

**Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du diplôme  
de Statisticien Mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Andréa Kaidjayan

**Titre du mémoire :  
Confrontation de la formule standard et de l'utilisation des  
Undertaking Specific Parameters pour le calcul d'un ajustement  
pour risque (RA)**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de  
l'Institut des Actuaires*

signature

*Entreprise :*

Nom : SOGECAP

*Signature :*

*Directeurs de mémoire en  
entreprise :*


*Membres présents du jury de la  
filière*

*Nom : David MACE*

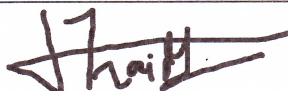
*Signatures :*

*Autorisation de publication et de mise en  
ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de l'éventuel  
délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



---

# Résumé

---

**Mots clés :** *IFRS 17, Solvabilité II, Risk Adjustment, démarche ERM, modélisation, Undertaking Specific Parameters, sinistralité, Primes acquises, charges ultimes, SCR, provisionnement.*

Les différentes normes et directives présentent un objectif commun : garantir la stabilité du système et ainsi offrir une sécurité renforcée aux consommateurs d'assurance. L'ORSA, située au coeur de la réforme prudentielle Solvabilité II a eu pour objectif d'incorporer les risques dans le pilotage des entités. Toute entité doit désormais détenir un certain niveau de capital (SCR) pour minimiser sa probabilité de ruine et la limiter à moins de 0,5% par an.

Après plusieurs décalages, la norme IFRS 17 entrera en vigueur au 1<sup>er</sup> janvier 2023. Cette dernière complète rigoureusement la norme IFRS 4 permettant ainsi une homogénéisation internationale de la comptabilité des contrats d'assurance. Cette norme marque un changement dans l'approche bilantielle des assureurs. En effet, sous IFRS 17, les provisions techniques correspondent désormais à la somme de la meilleure estimation (Best Estimate) et de l'ajustement pour risque (Risk Adjustment). Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la détermination du Risk Adjustment pour un quantile à 80%.

Sogessur, compagnie dommages de Société Générale, calcule son SCR souscription non-vie selon une formule standard. Cependant, cette dernière ne rentre pas vraiment dans le cadre d'une démarche ERM. En effet, elle représente une méthode commune à l'ensemble des acteurs de marché et ne permet donc pas de refléter correctement les risques propres à chaque organisme.

On sait que la norme IFRS 17 ne précise aucune méthode pour le calcul de l'ajustement pour risque (RA). Ainsi, ce mémoire a consisté à mettre au point une méthode dite "des paramètres USP" pour calculer à la fois le SCR et le RA de l'entreprise. Une étude préalable de la fonction  $\rho(\sigma)$  utilisée initialement en formule standard est déterminante en fonction du niveau de quantile souhaité. L'avantage de cette méthode est qu'elle incorpore le profil de risque de l'entité. Comme en formule standard, il faut donc étudier à la fois le risque de prime et le risque de réserve de l'entité.

---

# Abstract

---

**Keywords** : *IFRS 17, Solvency II, Risk Adjustment, ERM approach, modeling, Undertaking Specific Parameters, claims experience, Earned Premiums, ultimate expenses, SCR, provisioning.*

The various standards and directives have a common objective : to guarantee the stability of the system and thus provide greater security for insurance consumers. The ORSA, which is at the heart of the Solvency II prudential reform, has aimed to incorporate risks into the management of entities. All entities must now hold a certain level of capital (SCR) to minimize the probability of ruin and limit it to less than 0.5% per year.

After several delays, IFRS 17 will become effective on January 1, 2023. This standard rigorously complements IFRS 4, allowing for international standardization of insurance contract accounting. This standard marks a change in the balance sheet approach of insurers. Indeed, under IFRS 17, technical provisions now correspond to the sum of the best estimate and the Risk Adjustment. In this memory, we were interested in the determination of the Risk Adjustment for a quantile at 80%.

Sogessur, Société Générale's property and casualty company, calculates its non-life underwriting SCR according to a standard formula. However, the latter does not really fit into the framework of an ERM approach. Indeed, it represents a method common to all market players and therefore does not correctly reflect the risks specific to each organization.

It is known that IFRS 17 does not specify any method for calculating the risk adjustment (RA). Thus, this dissertation consisted in developing a method known as "USP parameters" to calculate both the SCR and the RA of the company. A preliminary study of the  $\rho(\sigma)$  function initially used in the standard formula is decisive depending on the desired level of quantile. The advantage of this method is that it incorporates the risk profile of the entity. As with the standard formula, both the premium risk and the reserve risk of the entity must be considered.

---

# Synthèse

---

## Contexte

Les différentes crises économiques et financières ont eu pour conséquence de soulever un problème certain : le profil de risque de chaque entité n'est pas correctement incorporé dans les processus de calculs réglementaires. On s'est rendu compte que les banques, assureurs, réassureurs ne détenaient pas de fonds propres suffisants pour éviter de faire défaut. Si les causes des grandes crises font parfois l'objet de débats, la nécessité d'intégrer une démarche ERM (Enterprise Risk Management) apparaît comme incontournable.

Dans la continuité des réformes Bâle 2 pour le secteur bancaire en 2008, Il a fallu également encadrer le monde de l'assurance. Ainsi, la directive Solvabilité 1 est donc remplacée le 1er janvier 2016 par une nouvelle directive Européenne qui s'applique à l'ensemble des compagnies d'assurance des pays membres de l'Union Européenne. Cette nouvelle directive s'appelle Solvabilité 2 (Solvency 2 en Anglais).

Plusieurs nouveautés apparaissent au sein de ce nouveau bilan. Les actifs sont désormais évalués en valeur de marché et non en valeur historique comme c'était le cas sous S1. De plus, les nouvelles exigences en capital (SCR, MCR) permettent de mieux prendre en compte les différents risques des entités. La directive Solvabilité II a marqué un profond changement chez les assureurs et réassureurs.

Parallèlement, les normes IFRS élaborées par l'IASB ont pour objectif de standardiser la présentation des données comptables échangées au niveau international. La norme IFRS 4 *Insurance contracts*, introduite en 2004, est apparue comme un moyen de spécifier l'information financière pour les contrats d'assurance. Bien qu'utile, cette norme s'est avérée assez limitée dans la mesure où elle engendre une inadéquation entre les engagements au passif et les Cash-flows à l'actif. Ce défaut majeur a contribué à développer la norme IFRS 17 qui devra être appliquée à partir du 1er Janvier 2023 pour l'ensemble des compagnies d'assurance.

La norme IFRS 17 marque à nouveau un changement majeur dans la manière de comptabiliser le passif des assureurs : Les provisions techniques tels qu'elles étaient définies sous Solvabilité 2 seront désormais constituées du Best Estimate des engagements et d'un ajustement pour risque (Risk adjustment en anglais). En



assurance non-vie, la provision pour sinistres à payer (PSAP) représente la fraction la plus importante soit en moyenne plus de 80% des provisions pour les assureurs non-vie. Il est donc nécessaire de les évaluer convenablement pour que les assureurs puissent honorer leurs engagements.

L'objectif de ce mémoire a donc été de concevoir une méthode de calcul à la fois pour le SCR sous Solvabilité 2 et le RA sous IFRS 17. Actuellement, Sogessur, compagnie d'assurance dommage de Société Générale détermine son SCR en formule standard sous le logiciel addactis Modelling. Cette formule repose globalement sur le produit entre une fonction  $\rho(\sigma)$  qui est calibrée pour être équivalente à une VaR(99,5%) et un volume global (agrégé) de prime et de réserve de l'entreprise. Un développement en série entière permet aisément de montrer que  $\rho(\sigma) \approx 3\sigma$  quand  $\sigma \rightarrow 0$ .

$$SCR_{PR} = 3\sigma \times V$$

### L'ajustement pour risque RA

L'ajustement pour risque ou risk adjustment reflète la compensation requise pour supporter l'incertitude des flux futurs de trésorerie provenant des risques non-financiers. Le risque financier se retrouve globalement dans les taux d'intérêt pour calculer le Best estimate.

En reprenant l'appendice A de la norme IFRS 17, on a pu définir un risque non financier comme étant le risque autre qu'un risque financier, transféré d'un contrat à l'émetteur. Cette définition est renforcée par le paragraphe B8 qui explique que tout risque provenant de variables non financières sont des risques non financiers. Nous avons également pu définir le périmètre d'application en rappelant que le RA concernait les risques d'assurance, de frais, de résiliation, de rachat et le risque opérationnel directement lié aux contrats (erreur de tarification, de provisionnement). Par ailleurs, ce dernier exclu le risque opérationnel non directement lié aux contrats d'assurance et le risque de contrepartie. La norme IFRS 17 ne fournit pas de méthode d'évaluation du RA mais fournit cependant certaines caractéristiques qu'il doit respecter, à savoir :

- Le RA est plus fortement impacté par l'intensité du risque que par sa fréquence ;
- Le RA croît avec la durée du risque ;
- Le RA croît avec la volatilité du risque ;
- Le RA croît avec l'incertitude sur les risques mesurés.

La norme IFRS 17 est une norme "principe-based" ; ce qui prime c'est la place laissée à l'interprétation. L'approximation n'est donc plus obligatoire dans les processus de calcul. L'entité doit indiquer la méthode appliquée et également le niveau de confiance choisi pour les calculs. C'est pourquoi, compte tenu des différentes réunions et du consensus des assureurs, l'entité a souhaité tester ses calculs de Risk Adjustment pour un niveau de quantile à 80%. J'ai donc décidé de présenter les résultats en utilisant la fonction  $\rho(\sigma)$  calibrée selon un niveau de quantile à 80% et une approximation  $N_{0,8}\sigma$  de cette dernière.

La formule standard a l'avantage d'être assez simple à mettre en place compte tenu du peu d'inputs nécessaires impliquant ainsi un coût faible pour les calculs. Cependant, cette méthode est par définition commune à l'ensemble des acteurs du marché. Elle ne permet donc pas d'incorporer correctement le profil de risque de chacun des assureurs. C'est en suivant cette logique que la méthode des paramètres USP apparaît comme un excellent compromis entre prise en compte suffisante du risque de l'entité et facilité de mise en place.

### Méthode utilisée

La calibration des USP peut s'effectuer sur les risques de prime et réserves, de révision et ce, pour les garanties vie, non-vie et santé. Cette méthode consiste à substituer dans le calcul du RA et du SCR un ensemble de paramètres par des paramètres propres à l'entreprise communément appelés « paramètres USP ».

L'objectif principal de cette méthode est de réduire l'immobilisation en capital pour l'assureur et ainsi favoriser l'investissement par exemple. En prenant deux entreprises distinctes  $E_1$  et  $E_2$  ayant des profils de risques  $P_1$  et  $P_2$  tel que  $m(P_1) > m(P_2)$  pour une certaine mesure de l'écart du profil de risque par rapport au marché, alors, l'utilisation de la formule standard sera moins bénéfique pour  $E_1$  qu'elle ne l'est pour  $E_2$ . Ainsi,  $E_1$  aura donc tout intérêt à opter pour une utilisation de la méthode des USP.

Toutes les entités ne sont pas éligibles à une utilisation de la méthode des USP. L'entreprise doit déposer un dossier à l'ACPR pour obtenir son approbation. Ce dossier doit contenir de nombreux éléments tels que la date, la liste des paramètres à remplacer, les résultats des paramètres propres à l'entreprise, le respect des contraintes sur les données qui doivent être appropriées, complètes et précises, et la preuve que la méthode est optimale.

La méthode des USP est utilisée selon une segmentation en lignes d'activités « Lob ». Autrement dit, on aura autant de paramètres USP que de Lobs éligibles. L'autorité européenne des assurances, l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority* en Anglais) a intégré un facteur de crédibilité  $c$  dans le calcul des USP pour prendre en compte la longueur de l'historique de l'entité. Le modèle est le suivant :

$$\sigma_{LoB,USP} = c \cdot \sigma_{U,LoB} + (1 - c) \cdot \sigma_{M,LoB}$$

Pour les branches RC automobile, RC générale, crédit et cautionnement :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 et plus
<b>C</b>	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

Pour les autres branches :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10 et plus
<b>C</b>	34%	51%	67%	81%	92%	100%

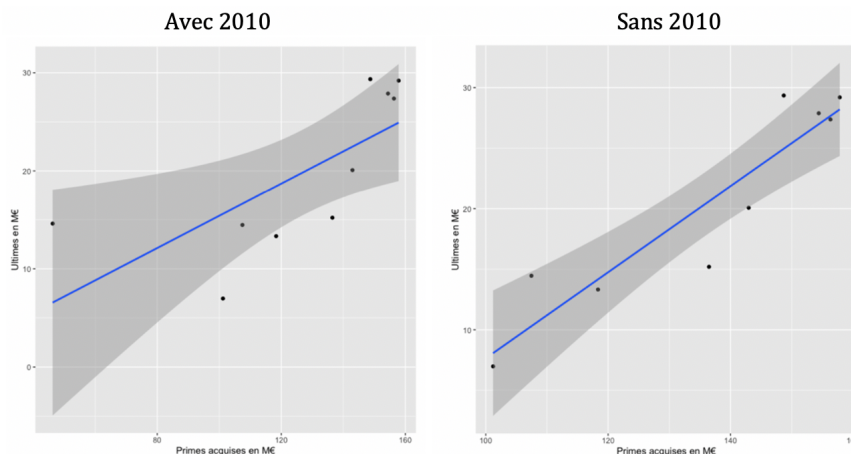
Pour calculer les USP, comme dans le cas de la formule standard, il faut étudier d'une part la volatilité pour le risque de prime et d'autre part pour le risque de réserve. Pour ce mémoire, nous avons travaillé sur la ligne d'activité assurance pertes pécuniaires diverses qui correspond à la Lob la plus coûteuse en capital réglementaire à détenir.

## Modélisation du risque de prime

Le risque de prime est le risque associé à une mauvaise tarification d'un assureur. Pour ce risque nous avons étudié une méthode unique proposée par l'EIOPA qui est la méthode du maximum de vraisemblance. Elle repose sur des hypothèses que l'on peut classer en deux grandes familles ; d'une part des hypothèses sur les données (fiabilité, historique suffisamment long, incorporation des charges dans les frais, ...) et d'autre part les hypothèses statistiques sur ces données permettant d'utiliser la méthode. On considèrera  $X_t$  les primes acquises pour l'année de surveillance  $t$  et  $Y_t$  les pertes agrégées (somme de prestations versées durant la première année de développement). Il convient ainsi de regarder les différentes hypothèses statistiques suivantes :

**$(H_1)$  : Pour une année de survenance et une ligne d'activité, les pertes agrégées  $Y_t$  sont proportionnelles aux primes acquises**

Pour tenter de valider l'hypothèse sur nos données, un statisticien serait tenté de modéliser le problème selon un modèle de régression simple avec un coefficient  $\beta_0$  nul de tel sorte que :  $Y_t = \beta X_t + \epsilon_t$ . Ce modèle nécessiterait de considérer les erreurs gaussiennes ce qui est impossible au vu de notre hypothèse de log-normalité sur les  $Y_t$ . Pour pallier ce problème, on peut donc simplement passer par la transformation  $Y \rightarrow \log(Y)$  car par définition une variable aléatoire suit une loi log-normale si la variable  $\log(Y)$  suit une loi normale de paramètres identiques. On a décidé de retirer 2010 qui représente une valeur aberrante et qui génère un biais dans la régression et donc dans les intervalles de confiance.

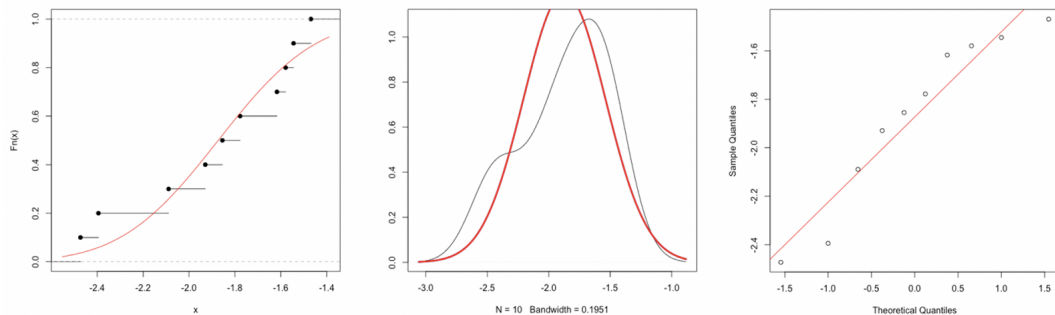


99,12% de la variabilité des primes acquises s'exprime par la transformation logarithmique des pertes agrégées. Des tests en amont, ont été réalisés pour vérifier la normalité des résidus (Q-Q plot, Test de Shapiro). On a obtenu une p-valeur

de 43%, ce qui signifie qu'au vu de nos données, on ne rejette pas l'hypothèse de normalité des résidus avec un risque de 5% de se tromper. Cette analyse est à prendre avec du recul compte tenu du faible nombre d'observations (10 années). Elle nous donne simplement une tendance pour l'instant.

**(H<sub>2</sub>) : Les pertes agrégées  $Y_t$  suivent une loi log-normale de paramètres  $\mu_t$  et  $\omega_t^2$**

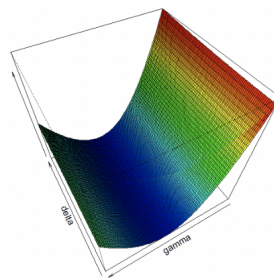
Pour cette hypothèse, on disposait seulement d'une réalisation pour chaque variable aléatoire. On a donc posé une hypothèse plus restrictive qui est que les paramètres de notre loi soient indépendants du temps, donc, des années de survenance (i.e.  $(\mu_t, \omega_t^2) \perp\!\!\!\perp t$ ). Pour pallier au problème de dépendance des  $Y_t$  nous avons travaillé sur la variable  $Q_t = \log(Z_t) = \log\left(\frac{Y_t}{X_t}\right)$ . En montrant que  $Q_t \sim \mathcal{N}(\mu - \log(X_t), \omega^2)$  cela impliquera que  $Y_t \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$ .



Que ce soit par des méthodes graphiques (méthode de la fonction de répartition, de la fonction de densité, et du Q-Q plot), ou théoriques (tests d'hypothèses sur la fonction de répartition empirique), on voit bien qu'on ne rejette pas l'hypothèse de log-normalité de nos pertes agrégées au risque  $\alpha = 5\%$ .

**(H<sub>3</sub>) : La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée pour l'estimation des paramètres du modèle**

Grâce à l'algorithme d'optimisation utilisé, on obtient bien un couple de paramètres  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  permettant de minimiser la log-vraisemblance. On voit bien graphiquement que la log-vraisemblance est une fonction convexe et qu'il existe un minimum global atteint en  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ .



Sachant que les hypothèses ont été vérifiées, nous avons été en mesure de calculer

les paramètres USP. La formule suivante permet de déterminer l'écart-type propre à l'entreprise pour le segment s :

$$\sigma_{prem,s,USP} = c \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \cdot \sigma_{(prem,s)}$$

On obtient le couple d'estimateurs  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  en minimisant la fonction suivante :

$$(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \arg \min_{(\delta, \gamma)} \sum_{t=1}^T \pi_t(\delta, \gamma) \left( \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\delta, \gamma))$$

En utilisant notre algorithme d'optimisation, on obtient les paramètres suivants :

	INCOME PROTECTION INSURANCE	MOTOR VEHICLE LIABILITY INSURANCE	OTHER MOTO INSURANCE	FIRE AND OTHER DAMAGE TO PROPERTY	GENERAL LIABILITY INSURANCE	LEGAL EXPENSES INSURANCE	MISCELLANEOUS FINANCIAL LOSS
EIOPA (MARCHE)	8,5%	10%	8%	8%	14%	8,3%	13%
USP : 2011-2019	7,5%	9,18%	8,47%	6,94%	18%	10,17%	5,79%
USP : 2010 – 2019	12,4%	10,02%	8,3%	8,16%	25,54%	10,45%	5,16%

## Modélisation du risque de réserve

Le risque de réserve correspond à un risque de sous-provisionnement, donc d'une mauvaise estimation de la sinistralité. Autrement dit, il s'agit du risque lié à l'incertitude concernant la capacité de l'entité à appréhender convenablement la charge ultime de la sinistralité passée. Si un assureur estime mal sa sinistralité, il sera moins disposé à y faire face puisque ses provisions auront été insuffisantes. On visualise bien l'impact direct sur le ratio de solvabilité  $\frac{NAV}{SCR}$ .

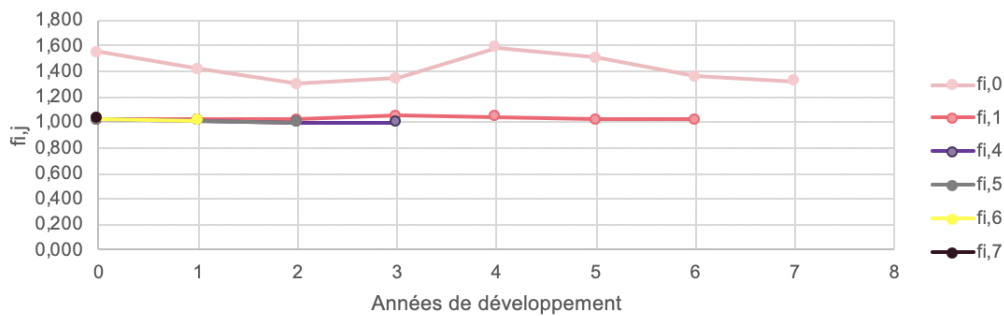
Pour ce risque nous avons dû construire notre input qui ici était le montant cumulé des paiements effectués pendant  $j$  années pour tous les sinistres survenus l'année  $i$ , soit  $C_{i,j}$ . Comme pour le risque de prime, il a fallu vérifier différentes hypothèses sur les données (avoir un minimum de 5 années d'historiques, inclure les frais de gestion dans les paiements, disposer d'un nombre d'années d'accident consécutives au moins égal au nombre d'années de développement consécutive de la première année d'accident, ...).

La méthode retenue a été la méthode de Merz et Wüthrich qui repose sur une approche en triangle de règlement net basée sur les études des auteurs Merz et Wüthrich. Cette méthode est basée sur une vision à 1 an de la méthode de Mack permettant ainsi une application directe pour le risque de réserve. Il convient une nouvelle fois de voir les différentes hypothèses statistiques sous-jacentes. Une nouvelle fois, nous allons présenter les différentes hypothèses du modèle :

**(H<sub>1</sub>) : Les montants de sinistres cumulés  $C_{i,j}$  sont indépendants pour les différentes années de survenance**

Pour modéliser de manière rigoureuse cette hypothèse, on décide de travailler sur le rapport  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ . Ce dernier permet de comparer l'évolution pour une année de survenance fixée l'évolution des paiements cumulés sur deux années de développement consécutives. Mathématiquement, cette hypothèse revient à montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}\right] = f_j$$



Graphiquement, on ne perçoit aucune tendance dans l'évolution de ces rapports, et ce, pour chaque année de développement  $j = 1, \dots, J$ .

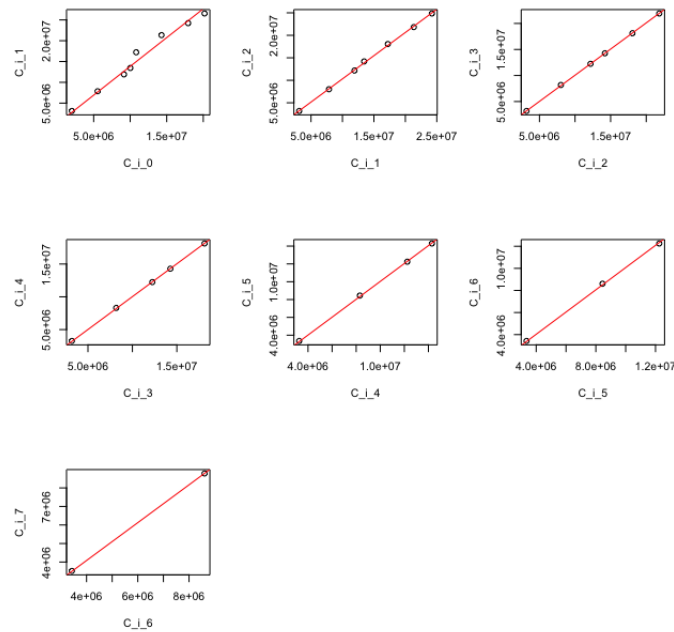
Une analyse graphique doit être accompagnée d'une analyse fondamentale, c'est pourquoi, en s'inspirant de l'ouvrage de Thomas MACK « *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates* », nous avons pu utiliser sa méthode permettant de tester cette indépendance avec un certain risque d'erreur. La méthode consiste à déterminer dans un premier temps les facteurs de développement pour ensuite les comparer avec la médiane de chaque colonne générée. Nous pouvons donc comptabiliser le nombre de facteurs de développement étant supérieurs et inférieurs à la médiane. On reconnaît bien une répétition de Bernoulli avec 2 états possibles  $\Omega = \{\omega_L; \omega_S\}$  lorsqu'on est supérieur à la médiane « *Larger* » et inférieur « *Slower* ». On obtient donc une loi binomiale qui s'approxime par une loi normale (TCL). Ainsi, nous pouvons construire un intervalle de confiance. On a conclu que notre statistique de test  $Z = \sum_d \min(Z_d; L_d)$  appartenait aux bornes et donc que l'on ne rejetait pas l'hypothèse selon laquelle les montants des sinistres cumulés  $C_{i,j}$  sont indépendants pour les différentes années de survenance. L'application numérique a donnée :  $Z(\omega) = 6 \in [5, 4632; 14, 1263]$ .

**(H<sub>2</sub>) : La valeur attendue du montant de sinistres cumulé d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente**

Mathématiquement, cela se modélise comme ceci :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = f_j \cdot C_{i,j}$$

On voit bien que cela revient à montrer que les couples de points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$  doivent être alignés sur une droite issue de l'origine et de pente égale à  $f_j$ . Une condition nécessaire est de vérifier que les facteurs de développement  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  et  $\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$  soient décorrélés. Pour ce faire, Mack préconise un test de Spearman qui nous a permis d'obtenir que  $T(\omega) = 0,16 \in [-0,43; 0,43]$  en utilisant un quantile de la loi normale à 95% de confiance. Ensuite, nous avons donc réalisé une régression linéaire simple définie comme suit :  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \epsilon_i$ . Une nouvelle fois, le nombre de données est à prendre en compte dans cette analyse. On voit bien graphiquement ci-dessous que les couples de points  $(C_{i,j+1}; C_{i,j})$  sont bien alignés sur les différentes droites de régression de pente  $f_j$ .



**$(H_3)$  : La variance du montant de sinistres cumulé d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente**

Pour cette hypothèse, nous souhaitons montrer que :

$$\mathbb{V}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j}$$

Pour ce faire, il a fallu dans un premier temps calculer les différents résidus  $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j} f_j}{\sqrt{C_{i,j}}}$ . La méthode ici est essentiellement graphique (L'auteur intéressé pourra se référer au polycopié d'Arnaud Guyader sur la régression linéaire). L'objectif est donc de tracer les couples de points  $(C_{i,j}; r_{i,j})$  et de voir si une structure quelconque apparaît (trend, cône, vague, ...). Maintenant que les hypothèses ont été vérifiées, nous pouvons calculer l'écart-type propre à l'entreprise en non-vie ou en santé non-SLT et ce, pour une ligne d'activité souhaitée :

$$\sigma_{(res,LoB,USP)} = c \cdot \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I} - \hat{C}_{i,I-i})} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,LoB)}$$



On voit bien que  $\sigma_{(res,LoB,USP)} = f(MSEP)$  où la MSEP (Erreur Quadratique Moyenne (EQM)) est un moyen utilisé en statistiques inférentielles pour justifier la qualité d'un estimateur. On a également :

$$MSE(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{E}[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | \mathcal{F}] = MSEP(\hat{R}_i)$$

Un calcul assez chronophage nous a permis finalement d'obtenir la formule suivante que l'on retrouve dans la directive S2 :

$$MSEP = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I}^{(I)})^2 \cdot \frac{\hat{Q}_{I-i}}{C_{i,I-i}} + \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} \cdot \left( \frac{\hat{Q}_{I-i}}{S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{Q}_j}{S_j^{(I)}} \right)$$

Pour ce calcul il a fallu constituer les deux ensembles suivants :

$$\mathcal{D}_I := \{C_{i,j} | i + j \leq I \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I$$

$$\mathcal{D}_{I+1} := \{C_{i,j} | i + j \leq I + 1 \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I+1$$

On obtient ainsi les paramètres USP suivants pour le risque de réserve :

	INCOME PROTECTION INSURANCE	MOTOR VEHICLE LIABILITY INSURANCE	OTHER MOTO INSURANCE	FIRE AND OTHER DAMAGE TO PROPERTY	GENERAL LIABILITY INSURANCE	MISCELLANEOUS FINANCIAL LOSS
EIOPA (MARCHE)	14%	9%	8%	10%	11%	20%
USP : 2010 – 2019	19,68%	11,58%	13,74%	9,14%	12,55%	13,96%

## Tests de sensibilités sur les paramètres USP

Dans cette partie, nous cherchons à savoir si nos paramètres USP étaient stables à la suite de certaines fluctuations. Par définition, nous savons que les paramètres propres à l'entreprise sont impactés par le facteur de crédibilité. Nous avons premièrement décidé de tester leur stabilité par des méthodes ascendantes et descendantes. L'objectif est assez simple : dans le cas de la méthode ascendante (resp. descendante) on lance dans un premier temps l'algorithme sur l'historique complet et ensuite on retire une année en commençant par la dernière (resp. la première).

Le deuxième test de sensibilité que nous avons utilisé consiste à appliquer les chocs ORSA sur la sinistralité. Pour l'ORSA 2019, 2 scénarios distincts ont été donnés : le premier correspond à une augmentation de 4,3% de la charge de sinistralité à l'ultime et le second correspond à une augmentation de 8,5%.

Éléments / Années d'historique	10	9	8	7	6	5
Facteur de crédibilité	100%	92%	81%	67%	51%	34%
Paramètres de l'entreprise (Méthode descendante)	5,16%	5,25%	5,07%	4,61%	3,25%	3,01%
Paramètres USP (Méthode descendante)	5,16%	5,87%	6,58%	7,38%	8,03%	9,6%
Paramètres de l'entreprise (Méthode ascendante)	5,16%	5,17%	3,81%	3,64%	3,83%	2,45%
Paramètres USP (Méthode ascendante)	5,16%	5,79%	5,56%	6,73%	8,32%	9,41%

Paramètres USP / Scénarios	Scénario normal : Sans Stress	Scénario 1 : Appétit pour le risque (+4,3% de sinistralité à l'ultime)	Scénario 2 : Stress de sinistralité (+8,5% de sinistralité à l'ultime)
Paramètres USP	5,16%	5,26%	5,37%

Nous pouvons donc réinjecter nos paramètres dans la formule standard et ainsi déterminer un montant de SCR et de RA pour les niveaux de quantiles associés :

	Formule standard	Paramètres USP	Évolution		Paramètres USP avec la fonction $p(\sigma)$	Paramètres USP avec la proxy $p(\sigma) \approx N_{0,8}\sigma$	Delta généré par la proxy	Formule standard
SCR P&R NL	166,5M	145,3M	<b>-12,69%</b>	RA P&R NL	40,3M	40,7M	<b>+1,17%</b>	46,1M
SCR souscription NL	191,6M	171,7M	<b>-10,39%</b>	RA souscription NL	82,3M	82,6M	<b>+0,39%</b>	86,3M
SCR P&R santé NL	41,7M	43,8M	<b>+5,12%</b>	RA P&R Santé NL	16,4M	16,9M	<b>+3,23%</b>	11,5M
SCR souscription santé non-SLT	42M	44,1M	<b>+5,05%</b>	RA souscription Santé non-SLT	17,1M	17,6M	<b>+2,98%</b>	12,4M

## Conclusion

Par rapport à son évaluation en formule standard à 86,3M le RA souscription non-vie est passé à 82,3M avec la méthode des USP, soit une baisse de 4,63%. Le SCR souscription non-vie, quant à lui est passé de 191,6M à 171,7M ce qui correspond à une diminution de 10,39%. Cette méthode requiert l'approbation de l'autorité de contrôle. À ce jour, aucun dossier n'a été présenté à l'autorité de contrôle, mais, dans la continuité de ces travaux, Sogessur pourrait être en mesure de le faire et ainsi utiliser cette méthode pour ses calculs d'exigence en capital et d'ajustement pour risque en assurance non-vie. . .

---

# Synthesis

---

## Context

The various economic and financial crises have raised a definite problem : the risk profile of each entity is not properly incorporated into the regulatory calculation processes. It was realized that banks, insurers and reinsurers did not have sufficient capital to avoid a risk of default. While the causes of major crises are sometimes debated, the need to integrate an ERM (Enterprise Risk Management) approach appears to be unavoidable.

In the continuity of the Bâle 2 reforms for the banking sector in 2008, the insurance world also had to be supervised. Thus, the Solvency 1 directive is replaced on January 1, 2016 by a new European directive that applies to all insurance companies in the member countries of the European Union. This new directive is called Solvency 2.

Several changes appear in this new balance sheet. Assets are now valued at market value and not at historical value as was the case under Solvency 1. In addition, the new capital requirements (SCR, MCR) allow to better take into account the different risks of the entities. The Solvency II directive marked a radical change for insurers and reinsurers.

At the same time, the IFRS standards developed by the IASB aim to standardize the presentation of accounting data exchanged internationally. IFRS 4 *Insurance contracts*, introduced in 2004, has emerged as a means of specifying financial information for insurance contracts. Although useful, this standard has proved to be rather limited in that it creates a mismatch between liabilities on the liabilities side and cash flows on the assets side. This major flaw contributed to the development of IFRS 17, which must be applied as of January 1, 2023 for all insurance companies.

IFRS 17 again marks a major change in the way insurers' liabilities are accounted for : Technical provisions as defined under Solvency 2 will now consist of the Best Estimate of liabilities and a risk adjustment. In non-life insurance, the provision for claims payable represents the largest fraction, i.e. on average more than 80% of the provisions for non-life insurers. It is therefore necessary to evaluate them

properly so that insurers can honor their commitments.

The objective of this thesis was therefore to design a calculation method for both the SCR under Solvency 2 and the RA under IFRS 17. Currently, Sogessur, Société Générale's property and casualty insurance company, determines its SCR in standard formula under the addactis Modelling software. This formula is globally based on the product between a  $\rho(\sigma)$  function which is calibrated to be equivalent to a VaR(99.5%) and a global (aggregated) volume of premium and reserve of the company. A full series development can easily show that  $\rho(\sigma) \approx 3\sigma$  when  $\sigma \rightarrow 0$ .

$$SCR_{PR} = 3\sigma \times V$$

### **Risk Adjustment (RA)**

The risk adjustment reflects the compensation required to support the uncertainty of future cash flows arising from non-financial risks. Financial risk is generally reflected in interest rates for the calculation of the best estimate.

Using Appendix A of IFRS 17, a non-financial risk is defined as the risk, other than a financial risk, transferred from a contract to the issuer. This definition is reinforced by paragraph B8, which explains that any risk arising from non-financial variables are non-financial risks. We were also able to define the scope of application by recalling that the RA concerned insurance risks, fees, termination, surrender and operational risk directly related to contracts (pricing errors, provisioning errors). In addition, the latter excluded operational risk not directly related to insurance contracts and counterparty risk. IFRS 17 does not provide a method for evaluating RA but does provide certain characteristics that it must comply with, namely :

- RA is more strongly impacted by the intensity of the risk than by its frequency ; ;
- RA increases with the duration of the risk ;
- RA increases with the volatility of the risk ;
- RA increases with the uncertainty of the risks measured.

IFRS 17 is a "principle-based" standard ; what is important is the room for interpretation. Approximation is therefore no longer mandatory in the calculation process. The entity must indicate the method applied and also the level of confidence chosen for the calculations. This is why, taking into account the various meetings and the consensus of the insurers, the entity wished to test its Risk Adjustment calculations for a level of quantile at 80%. I therefore decided to present the results using the  $\rho(\sigma)$  function calibrated to an 80% level of quantile and an approximation  $N_{0.8}.\sigma$  of the latter.

The standard formula has the advantage of being fairly simple to implement given the few inputs required, thus implying a low cost for the calculations. However, this method is by definition common to all market players. It therefore does not allow the risk profile of each insurer to be correctly incorporated. It is by following this logic that the USP parameter method appears to be an excellent compromise between taking sufficient account of the entity's risk and ease of implementation.

## Method used

The calibration of USPs can be performed on premium and reserve risks, revision risks and this, for life, non-life and health guarantees. This method consists in substituting a set of parameters in the calculation of the RA and the SCR by company-specific parameters commonly called "USP parameters".

The main objective of this method is to reduce the capital immobilization for the insurer and thus promote investment for example. By taking two separate companies  $E_1$  and  $E_2$  with risk profiles  $P_1$  and  $P_2$  such that  $m(P_1) > m(P_2)$  for some measure of the deviation of the risk profile from the market, then using the standard formula will be less beneficial for  $E_1$  than it is for  $E_2$ . Thus,  $E_1$  will be better off using the USP method.

Not all entities are eligible to use the USP method. The company must submit a file to the ACPR for approval. This submission must contain numerous elements such as date, list of parameters to be replaced, results of company-specific parameters, compliance with data constraints that must be appropriate, complete and accurate, and evidence that the method is optimal.

The USP method is used according to a segmentation into "Lob" lines of business. In other words, there will be as many USP parameters as there are eligible Lobs. The European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) has integrated a credibility factor  $c$  in the calculation of USPs to take into account the length of the entity's history. The model is as follows :

$$\sigma_{LoB,USP} = c \cdot \sigma_{U,LoB} + (1 - c) \cdot \sigma_{M,LoB}$$

For the automobile liability, general liability, credit and surety branches :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 et plus
<b>c</b>	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

For the other branches :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10 et plus
<b>c</b>	34%	51%	67%	81%	92%	100%

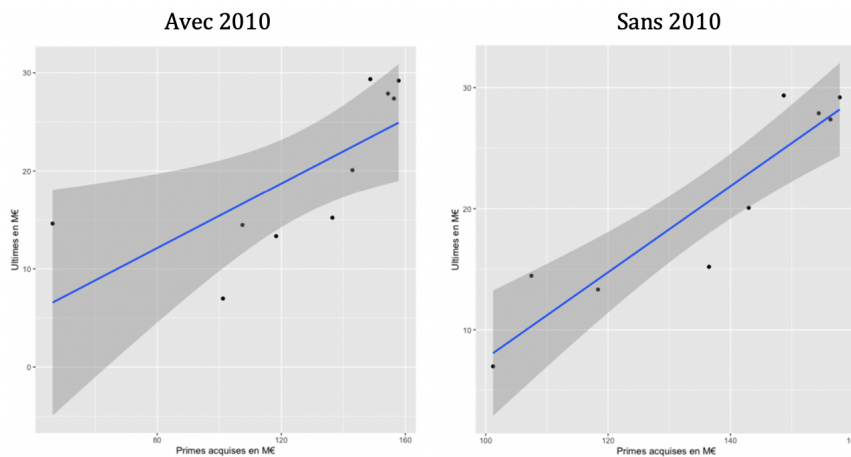
To calculate the USPs, as in the case of the standard formula, the volatility for the premium risk on the one hand and for the reserve risk on the other hand must be studied. For this paper, we have worked on the line of business of miscellaneous pecuniary loss insurance, which corresponds to the most expensive Lob in regulatory capital to hold.

## Modeling premium risk

Premium risk is the risk associated with an insurer's incorrect pricing. For this risk we have studied a unique method proposed by EIOPA which is the maximum likelihood method. It is based on hypotheses that can be classified into two main families; on the one hand, hypotheses on the data (reliability, sufficiently long history, incorporation of charges in the fees, ...) and on the other hand, statistical hypotheses on these data allowing to use the method. We will consider  $X_t$  the earned premiums for the year of occurrence  $t$  and  $Y_t$  the aggregated losses (sum of benefits paid during the first year of development). The following different statistical assumptions should therefore be considered :

**$(H_1)$  : For a year of occurrence and a line of business, the aggregate losses  $Y_t$  are proportional to the premiums earned**

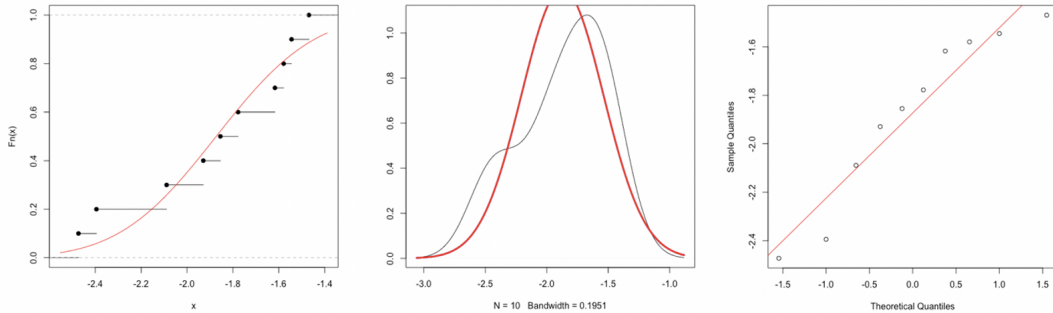
To try to validate the hypothesis on our data, a statistician would be tempted to model the problem using a simple regression model with a coefficient  $\beta_0$  of zero such that :  $Y_t = \beta X_t + \epsilon_t$ . This model would require to consider Gaussian errors, which is impossible in view of our hypothesis of log-normality on  $Y_t$ . To overcome this problem, we can simply use the  $Y \rightarrow \log(Y)$  transformation because by definition a random variable follows a log-normal law if the variable  $\log(Y)$  follows a normal law with identical parameters. We decided to remove 2010 which represents an outlier and which generates a bias in the regression and therefore in the confidence intervals.



99.12% of the variability of earned premiums is expressed by the logarithmic transformation of aggregated losses. Upstream tests were carried out to verify the normality of the residuals (Q-Q plot, Shapiro test). We obtained a p-value of 43%, which means that in view of our data, we do not reject the hypothesis of normality of the residuals with a 5% risk of being wrong. This analysis should be taken with hindsight given the small number of observations (10 years). It simply gives us a trend for the moment.

**(H<sub>2</sub>) : The aggregated losses  $Y_t$  follow a log-normal distribution with parameters  $\mu_t$  and  $\omega_t^2$**

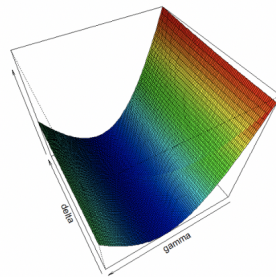
For this hypothesis, only one realization was available for each random variable. A more restrictive hypothesis was therefore put forward, which is that the parameters of our distribution are independent of time, that is, of the years of occurrence (i.e.  $(\mu_t, \omega_t^2) \perp\!\!\!\perp t$ ). To mitigate the problem of dependence of the  $Y_t$  we worked on the variable  $Q_t = \log(Z_t) = \log\left(\frac{Y_t}{X_t}\right)$ . By showing that  $Q_t \sim \mathcal{N}(\mu - \log(X_t), \omega^2)$  this will imply that  $Y_t \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$ .



Whether by graphical methods (distribution function method, density function method, and Q-Q plot method), or theoretical methods (hypothesis tests on the empirical distribution function), it is clear that we do not reject the hypothesis of log-normality of our aggregated losses at risk  $\alpha = 5\%$ .

**(H<sub>3</sub>) : The maximum likelihood method is adapted for the estimation of the model parameters**

Thanks to the optimization algorithm used, we obtain a pair of parameters  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  allowing to minimize the log-likelihood. We can see graphically that the log-likelihood is a convex function and that there is a global minimum reached in  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ .



Knowing that the assumptions have been tested, we were able to calculate the USP parameters. The following formula is used to determine the firm-specific standard deviation for segment  $s$  :

$$\sigma_{prem,s,USP} = c \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \cdot \sigma_{(prem,s)}$$

The pair of estimators  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  is obtained by minimizing the following function :



$$(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \arg \min_{(\delta, \gamma)} \sum_{t=1}^T \pi_t(\delta, \gamma) \left( \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\delta, \gamma))$$

Using our optimization algorithm, we obtain the following parameters :

	INCOME PROTECTION INSURANCE	MOTOR VEHICLE LIABILITY INSURANCE	OTHER MOTO INSURANCE	FIRE AND OTHER DAMAGE TO PROPERTY	GENERAL LIABILITY INSURANCE	LEGAL EXPENSES INSURANCE	MISCELLANEOUS FINANCIAL LOSS
EIOPA (MARCHE)	8,5%	10%	8%	8%	14%	8,3%	13%
USP : 2011-2019	7,5%	9,18%	8,47%	6,94%	18%	10,17%	5,79%
USP : 2010 – 2019	12,4%	10,02%	8,3%	8,16%	25,54%	10 ,45%	5,16%

### Reserve risk modeling

The reserve risk corresponds to a risk of under-provisioning, and therefore of a poor estimate of the loss ratio. In other words, it is the risk related to the uncertainty concerning the entity's ability to properly apprehend the ultimate burden of past claims experience. If an insurer estimates its claims experience incorrectly, it will be less willing to deal with it since its reserves will have been insufficient. The direct impact on the solvency ratio  $\frac{NAV}{SCR}$  is clearly visible.

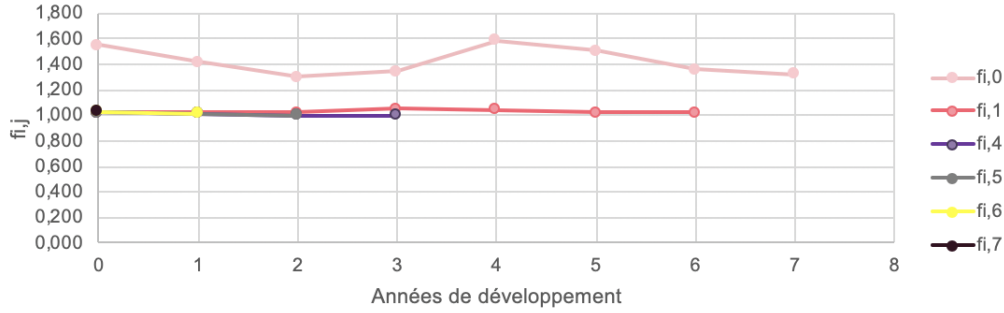
For this risk, we had to construct our input, which here was the cumulative amount of payments made during  $j$  years for all claims incurred in year  $i$ , i.e.  $C_{i,j}$ . As for the premium risk, we had to verify different assumptions on the data (having a minimum of 5 years of history, including management fees in the payments, having a number of consecutive accident years at least equal to the number of consecutive development years of the first accident year, ...).

The method chosen was the Merz and Wüthrich method, which is based on a triangle approach to net settlement based on the studies of authors Merz and Wüthrich. This method is based on a 1-year view of Mack's method allowing a direct application for reserve risk. Once again it is necessary to look at the different underlying statistical assumptions. Once again, we will present the different assumptions of the model :

**( $H_1$ ) : Accumulated claim amounts  $C_{i,j}$  are independent for the different years of occurrence**

To model this hypothesis rigorously, we decide to work on the  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  ratio. The latter allows to compare the evolution for a fixed year of occurrence with the evolution of cumulative payments over two consecutive years of development. Mathematically, this hypothesis amounts to showing that :

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}\right] = f_j$$



Graphically, there is no discernible trend in the evolution of these ratios for each year of development  $j = 1, \dots, J$ .

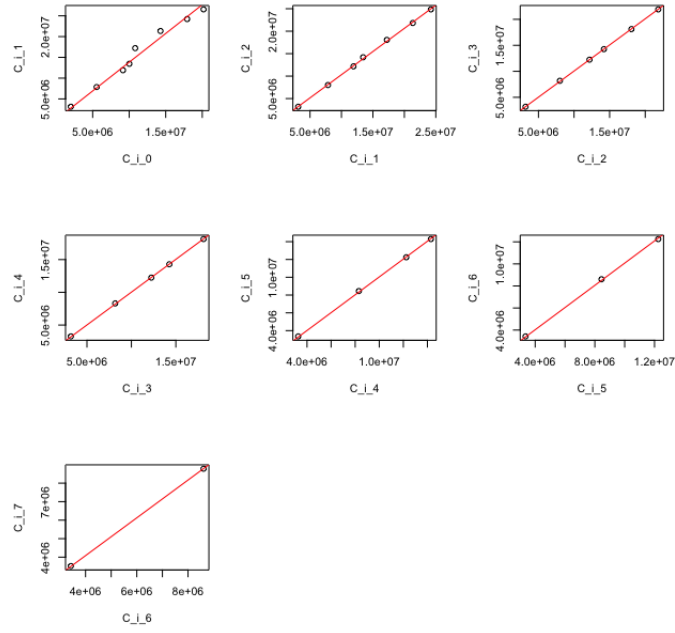
A graphical analysis must be followed by a fundamental analysis, which is why, inspired by Thomas MACK's book " *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*", we were able to use his method to test this independence with a certain risk of error. The method consists in first determining the development factors and then comparing them with the median of each generated column. We can therefore count the number of development factors being higher and lower than the median. One recognizes well a repetition of Bernoulli with 2 possible states  $\Omega = \{\omega_L; \omega_S\}$  when one is above the median " *Larger* " and below " *Slower* ". We thus obtain a binomial distribution which is approximated by a normal distribution (CLT). Thus, we can construct a confidence interval. We concluded that our test statistic  $Z = \sum_d \min(Z_d; L_d)$  belonged to the bounds and therefore that we did not reject the hypothesis that the amounts of cumulative claims  $C_{i,j}$  are independent for the different years of occurrence. The numerical application gave :  $Z(\omega) = 6 \in [5.4632; 14.1263]$ .

**(H<sub>2</sub>) : The expected value of the cumulative claim amount of a development year is proportional to the cumulative claim amount of the previous development year**

Mathematically, it is modeled like this :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = f_j \cdot C_{i,j}$$

It is clear that this is equivalent to showing that the pairs of points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$  must be aligned on a straight line coming from the origin and of slope equal to  $f_j$ . A necessary condition is to check that the development factors  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  and  $\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$  are decorrelated. To do this, Mack recommends a Spearman test which allowed us to obtain that  $T(\omega) = 0.16 \in [-0.43; 0.43]$  using a 95% confidence quantile of the normal distribution. Then we performed a simple linear regression defined as follows :  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \epsilon_i$ . Once again, the number of data is to be taken into account in this analysis. We can see graphically below that the pairs of points  $(C_{i,j+1}; C_{i,j})$  are well aligned on the different slope regression lines  $f_j$ .



**( $H_3$ ) : The variance in the cumulative claim amount of a development year is proportional to the cumulative claim amount of the previous development year**

For this hypothesis, we wish to show that :

$$\mathbb{V}[C_{i,j+1}|C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j}$$

In order to do this, it was first necessary to calculate the various residuals  $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j} \hat{f}_j}{\sqrt{C_{i,j}}}$ . The method here is essentially graphic (the interested author may refer to Arnaud Guyader's handout on linear regression). The objective is thus to trace the pairs of points  $(C_{i,j}; r_{i,j})$  and to see if any structure appears (trend, cone, wave, ...). Now that the hypotheses have been tested, we can calculate the firm-specific standard deviation in non-life or non-SLT health for a desired line of business :

$$\sigma_{(res,LoB,USP)} = c \cdot \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I} - \hat{C}_{i,I-i})} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,LoB)}$$

We can see that  $\sigma_{(res,LoB,USP)} = f(MSEP)$  where MSEP (Mean Square Error) is a means used in inferential statistics to justify the quality of an estimator. We also have :

$$MSE(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{E}[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | \mathcal{F}] = MSEP(\hat{R}_i)$$

A rather time-consuming calculation finally allowed us to obtain the following formula found in the S2 directive :

$$MSEP = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I}^{(I)})^2 \cdot \frac{\hat{Q}_{I-i}}{C_{i,I-i}} + \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} \cdot \left( \frac{\hat{Q}_{I-i}}{S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{Q}_j}{S_j^{(I)}} \right)$$

For this calculation it was necessary to constitute the two following sets :

$$\mathcal{D}_I := \{C_{i,j} | i + j \leq I \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I$$

$$\mathcal{D}_{I+1} := \{C_{i,j} | i + j \leq I + 1 \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I+1$$

This gives the following USP parameters for reserve risk :

	INCOME PROTECTION INSURANCE	MOTOR VEHICLE LIABILITY INSURANCE	OTHER MOTO INSURANCE	FIRE AND OTHER DAMAGE TO PROPERTY	GENERAL LIABILITY INSURANCE	MISCELLANEOUS FINANCIAL LOSS
EIOPA (MARCHE)	14%	9%	8%	10%	11%	20%
USP : 2010 – 2019	19,68%	11,58%	13,74%	9,14%	12,55%	13,96%

### Sensitivity tests on USP parameters

In this section, we investigate whether our USP parameters were stable following certain fluctuations. By definition, we know that company-specific parameters are impacted by the credibility factor. We first decided to test their stability using bottom-up and top-down methods. The objective is quite simple : in the case of the bottom-up (resp. top-down) method, we first run the algorithm on the complete history and then we remove one year starting with the last (resp. the first).

Éléments / Années d'historique	10	9	8	7	6	5
Facteur de crédibilité	100%	92%	81%	67%	51%	34%
Paramètres de l'entreprise (Méthode descendante)	5,16%	5,25%	5,07%	4,61%	3,25%	3,01%
Paramètres USP (Méthode descendante)	5,16%	5,87%	6,58%	7,38%	8,03%	9,6%
Paramètres de l'entreprise (Méthode ascendante)	5,16%	5,17%	3,81%	3,64%	3,83%	2,45%
Paramètres USP (Méthode ascendante)	5,16%	5,79%	5,56%	6,73%	8,32%	9,41%

The second sensitivity test we used is to apply ORSA shocks to the claims experience. For the ORSA 2019, 2 distinct scenarios were given : the first corresponds to a 4.3% increase in the ultimate claims load and the second corresponds to an 8.5% increase.

Paramètres USP / Scénarios	Scénario normal : Sans Stress	Scénario 1 : Appétit pour le risque (+4,3% de sinistralité à l'ultime)	Scénario 2 : Stress de sinistralité (+8,5% de sinistralité à l'ultime)
Paramètres USP	5,16%	5,26%	5,37%

We can therefore re-inject our parameters into the standard formula and thus determine an amount of SCR and AR for the associated quantum levels :

	Formule standard	Paramètres USP	Évolution		Paramètres USP avec la fonction $\rho(\sigma)$	Paramètres USP avec la proxy $\rho(\sigma) \approx N_{0,8}\sigma$	Delta généré par la proxy	Formule standard
SCR P&R NL	166,5M	145,3M	<b>-12,69%</b>	RA P&R NL	40,3M	40,7M	<b>+1,17%</b>	46,1M
SCR souscription NL	191,6M	171,7M	<b>-10,39%</b>	RA souscription NL	82,3M	82,6M	<b>+0,39%</b>	86,5M
SCR P&R santé NL	41,7M	43,8M	<b>+5,12%</b>	RA P&R Santé NL	16,4M	16,9M	<b>+3,23%</b>	11,5M
SCR souscription santé non-SLT	42M	44,1M	<b>+5,05%</b>	RA souscription Santé non-SLT	17,1M	17,6M	<b>+2,98%</b>	12,4M

## Conclusion

Compared to its standard valuation of €86.3m, the non-life subscription RA has decreased by 4.63% to €82.3m using the USP method. Non-life SCR increased from €191.6m to €171.7m, a decrease of 10.39%. This method requires the approval of the regulatory authority. To date, no file has been submitted to the supervisory authority, but, as a continuation of this work, Sogessur may be in a position to do so and thus use this method for its calculations of capital requirement and risk adjustment for non-life insurance..

# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon maître de stage, David MACE, chargé d'études actuarielles ALM chez SOGECAP. Un grand merci pour son accueil chaleureux au sein de l'entreprise ainsi que sa présence et ses précieux conseils tout au long de cette année. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a consacré, sa disponibilité, et cela, malgré un emploi du temps chargé et des conditions de travail particulières dues au COVID. David a été un vrai père pour moi durant cette aventure et je l'en remercie sincèrement.

Je remercie également vivement Frédéric DAEFFLER, responsable du pôle ALM pour son accueil chaleureux au sein de son équipe. Je lui suis fortement reconnaissant pour sa disponibilité, son écoute et son soutien au quotidien.

Je tiens également à remercier Édith BUCHET, Kévin DUBOURG et Delphine OPITZ pour leurs conseils avisés qui ont contribué à l'avancement de l'étude. Je tiens à les remercier d'avoir pris le temps de répondre à mes nombreuses questions et de m'expliquer de manière ludique des concepts parfois complexes.

Je souhaite également remercier tous les membres de l'équipe ALM pour leur accueil, gentillesse, et coopération tout au long de mon alternance. Chacun des membres de l'équipe a contribué au bon déroulement de mon alternance et à la réalisation de ce mémoire.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à toute l'équipe pédagogique de l'ISUP et notamment à Olivier WINTENBERGER, mon tuteur académique, pour son aide.

Enfin, je remercie particulièrement mes parents pour leur présence et précieux conseils tout au long de ces années ainsi que leur soutien inconditionnel. Si ce mémoire voit le jour c'est en partie grâce à vous.

---

# Table des matières

---

<b>Table des figures</b>	<b>26</b>
<b>Introduction</b>	<b>28</b>
<b>1 Contextualisation et description des objectifs de la norme IFRS 17</b>	<b>30</b>
1.1 Présentation des normes IFRS . . . . .	30
1.2 IFRS 4 : Un point de départ jugé insuffisant . . . . .	31
1.3 IFRS 17 : Vers une nouvelle norme comptable internationale . . . . .	32
1.3.1 Similitude et différence du cadre valorisation par rapport à S2	34
1.3.2 Niveau de regroupement des contrats d'assurance . . . . .	35
1.3.3 Évolution du passif au cours de la période de couverture . . . . .	36
1.3.4 Modèles de valorisation des contrats d'assurance . . . . .	36
1.3.4.1 Le modèle BBA . . . . .	38
<b>2 Le Risk Adjustment : Vers une approche en formule standard</b>	<b>40</b>
2.1 La directive Solvabilité II . . . . .	40
2.2 La vision Best Estimate . . . . .	44
2.3 Les exigences quantitatives concernant le niveau des fonds propres . . . . .	44
2.4 Le Risk Adjustment . . . . .	45
2.4.1 Définition et périmètre de risque propre au Risk Adjustment	45
2.4.2 Exigences de la norme sur l'ajustement pour risque . . . . .	46
2.4.3 Comparaison du Risk Adjustment et de la Risk Margin . . . . .	48
2.4.4 Démarches ERM pour le calcul d'un Risk Adjustment . . . . .	49
2.4.4.1 Contextualisation de la gestion des risques . . . . .	49
2.4.4.2 Mesure de risque cohérente . . . . .	50
2.5 Méthodologie de calcul du SCR transposable au RA . . . . .	52
2.5.1 Utilisation de la formule standard . . . . .	53
2.5.2 Le risque de Souscription Non-Vie . . . . .	54
2.5.3 Segmentation en ligne d'activité . . . . .	55
2.5.4 Approche par la formule standard : Calcul du Risk adjustment pour le risque de primes et de réserve . . . . .	56
2.5.4.1 Quelques rappels statistiques . . . . .	56
2.5.4.2 Conséquences directes sur la distribution des pertes	57
2.5.4.3 Calcul du Risk Adjustment : Les différentes étapes	58
2.6 Avantages et inconvénients de la formule standard . . . . .	64



<b>3</b>	<b>Les paramètres USP : Un bon compromis pour le calcul d'un RA</b>	<b>65</b>
3.1	Présentation de l'approche des Undertaking Specific Parameters (USP)	65
3.2	Conditions d'application et d'utilisation des paramètres USP	67
3.3	Calibrage et utilisation des paramètres USP	68
3.4	Modélisation statistique des USP	70
3.4.1	Volatilité pour le risque de prime	70
3.4.2	Volatilité pour le risque de réserve	75
<b>4</b>	<b>Application numérique des USP sur le portefeuille SOGESSUR</b>	<b>85</b>
4.1	(A.N) pour le risque de prime	86
4.1.1	Présentation des données	86
4.1.2	Processus de validation des hypothèses	86
4.1.3	Calcul des paramètres USP pour le risque de prime	96
4.2	(A.N) pour le risque de réserve	98
4.2.1	Présentation des données	98
4.2.2	Processus de validation des hypothèses	99
4.2.3	Calcul des paramètres USP pour le risque de réserve	107
4.3	Tests de sensibilités sur les paramètres USP	109
4.4	Méthodes ascendante et descendante	109
4.5	Chocs ORSA sur la sinistralité	111
4.6	Injection des USP pour le calcul du SCR et du RA	112
4.7	Calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)	112
4.8	Calcul de l'ajustement pour risque (RA)	113
	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>
	<b>Annexes</b>	<b>118</b>

---

# Table des figures

---

1.1	Normes IAS et IFRS pour les sociétés d'assurance . . . . .	31
1.2	Dates clés pour l'application de la norme IFRS 17 . . . . .	33
1.3	Évolutions bilantielles entre S2 et IFRS 17 . . . . .	34
1.4	Niveaux de granularité autour des contrats . . . . .	35
1.5	Vie d'un groupe de contrat d'assurance . . . . .	36
1.6	Processus d'application des modèles . . . . .	37
1.7	Synthèse du modèle BBA . . . . .	39
1.8	Initialisation du modèle BBA . . . . .	39
2.1	Évolution des cotisations sur l'ensemble de l'assurance en France . . . . .	41
2.2	Du bilan S1 vers le bilan S2 . . . . .	42
2.3	Les 3 piliers de Solvabilité 2 . . . . .	43
2.4	Comparaison entre la Risk Margin et le Risk Adjustment . . . . .	48
2.5	Caractéristiques des mesures de risques possibles pour le calcul d'un RA . . . . .	51
2.6	Pieuvre des modules de risque, QIS 5 <i>Technical Specifications</i> . . . . .	53
2.7	Les différentes lignes d'activité en Non-Vie sous S2 . . . . .	55
2.8	Zoom sur le module de risque prime et réserve du risque de souscription non-vie . . . . .	56
2.9	Évolution de la fonction Rho sur des petites valeurs de sigma . . . . .	59
2.10	Écarts-types pour le sous module risque de primes et de réserve en non-vie . . . . .	62
2.11	Revue 2020 : Nouveaux écart-types pour le sous module risque de primes et de réserve en non-vie . . . . .	63
2.12	matrice des corrélations . . . . .	64
3.1	Entre prise en compte du risque et facilité de mise en place . . . . .	65
3.2	Éligibilité sur l'utilisation des USP . . . . .	66
3.3	Étapes pour le calcul de l'écart-type du risque de P&R . . . . .	69
3.4	Triangle de développement avec $I=J$ . . . . .	79
4.1	Données pour le risque de prime avec un historique de 10 ans . . . . .	86
4.2	Nuage de points entre les pertes et les primes acquises . . . . .	87
4.3	Nuage de points avec retrait de l'année de survenance 2010 . . . . .	88
4.4	GLM sur réponse Log-Normale . . . . .	89
4.5	Régression sur transformation logarithmique . . . . .	89

4.6	Normalité des résidus . . . . .	90
4.7	Test de Shapiro . . . . .	90
4.8	Méthode de la fonction de répartition . . . . .	93
4.9	Méthode de la fonction de densité . . . . .	93
4.10	Méthode du Q-Q plot . . . . .	94
4.11	Outputs : Tests de normalité . . . . .	95
4.12	Rappel : Ecart-type de marché pour le risque de prime . . . . .	96
4.13	Paramètres USP pour le segment pertes pécuniaires diverses . . . . .	97
4.14	Récapitulatif sur la validation des hypothèses concernant le risque de prime . . . . .	97
4.15	Paramètres USP pour le risque de prime . . . . .	98
4.16	Données pour le risque de réserve . . . . .	99
4.17	Méthode graphique . . . . .	100
4.18	Étape 1 . . . . .	100
4.19	Étape 2 . . . . .	101
4.20	Étape 3 . . . . .	101
4.21	Étape 5 . . . . .	102
4.22	Étape 1 : Tableau des $F_k$ . . . . .	103
4.23	Étape 2 . . . . .	103
4.24	Calcul des $T_k$ . . . . .	103
4.25	Régressions linéaires . . . . .	105
4.26	Nuage de points des couples $(C_{i,j}, r_{i,j})$ . . . . .	106
4.27	Récapitulatif sur la validation des hypothèses concernant le risque de réserve . . . . .	107
4.28	Rappel : Ecart-type de marché pour le risque de réserve . . . . .	108
4.29	Risque de réserve : Paramètre USP pour le segment pertes pécuniaires diverses . . . . .	108
4.30	Paramètres USP pour le risque de réserve . . . . .	109
4.31	Tests de sensibilités par méthodes ascendante et descendante . . . . .	110
4.32	Tests de sensibilités par les chocs ORSA . . . . .	111
4.33	Comparaison du SCR en formule standard et avec les USP sur les modules de risques P&R et Santé NL . . . . .	112
4.34	Comparaison du SCR agrégé entre la formule standard (FS) et l'utilisation des USP . . . . .	113
4.35	Comparaison du RA en formule standard et avec les USP pour un quantile à 80% . . . . .	113
4.36	Delta entre FS et méthode retenur des USP pour un quantile à 80% . . . . .	114
4.37	Comparaison du RA en formule standard et avec les USP pour un quantile à 70% . . . . .	114

---

# Introduction

---

Ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe ALM non vie dans le cadre d'une modification de la méthode de calcul du capital de solvabilité requis (SCR) et de l'ajustement pour risque (Risk adjustment ou RA). Sous Solvabilité II, les assureurs doivent détenir un certain niveau de capital pour minimiser leurs probabilité de ruine. Sous IFRS 17, norme qui entrera en vigueur au 1er janvier 2023, la structure du bilan a changé par rapport à S2. De nouvelles composantes sont à intégrées dans le bilan telles que le Current Estimate, la marge de service contractuelle (CSM) et l'ajustement pour risque (RA). Le mémoire portera essentiellement sur ces éléments que sont le SCR et le Risk Adjustment et plus particulièrement sur la manière de les calculer.

Dans un contexte où la gestion des risques devient de plus en plus importante, les entités doivent être en mesure de pouvoir identifier, évaluer, mesurer, catégoriser et traiter leurs risques. C'est dans cette logique qu'on retrouve la notion d'Enterprise Risk Management (ERM). Cela consiste en une évaluation du risque et en une réduction de la zone d'incertitude autour de ce dernier. Ce mémoire portera sur le module de risque Non-Vie et plus spécifiquement sur le sous module de risque primes et réserves car nous concernant, il s'agit du risque le plus important en terme de capital à immobiliser. De plus, ce sous module de risque est le seul qui soit éligible à une utilisation des paramètres USP.

Dans une première partie, les grands concepts de la norme IFRS 17 seront présentés permettant ainsi une comparaison avec les autres IFRS. Les notions de valorisation, de regroupement des contrats, d'évolution du passif et de modèles de valorisation y seront évoquées. Cette partie servira d'introduction à l'étude qui porte sur l'ajustement pour risque.

La seconde partie sera orientée autour de cette notion de Risk Adjustment qui reflète la compensation requise pour supporter l'incertitude des flux futurs de trésorerie provenant des risques non-financiers. Il faudra alors définir cette notion de *risques financiers* et la confronter avec la notion classique de *risques d'assurance non-financiers*. Il faudra également se positionner dans un contexte de gestion des risques en rappelant les grands points d'une démarche ERM. La fin de cette seconde partie sera plus théorique et présentera la méthodologie du calcul du SCR qui sera transposable à celle de l'ajustement pour risque. Cela est dû au fait que la

norme IFRS 17 est une norme *principle based*. Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer le capital de solvabilité requis (SCR) ainsi que l'ajustement pour risque (RA). Actuellement, SOGECAP<sup>1</sup> est en formule standard mais ce choix n'est vraisemblablement pas optimal en terme d'immobilisation de capital. Il apparaît nécessaire de trouver un compromis entre facilité de mise en place et prise en compte du risque de l'entité.

C'est en suivant la logique de cet équilibre que l'entité a décidé d'expérimenter la méthode des paramètres USP (Undertaking Specific Parameters) sur son portefeuille. La notion d'appétit pour le risque doit également être prise en considération ce qui impactera la manière dont les assureurs gèrent leurs risques. Les deux prochaines parties vont être tournées autour de la méthode des USP. Dans un premier temps, un cadre théorique sera instauré avec une présentation des différents concepts pour laisser place ensuite à une application numérique (A.N) sur le portefeuille SOGESSUR<sup>2</sup>. Au préalable et tout au long de cette étude, un travail devra être fait au niveau de la qualité, la fiabilité et la pertinence des données.

---

1. SOGECAP est la compagnie d'assurance vie et de capitalisation du groupe Société Générale

2. SOGESSUR, filiale à 100% de SOGECAP est la compagnie d'assurance dommages de Société Générale Assurances en France

# — Chapitre 1 —

---

## Contextualisation et description des objectifs de la norme IFRS 17

---

### 1.1 Présentation des normes IFRS

Les normes IFRS (International Financial Reporting Standards) sont élaborées par l'IASB (International Accounting Standards Board) dont le siège est à Londres. Ces normes d'informations financières sont destinées à standardiser la présentation des données comptables échangées au niveau international.

L'information comptable au sein de ces dernières doit être “ *pertinente, intelligible, fiable et d'une importance relative* ”. Ces normes sont en réalité plutôt des principes que des règles, ce qui offre aux entreprises un certain levier de pilotage. Parmi ces principes on peut citer les suivants :

- Une approche bilancielle
- La priorité accordée à la vision de l'investisseur (MCEV)
- La place importante accordée à l'interprétation
- L'importance du principe de prudence

Depuis 2002, les entreprises de l'Union européenne qui font appel à l'épargne publique doivent présenter leurs comptes financiers en utilisant la standardisation IFRS. Cette obligation s'applique aux sociétés cotées en bourse ainsi qu'aux grands groupes internationaux. Pour ce qui est des autres sociétés, aucune obligation n'est imposée. À noter que l'obligation d'appliquer ces nouvelles règles comptables reste du ressort de chaque État de l'UE.

Un des vecteurs ayant motivé la création de ce nouveau système de référence est qu'il existe actuellement un nombre jugé “trop” important de normes comptables nationales. Cette quantité abondante de contraintes rend ainsi difficile la comparaison des comptes par les analystes et investisseurs.

Les normes IFRS ont donc pour mission d'introduire des changements sur la souscription des risques et sur le plan comptable. Elles impactent l'ensemble de l'assurance que ce soit sur les branches d'assurance vie, non vie et réassurance.

IAS 1	Présentation des divers états financiers
IAS 19	Comptabilisation des avantages au personnel
IAS 32	Présentation des instruments financiers
IAS 39	Comptabilisation et évaluation des instruments financiers
IFRS 4	Contrats d'assurance
IFRS 19	Information sur les instruments financiers à présenter

FIGURE 1.1 – Normes IAS et IFRS pour les sociétés d'assurance

Il a donc fallu créer des normes facilitant l'harmonisation, à l'échelle mondiale, de l'information comptable pour que les documents fournis soient facilement accessibles pour les parties concernées.

## 1.2 IFRS 4 : Un point de départ jugé insuffisant

Introduite en 2004 comme norme transitoire et adoptée par l'UE le 29 décembre 2004, IFRS 4 avait pour objectif de *spécifier l'information financière* pour les contrats d'assurance émis ainsi que les différents traités de réassurance détenus par la compagnie d'assurance.

En ce qui concerne son champ d'application, une entité doit appliquer la norme IFRS 4 *Insurance Contracts* aux :

- **Contrats d'assurance** (traités de réassurance inclus) qu'elle émet et aux traités de réassurance qu'elle détient.
- **Instruments financiers** qu'elle émet auquel on ajoute un élément de participation discrétionnaire (proportion des bénéfices distribuée au delà des minima autorisés). Les informations relatives aux instruments financiers se situent dans IFRS 7, partie "Instruments financiers : Informations à fournir".

Cette norme était assez laxiste dans un sens puisqu'elle autorisait les assureurs à continuer de comptabiliser leurs contrats selon les normes locales avec *quelques* ajustements. Elle y rajoutait également quelques éléments dont le test de **Liability Adequacy test (LAT)** ou Test de suffisance du passif en Français.

Ce test est construit afin que l'assureur puisse évaluer à chaque date de reporting si ses passifs d'assurance sont suffisants. Une fois l'estimation actuelle des flux de trésorerie futurs réalisée, si la valeur comptable des passifs de l'assureur



(retranchée des frais d'acquisition différés et des immobilisations incorporelles) est insuffisante par rapport à la meilleure estimation, alors l'assureur doit comptabiliser cette insuffisance directement en résultat.

Avant adoption de la norme IFRS 4 *phase II*, la première phase de la norme IFRS 4 a permis la création du principe de **shadow accounting** ayant pour but de minimiser le décalage entre l'actif, valorisé en valeur de marché (selon la norme IAS 39), et le passif, généralement déterminé selon les normes locales en valeur historique. Ce décalage est un peu contre productif puisqu'il favorise l'exposition au risque d'inadéquation entre les engagements au passif et les flux de trésorerie à l'actif de l'entreprise.

La norme IFRS 4 « *phase I* » a engendré une inadéquation entre les engagements au passif et les flux de trésorerie à l'actif. En effet les actifs sont principalement évalués en juste valeur tandis que les passifs sont déterminés en normes locales faisant généralement référence à la valeur historique.

Il faut donc comprendre que cette norme a en quelque sorte été publiée comme une démarche à court terme afin de combler une insuffisance dans les normes IFRS. L'arrivée progressive de la norme IFRS 17 sur laquelle portera ce mémoire viendra donc remplacer la norme IFRS 4 qui nous le rappelons autorise les entreprises à utiliser les règles comptables nationales.

### **1.3 IFRS 17 : Vers une nouvelle norme comptable internationale**

À partir du 1<sup>er</sup> Janvier 2023, les compagnies d'assurance devront appliquer la norme IFRS 17 sur tous les contrats d'assurance et de réassurance présents en portefeuille. La définition de contrat d'assurance reste conforme au principe actuel IFRS 4 *Insurance Contracts* à savoir tout contrat dans lequel une partie (l'assureur) accepte un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un événement futur incertain spécifié (l'événement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police.

Publiée par l'*International Accounting Standards Board (IASB)*, cette norme internationale constitue un tournant dans la comptabilité des assureurs. Elle va intervenir dans la hiérarchie même des contrats d'assurance (i.e dans la façon dont ces contrats seront classés et comptabilisés dans les comptes). Le schéma ci-dessous permet de donner les dates clés :



FIGURE 1.2 – Dates clés pour l'application de la norme IFRS 17

Bien que la norme n'entre en vigueur qu'au 1<sup>er</sup> Janvier 2023, il est nécessaire d'effectuer la transition au plus tard au 1<sup>er</sup> Janvier 2021, et donc de produire un bilan d'ouverture sur base des comptes au 31 décembre 2020. En termes de périmètre, IFRS 17 est une norme internationale et sera de ce fait obligatoire en Europe pour les organismes assureurs cotés ou émettant de la dette cotée.

Les promesses de cette norme peuvent se classer en 4 enjeux majoritaires à savoir :

- La création de nouvelles méthodes de valorisation des contrats d'assurance
- Une homogénéisation internationale de la comptabilisation des contrats d'assurance
- Une favorisation de la cohérence avec les autres normes IFRS (IFRS9, IFRS7, IFRS4)
- Une valorisation des options et garanties des contrats d'assurance.

La norme IFRS 17 a pour but de définir des règles claires et cohérentes pour augmenter considérablement la comparabilité des états financiers et plus particulièrement celle des principaux indicateurs de performance.

Il existe une différence fondamentale entre les deux référentiels comptables dominants en Europe. Ces derniers sont fondés sur des démarches bien distinctes : Les French GAAP sont fondés selon une approche par les règles (*rules-based approach*) tandis que les IFRS, quant à eux, sont fondés selon une approche par les principes (*principles-based approach*). Ce qui prime dans cette dernière approche c'est la place majeure laissée à l'interprétation des normes offrant ainsi aux dirigeants un certain levier de pilotage dans les calculs et la gestion des résultats. Notons que ce niveau de pilotage de gestion est d'autant plus grand que la norme sera imprécise.

### 1.3.1 Similitude et différence du cadre valorisation par rapport à S2

Il est important de bien comprendre les nouveautés de cette norme par rapport à la directive Solvabilité II que nous présenterons dans une autre partie. Ainsi, ce tableau permet de pointer du doigt certaines de ces différences en termes de contexte et d'objectifs :

	Solvabilité II	IFRS 17
<b>Objectif</b>	Permet de vérifier la solidité patrimoniale et financière d'une société pour résister face à des chocs imprévus. Elle permet d'assurer la solvabilité de la société et ainsi de minimiser son risque de ruine à un an	Principalement utilisée par les investisseurs afin de comparer la performance des entreprises établies dans différents pays à travers les rapports financiers.
<b>Domaine d'application</b>	Elle s'applique à l'ensemble des activités d'une compagnie d'assurance. En revanche, si l'organisme n'a qu'un seul portefeuille en UC, IFRS 17 n'est pas applicable. Dans ce cas, cela relève de la directive Solvabilité II.	Elle s'applique à tous les contrats qui rentrent dans le cadre de la notion de <i>Contrats d'assurance</i> telle qu'elle est définie sous IFRS 4
<b>Approche</b>	Valeur actuelle	Valeur actuelle et suspension de bénéfice grâce à la création de la Marge de Service Contractuelle (CSM)
<b>Optique d'évaluation</b>	Orientation sur la problématique de gestion des risques (démarche ERM)	Orientation sur la problématique de gestion des contrats (cohortes, méthodes de valorisation...)

Dans cette nouvelle norme, les provisions techniques telles que nous les connaissons dans la norme Solvabilité II seront sous IFRS 17 basées à la fois sur :

- **Le Best Estimate des engagements**
- **Un Ajustement pour Risque (RA)** qui correspond à la couche de provision supplémentaire permettant de faire face à une déviation des hypothèses par rapport à la vision centrale.

Il existe également une différence fondamentale concernant la reconnaissance des profits futurs, et donc sur le niveau des fonds propres entre les référentiels IFRS 17 et Solvabilité II.

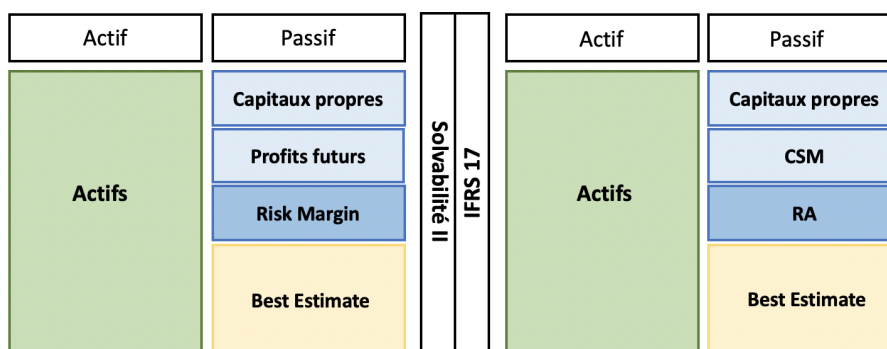


FIGURE 1.3 – Évolutions bilantielles entre S2 et IFRS 17

Comme le montre ces bilans, sous le référentiel Solvabilité II, il y a une reconnaissance immédiate des profits futurs dans les éléments éligibles. En revanche, pour l'approche IFRS 17, ces derniers sont mis en réserve au sein d'une provision dédiée, la **Marge de Service Contractuelle (CSM)**.

### 1.3.2 Niveau de regroupement des contrats d'assurance

La norme IFRS 17 stipule que l'entité doit être en mesure de pouvoir **identifier** les portefeuilles de contrats d'assurance. Pour ce faire, les portefeuilles doivent être constitués de contrats d'assurance qui comportent des risques similaires afin qu'ils puissent être gérés ensembles.

Elle va aussi au delà en disant que les contrats qui appartiennent à une même ligne de produits comportent les mêmes risques et doivent par conséquent faire partie d'un même portefeuille s'ils sont gérés ensemble.

Pour que cette agrégation ait bien lieu, il est nécessaire que ces contrats d'assurance soient souscrits la même année. On parle ainsi de **cohortes**.

De plus, les contrats vont être segmentés selon leur **niveau de profitabilité**. On retrouvera ainsi les trois groupes suivants :

- Les contrats onéreux à l'origine ;
- Les contrats non-onéreux à l'origine présentant un risque de le devenir (significatif) ;
- Les contrats profitables ne présentant aucun risque de devenir onéreux.

Le graphique ci-dessous permet d'imager ces 3 grandes idées concernant le niveau de granularité autour des contrats sous la norme IFRS 17.

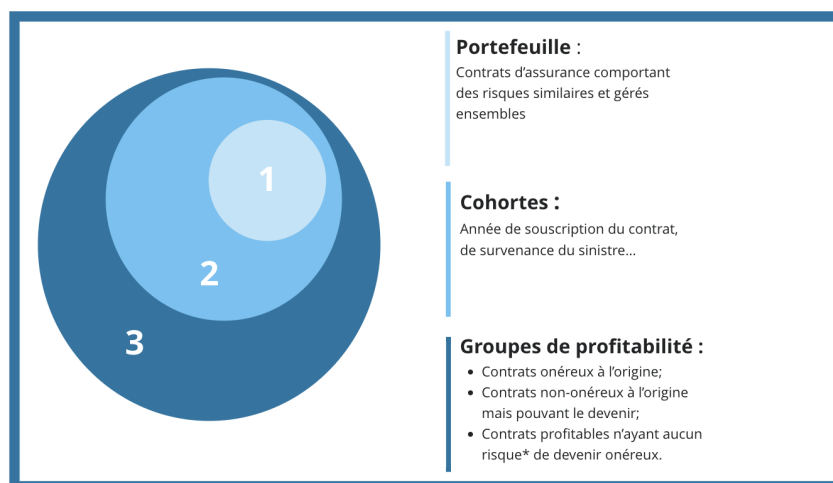


FIGURE 1.4 – Niveaux de granularité autour des contrats

La segmentation du portefeuille en différents niveaux d'agrégation permet de bien hiérarchiser les contrats d'assurance. IFRS 17 met également l'accent sur l'évolution du passif au cours de la période de couverture.

### 1.3.3 Évolution du passif au cours de la période de couverture

Pour comprendre cette partie, il faut déjà comprendre la vie d'un groupe de contrat d'assurance. Afin de rendre la compréhension plus claire, nous avons décidé de la représenter au sein du schéma ci-dessous :

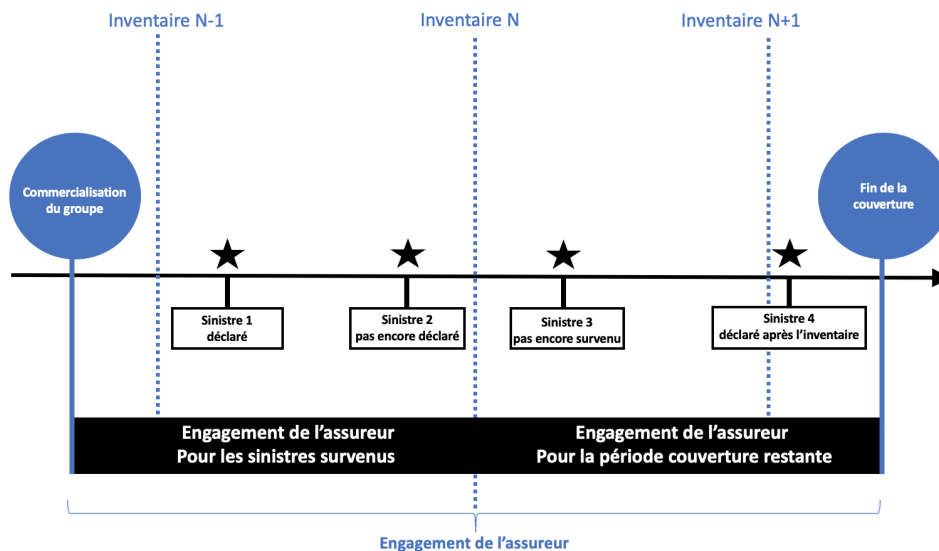


FIGURE 1.5 – Vie d'un groupe de contrat d'assurance

### 1.3.4 Modèles de valorisation des contrats d'assurance

La période de couverture se caractérise comme étant la durée pendant laquelle l'assureur est engagé vis-à-vis de son ou ses assurés à couvrir les différents événements assurés. Lors de la souscription du contrat d'assurance, étape initiale, la prestation d'assurance n'a pas encore commencé ; seule la période de couverture est à venir à cet instant. Ainsi, dans ce contexte, les blocs du passif d'assurance correspondent ici à une provision pour couverture future (*Libability for Remaining Coverage = LRC*)

Petit à petit, alors que la période de couverture s'écoule, la provision pour couverture future diminue (L'assureur verse des prestations d'assurance donc la provision diminue). En revanche, parallèlement, une provision pour sinistres survenus peut désormais apparaître (*Libability for Incurred Claims = LIC*).

La distinction entre LIC et LRC est fondamentale puisque la norme IFRS 17 précise qu'une variation de la provision pour couverture future (LRC) au cours d'une période est censé refléter son niveau d'activité au sein de la même période.

Ainsi, la valeur comptable d'un groupe de contrats d'assurance à la fin de chaque période de déclaration est la somme du passif pour la couverture restante et du passif pour les sinistres encourus. Le passif pour la couverture restante comprend le FCF relatif aux services futurs et la CSM du groupe à cette date. Le passif pour les sinistres encourus est mesuré comme le FCF relatif aux services passés attribué

au groupe à cette date.

La norme IFRS 17 prévoit trois méthodes différentes de valorisation du passif d'assurance. L'utilisation de ces dernières se justifie selon le type (contrat participatif, direct) et la durée (période de couverture) des contrats d'assurance. Les modèles d'évaluation qui sont introduits sont :

- **Building Block Approach (BBA)** : modèle général basé sur la valeur actuelle, pondéré et ajusté en fonction d'un facteur de risque des flux de trésorerie correspondants à un contrat d'assurance et qui prévoit la suspension du bénéfice attendu (Marge de Service Contractuelle) au moment de la signature du contrat ;
- **Variable Fee Approach (VFA)** : variante du modèle BBA qui s'applique pour la comptabilisation des contrats d'assurance participatifs direct sur la vie pour tenir compte des commissions de gestion des actifs sous-jacents versées à la société ;
- **Premium Allocation Approach (PAA)** : une méthode alternative et simplifiée du modèle comptable général applicable aux contrats ayant une période de couverture de la prime d'un an ou moins.

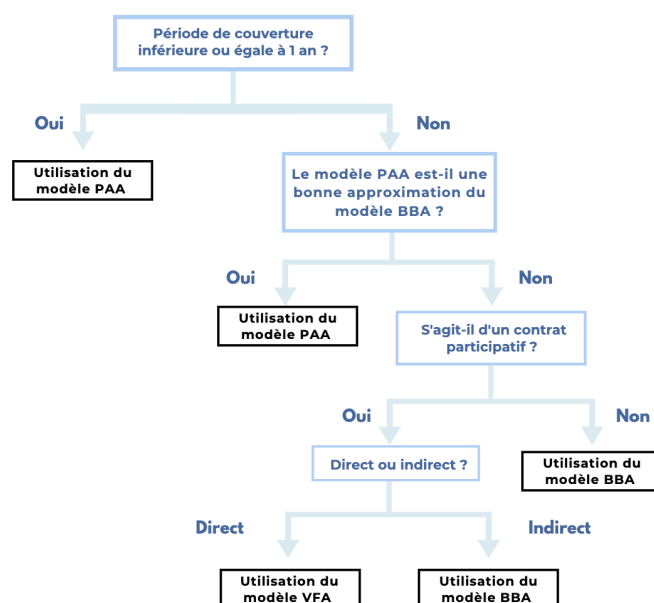


FIGURE 1.6 – Processus d'application des modèles

Maintenant que nous avons donné les différents champs d'application de ces trois méthodes nous allons présenter en détail le modèle BBA qui est le modèle général. Durant mon stage j'avais pour mission de fournir un Bilan ainsi qu'un compte de résultat au format IFRS 17 sur le modèle BBA. Le modèle PAA est comme nous l'avons vu une simplification du modèle BBA c'est pourquoi nous ne rentrerons pas dans les détails pour ce dernier.

### 1.3.4.1 Le modèle BBA

Le **modèle général** ou **Building Block Approach (BBA)** a pour objectif de valoriser le passif d'assurance en le décomposant en trois nouveaux éléments. Le premier élément à savoir la notion de Best Estimate s'inspire grandement de l'approche bilancielle du référentiel Solvabilité II, soit :

- **Le Best Estimate (BE)** : La meilleure estimation (en Français) correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.

En IFRS 17, cette philosophie du calcul du Best Estimate est très proche de celle sous-jacente du référentiel Solvabilité II, et ce notamment sur les points suivants :

- La prise en compte des dernières données disponibles à la date de valorisation ;
- L'utilisation d'hypothèses et de données reflétant l'expérience propre de la compagnie pour les paramètres non financiers ;
- La prise en compte de la valeur temporelle des options et garanties financières ;
- La prise en compte d'un effet d'actualisation basé sur les données de marché observables (Approche **Market Consistent**).

Les **principales différences** pour le Best Estimate avec Solvabilité II se situent au niveau :

- De la **frontière des contrats** : Il s'agit de la date à partir de laquelle les primes futures ainsi que les engagements associés sont censés appartenir à un nouveau contrat ;
- Du **taux d'actualisation** : Plus particulièrement dans le taux d'actualisation de la liquidité des passifs ;
- Des différents **frais** : Les frais attribuables aux contrats sont pris en compte dans le Best Estimate, en revanche, les frais non attribuables aux contrats, quant à eux, sont reconnus en charge dès lors qu'ils sont payés.

La nouveauté apportée par IFRS 17 porte sur les deux autres éléments :

- **Le Risk Adjustment (RA)** ou **ajustement pour risque** : Il représente la compensation requise pour supporter l'incertitude des flux de trésorerie provenant des risques non-financiers uniquement.
- **La marge de service contractuelle (CSM)** : Elle correspond aux profits futurs du contrat. Cette dernière est constatée en produit au rythme de son amortissement sur la période de couverture. Ce sont donc les bénéfices attendus et non encore réalisés (car associés aux couvertures / services futurs) d'un groupe de contrats.

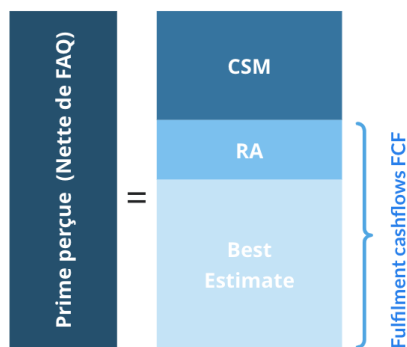


FIGURE 1.7 – Synthèse du modèle BBA

Comme on le voit sur le graphique ci-dessus, la marge de service contractuelle dit CSM se calcule comme suit :

$$\text{CSM} = \text{Primes perçues à la souscription} - (\text{Best Estimate} + \text{RA})$$

Nous allons voir maintenant par le biais d'un graphique comment le modèle s'initialise et comment il fonctionne. Pour ce schéma nous avons pris l'exemple d'un contrat pour lequel la Marge de service Contractuelle (CSM) est positive. Dans ce cas elle est simplement dotée sachant que cette dernière est amortie en suivant la diminution des unités de couverture («coverage units») au cours du temps.

Nous aurions très bien pu prendre le cas d'un contrat onéreux (CSM négative) ce qui aurait conduit à reporter directement la perte en résultat (P&L) par prudence comptable.

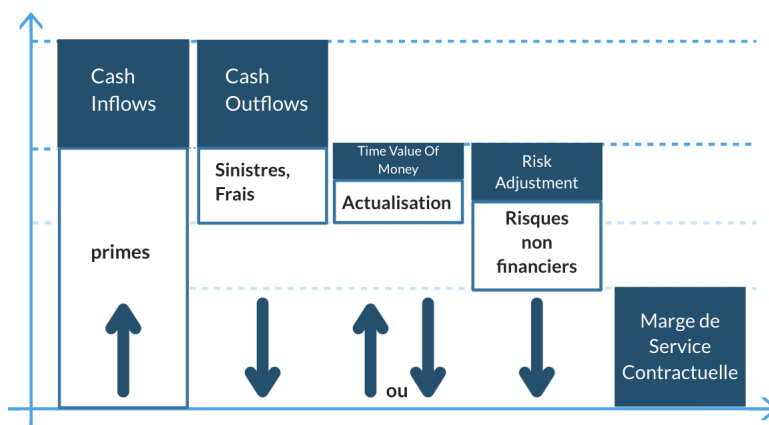


FIGURE 1.8 – Initialisation du modèle BBA



## — Chapitre 2 —

---

# Le Risk Adjustment : Vers une approche en formule standard

---

## 2.1 La directive Solvabilité II

Pour comprendre les objectifs de la directive Solvabilité II, il faut déjà comprendre le fonctionnement des compagnies d'assurance, leurs besoins et leurs limites. Cette compréhension permet de donner un cadre dans l'aboutissement d'une réglementation prudentielle.

Une notion clé dans le monde de l'assurance est la notion de solvabilité. On dit d'un organisme d'assurance qu'il est solvable s'il est capable de faire face à ses engagements vis-à-vis de ses assurés. Il est donc nécessaire de définir mathématiquement cette notion de *solvabilité* et donc de la quantifier.

Un organisme d'assurance propose des produits divers et variés tenant compte de sa spécialisation. Généralement, ces produits sont majoritairement des produits de masse (parfois obligatoires : RC auto, Assurance habitation, RC médicale...). C'est en partie grâce à cette diversité que les assureurs sont aujourd'hui aussi nombreux.

Sur le tableau ci-dessous issu de la FFA (**Fédération Française de l'Assurance**), on constate qu'entre 2014 et 2018 il y a eu une évolution croissante dans le montant des cotisations des assurés en France.

### Cotisations

Md€	2014	2015	2016	2017	2018	18/17
<b>Ensemble assurance française</b>	<b>200,3</b>	<b>208,7</b>	<b>208,7</b>	<b>211,7</b>	<b>219,4</b>	<b>+ 3,7 %</b>
<b>Assurances de personnes</b>	<b>149,1</b>	<b>156,3</b>	<b>155,4</b>	<b>157,1</b>	<b>163,4</b>	<b>+ 4,0 %</b>
Vie et capitalisation	128,9	135,5	133,9	134,6	139,7	+ 3,8 %
Maladie et accidents corporels	20,1	20,8	21,5	22,5	23,7	+ 5,1 %
<b>Assurances de biens et de responsabilité</b>	<b>51,2</b>	<b>52,4</b>	<b>53,3</b>	<b>54,5</b>	<b>56,1</b>	<b>+ 2,8 %</b>
Automobile	20,1	20,4	20,8	21,4	22,1	+ 3,4 %
Domages aux biens des particuliers	9,7	10,0	10,2	10,4	10,7	+ 2,4 %
Domages aux biens des professionnels et agricoles	7,5	7,5	7,6	7,7	7,9	+ 2,8 %
Responsabilité civile générale	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7	+ 0,2 %
Autres assurances <sup>(1)</sup>	10,4	10,9	11,1	11,4	11,7	+ 3,0 %

(1) Cat-Nat, P.J, assistance, PP, transports, construction et crédit-caution.

FIGURE 2.1 – Évolution des cotisations sur l'ensemble de l'assurance en France

Or, l'activité d'assurance, bien que largement répandue n'est pas sans risque. Cette notion de risque repose sur plusieurs concepts qui ont motivé beaucoup d'auteurs à étudier de plus près cette activité. Parmi ces concepts on trouve par exemple :

- **L'inversion de la chaîne de production** : Dans un commerce traditionnel, le produit destiné à la vente est fabriqué avant d'être vendu. Ainsi, le vendeur dispose d'un vecteur d'information (le coût de production, les différents frais engendrés et donc la marge unitaire qu'il réalisera lors de la vente) sur ce produit. En Assurance, ce processus est inversé : l'assuré paye une prime et ne reçoit la prestation qu'a posteriori. Cette prestation, constituée principalement de paiements pour des sinistres et frais, n'est pas connue lors du paiement de la prime, elle ne peut être évaluée qu'approximativement par des méthodes statistiques.
- **La difficulté à tarifer certains aléas** : Certains événements sont plus difficiles à prédire que d'autres. Cette difficulté réside dans le fait que ces événements sont peu fréquents (faible fréquence d'occurrence) mais de forte sévérité (impact conséquent sur la solvabilité de l'assureur). L'assureur doit donc modéliser cette incertitude (par une étude statistique des extrêmes par exemple) pour mieux gérer ses risques. Le recours à des traités de réassurance est également fréquent chez les assureurs. L'intérêt pour un assureur d'avoir recours à la réassurance est de transférer son risque pour minimiser sa probabilité de ruine.
- **Le risque d'anti-sélection et d'aléa moral** : L'anti-sélection s'opère principalement lorsqu'un Assureur propose un tarif moins segmenté que ses concurrents. Une limite sur ce phénomène est qu'il n'est pas mesurable par un acteur de marché. Pour qu'il le soit, il faudrait que l'acteur ait une connaissance parfaite de l'ensemble du marché. L'aléa moral, quant à lui, consiste dans le fait qu'un individu assuré peut augmenter sa prise de risque dès qu'une police le met à l'abri des conséquences négatives d'un sinistre.

Pour faire face à ce risque d'insolvabilité, un suivi régulier du portefeuille et de sa rentabilité, la constitution de réserves et de fonds propres, une gestion prudente des actifs, un accent sur les problématiques de gestion des risque sont autant de pratiques devenues indispensables chez les assureurs.

La directive Solvabilité 1 à été remplacée à cet effet le 1<sup>er</sup> Janvier 2016 par une nouvelle directive européenne qui s'applique à l'ensemble des compagnies d'assurance des pays membres de l'Union Européenne. Il s'agit de la directive **Solvabilité 2** (Solvency 2 en Anglais). Cette dernière a pour but d'harmoniser la réglementation dans l'UE, d'accroître la transparence de la communication financière des assureurs et de garantir leurs aptitude à honorer les engagements pris envers leurs assurés.

Cette réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance vise à mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurance et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité (Risque de souscription, Risque de crédit, Risque opérationnel et Risque de marché). L'un des objectifs principaux est donc l'adéquation entre les risques reposant sur l'activité d'assurance et le capital alloué pour couvrir ces mêmes risques.

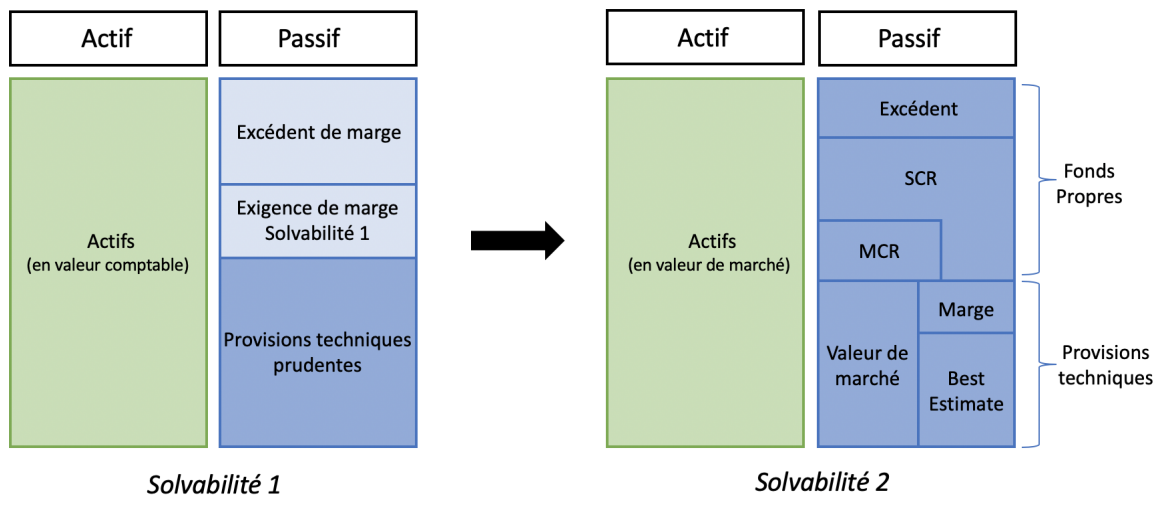


FIGURE 2.2 – Du bilan S1 vers le bilan S2

Le bilan **Solvabilité 1** a été critiqué notamment pour son côté trop simpliste. En effet, ce dernier ne prend pas en compte les risques propres à chaque organisme d'assurance. Par conséquent, les organismes sont moins enclins à connaître leurs risques et donc à les maîtriser.

Le bilan **Solvabilité 2** permet de régler ces problèmes et on retient les différences majeures suivantes :

- Une meilleure adaptation des exigences de capital et des pratiques de contrôle au profil de risque (risk-based)
- Création du **bilan prudentiel avec une "vision économique"**
- Renforcement de la **gouvernance** et de la **gestion des risques**
- Amélioration du contrôle des groupes (collèges de superviseurs)
- Harmonisation européenne des normes et pratiques de contrôle (*level-playing field*)
- **Principe de proportionnalité**
- Meilleure information au public (fluidité)

Le dispositif constitue 3 piliers qui sont définis ci-dessous :

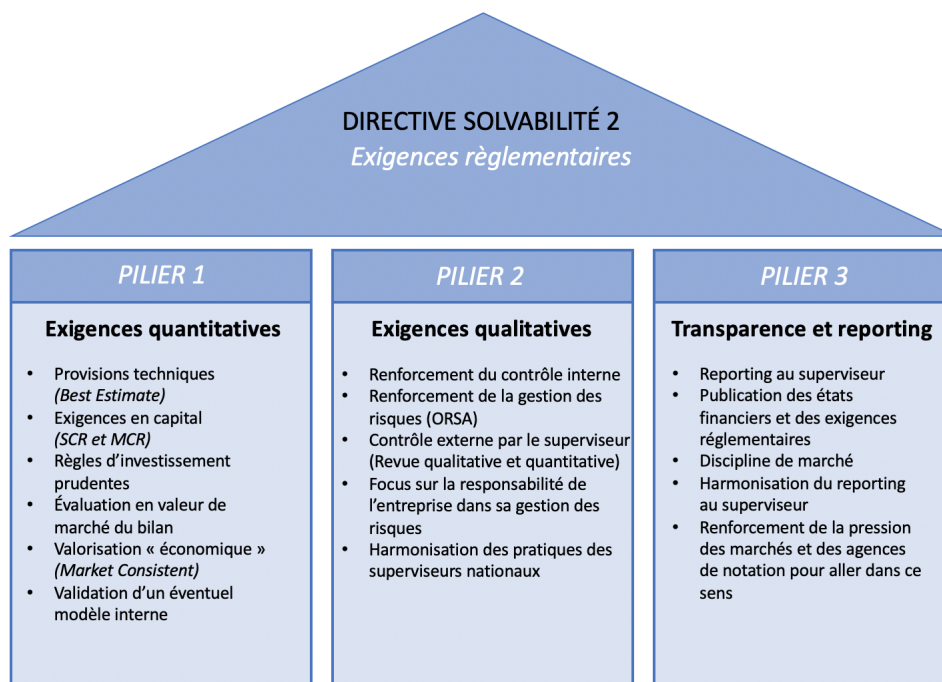


FIGURE 2.3 – Les 3 piliers de Solvabilité 2

Dans les exigences quantitatives, le premier point s'articule autour de la notion de provisions techniques. Inscrites au passif du bilan d'une compagnie elles correspondent (1) aux charges à prévoir pour faire face à la sinistralité non encore déclarée mais prévisible des contrats en cours ainsi (2) qu'à une anticipation des prestations futures auxquelles l'assureur devra faire face lorsqu'un engagement prendra effet. Elles correspondent à la somme de la **meilleure estimation** avec la marge de risque.

$$\textit{Provisions techniques} = \textit{Best Estimate} + \textit{Marge de risque}$$

## 2.2 La vision Best Estimate

Le **Best Estimate** (ou meilleure estimation) est calculé comme la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs par groupe homogène de risques (avec une hypothèse de continuité d'activité et une actualisation par la courbe des taux "sans risque" fournie par EIOPA). La décomposition du BE dans son calcul varie en fonction du type d'assurance que fournit la société (Société d'assurance vie, Société d'assurance non-vie). Il faut donc bien distinguer les deux :

### Sociétés d'Assurance Vie (L) :

$$Best\ Estimate_L = Best\ Estimate\ garanti\ (1) + Future\ discretionary\ benefits\ (2)$$

**(1)** : Couverture des engagements certains de l'assureur = revalorisations à hauteur du taux technique (Calcul proche de la PM)

**(2)** : Situation du montant de participation aux bénéficiaires futurs, à l'aide d'un générateur de scénarios économiques qui donne les trajectoires futures du rendement des actifs.

### Sociétés d'Assurance Non-Vie (NL) :

$$Best\ Estimate_{NL} = Best\ Estimate\ de\ primes\ (3) + Best\ Estimate\ de\ sinistres\ (4)$$

**(3)** : Couverture des primes et sinistres futurs pour lesquels l'assureur est déjà engagé.

**(4)** : Couverture des sinistres déjà survenus mais non encore réglés.

## 2.3 Les exigences quantitatives concernant le niveau des fonds propres

Un des objectifs important pour l'assureur est d'estimer quelle sera la situation financière de l'entreprise en cas d'événements extrêmes (de probabilité bicentenaire) pour s'assurer qu'il puisse y faire face.

Les exigences quantitatives en matière de niveau des fonds propres des sociétés d'assurances dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2 s'articulent selon deux niveaux :

- **Le SCR : Capital de Solvabilité Requis** correspond au capital exigible pour faire face à une situation de ruine à horizon de 1 an (En prenant l'hypothèse d'une gestion extinctive au delà de cet horizon). Ce capital réglementaire correspond à une Value-at-Risk à 99,5% à un an que l'on note :  $VaR(99,5\% ; 1\text{ an})$ . Retenons qu'il s'agit du niveau minimum à couvrir pour continuer son activité sans intervention directe du superviseur.

- **Le MCR : Minimum de Capital Requis** correspond au montant de fonds propres de base éligibles en deçà duquel l'entreprise d'assurance ou de réassurance court un risque inacceptable en poursuivant son activité. Ce dernier est défini par les articles L352-5, L.352-5-1 et R.352-29 du Code des assurances ainsi que par les articles 248 à 253 des actes délégués. Il est calculé à partir des formules factorielles en distinguant les activités Vie et Non Vie. On doit nécessairement avoir l'inégalité suivante :

$$25\%SCR \leq MCR \leq 45\%SCR$$

De plus, il existe des seuils plancher pour le MCR : 2,2M€ pour une société d'assurance non-vie et 3,2M€ pour une société d'assurance vie.

## 2.4 Le Risk Adjustment

Dans cette section nous allons présenter en détail un nouvel élément introduit par la norme IFRS 17. Il s'agit de l'ajustement pour risque (*Risk Adjustment* en Anglais). Dans la première partie nous avons vaguement énuméré les nouveaux points de la norme sans trop rentrer dans les détails. Cette présente partie aura pour objectif de présenter l'ajustement pour risque à un niveau de granularité assez fin pour bien se familiariser avec notre sujet de mémoire qui porte on le rappelle sur la détermination de ce dernier.

### 2.4.1 Définition et périmètre de risque propre au Risk Adjustment

L'ajustement pour risque (RA) tel qu'il est défini dans la norme correspond à **la compensation attendue par l'entité d'assurance afin de faire face à l'incertitude des flux futurs de trésorerie relative aux risques non financiers** (cf. B86 et B87). Il est bon de noter que le risque financier se retrouve dans les taux d'intérêts utilisés pour calculer le Current Estimate.

Le Risk adjustment apparaît comme le *bouclier* du **Current Estimate** sous IFRS 17. En effet, le Current Estimate est issu de calculs probabilistes ce qui a pour conséquence de créer une certaine incertitude autour de ces derniers. Le RA traduit donc cette incertitude ainsi que le risque d'une mauvaise estimation sur le CE.

Il est important de bien distinguer les risques d'assurance des risques financiers qui interviennent respectivement dans la détermination du Risk Adjustment et du Current Estimate (cf. B86 et B90). Le **risque d'assurance** est défini à l'Annexe A de la norme IFRS 17 comme le "*risque, autre que le risque financier, transféré du titulaire à l'émetteur d'un contrat*".

Le risque **non-financier**, lui, est défini comme "*le risque, autre qu'un risque financier, transféré du titulaire à l'émetteur d'un contrat*". Cette dernière définition assez simpliste est renforcée par le paragraphe B8 des Application Guidances qui explique que les risques provenant de variables non financières sont des risques non financiers.

En ce qui concerne le périmètre de risques associés au calcul du RA on peut dire tout d'abord que l'ajustement pour risques non financier concerne (B86 et B14) :

- Les risques d'assurance ;
- Les risques de frais ;
- Le risque de résiliation ;
- Le risque de rachat ;
- Le risque opérationnel directement lié aux contrats (erreur de tarification, erreur de provisionnement).

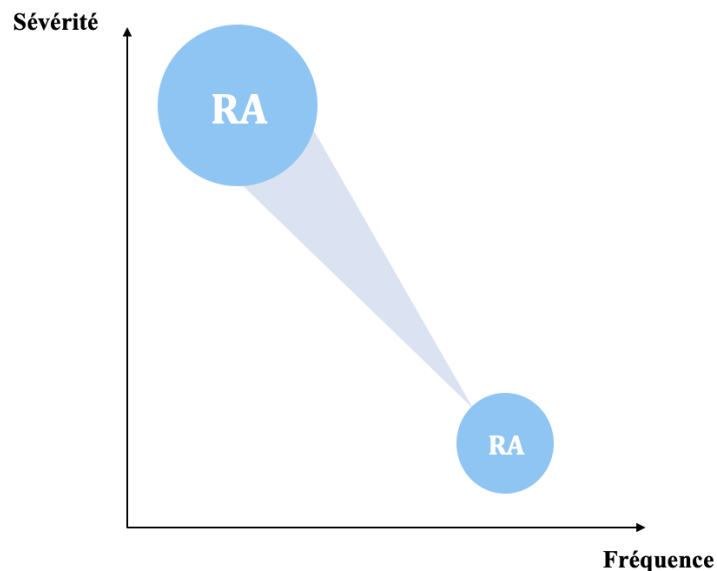
En revanche, l'ajustement pour risque non financier exclut :

- Le risque opérationnel non directement lié aux contrats d'assurance ;
- Le risque de contrepartie.

## 2.4.2 Exigences de la norme sur l'ajustement pour risque

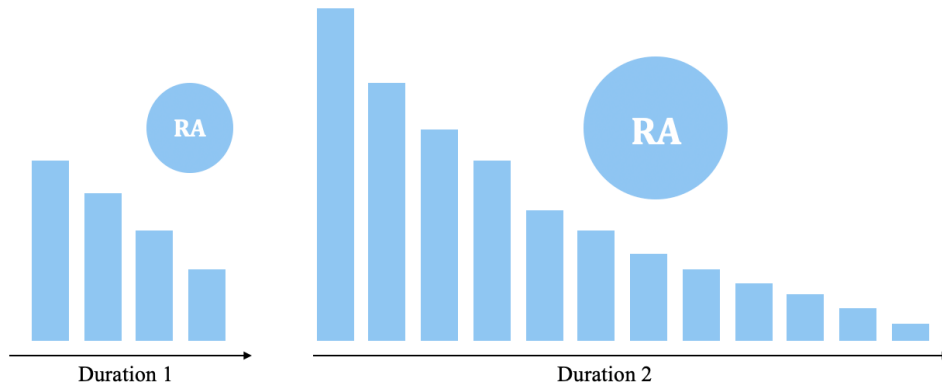
La norme IFRS 17 étant une norme « *principal based* » ne prescrit pas de méthode d'évaluation de l'ajustement pour risque. En revanche, dans le paragraphe B91, le conseil d'application indique, qu'un ajustement pour risque doit présenter les cinq caractéristiques suivantes :

1. L'ajustement pour risque est plus fortement impacté par **l'intensité** du risque que par **sa fréquence**

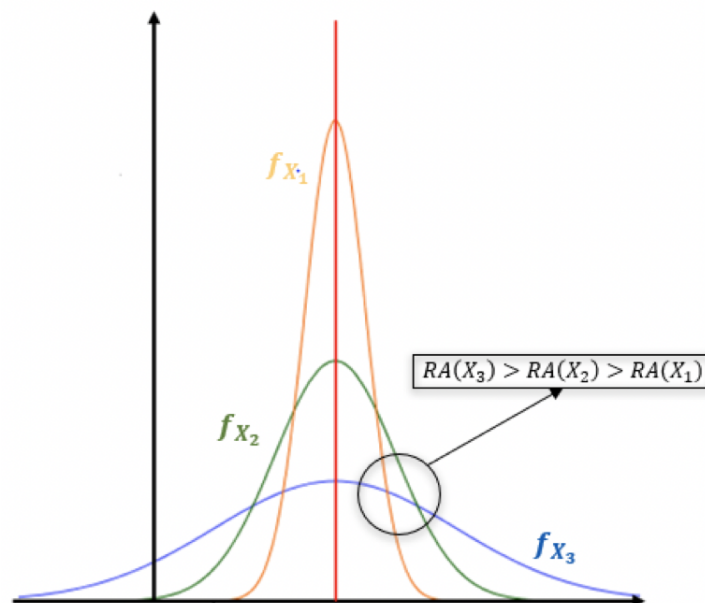


On voit bien graphiquement que le RA sera d'un montant plus élevé si les risques sont peu fréquents, mais graves, que s'ils sont fréquents, mais peu graves.

2. À risques similaires, les contrats à **durée plus longue** induisent un RA plus élevé que ceux ayant une **plus courte durée** du risque. (Le RA est donc une fonction croissante de la durée).



3. L'ajustement pour risque sera d'autant plus élevé que la **queue de distribution** des risques sous-jacentes sera **épaisse**.



4. Moins on dispose d'informations sur l'estimation des engagements et sur les tendances sous-jacentes, plus l'ajustement pour risque sera élevé.
5. Plus on dispose d'informations permettant de réduire l'incertitude concernant les montants et les dates de versement des flux futurs et plus l'ajustement pour risque diminuera.



## 2.4.3 Comparaison du Risk Adjustment et de la Risk Margin

On décide dans un premier temps de rappeler les évolutions bilantielles qu'ont connu les assureurs suite à la parution des normes Solvabilité II et IFRS 17.

Actif	Passif		Actif	Passif
Actifs	Capitaux propres	Solvabilité II IFRS 17	Actifs	Capitaux propres
	Profits futurs			CSM
	Risk Margin			RA
	Best Estimate			Best Estimate

Graphiquement et intuitivement on serait tenté de se dire que le Risk Adjustment est à IFRS 17 ce que la Risk Margin est à Solvabilité II. En effet, leurs objections sont un peu similaires dans le sens où ils représentent une protection supplémentaire pour l'assureur. Néanmoins, bon nombre de différences permettent d'écarter toute confusion entre ces deux éléments. Le tableau ci-dessous énonce une liste non exhaustive des principales différences entre ces derniers :

Niveau	Risk Margin (Solvabilité 2)	Risk Adjustment (IFRS 17)
<b>Global</b>	La part des PT permettant de s'assurer que le montant des PT soit équivalent au montant que l'assureur doit disposer pour honorer ses engagements. (Mesure de transfert à un tiers si défaillance de l'assureur)	La compensation attendue par l'entité d'assurance afin de faire face à l'incertitude des flux futurs de trésorerie relative aux risques non financiers
<b>Méthode de calcul</b>	Méthode du coût du capital	Pas de méthode prescrite mais obligation de communiquer sur le quantile correspondant à la RA obtenue (80%)
<b>Calibrage</b>	Le capital de solvabilité de base requis par un assureur pour les risques non couverts est multiplié par le coût du capital à 6 % et actualisé aux taux d'intérêt en vigueur	Il est possible de calibrer la totalité des paramètres de la méthode retenue
<b>Périmètre et champ d'application</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La reconnaissance des contrats sous S2 se fait à la date de début de couverture et la date d'entrée dans le contrat</li> <li>On retient les flux jusqu'à la date de possibilité de résiliation par l'assureur</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La reconnaissance des contrats se fait à la date de début de couverture</li> <li>On rentre dans la frontière de flux au sein des contrats IFRS 17 tant que l'entité peut exiger le paiement de la prime ou bien tant que l'entité est obligée de rendre le service associé.</li> </ul>
<b>Niveau de granularité</b>	Par ligne d'activité (LoB)	Par groupes de contrats (Segmentation selon le niveau de profitabilité), maille plus fine.
<b>Modules de risques à prendre en compte</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Risque de souscription</li> <li>Risque de marché résiduel</li> <li>Risque de contrepartie pour les engagements d'assurance</li> <li>Risque opérationnel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Risque non-financiers</li> <li>Risque opérationnel directement lié aux contrats (erreur de tarification, provisionnement)</li> <li>Risque de marché</li> </ul>
<b>Réassurance</b>	Elle est calculée nette des effets d'atténuation par les contrats de réassurance	Nécessité de calculer un RA distinct pour les contrats de réassurance

FIGURE 2.4 – Comparaison entre la Risk Margin et le Risk Adjustment

## 2.4.4 Démarches ERM pour le calcul d'un Risk Adjustment

### 2.4.4.1 Contextualisation de la gestion des risques

Nous avons vu que l'ajustement pour risque doit refléter la vision économique du risque. Pour ce faire il faut tenir compte d'une démarche ERM.

Il s'agit d'un processus par lequel une entreprise identifie, évalue, contrôle, finance et surveille tous ses risques dans le but d'accroître sa valeur à court et long terme pour toutes ses parties prenantes.

Établir une cartographie des risques est une étape fondamentale dans tout dispositif ERM. Cela permet de décomposer les risques d'assurance et de les gérer de manière optimale. Pour ce mémoire nous nous intéresserons au risque de primes et de réserve.

Avant de concevoir une méthode d'estimation de l'ajustement pour risque il faut d'abord prendre en compte cette notion de risque. Ainsi, une première étape consiste à évaluer **l'appétence au risque** de l'entité ainsi que son **seuil de tolérance**. En effet, en fonction du niveau de risque auquel l'entreprise est prête à faire face ainsi que la variation acceptable de ce niveau deux assureurs n'auront pas les mêmes projets pour calculer leurs ajustements pour risque (RA). Il est donc important de bien identifier certains éléments qui donnent une idée sur cette aversion au risque (taille de l'entité, segmentation de l'assurance, politique de gestion des risques, besoins de diversification...).

L'estimation de **l'incertitude** selon les données disponibles y est aussi très importante : il est important de vérifier que l'on dispose d'un historique de données fiable, assez long, vérifiable avant d'utiliser des méthodes de calcul.

Pour résumer, le processus repose donc sur :

- Une évaluation de l'ensemble des risques (cartographie des risques) ainsi que les interactions qui en découlent ;
- La mise en place de stratégies pour maîtriser le risque de manière continue.
- Une approche qui vise à gérer de manière globale les risques inhérents à l'assurance.

Maintenant que nous avons contextualisé cette notion de risque nous allons voir comment le mesurer.

#### 2.4.4.2 Mesure de risque cohérente

Une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une mesure cohérente au sens d'ARTZNER si pour tout  $X, Y \in \Omega$  elle satisfait les quatres conditions suivantes :

- Monotonie : Si  $X \leq Y$  alors  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
- Invariance monétaire :  $\forall m \geq 0, \rho(X + m) \geq \rho(X) + m$
- Homogénéité positive :  $\forall \lambda \geq 0, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- Sous additivité :  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Il existe plusieurs mesures de risque mais nous citerons ici seulement quelques exemples de mesures éligibles à un calcul d'ajustement pour risque. La méthode du coût du capital peut également être considérée.

#### La Value at Risk (VaR)

Suite au dispositif prudentiel Bâle-II qui vise à permettre une couverture plus fine et plus complète des risques bancaires, la Value-at-Risk a connu un essor considérable dans les problématiques financières et assurantielles.

On considère  $X$  une variable aléatoire qui représente le risque assuré par une compagnie d'assurance et  $(1 - \alpha) \in [0, 1]$  le niveau de risque selon lequel on souhaite évaluer la perte potentielle.  $\alpha$  est généralement appelé le niveau de confiance associé au risque  $R$ . La Value-at-Risk (VaR) au niveau de confiance  $\alpha$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}; \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Par exemple, si  $x$  est le montant de sinistres engendré par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$  alors  $\text{VaR}_\alpha(X)$  représente le montant de capital nécessaire pour couvrir une sinistralité de montant  $x$ . Cela signifie que si l'on dispose d'une quantité  $\text{VaR}_\alpha(X)$  alors la probabilité de ruine de l'entreprise est  $1 - \alpha$ .

Dans un contexte financier on l'interprète comme la perte potentielle maximale que peut subir un portefeuille à un niveau de risque  $\alpha$  sur un horizon fixé.

L'inconvénient avec la *VaR* est qu'elle n'est pas une mesure cohérente du risque au sens d'Artzner. En effet, elle ne respecte pas la condition de sous additivité. Par exemple, si on considère  $X_1$  et  $X_2$  deux risques distincts, alors pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  on pourra avoir  $\text{VaR}(X_1 + X_2) \geq \text{VaR}(X_1) + \text{VaR}(X_2)$ . Il faut noter qu'une mesure utilisée par une compagnie d'assurance ne doit pas nécessairement être une mesure cohérente (La preuve étant que le SCR en formule standard se calcule avec la Value-at-Risk).

#### La Tail Value at Risk (TVaR)

La Tail Value at Risk notée  $\text{TVaR}_\alpha(X)$  est définie comme suit :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_t(X) dt$$

La Tail Value at Risk est simplement la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ .

## La Proportional Hazards Transform (PHT)

Pour une variable aléatoire de perte non négative  $X$  ayant pour fonction de survie  $S(X)$  telle que  $S_X(u) = \mathbb{P}(X > u) = 1 - \mathbb{P}(X \leq u)$  alors  $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty S_X(u)du$ . La PH-mean avec le paramètre  $\rho$  est donnée par  $H_\rho(X)$  où :

$$H_\rho(X) = \int_0^\infty [S_X(u)]^{1/\rho} du \quad (\text{pour } \rho \geq 1)$$

Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques de chacune des mesures de risque :

<b>Caractéristiques</b>	<b>Value at Risk</b>	<b>Tail Value at Risk</b>	<b>Proportional Hazards Transform</b>
<b>1</b>	La VaR est issue d'une seule simulation	La TVaR utilise des poids égaux au-dessus d'un certain niveau donné	Elle utilise des poids croissants dans toute les simulations
<b>2</b>	Elle a une fourchette allant du minimum au maximum des valeurs simulées	Elle est meilleur pour capter l'information dans les extrêmes	Elle est encore plus robuste pour capter les extrêmes
<b>3</b>	La VaR ne tient pas correctement en compte des extrêmes.	Elle a une fourchette allant de la moyenne à la valeur maximale simulée	Elle a une fourchette allant de la moyenne à la valeur maximale simulée
<b>4</b>	La VaR n'est pas une mesure cohérente puisqu'elle ne respecte pas la propriété de sous-additivité	La TVaR est une mesure cohérente qui respecte la propriété de sous-additivité	La PHT est une mesure cohérente qui respecte la propriété de sous-additivité

FIGURE 2.5 – Caractéristiques des mesures de risques possibles pour le calcul d'un RA

## 2.5 Méthodologie de calcul du SCR transposable au RA

Comme nous l'avons vu, le SCR correspond à une exigence de fonds propres afin de faire face à un scénario de crise qui se produirait une fois tout les 200 ans. L'article 101 dédié au calcul du SCR précise les informations suivantes :

### *Article 101*

#### **Calcul du capital de solvabilité requis**

1. Le capital de solvabilité requis est calculé conformément aux paragraphes 2 à 5.
2. Le calcul du capital de solvabilité requis se fonde sur l'hypothèse d'une continuité de l'exploitation de l'entreprise concernée.
3. Le capital de solvabilité requis est calibré de manière à garantir que tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée soient pris en considération. Il doit couvrir le portefeuille en cours, ainsi que le nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. Pour ce qui concerne le portefeuille en cours, il couvre seulement les pertes non anticipées. Le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an.
4. Le capital de solvabilité requis couvre au minimum les risques suivants : le risque de souscription en non-vie, le risque de souscription en vie, le risque de souscription en santé, le risque de marché, le risque de crédit, le risque opérationnel.
5. Lorsqu'elles calculent leur capital de solvabilité requis, les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de l'impact des techniques d'atténuation des risques, sous réserve que le risque de crédit et les autres risques inhérents à l'emploi de ces techniques soient pris en considération de manière adéquate dans le capital de solvabilité requis

De plus, conformément à l'article R. 352-3 du Code des Assurances et à l'article 102, le SCR doit être calculé au moins une fois par an. Il doit également être suivi en permanence, de même que le niveau de fonds propres admissibles et doit de plus être immédiatement recalculé si le profil de risque de l'entreprise est modifié de façon significative. Dans ce cas, le superviseur peut exiger un re-calcul.

**L'EIOPA** (European Insurance and Occupational Pensions Authority) a proposé 5 méthodes pour calculer le Capital de Solvabilité Requis (SCR) :

- La formule standard simplifiée ;
- La formule standard ;
- La formule standard avec l'utilisation des Undertaking Specific Parameters ;
- Un modèle interne partiel ;
- Un modèle interne total.

Dans ce mémoire, l'objectif va être de comparer le montant d'un ajustement pour risque calculé en utilisant d'une part la formule standard et d'autre part les paramètres USP que nous présenterons dans une partie ultérieure.

Dans la formule standard, le SCR se détermine grâce à la formule suivante :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{Op}$$

Avec :

- SCR : Le capital de Solvabilité Requis.
- BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) : Le capital de solvabilité requis de base.
- Adj : L'ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéficiaires et des impôts différés.
- $SCR_{Op}$  : La charge de capital pour le risque opérationnel.

## 2.5.1 Utilisation de la formule standard

La formule standard est une approche dite par silo ou modulaire car le SCR (charge en capital) est déterminée pour chaque source de risque (module de base). On calcule le besoin en capital à l'aide d'un scénario de "stress" qui mesure l'impact d'un choc sur le paramètre testé. On agrège ensuite les risques élémentaires avec des matrices de corrélations pour déterminer les besoins en capital représentatifs des classes de risque majeures. On trouve le SCR de base (BSCR) auquel on ajoute une charge en capital qui mesure le risque opérationnel ( $SCR_{Op}$ ).

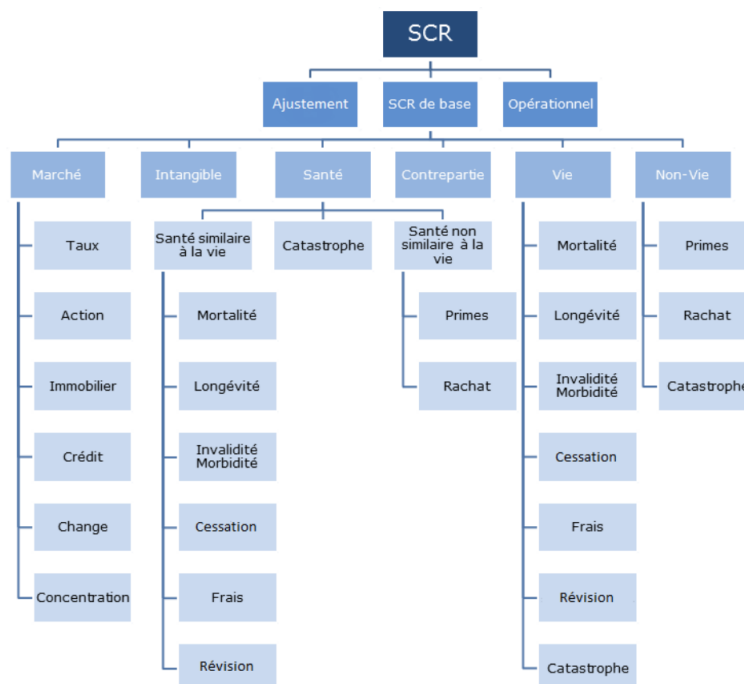


FIGURE 2.6 – Pieuvre des modules de risque, QIS 5 *Technical Specifications*

Le BSCR est agrégé de façon inter-modulaire, c'est-à-dire en agrégeant les différents modules qui le composent (Vie, Non-Vie, Santé, Marché, Défaut, Intangibles) :

$$BSCR = \left( \sum_{i \in N_i} \sum_{j \in N_j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j \right)^{0,5} + SCR_{int}$$

Avec :

- $N_k$  : Nombre de modules sur l'indice k.
- $SCR_k$  : Le capital réglementaire pour le module k.
- $Corr_{k,l}$  : La corrélation entre le module k et le module l retrouvable dans la matrice de corrélation de la formule standard.
- $SCR_{int}$  : L'exigence de capital pour le risque intangible qui est le risque de baisse de la valeur des actifs incorporels.

Dans ce mémoire, on s'attache au **module de souscription non-vie**, et plus particulièrement au **risque de primes et réserves**. Nous allons donc présenter le module risque de souscription en non-vie dans sa globalité avant de se focaliser sur le risque de primes et réserves.

## 2.5.2 Le risque de Souscription Non-Vie

**Le risque de Souscription Non-Vie** se définit comme étant le risque lié à l'activité de l'assurance non-vie pour tout type d'entreprise du secteur, provenant directement des sinistres couverts ou d'une mauvaise gestion de l'activité. Ce risque comprend également le risque lié à l'incertitude sur le comportement de l'assuré (reconduction de contrat par exemple) et le risque catastrophe (CAT); Le risque catastrophe étant définit comme le risque de survenance d'une catastrophe naturelle (Tsunami, cyclone, tempête..) ou d'origine humaine (attaque terroriste..).

Dans les spécifications techniques du QIS 5, le risque de souscription non-vie se décompose en trois sous-modules :

- **Le risque de primes et et réserve** qui est lié à l'insuffisance de provisionnement (sinistres passés) et à l'insuffisance de tarification (sinistres de l'année à venir). Il permet de mesurer les erreurs de tarification et d'estimation sur les provisions à effectuer pour les risques à venir.
- **Le risque de catastrophe** qui est lié aux événements extrêmes ou exceptionnels n'étant pas correctement appréhendés dans l'approche factorielle. Il représente donc le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance comme conséquence d'une mauvais appréhension d'événements **extrêmes** ou **exceptionnels**.
- **Le risque de rachat ou de cessation** qui est lié aux contrats intégrant une clause de reconduction annuelle et unilatérale disponible pour l'assuré ou une option qui leur permet de cloturer le contrat avant la fin de la période de couverture initialement prévue. On le résume souvent au risque de perte de fonds propres.

### 2.5.3 Segmentation en ligne d'activité

Le calcul de l'exigence en capital réglementaire pour le risque de primes et réserve Non-Vie doit s'effectuer à la maille Lines of Business (LoB) à minima. Dans l'annexe 1 du journal officiel de l'Union européenne L 12/227, on retrouve la segmentation suivante proposée par Solvabilité II :

LOB 1	Medical Expense Insurance
LOB 2	Income Protection Insurance
LOB 3	Workers' Compensation Insurance
LOB 4	Motor Vehicle Liability Insurance
LOB 5	Other Motor Insurance
LOB 6	Marine, Aviation and Transport Insurance
LOB 7	Fire and Other Damage to Property Insurance
LOB 8	General Liability Insurance = Third part Liability
LOB 9	Credit and Suretyship Insurance
LOB 10	Legal Expenses Insurance
LOB 11	Assistance
LOB 12	Miscellaneous Financial Loss

FIGURE 2.7 – Les différentes lignes d'activité en Non-Vie sous S2

Il est crucial pour un assureur d'avoir une vision nette de son profil de risque (mesurable par son besoin global de solvabilité) au sein de ces trois sous-modules qui composent le risque de souscription non-vie. Le risque de prime et réserve est le sous module le plus important en terme d'impact sur le bilan de l'assureur et il est également le seul risque en non-vie éligible à une utilisation des USP. Ainsi, c'est pour ces raisons que nous allons essentiellement nous intéresser à l'étude de ce dernier.



## 2.5.4 Approche par la formule standard : Calcul du Risk adjustment pour le risque de primes et de réserve

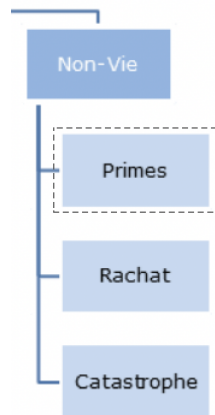


FIGURE 2.8 – Zoom sur le module de risque prime et réserve du risque de souscription non-vie

Dans cette partie nous allons présenter les différentes étapes qui permettent de calculer un ajustement pour risque au niveau de confiance 80%.

Notation : Pour la suite, nous utiliserons le raccourci **P&R** pour Prime et réserve.

Le calcul du Risk Adjustment non-vie pour le sous module de risque P&R s'exprime par la formule suivante :

$$RA_{P\&R} = \rho(\sigma) \times V$$

Avec :

- $V$  : Mesure du volume global de prime et de réserve de l'entreprise.
- $\sigma$  : Volatilité global de prime et de réserve de l'entreprise. En réalité il s'agit de l'écart-type du ratio combiné<sup>1</sup>.
- La fonction qui à  $\sigma$  associe  $\rho(\sigma)$  se basant sur la log-normalité du risque sous-jacent à été calibrée afin que le calcul du Risk Adjustment  $RA_{P\&R}$  soit équivalent à un calcul d'une VaR(80% ;1 an).

### 2.5.4.1 Quelques rappels statistiques

**Rappel** : Soient  $\mu, \omega$  deux réels. On dit que  $X \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$  (X suit une loi log-normale de paramètres  $(\mu, \omega^2)$ ) si la variable  $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Comme X est une variable aléatoire presque sûrement positive, on a, grâce à la formule de transfert :

1. Il s'obtient en rapportant la somme de la charge de sinistre nette et des frais d'exploitation net avec les primes acquises nettes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^k] &= \mathbb{E}[X^k] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} x^k \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\omega^2}} dx \\ &= e^{\frac{k(2\mu+k\omega^2)}{2}}\end{aligned}$$

Ce calcul se justifie car la fonction  $x \mapsto x^k \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\omega^2}} = x^{k-1} e^{-\ln(x) \times \frac{\ln(x)-2\mu}{2\omega^2}} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\omega^2}}}{\sqrt{2\pi\omega^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , prolongeable par continuité en 0. En  $+\infty$ , on peut utiliser le critère de Riemann pour vérifier que son intégrale converge :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{k-1} \frac{\ln(x) - 2\mu}{2\omega^2} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\omega^2}}}{\sqrt{2\pi\omega^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \frac{\ln(x)}{2\omega^2} + cte} \times cte = 0$$

L'intégrale est donc convergente pour tout  $k \geq 1$  et donc  $X$  possède des moments de tout ordres. On peut maintenant facilement déterminer l'espérance ainsi que la variance de notre variable aléatoire et ainsi obtenir par la méthode des moments des estimateurs de nos paramètres :

#### 2.5.4.2 Conséquences directes sur la distribution des pertes

- $\mathbb{E}[X] = e^{\left(\mu + \frac{\omega^2}{2}\right)} \Rightarrow \mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{1}{2}\omega^2$  **(1)**
- $\mathbb{V}[X] = e^{2(\mu+\omega^2)} - e^{2\mu+\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right) \Rightarrow \mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)$  **(2)**

On considère  $X$  la variable aléatoire qui modélise **la distribution des pertes**. Par hypothèse cette dernière est distribuée selon une loi log-normale i.e  $X \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$  avec :

- $\mathbb{E}[X] = 1 \iff \mathbb{E}[X] = PCO$
- $\mathbb{V}[X] = \sigma^2 \iff \mathbb{V}[X] = (\sigma \times PCO)^2$

où **PCO** représente la meilleure estimation de la provision pour sinistres à payer et  $VaR_{99,5\%}(X)$  le capital requis pour le risque de réserve. L'équivalence au niveau de l'espérance est une équivalence au sens de la modélisation.

En utilisant les équations **(1)** et **(2)**, on trouve facilement que :

- $\mu = -\frac{1}{2}\ln(1 + \sigma^2)$
- $\omega^2 = \ln(1 + \sigma^2)$

Pour trouver le quantile à 80% de  $X$ , on va dans un premier temps exprimer la fonction de répartition de  $X$  à l'aide de la fonction de répartition  $\phi$  de la loi normale centré réduite. On calcule donc la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  en  $t \in \mathbb{R}$  :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(e^Y \leq t)$$

Comme la fonction exponentielle est à valeur dans  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\mathbb{P}(e^Y \leq t) = 0 \text{ si } t \leq 0$$

Supposons  $t \geq 0$ . Comme la fonction  $\ln$  est strictement croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$e^Y \leq t \iff Y \leq \ln(t)$$

D'où

$$\mathbb{P}(e^Y \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(t)) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu \leq \ln(t)) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)$$

car  $\sigma > 0$  : D'où :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Par conséquent, pour  $0 < p < 1$ ,  $F_X(t) = \phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) = p \iff F_X^{-1}(p) = q_X(p) = e^{\mu + \sigma \phi^{-1}(p)}$

On peut maintenant déterminer notre quantile à 80% qui correspond au coefficient multiplicateur du volume  $V$  du risque de réserve.

$$\begin{aligned} q_X(0, 8) &= \exp(\mu + \sigma \phi^{-1}(0, 8)) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1 + \sigma^2) + \phi^{-1}(0, 8) \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)}\right) \\ &= \frac{\exp\left(\phi^{-1}(0, 8) \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)}\right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \end{aligned}$$

### 2.5.4.3 Calcul du Risk Adjustment : Les différentes étapes

Le Risk Adjustment peut alors se calculer en utilisant la formule suivante :

$$RA = q_X(0, 8)V - V = V(q_X(0, 8) - 1)$$

C'est ainsi qu'est construite la fonction  $\rho(\sigma) = q_X(0, 8) - 1$  de telle sorte que l'on ait :  $RA = V \times \rho(\sigma)$  Dans le cadre du calcul d'un capital réglementaire Non-Vie en formule standard, la fonction  $\rho(\sigma)$  s'approxime en général par  $3\sigma$  (Facilement démontrable avec un développement limité en série entière à l'ordre 1).

Notons  $\hat{\rho}(\sigma)$  une approximation de la fonction initiale  $\rho(\sigma)$  indépendamment du niveau de quantile étudié. L'objectif pour un assureur prudent sera donc de prendre pour un niveau de  $\sigma$  qui tend vers 0 la valeur suivante :

$$\max\{\rho(\sigma); \hat{\rho}(\sigma)\}$$

C'est d'ailleurs pour cette raison que l'approximation  $\hat{\rho}(\sigma) = 3\sigma$  est préférable et a été de ce fait choisie par rapport à  $\hat{\rho}(\sigma) = \phi^{-1}(0,995)\sigma$  pour le calcul du capital réglementaire en Non-Vie.

L'avantage du calcul du Risk Adjustment est que la norme n'impose aucune méthode précise dans le calcul de ce dernier. Logiquement, on va essayer de minimiser la perte de précision. Pour la suite nous donnerons les résultats du Risk Adjustment en prenant soit la fonction  $\rho(\sigma)$  où en l'approximant par  $\phi^{-1}(0,8)\sigma$  pour  $\sigma$  suffisamment petit.

Dans le plot ci-dessous, j'ai représenté plusieurs fonctions et approximations en fonction du niveau de quantile (80% pour le RA et 99,5% pour le SCR). Celles qui vont nous intéresser pour la suite de l'étude sont les deux plus proches de l'axe des abscisses (la violette et la kaki).

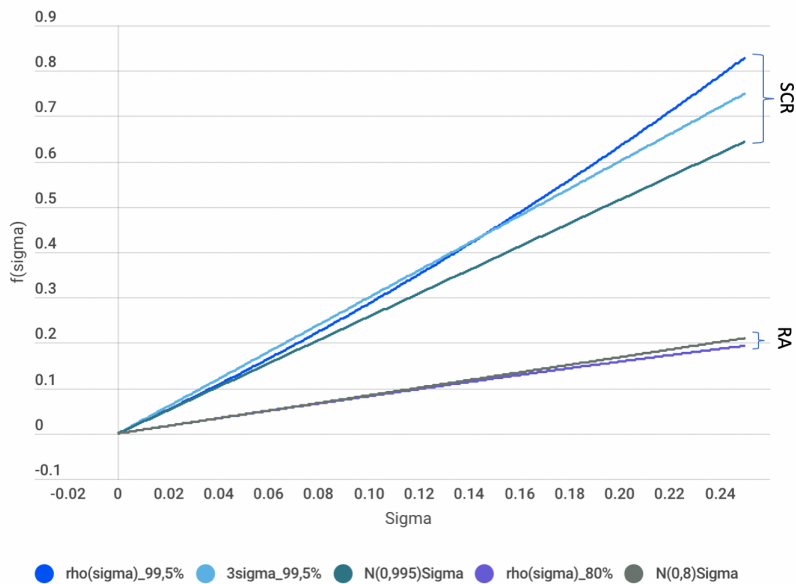


FIGURE 2.9 – Évolution de la fonction Rho sur des petites valeurs de sigma

On voit bien que l'écart absolu entre la fonction  $\rho(\sigma)$  et son approximation  $\phi^{-1}(0,8)\sigma$  tend vers 0 lorsque  $\sigma$  tend vers 0 en positif. Mathématiquement cela se retranscrit comme suit :

$$|\rho(\sigma) - \phi^{-1}(0,8)\sigma| \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0_+} 0$$

Pour la suite de cette méthode, nous considérerons la notation  $RA_{P\&R}^{FS}$  pour le Risk Adjustment du risque de prime et de réserve avec la formule standard. On rappelle une nouvelle fois la formule permettant de le calculer :

$$RA_{P\&R}^{FS} = \rho(\sigma) \times V \approx \phi^{-1}(0,8)\sigma \times V$$

On peut résumer cette méthode pour ce risque à 2 grandes étapes (elles mêmes décomposées en sous-étapes) :

**ETAPE 1** : Calcul du **volume global** associé au risque de prime et de réserve noté  $V$  ;

**ETAPE 2** : Calcul de la **volatilité** associée au risque de prime et de réserve noté  $\sigma$

**ETAPE 1** : La mesure du volume global de prime et de réserve de l'entreprise notée  $V$  correspond (avant agrégation) à la combinaison des volumes de prime et de réserve pour chaque ligne d'activité. La formule suivante nous permet de déterminer le **volume du risque de prime** pour chaque LoB :

$$V_{(Prem,LoB)} = \max(P_{LoB}; P_{(last,LoB)}) + FP_{(existing,LoB)} + FP_{(Future,LoB)}$$

Avec :

- $P_{LoB}$  : Estimation des primes à acquérir au cours de l'année à venir
- $P_{(last,LoB)}$  : Primes acquises au cours des 12 derniers mois.
- $FP_{(existing,LoB)}$  : Valeur actuelle des primes qui seront perçues après les 12 prochains mois pour la LoB étudiée, pour les contrats existants
- $FP_{(Future,LoB)}$  : Valeur actuelle attendue des primes à acquérir pour la LoB étudiée et pour les contrats dont la date de comptabilisation initiale tombe en  $N+1$  (On exclut logiquement les primes acquises au cours des 12 mois après la comptabilisation initiale).

**Le volume du risque de réserve** pour chaque LoB se calcul comme suit :

$$V_{(res,LoB)} = (PCO_{LoB})_+ = \max(PCO_{LoB}; 0)$$

où  $PCO_{LoB}$  (*Provisions for Claims Outstanding*) correspond à la meilleur estimation de la provision pour les sinistres à payer pour la LoB étudiée.

Ensuite, pour chaque ligne d'activité (LoB), on agrège les risques en tenant compte d'un coefficient de diversification géographique afin d'obtenir une unique valeur qui prend en compte l'information du risque de prime et de réserve. On obtient ainsi le **volume du risque de prime et de réserve** donné par la formule suivante :

$$V_{LoB} = (V_{(Prem,LoB)} + V_{(res,LoB)}) \times (0,75 + 0,25DIV_{LoB})$$

où  $DIV_{LoB}$  est le coefficient de diversification géographique donné par la formule suivante :

$$\frac{\sum_{j \in J} ((V_{(Prem,j,LoB)} + V_{(res,j,LoB)})^2)}{(\sum_{j \in J} (V_{(Prem,j,LoB)} + V_{(res,j,LoB)}))^2}$$

Pour voir les différentes zones géographiques, il faut se référer à *l'annexe III des actes délégués du 17 Janvier 2015*.

On peut maintenant déterminer **le volume global de prime et de réserve de l'entreprise** qui se calcule simplement comme la somme par ligne d'activité des volumes de prime et de réserve :

$$V = \sum_{l \in LoB} V_l$$

**ETAPE 2** : Pour déterminer la volatilité de prime et de réserve  $\sigma$ , on va d'abord comme pour le calcul du volume global de *P&R*, calculer pour chaque LoB la volatilité du risque de *P&R*. Ensuite, par le biais d'une matrice de corrélation nous agrègerons ces volatilités.

La formule suivante permet de calculer pour chaque ligne d'activité la volatilité du risque de *P&R* notée  $\sigma_{LoB}$  :

$$\frac{\sqrt{(\sigma_{(Prem,LoB)} V_{(Prem,LoB)})^2 + 2\alpha\sigma_{(Prem,LoB)}\sigma_{(res,LoB)}V_{(Prem,LoB)}V_{(res,LoB)} + (\sigma_{(res,LoB)} V_{(res,LoB)})^2}}{V_{(Prem,LoB)} + V_{(res,LoB)}}$$

Avec :

- $\alpha$  : Coefficient linéaire de 50 % par hypothèse
- $\sigma_{(Prem,LoB)}$  : Volatilité du risque de prime
- $\sigma_{(res,LoB)}$  : Volatilité du risque de réserve

Les estimations à l'échelle du marché de l'écart type net pour le risque de prime et de réserve pour chaque ligne d'activité nous est donné par le QIS 5 à travers le tableau suivant :

<b>Segment</b>	<b>Écart type pour le risque de primes brut du segment</b>	<b>Écart type pour le risque de réserve brut du segment</b>
Responsabilité civile Automobile	10%	9%
Autre assurance des véhicules à moteur	8%	8%
Maritime, aérienne et transport	15%	11%
Incendie et autres dommages aux biens	8%	10%
Responsabilité civile générale	14%	11%
Crédit et cautionnement	12%	19%
Protection juridique	7%	12%
Assistance	9%	20%
Pertes pécuniaires diverses	13%	20%
Réassurance accidents non proportionnelle	17%	20%
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	17%	20%
Réassurance dommages non proportionnelle	17%	20%

FIGURE 2.10 – Ecart-types pour le sous module risque de primes et de réserve en non-vie

Cependant, il est bon de noter que suite à une revue de la formule standard en 2020, certains coefficients ne sont plus applicables depuis le 1<sup>er</sup> Janvier 2020. Il faudra donc prendre en compte de ce changement en fonction du moment où on se positionne pour faire tourner les calculs. Dans le tableau ci-dessous, on donne les nouveaux coefficients de la revue :

Segment	Écart type pour le risque de primes brut du segment	Écart type pour le risque de réserve brut du segment
Responsabilité civile Automobile	10%	9%
Autre assurance des véhicules à moteur	8%	8%
Maritime, aérienne et transport	15%	11%
Incendie et autres dommages aux biens	8%	10%
Responsabilité civile générale	14%	11%
Crédit et cautionnement	19%	17,2%
Protection juridique	8,3%	5,5%
Assistance	6,4%	22%
Pertes pécuniaires diverses	13%	20%
Réassurance accidents non proportionnelle	17%	20%
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	17%	20%
Réassurance dommages non proportionnelle	17%	20%

FIGURE 2.11 – Revue 2020 : Nouveaux écart-types pour le sous module risque de primes et de réserve en non-vie

On peut maintenant calculer la volatilité globale du risque de  $P\&R$  par la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \sum_r \sum_c CorrLoB_{r,c} \sigma_r \sigma_c V_r V_c}$$

Avec :

- $r, c$  : Les indices qui parcourent les différentes LoB
- $CorrLoB_{r,c}$  : La matrice de corrélation entre les LoB r et c
- $\sigma_r, \sigma_c$  : Les mesures de volatilité pour les LoB r et c.
- $V_r, V_c$  : Les mesures de volume pour les LoB r et c.

La matrice des corrélations entre LOB  $CorrLoB_{r,c}$  proposée par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) est la suivante :



<i>CorrLoB</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Motor vehicle liability	1											
2. Motor other classes	0,5	1										
3. MAT : Marine, Aviation, Transport	0,5	0,25	1									
4. Fire and other property damage	0,25	0,25	0,25	1								
5. Third-party liability	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6. Credit and suretyship	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7. Legal expenses	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8. Assistance	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9. Miscellaneous	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10. Non-proportional reinsurance - casualty	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
11. Non-proportional reinsurance - MAT	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	
12. Non-proportional reinsurance - property	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	1

FIGURE 2.12 – matrice des corrélations

## 2.6 Avantages et inconvénients de la formule standard

L'utilisation de la formule standard est simple d'utilisation et ne demande que très peu de données en Input. Nous avons vu sur le sous-module de risque P&R que le calcul d'un SCR ainsi que d'un RA dépendent du volume de P&R ainsi que d'un paramètre de volatilité.

La formule standard présente donc un réel avantage pour les entités de petite taille ne disposant pas des ressources financières nécessaires pour évaluer de manière optimale leurs risques.

La Formule Standard repose sur des hypothèses et des méthodes fixées par la Directive et la Commission Européenne. Par définition, la formule standard est commune à l'ensemble des acteurs du marché et ne permet donc pas de refléter pleinement et précisément les risques propres à chaque organisme.

Pour pallier ce problème, les entités peuvent choisir de mettre en place un modèle interne (total ou partiel) ce qui leur permet de traduire au mieux leur profil de risque. Ce choix constitue un réel coût pour l'entreprise d'autant plus qu'il faut obtenir l'accord de l'autorité de contrôle ce qui n'est parfois pas si évident.

Il faut donc trouver le bon compromis entre une prise en compte du risque suffisante et une mise en place pas trop complexe. Ce compromis peut résider au sein de la méthode des paramètres USP.

## — Chapitre 3 —

# Les paramètres USP : Un bon compromis pour le calcul d'un RA

### 3.1 Présentation de l'approche des Undertaking Specific Parameters (USP)

Le capital de solvabilité requis (SCR) ainsi que l'ajustement pour risque (RA) peuvent être calculés selon plusieurs méthodes, allant de la formule standard simplifiée pour les entités de petites tailles à l'utilisation d'un modèle interne plus difficile et coûteux à mettre en œuvre.

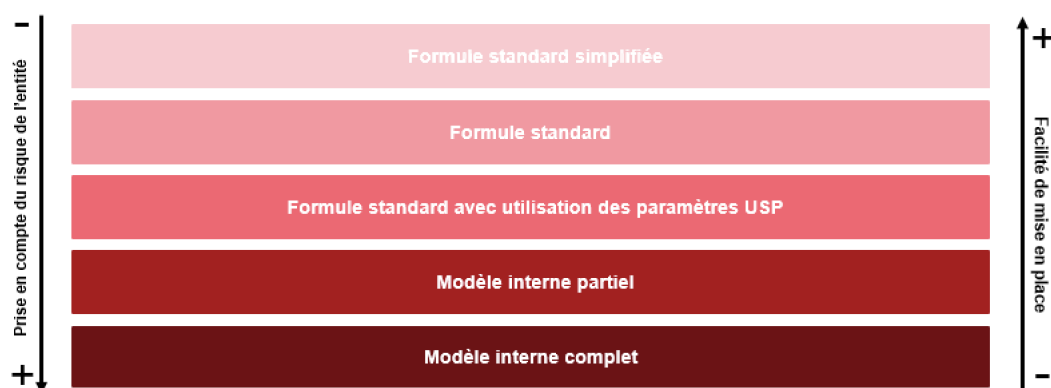


FIGURE 3.1 – Entre prise en compte du risque et facilité de mise en place

Dans un contexte économique et financier incertain où la gestion de risque prend une place majeure et cruciale au sein des fonctions d'une entité, l'utilisation des paramètres propres à l'entreprise dits paramètres USP semble être un bon moyen de tenir compte d'une bonne démarche ERM.

Ainsi, la calibration de la formule standard bien qu'utile pour certaines entités ne peut convenir à tous les acteurs. L'article 104 de la directive Solvabilité II offre la possibilité aux entreprises d'utiliser des paramètres qui leur sont propres.

Les USP peuvent être calibrés sur le risque P&R ainsi que sur le risque de révision, et ce, pour les garanties vie, non-vie et santé. La figure ci-dessous présente en encadré rouge les sous modules de risques éligibles à une calibration par les USP.

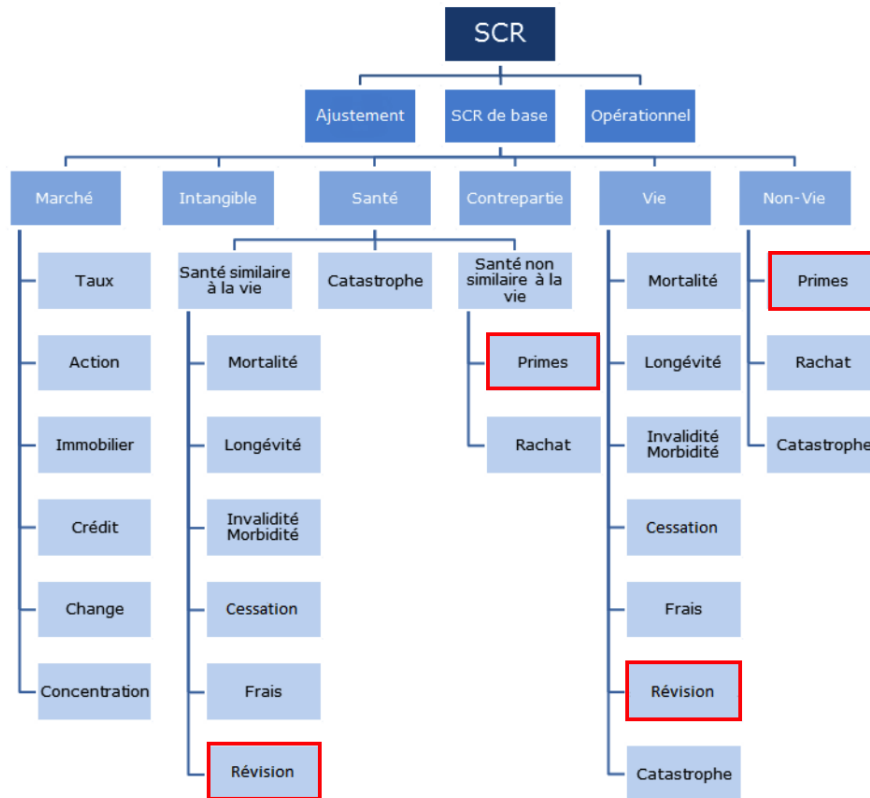


FIGURE 3.2 – Éligibilité sur l'utilisation des USP

Cette approche des paramètres propres à l'entreprise consiste donc à remplacer dans le calcul d'un RA ainsi que d'un SCR de la formule standard un ensemble de paramètres par des paramètres propres à l'entité qui reflètent au mieux son profil de risque. L'intérêt principal est de réduire l'exigence en capital et l'immobilisation de ce dernier par rapport à une formule standard qui a tendance à les surévaluer.

**L'article 104** stipule que *les paramètres doivent être calibrés sur la base des données internes de l'entreprise concernée ou des données directement pertinentes pour les opérations de cette entreprise et ce sur la base des méthodes standardisées.*

Nous présenterons dans une prochaine partie les méthodes permettant de calculer le couple de paramètres  $(\sigma_{(Prem,LoB,USP)}, \sigma_{(res,LoB,USP)})$  compte tenu de l'historique de l'entité.

## 3.2 Conditions d'application et d'utilisation des paramètres USP

L'utilisation des paramètres USP repose comme bien souvent sur l'approbation de l'autorité de contrôle (ACPR). L'entité doit donc dans un premier temps établir un premier contact avec l'autorité à titre informel. Cet échange représente une discussion simple sur les travaux en cours relatifs aux USP ainsi que sur le dossier à constituer. Il faut évidemment que le dossier soit validé en interne avant d'être soumis à l'ACPR.

L'autorité dispose de 30 jours pour accuser bonne réception du dossier (point 6 de l'article 1). En cas de dossier incomplet, l'autorité se réserve le droit d'en informer l'entité et ainsi décaler la durée de 6 mois liée à l'approbation.

### Constitution d'un dossier pour les USP

Certains éléments sont obligatoires pour la constitution d'un dossier en vue d'une approbation par l'autorité :

- La **date** (souhaitée) à partir de laquelle la méthode des USP sera effective ;
- Une **liste complète** des paramètres standards remplacés par les paramètres propres de l'entreprise ;
- Les différents **résultats** des USP calibrés selon les méthodes standards ;
- L'ensemble des calculs des USP et des hypothèses vérifiées statistiquement ;
- Le respect des contraintes sur les données qui doivent être *appropriées, complètes et précises* ;
- La preuve que la méthode des USP offre une **complexité** et un **coût inférieur** à un modèle interne et qu'elle présente un **réel intérêt** par rapport à la formule standard (i.e qu'elle est optimale dans le cadre d'une démarche ERM).

Une fois le dossier reçu, l'autorité de contrôle dispose alors de **6 mois** pour donner son approbation quant à l'utilisation de la méthode des USP.

## Contraintes sur les données

Les données sont d'une importance capitale dans la détermination d'un RA et d'un SCR. Certaines exigences de l'EIOPA sont à respecter notamment sur la nature et la qualité des données :

- **La source** : L'entité peut utiliser des données internes ou externes. Si le choix est celui des données externes, alors, l'entité devra prouver la pertinence et la cohérence de ce choix vis à vis des exigences de l'article 19 du règlement délégué 2015/35 ;
- **L'exhaustivité** : Pour chaque ligne d'activité dont l'entreprise souhaite passer en USP, les données utilisées doivent couvrir une large majorité du périmètre ;
- **La pertinence** : Les données utilisées par l'entité doivent être représentatives du portefeuille actuel et de la conjoncture économique sous-jacente. Les données doivent de plus refléter les risques couverts sur l'année à venir. La structure de Réassurance doit également être prise en compte de manière réaliste avec notamment les charges de sinistres qui doivent être nettes de réassurance. Chaque ajustement doit être motivé par la volonté de l'entité d'augmenter le caractère représentatif des données pour l'année à venir ;
- **La profondeur d'historique** : L'entité doit disposer d'un historique de données suffisamment élevé (quinze ans en branche longue, dix ans en branche courte). Dans l'hypothèse où la profondeur d'historique n'est pas respectée, l'USP ne pourra dans ce cas être utilisée que partiellement. Il faut qu'à minima, l'entité dispose de cinq années d'historiques.

## 3.3 Calibrage et utilisation des paramètres USP

On rappelle que le Risk Adjustment Non-Vie pour le sous module de risque P&R se détermine ainsi :

$$RA_{P\&R} = \rho(\sigma) \times V$$

Avec :

- $V$  : La mesure de volume pour le risque de primes et de réserve en non-vie.
- $\sigma$  : L'écart-type du risque de primes et de réserve en non-vie.
- La fonction qui à  $\sigma$  associe  $\rho(\sigma)$  se basant sur la log-normalité du risque sous-jacent à été calibrée afin que le calcul du Risk Adjustment  $RA_{P\&R}$  soit équivalent à un calcul d'une VaR(80% ;1 an).

On rappelle dans le schéma ci-dessous les différentes étapes successives qui mènent au calcul de l'écart-type du risque de P&R en non-vie

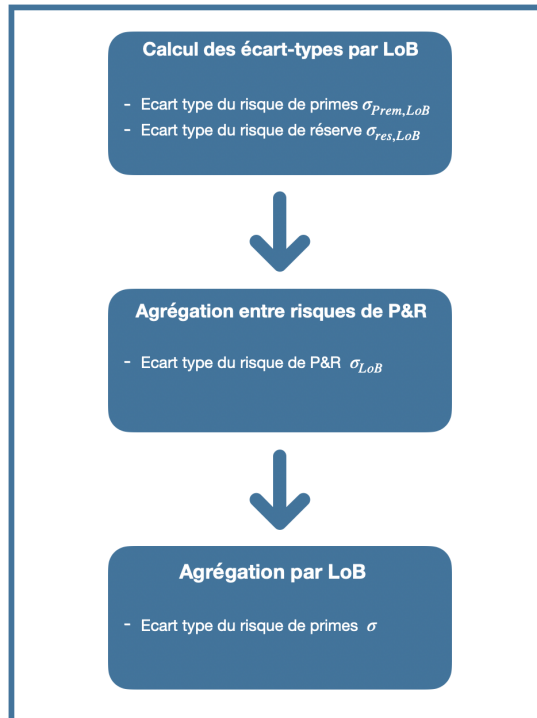


FIGURE 3.3 – Étapes pour le calcul de l'écart-type du risque de P&R

L'application des USP consiste donc à remplacer pour les Lob choisies l'écart-type du risque de prime  $\sigma_{Prem,LoB}$  et du risque de réserve  $\sigma_{res,LoB}$ . Pour une calibration optimale l'EIOPA a intégré un **facteur de crédibilité** dans le calcul des USP. L'objectif de ce dernier est d'incorporer l'historique de l'entité dans le calibrage des USP. On obtient ainsi le modèle suivant :

$$\sigma_{LoB,USP} = c \cdot \sigma_{U,LoB} + (1 - c) \cdot \sigma_{M,LoB}$$

Avec :

- $c$  : Le facteur de crédibilité
- $\sigma_{U,LoB}$  : La volatilité estimée par l'entité basée sur les méthodes de l'EIOPA
- $\sigma_{M,LoB}$  : La volatilité de la formule standard (du marché)

Notons que le facteur de crédibilité tend en croissant vers 1 en fonction de la longueur de l'historique.

Pour les branches RC automobile, RC générale, Crédit et cautionnement :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 et plus
<b>C</b>	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

Pour les autres branches :

<b>N</b>	5	6	7	8	9	10 et plus
<b>C</b>	34%	51%	67%	81%	92%	100%

## 3.4 Modélisation statistique des USP

### 3.4.1 Volatilité pour le risque de prime

On rappelle que le risque de prime représente le risque lié à une mauvaise tarification pour un assureur. En effet, une mauvaise estimation de la sinistralité aura un impact certainement négatif sur la solvabilité de l'entité (et donc sur son ratio). On peut l'interpréter aisément comme étant le risque d'une perte inattendue engendrée par une insuffisance des primes couvrant les sinistres à venir sur les 12 prochains mois.

L'EIOPA a proposé une méthode **unique** pour calibrer les USP et ainsi estimer la volatilité sur le risque de prime. Il s'agit de la méthode du maximum de vraisemblance qui se base ici sur une hypothèse de log-normalité des ultimes. Nous allons donc dans un premier temps présenter les données nécessaires pour l'estimation de la volatilité sur ce risque.

### Cadre et données d'entrée

Les données nécessaires à la modélisation du risque de prime sont les suivantes :

- $t \in \{1, \dots, T\}$  : la  $t^{\text{ème}}$  année de survenance ;
- $X_t$  : Les primes acquises pour l'année de survenance  $t$ , et ce pour chaque LoB ;
- $Y_t$  : Les pertes agrégées ;<sup>1</sup>
- $\beta$  : Le taux de sinistralité attendu fréquemment appelé le *Loss ratio* ;
- $c$  : Le facteur de crédibilité ;
- $\sigma$  : L'écart-type du risque de prime ;
- $\delta \in [0, 1]$  : Le paramètre de mélange ;

1. Il s'agit de la somme des prestations versées durant la première année de développement, y compris frais de gestion des engagements et du Best Estimate des provisions pour sinistres à payer y compris frais de gestion des engagements

- $\gamma \in \mathbb{R}$  : Le coefficient de variation logarithmique ;
- $\sigma_{Prem,LoB}$  : Le paramètre standard à remplacer par le paramètre propre à l'entreprise.

## Exigences et hypothèses sur les données d'entrée

Ces données doivent respecter plusieurs exigences dans la manière dont elles sont construites :

- Les hypothèses représentent le risque sur les 12 prochains mois ;
- L'historique comporte au minimum 5 années de survenance consécutive ;
- La charge globale inclut les frais ;
- Les pertes agrégées doivent tenir compte des événements extrêmes.

## (H) Hypothèses statistiques sur les données

La norme précise également que les données doivent être conformes aux hypothèses statistiques suivantes :

1. Pour une année de survenance et un segment d'activité donnés, Les pertes agrégées  $Y_t$  sont **proportionnelles** aux primes acquises  $X_t$ . Mathématiquement cela signifie que  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$  :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \beta X_t \quad (3.1)$$

2. Les pertes agrégées  $Y_t$  suivent une loi **log-normale** de paramètre  $\mu_t$  et  $\omega_t^2$  ( $Y_t \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_t, \omega_t^2)$ ). Cela implique donc mathématiquement que :

$$\mathbb{E}[Y_t] = e^{\mu_t + \frac{1}{2}\omega_t^2} \quad (3.2)$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = (e^{\omega_t^2} - 1)e^{2\mu_t + \omega_t^2} \quad (3.3)$$

3. Pour une année de survenance et un segment d'activité donnés, la variance des pertes agrégées est une expression **quadratique** par rapport aux primes acquises. Mathématiquement elle est de la forme :

$$\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 ((1 - \delta)\bar{X}X_t + \delta X_t^2) \quad (3.4)$$

4. La méthode du maximum de vraisemblance est **adaptée** pour l'estimation des paramètres du modèle.



Supposons les hypothèses (1) et (3) vraie, on peut donc en déduire que :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } t \in \{1, \dots, T\} : \quad \mathbb{E}[Y_t] &= \beta X_t \\ &= \mathbb{E}[\text{Log} - \mathcal{N}(\mu_t, \omega_t^2)] \\ &= e^{\mu_t + \frac{1}{2}\omega_t^2} \end{aligned}$$

On remarque également que :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } t \in \{1, \dots, T\} : \quad \mathbb{V}[Y_t] &= (e^{\omega_t^2} - 1)e^{2\mu_t + \omega_t^2} \\ &= (e^{\omega_t^2} - 1)e^{2(\mu_t + \frac{1}{2}\omega_t^2)} \\ &= (e^{\omega_t^2} - 1)[e^{(\mu_t + \frac{1}{2}\omega_t^2)}]^2 \\ &= [\mathbb{E}[Y_t]]^2(e^{\omega_t^2} - 1) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\mu_t = \ln(\beta X_t) - \frac{1}{2}\omega_t^2 \quad (3.5)$$

$$\omega_t^2 = \ln \left( 1 + \frac{\mathbb{V}[Y_t]}{(\beta X_t)^2} \right) \quad (3.6)$$

Supposons l'hypothèse (4) vraie, on peut alors réécrire l'égalité (3.6) en remplaçant le numérateur par sa valeur calculée Précédemment afin d'y faire apparaitre le paramètre de mélange  $\delta$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_t^2 &= \ln \left( 1 + \frac{\sigma^2((1 - \delta)\bar{X} X_t + \delta X_t^2)}{(\beta X_t)^2} \right) \\ &= \ln \left( 1 + ((1 - \delta) \cdot \frac{\bar{X}}{X_t} + \delta) \cdot \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

On pose  $e^{2\gamma} = \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2$  on obtient finalement :

$$\omega_t^2 = \ln \left( 1 + ((1 - \delta) \cdot \frac{\bar{X}}{X_t} + \delta) \cdot e^{2\gamma} \right) = \frac{1}{\pi_t(\delta, \gamma)} \quad (3.7)$$

## Méthode de calcul

Sous l'hypothèse 3 de la section précédente on sait donc que les pertes agrégées  $Y_t$  suivent une loi **log-normale** de paramètre  $\mu_t$  et  $\omega_t^2$  (i.e  $Y_t \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_t, \omega_t^2)$ )

On peut donc partir de la fonction de densité (connue) pour calculer la fonction de vraisemblance de  $Y_t$ . Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} L(Y_1, \dots, Y_T | \sigma, \delta, \beta) &= \prod_{t=1}^T f_{Y_t}(\sigma, \delta, \beta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{Y_t \cdot \omega_t \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[\ln(Y_t) - \mu_t]^2}{2 \cdot \omega_t^2}} \end{aligned}$$

On peut donc désormais calculer la log-vraisemblance comme suit :

$$\begin{aligned}
l(Y_1, \dots, Y_T | \sigma, \delta, \beta) &= \ln(L(Y_1, \dots, Y_T | \sigma, \delta, \beta)) \\
&= \ln \left( \prod_{t=1}^T \frac{1}{Y_t \cdot \omega_t \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[\ln(Y_t) - \mu_t]^2}{2 \cdot \omega_t^2}} \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \ln \left( (Y_t)^{-1} (\omega_t)^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{[\ln(Y_t) - \mu_t]^2}{2 \cdot \omega_t^2}} \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \left( -\ln(Y_t) - \ln(\omega_t) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{[\ln(Y_t) - \mu_t]^2}{2 \cdot \omega_t^2} \right) \\
&\propto \sum_{t=1}^T \left( -\ln(\omega_t) - \frac{[\ln(Y_t) - \mu_t]^2}{2 \cdot \omega_t^2} \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \left( -\ln(\omega_t) - \frac{1}{2} \cdot \pi_t [\ln(Y_t) - \mu_t]^2 \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \left( -\frac{1}{2} \ln(\omega_t^2) - \frac{1}{2} \cdot \pi_t [\ln(Y_t) - \mu_t]^2 \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{2} \ln(\pi_t(\delta, \gamma)) - \frac{1}{2} \cdot \pi_t [\ln(Y_t) - \ln(\beta X_t) + \frac{1}{2} \omega_t^2]^2 \right) \\
&\propto \sum_{t=1}^T \pi_t \left( \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) + \frac{1}{2\pi_t} + \ln(\sigma) - \ln(\beta) - \ln(\sigma) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t)
\end{aligned}$$

Pour mieux comprendre ces passages, dans un premier temps il a fallu enlever les parties de l'équation qui ne dépendent pas des paramètres de la fonction de vraisemblance à savoir  $(\sigma, \delta, \beta)$ . Ensuite, il a fallu remplacer  $\mu_t$  par (3.5) ainsi que  $\omega_t^2$  par (3.7). Enfin, nous avons multiplié l'avant dernière ligne par (-2) pour obtenir la dernière ligne.

On souhaite maintenant réécrire cette fonction de log-vraisemblance en y introduisant notre paramètre  $\gamma$  et ainsi ne plus traiter avec  $\beta$ . On sait que  $e^{2\gamma} = \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2$  d'où  $\gamma = \ln(\sigma) - \ln(\beta)$ . On peut donc alors réécrire la fonction de log-vraisemblance comme suit (on la notera  $\dagger$  pour y faire référence dans la suite) :

$$l(Y_1, \dots, Y_T | \sigma, \delta, \gamma) \propto \sum_{t=1}^T \pi_t(\delta, \gamma) \left( \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\delta, \gamma))$$

On peut désormais résoudre l'équation suivante pour en déduire un estimateur de  $\sigma(\delta, \gamma)$  :

$$\frac{\partial l(Y_1, \dots, Y_T | \sigma, \delta, \gamma)}{\partial \sigma} = 0$$

Après dérivation puis résolution, on obtient donc la fonction d'écart type à deux variables suivante :

$$\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \exp \left( \hat{\gamma} + \frac{\frac{T}{2} + \sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right)}{\sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})} \right)$$

On a vu également que :

$$\pi_t(\delta, \gamma) = \frac{1}{\ln \left( 1 + ((1 - \delta) \cdot \frac{\bar{X}}{X_t} + \delta) \cdot e^{2\gamma} \right)}$$

avec :  $\bar{X} = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t$

Compte tenu de l'hypothèse de log-normalité des ultimes, la méthode consiste donc à minimiser la log-vraisemblance pour en obtenir une estimation du couple  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ . Mathématiquement, cela s'écrit comme suit :

$$(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \arg \min_{(\delta, \gamma)} \sum_{t=1}^T \pi_t(\delta, \gamma) \left( \ln\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\delta, \gamma))$$

## Paramètre propre à l'entreprise

La fonction que l'on cherche à minimiser permet donc d'obtenir le couple de paramètres  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ . Ces paramètres, une fois obtenus, permettent de calculer l'écart-type propre à l'entreprise pour le risque de prime (ou réserve) sur une loB considérée :

$$\sigma_{(Prem, LoB, USP)} = \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$$

Le facteur  $\sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$  permet d'enlever le biais de l'estimateur du paramètre  $\hat{\sigma}$  et ainsi augmenter la volatilité calibrée par les USP. Il est assez facile de voir que plus on a d'années d'historique et plus ce facteur va tendre vers 1.

Au final on obtient donc l'écart-type propre à l'entreprise final dans la LoB considérée suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_{(Prem,LoB,final)} &= c \cdot \sigma_{(Prem,LoB,USP)} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,LoB)} \\ &= c \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,LoB)}\end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la volatilité concernant le risque de réserve. Une fois cette partie traitée, nous présenterons les travaux concernant la validation des hypothèses ainsi que les différents résultats numériques sur le portefeuille de l'entreprise.

### 3.4.2 Volatilité pour le risque de réserve

On rappelle que le risque de réserve représente le risque d'un **sous-provisionnement** des sinistres. Il s'agit en effet du risque lié à l'incertitude concernant la capacité de l'entité à appréhender correctement la charge ultime de la sinistralité passée. Il s'agit d'un des risques majeurs du module de risque " *Souscription non-vie*."

Concernant ce risque, deux méthodes sont possibles : la même que précédemment à savoir une méthode log-normale ou bien une méthode dite de triangle – Paiements issue des travaux de Merz et Wüthrich.

#### Cadre et données d'entrée

Les données nécessaires à la modélisation du risque de réserve sont les suivantes :

- $i \in \{0, \dots, I\}$  : la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance ;
- $j \in \{0, \dots, J\}$  : la  $j^{\text{ème}}$  année de développement. (si  $i$  est l'année de survenance, alors un paiement est effectué en  $i+j$ ) ;
- $X_{i,j}$  : Les paiements incrémentaux ;
- $C_{i,j}$  : Le montant cumulé des paiements effectués pendant  $j$  année(s) pour tous les sinistres survenus l'année  $i$  ;
- $PCO_{i,j}$  : Le BE PSAP pour l'année de survenance  $i$  vue à la fin de l'année de développement  $j$  ;
- $MSEP$  : Mean Squared Error of Prediction.

#### Exigences et hypothèses sur les données d'entrée

Comme pour le risque de prime, ces données doivent respecter divers exigences dans la manière dont elles sont construites :

- Les hypothèses représentent le risque de réserve sur les 12 prochains mois ;

- L'historique comporte au minimum 5 années de survenance consécutive ;
- Pour la première année d'accident, on dispose d'un historique d'au moins 5 années de développement ;
- Pour la première année d'accident, le montant de paiements cumulés de la dernière année de développement pour laquelle on dispose d'un historique **inclut tous les paiements** de l'année d'accident à quelque différence non significative près ;
- Les montants de sinistres cumulés incluent les dépenses encourues pour la gestion des engagements d'assurance et de réassurance ;
- Le **nombre d'années d'accident** consécutif (pour lesquelles on a un historique) est supérieur ou égal au nombre d'années de développement consécutif de la première année d'accident.

Nous allons dans un premier temps présenter la méthode de Mack afin de donner un cadre pour la méthode de Merz et Wüthrich qui sera ensuite présentée et utilisée pour déterminer le paramètre propre à l'entreprise.

## Méthode de Mack

La méthode de Mack est une version stochastique de Chain Ladder. Cette dernière a été introduite par T. Mack en 1932. Elle a pour ambition d'estimer les erreurs commises lors de l'estimation des provisions par la méthode de Chain Ladder standard. Cette méthode repose sur les trois hypothèses suivantes :

### (H-Mack) Hypothèses statistiques sur les données

1. Il y a indépendance entre les années de survenance. Mathématiquement, cela signifie que les vecteurs  $(C_{i_1,j})_{j=0,\dots,n}$  et  $(C_{i_2,j})_{j=0,\dots,n}$  sont indépendants pour  $i_1 \neq i_2$  ;
2. Il existe des paramètres  $f_j$  tels que pour tout  $i$  :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1}|C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = f_j \cdot C_{i,j}$$

3. pour tout  $i$  et  $j$

$$\mathbb{V}[C_{i,j+1}|C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}] = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j}$$

La première hypothèse affirme que les montants cumulés de recouvrement sont indépendants, et ce pour chaque année de survenance. En ce qui concerne les hypothèses 2 et 3, elles permettent de considérer chaque facteur de développement  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  comme une variable aléatoire d'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}|C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}\right] = f_j$$

et de variance conditionnelle :

$$\mathbb{V}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}|C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}\right] = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

En se placant sous les hypothèses précédentes et en notant  $\mathcal{F}$  la tribu engendré par l'ensemble des  $C_{i,j}$  tels que  $i + j \leq n$  (ceux qui sont observés).

$$\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}] = f_{n-1} \dots f_{n-i} \cdot C_{i,n-i}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}] &= \mathbb{E}[C_{i,n}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[C_{i,n}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-1}]|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}] \\ &= \mathbb{E}[f_{n-1}C_{i,n-1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}] \\ &\vdots \\ &= f_{n-1} \dots f_{n-i} \cdot C_{i,n-i} \end{aligned}$$

Ce résultat montre donc que l'estimateur  $\hat{C}_{i,n}$  a la même forme que  $\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}]$  étant l'approximation de  $C_{i,n}$  comme fonction de l'information  $\mathcal{F}$ . Les quantités

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

sont des estimateurs sans biais et non corrélés des  $f_j$ .

Considérons  $B_k = \{C_{i,j}|j \leq k, i + j \leq n\}$  pour  $k = 1, \dots, n$ . Sous les hypothèses 1 et 2 on a alors :

$$\mathbb{E}[C_{i,k+1}|B_k] = \mathbb{E}[C_{i,k+1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,k}]$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}[\hat{f}_k|B_k] = \frac{\sum_{i=0}^{n-k-1} \mathbb{E}[C_{j,k+1}|B_k]}{\sum_{i=0}^{n-k-1} C_{j,k}} = f_k$$

ce qui implique donc que :

$$\mathbb{E}[\hat{f}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{f}_k|B_k]] = f_k$$

De plus, pour  $j < k$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{f}_j \hat{f}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{f}_j \hat{f}_k|B_k]] \\ &= \mathbb{E}[\hat{f}_j \mathbb{E}[\hat{f}_k|B_k]] \\ &= \mathbb{E}[\hat{f}_j] f_k \\ &= \mathbb{E}[\hat{f}_j] \mathbb{E}[\hat{f}_k] \end{aligned}$$

Les  $(\sigma_j^2)_j$  sont estimés par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

*Préambule* : On peut calculer l'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Squared Error) que l'on définit par :

$$MSE(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{E}[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | \mathcal{F}]$$

On a la décomposition biais-variance suivante :

$$MSE(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{V}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{F}] + \left( \hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{F}] \right)^2$$

Finalement, un estimateur naturel de l'erreur quadratique de la provision pour l'année  $i$  est donné par

$$MSE(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \right)$$

## Méthode de Merz et Wüthrich

Partant des triangles de développement, les mathématiciens Merz et Wüthrich ont théorisés une méthode de calcul qui permet de mesurer l'incertitude du risque de réserve. Cette dernière se base sur une vision à 1 an de la méthode de Mack. En effet, la méthode de Mack permet de calculer l'erreur de prédiction à l'ultime tandis que la méthode de Merz et Wüthrich va plutôt chercher à mesurer la variabilité à un an.

La méthode se retrouve dans les actes délégués ainsi que dans l'étude quantitative d'impact QIS 5. Le lecteur pourra se référer à l'article suivant [Merz].

## (H-MW) Hypothèses statistiques sur les données

La norme précise également que les données doivent être conformes aux hypothèses statistiques suivantes :

1. **Les montants de sinistres cumulés**  $C_{i,j}$  sont **stochastiquement indépendants** pour les différentes années de survenance  $i \in \{0, \dots, I\}$ . Mathématiquement, cela signifie que les vecteurs  $(C_{i_1,j})_{j=0,\dots,n}$  et  $(C_{i_2,j})_{j=0,\dots,n}$  sont indépendants pour  $i_1 \neq i_2$  ;
2. Les paiements cumulés  $(C_{i,j})_{j \geq 0}$  forment **une chaîne de Markov** et la **valeur attendue du montant de sinistres cumulés** d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulés de l'année de développement précédente :

$$\mathbb{E}[C_{i,k+1} | C_{i,k}, C_{i,k-1}, \dots, C_{i,0}] = f_k \cdot C_{i,k} \quad (3.8)$$

3. **La variance du montant de sinistres cumulés** d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulés de l'année de développement précédente :

$$\mathbb{V}[C_{i,k+1} | C_{i,k}, C_{i,k-1}, \dots, C_{i,0}] = \sigma_k^2 \cdot C_{i,k} \quad (3.9)$$

On peut remarquer que le modèle de Merz et Wüthrich reprend les hypothèses de Mack en y ajoutant une condition plus forte avec l'hypothèse de la chaîne de Markov sur paiements cumulés  $C_{i,j}$ .

## Méthode de calcul

Dans un premier temps, il convient d'introduire certaines notations. Ainsi, pour notre étude, nous allons considérer les deux vecteurs d'informations suivants : On

$$\mathcal{D}_I := \{C_{i,j} | i + j \leq I \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I$$

$$\mathcal{D}_{I+1} := \{C_{i,j} | i + j \leq I + 1 \text{ et } i \leq I\} : \text{l'information disponible en } t = I+1$$

voit que  $\mathcal{D}_{I+1}$  représente l'information contenue dans  $\mathcal{D}_I$  auquel on rajoute les paiements cumulés observés à la date  $I + 1$

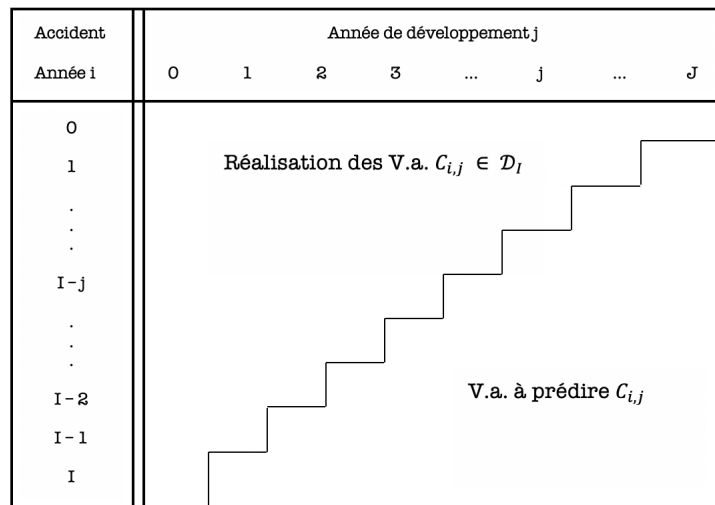


FIGURE 3.4 – Triangle de développement avec  $I=J$

Tenant compte des informations contenues dans  $\mathcal{D}_I$  et  $\mathcal{D}_{I+1}$ , nous pouvons estimer les facteurs de développement pour une année de développement  $j$  par :

$$\hat{f}_j^{(I)} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^{(I)}} \quad \text{avec} \quad S_j^{(I)} = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$$

$$\hat{f}_j^{(I+1)} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{S_j^{(I+1)}} \quad \text{avec} \quad S_j^{(I+1)} = \sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}$$

Ensuite, On obtient grâce aux estimateurs de Chain-Ladder des estimateurs **sans biais** des charges futures  $\mathbb{E}[C_{i,j} | \mathcal{D}_I]$  et  $\mathbb{E}[C_{i,j} | \mathcal{D}_{I+1}]$  :

$$\hat{C}_{i,j}^{(I)} = C_{i,I-1} \cdot \prod_{k=I-i}^{j-1} \hat{f}_k^{(I)}$$

$$\hat{C}_{i,j}^{(I+1)} = C_{i,I-i+1} \cdot \prod_{k=I-i+1}^{j-1} \hat{f}_k^{(I+1)}$$



Définissons également deux provisions  $R_i^{(I)}$  et  $R_i^{(I+1)}$  (une vue en date  $I$  et l'autre vue en date  $I + 1$ ) comme suit :

$$R_i^{(I)} = C_{i,I} - C_{i,I-i}$$

$$R_i^{(I+1)} = C_{i,I} - C_{i,I-i+1}$$

### Claims development result (CDR)

Le CDR correspond à la différence entre l'estimation de la charge ultime calculée en  $t = I$  et la prediction de la charge ultime calculée  $t = I + 1$ . Il se note  $CDR_i$  pour la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance et se détermine comme suit :

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}[R_i^{(I)} | \mathcal{D}_I] - \left( X_{i,I-i+1} + \mathbb{E}[R_i^{(I+1)} | \mathcal{D}_{I+1}] \right) \quad (3.10)$$

Avec :

- $X_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i}$  : Les paiements incrémentaux ;
- $R_i^{(I)}$  : Les réserves vues en  $t = I$  pour l'année de survenance  $i$ .

On observe que le  $CDR$  tel qu'il est défini dans l'égalité (10) est  $\mathcal{D}_{I+1}$ -mesurable donc on peut le réécrire ainsi :

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}[C_{i,I} | \mathcal{D}_I] - \mathbb{E}[C_{i,I} | \mathcal{D}_{I+1}] \quad (3.11)$$

Une propriété intéressante découlant de la martingalité de  $(\mathbb{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_t])_t$  nous permet d'affirmer que :

$$\mathbb{E}[CDR_i(I + 1) | \mathcal{D}_I] = 0$$

On définit le CDR réel agrégé comme étant la somme par année de survenance des CDR. Mathématiquement, cela s'écrit comme suit :

$$CDR = \sum_{i=1}^I CDR_i(I + 1)$$

La propriété sur l'espérance conditionnelle nulle en haut de page signifie que le CDR serait nul si les facteurs de développements étaient parfaitement connus. En général, les facteurs  $f_j$  ne sont pas connus (i.e le CDR n'est pas observable) et sont donc estimés par  $\hat{f}_j^{(I)}$  et  $\hat{f}_j^{(I+1)}$ . Par conséquent, en remplaçant les sinistres à l'ultime  $\mathbb{E}[C_{i,I} | \mathcal{D}_I]$  et  $\mathbb{E}[C_{i,I} | \mathcal{D}_{I+1}]$  par leurs estimateurs respectifs  $\hat{C}_{i,I}^{(I)}$  et  $\hat{C}_{i,I}^{(I+1)}$ , on peut alors estimer le **CDR réel** pour l'année de survenance  $i$  ( $1 \leq i \leq I$ ) et l'année comptable  $(I, I + 1]$  par le **CDR Observable** défini comme suit :

$$\begin{aligned} C\hat{D}R_i(I+1) &= \hat{R}_i^{\mathcal{D}_I} - X_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{\mathcal{D}_{I+1}} \\ &= \hat{C}_{i,I}^{(I)} - \hat{C}_{i,I}^{(I+1)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec :

- $\hat{R}_i^{\mathcal{D}_I} = \hat{C}_{i,I}^{(I)} - C_{i,I-i}$  un estimateur sans biais de  $\mathbb{E}[R_i^{(I)} | \mathcal{D}_I]$
- $\hat{R}_i^{\mathcal{D}_{I+1}} = \hat{C}_{i,I}^{(I+1)} - C_{i,I-i+1}$  un estimateur sans biais de  $\mathbb{E}[R_i^{(I+1)} | \mathcal{D}_{I+1}]$

Comme pour le CDR réel agrégé, le CDR observable agrégé sera donc la somme par année de survenance des CDR observables. Mathématiquement, cela s'écrit comme suit :

$$C\hat{D}R = \sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1)$$

### Mesure de l'erreur de prédiction à 1 an

Comme nous l'avons vu, la méthode de Merz Wüthrich ambitionne d'avoir une vision sur l'erreur de prédiction à 1 an. Pour quantifier cela, nous allons donc utiliser la notion statistique d'erreur quadratique moyenne ( $MSEP = \text{Mean Squared Error of Prediction}$ ) afin de mesurer l'incertitude de la prédiction du CDR.

2 choix sont possibles : Le premier serait d'adopter une **vision prospective** en étudiant l'incertitude de la prédiction du CDR autour de 0. L'autre choix possible serait d'adopter une vision dite **rétrospective** en considérant la distance entre le CDR réel et le CDR observable. Mathématiquement, il faut donc considérer ces quantités :

— Pour l'erreur de prédiction dans le cas d'une **vision prospective** :

$$MSEP_{C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = \mathbb{E}[(C\hat{D}R_i(I+1) - 0)^2 | \mathcal{D}_I]$$

— Pour l'erreur de prédiction dans le cas d'une **vision rétrospective** :

$$MSEP_{C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(C\hat{D}R_i(I+1)) = \mathbb{E}[(C\hat{D}R_i(I+1) - CDR_i(I+1))^2 | \mathcal{D}_I]$$

Dans la suite de ce mémoire nous présenterons uniquement la vision prospective car c'est celle qui s'intègre le mieux dans le cadre du référentiel Solvabilité 2.

En effet, cette réflexion réside dans le fait que l'entité doit disposer d'un capital suffisant pour faire face aux fluctuations du CDR autour de 0.

## MSEP du CDR observable par rapport à 0

On considère donc la quantité suivante :

$$\begin{aligned} MSEP_{C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) &= \mathbb{E}\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) - 0\right)^2 \mid \mathcal{D}_I\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{C}_{i,I}^{(I)} - \hat{C}_{i,I}^{(I+1)}\right)^2 \mid \mathcal{D}_I\right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour quantifier l'erreur quadratique moyenne conditionnelle (13), il faut dans un premier temps définir un estimateur pour les paramètres de variance. Ainsi, un estimateur sans biais pour  $\sigma_j^2$  sera donné par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j\right)^2 \quad (3.14)$$

On peut donc estimer maintenant la variance du CDR réel pour l'année de surveillance  $i \in \{1, \dots, I\}$  :

$$\hat{V}(CDR_i(I+1)|\mathcal{D}_I) = \left(\hat{C}_{i,I}^{(I)}\right)^2 \cdot \hat{\Psi}_i^{(I)} \quad (3.15)$$

avec :

$$\hat{\Psi}_i^{(I)} = \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i}^{(I)})^2 \cdot C_{i,I-i}}$$

On peut donc estimer l'erreur quadratique moyenne conditionnelle définie en (13) par :

$$M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = \left(\hat{C}_{i,I}^{(I)}\right)^2 \cdot \left(\hat{\Gamma}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Delta}_{i,I}^{(I)}\right) \quad (3.16)$$

avec :

- $\hat{\Delta}_{i,I}^{(I)} = \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i}^{(I)})^2 \cdot S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}}\right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j^{(I)})^2 \cdot S_j^{(I)}}$
- $\hat{\Phi}_{i,I}^{(I)} = \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}}\right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j^{(I)})^2 \cdot C_{I-j,j}}$
- $\hat{\Gamma}_{i,I}^{(I)} = \hat{\Phi}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Psi}_{i,I}^{(I)} \geq \hat{\Phi}_{i,I}^{(I)}$

## MSEP du CDR agrégé

Pour déterminer la MSEP globale agrégée il faut tenir compte des corrélations entre les années de survenance. Ainsi, pour des années d'accidents agrégées on obtient l'estimateur suivant :

$$MSEP_{\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0) = \sum_{i=1}^I M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(I+1)}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} (\hat{\Xi}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Lambda}_{i,I}^{(I)})$$

avec :

- $\hat{\Xi}_{i,I}^{(I)} = \hat{\Phi}_{i,I}^{(I)} + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i}^{(I)})^2 \cdot S_{I-i}^{(I+1)}}$
- $\hat{\Lambda}_{i,I}^{(I)} = \frac{C_{i,I-i}}{S_{I-i}^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i}^{(I)})^2 \cdot S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \left( \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \right)^2 \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j^{(I)})^2 \cdot S_j^{(I)}}$

Pour rappel,  $S_j^{(I)} = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$  et  $S_j^{(I+1)} = \sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}$ . Ainsi, il est facile de voir que  $S_j^{(I+1)} = S_j^{(I)} + C_{I-j,j}$  ce qui nous permet donc de réécrire le MSEP du CDR agrégé (que l'on notera pour la suite MSEP pour simplifier l'écriture  $MSEP_{\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1)|\mathcal{D}_I}(0)$ )

$$\begin{aligned} MSEP &= \sum_{i=1}^I M\hat{S}EP_{C\hat{D}R_i(I+1)}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} (\hat{\Xi}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Lambda}_{i,I}^{(I)}) \quad (3.17) \\ &= \sum_{i=1}^I \left( \hat{C}_{i,I}^{(I)} \right)^2 \cdot \left( \hat{\Gamma}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Delta}_{i,I}^{(I)} \right) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} (\hat{\Xi}_{i,I}^{(I)} + \hat{\Lambda}_{i,I}^{(I)}) \\ &= \sum_{i=1}^I \left( \left( \hat{C}_{i,I}^{(I)} \right)^2 \left( \frac{\hat{Q}_{I-i}}{C_{i,I-i}} + \frac{\hat{Q}_{I-i}}{S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{Q}_j}{S_j^{(I)}} \right) \right) \\ &\quad + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} \left( \frac{\hat{Q}_{I-i}}{S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{Q}_j}{S_j^{(I)}} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\hat{Q}_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}$$

Après un calcul assez fastidieux on obtient en fin de compte l'erreur quadratique moyenne de prédiction suivante :

$$MSEP = \sum_{i=1}^I \left( \hat{C}_{i,I}^{(I)} \right)^2 \cdot \frac{\hat{Q}_{I-i}}{C_{i,I-i}} + \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I \hat{C}_{i,I}^{(I)} \cdot \hat{C}_{k,I}^{(I)} \cdot \left( \frac{\hat{Q}_{I-i}}{S_{I-i}^{(I)}} + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{(I+1)}} \cdot \frac{\hat{Q}_j}{S_j^{(I)}} \right)$$

## Paramètre propre à l'entreprise

Maintenant que nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne de prédiction, nous pouvons désormais déterminer l'écart-type pour le risque de réserve en non vie pour une Lob considérée :

$$\sigma_{(res,LoB,USP)} = \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I} - \hat{C}_{i,I-i})}$$

On peut donc calculer l'écart-type final propre à l'entreprise de réserve en non-vie :

$$\sigma_{(res,LoB,final)} = c \cdot \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I} - \hat{C}_{i,I-i})} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,LoB)}$$

## — Chapitre 4 —

---

# Application numérique des USP sur le portefeuille SOGESSUR

---

Dans ce chapitre nous allons donc mettre en pratique les différentes méthodes proposées précédemment que ce soit pour le risque de prime ou de réserve. Pour ce faire, nous présenterons dans un premier temps les données en veillant au respect des contraintes réglementaires sur ces dernières. Nous attacherons ensuite une importance capitale au respect des hypothèses statistiques qui constituent le gros du travail. Ensuite, nous présenterons les résultats concernant les paramètres propres à l'entreprise pour enfin terminer par des analyses de sensibilité sur nos résultats. L'intérêt sera de tester la robustesse de la méthode des USP sur des scénarios économiques *anormaux*.

Avant d'afficher l'ensemble des résultats au global pour chaque LoB nous présenterons les résultats sur la ligne d'activité **Assurance pertes pécuniaires diverses**. Il s'agit de la ligne d'activité la plus importante car elle contient les produits AMDP (Assurance Moyen De Paiement) et chômage qui sont les plus coûteux pour l'entité en terme de capital réglementaire. Nous rappelons dans un premier temps la définition de cette ligne d'activité présente dans les actes délégués.

### **Assurance pertes pécuniaires diverses :**

*Engagements d'assurance couvrant le risque d'emploi, l'insuffisance de recettes, les intempéries, la perte de bénéfices, la persistance de frais généraux, les frais commerciaux imprévus, la diminution de la valeur vénale, la perte de loyers ou de revenus, les pertes commerciales indirectes autres que celles mentionnées plus haut, les pertes pécuniaires non commerciales, ainsi que tout autre risque d'assurance non-vie qui n'est pas couvert par les lignes d'activité déjà citées.*

## 4.1 (A.N) pour le risque de prime

### 4.1.1 Présentation des données

Pour le risque de prime, on rappelle que les données nécessaires pour calculer les paramètres propres à l'entreprise sont :

- $t \in \{1, \dots, T = 10\}$  : la  $t^{\text{ème}}$  année de survenance ;
- $X_t$  : **Les primes acquises** pour l'année de survenance  $t$ , et ce pour chaque LoB ;
- $Y_t$  : **Les pertes agrégées** qui correspondent à la somme des prestations versées durant la première année de développement, y compris frais de gestion des engagements et du Best Estimate des provisions pour sinistres à payer y compris frais de gestion des engagements.

#### Données

$t$	$X_t$	$Y_t$
2010	46,3M	4,1M
2011	101M	6,9M
2012	118M	13,3M
2013	107M	14,4M
2014	136M	15,2M
2015	143M	20M
2016	149M	29,3M
2017	154M	27,9M
2018	157M	29,2M
2019	156M	27,3M

FIGURE 4.1 – Données pour le risque de prime avec un historique de 10 ans

Afin de respecter les exigences sur les données d'entrée, il a fallu au préalable effectuer un traitement sur les données pour prendre en compte les frais de gestion. Ainsi, j'ai récupéré en comptabilité pour chaque année de survenance les frais de gestion associés vu en fin de première année de développement pour ainsi constituer les réelles charges ultimes. Les contraintes sur le nombre d'années d'historique ainsi que sur la prise en compte des événements catastrophiques se justifient par construction des données.

### 4.1.2 Processus de validation des hypothèses

Nous présenterons dans cette section les différentes méthodes statistique ainsi que les différents résultats concernant les hypothèses sous-jacentes au calcul des paramètres propres pour le risque de prime.

### Hypothèse 1 :

**Pour une année de survenance et un segment d'activité donnés, Les pertes agrégées  $Y_t$  sont proportionnelles aux primes acquises  $X_t$ . Mathématiquement cela signifie que  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$  :**

$$\mathbb{E}[Y_t] = \beta X_t$$

Dans un premier temps, on va procéder à une analyse essentiellement graphique pour voir le comportement de ces deux variables dans le temps. On trace donc un nuage de point entre nos charges ultimes et nos primes acquises. Le package *ggplot2* offre une visualisation intéressante puisqu'il inclue au nuage de point la droite de régression ainsi que des intervalles de confiance pour nos valeurs. Il est bon de noter que statistiquement l'utilisation de ces outils doit être justifiée.

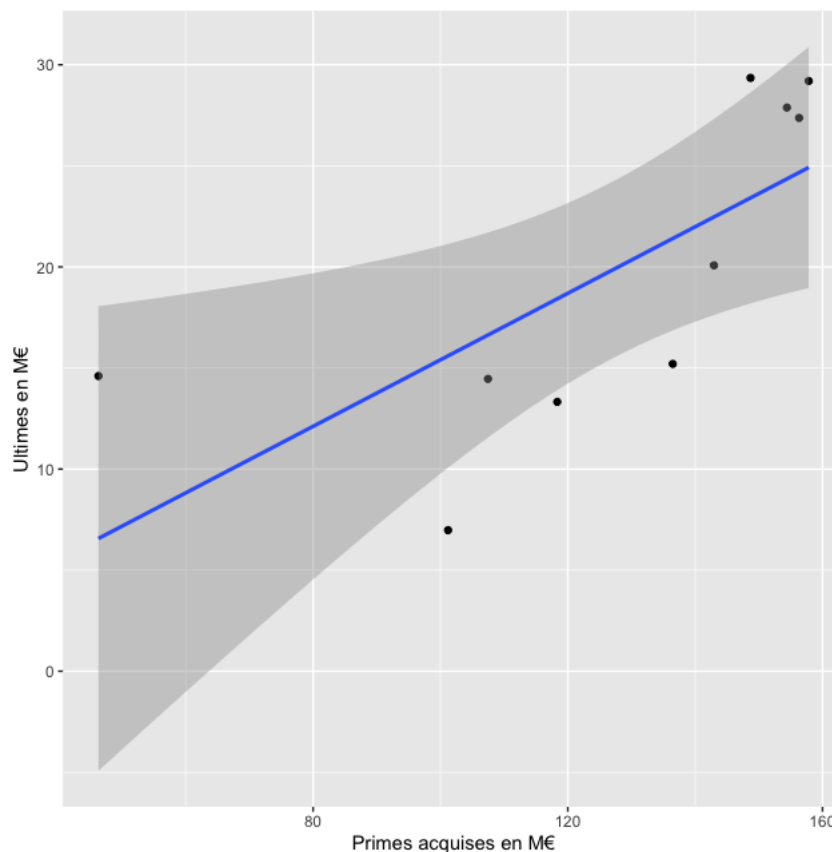


FIGURE 4.2 – Nuage de points entre les pertes et les primes acquises

Graphiquement, l'hypothèse de proportionnalité entre les pertes agrégées et les primes acquises semble assez évidente. En effet, on voit assez facilement que les pertes semblent être une fonction croissante des primes acquises. En revanche, intuitivement, on constate que pour l'année de survenance 2010 le point de coordonnée  $(X_{2010}, Y_{2010})$  semble biaiser un peu notre étude.



L'intervalle de confiance aux alentours de ce point est trop grand. Cela semble s'expliquer par le fait qu'en 2010 le volume de primes acquises a été réparti au prorata des données comptables. Du fait de son caractère aberrant, on décide donc de retirer ce point et on obtient ainsi :

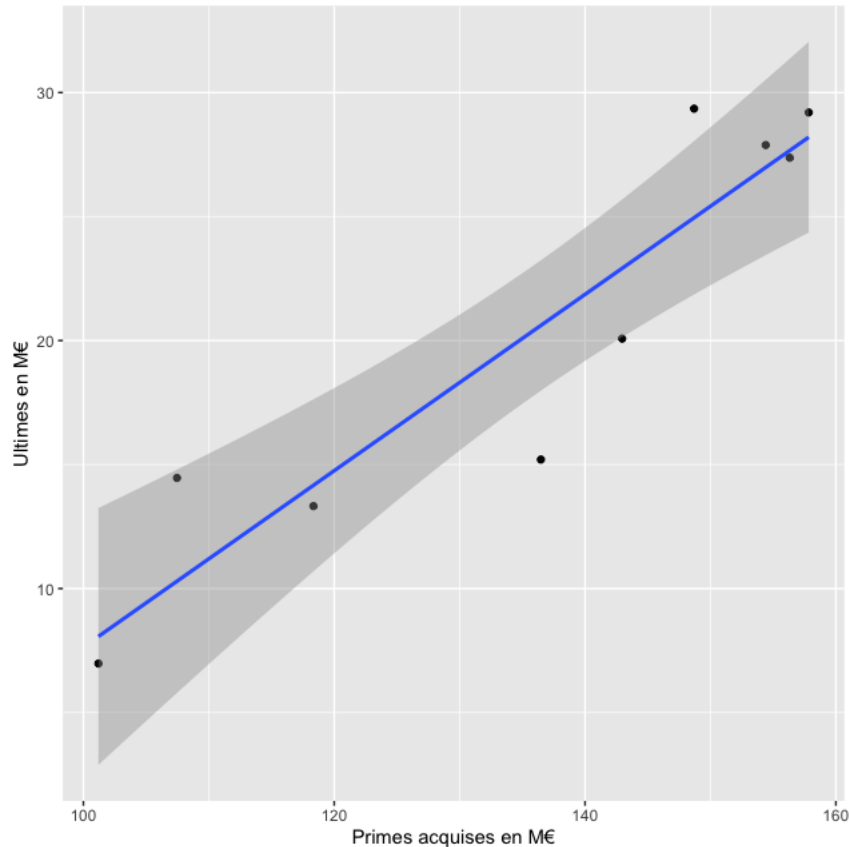


FIGURE 4.3 – Nuage de points avec retrait de l'année de survenance 2010

On serait tenté de vouloir modéliser le problème en utilisant un modèle de régression simple de la forme :  $Y_t = \beta \cdot X_t + \epsilon_t$ . Le problème est que nos résidus tel que le modèle est défini ne peuvent être normaux compte tenu de la loi de  $Y$ . On sait de plus que la densité log-normale ne fait hélas pas partie de la famille de lois exponentielles ce qui signifie que l'on ne peut donc pas appliquer le modèle linéaire généralisé directement sur la variable aléatoire  $Y$ .

En revanche, on sait que si  $Y$  suit une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ , alors la variable  $Y = \exp[Y^*]$  en Loi où  $Y^* \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Ainsi, pour pallier à ce problème on va donc travailler sur la transformation  $\log(Y)$  plutôt que  $Y$ .

On va donc considérer un modèle linéaire généralisé offrant la possibilité d'inclure une fonction de lien à la modélisation. On note  $\mu(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ . Un modèle généralisé se modélise de la manière suivante :  $g(\mu(X)) = g(\mathbb{E}[Y|X]) = X \cdot \beta$  pour une certaine fonction  $g$  bijective, appelée fonction de lien. La littérature statistique nous invite donc à choisir comme fonction de lien la fonction identité définit comme suit :  $g(\mu) = \mu$  qui s'apparente donc à une famille gaussienne. On effectue donc ce GLM sur la transformation  $\log(Y)$ .

La fonction *GLM* sur R nous permet d'obtenir les résultats suivants :

```
> log.lin.mod <- glm(log(Ultime) ~ PA-1, data=essai, family=gaussian(link="identity"))
> summary(log.lin.mod)

Call:
glm(formula = log(Ultime) ~ PA - 1, family = gaussian(link = "identity"),
    data = essai)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.694  -1.269  -0.201   1.307   2.910

Coefficients:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
PA 1.203e-07  4.008e-09   30.02 1.65e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 2.841737)

Null deviance: 2583.592 on 9 degrees of freedom
Residual deviance: 22.734 on 8 degrees of freedom
AIC: 37.881

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

FIGURE 4.4 – GLM sur réponse Log-Normale

On peut donc calculer une p-valeur pour le test de la déviance résiduelle qui s'obtient avec la commande R suivante :  $1 - pchisq(22, 734/2, 841737, 8) = 0.43$  à  $10^{-2}$  près. Cela est dû au fait que la déviance (cf Annexe) peut être approchée par une loi du Khi deux à  $n - p$  degrés de libertés où  $p$  est le nombre de paramètres à estimer dans le modèle estimé.

Dans le cas d'une régression linéaire sur la transformation  $\log(Y)$  on considère le modèle suivant :  $\log(Y_t) = \beta \cdot X_t + \epsilon_t$ . On obtient ainsi la sortie suivante :

```
> reglm <- lm(log(Ultime)~PA-1, data = essai)
> summary(reglm)

Call:
lm(formula = log(Ultime) ~ PA - 1, data = essai)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.694  -1.269  -0.201   1.307   2.910

Coefficients:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
PA 1.203e-07  4.008e-09   30.02 1.65e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.686 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9912,    Adjusted R-squared:  0.9901
F-statistic: 901.2 on 1 and 8 DF,  p-value: 1.645e-09
```

FIGURE 4.5 – Régression sur transformation logarithmique

On obtient un  $R^2$  de 99,12%. Cela signifie que 99,12% de la variabilité des primes acquises s'exprime par la transformation logarithmique des pertes agrégées. Ainsi, les deux approches ( $R^2 = .9912$  et  $p\text{-value} = .43$ ) nous permettent de ne pas rejeter l'hypothèse de proportionnalité. On peut également tester l'hypothèse de normalité des résidus avec un QQ-Plot ou un test statistique de normalité. On obtient les sorties suivantes :

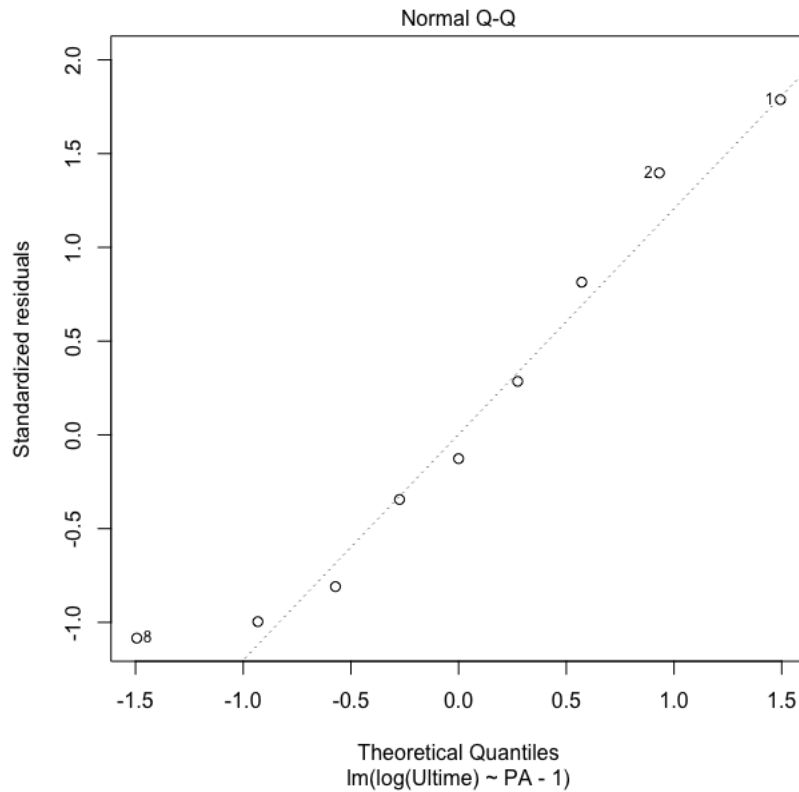


FIGURE 4.6 – Normalité des résidus

On voit bien que les résidus semblent distribués le long de la droite figurant sur le plot. Effectuons désormais un test de Shapiro pour vérifier par le biais d'un test cette hypothèse. On obtient ainsi :

```
Shapiro-Wilk normality test
data: residuals(reglm)
W = 0.92466, p-value = 0.4322
```

FIGURE 4.7 – Test de Shapiro

La p-valeur qui correspond au niveau minimal  $\alpha$  à partir duquel on rejette l'hypothèse nulle (qui est celle où nos résidus seraient gaussiens) est de 0,4322. Ainsi, au vu des données, on ne rejette donc pas l'hypothèse de normalité des résidus avec un risque de 5% de se tromper. L'avantage du modèle linéaire généralisé est que l'hypothèse d'homogénéité des résidus n'est pas obligatoire. En effet, on dispose de très peu d'informations sur les résidus et ces derniers n'ont aucune raison d'avoir la même variance.

## Hypothèse 2 :

**Les pertes agrégées  $Y_t$  suivent une loi log-normale de paramètre  $\mu_t$  et  $\omega_t^2$ .**

$$Y_t \sim \log -\mathcal{N}(\mu_t, \omega_t^2)$$

Dans un premier temps, il est bon de noter plusieurs éléments concernant les variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_T$ . Les v.a.  $Y_t, t = 1, \dots, T$  ne sont pas i.i.d. C'est assez logique sachant qu'on vient de montrer dans l'hypothèse (1) que les pertes agrégées étaient fonction des primes acquises (i.e  $Y_t = f(X_t)$ ). On sait également que les primes acquises ne sont pas des variables aléatoires, leurs montants sont connus.

De plus, pour chaque année de survenance la norme veut que les pertes agrégées suivent une loi log-normale. Cela s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 \sim \log -\mathcal{N}(\mu_1, \omega_1^2) \\ \dots \\ Y_{10} \sim \log -\mathcal{N}(\mu_{10}, \omega_{10}^2) \end{array} \right.$$

Or, en Input on dispose seulement d'une seule réalisation pour chaque variable aléatoire. Il est donc impossible de tester la log-normalité sur une seule réalisation de v.a., c'est pourquoi il est nécessaire de poser une hypothèse plus restrictive et donc plus lourde sur ces dernières. On supposera donc que les paramètres de la loi associée aux pertes agrégées sont indépendants des années de survenance  $(\mu_t, \omega_t) \perp\!\!\!\perp t$ . Le travail consiste donc maintenant à montrer sous notre hypothèse d'indépendance des paramètres que  $Y_t \sim \log -\mathcal{N}(\mu, \omega)$ .

On souhaite se débarrasser du caractère dépendant des  $Y_t$ . Pour ce faire on construit une nouvelle variable aléatoire  $Q_t$  qui est défini comme étant le rapport entre les pertes agrégées et les primes acquises  $\left( Z_t = \frac{Y_t}{X_t} \right)$ . L'intérêt que présente cette transformation est d'obtenir des variables indépendantes qui pourront donner lieu à des tests statistiques d'adéquations de loi.

On décide également pour nos test d'utiliser la transformation logarithmique pour créer la variable aléatoire  $Q_t = \log(Z_t)$  plutôt que  $Z_t$ . Ainsi, en se plaçant sous l'hypothèse de normalité des  $Q_t$  on en déduit que :

$$Q_t = \log(Z_t) \sim N(\mu, \omega^2)$$

$$\log\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) = \log(Y_t) - \log(X_t) \sim N(\mu, \omega^2)$$

$$\log(Y_t) \sim N(\mu + \log(X_t), \omega^2)$$

Cela revient donc à dire que prouver la normalité des  $Q_t$  implique la normalité de  $\log(Y_t)$ . De plus, on sait par définition d'une loi log-normale que si  $\log(Y_t)$  est distribuée selon une loi normale, alors  $Y_t$  sera distribuée selon une loi log-normale (Hypothèse que l'on cherche à valider). Ainsi, en montrant que  $\log(Y_t)$  est normale on aura ce que l'on cherche à savoir la log-normalité des pertes agrégées. **Ainsi, il suffit donc de montrer que nos  $Q_t \sim N(\mu - \log(X_t), \omega^2)$  pour pouvoir valider cette hypothèse.**

Pour valider cette hypothèse nous allons procéder de deux manières. Dans un premier temps nous utiliserons des méthodes essentiellement graphiques (histogramme, fonction de densité, fonction de répartition) qui s'appuient sur des notions statistiques bien spécifiques. Ensuite, nous proposerons différents tests statistiques d'adéquations de loi pour proposer une vision différente du problème. Soient  $q_1, \dots, q_{10}$  nos 10 réalisations de la variable aléatoire  $Q$ . L'objectif va donc être de savoir si notre variable  $Q$  peut être modélisée par une loi normale. On rappelle que si  $Q$  suit une loi normale de paramètre  $\mu$  et  $\omega^2$  alors la densité de  $Q$  est  $f_Q(x) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(q-\mu)^2}{2\omega^2}\right)$ . En premier lieu, il convient d'estimer par la méthode des moments les paramètres de notre loi normale. On suppose donc  $(Q_1, \dots, Q_T)$  i.i.d de même loi que  $Q$ . Par la méthode des moments on obtient donc facilement les estimateurs sans biais, convergents de  $\mu$  et  $\omega^2$  suivants :  $\hat{\mu}_T = \overline{Q}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Q_i$  et  $\hat{\omega}_T^2 = S_T'^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (Q_i^2 - \overline{Q}_T^2)$ .

Maintenant que les paramètres sont estimés on compare la fonction de répartition empirique de nos données avec celle d'une loi normale prenant en paramètre le couple  $(\hat{\mu}_T, \hat{\omega}_T^2)$  estimé précédemment par la méthode des moments. Pour rappel, la fonction de répartition empirique se calcule comme suit :  $F_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{[q_i \leq t]}$ .

Ainsi, on construit ces deux fonctions de répartition (en noir pour la fonction de répartition empirique associée à nos données et rouge pour celle d'une loi normale avec nos paramètres estimés par la méthode des moments). Grâce à la fonction ecdf de R on obtient le graphique suivant :

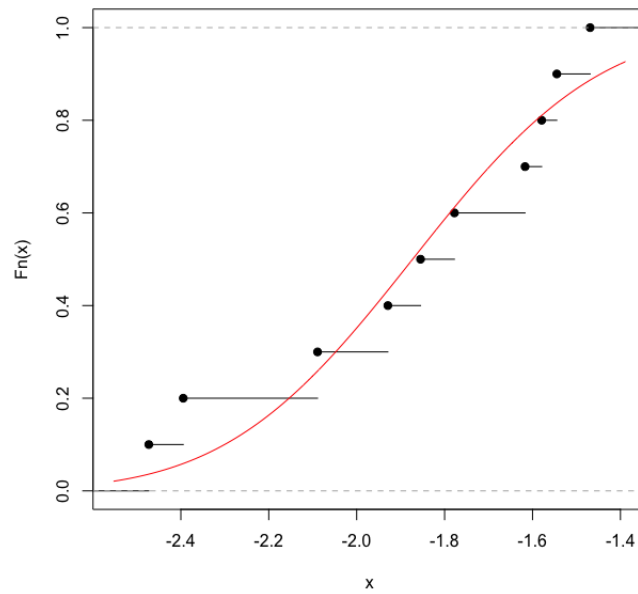


FIGURE 4.8 – Méthode de la fonction de répartition

On constate facilement que l'écart entre la courbe rouge et la courbe noire est relativement faible. Cette méthode permet une nouvelle fois de ne pas écarter l'idée d'une loi normale sur nos données. On peut également tracer la fonction de densité approximée de nos données et voir la différence avec celle d'une loi normale prenant comme paramètre ceux estimés précédemment

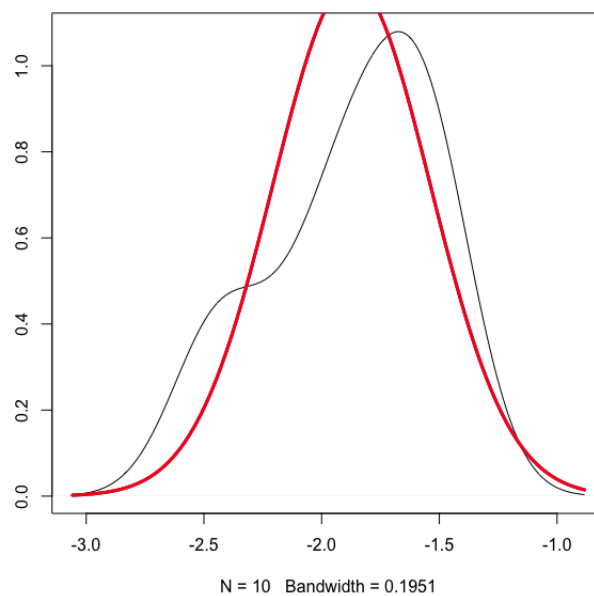


FIGURE 4.9 – Méthode de la fonction de densité

La conclusion reste logiquement inchangée. Cette analyse graphique est déterminante puisque en théorie des probabilités, la densité ainsi que la fonction de répartition caractérisent la loi.

On va maintenant utiliser la méthode du Q-Q Plot. Le Q-Q plot est un diagramme qui permet de comparer la distribution de nos données à une distribution normale. Ainsi, La droite du QQ-Plot indique la position que devraient avoir les points s'ils obéissaient exactement à la distribution normale. On obtient ainsi :

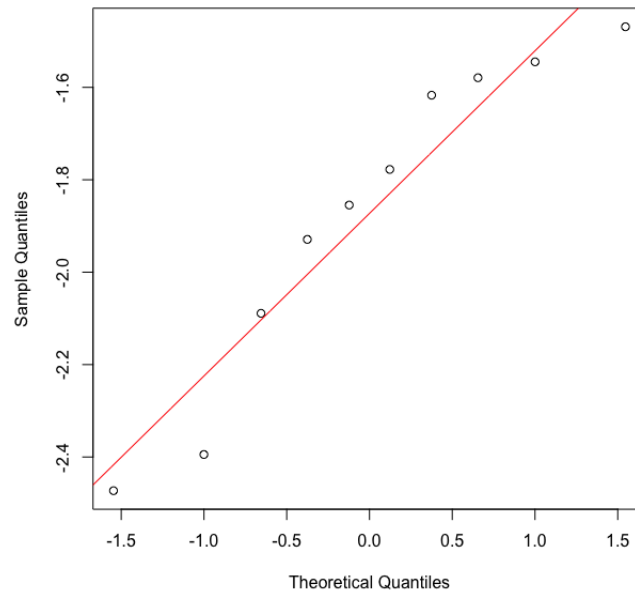


FIGURE 4.10 – Méthode du Q-Q plot

On constate que les points semblent bien alignés sur la droite. Cela nous conforte une nouvelle fois dans l'hypothèse que nos données sembleraient suivre une loi normale. Maintenant que nous avons vu par des méthodes essentiellement graphiques que nos données ne semblent pas s'éloigner de l'hypothèse de normalité, il convient d'intégrer une notion de risque dans notre analyse. Pour ce faire, nous prendrons par la suite un risque d'erreur classique de 5% (soit un niveau de confiance de 95%).

Ainsi, nous allons effectuer des tests statistiques afin de déterminer (tenant compte du risque d'erreur et de la taille de notre échantillon) la loi associée aux données. On pourra ensuite comparer les résultats avec ceux obtenus précédemment.

On suppose donc toujours  $(Q_1, \dots, Q_T)$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de même loi que  $Q$  et de fonction de répartition  $F_Q$ . La fonction de répartition empirique associée à notre  $T$ -échantillon est la fonction définie par :

$$F_Q(t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{[Q_i \leq t]}$$

Cette fonction est croissante et continue à droite. De plus, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet aisément d'affirmer que  $|F_{Q,T}(x) - F_Q(x)|$  tend en probabilité vers 0.

On considère  $F$  la fonction de répartition sur nos données et on se donne une fonction de répartition  $F_\lambda$  qui est celle que l'on veut tester (i.e la fonction de répartition d'une loi normale ici). Dans le cadre général  $F_\lambda$  doit être continue ce qui est le cas ici par propriété de la fonction de répartition sur une loi usuelle continue telle que la loi normale. On note que  $\lambda$  représente le couple de paramètre que l'on cherche à estimer.

**NB :** On notera  $F_{\hat{\lambda}}$  la fonction de répartition associée aux paramètres estimés par la méthode des moments avec  $\hat{\lambda} = (\hat{\mu}, \hat{\omega})$ .

**Hypothèses de test :**

$$H_0 : F = F_\lambda \quad \text{vs} \quad H_1 : F \neq F_\lambda$$

Cela revient à écrire les hypothèses ainsi :

$$H_0 : Q_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(\mu - \log(X_t), \omega^2) \quad \text{vs} \quad H_1 : Q_t \stackrel{\mathcal{L}}{\neq} N(\mu - \log(X_t), \omega^2)$$

Ce qui équivaut comme on l'a vu plus haut à tester :

$$H_0 : Y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \log - \mathcal{N}(\mu, \omega^2) \quad \text{vs} \quad H_1 : Y_t \stackrel{\mathcal{L}}{\neq} \log - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$$

Pour la présentation des différents tests que nous allons utiliser, l'auteur pourra se référer à **l'annexe 2** dans laquelle nous donnerons les détails techniques de ces tests. On obtient les sorties suivantes concernant les différents tests de normalité utilisés :

<p>Shapiro-Wilk normality test</p> <p>data: test\$quotient W = 0.90891, p-value = 0.2736</p>	<p>One-sample Kolmogorov-Smirnov test</p> <p>data: test\$quotient D = 0.17826, p-value = 0.8551 alternative hypothesis: two-sided</p>
<p>Jarque Bera Test</p> <p>data: test\$quotient X-squared = 0.97303, df = 2, p-value = 0.6148</p>	<p>Anderson-Darling normality test</p> <p>data: test\$quotient A = 0.374, p-value = 0.3426</p>

FIGURE 4.11 – Outputs : Tests de normalité

On constate que pour l'ensemble de nos tests, on obtient une p-valeur bien supérieure à 5%. Cela signifie qu'au vu de nos données et compte tenu d'un risque d'erreur de 5%, on ne rejette pas l'hypothèse de normalité des  $Q_t$ . **Cela implique donc comme nous l'avons vu précédemment que nos pertes agrégées ne semblent pas s'écarter de l'hypothèse de lognormalité.**



### Hypothèse 3 :

**La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée pour l'estimation des paramètres du modèle.**

Cette hypothèse a pour but de montrer que la méthode du maximum de vraisemblance aboutit bien à une optimisation de la fonction de vraisemblance. En d'autres termes, on souhaite voir visuellement qu'il existe un couple de paramètres  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  qui permettent de minimiser la log-vraisemblance. Pour ce problème d'optimisation nous allons avoir recours à l'algorithme **BFGS**. Il s'agit d'un algorithme de type quasi-Newton que nous présenterons un peu plus en détail dans l'annexe 3. Nous utiliserons plus particulièrement l'algorithme L-BFGS-B qui offre la possibilité de fixer des contraintes sur les paramètres que l'on cherche à optimiser.

#### **4.1.3 Calcul des paramètres USP pour le risque de prime**

Dans un premier temps, on rappelle les estimations à l'échelle du marché de l'écart type net pour le risque de prime pour chaque ligne d'activité. Notre application numérique concerne le segment pertes pécuniaires diverses que l'on a encadré en rouge sur le tableau suivant :

<b>Segment</b>	<b>Écart type pour le risque de primes brut du segment</b>
Responsabilité civile Automobile	10%
Autre assurance des véhicules à moteur	8%
Maritime, aérienne et transport	15%
Incendie et autres dommages aux biens	8%
Responsabilité civile générale	14%
Crédit et cautionnement	19%
Protection juridique	8,3%
Assistance	6,4%
<b>Pertes pécuniaires diverses</b>	<b>13%</b>
Réassurance accidents non proportionnelle	17%
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	17%
Réassurance dommages non proportionnelle	17%

FIGURE 4.12 – Rappel : Ecart-type de marché pour le risque de prime

Après optimisation on obtient finalement les résultats suivants :

Sources	EIOPA (Marché)	USP: de 2010 à 2019	USP: de 2011 à 2019
Paramètres	13%	5,16% (-7,84%)	5,79% (-7,21%)

FIGURE 4.13 – Paramètres USP pour le segment pertes pécuniaires diverses

En retirant l'année 2010 (comme nous l'avons vu lors de la justification de l'hypothèse de proportionnalité), on aurait pu s'attendre à plus de précision et ainsi à un paramètre USP plus faible mais en réalité ce n'est pas le cas. En effet, en retirant une année d'historique, on passe de 10 années à 9 années. Cela a pour conséquence de faire baisser le facteur de crédibilité de 100% à 92%.

Ainsi pour l'historique de 9 ans (celui hors 2010), on obtient par optimisation l'estimation de nos paramètres suivantes : ( $\hat{\delta} = 0, \hat{\gamma} = -1.20$ ). On calcule donc le

$$\begin{aligned}
 \sigma_{(Prem,LoB\ 9,final)} &= 0.92 \cdot \sigma_{(Prem,LoB\ 9,USP)} + (1 - 0.92) \cdot \sigma_{(M,LoB)} \\
 &= 0.92 \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1 - 0.92) \cdot \sigma_{(M,LoB)} \\
 &= 0.92 \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{9+1}{9-1}} + (1 - 0.92) \cdot 13\% \\
 &= 5.16\%
 \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons regardé bien en détail chacune des hypothèses pour le segment *pertes pécuniaires diverses* = *Miscellaneous Financial Loss en Anglais*, on peut réitérer ces études sur l'ensemble des segments pour lesquels on dispose d'un historique de données fiables (i.e qui répondent aux exigences réglementaires). On obtient donc le tableau suivant qui récapitule ce qui est validé ou non :

HYPOTHÈSES POUR LE RISQUE DE PRIME			
Segment	Hypothèse de proportionnalité	Hypothèse de log normalité	Méthode du max de vraisemblance adaptée ?
Income protection insurance	✓	✓	✓
Motor Vehicle Liability Insurance	✓	✓	✓
Other motor Insurance	✓	✓	✓
Fire and other damage to property Insurance	✓	✓	✓
General Liability Insurance	✗	✓	✓
Legal Expenses Insurance	✓	✓	✓
Miscellaneous Financial Loss	✓	✓	✓

FIGURE 4.14 – Récapitulatif sur la validation des hypothèses concernant le risque de prime

On constate que globalement, les hypothèses concernant la méthode du maximum de vraisemblance sont validées. L'hypothèse de proportionnalité concernant le segment *General Liability Insurance* n'est en revanche pas validé car la sinistralité est très volatile concernant cette ligne d'activité.

On peut désormais donner les résultats au global concernant le calcul des paramètres USP pour le risque de prime sur l'ensemble de nos segments.

Paramètres	EIOPA (Marché)	USP : De 2011 à 2019	USP : De 2010 à 2019
<b>Income Protection Insurance</b>	8,5%	7,5% (-1%)	12,4% (+1,9%)
<b>Motor Vehicle Liability Insurance</b>	10%	9,18% (-0,82%)	10,02% (+0,02%)
<b>Other Moto Insurance</b>	8%	8,47% (+0,47%)	8,3% (+0,3%)
<b>Fire and Other Damage to Property Insurance</b>	8%	6,94% (-1,06%)	8,16% (+0,16%)
<b>General Liability Insurance</b>	14%	18% (+4%)	25,54% (+11,54%)
<b>Legal Expense Insurance</b>	8,3%	10,17% (+1,87%)	10,45% (+2,15%)
<b>Miscellaneous Financial Loss</b>	13%	5,79% (-7,21%)	5,16% (-7,84%)

FIGURE 4.15 – Paramètres USP pour le risque de prime

Le choix de présenter les résultats de 2011 à 2019 d'une part et de 2010 à 2019 d'autre part sert uniquement à montrer le biais que l'année 2010 procure sur les paramètres USP. Sogessur, dans ses calculs, devra considérer uniquement l'échantillon entre les années 2011 à 2019 (sauf si la comptabilité permet de récupérer des données plus fiables pour l'année 2010).

## 4.2 (A.N) pour le risque de réserve

### 4.2.1 Présentation des données

Pour rappel, le risque de réserve correspond au risque d'un **sous-provisionnement** (donc d'une mauvaise estimation) des sinistres. Pour ce dernier, les données nécessaires au calcul des paramètres propres à l'entreprise sont :

- $i, j$  : année de survenance et année de développement (Si  $i$  est l'année de survenance, alors un paiement est effectué en  $i + j$ ) ;
- $C_{i,j}$  : Le montant cumulé des paiements effectués pendant  $j$  année pour tous les sinistres survenus l'année  $i$ .

## Données

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2 012 383,00	3 119 093,00	3 182 353,96	3 187 351,78	3 265 059,77	3 352 178,06	3 425 043,62	3 518 730,26	3 618 667,41
1	5 543 134,00	7 856 739,56	8 012 872,45	8 175 407,19	8 306 507,44	8 446 618,75	8 607 138,22	8 779 166,09	-
2	9 145 554,10	11 907 746,58	12 172 882,22	12 238 670,09	12 241 505,35	12 249 145,76	12 252 859,99	-	-
3	10 015 686,80	13 449 614,86	14 193 051,73	14 267 957,76	14 289 718,20	14 293 722,22	-	-	-
4	10 818 238,81	17 220 322,00	18 059 849,36	18 118 428,38	18 135 615,18	-	-	-	-
5	14 285 598,61	21 344 384,54	21 830 054,71	21 911 580,73	-	-	-	-	-
6	17 928 623,94	24 220 585,81	24 854 588,43	-	-	-	-	-	-
7	20 179 912,48	26 545 608,32	-	-	-	-	-	-	-
8	18 463 162,20	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.16 – Données pour le risque de réserve

Une nouvelle fois, pour respecter les exigences sur les données d'entrée, il a fallu au préalable faire un traitement sur ces données. La norme précise que les montants de sinistres cumulés incluent les dépenses encourues pour la gestion des engagements d'assurance et de réassurance. Il a donc fallu construire un triangle des frais de gestion liés aux sinistres vu en fin de première année de développement pour ensuite l'ajouter au triangle des sinistres cumulés. Les contraintes sur le nombre d'années d'accidents et le nombre d'années de développements sont respectées.

### 4.2.2 Processus de validation des hypothèses

Nous présenterons dans cette section les différentes méthodes statistiques ainsi que les différents résultats concernant les hypothèses sous-jacentes au calcul des paramètres propres pour le risque de réserve.

#### Hypothèse 1 :

**Il y a indépendance entre les années de survenance. Mathématiquement, cela signifie que les vecteurs  $(C_{i_1,j})_{j=0,\dots,n}$  et  $(C_{i_2,j})_{j=0,\dots,n}$  sont indépendants pour  $i_1 \neq i_2$**

Cela revient donc à dire que les montants de sinistres cumulés  $C_{i,j}$  sont indépendants pour les différentes années de survenance  $i \in \{0, \dots, I = 8\}$ . Pour tenter de valider cette hypothèse on va procéder en deux étapes. D'abord, on va utiliser des critères essentiellement graphiques qui donnent une bonne première vision du problème. Ensuite, on utilisera des critères théoriques, qui eux découlent d'une réflexion statistique et mathématique.

#### **Critère graphique :**

On a vu que mathématiquement cette hypothèse peut se justifier en montrant que l'espérance conditionnelle du rapport  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  sur un pas de temps consécutif est indépendante de l'année de survenance. L'idée de la **méthode graphique** va être de tracer les couples  $(i, f_{i,j})$  pour chaque année de développement  $j = 1, \dots, J$  et de voir si l'on perçoit une certaine tendance dans l'évolution de ces rapports par rapport aux années de survenance, ou si au contraire, il existe un caractère immuable dans cette évolution. On obtient le plot suivant :

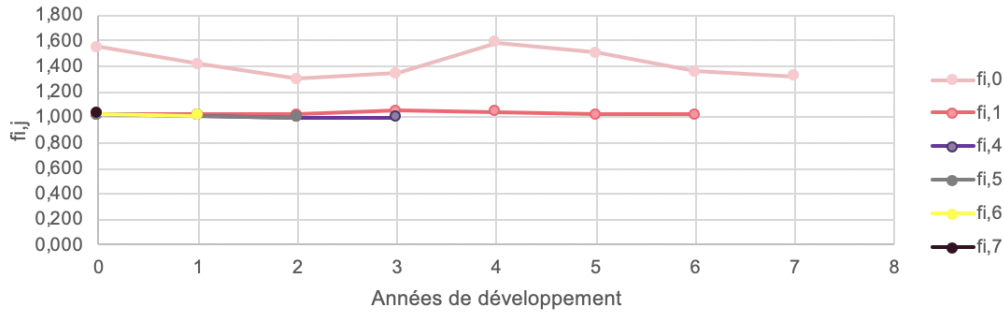


FIGURE 4.17 – Méthode graphique

On voit bien que l'évolution du rapport semble constante et plutôt indépendante des années de survenance. C'est une première idée visuelle mais cela ne suffit pas. Comme bien souvent, il faut modéliser ce problème et surtout quantifier ce niveau d'indépendance.

### Critère théorique :

Ce critère se décompose en 5 étapes différentes que nous allons présenter en détail :

- **Étape 1** : Partant du tableau des sinistres cumulés (frais inclus) avec  $i \in \{0, \dots, I\}$  et  $j \in \{0, \dots, J\}$  ( $I=J=8$ ), on va créer un nouveau tableau à partir des éléments de l'ensemble suivant pour  $k = 0, \dots, I - 1$  :

$$F_k := \left\{ \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \mid 0 \leq i \leq I - (k + 1) \right\}$$

i \ j	0	1	...	J-1	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...		
...	...	...			
I-1	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$			
I	$C_{I,0}$				

➔

i	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$
0	1,550	1,017	1,001	1,0001	1,005	0,996	1,000	1,000
1	1,364	1,019	1,003	1,0012	0,999	1,000	1,000	
2	1,321	1,025	1,006	1,0002	1,001	1,000		
3	1,370	1,062	1,006	1,0016	1,000			
4	1,641	1,052	1,003	1,0009				
5	1,534	1,024	1,004					
6	1,383	1,029						
7	1,384							

FIGURE 4.18 – Étape 1


- **Étape 2** : On subdivise chaque colonne  $F_k$  en sous-ensembles  $SL_k$  définis comme suit pour  $k = 0, \dots, I - 1$  :

$$SL_k := \left\{ S \mathbb{1}_{F_{i,k} < Med(F_k)} + L \mathbb{1}_{F_{i,k} > Med(F_k)} + E \mathbb{1}_{F_{i,k} = Med(F_k)} \mid 0 \leq i \leq I - (k + 1) \right\}$$

Comme le montre la formule, cela consiste donc à créer un nouveau tableau dans lequel on va comparer pour chaque année de survenance  $i$  le rapport  $F_{i,k}$  avec la médiane de la colonne considérée  $k$ . Si le rapport est strictement plus petit que la médiane on met un S (*Smaller*) dans la nouvelle cellule prévu à cet effet. Si il est strictement plus grand on met un L (*Larger*) et sinon (si il est égal), on met un E (*Equal*). Les tableaux ci-dessous illustrent la transformation  $F_k \rightarrow SL_k$ .

- **Étape 3** : Pour chaque diagonale on va créer deux variables  $S_d$  et  $L_d$  qui vont compter sur chaque diagonale le nombre d'occurrence pour S et L (Le E n'aura pas d'importance dans l'analyse) :

i	F <sub>0</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>
0	1,550	1,020	1,002	1,0244	1,027	1,022	1,027	1,028
1	1,417	1,020	1,020	1,0160	1,017	1,019	1,020	
2	1,302	1,022	1,005	1,0002	1,001	1,000		
3	1,343	1,055	1,005	1,0015	1,000			
4	1,592	1,049	1,003	1,0009				
5	1,511	1,023	1,004					
6	1,365	1,027						
7	1,327							



i	SL <sub>0</sub>	SL <sub>1</sub>	SL <sub>2</sub>	SL <sub>3</sub>	SL <sub>4</sub>	SL <sub>5</sub>	SL <sub>6</sub>	SL <sub>7</sub>
0	L	S	S	L	L	L	L	E
1	L	S	L	L	L	E	S	
2	S	S	L	S	S	S		
3	S	L	L	E	S			
4	L	L	S	S				
5	L	E	S					
6	S	L						
7	S							

FIGURE 4.19 – Etape 2

d	S <sub>d</sub>	L <sub>d</sub>
0	0	1
1	1	1
2	3	0
3	2	2
4	0	5
5	1	5
6	3	1
7	6	1

FIGURE 4.20 – Etape 3

- **Étape 4** : On introduit les variables (aléatoires et non aléatoires) suivantes :

- $Z_d = \min(S_d; L_d)$
- $n = S_d + L_d$
- $m = \frac{n-1}{2}$ .

On cherche à montrer que les montants de sinistres cumulés  $C_{i,j}$  sont indépendants pour les différentes années de survenance. Intuitivement cela laisse sous entendre que *petits facteurs* et les *grands facteurs* doivent être sensiblement de même taille ( $S_j \approx L_j$ ). On prends donc (sans trop prendre de risque) comme hypothèse que chaque facteur de développement a une probabilité de 50% d'appartenir à L ou à S. Pour concevoir un test statistique, nous avons besoins des deux premiers moments de la distribution de probabilité de  $Z_d$  sous cette précédente hypothèse. Ainsi, tenant compte que  $S_d + L_d = n$ , il est donc concevable de considérer que  $L_d \sim B(n, 0.5)$  tel que  $\mathbb{P}[L_d = k] = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On trouve donc facilement la distribution de  $S_d$  par différence et donc celle de  $Z_d$  par construction. On admettra par généralisation que :

$$\mathbb{E}[Z_d] = \frac{n}{2} - \binom{n-1}{m} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\mathbb{V}[Z_d] = \frac{n(n-1)}{4} - \binom{n-1}{m} \times \frac{n(n-1)}{2^n} + \mathbb{E}[Z_d] - (\mathbb{E}[Z_d])^2$$

- **Étape 5** : Dans cette dernière étape, nous allons construire des intervalles de confiance pour la statistique de test  $Z = \sum_d Z_d$ . Sous l'hypothèse qu'on cherche à tester, les  $Z_d$  sont décorrélés et donc on a :

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{d \in S_d} z_d\right] = \sum_{d \in S_d} \mathbb{E}[Z_d] = \mathbb{E}[Z_0] + \dots + \mathbb{E}[Z_{I-1}]$$

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}\left[\sum_{d \in S_d} Z_d\right] = \sum_{d \in S_d} \mathbb{V}[Z_d] = \mathbb{V}[Z_1] + \dots + \mathbb{V}[Z_{I-1}]$$

On a montré que  $Z_d$  admet des moments d'ordre 2, et sous l'hypothèse testée on a l'indépendance donc on peut considérer que Z s'approxime par une loi normale (TCL). Par prudence, on choisit un test avec un risque d'erreur de 1% soit 99% de confiance. Ainsi, comme règle de décision, on ne rejettera pas au risque d'erreur de 1% l'hypothèse d'indépendance si :

$$Z \in [\mathbb{E}[Z] - 2.576\sqrt{\mathbb{V}[Z]}; \mathbb{E}[Z] + 2.576\sqrt{\mathbb{V}[Z]}]$$

Où 2.567 est le quantile tel que  $\mathbb{P}(-2.576 \leq \mathcal{N}(0, 1) \leq 2.576) = 99\%$   
On obtient ainsi le tableau suivant :

d	S <sub>d</sub>	L <sub>d</sub>	Z <sub>d</sub>	n	m	E[Z <sub>d</sub> ]	V[Z <sub>d</sub> ]
0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	2	0,5	0,5	0,25
2	3	0	0	3	1	0,75	0,1875
3	2	2	2	4	1,5	1,25	0,4375
4	0	5	0	5	2,0	1,5625	0,3710938
5	1	5	1	6	2,5	2,0625	0,6210938
6	3	1	1	4	1,5	1,25	0,4375
7	6	1	1	7	3	2,40625	0,5537109
						9,78125	2,8583984

FIGURE 4.21 – Etape 5

Ainsi, sur nos données on obtient :

$$Z(\omega) = 6 \in [5, 4362 ; 14, 1263]$$

**On ne rejette donc pas l'hypothèse selon laquelle les montants des sinistres cumulés  $C_{i,j}$  sont indépendants des années de survenance de ces derniers.**

### Hypothèse 2 :

**Les paiements cumulés  $(C_{i,j})_{\geq 0}$  forment une chaîne de Markov et la valeur attendue du montant de sinistres cumulé d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente :**

$$\mathbb{E}[C_{i,k+1} \mid C_{i,k}, C_{i,k-1}, \dots, C_{i,0}] = f_k \times C_{i,k} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq I \text{ et } 0 \leq k \leq I - 1$$

Intuitivement, cette hypothèse signifie que pour année de survenance  $k$ , le couple de points  $(C_{i,k+1}; C_{i,k})$  doivent être alignés sur une droite issue de l'origine et de pente  $f_k$ . Cette hypothèse est l'hypothèse basique de la méthode de Chain-Ladder qui implique que les facteurs de développement  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$  et  $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$  sont décorrélés.

En théorie des probabilités cela signifie que :  $\mathbb{E}\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \times \frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right] \times \mathbb{E}\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right]$ . Pour montrer la décorrélation de ces facteurs de développement Mack préconise l'utilisation du **test de Spearman empirique**.

### **Test de Spearman empirique :**

Pour présenter ce test statistique, nous allons donc le décomposer en plusieurs étapes :

- **Étape 1 :** On va repartir du triangle construit à partir du calcul des  $F_k$  où  $F_k := \left\{ \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \mid 0 \leq i \leq I - (k + 1) \right\}$ . Sur ce tableau, on va trier dans un premier temps les facteurs de développement pour chaque colonne  $k = 0, \dots, I - 1$ . On notera  $r_{i,k}$  le rang associé pour une année de survenance  $i$  et pour la colonne  $k$ . On rappelle ci-dessous le tableau le tableau des  $F_k$

i	F <sub>0</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>
0	1,550	1,020	1,002	1,0244	1,027	1,022	1,027	1,028
1	1,417	1,020	1,020	1,0160	1,017	1,019	1,020	
2	1,302	1,022	1,005	1,0002	1,001	1,000		
3	1,343	1,055	1,005	1,0015	1,000			
4	1,592	1,049	1,003	1,0009				
5	1,511	1,023	1,004					
6	1,365	1,027						
7	1,327							

FIGURE 4.22 – Étape 1 : Tableau des  $F_k$

- **Étape 2 :** On va retirer du triangle initial construit à partir des  $F_k$  le dernier facteur de développement pour chaque colonne  $k$  (i.e Pour chaque colonne  $k$  on enlève le coefficient  $\frac{C_{I-(k+1),k+1}}{C_{I-(k+1),k}}$ ). Ensuite, on réitère l'étape 1 sur chacun des vecteurs colonne diminué. On notera cette fois-ci  $s_{i,k}$  le rang associé des facteurs sur les nouveaux vecteurs colonnes.

i	r <sub>i,0</sub>	s <sub>i,1</sub>	r <sub>i,1</sub>	s <sub>i,2</sub>	r <sub>i,2</sub>	s <sub>i,3</sub>	r <sub>i,3</sub>	s <sub>i,4</sub>	r <sub>i,4</sub>	s <sub>i,5</sub>	r <sub>i,5</sub>	s <sub>i,6</sub>	r <sub>i,6</sub>
0	7	6	2	2	1	1	5	4	4	3	3	2	2
1	5	4	1	1	6	5	4	3	3	2	2	1	1
2	1	1	3	3	5	4	1	1	2	1	1	-	-
3	3	2	7	6	4	3	3	2	1	-	-	-	-
4	8	7	6	5	2	2	2	-	-	-	-	-	-
5	6	5	4	4	3	-	-	-	-	-	-	-	-
6	4	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE 4.23 – Étape 2

- **Étape 3 :** On peut calculer les coefficients de Spearman pour chaque colonne  $k$  par la formule suivante pour  $k = 1, \dots, I - 2$

$$T_k = 1 - 6 \times \frac{\sum_{i=0}^{I-(k+1)} (s_{i,k} - r_{i,k})^2}{(I-k)^3 - (I-k)}$$

k	1	2	3	4	5	6
$T_k$	0,50	0,48	0,54	0,94	1,00	1,00
$I-k-1$	6	5	4	3	2	1

FIGURE 4.24 – Calcul des  $T_k$

- **Étape 4 :** On peut calculer la statistique de test  $T$  qui prends en compte le calcul des  $T_k$  de l'étape 3.

$$T = \frac{\sum_{k=1}^{I-2} \frac{I - (k + 1)}{(I - 1)(I - 2)} \times T_k}{2}$$

(A.N) On obtient ici la statistique de test suivante :

$$T(\omega) = 0,16 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$



- **Étape 5** : On remarque que  $T$  est l'aggrégation des différents  $T_k$  décorrés et distribués autour de leur moyenne 0 ( $-1 \leq T_k \leq 1$ ). On peut donc supposer que  $T$  est normal afin de pouvoir construire un test statistique. On prendra volontairement un risque d'erreur assez large (95% de confiance soit un risque d'erreur de 5%). On obtient ainsi l'intervalle de confiance suivant (avec -1 et 1 définis tel que  $P(-1.96 \leq \mathcal{N}(0, 1) \leq 1.96) = 95\%$ )

$$IC_{95\%}(T) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{\frac{(I-1)(I-2)}{2}}}; \frac{1}{\sqrt{\frac{(I-1)(I-2)}{2}}} \right]$$

**(A.N)** On obtient l'intervalle de confiance suivant :

$$IC_{95\%}(T) = [-0,43; 0,43]$$

On constate que  $T(\omega) \in IC_{95\%}(T)$ . Cela signifie qu'avec un risque d'erreur de 5% on ne rejette pas l'hypothèse nulle selon laquelle les facteurs de développement  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$  et  $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$  sont décorrés.

Le choix de ce niveau de risque n'est pas exhaustif. En effet, Mack dans son document *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*, propose de n'utiliser qu'un intervalle de confiance à 50%. La raison est que le test n'est qu'approximatif car on dispose seulement de la normalité de  $T$  en approximation.

Il justifie également ce choix en disant que l'on cherche à détecter les corrélations dans une partie substantielle des triangles de règlements. Pour plus de prudence, nous avons opté ici pour un risque d'erreur classique de 5% (La conclusion du test restant inchangée en prenant un risque d'erreur plus élevé sur ces données).

On peut donc considérer un modèle de régression linéaire pour  $k$  fixé de la forme (sous la condition que  $\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0$ ).

$$C_{i,k+1} = f_k \times C_{i,k} + \epsilon_i$$

Cela nous permet donc de tracer les nuages de points avec les droites de régression comme le montre le graphique suivant :

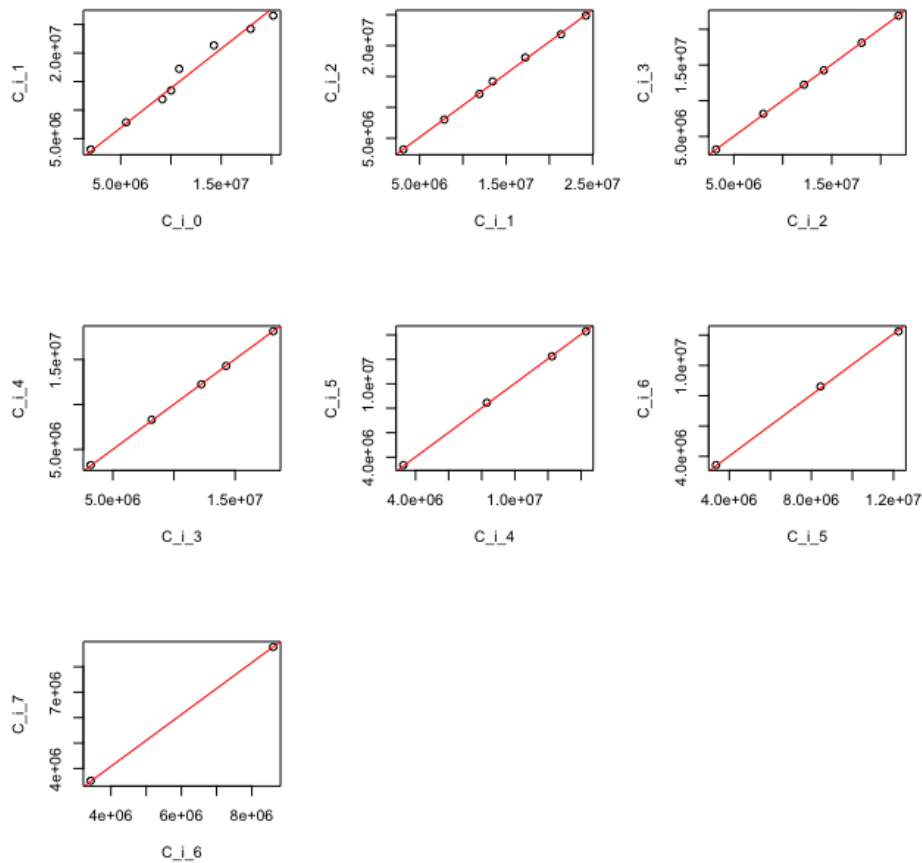


FIGURE 4.25 – Régressions linéaires

Graphiquement, on constate que pour chaque année de survenance  $k$ , les couples de points  $(C_{i,k+1}; C_{i,k})$  sont bien alignés sur les différentes droites de régression de pente  $f_k$ . De plus les coefficients de détermination  $R^2$  sont tous très proches de 1, ce qui nous permet de conclure que les modèles sont bons. Ainsi, on ne rejette pas l'hypothèse selon laquelle **la valeur attendue du montant de sinistres cumulé d'une année de développement est bien proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente.**

### Hypothèse 3 :

**La variance du montant de sinistres cumulé d'une année de développement est proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente :**

$$\mathbb{V}[C_{i,k+1}|C_{i,k}, C_{i,k-1}, \dots, C_{i,0}] = \sigma_k^2 \cdot C_{i,k}$$

Pour cette hypothèse, il convient dans un premier temps d'estimer les coefficients du modèle en minimisant la somme pondérée des carrés des erreurs résiduelles :

$$\arg \min_{f_k} \sum_{i=1}^{I-k} \omega_i (C_{i,k+1} - C_{i,k} \cdot f_k)^2$$

avec  $\omega_i$  inversement proportionnel à  $\mathbb{V}[C_{i,k+1}|C_{i,k}, C_{i,k-1}, \dots, C_{i,0}]$ . Après annulation de la dérivée par rapport à  $f_k$ , on obtient l'estimateur suivant :

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}$$

Maintenant que nous avons estimé nos coefficients, nous allons calculer les différents résidus  $r_{i,j}$  définis comme suit :

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j} \hat{f}_j}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Une fois ces résidus calculés, nous allons ensuite tracer pour chaque année de développement  $j$  les couples de points  $(C_{i,j}, r_{i,j})$ . La méthode (**essentiellement graphique**) consistera à dire que sur ces plots, si une structure apparaît (tendance, cône, vague), l'hypothèse de la variance risque fort de ne pas être validée. Cela signifie qu'à  $j$  fixé, il ne doit pas y avoir d'autocorrélation entre les résidus (qui se remarque par la tendance graphique).

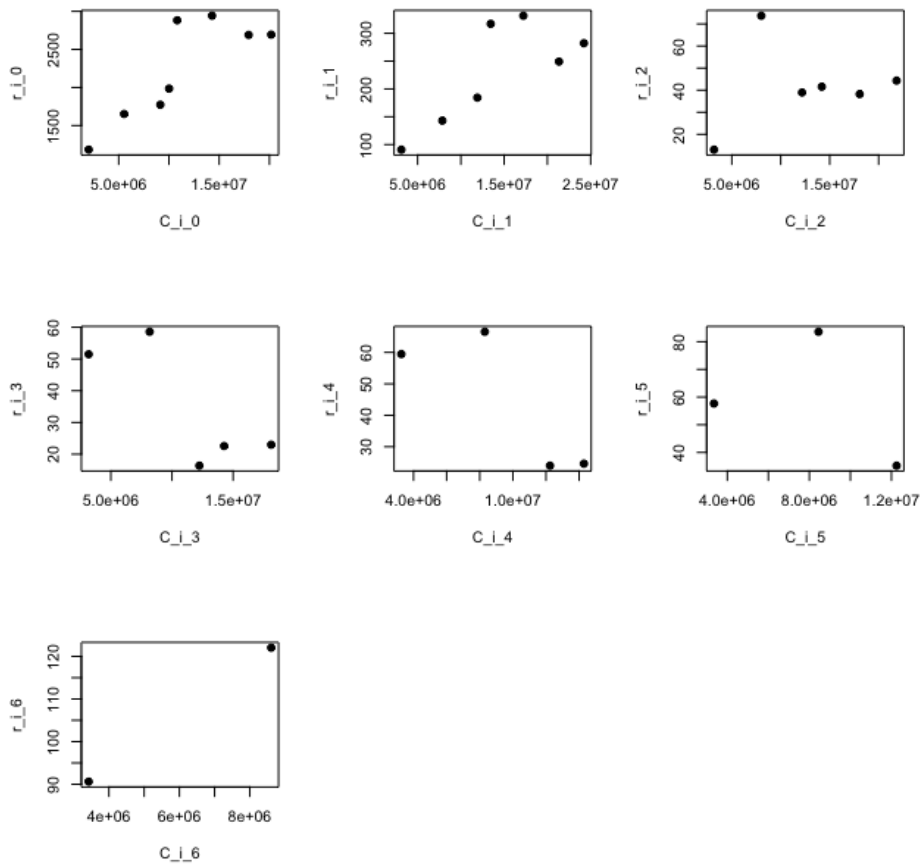


FIGURE 4.26 – Nuage de points des couples  $(C_{i,j}, r_{i,j})$

À priori, il semblerait qu'il n'y ai pas de tendance visible au vu des différents graphiques. Ainsi, on ne rejette pas l'hypothèse selon laquelle la variance du montant de sinistre cumulé d'une année de développement serait proportionnelle au montant de sinistres cumulé de l'année de développement précédente. Il faut cependant tenir compte de la faible taille de notre échantillon.

Maintenant que nous avons regardé bien en détail chacune des hypothèses pour le segment *pertes pécuniaires diverses = Miscellaneous Financial Loss en Anglais*, on peut réitérer ces études sur l'ensemble des segments comme nous l'avons fait pour le risur de prime. On obtient donc le tableau suivant qui récapitule ce qui est validé ou non :

<b>HYPOTHÈSES POUR LE RISQUE DE RESERVE</b>			
<b>Segment</b>	<b>Hypothèse d'indépendance</b>	<b>Hypothèse de de non corrélation</b>	<b>Hypothèse de la variance (Absence de tendance)</b>
Income protection insurance	✓	✓	✓
Motor Vehicle Liability Insurance	✓	✓	✓
Other motor Insurance	✓	✓	✓
Fire and other damage to property Insurance	✓	✓	✓
General Liability Insurance	✓	✓	✗
Legal Expenses Insurance	✓	✓	✓
Miscellaneous Financial Loss	✓	✓	✓

FIGURE 4.27 – Récapitulatif sur la validation des hypothèses concernant le risque de réserve

On constate donc que les hypothèses concernant la méthode Merz Wüthrich sont globalement vérifiées. On peut désormais donner les résultats au global concernant le calcul des paramètres USP pour le risque de réserve sur l'ensemble de nos segments.

### 4.2.3 Calcul des paramètres USP pour le risque de réserve

Dans cette section nous allons présenter les résultats concernant les paramètres USP pour le risque de réserve. Dans un premier temps, on rappelle les estimations à l'échelle du marché de l'écart type net pour le risque de réserve pour chaque ligne d'activité. Une nouvelle fois notre application numérique concernera le segment *pertes pécuniaires diverses* que l'on a encadré en rouge dans le tableau suivant :

<b>Segment</b>	<b>Écart type pour le risque de réserve brut du segment</b>
Responsabilité civile Automobile	9%
Autre assurance des véhicules à moteur	8%
Maritime, aérienne et transport	11%
Incendie et autres dommages aux biens	10%
Responsabilité civile générale	11%
Crédit et cautionnement	17,2%
Protection juridique	5,5%
Assistance	22%
Pertes pécuniaires diverses	20%
Réassurance accidents non proportionnelle	20%
Réassurance maritime, aérienne et transport non proportionnelle	20%
Réassurance dommages non proportionnelle	20%

FIGURE 4.28 – Rappel : Ecart-type de marché pour le risque de réserve

Pour calculer les paramètres USP du risque de réserve nous avons implémenter la méthode de Merz & Wüthrich sur Excel ce qui nous a permit de décomposer le calcul long et fastidieux de la MSEP. On obtient ainsi le résultat suivant pour le segment *pertes pécuniaires diverses* :

<b>Sources</b>	<b>EIOPA (Marché)</b>	<b>Paramètres USP</b>
<b>Paramètres</b>	20%	13,96%

FIGURE 4.29 – Risque de réserve : Paramètre USP pour le segment pertes pécuniaires diverses

On constate donc que l'utilisation des USP pour cette LoB serait avantageuse pour l'entité. Nous allons maintenant voir les résultats sur les autres lignes d'activité éligibles à la méthode des USP :

Paramètres	EIOPA (Marché)	USP pour le risque de réserve
<b>Income Protection Insurance</b>	14%	19,68%
<b>Motor Vehicle Liability Insurance</b>	9%	11,58%
<b>Other Moto Insurance</b>	8%	13,74%
<b>Fire and Other Damage to Property Insurance</b>	10%	9,14%
<b>General Liability Insurance</b>	11%	12,55%
<b>Miscellaneous Financial Loss</b>	20%	13,96%

x

FIGURE 4.30 – Paramètres USP pour le risque de réserve

### 4.3 Tests de sensibilités sur les paramètres USP

Maintenant que nous avons calculé les paramètres USP pour les différentes LoB, il convient d'effectuer des tests de sensibilités sur ces derniers afin de tester leurs robustesse suite à d'éventuelles fluctuations.

Plusieurs facteurs peuvent en effet impacter directement la valeur des USP. Par exemple le facteur de crédibilité étant directement lié aux nombres d'années d'historique pourra avoir une influence significative sur la valeur des USP. Également, une variation de la sinistralité pourra également faire l'objet d'une modification de la valeur des USP. C'est pourquoi, dans cette partie, nous allons procéder à plusieurs types de sensibilités que je vais présenter ci-dessous (la liste n'étant pas exhaustive) :

- Tests de sensibilités par une méthode ascendante et descendante
- Tests de sensibilités par application des chocs ORSA sur la charge des sinistres à l'ultime.

### 4.4 Méthodes ascendante et descendante

Nous avons vu pour l'étude du risque de prime que plusieurs éléments rentrent en jeu dans le calcul des paramètres USP. La **méthode ascendante** est assez simple dans le sens où elle consiste à lancer l'algorithme d'optimisation sur l'historique complet et à réitérer cette étape en considérant un sous-échantillon de taille inférieure.

À chaque étape on retirera une année en commençant par la plus ancienne. La méthode s'arrête à partir du moment où on arrive à 5 années d'historique. Cela est dû au fait que la norme impose d'avoir au moins 5 années d'historique pour

pouvoir être éligible à une utilisation des paramètres USP.

Inversement, la **méthode descendante** sera exactement similaire à celle ascendante hormis le fait qu'on retire les années les plus récentes au lieu des plus ancienne telle une descente.

Tenant compte du nombre d'année d'historique à chaque itération et du facteur de crédibilité associé, on est en mesure de pouvoir fournir une estimation des paramètres USP par le biais de notre algorithme.

Cette méthode est bien connue dans le domaine des statistiques comme par exemple lors d'une sélection de modèle en régression linéaire multiple.

Ces tests on été effectués sur la ligne d'activité sélectionnée pour l'application numérique à savoir la LoB "*pertes pécuniaires diverses*". Afin de pouvoir rapidement effectuer des comparaison, les résultats sont fournis dans le tableau ci-dessous :

Éléments / Années d'historique	10	9	8	7	6	5
Facteur de crédibilité	100%	92%	81%	67%	51%	34%
Paramètres de l'entreprise (Méthode descendante)	5,16%	5,25%	5,07%	4,61%	3,25%	3,01%
Paramètres USP (Méthode descendante)	5,16%	5,87%	6,58%	7,38%	8,03%	9,6%
Paramètres de l'entreprise (Méthode ascendante)	5,16%	5,17%	3,81%	3,64%	3,83%	2,45%
Paramètres USP (Méthode ascendante)	5,16%	5,79%	5,56%	6,73%	8,32%	9,41%

FIGURE 4.31 – Tests de sensibilités par méthodes ascendante et descendante

Plusieurs choses sont à constater au regard de ce tableau. Premièrement, la plus évidente est que plus le nombre d'années d'historique est élevé et plus le paramètre USP de volatilité est faible. En effet, pour un historique de 10 ans ou plus, le facteur de crédibilité vaut 1 ce qui signifie que le paramètre de volatilité fourni par l'EIOPA ne rentre plus en compte dans le calcul des USP. Récupérer l'historique le plus large est donc une technique à privilégier pour l'entité.

Deuxièmement on constate que les paramètres USP, qu'importe le nombre d'année d'historique reste inférieurs au 13% fourni par l'EIOPA. Cela permet donc de conclure que le profil de risque de l'assureur semble bien correspondre à une utilisation des paramètres USP. De plus la variation au sein de ces paramètres n'est pas choquant. Par exemple, pour la méthode ascendante, en retirant deux années d'historique, le paramètre USP augmente seulement de 1.5%.

Nous allons maintenant effectuer des tests de sensibilités par application des chocs ORSA sur la charge des sinistres à l'ultime.

## 4.5 Chocs ORSA sur la sinistralité

L'ACPR, en se basant sur l'article 45 de la directive 2009/138/CE définit l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) comme un processus interne ayant pour objectif d'évaluer les risques ainsi que la solvabilité des organismes. Il doit ainsi illustrer la capacité d'un organisme ou d'un groupe à identifier, évaluer, contrôler et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ainsi que sa situation financière et patrimoniale. Il faut également noter que les résultats de l'ORSA doivent être communiqués à l'autorité de contrôle.

L'ORSA s'articule au sein de 3 composantes :

1. **L'évaluation du Besoin Global de Solvabilité (BSG)** : Il représente la vision que l'entreprise a de son profil de risque ainsi que les capitaux et autres moyens nécessaires pour faire face à ces risques (il inclut les risques non quantifiables de liquidité, de réputation, non réglementaire).
2. **Le respect permanent des obligations réglementaires de couverture du SCR et MCR** : L'ORSA veille également au à la bonne prise en compte des exigences concernant les provisions techniques.
3. **La prise en compte de la dérivation du profil de risque** : Elle doit être capable d'évaluer la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entité s'écarte des hypothèses qui sous tendent le calcul du SCR

Pour l'ORSA 2019, deux scénarios majoritaires sont à prendre en considération :

- **Scénario 1 : Appétit pour le risque** : Augmentation de 4,3 % de la charge de sinistralité à l'ultime (vs +3,6% au 31/12/2017)
- **Scénario 2 : Stress de sinistralité** : Augmentation de 8,5 % de la charge de sinistralité à l'ultime (vs +7,2% au 31/12/2017)

On va donc reprendre notre base de données concernant le risque de prime pour la ligne d'activité *pertes pécuniaires diverses* et nous allons appliquer ces chocs sur la dernière année de notre historique afin de refaire tourner l'algorithme d'optimisation et d'obtenir in fine les paramètres USP choqués.

Paramètres USP / Scénarios	Scénario normal : Sans Stress	Scénario 1 : Appétit pour le risque (+4,3% de sinistralité à l'ultime)	Scénario 2 : Stress de sinistralité (+8,5% de sinistralité à l'ultime)
Paramètres USP	5,16%	5,26%	5,37%

FIGURE 4.32 – Tests de sensibilités par les chocs ORSA

On constate que les paramètres USP ne varient pas beaucoup concernant cette ligne d'activité. En effet, l'écart est seulement de 0,21% entre le scénario sans chocs et le scénario 2. Il conviendra de voir dans la prochaine partie l'impact de cette variation sur la valeur du SCR et du Risk Adjustment.



## 4.6 Injection des USP pour le calcul du SCR et du RA

Maintenant que nous avons déterminé nos paramètres USP pour le risque de prime et de réserve il convient de les injecter directement à la place des paramètres EIOPA de la formule standard. Chez Sogessur, les calculs S2 en formule standard sont réalisés avec le logiciel *Addactis Modeling*<sup>©</sup>, développé par le cabinet ACTUARIS. Il a donc fallu dans un premier temps se familiariser avec l'outil, étape qui a été assez longue. Pour la suite du mémoire, je précise que les calculs ont été réalisés en utilisant les écart-types donnés par le QIS 5 et non ceux de la revue 2020. Il faudra donc pour les prochains calculs que l'entité modifie dans Addactis les quelques paramètres ayant changé de valeur (cf figure 2.11).

## 4.7 Calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)

Une fois les paramètres rentrés dans les inputs de calibration du modèle on obtient les résultats du tableau suivant :

	<i>Formule standard</i>	<i>Paramètres USP</i>	<i>Évolution</i>
SCR P&R NL	166,5M	145,3M	<b>-12,69%</b>
SCR souscription NL	191,6M	171,7M	<b>-10,39%</b>
SCR P&R santé NL	41,7M	43,8M	<b>+5,12%</b>
SCR souscription santé non-SLT	42M	44,1M	<b>+5,05%</b>

FIGURE 4.33 – Comparaison du SCR en formule standard et avec les USP sur les modules de risques P&R et Santé NL

On constate que l'utilisation des paramètres USP a permis de réduire le capital de solvabilité requis pour notre assureur. En effet, le SCR Prime et réserve a diminué de 12,69% grâce au passage de la formule standard à l'utilisation des paramètres propres à l'entreprise. Au global<sup>1</sup>, le SCR Non-Vie diminue de 10,39%. Ces chiffres sont encourageants puisqu'ils vont permettre à l'entité de réduire considérablement son immobilisation en capital.

Cette diminution est due majoritairement aux paramètres USP sur la ligne d'activité "divers" puisque la volatilité chute de manière conséquente aussi bien pour le risque de prime que de réserve.

Au niveau agrégé c'est à dire après agrégation des différents modules de risques on obtient les résultats suivant pour le SCR :

1. en rajoutant les SCR Rachat et CAT NL

	<b>Formule standard</b>	<b>Paramètres USP</b>	<b>Évolution</b>
SCR agrégé	167 308 933 €	157 863 962 €	<b>-5,64%</b>

FIGURE 4.34 – Comparaison du SCR agrégé entre la formule standard (FS) et l'utilisation des USP

On constate que l'utilisation des paramètres USP permet de diminuer le besoin en capital de 5,64%. C'est un résultat encourageant dans le sens où la prise en compte de son risque par l'entité lui fait "économiser" environ 10 M€.

Maintenant que nous avons regardé les résultats pour le SCR il est important de rester dans le cadre de l'étude qui porte sur l'estimation du Risk Adjustment.

## 4.8 Calcul de l'ajustement pour risque (RA)

Comme nous l'avons vu dans la partie consacrée au Risk Adjustment, l'entité a opté pour un choix de quantile à 80% concernant le calcul du RA. Nous avons vu également que la norme IFRS 17 était une norme "principe based" (i.e basée sur l'interprétation) ce qui permettait de concevoir deux Risk Adjustment en Non-Vie : un basé sur l'approximation de la fonction  $\rho(\sigma)$  par  $N_{0,8}\sigma$  et l'autre utilisant directement la fonction  $\rho(\sigma)$  telle qu'on l'a défini dans le chapitre consacré à l'étude du SCR Non-Vie sous Solvabilité II.

Une nouvelle fois, en adaptant les formules sur Addactis Modelling et en prenant soin d'intégrer le bon niveau de quantile on obtient les résultats suivants :

	<b>Paramètres USP avec la fonction <math>\rho(\sigma)</math></b>	<b>Paramètres USP avec la proxy <math>\rho(\sigma) \approx N_{0,8}\sigma</math></b>	<b>Delta généré par la proxy</b>	<b>Formule standard</b>
RA P&R NL	40,3M	40,7M	<b>+1,17%</b>	46,1M
RA souscription NL	82,3M	82,6M	<b>+0,39%</b>	86,3M
RA P&R Santé NL	16,4M	16,9M	<b>+3,23%</b>	11,5M
RA souscription Santé non-SLT	17,1M	17,6M	<b>+2,98%</b>	12,4M

FIGURE 4.35 – Comparaison du RA en formule standard et avec les USP pour un quantile à 80%

On peut donc comparer les résultats de la méthode des paramètres USP retenue (celle utilisant directement la fonction  $\rho(\sigma)$  sans approximation) avec ceux de la formule standard. On obtient ainsi le tableau suivant :

	<i>RA P&amp;R NL</i>	<i>RA souscription NL</i>	<i>RA P&amp;R Santé NL</i>	<i>RA souscription santé non – SLT</i>
Delta entre FS et USP retenus	-12,51%	-4,63%	+42%	+37,05%

FIGURE 4.36 – Delta entre FS et méthode retenur des USP pour un quantile à 80%

En guise de comparaison, nous avons décidé de calculer le Risk Adjustment pour un niveau de quantile à 70%. On obtient ainsi le tableau ci-dessous :

	<i>Paramètres USP avec la fonction <math>\rho(\sigma)</math></i>	<i>Paramètres USP avec la proxy <math>\rho(\sigma) \approx N_{0,7}\sigma</math></i>	<i>Formule standard</i>
RA P&R NL	24,4M	25,4M	27,7M
RA souscription NL	72,5M	73,1M	74,4M
RA P&R Santé NL	9,5M	10,5M	6,8M
RA souscription Santé non-SLT	10,7M	11,6M	8,3M

FIGURE 4.37 – Comparaison du RA en formule standard et avec les USP pour un quantile à 70%

---

# Conclusion

---

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la norme IFRS 17 et plus particulièrement aux nouvelles composantes qui marquent un changement dans l'approche bilantielle des assureurs. En effet, sous IFRS 17, les provisions techniques correspondent désormais à la somme de la meilleure estimation (Best Estimate) et de l'ajustement pour risque (Risk Adjustment).

Tout d'abord, nous avons présenté les normes IFRS d'un point de vue assez général en montrant qu'elles correspondaient plutôt à un ensemble de principes (approche bilantielle, priorité donnée à l'investisseur, place importante accordée à l'interprétation, importance du principe de prudence, ...) qu'à des règles. En préambule, la norme IFRS 4 a permis de théoriser la notion de contrat d'assurance et de donner un cadre pour l'aboutissement de la norme IFRS 17 qui sera imposée aux contrats d'assurance et de réassurance à partir du 1<sup>er</sup> Janvier 2023. Cette norme va marquer un réel tournant dans la comptabilité des assureurs. Sa création s'explique par une volonté d'homogénéiser à l'international la comptabilisation des contrats d'assurance et de favoriser la cohérence avec les autres normes IFRS.

L'objectif de ce mémoire a été de faire "*d'une pierre deux coups*". La pierre ici serait la méthode des paramètres USP qui à première vue apparaît comme étant un excellent compromis entre facilité de mise en place et prise en compte du profil de risque de l'entité. Cette pierre permettrait à la fois de calculer le SCR souscription NL et le Risk Adjustment NL (i.e. de faire deux coups). Cette mise en place s'inscrit bien dans une démarche ERM dans le sens où le risque de l'entité est bien incorporé dans ses calculs. Cette méthode n'est en revanche pas équivalente entre la norme Solvabilité 2 et la norme IFRS 17 puisqu'en IFRS 17, nous raisonnons en *principle based*. On aura donc dans cette dernière un plus grand levier de pilotage sur la fonction  $\rho(\sigma)$  que sous la directive S2.

Nous avons donc présenté la méthode des paramètres USP qui repose principalement sur la validation de nombreuses hypothèses. On peut classer ces hypothèses en 2 grandes familles : les hypothèses associées à la qualité, la fiabilité et la réglementation des données et les hypothèses théoriques qui reposent sur des modélisations mathématiques. L'hypothèse sur les données a été la plus chronophage puisqu'il a fallu reconstituer un historique suffisamment long et fiable pour toutes les lignes d'activité éligibles à l'utilisation de ces paramètres. En ce

qui concerne la deuxième grande famille des hypothèses, à savoir les hypothèses théoriques, on s'est aperçu qu'elles étaient globalement respectées sur la plupart des lignes d'activité aussi bien pour le risque de prime que le risque de réserve.

Une fois l'historique constitué, il a fallu implémenter un algorithme d'optimisation permettant de calculer les paramètres USP pour le risque de prime et de réserve. Cela a permis d'aboutir à des résultats encourageants aussi bien pour le calcul du SCR que du Risk adjustment. Par rapport à son évaluation en formule standard à 86,3M€, le RA souscription non-vie est passé à 82,3M€ avec la méthode des USP, soit une baisse de 4,63%. Le SCR souscription non-vie, quant à lui est passé de 191,6M€ à 171,7M€ ce qui correspond à une diminution de 10,39%.

La méthode des paramètres USP requiert une approbation de l'ACPR pour être applicable. À ce jour, aucun dossier n'a été présenté à l'autorité de contrôle. Cependant, dans la continuité de ces travaux, Sogessur pourrait être en mesure d'en constituer un et d'utiliser par la suite cette méthode pour ses calculs d'exigence en capital et d'ajustement pour risque en assurance non-vie...

---

# Bibliographie

---

## Sources principales

- [1] APPERT-RAULLIN, *Cours d'Enterprise Risk Management (ERM)* ISUP, 2020.
- [2] Thomas MACK, Munich Re, *MEASURING THE VARIABILITY OF CHAIN LADDER RESERVE ESTIMATES* , 1993.
- [3] Les papiers d'Addactis, *Le Risk Adjustment sous IFRS 17* , 2019.
- [4] Marie-Laure DREYFUSS, *Les grands principes de Solvabilité 2* , 2013.
- [5] Mario V. WÜTHRICH, Michael MERZ, Natalia LYSENKO, *Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method* , 2009.
- [6] AISAM-ACME, *Study on non-life long tail liabilities : Reserve risk and risk margin assessment under solve* , 2007.
- [7] Les papiers d'Addactis, *Le Risk Adjustment sous IFRS 17* , 2019.

---

# Annexes

---

## Annexe 1 : Les modèles linéaires généralisés GLM

Pour introduire cette nouvelle notion, nous allons dans un premier temps en guise de préambule définir ce qu'est une famille exponentielle. Cette définition est très importante puisqu'elle définit un cadre pour l'utilisation des GLM.

**Famille Exponentielle :** Un modèle statistique  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_{\theta, \phi})_{\theta \in \Theta, \phi > 0})$  est appelé *famille exponentielle* si les probabilités  $\mathbb{P}_{\theta, \phi}$  admettent une densité  $f$  par rapport à une mesure dominante avec :

$$f_{\theta, \phi}(y) = c_{\phi}(y) \cdot \exp\left(\frac{y\theta - a(\theta)}{\phi}\right)$$

Avec :

- $\theta$  : le paramètre canonique ;
- $\phi$  : Le paramètre de dispersion, considéré comme étant un paramètre de nuisance (i.e un paramètre ne présentant pas d'intérêt immédiat mais qui doit tout de même être pris en compte dans l'analyse des paramètres d'intérêt) ;
- $a(\theta)$  est convexe et de classe  $C^2$  ;
- $c_{\phi}(y)$  indépendant de  $\theta$ .

Remarque : La définition d'une famille exponentielle fait intervenir une mesure dominante. Cela signifie que les lois discrètes peuvent également être des familles exponentielles.

On se rappelle que le principe de la régression linéaire était de modéliser  $\mathbb{E}[Y|X]$  comme une fonction  $g$  des variables explicatives  $X$ , soit  $\mathbb{E}[Y|X] = g(X)$ . Le modèle linéaire gaussien s'écrivait ainsi  $Y = X\beta + \epsilon$ . Derrière ce modèle, plusieurs hypothèses très importantes sont posées. La matrice  $X$  doit être de plein rang ( $\text{rang}(X) = p$ ) et les résidus sont supposés gaussiens, centrés et décorrés.

On reprend donc les mêmes notations que pour les modèles linéaires gaussiens et on notera pour la suite  $\mu(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ .

**Modèle linéaire généralisé :** Un modèle est un modèle linéaire généralisé s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1.  $Y|X = x$  appartient à une famille exponentielle. Mathématiquement cela s'écrit comme suit :  $Y|X = x \sim \mathbb{P}_{\theta, \phi}$  ;
2.  $g(\mu(X)) = g(\mathbb{E}[Y|X]) = X\beta$  pour une fonction  $g$  appelée fonction de lien (elle doit être bijective) ;

Remarque : Certains auteurs considèrent que l'hypothèse 2 est suffisante pour définir un GLM.

On peut donner plusieurs exemples de fonctions de lien canoniques. Pour la loi normale, on prendra  $g(\mu) = \mu$  qui est la fonction identité. Pour une loi de poisson, on prendra le logarithme soit  $g(\mu) = \log(\mu)$ . En ce qui concerne une loi gamma, la fonction de lien sera  $g(\mu) = \frac{1}{\mu}$  et pour une loi de Bernoulli on prendra la fonction *logit* à savoir  $g(\mu) = \text{logit}(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$ .

**Estimation des paramètres :** Comme dans tout modèle on peut alors estimer les paramètres  $\phi$  et  $\beta$ .  $\phi$  étant un paramètre de nuisance, son estimation n'est pas principale. En effet, sa valeur n'influence pas la maximisation de la vraisemblance en  $\beta$ . On note qu'en cas de besoin,  $\phi$  peut toutefois être estimé par maximum de vraisemblance. En ce qui concerne  $\beta$ , on l'estime par maximum de vraisemblance.

$$\begin{cases} \eta_i &= X_i' \beta \\ \mu_i &= \mathbb{E}[Y_i|X_i] = g^{-1}(X_i' \beta) = g^{-1}(\eta_i) \\ \theta_i &= (a')^{-1}(\mu_i) = (a')^{-1}(g^{-1}(X_i' \beta)) = (a')^{-1}(g^{-1}(\eta_i)) \end{cases}$$

On peut donc écrire la log-vraisemblance comme suit (en supposant les  $Y_i$  indépendants :

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n \log f(Y_i; \beta, \phi) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left\{ \log c_\phi(Y_i) + \frac{Y_i \theta_i - a(\theta_i)}{\phi} \right\}}_{:=\ell_i(\theta_i)}$$

On considère l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\beta_j$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\theta_i)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{Y_i - a'(\theta_i)}{\phi} = \frac{Y_i - \mu_i}{\phi}$$

Vu que  $\eta_i = X_i' \beta$  on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} x_{i,j}$$

avec  $x_{i,j}$  qui est la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée de  $X_i'$ .



Enfin,

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \eta_i} = \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_i} \right)^{-1}$$

et aussi :

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = g'(\mu_i) a''(\theta_i)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,j}(Y_i - \mu_i)}{g'(\mu_i) a''(\theta_i)}$$

Soit D la matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à  $\frac{1}{g'(\mu_i) a''(\theta_i)}$  alors

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = 0 \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, p \quad \iff \quad X'D(Y - \mu) = 0$$

L'estimateur  $\hat{\beta}$  est donc solution de

$$X'D(Y - g^{-1}(X\beta)) = 0$$

Remarque : En considérant une loi gaussienne, la matrice D est la matrice identité. Ainsi, sous les contraintes d'identifiabilité, la matrice  $X'X$  est inversible et on retrouve notre estimateur bien connu du maximum de vraisemblance dans le cadre d'un modèle linéaire gaussien :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

### Propriétés asymptotique de l'estimateur :

Soit  $U_n(\beta) = (u_1, \dots, u_p)'$  le vecteur des scores avec

$$u_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell_i(\theta_i)$$

L'information de Fisher est définie par

$$\mathcal{I}_n(\beta) = \mathbb{E}[U_n(\beta)U_n(\beta)']$$

Proposition :

$$\mathbb{E}[U_n(\beta)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \text{Var} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell_i(\theta_i) \right]$$

Théorème : Sous condition de régularité, que g soit deux fois continument différentiable, que les conditions sur X soient respectées pour que  $\mathcal{I}_n(\beta)$  soit définie positive :

1.  $\hat{\beta}$  existe et est consistant ;
2.  $\hat{\beta}$  est asymptotiquement normal

$$\mathcal{I}_n(\beta)^{1/2}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p(0, I_p)$$

Partant de ces propriétés asymptotiques, on peut facilement construire un test avec pour hypothèse nulle  $H_0 : \beta_j = 0$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \beta_j \neq 0$  ainsi que des intervalles de confiance.

### Sélection de modèle (Déviance) :

Les paramètres étant estimés, on peut maintenant analyser la validité de notre modèle, c'est à dire à quel point le modèle s'écarte ou non de la réalité. Comme nous l'avons vu dans la partie sur la validation des hypothèses sous-jacentes au calcul des paramètres propres à l'entreprise pour le risque de prime, on dispose de très peu d'informations sur les résidus. Ce qui se fait généralement est de comparer le modèle que l'on a ajusté  $\mathcal{M}$  à un modèle plus général ayant autant de paramètres que de variables réponses : le modèle saturé  $\mathcal{M}$ .

On note  $\tilde{l}$  la vraisemblance du modèle saturé et  $\hat{l}$  celle du modèle estimé. Pour comparer ces deux modèles on peut bâtir un test de rapport de vraisemblance que l'on note  $\log(\lambda) = \tilde{l} - \hat{l}$ . Plus  $\log(\lambda)$  est grand et plus cela signifie que le modèle estimé décrit mal les données par rapport au modèle saturé. Pour quantifier cette grandeur, on a besoin de la loi de  $\lambda$ . Le théorème de Wilks nous affirme que la déviance notée  $\Delta$  et définie comme suit  $\Delta = 2\log(\lambda) = 2(\tilde{l} - \hat{l})$  peut être approchée par une loi du  $\chi_{n-p}^2$  avec  $p$  qui correspond au nombre de paramètres estimés dans le modèle  $\mathcal{M}$  (convergence en loi).

## **Annexe 2 : Tests statistiques d'adéquation à une loi**

Cette annexe va servir à présenter plusieurs tests statistiques d'adéquation à une loi. L'objectif est de montrer que nos pertes agrégées  $Y_t$  suivent une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\omega^2$ . On a vu que cela revenait à montrer que  $Q_t = \log\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(\mu - \log(X_t), \omega^2)$ . Nous allons donc présenter plusieurs tests de normalité. L'ensemble des tests que nous présenterons, bien que basés sur des ambitions statistiques différentes auront pour but de tester les mêmes **hypothèses de test** à savoir :

$$H_0 : Y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \log - \mathcal{N}(\mu, \omega^2) \quad \text{vs} \quad H_1 : Y_t \not\stackrel{\mathcal{L}}{=} \log - \mathcal{N}(\mu, \omega^2)$$

### **1) Test de Shapiro-Wilk :**

Le test de Shapiro-Wilk est un test très utilisé pour tester la normalité de données. L'avantage de ce dernier est de procurer une certaine robustesse pour des échantillons de taille *faible* ( $T \leq 50$ ).

- **Statistique de test :** 
$$SW = \frac{\left[ \sum_{i=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} a_i (q_{(T-i+1)} - q_{(i)}) \right]^2}{\sum_i (q_i - \bar{q})^2}$$

- **Règle de décision, région de rejet :**  $R_{\alpha, T}(H_0) = \{SW < SW_\alpha\}$

- **Conclusion :** Si  $SW(\omega) \in R_{\alpha, T}(H_0)$  alors on rejette  $H_0$  avec un risque d'erreur de 5%. On conclut ainsi qu'au vu des données, et tenant compte du risque d'erreur de 5% que nos données ne semblent pas s'écarter de l'hypothèse de normalité.

Avec :

- $\left[\frac{T}{2}\right]$  : La partie entière de  $\frac{T}{2}$  ;
- $q_{(i)}$  : La série des données triées par ordre croissant ;
- $a_i$  : les constantes créées à partir de la moyenne et la matrice de variance covariance des quantiles d'un échantillon de taille T qui suit une loi normale ;
- $SW_\alpha$  : les valeurs critiques pour un risque  $\alpha$  et un effectif T que l'on retrouve dans la table de Shapiro-Wilk.

## 2) Test de Kolmogorov-Smirnov :

Ce dernier se base principalement sur la notion de fonction de répartition empirique. C'est pourquoi il convient tout d'abord de donner quelques rappels sur cette notion :

On considère  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{T-1}, Q_T, \dots$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de fonction de répartition  $F_Q$  (On rappelle que la fonction de répartition caractérise la loi). On appelle *fonction de répartition empirique* associé à notre T-échantillon la fonction définie par :

$$F_{Q,T}(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{Q_i \leq x}$$

• **Statistique de test** :  $K_T = \sup_{x \in \mathbf{R}} | F_{Q,T}(x) - F_\lambda(x) |$

• **Région de rejet** :  $R_{\alpha,T}(H_0) = \{K_T \geq q_{T,\alpha}\}$

On sait par construction que la loi de  $K_T$  sous l'hypothèse nulle ( $F = F_\lambda$ ) est indépendante de  $F_\lambda$ . Une méthode pratique pour calculer la statistique revient à ordonner notre échantillon

(i.e  $Q_{(1)} \leq Q_{(2)} \leq \dots \leq Q_{(T-1)} \leq Q_{(T)}$ ) et ainsi considérer la statistique de test suivante :

$$K_T = \max_{i=1, \dots, T} \max(| \frac{i}{T} - F_0(Q_{(i)}) | ; | \frac{i}{T} - F_0(Q_{(i+1)}) |)$$

## 3) Test de Jarque-Bera :

Le test de Jarque-Bera est un test de normalité qui se base sur les sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Il mesure les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence d'une loi normale.

On note respectivement  $\beta_1$  et  $\beta_2$  les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Pearson où  $\beta_1 = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^3$  et  $\beta_2 = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^4$ .

On peut alors estimer  $\beta_1$  et  $\beta_2$  comme suit :

$$\text{--- } \hat{\beta}_1 = \frac{\frac{1}{T} \sum_i (q_i - \bar{q})^3}{\left(\frac{1}{T} \sum_i (q_i - \bar{q})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{--- } \hat{\beta}_2 = \frac{\frac{1}{T} \sum_i (q_i - \bar{q})^4}{\left(\frac{1}{T} \sum_i (q_i - \bar{q})^2\right)^2}$$

certain calculs et certaines propriétés statistiques que nous ne présenterons pas ici permettent de montrer que la loi conjointe de ces estimateurs est normale bivariée. Ainsi, on a :

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \right]$$

On peut donc facilement construire une statistique de test en centrant et réduisant nos estimateurs et en pondérant par la taille de l'échantillon.

- **Statistique de test** :  $Q_{JB} = T \left( \frac{\hat{\beta}_1^2}{6} + \frac{(\hat{\beta}_2 - 3)^2}{24} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} \chi_{1-\alpha}^2(2)$
- **Région de rejet** :  $R_{\alpha,T}(H_0) : \{Q > \chi_{1-\alpha}^2(2)\}$

#### 4) Tests d'Anderson-Darling et de Cramer-von Mises :

Ces tests se basent sur la même logique que le test de Kolmogorov-Smirnov car ils examinent la distance entre la fonction de répartition théorique sous l'hypothèse nulle et la fonction de répartition empirique construite sur l'échantillon  $F_{\hat{\lambda}}$

Ils se différencient du test de Kolmogorov-Smirnov par deux points essentiels :

- La statistique de test prend en compte l'écart quadratique  $(F_{\hat{\lambda}}(x) - F_{Q,T}(x))^2$ , et non l'écart absolu comme le fait le test de KS :  $|F_{Q,T}(x) - F_{\hat{\lambda}}(x)|$
- Tandis que dans le test de KS, on ne regarde que la distance maximale entre les deux fonctions, ces deux la vont considérer l'ensemble des observations

##### Test d'Anderson-Darling :

- **Hypothèses de test** :  $H_0 : F = F_{\lambda}$  vs  $H_1 : F \neq F_{\lambda}$
- **Statistique de test** :  $AD_T = T \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{\hat{\lambda}}(x) - F_{Q,T}(x))^2 \frac{f(x)}{F_{\hat{\lambda}}(x)(1-F_{\hat{\lambda}}(x))} dx$

##### Test de Cramer-von Mises :

- **Hypothèses de test** :  $H_0 : F = F_{\lambda}$  vs  $H_1 : F \neq F_{\lambda}$
- **Statistique de test** :  $CVMT = T \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{\hat{\lambda}}(x) - F_{Q,T}(x))^2 f(x) dx$

Un atout important de ces tests réside dans le fait que la distribution asymptotique de leur statistique est complètement indépendante de l'hypothèse nulle  $H_0$ .

Pour ces deux tests les valeurs de nos statistiques de tests ne sont pas comparables entre eux, puisque le seuil d'acceptation du test dépend de la loi testée. Nous nous baserons donc sur les P-valeurs pour comparer les résultats.

La P-valeur correspond à la probabilité de ne pas rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  en supposant l'hypothèse vérifiée. Par exemple si la P-valeur est inférieure à 0.05, on peut rejeter  $H_0$  avec un seuil d'erreur de 5%.

## **Annexe 3 : Algorithme d'optimisation pour le calcul des paramètres propres pour le risque de prime**

Pour bien comprendre l'algorithme que nous utilisons qui est un algorithme d'optimisation, il faut d'abord aller à la source. L'algorithme **BFGS** est un algorithme de type quasi-Newton issu des chercheurs Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno. Dans les méthodes quasi-Newtonienne, l'information du premier ordre est utilisée dans l'optique d'approximer la matrice Hessienne. En effet, la matrice Hessienne serait trop lourde à calculer à chaque itération.

Quand on utilise la direction de Newton, on cherche à minimiser l'approximation quadratique de  $f$  pour un certain déplacement  $p$ . Ainsi on obtient :

$$m_k(p) = f_k + \nabla f_k^t p + \frac{1}{2} p^t \nabla^2 f_k p$$

Ce dernier admet comme minimiseur :  $p_k = -\nabla^2 f_k^{-1} \nabla f_k$

En utilisant une approximation de  $B_k$  de la Hessienne  $\nabla^2 f_k$  on obtient :

$$m_k(p) = f_k + \nabla f_k^t p + \frac{1}{2} p^t B_k p$$

Ce dernier admet comme minimiseur :  $p_k = -B_k^{-1} \nabla f_k$

Ce minimiseur est essentiel puisqu'il nous sert de direction de descente. Ainsi, en utilisant  $\alpha_k$  on a :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

On peut alors construire une approximation quadratique au nouveau point  $x_{k+1}$  et ainsi on obtient :

$$m_{k+1}(p) = f_{k+1} + \nabla f_{k+1}^t p + \frac{1}{2} p^t B_{k+1} p$$

On souhaite que les deux gradients (le précédent et le nouveau) coïncident avec  $\nabla m_{k+1}$ . Or, concernant le nouveau gradient, il est assez évident que  $\nabla m_{k+1} = \nabla f_{k+1}^t$ . Pour l'ancien on obtient que :  $\nabla m_{k+1}(-\alpha_k p_k) = \nabla f_{k+1}^t + \alpha_k B_{k+1} p_k = \nabla f_k^t \iff B_{k+1} s_k = y_k$ . En multipliant des deux côtés par  $s_k^t$ , on obtient alors :  $s_k^t B_{k+1} s_k = s_k^t y_k > 0$  (car on considère que  $B_{k+1}$  est définie positive).

Dans l'objectif d'assurer l'unicité de  $B_{k+1}$ , on cherchera à la rendre la plus proche de  $B_k$ . Cela équivaut à résoudre le problème suivant :

$$\arg \min_B \|B - B_k\|$$

Finalement, on obtient la solution suivante :  $B_{k+1} = (\mathbb{1} - \rho_k y_k s_k^t) B_k (\mathbb{1} - \rho_k s_k y_k^t) + \rho_k y_k y_k^t$  avec  $\rho_k = \frac{1}{y_k^t s_k}$  et  $\mathbb{1}$  un vecteur de 1.

### Algorithme 1 : BFGS

---

Données :  $x_0$  un point de départ et  $H_0$  une première approximation de  $H$

Résultat :  $x^*$  une approximation du problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

- 1  $k = 0$  ;
- 2 tant que *test d'arrêt* non satisfait faire
- 3 | On calcule la direction  $p_k = -H_k \nabla f_k$
- 4 | On calcule  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ , tel que  $\alpha_k$  est issu d'une recherche linéaire ;
- 5 | On calcule  $H_{k+1} = (\mathbb{1} - \rho_k s_k y_k^t) H_k (\mathbb{1} - \rho_k y_k s_k^t) + \rho_k s_k s_k^t$
- 6 |  $\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1$  ;

Une version allégée de cette algorithme a été mise en place pour ces problèmes de dimension que peut causer la matrice Hessienne dans les cas où elle prendrait trop de mémoire. On l'appelle l'algorithme L-BFGS, (limited memory-BFGS). Il se présente comme suit :

### Algorithme 2 : L-BFGS

---

Données :  $x_0$  un point de départ et  $H_0$  une première approximation de  $H$

Résultat :  $x^*$  une approximation du problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

- 1  $k = 0$  ;
- 2 tant que *test d'arrêt* non satisfait faire
- 3 | On choisit un  $H^k$
- 4 | On calcule la direction  $p_k = -H_k \nabla f_k$  selon la procédure récursive L-BFGS
- 5 | On calcule  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ , tel que  $\alpha_k$  est issu d'une recherche linéaire ;
- 6 | On met à jour les vecteurs avec les nouveaux  $s_k$  et  $y_k$
- 7 |  $\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1$  ;

Pour notre fonction de log-vraisemblance nous avons finalement décidé d'utiliser l'algorithme L-BFGS-B (*limited memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno with boundaries*) qui offre donc la possibilité de fixer des contraintes sur les bornes des paramètres que l'on cherche à optimiser ( $\delta, \gamma$ ). Cela permet de gagner du temps dans les calculs puisque l'algorithme sait déjà à quel endroit il doit travailler.