

Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire de l'Institut du Risk Management et l'admission à l'Institut des Actuaires

le

Par : Tom POPA

Titre : Optimisation des comportements sur des produits d'épargne-retraite avec garanties optionnelles face aux risques financiers et l'évolution de l'espérance de vie

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

.....
.....
.....

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

.....
.....
.....
.....
.....

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : Detralytics

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Audrey Meganck

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

L'assurance-vie et le nouveau Plan d'Épargne Retraite (PER) sont des produits d'épargne permettant de se constituer une retraite supplémentaire en obtenant lors du départ à la retraite un capital ou une rente viagère supplémentaire s'ajoutant à la pension des régimes obligatoires. Ces produits sont exposés aux risques financiers (baisse de la participation aux bénéfices, perte en capital sur les supports en unités de comptes) et risques de mortalité/longévité (décès avant la liquidation, plus faibles montant et durée de vie après la liquidation qu'espéré), les assureurs peuvent donc proposer aux assurés des garanties optionnelles comme les garanties plancher et la garantie de table de mortalité. Sur ces produits, l'assuré peut modifier l'allocation financière de l'épargne, effectuer des rachats (limités à des motifs précis sur le PER) et choisir à la liquidation une rente viagère et/ou un capital (avec une limitation sur un des compartiments du PER).

Compte-tenu des risques financiers et de mortalité/longévité, du profil de l'assuré, du produit et des garanties optionnelles souscrites, l'assuré peut optimiser ses comportements afin de maximiser la valorisation du contrat. Dans ce mémoire, après avoir présenté les différents produits et garanties, on construira un générateur de scénarios économiques pour la modélisation des actifs financiers et on définira deux modèles pour obtenir une projection de la mortalité dont un modèle basé sur l'hypothèse d'évolution de l'espérance de vie à la naissance. Grâce à cela et en modélisant l'évolution de l'épargne et de la base garantie, on cherchera les stratégies de comportement optimales des assurés en utilisant la programmation dynamique pour résoudre le problème d'optimisation posé sous la forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Mots-clés : comportements optimaux, EDP, épargne-retraite avec garanties plancher & garantie de table, équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, espérance de vie, modèle de mortalité de Bongaarts, modèles de mortalité stochastique, modèles à changement de régime, programmation dynamique

Abstract

Life insurance and the new “*Plan d’Épargne Retraite*” (PER), i.e. the “Retirement Savings Plan”, are both French savings products that allow policyholders to build up retirement savings to get upon retirement a lump sum or a life annuity which is additional to the pension from the French pension system. These products are exposed to financial risks (decrease of profit sharing, losses on unit linked funds) and mortality/longevity risks (death before retirement, lower annuity value and lower remaining lifetime after retiring than expected), so insurers can offer optional guarantees such as guaranteed minimum death benefit, guaranteed minimum accumulation benefit at retirement age, and guaranteed mortality table. On both products, policyholders can modify the asset allocation, make withdrawals (limited to specific reasons for the PER) and choose at retirement between a life annuity and/or a lump sum (with limitations on one of the PER compartments).

Considering the financial and mortality/longevity risks, the policyholder’s characteristics, the product features and selected optional guarantees, the policyholder can optimise his behaviour to maximise the policy value. In this actuarial thesis, after a presentation of the various products and guarantees, we will build an economic scenario generator for modelling financial assets and we will develop two models to obtain a projection of mortality rates, one of them based on the assumption for the evolution of life expectancy at birth. After that, by modelling both the account value and the benefit base, we will identify the optimal behaviour strategies for policyholders by using dynamic programming to solve the optimisation problem posed as a Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

Keywords: Bongaarts mortality model, dynamic programming, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, life expectancy, optimal behaviour, PDE, regime-switching models, retirement savings with guaranteed minimum benefits and guaranteed mortality table, stochastic mortality models

Table des matières

Note de synthèse	7
Synthesis note	14
Remerciements	21
Introduction	22
1 Présentation de l'épargne-retraite en France	24
1.1 Un état des lieux de l'épargne et de la retraite en France	24
1.2 Les principaux produits d'épargne pour préparer sa retraite	28
1.3 Les garanties optionnelles sur l'assurance-vie et le PER	40
1.4 Les différents risques pour l'assuré et l'assureur	44
2 Construction d'un générateur de scénarios économiques	45
2.1 Une introduction à la modélisation d'actifs financiers	45
2.2 Les modèles de taux	47
2.3 La modélisation des actions	54
2.4 La modélisation de l'actif immobilier	64
2.5 Le générateur de scénarios économiques	70
3 Modélisation de l'évolution de l'espérance de vie	75
3.1 L'évolution historique de l'espérance de vie humaine	75
3.2 Les modèles de mortalité	81
3.3 La calibration et la simulation des modèles de mortalité	92
3.4 Un modèle de mortalité basé sur l'évolution de l'espérance de vie	99

4 Optimisation des comportements en épargne-retraite	105
4.1 Le cadre de l'étude : les produits et les assurés	105
4.2 La modélisation de l'épargne et des garanties	108
4.3 Les sensibilités face à la mortalité et aux risques financiers	116
4.4 La recherche de stratégies optimales par l'assuré	122
Conclusion	143
Bibliographie	145
Annexes	148
A Outils mathématiques	148
B Indicateurs et modèles de mortalité	151
C Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles	157

Note de synthèse

Résumé

Afin d'augmenter leur future pension de retraite, les actifs peuvent se constituer une épargne grâce à l'assurance-vie ou aux dispositifs d'épargne-retraite comme le Plan d'Épargne Retraite (PER) lancé en 2019. Sur les produits d'assurance, les primes sont investies sur les supports en unités de compte et le fonds en euro. Avant la liquidation, un capital peut être versé au(x) bénéficiaire(s) en cas de décès et les rachats sont possibles (toutefois limités sur le PER). L'assuré opte pour un capital ou une rente viagère à la liquidation. Ces produits sont exposés aux risques financiers, et on modélise la dynamique des actifs risqués avec un modèle à changement de régime, et aux risques de mortalité et longévité, et on projette les taux de mortalité avec deux modèles dont un basé sur l'évolution de l'espérance de vie à la naissance. Face à ces risques, l'assureur peut proposer aux assurés des garanties optionnelles comme les garanties plancher et la garantie de table. Dans ce papier, on étudie les stratégies de comportement des assurés (rachats, choix sur la sortie à la liquidation) pour obtenir les stratégies optimales selon les différents risques et les garanties optionnelles souscrites en résolvant une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman par programmation dynamique. On obtient ainsi les stratégies optimales en fonction du temps, de la moneyness et de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance.

Mots-clés : comportements optimaux, épargne-retraite, EDP, espérance de vie, garanties plancher & garantie de table, modèle de Bongaarts, modèle à changement de régime, programmation dynamique

Introduction

Dans un contexte de baisse des taux de remplacement lors du départ à la retraite et de l'allongement de la durée de vie, les assureurs proposent des produits d'épargne qui permettent aux actifs d'augmenter leur future pension de retraite ou de disposer d'un capital en partant à la retraite. On a notamment l'**assurance-vie** qui est le produit préféré des Français avec 1796 milliards d'euros d'encours à fin 2020 et le plus utilisé à ce jour pour préparer sa retraite. Il y a aussi les produits dédiés à l'épargne-retraite mais ceux-ci étaient jusqu'alors peu favorisés avec seulement 269 milliards d'euros d'encours à fin 2020. Pour dynamiser l'activité et encourager les Français à épargner pour leur retraite, la loi PACTE de 2019 a créé le **Plan d'Épargne Retraite (PER)** proposé par les gestionnaires d'actifs et les assureurs. Sur l'assurance-vie et le PER assurantiel, les primes sont versées sur divers supports dont ceux en unités de compte (UC) au capital variable et le fonds en euros au capital garanti délivrant une participation aux bénéfices annuelle aux assurés selon les résultats du fonds de l'assureur. En cas de décès avant la liquidation, un capital peut être versé au(x) bénéficiaire(s) de l'assuré. Ce dernier peut aussi effectuer des rachats avant la liquidation, avec des limites sur les motifs de rachat pour le PER.

À la liquidation, l'assuré peut opter pour une rente viagère (avec diverses options possibles telles que la réversion ou les annuités garanties) ou un capital payé en une ou plusieurs fois (la sortie en capital est absente sur l'épargne issue des versements obligatoires sur le PER).

Les assureurs et assurés sont exposés à divers risques sur ces produits. L'assuré est tout d'abord exposé aux risques financiers (sur les taux, les actions, etc.) qui affectent directement le montant de l'épargne avec un risque de baisse prolongée des rendements du fonds en euros et un risque de perte en capital sur les UC. On a aussi les risques de mortalité et de longévité dus aux aléas de la mortalité avant et après la liquidation. En cas de décès avant la liquidation, le capital versé au(x) bénéficiaire(s) peut être inférieur aux primes versées en cas de sous-performance des actifs. Jusqu'à la liquidation, la table de mortalité pour calculer la rente peut être modifiée, réduisant ainsi son montant. Après le départ en rente, l'assuré peut vivre moins longtemps qu'anticipé à la liquidation et donc risquer de ne pas retrouver son investissement. Pour se protéger face à certains de ces risques, l'assuré peut recourir aux garanties optionnelles proposées par l'assureur telles que les garanties plancher en cas de décès avant la liquidation ou en cas de vie à la liquidation qui offrent à l'assuré un capital garanti aux moments cités, ainsi que la garantie de la table de mortalité utilisée à la liquidation. L'objectif de ce papier sera, après avoir modélisé l'évolution des actifs financiers et des taux de mortalité, de rechercher les stratégies de comportement (rachats et choix à la liquidation) optimales des assurés permettant de maximiser la valorisation de leur contrat face aux différents risques et selon les garanties optionnelles souscrites. Ces stratégies optimales seront exprimées en fonction du temps, de la moneyness (le ratio de l'épargne sur la base garantie) et de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance.

La description du produit et des garanties optionnelles

On considère un produit d'épargne-retraite au sens large (assurance-vie ou PER), pour un assuré d'âge x en $t_0 = 0$ dont le futur départ à la retraite est prévu à 65 ans. On projettera l'épargne A_t sur la période $[0, T]$ où T est la date de liquidation. Par simplification, on considère l'absence de primes futures sur l'épargne pour laquelle on a une allocation par horizon avec deux actifs : l'actif sans risque B_t (remplaçant ici le fonds en euros) aux rendements positifs constants et l'actif risqué S_t . La proportion de S_t en t dans l'épargne est notée $\theta_t \in [0, 1]$, elle décroît vers 0 quand t s'approche de T . Pour les actifs financiers, on se place sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

Sur le produit, on peut avoir des garanties plancher et une garantie de table qui sont optionnelles. Pour les garanties plancher, la **base garantie** G_t correspond à la somme des primes versées nette des frais et réduite par les éventuels rachats partiels effectués jusqu'en t . Dans le détail, on a :

- **Garantie plancher en cas de décès (GPD)** : en cas de décès de l'assuré en phase d'épargne, les bénéficiaires de l'assuré reçoivent au minimum le capital garanti G_t .
- **Garantie plancher en cas de vie (GPV)** : à la liquidation, l'assuré reçoit au minimum le capital garanti G_t s'il choisit de sortir en capital.
- **Garantie de table de mortalité (GT)** : à la liquidation, une table de mortalité garantie, plus avantageuse que la nouvelle table, est appliquée pour la conversion de l'épargne en rente.

On note $\mathbb{1}_G$ la fonction indicatrice de souscription d'une garantie $G \in \{GPD, GPV, GT\}$.

L'assureur applique des frais sur les rentes au taux α_R et des frais prélevés sur l'encours A_t dont les frais de gestion α_A^E (avec ici un taux identique pour tous les actifs alors qu'on a souvent une distinction entre le fonds en euro et les UC) et les frais α_A^{GT} , α_G^{GPD} et α_G^{GPV} pour les garanties optionnelles GT, GPD et GPV. On suppose l'absence de frais sur les arbitrages et les rachats. Les taux α_A^E et α_A^{GT} sont appliqués sur l'assiette A_t , les taux α_G^{GPD} et α_G^{GPV} sont appliqués sur l'assiette G_t . On note alors :

$$\alpha_A = \alpha_A^E + \alpha_A^{GT} \cdot \mathbb{1}_{GT} \quad \text{et} \quad \alpha_G = \alpha_G^{GPD} \cdot \mathbb{1}_{GPD} + \alpha_G^{GPV} \cdot \mathbb{1}_{GPV}.$$

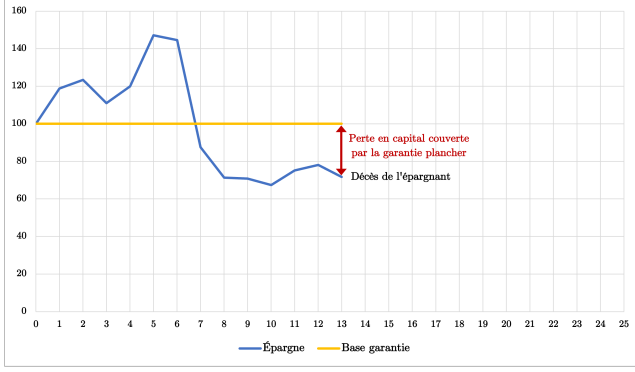


FIGURE 1 – Illustration de la GPD

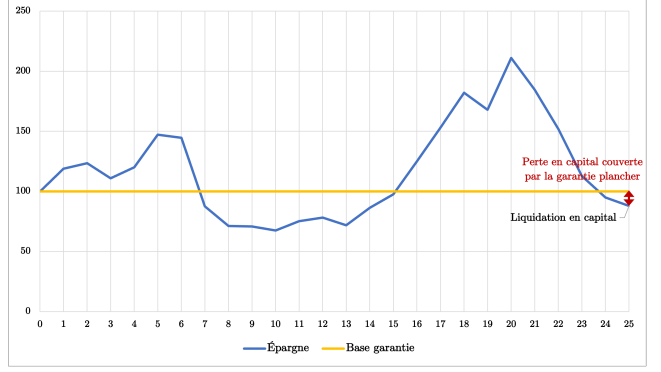


FIGURE 2 – Illustration de la GPV

L'assuré peut effectuer des **rachats** $\Gamma_t = \gamma_t \cdot A_{t-}$ avant la liquidation et dans ce cas A_t et G_t sont réduits proportionnellement au taux γ_t . A_t et G_t suivent la dynamique suivante (avec $G_t = 1$ en l'absence des garanties plancher), avec $W_t^{\mathbb{Q}}$ un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} :

$$\begin{cases} dA_{t-} = \left\{ (r - \alpha_A) \cdot A_{t-} - \alpha_G \cdot G_{t-} \right\} dt + \left\{ \theta_t \cdot \sigma_t \cdot A_{t-} \right\} dW_t^{\mathbb{Q}}, & A_t \geq 0 \quad \text{avant rachat en } t, \\ A_{t+} = A_{t-} \cdot (1 - \gamma_t) \quad \text{et} \quad G_{t+} = G_{t-} \cdot (1 - \gamma_t) & \text{au rachat en } t, \end{cases}$$

où r est le taux sans risque ici supposé constant et σ_t est la volatilité de l'actif risqué qui suit un processus à changement de régime (cf. ci-après). On introduit également la **moneyness** $M_t = A_t/G_t$ permettant de valoriser la GPD et la GPV qui sont exercées si $M < 1$. Si l'assuré décède en $t \leq T$, l'assureur verse aux bénéficiaires un **capital décès** K_t qui est (avec $[x]^+ = \max(0, x)$) :

$$K_t(A_t, G_t) = A_t + [G_t - A_t]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPD}.$$

À la liquidation, l'assuré choisit un capital unique et/ou une rente viagère mensuelle simple et liquidée au taux technique $i_T = 0$. Le taux de liquidation en capital est noté κ (le taux de liquidation en rente est alors $1 - \kappa$). Le **pay-off équivalent à la liquidation** est donc

$$L_T(A_T, G_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa) = \kappa \cdot \left(A_T + [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPV} \right) + \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V(\mathbf{\Lambda})}{a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)}.$$

Ici, $\mathbf{\Lambda}_R$ est la fonction de survie supposée pour l'assuré à la liquidation. Elle est obtenue par la table de mortalité TGH 05 (pour les hommes) / TGF 05 (pour les femmes) si la GT est souscrite. Sinon, elle est donnée par le scénario déterministe du modèle Age-Period-Cohort (cf. ci-après). $\mathbf{\Lambda}$ est la fonction de survie pour valoriser la rente viagère $R = \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R) \cdot a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)}$. La modélisation de la mortalité décrite ci-après donne une distribution des fonctions de survie. $a_{x+T}^V(\mathbf{\Lambda})$ et $a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)$ sont respectivement les facteurs de valorisation et de conversion en rente viagère à l'âge $x + T$ (âge à la liquidation) selon les fonctions de survie $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Lambda}_R$.

On réalise une projection mensuelle de l'épargne A_t et de la base garantie G_t sur $[0, T]$ à partir du 31 décembre 2021 (t_0) aux dates t_k pour $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_K = T$, où $t_k = t_{k-1} + h$ et $h = 1/12$. On suppose que les flux de rachats Γ_{t_k} et de décès K_{t_k} se produisent aux dates t_k avec toutefois $\Gamma_{t_0} = \Gamma_{t_K} = 0$ et on a le flux de liquidation L_{t_K} à la date $t_K = T$.

La modélisation des actifs financiers et de la mortalité

La modélisation des actifs financiers

Pour modéliser l'évolution de l'actif risqué S_t , on retient un **mouvement brownien géométrique avec changement de régime** où les paramètres de rendement et de volatilité peuvent prendre des valeurs différentes parmi les n régimes possibles pour refléter les différents cycles financiers. On prendra par la suite $n = 2$. Pour ce modèle, la dynamique de S_t sous la probabilité historique \mathbb{P} est

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Ici $\mu_t = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ et $\sigma_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ avec $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \in [0, T]$. $(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une **chaîne de Markov** à valeurs dans l'espace d'états fini $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ étant la base canonique de \mathbb{R}^n et avec le générateur infinitésimal $\mathbf{Q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t+h} = \mathbf{e}_j \mid \boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i) = \delta_{i,j} + q_{i,j} \cdot h + o(h)$ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. La matrice des probabilités de transition sur $[t_k, t_{k+1}]$ est donnée par $\mathbf{P}(t_k, t_{k+1}) = \exp(\mathbf{Q} \cdot (t_{k+1} - t_k))$. $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{P} , W et $\boldsymbol{\eta}$ étant indépendants.

Sous la probabilité \mathbb{P} , on peut calibrer les paramètres du modèle avec les log-rendements historiques $R_{t_i} = \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)$ en utilisant un filtre d'Hamilton pour maximiser la log-vraisemblance. Par le théorème de Girsanov étendu, avec r constant dans les différents régimes et le lemme d'Itô, on a sous \mathbb{Q} :

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\int_0^t \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^{\mathbb{Q}}\right].$$

σ_t est utilisée pour la dynamique de A_t formulée plus haut. On peut étendre ce modèle en un modèle multidimensionnel avec plusieurs actifs risqués. À la place du taux sans risque r constant, on peut avoir r_t suivant un processus stochastique de type Cox-Ingersoll-Ross ou à changement de régime.

L'évolution de l'espérance de vie et la modélisation de la mortalité

La durée de vie a considérablement augmenté depuis le milieu du XIX^e siècle grâce aux progrès technologiques et médicaux. En France, l'espérance de vie à la naissance par période est passée de 43,3 ans en 1850 à 82,6 ans en 2018 (79,6 ans pour les hommes et 85,5 ans pour les femmes) d'après la *Human Mortality Database* (HMD). Depuis 2001, l'augmentation annuelle moyenne est de +0,20 pour l'espérance de vie à la naissance de la population totale (+0,14 pour l'espérance de vie à 60 ans). Pour projeter les taux de mortalité futurs, on retient deux approches avec un modèle de mortalité stochastique classique et un modèle basé sur l'évolution de l'espérance de vie à la naissance :

- Le modèle de mortalité stochastique **Age-Period-Cohort (APC)**, une extension du modèle de Lee-Carter, donne les taux de mortalité $m(x, t)$ pour chaque âge x et chaque année t avec :

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + n_a^{-1} \cdot \kappa_t^{(2)} + n_a^{-1} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)},$$

où $\beta_x^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ et $\gamma_{t-x}^{(3)}$ sont les paramètres d'âge, de temps et de cohorte, n_a est le nombre d'âges. Le modèle est calibré sur la population nationale pour chaque sexe sur la période 1969-2018 et les âges 40-90. On positionne les probabilités de décès $q(x, t)$ obtenues avec l'APC par rapport aux tables TGH/F 05 sur l'année 2021 avec une régression logistique. On étend la mortalité aux grands âges avec un modèle de Denuit-Goderniaux asymptotique où les $q(x, t)$ atteignent en t pour $x \geq \omega = 130$ la valeur asymptotique $q_{\omega, t} \in [50\%, 100\%]$. La projection déterministe d'APC permet d'obtenir la nouvelle table de mortalité à la liquidation sans la GT.

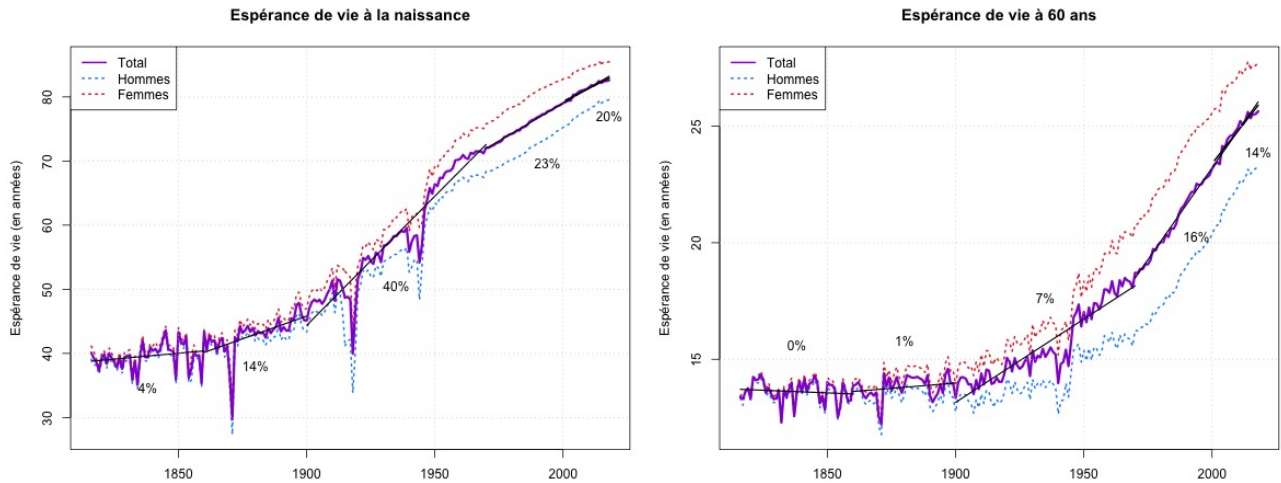


FIGURE 3 – Évolution de l'espérance de vie par période en France de 1816 à 2018 (Source : HMD)

- Le modèle de **Bongaarts Décalé Linéaire (BDL)** est une variante du modèle de Bongaarts avec un paramètre de décalage $\lambda(t) = \lambda \cdot t$ linéaire. Il donne la force de mortalité

$$\mu(x, t) = \alpha + \frac{\beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]}{1 + \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]},$$

où α est la mortalité de base, β est le paramètre d'âge et M_0 approche l'âge modal en $t_0 = 0$. On a l'espérance de vie par période $e^P(x, t)$ qui est solution d'une équation de transport et de :

$$\frac{\partial e^P}{\partial t}(x, t) = \lambda \cdot (1 - \mu(x, t) \cdot e^P(x, t)).$$

Aujourd'hui, on a $\mu(0, t) \simeq 0$ donc $e^P(0, t)$ évolue ici linéairement. Après avoir calibré les paramètres α , β et M_0 sur la mortalité de la TGH/F 05 en 2021, on génère une distribution de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance e'_0 (et donc de λ) avec $\mathbb{E}[e'_0] = 0,2$ pour obtenir une distribution des fonctions de survie $\Lambda(e'_0)$. Cette approche permet d'évaluer le risque de tendance, principale composante du risque de longévité, et a_{x+T}^V en fonction de seulement e'_0 .

Les stratégies de comportement optimales des assurés

On a les fonctions de survie mensuelle en supposant une répartition linéaire des décès entre deux âges entiers. Avec ${}_t p_x^{(h)} = l_{x+t_k}^{(h)} / l_x^{(h)}$ la probabilité de survie sur $[0, t_k]$ et $q_{x+t_{k-1}}^{(h)} = 1 - l_{x+t_k}^{(h)} / l_{x+t_{k-1}}^{(h)}$ la probabilité de décès sur $[t_{k-1}, t_k]$ pour une fonction de survie mensuelle sous la mesure de probabilité \mathbb{M} indépendante de \mathbb{Q} , avec la filtration globale $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, on a la valorisation du contrat en $t_0 = 0$:

$$V_0(\mathbf{C}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[e^{-r \cdot T} \cdot {}_T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{k=1}^K e^{-r \cdot t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} e^{-r \cdot t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k}^- \mid \mathcal{F}_0 \right].$$

où $\mathbf{C} = (\gamma = (\gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_{K-1}}), \kappa)$ est la stratégie de comportement de l'assuré pour les taux de rachats et de sortie en capital à la liquidation. $\mathbf{C}^* = (\gamma^*, \kappa^*)$ est une **stratégie optimale** si elle permet d'obtenir la valorisation maximale V_0^* . Le problème ainsi formulé est une **équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman** que l'on résout par **programmation dynamique**. On regarde la valorisation

maximale du contrat en t_k en distinguant avant et après rachat. Pour que la valorisation du contrat en t_k^- soit maximale, la somme du rachat et de la valorisation après rachat (en t_k^+) doit l'être. On a :

$$V_{t_k^+}^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[e^{-r \cdot h} \cdot \left(p_{x+t_k}^{(h)} \cdot V_{t_{k+1}^-}^* + q_{x+t_k}^{(h)} \cdot K_{t_{k+1}^-} \right) \mid \mathcal{F}_{t_k^+} \right] \text{ et } V_{t_k^-}^* = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k^-} + V_{t_k^+}^* \mid \mathcal{F}_{t_k^-} \right\},$$

où $V_{t_k^+}^*$ est la valorisation après rachat au taux γ_{t_k} en t_k , $V_0^* = V_{t_0^+}^*$ et $V_T^* = \sup_{\kappa \in [0,1]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} [L_T(\kappa) \mid \mathcal{F}_T]$. On peut donc formuler un problème récursif rétrograde en optimisant d'abord la valorisation du contrat en T puis, de proche en proche, parvenir à V_0^* en $t_0 = 0$. On considère alors $\bar{V}_{t_k}^*(e'_0)$, la valorisation maximale en t_k sachant e'_0 , et le vecteur d'état de l'épargne $\mathbf{E}_{t_k} = (A_{t_k}, G_{t_k})$ pour introduire :

$$\bar{v}_{t_k}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = G_{t_k}^{-1} \cdot \left({}_{t_k}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \bar{V}_{t_k}^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, \mathbf{E}_{t_k}) + {}_{t_{k-1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot K_{t_k}(\mathbf{E}_{t_k}) \right)$$

Si la GPD ou la GPV est souscrite, on a $M_{t^-} = M_{t^+}$. On introduit $g(x) = x + [1 - x]^+ \cdot \mathbf{1}_{GPD}$ et

$$\phi_T^*(e'_0, M_T) = M_T \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + [1 - M_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{GPV}.$$

Avec la filtration $(\mathcal{F}_t^F)_{0 \leq t \leq T}$ des processus financiers, le problème d'optimisation à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, M_T) = {}_T p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \left([\phi_T^*(e'_0, M_T)]^+ + \frac{M_T}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + {}_{t_{K-1}} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{K-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_T), \\ \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k^+}) = e^{-r \cdot h} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\bar{v}_{t_{k+1}^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}}, M_{t_{k+1}^-}) \mid \mathcal{F}_{t_k^+}^F \right], \\ \bar{v}_{t_k^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ {}_{t_k} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \gamma_{t_k} \cdot M_{t_k} + (1 - \gamma_{t_k}) \cdot \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) + {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_{t_k}) \right\}. \end{array} \right.$$

On peut déterminer κ^* avec la première relation du problème :

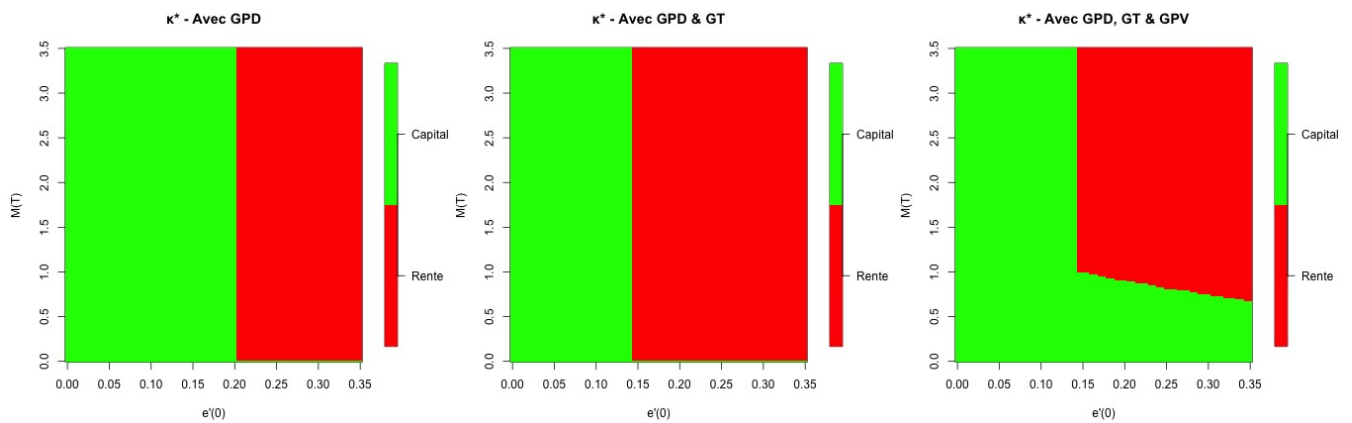
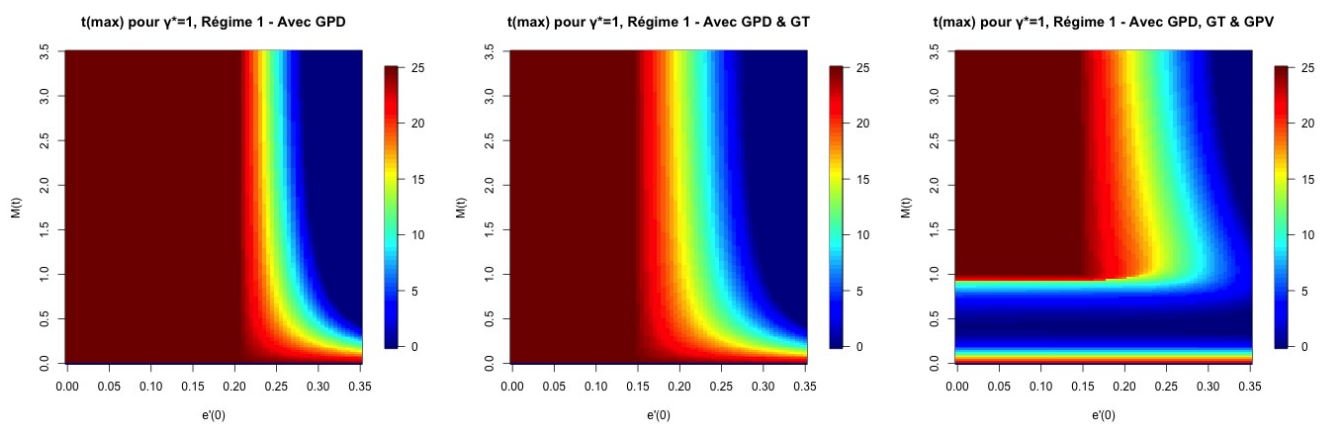
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_T^*(e'_0, M_T) > 0 \iff \kappa^* = 1 \iff \text{Le choix optimal à la liquidation est la sortie en capital.} \\ \phi_T^*(e'_0, M_T) < 0 \iff \kappa^* = 0 \iff \text{Le choix optimal à la liquidation est la sortie en rente viagère.} \end{array} \right.$$

Avec $\tau = T - t$, on applique le théorème de Feynman-Kac à la deuxième relation du problème pour avoir, sur $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+] = [t_k^+, t_{k+1}^-]$ et en notant $\bar{v}_\tau^{(i)}(\cdot, \cdot) = \bar{v}_\tau(\cdot, \mathbf{e}_i, \cdot)$, le système d'EDP couplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \theta^2 \sigma_1^2 M^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A) M - \alpha_G \right\} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M} - (r - q_{1,1}) \bar{v}_\tau^{(1)} - q_{1,1} \bar{v}_\tau^{(2)}, \\ \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \theta^2 \sigma_2^2 M^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A) M - \alpha_G \right\} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M} - (r - q_{2,2}) \bar{v}_\tau^{(2)} - q_{2,2} \bar{v}_\tau^{(1)}. \end{array} \right.$$

On le résout avec un schéma numérique de Crank-Nicolson en construisant un maillage sur le domaine des valeurs possibles pour $\boldsymbol{\eta}$, M et τ et en fixant des conditions limites par rapport à M (en $M_{min} = 0$, il y a un flux si l'assuré décède en ayant souscrit la GPD, et en M_{max} l'assuré fait un rachat total ou réalise un arbitrage total sur l'actif sans risque pour avoir une rente avantageuse à la liquidation), on peut déterminer $\bar{v}_{\tau_{k'}^+}$ à partir de $\bar{v}_{\tau_{k'}^-}$. On obtient alors $\gamma_{t_k}^* \in \{0, 1\}$ et $\bar{v}_{\tau_{k'}^-}$ avec la troisième relation.

On illustre les résultats pour un homme de 40 ans ($T = 25$) avec $r = 2,5\%$, $\sigma_1 = 11,04\%$, $\sigma_2 = 24,17\%$, $q_{1,1} = -0,6151$, $q_{2,2} = -1,0180$, $\alpha_R = 1\%$, $\alpha_A^E = 0,5\%$, $\alpha_A^{GT} = 0,4\%$, $\alpha_G^{GPD} = 0,35\%$ et $\alpha_G^{GPV} = 1\%$:

FIGURE 4 – κ^* selon e'_0 et M_T - Homme 40 ans ($T=25$)FIGURE 5 – Dernière date t pour un rachat optimal selon e'_0 et M - Homme 40 ans ($T=25$)

D'après les résultats pour κ^* , la surface de sortie en rente s'étend vers de plus petites valeurs de e'_0 avec la GT souscrite, la valorisation de la rente augmentant. Avec la GPV, la surface de sortie en capital augmente pour $M < 1$ pour de grandes valeurs de e'_0 , le capital garanti étant plus profitable. Pour les rachats, on affiche la dernière date t_{max} où $\gamma^* = 1$ (rachat total) en fonction de M et e'_0 , au-delà on a $\gamma^* = 0$ (pas de rachat). Les résultats étant similaires pour les deux régimes, on affiche le seul Régime 1. Pour $M > 1$, il est optimal de ne jamais racheter si e'_0 est élevé. Ce seuil pour e'_0 où il devient plus rapidement optimal de ne pas racheter diminue avec la GT, la valorisation de la future rente augmentant. Sans la GPV, avec e'_0 faible ou M proche de 0, la rente n'étant pas avantageuse et les frais diminuant les rendements, il est préférable de racheter vite. Avec la GPV, il est optimal de ne pas racheter quand $M < 1$ pour profiter des garanties plancher en cas de décès ou à la liquidation.

Conclusion

Avec cette analyse, l'assureur peut définir les stratégies optimales sur les rachats et le choix entre capital ou rente à la liquidation en fonction du temps, de la moneyness et de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance. Le modèle peut être enrichi et tenir compte de plusieurs actifs et/ou d'un rendement dynamique. Avec ces résultats, l'assureur peut définir des hypothèses *best estimate* avec un taux de rationalité des assurés ou utiliser les résultats dans l'ORSA en supposant une augmentation de la rationalité des assurés. On peut avoir la même approche en univers réel en prenant compte les primes de risque des actifs ainsi que la fonction d'utilité et les préférences pour optimiser les comportements, en incluant les arbitrages sur l'épargne, selon le profil de risque de l'assuré.

Synthesis note

Abstract

In France, it is possible to increase one's future pension with insurance savings products such as life insurance or dedicated retirement products such as the “*Plan d'Épargne Retraite*” (PER), i.e. the “Retirement Savings Plan”, created in 2019. Premiums are invested on unit-linked funds and the general account. Before retirement, a death benefit is paid to the beneficiary(ies) if the policyholder dies, and withdrawals are possible (however limited on the PER). At retirement, the policyholder chooses a lump sum, an annuity, or a combination of both. These products are exposed to financial risks, risky assets are modelled with a regime-switching model, and to mortality and longevity risks, mortality rates are projected with two different models, one based on the evolution of life expectancy at birth. Insurers can offer optional guarantees to policyholders such as guaranteed minimum death/accumulation benefit and a guaranteed mortality table. This paper will focus on optimal behaviour strategies from policyholders (withdrawals, lump sum/annuity election at retirement) facing the different risks and depending on the selected optional guarantees. The optimisation problem, formulated as a Hamilton-Jacobi-Bellman equation, will be solved with dynamic programming to obtain optimal strategies according to time, moneyness and evolution of life expectancy at birth.

Keywords: Bongaarts mortality model, dynamic programming, GMAB/GMDB/guaranteed mortality table, life expectancy, optimal behaviour, PDE, regime-switching model, retirement savings

Introduction

With decreasing replacement rates at retirement and the increasing human lifespan, French insurers offer savings products which allow policyholders to increase their future pension or to get a lump sum at retirement. Among these products, there is the **life insurance** being the major savings product in France with €1,796 billion assets under management in December 2020 and the most used product to save for the future supplementary retirement benefits. The pension schemes and dedicated retirement savings products are less common with only €269 billion assets under management in December 2020. The 2019 French “PACTE” law created the “*Plan d'Épargne Retraite*” (PER), i.e. the “Retirement Savings Plan”, proposed by insurers and asset management companies with the goal to boost the retirement savings market. On these insurance products, premiums are invested on unit-linked funds (UL) and the general account for which there is a capital guarantee and an annual profit-sharing distribution to policyholders depending on the insurer's results. If the policyholder dies before retirement, a death benefit is paid to the beneficiary(ies). The policyholder can make withdrawals before retirement, although for limited reasons on the PER. At retirement, the policyholder can elect

for a life annuity (with various options such as a reversionary annuity or guaranteed annuities over a given time interval) or a lump sum (the lump sum is not possible for the account value coming from mandatory payments from the employer on the PER).

Insurers and policyholders are both exposed to several risks on the life insurance and PER products. The policyholder is exposed to financial risks (on interest rates, equities, etc.) directly impacting the account value with a risk of long-term decrease in profit-sharing on the general account and a risk of capital loss on UL funds. The policyholder is also exposed to mortality and longevity risks due to the random mortality before and after retirement. If the policyholder dies before retirement, the death benefit paid to the beneficiaries can be lower than the sum of paid premiums. Until retirement, the mortality table to define the annuity amount can be modified, therefore decreasing the future annuity. After retirement, the policyholder's lifespan can be lower than expected at retirement when defining the annuity amount and then receive a lower cumulated income. As a protection from some of these risks, the policyholder can select an optional guarantee such as the guaranteed minimum death benefit and the guaranteed minimum accumulation benefit at retirement (both existing as GMxB guarantees on variable annuities) and a guaranteed mortality table. After modelling financial assets and mortality rates, this paper will focus on the optimal behaviour strategies (for withdrawals and lump sum/annuity election rate at retirement) for policyholders facing the different risks and depending on the selected optional guarantees. These optimal behaviour strategies will be given as a function of time, moneyness, and evolution of life expectancy at birth.

Retirement savings product design and the optional guarantees

We focus on a retirement savings product in the broad sense (life insurance or PER), for a policyholder at age x at $t_0 = 0$ with a future retirement at age 65. The **account value** A_t will be projected on time interval $[0, T]$, T being the retirement time. To simplify matters, there is no future premiums on the product and a target retirement allocation with account value split into two assets: the risk-free asset B_t (a substitute for the general account) with positive and constant interest rates, and the risky asset S_t . The share of risky asset S_t at time t is $\theta_t \in [0, 1]$, it decreases towards 0 when t gets closer to T . For financial processes, we are under the risk-neutral probability measure \mathbb{Q} .

The product contains several optional guarantees for minimum benefits and an optional guaranteed mortality table. For guaranteed minimum benefits, the minimum paid amount is the **benefit base** G_t being the sum of net premiums at t reduced by previous partial withdrawals. The guarantees are:

- **Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB):** if the policyholder dies before retirement, the beneficiaries receive at least the guaranteed amount G_t .
- **Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB):** at retirement, if the policyholder chooses a lump sum, he gets at least the guaranteed amount G_t .
- **Guaranteed Mortality Table (GMT):** at retirement, a guaranteed mortality table, more favourable than the new mortality table, is used to define the life annuity amount.

$\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ is the characteristic function regarding subscription to a guarantee $\mathcal{G} \in \{GMDB, GMAB, GMT\}$.

There are fees on the product such as the annuity fees α_R and several fees reducing the account value A_t including the management fees α_A^E (identical for all assets, but usually rates are different between general account and UL) and fees α_A^{MT} , α_G^{DB} et α_G^{AB} for optional guarantees GMT, GMDB and GMAB. There are no arbitrage fees and no withdrawals fees. α_A^E and α_A^{MT} rates are applied to A_t , α_G^{DB} and α_G^{AB} rates are applied to G_t . We introduce the global fees:

$$\alpha_A = \alpha_A^E + \alpha_A^{MT} \cdot \mathbb{1}_{GMT} \quad \text{and} \quad \alpha_G = \alpha_G^{DB} \cdot \mathbb{1}_{GMDB} + \alpha_G^{AB} \cdot \mathbb{1}_{GMAB}.$$

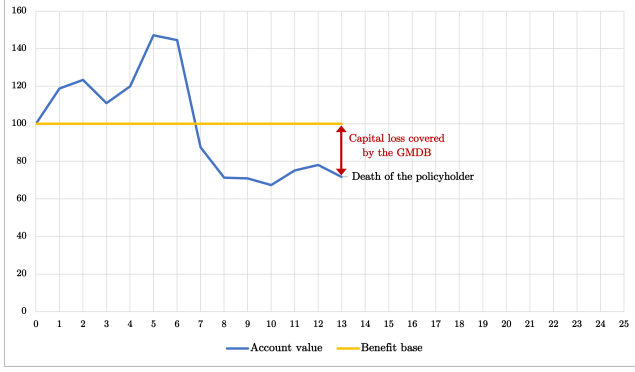


Figure 6 – Example for GMDB

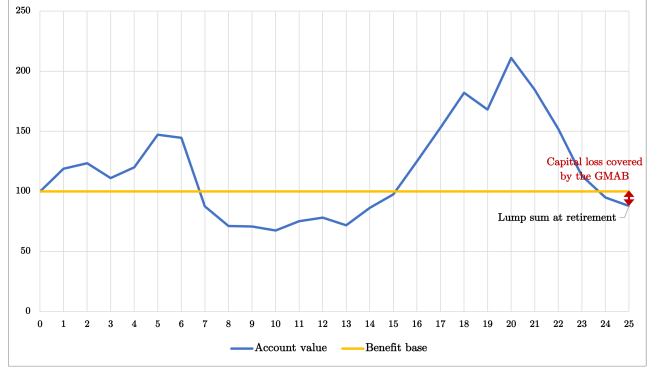


Figure 7 – Example for GMAB

The policyholder can make **withdrawals** $\Gamma_t = \gamma_t \cdot A_{t-}$ before retirement and then A_t and G_t are proportionally reduced with rate γ_t . With $W_t^{\mathbb{Q}}$ a standard brownian motion under the probability measure \mathbb{Q} , the evolution for A_t and G_t (with $G_t = 1$ without GMDB and GMAB) is given by

$$\begin{cases} dA_{t-} = \left\{ (r - \alpha_A) \cdot A_{t-} - \alpha_G \cdot G_{t-} \right\} dt + \left\{ \theta_t \cdot \sigma_t \cdot A_{t-} \right\} dW_t^{\mathbb{Q}}, & A_t \geq 0 & \text{before withdrawal at } t, \\ A_{t+} = A_{t-} \cdot (1 - \gamma_t) & \text{and} & G_{t+} = G_{t-} \cdot (1 - \gamma_t) & \text{at withdrawal at } t, \end{cases}$$

where r is the constant risk-free rate and σ_t is the volatility of the risky asset obtained from a regime-switching process (cf. below). The **moneyiness** is defined as $M_t = A_t/G_t$ and is used for the valuation of GMDB and GMAB options which are exercised if $M < 1$. If the policyholder dies at time $t \leq T$, a **death benefit** K_t is paid to the beneficiaries, its amount being (with $[x]^+ = \max(0, x)$):

$$K_t(A_t, G_t) = A_t + [G_t - A_t]^+ \cdot \mathbf{1}_{GMDB}.$$

At retirement, the policyholder elects for a lump sum and/or a life annuity simple paid monthly, and with a $i_T = 0$ interest rate. The lump sum election rate is κ (the annuity election rate being then $1 - \kappa$). The **equivalent pay-off at retirement** is

$$L_T(A_T, G_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa) = \kappa \cdot \left(A_T + [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{GMAB} \right) + \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V(\mathbf{\Lambda})}{a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)}.$$

Here, $\mathbf{\Lambda}_R$ is the survival function assumed at retirement to define the annuity, extracted from the TGH 05 (for males) and TGF 05 (for females) mortality tables with the GMT option. Otherwise, it comes from the deterministic scenario of the Age-Period-Cohort model (cf. below). $\mathbf{\Lambda}$ is the survival function used for the valuation of annuity $R = \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R) \cdot a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)}$. The distribution of survival functions is given through the mortality model described below. $a_{x+T}^V(\mathbf{\Lambda})$ and $a_{x+T}^R(\mathbf{\Lambda}_R)$ are annuity factors for valuation and annuitisation at age $x + T$ (age at retirement) according to survival functions $\mathbf{\Lambda}$ and $\mathbf{\Lambda}_R$.

The account value A_t and the benefit base G_t are projected monthly on time interval $[0, T]$ (starting on December 31, 2021) at times t_k for $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$ with $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_K = T$, where $t_k = t_{k-1} + h$ and $h = 1/12$. We assume that cash-flows for withdrawals Γ_{t_k} and death benefits K_{t_k} happen at times t_k with however $\Gamma_{t_0} = \Gamma_{t_K} = 0$, and the cash-flow at retirement ($t_K = T$) is L_{t_K} .

Modelling financial assets and mortality rates

Modelling financial assets

Risky asset S_t is modelled using a **regime-switching geometric brownian motion** in which the drift and the volatility can vary according to n different regimes defined by the various financial cycles. We take $n = 2$ for the numerical applications. The stochastic process for S_t under the historical probability measure \mathbb{P} is defined as

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Here, $\mu_t = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ and $\sigma_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ with $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ for $t \in [0, T]$. $(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a **Markov chain** having a finite state space $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ being the canonical basis for \mathbb{R}^n and with the infinitesimal generator $\mathbf{Q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ where $\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t+h} = \mathbf{e}_j \mid \boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i) = \delta_{i,j} + q_{i,j} \cdot h + o(h)$, $\delta_{i,j}$ being the Kronecker delta. The matrix of transition probabilities over time interval $[t_k, t_{k+1}]$ is $\mathbf{P}(t_k, t_{k+1}) = \exp(\mathbf{Q} \cdot (t_{k+1} - t_k))$. $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a standard brownian motion under \mathbb{P} , W and $\boldsymbol{\eta}$ being independent.

Under the probability measure \mathbb{P} , we can estimate the parameters with the historical log returns $R_{t_i} = \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)$ using a Hamilton filter to maximise the log-likelihood. With the extended Girsanov theorem, constant risk-free rate r in all regimes, and Itô's lemma, we have S_t being under \mathbb{Q} :

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\int_0^t \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^\mathbb{Q}\right].$$

σ_t is used in the process for A_t as mentioned above. This model can be extended into a multidimensional one with several risky assets. Instead of a constant risk-free rate r , we can have r_t following a stochastic process such as the Cox-Ingersoll-Ross model or a regime-switching model.

Life expectancy evolution and mortality modelling

The human lifespan has considerably increased since the 19th century thanks to technological and medical progress. The period life expectancy at birth has increased from 43.3 years in 1850 to 82.6 years in 2018 for the French population (79.6 years for males and 85.5 years for females) according to the *Human Mortality Database* (HMD). Since 2001, the average annual increase of life expectancy at birth is +0.20 for the total population (+0.14 for life expectancy at 60). We use two different approaches to project future mortality rates: a first model being a standard stochastic mortality model and a second model based on the evolution of life expectancy.

- The stochastic mortality model **Age-Period-Cohort (APC)**, an extension of the Lee-Carter model, defines for each age x and year t the mortality rate $m(x, t)$ as:

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + n_a^{-1} \cdot \kappa_t^{(2)} + n_a^{-1} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)},$$

where $\beta_x^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ and $\gamma_{t-x}^{(3)}$ are respectively the age, period, and cohort parameters, and n_a is the number of ages. The model is calibrated with the French national population for each gender on years 1969-2018 and ages 40-90. The probabilities of death $q(x, t)$ given with APC model are adjusted with a logistic regression using the TGH/F 05 mortality tables for year 2021. Mortality at old ages is obtained through an asymptotic Denuit-Goderniaux where $q(x, t)$ probabilities reach in year t an asymptotic value $q_{\omega,t} \in [50\%, 100\%]$, $\omega = 130$. The deterministic scenario of the APC model gives the new mortality table at retirement without the GMT option.

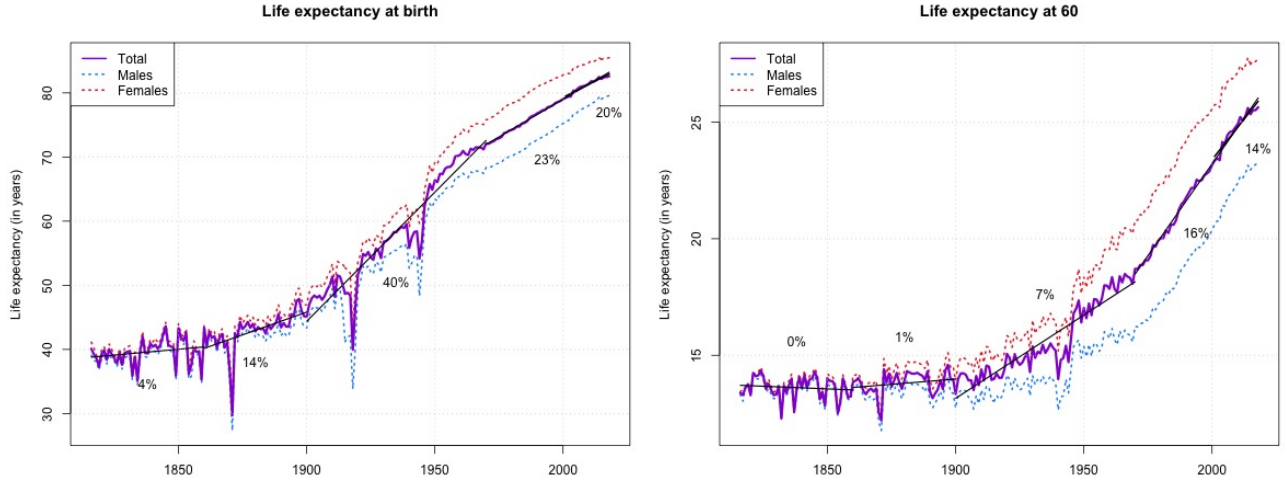


Figure 8 – Period life expectancy evolution in France from 1816 to 2018 (Source: HMD)

- The **Linear Shifting Bongaarts model (LSB)** is a variation of the Bongaarts mortality model with a shifting parameter $\lambda(t) = \lambda \cdot t$ being linear. The force of mortality is

$$\mu(x, t) = \alpha + \frac{\beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]}{1 + \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]},$$

where α is the base mortality, β is the age parameter, and M_0 approximates the modal age in $t_0 = 0$. The period life expectancy $e^P(x, t)$ is a solution of a scalar transport equation and:

$$\frac{\partial e^P}{\partial t}(x, t) = \lambda \cdot (1 - \mu(x, t) \cdot e^P(x, t)).$$

Nowadays, $\mu(0, t) \simeq 0$ so $e^P(0, t)$ increases linearly in the LSB model. After an estimation of parameters α , β , and M_0 using the 2021 mortality from TGH/F 05 mortality tables, we obtain a distribution of the evolution of life expectancy at birth e'_0 (and then λ) with $\mathbb{E}[e'_0] = 0.2$ and then a distribution of survival functions $\Lambda(e'_0)$. This approach allows an assessment of the trend risk, the main component of the longevity risk, and a_{x+T}^V being given only with e'_0 .

Optimal behaviour strategies for policyholders

The monthly survival function is obtained assuming a linear distribution of deaths between two consecutive ages. With ${}_t p_x^{(h)} = l_{x+t_k}^{(h)} / l_x^{(h)}$ the survival probability on $[0, t_k]$ and $q_{x+t_{k-1}}^{(h)} = 1 - l_{x+t_k}^{(h)} / l_{x+t_{k-1}}^{(h)}$ the probability of death $[t_{k-1}, t_k]$ for a monthly survival function under the probability measure \mathbb{M} , \mathbb{M} and \mathbb{Q} being independent, with the global filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, the policy value at $t_0 = 0$ is:

$$V_0(\mathbf{C}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[e^{-r \cdot T} \cdot {}_T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{k=1}^K e^{-r \cdot t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} e^{-r \cdot t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k}^- \mid \mathcal{F}_0 \right].$$

with $\mathbf{C} = (\gamma = (\gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_{K-1}}), \kappa)$ being the behaviour strategy of the policyholder for withdrawal rates and lump sum election at retirement. $\mathbf{C}^* = (\gamma^*, \kappa^*)$ is an **optimal strategy** if it gives the maximum policy value V_0^* . The optimisation problem is a **Hamilton-Jacobi-Bellman equation** solved with **dynamic programming**. We look at the maximum policy value at t_k before and after

withdrawal. The policy value at time t_k^- is maximised if the sum of withdrawal and policy value after withdrawal is maximised. With $V_{t_k^+}^*$ being the policy value after withdrawal rate γ_{t_k} in t_k , we have:

$$V_{t_k^+}^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[e^{-r \cdot h} \cdot \left(p_{x+t_k}^{(h)} \cdot V_{t_{k+1}^-}^* + q_{x+t_k}^{(h)} \cdot K_{t_{k+1}^-} \right) \mid \mathcal{F}_{t_k^+} \right] \text{ and } V_{t_k^-}^* = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k^-} + V_{t_k^+}^* \mid \mathcal{F}_{t_k^-} \right\},$$

with $V_0^* = V_{t_0^+}^*$ and $V_T^* = \sup_{\kappa \in [0,1]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} [L_T(\kappa) \mid \mathcal{F}_T]$. The optimisation problem can then be defined as a backward recursive problem starting at time T to finally obtain V_0^* at $t_0 = 0$. We consider $\bar{V}_{t_k}^*(e'_0)$, the maximum policy value at t_k according to e'_0 , and the state vector $\mathbf{E}_{t_k} = (A_{t_k}, G_{t_k})$ to define:

$$\bar{v}_{t_k}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = G_{t_k}^{-1} \cdot \left({}_{t_k}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \bar{V}_{t_k}^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, \mathbf{E}_{t_k}) + {}_{t_{k-1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot K_{t_k}(\mathbf{E}_{t_k}) \right)$$

If there is either GMDB or GMAB, then $M_{t^-} = M_{t^+}$. We introduce $g(x) = x + [1 - x]^+ \cdot \mathbf{1}_{GMDB}$ and

$$\phi_T^*(e'_0, M_T) = M_T \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + [1 - M_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{GMAB}.$$

With the filtration $(\mathcal{F}_t^F)_{0 \leq t \leq T}$ for financial processes financiers, the optimisation problem to solve is:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, M_T) = {}_T p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \left([\phi_T^*(e'_0, M_T)]^+ + \frac{M_T}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + {}_{t_{K-1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{K-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_T), \\ \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k^+}) = e^{-r \cdot h} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\bar{v}_{t_{k+1}^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}}, M_{t_{k+1}^-}) \mid \mathcal{F}_{t_k^+}^F \right], \\ \bar{v}_{t_k^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ {}_{t_k}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \gamma_{t_k} \cdot M_{t_k} + (1 - \gamma_{t_k}) \cdot \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) + {}_{t_{k-1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_{t_k}) \right\}. \end{array} \right.$$

κ^* is given by the first line of the optimisation problem:

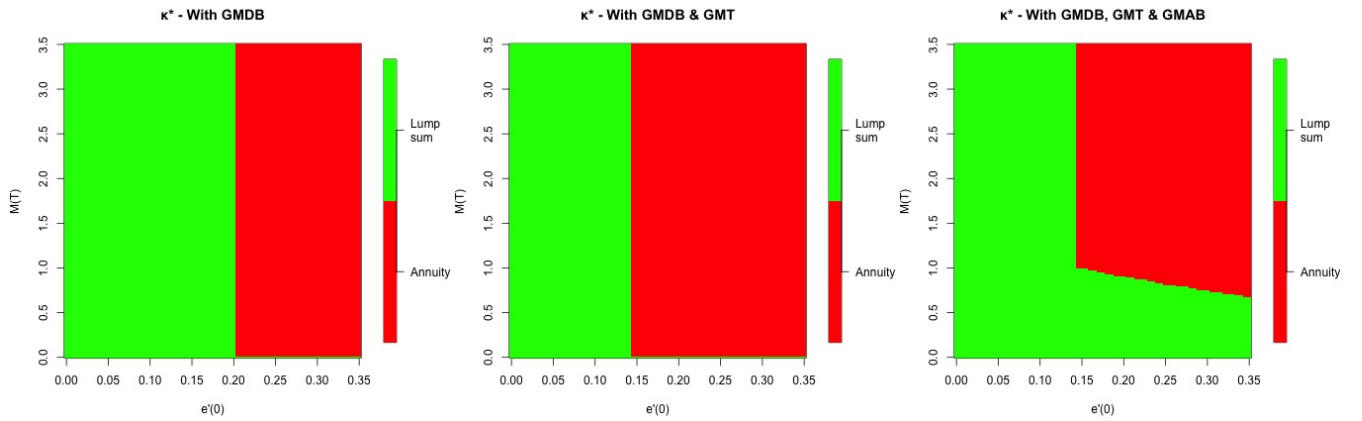
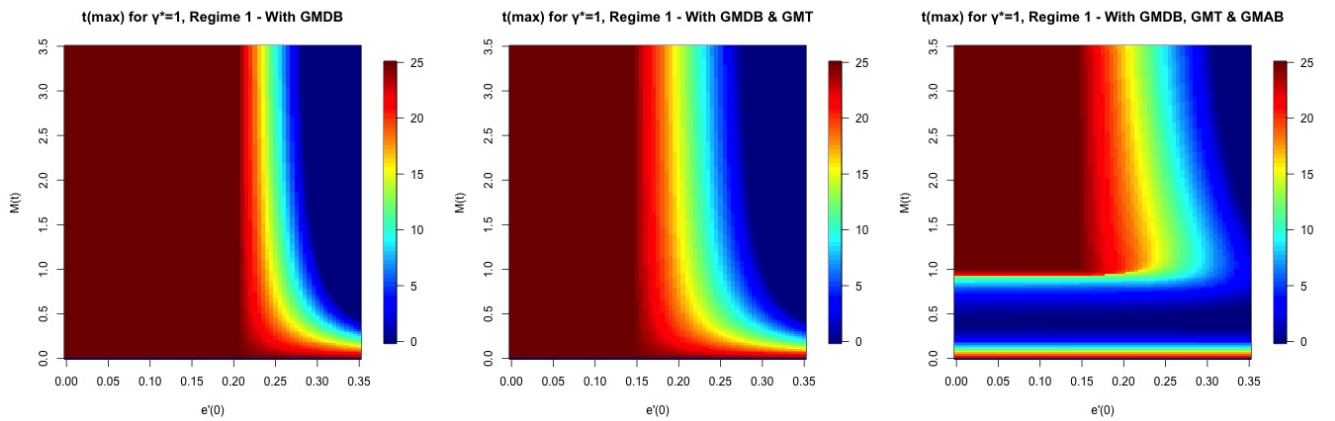
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_T^*(e'_0, M_T) > 0 \iff \kappa^* = 1 \iff \text{Optimal behaviour at retirement is to choose the lump sum.} \\ \phi_T^*(e'_0, M_T) < 0 \iff \kappa^* = 0 \iff \text{Optimal behaviour at retirement is to choose the life annuity.} \end{array} \right.$$

With $\tau = T - t$, the Feynman-Kac theorem is used on the second line of the optimisation problem and we have on $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+] = [t_k^+, t_{k+1}^-]$, with $\bar{v}_\tau^{(i)}(\cdot, \cdot) = \bar{v}_\tau(\cdot, \mathbf{e}_i, \cdot)$, the PDE system:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \theta^2 \sigma_1^2 M^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A)M - \alpha_G \right\} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M} - (r - q_{1,1}) \bar{v}_\tau^{(1)} - q_{1,1} \bar{v}_\tau^{(2)}, \\ \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \theta^2 \sigma_2^2 M^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A)M - \alpha_G \right\} \frac{\partial \bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M} - (r - q_{2,2}) \bar{v}_\tau^{(2)} - q_{2,2} \bar{v}_\tau^{(1)}. \end{array} \right.$$

We solve it with a Crank-Nicolson numerical scheme. We build a grid on the solution domain for $\boldsymbol{\eta}$, M and τ , and define boundary conditions relative to M (for $M_{min} = 0$, there is a cash-flow only if the policyholder dies with the GMDB option, and for M_{max} the policyholder either makes a total withdrawal or allocates the full account value on the risk-free asset to get a high annuity at retirement) to obtain $\bar{v}_{\tau_{k'}^+}$ from $\bar{v}_{\tau_{k'-1}^-}$. The third line of the optimisation problem gives $\gamma_{t_k}^* \in \{0, 1\}$ and $\bar{v}_{\tau_{k'}^-}$.

Here are the results for a 40-year-old male ($T = 25$) with $r = 2.5\%$, $\sigma_1 = 11.04\%$, $\sigma_2 = 24.17\%$, $q_{1,1} = -0.6151$, $q_{2,2} = -1.0180$, $\alpha_R = 1\%$, $\alpha_A^E = 0.5\%$, $\alpha_A^{MT} = 0.4\%$, $\alpha_G^{DB} = 0.35\%$ and $\alpha_G^{AB} = 1\%$:

Figure 9 – κ^* as a function of e'_0 and M_T - Male at 40 ($T=25$)Figure 10 – Last time t for an optimal withdrawal as a function of e'_0 and M - Male at 40 ($T=25$)

By optimising κ^* , the surface for annuity election increases in low e'_0 areas when having GMT option due to an increase of the annuity value. With GMAB option, the surface for lump sum election increases with $M < 1$ in high e'_0 areas, the guaranteed lump sum being more profitable. For withdrawals, we illustrate the last time t_{max} where $\gamma^* = 1$ (total withdrawal) as a function of M and e'_0 , and after that: $\gamma^* = 0$ (no withdrawal). With similar results in both regimes, we only illustrate Regime 1. With $M > 1$, the optimal behaviour is to make no withdrawal when e'_0 is high. The threshold for e'_0 above which t_{max} decreases towards 0 is lower with GMT option giving a higher annuity value. Without GMAB, with low e'_0 or M close to 0, the annuity is not profitable and fees keep depleting the account value, therefore an early total withdrawal is advised. With GMAB, the optimal behaviour is to make no withdrawal when $M < 1$ to get the benefit base at death or at retirement.

Conclusion

This analysis allows the insurer to define the optimal behaviour strategies for withdrawals and lump sum/annuity election at retirement as a function of time, moneyness, and evolution of life expectancy at birth. We can extend this model by considering several risky assets and/or a stochastic risk-free asset. With the results, we can define best estimate assumptions with an assumption on how rational policyholders are, or use it in the ORSA assuming an increase of rational behaviour. We can also solve the optimisation problem in a real-world environment by including the risk premiums on assets, and the utility function and preferences to get the optimal behaviour strategies, including asset allocation modifications, according to the policyholder's risk profile.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement Audrey MEGANCK, CEO de Detralytics et vice-présidente de l'IA|BE, qui m'a encadré et soutenu dans la rédaction de ce mémoire, ainsi que toute l'équipe de Detralytics. En particulier, je remercie Donatien HAINAUT et Michel DENUIT, directeurs scientifiques chez Detralytics, pour nos échanges et leurs conseils qui m'ont aidé dans mes travaux, ainsi que Hugo RAPIOR, Éric NANA NJOYA, Amina ABED et David WEEMAELS pour leur soutien sans faille.

Je tiens ensuite à remercier Christophe DUTANG, mon référent académique dans le cadre de la réalisation de ce mémoire, pour son encadrement et ses conseils. Je souhaite également remercier l'équipe de l'Institut du Risk Management, et tout particulièrement Ophélie DUPAS, pour leur aide qui m'a permis de soutenir ce mémoire.

Je souhaite enfin remercier mes proches pour leur soutien durant cette période pour la réalisation de ce mémoire, et tout particulièrement mon frère Louis.

Introduction

Grâce au système de protection sociale comprenant entre autres les régimes de retraite de base et les régimes de retraite complémentaires obligatoires, les Français jouissent d'une pension à vie en liquidant leurs droits lors de leur départ à la retraite. Cependant, avec la baisse continue des taux de remplacement au fil des générations, la préparation de la retraite devient un sujet de préoccupation pour une grande partie de la population active. Afin d'augmenter sa future pension et/ou de disposer d'un capital supplémentaire au moment de partir à la retraite, il est possible de souscrire à un contrat permettant d'épargner progressivement et de faire fructifier ses placements jusqu'à la fin de sa carrière. Ces contrats peuvent être mis en place par les entreprises pour leurs salariés ou être souscrits par des particuliers pour leur propre compte.

Parmi les produits d'épargne favorisés par les Français pour préparer leur retraite, on a principalement l'assurance-vie, les produits d'épargne spécifiquement consacrés à cet objectif étaient jusqu'à alors peu privilégiés : on comptait seulement 229 milliards d'euros d'encours sur l'épargne-retraite en 2017 contre 1682 milliards d'euros pour l'assurance-vie. Pour encourager le développement de ces produits et inciter les Français à épargner en vue de leur retraite, le gouvernement a mis en place avec la loi PACTE de 2019 le nouveau Plan d'Épargne Retraite (PER) à destination des entreprises, des particuliers et des travailleurs non-salariés, et qui a connu un véritable engouement dès son lancement.

Sur les produits d'épargne comme l'assurance-vie ou le PER, les épargnants (ou éventuellement leur entreprise dans le cadre du PER d'Entreprise) peuvent verser des primes sur divers supports financiers dans le but de faire croître leur épargne. Pour les contrats d'assurance, on a classiquement les fonds en euros et les unités de compte sur lesquels les assurés sont exposés à un risque de perte en capital en cas de sous-performance des actifs. L'épargnant peut avoir la faculté de modifier le mode de gestion financière sur son contrat et l'allocation de l'épargne entre les différents supports. Selon le produit, l'épargnant peut avoir la faculté d'effectuer des rachats avant la liquidation, soit librement comme sur l'assurance-vie, soit pour des motifs précis comme sur le PER. En cas de décès avant l'épargne, un capital décès (ou parfois une rente) peut être versé au(x) bénéficiaire(s). À la liquidation, selon le produit, l'épargnant peut opter pour une rente viagère ou une sortie en capital ou une combinaison des deux. Outre là encore un risque de perte en capital au moment de la liquidation, l'assuré peut également être confronté au risque d'un changement avant la liquidation de la table de mortalité utilisée pour le calcul de la rente viagère, ce qui en réduirait son montant. Afin de se couvrir contre ces différents risques, l'assuré peut prendre, moyennant des frais additionnels, des garanties supplémentaires optionnelles pouvant être proposées par l'assureur. On a par exemple des garanties plancher pour garantir un capital minimum en cas de décès avant la liquidation ou en cas de sortie en capital à la liquidation et une garantie sur la table de mortalité utilisée pour la liquidation en rente.

L'assurance-vie et le PER sont donc exposés à des risques financiers (risques de taux, actions, immobilier, etc.) pouvant entraîner une moins-value sur le contrat, et des risques de mortalité et de longévité à la fois en phase d'épargne, avec le risque de décès avant la liquidation, puis à la liquidation

et au-delà sur le calcul de la rente viagère et la durée de vie à la retraite pouvant être plus faibles qu'espéré. Compte tenu de ces risques, du profil de l'épargnant, du produit et des garanties optionnelles sélectionnées, l'assuré peut chercher à optimiser son contrat à travers ses comportements pour obtenir la valorisation du contrat la plus élevée possible. Ces comportements correspondent au fait d'utiliser ou non (et si oui, à quelles dates) les dispositions prévues au contrat comme la faculté de rachat, le choix entre la sortie en capital et la rente viagère à la liquidation, l'allocation financière de l'épargne, etc. L'objectif de ce mémoire sera d'étudier les stratégies de comportement des assurés compte tenu des risques financiers et de mortalité/longévité pour déterminer les stratégies optimales dans lesquelles un assuré peut maximiser la valorisation de son contrat.

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré à une présentation de l'épargne-retraite en France en commençant par une introduction sur la situation globale de l'épargne et la nécessité de préparer sa retraite pour venir augmenter sa future pension. Les différents produits utilisés par les épargnants pour préparer leur retraite seront ensuite présentés avec notamment l'assurance-vie et le PER, puis on s'attardera sur une présentation détaillée des garanties optionnelles (dont les garanties plancher et la garantie de table) sur les produits d'assurance.

Le deuxième chapitre sera dédié à la modélisation des actifs financiers pour évaluer par la suite les risques financiers sur les produits d'épargne-retraite. Pour cela, on introduira un modèle pour les taux ainsi qu'un modèle à changement de régime pour les actions et l'immobilier en présentant pour ce dernier une méthode de calibration sous la probabilité historique dans le cas unidimensionnel et dans le cas multidimensionnel. Ces modèles permettront d'obtenir les différentes composantes du générateur de scénarios économiques sous la probabilité risque-neutre.

Le troisième chapitre portera sur la modélisation prospective de la mortalité pour pouvoir ensuite évaluer les risques de mortalité et de longévité sur les produits d'épargne-retraite. Après une introduction sur l'évolution de l'espérance de vie en France sur le long-terme et sur une période plus récente, on cherchera à obtenir une distribution des taux de mortalité futurs sous deux modèles bien distincts : un modèle de mortalité stochastique classique et un modèle prospectif basé sur l'hypothèse d'évolution future de l'espérance de vie à la naissance.

Le quatrième et dernier chapitre permettra de modéliser l'épargne et les garanties optionnelles pour obtenir la valorisation du contrat avec les hypothèses d'évolution des actifs financiers (sous la probabilité risque-neutre) et des taux de mortalité. Après une première analyse de la valorisation du contrat sous diverses stratégies de comportement déterministes, on s'attardera à la recherche de stratégies optimales pour les rachats et le choix entre la sortie en capital ou en rente viagère à la liquidation. On abordera enfin la recherche de stratégies optimales en univers réel en tenant compte de la fonction d'utilité de l'assuré.

Chapitre 1

Présentation de l'épargne-retraite en France

1.1 Un état des lieux de l'épargne et de la retraite en France

1.1.1 Une forte épargne des ménages non majoritairement tournée vers la retraite

La France compte parmi les pays européens avec le plus haut taux d'épargne des ménages (en étant derrière d'autres pays tels que l'Allemagne, les Pays-Bas, la Suède et la Suisse). Selon l'INSEE, ce taux était compris entre 14% et 16% sur la période 2009-2019 et il est monté à 21,4% en 2020 durant la crise de la Covid-19 (contre 25% sur l'ensemble de la zone euro d'après Eurostat). Toutefois, cette hausse de l'épargne en France durant la crise s'est globalement tournée vers l'épargne de précaution telle que l'épargne réglementée qui est une solution de placement plutôt destinée à un horizon court-terme. A contrario, sur l'assurance-vie et l'épargne-retraite (des placements adaptés sur le moyen à long-terme) la collecte nette (total des primes moins les prestations) a été négative en 2020 avant de redevenir positive en 2021. Le taux d'épargne reste élevé en 2021 avec 20,2% mais a diminué en cours d'année.

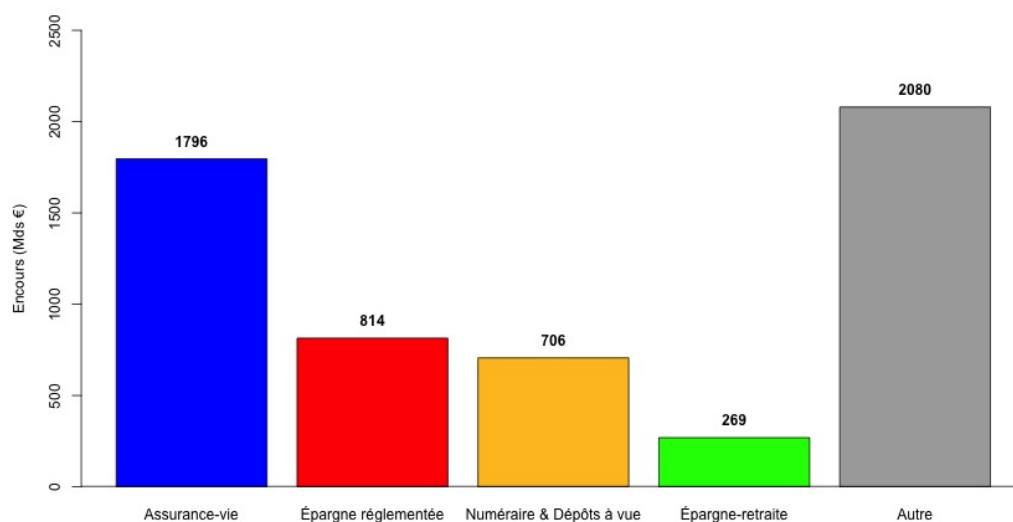


FIGURE 1.1 – Épargne des Français au 31 décembre 2020 (Sources : BDF, France Assureurs, DREES)

On constate d'après la Figure 1.1 que **l'assurance-vie** est le placement préféré des Français avec 1796 milliards d'euros d'encours à fin 2020 et que **l'épargne-retraite** se trouve loin derrière et est même bien plus faible que l'épargne réglementée (composée majoritairement du Livret A, du LDDS, du LEP, du PEL et du CEL) aux rendements actuels très faibles (cf. Figure 1.6) et bien inférieurs à l'inflation croissante depuis 2021, et les numéraire & dépôts à vue (le reste de l'épargne des ménages français étant constitué de divers produits de taux et de fonds propres).

D'après une étude du cabinet Eresⁱ, sur les 5437 milliards d'euros d'épargne à fin 2019, seulement 965 milliards d'euros étaient consacrés à la retraite. Ce montant a connu une hausse de 63% en dix ans mais cela reste inférieur à la hausse moyenne de 87% pour l'ensemble des pays de l'OCDE sur la même périodeⁱⁱ. L'étude montre aussi que les produits plébiscités pour préparer la retraite n'étaient pas ceux spécifiquement dédiés à cet objectif (seulement 21,9% du total), malgré tout de même une amélioration au cours des dix dernières années, mais plutôt les produits d'assurance-vie (à 41,1%) et de valeurs mobilières (à 26,6%). Il y a aussi l'épargne salariale avec le PEE (à 7,1%) et les livrets d'épargne (à 3,3%). Il existe donc une réelle opportunité de développement des produits d'épargne-retraite.

1.1.2 La nécessité d'épargner pour sa retraite

La préparation de la retraite est en effet un enjeu fondamental au cœur des préoccupations de nombreux Français. Le système de retraite français repose largement sur le principe de la retraite par répartition obligatoire (une faible partie de retraite supplémentaire par capitalisation étant constituée à titre facultatif avec des produits tels que l'épargne-retraite) dans lequel les actifs qui sont en âge de travailler financent les pensions des retraités en payant des cotisations. Le système de retraite par répartition est composé de 42 régimes avec les régimes de base et les régimes complémentaires auxquels sont affiliés les Français selon leur parcours professionnel.

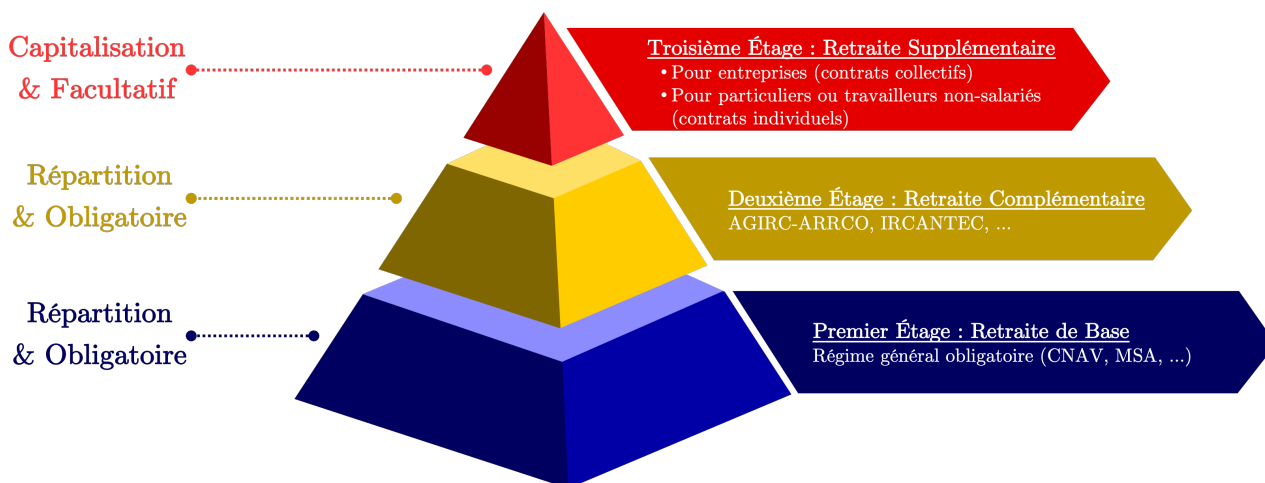


FIGURE 1.2 – Les trois étages du système de retraite français

En 2019, le montant des pensions de vieillesse et de survie s'élevait à 327,9 milliards d'euros (+2% par rapport à 2018) pour 16,7 millions de retraités (répartis entre les 42 régimes de retraite), soit 13,5% du PIB et environ un quart des dépenses publiquesⁱⁱⁱ.

i. Source : www.eres-group.com/etudes-et-enquetes/observatoire-retraite-eres-epargne-retraite/

ii. Source : "Pension Markets in Focus 2020", OECD

iii. Source : Direction de la Recherche, des Études, de l'Évaluation et des Statistiques (DREES)

Le fonctionnement d'un tel système de retraite repose principalement sur l'équilibre démographique entre le nombre d'actifs cotisants et le nombre de retraités. Avec l'allongement de la durée de vie humaine au-delà de 60 ans depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale (cf. Chapitre 3) ainsi qu'une diminution de la natalité, le ratio d'actifs sur le nombre de retraités a tendance à diminuer ce qui vient créer des tensions sur l'équilibre démographique et donc le financement du système de retraite. Ce ratio n'était que de 1,7 actif cotisant par retraité en 2019 tous régimes confondus (contre 2,02 en 2004). D'après différentes projections réalisées, et notamment celles du rapport de 2021 du Conseil d'Orientation des Retraites (COR), le ratio du nombre de personnes en âge de travailler (pour les âges allant de 20 ans à 59 ans ou 64 ans) sur le nombre de personnes en âge d'être à la retraite (pour les âges à partir de 60 ans ou 65 ans) va continuer à se dégrader dans les prochaines décennies :

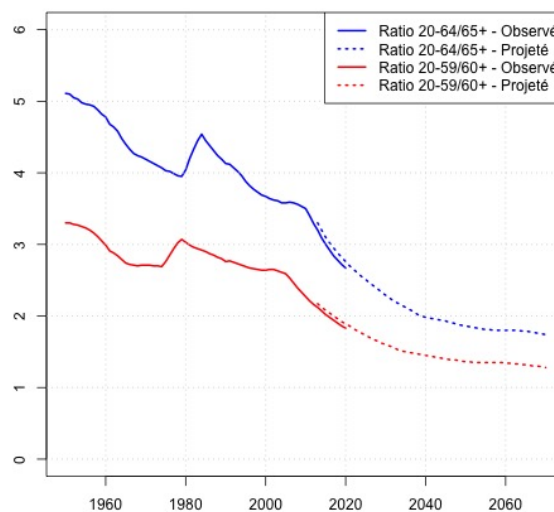


FIGURE 1.3 – Ratio d'âges 20-59/60+ et 20-64/65+ observés et projetés (Source : COR)

Depuis la mise en place du système de retraite par répartition en 1945, de nombreuses réformes y ont été apportées notamment pour essayer de rééquilibrer et d'assurer le financement du système, que ce soit sur le niveau des cotisations et des pensions ou alors sur l'âge de départ à la retraite aujourd'hui fixé à 62 ans (67 ans pour la retraite à taux plein sans décote) et la durée de cotisation aujourd'hui de 43 années pour les plus jeunes générations. L'âge moyen conjoncturel de départ en retraite était de 62 ans et 2 mois à fin 2019 d'après la DREES. De nouvelles réformes seront sans nul doute nécessaires pour garantir la pérennité du système avec l'allongement de la durée de vie qui se poursuit.

Tout ceci entraîne également une baisse durable au fil des générations des **taux de remplacement** qui indiquent le montant de la retraite obligatoire perçue rapporté au dernier revenu d'activité (cf. Figure 1.4). Pour pallier le manque de revenu grandissant lors du départ à la retraite avec cette baisse des taux de remplacement, il est donc préférable de se constituer progressivement et suffisamment à l'avance une épargne durant sa vie active pour pouvoir l'utiliser en tant que retraite supplémentaire lors du départ à la retraite. Ce supplément peut être constitué en ayant notamment recours à des dispositifs tels que l'assurance-vie ou les produits d'épargne-retraite.

Aujourd'hui, la retraite supplémentaire constitue une part très minoritaire dans la retraite des Français : d'après la DREES, elle représentait en 2019 à peine 4% des cotisations au titre de la retraite et 2,1% des pensions de retraite, ces chiffres étant stables depuis une dizaine d'années. Des réformes ont été conduites par les pouvoirs publics pour chercher à accroître l'épargne-retraite des Français.

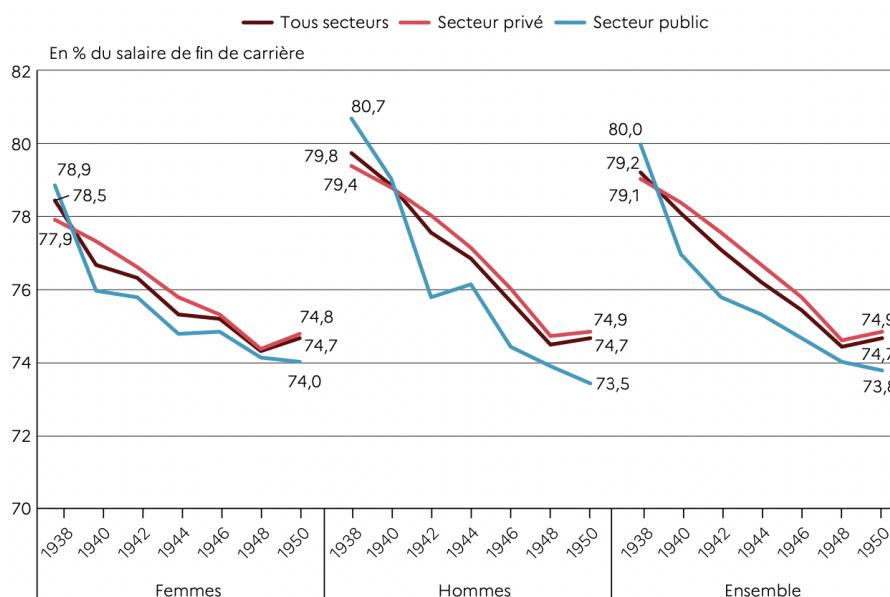


FIGURE 1.4 – Taux de remplacement médian des retraités anciens salariés à carrière complète, par génération (Source : DREES)

1.1.3 Les récentes évolutions réglementaires pour dynamiser l'épargne

Dans le but d'encourager les Français à épargner en vue de leur retraite, diverses réformes ont été conduites au cours des vingt dernières années pour rénover les offres de produits d'épargne, améliorer leur portabilité, simplifier la fiscalité ou encore créer de nouveaux types de supports financiers. Pour l'assurance-vie, on peut notamment citer l'amendement Fourgous (2005) : bien que le transfert d'un contrat d'assurance-vie vers un autre contrat de même nature entre deux assureurs différents soit impossible, cet amendement permet aux assurés de transformer un ancien contrat d'assurance-vie monosupport n'étant plus rentable en un nouveau contrat multisupport chez le même assureur sur lequel on peut espérer une meilleure rentabilité, le tout sans perdre l'antériorité fiscale. En 2019, avec la loi PACTE (cf. ci-après), la transférabilité des contrats d'assurance-vie au sein d'un même assureur sans perte des avantages fiscaux a été étendue. On a également eu en 2018 l'instauration du **prélèvement forfaitaire unique (PFU)**, également appelé "*flat-tax*", qui a permis de simplifier et d'alléger la fiscalité sur les revenus de capitaux mobiliers, incluant notamment l'assurance-vie, avec une fiscalité unique de 30% (12,8% au titre de l'impôt sur le revenu, ou le barème progressif si cela est plus avantageux, et 17,2% au titre des prélèvements sociaux) sur les plus-values générées. L'assurance-vie conserve toutefois des spécificités pour les contrats de plus de 8 ans (cf. paragraphe 1.2.2).

Avec la baisse continue des rendements des fonds en euros et le risque de perte en capital sur les supports en unités de compte (cf. paragraphe 1.2.1), le nouveau support "Eurocroissance" a été introduit en 2014 pour être intégré dans des contrats d'assurance-vie en offrant une garantie en capital seulement au terme du contrat. Toutefois, à cause de sa complexité, ce support n'a pas connu le succès escompté après son lancement. Il a été modernisé et simplifié en 2019 dans l'espoir de connaître un meilleur développement. 2019 a également été l'année de publication d'un décret permettant à de nouveaux fonds de capital-investissement (aussi appelé "*private equity*") d'être éligibles à l'intégration dans les contrats d'assurance-vie pour permettre aux épargnants d'investir dans des sociétés non cotées et chercher de potentielles fortes performances mais avec des risques élevés de perte en capital.

Ce décret venait compléter une des nombreuses mesures prévues par la **loi PACTE** (Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation des Entreprises) du 22 mai 2019 dont l'objectif global du gouvernement était de permettre aux entreprises, notamment les TPE-PME, de pouvoir se développer, de simplifier leur fonctionnement et d'innover. La loi a prévu également des mesures autour de l'épargne-retraite pour refonder complètement l'offre des produits à destination des particuliers, des travailleurs non-salariés (TNS) et des entreprises avec la création du nouveau **Plan d'Épargne Retraite (PER)** au 1^{er} octobre 2019 (dont le fonctionnement détaillé est décrit au paragraphe 1.2.3) remplaçant d'anciens produits d'épargne-retraite dont ceux créés par la loi Fillon de 2003 (tels que le PERP et le PERCO). Voici les principaux objectifs fixés avec le lancement du PER :

- **Harmoniser les produits d'épargne-retraite** sur les règles de gestion, les cas de déblocage avant la retraite, les modalités de liquidation de l'épargne à la retraite et la fiscalité,
- **Décliner le PER pour les particuliers, TNS et entreprises** pour permettre sur les différents produits de réaliser des versements individuels et, le cas échéant, des versements par le biais de l'entreprise pour tous les salariés ou une partie d'entre eux,
- **Ouvrir à la concurrence le marché de l'épargne-retraite** avec la possibilité de souscrire un PER auprès d'un assureur ou auprès d'un gestionnaire d'actif,
- **Favoriser la portabilité de l'épargne** avec la possibilité de librement transférer son PER d'un gestionnaire à un autre sans frais au bout de cinq ans ou après l'âge de départ en retraite,
- **Encourager les investissements au long-terme sur les supports en unités de compte** grâce à la gestion pilotée par horizon instaurée par défaut avec une part des investissements consacrée au développement des TPE-PME.

Avec le lancement du PER, le gouvernement prévoyait d'atteindre 300 milliards d'euros d'encours pour l'épargne-retraite en 2022, cet objectif ayant été fixé bien évidemment avant la crise liée à la pandémie de Covid-19. En outre, la loi PACTE, complétée de textes supplémentaires, a également permis de créer les nouveaux régimes à prestations définies L.137-11-2 pouvant être mis en place par les entreprises pour une partie de leurs salariés.

Par ailleurs, d'autres réglementations ont été instaurées avec les objectifs de mieux informer et protéger les épargnants dans leurs droits. On peut citer par exemple la loi Eckert de 2014 sur la déshérence qui impose aux banques et assureurs d'informer les titulaires des contrats inactifs de l'existence de leur contrat et, en cas de décès du titulaire, d'informer les ayants droit. On peut également mentionner la directive européenne MIF 2 (ou "MiFID 2") de 2014 qui a permis de renforcer la protection et l'information aux investisseurs, ou encore la Directive sur la Distribution d'Assurances (DDA) de 2016 pour harmoniser les pratiques de distribution des produits d'assurance en Europe et davantage informer les consommateurs à la souscription d'un produit d'assurance. La loi PACTE a également mis en place des obligations de transparence et de devoir d'information par le gestionnaire sur les performances des supports financiers et les frais appliqués.

1.2 Les principaux produits d'épargne pour préparer sa retraite

1.2.1 Le fonctionnement général des produits d'assurance-vie et d'épargne-retraite

Le versement des primes

L'assurance-vie et les produits d'épargne-retraite sont alimentés par le versement de primes qui peuvent être versées soit directement par l'épargnant, soit par son employeur dans le cadre d'un contrat

souscrit par une entreprise pour tous ses salariés ou une partie d'entre eux. Il est à noter que certains contrats d'entreprise, notamment des régimes à prestations définies, ne permettent pas à l'épargnant de verser directement sur son contrat car seul l'employeur y est habilité.

Les primes peuvent être versées de façon libre et/ou de façon périodique avec une périodicité choisie par l'épargnant (ou l'entreprise le cas échéant). Des frais sur primes peuvent être prélevés par le gestionnaire du contrat avant l'investissement des primes sur les supports financiers. Il est à noter que certains produits comme les PER permettent de déduire les primes versées du revenu imposable, ou du résultat imposable dans le cadre des contrats d'entreprise, dans une certaine limite pour inciter le versement de primes sur le contrat et mieux préparer la retraite des épargnants.

La gestion financière

Les primes versées sont investies sur des supports financiers dont la liste pour chaque contrat est établie par le gestionnaire, la plupart des contrats d'épargne actuellement distribués étant multisupports. L'allocation de l'épargne entre les différents supports financiers peut être soit gérée par l'épargnant lui-même (sauf lorsque celui lui est impossible comme dans le cadre de fonds collectifs pour des régimes à prestations définies), soit par le gestionnaire selon différents modes de gestion.

Parmi les supports financiers proposés, on compte les **supports en unités de compte (UC)** dont le capital n'est pas garanti, seulement le nombre de parts. Les UC peuvent être plus ou moins performants en étant plus ou moins risqués pour l'épargnant en termes de perte en capital. Les UC sont classifiés selon une échelle de risque qui est le *Synthetic Risk and Reward Indicator* (SRRI) se basant sur la volatilité historique des actifs et qui va de 1 (actifs les moins risqués et avec a priori un faible potentiel de rendement) à 7 (actifs les plus risqués avec des rendements potentiellement plus élevés). L'épargnant choisit donc une allocation financière comprenant des UC qui répond à son profil de risque, ses objectifs et son horizon de placement. Des frais de gestion peuvent être prélevés sur les encours par le gestionnaire du contrat en plus des frais internes des UC. Les UC peuvent contenir des investissements sur des fonds de type actions, immobilier, obligations, monétaire, etc.

Les contrats d'assurance proposent classiquement le **fonds en euros** sur le produit d'épargne. Le fonds en euros est le support de placement historique des contrats d'assurance-vie dont la plupart autrefois étaient monosupports et ne proposaient que ce fonds. Aujourd'hui encore, les trois-quarts des encours de l'assurance-vie se trouvent sur le fonds en euros selon France Assureurs mais la part du fonds en euros a tendance à diminuer sur les nouvelles primes, parfois du fait d'initiatives de certains assureurs qui limitent la part d'investissement sur le fonds en euros, ou du fait d'assurés qui privilégient la recherche de rendement sur les UC plus risqués. Le fonds en euros offre aux épargnants une garantie en capital pour les sommes investies sur le support. Des frais de gestion y sont prélevés et l'assureur verse aux assurés une participation aux bénéfices (en général annuellement) qui dépend des résultats techniques et financiers du fonds (avec des règles de distribution minimale imposées aux assureurs de 85% des bénéfices financiers et de 90% des bénéfices techniques). L'assureur peut constituer une provision pour participation aux bénéfices (PPB) lui permettant de lisser les résultats d'une année sur l'autre avec l'obligation de restituer les bénéfices dus aux assurés dans un délai maximum de 8 ans. Lorsque les rendements du fonds en euros étaient élevés, la garantie offerte était nette de frais de gestion mais, avec la baisse des rendements sur ce support, de plus en plus d'assureurs proposent désormais une garantie brute de frais de gestion. Cela veut dire par exemple que si une année il n'y a pas de versement de participation aux bénéfices dû à une mauvaise performance du fonds et que les frais de gestion sont de 0,50%, alors l'assureur prélèvera tout de même les frais et le capital garanti diminuera de 0,50%. Historiquement, les fonds en euros proposaient généralement un Taux Minimum Garanti (TMG) qui garantissait un rendement annuel minimum aux épargnants qui pouvait monter

jusqu'à 4,50% au début des années 1990 puis 3,5% à partir de 1995. On pouvait avoir aussi un Taux Minimum Annuel Garanti (TMAG) où le taux garanti était revu annuellement. Les fonds en euros des assureurs étant majoritairement investis sur des obligations (publiques et privées) dont les rendements ont fortement baissé au cours des dernières décennies avec la baisse des taux (cf. Chapitre 2), les taux de participation aux bénéfices des fonds en euros sont donc de plus en plus faibles et les taux garantis ne sont aujourd'hui presque plus proposés car coûteux et risqués pour l'assureur.

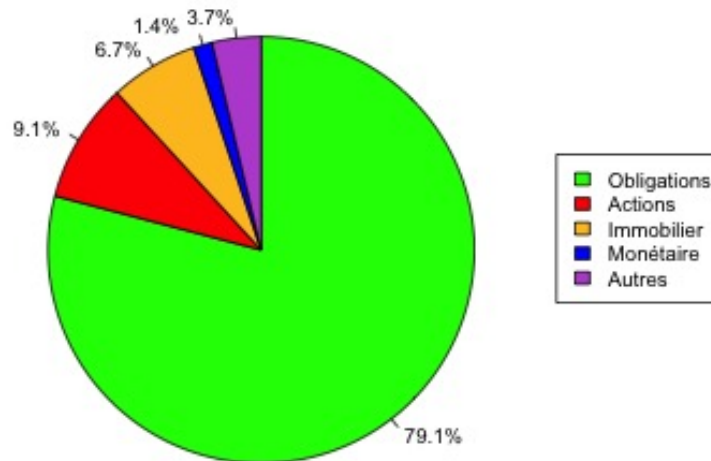


FIGURE 1.5 – Composition moyenne des fonds en euros à fin 2020 (Source : Good Value for Money)

Il existe par ailleurs des fonds en euros avec des allocations plus risquées contenant une grande part d'immobilier (36% en moyenne en 2020), dits "fonds en euros immobiliers", ou une plus grande part d'actions et d'immobilier (seulement 64% d'obligations en moyenne en 2020), dits "fonds en euros dynamiques", pour une recherche de rendement plus élevé. D'autres supports peuvent être intégrés au contrat comme l'Eurocroissance. On affiche ci-dessous les performances moyennes des fonds en euros et des UC en comparaison avec les rendements d'autres produits dont les livrets d'épargne :

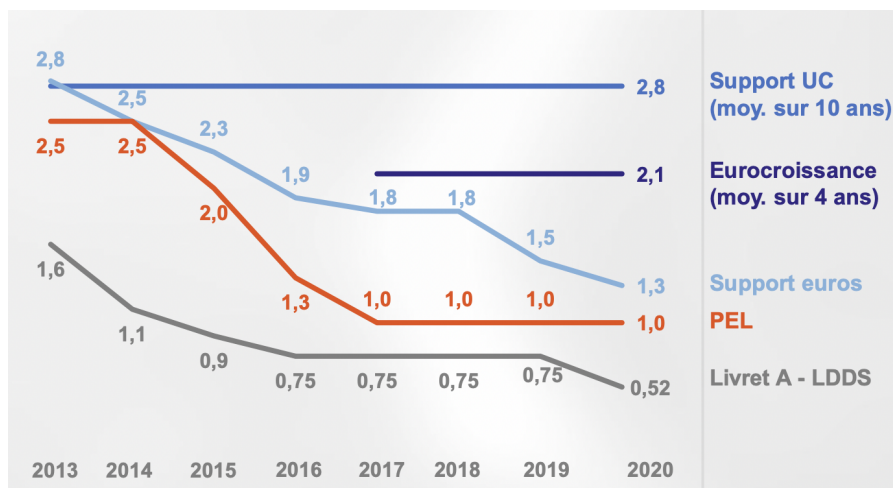


FIGURE 1.6 – Taux de rendement net de frais en pourcentage (Source : FFA)

Le rendement moyen des fonds en euros a donc beaucoup baissé au cours de ces dernières années pour atteindre 1,3% net de frais de gestion en 2020. Il est à noter que le rendement des fonds en euros

des contrats collectifs d'entreprise reste supérieur à celui des contrats individuels : pour ces premiers, le rendement moyen en 2020 était de 1,86% contre 1,28% pour les contrats individuels d'après l'ACPR.

Parmi les différentes gestions financières possibles, on peut avoir la gestion libre où l'épargnant choisit l'allocation et réalise ses propres arbitrages, ou une gestion pilotée par le gestionnaire qui peut proposer plusieurs allocations cible aux épargnants correspondant à divers profils de risque. Par exemple, la part de fonds en euros est plus élevée dans un profil prudent que dans un profil dynamique. L'assureur réalise des arbitrages réguliers pour que l'allocation soit respectée. Dans le cadre des contrats dédiés à la préparation de la retraite, on peut également avoir une **gestion pilotée par horizon** où la part de fonds en euros (ou d'actif monétaire pour les contrats souscrits auprès de gestionnaires d'actifs) augmente progressivement au fur et à mesure que l'épargnant s'approche de la retraite afin de sécuriser son épargne après une phase plus dynamique.

N. B. :

Il existe également d'autres formes de contrats dont les "contrats en points" comme Préfon dans lesquels les primes versées sont transformées en points grâce à un barème et ces points acquis seront ensuite convertis en montant de prestation lors du déblocage de l'épargne avec la valeur de service du point.

Le déblocage de l'épargne

Pour les contrats de type assurance-vie et PER, il est possible pour l'épargnant de débloquer son épargne avant son départ à la retraite. Cela n'est en revanche pas permis sur certains autres produits d'épargne-retraite, comme les régimes à prestations définies avec un fonds collectif en phase d'épargne. Le déblocage anticipé peut provenir du décès de l'épargnant et alors une garantie décès est versée à son (ses) bénéficiaire(s) sous la forme d'un capital ou d'une rente. Si le contrat le permet, l'épargnant peut également effectuer des rachats partiels ou un rachat total (mettant ainsi un terme au contrat) avant la liquidation. C'est le cas par exemple sur l'assurance-vie. Sur le PER, les motifs de rachats sont limités et encadrés par la réglementation. Les déblocages anticipés pour cause de décès ou de rachat sont soumis à des fiscalités différentes selon le produit d'épargne et la nature du déblocage.

Au moment de la liquidation, l'épargne acquise est liquidée pour être restituée à l'épargnant pour l'aider dans le financement de sa retraite. La liquidation se fait généralement sous la forme d'un versement d'un capital ou du paiement d'une rente viagère. Certains produits peuvent limiter voire interdire la sortie en capital comme les anciens contrats d'entreprise dits "Article 83". Lorsque le choix est donné à l'épargnant, il peut généralement demander de percevoir une partie en rente viagère et une partie en capital. L'assureur peut proposer différentes options sur la sortie en capital qui peut être payé en une ou plusieurs fois (appelé alors "capital fractionné"), ainsi que sur les rentes viagères en proposant diverses options : rente de réversion pour protéger le conjoint après le décès de l'assuré parti à la retraite, rente garantie les premières années en cas de décès prématuré, rente par paliers pour faire croître ou décroître le montant de la rente après un certain temps, etc. Le montant de la rente viagère est calculé selon les options souscrites, l'âge de départ à la retraite, une table de mortalité, un taux technique, la fréquence et les dates des versements de la rente par l'assureur. Des frais peuvent être appliqués par l'assureur, notamment des frais sur les rentes versées. Les sommes liquidées sont soumises à des fiscalités différentes selon le produit d'épargne et les modalités de liquidation.

Par ailleurs, certains contrats comme le PER sont transférables d'un gestionnaire à un autre (pour le PER, des frais éventuels jusqu'à 1% sont appliqués si le transfert intervient durant les cinq premières années et avant l'âge de départ à la retraite). D'autres en revanche ne sont pas transférables comme l'assurance-vie à moins de passer sur un autre contrat d'assurance-vie chez le même assureur.

1.2.2 L'assurance-vie pour épargner tout au long de sa vie

Comme décrit précédemment, l'assurance-vie est le placement préféré des Français avec 1796 milliards d'euros d'encours fin 2020 avec en moyenne des cotisations annuelles de 130 milliards d'euros sur la période 2011-2020 et une baisse en 2020 dû à la crise de la Covid-19 suivie d'un rattrapage en 2021 avec une collecte record à 151,1 milliards d'euros. Alors qu'il ne s'agit pas d'un produit spécifiquement dédié à la préparation de la retraite, il s'agit du produit d'épargne le plus utilisé dans ce but (à 41% d'après l'étude d'Eres), loin devant les produits d'épargne-retraite. Bien que l'encours de l'assurance-vie soit à 75,8% sur le fonds en euros fin 2020, la proportion des UC a tendance à augmenter depuis quelques années et la part des UC au sein des cotisations est de plus en plus élevée (cf. Figure 1.7) avec les épargnants investissant davantage sur ces supports, soit par les limites de versements sur le fonds en euros imposées par des assureurs, soit à cause des rendements de plus en plus faibles des fonds en euros. Par ailleurs, durant la crise de 2020, l'assurance-vie a connu une collecte négative avec moins de cotisations que de prestations venant surtout de rachats très importants sur les fonds en euros, la collecte nette sur les UC ayant été positiveⁱ.

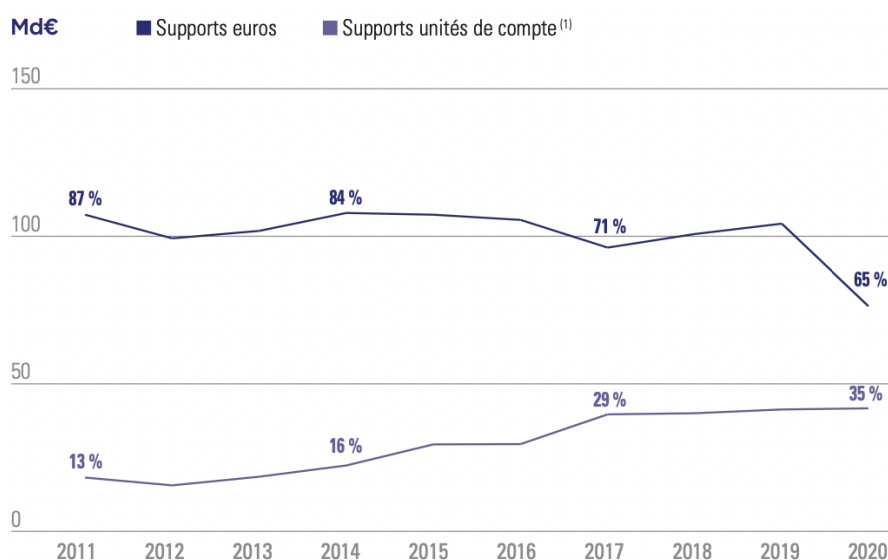


FIGURE 1.7 – Cotisations par type de support en assurance-vie (Source : France Assureurs)

Étant donné son fonctionnement, l'assurance-vie est adaptée pour les investissements à moyen-terme et au long-terme, notamment pour la préparation de la retraite. Les versements sur l'assurance-vie sont librement effectués par l'épargnant (qui peut mettre en place des versements programmés) sans aucune déduction fiscale. Les versements sont répartis sur les supports choisis par l'assuré ou, si une allocation prédéfinie a été mise en place, dans le respect de cette dernière. Il est possible de racheter tout ou partie de son épargne à n'importe quel moment mais ces rachats sont soumis à une fiscalité sur les produits générés (par les plus-values sur les UC et la participation aux bénéficiaires sur le fonds en euros). En cas de moins-value lors du rachat, aucune fiscalité n'est appliquée. Depuis la mise en place de la flat-tax, la fiscalité des rachats sur l'assurance-vie a été simplifiée en conservant toutefois une différence entre les versements effectués avant et après le 27 septembre 2017 et il reste préférable de conserver son contrat pendant au moins 8 ans avant d'effectuer un rachat pour bénéficier d'une fiscalité plus avantageuse :

i. Source : France Assureurs

Durée du contrat	Fiscalité des produits issus des primes versées avant le 27/09/2017	Fiscalité des produits issus des primes versées après le 27/09/2017	
Moins de 4 ans	PFL 35% + PS 17,2%	PFU 12,8% + PS 17,2%	
Entre 4 et 8 ans	PFL 15% + PS 17,2%		
Plus de 8 ans	PFL 7,5% + PS 17,2% après abattement IR	Part des primes versées inférieures à 150 000€ : PFU 7,5% + PS 17,2% après abattement IR	Part des primes versées supérieures à 150 000€ : PFU 12,8% + PS 17,2% après abattement IR

TABLE 1.1 – Fiscalité des rachats en assurance-vie

Lexique pour la Table 1.1 :

- “Primes versées” : on entend par là les primes versées nettes des rachats partiels déjà effectués,
- IR : Impôt sur le revenu,
- PFL : Prélèvement Forfaitaire Libératoire pour l’impôt sur le revenu,
- PFU : Prélèvement Forfaitaire Unique pour l’impôt sur le revenu,
- PS : Prélèvements Sociaux (CSG : 9,2% + CRDS : 0,5% + Prélèvement de solidarité : 7,5%),
- Abattement après 8 ans sur la fiscalité au titre de l’impôt sur le revenu : 4600€ pour une personne seule, 9200€ pour un couple marié. Ces montants sont des plafonds annuels globaux.

L’abattement au-delà de 8 ans peut être intéressant pour des rachats successifs étalés sur plusieurs années car il permet de réduire la fiscalité voire de n’avoir à payer que les prélèvements sociaux si le rachat annuel est inférieur à l’abattement. Il est à noter que si l’assuré a un taux d’imposition plus avantageux que le prélèvement forfaitaire ici indiqué, il peut demander que ne soit pas appliqué in fine le prélèvement forfaitaire mais l’impôt sur le revenu avec le barème progressif. Dans le cas des fonds en euros sur les contrats d’assurance-vie, les prélèvements sociaux sont prélevés automatiquement et de façon anticipée chaque fin d’année avec le versement de la participation aux bénéficiaires. Cet acompte vient en déduction des prélèvements sociaux dus lors des futurs rachats.

La fiscalité décès de l’assurance-vie a évolué plusieurs fois et peut dépendre de la date d’adhésion au contrat. Pour les contrats ouverts à partir du 13 octobre 1998, la fiscalité décès est la suivante :

Âge des versements effectués	Fiscalité sur le capital décès
Avant 70 ans	Le capital décès taxable correspond au total des sommes transmises sur l’ensemble des contrats d’assurance-vie et PER assurantiels. L’imposition est appliquée sur la part de chaque bénéficiaire : <ul style="list-style-type: none"> – Jusqu’à 152 500€ : Exonération, – Part entre 152 500€ et 852 500€ : Taxe forfaitaire de 20%, – Part au-delà de 852 500€ : Taxe forfaitaire de 31,25%.
Après 70 ans	Le capital décès taxable correspond à la part des versements après un abattement de 30 500€. La part de chaque bénéficiaire est soumise aux droits de successions (avec imposition et possibles abattements selon les liens de parenté avec l’épargnant décédé).

TABLE 1.2 – Fiscalité des décès en assurance-vie (Contrats ouverts à partir du 13 octobre 1998)

Si l'assuré décide de liquider à son départ à la retraite son épargne sous la forme d'un capital, cela est assimilé à un rachat total et la fiscalité précédemment décrite dans la Table 1.1 s'applique. Si l'assuré décide de liquider son épargne en rente viagère, la fiscalité des rentes viagères à titre onéreux (RVTO) s'applique. La fraction imposable de la rente viagère correspond à l'âge de l'assuré au premier versement de la rente :

- Moins de 50 ans : 70%,
- Entre 50 ans et 59 ans : 50%,
- Entre 60 ans et 69 ans : 40%,
- Plus de 69 ans : 30%.

Les prélèvements sociaux de 17,2% sont appliqués sur la fraction imposable. Pour un assuré voulant partir en rente, il est donc plus intéressant fiscalement de liquider son assurance-vie à partir de 70 ans.

Dans le Chapitre 4, on intégrera l'assurance-vie dans les produits d'épargne-retraite au sens large dans le cadre d'une utilisation en vue de la préparation d'une retraite supplémentaire.

1.2.3 Le Plan d'Épargne Retraite (PER) pour préparer sa retraite

Afin d'encourager et d'aider les Français à la préparation de leur retraite sur le long-terme, le gouvernement a mis en place en 2019 le Plan d'Épargne Retraite avec pour objectif de dynamiser le marché de l'épargne-retraite et de faire progresser les encours qui restent très faibles par rapport aux autres produits d'épargne. Le PER a été mis en place par la loi PACTE du 22 mai 2019 et une ordonnance, un décret et un arrêté parus l'été suivant afin de préciser son fonctionnement pour son entrée en vigueur au 1^{er} octobre 2019. Le PER avait pour vocation à son lancement de remplacer un ensemble de produits d'épargne-retraite préexistants dont les fonctionnements et les règles de gestion pouvaient être très différents. Le PER se décline sous trois formes :

- Le **PER Individuel (PERIN)** à destination des particuliers et travailleurs non-salariés, remplaçant les PERP, Madelin et Madelin Agricole autrefois proposés par les assureurs,
- Le **PER d'Entreprise Collectif (PERCOL)** à destination des entreprises pour l'ensemble de leurs salariés, remplaçant le PERCO autrefois proposé par les gestionnaires d'actifs,
- Le **PER d'Entreprise Obligatoire (PERO)** à destination des entreprises pour tout ou partie de leurs salariés, remplaçant l'Article 83 qui était proposé par les assureurs. L'adhésion au PERO est obligatoire pour les salariés faisant partie du collègue couvert par le régime.

Ces produits peuvent être proposés par les assureurs en tant que **PER assurantiel** et par les gestionnaires d'actifs en tant que **PER compte-titres**. Il existe des différences entre les deux, notamment la possibilité de n'avoir le fonds en euros que sur le PER assurantiel, l'absence de garanties optionnelles d'assurance sur le PER compte-titres et des différences sur la fiscalité en cas de décès.

Le PER est organisé dans sa gestion par **compartiments** qui correspondent aux différentes sources de versement possibles car les versements et l'encours qui en découle ont des fiscalités et des règles de gestion différentes. Les versements possibles sur le PER sont les suivants :

- **Compartiment 1 (C1)** : Les **versements volontaires** de l'épargnant qui peuvent être déductibles de l'impôt sur le revenu (l'épargnant pouvant toutefois renoncer à cette disposition),
- **Compartiment 2 (C2)** : Les **versements d'épargne salariale et d'épargne-temps** correspondant à l'intéressement, la participation et l'abondement versés par l'entreprise ainsi que les droits inscrits au compte épargne-temps (CET) ou la monétisation de jours de repos non pris, si le salarié décide que cela soit versé sur son PER,
- **Compartiment 3 (C3)** : Les **versements obligatoires** de l'entreprise pour l'ensemble du personnel ou pour une (ou plusieurs) catégorie de salariés désignée (ex. cadres, non-cadres).

L'épargnant a le choix à chaque versement volontaire de le déduire de son impôt sur le revenu ou de renoncer à cette disposition en contrepartie d'une fiscalité plus allégée en sortie. Le C1 peut alors être subdivisé en deux sous-compartiments pour distinguer les fiscalités. Si l'épargnant choisit la déductibilité, les primes sont déduites de son revenu imposable dans la limite de 10% du maximum entre le Plafond Annuel de la Sécurité Sociale (PASS) et des revenus professionnels (limités à 8 PASS) de l'année précédente. Ce plafond est réduit des versements obligatoires, de l'abondement de l'employeur et des versements d'épargne-temps sur le PER. Si le plafond n'est pas atteint, le reliquat non consommé peut être reporté sur trois ans. Plus la tranche marginale d'imposition (TMI) de l'épargnant est élevée, plus sa déduction d'impôt sera importante. Par exemple, pour 100€ versés, il peut déduire 30€ de son impôt sur le revenu s'il a une TMI à 30% et il déduit 45€ si elle est à 45%. Il est particulièrement intéressant de réaliser des versements déductibles si l'épargnant s'attend à une baisse de sa TMI en partant à la retraite car il aura déduit à un taux plus élevé que son taux de fiscalité en sortie.

Selon le PER mis en place, certains versements mentionnés ci-dessus peuvent ne pas être réalisables. Par exemple, un PERIN souscrit par un particulier n'a pas de versements de l'employeur. Dans tous les cas, il est toujours possible de réaliser un transfert vers un PER depuis un des anciens contrats mentionnés ci-dessus (ainsi que Préfon, Corem et la Complémentaire Retraite des Hospitaliers) ou un autre PERⁱ. Dans ce cas, les encours sont orientés vers les compartiments correspondants (ex. un PERP ou le C1 d'un PER sont transférés vers le C1 du nouveau PER, le transfert d'un PERCO peut alimenter le C2 d'un PERIN). Voici les versements possibles sur chacun des PER :

Compartiment	Type de versement	PER Individuel	PER Collectif	PER Obligatoire
C1 - Versements volontaires	Versement volontaire déductible	Oui	Oui	Oui
	Versement volontaire non déductible	Oui	Oui	Oui
C2 - Versements d'épargne salariale & temps	Intéressement & participation	Non	Oui	Oui (si ensemble du personnel)
	CET ou jours de repos non pris	Non	Oui	Oui
	Abondement	Non	Oui	Non
C3 - Versements obligatoires	VO - Part employeur	Non	Possible	Oui
	VO - Part salarié	Non	Possible	Oui

TABLE 1.3 – Versements possible sur le PER

Comme indiqué dans la Table 1.3, il est possible pour le PERCOL d'ajouter des versements obligatoires permettant d'avoir ainsi un dispositif réunissant le PERCOL et le PERO. Ce dispositif est communément appelé **PER Unique (PERU)** et il permet de capter tous les flux du PER sur un même produit. Pour sa mise en place, le gestionnaire du contrat doit être en mesure de gérer les appels et réceptions de primes sur l'ensemble des compartiments.

En cas de décès de l'épargnant avant la liquidation, son compte est clôturé et l'épargne est reversée à son (ses) bénéficiaire(s) sous forme de capital ou de rente avec d'éventuelles garanties dans le cas d'un contrat d'assurance (cf. paragraphe 1.3). La fiscalité sur les sommes transmises dépend de la nature du PER. S'il s'agit d'un PER compte-titres, les sommes transmises sont intégrées à la succession et les

i. N. B. : À condition de ne plus être tenu d'adhérer au régime dans le cas d'un Article 83 ou d'un PERO par exemple.

règles sur les droits de succession sont appliquées. S'il s'agit d'un PER assurantiel, la fiscalité appliquée dépendra de l'âge de décès de l'épargnant :

- En cas de décès avant 70 ans : Les sommes transmises (versements et plus-ou-moins-values) sont soumises à une fiscalité pour la part de chaque bénéficiaire.
 - Jusqu'à 152 500€ : Exonération,
 - Part entre 152 500€ et 852 500€ : Taxe forfaitaire de 20%,
 - Part au-delà de 852 500€ : Taxe forfaitaire de 31,25%.

Ces seuils s'appliquent par bénéficiaire sur l'ensemble des contrats PER assantiels et contrats d'assurance-vie détenus par l'épargnant au moment de son décès. Si le bénéficiaire est le conjoint ou partenaire lié par Pacs, il est exonéré de ce prélèvement. Par exception pour le PER Individuel les capitaux constitutifs de rente viagère sont exonérés de cette taxe s'ils ont été constitués par le versement de primes régulières pendant une durée d'au moins quinze ans.

- En cas de décès après 70 ans : Les sommes transmises (versements et plus-ou-moins-values) sont soumises aux droits de succession après un abattement de 30 500€ qui s'applique à l'ensemble des bénéficiaires sur l'ensemble des contrats PER assantiels et contrats d'assurance-vie pour la part des primes versées après 70 ans détenus par l'épargnant au moment de son décès.

L'épargnant peut effectuer des rachats sur le PER avant la liquidation mais seulement dans certains cas. Il y a tout d'abord les cas dits de "force majeure" :

- Décès du conjoint ou du partenaire lié par un Pacs,
- Invalidité de deuxième ou de troisième catégorie de l'épargnant, de ses enfants, de son conjoint ou du partenaire lié par un Pacs,
- Surendettement de l'épargnant,
- Expiration de l'assurance chômage de l'épargnant,
- Cessation d'activité non salariée de l'épargnant.

Dans ces cas, seuls les prélèvements sociaux de 17,2% sont appliqués sur les éventuelles plus-values lors du rachat. L'autre cas de rachat possible sur le PER est réservé à l'acquisition de la résidence principale (comme précédemment sur le PERCO). Dans ce cas, le rachat ne peut porter que sur les deux premiers compartiments, pas sur celui des versements obligatoires (C3). La fiscalité est la même que la sortie en capital à la liquidation (cf. Table 1.4).

Lors de la liquidation du PER pour son départ à la retraite, l'épargnant peut choisir entre le versement d'un capital (versé en une ou plusieurs échéances), d'une rente viagère (avec diverses options possibles) ou d'une combinaison des deux. Il est à noter que le C3 des versements obligatoires ne peut pas être liquidé sous la forme d'un capital. Toutefois, lorsque l'épargne est trop faible pour constituer une rente suffisamment élevée (plus de 100€ depuis le 1^{er} juillet 2021), l'épargnant peut percevoir l'épargne sur le C3 sous la forme d'un arrérage unique. Le taux technique appliqué pour convertir l'épargne en rente viagère est d'au plus 0% sur le PER. La fiscalité appliquée sur la sortie en capital et la rente viagère dépend du compartiment :

Compartiment	Impôt sur le revenu	Prélèvements sociaux
Versements volontaires déductibles	– Sur les versements : IR (sans abattement) – Sur les produits : 12,8% ou barème progressif	Sur les produits : 17,2%
Versements volontaires non déductibles	– Sur les versements : Exonération – Sur les produits : 12,8% ou barème progressif	
Épargne salariale & temps	– Sur les versements : Exonération – Sur les produits : Exonération	

TABLE 1.4 – Fiscalité pour la sortie en capital sur le PER

Compartiment	Impôt sur le revenu	Prélèvements sociaux
Versements volontaires déductibles	Impôt sur le revenu au titre des RVTG avec abattement de 10%	Sur la fraction de rente du barème RVTO : 17,2%
Versements volontaires non déductibles	Impôt sur le revenu au titre des RVTO (sur la fraction de la rente du barème RVTO)	
Épargne salariale & temps	Impôt sur le revenu au titre des RVTO (sur la fraction de la rente du barème RVTO)	
Versements obligatoires	Impôt sur le revenu au titre des RVTG avec abattement de 10%	Total des PS : 10,1%

TABLE 1.5 – Fiscalité pour la sortie en rente viagère sur le PER

Lexique pour les Tables 1.4 et 1.5 :

- Choix “12,8% ou barème progressif” : l'épargnant choisit la fiscalité pour l'impôt sur le revenu qui lui est la plus avantageuse entre ces deux possibilités,
- RVTG : Rente viagère à titre gratuit,
- RVTO : Rente viagère à titre onéreux,
- Rente viagère issue des versements obligatoires – PS à 10,1% : CSG 8,3% + CRDS 0,5% + CASA 0,3% + Cotisation Maladie 1%. Des minorations ou exonérations sur plusieurs de ces prélèvements sont possibles dans certains cas.

À la réception des primes (ou transferts entrants) dans chacun des compartiments, après le prélèvement des éventuels frais sur primes, les sommes sont investies sur les différents supports financiers. Par défaut, le PER a pour gestion financière une gestion pilotée par horizon où la part des actifs risqués diminue alors que l'épargnant s'approche de la retraite avec la part des actifs peu ou pas risqués (comme le fonds en euros) augmente. La réglementation définit trois profils type pour la gestion par horizon selon l'aversion au risque de l'épargnant. Ces profils sont nommés “prudent”, “équilibré” et “dynamique” avec les contraintes suivantes en termes de part d'actifs peu risqués ($SRRI \leq 3$ ou le fonds en euros) :

Années avant la liquidation	Profil prudent	Profil équilibré	Profil dynamique
Plus de 10 ans	30%	Libre	Libre
Entre 10 et 5 ans	60%	20%	Libre
Entre 5 et 2 ans	80%	50%	30%
Moins de 2 ans	90%	70%	50%

TABLE 1.6 – Part minimale d'actifs peu risqués dans la gestion pilotée par horizon

Le gestionnaire propose alors des allocations aux épargnants sur le PER qui répondent à ces normes. Par défaut, la gestion pilotée par horizon est celle avec le profil équilibré. L'épargnant a la liberté de changer de profil, de modifier son âge d'horizon prévu ou de passer en gestion libre et alors l'épargne est réallouée en conséquence.

Dès son lancement au 1^{er} octobre 2019, le PER a connu un fort succès avec 342 000 contrats souscrits et 6 milliards d'euros d'encours pour l'ensemble des PER individuels et d'entreprise au bout de trois mois, une grande partie venant des transferts depuis les anciens produits, notamment du PERCO vers le nouveau PER d'Entreprise Collectif (PERCOL)ⁱ.

i. Sources : Association Française de la Gestion financière (AFG) & Fédération Française de l'Assurance (FFA)

Au 31 décembre 2021, on comptait 14,8 milliards d'euros d'encours sur les PERCOL en comptes-titres (et 11,2 milliards d'euros pour les anciens PERCO) pour 1,75 million d'épargnants et 118 500 entreprises équipées d'un tel dispositif (dont une importante partie issue des transferts). Pour les PER assurantiels, les encours s'élevaient à 29,6 milliards d'euros d'encours pour 2,6 millions d'épargnants. Le seuil des 3 millions d'épargnants sur les PER assurantiels a été franchi à la fin du premier trimestre 2022 avec un encours total de 37,8 milliards d'euros. La hausse des encours s'est accélérée à partir d'octobre 2020 par des transferts massifs avec la fermeture à cette date de la commercialisation des anciens produits d'épargne-retraite remplacés par le PER. Par ailleurs, la part des encours en UC sur le PER assurantiel était de 41% à fin 2020, ce qui est un taux bien plus élevé que pour le reste des contrats d'épargne-retraite assurantiels dont la part des UC atteignait 22% à cette même date. Cela est notamment dû à la mise en place de la gestion pilotée par défaut sur le PER.

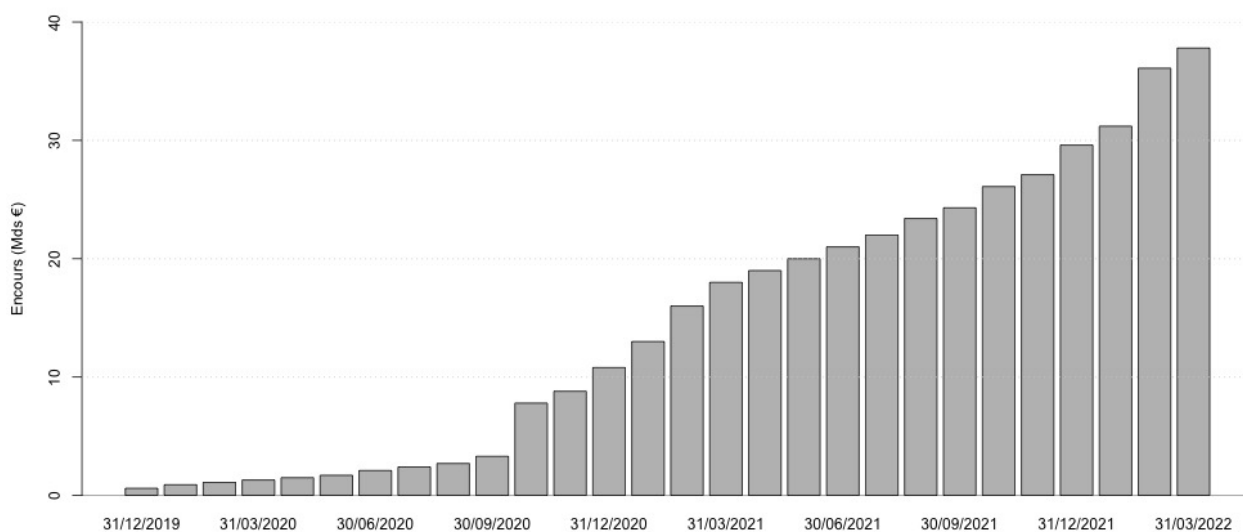


FIGURE 1.8 – Encours mensuels sur les PER assurantiels (Source : France Assureurs)

1.2.4 Les autres produits d'épargne-retraite

Le PER (avec ses déclinaisons en PER Individuel, PER d'Entreprise Collectif et PER d'Entreprise Obligatoire) est un des différents produits d'épargne-retraite existants. Parmi les autres produits, on a les prédécesseurs du PER aujourd'hui fermés à la commercialisation mais sur lesquels il reste des encours. On a également d'autres produits de retraite individuelle et de retraite d'entreprise pouvant être des régimes à cotisations définies (l'engagement porte sur les cotisations à verser et non sur les futures prestations qui résulteront des cotisations versées et/ou de l'encours) ou des régimes à prestations définies (l'engagement porte sur un niveau de prestation future et les cotisations sont alors versées pour atteindre cet engagement).

Parmi les produits d'épargne-retraite individuels, on a notamment Préfon qui est réservé aux fonctionnaires. C'est un régime en points de type L.441 dont la Provision Mathématique Théorique (PMT) s'élevait à 14 milliards d'euros à fin 2019. Le contrat a été transformé en PER au 1^{er} décembre 2019. Pour les régimes de retraite supplémentaire d'entreprise encore proposés aujourd'hui (hormis le PERCOL et le PERO), on a comme produits d'assurance retraite :

- Les **régimes à prestations définies “Article 39”** qui sont mis en place dans des entreprises en général pour un collège de salariés, souvent des cadres supérieurs ou cadres dirigeants, pour offrir lors du départ à la retraite une rente viagère généralement définie en pourcentage du salaire. À la suite de la directive européenne 2014/50/UE du 16 avril 2014 et de la loi PACTE de 2019, les anciens régimes non fermés avant 2014 ne peuvent aujourd’hui plus accueillir ni de nouveaux adhérents ni de nouveaux droits. La loi PACTE et l’ordonnance n°2019-697 du 3 juillet 2019 ont mis en place les nouveaux régimes à prestations définies **L.137-11-2** qui ont notamment comme particularités par rapport aux anciens régimes :
 - L’acquisition de droits peut être soumise à une condition de durée de présence dans l’entreprise et à une condition de durée de cotisations mais le total de ces durées ne peut pas excéder trois ans. Une condition d’âge pour l’acquisition de droits peut également être fixée mais elle ne peut excéder vingt et un ans.
 - Les salariés conservent leurs droits en quittant l’entreprise avant leur départ à la retraite. Dans les anciens régimes, les droits étaient perdus dès lors que le salarié quittait l’entreprise.
 - Le taux d’acquisition annuelle des droits est plafonné à 3% de la rémunération annuelle. La somme des taux d’acquisition ne peut pas excéder 30 points sur l’ensemble de la carrière, tous employeurs confondus. Un transfert de droits d’un ancien régime Article 39 vers le nouveau régime L.137-11-2 est possible mais vient consommer ce maximum de 30 points.
 - L’assureur informe annuellement les adhérents aux régimes sur leurs droits acquis.
- Les **régimes à cotisations définies “Article 82”** classiquement réservés à une catégorie de salariés mais pour lesquels l’adhésion est facultative. Ces contrats permettent aux épargnants de sortir en capital ou en rente à la liquidation. Du fait d’une fiscalité moins avantageuse que les autres régimes, ces régimes sont tombés en désuétude auprès de nombreux acteurs mais ont connu un regain d’activité lorsque les anciens régimes de type Article 39 ont été fermés et que le marché était en attente de précisions sur le fonctionnement des nouveaux régimes L.137-11-2.

On affiche ci-dessous les encours à fin 2019 ainsi que les cotisations perçues et prestations payées au cours de l’année 2019 au titre de l’épargne-retraite, le PER ne représentant ici qu’une petite partie car il avait été lancé seulement trois mois plus tôt :

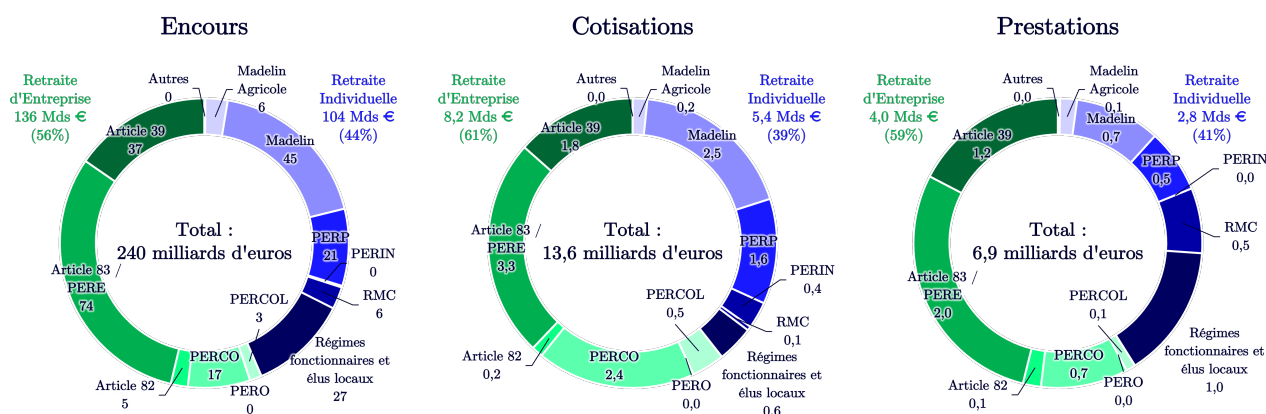


FIGURE 1.9 – Chiffres de l’épargne-retraite à fin 2019 en milliards d’euros (Source : DREES)

Lexique pour la Figure 1.9 :

- **RMC** : Retraite Mutualiste du Combattant,
- **Régimes fonctionnaires et élus locaux** : Préfon, Fonpel, Carel-Mudel, Corem et Complémentaire Retraite des Hospitaliers (CRH).

1.3 Les garanties optionnelles sur l'assurance-vie et le PER

1.3.1 Une introduction aux garanties optionnelles

Les produits d'épargne comme l'assurance-vie ou le PER souscrits auprès d'un assureur peuvent contenir des garanties optionnelles que peut prendre l'assuré. On présentera ci-dessous des garanties d'assurance ne pouvant par exemple pas être proposées sur un PER compte-titres. Il peut s'agir de garanties pour se protéger contre les aléas financiers, les aléas de la mortalité en phase d'épargne ou après le départ à la retraite, ou il peut s'agir de garanties de type prévoyance. Des frais sont appliqués par l'assureur pour couvrir ces garanties, ils sont prélevés par exemple sur les primes ou sur les encours.

1.3.2 Les garanties plancher en cas de décès et en cas de vie

Avec un contrat d'épargne contenant une part d'unités de compte, il existe un risque pour l'assuré de ne pas récupérer au moment du déblocage de l'épargne les primes investies sur le contrat. Pour se prémunir face à ce risque, l'assureur peut proposer des garanties optionnelles qui peuvent s'exercer à certains moments de la vie du contrat en assurant un capital minimum à l'assuré correspondant à une **base garantie** définie selon l'option choisie. Parmi ces options, on a :

- La **base garantie simple** où l'assuré retrouve a minima la simple somme des primes versées nettes de frais et réduite par les éventuels rachats partiels précédents,
- La **base garantie revalorisée** définie à partir des primes nettes de frais comme pour la base garantie simple mais elle est ici revalorisée avec un taux annuel garanti. Les éventuels rachats partiels viennent réduire la base garantie selon les règles définies au contrat,
- La **base garantie avec effet cliquet** définie à partir des primes nettes de frais comme pour la base garantie simple mais ici avec un effet cliquet où la base garantie est la valeur maximale atteinte par l'épargne depuis l'ouverture du contrat. Là encore, les éventuels rachats partiels viennent réduire la base garantie selon les règles définies au contrat.

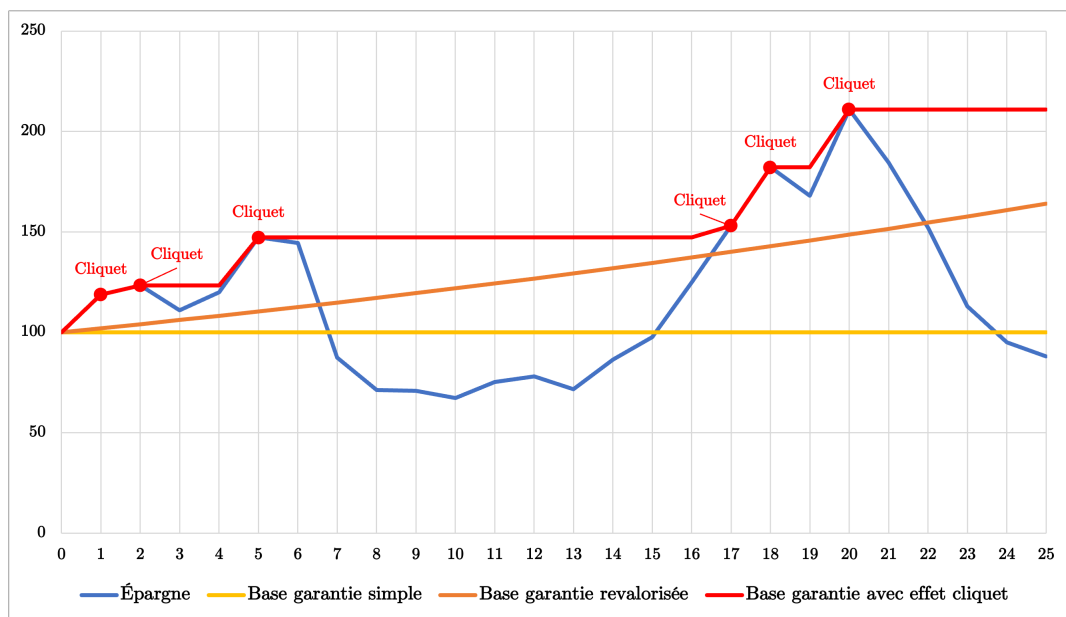


FIGURE 1.10 – Base garantie sous diverses options (prime unique de 100 en $t_0 = 0$ et sans rachat)

Sur le graphique ci-dessus, la base garantie (en jaune, orange ou rouge) sera appliquée à l'exercice de la garantie si elle est supérieure à l'épargne acquise (en bleu). Si l'épargne est supérieure à la base garantie, il n'y a pas lieu d'exercer la garantie.

D'autres options pour définir la base garantie sont possibles, par exemple cela peut être la base garantie simple multipliée par un facteur, ou encore le maximum entre la base garantie revalorisée et la base garantie avec effet cliquet. Pour les rachats, lorsque la base garantie est revalorisée avec un taux r_G , il peut être possible d'avoir une distinction lorsque le montant de rachat Γ est inférieur ou supérieur au montant de rachat garanti $\Gamma^G = r_G \cdot G_-$, G_- étant la base garantie avant rachat. Par exemple, pour un rachat $\Gamma \leq A_-$ en fin d'année et déduit de l'épargne A_- (montant avant rachat), avec la revalorisation annuelle de la base garantie à cette date, on a la base garantie après rachat G_+ :

$$G_+ = \begin{cases} G_- \cdot (1 + r_G) - \Gamma & \text{si } \Gamma \leq \Gamma^G, \\ G_- \cdot \left(1 - \frac{\Gamma - \Gamma^G}{A_-}\right) & \text{si } \Gamma > \Gamma^G. \end{cases}$$

Du fait du fort risque financier pour les bases garanties revalorisées ou avec effet cliquet et de l'environnement de taux bas, la base garantie simple est l'option la plus répandue pour les contrats aujourd'hui proposés et on retiendra cette option pour la suite. Les frais pour les autres options que la base garantie simple sont plus élevés afin de couvrir les risques plus importants pour l'assureur.

Avec la base garantie ainsi définie, l'assureur peut proposer des **garanties plancher** optionnelles aux assurés telles que :

- La **garantie plancher en cas de décès** (notée ensuite "GPD") qui garantit le versement d'un capital minimum au(x) bénéficiaire(s) de l'assuré si celui-ci vient à décéder avant la liquidation,
- La **garantie plancher en cas de vie à la liquidation** (notée ensuite "GPV") qui garantit le versement d'un capital minimum à l'assuré partant à la retraite lorsqu'il liquide son contrat sous la forme d'un capital plutôt que d'une rente viagère.

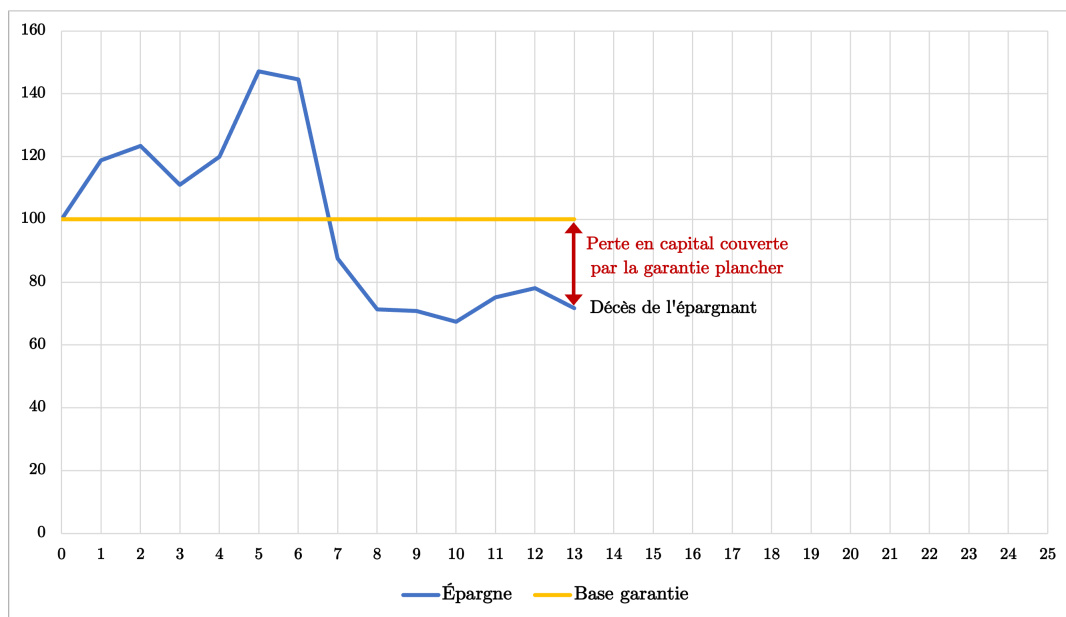


FIGURE 1.11 – Exemple de garantie plancher en cas de décès exercée au décès de l'épargnant

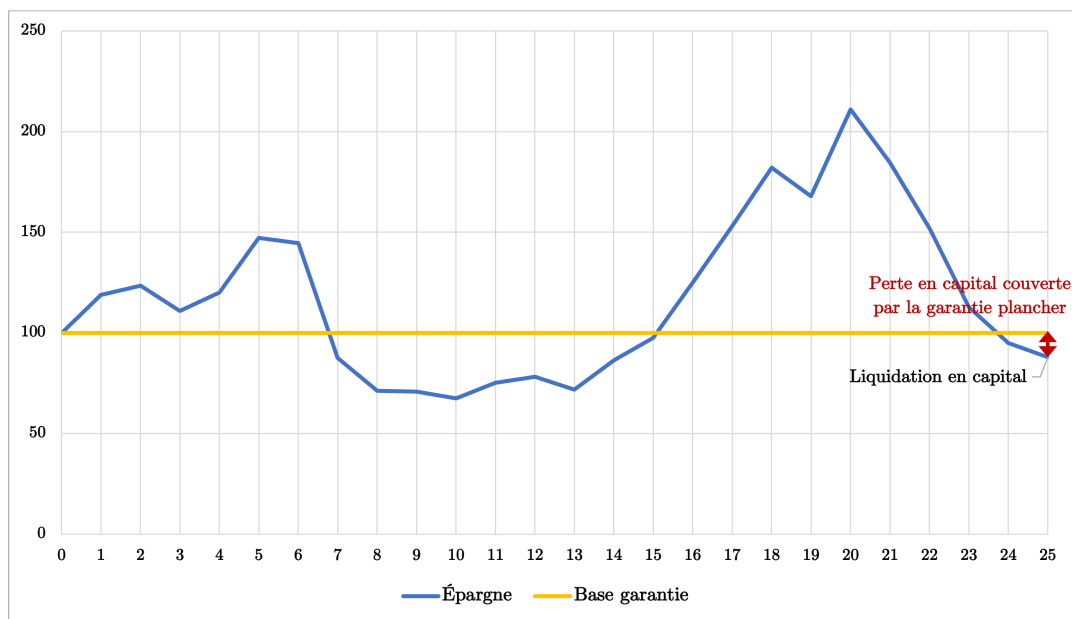


FIGURE 1.12 – Exemple de garantie plancher en cas de vie à la liquidation avec sortie en capital

La garantie plancher en cas de décès avec la base garantie simple (somme des primes nettes réduite des rachats partiels précédents) est celle qui est la plus répandue, la garantie plancher en cas de vie à la liquidation étant bien plus risquée du fait de la forte probabilité de survie jusqu'à la retraite. Cette dernière est donc proposée avec des frais plus élevés. Ces deux garanties plancher font partie de la liste des garanties qui peuvent être proposées sur le PER assurantiel.

Ces garanties proviennent des produits *variable annuities* venus des États-Unis avec des garanties "GMxB" désignant les *Guaranteed Minimum Benefit*. Parmi ces garanties GMxB, on a notamment :

- *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)* : un capital minimum est garanti pour être versé à l'assuré au terme du contrat. Cette garantie correspond à la garantie plancher en cas de vie à la liquidation mentionnée précédemment.
- *Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)* : un capital minimum est garanti en cas de décès de l'épargnant avant le terme du contrat pour être versé au(x) bénéficiaire(s). Cette garantie correspond à la garantie plancher en cas de décès mentionnée précédemment.
- *Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)* : un montant de rente viagère minimal est versé à l'assuré s'il choisit de partir en rente à la liquidation. Ce montant est défini en fonction de la base garantie et d'un barème de conversion en rente viagère garanti à la souscription.
- *Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)* : après une période d'attente, l'épargne est restituée à l'épargnant par des revenus se matérialisant par des rachats partiels périodiques dont les montants sont garantis. La durée de perception de ces revenus peut être viagère, on parle alors de *Guaranteed Life Withdrawal Benefit (GLWB)*.

1.3.3 La garantie de table de mortalité à la liquidation

Pour mettre en place une rente viagère dans un contrat à cotisations définies comme l'assurance-vie ou le PER et définir son montant, l'assureur utilise une table de mortalité, un taux technique, l'âge de l'assuré qui part à la retraite, la périodicité de la rente et les dates de paiement (et éventuellement d'autres paramètres en cas d'options spécifiques). La différenciation par sexe des tables de mortalité

peut être possible pour des contrats d'entreprise à adhésion obligatoire comme l'Article 83 ou le PERO mais ne l'est pas pour les contrats individuels comme l'assurance-vie ou le PERIN depuis 2012. Pour ces derniers, la table des femmes est retenue car plus prudente, ce qui pénalise grandement les hommes qui ont en moyenne une espérance de vie plus faible que les femmes (cf. Chapitre 3).

Avec la forte augmentation de l'espérance de vie pour les seniors depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale (comme décrit dans le Chapitre 3), les tables de mortalité pour le calcul des rentes ont été revues à plusieurs reprises depuis 1945. Depuis la TPG 93 unisexe homologuée en 1993, les tables de mortalité de place pour le calcul des rentes viagères sont définies pour une série de générations avec une espérance de vie plus élevée pour les plus jeunes générations en tenant compte des hypothèses de futures améliorations de la mortalité. On illustre ci-dessous l'évolution de l'espérance de vie à 65 ans dans les tables de mortalité successives qui ont été en vigueur depuis 1950 jusqu'au couple de tables de mortalité TGH 05 (pour les hommes) / TGF 05 (pour les femmes) mis en place en 2007 (cf. paragraphe 3.2.6), avec pour les tables par génération les valeurs pour les générations nées en 1971 (G1971) et en 1981 (G1981). On constate qu'à chaque nouvelle table de mortalité, l'espérance de vie est supposée plus importante ce qui donne des montants plus faibles lors du calcul des rentes viagères.

PF 46-49	PF 60-64	TV 73-77	TV 88-90	TPG 93		TGH 05		TGF 05	
				G1971	G1981	G1971	G1981	G1971	G1981
14,5 ans	16,1 ans	17,3 ans	19,8 ans	26,6 ans	27,7 ans	27,0 ans	28,3 ans	30,6 ans	32,0 ans

TABLE 1.7 – Espérance de vie à 65 ans dans les tables de mortalité successives

Pour la plupart des contrats aujourd'hui distribués, la table de mortalité utilisée pour définir le montant de la rente viagère est celle qui sera en vigueur au moment de la liquidation. Le risque pour l'assuré est donc qu'il y ait un changement de table entre la souscription et la liquidation avec une hypothèse d'espérance de vie plus élevée, ce qui lui donnerait une rente viagère plus faible. L'assureur peut donc proposer aux assurés une **garantie de table de mortalité** optionnelle (notée ensuite "GT") où la table de mortalité utilisée pour calculer la future rente viagère peut être celle en vigueur au moment de la souscription. La garantie peut également être définie en prenant en compte la table de mortalité en vigueur au moment du versement de chacune des primes. Le capital constitutif de rente total à la liquidation est alors scindé au prorata des primes versées par table de mortalité afin de calculer les différents éléments de rente et ainsi définir la rente viagère totale.

1.3.4 Les autres garanties optionnelles possibles

D'autres garanties peuvent être proposées sur ces produits d'épargne, notamment des **garanties de prévoyance**. Parmi les garanties possibles, on peut lister celles éligibles sur le PER assurantiel :

- Une garantie décès avant ou après la liquidation avec le versement d'un capital ou d'une rente, par exemple une rente conjoint ou une rente éducation,
- Une garantie invalidité prévoyant le versement d'une rente si l'assuré devient invalide,
- Une garantie sur la prise en charge des cotisations (garantie exonération de cotisations) en cas d'incapacité ou d'invalidité de l'assuré,
- Une garantie sur la perte d'autonomie (garantie dépendance) de l'assuré avec le versement d'un capital ou d'une rente viagère,
- Une garantie prévoyant des indemnités en cas de perte d'emploi de l'assuré (garantie chômage) versées sous la forme d'une rente ou d'un capital avec paiement unique ou fractionné.

Les assureurs et gestionnaires d'actifs peuvent également proposer des **options sur la gestion financière**. Par exemple, on peut avoir la sécurisation ou la dynamisation des plus-values qui sont

arbitrées vers des supports respectivement moins risqués ou plus risqués. On a aussi la limitation des moins-values en arbitrant l'épargne vers des supports moins risqués en cas de baisse trop importante.

1.4 Les différents risques pour l'assuré et l'assureur

Pour l'assurance-vie et le PER assurantiel, les assurés et l'assureur sont exposés à différents risques à la fois sur le produit de base mais aussi sur les garanties optionnelles sélectionnées par les assurés. Dans la suite de ce mémoire, on s'intéressera aux trois risques majeurs sur ces produits :

- Les **risques financiers** provenant des aléas sur l'évolution des taux et de l'épargne en UC :
 - Sur le produit de base : L'assuré est exposé sur le fonds en euros à un risque de baisse dans le temps de la participation aux bénéficiaires (due à une baisse continue des taux obligataires) et d'avoir potentiellement un rendement négatif si l'assureur applique une garantie brute de frais de gestion. Il est également exposé sur les UC à une perte en capital potentielle au moment de sa sortie. Pour l'assureur, une baisse des taux entraînerait sur ces produits une hausse des provisions et du capital de solvabilité requis et si son taux de participation aux bénéficiaires baisse trop, il risque de se retrouver désavantagé par rapport à la concurrence.
 - Sur les garanties optionnelles GPD & GPV : L'assuré est couvert contre une perte en capital en cas de décès et/ou à la liquidation mais pas en cas de rachat. Le risque pour l'assuré est d'avoir une perte dû aux frais prélevés au titre de ces garanties s'il n'y a pas lieu de les exercer. Pour l'assureur, il s'agit d'un risque financier supplémentaire et il a la nécessité de provisionner ces garanties et de se couvrir sur le risque avec des opérations de hedging.
- Les **risques de mortalité et de longévité** provenant des aléas sur les taux de mortalité avant et après la liquidation (si l'épargnant choisit de liquider sous forme d'une rente viagère) :
 - Sur le produit de base : L'assuré est exposé au risque de décès en phase d'épargne avec un risque de perte en capital en cas de sous-performance des actifs. Il est également exposé au risque d'un changement de table avant la liquidation qui lui diminuerait sa rente viagère à la liquidation. Après la liquidation et s'il a choisi la rente, l'assuré fait face aux aléas de mortalité avec un risque d'avoir une durée de vie à la retraite plus faible que les hypothèses pour les calculs de la rente et donc de ne pas retrouver son investissement. Pour l'assureur, le risque principal en cas de sortie en rente viagère est le risque de longévité dans lequel l'assuré vit plus longtemps que les hypothèses utilisées pour le calcul de la rente.
 - Sur les garanties optionnelles GPD & GT : L'assuré est couvert jusqu'à la liquidation en cas de changement de table de mortalité et/ou en cas de perte en capital s'il décède. Le risque pour l'assuré est d'avoir une perte dû aux frais prélevés au titre de ces garanties s'il n'y a pas lieu de les exercer. Pour l'assureur, outre le risque sur la garantie plancher en cas de décès précédemment décrit, le risque sur la garantie de table est de prendre à sa charge le différentiel entre l'ancienne et la nouvelle table de mortalité.
- Les **risques liés aux comportements des assurés** sur leurs choix d'activation ou non des dispositions du contrat (arbitrages, rachats, choix sur le mode de liquidation, etc.), l'assuré ayant ses comportements guidés par son profil de risque, ses objectifs, le rendement de son épargne, l'environnement de longévité, les garanties optionnelles souscrites et selon son niveau de rationalité. Pour l'assuré, le risque est d'adopter une stratégie de comportement qui ne lui permet pas de maximiser la valorisation de son contrat. Pour l'assureur, le risque est d'avoir un écart avec les hypothèses de comportements formulées, notamment si les assurés deviennent plus rationnels et optimisent davantage sur leur contrat.

Les chapitres suivants aborderont et permettront de modéliser ces différentes familles de risque.

Chapitre 2

Construction d'un générateur de scénarios économiques

2.1 Une introduction à la modélisation d'actifs financiers

2.1.1 Les actifs financiers

Les actifs financiers disponibles sur un marché et sur lesquels un investisseur peut placer une certaine somme d'argent se divisent en deux catégories :

- L'**actif sans risque** (noté B_t) qui, lorsqu'on est en environnement certain, a un rendement connu à l'avance pour chaque période future t . Il s'agit par exemple d'une obligation d'État sans risque de défaut.
- Les **actifs risqués** (notés $S_t^{(i)}$) avec des rendements non connus à l'avance, tels que les actions, les actifs immobiliers, les obligations avec risque de défaut, etc.

En plaçant 1€ à la date 0 sur l'actif sans risque (i.e. $B_0 = 1$) qui à chaque date $s \leq t$ a un rendement r_s , la valeur de l'actif sans risque à la date $t > 0$ est

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad (2.1)$$

i.e. B_t suit la dynamique

$$dB_t = r_t B_t dt. \quad (2.2)$$

Pour la modélisation des actifs, on se placera dans l'**espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où l'on a Ω qui est l'ensemble des états possibles du marché et \mathbb{P} est la mesure de probabilité de survenance des états (avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). \mathbb{P} est appelée la **probabilité historique**. L'espace probabilisé est muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La tribu \mathcal{F}_t représente l'information connue par l'investisseur à la date t , i.e. le cours des actifs jusqu'à t . Pour tout t , les actifs B_t et $S_t^{(i)}$ sont alors \mathcal{F}_t -mesurables, i.e. $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(S_t^{(i)})_{0 \leq t \leq T}$ sont **\mathcal{F} -adaptés**.

On formule également plusieurs hypothèses sur le marché :

- Le marché est liquide, i.e. on peut vendre et acheter tout actif à tout instant,
- Les actifs sont divisibles à l'infini,
- L'achat et la vente à découvert sont autorisés,

— Les échanges sont effectués sans coût de transaction.

Pour la modélisation des actifs financiers, on utilisera le **mouvement brownien** appliqué en finance depuis la thèse sur la *Théorie de la spéculation* de **Bachelier (1900)**. Le mouvement brownien est modélisé par un **processus de Wiener** $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui présente les caractéristiques suivantes :

- Les accroissement de W sont indépendants, i.e. pour tous $t \geq s$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq s)$,
- Les accroissement de W sont gaussiens avec pour tous $t \geq s$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,
- Les trajectoires de W sont continues,
- $W_0 = 0$ pour un avoir un mouvement brownien standard.

2.1.2 L'absence d'opportunité d'arbitrage et la probabilité risque-neutre

On peut de plus supposer sur le marché une hypothèse d'**absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)** sous laquelle un investisseur ne peut s'enrichir à coup sûr avec un investissement initial nul, i.e. pour un portefeuille autofinçant V_t en tout t on a

$$\{V_0 = 0 \ \& \ V_t \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V_t > 0) = 0.$$

On peut alors montrer que sous la condition d'AOA il existe au moins une mesure de probabilité \mathbb{Q} , appelée **probabilité risque-neutre**, sous laquelle les prix des actifs actualisés sont des martingales. Ainsi, pour un actif S_t , $\tilde{S}_t = S_t \cdot D_t$ est une martingale sous \mathbb{Q} avec $D_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) = B_t^{-1}$ le facteur d'actualisation entre 0 et t , i.e.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T \cdot D_T \mid \mathcal{F}_t] = S_t \cdot D_t.$$

On peut de plus passer de la mesure de probabilité historique \mathbb{P} à la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{Q} équivalente grâce au théorème de Girsanov.

Théorème de Girsanov

Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ et soit $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus \mathcal{F} -adapté tel que $\int_0^T \lambda_t^2 dt < \infty$, \mathbb{P} -p.s. et le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $L_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds\right)$ est une \mathcal{F} -martingale sous la probabilité \mathbb{P} . Alors avec la mesure de probabilité \mathbb{Q} de densité L_T (ou "dérivée de Radon-Nikodym") par rapport à \mathbb{P} , i.e. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T$, le processus $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Par ailleurs, lorsque le marché est également **complet**, i.e. lorsque tout flux financier peut être répliqué par un portefeuille composé de l'actif sans risque et des actifs risqués, il y a unicité de la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

2.2 Les modèles de taux

2.2.1 Les taux d'intérêt et les obligations zéro-coupon

Notations et définitions élémentaires

Obligation zéro-coupon

On définit l'**obligation zéro-coupon** de maturité T comme l'obligation qui verse un flux unique de 1€ en T . On note $P(t, T)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T à la date $t < T$. On a $P(T, T) = 1$. Lorsqu'on est en environnement certain et sous l'hypothèse d'AOA, on a l'égalité

$$P(0, t) \cdot P(t, T) = P(0, T).$$

La connaissance des $P(t, T)$ permet d'obtenir la **courbe zéro-coupon** qui à son tour permet de définir les prix actualisés des actifs.

Taux spot

On définit le **taux zéro-coupon** $R(t, T)$, ou **taux d'intérêt continu**, par

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \iff P(t, T) = e^{-R(t, T) \cdot (T - t)}. \quad (2.3)$$

Le **taux d'intérêt simple** $L(t, T)$ est défini par

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T) \cdot (T - t)} \iff P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T) \cdot (T - t)}. \quad (2.4)$$

Le **taux d'intérêt composé** $Y(t, T)$ est défini par

$$Y(t, T) = \frac{1}{P(t, T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1 \iff P(t, T) = \frac{1}{1 + Y(t, T)^{T-t}}. \quad (2.5)$$

Avec les taux précédemment définis, on obtient le **taux spot** $r(t)$, également appelé **taux instantané** ou **taux court**, par

$$r(t) = \lim_{T \downarrow t} R(t, T) = \lim_{T \downarrow t} L(t, T) = \lim_{T \downarrow t} Y(t, T). \quad (2.6)$$

Taux forward

Le **taux forward** $F(t, T, S)$ désigne la valeur en t d'un prêt futur démarrant en T et de maturité S :

$$F(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{(S - T) \cdot P(t, S)}. \quad (2.7)$$

On définit le **taux forward instantané** $f(t, T)$ par

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T)). \quad (2.8)$$

On a donc

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right). \quad (2.9)$$

On obtient alors $r(t) = f(t, t)$ et $f(t, T) = \lim_{S \downarrow T} F(t, T, S)$.

Taux swap

On définit un *swap* comme un produit de taux qui permet l'échange entre des flux fixes et des flux variables pour des dates T_i , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le swap est "payeur" lorsque l'on paie la jambe fixe et reçoit la jambe variable, et "receveur" dans le cas contraire. On définit, grâce aux taux forward $F(t, T_{i-1}, T_i)$, le **taux swap forward** donnant la *fair value* du swap par

$$s_t = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i)}. \quad (2.10)$$

On note que la connaissance des taux swap nous permet de construire la courbe zéro-coupon. Par la suite, on ne reconstruira pas la courbe zéro-coupon à partir des taux swap mais on utilisera une courbe zéro-coupon déjà constituée : celle de l'EIOPA.

Les taux d'intérêt stochastiques et prix zéro-coupon

On se place ici dans un environnement où les taux futurs suivent un processus stochastique. Sous l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$, on a l'actif sans risque $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par la relation 2.1 avec $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui suit un processus \mathcal{F} -adapté.

Pour tout $u \in [t, T]$, avec les taux incertains sur cette période, les prix zéro-coupon $(P(t, u))_{0 \leq t \leq u}$ entre t et u avec $P(u, u) = 1$ suivent également un processus \mathcal{F} -adapté. Sous l'hypothèse d'AOA, on se place sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} telle que le prix actualisé

$$\tilde{P}(t, u) = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \cdot P(t, u)$$

soit une martingale, i.e. $\tilde{P}(t, u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{P}(u, u) | \mathcal{F}_t]$. Et puisque $P(u, u) = 1$, on obtient :

$$P(t, u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^u r_s ds\right) | \mathcal{F}_t\right]. \quad (2.11)$$

Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , les prix zéro-coupon ne dépendent donc que des taux $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$.

On obtient également les prix zéro-coupon sous la probabilité historique \mathbb{P} : avec le théorème de Girsanov, ils sont exprimés par

$$P(t, u) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_t^u r_s ds - \int_t^u \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^u \lambda_s^2 ds\right) | \mathcal{F}_t\right], \quad (2.12)$$

où $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{F} -adapté adéquat qui représente la **prime de risque**.

Les taux de référence dans la Zone Euro

Au sein de la Zone Euro, il existe des taux publiés quotidiennement pour le marché interbancaire sur lequel les acteurs bancaires peuvent s'échanger des actifs de gré à gré sur le court-terme. Ces taux peuvent servir de référence pour les taux spot. On a comme taux :

- **Euro Short-Term Rate (€STR)** : le taux €STR est publié quotidiennement par la BCE pour refléter le coût d'emprunt à échéance d'un jour pour les banques au sein de la Zone Euro. Ce taux a été introduit au 1^{er} octobre 2019 et vient remplacer l'*Euro OverNight Index Average* (EONIA) qui, dès le 2 octobre 2019, était défini à partir du taux €STR en y ajoutant 8,5 points de base. L'EONIA n'est plus utilisé à compter du 3 janvier 2022, seul l'€STR est utilisé à présent.
- **Euro Interbank Offered Rate (EURIBOR)** : les taux EURIBOR, de plusieurs échéances allant de 1 semaine (EUR1W) à 12 mois (EUR12M), publiés quotidiennement correspondent pour les banques au sein de la Zone Euro au coût d'emprunt pour ces différentes échéances.

L'€STR et l'EURIBOR sont des taux simples définis par la relation 2.4 et calculés avec la convention "Actuel/360", i.e. on considère que l'année compte 360 jours.

En observant l'historique des taux depuis début 2001, on constate qu'après une hausse à partir de 2005, les taux ont connu une chute à l'automne 2008 du fait de la crise bancaire et financière. Depuis, les taux ont continué à baisser et sont même entrés en territoire négatif à partir de 2015 pour l'EURIBOR 3 mois. Au 31 décembre 2021, les taux euro STR et EURIBOR étaient tous négatifs et compris entre -0,6% et -0,5%.

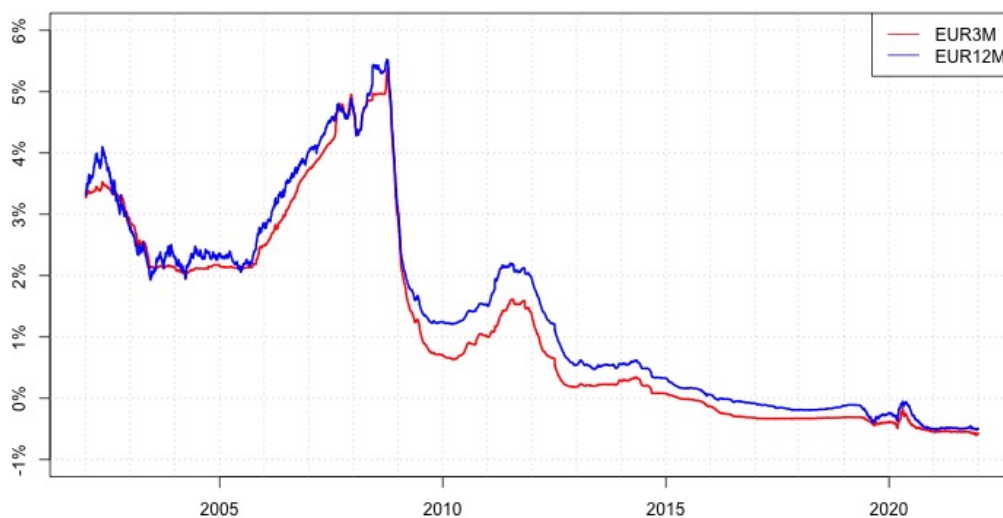


FIGURE 2.1 – Taux historiques EUR3M et EUR12M (2002-2021)

€STR	EUR1W	EUR1M	EUR3M	EUR6M	EUR12M
-0,590%	-0,574%	-0,583%	-0,572%	-0,546%	-0,501%

TABLE 2.1 – €STR et EURIBOR 1 semaine, 1 mois, 3 mois, 6 mois et 12 mois (31 décembre 2021)

La courbe de taux au 31/12/2021

L'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) fournit mensuellement les courbes de taux d'intérêt composés $Y(t, T)$ sans risque sur un horizon de 150 ans pour la Zone Euro et plusieurs autres pays et monnaies dans le mondeⁱ.

La courbe de taux de l'EIOPA est construite au moyen des taux swap ou, pour certains pays, des obligations d'État. Elle intègre ou non un ajustement de volatilité pour tenir compte des spreads des obligations sur lesquelles l'assureur a investi. La courbe de taux de l'EIOPA intègre un *Ultimate Forward Rate* (UFR) qui est la somme du taux réel espéré et du taux d'inflation espéré (ici fixé à 2%) sur le long-terme. Au 1^{er} janvier 2022, l'UFR est de 3,45%. La courbe de taux de l'EIOPA au 31 décembre 2021 est la suivante :

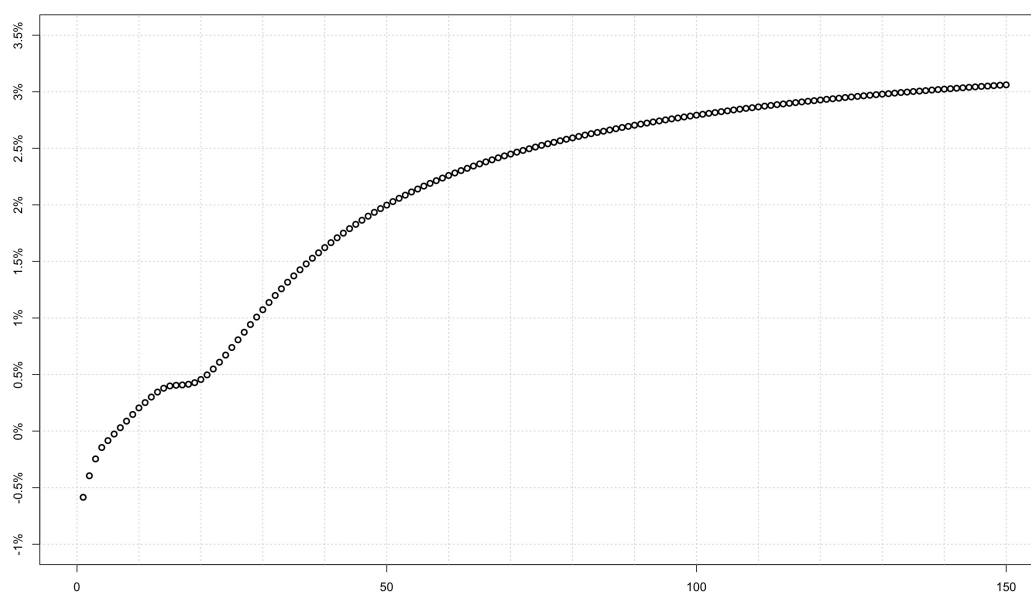


FIGURE 2.2 – Courbe de taux de l'EIOPA sans ajustement de la volatilité au 31 décembre 2021

Pour les maturités inférieures à 1 an, on utilise les taux simples EURIBOR $L(t, T)$ au 31 décembre 2021 indiqués dans la Table 2.1 en les transformant en taux d'intérêt composés $Y(t, T)$ grâce aux relations 2.4 et 2.5 avec la convention "Actuel/360" des taux EURIBOR.

Maturité	1 semaine	1 mois	3 mois	6 mois
Taux $L(t, T)$	-0,574%	-0,583%	-0,572%	-0,546%
Taux $Y(t, T)$	-0,581%	-0,590%	-0,579%	-0,553%

TABLE 2.2 – Taux composés de maturité inférieure à 1 an au 31 décembre 2021

La courbe de taux de l'EIOPA étant en base annuelle, on réalise donc une interpolation par splines cubiques (dont la méthode est présentée en Annexe A) pour avoir une courbe de taux en base mensuelle. On prend pour r_0 le taux €STR. On obtient ainsi notre courbe zéro-coupon de référence.

i. Source : EIOPA - www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en

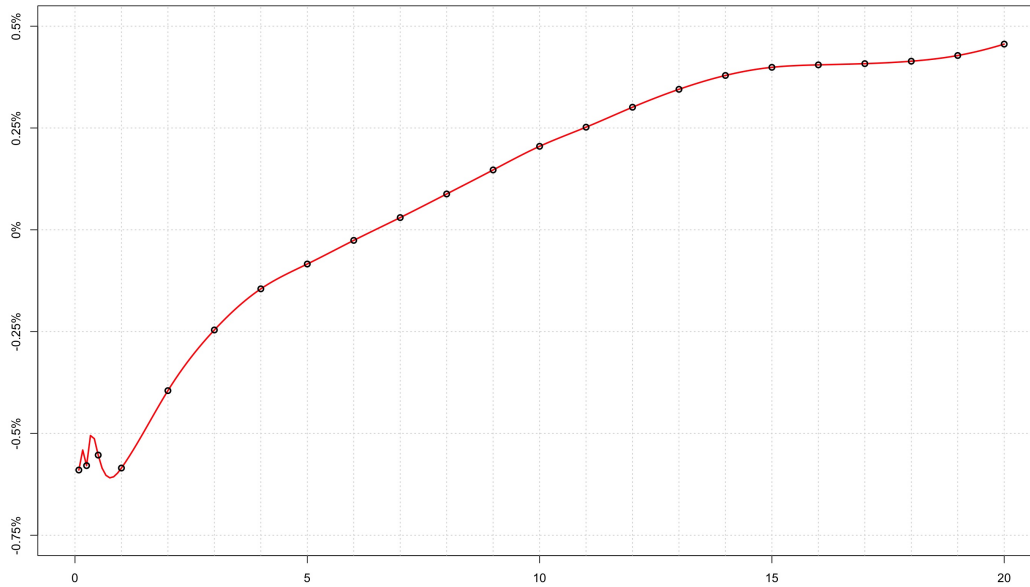


FIGURE 2.3 – Interpolation de la courbe de taux pour les maturités inférieures à 20 ans

2.2.2 Le modèle de Vasicek

Afin de modéliser l'évolution des taux d'intérêt, on a recours à un modèle de diffusion. On se place sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ et on a la probabilité risque-neutre équivalente \mathbb{Q} avec la prime de risque λ constante.

Le modèle de **Vasicek (1977)** donne les taux instantanés $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ par le processus qui suit la dynamique

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2.13)$$

où θ est le taux moyen au long-terme, κ est la vitesse de retour à la moyenne, σ est la volatilité et $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure de probabilité considérée. Les paramètres θ , κ et σ sont ici constants avec $\sigma > 0$ et on suppose $\kappa > 0$ pour que les taux ne divergent pas vers l'infini. On peut avoir $\theta < 0$ dans un environnement de taux négatifs durable.

Lorsque le modèle précédent est défini sous \mathbb{P} , en introduisant $\tilde{\theta} = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa}$ et $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$ qui est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} , les taux suivent alors sous \mathbb{Q} la dynamique

$$dr_t = \kappa(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t. \quad (2.14)$$

En appliquant le lemme d'Itô (cf. Annexe A) au processus défini par $f(r_t, t) = r_t e^{\kappa t}$, on peut déterminer les taux r_t pour tout $t \in [0, T]$ pour obtenir :

$$r_t = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} ds. \quad (2.15)$$

Puisque $\int_0^t e^{\kappa s} dW_s$ est une martingale nulle en $t = 0$, les r_t sont gaussiens d'espérance et variance :

$$\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[r_t] = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}.$$

Le modèle de Vasicek permet d'obtenir des formules fermées pour les prix et taux zéro-coupon en fonction des paramètres (κ, θ, σ) sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

2.2.3 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Une caractéristique majeure du modèle de Vasicek est qu'il permet d'obtenir des taux négatifs, ce qui pouvait être problématique pour les modélisations réalisées avant l'apparition des taux négatifs au cours des années 2010. Pour pallier cela, le modèle de **Cox-Ingersoll-Ross (CIR)** introduit en 1985 donne des taux instantanés $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ strictement positifs avec le processus qui suit la dynamique

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2.16)$$

où θ est le taux moyen au long-terme, κ est la vitesse de retour à la moyenne, σ est la volatilité et $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure de probabilité considérée. Les paramètres θ , κ et σ sont strictement positifs et on s'assure que la condition $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ soit respectée afin que les taux n'atteignent pas 0.

Lorsque le modèle précédent est défini sous la probabilité historique \mathbb{P} , avec la prime de risque $\lambda_t = \lambda\sqrt{r_t}$, on a $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ qui est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre équivalente \mathbb{Q} . Avec les paramètres $\tilde{\kappa} = \kappa + \lambda\sigma$ et $\tilde{\theta} = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda\sigma}$, on a la dynamique des taux sous \mathbb{Q} qui est :

$$dr_t = \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t. \quad (2.17)$$

Contrairement au modèle de Vasicek, les taux r_t ne sont pas gaussiens. En revanche, on peut montrer que la loi conditionnelle $r_t | r_s$ pour $s < t$ suit une loi de la forme

$$r_t | r_s \sim \frac{\chi^2(d, \lambda_{t,s})}{c_{t-s}},$$

où $c_{t-s} = \frac{4\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}$ et $\chi^2(d, \lambda_{t,s})$ est une loi du χ^2 non centrée de paramètres $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$ pour les degrés de liberté et $\lambda_{t,s} = c_{t-s}r_s e^{-\kappa(t-s)}$ pour le paramètre de décentralisation. On peut alors déterminer les espérance et variance conditionnelles :

$$\mathbb{E}[r_t | r_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[r_t | r_s] = r_s \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2.$$

On considère par la suite le modèle CIR de paramètres (κ, θ, σ) sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . On peut grâce au théorème de Feynman-Kac (cf. Annexe A) déterminer la valeur des prix zéro-coupon $P(t, T) = u(r_t, t)$ en cherchant la solution de l'équation différentielle A.4. On obtient alors

$$P(t, T) = \exp\left(A(t, T) - r_t B(t, T)\right), \quad (2.18)$$

où, avec $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$:

$$A(t, T) = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{\kappa+\gamma}{2}(T-t)}}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)} \right] \quad \text{et} \quad B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)}.$$

Avec la relation 2.3, on obtient les taux zéro-coupon $R(t, T)$ s'exprimant sous la forme

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left[r_t \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)} - \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2\gamma e^{\frac{\kappa+\gamma}{2}(T-t)}}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)} \right) \right]. \quad (2.19)$$

Considérant la courbe zéro-coupon de référence précédemment définie, on ajoute aux taux un spread de 200 bp pour obtenir les prix zéro-coupon $P_1(t, T)$. Pour cette courbe zéro-coupon, tous les taux sont alors positifs. On en extrait les taux zéro-coupon $R_1(t, T)$. On cherche ensuite à calibrer le modèle CIR sur ces taux zéro-coupon sous la probabilité \mathbb{Q} en minimisant la fonction

$$\Phi(\kappa, \theta, \sigma) = \sum_{0 < t \leq T} \left(R_1(0, t) - R_{CIR(\kappa, \theta, \sigma)}(0, t) \right)^2.$$

On obtient les résultats $(\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \operatorname{argmin}_{(\kappa, \theta, \sigma)} \Phi$ suivants :

$\hat{\kappa}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$
0,0355	6,04%	1,06%

TABLE 2.3 – Calibration des paramètres du modèle CIR

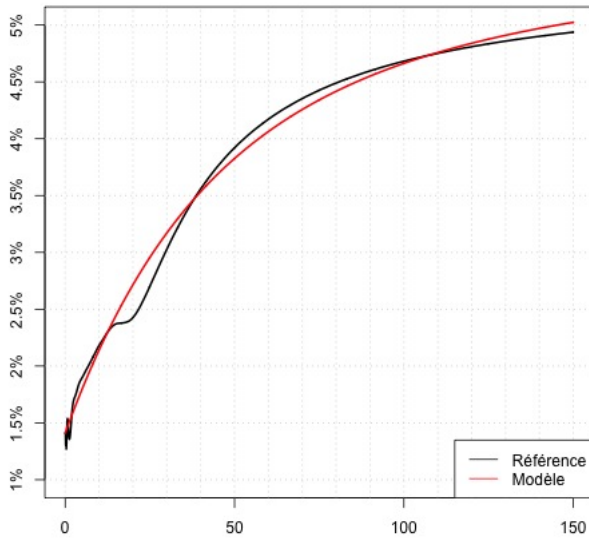


FIGURE 2.4 – Taux zéro-coupon $R(0, t)$

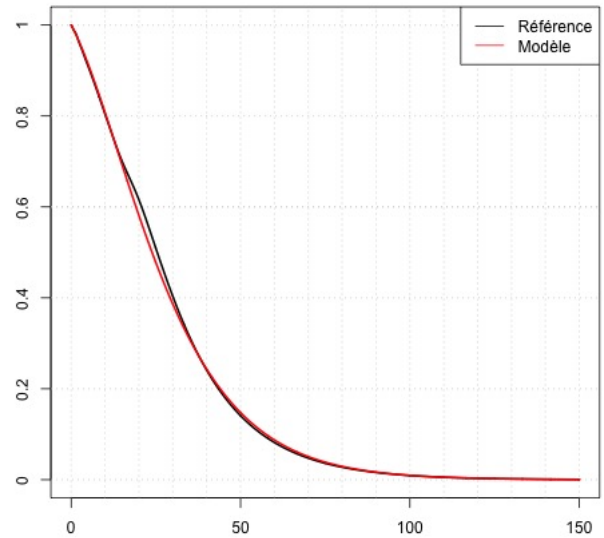


FIGURE 2.5 – Prix zéro-coupon $P(0, t)$

2.2.4 Les limites des modèles Vasicek et CIR & les autres modèles de taux

Bien que les modèles Vasicek et CIR ont l'avantage d'avoir une définition explicite des taux instantanés et une formule fermée pour le calcul des prix et taux zéro-coupon, ils ont comme limite principale de ne pas pouvoir reproduire exactement la courbe de taux comme illustré dans les calibrations effectuées ci-dessus. Il est possible d'introduire des modèles à plusieurs facteurs pour mieux approcher la courbe zéro-coupon, comme notamment le modèle de Hull & White à deux facteurs, une extension

du modèle de Vasicek pour modéliser la dynamique des taux courts r_t et des taux longs l_t en supposant une corrélation sur les dynamiques des deux taux.

Mais pour reproduire fidèlement la courbe de taux initiale, on peut retenir l'approche de Heath, Jarrow et Morton (HJM) où l'on modélise les taux forward instantanés grâce à la dynamique

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \quad \text{et} \quad f(0, T) = f^M(0, T),$$

où W est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} et les $f^M(0, T)$ sont les taux forward instantanés obtenus avec les prix de marché. Sous l'hypothèse d'AOA, on a

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

Grâce à l'équation différentielle stochastique précédente, la propriété $r(t) = f(t, t)$ et la relation 2.11, on obtient les prix zéro-coupon $P(0, t)$. On peut utiliser des produits dérivés de taux de type *cap* (respectivement *floor*), une combinaison linéaire de *caplets* (respectivement *floorlets*) qui sont des options de type call (respectivement de type put) sur les taux forward, ou des *swaptions* (options sur swaps) pour calibrer le modèle.

2.3 La modélisation des actions

2.3.1 Le modèle de Black-Scholes (Mouvement Brownien Géométrique)

Le modèle proposé par **Black & Scholes (1973)** est devenu une référence pour modéliser le cours d'une action. Le modèle suppose que l'actif risqué $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ suit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un **mouvement brownien géométrique (GBM)**

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2.20)$$

où μ est le rendement, σ est la volatilité et $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{P} . Les paramètres μ et σ sont ici supposés constants avec $\sigma > 0$.

En appliquant le lemme d'Itô (cf. Annexe A) au processus défini par $f(S_t, t) = \ln(S_t)$, on obtient l'expression du prix de l'action :

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad (2.21)$$

Les log-rendements $R_{h,t} = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-h}} \right)$ suivent donc une loi normale $R_{h,t} \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h, \sigma^2 h \right)$ et S_t est distribué selon une loi log-normale et a pour espérance $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$.

On considère ci-après le cours du **CAC 40** sur la période du 2 janvier 2002 au 30 décembre 2021ⁱ et les log-rendements quotidiens, soit 5114 observations d'espacement moyen $h = 0,003909$ ans.

Pour estimer les paramètres μ et σ du modèle, on cherche à maximiser la log-vraisemblance de la loi $R_{h,t} \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h, \sigma^2 h \right)$. Pour une variable aléatoire continue X de paramètres Θ et de densité de probabilité $f(\cdot; \Theta)$, et n observations $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, la **log-vraisemblance** \mathcal{L} est définie par

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}; \Theta) = \sum_{i=1}^n \ln \left(f(x_i; \Theta) \right). \quad (2.22)$$

i. Source : Yahoo Finance - fr.finance.yahoo.com

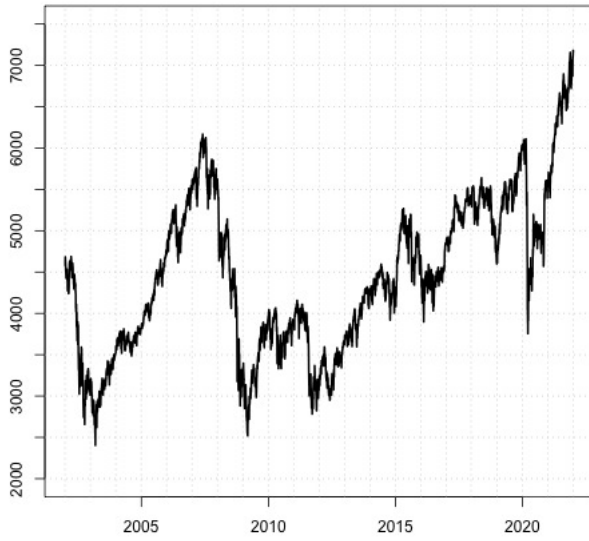


FIGURE 2.6 – Cours du CAC 40

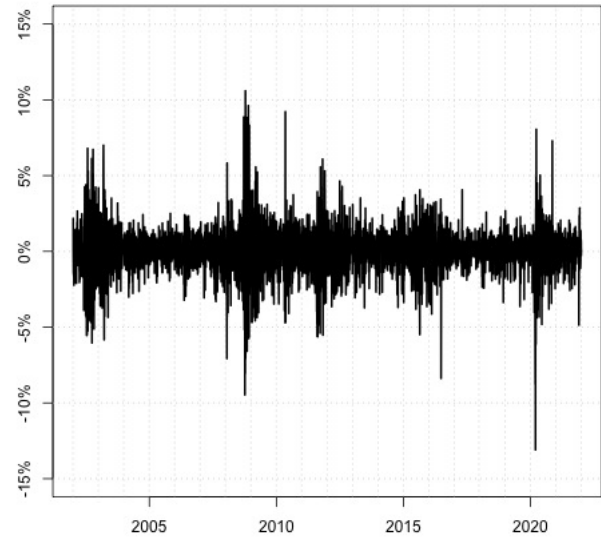


FIGURE 2.7 – Log-rendements du CAC 40

Pour estimer les paramètres de la loi, on cherche les paramètres $\hat{\Theta} = \operatorname{argmax}_{\Theta} \mathcal{L}(X; \Theta)$ qui maximisent cette log-vraisemblance (dans la pratique on cherche à annuler la dérivée de \mathcal{L} par rapport à chaque paramètre). Dans le cas d'une loi normale, l'estimation des paramètres se fait en calculant la moyenne et la variance des observations. On obtient alors pour le modèle Black-Scholes :

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
4,79%	22,57%

TABLE 2.4 – Calibration des paramètres du modèle Black-Scholes

N. B. :

La valeur des paramètres estimés dépend fortement de la profondeur de l'historique utilisé pour les cours. En considérant la période 2012-2021, on trouve par exemple $\hat{\mu} = 9,78\%$ et $\hat{\sigma} = 19,18\%$.

Avec r supposé constant, on a l'actif sans risque $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ (avec $B_0 = 1$) qui suit la dynamique $dB_t = r_t B_t dt$. On se place sous probabilité risqué-neutre \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} et définie via le théorème de Girsanov avec la prime de risque $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ et $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$, un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} . Sous \mathbb{Q} , le prix actualisé de l'action $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ est une martingale donc $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_t] = S_0 e^{rt}$ et S_t suit la dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{W}_t. \quad (2.23)$$

On considère les produits dérivés que sont le **call européen** et le **put européen** qui permettent respectivement d'acheter et de vendre l'actif risqué sous-jacent S_t au prix d'exercice K , appelé **strike**, à la date de maturité T . Le **pay-off** $\Phi(S_T, T)$ en T pour chacune de ces deux options est, avec la fonction $[x]^+ = \max(0, x)$:

Call européen	Put européen
$\Phi(S_T, T) = C(S_T, T) = [S_T - K]^+$	$\Phi(S_T, T) = P(S_T, T) = [K - S_T]^+$

TABLE 2.5 – Pay-off du call européen et du put européen à maturité

Le modèle de Black-Scholes donne une forme fermée sous \mathbb{Q} pour $C(S_t, t)$ et $P(S_t, t)$ et donc au moyen de leurs valeurs de marché, on peut déterminer le rendement et la volatilité implicite de S_t .

2.3.2 Un modèle à changement de régime

Une introduction aux modèles à changement de régime

L'une des principales caractéristiques du mouvement brownien géométrique est de supposer que les log-rendements suivent une loi-normale avec la même moyenne et la même volatilité sur toute la période considérée. Dans les faits, les prix des actions évoluent selon des cycles qui présentent des rendements et volatilités différents, comme on peut le constater sur l'évolution du CAC 40 sur la période de 2002 à 2021 (cf. Figure 2.6). Cela rend le simple modèle de Black-Scholes peu adapté sur le long-terme. Pour modéliser ces différents cycles, on peut introduire un **modèle à changement de régime** où l'on modélise le changement de régime au moyen d'une chaîne de Markov au sein d'un modèle autorégressif comme proposé par **Hamilton (1989)** ou au sein d'un mouvement brownien géométrique comme proposé par **Hardy (2001)**.

Sous la probabilité historique \mathbb{P} , on suppose que le prix de l'action S_t suit un **mouvement brownien géométrique avec changement de régime (SGBM)** où le couple (μ_t, σ_t) du rendement et de la volatilité du prix S_t peut prendre une valeur parmi les n régimes possibles $\{(\mu_1, \sigma_1), \dots, (\mu_n, \sigma_n)\}$. On notera $\mathcal{R} = (1, 2, \dots, n)$. Le prix S_t suit alors à chaque instant t la dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad (2.24)$$

où pour $t \in [0, T]$, on a $\mu_t = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ et $\sigma_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ avec $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, la chaîne de Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ le mouvement brownien standard sous \mathbb{P} . W et $\boldsymbol{\eta}$ sont indépendants. On a aussi $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration pour S_t et $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de la chaîne de Markov (cf. ci-dessous), on considère la filtration globale $(\mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq T}$ telle que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$. On notera également par la suite $\tilde{\mu}_t = \tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ où $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ est le vecteur d'éléments $\tilde{\mu}_i = \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}$.

La chaîne de Markov du modèle

On suppose que les régimes sont *cachés* : un investisseur ne sait pas avec certitude dans quel régime l'univers se trouve à l'instant t , on peut seulement avoir la probabilité de chaque régime. On définit la **chaîne de Markov** $(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ de filtration naturelle $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$. À chaque instant t , $\boldsymbol{\eta}_t$ peut prendre une valeur dans l'espace d'états $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ fini qui est la base canonique de \mathbb{R}^n (i.e. \mathbf{e}_i est un vecteur ligne de taille n dont toutes les valeurs sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1). Soit $\mathbf{Q} = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la **matrice de transition**, également appelée **générateur**

infinitésimal, de $\boldsymbol{\eta}_t$ qui a pour propriétés pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$q_{i,i} < 0 \quad \text{et} \quad q_{i,j} \geq 0 \text{ pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n q_{i,j} = 0.$$

On a alors à tout instant t , avec $h \rightarrow 0$, la probabilité de passage du régime i au régime j qui est

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t+h} = \mathbf{e}_j \mid \boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i) = \delta_{i,j} + q_{i,j}h + o(h), \quad (2.25)$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. On définit également la **matrice des probabilités de transition** $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, avec l'exponentielle d'une matriceⁱ, par

$$\mathbf{P}(t_n, t_{n+1}) = \exp(\mathbf{Q}(t_{n+1} - t_n)).$$

On a pour tous $\boldsymbol{\epsilon}_0, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \in \mathbf{E}$ aux instants t_0, \dots, t_{n+1} , et $i_k = \boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \mathcal{R}^\top$ par la propriété de Markov :

$$\underbrace{\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t_{n+1}} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \mid \boldsymbol{\eta}_{t_0} = \boldsymbol{\epsilon}_0, \dots, \boldsymbol{\eta}_{t_n} = \boldsymbol{\epsilon}_n)}_{\text{Futur}} = \underbrace{\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t_{n+1}} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \mid \boldsymbol{\eta}_{t_n} = \boldsymbol{\epsilon}_n)}_{\text{Futur}} \underbrace{\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t_n} = \boldsymbol{\epsilon}_n)}_{\text{Présent}} = p_{i_n, i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n). \quad (2.26)$$

On suppose de plus que la chaîne de Markov est *irréductible* : tout régime j peut être atteint depuis un régime i , i.e. $p_{i,j}(t, t+h) > 0$. On a également pour la chaîne de Markov ci-dessus une **distribution stationnaire** $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{1 \leq i \leq n}$, où $\forall i, \pi_i > 0$ et $\sum_i \pi_i = 1$, qui est une fonction propre de \mathbf{P} , i.e. $\boldsymbol{\pi} \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$, ou encore $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{1}_n \boldsymbol{\pi}$ (avec $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$, vecteur colonne de taille n).

La calibration du modèle sous la probabilité historique

Afin de déterminer les paramètres $\boldsymbol{\Theta} = (\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{P})$ sous \mathbb{P} du modèle SGBM, on utilise le principe du filtre présenté par Hamilton que l'on adapte à ce modèle pour maximiser la log-vraisemblance. On calibre ici le modèle sur la série $\mathbf{R} = \left(R_{t_k} = \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right) \right)_{k \in \llbracket 2, K \rrbracket}$ des log-rendements quotidiens du CAC 40 sur les temps t_k avec $t_k = t_{k-1} + h$ (on a ici : $K' = K - 1 = 5114$ et $h = 0,003909$). On note $\mathbf{R}_{(k)} = (R_{t_1}, \dots, R_{t_k})$ le vecteur des k premiers éléments de \mathbf{R} . On suppose qu'à chaque instant t_k on peut avoir un changement de régime régi par la chaîne de Markov $\boldsymbol{\eta}_t$ et que le rendement et la volatilité sont constants sur la période $[t_{k-1}, t_k[$.

On note $f(R_{t_k}; \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\eta}_{t_{k-1}} = \mathbf{e}_i)$ la densité de la loi du log-rendement sur la k -ième période avec les paramètres $\boldsymbol{\Theta}$ conditionnellement au fait de se trouver dans le régime i à la période t_{k-1} et dans le régime j à la période t_k (avec possiblement $i = j$). Du fait de l'hypothèse de constance des paramètres sur $[t_{k-1}, t_k[$, cette densité est celle de la loi $\mathcal{N}(\tilde{\mu}_i h, \sigma_i^2 h)$. D'après le théorème de Bayes, on a la log-vraisemblance \mathcal{L} qui est

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}; \boldsymbol{\Theta}) = \ln(f(\mathbf{R}; \boldsymbol{\Theta})) = \ln(f(R_{t_1}; \boldsymbol{\Theta})) + \ln(f(R_{t_2}; \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}_{(1)})) + \dots + \ln(f(R_{t_{K'}}; \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}_{(K'-1)})),$$

où $f(R_{t_k}; \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}_{(k-1)})$ est la densité du log-rendement sur la k -ième période avec les paramètres $\boldsymbol{\Theta}$ conditionnellement aux précédentes observations $\mathbf{R}_{(k-1)} = (R_{t_1}, \dots, R_{t_{k-1}})$ et est définie par

$$f(R_{t_k}; \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}_{(k-1)}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_i(t_{k-1}; \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}_{(k-1)}) \cdot p_{i,j}(t_{k-1}, t_k; \boldsymbol{\Theta}) \cdot f(R_{t_k}; \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\eta}_{t_{k-1}} = \mathbf{e}_i),$$

i. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

où $p_i(t_{k-1}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)})$ est la probabilité de présence dans le régime i à l'instant t_{k-1} conditionnellement à toutes les observations jusqu'à cette date et $p_{i,j}(t_{k-1}, t_k; \Theta)$ est la probabilité de transition (issue de la matrice \mathbf{P}) entre le régime i et le régime j entre t_{k-1} et t_k avec les paramètres Θ . Grâce au théorème de Bayes, on peut déterminer de façon récursive $p_i(t_{k-1}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)})$ par

$$p_i(t_{k-1}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)}) = \frac{\sum_{j=1}^n p_i(t_{k-2}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-2)}) \cdot p_{i,j}(t_{k-2}, t_{k-1}; \Theta) \cdot f(R_{t_{k-1}}; \Theta, \eta_{t_{k-1}} = e_j, \eta_{t_{k-2}} = e_i)}{f(R_{t_{k-1}}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-2)})}$$

en initialisant la récurrence avec $p_i(t_1; \Theta) = \pi_i(\Theta)$ où les π_i sont les probabilités stationnaires de la chaîne de Markov. Avec les relations précédentes, on peut calculer la log-vraisemblance par récurrence et la maximiser pour obtenir les paramètres estimés $\hat{\Theta}$ avec un algorithme implémenté sur R.

Afin d'évaluer la qualité de la calibration, on introduit le **critère d'information bayésien (BIC)** et le **critère d'information d'Akaike (AIC)** qui incluent le nombre de paramètres N du modèle pour pénaliser les modèles selon le critère de parcimonie. On recherche à chaque fois les valeurs minimales pour le BIC et l'AIC qui sont ainsi définis :

$$BIC = N \cdot \ln(n_{obs}) - 2 \cdot \mathcal{L} \quad \text{et} \quad AIC = 2 \cdot N - 2 \cdot \mathcal{L}.$$

On calibre les modèles SGBM pour $n \in \{2, 3, 4\}$ régimes et on obtient les BIC et AIC suivants :

Modèle	Log-vraisemblance	Paramètres	AIC	BIC
Black-Scholes (GBM)	14 532	2	-29 060	-29 047
SGBM(n=2)	15 437	6	-30 862	-30 823
SGBM(n=3)	15 628	12	-31 232	-31 154
SGBM(n=4)	15 663	20	-31 285	-31 155

TABLE 2.6 – Calibration des modèles Black-Scholes et SGBM

Le BIC et l'AIC du modèle SGBM sont bien meilleurs que ceux du modèle de Black-Scholes (GBM) avec la prise en compte sur une longue période des différents régimes du rendement et de la volatilité. Ces indicateurs augmentent dans le modèle SGBM avec le nombre de régimes considérés. Toutefois, ayant quasiment le même BIC pour SGBM(3) et SGBM(4), on se limitera par parcimonie par la suite à $n \in \{2, 3\}$. Les paramètres estimés des modèles SGBM(2) et SGBM(3) sont les suivants :

Paramètre	SGBM 2 Régimes	SGBM 3 Régimes
$\hat{\mu}$	(19,65% – 31,77%)	(29,31% – 8,23% – 41,73%)
$\hat{\sigma}$	(13,66% 35,99%)	(10,59% 21,55% 47,44%)
$\hat{\mathbf{P}}$	$\begin{pmatrix} 98,61\% & 1,39\% \\ 3,42\% & 96,58\% \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 96,68\% & 3,32\% & 1,244 \cdot 10^{-8} \\ 3,34\% & 96,05\% & 0,61\% \\ 2,976 \cdot 10^{-8} & 2,41\% & 97,59\% \end{pmatrix}$

TABLE 2.7 – Paramètres des modèles SGBM(2) et SGBM(3)

On affiche ci-dessous les graphiques des probabilités d'occurrence des différents régimes pour chaque observation, ainsi que les cours historiques du CAC 40 classés par régime avec la plus forte probabilité d'occurrence à chaque instant. On retrouve bien dans les régimes de crise les krachs boursiers à la suite de l'éclatement de la bulle internet en 2001-2002, la crise bancaire et financière de 2008 et la crise liée à la pandémie de Covid-19 en 2020, et on observe également les régimes de reprise successifs.

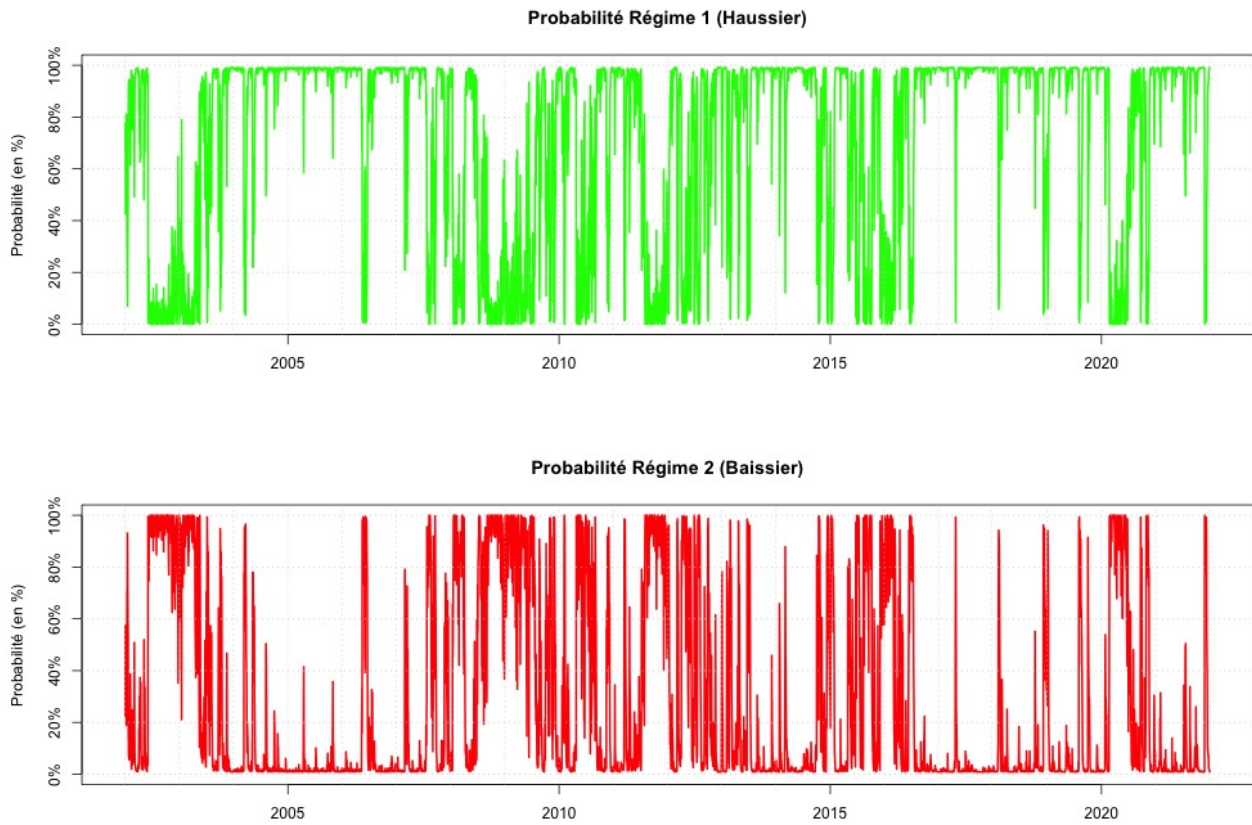


FIGURE 2.8 – Modèle SGBM(2) - Probabilité d'occurrence des régimes



FIGURE 2.9 – Modèle SGBM(2) - Cours CAC 40 par régime le plus probable

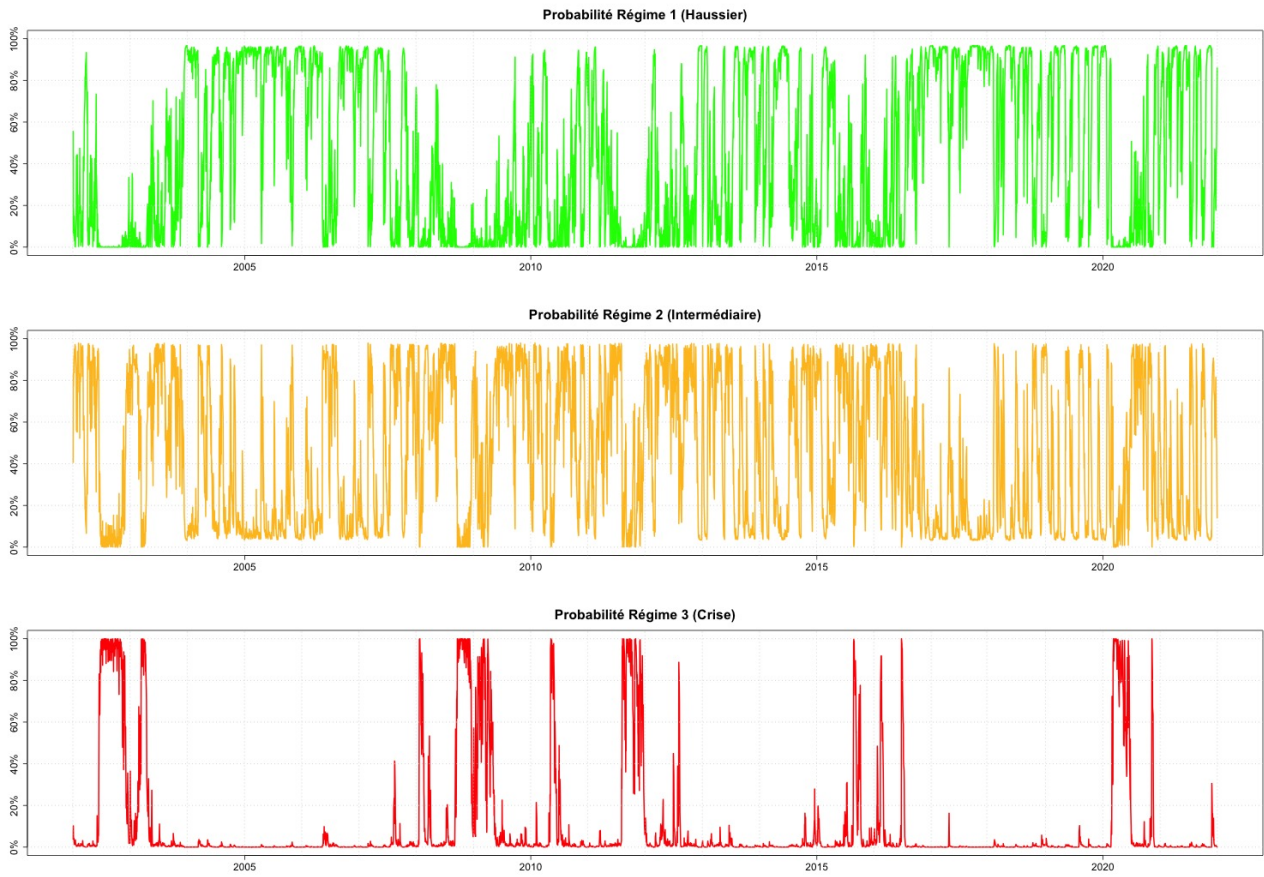


FIGURE 2.10 – Modèle SGBM(3) - Probabilité d'occurrence des régimes



FIGURE 2.11 – Modèle SGBM(3) - Cours CAC 40 par régime le plus probable

Pour le modèle à 2 régimes, on a un régime haussier (“*bull market*”) et un régime baissier (“*bear market*”) avec pour ce dernier une volatilité plus élevée. Sur la période de calibration, on a en moyenne une probabilité de 71,4% de se trouver dans le régime haussier (et 28,6% d’être dans le régime baissier).

Pour le modèle à 3 régimes, on a un régime haussier qui présente la volatilité la plus faible, un régime intermédiaire avec ici un rendement négatif, et un régime de crise avec une volatilité très élevée et un rendement très négatif. Sur la période de calibration, les probabilités moyennes de se trouver dans les régimes haussier, intermédiaire et baissier sont respectivement de 44,3%, 45,0% et 10,7%, donnant ainsi le rendement moyen $\bar{\mu} = 4,79\%$. Les probabilités de transition directe entre le régime haussier (régime 1) et le régime de crise (régime 3) sont très faibles donc l’actif passe très souvent par le régime intermédiaire (régime 2) lorsqu’il transite entre les régimes de hausse et de crise.

Pour la suite, on a aura besoin de modéliser le cours des actions sur une base mensuelle, on calibre donc le modèle SGBM sur les cours et log-rendements $R_{h,t} = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-h}}\right)$ mensuels du CAC 40 (avec $h = 1/12$) pour avoir une chaîne de Markov sur des intervalles de temps appropriés :

Modèle	Log-vraisemblance	Paramètres	AIC	BIC
Black-Scholes (GBM)	371	2	-739	-732
SGBM(n=2)	395	6	-777	-756
SGBM(n=3)	399	12	-774	-733

TABLE 2.8 – Calibration des modèles Black-Scholes et SGBM en base mensuelle ($h = 1/12$)

Selon le BIC et l’AIC, le modèle le plus approprié est le modèle à SGBM à 2 régimes dont les paramètres estimés sont donnés ci-dessous. Avec des probabilités moyennes de réalisation sur les cours historiques de 62,4% pour le régime haussier (régime 1) et de 37,6% pour le régime baissier (régime 2), on a un rendement moyen $\bar{\mu} = 3,92\%$ sur la période de calibration.

Paramètre	Black-Scholes (GBM)	SGBM 2 Régimes
$\hat{\mu}$	3,94%	$(\mu_1 = 14,31\% \quad \mu_2 = -13,33\%)$
$\hat{\sigma}$	17,73%	$(\sigma_1 = 11,04\% \quad \sigma_2 = 24,17\%)$
\hat{P}	N/A	$\begin{pmatrix} 95,21\% & 4,79\% \\ 7,93\% & 92,07\% \end{pmatrix}$

TABLE 2.9 – Paramètres des modèles GBM et SGBM(2) (Calibration en base mensuelle $h = 1/12$)

Le modèle à changement de régime sous la probabilité risque-neutre

On introduit le **processus d’intensité de changement de régime** $\nu_{i,j}(t)$, le **processus de comptage** $N_{i,j}(t)$ indiquant le nombre de transitions entre les régimes i et j jusqu’en t , et $M_{i,j}$:

$$\nu_{i,j}(t) = q_{i,j} \mathbb{1}_{\{\eta_{t-} = e_i\}} \quad \text{et} \quad N_{i,j}(t) = \sum_{0 < s \leq t} \mathbb{1}_{\{\eta_s = e_j\}} \mathbb{1}_{\{\eta_{s-} = e_i\}} \quad \text{et} \quad M_{i,j}(t) = N_{i,j}(t) - \int_0^t \nu_{i,j}(s) ds,$$

où $M_{i,j}$ est une martingale par construction. Avec les processus λ_t (prime de risque) et $h_{i,j}(t)$ appropriés, on construit la martingale L_t définie par

$$\frac{dL_t}{L_t} = -\lambda_t dW_t + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} h_{i,j}(t) dM_{i,j}(t),$$

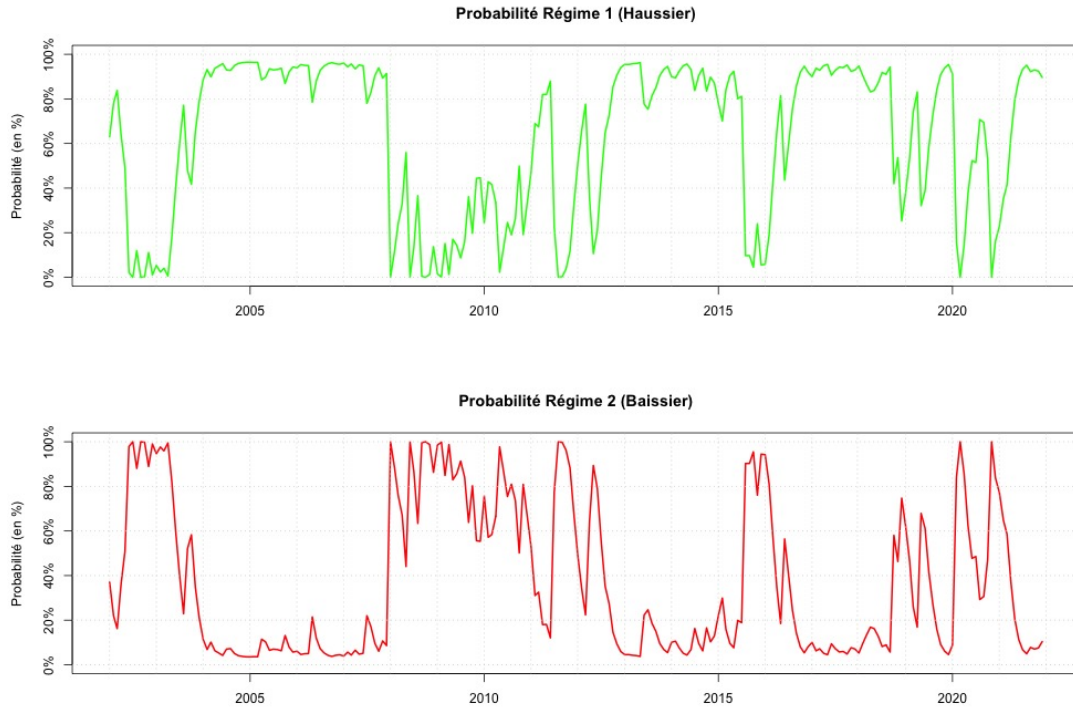


FIGURE 2.12 – Modèle SGBM(2) - Probabilité d'occurrence des régimes (Calibration mensuelle)

d'où en intégrant $f(L_t, t) = \ln(L_t)$ avec le lemme d'Itô pour les processus à sauts (cf. Annexe A) :

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} h_{i,j}(s) \nu_{i,j}(s) ds \right) \cdot \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \prod_{0 < s \leq t} (1 + h_{i,j}(s) dN_{i,j}(s)).$$

Sous la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{Q} de densité L_t par rapport à \mathbb{P} , avec le mouvement brownien standard $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ sous \mathbb{Q} et $\boldsymbol{\eta}_t$ qui reste une chaîne de Markov, on a la dynamique de S_t qui est

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t d\tilde{W}_t, \quad (2.27)$$

avec $r_t = \mu_t - \lambda_t \sigma_t = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ où $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ quand on suppose que le taux sans risque dépend de $\boldsymbol{\eta}_t$. Lorsque r est supposé constant, on peut également déterminer les prix des calls et puts européens avec la distribution des log-rendements conditionnellement aux différents régimes.

Une extension possible du modèle avec l'introduction de sauts boursiers

Une autre caractéristique du mouvement brownien géométrique est qu'il suppose des trajectoires continues alors que l'on peut constater des discontinuités dans l'évolution du prix des actions, notamment lors d'un krach boursier. Pour cela, on peut inclure la modélisation de sauts dans la dynamique de S_t . Une approche classique est le modèle à sauts introduit par **Merton (1976)** et défini par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu - \nu \mathbb{E}[e^{J_1} - 1] \right) dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{i=1}^{N_t} (e^{J_i} - 1) \right),$$

où N_t est un processus de Poisson d'intensité ν et les J_i sont les variables aléatoires i.i.d des sauts. On suppose classiquement dans le modèle de Merton que les sauts sont gaussiens avec pour tout i : $J_i \sim \mathcal{N}(\delta, \gamma^2)$. Les processus W_t , N_t et J_i sont indépendants.

$\sum_{n=1}^{N_t} (e^{J_i} - 1)$ suit donc un processus de Poisson composé et on obtient bien $\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mu dt$. Le modèle de Merton permet également d'obtenir une formule fermée pour les calls et puts européens.

Comme proposé par **Hainaut (2022)**, on peut aussi enrichir le modèle à changement de régime en y ajoutant des sauts se produisant lors d'un changement de régime (ex. : un krach boursier peut être suivi d'une hausse de la volatilité et une baisse des rendements pendant un certain temps). Le processus de comptage de sauts est donc le même que le processus de comptage des changements de régime. On suppose de plus que pour tous $i \neq j$, les variables de sauts $J_{i,j}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) et indépendantes des $N_{i,j}(t)$, on a alors $\mathbb{E}[(e^{J_{i,j}} - 1)dN_{i,j}(t)] = \nu_{i,j}(t)\mathbb{E}[e^{J_{i,j}} - 1]dt$.

On peut donc définir la dynamique de l'actif S_t sous un **mouvement brownien géométrique à changement de régime avec sauts** où les sauts sont compensés :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \underbrace{\mu_t dt + \sigma_t dW_t}_{\text{Processus de diffusion continu}} + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (e^{J_{i,j}} - 1)dN_{i,j}(t) - \nu_{i,j}(t)\mathbb{E}[e^{J_{i,j}} - 1]dt}_{\text{Processus de sauts compensés}}.$$

En appliquant le lemme d'Itô pour les processus de diffusion à sauts (cf. Annexe A) au processus défini par $f(S_t, t) = \ln(S_t)$, on obtient l'expression du prix de l'action qui est

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \left(\int_0^t J_{i,j}(s) dN_{i,j}(s) - \int_0^t \nu_{i,j}(s) \mathbb{E}[e^{J_{i,j}(s)} - 1] ds \right) \right].$$

Pour modéliser les sauts $J_{i,j}$, on peut sélectionner une *loi double exponentielle asymétrique* de densité de probabilité

$$f_{J_{i,j}}(x) = \theta_{i,j} \cdot \rho_{i,j}^+ \cdot e^{-\rho_{i,j}^+ \cdot x} \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} - (1 - \theta_{i,j}) \cdot \rho_{i,j}^- \cdot e^{-\rho_{i,j}^- \cdot x} \cdot \mathbf{1}_{\{x < 0\}},$$

avec $\theta_{i,j}$ (respectivement $(1 - \theta_{i,j})$) la probabilité d'observer un saut haussier (respectivement baissier), et $\frac{1}{\rho_{i,j}^+}$ (respectivement $\frac{1}{\rho_{i,j}^-}$) la taille moyenne du saut haussier (respectivement baissier).

Pour estimer les paramètres Θ du modèle à changement de régime avec sauts, on reprend le filtre d'Hamilton décrit ci-dessus en modifiant la densité $f(R_{t_k}; \Theta, \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\eta}_{t_{k-1}} = \mathbf{e}_i)$ de la loi des log-rendements sur $[t_{k-1}, t_k]$ qui devient la densité de la loi $\mathcal{N}(\tilde{\mu}_i h, \sigma_i^2 h)$ si on reste dans le régime i ou $\phi_{Z_{i,j,h}}(z - \tilde{\mu}_i h \mid \boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i)$ si on passe du régime i au régime j . $\phi_{Z_{i,j,h}}(z \mid \boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i)$ désigne la densité de probabilité de la loi $Z_{i,j,h} = J_{i,j} + \sigma W_h$ sachant $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{e}_i$, et

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} - \sum_{j \neq i} q_{i,j} \mathbb{E}[e^{J_{i,j}} - 1].$$

2.4 La modélisation de l'actif immobilier

2.4.1 L'extension du modèle à changement de régime à plusieurs actifs

Pour la modélisation de l'actif immobilier, on s'appuie sur l'évolution de l'indice sans dividende **IEIF Immobilier France** de l'Institut de l'Épargne Immobilière & Foncière (IEIF) sur la période du 31 décembre 2001 au 31 décembre 2021 qui est constitué de 18 sociétés immobilières cotéesⁱ.

On considère le cours de l'indice immobilier $S_{t_k}^I$ avec les log-rendements $R_{t_k}^I = \ln\left(\frac{S_{t_k}^I}{S_{t_{k-1}}^I}\right)$ sur les périodes mensuelles avec $t_k = t_{k-1} + h$ où $h = 1/12$. On illustre ci-dessous l'évolution de l'indice IEIF en comparaison avec le cours des actions $S_{t_k}^A$ du CAC 40 (on a $K = 240$ observations pour chacun des cours) en prenant comme base 100 pour chaque cours leur valeur au 1^{er} janvier 2012.

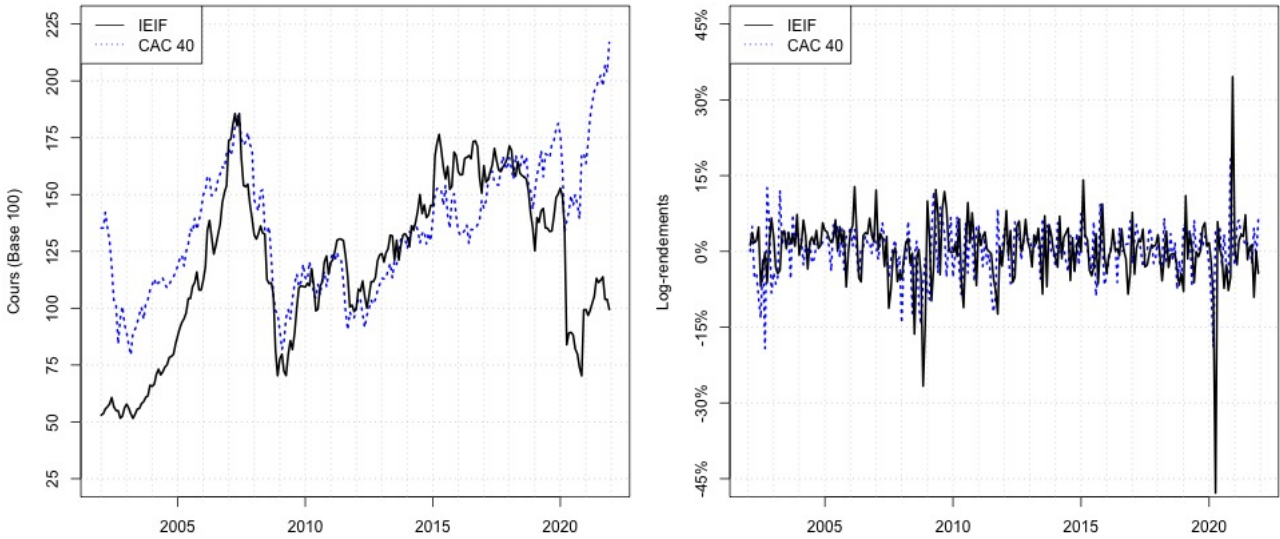


FIGURE 2.13 – Cours et log-rendements mensuels IEIF & CAC 40

On observe une certaine similitude dans l'évolution du CAC 40 et de l'indice IEIF avec différents régimes haussiers et baissiers sur l'évolution du cours de l'IEIF qui semblent correspondre à ceux du CAC 40. On supposera par la suite que les deux actifs suivent une dynamique dans différents régimes, ces régimes étant communs aux deux actifs.

On étend le modèle SGBM pour un seul actif à un **mouvement brownien géométrique multidimensionnel avec changement de régime (MSGBM)** à n régimes où le vecteur de prix $\mathbf{S}_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\top$ des d actifs considérés suit à chaque instant t la dynamique

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_t} = \boldsymbol{\mu}_t dt + \boldsymbol{\Sigma}_t d\mathbf{W}_t, \quad (2.28)$$

avec $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,d \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ est la matrice des rendements de chaque actif i dans chaque régime j , $\boldsymbol{\Sigma}_t = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ où $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ est un vecteur de n matrices triangulaires inférieures $\boldsymbol{\Sigma}_j \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}_+)$ pour chaque régime j . On a $\boldsymbol{\mathfrak{S}}_j = \boldsymbol{\Sigma}_j \cdot \boldsymbol{\Sigma}_j^\top$ la matrice de variance-covariance des actifs

i. Source : Institut de l'Épargne Immobilière & Foncière (IEIF) - www.ieif.fr

dans le régime j . La matrice Σ_j est obtenue par la décomposition de Choleskyⁱ. On note :

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1;t} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{2,1;t} & \sigma_{2,2;t} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sigma_{d,1;t} & \sigma_{d,2;t} & \dots & \sigma_{d,d;t} \end{pmatrix}.$$

$(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la chaîne de Markov qui définit les transitions entre les différents régimes (on reprend les notations décrites au 2.3.2) et $(\mathbf{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un vecteur de d mouvements browniens standards $(W_t^1, \dots, W_t^d)^\top$ indépendants sous \mathbb{P} , et indépendants des $(\boldsymbol{\eta}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Sur les $K' = K - 1$ périodes observées $[t_{k-1}, t_k[$ d'intervalle de temps h , l'univers considéré se trouve dans un certain régime où les paramètres du modèle sont fixés. Sur la k -ième période, considérant le vecteur $\mathbf{R}_{t_k} = (R_{t_k}^1, \dots, R_{t_k}^d)^\top$ des log-rendements des d actifs, avec $R_{t_k}^{d'} = \ln\left(\frac{S_{t_k}^{d'}}{S_{t_{k-1}}^{d'}}\right)$ pour le d' -ième actif sur l'intervalle de temps $[t_{k-1}, t_k[$, \mathbf{R}_{t_k} suit une loi normale d -dimensionnelle

$$\mathbf{R}_{t_k} \sim \mathcal{N}_d\left(\left(\boldsymbol{\mu}_{t_k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_{t_k} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{t_k}^\top\right) \cdot h, \boldsymbol{\Sigma}_{t_k} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{t_k}^\top \cdot h\right).$$

On note Θ le vecteur des N paramètres du modèle à valeurs possibles dans $\Omega_\Theta \subset \mathbb{R}^N$.

2.4.2 L'estimation des paramètres du modèle MSGBM

On a la matrice $\mathbf{R} \in \mathcal{M}_{d,K'}(\mathbb{R})$ des log-rendements observés. Afin d'estimer les paramètres du modèle multidimensionnel, on reprend le filtre présenté au 2.3.2 dans l'étape de calibration et l'on adapte au modèle multidimensionnel. La vraisemblance \mathcal{L}_0 est

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{R}; \Theta) = f(\mathbf{R}; \Theta) = f(\mathbf{R}_{t_1}; \Theta) \cdot f(\mathbf{R}_{t_2}; \Theta, \mathbf{R}_{(1)}) \cdot \dots \cdot f(\mathbf{R}_{t_{K'}}; \Theta, \mathbf{R}_{(K'-1)}),$$

avec $f(\mathbf{R}_{t_k}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)})$ qui est la densité du log-rendement sur la k -ième période avec les paramètres Θ conditionnellement aux précédentes observations $\mathbf{R}_{(k-1)} = (\mathbf{R}_{t_1}, \dots, \mathbf{R}_{t_{k-1}})$ et est définie par

$$f(\mathbf{R}_{t_k}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_i(t_{k-1}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)}) \cdot p_{i,j}(t_{k-1}, t_k; \Theta) \cdot f(\mathbf{R}_{t_k}; \Theta, \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\eta}_{t_{k-1}} = \mathbf{e}_i),$$

où ici $f(\mathbf{R}_{t_k}; \Theta, \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\eta}_{t_{k-1}} = \mathbf{e}_i)$ est la densité de la loi des log-rendements des d actifs sur la k -ième période avec les paramètres Θ conditionnellement au fait de se trouver dans le régime i à l'instant t_{k-1} et dans le régime j à l'instant t_k (avec possiblement $i = j$). Du fait de l'hypothèse du modèle, cette densité sur $[t_{k-1}, t_k[$ est celle de la loi normale d -dimensionnelle

$$\mathcal{N}_d\left(\left(\boldsymbol{\mu}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i \cdot \boldsymbol{\Sigma}_i^\top\right) \cdot h, \boldsymbol{\Sigma}_i \cdot \boldsymbol{\Sigma}_i^\top \cdot h\right).$$

On a $p_i(t_{k-1}; \Theta, \mathbf{R}_{(k-1)})$ et $p_{i,j}(t_{k-1}, t_k; \Theta)$ qui sont respectivement la probabilité de présence dans le régime i à l'instant t_{k-1} conditionnellement aux observations jusqu'à cette date, et la probabilité de transition (issue de la matrice \mathbf{P}) entre les régimes i et j entre t_{k-1} et t_k avec les paramètres Θ .

i. Pour une matrice symétrique définie positive $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la décomposition de Cholesky permet d'obtenir la matrice triangulaire inférieure $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = L \cdot L^\top$

On a pour une chaîne de Markov irréductible, apériodique (on ne revient pas dans le même régime à des intervalles réguliers) et récurrente positive (on revient dans un même régime en un nombre d'étapes fini), la distribution stationnaire π qui est unique. Une **méthode Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC)** permet pour une distribution π d'obtenir la chaîne de Markov aux caractéristiques précédemment décrites pour laquelle π est la distribution stationnaire. L'**algorithme de Metropolis-Hastings** est une méthode MCMC que l'on va utiliser pour maximiser la vraisemblance du modèle MSGBM pour obtenir les paramètres estimés $\hat{\Theta}$. Avec le vecteur de N paramètres $\theta \in \Omega_{\Theta}$, on a la vraisemblance $f(\mathbf{R}; \theta)$. D'après le théorème de Bayes, on a

$$f(\theta; \mathbf{R}) \propto f(\mathbf{R}; \theta) \cdot f(\theta).$$

avec $f(\theta)$ la loi de probabilité a priori et $f(\theta; \mathbf{R})$ est la loi de probabilité a posteriori. En sachant les valeurs \mathbf{R} , les paramètres θ sont distribués selon $f(\theta; \mathbf{R})$ qui est proportionnelle à $\pi(\theta)$. On définit la probabilité de transition $q(\theta; \theta')$ que l'on choisira symétrique, i.e. $q(\theta; \theta') = q(\theta'; \theta)$. On définit la probabilité d'acceptation ρ_{τ} à l'étape τ de l'algorithme de Metropolis-Hastings par

$$\rho_{\tau} = \min\left(\frac{f(\theta'; \mathbf{R}) \cdot q(\theta_{\tau}; \theta')}{f(\theta_{\tau}; \mathbf{R}) \cdot q(\theta'; \theta_{\tau})}; 1\right) = \min\left(\frac{f(\mathbf{R}; \theta') \cdot f(\theta') \cdot q(\theta_{\tau}; \theta')}{f(\mathbf{R}; \theta_{\tau}) \cdot f(\theta_{\tau}) \cdot q(\theta'; \theta_{\tau})}; 1\right) = \min\left(\frac{f(\mathbf{R}; \theta') \cdot f(\theta')}{f(\mathbf{R}; \theta_{\tau}) \cdot f(\theta_{\tau})}; 1\right).$$

On utilise une variation de l'algorithme avec la méthode de Gibbs : on suppose que le vecteur θ_{τ} de N paramètres est partitionné en m sous-vecteurs de taille N' : $\theta_{\tau} = (\theta_{\tau}^{(1)}, \dots, \theta_{\tau}^{(m)})$. Dans l'algorithme que l'on utilisera ici, on mettra à jour à chaque étape un des sous-vecteurs. On considérera pour la probabilité de transition $q(\theta'; \theta_{\tau}) \sim \mathcal{N}_{N'}(\theta_{\tau}, \sigma_{\theta} \mathbf{I}_{N'})$ où $\mathbf{I}_{N'}$ est la matrice identité de taille N' .

Algorithme de Metropolis-Hastings

Pour chaque itération $\tau \leq N_{\tau}$, on réalise les actions suivantes :

1. Simulation du sous-vecteur de paramètres : Pour $m_{\tau} = \tau \bmod m$, on simule le sous-vecteur

$$\theta_{\tau}^{(m'_{\tau})} \sim \mathcal{N}_{N'}(\theta_{\tau}^{(m_{\tau})}, \sigma_{\theta} \mathbf{I}_{N'}).$$

2. Définition du vecteur de paramètres proposé : À partir du vecteur $\theta_{\tau} = (\theta_{\tau}^{(1)}, \dots, \theta_{\tau}^{(m_{\tau})}, \dots, \theta_{\tau}^{(m)})$, on définit le vecteur proposé $\theta' = (\theta_{\tau}^{(1)}, \dots, \theta_{\tau}^{(m'_{\tau})}, \dots, \theta_{\tau}^{(m)})$.
3. Calcul de la probabilité d'acceptation : On tire $\alpha_{\tau} \sim \mathcal{U}([0, 1])$ que l'on compare à

$$\rho_{\tau} = \min\left(\frac{f(\mathbf{R}; \theta') \cdot f(\theta')}{f(\mathbf{R}; \theta_{\tau}) \cdot f(\theta_{\tau})}; 1\right).$$

4. Acceptation du nouveau vecteur de paramètres : Le nouveau vecteur de paramètres $\theta_{\tau+1}$ est :

$$\theta_{\tau+1} = \begin{cases} \theta' & \text{si } \alpha_{\tau} \leq \rho_{\tau} \text{ (acceptation du vecteur proposé avec la probabilité } \rho_{\tau}), \\ \theta_{\tau} & \text{si } \alpha_{\tau} > \rho_{\tau} \text{ (rejet du vecteur proposé avec la probabilité } 1 - \rho_{\tau}). \end{cases}$$

On définit une période de chauffe, ou "*burn-in*", pour laquelle on ne considère pas les B premiers jeux de paramètres. On obtient les paramètres estimés $\hat{\Theta}$ par :

$$\hat{\Theta} = \mathbb{E}[\Theta | \mathbf{R}] = \int \theta f(\theta; \mathbf{R}) d\theta \simeq \frac{1}{N_{\tau} - B + 1} \sum_{\tau=B}^{N_{\tau}} \theta_{\tau}.$$

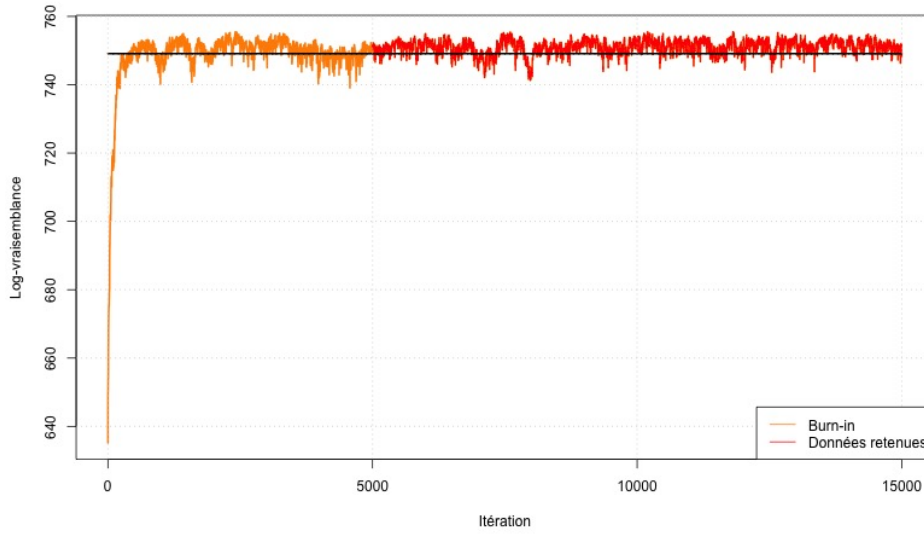


FIGURE 2.14 – Algorithme Metropolis-Hastings - Évolution de la log-vraisemblance $\mathcal{L} = \ln(\mathcal{L}_0)$

On applique l'algorithme de Metropolis-Hastings implémenté sur R avec $N_\tau = 15\,000$, $B = 5000$, $m = 2$ et $\sigma_\theta = 1\%$ pour le modèle MSGBM(2) à deux actifs : CAC 40 (Actif 1) et IEIF (Actif 2) sur les $K' = 239$ observations \mathbf{R}_{t_k} des vecteurs log-rendements mensuels ($h = 1/12$) de chaque actif.

L'algorithme Metropolis-Hastings converge rapidement vers une log-vraisemblance stable étant $\ln(\mathcal{L}_0) = 755$. En prenant la moyenne des paramètres des 10 000 dernières itérations, on obtient les paramètres estimés du modèle MSGBM(2) :

Rendements :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} 10,25\% & -35,01\% \\ 12,18\% & -19,72\% \end{pmatrix}.$$

Volatilités (matrices par régime) :

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 13,37\% & 0\% \\ 1,67\% & 15,00\% \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 32,22\% & 0\% \\ 5,68\% & 45,45\% \end{pmatrix}.$$

Probabilités de transition :

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 96,38\% & 3,62\% \\ 14,63\% & 85,37\% \end{pmatrix}.$$

Dans chaque régime $i \in \{1, 2\}$, on a la matrice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i$ qui est, avec les volatilités $\hat{\sigma}_{1;i}$ et $\hat{\sigma}_{2;i}$ des actifs 1 et 2 et leur corrélation $\hat{\rho}_i$ dans ce régime i , on a

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{1;i} & 0 \\ \hat{\sigma}_{2;i} \cdot \hat{\rho}_i & \hat{\sigma}_{2;i} \cdot \sqrt{1 - \hat{\rho}_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{1;i} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{2;i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{\rho}_i & \sqrt{1 - \hat{\rho}_i^2} \end{pmatrix}.$$

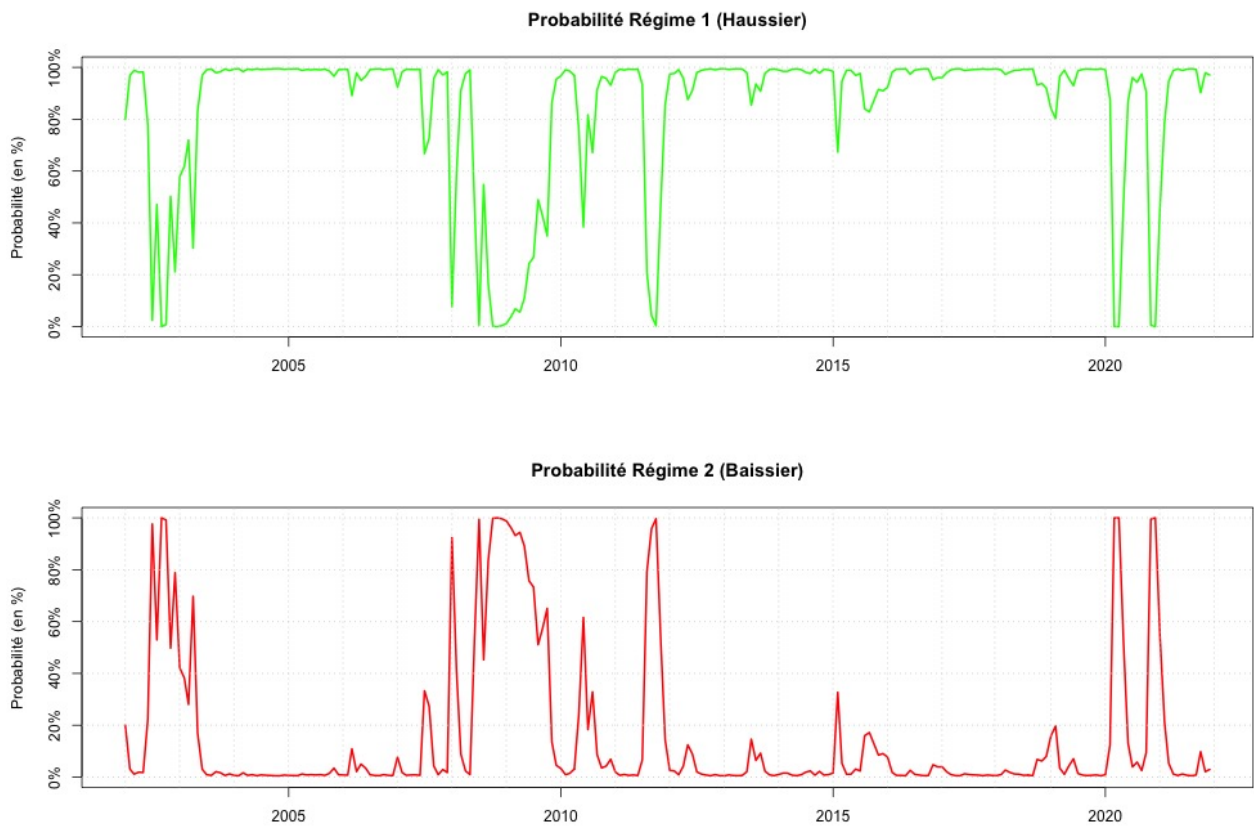


FIGURE 2.15 – Modèle MSGBM(2) - Probabilité d'occurrence des régimes

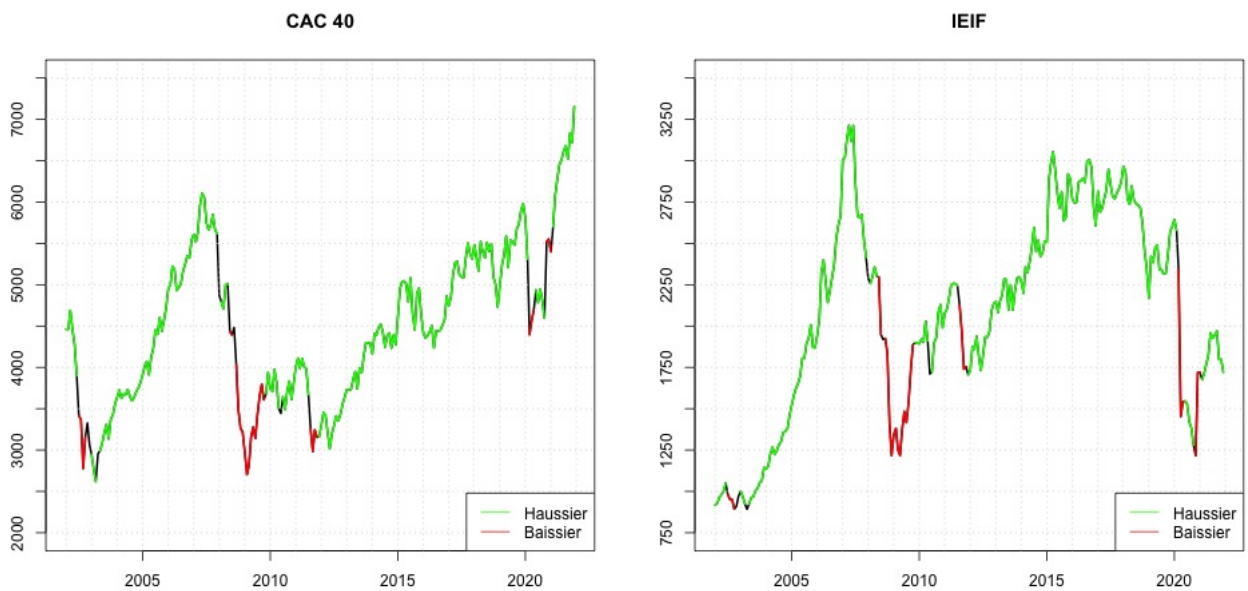


FIGURE 2.16 – Modèle MSGBM(2) - Cours CAC 40 et IEIF par régime le plus probable

Le régime 1 est le régime haussier et le régime 2 est le régime baissier dans lequel on observe une hausse des volatilités et de la corrélation entre les actifs (passant de $\hat{\rho}_1 = 11,1\%$ à $\hat{\rho}_2 = 12,4\%$). Le régime 1 est le régime dominant avec une probabilité moyenne de réalisation sur les cours historiques de 83,9% et le régime 2 a une probabilité moyenne de réalisation sur les cours historiques de 16,1%.

N. B. :

On peut considérer le modèle ci-dessus comme une extension du modèle **Black-Scholes multidimensionnel / mouvement brownien géométrique multidimensionnel (MGBM)** sans changement de régime où, en supposant $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ constants, la dynamique de $\mathbf{S}_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\top$ est définie par

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_t} = \boldsymbol{\mu}dt + \boldsymbol{\Sigma}d\mathbf{W}_t.$$

Le vecteur des log-rendements sur un intervalle de temps h suit la loi normale multidimensionnelle

$$\mathcal{N}_d\left(\left(\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^\top\right) \cdot h, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^\top \cdot h\right).$$

En estimant les paramètres de ce modèle sur les mêmes données que pour le modèle précédent, on obtient une log-vraisemblance bien plus faible ainsi que des AIC et BIC plus élevés malgré un nombre de paramètres plus petit :

Modèle	Log-vraisemblance	Paramètres	AIC	BIC
MGBM	688	5	-1367	-1350
MSGMB(2)	755	12	-1487	-1445

TABLE 2.10 – Calibration des modèles MGBM et MSGMB en base mensuelle ($h = 1/12$)

On a les paramètres estimés pour le modèle MGBM :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (3,94\% \quad 5,65\%) \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 17,75\% & 0\% \\ 1,69\% & 22,24\% \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Le modèle MSGMB sous la probabilité risque-neutre

On peut également obtenir la dynamique de \mathbf{S}_t sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . En appliquant le théorème de Girsanov étendu, on a

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_t} = \mathbf{r}_t dt + \boldsymbol{\Sigma}_t d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (2.29)$$

où le processus de la prime de risque est $\boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} \cdot (\boldsymbol{\mu}_t - \mathbf{r}_t)$ avec $\mathbf{r}_t = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ et $\mathbf{r} \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ avec toutes les lignes identiques.

Avec le lemme d'Itô multidimensionnel appliqué au processus $f(\mathbf{S}_t, t) = \ln(\mathbf{S}_t)$, on peut définir une solution explicite pour \mathbf{S}_t et on a pour chaque actif $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ le prix S_t^i :

$$S_t^i = S_0^i \cdot \exp \left[\int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j;s}^2 \right) ds + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j;s} dW_s^j \right]. \quad (2.30)$$

2.5 Le générateur de scénarios économiques

2.5.1 La présentation du générateur de scénarios économiques (GSE) et de ses composantes

L'introduction du GSE

Afin de modéliser la dynamique des actifs financiers au sein d'un produit d'épargne, on construit un **générateur de scénarios économiques (GSE)**. Un GSE permet de projeter l'évolution de divers indicateurs économiques et/ou actifs financiers dans un univers stochastique sur un horizon de temps donné et pour un certain nombre de trajectoires. On peut distinguer au sein d'un GSE différentes classes d'actifs dont les évolutions peuvent être corrélées. Les projections des actifs sont régies par des modèles pour chaque classe, les paramètres introduits en entrée et des aléas sous une certaine mesure de probabilité (dans la pratique, on fera souvent le choix en univers réel et univers risque-neutre).

Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} et dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega_F, \mathcal{F}^F, (\mathcal{F}_t^F)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{Q})$ des processus financiers, on construit un générateur de scénarios économiques avec trois classes d'actifs :

- Les actions,
- L'immobilier,
- Les obligations.

On considérera ici que chaque classe contient un seul élément représentatif. On représentera les actions par le CAC 40 et l'immobilier par l'indice IEIF. On a donc les actifs : Actions S_t , Immobilier I_t , et Obligation B_t . Le rendement obligataire est donné par le Taux r_t sans risque et on suppose que ce taux sans risque définit les rendements espérés des actifs risqués Actions et Immobilier. On projetera l'évolution des actifs sur un pas de temps mensuel avec $h = 1/12$.

On suppose aussi qu'il existe deux régimes (on notera $\mathcal{R} = (1, 2)$) dans lequel l'univers peut se trouver avec des volatilités différentes pour les Actions et l'Immobilier et que les transitions entre les régimes sont régies par une chaîne de Markov η_t (la dynamique de r_t étant supposée la même dans les deux régimes). On suppose également que les dynamiques des différents actifs sont corrélées.

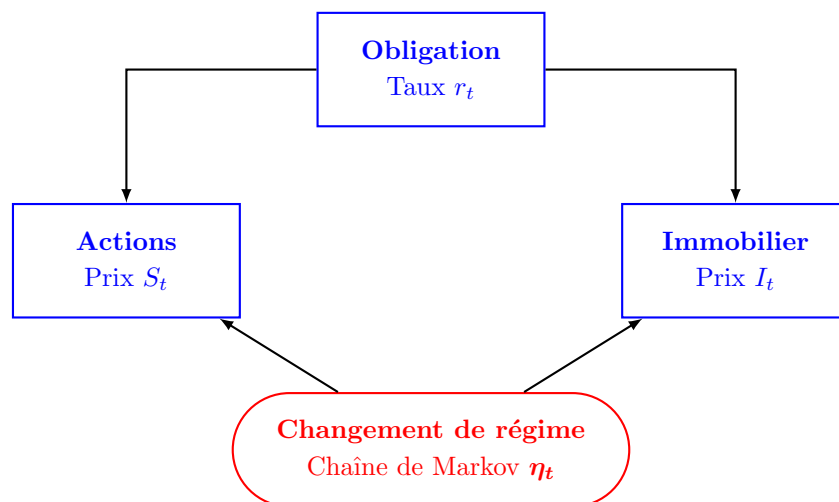


FIGURE 2.17 – Structure du générateur de scénarios économiques

La chaîne de Markov pour les changements de régime

La chaîne de Markov $\boldsymbol{\eta}_t$ pour les changements de régime des actifs est à valeurs dans l'espace d'états $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ avec la matrice de probabilités de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix},$$

où $p_{1,2} = 1 - p_{1,1}$ et $p_{2,1} = 1 - p_{2,2}$. On a à tout instant $t_{k+1} = t_k + h$ et pour tout $(\boldsymbol{\epsilon}_k, \boldsymbol{\epsilon}_{k+1}) \in \mathbf{E}^2$:

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}} = \boldsymbol{\epsilon}_{k+1} | \boldsymbol{\eta}_{t_k} = \boldsymbol{\epsilon}_k) = p_{\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \mathcal{R}^\top, \boldsymbol{\epsilon}_{k+1} \cdot \mathcal{R}^\top} \cdot h.$$

La dynamique des actifs

Pour projeter les évolutions des différents actifs sur un horizon maximal T_{max} suffisamment lointain, on utilisera les modèles suivants :

Actif	Indicateur	Modèle
Actions	Prix S_t	Modèle MSGBM à 2 régimes
Immobilier	Prix I_t	
Obligation	Taux r_t	Modèle CIR

TABLE 2.11 – Modélisation des actifs dans le GSE

On suppose que dans chaque régime $i \in \{1, 2\}$ on a la matrice symétrique des corrélations \mathbf{R}_i entre les dynamiques des Actions (S), Immobilier (I) et Taux (r) qui est

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{S,I;i} & \rho_{S,r;i} \\ \rho_{S,I;i} & 1 & \rho_{I,r;i} \\ \rho_{S,r;i} & \rho_{I,r;i} & 1 \end{pmatrix},$$

et par la décomposition de Cholesky on obtient les deux matrices triangulaires inférieures \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 telles que $\mathbf{R}_1 = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_1^\top$ et $\mathbf{R}_2 = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_2^\top$, avec pour chaque $i \in \{1, 2\}$:

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_{S,I;i} & \sqrt{1 - \rho_{S,I;i}^2} & 0 \\ \rho_{S,r;i} & \frac{\rho_{I,r;i} - \rho_{S,I;i} \rho_{S,r;i}}{\sqrt{1 - \rho_{S,I;i}^2}} & \sqrt{1 - \rho_{S,r;i}^2 - \frac{(\rho_{I,r;i} - \rho_{S,I;i} \rho_{S,r;i})^2}{1 - \rho_{S,I;i}^2}} \end{pmatrix}.$$

On a alors la matrice $\boldsymbol{\Sigma}_i$, avec $\boldsymbol{\Sigma}_i \cdot \boldsymbol{\Sigma}_i^\top$ qui est la matrice de variance-covariance, définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1;i} & 0 & 0 \\ \sigma_{2,1;i} & \sigma_{2,2;i} & 0 \\ \sigma_{3,1;i} & \sigma_{3,2;i} & \sigma_{3,3;i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{S;i} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{I;i} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{r;i} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}_i.$$

On définit alors le vecteur de matrice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ et on a à chaque instant t :

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1;t} & 0 & 0 \\ \sigma_{2,1;t} & \sigma_{2,2;t} & 0 \\ \sigma_{3,1;t} & \sigma_{3,2;t} & \sigma_{3,3;t} \end{pmatrix}.$$

On considère un vecteur de trois mouvements browniens standards indépendants $\mathbf{W}_t = (W_t^1, W_t^2, W_t^3)^\top$ sous \mathbb{Q} . On a alors pour les actifs qui suivent des processus de Markov les dynamiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sum_{j=1}^3 \sigma_{1,j;t} dW_t^j, \\ \frac{dI_t}{I_t} = r_t dt + \sum_{j=1}^3 \sigma_{2,j;t} dW_t^j, \\ \frac{dB_t}{B_t} = r_t dt, \\ dr_t = \kappa_r (\theta_r - r_t) dt + \sqrt{r_t} \sum_{j=1}^3 \sigma_{3,j;t} dW_t^j, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

où les valeurs initiales respectives en $t_0 = 0$ sont S_0 , I_0 , B_0 et r_0 .

2.5.2 Les hypothèses pour le GSE

Pour avoir un GSE “*market consistant*”, on pourrait calibrer les paramètres du modèle de taux au moyen de produits dérivés (ex. caplets) et obtenir les volatilités implicites des différents actifs Actions et Immobilier au moyen de paniers d'options et estimer les paramètres du modèle avec les formules du call et du put européens. Étant ici dans un cadre plus théorique, on se contentera de réutiliser des paramètres précédemment estimés.

Dans le GSE, on prendra pour la projection des taux les paramètres calibrés au 2.2.3 sur la courbe des taux de l'EIOPA avec un spread de 200 bp pour approcher le niveau de rendement d'un fonds en euros. Pour les Actions et l'Immobilier, on réutilisera les valeurs pour les volatilités historiques et les paramètres de la chaîne de Markov obtenus au 2.4. On supposera de plus une corrélation de 5% dans les deux régimes entre les taux et les Actions et l'Immobilier. On considérera donc les paramètres suivants pour le GSE :

$$r_0 = 1,41\% \quad \text{et} \quad \kappa_r = 0,0355 \quad \text{et} \quad \theta_r = 6,04\%,$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 96,38\% & 3,62\% \\ 14,63\% & 85,37\% \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 13,37\% & 0 & 0 \\ 1,67\% & 15,00\% & 0 \\ 0,05\% & 0,05\% & 1,06\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,37\% & 0 & 0 \\ 0 & 15,09\% & 0 \\ 0 & 0 & 1,06\% \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100,00\% & 0 & 0 \\ 11,08\% & 99,38\% & 0 \\ 5,00\% & 4,47\% & 99,77\% \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 32,22\% & 0 & 0 \\ 5,68\% & 45,45\% & 0 \\ 0,05\% & 0,05\% & 1,06\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,22\% & 0 & 0 \\ 0 & 45,80\% & 0 \\ 0 & 0 & 1,06\% \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100,00\% & 0 & 0 \\ 12,40\% & 99,23\% & 0 \\ 5,00\% & 4,41\% & 99,78\% \end{pmatrix}.$$

2.5.3 La simulation dans le GSE

La simulation de la chaîne de Markov

Pour initialiser la chaîne de Markov en t_0 , on tire aléatoirement au moyen d'une loi $\mathcal{U}([0, 1])$ le régime initial selon les probabilités historiques des régimes déterminées au 2.4 pour la dernière observation, soit 97,06% pour le régime 1 et 2,94% pour le régime 2. Ensuite, à chaque instant t_k , en se trouvant dans le régime $i \in \{1, 2\}$, on tire un nombre aléatoire α_k au moyen d'une loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et

- Si $\alpha_k \leq p_{i,i}$: on reste dans le régime i ,
- Si $\alpha_k > p_{i,i}$: on passe dans le régime $j = 3 - i$.

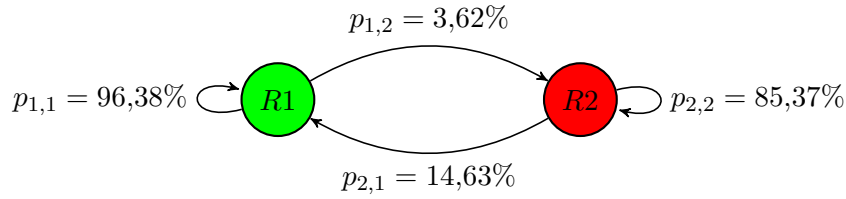


FIGURE 2.18 – Probabilités de transition de la chaîne de Markov du GSE

La simulation des actifs

À chaque instant t_k , se trouvant dans le régime $i_k = \boldsymbol{\eta}_{t_k} \cdot \mathcal{R}^\top$, on considère la matrice $\boldsymbol{\Sigma}_{i_k}$. On simule $\varepsilon_{1;t_k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\varepsilon_{2;t_k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\varepsilon_{3;t_k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendants afin de projeter l'évolution des actifs définie par la relation 2.31. Pour projeter les taux, on discrétise la relation de r_t avec un schéma de Milstein (développement au second ordre de la formule d'Itô) pour déterminer $r_{t_{k+1}}$ à partir de r_{t_k} . Pour projeter les prix des Actions S_t et de l'Immobilier I_t de la dynamique du GSE, on a par le lemme d'Itô (cf. relation 2.30) une relation pour obtenir $S_{t_{k+1}}$ et $I_{t_{k+1}}$ respectivement à partir de S_{t_k} et I_{t_k} . On obtient alors les processus discrétisés des actifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \cdot \exp \left[\left(r_{t_k} - \frac{1}{2} \sigma_{S;i_k}^2 \right) h + \sigma_{S;i_k} \sqrt{h} \left(\sum_{j=1}^3 C_{1,j;i_k} \varepsilon_{j;t_k} \right) \right], \\ I_{t_{k+1}} = I_{t_k} \cdot \exp \left[\left(r_{t_k} - \frac{1}{2} \sigma_{I;i_k}^2 \right) h + \sigma_{I;i_k} \sqrt{h} \left(\sum_{j=1}^3 C_{2,j;i_k} \varepsilon_{j;t_k} \right) \right], \\ r_{t_{k+1}} = r_{t_k} + \kappa_r (\theta_r - r_{t_k}) h + \sigma_r \sqrt{r_{t_k}} h \left(\sum_{j=1}^3 C_{3,j;i_k} \varepsilon_{j;t_k} \right) + \frac{\sigma_r^2 h}{4} \left(\left(\sum_{j=1}^3 C_{3,j;i_k} \varepsilon_{j;t_k} \right)^2 - 1 \right). \end{array} \right. \quad (2.32)$$

La simulation de $\boldsymbol{\eta}_t$ et des actifs se fait avec un algorithme développé sur R. On illustre ci-dessous les projections des actifs du GSE (en base 100 en t_0 au 31 décembre 2021) avec 1000 trajectoires sur un horizon de 25 ans en affichant à chaque fois la moyenne, les intervalles de projection [25%, 75%], [10%, 90%] et [2,5%, 97,5%] (en dégradé de gris), et deux trajectoires (en rouge et bleu).

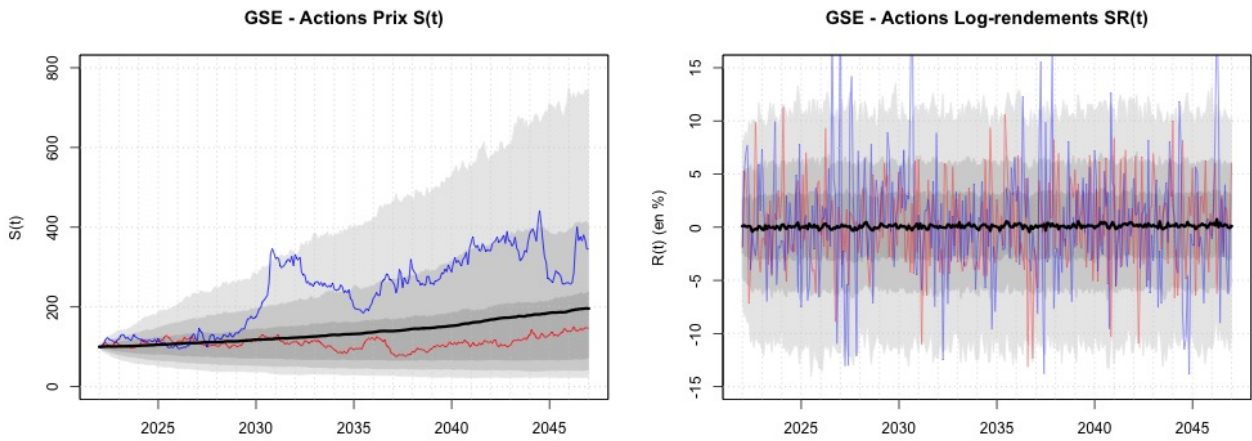


FIGURE 2.19 – GSE - Projection des Actions

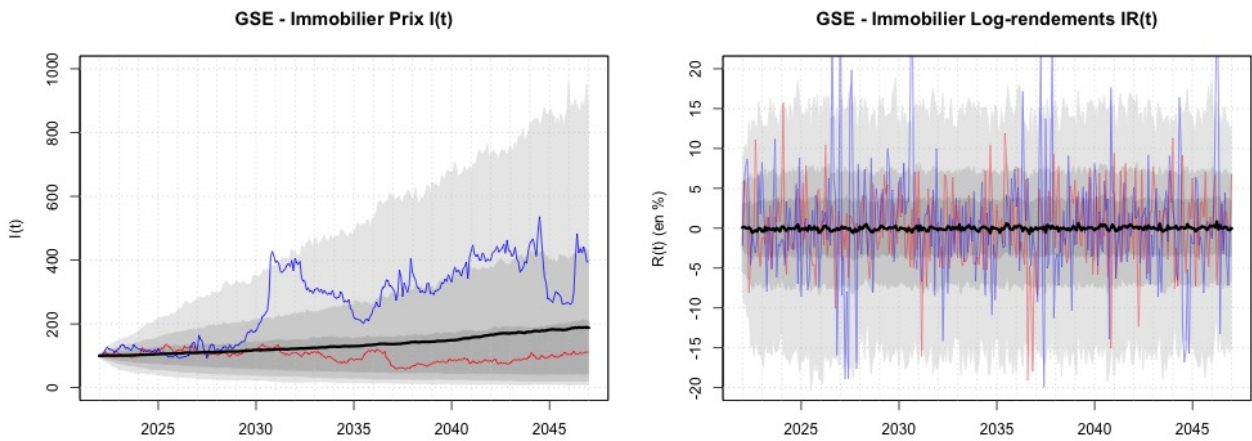


FIGURE 2.20 – GSE - Projection de l'Immobilier

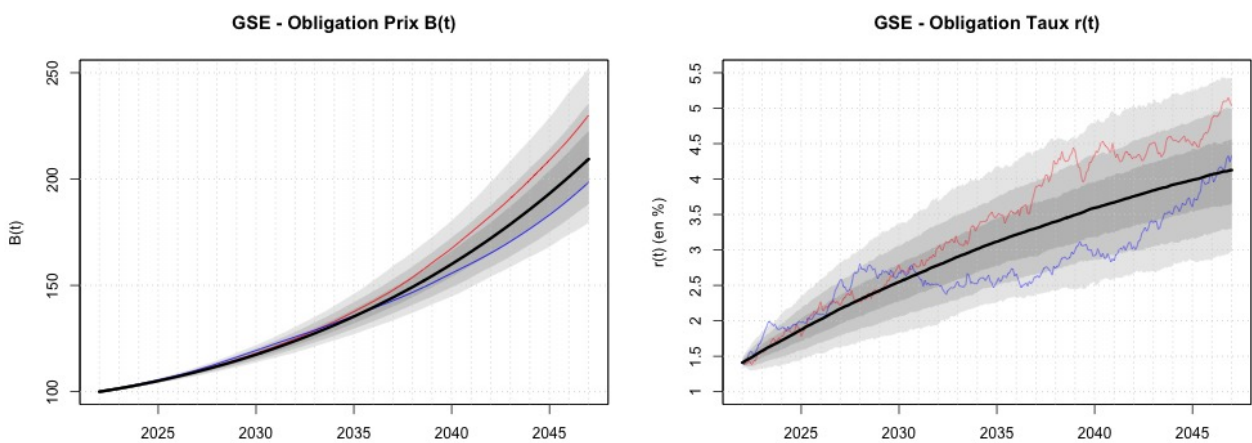


FIGURE 2.21 – GSE - Projection obligation & taux

Chapitre 3

Modélisation de l'évolution de l'espérance de vie

3.1 L'évolution historique de l'espérance de vie humaine

3.1.1 L'augmentation de l'espérance de vie en France et dans le monde depuis la seconde moitié du XIX^e siècle

La durée de vie humaine a considérablement augmenté depuis la seconde moitié du XIX^e siècle grâce aux progrès réalisés en médecine, aux développements technologiques et à des évolutions sociétales ayant débuté lors de la Seconde Révolution industrielle. L'un des principaux indicateurs mesurant cela est l'évolution de l'espérance de vie à la naissance par période (cf. paragraphe 3.2.1). L'espérance de vie à la naissance est passée d'environ 40 ans en 1850 dans des pays développés à environ 80 ans en 2018. Il est à noter que l'espérance de vie des femmes est généralement plus élevée que celle des hommes avec des écarts de plusieurs années dans certains pays mais ayant parfois tendance à se réduire.

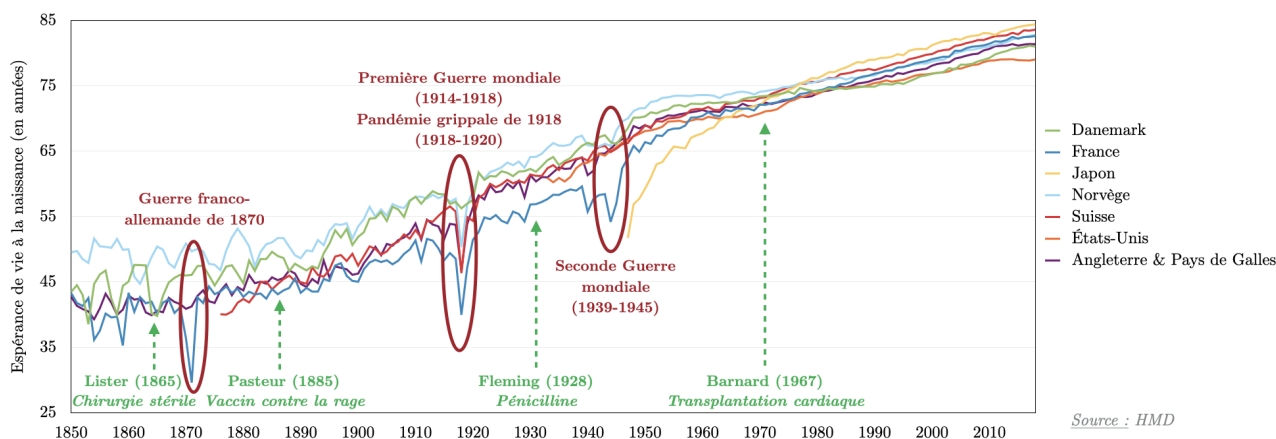


FIGURE 3.1 – Évolution de l'espérance de vie à la naissance (1850-2018)

Bien que divers évènements au cours du XX^e siècle soient venus impacter temporairement à la baisse le niveau de l'espérance de vie, comme la pandémie grippale de 1918 et les deux guerres mondiales, l'espérance de vie à la naissance a continué d'augmenter après 1950 avec une volatilité plus faible

sur son évolution annuelle. Dans un premier temps, les améliorations en termes de mortalité se sont concentrées sur les jeunes âges avec une chute drastique de la mortalité infanto-juvénile (avant 5 ans) et des jeunes adultes puis, depuis la seconde moitié du XX^e siècle, avec une augmentation de l'espérance de vie des seniors. Au cours des soixante dernières années, l'augmentation de l'espérance de vie à la naissance a été plus faible dans les pays développés par rapport au reste du monde ce qui s'explique par le fait que la transition démographique s'est réalisée dans ces pays pour atteindre de faibles niveaux de natalité et de mortalité, alors que la transition démographique est encore en cours dans les pays en voie de développement.

Région	1960	2019	Évolution moyenne
France	69,9 ans	82,6 ans	+2,58 mois/an
Monde	52,6 ans	72,7 ans	+4,10 mois/an
Pays à revenu élevé	68,6 ans	80,9 ans	+2,51 mois/an
Pays à revenu intermédiaire élevé	49,9 ans	75,9 ans	+5,30 mois/an
Pays à revenu intermédiaire faible	45,2 ans	69,1 ans	+4,85 mois/an
Pays à revenu faible	39,5 ans	63,7 ans	+4,93 mois/an

TABLE 3.1 – Évolution de l'espérance de vie à la naissance de 1960 à 2019 (Source : Banque Mondiale)

L'article “*Broken limits to life expectancy*” d'**Oeppen & Vaupel (2002)** montre que le record annuel mondial de l'espérance de vie à la naissance a augmenté à un rythme continu de presque 3 mois par an depuis la seconde moitié du XIX^e siècleⁱ. Ils ont par ailleurs comparé l'évolution de l'espérance de vie record annuelle avec des projections prévoyant un ralentissement de l'évolution de l'espérance de vie, et des limites précédemment suggérées pour la durée de vie en formulant l'hypothèse que ces limites pouvaient être dépassées dans le futur. Cette analyse a été complétée par **Vallin & Meslé (2010)** qui montrent que ce rythme de 3 mois par an n'a pas été constant sur toute la période étudiée mais qu'il y a eu plusieurs phases à des rythmes différents.

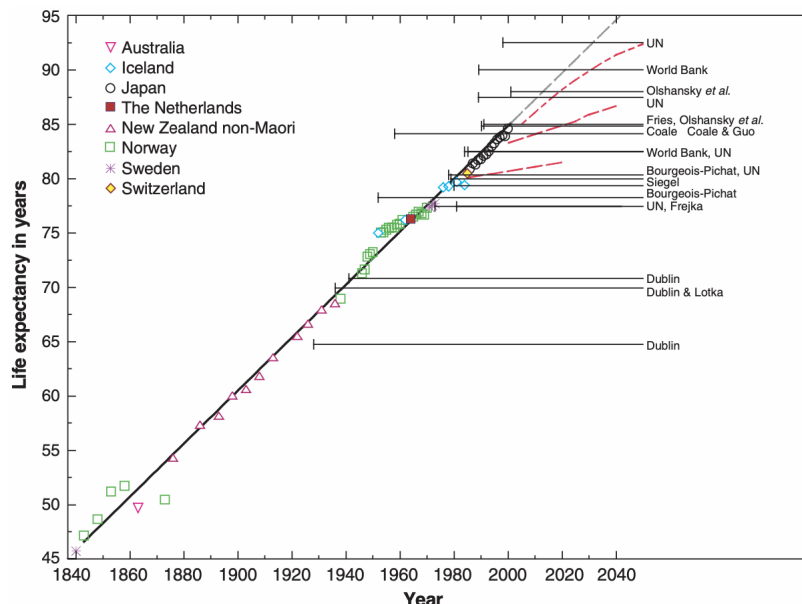


FIGURE 3.2 – Espérance de vie record annuelle des femmes (1840-2000) et projections futures

i. N. B. : Cette observation a été confirmée jusqu'en 2017 par **Vaupel et al. (2021)**.

En France, on observe une augmentation de l'espérance de vie pour atteindre 82,6 ans à la naissance pour la population totale en 2018 (79,6 ans pour les hommes et 85,5 ans pour les femmes) et 25,6 ans pour l'espérance de vie à 60 ans (23,3 ans pour les hommes et 27,7 ans pour les femmes). L'évolution de l'espérance de vie a connu différents rythmes depuis le début du XIX^e siècle avec un taux d'accroissement linéaire de 23% pour l'espérance de vie à la naissance depuis 1970 pour la population totale (16% pour l'espérance de vie à 60 ans)ⁱ.

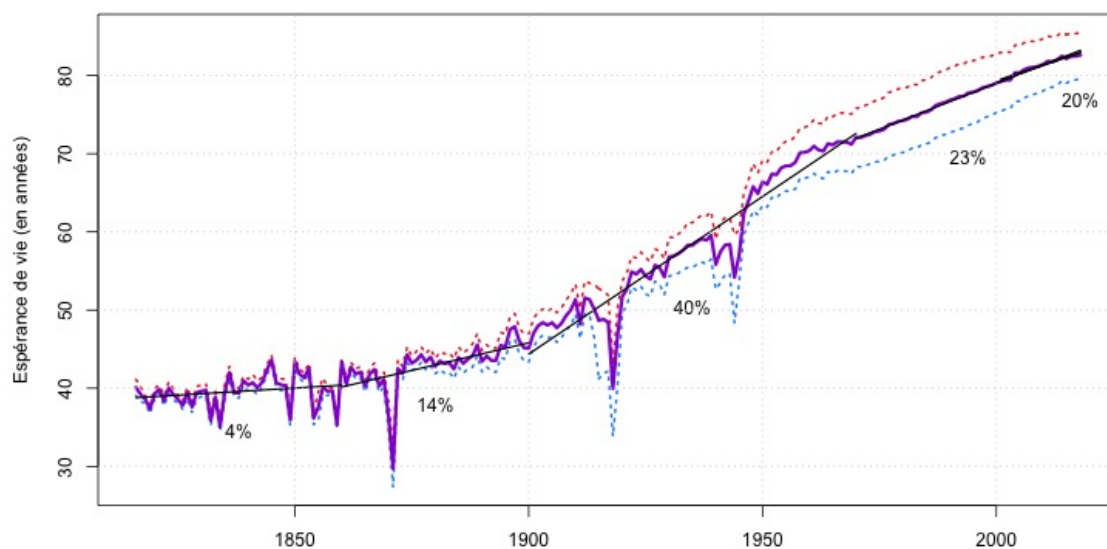


FIGURE 3.3 – Évolution de l'espérance de vie à la naissance en France (1816-2018)

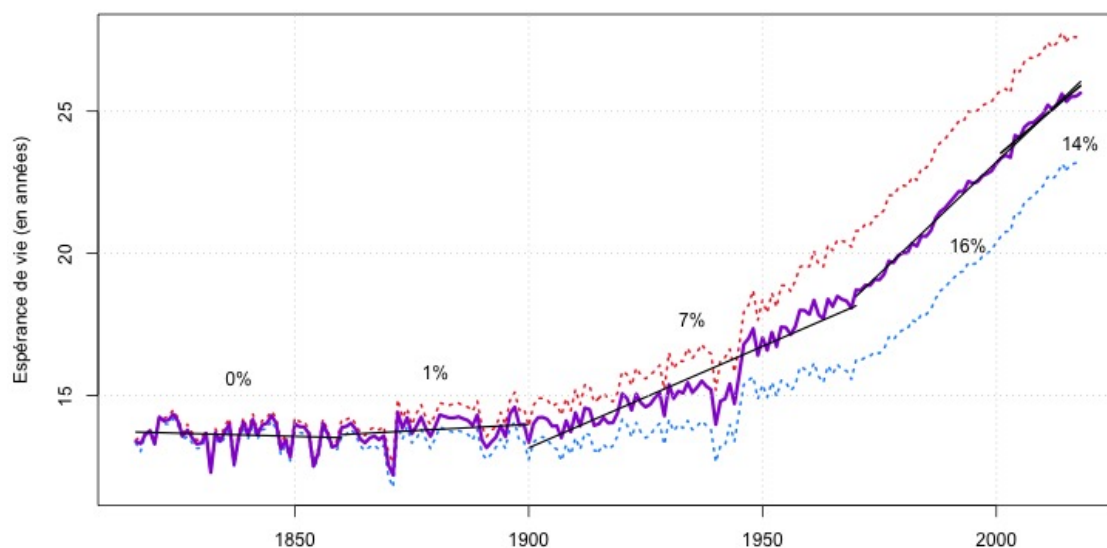


FIGURE 3.4 – Évolution de l'espérance de vie à 60 ans en France (1816-2018)

i. Source : *Human Mortality Database* - www.mortality.org

L'augmentation de l'espérance de vie à la naissance s'est réalisée jusqu'aux années 1970 notamment grâce à une baisse de la mortalité pour les jeunes âges, en particulier sur la mortalité infanto-juvénile entre 0 et 5 ans. La baisse de la mortalité aux âges élevés s'est principalement réalisée en France après la Seconde Guerre mondiale avec une augmentation importante et continue depuis.

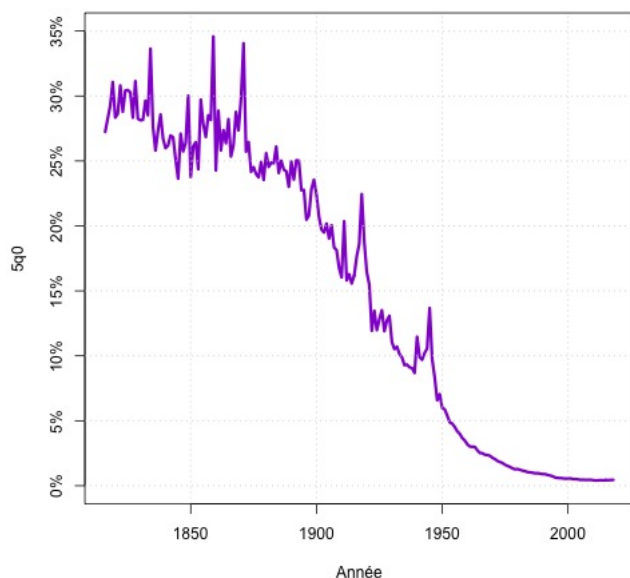


FIGURE 3.5 – Probabilité de décès entre 0 et 5 ans en France (1816-2018)

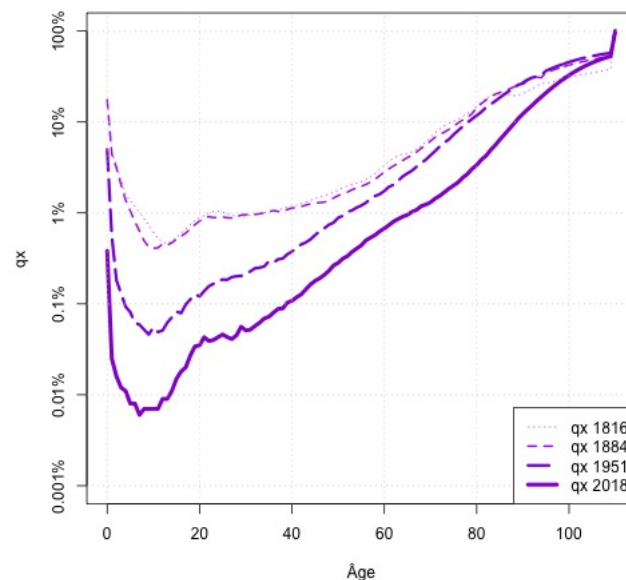


FIGURE 3.6 – Probabilités de décès par âge en France (1816, 1884, 1951 et 2018)

3.1.2 L'évolution récente de la mortalité en France

La *Human Mortality Database* (HMD)

L'étude de la mortalité en France peut être réalisée avec les données de la *Human Mortality Database* (HMD). Cette base de données est le fruit d'un projet international lancé en 2002 et qui, fin 2021, collecte et rend disponible des données sur les populations et les décès dans 41 pays dont la France. Pour la France, HMD s'appuie sur les données de l'Institut National d'Études Démographiques (INED) et de l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques (INSEE). Les données disponibles dans la base de données HMD pour chaque population sont :

- Les naissances par année,
- Les décès par âge et par année (y compris les triangles de Lexis),
- La population par âge et par année,
- L'exposition au risque par âge et par année (y compris les triangles de Lexis),
- Les taux de décès par âge et par année,
- Les tables de mortalité,
- L'espérance de vie à la naissance.

Les données sont différenciées par sexe (population totale, hommes et femmes) et sont disponibles par période ou par cohorte pour les âges 0 à 110+. Pour certains pays, on peut avoir des données sur différentes populations comme pour la France avec la population totale et la population civile.

Les traitements effectués sur les données brutes sont explicités en détail dans les protocoles et la documentation de la HMD.

Fin 2021, les données par période pour la France sont disponibles de 1816 à 2018 avec une distinction entre la population civile et la population totale lors des guerres. Dans la suite de l'analyse, les données HMD utilisées seront celles de la population civile téléchargées au 31 décembre 2021.

L'analyse de la mortalité en France

Sur la période 1969-2018, les taux de mortalité ont continué à diminuer en France. En observant les taux de mortalité par âge et par année, on obtient ci-dessous les améliorations de mortalité entre deux années consécutives pour les âges 40-90 :

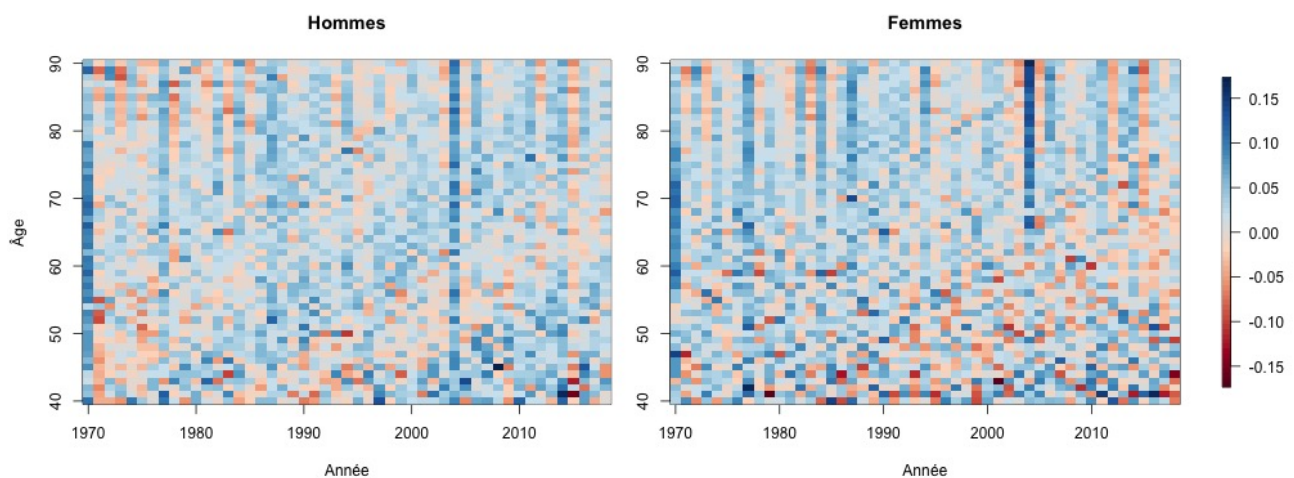


FIGURE 3.7 – Améliorations des taux de mortalité $r(x, t)$

En regardant les taux d'amélioration de la mortalité par âge, ceux-ci sont un peu plus volatiles sur les âges avant 50 ans pour les femmes. En analysant la mortalité par période, on observe certaines années avec une mortalité plus élevée, comme en 2015 du fait de l'épidémie de grippe sévère. Habituellement, ces années sont suivies ou précédées d'une année avec une mortalité plus faible. Ce fut le cas en 2003 où, après une mortalité plus élevée à cause de la canicule, 2004 a enregistré une plus forte amélioration de la mortalité. On observe également des tendances sur certaines cohortes, surtout pour les hommes, où les améliorations semblent plus faibles, comme les cohortes 1945-1955, et d'autres où les améliorations sont plus élevées, notamment les cohortes 1935-1945 et 1960-1975 pour les hommes.

Mais globalement, la mortalité a baissé au cours des cinquante dernières années, contribuant ainsi à une augmentation de l'espérance de vie. Le rythme de l'augmentation a toutefois été légèrement plus faible depuis 2001. La baisse des taux de mortalité est observable à tous les âges mais avec des taux d'amélioration pouvant varier entre les âges mais aussi entre les sexes.

Années	Total	Hommes	Femmes
1970-2018	0,23	0,25	0,21
2001-2018	0,20	0,25	0,16

TABLE 3.2 – Évolution moyenne de l'espérance de vie à la naissance (Source : HMD)

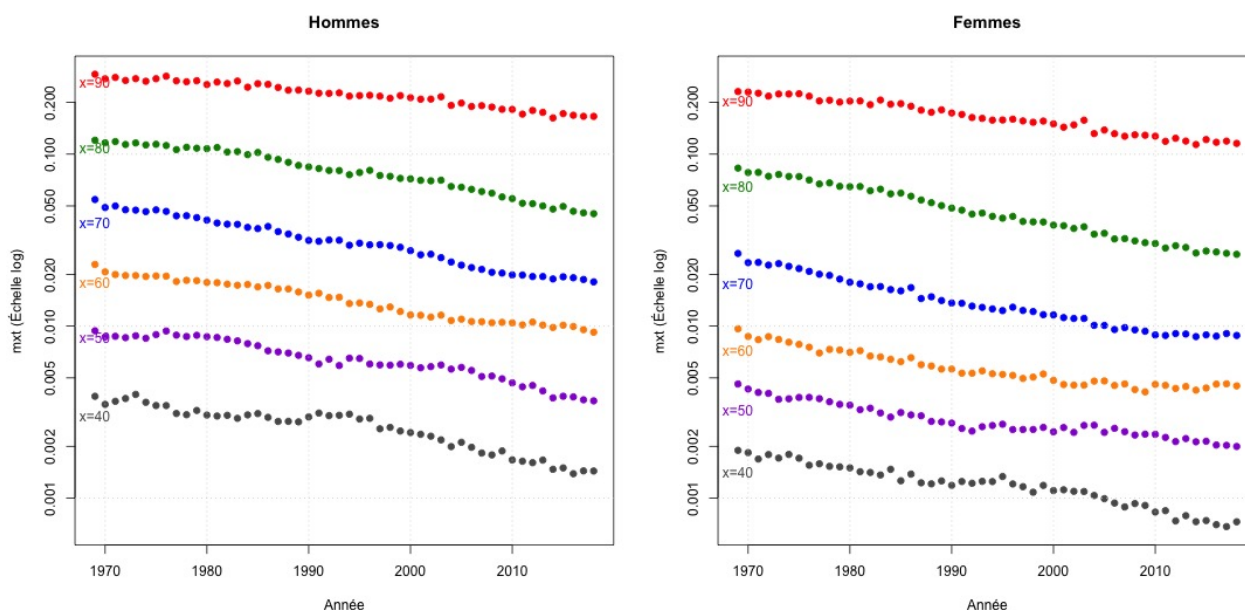


FIGURE 3.8 – Évolution des taux de mortalité en France (1969-2018)

La mortalité avec la Covid-19

La pandémie de Covid-19 a provoqué sur 2020 et 2021 une hausse de la mortalité dans le monde et notamment en France. Bien que cette hausse de la mortalité fût moins élevée que celle attendue dans les scénarios de calcul du SCR pandémie, elle a néanmoins provoqué une baisse de l'espérance de vie pour revenir d'après l'INED à des niveaux d'espérance de vie observables six ans plus tôt.

Espérance de vie	2019	2020	Baisse
Espérance de vie à la naissance - Hommes	79,7 ans	79,1 ans	-0,6 ans
Espérance de vie à la naissance - Femmes	85,6 ans	85,1 ans	-0,5 ans
Espérance de vie à 65 ans - Hommes	19,6 ans	18,9 ans	-0,7 ans
Espérance de vie à 65 ans - Femmes	23,4 ans	23,0 ans	-0,4 ans

TABLE 3.3 – Baisse de l'espérance de vie en 2020 avec la Covid-19 (Source : INED)

La hausse de la mortalité due à la Covid-19 ne sera pas prise en compte dans la suite comme un impact durable sur le niveau de mortalité. Par analogie, on peut considérer que les hausses de mortalité en 2003 et 2015, respectivement dues à la canicule et à la grippe, ont seulement été temporaires et n'ont pas provoqué de baisses de l'espérance de vie dans la durée. Il serait nécessaire de voir les impacts sur le long-terme de la pandémie, si elle a contribué ou non à infléchir la tendance sur l'évolution de la longévité (du fait des "Covid longs", des améliorations médicales à la suite de la pandémie, etc.) mais il n'y a ce stade pas assez de recul car les observations de changement de tendance se réalisent et s'observent sur plusieurs années.

3.2 Les modèles de mortalité

3.2.1 Les variables pour la modélisation de la mortalité

Durée de vie, probabilités de survie et de décès, et fonction de survie

On introduit la **durée de vie** \mathcal{T} d'un individu et \mathcal{T}_x la **durée de vie résiduelle** à l'âge x , deux variables aléatoires positives. L'individu d'âge x décèdera ainsi à l'âge $x + \mathcal{T}_x$. On définit alors la **probabilité de survie** à l'âge x durant les τ prochaines années par

$${}_{\tau}p_x = \mathbb{P}(\mathcal{T}_x > \tau) = \mathbb{P}(\mathcal{T} > x + \tau \mid \mathcal{T} > x), \quad (3.1)$$

ainsi que la **probabilité de décès** au cours des τ prochaines années (i.e. de décéder entre x et $x + \tau$), qui est la fonction de répartition de \mathcal{T}_x et qui s'exprime par :

$${}_{\tau}q_x = 1 - {}_{\tau}p_x = \mathbb{P}(\mathcal{T}_x \leq \tau) = \mathbb{P}(\mathcal{T} \leq x + \tau \mid \mathcal{T} > x). \quad (3.2)$$

On note également l_x la **fonction de survie** définie par :

$$l_{x+\tau} = l_x \cdot {}_{\tau}p_x. \quad (3.3)$$

Par convention, on prendra $l_0 = 1$.

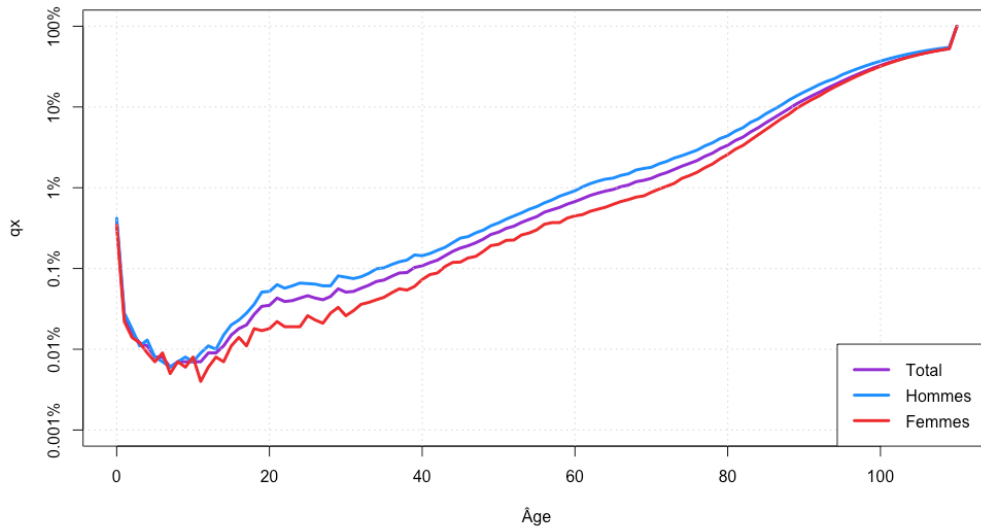


FIGURE 3.9 – Probabilités de décès $q(x, 2018)$ en France (Source : HMD)

On définit aussi l'**exposition**, le nombre total de survivants, ${}_{\tau}E_x$ entre l'âge x et l'âge $x + \tau$ défini par

$${}_{\tau}E_x = \int_0^{\tau} l_{x+u} du, \quad (3.4)$$

ainsi que le **nombre de décès** :

$${}_{\tau}d_x = l_x - l_{x+\tau}. \quad (3.5)$$

N. B. :

Pour $\tau = 1$, on utilise les notations simplifiées : ${}_1p_x = p_x$, ${}_1d_x = d_x$ et ${}_1q_x = q_x$.

Pour $\tau = 0$, on a : ${}_0p_x = 1$ et ${}_0q_x = 0$. Pour $\tau \in \mathbb{N}^*$, on a

$${}_{\tau}p_x = \prod_{k=0}^{\tau-1} p_{x+k} = \prod_{k=0}^{\tau-1} 1 - q_{x+k}.$$

Taux central de mortalité et force de mortalité

Le **taux central de mortalité** ${}_{\tau}m_x$ entre les âges x et $x+\tau$ est obtenu en rapport entre le nombre de décès ${}_{\tau}d_x$ et l'exposition ${}_{\tau}E_x$:

$${}_{\tau}m_x = \frac{{}_{\tau}d_x}{{}_{\tau}E_x}. \quad (3.6)$$

On définit la **force de mortalité** comme le taux instantané de mortalité, i.e.

$$\mu_{x+\tau} = \lim_{\delta\tau \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\tau < \mathcal{T}_x \leq \tau + \delta\tau \mid \mathcal{T}_x > \tau)}{\delta\tau} = \frac{1}{{}_{\tau}p_x} \cdot \frac{\partial}{{\partial\tau}} {}_{\tau}q_x. \quad (3.7)$$

La force de mortalité est obtenue avec le taux central de mortalité sur une durée infinitésimale, i.e. $\mu_x = \lim_{\delta\tau \downarrow 0} \delta\tau m_x$. La force de mortalité permet d'obtenir la fonction de survie avec la formulation

$$l_x = \exp\left(-\int_0^x \mu_u \, du\right). \quad (3.8)$$

Indicateurs par période et indicateurs par cohorte

En modélisant la mortalité qui évolue dans le temps ou d'une cohorte à une autre, on adapte les notations ci-dessus pour avoir des indicateurs par période qui soient fonction du temps et des indicateurs par cohorte qui soient fonction de la génération de l'individu. On note ainsi dans la suite, pour l'âge x , la date t et la génération g :

— Fonction de survie :

- Par période : $l^P(x, t) = \exp\left(-\int_0^x \mu(u, t) \, du\right)$,
- Par génération : $l^G(x, g) = \exp\left(-\int_0^x \mu(u, g+u) \, du\right)$.

— Décès sur un an :

- Par période : $d^P(x, t) = l^P(x, t) - l^P(x+1, t)$,
- Par génération : $d^G(x, g) = l^G(x, g) - l^G(x+1, g)$.

Selon les cas, il pourra être précisé si nécessaire s'il s'agit des indicateurs par période ou des indicateurs par cohorte.

Dans la suite du chapitre, on se placera sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega_M, \mathcal{F}^M, (\mathcal{F}_t^M)_{t \geq 0}, \mathbb{M})$ pour modéliser l'évolution de $\mu(x, t)$ et des fonctions associées.

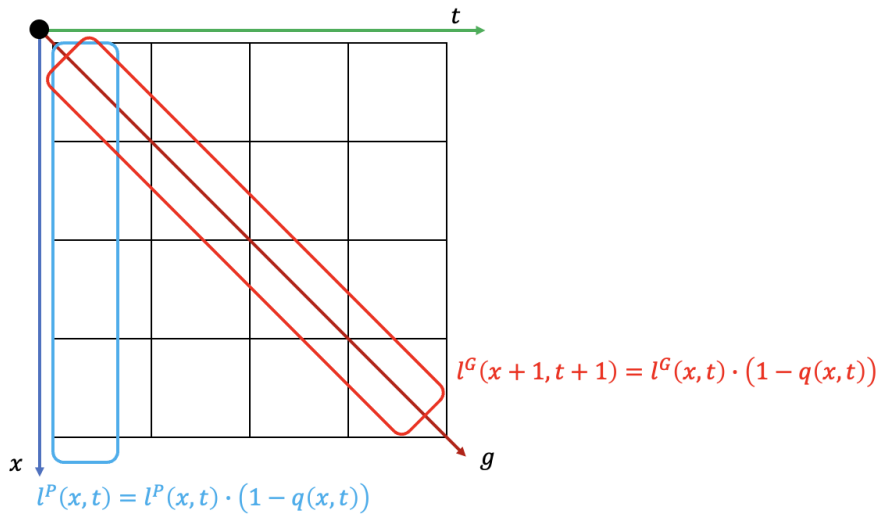


FIGURE 3.10 – Illustration de la vision par période et de la vision par cohorte

On introduit également le **taux d'amélioration de la mortalité** $r(x, t)$ qui permet d'observer l'évolution du taux central de mortalité à un âge donné entre deux périodes consécutives :

$$r(x, t) = 1 - \frac{m(x, t)}{m(x, t - 1)}.$$

Espérance de vie résiduelle

L'**espérance de vie résiduelle** à l'âge x est définie par $e_x = \mathbb{E}[\mathcal{T}_x]$. On distingue dans la suite l'**espérance de vie par période** $e^P(x, t)$ de l'**espérance de vie par cohorte** $e^G(x, g)$. Elles sont définies par

$$\begin{cases} e^P(x, t) = \frac{1}{l^P(x, t)} \cdot \int_x^{+\infty} l^P(u, t) du, \\ e^G(x, g) = \frac{1}{l^G(x, g)} \cdot \int_x^{+\infty} l^G(u, g) du. \end{cases} \quad (3.9)$$

On a de plus la relation suivante qui lie l'espérance de vie et la force de mortalité (la démonstration est présentée en Annexe B) :

$$\frac{\partial e^P}{\partial x}(x, t) = \mu(x, t) \cdot e^P(x, t) - 1. \quad (3.10)$$

Les versions discrètes pour la formulation de l'espérance de vie sont :

$$\begin{cases} e^P(x, t) = \frac{1}{l^P(x, t)} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} l^P(x + k, t) + \frac{1}{2}, \\ e^G(x, g) = \frac{1}{l^G(x, g)} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} l^G(x + k, g) + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.11)$$

N. B. :

Le facteur d'ajustement $+1/2$ dans les formules 3.11 est classiquement utilisé en faisant l'hypothèse que les décès se produisent en moyenne en milieu d'année. On peut aussi utiliser des facteurs d'ajustement qui dépendent de l'âge.

Autres indicateurs

L'**âge modal** x_M est l'âge avec le plus grand nombre de décès : $d_{x_M} = \sup\{d_x, x \in [0, +\infty[\}$. L'**entropie** H permet de mesurer la dispersion des décès et de mesurer le phénomène observable de la *rectangularisation* des courbes de survie. À l'image de l'entropie de Shannon, on définit ici l'entropie pour la période t par

$$H(t) = - \frac{\int_0^{+\infty} l(u, t) \cdot \ln(l(u, t)) du}{\int_0^{+\infty} l(u, t) du}. \quad (3.12)$$

Lorsque H tend vers 0, les décès se concentrent autour d'un même âge : l'âge modal. Au contraire, lorsque H tend vers 1, les décès se répartissent uniformément entre les âges. La hausse de l'espérance de vie constatée depuis le milieu du XIX^e siècle s'est accompagnée d'une baisse de l'entropie (cf. Figure 3.11) avec la rectangularisation de la courbe de survie : la mortalité aux jeunes âges a très fortement diminué et les décès se concentrent de plus en plus aux âges élevés autour de l'âge modal, formant ainsi une courbe de survie avec une forme davantage rectangulaire (cf. Figure 3.12).

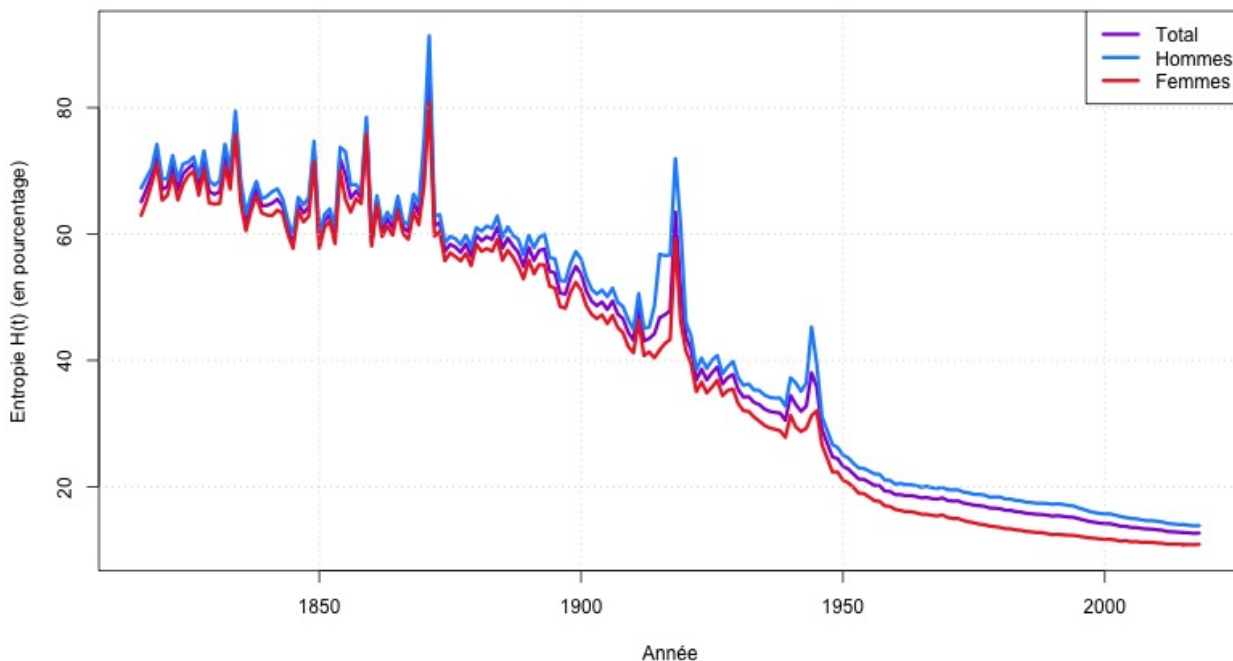


FIGURE 3.11 – Évolution de l'entropie en France (1816-2018)

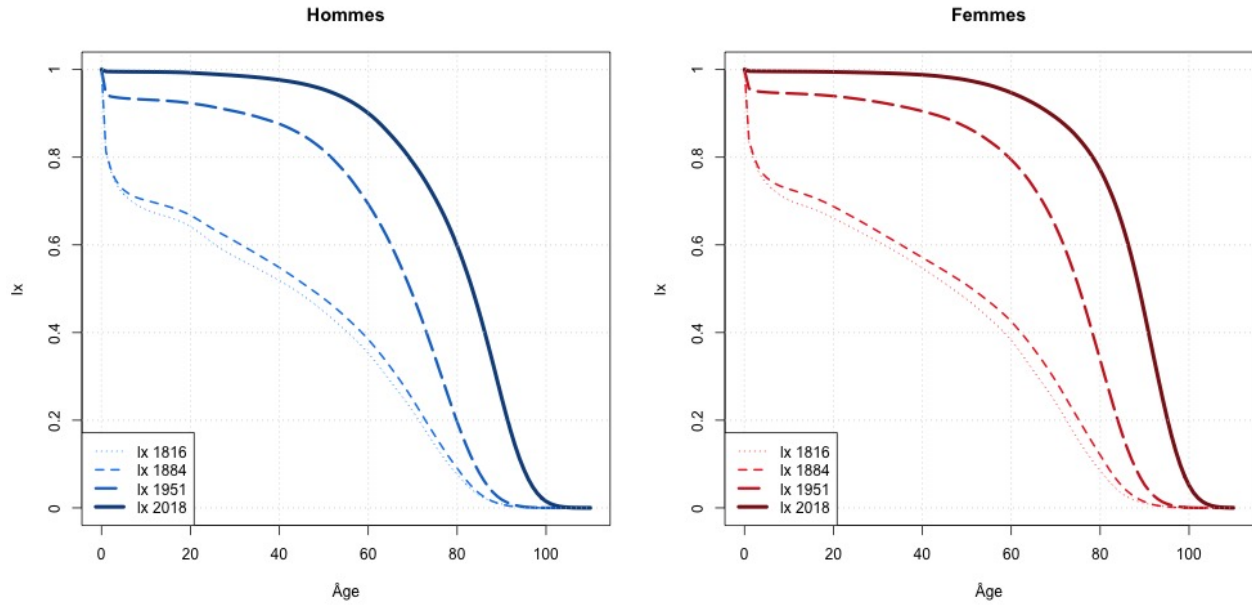


FIGURE 3.12 – Fonctions de survie en France (1816, 1884, 1951 et 2018)

Hypothèses sur la mortalité

Les expositions $E(x, t)$ et décès $D(x, t)$ de la base de données HMD permettent de définir le taux central de mortalité $m(x, t) = D(x, t)/E(x, t)$ par âge et par année. Pour étudier la mortalité, on formule les hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1** : $\forall(x, t) \in \mathbb{N}^2, \forall(u, v) \in [0, 1]^2, \mu(x + u, t + v) = \mu(x, t)$, i.e. la force de mortalité est constante entre deux âges entiers et deux années entières.
- **Hypothèse 2** : $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, D(x, t) \sim \mathcal{P}(E(x, t) \cdot \mu(x, t))$, i.e. les décès suivent une loi de Poisson.

On déduit de l'Hypothèse 1 les relations :

$$m(x, t) = \mu(x, t) = -\ln(1 - q(x, t)) \iff q(x, t) = 1 - \exp(-\mu(x, t)) = 1 - \exp(-m(x, t)). \quad (3.13)$$

Pour un modèle de mortalité prospectif de paramètres Θ permettant d'obtenir une estimation des taux de mortalité $m(x, t; \Theta)$, on déduit de l'Hypothèse 2 la log-vraisemblance \mathcal{L} . Avec les décès qui suivent la loi $\mathcal{D} \sim \mathcal{P}(E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta))$, on a

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathbf{E}; \Theta) = \ln \left(\prod_{x,t} \mathbb{P}(\mathcal{D} = D(x, t)) \right) = \ln \left(\prod_{x,t} \frac{(E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta))^{D(x,t)}}{D(x, t)!} \cdot \exp(-E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta)) \right),$$

i.e.

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathbf{E}; \Theta) = \sum_{x,t} \left[D(x, t) \cdot \ln(E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta)) - \ln(D(x, t)!) - E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta) \right],$$

i.e.

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathbf{E}; \Theta) = \sum_{x,t} \left[D(x, t) \cdot \ln(m(x, t; \Theta)) - E(x, t) \cdot m(x, t; \Theta) + \ln \left(\frac{E(x, t)^{D(x,t)}}{D(x, t)!} \right) \right]. \quad (3.14)$$

3.2.2 Les risques liés à l'estimation de la mortalité future

En cherchant à estimer la mortalité future pour une population donnée, on peut être confronté à différents types de risques :

- **Risque de modèle** : Le modèle n'est pas adapté pour la modélisation de la mortalité de la population visée.
- **Risque de base** : La population considérée pour la calibration du modèle a une mortalité différente de celle de la population visée.
- **Risque de niveau** : Les taux estimés pour la mortalité actuelle présentent un écart avec les taux de mortalité réels actuels.
- **Risque de tendance** : Les améliorations de mortalité estimées sont différentes dans le futur.
- **Risque de volatilité** : Sur un court horizon, l'expérience de mortalité peut connaître des fluctuations majeures (ex. épidémie, canicule, etc.) qui impactent l'estimation de la mortalité.
- **Risque idiosyncratique** : Des variations peuvent venir de la mortalité aléatoire des individus au sein de la population pour laquelle la mortalité est estimée.

Dans la suite de l'étude, après avoir sélectionné un modèle adapté et calibré la mortalité sur un niveau adéquat, on se penchera surtout sur le risque de tendance qui est généralement la composante majeure du risque de longévité. L'estimation de la tendance se fera à partir de la population nationale plutôt qu'à partir d'une population assurée du fait du manque de données. On négligera le risque de base entre la population nationale et la population assurée sur les évolutions de mortalité futures en s'appuyant sur des études de l'INSEE qui montrent qu'il existe un écart sur l'espérance de vie entre les cadres et les ouvriers mais que cet écart a été relativement stable entre la fin des années 1970 et le milieu des années 2010.

3.2.3 Les modèles prospectifs stochastiques

Le modèle de Lee-Carter

Jusque dans les années 1980, les tables de mortalité étaient principalement construites en utilisant des modèles statiques avec une estimation de la mortalité réalisée sur une période ou une cohorte, ou un ensemble de quelques périodes ou cohortes adjacentes pour prendre en compte la volatilité de la mortalité sur plusieurs années consécutives. On peut par exemple citer le modèle de Gompertz-Makeham (avec les travaux de **Gompertz (1825)** et de **Makeham (1860)**) qui permet d'exprimer la force de mortalité $\mu(x)$ par la formule :

$$\mu(x) = a + b \cdot c^x. \quad (3.15)$$

Dans l'article "*Modeling and forecasting U.S. mortality*" de **Lee & Carter (1992)**, les auteurs ont introduit un modèle de mortalité prospectif prenant en compte le facteur temps et donc l'évolution de la mortalité d'année en année. Le modèle de Lee-Carter est un modèle de mortalité stochastique qui permet de projeter une distribution de taux de mortalité par âge et par année. Les taux de mortalité dans le **modèle de Lee-Carter (LC-M1)** sont définis par

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(2)}, \quad (3.16)$$

avec les contraintes suivantes pour résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x^{(2)} = 1.$$

En effet, sans ces contraintes, le modèle resterait inchangé en modifiant les paramètres avec les constantes non nulles a et b donnant d'autres valeurs $\tilde{\beta}_x^{(1)}$, $\tilde{\beta}_x^{(2)}$ et $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$:

$$\tilde{\beta}_x^{(1)} = \beta_x^{(1)} + a \cdot \beta_x^{(2)} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_x^{(2)} = \frac{\beta_x^{(2)}}{b} \quad \text{et} \quad \tilde{\kappa}_t^{(2)} = b \cdot (\kappa_t^{(2)} - a).$$

Le coefficient $\beta_x^{(1)}$, constant au cours du temps, correspond à la valeur moyenne de $\ln(m(x, t))$ pour tous les âges x et années t . On peut ainsi voir le modèle de Lee-Carter comme une extension du modèle de Gompertz-Makeham avec l'ajout d'une composante temporelle.

Le coefficient $\beta_x^{(2)}$ vérifie $\frac{d \ln(m(x, t))}{dt} = \beta_x^{(2)} \cdot \frac{d\kappa_t^{(2)}}{dt}$ et permet ainsi d'ajuster la dynamique d'évolution des taux de mortalité selon l'âge. Ce coefficient reste lui aussi constant au cours du temps, ce qui peut être inadéquat sur le long-terme. Cela peut notamment entraîner une décélération des améliorations de l'espérance de vie par période, en particulier lorsque $\kappa_t^{(2)}$ est linéaire.

Le coefficient $\kappa_t^{(2)}$ dépendant uniquement du temps peut être modélisé comme une marche aléatoire pour les projections futures. On peut aussi choisir une évolution linéaire de $\kappa_t^{(2)}$ pour obtenir une projection déterministe de la mortalité.

Le modèle de Cairns-Blake-Dowd

Le **modèle de Cairns-Blake-Dowd (CBD-M5)** introduit par **Cairns et al. (2006b)** est un autre modèle de mortalité stochastique qui permet de projeter la mortalité par âge et par année au moyen de deux coefficients de tendance. Le modèle donne une formulation pour les probabilités de décès $q(x, t)$ qui est

$$\text{logit}(q(x, t)) = \ln\left(\frac{q(x, t)}{1 - q(x, t)}\right) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)}, \quad (3.17)$$

où $\bar{x} = n_a^{-1} \cdot \sum_i x_i$, n_a étant le nombre d'âges de la calibration.

Contrairement au modèle de Lee-Carter, ce modèle est sans problème d'identifiabilité. De plus, le modèle CBD n'a pas de paramètre $\beta_x^{(1)}$ ajustant la mortalité par âge, il a uniquement un paramètre $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$. Cela peut avoir pour conséquence une moins bonne précision du niveau de mortalité initial par rapport au modèle de Lee-Carter qui contient un paramètre $\beta_x^{(1)}$. Les coefficients $\kappa_t^{(1)}$ et $\kappa_t^{(2)}$ dépendent uniquement du temps et peuvent être modélisés comme deux marches aléatoires corrélées pour les projections futures. On peut aussi choisir une évolution linéaire des coefficients pour obtenir une projection déterministe de la mortalité.

Les modèles avec effet cohorte

Les modèles Lee-Carter et Cairns-Blake-Dowd peuvent être étendus en ajoutant un effet cohorte γ_c pour les cohortes $c = t - x$ lorsque, en plus de varier selon l'âge et la période, la mortalité varie aussi selon la génération. Les modèles ci-dessous intègrent cette variation de la mortalité par cohorte.

Modèle de Renshaw-Haberman (RH-M2)

La dynamique des taux de mortalité par âge et par année est donnée par :

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}, \quad (3.18)$$

avec les contraintes suivantes pour résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\begin{aligned} \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 & \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x^{(2)} = 1, \\ \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0 & \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x^{(3)} = 1. \end{aligned}$$

Modèle Age-Period-Cohort (APC-M3)

La dynamique des taux de mortalité par âge et par année est donnée par :

$$\ln(m(x, t)) = \beta_x^{(1)} + n_a^{-1} \cdot \kappa_t^{(2)} + n_a^{-1} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}, \quad (3.19)$$

avec n_a est le nombre d'âges de la calibration. Contrairement au modèle de Lee-Carter, le paramètre $\beta_x^{(2)}$ est ici constant et vaut n_a^{-1} pour tous les âges. Par rapport au modèle de Renshaw-Haberman, le paramètre $\beta_x^{(3)}$ devant $\gamma_{t-x}^{(3)}$ est également constant, ce qui rend l'APC plus stable que ce dernier lors de la calibration. On a de plus les contraintes suivantes pour résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0.$$

Modèle CBD avec cohortes 1 (M6)

La dynamique des taux de mortalité par âge et par année est donnée par :

$$\text{logit}(q(x, t)) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}, \quad (3.20)$$

avec les contraintes suivantes, pour toutes les cohortes c considérées pour la calibration, afin de résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\sum_c \gamma_c^{(3)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_c c \gamma_c^{(3)} = 0.$$

Modèle CBD avec cohortes 2 (M7)

La dynamique des taux de mortalité par âge et par année est donnée par :

$$\text{logit}(q(x, t)) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)} + \kappa_t^{(3)} \cdot \left((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 \right) + \gamma_{t-x}^{(4)}, \quad (3.21)$$

avec $\hat{\sigma}_x^2 = n_a^{-1} \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ et les contraintes suivantes, pour toutes les cohortes c considérées pour la calibration, afin de résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\sum_c \gamma_c^{(4)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_c c \gamma_c^{(4)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_c c^2 \gamma_c^{(4)} = 0.$$

Modèle CBD avec cohortes 3 (M8)

La dynamique des taux de mortalité par âge et par année est donnée par :

$$\text{logit}(q(x, t)) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)} + (x_c - x) \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}, \quad (3.22)$$

avec x_c un paramètre (on prendra par la suite $x_c = 75$ mais on pourrait aussi estimer ce paramètre dans la calibration du modèle) et la contrainte suivante, pour toutes les cohortes c considérées pour la calibration, afin de résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle :

$$\sum_c \gamma_c^{(3)} = 0.$$

Pour tous ces modèles, lors de la projection des futurs taux de mortalité, les paramètres $\gamma_c^{(i)}$ sont utilisés pour toutes les cohortes c de la plage de calibration. Pour les futures cohortes c' , les paramètres $\gamma_{c'}^{(i)}$ peuvent être projetés avec une série temporelle *ARIMA*(p, d, q) qui est calibrée sur les $\gamma_c^{(i)}$ obtenus via la calibration du modèle.

Les modèles Lee-Carter et Cairns-Blake-Dowd généralisés

Plus globalement, on peut généraliser les modèles de Lee-Carter, de Cairns-Blake-Dowd et leurs extensions avec les effets cohortes grâce à la formulation

$$\pi(x, t) = \sum_i \beta_x^{(i)} \cdot \kappa_t^{(i)} \cdot \gamma_{t-x}^{(i)}, \quad (3.23)$$

où $\pi(x, t)$ est le prédicteur avec $\pi(x, t) = \ln(m(x, t))$ ou $\pi(x, t) = \text{logit}(q(x, t))$, les $\beta_x^{(i)}$ sont les paramètres d'âge, les $\kappa_t^{(i)}$ sont paramètres de temps et les $\gamma_{t-x}^{(i)}$ sont les paramètres de cohorte.

3.2.4 La modélisation de la mortalité aux grands âges

L'estimation de la mortalité d'une population donnée n'est en général possible que jusqu'à un certain âge car la raréfaction des données aux grands âges diminue la robustesse des estimations des taux de mortalité. Par ailleurs, lorsqu'on observe de près la mortalité aux âges avancés pour de larges populations, on se rend compte que les taux de mortalité suivent une évolution avec l'âge qui est plus concave qu'une loi log-linéaire et donc les modèles de type Gompertz-Makeham ou Lee-Carter ont tendance à surestimer la mortalité aux âges élevés.

C'est pour cela que l'on a souvent recours à des modèles spécifiques pour la mortalité aux grands âges afin de réaliser les clôtures des tables de mortalité. Parmi ces modèles, on retiendra le modèle de mortalité log-quadratique proposé par **Denuit & Goderniaux (2005)** qui est

$$\ln(q(x, t)) = a_t + b_t \cdot x + c_t \cdot x^2, \quad (3.24)$$

avec comme contraintes :

— **Contrainte 1** : $\forall t, q(\omega, t) = 1,$

— **Contrainte 2** : $\forall t, \frac{\partial q}{\partial x}(\omega, t) = 0,$

où $\omega = 130$ (supposition classique) est l'âge de clôture de la table de mortalité. Avec les contraintes imposées, on en déduit la formulation suivante des probabilités de décès pour les âges élevés :

$$q(x, t) = \exp\left(c_t \cdot (130 - x)^2\right). \quad (3.25)$$

On peut également considérer que $q(\omega, t) = 1$ est une hypothèse forte car il ne semble pas y avoir de limites biologiques imposant une mortalité certaine à partir d'un âge déterminé. La Contrainte 1 peut donc être reformulée de la façon suivante : $\forall t, \forall x \geq \omega, q(x, t) = q_{\omega, t}$ avec $q_{\omega, t} \leq 1$ où $q_{\omega, t}$ est la probabilité de décès asymptotique en année t . On a alors :

$$q(x, t) = q_{\omega, t} \cdot \exp\left(c_t \cdot \max(0, \omega - x)^2\right). \quad (3.26)$$

L'estimation des paramètres du modèle de Denuit-Goderniaux se fait par la méthode des moindres carrés ordinaires sur les âges précédant l'âge de clôture $\llbracket x_{min}^C, x_{max}^C \rrbracket$. On considérera par la suite x_{max}^C comme étant l'âge maximum de la plage de calibration et $x_{min}^C = x_{max}^C - 10$. Avec les taux $q(x, t)$ connus sur la plage de calibration, on cherchera pour toute année t le minimum de la fonction d'objectif

$$\Phi(c_t) = \sum_{x=x_{min}^C}^{x_{max}^C} \left[\ln(q(x, t)) - c_t \cdot (130 - x)^2 \right]^2$$

pour obtenir $\hat{c}_t = \operatorname{argmin}_{c_t} \Phi$. Dans le cas avec un taux asymptotique $q_{\omega, t}$, on a la fonction d'objectif

$$\Phi(q_{\omega, t}, c_t) = \sum_{x=x_{min}^C}^{x_{max}^C} \left[\ln(q(x, t)) - \ln(q_{\omega, t}) - c_t \cdot (130 - x)^2 \right]^2$$

pour obtenir $(\hat{q}_{\omega, t}, \hat{c}_t) = \operatorname{argmin}_{(q_{\omega, t}, c_t)} \Phi$. Il est à noter que le modèle peut être ajusté en considérant un paramètre ω_t dynamique avec le temps. Le record de longévité est détenu à ce jour par Jeanne Calment décédée en 1997 à l'âge de 122 ans et 5 mois, mais on peut anticiper une évolution de ce record dans le futur.

3.2.5 Les méthodes de positionnement

Il est également possible de construire une table de mortalité en s'appuyant sur une référence externe de mortalité lorsque l'on manque de données pour calibrer les taux de mortalité pour une population cible. C'est par exemple ici le cas en l'absence de données historiques d'un portefeuille d'assurés pour estimer une évolution future des taux de mortalité.

On peut utiliser comme méthode une régression logistique, comme proposé par **Brass (1971)**, entre la mortalité définie sur une population B à positionner sur la mortalité de la population A cible. Pour réaliser la régression logistique pour tout âge x et toute année t , on a la relation

$$\text{logit}(\tilde{q}_B(x, t, a, b)) = a \cdot \text{logit}(q_B(x, t)) + b. \quad (3.27)$$

On obtient les paramètres estimés $(\hat{a}, \hat{b}) = \text{argmin}_{(a,b)} \Phi$ en minimisant la fonction d'objectif

$$\Phi(a, b) = \sum_{x,t} \eta(x, t) \cdot \left[q_A(x, t) - \tilde{q}_B(x, t, a, b) \right]^2,$$

où les $\eta(x, t)$ représentent les expositions $E(x, t)$ lorsque celles-ci sont connues ou alors $\eta(x, t) = 1$ sans expositions connues comme dans le cas où l'on cherche à réaliser un positionnement entre deux tables sans volumétrie sur la population. On a ainsi pour la population A les probabilités de décès

$$q(x, t) = \frac{\exp\left(a \cdot \text{logit}(q_B(x, t)) + b\right)}{1 + \exp\left(a \cdot \text{logit}(q_B(x, t)) + b\right)}. \quad (3.28)$$

3.2.6 Les tables de mortalité TGH 05 / TGF 05 réglementaires pour les rentiers

La TGH 05 et la TGF 05 forment un couple de tables de mortalité par âge et par génération pour chaque sexe (TGH 05 pour les hommes et TGF 05 pour les femmes) qui est en vigueur depuis le 1^{er} janvier 2007. Les tables indiquent pour chaque âge x et chaque génération g la fonction de survie $l^G(x, g)$. Ces tables réglementaires pour les rentiers viennent remplacer l'ancienne table de mortalité par génération unisexe TPG 93. Ces tables ont été construites à partir de données de l'INSEE de 1960 à 2000 et des données de portefeuille pour 700 000 rentiers sur la période 1993-2005.

Dans la suite de l'étude on considèrera ces tables de mortalité pour définir les rentes viagères lors de la liquidation en rente. On considère également les tables TGH 05 et TGF 05 pour définir les taux de mortalité d'expérience des assurés jusqu'en 2021. Pour cela, on effectue les opérations suivantes :

1. On calcule les probabilités de décès par générations : $q^G(x, g) = 1 - \frac{q^G(x+1, g)}{l^G(x, g)}$,
2. On définit les probabilités de décès par période en faisant l'hypothèse : pour l'âge entier x et l'année t , on considère l'approximation $q^P(x, t) \simeq q^G(x, g = t - x)$,
3. On retient $q_H^{\text{Assuré}}(x, t) = q_{TGH05}^P(x, t)$ pour les hommes et $q_F^{\text{Assuré}}(x, t) = q_{TGF05}^P(x, t)$ pour les femmes, pour $1996 \leq t \leq 2021$ (les données des tables TGH 05 et TGF 05 étant disponibles pour $g + x \geq 1996$).

N. B. :

$q^P(x, t) \simeq q^G(x, g = t - x)$ est une approximation de la mortalité en (x, t) . Pour définir le véritable taux $q^P(x, t)$, il faudrait définir les triangles de Lexis et calculer la mortalité sur la période calendaire t en différenciant les individus de la génération g ayant eu leur x -ème anniversaire durant l'année t et ceux de la génération $g - 1$ qui était d'âge x au début de l'année t .

3.3 La calibration et la simulation des modèles de mortalité

3.3.1 La calibration des paramètres des modèles stochastiques

Les données pour la calibration des modèles

Les données HMD utilisées pour la calibration sont les décès $D(x, t)$ et les expositions $E(x, t)$ sur les âges 40 à 90 ans et les années 1969 à 2018 pour les hommes et pour les femmes. On ne retiendra que les données pour les cohortes ayant au moins cinq observations. Ainsi, la plage de calibration est

$$\left\{ (x, t) \in \llbracket x_{min} = 40, x_{max} = 90 \rrbracket \times \llbracket t_{min} = 1969, t_{max} = 2018 \rrbracket \mid t - x \geq 1883 \ \& \ t - x \leq 1974 \right\}.$$

On a ainsi $n_{obs} = 2530$ observations pour chacune des données $D(x, t)$ et $E(x, t)$.

La méthodologie de calibration des paramètres des modèles

Afin de définir le modèle de mortalité stochastique qui sera retenu par la suite, on commence par calibrer les vecteurs de N paramètres $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ (avec θ_n qui vaut $\beta_x^{(i)}$ ou $\kappa_t^{(i)}$ ou $\gamma_{t-x}^{(i)}$) des sept modèles stochastiques précédemment décrits pour chaque sexe. Pour ce faire, on maximise la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\mathbf{D}, \mathbf{E}; \Theta)$ définie par la relation 3.14 avec un algorithme de Newton-Raphson pour chercher à annuler la fonction de score $\mathbf{S}(\Theta)$ qui correspond au gradient de la log-vraisemblance :

$$\mathbf{S}(\Theta) = \nabla \mathcal{L}(\Theta) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\Theta)}{\partial \theta_n} \right)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket},$$

en utilisant pour cela la matrice hessienne $\mathbf{H}(\Theta)$ définie par

$$\mathbf{H}(\Theta) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta)}{\partial \theta_n \partial \theta_m} \right)_{(n, m) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2}.$$

On commence par initialiser le vecteur de paramètres $\hat{\Theta}_0$ avec des valeurs choisies selon le modèle. Puis à chaque étape k , tant que la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\hat{\Theta}_k)$ n'a pas convergé (on considérera l'absence de convergence tant que $|\mathcal{L}(\hat{\Theta}_k) - \mathcal{L}(\hat{\Theta}_{k-1})| > 0,0001$), on effectue les opérations suivantes :

1. On réestime en partant des paramètres $\hat{\Theta}_{k-1}$ obtenus en étape $k - 1$ le nouveau vecteur de paramètres $\hat{\Theta}_k$ pour avoir $\mathbf{S}(\hat{\Theta}_k) = \mathbf{0}$ au moyen de la relation suivante obtenue par la formule de Taylor :

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} - \mathbf{H}(\hat{\Theta}_{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}(\hat{\Theta}_{k-1}).$$

2. Si nécessaire selon le modèle, on ajuste les paramètres estimés $\hat{\Theta}_k$ avec les contraintes permettant de résoudre les problèmes d'identifiabilité du modèle.

L'algorithme de calibration que l'on implémente sur R est arrêté au bout de 1000 itérations s'il n'a pas encore convergé. On donne l'exemple de l'algorithme de calibration du modèle APC en Annexe B.

Afin d'évaluer la qualité de la calibration, on utilise le critère d'information bayésien (BIC) et le critère d'information d'Akaike (AIC) définis au Chapitre 2, pour rechercher les plus faibles AIC et BIC :

$$BIC = N \cdot \ln(n_{obs}) - 2 \cdot \mathcal{L} \quad \text{et} \quad AIC = 2 \cdot N - 2 \cdot \mathcal{L}.$$

Les résultats de la calibration

On calibre les modèles de mortalité Lee-Carter (LC), Renshaw-Haberman (RH), Age-Period-Cohort (APC), Cairns-Blake-Dowd (CBD), CBD avec cohortes 1 (M6), CBD avec cohortes 2 (M7) et CBD avec cohortes 3 (M8) pour les hommes et pour les femmes et on obtient les résultats ci-dessous :

Modèle	Log-vraisemblance	Paramètres	AIC	BIC	Itérations	Convergence
LC	-19 345	150	38 990	39 866	7	Oui
RH	-14 592	291	29 765	31 464	1000	Non
APC	-19 597	190	39 573	40 682	8	Oui
CBD	-71 514	100	143 229	143 813	11	Oui
M6	-26 939	190	54 258	55 367	66	Oui
M7	-15 408	239	31 294	32 689	217	Oui
M8	-31 497	191	63 375	64 490	30	Oui

TABLE 3.4 – Calibration des modèles de mortalité pour les hommes

Modèle	Log-vraisemblance	Paramètres	AIC	BIC	Itérations	Convergence
LC	-17 328	150	34 955	35 830	6	Oui
RH	-13 605	291	27 791	29 489	1000	Non
APC	-17 959	190	36 299	37 408	8	Oui
CBD	-156 631	100	313 462	314 045	21	Oui
M6	-21 794	190	43 969	45 078	108	Oui
M7	-17 835	239	36 147	37 542	281	Oui
M8	-22 713	191	45 808	46 923	46	Oui

TABLE 3.5 – Calibration des modèles de mortalité pour les femmes

Pour les hommes et les femmes, le modèle RH ne converge et donc il n'est pas retenu pour la suite. Les modèles LC, APC et M7 sont les modèles avec les meilleurs indicateurs et le modèle CBD a à chaque fois la plus faible log-vraisemblance. On définit également les résidus

$$R(x, t) = \frac{D(x, t) - E(x, t) \cdot \hat{m}(x, t)}{\sqrt{E(x, t) \cdot \hat{m}(x, t)}}. \quad (3.29)$$

On regarde si les signes des résidus sont aléatoirement distribués (cf. Annexe B). Certains modèles présentent des regroupements significatifs avec le même signe, notamment les modèles CBD, M6 et M8, ainsi que le modèle M7 pour les femmes.

Pour les modèles avec cohortes (CBD, M6, M7 et M8), on calibre également sur les $\gamma_c^{(i)}$ avec $c \in \llbracket 1883, 1974 \rrbracket$ un modèle *autoregressive integrated moving average* $ARIMA(p, d, q)$. Pour une série temporelle X_t , le modèle est défini par

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p'} \phi'_i L^i\right) X_t = \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i\right) (1 - L)^d X_t = \delta + \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i\right) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.30)$$

où L est l'opérateur retard avec $LX_t = X_{t-1}$ et $L^i X_t = X_{t-i}$, $p \in \mathbb{N}$ est l'ordre du processus autorégressif $AR(p)$, $d \in \mathbb{N}$ est le nombre de racines unitaires du polynôme $\Phi_0(X) = 1 - \sum_{i=1}^{p'} \phi'_i X^i$, $q \in \mathbb{N}$ est l'ordre du processus de moyenne mobile $MA(q)$, ε_t sont des bruits blancs de variance σ^2 ,

δ est une constante et $\frac{\delta}{1 - \sum_{i=1}^p \phi_i}$ est le drift. On peut choisir un modèle sans drift avec $\delta = 0$. $\Phi_0(X) = 1 - \sum_{i=1}^{p'} \phi'_i X^i$, $\Phi(X) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i X^i$ et $\Theta(X) = 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i X^i$ sont des polynômes réels de degrés respectifs $p' = p + d$, p et q . Φ et Θ sont sans racines communes et leurs racines sont de module strictement supérieur à 1.

Pour la calibration des modèles ARIMA, on considère p , d et q à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ en rejetant les modèles non conformes car présentant des racines unitaires et ceux dont la projection déterministe diverge (la projection est réalisée au moyen du package *forecast* sur R). On classe les modèles conformes selon l'indicateur AICc qui est un AIC corrigé pour les échantillons de petite taille K et défini par

$$AICc = AIC + \frac{2N(N+1)}{K-N-1}.$$

On retient pour chaque modèle les ARIMA suivants :

Modèle	Log-vraisemblance	AICc	p	d	q	Constante
APC	-78	167	2	0	1	Non
M6	95	-181	0	0	2	Non
M7	88	-168	0	0	2	Non
M8	528	-1048	1	0	1	Oui

TABLE 3.6 – ARIMA pour la modélisation des futures cohortes - Hommes

Modèle	Log-vraisemblance	AICc	p	d	q	Constante
APC	-88	188	1	0	2	Non
M6	203	-398	0	1	2	Oui
M7	242	-476	2	0	0	Non
M8	545	-1079	1	1	2	Non

TABLE 3.7 – ARIMA pour la modélisation des futures cohortes - Femmes

En se basant sur les résultats de la calibration des modèles, le modèle de mortalité final sera retenu parmi LC, APC et M7 que l'on simule ensuite.

3.3.2 La simulation des taux de mortalité futurs

La méthodologie de simulation

Pour déterminer les taux de mortalité futurs, on a besoin de simuler l'évolution des paramètres $\kappa_t^{(i)}$ pour $t \geq 2019$ et les paramètres $\gamma_c^{(i)}$ pour $c \geq 1975$. Les paramètres $\beta_x^{(i)}$ étant constants pour chaque âge x , on conserve les paramètres de la calibration.

Simulation des $\kappa_t^{(i)}$

Le vecteur de N_κ paramètres $\kappa_t = \left(\kappa_t^{(i_1)}, \dots, \kappa_t^{(i_{N_\kappa})} \right)^\top$ est simulé au moyen d'une marche aléatoire

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \delta_\kappa + \Sigma_\kappa \cdot \varepsilon_t,$$

Ici, $\delta_\kappa = \left(\delta_\kappa^{(i_1)}, \dots, \delta_\kappa^{(i_{N_\kappa})} \right)^\top$ avec $\delta_\kappa^{(i)}$ étant la moyenne des variations historiques $\Delta \kappa_t^{(i)} = \kappa_t^{(i)} - \kappa_{t-1}^{(i)}$.

\mathbf{V}_κ est la matrice de variance-covariance des variations historiques $\Delta \kappa_t^{(i)}$. Dans le cas où $N_\kappa = 1$, il

s'agit de la simple variance. Σ_{κ} est une matrice triangulaire inférieure telle que $V_{\kappa} = \Sigma_{\kappa} \cdot \Sigma_{\kappa}^{\top}$. La matrice Σ_{κ} est obtenue par la décomposition de Cholesky lorsque $N_{\kappa} > 1$. Dans le cas où $N_{\kappa} = 1$, on a à la place σ_{κ} un scalaire qui est l'écart-type des variations historiques $\Delta\kappa_t^{(i)}$. $\varepsilon_t = \left(\varepsilon_t^{(i_1)}, \dots, \varepsilon_t^{(i_{N_{\kappa}})}\right)^{\top}$ est un vecteur de N_{κ} bruits blancs de variance 1.

Dans le cas des modèles de type Lee-Carter (LC, RH et APC), on a $N_{\kappa} = 1$ et donc on calcule simplement les scalaires δ_{κ} et σ_{κ} qui sont respectivement la moyenne et l'écart-type des valeurs historiques $\Delta\kappa_t^{(2)} = \kappa_t^{(2)} - \kappa_{t-1}^{(2)}$ et ε_t est un bruit blanc de variance 1.

Dans le cas d'une projection déterministe, on a simplement l'évolution linéaire $\kappa_{t+1} = \kappa_t + \delta_{\kappa}$.

Simulation des $\gamma_c^{(i)}$

Les paramètres $\gamma_c^{(i)}$ sont simulés avec la série temporelle $ARIMA(p, d, q)$ précédemment calibrée. On utilise là encore le package *forecast*.

Les résultats de la simulation et la sélection du modèle

Dans la suite de l'étude, on cherchera à simuler une distribution de taux de mortalité à partir du 31 décembre 2021. Les données pour la calibration s'arrêtant en 2018, on projettera de façon déterministe les taux de mortalité sur les années de 2019 à 2021 avant de réaliser une projection stochastique à partir de 2022. On projette la mortalité sur une centaine d'années au moyen d'un algorithme que l'on implémente sur R.

On obtient dans le prolongement des taux historiques les projections suivantes pour les taux de mortalité (ou pour le modèle M7, les probabilités de décès) à 65 ans (en vert), 75 ans (en rouge) et 85 ans (en bleu) avec la projection déterministe et la distribution des taux obtenus dans chaque modèle (on affiche ici les quantiles 2,5%, 10%, 25%, 75%, 90% et 97,5%) :

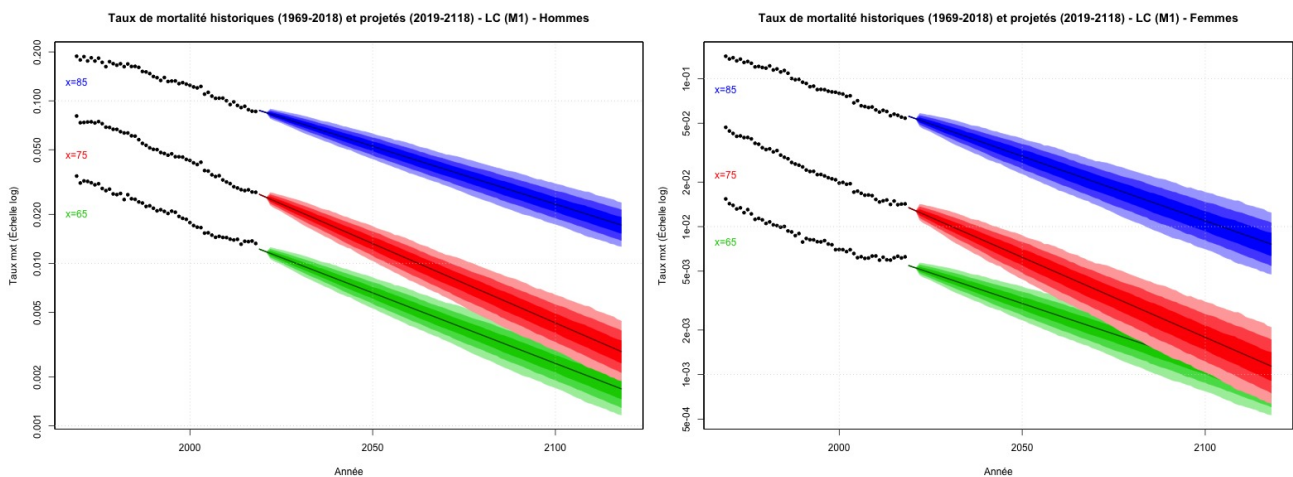


FIGURE 3.13 – Simulation des taux de mortalité avec le modèle LC

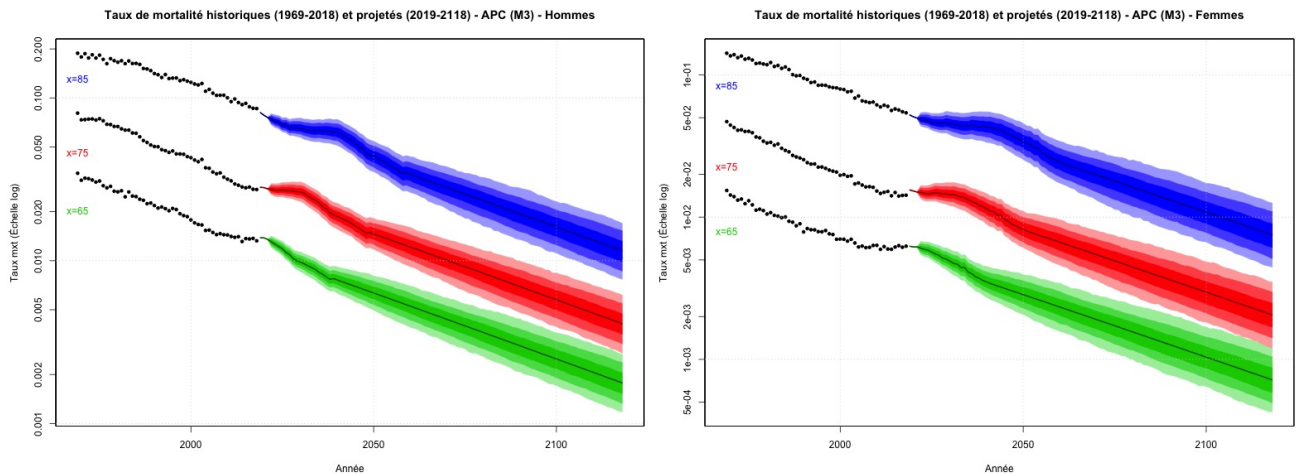


FIGURE 3.14 – Simulation des taux de mortalité avec le modèle APC

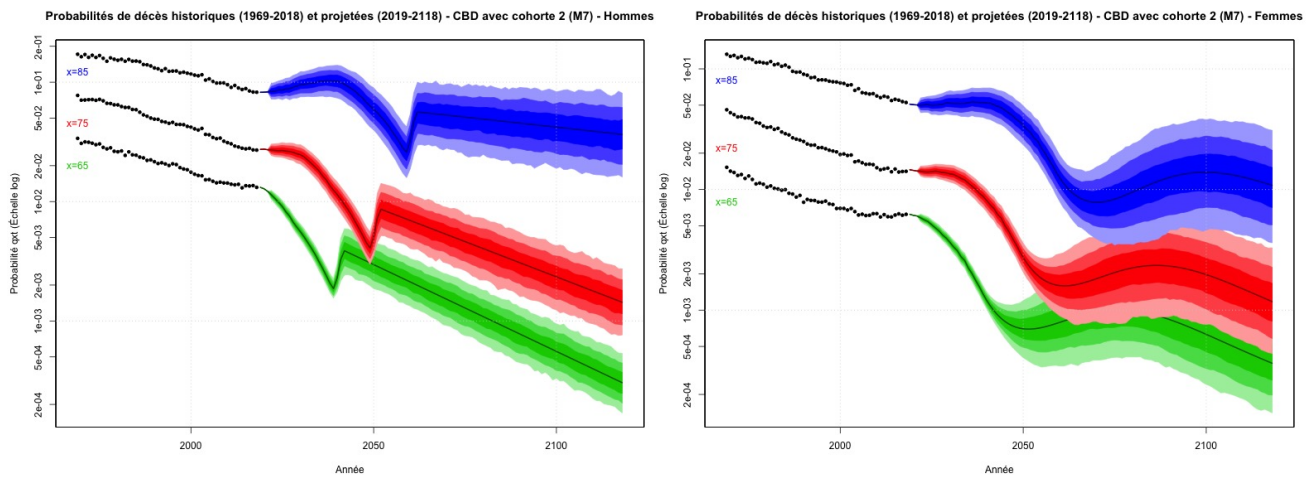


FIGURE 3.15 – Simulation des probabilités de décès avec le modèle M7

Le modèle M7 présente des projections instables des probabilités de décès avec une remontée des taux vers 2050. Le modèle LC prévoit une baisse de la mortalité à 75 ans plus importante qu'aux autres âges, la mortalité à 65 ans et à 85 ans diminuant en comparaison à une faible vitesse.

Du fait des simulations effectuées, on retiendra le modèle Age-Period-Cohort (APC) qui semble le plus approprié. Les paramètres calibrés et projetés du modèle APC sont présentés en Annexe B.

3.3.3 Le backtesting du modèle de mortalité

Avec les paramètres calibrés et la méthode de simulation présentée ci-dessus, on réalise un backtesting du modèle APC. Pour cela, on prend les paramètres précédemment calibrés en ne retenant que ceux sur la plage d'années $[[1969, 2008]]$ et on projette les taux de mortalité sur la période $[[2009, 2018]]$ pour les comparer aux taux de mortalité historiques. On obtient ci-dessous les taux de mortalité historiques (en rouge) et les taux de mortalité projetés (en noir) dans le cadre du backtesting :

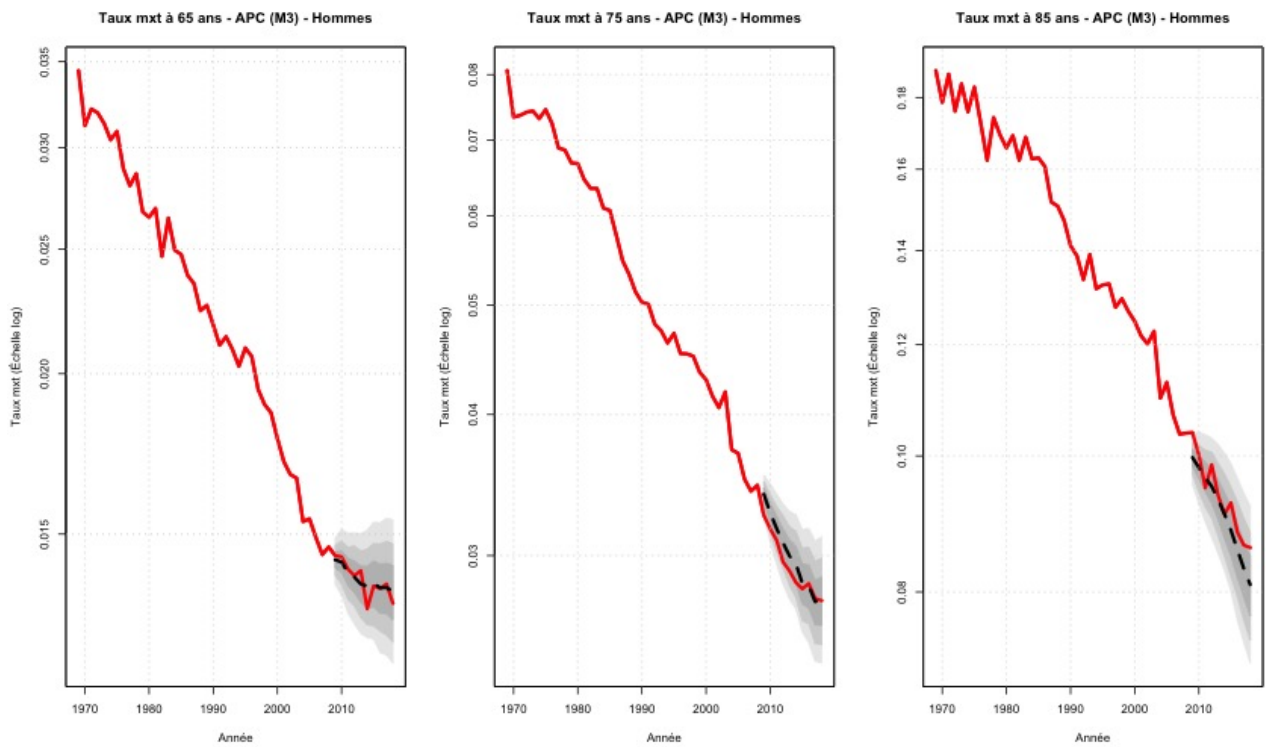


FIGURE 3.16 – Backtesting du modèle APC - Hommes (âges 65 ans, 75 ans et 85 ans)

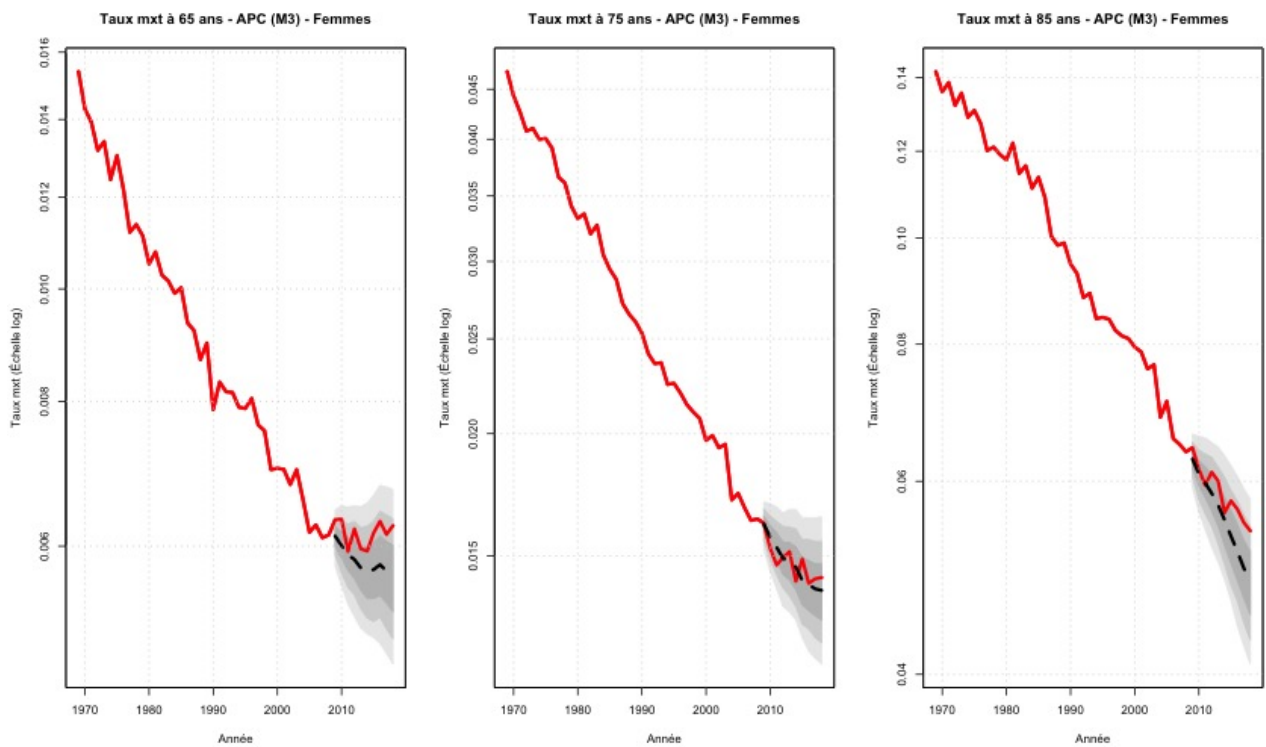


FIGURE 3.17 – Backtesting du modèle APC - Femmes (âges 65 ans, 75 ans et 85 ans)

Les taux de mortalité projetés sur la période $\llbracket 2009, 2018 \rrbracket$ suivent globalement bien les taux historiques, avec toutefois un écart un peu plus net sur les femmes à 65 ans du fait de la remontée exceptionnelle de la mortalité à cet âge durant cette période, même si les taux historiques se trouvent bien dans la distribution projetée.

3.3.4 Le positionnement des taux de mortalité et la modélisation de la mortalité aux grands âges

Avec la simulation ci-dessus, on obtient une projection des taux de mortalité $m(x, t)$ et donc des probabilités de décès $q(x, t)$ qui s'expriment sous la forme

$$q^{APC}(x, t) = 1 - e^{-e^{\left(\beta_x^{(1)} + n_a^{-1} \cdot \kappa_t^{(2)} + n_a^{-1} \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}\right)}}$$

pour les âges $\llbracket 40, 90 \rrbracket$ et les années $\llbracket 2019, 2118 \rrbracket$. Pour observer l'évolution de l'espérance de vie à la naissance, on peut étendre les $\beta_x^{(1)}$ sur les âges $\llbracket 0, 39 \rrbracket$ avec la relation suivante :

$$\forall x \in \llbracket 0, 39 \rrbracket, \beta_x^{(1)} = \beta_{40}^{(1)} + (x - 40) \cdot \frac{\beta_{90}^{(1)} - \beta_{40}^{(1)}}{90 - 40}.$$

N. B. :

Comme on a pu le voir sur la Figure 3.9, les probabilités de décès aux jeunes âges ne suivent par une loi log-linéaire et il faudrait modéliser de façon spécifique la mortalité à ces âges pour obtenir des probabilités de décès appropriées. Mais étant donné que l'on se concentrera dans la suite de l'étude sur la mortalité au-delà de 40 ans, on négligera ici cet aspect et on retiendra l'approche simplifiée décrite ci-dessus.

On positionne ensuite les probabilités de décès du modèle $q^{APC}(x, 2021)$ par rapport aux probabilités de décès $q^{Assuré}(x, 2021)$ sur la plage d'âges $x \in \llbracket 40, 90 \rrbracket$ avec le modèle de régression logistique présenté par la formule 3.27. On obtient les paramètres de positionnement suivants pour les hommes et les femmes pour le modèle de régression logistique appliqué pour tout $t \geq 2021$:

Sexe	\hat{a}	\hat{b}
Hommes	0,3779	1,2507
Femmes	0,2834	1,1690

TABLE 3.8 – Paramètres de la régression logistique des taux $q(x, t)$ pour la population des assurés

Enfin, on modélise la mortalité aux grands âges pour fermer la table de mortalité. Pour cela, on utilise le modèle de Denuit-Goderniaux avec taux asymptotique défini par la relation 3.26 pour déterminer pour chaque année t les probabilités de décès $q(x, t)$, $x \in \llbracket 91, 130 \rrbracket$. On estime par la méthode des moindres carrés ordinaires sur les âges $\llbracket 80, 90 \rrbracket$ les paramètres c_t et $q_{\omega, t} \in [50\%, 100\%]$ pour chaque année et chaque trajectoire simulée. On s'assure que sur chaque trajectoire on ait $q_{\omega, t} \leq q_{\omega, t-1}$ pour $t \geq 1$. On obtient par exemple pour le scénario déterministe :

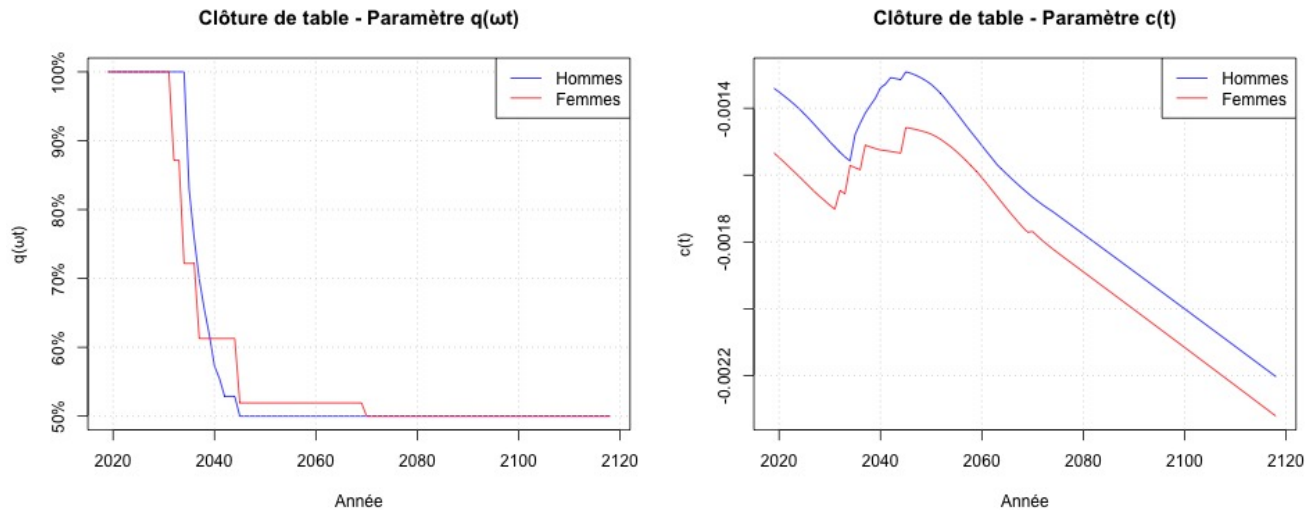


FIGURE 3.18 – Scénario déterministe - Modèle Denuit-Goderniaux avec taux asymptotique

3.4 Un modèle de mortalité basé sur l'évolution de l'espérance de vie

3.4.1 Le modèle de Bongaarts décalé

La présentation du modèle de Bongaarts

Le modèle prospectif proposé par **Bongaarts (2004)** donne une formulation des $\mu(x, t)$ qui est

$$\mu(x, t) = \alpha(t) + \frac{\nu(t) \cdot \exp(\beta \cdot x)}{1 + \nu(t) \cdot \exp(\beta \cdot x)}. \quad (3.31)$$

Ce modèle est une extension du modèle logistique sans composante temporelle proposé par Thatcher, Kannisto et Vaupel (**Thatcher et al. (1998)** et **Thatcher (1999)**) et défini par

$$\mu(x) = \alpha + \frac{\nu \cdot \exp(\beta \cdot x)}{1 + \nu \cdot \exp(\beta \cdot x)}. \quad (3.32)$$

Le modèle de Bongaarts peut également exprimer sous le format d'un modèle logistique décalé en reformulant 3.31 pour obtenir

$$\mu(x, t) = \alpha(t) + \frac{\beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda(t))]}{1 + \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda(t))]}, \quad (3.33)$$

où $M_0 + \lambda(t) = \frac{1}{\beta} \cdot \ln\left(\frac{\beta}{\nu(t)}\right)$. On notera par la suite $\Lambda(x, t) = \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda(t))]$.

Dans ce modèle, β est le paramètre d'âge, $\lambda(t)$ représente le terme de décalage temporel du modèle (en prenant par convention $\lambda(0) = 0$), $\alpha(t)$ représente la mortalité de base sur la période t et M_0 est un paramètre approchant l'âge modal en $t = 0$ (cf. Annexe B).

Avec la relation 3.33, on détermine les fonctions de survie par période $l^P(x, t)$ et par cohorte $l^G(x, g)$ avec $g = t - x$:

$$l^P(x, t) = \exp(-\alpha(t) \cdot x) \cdot \left(\frac{1 + \Lambda(0, t)}{1 + \Lambda(x, t)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (3.34)$$

$$l^G(x, g) = \exp\left(-\int_0^x \left(\alpha(u) + \frac{\Lambda(u, g + u)}{1 + \Lambda(u, g + u)} \right) du\right). \quad (3.35)$$

Les paramètres du modèle de Bongaarts décalé sont définis en estimant tout d'abord les paramètres d'un modèle de Thatcher pour chaque année t . Puis le paramètre β du modèle de Bongaarts décalé est défini comme la moyenne des paramètres $\beta_{Thatcher}(t)$. Enfin, on obtient les paramètres $\alpha(t)$, M_0 et $\lambda(t)$ en cherchant à minimiser la somme quadratique des résidus définis par la relation 3.29.

L'évolution de l'espérance de vie avec le modèle de Bongaarts décalé

En intégrant la relation 3.34, on obtient l'espérance de vie par période $e^P(x, t)$ sous le modèle de Bongaarts décalé :

$$e^P(x, t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha(t) \cdot u) \cdot \left(\frac{1 + \Lambda(x, t)}{1 + \Lambda(x + u, t)} \right)^{\frac{1}{\beta}} du.$$

En dérivant ensuite $e^P(x, t)$ par rapport à t , on obtient la relation :

$$\frac{\partial e^P}{\partial t}(x, t) = \lambda'(t) \cdot \left(1 - \mu(x, t) \cdot e^P(x, t) \right) - \alpha'(t) \cdot \int_0^{+\infty} u \cdot \frac{l^P(x + u, t)}{l^P(x, t)} du. \quad (3.36)$$

Une variation : le modèle Bongaarts décalé à tendance linéaire

On choisit ici pour le modèle de Bongaarts un paramètre $\alpha(t)$ constant et un paramètre de décalage temporel $\lambda(t)$ linéaire. Avec $\Lambda(x, t) = \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]$, on a le modèle :

$$\mu(x, t) = \alpha + \frac{\beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]}{1 + \beta \cdot \exp[\beta \cdot (x - M_0 - \lambda \cdot t)]} = \alpha + \frac{\Lambda(x, t)}{1 + \Lambda(x, t)}. \quad (3.37)$$

Les fonctions de survie par période et par cohorte deviennent :

$$l^P(x, t) = \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \left(\frac{1 + \Lambda(0, t)}{1 + \Lambda(x, t)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (3.38)$$

$$l^G(x, g) = \begin{cases} \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \left(\frac{1 + \Lambda(0, g)}{1 + \Lambda(x, g + x)} \right)^{\frac{1}{\beta \cdot (1 - \lambda)}} & \text{si } \lambda \neq 1, \\ \exp(-\mu(0, g) \cdot x) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

La formule 3.36 de dérivation de l'espérance de vie par période par rapport au temps se simplifie par :

$$\frac{\partial e^P}{\partial t}(x, t) = \lambda \cdot \left(1 - \mu(x, t) \cdot e^P(x, t) \right). \quad (3.40)$$

Avec la relation 3.10, $e^P(x, t)$ est, tout comme $\mu(x, t)$, solution de l'équation de transport linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \\ u(x, t = 0) = u^0(x), \end{cases} \quad (3.41)$$

avec les conditions initiales respectives $e(x, t = 0) = e^0(x)$ et $\mu(x, t = 0) = \mu^0(x)$.

On a alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+$:

$$e^P(x, t) = e^P(x + \lambda \cdot \tau, t + \tau) \quad \text{et} \quad \mu(x, t) = \mu(x + \lambda \cdot \tau, t + \tau).$$

Avec la relation 3.40, on peut estimer le paramètre λ à partir de données historiques sur l'espérance de vie à la naissance et son évolution, ainsi que la force de mortalité à la naissance. Il est à noter qu'aujourd'hui, avec la baisse importante de la mortalité infantile, $\mu(0)$ est très faible. Et lorsque $\mu(0, t) \simeq 0$, on a $\frac{\partial e^P}{\partial t}(0, t) \simeq \lambda$ et donc l'espérance de vie à la naissance par période évolue de façon quasi-linéaire par rapport au temps, de même que l'âge modal (cf. Annexe B).

N. B. :

Les taux de mortalité avec le modèle de Bongaarts sont logit-linéaires, contrairement aux taux réels aux jeunes âges. Comme lors de l'extension du modèle APC aux jeunes âges, on négligera cet aspect.

La méthodologie de calibration des paramètres du modèle de Bongaarts décalé linéaire sur les âges et les n années $\{t_1, \dots, t_n\}$ (avec $t_i = i - n$ d'où $t_n = 0$) de la plage de calibration est la suivante :

— Étape 1 : Force de mortalité et espérance de vie à la naissance réelles

Avec les hypothèses du paragraphe 3.2.1, on détermine la force de mortalité $\mu(0, t_n = 0)$ et l'espérance de vie à la naissance historique par période $e_0(t)$ pour chaque année t .

— Étape 2 : Estimation de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance

On détermine l'évolution globale de l'espérance de vie à la naissance $e'_0 = \frac{e_0(t_n) - e_0(t_1)}{n - 1}$.

— Étape 3 : Estimation des paramètres du modèle de Bongaarts linéaire

- Avec les paramètres α , β et M_0 , on a la force de mortalité à la naissance en t_n qui est

$$\tilde{\mu}(0, t_n = 0, \alpha, \beta, M_0) = \alpha + \frac{\beta \cdot \exp(-\beta \cdot M_0)}{1 + \beta \cdot \exp(-\beta \cdot M_0)},$$

et à tous les âges et toutes les périodes on a

$$\tilde{\mu}(x, t, \alpha, \beta, M_0) = \alpha + \frac{\beta \cdot \exp\left[\beta \cdot \left(x - M_0 - \frac{e'_0}{1 - \tilde{\mu}(0, t_n, \alpha, \beta, M_0) \cdot e_0(0)} \cdot t\right)\right]}{1 + \beta \cdot \exp\left[\beta \cdot \left(x - M_0 - \frac{e'_0}{1 - \tilde{\mu}(0, t_n, \alpha, \beta, M_0) \cdot e_0(0)} \cdot t\right)\right]}.$$

- On minimise la fonction d'objectif suivante pour obtenir les paramètres estimés $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et \hat{M}_0 :

$$\Phi(\alpha, \beta, M_0) = \sum_{x, t} \frac{[D(x, t) - E(x, t) \cdot \tilde{\mu}(x, t, \alpha, \beta, M_0)]^2}{E(x, t) \cdot \tilde{\mu}(x, t, \alpha, \beta, M_0)}.$$

- Avec les paramètres $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et \hat{M}_0 , on recalcule, avec les formules précédemment pour le modèle de Bongaarts décalé linéaire, $\mu(0, 0)$, la force de mortalité à la naissance, et $e^P(0, 0)$

l'espérance de vie à la naissance en $t = 0$, puis le paramètre $\lambda = \frac{e'_0}{1 - \mu(0, 0) \cdot e^P(0, 0)}$.

Lorsque l'on souhaite positionner le modèle par rapport à une autre table de mortalité de référence en $t_n = 0$, on détermine les paramètres $(\hat{\alpha}_{Ref}, \hat{\beta}_{Ref}, \hat{M}_{0;Ref}) = \operatorname{argmin}_{(\alpha_{Ref}, \beta_{Ref}, M_{0;Ref})} \Phi$ avec la fonction d'objectif à minimiser :

$$\Phi(\alpha_{Ref}, \beta_{Ref}, M_{0;Ref}) = \sum_x \left[1 - \frac{\tilde{q}(x, 0, \alpha_{Ref}, \beta_{Ref}, M_{0;Ref})}{q(x, 0)} \right]^2.$$

Pour la suite, on positionne le modèle par rapport aux probabilités de décès de la population des assurés $\{q^{Assuré}(x, 2021), x \in \llbracket 30, 120 \rrbracket\}$ pour chaque sexe afin d'estimer les paramètres $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et \hat{M}_0 en conséquence. L'estimation du paramètre $\hat{\lambda}$ est ensuite réalisée avec la méthode précédemment décrite en conservant la valeur de e'_0 définie sur la population nationale. En implémentant l'algorithme de calibration du modèle sur R, on obtient les paramètres suivants :

Sexe	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{M}_0	$\hat{\lambda}$
Hommes	$2,2698 \cdot 10^{-4}$	0,1289	89,7773	0,2529
Femmes	$3,1231 \cdot 10^{-4}$	0,1277	93,4611	0,2191

TABLE 3.9 – Paramètres du modèle de Bongaarts décalé linéaire pour la population des assurés

3.4.2 Les scénarios d'évolution de l'espérance de vie à la naissance

Bien que l'espérance de vie humaine ait grandement augmenté depuis 150 ans et qu'elle est susceptible de continuer à croître dans le futur, il n'y a aujourd'hui pas de consensus parmi les scientifiques et experts en la matière sur le nombre d'années dont elle pourrait encore augmenter, ni même s'il existe un plafond, ce que semblait réfuter l'article d'Oeppen & Vaupel. On approche par la suite une modélisation prospective de la mortalité future par des dynamiques possibles pour l'espérance de vie à la naissance allant de la vision "pessimiste" avec peu d'augmentations possibles à la vision "optimiste" avec la poursuite de l'accroissement de la durée de vie humaine grâce aux progrès scientifiques.

En utilisant le modèle de Bongaarts décalé linéaire (BDL) précédemment décrit, on peut obtenir des évolutions d'espérance de vie à la naissance qui suivent une tendance linéaire. Pour cela, on peut générer une distribution des e'_0 donnant l'évolution de l'espérance de vie par période à la naissance sur l'ensemble de la projection pour obtenir, avec les paramètres α , β et M_0 fixés, la distribution des λ .

Pour la projection de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance, on considère la variable aléatoire e'_0 d'espérance $\mathbb{E}[e'_0] = 0,2$ à valeurs comprises entre 0 (i.e. pas d'augmentation de l'espérance de vie) et 0,33 (i.e. une augmentation de 4 mois/ans, plus faible que la plus haute tendance long-terme observée par le passé à 0,40 entre 1900 et 1970, cf. Figure 3.3). Afin de modéliser cette distribution e'_0 , on sélectionne une loi bêta-PERT à trois paramètres a , b et c (cf. Annexe A). On sélectionne donc :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,2175 \quad \text{et} \quad c = 0,33.$$

On transforme ensuite la distribution de e'_0 en une distribution de λ pour les hommes et pour les femmes avec la relation $\lambda = \frac{e'_0}{1 - \mu(0, 0) \cdot e^P(0, 0)}$.

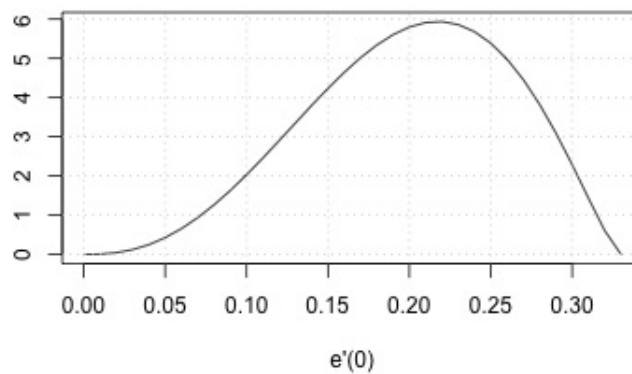


FIGURE 3.19 – Densité de probabilité de $e'_0 \sim PERT(a = 0, b = 0,2175, c = 0,33)$

3.4.3 La comparaison avec la projection de la mortalité du modèle APC

Avec les modèles APC et BDL, on illustre les espérances de vie par cohorte pour diverses générations à fin 2021 et l'espérance de vie par période future pour les hommes et les femmes. Les deux modèles donnent des espérances de vie par cohorte sur le scénario déterministe supérieures aux tables TGH 05 / TGF 05. Par ailleurs, le modèle BDL donne un plus large intervalle de prédiction [2,5%, 97,5%] que le modèle APC et un non-ralentissement de l'évolution de l'espérance de vie par période sur le scénario déterministe contrairement au modèle APC. En revanche, la baisse de l'entropie est moins marquée sur le modèle BDL notamment du fait du paramètre α restant constant sur la projection.

Âge au 31/12/2021	TGH 05	APC	BDL
40	52,1	55,4 [53,3 - 57,5]	55,6 [48,6 - 62,8]
45	46,5	49,3 [47,1 - 51,2]	49,5 [43,4 - 55,8]
50	40,9	43,0 [40,8 - 44,9]	43,4 [38,2 - 48,8]
55	35,4	36,4 [34,3 - 38,3]	37,4 [33,0 - 41,9]
60	30,1	31,3 [29,3 - 32,9]	31,6 [28,0 - 35,3]
65	24,9	26,5 [24,8 - 27,9]	26,0 [23,2 - 28,9]
70	19,9	21,7 [20,2 - 22,9]	20,8 [18,6 - 22,9]

TABLE 3.10 – Espérances de vie cohorte - Hommes (Scénario déterministe & intervalle de prédiction)

Âge au 31/12/2021	TGF 05	APC	BDL
40	55,6	57,4 [54,8 - 59,8]	60,0 [52,4 - 67,9]
45	50,0	51,3 [48,5 - 53,6]	53,9 [47,1 - 60,9]
50	44,5	45,2 [42,4 - 47,5]	47,8 [41,9 - 53,9]
55	39,1	39,3 [36,8 - 41,5]	41,8 [36,7 - 46,9]
60	33,7	34,1 [31,7 - 36,0]	35,8 [31,6 - 40,1]
65	28,4	29,1 [27,0 - 30,8]	30,1 [26,7 - 33,5]
70	23,2	24,2 [22,4 - 25,8]	24,6 [22,0 - 27,3]

TABLE 3.11 – Espérances de vie cohorte - Femmes (Scénario déterministe & intervalle de prédiction)

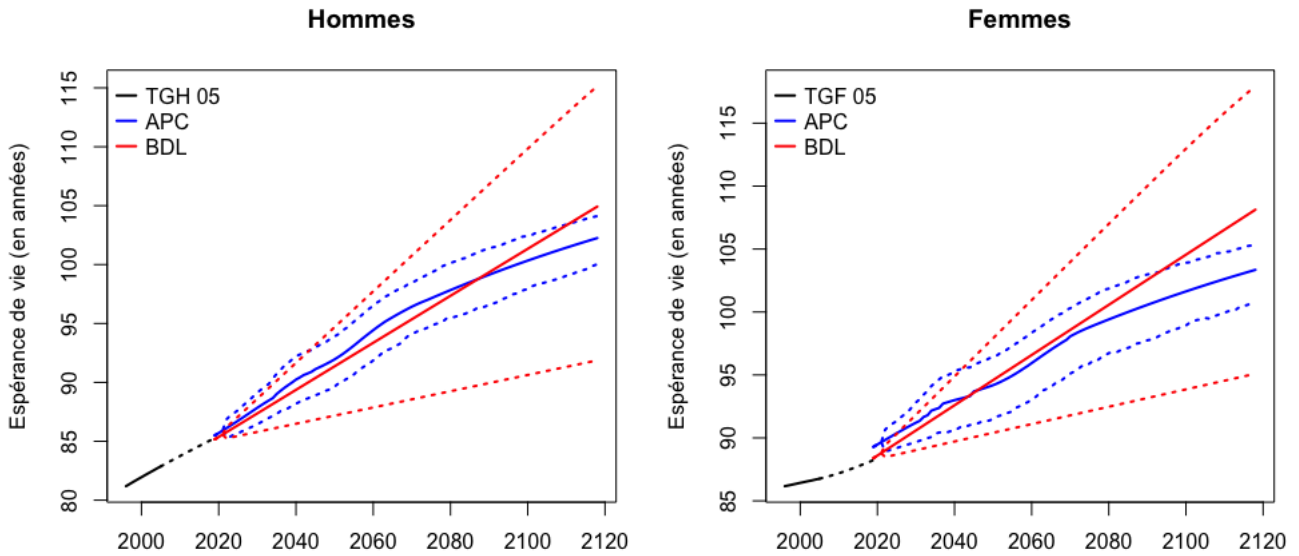


FIGURE 3.20 – Projection de $e^P(0, t)$ - (Scénario déterministe & intervalle de prédiction)

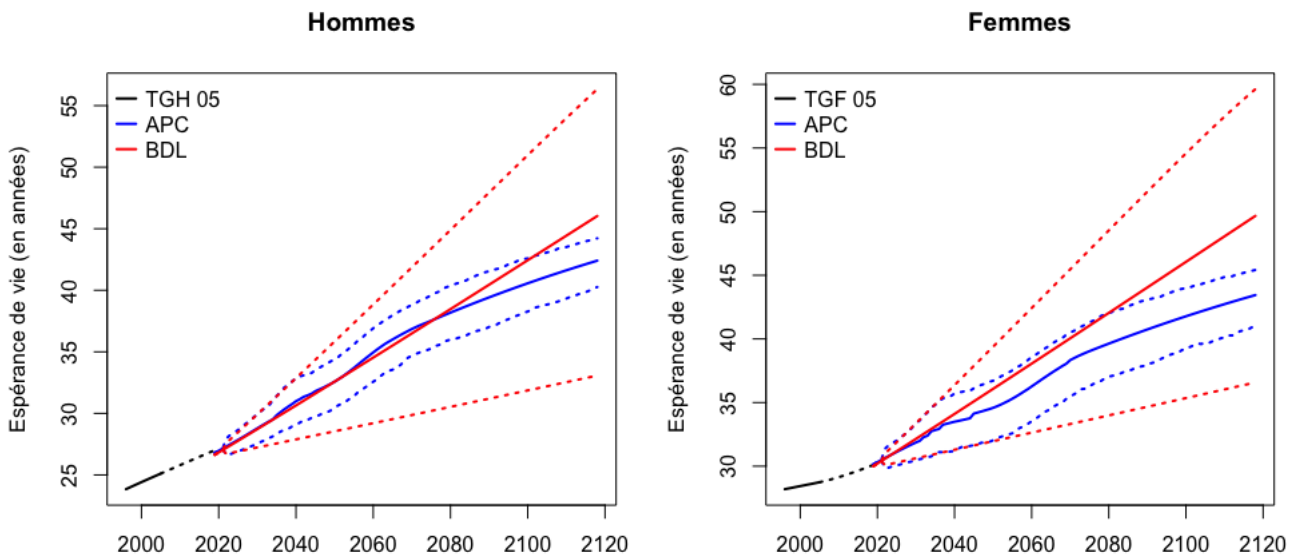


FIGURE 3.21 – Projection de $e^P(60, t)$ - (Scénario déterministe & intervalle de prédiction)

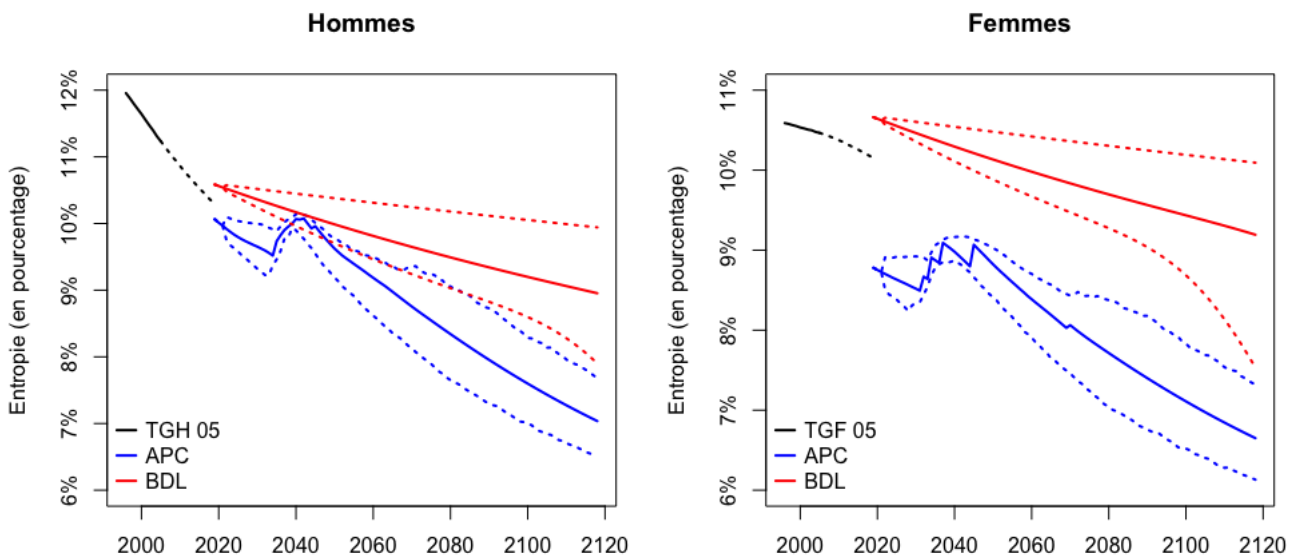


FIGURE 3.22 – Projection de $H(t)$ - (Scénario déterministe & intervalle de prédiction)

Chapitre 4

Optimisation des comportements en épargne-retraite

4.1 Le cadre de l'étude : les produits et les assurés

On s'intéresse ici aux produits d'épargne-retraite souscrits par des assurés encore en activité. Les produits proposent différentes garanties optionnelles aux assurés pour leur permettre de se couvrir face aux risques financiers, de mortalité et de longévité. Les produits ici considérés sont une assurance-vie et un Plan d'Épargne Retraite (PER) assurantiel (hors C3 qui est sans liquidation en capital). Toutes les modélisations dans cette partie sont effectuées au moyen d'algorithmes implémentés sur R.

Les opérations en phase d'épargne

En phase d'épargne et jusqu'à la liquidation lors du départ en retraite, les assurés peuvent verser des primes sur le contrat et effectuer des rachats partiels ou totaux, la capacité d'effectuer des rachats étant limitée sur le PER aux cas de force majeure et l'acquisition de la résidence principale. En cas de décès, un capital est versé au(x) bénéficiaire(s) de l'assuré. L'assuré peut également modifier son âge de départ à la retraite initialement prévu à 65 ans.

Les supports financiers et l'allocation en phase d'épargne

Les primes versées par les assurés sont investies sur différents supports financiers. Classiquement, les supports proposés par les assureurs sont des unités de compte (UC) et le fonds en euros. Pour ce dernier, l'épargne placée y est garantie (nette ou brute de frais de gestion) sans TMG et on a le versement annuel d'une participation aux bénéfices aux assurés selon les résultats techniques et financiers de l'assureur. Pour simplifier la modélisation de l'évolution de l'épargne, on supposera que les primes sont investies sur l'actif sans risque rémunéré au taux sans risque qui est strictement positif net de frais (remplaçant le fonds en euros) sans taux garanti, et sur les actifs Actions et Immobilier (pour les supports UC) modélisés au sein du générateur de scénarios économiques du Chapitre 2.

En univers risque-neutre sans prime de risque sur les actifs, on supposera en phase d'épargne une allocation par horizon avec la baisse de la volatilité totale et la hausse de la part d'actif sans risque à l'approche de la retraite. L'assureur effectue des arbitrages mensuels pour respecter l'allocation.

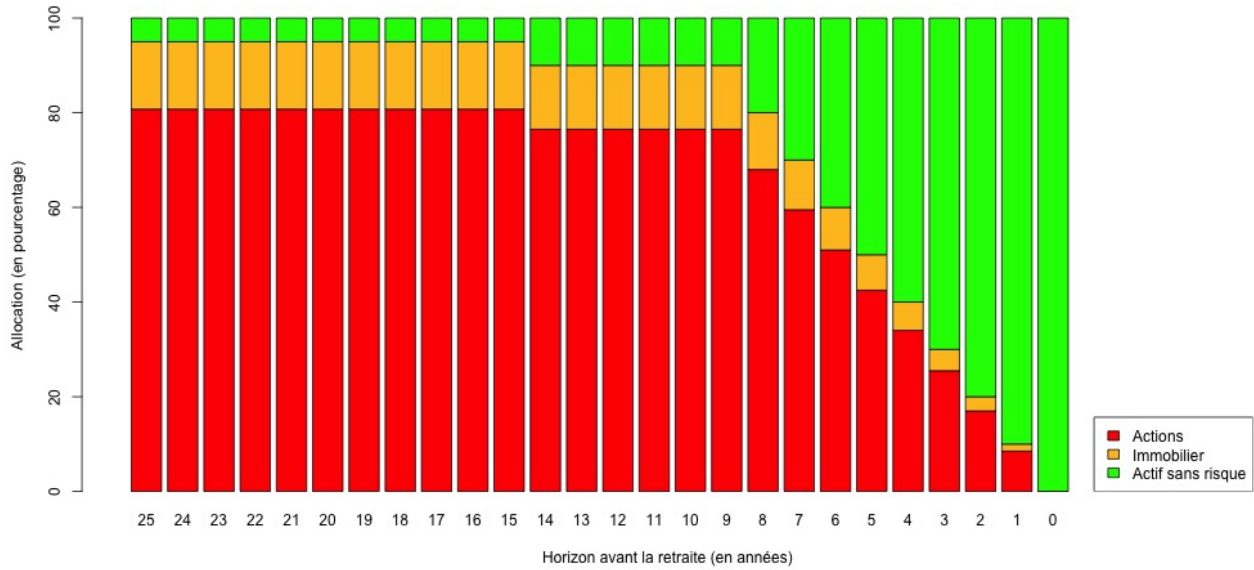


FIGURE 4.1 – Allocation de l'épargne jusqu'au départ en retraite de l'assuré

Les garanties optionnelles des produits et les choix à la liquidation

Lors de la liquidation de l'épargne au moment de son départ à la retraite, l'assuré a le choix de percevoir un capital unique ou une rente viagère ou une combinaison des deux. On supposera que la rente viagère est une rente simple, sans réversion ni annuités garanties. La rente est versée mensuellement à terme échu (à condition que l'assuré soit toujours en vie) et le montant de la rente versée est déterminé selon le taux technique et la table de mortalité appliqués. Hors garantie spécifique, on considérera que l'assureur applique la table de mortalité par sexe obtenue avec le scénario déterministe du modèle Age-Period-Cohort (APC) défini au Chapitre 3.

Pour se couvrir face aux différents risques, des garanties optionnelles sont proposées aux assurés qui prennent effet durant la phase d'épargne ou à la liquidation. Elles sont souscrites ou non à l'ouverture du contrat par l'assuré et on considère que ce choix est immuable sur toute la durée du contrat.

Garantie	Application	Description
Garantie plancher en cas de décès (GPD)	Phase d'épargne	En cas de décès de l'assuré en phase d'épargne, un capital minimum G_t est versé au(x) bénéficiaire(s).
Garantie plancher en cas de vie (GPV)	À la liquidation	À la liquidation, un capital minimum G_t est versé à l'assuré s'il choisit de sortir en capital.
Garantie de table de mortalité (GT)	À la liquidation	À la liquidation, une table de mortalité garantie est appliquée pour la conversion de l'épargne en rente.

TABLE 4.1 – Garanties optionnelles sur les produits

Le capital minimum garanti G_t est la somme des primes nettes de frais versées jusqu'en t réduite par les rachats précédents, sans effet cliquet ou revalorisation. Les tables de mortalité garanties sont les tables actuelles TGH 05 / TGF 05, en supposant la différenciation par sexe possible. La table garantie est appliquée si elle est plus avantageuse que la table en vigueur au moment de la liquidation.

Les frais

L'assureur applique sur les produits différents frais qui sont définis par une assiette et un taux. Des frais spécifiques pour les garanties optionnelles précédemment décrites sont prélevés sur l'épargne. Ceux-ci peuvent être définis en fonction de l'encours de l'épargne pour la garantie de table, ou en fonction du montant de la base garantie pour les garanties plancher en cas de décès ou en cas de vie.

Frais	Notation	Assiette	Taux
Frais sur prime	α_{Π}	Prime Π_t	3,00%
Frais sur rente	α_R	Rente R	1,00%
Frais de gestion	α_A^E	Épargne A_t	0,50%
Frais pour garantie de table GT	α_A^{GT}	Épargne A_t	0,40%
Frais pour garantie plancher en cas de décès GPD	α_G^{GPD}	Garantie G_t	0,35%
Frais pour garantie plancher en cas de vie GPV	α_G^{GPV}	Garantie G_t	1,00%

TABLE 4.2 – Frais sur les produits

Lorsque la garantie n'est pas appliquée, les frais liés sont nuls. On notera respectivement $\mathbb{1}_{GT}$, $\mathbb{1}_{GPD}$ et $\mathbb{1}_{GPV}$ les fonctions indicatrices de souscription des garanties GT, GPD et GPV. On considérera dans la suite les frais totaux sur l'épargne et la garantie qui sont respectivement définis par

$$\alpha_A = \alpha_A^E + \alpha_A^{GT} \cdot \mathbb{1}_{GT} \quad \text{et} \quad \alpha_G = \alpha_G^{GPD} \cdot \mathbb{1}_{GPD} + \alpha_G^{GPV} \cdot \mathbb{1}_{GPV}.$$

N. B. :

Classiquement, les frais de gestion sont différenciés entre le fonds en euros et les unités de compte mais on considérera ici des frais identiques pour tous les actifs. On supposera l'absence de frais sur les arbitrages, bien que certains assureurs appliquent des frais selon le produit et le mode de gestion. On considère aussi l'absence de frais sur la sortie en capital à la liquidation et en cas de rachat (partiel ou total). Il est à noter que les frais appliqués peuvent grandement varier d'un assureur à un autre.

Les assurés

On considérera des assurés hommes et femmes âgés de 40 ans et 50 ans au 31 décembre (nés en 1981 et 1971) avec un départ en retraite prévu à 65 ans au sein d'un portefeuille suffisamment diversifié. On suppose que les assurés ont une durée de vie résiduelle avec des probabilités de décès définies par les modèles Age-Period-Cohort (APC) ou Bongaarts Décalé Linéaire (BDL) introduits au Chapitre 3.

Les limites du cadre de l'étude

On retient ici plusieurs hypothèses simplificatrices comme le remplacement du fonds en euros par l'actif sans risque, l'allocation financière par horizon non modifiable (en réalité, l'assuré peut choisir parmi plusieurs modes de gestion et optimiser son allocation), la limitation des choix à la liquidation (sans les différentes options de rente pouvant exister et la sortie en capital fractionné), l'absence de transferts entrants et sortants sur le PER et la différenciation par sexe des tables de mortalité actuellement non permise sur l'assurance-vie et le PERIN.

Par ailleurs, on décrira les impacts de la fiscalité ci-après sans pour autant réaliser les applications numériques qui dépendent de la situation fiscale de l'assuré, de son imposition sur le revenu, des autres

produits similaires qu'il peut détenir, et de l'évolution des barèmes fiscaux (l'assuré étant exposé aux risques liés aux changements de fiscalité). L'application de la fiscalité décrite au Chapitre 1 qui dépend de la situation de l'assuré peut avoir un impact sur les stratégies de comportement car cela modifie les équilibres entre les flux de rachats, les capitaux décès et les sommes perçues dès la liquidation.

4.2 La modélisation de l'épargne et des garanties

4.2.1 La projection de l'épargne et de la base garantie

À chaque date $t \in [0, T]$, avec la date de liquidation T , on note A_t la **valeur de l'épargne** composée des différents actifs financiers décrits précédemment :

- S_t l'actif Actions,
- I_t l'actif Immobilier,
- B_t l'actif sans risque.

avec les taux d'allocation respectifs θ_t^S et θ_t^I et θ_t^B tels que $\theta_t^S + \theta_t^I + \theta_t^B = 1$. On notera $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^S, \theta_t^I, \theta_t^B) \in [0, 1]^3$. Si A_t atteint 0 pour $t < T$, le contrat d'épargne est clôturé avant la liquidation. On note $\mathbf{A} = (A_t)_{0 \leq t \leq T}$.

En cas d'un rachat partiel ou du versement d'une prime, ceux-ci sont effectués selon la répartition des actifs au sein de l'épargne afin de respecter l'allocation en vigueur. On notera en t :

- $\Gamma_t = \gamma_t \cdot A_{t-}$: le rachat effectué avec le taux de rachat $\gamma_t \in [0, 1]$. $A_{t+} = A_{t-} - \Gamma_t$ est l'épargne après rachat. Pour $\gamma_t = 1$, le rachat est total à la date t et cela met fin au contrat.
- $\Pi_t = \Pi_t^B \cdot (1 - \alpha_\Pi)$: la prime nette versée, Π_t^B étant la prime brute et α_Π les frais sur primes.

On note $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, la **stratégie de rachats** en montants de l'assuré jusqu'à la liquidation (et $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la stratégie exprimée en taux d'épargne résiduelle), ainsi que $\boldsymbol{\Pi} = (\Pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ la série de primes nettes versées par l'assuré. On supposera l'absence de rachat en $t_0 = 0$ et l'absence de prime et de rachat en $t_K = T$, i.e. $\Gamma_0 = \Gamma_T = \Pi_T = 0$.

On définit également $\mathbf{G} = (G_t)_{0 \leq t \leq T}$ où G_t est la **base garantie** en t . En l'absence de rachats, G_t est la somme non revalorisée des primes nettes versées sur le contrat. En cas de rachat partiel, la base garantie G_t est réduite proportionnellement au taux de rachat effectué sur l'épargne A_t . On notera par convention $G_t = 1$ en l'absence des deux garanties plancher GPD et GPV. Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , on a alors pour l'épargne A_t et la base garantie G_t la dynamique :

$$\begin{cases} dA_{t-} = A_{t-} \left(\theta_t^S \frac{dS_t}{S_t} + \theta_t^I \frac{dI_t}{I_t} + \theta_t^B \frac{dB_t}{B_t} - \alpha_A dt \right) - \alpha_G G_{t-} dt, & A_t \geq 0 \quad \text{avant prime et/ou rachat,} \\ A_{t+} = A_{t-}(1 - \gamma_t) + \Pi_t \quad \text{et} \quad G_{t+} = G_{t-}(1 - \gamma_t) + \Pi_t & \text{lors de la prime et/ou du rachat.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec la relation 2.31, on peut reformuler le premier membre de la dynamique précédemment décrite :

$$dA_{t-} = (r_t - \alpha_A) A_{t-} dt + \theta_t^S A_{t-} \sum_{j=1}^3 \sigma_{1,j;t} dW_t^j + \theta_t^I A_{t-} \sum_{j=1}^3 \sigma_{2,j;t} dW_t^j - \alpha_G G_{t-} dt,$$

où :

$$dr_t = \kappa_r (\theta_r - r_t) dt + \sqrt{r_t} \sum_{j=1}^3 \sigma_{3,j;t} dW_t^j.$$

On réalisera une projection mensuelle de l'épargne et la base garantie à partir du 31 décembre 2021 aux dates t_k pour $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_K = T$, où $t_k = t_{k-1} + h$ et $h = 1/12$. Pour cela, on discrétise le processus A_t grâce aux relations 2.32. On notera τ_A la date à laquelle on a $A_{\tau_A} = 0$ si l'épargne devient nulle avant la liquidation, notamment en cas de rachat total (par convention, si A_t ne devient pas nul avant la liquidation, on a $\tau_A > T$). On a pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } t_k \leq \min(\tau_A, T) - \text{Avant prime et/ou rachat :} \\ \quad \circ A_{t_k}^- = \left[A_{t_{k-1}} \left(\theta_{t_{k-1}}^S \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} + \theta_{t_{k-1}}^I \frac{I_{t_k}}{I_{t_{k-1}}} + \theta_{t_{k-1}}^B \frac{B_{t_k}}{B_{t_{k-1}}} - \alpha_A h \right) - \alpha_G G_{t_{k-1}} h \right]^+, \\ \quad \circ G_{t_k}^- = G_{t_{k-1}}. \\ \bullet \text{ Si } t_k \leq \min(\tau_A, T) - \text{Lors de la prime et/ou du rachat (avec en } t_K = T, \Pi_T = \Gamma_T = 0) : \\ \quad \circ A_{t_k}^+ = \left[A_{t_k}^- - \Gamma_{t_k} \right]^+ + \Pi_{t_k} \cdot \mathbb{1}_{\{\Gamma_{t_k} < A_{t_k}^-\}} = A_{t_k}^- (1 - \gamma_{t_k}) + \Pi_{t_k} \cdot \mathbb{1}_{\{\gamma_{t_k} < 1\}}, \\ \quad \circ G_{t_k}^+ = G_{t_k}^- (1 - \gamma_{t_k}) + \Pi_{t_k} \cdot \mathbb{1}_{\{\gamma_{t_k} < 1\}}. \\ \bullet \text{ Si } t_k > \tau_A : A_{t_k} = G_{t_k} = \Pi_{t_k} = \Gamma_{t_k} = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

On introduit la **“moneyness”** $M_t = \frac{A_t}{G_t}$ (avec par convention $M_t = 0$ lorsque $A_t = G_t = 0$) pour valoriser les options GPD et GPV, de type put et de strike G_t , si elles étaient exercées en t :

- $M_t < 1$, i.e. $A_t < G_t$: l'option est dans la monnaie (*“in the money”*, ITM), il y a un intérêt à l'exercer car sa valeur intrinsèque est positive,
- $M_t = 1$, i.e. $A_t = G_t$: l'option est à la monnaie (*“at the money”*, ATM), le sous-jacent a la même valeur que le strike,
- $M_t > 1$, i.e. $A_t > G_t$: l'option est hors de la monnaie (*“out of the money”*, OTM), il n'y a pas d'intérêt à l'exercer car sa valeur intrinsèque est nulle.

On illustre ci-dessous l'épargne A_t , la base garantie G_t et la moneyness M_t projetées mensuellement sur 25 ans à partir du 31 décembre 2021 avec toutes les garanties optionnelles souscrites par l'assuré, avec $A_0 = G_0 = 10\,000\text{€}$, sans primes futures, et des rachats partiels de $\gamma_t = 2,5\%$ de l'épargne effectués chaque fin d'année (tous les douze mois) sauf la dernière année quand l'assuré part à la retraite et liquide son épargne. On observe notamment plusieurs trajectoires pour lesquelles $\tau_A < T$.

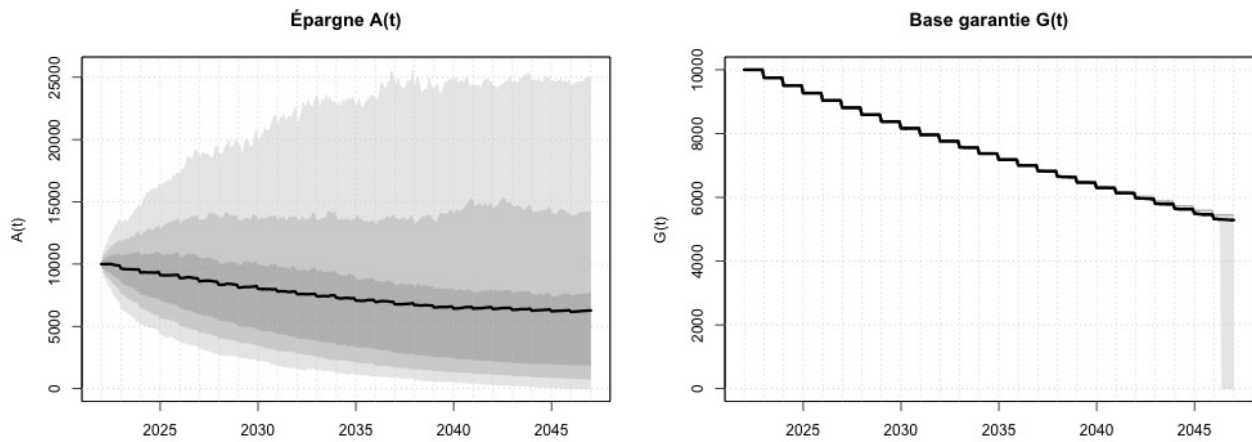
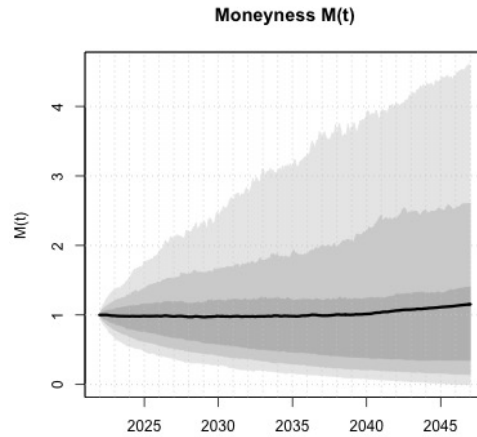


FIGURE 4.2 – Projection de l'épargne A_t et de la base garantie G_t

FIGURE 4.3 – Moneyiness projetée M_t (avec $M_0 = 1$)

N. B. :

La moneyiness initiale, et donc l'écart entre A_0 et G_0 , a un impact sur la dynamique de l'épargne, notamment du fait des frais sur la base G_t prélevés sur A_t et de la motivation des assurés à payer des primes et effectuer des rachats.

4.2.2 La projection de la mortalité de l'assuré

Sous la mesure de probabilité \mathbb{M} , la durée de vie résiduelle \mathcal{T}_x de l'assuré d'âge x en $t_0 = 0$ pour la cohorte g est une variable aléatoire qui suit la loi de mortalité définie par le modèle APC ou BDL. Avec ces modèles, on obtient une projection des probabilités de décès annuelles q_x pour la cohorte g et la fonction de survie annuelle l_x associée. Pour obtenir la fonction de survie mensuelle, on suppose une répartition linéaire des décès sur $[x, x + 1[$ pour tout âge entier $x \in \mathbb{N}$. On a alors pour $\tau \in]0, 1[$:

$$l_{x+\tau} = l_x \cdot (1 - \tau \cdot q_x) \quad \text{et} \quad d_x^{(\tau)} = l_x - l_{x+\tau} = \tau \cdot q_x \cdot l_x.$$

On notera $q_x^{(\tau)} = \tau \cdot q_x$. Pour une série d'âges $X_\tau = \{x, x + \tau, x + 2\tau, \dots\}$ avec $\tau^{-1} \in \mathbb{N}^*$, on obtient la fonction de survie fractionnée associée $\mathbf{\Lambda} = \left(l_{x_i}^{(\tau)} \right)_{x_i \in X_\tau}$ grâce aux relations précédentes appliquées entre deux âges entiers.

4.2.3 Le capital en cas de décès

Si l'assuré décède sur la période $]t - h, t]$, (i.e. si $t - h < \mathcal{T}_x \leq t$) en étant encore dans le contrat (i.e. si $\mathcal{T}_x < \tau_A$), l'assureur verse en t au(x) bénéficiaire(s) de l'assuré un **capital décès** K_t qui est

$$K_t(A_t, G_t) = \begin{cases} A_t & \text{sans GPD,} \\ \max(A_t, G_t) & \text{avec GPD.} \end{cases}$$

En utilisant la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{GPD}$ de souscription de la garantie plancher en cas de décès GPD, on reformule l'expression précédente par

$$K_t(A_t, G_t) = A_t + [G_t - A_t]^+ \cdot \mathbf{1}_{GPD}.$$

On peut donc valoriser la garantie du capital pour un décès en t en l'exprimant sous la forme d'un put européen de maturité t , de strike G_t et de sous-jacent A_t . Cela peut permettre à l'assureur de tarifier la garantie plancher en cas de décès et, en calculant les grecques associées, de pouvoir définir la couverture face aux risques financiers. Par la suite, on notera de façon simplifiée K_t au lieu de $K_t(A_t, G_t)$. On aura de plus lorsque $t > \tau_A$: $K_t = 0$.

4.2.4 La liquidation lors du départ à la retraite

Si l'assuré atteint l'âge de la retraite en T avec $A_T > 0$, i.e. si $\min(\mathcal{T}_x, \tau_A) > T$, il réalise une **liquidation en capital** et/ou une **liquidation en rente viagère** de son épargne. On suppose que la part de liquidation en capital est $\kappa \in [0, 1]$ et la part de liquidation en rente est donc $1 - \kappa$.

La liquidation en capital

Le montant $LC_T(\kappa)$ du capital perçu à la liquidation, pondéré par le taux de sortie en capital κ , est donné par

$$LC_T(A_T, G_T, \kappa) = \begin{cases} \kappa \cdot A_T & \text{sans GPV,} \\ \kappa \cdot \max(A_T, G_T) & \text{avec GPV.} \end{cases}$$

En utilisant la fonction indicatrice de souscription $\mathbb{1}_{GPV}$ de la garantie plancher en cas de vie GPV, on reformule l'expression précédente par

$$LC_T(A_T, G_T, \kappa) = \kappa \cdot (A_T + [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPV}),$$

On peut donc valoriser la garantie en l'exprimant sous la forme d'un put européen de maturité T , de strike G_T et de sous-jacent A_T . Cela peut permettre à l'assureur de tarifier la garantie plancher en cas de vie et, en calculant les grecques associées, de pouvoir définir la couverture face aux risques financiers. Par la suite, on notera de façon simplifiée $LC_T(\kappa)$ au lieu de $LC_T(A_T, G_T, \kappa)$.

La liquidation en rente

Le montant de l'épargne transformée en rente viagère est $(1 - \kappa) \cdot A_T$ et le montant de la rente viagère mensuelle nette de frais est donc

$$R(T, A_T, \mathbf{\Lambda}_R, \kappa) = \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{a_{x+T}^R(h, i_T) \cdot (1 + \alpha_R)},$$

où i_T est le taux technique à la liquidation en T et $a_{x+T}^R(h, i_T)$ est le facteur de conversion en rente de période $h = 1/12$ à cette même date avec

$$a_{x+T}^R(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_R) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h}{(1 + i_T)^{kh}} \cdot {}_{kh}p_{x+T} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h}{(1 + i_T)^{kh}} \cdot \frac{l_{x+T+kh}^{(h)}}{l_{x+T}^{(h)}},$$

avec $\mathbf{\Lambda}_R = \left(l_x^{(h)} \right)_{x \in X_h}$, $X_h = \{x, x + h, x + 2h, \dots\}$, la fonction de survie fractionnée supposée à la liquidation pour la génération de l'assuré. Selon si la garantie de table GT est souscrite ou non, la fonction de survie à la liquidation est

- Sans GT : la loi de mortalité du scénario déterministe du modèle APC. On obtient $a_{x+T}^{R-HG}(\mathbf{\Lambda}_{HG})$,
- Avec GT : la loi de mortalité la plus avantageuse pour l'assuré entre la table en vigueur à la liquidation et les tables de mortalité TGH 05 / TGF 05. On obtient $a_{x+T}^{R-G}(\mathbf{\Lambda}_G)$.

On a $a_{x+T}^{R-G}(\mathbf{\Lambda}_G) \leq a_{x+T}^{R-HG}(\mathbf{\Lambda}_{HG})$ et donc $R_G \geq R_{HG}$. On a le facteur de conversion en rente tel que

$$\frac{1}{a_{x+T}^R(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_R)} = \frac{1}{a_{x+T}^{R-HG}(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_{HG})} + \left[\frac{1}{a_{x+T}^{R-G}(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_G)} - \frac{1}{a_{x+T}^{R-HG}(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_{HG})} \right]^+ \cdot \mathbb{1}_{GT}.$$

En reprenant les notations précédentes, on peut définir le facteur de valorisation de la rente viagère $a_{x+T}^V(h, i_T, \mathbf{\Lambda})$ (en considérant le taux sans risque i_T pour $t > T$) selon une trajectoire $\mathbf{\Lambda}$ pour la fonction de survie et on obtient la valeur actualisée probable des flux des rentes qui est

$$LR_T(A_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa) = R(T, A_T, \mathbf{\Lambda}_R, \kappa) \cdot a_{x+T}^V(h, i_T, \mathbf{\Lambda}) = \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V(h, i_T, \mathbf{\Lambda})}{a_{x+T}^R(h, i_T, \mathbf{\Lambda}_R)}.$$

Les trajectoires des fonctions de survie sont définies avec les probabilités de décès obtenues avec le modèle APC ou le modèle BDL du Chapitre 3. Pour le PER, le taux technique réglementaire est au plus 0%. Par homogénéité, on supposera que l'on a une liquidation en rente au taux $i_T = 0$. Par la suite, on utilisera les notations simplifiées a_{x+T}^R et a_{x+T}^V , et $LR_T(\kappa)$ au lieu de $LR_T(A_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa)$.

La liquidation globale

On considérera par la suite le capital équivalent $LR_T(\kappa)$ pour désigner la somme des flux futurs actualisés de rente. On peut alors définir le “pay-off” global à la liquidation de l'assuré en T par

$$L_T(A_T, G_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa) = LC_T(\kappa) + LR_T(\kappa) = \begin{cases} \kappa \cdot A_T + \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^R} & \text{sans GPV,} \\ \kappa \cdot \max(A_T, G_T) + \frac{(1 - \kappa) \cdot A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^R} & \text{avec GPV.} \end{cases}$$

Par la suite, on notera de façon simplifiée $L_T(\kappa)$ au lieu de $L_T(A_T, G_T, \mathbf{\Lambda}_R, \mathbf{\Lambda}, \kappa)$. De plus, lorsque $T > \tau_A$, on a $L_T(\kappa) = LC_T(\kappa) = LR_T(\kappa) = 0$.

On note par ailleurs que, au moment de la liquidation avec A_T et G_T connus, la sortie en capital est plus intéressante que la sortie en rente viagère pour l'assuré dès lors que (pour $\tau_A > T$)

$$\begin{cases} \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^R} < 1 & \text{sans GPV,} \\ \frac{A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^R} < \max(A_T, G_T) & \text{avec GPV,} \end{cases} \quad (4.3)$$

d'où par l'espérance sur \mathbb{M} et sachant A_T et G_T :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}}[a_{x+T}^V]}{a_{x+T}^R} < 1 \quad \text{sans GPV,} \\ \frac{A_T}{(1 + \alpha_R)} \cdot \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{M}}[a_{x+T}^V]}{a_{x+T}^R} < \max(A_T, G_T) \quad \text{avec GPV.} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

N. B. :

Le capital perçu à la liquidation et la rente viagère étant soumis à des fiscalités différentes (cf. Chapitre 1), on peut également définir le mode de sortie le plus intéressant en tenant compte de la fiscalité et les relations précédentes en sont alors modifiées selon la situation fiscale de l'assuré.

4.2.5 La valorisation du contrat de l'assuré

On considère les valeurs de l'épargne A_{t_k} et de la base garantie G_{t_k} (avant et après rachat éventuel en t_k) aux $K + 1$ dates t_k où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ avec $t_k = t_{k-1} + h$. On introduit le vecteur d'état pour l'épargne et la garantie $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{t_k})_{0 \leq k \leq K}$ avec $\mathbf{E}_{t_k} = (A_{t_k}, G_{t_k})$, et le vecteur des stratégies de comportement $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{t_k})_{0 \leq k \leq K}$ avec $\mathbf{C}_{t_k} = (\Pi_{t_k}, \Gamma_{t_k}, \kappa)$ et $\Pi_T = \Gamma_T = 0$. On supposera aussi $\Gamma_0 = 0$. On a la variable aléatoire \mathcal{T}_x pour la durée de vie résiduelle de l'assuré d'âge x en $t_0 = 0$. On a $\mathbb{1}_{\{t < \mathcal{T}_x \leq t+h\}} = 1$ si l'assuré décède sur $]t, t+h]$ et $\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_x > t\}} = 1$ si l'assuré décède après la date t . On suppose de plus que les processus financiers sous la mesure de probabilité \mathbb{Q} et les processus de mortalité sous la mesure de probabilité \mathbb{M} sont indépendants. On a donc la mesure de probabilité jointe $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}$ et on considèrera la filtration globale $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\mathcal{F}_t^F \cup \mathcal{F}_t^M \subset \mathcal{F}_t$ (\mathcal{F}_t^F incluant la filtration pour le processus \mathbf{E}_t dépendant également des frais appliqués et des rachats effectués). La **valeur actualisée des flux futurs** de l'assuré en $t_0 = 0$ formulée de façon discrétisée est donc

$$\Phi_0(\mathbf{E}, \mathcal{T}_x, \mathbf{C}, T) = \beta_T \cdot L_T(\kappa) \cdot \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_x > T\}} + \sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot K_{t_k} \cdot \mathbb{1}_{\{t_{k-1} < \mathcal{T}_x \leq t_k\}} + \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{t_k} \cdot (\Gamma_{t_k} - \Pi_{t_k}) \cdot \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_x > t_k\}}, \quad (4.5)$$

avec le déflateur stochastique sur $[0, t_k]$ défini par $\beta_{t_k} = \exp\left(-\int_0^{t_k} r_s ds\right) \simeq \exp\left(-\sum_{i=1}^k r_{t_i} h\right)$.

On suppose que les fonctions de survie possibles de l'assuré associées à la durée de vie résiduelle \mathcal{T}_x , notées $\mathbf{\Lambda} = \left(l_{x_i}^{(h)}\right)_{x_i \in X_h}$ pour la série d'âges $X_h = \{x, x+h, x+2h, \dots\}$, sont obtenues grâce à la distribution des taux de mortalité issue du modèle APC ou du modèle BDL. Avec la fonction de survie $\mathbf{\Lambda}$, on notera pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$:

- Probabilité de survie sur $[0, t_k]$: ${}_t p_x^{(h)} = \frac{l_{x+t_k}^{(h)}}{l_x^{(h)}}$,
- Probabilité de survie sur $[t_{k-1}, t_k]$: $p_{x+t_{k-1}}^{(h)} = \frac{l_{x+t_k}^{(h)}}{l_{x+t_{k-1}}^{(h)}}$,
- Probabilité de décès sur $[t_{k-1}, t_k]$: $q_{x+t_{k-1}}^{(h)} = 1 - p_{x+t_{k-1}}^{(h)}$.

Sous la fonction de survie $\mathbf{\Lambda}$, on a la valeur actualisée probable des flux futurs :

$$\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) = \beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot (\Gamma_{t_k} - \Pi_{t_k}). \quad (4.6)$$

Par la suite, on considérera le problème simplifié sans primes futures (i.e. $\forall t > 0, \Pi_t = 0$) dans les relations 4.2 et 4.6 et on a donc $\mathbf{C}_{t_k} = (\Gamma_{t_k}, \kappa)$. On a ainsi la valeur actualisée probable suivante en fonction des différentes typologies de flux et des garanties optionnelles :

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) &= \underbrace{\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa)}_{\text{Liquidation}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k}}_{\text{Décès}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} \beta_{t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \Gamma_{t_k}}_{\text{Rachats}} \\
&= \underbrace{\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot A_T \cdot \left(\kappa + \frac{(1-\kappa)}{(1+\alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^{R-HG}} \right) + \sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot \left({}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \Gamma_{t_k} + {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot A_{t_k} \right)}_{\Phi_0^{HG}} \\
&+ \underbrace{\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot \kappa \cdot [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPV}}_{\Phi_0^{GPV}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot [G_{t_k} - A_{t_k}]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPD}}_{\Phi_0^{GPD}} \\
&+ \underbrace{\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot A_T \cdot \frac{(1-\kappa)}{(1+\alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^{R-HG}} \cdot \left[\frac{a_{x+T}^{R-HG}}{a_{x+T}^{R-GT}} - 1 \right]^+}_{\Phi_0^{GT}} \cdot \mathbb{1}_{GT},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\Gamma_{t_k} = 0$, a_{x+T}^{R-HG} est le facteur de conversion en rente avec la table de mortalité à la liquidation sans garantie de table, a_{x+T}^{R-GT} est le facteur de conversion en rente avec la table de mortalité garantie, Φ_0^{HG} est la valeur actualisée des flux hors garanties optionnelles et $\Phi_0^G = \Phi_0^{GPV} + \Phi_0^{GPD} + \Phi_0^{GT}$ est la valeur actualisée des flux des garanties optionnelles (avec les sous-composantes respectives GPV, GPD et GT). Il s'agit pour cette dernière d'une option composée d'une combinaison linéaire de différentes options mais pour laquelle on n'a pas de formule fermée du fait du processus stochastique des rachats.

N. B. :

Dans les relations 4.6 et 4.7 (et pour la valorisation du contrat V_0 définie ci-après), on peut considérer à la place les flux $L_T^f(\kappa)$, $K_{t_k}^f$, $\Gamma_{t_k}^f$ et $\Pi_{t_k}^f$ qui sont respectivement les flux de liquidation, de capital décès, des rachats et des primes avec fiscalité. La valeur de Φ_0 (et celle de V_0) est dans ce cas modifiée car dépendant alors de la situation fiscale de l'assuré et la répartition de la valeur entre les sous-composantes est également modifiée du fait d'une fiscalité différente selon la nature des flux.

On reprend l'exemple numérique du paragraphe 4.2.1 avec toutes les garanties optionnelles sous-critées avec une prime unique $\Pi_0 = 10\,000\text{€}$, des rachats partiels tous les douze mois de $\gamma_t = 2,5\%$ de l'épargne résiduelle sauf la dernière année, et on considère des assurés hommes et femmes âgés de 40 et 50 ans au 31 décembre 2021 qui lors de leur départ à la retraite, respectivement dans 25 ans et 15 ans, liquideront la moitié de leur épargne en rente viagère et l'autre moitié en capital. On suppose que leur loi de mortalité est donnée par le modèle BDL. On peut illustrer les différentes trajectoires en les ordonnant par l'évolution de l'espérance de vie à la naissance e'_0 pour les scénarios de longévité et par le rendement brut moyen (hors frais) sur la période $[0, T]$ pour les scénarios financiers ainsi défini :

$$RBM(0, T) = \left(\frac{\bar{A}_T}{\bar{A}_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1,$$

où \bar{A}_t est obtenu par la définition 4.2 de A_t en considérant $\alpha_A = \alpha_G = \Pi_t = \Gamma_t = 0$ pour tout $t > 0$.

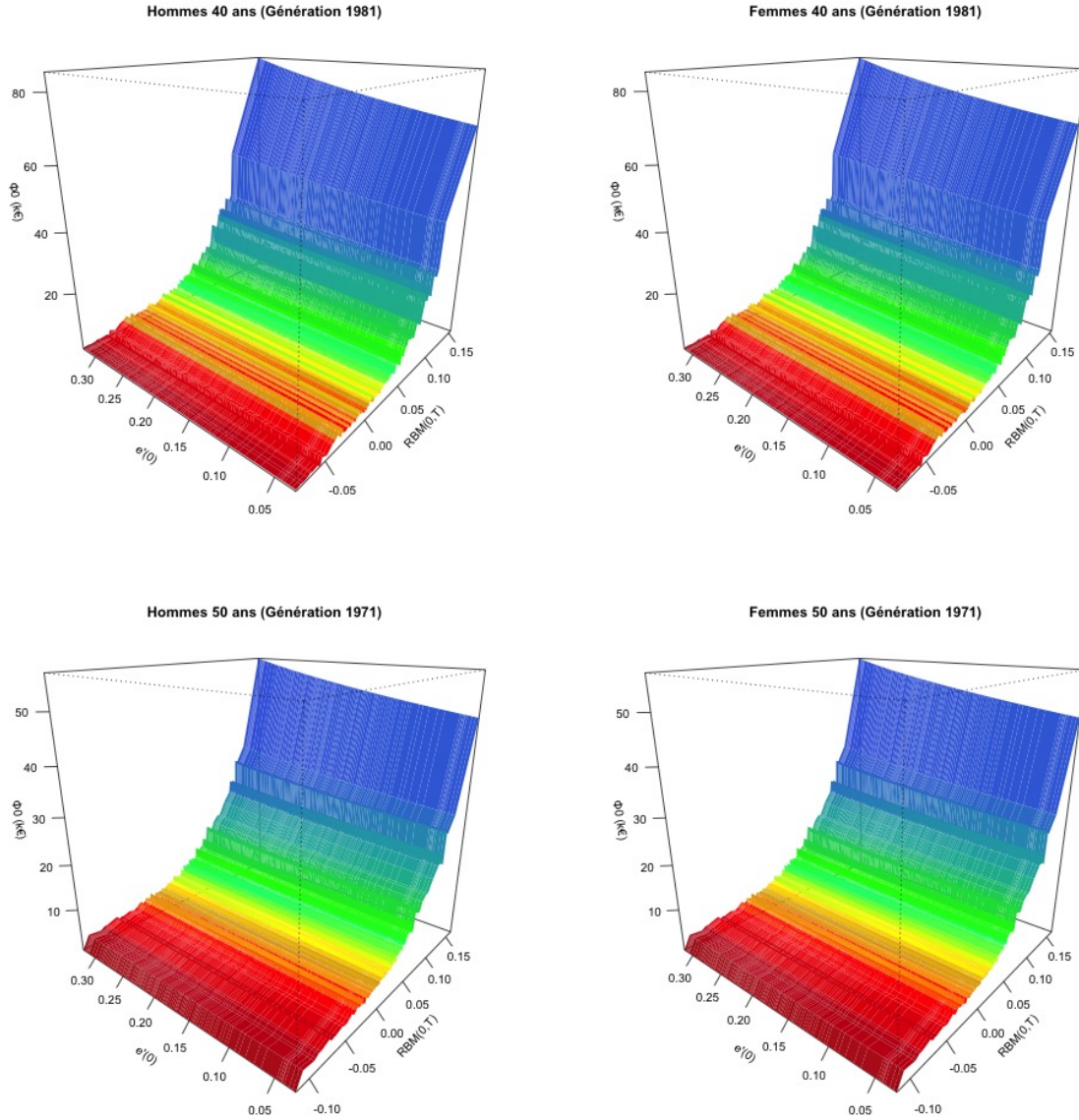


FIGURE 4.4 – Φ_0 par trajectoires pour chaque sexe et génération

On a de plus la **valorisation du contrat d'épargne-retraite** de l'assuré en $t_0 = 0$ qui est donnée par l'espérance de Φ_0 sous $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}$:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) \mid \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\Phi_0^{HG}(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) + \Phi_0^G(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) \mid \mathcal{F}_0 \right] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \Gamma_{t_k} \mid \mathcal{F}_0 \right].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour les applications numériques, on pourra calculer V_0 par la moyenne des valeurs pour Φ_0 obtenues sur les $n = 10^6$ trajectoires simulées ($n_F = 1000$ scénarios financiers donnant \mathbf{E} et $n_L = 1000$ scénarios de longévité/mortalité pour obtenir les fonctions de survie $\mathbf{\Lambda}$).

N. B. :

— La relation 4.8 permet à l'assureur de tarifer les frais de gestion et des garanties optionnelles en cherchant l'égalité $V_0 = A_0 = \Pi_0$ à la souscription pour un ensemble d'assurés hommes et femmes d'âges différents. Les frais dépendent donc des hypothèses formulées par l'assureur sur le comportement des assurés.

— En exprimant V_0 sous la forme continue et avec $\delta_t = \exp\left(-\int_0^t (r_u + \mu(x+u, u)) du\right)$, on a

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\delta_T \cdot L_T(\kappa) + \int_0^T \delta_t \cdot (\mu(x+t, t) \cdot K_t + \Gamma_t) dt \mid \mathcal{F}_0 \right]. \quad (4.9)$$

Pour la suite, on pourra généraliser la définition de V_0 pour obtenir la valorisation des flux futurs et du contrat à une date $t^+ > 0$, i.e. après avoir effectué un éventuel rachat partiel en t . On se place en t_k^+ , $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$. On notera pour $l > k$: $\delta_{k,l} = t_l - t_k$ et β_{t_k, t_l} , le déflateur sur $[t_k, t_l]$. En supposant que l'on a $A_{t_k^+} > 0$ et selon si l'assuré est encore vivant à cette date, on a avec $\Gamma_{t_K} = 0$:

$$V_{t_k^+} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\beta_{t_k, T} \cdot \delta_{k, K} p_{x+t_k}^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{l=k+1}^K \beta_{t_k, t_l} \cdot \delta_{k, l-1} p_{x+t_k}^{(h)} \cdot q_{x+t_{l-1}}^{(h)} \cdot K_{t_l} + \sum_{l=k+1}^{K-1} \beta_{t_k, t_l} \cdot \delta_{k, l} p_{x+t_k}^{(h)} \cdot \Gamma_{t_l} \mid \mathcal{F}_{t_k^+} \right]. \quad (4.10)$$

4.3 Les sensibilités face à la mortalité et aux risques financiers

4.3.1 Les sensibilités face aux risques de mortalité et de longévité

La valeur actualisée des flux futurs Φ_0 et la valorisation du contrat V_0 dépendent de la mortalité de l'assuré :

- Une hausse des taux de mortalité entraîne :
 - Une augmentation de la valeur des flux pour les capitaux décès et notamment de la garantie plancher en cas de décès GPD,
 - Une diminution des flux de rachats avant le départ à la retraite et du flux $L_T(\kappa)$ lors du départ à la retraite, notamment lorsque $\kappa < 1$ avec une valorisation de la rente viagère plus faible.
- Une baisse des taux de mortalité entraîne une augmentation de l'espérance de vie et :
 - Une diminution de la valeur des flux pour les capitaux décès et notamment de la garantie plancher en cas de décès GPD,
 - Une augmentation des flux de rachats avant le départ à la retraite et du flux $L_T(\kappa)$ lors du départ à la retraite, tout particulièrement lorsque κ est proche de 0 avec une valorisation de la rente viagère plus élevée. La GT est également davantage valorisée avec une augmentation du ratio $a_{x+T}^V / a_{x+T}^{R-G}$.

Il est à noter toutefois que la mortalité avant 65 ans est aujourd'hui très faible, comme cela a pu être observé dans le Chapitre 3. Pour illustrer cela, on affiche dans la Table 4.3 les probabilités :

- Pour les assurés ayant 40 ans au 31 décembre 2021 (nés en 1981) : $25q_{40}$,
- Pour les assurés ayant 50 ans au 31 décembre 2021 (nés en 1971) : $15q_{50}$.

Ces probabilités sont indiquées pour les hommes et pour les femmes. Pour les distributions avec les modèles APC et BDL on affiche, en plus du scénario central, l'intervalle de prédiction à 95% :

Modèle	Hommes		Femmes	
	25q40(1981)	15q50(1971)	25q40(1981)	15q50(1971)
TGH 05 / TGF 05	3,2%	3,2%	3,4%	3,0%
APC	3,1% [2,6%, 3,7%]	3,6% [3,2%, 4,2%]	1,9% [1,5%, 2,4%]	2,2% [1,8%, 2,6%]
BDL	2,8% [2,3%, 3,8%]	2,8% [2,5%, 3,4%]	2,2% [1,9%, 2,8%]	2,1% [1,9%, 2,4%]

TABLE 4.3 – Probabilités de décès avant 65 ans par modèle pour les générations 1981 et 1971

Ces faibles taux de mortalité en phase d'épargne ont donc pour conséquence une représentation mineure de la garantie décès (avec ou sans garantie plancher décès optionnelle) dans la valorisation globale du contrat. On représente ci-dessous la valorisation des contrats pour chaque profil type, avec la mortalité suivant le modèle APC (présenté en base 100) et BDL, et dans les cas où les assurés n'ont souscrit aucune ou toutes les garanties optionnelles. On supposera l'absence de rachats avant la liquidation qui se fera pour moitié en capital et pour moitié en rente viagère. On observe ainsi que la part de la garantie décès est très minoritaire dans la valorisation du contrat. La valorisation du contrat est un peu plus élevée sous le modèle BDL, cela est d'autant plus marquant pour les femmes.

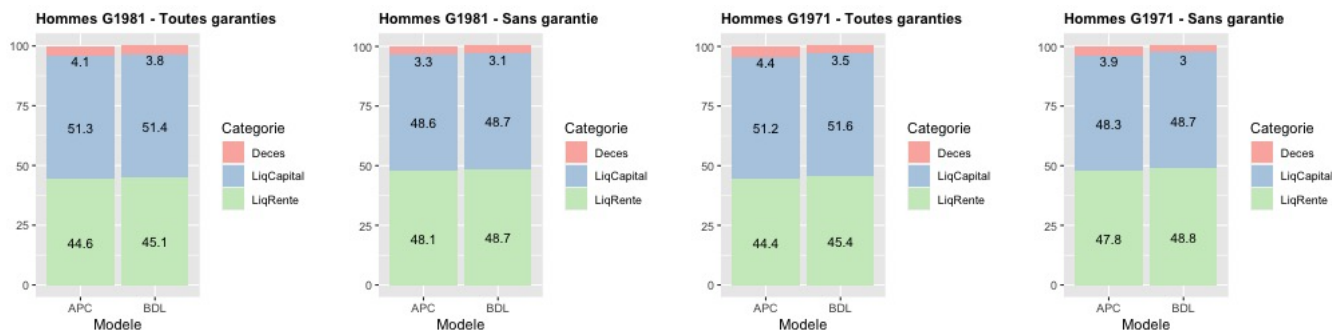


FIGURE 4.5 – V_0 sans rachats - Hommes (Base 100 : modèle APC)

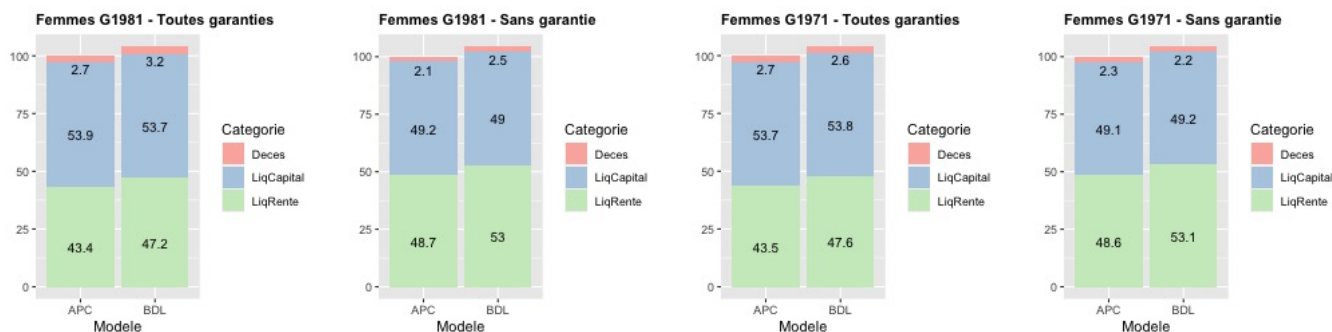


FIGURE 4.6 – V_0 sans rachats - Femmes (Base 100 : modèle APC)

Les aléas de mortalité influent donc principalement sur le flux à la liquidation, notamment lorsque l'assuré décide de liquider au moins une partie de son épargne sous la forme d'une rente viagère. Plus le taux de liquidation en rente est élevé, plus le risque de longévité est grand pour l'assureur. En considérant ce portefeuille de façon isolée, la compensation partielle entre le risque de mortalité sur la garantie décès et le risque de longévité sur la garantie de rente sera donc faible pour l'assureur.

On peut comparer ci-dessous les valeurs des a_{x+T}^V (ordonnées par ordre croissant) pour les modèles APC (en bleu) et BDL (en rouge) avec les valeurs de a_{x+T}^R sans garantie de table (a_{x+T}^{R-HG} en gris) ou avec garantie de table (a_{x+T}^{R-G} en noir). Plus l'écart $a_{x+T}^V - a_{x+T}^R$ sera positivement élevé, plus la valorisation de la sortie en rente sera importante. De la même manière, plus l'écart entre $a_{x+T}^{R-HG} - a_{x+T}^{R-G}$ sera important et plus la valorisation de la garantie de table sera grande.

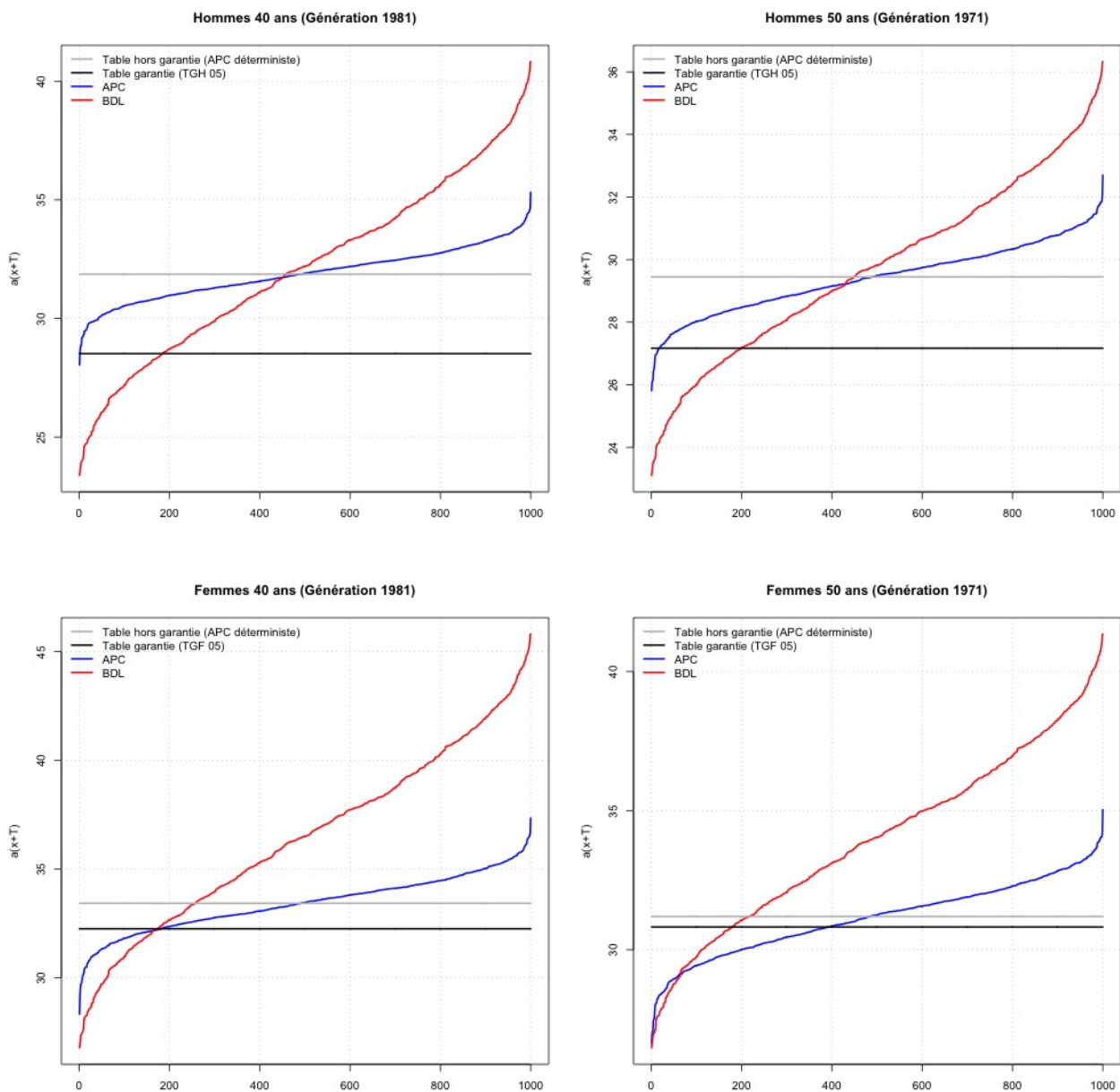


FIGURE 4.7 – Scénarios pour a_{x+T}^V et valeurs pour a_{x+T}^R par sexe et par génération

On observe que la garantie de table est plus avantageuse pour les hommes que pour les femmes, cela est dû à une plus forte amélioration de la mortalité pour les hommes au cours des récentes années que ce qui avait été anticipé dans la table TGH 05 (on peut constater sur la Figure 3.8 des améliorations plus importantes sur la période 2007-2018 que sur la période 1996-2007 pour les hommes). Dans tous les cas, on a ici $a_{x+T}^{R-HG} > a_{x+T}^{R-G}$, i.e. la table garantie suppose une espérance de vie strictement plus faible et donc une rente strictement plus élevée que celle obtenue avec la table en vigueur au moment de la liquidation. Lorsque la GT est souscrite, si a_{x+T}^{R-HG} est une variable aléatoire dépendant de l'évolution de la mortalité jusqu'en T , on peut avec la formule 4.7 l'assimiler à un call européen de strike 1 et de sous-jacent $\nu_T = a_{x+T}^{R-HG} / a_{x+T}^{R-GT}$ à la maturité T .

Dans le cas présent, on a ici $a_{x+T}^{R-HG} = a_{x+T}^{APCd}$ constant (où APCd est le scénario déterministe du modèle APC) avec $a_{x+T}^{R-HG} > a_{x+T}^{R-G}$ (avec $a_{x+T}^{R-G} = a_{x+T}^{TGH/F\ 05}$). Il est à noter de plus que lorsqu'un assureur modifie la table de mortalité pour la conversion en rente, la longévité a tendance à augmenter dans la nouvelle table et donc l'inégalité précédente serait toujours respectée et l'option resterait alors systématiquement exercée. On a donc comme facteur de conversion en rente à la liquidation :

$$a_{x+T}^R = \begin{cases} a_{x+T}^{R-HG} = a_{x+T}^{APCd} & \text{sans GT,} \\ a_{x+T}^{R-G} = a_{x+T}^{TGH/F\ 05} & \text{avec GT.} \end{cases}$$

On constate pour les femmes que la valorisation des rentes est plus élevée avec le modèle BDL qu'avec le modèle APC du fait d'améliorations de mortalité plus importantes dans ce premier modèle. On a également un écart-type plus important sur la distribution des a_{x+T}^V dans le modèle BDL que dans le modèle APC, comme déjà constaté sur les projections d'espérance de vie par période au Chapitre 3. Avec le modèle APC, on a a_{x+T}^V qui est quasiment tout le temps supérieur à a_{x+T}^{R-G} pour les hommes et pour les femmes cela varie selon les générations. Avec le modèle BDL, on a a_{x+T}^V qui est inférieur à a_{x+T}^{R-G} , et donc le choix de sortie en rente n'est pas rentable pour l'assuré, dans environ 20% des cas.

N. B. :

Si la différenciation par sexe des tables est impossible, la rente viagère et par conséquent sa valorisation sont fortement réduites pour les hommes en leur appliquant la table féminine. Cela modifie alors les résultats de la Figure 4.7 avec de nombreux cas où la rente n'est plus rentable pour les hommes.

Dans le cas où la mortalité suit le modèle BDL, avec la formulation 3.39 de la fonction survie par cohorte pour ce modèle et sachant que $\lambda < 1$ et $i_T = 0$, on a

$$a_{x+T}^V \simeq e^G(x+T, g) = \int_{x+T}^{+\infty} \exp[\alpha(x+T-u)] \left[\frac{1 + \beta \cdot \exp[\beta(x+T - M_0 - \lambda(g+x+T))]}{1 + \beta \cdot \exp[\beta(u - M_0 - \lambda(g+u))]} \right]^{\frac{1}{\beta(1-\lambda)}} du, \quad (4.11)$$

où $e'_0 = \lambda \cdot [1 - \mu(0,0) \cdot e^P(0,0)]$. On peut donc exprimer a_{x+T}^V , et donc la valorisation de la rente, en fonction de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance e'_0 dans le modèle BDL. Par ailleurs, en notant $f(u, \lambda)$ le terme sous l'intégrale dans la relation précédente, on a par le théorème de dérivation sous l'intégrale pour tout $u > x+T$: $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(u, \lambda) > 0$. On vérifie donc, grâce à la relation entre e'_0 et λ , que l'on a $\frac{\partial a_{x+T}^V}{\partial e'_0} > 0$, i.e. a_{x+T}^V est strictement croissant en fonction de e'_0 .

Par la suite, on illustrera les applications numériques avec le modèle BDL.

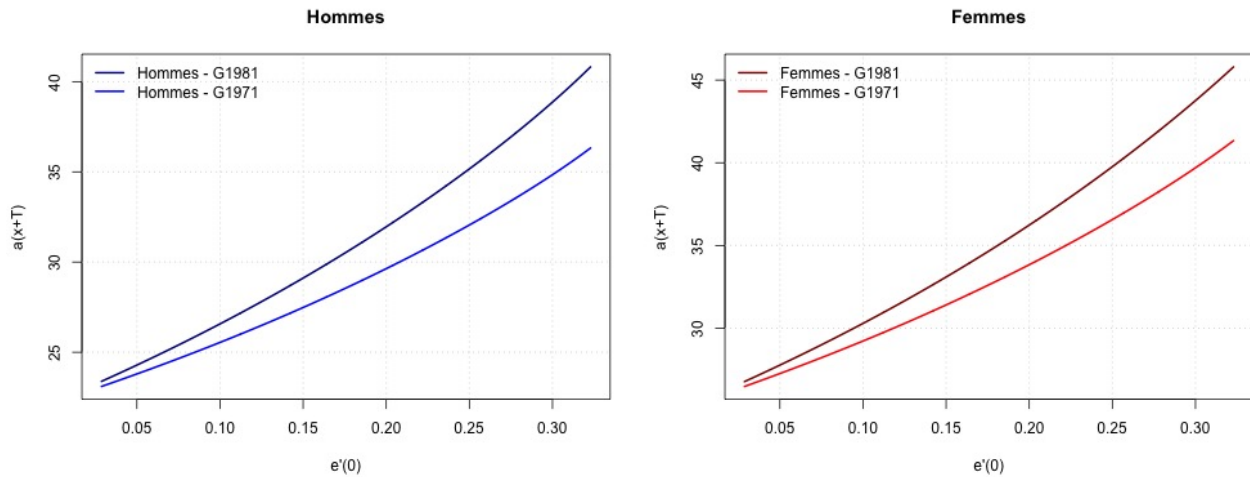


FIGURE 4.8 – a_{x+T}^V en fonction de e'_0 pour chaque sexe et génération

4.3.2 Les sensibilités face aux risques financiers

La valorisation du contrat de l'assuré est hautement sensible à l'évolution des actifs financiers qui composent l'épargne. Il s'agit du premier facteur déterminant de cette valorisation comme on peut le voir sur la Figure 4.4 où la variation de Φ_0 est plus importante selon l'axe des scénarios financiers (classés selon le revenu brut moyen jusqu'à la liquidation) que selon l'axe des scénarios de longévité. On a avec un rendement globalement plus élevé :

- Une hausse de l'épargne A_t et donc une augmentation de la valorisation du contrat hors garanties optionnelles GPD et GPV, mais aussi de la garantie optionnelle GT qui a pour assiette l'épargne à la liquidation A_T ,
- Une baisse de la valeur intrinsèque des garanties optionnelles GPD et GPV car il n'est pas nécessaire de les exercer en t dès lors que l'on a $A_t > G_t$.

Inversement, pour des scénarios financiers induisant une dynamique baissière sur A_t , les garanties optionnelles plancher GPD et GPV sont davantage valorisées en sécurisant un capital en cas de décès ou à la liquidation. Face à des scénarios financiers où le rendement net global est négatif (après prélèvement des frais), lorsque l'assuré a souscrit la GPV, le choix de sortie en capital à la liquidation est donc d'autant plus attractif pour l'assuré.

Avec un rendement faible et en l'absence de primes futures versées, on a également une hausse de la probabilité d'avoir un temps d'arrêt $\tau_A < T$ à cause des frais α_G prélevés en présence d'une garantie plancher, surtout lorsque la moneyness est faible (i.e. A_t petit face à G_t). Lorsque des rachats partiels sont en plus effectués, la probabilité d'avoir un temps d'arrêt $\tau_A < T$ augmente encore.

N. B. :

Dans le cas d'une modélisation des actifs en univers réel sous la probabilité \mathbb{P} , les primes de risque des actifs influent tout particulièrement sur les dynamiques de A_t et G_t , sur la probabilité d'avoir un temps d'arrêt $\tau_A < T$ et sur la valorisation des flux futurs. Les rendements des actifs (incluant les primes de risque) ainsi que la fonction d'utilité de l'assuré vont également affecter l'optimisation qu'il fera sur l'allocation financière de son épargne et sur ses autres comportements.

On peut également regarder la sensibilité de la valorisation du contrat par rapport à la volatilité des actifs. Pour cela, on illustre l'impact sur les résultants en venant choquer la volatilité des actifs de -50% et de +50%. On reprend les paramètres numériques du modèle pour les actifs financiers définis au Chapitre 2 en modifiant seulement les volatilités $\sigma_i^{Central} = (\sigma_{S;i}, \sigma_{I;i}, \sigma_{r;i})$ des différentes classes d'actifs dans chaque régime i :

- Volatilité basse : $\sigma_i^{Bas} = \sigma_i^{Central} \cdot (1 - 50\%)$,
- Volatilité haute : $\sigma_i^{Haut} = \sigma_i^{Central} \cdot (1 + 50\%)$.

On représente ci-dessous la valorisation des contrats pour chaque profil type dans chaque scénario de volatilité et dans les cas où les assurés n'ont souscrit aucune ou toutes les garanties optionnelles. On supposera l'absence de rachats avant la liquidation qui se fera pour moitié en capital et pour moitié en rente viagère. On observe ainsi qu'en l'absence de garanties plancher, la valorisation du contrat augmente avec la volatilité mais a contrario la valorisation des garanties plancher augmente avec la volatilité car on a bien le vega \mathcal{V} (défini par $\frac{\partial \Phi_0^{GPD}}{\partial \sigma}$ et/ou $\frac{\partial \Phi_0^{GPV}}{\partial \sigma}$ et mesurant la sensibilité de l'option par rapport à la volatilité) qui est positif.

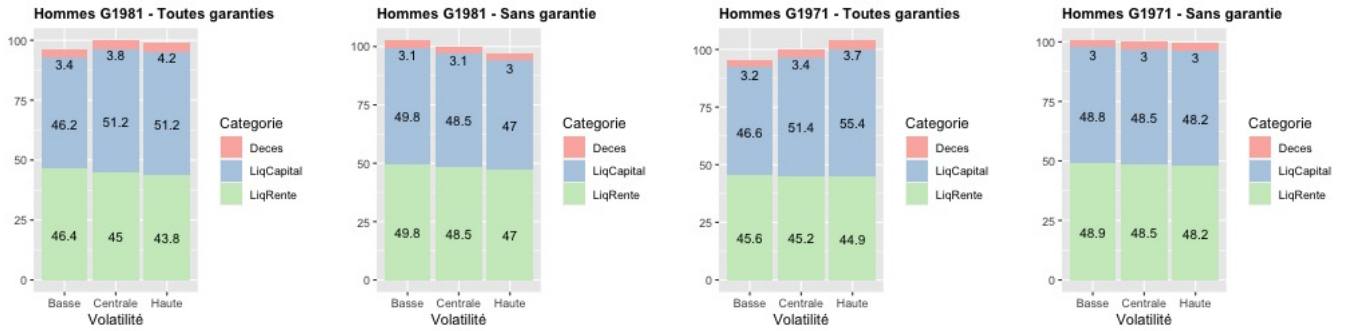


FIGURE 4.9 – V_0 sans rachats - Hommes (Base 100 : volatilité centrale)

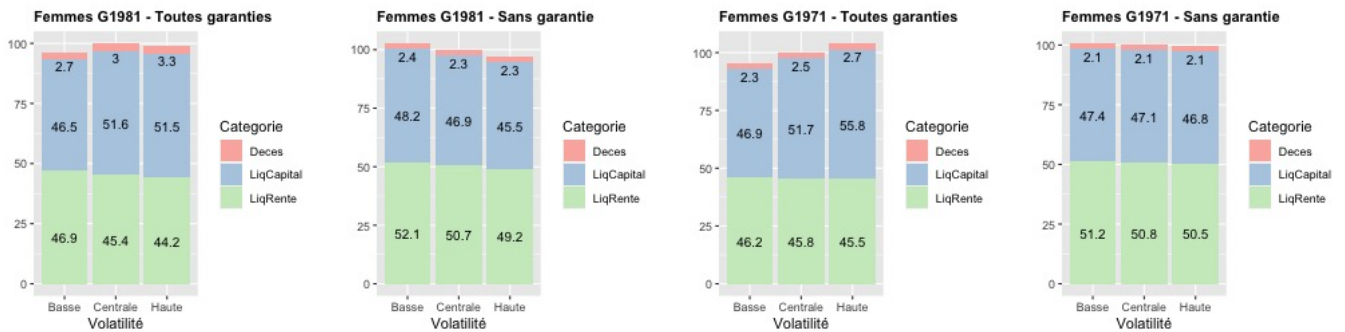


FIGURE 4.10 – V_0 sans rachats - Femmes (Base 100 : volatilité centrale)

N. B. :

Si on prenait en compte la fiscalité, on aurait lors des rachats et des sorties en capital un montant de capital débloqué différent entre le cas où le contrat est en moins-value et le cas où le contrat est en plus-value. Dans le second cas, on a l'application de la fiscalité sur les produits générés. La fiscalité va également être différente entre la sortie en capital, la sortie en rente, les rachats et le décès en tenant compte de la situation fiscale de l'assuré, et donc impacter la sensibilité face aux risques financiers.

4.4 La recherche de stratégies optimales par l'assuré

4.4.1 Les impacts des choix des assurés sur la valorisation du contrat

Les rachats

Les rachats partiels Γ_t impactent directement l'épargne A_t et la base garantie G_t et influent donc grandement sur le temps d'arrêt τ_A et la valorisation du contrat V_t . Lorsqu'elles sont souscrites, les garanties optionnelles sont également sensibles aux rachats partiels, notamment la GPD et la GPV. Pour un assuré en vie et dans le contrat en $t \in]0, T[$ avant un rachat (i.e. $A_{t^-} > 0$), effectuer un rachat $\Gamma_t = \gamma_t A_{t^-}$ avec $\gamma_t \in]0, 1]$ est avantageux pour l'assuré si $\Gamma_t \geq V_t^{\{0\}} - V_{t^+}^{\{\gamma_t\}}$ (où $V_t^{\{0\}} = V_{t^-}$ et $V_{t^+}^{\{\gamma_t\}}$ sont respectivement les valorisations en l'absence de rachat et après un taux de rachat γ_t en t) donc, en définissant le ratio de moneyness du contrat avant rachat $M_{t^-}^V = \frac{A_{t^-}}{V_{t^-}}$, si

$$\gamma_t M_{t^-}^V \geq 1 - \frac{V_{t^+}^{\{\gamma_t\}}}{V_t^{\{0\}}},$$

avec $\lim_{\gamma_t \downarrow 0} V_{t^+}^{\{\gamma_t\}} = V_t^{\{0\}} = V_{t^-}$ et $V_{t^+}^{\{\gamma_t=1\}} = 0$. Plus un contrat sera dans la monnaie, i.e. plus A_t sera faible par rapport à V_t , moins l'assuré aura un avantage à racheter prématurément le contrat à la valeur de rachat A_t du fait de la richesse des garanties futures.

En supposant que les assurés sont influencés dans leurs rachats par la richesse de leur contrat sans toutefois suivre globalement une stratégie optimale, l'assureur peut définir une loi des taux de rachats $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ en la scindant en deux composantes $\gamma_t = \gamma_t^C + \gamma_t^D$:

- Le taux de rachat structurel γ_t^C ne dépendant pas de la richesse du contrat et que l'assureur peut définir selon les rachats observés sur le portefeuille. γ_t^C peut dépendre de certains facteurs tels que la durée depuis l'ouverture du contrat et la capacité de racheter à tout moment, ce qui n'est pas le cas du PER où le rachat ne peut s'effectuer que selon certains motifs.
- Le taux de rachat dynamique γ_t^D qui dépend de la moneyness du contrat et est croissant en fonction de cette dernière : moins le contrat est dans la monnaie, plus le rachat devient avantageux.

M_t^V dépendant des comportements futurs, le calcul de la métrique peut être compliqué et dépendra de l'hypothèse faite par l'assureur sur les taux de rachats. Dans la pratique, pour évaluer l'intérêt du rachat vis-à-vis des garanties GPD et GPV, on pourra se fonder sur M_t qui est plus simple à déterminer.

Le choix du mode de sortie à la liquidation

La sensibilité du choix du taux de sortie en capital sur la valorisation du contrat est donnée par

$$\frac{\partial V_0}{\partial \kappa} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot \left\{ A_T \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V}{a_{x+T}^R} \right) + [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{GPV} \right\} \mid \mathcal{F}_0 \right]. \quad (4.12)$$

Le choix de la sortie en capital n'influe que sur le flux en T (dès lors que $\tau_A > T$) et il impacte la valeur terminale du contrat. On détermine alors, avec les inéquations 4.3 et 4.4, le signe du terme sous l'espérance pour déterminer si la préférence du choix de la sortie en capital impacte positivement ou négativement la valeur du contrat.

On peut illustrer l'influence de κ sur V_0 en reprenant l'exemple numérique précédent en se plaçant dans le cas où toutes les garanties optionnelles souscrites et dans le cas où on a seulement les garanties optionnelles GT et GPD souscrites. On regarde les résultats en faisant varier le taux de sortie en capital en considérant les résultats avec $\kappa \in \{0\%, 50\%, 100\%\}$. On observe que la sortie en capital est ici plus intéressante en souscrivant la garantie plancher en cas de vie. Autrement, la sortie en rente est plus intéressante, renforcée par la souscription de la garantie de table.

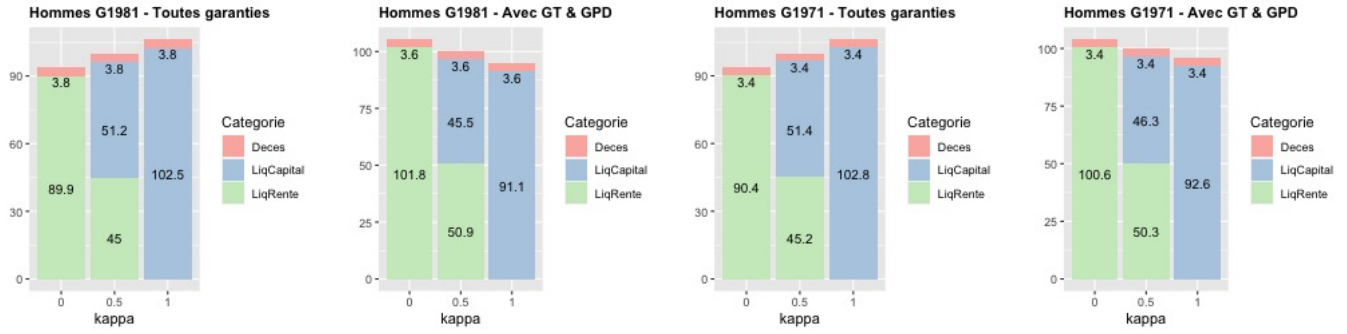


FIGURE 4.11 – V_0 sans rachats - Hommes (Base 100 : $\kappa = 50\%$)

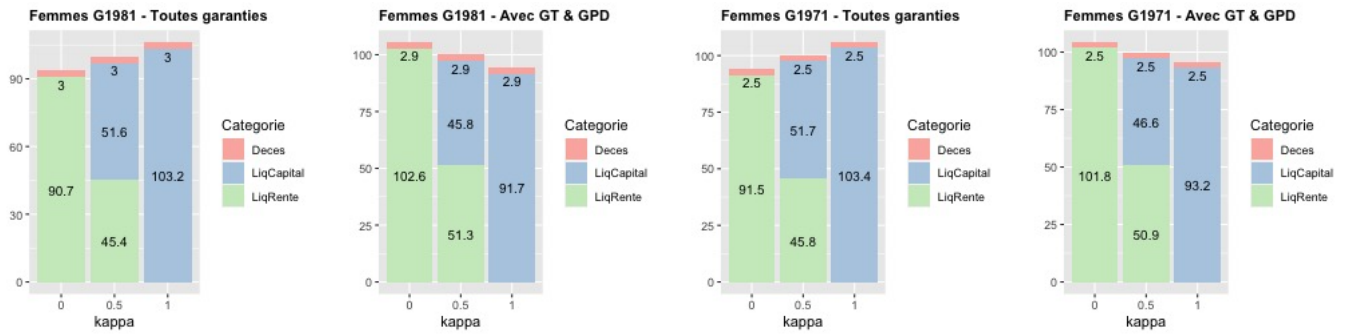
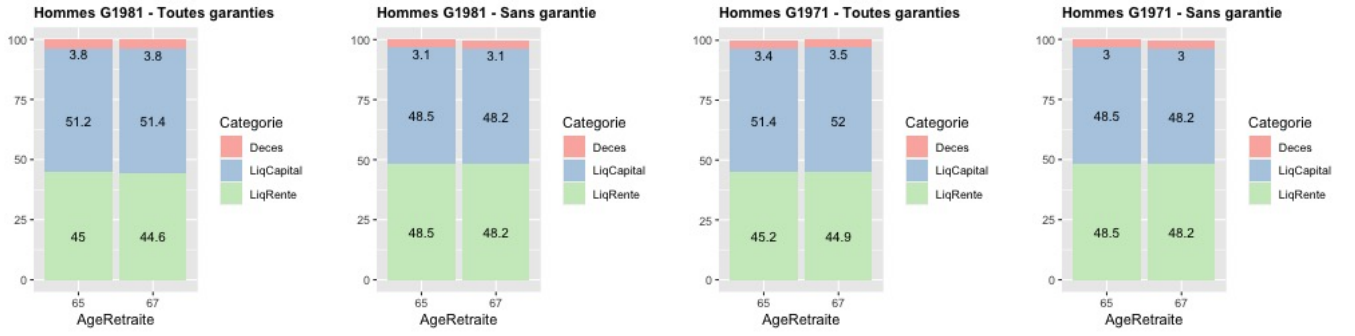
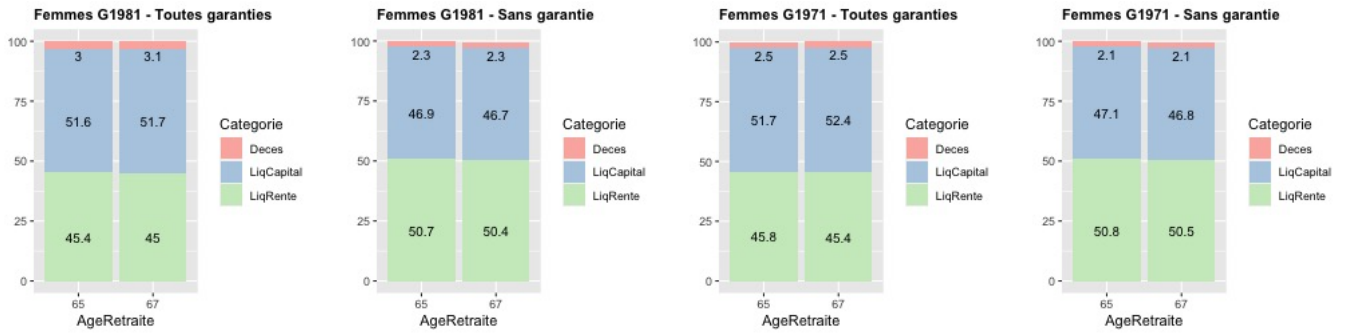


FIGURE 4.12 – V_0 sans rachats - Femmes (Base 100 : $\kappa = 50\%$)

Le décalage de la date de départ en retraite

Le choix de décaler en $t_0 = 0$ la date de départ à la retraite T a également pour effet de modifier dans le cas présent la dynamique de A_t du fait d'un réajustement de l'allocation financière pour être conforme au nouvel horizon de retraite. On peut évaluer l'impact du changement d'horizon de retraite en déterminant $\frac{\partial \Phi_0}{\partial T}$ et pour les garanties optionnelles $\frac{\partial \Phi_0^G}{\partial T}$ (i.e. en analysant le thêta de l'option).

On peut illustrer l'impact de la variation de la date de départ à la retraite sur V_0 en reprenant l'exemple numérique précédent en se plaçant dans le cas où toutes les garanties optionnelles souscrites et dans le cas où aucune n'est souscrite. On regarde les résultats en faisant varier l'âge de départ à la retraite en considérant les résultats avec un départ à la retraite à 65 ans et à 67 ans, i.e. $T \in \{25, 27\}$ pour la génération 1981 et $T \in \{15, 17\}$ pour la génération 1971. En reportant l'âge de départ à la retraite, on a une augmentation de la garanties décès (du fait d'un allongement de la durée de la garantie) ainsi que de la liquidation en capital dès lors que la GPV est souscrite.

FIGURE 4.13 – V_0 sans rachats - Hommes (Base 100 : $x + T = 65$)FIGURE 4.14 – V_0 sans rachats - Femmes (Base 100 : $x + T = 65$)

Par la suite, en cherchant les stratégies de comportement optimales des assurés, on s'intéressera aux choix en matière de rachats et de sélection entre le capital et la rente viagère à la liquidation sans détailler l'optimisation des comportements sur le décalage de la date de départ à la retraite qui entraîne dans le cas présent une réallocation de l'épargne.

4.4.2 Les différentes catégories de stratégies de comportement

Étant en $t_0 = 0$, on s'intéresse ici aux stratégies de comportement des assurés $\mathbf{C} = (\gamma, \kappa) \in \Omega_C$ sur $\{t_1, \dots, t_K = T\}$ où $\Omega_C = [0, 1]^{K-1} \times [0, 1]$ est l'ensemble des stratégies possibles jusqu'en T (avec $\gamma_T = 0$). On peut classer les stratégies selon plusieurs catégories :

- Une **stratégie de comportement optimale**, notée $\mathbf{C}^* = (\gamma^*, \kappa^*)$, est une stratégie pour laquelle les choix de l'assuré sur $]0, T]$ permettent de maximiser la valorisation du contrat en $t_0 = 0$, i.e.

$$\mathbf{C}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{C} \in \Omega_C} \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) \mid \mathcal{F}_0 \right]. \quad (4.13)$$

On notera V_0^* la valorisation maximale associée définie par

$$V_0^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}^*, T) \mid \mathcal{F}_0 \right]. \quad (4.14)$$

- Une **stratégie de comportement sous-optimale** est une stratégie \mathbf{C} pour laquelle les choix de l'assuré sur $]0, T]$ ne permettent pas de maximiser la valorisation du contrat V_0 en $t_0 = 0$, i.e.

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\Phi_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{C}, T) \mid \mathcal{F}_0 \right] < V_0^*. \quad (4.15)$$

L'assureur peut définir les lois de comportements déterministes ne prenant pas en compte la richesse individuelle du contrat ou des garanties, ou bien des lois dynamiques pour les comportements fondées sur cette richesse (cf. paragraphe 4.4.1). On peut aussi définir une stratégie sous-optimale à partir d'une stratégie optimale en supposant un taux de rationalité des assurés. Par la suite, on se concentrera sur une série de stratégies déterministes et les stratégies optimales pour les assurés.

4.4.3 Le cas de stratégies déterministes

On s'intéresse dans cette partie à différents scénarios déterministes sur la période $[0, T]$ pour lesquels on calcule Φ_0 sur les $n = 10^6$ trajectoires simulées que l'on ordonne selon $RBM(0, T)$ pour les scénarios financiers et selon e'_0 pour les scénarios de longévité. On retient Φ_0^M qui correspond à la valeur maximale de Φ_0 entre les différentes stratégies retenues. On se placera dans le cas où l'assuré peut librement racheter son épargne (comme sur un contrat d'assurance-vie). Les stratégies sont les suivantes, avec pour les stratégies 3, 6 et 9 l'absence de liquidation du fait d'une sortie prématurée du contrat car $\tau_A < T$ dans la simulation :

N°	Couleur	Description	γ_t (en fin d'année)	κ
1	Dark Blue	Sans rachats & sortie en rente	0%	0
2	Blue	Sans rachats & sortie en capital	0%	1
3	Light Blue	Sans rachats & pas de liquidation ($\tau_A < T$)	0%	N/A
4	Purple	Rachats "moyens" & sortie en rente	2,5%	0
5	Magenta	Rachats "moyens" & sortie en capital	2,5%	1
6	Pink	Rachats "moyens" & pas de liquidation ($\tau_A < T$)	2,5%	N/A
7	Red	Rachats "élevés" & sortie en rente	5%	0
8	Orange	Rachats "élevés" & sortie en capital	5%	1
9	Yellow	Rachats "élevés" & pas de liquidation ($\tau_A < T$)	5%	N/A

TABLE 4.4 – Stratégies déterministes

On illustre ci-dessous les résultats pour les assurés hommes et femmes de 40 et 50 ans en supposant que l'on a $A_0 = G_0 = M_0 = 1$. On regardera les cas où l'assuré n'a souscrit aucune garantie optionnelle, où il a opté pour la GPD et la GT, et où il a souscrit toutes les garanties optionnelles.

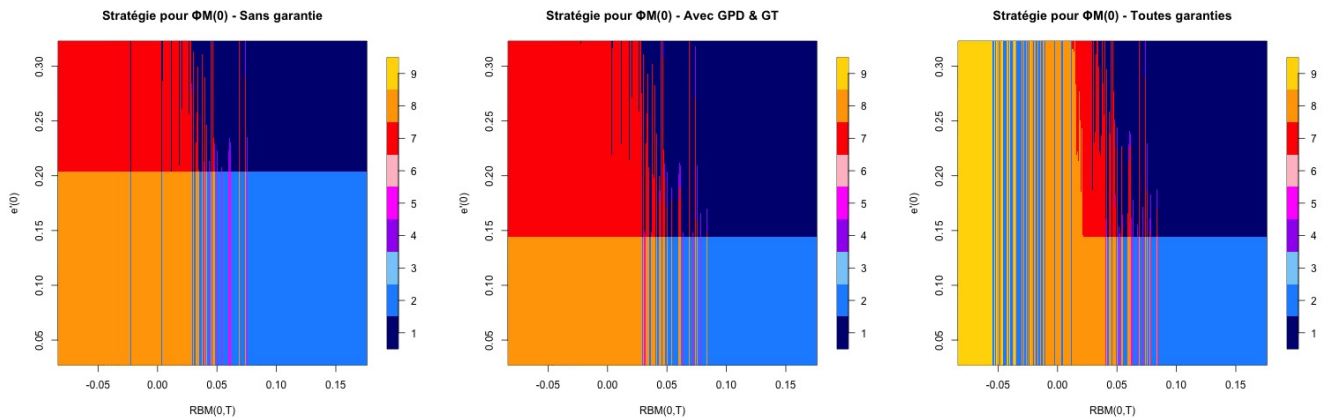
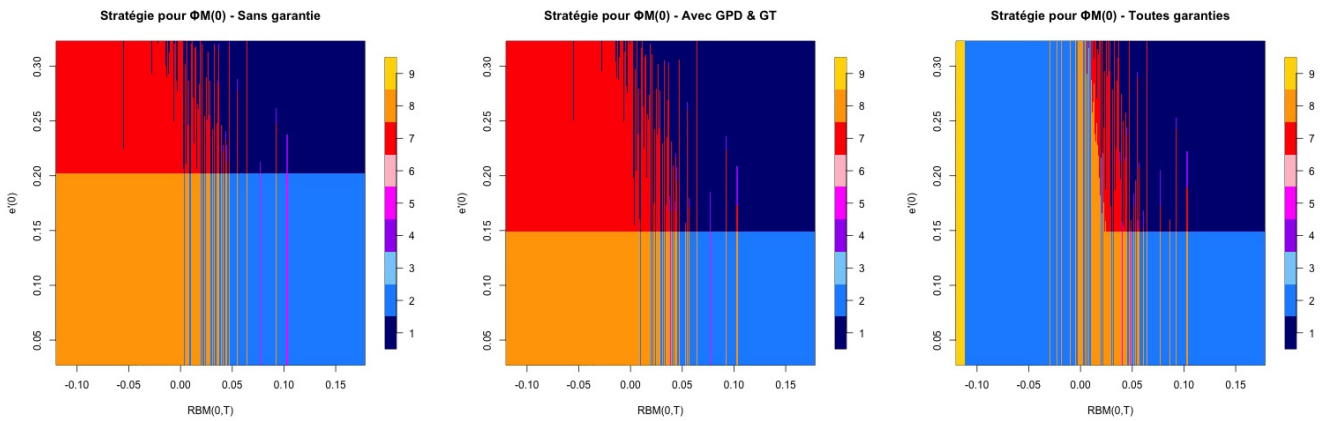
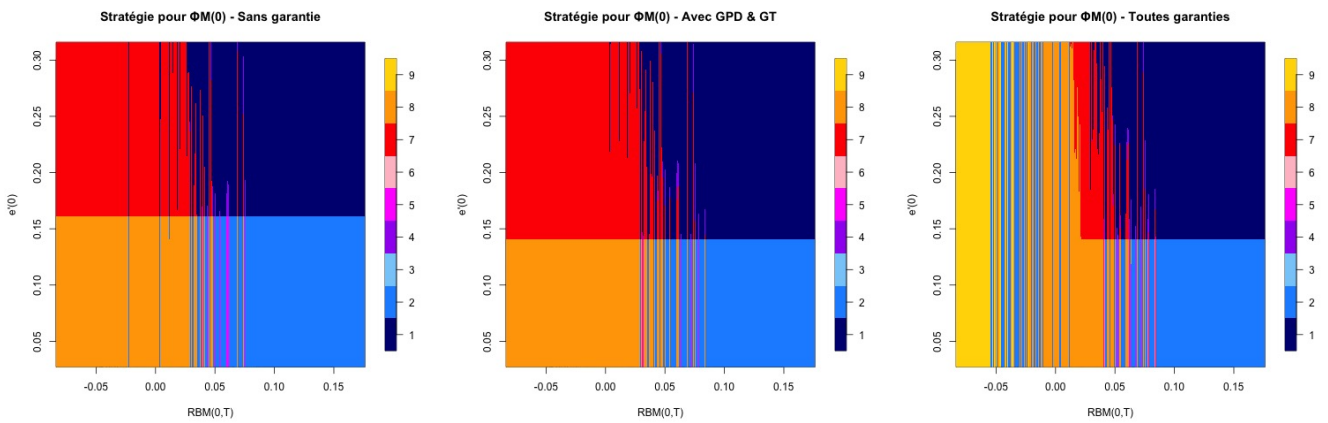
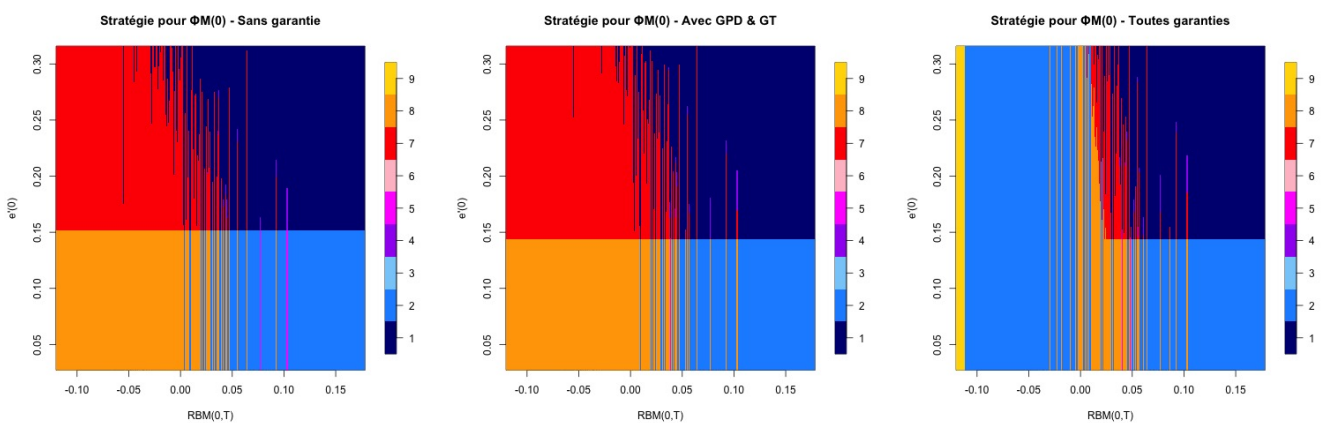


FIGURE 4.15 – Φ_0^M par trajectoire avec $M_0 = 1$ - Hommes 40 ans ($T=25$)

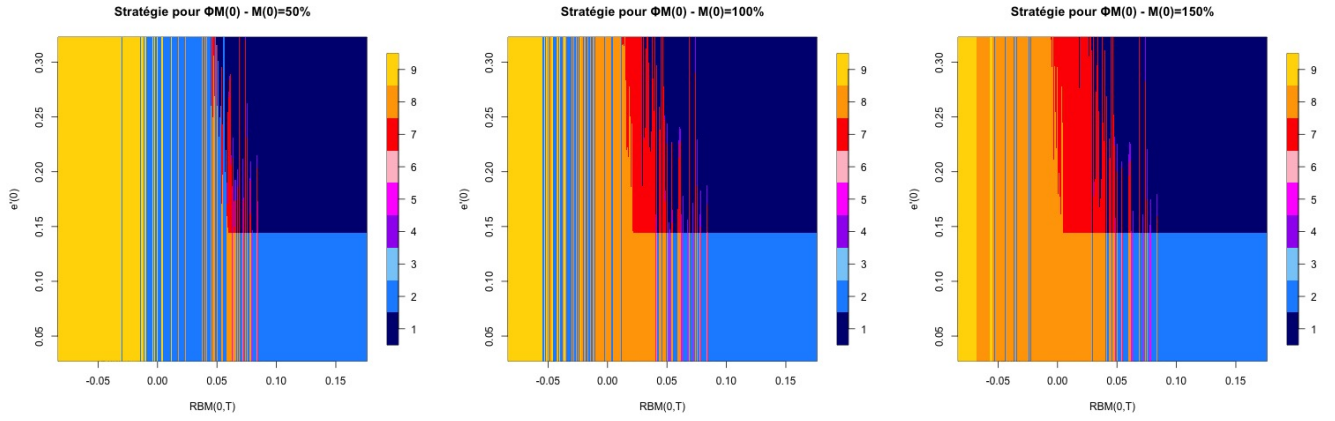
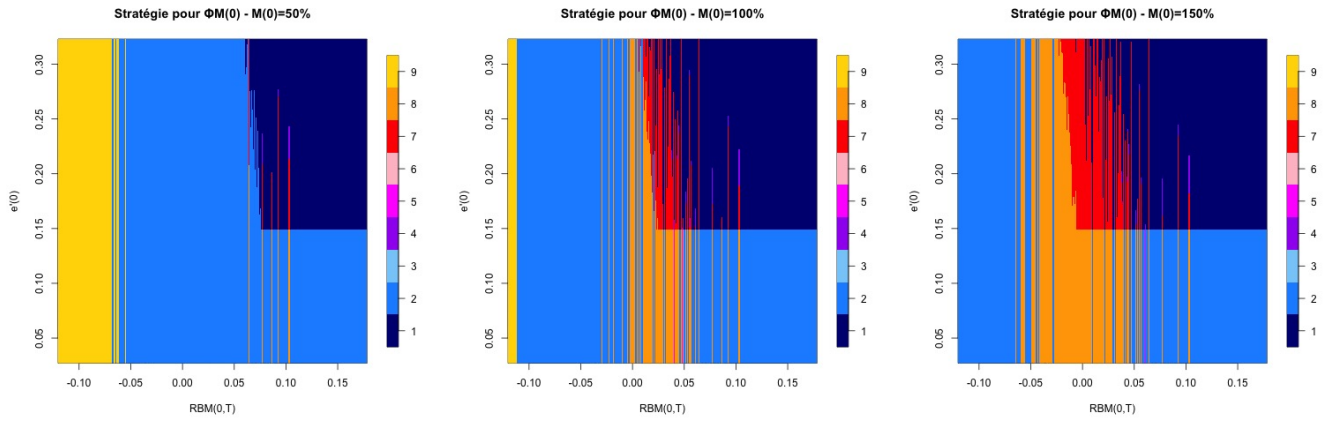
FIGURE 4.16 – Φ_0^M par trajectoire avec $M_0 = 1$ - Hommes 50 ans (T=15)FIGURE 4.17 – Φ_0^M par trajectoire avec $M_0 = 1$ - Femmes 40 ans (T=25)FIGURE 4.18 – Φ_0^M par trajectoire avec $M_0 = 1$ - Femmes 50 ans (T=15)

On obtient pour chaque cas différentes surfaces sur lesquelles une stratégie se démarque des autres. En observant les résultats selon l'axe des rendements financiers avec le rendement brut moyen (RBM) sur $[0, T]$, on observe des comportements différents vis-à-vis des rachats entre les trajectoires à rendement négatif ou faiblement positif, et celles à rendement élevé. Sur l'axe des gains de longévité, on observe bien la distinction des comportements entre les choix de sortie en capital et de sortie en rente à la liquidation selon une valeur de e'_0 qui peut varier selon les profils et garanties souscrites.

Pour les résultats selon l'axe financier, on a globalement les trajectoires aux rendements élevés qui incitent à peu ou pas racheter avant la liquidation car on a une forte richesse du contrat à la liquidation, renforcée avec les souscriptions de la GT et de la GPV. A contrario, sans souscription de la GPV, de faibles rendements financiers encouragent les rachats partiels prématurés pour éviter au maximum la potentielle absence de retour sur investissement à la liquidation. Lorsque la GPV est souscrite, on observe que pour des rendements très négatifs on a $\tau_A < T$ du fait des frais de la garantie et donc la réalisation des rachats permet ainsi de limiter les pertes. Pour des rendements moins négatifs, le comportement va dépendre de l'horizon de maturité. Pour un horizon court, l'absence de rachats permet de rester dans le contrat et de retrouver son investissement initial en exerçant la GPV sur une sortie en capital à 100%. Pour un horizon plus lointain, le comportement varie entre exercer peu de rachats pour rester dans le contrat ou exercer des rachats suffisamment élevés pour rester dans le contrat tout en limitant les pertes. Dans les deux cas, la sortie se fait en capital en exerçant la GPV.

En analysant les résultats selon l'axe de longévité, hors cas où la GPV est souscrite, on a globalement un avantage à liquider en rente viagère pour les trajectoires avec une forte augmentation de l'espérance de vie et a contrario un avantage à liquider en capital lorsqu'elle augmente faiblement. La surface des trajectoires où la sortie en rente est plus avantageuse s'accroît lorsque la garantie de table est souscrite. On observe des surfaces différentes entre les hommes et les femmes ainsi qu'entre les générations du fait des avantages de la sortie en rente (avec ou sans garantie de table) qui diffèrent entre les différents types d'assurés comme vu au paragraphe 4.3.1. Dans le cas où la GPV est souscrite, le choix de sortie entre capital et rente demeure pour les trajectoires à rendements élevés pour lesquels il n'est pas nécessaire d'exercer la GPV car $A_T > G_T$ et donc on est confronté à l'optimisation décrite par l'inéquation 4.3 dans le cas sans GPV. En revanche, lorsque le rendement est faible, l'inéquation 4.3 dans le cas avec GPV prend tout son sens car la GPV sera exercée et que la sortie en capital G_T pourra être plus avantageuse que la sortie en rente dû à un capital constitutif A_T plus faible que G_T . Avec la GPV, la rente viagère n'a donc d'intérêt que dans les trajectoires à rendement positif et avec une longévité suffisamment élevée. On constate de plus dans tous les cas que dans un environnement à forte longévité, la surface de sortie en rente sans effectuer des rachats au préalable augmente du fait de la grande richesse de la rente viagère non diminuée par les rachats.

Le choix entre les différentes stratégies qui permettent d'obtenir Φ_0^M va également dépendre de la moneyness initiale $M_0 = A_0/G_0$ (lorsque le contrat a été souscrit à une date $t_S < 0$). Pour illustrer cela, on prend les exemples des hommes âgés de 40 ans ($T = 25$) et 50 ans ($T = 15$) avec comme moneyness initiales $M_0 \in \{50\%, 100\%, 150\%\}$ dans le cas où toutes les garanties sont souscrites. On observe ci-dessous qu'avec une moneyness initiale plus faible en ayant $M_0 < 1$, la surface des trajectoires sans rachats pour obtenir Φ_0^M augmente ainsi que la surface des trajectoires avec sortie en capital lorsque les rendements ne sont pas élevés du fait de la GPV étant dans la monnaie et valant plus que la sortie en rente. Pour les trajectoires à rendement très négatif, la surface de rachats élevés et sans liquidation (car $\tau_A < T$) augmente. Lors que la moneyness initiale est plus élevée avec $M_0 > 1$, la surface des trajectoires avec rachats élevés à tendance à augmenter pour les rendements intermédiaires ainsi, notamment la surface où s'effectue également une sortie en rente du fait d'une GPV qui est moins dans la monnaie.

FIGURE 4.19 – Φ_0^M par trajectoire - Hommes 40 ans ($T=25$)FIGURE 4.20 – Φ_0^M par trajectoire - Hommes 50 ans ($T=15$)

4.4.4 Le cas des stratégies optimales

La stratégie optimale $C^* = (\gamma^*, \kappa^*)$ sur $[0, T]$ (avec $\gamma^* = (\gamma_t^*)_{0 < t < T}$) définie par la relation 4.13 est conditionnée par les processus stochastiques A_t et G_t et donc la dynamique des actifs financiers, et par la fonction de survie Λ des assurés et donc de e'_0 dans le modèle BDL. On est ici face à un **problème de contrôle optimal stochastique** pour déterminer V_0^* que l'on obtiendra en résolvant une **équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman** par **programmation dynamique**, une méthode introduite par Richard Bellman dans les années 1950. On a sous la forme discrétisée :

$$V_0^* = \sup_{\gamma, \kappa} \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\beta_T \cdot T p_x^{(h)} \cdot L_T(\kappa) + \sum_{k=1}^K \beta_{t_k} \cdot {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)} \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)} \cdot K_{t_k} + \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{t_k} \cdot {}_{t_k} p_x^{(h)} \cdot \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k}^- \mid \mathcal{F}_0 \right].$$

En reprenant la formulation 4.10 et sachant qu'entre t_k^+ et t_{k+1}^- on a le mouvement de l'épargne avec l'évolution des actifs, le prélèvement des frais, le décès possible de l'assuré mais pas de rachat, on obtient donc pour l'assuré encore en vie en t_k la valorisation optimale du contrat :

$$V_{t_k^+}^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[\beta_{t_k, t_{k+1}} \cdot \left(p_{x+t_k}^{(h)} \cdot V_{t_{k+1}^-}^* + q_{x+t_k}^{(h)} \cdot K_{t_{k+1}^-} \right) \mid \mathcal{F}_{t_k^+} \right].$$

Pour que le rachat partiel au taux γ_{t_k} effectué en t_k soit optimal, on doit donc avoir $V_{t_k^-}$ qui maximise la somme du rachat effectué et de la valorisation du contrat résiduelle après rachat, i.e.

$$V_{t_k^-}^* = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ \gamma_{t_k} A_{t_k^-} + V_{t_k^+}^{*\{\gamma_{t_k}\}} \mid \mathcal{F}_{t_k^-} \right\},$$

avec $V_0^* = V_{t_0^+}^*$ car sans rachat en $t_0 = 0$. Si l'assuré est en vie à la liquidation en T , on a la valorisation

$$V_T^* = \sup_{\kappa \in [0,1]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{M}} \left[L_T(\kappa) \mid \mathcal{F}_T \right]$$

car pas de rachat en T et $L_T(\kappa)$ ne dépend que de A_T , G_T (si GPV souscrite), $\mathbf{\Lambda}_R$, $\mathbf{\Lambda}$, κ et de a_{x+T}^R dont la valeur est conditionnée par la souscription de la GT.

On déduit des expressions précédentes un problème récursif rétrograde en optimisant d'abord le comportement à la liquidation en $t_K = T$ avec le paramètre de choix de sortie en capital κ^* puis en optimisant de proche en proche les rachats $\gamma_{t_k}^*$ en t_{K-1} , t_{K-2} , \dots , t_1 , pour obtenir V_0^* en $t_0 = 0$. Sous l'indépendance des processus financiers et de mortalité, on cherchera \bar{V}_0^* qui est la valeur optimale du contrat dans un environnement de longévité donné. Sous le modèle BDL, lorsque l'espérance de vie à la naissance évolue à la vitesse e'_0 , on considère la valorisation optimale $\bar{V}_t^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{E}_t)$ sous la fonction de survie $\mathbf{\Lambda}(e'_0)$, selon le régime $\boldsymbol{\eta}_t$ et de $\mathbf{E}_t = (A_t, G_t)$ en t , en notant par convention $G_t = 1$ (lorsque $A_t > 0$) en l'absence des deux garanties plancher. On définit la quantité $v_t(e'_0, \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{E}_t)$ qui vaut en t_k :

$$v_{t_k}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, \mathbf{E}_{t_k}) = {}_{t_k}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \bar{V}_{t_k}^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, \mathbf{E}_{t_k}) + {}_{t_{k-1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot K_{t_k}(\mathbf{E}_{t_k}). \quad (4.16)$$

Celle-ci permet de reformuler la problématique précédente pour obtenir par récurrences successives $\bar{V}_0^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{E}_0) = v_0(e'_0, \boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{E}_0)$ avec $\gamma_{t_0} = 0$ depuis la date de liquidation T (avec $t_K^- = T$) et pour tout $k \in \{K-1, K-2, \dots, 1, 0\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, \mathbf{E}_T) = \sup_{\kappa \in [0,1]} \left\{ {}_T p_x^{(h)}(e'_0) \cdot L_T(\mathbf{E}_T, \mathbf{\Lambda}_R, e'_0, \kappa) + {}_{t_{K-1}} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{K-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot K_T(\mathbf{E}_T) \right\}, \\ v_{t_k^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k^-}, \mathbf{E}_{t_k^-}) = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0,1]} \left\{ {}_{t_k} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \gamma_{t_k} \cdot A_{t_k^-} + {}_{t_{k-1}} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot K_{t_k}(\mathbf{E}_{t_k^-}) \right. \\ \left. + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\beta_{t_k, t_{k+1}} \cdot v_{t_{k+1}^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}^-}, \mathbf{E}_{t_{k+1}^-}) \mid \mathcal{F}_{t_k^-}^F, \gamma_{t_k} \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

L'optimisation à la liquidation

Si l'assuré est encore en vie au moment de la liquidation, on a la valorisation du contrat selon e'_0 qui est $\bar{V}_T^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, \mathbf{E}_T) = \sup_{\kappa \in [0,1]} \{L_T(\mathbf{E}_T, \mathbf{\Lambda}_R, e'_0, \kappa)\}$ et qui dépend seulement de a_{x+T}^V (dépendant ici uniquement des probabilités de survie à partir de l'âge $x+T$ et non des processus financiers) et donc de e'_0 avec le modèle BDL, de A_T mais aussi de G_T si la GPV est souscrite. On a

$$\frac{\partial L_T}{\partial \kappa}(\mathbf{E}_T = (A_T, G_T), \mathbf{\Lambda}_R, e'_0, \kappa) = A_T \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + [G_T - A_T]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPV}.$$

Pour déterminer κ^* permettant d'obtenir $\bar{V}_T^*(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, \mathbf{E}_T)$, on peut définir pour un couple (e'_0, M_T) la quantité $\phi_T^*(e'_0, M_T)$, avec par convention $M_T = A_T$ et $G_T = 1$ dans le cas sans GPV :

$$\phi_T^*(e'_0, M_T) = M_T \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + [1 - M_T]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPV}.$$

Cette fonction permet d'avoir $\frac{\partial L_T}{\partial \kappa}(\mathbf{E}_T, \mathbf{A}_R, e'_0, \kappa) = G_T \cdot \phi_T^*(e'_0, M_T)$ et donc :

$$\begin{cases} \phi_T^*(e'_0, M_T) > 0 \iff \kappa^* = 1 \iff \text{Le choix optimal à la liquidation est la sortie en capital.} \\ \phi_T^*(e'_0, M_T) < 0 \iff \kappa^* = 0 \iff \text{Le choix optimal à la liquidation est la sortie en rente viagère.} \end{cases}$$

Dans un algorithme d'optimisation pour le problème 4.17, on peut définir un ensemble de valeurs possibles pour le couple (e'_0, M_T) et obtenir κ^* selon le signe de ϕ_T^* pour avoir $v_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, \mathbf{E}_T)$, puis chercher par récurrence les v_{t_k} pour $k \in \{K-1, K-2, \dots, 1, 0\}$. En introduisant la fonction $g(x) = x + [1-x]^+ \cdot \mathbb{1}_{GPD}$, on a

$$v_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, \mathbf{E}_T) = G_T \cdot \left\{ TP_x^{(h)}(e'_0) \cdot \left([\phi_T^*(e'_0, M_T)]^+ + \frac{M_T}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + t_{K-1} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{K-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_T) \right\}. \quad (4.18)$$

On affiche ci-dessous le cas sans GPV pour les différents profils d'assurés la valeur ϕ_T^* en fonction de e'_0 et on trouve :

- Pour les hommes : le choix de la rente viagère est optimal dès lors que l'on a environ $e'_0 > 0,15$ dans le cas avec GT et $e'_0 > 0,20$ dans le cas sans GT,
- Pour les femmes : le choix de la rente viagère est optimal dès lors que l'on a environ $e'_0 > 0,15$ dans le cas avec GT et $e'_0 > 0,16$ dans le cas sans GT.

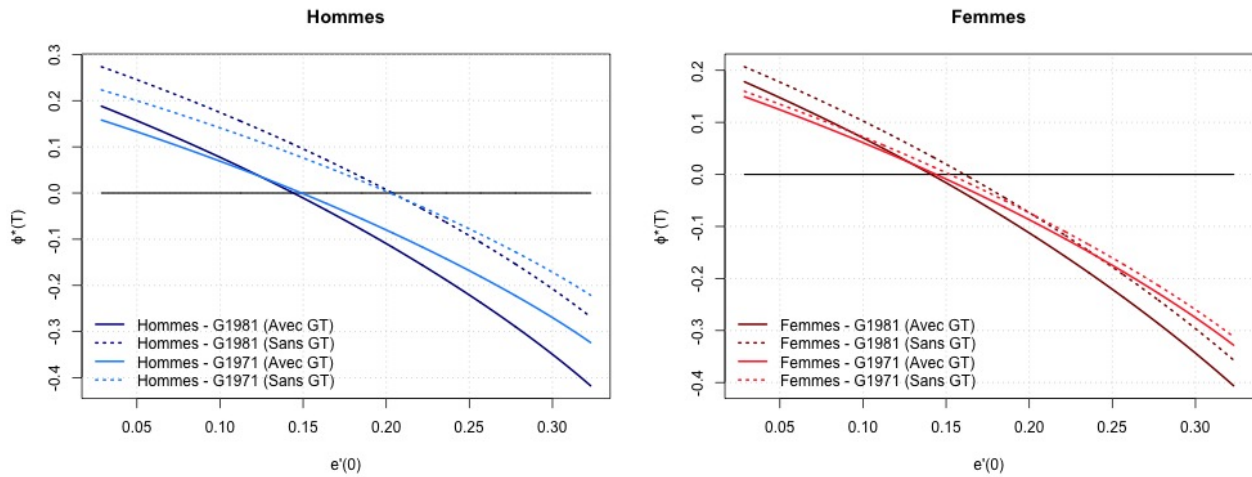
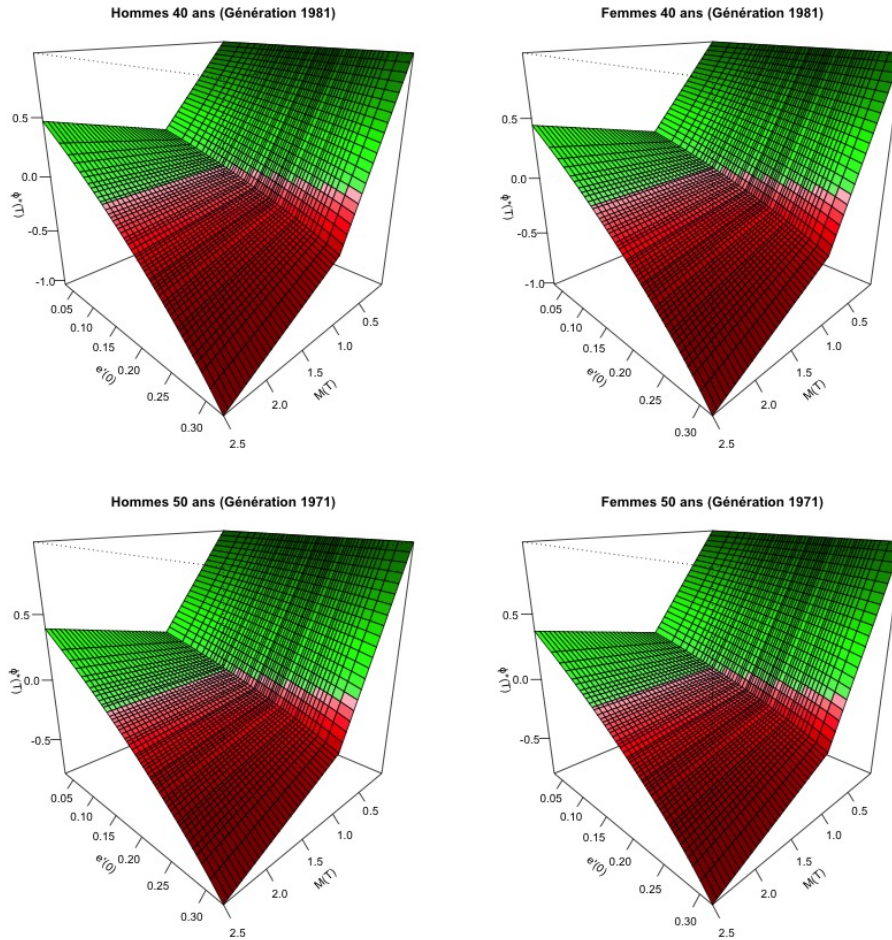


FIGURE 4.21 – ϕ_T^* en fonction de e'_0 pour chaque sexe et génération - Sans GPV

On affiche ci-dessous les surfaces pour ϕ_T^* en fonction de e'_0 et M_T avec la GT et la GPV souscrites pour les différents profils d'assurés : on a en vert l'optimum atteint avec la sortie en capital et en rouge l'optimum atteint avec la sortie en rente viagère. La forme des surfaces reste globalement la même entre les profils avec le choix de la rente rendu optimal avec l'augmentation de e'_0 et de M_T .

FIGURE 4.22 – ϕ_T^* en fonction de e'_0 et M_T pour chaque sexe et génération - Avec GT & GPV

N. B. :

Si la différenciation par sexe des tables est impossible, les résultats de l'optimisation à la liquidation s'en trouvent modifiés pour les hommes car pénalisés par une rente viagère moins avantageuse calculée avec la table féminine. La surface correspondant à la sortie en capital devient donc plus grande.

L'optimisation des rachats avant la liquidation

Afin de déterminer le taux de rachat optimal $\gamma_{t_k}^*$ en t_k pour chaque $k \in \{K-1, K-2, \dots, 2, 1\}$, il est nécessaire de maximiser la seconde composante du problème 4.17. Pour cela, il est nécessaire d'évaluer le terme $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\beta_{t_k, t_{k+1}} \cdot v_{t_{k+1}}^-(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}}, \mathbf{E}_{t_{k+1}}^-) \mid \mathcal{F}_{t_k}^F, \gamma_{t_k} \right]$ qui dépend bien évidemment du taux de rachat γ_{t_k} , du régime $\boldsymbol{\eta}_{t_k}$ et du vecteur d'état de l'épargne $\mathbf{E}_{t_k}^-$ avant rachat.

Pour la résolution numérique, on simplifiera le problème 4.17 en considérant ici un taux sans risque constant r et une épargne constituée en partie de l'actif sans risque B_t , avec la même pondération θ_t^B que dans le cas avec trois actifs, et de l'actif risqué S_t de pondération $\theta_t = 1 - \theta_t^B$ (avec $t \mapsto \theta_t$ décroissante). On prendra $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ pour la volatilité de l'actif risqué dans les différents régimes $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ possibles pour la chaîne de Markov $\boldsymbol{\eta}_t$ et $\sigma_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$. On a le déflateur sur $[t_k, t_l]$ (avec $t_l > t_k$) qui est alors $\beta_{t_k, t_l} = \exp(-r \cdot (t_l - t_k))$ et la dynamique de $\mathbf{E}_t = (A_t, G_t)$ décrite par 4.1 devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_{t^-} = \left\{ (r - \alpha_A)A_{t^-} - \alpha_G G_{t^-} \right\} dt + \left\{ \theta_t \sigma_t A_{t^-} \right\} dW_t, \quad A_t \geq 0 \quad \text{avant rachat en } t, \\ A_{t^+} = A_{t^-} (1 - \gamma_t) \quad \text{et} \quad G_{t^+} = G_{t^-} (1 - \gamma_t) \quad \text{au rachat en } t. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

En reprenant la seconde composante de la relation 4.17 pour tout $k \in \{K-1, K-2, \dots, 1, 0\}$, on a sur $[t_k^+, t_{k+1}^-]$ en l'absence de rachats sur cette période :

$$v_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, \mathbf{E}_{t_k^+}) = e^{-r \cdot h} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[v_{t_{k+1}^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}}, \mathbf{E}_{t_{k+1}^-}) \mid \mathcal{F}_{t_k^+}^F \right].$$

Comme réalisé à l'étape de l'optimisation à la liquidation et au vu des relations précédentes, on peut mettre en facteur $G_{t_k^+} = G_{t_{k+1}^-}$ pour changer d'échelle le problème en considérant le vecteur d'état sans dimension $\bar{\mathbf{E}}_t = G_t^{-1} \cdot \mathbf{E}_t = (M_t, 1)$. On constate par ailleurs qu'étant donné que le rachat est effectué au prorata au même taux sur A_t et G_t , on a $M_t = M_{t^-} = M_{t^+}$. Par ailleurs, en l'absence des garanties plancher GPD et GPV, on notera par convention $\bar{\mathbf{E}}_t = (A_t, 1)$ avec $M_t = A_t$ et $G_t = 1$. En définissant $\bar{v}_t(e'_0, \boldsymbol{\eta}_t, M_t) = G_t^{-1} \cdot v_t(e'_0, \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{E}_t)$ on a le problème d'optimisation 4.17 qui devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_T(e'_0, \boldsymbol{\eta}_T, M_T) = T p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \left([\phi_T^*(e'_0, M_T)]^+ + \frac{M_T}{(1 + \alpha_R)} \frac{a_{x+T}^V(e'_0)}{a_{x+T}^R} \right) + t_{K-1} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{K-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_T), \\ \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k^+}) = e^{-r \cdot h} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\bar{v}_{t_{k+1}^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_{k+1}}, M_{t_{k+1}^-}) \mid \mathcal{F}_{t_k^+}^F \right], \\ \bar{v}_{t_k^-}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = \sup_{\gamma_{t_k} \in [0, 1]} \left\{ t_k p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \gamma_{t_k} \cdot M_{t_k} + (1 - \gamma_{t_k}) \cdot \bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) \right. \\ \left. + t_{k-1} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{k-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot g(M_{t_k}) \right\}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Afin de résoudre ce problème permettant d'obtenir les $\gamma_{t_k}^*$, on construira un maillage sur le domaine des valeurs possibles pour $(e'_0, \boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k})$ pour déterminer le rachat optimal à réaliser en t_k selon la valeur du triplet. Pour e'_0 fixé, si en t_k on a $(\boldsymbol{\eta}_{t_k}, M_{t_k}) = (\mathbf{e}_i, M)$, $i \in \{1, 2\}$, on cherchera à évaluer dans la deuxième relation du problème précédent le terme $\bar{v}_{t_k^+}(e'_0, \mathbf{e}_i, M)$ pour ensuite déterminer $\gamma_{t_k}^*$ qui permet d'obtenir $\bar{v}_{t_k^-}(e'_0, \mathbf{e}_i, M)$ avec la troisième relation.

Pour évaluer $\bar{v}_{t_k^+}$, on applique à la deuxième relation le théorème de Feynman-Kac (cf. Annexe A) que l'on adapte à un processus à changement de régime et pour un problème rétrograde avec $t \leq t_{k+1}^-$ pour chaque k . Pour faciliter les notations par la suite, on introduit $\tau = T - t$ et la suite des $\tau_{k'}$ correspondant aux t_k avec $k' \in \{0, 1, \dots, K-1, K\}$ et $\tau_0 = t_K = T$ et $\tau_K = t_0 = 0$. Sur $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ (i.e. sur $[t_k^+, t_{k+1}^-]$), avant le changement de régime éventuel en $\tau_{k'}$ et avec $\theta_\tau = \theta$ constant sur cette période (avant changement en $\tau_{k'}$), \bar{v}_τ est donc solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\frac{\partial \bar{v}_\tau}{\partial \tau} = \mathcal{A} \bar{v}_\tau - r \cdot \bar{v}_\tau, \quad (4.21)$$

où pour e'_0 fixé on a $\mathcal{A} \bar{v}_\tau$ qui est le générateur infinitésimal défini par

$$\mathcal{A} \bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_i, M) = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\mathbb{E} \left[\bar{v}_\tau(e'_0, \boldsymbol{\eta}_u, M_u) \mid (\boldsymbol{\eta}_0, M_0) = (\mathbf{e}_i, M) \right] - \bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_i, M)}{u}.$$

Le générateur infinitésimal vaut ici

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_i, M) &= \frac{1}{2}\theta^2\sigma_i^2M^2\frac{\partial^2\bar{v}_\tau}{\partial M^2}(e'_0, \mathbf{e}_i, M) + \left\{ (r - \alpha_A)M - \alpha_G \right\} \frac{\partial\bar{v}_\tau}{\partial M}(e'_0, \mathbf{e}_i, M) \\ &+ \mathcal{Q}\bar{v}_\tau(e'_0, \cdot, M)(i), \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix}$ le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov $\boldsymbol{\eta}_\tau$ où $q_{i,j} = -q_{i,i}$, et

$$\mathcal{Q}\bar{v}_\tau(e'_0, \cdot, M)(i) = q_{i,3-i} \cdot [\bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_{3-i}, M) - \bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_i, M)] = q_{i,i} \cdot [\bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_i, M) - \bar{v}_\tau(e'_0, \mathbf{e}_{3-i}, M)].$$

En notant $\bar{v}_\tau^{(i)}(\cdot, \cdot) = \bar{v}_\tau(\cdot, \mathbf{e}_i, \cdot)$, on obtient ainsi un système d'équations d'advection-diffusion-réaction couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial\bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\theta^2\sigma_1^2M^2\frac{\partial^2\bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A)M - \alpha_G \right\} \frac{\partial\bar{v}_\tau^{(1)}}{\partial M} - (r - q_{1,1})\bar{v}_\tau^{(1)} - q_{1,1}\bar{v}_\tau^{(2)}, \\ \frac{\partial\bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\theta^2\sigma_2^2M^2\frac{\partial^2\bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M^2} + \left\{ (r - \alpha_A)M - \alpha_G \right\} \frac{\partial\bar{v}_\tau^{(2)}}{\partial M} - (r - q_{2,2})\bar{v}_\tau^{(2)} - q_{2,2}\bar{v}_\tau^{(1)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Pour résoudre ce problème de Cauchy, on cherchera la solution de viscosité de ce système d'équations aux dérivées partielles sur l'ensemble $\Omega_{k'} = [0, e'_{0,max}] \times \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \times [0, M_{max}] \times [\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ (avec M_{max} suffisamment élevé) et avec comme conditions initiales par rapport à τ les valeurs $\bar{v}_{\tau_{k'-1}^-}$ obtenues à l'étape précédente et comme conditions limites par rapport à M :

- $M = M_{min} \equiv 0$: On a alors $A = 0$, ce qui implique la fermeture du contrat. Le seul flux possible est en cas du décès de l'assuré sur $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+] = [t_k^+, t_{k+1}^-]$ si ce dernier a souscrit la GPD. Dans ce cas, l'assureur verse la base garantie résiduelle au(x) bénéficiaire(s) de l'assuré. On a donc

$$\bar{v}_t(e'_0, \cdot, 0) = e^{-r \cdot (t_{k+1} - t)} \cdot {}_t k p_x^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_k}^{(h)}(e'_0) \cdot \mathbf{1}_{GPD}. \quad (4.24)$$

- $M = M_{max}$: Les garanties plancher sont hors de la monnaie car $A \gg G$. La GPD n'est pas exercée en cas de décès et la probabilité d'exercer la GPV à la liquidation est quasi-nulle pour M_{max} suffisamment grand. Si l'assuré décède sur $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+] = [t_k^+, t_{k+1}^-]$, l'épargne A est versée au(x) bénéficiaire(s). Si l'assuré est vivant en t_{k+1} et a la possibilité de réaliser une opération spéciale d'arbitrage où toute l'épargne bascule sur l'actif sans risque au rendement r puis ne réalise aucun rachat jusqu'à la liquidation avec pour objectif de prendre dans le futur une rente viagère si l'environnement de longévité lui est favorable, M_t suit alors jusqu'en T la dynamique

$$dM_t = \left\{ (r - \alpha_A) \cdot M_t - \alpha_G \right\} dt.$$

Par intégration pour tout $u \in [t, T]$ sachant la valeur initiale M_t en t , on a¹

$$M_u(M_t, t) = M_t \cdot e^{(r - \alpha_A) \cdot (u - t)} - \frac{\alpha_G}{r - \alpha_A} \cdot e^{(r - \alpha_A) \cdot (u - t)} \cdot \left[e^{-(r - \alpha_A) \cdot t} - e^{-(r - \alpha_A) \cdot u} \right].$$

On considère qu'il réalise le choix optimal entre effectuer un rachat total pour récupérer A ou rester dans le contrat sans effectuer de rachats ultérieurs pour percevoir la future rente viagère à la liquidation ou l'épargne résiduelle si décès avant la liquidation. On a donc

$$\bar{v}_t(e'_0, \cdot, M_{max}) = e^{-r \cdot (t_{k+1} - t)} \cdot {}_t k p_x^{(h)}(e'_0) \cdot \left(p_{x+t_k}^{(h)}(e'_0) \cdot \max[M_{max}, \Psi(M_{max}, k + 1)] + q_{x+t_k}^{(h)}(e'_0) \cdot M_{max} \right), \quad (4.25)$$

i. N. B. : Le résultat peut être démontré en intégrant $N_s = M_s \cdot e^{-(r - \alpha_A) \cdot s}$ pour $s \in [t, u]$.

où :

$$\begin{aligned} \Psi(M, k) = & e^{-r \cdot (T-t_k)} \cdot {}_{T-t_k}p_{x+t_k}^{(h)}(e'_0) \cdot \left(\left[\phi_T^*(e'_0, M_T(M, t_k)) \right]^+ + \frac{M_T(M, t_k) a_{x+T}^V(e'_0)}{(1 + \alpha_R) a_{x+T}^R} \right) \\ & + \mathbb{1}_{\{k < K-1\}} \cdot \sum_{j=k+1}^K e^{-r \cdot (t_j-t_k)} \cdot {}_{t_{j-1}}p_{x+t_k}^{(h)}(e'_0) \cdot q_{x+t_{j-1}}^{(h)}(e'_0) \cdot M_{t_j}(M, t_k). \end{aligned}$$

Alternativement, si l'assuré ne considère pas son éventuelle rente future en fonction l'environnement de longévité ou qu'il n'a pas la possibilité d'arbitrer pour supprimer le risque de perte en capital dû à la volatilité de l'épargne, l'assuré fait un rachat total. On aurait donc

$$\bar{v}_t(e'_0, \cdot, M_{max}) = e^{-r \cdot (t_{k+1}-t)} \cdot {}_{t_{k+1}}p_x^{(h)}(e'_0) \cdot M_{max}.$$

La résolution du schéma numérique sur $\Omega_{k'}$ se fait avec la méthode de Crank-Nicolson (cf. Annexe C) adapté à un système de deux équations couplées. On réalise l'optimisation pour les n_L valeurs de e'_0 notées $e'_0(l)$ avec $l \in \llbracket 1, n_L \rrbracket$. Pour un $e'_0(l)$ donné, on construit le maillage pour la résolution du couple d'équations aux dérivées partielles avec :

- Axe des régimes : L'axe correspond aux deux états possibles pour η_τ qui sont e_1 et e_2 . On a $i \in \{1, 2\}$ pour les états e_i .
- Axe spatial : L'axe spatial correspondant aux valeurs pour M est composé de $J + 1$ points M_j à valeurs entre $M_{min} = 0$ et M_{max} où :

$$\delta M = \frac{M_{max}}{J} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 0, J \rrbracket, \quad M_j = j \cdot \delta M.$$

- Axe temporel : L'axe temporel est défini par l'intervalle $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ de longueur h en considérant que les événements (décès et rachats) se produisent aux bornes de l'intervalle. Afin de garantir la convergence du schéma numérique, il faut un pas de temps suffisamment petit sachant la valeur de δM . Il peut donc être nécessaire de partitionner l'intervalle $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ en N sous-intervalles $[\tau'_n, \tau'_{n+1}]$ de taille $\delta\tau$, avec $h = N \cdot \delta\tau$ et $\tau'_n = \tau_{k'-1}^- + n \cdot \delta\tau$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

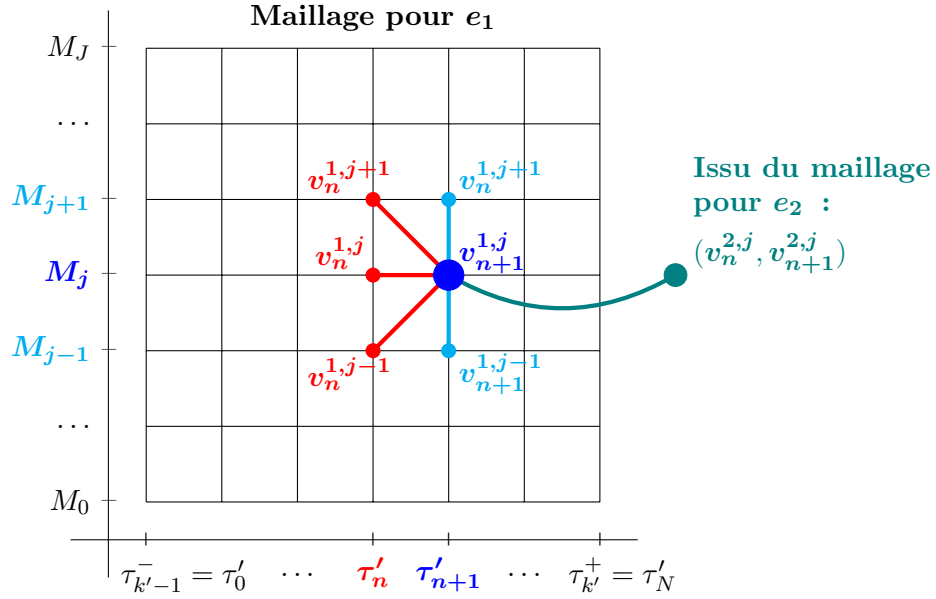
On obtient alors pour chaque l le schéma numérique des $\bar{v}_n^{i,j}(l)$, avec la notation simplifiée $\bar{v}_n^{i,j}$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\bar{v}_n^{i,j} = \frac{1}{2}\theta^2\sigma_i^2 M_j^2 \frac{\bar{v}_n^{i,j+1} - 2\bar{v}_n^{i,j} + \bar{v}_n^{i,j-1}}{\delta M^2} + \left\{ (r - \alpha_A)M_j - \alpha_G \right\} \frac{\bar{v}_n^{i,j+1} - \bar{v}_n^{i,j-1}}{2\delta M} + q_{i,i} [\bar{v}_n^{i,j} - \bar{v}_n^{3-i,j}], \\ \frac{\bar{v}_{n+1}^{i,j} - \bar{v}_n^{i,j}}{\delta\tau} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{A}\bar{v}_{n+1}^{i,j} - r\bar{v}_{n+1}^{i,j} + \mathcal{A}\bar{v}_n^{i,j} - r\bar{v}_n^{i,j} \right]. \end{cases} \quad (4.26)$$

Comme illustré sur la Figure 4.23 ci-dessous, cette relation permet d'exprimer $\bar{v}_{n+1}^{i,j}$ en fonction de :

- Dans le maillage pour e_i à l'étape n : $\bar{v}_n^{i,j-1}$, $\bar{v}_n^{i,j}$, $\bar{v}_n^{i,j+1}$,
- Dans le maillage pour e_i à l'étape $n + 1$: $\bar{v}_{n+1}^{i,j-1}$, $\bar{v}_{n+1}^{i,j+1}$,
- Dans le maillage pour e_{3-i} aux étapes n et $n + 1$: $\bar{v}_n^{3-i,j}$, $\bar{v}_{n+1}^{3-i,j}$.

La résolution de ce schéma numérique se réalise donc par un système d'équations tridiagonales avec des conditions aux bords correspondant aux conditions limites fixées plus haut qui permet d'obtenir les $\bar{v}_{\tau_{k'}^+}^{i,j}$ à partir des résultats pour $\bar{v}_{\tau_{k'-1}^-}^{i,j}$ obtenus à l'étape précédente (cf. Annexe C).


 FIGURE 4.23 – Obtention de $\bar{v}_{n+1}^{1,j}$ avec le maillage pour la résolution du système d'EDP

Pour la résolution du problème d'optimisation de rachat en $\tau_{k'}$ et les résultats des applications numériques présentés ci-après, on se placera dans le cas où l'on a au moins la GPD souscrite et donc $\alpha_G > 0$. On peut déterminer le taux de rachat optimal avec la troisième relation de 4.20 en introduisant

$$\varphi_{\tau_{k'}}^*(e'_0, \mathbf{e}_i, M, \bar{v}_{\tau_{k'}^+}(e'_0, \mathbf{e}_i, M)) = T_{-\tau_{k'}} p_x^{(h)}(e'_0) \cdot M - \bar{v}_{\tau_{k'}^+}(e'_0, \mathbf{e}_i, M).$$

Le signe de $\varphi_{\tau_{k'}}^*$ permet d'avoir le taux de rachat optimal $\gamma_{\tau_{k'}}^* \in \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} \varphi_{\tau_{k'}}^*(e'_0, \mathbf{e}_i, M, \bar{v}_{\tau_{k'}^+}(e'_0, \mathbf{e}_i, M)) > 0 \iff \gamma_{\tau_{k'}}^* = 1 \iff \text{Le choix optimal est le rachat total.} \\ \varphi_{\tau_{k'}}^*(e'_0, \mathbf{e}_i, M, \bar{v}_{\tau_{k'}^+}(e'_0, \mathbf{e}_i, M)) < 0 \iff \gamma_{\tau_{k'}}^* = 0 \iff \text{Le choix optimal est de ne pas racheter.} \end{cases}$$

N. B. :

- Par simplification, la résolution du problème a été réduite au cas avec l'actif sans risque et un seul actif risqué. On peut traiter le cas multivarié (avec les actifs risqués Actions et Immobilier) décrit précédemment avec la pondération des actifs $\boldsymbol{\theta} = (\theta^S, \theta^I, \theta^B)$ et G constants sur l'intervalle de temps $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ sans rachats, $A_t = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{X}_t$ avec $\mathbf{X}_t = (S_t, I_t, B_t)^\top$ et

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, G)dt + \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\eta}_t)d\mathbf{W}_t,$$

où :

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, G) = \left\{ (r - \alpha_A) \cdot \mathbf{X}_t - \alpha_G \cdot G \cdot \mathbf{1}_3 \right\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\eta}_t) = \begin{pmatrix} S_t \cdot \sigma_{1,1;t} & 0 & 0 \\ I_t \cdot \sigma_{2,1;t} & I_t \cdot \sigma_{2,2;t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera $\boldsymbol{\sigma}_i(\cdot) = \boldsymbol{\sigma}_t(\cdot, \mathbf{e}_i)$. Le système d'équations à résoudre pour les $v_\tau^{(i)}(e'_0, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}, G)$ devient alors, avec le gradient $\nabla_{\mathbf{X}} v_\tau^{(i)}$ et la matrice hessienne $\nabla_{\mathbf{X}}^2 v_\tau^{(i)}$ (avec $\nabla_{\mathbf{X}}^2 = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}$ obtenu par

le produit dyadique) de $v_\tau^{(i)}$ par rapport à \mathbf{X} , et $\Theta = \text{diag}(\theta^S, \theta^I, \theta^B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial v_\tau^{(i)}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \cdot \text{Tr} \left(\sigma_i \cdot \sigma_i^\top \cdot \Theta^2 \cdot \nabla_{\mathbf{X}}^2 v_\tau^{(i)} \right) + \mu^\top \cdot \Theta \cdot \nabla_{\mathbf{X}} v_\tau^{(i)} + \mathcal{Q} v_\tau^{(i)}(\cdot)(i) - r \cdot v_\tau^{(i)}.$$

Pour résoudre le problème d'optimisation, il convient d'ajouter plusieurs dimensions au maillage précédent et de modifier le schéma numérique 4.26 en conséquence.

- G_t est ici non revalorisée et sans effet cliquet et il n'y a pas un montant de rachat garanti. Si on a ces spécificités, G_t évolue entre deux dates consécutives t_k^+ et t_{k+1}^- et le problème 4.20 est modifié avec la variation le cas échéant de M et \bar{v}_τ lors du rachat (l'interpolation des \bar{v}_τ sur l'axe spatial entre deux nœuds pouvant être nécessaire). La nouvelle fonction d'optimisation $\varphi_{\tau_{k'}}^*$ peut alors dépendre du taux de rachat qui n'est plus nécessairement un choix binaire et on cherchera donc $\gamma_{\tau_{k'}}^* = \underset{\gamma_{\tau_{k'}}}{\text{argmax}} \varphi_{\tau_{k'}}^* \in [0, 1]$.

Les résultats pour les stratégies optimales

On présente ci-dessous les résultats de l'application numérique avec a minima la GPD souscrite. L'illustration se fera avec le cas d'un homme de 40 ans (né en 1981). On prendra comme taux sans risque $r = 2,5\%$, et pour la volatilité de l'actif risqué et le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov pour le changement de régime les valeurs obtenues au Chapitre 2 pour les Actions :

$$\sigma = (\sigma_1 = 11,04\% , \quad \sigma_2 = 24,17\%) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,6151 & 0,6151 \\ 1,0180 & -1,0180 \end{pmatrix}.$$

On a les paramètres pour le maillageⁱ :

$e'_0(\min)$	$e'_0(\max)$	M_{\min}	M_{\max}	δM	J	$\delta \tau$	N
0	0,35	0	3,5	0,02	175	1/60	5

TABLE 4.5 – Paramètres pour le maillage sur $[\tau_{k'}^-, \tau_{k'}^+]$ pour la résolution numérique des EDP

On affiche ci-dessous les résultats pour κ^* selon la souscription des garanties GT et GPV :

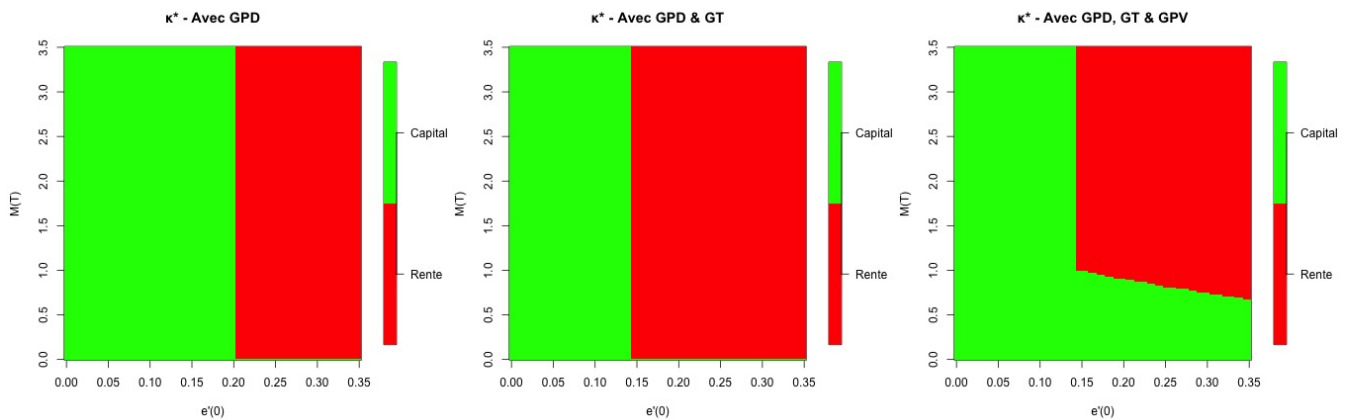


FIGURE 4.24 – κ^* selon e'_0 et M_T - Hommes 40 ans ($T=25$)

i. N. B. : Le choix de δM peut être contraint par la valeur de α_G pour garantir au niveau du terme d'advection la stabilité du schéma numérique pour la résolution du système d'EDP.

On observe une augmentation selon l'axe e'_0 de la surface pour laquelle la sortie en rente viagère est optimale lorsque la GT est souscrite. Avec la GPV, on a une augmentation de la surface pour laquelle la sortie en capital est optimale pour $M_T < 1$. Cette surface augmente moins pour les hautes valeurs de e'_0 du fait d'une plus forte valeur de la rente viagère dans un environnement de longévité élevée.

En optimisant \bar{v}_τ pour tout $\tau \in]0, T[$ depuis la date de liquidation en $\tau = 0$, on obtient les rachats optimaux γ_τ^* en fonction de e'_0 , M et $t = T - \tau$. On peut tout d'abord noter que le choix de la condition limite en M_{max} influe sur les résultats de γ^* pour les grandes valeurs de M : lorsque l'on offre à l'assuré la possibilité d'avoir la valeur maximale entre tout racheter ou d'arbitrer sur l'actif sans risque quand M est suffisamment grand et d'attendre la liquidation en rente future qui se trouve avantageuse, on a effectivement moins de cas de rachats qu'en l'absence de cette possibilité.

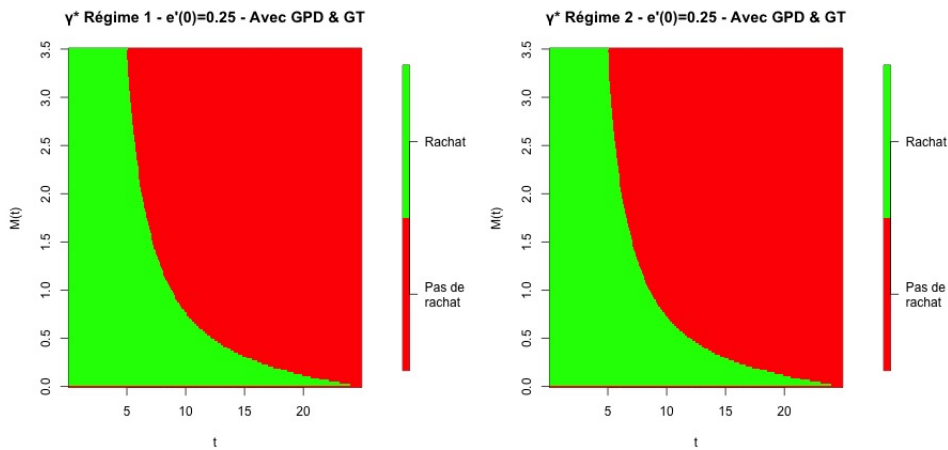


FIGURE 4.25 – Choix arbitrage pour liquidation future/rachat total en M_{max} - Hommes 40 ans ($T=25$)

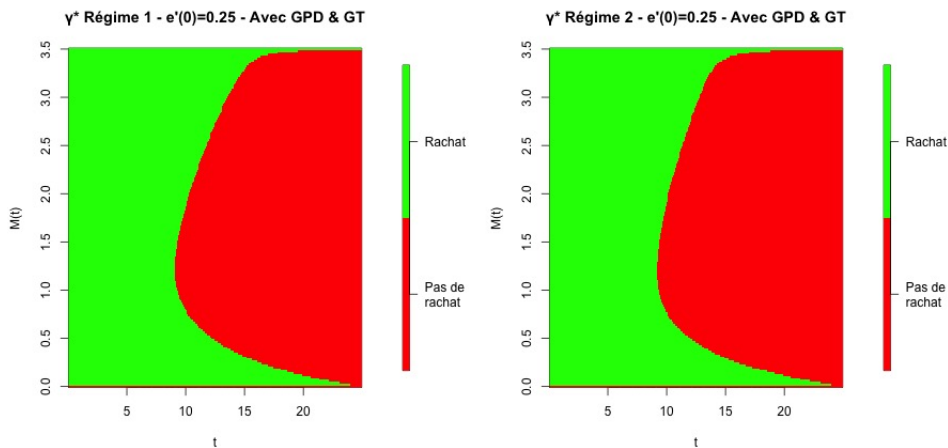
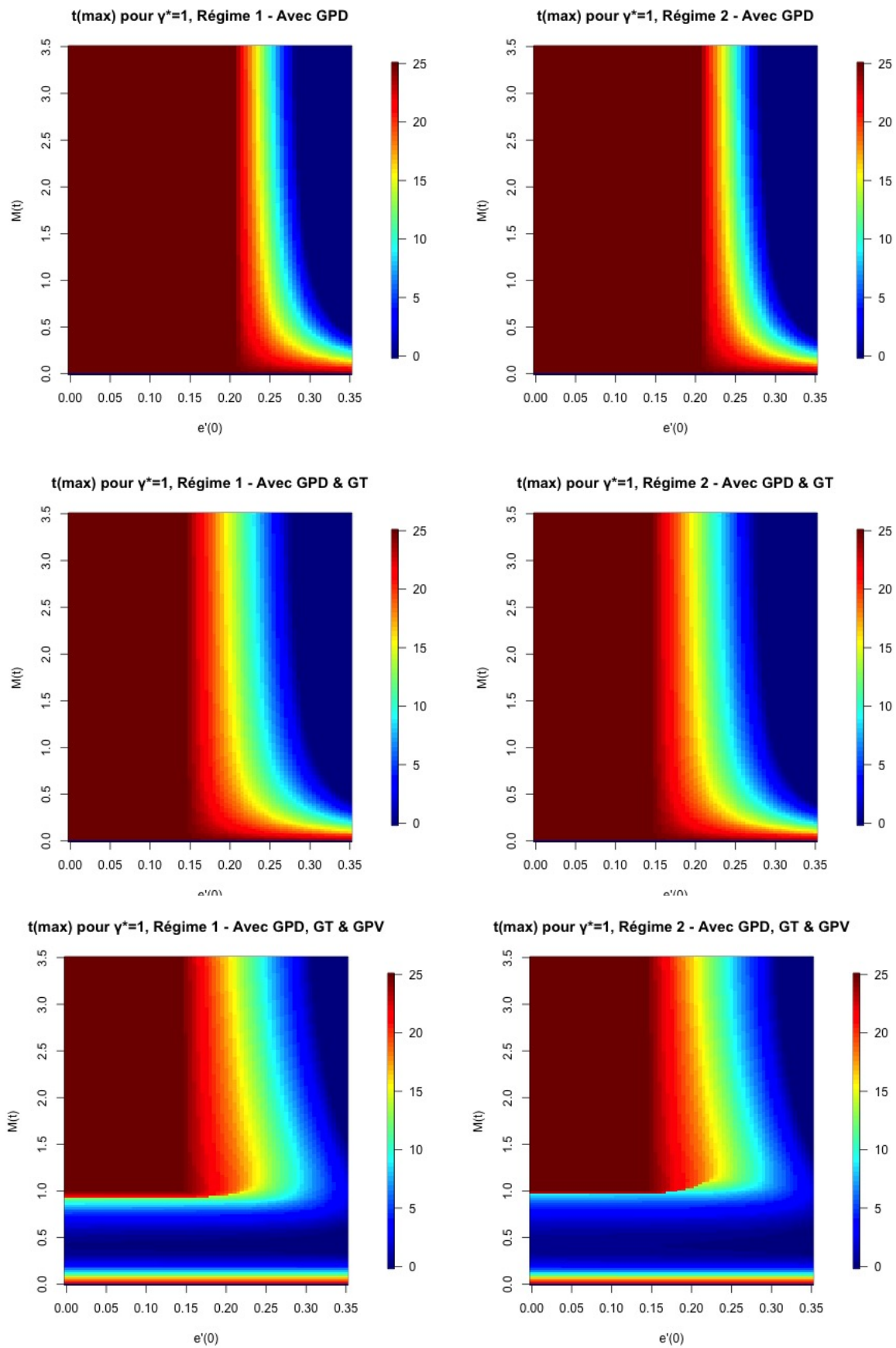


FIGURE 4.26 – Rachat total en M_{max} - Hommes 40 ans ($T=25$)

Par la suite, on considérera que l'assuré choisit en M_{max} le maximum entre le rachat total et l'arbitrage sur l'actif sans risque en attendant la liquidation.

On s'intéresse maintenant aux valeurs maximales des variables t , e'_0 et M , chacune en fonction des deux autres variables, au-delà desquelles il n'est plus optimal d'effectuer un rachat. On constatera que les schémas pour les résultats sont similaires dans les deux régimes de volatilité dans les différentes analyses. On regarde tout d'abord la dernière date à partir de laquelle il n'est plus optimal pour l'assuré de racheter en fonction de e'_0 et M , i.e. la dernière date t pour laquelle on a $\gamma^* = 1$:

FIGURE 4.27 – Dernière date t pour un rachat optimal selon e'_0 et M - Hommes 40 ans ($T=25$)

Lorsque la GPV n'est pas souscrite, on a pour e'_0 élevé la dernière date t de rachat optimal qui converge vers 0 où il est optimal de ne jamais racheter. Cette convergence est plus rapide avec la GT car la valorisation de la future rente viagère est plus élevée et le rachat plus pénalisant. À l'inverse, lorsque e'_0 est faible, la rente viagère n'est pas rentable, les frais continuent à être prélevés jusqu'à la liquidation et on a une faible probabilité de décès pour percevoir un capital décès même garanti : il est donc optimal pour l'assuré de racheter avant la liquidation. Lorsque M passe en dessous de 50%, cette convergence vers 0 est moins prononcée voire totalement absente et il est au contraire préférable pour l'assuré d'effectuer un rachat le plus tôt possible pour sortir du produit en limitant les pertes. Lorsque la GPV est souscrite, on a une bande pour $M < 1$ dans laquelle il est optimal de ne pas racheter pour profiter de la GPV à la liquidation ou, en cas de décès avant la liquidation, de la GPD.

On affiche ensuite la valeur limite pour e'_0 pour laquelle il n'est plus optimal de racheter en fonction de t et M . La valeur limite minimale est plus faible quand la GT est souscrite car la rente gagne en valeur. La valeur limite augmente avec t ou M s'approchant de 0, l'effet étant plus marqué sur l'axe temporel si $M > 1$, sinon l'effet est plus marqué selon M . Pour t faible, il est nécessaire d'avoir e'_0 grand pour que l'assuré trouve un avantage à rester dans le produit et bénéficier d'une future rente élevée. Pour M proche vers 0, il faut un e'_0 très élevé pour favoriser l'absence de rachats et profiter d'un facteur de rente avantageux à la liquidation. Avec la GPV, on retrouve la bande pour $M < 1$ dans laquelle il est optimal de ne jamais racheter et d'exercer la garantie en sortant en capital à la liquidation. Pour les femmes, on a au contraire pour t faible une augmentation de la valeur limite pour e'_0 quand la GT est souscrite, car peu avantageuse et avec des frais pénalisants sur le long-terme.

En regardant enfin la valeur maximale pour M au-delà de laquelle il n'est plus intéressant de réaliser un rachat, on observe en l'absence de la GPV que le plan est globalement segmenté en deux parties séparées par un étroit corridor. Une première partie correspond à $M \simeq 0$ (i.e. aucun rachat sauf si l'épargne s'approche de 0) pour e'_0 élevé et t s'approchant la date de liquidation T , la seconde partie correspond à $M = M_{max}$ pour e'_0 plus faible. La largeur de la première partie croît avec t : plus on s'approche de la liquidation, moins il est nécessaire que e'_0 soit élevé pour ne plus racheter. Avec la GT souscrite, la surface de la première partie augmente pour t élevé : il devient moins optimal de racheter à l'approche de la liquidation. Avec la GPV souscrite, le corridor entre les deux parties s'élargit car la valeur de M va davantage influencer sur le choix à la liquidation entre le capital garanti par la GPV et la forte valeur de la rente viagère dans un environnement de longévité élevée.

Une application pour les hypothèses *best estimate* et l'ORSA

En s'appuyant sur les analyses précédentes pour chaque profil d'assuré au sein d'un portefeuille, l'assureur peut déterminer sous la probabilité risque-neutre les stratégies optimales en termes de rachats et de choix de sortie à la liquidation entre le capital et la rente en fonction de la date t (ou du temps $\tau = T - t$ avant la liquidation), de M_t (ou plus généralement en fonction de A_t et G_t) pour l'indicateur financier et de e'_0 pour l'indicateur de longévité. Cela fait, en définissant un taux de rationalité des assurés en s'appuyant sur l'expérience du portefeuille, il peut définir des hypothèses pour les calculs *best estimate*. Dans le cadre du PER où les rachats sont limités à des motifs précis, il peut ajouter un coefficient de possibilité de rachat. On peut également affiner ces résultats en incluant la fiscalité dans l'analyse (sur les primes du PER, les rachats, le capital décès et la liquidation) qui diffère entre l'assurance-vie et le PER et selon la situation personnelle de l'épargnant, et ainsi identifier des optimisations variant d'un produit à un autre ou en considérant une combinaison des deux produits.

Les résultats de cette analyse et les hypothèses construites peuvent également être intégrés dans l'ORSA en supposant dans un scénario une augmentation de la rationalité des assurés qui repose à la fois sur les environnements financiers et de longévité et sur les garanties proposées aux assurés.

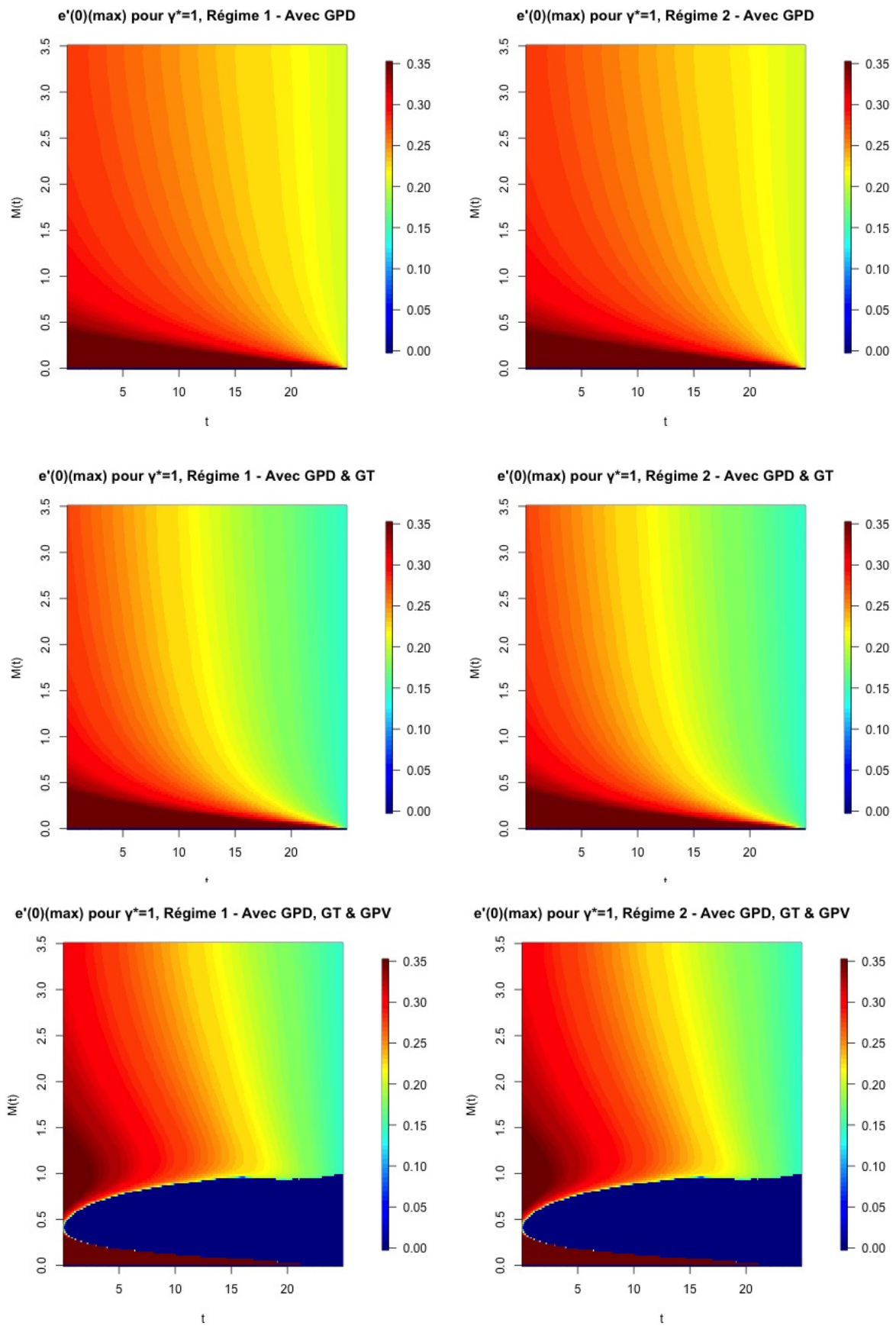


FIGURE 4.28 – e'_0 maximal pour un rachat optimal selon t et M - Hommes 40 ans ($T=25$)

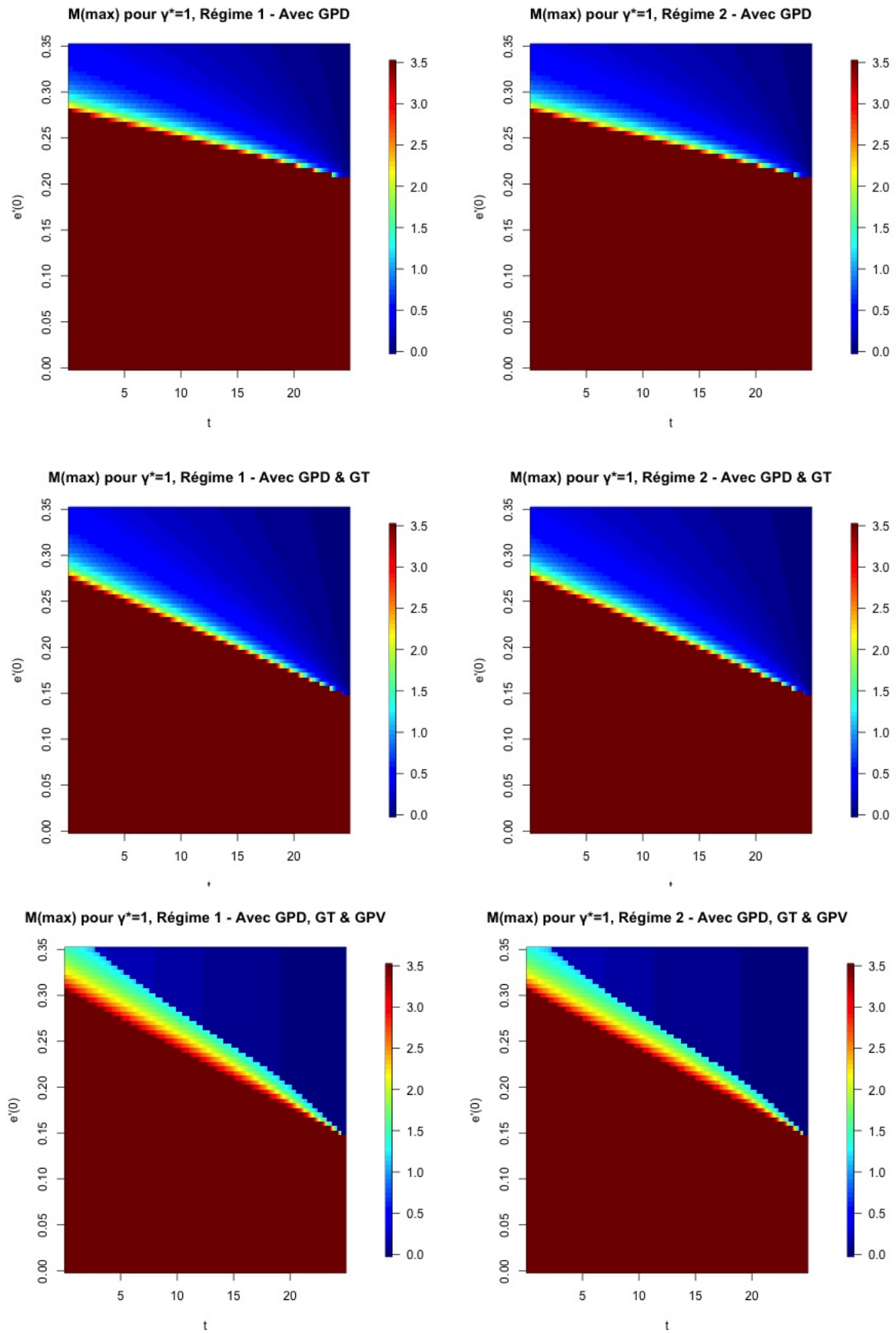


FIGURE 4.29 – M maximal pour un rachat optimal selon t et e'_0 - Hommes 40 ans ($T=25$)

4.4.5 Les stratégies optimales en univers réel avec la fonction d'utilité de l'assuré

Dans ce chapitre, on a modélisé la dynamique de l'épargne et de la base garantie et définit les stratégies optimales sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} pour les processus financiers. Comme on a pu le voir au paragraphe 4.3.2, le contrat est particulièrement sensible aux risques financiers. Dans la réalité, les comportements des assurés seront également fortement motivés par les rendements des actifs avec des primes de risque qui peuvent être très négatives dans le régime baissier et redevenir positive en régime haussier : cela peut influencer non seulement sur les rachats mais aussi sur les arbitrages avant la liquidation en venant augmenter ou diminuer la part d'actif risqué. On peut également inclure l'aversion au risque de l'assuré et sa préférence entre les différentes garanties pour pouvoir déterminer des stratégies optimales qui correspondent à son profil.

Pour rechercher les stratégies optimales des assurés dans ce cadre (en reprenant le cas à un seul actif risqué), on peut se placer en univers réel où sous la probabilité \mathbb{P} on a $\lambda_t = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\eta}_t^\top$ la prime de risque en t avec $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ le vecteur des primes de risque dans chaque régime. La dynamique de $\mathbf{E}_t = (A_t, G_t)$ sous \mathbb{P} est alors donnée par :

$$\begin{cases} dA_{t-} = \left\{ (r + \theta_t \lambda_t \sigma_t - \alpha_A) A_{t-} - \alpha_G G_{t-} \right\} dt + \left\{ \theta_t \sigma_t A_{t-} \right\} dW_t^\mathbb{P}, & A_t \geq 0 \text{ avant rachat en } t, \\ A_{t+} = A_{t-}(1 - \gamma_t) \quad \text{et} \quad G_{t+} = G_{t-}(1 - \gamma_t) & \text{au rachat en } t. \end{cases}$$

Pour optimiser les stratégies de l'assuré sur $[0, T]$ vis-à-vis de la part d'actif risqué $\boldsymbol{\theta}$, des rachats $\boldsymbol{\Gamma}$ et du taux de sortie en capital κ sur l'ensemble des stratégies possibles $\Omega_C(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_I)$ sachant la valeur initiale de $(\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_I)$, on cherchera à maximiser l'utilité espérée suivante pour obtenir V_0^* :

$$\begin{aligned} V_0^*(e'_0, \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_I) = & \sup_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Gamma}, \kappa) \in \Omega_C(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_I)} \mathbb{E} \left[\int_0^T {}_t p_x(e'_0) \cdot \left(U_\Gamma[t, \boldsymbol{\Gamma}_t(\mathbf{E}_t), \boldsymbol{\eta}_t] + \mu_{x+t,t}(e'_0) \cdot U_K[t, K_t(\mathbf{E}_t), \boldsymbol{\eta}_t] \right) dt \right. \\ & \left. + {}_T p_x(e'_0) \cdot U_L[T, LC_T(\mathbf{E}_T, \kappa)] + \int_T^\infty {}_s p_x(e'_0) \cdot U_L[s, R(T, A_T, \boldsymbol{\Lambda}_R, \kappa)] ds \mid (\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{e}_i, \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_I) \right]. \end{aligned}$$

Les valeurs pour K_u , LC_T et la rente R dépendent respectivement des souscriptions de la GPD, de la GPV et de la GT qui pour cette dernière définit la loi de mortalité $\boldsymbol{\Lambda}_R$ pour la conversion de l'épargne en rente. La fonction de survie est donnée par la vision subjective de e'_0 par l'assuré. U_Γ , U_K et U_L sont les fonctions d'utilité intertemporelles de l'assuré respectivement vis-à-vis des rachats, du capital décès et de la liquidation. On peut classiquement prendre des fonctions d'utilité de type *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA) en y ajoutant directement le facteur d'escompte temporel et s'exprimant ainsi :

$$U[t, x, \mathbf{e}_i] = \begin{cases} e^{-\rho \cdot t} \cdot \frac{x^{1-\zeta_i} - 1}{1 - \zeta_i} & \text{si } \zeta_i \neq 1, \\ e^{-\rho \cdot t} \cdot \ln(x) & \text{si } \zeta_i = 1, \end{cases}$$

où $\rho \in [0, 1]$ permet d'évaluer la préférence temporelle de l'assuré et $\zeta_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}^\top \geq 0$ (avec $\boldsymbol{\mathcal{R}} = (1, 2)$) est une constante qui permet d'évaluer l'aversion au risque de l'assuré dans le régime i (avec la possibilité d'avoir $\zeta_1 = \zeta_2$ et en considérant simplement ζ lorsque le régime n'influe pas), $\zeta_i = 0$ correspondant à la neutralité face au risque et $\zeta_i \rightarrow \infty$ l'aversion extrême au risque. Ce problème ainsi formulé peut être résolu comme précédemment par programmation dynamique.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier les stratégies de comportement des assurés sur les produits d'épargne-retraite tels que l'assurance-vie, utilisée dans le cadre de la préparation de la retraite, et le Plan d'Épargne Retraite (PER) et d'identifier les stratégies optimales en tenant compte des risques financiers, des risques de mortalité/longévité et des éventuelles garanties optionnelles qui ont pu être souscrites par l'assuré. Après avoir présenté ces différents produits ainsi que les garanties plancher (garantie plancher en cas de décès et garantie plancher en cas de vie à la liquidation) et la garantie de table pouvant être proposées de façon optionnelle sur ces produits, on s'est attaché à la modélisation des actifs financiers et des taux de mortalité pour évaluer les risques financiers et de mortalité/longévité.

Pour les actifs financiers, avec quelques hypothèses simplificatrices comme le remplacement du fonds en euros par un actif sans risque obligataire dans le produit, on a pu construire un générateur de scénarios économiques sous la probabilité risque-neutre qui permet d'obtenir une distribution sur l'évolution des actifs financiers qui constituent l'épargne. On a adopté pour les actifs risqués un modèle à changement de régime se traduisant par des niveaux de volatilité différents dans chaque régime. On pourrait étendre les changements de régime au taux sans risque pour avoir là aussi des dynamiques différentes pour les taux entre un régime haussier et un régime baissier, et calibrer les paramètres du modèle avec un ensemble de produits dérivés pour être *market consistent*.

La projection des futurs taux de mortalité a été réalisée au moyen de deux modèles distincts, tous deux positionnés par rapport à un niveau de mortalité initial pour l'année 2021 correspondant à celui des tables de mortalité TGH 05 / TGF 05, l'objectif étant de se concentrer sur la principale composante du risque de longévité : le risque de tendance. Le risque de mortalité est assez faible sur le produit du fait que l'on a aujourd'hui une faible probabilité de décéder avant 65 ans (âge supposé pour le départ à la retraite). Le modèle Age-Period-Cohort (APC) est le premier utilisé, il s'agit d'un modèle de mortalité stochastique classique qui s'apparente au modèle de Lee-Carter mais en incluant un effet cohorte. Ce modèle a permis notamment de définir les futures tables de mortalité hors garantie de table, en supposant une distinction par sexe mais on pourrait simplifier le problème en conservant l'hypothèse d'une table unique. On utilise ensuite une variation du modèle de Bongaarts qui permet de définir la dynamique des futurs taux de mortalité en fonction de l'hypothèse d'évolution de l'espérance de vie à la naissance supposée ici constante sur la projection. Ce modèle a l'avantage d'établir un cadre d'analyse qui permet d'évaluer simplement le risque de longévité et l'évaluation des rentes viagères en fonction de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance, une valeur qui peut être facilement obtenue pour de nombreuses populations et qui est largement documentée. Il est donc principalement retenu par la suite pour définir la fonction de survie de l'assuré et valoriser les rentes viagères.

Grâce à la modélisation des actifs financiers et de la mortalité, on a pu réaliser une projection de l'épargne en supposant une désensibilisation de la volatilité et une augmentation de l'actif sans risque à l'approche de la retraite avec une allocation par horizon. On a également obtenu une projection de la base garantie, correspondant au remboursement de la somme des primes nettes diminuée par

les rachats partiels précédents, qui est présente dans le cadre d'une garantie plancher. Sous diverses hypothèses de comportements en termes de rachats et de choix entre la sortie en capital ou la rente viagère à la liquidation, on a pu ensuite valoriser le contrat avec les éventuelles garanties optionnelles souscrites sous la probabilité risque-neutre pour les actifs financiers. Après une analyse des sensibilités de la valorisation du contrat sous les différents risques, on a tout d'abord regardé le cas de stratégies de comportement déterministes pour voir laquelle, parmi une liste de plusieurs stratégies retenues, donnait la meilleure valorisation du contrat selon le rendement des actifs financiers et l'évolution de l'espérance de vie à la naissance. On a pu vérifier que les stratégies de choix de sortie en rente étaient préférables dans un environnement à forte longévité, surtout lorsque la garantie de table était souscrite, et que le rendement des actifs (la principale source de risque sur valorisation du contrat) conditionnait fortement les rachats et les décourageait en cas de rendement élevé. On a pu observer également que les différentes garanties optionnelles pouvaient influencer fortement sur le choix de la meilleure stratégie à adopter pour avoir la valorisation la plus élevée possible.

Finalement, on s'est concentré sur la recherche des stratégies optimales pour les rachats avant la liquidation et sur le choix entre le capital et la rente viagère à la liquidation. Pour cela, on a cherché à résoudre le problème d'optimisation correspondant à une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman par la programmation dynamique en formulant un problème d'optimisation récursif rétrograde. On a optimisé tout d'abord la valorisation du contrat à la liquidation avec le choix optimal entre le capital et la rente viagère en fonction de la *moneyness* (ou la valeur de l'épargne dans le cas sans garantie plancher) et de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance. Puis, en remontant dans le temps jusqu'à $t_0 = 0$, on a cherché à chaque pas de temps s'il était optimal de racheter ou non. La résolution de ce problème s'est faite en établissant entre deux instants possibles pour le rachat (correspondant ici à un pas de temps d'un mois) un couple d'équation aux dérivées partielles (EDP) dans les deux régimes pour la somme de la valorisation du contrat et du flux de décès à un instant t pondérée par la fonction de survie. Avec la résolution numérique de ce couple d'EDP par la méthode de Crank-Nicolson, on a pu déterminer les taux de rachats optimaux en fonction là encore de la *moneyness* M (ou la valeur de l'épargne dans le cas sans garantie plancher) et de l'évolution de l'espérance de vie à la naissance. On observe là aussi des variations sur les stratégies optimales selon les différentes garanties optionnelles souscrites avec par exemple l'absence de rachats lorsque $M < 1$ sur toute la durée de projection si la garantie plancher en cas de vie à la liquidation est souscrite. On observe également des seuils selon le temps restant avant la liquidation, la *moneyness* et l'évolution de l'espérance de vie à la naissance au-delà desquels il n'est plus intéressant de racheter. Ces constats peuvent permettre à un assureur de définir des hypothèses de comportements en incluant un taux de rationalité des assurés qui peuvent être utilisées dans la définition du *best estimate* ou dans l'ORSA en supposant une hausse de la rationalité des assurés.

Toutefois, ces analyses effectuées sous la probabilité risque-neutre pour les risques financiers ne prennent pas en compte les primes de risque sur les actifs et ne considère pas non plus les profils de risque des assurés, leur fonction d'utilité et leurs éventuelles préférences. On peut donc reformuler la problématique précédente en univers réel en cherchant à maximiser la valorisation du contrat dépendant de l'utilité espérée et inclure dans l'optimisation un autre comportement majeur des assurés en phase d'épargne : la modification de l'allocation financière de leur épargne. Là encore, on peut résoudre ce problème par programmation dynamique pour identifier les stratégies optimales de comportement des assurés.

Bibliographie

- Bachelier, L. (1900), Théorie de la spéculation, PhD thesis, École Normale Supérieure.
- Baran, N. (2014), On Switching Diffusions : The Feynman-Kac Formula and Near-Optimal Controls, PhD thesis, Wayne State University.
- Bellman, R. E. (1954), ‘The theory of dynamic programming’, *Bulletin of the American Mathematical Society* **60**(6), 503–515.
- Black, F. & Scholes, M. (1973), ‘The pricing of options and corporate liabilities’, *Journal of Political Economy* **81**(3), 637–654.
- Blanpain, N. (2016), ‘Les hommes cadres vivent toujours 6 ans de plus que les hommes ouvriers’, *INSEE Première* **1584**.
- Bongaarts, J. (2004), ‘Long-range trends in adult mortality : Models and projection methods’, *Population Council* **192**.
- Bouchard, B. (2021), *Introduction to stochastic control of mixed diffusion processes, viscosity solutions and applications in finance and insurance*, Université Paris Dauphine (Cours).
- Brass, W. (1971), *Mortality models and their uses in demography*, Taylor and Francis.
- Breton, D., Belliot, N., Barbieri, M., d’Albis, H. & Mazuy, M. (2021), ‘L’évolution démographique récente de la France’, *Population* **4**.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006a), ‘Pricing death : Frameworks for the valuation and securization of mortality risk’, *Astin Bulletin* **36**, 79–120.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006b), ‘A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty : Theory and calibration’, *The Journal of Risk and Insurance* **73**, 687–718.
- Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2009), ‘A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States’, *North American Actuarial Journal* **13**.
- Conseil d’Orientation des Retraites (COR) (2021), *Évolutions et perspectives des retraites en France – Rapport annuel du COR 2021*.
- Cont, R. & Tankov, P. (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall / CRC.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985), ‘A theory of the term structure of interest rates’, *Econometrica* **53**(2), 385–407.
- Denuit, M. & Charpentier, A. (2005), *Mathématiques de l’assurance non-vie, Tome II : Tarification et provisionnement*, Economica.

- Denuit, M. & Goderniaux, A.-C. (2005), ‘Closing and projecting life tables using log-linear models’.
- Direction de la Recherche des Études de l’Évaluation et des Statistiques (DREES) (2021), *Les retraités et les retraites – Édition 2021*.
- Donnelly, C. (2010), ‘Pricing maturity guarantees in a regime-switching diffusion market’.
- EIOPA – *Risk-free interest rate term structures* (Données téléchargées au 31/12/2021).
URL: www.eiopa.europa.eu
- Fédération Française de l’Assurance (2021), *Dossier de presse – Les assureurs, acteurs de la relance durable*.
- France Assureurs (2021), *L’assurance française – Données clés 2020*.
- Gbari, S., Denuit, M. & Trufin, J. (2017), ‘Quand Vilfredo Pareto rencontre Jeanne Calment – Analyse de la mortalité aux âges extrêmes en Belgique’, *Detra Note* **2017-1**.
- Gompertz, B. (1825), ‘On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies’, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **115**, 513–583.
- Hainaut, D. (2022), *Continuous time processes for finance – Switching, self-exciting, fractional and other recent dynamics*, Springer.
- Hamilton, J. D. (1989), ‘A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle’, *Econometrica* **57**(2), 357–384.
- Hardy, M. R. (2001), ‘A regime-switching model of long-term stock returns’, *North American Actuarial Journal* **5**, 41–53.
- Human Mortality Database (HMD)*. Max Planck Institute for Demographic Research (Germany), University of California, Berkeley (USA), and French Institute for Demographic Studies (France). (Données téléchargées au 31/12/2021).
URL: www.mortality.org
- Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1997), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.
- Lee, R. & Carter, L. (1992), ‘Modeling and forecasting U.S. mortality’, *Journal of the American Statistical Association* **7**(419), 659–671.
- Loi PACTE – Arrêté du 7 août 2019 portant application de la réforme de l’épargne retraite* (2019), *Journal Officiel*.
- Loi PACTE – Décret n°2019-807 du 30 juillet 2019 portant réforme de l’épargne retraite* (2019), *Journal Officiel*.
- Loi PACTE – Loi n°2019-486 du 22 mai 2019 relative à la croissance et la transformation des entreprises* (2019), *Journal Officiel*.
- Loi PACTE – Ordonnance n°2019-766 du 24 juillet 2019 portant réforme de l’épargne retraite* (2019), *Journal Officiel*.
- Makeham, W. M. (1860), ‘On the law of mortality and the construction of annuity tables’, *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries* **8**(6), 301–310.

- Merton, R. C. (1969), ‘Lifetime portfolio selection under uncertainty : the continuous-time case’, *The Review of Economics and Statistics* **51**(3), 247–257.
- Merton, R. C. (1976), ‘Option prices when underlying stock returns are discontinuous’, *Journal of Financial Economics* **3**, 125–144.
- Mouti, S. (2017), Le management du risque pour les compagnies d’assurance : une approche marchés financiers, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Oeppen, J. & Vaupel, J. W. (2002), ‘Broken limits to life expectancy’, *Science* **296**, 1029–1031.
- Planchet, F. (2007), *Tables de mortalité d’expérience pour les portefeuilles de rentiers – Tables TGH 05 et TGF 05*, Institut des Actuaire.
- Planchet, F. & Thérond, P. (2011), *Modélisation Statistique des Phénomènes de Durée – Applications actuarielles*, Economica.
- Planchet, F., Thérond, P. & Juillard, M. (2011), *Modèles Financiers en Assurance – Analyses de risques dynamiques*, 2 edn, Economica.
- Protter, P. E. (2004), *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2 edn, Springer.
- Quashie, A. & Denuit, M. (2005), ‘Modèles d’extrapolation de la mortalité aux grands âges’.
- R Core Team (2019), *R : A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
URL: <http://www.R-project.org>
- Thatcher, A. R. (1999), ‘The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age’, *Journal of the Royal Statistical Society* **162**, 5–43.
- Thatcher, A. R., Kannisto, V. & Vaupel, J. W. (1998), *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense Monographs on Population Aging.
- Vallin, J. & Meslé, F. (2010), ‘Espérance de vie : Peut-on gagner trois mois par an indéfiniment ?’, *Bulletin d’information de l’Institut National d’Études Démographiques* **473**.
- Vasicek, O. (1977), ‘An equilibrium characterization of the term structure’, *Journal of Financial Economics* **5**, 177–188.
- Vaupel, J. W., Villavicencio, F. & Bergeron-Boucher, M.-P. (2021), ‘Demographic perspectives on the rise of longevity’, *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)* **118**(9).
- Yong, J. & Zhou, X. Y. (1999), *Stochastic Controls – Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer.

Annexe A

Outils mathématiques

Éléments de calcul stochastique

Pour cette partie, on se place sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. W est un mouvement brownien (un processus de Wiener) sous la mesure de probabilité \mathbb{P} . On considérera ici des processus en temps continu et notamment des **processus d'Itô** $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ s'exprimant par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s,$$

avec, en utilisant les notations simplifiées $\mu_t = \mu(X_t, t)$ et $\sigma_t = \sigma(X_t, t)$, on a X_0 est \mathcal{F} -mesurable et on a μ et σ sont deux processus \mathcal{F} -adaptés avec $\int_0^T (|\mu_t| + \sigma_t^2) dt < \infty$, \mathbb{P} -presque sûrement.

Lemme d'Itô pour un processus d'Itô unidimensionnel

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô selon la définition précédente.

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à dérivées bornées. On a le processus $f(X_t, t)$ tel que :

$$f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right) ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \quad (\text{A.1})$$

Lemme d'Itô pour un processus de diffusion à sauts

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de diffusion à sauts défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i,$$

où N_t est un processus de comptage et les ΔX_i sont les tailles des sauts (à variations finies).

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à dérivées bornées. On a le processus $f(X_t, t)$ tel que :

$$f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right) ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s + \sum_{\substack{0 < s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} [f(X_{s-} + \Delta X_s, s) - f(X_{s-}, s)]. \quad (\text{A.2})$$

Lemme d'Itô pour un processus d'Itô multidimensionnel

Soit $(\mathbf{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)^\top$ un processus d'Itô d -dimensionnel défini par

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\mu}_s ds + \int_0^t \boldsymbol{\Sigma}_s d\mathbf{W}_s,$$

où $\boldsymbol{\mu}_s = (\mu_s^1, \dots, \mu_s^d)^\top \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\Sigma}_s = (\sigma_{i,j;s})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)^\top$ est un vecteur de mouvements browniens indépendants. On a pour chaque composante X_t^i la formulation :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mu_s^i ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j;s} dW_s^j.$$

On note $d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k;s} \sigma_{j,k;s} ds$. Soit $f \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, on a $f(\mathbf{X}_t, t)$ tel que :

$$f(\mathbf{X}_t, t) = f(\mathbf{X}_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{X}_s, s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}_s, s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}_s, s) d\langle X^i, X^j \rangle_s. \quad (\text{A.3})$$

Théorème de Feynman-Kac

Soient $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Soient μ , σ et r trois fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R} \times [0, T]$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - r(x, t) u(x, t) = 0, \quad (\text{A.4})$$

avec la condition limite $u(x, T) = \Phi(x)$. Si $\forall t \leq T$, $\int_0^t \mathbb{E} \left[\left(\sigma(X_s, s) \frac{\partial u}{\partial x}(X_s, s) \right)^2 \right] ds < \infty$, alors on a

$$u(x, t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r(X_s^{x,t}, s) ds \right) \Phi(X_T^{x,t}) \right],$$

où W est un mouvement brownien et $X^{x,t}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$ issue de x à l'instant t .

Interpolation par splines cubiques

On a une série de n points, appelés *nœuds*, $N = \{(x_i, y_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, espacés de $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^\top$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ et on cherche les $n - 1$ polynômes $P_i(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ passant chacun par les nœuds en x_i et x_{i+1} pour obtenir la **spline cubique d'interpolation** S qui est la fonction continue définie par morceaux

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2, \\ P_2(x) & \text{si } x_2 \leq x < x_3, \\ \dots, \\ P_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases}$$

Pour définir ces polynômes P_i , on fixe les conditions $y_i = P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i)$, $P'_i(x_i) = P'_{i-1}(x_i)$ et $P''_i(x_i) = P''_{i-1}(x_i)$ pour tout i avec $P''_1(x_1) = P''_{n-1}(x_n) = 0$. On définit les vecteurs $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)^\top$ et \mathbf{A} de taille n , les vecteurs \mathbf{B} et \mathbf{C} de taille $n - 1$ et la matrice $\mathbf{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$- F_i = \begin{cases} F_1 = F_n = 0, \\ F_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{si } 2 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

$$- H_{i,j} = \begin{cases} H_{1,1} = H_{n,n} = 1, \\ H_{i,i-1} = \frac{h_{i-1}}{6} & \text{pour } 2 \leq i \leq n - 1, \\ H_{i,i} = \frac{h_{i-1} + h_i}{3} & \text{pour } 2 \leq i \leq n - 1, \\ H_{i,i+1} = \frac{h_i}{6} & \text{pour } 2 \leq i \leq n - 1, \\ H_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$- \mathbf{A} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{F},$$

$$- B_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(A_{i+1} - A_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1,$$

$$- C_i = y_i - A_i \frac{h_i^2}{6} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1.$$

On a pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ avec $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, la spline d'interpolation :

$$S(x) = A_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + A_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + B_i(x - x_i) + C_i.$$

Loi bêta-PERT

Soit X une variable aléatoire suivant une loi bêta-PERT à trois paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$. Le support de la loi est $[a, c]$ et la fonction de répartition pour $X \sim PERT(a, b, c)$ est

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = I_z(\alpha, \beta) = \frac{B(z; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)},$$

$$\text{avec } \alpha = 1 + 4 \cdot \frac{b - a}{c - a}, \quad \beta = 1 + 4 \cdot \frac{c - b}{c - a}, \quad z = \frac{x - a}{c - a}, \quad B(z; \alpha, \beta) = \int_0^z t^{\alpha-1} \cdot (1 - t)^{\beta-1} dt \quad \text{et} \\ B(\alpha, \beta) = B(1; \alpha, \beta).$$

Le mode est b , son espérance est $\mathbb{E}[X] = \frac{a + 4 \cdot b + c}{6} = \mu$ et sa variance est $\mathbb{V}[X] = \frac{(\mu - a) \cdot (c - \mu)}{7}$.

Annexe B

Indicateurs et modèles de mortalité

Relations entre les indicateurs de mortalité

La fonction de survie $l(x, t)$ s'exprime en fonction de la force de mortalité $\mu(x, t)$ (cf. relation 3.8). Pour $x \mapsto l(x, t)$ et $x \mapsto \mu(x, t)$ de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$l(x, t) = \exp\left(-\int_0^x \mu(u, t) du\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial x}(x, t) = -\mu(x, t) \cdot l(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(x, t) = \left(\mu^2(x, t) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, t)\right) \cdot l(x, t).$$

Lorsque $x \mapsto \mu(x, t)$ strictement croissante, $x \mapsto l(x, t)$ est strictement décroissante, positive et a un unique point d'inflexion atteint à l'âge modal x_M et donc $\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(x_M, t) = 0$, i.e.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x_M, t) = \mu^2(x_M, t). \quad (\text{B.1})$$

D'après les relations ci-dessus, le théorème de dérivation sous l'intégrale et avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x, t) = 0$ on a

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x, t) = \frac{\left(\int_x^{+\infty} \frac{\partial l}{\partial x}(u, t) du\right) \cdot l(x, t) - \frac{\partial l}{\partial x}(x, t) \cdot \int_x^{+\infty} l(u, t) du}{l^2(x, t)} = -1 + \frac{\mu(x, t) \cdot \int_x^{+\infty} l(u, t) du}{l(x, t)},$$

et donc on retrouve la relation 3.10 :

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x, t) = \mu(x, t) \cdot e(x, t) - 1.$$

Âge modal du modèle de Bongaarts décalé

Pour la période t , avec la relation B.1 et sachant que $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, t) = \frac{\beta \cdot \Lambda(x, t)}{[1 + \Lambda(x, t)]^2}$, on a

$$\frac{\beta \cdot \Lambda(x_M(t), t)}{[1 + \Lambda(x_M(t), t)]^2} = \left[\alpha(t) + \frac{\Lambda(x_M(t), t)}{1 + \Lambda(x_M(t), t)} \right]^2,$$

d'où :

$$[1 + \alpha(t)]^2 \cdot \Lambda^2(x_M(t), t) + [2 \cdot \alpha(t) \cdot (1 + \alpha(t)) - \beta] \cdot \Lambda(x_M(t), t) + \alpha^2(t) = 0.$$

En résolvant cette équation du second degré d'inconnue $\Lambda(x_M(t), t)$ et en conservant la valeur adéquate, à condition d'avoir $\beta > 4 \cdot \alpha(t) \cdot (1 + \alpha(t))$, on obtient l'âge modal

$$x_M(t) = M_0 + \lambda(t) + \frac{1}{\beta} \cdot \ln \left[\frac{\beta - 2 \cdot \alpha(t) \cdot (1 + \alpha(t)) + \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot \beta \cdot \alpha(t) \cdot (1 + \alpha(t))}}{2 \cdot \beta \cdot (1 + \alpha(t))^2} \right]. \quad (\text{B.2})$$

Lorsque $\alpha(t)$ est constant, l'âge modal $x_M(t)$ évolue de façon identique à $\lambda(t)$. Par ailleurs, le dernier terme est bien souvent négligeable et alors $x_M(t) \simeq M_0 + \lambda(t)$. L'égalité est assurée lorsque $\alpha(t) = 0$.

Calibration du modèle Age-Period-Cohort (APC)

Pour calibrer le modèle APC, on réalise les opérations suivantes à chaque étape $k + 1$:

$$\begin{aligned} - \kappa_t^{(2)}(k+1) &= \kappa_t^{(2)}(k) + \frac{\sum_x \left[D(x, t) \cdot \beta_x^{(2)}(k) - \lambda_k(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(2)}(k) \cdot \kappa_t^{(2)}(k)\right) \right]}{\sum_x \beta_x^{(2)}(k) \cdot \lambda_k(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(2)}(k) \cdot \kappa_t^{(2)}(k)\right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lambda_k(x, t) = \beta_x^{(2)}(k) \cdot E(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(1)}(k) + \beta_x^{(3)}(k) \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}(k)\right),$$

$$\begin{aligned} - \gamma_{t-x}^{(3)}(k+1) &= \gamma_{t-x}^{(3)}(k) + \frac{\sum_{t-x} \left[D(x, t) \cdot \beta_x^{(3)}(k) - \lambda_k(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(3)}(k) \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}(k)\right) \right]}{\sum_{t-x} \beta_x^{(3)}(k) \cdot \lambda_k(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(3)}(k) \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}(k)\right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lambda_k(x, t) = \beta_x^{(3)}(k) \cdot E(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(1)}(k) + \beta_x^{(2)}(k) \cdot \kappa_t^{(2)}(k)\right),$$

$$\begin{aligned} - \beta_x^{(1)}(k+1) &= \ln \left(\sum_t D(x, t) \right) - \ln \left(\sum_t E(x, t) \cdot \exp\left(\beta_x^{(2)}(k) \cdot \kappa_t^{(2)}(k) + \beta_x^{(3)}(k) \cdot \gamma_{t-x}^{(3)}(k)\right) \right), \end{aligned}$$

— Ajustement des paramètres pour tenir compte des contraintes d'identifiabilité :

- $\tilde{\beta}_x^{(1)} = \beta_x^{(1)} + \delta \cdot (x - \bar{x})$,
- $\tilde{\kappa}_t^{(2)} = \kappa_t^{(2)} - n_a \cdot \delta \cdot (t - \bar{t})$,
- $\tilde{\gamma}_{t-x}^{(3)} = \gamma_{t-x}^{(3)} + n_a \cdot \delta \cdot [(t - \bar{t}) - (x - \bar{x})]$.

$$\text{avec } \delta = - \frac{\sum_x (x - \bar{x}) \cdot \left(\beta_x^{(1)} - \tilde{\beta}_x^{(1)} \right)}{\sum_x (x - \bar{x})^2}, \quad \tilde{\beta}_x^{(1)} = n_y^{-1} \cdot \sum_t \ln(m(x, t)) \text{ et } n_y \text{ le nombre d'années,}$$

$$\text{afin de minimiser la fonction } S(\delta) = \sum_x \left(\beta_x^{(1)} + \delta \cdot (x - \bar{x}) - \tilde{\beta}_x^{(1)} \right)^2.$$

Résultats de la calibration et projection des paramètres

On présente ci-dessous les graphiques pour les paramètres calibrés et projetés du modèle APC (y compris l'ARIMA pour $\gamma_{t-x}^{(3)}$) et les résidus obtenus lors de la calibration des modèles (hors RH).

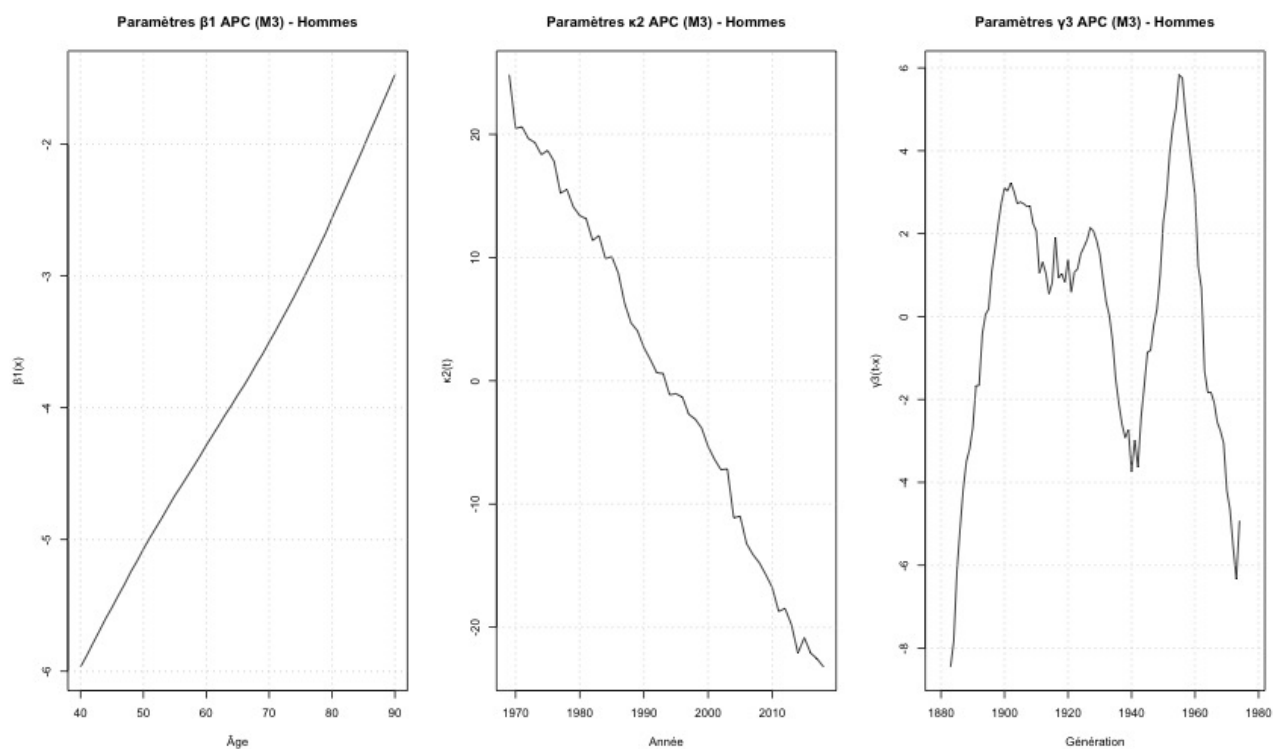


FIGURE B.1 – Paramètres du modèle Age-Period-Cohort (APC) - Hommes

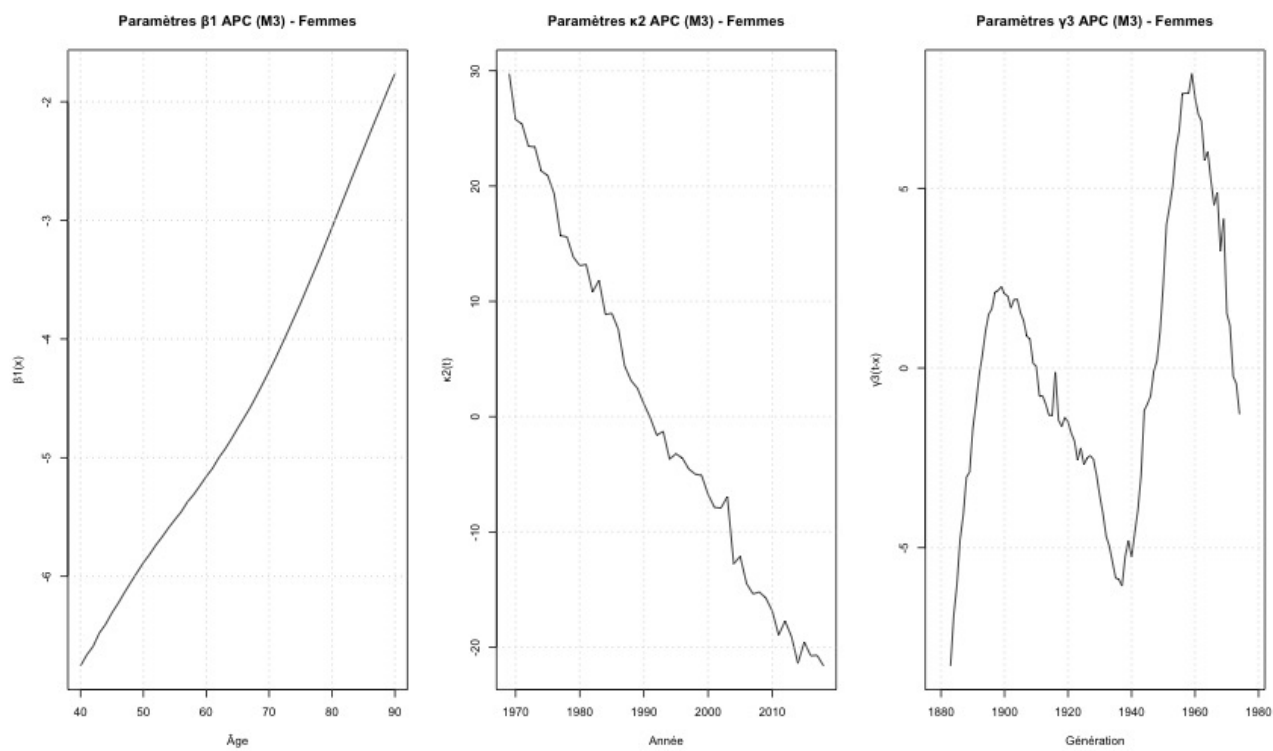


FIGURE B.2 – Paramètres du modèle Age-Period-Cohort (APC) - Femmes

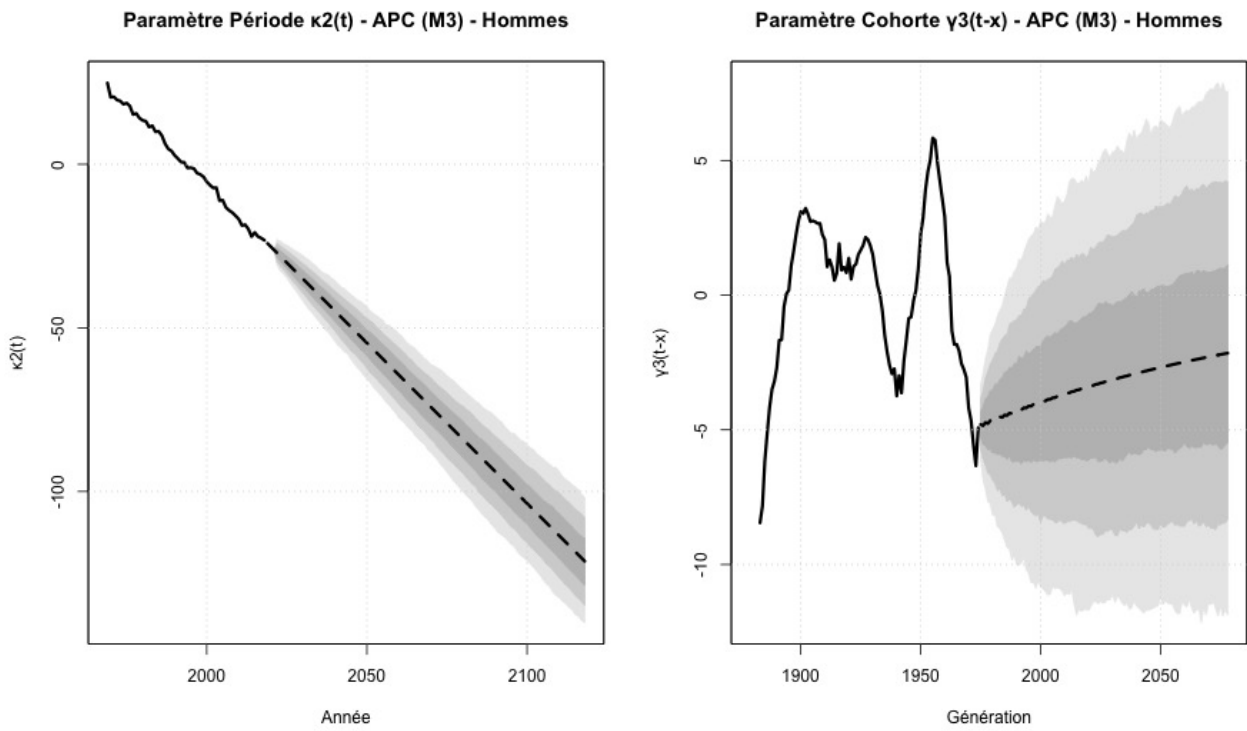


FIGURE B.3 – Projection des paramètres du modèle APC - Hommes

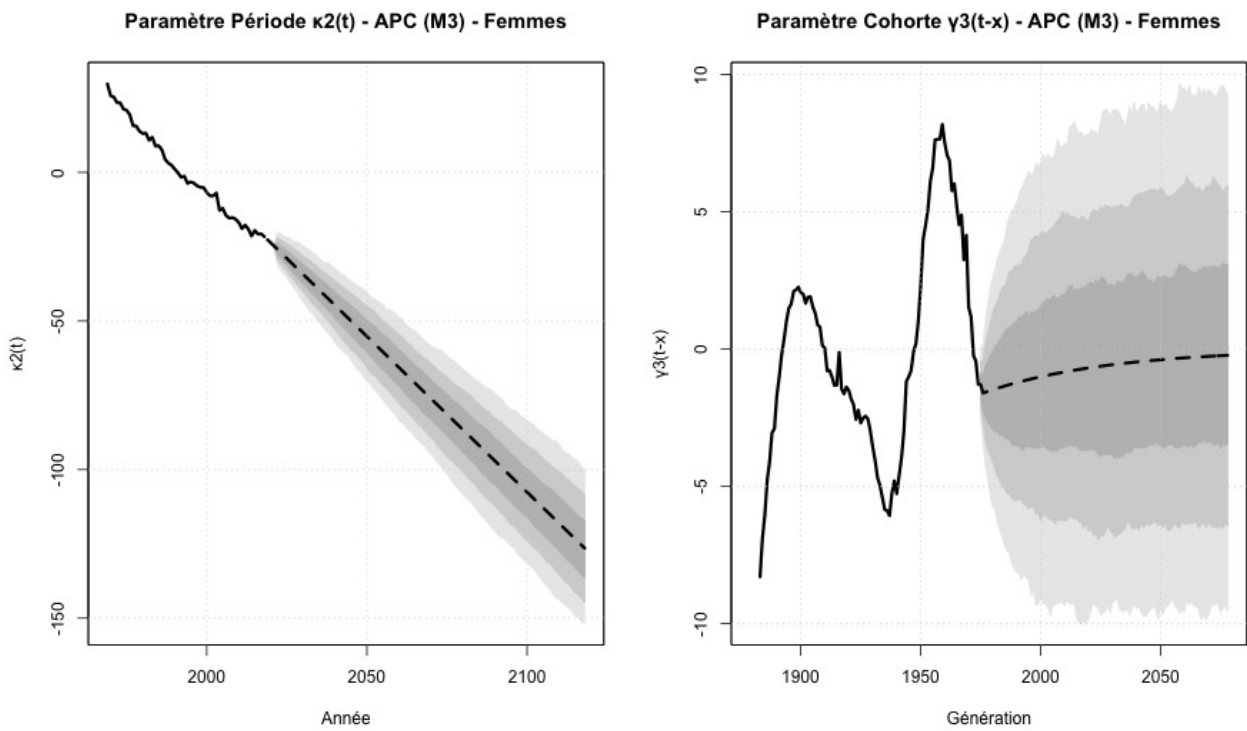


FIGURE B.4 – Projection des paramètres du modèle APC - Femmes

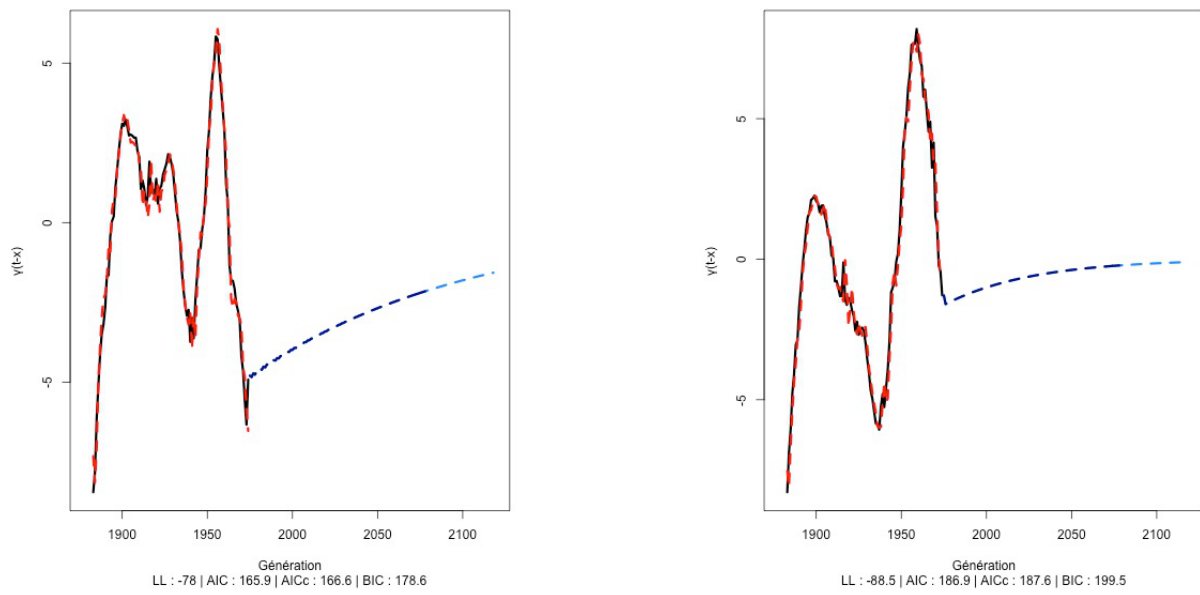


FIGURE B.5 – Calibration de l'ARIMA pour le modèle APC - Hommes & Femmes

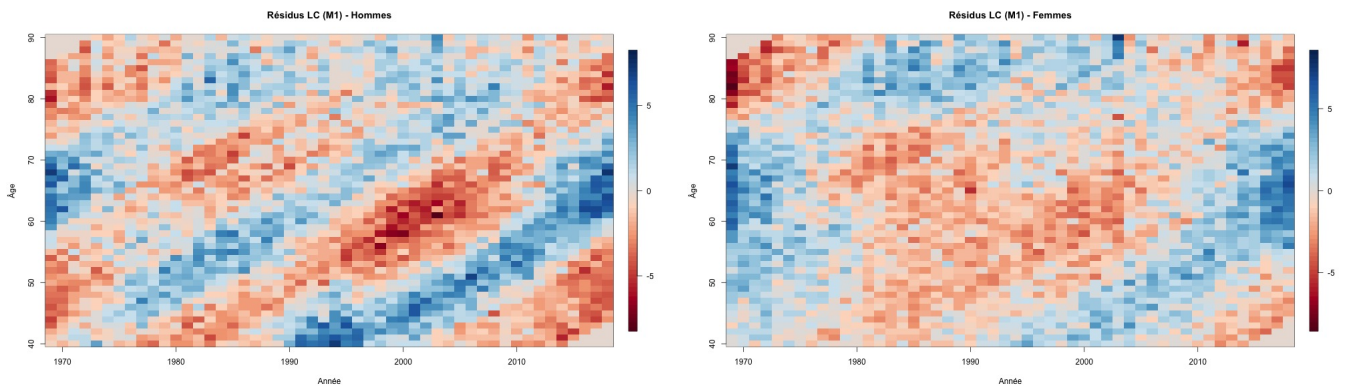


FIGURE B.6 – Résidus lors de la calibration du modèle LC - Hommes & Femmes

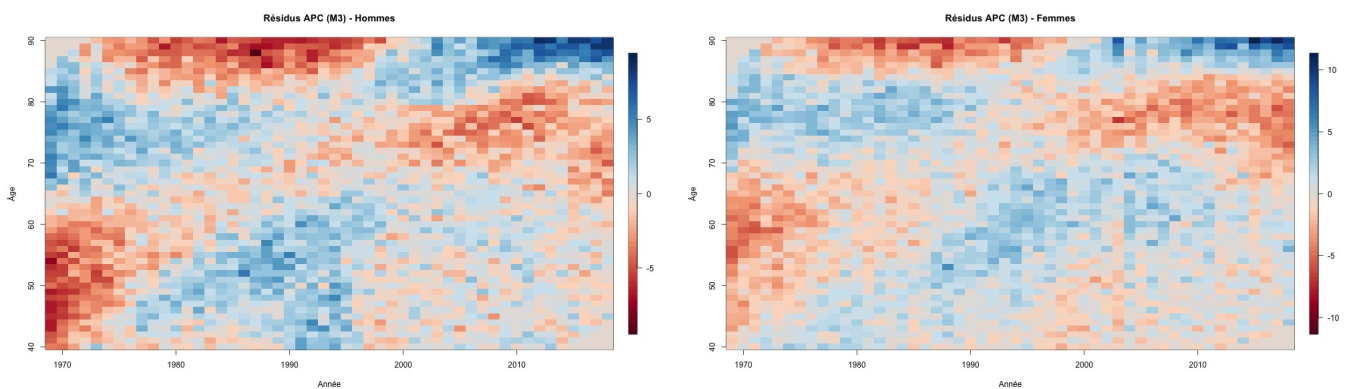


FIGURE B.7 – Résidus lors de la calibration du modèle APC - Hommes & Femmes

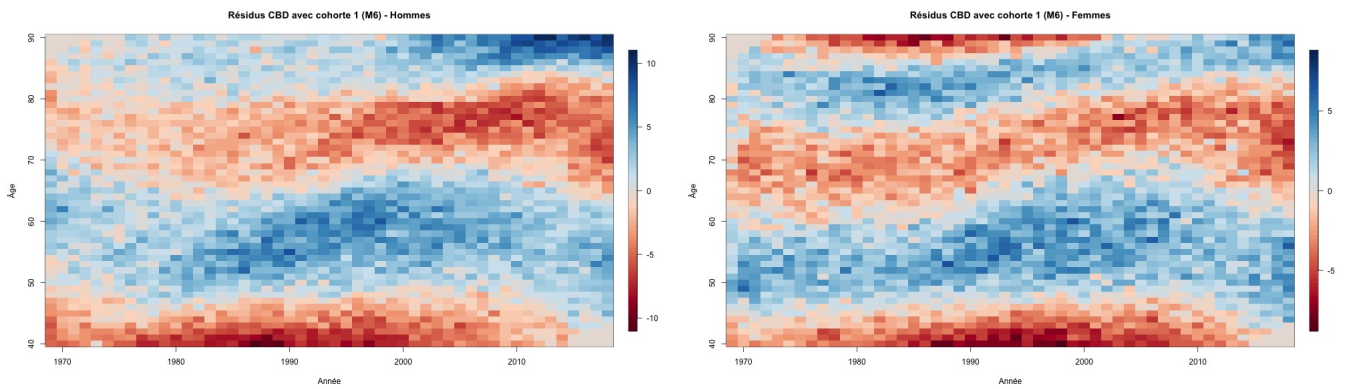


FIGURE B.8 – Résidus lors de la calibration du modèle M6 - Hommes & Femmes

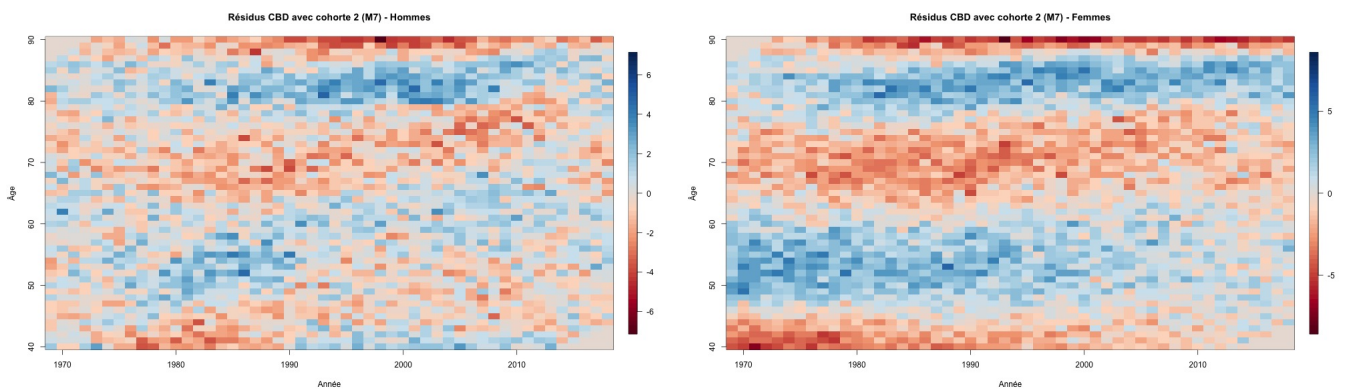


FIGURE B.9 – Résidus lors de la calibration du modèle M7 - Hommes & Femmes

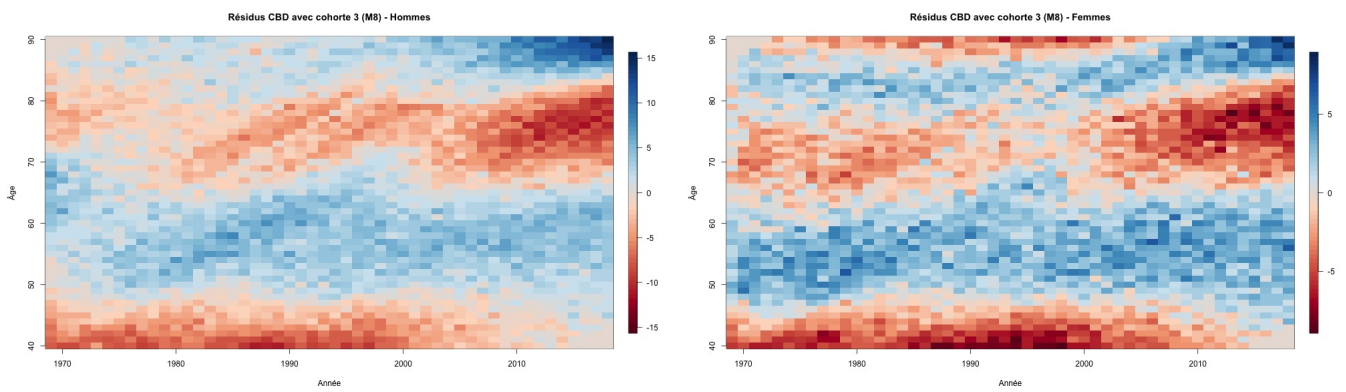


FIGURE B.10 – Résidus lors de la calibration du modèle M8 - Hommes & Femmes

Annexe C

Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles

Méthode des différences finies

La **méthode des différences finies** est une technique qui permet d'obtenir des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles grâce à un schéma numérique obtenu en discrétisant ces équations. Pour illustrer cela, on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

avec un axe spatial x et un axe temporel t . On discrétise le domaine de résolution avec un maillage $(x_j = j \cdot \delta x, t_n = n \cdot \delta t)$, $0 \leq j \leq J$ et $0 \leq n \leq N$, où δx et δt sont respectivement les pas de discrétisation selon l'axe spatial et l'axe temporel. On cherche ensuite à évaluer $u_n^j = u(x_j, t_n)$ qui est la solution de u au nœud (x_j, t_n) avec F_n^j qui est l'évaluation de F sachant j , n et u_n^j . Pour cela, on utilise des différences finies afin d'évaluer les dérivées partielles de u à chaque nœud (x_j, t_n) . Le schéma numérique peut présenter des problématiques de stabilité et il peut être nécessaire de bien choisir des valeurs adéquates pour δx et δt afin de permettre la convergence du schéma numérique.

On peut considérer comme exemples de différences finies centrées par rapport à la dérivée spatiale x :

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) = \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2 \cdot \delta x} + \mathcal{O}(\delta x^2)$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) = \frac{u_n^{j+1} - 2 \cdot u_n^j + u_n^{j-1}}{\delta x^2} + \mathcal{O}(\delta x^2)$.

On a comme différences finies possibles par rapport à la dérivée temporelle t :

- Méthode d'Euler explicite/progressive : $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) = \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)$,
- Méthode d'Euler implicite/rétrograde : $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) = \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)$.

Il est à noter que la méthode explicite peut présenter des problèmes d'instabilité alors que la méthode implicite est plus stable (voire être inconditionnellement stable pour un bon nombre d'équations).

Méthode de Crank-Nicolson

La **méthode de Crank-Nicolson** est une méthode des différences finies particulière utilisée pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. On considère l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

On peut combiner la méthode d'Euler rétrograde (méthode implicite) et la méthode d'Euler progressive (méthode explicite) pour obtenir le schéma numérique

$$\frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\delta t} = \underbrace{\xi \cdot F_{n+1}^j\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_{\text{Méthode d'Euler rétrograde}} + (1 - \xi) \cdot \underbrace{F_n^j\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_{\text{Méthode d'Euler progressive}}.$$

La méthode de Crank-Nicolson est obtenue avec $\xi = 1/2$. C'est une méthode implicite car elle nécessite l'évaluation de F_{n+1}^j pour obtenir u_{n+1}^j . Dans le cas des équations de diffusion, cette méthode est inconditionnellement stable et converge en $\mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2)$.

Schéma numérique pour obtenir les $\bar{v}_{\tau_{k'}^+}^{i,j}$ avant rachat optimal en $\tau_{k'}$

On décrit ici le schéma numérique pour obtenir $\bar{v}_{\tau_{k'}^+}^{i,j}$ à la date $\tau_{k'}$, $k' \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket$ en ayant les $\bar{v}_{\tau_{k'-1}^-}^{i,j}$ obtenus à l'étape précédente (où les $\bar{v}_{\tau_0}^{i,j}$ sont obtenus lors de l'optimisation à la liquidation) pour tous $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \llbracket 1, J-1 \rrbracket$. On partitionne $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$ en N sous-intervalles $[\tau_n', \tau_{n+1}']$ de taille $\delta\tau$, avec $h = N \cdot \delta\tau$ et $\tau_n' = \tau_{k'-1}^- + n \cdot \delta\tau$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. On notera $\bar{v}_n^{i,j}$ la valeur de $\bar{v}_{\tau'}^{i,j}$ pour $\tau = \tau_n'$ et

$$\bar{\mathbf{v}}_n^j = (\bar{v}_n^{1,j}, \bar{v}_n^{2,j})^\top.$$

Pour la résolution du système d'équations 4.23 avec le schéma numérique décrit par 4.26, on a \bar{v}_n^{min} et \bar{v}_n^{max} connus pour tout n avec les conditions limites 4.24 et 4.25. Pour $\theta_\tau = \theta$ constant sur l'intervalle $[\tau_{k'-1}^-, \tau_{k'}^+]$, on introduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{v}}_n = (\bar{v}_n^1, \dots, \bar{v}_n^{J-1})^\top, \\ \mathbf{L}_j^G = \begin{pmatrix} A_{1,j}^G & 0 \\ 0 & A_{2,j}^G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_j^H = \begin{pmatrix} A_{1,j}^H & 0 \\ 0 & A_{2,j}^H \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_j^G = \begin{pmatrix} B_{1,j}^G & Q_1^G \\ Q_2^G & B_{2,j}^G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_j^H = \begin{pmatrix} B_{1,j}^H & Q_1^H \\ Q_2^H & B_{2,j}^H \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U}_j^G = \begin{pmatrix} C_{1,j}^G & 0 \\ 0 & C_{2,j}^G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_j^H = \begin{pmatrix} C_{1,j}^H & 0 \\ 0 & C_{2,j}^H \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_n^{lim} = (A_{1,1}^G \cdot \bar{v}_n^{min} - A_{1,1}^H \cdot \bar{v}_{n+1}^{min}, A_{2,1}^G \cdot \bar{v}_n^{min} - A_{2,1}^H \cdot \bar{v}_{n+1}^{min}, 0, \dots, 0, \\ C_{1,J-1}^G \cdot \bar{v}_n^{max} - C_{1,J-1}^H \cdot \bar{v}_{n+1}^{max}, C_{2,J-1}^G \cdot \bar{v}_n^{max} - C_{2,J-1}^H \cdot \bar{v}_{n+1}^{max})^\top, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{i,j}^G = \frac{\delta t}{4} \cdot \left[- \left\{ (r - \alpha_A) \cdot j - \frac{\alpha_G}{\delta M} \right\} + \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ B_{i,j}^G = 1 - \frac{\delta t}{2} \cdot \left[r - q_{i,i} + \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ C_{i,j}^G = \frac{\delta t}{4} \cdot \left[\left\{ (r - \alpha_A) \cdot j - \frac{\alpha_G}{\delta M} \right\} + \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ Q_i^G = -q_{i,i} \cdot \frac{\delta t}{2}, \\ A_{i,j}^H = \frac{\delta t}{4} \cdot \left[\left\{ (r - \alpha_A) \cdot j - \frac{\alpha_G}{\delta M} \right\} - \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ B_{i,j}^H = 1 + \frac{\delta t}{2} \cdot \left[r - q_{i,i} + \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ C_{i,j}^H = \frac{\delta t}{4} \cdot \left[- \left\{ (r - \alpha_A) \cdot j - \frac{\alpha_G}{\delta M} \right\} - \theta^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot j^2 \right], \\ Q_i^H = q_{i,i} \cdot \frac{\delta t}{2}. \end{array} \right.$$

On introduit les matrices tridiagonales par blocs \mathbf{G} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} D_1^G & U_1^G & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ L_2^G & D_2^G & U_2^G & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & L_3^G & D_3^G & U_3^G & \ddots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 & L_{J-2}^G & D_{J-2}^G & U_{J-2}^G \\ \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & L_{J-1}^G & D_{J-1}^G \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} D_1^H & U_1^H & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ L_2^H & D_2^H & U_2^H & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & L_3^H & D_3^H & U_3^H & \ddots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 & L_{J-2}^H & D_{J-2}^H & U_{J-2}^H \\ \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & L_{J-1}^H & D_{J-1}^H \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\bar{v}_{n+1} = \mathbf{H}^{-1} \cdot (\mathbf{G} \cdot \bar{v}_n + \mathbf{F}_n^{lim}).$$

On réalise alors les itérations de $\bar{v}_{\tau_{k'}^-} = \bar{v}_{\tau_0'}$ jusqu'à $\bar{v}_{\tau_N'} = \bar{v}_{\tau_{k'}^+}$. On détermine ensuite le rachat optimal $\gamma_{\tau_{k'}}$ pour obtenir $\bar{v}_{\tau_{k'}}$ et on réitère la procédure sur l'intervalle $[\tau_{k'}^-, \tau_{k'+1}^+]$ avec la nouvelle valeur de θ_τ sur cet intervalle.