 2006, p.77 [7]) :

$$PS^{HW}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i [X_i P(t, T_\alpha) \Phi(-h_i + \sigma_p^i) - P(t, T_i) \Phi(-h_i)] \quad (7.13)$$

Avec  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi normale standard, et :

$$c_i = \tau_i K, \quad i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta - 1\}$$

$$c_n = 1 + K\tau_\beta$$

$$\sigma_p^i = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T_\alpha - t)}}{2a}} B(T_\alpha, T_i)$$

$$h_i = \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_\alpha) X_i} + \frac{\sigma_p^i}{2}$$

$$X_i = A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i)r^*}$$

où  $r^*$  est la valeur du taux *spot* en date  $T$  pour laquelle :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i)r^*} = 1$$

Et le prix d'une *swaption* receveuse dans le modèle de Hull & White est le suivant (Brigo & Mercurio, 2006, p.77 [7]) :

$$RS^{HW}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i [P(t, T_i) \Phi(h_i) - X_i P(t, T_\alpha) \Phi(h_i - \sigma_p^i)] \quad (7.14)$$

La valorisation de ces options nécessite ainsi de recourir à des algorithmes de résolution d'équations non linéaires.

### 7.1.5 Limites

Malgré une facilité de mise en œuvre, un calibrage rapide et des résultats satisfaisants, le modèle de Hull & White présente des limites en raison de son unique facteur d'aléa. En effet, le modèle conduit, à chaque instant  $t$ , à des taux zéro-coupon parfaitement corrélés entre eux, et ce quelle que soit la maturité  $T$  considérée. Un choc sur les taux d'intérêt impacte alors toutes les maturités dans le même sens. Il ne s'agit toutefois pas d'un phénomène observé en pratique, notamment pour des maturités lointaines. Ainsi, à chaque date  $t$ , le modèle de Hull & White simule uniquement des translations d'une même version de la courbe des taux. Or, il a été justifié précédemment<sup>1</sup> que des facteurs de pente et de convexité influent également sur l'allure de celle-ci. Enfin, le modèle ne permet pas de reproduire fidèlement toute la matrice de volatilité observée sur le marché des produits dérivés utilisés lors du calibrage.

Ces critiques motivent la construction d'un modèle multifactoriel, dont les performances et les résultats seront comparés à ceux de Hull & White.

---

1. Voir la section 6.1.

## 7.2 Modèle gaussien à deux facteurs

Le modèle gaussien à deux facteurs, aussi appelé G2++, est un modèle de taux court développé en 2005 par D. Brigo et F. Mercurio dans leur ouvrage *Interest Rate Models-Theory and Practice*. Les principales notions théoriques du modèle gaussien à deux facteurs sont présentées dans les paragraphes suivants.

### 7.2.1 Dynamique

La dynamique du taux court dans le modèle gaussien à deux facteurs s'obtient en combinant deux processus gaussiens corrélés. Ainsi, sous la probabilité risque-neutre, le taux court instantané en  $t$  s'écrit :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0 \quad (7.15)$$

où  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$  sont deux processus de dynamiques :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0 \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

Avec :

- $a, b$  des constantes positives. Elles représentent les coefficients de retour à la moyenne des processus  $x$  et  $y$  ;
- $\sigma, \eta$  des constantes positives. Elles correspondent aux volatilités des processus  $x$  et  $y$  ;
- $W_1, W_2$  deux mouvements browniens standards de corrélation instantanée  $\rho \in [-1; 1]$ , *i.e.*  $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ . Le vecteur formé par  $(W_1, W_2)$  est appelé mouvement brownien bidimensionnel ;
- $\varphi$  une fonction déterministe telle que  $\varphi(0) = r_0$ . Équivalente à  $v$  dans le modèle de Hull & White, elle permet de reproduire de façon exacte la courbe des taux zéro-coupon initiale. Son expression est explicitée dans l'Annexe B.

L'ajout d'une deuxième source d'aléa augmente naturellement le nombre de paramètres du modèle. Les cinq paramètres  $a, b, \sigma, \eta, \rho$  sont calibrés à l'aide de produits dérivés de taux.

En outre, les processus  $x$  et  $y$  jouent un rôle symétrique dans la dynamique de  $r$ . De ce fait, les composantes du modèle sont peu interprétables.

### 7.2.2 Distribution du taux court

En appliquant le lemme d'Itô aux processus  $X_t = x(t)e^{at}$  et  $Y_t = y(t)e^{bt}$ , il vient :

$$\begin{aligned} dX_t &= e^{at} \sigma dW_1(t) \\ dY_t &= e^{bt} \eta dW_2(t) \end{aligned}$$

Puis, par intégration sur l'intervalle  $[s, t]$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-a(t-s)}x(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW_1(u) \\ y(t) &= e^{-b(t-s)}y(s) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)}dW_2(u) \end{aligned}$$

L'expression de  $r(t)$  se réécrit alors comme suit, pour tout  $s < t$  :

$$r(t) = e^{-a(t-s)}x(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW_1(u) + e^{-b(t-s)}y(s) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)}dW_2(u) + \varphi(t) \quad (7.17)$$

Ainsi, soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration engendrée par le couple  $(x(t), y(t))$ . Elle reflète l'information accumulée sur les deux processus jusqu'à la date  $t$ . Pour  $s < t$ , conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$ ,  $r(t)$  est normalement distribué d'espérance (Brigo & Mercurio, 2006, p.144 [7]) :

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t) \quad (7.18)$$

et de variance :

$$\mathbb{V}[r(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)(t-s)}] \quad (7.19)$$

En particulier,

$$\mu_r(t) = \mathbb{E}[r(t)] = \varphi(t) \quad (7.20)$$

$$\sigma_r(t) = \mathbb{V}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2at}] + \frac{\eta^2}{2b} [1 - e^{-2bt}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} [1 - e^{-(a+b)t}] \quad (7.21)$$

Enfin, la distribution gaussienne des taux courts garantit la capacité du modèle à générer des scénarios de taux négatifs, avec une probabilité  $\mathbb{Q}[r(t) < 0]$  telle que :

$$\mathbb{Q}[r(t) < 0] = \Phi\left(-\frac{\mu_r(t)}{\sigma_r(t)}\right) \quad (7.22)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard. Cette probabilité théorique sera comparée à la proportion empirique de taux négatifs simulés lors de l'étude de la validité du modèle.

### 7.2.3 Prix d'un zéro-coupon

L'existence d'une formule fermée pour la valorisation des obligations zéro-coupon est une caractéristique essentielle du modèle de taux utilisé.

Le prix en  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$  s'obtient en calculant l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son *payoff* actualisé, conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$  :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] \quad (7.23)$$

La loi du taux court étant connue, il vient après calcul de cette espérance (Brigo & Mercurio, 2006, p.146 [7]) :

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp(\mathcal{A}(t, T)) \quad (7.24)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, T) &= \frac{1}{2} [V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) \\ V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[ T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right] \end{aligned}$$

#### 7.2.4 Prix des *caps* et des *floors*

De façon similaire aux obligations zéro-coupon, la valorisation des *caps* et des *floors* est réalisée à partir d'une formule fermée. Il s'agit d'un avantage considérable en termes de temps de calcul lors du calibrage des paramètres  $a, b, \sigma, \eta$  et  $\rho$ .

Soit un *cap* de nominal  $N$ , de *strike*  $K$ , débutant en  $T_\alpha$ , et dont les intérêts sont payés aux dates  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ . Les fractions d'années entre les dates de  $\mathcal{T}$  sont notées  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_n$  et sont telles que  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Le prix en date  $t$  du *cap* associé est donné par la formule suivante (Brigo & Mercurio, 2006, p.157 [7]) :

$$\begin{aligned} Cap^{G^2}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} -N(1 + K\tau_i)P(t, T_i)\Phi \left( \frac{\ln \frac{P(t, T_{i-1})}{(1+K\tau_i)P(t, T_i)}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} - \frac{1}{2}\Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \\ &\quad + P(t, T_{i-1})N\Phi \left( \frac{\ln \frac{P(t, T_{i-1})}{(1+K\tau_i)P(t, T_i)}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} + \frac{1}{2}\Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition d'une loi normale standard, et :

$$\begin{aligned} \Sigma(t, T, S)^2 &= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[ 1 - e^{-a(S-T)} \right]^2 \left[ 1 - e^{-2a(T-t)} \right] \\ &\quad + \frac{\eta^2}{2b^3} \left[ 1 - e^{-b(S-T)} \right]^2 \left[ 1 - e^{-2b(T-t)} \right] \\ &\quad + 2\rho \frac{\eta\sigma}{ab(a+b)} \left[ 1 - e^{-a(S-T)} \right] \left[ 1 - e^{-b(S-T)} \right] \left[ 1 - e^{-(a+b)(T-t)} \right] \end{aligned}$$

Le prix du *floor* de mêmes caractéristiques est le suivant (Brigo & Mercurio, 2006, p.158 [7]) :

$$\begin{aligned} Floor^{G^2}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N(1 + K\tau_i)P(t, T_i)\Phi \left( \frac{\ln \frac{P(t, T_i)(1+K\tau_i)}{P(t, T_{i-1})}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} + \frac{1}{2}\Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \\ &\quad - P(t, T_{i-1})N\Phi \left( \frac{\ln \frac{P(t, T_i)(1+K\tau_i)}{P(t, T_{i-1})}}{\Sigma(t, T_{i-1}, T_i)} - \frac{1}{2}\Sigma(t, T_{i-1}, T_i) \right) \end{aligned} \quad (7.26)$$

### 7.2.5 Prix d'une *swaption*

À la différence du modèle de Hull & White, il n'existe pas de formule fermée pour calculer le prix d'une *swaption* dans le modèle G2++. Soit une *swaption* de maturité  $T_\alpha$ , de nominal  $N$  et de *strike*  $K$ . Elle donne droit à son détenteur d'entrer dans un *swap* de taux en date  $T_\alpha$ , pour une durée  $T_\beta - T_\alpha$ . L'ensemble des dates de paiement des intérêts du *swap* est noté  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ , avec  $T_{\alpha+1} > T_\alpha$ . Les dates  $T_i$  sont espacées d'un pas  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ . Le prix de cette option en date 0 est donné par la formule suivante (Brigo & Mercurio, 2006, p.158 [7]) :

$$\begin{aligned}
 & PS^{G2}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, w) \\
 &= NwP(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} [\Phi(-wh_1(x)) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-wh_2(x))] dx \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Avec :

$w = 1, (w = -1)$  pour une *swaption* payeuse (receveuse)

$$\mu_x = - \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) [1 - e^{-aT_\alpha}] + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-2aT_\alpha}] + \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T_\alpha}]$$

$$\mu_y = - \left( \frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) [1 - e^{-bT_\alpha}] + \frac{\eta^2}{2b^2} [1 - e^{-2bT_\alpha}] + \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T_\alpha}]$$

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT_\alpha}}{2a}}$$

$$\sigma_y = \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2bT_\alpha}}{2b}}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma\eta\rho}{(a+b)\sigma_x\sigma_y} (1 - e^{-(a+b)T_\alpha})$$

$$B(z, t, T) = \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$$

$$h_1(x) = \frac{\bar{y} - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}$$

$$h_2(x) = h_1(x) + B(b, T_\alpha, T_i) \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$$

$$\lambda_i(x) = c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(a, T_\alpha, T_i)x}$$

$$c_i = \tau_i K, \quad i \in [1; n-1]$$

$$c_n = 1 + K\tau_n$$

$$\kappa_i(x) = -B(b, T_\alpha, T_i) \left[ \mu_y - \frac{1}{2}(1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 B(b, T_\alpha, T_i) + \rho_{xy} \sigma_y \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right]$$

Et  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  est l'unique solution de l'équation non linéaire :

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(a, T_\alpha, T_i)x - B(b, T_\alpha, T_i)\bar{y}} = 1$$

Le calcul de cette expression nécessite d'utiliser des méthodes d'intégration numérique et des algorithmes de résolution d'équations non linéaires. Ces problématiques seront abordées dans les chapitres suivants.

## Troisième partie

# Implémentation du $G2++$ au sein du GSE

Les notions théoriques développées dans la partie précédente sont à présent mises en pratique afin de construire le modèle gaussien à deux facteurs. Aussi les chapitres 8 et 9 explicitent-t-ils les étapes de calibrage, de discrétisation et de corrélation inhérentes à la construction du modèle. Le chapitre 10, quant à lui, présente les différents contrôles réalisés dans le but de valider les trajectoires économiques projetées.

## Chapitre 8

# Construction du modèle gaussien à deux facteurs

Ce chapitre décrit les étapes observées lors de la construction du modèle gaussien à deux facteurs et de son intégration au GSE. Seront alors évoqués le calibrage des paramètres, la discrétisation des trajectoires simulées ainsi que la génération des facteurs aléatoires.

### 8.1 Calibrage des paramètres

Afin que le modèle G2++ projette des trajectoires fiables et cohérentes avec la réalité, ses cinq paramètres sont calibrés à partir de produits de taux d'intérêt. Le calibrage du modèle est déterminant car il conditionne les résultats en sortie du modèle ALM. Il nécessite à chaque étape d'arbitrer entre plusieurs alternatives. Cette section décrit brièvement le déroulé du processus de calibrage, puis détaille chacune de ses étapes.

#### 8.1.1 Description du processus de calibrage

Le calibrage d'un modèle de taux se déroule en trois étapes :

##### Étape 1 :

Il s'agit dans un premier temps de choisir les produits de taux de référence et leurs caractéristiques. Les *caps* et les *swaptions* étant les instruments les plus échangés sur les marchés de taux, et donc les plus liquides, un jeu de paramètres est calibré pour chacun de ces deux produits. Pour rappel, ces derniers ne sont pas cotés en prix mais en volatilité. Ainsi, les volatilités de marché des *caps* et des *swaptions* à la monnaie sont extraites à la date de calibrage (31/12/2021). Utiliser des options à la monnaie est justifié par la plus grande liquidité de celles-ci ; les prix de marché associés représentent donc des quantités d'équilibre.

##### Étape 2 :

Les volatilités de marché implicites des *caps* et des *swaptions* extraites à l'étape précédente sont converties en prix à l'aide de formules théoriques. Celles-ci varient selon la distribution supposée des produits de taux.

**Étape 3 :**

Enfin, la distance quadratique entre le prix de marché des actifs et leur prix théorique issu du modèle de taux est minimisée. Soit un nombre  $N$  de *swaptions* (resp. de *caps*) de différentes caractéristiques, le problème de minimisation considéré consiste à déterminer  $(a^*, b^*, \sigma^*, \eta^*, \rho^*)$  tels que :

$$(a^*, b^*, \sigma^*, \eta^*, \rho^*) = \operatorname{argmin}_{a,b,\sigma,\eta,\rho} \left\{ \sum_{i=1}^N w_i (\pi_{\text{marché}}(i) - \pi_{\text{G}2++,(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i))^2 \right\}$$

où :

- $\pi_{\text{marché}}(i)$  est le prix observé de la *swaption* (resp. du *cap*)  $i$  ;
- $\pi_{\text{G}2++,(a,b,\sigma,\eta,\rho)}(i)$  est le prix théorique de la *swaption* (resp. du *cap*)  $i$ . Sa valeur dépend naturellement des paramètres du modèle de taux ;
- $w_i$  est le poids alloué à la *swaption* (resp. au *cap*)  $i$ . Les choix les plus fréquents pour  $w_i$  sont :

- .  $w_i = 1$
- .  $w_i = \left( \frac{1}{\pi_{\text{marché}}(i)} \right)^2$

Le premier consiste à minimiser l'écart quadratique absolu entre les deux quantités, et le second l'écart quadratique relatif. Cependant, le dernier pondère davantage les instruments de maturités et de ténors faibles, car leurs prix avoisinent zéro. Dans le but de donner une importance égale à toutes les *swaptions*, le calibrage est réalisé pour  $w_i = 1$ .

Pour ce faire, un algorithme de descente de gradient est employé. Il est à noter qu'une mauvaise initialisation de l'algorithme d'optimisation peut aboutir à un minimum local et non global. En vue de déterminer un minimum global, ce dernier est lancé pour 100 jeux de paramètres initialisés aléatoirement, puis celui menant à l'écart le plus faible est retenu.

Afin d'accélérer la recherche de l'optimum et de respecter la cohérence avec les formules théoriques, l'optimisation est réalisée sous les contraintes suivantes :

- Les paramètres  $a, b, \eta, \sigma$  sont positifs ;
- $\rho$  est compris entre -1 et 1 ;
- Les processus  $x$  et  $y$  ayant un rôle symétrique dans les formules théoriques,  $a$  est supposé supérieur ou égal à  $b$ .

### 8.1.2 Courbe des taux utilisée

Les formules de valorisation des *swaptions* et des *caps* font intervenir les prix des obligations zéro-coupon en date initiale. Il s'agit alors de déterminer la courbe des taux d'actualisation la plus pertinente. Ces deux produits dérivés ayant pour sous-jacents des taux *swap* de marché, la courbe des taux zéro-coupon sans risque construite par l'EIOPA n'est pas adaptée pour les évaluer à leur juste valeur. En effet, bien qu'elle soit construite

à partir des taux *swap*, elle diverge de la courbe des taux *swap* de marché.

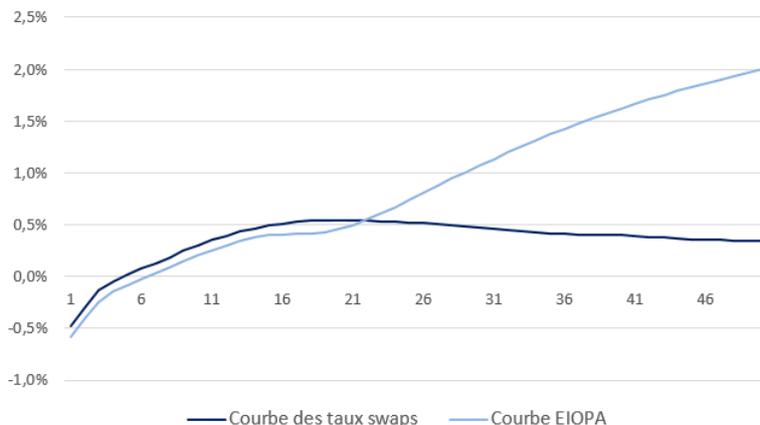


FIGURE 8.1 – Comparaison de la courbe EIOPA à la courbe des taux *swap* de marché au 31/12/2021

Il est donc impossible de reproduire les surfaces de volatilité de marché des produits de taux avec la courbe EIOPA.

Comme présenté dans la première partie, l'évaluation du *Best Estimate* à l'aide du GSE est réalisée via une approche dite *Mark-to-Model* (Armel & Planchet, 2018 [3]). Celle-ci consiste à apprécier la qualité du GSE à travers sa capacité à reproduire des prix d'instruments financiers, les prix des options et des garanties des contrats d'assurances n'étant pas observés. La valeur du *Best Estimate* est considérée comme fiable si le GSE reproduit avec précision les valeurs de marché d'instruments dérivés. Or, les prix cotés des produits de taux intègrent le risque de défaut de la contrepartie du *swap*, ainsi qu'une éventuelle prime de liquidité. Ces éléments ne sont pas pris en compte dans la courbe EIOPA. Ainsi, la courbe des taux zéro-coupon utilisée pour calibrer le modèle de taux est celle issue du marché des *swaps*. Elle correspond à la courbe avant les retraitements permettant d'obtenir la courbe des taux sans risque de l'EIOPA. Les taux *swap* pour lesquels aucune valeur n'est observée sont extrapolés par interpolation linéaire.

Il est à noter qu'une fois le modèle calibré, la courbe des taux de l'EIOPA est bien celle utilisée pour projeter les scénarios et calculer le *Best Estimate*.

### 8.1.3 Conversion des volatilités implicites

Les produits dérivés de taux ne sont pas cotés en prix mais en volatilité. Pour comparer les prix fixés par les marchés financiers aux valeurs théoriques calculées par le modèle de taux, il est d'usage de convertir les volatilités de marché en prix. Il existe deux principales conventions de calcul de la volatilité implicite : la volatilité log-normale et la volatilité normale.

#### Volatilités log-normales

Historiquement utilisée par les acteurs du marché, la volatilité log-normale repose sur le modèle de Black. Ce dernier suppose que les taux *swap forward* évoluent selon la dynamique

suivante :

$$\frac{dS_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(t)} = \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta} dW(t) \quad (8.1)$$

où  $\sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta}$  est la volatilité implicite cotée pour la maturité  $T_\alpha$  et le ténor  $T_\beta - T_\alpha$ , et  $W$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité  $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$  associé au numéraire  $A_{\alpha,\beta}(t)$ . Ce dernier est un portefeuille constitué d'obligations zéro-coupon :

$$A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$$

Ainsi, le taux *swap forward* est une martingale sous  $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$ .

Il se démontre aisément à partir de la relation (8.1) que le taux *swap forward* suit une distribution log-normale telle que :

$$\ln(S_{\alpha,\beta}(t)) \sim \mathcal{N} \left( \ln(S_{\alpha,\beta}(0)) - \frac{(\sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta})^2}{2} t, (\sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta})^2 t \right) \quad (8.2)$$

La date  $t = 0$  correspondant à la date de calibrage, et donc d'observation de la volatilité cotée, il s'agit de déterminer le prix de la *swaption* à cette même date. Pour ce faire, l'espérance du *payoff* d'une *swaption* actualisé en date 0 est calculée sous la probabilité risque-neutre. Cette option a pour caractéristiques un nominal  $N$ , une maturité  $T_\alpha$ , un ténor  $T_\beta - T_\alpha$  et un calendrier de paiements  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ . Il vient (Brigo & Mercurio, 2006, p.20 [7]) :

$$PS^{\text{Black}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta}) = N \text{Bl}(K, S_{\alpha,\beta}(0), v_{\alpha+1}, 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \quad (8.3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \text{Bl}(K, F, v, w) &= Fw\Phi(wd_1(K, F, v)) - Kw\Phi(wd_2(K, F, v)) \\ w &= 1 \text{ (resp. -1) pour une } swaption \text{ payeuse (resp. receveuse)} \\ d_1(K, F, v) &= \frac{\ln(F/K) + v^2/2}{v} \\ d_2(K, F, v) &= \frac{\ln(F/K) - v^2/2}{v} \\ v_i &= \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{i-1}} \end{aligned}$$

Et  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi normale standard.

De manière analogue, en supposant une dynamique similaire à (8.1) pour les taux *forward*, sous la mesure  $\mathbb{Q}^i$  de numéraire  $P(\cdot, T_i)$ , le prix d'un *cap* de nominal  $N$ , de calendrier de paiements  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ , est donné par la formule de Black (Brigo & Mercurio, 2006, p.17 [7]) :

$$Cap^{\text{Black}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha,\beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \text{Bl}(K, F(0, T_{i-1}, T_i), v_i, 1) \quad (8.4)$$

où  $F(0, T_{i-1}, T_i)$  est le taux *forward* vu en date 0 pour la période  $[T_{i-1}, T_i]$ . Sous  $\mathbb{Q}^i$ ,  $F(t, T_{i-1}, T_i)$  est une martingale.

**Volatilités normales**

Le modèle de volatilité normal repose sur les travaux menés par L. Bachelier (1900). Il suppose la dynamique suivante pour les taux *swap forward* sous la probabilité associée au numéraire  $A_{\alpha,\beta}(t)$  :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} dW(t) \quad (8.5)$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$  et  $\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}$  est la volatilité implicite de Bachelier d'une *swaption* de maturité  $T_\alpha$  et de ténor  $T_\beta - T_\alpha$ .

En intégrant (8.5), il vient :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(0) + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_\alpha} \varepsilon \quad (8.6)$$

où  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Le taux *swap forward* suit donc une distribution normale telle que :

$$S_{\alpha,\beta}(t) \sim \mathcal{N} \left( S_{\alpha,\beta}(0), \left( \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \right)^2 t \right) \quad (8.7)$$

Le prix d'une *swaption* se calcule à l'aide de l'expression suivante de son *payoff* actualisé (Brigo & Mercurio, 2006, p.21 [7]) :

$$ND(0, T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)$$

Ainsi, le prix en date 0 d'une *swaption* de nominal  $N$ , de maturité  $T_\alpha$ , de ténor  $T_\beta - T_\alpha$  et de calendrier de paiements  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ , est reconstitué de la façon suivante :

$$PS^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ ND(0, T_\alpha) (S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \right]$$

Il vient après calcul de cette espérance<sup>1</sup> :

$$PS^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) = NBachelier(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_\alpha}, 1) \sum_{\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \quad (8.8)$$

où :

$$\text{Bachelier}(F, K, v, w) = w(F - K) \Phi \left( w \frac{F - K}{v} \right) + v \phi \left( w \frac{F - K}{v} \right)$$

$\Phi$  et  $\phi$  désignent respectivement la fonction de répartition et la densité de la loi normale centrée réduite, et  $w = 1$  (resp.  $-1$ ) pour une *swaption* payeuse (resp. receveuse).

De manière analogue, en supposant la dynamique suivante pour les taux *forward* sous la probabilité  $\mathbb{Q}_i$  associée au numéraire  $P(t, T_i)$  :

$$dF(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} dW(t) \quad (8.9)$$

---

1. Le calcul est détaillé en Annexe C.

où  $W$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^i$  et  $\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}$  est la volatilité implicite de Bachelier observée sur le marché du *cap* de durée  $T_\beta - T_\alpha$ , le prix d'un *cap* de première date de réinitialisation  $T_\alpha$  et de calendrier de paiement  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$  est donné par :

$$Cap^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} ND(t, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right]$$

Il vient après calcul de cette espérance :

$$Cap^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \text{Bachelier}(F(0, T_{i-1}, T_i), K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{i-1}}, 1) \quad (8.10)$$

### Convention retenue

Les cotations des *caps* et des *swaptions* sont disponibles dans les deux conventions de calcul de la volatilité. Cependant, lors d'une période de taux bas, voire négatifs, les volatilités implicites de Black explosent car la distribution log-normale n'est pas adaptée pour décrire une telle configuration des taux. Pour certains couples maturité  $\times$  ténor, il peut alors arriver qu'aucune cotation ne soit disponible. Par ailleurs, le taux *swap forward* étant négatif au 31/12/2021, il est impossible d'évaluer les options à la monnaie à cette date. Dans ce contexte, l'utilisation des volatilités normales, moins sensibles au niveau des taux d'intérêt, s'est imposée. C'est pourquoi la volatilité normale telle que décrite par Bachelier est utilisée lors du calibrage.

#### 8.1.4 Calibrage sur les *caps*

Dans un premier temps, les paramètres du modèle sont calibrés en référence aux *caps*. Sous la dynamique du G2++, ces derniers sont valorisés par la formule (7.25). Il s'agit d'une formule fermée, fonction des caractéristiques du *cap*. Le calibrage s'effectue sur les instruments à la monnaie de maturité 1 à 30, dont les paiements s'effectuent semestriellement<sup>2</sup>. Les volatilités normales de marché de ces instruments et leurs prix sont représentés ci-dessous :

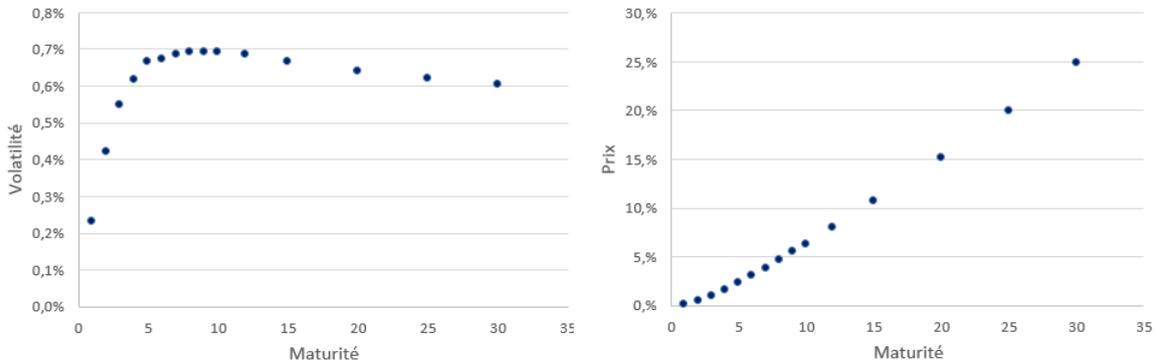


FIGURE 8.2 – Volatilité implicite et prix de marché des *caps* au 31/12/2021

2. La première date de réinitialisation du *cap* est donc  $T_\alpha = 0,5$ .

Après conversion des volatilités implicites en prix, il s'agit de minimiser la somme des écarts quadratiques entre prix observés et théoriques, et ainsi de résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{a,b,\sigma,\eta,\rho} \sum_k (Cap_k^{\text{Bach}} - Cap_k^{\text{G}^2}(a,b,\sigma,\eta,\rho))^2$$

où  $Cap_k^{\text{Bach}}$  et  $Cap_k^{\text{G}^2}$  désignent respectivement le prix de marché et le prix théorique du  $k$ -ième *cap* considéré pour le calibrage. En raison du nombre de paramètres à estimer, l'initialisation de l'algorithme de minimisation impacte de façon non négligeable son résultat. Par conséquent, celui-ci est initialisé puis lancé avec 100 jeux de paramètres générés aléatoirement. Les paramètres menant à l'écart quadratique le plus faible sont conservés.

Les jeux de paramètres optimaux au 31/12/N des 4 dernières années sont les suivants :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 79,97% | 3,48% | 0,19%    | 0,82%  | -99,03% |
| 31/12/2020 | 34,84% | 2,51% | 1,07%    | 0,82%  | -100%   |
| 31/12/2019 | 54,19% | 1,94% | 1,14%    | 0,75%  | -100%   |
| 31/12/2018 | 85,14% | 4,66% | 1,74%    | 1,01%  | -100%   |

TABLE 8.1 – Paramètres du G2++ calibrés en référence aux *caps* de 2018 à 2021

Le calibrage laisse apparaître une saturation quasi systématique du paramètre  $\rho$ . Il atteint -1 de 2018 à 2020, et demeure proche de ce plancher au 31/12/2021. Il s'agit d'un phénomène fréquemment observé lors du calibrage des *caps* (Brigo & Mercurio, 2006, p.167), provenant de la façon dont ces derniers sont valorisés. En effet, leur prix ne dépend pas de la corrélation entre les taux *forward*. Un modèle unifactoriel modélisant des taux parfaitement corrélés est alors capable de reproduire fidèlement la surface de volatilité des *caps*. Cette tendance du paramètre de corrélation à tendre vers -1 est interprétée par Brigo et Mercurio comme une forme de dégénérescence du G2++ vers un modèle à un facteur.

Le tableau ci-dessous présente les valeurs des écarts quadratiques absolus et relatifs globaux entre les prix observés et théoriques des *caps* pour les quatre dernières années :

|            | Écarts absolus | Écarts relatifs |
|------------|----------------|-----------------|
| 31/12/2021 | 0,00179%       | 214%            |
| 31/12/2020 | 0,00005%       | 23%             |
| 31/12/2019 | 0,00018%       | 56%             |
| 31/12/2018 | 0,00110%       | 68%             |

TABLE 8.2 – Écarts absolus et relatifs après calibrage sur les *caps*

Les écarts relatifs les plus importants sont observés pour les *caps* de faible maturité, et d'autant plus sur la dernière année de calibrage. Cela s'explique notamment par le choix de réduire l'écart quadratique absolu et non relatif entre les prix observés et théoriques. En effet, une minimisation de l'écart quadratique relatif surpondère les *caps* de faible maturité.

Les prix théoriques obtenus avec le jeu de paramètres optimal sont superposés à leur valeur cible de marché au 31/12/2021 :

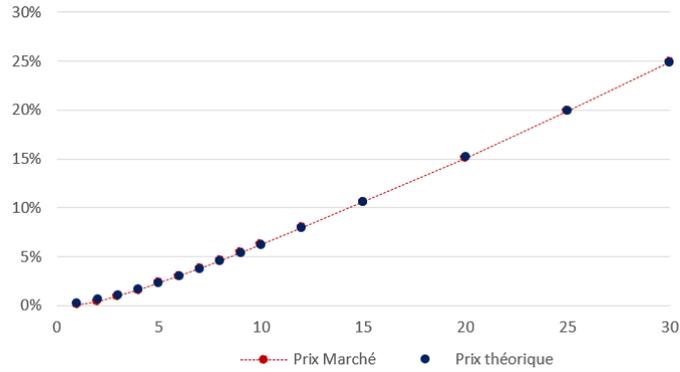


FIGURE 8.3 – Prix de marché et théoriques des *caps* après calibrage au 31/12/2021

### 8.1.5 Calibrage sur les *swaptions*

Dans un second temps, le calibrage des cinq paramètres est réalisé en référence aux *swaptions* à la monnaie. Cependant, l'évaluation de ces dernières dans le modèle G2++ est moins directe que celle des *caps*. En effet, le calcul de la formule (7.27) nécessite d'employer des techniques d'intégration numérique et de résolution d'équations non linéaires.

L'optimisation est réalisée sur toute la surface des prix des *swaptions* à la monnaie, d'intervalles de paiements semestriels :

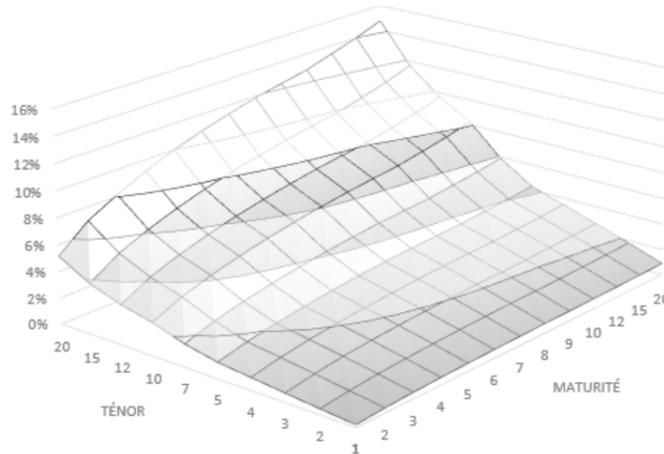


FIGURE 8.4 – Prix de marché au 31/12/2021 des *swaptions* à la monnaie

L'objectif est alors de minimiser la somme des écarts quadratiques entre les prix de marché et les prix théoriques :

$$\min \sum_k (PS^{\text{Bach}}(k) - PS^{G^2}(k))^2$$

où  $PS^{\text{Bach}}(k)$  et  $PS^{G^2}(k)$  désignent respectivement le prix de marché et le prix théorique de la  $k$ -ième *swaption* considérée pour le calibrage.

#### Valorisation des *swaptions* par la formule exacte

La quadrature de Gauss-Hermite est la méthode d'intégration numérique la plus adaptée pour calculer (7.27) car elle permet d'estimer des intégrales de la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \quad (8.11)$$

Or, le prix d'une *swaption* dans le modèle G2++ peut se réécrire sous cette forme en opérant le changement de variable suivant :

$$u = \frac{x - \mu_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \text{ tel que } du = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma_x}$$

Il vient alors :

$$PS^{G2}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K) = NP(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(u) du \quad (8.12)$$

où :

$$f(u) = \varphi(-h_1(u\sqrt{2}\sigma_x + \mu_x)) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \lambda_i (u\sqrt{2}\sigma_x + \mu_x) e^{\kappa_i(u\sqrt{2}\sigma_x + \mu_x)} \varphi(-h_2(u\sqrt{2}\sigma_x + \mu_x))$$

La quadrature de Gauss-Hermite approxime l'intégrale (8.11) par la somme ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (8.13)$$

où :

- $n$  est le nombre de points auxquels est évaluée la fonction  $f$ . Il est également appelé le nombre de nœuds ;
- les points  $x_i$  avec  $i \in [1; n]$  sont les racines du polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Le polynôme  $H_n(x)$  est calculé à partir de la formule de récurrence suivante :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Ses racines sont déterminées par la méthode de la sécante, adaptée de l'algorithme de Newton-Raphson.

- $w_i$  sont les poids associés à chaque point  $x_i$  :

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 \sqrt{2\pi} [H_{n-1}(x_i)]^2}$$

Le choix du nombre  $n$  de points utilisés dans la quadrature représente un compromis entre la précision souhaitée et le temps alloué au calcul. En effet, la durée de calcul croît à mesure que le nombre de points augmente, chacun nécessitant de déterminer l'unique solution  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  de l'équation non linéaire :

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i, a)x - B(T_\alpha, T_i, b)\bar{y}} = 1$$

Sa résolution s'effectue par la méthode de la sécante.

Finalement, la quadrature de Gauss-Hermite est appliquée avec un nombre de 20 nœuds. Dans ce cas, l'évaluation de la matrice des prix théoriques de dimension  $13 \times 11$  nécessite 3 secondes<sup>3</sup>. Un nombre plus élevé de nœuds allongerait le temps du calcul sans en augmenter considérablement la précision.

L'optimisation sur toute la matrice des prix des *swaptions* s'avère nettement plus longue que le calibrage sur les *caps*. De fait, l'évaluation d'une *swaption* nécessite d'évaluer la fonction  $f$  vingt fois, chacune requérant d'appliquer l'algorithme de résolution de Newton. Le lancement de l'algorithme d'optimisation pour 100 scénarios de paramètres différents requiert un temps de calcul trop important. Déterminer un minimum global nécessite alors d'initialiser le problème de minimisation à l'aide d'un jeu de paramètres proche de la solution optimale.

### Valorisation des *swaptions* par l'approximation de Schrager et Pelsser

Une alternative à l'évaluation des *swaptions* par intégration numérique peut être envisagée. Celle-ci repose sur une formule d'approximation développée par Schrager et Pelsser (2006 [18]). Moins complexe, elle permet de résoudre plus rapidement le problème d'optimisation. De fait, le calcul de toute la matrice de volatilité nécessite 0,03 seconde.

L'approximation de Schrager et Pelsser établit le prix d'une *swaption* à la monnaie par la formule suivante :

$$PS^{SP}(0, \mathcal{T}, \tau, N, S_{\alpha, \beta}(0)) = A_{\alpha}^{\beta}(0) \frac{\sigma_{\alpha, \beta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (8.14)$$

Avec :

$$A_{\alpha}^{\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$$

$$\sigma_{\alpha, \beta} = \left[ \sigma^2 (C^{(1)})^2 \frac{e^{2aT_{\alpha}} - 1}{2a} + \eta^2 (C^{(2)})^2 \frac{e^{2bT_{\alpha}} - 1}{2b} + 2\rho\sigma\eta C^{(1)}C^{(2)} \frac{e^{(a+b)T_{\alpha}} - 1}{a+b} \right]^{1/2}$$

$$C^{(1)} = \frac{1}{a} \left[ e^{-aT_{\alpha}} P^A(0, T_{\alpha}) - e^{-aT_{\beta}} P^A(0, T_{\beta}) - S_{\alpha, \beta}(0) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i e^{-aT_i} P^A(0, T_i) \right]$$

$$C^{(2)} = \frac{1}{b} \left[ e^{-bT_{\alpha}} P^A(0, T_{\alpha}) - e^{-bT_{\beta}} P^A(0, T_{\beta}) - S_{\alpha, \beta}(0) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i e^{-bT_i} P^A(0, T_i) \right]$$

$$P^A(t, T_i) = \frac{P(t, T_i)}{A_{\alpha}^{\beta}(t)}$$

Pour un jeu de paramètres quelconque, l'erreur quadratique moyenne<sup>4</sup> entre les prix estimés par la méthode exacte et la formule approchée est de 0,0008%.

3. Les calculs sont réalisés sous Excel VBA.

4. L'erreur quadratique moyenne représente la somme des écarts quadratiques absolus pondérés par le nombre d'observations.

Cette fois, l'algorithme d'optimisation initialisé aléatoirement peut être appliqué dans un temps raisonnable.

### Combinaison des deux méthodes

Si les résultats obtenus avec la formule de Schrager et Pessler peuvent être conservés à des fins d'efficacité, il est proposé ici de combiner la simplicité de l'approximation et la précision de la formule théorique. Les paramètres obtenus par la formule de Schrager et Pessler font office de points d'initialisation de l'algorithme de minimisation entre les prix théoriques calculés par la formule exacte et les prix de marché (Bonnefoy-Cudraz, 2016 [6]). Les paramètres optimaux au 31/12/N des 4 dernières années sont les suivants :

|            | $a$    | $b$   | $\sigma$ | $\eta$ | $\rho$  |
|------------|--------|-------|----------|--------|---------|
| 31/12/2021 | 50,77% | 2,52% | 0,42%    | 0,78%  | -89,70% |
| 31/12/2020 | 31,38% | 2,86% | 1,561%   | 0,85%  | -93,81% |
| 31/12/2019 | 31,20% | 2,30% | 0,98%    | 0,79%  | -95,80% |
| 31/12/2018 | 70,56% | 3,72% | 3,59%    | 0,93%  | -92,96% |

TABLE 8.3 – Paramètres du G2++ calibrés de 2018 à 2021

Contrairement au calibrage sur les *caps*, le paramètre  $\rho$  est davantage éloigné de sa valeur plancher -1. En effet, le prix des *swaptions* est dépendant de la corrélation entre les taux, elle-même liée à  $\rho$ . Le calibrage sur cet instrument dérivé semble donc plus pertinent, car il n'induit pas de saturation des paramètres. De surcroît, l'écart quadratique global entre les prix des *caps* et des *swaptions* observés et théoriques est plus faible lorsque les paramètres sont calibrés à partir des *swaptions* :

| Instrument de calibrage | <i>Caps</i> | <i>Swaptions</i> |
|-------------------------|-------------|------------------|
| Erreur globale          | 0,16%       | 0,09%            |

FIGURE 8.5 – Erreur quadratique absolue globale au 31/12/2021 selon l'instrument utilisé pour le calibrage

Ce résultat suggère que le calibrage sur les *swaptions* induit une reproduction plus fidèle de ces deux instruments. Calibrer à la fois sur les *caps* et les *swaptions* s'avérant trop complexe, les paramètres calibrés sur les *swaptions* au 31/12/2021 sont retenus pour la suite de l'étude.

Les écarts quadratiques absolus et relatifs globaux entre les prix théoriques et ceux observés sur le marché sont présentés ci-dessous :

| Écarts absolus | Écarts relatifs |
|----------------|-----------------|
| 0,045%         | 20%             |

FIGURE 8.6 – Écarts quadratiques absolus et relatifs après calibrage sur les *swaptions* au 31/12/2021

Les écarts les plus importants entre les prix théoriques et leurs analogues de marché concernent les ténors situés aux extrémités de la surface de volatilité (1,2, 15 et 20 ans) associés à de faibles maturités (entre 1 et 5 ans).

| Maturité\Tenor | 1    | 2   | 3   | 4   | 5  |
|----------------|------|-----|-----|-----|----|
| 1              | 12%  | 6%  | 4%  | 3%  | 2% |
| 2              | -6%  | -5% | -3% | -1% | 2% |
| 3              | -10% | -8% | -5% | -2% | 1% |
| 4              | -10% | -7% | -5% | -1% | 1% |
| 5              | -8%  | -6% | -4% | -1% | 1% |
| 6              | -6%  | -5% | -3% | -1% | 1% |
| 7              | -5%  | -4% | -2% | -1% | 1% |
| 8              | -3%  | -3% | -1% | 0%  | 1% |
| 9              | -2%  | -1% | 0%  | 1%  | 2% |
| 10             | -1%  | -1% | 0%  | 1%  | 2% |
| 12             | 1%   | 1%  | 1%  | 2%  | 3% |
| 15             | 2%   | 2%  | 3%  | 4%  | 4% |
| 20             | 4%   | 3%  | 4%  | 5%  | 5% |

FIGURE 8.7 – Extrait de la matrice des écarts relatifs entre prix observés et prix théoriques des *swaptions* au 31/12/2021

### 8.1.6 Comparaison avec Hull & White

Le modèle de Hull & White utilisé jusqu'alors par l'entreprise est calibré sur les *swaptions* à la monnaie. Le calibrage des paramètres de Hull & White est plus aisé que celui du G2++, en raison du faible nombre de paramètres à ajuster. L'évaluation des prix des *swaptions* s'effectue à l'aide d'une formule fermée, et le résultat en sortie de l'algorithme d'optimisation est très peu dépendant des paramètres initiaux. Cependant, une des critiques fréquemment opposées au modèle de Hull & White est sa faible capacité de reproduction de l'entièreté de la matrice des prix des *swaptions*. En effet, les paramètres plus nombreux du G2++ permettent en théorie d'améliorer la performance du calibrage et de reproduire plus fidèlement les prix de marché des dérivés de taux.

Ci-dessous sont indiqués les écarts quadratiques, absolus et relatifs, entre les prix théoriques après calibrage des *swaptions* et leur valeur de marché pour chacun des modèles :

|            | G2     | HW     |
|------------|--------|--------|
| 31/12/2021 | 0,045% | 0,042% |
| 31/12/2020 | 0,007% | 0,072% |
| 31/12/2019 | 0,002% | 0,038% |

TABLE 8.4 – Distance quadratique des écarts absolus entre les deux modèles

|            | G2   | HW    |
|------------|------|-------|
| 31/12/2021 | 20%  | 57%   |
| 31/12/2020 | 564% | 1477% |
| 31/12/2019 | 21%  | 1160% |

TABLE 8.5 – Distance quadratique des écarts relatifs entre les deux modèles

Ces résultats témoignent d'une meilleure capacité de calibrage du modèle G2++. En effet, le modèle HW peine à reproduire certaines zones de la matrice, notamment les instruments de faibles maturités et ténors.

## 8.2 Diffusion des trajectoires

Une fois les paramètres calibrés, les taux zéro-coupon sont simulés de proche en proche à un pas semestriel. La génération des trajectoires de ces derniers nécessite de discrétiser la

formule (7.24), et plus particulièrement la dynamique des processus  $(x(t))_{t \geq 0}$  et  $(y(t))_{t \geq 0}$ . Pour ce faire, la période de projection  $[0; T]$  est subdivisée en un nombre fini  $n$  de sous-périodes délimitées par les instants  $\{t_1, \dots, t_n\}$  espacés les uns des autres d'un pas  $\delta = 0, 5$ . Les deux facteurs  $x$  et  $y$ , correspondant chacun à un processus d'Orstein-Uhlenbeck, sont générés à chaque date  $t_k = \delta k$  à l'aide de la discrétisation exacte suivante (Thérond, 2005 [20]) :

$$x(t_{k+1}) = e^{-a\delta} x(t_k) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} Z_{k+1}^1 \quad (8.15)$$

$$y(t_{k+1}) = e^{-b\delta} y(t_k) + \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2b\delta}}{2b}} Z_{k+1}^2 \quad (8.16)$$

Avec  $Z_{k+1}^1$  et  $Z_{k+1}^2$  deux variables aléatoires de loi normale centrée réduite et de coefficient de corrélation linéaire  $\rho$ . La génération de ces aléas et leur corrélation font l'objet du chapitre suivant.

Il se démontre aisément que l'espérance et la variance de  $r(t_{k+1})$  (calculé comme la somme des deux processus discrétisés ci-dessus et de la fonction déterministe  $\varphi(t_{k+1})$ ) sachant  $\mathcal{F}_{t_k}$  coïncident avec les formules théoriques (7.18) et (7.19) lorsque  $\delta$  est proche de 0.

## Chapitre 9

# Structure de dépendance du GSE

Dans le cadre d'un système hybride alliant plusieurs modèles stochastiques, il est essentiel que les trajectoires diffusées reflètent la dépendance réelle entre les facteurs de risque. En effet, il existe incontestablement des interactions entre les rendements des actions, de l'immobilier, de la gestion alternative, des taux d'intérêt et du *spread* de crédit. Par conséquent, la définition d'une structure de dépendance entre les variables modélisées dans le GSE est primordiale.

Les modèles de projection intégrés au générateur de scénarios économiques sont tous simulés à partir de mouvements browniens standards. Pour ce type de modèle, la mesure de la dépendance la plus populaire auprès des acteurs financiers est la corrélation linéaire de Pearson (Arrouy, 2015 [4]). Ainsi, l'information concernant la dépendance entre les facteurs est implicitement contenue dans le vecteur formé par ceux-ci après application de l'algorithme de Cholesky. Aussi, les browniens sont-ils corrélés à l'aide d'une matrice de corrélation spécifique. En considérant le mouvement brownien multidimensionnel  $W = (W^1, \dots, W^N)$  formé par les  $N$  browniens employés dans les différents modèles de diffusion, la matrice de corrélation instantanée est définie de la manière suivante (Arrouy, 2015 [4]) :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \cdots & \rho_{NN} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, 0 < i, j < N, dW^i(t)dW^j(t) &= \rho dt \\ \forall 0 < i < N, \rho_{i,i} &= 1 \\ \forall 0 < i, j < N, \rho_{i,j} &= \rho_{j,i} \end{aligned}$$

L'objet de cette section est de construire la matrice de corrélation instantanée la plus réaliste possible. Si de façon générale la construction d'une telle matrice est délicate, elle l'est particulièrement lors de l'intégration du modèle G2++.

La matrice de corrélation instantanée dans le cadre du modèle unifactoriel de Hull & White est la suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \rho_{a,t} & 1 & & & & \\ \rho_{i,t} & \rho_{i,a} & 1 & & & \\ \rho_{g,t} & \rho_{g,a} & \rho_{g,i} & 1 & & \\ \rho_{s,t} & \rho_{s,a} & \rho_{s,i} & \rho_{s,ga} & 1 & \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

où :

- $\{t, a, i, g, s\}$  représentent les facteurs aléatoires taux, actions, immobilier, gestion alternative et *spread* de crédit ;
- $\forall i, j \in \{t, a, i, g, s\}$ ,  $\rho_{i,j}$  est la corrélation linéaire entre les facteurs de risque  $i$  et  $j$ . Elle est calculée empiriquement à partir d'un historique de données de marché. L'aléa associé au risque de taux est identifié à un taux *swap* court terme.

Les facteurs de risques modélisés sont identifiés aux variables suivantes :

- Variation du taux 1 an ;
- Log-rendement actions ;
- Log-rendement immobilier ;
- Log-rendement gestion alternative ;
- Variation du *spread* 1 an.

La mise en place d'un modèle de taux à deux facteurs transforme la matrice de corrélation. En effet, l'intégration d'un aléa supplémentaire augmente la dimension de la matrice  $\Sigma$ . Elle devient :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ \rho_{a,x} & 1 & & & & & \\ \rho_{i,x} & \rho_{i,a} & 1 & & & & \\ \rho_{g,x} & \rho_{g,a} & \rho_{g,i} & 1 & & & \\ \rho_{s,x} & \rho_{s,a} & \rho_{s,i} & \rho_{s,g} & 1 & & \\ \rho_{y,x} & \rho_{y,a} & \rho_{y,i} & \rho_{y,g} & \rho_{y,s} & 1 & \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

où  $x$  et  $y$  représentent les deux facteurs du G2++. Une des spécificités de ce modèle de taux est alors l'influence directe du calibrage de ses paramètres sur la structure de dépendance du GSE. En effet, la corrélation  $\rho_{y,x}$  n'est autre que le paramètre  $\rho$  dont la valeur a été déterminée dans la section 8.1.

Tout l'enjeu réside alors dans l'estimation des corrélations entre le processus  $x$  (resp.  $y$ ) et les autres facteurs de risque. Cette étape est moins aisée que pour un modèle unifactoriel, puisqu'à l'abstraction des facteurs s'ajoutent leur rôle symétrique dans la dynamique du taux court, ainsi que leur corrélation dépendant du paramètre  $\rho$ . De ce fait, les deux processus ne sont pas aisément identifiables à des taux observés sur le marché. Il ne semble donc pas pertinent d'estimer les corrélations souhaitées empiriquement sur un historique de données. Il s'agit alors de choisir une méthode plus pertinente quant à son efficacité et son réalisme.

## 9.1 Estimation des corrélations théoriques

L'approche retenue est adaptée d'un article de B. Law (2021 [13]). Elle permet d'estimer, à partir de corrélations observées, les corrélations théoriques entre les processus gaussiens du G2++ et les facteurs de risque du GSE. Un des avantages principaux de cette méthode est sa rapidité, car sa mise en œuvre consiste simplement en la résolution d'un système d'équations linéaires de faible dimension.

Dans son article, l'auteur établit une formule de dépendance entre les facteurs de risque action et taux d'intérêt, simulés respectivement par le modèle de Heston<sup>1</sup> et le G2++. Dans le cadre de ce mémoire, la démarche est donc légèrement adaptée. En effet, les variables action, immobilier et gestion alternative sont diffusées à l'aide du modèle de Black & Scholes, tandis que le risque de crédit est capturé à travers le modèle LMN. Ce dernier suppose l'indépendance entre les taux courts et le *spread* de crédit. Le coefficient de corrélation taux/*spread* est donc nul. Les développements ci-dessous s'attachent ainsi à décrire la démarche d'estimation des corrélations entre un actif simulé par le modèle de Black & Scholes et les processus gaussiens du G2++. La méthode décrite est identique pour les risques action, immobilier et gestion alternative. Les notations utilisées dans la suite sont extraites de l'article de B. Law.

Soit  $s$  le logarithme du prix  $S$  d'un actif dont la dynamique est donnée par la formule de Black & Scholes, et soit  $R^\tau(t) = R(t, t + \tau)$  le taux zéro-coupon de durée de maturité  $\tau$  modélisé par le G2++. Les valeurs de ces deux instruments financiers sont supposées observées aux dates  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Les rendements des quantités  $s$  et  $R$  entre les dates  $t_{k-1}$  et  $t_k$  sont notés  $\Delta_\tau^R(k)$  et  $\Delta^s(k)$  et s'obtiennent comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta_\tau^R(k) &= R(t_k, t_k + \tau) - R(t_{k-1}, t_{k-1} + \tau) \\ \Delta^s(k) &= s(t_k) - s(t_{k-1})\end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation empirique  $\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_\tau^R, \Delta^s)$  entre les variables  $\Delta_\tau^R$  et  $\Delta^s$  est défini de la façon suivante :

$$\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_\tau^R, \Delta^s) = \frac{\sum_{k=1}^n (\Delta_\tau^R(k) - \bar{\Delta}_\tau^R)(\Delta^s(k) - \bar{\Delta}^s)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\Delta_\tau^R(k) - \bar{\Delta}_\tau^R)^2 \sum_{k=1}^n (\Delta^s(k) - \bar{\Delta}^s)^2}} \quad (9.4)$$

où  $\bar{\Delta}_\tau^R$  et  $\bar{\Delta}^s$  sont les moyennes empiriques des variables  $\Delta_\tau^R$  et  $\Delta^s$  :

$$\bar{\Delta}_\tau^R = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_\tau^R(k)}{n}, \quad \bar{\Delta}^s = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^s(k)}{n} \quad (9.5)$$

Il vient alors le résultat de convergence suivant<sup>2</sup> :

$$\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_\tau^R, \Delta^s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty, T \rightarrow 0]{\mathbb{P}} c_1(\tau)\rho_{x,s} + c_2(\tau)\rho_{y,s} \quad (9.6)$$

Avec :

1. Le modèle de Heston est une formulation plus générale du modèle de Black & Scholes.
2. Le détail mathématique est présenté en Annexe D.



## 9.2 Propriété de définie positivité de la matrice de corrélation

Par définition, une matrice de corrélation est symétrique, semi-définie positive, de diagonale unitaire. Toutefois, la matrice  $A$  résultant de la méthode de Law n'est pas systématiquement semi-définie positive. Dans ce cas, la matrice obtenue n'est pas réellement une matrice de corrélation, et la décomposition de Cholesky est impossible à mettre en œuvre. Il s'agit d'un phénomène fréquemment rencontré en finance. Dans ce cas, il est d'usage de déterminer la matrice définie positive<sup>3</sup> la plus proche de  $\Sigma$ .

Les algorithmes basés sur la norme de Frobenius, comme celui développé par Higham (2002 [10]), sont fréquemment utilisés pour déterminer la matrice définie positive la plus proche d'une matrice symétrique donnée. Bien que cette méthode soit précise et renvoie une matrice proche de l'originale, elle présente deux inconvénients majeurs. D'une part, cette méthode modifie l'entièreté de la matrice  $\Sigma$ , y compris les corrélations ne faisant pas intervenir le risque de taux, et le paramètre  $\rho$  calibré au préalable. D'autre part, l'algorithme n'est pas aisé à intégrer au modèle ALM, implémenté en VBA. Il doit être mis en pratique sur R à l'aide de la fonction *NearPD*, et ce pour chaque nouveau jeu de paramètres.

La méthode alternative proposée ci-dessous, développée par Higham en 2016, ne transforme qu'une partie de la matrice  $\Sigma$ .

### 9.2.1 Algorithme par *shrinking*

L'ajout d'un facteur n'impactant qu'une partie de la matrice de corrélation, il n'est pas nécessaire de la transformer dans sa totalité. C'est pourquoi cette optimisation peut être réalisée en maintenant inchangées certaines lignes et colonnes. C'est l'objectif de l'algorithme par *shrinking*, également développé par Higham (2016 [11]). Cet algorithme est certes moins performant, au sens de la norme de Frobenius, que le premier, mais il est rapide et facile à intégrer dans le modèle ALM de l'entreprise. D'autant plus qu'il permet de faire varier uniquement les colonnes et les lignes d'intérêt.

Soit une matrice  $M_0$  symétrique, l'objectif est de la rendre définie positive à l'aide d'une combinaison convexe entre  $M_0$  et une matrice  $M_1$  définie positive choisie arbitrairement. La combinaison convexe  $S$  s'écrit :

$$S(\alpha) = (1 - \alpha)M_0 + \alpha M_1 \tag{9.9}$$

où  $\alpha$  est un paramètre compris entre 0 et 1.

Dans le cadre du G2++, seules les colonnes et les lignes relatives aux processus de taux d'intérêt sont autorisées à varier :

---

3. Cette condition, plus forte que la semi-définie positivité, garantit la faisabilité de la décomposition de Cholesky.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \rho_{a,x} & 1 & & & & \\ \rho_{i,x} & \rho_{i,a} & 1 & & & \\ \rho_{g,x} & \rho_{g,a} & \rho_{g,i} & 1 & & \\ \rho_{s,x} & \rho_{s,a} & \rho_{s,i} & \rho_{s,g} & 1 & \\ \rho_{y,x} & \rho_{y,a} & \rho_{y,i} & \rho_{y,g} & \rho_{y,s} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M_1$  est alors choisie telle que :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 1 & \rho_{a,i} & \rho_{a,g} & \rho_{a,s} & 0 \\ 0 & \rho_{i,a} & 1 & \rho_{i,g} & \rho_{i,s} & 0 \\ 0 & \rho_{g,a} & \rho_{g,i} & 1 & \rho_{g,s} & 0 \\ 0 & \rho_{s,a} & \rho_{s,i} & \rho_{s,g} & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est vérifié numériquement que  $M_1$  est définie positive pour toutes les valeurs possibles prises par  $\rho$ . Étant donné l'expression de  $S(\alpha)$ , les valeurs identiques entre  $M_1$  et  $M_0$  demeurent inchangées lorsque  $\alpha$  varie. Cela permet alors de fixer n'importe lequel des éléments de la matrice lors de l'application de l'algorithme.

Le problème d'optimisation revient alors à déterminer le paramètre  $\alpha^*$  tel que :

$$\alpha^* = \{ \min \alpha \in [0, 1] | S(\alpha) \text{ est définie positive} \} \quad (9.10)$$

L'existence d' $\alpha^*$  est assurée car la valeur 1 est solution de (9.10). Higham démontre également qu'il existe une solution  $\alpha^*$  appartenant à  $]0, 1[$ .

$S(\alpha^*)$  s'interprète comme la matrice définie positive la plus proche de  $M_0$  quelle que soit la norme considérée. En effet,

$$\|M_0 - S(\alpha)\| = \alpha \|M_0 - M_1\|$$

La quantité  $\|M_0 - M_1\|$  étant fixée, la distance entre  $M_0$  et  $S(\alpha)$  est bien minimale pour  $\alpha = \alpha^*$ .

Résoudre ce problème revient à chercher le point d'annulation d'une fonction  $f$  dont la construction est présentée dans la référence [11]. Trois méthodes d'optimisation sont proposées par Higham pour déterminer le paramètre  $\alpha^*$ . La plus simple d'entre elles est la méthode par dichotomie. L'algorithme ci-dessous détermine le paramètre  $\alpha^*$ , étant donné une matrice  $M_0$ , une matrice définie positive  $M_1$  et un critère de convergence  $\varepsilon$  :

$\alpha_l = 0, \alpha_r = 1$   
 tant que  $\alpha_r - \alpha_l > \varepsilon$   
 $\alpha_m = (\alpha_l + \alpha_r)/2$   
 si  $S(\alpha_m)$  n'est pas définie positive  
 $\alpha_l = \alpha_m$   
 sinon  
 $\alpha_r = \alpha_m$   
 Fin du tant que  
 $\alpha^* = \alpha_r$

Le critère de Sylvester permet de tester si  $S(\alpha_m)$  est définie positive ou non. Il énonce qu'une matrice  $A$  est définie positive si et seulement si ses  $n$  mineurs principaux sont strictement positifs<sup>4</sup>.

Les valeurs d' $\alpha^*$  pour les 4 dernières années varient entre -20% et -3%.

En résumé, les corrélations entre les processus du G2++ sont dérivées d'une formule théorique. Lorsque la matrice de corrélation obtenue n'est pas définie positive, un algorithme de correction lui est appliqué. Il s'agit par conséquent de s'assurer que les corrélations induites par celui-ci donnent lieu à une structure de dépendance réaliste. Les algorithmes basés sur la norme de Frobenius produisent des corrélations plus proches de celles observées, mais modifient toute la matrice de corrélation. La méthode de transformation par *shrinking*, bien que moins précise, est plus adaptée à l'élargissement d'une matrice de corrélation suite à l'ajout d'un facteur de taux.

### 9.3 Génération des aléas

Les modèles de projection des différents facteurs de risque du GSE sont tous construits à partir d'aléas gaussiens. Ces derniers sont simulés en associant l'algorithme de génération de nombres aléatoires de Mersenne-Twister à la décomposition de Cholesky. De surcroît, une technique de réduction de variance est mise en œuvre afin d'améliorer la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo.

L'algorithme de Mersenne-Twister est un outil de génération de nombres pseudo-aléatoires développé par M. Matsumoto et T. Nishimura. Il simule des réalisations de lois uniformes indépendantes, transformées en réalisations de variables gaussiennes par la méthode de la transformée inverse. En effet, soit  $U$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0; 1]$  et  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale standard. Celle-ci est continue et strictement croissante : elle est donc bijective. Aussi :

$$\mathbb{P} [\Phi^{-1}(U) \leq t] = \mathbb{P} [U \leq \Phi(t)] = \Phi(t) \quad (9.11)$$

La fonction de répartition caractérisant la loi de la variable aléatoire lui étant associée, la variable aléatoire  $\Phi^{-1}(U)$  est distribuée selon une loi normale standard.

---

4. Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ses mineurs principaux sont définis comme les déterminants des matrices  $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ , pour  $p$  variant de 1 à  $n$ .

### 9.3.1 Corrélacion des aléas

La décomposition de Cholesky permet de générer des vecteurs aléatoires gaussiens corrélés à partir de variables gaussiennes indépendantes.

Le théorème de Cholesky énonce que pour toute matrice  $A$  symétrique définie positive, il existe une matrice  $L$  triangulaire inférieure telle que  $A = LL^T$ . Cette factorisation est unique sous la contrainte que tous les éléments diagonaux de la matrice  $L$  soient strictement positifs. Ainsi, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes de distribution normale standard formant le vecteur gaussien  $Y = (X_1, \dots, X_n)^T$ , le vecteur  $X = LY$  est distribué de la façon suivante :

$$X = LY \sim \mathcal{N}(0, A) \quad (9.12)$$

Il est alors possible, à partir de variables indépendantes de distribution  $\mathcal{N}(0, 1)$ , d'obtenir un vecteur de variables gaussiennes centrées réduites de matrice de variance-covariance  $A$ . Les coefficients de la matrice  $L$  sont déterminés par l'algorithme récursif de Cholesky.

### 9.3.2 Méthode de réduction de variance

Le calcul du *Best Estimate* par l'estimateur de Monte-Carlo est d'autant plus précis que le nombre de simulations est grand. Cependant, augmenter ce dernier pénalise considérablement le temps de calcul. Les techniques de réduction de variance permettent alors de réduire la variance de l'estimateur de Monte-Carlo, et donc l'erreur statistique d'estimation du *Best Estimate*, sans modifier le nombre de trajectoires.

De fait, il se peut qu'en pratique les réalisations des lois normales générées par l'algorithme de Mersenne-Twister soient légèrement corrélées, réduisant la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo (Wang, 2008 [21]). Afin de pallier ce problème, la technique de réduction de variance développée par J. Wang est mise en œuvre. Cette méthode consiste à considérer les vecteurs générés comme des réalisations de variables initialement indépendantes, corrélées par la décomposition de Cholesky. Il est alors possible de retrouver le vecteur d'origine en inversant l'algorithme de Cholesky, c.a.d. en déterminant la matrice  $L$  liant les variables indépendantes aux variables corrélées.

Dans le cadre de la simulation de  $N$  facteurs de risque, le déroulé de la méthode est le suivant :

**Étape 1 :** Un échantillon de  $M$  réalisations est généré pour les  $N$  actifs modélisés. La matrice ainsi obtenue est notée  $Z$  et s'écrit :

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1M} \\ \dots & \dots & & \dots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NM} \end{pmatrix} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N)^T \quad (9.13)$$

Avec  $z_{i,j}$  la  $i$ -ème réalisation du facteur  $j$  et  $z_j$  le vecteur contenant les  $M$  réalisations de celui-ci. Pour rappel, dans le cadre du GSE employé,  $M = 2000$ .

**Étape 2 :** Les variables  $z_j$  sont centrées et réduites telles que :

$$z'_j = \frac{z_j - \hat{\mu}_j \mathbf{1}}{\hat{\sigma}_j}$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M z_{i,j} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_j = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i=1}^M (z_{i,j} - \hat{\mu}_j)^2}$$

Puis, la matrice de variance-covariance empirique entre les variables  $z'_j$  est calculée :

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & Cov(z'_1, z'_2) & \dots & Cov(z'_1, z'_N) \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ Cov(z'_N, z'_1) & Cov(z'_N, z'_2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

En pratique,  $C'$  diffère de la matrice identité. Les aléas générés ne sont donc pas parfaitement indépendants.

**Étape 3 :** La décomposition de Cholesky est ensuite appliquée pour déterminer la matrice triangulaire inférieure  $L'$  telle que  $C' = L'L'^T$ .

**Étape 4 :** En inversant la matrice  $L'$  calculée à l'étape précédente, la matrice  $Y$  contenant les réalisations des  $N$  aléas indépendants est obtenue. En effet, la matrice  $Z$  peut être considérée comme les réalisations de  $N$  variables aléatoires corrélées par la méthode de Cholesky. Il existe alors une matrice  $Y$  de réalisations de variables indépendantes telle que :

$$Z' = L'Y \quad (9.15)$$

L'expression de  $Y$  s'en déduit simplement :

$$Y = L'^{-1}Z' \quad (9.16)$$

La matrice  $L$  est inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls.

L'algorithme standard de Cholesky peut ensuite être appliqué à  $Y$  dans le but d'obtenir des variables de matrice de corrélation souhaitée.

Le déroulé de la méthode peut être schématisé sous la forme suivante :

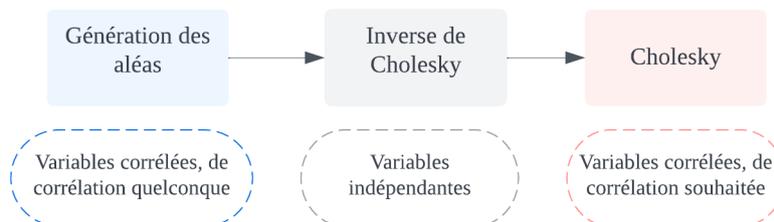


FIGURE 9.1 – Étapes de la méthode de réduction de variance de Wang

D'après Wang, cette approche est plus performante que les techniques classiques de réduction de variance lors de la valorisation d'options financières par simulations de Monte-Carlo<sup>5</sup>. Une comparaison numérique détaillée de ces méthodes est disponible dans la référence [21].

---

5. À titre d'information, l'application de la méthode de Wang entraîne une baisse de 14% de l'écart type empirique du BE, ainsi qu'une diminution de 75% de l'écart de convergence sur le fonds euros.

# Chapitre 10

## Validation du modèle de taux

Comme présenté dans la première partie, la réglementation impose à l'organisme d'assurance d'évaluer la précision et la cohérence des trajectoires simulées. En effet, le modèle de taux a un tel impact sur le GSE qu'il est essentiel de s'assurer de sa validité.

Les contrôles détaillés dans les paragraphes ci-dessous sont réalisés à partir des paramètres et de la matrice de corrélation calibrés dans le chapitre 8.

### 10.1 Tests de martingalité

Cette section présente les tests de vérification afférents à la propriété de martingalité des actifs modélisés. En effet, en univers risque-neutre, les processus de prix actualisés des actifs sont des martingales.

Pour rappel, soit un actif quelconque de valeur  $(A_t)_{t \geq 0}$ , avec  $M_t = D(0, t)A(t)$  le processus de prix actualisé lui étant associé.  $M_t$  est une martingale si pour tout  $s < t$ <sup>1</sup> :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$$

En particulier, pour  $s = 0$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t] = M_0 = A(0) \tag{10.1}$$

Les tests de martingalité les plus courants consistent à établir numériquement l'égalité (10.1). Il est à noter que si cette dernière valide une caractéristique des processus martingales, elle n'est qu'une condition nécessaire et non suffisante à la martingalité. Ce test permet toutefois de déceler efficacement des écarts de convergence dus à la non martingalité des actifs projetés. À cette fin, un test bilatéral au seuil  $\alpha = 5\%$  est réalisé sous les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t] = A(0) , \mathcal{H}_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t] \neq A(0)$$

Pour ce faire, à chaque instant de projection  $t$ , un échantillon de  $n = 2000$  variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $M_t$  est constitué. Il contient les déclinaisons de  $M_t$  dans chacune des trajectoires économiques simulées et s'écrit :

$$(M_t^1, \dots, M_t^n)$$

---

1. Les deux premières caractéristiques de la martingalité sont supposées satisfaites

Le théorème central limite induit la convergence en loi de la statistique de Student  $T_{t,n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini (Suquet, 2005, p.4 [19]). Le nombre de simulations étant suffisamment important, l'approximation suivante est faite :

$$T_{t,n} = \sqrt{n} \frac{\bar{M}_t - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t]}{\sqrt{(S_{t,n}^2)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (10.2)$$

Avec  $\bar{M}_t$  et  $S_{t,n}^2$  les estimateurs sans biais de l'espérance et de la variance de  $M_t$  :

$$\begin{aligned} \bar{M}_t &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_t^i \\ S_{t,n}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (M_t^i - \bar{M}_t)^2 \end{aligned}$$

Aussi, sous  $\mathcal{H}_0$ ,

$$U_{t,n} = \sqrt{n} \frac{\bar{M}_t - A(0)}{\sqrt{(S_{t,n}^2)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (10.3)$$

Ainsi, le rejet ou non de l'hypothèse nulle peut être arrêté en comparant la valeur de la réalisation de la statistique de test  $U_{t,n}$  à la distribution normale standard. Pour ce faire, la p-valeur, indicateur de significativité du test, est définie comme la probabilité suivante :

$$\mathbb{P} \left[ |Z| > \left| \sqrt{n} \frac{\bar{m}_t - A(0)}{\sqrt{s_{t,n}^2}} \right| \right]$$

où  $Z$  est une variable aléatoire de distribution  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et  $\bar{m}_t$  et  $s_{t,n}^2$  désignent respectivement la moyenne et l'écart type empirique non biaisé de l'échantillon.

La p-valeur est comparée au seuil  $\alpha = 5\%$ . Si elle lui est supérieure, l'hypothèse nulle est conservée au niveau de confiance 95%. En revanche, si la p-valeur est inférieure à  $\alpha$ ,  $\mathcal{H}_0$  est rejetée au seuil de 5%.

Les tests de martingalité réalisés pour les déflateurs et les obligations zéro-coupon ainsi que leurs spécificités sont explicités dans les paragraphes ci-dessous. En outre, la diffusion des rendements des actions, de l'immobilier et de la gestion alternative par le modèle de Black & Scholes dépend des trajectoires du taux court. Le test de martingalité est également appliqué à ces facteurs et ses résultats sont présentés en Annexe E.

### 10.1.1 Déflateur

Le test de martingalité du déflateur consiste à comparer la moyenne du déflateur simulé au prix initial de l'obligation zéro-coupon de même maturité. Ce dernier correspond au prix de marché du zéro-coupon. Mathématiquement, il s'agit de vérifier la propriété suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)] = P_{\text{marché}}(0, t)$$

L'espérance est approchée par l'estimateur empirique de la moyenne. Il est à noter que la comparaison aux prix observés des obligations zéro-coupon permet par la même occasion

d'apprécier la *market consistency* des trajectoires du déflateur.

Ci-dessous, la courbe des prix zéro-coupon, construite par l'EIOPA est superposée à la valeur moyenne du déflateur projetée aux dates de maturités  $t$  variant de 1 à 40 ans.

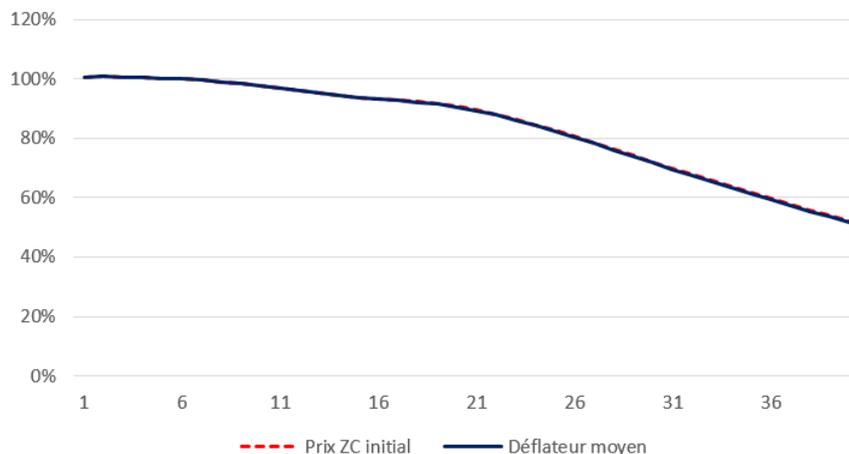


FIGURE 10.1 – Comparaison des valeurs du déflateur moyen aux prix ZC pour des maturités de 1 à 40 ans

La significativité de cette proximité graphique est établie à l'aide du test bilatéral :

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)] = P_{\text{marché}}(0, t) , \mathcal{H}_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)] \neq P_{\text{marché}}(0, t)$$

Le procédé de test présenté dans l'introduction est appliqué à partir des réalisations du déflateur dans chacun des  $n$  scénarios économiques :

$$\{D_1(0, t), \dots, D_n(0, t)\}$$

L'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est conservée au niveau de confiance  $1 - \alpha = 95\%$  pour toutes les dates de projection  $t$ . La p-valeur de chaque test réalisé est représentée sur le graphique ci-dessous :

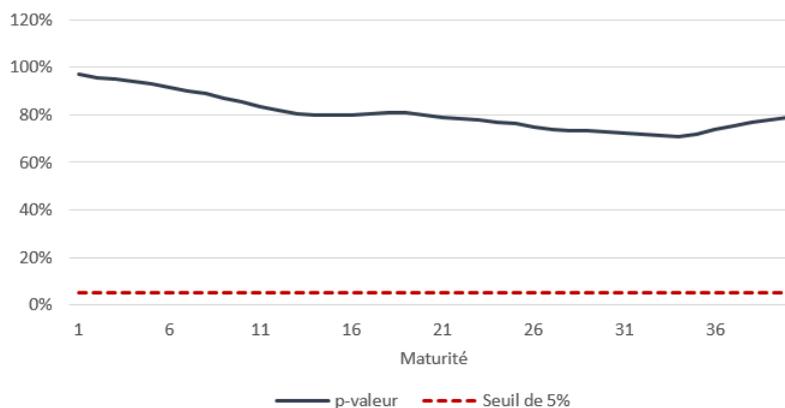


FIGURE 10.2 – Évolution de la p-valeur du test de martingalité du déflateur par rapport au seuil  $\alpha$  de 5%

### 10.1.2 Obligation zéro-coupon

Sous la probabilité risque-neutre, les processus de prix des obligations zéro-coupon actualisés sont des martingales. L'objectif est d'établir la validité de l'égalité ci-dessous :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, T)] = P(0, T) = P_{\text{marché}}(0, T)$$

À nouveau, l'espérance est approchée par la moyenne empirique des quantités simulées. Par ailleurs, ce test apprécie également la cohérence des trajectoires des zéro-coupon projetées avec les prix observés sur le marché.

En théorie, il convient de réaliser ce test de martingalité pour toutes les dates de maturité  $T$ , et pour chaque instant de projection  $t$ . Autrement dit, les deux approches ci-dessous doivent être mises en œuvre :

- À chaque instant de projection  $t$ , il s'agit de comparer la valeur moyenne de la fonction  $T \rightarrow D(0, t)P(t, T)$  à  $P_{\text{marché}}(0, T)$  ;
- Pour chaque date de maturité  $T$  fixée, il s'agit de comparer la valeur moyenne de la fonction  $t \rightarrow D(0, t)P(t, T)$  à  $P_{\text{marché}}(0, T)$ .

La réalisation de ces deux méthodes s'avérant exhaustive, seuls certains couples  $(t, T)$  sont examinés dans cette section. Dans un premier temps, pour chaque instant de projection  $t$ , l'égalité est testée pour les dates de maturité  $t + 10$  et  $t + 1$  :

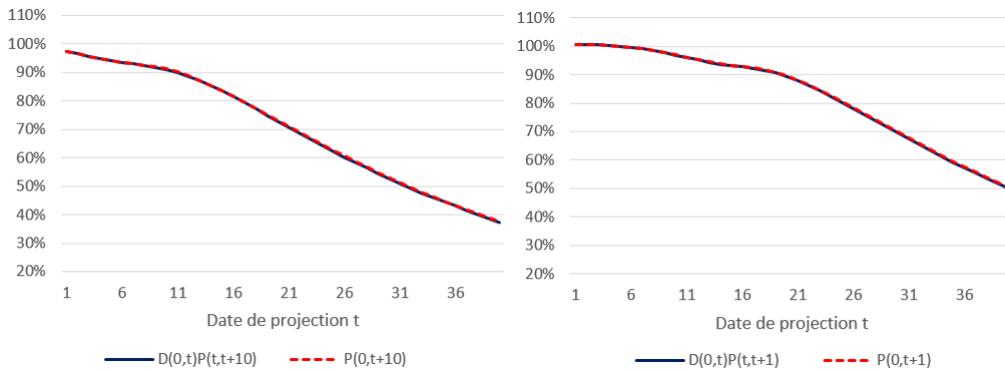


FIGURE 10.3 – Pour chaque  $t$  fixé, comparaison des prix des ZC simulés de date de maturité  $t + 10$  (à gauche) et  $t + 1$  (à droite) aux prix théoriques

Afin de confirmer la proximité graphique entre prix observés et théoriques, les tests d'hypothèse bilatéraux suivants sont mis en œuvre :

**Test 1 :**

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, t + 10)] = P_{\text{marché}}(0, t + 10)$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, t + 10)] \neq P_{\text{marché}}(0, t + 10)$$

**Test 2 :**

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, t + 1)] = P_{\text{marché}}(0, t + 1)$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, t + 1)] \neq P_{\text{marché}}(0, t + 1)$$

L'hypothèse nulle est conservée au seuil de 5% à chaque date de projection pour les deux types d'obligation considérés. L'évolution de la p-valeur du test statistique réalisé est représentée ci-dessous :

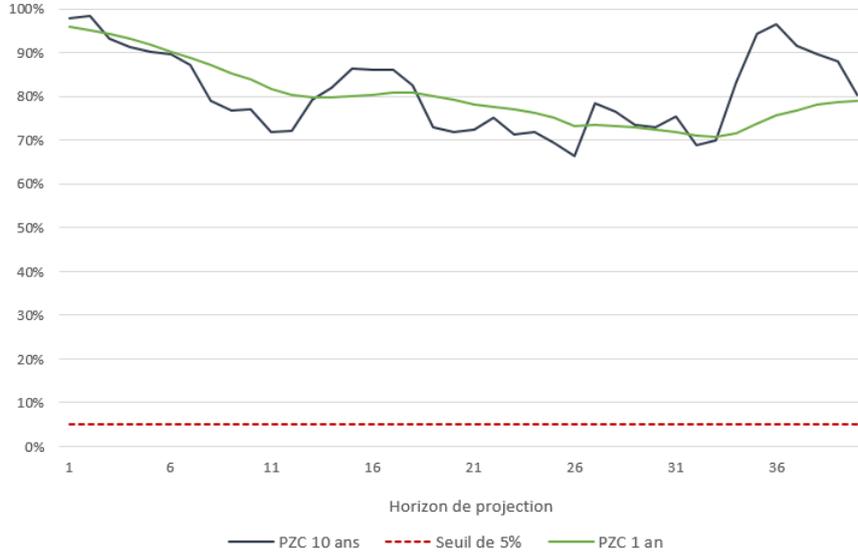


FIGURE 10.4 – Évolution de la p-valeur du test de martingalité des prix zéro-coupon par rapport au seuil  $\alpha$  de 5%

Dans un second temps, le test de martingalité est réalisé à date de maturité  $T$  fixée. Il s'agit alors de vérifier que les processus de prix actualisé des obligations zéro-coupon de dates de maturité 10 et 30 possèdent une espérance constante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, 10)] &= P_{\text{marché}}(0, 10) \quad \forall t \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)P(t, 30)] &= P_{\text{marché}}(0, 30) \quad \forall t \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \end{aligned}$$

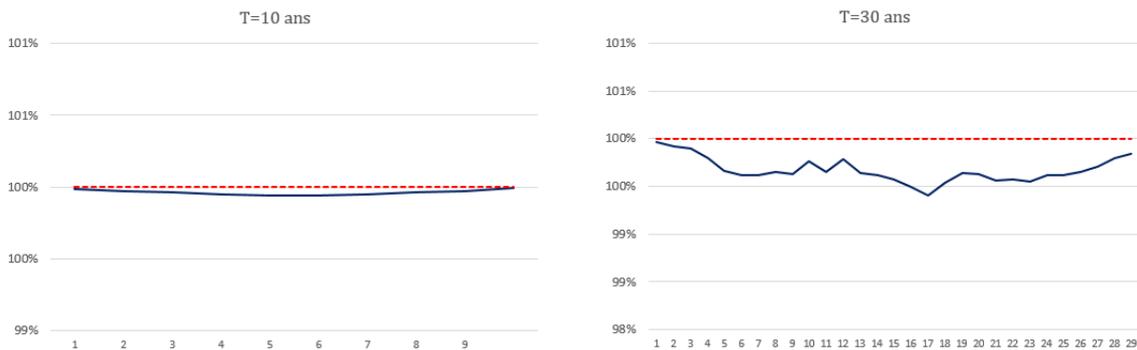


FIGURE 10.5 – Évolution en fonction de  $t$  de  $E_{\mathbb{Q}}[D(t)P(t, T)]/P_{\text{marché}}(0, T)$

Bien que le modèle ait tendance à légèrement sous-estimer les prix zéro-coupon pour des maturités élevées, l'hypothèse nulle d'égalité est conservée à chaque date  $t$  au niveau de confiance de 95%.

## 10.2 Tests de *market consistency*

D'après le premier point de l'article 22§3 du règlement délégué, le GSE doit être apte à générer des prix d'actifs financiers cohérents avec ceux observés sur le marché. Les tests de *market consistency* s'attachent alors à comparer les prix des instruments financiers recalculés empiriquement à leur valeur de marché. Les tests de martingalité réalisés sur le déflateur, les obligations zéro-coupon et les actions ont établi par la même occasion la cohérence des prix issus des trajectoires projetées avec ceux observés sur le marché. Toutefois, il s'agit également d'examiner la *market consistency* d'instruments dérivés des taux d'intérêt.

Les prix des *swaptions* en sortie du GSE sont comparés à leurs valeurs de marché. De fait, les prix des *swaptions* en date initiale peuvent être estimés par la méthode de Monte-Carlo à partir des trajectoires de taux simulées. Au sein d'un scénario économique donné, le prix actualisé en date 0 d'une *swaption* à la monnaie peut s'exprimer de la façon suivante (Brigo & Mercurio, 2006, p.21 [7]) :

$$PS_{\text{simu}}(0, \tau, T, N, K^{ATM}) = ND_{\text{simu}}(0, T_\alpha)(S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - S_{\alpha, \beta}(0))^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P_{\text{simu}}(T_\alpha, T_i) \quad (10.4)$$

où  $S_{\alpha, \beta}(T_\alpha)$  est le taux *swap forward* en date  $T_\alpha$ . Cette expression est évaluée pour chacune des 2000 trajectoires de taux, puis sa valeur moyenne est comparée au prix de marché de la *swaption* de caractéristiques similaires.

La somme des écarts quadratiques relatifs et absolus entre les prix générés et observés sur toute la matrice de prix des *swaptions* est représentée ci-après :

| Écart absolu | Écart relatif |
|--------------|---------------|
| 0,067%       | 21%           |

TABLE 10.1 – Appréciation de la *Market consistency* du modèle G2++

Les écarts les plus importants sont observés aux extrémités de la matrice, *i.e.* sur les instruments de maturités et ténors les plus courts (respectivement les plus longs). Il s'agit des zones de la matrice que le modèle peinait à reproduire lors du calibrage des paramètres.

À titre de comparaison, les mêmes valeurs sont représentées lorsque le risque de taux est diffusé par le modèle de Hull & White :

| Écart absolu | Écart relatif |
|--------------|---------------|
| 0,072%       | 53%           |

TABLE 10.2 – Appréciation de la *Market consistency* du modèle Hull & White

Ainsi, les trajectoires projetées par le G2++ sont plus cohérentes avec les prix de marché.

Le graphique ci-dessous présente les résultats obtenus pour les *swaptions* de ténor 10 ans :

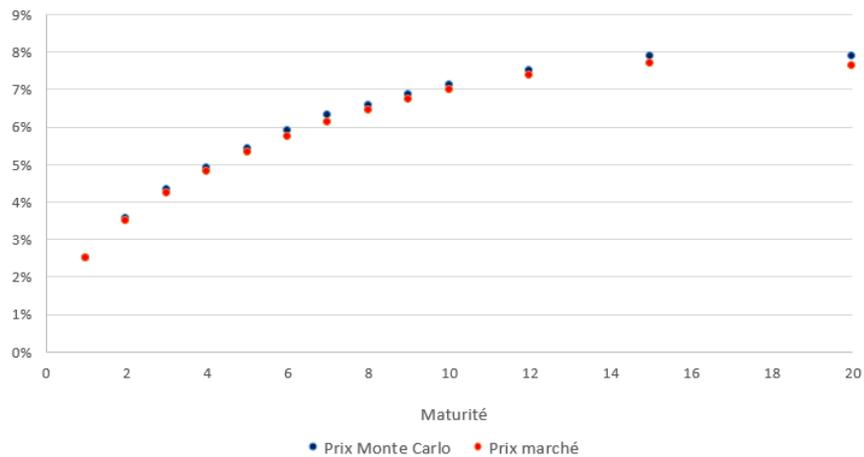


FIGURE 10.6 – Prix issu du GSE comparé au prix de marché des *swaptions* de ténor 10 ans

### 10.3 Étude des moments des taux zéro-coupon

Un moyen supplémentaire de valider les trajectoires d'actifs générées par le GSE est de comparer les valeurs théoriques développées dans la section 7.2 à leurs analogues empiriques.

Les expressions théoriques de l'espérance et de la variance du taux zéro-coupon  $R(t, T)$ , développées dans l'Annexe B, sont comparées à celles de leurs estimateurs empiriques issus des trajectoires de taux projetées. Les graphiques suivants illustrent cette analyse pour les taux zéro-coupon de durée 10 ans.

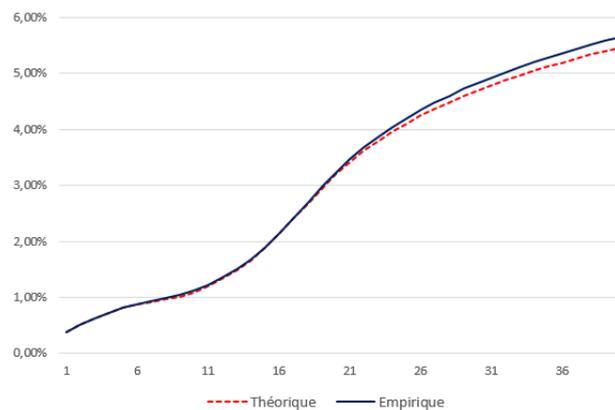


FIGURE 10.7 – Espérance théorique et empirique des PZC 10 ans

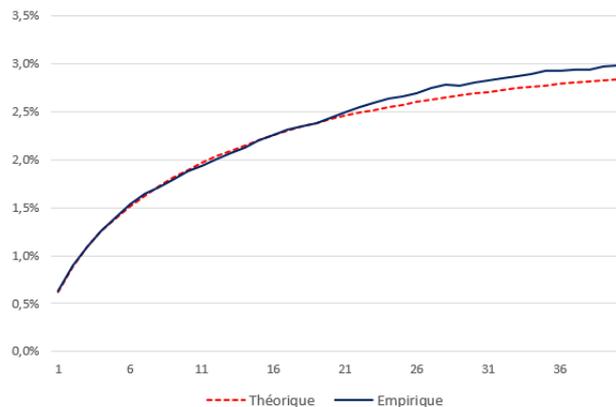


FIGURE 10.8 – Volatilité théorique et empirique des PZC 10 ans

De même, la probabilité théorique de taux zéro-coupon négatifs générés est comparée à la proportion empirique observée à chaque instant sur les 2000 trajectoires.

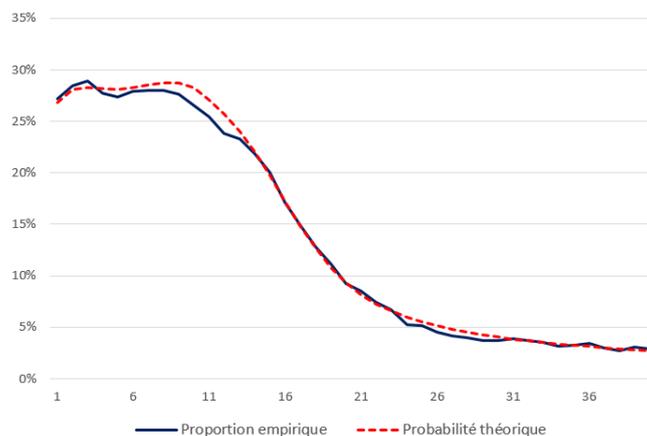


FIGURE 10.9 – Proportion de taux 10 ans négatifs comparée à la probabilité théorique

Aucune erreur d'implémentation n'est décelée suite aux comparaisons ci-dessus.

## 10.4 Étude des corrélations

La validation du modèle de taux s'achève par l'étude de la proximité entre les corrélations théoriques entre actifs et celles projetées par le modèle. Pour rappel, la structure de dépendance entre les aléas du GSE repose sur les coefficients de corrélation linéaire observés entre les variables suivantes :

- Variation du taux 1 an ;
- Variation du taux 10 ans ;
- Log-rendement actions ;
- Log-rendement immobilier ;
- Log-rendement gestion alternative ;
- Variation du *spread* 1 an.

Les coefficients de corrélation empiriques entre les 5 facteurs d'intérêt sont calculés à partir des 2000 trajectoires simulées. Ils sont ensuite comparés aux valeurs théoriques des corrélations entre les différents facteurs de risque à chaque instant de projection. Ci-dessous, les corrélations issues du GSE entre les taux zéro-coupon de durée un an sont comparées à leurs valeurs théoriques :



FIGURE 10.10 – Comparaison des corrélations théoriques à celles générées par le GSE

Afin de confirmer les intuitions graphiques, un test statistique est réalisé au seuil  $\alpha = 5\%$ . En considérant le couple de facteurs de risque  $(X, Y)$ , les hypothèses nulles et alternatives sont les suivantes :

$$\mathcal{H}_0 : \rho_{XY} = \rho_0, \mathcal{H}_1 : \rho_{XY} \neq \rho_0$$

où  $\rho_{XY}$  est le coefficient de corrélation linéaire entre les variables  $X$  et  $Y$ , et  $\rho_0$  la valeur théorique de la corrélation issue des formules de diffusion. Un échantillon de  $n = 2000$  couples  $(X_k, Y_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $(X, Y)$  est constitué. La statistique du test est construite à partir de la transformée de Fisher :

$$\hat{Z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}}$$

où  $\hat{\rho}$  est l'estimateur empirique du coefficient de corrélation :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) - (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})}}$$

Lorsque la taille de l'échantillon  $n$  est suffisamment grande,  $\hat{Z}$  suit approximativement une loi normale dont les caractéristiques sont :

$$\hat{Z} \approx \mathcal{N} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho_{xy}}{1 - \rho_{xy}}, \frac{1}{n - 3} \right)$$

La statistique de test  $U$  est alors construite comme suit :

$$U = \frac{\hat{Z} - z_0}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

où

$$z_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0}$$

Sous  $\mathcal{H}_0$ ,  $U$  est distribuée selon une loi normale centrée réduite. Ainsi, le rejet ou non de l'hypothèse nulle peut être arrêté en comparant la valeur de la réalisation de  $U$  à celle d'une distribution normale standard. Pour ce faire, la p-valeur, indicateur de significativité du test, est définie comme la probabilité suivante :

$$\mathbb{P} \left[ |N| > \left| \frac{\hat{z} - z_0}{\sigma_0} \right| \right]$$

où  $N$  est une variable aléatoire de distribution normale standard et  $\hat{z}$  est la transformée de Fisher calculée à l'aide du coefficient de corrélation empirique. Ce test est réalisé à chaque instant de projection  $t$ , pour tous les couples d'aléas considérés dans le GSE. L'hypothèse nulle est conservée au seuil  $\alpha = 5\%$  pour tous les couples  $(x, y)$  considérés. Ainsi, les corrélations en sortie du modèle sont cohérentes avec les formules théoriques.

## 10.5 Fuite du modèle

Enfin, l'écart de convergence, aussi appelé la fuite de modèle, correspond à la différence entre la valeur de marché initiale des actifs et les provisions *Best Estimate* augmentées de la somme actualisée des marges futures de l'assureur (VIF). En scénario central, il se calcule donc ainsi :

$$EC = VM_0 - (BE + VIF)$$

Au sein d'un modèle de projection stochastique des contrats d'épargne, cet écart est non nul, et ce notamment en raison de l'erreur de convergence de l'estimateur de Monte-Carlo. Il peut résulter d'un nombre de scénarios trop faible, d'une martingalité non vérifiée, ou encore d'une volatilité importante des actifs. Par conséquent, l'appréciation de l'écart de convergence est un contrôle de cohérence effectué systématiquement lors du calcul des provisions *Best Estimate*.

Dans sa revue « Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques », l'ACPR enjoint les assureurs, par mesure de prudence, à allouer la fuite de modèle de telle manière à maximiser la valeur des provisions *Best Estimate*. Ainsi, lorsqu'il est positif, l'écart de convergence est ajouté au *BE*. Dans le cas contraire, il est intégré aux marges futures. Les valeurs ajustées de ces grandeurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} BE_{aj} &= BE + \max(EC; 0) \\ VIF_{aj} &= VIF + \min(EC; 0) \end{aligned}$$

Toutefois, un écart de convergence trop important peut refléter une erreur de modélisation nécessitant une recherche approfondie, pour laquelle l'intégration au BE n'est pas

suffisante.

L'écart de convergence au 31/12/2021 obtenu avec les paramètres présentés dans le tableau 8.3 représente 0,04% de la valeur de marché des actifs, ce qui est acceptable. À titre de comparaison, la fuite de modèle issue du modèle de Hull & White est de 0,11%.

## Quatrième partie

# Résultats et impacts

Cette quatrième et dernière partie expose les conséquences du changement de modèle de taux du générateur de scénarios économiques sur la solvabilité d'une société d'assurance vie. Puis, une méthode d'ajustement du *Best Estimate* est proposée pour prendre en compte la reproduction imparfaite de toute la surface des produits dérivés de taux. Par souci de confidentialité, l'ensemble des éléments chiffrés présents dans cette partie ont été retraités.

## Chapitre 11

# Impacts sur les indicateurs de solvabilité

Afin d'évaluer les conséquences du changement de modèle de taux, les indicateurs de solvabilité de la société sont calculés au 31/12/2021 à l'aide du modèle de projection actif-passif, dans lequel l'ensemble des développements des chapitres 8 et 9 est intégré.

Les impacts de la mise en place du modèle gaussien à deux facteurs sur le *Best Estimate* en situation centrale et sur le ratio de solvabilité sont détaillés.

### 11.1 Impact sur le *Best Estimate*

Pour rappel, le *Best Estimate* représente l'engagement moyen de l'assureur sur un horizon de projection donné. Il intègre alors l'ensemble des flux de trésorerie entrants et sortants futurs. Ces derniers sont fonction à la fois du comportement des assurés et des performances du portefeuille d'actifs sur les marchés financiers. La valeur du BE au 31/12/2021 est approximée par l'estimateur de Monte-Carlo pour 2000 simulations, sur un horizon de projection de 40 ans. Les flux constituant la valeur des provisions *Best Estimate* sont représentés sur le graphique ci-dessous :

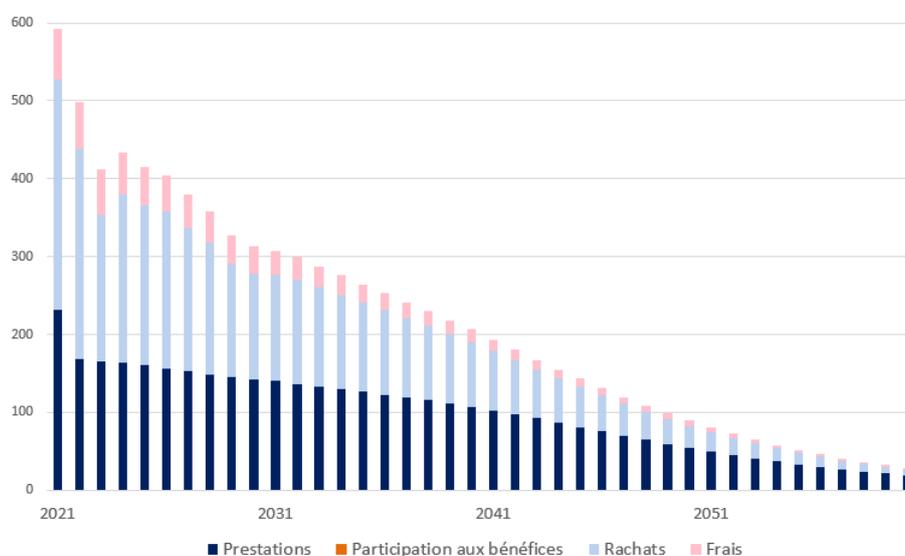


FIGURE 11.1 – Évolution des flux de trésorerie futurs sur les 40 ans de projection

Le modèle de taux influe sur l'ensemble des constituants du *Best Estimate*, et ce notamment à travers les facteurs d'actualisation, les rendements projetés des actifs en portefeuille, ou encore le taux d'intérêt servi aux assurés. Le passage du modèle unifactoriel de Hull & White au G2++ induit une légère baisse de 0,03% du *Best Estimate* en scénario central.

|                      | HW     | G2++  | Variation relative |
|----------------------|--------|-------|--------------------|
| <i>Best Estimate</i> | 10 000 | 9 997 | -0,03%             |

TABLE 11.1 – Valeurs du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 pour les modèles de Hull & White et G2++

Cette variation s'explique principalement par les mouvements des rachats conjoncturels. Ces derniers sont opérés par l'assuré lorsqu'il juge la rémunération de son contrat insuffisante par rapport aux taux observés sur les marchés. Ce changement de comportement des assurés résulte de la différence entre le taux cible, taux moyen de rémunération attendu par les assurés, et le taux servi par l'assureur. Le taux cible à chaque date de projection dépend du niveau des taux projetés ainsi que des taux cibles des années précédentes. De 2039 à 2050, la différence entre le taux cible et le taux servi projeté par chaque modèle est négative. Néanmoins, sur cette période, les taux projetés par le G2++ s'écartent en moyenne davantage du taux cible :

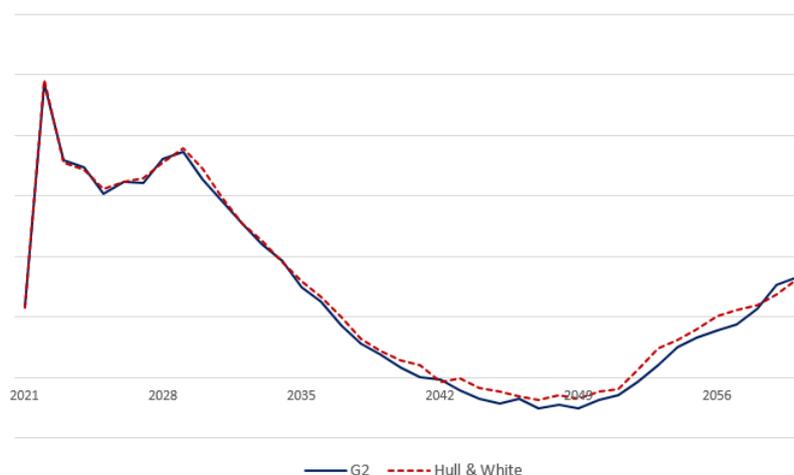


FIGURE 11.2 – Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux cible pour le fonds euros sur les 40 ans de projection

Sur cette même période, le montant des rachats augmente. De fait, la baisse des intérêts servis aux assurés réduit l'attractivité des contrats et entraîne une hausse des rachats de ces derniers. Toutefois, ces rachats concernent des contrats non rentables pour l'assureur. En effet, le taux net comptable, taux de rendement financier de l'assureur net de frais, est inférieur au taux cible et au taux servi par l'assureur. Ce dernier ne peut pas rémunérer les contrats des assurés uniquement au moyen des placements réalisés sur les marchés financiers.

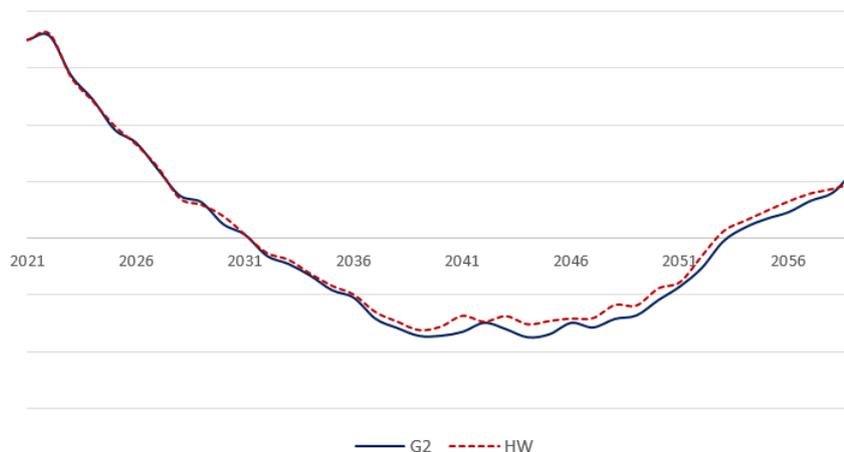


FIGURE 11.3 – Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux de rendement comptable moyen perçu par l'assureur pour le fonds euros sur les 40 ans de projection

Ainsi, la hausse des rachats de contrats non profitables diminue les pertes futures de l'assureur, et induit une diminution de ses engagements.

## 11.2 Impact sur le ratio de solvabilité

Les variations du *Best Estimate* en situation centrale ont des répercussions sur le SCR et par conséquent sur le ratio de solvabilité.

Calculé par variation de l'actif net réévalué entre les scénarios central et choqué, le SCR dépend naturellement des mouvements observés dans la section précédente. Pour rappel, le SCR du module de risque  $i$  s'obtient de la sorte :

$$\begin{aligned} SCR_i &= NAV_{\text{central}} - NAV_{\text{choc}}^i \\ &= \Delta VM(\text{Actif}) - \Delta BE \end{aligned}$$

En ce qui concerne les sociétés d'assurance vie, les modules marché et souscription vie contribuent le plus fortement au SCR global.

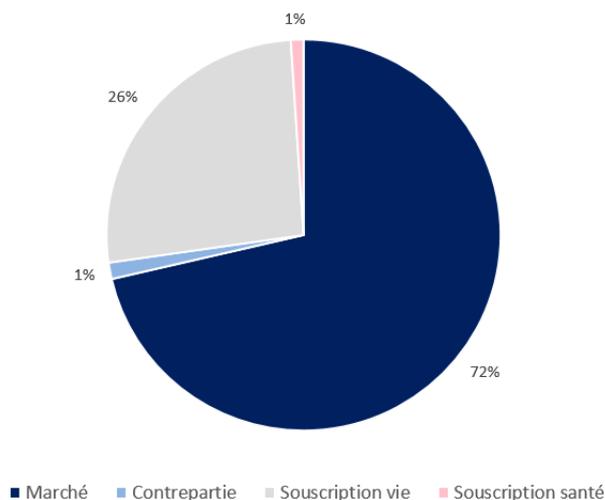


FIGURE 11.4 – Décomposition du BSCR par module de risque

Le module de risque de marché est le plus affecté par le changement de modèle de taux. En effet, le remplacement du modèle de Hull & White par le G2++ mène à une diminution de 1,62% du SCR de marché. Les variations de ses principaux composants sont résumées dans le tableau suivant :

| Sous-module   | Variation |
|---------------|-----------|
| Taux          | -0,8%     |
| Actions       | -2,23%    |
| <i>Spread</i> | -2,13%    |

TABLE 11.2 – Variation des trois principaux modules de risque du SCR de marché

Suite à la mise en place du modèle gaussien à deux facteurs, le SCR de souscription vie augmente légèrement de 0,23% du fait de la hausse du SCR de rachats. Concernant les autres sous-modules de risque, le *Best Estimate* en situation choquée diminue d'environ de la même intensité qu'en situation centrale, n'entraînant pas de variation.

Les capitaux propres S2 éligibles augmentent de 0,2% en raison de la hausse des résultats futurs des contrats en fonds euros et UC.

Enfin, le ratio de couverture se calcule comme le quotient entre les fonds propres pruden-  
 tiels et le capital de solvabilité requis :

$$\text{Ratio de solvabilité} = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{SCR}}$$

Suite à la hausse des fonds propres et à la baisse du SCR, le passage du modèle de Hull & White au G2++ augmente le ratio de solvabilité de 4 points au 31/12/2021.

|                      | HW   | G2++ | Variation |
|----------------------|------|------|-----------|
| Ratio de solvabilité | 200% | 204% | + 4 pts   |

TABLE 11.3 – Variation du ratio de solvabilité suite à la mise en place du G2++ au 31/12/2021

Il est à noter que cette analyse n'est valable que pour le portefeuille étudié et le contexte économique en vigueur au 31/12/2021.

## Chapitre 12

# Ajustement des provisions *Best Estimate*

Une fois le modèle mis en place et ses impacts évalués, il est justifié de s'interroger sur ses limites éventuelles. Dans cette intention, le présent chapitre tente de pallier des imprécisions liées au calibrage du modèle G2++.

La qualité de reproduction des prix d'instruments dérivés du modèle gaussien à deux facteurs, bien que supérieure à celle de Hull & White, est imparfaite. En effet, les zones situées aux extrémités de la matrice de volatilité des *swaptions*<sup>1</sup> présentent des écarts importants avec les prix de marché. Cela s'explique par le nombre restreint de paramètres du modèle de taux pour décrire l'entièreté de la matrice considérée. De plus, l'évaluation des *caps* par le modèle calibré au 31/12/2021 est peu précise, car le calibrage du modèle n'est pas réalisé simultanément sur les deux produits de taux considérés. Ainsi, le modèle de taux utilisé pour évaluer le *Best Estimate* n'est pas calibré sur la totalité de ses instruments de couverture, et cette imprécision peut affecter sa valeur. Il est donc proposé ci-dessous d'ajuster la valeur des provisions *Best Estimate* calculée avec le modèle G2++ pour tenir compte du calibrage imparfait de la surface des volatilités, ainsi que du manque de précision inhérent aux méthodes d'approximation numériques.

Cette étude s'inspire des travaux sur les ajustements de produits financiers développés par Hagan<sup>2</sup> en 2002 et enrichis par Bégot<sup>3</sup> en 2016. Il est proposé dans la suite d'ajuster non pas le prix d'un actif financier, mais bien la valeur des provisions *Best Estimate*. Cette approche repose sur le transfert du risque engendré par le modèle de taux vers celui présent sur les marchés financiers, et nécessite notamment de construire un portefeuille répliquant du BE. Cette méthode, non seulement nécessaire à la mise en place des méthodes d'Hagan et de Bégot, est cohérente avec la volonté d'ajuster le *Best Estimate*.

En effet, le *Best Estimate* est composé de nombreux flux dépendant des trajectoires d'évolution d'un certain nombre d'actifs financiers. Il est donc théoriquement possible de construire un portefeuille répliquant, également appelé portefeuille de couverture, du *Best Estimate*. Un portefeuille répliquant est constitué d'instruments financiers simples générant des flux les plus similaires possible à ceux du passif de l'assureur (Schrager, 2008 [17]). La simplicité des instruments de couverture est essentielle car elle permet de calculer facile-

---

1. Pour rappel, il s'agit des *swaptions* dont les ténors sont les plus courts et les plus longs.  
2. [9]  
3. [5]

ment la valeur de ce portefeuille. De manière générale, construire un portefeuille de mêmes caractéristiques que le passif d'assurance permet d'estimer aisément la valeur du *Best Estimate*, la difficulté principale résidant dans le choix des actifs le composant. Les notations introduites dans les paragraphes suivants sont reprises de l'article de Bégot (2016, [5]).

Soit un produit  $\Pi$  générant  $n_t$  flux aux dates  $t_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ces flux de trésorerie dépendent des trajectoires réalisées de  $n_s$  actifs sous-jacents. Ici,  $\Pi$  correspond au *Best Estimate*. Au vu des similitudes entre les options des contrats d'épargne et certains produits financiers, il est supposé que les engagements d'assurance peuvent être répliqués par un ensemble d'instruments de couverture (Schrager, 2008 [17]). Soit  $H$  le portefeuille répliquant de  $\Pi$ , constitué d'un nombre  $n_H$  d'instruments de couverture  $\{H_1, \dots, H_{n_H}\}$  :

$$H = \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i H_i \quad (12.1)$$

où  $H_i$  correspond à l'instrument répliquant  $i$ , et  $\alpha_i$  son poids dans le portefeuille  $H$ . La construction d'un portefeuille de couverture s'avère être une tâche laborieuse, et pourrait constituer une étude à part entière. L'approche est ici simplifiée : le portefeuille considéré est supposé composé uniquement de *swaptions* et de *caps*. De cette manière, la valeur ajustée du BE tiendra compte de l'erreur liée au fait que le modèle n'a pas été calibré sur les *caps*.

Le prix de  $H$  évalué à l'aide du modèle G2++ est noté  $H^m$ . Il se calcule à partir des formules et des méthodes numériques présentées dans les chapitres précédents.

En notant  $BE^m$  la valeur du *Best Estimate* calculée à l'aide du G2++, il vient :

$$BE^m = (BE - H)^m + H^m \quad (12.2)$$

où le terme  $(BE - H)^m$  représente la valeur calculée à l'aide du modèle G2++ d'un portefeuille fictif composé du *Best Estimate* et de son portefeuille répliquant.

Hagan définit le prix ajusté de  $\Pi$  de la façon suivante :

$$\Pi^{aj} = BE^{aj} = (BE - H)^m + H^{\text{marché}} \quad (12.3)$$

$$= BE^m + \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i (H_i^{\text{marché}} - H_i^m) \quad (12.4)$$

Lorsque le BE est parfaitement répliqué par  $H$ ,  $\Pi = \sum_i^{n_H} \alpha_i H_i$  et le risque associé au BE ajusté provient uniquement des marchés financiers. Or, pour couvrir ce risque, il suffit de vendre le portefeuille  $H^{\text{marché}}$ . Ainsi, en déterminant convenablement les poids  $\alpha_i$ , cette méthode d'ajustement permet de réduire au maximum l'erreur liée au calibrage du modèle en la transférant sur les prix de marché des instruments du portefeuille répliquant.

La mise en œuvre de cette méthode se déroule en deux étapes.

## 12.1 Construction du portefeuille répliquant

Le portefeuille répliquant du *Best Estimate* est supposé composé de *caps* de maturités 5, 7, 10, 12 et 15 ans, ainsi que de *swaptions* de maturité  $T_\alpha \in \{5, 7, 10\}$  et de ténor

$T_\beta - T_\alpha \in \{5, 10, 12\}$ . Ce choix est motivé par les caractéristiques du passif d'assurance et par la durée de 9,5 ans du portefeuille d'actifs représentatif du fonds euro. Le nombre d'instruments sélectionnés peut paraître limité mais il permet de conserver la simplicité de la méthode. De plus, Bégot préconise l'utilisation d'un nombre d'actifs de couverture inférieur au nombre d'instruments de calibrage.

## 12.2 Allocation des actifs répliquants

Une fois les instruments composant le portefeuille  $H$  sélectionnés, il s'agit de déterminer leur allocation au sein de celui-ci. Pour ce faire, la métrique *Present Value Matching* est employée. Elle consiste à faire correspondre les valeurs actualisées des flux du portefeuille répliquant et du passif à la date de calcul (Ponnusamy, 2020 [14]). Ainsi, les poids  $\alpha_i$  de chaque instrument  $H_i$  du portefeuille  $H$  sont choisis de façon à minimiser la distance entre la valeur du *Best Estimate* et celle du portefeuille répliquant. La distance retenue est la norme quadratique  $\mathcal{L}^2$ .

Les paramètres  $\alpha_i$  sont estimés par une régression *ridge* afin de prendre en compte une éventuelle dépendance entre les instruments financiers composant  $H$ . Les données utilisées pour la régression sont issues de différentes sensibilités, représentant autant de scénarios de calibrage. Ces dernières sont obtenues en considérant un nombre  $s$  de jeux de paramètres  $(a, b, \sigma, \eta, \rho)$  différents, générés aléatoirement. Ceux-ci sont simulés à partir des valeurs calibrées dans la section 8.1, auxquelles sont ajoutées des réalisations de lois uniformes<sup>4</sup>. Puis, à chaque jeu de paramètres sont associés une valeur du BE ainsi que les prix des instruments  $H_i$ . Chaque calcul du *Best Estimate* nécessitant un lancement du modèle ALM, un nombre restreint de  $s = 50$  sensibilités est considéré.

Il s'agit alors de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\alpha} \sum_{k=1}^s \left( \text{BE}_k - \sum_{i=1}^{n_H} H_i^k \alpha_i \right)^2 + \lambda \|\alpha\|_2$$

où  $H_i^k$  est le prix de l'instrument  $H_i$  pour le jeu de paramètres  $k$ , et  $\alpha$  le vecteur contenant les poids  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n_H\}$ . Le coefficient de pénalisation  $\lambda$  est déterminé à partir d'une validation croisée de type *k-folds*. L'échantillon des  $s$  sensibilités est segmenté aléatoirement en un nombre  $k$  de sous-échantillons disjoints. L'un d'entre eux constitue alors l'échantillon de validation, et les  $k - 1$  autres l'échantillon d'apprentissage. La régression *ridge* est réalisée sur l'échantillon d'apprentissage, puis l'erreur quadratique moyenne (MSE pour *Mean Squared Error*) est calculée sur l'échantillon de validation. Ces étapes sont répétées en isolant chacun des  $k$  sous-ensembles. L'erreur moyenne associée à la validation croisée est calculée comme suit :

$$\text{CV}_\lambda = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{MSE}_i$$

---

4. Chaque paramètre choqué est contenu dans un intervalle défini de telle sorte que la simulation tienne compte des contraintes liées aux supports de définition des différents paramètres. Celles-ci ont été définies dans le chapitre 8.

Soit un ensemble de coefficients  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ , le coefficient  $\lambda^*$  retenu pour la régression est tel que :

$$\lambda^* = \min_{\lambda \in \Lambda} CV_\lambda$$

La régression *ridge* est réalisée à l'aide du logiciel R. La taille du jeu de données à disposition étant relativement faible, la validation croisée est réalisée pour  $k = s$  ; il s'agit de la méthode du *Leave One Out*.

Une fois les poids optimaux  $\alpha_i^*$  estimés, le coefficient de détermination  $R^2$  permet de quantifier la qualité de l'ajustement du portefeuille répliquant au *Best Estimate* :

$$R^2 = 1 - \frac{\|\varepsilon\|_2^2}{\|\mathbf{BE}\|_2^2}$$

où  $\mathbf{BE}$  est le vecteur contenant les valeurs du *Best Estimate* et  $\varepsilon$  le vecteur des résidus tel que  $\varepsilon_k = BE_k - \sum_{i=1}^{n_H} H_i^k \alpha_i^*$  pour  $k = 1, \dots, s$ . Le coefficient de détermination de la régression est de 94,88%. C'est une valeur acceptable au regard de la simplicité du portefeuille construit et du peu d'instruments sélectionnés.

De plus, un test de Shapiro-Wilk au seuil  $\alpha = 5\%$  est réalisé afin d'examiner la normalité des résidus. La p-valeur du test étant égale à 0,24, l'hypothèse  $H_0$  de normalité est conservée au seuil de 5%.

### 12.3 Ajustement du *Best Estimate*

L'allocation du portefeuille répliquant étant fixée, il est alors possible d'ajuster la valeur du *Best Estimate* à l'aide de la formule (12.4). La valeur ajustée du *Best Estimate* au 31/12/2021 est la suivante :

| Ajustement | BE Ajusté | BE Central |
|------------|-----------|------------|
| 24         | 10 021    | 9 997      |

TABLE 12.1 – Valeur ajustée du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021

L'influence des composantes de  $H$  sur la valeur de l'ajustement dépend à la fois des poids estimés par la régression *ridge*, et de l'écart entre les prix issus du modèle de taux et leur valeur de marché. Sans surprise, les instruments du portefeuille  $H$  pour lesquels l'ajustement est le plus élevé sont les *caps*. Cela provient du fait que le calibrage n'a pas été réalisé sur ces produits dérivés, et que par conséquent, leurs prix théoriques sont plus éloignés de leur valeur de marché. La contribution des différents instruments à l'ajustement final est représentée dans le graphique ci-dessous (Cap 5, Cap 7, etc. désignent les *caps* de maturité 5 ans, 7 ans, etc.) :

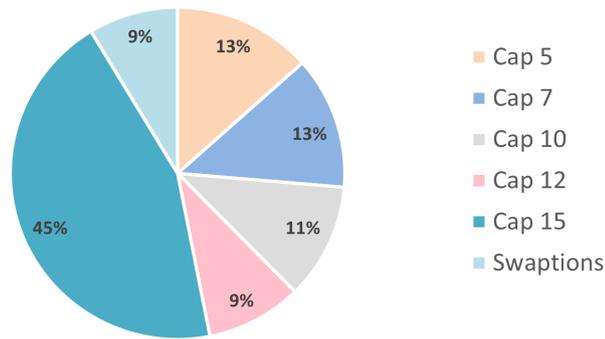


FIGURE 12.1 – Contributions des actifs répliquants à l’ajustement

Afin d’apprécier l’efficacité de la méthode des ajusteurs, celle-ci peut être appliquée dans le cas d’un mauvais calibrage du modèle de taux. Dans ce contexte, les trajectoires produites par le modèle ne permettraient plus de reproduire correctement les prix de marché des dérivés de taux.

Soit  $BE_{\text{choc}}$  le *Best Estimate* central calculé à l’aide du G2++ dont les paramètres ont été choqués aléatoirement. Les paramètres du modèle ne reflétant pas les prix de marché des dérivés de taux, il est possible que la valeur estimée  $BE_{\text{choc}}$  des provisions *Best Estimate* soit faussée. Le calcul suivant permet d’ajuster la valeur  $BE_{\text{choc}}$  :

$$BE_{\text{choc}}^{aj} = BE_{\text{choc}} + \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i (H_i^{\text{marché}} - H_i^{\text{choc}})$$

La valeur ajustée du *Best Estimate* choqué est la suivante :

| Ajustement | BE Ajusté | BE Choc |
|------------|-----------|---------|
| 162        | 10 035    | 9 873   |

TABLE 12.2 – Valeur ajustée du BE (en millions d’euros) dont les paramètres ont été mal calibrés au 31/12/2021

La valeur ajustée du  $BE_{\text{choc}}$  est proche de celle du BE central ajusté calculée précédemment. L’écart relatif entre ces deux grandeurs est de 0,1%.

Ainsi, cette méthode permet de conserver les bénéfices apportés par un modèle de taux simple (interprétabilité des résultats, temps de calcul, etc.), tout en palliant ses lacunes. La construction du portefeuille répliquant pourrait cependant être approfondie en incluant davantage d’instruments financiers tels que des *floors*, ou des *swaptions* receveuses, ou en choisissant des instruments de couverture à partir d’algorithmes de sélection. De même, des indicateurs plus poussés pourraient être employés pour attester de la qualité de l’ajustement.

## 12.4 Impact sur le ratio de solvabilité

Enfin, cette dernière section revient brièvement sur les conclusions établies dans le chapitre précédent à l’aune de la méthode d’ajustement du BE.

L’ajustement appliqué au *Best Estimate* étant supposé identique au sein de tous les scénarios, la méthode n’a pas d’impact sur le SCR. Celui-ci est, pour rappel, calculé par

variation de l'actif net réévalué. En revanche, l'ajout d'un terme d'ajustement au *Best Estimate* en scénario central influe sur la valeur des capitaux propres au 31/12/2021. En effet, les fonds propres, calculés comme la différence entre l'actif et les provisions techniques, diminuent. Le SCR restant inchangé, la baisse des fonds propres entraîne une baisse du ratio de solvabilité au 31/12/2021.

Finalement, l'impact du modèle G2++ combiné à la méthode d'ajustement du *Best Estimate* n'induit qu'une hausse d'un point du ratio de solvabilité par rapport à celui calculé avec Hull & White au 31/12/2021.

|                                    | HW   | G2++ ajusté | Variation |
|------------------------------------|------|-------------|-----------|
| Ratio de solvabilité au 31/12/2021 | 200% | 201%        | +1 pt     |

TABLE 12.3 – Variation du ratio de solvabilité suite à l'ajustement du G2++

L'impact du changement de modèle de taux est minime, avec ou sans ajustement des provisions *Best Estimate*. La dynamique du modèle semble finalement avoir une influence faible, bien que l'étape de calibrage reproduise fidèlement le prix des instruments cotés. Les erreurs résiduelles de calibrage existent, mais elles sont faibles par rapport à la variabilité habituelle des marchés et n'impactent que faiblement le ratio de solvabilité, comme le montre l'ajustement du BE. L'utilisation de modèles simples est donc crédible dans le cas de la valorisation de l'assurance vie.

# Conclusion

La modélisation stochastique des taux d'intérêt à l'aide d'un modèle unifactoriel ne permet pas, en théorie, de reproduire toutes les déformations de la courbe des taux. L'ACPR recommande notamment de réaliser des tests de sensibilité ponctuels à l'aide de modèles plus complexes, afin de s'assurer de la bonne évaluation des provisions techniques. Ainsi, l'objectif de ce mémoire était de comparer le modèle de Hull & White utilisé par l'entreprise à un nouveau modèle multifactoriel.

Les travaux réalisés ont permis de quantifier l'impact de la mise en place d'un modèle à deux facteurs sur le *Best Estimate* et le ratio de solvabilité d'une compagnie d'assurance vie, par rapport au modèle de Hull & White. Pour ce faire, l'intégralité des étapes de construction du modèle G2++ a été détaillée. Il s'est avéré que l'ajout d'un facteur complexifie la mise en place du modèle de taux, et nécessite de recourir à des méthodes pertinentes et efficaces.

La complexité des formules théoriques de valorisation des *swaptions* mène à une convergence lente de l'algorithme d'optimisation utilisé lors du calibrage. L'approximation du prix des *swaptions* issue des travaux de Schrage et Pessler permet d'initialiser l'algorithme et ainsi de réduire sensiblement le temps de calcul. De même, l'évaluation des corrélations entre les deux facteurs du G2++ et les autres aléas du GSE est délicate, car ces deux processus n'ont aucune réalité économique. Une nouvelle méthode, liant corrélations théoriques et empiriques est alors appliquée. Elle permet de refléter la dépendance observée entre certains taux de référence et les facteurs actions, immobilier et gestion alternative.

L'évaluation des exigences quantitatives imposées par Solvabilité II avec le modèle G2++ n'a qu'un impact réduit par rapport au modèle de Hull & White. Les distributions des taux induites par les deux modèles sont proches. La différence entre les deux modèles est surtout remarquable lors de l'évaluation de produits dérivés. En effet, la qualité de réplcation des prix de marché des *caps* et des *swaptions* du modèle G2++ est supérieure. Cette étude a néanmoins permis de vérifier que l'utilisation du modèle de Hull & White ne sous-estimait pas la valeur du *Best Estimate*. Il est à noter que l'étude pourrait être réitérée dans un contexte économique différent.

Certains algorithmes, tels que celui utilisé pour rétablir la définie positivité d'une matrice, pourraient être affinés afin d'obtenir des matrices de corrélation plus conformes à la réalité. De même, si la méthode d'ajustement d'Hagan venait à être mise en pratique au sein de l'entreprise, le portefeuille répliquant pourrait être étoffé.

Enfin, la méthode d'ajustement du *Best Estimate*, inspirée des travaux d'Hagan et de Bégot, permet de conserver des modèles de taux simples en tenant compte de leurs limites,

---

et ainsi de satisfaire aux exigences grandissantes de communication financière. En effet, l'entrée en vigueur de la norme comptable IFRS 17 le 1<sup>er</sup> janvier 2023 amplifie l'importance donnée aux calculs stochastiques dans la construction du résultat de la société. À l'instar de Solvabilité II, IFRS 17 impose d'évaluer des provisions *Best Estimate*. Cependant, la complexité des modèles stochastiques utilisés reste un obstacle à une communication efficace sur les facteurs de variation du BE, justifiant le recours à des modèles simples et plus interprétables.

# Bibliographie

- [1] ACPR. (2015). *NOTICE « Solvabilité II » Provisions techniques (y compris mesures « branches longues »)* <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2017/09/25/20151218-notice-solvabilite2-provisions-techniques.pdf>
- [2] ACPR. (2020). *Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques* [https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204\\_article\\_gse\\_revue.pdf](https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20201204_article_gse_revue.pdf)
- [3] Armel, K., & Planchet, F., (2018). Comment définir la qualité d'un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le Best-Estimate épargne en euros? *ressources-actuarielles.net* [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/a2b3f50b4905dbf2c12582700070d49d/\\$FILE/Article\\_BE\\_V\\_1\\_3.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/a2b3f50b4905dbf2c12582700070d49d/$FILE/Article_BE_V_1_3.pdf)
- [4] Arrouy, P-E. (2015). *Corrélations dans les générateurs de scénarios économiques en univers risque neutre* [Mémoire de master, EURIA] *institutdesactuaires.com* <https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/1308fd9c237cbb8b0591eef747cf3ee9.pdf>
- [5] Bégot, V., (2016). Smart Adjusters for Structured Products. *Quantitative Analytics, LexiFi*. [https://www.lexifi.com/white\\_papers/adjusters.pdf](https://www.lexifi.com/white_papers/adjusters.pdf)
- [6] Bonnefoy-Cudraz, P. (2016). *Implémentation et calibrage d'un Générateur de Scénarios Economiques : impact sur la volatilité du Solvency Capital Requirement* [Mémoire de master, EURIA] *institutdesactuaires.com* <https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/68de1411338c51260153d78500102667.pdf>
- [7] Brigo, B., & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit* (2e éd.). Springer.
- [8] Cousin, A. (2021). *Cours de calcul stochastique appliqué*. [Support de cours].
- [9] Hagan, P. (2002). Adjusters : Turning good prices into great prices. *Wilmott Magazine*, 56-59.
- [10] Higham, N. (2002). Computing the nearest correlation matrix-a problem for finance. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22, 329-343.
- [11] Higham, N., Strabic, N., & Sego, V. (2016). Restoring Definiteness via Shrinking, with an Application to Correlation Matrices with a Fixed Block. *SIAM Review*, 58(2), 245-263.
- [12] INSEE, (mai 2022). *La composition du patrimoine des ménages évolue peu à la suite de la crise sanitaire* <https://www.insee.fr/fr/statistiques/6437977>
- [13] Law, B. (2021). Correlation Estimation in Hybrid Systems. *arXiv.org*. <https://arxiv.org/abs/2111.06042>
- [14] Ponnusamy, S., (2020). *Méthodes de sélection d'instruments financiers pour le calibrage de portefeuilles répliquants* [Mémoire d'actuariat, ISUP] *institutdesactuaires.com* <https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/3b54c4ec884b7b24b22e923b084de85a.pdf>

- [15] Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité 2). (J.O. 17 janvier 2015). <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=EN>
- [16] Roncalli, T. (1998). *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*[Thèse de doctorat, Université Montesquieu-Bordeaux IV]. ressources-actuarielles.net. <http://www.ressources-actuarielles.net/C1256CFC001E6549/0/6FAAC37E9F096BF5C1256DBE002A93E8>
- [17] Schrage, D. (2008). Replicating Portfolios for Insurance Liabilities. *Aenorm* 59, 57-61.
- [18] Schrage, D., & Pelsser, J. (2006). Pricing swaptions and coupon bond options in affine term structure models. *Mathematical Finance*, 16(4), 673-694.
- [19] Suquet, C. (2005). *Théorème limite central* [Support de cours] <http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/Agr/TLC05.pdf>
- [20] Thérond, P. (2005). *Techniques de simulation : discrétisation d'équations différentielles stochastiques*[Support de cours]. [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/\\$FILE/Discretisation\\_EDS.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/$FILE/Discretisation_EDS.pdf)
- [21] Wang, J-Y. (2008). Variance Reduction for Multivariate Monte Carlo Simulation. *The Journal of Derivatives*, 16(1), 7-28.

# Table des figures

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1   | Prix de marché et théoriques des <i>caps</i> après calibrage au 31/12/2021 . . . . .   | iv  |
| 2   | Erreur quadratique globale au 31/12/2021 selon l'instrument utilisé pour le calibrage . . . . .  | v   |
| 3   | Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux de rendement comptable moyen perçu par l'assureur pour le fonds euros sur les 40 ans de projection . . . . . | vii |
| 4   | Market and theoretical cap prices after calibration on 31/12/2021 . . . . .  | xi  |
| 5   | Global squared error on 31/12/2021 according to the instrument used for calibration . . . . .  | xii |
| 6   | Difference between the average rate paid to policyholders and the one received by the insurer for the euro fund over a 40-year projection period . . . . .                         | xiv |
| 1.1 | Comparaison du bilan comptable sous Solvabilité I au bilan économique sous Solvabilité II . . . . .  | 5   |
| 1.2 | Modules de risques nécessaires au calcul du SCR . . . . .  | 7   |
| 1.3 | Variation de l'actif net réévalué suite à un choc . . . . .  | 8   |
| 3.1 | Fonctionnement du modèle de gestion actif-passif de l'entreprise . . . . .   | 12  |
| 3.2 | Répartition du portefeuille d'actifs au 31/12/2021 en pourcentage de la valeur nette comptable (hors actifs en représentation des contrats en unité de compte) . . . . .           | 13  |
| 3.3 | Répartition des provisions mathématiques selon le type de produit . . . . .  | 14  |
| 4.1 | Intéractions entre le GSE et le modèle ALM . . . . .   | 16  |
| 5.1 | Courbe des taux au 31/12/2021 fournie par l'EIOPA, pour des dates de maturité de 1 à 70 ans . . . . .  | 23  |
| 8.1 | Comparaison de la courbe EIOPA à la courbe des taux <i>swap</i> de marché au 31/12/2021 . . . . .  | 43  |
| 8.2 | Volatilité implicite et prix de marché des <i>caps</i> au 31/12/2021 . . . . .   | 46  |
| 8.3 | Prix de marché et théoriques des <i>caps</i> après calibrage au 31/12/2021 . . . . .   | 48  |
| 8.4 | Prix de marché au 31/12/2021 des <i>swaptions</i> à la monnaie . . . . .   | 48  |
| 8.5 | Erreur quadratique absolue globale au 31/12/2021 selon l'instrument utilisé pour le calibrage . . . . .  | 51  |
| 8.6 | Écarts quadratiques absolus et relatifs après calibrage sur les <i>swaptions</i> au 31/12/2021 . . . . .   | 51  |
| 8.7 | Extrait de la matrice des écarts relatifs entre prix observés et prix théoriques des <i>swaptions</i> au 31/12/2021 . . . . .  | 52  |
| 9.1 | Étapes de la méthode de réduction de variance de Wang . . . . .  | 62  |

TABLE DES FIGURES

---

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 10.1  | Comparaison des valeurs du déflateur moyen aux prix ZC pour des maturités de 1 à 40 ans . . . . .  | 66  |
| 10.2  | Évolution de la p-valeur du test de martingalité du déflateur par rapport au seuil $\alpha$ de 5% . . . . .  | 66  |
| 10.3  | Pour chaque $t$ fixé, comparaison des prix des ZC simulés de date de maturité $t + 10$ (à gauche) et $t + 1$ (à droite) aux prix théoriques . . . . .                              | 67  |
| 10.4  | Évolution de la p-valeur du test de martingalité des prix zéro-coupon par rapport au seuil $\alpha$ de 5% . . . . .  | 68  |
| 10.5  | Évolution en fonction de $t$ de $E_{\mathbb{Q}}[D(t)P(t, T)]/P_{\text{marché}}(0, T)$ . . . . .  | 68  |
| 10.6  | Prix issu du GSE comparé au prix de marché des <i>swaptions</i> de ténor 10 ans  | 70  |
| 10.7  | Espérance théorique et empirique des PZC 10 ans . . . . .  | 70  |
| 10.8  | Volatilité théorique et empirique des PZC 10 ans . . . . .   | 71  |
| 10.9  | Proportion de taux 10 ans négatifs comparée à la probabilité théorique . . .   | 71  |
| 10.10 | Comparaison des corrélations théoriques à celles générées par le GSE . . . . .   | 72  |
| 11.1  | Évolution des flux de trésorerie futurs sur les 40 ans de projection . . . . .   | 76  |
| 11.2  | Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux cible pour le fonds euros sur les 40 ans de projection . . . . .   | 77  |
| 11.3  | Évolution de l'écart entre le taux moyen servi aux assurés et le taux de rendement comptable moyen perçu par l'assureur pour le fonds euros sur les 40 ans de projection . . . . . | 78  |
| 11.4  | Décomposition du BSCR par module de risque . . . . .   | 78  |
| 12.1  | Contributions des actifs répliquants à l'ajustement . . . . .  | 84  |
| E.1   | Tests de martingalité des indices immobilier, action et gestion alternative . .  | 107 |
| F.1   | Moyenne des taux zéro-coupon de maturité 1 an (à gauche) et 10 ans (à droite) générés par les modèles de Hull & White et G2++ . . . . .  | 108 |
| F.2   | Volatilité des taux zéro-coupon de maturité 1 an (à gauche) et 10 ans (à droite) pour les modèles de Hull & White et G2++ . . . . .  | 109 |

# Liste des tableaux

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1    | Paramètres du G2++ calibrés en référence aux <i>caps</i> au 31/12/2021 . . . . .                            | iv  |
| 2    | Paramètres du G2++ calibrés en référence aux <i>swaptions</i> au 31/12/2021 . . . . .                       | v   |
| 3    | Distance quadratique des écarts relatifs entre les deux modèles . . . . .                                   | v   |
| 4    | Valeurs du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 pour les modèles de Hull & White et G2++ . . . . .        | vii |
| 5    | Variation du ratio de solvabilité suite à la mise en place du G2++ . . . . .                                | vii |
| 6    | Valeur ajustée du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 . . . . .  | ix  |
| 7    | G2++ parameters calibrated with reference to caps on 31/12/2021 . . . . .                                   | xi  |
| 8    | Calibrated parameters with reference to swaptions on 31/12/2021 . . . . .                                   | xii |
| 9    | Squared distance of the relative differences between the two models . . . . .                               | xii |
| 10   | Best Estimate (in millions of euros) on 31/12/2021 . . . . .  | xiv |
| 11   | Change in the solvency ratio following the introduction of G2++ . . . . .                                   | xiv |
| 12   | Adjusted BEL (in millions of euros) on 31/12/2021 . . . . .   | xvi |
| 3.1  | Provisions techniques Solvabilité II selon le type de support (en millions d'euros) au 31/12/2021 . . . . . | 11  |
| 3.2  | Qualité de crédit du portefeuille obligataire au 31/12/2021 . . . . .                                       | 13  |
| 3.3  | Répartition des provisions mathématiques des contrats d'épargne . . . . .                                   | 14  |
| 8.1  | Paramètres du G2++ calibrés en référence aux <i>caps</i> de 2018 à 2021 . . . . .                           | 47  |
| 8.2  | Écarts absolus et relatifs après calibrage sur les <i>caps</i> . . . . .                                    | 47  |
| 8.3  | Paramètres du G2++ calibrés de 2018 à 2021 . . . . .  | 51  |
| 8.4  | Distance quadratique des écarts absolus entre les deux modèles . . . . .                                    | 52  |
| 8.5  | Distance quadratique des écarts relatifs entre les deux modèles . . . . .                                   | 52  |
| 10.1 | Appréciation de la <i>Market consistency</i> du modèle G2++ . . . . .                                       | 69  |
| 10.2 | Appréciation de la <i>Market consistency</i> du modèle Hull & White . . . . .                               | 69  |
| 11.1 | Valeurs du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 pour les modèles de Hull & White et G2++ . . . . .        | 77  |
| 11.2 | Variation des trois principaux modules de risque du SCR de marché . . . . .                                 | 79  |
| 11.3 | Variation du ratio de solvabilité suite à la mise en place du G2++ au 31/12/2021 . . . . .                  | 79  |
| 12.1 | Valeur ajustée du BE (en millions d'euros) au 31/12/2021 . . . . .  | 83  |
| 12.2 | Valeur ajustée du BE (en millions d'euros) dont les paramètres ont été mal calibrés au 31/12/2021 . . . . . | 84  |
| 12.3 | Variation du ratio de solvabilité suite à l'ajustement du G2++ . . . . .                                    | 85  |
| G.1  | Support des paramètres . . . . .  | 110 |

# Annexes

## Annexe A

# Compléments de mathématiques financières

### A.1 Convention de calcul des intérêts

La valorisation d'actifs financiers nécessite dans un premier temps de définir une base de calcul des intérêts.

#### A.1.1 Composition simple

La composition simple des intérêts est la convention traditionnellement utilisée pour des opérations financières d'une durée inférieure à 1 an. Noté  $L(t, T)$ , le taux d'intérêt composé simplement entre les dates  $t$  et  $T$  est le taux constant pour lequel le placement de  $N$  unités monétaires en  $t$  équivaut au capital suivant en  $T$  :

$$C(T) = N(1 + L(t, T)(T - t))$$

#### A.1.2 Composition annuelle

Noté  $Y(t, T)$ , le taux d'intérêt composé annuellement s'applique aux intérêts accumulés chaque année jusqu'à maturité. Ainsi, le capital obtenu en date  $T$  vaut :

$$C(T) = N(1 + Y(t, T))^{T-t}$$

#### A.1.3 Composition continue

Enfin, le capital accumulé en date  $T$  lorsque le montant nominal placé en  $t$  croît au taux continu  $R(t, T)$  s'écrit :

$$C(T) = Ne^{R(t, T)(T-t)}$$

#### A.1.4 Taux *forward*

Soient les instants  $t < T_1 < T_2$ . Le taux *forward*  $F(t, T_1, T_2)$  est le taux d'intérêt fixé en date  $t$  d'un emprunt sur une période ultérieure  $[T_1; T_2]$ . En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux *forward* s'exprime en fonction des prix zéro-coupon :

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \quad (\text{A.1})$$

## A.2 Taux *forward* instantané

Le taux *forward* instantané s'interprète comme le taux d'intérêt d'un emprunt futur de durée infiniment courte. De manière analogue au passage du taux *spot* au taux court, il s'obtient comme la limite suivante :

$$f(t, T) = \lim_{h \rightarrow 0} F(t, T, T + h) \quad (\text{A.2})$$

Le taux *forward* instantané intervient également dans la modélisation des taux d'intérêt. En effet, le taux court et le taux *forward* instantané sont liés par la relation suivante :

$$f(t, t) = r(t)$$

De même, il se démontre aisément que le taux *forward* est lié aux obligations zéro-coupon par la relation suivante :

$$f(t, T) = -\frac{\delta}{\delta T} [\ln P(t, T)]$$

## A.3 Mouvement brownien

Un processus stochastique en temps continu  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien avec dérive si (Cousin, 2021 [8]) :

1.  $B_0 = 0$  presque sûrement ;
2. Les accroissements  $B_t - B_s$  du processus sont indépendants et stationnaires. Autrement dit, pour toute suite de dates  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , les variables  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_0$  sont indépendantes, et  $\forall t, h > 0$  la loi de  $B_{t+h} - B_t$  ne dépend pas de  $t$ , mais uniquement de la durée  $h$  ;
3. Les trajectoires de  $B$  sont continues.

Ces trois conditions impliquent la normalité des incréments :

$$\forall t, h > 0, \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0 \text{ tels que } B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(\mu h, \sigma^2 h)$$

Lorsque  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ , le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard.

## A.4 Lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est un résultat fondamental de calcul stochastique, permettant de dériver l'expression de processus à partir de leur dynamique.

Soit un processus d'Itô  $X_t$ , tel que :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Avec  $W_t$  un mouvement brownien standard de filtration  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma_t, \mu_t$  deux processus stochastiques adaptés à  $\mathcal{F}$ .

Le lemme d'Itô stipule que la dynamique de toute fonction  $f(X_t, t)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  s'écrit :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt \quad (\text{A.3})$$

## A.5 Probabilité risque-neutre

La proposition ci-dessous est fondamentale et est à l'origine de nombreux résultats théoriques utilisés dans ce mémoire.

### Proposition

Soit un numéraire  $N$ , assorti d'une probabilité  $\mathbb{Q}^N$  équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , telle que le prix de tout actif financier  $X$  ne versant aucun paiement intermédiaire normalisé par  $N$  soit une martingale sous  $\mathbb{Q}^N$ , c-à-d :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{X_T}{N_T} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{X_t}{N_t} \quad (\text{A.4})$$

où  $\mathcal{F}_t$  est la filtration associée à l'espace de probabilité engendré par  $\mathbb{Q}^N$ .

Soit  $U$  un numéraire différent de  $N$ , choisi de façon arbitraire. Alors, il existe une probabilité  $\mathbb{Q}^U$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le prix de tout actif financier  $Y$ , ne versant aucun paiement intermédiaire, normalisé par  $N$  soit une martingale sous  $\mathbb{Q}^U$ . La densité de Radon-Nikodym définissant la probabilité  $\mathbb{Q}^U$  s'obtient de la manière suivante (Brigo et Mercurio, 2006, pp.27-28, [7]) :

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T} \quad (\text{A.5})$$

Cette dernière permet alors de passer aisément d'un espace probabilisé à un autre :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{Z_T}{N_T} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{Z_T}{N_T} \frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^U} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{Z_T U_0}{U_T N_0} \right] \quad (\text{A.6})$$

La technique du changement de numéraire est fréquemment utilisée pour faciliter la valorisation d'actifs dérivés.

La probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  est définie comme l'univers de projection dont le numéraire est l'actif sans risque  $B(t)$ . Ainsi, tout actif normalisé par  $B$ , autrement dit tout actif actualisé, est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ . Ainsi, sous la probabilité risque-neutre, le prix en date  $t$  d'un actif financier de prix (ou de *payoff*)  $(H_t)_{t \geq 0}$  se calcule de la façon suivante :

$$H_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ H_T e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{A.7})$$

En effet, par définition de  $\mathbb{Q}$ , le processus de prix actualisé  $\frac{H_t}{B(t)}$  est une martingale sous cette mesure de probabilité. Aussi,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [ H_T e^{-\int_0^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t ] = H_t e^{-\int_0^t r(s) ds} \quad (\text{A.8})$$

Qui se réécrit :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [ H_T e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t ] = H_t \quad (\text{A.9})$$

En particulier, pour l'obligation zéro-coupon de prix  $P(t, T)$ ,

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [ P(T, T) D(t, T) | \mathcal{F}_t ] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [ D(t, T) | \mathcal{F}_t ] \quad (\text{A.10})$$

Ainsi, le prix en  $t$  d'un zéro-coupon correspond à l'espérance du déflateur sous la probabilité risque-neutre, au regard de l'information accumulée en  $t$ .

Un corollaire de la proposition ci-dessus est qu'en AOA, l'existence de la probabilité risque-neutre induit que le prix de tout actif divisé par un numéraire  $M$  quelconque est une martingale sous la mesure  $\mathbb{Q}_M$  construite de la façon suivante :

$$\frac{dQ^M}{dQ} = \frac{B(0)M_t}{B(t)M_0} = e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{M_t}{M_0}$$

## Annexe B

# Compléments sur le modèle G2++

### B.1 Expression de la fonction $\varphi$

Pour rappel, pour que le modèle de taux satisfasse aux exigences réglementaires, il doit être capable de reproduire les prix des obligations zéro-coupon en date initiale. Cette caractéristique est capturée par la fonction déterministe  $\varphi$ .

Ainsi, quelle que soit la maturité  $T$  considérée, le prix d'une obligation zéro-coupon  $P(0, T)$  calculé par le modèle G2++ est égal au prix réel de marché  $P^M(0, T)$  si et seulement si (Brigo & Mercurio, 2006, p.146 [7]) :

$$\varphi(T) = f^M(t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab}(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \quad (\text{B.1})$$

Cette expression est obtenue en supposant que la fonction  $P^M : T \rightarrow P^M(0, T)$  est différentiable.

### B.2 Taux *spot*

L'expression du taux *spot* dans le modèle G2++ s'obtient à partir du prix zéro-coupon :

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \\ &= -\frac{1}{T-t} \left[ \ln \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} + \mathcal{A}(t, T) \right] \\ &= -\frac{1}{T-t} \left[ \ln \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} + \frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}y(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les moments d'ordre 1 et 2 du taux *spot* se déduisent aisément de cette expression :

$$\mathbb{E}[R(t, T)] = -\frac{1}{T-t} \left[ \ln \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} + \frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[R(t, T)] &= \frac{1}{(T-t)^2} \left[ \frac{(1 - e^{-a(T-t)})^2}{a^2} \mathbb{V}[x(t)] + \frac{(1 - e^{-b(T-t)})^2}{b^2} \mathbb{V}[y(t)] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} \text{Cov}[x(t), y(t)] \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où la covariance entre  $x(t)$  et  $y(t)$  se calcule de la sorte :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov[x(t), y(t)] &= \sigma\eta cov\left(\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u), \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_2(u)\right) \\ &= \sigma\eta \int_0^t e^{-a(t-u)} e^{-b(t-u)} cov(dW_1(u), dW_2(u)) \\ &= \sigma\eta \int_0^t e^{-(a+b)(t-u)} \rho du \\ &= \sigma\eta\rho \frac{1 - e^{-(a+b)t}}{a + b}\end{aligned}$$

Ces deux expressions théoriques sont comparées aux moments empiriques lors de l'appréciation de la validité du modèle.

# Annexe C

## Volatilités implicites

Les formules de Bachelier d'évaluation du prix des *swaptions* et des *caps* sont démontrées dans les paragraphes suivants. Les formules de Black lorsque les taux sous-jacents suivent une distribution log-normale se démontrent de façon analogue.

### C.1 Valorisation des *swaptions* par la formule de Bachelier

La dynamique des taux *swap forward* sous la probabilité associée au numéraire  $A_{\alpha,\beta}(t)$  est la suivante :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} dW(t)$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$  et  $A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$ .

Le prix de la *swaption* est donné par l'espérance de son *payoff* sous la probabilité risque-neutre :

$$PS^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ ND(0, T_{\alpha}) (S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_{\alpha}, T_i) \right]$$

Ne connaissant la distribution du taux *swap forward* que sous la mesure  $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$  associée au numéraire  $A_{\alpha,\beta}(t)$  le changement de probabilité suivant est opéré :

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}}{d\mathbb{Q}} = \frac{A_{\alpha,\beta}(T_{\alpha})}{B(T_{\alpha})A_{\alpha,\beta}(0)}$$

tel que :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ N \frac{1}{B(T_{\alpha})} (S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K)^+ A_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ N \frac{1}{B(T_{\alpha})} B(T_{\alpha}) \frac{A_{\alpha,\beta}(0)}{A_{\alpha,\beta}(T_{\alpha})} (S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K)^+ A_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} [N A_{\alpha,\beta}(0) (S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K)^+] \\
 &= N A_{\alpha,\beta}(0) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} [(S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K)^+] \\
 &= N A_{\alpha,\beta}(0) E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ (S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) - K) 1_{S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K} \right] \\
 &= N A_{\alpha,\beta}(0) E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) 1_{S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K} \right] - N A_{\alpha,\beta}(0) E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ K 1_{S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K} \right] \\
 &= N A_{\alpha,\beta}(0) E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) 1_{S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K} \right] - N A_{\alpha,\beta}(0) K \mathbb{Q}^{\alpha,\beta} [S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K]
 \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant la distribution normale du taux *swap forward*,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}^{\alpha,\beta} [S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K] &= \mathbb{Q}^{\alpha,\beta} \left[ \varepsilon \geq \frac{K - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] \\
 &= \Phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right]
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) 1_{S_{\alpha,\beta}(T_{\alpha}) \geq K} \right] &= E_{\mathbb{Q}}^{\alpha,\beta} \left[ (S_{\alpha,\beta}(0) + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}} \varepsilon) 1_{\varepsilon \geq \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}}} \right] \\
 &= S_{\alpha,\beta}(0) \Phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}} \int_{\frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}}}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 &= S_{\alpha,\beta}(0) \Phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}} \phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & PS^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) \\
 &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \left[ (S_{\alpha,\beta}(0) - K) \Phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}} \phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] \right]
 \end{aligned}$$

Il vient naturellement, pour la *swaption* receveuse :

$$\begin{aligned}
 & RS^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta}) \\
 &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \left[ (S_{\alpha,\beta}(0) - K) \Phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}} \phi \left[ \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha,\beta} \sqrt{T_{\alpha}}} \right] \right]
 \end{aligned}$$

## C.2 Valorisation des *caps* par la formule de Bachelier

La dynamique des taux *forward* sous la probabilité  $\mathbb{Q}_i$  associée au numéraire  $P(t, T_i)$  est la suivante :

$$dF(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} dW(t) \quad (\text{C.1})$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^i$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \text{Cap}^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} ND(0, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} ND(0, T_i) \tau_i (F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right] \end{aligned}$$

Ne connaissant la distribution des taux *forward* que sous la mesure  $\mathbb{Q}^i$  associée au numéraire  $P(t, T_i)$  le changement de probabilité suivant est opéré :

$$\frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{B(T_i)P(0, T_i)}$$

tel que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N \frac{1}{B(T_i)} \tau_i (F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^i \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(0, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \right] \\ &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^i \left[ (F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K) \mathbf{1}_{F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) \geq K} \right] \end{aligned}$$

L'expression de  $F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)$  se déduit de la dynamique des taux *forward*. Puis, en utilisant des développements identiques à ceux des *swaptions*, il vient :

$$\begin{aligned} &\text{Cap}^{\text{Bach}}(0, \mathcal{T}, \tau, N, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta}) \\ &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \left[ (F(0, T_{i-1}, T_i) - K) \Phi \left[ \frac{F(0, T_{i-1}, T_i) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}} \right] + \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}} \phi \left[ \frac{F(0, T_{i-1}, T_i) - K}{\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}} \right] \right] \end{aligned}$$

## Annexe D

# Estimation des corrélations théoriques

Cette annexe présente les éléments de démonstration du résultat de convergence (9.6). Ces derniers sont issus de [13].

*Démonstration :*

Il se démontre aisément que le coefficient de corrélation empirique se réécrit :

$$\hat{\rho}_{n,T}(\Delta_\tau^R, \Delta_j^s) = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_\tau^R(k) \Delta^s(k) - n \bar{\Delta}_\tau^R \bar{\Delta}^s}{\sqrt{(\sum_{k=1}^n (\Delta_\tau^R(k))^2 - n (\bar{\Delta}_\tau^R)^2) (\sum_{k=1}^n (\Delta^s(k))^2 - n (\bar{\Delta}^s)^2)}}$$

Ce dernier s'écrit sous la forme de plusieurs termes, dont il convient d'évaluer la convergence.

### Définition 1 :

Pour toute suite de subdivisions  $\Delta_n = (0 < t_0^n < \dots < t_{k(n)}^n = t)$  de  $[0, t]$  de pas  $|\Delta_n|$  convergeant vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, la variation quadratique d'un processus stochastique est le processus  $[X]_t$  tel que :

$$\sum_{k=1}^{k(n)} (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} [X]_t$$

En particulier, la variation quadratique d'un mouvement brownien existe et vaut :

$$[W]_t = t$$

### Définition 2 :

La covariation quadratique de deux processus stochastiques est définie de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{k(n)} (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})(Y_{t_k^n} - Y_{t_{k-1}^n}) \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} [X, Y]_t$$

Il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique telle que  $[X, X]_t = [X]_t$ . En particulier, pour deux mouvements browniens de corrélation instantanée  $\rho$  :

$$d[B^1, B^2]_t = dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt$$

Ainsi, pour un instant  $T$  positif donné, la quantité suivante converge en probabilité vers la covariation quadratique entre les variables  $R_\tau$  et  $s$  :

$$\sum_{k=1}^n \Delta_\tau^R(k) \Delta^s(k) = \sum_{k=1}^n (R^\tau(t_k) - R^\tau(t_{k-1})) (s(t_k) - s(t_{k-1})) \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} [R^\tau, s]_T$$

De même,

$$\sum_{k=1}^n \Delta_\tau^R(k)^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} [R^\tau, R^\tau]_T$$

Et,

$$\sum_{k=1}^n \Delta^s(k)^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} [s, s]_T$$

Pour rappel, les deux actifs considérés s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R^\tau(t) &= R(t, t + \tau) = f(t, t + \tau) + \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} x(t) + \frac{1 - e^{-b\tau}}{a\tau} y(t) \\ &= f(t, T) + \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \frac{1 - e^{-b\tau}}{b\tau} \eta \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \\ s(t) &= s(0) + (r_t - \frac{1}{2}v^2)t + vB_t \end{aligned}$$

où  $f$  est une fonction déterministe.

Seuls les termes aléatoires interviennent dans les formules de covariation. La covariation quadratique se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} [R^\tau, s]_T &= \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \sigma v \left[ \int_0^\cdot e^{-a(\cdot-u)} dW_1(u), B. \right]_T + \frac{1 - e^{-b\tau}}{b\tau} \eta \sigma v \left[ \int_0^\cdot e^{-b(\cdot-u)} dW_2(u), B. \right]_T \\ &= \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \sigma v \int_0^T e^{-a(T-u)} d[W_1, B]_T + \frac{1 - e^{-b\tau}}{b\tau} \eta \sigma v \int_0^T e^{-b(T-u)} d[W_2, B]_T \\ &= \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} \sigma v \rho_{x,s} \int_0^T e^{-a(T-u)} du + \frac{1 - e^{-b\tau}}{b\tau} \eta v \rho_{y,s} \int_0^T e^{-b(T-u)} du \\ &= \frac{1 - e^{-a\tau}}{a^2\tau} \sigma v \rho_{x,s} (1 - e^{-aT}) + \frac{1 - e^{-b\tau}}{b^2\tau} \eta v \rho_{y,s} (1 - e^{-bT}) \\ &= c(a, \sigma, \tau) \sigma v \rho_{x,s} \frac{1 - e^{-aT}}{a} + c(b, \eta, \tau) \eta v \rho_{y,s} \frac{1 - e^{-bT}}{b} \\ &\underset{T \rightarrow 0}{\sim} c(a, \sigma, \tau) \sigma v \rho_{x,s} T + c(b, \eta, \tau) \eta v \rho_{y,s} T \end{aligned}$$

De façon analogue,

$$\begin{aligned} [R^\tau, R^\tau]_T &= \sigma^2 c(a, \sigma, \tau) \frac{(1 - e^{-2aT})}{2a} + \eta^2 c(b, \eta, \tau) \frac{(1 - e^{-2bT})}{2b} + 2\sigma\eta\rho c(a, \sigma, \tau) c(b, \eta, \tau) \frac{1 - e^{-(a+b)T}}{a+b} \\ &\underset{T \rightarrow 0}{\sim} \sigma^2 c(a, \sigma, \tau) T + \eta^2 c(b, \eta, \tau) T + 2\eta\sigma\rho c(a, \sigma, \tau) c(b, \eta, \tau) T \end{aligned}$$

Et,

$$[s, s]_T = v^2 [B]_T = v^2 T$$

D'autre part, en supposant que  $R^\tau(T)$  et  $s(T)$  sont de carré intégrable, l'inégalité de Tchebychev induit pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathbb{P} \left[ \frac{|R^\tau(T)|}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon \right] \leq \frac{\mathbb{E}[R^\tau(T)^2]}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ceci démontre la convergence en probabilité de  $\frac{R^\tau(T)}{\sqrt{n}}$  vers 0. Un raisonnement analogue démontre la convergence en probabilité de  $\frac{s(T)}{\sqrt{n}}$  vers 0. Ainsi,

$$n\bar{\Delta}_\tau^R \bar{\Delta}^s = \frac{(\sum_{k=1}^n \Delta_\tau^R(k)) (\sum_{k=1}^n \Delta^s(k))}{n} = \frac{R^\tau(T) - R^\tau(0)}{\sqrt{n}} \times \frac{s(T) - s(0)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

$R^\tau(0)$  et  $s(0)$  étant des constantes.

De la même façon,

$$n(\bar{\Delta}_\tau^R)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \text{et} \quad n(\bar{\Delta}^s)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

Le résultat final vient après agrégation des étapes précédentes.

## Annexe E

# Tests de martingalité

Pour rappel, la diffusion des rendements des actions, de l'immobilier et de la gestion alternative par le modèle de Black & Scholes dépend des trajectoires du taux court. Un test de martingalité est alors réalisé sur ces trois grandeurs.

Soit  $S(t)$  l'indice considéré en date  $t$ . Il s'agit de vérifier la relation suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(0, t)S(t)] = S(0) \quad (\text{E.1})$$

La quantité  $S(0)$  étant déterministe et supposée non nulle, l'égalité se réécrit :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ D(0, t) \frac{S(t)}{S(0)} \right] = 1 \quad (\text{E.2})$$

La propriété (E.2) est validée statistiquement à l'aide du test d'hypothèse au seuil  $\alpha = 5\%$  présenté dans le chapitre 10, avec :

$$\mathcal{H}_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ D(0, t) \frac{S(t)}{S(0)} \right] = 1, \quad \mathcal{H}_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ D(0, t) \frac{S(t)}{S(0)} \right] \neq 1$$

L'évolution de la p-valeur du test pour les trois classes d'actifs est représentée ci-dessous :

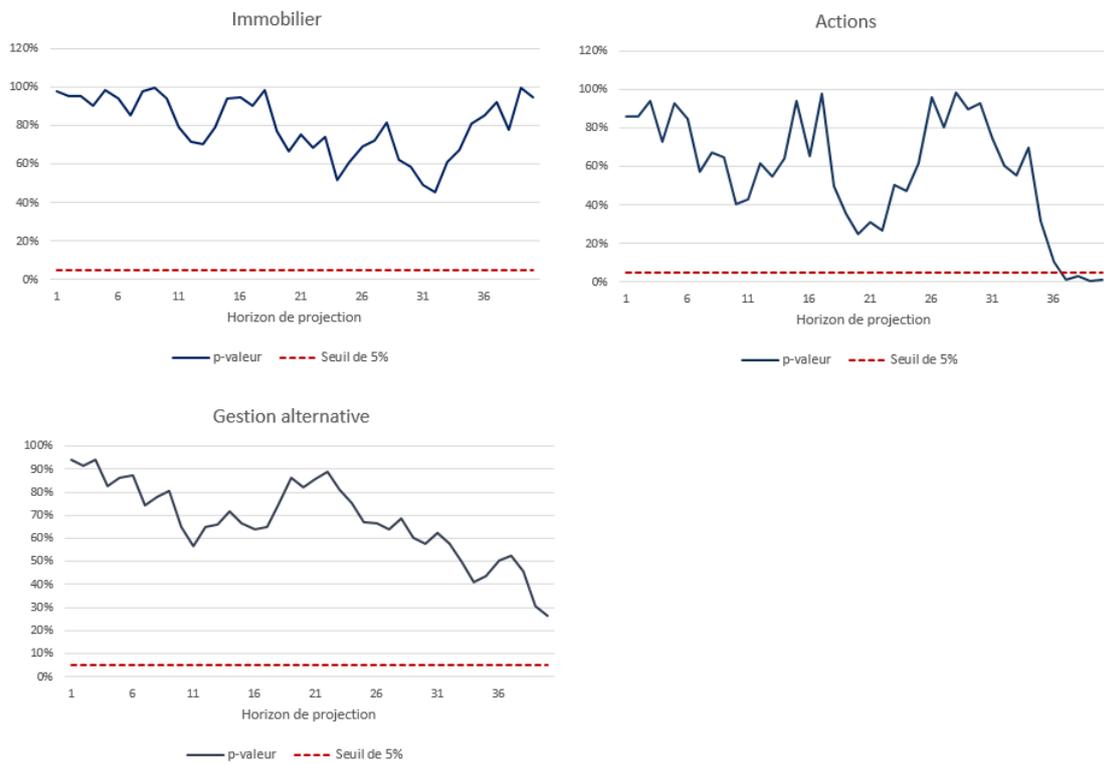


FIGURE E.1 – Tests de martingalité des indices immobilier, action et gestion alternative

Le test de martingalité des actions est rejeté au seuil de 5% lors des trois dernières années de projection. Ces écarts reflètent davantage une volatilité importante de la classe d'actif actions qu'une absence de martingalité des trajectoires projetées.

## Annexe F

# Comparaison des trajectoires projetées

Une fois le G2++ construit, il est intéressant de comparer les caractéristiques des trajectoires de taux produites par chaque modèle. Celles-ci sont mises en parallèle selon deux indicateurs : la valeur moyenne des taux et leur volatilité. Les trajectoires moyennes des taux de durée de maturité 1 et 10 ans sont superposées dans les graphiques suivants :

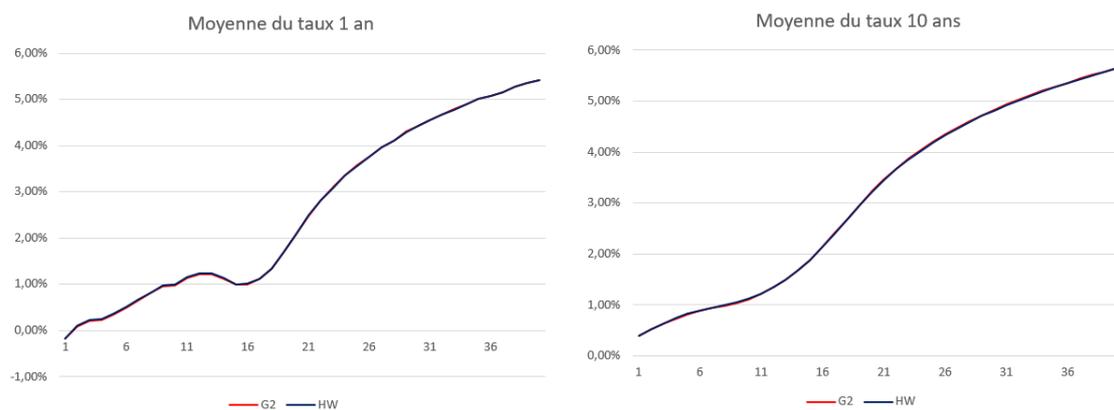


FIGURE F.1 – Moyenne des taux zéro-coupon de maturité 1 an (à gauche) et 10 ans (à droite) générés par les modèles de Hull & White et G2++

De même, l'évolution de la volatilité des taux de durée de maturité 1 et 10 ans est représentée pour chacun des modèles :

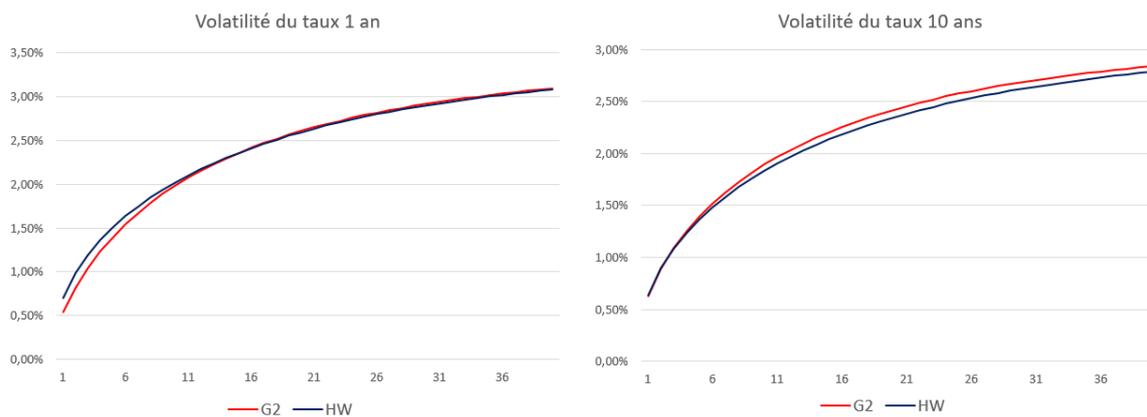


FIGURE F.2 – Volatilité des taux zéro-coupon de maturité 1 an (à gauche) et 10 ans (à droite) pour les modèles de Hull & White et G2++

Ainsi, bien que les trajectoires moyennes de chaque modèle coïncident, les taux long terme générés par le G2++ semblent plus volatiles.

## Annexe G

# Jeux de paramètres choqués et sensibilités

Dans le cadre de l'estimation des poids associés à chaque actif composant le portefeuille répliquant, 50 jeux de paramètres du G2++ sont générés. Le tableau suivant précise les intervalles dans lesquelles sont générés les paramètres choqués.

|          | Support           |
|----------|-------------------|
| $a$      | [0, 150%]         |
| $b$      | [0, 20%]          |
| $\sigma$ | [0, 5%]           |
| $\eta$   | [0, 5%]           |
| $\rho$   | [-0, 99%, 0, 99%] |

TABLE G.1 – Support des paramètres