



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le 20 juillet 2010

Par : Quentin GUIBERT

Titre: Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuares

Entreprise :

LYNXIAL

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS
M. Alexis BIENVENÛE
Mme Diana DOROBANTU
Mme Anne EYRAUD-LOISEL
M. Jean-Paul LAURENT
M. Nicolas LEBOISNE
M. Stéphane LOISEL
Mlle Esterina MASIELLO
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
M. Frédéric PLANCHET
M. François QUITTARD-PINON
Mme Béatrice REY-FOURNIER
M. Didier RULLIERE

Directeur de mémoire en entreprise :

Fabrice MAGNIN

Invité :

Frédéric PLANCHET

***Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

RESUME

Mots clés : *Retraite supplémentaire, Passif social, Solvabilité, Best estimate, Risk margin, SCR, Formule standard, Modèle interne, Mesure de risque, Market consistent, Modélisation stochastique, Inflation, Modèle semi-analytique.*

Un régime de retraite supplémentaire d'entreprise est un dispositif mis en place par l'employeur afin d'offrir un revenu complémentaire aux salariés après leur départ à la retraite. Cette promesse génère des engagements aussi bien vis-à-vis des actifs que des retraités. Bien souvent, une partie est transférée vers un organisme assureur ce qui génère alors plusieurs sources d'incertitude.

Le cadre du dispositif Européen Solvabilité II conduit à analyser ces risques à travers la classification suivante :

- ✓ le risque de marché, provenant de l'incertitude associée à la valeur et aux rendements des actifs financiers ;
- ✓ le risque de souscription, provenant de l'incertitude liée à la mesure des engagements pris par l'assureur dans les branches vie, santé et non vie ;
- ✓ le risque de contrepartie, lié au défaut potentiel des contreparties ;
- ✓ le risque opérationnel comprenant l'ensemble des risques associés aux procédures de gestion interne et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

L'objectif étant la prudence, ce dispositif définit des exigences en matière de fonds propres des organismes assureurs ainsi qu'en termes de comptabilisation des actifs et des passifs. Au surplus, cette dernière fait appel de plus en plus souvent à des références de marché.

L'objet de ce mémoire est de proposer, dans le cadre des réflexions menées actuellement sur le projet Solvabilité II, une analyse critique de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire d'entreprise. Il s'agit de présenter, en tenant compte des différents facteurs de risques et des mécanismes liés à cette activité, les modèles permettant de quantifier les engagements et le besoin en capital requis par l'assureur.

L'analyse menée dans cette étude met en parallèle l'approche dite « formule standard », dont les spécifications sont conformes au QIS4, et l'approche « modèle interne ». A ce titre, un modèle interne partiel est construit, l'enjeu étant d'offrir une modélisation plus cohérente des différents risques vis-à-vis des spécificités d'un régime de retraite. Une réflexion doit dès lors être menée autour des modèles, permettant d'intégrer des aléas économiques, financiers et biométriques susceptibles de modifier la situation économique de l'entité. Ainsi, l'approche développée s'appuie sur des formules « semi-analytiques » afin de gagner en efficacité dans la mise en œuvre, la loi caractérisant les engagements du régime conditionnellement aux facteurs de risques systématiques étant gaussienne.

ABSTRACT

Key words: *Additional retirement, Solvency, Best estimate, Risk margin, SCR, Standard formula, Internal Model, Risk measure, Market consistent, Stochastic model, Inflation, Semi-analytical model.*

An additional pension plan is a system set up by the employer to provide additional income to employee after their retirement. This promise generates commitments to employees and retired people. Often, some of these commitments are transferred to an insurer which generates several sources of uncertainty.

The scope of the European project Solvency II led to analyze these risks through the following classification:

- ✓ the market risk due to the uncertainty associated with the value and returns of financial assets;
- ✓ underwriting risk due to the uncertainty related to the life, health and non-life insurance commitments;
- ✓ the counterparty risk associated with potential failure of counterparties;
- ✓ the operational risk including all risks associated with the internal management procedures and the consequence of a failure at this level.

In order to respect cautious aim, this project sets requirements on insurers' capital adequacy and on assets and liabilities accounting rules. Moreover, the accounting rule is used more and more references to market.

The purpose of this paper is to propose a critical analysis of the solvency capital requirement of an additional pension plan, as part of the current discussions about Solvency II project. The aim is to present models taking into account the different risks factors associated with this activity to quantify the commitments and the insurer's capital requirement.

The analysis conducted in this study draws a parallel approach called "standard formula", whose specifications comply with the guidelines of QIS4, and approach "internal model". As such, a partial internal model is constructed; the challenge is to provide a more coherent modeling of specific risks. Therefore, a reflection should be conducted about models in order to integrate economic, financial and biometric risks could change the economic situation of the plan. Thus, the approach is based on "semi-analytical" formulas, to improve efficiency in implementing, because the law characterizing the commitments, conditionally to systematic risks, is Gaussian.

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier très vivement Frédéric PLANCHET, directeur scientifique au sein du Cabinet WINTER & Associés et professeur à l'ISFA, pour l'attention qu'il a bien voulu consacré à mes travaux ; la disponibilité dont il a fait preuve pour me prodiguer conseils et réflexions avisés m'a permis de nourrir ce mémoire et de développer des applications intéressantes.

Je tiens également à remercier tout particulièrement Fabrice MAGNIN, Actuaire chez Lynxial et directeur de ce mémoire, pour ses relectures minutieuses et ses remarques pertinentes.

Merci à l'entreprise Lynxial et au Cabinet WINTER & Associés de m'avoir accueilli au sein de leurs équipes ainsi que pour le temps et les moyens qui ont été mis à ma disposition pour réaliser cette étude.

Merci enfin à l'ISFA et à l'ensemble du corps enseignant pour la qualité de la formation qui m'a été dispensé durant ces trois dernière année.

SOMMAIRE

Introduction	7
Partie I. Présentation générale	9
Chapitre 1. Retraite supplémentaire : contexte - rappels	9
Section 1.1. Régimes à prestations définies	9
Section 1.2. Engagements contractés et leur couverture	12
Section 1.3. Analyse des risques	17
Chapitre 2. Présentation de la solvabilité d'un organisme assureur	25
Section 2.1. Le dispositif Solvabilité II	26
Section 2.2. Piliers fondamentaux de Solvabilité II	27
Section 2.3. Exigences du QIS4	28
Partie II. Présentation du contexte de l'étude	37
Chapitre 1. Mesure de la solvabilité	37
Section 1.1. Quelques éléments techniques	37
Section 1.2. Cadre d'analyse	39
Section 1.3. Les approches de détermination du besoin en capital	44
Chapitre 2. Présentation du régime étudié	47
Section 2.1. Hypothèses générales du régime de retraite	48
Section 2.2. Réassurance	51
Section 2.3. Allocation des actifs	52
Partie III. Evaluation de la solvabilité dans le cadre de l'approche « formule standard »	55
Chapitre 1. Evaluation des provisions <i>best estimate</i>	55
Section 1.1. Description des calculs	56
Section 1.2. Application	59
Chapitre 2. Evaluation des modules de risques	59
Section 2.1. Définition de la NAV	59
Section 2.2. Module de risque de marché	60
Section 2.3. Module risque souscription vie	74
Section 2.4. Module de risque de contrepartie	81
Chapitre 3. Evaluation du SCR global	83
Section 3.1. Evaluation du BSCR	84
Section 3.2. Evaluation du SCR risque opérationnel	85
Section 3.3. Evaluation du SCR global	87
Chapitre 4. Evaluation de la <i>risk margin</i>	87
Section 4.1. Principe de calcul	88
Section 4.2. Application	88
Chapitre 5. Analyse de la solvabilité dans le dispositif actuel	91
Section 5.1. Evaluation des provisions techniques	91
Section 5.2. Evaluation de l'exigence de marge	92
Chapitre 6. Conclusion de la partie	93
Partie IV. Construction d'un modèle interne partiel	96
Chapitre 1. Enjeux de la mise en place d'un modèle interne	96
Section 1.1. Quantification du besoin en capital associé à un risque	97

Section 1.2. Agrégation des SCR unitaires.....	97
Chapitre 2. Modèles d'actifs.....	98
Section 2.1. Simulation des trajectoires d'actifs	100
Section 2.2. Description du modèle	101
Section 2.3. Détermination des paramètres réels du modèle	106
Section 2.4. Détermination des paramètres risque-neutre du modèle	116
Section 2.5. Corrélations des résidus	119
Section 2.6. Traitement du risque de <i>spread</i>	119
Chapitre 3. Modélisation de la durée de vie	121
Section 3.1. Risque mutualisable.....	122
Section 3.2. Mesure du risque systématique.....	128
Section 3.3. Modélisation des autres risques	132
Chapitre 4. Calcul de l'exigence de capital	132
Section 4.1. Approche retenue.....	133
Section 4.2. Description de la démarche.....	134
Section 4.3. Estimation du besoin en capital	143
Section 4.4. Tests de sensibilité aux paramètres économiques et financiers	150
Chapitre 5. Conclusion de la partie	154
Conclusion générale	157
Bibliographie	159
Annexes	162

INTRODUCTION

De nombreuses entreprises sont dotées d'un régime de retraite supplémentaire mis en place au profit des salariés afin de leur assurer un revenu complémentaire au jour de leur départ à la retraite. Les régimes dits à prestations définies constituent une catégorie parmi les différents systèmes existants et se caractérisent par la promesse de l'employeur à verser une prestation, dont les modalités de calculs sont fixées d'avance, à ses employés. Cette promesse s'exprime sous la forme d'un droit à rente à la date de liquidation, conditionnée le plus souvent par la présence du salarié jusqu'à la liquidation.

Comme il s'agit d'un engagement pour l'employeur, sa comptabilisation est nécessaire et est régie par la norme IAS 19, qui impose le provisionnement total des passifs sociaux, ce qui impacte donc les comptes des sociétés. Le poids de ces engagements et les articles 115 et 116 de la loi Fillon, soumettant de nouvelles contraintes aux régimes à prestations définies et aux Institutions de Retraite Supplémentaire, ont alors poussé les entreprises à transférer leurs risques vers des organismes assureurs. En pratique, ces derniers apparaissent généralement en phase de liquidation de la rente et supportent donc des engagements de nature viagère à l'égard des salariés retraités. Par ailleurs, l'ajout de certaines garanties supplémentaires dans les contrats de retraite collectifs telles que les garanties de mortalité ou de revalorisation, aujourd'hui très demandées, font naître des engagements supplémentaires qui doivent être comptabilisés ce qui nécessite de considérer une population sous risque étendue à celle des actifs du régime de retraite.

En France, les nets changements démographiques observés notamment à travers l'allongement de la durée de vie et les évolutions économiques et financières sont autant de facteurs susceptibles de modifier les engagements constitués par les assureurs. Dans ce contexte d'évolutions actuarielles et financières, de nouveaux référentiels financiers, comptables et prudentiels font leur apparition et redéfinissent les standards de gestion et d'évaluation bilancielle. C'est notamment le cas du dispositif Solvabilité II, mis en place par la Commission Européenne afin de refondre les principes de la solvabilité en Europe. Guidé par des objectifs prudentiels, ce dispositif propose une grille d'analyse des risques et définit la quantification du besoin en capital généré par ces mêmes risques. Par ailleurs, de nouveaux outils techniques et conceptuels accompagnent cette métamorphose et doivent aujourd'hui être considérés. En particulier, le basculement d'une prise en compte implicite de certains facteurs de risques *via* la constitution de marges de prudence dans l'ancien référentiel Solvabilité I vers une logique de provisionnement *best estimate* dans un environnement où la notion de valeur de marché fait figure d'autorité, complexifie grandement les pratiques actuarielles. L'enjeu crucial de ce dispositif passe pour les assureurs par une connaissance explicite et une meilleure maîtrise de leurs risques en vue de quantifier leurs impacts sur leur solvabilité.

Compte tenu de l'ensemble de ces évolutions, la contribution de ce mémoire se situe dans l'analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire, l'enjeu étant de proposer un cadre pour examiner, à la lumière des spécificités de tels régimes, l'impact des risques inhérents à cette activité sur la solvabilité et sur les besoins en capital qu'ils génèrent. La démarche construite dans cette étude présente les différentes approches pour quantifier ces besoins et les mets en regard. L'objet de ce mémoire est également de proposer un cadre adapté pour construire un modèle interne partiel pour les principaux risques d'assurance

(financiers et de souscription) auxquels est exposée une entité couvrant des engagements de retraite.

Cette étude est organisée de la manière suivante.

Dans une première partie, les caractéristiques des régimes de retraite supplémentaires français sont rappelées afin de pouvoir proposer une analyse des risques spécifiques à ce segment. Il s'agit notamment d'identifier les facteurs de risques assurables et dont le traitement fera l'objet des développements qui suivent. Cette partie revient également sur les principes fondamentaux de Solvabilité II qui constitue le cadre réglementaire de ce travail.

La seconde partie s'intéresse de plus près au contexte de l'étude et les différentes démarches pour analyser la solvabilité d'un assureur y sont développées. Ceci relève de deux approches, l'approche « formule standard » et l'approche « modèle interne ». Or si chacune d'elle nécessite de réaliser une cartographie précise des facteurs de risques et fournit une évaluation des provisions techniques et du besoin en fonds propres, la première ne laisse pas suffisamment de latitude pour tenir compte des spécificités techniques de l'entité et de sa gestion propres des risques. Par ailleurs, une seconde étape consiste à présenter un exemple de régime de retraite supplémentaire sur lequel sont construits les développements qui suivent. Les différentes démarches pour analyser la solvabilité de ce régime sont ensuite abordées dans les parties qui viennent.

Dans une troisième partie, l'approche dite « formule standard » est développée. Elle présente le calcul des provisions techniques, constituées des provisions *best estimate* et de la *risk margin*, et du SCR conformément au cadre décrit dans les spécifications du QIS4. Outre l'évaluation de ces grandeurs dans un contexte de retraite, cette partie permet de faire le lien entre l'ancien dispositif de solvabilité applicable en norme locale et une approche plus aboutie de type modèle interne partiel.

Enfin, la dernière partie s'attache à décrire un périmètre d'étude pour la construction d'un modèle interne partiel adapté au régime et qui propose de modéliser les aléas économiques et financiers et les risques biométriques. La méthode proposée est originale puisqu'elle est construite selon une formulation « semi-analytique » pour intégrer les engagements ce qui se révèle particulièrement efficace en termes de mise en œuvre. Ce procédé est fondé sur la distinction entre les risques mutualisables et systématiques, qui trouve son origine dans la réalisation ou non d'une hypothèse d'indépendance, et propose un mécanisme mêlant techniques de simulation et formules analytiques. L'intérêt de ce schéma de calcul est de proposer une approche alternative à la simulation dans la simulation pour évaluer la valeur des engagements de retraite lorsque ces deux types de risques sont imbriqués. Au surplus, on note qu'une telle méthodologie peut de manière générale être extrapolée en assurance de personnes pour constituer le socle technique d'un modèle interne partiel pour le risque de souscription (cf. PLANCHET, GUIBERT et JUILLARD (2010)). Dans cette étude, on montre alors que conditionnellement aux facteurs de risque systématiques modélisés, en l'occurrence les risques financiers et économiques, l'engagement présente un caractère gaussien déterminé par la connaissance de ces moments d'ordre 1 et 2.

PARTIE I. PRESENTATION GENERALE

De par l'avènement prochain du référentiel européen de solvabilité, les organismes assureurs envisagent d'ores et déjà la mise en place de ce dispositif en interne. A l'inverse du système actuel, Solvabilité I, son successeur construit une analyse plus fine des risques auxquels sont exposés les assureurs, nécessitant en amont un lourd investissement, par le biais d'une démarche élaborée sur des bases communes avec le dispositif Bâle II pour le secteur bancaire.

Dans cette mesure, une segmentation par grand groupe de contrats doit être menée afin d'en extraire les risques affectant chaque activité. Dans le cadre de cette étude, les contrats permettant d'offrir une garantie de retraite supplémentaire vont être étudiés. Ainsi, la présente partie propose de revenir sur le contexte associé au régime de retraite supplémentaire, l'idée sous jacente étant de préciser les risques relatifs à cette activité. Elle s'accompagne par la suite d'une présentation non exhaustive des grands principes et les exigences du référentiel Solvabilité II.

Chapitre 1. Retraite supplémentaire : contexte - rappels

Le paysage de la retraite française est classiquement découpé en trois piliers. Le premier est constitué des régimes légalement obligatoires de base et éventuellement complémentaires gérés en répartition. Le second niveau comprend les régimes supplémentaires d'entreprise gérés en capitalisation. Enfin, le dernier pilier regroupe les régimes supplémentaires à adhésion individuelle eux aussi gérés en capitalisation.

Dans le cadre de ce mémoire, notre attention se concentre plus spécifiquement sur les régimes supplémentaires d'entreprise. Ces régimes de retraite appelés parfois sur-complémentaires peuvent être définis comme « *des régimes permettant aux entreprises de constituer, au profit de leurs salariés, une pension servie sous forme de rente viagère, en complément et en dehors des régimes de retraite complémentaire et obligatoire (généralement l'ARRCO, l'AGIRC et l'assurance vieillesse de la Sécurité Sociale pour les salariés de droit privé)* » (MAGNIN (1999)).

Les régimes de retraite supplémentaires sont communément répertoriés en deux catégories : les régimes à prestations définies et les régimes à cotisations définies. Dans la suite, nous nous intéresserons plus spécifiquement aux régimes à prestations définies¹.

Section 1.1. Régimes à prestations définies

Dans un régime à prestations définies, l'entreprise s'engage à verser une pension dont les modalités de calculs sont définies préalablement. Au sein de ces régimes, on distingue :

- ✓ les régimes à droits aléatoires pour lesquels le versement des prestations par l'entreprise est lié à l'activité du salarié dans cette dernière au moment de la liquidation des droits, c'est-à-dire au moment du départ en retraite ;

¹ La présente présentation reprend et réactualise des éléments tirés de MAGNIN (1999).

- ✓ les régimes à droits acquis pour lesquels le droit à prestation est acquis si le salarié quitte l'entreprise avant son départ à la retraite.

Les régimes à prestations définies garantissent, au moment du départ à la retraite, une pension dont le montant est conventionnellement déterminé à l'entrée dans le régime. En outre, les régimes de retraite prévoient fréquemment des garanties supplémentaires comme le versement de prestations de réversion, de conjoint et d'invalidité.

Les objectifs de la mise en place d'un tel régime dépendent des besoins des salariés en matière de complément de retraite. Ce sont principalement les suivants :

- ✓ assurer un niveau global de retraite, tous régimes confondus ;
- ✓ permettre de lier le revenu issu du régime mis en place aux derniers revenus, en gommant ainsi les éventuelles irrégularités des profils de carrière ou les effets d'une forte croissance des salaires ;
- ✓ permettre d'opérer une égalité des droits au moment du départ à la retraite et de pouvoir bénéficier d'une pension d'un niveau suffisant par rapport à la dernière rémunération ;
- ✓ pouvoir faciliter le départ volontaire en retraite des salariés âgés ;
- ✓ fidéliser le personnel si la condition d'être présent dans l'entreprise au moment du départ, ou à défaut de bénéficier d'une certaine ancienneté, est exigée pour pouvoir bénéficier des prestations.

En général, l'entreprise définit librement la catégorie de salariés concernés et les caractéristiques de la retraite à servir sont précisées dans le règlement intérieur de retraite que doit établir chaque entreprise². On distingue deux types de régimes à prestations définies : les régimes différentiels ou chapeaux et les régimes additifs.

1.1.1. Régimes différentiels

Ces régimes permettent de garantir aux salariés un niveau global de retraite considéré comme minimal. L'engagement consiste à garantir une pension globale égale à un pourcentage du dernier salaire ou d'un salaire de référence en intégrant les prestations des différents régimes de retraite obligatoires et supplémentaires.

Le régime verse donc une prestation égale à la différence entre le niveau garanti et les revenus des retraites obligatoires. L'engagement de l'employeur au titre d'un régime différentiel est donc soumis au maintien du rendement proposé par les régimes Sécurité Sociale et l'AGIRC/ARRCO.

² Le règlement intérieur définit les obligations de l'employeur vis-à-vis de ces salariés.

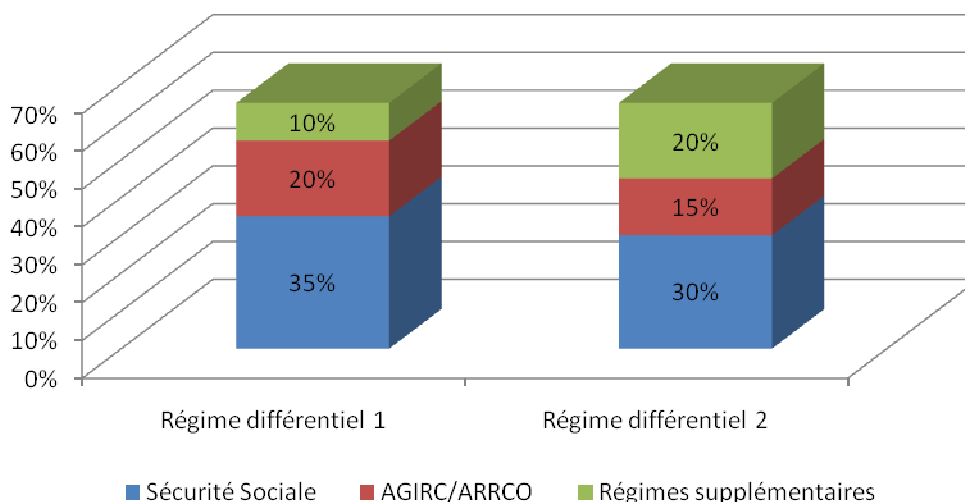


Fig. 1 - Régime différentiel garantissant 65 % du salaire

1.1.2. Régimes additifs

Dans ce type de régime, la définition de la prestation ne prend pas en compte les régimes obligatoires et concerne uniquement le montant de la pension qui viendra s'ajouter aux prestations de ceux-ci, indépendamment de leur niveau.

L'entreprise verse donc au salarié un complément de retraite correspondant le plus souvent à une fraction fixe de son dernier salaire ou de la moyenne de ses derniers salaires. Le niveau de retraite garanti par l'employeur peut également dépendre de l'ancienneté du salarié dans l'entreprise.

Contrairement aux régimes différentiels, c'est dans ce cas le salarié qui supporte le risque d'une chute des rendements offerts par les régimes obligatoires Sécurité Sociale et l'AGIRC/ARRCO.

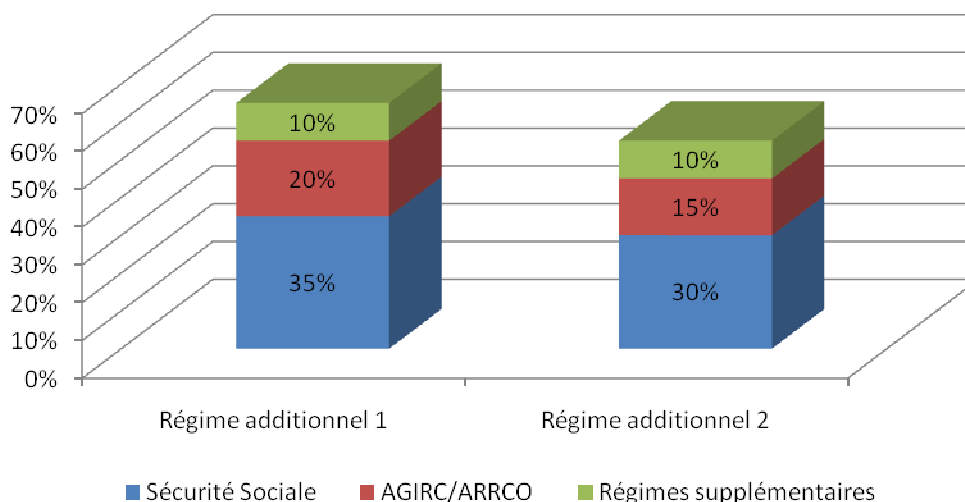


Fig. 2 - Régime additionnel garantissant 10 % du salaire

Section 1.2. Engagements contractés et leur couverture

La souscription d'un régime de retraite supplémentaire se traduit par la naissance d'engagements pour le souscripteur et de droits pour les bénéficiaires.

Les régimes à prestations définies sont le plus souvent mis en place pour profiter d'un cadre fiscal favorable, décrit dans l'article 39 du Code Général des Impôts. Cette fiscalité permet notamment à l'employeur de déduire de son bénéfice imposable les sommes versées au titre du régime et les gains provenant des placements issus de ces sommes.

1.2.1. Engagements du souscripteur

L'engagement du souscripteur porte sur la prestation qui sera versée à chaque bénéficiaire au moment de son départ en retraite. Cependant, l'entreprise ne s'engage généralement pas sur le montant exact de la rente mais plutôt sur un mode de calcul prédéfini.

Cet engagement la conduit à supporter une obligation de résultats quant au niveau de la prestation versée. Les conséquences de cette obligation sont alors variables selon qu'il s'agit d'un régime additif ou d'un régime différentiel. En effet, dans un régime additif, l'engagement ne dépend que d'éléments tels que l'évolution du salaire et l'ancienneté alors que, dans un régime différentiel, il faut ajouter l'évolution des retraites obligatoires, ce qui constitue un engagement non assurable.

Par ailleurs, l'engagement pris par l'employeur est une dette, appelée passif social. vis-à-vis des salariés et qu'il faut évaluer. *De facto*, les salariés sont les créanciers potentiels de leur entreprise au fur et à mesure de l'acquisition de leurs droits³. L'entreprise porte donc des engagements vis-à-vis de deux populations : les anciens salariés et les salariés actifs.

³ Cf. PASTOR (2009) pour plus de précisions.

Concernant les anciens salariés, la promesse est relativement simple à évaluer car elle ne dépend que d'hypothèses sur l'actualisation et sur la mortalité. Les engagements vis-à-vis des salariés actifs sont en revanche plus complexes car viennent s'ajouter des hypothèses concernant le turnover, le profil de carrière, l'âge de départ en retraite, etc.

Ainsi, ce passif social est une valeur estimée qui impacte négativement la situation nette de l'entreprise. Cette dernière doit d'ailleurs indiquer le montant de cette charge à l'annexe du bilan. Cependant, l'effet de ce passif sur les charges futures de l'entreprise est atténué s'il fait l'objet d'un financement par constitution de provisions mathématiques nécessaires au versement futur des prestations. Par ailleurs, un contrat d'assurance est souvent mis en place afin de transférer une partie de l'engagement vers un organisme assureur.

La norme IAS 19 *Avantages du personnel*⁴ prévoit les règles de comptabilisation des engagements sociaux de ce type. Elle est complétée par la norme IFRS 2 *Paiements en actions*⁵ qui prévoit notamment les méthodes d'évaluation des engagements sociaux donnant droit à des actions, comme les plans de stock-options.

La norme IAS 19 identifie les avantages octroyés par l'entreprise à son personnel⁶ :

- ✓ les avantages à court terme ;
- ✓ les avantages à long terme ;
- ✓ les avantages postérieurs à l'emploi ;
- ✓ les indemnités de fin de contrat de travail ;
- ✓ les avantages sur capitaux propres.

Parmi ces avantages, seuls ceux à court terme⁷ ne sont pas générateur de passif social. Par contre, les engagements liés à un régime de retraite à prestations définies donnent lieu à la constitution d'une provision. En effet, la norme définit deux critères d'analyse principaux afin de déterminer si un avantage doit donner lieu à la constitution d'un passif social :

- ✓ l'avantage n'est pas gagé par la production de valeur ajoutée ;
- ✓ l'avantage génère une distorsion par rapport à des entreprises du même secteur.

L'évaluation de ce passif social comporte schématiquement deux étapes : l'évaluation de l'engagement total de l'employeur et la répartition de cet engagement entre part affectable au passé, représentative de droits acquis, et la part complémentaire représentative de droits futurs, restant à acquérir. La première étape relève de la compétence de l'actuaire et conduit à la notion de valeur actuelle probable du régime, calculée à partir de projections sur les phénomènes démographiques, financiers et économiques. La seconde étape est comptable et consiste à répartir cette valeur entre le passé et le futur, on parle de *projected benefit obligation* pour comptabiliser l'engagement de l'entreprise pour le passé.

⁴ Cf. Site de l'International Accounting Standards Board : <http://www.iasb.org>.

⁵ Cf. Site de la Commission Européenne pour plus de détails : <http://ec.europa.eu>.

⁶ Ces éléments sont repris de THEROND (2008a).

⁷ Il s'agit des avantages liquidés dans les 12 mois suivant la fin de l'exercice (rémunérations, congés payés, etc.).

Le calcul de la valeur actuelle probable met en œuvre un certain nombre d'hypothèses qui doivent être « objectives et mutuellement compatibles », c'est-à-dire qu'elles doivent être réalistes et cohérentes. Les principales hypothèses actuarielles sont les suivantes :

- ✓ le taux d'actualisation⁸ ;
- ✓ l'inflation ;
- ✓ le profil de carrière de l'employé ;
- ✓ le mode de revalorisation des retraites ;
- ✓ le turnover ;
- ✓ la mortalité ;
- ✓ l'âge et les modalités de départ à la retraite.

D'autres hypothèses exogènes sont déterminées par référence au marché. Le calcul de la valeur actuelle probable s'appuie donc sur ces hypothèses et consiste à actualiser et à probabiliser, à la date de comptabilisation, la valeur des prestations servies.

La norme précise trois techniques de calcul de la *projected benefit obligation*⁹ :

- ✓ *Projected Unit Credit Method* ;

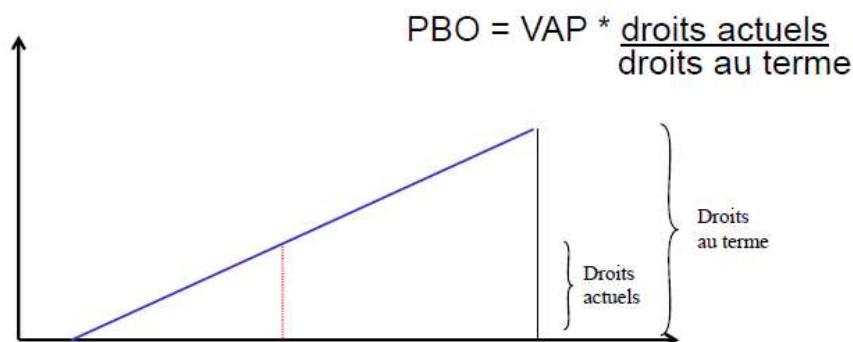


Fig. 3 - *Projected Unit Credit Method*

⁸ La norme impose le taux des obligations d'entreprises de première catégorie dont la durée correspond à la durée résiduelle de l'engagement ou, s'il n'existe pas de marché actif pour ce type d'instrument, sur le taux des obligations d'Etat.

⁹ Cf. JACQUEMIN et BARBIER (2009) pour plus de précisions.

- ✓ *Projected Unit Credit Method with Service Prorate* ;

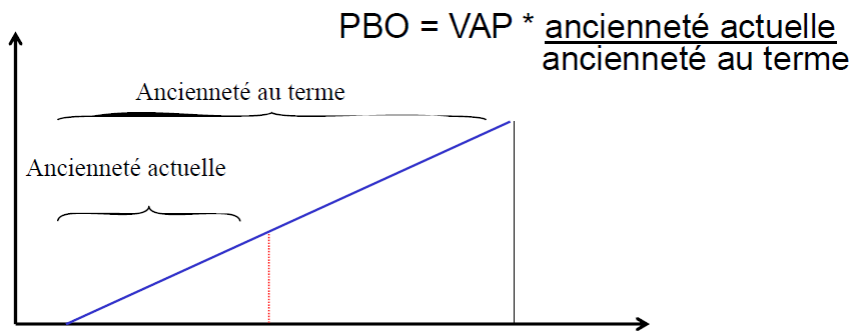


Fig. 4 - *Projected Unit Credit Method with Service Prorate*

- ✓ *Projected Unit Credit Method with Acquisition Prorate*.

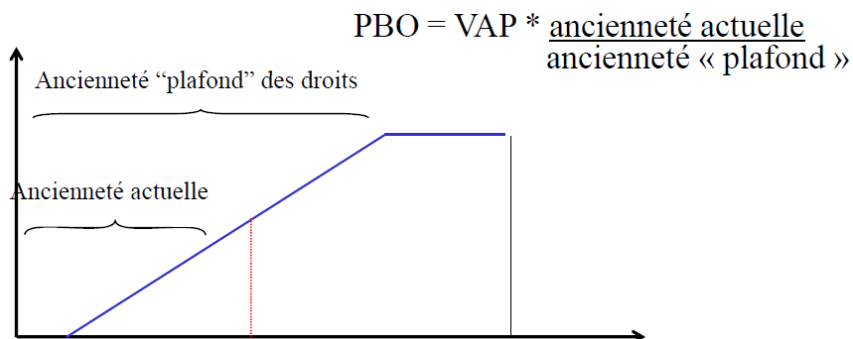


Fig. 5 - *Projected Unit Credit Method with Acquisition Prorate*

Précisons que les actifs du fonds de retraite doivent être évalués en *fair value*¹⁰. Par exemple, pour des actifs disposant d'un marché actif, ces derniers sont évalués à leur valeur de marché. D'autres sont évalués par l'actualisation des *cash flows* futurs attendus.

1.2.2. Droits des bénéficiaires

Dans ce type de régime, les bénéficiaires ont droit au versement de prestations au jour de leur départ à la retraite. Il existe plusieurs assiettes susceptibles d'être retenues pour le calcul des prestations :

- ✓ la dernière rémunération perçue (brute ou nette) ;
- ✓ la rémunération des douze derniers mois d'activité ;
- ✓ la moyenne d'un certain nombre de rémunérations ;
- ✓ des tranches particulières de salaire.

¹⁰ Cf. Site de l'*International Accounting Standards Board* : www.iasb.org pour plus de précisions sur cette notion.

Les garanties liées aux régimes à prestations définies peuvent être classées en deux catégories :

- ✓ les garanties forfaitaires qui s'expriment en pourcentage de l'assiette des prestations ;
- ✓ les garanties liées à l'ancienneté dans l'entreprise qui s'expriment en pourcentage de l'assiette par année d'ancienneté.

De plus, les prestations versées peuvent être revalorisées par l'entreprise au cours de leur service.

En outre, les régimes à prestations définies prévoient souvent une pension de réversion au profit du conjoint survivant en cas de décès du salarié. On note que cette réversion peut être conditionnée à un âge minimum du conjoint (en général 60 ans).

1.2.3. Financement

Dans la grande majorité des cas, le financement des régimes est uniquement patronal, sans cotisation de la part des salariés¹¹. En effet, la participation financière des salariés ouvre droit à une prestation imprescriptible qui ferait perdre l'avantage de la déductibilité fiscale.

1.2.4. Gestion

Un régime à prestations définies peut être géré avec ou sans organisme assureur ; la question essentielle est d'assurer la pérennité de l'entreprise. Cependant, la réforme des retraites instaurée par les articles 115 et 116 de la loi Fillon de 2003 confirme la tendance de fond, instauré depuis la loi Evin du 31/12/1989, poussant à l'externalisation¹².

Si le régime est géré en interne, c'est l'employeur qui assure directement le financement des prestations. Ces régimes sont souvent qualifiés, en France, d'auto-assurés. Dans ce cas, le régime est géré par l'intermédiaire de deux fonds : le fonds des actifs et le fonds des retraités. Pendant la phase d'activité du salarié, l'employeur doit abonder le fonds des actifs dans des proportions suffisantes afin de pouvoir tenir sa promesse. Lors du départ du salarié, le capital constitutif de la pension est transféré dans le fonds des retraités.

Cependant, les partenaires sociaux exigent de plus en plus fréquemment, lorsque le régime est mis en place par accord collectif, que l'employeur s'engage à externaliser les sommes régulièrement et au plus tard au jour du départ. Trois types d'organismes peuvent alors intervenir : les institutions de prévoyance, les mutuelles et les compagnies d'assurance.

Lorsque le régime est géré par un organisme assureur, des fonds collectifs de retraités, cantonnés ou non selon le contrat, sont alimentés par les primes et les produits financiers et débités des prestations. On note que l'assureur ne règle les prestations qu'à hauteur des fonds qui ont été constitués.

¹¹ Il s'agit de l'une des conditions d'applications de l'article 39 du Code Général des Impôts.

¹² Le lecteur intéressé pourra se reporter à PASTOR (2009) qui fournit une description des mécanismes d'externalisation d'un régime de retraite.

De plus, il faut préciser que le lien juridique entre l'assureur et le salarié est différent de celui qui lie l'employeur et le salarié. En effet, lorsque le salarié relié à l'entreprise par le droit social devient un jeune retraité, sa condition est régie par le droit des assurances. Il a alors la possibilité de déterminer certaines caractéristiques de sa rente (viagère, certaine temporaire, réversion, dépendance, etc.), dans les limites de déductibilité sociale du régime.

Dans cette perspective, le retraité bénéficie également de la revalorisation du contrat, qui résulte d'une obligation réglementaire pour l'assureur¹³, le plus souvent doublée d'une clause contractuelle.

La revalorisation disponible correspond aux produits financiers bruts auxquels ont été ôtés les prélèvements du gestionnaire financier, les chargements sur épargne assureur, le taux technique et la perte de mortalité le cas échéant (à l'inverse, le gain de mortalité est ajouté).

Section 1.3. Analyse des risques

L'objectif de cette partie est de décrire de manière exhaustive les éléments techniques à prendre en compte pour un calcul rigoureux des engagements de retraite. En pratique, certains de ces facteurs présentent un caractère non assurable et devront être figés.

1.3.1. Facteurs démographiques

On entend par facteurs démographiques, tout événement dont la réalisation modifie l'effectif ou la nature du groupe des adhérents - actifs ou retraités - au régime de retraite. En reprenant l'approche développée par MAGNIN (1999), les cinq facteurs les plus couramment retenus quand il s'agit de modéliser un fonds de retraite sont présentés.

1.3.1.1. La survie

Le risque viager est un élément essentiel dans la détermination de l'engagement puisqu'il intervient à deux niveaux. Dans un premier temps, la probabilité de décès avant l'âge de départ en retraite conditionne le versement de la prestation ou, du moins, la reporte sur une seconde tête. Ensuite, si le salarié survit au-delà de son âge de départ, c'est la durée de vie probable qui va déterminer la durée de paiement de la prestation.

Ainsi, il convient de choisir avec beaucoup de soin les hypothèses décrivant la mortalité du groupe étudié, sur la base des informations disponibles. Au surplus, le choix de la table de mortalité est particulièrement délicat lorsque l'effectif étudié est de taille modeste.

La modélisation adoptée doit tenir compte d'un phénomène responsable d'une dérive des tables de mortalité : le risque de glissement, correspondant à l'écart entre l'espérance de vie du retraité au jour du versement de la prestation et au jour de l'évaluation. Ce risque est dû à l'augmentation de l'espérance de vie en France selon une croissance régulière. Or, cette croissance n'est pas répartie de façon régulière entre les différentes classes d'âge.

¹³ En France, l'assureur doit reverser au moins 90 % du Solde Technique et 85 % du Solde Financier au titre de la participation au bénéfice.

Ce risque de glissement représente un des risques essentiels auquel sont soumis les fonds de retraite. Ainsi, le principe qui préside à l'utilisation des tables de mortalité est la prudence. En effet, il serait particulièrement dangereux pour la solvabilité d'un régime de retraite offrant des prestations viagères de surestimer systématiquement les taux de mortalité des retraités puisque cela reviendrait à sous-estimer la valeur de l'engagement. Les actuaires ont répondu à cette problématique en construisant des tables de mortalité prospective.

L'approche retenue lors de la construction d'un modèle de mortalité doit prévoir la tendance et le niveau de mortalité attendus. Si ces éléments sont correctement spécifiés, le risque de mortalité se mutualise si la taille du portefeuille est suffisamment importante. *A contrario*, une erreur de spécification du modèle conduit à observer un écart non mutualisable puisque l'ensemble des têtes est affecté dans le même sens par cette erreur.

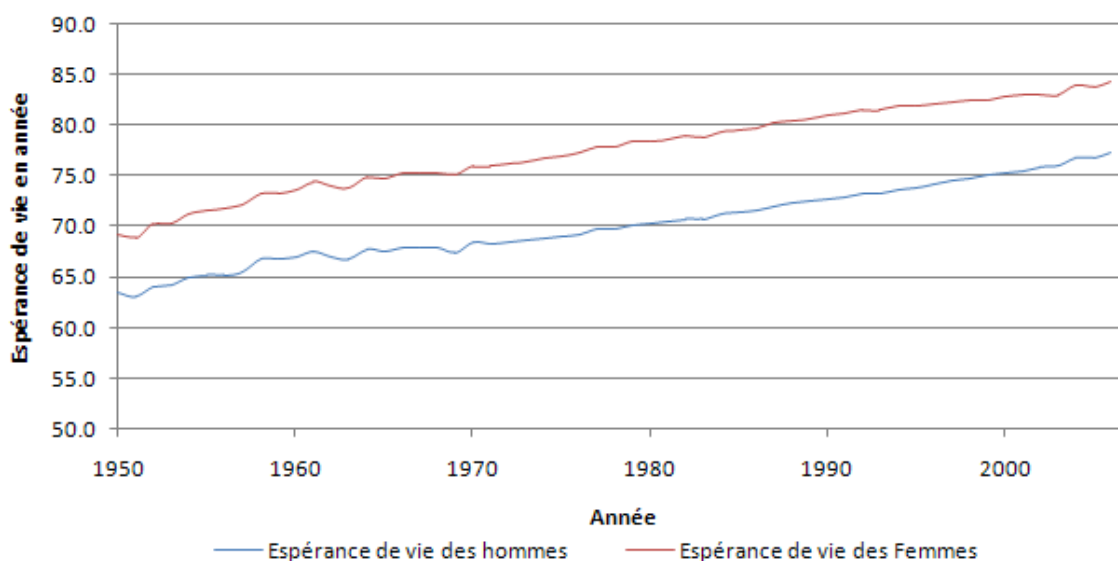


Fig. 6 - Evolution de l'espérance de vie à la naissance depuis 1950 (source INSEE)

A ce titre, des pertes techniques ont été enregistrées sur certains portefeuilles de rentes, utilisant les tables réglementaires TGH/F 05, en 2007 (entre 0,15 % et 0,3 % des provisions d'ouverture) et en 2008 (entre 0,25 % et 0,4 % de la provision) ce qui pourrait remettre en cause leur prudence. Ces pertes peuvent alerter et posent le problème d'une inéquation de ces tables à la mortalité observée¹⁴.

¹⁴ PLANCHET (2009a) propose un article sur la question sur le blog actuariel du Cabinet WINTER & Associés.

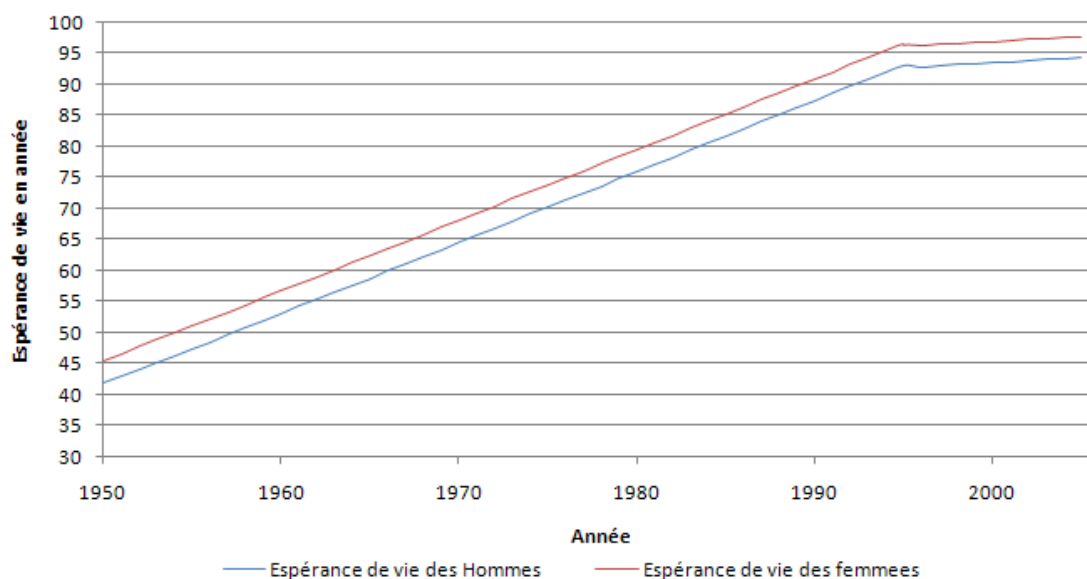


Fig. 7 - Evolution de l'espérance de vie à la naissance depuis 1950 avec les tables TGH/F 05

1.3.1.2. Le turnover

Les hypothèses de turnover vont influencer directement sur le nombre de salariés présents dans l'entreprise à l'âge de départ à la retraite et qui, à ce titre, bénéficieront des prestations prévues par le régime. Par conséquent, il faut s'assurer que les probabilités de démission et de licenciement soient les plus proches possibles de la réalité.

Les critères retenus pour une analyse statistique de la rotation du personnel sont en général l'ancienneté et l'âge, mais il peut être intéressant de retenir également d'autres variables telles que la répartition hommes/femmes ou la catégorie socioprofessionnelle du salarié.

1.3.1.3. L'âge de départ à la retraite

L'âge légal de l'ouverture des droits à la retraite en France est fixé à 60 ans, mais le régime peut prévoir d'autres dispositions en la matière. Cette hypothèse joue un rôle important lors de l'évaluation des engagements et doit être connue à l'avance.

1.3.1.4. L'invalidité

Ce facteur indique un changement d'état de l'individu concerné. Ce changement peut-être traité de deux manières différentes selon ce que prévoit le régime. Si certaines garanties en cas d'invalidité totale de travail sont prévues, alors ce facteur est un moyen de distinguer les prestations à servir aux invalides d'une part et aux valides d'autre part. Si en revanche aucune garantie n'est offerte, l'invalidité revient à une cause de sortie de même nature que le décès ou le turnover.

1.3.1.5. Les nouveaux entrants

Les nouveaux entrants peuvent être considérés selon l'approche que l'on souhaite adopter. Dans une logique d'évaluation de l'engagement, les nouveaux entrants ne doivent pas être pris en compte. *A contrario*, leur entrée sera privilégiée si l'approche retenue nécessite l'évaluation des flux de dépenses et de ressources.

1.3.2. Facteurs économiques et sociaux

D'un point de vue technique et financier, l'évolution d'un régime de retraite supplémentaire à cotisations ou à prestations définies est liée à celle de l'économie et de l'environnement social. On dénombre ici quelques facteurs exogènes à l'entreprise susceptibles d'influer sur le coût du régime et sur l'évaluation *a priori* des engagements.

1.3.2.1. Lien entre les taux de croissance, les taux d'inflation et les taux d'intérêt¹⁵

A long terme, il est généralement considéré qu'il existe un lien étroit entre le taux d'intérêt nominal prévalant sur les marchés financiers, le taux d'inflation c'est-à-dire l'évolution de l'indice des prix, et le taux d'intérêt réel. Plus précisément, le taux d'intérêt nominal est égal à la somme du taux d'intérêt réel et de l'anticipation du taux d'inflation.

$$Taux\ Nominal = E_t [Taux\ Inflation] + Taux\ Réel$$

Simultanément, on observe un lien étroit à long terme entre le taux d'intérêt réel et le taux de croissance réel de l'économie. Ainsi, le taux d'intérêt réel ne peut être longuement très différent du taux de croissance de l'économie sans provoquer des arbitrages entre l'activité financière et l'activité réelle d'une part et entre l'investissement dans différents pays d'autre part.

$$Taux\ Réel\ à\ Long\ Terme = Taux\ de\ Croissance\ à\ Long\ Terme$$

Dans la mesure où ces deux règles fondamentales sont observées sur une longue période, c'est-à-dire l'horizon des engagements d'un régime de retraite, le débat doit alors se porter sur le taux d'actualisation qui permet d'établir les liens entre flux présents et futurs et surtout de donner une valeur à l'engagement actuel de l'entreprise.

En effet, les investissements effectués dans le cadre du régime obtiendront un rendement qui sera généralement proche des intérêts nominaux. On retiendra alors un taux d'actualisation proche du taux d'intérêt réel.

En conséquence, il paraît erroné d'utiliser, lors de l'actualisation des prestations, un taux fixé alors que les placements réellement effectués ont une rentabilité incertaine. Le risque est que l'escompte d'intérêt réalisée lors de l'actualisation des engagements ne soit pas récupérée sur les produits financiers en face de la provision mathématique. Enfin, le niveau de taux d'actualisation choisi a également une influence sur le montant des majorations de pensions effectuées dans le cadre de la participation aux bénéficiaires.

¹⁵ La description de cette relation appelée relation de Fisher est reprise de PLANCHET et THEROND (2007).

1.3.2.2. Revalorisation des prestations¹⁶

Les retraités, bénéficiaires de prestations, doivent au cours des années faire face à des acquisitions de biens de consommation dont les prix évoluent avec le temps. Dans ces conditions, il paraît normal de prévoir une revalorisation des prestations qui vise à maintenir leur pouvoir d'achat, c'est-à-dire ajustée sur l'évolution des prix.

Une seconde approche serait de prévoir une revalorisation des prestations qui soit corrélée avec l'évolution des salaires nominaux des actifs pour tenter de maintenir le pouvoir d'achat relatif des actifs et des retraités. L'évolution annuelle du pouvoir d'achat des salariés actifs doit être proche de celle des taux d'intérêt nominaux auxquels seront placés, en toute logique, les actifs représentatifs des provisions mathématiques.

Notons qu'à long terme, le choix d'un tel dispositif n'est pas neutre puisque, pour autant que la croissance perdure sur le long terme, l'évolution des prix est en générale inférieure à l'évolution des salaires.

1.3.2.3. Le profil de carrière

Dans l'hypothèse où les prestations seront déterminées en fonction du dernier salaire d'activité, les taux de progression des salaires ont un impact déterminant. Cela revient à estimer le montant de la rémunération future des employés en revalorisant leurs salaires actuels sur l'ensemble des années restant à courir avant la date du départ en retraite.

1.3.2.4. La performance des systèmes légal et complémentaire de retraite obligatoire

Le coût d'un régime de type différentiel est fortement dépendant du rendement fourni par les régimes obligatoires, un risque supplémentaire pèse donc sur le passif social des entreprises ayant mis en place un régime différentiel. Ainsi, la démarche adoptée lors de l'évaluation de l'engagement pour de tels régimes doit être suffisamment prudente dans le choix des hypothèses retenues.

En pratique, le coût d'un régime différentiel est relativement difficile à évaluer en raison du désengagement en cours et probablement à venir des régimes obligatoires. En cas de transfert des risques vers un assureur, les droits relatifs des retraités et des actifs relatifs aux régimes obligatoires sont cristallisés à la date de transfert.

1.3.3. Assurabilité des engagements

Dans le cas où l'employeur souhaiterait externaliser ses engagements auprès d'un organisme assureur, se pose la question des éléments du régime qui peuvent être externalisés et les spécificités qui ne peuvent être reprises¹⁷.

¹⁶ Cette partie est reprise de PLANCHET, THEROND et JACQUEMIN (2005).

¹⁷ Cf. PASTOR (2009) pour plus de précisions.

1.3.3.1. Eléments assurables

Un organisme d'assurance habilité peut garantir une table de mortalité ainsi qu'un taux technique¹⁸ sur la base d'un montant de rente déterminé, de dates de naissance connues (première et deuxième têtes) et d'une date de départ à la retraite connue et certaine. Compte tenu de ces engagements, l'assureur doit justifier de provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de ses engagements.

En particulier, les engagements de retraite pris par l'assureur sont couverts par des provisions mathématiques. Les modalités de calcul de ces provisions sont déterminées réglementairement¹⁹ : « les provisions mathématiques des contrats d'assurance sur la vie doivent être calculées d'après les taux d'intérêts retenus pour l'établissement du tarif et, lorsqu'ils comportent un élément viager, pour tous les contrats individuels et collectifs de rente viagère en cours de service au 1^{er} janvier 2007 ou liquidés à compter de cette même date, calculées à partir des tables de mortalité appropriées ».

Les tarifs pratiqués par les entreprises d'assurance sur la vie sont donc établis d'après un taux d'intérêt technique fixé dans les conditions prévues par arrêté²⁰ et une des tables suivantes :

- ✓ soit celle homologuée par arrêté du ministre de l'économie et des finances établie par sexe ;
- ✓ soit celle établie ou non par sexe par l'entreprise d'assurance et certifiée par un actuaire indépendant.

Le tarif déterminé en utilisant une table certifiée ne peut être inférieur à celui qui résulterait de l'utilisation de la table homologuée²¹.

Par ailleurs, le montant des primes à verser à l'organisme assureur doit prendre en compte les chargements qui seront prélevés au cours de la vie du contrat sur primes, sur rentes et sur encours. L'assureur peut également s'engager sur un coût de gestion du régime d'où la nécessité d'une tarification adéquate de cette gestion.

Au-delà des éléments cités *supra*, on note que ceux ayant un impact sur un dispositif de retraite ne peuvent être assurés en tant que tels. On peut citer : l'âge de départ à la retraite, le pourcentage d'individus mariés (taux de nuptialité), la différence d'âge entre conjoints, le profil de carrière, le turnover, ou le montant de la pension de retraite versée par les organismes de retraite obligatoire (en cas de prestations différentielles).

Dans l'analyse technique d'un régime, ces éléments non assurables pris en compte à partir d'hypothèses actuarielles font l'objet d'une comparaison attentive avec les résultats constatés annuellement. Ces valeurs d'hypothèses devront être conformes à la réalité de la population couverte.

¹⁸ Cf. art. A.335-1 Code des Assurances.

¹⁹ Cf. art. R.331-4, A.331-1-1 et A.335-1 du Code des Assurances.

²⁰ Cf. art. A.132-1 du Code des Assurances.

²¹ Cf. art. A.335-1 du Code des Assurances.

1.3.3.2. Novations assurantielles

Les articles 115 et 116 de la loi Fillon de 2003, par leur incitation à l'externalisation des engagements de retraite, ainsi que la norme IAS 19 ont induit un certain nombre de novations au niveau des contrats d'assurance collectifs de retraite.

La distinction des bénéfices techniques et financiers

En assurance vie, les montages tendent usuellement à ne pas distinguer, pour une année donnée, le résultat technique du résultat financier.

Néanmoins, cette mutualisation du résultat technique et du résultat financier conduit économiquement à compenser les pertes techniques dues à la sous-mortalité du portefeuille (souvent constatées par les organismes assureurs) par des excédents de produits financiers, donc à diminuer le rendement financier attribué aux assurés.

D'où l'intérêt d'identifier spécifiquement le résultat technique. Les organismes assureurs communiquent de plus en plus fréquemment leur solde de mortalité et étudient la possibilité (en fonction du nombre de têtes à assurer) de mutualiser (ou non) la mortalité du groupe.

La garantie de table²²

La garantie de table de mortalité consiste à prévoir contractuellement une table de mortalité unique d'évaluation des provisions mathématiques quelles que soient les évolutions réglementaires applicables aux organismes assureurs. Cette contractualisation permet au souscripteur de transférer à l'organisme assureur toute évolution défavorable de la mortalité de la population assurée, contre le versement d'une prime additionnelle. En pratique, la tarification d'une telle clause est délicate et on pourra retenir une prime unique ou la valeur actualisée des chargements prélevés en cas d'abattement sur les taux de décès de la table de mortalité contractuelle. De ce fait, ces garanties ne sont pas toujours admises par les assureurs, ce qui laisse au souscripteur la charge d'une évolution défavorable de la mortalité.

Si elle est acceptée, cette garantie modifie considérablement l'engagement de l'organisme assureur. En effet, en l'absence de garantie de table, ce dernier supporte uniquement des engagements vis-à-vis des seuls salariés retraités. Par contre, cette garantie oblige l'assureur à considérer à la fois le groupe des salariés retraités et le groupe des salariés actifs. Il doit constituer des provisions de manière à prévoir une déformation de la mortalité des actifs par rapport à la table de mortalité contractuelle. Lors de l'évaluation de ces engagements, l'assureur doit donc projeter l'ensemble de la population couverte jusqu'à son extinction, l'horizon pouvant alors être très long.

La garantie de taux

La garantie de taux consiste à prévoir contractuellement un taux unique d'évaluation des provisions mathématiques quelles que soient les évolutions des réglementaires applicables aux organismes assureurs. Cette contractualisation permet au souscripteur de transférer à l'organisme assureur toute évolution défavorable du rendement des actifs dans lesquels sont investis les fonds de retraite.

²² Cf. PLANCHET et THEROND (2007) pour plus de précisions.

De même que la garantie de table, cette garantie conduit l'organisme assureur à projeter l'ensemble de la population couverte jusqu'à son extinction.

La garantie d'inflation²³

On rappelle tout d'abord que l'organisme assureur s'engage sur la base d'un montant de rente déterminé en cas de gestion externe. Néanmoins, de nombreux régimes de retraite d'entreprise promettent *a priori* une revalorisation des rentes versées, reposant sur une référence extérieure (valeur de service du point ARRCO / AGIRC, évolution de la pension Sécurité Sociale, évolution de l'inflation, etc.). La référence d'inflation communément admise sur la place correspond à l'évolution annuelle de l'indice des prix *INSEE hors tabac - France entière - ensemble des ménages*.

La contrainte de transformation des Institutions de Retraite Supplémentaire²⁴ a contribué à accroître la demande des entreprises pour ce type de garantie.

Dans le cas où l'entreprise souhaite dès à présent obtenir la garantie de revalorisation des rentes au niveau de l'inflation, un adossement de l'échéancier des prestations probables pourra être réalisé à partir d'actifs financiers dont le rendement réalisé sera corrélé précisément sur l'inflation. En pratique, la garantie de rendement avec montage d'inflation correspond à une décomposition du rendement pour les actifs financiers de la forme $i + r$ avec i l'inflation constatée et r le taux de rendement réel de l'actif.

Les actifs financiers peuvent être des obligations indexées sur l'inflation, des produits structurés composés d'obligations, d'actions et de tout autre actif permettant un adossement des flux. L'adossement et les éventuelles garanties associées doivent prendre en compte que les régimes prévoient généralement que l'évolution des rentes ne peut être négative (contrairement à l'inflation au cours d'une année donnée).

Par ailleurs, l'adossement sera difficilement compatible avec un échéancier de prestations dont le terme peut aller au-delà de 50 ans. Se pose alors le problème de l'absence d'actifs financiers pour ces maturités. La mise en place de telles garanties, basées sur un indice de référence est nécessairement conditionnée par la présence sur les marchés d'actifs financiers corrélés au même indice (OAT_i, OAT€_i, etc.).

²³ Cette partie s'inspire de JOUAHRI et PLANCHET (2008).

²⁴ Cf. art. 116 de la loi Fillon du 21 août 2003.

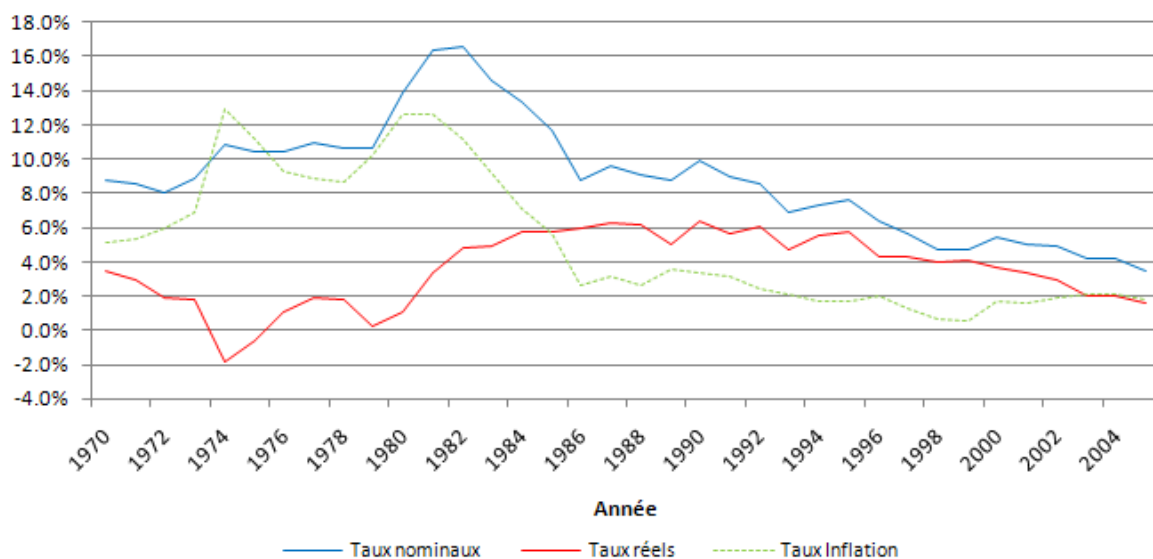


Fig. 8 - Evolution des taux nominal, d'inflation et réel entre 1970 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

Le transfert intégral des risques

La norme IAS 19 prévoit que les contrats d'assurance souscrits par les entreprises au titre de couverture de passifs de retraite à prestations définies viennent minorer l'engagement à retenir dans les comptes consolidés des entreprises. Le transfert des risques d'assurance d'une part, des risques financiers d'autre part, peut, après accord des commissaires aux comptes, permettre de supprimer l'engagement externalisé des comptes de l'entreprise.

Ce transfert peut s'étendre en plus de la population des allocataires, à des préretraités ne rendant plus de services à l'entreprise. On remarque que ce transfert n'est *a priori* pas possible pour les actifs pour lesquels l'entreprise prend *in fine* la responsabilité du paiement des rentes au moment du départ en retraite. L'assureur n'intervient généralement en phase de constitution que comme gestionnaire financier. Il ne porte le risque viager qu'une fois le capital constitutif de la rente prélevé dans le fonds des actifs pour être transféré dans celui des retraités.

Chapitre 2. Présentation de la solvabilité d'un organisme assureur

Dans ce chapitre, les différents aspects qui permettent de définir la solvabilité d'un organisme assureur sont présentés. Puis, les spécifications du QIS4 afin de fixer le cadre d'analyse de la solvabilité d'un organisme assureur sont décrites²⁵.

La solvabilité traduit l'aptitude de l'entreprise à faire face à ses engagements en cas de liquidation, c'est-à-dire d'arrêt de l'exploitation et de mise en vente des actifs. Une entreprise peut donc être considérée comme insolvable dès lors que ses capitaux propres sont négatifs : dans ce cas, elle doit en effet plus qu'elle ne possède.

²⁵ Cf. GEAGEA (2009) pour une présentation complémentaire du sujet.

Section 2.1. Le dispositif Solvabilité II

Une société d'assurance se doit d'être solvable compte tenu des sommes en jeu et de son rôle croissant dans la société et l'économie. L'Etat a donc établi des normes permettant le contrôle de la solidité financière des organismes assureur²⁶.

Ces enjeux ont ensuite été repris à un niveau européen dans le but d'harmoniser les systèmes des différents Etats membres. Dans un premier temps, la Commission Européenne a harmonisé les systèmes de marge de solvabilité par le biais du projet Solvabilité I. Ce système, encore d'actualité, présente certaines faiblesses dont les principales sont l'absence de convergence financière au niveau européen et l'inadaptation de la mesure des différents risques portés par les organismes assureurs dans le calcul de la marge de solvabilité.

Dans un second temps, la Commission Européenne a commencé à élaborer un référentiel unique visant à :

- ✓ renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance ;
- ✓ renforcer la protection des assurés et des bénéficiaires des contrats d'assurance ;
- ✓ favoriser la compétitivité des assureurs européens ;
- ✓ améliorer la légifération dans le cadre du *Better Regulation Agenda*.

Le projet Solvabilité II, en cours d'élaboration, a pour but de mettre à jour le système de solvabilité européen en intégrant tous les risques qui pèsent de manière effective sur les sociétés d'assurance. Son objet est donc le contrôle prudentiel. Ce projet tient compte des évolutions en matière de gestion des risques et des normes comptables IAS et IFRS.

Compte tenu de l'ampleur des travaux, le projet a été scindé en deux :

- ✓ une première phase de réflexion sur la forme générale que doit prendre le système de solvabilité européen ;
- ✓ une seconde phase de détermination des méthodes de prise en compte des différents risques.

Selon les principes définis, le système de solvabilité doit fournir aux autorités de contrôle les moyens d'évaluer correctement la solvabilité globale des organismes assureurs et de couvrir des aspects qualitatifs influençant l'exposition aux risques de la société. Les entreprises d'assurances doivent être incitées à mieux mesurer et gérer leurs risques, ce qui se traduit en pratique par des principes harmonisés de gestion de risques et de veille prudentielle.

Concernant l'exigence de fonds propres, un système à deux niveaux (SCR²⁷, MCR²⁸) doit permettre aux autorités de contrôle de disposer du temps nécessaire pour ajuster le mode de détermination de l'exigence cible.

²⁶ Cf. THEROND (2008b) pour plus de précisions.

²⁷ *Solvency Capital Requirement*.

²⁸ *Minimum Capital Requirement*.

La seconde phase devait permettre initialement de déterminer les règles qui seront effectivement appliquées par les sociétés d'assurance. Des groupes de travail ont fait des propositions sur les différents points techniques du projet. Des tests ont été élaborés pour valider les différents corps de règles d'évaluation des risques mis en place par les organismes assureurs avant de proposer un modèle prudentiel à la Commission.

Suite au vote le 22 avril 2009 et à l'adoption le 5 mai 2009 de la directive européenne Solvabilité II, les assureurs doivent mettre en place son implémentation. L'objectif à venir de la Commission Européenne et conjointement du CEIOPS est de définir les mesures d'exécution de la directive. Pour ce faire, des nouveaux *Consultation Papers* (CP) et *Quantitative Impact Studies* (QIS) vont être menés pour entériner finalement ces mesures d'ici mi-2010.

Section 2.2. Piliers fondamentaux de Solvabilité II

Solvabilité II repose sur trois piliers fondamentaux :

Le premier pilier : les exigences quantitatives en capital

Ce premier pilier se rapporte aux montants des provisions techniques, au capital de solvabilité requis, au capital minimum requis et à la gestion interne du risque. Ce premier pilier est quantitatif et s'attache à établir les outils de mesure de la suffisance des provisions techniques et des seuils de fonds propres pour que les organismes assureurs puissent être solvables.

Le second pilier : les exigences qualitatives

Ce pilier s'attache à décrire les règles et principes en matière de contrôle de l'organisme assureurs par l'autorité de contrôle et en interne.

En interne, la mise en place d'un système de gouvernance doit permettre à la fois une organisation claire et une définition des responsabilités. Le principe de proportionnalité prévoit que les règles et le contrôle doivent s'appliquer proportionnellement à la nature, la complexité et l'échelle des risques inhérents à l'activité de l'entreprise. Il est également prévu, en interne, une évaluation régulière des risques, de la solvabilité et des besoins de financement.

Du côté externe à l'entreprise, des superviseurs seront chargés de contrôler à la fois sur pièce et sur place et de faire respecter la directive Solvabilité II. En cas d'insuffisances quantitatives ou de gouvernance, ils pourront demander la mise en place de capitaux supplémentaires. Les superviseurs devront également contrôler les modèles internes que peuvent mettre en place les organismes assureurs.

Le troisième pilier : les exigences d'informations

Ce dernier pilier concerne l'information publique qui doit venir renforcer la discipline de marché. L'objectif est notamment de progresser vers une coordination et une harmonisation des informations diffusées dans les États membres à différents niveaux (assurés, marchés ou institutionnels, autorités de contrôle).

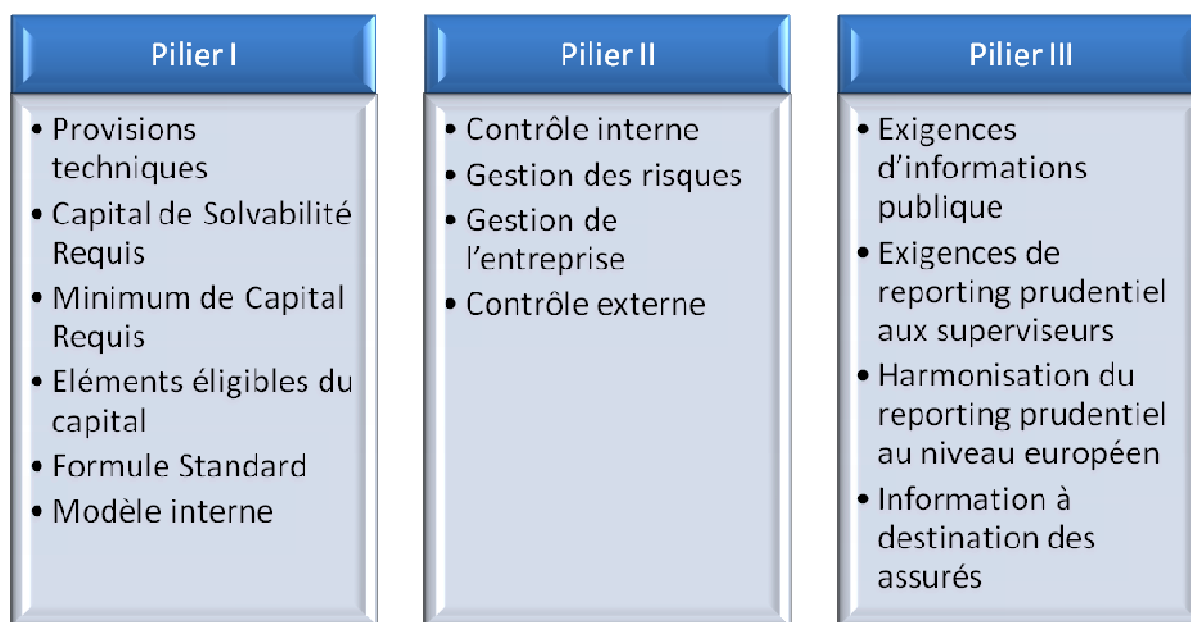


Fig. 9 - Les trois piliers de Solvabilité II

Section 2.3. Exigences du QIS4

Les Etudes Quantitatives d'Impact (QIS), permettent à la fois de familiariser les organismes assureurs à la pratique des calculs des exigences de solvabilité et de les encourager à faire évoluer les systèmes d'information dans un souci d'efficacité. A ce jour, quatre études ont déjà été rendues et il s'en suivra une cinquième et éventuellement une sixième.

Le QIS1 avait pour but de comparer les niveaux de prudence des provisions techniques et de recueillir des informations quant aux méthodes de calculs de ces provisions.

Le QIS2 visait à tester la faisabilité des principes de valorisation, évaluer les nouvelles règles de calculs de la solvabilité et à obtenir des informations quant à la pertinence des différentes approches envisagées pour la détermination du SCR.

Le QIS3 permettait de tester le futur système et de calibrer la formule standard pour le calcul du SCR.

Le QIS4 permet de donner une approche simplifiée et mieux structurée de la formule standard par rapport à QIS3. Il apporte également des éclaircissements concernant le *best estimate* et la *risk margin* pour le calcul des provisions techniques et le SCR et MCR pour la quantification des formules standards. Cette étude intègre également des simplifications et des approximations destinées aux assureurs de taille réduite.

Le QIS5 sera lancé en avril 2010 et apportera des conclusions pour juillet 2010. Cette étude fournira des informations en vue de l'adoption de spécifications définitives prévues pour la deuxième moitié de 2010.

2.3.1. Actifs dans le QIS4

Plusieurs approches sont proposées dans QIS4 pour évaluer les actifs d'un organisme assureur²⁹ :

Mark to market

Cette approche consiste à évaluer les actifs, s'ils sont suffisamment liquides et échangés, à leur valeur de marché. Les positions longues sont évaluées au prix offert à la date d'évaluation tandis que les positions courtes sont évaluées au prix de vente.

Mark to model

Cette approche consiste à évaluer les actifs, lorsque l'évaluation en valeur de marché est impossible, par rapport à un modèle. Cette évaluation doit cependant faire appel, en entrée, au plus grand nombre possible de paramètres conformes aux marchés ;

Evaluation selon les normes IFRS

Cette approche est utilisée si, sous certaines hypothèses, l'évaluation selon les normes IFRS est considérée comme un indicateur acceptable. A titre d'exemple, une évaluation du poste *Actifs financiers disponible à la vente* selon la norme IAS 39 constitue un indicateur acceptable de la valeur économique ;

Evaluation selon la norme locale

Cette approche est utilisée dans le cas où l'actif n'a pas d'incidence sensible sur la situation financière et le résultat de l'entité et lorsqu'aucune autre évaluation n'est possible.

2.3.2. Provisions techniques dans le QIS4

L'évaluation des engagements d'assurance occupe une place importante dans le QIS4. Par ailleurs, les principes d'évaluation sont complétés par des simplifications et des approximations.

Les principes généraux d'évaluation de ces passifs sont décrits dans le QIS4³⁰. En particulier, les provisions techniques sont évaluées à un montant auquel elles pourraient être transférées, sur la base d'un calcul en *Current Exit Value*³¹.

On distingue les passifs « couvrables » des passifs « non couvrables ».

2.3.2.1. Passifs « couvrables »

Un passif est dit « couvrable » lorsque les flux financiers futurs d'assurance et de réassurance peuvent être couverts à l'aide d'instruments financiers disponibles sur un marché profond, liquide et transparent³².

²⁹ Cf. partie TS.I.A.2 du QIS4.

³⁰ Cf. partie TS.II.A du QIS4.

³¹ Cf. parties TS.II.A.1 et 2 du QIS4.

On définit un tel marché par les conditions suivantes³³ :

- ✓ des transactions de grand volume peuvent être exécutées rapidement sans impact sur les cours ;
- ✓ des informations sur les transactions et les cours sont aisément accessibles ;
- ✓ les deux conditions ci-dessus sont vérifiées à tout instant.

Si ces conditions sont respectées, le passif « couvrable » est évalué à la valeur actuelle de marché du portefeuille répliquant. A titre d'exemple, les options et garanties d'un contrat d'assurance, si elles sont entièrement séparables et qu'elles peuvent être couvertes sur marché profond, liquide et transparent, sont considérées comme des éléments de passif « couvrable ».

2.3.2.2. Passifs « non couvrable »

Lorsque les flux de trésorerie futurs associés à un passif ne peuvent être répliqués dans les conditions décrites *supra*, le passif est dit « non répliquable » et est évalué par la somme du *best estimate* et de la *risk margin*³⁴

Le best estimate

Le best estimate est égal à la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente (TS.IIA.10 du QIS4).

Le calcul du best estimate doit reposer sur des informations actuelles et crédibles et sur des hypothèses réalistes. Il doit faire appel à des méthodes actuarielles et techniques statistiques adéquates (TS.II.A.11 du QIS4).

Par ailleurs, la projection de flux de trésorerie intervenant dans le calcul du best estimate doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de fonds nécessaires pour honorer les engagements d'assurance sur leur durée de vie (TS.II.A.12 du QIS 4).

Le best estimate doit être calculé brut, sans déduire les créances découlant des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation (TS.II.A.13 du QIS 4).

En pratique, le calcul du *best estimate* doit être appliqué selon des méthodes actuarielles³⁵ pertinentes et fiables. Ces méthodes doivent tenir compte d'un horizon de projection suffisamment long pour pouvoir saisir tous les flux de trésorerie résultant du contrat. L'actualisation³⁶ de ces flux se fait sur la base du taux sans risque observé sur les marchés pour des instruments financiers de même durée, en utilisant la structure par terme des taux d'intérêts établie à partir de la courbe des taux sans risque *swap*, voir à partir des obligations souveraines s'il n'y a pas de marché *swap*.

³² Cf. partie TS.II.A.22 du QIS4.

³³ Cf. partie TS.II.A.27 du QIS4.

³⁴ Cf. partie TS.II.A.6 du QIS4.

³⁵ Cf. partie TS.II.B du QIS4.

³⁶ Cf. partie TS.II.B.10 à 14 du QIS4.

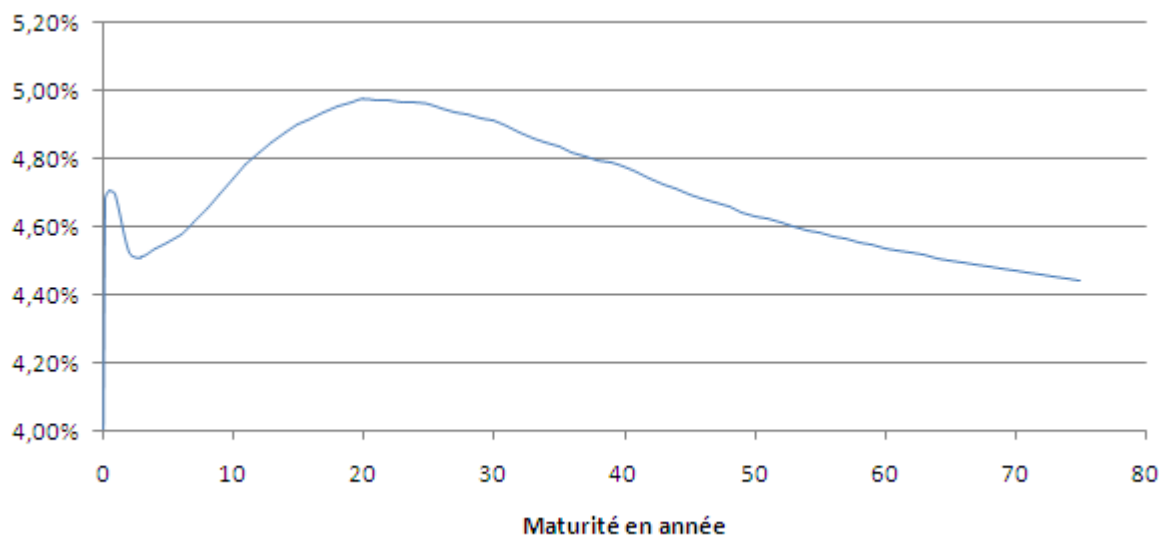


Fig. 10 - Courbe des taux sans risque zone euro du QIS4 (source : CEIOPS)

Le calcul du *best estimate* doit tenir compte de l'ensemble des frais³⁷ relatifs déboursés pour honorer les engagements du contrat, y compris les charges administratives futures et les frais relatifs aux futurs dépôts et prime de renouvellement.

Par ailleurs, le *best estimate* doit être déterminé brut des flux issus des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation. La valeur de ces créances doit tenir compte du risque de contrepartie de l'organisme débiteur³⁸.

La prise en compte du risque de défaut de contrepartie doit reposer sur sa probabilité de défaut, sur la perte moyenne résultant de ce défaut et sur la durée des passifs réassurés. Ces éléments reposent sur des informations fiables et crédibles au jour de l'évaluation comme notamment des *spreads* de crédit, des notes de crédit ou encore des informations découlant des autorités de contrôle³⁹.

En cas de manque d'informations quant à la perte moyenne résultant du défaut, on retient 50 % de la valeur du montant recouvrable. De même, en cas de manque d'informations sur la probabilité de défaut, on retient la probabilité de défaut de contrepartie du sous module de risque de contrepartie de la formule standard du SCR pour un horizon d'un an⁴⁰.

Enfin, les flux de trésorerie pris en compte dans le *best estimate* ne concernent que les flux associés au contrat d'assurance en cours. Ainsi, les cotisations futures doivent être prises en compte à condition que les paiements soient légalement exigibles. Par conséquent, les futurs renouvellements attendus ne doivent pas être inclus sauf s'ils sont liés à l'exercice d'un droit d'obtention d'un autre contrat⁴¹.

³⁷ Cf. partie TS.II.B.15 du QIS4.

³⁸ Cf. partie TS.II.B.21 du QIS4.

³⁹ Cf. parties TS.II.B.23 et 24 du QIS4.

⁴⁰ Cf. parties TS.II.B.27 et 28 du QIS4.

⁴¹ Cf. parties TS.II.B.32, 33 et 34 du QIS4.

La risk margin

La *risk margin* vient compléter le *best estimate* lors de l'évaluation de la provision technique. Elle est évaluée selon la méthode du *Cost of Capital* qui consiste à calculer le coût de la mobilisation des fonds propres éligibles au SCR relatif aux engagements d'assurance et de réassurance. Le coût de la mobilisation est estimé en projetant ces engagements sur toute leur durée de vie et en calculant pour chaque année le SCR correspondant. On note que le calcul du SCR doit être effectué au moyen de la formule standard même si un modèle interne partiel ou total a été mis en place⁴².

Contrairement au QIS3, le QIS4 énumère les risques à prendre en compte pour le calcul de la *risk margin*. Il se limite aux risques de souscription, aux risques opérationnels et aux risques de contrepartie relatifs aux cessions de réassurance⁴³. Le taux du *Cost of Capital* est égal à 6 % pour tous les assureurs⁴⁴.

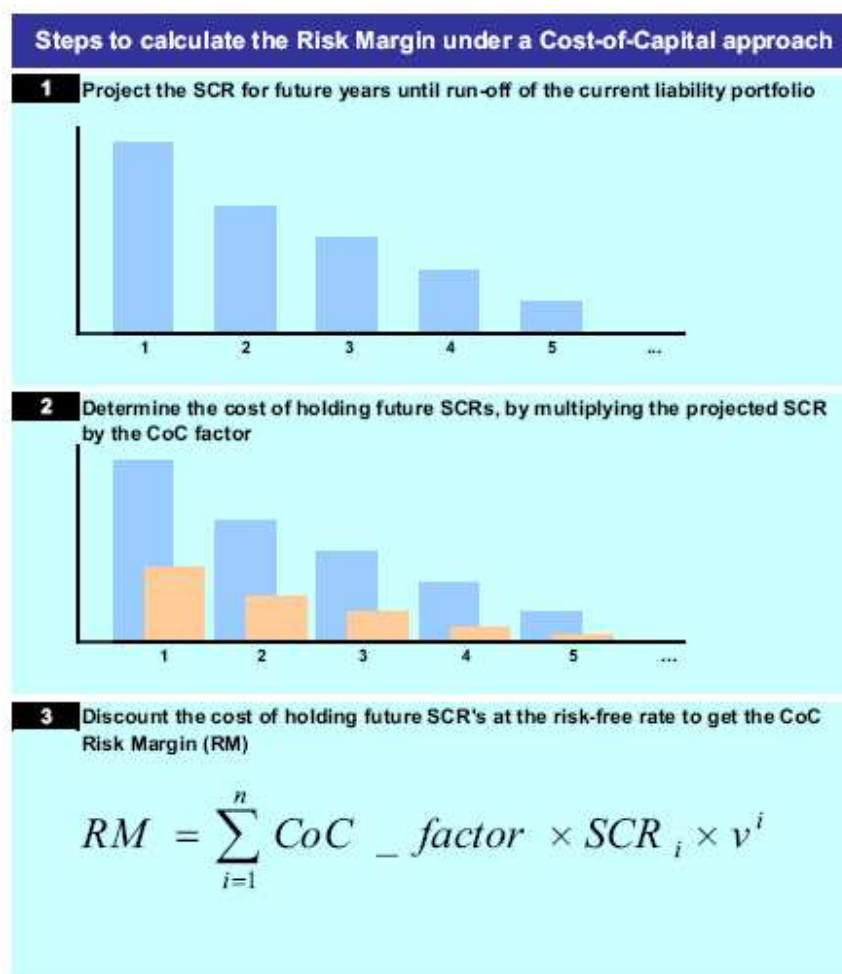


Fig. 11 - Les trois étapes de calcul de la risk margin

⁴² Cf. parties TS.II.C.1, 2 et 4 du QIS4.

⁴³ Cf. parties TS.II.C.7 du QIS4.

⁴⁴ Cf. parties TS.II.C.14 du QIS4.

2.3.2.3. Modalités de calculs des provisions en vie

Le cheminement pour arriver à l'évaluation des provisions passe par plusieurs étapes à travers desquelles l'organisme assureur segmente ses contrats, identifie les facteurs de risque, analyse les caractéristiques des contrats et fixe les hypothèses de calculs.

La segmentation du portefeuille

Dans un premier temps, l'assureur segmente son portefeuille en groupe de risques homogènes. Deux niveaux de segmentations sont ainsi mis en place comme indiqué sur le schéma suivant⁴⁵ :

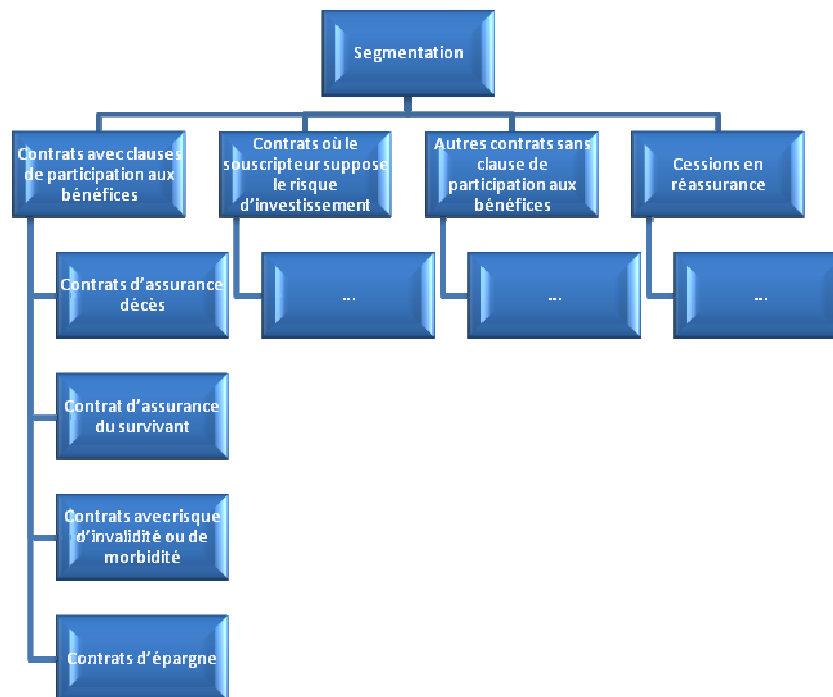


Fig. 12 - Segmentation d'un portefeuille d'assurance vie

Les facteurs de risque

L'évaluation des provisions techniques en vie doit tenir compte de la survenance de risques. *A minima*, le QIS4⁴⁶ impose de considérer les facteurs suivants :

- ✓ le taux de mortalité ;
- ✓ le taux de morbidité ;
- ✓ le taux d'invalidité ;
- ✓ le taux de rachat ;

⁴⁵ Cf. partie TS.II.D.3 du QIS4.

⁴⁶ Cf. partie TS.II.D.6 du QIS4.

- ✓ le taux de souscription d'options ;
- ✓ les hypothèses de frais.

Le comportement des souscripteurs

La présence d'options dans le contrat peut avoir un effet significatif sur la nature économique des risques. Aussi, il est nécessaire de considérer le comportement des souscripteurs vis-à-vis de ces options. Par conséquent, la projection des *cash flows* futurs doit tenir compte de la proportion de souscripteurs susceptibles d'exercer leurs options. La modélisation du comportement du souscripteur doit intégrer à la fois des conditions financières liées à l'option et de conditions non financières comme la santé de l'assuré⁴⁷.

Options et garanties

Les options et garanties des contrats doivent être évaluées sur une base conforme au marché. Cette évaluation doit comprendre la valeur intrinsèque et la valeur temps de l'option⁴⁸. Les méthodes utilisées pour l'évaluation d'options sont les suivantes :

- ✓ les coûts de marché du portefeuille de couverture ou de réplcation si l'option est « couvrable » ;
- ✓ une approche stochastique sur la base d'un modèle d'actifs conforme au marché ;
- ✓ une série de projections déterministes avec des probabilités associées ;
- ✓ une évaluation déterministe basée sur les flux de trésorerie dans le cas où celle-ci conduit à une valorisation type *market consistent* comprenant le coût des options et des garanties.

2.3.3. Formule standard du SCR dans le QIS4

Cette partie vise à décrire brièvement la formule standard du SCR⁴⁹. La description de chaque module de base, correspondant à un risque spécifique, sera effectuée par la suite.

Le SCR ou Capital de Solvabilité Requis correspond au niveau de fonds propres que doit détenir l'assureur afin d'absorber des pertes imprévues qui pourraient menacer sa solvabilité. En principe, le capital requis doit permettre de limiter la probabilité de ruine de l'entreprise à 0,5 % sur un horizon d'un an, soit une ruine tous les 200 ans.

L'approche développée pour calculer le SCR est modulaire afin de répondre au besoin spécifique en capital de chaque type de risque. Le calcul de chaque module est le plus souvent effectué par le biais d'un *stress scenario* qui mesure l'impact d'un choc sur les paramètres susceptible de jouer sur le risque.

⁴⁷ Cf. partie TS.II.D.11 du QIS4.

⁴⁸ Cf. parties TS.II.D.40 et 42 du QIS4.

⁴⁹ Cf. partie TS.VI.A du QIS4.

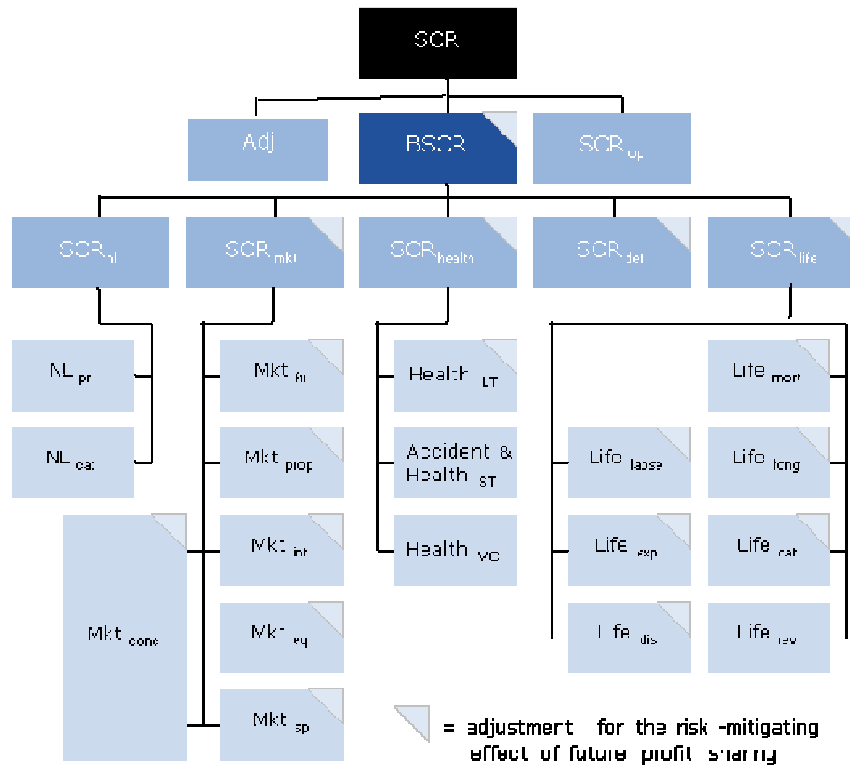


Fig. 13 - Les modules de la formule standard du SCR

Dans ces circonstances, l'analyse des risques se décline en quatre catégories principales que l'on retrouve au sein des différents modules :

- ✓ le risque de marché, provenant de l'incertitude associée à la valeur et aux rendements des actifs financiers ;
- ✓ le risque de souscription, provenant de l'incertitude liée à la mesure des engagements pris par l'assureur en vie, en santé et en non vie ;
- ✓ le risque de contrepartie, lié à au défaut potentiel des contreparties ;
- ✓ le risque opérationnel comprenant l'ensemble des risques associés aux procédures de gestion interne et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

Chacune de ces grandes catégories de risques se retrouve éclatée dans les différents sous modules qu'il faut ensuite agréger, de manière à tenir compte de la dépendance entre les risques.

Par ailleurs, le QIS4 préconise l'utilisation de techniques de réduction du risque afin de diminuer le chargement en capital au titre des risques concernés. Cette réduction comprend des instruments de transfert de risques à l'actif (couverture financière, titrisation, ...) et au passif (instruments de couverture, réassurance, ...). Ces techniques permettent d'une part de réduire le besoin en capital au titre des risques transférés mais viennent accroître les risques

de contrepartie⁵⁰. Au surplus, ce nouveau risque doit être comptabilisé dans la formule du SCR.

La formule de calcul du SCR global est la suivante⁵¹ :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

où :

- ✓ *BSCR* : le capital de solvabilité de base ;
- ✓ *SCR_{op}* : le chargement en capital au titre du risque opérationnel ;
- ✓ *Adj* : l'ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéficiaires et de l'impôt différé.

⁵⁰ Cf. partie TS.VII.A du QIS4.

⁵¹ Cf. partie TS.VIII.A du QIS4.

PARTIE II. PRESENTATION DU CONTEXTE DE L'ETUDE

La présente partie vise à mettre en place l'analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire. Dans un premier temps, les points clés permettant de mettre en œuvre cette étude sont présentés, puis dans un second temps, les spécificités du régime sont décrites.

Chapitre 1. Mesure de la solvabilité

La solvabilité d'un organisme assureur se mesure à sa capacité à honorer ses engagements dans un contexte incertain. Dans le cadre actuel et avec l'avènement du référentiel Solvabilité II, ce concept fait peau neuve *via* la mise en place de critères quantitatifs précis et d'une véritable politique de gestion des risques. Pour répondre à ces nouveaux objectifs, il devient indispensable de fournir une cartographie complète des facteurs de risques affectant chaque entité et de révéler les interconnexions liant chacun d'eux. Cette notion n'est d'ailleurs pas limitée au simple périmètre de l'entité mais s'étend au niveau des groupes eux-mêmes. Dans le contexte actuel, le traitement de cette problématique relève de deux approches, non exclusives, l'approche dite « formule standard » et l'approche « modèle interne ».

Section 1.1. Quelques éléments techniques

Cette section vise à rappeler de manière lapidaire quelques éléments techniques utiles dans le contexte de l'étude.

1.1.1. Probabilité risque-neutre et probabilité historique

Les approches d'évaluation développées dans les milieux financiers ont conduit à la mise en place de certaines techniques sophistiquées utilisées désormais par les assureurs. Cette assertion est aujourd'hui d'autant plus vraie avec la montée en puissance du dispositif Solvabilité II et l'avènement des normes comptables IFRS et des techniques EEV et MCEV. Dans ce contexte, l'évaluation en valeur de marché prend tout son sens et il faut dorénavant savoir composer avec ses techniques.

L'évaluation du prix des actifs financiers (produits dérivés notamment) dans le monde réel est une tâche relativement complexe dans la mesure où elle nécessite l'utilisation du taux de rendement de l'actif, variant selon le risque qui lui est associé. Ainsi, une prime de risque venant s'ajouter au taux sans risque doit être évaluée dès lors que la connaissance de la distribution dans le monde réel est requise. Pour remédier à ces difficultés, les financiers ont mis en place un paradigme afin de passer de l'univers réel à un univers dit risque-neutre dans lequel les actifs ont pour rendement moyen le taux sans risque. La mesure de probabilité associée est alors appelée probabilité risque-neutre.

L'existence et l'unicité d'une telle mesure équivalente à la probabilité réelle sont assurées par la coexistence de conditions de marché particulières⁵² :

- ✓ l'absence d'opportunité d'arbitrage garantissant l'existence ;
- ✓ l'existence d'un marché complet garantissant l'unicité.

Dans cet univers, un processus de prix actualisé est une martingale ce qui fournit ainsi une méthode d'évaluation des processus de prix continus. L'avantage d'une telle approche est de faire preuve d'une grande parcimonie dans les calculs. En effet, le seul paramètre à estimer pour la mettre en œuvre est la volatilité de l'actif risqué à partir soit de la volatilité historique, soit de la volatilité implicite calculée grâce à l'observation du prix de dérivés sur le marché, soit un mélange des deux.

Dans les problématiques d'assurance, la quantification des risques financiers passe par l'évaluation des probabilités associées aux différents états du monde dans l'univers réel. Cependant, lors d'étapes intermédiaires de valorisation, l'utilisation de la probabilité risque-neutre peut s'avérer un outil efficace. Par exemple, la valorisation du bilan dans le futur est une tâche qui requiert de distinguer ces deux notions avec discernement. Ainsi, la prise en compte des différents états du monde à la date de projection doit être effectuée dans l'univers réel, doté de la mesure de probabilité historique. Néanmoins, pour chaque état, l'estimation des postes de bilan est effectuée de manière *market consistent* et requiert l'utilisation de la probabilité risque-neutre.

Dans la suite de cette étude, P et Q désignent les mesures de probabilité respectivement associées aux univers réel et risque-neutre, et Φ la filtration associée à l'information disponible (univers réel).

1.1.2. Techniques de simulation

La mise en œuvre de méthodes de simulation nécessite de présenter certains éléments relatifs aux techniques numériques qui seront utilisées.

1.1.2.1. Générateur de nombres aléatoires

Le générateur de nombres aléatoires utilisé est le générateur standard du logiciel R qui fournit des résultats satisfaisants compte tenu de notre étude.

1.1.2.2. La méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une méthode numérique permettant le calcul approché d'intégrale en l'exprimant sous forme d'une espérance. Cette méthode s'appuie sur la loi forte des grands nombres qui permet d'approcher la valeur empirique de l'espérance d'une variable aléatoire. Elle consiste à générer des réalisations indépendantes de la variable aléatoire dont on cherche à déterminer l'espérance et à en faire la moyenne. Le nombre de simulations N effectuées dépend de la précision recherchée.

⁵² Cf. PLANCHET, THEROND, JACQUEMIN (2005).

Cette méthode est utile pour évaluer la provision *best estimate*, correspondant à l'espérance des flux futurs actualisés. Elle peut être accompagnée de techniques de réduction de variance permettant d'améliorer la vitesse de convergence de la méthode initiale qui est en \sqrt{N} .

Section 1.2. Cadre d'analyse

1.2.1. Les facteurs de risques

L'identification et la segmentation des facteurs de risques inhérents à chaque activité est une étape indispensable à la bonne maîtrise de ces derniers et par ricochet à la solvabilité de l'entité. La présente partie permet de reprendre les facteurs de risques susceptibles de nuire à la bonne marche de l'entité, l'objet de cette présentation n'étant pas de décrire de manière exhaustive tous les formes de risques adverses à l'entité mais seulement celles dont la survenance est réaliste et les effets quantifiables.

Vis-à-vis du risque de marché, l'organisme assureur est confronté à des aléas susceptibles de modifier la valeur de ses actifs et donc de mettre en péril sa solvabilité si cette valeur devient inférieure à celle de ces passifs. Le risque de taux, impactant la valeur des obligations et de l'engagement au passif, le risque action et le risque immobilier sont les trois principales sources d'incertitudes à considérer. Elles sont complétées par les risques de *spread*, relatif aux obligations en portefeuille et le risque de concentration, résultant d'un manque de diversification du portefeuille. D'autres aléas non décrits dans la méthode standard du QIS4 sont susceptibles d'impacter négativement la situation de l'assureur. C'est le cas du risque de liquidité, intimement lié à la gestion des couvertures financières, résultant d'une situation défavorable où les liquidités à un instant t ne permettraient pas de faire face aux dépenses immédiates.

L'entité est exposée au risque de contrepartie, le plus souvent au travers d'un traité de réassurance, au cas où le cessionnaire ne pourrait honorer son engagement.

Le risque opérationnel constitue un aléa auquel est exposée toute entité et dont le périmètre est particulièrement large. Il est associé aux pertes résultant tant de facteurs internes tels que des procédures internes inadaptées ou des erreurs du personnel, qu'externes.

Le risque de souscription est caractéristique de l'activité d'assurance étudiée. En l'occurrence, les risques de souscription santé et non vie ne sont pas décrits dans ce paragraphe. Ces facteurs de risques sont plus spécifiquement liés au passif de la société, bien que des interactions avec l'actif soient susceptibles d'apparaître.

D'ores et déjà, on peut noter que l'étude des risques associés au module de souscription et de marché devront être les plus fines, ces éléments représentant le poids le plus important en terme de dangerosité pour la solvabilité du régime.

1.2.2. Caractérisation des risques

La modélisation et la prise en compte des risques dans une optique de mesure de la solvabilité requièrent de distinguer les sources d'incertitude selon leur caractère mutualisable ou systématique.

D'autre part, le contexte particulier de l'assurance conduit à distinguer les sources d'aléas selon qu'elles soient associées à la probabilité de verser un flux ou bien associées au niveau de flux, lui-même.

Ainsi, la cartographie des risques peut se faire selon la grille d'analyse suivante :

	<i>Risque mutualisable</i>	<i>Risque systématique</i>
<i>Probabilité de verser le flux</i>		
<i>Niveau de flux</i>		

1.2.2.1. Risques mutualisables

La gestion des risques mutualisables constitue le cœur de métier de l'activité d'assurance. Elle est fondée sur le principe de la loi des grands nombre qui garantit, pour des classes de contrats homogènes et en supposant l'indépendance entre les polices, la convergence avec le nombre de contrats de la moyenne empirique de l'engagement vers son espérance mathématique. Au surplus, le théorème central limite⁵³ fournit un intervalle de confiance asymptotique de l'incertitude.

Classiquement, l'incertitude sur le versement d'un flux en assurance vie est associée à des aléas biométriques. Dans le cas de la durée de vie, la part mutualisable du risque est liée aux fluctuations d'échantillonnage autour de l'espérance mathématique du phénomène, conséquence directe de la taille finie du portefeuille. Concrètement, le nombre de décès moyen oscille autour de la moyenne théorique, l'écart diminuant avec la taille du portefeuille en application de la loi des grands nombres.

Le niveau des flux versés est soumis à une incertitude dont une part est non systématique. C'est le cas par exemple, d'erreurs commises dans les systèmes de gestion, susceptibles de venir modifier le niveau des prestations versées aux bénéficiaires.

1.2.2.2. Risques systématiques

Les risques systématiques représentent une source d'aléa dont la gestion est bien plus délicate que celle des risques mutualisables. A l'inverse de ces derniers, toute source d'aléa systématique affecte la situation de l'assureur dans le même sens et ce quelque soit la taille de

⁵³ En pratique, les conditions initiales de ce théorème ne sont pas toujours remplies. En revanche, si les variables aléatoires ne sont pas toujours identiquement distribuées, le respect de la condition de Lindeberg permet d'étendre le périmètre d'application du théorème central limite.

la population assurée. De manière générale, c'est source d'incertitude apparaît dès lors que les facteurs de risques ne sont plus indépendants. Usuellement, la gestion de ces derniers est alors confiée à un organisme réassureur qui dispose de moyens pour diversifier son portefeuille de risques par secteur géographique, d'activité, etc.

A l'actif, les facteurs de risques considérés sont tous systématiques. Au passif, la distinction entre les risques impactant la probabilité de verser le flux et ceux impactant son niveau peut être opérée.

D'une part, le risque de longévité comprend une composante systématique qui s'explique notamment par une possible erreur d'estimation sur la loi d'expérience ou par une déformation de cette dernière au fil du temps. Une présentation plus approfondie de cet aléa est fournie dans la Partie IV.

D'autre part, le niveau des prestations versées peut être affecté par des revalorisations suivant l'inflation. Notons que l'inflation modifie également l'évolution des frais fixes. Par ailleurs, on peut noter l'impact du risque de taux qui vient modifier de manière systématique le niveau des provisions constituées.

1.2.3. Identification des dépendances

La prise en compte de la structure de dépendance entre les différents facteurs de risques identifiés constitue un élément important de l'analyse des risques. En effet, la négligence des dépendances reviendrait à considérer des distributions de risques indépendantes les unes de autres ; la mesure de solvabilité ne tiendrait alors pas compte de la survenance des situations de concordance ou de discordance entre les risques. L'estimation du niveau global de risques affectant l'entité serait alors incomplète. La structure de dépendance peut être découpée en plusieurs niveaux.

Le premier niveau correspond à la mise en place d'une structure de dépendance entre les facteurs de risques. Il s'agit par exemple de liens entre les différentes classes d'actifs (actions, taux, immobiliers, inflation, etc.) ou encore de corrélations entre les décès observés (dépendance de la durée de vie des conjoints).

Le second niveau consiste à prendre en compte des liens étroits entre des éléments conjoncturels et des éléments contractuels. Il peut s'agir par exemple du lien entre les revalorisations des prestations et les dépenses évoluant selon l'inflation, du caractère dynamique des rachats sur un contrat qui évolue selon les performances offertes ou encore la dépendance entre le rendement des placements et les règles de gestion financière.

Le dernier niveau permet de modéliser les dépendances non prises en compte par ailleurs. Il s'agit de modéliser des niveaux de dépendance entre des facteurs globaux ou agrégés.

En pratique, il convient de rappeler que l'étude des structures de dépendance se révèle un être un exercice délicat, notamment lors de la mise en place d'une approche type « copules » en grande dimension.

1.2.4. Quantification du besoin en capital

La solvabilité d'un organisme assureur est déterminée par sa résistance à la survenance de situations défavorables dans le futur ce qui revient finalement à mesurer le niveau de capital à détenir pour faire face à ces situations. De ce point de vue, la mesure du risque est un élément déterminant dans l'optique de quantification du besoin en capital. Le but de cette partie est de donner une définition d'une mesure de risque ainsi que quelques propriétés remarquables. Deux mesures de risque usuelles sont également présentées⁵⁴.

1.2.4.1. Définitions et propriétés

Définition 1 : Une mesure de risque ρ est une application associant un risque X à un réel $\rho(X) \in \mathfrak{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Propriété 1 : Une mesure de risque ρ est invariante par translation si $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ pour tout risque X et pour toute constante c .

Propriété 2 : Une mesure de risque ρ est sous-additive si $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ pour tout risque X et Y .

Propriété 3 : Une mesure de risque ρ est homogène si $\rho(c \cdot X) = c \cdot \rho(X)$ pour tout risque X et pour toute constante c .

Propriété 4 : Une mesure de risque ρ est monotone si $\Pr[X < Y] = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ pour tout risque X et Y .

Définition 2 : Une mesure de risque est dite cohérente si elle est invariante par translation, sous additive, homogène et monotone.

Définition 3 : Le vecteur aléatoire (X_1, X_2) , de fonctions de répartition marginales respectives F_1 et F_2 est comonotone s'il existe un variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0;1]$ telle $(X_1, X_2) \sim (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U))$.

Définition 4 : Une mesure de risque est dite comonotone additive si $\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$ pour tout vecteur aléatoire comonotone (X_1, X_2) .

1.2.4.2. Exemples de mesures de risques

Dans cette partie, quelques mesures de risques susceptibles d'être utilisées dans le cadre de l'évaluation du SCR sont présentées.

⁵⁴ Cette partie s'inspire de PLANCHET, THEROND, JACQUEMIN (2005).

La Value-at-Risk (VaR)

La VaR est une mesure de risque largement répandue dans les milieux financiers. Outre son utilisation pour quantifier les pertes financières potentielles, elle permet de mesurer le niveau de sinistres engendré par un risque avec une probabilité déterminée. Il s'agit donc de la fonction quantile associé à un risque X .

Définition 5 : La VaR associée à un risque X et de niveau α est définie par :

$$VaR(X, \alpha) = \text{Inf} \{x \mid \Pr[X \leq x] \geq \alpha\}.$$

Proposition 1 : La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous additive.

Proposition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle et soit $0 < \alpha < 1$. Pour toute fonction g croissante et continue à gauche, on a : $VaR(g(X), \alpha) = g(VaR(X, \alpha))$.

Proposition 3 : La VaR est comonotone additive.

La Tail-Value-at-Risk (TVaR) et la Conditional Tail Expectation (CET)

Définition 6 : La TVaR associée à un risque X et de niveau α est définie par :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 F_X(u) du.$$

Définition 7 : La CTE associée à un risque X et de niveau α est définie par :

$$CET(X, \alpha) = E[X \mid X > VaR(X, \alpha)].$$

Proposition 4 : La TVaR est cohérente.

Proposition 5 : La TVaR est comonotone additive.

Proposition 6 : Les notions de TVaR et de CET coïncident lorsque le risque admet une fonction de répartition continue.

La TVaR présente l'avantage par rapport à la VaR d'être cohérente. Cependant, elle est à l'heure actuelle écartée du projet Solvabilité II car elle est parfois « trop sous-additive », ce qui revient à prendre une valeur trop importante du SCR. Ainsi, la mesure retenue pour le reste de l'étude est la VaR.

1.2.5. Définition de la ruine et du capital requis

On distingue deux définitions envisageables de la ruine⁵⁵ :

- ✓ la ruine comptable qui survient lorsque l'actif est insuffisant pour couvrir la valeur du passif ;

⁵⁵ Cf. KAECKENBEECK et MILLER (2009).

- ✓ la ruine opérationnelle qui survient lorsque la valeur de l'actif juste avant le paiement des sinistres est insuffisante pour couvrir les prestations de l'année.

Dans le premier cas, il y a ruine en t lorsque $A_t - L_t < 0$. Dans le second, la ruine survient en t lorsque $A_t - Prestation_t < 0$.

Le bilan simplifié de l'assureur se présente de la manière suivante à la date t :

BILAN en t

	NAV_t
A_t	L_t

où :

- ✓ A_t : la valeur de marché de l'actif en t ;
- ✓ L_t : la valeur de marché du passif en t .

Dans notre étude, la définition de ruine comptable est privilégiée. Selon Solvabilité II, le capital économique correspond au niveau minimal de fonds propres pour que l'inégalité suivante soit respectée :

$$\Pr[(A_t - L_t > 0)] \geq 99,5\%$$

Section 1.3. Les approches de détermination du besoin en capital

Une des forces de la directive Solvabilité II réside dans la possibilité donnée aux participants de développer un modèle interne pour évaluer leur solvabilité. Pour autant, la formule standard constitue la référence en termes d'évaluation de la solvabilité.

La présente section a pour but de présenter brièvement la structure des deux approches, la modélisation des risques qui en résulte et de souligner les principales différences.

1.3.1. Approche « formule standard »

L'approche « formule standard » permet de mesurer le besoin en capital requis par les risques *via* l'application d'une méthode construite en deux étapes. Dans un premier temps, un capital requis est évalué pour chaque facteur de risque. Pour ce faire, deux méthodes sont d'usage :

- ✓ une approche par choc qui consiste à évaluer la variation d'actif net suite à un choc systématique, le niveau de ce dernier étant calibré de manière à générer un besoin en capital équivalent à celui permettant de faire face à 99,5 % des scénarii défavorables :

- ✓ l'application de coefficients pré calibrés.

Cette démarche nécessite de valoriser les différents postes du bilan de l'organisme assureur en cohérence avec le marché. Ces évaluations sont alors menés pour un *scénario* central et éventuellement pour un *scénario* dit choqué. Le calcul est alors réalisé sur une période et ne nécessite pas de projection du bilan.

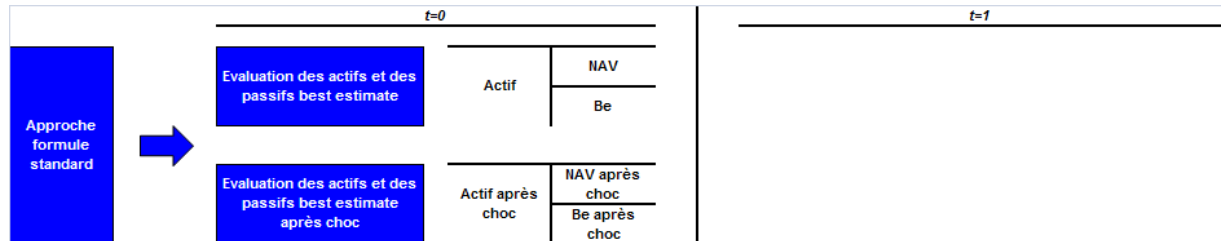


Fig. 14 - Calcul du besoin en capital dans l'approche « formule standard »

Le montant de capital requis SCR pour un risque est alors obtenu en appliquant la formule suivante :

$$SCR = NAV_0 - NAV_0^{après\ choc}$$

Le calcul des provisions *best estimate* est effectué selon une approche déterministe ou bien par simulation Monte Carlo, notamment si l'évaluation d'options (participation aux bénéfices, rachat dynamique, etc.) est nécessaire et qu'aucune formule fermée n'est disponible. Précisons que la mise en place de simulations complexifie néanmoins le modèle et accroît les temps de calcul.

Dans un second temps et conformément à l'approche modulaire décrite dans la Partie I.2.3.3, les capitaux requis marginaux sont agrégés *via* une formule en racine carrée.

1.3.2. Approche « modèle interne »

L'approche modèle interne accorde une plus grande importance à la modélisation des risques, cette dernière étant rendu possible par une connaissance plus fine des aléas affectant l'organisme assureur. De ce point de vue, il s'agit de répondre à l'exigence prudentielle imposée par le référentiel Solvabilité II qui consiste à limiter la probabilité de ruine à 0,5 % dans un an. Ainsi, cette démarche nécessite l'estimation de la valeur *market consistent* du bilan à l'horizon un an selon l'évolution réelle de l'information disponible.

Le schéma suivant résume la problématique à laquelle sont confrontés les assureurs :

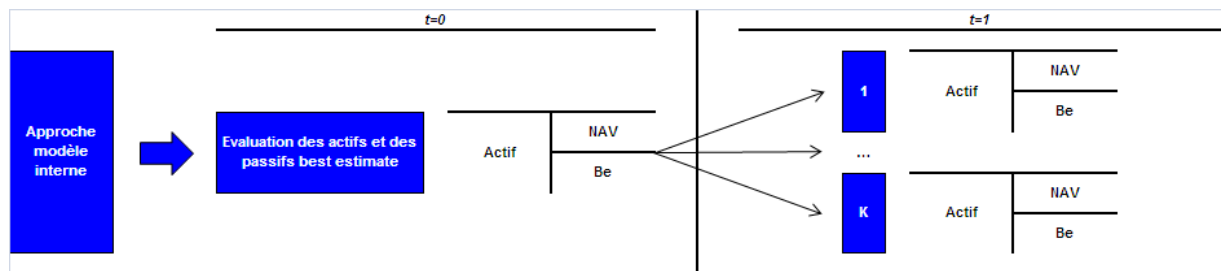


Fig. 15 - Calcul du besoin en capital dans l'approche « modèle interne »

Plusieurs approches sont envisageables pour mettre en œuvre ce modèle :

- ✓ Sur la base d'une logique identique à celle de la formule standard, des niveaux de chocs peuvent être recalibrés afin de traduire avec plus de fidélité la structure des facteurs de risques de l'entité. Le niveau de capital requis pour chaque aléa résulte alors de l'évaluation de la situation nette dans les scénarii centraux et choqués. Dans cette perspective, le montant de capital est estimé *via* la formule :

$$SCR = NAV_0 - NAV_0^{après\ choc}$$

- ✓ Le niveau de capital requis est évalué de manière à limiter la probabilité de ruine économique de l'entité à 0,5 % à horizon d'un an. Il convient alors de définir le montant de capital économique satisfaisant cette condition.

Quelque soit l'approche retenue, il est clair que sa mise en œuvre fait appel à un niveau de complexité plus important que celui de la formule standard. Le calibrage des chocs nécessite la mise en place d'une étude stochastique *ad hoc* en dehors du modèle.

Le calcul de la probabilité de ruine à horizon un an passe par le biais de méthodes stochastiques, qui permettent de fournir des informations sur la distribution du phénomène étudié. La mise en œuvre de ces techniques se base sur des formules analytiques et / ou la génération de simulations. L'approche généralement retenue est basée sur des simulations en particulier pour évaluer l'impact des risques systématiques sur la situation nette à horizon un an. Ainsi, l'ensemble des risques impactant l'entité peuvent être considérés mais ces techniques présentent néanmoins trois inconvénients majeurs : leur coût de mise en œuvre, les temps de calcul et les risques de modèle et d'estimation associés.

D'un point de vue théorique, les techniques dites analytiques sont strictement équivalentes à la génération de simulations. Elles consistent à décrire explicitement la loi sous-jacente des phénomènes étudiés. D'une part moins gourmandes en termes de temps de calcul, ces méthodes permettent d'éviter les erreurs d'estimations induites par celles basées sur la simulation. En contrepartie, elles nécessitent en amont une étude statistique fine des risques modélisés.

L'utilisation des deux approches n'est pas exclusive. Au contraire, bien que le recours aux méthodes basées sur la simulation soit de plus en plus courant, un modèle partiellement basé sur des éléments analytiques est justifiable et légitime afin de réduire les temps de calculs,

même si étant donnée la complexité des phénomènes modélisés leur utilisation est souvent délicate.

La prise en compte de la distribution des risques impactant la situation nette de l'entité à horizon un an n'est pas la seule difficulté technique associée au calcul du besoin en capital. En effet, les différents postes du bilan doivent être valorisés *market consistent*, cette évaluation dépendant bien évidemment de l'état du monde considéré en $t=1$. Si pour des actifs « traditionnels » (actions, obligations,...) cette évaluation ne pose *a priori* pas de difficulté majeure, il n'en est pas de même en ce qui concerne des produits dérivés ou si les engagements de l'assureur comportent des options. Ces évaluations sont le plus souvent réalisées en se plaçant sous la probabilité risque-neutre.

Cependant dès lors qu'aucune formule fermée n'existe pour le *pricing*, le poste est valorisé grâce à des simulations Monte Carlo sous la probabilité risque-neutre. Dans ce cas de figure, l'évaluation du besoin en capital s'avère complexe. En effet, la démarche conduit à effectuer un premier jet de simulations dans le monde réel, puis pour chacune d'entre elles, un deuxième jeu de trajectoires est généré pour valoriser chaque poste du bilan, dans l'univers risque-neutre. On parle alors de simulations dans les simulations. Bien que des techniques d'optimisation complexes permettent d'accélérer le processus⁵⁶, la valorisation dans l'univers réel par le biais des déflateurs peut être considérée comme une alternative intéressante malgré les difficultés associées à l'estimation de ces derniers. D'un point de vue technique, rappelons en effet que les deux approches sont équivalentes car un déflateur n'est rien d'autre que la densité de Radon-Nicodym associée au changement de probabilité de P vers Q .

Chapitre 2. Présentation du régime étudié

Dans le cadre de ce mémoire, la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire d'entreprise à prestations définies est étudiée. Ce régime d'entreprise est transféré auprès d'un organisme assureur et est géré de manière isolée du reste de son activité au sein d'un fonds cantonné.

Cette étude étant effectuée dans le cadre du QIS4, on entend par fonds cantonné « *un dispositif contractuel ou légal par lequel une partie des actifs ou des réserves de bénéficiaires éligibles de l'entreprise est strictement isolée du reste de ses investissements ou ressources et ne peut servir qu'à honorer les engagements d'assurance et de réassurance au regard desquels le fonds cantonné a été constitué* » (TS.V.C.2 du QIS4).

Ainsi la solvabilité de cet organisme assureur est étudiée, sans tenir compte des engagements propres au souscripteur (comptabilisés selon la norme IAS 19). En effet, ces derniers sont enregistrés par l'employeur pendant la phase de constitution de l'épargne, au travers d'un fonds collectif. Lors de chaque départ, le capital constitutif de la pension est prélevé sur ce fonds (voir sur le résultat de l'employeur en cas d'insuffisance) et est transféré vers l'organisme assureur.

⁵⁶ DEVINEAU et LOISEL (2009a) propose notamment un algorithme permettant de réduire significativement les temps de calculs.

Section 2.1. Hypothèses générales du régime de retraite

Dans l'exemple retenu, les droits des assurés sont évalués au 31/12/2007, en fonction de l'ancienneté de ces derniers. Le montant de la pension acquise à cette date est supposé être connu et les droits des actifs **sont figés** (pas d'acquisition de droits futurs).

2.1.1. Population étudiée

Le régime de retraite à prestations définies étudié couvre une population d'assurés, en groupe fermé, constituée :

- ✓ de salariés encore en activité à la date d'évaluation, appelés « actifs » ;
- ✓ de retraités, appelés « allocataires ».

<i>Actif</i>	<i>Effectif</i>	<i>Age moyen</i>
<i>Homme</i>	2044	51,87
<i>Femme</i>	2669	52,48
<i>Total</i>	4713	52,21

<i>Allocataire</i>	<i>Effectif</i>	<i>Age moyen</i>
<i>Homme</i>	1115	71,47
<i>Femme</i>	1632	72,57
<i>Total</i>	2747	72,12

Par ailleurs, la population des allocataires est répartie entre les retraités de droits directs et les réversataires.

<i>Allocataire</i>	<i>Effectif</i>	<i>Age moyen</i>
<i>Droits direct</i>	2378	71,25
<i>Réversataire</i>	369	77,79
<i>Total</i>	2747	72,12

Dans le cadre de cette étude, une information tête par tête est disponible pour le groupe des assurés ce qui permet de travailler directement sur cette population et non sur une population agrégée. Cependant, n'ayant pas d'informations sur l'âge des conjoints, on considère que l'écart d'âge entre conjoints est de 2 ans.

2.1.2. Caractéristiques de la rente

Pendant la phase de constitution de la rente, l'employeur cotise à un fonds de manière à pouvoir honorer son engagement vis-à-vis du salarié. Au départ à la retraite, l'employeur verse à l'assureur le capital constitutif de la rente en fonction des conditions de transformation en rente applicables.

Les conditions suivantes sont retenues pour tarifer la rente :

- ✓ Age de départ : 61 ans ;
- ✓ Taux d'actualisation de la rente : 60 % du TME soit 2,5 % au 31/12/2007 ;
- ✓ Tables de mortalité : TGH/F 05 ;
- ✓ Mode : annuel ;
- ✓ Fractionnement : échu ;
- ✓ Taux de nuptialité : 80 % ;
- ✓ Taux de réversion : 60 % ;
- ✓ Chargements : 3 % sur rentes.

Notons que pour des raisons de simplifications, le turnover et le profil de carrière sont nuls. En pratique, ces éléments sont caractérisés par le biais de tables fonction de l'ancienneté déterminées sur la base de données propres à l'entité. La retraite de réversion est versée à partir du décès de l'assuré allocataire sans condition d'âge pour les réversataires.

Les graphiques suivants présentent les flux de prestations espérées et actualisées (selon la courbe des taux QIS4) versées aux actifs et aux allocataires (sans revalorisation) :

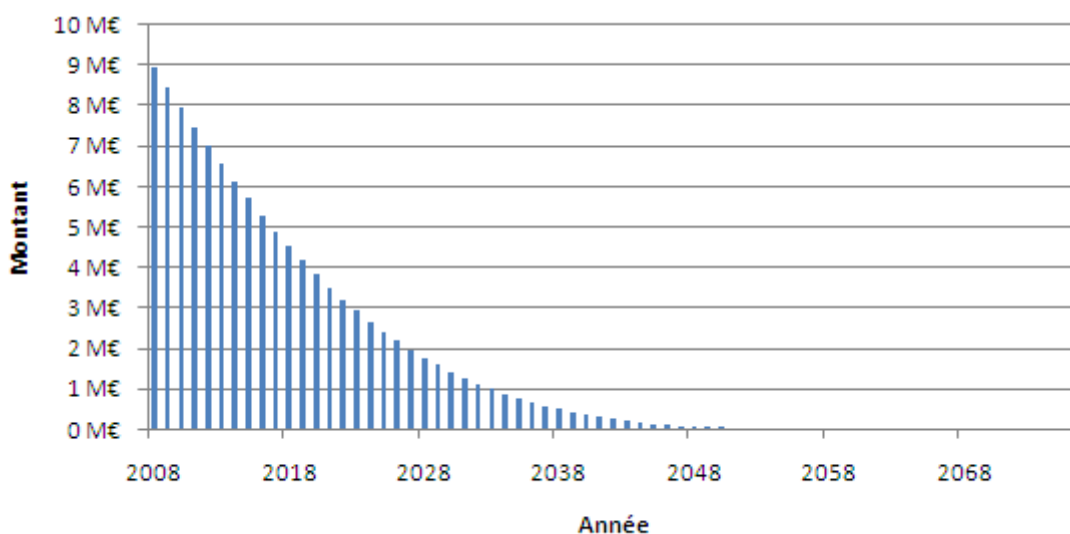


Fig. 16 - Flux de prestations espérées et actualisées des allocataires

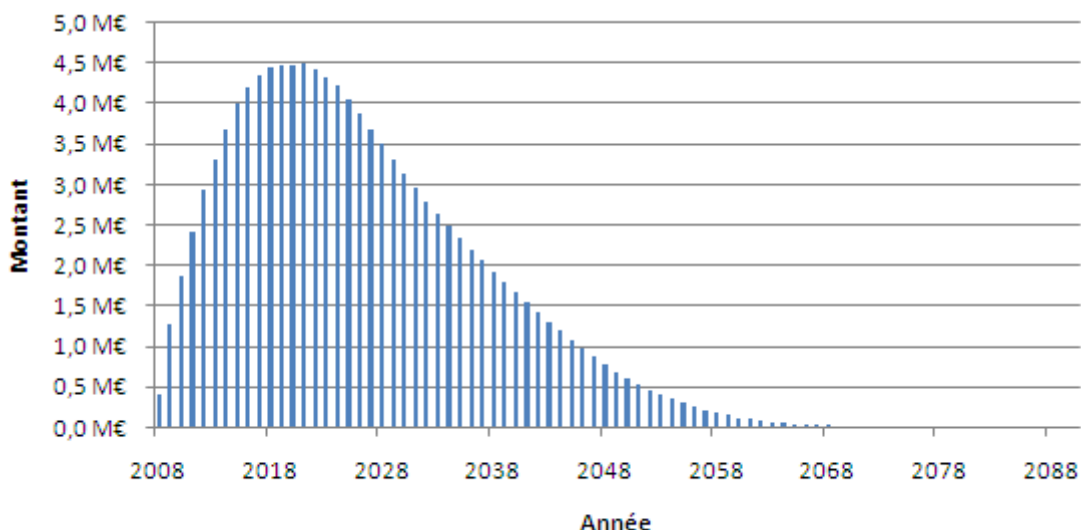


Fig. 17 - Flux de prestations espérées et actualisées des actifs

2.1.3. Frais de gestion

Les frais de gestion du contrat sont pris égaux à 10 % des prestations servies chaque année. Ils intègrent à la fois les frais de gestion des placements et les frais de gestion du contrat.

2.1.4. Garanties

Les deux garanties suivantes sont financées par le biais d'un prélèvement de 5 % sur les capitaux constitutif versés.

2.1.4.1. Revalorisation

Conformément à la réglementation française, l'assureur doit constituer une provision pour participations aux excédents, liquidable dans les 8 ans, correspondant au moins à 90 % du solde technique et 85 % du solde financier.

Dans le cadre de ce mémoire, les revalorisations versées aux allocataires sont par convention issues de décisions discrétionnaires indépendantes des résultats techniques et financiers. De cette manière, la problématique associée à l'évaluation d'options de participation aux bénéfices ne se pose pas.

En outre, le contrat prévoit une revalorisation des prestations servies chaque année au niveau de l'inflation, caractérisée par l'indice des prix à la consommation. Grâce à ce dispositif toute évolution défavorable de l'inflation par rapport aux revalorisations anticipées par le tarif est à la charge de l'assureur.

2.1.4.2. Garantie mortalité

Le régime de retraite supplémentaire est assorti d'une garantie mortalité. Cette garantie permet de transférer vers l'assureur le risque inhérent à l'aléa viager qui pèse habituellement sur l'employeur pendant la phase de constitution. Ainsi, le souscripteur est couvert contre toute dérive de la mortalité du groupe assuré.

L'assureur s'engage alors à tarifier le contrat sur la base d'une table de mortalité définie contractuellement. Ainsi, il supporte le coût d'une dérive de la mortalité ou d'un éventuel changement de table.

Dans cette étude, les tables retenues lors de la tarification de la rente sont les tables réglementaires TGH/F 05. L'engagement au titre des rentes est provisionné sur la base de la table TGH/F 05 pendant 15 ans (jusqu'au 31/12/2022), puis sur la base de cette même table abattue de 3 %. Cette hypothèse, sensée représenter le niveau de mortalité réel de la population, anticipe une éventuelle dérive de la tendance prédite par la table dans le futur.

Section 2.2. Réassurance

Un des risques spécifiques aux contrats de retraite supplémentaire est le risque longévité. Ce risque est relativement difficile à évaluer et peut présenter un caractère systématique comme il est décrit dans la Partie IV. Par conséquent, l'assureur peut être tenté de le céder en partie vers un organisme réassureur, la part cédée dépendant de son appétence envers ce risque.

Les solutions proposées par les réassureurs, tant proportionnelles que non-proportionnelles sont généralement les suivantes :

Traité en quote-part (proportionnelle)

Le traité de quote-part consiste pour le réassureur à payer une proportion des arrérages versés par l'assureur aux retraités en contrepartie d'une prime unique correspondant à la même proportion des capitaux constitutifs perçus.

Swap de longévité (non proportionnelle)

Ce contrat prévoit l'échange des flux aléatoires de l'assureur versés aux assurés contre des primes de réassurance fixes, dont le montant est convenu d'avance. Ce produit peut être structuré sur la base de la mortalité d'expérience ou bien sur un indice de population. Dans ce dernier cas, le réassureur paie sur la base de cet indice. L'essentiel de ces traités sont des contrats de gré à gré.

La réassurance du risque longévité est assez peu pratiquée en Europe occidentale, contrairement à la Grande Bretagne où le marché de la réassurance proportionnelle se développe. La majeure partie des contrats souscrits outre Manche sont des quotes-parts avec transferts des actifs chez le cessionnaire. Sur le continent, les dispositifs de transfert de risque avec transfert d'actifs sont souvent considérés par les autorités de contrôle avec un regard critique, ce qui bien entendu freine leur développement.

Un autre frein tout aussi important au développement de ces solutions est la taille du projet à réassurer. En effet, ce marché étant caractérisé par des marges relativement ténues,

l'intérêt d'une contrepartie ne sera véritablement éveillé que par une affaire dont le volume est suffisamment conséquent.

Au vu de ces éléments, il apparaît que les informations précises sur ce sujet sont rares. Ainsi, le dispositif de réassurance mis en place est relativement simple afin d'étudier l'impact de la réassurance. Cet impact est double :

- ✓ d'une part, il permet de réduire le besoin en capital relatif aux sous modules de risque de la formule standard ;
- ✓ d'autre part, il vient générer un risque de défaut supplémentaire qui ne doit pas être négligé.

Cette étude propose pour chaque sous module de risque de la formule standard d'analyser l'impact de la réassurance afin de quantifier la réduction du besoin en capital. Au terme de l'étude, nous pourrions alors vérifier s'il s'agit d'un processus de réduction des risques intéressant pour le régime.

Le traité mis en place est un quote-part de taux de cession 50 %. L'assureur s'engage à céder 50 % des capitaux constitutifs perçus en contrepartie desquels le réassureur prend à sa charge 50 % des arrérages. Pour les rentes en cours de service, on considère que les primes de réassurance ont déjà été versées.

Le *rating* du réassureur est A (Standard & Poor's)⁵⁷.

Section 2.3. Allocation des actifs

A la date des calculs, les actifs du fonds cantonnés sont répartis de la manière suivante (en valeur comptable) :

- ✓ 90 % d'obligations ;
- ✓ 10 % d'actions.

On supposera dans la suite que ces actifs sont parfaitement liquides. Ainsi, l'étude du risque de liquidité n'est pas considérée.

2.3.1. Obligations

Au sein du portefeuille d'actifs, on distingue trois types d'obligations⁵⁸ :

Obligation 1

- ✓ Coupon : 4 % ;
- ✓ Echéance : 31/12/2015 ;

⁵⁷ Cf. Annexe 1 pour une brève description des notations Standard & Poor's.

⁵⁸ Cf. Annexe 3 Annexe 2 pour le calcul de la sensibilité et de la durée.

- ✓ Duration : 6,99 ;
- ✓ Sensibilité : 6,70 ;
- ✓ *Rating* : AAA (Standard & Poor's) ;
- ✓ Pourcentage : 70 %.

Obligation 2

- ✓ Coupon : 4,5 % ;
- ✓ Echéance : 31/12/2011 ;
- ✓ Duration : 3,75 ;
- ✓ Sensibilité : 3,60 ;
- ✓ *Rating* : AA (Standard & Poor's) ;
- ✓ Pourcentage : 11 %.

Obligation 3

- ✓ Coupon : 5,5 % ;
- ✓ Echéance : 31/12/2012 ;
- ✓ Duration : 4,52 ;
- ✓ Sensibilité : 4,34 ;
- ✓ *Rating* : A (Standard & Poor's) ;
- ✓ Pourcentage : 19 %.

Les obligations de type 1, 2 et 3 sont réparties respectivement entre 10, 2 et 5 contreparties de manière égale.

2.3.2. Actions

De manière à modéliser simplement l'ensemble de la classe action, le portefeuille est assimilé à une seule action agrégée dont le cours correspond aux prix pondérés de chaque action

L'action synthétique, libellée en euros, n'est pas notée et est répartie entre 7 contreparties de manière égale.

2.3.3. Valeurs des actifs

Les valeurs des actifs au 31/12/2007 sont représentées dans le tableau ci-dessous :

	<i>Valeur comptable</i>		<i>Valeur de marché</i>		<i>+/- Values latentes</i>	
	<i>En M€</i>	<i>En %</i>	<i>En M€</i>	<i>En %</i>	<i>En M€</i>	<i>En %</i>
<i>Obligations 1</i>	161,09	62,90 %	159,70	62,70 %	-1,38	-0,87 %
<i>Obligations 2</i>	25,35	9,90 %	24,96	9,80 %	-0,39	-1,57 %
<i>Obligations 3</i>	43,79	17,10 %	43,30	17,00 %	-0,49	-1,14 %
<i>Actions</i>	25,87	10,10 %	26,74	10,50 %	0,88	3,29 %
<i>Total</i>	256,10	100 %	254,71	100 %	-1,39	-0,54 %

PARTIE III. EVALUATION DE LA SOLVABILITE DANS LE CADRE DE L'APPROCHE « FORMULE STANDARD »

L'étude de la solvabilité d'un organisme assureur correspond à un des objets majeurs de la directive Solvabilité II. En l'occurrence, l'approche « formule standard » décrite dans le QIS4 fournit un déroulé complet et précis de la démarche à adopter. Par conséquent, la présente partie a pour but de présenter avec précision les différentes étapes de cette analyse. En particulier, l'impact du dispositif de réassurance est décrit et la comparaison est effectuée avec le système encore en vigueur : Solvabilité I.

Chapitre 1. Evaluation des provisions *best estimate*

Dans ce chapitre, la méthode d'évaluation des provisions techniques est explicitée pour le régime étudié. Elles doivent être évaluées selon la méthode *best estimate* et doit exclure la *risk margin*.

La détermination de la provision *best estimate* est basée sur la projection des flux futurs de trésorerie ce qui implique la prise en compte de l'interaction entre les actifs et les passifs. En ce sens, l'engagement de l'organisme assureur doit intégrer l'évolution de l'inflation et des taux d'actualisation. On reprend alors la courbe des taux zéro-coupon publiée par le QIS4 et la courbe des coefficients d'inflation suivante. Cette courbe est obtenue à partir du modèle d'Ahlgren et Al. (2005), la description de ce modèle étant abordée dans la Partie IV.

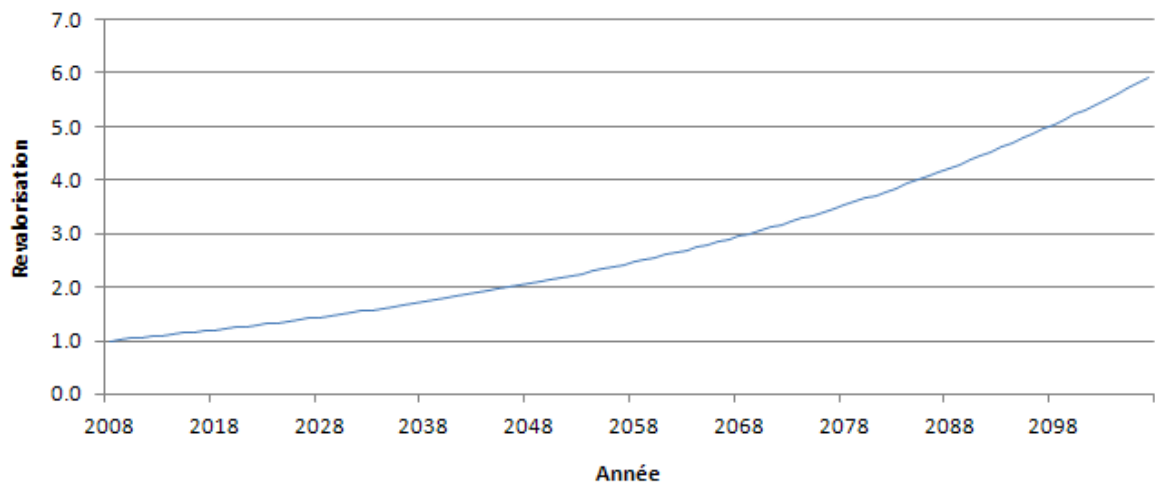


Fig. 18 - Evolution du coefficient d'inflation

Lors de l'évaluation de la provision *best estimate*, les engagements au titre des allocataires et des actifs sont distingués. Parmi le groupe d'actifs, notons qu'il faut tenir compte de la réversion éventuelle en cas de décès de l'assuré.

Section 1.1. Description des calculs

Pour une population constituée d'actifs I_{Act} , d'allocataires I_{All} et d'allocataires-réversataires I_{Rev} , les flux aléatoires incluant les prestations, les frais et les chargements \tilde{F}_t^{Act} , \tilde{F}_t^{All} et \tilde{F}_t^{Rev} versés au titre de l'année t s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_t^{Act} &= \sum_{i \in I_{Act}} f_i^{Act} \cdot (1 - \gamma_{cht}) \cdot (1 + \gamma_{gest}) \cdot \left(1_{]t, +\infty[}(T_{x(i)}) + \theta_{nup} \cdot \theta_{rev} \cdot \left(1_{]t, +\infty[}(T_{y(i)}) - 1_{]t, +\infty[}(T_{xy(i)}) \right) \right) \\ \tilde{F}_t^{All} &= \sum_{i \in I_{Act}} f_i^{All} \cdot (1 - \gamma_{cht}) \cdot (1 + \gamma_{gest}) \cdot \left(1_{]t, +\infty[}(T_{x(i)}) \cdot 1_{x(i)+t > x_{dep}} + \theta_{nup} \cdot \theta_{rev} \cdot \left(1_{]t, +\infty[}(T_{y(i)}) - 1_{]t, +\infty[}(T_{xy(i)}) \right) \right) \\ \tilde{F}_t^{Rev} &= \sum_{i \in I_{Act}} f_i^{Rev} \cdot (1 - \gamma_{cht}) \cdot (1 + \gamma_{gest}) \cdot 1_{]t, +\infty[}(T_{x(i)})\end{aligned}$$

où :

- ✓ $T_{x(i)} = T - x(i) | T > x(i)$: la durée résiduelle de survie de l'individu i ;
- ✓ $T_{y(i)}$: la durée résiduelle de survie du conjoint i ;
- ✓ $T_{xy(i)}$: la durée résiduelle de survie couple i au premier décès ;
- ✓ $x(i)$: l'âge de l'individu i à la date $t = 0$;
- ✓ x_{dep} : l'âge de départ à la retraite soit 61 ans ;
- ✓ f_i^j : le montant de la rente annuelle versée à l'individu i de la population $j \in \{Act, All, Rev\}$;
- ✓ θ_{rev} : le taux de réversion ;
- ✓ θ_{nup} : le taux de nuptialité ;
- ✓ γ_{gest} : le taux des frais de gestion ;
- ✓ γ_{cht} : le taux de chargement.

Ainsi, les suites des flux probables de prestations $(F_t^{Act})_{t \geq 1}$, $(F_t^{All})_{t \geq 1}$ et $(F_t^{Rev})_{t \geq 1}$ évalués à la date 0 s'écrivent :

$$\forall j \in \{Act, All, Rev\},$$

$$F_t^j = \mathbf{E}^P \left[\tilde{F}_t^j \mid \Phi_0 \right]$$

Avec les notations classiques de l'assurance vie, l_x désigne le nombre de personnes en vie à l'âge x selon les tables de mortalité :

$$\mathbf{E}^P \left[1_{|t, +\infty[} (T_{x(i)}) \mid \Phi_0 \right] = \frac{l_{x(i)+t}}{l_{x(i)}}$$

La table de mortalité abattue est obtenue par l'application d'un taux d'abattement $\theta_{abattement}$ aux q_x selon la formule suivante :

$$q_{x(i)}^{abattue} = \left(1 - \frac{l_{x(i)+1}^{abattue}}{l_{x(i)}^{abattue}} \right) = q_{x(i)} \cdot (1 - \theta_{abattement}) = \left(1 - \frac{l_{x(i)+1}}{l_{x(i)}} \right) \cdot (1 - \theta_{abattement})$$

Les montants des capitaux constitutifs chargés versés par les nouveaux retraités \tilde{C}_t au titre de l'année t s'écrivent :

$$\tilde{C}_t = \sum_{i \in I_{Act}} C_t(i) \cdot (1 + \gamma_{gar}) \cdot 1_{|x_{dep} - x(i), +\infty[} (T_{x(i)})$$

où :

$$\checkmark \quad C_t(i) = 1_{x(i)+t=x_{dep}} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_i^{Act}}{(1+r)^k} \cdot \left(\frac{l_{x(i)+t+k}}{l_{x(i)+t}} + \theta_{nup} \cdot \theta_{rev} \cdot \frac{l_{y(i)+t+k}}{l_{y(i)+t}} \left(1 - \frac{l_{x(i)+t+k}}{l_{x(i)+t}} \right) \right)$$

- ✓ r : le taux d'actualisation correspondant à 60 % du TME ;
- ✓ γ_{gar} : le taux de chargement au titre des garanties de mortalité et de revalorisation.

Notons que pour des raisons de simplification, les notations ci-dessus ne font pas référence aux courbes des taux et aux tables de mortalité utilisées. En pratique, une distinction est effectuée pour intégrer convenablement le coût des garanties.

Des garanties de revalorisation et de mortalité ayant été souscrites au profit du souscripteur du contrat, l'assureur doit alors considérer l'ensemble de la population des actifs et constituer une provision correspondant à la différence entre son engagement et celui du souscripteur, ce dernier devant reverser à l'assureur les capitaux constitutifs au départ de chaque allocataire. Par définition, cette provision évaluée avec des hypothèses *best estimate* peut être négative dès lors que le niveau de l'inflation et / ou la mortalité réelle à la date d'évaluation sont inférieures aux spécifications tarifaires. Par mesure de prudence, la provision est prise égale à 0 lorsque survient cette situation.

L'engagement *best estimate* s'écrit alors en 0 :

$$Be_{Act}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\left(\tilde{F}_t^{Act} - \tilde{C}_t \right) \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(t)) \right)^t}$$

$$Be_{All}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\tilde{F}_t^{All} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(t)) \right)^t}$$

$$Be_{Rev}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\tilde{F}_t^{Rev} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(t)) \right)^t}$$

$$Be(0) = Be_{Act}(0) + Be_{All}(0) + Be_{Rev}(0)$$

où $R(t)$ est le taux sans risque (courbe QIS4) à l'échéance t et IPC_t l'indice des prix à la consommation.

Par ailleurs, on suppose l'indépendance entre l'évolution de la mortalité et celle des prix. Ainsi, on a :

$$\forall j \in \{Act, All, Rev\},$$

$$\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\tilde{F}_t^j \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right] = \mathbf{E}^P \left[\tilde{F}_t^j \mid \Phi_0 \right] \cdot \mathbf{E}^Q \left[\frac{IPC_t}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]$$

Cette hypothèse sera utile par la suite et semble raisonnable en pratique. En effet, un lien de dépendance entre les deux ne permettrait pas l'évaluation du *best estimate* par une formule fermée, obligeant à recourir à des méthodes type Monte Carlo pour estimer cette quantité.

Par ailleurs, les notations suivantes sont définies :

$$\Lambda_{Act}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{(\tilde{F}_t^{Act} - \tilde{C}_t) \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0}}{\left((1+R(t))\right)^t}$$

$$\Lambda_{All}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\tilde{F}_t^{All} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0}}{\left((1+R(t))\right)^t}$$

$$\Lambda_{Rev}(0) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\tilde{F}_t^{Rev} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0}}{\left((1+R(t))\right)^t}$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_{Act}(0) + \Lambda_{All}(0) + \Lambda_{Rev}(0)$$

Section 1.2. Application

Sur la base des formules décrites ci-dessus les valeurs moyennes théoriques de l'engagement sont estimées et regroupées dans le tableau suivant :

Valeur moyenne théorique	en M€
Be_{Act}	0
$Be_{All} + Be_{Rev}$	138,42
Be	138,42

La valeur de la provision constituée au titre de la population d'actifs est négative et est par convention prise égale à 0. A la date d'évaluation, le tarif, calculé sur la base d'un taux correspondant à 60 % du TME, est suffisamment contraint pour que les produits financiers réalisés permettent de servir la revalorisation au niveau de l'inflation. Par conséquent, il n'y a pas lieu de constituer une provision.

Chapitre 2. Evaluation des modules de risques

Afin d'évaluer le SCR relatif au portefeuille étudié, on considère chaque sous module de la formule du SCR. Dans la suite, les seuls modules de risques décrits sont ceux ayant une utilité pour le calcul du SCR relatif au régime étudié.

Section 2.1. Définition de la NAV

Le calcul du besoin en capital pour chaque module est effectué généralement par le biais de chocs sur les différentes hypothèses de calculs. La mesure de l'importance de ces chocs est

effectuée par la variation de la NAV⁵⁹. Cette variation, notée ΔNAV par la suite, est définie de la manière suivante :

$$\Delta NAV = (Actif - Passif) - (Actif_{choc} - Passif_{choc})$$

où :

- ✓ *Actif* : la valeur de l'actif avant le choc ;
- ✓ *Passif* : la valeur du passif avant le choc ;
- ✓ *Actif_{choc}* : la valeur de l'actif après le choc ;
- ✓ *Passif_{choc}* : la valeur du passif après le choc.

Lorsque $\Delta NAV > 0$, la compagnie d'assurance enregistre une perte, la charge de capital correspondante est calculée de manière prudente par $\max\{\Delta NAV; 0\}$.

Section 2.2. Module de risque de marché

Le module de risque de marché a pour objectif de quantifier le besoin en capital généré par des risques résultant du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers. Il est possible de mesurer l'exposition au risque de ces instruments par l'impact des variations des données financières (cours des actions, taux d'intérêts, prix de l'immobilier, taux de change)⁶⁰. Différents sous modules permettent de traiter les différents risques compris sous la dénomination « risque de marché ». On intègre ainsi :

- ✓ *Mkt_{int}* : le chargement en capital relatif au risque de taux d'intérêt ;
- ✓ *Mkt_{eq}* : le chargement en capital relatif au risque sur actions ;
- ✓ *Mkt_{prop}* : le chargement en capital relatif au risque sur actifs immobiliers ;
- ✓ *Mkt_{fr}* : le chargement en capital relatif au risque monétaire ;
- ✓ *Mkt_{sp}* : le chargement en capital relatif au risque de *spread* ;
- ✓ *Mkt_{conc}* : le chargement en capital relatif au risque de concentration.

2.2.1. Sous module risque de taux

Ce sous module permet de calculer le besoin en capital nécessaire afin de faire face à une chute ou à une hausse des taux d'intérêts. En effet, la variation de la structure par terme des

⁵⁹ Net value of assets minus liabilities ou actifs nets des passifs.

⁶⁰ Cf. partie TS.IX.A du QIS4.

taux d'intérêts a un double impact. A l'actif, elle modifie la valeur des instruments à taux fixes (obligations). Au passif, elle modifie le taux d'actualisation utilisé pour évaluer les engagements de l'assureur⁶¹.

2.2.1.1. Principe de calcul

Le calcul du Mkt_{int} s'appuie sur les variables suivantes :

- ✓ Mkt_{int}^{up} : le chargement en cas de tension à la hausse ;
- ✓ Mkt_{int}^{down} : le chargement en cas de tension à la baisse ;
- ✓ $\Delta NAV_{upwardshock}$: la variation de l'actif net en cas de tension à la hausse ;
- ✓ $\Delta NAV_{downwardshock}$: la variation de l'actif net en cas de tension à la baisse.

Les différents chocs, à la hausse ou à la baisse sont appliqués en multipliant la courbe des taux sans risque par les coefficients suivants :

- ✓ $S^{up}(t)$: le choc haussier à l'échéance t ;
- ✓ $S^{down}(t)$: le choc baissier à l'échéance t ;
- ✓ $R(t)$: le taux sans risque à l'échéance t ;
- ✓ $R_{shock}(t)$: le taux sans risque après choc à l'échéance t .

Échéance t (années)	1	2	3	4	5	6	7
Choc haussier	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
Choc baissier	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37

Échéance t (années)	8	9	10	11	12	13	14
Choc haussier	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
Choc baissier	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34

⁶¹ Cf. partie TS.IX.B du QIS4.

<i>Échéance t (années)</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>20 et plus</i>
<i>Choc haussier</i>	0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37
<i>Choc baissier</i>	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31

L'application des chocs s'effectue de la manière suivante :

$$R_{choc}(t) = \begin{cases} R(t) \cdot (1 + S^{up}(t)) & \text{en cas de choc haussier} \\ R(t) \cdot (1 + S^{down}(t)) & \text{en cas de choc baissier} \end{cases}$$

La charge en capital découle alors du résultat suivant :

$$Mkt_{int} = \max \{ Mkt_{int}^{up}; Mkt_{int}^{down}; 0 \}$$

$$Mkt_{int}^{up} = \Delta NAV_{upwardshock}$$

$$Mkt_{int}^{down} = \Delta NAV_{downwardshock}$$

2.2.1.2. Choc à l'actif

Dans le cadre de l'exemple considéré, les seuls actifs sensibles au taux d'intérêts sont les obligations. Par conséquent, elles sont évaluées après choc par la formule suivante :

$$VO_{shock} = \sum_{t=1}^T \frac{C(t)}{(1 + R_{shock}(t))^t} + \frac{N}{(1 + R_{shock}(t))^n}$$

où :

- ✓ VO_{shock} : la valeur de l'obligation après choc ;
- ✓ $C(t)$: le coupon versé à la date t ;
- ✓ T : la maturité de l'obligation ;
- ✓ N : le nominal de l'obligation.

2.2.1.3. Choc au passif

Un choc sur la courbe des taux impacte le *best estimate* et en particulier le taux d'actualisation des engagements pris par l'assureur. L'impact d'un choc à la hausse ou à la baisse se mesure donc, conformément au calcul détaillé plus haut, par l'actualisation des flux de trésorerie à partir des taux sous tension. La valeur du choc au passif, notée $Mkt_{int,passif}^{up}$ en cas de hausse et $Mkt_{int,passif}^{down}$ en cas de baisse, correspond à :

$$Mkt_{int,passif}^{up} = Be_{choc} - Be$$

où :

- ✓ Be : le *best estimate* net de réassurance ;
- ✓ Be_{choc} : le *best estimate* net de réassurance après choc.

2.2.1.4. Application

En application de la méthode vue *supra*, nous calculons la NAV en cas de chocs haussier et baissier.

Choc haussier		
Valeur du choc à l'actif en M€	Valeur du choc au passif	ΔNAV en M€
28,01	-13,13	14,93

Choc baissier		
Valeur du choc à l'actif en M€	Valeur du choc au passif	ΔNAV en M€
-23,87	31,61	7,74

Ainsi, on retient :

Mkt_{int} en M€
14,93

A titre de comparaison, le besoin en capital en l'absence de réassurance est estimé :

Mkt_{int} en M€
39,35

La prise en compte de la réassurance permet de réduire d'un facteur 2,6 la charge en capital relative au risque de taux. On note qu'une tension à la baisse des taux conduit à réduire le rendement des produits financiers, la revalorisation au niveau de l'inflation engendre un coût supérieur au tarif de cette garantie pour l'assureur. Ainsi, une provision de 35,05 M€ est constituée au titre de la couverture de la garantie de revalorisation pour la population d'actifs.

Par ailleurs, la valeur du besoin en capital généré par le risque de taux dépend de la bonne couverture des engagements. Ainsi, cette dernière est adaptée à la présence d'une garantie de

réassurance, ce qui explique l'écart au-delà du facteur 2 entre la situation avec réassurance et sans réassurance.

2.2.2. Sous module de risque action

Ce sous module permet de calculer le besoin en capital nécessaire afin de faire face à une chute de la valeur de marché des actions. On précise que le risque examiné dans ce module est le risque systématique. Le risque idiosyncratique, qui résulte d'un manque de diversification du portefeuille est étudié par la suite⁶².

2.2.2.1. Principe de calcul

On distingue deux types d'actions : les actions cotées dans des pays de l'EEE et de l'OCDE intitulées « global » et les « autres ».

Le calcul du Mkt_{eq} s'appuie sur les variables suivantes :

- ✓ $i \in \{1,2\}$: l'indice qui par 1 désigne les actions « global » et par 2 les « autres » ;
- ✓ $Mkt_{eq,i}$: le chargement en capital résultant d'un choc sur l'indice i ;
- ✓ $\Delta NAV_{equity\ shock_i}$: la variation de l'actif net en cas de chute de la valeur de l'indice i ;
- ✓ $equity\ shock_i$: la valeur du choc sur la valeur de l'indice i .

	<i>Global</i>	<i>Autres</i>
<i>equity shock_i</i>	32 %	45 %

La détermination du chargement en capital s'effectue comme suit pour chaque indice $i \in \{1,2\}$:

$$Mkt_{eq,i} = \max\{\Delta NAV_{equity\ shock_i}; 0\}$$

Une deuxième étape consiste à utiliser une formule d'agrégation au moyen du tableau de corrélations suivant :

<i>Corr</i>	<i>Global</i>	<i>Autres</i>
<i>Global</i>	1	0,75
<i>Autres</i>	0,75	1

⁶² Cf. partie TS.IX.C du QIS4.

La valeur du sous module action est alors obtenue *via* la formule :

$$Mkt_{eq} = \sqrt{\sum_{i,j \in \{1,2\}} Corr_{i,j} \cdot Mkt_{eq,i} \cdot Mkt_{eq,j}}$$

On introduit les notations suivantes :

- ✓ VM_i : la valeur de marché de l'action d'indice i ;
- ✓ $VM_{shock,i}$: la valeur de marché après choc de l'action d'indice i ;
- ✓ β : le coefficient de sensibilité à une variation du sous jacent pour les produits dérivés (égal à 1, conformément aux spécifications du QIS4).

Ainsi, la valeur de l'action après choc est obtenue *via* la formule suivante pour chaque indice $i \in \{1,2\}$:

$$VM_{shock,i} = VM_i \cdot (1 - \beta \cdot equity\ shock_i)$$

2.2.2.2. Application

Le portefeuille d'actifs étant constitué uniquement d'actions cotées dans la zone euro, le calcul du besoin en capital se limite au calcul de $Mkt_{eq,1}$.

L'impact d'un choc sur les actions n'ayant pas d'impact au passif, on obtient les résultats illustrés par le tableau suivant :

Action	Choc	Valeur de marché en M€	Mkt_{eq} en M€
1	32 %	26,74	8,56

Ainsi, on obtient :

Mkt_{eq} en M€
8,56

2.2.3. Sous module de risque de spread

Ce sous module permet de calculer le besoin en capital nécessaire afin de faire face au risques issus des *spreads* de crédit par rapport à la structure par terme des taux d'intérêts sans risque. Ce risque né d'une variation de la courbe des rendements par rapport à la structure par terme des taux d'intérêts sans risque. Les actifs correspondants aux contrats pour lesquels le

souscripteur supporte le risque d'investissement sont exclus de ce module⁶³. On précise que les obligations souveraines ne sont pas prises en compte dans ce module.

2.2.3.1. Principe de calcul

Le calcul du Mkt_{sp} est la somme de la charge de capital relative à chacun des trois types d'actifs concernés, les obligations, les produits structurés et les produits dérivés de crédit :

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cd}$$

où :

- ✓ Mkt_{sp}^{bonds} : le chargement au titre du risque de *spread* des obligations ;
- ✓ Mkt_{sp}^{struct} : le chargement au titre du risque de *spread* des produits structurés de crédit ;
- ✓ Mkt_{sp}^{cd} : le chargement au titre du risque de *spread* des dérivés de crédit.

Le calcul de chacun de ces chargements en capital s'appuie sur les variables suivantes :

- ✓ $rating_i$: la note externe de l'exposition au risque de crédit i ;
- ✓ $Sens_i$: la sensibilité de l'exposition au risque de crédit i ;
- ✓ MV_i : l'exposition au risque de crédit i ;
- ✓ $m(Sens_i)$: la fonction permettant de sélectionner la duration maximum à prendre en compte ;

$$m(Sens_i) = \left. \begin{array}{l} \max \{ \min \{ Sens_i; 8 \}; 1 \} \quad \text{si } rating_i = BB \\ \max \{ \min \{ Sens_i; 6 \}; 1 \} \quad \text{si } rating_i = B \\ \max \{ \min \{ Sens_i; 4 \}; 1 \} \quad \text{si } rating_i = CCC \text{ ou plus basse, non notée} \\ \max \{ Sens_i; 1 \} \quad \text{dans les autres cas} \end{array} \right\}$$

- ✓ $n(Sens_i)$: la fonction permettant de sélectionner la duration maximum à prendre en compte pour les produits structurés ;

⁶³ Cf. partie TS.IX.F du QIS4.

$$n(Sens_i) = \left. \begin{array}{l} \max(\min\{Sens_i; 5\}; 1) \quad \text{si } rating_i = BB \\ \max(\min\{Sens_i; 4\}; 1) \quad \text{si } rating_i = B \\ \max(\min\{Sens_i; 2,5\}; 1) \quad \text{si } rating_i = CCC \text{ ou plus basse} \\ 1 \quad \text{si non notée} \\ \max\{Sens_i; 1\} \quad \text{dans les autres cas} \end{array} \right\}$$

- ✓ $F(rating_i)$: la fonction renvoyant la valeur du choc en fonction du $rating_i$ ⁶⁴ ;
- ✓ $G(rating_i)$: la fonction renvoyant la valeur du choc en fonction du $rating_i$ pour les produits structurés ;
- ✓ $\Delta Liab_{ul}$: l'impact du choc sur les contrats pour lesquels le souscripteur assume le risque d'investissement.

Rating	F(Rating)	G(Rating)
AAA	0,25 %	2,13 %
AA	0,25 %	2,55 %
A	1,03 %	2,91 %
BBB	1,25 %	4,11 %
BB	3,39 %	8,42 %
B	5,60 %	13,35 %
CCC ou plus basse	11,20 %	29,71 %
Non notée	2,00 %	100,00 %

⁶⁴ Cette fonction est calibrée de manière à produire un choc équivalent à une VaR de 99,5 %.

Ainsi, on obtient :

$$Mkt_{sp}^{bonds} = \sum_i MV_i \cdot m(Sens_i) \cdot F(rating_i) + \Delta Liab_{ul}$$

$$Mkt_{sp}^{cd} = \sum_i MV_i \cdot m(Sens_i) \cdot F(rating_i) + \Delta Liab_{ul}$$

$$Mkt_{sp}^{struct} = \sum_i MV_i \cdot n(Sens_i) \cdot G(rating_i)$$

2.2.3.2. Application

Les seuls actifs présents en portefeuille susceptibles d'être impactés par le risque de *spread* sont les obligations. Par conséquent, le chargement en capital se limite au Mkt_{sp}^{bonds} . Par ailleurs, $\Delta Liab_{ul}$ est nulle car le risque d'investissement n'est pas supporté par le souscripteur.

La sensibilité des obligations est représentée dans le tableau suivant :

<i>Obligation</i>	<i>Sensibilité</i>
1	6,70
2	3,60
3	4,34

Le risque de *spread* est évalué *via* la formule développée *supra*. Les éléments de calcul sont présentés dans le tableau suivant :

<i>Obligation</i>	MV_i	$m(Sens_i)$	$F(Rating_i)$	Mkt_{sp} en M€
1	159,70	6,70	0,25 %	2,67
2	24,96	3,60	0,25 %	0,22
3	43,30	4,34	1,03 %	1,94

Ainsi, on obtient :

Mkt_{sp} en M€
4,83

2.2.4. Sous module de risque de concentration

Ce sous module permet de calculer le besoin en capital nécessaire afin de faire au risque relatif à l'accumulation d'exposition avec une même contrepartie. Le risque de concentration est constitué d'une part de la volatilité supplémentaire incluse dans les portefeuilles d'actifs concentrés et d'autre part de l'accumulation des risques de défaut⁶⁵.

On précise que les obligations souveraines ne sont pas comprises dans ce module.

2.2.4.1. Principe de calcul

Les chocs appliqués sont modélisés à la fois selon le *rating* du titre et selon son niveau de concentration. Le calcul est décomposé en trois étapes : l'excédent d'exposition, le chargement au titre de la concentration des risques par émetteur et l'agrégation.

L'excédent d'exposition permet d'identifier le montant des actifs rattachés à une même contrepartie, dépassant un certain niveau de prudence. L'excédent d'exposition se calcule par la formule :

$$XS_i = \max \left\{ 0; \frac{E_i}{Assets_{xl}} - CT \right\}$$

où :

- ✓ XS_i : l'excédent de contrepartie relatif à la contrepartie i ;
- ✓ E_i : l'exposition nette au défaut de la contrepartie i ;
- ✓ $Assets_{xl}$: le montant total des actifs en dehors de ceux pour lesquels le souscripteur assume le risque d'investissement ;
- ✓ $rating_i$: le *rating* associé à la contrepartie i ;
- ✓ CT : le seuil de contrepartie fonction du *rating* de la contrepartie.

<i>Rating</i>	<i>CT</i>
AA-AAA	5 %
A	5 %
BBB	3 %
BB ou moins	3 %-

⁶⁵ Cf. partie TS.IX.G du QIS4.

Précisons que dans le cas où pour une même contrepartie, les lignes d'actifs présentent un *rating* différent, ce dernier est calculé comme le *rating* moyen pondéré des valeurs de marchés de tous ces actifs

Le chargement au titre de la concentration des risques pour la contrepartie i , noté $Conc_i$, est calculé *via* la formule :

$$Conc_i = Assets_{xl} \cdot XS_i \cdot g_i + \Delta Liab_{ul}$$

où :

- ✓ $\Delta Liab_{ul}$: l'impact du choc sur les contrats pour lesquels le souscripteur supporte le risque d'investissement ;
- ✓ g_i : l'échelon de qualité de crédit.

Rating	Échelon de qualité de crédit	g_i
AAA	1	0,15
AA		
A	2	0,18
BBB	3	0,30
BB ou moins, non notée	4 – 6, -	0,73

L'agrégation de ces éléments permet de construire la charge de capital Mkt_{conc} :

$$Mkt_{conc} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2}$$

2.2.4.2. Application

Les actifs concernés par le risque de concentration sont ceux pour lesquels une accumulation d'exposition au risque avec une même contrepartie est possible. Par ailleurs, $\Delta Liab_{ul}$ est nulle car le risque d'investissement n'est pas supporté par le souscripteur. Dans le cadre de l'exemple retenu, $Assets_{xl}$ vaut 254,71 M€.

Le calcul des $Conc_i$ est détaillé dans le tableau ci-dessous :

<i>Contrepartie</i>	<i>E_i en M€</i>	<i>XS_i en M€</i>	<i>Conc_i en M€</i>
<i>Obligation 1</i>			
1	15,97	0,013	0,49
2	15,97	0,013	0,49
3	15,97	0,013	0,49
4	15,97	0,013	0,49
5	15,97	0,013	0,49
6	15,97	0,013	0,49
7	15,97	0,013	0,49
8	15,97	0,013	0,49
9	15,97	0,013	0,49
10	15,97	0,013	0,49
<i>Obligation 2</i>			
1	12,48	0	0
2	12,48	0	0
<i>Obligation 3</i>			
1	8,66	0	0
2	8,66	0	0
3	8,66	0	0
4	8,66	0	0
5	8,66	0	0
<i>Action</i>			
1	3,82	0	0
2	3,82	0	0
3	3,82	0	0
4	3,82	0	0
5	3,82	0	0

6	3,82	0	0
7	3,82	0	0

Ainsi, on obtient :

<i>Mkt_{conc} en M€</i>
1,53

2.2.5. Calcul du SCR risque de marché

Le SCR_{Mkt} est construit sur la base des différents sous modules développés plus haut⁶⁶.

2.2.5.1. Principe de calcul

Le calcul du besoin en capital au titre du risque de marché est construit selon la formule d'agrégation suivante :

$$SCR_{Mkt} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrMkt_{i,j} \cdot Mkt_i \cdot Mkt_j}$$

où :

- ✓ $CorrMkt_{i,j}$: la cellule (i, j) du tableau de corrélation ;
- ✓ Mkt_i : le chargement en capital correspondant au sous module de risque i .

<i>CorrMkt</i>	<i>Mkt_{int}</i>	<i>Mkt_{eq}</i>	<i>Mkt_{sp}</i>	<i>Mkt_{conc}</i>
<i>Mkt_{int}</i>	1	0	0,25	0
<i>Mkt_{eq}</i>	0	1	0,25	0
<i>Mkt_{sp}</i>	0,25	0,25	1	0
<i>Mkt_{conc}</i>	0	0	0	1

⁶⁶ Cf. partie TS.IX.A du QIS4.

2.2.5.2. Application

Une fois les différents sous modules de risques évalués, on calcule SCR_{Mkt} via le tableau de corrélations suivant :

En M€	14,93	8,56	4,83	1,53
14,93	1	0	0,25	0
8,56	0	1	0,25	0^
4,83	0,25	0,25	1	0
1,53	0	0	0	1

L'application de la formule en racine carrée donne :

SCR_{Mkt} en M€
19,46

La valeur du capital requis au titre du risque de marché est fortement expliquée par le poids des obligations dans le portefeuille d'actifs de l'entité, l'exposition au risque de taux est donc élevée, d'autant que ce risque impacte également le passif. La charge de capital générée correspond à environ 7,6 % de la valeur de marché de l'actif total.

A titre de comparaison, l'évaluation du SCR_{Mkt} brut de réassurance conduit au résultat suivant :

En M€	39,35	8,56	4,83	1,53
39,35	1	0	0,25	0
8,56	0	1	0,25	0^
4,83	0,25	0,25	1	0
1,53	0	0	0	1

L'application de la formule en racine carrée permet d'obtenir le montant de la charge de capital brute de réassurance au titre du risque de marché :

SCR_{Life} en M€
41,99

La charge de capital générée correspond à environ 7,6 % de la valeur de marché de l'actif total en présence du dispositif de réassurance. *A contrario*, la charge en capital représente près de 16,5 % de la valeur de l'actif sans réassurance. Ce gain très net s'explique par la forte exposition du régime au risque de taux, dont les variations impactent directement la valeur des provisions et par le fait que la couverture est adaptée à la présence d'un traité de réassurance.

Section 2.3. Module risque souscription vie

Le module de risque de souscription englobe les risques associés aux activités vie, santé et non vie. Dans le cadre de ce mémoire, nous ne présenterons que le module de risque souscription vie.

Ce module est constitué afin de déterminer le besoin en capital soulevé par les risques résultants de la souscription de contrats d'assurance sur la vie. Comme pour le risque de marché, le risque de souscription vie est décomposé en plusieurs sous risques, répartis en sous modules :

- ✓ $Life_{rev}$: le chargement en capital relatif au risque de révision ;
- ✓ $Life_{mort}$: le chargement en capital relatif au risque de mortalité ;
- ✓ $Life_{long}$: le chargement en capital relatif au risque de longévité ;
- ✓ $Life_{dis}$: le chargement en capital relatif au risque d'invalidité ;
- ✓ $Life_{lapse}$: le chargement en capital relatif au risque de rachat ;
- ✓ $Life_{exp}$: le chargement en capital relatif au risque de dépenses ;
- ✓ $Life_{cat}$: le chargement en capital relatif au risque de catastrophe.

2.3.1. Sous module de risque mortalité

Le risque de mortalité est lié au risque d'une aggravation de la mortalité des assurés par rapport à celle prise en compte dans l'évaluation des provisions techniques. Ce risque survient dans les contrats d'assurance où interviennent un montant à verser au décès et, par conséquent, où une aggravation des taux de mortalité vient accroître les provisions techniques.⁶⁷

Dans un contrat de retraite supplémentaire, le risque de mortalité n'est pas présent *a priori*, à moins que des garanties particulières comme la réversion soient souscrites et que le report vers les réversataires vient aggraver la situation nette de l'entité.

⁶⁷ Cf. partie TS.XI.B du QIS4.

2.3.1.1. Principe de calcul

Le calcul du chargement $Life_{mort}$ résulte de l'application d'un scénario sur la mortalité défini via la formule suivante pour chaque contrat i :

$$Life_{mort} = \sum_i (\Delta NAV_{mortshock})$$

où $\Delta NAV_{mortshock}$ représente la variation d'actif net suite à un choc de 10 % sur les taux de mortalité pour chaque âge.

Le choc sur la mortalité n'impacte que les passifs. Par conséquent, $\Delta NAV_{mortshock}$ est obtenue simplement par la formule suivante :

$$\Delta NAV_{mortshock} = \max \{ Be_{choc} - Be; 0 \}$$

2.3.1.2. Application

A première vue, le risque de mortalité est non adverse dans le cadre de cette étude. Cependant, en présence de réversion, l'aggravation de la mortalité est susceptible d'accroître l'engagement de l'assureur. Par conséquent, le calcul de chargement en capital au titre de ce risque est effectué.

On retrouve le résultat attendu :

Be	Be_{choc}	$Life_{mort}$ en M€
138,42	134,85	0

Le résultat net de réassurance est obtenu en appliquant au réducteur le montant du *best estimate* de 50 % :

Be	Be_{choc}	$Life_{mort}$ en M€
69,21	67,42	0

2.3.2. Sous module de risque de longévité

Le risque de longévité est lié à l'incertitude résultant d'un report de la mortalité ou encore d'une amélioration de l'espérance de vie. Ce risque impacte les contrats d'assurance pour lesquels une prestation est versée en cas de vie⁶⁸.

⁶⁸ Cf. partie TS.XI.C du QIS4.

2.3.2.1. Principe de calcul

Le calcul du chargement $Life_{long}$ résulte de l'application d'un scénario sur la longévité défini *via* la formule suivante pour chaque contrat i :

$$Life_{long} = \sum_i (\Delta NAV_{longevityshock})$$

où $\Delta NAV_{longevityshock}$ représente la variation d'actif net suite à un choc de -25 % sur les taux de mortalité pour chaque âge.

Le choc sur la mortalité n'impacte que les passifs. Par conséquent, $\Delta NAV_{longevityshock}$ est obtenu simplement par la formule suivante :

$$\Delta NAV_{longevityshock} = \max \{ Be_{choc} - Be; 0 \}$$

2.3.2.2. Application

Le choc appliqué au taux de mortalité reporte le décès des allocataires et augmente donc l'engagement supporté par l'assureur. Le tableau suivant fournit les résultats obtenus :

Be	Be_{choc}	$Life_{long}$ en M€
138,42	149,61	11,19

Le résultat net de réassurance est obtenu en réduisant le montant du *best estimate* de 50 % :

Be	Be_{choc}	$Life_{long}$ en M€
69,21	74,80	5,60

Le régime est sensible à cette source d'aléa car elle génère un besoin en capital égal à 8,1 % de la provision sans réassurance et 4,04 % avec réassurance. On note que l'allongement de la durée de vie conduit à constituer une provision pour la population d'actifs égale à 0,3 M€. En effet, l'amélioration de la longévité matérialisée par ce choc produit un engagement supplémentaire vis-à-vis de la population d'actifs qui est directement transféré à l'assureur *via* la garantie de table.

2.3.3. Sous module de risque de dépense

Ce sous module est associé au risque de dépense lié à une variation des frais de gestion (frais d'administration, gestion des prestations) des contrats d'assurance⁶⁹.

2.3.3.1. Principe de calcul

Le calcul du chargement $Life_{exp}$ résulte de l'application d'un *scénario* sur les dépenses défini *via* la formule suivante pour chaque contrat i :

$$Life_{exp} = \sum_i (\Delta NAV_{expshock})$$

où $\Delta NAV_{expshock}$ représente la variation de l'actif net suite à une augmentation de 10 % des dépenses futures par rapport aux anticipations du *best estimate* et une augmentation de 1 % par an du taux d'inflation.

Le choc sur les dépenses n'impacte que les passifs. Par conséquent, $\Delta NAV_{expshock}$ est obtenue simplement par la formule suivante :

$$\Delta NAV_{expshock} = \max \{ Be_{choc} - Be; 0 \}$$

2.3.3.2. Application

Dans le cadre de l'étude, les dépenses se limitent aux seuls frais de gestion. Ainsi, le *best estimate* après choc est obtenu en augmentant les dépenses de 10 % et en les faisant dériver de 1 % par an au titre de l'inflation.

Le tableau suivant fournit les résultats obtenus :

Be	Be_{choc}	$Life_{exp}$ en M€
138,42	139,81	1,40

Le résultat net de réassurance est obtenu en réduisant le montant du *best estimate* de 50 % :

Be	Be_{choc}	$Life_{long}$ en M€
69,21	69,91	0,70

La charge en capital relative au risque de dépense est modeste et représente un peu plus de 0,5 % des provisions totales avec réassurance.

⁶⁹ Cf. partie TS.XI.F du QIS4.

2.3.4. Sous module de risque catastrophe

Ce sous module de risque est mis en place afin de faire face à la survenance d'évènements extrêmes ou irréguliers (une pandémie par exemple) qui ne sont pas suffisamment pris en compte par les autres sous modules de risques⁷⁰.

Comme pour le risque mortalité, le risque de catastrophe n'est *a priori* pas pris en compte dans un contrat de retraite supplémentaire, à moins que des garanties particulières comme la réversion soient promises.

2.3.4.1. Principe de calcul

Le chargement en capital au titre du risque catastrophe est défini *via* la formule suivante :

$$Life_{cat} = \Delta NAV | life_{catshock}$$

$\Delta NAV | life_{catshock}$ est obtenue suite à la survenance simultanée de plusieurs évènements :

- ✓ une augmentation en valeur absolue de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs décédant dans l'année suivante ;
- ✓ une augmentation en valeur absolue de 1,5 pour mille du taux de souscripteurs touchés par la maladie au cours de l'année suivante.

2.3.4.2. Simplification

N'ayant pas les données nécessaires, le calcul de la charge en capital au titre du risque catastrophe est effectué sur la base de la simplification suivante pour chaque contrat i ⁷¹ :

$$Life_{cat} = \sum_i 0,0015 \cdot Capital_at_Risk_i$$

$Capital_at_Risk_i$ est déterminé *via* la formule :

$$Capital_at_Risk_i = SA_i + AB_i \cdot Annuity_factor - TP_i$$

où :

- ✓ TP_i : la provision technique (nette de réassurance) pour chaque contrat i ;
- ✓ SA_i : la somme au décès ou à l'invalidité (nette de réassurance) pour chaque contrat i si la prestation est versée sous forme de capital et 0 sinon ;

⁷⁰ Cf. partie TS.XI.H du QIS4.

⁷¹ Cf. partie TS.XI.H.6 du QIS4.

- ✓ AB_i : le montant annualisé des prestations dues au décès ou à l'invalidité (net de réassurance) pour chaque contrat i si la prestation n'est pas versée sous forme de capital et 0 sinon ;
- ✓ $Annuity_factor$: le facteur de rente moyen au titre de la prestation.

2.3.4.3. Application

Comme pour le risque de mortalité, le régime étudié n'est exposé au titre du risque de catastrophe qu'en proportion des rentes de réversion.

Pour calculer le besoin en capital au titre de ce risque, la simplification décrite ci-dessus est utilisée. Pour chaque contrat, la valeur de SA_i est nulle car les prestations ne sont pas servies sous forme de capital. La somme versée en cas de décès de l'assuré est la rente de réversion versée au conjoint veuf.

On trouve un résultat négatif qui conduit à considérer le besoin suivant :

<i>Life_{cat} en M€</i>
0

2.3.5. Calcul du SCR risque de souscription vie

Le calcul du besoin en capital au titre du risque de souscription vie est construit selon la formule d'agrégation suivante⁷² :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrLife_{i,j} \cdot Life_i \cdot Life_j}$$

où :

- ✓ $CorrLife_{i,j}$: la cellule (i, j) du tableau de corrélations ;
- ✓ $Life_i$: le chargement en capital correspondant au sous module de risque i .

⁷² Cf. partie TS.XI.A du QIS4.

<i>CorrLife</i>	<i>Life_{mort}</i>	<i>Life_{long}</i>	<i>Life_{exp}</i>	<i>Life_{cat}</i>
<i>Life_{mort}</i>	1	-0,25	0,25	0
<i>Life_{long}</i>	-0,25	1	0,25	0
<i>Life_{exp}</i>	0,25	0,25	1	0
<i>Life_{cat}</i>	0	0	0	1

2.3.5.1. Application

Une fois les différents sous modules de risques évalués, le calcul SCR_{Life} est effectué avec les charges en capital calculées nettes de réassurance grâce au tableau de corrélations suivant :

<i>En M€</i>	0	5,60	0,7	0
0	1	-0,25	0,25	0
5,60	-0,25	1	0,25	0
0,7	0,25	0,25	1	0
0	0	0	0	1

L'application de la formule en racine carrée donne :

<i>SCR_{Life} en M€</i>
5,81

A titre de comparaison, l'évaluation du SCR_{Life} brut de réassurance conduit au résultat suivant :

<i>SCR_{Life} en M€</i>
11,62

L'application de la formule en racine carrée permet d'obtenir le montant de la charge de capital brute de réassurance au titre du risque de souscription, utilisée par la suite pour quantifier le risque de contrepartie et permettant de diviser par deux le SCR. Hors réassurance, le besoin en capital généré par les risques de souscription représente 8,4 % de la provision. En grande partie, cette quantité est expliquée par le risque de longévité dont le besoin en capital est fortement impacté par le report défavorable vers l'assureur de l'allongement de la durée de vie des allocataires.

Section 2.4. Module de risque de contrepartie

Le module de risque est associé au risque de perte résultant du défaut ou de la dégradation du *rating* des contreparties ou des dispositifs de réassurance (ou plus généralement les débiteurs de contrats de réduction de risques)⁷³.

2.4.1. Principe de calcul

La perte effective en cas de défaut d'une contrepartie est mesurée au travers des deux éléments suivants :

- ✓ LGD_i : la perte en cas de défaut de la contrepartie i ;
- ✓ PD_i : la probabilité de défaut de la contrepartie i .

Pour une contrepartie (réassureur) i , la perte en cas de défaut est évaluée comme suit :

$$LGD_i = 50\% \cdot \max \{ Recoverables + SCR_{U/W}^{gross} - SCR_{U/W}^{net} - Collateral; 0 \}$$

où :

- ✓ *Recoverables* : l'évaluation du *best estimate* des risques cédés en réassurance ;
- ✓ $SCR_{U/W}^{gross}$: le SCR au titre du risque de souscription mais hors effet de réduction des risques dus à la réassurance (hors effet de la capacité d'absorption des pertes futures participations aux bénéfiques et des impôts différés) ;
- ✓ $SCR_{U/W}^{net}$: le SCR au titre du risque de souscription (hors effet de la capacité d'absorption des pertes futures participations aux bénéfiques et des impôts différés) ;
- ✓ *Collateral* : le collatéral couvrant la perte en cas de contrepartie (pris en compte si ce dernier est détenu par la contrepartie elle-même).

Notons que le facteur de 50 % permet de tenir compte, de manière suffisamment prudente, de l'exécution, même en cas de défaut, de la plupart des engagements du réassureur.

⁷³ Cf. partie TS.X.A du QIS4.

La probabilité de défaut est quant à elle évaluée à partir du *rating* de la contrepartie.

<i>Rating_i</i>	<i>Échelon de qualité de crédit</i>	<i>PD_i</i>
AAA	1	0,002 %
AA		0,01 %
A	2	0,05 %
BBB	3	0,24 %
BB	4	1,20 %
B	5	6,04 %
CCC ou moins, non noté	6	30,41 %

Dans le cas où plusieurs notations sont disponibles, le QIS4 préconise l'utilisation de la deuxième meilleure note. Le calcul du capital requis au titre du risque de contrepartie SCR_{def} est déterminé par un calcul décomposable en trois étapes.

Dans un premier temps, on calcule la concentration de l'exposition au risque de défaut de réassurance grâce à l'indice d'Herfindahl H :

$$H = \frac{\sum_{i \in Re} LGD_i^2}{\left(\sum_{i \in Re} LGD_i \right)^2}$$

où Re représente l'ensemble des réassureurs.

La seconde étape consiste à déterminer pour chaque contrepartie, le chargement en capital Def_i pour l'exposition i . On définit alors une corrélation implicite R par :

$$R = 0,5 + 0,5 \cdot H$$

✓ si $R < 1$, Def_i est défini par :

$$Def_i = LGD_i \cdot \Phi \left((1-R)^{-0,5} \cdot \Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \cdot \Phi^{-1}(0,995) \right)$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

✓ si $R = 1$, Def_i est défini par :

$$Def_i = LGD_i \cdot \min\{100 \cdot PD_i; 1\}$$

Le SCR_{def} est enfin calculé par :

$$SCR_{def} = \sum_{i \in Re} Def_i$$

2.4.2. Application

Dans le cadre de cette étude, la seule contrepartie envisagée est un réassureur de *rating* A. Par ailleurs, aucun dispositif n'est mis en place pour couvrir le défaut de ce dernier, le *Collateral* est donc nul. Par conséquent, la perte potentielle en cas de défaut est donné par :

<i>Recoverable</i>	SCR^{gross}	SCR^{net}	<i>LGD en M€</i>
69,21	11,62	5,81	37,51

Le besoin en capital généré par le risque de défaut envers le réassureur est ensuite déterminé simplement, l'indice d'Herfindahl étant égal à 1.

<i>H</i>	R^s	<i>PD</i>	<i>Def</i>
1	1	0,05 %	1,88

Ainsi, le montant du SCR_{def} est égal à :

SCR_{def} en M€
1,88

La charge en capital relative au risque de contrepartie est relativement modeste (1,35 % des provisions techniques) du fait de la bonne notation du réassureur choisi. Le dispositif de réassurance, au vu de ce qui a été décrit *supra*, est avantageux pour le régime car il permet une économie remarquable en termes de besoin en capital. Par ailleurs, on comprend à travers ce bref exposé l'importance du *rating* du réassureur, dès lors que l'on souhaite réduire le SCR, une dégradation de la note de ce dernier de A vers BBB reviendrait en effet à multiplier par un facteur d'ordre 5 le besoin en capital associé au risque de défaut.

Chapitre 3. Evaluation du SCR global

Le SCR global est le résultat d'une formule d'agrégation des différents modules de risques vus plus haut. Il convient de prendre en compte le risque opérationnel et l'ajustement

au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéficiaires. On rappelle la formule de calcul du SCR global :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Section 3.1. Evaluation du BSCR

3.1.1. Principe de calcul

Le BSCR résulte de l'agrégation des différents chargements en capital vus *supra*. Il est déterminé *via* la formule suivante⁷⁴ :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} CorrSCR_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

où :

- ✓ $CorrSCR_{i,j}$: la cellule (i, j) du tableau de corrélations ;
- ✓ SCR_i : le chargement en capital correspondant au module de risque i .

$CorrSCR$	SCR_{mkt}	SCR_{def}	SCR_{life}
SCR_{mkt}	1	0,25	0,25
SCR_{def}	0,25	1	0,25
SCR_{life}	0,25	0,25	1

3.1.2. Application

L'évaluation du BSCR est basée sur une formule en racine carrée, identique à celle rencontrée lors de l'agrégation des sous-modules. Cette formule est alimentée par les charges en capital exprimées nettes de réassurance.

⁷⁴ Cf. partie TS.VIII.C du QIS4.

L'évaluation du BSCR conduit au résultat suivant :

<i>CorrSCR</i>	<i>19,46</i>	<i>1,88</i>	<i>5,81</i>
<i>19,46</i>	1	0,25	0,25
<i>1,88</i>	0,25	1	0,25
<i>5,81</i>	0,25	0,25	1

<i>BSCR en M€</i>
22,27

3.1.3. Application sans réassurance

Afin d'illustrer l'impact du traité de réassurance étudié, les calculs ont été menés en parallèle sans tenir compte du dit traité. Dans cette mesure, la charge en capital au titre du risque de contrepartie n'est pas prise en compte. Le tableau permettant d'effectuer l'agrégation des SCR est le suivant :

<i>CorrSCR</i>	<i>41,99</i>	<i>0</i>	<i>11,62</i>
<i>41,99</i>	1	0,25	0,25
<i>0</i>	0,25	1	0,25
<i>11,62</i>	0,25	0,25	1

<i>BSCR en M€</i>
46,28

La mise en place d'un traité de réassurance, bien qu'elle ajoute un risque de défaut dont la charge peut être quantifiée à 1,88 M€, permet de réduire sensiblement le montant du BSCR de près de 52 %.

Section 3.2. Evaluation du SCR risque opérationnel

Le module de risque opérationnel permet de tenir compte des pertes potentielles liées à des défaillances internes ou à des événements extérieurs⁷⁵.

⁷⁵ Cf. partie TS.VIII.B du QIS4.

3.2.1. Principe de calcul

Le chargement en capital au titre du risque opérationnel est déterminé comme suit :

$$SCR_{op} = \min\{0,30 \cdot BSCR; Op_{lnul}\} + 0,25 \cdot Exp_{ul}$$

$$Op_{lnul} = \max\{0,03 \cdot (Earn_{life} - Earn_{life-ul}); 0,003 \cdot (Tp_{life} - Tp_{life-ul})\}$$

où :

- ✓ Op_{lnul} : le chargement de base pour le risque opérationnel hors l'activité unité de compte ;
- ✓ Exp_{ul} : le montant des dépenses (bruts de réassurance) pour les contrats en unités de compte ;
- ✓ Tp_{life} : le total des provisions techniques en vie (brutes de réassurance) ;
- ✓ $Tp_{life-ul}$: le total des provisions techniques en vie pour les contrats en unités de compte (brutes de réassurance) ;
- ✓ $Earn_{life}$: le total des primes acquises en vie (brutes de réassurance) ;
- ✓ $Earn_{life-ul}$: le total des primes acquises en vie pour les contrats en unités de compte (brutes de réassurance).

3.2.2. Application

Dans le cadre de cette étude, aucune activité en unités de compte n'est considérée. Par conséquent, la formule d'évaluation du SCR_{op} se réduit à :

$$SCR_{op} = \min\{0,30 \cdot BSCR; Op_{lnul}\}$$

$$Op_{lnul} = \max\{0,03 \cdot Earn_{life}; 0,003 \cdot Tp_{life}\}$$

Le terme $Earn_{life}$ correspond au montant des capitaux constitutifs bruts de réassurance collectés au cours de l'année 2007. Les éléments nécessaires aux calculs sont repris dans le tableau suivant :

<i>BSCR</i>	<i>Earn_{life}</i>	<i>TP_{life}</i>
22,27	14,13	138,42

D'où l'on déduit le montant de la charge requise pour le SCR_{op} :

SCR_{op} en M€
0,42

La charge relative au risque opérationnel est relativement faible (0,3 % des provisions techniques) et ne pèse donc que très peu dans l'analyse de la solvabilité du régime.

Section 3.3. Evaluation du SCR global

En l'absence d'engagements au titre de la participation aux bénéfices, Adj est nul. La formule de calcul du SCR étant la suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

on obtient facilement le montant du capital de solvabilité requis.

SCR en M€
22,70

Les calculs effectués en parallèle sans prise en compte du traité de réassurance, conduites au résultat suivant, le montant du SCR_{op} n'étant pas modifié.

SCR en M€
46,71

La mise en place d'un traité de réassurance, bien qu'elle ajoute un risque de défaut dont la charge peut être quantifiée à 1,88 M€, permet de réduire sensiblement le montant du SCR de plus de 51,4 %.

Chapitre 4. Evaluation de la *risk margin*

La *risk margin* est déterminée par la méthode du coût du capital. La principale difficulté de cette méthode réside dans la projection des SCR futurs. Cette remarque est d'autant plus vraie que la durée de vie des engagements d'un régime de retraite est longue. Rappelons que les risques à prendre en compte pour le calcul des SCR futurs sont le risque opérationnel, le risque de souscription et le risque de contrepartie relatif aux cessions en réassurance.

Le risque de marché est exclu, bien qu'il puisse être pris en compte à l'avenir dans le prochain QIS5.

Section 4.1. Principe de calcul

La *risk margin* RM est calculée via la formule :

$$RM = \sum_t \frac{CoC_{factor} \cdot SCR_t}{(1+R(t))^t}$$

où :

- ✓ CoC_{factor} : le facteur de coût du capital (égal à 6 %) ;
- ✓ SCR_t : le SCR de l'année t (excluant le risque de marché).

Section 4.2. Application

La principale difficulté liée au calcul des SCR futurs vient de la projection des *best estimate* futurs qui nécessite le suivi de la population. Pour ce faire, les provisions *best estimate* futurs avant choc et après choc doivent être projetées. Les hypothèses, tant économiques que démographiques, sont supposées être identiques à celles utilisées pour mener l'évaluation au 31/12/2007. Dans un second temps, les différentes charges de capital sont estimées pour chaque horizon de projection.

4.2.1. Projection des provisions *best estimate*

Le *best estimate* évalué à une date s se présente sous la forme suivante :

$$Be_{Act}(s) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\left(\tilde{F}_{t+s}^{Act} - \tilde{C}_{t+s} \right) \cdot \frac{IPC_{t+s}}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(s,t)) \right)^t}$$

$$Be_{All}(s) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\tilde{F}_{t+s}^{All} \cdot \frac{IPC_{t+s}}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(s,t)) \right)^t}$$

$$Be_{Rev}(s) = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\tilde{F}_{t+s}^{Rev} \cdot \frac{IPC_{t+s}}{IPC_0} \mid \Phi_0 \right]}{\left((1+R(s,t)) \right)^t}$$

$$Be(s) = Be_{Act}(s) + Be_{All}(s) + Be_{Rev}(s)$$

où $R(s,t)$ représente le taux zéro-coupon à la date s et d'échéance $s+t$, obtenue selon l'approximation :

$$(1+R(s+t))^{s+t} \approx (1+R(s))^s \cdot (1+R(s,t))^t$$

Les montants des provisions *best estimate* sont projetés selon les mêmes hypothèses que celles utilisées à la date d'évaluation (inflation, courbe des taux, mortalité, etc.). Par conséquent, le *best estimate* en date s est calculé à partir de l'information disponible en $t = 0$ et est différent de ce que l'on calculerait en s .

Par ailleurs, il est utile de préciser que l'engagement au titre des actifs est modifié à la date de leur départ. En effet lors de la liquidation, le capital constitutif de la rente est versé dans le fonds des retraités : l'actif devient alors un allocataire, ce qui majore la provision, cette dernière étant cette fois prévue pour honorer l'engagement de retraite.

La projection du *best estimate* pour la population des allocataires est donnée par le graphique suivant. Cette représentation fournit uniquement l'engagement pour les assurés appelés « allocataires » en $t = 0$.

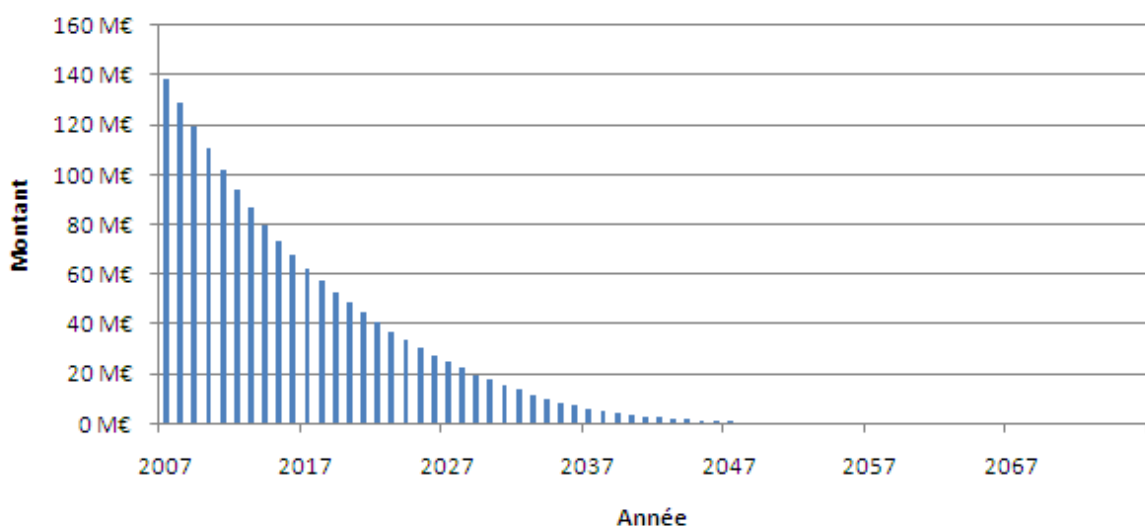


Fig. 19 - Projection des provisions *best estimate* des allocataires

De la même manière, on obtient pour la population d'actifs (en $t = 0$) puis pour l'ensemble du portefeuille, la représentation suivante des *best estimate* projetés :

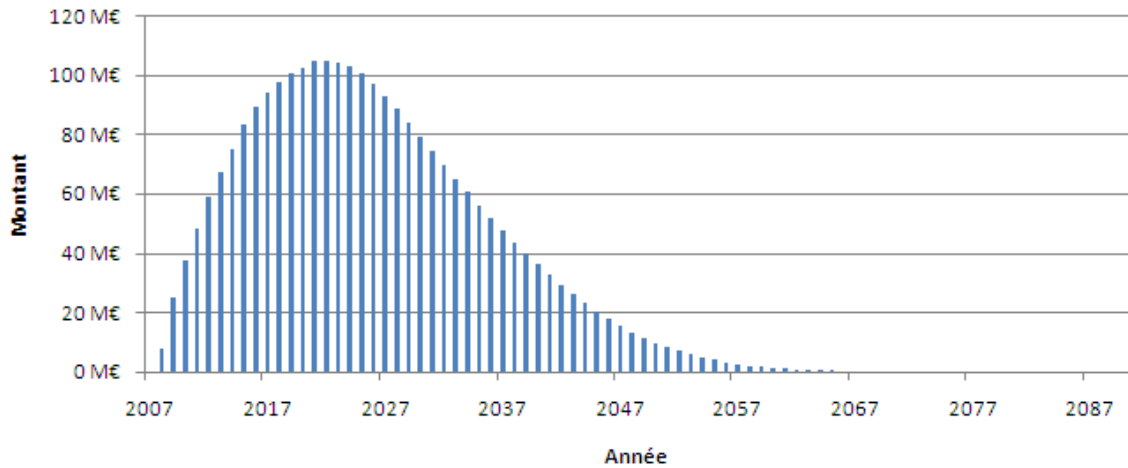


Fig. 20 - *Projection des provisions best estimate des actifs*

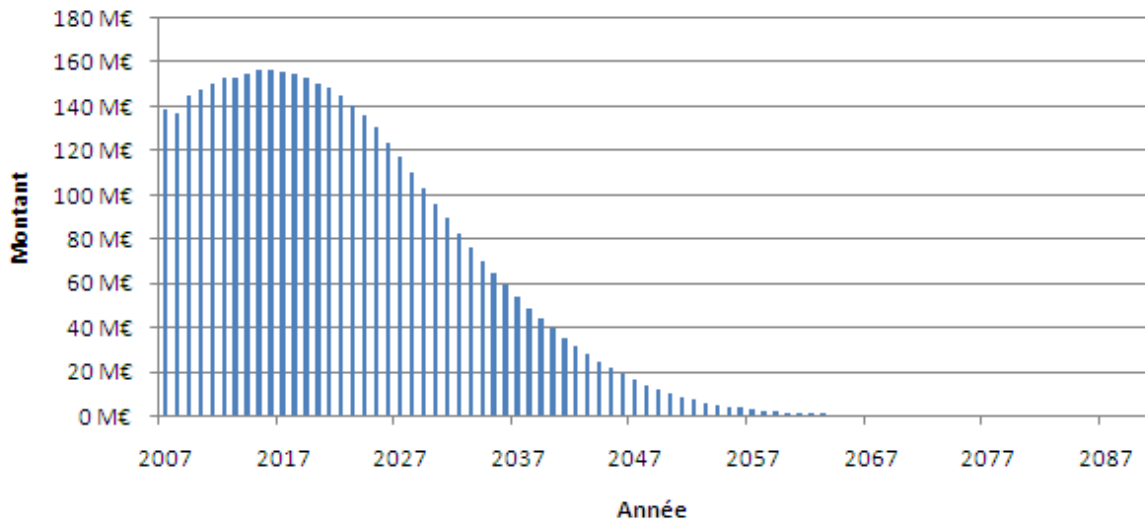


Fig. 21 - *Projection des provisions best estimate du portefeuille*

La projection des provisions techniques futures *best estimate* illustrée ci-dessus permet de comprendre comment évolue l'engagement de l'assureur au fil du temps. La population d'actifs fait apparaître un engagement qui s'accroît pendant près d'une vingtaine d'années, durée pendant laquelle de nouveaux retraités viennent élargir le nombre d'allocataires.

4.2.2. Projection des SCR futurs

Conformément à la présentation des différents sous modules de risques vus *supra*, la démarche suivie pour déterminer les SCR_{life} futurs s'appuie sur une logique de chocs. Ainsi, elle conduit à projeter les provisions techniques selon les différents scénarii envisagés plus haut pour le calcul du $Life_{mort}$, $Life_{long}$, $Life_{exp}$ et du $Life_{cat}$. Le détail des projections réalisées pour chaque module de risque est fourni en Annexe 3.

4.2.3. Calcul de la *risk margin*

Conformément à la formule de la *risk margin*, les capitaux requis futurs sont actualisés selon la courbe des taux sans risque du QIS4, puis se voient appliquer le coefficient de 6 % correspondant au coût du capital. Le tableau suivant fournit le résultat de ce calcul.

<i>RM en M€</i>
9,83

Le même cheminement est suivi sans tenir compte du traité de réassurance afin de mesurer l'augmentation de la *risk margin* dans ce cas. Le résultat obtenu est le suivant :

<i>RM en M€</i>
17,85

La prise en compte du dit traité de réassurance permet de réduire de près de 45 % la valeur de la *risk margin*. Elle correspond à 7,1 % du *best estimate*, ce montant relativement élevé s'explique par un écoulement long des SCR futurs, ces derniers étant croissants pendant près de dix ans, puis diminuant progressivement.

Chapitre 5. Analyse de la solvabilité dans le dispositif actuel

Le présent chapitre vise à appliquer les principes de solvabilité en vigueur afin de pouvoir comparer le niveau de prudence avec ceux du nouveau dispositif. Cette démarche conduit à évaluer le montant des provisions techniques dans le cadre de la réglementation française et l'exigence de marge.

Section 5.1. Evaluation des provisions techniques

La formule d'évaluation de l'engagement en normes française est sensiblement la même que celle évoquée dans le Chapitre 1 de cette partie à la différence que les flux sont actualisés au taux technique correspondant à 60 % du TME soit 2,5 % au 31/12/2007. De part sa définition, le taux réglementaire intègre une marge de prudence relativement importante. D'un point de vue économique cette contrainte intègre la revalorisation des prestations aux niveaux de l'inflation.

Par conséquent, les résultats suivants sont obtenus sans prendre en compte la courbe d'inflation :

Valeur moyenne théorique	Normes Solvabilité II (en M€)	Normes française (en M€)
$Be_{Act} = \mathbf{E}[\Lambda_{Act}(0)]$	0	5,82
$Be_{All} + Be_{Rev} = \mathbf{E}[\Lambda_{All}(0) + \Lambda_{Rev}(0)]$	138,42	144,98
$Be = \mathbf{E}[\Lambda(0)]$	153,78	150,80

Le tableau précédent illustre l'écart entre les deux référentiels. En ce qui concerne les allocataires et les réversataires, la provision est majorée dans le dispositif Solvabilité I de plus de 4,7 % par rapport à la provision *best estimate*. En revanche, on note qu'une provision au titre des actifs est constituée. Ceci provient du fait que le niveau de revalorisation prévue dans le tarif est identique à celui utilisée pour valoriser l'engagement de l'assureur. En conséquence, la provision constituée par l'assureur revient à la différence entre son engagement et celui du souscripteur..

Section 5.2. Evaluation de l'exigence de marge

Le dispositif de solvabilité en vigueur encore aujourd'hui, résultant de l'application en droit français de la directive Solvabilité I de 1973, prévoit une exigence de marge en vie pour le type d'engagements étudié égale à la somme de deux termes définis par les formules suivantes ⁷⁶ :

$$MS_1 = 4 \% \cdot PM_{brut} \cdot \max \left\{ 85 \% ; \frac{PM_{net}}{PM_{brut}} \right\}$$

$$MS_2 = 0,3 \% \cdot CR_{brut} \cdot \max \left\{ 50 \% ; \frac{CR_{net}}{CR_{brut}} \right\}$$

où :

- ✓ PM_{brute} : le montant des provisions mathématiques brut de réassurance ;
- ✓ PM_{nette} : le montant des provisions mathématiques net de réassurance ;
- ✓ CR_{brute} : le montant des capitaux sous risque brut de réassurance ;
- ✓ CR_{nette} : le montant des capitaux sous risque net de réassurance.

⁷⁶ Cf. article R334-13 du Code des Assurances.

L'application de la formule suivante est fournie au travers du tableau suivant :

PM_{brut} en M€	PM_{net} en M€	MS_I en M€
150,80	75,40	5,13

Le montant des capitaux sous risque étant nuls, le montant de l'exigence de marge de solvabilité est réduit à 5,13 M€. Dans le cadre fixé par le dispositif Solvabilité I, l'évaluation de l'exigence de marge de solvabilité ne tient pas compte de la typologie des différents risques (marché, souscription, contrepartie et opérationnel). Le mode de calcul, forfaitaire ne reflète donc pas l'exposition réelle de la compagnie.

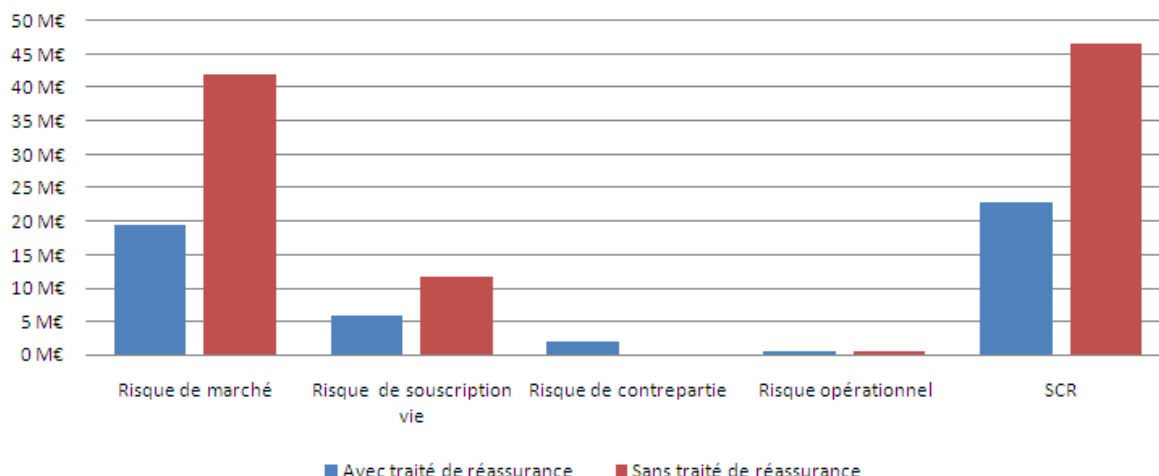
D'autre part, le contrôle de la solvabilité d'un assureur ne repose plus uniquement sur la satisfaction à l'exigence de marge de solvabilité, la réponse ne pouvant être que binaire. Dorénavant, le capital requis s'interprète comme un indicateur plus flexible, jouant le rôle de clignotant dans le contrôle de la solvabilité. Le MCR (non calculé ici) est, d'un point de vue fonctionnel, plus proche de l'exigence de marge.

Néanmoins, on note que le montant de l'exigence de marge constituée est relativement proche du capital requis par le risque de souscription soit 5,81 M€. Autrement dit, le point de convergence entre les deux référentiels se trouvent dans la prise en compte d'un même niveau capital requis pour face aux risques dits de souscription c'est-à-dire ceux liés à la spécificité de l'organisme assureur. En fin de compte, l'exigence de marge Solvabilité I a pour l'objet de couvrir les aléas systématiques liés à l'activité propre de l'assureur, les risques financiers n'étant pas pris en compte dans cette approche. En revanche, ce système intègre une part de ces aléas directement dans la marge de prudence des provisions techniques. Ainsi, on retrouve un écart de 12,39 M€ (20,27 M€ si on considère la provision négative au titre des actifs dans dispositif Solvabilité II) entre les provisions dans les deux référentiels, ce qui *a priori* bien qu'un peu faible n'est pas très éloigné du montant de capital requis par les risques de marché (19,46 M€), l'allocation d'actifs n'ayant peut être pas été complètement optimisée.

Chapitre 6. Conclusion de la partie

La présente partie a permis de développer l'approche « formule standard » retenue par le QIS4 pour évaluer la solvabilité d'un organisme assureur gérant un portefeuille de retraite supplémentaire. Au travers de la démarche suivie, les différents risques auquel ce dernier est exposé ont pu être mis en exergue ainsi que les chargements en capitaux qu'ils génèrent.

Le graphique suivant reprend les principaux résultats :



La mise en place d'un traité de réassurance en quote-part (taux de cession de 50 %) permet de réduire le montant du capital requis de plus de 51,4 %. Ce dispositif s'avère être une mesure de réduction de risque avantageuse pour le régime du point de vue de la solvabilité, la part de capital requis par le risque de contrepartie restant relativement faible (1,88 M€) au regard des autres risques.

Dans le référentiel Solvabilité II, les actifs sont évalués à leur valeur de marché et sont donc augmentés des plus ou moins value latentes. En effet, ils sont cotés sur des marchés suffisamment liquides et actifs pour que l'information puisse être considérée comme fiable.

Les provisions techniques, évaluées *best estimate*, sont augmentées de la *risk margin*, calculée selon la méthode du coût du capital. Conformément à ces principes, le bilan Solvabilité II du régime étudié est présenté ci-dessous :

<i>Bilan Solvabilité II (en M€)</i>			
<i>Actif</i>		<i>Passif</i>	
<i>Obligations</i>	227,97	<i>Fonds propres</i>	175,67
<i>Actions</i>	26,74	<i>Provisions techniques (best estimate et risk margin)</i>	148,24
<i>Provisions techniques de réassurance</i>	69,21		
<i>Total</i>	323,92	<i>Total</i>	323,92

Le montant des provisions techniques dans le référentiel Solvabilité II est composé à plus de 93 % par le *best estimate*. Le montant de fonds propres détenu par l'entité permet de répondre à l'exigence en matière de solvabilité imposée par le dispositif européen, le montant

des capitaux requis étant de 22,70 M€. Au surplus, le ratio de couverture dépasse les 87 %, laissant à la disposition de l'entité un surplus de 152,98 M€.

En norme française, les actifs financiers sont évalués en valeur comptable et les provisions techniques sont calculées sur la base d'un taux technique égal à 60 % du TME. Conformément à ces principes, le bilan en norme française est présenté ci-dessous :

<i>Bilan Norme Française (en M€)</i>			
<i>Actif</i>		<i>Passif</i>	
<i>Obligations</i>	230,23	<i>Fonds propres</i>	180,70
<i>Actions</i>	25,87	<i>Provisions techniques</i>	150,80
<i>Provisions techniques de réassurance</i>	75,40		
<i>Total</i>	331,50	<i>Total</i>	331,50

Le montant des provisions techniques dans le référentiel local est relativement proche de celui constitué dans le référentiel Solvabilité II. *A contrario*, l'exigence de marge, proportionnelle au montant des provisions, semble suffisante pour ne couvrir que les risques de souscription, une partie des risques de marché étant en fait intégrée dans le principe de prudence des provisions techniques. On dénote cependant dans ce dispositif son caractère forfaitaire ce qui ne laisse aucune place à l'analyse des risques et donc aux ajustements possibles à la hausse comme à la baisse. Par ailleurs, on note que la prise en compte d'un dispositif de réassurance est sommaire dans le référentiel actuel. Enfin, on n'observe pas de notion équivalente à la *risk margin* et l'absence de valorisation du coût du capital engendré par l'immobilisation de l'exigence de marge.

Au global, on retient que le manque de fonds propres n'est pas une difficulté première auquel le régime est directement exposé. En revanche, la présente mise en opposition des deux systèmes de mesure de la solvabilité permet de mettre en lumière les insuffisances du référentiel actuel en matière d'analyse des risques.

PARTIE IV. CONSTRUCTION D'UN MODELE INTERNE PARTIEL

Dans le cadre du Projet Solvabilité II, un assureur a la possibilité de déroger à la formule standard et de mettre en place un modèle interne afin d'adapter le niveau de SCR à son profil de risque. Cette alternative est souvent mise en œuvre par le biais d'un modèle interne partiel, pour lequel seuls certains modules de la formule standard sont réajustés. L'objet de cette partie est de décrire les modalités de construction d'un modèle interne partiel adapté au régime étudié.

Selon les spécifications du QIS4, un tel modèle doit respecter les principes de la formule standard. En particulier, il doit respecter l'exigence imposée en termes de prudence de 99,5 % sur un horizon d'un an.

Par conséquent, le SCR correspond au capital à détenir en $t = 0$ pour que la probabilité de ruine à horizon d'un an soit limitée à 0,5 %.

Chapitre 1. Enjeux de la mise en place d'un modèle interne

Le développement d'un modèle interne vise à déterminer de manière optimale l'exigence de fonds propres soulevée par les risques encourus. L'entité désireuse de mettre en place cette démarche possède en effet des éléments lui permettant d'apprécier ces risques plus finement que l'approche « formule standard ». Précisons cependant que ce procédé n'exclut pas l'application de cette dernière pour autant. En effet, l'article 10 de la Directive européenne Solvabilité II exige l'application de cette méthode pendant les deux années suivant l'approbation du modèle interne.

De part la modélisation souvent élaborée des risques, la mise en œuvre d'un tel modèle est un processus complexe qui nécessite la définition d'objectifs raisonnables en termes de complexité et de faisabilité. Au surplus, le modèle interne ne doit pas être un simple outil d'évaluation de la solvabilité mais doit trouver sa place dans un processus plus global et doit participer à la bonne gestion de l'organisme assureur.

En termes opérationnels, la mise en place d'un modèle interne, même partiel, est un processus long et coûteux dont l'architecture comporte au moins trois points techniques majeurs. Dans un premier temps, il s'agit d'identifier les différents facteurs de risques affectant l'activité et de définir la modélisation retenue pour chacun d'eux. Dans un second temps, le modèle doit définir la structure de dépendance entre les différentes sources d'incertitude identifiées à l'étape précédente. Enfin, il s'agit de définir une méthode d'agrégation des différents risques entre eux afin de pouvoir calculer le besoin en capital requis par l'activité, ce dernier devant répondre aux exigences prudentielles fixés par Solvabilité II.

Le but de cette partie est d'illustrer quelques limites de l'approche « formule standard » pouvant être solutionnées par le biais d'une approche « modèle interne ».

Section 1.1. Quantification du besoin en capital associé à un risque

L'approche « formule standard » est basée le plus souvent dans Solvabilité II sur l'impact de chocs, dont la valeur est calibrée pour répondre aux contraintes prudentielles, sur la valeur de l'actif net de l'entreprise d'assurance. Dans ces circonstances, elle ne tient pas compte du profil de risque associé, car il est supposé être intégré dans les chocs.

Dans certain cas, cette convention présente des lacunes et donne une mauvaise approximation du besoin en capital. La mise en place de processus de couverture pour gérer les risques associés à des garanties financières entre dans ce périmètre⁷⁷. En effet, la mise en place de telles couvertures vise à réduire le risque financier en ajustant au fil de l'eau le portefeuille d'actifs aux conditions de marché et à l'évolution du portefeuille. Cependant, le profil de risque n'étant actuellement pas pris en compte dans la « formule standard », le besoin en capital est alors artificiellement majoré par rapport au besoin réel. *A contrario*, le besoin en capital est trop faible en l'absence de couverture.

Ainsi, les modèles développés dans le cadre de cette approche sont souvent associés à des problématiques de détermination de profil de risque et de mesure de risque.

Section 1.2. Agrégation des SCR unitaires

Une des problématiques centrales du projet Solvabilité II est de proposer une méthode de calcul du SCR global, l'objectif étant de limiter la probabilité de ruine à un an à 99,5 %. Dans la « formule standard », le SCR global résulte de l'agrégation de SCR unitaires par une formule en racine carrée. D'un point de vue théorique, cette formule est correcte si l'hypothèse sous jacente de normalité de la distribution conjointe des risques et des distributions marginales est respectée et si la mesure de risque utilisée est la VaR où la TVaR (les deux sont équivalentes si le risque est gaussien). De nombreuses réflexions sont en cours sur ces sujets. Néanmoins, on peut citer PFEIFER et STRASSBURGER (2008) qui présente les enjeux liés à la formule d'agrégation du SCR ou encore DEVINEAU et LOISEL (2009b) qui compare la convergence des méthodes d'agrégation « formule standard » et « modèle interne ».

A titre d'exemple, considérons deux risques gaussiens (X_1, X_2) d'espérance (μ_1, μ_2) et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$. On a alors pour $i \in \{1, 2\}$:

$$VaR(X_i, \alpha) = \mu_i + \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \text{ et } TVaR(X_i, \alpha) = \mu_i + \sigma_i \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2}\right\}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \alpha}}$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

⁷⁷ Cf. PLANCHET (2009c) pour plus de précisions.

La valeur du SCR est alors donnée pour $i \in \{1, 2\}$:

$$SCR_i = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \text{ pour la VaR} \\ \exp\left\{-\frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2}\right\} \\ \sigma_i \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2}\right\}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \alpha}} \text{ pour la TVaR} \end{array} \right\}$$

Ainsi, sachant que $V[X_1 + X_2] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$, le SCR global vaut :

$$SCR = \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2 + 2 \cdot \rho \cdot SCR_1 \cdot SCR_2}$$

Cependant, dès lors que l'on s'écarte du cadre gaussien, la formule en racine carrée n'est plus valable. En effet, la VaR d'une somme dépend à la fois de la structure de dépendance entre les risques et des marginales. Pour reprendre PFEIFER et STRASSBURGER (2008), on peut vérifier que la formule en racine carrée revient tantôt à surestimer, tantôt à sous estimer le SCR global lorsque les marginales sont des lois Bêta indépendantes. Si les risques sont non corrélés mais dépendants, la « formule standard » fournit à nouveau des résultats erratiques.

Dans ces circonstances, la simple calibration de la « formule standard » par la formule d'agrégation en racine carrée n'est pas suffisante dès lors que l'on sort du cadre gaussien, voir elliptique. Par conséquent, l'utilisation d'un modèle interne apparaît justifiée pour solutionner ces problèmes.

Chapitre 2. Modèles d'actifs

Le choix d'un modèle d'actifs est un élément délicat dans la mise en place d'un modèle interne. Il doit en effet être accompagné d'une analyse méthodique des risques impactant l'assureur afin d'identifier les informations susceptibles d'être utilisées pour caractériser les risques et pour alimenter le modèle. Classiquement, les différents supports d'investissement intégrés dans la gestion sont les suivants :

- ✓ obligations ;
- ✓ actions ;
- ✓ immobilier ;
- ✓ monétaire.

Deux types de modèles d'actifs sont généralement utilisés en assurance dans le cadre des problématiques d'allocations d'actifs⁷⁸ :

- ✓ les modèles composites s'appuient sur une description de chaque classe d'actifs puis les agrègent, en introduisant des corrélations, pour proposer une description globale de l'actif ;
- ✓ les modèles intégrés proposent une description structurée de plusieurs classes d'actifs, reliées entre elles par une variable explicative de référence (l'inflation par exemple).

Dans le cadre de l'évaluation *market consistent* des différents postes du bilan, le modèle d'actifs utilisé doit s'inscrire dans une logique de long terme et respecter les équilibres macro-économiques tout en prenant en compte les variations à court terme de la valeur des actifs. L'inflation, compte tenu de sa prépondérance dans la réalisation de ces équilibres (voir Partie I.1.3.2) et de son rôle dans les dispositifs de revalorisation des pensions, doit faire l'objet d'une attention particulière.

En outre, le modèle choisi ne peut faire l'économie d'une modélisation cohérente de la dépendance entre les classes d'actifs. En effet, bien que la théorie financière actuelle propose des modélisations des risques relativement avancées, les corrélations entre ces derniers sont encore mal gérées. En effet, la crise financière et économique qui sévit à l'échelle mondiale depuis 2008 a mis en évidence les faiblesses de ces modélisations. Ces événements conduisent à repenser les modèles et à tenir compte d'une interconnexion structurelle de plus en plus profonde entre les différents marchés (actions, crédits, immobiliers, etc.). Un chantier à venir consiste à intégrer la déformation des structures de dépendance avec le temps et la volatilité sur les marchés, le lien devenant plus tenu en période de crise, par le biais notamment des dépendances de queues. L'objectif est alors d'intégrer à l'analyse de la solvabilité les mécanismes de contagion d'une situation défavorable sur un marché vers les autres secteurs de l'économie. Précisons que l'efficacité de la gestion des risques financiers par diversification, pratiquée par les assureurs pour minimiser l'impact systématique de ces derniers, est considérablement réduite si l'on considère un lien de dépendance dynamique entre les classes d'actifs.

Différentes grandeurs comme l'inflation ou le taux de change peuvent être considérées comme des déterminants de la dépendance entre les classes d'actifs et permettent de prendre en compte, au moins en partie, ces phénomènes. Cependant l'utilisation de ces grandeurs dans un modèle composite est délicate, l'inflation par exemple affectant chaque type d'actifs. Ainsi, l'approche retenue consiste à considérer un modèle intégré.

Par la suite, le modèle intégré d' AHLGRIM et AL. (2005) est retenu afin de répondre à cette problématique. Ce dernier propose en effet une modélisation intéressante des différentes classes d'actifs, en adéquation avec les principes économiques. Cette modélisation est plus stable et plus homogène que celle de WILKIE (1995) par exemple et bénéficie de surcroît du soutien de la *Casualty Actuarial Society* et de la *Society Of Actuaries*.

⁷⁸ Cf. PLANCHET (2009b).

L'utilisation de ce modèle nécessite de l'alimenter avec un ensemble de paramètres cohérent avec son utilisation. Trois approches sont classiquement retenues :

- ✓ l'approche historique consiste à calibrer les paramètres à partir de séries historiques ;
- ✓ l'approche implicite conduit à déterminer les paramètres du modèle représentant de manière optimale le prix de la grandeur d'intérêt ;
- ✓ l'avis d'expert permet, à l'inverse des précédentes approches, de ne pas présupposer la répétition des comportements passés et de tenir compte de certaines situations exceptionnelles.

La démarche décrite ci-dessous s'inspire de celle de PLANCHET, THEROND et KAMEGA (2009).

Section 2.1. Simulation des trajectoires d'actifs

Les processus permettant de modéliser les taux d'inflation, les taux d'intérêts et les rendements des actions sont construits sur la base d'équations de diffusion. Que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour générer des tables de *scénarii*, une mise en œuvre pratique de ces processus nécessite une discrétisation au préalable. La discrétisation peut être exacte ou bien approximative. Dans ce dernier cas, l'utilisation de schémas de développement comme ceux d'Euler ou de Milstein est préconisée⁷⁹.

Ces schémas permettent une discrétisation approximative d'équation différentielle stochastique. Ce sont des développements d'Itô-Taylor aux ordres 1 et 2 de l'équation différentielle étudiée.

Soit X un processus stochastique défini par l'équation suivante :

$$dX_t = \mu(X_t, t) \cdot dt + \sigma(X_t, t) \cdot dB_t$$

avec B un mouvement brownien.

2.1.1. Schéma d'Euler

Notons \tilde{X} , l'approximation discrète de X . L'approximation d'Euler est alors construite *via* la formule :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t) \cdot \delta + \sigma(\tilde{X}_t, t) \cdot \sqrt{\delta} \cdot \varepsilon$$

avec δ , le pas de discrétisation et $\varepsilon \sim N(0,1)$.

⁷⁹ Cette partie est adaptée de PLANCHET et THEROND (2005)

2.1.2. Schéma de Milstein

Notons \tilde{X} , l'approximation discrète de X . L'approximation d'Euler est alors construite via la formule :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t) \cdot \delta + \sigma(\tilde{X}_t, t) \cdot \sqrt{\delta} \cdot \varepsilon + \frac{\partial \sigma(\tilde{X}_t, t)}{\partial X} \cdot \sigma(\tilde{X}_t, t) \cdot \delta \cdot (\varepsilon^2 - 1)$$

avec δ , le pas de discrétisation et $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Dans la suite, le schéma d'Euler sera retenu, si aucune discrétisation exacte n'est possible.

Section 2.2. Description du modèle

Le modèle d' AHLGRIM et AL. (2005) est un modèle intégré qui permet la modélisation des différentes classes d'actifs. Pour les besoins de cette étude, seuls les modèles relatifs à l'inflation, aux taux d'intérêts et aux actifs risqués sont repris.

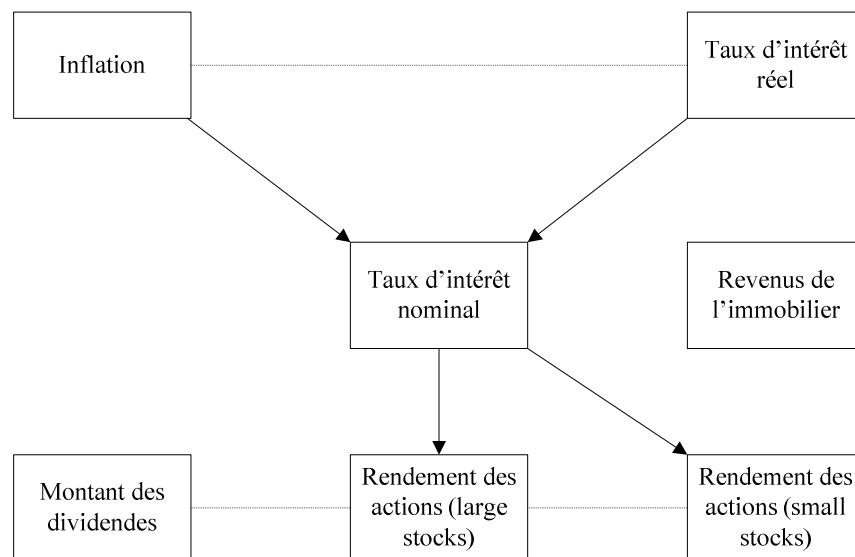


Fig. 22 - La structure du modèle d'AHLGRIM et AL. (2005)

2.2.1. Inflation

L'inflation est modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck via l'équation de diffusion :

$$dq_t = \kappa_q \cdot (\mu_q - q_t) \cdot dt + \sigma_q \cdot dB_{q,t}$$

où :

- ✓ q_t : l'inflation à la date t ;
- ✓ κ_q : la vitesse de retour à la moyenne ;
- ✓ μ_q : l'inflation moyenne ;
- ✓ σ_q : la volatilité ;
- ✓ B_q : un mouvement brownien.

D'après la formule d'Itô, on obtient :

$$q_{t+\delta} = \mu_q + e^{-\kappa_q \cdot \delta} \cdot (q_t - \mu_q) + e^{-\kappa_q \cdot (t+\delta)} \int_t^{t+\delta} \sigma_q \cdot e^{\kappa_q \cdot s} dB_{q,s}$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte, reprise par la suite pour les simulations :

$$q_{t+\delta} = q_t \cdot e^{-\kappa_q \cdot \delta} + \mu_q \cdot (1 - e^{-\kappa_q \cdot \delta}) + \sigma_q \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q \cdot \delta}}{2 \cdot \kappa_q}} \cdot \varepsilon_{q,t}$$

où ε_q : une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

La revalorisation des pensions au niveau de l'inflation utilise la suite des indices des prix à la consommation $(IPC_t)_{t \geq 0}$. Ces derniers sont obtenus par la formule suivante :

$$\frac{IPC_{t+T}}{IPC_t} = \exp \left\{ \int_t^{t+T} q_s ds \right\}$$

Il faut alors calculer la quantité $\mathbf{E}^Q \left[\frac{IPC_{t+T}}{IPC_t} \mid \Phi_t \right]$ qui admet une solution sous la forme d'une formule fermée. En effet, le processus q_t étant gaussien, la formule vient directement de l'expression de la transformée de Laplace d'une gaussienne :

$$\mathbf{E}^Q \left[\frac{IPC_{t+T}}{IPC_t} \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ \mathbf{E}^Q \left[\int_t^{t+T} q_s ds \mid \Phi_t \right] + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{V}^Q \left[\int_t^{t+T} q_s ds \mid \Phi_t \right] \right\}$$

On obtient :

$$\mathbf{E}^Q \left[\int_t^{t+T} q_s ds \mid \Phi_t \right] = \mu_q \cdot T + (q_t - \mu_q) \cdot \left(\frac{1 - e^{-\kappa_q \cdot T}}{\kappa_q} \right)$$

$$\mathbf{V}^Q \left[\int_t^{t+T} q_s ds \mid \Phi_t \right] = \frac{\sigma_q^2}{\kappa_q^2} \cdot \left(T - \frac{(1 - e^{-\kappa_q \cdot T})}{\kappa_q} - \frac{(1 - e^{-\kappa_q \cdot T})^2}{2 \cdot \kappa_q} \right)$$

$$\mathbf{E}^Q \left[\frac{IPC_{t+T}}{IPC_t} \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ \mu_q \cdot T + (q_t - \mu_q) \cdot \left(\frac{1 - e^{-\kappa_q \cdot T}}{\kappa_q} \right) + \frac{\sigma_q^2}{2 \cdot \kappa_q^2} \cdot \left(T - \frac{(1 - e^{-\kappa_q \cdot T})}{\kappa_q} - \frac{(1 - e^{-\kappa_q \cdot T})^2}{2 \cdot \kappa_q} \right) \right\}$$

La démarche coïncidant avec celles menées habituellement pour les taux d'intérêts, on introduit le prix d'un zéro-coupon pour l'inflation à la date t et d'échéance $t+T$, noté $P_{inf}(t, T)$, exprimé sous une forme classique :

$$P_{inf}(t, T) = \mathbf{E}^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t+T} q_s ds \right\} \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ \frac{1 - e^{-\kappa_q \cdot T}}{\kappa_q} \cdot (R_\infty - q_t) - T \cdot R_\infty - \frac{\sigma_q^2}{4 \cdot \kappa_q^3} \cdot (1 - e^{-\kappa_q \cdot T})^2 \right\}$$

où $R_\infty = \mu_q - \frac{\sigma_q^2}{2 \cdot \kappa_q^2}$.

2.2.2. Taux d'intérêts réels

Les taux d'intérêts réels sont modélisés par un processus de HULL et WHITE (1994), basé sur la structure d'un modèle de VASICEK (1977). Le modèle distingue un taux court et un taux long.

$$dr_t = \kappa_r \cdot (l_t - r_t) \cdot dt + \sigma_r \cdot dB_{r,t}$$

$$dl_t = \kappa_l \cdot (\mu_l - l_t) \cdot dt + \sigma_l \cdot dB_{l,t}$$

où :

- ✓ r_t : le taux d'intérêt réel à court terme à la date t ;
- ✓ l_t : le taux d'intérêt réel à long terme à la date t ;
- ✓ κ_r, κ_l : les vitesses de retour à la moyenne ;
- ✓ μ_l : le taux d'intérêt à long terme moyen ;
- ✓ σ_r, σ_l : les volatilités ;

✓ B_r, B_l : les mouvements browniens.

Ces équations admettent une discrétisation exacte qui sera utilisée pour la simulation :

$$r_{t+\delta} = r_t \cdot e^{-\kappa_r \cdot \delta} + l_t \cdot (1 - e^{-\kappa_r \cdot \delta}) + \sigma_r \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_r \cdot \delta}}{2 \cdot \kappa_r}} \cdot \varepsilon_{r,t}$$

$$l_{t+\delta} = l_t \cdot e^{-\kappa_l \cdot \delta} + \mu_l \cdot (1 - e^{-\kappa_l \cdot \delta}) + \sigma_l \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_l \cdot \delta}}{2 \cdot \kappa_l}} \cdot \varepsilon_{l,t}$$

où $\varepsilon_r, \varepsilon_l$ sont des variables aléatoires de loi normale centrée réduite.

L'expression du prix d'un zéro-coupon réel à la date t et d'échéance $t+T$, noté $P_{reel}(t, T)$ s'écrit⁸⁰ :

$$P_{reel}(t, T) = \mathbf{E}^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t+T} r_s ds \right\} \mid \Phi_t \right] = \exp \{ A(T) - B_r(T) \cdot r_t - B_l(T) \cdot l_t \}$$

où :

$$✓ \quad B_r(s) = \frac{1 - e^{-\kappa_r \cdot s}}{\kappa_r} ;$$

$$✓ \quad B_l(s) = \frac{\kappa_r}{\kappa_r - \kappa_l} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\kappa_l \cdot s}}{\kappa_l} - \frac{1 - e^{-\kappa_r \cdot s}}{\kappa_r} \right) ;$$

$$A(s) = (B_r(s) - s) \cdot \left(\mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2 \cdot \kappa_r^2} \right) + B_l(s) \cdot \mu_l - \frac{\sigma_r^2 \cdot B_r(s)^2}{4 \cdot \kappa_r}$$

$$✓ \quad + \frac{\sigma_l^2}{2} \cdot \left(\frac{s}{\kappa_l^2} - 2 \cdot \frac{B_l(s) + B_r(s)}{\kappa_l^2} + \frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_r \cdot s}}{2 \cdot \kappa_r \cdot (\kappa_r - \kappa_l)^2} - \frac{2 \cdot \kappa_r \cdot (1 - e^{-(\kappa_r + \kappa_l) \cdot s})}{\kappa_l \cdot (\kappa_r + \kappa_l) (\kappa_r - \kappa_l)^2} + \frac{\kappa_r^2 \cdot (1 - e^{-2 \cdot \kappa_l \cdot s})}{2 \cdot \kappa_l^3 \cdot (\kappa_r - \kappa_l)^2} \right)$$

La courbe des taux zéro-coupon $R_{reel}(t, T)$ est alors obtenue *via* la formule :

$$R_{reel}(t, T) = - \frac{\ln \{ P_{reel}(t, T) \}}{T}$$

⁸⁰ Cf. HIBBERT, MOWBRAY et TURNBULL (2001).

2.2.3. Taux d'intérêts nominaux

Le prix d'un zéro-coupon nominal à la date t et d'échéance $t+T$, noté $P_{nom}(t, T)$ s'écrit avec $r_s^{nom} = r_s + q_s$:

$$P_{nom}(t, T) = \mathbf{E}^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t+T} r_s^{nom} ds \right\} \middle| \Phi_t \right] = \mathbf{E}^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t+T} (r_s + q_s) ds \right\} \middle| \Phi_t \right]$$

Les dynamiques de taux d'intérêt réel et de taux d'inflation étant indépendantes, on obtient l'expression suivante⁸¹ :

$$P_{nom}(t, T) = P_{inf}(t, T) \cdot P_{reel}(t, T)$$

Ainsi, la courbe des taux zéro-coupon $R_{reel}(t, T)$ est alors obtenue *via* la formule :

$$R_{nom}(t, T) = - \frac{\ln \{ P_{nom}(t, T) \}}{T}$$

2.2.4. Actif risqué

Le modèle d'actifs décrit par AHLGRIM et AL. (2005) suggère de modéliser le rendement des actions hors dividendes s_t selon la formule :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

où x_t représente l'excès de rendement attribuable à l'appréciation du capital. Ce dernier est décrit selon l'approche proposée par HARDY (2001), basée sur un modèle à changement de régime à l'excès de rendements totaux des actions.

AHLGRIM et AL. (2005) propose alors de modéliser les taux de dividendes y_t *via* la formule :

$$d(\ln \{ y_t \}) = \kappa_y \cdot (\mu_y - \ln \{ y_t \}) \cdot dt + \sigma_y \cdot dB_{y,t}$$

où :

- ✓ κ_y : la vitesse de retour à la moyenne ;
- ✓ μ_y : le logarithme du taux de dividende moyen ;
- ✓ σ_y : la volatilité ;

⁸¹ Cf. HIBBERT, MOWBRAY et TURNBULL (2001) pour l'expression de cette grandeur dans le cas non indépendant.

- ✓ B_y : un mouvement brownien.

Le modèle action décrit par AHLGRIM et AL. (2005) rencontre cependant certaines difficultés de mise en œuvre pratique. En effet, le calibrage des taux de dividende requiert l'usage de données privées. Par conséquent, une alternative est utilisée, conformément à la démarche suivie par PLANCHET, THEROND et KAMEGA (2009). Elle consiste à modéliser les rendements totaux des actions avec dividendes réinvestis *via* l'approche de HARDY (2001) généralisant Black et Scholes.

Le principe du modèle de HARDY (2001) repose sur l'association d'un régime ρ_t à chaque intervalle de temps $[t, t+1]$. Ainsi sur chaque intervalle, il reprend l'hypothèse de modélisation classique de rendements des actions x_t par un mouvement brownien géométrique dont les paramètres dépendent du régime applicable ρ_t :

$$x_t | \rho_t \sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2)$$

où :

- ✓ μ_{ρ_t} : la moyenne pour le régime ρ_t ;
- ✓ σ_{ρ_t} : l'écart type pour le régime ρ_t .

Le régime ρ_t en vigueur à la date t évolue selon une chaîne de Markov à deux états :

- ✓ Régime 1 : faible volatilité ;
- ✓ Régime 2 : forte volatilité.

Une matrice de transition, notée P , permet de passer d'un régime à l'autre :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{ où } p_{ij} = \Pr[\rho_{t+1} = j | \rho_t = i, \Theta] \quad i = 1, 2, j = 1, 2$$

Ainsi, le modèle suppose l'estimation de 6 paramètres :

$$\Theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21})$$

Pour la simulation, le processus modélisant la valeur des actions est approché par la méthode d'Euler.

Section 2.3. Détermination des paramètres réels du modèle

Les données utilisées pour le calibrage du modèle sont les données utilisées par FRIGGIT (2007). Celles-ci sont annuelles, afin de conserver les tendances de long terme et d'éliminer la variabilité à court terme, et s'étendent entre 1800 et 2005. Les données étant relativement erratiques avant 1955 (du fait notamment des Guerres Mondiales), on se limite à la période de 1955 à 2005 pour plus d'homogénéité.

FRIGGIT (2007) présente des données pour la France, le Royaume-Uni et les Etats Unis. Dans le cadre de cette étude, les données retenues sont les données françaises. PLANCHET, THEROND et KAMEGA (2009) ayant réalisé avec soin le calibrage de leur modèle sur ce même jeu de données, les étapes d'analyse des résidus et de validation des différents paramètres ne sont effectuées que si elles ne font pas l'objet d'un développement dans le présent ouvrage.

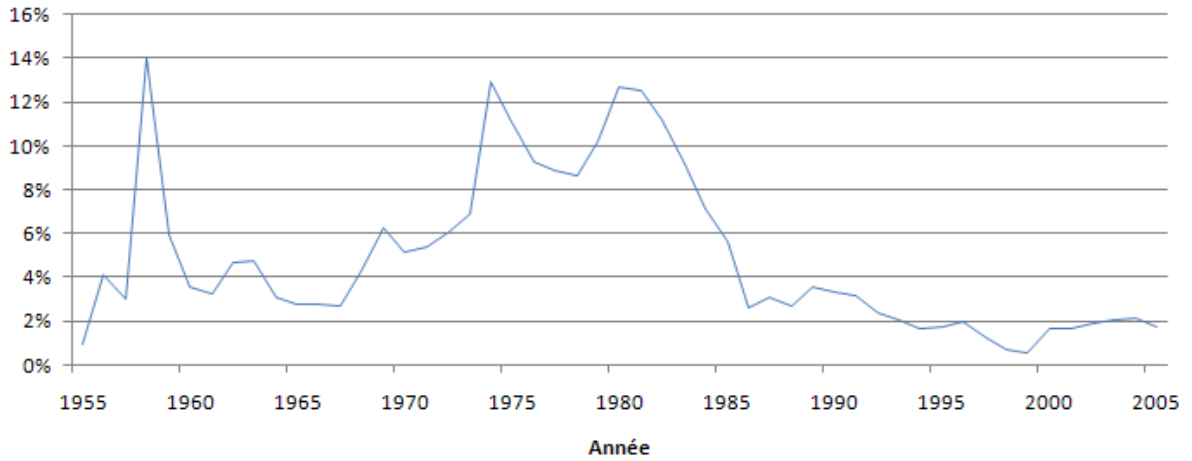


Fig. 23 - Evolution de l'inflation entre 1955 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

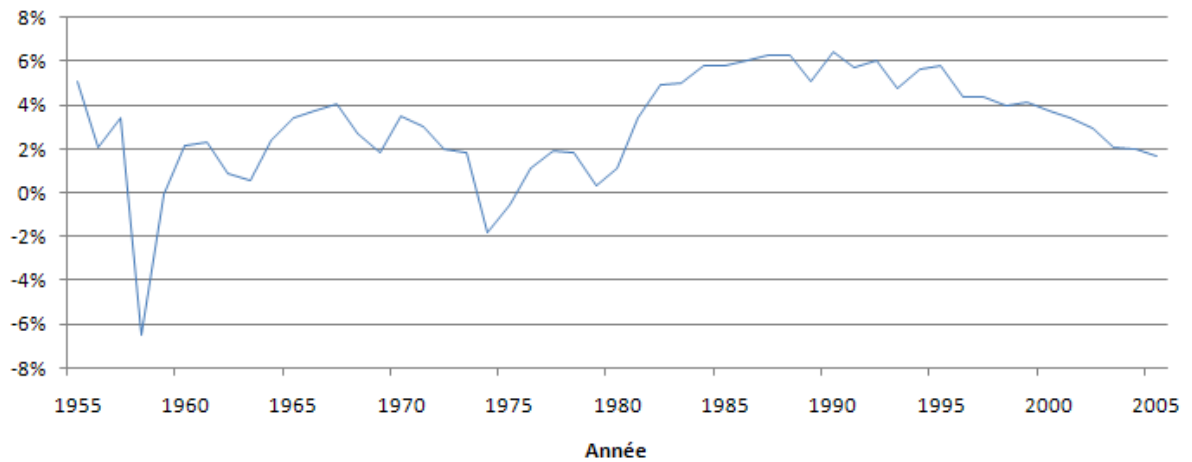


Fig. 24 - Evolution des taux réels longs entre 1955 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire

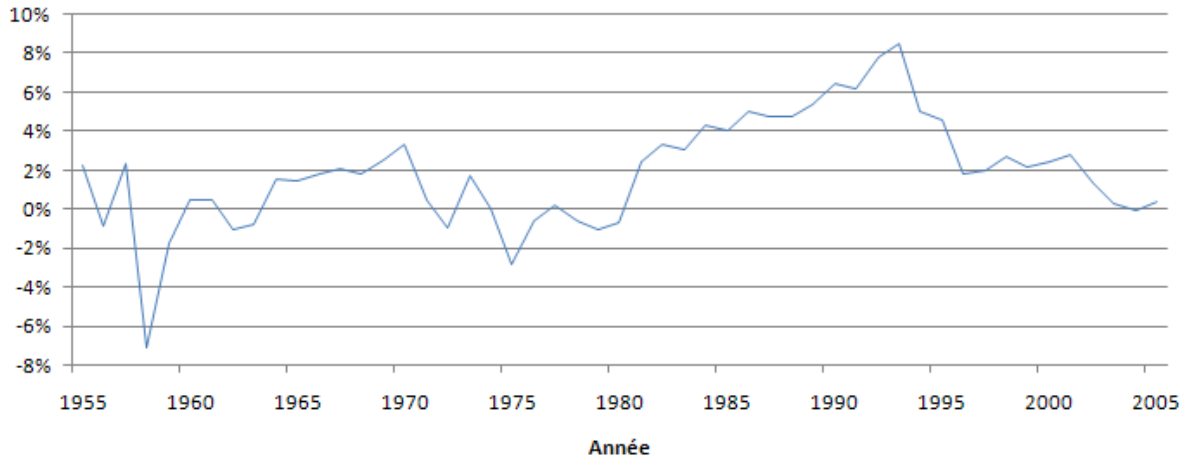


Fig. 25 - Evolution des taux réels courts entre 1955 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

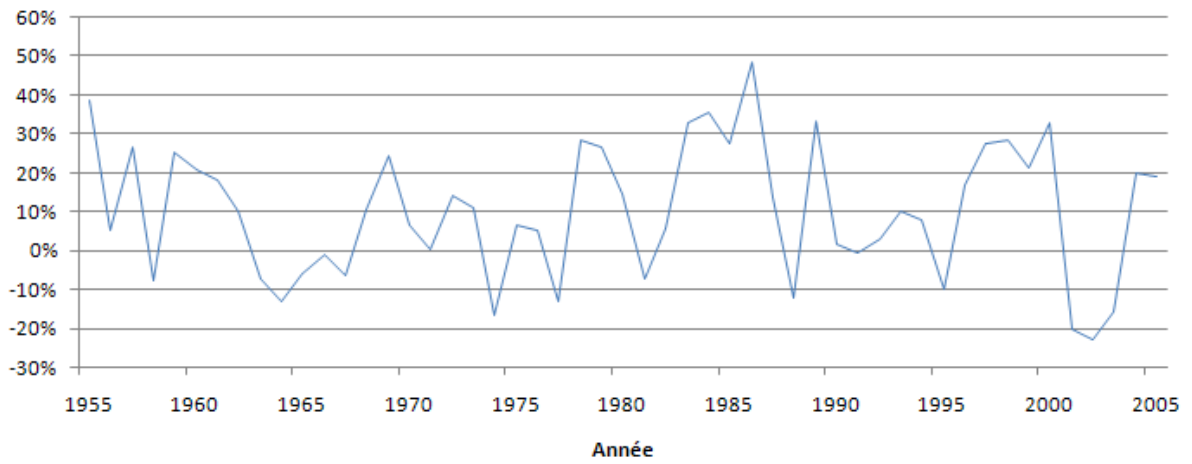


Fig. 26 - Evolution des rendements actions entre 1955 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

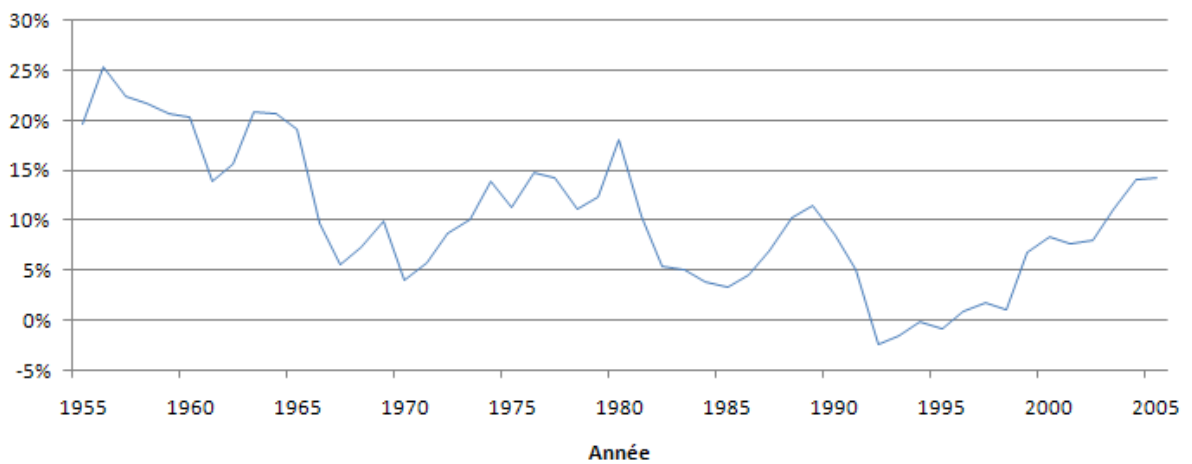


Fig. 27 - Evolution des rendements immobiliers entre 1955 et 2005 (Source : FRIGGIT (2007))

2.3.1. Inflation

Les données de FRIGGIT (2007) fournissent initialement la valeur de l'indice des prix à la consommation. A titre indicatif, les résultats du calibrage obtenues par AHLGRIM et AL. (2005) sur des données annuelles américaines entre 1946 et 2001 sont présentés. On passe de cette dernière au taux d'inflation par la formule :

$$\ln \left\{ \frac{IPC_{t+1}}{IPC_t} \right\} = q_t$$

A partir de l'équation de discrétisation de l'inflation, q_t peut s'écrire sous la forme d'un processus autorégressif d'ordre 1 :

$$q_{t+1} = \alpha_q + \beta_q \cdot q_t + \varepsilon'_{q,t}$$

où :

$$\checkmark \quad \alpha_q = \mu_q \cdot (1 - e^{-\kappa_q}) ;$$

$$\checkmark \quad \beta_q = e^{-\kappa_q} ;$$

$$\checkmark \quad \varepsilon'_{q,t} = \sigma_q \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_q}}{2 \cdot \kappa_q}} \cdot \varepsilon_{q,t} \text{ de variance } \sigma_q^2.$$

L'estimation des paramètres $\hat{\alpha}_q$, $\hat{\beta}_q$ et $\hat{\sigma}_q$ fournit les résultats suivants :

Paramètre	Valeur fixée par AHLGRIM et AL.	Valeur estimée à long terme
$\hat{\kappa}_q = -\ln(\hat{\beta}_q)$	0,47	0,261
$\hat{\mu}_q = \frac{\hat{\alpha}_q}{1 - \hat{\beta}_q}$	0,048	0,051
$\hat{\sigma}_q = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_q^2 \cdot 2 \cdot \hat{\kappa}_q}{1 - e^{-2 \cdot \hat{\kappa}_q}}}$	0,03	0,026

Les résultats ci-dessus donnent une inflation à long terme $\hat{\mu}_q$ qui peut sembler importante. Ceci s'explique par la présence de plusieurs cycles économiques depuis 1955 au cours desquels l'inflation a connu des variations importantes.

Néanmoins, rappelons l'objectif de stabilité des prix fixé auquel s'astreint la BCE correspondant au maintien des « taux d'inflation à un niveau inférieur à, mais proche de 2 % à moyen terme »⁸². Par conséquent, une estimation complémentaire est menée sur une période de 20 ans entre 1985 et 2005, afin d'avoir un aperçu de la tendance de moyen terme et de donner plus d'importance au présent. L'estimation des paramètres sous le logiciel R fournit les résultats suivants :

Residuals:				
Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.0111282	-0.0026791	0.0003111	0.0023812	0.0127723
Coefficients:				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.009730	0.003122	3.117	0.005951 **
Coeff1	0.487892	0.123133	3.962	0.000913 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				
Residual standard error: 0.006079 on 18 degrees of freedom				
Multiple R-squared: 0.4659, Adjusted R-squared: 0.4362				
F-statistic: 15.7 on 1 and 18 DF, p-value: 0.0009134				

Les résultats sont illustrés dans le tableau suivant :

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur estimée à moyen terme</i>
$\hat{\kappa}_q = -\ln(\hat{\beta}_q)$	0,718
$\hat{\mu}_q = \frac{\hat{\alpha}_q}{1 - \hat{\beta}_q}$	0,020
$\hat{\sigma}_q = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_q^2 \cdot 2 \cdot \hat{\kappa}_q}{1 - e^{-2 \cdot \hat{\kappa}_q}}}$	0,005

⁸² Cf. http://www.ecb.int/ecb/educational/facts/monpol/html/mp_002.fr.html.

Les résultats des tests d'adéquation du modèle et l'analyse des résidus⁸³ réalisés sous le logiciel R sont présentés dans le tableau suivant :

<i>Test</i>	<i>Résultat</i>	<i>Interprétation</i>
<i>R² ajusté</i>	0,43	Le pouvoir explicatif du modèle est de 43 %
<i>Fisher</i>	$9,13 \cdot 10^{-4}$	Le modèle global est significatif
<i>Student (constante)</i>	$5,95 \cdot 10^{-3}$	La constante est significative
<i>Student (variable)</i>	$9,13 \cdot 10^{-4}$	La variable est significative
<i>Moyenne résidus</i>	0	La moyenne des résidus est nulle
<i>Breusch-Godfrey</i>	0,31	Absence d'auto corrélation d'ordre 1
<i>ARCH(1)</i>	0,33	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
<i>Jarque-Bera</i>	0,97	Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

L'ensemble de ces tests conduisent à valider le modèle utilisé et le calibrage réalisé. Toutefois, on note que la qualité de l'ajustement obtenue est relativement faible. Ceci constituant une limite et il convient d'utiliser ces résultats avec un regard critique et plus particulièrement les tests de Student. Néanmoins, ces paramètres sont retenus pour la modélisation de l'inflation dans la suite de l'étude.

Cette estimation permet de fournir un taux d'inflation moyen légèrement inférieur à 2 %, répondant ainsi à l'objectif de la Banque Centrale Européenne. Des réserves peuvent cependant être émises à l'encontre de ces objectifs. En effet, les réponses adoptées par les Etats européens en matière de politique budgétaire pour faire face à la crise financière et économique qui sévit depuis 2008 conduit à l'explosion de la dette publique ce qui fait craindre une reprise de l'inflation dans les années à venir. Encore une fois, les hypothèses retenues doivent être considérées avec un regard critique.

2.3.2. Taux d'intérêts réels

Les taux d'intérêts à court terme et à long terme fournis par FRIGGIT (2007) sont les taux nominaux. A titre indicatif, les résultats du calibrage obtenues par AHLGRIM et AL. (2005) sur des données mensuelles (et annualisées) américaines entre 1982 et 2001 sont présentés. On passe de ces derniers au taux d'intérêts réels par la formule où i_r et i_l sont respectivement les taux nominaux à court et long terme :

$$i_r = (1+q) \cdot (1+r) - 1$$

$$i_l = (1+q) \cdot (1+l) - 1$$

⁸³ Cf. Annexe 4 pour une brève description de ces éléments. Les tests sont réalisés au niveau $\alpha = 5\%$

A partir des équations de discrétisation des taux, r_t et l_t sont estimés grâce à l'application des moindres carrés ordinaires :

$$l_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \cdot l_t + \varepsilon'_{l,t}$$

$$r_{t+1} = \alpha_1 \cdot \hat{l}_t + (1 - \alpha_1) \cdot r_t + \varepsilon'_{r,t}$$

où \hat{l}_t correspond à l'estimation de l_t .

où :

$$\checkmark \beta_1 = \mu_l \cdot (1 - e^{-\kappa_l}) ;$$

$$\checkmark \beta_2 = e^{-\kappa_l} ;$$

$$\checkmark \varepsilon'_{l,t} = \sigma_l \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_l}}{2 \cdot \kappa_l}} \cdot \varepsilon_{l,t} \text{ de variance } \sigma_l^2 ;$$

$$\checkmark \alpha_1 = 1 - e^{-\kappa_r} ;$$

$$\checkmark \varepsilon'_{r,t} = \sigma_r \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \kappa_r}}{2 \cdot \kappa_r}} \cdot \varepsilon_{r,t} \text{ de variance } \sigma_r^2 /$$

L'estimation des paramètres $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\sigma}_l$ conduit aux résultats suivant :

Paramètre	Valeur fixée par AHLGRIM et AL.	Valeur estimée
$\hat{\kappa}_l = -\ln(\hat{\beta}_2)$	5,1 0,1	0,451
$\hat{\mu}_l = \frac{\hat{\beta}_1}{1 - \hat{\beta}_2}$	0,028 0,028	0,029
$\hat{\sigma}_l = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_l^2 \cdot 2 \cdot \hat{\kappa}_l}{1 - e^{-2 \cdot \hat{\kappa}_l}}}$	0,1 0,0165	0,023

Dans un deuxième temps, l'estimation par les moindres carrés ordinaires des paramètres $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\sigma}'_r$ fournit les résultats suivant :

Paramètre	Valeur fixée par AHLGRIM et AL.	Valeur estimée
$\hat{\kappa}_r = -\ln(1 - \hat{\alpha}_1)$	6,1 1,0	0,369
$\hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}'_r \cdot 2 \cdot \hat{\kappa}_r}{1 - e^{-2 \cdot \hat{\kappa}_r}}}$	0,1 0,01	0,025

Les estimations obtenues sont sensiblement différentes mis à part le taux moyen. Ces différences s'expliquent par la nature des données prises par AHLGRIM et AL. (2005) qui sont mensuelles. Cette fréquence induit un bruit de court terme, source de surestimation de la volatilité des erreurs et de la vitesse de retour à la moyenne, que l'on ne retrouve pas à long terme. AHLGRIM et AL. (2005) reconnaissent d'ailleurs que les paramètres obtenus ne sont pas satisfaisant et fixe alors les paramètres (en gras dans le tableau), plus proche de ceux estimés avec les données de FRIGGIT (2007).

2.3.3. Actif risqué

L'estimation des paramètres du modèle à changement de régime de HARDY (2001) peut être réalisée sur des données historiques *via* une approche maximum de vraisemblance. Le calcul de cette dernière est effectué grâce à une approche itérative.

En notant S_t le prix des actions et $X_t = \ln \left\{ \frac{S_{t+1}}{S_t} \right\}$ le rendement des actions à la date t , la vraisemblance du modèle $L(\Theta, x_1, \dots, x_n)$ associée au paramètre $\Theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21})$ et aux observations (x_1, \dots, x_n) s'écrit, grâce à la formule de Bayes :

$$L(\Theta, x_1, \dots, x_n) = f_{\Theta}(x_1) \cdot f_{\Theta}(x_2 | x_1) \dots f_{\Theta}(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1)$$

avec $f_{\Theta} | \rho$ la densité associée à une loi normale $N(\mu_{\rho}, \sigma_{\rho}^2)$.

Le calcul de chaque élément $f_{\Theta}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1)$ est obtenue en utilisant la loi conjointe de $(x_t, \rho_t, \rho_{t-1})$ conditionnellement à x_{t-1}, \dots, x_1 :

$$f_{\Theta}(x_t, \rho_t, \rho_{t-1} | x_{t-1}, \dots, x_1) = p_{\Theta}(\rho_{t-1} | x_{t-1}, \dots, x_1) \cdot p_{\Theta}(\rho_t | \rho_{t-1}) \cdot f_{\Theta}(x_t | \rho_t)$$

Ainsi pour chaque date t , les trois termes ci-dessus doivent être calculés :

1. $f_{\Theta}(x_t | \rho_t)$ correspond à la densité conditionnelle du rendement ;
2. $p_{\Theta}(\rho_t | \rho_{t-1})$ correspond à la probabilité de transition entre deux états ;
3. $p_{\Theta}(\rho_{t-1} | x_{t-1}, \dots, x_1)$ s'écrit grâce à la formule des probabilités totales :

$$p_{\Theta}(\rho_{t-1} | x_{t-1}, \dots, x_1) = \frac{f_{\Theta}(x_{t-1}, \rho_{t-1}, \rho_{t-2} = 1 | x_{t-2}, \dots, x_1) + f_{\Theta}(x_{t-1}, \rho_{t-1}, \rho_{t-2} = 2 | x_{t-2}, \dots, x_1)}{f_{\Theta}(x_{t-1} | x_{t-2}, \dots, x_1)}$$

avec

$$f_{\Theta}(x_{t-1} | x_{t-2}, \dots, x_1) = \sum_{i,j \in \{1,2\}} f_{\Theta}(x_{t-1}, \rho_{t-1} = i, \rho_{t-2} = j | x_{t-2}, \dots, x_1)$$

Le calcul de la quantité $L(\Theta, x_1, \dots, x_n)$ est donc mené *via* une approche itérative. La première étape est initialisée de la sorte, grâce à la mesure stationnaire de la chaîne de Markov :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Theta}(x_1, \rho_1 = i) = \pi_i \cdot N\left(\frac{x_1 - \mu_i}{\sigma_i}\right), i = 1, 2 \\ \pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}} \\ \pi_2 = 1 - \pi_1 \end{array} \right.$$

Par ailleurs, on considère $p_{\Theta}(\rho_1 | x_1) = \frac{f_{\Theta}(\rho_1, x_1)}{f_{\Theta}(x_1)}$ avec

$$f_{\Theta}(x_1) = f_{\Theta}(\rho_1 = 1, x_1) + f_{\Theta}(\rho_1 = 2, x_1).$$

L'estimation des paramètres menés dans HARDY (2001) est réalisée par une approche maximum de vraisemblance sur deux indices : le TSE 300 et le S&P 500. Notons que le calibrage effectué sur l'indice S&P 500 se base sur des données historiques de l'indice couvrant la période 1956-1999.

Les données fournies par FRIGGIT (2007) traduisent avec une périodicité annuelle l'investissement en actions. Les 51 données disponibles ne sont alors pas suffisantes pour mener une estimation robuste du paramètre $\Theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21})$. En effet, le calibrage du modèle de HARDY (2001) doit être réalisé sur un historique de données suffisamment long et de préférence sur des données mensuelles pour connaître avec précision la valeur des probabilité de transition.

En conséquence, le calibrage du modèle est réalisé à partir des données historiques de l'indice CAC40 sur la période mars 1990 – décembre 2005⁸⁴. Conformément à l'approche décrit plus haut, l'excès de rendement est alors estimé à chaque date t :

$$x_t = \ln \left\{ \frac{S_t}{S_{t-1}} \right\} - q_t - r_t$$

avec S_t la valeur de l'indice CAC40 à la date t . Les valeurs de q_t et de r_t sont fournies à partir des données de FRIGGIT (2007), que l'on aura préalablement interpolées linéairement afin d'obtenir des grandeurs pour chaque mois manquant.

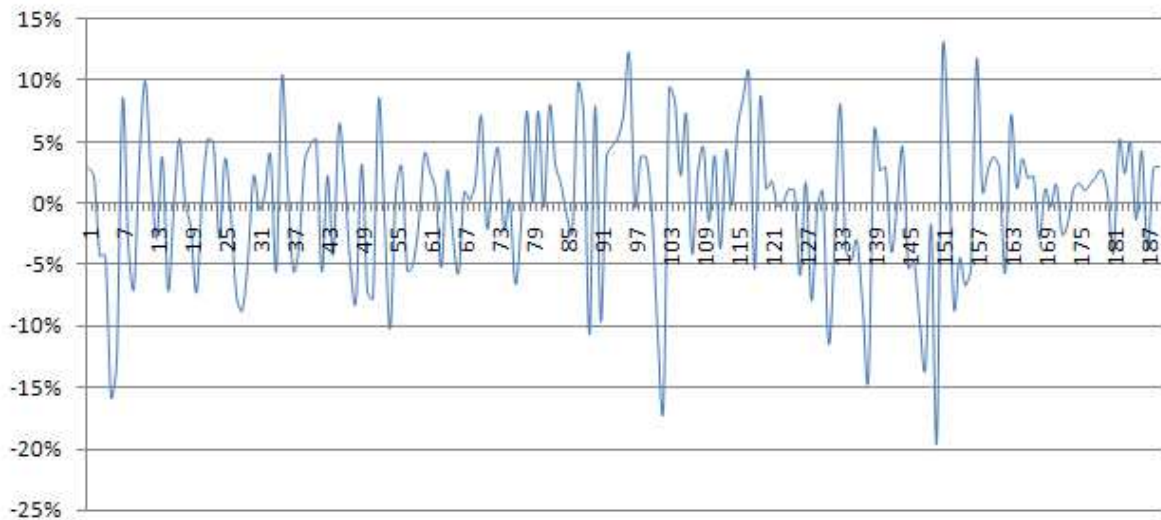


Fig. 28 - *Excès de rendement mensuel des actions entre mars 1990 et décembre 2005*

⁸⁴ Données disponible sur le site <http://fr.finance.yahoo.com/q/hp?s=FCHI>.

L'estimation par maximum de vraisemblance fournit, *via* un algorithme numérique de minimisation de type Newton (fonction *nlm* du logiciel R), les résultats suivants (avec une estimation des erreurs entre parenthèses) :

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur estimée par HARDY sur l'indice S&P500</i>	<i>Valeur estimée</i>
$\hat{\mu}_1$	0,0126 (0,002)	0,0132 (0,006)
$\hat{\sigma}_1$	0,0350 (0,001)	0,0424 (0,005)
\hat{p}_{12}	0,0398 (0,015)	0,0829 (0,049)
$\hat{\mu}_2$	-0,0185 (0,014)	-0,0234 (0,017)
$\hat{\sigma}_2$	0,0748 (0,009)	0,0727 (0,008)
\hat{p}_{21}	0,3798 (0,123)	0,1523 (0,103)

Les paramètres de rentabilité et de volatilité sont globalement comparables entre les deux estimations. Cependant, la différence est plus nette concernant les probabilités de transition. La probabilité de transition vers un régime très volatile passe de 38 % sur l'indice S&P500 à 15,2 % sur l'excès de rendement des actions CAC40. La probabilité de transition vers un régime peu volatile passe de 4 % sur l'indice S&P500 à 8,3 % sur l'excès de rendement des actions CAC40. Ainsi, la survenance des régimes à forte volatilité est plus fréquente sur la série de données retenue dans cette étude, la durée moyenne d'une trajectoire en régime très volatil étant de 6,6 mois. Néanmoins, on remarque que comme dans HARDY (2001), l'estimation de l'erreur associée au paramètre \hat{p}_{21} est importante.

Il convient de noter que l'interpolation réalisée sur les taux d'intérêt et d'inflation constitue une limite à l'approche retenue puisqu'elle revient à ne pas considérer les variations de courts termes de ces grandeurs. D'ailleurs, le caractère significativement différent entre les taux d'intérêt réels calibrés initialement par AHLGRIM et AL. (2005) sur des données mensuelles et l'estimation sur des données annuelles renforce ce sentiment. Toutefois, en l'absence de données mensuelles pertinentes, ce choix pourra être retenu, en gardant à l'esprit les limites évoquées.

Le contexte économique et financier observable au 31/12/2007 est comparable à une situation de forte volatilité, considéré comme état initial. Au surplus, la crise globale qui a suivi valide, *a posteriori*, l'hypothèse retenue.

Section 2.4. Détermination des paramètres risque-neutre du modèle

La valorisation des postes du bilan *market consistent* nécessite l'utilisation de la probabilité risque-neutre. Comme il est vu plus haut, les différents *scénarii* économiques susceptibles de survenir sont modélisés dans l'univers réel. Les paramètres estimés lors de

l'étape précédente permettent d'effectuer des simulations dans cet univers, dans la continuité des tendances observées par le passé.

Cependant, les paramètres estimés dans l'univers réel ne sont plus utilisables pour le calcul des éléments faisant intervenir la probabilité risque-neutre. Par conséquent, les paramètres nécessaires à la valorisation de ces derniers sont estimés.

Pour les besoins de l'étude, seuls les paramètres nécessaires au calcul des zéro-coupon d'inflation et de taux sont déterminés. La courbe des taux nominaux zéro-coupon fournis par le QIS4 à la date d'évaluation est utilisée pour déterminer les paramètres $(\kappa_q, \mu_q, \sigma_q, \kappa_l, \mu_l, \sigma_l, \kappa_r, \sigma_r)$ sous Q .

La méthode retenue afin d'estimer ces paramètres consiste à minimiser l'erreur quadratique entre la courbe des taux zéro-coupon de référence et la courbe fournie par le modèle d' AHLGRIM et AL. (2005). Il s'agit donc de minimiser la quantité suivante :

$$\sum_T (R_{nom}^{mod}(0, T) - R_{nom}^{ref}(0, T))^2$$

où :

- ✓ $R_{nom}^{mod}(0, T)$: le taux zéro-coupon renvoyé par le modèle pour le jeu de paramètres $(\kappa_q, \mu_q, \sigma_q, \kappa_l, \mu_l, \sigma_l, \kappa_r, \sigma_r)$;
- ✓ $R_{nom}^{ref}(0, T)$: le taux zéro-coupon de la courbe de référence.

Cette méthode permet d'obtenir, par l'application des formules vues *supra*, la valeur du taux zéro-coupon, puis celle du prix d'un zéro-coupon. Elle permet d'éviter l'estimation d'une prime de risque, celle-ci étant déjà incluse dans les prix de marché.

Les valeurs initiales des processus q_t , r_t et l_t sont estimés à partir des indices des prix à la consommation 2007 et 2008 publiés par l'INSEE⁸⁵ et des valeurs court terme et long terme de la courbe des taux de référence. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

Paramètre	Valeur
q_0	0,025
l_0	0,019
r_0	0,022

Le taux court pris en paramètre initial a la particularité d'être supérieur au taux long ce qui traduit bien le caractère inhabituel de la situation à la date des calculs.

⁸⁵ Indice des prix à la consommation – Ensemble des ménages – France entière

La résolution du problème d'optimisation est alors réalisée à l'aide de l'outil solveur d'Excel :

Paramètre sous Q	Valeur
$\hat{\kappa}_q$	0,656
$\hat{\mu}_q$	0,018
$\hat{\sigma}_q$	0,002
$\hat{\kappa}_l$	0,092
$\hat{\mu}_l$	0,078
$\hat{\sigma}_l$	0,030
$\hat{\kappa}_r$	0,442
$\hat{\sigma}_r$	0,01

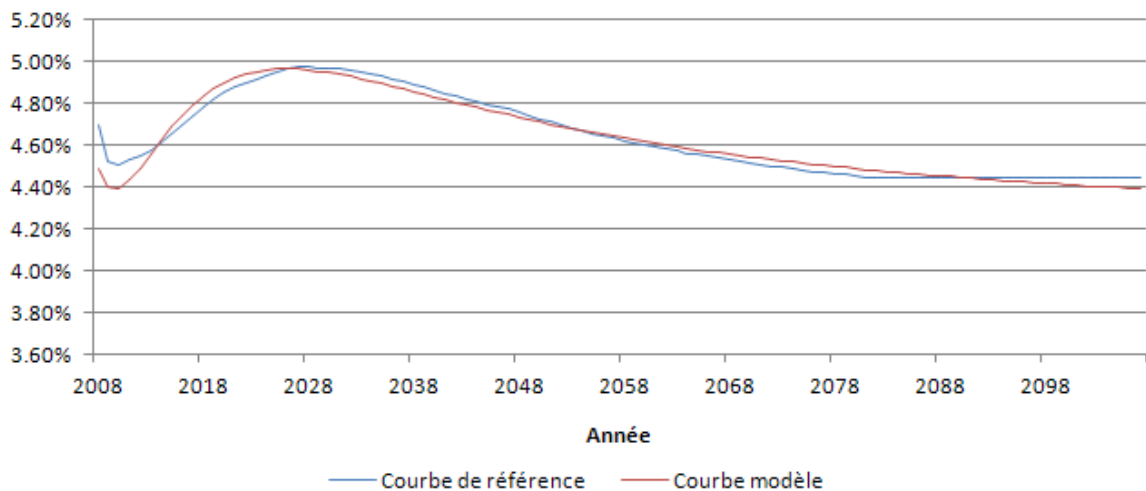


Fig. 29 - Ecart entre la courbe de référence et le modèle

L'évaluation des paramètres $(\kappa_q, \mu_q, \sigma_q, \kappa_l, \mu_l, \sigma_l, \kappa_r, \sigma_r)$ sous Q donne la valeur du taux zéro-coupon $R_{nom}(t, T)$ pour n'importe quelle valeur de t et T . Ainsi, lors de la valorisation des postes du bilan à la date t et conformément à l'approche *market consistent*, les valeurs de $R_{nom}(t, T)$, $P_{nom}(t, T)$ et $\mathbf{E}^Q \left[\frac{IPC_{t+T}}{IPC_t} \mid \Phi_t \right]$ sont évaluées sous Q . *A contrario*, les trajectoires de q_t , r_t et l_t seront effectuées dans le monde réel.

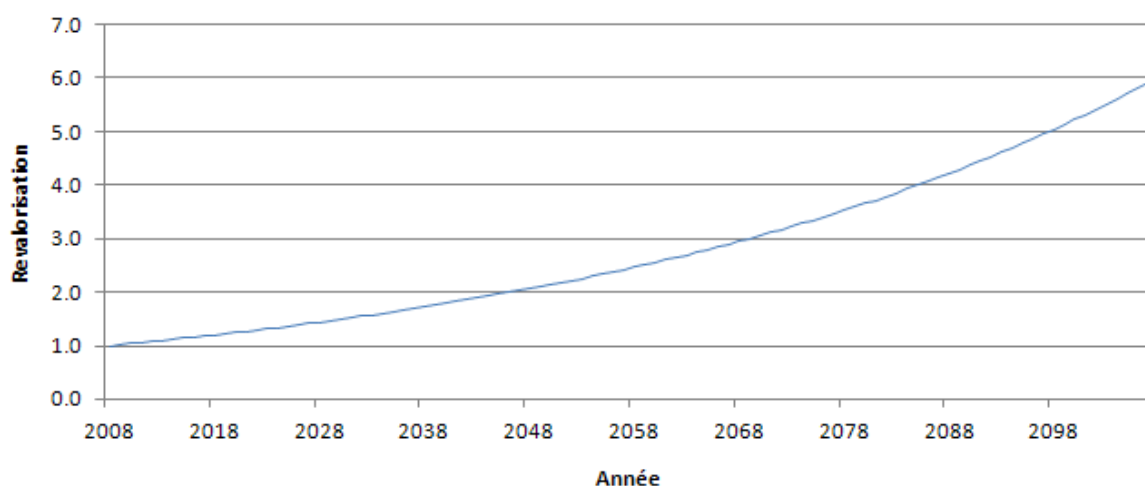


Fig. 30 - Evolution du coefficient de revalorisation

Section 2.5. Corrélations des résidus

Les projections réalisées dans le cadre du modèle d' AHLGRIM et AL. (2005) se doivent de tenir compte des corrélations observées entre les résidus des modèles calibrés. Les simulations sont par conséquent effectuées à partir des erreurs projetées, calibrées à partir de l'historique de données. A partir de la matrice de corrélations des résidus, les erreurs projetées s'écrivent comme combinaison linéaire des erreurs des autres modèles. La matrice des corrélations des résidus obtenus par PLANCHET, THEROND et KAMEGA (2009) en mesurant les corrélations entre les résidus sur les données de FRIGGIT (2007) est présentée dans le tableau suivant et sera reprise dans cette étude :

<i>Corrélation</i>	<i>Inflation</i>	<i>Immobilier</i>	<i>Taux long</i>	<i>Taux court</i>	<i>Excès rendement</i>
<i>Inflation</i>	1	0,202	-0,858	-0,651	-0,324
<i>Immobilier</i>	0,202	1	-0,321	-0,269	0,103
<i>Taux long</i>	-0,858	-0,321	1	0,802	0,176
<i>Taux court</i>	-0,651	-0,269	0,802	1	0,112
<i>Excès rendement</i>	-0,324	0,103	0,176	0,112	1

La prise en compte des corrélations dans les erreurs projetées est effectuée *via* la méthode de factorisation de Cholesky.

Section 2.6. Traitement du risque de *spread*

La variation des taux d'intérêt ne constitue pas le seul facteur de risque auquel est exposé le portefeuille obligataire. Il est également soumis au risque de défaut de l'émetteur des titres.

Cette exposition supplémentaire se traduit au niveau du prix des obligations qui est majoré d'un *spread* de crédit.

Théoriquement, l'évaluation du risque associé au *spread* nécessite la détermination d'une part de la probabilité de défaut de l'émetteur et d'autre part du montant recouvrable suite à une situation de défaillance. L'intégration de cette approche à la présente étude s'avère cependant délicate car nous ne disposons pas de données fiables permettant une mise en œuvre pratique. Par ailleurs, la première évaluation du risque de *spread* dans la Partie III indique que ce dernier reste relativement contenu vis-à-vis des autres risques de marché.

C'est pourquoi une méthode alternative est utilisée afin d'évaluer la valeur économique des obligations. Cette méthode consiste à utiliser pour les obligations avec défaut le modèle d'évaluation des obligations sans risque de défaut en abattant le nominal de manière à recalculer le prix théorique issu du modèle avec le prix de marché initial.

Cette modélisation du défaut est déterministe, mais présente de nombreux avantages pratiques :

- ✓ calibrage simple et cohérence avec les prix de marché ;
- ✓ aucune simulation du défaut lors des projections n'est nécessaire car la valeur des titres reflète déjà ce risque ;
- ✓ l'approche est légitimée par son statut de « standard de place ».

Elle présente cependant l'inconvénient de ne pas impacter le rendement des titres par l'introduction du défaut, qui se traduit uniquement par un effet de minoration de la valeur.

2.6.1. Principe de calcul

La mise en œuvre de la démarche repose sur la spécification du prix des obligations sans risque de défaut et sur le prix observé sur le marché des obligations présentant un risque de défaut. La valeur VO de l'obligation sans risque de marché est :

$$VO = \sum_{t=1}^T C(t) \cdot P_{nom}(0, t) + N \cdot P_{nom}(0, T)$$

où :

- ✓ $C(t)$: le coupon versé à la date t ;
- ✓ T : la maturité de l'obligation ;
- ✓ N : le nominal de l'obligation.

La démarche présentée consiste à déterminer l'abattement α tel que la valeur de marché avec risque de défaut VM soit égale à :

$$VM = \alpha \cdot VO$$

En pratique, on note que α dépend de la maturité et du *rating* des obligations présentant un risque de défaut.

2.6.2. Application

A partir des valeurs de marché des obligations détenues en portefeuille et de la courbe des taux sans risque estimé à la date $t = 0$ dans la Section 2.4, les coefficients α sont évalués selon la méthode décrite ci-dessus. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

<i>Obligation</i>	α
<i>Obligation 1</i>	100 %
<i>Obligation 2</i>	99,65 %
<i>Obligation 3</i>	98,61 %

Les coefficients α étant relativement proche de 1 indiquent que les obligations en portefeuille présentent une faible exposition au risque de défaut, leur *spread* de crédit étant relativement faible.

Chapitre 3. Modélisation de la durée de vie

Un régime de retraite est soumis à une incertitude relative à la durée de vie de son portefeuille. En particulier, le risque de longévité prend une place d'autant plus importante que s'allonge la durée de vie humaine⁸⁶. Depuis une quinzaine d'années, les actuaires ont répondu à ce phénomène par la construction de tables de mortalité prospectives. Cependant, le passage des tables réglementaires TPG 1993 aux table TGH/F 05 s'accompagnant de majorations de provisions parfois supérieures à 20 % ce qui illustre la difficulté de mise en œuvre de l'estimation de la tendance et du niveau de la mortalité future. PLANCHET (2007) illustre ces majorations dans le tableau suivant :

Age	Génération	TPG 1993	Femmes	Femmes / TPG	Hommes	Hommes / TPG
50	1955	26,81647	28,40552	5,9%	26,75507	-0,2%
55	1950	24,26368	25,95575	7,0%	24,07474	-0,8%
60	1945	21,50832	23,30185	8,3%	21,25828	-1,2%
65	1940	18,53412	20,39677	10,0%	18,22126	-1,7%
70	1935	15,39467	17,28922	12,3%	15,08772	-2,0%
75	1930	12,25679	14,08680	14,9%	12,05698	-1,6%
80	1925	9,35194	10,96271	17,2%	9,12890	-2,4%
85	1920	6,88306	8,15548	18,5%	6,64827	-3,4%
90	1915	4,93310	5,89309	19,5%	4,73880	-3,9%
95	1910	3,46780	4,29408	23,8%	3,40109	-1,9%

Fig. 31 - Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/F 05

⁸⁶ OLIVIERI (2001) mesure l'impact de ce risque sur un portefeuille de rentes viagères.

Classiquement, la modélisation de la mortalité est effectuée par la spécification d'un taux de hasard $\mu(x, t)$, en fonction de l'âge x et de l'année courante t . Ce dernier permet en effet de connaître la probabilité de survie d'un individu entre deux dates t et T via la formule :

$$S(x, t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \mu(x+u-t, u) du \right\}$$

La construction de la surface des $\mu(x, t)$ est effectuée à partir de l'extrapolation sur les taux passés. L'utilisation des modèles de Lee-Carter ou poissoniens⁸⁷ sont d'usage.

En pratique, l'aléa biométrique induit deux risques spécifiques. Dans un premier temps et en supposant que les $\mu(x, t)$ sont correctement spécifiés, l'assureur est confronté aux fluctuations d'échantillonnages qui persistent autour de la tendance. Cependant, ce risque se mutualise si la taille du portefeuille est suffisamment importante. D'ailleurs, le théorème central limite fournit une quantification de ces fluctuations.

La difficulté réside donc dans l'appréciation du niveau et de la tendance de la mortalité future. L'estimation de ces dernières génère un risque systématique lié à une mauvaise interprétation des tendances futures. En effet, une erreur de modèle vient affecter l'ensemble des individus dans le même sens et crée un écart par rapport à la prévision.

Section 3.1. Risque mutualisable

3.1.1. Quantification du risque mutualisable

Dans cette partie, la démarche retenue consiste à fabriquer la distribution de l'engagement Λ à la date d'évaluation en présence uniquement de l'incertitude sur la durée de vie des rentiers. Ainsi, on mesure l'adéquation de la loi de l'engagement à une loi normale et la quantification du risque induit par les fluctuations d'échantillonnage autour de l'engagement moyen est réalisée.

Rappelons les valeurs moyennes théoriques de l'engagement estimée en $t=0$ dans la Partie III.

Valeur moyenne théorique	en M€
Be_{Act}	0
$Be_{All} + Be_{Rev}$	138,42
Be	138,42

⁸⁷ Cf. PLANCHET et THEROND (2007) pour une présentation de ces modèles

La démarche mise en œuvre nécessite la simulation des durées de vie des assurés. Etant donnée la taille du portefeuille étudié, il est important d'utiliser un algorithme de simulation efficace en termes de temps de calcul. Une méthode d'inversion dans un contexte discret dont le principe est repris dans le tableau ci-dessous est retenue⁸⁸ :

Valeur de u suivant U uniforme sur $[0,1]$	Valeur de la durée de vie T
$u < \frac{l_{x+1}}{l_x}$	$T = 0$
$\frac{l_{x+1}}{l_x} \leq u < \frac{l_{x+2}}{l_x}$	$T = 1$
\vdots	\vdots
$\frac{l_{x+j}}{l_x} \leq u < \frac{l_{x+j+1}}{l_x}$	$T = j$

La distribution de Λ est obtenue *via* la simulation de $K = 10\,000$ réalisations et sur la base de la courbe des taux spécifié à la date $t = 0$. Les graphiques suivants fournissent une représentation des distributions empiriques lissées (fonction *density* sous R) des engagements au titre des allocataires et des actifs (cette dernière est présentée pour illustration bien que la valeur prise sont presque toujours négative et que finalement aucune provision ne soit constituée) et leur ajustement à une loi normale dont les paramètres sont estimés à partir de la méthode des moments :

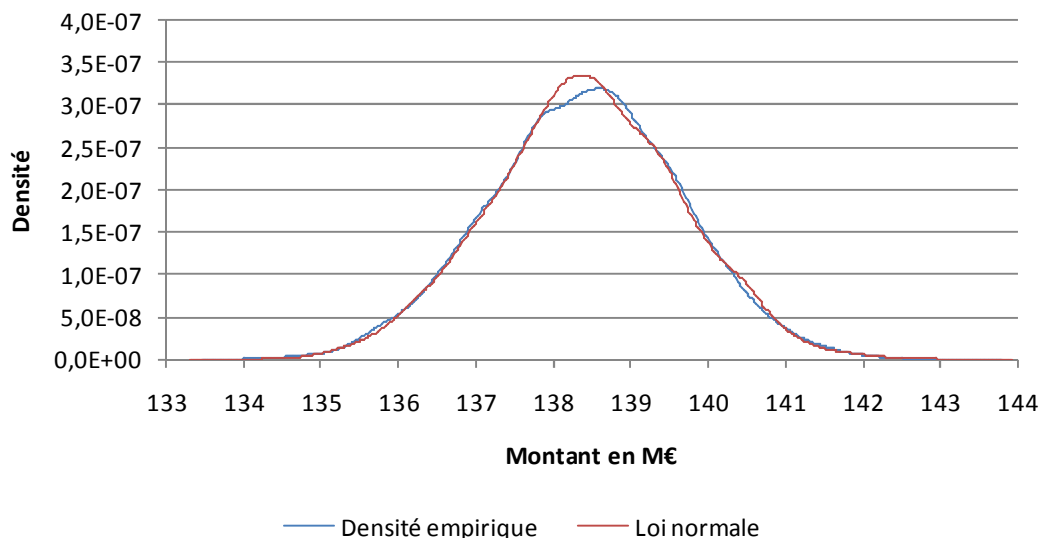


Fig. 32 - *Distribution empirique de l'engagement vis-à-vis des allocataires*

⁸⁸ Cf. PLANCHET et THEROND (2006) pour plus de précisions sur cette méthode dont l'algorithme est décrit en Annexe 5.

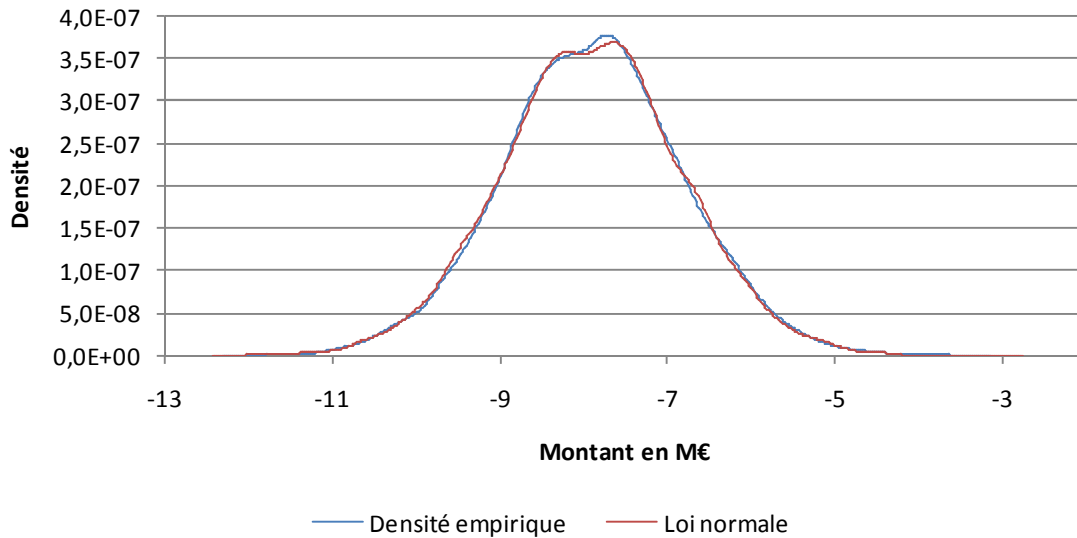


Fig. 33 - *Distribution empirique de l'engagement vis-à-vis des actifs*

On rappelle les estimateurs empiriques de l'espérance et de la variance, obtenus à partir des réalisations de Λ notées $(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$, sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Lambda} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \lambda_k \\ \sigma_{\Lambda}^2 = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (\lambda_k - \bar{\Lambda})^2 \end{array} \right\}$$

La qualité d'ajustement de la loi empirique de l'engagement peut être appréciée graphiquement en traçant les QQ-plots :

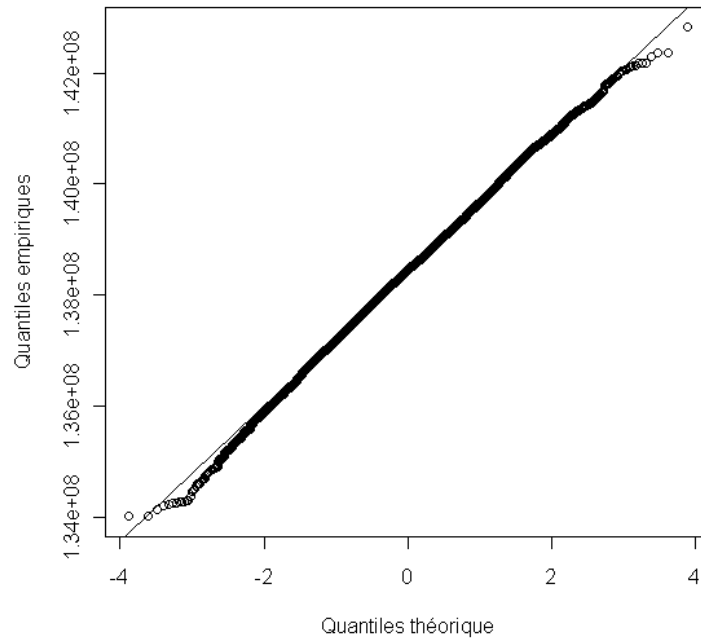


Fig. 34 - *QQ-plot loi normale : engagement des allocataires*

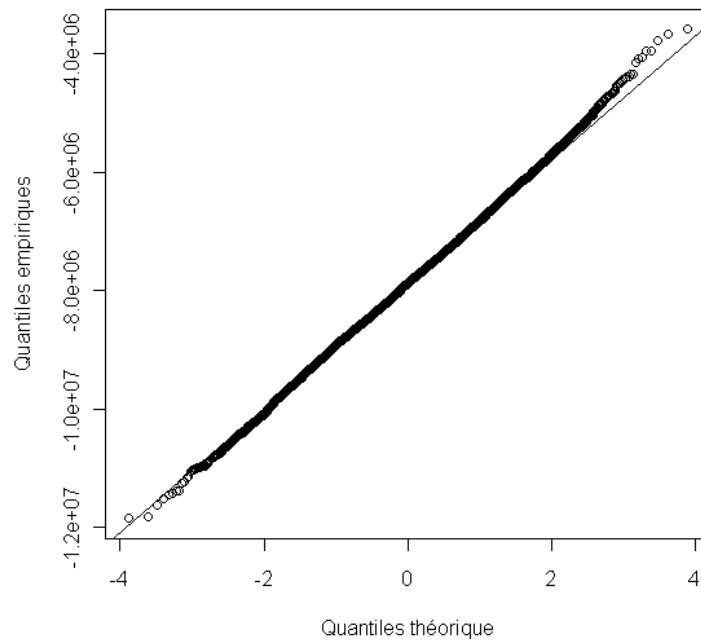


Fig. 35 - *QQ-plot loi normale : engagement des actifs*

La convergence de l'engagement vers la loi normale semble *a priori* vérifiée. Un test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov est réalisé pour valider ce résultat. Il est formulé de la manière suivante :

- ✓ H_0 : la loi empirique est conforme à la loi théorique ;
- ✓ H_1 : la loi empirique n'est pas conforme à la loi théorique ;

La statistique de test D compare la fonction de répartition empirique \hat{F} à la fonction de répartition théorique F :

$$D = \max_x \{ \hat{F}(x) - F(x) \}$$

L'hypothèse nulle est rejetée pour une p-valeur $p \leq \alpha = 5\%$. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Engagement	Valeur de D	p-valeur
Allocataire	0,01	0,2714
Actif	0,0091	0,374

La convergence de l'engagement vers une loi normale est donc vérifiée. L'incertitude liée aux fluctuations d'échantillonnages susceptibles d'apparaître autour de la tendance prédite par la table de mortalité peut alors être quantifiée. Etant donnée la taille du portefeuille étudié et l'indépendance entre les têtes, ce risque se mutualise, l'incertitude reste alors relativement contenue et quantifiable *via* un intervalle de confiance asymptotique.

$$IC(\alpha) = \left[\bar{\Lambda} - \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma_{\Lambda}; \bar{\Lambda} + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma_{\Lambda} \right]$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Indicateur	Estimation Allocataire	Estimation Actif
$\bar{\Lambda}$	138 411 842	-7 885 307
σ_{Λ}	1 246 697	1 077 281
Borne inférieure de l'intervalle de confiance à 95 %	135 968 361	-9 996 739
Borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95 %	140 855 323	-5 773 875

3.1.2. Prise en compte analytique du risque mutualisable

L'intégration des risques mutualisables au modèle peut être effectuée selon deux procédés. Une première méthode consiste à générer aléatoirement ces risques par le biais de techniques de simulation, comme vue *supra*. D'un point de vue théorique, cette méthode permet bien de générer la distribution de ces facteurs de risques et si elle s'avère relativement simple à mettre en œuvre lorsque seuls ces risques sont considérés, elle devient beaucoup plus délicate à intégrer à un modèle interne dans la mesure où elle génère un niveau de complexité supplémentaire puisque lorsque les risques sont imbriqués, cette technique revient à faire de la simulation dans la simulation. En effet, pour chaque jeu de trajectoires systématiques généré, on simule une seconde table de *scénarii* afin d'intégrer les composantes mutualisables. Au global, le nombre total de trajectoires répond à une logique multiplicative difficilement contrôlable en terme de temps de calcul.

Une approche alternative repose sur l'exposé suivant. Considérons, la variable aléatoire $X = \sum_{i \in I} X_i$ représentant un engagement constitué à l'égard d'une population d'assurés I et Z une variable synthétique sensée représenter l'ensemble des aléas systématiques. Conditionnellement à cette variable Z , l'engagement présente un caractère asymptotiquement gaussien dès lors que les individus sont indépendants et que les engagements individuels sont identiquement distribués ou à tout le moins bornés :

$$\frac{X | Z - \mathbf{E}[X | Z]}{\sqrt{\mathbf{V}[X | Z]}} \xrightarrow[|I| \rightarrow +\infty]{\text{Loi}} N(0,1)$$

Ce simple constat permet de caractériser la loi asymptotique de X , l'expression de sa fonction de répartition F_X s'écrivant alors :

$$F_X(x) = \int \Phi\left(\frac{x - m^{(z)}}{\sqrt{v^{(z)}}}\right) \cdot f_Z(z) dz$$

avec :

- ✓ Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite ;
- ✓ f_Z la densité de la variable Z ;
- ✓ $m^{(z)}$: estimation de l'espérance conditionnelle de $X | Z = z$;
- ✓ $v^{(z)}$: estimation de la variance conditionnelle de $X | Z = z$.

De même, la densité de X , notée f_X , est obtenue *via* la formule suivante :

$$f_X(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v^{(z)}}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - m^{(z)})^2}{2 \cdot v^{(z)}}\right\} \cdot f_Z(z) dz$$

L'expression ainsi obtenue permet de caractériser la loi d'un engagement mutualisable, conditionnellement à n'importe quel aléa systématique. En pratique, le calcul de cette quantité est ensuite régi par la mise en place de méthode type Monte Carlo permettant de simuler le facteur de risque Z :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_X(x) \approx \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \Phi\left(\frac{x-m^{(k)}}{\sqrt{v^{(k)}}}\right) \\ f_X(x) \approx \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v^{(k)}}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m^{(k)})^2}{2 \cdot v^{(k)}}\right\} \end{array} \right.$$

L'approche présentée est qualifiée de « semi-analytique » puisqu'elle mêle, pour décrire des phénomènes stochastiques imbriqués, en l'occurrence des risques systématiques et mutualisables, des techniques de simulation et des formules analytiques. Ce procédé est strictement équivalent d'un point de vue théorique à une approche de type simulation dans la simulation mais présente un caractère efficient pour traiter la problématique développée ici. En effet, la construction d'un algorithme basé sur de la simulation exclusivement présente des temps de calculs relativement long ce qui est un frein à une utilisation fréquente. Un tel algorithme peut être relativement lourd ce qui le rend peu auditable⁸⁹.

A l'inverse, une approche semi-analytique est particulièrement bien adaptée puisque la loi d'un phénomène mutualisable est connue et caractérisée par ses moments d'ordre 1 et 2 conditionnellement aux facteurs de risques systématiques. La loi du phénomène est alors décrite de manière exacte, contrairement à celle obtenue par simulation qui comprend une erreur d'estimation. Cette approche permet en outre de réduire les temps de calcul de manière drastique puisque la simulation des risques systématiques de premier niveau est obtenue de manière quasi-immédiate.

Section 3.2. Mesure du risque systématique

On distingue plusieurs sources d'incertitudes susceptibles de générer une composante systématique dans l'aléa biométrique :

L'estimation des paramètres

De part l'incertitude liée à tout procédure d'estimation des paramètres d'un modèle, des chocs non mutualisables sont susceptibles de venir affecter la mortalité moyenne estimée. Dès lors, les taux de mortalité instantanés présentent des variations erratiques autour de la tendance moyenne, modifiant ainsi de manière globale les engagements de l'assureur. A titre d'exemple, le graphique suivant, repris de PLANCHET, JUILLARD et THEROND (2008) illustre l'impact de la période d'observations considérée sur le niveau de la tendance estimée.

⁸⁹ ce qui va à l'encontre des préconisations du CEIOPS dans le *consultation paper* n°26.

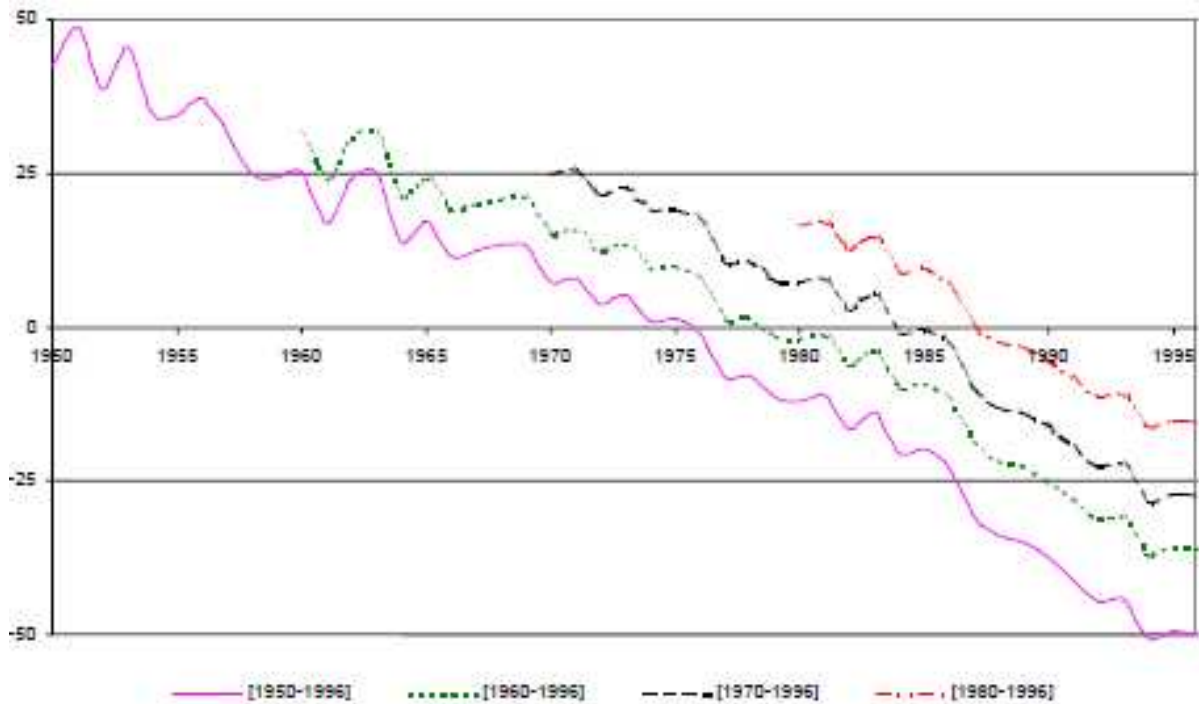


Fig. 36 - Tendances estimées avec Lee-Carter en fonction de la période d'observation

L'impact de variables exogènes

De manière générale, il s'agit de variables exogènes, dont l'impact non prévisible *a priori*, viennent perturber la tendance prédite dans l'avenir par une table de mortalité. A titre d'exemple, l'introduction des antibiotiques dans les années 1950 à déformer de manière significative les taux de mortalités instantanée. A l'époque, la modification de la tendance ainsi introduite n'était pas prévisible *a priori* et la nouvelle tendance n'eut un effet remarquable qu'environ pendant dix ans. Ainsi, des facteurs tel que le réchauffement climatique auront vraisemblablement un effet sur les profils de mortalité à venir, sans pour autant que l'on puisse les quantifier.

Les évènements exceptionnels

Des évènements exceptionnels et imprévisibles comme les pandémies ou le terrorisme peuvent survenir et produire des chocs brutaux sur la structure de mortalité. Ces impacts bien que ponctuels doivent par conséquent être pris en compte dès lors que la population étudiée est exposée à un risque de mortalité catastrophique.

Tout d'abord, précisons que les modèles stochastiques de mortalité fournissent un outil adapté à ces problématiques en particulier pour répondre à la première source de risque. Une littérature abondante est d'ailleurs disponible sur ce point. On pourra citer notamment les modèles dérivés de Lee-Carter, DAHL (2004) et SCHRAGER (2006) pour une approche dite financière ou encore BAUER et KRAMER (2007) pour la prise en compte des évènements exceptionnels. En outre, GUETTE (2010) propose une modélisation des chocs de surmortalité de nature variée (à l'inverse des modèles de mortalité stochastique) basée sur la calibration d'une surface de mortalité moyenne et d'une surface de surmortalité ce qui s'avère utile en vue d'une extrapolation pour des calculs de quantile.

3.2.1. Difficultés d'estimation du risque systématique

Un régime de retraite supplémentaire est soumis à la fois au risque lié aux fluctuations aléatoires des taux de mortalité autour de la tendance prédite par la table et au risque lié à l'incertitude sur cette tendance. L'évaluation de la composante systématique s'avère être complexe car plusieurs sources d'incertitude sont envisageables. En particulier, l'évaluation de l'erreur de modèle commise lors de la construction d'une table de mortalité d'expérience prospective relève d'un exercice délicat.

Une méthode pour tester la robustesse de l'estimation consiste à observer le caractère plus ou moins divergent des décès observés. Nous ne disposons pas de données spécifiques au régime pour mener une étude fine sur ce risque. Toutefois, le graphique suivant tirée d'une étude effectuée sur un portefeuille comparable (étude confidentielle réalisée par le Cabinet WINTER & Associés) permet d'illustrer notre propos.

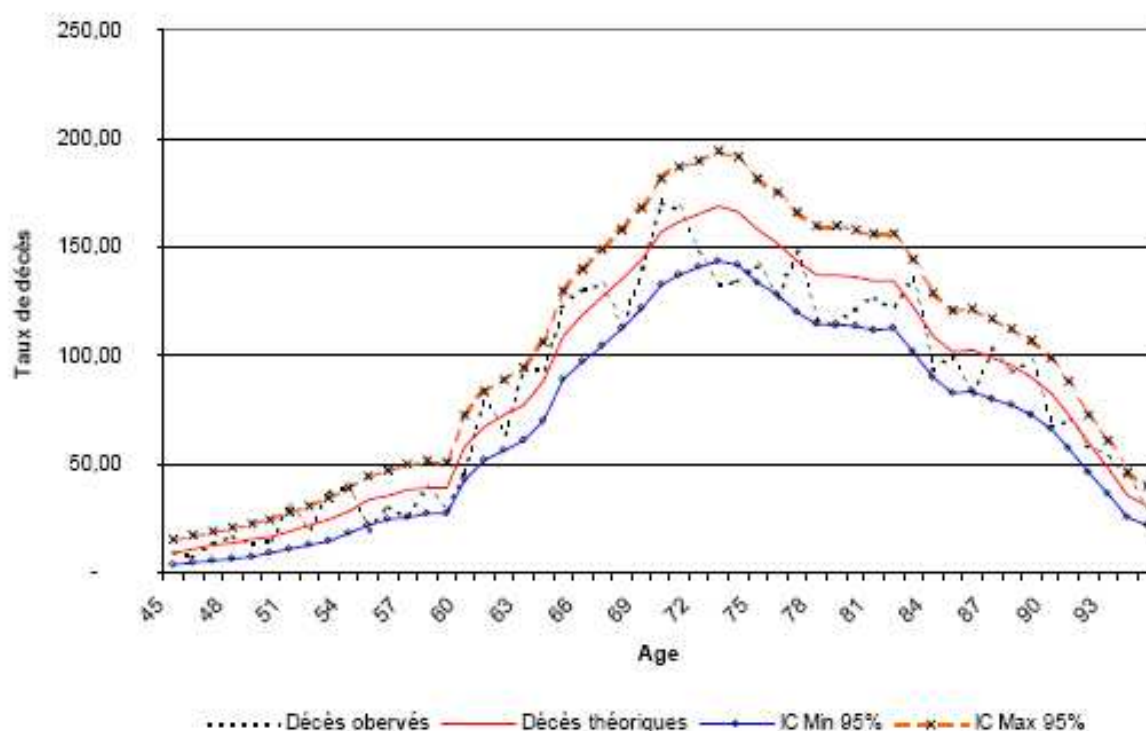


Fig. 37 - Comparaison par âge des décès prédits et des décès observés sur une population masculine

Une mesure de la robustesse de la table construite consiste à comparer les décès théoriques au décès observés sur différentes plages temporelles. Un intervalle de confiance peut être alors mis en place comme indicateur de robustesse sur la base de l'approximation binomiale de la survenance des décès.

Les problèmes liés à cette source d'incertitude ne sont pas réduits du fait des hypothèses à adopter dans le cadre des nouveaux référentiels qui imposent le recours aux meilleures hypothèses. Ces exigences conduisent à construire des tables sur la base d'un niveau de segmentation plus important afin d'affiner les hypothèses de mortalité utilisées pour chaque sous population significatives du portefeuille et ainsi de réduire le risque de déformation de la loi avec le temps. Ainsi, la population sous risque utilisée pour construire une table est

restreinte au critère de segmentation retenu et ne doit plus intégrer de marge de prudence. Dès lors, il apparaît un arbitrage délicat entre finesse de la segmentation et robustesse de l'estimation. En effet, la réduction de l'exposition aux risques va de paire avec l'élargissement de la zone de confiance. La difficulté de prise en compte d'un niveau de segmentation plus fin pour évaluer la mortalité est notamment illustrée dans ALHO (2007) à travers une analyse critique des études menées sur la mortalité par causes.

Des modèles permettent cependant de quantifier l'incertitude relative au niveau et à la pente de la tendance d'évolution. PLANCHET, JUILLARD et THEROND (2008) propose par exemple de quantifier ce risque sur la base d'un modèle de Lee-Carter pour lequel la tendance est impactée *via* la génération de chocs asymétriques, modélisés selon une loi de Pareto, autour de la tendance estimée. On pourra garder à l'esprit que le risque en question peut avoir un impact important sur le niveau de provisionnement retenu du fait du caractère plus ou moins divergent des taux de décès.

Bien que l'aléa systématique puisse raisonnablement être pris en compte par les modèles de mortalité stochastique, l'analyse fournie dans ALHO (2007) tend à démontrer que ces dernières ont tendance à sous-estimer l'espérance de vie masculine. Pour autant cette grandeur a un impact relativement important dans l'estimation dans la durée de versement des arrérages aux bénéficiaires du régime étudié.

Pour ces raisons d'une part et en l'absence de données pertinentes pour calibrer un modèle stochastique de mortalité d'autre part, la présente étude n'intègre pas un tel modèle pour mesurer l'impact de ce risque.

3.2.2. Prise en compte du risque systématique

L'approche que nous avons choisi de développer conduit à se recentrer sur l'espérance de vie qui représente la composante liée à la durée de vie auquel l'engagement d'un régime de retraite est la plus dépendante.

Ne pouvant négliger le risque de longévité, la présente étude fait donc le choix de mesurer l'impact d'un choc à la hausse sur l'espérance de vie afin d'en extraire l'impact sur le capital requis par ce risque. Pour cela, des chocs sont appliqués sur les quotients de mortalité de la table d'expérience, conduisant à modifier le niveau de la tendance d'évolution de l'espérance de vie. Le graphique suivant illustre l'effet de ces chocs sur l'espérance de vie résiduelle à 52 ans de la population féminine, âge moyen des femmes actives dans le régime.

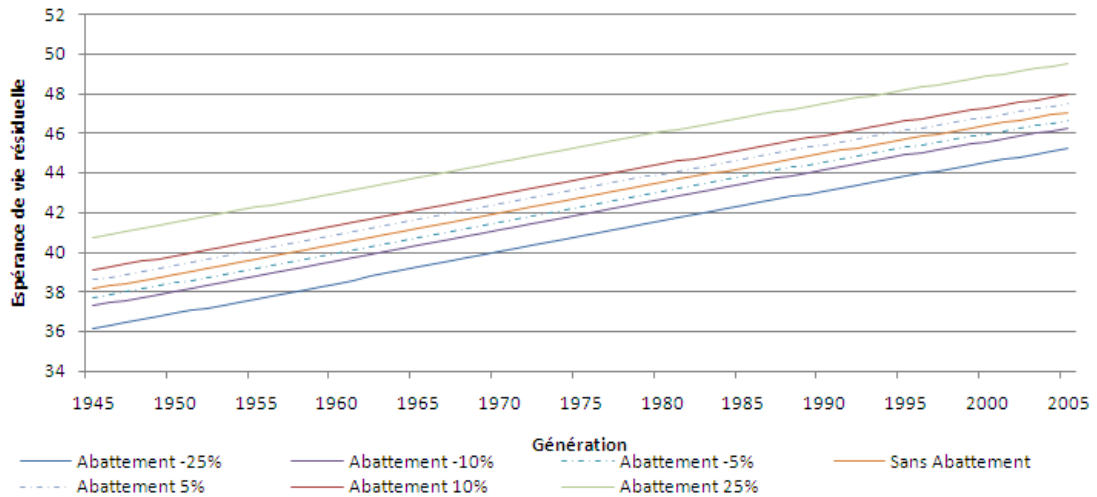


Fig. 38 - Evolution de l'espérance de vie résiduelle féminine choquée à 72 ans

L'étude de sensibilité ainsi menée a pour but de mesurer l'impact d'une déformation du niveau de la tendance de l'espérance de vie sur l'engagement de l'assureur. Cette étude s'inscrit dans une démarche alternative aux modèles stochastiques, et suggérerait la calibration d'un choc sur les q_x représentant la situation la plus défavorable adapter aux données si elle devait être poursuivie.

In fine, le besoin en capital relatif au risque de longévité est calculé selon le même niveau de choc que celui préconisé par le QIS4, un calibrage propre à l'exemple étudié n'ayant pu être réalisé.

Section 3.3. Modélisation des autres risques

Les autres risques auquel est soumis le régime ne font pas l'objet d'une modélisation particulière et leur impact général sur la solvabilité est calculé selon la même approche que celle développée dans la Partie III.

Par ailleurs, la mesure de la solvabilité dans cette étude n'intègre pas la prise en compte du risque de concentration. Ce dernier, traité dans la Partie III, génère un besoin en capital négligeable vis-à-vis des autres risques. Par conséquent, cette convention constitue une simplification acceptable.

Chapitre 4. Calcul de l'exigence de capital

La solvabilité du régime est appréciée par la probabilité de ruine à horizon d'un an. Par conséquent, le besoin en capital est déterminé en fonction de la valeur des actifs et des passifs en $t = 1$.

Le modèle interne simplifié permet de modéliser le besoin en capital de la compagnie d'assurance. Ainsi, il convient d'analyser pour chaque risque le capital nécessaire pour être solvable dans 99,5 % des cas.

Section 4.1. Approche retenue

Comme il est fait mention dans la Partie II. Section 1.3, les démarches pour mesurer la solvabilité de l'entité sont multiples. Cependant, elles ne sont pas toutes équivalentes que ce soit en termes de complexité, de temps de calcul ou encore de précision. *A priori*, une approche « modèle interne », même partiel, se veut par essence plus aboutie qu'une démarche « formule standard ».

Etant donnée la complexité des risques à intégrer, il est délicat de contourner une approche par simulation, un modèle purement analytique étant tout simplement infaisable en pratique pour modéliser les mécaniques complexes entre l'actif et le passif. Pour autant, le fait de conserver un maximum d'éléments analytiques peut s'avérer très utile pour limiter les temps de calculs et rendre le modèle plus exploitable dans l'optique par exemple de réaliser des tests de sensibilité. C'est donc vers une approche mixte que nous nous sommes dirigés.

Afin de prendre en compte la distribution du bilan à horizon un an, la génération de *scénarii* économiques s'avère indispensable. En effet, le caractère systématique des risques économiques, impacte l'ensemble du bilan dans une même direction, la distribution est complexe et ne peut être résumée analytiquement. La prise en compte d'un critère exigeant pour contraindre la probabilité de ruine à 0,5 % impose de mettre en œuvre un nombre important de simulations pour assurer la robustesse de l'estimation du capital requis. Dix milles simulations sont considérées. Le risque systématique de mortalité étant pris en compte par le biais de chocs, les trajectoires de risques liés à l'actif constituent la seule table de trajectoires systématiques.

Le risque mutualisable de mortalité est quant à lui pris en compte *via* une formule analytique. Bien que l'impact de ce dernier reste relativement limité étant donné la taille du portefeuille étudié, il a été décidé de le prendre en compte afin d'avoir une approche plus fine, l'utilisation d'une formule analytique n'étant pas coûteuse en terme de temps de calcul.

Notons que l'indépendance supposée entre les risques biométriques, les risques économiques et financiers ainsi que la présence de formules fermées pour les taux et l'inflation permettent de simplifier l'évaluation des postes du bilan et d'éviter les difficultés liées à la simulation dans la simulation. Une simulation des actifs et une simulation des passifs sans interaction est suffisante ce qui n'aurait pas été le cas si des rachats dynamiques ou des mécanismes de participation aux bénéfices avaient été modélisés.

Enfin, en ce qui concerne l'agrégation des risques, l'approche « formule standard » est retenue, bien que l'on puisse émettre quelques réserves à son encontre, car nous n'avons pas les moyens d'analyser de manière fine le niveau de dépendance entre les risques modélisés, le risque de longévité et le risque de défaut. Notons cependant que de par sa construction, le modèle d'actif retenue permet de capter une part importante des relations de dépendance existantes dans le régime, la génération simultanée des risques permettant de ne pas avoir recours à une quelconque technique d'agrégation.

Section 4.2. Description de la démarche

4.2.1. Contexte

Le but de cette section est de décrire de manière précise la démarche mise en œuvre pour estimer le besoin en capital SCR qui doit être mobilisé par le régime.

Le bilan de l'assureur se présente de la manière suivante à la date t :

BILAN en t

	NAV_t
A_t	L_t

où :

- ✓ A_t : la valeur de marché de l'actif en t ;
- ✓ L_t : la valeur de marché du passif en t .

Il évolue de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{t+1} = A_t \cdot (1 + R_{t+1}) - \tilde{F}_{t+1} \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + \tilde{C}_{t+1} \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \\ L_{t+1} = Be(t+1) + RM(t+1) \\ NAV_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1} \end{array} \right.$$

où :

- ✓ R_{t+1} : le rendement (aléatoire) des actifs incluant les coupons entre t et $t+1$;
- ✓ \tilde{F}_{t+1} : les prestations et les frais versés (aléatoires) entre t et $t+1$;
- ✓ \tilde{C}_{t+1} : les capitaux constitutifs versés (aléatoires) entre t et $t+1$.

Pour évaluer le SCR, il s'agit de projeter le bilan de l'entité dans un an. Pour cela, on considère que la situation initiale de l'entité est décrite par le bilan Solvabilité II présenté ci-dessous :

<i>Bilan Solvabilité II (en M€)</i>			
<i>Actif</i>		<i>Passif</i>	
<i>Obligations</i>	227,97	<i>Fonds propres</i>	175,67
<i>Actions</i>	26,74	<i>Provisions techniques (best estimate et risk margin)</i>	148,24
<i>Provisions techniques de réassurance</i>	69,21		
<i>Total</i>	323,92	<i>Total</i>	323,92

4.2.2. Spécification du calcul du SCR

Dans le dispositif Solvabilité II, le critère de calcul du SCR est le contrôle de la probabilité de ruine à un an, ce qui conduit à devoir respecter la condition :

$$\Pr[A_1 - L_1 \geq 0] \geq 99,5\%$$

A la date initiale, une partie des fonds propres de l'entité correspond au capital requis et l'autre partie reste disponible (*Free Surplus*). On est donc amené à présenter le bilan simplifié en $t = 0$ selon le schéma suivant :

BILAN en 0

A_0^{FS}	FS_0
	$SCR = NAV_0 - FS_0$
$A_0 - A_0^{FS}$	L_0

où :

- ✓ A_0^{FS} : la valeur de marché de l'actif en représentation du *Free Surplus* ;
- ✓ FS_0 : la valeur initiale du *Free Surplus*.

En tenant compte de l'évolution de ce bilan dans un an, l'actif net s'écrit :

$$A_1 - L_1 = A_0 \cdot (1 + R_1) - \tilde{F}_1 \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + \tilde{C}_1 \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} - L_1$$

$$A_1 - L_1 = (FS_0 + SCR + L_0) \cdot (1 + R_1) + (\tilde{C}_1 - \tilde{F}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} - L_1$$

A priori, le montant de *Free Surplus* n'est pas connu et dépend de la proportion de capital immobilisé. Ainsi pour calculer le SCR, on ne s'intéresse qu'à la partie basse du bilan ce qui revient à supposer que $FS_0 = 0$.

On a alors :

$$\Pr[A_1 - L_1 \geq 0] = \Pr \left[SCR \geq \frac{(\tilde{F}_1 - \tilde{C}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + L_1}{1 + R_1} - L_0 \right]$$

La condition limite $\Pr[A_1 - L_1 \geq 0] = 99,5\%$ est donc garantie pour :

$$SCR = VaR \left(\frac{(\tilde{F}_1 - \tilde{C}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + L_1}{1 + R_1}; 99,5\% \right) - L_0$$

Le montant de SCR requis est donc conditionné par la valeur d'un quantile de la variable aléatoire :

$$X(1) = \frac{(\tilde{F}_1 - \tilde{C}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + L_1}{1 + R_1}$$

Le calcul du SCR revient par conséquent à comparer les charges à un an actualisées au taux de rendements du portefeuille d'actifs à l'engagement initial. Le *Free Surplus* est alors obtenu par différence entre le montant des fonds propres initiaux et le montant de SCR.

4.2.3. Projection à horizon un an et évaluation des différentes grandeurs économiques

Le calcul de la variable $X(1)$ nécessite la projection des postes du bilan à un an. Dans cette partie, l'algorithme permettant d'arriver à cette fin est décrit ainsi que la technique utilisée pour valoriser ces postes

Projection à un an

La projection est réalisée en considérant les différents *scénarii* susceptibles de survenir dans le « monde réel ».

Dans un premier, il s'agit de simuler les bruits blancs relatifs aux dynamiques de taux d'intérêt, de taux d'inflation et des actions, ces dernières décrites dans le Section 2.2 Chapitre 2 sont discrétisées avec un pas mensuel. La génération de ces bruits blancs est effectuée grâce au générateur standard du logiciel R puis sont corrélés avec la matrice de corrélations des résidus décrite *supra*. Grâce à ce procédé, on obtient la réalisation de $K = 10\,000$ *scénarii* des valeurs à un an du taux d'inflation, des taux d'intérêt réels et des actions. Notons que ces tirages sont réalisés avec les paramètres calibrés dans l'univers réel.

Valorisation

Dès lors, pour chaque trajectoire, la valeur des différents postes du bilan doit être effectuée de manière *market consistent*. Ainsi, la valeur des grandeurs suivantes sont évaluées sous la probabilité risque-neutre *via* les formules fermées⁹⁰ décrites dans le Chapitre 2, conditionnellement à chaque état du monde généré :

- ✓ la courbe des coefficients de revalorisation ;
- ✓ la courbe des zéro-coupon d'inflation ;
- ✓ la courbe des zéro-coupon de taux réel ;
- ✓ la courbe des zéro-coupon de taux nominaux.

Par ailleurs, la projection du bilan doit également intégrer les risques systématique et mutualisable lié à la durée de vie. Dès lors, les prestations versées, les capitaux constitutifs collectés et les provisions *best estimate* constitués sont soumis à un aléa sur la survie éventuelle dans un an de chaque individu.

Le risque systématique nécessite la génération de table de *scénarii* traduisant les chocs systématiques appliqués sur la table de mortalité moyenne. L'approche est donc multiplicative et la valeur des postes du bilan à un an doit être évaluée en tenant compte de ces deux niveaux de simulation. Heureusement, seul quelques chocs sur la table de mortalité sont appliqués ce qui garanti un nombre raisonnable d'opérations.

La prise en compte du risque mutualisable de mortalité génère un niveau supplémentaire de complexité s'il est pris en compte *via* une logique de simulation. Pour cette raison, une

⁹⁰ On rappelle l'importance de l'existence de ces formules qui permettent de contourner les difficultés liées à la simulation dans les simulations.

approche analytique est privilégiée sur la base de l'approximation décrite dans le Chapitre 3 Section 3.1.2. Ainsi, la situation à un an tient à la fois des différentes réalisations économiques et du risque mutualisable de mortalité.

4.2.4. Description du rendement de l'actif

L'évaluation du rendement aléatoire observé sur l'actif initial pendant une année s'apprécie *via* la valorisation des actifs financiers. Ainsi, il s'agit de déterminer la quantité notée R_1 . Les schémas de programmation de ces algorithmes sont décrits en Annexe 6 et Annexe 7.

La valeur des actifs financiers est obtenue classiquement en prenant la valeur de marché des actions et des obligations à horizon un an, cette valeur dépendant des situations produites par le générateur de scénarios économiques.

En ce qui concerne la valeur des actions, elle est directement obtenue en multipliant la valeur initiale de celles-ci par les rendements générés comme décrit dans la partie précédente. La valeur des obligations est quant elle calculée à partir de la courbe des taux zéro-coupon estimée à un an pour chaque état du monde. Ces valeurs sont ensuite multipliées par les coefficients matérialisant le risque de *spread*.

La quantité R_1 est alors obtenue en faisant le rapport entre la valeur des actifs financiers et leur valeur initial.

4.2.5. Valeur du passif à un an

La valeur du passif est déterminée par le calcul du *best estimate* et de la *risk margin* dans un an. Le présent exposé a pour but de formaliser les calculs caractérisant la loi de ces quantités :

$$L_1 = Be(1) + RM(1)$$

Comme pour l'actif, la loi du passif nécessite une valorisation *market consistent* pour chaque état du monde. Ainsi, la revalorisation des prestations et l'actualisation des flux est réalisée selon le scénario considéré et en tenant compte de la mortalité constatée.

4.2.5.1. Provision *best estimate*

Le *best estimate* dans un an s'écrit :

$$Be(1) = \mathbf{E}^{P \otimes Q} [\Lambda(1) | \Phi_1] = \mathbf{E}^{P \otimes Q} [\Lambda_{Act}(1) + \Lambda_{All}(1) + \Lambda_{Rev}(1) | \Phi_1]$$

$$\Lambda_{Act}(1) = \sum_{t=2}^{+\infty} (\tilde{F}_t^{Act} - \tilde{C}_t) \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\}$$

$$\Lambda_{All}(1) = \sum_{t=2}^{+\infty} \left(\tilde{F}_t^{All} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \right) \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\}$$

$$\Lambda_{Rev}(1) = \sum_{t=2}^{+\infty} \left(\tilde{F}_t^{Rev} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \right) \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\}$$

Par ailleurs, la variable $\Lambda(1)$ s'écrit comme la somme des engagements individuels notés $\Lambda_i(1)$:

$$\Lambda(1) = \sum_{i \in I} \Lambda_i(1)$$

On décrit alors ci-dessous, l'expression de cette quantité pour une tête $i \in I_{Act}$ en notant $\tau(i) = x_{dep} - x(i)$:

$$\Lambda_i(1) = \sum_{t=2}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_0} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\} \cdot \mathbf{1}_{]t, +\infty[} (T_{x(i)})$$

$$- C_{\tau(i)}(i) \cdot \frac{IPC_{\tau(i)}}{IPC_0} \cdot \exp \left\{ \int_1^{\tau(i)} -r_s^{nom} ds \right\} \cdot \mathbf{1}_{] \tau(i), +\infty[} (T_{x(i)})$$

$$\Lambda_i(1) = \left(\begin{array}{l} \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot \sum_{t=2}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_1} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\} \cdot \mathbf{1}_{]t-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \\ - C_{\tau(i)}(i) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot \frac{IPC_{\tau(i)}}{IPC_1} \cdot \exp \left\{ \int_1^{\tau(i)} -r_s^{nom} ds \right\} \cdot \mathbf{1}_{] \tau(i)-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \end{array} \right) \cdot \mathbf{1}_{]1, +\infty[} (T_{x(i)})$$

La provision *best estimate* $Be_i(1)$ constituée pour cette tête s'écrit alors :

$$Be_i(1) = \mathbf{E}^{P \otimes Q} [\Lambda_i(1) | \Phi_1]$$

$$Be_i(1) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\sum_{t=2}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot \frac{IPC_t}{IPC_1} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\} \cdot 1_{]t-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \mid \Phi_1 \right] \\ -\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[C_{\tau(i)}(i) \cdot \frac{IPC_{\tau(i)}}{IPC_1} \cdot \exp \left\{ \int_1^{\tau(i)} -r_s^{nom} ds \right\} \cdot 1_{] \tau(i)-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \mid \Phi_1 \right] \end{array} \right) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot 1_{]1, +\infty[} (T_{x(i)})$$

En remarquant que $r_s^{nom} = r_s + q_s$, on obtient $\frac{IPC_t}{IPC_1} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s^{nom} ds \right\} = \exp \left\{ \int_1^t -r_s ds \right\}$, soit :

$$Be_i(1) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\sum_{t=2}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s ds \right\} \cdot 1_{]t-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \mid \Phi_1 \right] \\ -\mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[C_{\tau(i)}(i) \cdot \exp \left\{ \int_1^{\tau(i)} -r_s ds \right\} \cdot 1_{] \tau(i)-1, +\infty[} (T_{x(i)+1}) \mid \Phi_1 \right] \end{array} \right) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot 1_{]1, +\infty[} (T_{x(i)})$$

4.2.5.2. La risk margin

Le calcul de la *risk margin* dans un an relève d'un exercice délicat cette quantité étant également aléatoire. En effet, en suivant les spécifications décrites dans le QIS4, cette quantité devrait être évaluée selon une approche « coût du capital » en projetant les SCR futurs à partir de l'année $t=1$, ces mêmes projections dépendant bien évidemment de l'information connue à cette date. Le calcul des SCR futurs représente vraisemblablement une vraie difficulté technique car calculer un SCR à une date t nécessite la projection du bilan à cette date et donc à nouveau le calcul de la *risk margin*.

$$RM(1) = CoC_{factor} \cdot \sum_{t \geq 1} SCR(t) \cdot P_{nom}(1, t)$$

Plusieurs alternatives sont envisageables pour contourner cette difficulté. La solution imposée par le QIS4 consiste à évaluer la marge pour risque selon la méthode « formule standard ». Cette approche a la mérite d'être simple car déterministe dans le cadre de cette étude et peut donc être facilement mise en œuvre. Une alternative à cette solution pourrait consister à considérer les SCR futurs comme une proportion des provisions *best estimate* aux mêmes dates⁹¹. Dans cette configuration et en utilisant l'approximation $RM(1) \approx CoC_{factor} \cdot D(1) \cdot k \cdot Be(1)$ où $D(1)$ est la durée de l'engagement vue depuis $t=1$

⁹¹ Cette solution est en fait proposer dans la partie TS.II.C.28 du QIS4.

et k tel que $k = \frac{SCR(t)}{Be(t)}$, on peut obtenir une équation implicite caractérisant la *risk margin* (la quantité $D(1)$ aléatoire pouvant être fixée de manière prudente à $D(0)-1$)⁹².

Dans le cadre de cette étude, une approche déterministe a été retenue. Sur la base des projections réalisées dans la Partie III. Chapitre 4, le calcul de la *risk margin* est réalisé en considérant les SCR futurs (déterministe) à partir de la date $t=1$ et en les actualisant à partir de la courbe du QIS4. Comme pour le calcul mené précédemment, l'approximation suivante est utilisée :

$$(1 + R(s+t))^{s+t} \approx (1 + R(s))^s \cdot (1 + R(s,t))^t$$

On obtient les quantités suivantes avec et sans réassurance :

<i>RM en M€ avec réassurance</i>	<i>RM en M€ sans réassurance</i>
9,86	17,94

4.2.6. Expression de la loi de la variable d'intérêt

La présente partie vise à préciser l'expression de la loi de la variable $X(1)$. Le schéma de programmation de l'algorithme est décrit en Annexe 8.

$$X(1) = \frac{(\tilde{F}_1 - \tilde{C}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + L_1}{1 + R_1}$$

$$X(1) = \frac{(\tilde{F}_1 - \tilde{C}_1) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} + Be(1) + RM(1)}{1 + R_1}$$

En notant Z est une variable synthétique représentant l'ensemble des risques systématiques économiques et financiers, on remarque que la variable $Y(1) = X(1) | Z$ est asymptotiquement gaussienne puisque soumise au seul risque mutualisable de mortalité. En effet, en supposant $RM(1)$ constante et conditionnellement aux risques économiques et financiers, la variable $X(1)$ ne dépend que de la population d'individus survivants à la date $t=1$ dont la composition est aléatoire et varie selon la survie des individus qui la compose. La convergence vers une loi de normale de $Y(1) = X(1) | Z$ est assurée par l'indépendance des individus et par le caractère uniformément bornés des montants considérés. Au passage,

⁹² Cf. PLANCHET, GUIBERT et JUILLARD (2010) pour plus de précisions.

on peut noter que la loi $\Lambda(1)|Z$ n'est en revanche pas simple à déterminer puisqu'elle correspond asymptotiquement à un mélange de loi gaussienne, ceci s'expliquant par le fait que conditionnellement à la fois à Z et à l'état de la population en $t=1$, la variable $\Lambda(1)$ est approximativement gaussienne.

Par conséquent, la loi de $Y(1)$ est déterminable par la connaissance de ses moments. En prenant en compte la population d'assurés I en 0, la variable $X(1)$ peut être vue comme la somme de variables individuelles $X_i(1)$:

$$X(1) = \sum_{i \in I} X_i(1)$$

et par indépendance entre les individus, le calcul peut être obtenu grâce à l'espérance et à la variance, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{E}[X(1)] = \sum_{i \in I} \mathbf{E}[X_i(1)] \\ \mathbf{V}[X(1)] = \sum_{i \in I} \mathbf{V}[X_i(1)] \end{cases}$$

Par souci de clarté, une présentation simplifiée du calcul des moments est présentée pour une seule tête $i \in I_{Act}$ dont le départ à la retraite est programmé la première année et sans prendre en compte la réversion, les frais et les chargements, la généralisation étant immédiate dès lors que les têtes sont indépendantes. La variable $X_i(1)$ constituée pour l'individu i s'écrit alors :

$$X_i(1) = \frac{(f_i^{Act} - C_1(i)) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot 1_{]1, +\infty[}(T_{x(i)}) + Be_i(1) + RM_i(1)}{1 + R(1)}$$

$$X_i(1) = \frac{(A - C_1(i)) \cdot \frac{IPC_1}{IPC_0} \cdot 1_{]1, +\infty[}(T_{x(i)}) + RM_i(1)}{1 + R(1)}$$

avec :

$$\checkmark \quad A = \mathbf{E}^{P \otimes Q} \left[\sum_{t=1}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot \exp \left\{ \int_1^t -r_s ds \right\} \cdot 1_{]t-1, +\infty[}(T_{x(i)+1}) \mid \Phi_1 \right];$$

$$\checkmark \quad RM_i(1) \text{ tel que } RM(1) = \sum_{i \in I} RM_i(1).$$

Le calcul de l'espérance et de la variance de cette variable est alors effectué, en notant $l_{x(i)}$ le nombre de survivant à l'âge $x(i)$ prédit par la table (éventuellement choquée), conditionnellement à chaque état du monde $Z = z^{(k)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^P \left[X_i(1) \mid Z = z^{(k)} \right] = \frac{\left(A^{(k)} - C_1(i) \right) \cdot \left(\frac{IPC_1}{IPC_0} \right)^{(k)} \mathbf{E}^P \left[1_{]1, +\infty[} \left(T_{x(i)} \right) \right] + RM_i(1)}{1 + R(1)^{(k)}} \\ \mathbf{V}^P \left[X_i(1) \mid Z = z^{(k)} \right] = \frac{\left(A^{(k)} - C_1(i) \right) \cdot \left(\frac{IPC_1}{IPC_0} \right)^{(k)2} \cdot \mathbf{V}^P \left[1_{]1, +\infty[} \left(T_{x(i)} \right) \right]}{\left(1 + R(1)^{(k)} \right)^2} \end{array} \right.$$

avec :

$$\checkmark \quad A^{(k)} = \sum_{t=1}^{+\infty} f_i^{Act} \cdot P_{reel}^{(k)}(1, t) \cdot \frac{l_{x(i)+t}}{l_{x(i)+1}} ;$$

$$\checkmark \quad \mathbf{E}^P \left[1_{]1, +\infty[} \left(T_{x(i)} \right) \right] = \frac{l_{x(i)+1}}{l_{x(i)}} ;$$

$$\checkmark \quad \mathbf{V}^P \left[1_{]1, +\infty[} \left(T_{x(i)} \right) \right] = \frac{l_{x(i)+1}}{l_{x(i)}} \cdot \left(1 - \frac{l_{x(i)+1}}{l_{x(i)}} \right).$$

En sommant les espérances et les variances individuelles, la loi de $Y(1) = X(1) \mid Z$ peut être décrite explicitement grâce aux formules décrites en 3.1.2.

Section 4.3. Estimation du besoin en capital

A l'horizon $t=1$, la valeur du bilan est projetée en tenant compte de l'exposition aux risques du régime. Le générateur de scénarii économiques permet de considérer l'intégralité des risques de marché, hormis le risque de concentration qui est négligé, ainsi que le risque de dépense intégré grâce à l'approche retenue en termes d'inflation. De plus, le modèle proposé intègre une incertitude systématique supplémentaire associée à la revalorisation des prestations au niveau de l'inflation, cette dernière n'étant pas intégrée dans l'approche « formule standard ». Enfin, le besoin en capital des risques non modélisés est estimé selon l'approche « formule standard ».

4.3.1. Besoin en capital des risques générés

La génération de dix milles scénarii économique et financier, avec réassurance, à horizon un an fournit la distribution de la charge actualisée au taux de rendement du portefeuille $X(1)$ représentée avec et sans prise en compte de l'aléa mutualisable :

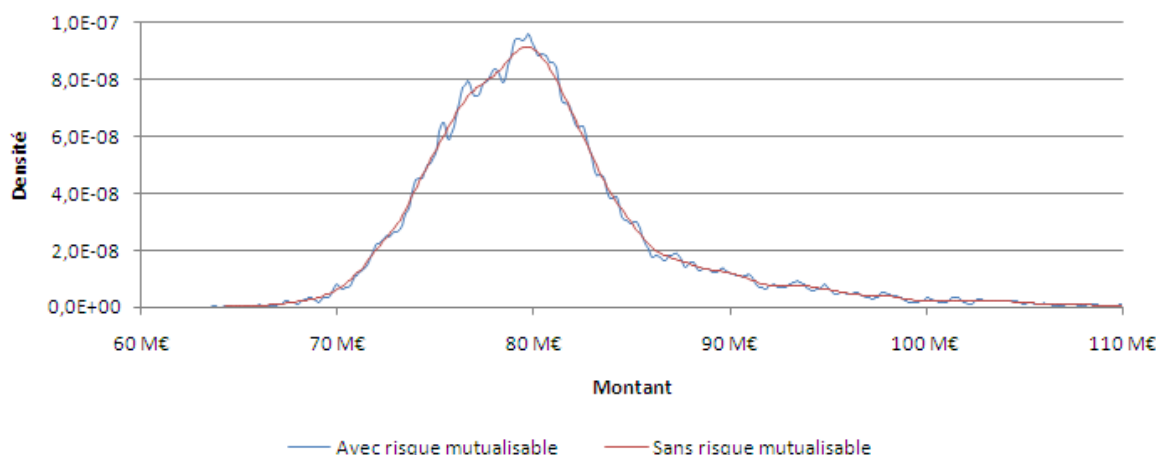


Fig. 39 - Distribution de la charge actualisée avec réassurance

Cette distribution est caractérisée par une queue de distribution épaisse ce qui se traduit par une « dangerosité » importante. Elle peut être mesurée par son coefficient de variation empirique, rapport de l'écart type et de la moyenne empirique :

<i>Indicateur</i>	<i>Estimation</i>
Moyenne	80 624 158
Ecart type	6 362 144
Coefficient de variation	7,89 %

L'explication provient de la forte sensibilité de la variable d'intérêt à la baisse des taux et qui résulte d'un décalage entre la durée modifiée du passif et celle de l'actif. Par ailleurs, on note que dans ce exemple, le risque mutualisable a un impact assez faible sur la loi de $X(1)$, preuve de sa bonne mutualisation. Le besoin en capital généré par l'ensemble des risques modélisés est obtenu par l'application de la formule suivante :

$$SCR = VaR(X(1); 99,5\%) - L_0$$

On obtient alors un montant de SCR égal à 27,84 M€, l'impact du risque mutualisable étant très faible et représente 0,1 M€.

<i>Besoin en capital (en M€)</i>
27,84

La prise en compte du traité de réassurance permet de réduire significativement le besoin en capital d'un facteur deux. Le graphique suivant représente la distribution de $X(1)$ sans prendre en compte la réassurance :

Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire

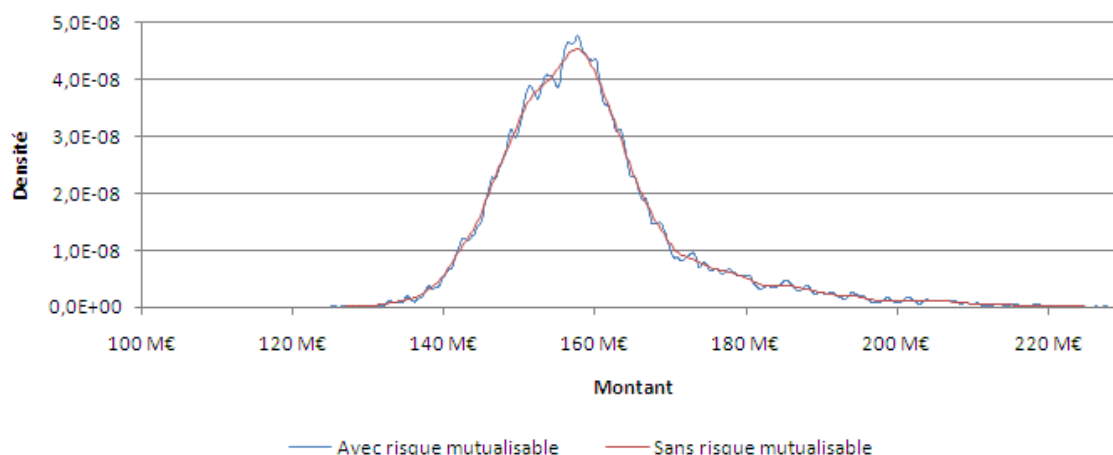


Fig. 40 - Distribution de la charge actualisée sans réassurance

Indicateur	Estimation
Moyenne	159 485 774
Ecart type	12 816 548
Coefficient de variation	8,03 %

La charge de capital qui doit alors être immobilisée vaut :

Besoin en capital (en M€)
56,01

A la lumière de ces différents résultats, la comparaison avec les résultats obtenus selon l'approche « formule standard » doivent être effectuée. Pour cela, le SCR relatif au risque modélisé, c'est-à-dire les risques de marché et le risque de dépense, est calculé selon l'approche « formule standard » avec les mêmes matrice d'agrégation des risques :

SCR risque modélisé (en M€) avec réassurance	SCR risque modélisé (en M€) sans réassurance
19,46	42,00

Le besoin en capital requis par les risques qui ont été modélisés est plus important dans le cadre de l'approche « modèle interne » de près de 8,2 M€. Ce surplus est la résultante de deux effets. D'un part, la modélisation proposée pour rendre compte du risque action conduit à générer un besoin en capital plus élevé que le niveau de choc spécifié par le QIS4. La distribution de rendement des actions à un an est donnée par le graphique suivant :

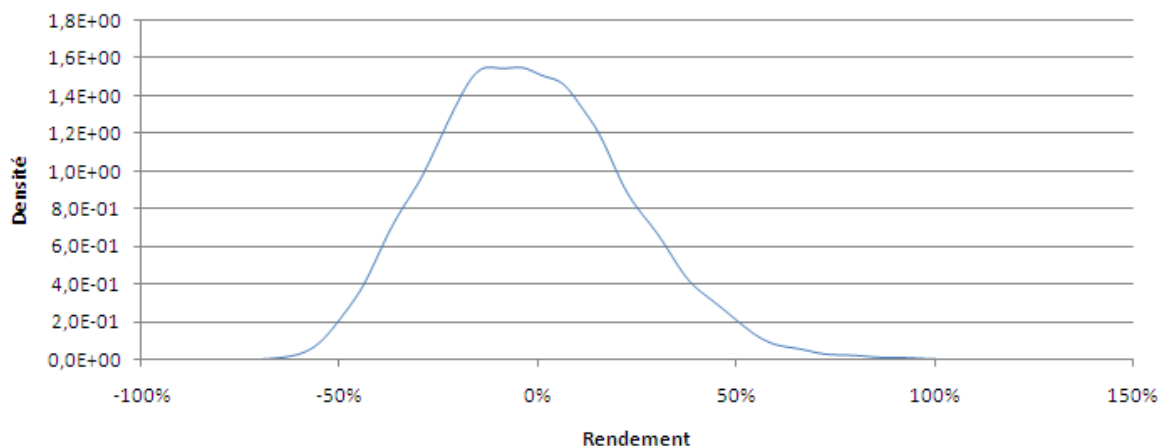


Fig. 41 - *Distribution du rendement des actions*

Le VaR à 0,05 % de cette distribution correspond à une perte de 52,39 % bien plus important que les 32 % spécifié par le QIS4. Cet écart s'explique par l'hypothèse de forte volatilité retenue à la date d'évaluation pour la période à venir.

<i>Indicateur</i>	<i>Estimation</i>
Moyenne	-1,6 %
Ecart type	24,4%
VaR à 0,05%	-52,39 %

Au regard de la situation économique observable au 31/12/2008, l'hypothèse d'un choc important est légitime. En effet, suite à la crise financière, les valeurs actions ont subies des pertes relativement lourde (par exemple -42,68 % sur l'indice CAC40 entre le 31/12/2007 et le 31/12/2008 ou encore -54,15 % en annuel entre le 31/07/2008 et le 31/01/2009).

Pour vérifier l'impact de cette hypothèse, le calcul du besoin en capital « formule standard » relatif aux risques modélisés est recalculé avec un choc sur la valeur des actions à - 52,39 %. Les résultats obtenus sont les suivants :

<i>SCR risque modélisé (en M€) avec réassurance</i>
22,88

Dès lors, une part importante de l'écart entre les deux approches s'explique par la sous-estimation du besoin en capital requis par le risque action. L'écart résiduel, soit 4,9 M€ est ensuite expliqué par la prise en compte du risque inflation qui impacte principalement la population d'actifs.

4.3.2. Besoin en capital relatif au risque de longévité

Le risque de longévité est particulièrement présent dans le cadre d'un régime de retraite, d'autant qu'une population d'actifs est considérée. La charge en capital de ce risque est mesurée selon l'approche « formule standard » et s'accompagne d'une étude de sensibilité à l'évolution de l'espérance de vie résiduelle.

Le besoin en capital associé au risque de longévité est mesuré en prenant la différence entre la valeur de l'actif net avant et après choc :

$$Life_{long} = \Delta NAV_{longevityshock, t=1}$$

Pour rappel les résultats sont les suivants, avec et sans réassurance :

<i>Life_{long} (en M€) avec réassurance</i>	<i>Life_{long} (en M€) sans réassurance</i>
5,60	11,19

Dès lors, l'impact de chocs sur les coefficients de mortalité permet de modifier le niveau d'évolution de l'espérance de vie résiduelle, composante principale de risque systématique de longévité. En présence des autres risques simulés par le modèle, nous appliquons des chocs sur la table de mortalité afin de mesurer leurs impacts sur la distribution de la valeur de la variable $X(1)$. Les graphiques suivants représentent la distribution de la variable $X(1)$ avec réassurance sous l'effet des différents chocs :

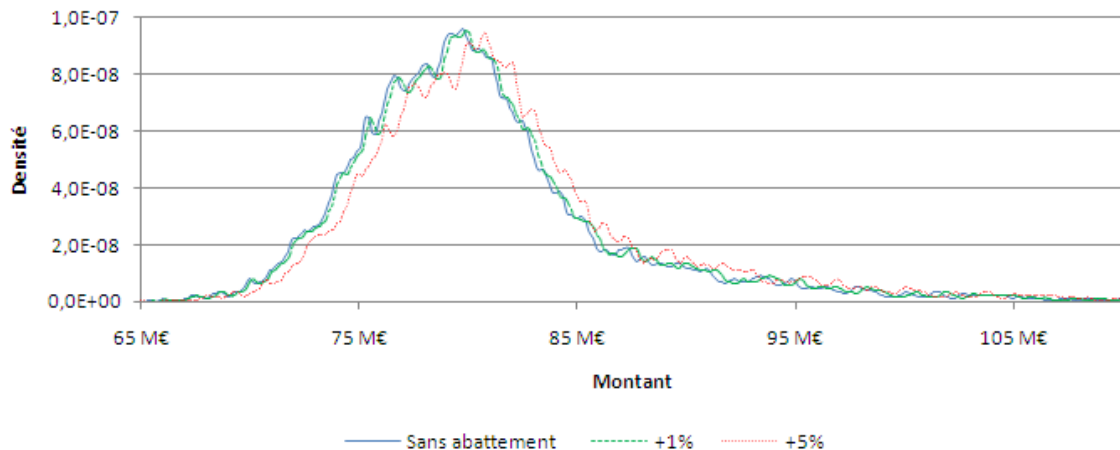


Fig. 42 - Distributions choquées à 1 % et 5 %

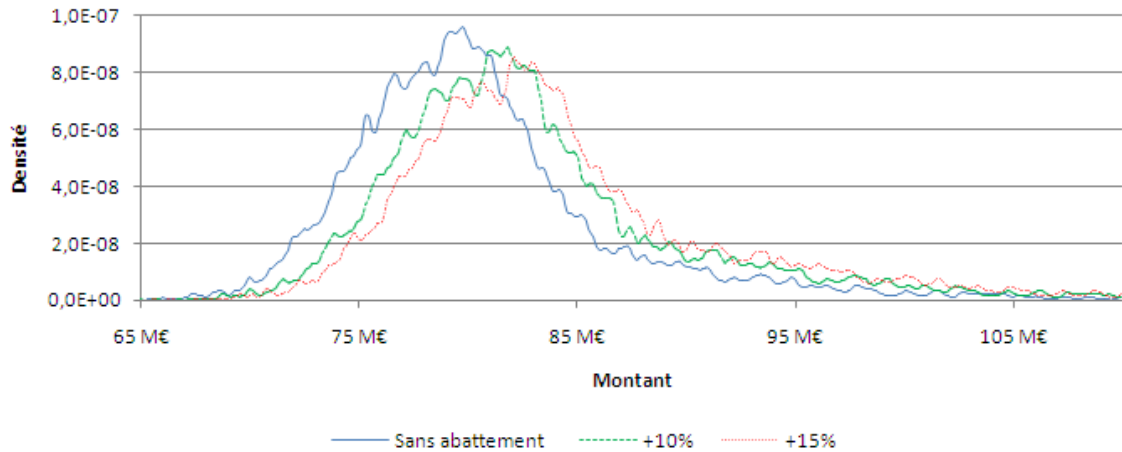


Fig. 43 - Distributions choquées à 10 % et 15 %

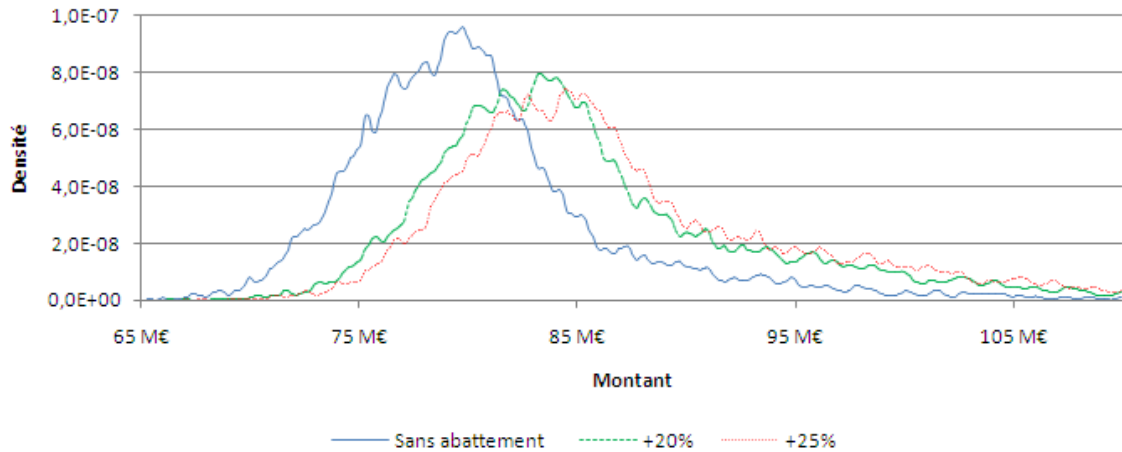


Fig. 44 - Distributions choquées à 20 % et 25 %

Les graphes ci-dessus permettent de traduire les variations observées sur la distribution de la variable $X(1)$ avec réassurance en fonction des chocs systématiques de longévité. Les effets de ces derniers peuvent être décomposés en deux phases : d'une part, les chocs diminuent la valeur moyenne de $X(1)$ selon leur intensité et d'autre part, ils modifient sa dangerosité, la queue de la distribution devenant plus épaisse avec l'élévation du niveau de l'espérance de vie résiduelle. En effet, un abattement de 5 % sur les Q_x conduit à élever de 1,2 % le niveau de l'espérance de vie résiduelle des femmes à 52 ans. Cet abattement accroît la charge en capital de 8,68 % à 30,16 M€.

Bien que la charge en capital requise par ce risque ne puisse être évaluée avec précision, l'intensité d'occurrence de ces chocs n'étant pas en notre possession, l'étude ci-dessus permet d'ores et déjà de mettre en exergue la dangerosité de ce risque. Le tableau suivant reprend des éléments quantitatifs permettant d'illustrer ce propos :

<i>Indicateur</i>	<i>Sans abattement</i>	<i>1 %</i>	<i>5 %</i>	<i>10 %</i>	<i>15 %</i>	<i>20 %</i>	<i>25 %</i>
Moyenne	80,62	80,85	81,80	83,06	84,43	85,91	87,52
Ecart type	6,36	6,44	6,75	7,18	7,65	8,16	8,72
Coefficient de variation	7,89 %	7,96 %	8,26 %	8,65 %	9,06 %	9,50 %	9,96 %
Besoin en capital (VaR à 99,5 %)	27,84	28,22	30,16	32,70	35,40	38,27	41,33

4.3.3. Besoin en capital relatif au risque de contrepartie

Le besoin en capital relatif au risque de contrepartie est repris de l'approche « formule standard ». Pour rappel, le résultat est le suivant :

<i>SCR_{def} en M€</i>
1,88

4.3.4. Agrégation des facteurs de risques

L'agrégation des facteurs de risques est réalisée grâce à la formule en racine carrée vue dans l'approche standard. Le coefficient de corrélation entre les risques modélisés, le risque de longévité et le risque de défaut est pris égal à 0,25.

Ainsi, on obtient le résultat suivant avec réassurance :

<i>CorrSCR</i>	<i>27,84</i>	<i>1,88</i>	<i>5,81</i>
<i>27,84</i>	1	0,25	0,25
<i>1,88</i>	0,25	1	0,25
<i>5,81</i>	0,25	0,25	1

et sans réassurance :

<i>CorrSCR</i>	<i>56,01</i>	<i>0</i>	<i>11,62</i>
<i>56,01</i>	1	0,25	0,25
<i>0</i>	0,25	1	0,25
<i>11,62</i>	0,25	0,25	1

En reprenant, le montant du besoin en capital généré par le risque opérationnel calculé selon l'approche « standard », on obtient le SCR suivant, avec et sans réassurance :

<i>SCR avec réassurance en M€</i>	<i>SCR sans réassurance en M€</i>
30,83	60,40

Section 4.4. Tests de sensibilité aux paramètres économiques et financiers

Le but de cette section est de mesurer la sensibilité du SCR, relatif aux risques modélisés dans le modèle interne partiel, aux paramètres économiques et financiers, tant dans l'univers réel que risque neutre, calibrés pour les besoins du générateur de *scénarii* économique. Une telle approche est légitime puisque les risques financiers, et notamment le risque de taux d'intérêts, expliquent une très large part du montant de capital immobilisés.

4.4.1. Sensibilité aux paramètres réels

D'ores et déjà, on peut noter que les tests doivent être réalisés sur des grandeurs dont les variations à des impacts à long terme, la durée de l'engagement étant longue, les taux d'intérêt à long terme et l'inflation jouent des rôles prépondérants.

4.4.1.1. Sensibilité au taux d'inflation

Le calibrage de l'inflation, réalisée sur des données annuelles entre 1985 et 2005, respecte la contrainte à moyen terme imposé par la BCE. Trois tests de sensibilité sont réalisés pour mesurer la variation du SCR :

1. augmentation (en absolu) de 1 % de la tendance de long terme μ_q ;
2. diminution (en absolu) de 1 % de la tendance de long terme μ_q ;
3. utilisation des paramètres calibrés à long terme $\hat{\kappa}_q = 0,261$, $\hat{\mu}_q = 0,051$, $\hat{\sigma}_q = 0,026$.

Les résultats obtenus pour ces trois tests sont résumés dans le tableau suivant pour un niveau de SCR de référence égale à 27,84 M€ :

<i>Test</i>	<i>SCR</i>
1	29,31
2	27,08
3	40,50

A volatilité constante, une évolution sur le taux d'inflation à long terme impacte relativement peu le niveau de SCR. En revanche, l'impact d'un retour à une inflation très volatile, comparable à celle que la France a connu durant la période 1970-1985, serait particulièrement dommageable pour un régime de retraite avec garantie de revalorisation puisqu'elle conduirait à augmenter de plus de 45 % son niveau de SCR.

4.4.1.2. Sensibilité aux taux d'intérêt réels

L'engagement d'un régime de retraite étant plus sensible aux paramètres de long terme, les tests sont réalisés sur les grandeurs de long terme du modèle :

1. augmentation (en absolu) de 1 % de la tendance de long terme μ_l ;
2. diminution (en absolu) de 1 % de la tendance de long terme μ_l ;
3. doubler par deux la vitesse de retour vers la moyenne et modification de la variance, toute chose égale par ailleurs ($\hat{\kappa}_l = 0,902, \hat{\sigma}_l = 0,027$) ;
4. diviser par deux la vitesse de retour vers la moyenne et modification de la variance, toute chose égale par ailleurs ($\hat{\kappa}_l = 0,226, \hat{\sigma}_l = 0,021$).

Les résultats obtenus pour ces quatre tests sont résumés dans le tableau suivant pour un niveau de SCR de référence égale à 27,84 M€ :

<i>Test</i>	<i>SCR</i>
1	25,09
2	30,34
3	25,85
4	28,81

Une variation de 1 % du taux d'intérêt réel à long terme conduit une baisse de près de 10 % du SCR en cas de tension à la hausse et un accroissement de près de 9 % en cas de

tension à baisse. L'impact d'une variation de la vitesse de convergence conduit à un diminution de plus de 7 % en cas de multiplication par 2 contre une augmentation un accroissement de 3,5 % en cas de division par 2.

4.4.2. Sensibilité aux paramètres risque-neutre

Les paramètres risque-neutre calibrés pour les besoins du générateur de *scenarii* économiques permettent de réaliser l'évaluation des postes du bilan de manière *market consistent*. Par conséquent, le choix de ces paramètres a des conséquences notables sur l'exigence en termes de capital. Deux tests de sensibilité sont effectués pour démontrer l'importance de ce choix.

Pour cela, le calibrage des paramètres risque-neutre du modèle est réalisé de manière à traduire la réalité économique à la date du 31/12/2006 et du 31/12/2008. Les courbes des taux d'intérêts fournies par l'Institut des Actuaire pour ces mêmes dates sont utilisées pour déterminer les paramètres d'intérêts, ainsi que les indices des prix à la consommation INSEE (cf. Chapitre 2. Section 2.4 pour la méthode) :

Paramètre sous Q	Valeur retenue	Valeur au 31/12/2006	Valeur au 31/12/2008
$\hat{\kappa}_q$	0,656	0,656	0,656
$\hat{\mu}_q$	0,018	0,014	0,010
$\hat{\sigma}_q$	0,002	0,010	0,010
$\hat{\kappa}_l$	0,092	0,097	0,095
$\hat{\mu}_l$	0,078	0,037	0,048
$\hat{\sigma}_l$	0,030	0,013	0,019
$\hat{\kappa}_r$	0,442	0,439	0,439
$\hat{\sigma}_r$	0,010	0,010	0,010

Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire

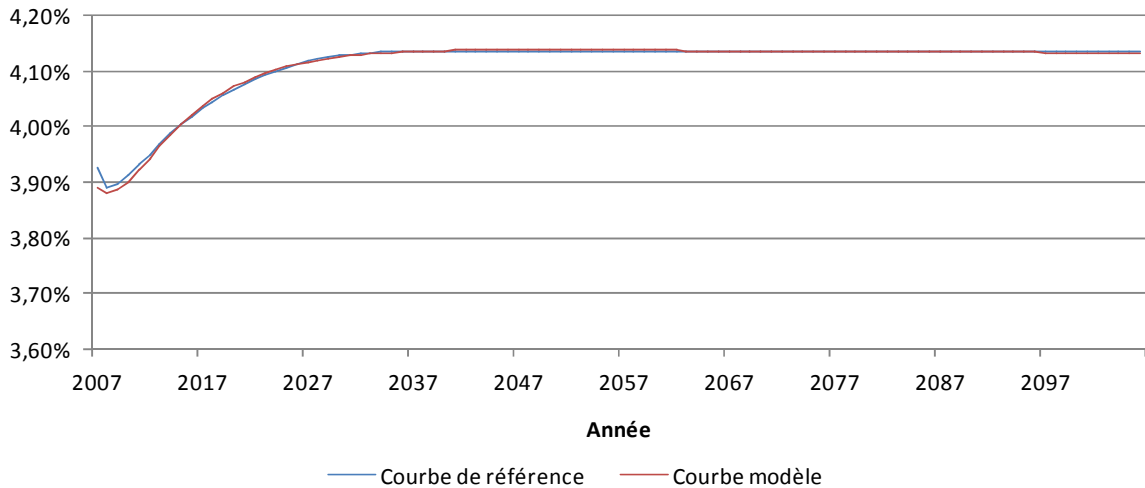


Fig. 45 - *Ecart entre la courbe de référence et le modèle au 31/12/2006 (source : IA)*

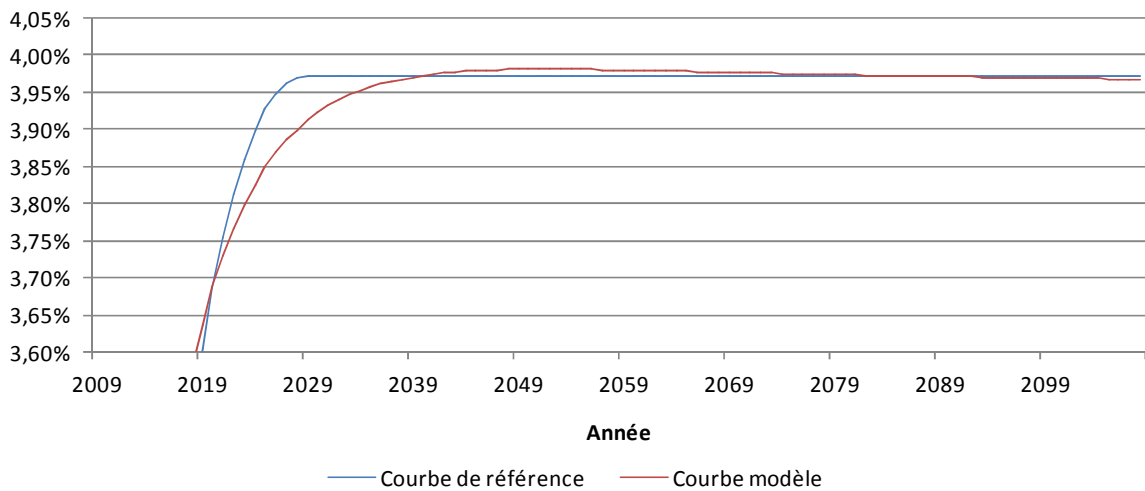


Fig. 46 - *Ecart entre la courbe de référence et le modèle au 31/12/2008 (source : IA)*

Les résultats obtenus pour ces quatre tests sont résumés dans le tableau suivant pour un niveau de SCR de référence égale à 27,84 M€ :

<i>Test</i>	<i>SCR</i>
31/12/2006	33,73
31/12/2008	25,16

La sensibilité du SCR aux paramètres risque-neutre est élevée comme on pouvait l'anticiper, le facteur le plus important étant la tendance de la long observable sur les marchés aussi bien pour les taux d'intérêt que pour les taux de revalorisation. Une augmentation de plus de 21 % du SCR est observable si le niveau de ces paramètres traduit la situation

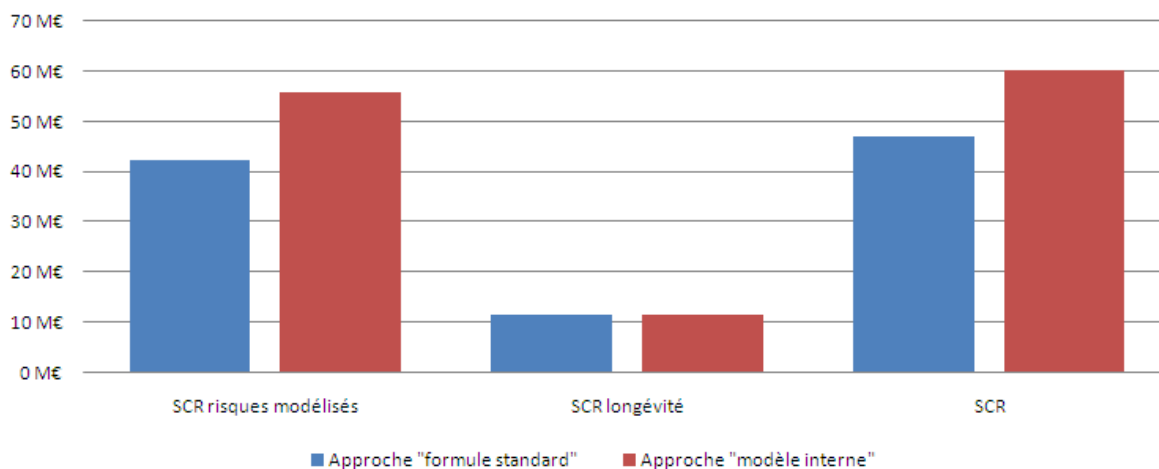
économique au 31/12/2006. En revanche, une baisse de près de 10 % du SCR est observable si le niveau de ces paramètres traduit la situation économique au 31/12/2008.

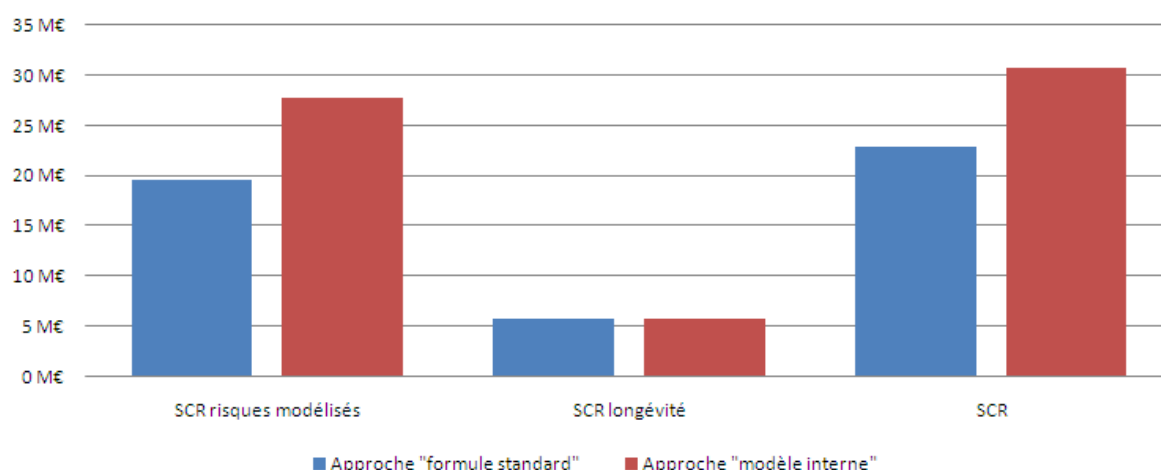
Chapitre 5. Conclusion de la partie

La présente partie a permis de développer une approche possible, « semi analytique » pour mettre en place un modèle interne partiel afin d'évaluer la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire. Ce travail est légitime car ce processus permet d'intégrer des éléments essentiels qui ne transparaissent pas dans l'approche « formule standard ». Dans un premier temps, l'utilisation d'un modèle d'actifs intégrés permet de tenir compte d'un certain nombre de dépendances, à moindre frais, entre les différents aléas économique et financiers. D'autres part et grâce à la modélisation de l'inflation, l'approche modèle interne intègre le coût de la revalorisation des pensions dans l'estimation du SCR. L'étude est également complétée par la mesure de la sensibilité au risque biométrique, le risque mutualisable grâce aux formules analytiques est intégré de manière exacte sans aucune conséquence sur la durée des calculs.

Dès lors, la charge en capital relative à l'ensemble des facteurs de risques modélisés est supérieure à celle prédite par l'approche « formule standard ». Les graphiques suivants récapitulent les principaux résultats :

Sans réassurance



Avec réassurance

Dans l'approche avec réassurance, le besoin en capital généré par les risques modélisés est supérieur de plus de 8 M€ à celui prévu dans l'approche « formule standard », comprenant l'ensemble des risques de l'actif et le risque de dépenses agrégés. Cette augmentation s'explique d'une part par la prise en compte du risque associé à la revalorisation des pensions, non intégré dans la première approche et par une démarche plus prudent pour analyser le risque action. Par ailleurs, la démarche pour intégrer le risque mutualisable, *via* une approche analytique, fournit une plus grande finesse à l'estimation réalisée, même si au global il ne pèse que très peu sur la solvabilité.

Malgré cette augmentation, on note que la mise en place d'une traité quote part 50 % permet de réduire significativement le besoin en capital. On observe une diminution de plus de près de moitié de la charge en capital.

Au global, le SCR constitué est supérieur de plus de 34,8 % à celui pris en compte dans l'approche « formule standard », le périmètre d'analyse des risques étant finalement plus large et l'approche mise en œuvre étant plus prudente. A la lumière des ces éléments, le bilan Solvabilité II constitué dans l'approche « formule standard » est toujours le même, seule change le ratio de couverture et le SCR immobilisé. On rappelle néanmoins que le calibrage du modèle joue un rôle important quant à la sensibilité du SCR. Dans un régime de rente où les engagements ont une durée longue, une attention particulière doit être attachée aux tendances de long terme.

<i>Bilan Solvabilité II (en M€)</i>			
<i>Actif</i>		<i>Passif</i>	
<i>Obligations</i>	227,97	<i>Fonds propres</i>	175,67
<i>Actions</i>	26,74	<i>Provisions techniques (best estimate et risk margin)</i>	148,24
<i>Provisions techniques de réassurance</i>	69,21		
<i>Total</i>	323,92	<i>Total</i>	323,92

Le besoin en fonds propres s'élève à 30,83 M€ ce qui laisse un *Free surplus* de 144,84 M€ à la disposition de l'entité, le ratio de couverture atteignant les 82,4 % au lieu de 87 % dans l'approche « formule standard ».

A l'issue de cette étude, les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

<i>Référenciel (en M€)</i>	<i>Provision technique</i>	<i>Risk margin</i>	<i>Capital de solvabilité</i>	<i>Ratio de couverture</i>
Solvabilité I	150,80	0	5,13	97,2%
Solvabilité II – Approche « formule standard »	138,42	9,83	22,70	87 %
Solvabilité II – Approche « modèle interne »	138,42	9,83	30,83	82,4 %

CONCLUSION GENERALE

Comme l'ensemble du monde de l'assurance, les organismes gérants des engagements de retraite supplémentaire doivent s'adapter à la métamorphose opérée au niveau européen du système de contrôle prudentiel. Le dispositif prévoit de nouveaux standards en matière de comptabilisation des actifs et des passifs d'assurance, de nouvelles exigences en matière de fonds propres et des innovations relatives aux règles de gestion, de communication et de contrôle de la solvabilité.

Au regard de ces changements, l'étude de la solvabilité ne peut faire l'économie d'une analyse rigoureuse des facteurs de risques et des liens de dépendance entre ces derniers. En effet, les régimes de retraite supplémentaire sont en particulier exposés à des aléas financiers et démographiques spécifiques qui doivent être décryptés. Dès lors, l'analyse de la solvabilité peut être menée selon deux approches : l'approche « formule standard » et l'approche « modèle interne ». Dans le cadre de la présente étude, les deux approches ci-dessus ont été développées. La première fait le point sur la démarche préconisée par le QIS4 et identifie le besoin en capital requis par les risques spécifiques d'un régime de retraite supplémentaire en tenant compte des garanties supplémentaires. Par ailleurs, la capacité d'absorption des risques par le dispositif de réassurance est intégrée et permet de réduire sensiblement la charge en capital requise. Ce dispositif tranche avec l'ancien référentiel où la notion de prudence comprenait de manière implicite certains risques (par exemple dans la construction de tables de mortalité dite prudente masque des facteurs de risques d'échantillonnage et de modèle) ce qui se répercutait dans la comptabilisation des provisions. Dès lors, le nouveau référentiel intègre de manière explicite ces nouveaux risques et on observe de nets changements en particulier dans la quantification de l'impact des risques de marché.

L'approche « modèle interne » mise en œuvre permet de quantifier le besoin en capital requis pour être solvable à horizon un an à 99,5 %. Au travers de cette étude, l'ensemble des risques financiers ont été modélisés grâce à un modèle dérivé d'ALHGRIM et AL. (2005), dont la dynamique est centrée autour de l'inflation. Cette variable est d'ailleurs d'une importance relative de part son rôle dans la revalorisation des pensions, l'évolution des frais fixes et la réalisation des équilibres macro-économique. Bien que les risques financiers soient captés de manière relativement fine par le modèle mis en œuvre, certaines faiblesses persistent et feront sans doute l'objet de développement à venir. Ainsi, les problématiques associées à la prise en compte des dépendances extrêmes entre les classes d'actifs, le caractère concomitant de ces dernières étant avéré, et à la gestion du risque de liquidité, les éléments peut liquides d'un portefeuille pouvant être des obstacles à la mise en place de couverture efficace, sont désormais d'actualité. D'autre part, on peut s'interroger sur la légitimité du poids occupé par cette classe de risque en termes de coût en capital. En effet, cette étude a permis de constater que la couverture exigée par le risque de marché dans Solvabilité II est importante comparée à l'exigence de marge dans le dispositif en vigueur, qui d'ailleurs joue son rôle malgré le contexte de crise majeure que le secteur a connu.

En dehors des risques financiers, du fait de la durée longue du passif d'un régime de retraite, le risque de longévité requiert également une attention particulière. Pour ce faire l'impact de chocs sur la tendance d'évolution de l'espérance de vie est mesuré. Bien que cette approche ne permette pas de quantifier le besoin en capital requis par ce risque, elle fournit toutefois une indication sur la sensibilité du régime à cet aléa. Deux approches sont envisageables pour améliorer la prise en compte de ce risque. D'une part, un modèle de

mortalité stochastique pourrait être mis en œuvre afin de générer la distribution de l'engagement sous risque, le choix du modèle devant traduire avec fidélité les phénomènes extrêmes observés sur les données ce qui en fin de compte est assez délicat. D'autre part, une approche par chocs pourrait être développée, un calibrage sur les données devant alors être effectué *ex ante*.

Le modèle mis en œuvre est « semi analytique » et permet d'intégrer avec soin la part mutualisable du risque biométrique. Le procédé développé, basé sur le caractère gaussien de la loi de l'engagement conditionnellement aux facteurs de risques systématiques, a l'avantage d'obtenir à moindre coût une information sur la distribution des postes du bilan dans un an. Il convient de noter que de telles approches sont efficaces car elles permettent d'intégrer des risques sans recourir abusivement à la simulation, ce qui est source d'économie de temps de calculs et de simplifications non négligeables. De plus, le modèle n'en est que plus auditable. Dans l'exemple étudié, le risque mutualisable est globalement bien contrôlé et n'impacte que peu le SCR. Pour autant, on ne peut faire l'économie de ce risque si l'effectif est restreint ou s'il se mutualise moins bien comme c'est le cas en incapacité / invalidité.

Enfin, la difficulté de ces problématiques techniques ne doit pas en faire oublier que quelle que soit l'approche développée, les modèles mis en œuvre doivent être intégrés au processus de gestion de l'entité, son objet n'étant *a priori* pas réduit à l'approche prudentiel. Dans un contexte d'assurance de personnes, le développement d'approches « semi-analytique » est légitime puisqu'en allégeant les procédures de calculs et en proposant une méthode efficace pour évaluer le SCR, le gain en termes de flexibilité permet d'utiliser le modèle interne construit comme un outil de contrôle des risques. En effet, un des enjeux futurs de Solvabilité II sera de pouvoir réaliser des études de sensibilité sur le SCR que ce soit pour la tarification d'un produit, pour la mise en place d'un dispositif de réassurance ou encore pour déterminer de manière générale l'appétit aux risques de l'assureur. En particulier, on peut rappeler la proximité de ces problématiques avec l'allocation stratégique d'actifs, le choix d'une couverture optimale des engagements ayant un rôle significatif dans la gestion des risques et dans le contrôle de la probabilité de ruine (*cf.* PLANCHET et THEROND (2008)). Au surplus, les techniques pour remédier aux difficultés liées à la couverture d'engagements retraite pourraient faire l'objet d'un développement.

Finalement même si des améliorations pourraient être apportées, notamment dans la modélisation et la calibration des risques financiers, le modèle construit présente l'avantage d'être assez générique pour pouvoir être transposé en assurance de personnes. On pourrait ainsi envisager d'étendre ce type d'approche « semi-analytique », en utilisant des formules de *proxies* appropriées, afin de simplifier la prise en compte de certains mécanismes d'assurance complexes (évaluation d'options dans les contrats ou mécanisme de participation aux bénéfices par exemple), le but étant toujours de contourner la lourdeur des algorithmes de simulation dans la simulation pour accroître les caractères opérationnel et auditable du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. (2005) Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92. (<http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>).
- ALHO J. M. (2007) « Méthodes utilisées pour établir les projections relatives à la mortalité – Distributions prédictives de la mortalité future », ISSA, Quinzième Conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale.
- BAUER D., KRAMER F. W. (2007) Risk and Valuation of Mortality Contingent Catastrophe Bonds.
- CEIOPS (2008) QIS4 Technical Specifications. MARKT/2505/08. CEIOPS (<http://www.ceiops.eu>).
- DAHL M. (2004) Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 35, 113-136.
- DEVINEAU L., LOISEL S. (2009a) Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol 9, n°17, 188-221.
- DEVINEAU L., LOISEL S. (2009b) Risk aggregation in Solvency II: how to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol 9, n°18, 107-145.
- FRIGGIT J. (2007) Long Term (1800-2005) Investment in Gold, Bonds, Stocks and Housing in France – with Insights into the USA and the UK: a Few Regularities. CGEDD.
- GEAGEA C. (2009) *Solvabilité II : application sur un portefeuille de temporaire décès*. Mémoire d'actuaire ISFA.
- GUETTE V. (2010) *La prise en compte des catastrophes dans la modélisation de la mortalité*. Mémoire d'actuaire ISFA.
- HARDY M. R. (2001) A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns. *North American Actuarial Journal* 5 (2).
- HIBBERT J., MOWBRAY P., TURNBULL C. (2001) A Stochastic Asset Model and Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes. Technical Report. Barrie & Hibbert Limited.
- HULL J. C., WHITE A. (1994) Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. *Journal of Derivatives*, 37-48.
- JACQUEMIN J., BARBIER M. (2009) *Evaluation des engagements de passifs sociaux*. ISFA. Support de cours.
- JOUAHRI A., PLANCHET F. (2008) La garantie inflation. *La Tribune de l'Assurance* 128, 54-55.

- KAECKENBEECK C., MILLER A. (2009) La solvabilité règlementaire des assureurs vie – De l'approche forfaitaire historique à la modélisation interne et prospective. *Bulletin Français d'Actuariat*, vol 9, n°17,154-187.
- MAGNIN F. (1999) *L'engagement de l'employeur dans le cadre d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies*. Mémoire d'actuaire ISFA.
- OLIVIERI, A. (2001). Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective. *Insurance: Mathematics & Economics* 29, 231-245.
- PFEIFER D., STRASSBURGER D (2008) Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 61-77.
- PLANCHET F. (2007) Prospective models of mortality with forced drift –Application to the longevity risk for life annuities. *Proceedings of the 11th IME Congress*.
- PLANCHET F. (2009a) *Les tables réglementaire TGH/F 05 sont elles prudentes ?*. Blog du Laboratoire Actuariel du Cabinet WINTER & Associés (<http://actudactulaires.typepad.com/laboratoire/2009/05/les-tables-r%C3%A9glementaires-tghf-05-sontelles-prudentes-.html>).
- PLANCHET F. (2009b) Quel modèle d'actifs en assurance ?. *La Tribune de l'Assurance* 136, 58-59.
- PLANCHET F. (2009c) Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. *La Tribune de l'Assurance* 138, 48-49.
- PLANCHET F., GUIBERT Q., JUILLARD M. (2010) « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes ». *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2126.
- PLANCHET F., JUILLARD M., THEROND P. E. (2008) Extreme disturbances on the drift of anticipated mortality-Application to annuity plans. *Proceedings of the 18th AFIR Colloquium*.
- PLANCHET F., THEROND P. E. (2005) Simulation de trajectoires de processus continus. *Belgian Actuarial Bulletin* 5, 1-13.
- PLANCHET F., THEROND P. E. (2007) *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*. Paris : Economica.
- PLANCHET F., THEROND P. E. (2008) « Rentes en cours de service : un nouveau critère d'allocation d'actifs », *Bulletin français d'actuariat*, Vol. 9 n°17.
- PLANCHET F., THEROND P. E., JACQUEMIN J. (2005) *Modèles financiers en assurance*. Paris : Economica.
- PLANCHET F., THEROND P. E., KAMEGA A. (2009) *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. Paris : Economica.
- PASTOR S. (2009) *Transformation d'une institution de retraite supplémentaire dans le cadre de la loi Fillon du 21 août 2003*. Mémoire d'actuaire ISFA.

SCHRAGER D. F. (2006) *Affine Stochastic Mortality*. IME 38, 81-97.

THEROND P.E. (2008a) *Présentation de la norme IAS 19*. ISFA. Support de cours.

THEROND P.E. (2008b) *Solvabilité 2 : Présentation générale*. ISFA. Support de cours.

VASICEK O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economic*, vol. 5, 177-188.

WILKIE A. D. (1995) More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use. *British Actuarial Journal*, vol.1, 777-964.

ANNEXES

Annexe 1. Notations de l'agence Standard & Poor's

Rating	Signification
AAA	Capacité à rembourser extrêmement forte
AA	Capacité à rembourser très forte
A	Forte capacité à rembourser mais sensibilité aux aléas économiques
BBB	Capacité suffisante mais grande sensibilité aux aléas économiques
BB et B	Caractère spéculatif et incertitude de paiement
CCC, CC, C	Créance douteuse
D	Défaut de paiement

Annexe 2. Calcul de la sensibilité des obligations

Le calcul de la sensibilité d'une obligation passe par le calcul de la durée. La durée Dur d'une obligation est définie par :

$$Dur = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{j \cdot C(t)}{(1+y)^t} + \frac{T \cdot N}{(1+y)^T}}{\sum_{t=1}^T \frac{C(t)}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^T}}$$

où :

- ✓ $C(t)$: le coupon versé à la date t ;
- ✓ T : la maturité de l'obligation ;
- ✓ N : le nominal de l'obligation ;
- ✓ y : le taux de rendement interne de l'obligation.

La sensibilité $Sens$ s'exprime alors en fonction de la durée :

$$Sens = \frac{Dur}{1+y}$$

Annexe 3. Projection des SCR futurs pour le calcul de la *risk margin*

La projection des différents sous modules de risques pour le calcul de la *risk margin* est détaillée dans le cadre de cette annexe.

Projection des SCR risque de souscription

Les sous-modules $Life_{mort}$ et $Life_{cat}$ ne sont par la suite repris car il ne représente pas un risque adverse pour l'assureur.

- ✓ Projection des $Life_{long}$

En appliquant, un choc de -25 % sur les taux de mortalité, les provisions *best estimate* choqués sont recalculés et repris par le graphique suivant :

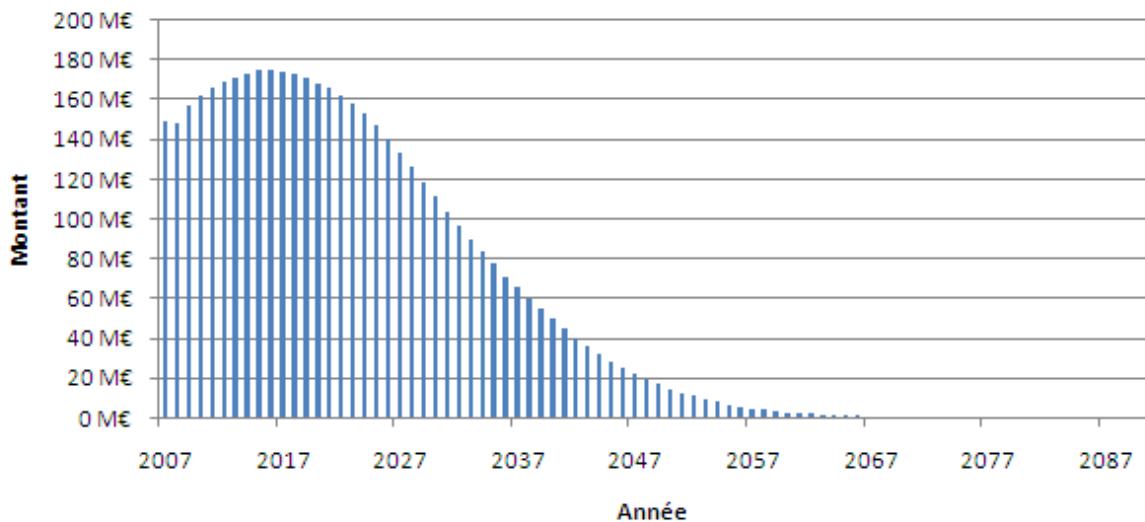


Fig. 1 - Projection des provisions *best estimate* du portefeuille après choc de longévité

Par différence, les charges en capital $Life_{long}$ sont déroulées sur le même horizon de projection et reprises ci-dessous nettes de réassurance :

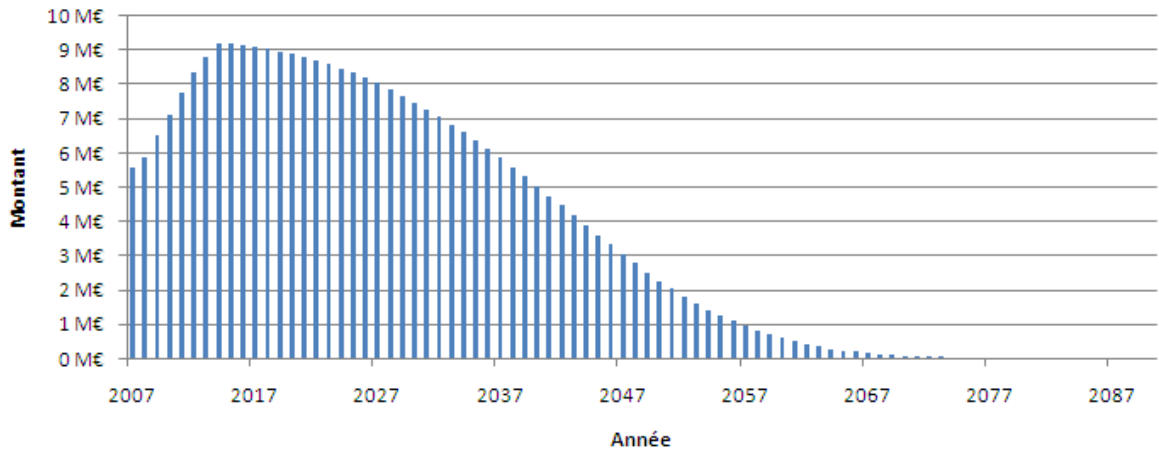


Fig. 2 - Projection des $Life_{long}$

Le risque de longévité s'accroît rapidement pendant près de dix ans, durée pendant laquelle de nouveaux allocataires entre dans le régime, puis décroît ensuite plus lentement.

✓ Projection des $Life_{exp}$

En application du choc sur les dépenses, les provisions *best estimate* choqués sont recalculées et reprises par le graphique suivant :

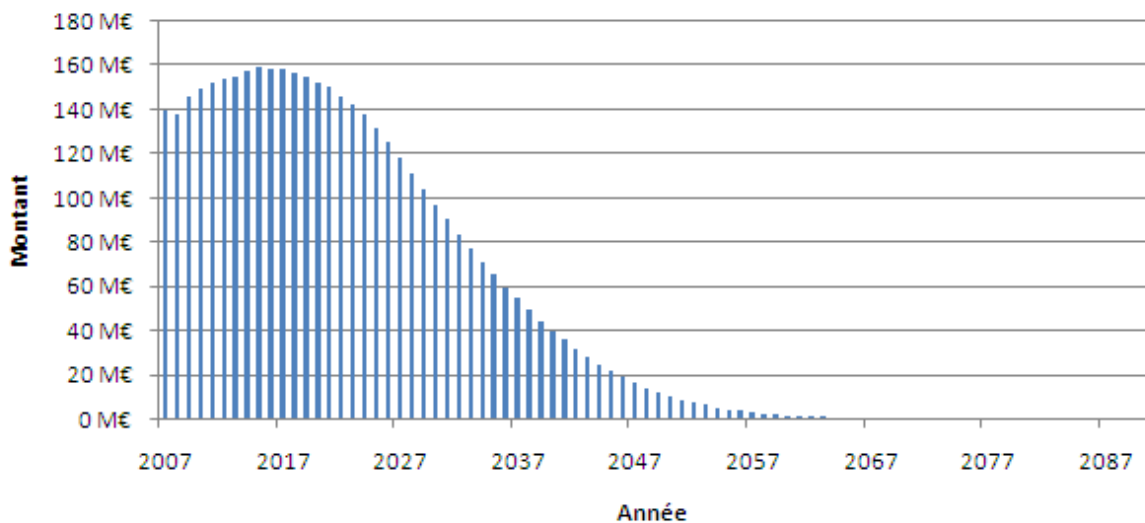


Fig. 3 - Projection des provisions *best estimate* du portefeuille après choc de longévité

Par différence, les charges en capital $Life_{exp}$ sont déroulées sur le même horizon de projection et reprises ci-dessous nettes de réassurance :

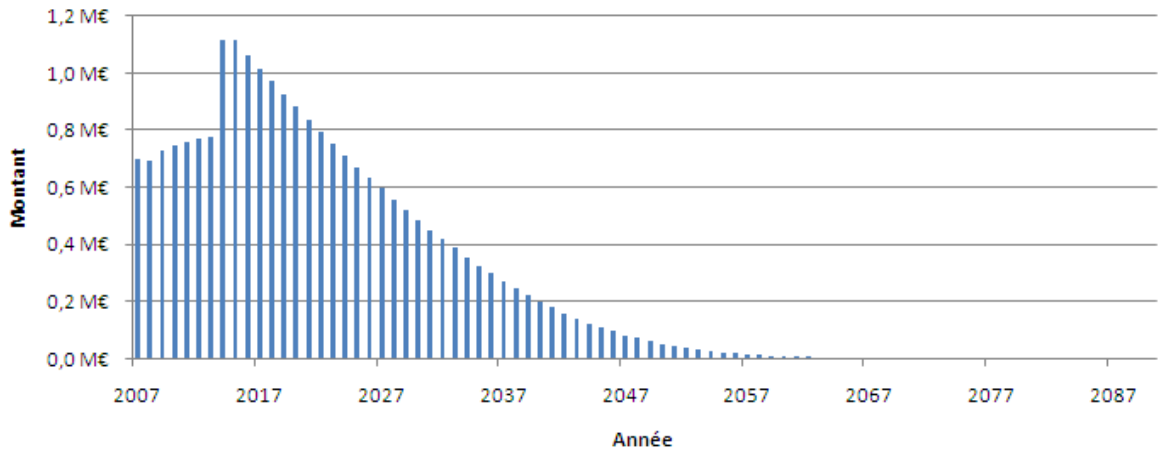


Fig. 4 - Projection des $Life_{exp}$

Le chargement au titre du risque de dépense croît progressivement pendant près de dix ans, puis s'élève brusquement de 0,3 M€ du fait du déclenchement de la provision au titre des actifs à cette date, l'engagement de revalorisation devenant plus lourd.

A partir de ces deux éléments, le SCR_{life} est calculé grâce à la formule d'agrégation vue précédemment. Les résultats nets de réassurance puis bruts de réassurance sont repris ci-dessous :

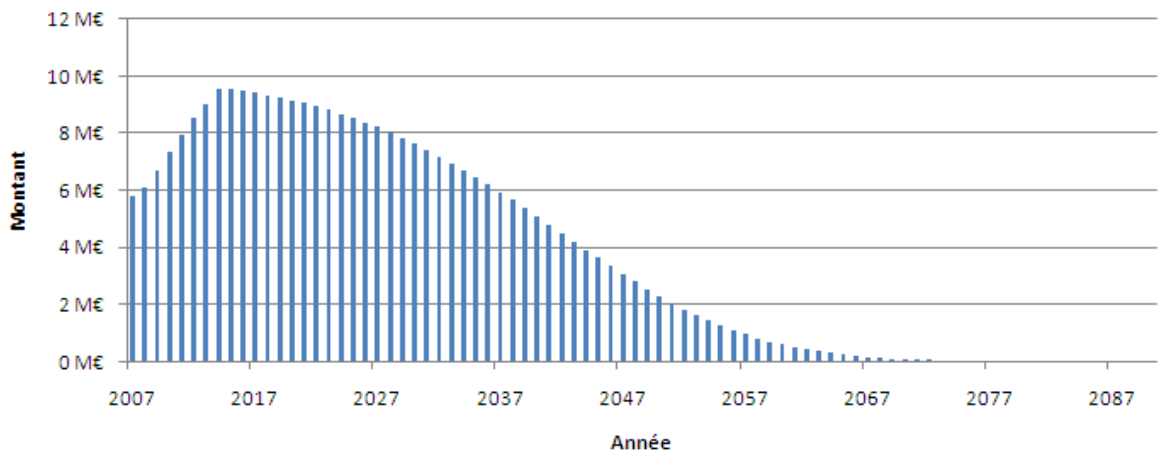


Fig. 5 - Projection des SCR_{life} bruts de réassurance

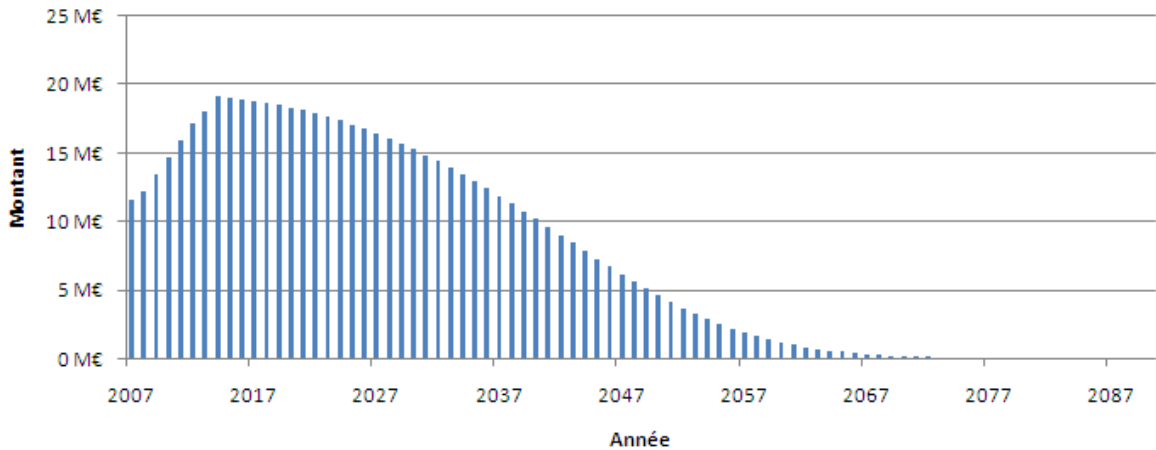


Fig. 6 - Projection des SCR_{life} nets de réassurance

Les graphiques ci-dessus mettent en évidence le poids du chargement au titre du risque longévité dans le module de risque souscription vie.

Projection des SCR risque de défaut

Conformément à la méthode précisée *supra*, les SCR_{def} futurs peuvent être projetés facilement sur la base des *Recoverables* et des SCR_{life} bruts et nets de réassurance. Les indices H et R futurs sont pris égaux à 1, la contrepartie restant par hypothèse la seule et conservant son *rating*.

Le SCR_{def} sont alors projetés selon ces hypothèses puis repris par le graphique suivant :

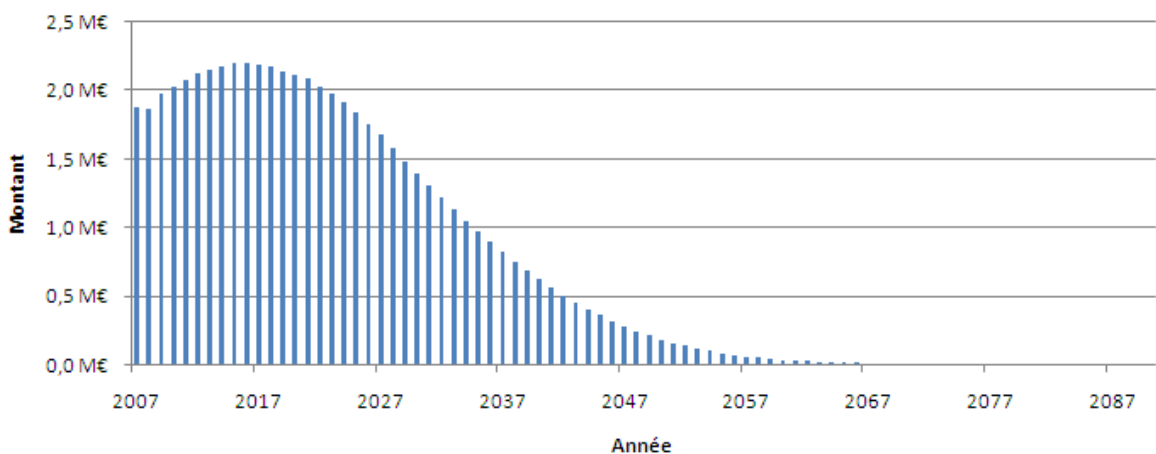


Fig. 7 - Projection des SCR_{def}

Le tracé suivi par les chargements au titre du risque de contrepartie croit légèrement pendant une dizaine d'année avant de décroître progressivement par la suite.

Projection des BSCR

Les éléments identifiés ci-dessous permettent de construire la suite des BSCR futurs, hors chargements au titre du risque de marché, *via* la formule d'agrégation en racine carrée vue plus haut. Ces derniers sont repris par le graphique suivant :

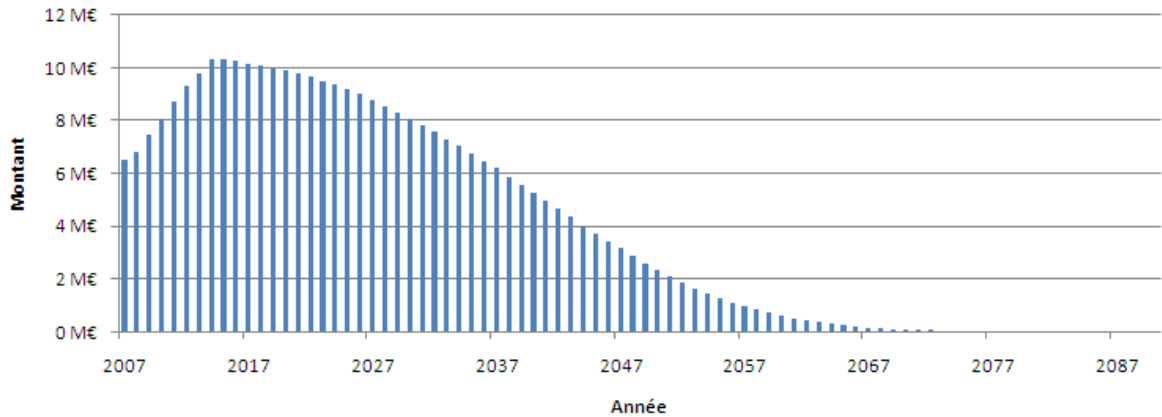


Fig. 8 - Projection des BSCR

Le profil suivi par les BSCR futurs est semblable à celui des SCR_{life} , du fait de l'impact important du risque de longévité.

Projection des SCR

Le calcul des SCR_{op} futurs nécessite dans un premier de temps de calculer les primes futures $Earn_{life}$. Ces dernières sont reprises par le graphique suivant :

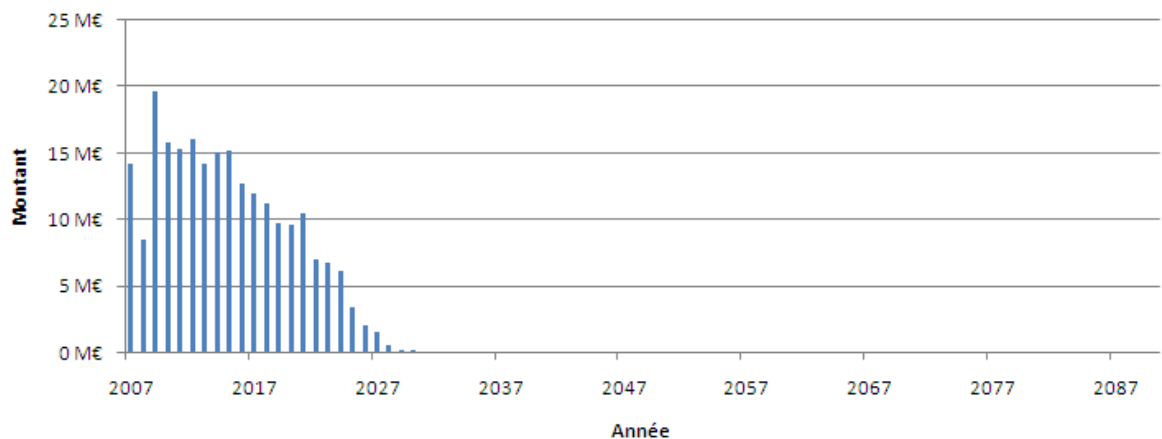


Fig. 9 - Projection des $Earn_{life}$

Ainsi, les SCR_{op} sont calculés selon la méthode exposée plus haut et repris ci-dessous :

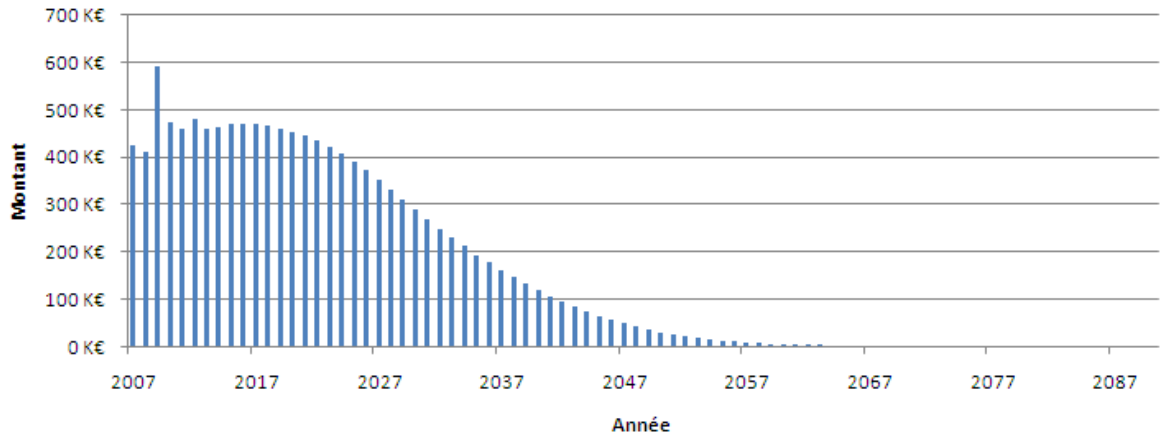


Fig. 10 - *Projection des SCR_{op}*

Les projections effectuées sur les différents modules de risque permettent de construire, *via* la formule d'agrégation du SCR, la suite des capitaux requis (hors risque de marché). Ils sont repris dans le graphique suivant :

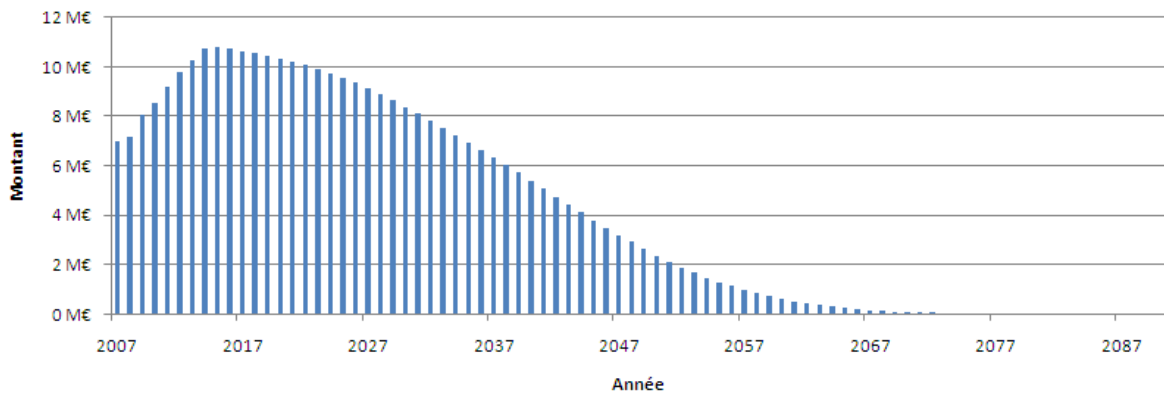


Fig. 11 - *Projection des SCR*

Annexe 4. Test d'adéquation d'un modèle autorégressif AR(1), des paramètres et analyse des résidus

Dans le cas d'un modèle autorégressif d'ordre 1, l'estimation des paramètres est réalisée *via* une régression linéaire simple de forme générale, (a, b) étant les paramètres du modèle :

$$y_t = a \cdot y_{t-1} + b + \varepsilon_t$$

avec $(\varepsilon_t)_{t \in \{1, \dots, n\}}$ les résidus du modèle.

1. Adéquation du modèle

Coefficient de détermination ajusté

Cette grandeur mesure la qualité de l'ajustement en quantifiant la part de variance expliquée par le modèle, corrigée du degré de liberté :

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p} \cdot (1 - R^2)$$

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

avec p le nombre de paramètre soit 2 ici.

Test de Fisher

Le test de Fisher mesure la significativité globale du modèle. Il est formulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : a = b = 0 \\ H_1 : a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 \end{array} \right\}$$

La statistique \hat{F} , suivant une loi de Fisher $F(p, n-p)$, sert d'indicateur :

$$\hat{F} = \frac{\frac{R^2}{p}}{\frac{1-R^2}{n-p}}$$

L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si et seulement si $\hat{F} > F_{1-\alpha}(p, n-p)$.

Test de Student

Le test de Student mesure la significativité individuelle de chaque paramètre. Il est formulé de la manière suivante pour le paramètre a par exemple :

$$\begin{cases} H_0 : a = 0 \\ H_1 : a \neq 0 \end{cases}$$

La statistique \hat{T} , suivant une loi de Student $T(n-p)$, sert d'indicateur :

$$\hat{T} = \frac{\hat{a} - a}{\hat{\sigma}_a}$$

L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si et seulement si $|\hat{T}| > T_{1-\alpha/2}(n-p)$.

2. Analyse des résidus

Espérance des résidus

La première étape de l'analyse consiste à vérifier que l'espérance des résidus est nulle :

$$\bar{\varepsilon} = 0$$

Test de Breusch-Godfrey

Ce test permet de détecter l'auto-corrélation des résidus. Le modèle testé étant un AR(1), l'objectif de montrer l'absence d'auto-corrélation d'ordre $k \geq 1$. Les résidus du modèle peuvent se mettre sous la forme d'un processus autorégressif AR(k) :

$$\varepsilon_t = \rho_0 + \sum_{i=1}^k \rho_i \cdot \varepsilon_{t-i} + \gamma_t$$

avec $\gamma_t \sim N(0,1)$.

Le test est alors formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ H_1 : \exists i \in \{1, \dots, k\} | \rho_i \neq 0 \end{cases}$$

La statistique dédiée à ce test est le coefficient de détermination de cette régression R_e^2 sachant que $(n-k) \cdot R_e^2$ suit une loi de $\chi^2(k)$.

L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si et seulement si $|(n-k) \cdot R_e^2| > \chi^2_{1-\alpha/2}(k)$.

Test ARCH(1)

Ce test permet de tester l'absence d'hétéroscédasticité dans la série des résidus. Il s'agit de vérifier si les résidus (supposés centrés) peuvent se mettre sous la forme d'un processus ARCH(q) :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_t$$

avec $\gamma_t \sim N(0,1)$.

Le test est alors formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, q\} \\ H_1 : \exists i \in \{1, \dots, q\} | \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

La statistique dédiée à ce test est le coefficient de détermination de cette régression $R_{\varepsilon^2}^2$ sachant que $(n-k) \cdot R_{\varepsilon^2}^2$ suit une loi de $\chi^2(k)$.

L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si et seulement si $|(n-k) \cdot R_{\varepsilon^2}^2| > \chi_{1-\alpha/2}^2(k)$.

Test de Jacque-Bera

Ce test permet de tester la normalité de la série des résidus. Le test est alors formulé de la manière suivante :

$$\{H_0 : \varepsilon_t \sim N(0,1)\}$$

La statistique de ce test JB suit une loi $\chi^2(2)$ sous l'hypothèse H_0 :

$$JB = \frac{n-p}{6} \cdot \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

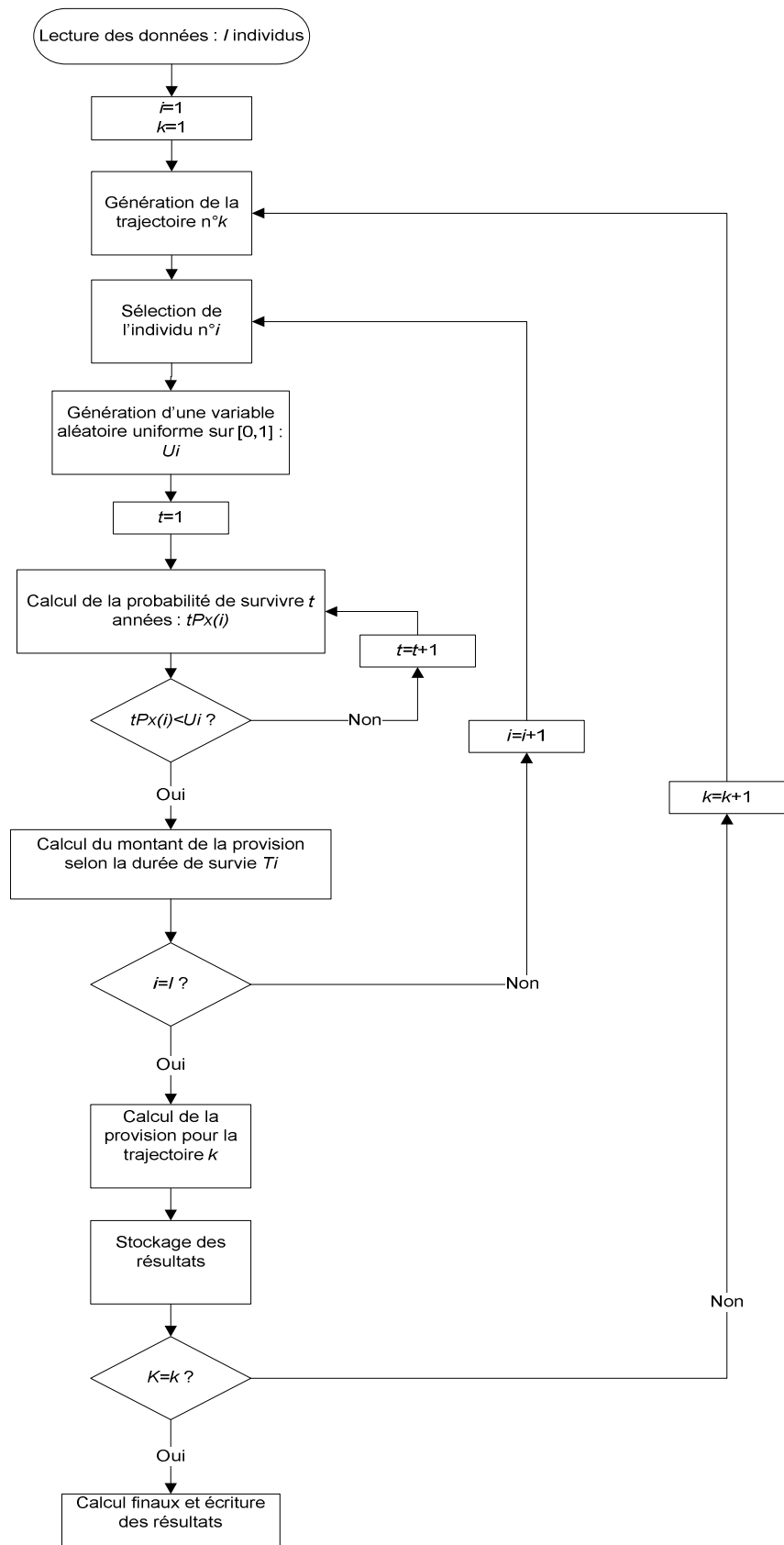
avec :

$$\checkmark S = \frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^3}{\hat{\sigma}_\varepsilon^3} : \text{le coefficient d'asymétrie (skewness)} ;$$

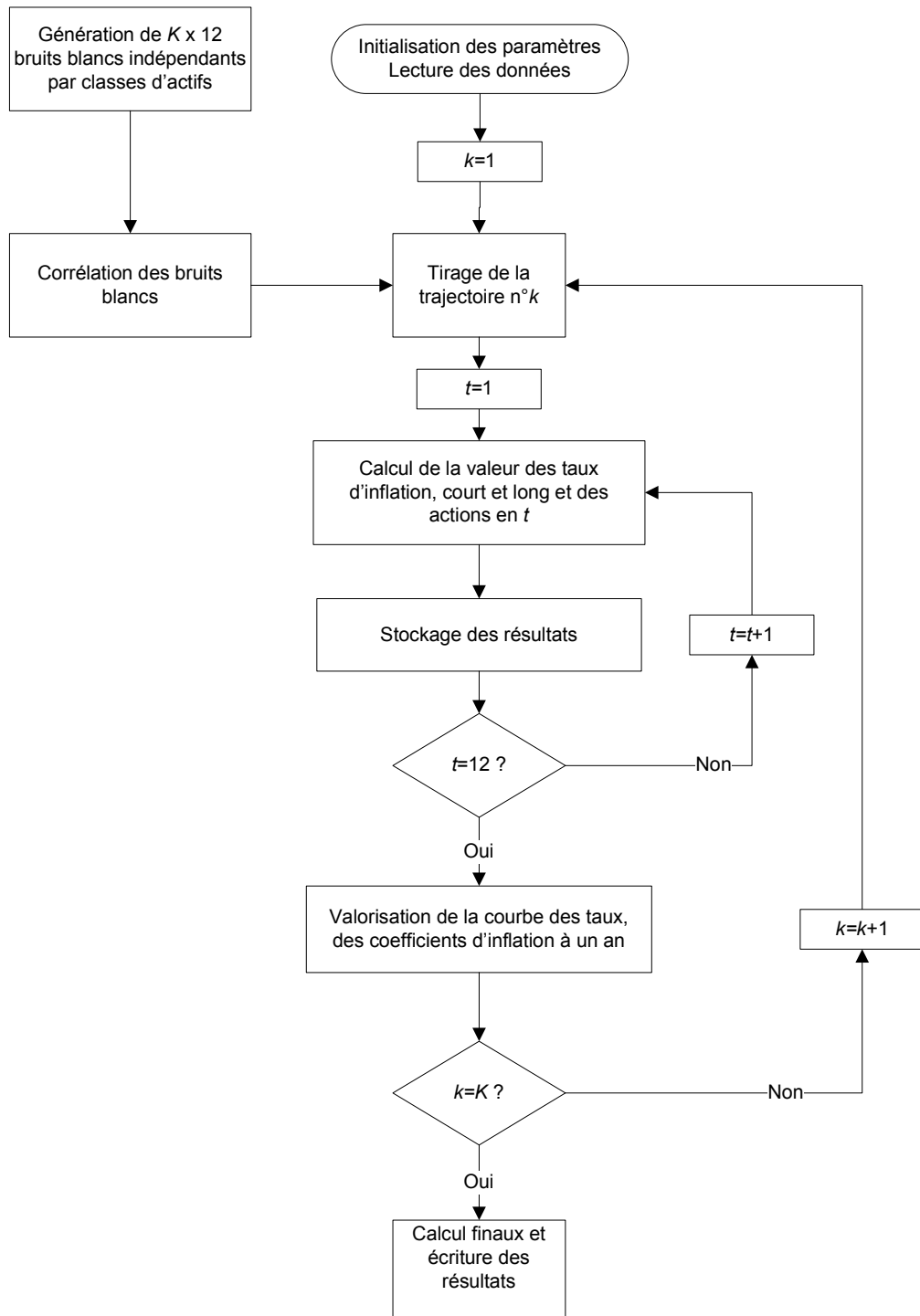
$$\checkmark K = \frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^4}{\hat{\sigma}_\varepsilon^4} : \text{le coefficient d'aplatissement (kurtosis)}.$$

L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si et seulement si $|JB| > \chi_{1-\alpha/2}^2(2)$.

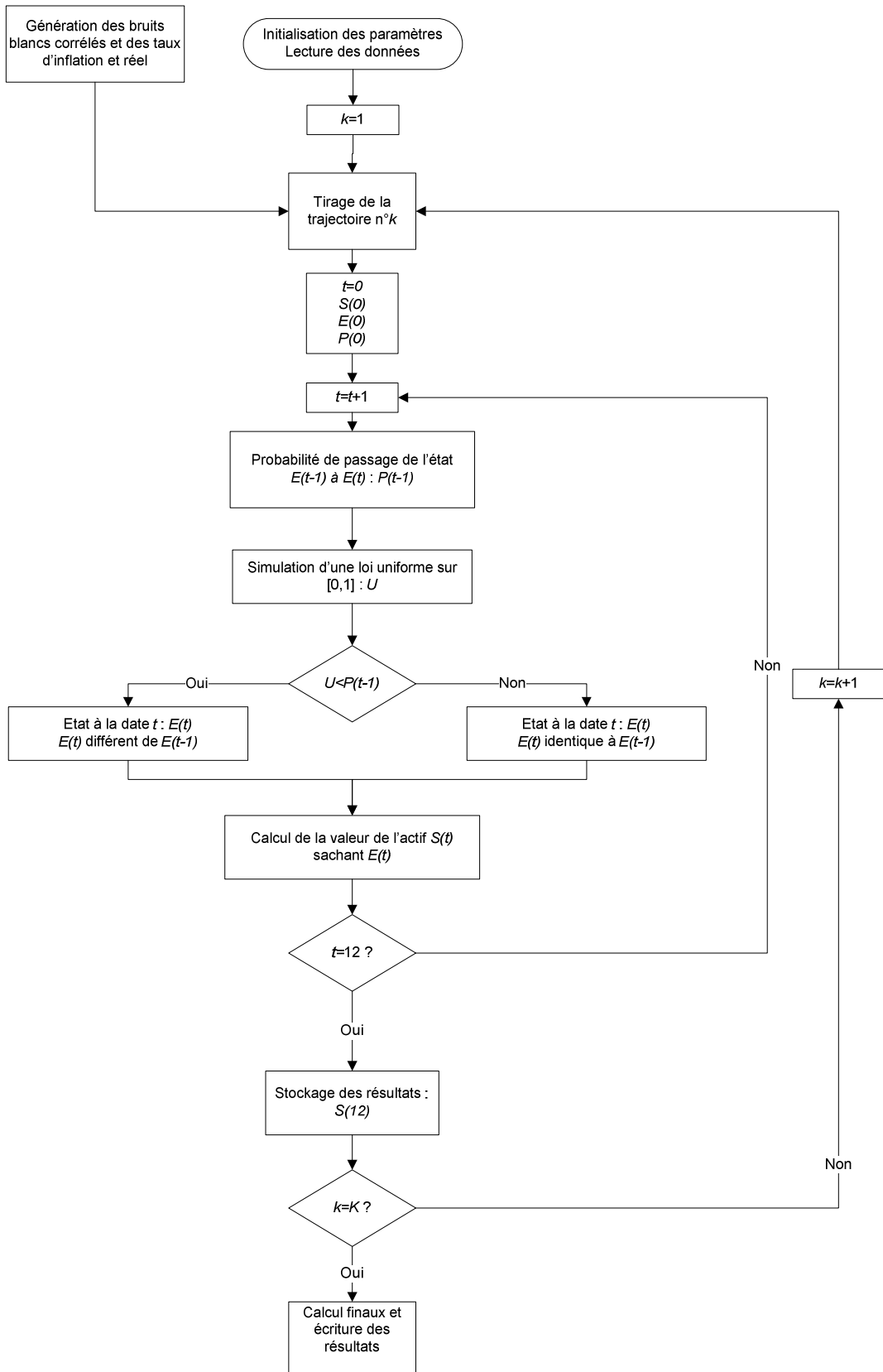
Annexe 5. Algorithme de calcul de la variable Λ



Annexe 6. Algorithme de génération des grandeurs économique à horizon un an



Annexe 7. Algorithme de génération des trajectoires du cours de l'action



Annexe 8. Algorithme de calcul de la loi de $X(1)$

