Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 8 Septembre 2022

Par : TEISSEYRE Julien
Titre : Modélisation d'une assurance vie sectorielle à garanties biométriques (Alternative au fonds euro en Assurance Vie)

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires :
Dominique ABGRALL & Nicolas BOURE
Signature :

Entreprise :
MALAKOFF HUMANIS
Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA :
Brice FRANKE

Directeur de mémoire en entreprise :
Madame Marieme SAMBE
Signature :

Invité :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

EURIA
EURo Institut d'Actuariat
6, avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3
T +33 (0)2 98 01 66 55
euria@univ-brest.fr

Résumé

Historiquement, les assurés ont profité de taux d'intérêt élevés sur leurs contrats en fonds Euro. Pour se prémunir des risques de marché et de taux, les assureurs ont recommandé les contrats multi-supports. Avec l'appui du législateur, de nouveaux produits privilégiant le temps long ont également été commercialisés. Cependant les encours de ces produits montrent qu'ils n'ont pas trouvé de public. Chez les assureurs, Eurocroissance lorsqu'il n'a pas été décommissionné représente moins de 1% des encours et les Plans Épargne Retraite représentent actuellement des encours inférieurs à 2%.

Aujourd'hui, les assureurs sont confrontés à une volatilité de plus en plus importante de toutes les typologies d'actifs et à une baisse de leur rendement. Pour se protéger les **taux de 0% bruts sur les fonds Euro** se sont généralisés. Avec la loi "Sapin II", le législateur, à même anticipé les risques systémiques. Les unités de compte sont désormais commercialement et contractuellement mises en avant.

En contre partie, face à une forte inflation débutée en 2022, à l'évolution défavorable des taux garantis et aux moins-values de certaines unités de compte, **nous constatons, depuis 2020, de plus en plus de mois de décollecte nette**. En effet les assurés arbitrent à nouveau vers des supports « sécurisés » qui redeviennent concurrentiels (Livret A, SCPI...). Cette tendance devrait s'accentuer, avec le maintien d'une inflation élevée, pour tenter de protéger l'épargne acquise.

Les intérêts entre assureurs et assurés semblent de plus en plus divergents. **Il existe un risque à moyen-long terme sur la filière d'autant plus que la pyramide d'âge des encours montre qu'ils sont très majoritairement détenus par la tranche d'âge vieillissante du "babyboom"**.

Dans ce mémoire, **nous proposerons une tentative de convergence d'intérêt entre l'assureur et l'assuré avec la modélisation d'une assurance vie sectorielle à garanties biométriques**. Tout d'abord, nous validerons la viabilité des garanties biométriques, puis nous modéliserons des unités de compte sectorielles. Enfin, nous intégrerons les contraintes de l'assureur dans cette modélisation pour conclure à l'opportunité de proposer ce type de produit.

Abstract

Historically, policyholders have taken advantage of high interest rates for their policies in Euro funds. Insurers have recommended multi-funds policies, to reduce market and interest rate risks.

The French legislature promoted long-term oriented products. However, outstandings for these products show success has been elusive. Indeed, Eurocroissance, when it has not been decommissioned, represents less than 1% of outstandings and Retirement Savings Plans currently represents less than 2% of outstandings.

Presently, there is an increasing volatility of all assets categories and a reduction of assets interest rate. To reduce risks, **0% gross rates on Euro funds** have become the norm.

Furthermore The French legislature with "Sapin II" law anticipated systemics risks. Units of account are now commercially and contractually highlighted.

Due to high inflation that began in 2022, unfavorable trend in guaranteed rates and capital losses of some units of account, **we have seen, since 2020, more and more months of net outflows**.

Indeed, policyholders are obliged to arbitrate between insurance contracts and others supports like (Livret A, SCPI...) which are once again becoming competitive. This trend should be accentuated with high inflation maintenance in an attempt to protect policyholders savings.

Interests between insurers and policyholders seem increasingly divergent. **There is a medium to long term risk for life insurance sector, especially because outstandings age distribution shows that they are overwhelmingly held by the aging "baby boom" cohort**.

In this master's thesis, **we will propose interests convergence between insurers and policyholders with the modeling of a sectoral life insurance contract with biometric guarantees**.

First, we will validate the viability of biometric guarantees, then we will model sectorals units of account.

Finally, we will add insurers constraints in this modeling to conclude on the opportunity of offering this type of product.

Synthèse

Nous présentons ici, une démarche complète permettant de modéliser une assurance vie en unités de compte sectorielles associée à des garanties biométriques. La modélisation est basée sur l'analyse de techniques statistiques, d'analyse financière, d'intelligence artificielle et de trading suivie de l'hybridation des plus efficaces. Le paramétrage a été réalisé et testé sur plusieurs secteurs d'activité afin de confirmer sa robustesse. Le modèle d'allocation d'actifs défini a été adapté pour prendre en compte les contraintes du passif de l'assureur ainsi que les évènements macro-économiques.

Mots clefs: Actuariat, Garanties biométriques, Unité de Compte, Gestion Actif - Passif, IFRS, SII

Problématique :

Les placements traditionnels de "bon père de famille" qui assuraient des rendements élevés sur le fonds Euro ont disparu. A cause de la baisse des taux d'intérêt, temporairement passés en territoire négatif, et de la forte volatilité des marchés, les assureurs ont dû diversifier leur offre commerciale. Depuis 2022 nous constatons également une forte inflation, probablement durable. Face à ces évolutions les assureurs ont progressivement baissé les taux moyens garantis des fonds Euro jusqu'à **0% brut**. Ils ont commercialement et contractuellement mis en avant les contrats multi-supports, faisant reposer les risques sur les assurés.

Les intérêts des assureurs et des assurés semblent de plus en plus divergents. Nous pouvons nous poser la question du risque à moyen-long terme sur la filière d'autant plus que la pyramide d'âge des encours montre qu'ils sont très majoritairement détenus par la tranche d'âge vieillissante du "*babyboom*". Logiquement, les assurés vont arbitrer vers d'autres supports ayant des taux d'intérêts, corrigés de l'inflation, plus favorables.

En France, au niveau macro-économique nous constatons, dans la répartition des actifs des ménages, une part non négligeable d'actifs "stériles". En effet, en 2020, sur les 13 400 milliards d'euros d'actifs des ménages [34], nous avons 1 812 milliards d'euros en dépôts et comptes courants, soit 81% de l'encours de l'assurance vie. Les encours sur ces actifs sont en croissance avec

le retour de l'inflation et la baisse des garanties réelles des assureurs sur le capital placé.

Opportunément, pour les clients, l'État et les assureurs, il est possible de flécher une partie de ces actifs « stériles » vers l'économie réelle.
L'objectif est donc de déterminer si les assureurs peuvent proposer une assurance vie en unités de compte avec garanties biométriques (i.e [1] garantie plancher du capital investi sur les grands évènements de la vie).
Nous allons présenter des unités de compte sectorielles en précisant leurs avantages par rapport aux unités de compte du marché modélisées par les gérants de fonds.

Nous structurerons notre démarche en **trois parties**.

Partie I : Modélisation du coût des garanties planchers

Les garanties biométriques ont été estimées sur la base d'un extrait de portefeuille de banque assureur de 500 000 contrats et de 25,3 milliards d'euros d'encours, statistiquement reproduit.

Deux approches principales ont été étudiées :

1. une analyse sur les **performances historiques** :
2. une analyse sur la base de **modèles mathématiques** :
   (a) Modèle de **Longstaff-Schwartz**
   (b) Modèle Binomial de **Cox-Ross-Rubinstein** et
   (c) Modèle stochastique avec le résultat d'un **générateur de scénarios économiques** : 1000 scénarios sur 40 ans

Les résultats de ces approches sont :

- Dans le monde réel, le coût historique des garanties biométriques, exprimé en pourcentage des frais de gestion, est de 5% en moyenne et 13% en cas de choc bicentenaire et 90% d'UC.
- Pour les modèles basés sur les sorties de générateurs de scénarios économiques nous observons des résultats plus dégradés car l'amplitude possible des chocs, dans le cadre d'un support, ne l'est pas pour un portefeuille diversifié : Nous avons constaté des coûts de 7 à 50% des supports avec cette méthodologie.
- Pour les modèles mathématiques, basés sur des formules fermées (Longstaff-Schwartz et modèle Binomial de Cox-Ross-Rubinstein), les estimations de garanties sont légèrement moins élevées. Le coût maximum observé est de 13% des supports. Notons que l'écart type est le critère clef de ces formules fermées. Or un écart type élevé n'est pas négatif surtout si le support est

1. id est : c'est à dire

en croissance. En conséquent, ces formules fermées standards doivent être adaptées pour intégrer l'asymétrie par exemple avec le "*skewness*".

Toutes ces approches ont un biais majeur qui est la modélisation en environnement "statique". Dans le monde réel, les UC ainsi que les supports constitutifs sont arbitrés dans le temps. De plus, ces approches ont été réalisées avec des unités de compte de marché. Notre étude préalable nous a montré que les unités de compte proposées par les gérants de fonds souffrent d'un manque de lisibilité de la part des souscripteurs. Rappelons enfin que le risque de garantir la performance d'unités de compte tierces n'est, par définition, pas entièrement maitrisable. Pour faciliter leur souscription, nous proposons des unités de compte sectorielles, à la main de l'assureur, plus accessibles à l'imaginaire des clients. Cela permet également de piloter le risque de l'assureur sur les garanties biométriques.

Partie II : Modélisation d'unités de compte sectorielles

Le choix retenu est de modéliser une **unité de compte sectorielle** constituée de trois poches : une poche "obligation", une poche "action" et une poche "trésorerie".

Les applications numériques pour sélectionner le meilleur modèle d'allocation d'actif sont principalement basées sur le secteur de l'**énergie** pour trois raisons principales.

1. Le secteur de l'énergie dispose d'indicateurs de marché cotés qui peuvent être utiles dans les modélisations.
2. Le secteur de l'énergie a connu deux chocs entre 2018 et 2022 ce qui permet d'avoir des données pour réaliser le *benchmark* des modèles :
   (a) Un **choc de la demande** suite aux confinements provoqués par la COVID19
   (b) Un **choc de l'offre** suite au conflit Ukrainien.

Différents modèles ont été testés avec comme benchmark la gestion passive du secteur, l'objectif étant de surperformer la gestion indicielle et de garantir le capital investi particulièrement sur le moyen et long terme.

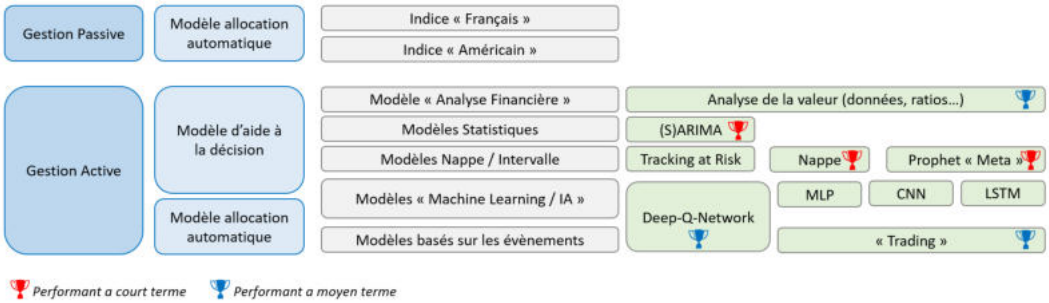


FIGURE 1 – Performance à court et moyen terme des familles de modèles

Le modèle traditionnel, basé sur la **stratégie d'analyse financière**, mise en avant par la surperformance de "Berkshire Hathaway", a permis d'obtenir des performances intéressantes, mais il souffre d'un manque de réactivité en cas de choc et de sa difficile industrialisation car il est basé sur des données quantitatives, qualitatives et d'un jugement d'expert.

Les **modèles statistiques** de type (S)ARIMA ont montré un intérêt relatif car leur efficacité se limite à une prédiction fiable à très court terme.

Les **modèles basés sur l'enveloppe de confiance**, initiés par le *tracking at risk* (TAR) de François Chauvet, ont été très pertinents sur le moyen terme.

$$T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \times \sigma^T_{\beta_{p-b}}\right)^2 + \left(\phi^{-1} \times \frac{1+\alpha}{2} \times \sigma^T_{e_{p-b}}\right)^2}$$

Ou : $T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right)$ est le TAR du titre à un horizon de temps T, et un niveau de confiance α
$\sigma^T_{\beta_{p-b}}$ est la tracking error systématique du portefeuille à un horizon de temps T
$\sigma^T_{e_{p-b}}$ est la tracking error spécifique du portefeuille à un horizon de temps T
$\phi^{-1}(\alpha)$est l'inverse de la fonction de distribution cumulée de la loi normale

L'adaptation de son modèle en incluant la tendance (pente) du support a permis d'améliorer les performances. Cependant cette typologie de modèle reste très sensible aux paramétrages.

Les **modèles d'intelligence artificielle** ont eu des performances mitigées. Les modèles linéaires de type MLP, CNN et LSTM ont des performances très faibles. Par contre les modèles d'intelligence artificielles basés sur la gestion des évènements sur la base du "Deep-Q-Network" ont des performances très intéressantes qui peuvent être nuancées par deux problématiques. Premièrement, ils génèrent beaucoup d'arbitrages qui engendrent des coûts de transaction à inclure dans la performance et deuxièmement nous avons, sur certaines périodes, constaté des décalages de tendance (baissière quand le marché est haussier) qui peuvent être difficiles à expliquer auprès d'une direction.

C'est la raison pour laquelle nous avons retenu un **modèle de type trading basé sur de la gestion d'évènements** compatible avec l'objectif d'industrialisation et de robotisation [2]. Ce modèle a surperformé la gestion passive sur 6 des 7 secteurs d'activités testés. Les grands critères de cette famille de modèles sont :

2. Stratégie du "Scalping" : méthode d'achat/vente conçue pour faire des profits sur de petites différences de cours

- de renforcer les positions lorsque les critère cumulatifs principaux de la croissance du marché, du secteur et du titre et de l'augmentation des volumes sont satisfaits.
- de liquider les positions lorsque les cours passent en dessous de la moyenne mobile à 30 semaines.
- de sécuriser une partie des plus-values sur du monétaire

Ce modèle présente également l'avantage de limiter les risques de perte par une gestion quotidienne voir infra quotidienne tout en réduisant le nombre d'arbitrage par des contraintes élevées.

FIGURE 2 – Performance du modèle sur 7 secteurs d'activité avec capital initial de 100 000 euros

Cependant, pour aller plus loin, il convient de tenir compte des contraintes d'ALM (*Asset and Liabilities Management*) et particulièrement des prévisions de rachats pour réduire les risques d'activation non maitrisés de la garantie plancher.

Partie III : Modélisation d'unités de compte sectorielles avec contraintes

L'intégration des contraintes externes au modèle d'allocation d'actif à pour objectif d'améliorer la répartition des encours entre les typologies d'actifs

("actions", "obligations", "trésorerie"). Les études de la réallocation inter-poche sont basées sur deux approches : déterministes et stochastiques.

Nous avons comparé 4 modèles.

- Le premier axé sur la stabilité (CPPI)
- Le second axé sur l'environnement externe (taux)
- Le troisième axé sur le passif de l'assureur (duration)
- Le quatrième axé sur la performance (réallocation stochastique intra-poche)

L'objectif poursuivi du modèle stochastique avec recours est que la composition du portefeuille nous donne in fine une valeur du portefeuille supérieure ou égale a l'objectif de rendement fixé. Le concept de recours vise a prendre des actions correctives après réalisation de l'évènement aléatoire qui en l'espèce sera la rentabilité respective des poches.

Concrètement, dans l'étape d'initialisation, nous avons la valeur de la variable de contrôle (x). Au moment du recours nous disposons de l'information certaine sur l'évènement qui était aléatoire et nous prenons la décision de recours (y) afin de corriger l'erreur sur la prévision de cet évènement. Le problème d'optimisation est de choisir les valeurs optimales de (x) et (y). La décision prise à l'initialisation (x) est indépendante du scénario pouvant avoir lieu à l'étape suivante du recours. Il s'agit de la propriété de non anticipation. Lorsque nous avons plusieurs recours (k), l'optimisation vise a minimiser le cout de la décision à l'initialisation et le coût espéré du recours effectué a chaque étape suivante.

Posons ω une variable aléatoire discrète pouvant avoir s valeurs possibles : $(\omega_1, ..., \omega_s)$ avec les probabilités $(p_1, ..., p_s)$ ou chaque valeur $\omega_i, i = 1, ..., s$ correspond à un scénario.

Pour k recours nous avons :

$$\begin{cases} \min_{x_i} c^{'} x_i + E_{\omega^2} \min\left(c_2(x_2(\omega^2)\,; \omega^2) + ... + E_{\omega^k} \min\left(c_k(x_k(\omega^k); \omega^k)\right)\right. \\ \text{s.c } W_1 x_1 = h_1 \\ W_2 x_2(\omega^2) + T_1(\omega^2) x_1 = h_2(\omega^2) \\ W_i x_i(\omega^i) + T_{i-1}(\omega^i) x_{i-1}(\omega^{i-1}) = h_i(\omega^i), i = 3, ..., k \\ x_1 \geq 0, x_i(\omega^i) \geq 0, i = 2, ..., k \end{cases}$$

Avec W_i représente des matrices connues de tailles $m_i \times n_i$
h_1 représente un vecteur connu dans $\mathbb{R}^{m_i}$
$h_i(i = 2, ..., m_i)$ représente un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^{m_i}$
$T_i(i = 1, ..., k-1)$ représente des matrices aléatoires de tailles $m_i \times (n_i - 1)$
$x_i(i = 1, ..., k)$ représente le vecteur de décisions à l'étape i avec $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ pour i>1
ω_i représente l'historique des évènements aléatoire jusqu'à l'étape i.

Application des modèles avec réallocation intra-poches :

Nous avons obtenu, sur le secteur énergie, les performances de 2018 à 2022 :

Modèle	**Performance totale**	**Performance annualisée**
Modèle CPPI	22,14%	5,54%
Modèle déterministe sans duration	37,08%	9,27%
Modèle déterministe avec duration	30,47%	7,62%
Modèle Stochastique	**47,25%**	**11,81%**

TABLE 1 – Comparatif des performances de réallocation des poches sur 4 ans

La gestion d'actif d'une unité de compte basée sur les évènements associée à une réallocation intra-poche stochastique offre les meilleures performances.

Conclusion et Pistes d'amélioration :

L'inflation qui a débuté avec le conflit Ukrainien, mais dont les causes sont antérieures, est en train d'accentuer un choc obligataire dont l'ampleur nous rappelle le choc obligataire de 1986 qui a entrainé la disparition de 186 sociétés d'assurance dans le monde. La gestion dynamique des encours semble plus que jamais une nécessité car elle seule permettra de garantir les capitaux investis tout en conservant une espérance de rendement de nature à maintenir l'intérêt des assurés pour l'assurance vie. En effet, seul un partage des risques et de la rentabilité équitable permettra la survie de la filière dans un environnement particulièrement instable sur la durée.

Pour affiner les performances du modèle, il pourrait être testé, sur l'ensemble des secteurs d'activité, sur d'autres marchés géographiques et périodes. Il doit également être adapté avec l'extension aux autres typologies d'actifs.

Références bibliographiques principales :

ALAEDDINE FALEH & PLANCHET F. (2012). *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs*. Economica

L HALLS-MORRE, M (2020). *Advanced Algorithmic Trading*. QuantStart

Synthesis

We present here, a complete approach allowing to model a life insurance contract based on sectoral units of account associated with biometric guarantees. Its modeling is based on the analysis of statistical models, financial analysis, artificial intelligence and trading followed by the hybridization of the most effective. The configuration has been carried out and tested on several lines of business in order to confirm its robustness. The defined assets allocation model has been adapted to take into account insurer's liabilities constraints as well as macro-economic events.

Keywords: Actuarial Issues,Biometrics guarantees, Asset and liability management, Units of Account, IFRS, SII

Problematic :

The traditional "good householder" investments that ensured high returns on the Euro fund have disappeared. Due to the interest rates fall, which temporarily went into negative territory, and the high market volatility, insurers had to diversify their commercial offer. Since 2022 we have also seen strong inflation, which is likely to last. Faced with these developments, insurers have gradually lowered guaranteed rates average for Euro funds to 0% gross rate. They have commercially and contractually promoted multi-funds policies, transfering risks on policyholders.

Interests of insurers and policyholders seem increasingly divergent. We can ask ourselves the question of the medium to long term risk for life insurance sector, especially since outstandings age pyramid shows that they are overwhelmingly held by the aging "baby boom" cohort. Indeed, policyholders will logically arbitrate between life insurance contracts and others supports with more favorable inflation-adjusted interest rates.

In France, at the macro-economic level, we observe, in the distribution of household assets, an important part of unproductive assets. Indeed, in 2020, among 13,400 billion euros in household assets [34], we have 1,812 billion euros of deposits and current accounts, which represents 81% of life insurance policies outstanding amount. Outstandings on these assets are growing with inflation return and real guarantees rate decline on invested capital.

Opportunely, for customers, the government and insurers, it is possible to attract part of these unproductive assets towards the real economy.
So, the objective is to determine if insurers can offer sectorial unit-linked life insurance contract with biometric guarantees (i.e[3] minimum guarantee of capital invested in case of major life events).
We are going to present sectoral units of account by specifying their advantages compared to market units of account modeled by funds managers.

We will structure our approach into **three parts**.

Part I : Modeling of the minimum guarantees cost

The biometric guarantees were estimated on the basis of an extract of a bank insurer portfolio of 500,000 contracts and an outstanding of 25.3 billion euros, statistically reproduced.

Two main approaches have been studied :

1. an analysis of **historical performance** :
2. an analysis based on **mathematical models** :
   (a) Model of **Longstaff-Schwartz**
   (b) Binomial model of **Cox-Ross-Rubinstein** and
   (c) Stochastic model with the result of an **economic scenario generator** : 1000 scenarios over 40 years

Results of these approaches are :

- In the real world the historical cost of biometric guarantees is, in management cost rate, an average of 5% and 13%, in the event of a bicentenary shock with 90% of Units of account.
- For models based on the outputs of economic scenario generator, we observe more degraded results because of amplitude shock, possible within the case of a single asset, which is not possible for a diversified portfolio. We have observed costs from 7 to 50% of assets with this methodology.
- For mathematical models based on closed formulas (Longstaff-Schwartz and Cox-Ross-Rubinstein Binomial model), guarantees cost estimations are slightly lower. The maximum cost observed is 13% of assets. Let us remind that the standard deviation is the key criterion for these closed formulas. However, a high standard deviation is not negative, especially if asset is increasing. Consequently, these standard closed formulas must be adapted to incorporate asymmetry, for example with "*skewness*".

All these approaches have a major bias which is modeling in a "static" environment. In the real world, units of account as well as constituent assets are arbitrated as time goes on. Moreover, these approaches have been carried out with market units of account. Our preliminary study has shown that units of

3. id is : i.e.

account offered by fund managers suffer from a lack of readability of subscribers. Finally, let us remember that the risk of guaranteeing the performance of third-party units of account is, by definition, not entirely controllable. To facilitate units of account subscription, we offer sectoral units of account, in the hand of the insurer, more accessible to customers imagination. This strategy let insurer manage biometric guarantees risk.

Part II : Modeling sectoral units of account

Our choice is to model a **sectoral unit of account** that consists on three parts : "bond", "equity" and "cash".

Numerical applications for selecting the best assets allocation model are mainly based on the **energy** sector for three main reasons.

1. Energy sector has quoted market indicators that can be useful in modelling.
2. Energy sector experienced two shocks between 2018 and 2022, which provides data for the *benchmark* of the models :
   (a) A **demand shock** following COVID19 lockdown
   (b) A **supply shock** following Ukrainian conflict.

Different models have been tested with as benchmark passive management of the sector. The objective is to outperform index-based management and to guarantee policyholders funds, particularly over the medium and long term.

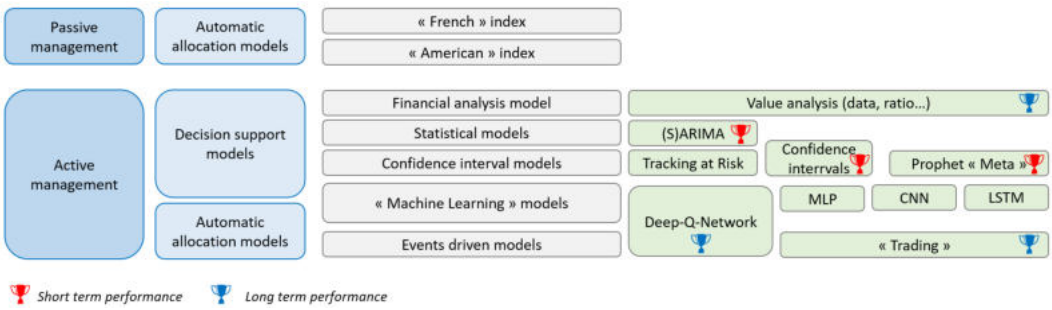


FIGURE 3 – Short and long terms models performance

The traditional model, based on the **financial analysis strategy**, highlighted by the outperformance of "Berkshire Hathaway", made possible to obtain interesting performances, but it suffers of a lack of events responsiveness and its difficult industrialization because it's based on quantitative and qualitative data and expert judgement.

Statistical models like (S)ARIMA-type have shown relative interest because their effectiveness is limited to very short term reliable prediction.

Models based on the confidence envelope, initiated by François Chauvet's tracking at risk (TAR), have been very relevant in the medium term.

$$T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \times \sigma^T_{\beta_{p-b}}\right)^2 + \left(\phi^{-1} \times \frac{1+\alpha}{2} \times \sigma^T_{e_{p-b}}\right)^2}$$

where : $T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right)$ is asset TAR at T time horizon, with a confidence level α
$\sigma^T_{\beta_{p-b}}$ is portfolio's systematic tracking error at T time horizon.
$\sigma^T_{e_{p-b}}$ is portfolio's specific tracking error at T time horizon.
$\phi^{-1}(\alpha)$ is inverse of cumulative distribution function of standard deviation.

The adaptation of his model, to include the trend (slope) of asset, improved performance. However, this type of model is very settings sensitive.

Artificial intelligence models had mixed performance. Linear models with MLP, CNN and LSTM type have very low performance. On the other hand, artificial intelligence models based on events driven based on the "Deep-Q-Network" have very interesting performances. There is however two issues. Firstly, theses models generate a lot of arbitrages which create transaction costs that decrease financial performance and secondly we have, over certain periods, observed trend shifts (bearish when the market is bullish) which can be difficult to explain to an executive board.

This is the reason why we have chosen an **events driven trading model** compatible with the objective of industrialization and automation[4]. This model outperformed passive management in 6 out of 7 lines of business tested. The main criteria of this model family are

- to add asset to portfolio when cumulative criteria of market, sector and asset growth and volume increase are met.
- ro liquidate asset when price fall below the 30-week moving average.
- to secure part of the capital gains on monetary

This model also has the advantage of limiting the risk of loss through daily or even intraday management with reducing the number of arbitrages through high constraints.

4. "Scalping" strategy : buy/sell method designed to make profits on small price differences

FIGURE 4 – Model performance for seven lines of business with 100 000 euros investment

However, to go further, it is necessary to take into account ALM (*Asset and Liabilities Management*) constraints and particularly redemption forecasts to reduce uncontrolled activation risks of biometrics guarantee.

Part III : Modeling sectoral units of account with constraints

External constraints integration into assets allocation model aims to improve assets distribution between assets types("equities", "bonds", "cash"). Studies of assets types reallocation are based on two approaches : deterministic and stochastic.

We compared 4 models.

- The first is stability focused (CPPI).
- The second is external indicator focused (interest rate).
- The third is insurer's liability focused (duration)
- The fourth is performance-driven focused stochastic assets type reallocation)

The objective of the stochastic model with recourse is that the portfolio's composition gives us a value of the portfolio greater or equal to the fixed return objective. The concept of recourse aims to take corrective actions after the occurrence of the random event which in this case will be the respective profitability of assets types.

Concretely, in the initialization step, we have the value of the control variable (x). At the time of the appeal we have certain information on the event which was random and we take the decision to appeal (y) there in order to correct the error on the forecast of this event. The optimization problem is to choose the optimal values of x and y. The decision taken at initialization (x) is independent of the scenario that may take place at the next stage of the appeal. This is the non-anticipation property.

When we have several recourses (k), the optimization aims to minimize the cost of the decision at initialization and the expected cost of the recourse carried out at each following step.

Let ω be a discrete random variable that can have s possible values : $(\omega_1, ..., \omega_s)$ with the probabilities $(p_1, ..., p_s)$ where each value $\omega_i, i = 1, ..., s$ corresponds to a scenario.

For k recourse we have :

$$\begin{cases} \min_{x_i} c^{'} x_i + E_{\omega^2} \min\left(c_2(x_2(\omega^2)\,; \omega^2) + ... + E_{\omega^k} \min\left(c_k(x_k(\omega^k); \omega^k)\right)\right. \\ \text{s.c } W_1 x_1 = h_1 \\ W_2 x_2(\omega^2) + T_1(\omega^2) x_1 = h_2(\omega^2) \\ W_i x_i(\omega^i) + T_{i-1}(\omega^i) x_{i-1}(\omega^{i-1}) = h_i(\omega^i), i = 3, ..., k \\ x_1 \geq 0, x_i(\omega^i) \geq 0, i = 2, ..., k \end{cases}$$

Where W_i represents known matrices of sizes $m_i \times n_i$
h_1 represents a known vector in $\mathbb{R}^{m_i}$
$h_i(i = 2, ..., m_i)$ represents a random vector in $\mathbb{R}^{m_i}$
$T_i(i = 1, ..., k-1)$ represents random matrices of sizes $m_i \times (n_i - 1)$
$x_i(i = 1, ..., k)$ represents the decision vector at step i with $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ for i >1
ω_i represents the random event history up to step i.

Application of assets types reallocation models :

We obtained, for the energy sector, from 2018 to 2022, the performance :

Model	**Total performance**	**Annualized performance**
CPPI Model	22.14%	5.54%
Deterministic model without duration	37.08%	9.27%
Deterministic model with duration	30.47%	7.62%
Stochastic Model	**47.25%**	**11.81%**

TABLE 2 – Comparison of assets types reallocation models performance over 4 years

Event driven management of unit of accounts combined with stochastic assets types reallocation offers the best performance.

Conclusion and potential sources of improvement :

The inflation which began with the Ukrainian conflict, but whose causes are earlier, is accentuating a bond shock whose magnitude reminds us of the bond shock of 1986 which led to the bankruptcy of 186 insurance companies in the world. The dynamic management of outstandings seems more than ever a necessity because it's the only way to guarantee policyholders investments while maintaining a rate of return expectation likely to maintain the interest of policyholders in life insurance. Indeed, only an equitable risks and profitability sharing will allow the survival of life insurance sector in a particularly unstable environment.

To refine the performance of the model, it could be tested, across all lines of business, in other geographic markets and periods. It must also be adapted with the extension to other types of assets.

Main bibliographic references :

ALAEDDINE FALEH & PLANCHET F. (2012). *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs.* Economica

L HALLS-MORRE, M (2020). *Advanced Algorithmic Trading.* QuantStart

Remerciements

Je remercie particulièrement **Dominique ABGRALL**, **Franck VERMET** et **Brice FRANKE** de m'avoir donné l'opportunité de soutenir ce mémoire au sein de l'Euria.

Ce mémoire a été rédigé avec le support de **Marieme SAMBE** que je remercie pour son temps de relecture.

Les communautés **Python** et **Stack Overflow** ont été d'une grande aide.

Bien sûr, rien n'aurait été possible sans le soutien de ma famille et de toutes les personnes que j'ai croisé au sein de ma carrière.

Merci à Yali, Arthur, Victoria, Marie, JC^2, PP, SE.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Contexte et attente des assurés **3**
2.1 Produits actuels proposés par les assureurs 3
2.1.1 Que veulent prioritairement les investisseurs particuliers ? 4
2.1.2 Quel est le profil des investisseurs particuliers ? 4
2.2 Introduction à la garantie du capital : garanties planchers absolues, biométriques... (portefeuille statique) 10
2.2.1 Les garanties "planchers" en cas de décès : 11
2.2.2 Les garanties en cas de vie : 11

I Coût des garanties "biométriques" **15**

1 Portefeuille de base et portefeuille déformé **21**
1.1 Le portefeuille de base 21
1.1.1 Coté Passif : 22
1.1.2 Coté Actif : 24
1.2 Le portefeuille déformé 25
1.2.1 Identification des causes de rachat (total ou partiel) 25

2 Les bases de calcul de la garantie : **27**
2.1 Notations et formules 27

3 Le coût des garanties sur le portefeuille de base **29**
3.1 Prise en compte des hypothèses de marché 29
3.1.1 Analyse du coût des garanties sur la base du scénario central (N°1) : 30
3.1.2 Amplification des hypothèses de marché 30
3.1.3 Évolution du coût dans le temps : 33

4 Le coût des garanties plancher sur la base du portefeuille déformé **37**

5 Analyse des garanties à partir d'un générateur de scénarios économiques (GSE) 43
5.1 Principe du générateur de scénarios économiques 43
5.2 Coût des garanties sur la base des 1000 scénarios sur 40 ans 45
5.3 Coût des garanties sur la base des scénarios bornés entre -59% et +289% sur 40 ans 47

6 Modélisation mathématique des garanties planchers 49
6.1 Modélisation mathématique des garanties planchers pour un mono-support avec prime unique 49
6.2 Modélisation d'un put Européen 50
6.3 Modélisation d'un put Américain 52
6.3.1 Adaptation des méthodes de Monte-Carlo : présentation de l'algorithme de Longstaff-Schwartz 52
6.3.2 Modélisation mathématique de l'algorithme de Longstaff-Schwartz. 53
6.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein 63
6.4.1 Présentation des options avec le modèle de Cox-Ross-Rubinstein . 63
6.4.2 Spécificité du modèle dans le cadre d'une option américaine (exercice à n'importe quel instant) 65

7 Conclusion Partie I 69

II Introduction aux unités de compte sectorielles pilotées par l'assureur (dynamique) 71

1 Modélisation des unités de compte sectorielles 77
1.1 Les actifs de type "actions" : 80
1.2 Les actifs de type "obligations" : 80
1.3 Les actifs de type "trésorerie" : 81

2 Modélisation d'UC sectorielles "gestion passive" ou de marché (secteur énergie) : 83
2.1 L'indice "action" 86
2.2 L'indice "obligation" 87

3 Sélection des supports sur la base d'indicateurs financiers des entités 89
3.1 Les indicateurs de performance 89
3.2 Les indicateurs de valorisation 91

4 Modèles de séries temporelles 97
4.1 modèle AR (*Auto Regressive*) 97
4.2 modèle MA (*Moving Average*) 98
4.3 Le modèle ARMA 98
4.4 Le modèle ARIMA 99

4.5 Le modèle SARIMA : "Seasonal ARIMA model" 100

5 Modèle de machine learning (secteur énergie) : 105
5.1 Présentation et application de modèles linéaires 105
5.1.1 La régression logistique : modèle de prédiction de tendance haussière ou baissière 105
5.1.2 le Support Vector Machine : modèle de prédiction de tendance haussière ou baissière 107
5.2 Présentation et application de modèles non linéaire de machine learning dans la prédiction de la valeur 110
5.2.1 MultiLayer Perceptrons (MLP) 110
5.2.2 Long Short-Term Memory networks, or LSTMs for short 111

6 Proposition d'un modèle mathématique de nappe 115
6.1 Modèle de la nappe / enveloppe de confiance 115
6.2 Proposition d'un modèle privé 122

7 Analyse de la performance des modèles prédictifs 125

8 Les "Event-Driven Models" 127
8.1 Proposition N°1 : Un modèle d'apprentissage par renforcement sur un titre 130
8.2 Proposition N°2 : Un modèle d'apprentissage par renforcement sur l'ensemble des titres du secteur d'activité. 131
8.2.1 Analyse critique dans la prédiction des algorithmes de machine learning 136
8.3 Proposition N°3 : Un modèle basé sur les valeurs et variations d'un ensemble de variables de type trading 136
8.3.1 Synthèse des contraintes des 3 modèles de "Trading" 138
8.3.2 Performances des modèles de "Trading" 139
8.3.3 Synthèse du modèle de Trading retenu (N°3) 140
8.3.4 Robustesse et axes d'amélioration du modèle de "Trading" retenu . 147
8.3.5 Performances du modèle retenu avec les deux poches : actions et obligations 150

9 Conclusion Partie II 153

III Modélisation des UC sectorielles et des garanties associées (dynamique) 155

1 Rappel des éléments fiscaux 161

2 Problématiques ALM : Stratégies classiques adaptées au produit modélisé 163
2.1 Modélisation coté "Actif" 164

2.1.1 Les obligations d'entreprises : 164
2.1.2 Les actions : 166
2.1.3 Le CASH : 166
2.2 Modélisation coté "Passif" 166
2.3 Modélisation Actif et Passif du produit 167

3 Proposition du modèle d'allocation d'actif avec intégration dynamique des contraintes "Passif" 171
3.1 Problématiques ALM pour les unités de compte : 173

4 Le modèle CPPI (Constant proportion Porfolio Insurance) 175

5 Le modèle N°1 : allocation des poches sur la base déterministe en fonction de taux 177

6 Le modèle N°2 : allocation des poches sur base déterministe avec prise en compte de la duration 181

7 Le modèle avec programmation stochastique avec recours (annuel) 185

8 Synthèse des modèles 191

9 Pour aller plus loin : SII, IFRS 17, impact des investisseurs institutionnels sur les cours 193
9.1 Solvency II 193
9.2 IFRS 17 194
9.3 Impact de la volumétrie sur les cours 194
9.3.1 Y a-t-il une corrélation entre les volumes échangés et les variations de cours ? 194

10 Conclusion 197

A Annexes explicatives 199
A.1 Sondage investissement 199
A.2 Résultat du sondage investissement 203
A.3 Descriptif des garanties biométriques et actes déclencheurs associés 206
A.4 Base de données source et méthodologie de génération de données de synthèse 207
A.4.1 Description de la base de données 207
A.4.2 Méthodologie de production de la base de données 208
A.5 Résultat du GSE Scénarios 2 et 3 215
A.6 PII : Modèles linéaires 218
A.7 PII : ARCH 218
A.8 PII : Autre modèle de machine learning : Convolutional Neural Network models : CNN 218
A.9 Historique des écarts ouverture - clôture CAC40 219

A.10 Performance détaillée du modèle "trading 1" sur le secteur "Énergie" . . . 220
A.11 Performance détaillée du modèle "trading 2" sur le secteur "Énergie" . . . 221
A.12 Performance détaillée du modèle "trading 3" sur le secteur "Énergie" . . . 222
A.13 Performance du modèle "trading 1" sur le secteur "aéronautique" 223
A.14 Performance du modèle "trading 1" sur le secteur "santé" 225
A.15 Performance Berkshire Hattaway 227
A.16 Autres illustrations de l'impact du volume sur le cours 227

B Lexique **229**

Bibliographie **234**

Chapitre 1

Introduction

Les placements traditionnels de « bon père de famille » qui assuraient des rendements élevés sur le fonds Euro ont disparu. Les taux d'intérêts ont oscillé autour de 4% jusqu'à la fin des années 1970. Cela a permis aux assureurs vie de faire des investissements à long terme avec un rendement nominal élevé et une très faible volatilité des actifs.

Avec la "**stagflation**" et la forte inflation des années 1980, les taux d'intérêts de marché sont montés à plus de 14%. Cela a créé un choc obligataire en 1986 qui a entrainé la disparition de 186 sociétés d'assurance vie dans le monde [26]. Plusieurs crises financières se sont succédées, mais celle de 2018 à été la plus grave car systémique. Elle a été réduite par une politique monétaire de "**quantitative easing**" dont les conséquences sont la descente progressive des taux courts en territoire négatif jusqu'en 2022. L'inflation produite par cette politique accentuée par la crise Ukrainienne entraine aujourd'hui une remontée des taux et un choc baissier obligataire. Face à ces évolutions **les assureurs ont progressivement baissé les taux moyens garantis des fonds Euro jusqu'à 0% brut**. Ils ont commercialement et contractuellement mis en avant les contrats multi-supports, faisant de fait reposer les risques sur les assurés. Avec l'appui du législateur, de nouveaux produits privilégiant le temps long ont également commercialisés. Cependant les encours respectifs d'Eurocroissance, des FRPS et du PER, inférieurs à 2% chez les assureurs, montrent qu'ils n'ont pas trouvé de public.

Les intérêts des assureurs et des assurés semblent de plus en plus divergents. Nous pouvons nous poser la question du risque à moyen-long terme sur la filière d'autant plus que la pyramide d'âge des encours montre qu'ils sont très majoritairement détenus par la tranche d'âge vieillissante du *babyboom*. Si cette population d'assurés a des contrats anciens en forte plus-values qui lui permet de préserver le capital investi et de conserver ses contrats, les plus jeunes sont plus exposées aux moins-values sur leurs unités de compte et aux rendements réels négatifs car corrigés de l'inflation. Ces derniers assurés vont logiquement arbitrer vers d'autres supports ayant des taux d'intérêts plus favorables comme le livret A, les SCPI... Nous observons également un nombre croissant de mois en décollecte nette sur le secteur depuis 2020.

De plus, en France, au niveau macro-économique nous constatons, dans la répartition des actifs des ménages, une part non négligeable d'actifs "stériles". En effet, en 2020, sur

les 13 400 milliards d'euros d'actifs des ménages [34], nous avons 1 812 milliards d'euros en dépôts et comptes courants, soit 81% de l'encours de l'assurance vie. Les encours sur ces actifs sont en croissance avec le retour de l'inflation et la baisse des garanties réelles des assureurs sur le capital placé.

Il existe une opportunité, pour les clients, l'État et les assureurs de flécher une partie de ces actifs "stériles" vers l'économie réelle. Cela permettrait de réduire la part des obligations d'état qui sont très exposées au choc obligataire si elles ne sont pas indexées.

Nous allons tenter de faire converger à nouveau les intérêts des assureurs et des assurés. **L'objectif est de déterminer si les assureurs peuvent proposer une assurance vie en unités de compte avec garanties biométriques (i.e [1] garantie plancher du capital investi sur les grands évènements de la vie).**
Nous allons présenter des unités de compte sectorielles en précisant leurs avantages par rapport aux unités de compte du marché modélisées par les gérants de fonds.

Après un bref rappel du contexte de l'assurance vie en France et des attentes des assurés, nous structurerons notre démarche en en **trois parties**.

La première va consister à chiffrer le coût des garanties biométriques afin de déterminer si elles sont viables pour l'assureur.

La seconde va consister à modéliser des unités des comptes sectorielles, qui ont l'avantage d'être très compréhensibles pour les assurés que ce soit au niveau des actifs sous-jacents ou de leurs fluctuations.

La dernière partie va consister à adapter le modèle en intégrant la réallocation entre les typologies d'actifs des unités de compte afin de réduire le risque d'activation des garanties biométriques et donc de piloter le risque pour l'assureur.

1. id est : c'est à dire

Chapitre 2

Contexte et attente des assurés

2.1 Produits actuels proposés par les assureurs

Pour augmenter l'espérance de rentabilité des assurés, le législateur et les assureurs ont mis en place, avec la loi "Sapin II" de 2016, des produits de type "eurocroissance", PER [4], ou FRPS "Fonds de Retraite Professionnel supplémentaire". En termes de proportion, ces produits représentent un encours très inférieur à 1% chez les assureurs qui les ont mis en place. La complexité du produit et le ratio risque / rendement sont les causes principales de l'absence de succès commercial. Notons que le produit eurocroissance vient d'être arrêté chez CARDIF en 2022.

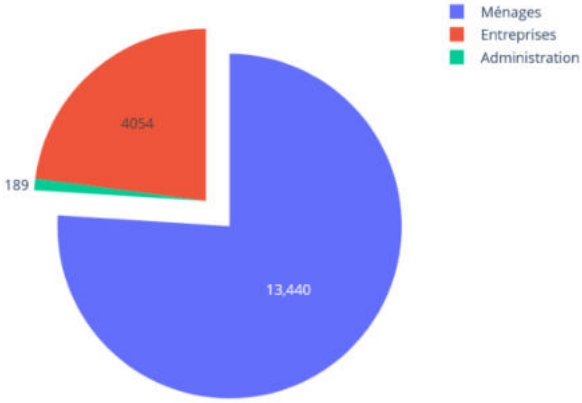


FIGURE 2.1 – Répartition du patrimoine des Français en 2020 en milliards d'euros (Source : INSEE)

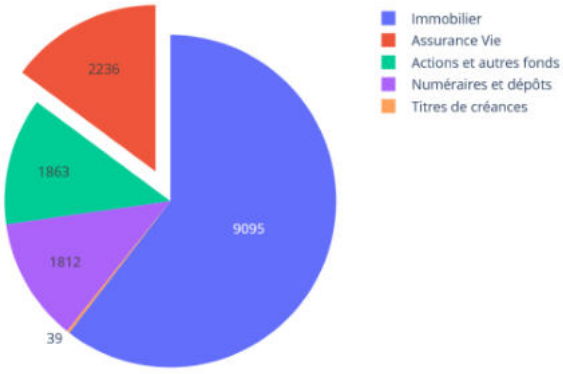


FIGURE 2.2 – Répartition du patrimoine des ménages Français en 2020 en milliards d'euros (Source : INSEE)

Un sondage [A1] [1], réalisé auprès de plus d'un millier de personnes a permis de mettre en évidence les critères de choix fondamentaux des investisseurs particuliers.

1. Annexe A1

Nous constatons une prépondérance de l'immobilier, ce qui est vraisemblablement liée à la fonction utilitaire du logement. Le deuxième constat est que l'assurance vie est l'investissement le plus important après l'immobilier et représente 1.4 fois les encours numéraires sans risque et 1.8 fois les actions comportant un risque.

2.1.1 Que veulent prioritairement les investisseurs particuliers ?

Le sondage réalisé, met en avant le fait que les investisseurs souhaitent par priorité :

1. La **lisibilité** ie[2] comprendre rapidement le produit d'investissement ; ce qui passe par une représentation mentale, qu'elle soit juste ou erronée ;
2. La **sécurité** ie garantir au maximum le capital investi ;
3. La **liquidité** / disponibilité ie avoir une disponibilité des fonds en cas d'évènements de la vie ;
4. La **rentabilité** ie avoir un rendement élevé

2.1.2 Quel est le profil des investisseurs particuliers ?

Appétence au risque : Modérée à faible

- Les **personnes à faible appétence au risque** réalisent des investissements en immobilier, en numéraire ou en dépôts, même si les taux de livret A sont inférieurs à l'inflation et si nous constatons une absence de corrélation entre le prix immobilier et les revenus des particuliers.
- Les **personnes avec une appétence au risque** réalisent des placements en actions via PEA ou autres comptes titres. Dans des cas marginaux, des placements sont réalisés sur des supports de type spéculatifs comme les monnaies virtuelles (BITCOIN), les investissements directs ou le *private equity*.

Représentation mentale des investissements.

Les investissements sont réalisés en fonction de la représentation mentale individuelle ou collective d'un niveau de risque par support d'investissement indépendamment de sa réalité. Les investisseurs particuliers souhaitent avoir une compréhension du produit dans lequel ils investissent et particulièrement des risques et contraintes associés.

- Le **produit d'investissement préféré des Français est l'immobilier** : il a l'avantage d'être très simple à représenter. Hors achat de la résidence principale "L'investissement immobilier locatif consiste à acheter un logement immobilier pour le louer".
- **Après l'immobilier, on retrouve l'assurance vie investie dans un fonds euro** qui est décrit "comme un placement à capital garanti disponible à tout moment, à rendement positif garanti ou non".

2. ie : Id est : c'est à dire

L'effort de compréhension pour les investisseurs particuliers est considérablement plus important pour un produit de type eurocroissance que pour les exemples précédents. Le produit eurocroissance est décrit comme un "engagement donnant lieu à la constitution d'une provision de diversification". Plus précisément, un investissement dans un "fonds diversifié" divisée en deux parties distinctes :

- une partie exprimée en euros que l'on appelle également "provision mathématique" et
- une autre partie exprimée en parts de diversification.

C'est l'une des raisons de son échec commercial.

Zoom sur l'assurance vie :

Les souscripteurs d'assurance vie, souhaitent un placement sécurisé avec une faible part en unités de compte +/- 20% à 30% pour le dynamisme et le risque.

Pourquoi cette répartition stable de l'assurance vie avec en moyenne 70% - 80% en fonds euro et 20%-30% UC ?
La situation est d'autant plus paradoxale que de 2013 à 2017, le rendement moyen des UC est de 1 à 2,5 fois plus élevé que ceux du fonds euro. [4]

Comment inciter les clients à investir plus en unités de compte ?
Dans les pays anglo-saxons Les *"Variable Annuities"* sont prépondérantes avec comme supports d'investissement des UC qui peuvent comporter des garanties planchers en cas de décès et de vie. Aux États-Unis, le stock des encours des *"Variables Annuities"*, même s'il remonte depuis 2018, a fortement baissé, il est passé de 184 Milliards de dollars en 2007 à 98,6 Milliards de dollars en 2020. Celui des *"Fixed Annuities"* a connu l'évolution inverse pour atteindre 120,5 Milliards de dollars en 2020 [57].

Quels sont les profils des titulaires d'assurance vie ?

Nous pouvons identifier trois grandes catégories de typologie de clientèle en fonction des contrats souscrits :
Les assurances vie "de placement disponible"
Ce type de clientèle recherche un placement libre plus rémunérateur que les produits monétaires. La répartition est approximativement, quels que soient les quantiles d'encours de 70%-80% en fonds euro et de 20%-30% en UC avec une majorité de contrats souscrits en intégralité sur le fonds euro.
Les assurances vie "d'investissement"
Ce type de clientèle recherche un placement rémunérateur avec 30% à 40% d'unités de compte. Pour ce type de clientèle, les arbitrages entre supports (euro vs UC et entre UC) ainsi qu'entre assureurs sont non négligeables en fonction des opportunités.
Les assurances vie "de succession"
Ce type de clientèle cherche à garantir à des héritiers ou des indivisions un capital. L'intérêt pour l'assureur est que ses clients ne font pas d'arbitrages d'opportunité.

Quels sont les profils d'assureurs ?

- Les **assureurs adossés aux banques traditionnelles** ont une part d'assurance vie "de succession " non négligeable.
- les **assureurs adossés aux banques en ligne** et les **assureurs purs** ont majoritairement des assurances vie de "placements disponibles" et "d'investissements".

Quelles sont les stratégies marketing ou juridiques des assureurs pour diminuer la part de fonds euro et pour quel résultat ?

Certains assureurs ont réalisé des études avec la première entreprise internationale de conseil et de technologies française ACCENTURE. Un levier pour augmenter la part d'unités de compte est la "segmentation client" :

1. cibler les populations jeunes à revenus supérieurs, de sexe masculin, sans enfant, dans les zones urbaines très favorisés permet de réduire la part du fonds euro.
2. pour élargir cette cible, des tentatives d'incitation financière ont été réalisées avec le versement d'un montant de quelques dizaines d'euros en contrepartie d'un pourcentage non négligeable d'investissement dans des unités de compte. Ces stratégies ont permis d'augmenter la part d'unités de compte dans des proportions intéressantes mais relatives.

Il faut remarquer que **chez les assureurs, le nombre de contrats d'assurance vie est sans rapport avec les encours sous gestion**. Ainsi en fonction des acteurs, **20% du nombre de clients peuvent représenter 80% des encours**. Une proportion qui dépend fortement du coeur de cible des assureurs.

Par exemple, les assureurs adossés à des banques ont généralement une clientèle de moyenne - haute bourgeoisie en fin de carrière et début de retraite qui est le coeur de leur encours. Les contrats d'assurance vie détenus par des profils très favorisés, même s'ils ont des encours qui peuvent être impressionnants ne représentent pas une part significative.

Le coeur des investisseurs particuliers souhaite disposer des fonds pour pallier des dépenses programmées ou imprévues. Il apparaît cependant que la vie humaine est programmée par des évènements de la vie probabilisable.

La représentation graphique des événements principaux de la vie par âge permet de comprendre qu'en réalité, si la date des besoins d'argent n'est pas identifiable elle est probabilisable par l'assureur voire quantifiable en fonction des profils clients. Cf Détail et descriptif en annexe [A3].

Dans la représentation ci-dessous, le dégradé de couleurs à **échelle logarithmique**, des couleurs claires traduisant des proportions faibles et des couleurs foncées des proportions élevées, permet de comprendre qu'à chaque âge de la vie, correspondent des évènements probabilisables de nature à justifier un rachat total ou partiel de l'assuré.

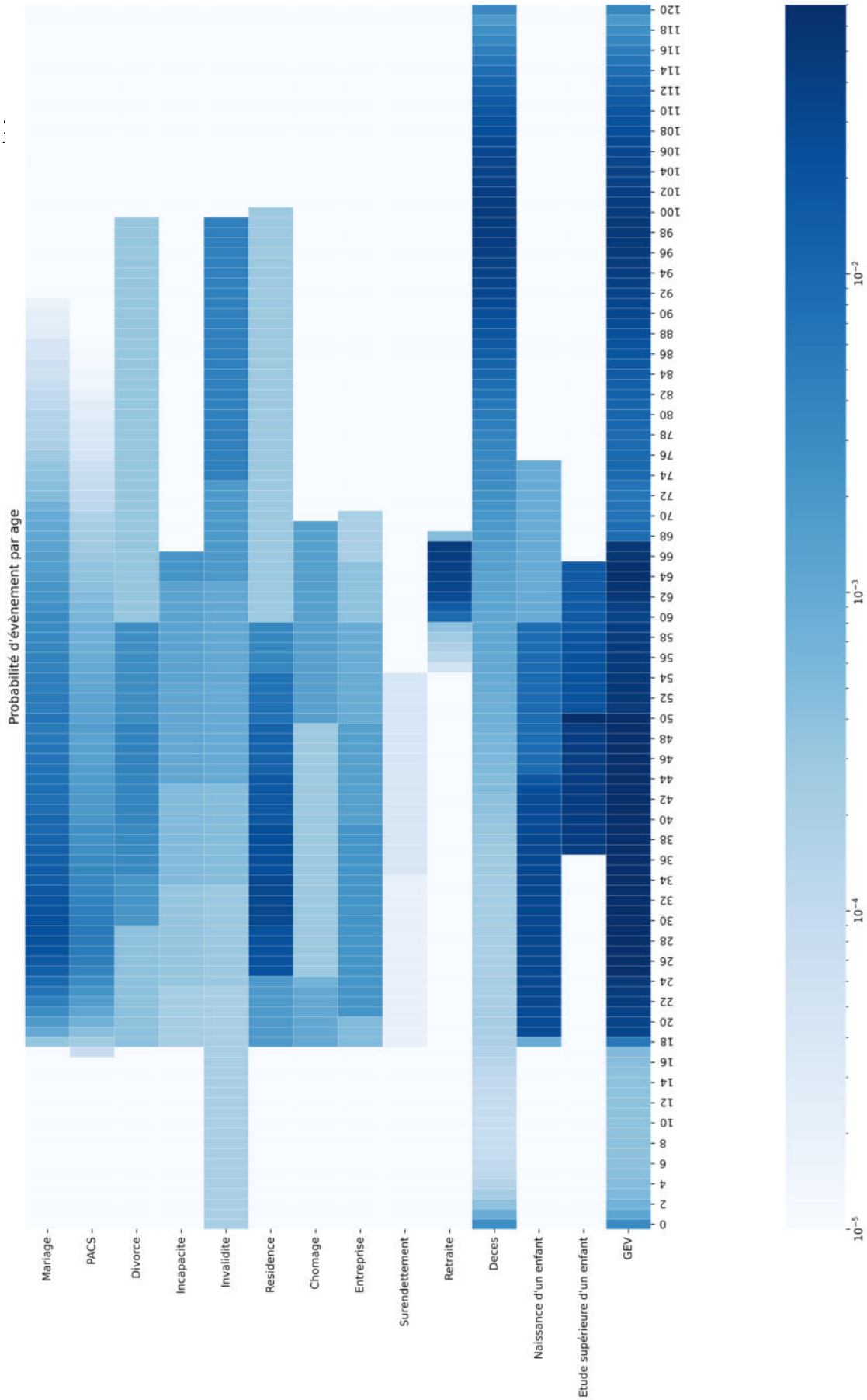


FIGURE 2.3 – Répartition des évènements de la vie par age

Il revient à l'assureur de considérer si chacun de ces événements est de nature à entraîner une sortie financière de type rachat partiel ou total des contrats d'assurance vie.

Par exemple :

- un **mariage** génère des dépenses importantes.
- une **incapacité** ou une **invalidité** nécessite des montants importants pour aménager le logement ou payer l'assistance éventuelle.
- une **naissance** ne génère pas de sorties significatives instantanées de nature à entraîner le rachat total.

Problématique :

La question qui se pose est alors de savoir si l'assureur peut remplacer tout ou partie du fonds euro par des UC associées à une garantie plancher. Cette étude sera réalisée en trois parties distinctes dont l'objectif est de présenter la modélisation d'un produit d'assurance vie viable pour les parties prenantes et suffisamment intelligible pour trouver un marché.

- Dans une **première partie**, nous introduirons des garanties "planchers" avant de détailler leurs coûts en partant d'une réalité chiffrée pour arriver aux modélisations mathématiques associées.
- Dans une **seconde partie**, nous présenterons une introduction aux UC plus compréhensibles pour les assurés afin de leur permettre de faire un choix entre elles et de les inciter à plus investir sur ces supports. Nous introduirons des UC thématiques gérées par intelligence artificielle (machine learning) avant de les confronter à des UC thématiques de marchés similaires à de la gestion passive afin de comparer les performances.
- Dans une **troisième partie**, nous étudierons les unités de compte modélisées par les assureurs pour leur clientèle et l'intérêt d'adapter la composition de ces dernières à la projection de rachat de leur portefeuille.

Nous conclurons sur l'opportunité de la part des assureurs de proposer une assurance vie avec garantie plancher en cas de vie accompagnée d'UC sectorielles en substitution totale ou partielle du fonds euro.

Synthèse de l'objectif et de la démarche :

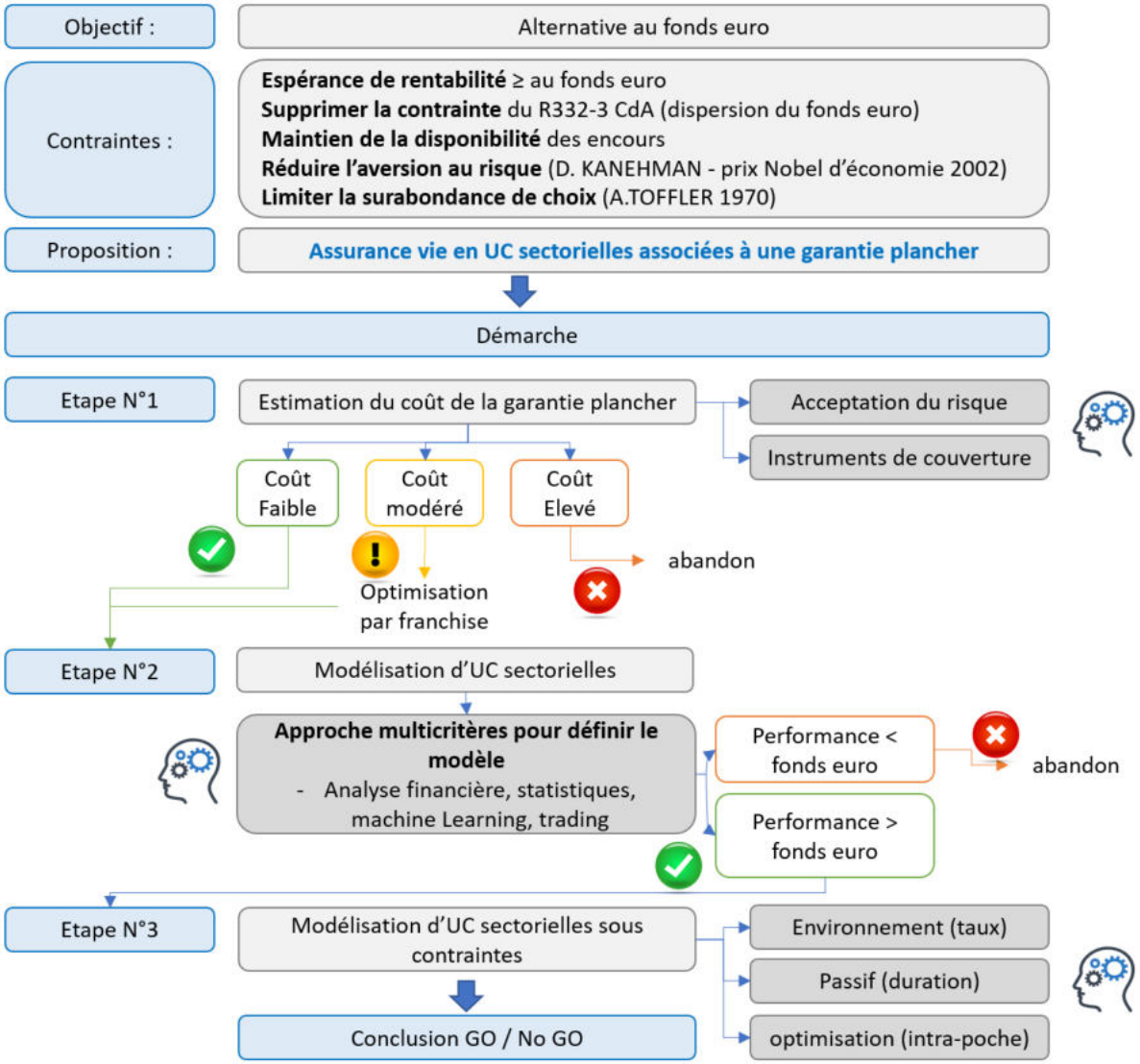


FIGURE 2.4 – Objectif du mémoire et démarche associée

2.2 Introduction à la garantie du capital : garanties planchers absolues, biométriques... (portefeuille statique)

Il convient de rappeler que les assureurs sont peu enclins à offrir une garantie plancher activable sur la base de n'importe quel motif et à n'importe quel moment. En effet les financiers ont tous en mémoire les chutes historiques de rentabilité :

- 1987 de -24,25%,
- 2008 de -18,38%,
- 2020 de 40,5% en 1 mois (le cours du CAC40 passant de 6 105 euros le 20 février 2020 à 3 632 euros le 20 mars 2020).

Notons que pour 2020, la situation s'est améliorée à fin novembre avec une baisse de 11,87% seulement malgré une économie à l'arrêt quasi-total lors du premier confinement et l'arrêt partiel lors des deuxième et troisième confinements. Ces chocs historiques sont la raison pour laquelle les garanties planchers, lorsqu'elles existent sont à maturité comme "eurocroissance" ou les *"Variables Annuities"*.

Point d'attention : Nous devons nous rappeler que le résultat d'un placement correspond à la plus ou moins-value **réalisée** augmentée des revenus (dividendes, coupons...) diminués des frais et autres prélèvements.

Si nous prenons l'exemple de l'immobilier : Entre le 1er janvier 2000 et le T2 2021, le prix moyen a augmenté de 1,79 pour la France, 2,03 pour l'ile de France et 2,64 pour Paris. Si nous prenons le CAC40 à titre de comparaison, nous constatons que le cours du 1er janvier 2000 au 30 septembre 2020 a une valeur moyenne de 4 528,98 euros oscillant entre 2 403,04 et 6 922,33 euros.

Graphiquement, les cours de 2020 sont proches de ceux de 2008 et de 2000. Si nous incluons l'inflation, nous pourrions conclure à une baisse de valeur réelle du CAC40 en 20 ans. Par contre, si nous prenons en compte les dividendes, la courbe "CAC 40 GROSS TR" correspondant à la valorisation du CAC40 avec dividendes réinvestis dans le CAC40, nous avons une valorisation au 30 septembre 2021 de 18 492,23 euros pour 5 917,37 euros investis début 2000 soit 312,51% d'augmentation.

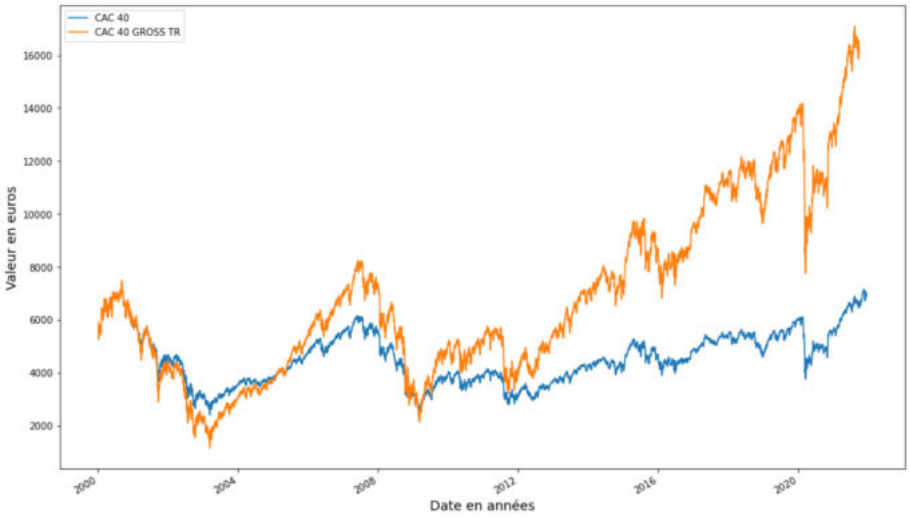


FIGURE 2.5 – Incidence des dividendes sur le CAC40

Dans la modélisation de garantie nous devrons donc prendre en compte les revenus des supports d'investissement.

2.2.1 Les garanties "planchers" en cas de décès :

Jusqu'en 1992, elles étaient obligatoires. En 1992, un changement de législation a rendu cette garantie facultative. Toutefois, pour éviter le risque d'anti-sélection, le caractère d'adhésion du contrat d'assurance rend la garantie rarement optionnelle.

Les garanties planchers en cas de décès ne présentent pas de risque pour les assureurs, l'étude menée en 2003 par la CCA (ex-ACPR) [41] fait état d'un ratio S/P pour les garanties planchers en cas de décès de 36% pour des prélèvements faibles, de l'ordre de 0,1 à 1 pour mille des primes émises. Notons que les UC monétaires et les UC immobilières sont en général exclues de ces garanties planchers.

2.2.2 Les garanties en cas de vie :

Elles peuvent être déclinées en :

- **garantie en cas de vie de valeur de rachat minimale du contrat au-delà d'une période de carence "GMSB"** : *"Guaranteed Minimum Surrender*

Benefit". L'intérêt de cette garantie est qu'elle est active quelle que soit la date après le délai de carence.
- **garantie en cas de vie proposant une sortie en rente dans des conditions fixées lors de la souscription "GMIB"** : *"Guaranteed Minimum Income Benefits"*. Cela correspond à une garantie de revenu minimal car le montant garanti en rente viagère est défini avec une table de mortalité et un taux technique fixés lors de la souscription.
- **garantie en cas de vie à une date définie au terme assortie d'une période de carence "GMAB"** : *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*. L'intérêt est de garantir une performance à terme pour l'assuré ou les bénéficiaires en échange d'une espérance augmentée de marge réalisée.
- **garanties en cas de vie du capital à terme "GMMB"** *"Guaranteed Minimum Maturity Benefit"*. Cette garantie est financée par un pourcentage de la performance du support en cas de hausse. En effet, cette garantie diminue l'espérance de gain du client par une participation inférieure à 100% de la performance du support en cas de hausse.

Les garanties de capital peuvent concerner :

- le capital investi
- le capital investi majoré en fonction d'un paramètre (durée de détention, âge de l'assuré).

Les garanties de rendement peuvent :

- avoir un **effet cliquet** (par exemple garantie du plus haut cours atteint par l'épargne durant la vie du contrat)
- être **hybrides** : garantie du maximum entre garantie de rendement et garantie du plus haut cours atteint

Les garanties planchers peuvent en principe augmenter le risque systémique de l'assureur. En effet, l'évolution défavorable des marchés financiers, va se répercuter sur les contrats :

- Plus les contrats sont anciens plus les risques sont réduits en raison des revenus financiers (dividendes, coupons...) cumulés depuis l'origine du contrat.
- **Dans le cadre de notre étude, nous nous concentrons sur les garanties de rachats totaux avec sortie en capital**.

La tarification de ce type de garanties en cas de vie sur des supports de type UC nécessite de prendre en compte la volatilité des unités de compte (UC). La recommandation de l'ACPR pour la valorisation des garanties planchers décès est :

- soit une méthode déterministe d'au moins 20 scénarios ou l'évolution du cours du support est basée sur sa volatilité.
- soit une méthode stochastique basée sur le modèle de Black & Scholes

Les **approches déterministes** impliquent d'utiliser un chemin prévisible pour le cours des UC. Une atténuation par des scénarios catastrophes permettrait d'inclure une

marge de prudence, cependant, cette méthodologie se heurte à la réalité de l'acceptation du coût de cette garantie par le client.

Les **approches stochastiques** basées sur une formalisation financière de la garantie comme une option. Les options peuvent être soit assimilables à des options Européennes ou Américaines.

Dans la partie suivante, nous calculons le coût de la garantie plancher en l'absence d'arbitrage selon plusieurs approches sur un portefeuille de 500 000 contrats en run-off.

Première partie

Coût des garanties "biométriques"

Définition

Nous définirons les **garanties biométriques** comme **"l'ensemble des garanties ayant un lien avec la vie humaine"**. Nous désignerons par ce vocable toutes les **garanties contractuelles** ayant un lien avec les **G**rands **E**vènements de la **V**ie (GEV) :
- Changement administratif : Mariage, PACS, Divorce, Rupture de Pacs
- Changement d'état de santé : Incapacité, Invalidité, Décès
- Changement de la structure familiale : Naissance d'un enfant
- Changement patrimonial majeur : Chômage, Sur endettement, Retraite, Achat de la résidence principale, Financement des études supérieures d'un enfant, Création d'entreprise.

L'exemple des critères de déclenchement pour chaque garantie avec acte juridique/document déclencheur est en annexe [A3].

Objectif et démarche

Dans cette partie nous considérons que le portefeuille est "en statique" c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'arbitrage entre supports dans le temps. Notre objectif va être de calculer le coût de la garantie biométrique. Pour estimer ce coût nous avons retenu deux approches : les modèles calculatoires et les modèles mathématiques basés sur des formules fermées.

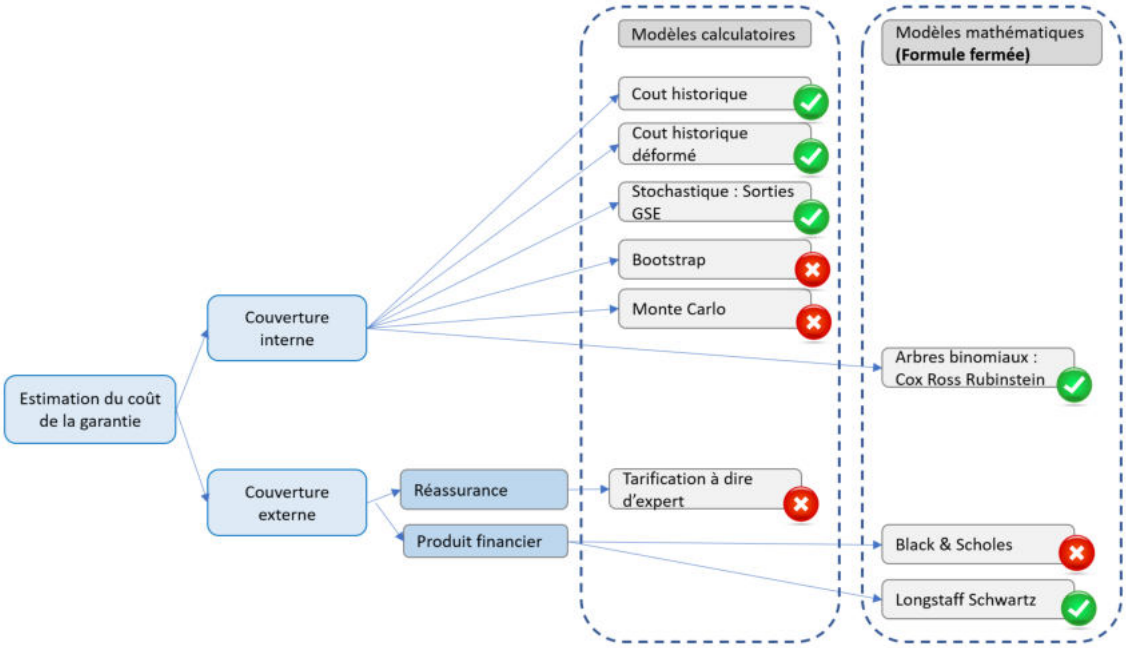


FIGURE 1 – Options pour calculer le coût de la garantie biométrique

Qu'est ce qui justifie ce choix ?
L'assureur doit arbitrer entre deux grandes stratégies :
- soit **prendre en charge directement le coût du risque**
- soit **céder le risque** idéalement sur le marché financier dans le cadre de d'une couverture ou via une réassurance.

Dans les deux cas, il est nécessaire d'estimer au préalable le coût avec les méthodes les plus adaptées.

Méthode	Avantages	Inconvénients	Choix
Coût historique	Facilité de calcul	Le passé ne reflète pas le futur	**Oui**
Coût historique déformé	Facilité de calcul sur plus de cas	Le passé ne reflète pas le futur	**Oui**
Sorties stochastiques GSE	Facilité de calcul	Les scénarios ne reflètent pas la réalité observée pour un portefeuille	**Oui**
Bootstrap	Technique classique	Nécessite de nombreux tests pour être "fiable"	Non
Simulation Monte Carlo	Technique classique simple d'utilisation	Forte dépendance des résultats au processus utilisé	Non
Réassurance	Risque transféré et coût connu à l'avance	Tarification faite par des réassureurs à dire d'expert	Non
Formule de Black & Scholes	Formule fermée classique	Formule inadaptée aux options non Européennes	Non
Formule de Longstaff-schwartz	Formule fermée paramétrable adaptée aux options américaines	Formule sensible aux paramètres utilisés	**Oui**
Arbre binominal de Cox Ross Rubinstein	Formule fermée paramétrable	Formule sensible aux paramètres utilisés	**Oui**

TABLE 1 – Critère de choix des méthodes d'estimation du coût de la garantie biométrique

Dans une première étape, nous décrivons le portefeuille de base que nous déformons ensuite pour voir les variables déterminantes dans le coût et les causes de rachat.

Dans une deuxième étape, nous présentons les bases de calcul de la garantie avant d'évaluer le coût des garanties planchers sur le portefeuille de base et le portefeuille déformé. Nous utilisons ensuite, les sorties d'un générateur de scénarios économiques (GSE), pour identifier le risque pour l'assureur de proposer ce type de garanties.

Pour finir, nous présentons en complément une modélisation mathématique avec deux approches :

- Les arbres binomiaux : Cox-Ross-Rubinstein
- L'algorithme de Longstaff-Schwartz

Chapitre 1

Portefeuille de base et portefeuille déformé

Le portefeuille de base a été reproduit pour être statistiquement comparable à un extrait de portefeuille type de bancassureur. La méthodologie de reproduction est en annexe [A4]

Ce choix présente plusieurs avantages :
1. il préserve le secret des affaires (composition du portefeuille, typologie de la clientèle),
2. il permet de déformer rapidement le portefeuille pour faire des études prospectives sur :
- l'évolution de la clientèle (vieillissement, renouvellement, catégories socio-professionnelles à privilégier ou exclure)
- ou les délais de carence à prévoir pour la garantie plancher
3. il permet de dimensionner le portefeuille à la taille représentative de 500 000 contrats tout en conservant les avantages de la loi des grands nombres.
4. La reproduction statistique, par simple modification des paramètres, permet avec le même programme, d'estimer rapidement le coût des garanties sur un autre portefeuille de l'assureur (zone géographique différente, segment différent) ou sur le portefeuille d'un tiers pouvant être acquis.

Remarque : Le développement informatique a depuis quelques années à permis de voir l'apparition de **générateurs de données de synthèse avec cohérence statistique**. Ces derniers peuvent être basés sur des *Generative adversarial network : GAN*, ...

1.1 Le portefeuille de base

Le portefeuille de base est segmenté quatre quartiles principaux (en encours moyens) ce qui permet de fournir l'indication de l'éventuel intérêt pour l'assureur de proposer ce type de garantie plancher pour certains segments de clientèle.
Caractéristiques :
Nombre de contrats : 500 000
Encours Total à la création du portefeuille : 25 324 354 906,99 euros

- Encours du fonds euro : 16 761 403 694,00 euros
- Encours des UC : 8 562 951 212,99 euros
Date de création du portefeuille : 2018
Taux de frais sur fonds euro sur encours : 0,70%
Taux de frais sur UC sur encours : 1,16%

1.1.1 Coté Passif :

Données en millions d'euros :

	1er Quartile	2nd Quartile	3eme Quartile	4eme Quartile	Encours
Total	729,5	1 446,8	6 922,9	16 225,1	25 324,3
Demoiselles	27,7	244,46	2 118,9	2 598,1	4 989,2
Femmes	88,2	590,9	1 534,1	5 021,5	7 234,8
Hommes	613,6	611,5	3 269,9	8 605,4	13 100,4

TABLE 1.1 – Répartition des encours du portefeuille par quartile et catégorie

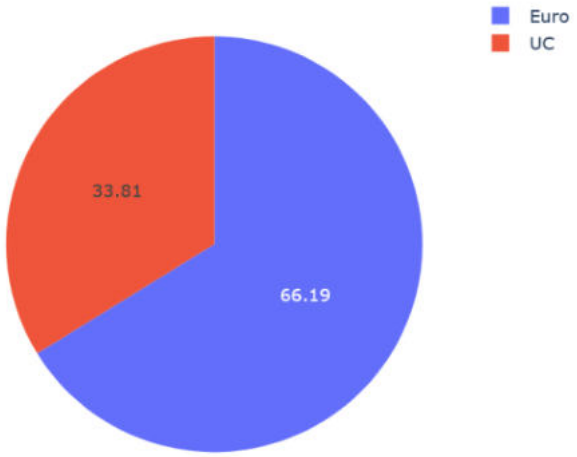


FIGURE 1.1 – Répartition en % du fonds euro et UC dans le scénario central)

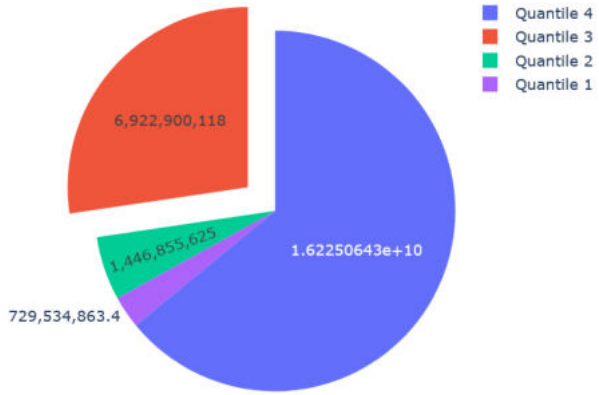


FIGURE 1.2 – Répartition des encours par quartile dans le scénario central

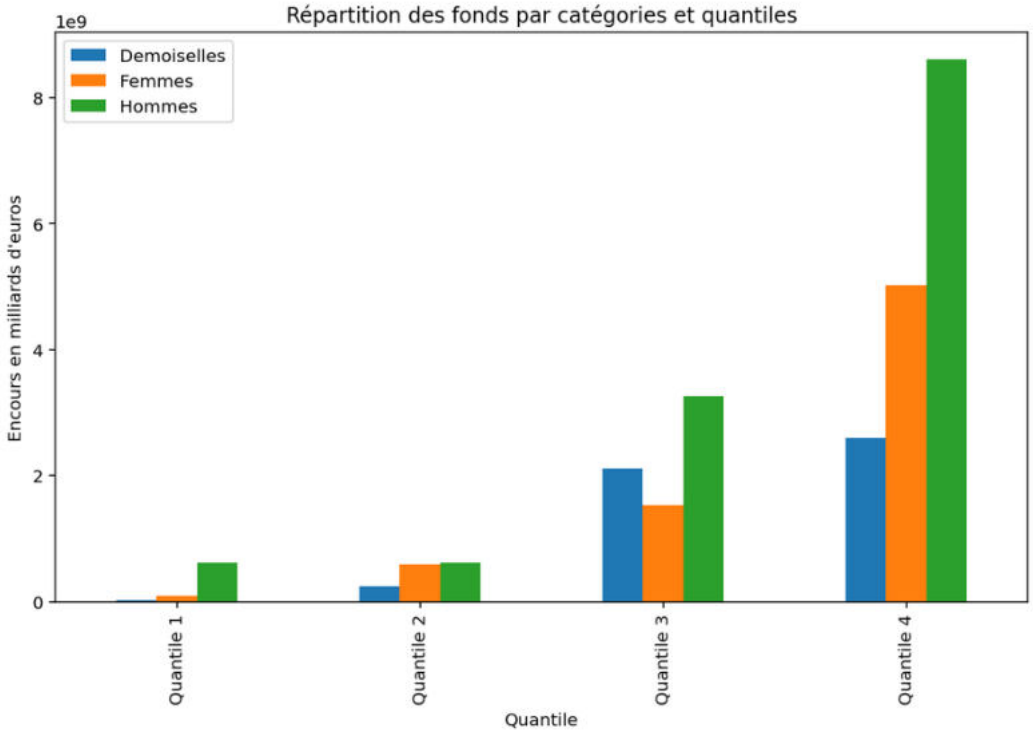


FIGURE 1.3 – Répartition des fonds par quartile et catégorie

1.1.2 Coté Actif :

Nous disposons des actifs suivants :

ISIN	Libellé	Allocation	Notation Morning Star (sur 5)	Niveau de risque (sur 7)
FR0012088870	BNP Paribas Convictions A	Actifs tous types - Zone Euro	3	4
FR0010144550	BNP Paribas Immobilier ISR Classic D	Actions immobilières - Zone Euro	2	6
FR0010028902	BNP Paribas Valeurs Françaises ISR Cl C	Actions Grandes Capitalisations - Zone France	3	6
FR0010115410	BNPP Best Sélection Actions Euro ISR CC	Actions Grandes Capitalisations - Zone Euro	4	6
LU1303481904	BNP Paribas L1 USA Classic USD CAP	Actions Grandes Capitalisations - Zone USA	non disponible	non disponible
FR0010077412	BNP Paribas Développement Humain C	Actions Grandes Capitalisations - Zone Euro	3	6
FR0010668145	BNP Paribas Aqua Classic	Actions Secteur Eau - Zone France	4	6
FR0010128587	BNP Paribas Smallcap Euroland ISR C C	Actions Moyennes Capitalisations - Zone Euro	3	6
FR0010129742	BNP Paribas Smallcap Euroland ISR C D	Actions Moyennes Capitalisations - Zone Euro	3	6
FR0010616177	BNP Paribas Midcap France ISR Classic C	Actions Grandes Capitalisations - Zone France	3	6
FR0010077859	BNP Paribas Midcap France ISR Classic D	Actions Grandes Capitalisations - Zone France	3	6
Fonds euro				

TABLE 1.2 – Actifs disponibles pour le produit commercialisé

1.2 Le portefeuille déformé

Le portefeuille a ensuite été déformé en modifiant
- l'encours moyen
- l'écart type
- l'ancienneté du portefeuille
- la répartition des UC et leur nombre dans le portefeuille
- le sexe
- l'âge
- ...

Ces déformations ont permis d'identifier les éléments clefs du coût (antériorité, répartition euro / UC...).

1.2.1 Identification des causes de rachat (total ou partiel)

Pour identifier les causes de rachat, différentes lois ont été utilisées sur les données publiques issues essentiellement de l'INSEE, et des données d'expérience de l'assureur. Les résultats montrent ainsi que la population titulaire d'assurance vie, plus aisée, a par exemple plus de chance de procéder à une acquisition immobilière. A l'opposée, elle a moins de chance d'être au chômage.

Statistiques de l'assureur inférieures aux statistiques publiques	Statistiques de l'assureur égales aux statistiques publiques	Statistiques de l'assureur supérieures aux statistiques publiques
Activation de la : -garantie Chômage -garantie Sur endettement -garantie Incapacité -garantie Invalidité	Activation de la : -garantie Rupture de PACS -garantie Divorce -garantie Décès -garantie Retraite	Activation de la : -garantie Étude (enfant) -garantie Conclusion de PACS -garantie Mariage -garantie Création d'entreprise -garantie achat de résidence principale

TABLE 1.3 – Comparaison des statistiques assureur vs données publiques

Si nous considérons que c'est l'événement qui déclenche la cause de la garantie, il est particulièrement intéressant de s'intéresser aux âges de survenance de ces événements. La probabilité de survenance dans la population des grands évènements de la vie (garantie Vie) et des décès permet de probabiliser le pourcentage de sortie des contrats d'assurance vie par âge.

Chapitre 2

Les bases de calcul de la garantie :

2.1 Notations et formules

Posons $CV_{t.i}$ la contre-valeur en euro à l'instant t du contrat i.
Avec
Contre-valeur de la part en euro à l'instant t du contrat i : $CVPartEuro_{t.i}$
Contre-valeur de la part en UC à l'instant t du contrat i : $CVPartUC_{t.i}$

$$CV_{t.i} = CVPart_Euro_{t.i} + CVPart_UC_{t.i} - Frais_{t.i}$$

En posant :
Le taux de frais à l'instant t : f_t
Le taux de rémunération du fonds euro : i_t
Le nombre de d'unités de compte k : n_k
La valeur de l'unité de compte k a l'instant t : UC_k
Le revenu de l'année t de l'unité de compte k : Rev_UC_k

$$CVpart_euro_{t.i} = Encours_euro_{t0} \times (1 - f_t)^t \times (1 + i)^t$$

$$CVPart_UC_{t.i} = \sum_{k=1}^{K} UC_k \times n_k + \sum_{t=0}^{t} \sum_{k=1}^{K} Rev_UC_k \times n_k$$

La garantie toutes causes GTC n'est activable que si :

$$CV_{t.i} - Encours_Total_{T0} < 0$$

La garantie grands évènements de la vie GEV n'est activable que si :

$$(CV_{t.i} - Encours_Total_{T0}) \times \mathbb{1}_{GEV} < 0$$

Nous posons : $\mathbb{1}_{GEV}$ l'indicatrice des Grands Évènements de la Vie.
Si l'assureur propose la couverture de n évènements de la vie.

$$\mathbb{1}_{GEV} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{GEV_k}$$

La garantie d'un grand évènement de la vie GEV comme le mariage n'est activable que si :

$$(CV_{t.i} - Encours_Total_{T0}) \times \mathbb{1}_{GEV.k=Mariage} < 0$$

Si la garantie est activable de manière certaine (exemple : Décès) la somme des probabilités en fonction de l'âge y :

$$\sum_{i=0}^{n} x_{k.i} = 1$$

Si la garantie n'est pas activable de manière certaine (exemple : mariage), nous lui affecterons une probabilité de survenance : α_k pour la population en portefeuille.

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{n} x_{k.i} = \alpha_k$$

Au niveau des pondérations y des K évènements chaque année i, sur la base des tables d'expérience de l'assureur nous avons :

$$\sum_{k=0}^{K} y_{k.i} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{K} y_{k.i} \times \sum_{i=0}^{n} y_{k.i} = 1$$

La probabilité pondérée d'activation de la garantie au motif k en année i si la garantie est validée est ainsi :

$$\frac{y_{k.i} \times x_{k.i}}{\sum_{k=0}^{K} y_{k.i} \times x_{k.i}}$$

Chapitre 3

Le coût des garanties sur le portefeuille de base

La méthodologie, utilisée sur la base des 500 000 contrats initiaux, est de tirer aléatoirement des contrats dans le pourcentage déterminé afin d'étudier les impacts des différents paramètres à partir de 3 scénarios.

- dans le scénario central (N°1) les calculs sont effectués sur la répartition euro/UC observée du portefeuille
- dans le scénario 2 on procède à une inversion de la répartition du fonds euro et des UC
- dans le scénario 3, la part d'UC est portée à 90%.

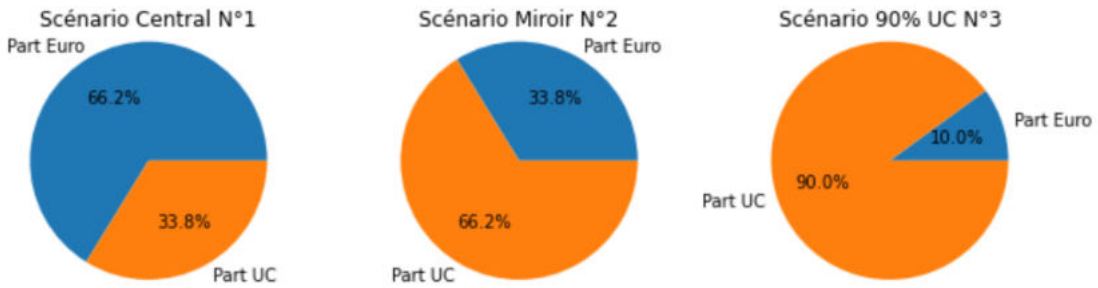


FIGURE 3.1 – Représentation des trois scénarios

3.1 Prise en compte des hypothèses de marché

Les simulations seront effectuées sur :

- l'année 2019 qui n'est pas considérée comme une année de choc financier
- l'année 2020 qui en raison du COVID19 a connu une forte volatilité
- la comparaison permettra d'identifier les conséquences pour l'assureur de proposer la garantie et les éventuelles modulations

3.1.1 Analyse du coût des garanties sur la base du scénario central (N°1) :

L'année 2019 (en Keuros) :

Scenario	Taux de rachat	Coût GTC	Montant de frais sur encours	Coût GEV	En % de frais sur encours
Central N°1	5%	5 184	221 019	3 755	1.7%
Central N°1	8%	8 218	221 019	6 271	1,81%

TABLE 3.1 – Coût des garanties GTC et GEV en 2019

Nous constatons que le coût des garanties est largement supportable pour l'assureur. Si nous le ramenons aux encours sous gestion (Fonds euro et UC) nous avons pour le taux de rachat de 5% un coût de 0,0205% pour la garantie toutes causes et de 0,0148% pour la garantie Grands Évènements de la Vie (GEV)

Pour le taux de rachat de 8% nous avons respectivement un coût de 0,0325% pour la garantie toutes causes et de 0,0248% pour la garantie GEV.

3.1.2 Amplification des hypothèses de marché

Nous allons augmenter progressivement le taux de rachat pour simuler un choc majeur de marché afin de déterminer l'impact envisageable pour l'assureur. Nous utiliserons une modulation de 5% à 25% de taux de rachat.

Remarque : Les bancassureurs ont des taux de collecte observés de 3 à 8% de l'encours par an et des taux de sorties (rachat total, décès...) de l'ordre de 1,5% à 5% y compris lors de la crise financière de 2008. Les taux de collecte ont diminué de 2008 à 2020 sans passer sous les taux de décollecte, sauf quelques rares mois. Les taux de collecte sont depuis 2020 (21,4% en 2020) à nouveau en croissance avec un niveau plus haut les cinq premiers mois de 2022 avec 11,8 milliards d'euros depuis 2011 [4].

Nous obtenons :

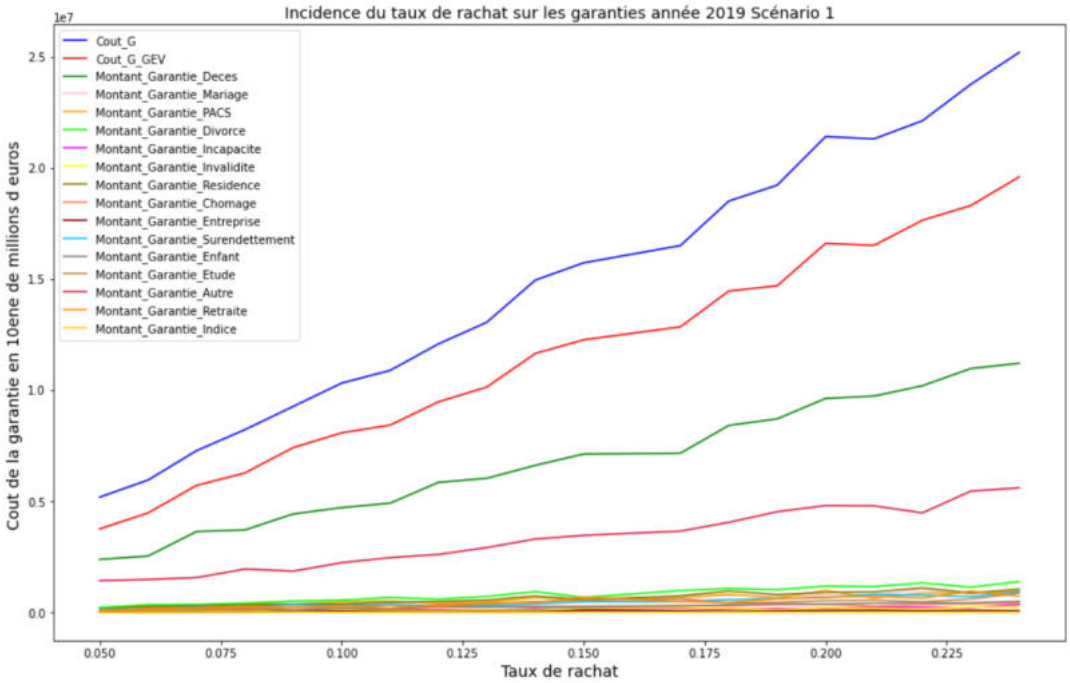


FIGURE 3.2 – Incidence du taux de rachat sur le coût des garanties

Nous constatons que nous avons des courbes relativement linéaires.

Le marché en état de choc : l'année 2020

Nous allons procéder aux calculs des différentes garanties (GEV et GTC) pour l'année 2020 en utilisant le portefeuille créé en 2018. Nous procédons ensuite à un calcul des garanties en nous positionnant au 30 juin 2020 en pleine crise boursière ainsi qu'au 31 décembre 2020. Pour ne pas prendre de risques systémiques et couvrir les effets de panique et de rachat massif de manière temporaire, nous allons étudier l'impact de la désactivation temporaire de la garantie (6 mois à 1 an) en cas de baisse de plus de 25% du cours du CAC40 au cours des 6 derniers mois. Nous allons utiliser une variable indexée sur l'indice CAC40 créée pour l'occasion.
Le coût en cas de désactivation de la garantie et pour un taux de rachat de 5% est de 6 314 944.09 euros au 30 juin 2020 et de 6 067 843.43 euros au 31 décembre 2020.
Nous obtenons ainsi :

Scénario **(en keuros)**	SC1(central)	SC1(central)	SC1(central)	SC1(central)	SC3(90% UC)
Date Creation Portefeuille	01/01/2018	01/01/2018	01/01/2018	01/01/2018	01/01/2018
Date Debut Simulation	30/06/2020	31/12/2020	30/06/2020	31/12/2020	30/06/2020
Taux Rachat Total	5%	5%	8%	8%	8%
Montant Frais	437 179,49	566 230,27	434 012,27	557 174,77	536 193,56
Cout G	-12 528,30	-12 773,76	-20 581,78	-18 889,61	-70 513,47
Ratio GTC / Frais	-2,87%	-2,26%	-4,74%	-3,39%	-13,15%
Cout GEV	-9 541,37	-9 942,11	-16 175,76	-14 609,62	-54 868,86
Ratio GEV / Frais	-2,18%	-1,76%	-3,73%	-2,62%	10,23%
Montant Garantie Autre	-2 986,93	-2 831,64	-4 406,04	-4 279,99	-5 838,68
Montant Garantie Indice	-6 314,94	-6 067,84	-9 224,38	-8 374,37	-35 359,80
Cout Net GTC	-6 213,36	-6 705,91	-6 951,38	-6 235,25	-19 509,05

TABLE 3.2 – Coût des garanties GTC et GEV en 2020 : année de choc

Nous constatons que le coût de la garantie est acceptable par l'assureur même en cas de choc extrême. Ce coût est d'autant plus faible qu'il est réductible d'environ 50% avec l'hypothèse d'une désactivation temporaire de 6 à 12 mois [1].

Le cas du scénario 3 (détaillé ci-dessus) avec 90% d'UC en pleine crise boursière du Covid19 (30/06/2020) montre que le coût de la Garantie Toute Causes (GTC) est de 70 millions d'euros, réduit a 54 millions pour la garantie Grands Événements de la Vie (GEV) donc 35 millions désactivables. Soit de 6 à 13% des frais pour des contrats avec une antériorité de moins de 2 ans.

1. Cas de la possibilité de la désactivation temporaire de la garantie (6 mois à 1 an) en cas de baisse de plus de 25% du cours du CAC40 au cours des 6 derniers mois

3.1.3 Évolution du coût dans le temps :

Nous avons intégré de la complexité et modifié l'antériorité par la date de création du portefeuille de façon à observer le portefeuille sur 9 ans. Nous constatons que le coût de la garantie GTC diminue dès la 2eme année, pour être quasiment nul la 3eme année. Pour la quatrième année d'antériorité (année de souscription 2015) si la garantie GTC est activée en 2019 , le coût représente :
- 3 617 500.19 euros pour 5% de taux de rachat soit 0.2416% des frais de gestion (1 496 888 593.42 euros représentant le cumul des frais de ces contrats de 2015 à 2019). L'encours total qui a été revalorisé atteint lui 30 629 843 697.01 euros pour les contrats actifs et 1 507 843 972.90 pour les contrats clos.
- 1 062 663.92 euros pour 8% de taux de rachat et des frais de gestion de 1 128 909 344.79 euros représentant le cumul des frais de ces contrats de 2015 à 2019. Cette quatrième année d'antériorité représente une augmentation du coût de la garantie en raison de la situation du marché en 2015.

L'augmentation de l'antériorité entraîne dès la 5eme année un coût de la garantie toutes causes GTC nul dans des conditions normales de marché (taux de rachat total 5% à 8%).

Le coût de la GTC augmente légèrement à plus de 10% de rachat total sans dépasser 2 millions d'euros par an pour des frais de gestion cumulés pour ces contrats à plus d'un milliard d'euros.

La représentation en trois dimensions des modélisations avec valeurs historiques (Valeur de marchés et revenus des OPCVM) montre clairement que le risque est contenu pour l'assureur dans le cadre de la répartition entre le fonds euro et UC du scénario central N°1.

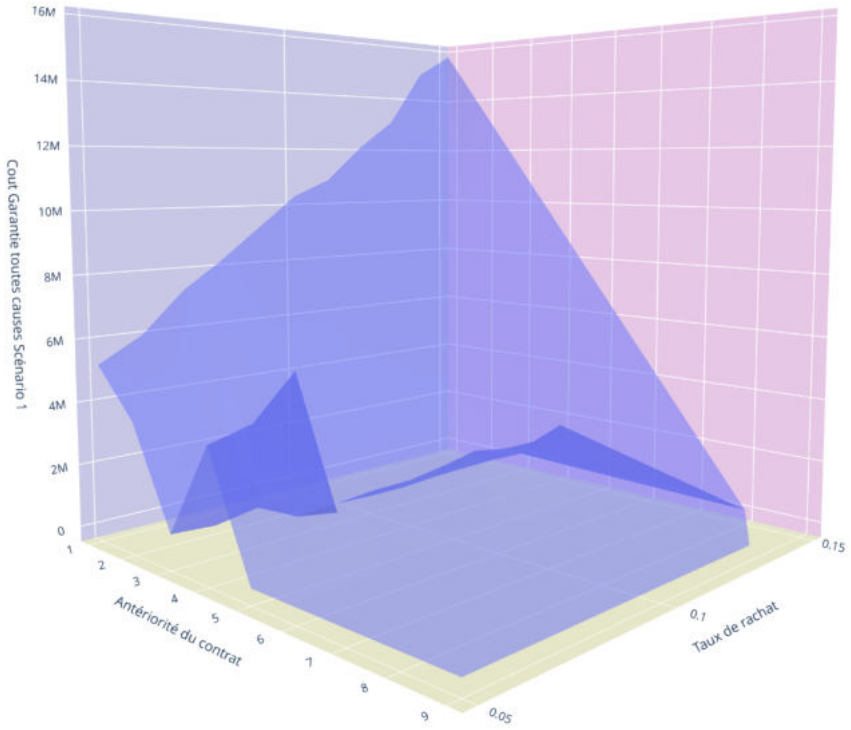


FIGURE 3.3 – Incidence du taux de rachat sur le coût de la garantie toute causes

D'un point de vue statistique nous obtenons :

Que pour un encours de 25 324 421 942,95 euros, nous avons sur des scénarios avec un taux de rachat de 5 à 25% un coût moyen de la garantie toute causes de 14 millions d'euros pour des frais cumulés moyens de 317 millions d'euros

Le coût de la garantie GTC est cependant largement majoré car il inclut des taux de rachat jusqu'à à 25% alors que nous constatons environ 5% de rachat moyen par an. La garantie GEV est en moyenne de 11,5 millions d'euros.

Cependant, même en prenant ces scénarios extrêmes nous constatons que nous sommes très largement en dessous des frais moyens de 317 millions d'euros. **Nous avons donc des ratios moyens majorés de l'ordre de 4,67% des frais en garantie GTC et de 3,63% en garantie GEV.**

Scenario (millions d'euros)	N°1 et année de création 2018
Encours T0	25,324
Cout GTC Mean	-14,832
Cout GTC Median	-15,336
Cout GTC Max	-5,184
Cout GTC Min	-25,194
Cout GTC Ecart Type	6,125
Cout GEV Mean	-11,527
Cout GEV Median	-11,954
Cout GEV Max	-3,755
Cout GEV Min	-19,593
Cout GEV Ecart Type	4,7930
Montant Frais Mean	317,725
Montant Frais Median	332,628
Montant Frais Max	345,667
Montant Frais Min	220,818
Montant Frais Ecart Type	42,199

TABLE 3.3 – Indicateurs clefs des coûts GTC et GEV

Chapitre 4

Le coût des garanties plancher sur la base du portefeuille déformé

Nous reprenons les 3 scénarios de base au niveau de la répartition entre le fonds euro et les unités de compte.

Le scénario N°1 correspond à au portefeuille de base avec la répartition entre fonds euro et unités de compte de production. Par exemple pour le quantile N°2 des femmes à 76%, 76% des encours sont placés en fonds euro et 24% en UC.

Le scénario N°2 correspond à l'inversion des proportions du scénario N°1 entre fonds euro et UC.

Le scénario central N°3 correspond à un scénario d'investissement massif en unités de compte 90% avec 10% de monétaire afin d'étudier la viabilité en mode réel.

Quantile	Clef	Encours moyen	Scénario 1 (Part du fonds Euro)	Scénario 2 (Part du fonds Euro)	Scénario 3 (Part du fonds Euro)
1	Demoiselle Quantile 1	145	76%	24%	10%
2	DQ2	1 000	55%	45%	10%
3	DQ3	5 000	75%	25%	10%
4	DQ4	67 000	76%	24%	10%
1	Femme Quantile 1	1 000	75%	25%	10%
2	FQ2	8 000	76%	24%	10%
3	FQ3	30 000	79%	21%	10%
4	FQ4	153 000	79%	21%	10%
1	Homme Quantile 1	300	71%	29%	10%
2	HQ2	3 000	72%	28%	10%
3	HQ3	16 000	72%	28%	10%
4	HQ4	132 000	73%	27%	10%

TABLE 4.1 – Répartition des encours à la maille catégorie x quartile par scénario

Nous obtenons sur la base de scénarios positionnant la date de création des contrats au 1er janvier 2010 (au lieu du 1er janvier 2018) les résultats ci-dessous. Nous maintenons la date de calcul au 31 décembre 2019, tout en modifiant également les taux de rachat de 5 à 15% les données ci-dessous :

Scenario (en keuros)	1	2	3
Encours T0	25 324 421,94	25 324 421,94	25 324 421,94
Cout GTC Moyenne	-3 30 77,46	-5 261,10	-3 172,64
Cout GTC Médiane	-99 266,08	-64 135,56	0,00
Cout GTC Max	0	0	0
Cout GTC Min	-25 194 5,52	-52 483,99	-20 103, 90
Cout GTC Ecart Type	6 259 552,69	11 313 064,32	4 845 460,27
Cout GEV Moyenne	-2 573 058,19	-4 043 927,74	-2 451 921,17
Cout GEV Médian	-71 890,96	-45 384,60	0,00
Cout GEV Max	0	0	0
Cout GEV Min	-19 593,57	-40 619, 81	-15 250,90
Cout GEV Ecart Type	4 870, 05	8 714, 78	3 744, 83
Montant Frais Moyenne	1 506 442,00	2 006 428,04	2 224 927, 66
Montant Frais Médiane	1 507 734, 29	1 710 805, 98	2 387 778, 39
Montant Frais Max	3 387 516, 00	4 861 284, 98	5 109 943, 62
Montant Frais Min	220 818, 29	273 715, 94	220 159, 64
Montant Frais Ecart Type	946 552, 610	1 330 343, 98	1 368 028, 93
Montant Garantie Indice Moyenne	0	0	-122,60
Montant Garantie Indice Médian	0	0	0
Montant Garantie Indice Max	0	0	0
Montant Garantie Indice Min	0	0	-6314,94
Montant Garantie Indice Ecart Type	0	0	867, 06

TABLE 4.2 – Indicateurs clefs par scénario

Nous constatons que le coût moyen de la garantie GTC varie de 3 millions (scénario N°1 et N°3 = 90% d'UC) à 5,2 millions d'euros pour le scénario 2. Le coût de la garantie GTC et donc de la garantie GEV est très souvent nul dès 4 à 5 ans d'antériorité (Variable Cout GTC Max).

Les coûts maximums de la Garantie GTC restent contenus à 40 millions d'euros maximum pour un taux d'UC de 90%.

Si nous rapportons ces soldes aux montant des frais, nous constatons que sur une plage de 10 ans (1er janvier 2010 au 1er janvier 2018, le montant des frais moyens varie de 1,5 milliards à 2,2 milliards, ce qui fait que le ratio du coût de la garantie sur les frais est, sur la base de l'historique, extrêmement faible.
Nous obtenons pour le scénario N°2 :

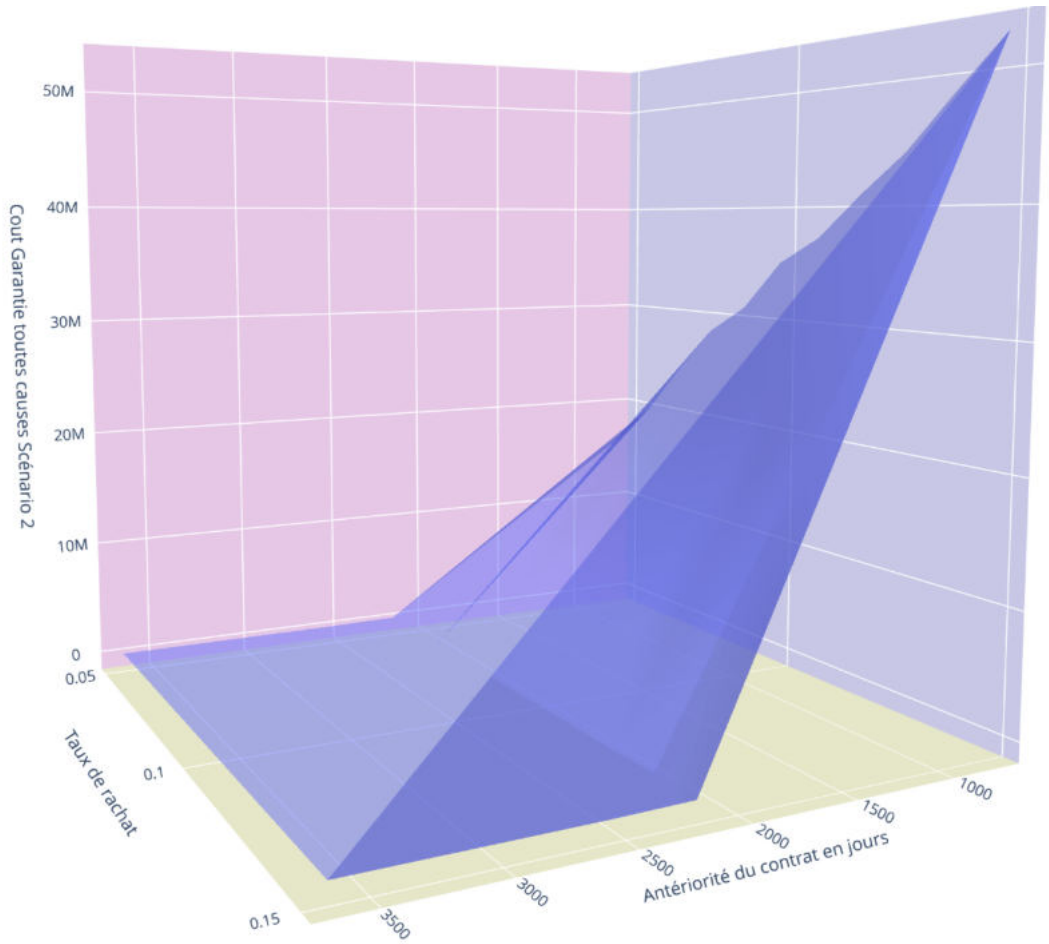


FIGURE 4.1 – Incidence du taux de rachat sur le coût de la garantie toute causes du scénario 2

Nous obtenons pour le scénario N°3 :

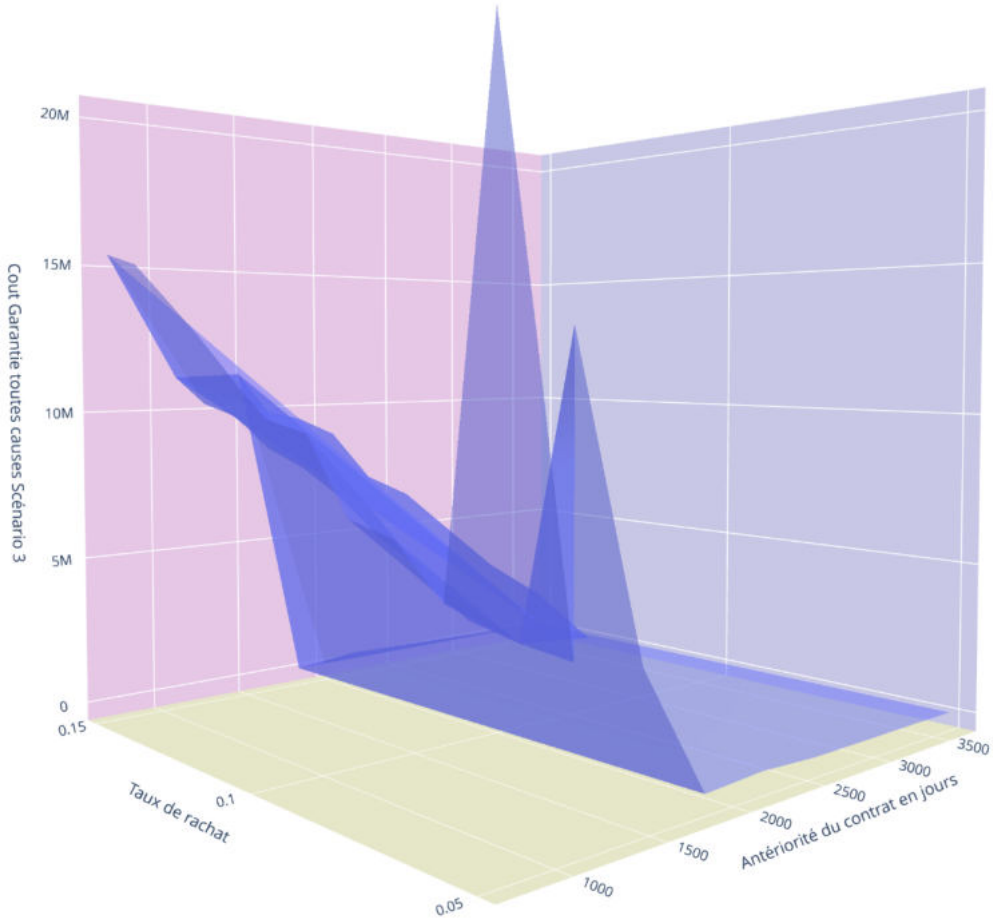


FIGURE 4.2 – Incidence du taux de rachat sur le coût de la garantie toute causes du scénario 3

Chapitre 5

Analyse des garanties à partir d'un générateur de scénarios économiques (GSE)

5.1 Principe du générateur de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques [25] (GSE) ou ESG : *"Economic Scenario Generator"* permet d'analyser l'évolution d'un portefeuille. Il simule des scénarios d'évolutions possibles des actifs et des passifs en fonction de variables économiques et financières, ce qui permet de tester un grand nombre de sources de risques et d'effectuer des *Stress Tests* en utilisant plusieurs modèles, par exemple, un modèle pour les taux, un modèle pour les risques de change...

Les ESG sont utilisés pour la gestion actif-passif (ALM : *Asset and liability management*).

Pour le secteur de l'assurance et des placements, l'objectif est de permettre une évaluation des capitaux requis de la part des assureurs.

Ils sont généralement proposés par des éditeurs. Par exemple, Moody's a un générateur de scénarios économiques qui produit 1000 scénarios sur 40 ans par type d'économie : Exemple la Zone Euro.

Pour chaque catégorie d'actifs, une évolution probable est présentée. Pour chaque simulation, une chronique sur 40 ans est proposée pour les actifs principaux ou les facteurs influant leur valeur comme l'inflation.

Nous trouvons par exemple :

- Les obligations zéros coupon par maturité,
- l'immobilier (REAL ESTATE),
- les fonds euro (actif général) ou UC,
- les fonds d'obligation,
- les fonds diversifiés,
- le livret A
- Les Obligations assimilées au trésor

– ...

La méthodologie d'un ESG est souvent basée sur des centaines de simulations "Monte Carlo". Les différents résultats des variables modélisées constituent les scénarios économiques. Cela permet la généralisation et l'automatisation de l'analyse de scénarios individuels. Dans le cadre de notre étude, nous effectuerons 1000 scénarios sur 40 ans sur le portefeuille de base.

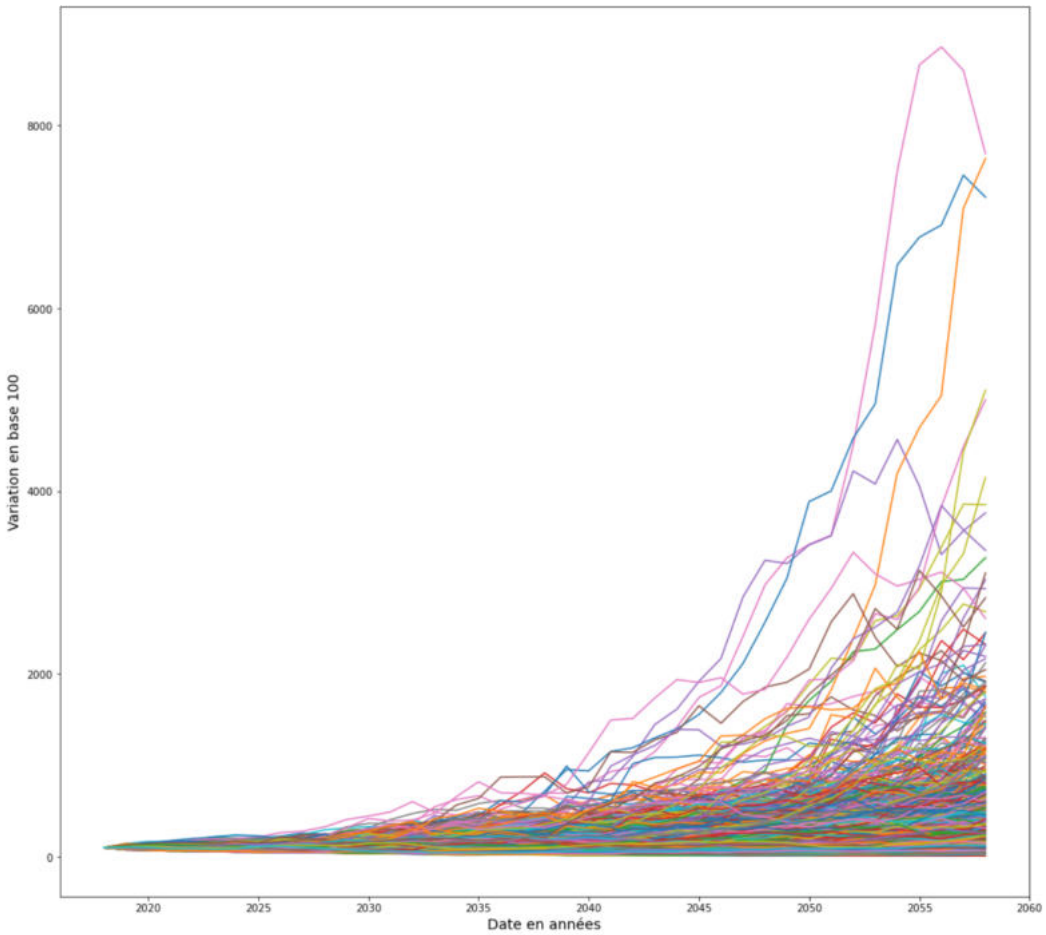


FIGURE 5.1 – Representation des 1000 scénarios sur 40 ans du GSE

Il convient d'avoir une analyse critique des résultats du générateur de scénarios économiques. Par exemple, les taux d'évolution du livret A négatifs même s'ils sont simulés mathématiquement dans le GSE ne sont pas possibles dans la réalité car ils entraineraient des arbitrages. De plus pour les fonds de type UC, actions, obligations, les scénarios font globalement osciller la valeur d'un titre au départ en valeur 100 dans la fourchette entre proche de 0 et 90000% soit entre la faillite et la multiplication par 90 de la catégorie de support. Il existe de titres ayant connu cette évolution (Proche de 0 pour les obligations d'états grecque) et forte augmentation par exemple variation de 43500% pour des

GAFA dont le titre APPLE qui est passé de 0,39 dollar en 2000 à 117 dollars en 2020. Cependant un portefeuille est diversifié par constitution , ce qui contribue à réduire la volatilité. Les scénarios ne prennent pas en compte la qualité des supports d'investissement et l'adéquation Actif / Passif de l'opérateur.

5.2 Coût des garanties sur la base des 1000 scénarios sur 40 ans

Les hypothèses retenues pour les taux de sorties des contrats sont les suivantes [1] :

Période	Taux annuels de sortie de contrats pour chaque année de la période
0-1 an	0,5%
2-10 ans	2%
11-20 ans	4%
21-30 ans	6%
31-40 ans	8%

TABLE 5.1 – Taux de rachat annuels prévisionnels pour chaque année de la période utilisés pour le GSE

Nous présentons à titre d'illustration les graphiques du scénario N°1.
Les graphiques du scénario N°2 et N°3 sont en annexes : [A5].

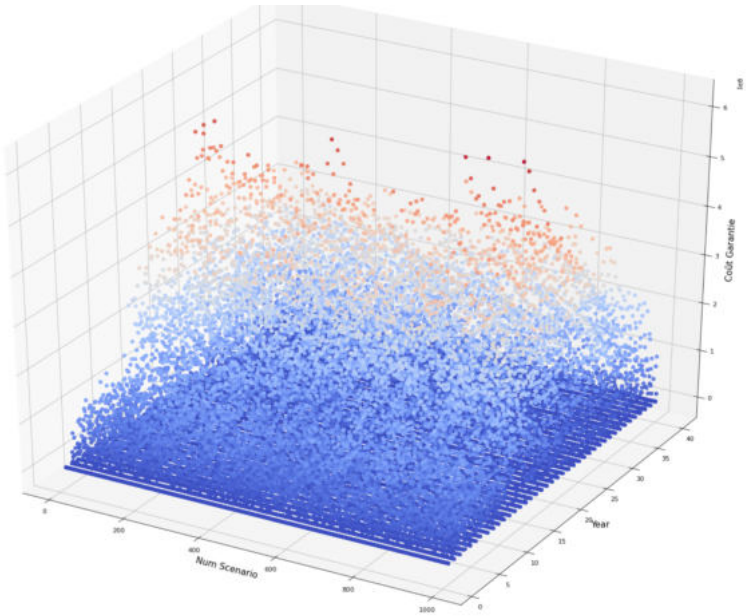


FIGURE 5.2 – Coût de la garantie toutes causes : scénario 1

1. Par exemple en année 3, sur 10 000 contrats à l'initialisation il y a eu 396 sorties

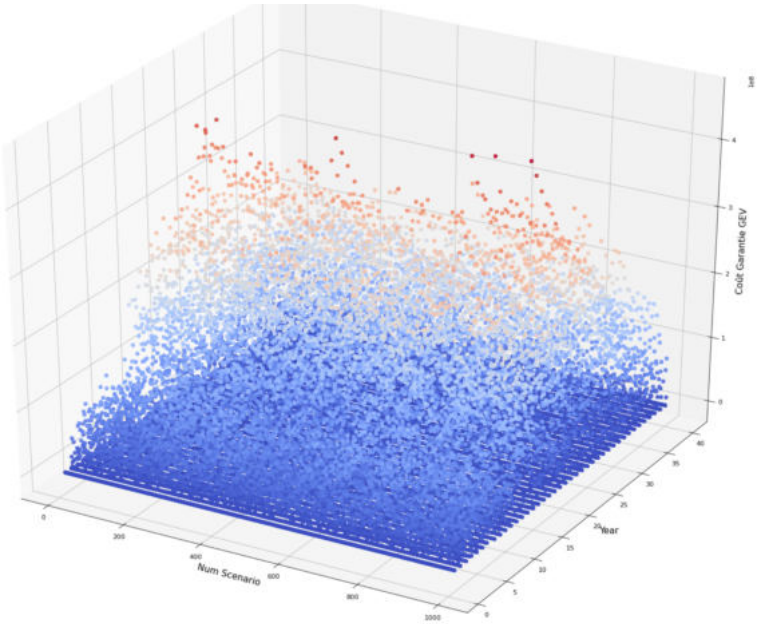


FIGURE 5.3 – Coût de la garantie grands évènements de la vie : scénario 1

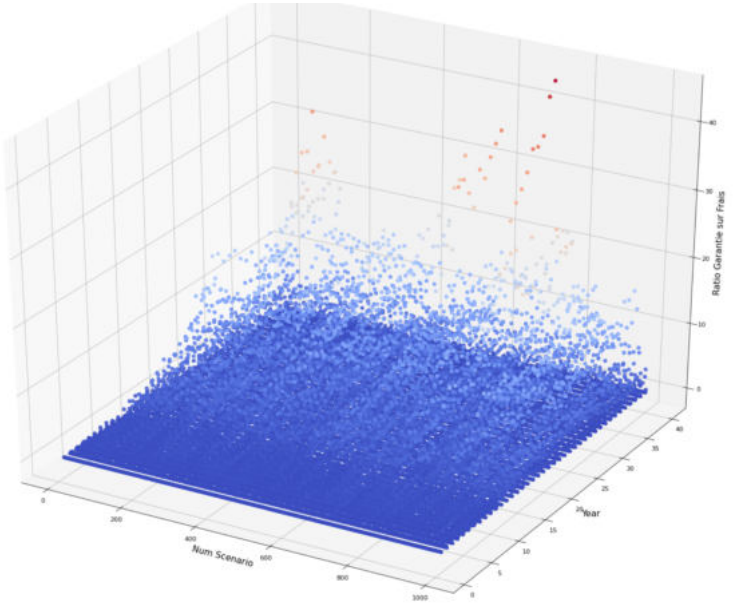


FIGURE 5.4 – Ratio Coût GTC / Frais : scénario 1

Nous constatons que le coût projeté des garanties (GTC et GEV) reste faible les 15 à 20 premières années, tout en sachant que la durée moyenne d'un contrat d'assurance vie est de 12 ans. Le ratio augmente progressivement au fur et à mesure que les chocs

prennent de l'amplitude et que l'assiette des encours diminue par sortie progressive des contrats.

D'un point de vue statistique pour les 1000 scénarios sur 40 années nous obtenons :

Scénarios **(en millions d'euros)**	1	2	3
Moyenne Total Frais GSE	162,5	204,6	212,6
Median Total Frais GSE	156, 0	187,7	193,6
Moyenne Cout GTC	55,5	86,12	91,6
Moyenne Cout GEV	41, 8	64,6	68,7
Median Cout GTC	0,1	3,7	7,7
Median Cout GEV	0,08	2,7	5,8
Max Cout GTC	636,3	738,6	766,2
Max Cout GEV	484,2	560,63	580,2
Moyenne Ratio GTC / Frais	**34,14%**	42,08%	**43,12%**
Mediane Ratio GTC / Frais	0,07%	1,97%	4,00%
Moyenne Ratio GEV / Frais	25,70%	31,55%	32,35%
Mediane Ratio GEV / Frais	0,06%	1,44%	2,99%

TABLE 5.2 – Indicateurs clefs basés sur la méthode du GSE avec 1000 scénarios

Nous constatons que dans les cas de scénarios extrêmes nous avons des
- coûts de la garantie toutes causes (GTC) entre 636 et 766 millions d'euros,
- un coût moyen de 55 à 91 millions d'euros.

En comparaison, les frais moyens sont de l'ordre de 162 à 212 millions d'euros. Le ratio moyen de la garantie GTC sur frais est de l'ordre de **34%** à **43%** en raison des scénarios extrêmes.

Pour les scénarios extrêmes, nous avons un ratio coût des garanties sur frais maximum qui oscille avec un ratio de 40/1 [2] pour le scénario N°1 jusqu'à 80/1 dans le scénario N°3 ou nous avons 90% d'UC.

5.3 Coût des garanties sur la base des scénarios bornés entre -59% et +289% sur 40 ans

Le générateur de scénarios économiques génère des trajectoires possibles pour un support. Cependant, un portefeuille en raison de sa diversification a un encours qui oscille dans une intervalle plus réduit. En nous basant sur le CAC 40 FR0003500008 au 03/01/2000, indice plus volatile qu'un portefeuille diversifié, nous constatons que la baisse maximale a été atteinte le 12/03/2003 avec -59,31% et que la valeur maximale du

2. Répartition euro / UC N°1 - Scénario N°734 - année 39 : valeur de base des UC en année 39 de 30,75664 sur base 100 en année 0 (à l'initialisation) pour la sortie d'actifs avec une moins value nette de frais de 264 141 279,78 euros d'actifs et des frais de gestion sur les actifs résiduels du portefeuille de 6 339 094,86 euros

CAC 40 avec dividendes réinvesti QS0011131834 a eu lieu le 13/08/2021 avec +289,24%. Nous utiliserons ces bornes dans les trajectoires pour modéliser le coût des garanties.

Nous obtenons :

Scénarios **(en millions d'euros)**	1	2	3
Moyenne Total Frais GSE	137,17	171,58	202,83
Median Total Frais GSE	129,53	151,81	179,60
Moyenne Cout GTC	55,08	84,83	102,65
Moyenne Cout GEV	41,46	63,59	77,02
Median Cout GTC	0,08	0,17	33,0
Median Cout GEV	0,08	0,11	24,75
Max Cout GTC	603,4	706,53	706,54
Max Cout GEV	455,77	537,34	536,25
Moyenne Ratio GTC / Frais	40,16%	49,44%	50,61%
Mediane Ratio GTC / Frais	0,07%	0,11%	18,37%
Moyenne Ratio GEV / Frais	30,23%	37,06%	37,97%
Mediane Ratio GEV / Frais	0,06%	0,07%	13,78%

TABLE 5.3 – Indicateurs clefs basés sur la méthode du GSE avec les scénarios bornés dans l'intervalle [-59% - +289%]

Nous constatons que la neutralisation des scénarios extrêmes limitent le coût maximum des garanties et améliorent la médiane mais la moyenne reste très élevée en raison de l'impact à la baisse des -59,31% très pénalisant. Rappelons en effet que pour Solvabilité II, les chocs a la baisse des actions les plus risquées sont de 22% à 39% pour les actions de type 1.

En conclusion la méthode du GSE majore les coûts observés par rapport à la méthode historique pour deux raisons :

- les scénarios extrêmes sont très défavorables pour l'estimation de la moyenne
- l'absence de modélisation d'arbitrage des assurés et des gérants de fonds pour limiter les pertes

Chapitre 6

Modélisation mathématique des garanties planchers

6.1 Modélisation mathématique des garanties planchers pour un mono-support avec prime unique

Soit un assuré A, qui verse une prime P à l'entité d'assurance.
La compagnie prélève des frais d'entrée : f_a.
Le capital investi par l'assureur va correspondre à la valeur : $V_0 = P \times (1 - f_a)$.
Nous considérons, dans un premier temps, que l'assureur investit toute la prime sur un seul support coté S_j avec une quantité n. En conséquence, à l'initialisation le montant investi est : $V_0 = P \times (1 - f_a) = n \times S_{j.t0}$
En fonction du support dans lequel l'assuré aura investi, la valeur de son contrat à l'instant t qui sera noté C_t évoluera. L'entité d'assurance va prélever des frais de gestion : f_g chaque année qui sont proportionnels à l'encours du client Nous considèrerons que les frais de gestion sont prélevés en fin d'année. Soit τ le taux de frais de gestion. Nous obtenons :

$$f_{g.t} = V_t \times \tau_t^t$$

La valeur de l'investissement en t sera donc : $V_t = n \times S_{(j.t)}$
La valeur du contrat en t sera donc : $C_t = n \times S_{j.t} \times ((1 - \tau_t)^t$
La garantie plancher en cas de vie à l'instant t vise à construire une stratégie de couverture délivrant en t la richesse :

$$max(0; V_0 - V_t \times (1 - \tau_t)^t)$$

$$max(0; V_0 - n \times S_{j.t} \times (1 - \tau_t)^t)$$

Nous pouvons retraduire le montant de ce flux positif ou nul, dont la valeur dépend

de l'évolution de l'actif sous-jacent, appelé payoff en :

$$max(0; V_0 - n \times S_{j.t} \times (1-\tau_t)^t = n \times (1-\tau_t)^t \times max(0; \frac{V_0}{n \times (1-\tau_t)^t} - S_{j.t})$$

$$P\left(s_{j.t}\right) = n \times (1-\tau_t)^t \times max(0; \frac{V_0}{n \times (1-\tau_t)^t} - S_{j.t})$$

Notons le payoff $K = \frac{V_0}{(n \times (1-\tau_t)^t}$
Ce payoff, pour l'assureur, est similaire à celui d'une option de vente (put). Le PUT peut être modélisé comme :

- une option Européenne (activable à échéance définie) ou
- une option Américaine (activable à n'importe quel moment pendant la vie du contrat (0-T)).

Notre objectif dans la suite, va être de calculer le coût de la garantie plancher (prime facturable à l'assuré) en contrepartie du payoff correspondant, si on doit prélever dans les provisions dédiées, à la moins-value sur le contrat de l'assuré. Sachant que les frais de gestion vont diminuer le nombre de parts détenus, le prix de l'exercice de l'option va augmenter à chaque échéance.

Notons $PED_{m.t}$ la Probabilité de l'Évènement Déclencheur (PED) de la garantie plancher liée au motif m à l'instant t.
L'engagement de l'assureur est alors :

$$\begin{cases} VAP_{assureur} = \sum_{t=1}^{\infty} PED_{m.t} \times n \times (1-\tau_t)^t \times PUT(K_t, t, S_{j.0}) \\ \sum_{t=1}^{\infty} PED_{m.t} \leq 1 \end{cases}$$

Si nous considérons qu'il existe m motifs de déclenchement de la garantie ayant une proportion $\alpha_{m.t}$ nous avons alors :

$$\begin{cases} VAP_{assureur} = \sum_{m=1}^{m} \sum_{t=1}^{\infty} PED_{m.t} \times n \times \alpha_{m.t} \times (1-\tau_t)^t \times PUT(K_t, t, S_{j.0}) \\ \sum_{t=1}^{\infty} PED_{m.t} \leq 1 \\ \sum_{m=1}^{m} \alpha_{m.t} \leq 1 \end{cases}$$

6.2 Modélisation d'un put Européen

Nous commencerons par modéliser une garantie à date fixe pour un instrument de type action sans dividende. Une garantie à date fixe correspond à une option de vente de type Européenne qui peut être représentée par le modèle de Black & Scholes. [47]
L'actif dans lequel les capitaux sont investis S_j a pour dynamique :
$\frac{dS_{j.t}}{s_{j.t}} = \mu.dt + \sigma dWt$ Avec

- μ = rendement moyen de l'actif,
- σ = volatilité de l'actif

– Wt = mouvement brownien standard

En probabilité risque neutre Q, avec r le taux sans risque de marché, nous avons la correspondance :

$$dW_t = dW_t^Q - \frac{\mu - r}{\sigma} dt$$

Par suite, nous avons :

$$\frac{dS_{j.t}}{S_{j.t}} = \mu.dt + \sigma dW_t^Q$$

$$\frac{dS_{j.t}}{S_{j.t}} = \mu.dt + \sigma \times (dW_t^Q - \frac{\mu - r}{\sigma} dt)$$

$$\frac{dS_{j.t}}{S_{j.t}} = r.dt + \sigma \times dW_t^Q$$

Le modèle de Black & Scholes, pour les options européennes à pour hypothèses :

– l'absence d'opportunité d'arbitrage et de coût de transaction
– l'actif ne verse pas de dividendes et
– l'actif suit un processus log normal : dS=μ.S.dt+ σ.S.dz ou z est un mouvement brownien standard.

Le taux sans risque r est constant au cours du temps quel que soit la maturité. La volatilité σ du sous-jacent est constante dans le temps.

La modélisation du cours de l'actif sous-jacent fait ressortir deux termes :

- Un terme dépendant uniquement du temps représenté par $\mu.dt$ (tendance globale de l'évolution du cours) et

- Un terme aléatoire $\sigma.dz$

Le prix d'un put s'écrit alors :

$$P = K \times e^{-rt} \times N\left(-\frac{ln(\frac{S_0}{K}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \times T\right)}{\sigma \times \sqrt{T}}\right) - S_0 \times N\left(\frac{ln(\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}}\right)$$

$$P = K \times e^{-rt}.N(-x_2) - S_0.N(-x_1)$$

Avec

$$x_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}}$$

$$x_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{K}) - (r + \frac{\sigma^2}{2}) \times T}{\sigma \times \sqrt{T}}$$

N étant une fonction de répartition de la loi normale standard. Le calcul de la valeur du Put peut également être basé sur les arbres binomiaux.

Pour calculer le coût de la garantie plancher, nous devons estimer la valeur future des actifs et soustraire le montant garanti. Les actifs vont ainsi être regroupés par catégories

(actions, obligations...). Chacune va ensuite être modélisée sur la base d'indice de référence dont nous chercherons à identifier la valeur future. Nous pourrons ensuite calculer la valeur des PUTs pour en déduire le coût de la garantie. Notons, que le marché, n'offre pas de cotation d'option de vente (PUTs) à plus d'un an. Pour en connaître le prix,

- soit nous devons demander à une banque qui offre ce type d'option et qui va tarifer un PUT
- soit nous devons calculer le coût de ces PUTs avec la méthodologie utilisée en banque.

Les formules de Black & Scholes sont adaptées pour la tarification des options européennes mais ne le sont pas pour les options américaines. Pour ces dernières, il faut se tourner vers les méthodes de Monte Carlo.

La méthode de "Monte-Carlo" (Nicholas Metropolis & Stanislaw Ulam) est basée sur la loi des grands nombres. Son principe est qu'un grand nombre de tirages aléatoires permet d'avoir une moyenne empirique qui converge vers la moyenne théorique.

6.3 Modélisation d'un put Américain

Pour évaluer le prix des options américaines, il est nécessaire de déterminer quand peut s'effectuer l'exercice de l'option par le détenteur.

En Finance, nous pouvons retenir que l'exercice de l'option est exercée lorsque l'espérance de gain est optimale.

Pour modéliser les options américaines, la méthode de Monte-Carlo doit être adaptée avec des algorithmes de type de Longstaff-Schwartz. [47]

6.3.1 Adaptation des méthodes de Monte-Carlo : présentation de l'algorithme de Longstaff-Schwartz

L'idée de l'algorithme de Longstaff-schwartz est de comparer à chaque instant "t", la valeur intrinsèque de l'option et la valeur qu'elle aurait si on la conservait en portefeuille. La valeur de l'exercice de l'option : Payoff est déterminable aisément par le différentiel (K et S). La valeur de conservation de l'option dans le portefeuille est plus complexe à déterminer car elle est basée sur le tirage de la trajectoire aléatoire ce qui implique que la décision prise le soit en connaissant d'avance la totalité de la trajectoire ce qui surévaluerai la prime. Envisager à chaque instant de faire une évaluation de Monte-Carlo pour le futur est possible, mais implique des recalculs à chaque instant, soit une quantité de calculs nécessaires trop importante pour que la méthode soit retenue.
La méthode de Longstaff-Schwartz, proposée en 2001, suppose une relation polynomiale d'ordre 2 entre le cours du sous-jacent et la valeur de conservation de l'option. Cette méthode suppose une relation fonctionnelle entre S et V (Valeur de conservation de l'option) par exemple avec une relation polynomiale de type :

$$V = a + bS + cS^2$$

L'objectif est alors d'identifier les valeurs a, b et c qui minimisent la somme :

$$\sum_{i=1}^{n}(V_i - a - b \times S_i - c \times S_i^2)^2$$

6.3.2 Modélisation mathématique de l'algorithme de Longstaff-Schwartz.

L'algorithme de Longstaff-Schwartz, pour une options américaine simple (*plain vanilla american option*) sans option exotique (options barrières, options asiatiques, option lookback [1], option digitale ou autre customisation...) s'implémente en quatre étapes. Notons S_t le cours du sous-jacent à un instant t et K le prix d'exercice de l'option.
La **première étape : la génération des scénarios possibles pour le cours du sous-jacent.** Le nombre de scénarios possibles N (= 10000 dans l'exemple précédent) est un des paramètres fondamentaux de l'algorithme. Il permet d'augmenter la précision du calcul de l'option. Le nombre de pas de temps choisi δ_t dont le total est désigné par M (nombre de pas correspondants=251 par an dans l'exemple précédent) détermine le nombre de valeur à générer pour définir le chemin. Plus il est important, plus l'option peut être exercée fréquemment. Un outil de génération aléatoire permet de définir les valeurs des scénarios à chaque pas de temps pour ensuite réaliser les calculs. Cet outil de génération aléatoire donne des valeurs d'une variable suivant une loi normale standard avec les paramètres :

- Un taux sans risque : r
- Une volatilité du sous-jacent : σ, adaptée à la durée de l'option américaine.
- Un processus lognormal comme modèle de génération aléatoire.

Nous en déduisons une relation entre le cours du sous-jacent à l'instant $t + \delta_t$ et en t de type :

$$S_{t+\delta t} = S_t \times e^{r\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t}}$$

Avec ϵ le tirage de la variable aléatoire suivant la loi normale standard.
Les scénarios sont stockés dans une matrice de dimension N x M.

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	...	$j=M$
$i=0$	S_t	$S_{i=0,t+\delta j=1}$	$S_{i=0,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=0,t+\delta j=M}$
$i=1$	S_t	$S_{i=1,t+\delta j=1}$	$S_{i=1,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=1,t+\delta j=M}$
$i=2$	S_t	$S_{i=2,t+\delta j=1}$	$S_{i=2,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=2,t+\delta j=M}$
$i=3$	S_t	$S_{i=3,t+\delta j=1}$	$S_{i=3,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=3,t+\delta j=M}$
$i=4$	S_t	$S_{i=4,t+\delta j=1}$	$S_{i=4,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=4,t+\delta j=M}$
$i=...$	...	...	...	...	...
$i=n$	S_t	$S_{i=n,t+\delta j=1}$	$S_{i=n,t+\delta j=2}$	...	$S_{i=n,t+\delta j=M}$

La **deuxième étape : le calcul de la valeur de l'option au dernier pas de temps** t_M Les valeurs des différents scénarios et pas de temps du sous-jacent de cette matrice vont pouvoir permettre de générer une autre matrice de même dimension (NxM), contenant les valeurs des flux générés par l'option calculée selon la formule :

1. L'option lookback permet d'acheter un sous-jacent sur la base d'un prix d'exercice correspondant au plus bas des cours pendant la Durée de vie de l'option

$$C_{i,j} = Max(0, E - S_{i,j})$$

Ou E est le prix d'exercice, et $S_{i,j}$ le prix du sous-jacent du scénario i au pas de temps j.

La **troisième étape : Les itérations de calculs par boucle descendante du pas de temps M-1 a T0.**

A chaque pas de temps (correspondant au pas de temps j dans la matrice) sont réalisées :

- la détermination des chemins pour lesquels l'option est dans la monnaie (valeur positive de $S_{t,i,j} - K$
- pour chaque chemin i ou la valeur d'exercice de l'option est strictement positive, la valeur du sous-jacent $S_{t,i,M} - K$ est ajouté à un vecteur que nous noterons A.
- pour chaque chemin i du vecteur A on recherche la valeur de conservation de l'option correspondant à la valeur $e^{-r(m-j)\delta t} \times C_{i,m}$ ou m est l'indice tel que m $>$ j et pour lequel $C_{i,m}$ est non nul. Cette valeur est ajoutée dans un vecteur que nous noterons B.
- L'algorithme de Longstaff-Schwartz suppose une relation polynomiale entre le cours du sous-jacent S et la valeur de conservation V de l'option de type :

$$V = a + bS + cS^2$$

Les coefficients a,b et c sont déterminés pour minimiser

$$\sum_{i=1}^{n} (V - a - bS - cS^2)^2$$

Notons que cette relation peut être complexifiée, avec plus de paramètres ou un polynôme de degré supérieur ce qui augmente la complexité de détermination des coefficients et du temps de calcul associé. La fonction de régression obtenue est utilisée pour calculer les valeurs de conservations estimées pour les chemins examinés. On supposer que l'option sera exercée de manière anticipée si la valeur d'exercice de l'option est supérieure à la valeur de conservation estimée à l'étape ci-dessus. La valeur $C_{i,m}$ est actualisée en t0 (initialisation) et la valeur $C_{i,m}$ est placée à la date d'exercice anticipé.

Suite à ces différentes itérations, chaque ligne contient un seul flux strictement positif au maximum pour la matrice C.

La **quatrième étape : Le calcul de la valeur de l'option.**

L'évaluation de la valeur de l'option est réalisée en connaissant tous les flux non nuls de la matrice C et les dates (pas de temps) à laquelle ils surviennent.

La somme de tous ces flux actualisés en t0 (initialisation) divisés par le nombre total de scénarios donne un prix moyen estimée de l'option américaine selon l'algorithme de Longstaff-Schwartz.

Désignons x la probabilité d'un évènement donné (k) avec une probabilité $x_{k.i}$chaque année. Nous supposerons qu'il existe k motifs distincts. Certains de ces motifs sont de

nature à enclencher la garantie plancher (décès, mariage...) et d'autres non (opportunité d'arbitrage...). La durée de vie est comprise entre 0 et n années.

Si la garantie est activable de manière certaine (exemple : Décès), nous avons :

$$\sum_{i=0}^{n} x_{k.i} = 1$$

Si la garantie n'est pas activable de manière certaine (exemple : Mariage), nous lui affecterons une probabilité de survenance : α_k

$$\alpha_k \times \sum_{i=0}^{n} x_{k.i} = \alpha_k$$

Au niveau des pondérations y des k évènements chaque année i, sur la base des tables d'expériences de l'assureur nous avons :

$$\sum_{k=0}^{k} y_{k.i} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{k} y_{k.i} \times \sum_{i=0}^{n} x_{k.i} = 1$$

La probabilité pondérée d'activation de la garantie au motif k en année i si la garantie est validée est ainsi :

$$\frac{y_{k.i} \times x_{k.i}}{\sum_{k=0}^{k} y_{k.i} \times x_{k.i}}$$

Application numérique descriptive de la méthode Longstaff-Schwartz :

Nous prendrons le cas du support FR0010144550 « BNP Paribas Immobilier ISR Classic D » et que nous nous plaçons au 1er jour ouvré de l'année 2018, soit le 2 janvier 2018 son cours est de 329,72 euros (cours du sous-jacent S_0). Au 1er janvier 2018, le taux sans risque est de : 2,25%. Le prix d'exercice de l'option est de 329,72 euros. La volatilité du sous-jacent FR0010144550 est par profondeur historique :

Volatilité historique	10 ans	5 ans	3 ans	2 ans	1 an
FR0010144550	17,40%	11,54%	4,65%	3,71%	3,26%

Table 6.1 – Volatilité du support par antériorité

Application numérique d'un put sur 3 ans de la méthode Longstaff-Schwartz : Nous utiliserons donc la volatilité historique à 3 ans.

Nous négligerons les dividendes, considérés comme une marge de précaution.

Nous nous baserons sur 16 scénarios.

Par simplification des calculs explicatifs nécessaires, l'option ne pourra être exercée qu'à chaque fin d'année.

Scenarios	T0	T1	Gain T1	T2	Gain T2	T3	Gain T3
0	329,72	332,43	0,00	333,15	0,00	327,67	2,05
1	329,72	330,92	0,00	327,59	2,13	331,32	0,00
2	329,72	332,15	0,00	330,42	0,00	333,91	0,00
3	329,72	329,96	0,00	332,61	0,00	328,44	1,28
4	329,72	329,06	0,66	333,88	0,00	326,67	3,05
5	329,72	331,71	0,00	328,93	0,79	325,66	4,06
6	329,72	332,83	0,00	331,83	0,00	333,36	0,00
7	329,72	330,13	0,00	332,21	0,00	328,37	1,35
8	329,72	324,27	5,45	330,26	0,00	333,26	0,00
9	329,72	335,71	0,00	338,08	0,00	327,86	1,86
10	329,72	326,96	2,76	323,68	6,04	328,09	1,63
11	329,72	327,45	2,27	330,16	0,00	328,79	0,93
12	329,72	330,03	0,00	330,72	0,00	328,77	0,95
13	329,72	329,46	0,26	334,13	0,00	328,57	1,15
14	329,72	339,82	0,00	330,07	0,00	332,03	0,00
15	329,72	334,78	0,00	329,64	0,08	321,06	8,66

TABLE 6.2 – Calcul du gain par scénario et période avec la méthode LS

Nous nous plaçons en T2 et nous calculons les valeurs a, b et c qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{n}(V_i - a - bS_i - cS_i^2)^2$$

Soit le minimum de :

$$(2,05 \times e^{2.25} - a - b \times 326,67 - c \times 326,67^2)^2$$
$$+(1,28 \times e^{2.25} - a - b \times 328,44 - c \times 328,44^2)^2$$
$$+(3,05 \times e^{2.25} - a - b \times 326,67 - c \times 326,67^2)^2$$
$$+(4,06 \times e^{2.25} - a - b \times 325,66 - c \times 325,66^2)^2$$
$$+(1,35 \times e^{2.25} - a - b \times 328,37 - c \times 328,37^2)^2$$
$$+(1,86 \times e^{2.25} - a - b \times 327,86 - c \times 327,86^2)^2$$
$$+(1,63 \times e^{2.25} - a - b \times 328,44 - c \times 328,44^2)^2$$
$$+(0,93 \times e^{2.25} - a - b \times 328,79 - c \times 328,79^2)^2$$
$$+(0,95 \times e^{2.25} - a - b \times 328,77 - c \times 328,77^2)^2$$

$$+(1,15 \times e^{2.25} - a - b \times 328,57 - c \times 328,57^2)^2$$
$$+(8,66 \times e^{2.25} - a - b \times 321,06 - c \times 321,06^2)^2$$

Nous obtenons numériquement : a=-508,0610547, b=-4,988 et c=0,020006264. Cela nous permet de recalculer la valeur de conservation en T2.

Scenarios	T3	Valeur intrinsèque	Valeur de Conservation en T2	Exercice anticipé
0	327,67	0,00	0,00	Non
1	331,32	2,13	4,73	Non
2	333,91	0,00	0,00	Non
3	328,44	0,00	0,00	Non
4	326,67	0,00	0,00	Non
5	325,66	0,79	11,02	Non
6	333,36	0,00	0,00	Non
7	328,37	0,00	0,00	Non
8	333,26	0,00	0,00	Non
9	327,86	0,00	0,00	Non
10	328,09	6,04	-31,26	**Oui**
11	328,79	0,00	0,00	Non
12	328,77	0,00	0,00	Non
13	328,57	0,00	0,00	Non
14	332,03	0,00	0,00	Non
15	321,06	0,08	16,78	Non

TABLE 6.3 – Identification des scénarios d'activation de l'option avec la méthode LS

En reproduisant la même démarche en T1, nous constatons que l'option est dans la monnaie pour les scénarios 2,5,10,15. La détermination des variables a,b et c selon la même méthode nous donne :
a=-502,1946235, b=-5,030343784 et c=0,020125689.

Scenarios	T1	Valeur intrinsèque	Valeur de Conservation en T1	Exercice anticipé
0	332,43	0,00	49,61	Non
1	330,92	0,00	37,05	Non
2	332,15	0,00	47,33	Non
3	329,96	0,00	29,15	Non
4	329,06	0,66	21,76	Non
5	331,71	0,00	43,67	Non
6	332,83	0,00	52,96	Non
7	330,13	0,00	30,59	Non
8	324,27	5,45	-17,18	**Oui**
9	335,71	0,00	77,22	Non
10	326,96	2,76	4,62	Non
11	327,45	2,27	8,60	Non
12	330,03	0,00	29,70	Non
13	329,46	0,26	25,02	Non
14	339,82	0,00	112,43	Non
15	334,78	0,00	69,35	Non

TABLE 6.4 – Identification des scénarios favorables d'activation de l'option avec la méthode LS

La valeur de l'option est alors de :

$$\frac{1}{15} \times \times (6.04 \times e^{(-2\times 2{,}25\%)} + 5.45 \times e^{(-2{,}25\%)}) = 0,740213489$$

Notons que dans cette illustration, nous avons posé que l'exercice de l'option n'est exercée qu'a un nombre défini de dates (chaque fin d'année). Cela simplifie les calculs mais sous évalue la valeur de l'option. Il est nécessaire de prévoir au moins une possibilité d'exercice par jour d'ouverture de place boursière. C'est ce que nous ferons sur une simulation de ce titre à 10 ans.

Application numérique d'un put sur 10 ans de la méthode Longstaff-Schwartz :
Dans les mêmes hypothèses que le put de 3 ans, nous supposerons une durée de l'option de 10 ans, nous utiliserons la volatilité historique à 10 ans.

Nous négligerons les dividendes, considérés comme une marge de précaution.

Nous considérerons que nous avons 251 jours de cotation par an soit sur 10 ans 2 510 jours possibles d'activation de l'option.

Nous simulerons donc 10 000 scénarios.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	9990	9991
0	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	329.720000	...	329.720000	329.720000
1	332.425119	330.915218	332.151700	329.959966	329.062243	331.712666	332.825373	330.134268	324.265744	335.705311	...	324.907543	325.232246
2	327.996712	323.208831	328.710524	334.016050	322.999053	337.840329	335.617678	327.229305	327.314906	335.979357	...	323.149802	326.013897
3	322.914733	324.120956	324.374300	328.462329	326.305848	342.279504	335.629866	322.462336	329.474443	332.854155	...	322.002655	327.462757
4	322.556618	330.439713	324.998947	323.475954	327.571959	345.737253	335.585479	323.026088	334.349959	326.713514	...	316.381479	325.065157
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2505	215.500698	744.702037	385.575496	1169.647392	554.946041	263.070245	102.054524	353.003016	210.656205	316.456937	...	203.305719	312.128969
2506	214.321067	740.400226	387.185569	1159.316976	557.805265	260.742605	102.148567	354.119134	210.779406	312.128159	...	205.653764	315.570110
2507	214.778310	735.125223	379.392378	1154.561130	571.171402	262.626991	101.624140	354.039155	210.144936	315.062447	...	204.632963	316.503515
2508	211.394782	723.309746	383.574351	1148.720788	558.084195	260.347628	100.691338	360.551112	209.527422	313.125347	...	202.700419	314.527195
2509	210.039503	710.028537	377.038908	1140.191773	554.379848	260.344072	100.796478	358.887989	213.034392	309.806414	...	204.497566	311.693270

FIGURE 6.1 – Extrait des 10 000 scénarios

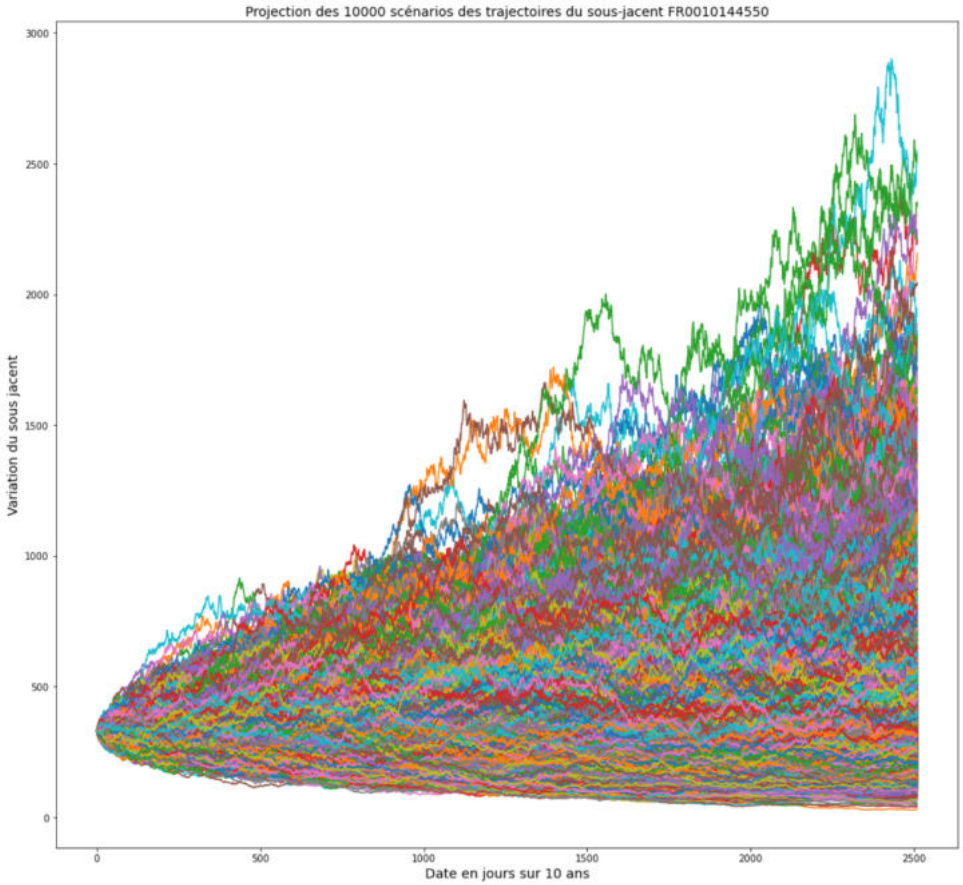


FIGURE 6.2 – Représentation des 10 000 scénarios du FR0010144550

Les simulations sous Python [2] de l'algorithme de Longstaff-Shwartz nous donne une valeur de l'option américaine (Net Present Value) de 44,91 euros. Les simulations de la valeur de l'option Européenne (activable à l'échéance des 10 ans), sur la base du même jeu de donnée, nous donne une valeur de 36,25 euros. Le coût de l'option américaine est plus élevée en raison de l'activation possible à n'importe quel moment. Nous constatons que le coût des options est très élevé. Pour le Put Américain il est de 13,621% du coût du sous-jacent FR0010144550 à la date de simulation. Pour le Put Européen il est de 10,996% du coût du sous-jacent FR0010144550 à la date de simulation.

Analyse des applications numériques de la méthode Longstaff-Schwartz :

Deux démarches de calcul de la couverture de la garantie ont été utilisées. Nous avons étudié la possibilité de convertir l'option américaine visant à garantir un capital à n'importe quel moment sur une période de n années en n options européennes à échéance annuelle garantissant chacune une fraction du capital garantie.

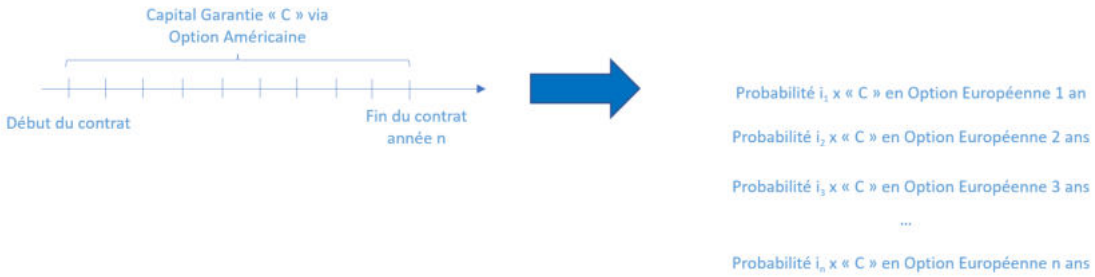


FIGURE 6.3 – Options de modélisation des options (Américaines Vs Européennes)

La première démarche a consisté à utiliser uniquement le put Américain à 10 ans. La seconde démarche a consisté à considérer en application de la loi des grands nombres que nous pouvons substituer une option américaine en 10 options européennes d'échéance d'un à dix ans afin de voir si cela à une incidence ou pas.
Les proportions seront ainsi ventilées. Si nous avons 10 puts Américains à 10 ans, sous réserve de répartition homogène des sorties nous aurions 1 put européen à 1 an, 1 put européen à 2 ans et ainsi de suite jusqu'à 10 ans.
Nous obtenons ainsi les valorisations des puts ci-dessous.

2. package longstaff_schwartz

ISIN	Eur1	Eur2	Eur3	Eur4	Eur5	Eur6	Eur7	Eur8	Eur9	Eur10	US10
FR0010028902	2,30	2,20	2,21	2,14	2,16	2,12	2,08	2,18	2,23	2,19	2,95
FR0010077412	48,26	48,16	48,12	47,49	48,36	47,85	48,60	48,23	48,78	47,70	49,34
FR0010077859	69,76	69,47	69,41	69,18	70,12	69,57	70,76	70,20	70,06	69,60	70,59
FR0010115410	0,43	0,41	0,42	0,40	0,41	0,40	0,40	0,41	0,42	0,41	0,46
FR0010128587	437,15	437,66	438,47	438,85	438,36	438,77	436,54	436,51	436,29	436,59	444,07
FR0010129742	399,47	400,59	401,30	401,73	401,28	401,32	399,58	398,88	398,83	399,06	405,81
FR0010144550	6,60	6,37	6,42	6,17	6,28	6,15	6,12	6,36	6,44	6,30	7,67
FR0010616177	84,58	84,29	84,21	83,93	85,18	84,56	85,83	85,25	84,88	84,54	85,20
FR0010668145	543,07	271,48	268,59	271,38	272,42	272,23	272,49	270,61	270,37	270,70	273,33
FR0012088870	32,63	32,53	32,57	32,02	32,63	32,25	32,76	32,54	32,92	32,14	33,57
LU1303481904	38,65	38,58	38,51	38,09	38,76	38,38	38,97	38,67	39,07	38,26	39,35

TABLE 6.5 – Valorisation du put par support avec la méthode LS

Nous constatons que la différence entre les puts européens et le put américain n'est pas significative. Bien évidement nous constatons que le put américain est supérieur aux puts européens. Le calcul de la couverture dans le cadre des 3 scénarios est envisageable en appliquant la formule :

$$Cout_Couverture = \sum_{i=1}^{n} Q_{UC.i} \times PUT_{UC.i}$$

Avec Q_{UC} la quantité de l'UC et PUT_{UC} la valeur du put américain de l'UC.
Nous obtenons :

	SC1	SC2	SC3
FR0010028902	107 199 671,85	273 311 672,22	0
FR0010077412	372 999 077,81	951 491 774,69	3 062 183 780,58
FR0010077859	419 893 630,13	1 068 293 983,75	4 298 962 651,07
FR0010115410	17 348 796,61	43 538 718,86	165 728 553,91
FR0010128587	693 599 904,16	1 642 295 661,38	0
FR0010129742	191 825 636,44	436 689 041,76	5 700 466 630,11
FR0010144550	308 625,13	687 215,02	8 456 409,05
FR0010616177	0	0	0
FR0010668145	0	0	0
FR0012088870	0	0	0
LU1303481904	0	0	0
Somme	1 803 175 342,13	4 416 308 067,68	13 235 798 024,71

TABLE 6.6 – Valorisation de la couverture par support et par scénario avec la méthode LS

Nous constatons que le coût de la garantie est extrêmement élevé pour le portefeuille initial ayant un encours total à la création de : 25 324 354 906,99 euros.

Analyse critique de la méthode Longstaff-Schwartz en raison des données projetées (mouvement brownien géométrique).
Le paramétrage des mouvements browniens, dans le modèle de projection des sous-jacents est déterminant dans l'estimation du calcul du PUT américain ou européen. Les quatre paramètres en entrée du modèle sont le prix de sous-jacent, le taux sans risque, le nombre de pas et l'écart type.

Le nombre de pas retenu est d'un pas par jour ouvré avec une projection de 1 à 10 ans.

Nous constatons que le nombre de pas n'est pas l'élément déterminant contrairement à l'écart type paramétré qui génère une forte volatilité des estimations de l'option américaine.

Les essais de paramétrage avec les écarts types d'un an (251 pas) à 10 ans (2501 pas : 251 x 10 ans) montrent que le coût de la garantie augmente fortement avec un écart type important. L'écart type est d'autant plus important que sa période de calcul est profonde. Cependant un écart type important est généralement lié à une évolution positive du cours du sous-jacent. Or le paramétrage d'un écart type important est interprété dans les deux sens (croissant et décroissant dans les modèles de projection des mouvement browniens : ce qui nous amène à tester le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

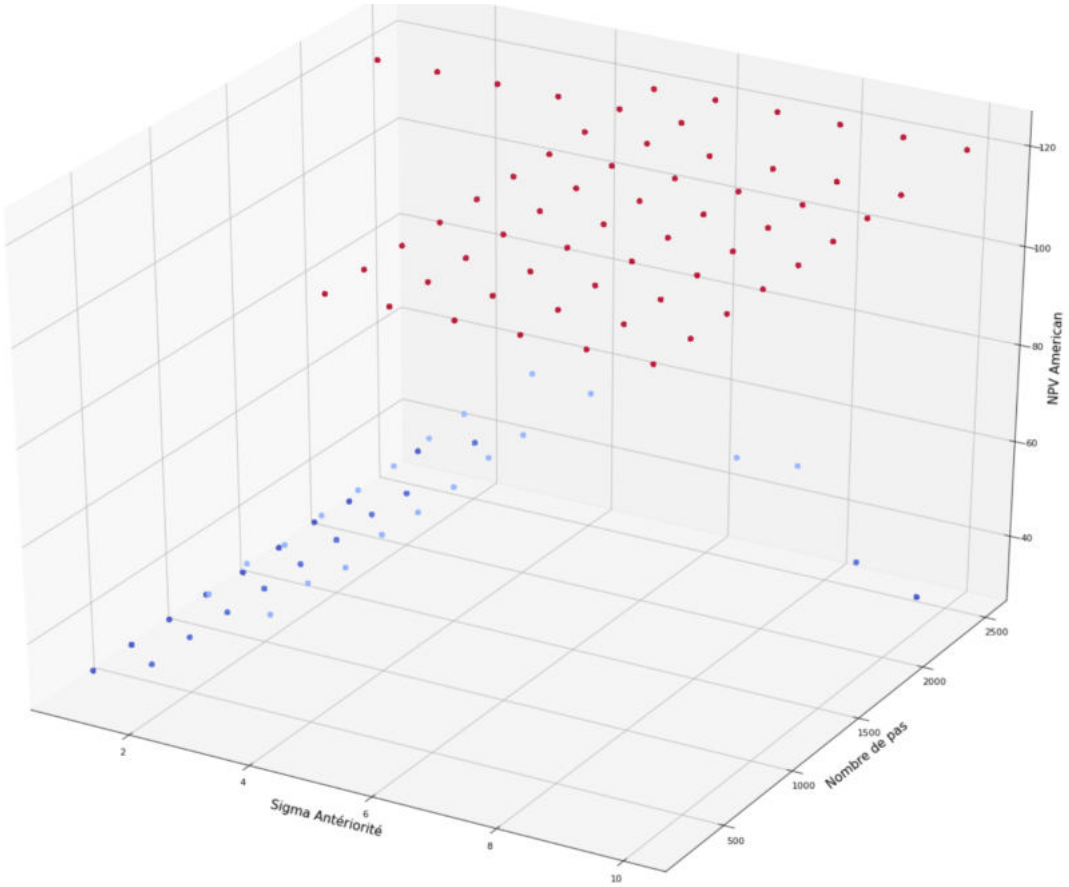


FIGURE 6.4 – Impact du nombre de pas et du sigma sur le support FR0012088870

6.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

6.4.1 Présentation des options avec le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Modèle Binomial de Cox-Ross-Rubinstein :

Le postulat de ce modèle est de retenir l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Nous supposerons notamment que le prix du sous-jacent S, ne puisse prendre à une itération i de T que deux valeurs :
la valeur S_i^u quand elle évolue à la hausse et S_i^d lors d'une évolution à la baisse.

$$S_i = \begin{cases} S_i^d = S_{i-1} \times u \text{ avec une probabilite p} \\ S_i^d = S_{i-1} \times d \text{ avec probabilite : 1-p} \end{cases}$$

Nous pouvons alors définir la valeur $S_{j,i}$ par rapport à la valeur S_0 correspondant au prix de l'actif sous-jacent à la date d'initialisation du contrat : t_0 comme un arbre

binomial dont la valeur à l'issue de i itérations et pour j hausses vaut : $S_0 \times u^j \times d^{i-j}$ avec i variant de 0 à n.

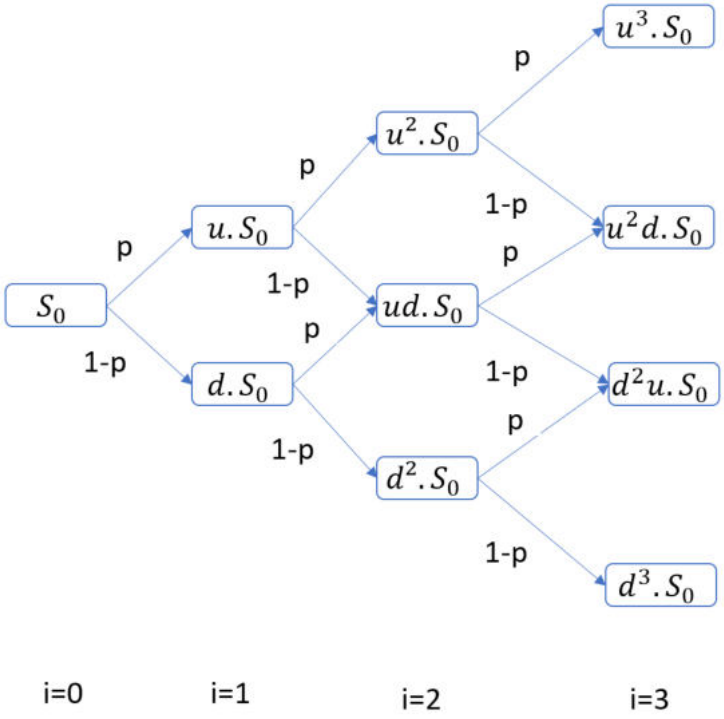


FIGURE 6.5 – Schema Cox Ross Rubinstein sur 3 itérations dans le cadre d'une option européenne

Nous en déduisons que s'il est possible de déterminer les valeurs de S à chaque noeud d'un arbre, il est donc aussi possible de calculer la valeur de l'option V, à chacun de ces noeuds, correspondant à :

$$V_{i,j} = \begin{cases} max(0, S_{j,i} - K); Call \\ max(0, K - S_{j,i}); Put \end{cases}$$

Dans le cadre de notre recherche de couverture pour l'assureur nous prendrons l'exemple d'un put qui vaudra ainsi :

$$P_1 = \begin{cases} P_1^u : max(0, K - S_1^u) \text{ avec une probabilite p} \\ P_1^d : max(0, K - S_1^d) \text{ avec probabilite : 1-p} \end{cases}$$

Il est possible de déterminer la valeur P_1 et la valeur P_0 que nous recherchons. Nous devons inclure comme hypothèse le risque neutre qui se traduit par le fait que l'espérance de rendement de l'actif sous-jacent est égale au taux de rendement d'un actif sans risque r.

r, correspondra aussi au taux d'actualisation.

Nous obtenons ainsi :

$$P_0 = (p \times P_1^u + (1-p) \times P_1^d) \times e^{-r}$$

Par transposition nous pouvons déterminer la valeur de l'option comme :

$$P_{j,i} = (p \times V_{i+1}^u + (1-p) \times V_{i+1}^d) \times e^{-r\Delta t}$$

Ou nous avons avec T la maturité de l'option et n le nombre d'itération :

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

La probabilité de risque neutre en raison du fait que, $e^r = p \times u + (1-p) \times d$, est p avec :

$$p = \frac{e^r - d}{u - d}$$

Dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les valeurs de u et d sont déterminés à partir de la variance $\sigma^2 \times \Delta t$ Nous utilisons alors :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

6.4.2 Spécificité du modèle dans le cadre d'une option américaine (exercice à n'importe quel instant)

Dans le cadre d'une option américaine, l'option est exercée au moment optimum entre la date de signature du contrat et la date d'expiration. Toujours dans notre hypothèse de calcul du put, à chaque noeud, il faut comparer :

$$\left(p \times V_{i+1}^u + (1-p) \times V_{i+1}^d\right) \times e^{-r \times \Delta t}$$

Et

$$K - S_0 \times u^j \times d^{i-j}$$

Nous avons alors :

$$V_{j,i} = max(p \times V_{i+1}^u + (1-p) \times V_{i+1}^d) \times e^{-r \times \Delta t}; K - S_0 \times u^j \times d^{i-j})$$

Application numérique descriptive du modèle Binomial de Cox-Ross-Rubinstein :
Nous prendrons, le même support que précédemment.

Le support FR0010144550 « BNP Paribas Immobilier ISR Classic D » pour lequel nous nous lançons au 1er jour ouvré de l'année 2018, soit le 2 janvier 2018 son cours est de 329,72 euros (cours du sous-jacent).

Au 1er janvier 2018, le taux sans risque est de : 2,25%, le prix d'exercice de l'option est de 329,72 euros.

La volatilité du sous-jacent FR0010144550 est par profondeur historique :

Volatilité historique	10 ans	5 ans	3 ans	2 ans	1 an
FR0010144550	17,40%	11,54%	4,65%	3,71%	3,26%

Table 6.7 – Volatilité historique du support par période

Le modèle développé sous Python nous donne :
- put américain sur 10 ans (2150 itérations) : 45,49 euros versus 44,91 euros avec l'algorithme de Longstaff-Schwartz
- put européen sur 10 ans (2150 itérations) : 36,19 euros versus 36,25 euros avec l'algorithme de Longstaff-Schwartz

Les deux méthodes donnent des résultats comparables.
Cependant, le coût reste élevé par rapport au support :

S : FR0010144550	329,72	Option / S
LS Put Américain 10 ans	44,91	13,62%
LS Put Européen 10 ans	36,25	10,99%
CRR Put Américain 10 ans	45,91	13,92%
CRR Put Européen 10 ans	36,19	10,98%

Table 6.8 – Comparaison de la valeur du put par méthode

Application numérique au portefeuille du modèle Binomial de Cox-Ross-Rubinstein :
Au niveau des UC, nous obtenons :

ISIN	CRR_American_10
FR0010028902	26,76
FR0010077412	153,90
FR0010077859	141,51
FR0010115410	7,00
FR0010128587	96,02
FR0010129742	83,21
FR0010144550	45,91
FR0010616177	160,50
FR0010668145	31,32
FR0012088870	118,43
LU1303481904	115,66

Table 6.9 – Valorisation du put par support par méthode CRR

Nous constatons que l'utilisation du modèle des arbres binomiaux de Cox Ross Rubinstein, génère des prix de put supérieur au modèle de Longstaff-Schwartz avec certains supports qui convergent au niveau du prix mais d'autres qui sont très différents.

Remarque : La limite de ces modèles mathématiques réside dans le fait que les évolutions de prix sont symétriques, à la hausse et à la baisse. Or plus l'amplitude de la variation des prix est importante, plus l'écart type augmente.

Cependant, ce qui intéresse l'assureur dans notre cas est l'évolution défavorable des prix des sous-jacents qui enclenche la garantie. Une forte volatilité des prix dans un contexte d'expansion monétaire au contraire est de l'intérêt de l'assureur car elle réduit la probabilité de déclenchement de la garantie par effet "cliquet".

Chapitre 7

Conclusion Partie I

Les coûts des différentes garanties proposées dans le monde réel sur le portefeuille initial et les portefeuilles déformés (proportion fonds euro / UC, ancienneté des contrats, taux de rachats...) sont acceptables pour l'assureur et ne représentant qu'un pourcentage circonscrit (5% en moyenne et 13% en cas de choc bicentenaire avec 90% d'UC) des frais de gestion.

Les modélisations sur la base des scénarios du générateur de scénarios économiques donnent des résultats plus dégradés car l'amplitude des chocs, si elle est possible dans le cadre d'un support, ne l'est pas pour un portefeuille diversifié contenant de nombreuses UC, et donc de nombreux supports par transparisation.

Les modèles mathématiques (Longstaff-Schwartz et modèle Binomial de Cox-Ross-Rubinstein) donnent des estimations des garanties qui restent élevées à cause de l'écart type, critère principal de ces méthodes.

Dans un contexte économique d'expansion monétaire les actifs augmentent en valeur ce qui augmente la variance et donc l'écart type, ce qui n'est pas forcément un critère négatif.

Puisque les modèles mathématiques ne prennent pas en compte cette asymétrie de variation, il faudra songer à intégrer des paramètres de type "*skewness*".

La deuxième limite de ces projections est que les modélisations sont faites en environnement "statique".

En réalité, les UC ainsi que les supports constitutifs sont arbitrés dans le temps, par les clients, les gestionnaires de fonds et les émetteurs de fonds ce qui nous amène à travailler en environnement dynamique dans la partie II pour déterminer les modèles les plus intéressants de constitution d'UC sectorielles.

Deuxième partie

Introduction aux unités de compte sectorielles pilotées par l'assureur (dynamique)

Objectif et démarche

Les méthodologies d'investissement sont basées sur plusieurs approches :

- l'approche historique est basée sur la **"valeur"** de l'entreprise, c'est à dire sa valeur intrinsèque définie par analyse financière.
- Le développement des capacités informatiques, a permis de faciliter l'utilisation des méthodes **statistiques** et de définir des méthodes de **machine learning**. L'analyse quantitative a ainsi débuté en 1952 avec Markovitz et Merton, et à été mise en avant en 1988 avec le fonds Renaissance Technologie de J.H Simons qui a connu un rendement brut annuel pendant 30 ans de 66%.
- la dernière famille d'approche est basée sur l'**analyse technique quantitative ou la gestion des évènements** qui peut être à haute fréquence de l'ordre de la seconde.

L'analyse comparative des méthodes, dans le *Journal of Investment Strategies*, ne permet pas de conclure sur la performance supérieure d'une ou plusieurs **familles de méthodes** [7]. En effet le résultat des méthodes est fortement dépendant de l'expertise de ceux qui les utilisent [1], des supports étudiés et du contexte économique. Les études menées par des ingénieurs font état d'une surperformance des méthodes de machine learning [51], sans pour autant converger [8], [36].

Des études ont été réalisées sur le NASDAQ [2][3], la bourse de Taiwan [19] et d'autres places [52], [49]. Elles ont comparé les différentes méthodes de machine learning et ont proposé une classification des méthodes les plus performantes de ces familles, même si nous constatons des divergences.

L'objectif va être de proposer un modèle d'allocation d'actifs robuste pour modéliser les unités de compte sectorielles. La méthode va consister à comparer les familles de méthodes et tester au sein de ses familles, les méthodes de plus en plus complexes afin d'apprécier le gain éventuel (et sa contrepartie) de la complexification. La démarche d'identification de la ou des deux méthodes les plus efficaces dans chaque famille est issue de la littérature [19], [52], [49]. Le choix entre deux modèles aux performances équivalentes est de sélectionner le plus simple en termes de paramètres et de données en entrée.

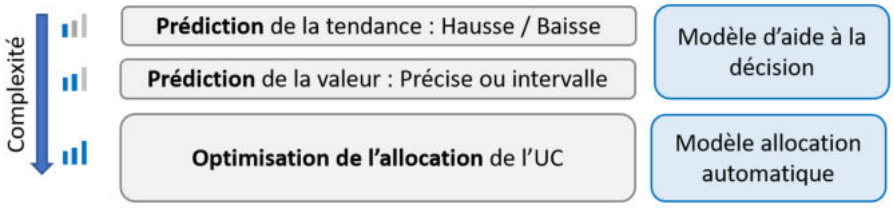


FIGURE 1 – Classement des stratégies par complexité croissante

Dans cette partie II, fonctionnellement, nous étudierons les modélisations basées sur

1. Un analyste financier n'a pas les mêmes compétences et outils qu'un quant et inversement
2. National Association of Securities Dealers Automated Quotations

- la **gestion passive** (indicielle de type "Américaine" et "Française"),
- la **gestion active** (critère de cours, de valeur économique, de ratios économiques...).

Pour cette dernière, plusieurs stratégies différentes en fonction de l'horizon de temps, sur lesquels nous souhaitons identifier le degré de performance, existent :

- les **modèles d'aide à la décision** :
  - analyse financière [28],
  - méthodes statistiques de séries temporelles [20].
  - les modèles de machine learning (régression logistique ("Prophet"- Meta), SVM : Support Vector Machine, Decision Tree, CNN : Convolutional Neuronal Network, LSTM : Long-Short-Term-Memory [42] ...)
- les **modèles d'allocation automatique** :
  - les modèles de nappe [30],
  - les modèles de machine learning (DNN : Deep Neural Network[39], Recurrent neural network, apprentissage par renforcement ...)
  - les modèles quantitatifs de trading.

Nous pourrons conclure sur leurs performances respectives à court et moyen terme afin de modéliser les UC.

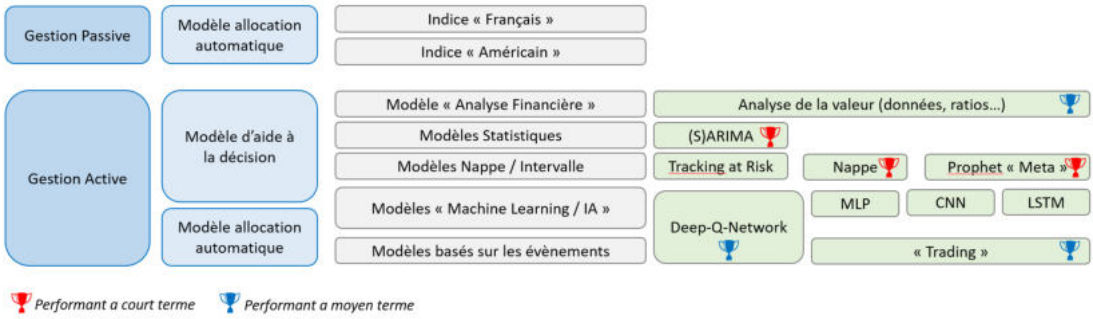


FIGURE 2 – Méthodes utilisées et performances associées

Nous allons introduire des unités de compte ayant pour **objectif principal la rentabilité et la stabilité**.

Le portefeuille de l'actif général ou du fonds euro a, en raison des contraintes réglementaires, une composition assez similaire entre assureurs.

Catégories	Fourchette Basse	Fourchette Haute
Actions	5%	30%
Obligations	20%	65%
OPCVM	10%	40%
UC	5%	35%
Créances	5%	15%
FCPI	0%	5%
Immeubles	5%	15%
Fonds d'investissements	0%	5%
Nantissement	0%	5%
Participations	0%	5%
Produits structurés	0%	5%
Reméré	0%	5%
REPO (pension livrée ou de titres)	0%	5%
Trésorerie	0%	15%

TABLE 1 – Pondération basse et haute de catégorie d'actif pour les assureurs

Deux points sont à prendre en considération dans les modélisations d'UC sectorielles :

- Le risque pour l'assureur de garantir des UC de marché est difficilement maîtrisable en raison de la politique d'investissement à la main des gestionnaires de fonds. Une pondération plus élevée des actifs risqués ou à forte volatilité peut entraîner des pertes plus importantes que celles que l'assureur pourrait avoir en gestion propre dans un fonds euro.
- Le choix des UC par les investisseurs particuliers, lorsqu'une gestion déléguée n'est pas mise en place, est fondamentalement subordonné à la représentation mentale associée.

Chapitre 1

Modélisation des unités de compte sectorielles

L'idée des unités de compte sectorielles est de transformer les boîtes noires que sont actuellement les UC en support ayant une représentation mentale possible à un large public.

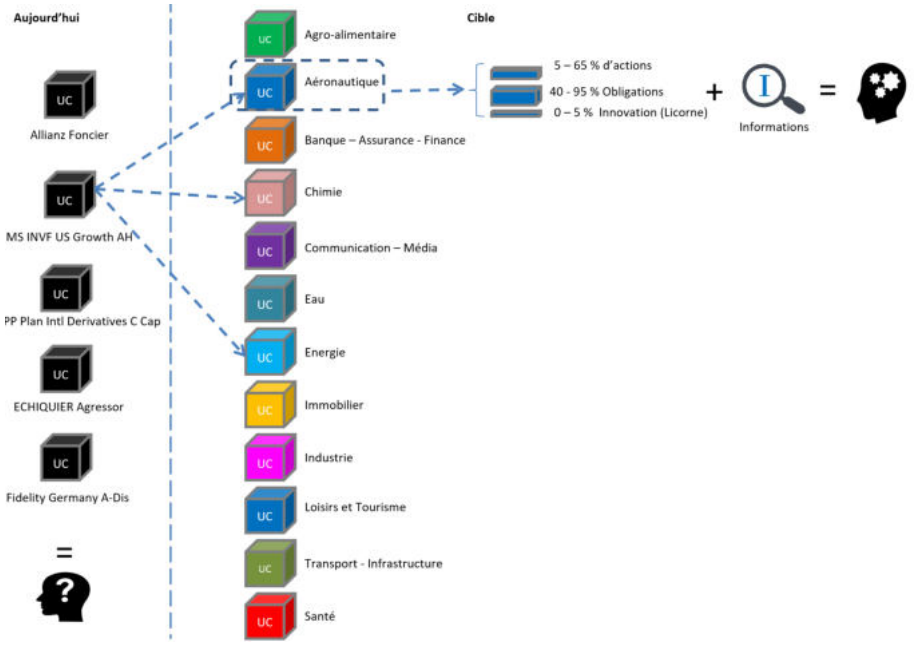


FIGURE 1.1 – Illustration des unités de compte sectorielles

Ces unités de compte seront modélisées selon plusieurs stratégies et outils mathématiques sous-jacents. Par simplification et problématique d'acquisition des données qualitatives, nous limitons les supports aux actions et aux obligations répondant aux critères suivants :

Critères	**action**	**obligation**
Place de marché	Paris	Paris
Type de négociation	Continue	Continue
Maturité	Sans Objet	Toutes
Compartiment	Compartiment A (large capitalisation)	Sans objet

TABLE 1.1 – Critères d'actifs éligibles aux UC

Il est à noter qu'une majorité des actifs des assureurs est localisée sur le territoire national (54%) et sur le continent européen (88%) .

L'identification des secteurs d'activité est basée sur la nature d'activité principale de l'entité émettrice du support. Ainsi :

- le support FR0000131906 RENAULT est assimilé au secteur "automobile", même si le groupe Renault détient des activités autres comme une activité bancaire avec RCI Bank.
- le support FR0000120503 BOUYGUES est assimilé au secteur "construction", même si le groupe BOUYGUES détient BOUYGUES Telecom représentant au T4 2021 5,273 milliards d'euros de contribution sur les 27,517 milliards d'euros de recettes (income) consolidé.

Sur la base des secteurs d'activités, nous travaillerons sur les secteurs communs aux **Obligations** et aux **Actions**. Nous nous concentrons sur 11 secteurs mixtes :

- L'aéronautique,
- L'industrie,
- L'immobilier,
- L'agroalimentaire,
- Le transport,
- L'énergie,
- La Santé,
- L'automobile,
- La finance,
- L'environnement.

L'objectif, après avoir sélectionné les titres par catégorie, est de définir la méthodologie de pondération entre actions et obligations.

Pour les besoins de l'étude nous avons constitué trois bases de données d'actifs [1] :

- Base de données d'apprentissage : $<$ 2016
- Base de données de validation : Année 2017
- Base de données de test : 2 janvier 2018 et supérieur pour évaluer la pertinence des différents modèles que nous allons proposer.

1. La liste des supports étudiés au 2 janvier 2018 ainsi qu'en 2022 sont en annexe.

Début janvier 2018, la tendance de l'économie générale, traduite par l'indice CAC40, est haussière depuis 2012, sans avoir atteint le pic de 2001.

FIGURE 1.2 – Evolution du CAC40 depuis 2001 et des indicateus associés

Pour illustrer les différentes méthodes de sélection des supports nous choisissons le secteur de l'énergie pour plusieurs raisons :

- Il offre l'opportunité d'avoir des indices sur le marché :
  - Cours du pétrole "BRENT" (marché Européen),
  - Cours du pétrole "WTI" *West Texas Intermediate* (marché Américain),
  - Cours du gaz naturel
  - Cours du charbon...
- Il y a eu un **choc à la baisse** avec le Covid 19 : Effondrement de la demande suite à l'arrêt de l'économie mondiale
- Il y a eu un **choc à la hausse** avec la crise Ukrainienne : effondrement de l'offre différents modèles que nous allons proposer.

Les unités de compte seront constituées de trois poches "**action**", "**obligation**" et "**trésorerie**".

1.1 Les actifs de type "actions" :

Pour les actifs de type "**actions**", nous avons les performances suivantes :

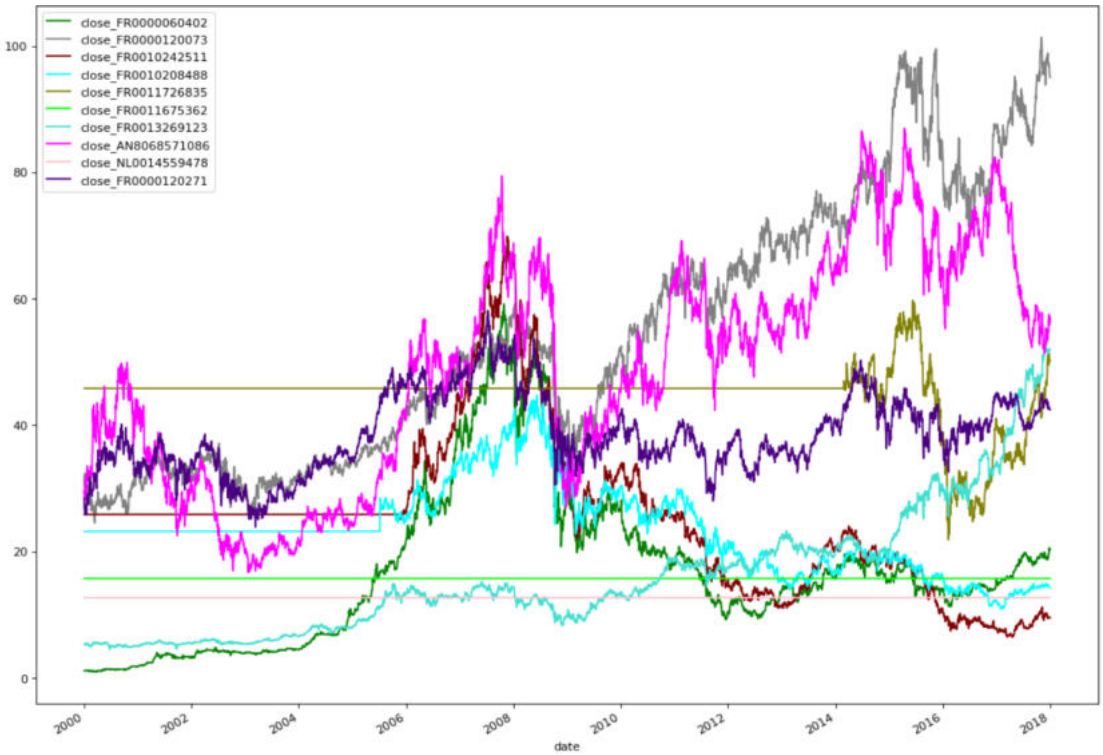


FIGURE 1.3 – Évolution des actions du secteur Energie au 2 janvier 2018

1.2 Les actifs de type "obligations" :

Les obligations standards sont généralement sélectionnées suivant 4 critères.

- le **taux d'intérêt** (fixe ou variable) qui permettra de déterminer le **taux de rendement actuariel : TRA**.
- le **risque de liquidité**
- le **risque de défaut**,
- la **duration**.

Les risques de liquidité et de défaut sont synthétisés dans les notations Standards & Poors, Moody's ou Fitch. Nous retiendrons les notations de S& P disponible via Bloomberg.

Le taux de rendement actuariel pour les obligations à taux fixe est le taux qui annule les flux réels et prévisionnels, c'est-à-dire le taux de rendement prévisionnel qui est différent du taux nominal en raison des prix d'achat et/ou de remboursement différent du prix au pair.

Différentes contraintes doivent également être respectées dans le choix d'obligations :

- Le TRA devra être supérieur au taux de frais gestion net de taxes :

$$TRA_i > Tx_{\text{frais projetés}} \times (1 + Tx_{\text{taxes prélevées}}))$$

- Le score des obligations devra être > BB

Les obligations à maturité infinie seront exclues en raison des problèmes de liquidité plus importants en cas de choc sur les taux ou de choc de liquidité.

1.3 Les actifs de type "trésorerie" :

Pour les actifs de type "trésorerie", considérés comme une poche de sécurité destinée à se protéger des baisses du marché, le taux associé sera de 0% par simplification.

Nous considérerons cette poche comme une poche de sécurité destinée à se protéger des baisses du marché. Par simplification, le taux associé sera de 0%.

Chapitre 2

Modélisation d'UC sectorielles "gestion passive" ou de marché (secteur énergie) :

L'idée ici est de reproduire un indice de marché par secteur d'activité. Nous devons cependant noter quelques points d'attention. Si nous nous basons sur l'indice CAC 40, il est composé d'un titre de chacun des 40 plus grands groupes français sélectionnés par un conseil d'expert et mis à jour trimestriellement. Pour pouvoir intégrer le CAC 40, les entreprises cotées doivent respecter des conditions financières comme :

- la liquidité du titre,
- la capitalisation boursière et
- un échange quotidien important de titres.

Le flottant, représentant la part des titres de la société qui peut être échangée sur le marché est un critère important. En effet, le poids d'une entreprise dans l'indice sera ici proportionnel à son flottant. Or nous constatons que plus la valeur boursière d'un titre est importante plus il va représenter un poids important dans l'indice même si la capitalisation boursière n'est pas aussi importante. Au 6 octobre 2020, le titre Hermès représente 15,29% de l'indice et seulement 5,07% de la capitalisation boursière de l'indice.

Titre	Capitalisation boursière au 06/10/2020 en milliards d'euro	Ratio Capitalisation	Cours du jour euro	Ratio indice
LVMH	207,56	13,31%	411,2	8,4%
L'Oréal	156,15	10,01%	279,2	5,70 %
Hermes International	79,03	5,07%	748,6	15,29%
Orange	24,53	1,57%	9,22	0,19%
Saint-Gobain	20	1,28%	36,72	0,75%
Société Générale	10,37	0,66%	12,55	0,26%
Renault	6,76	0,43%	22,87	0,47%
Cac 40	1559,50		4895,46	

TABLE 2.1 – Comparaison de la pondération de support entre l'indice CAC40 Et la capitalisation boursière

La valeur de l'indice est alors :

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} S_i(t)$$

L'évolution de ce type d'indice entre t-1 et t est :

$$I(t) = I(t-1)\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i(t)}{\alpha_t \times \sum_{i=1}^{n} S_i(t-1)}$$

Avec α étant le facteur d'ajustement éventuel.

Le plus juste serait donc pondérer le nombre de titres par son poids dans la capitalisation boursière globale, mais nous voyons que cela impliquerait des modifications quotidiennes de la composition voir même infra quotidienne. Nous devons cependant garder en mémoire qu'un indice peut être déformé par la présence de quelques titres non représentatifs.

A l'opposé de l'indice CAC 40 qui sur pondère L'Oréal et LVMH, les GAFA [1] représentent 19% de la capitalisation boursière du S&P 500 américain mais seulement 9,87% de l'indice pour la class A. Le S&P 500 a une valeur qui tient compte de la capitalisation boursière des entreprises qui le composent. Au 13 novembre 2020, le S&P 500 est a 3587,21$ avec Les GAFA qui représentaient respectivement :
Google : 656,99$ de cours, pour 190,45 milliards de dollars et 1.437765% (class "A") et 1.454123% (class C) dans l'indice S&P 500.
Apple : 119,26$ de cours, pour 2027,63 milliards de dollars et 3.911126% dans l'indice S&P 500.

1. Google, Apple, Facebook et Amazon

Facebook : 275,71$ de cours, pour 662,8 milliards de dollars et 1.835431% dans l'indice S&P 500.
Amazon : 3128,81$ de cours, pour 1569,88 milliards de dollars et 2.688036% dans l'indice S&P 500.

La valeur de l'indice est alors :

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} x_{it} \times S_i(t)$$

ou

$$x_{it} = \frac{n_{it} \times S_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} n_{jt} \times S_j(t)}$$

L'évolution de ce type d'indice entre t-1 et t est :

$$I(t) = I(t-1)\frac{\sum_{i=1}^{n} n_{is} \times S_i(t)}{\alpha_t \times \sum_{i=1}^{n} n_{is} \times S_i(t-1)}$$

Nous pourrons ainsi déterminer si une gestion passive basée sur cet indice est une stratégie satisfaisante pour modéliser une unité de compte a composition simplifiée ("action" et "obligation"). La performance de ces indices est comparable aux performances des unités de compte. Proposer ce type d'instrument passif aux assurés permettrait à l'assureur d'avoir les avantages des unités de compte sans avoir le cout de la gestion active que les gérants d'UC facturent.

2.1 L'indice "action"

La modélisation des indices de types Français et Anglais nous donne :

FIGURE 2.1 – Indices Français et Anglais "actions"

Nous obtenons ainsi pour l'indice énergie de type Français (1 action par titre) deux modifications de base :
L'entrée du titre NEOEN : FR0011675362 le 22/10/2018
L'entrée du titre TECHNIP ENERGIE : NL0014559478 le 17/02/2021.

Date	Indice Français	Nombre de part Base	Nombre de part porte-feuille	Divi-dendes	Valeur de marché	Renta-bilité	Renta-bilité annuali-sée
02/01/2018	369,11	1,00	270,92				
02/01/2019	356,736	0,96	270,92	2 402,81	94 842,90	-5,16%	-5,16%
02/01/2020	441,401	0,96	270,92	2 653,41	119 435,34	19,44%	9,72%
01/07/2020	391,727	0,96	270,92	1 759,48	108 322,92	8,32%	3,33%
04/01/2021	450,167	0,96	270,92	1 663,60	125 129,93	25,13%	8,38%
01/07/2021	428,879	0,93	270,92	1 361,40	117 766,38	17,77%	5,08%
03/01/2022	446,84	0,93	270,92	1 301,01	123 587,20	23,59%	5,90%
10/03/2022	448,18	0,93	270,92	166,09	124 090,50	24,09%	5,67%

TABLE 2.2 – Performance de l'indice Français du secteur énergie

De manière équivalente, avec un indice de type Américain avec modification des bases pondérées par l'entrée des deux titres précités :

Date	Indice US	Valeur de marché	Rentabilité	Rentabilité annualisée
02/01/2018	40,90	100 000,00		
02/01/2019	42,37	101 483,45	1,48%	1,48%
02/01/2020	49,91	121 752,88	21,75%	10,88%
01/07/2020	42,86	107 027,94	7,03%	2,81%
04/01/2021	45,95	115 920,71	15,92%	5,31%
01/07/2021	48,48	119 931,39	19,93%	5,69%
03/01/2022	52,81	131 056,87	31,06%	7,76%
10/03/2022	50,21	125 319,98	25,32%	5,96%

TABLE 2.3 – Performance de l'indice Américain du secteur énergie

2.2 L'indice "obligation"

Pour la partie "obligations", nous allons poser des contraintes de sélection :

- Aucune obligation perpétuelle incompatible avec les rachats modélisables et de nature à générer un problème de liquidité.
- Aucune obligation ayant un taux de rendement inférieur au taux de frais additionné du taux des garanties biométriques soit : 140 points de base additionné d'une marge de sécurité de 30 points de base soit ayant un taux nominal inférieur a 1,7%
- Aucun titre ayant un rating inférieur à BBB.

Pour le secteur énergie nous composerons ainsi au 01/01/2018 un indice Français composé des titres ci-dessous sur une base initiale de 30 supports :

Name	ISIN	Nominal	Taux nominal	Date d'émission
EDF1.875% 13OCT2036	FR0013213303	100000	1,880%	13/10/2016
EDF2.75%10MAR2023	FR0011318658	100000	2,750%	10/09/2012
EDF4.5%12NOV2040	FR0010961581	50000	4,500%	12/11/2010
ENGIE5.950%MAR2111	FR0011022474	1000	5,95%	16/03/2011
TTECI2.875%NOV25	XS0994991411	100000	2,88%	19/11/2013

Table 2.4 – Obligations sélectionnées du secteur énergie : partie 1/2

ISIN	Date de maturité	Durée de vie	Score	Cotation 01/01/2018	TRA
FR0013213303	13/10/2036	20	BBB	98,84	1,81%
FR0011318658	10/03/2023	11	BBB	111,064	1,70%
FR0010961581	12/11/2040	30	BBB	132,76	2,59%
FR0011022474	16/03/2111	100	BBB+	180,34	4,95%
XS0994991411	19/11/2025	12	A	113,24	2,26%

Table 2.5 – Obligations sélectionnées du secteur énergie : partie 2/2

Nous obtenons ainsi les rentabilités, basés sur les côtes issues de BLOOMBERG, ci-dessous par date.

Date Indice	Obligations French	Coupons N	Rentabilité	Rentabilité annualisée
02/01/2018	391 327,40			
02/01/2019	380 307,01	13 694,50	0,68%	0,68%
02/01/2020	407 620,40	27 389,00	14,66%	7,33%
01/07/2020	403 080,10	31 323,50	21,51%	8,60%
04/01/2021	413 500,30	41 083,50	30,50%	10,17%
01/07/2021	409 813,40	45 018,00	45,23%	12,92%
03/01/2022	399 055,14	54 778,00	56,48%	14,12%
10/03/2022	372 026,90	58 653,00	64,56%	15,19%

Table 2.6 – Performance de la poche obligations du secteur énergie

On peut noter que **contrairement aux actions, les cotations des obligations à taux d'intérêt supérieur au marché sont importantes mais vont converger vers 100 au fur et à mesure du rapprochement de l'échéance.**

Nous allons étudier les principaux modèles mathématiques et les méthodologies relatives à l'analyse des séries temporelles afin de déterminer si nous pouvons prédire le cours d'un support à un instant t avec une probabilité de confiance associée. Nous présenterons essentiellement les résultats numériques de deux titres : FR0000120271 (Total Energie) et FR0000120073 (Air Liquide) pour les illustrations. Les résultats sont en annexe.

Chapitre 3

Sélection des supports sur la base d'indicateurs financiers des entités

Les données financières pour les actions sont par simplification principalement issues de Bloomberg. Nous avons laissé la terminologie des ratios de Bloomberg [1] qui, dans son interface Française, parfois mélange de l'anglais et du Français.
La stratégie d'investissement sur la base des indicateurs financiers et de l'analyse de l'information financière a démontré son efficacité avec le fonds BERKSHIRE HATHAWAY de Warren Buffet qui a eu des performances supérieures aux marchés et qui a su éviter de nombreux kracks en ne privilégiant pas des secteurs spéculatifs comme la bulle internet... En effet les 25 familles qui ont acheté les actions Berkshire à leur introduction pour un total de 50 000$ sont aujourd'hui valorisées 100 millions de dollars [2]. En effet le cours de l'action BERKSHIRE HATHAWAY INC. (BRK.A) US0846701086 est passé de 40$ en 1974 à 504 633.75$ le 26 avril 2022. Notons cependant que la sur-performance du fonds Berkshire, sont liées a des performances exceptionnelles sur des titres sous cotés.

- Coca-Cola suite au krach de 1987
- Washington Post Compagny acheté pour 100 millions de dollars avec un valeur intrinsèque de 450 millions de dollars (cf book-to-market ci-dessous)
- ...

Avant la présentation des données numériques des titres du secteur énergie, nous rappellerons les principaux indicateurs disponibles en analyse financière :

3.1 Les indicateurs de performance

$$PER : \text{Price Earning Ratio} = \frac{\text{Cours}}{\text{Benefice net par action}}$$

1. https ://www.bloomberg.com
2. Warren Buffet : 24 leçons pour gagner en bourse. p39

$$\text{PEG Estimé : Price Earnings to Growth Ratio} = \frac{\frac{\text{Cours}}{\text{Benefice par action}}}{\text{Taux de croissance des bénéfices}}$$

L'EBITDA : *Earnings before interest, taxes, depreciation, and amortization* est en Français le bénéfice avant intérêts, impôts, dépréciation et amortissements (BAIIDA).

EBITDA = CA hors taxes−achats et charges externes−charges de personnel−autres charges

L'EBIT : *Earnings before interest*, taxes en Français le bénéfice avant intérêts, impôts (BAII).

EBIT = CA hors taxes−charges d'exploitation−dotations aux amortissements et provisions

L'OPM : *Other People's Money*, correspond aux fonds empruntés pour augmenter le retour sur investissement du capital.

$$\text{ROA} = \frac{\text{Résultat Net}}{\text{Actif Net}}$$

Le ROA : *Return on Assets* Ratio Résultat sur Actifs permet de déterminer la rentabilité sur une période des actifs investis ayant généré un certain montant de résultat.

$$\text{ROE : Return On Equities} = \frac{\text{Bénéfice net}}{\text{Capital social}}$$

Le ROE *Return on Equities* permet de connaitre la rentabilité générée pour 1 euro de capital social investi par les actionnaires.

$$\text{ROC : Return On Capital} = \frac{\text{Bénéfice net}}{\text{Capital social+Dettes (Emprunts+ Obligations)}}$$

Le ROC permet de connaitre la rentabilité générée pour 1 euro à disposition de l'entreprise (Capital social, emprunts, obligations...).

$$\text{P/CF :Price to cash flow} = \frac{\text{Cours de l'action}}{\text{Cash flow opérationnel par action}}$$

$$\text{Cash flow opérationnel par action} = \frac{\text{cash flow opérationnel}}{\text{nombre d'actions}}$$

Au niveau du P/CF, pour réduire sa volatilité, le cours utilisé est généralement une moyenne à 30 a 60 jours. Le P/CF permet de mesurer l'argent généré par une entité relativement à sa valeur de marché.

$$\text{P / FCF : Price to free cash flow} = \frac{\text{Valeur boursière}}{\text{Cash flow opérationnel}}$$

Le *Free cash flow (FCF)* représente l'argent disponible par la compagnie pour payer les créditeurs, et les dividendes ou intérêts aux investisseurs.

$$\text{CF/RN} = \frac{\text{Cash Flow}}{\text{Résultat Net}}$$

$$\text{CFO/Ventes} = \frac{\text{Cash Flow opérationnel}}{\text{Ventes}}$$

3.2 Les indicateurs de valorisation

$$\text{Book to market} = \frac{\text{Valeur comptable d'une action}}{\text{Valeur boursière d'une action}}$$

Le ratio *Book to Market* correspond au montant comptable des capitaux propres divisé par la capitalisation boursière.

$$\text{Market to Book} = \frac{\text{Capitalisation boursière}}{\text{Valeur comptable des capitaux propres}}$$

Le ratio *Market to book* correspond à la capitalisation boursière divisé par le montant comptable des capitaux propres .

ISIN	FR0000120073	FR0000060402	FR0010208488	FR0010242511	FR0011726835	FR0013269123	AN8068571086	NL0014559478	FR0000120271	FR0011675362
Libellé	AIR LIQUIDE SA	ALBIOMA SA	ENGIE	EDF	GTT	RUBIS	SCHLUMBERGER	TECHNIP ENERGIE	TOTAL ENERGIES	NEOEN
Nombre de titres émis	475 335 508	32 052 000	2 435 285 011	3 238 676 748	37 078 357	102 781 990	1 385 122 304	179 827 459	2 609 763 803	107 056 685
Tendance Long Terme Cours	↗	→	↘	↘	↗	↗	↘	N.A	→	N.A
Bilan	41 980M	1600M	95 502M	280 752M	248,359M	4412M	60096M	7805M	242631M	N.A
Capitaux propres	16317M	492M	37 191M	41 357M	179,441M	2078M	31016M	1800	111556M	N.A
Dont capital	2361M	1,2M	2435M	1464M	0,370M	117M	N.A	N.A	7882M	N.A
Dont réserves et résultat consolidés	9077M	1,4M	1123M	39893M	N.A	N.A	N.A	N.A	N.A	N.A
Notation financière	A	N.A	AA	AA - AAA	N.A	N.1	N.A	BBB	AA	N.A
Cours du jour : 02/01/2018	95,00	20,35	14,23	9,56	50,15	51,92	57	12,7 (17/2/21)	42,45	16,19 (22/10/18)
PER	22,45	18,16			27,34	10,1		4,38	N.A	71,3
BPA	6,27	1,86	1,36	0,01	3,43	2,67	1,96	0,11	7,48	0,52
Ratio dividende / Cours	6,60%	9,14%	9,56%	0,1%	6,85%	5,14%	3,44%		17,62%	3,21%
Ratio Book to market	0,36	0,75	1,0732	1,33	0,09	0,389	0,392	0,789	1,006	9,14
PEG estimé	2,08			4,58		1,05	0,01	2,29	0,02	N.A
Rendement brut	1,97%	1,24%	N.A	N.A	3,31%	6,66%		4,49%	4,96%	N.A
Croissance dividende 5 ans	5,61%	7,01%	N.A	N.A	3,14%	8,27%		N.A	N.A	N.A
Dernier dividende	2,90									
Nombre employés	66 400,00	606	170000	163423	512	3864	92000	14953	105476	127
Capitalisation brute (M€)	69 881,90	1084,3						1803,7		
Valeur Economique actuelle (M€)	82 127,50	2039								
Croissance BPA 1 an	5,60%	5,40%	N.A	526,50%		-11,90%	82,30%	18,30%	N.A	N.A
Croissance capitalisation 1 an	10,30%	N.A	15,70%	8,90%		-5,20%	-0,30%	N.A	-1,20%	N.A
ANPA Croissance 1 an	15,70%	N.A	27,60%	5,30%		-1,20%	23,30%	N.A	8,30%	N.A
Ratio Bénéfice non distribué	46,80%	54,90%	42,60%	63,30%	20%	33,50%	62,80%	100%	50,40%	100%
Croissance ventes 1 an	13,90%	13,10%	30,60%	22,40%		-25,40%	-2,80%	11,90%	54,20%	11,60%
Croissance employés 1 an	3%	N.A	N.A	1,40%		4,70%	7%	N.A	N.A	
Croissance Actifs 1 an	11,40%	N.A	47,10%	18%		-14,20%	-2,20%	N.A	10,30%	
EBITDA	6,2B	201M	10.3B	15,7B	241,1M	578,4M	6,1B	635M	32,3B	251,6M
EBIT	4,0B	120,8M	5,9B	5,2B	236,3M	389,3M	2,8B	513,6M	20,1B	141,7M
OPM	17,20%	23,80%	10,20%	6,20%	59,60%	10%	12,10%	8,90%	12,90%	47,40%
Marge avant impôt	15,40%	16,70%	9,30%	6,60%	59,60%	9,10%	10,40%	6%	14,10%	8,30%
ROA	5,80%	3,10%	1,90%	1,50%	39,10%	7,50%	4,50%	N.A	5,70%	-0,30%

ROE	12,90%	12,60%	11,10%	10,70%	65,20%	15,40%	13,90%	N.A	14,90%	-1,40%
ROC	8,10%	6,20%	5,60%	4,80%	63,70%	10,20%	7,80%	N.A	9,70%	1,30%
Rotation des actifs	0,50%	30,00%	30,00%	30,00%	90,00%	80,00%	50,00%	N.A	70,00%	0,1
P/CF		0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,30	0,00%	-
P/FCF		0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,40	0,00%	-
CF/RN	2,10	2,60	1,70	2,5	0,80	2,00	2,50	3,50	1,90	38,10
Ratio Dividende / Bénéfice	53,20%	45,10%	57,40%	36,70%	80%	66,50%	37,20%	0%	49,60%	-
Cash généré / Cash requis	1,30	1,00	0,80	0,70	0,90	1,30	2,50	23,00	1,50	0,30
Couverture div cash	1,9	2,20	1,70	2,70	1,30	1,50	2,70	N.A	2,00%	N.A
CFO/Ventes	22,90%	28%	10,80%	15%	38,80%	14,40%	20,30%	12,70%	16,50%	
Taux intérêt effectif	1%	3,60%	2,50%	2,40%	3,90%	1,80%	3,30%	1,60%	2,70%	
Ratio liquidité générale	0,9	1,3	1,10	1,1	3,1	2,20	1,20	0,9	1,20	1
Ratio de liquidité réduite	0,6	0,9	0,50	0,5	2,5	1,60	0,80	0,80	0,60	0,8
Dette / Actifs	29,80%	53,70%	18,30%	19%	1,70%	29,10	36,20%	8,20%	22%	69,90%
Dette / Actions ordinaires	65%	212,50%	111,30%	136,70%	2,50%	57,30%	100%	35,70%	57,80%	414,40%
Rotation compte clients	9,5	6,30	2,50	4,6	3,00%	10,7	4,3	N.A	8,40	4,20
EBIT/Charges intérêt totale	30,4	3,8	6,10	3,3	15,00	13,60	5,10	42,10	12,50	1,70
Revenus Année (Full)	21B	428,3M	60,6B	69B	246M	4,8B	32,8B	5,4B	N.A	N.A
Revenus Semestre 1	10,2B	202,3M	30,2B	35,2B	127,2M	2,4B	16,1B	N.A	N.A	N.A
Revenus Semestre 2	10,8B	226M	30,4B	33,8B	118,7M	2,4B	16,7B	N.A	N.A	N.A

En tant qu'investisseur basé sur la méthode d'analyse financière au 02/01/2018,
Nous sélectionnons :

- **Total Energie FR0000120271** car il a un fort taux de distribution de dividendes tout en sachant que le ratio dividende distribué sur bénéfice est de l'ordre de seulement 50%. Ce titre est également stable dans le temps.
- **RUBIS FR0013269123** dans une faible proportion de l'ordre de 5 à 10% , car ce titre présente l'avantage d'avoir un taux de dividende de 5,14% mais à l'inconvénient d'avoir une ratio *Book to market* de 0,39 ce qui signifie que sa valeur boursière est relativement élevé, cependant ce titre est dans une tendance croissante.
- **ENGIE FR0010208488** dans une faible proportion de l'ordre de 5 a 10% le titre car il est dans une tendance décroissante sur le temps, mais a un taux de dividende de 9,56% tout en ayant une croissance des ventes de plus de 30% en un an, un ratio book to market proche de 1, ce qui signifie qu'il n'est pas sous-évalué, et que sa marge avant impôt est de l'ordre de 10%.
- **ALBOMIA FR0000060402** dans une faible proportion de l'ordre de 5 à 10% car ce titre a un taux de dividende de plus de 9%, un ratio book to market de 0,75% ce qui signifie qu'il n'est pas surévalué, sa tendance de cours est stable, il a une marge avant impôt de plus de 16% par contre cette entité est relativement endettée 53,70%.
- **Air liquide FR0000120073** car sa tendance est haussière, son taux de dividende est de plus de 6%, ses ventes sont en croissance, son endettement est faible (29%) mais il faut surveiller son ratio *book to market* qui traduit une valorisation déjà haute.

Nous excluons :

- **EDF FR0010242511** car la distribution des dividendes est en termes de ratio extrêmement faible pour un cours de 14,23 euros ce qui est dans sa moyenne, sachant que ce titre est monté à un cours de plus de 40 euros. De plus, le résultat d'EDF est facilement manipulable en jouant sur le montant des provisions par exemple des sur la durée de vie et donc d'amortissement des centrales nucléaires. Les contraintes européennes de rachats d'électricité avec l'Accès régulé à l'électricité nucléaire historique (ARENH) sont également un point noir sur la rentabilité d'EDF.
- **GTT FR0011726835** car même si sa distribution de bénéfice est de l'ordre de 6,85% son ratio *book to market* traduit une valorisation excessive sur le marché par rapport a son bilan et ses actifs. Ce titre est suspecté comme spéculatif et en cas de retournement ne permettra de pas de récupération sur les actifs.
- **SCHLUMBERGER AN8068571086** qui a un taux de distribution de 3,45% ce qui est faible mais surtout ce titre est dans une tendance de décroissance sur le marché ce qui signifie que la distribution de dividende ne permet pas de compenser la moins-value des actions investies.

En conclusion :
Les ISINs sélectionnés et leurs pondérations associées sur lesquels nous allons appliquer nos modèles sont :

ISIN	Libellé	Achat
FR0000120073	AIR LIQUIDE	30%
FR0000060402	SA ALBIOMA	10%
FR0010208488	SA ENGIE	10%
FR0010242511	EDF	0%
FR0011726835	GTT	0%
FR0013269123	RUBIS	10%
AN8068571086	SCHLUMBERGER	0%
FR0000120271	TOTAL ENERGIES	40%

TABLE 3.1 – Initialisation de la pondération de la poche "action" du secteur énergie

Nous obtenons les performances relatives à la méthodologie d'analyse financière :

ISIN	FR0000120073	FR0000060402	FR0010208488	FR0013269123	FR0000120271	Valeur boursière
Libellé	AIR LIQUIDE	ALBIOMA	ENGIE	RUBIS	TOTAL ENERGIES	
Achat	30%	10%	10%	10%	40%	
02/01/2018 (Parts)	315,79	491,38	702,74	192,57	942,17	
02/01/2019	30 459,47	8 839,86	8 812,37	8 278,80	42 578,73	**98 969,23**
02/01/2020	40 010,53	12 517,32	10 326,77	9 862,50	46 026,15	118 743,27
01/07/2020	40 563,16	17 920,50	7 677,44	7 975,51	32 184,67	106 321,28
04/01/2021	43 089,47	23 262,25	8 998,59	7 065,61	32 585,09	115 001,01
01/07/2021	46 743,16	17 060,59	8 244,55	7 209,84	36 518,67	115 776,81
03/01/2022	48 789,47	17 119,55	9 269,15	5 241,77	42 388,41	122 808,35
10/03/2022	44 829,47	19 016,26	7 780,74	5 087,72	43 057,35	119 771,54

TABLE 3.2 – Valeur boursière de la poche "action" du secteur énergie par analyse financière sans arbitrage

Nous constatons que sur les cinq supports retenus, trois (AIR LIQUIDE, ALBIOMA, et TOTAL ENERGIES) sont croissants sur la période, qu'un (ENGIE) est relativement stable et le dernier est en décroissance (RUBIS). La performance globale au niveau de la valeur boursière est positive chaque année a l'exception d'une légère baisse la première année. L'optimisation passe par des arbitrages que nous verrons dans la suite de la partie N°2.

Date	Valeur boursière	Dividendes	Valeur de marché	Frais estimés	Rentabilité brute	Rentabilité brute annualisée
02/01/2019	98 969,23	1 197,03	100 166,26	1 187,63	0,17%	0,17%
02/01/2020	118 743,27	3 064,36	121 807,92	2 612,55	21,81%	10,90%
01/07/2020	106 321,28	5 516,51	111 837,86	3 888,41	11,84%	4,74%
04/01/2021	115 001,01	7 269,16	122 270,37	5 268,42	22,27%	7,42%
01/07/2021	115 776,81	9 727,87	125 504,89	6 657,74	25,50%	7,29%
03/01/2022	122 808,35	11 514,72	134 323,37	8 131,44	34,32%	6,86%
10/03/2022	119 771,54	12 457,56	132 229,35	9 568,70	32,23%	7,58%

TABLE 3.3 – Performance brute et nette de la poche "action" du secteur énergie par analyse financière sans arbitrage : suite de la table 3.2

Les performances brutes et nettes de frais sont très supérieures aux taux servis par le fonds euro des assureurs sur la période. La baisse de valeur boursière de la première année a été compensée par les dividendes.
Nous allons désormais comparer la méthode d'analyse financière, méthode historique, aux méthodes plus récentes (statistiques et machine learning).

Chapitre 4

Modèles de séries temporelles

Les cours sont volatiles par nature et on exprime souvent l'évolution d'une série temporelle en fonction de son passé. L'approche la plus courante est le modèle statistique d'analyse de séries temporelles financières.
Pour déterminer la finesse de prédiction, nous allons étudier le Modèle ARIMA composé de plusieurs sous modèles : [2]

4.1 modèle AR (*Auto Regressive*)

Un processus $\{y_t\}$ est un processus autorégressif d'ordre p AR(p) s'il obéit à :

$$\begin{cases} y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + z_t \\ z_t \sim BB(0, \sigma_z^2) \\ \phi_p \neq 0 \end{cases}$$

Avec BB, le buit blanc correspondant à une suite de variables aléatoires non corrélées mais pas nécessairement indépendantes de moyenne nulle et de variance constante σ_z^2
Le processus autorégressif d'ordre p admet une représentation $MA(\infty)$ si les racines de l'équation : $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - ... - \phi_p z^p = 0$ sont strictement supérieure à 1 en module.
Dans ce cas,

$$E(y_t) = \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - ... - \phi_p}$$

On peut alors réécrire :

$$y_t = \mu + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p} z_t$$

avec :

$$\Phi(B) y_t = c + z_t$$

ou l'opérateur d'autorégression est :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$

Cette formulation de AR(p) sépare clairement le niveau moyen μ de la série de l'erreur qui obéit à une dynamique autorégressive stationnaire.

4.2 modèle MA (*Moving Average*)

Un processus $\{y_t\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q MA(q) si :

$$\begin{cases} y_t = \mu + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + ... + \theta_q z_{t-q} \\ z_t \sim BB(0, \sigma_z^2) \\ \theta_q \neq 0 \end{cases}$$

Si nous introduisons l'opérateur moyenne mobile :

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$$

alors nous pouvons écrire de manière équivalente :

$$y_t = \mu + \Theta(B) z_t$$

Notons qu'un MA(q) est toujours stationnaire quelles que soient les valeurs des ϕ et qu'il est de moyenne μ.
l'objectif de l'inversibilité du processus est d'exprimer ce processus en fonction de son passé observé et pas seulement en fonction du bruit passé non observé.
Un processus MA(q) est inversible si l'on peut le représenter comme une autorégression infinie c'est à dire si $1 + \theta_1 z + \theta_2 z_2 + ... + \theta_q z_q = 0$

4.3 Le modèle ARMA

Il est possible de combiner les deux mécanismes d'autorégression AR(p) et moyenne mobile MA(q) en ARMA(p,q).

$$\begin{cases} y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + ..\phi_p y_{t-p} + z_t \theta_1 z_{t-1} + ..\theta_q z_{t-q} \\ z_t \sim BB(0, \sigma_z^2) \\ \text{c constante arbitraire, } \phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0 \end{cases}$$

L'opérateur de retard va s'écrire :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) y_t = c + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + ... + \theta_q B^q) z_t$$

y_t est stationnaire si comme dans les cas autorégressifs les racines du polynôme d'autorégression $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - ... - \phi_p z^p = 0$ sont strictement supérieure à 1 en module. Par calcul similaire a l'AR(p) nous obtenons que $\mu = E[y_t)$ vérifie : $(1 - \phi_1 - \phi_2 - ... - \phi_p)\mu = c$.
Par stationnarité : $1 - \phi_1 - \phi_2 - ... - \phi_p \neq 0$ et $\mu = \frac{c}{(1 - \phi_1 - \phi_2 - ... - \phi_p)}$.
Nous pouvons alors écrire :

$$y_t = \mu + \frac{= 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + ... + \theta_q B^q}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p}$$

Il est alors possible d'écrire une représentation du processus $MA(\infty)$ de la série sous forme :

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z_{t-i}, \psi_0 = 1$$

Par ailleurs, y_t ARMA(p,q) est inversible si les racines $\Theta(B)$ sont en module strictement supérieures à 1 et on peut alors écrire une représentation $AR(\infty)$ de la série :

$$y_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i y_{t-i} + z_t$$

Remarque N°1 : Pour la prévision du modèle AR(p), le bruit blanc utilisé est un bruit blanc gaussien $\{z_t\}$ qui est une suite de variables aléatoires i.i.d suivant : $\mathcal{N}(\mu, \sigma_z^2)$

4.4 Le modèle ARIMA

De nombreuses séries temporelles ne comportent pas de stationnarité. C'est le cas des cours d'actifs. Il est possible d'en obtenir une série stationnaire qu'après différenciation, ces séries sont dites stationnaires en différence. Ainsi les modèles ARIMA et SARIMA sont des modèles de séries stationnaires en différence qui comportent un trend stochastique ou une saisonnalité stochastique (et non déterministe). Concrètement les processus ARIMA et SARIMA sont des processus non stationnaires qui après différenciation simple ou saisonnière reviennent à des processus ARMA ou SARMA.
Une série est dite intégrée d'ordre d, notée I(d) s'il faut différencier d fois pour obtenir une série stationnaire. Concrètement, le processus ARIMA(p,q,d) est un processus dont la différence est d'ordre d est un ARMA(p,q).
Ainsi dans les exemples de séries intégrées, similaire à la trajectoire d'un actif,

- nous avons la marche aléatoire : $y_t = y_{t-1} + z_t = y_0 + z_1 + z_2 + ... + z_t$
- nous avons la marche aléatoire avec dérive : $y_t = \delta + y_{t-1} + z_t = \delta \times t + y_0 + z_1 + z_2 + ... + z_t$

En résumé : le modèle ARIMA, basé sur 3 paramètres, (p,d,q), intègre une condition d'hétéroscédasticité de type ARCH ou GARCH. cf annexe [A7] Le modèle ARIMA est utilisé car il permet de convertir la non-stationnarité de la série en série stationnaire en utilisant une séquence de différence de pas. La non-stationnarité étant la conséquence d'une variation de volatilité dans le temps, le but est donc de détecter l'hétéroscédasticité conditionnelle (CH) avec ARCH et GARCH.
Dans les applications des modèles ci-dessous, nous déterminerons les paramètres (p,d,q) donnant le *RMSE*[1] le plus faible pour ensuite les appliquer sur le jeu de test (date > 2018).

1. Root Mean Squared Error

4.5 Le modèle SARIMA : "Seasonal ARIMA model"

Le modèle SARIMA en complément du modèle ARIMA comporte une saisonnalité : $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ Une fois que les paramètres d et D ont été définis nous retombons sur un modèle SARMA sur une série différenciée. Il est d'usage de considérer que D est non nul si le coefficient d'auto-corrélation (ACF) de la série examinée aux décalages s,2s, 3s... ne décroit pas exponentiellement.
L'objectif de la saisonnalité est de limiter la non "blancheur[2]" en la traitant soit en rajoutant des termes de retard dans les polynômes Φ et Θ ou bien en modélisant le résidu b_t par un ARMA dont l'unité de temps est la période de saisonnalité.
Nous avons alors, avec s désignant la saisonnalité, :

$$b_t = \frac{\Theta_s(B^s)}{\Phi_s(B^s)} z_t$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \Phi_s(B^s)\Phi(B)y_t = c_1 + \Theta(B)\Theta_s(B^s)z_t \\ z_t \sim BB(0,\sigma_z^2) \\ c_1 = c\Phi_s(1) \\ \Phi B, \Theta B, \Phi_s(B^s, \Theta_s(B^s) \text{ sont des polynomes d'ordre p, q en B et P, Q en } B^s \end{cases}$$

Les modalités de définition des paramètres (p,d,q)(P,D,Q) à priori (ACF...) et de validation des modèles (AIC...) n'étant pas l'objet de nos recherches, nous renvoyons à la littérature associée [2].
L'application numérique du modèle SARIMA avec identification des paramètres générant le RMSE le plus faible sur les données d'entrainement nous donne :
Pour le titre FR0000120073 (Air Liquide)

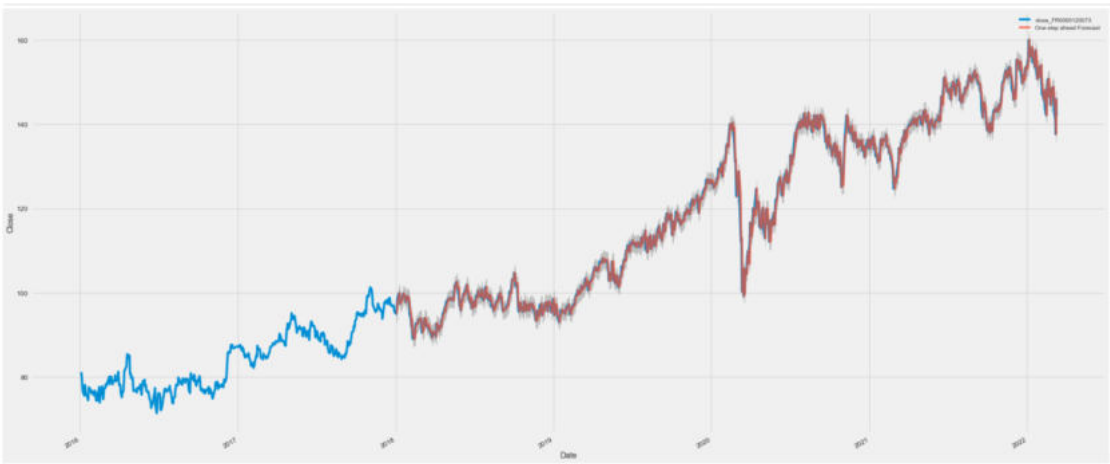


FIGURE 4.1 – ARIMA FR0000120073

2. cf Bruit blanc

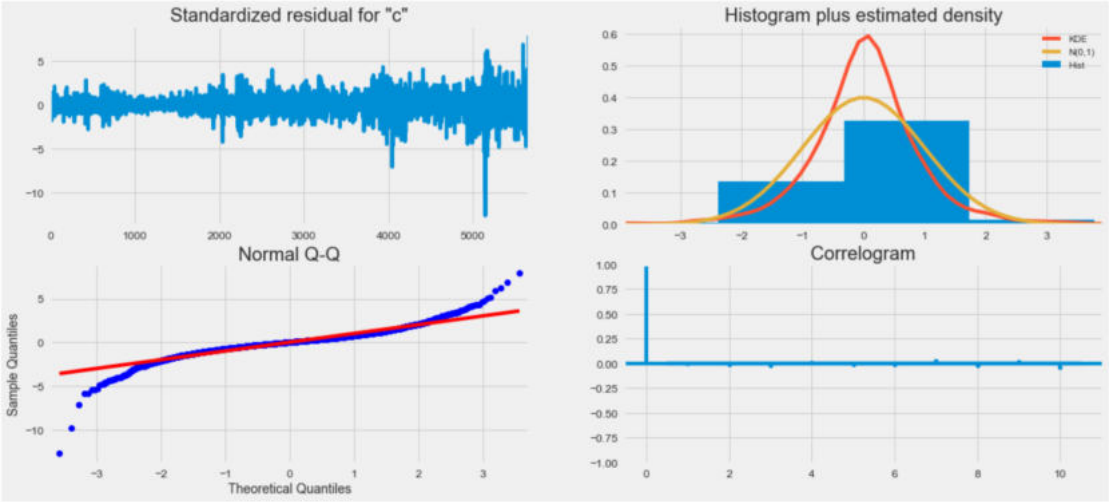


FIGURE 4.2 – ARIMA FR0000120073

Pour le titre FR0000120271 (Total)

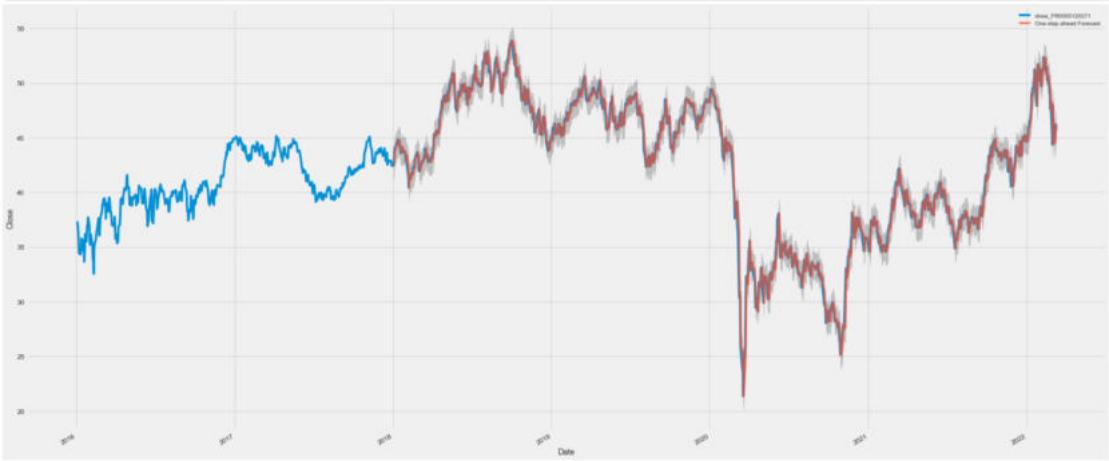


FIGURE 4.3 – ARIMA FR0000120271

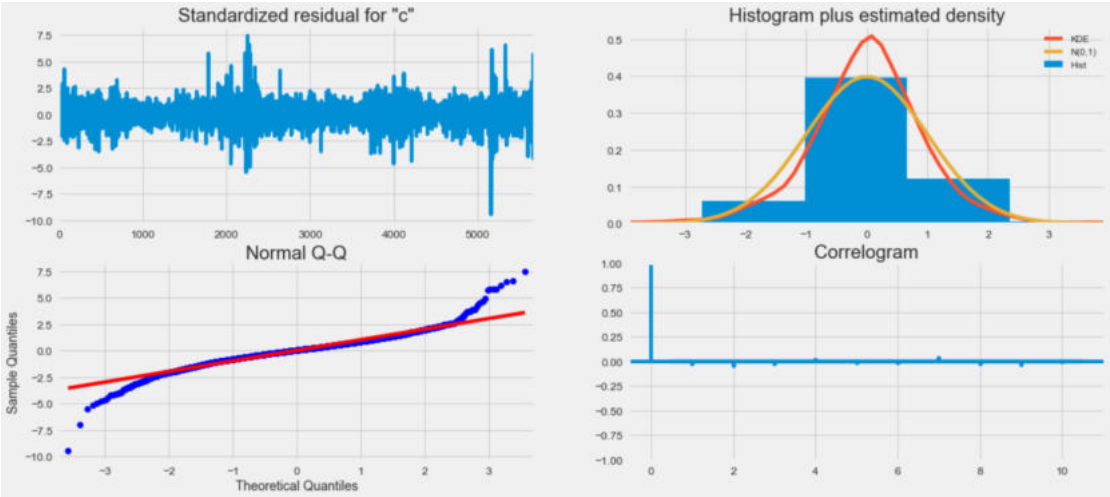


FIGURE 4.4 – ARIMA FR0000120271

Nous constatons que ces modèles sont très bien ajustés au réel, toutefois, nous devons noter que leur intérêt est à nuancer. Ce type de modèle utilise les données précédentes y_{t-1} pour estimer les données suivantes y_t, ce qui limite la prédiction avec un pas de temps plus important. Si nous changeons le pas de temps pour le modèle SARIMA, nous constatons par exemple pour le titre FR0000120073 (Air Liquide) avec un pas de temps à 3 mois les écarts ci-dessous entre prédictif et réel.

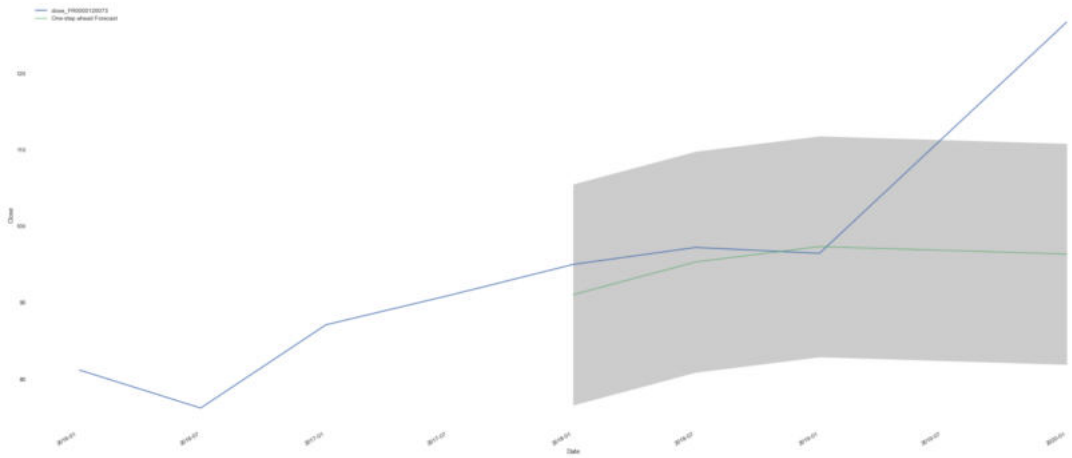


FIGURE 4.5 – ARIMA FR0000120073 à 3 mois

L'assureur ayant des placements à) moyen-long terme, nous devons être en mesure de prédire ou d'ajuster les actifs à un horizon plus long, c'est pour cette raison que nous allons tester les modèles de machine learning pour voir s'ils sont des prédicateurs plus exploitables dans le cadre d'un modèle.

Chapitre 5

Modèle de machine learning (secteur énergie) :

Sur le moyen-long terme, la tendance de certains de nos titres (FR0000120073) présente une forme linéaire. Nous allons donc tester deux modèles linéaires [39] avant de comparer les résultats et performances.

5.1 Présentation et application de modèles linéaires

Nous allons étudier la **prédiction de la tendance (haussière ou baissière)** de deux titres sur la base de la régression logistique et le SVC Linéaire. Notre choix est basé sur la simplicité de mise en oeuvre, la capacité d'utilisation sur une grande base de données et le fait que les résultats de la régression logistique sont facilement interprétables et que les résultats des SVC sont performants dans l'analyse des cas extrêmes. Les méthodes de type analyse linéaire discriminante, *Regression SVM* et *Random Forest* moins performantes sont en annexe.
Préalablement aux applications numériques et à l'étude comparative, nous présenterons rapidement les modèles mathématiques associés.

5.1.1 La régression logistique : modèle de prédiction de tendance haussière ou baissière

La régression logistique, n'est pas une régression, mais un algorithme de classification. Le terme de régression logistique vient du fait que la formulation mathématique est proche de la régression linéaire. [14], [53]
La régression logistique (modèle "logit") est qualifié de modèle semi-paramétrique dans la mesure ou est modélisé un rapport de densités $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ au lieu de chacune des densités. [50] Dans ce modèle, sous l'hypothèse la normalité et l'égalité des matrices de variance covariance il est établi que la probabilité a postériori d'appartenance au groupe "1" se mettait sous la forme d'une fonction logistique du score, elle même combinaison linéaire de variables.

$$P(G_1/x) = \pi(x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_1+...+\beta_p x_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+...+\beta_p x_p}}$$

$$P(G_1/x = \pi(x) = \frac{\beta_0 + \beta_x^{'}}{1+e^{\beta_0+\beta_x^{'}}}$$

La fonction logistique conduit à une expression entre 0 et 1, ce qui convient à une probabilité. Pour notre cas de tendance de cours cela se traduira par une prédiction de hausse ou de baisse. La fonction remplissant cette propriété est la fonction sigmoïde.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Le modèle de régression logistique est de la forme :

$$f_{w,b}(x) = \frac{1}{1+e^{-wx+b}}$$

Les coefficients du modèle sont liés aux "rapports de cotes" (ou *odds-ratios*). Y va désigner le résultat, dans notre cas la hausse ou la baisse du support. x correspondant a la donnée en entrée du modèle, en l'espèce le *lag* soit le différentiel de cours entre J et J-1.
Concrètement :

$$P(Y = 0/x = 1) = \frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta^1}}$$

$$P(Y = 1/x = 0) = \frac{e^{\beta_0}}{1+e^{\beta_0+\beta^1}}$$

L'*odds* est le rapport de deux probabilités $P(Y = 1/x = 1)/P(Y = 0/x = 1)$ analogue a la notion de cote des "parieurs". L'interprétation va dépendre de l'unité de mesure de la variable.

$$OR = \frac{P(Y = 1/x = 1)/P(Y = 0/x = 1)}{P(Y = 1/x = 0)/P(Y = 0/x = 0)} = e^{\beta_1}$$

l'estimation est réalisée par la méthode du **maximum** de vraisemblance à partir d'un échantillon iid de n observations (y_i, X_i) prélevées dans la population totale. Dans la régression logistique, nous avons une vraisemblance conditionnelle car nous modélisons $\pi(x)$.

$$L(\beta_0, \beta) = \prod_{i=1}^{n} (\frac{e^{\beta_0+\beta^{'}x}}{1+e^{\beta_0+\beta^{'}x}})^{y_i} \times 1 - (\frac{e^{\beta_0+\beta^{'}x}}{1+e^{\beta_0+\beta^{'}x}})^{1-y_i}$$

En annulant les dérivées par rapport aux β_j de la log vraisemblance nous obtenons :

$$L(\beta_0, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \log \pi(x_i) + (1-y_i) \log(1-\pi(x_i))]$$

Cela permet d'aboutir au système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\beta)}{\partial l(\beta_0)} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \pi(x_i)) \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial l(\beta_j)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^j(y_i - \pi(x_i)) \text{ avec j=1,...,p} \end{cases}$$

Ce système d'équation n'a pas de solution analytique et se résout par des procédures de calculs numériques.

5.1.2 le Support Vector Machine : modèle de prédiction de tendance haussière ou baissière

Le Support Vector Machine va utiliser des *inputs* comme des vecteurs dans un espace multi-dimensionnel. Cet espace multi-dimensionnel va constituer un hyper-plan. [14], [53]
L'équation d'un hyper-plan est donné par deux paramètres : un vecteur de données réelles w de mêmes dimensions que le vecteur de caractéristique d'entrée x et un nombre réel b de la forme :

$$wx - b = 0$$

ou :

$$wx \text{ signifie } w^1x^1 + w^2x^2 + w^3x^3 + ... + w^Dx^D$$

D est le nombre de dimension du vecteur de caractéristique d'entrée.
le résultat de prédiction (hausse ou baisse du support dans notre cas) en fonction du vecteur de caractéristique d'entrée x va être de la forme :

$$y = \text{sign}(wx - b = 0)$$

ou "sign" est l'opérateur mathématique du signe qui renvoie +1 si l'input est positif et -1 si l'input est négatif.
L'objectif de l'algorithme SVM est de définir les valeurs optimales de w* et b* pour les paramètres w et b. Dès que l'algorithme identifie ces valeurs optimales le modèle SVM est défini sous la forme :

$$y = \text{sign}(w * x - b* = 0)$$

ou nous avons :

$$\begin{cases} wx_i - b \geq +1 \text{ si } y_i = +1 \\ wx_i - b \leq -1 \text{ si } y_i = -1 \end{cases}$$

L'objectif est de préférer l'hyperplan qui sépare les données en positives ou négatives avec le maximum de marge. La marge est la distance entre les données des deux classes (positives - négatives) comme définies par la frontière de décision. Une large marge continue a une meilleure généralisation. Pour atteindre cet objectif, il faut minimiser la norme euclidienne de w dénoté : $\|w\|$: $\sqrt{\sum_{j=1}^{D}\left(w^{(j)}\right)^2}$.

La problématique d'optimisation vise donc à résoudre :

$$\text{Minimum } \|w\| \text{ sachant que } y_i(wx_i - b) \geq 1 \text{ pour i = 1, ..., N}$$

Minimiser $\|w\|$ équivaut a minimiser $\frac{1}{2}\|w\|^2$

$$\text{Minimum } \|w\| \text{ sachant que } y_i(wx_i - b) - 1 \geq 0 \text{ pour i = 1, ..., N}$$

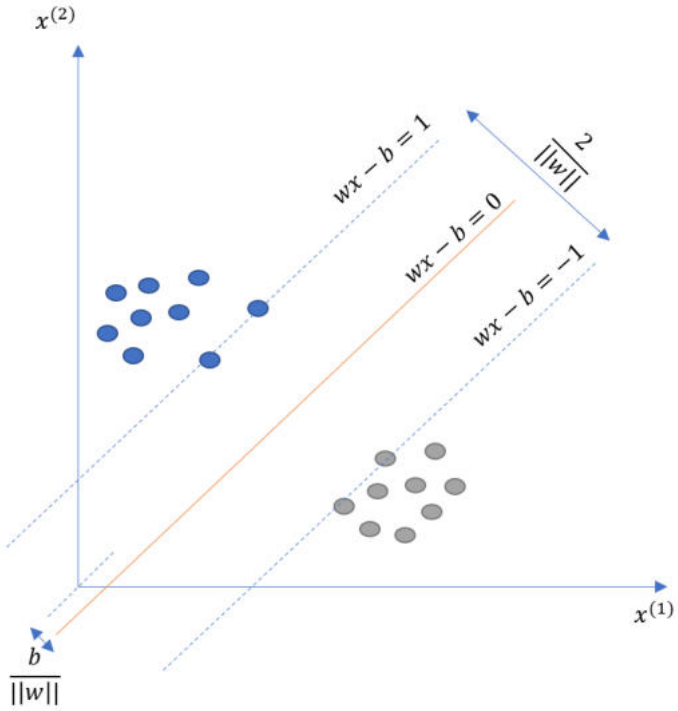


FIGURE 5.1 – Illustration du modèle SVM pour des vecteurs à caractéristique en 2 dimensions

Le modèle SVM peut intégrer des noyaux (*kernels*) qui vont permettre d'avoir une frontière de décision arbitrairement non linéaire.
Pour réduire le bruit il est possible d'introduire la fonction de perte charnière : $max(0, 1 - y_i(wx_i - b))$.
Nous devons ensuite minimiser la fonction de coût :

$$C\|w\|^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} max(0, 1 - y_i(wx_i - b))$$

Pour gérer la non linéarité le fait d'utiliser une fonction qui transforme l'espace original en un espace de dimension plus élevé durant l'optimisation de la fonction de coût est appelé "astuce de noyau" (*kernel tricks*).

Les fonctions "noyaux" (*kernel functions*) pour travailler en espace de dimensions supérieures sans faire des transformations explicites sont traditionnellement basées sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{cases} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_N}{max} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} y_i \alpha_i (x_i x_k) y_k \alpha_k \\ \text{sachant que } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0 \\ \text{sachant que } \alpha_i \geq 0, \text{i=1,...,N} \end{cases}$$

ou α_i sont des multiplicateurs de Lagrange.
Les machines à vecteurs de support (ou séparateurs à vaste marge) dont font partie les séparateurs à vastes marges sont des classificateurs qui reposent sur deux principes clés :

- traiter des problèmes de discrimination non linéaire
- reformuler le problème de classement comme un problème d'optimisation quadratique.

Application numérique et étude comparative de la RL et du SVM :

Les différents modèles mathématiques ci-dessus, sur la seule tendance de la journée (En hausse ou en baisse), nous donnent la matrice de confusion (ou table de contingence) suivante :

Classification Correcte Hausse : U_t	Classification Incorrecte Hausse : U_f
Classification Correcte Baisse : D_t	Classification Incorrecte Baisse : D_f

TABLE 5.1 – Matrice de classification

Ainsi que le taux de succès global $= U_T + D_T$ du modèle. Pour rappel, les données d'entraînement vont du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2017. Les données d'application pour contrôle des modèles vont du 1er janvier 2018 au 10 mars 2022.
Nous obtenons ainsi :

Méthode	Total Energie	FR0000120271	Succès	Air Liquide	FR0000120073	Succès	Indice	Energie	Succès
Régression logistique	73	85	50,93%	122	98	55,88%	24	30	52,15%
Régression logistique	441	473		375	477		483	535	
SVC Linéaire	73	85	50,93%	119	97	55,69%	24	30	52,15%
SVC Linéaire	441	473		378	478		483	535	

TABLE 5.2 – Comparatif de la performance de prédiction (hausse ou baisse) des méthodes linéaires

Nous constatons que le taux de réussite de la simple prédiction en hausse ou en baisse est très faible, de l'ordre de 50% seulement ce qui signifie que ces méthodes ne sont pas plus concluantes qu'un simple tirage aléatoire. L'extension de l'ensemble des titres du secteur énergie n'améliore pas les performances de ces modèles. Les méthodes linéaires n'étant pas performantes, car la tendance est impactée par la volatilité, nous testerons les méthodes non linéaires.

5.2 Présentation et application de modèles non linéaire de machine learning dans la prédiction de la valeur

Nous présenterons les modèles de *MultiLayer Perceptrons* (MLP) et *Long Short-Term Memory networks* (LSTM) et nous comparerons leurs performances.
Des méthodes non linéaires moins performantes (*Convolutional Neural Network models*, ou CNN) sont en annexe [A6].

5.2.1 MultiLayer Perceptrons (MLP)

Le *multiLayer Percetron* est basé sur un réseau de neurones. [14]
Un réseau de neurones est basé sur une fonction mathématique de type : $y = f_{NN}(x)$.
La fonction $f_{NN}(x)$ est une fonction imbriquée (*nested function*). A titre d'illustration pour un réseau de neurones à trois couches nous avons :

$$y = f_{NN}(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$$

Il existe une configuration particulière de réseau de neurones appelé réseau neuronaux en aval supervisé (*feed-forward neuronal networks : FFNN*). A l'intérieur de cette famille, il existe le *MultiLayer Perceptron* : MLP. A titre d'illustration, nous allons présenter un *MultiLayer Perceptron* à trois couches. Le réseau va un vecteur a caractéristiques d'entrée en deux dimensions en entrée du modèle et un nombre en sortie. C'est la fonction d'activation, utilisée ici en troisième position (couche), qui va définir la finalité du modèle : régression, classification... Ce qui caractérise un *MultiLayer Perceptron* est que toutes les sorties d'une couche sont connectées à chaque entrée de la couche suivante.
Présentons une représentation graphique du MLP à trois couches :

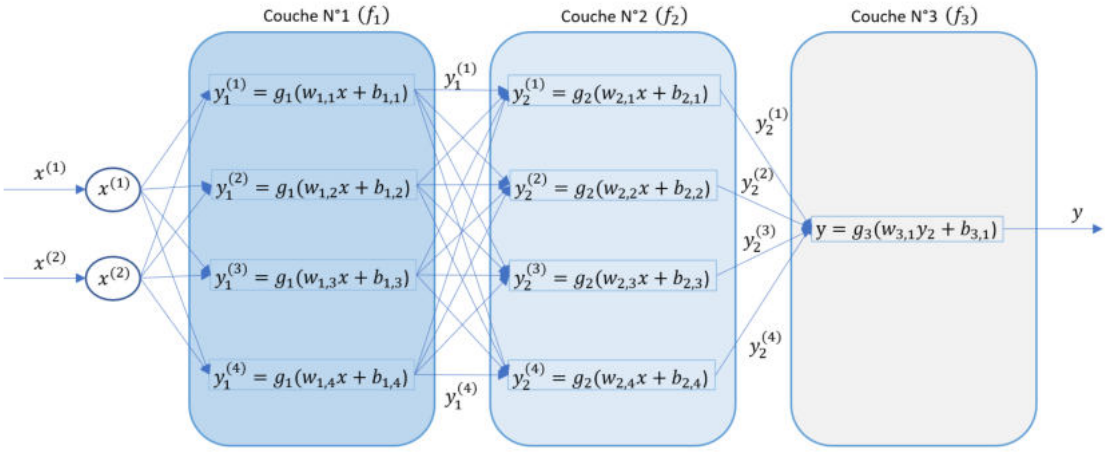


FIGURE 5.2 – Illustration d'un MLP avec données d'entrée en deux dimensions, deux couches avec quatre unités et une couche de sortie avec une unité.

Le réseau de neurones est représenté graphiquement comme une combinaison connectée

d'unités organisées logiquement en une ou plusieurs couches. Les flèches du graphique représentent une entrée d'une unité et indique sa provenance. La sortie de chaque unité est le résultat d'une opération mathématique illustré dans l'unité. Tous les données en entrée d'une unité constituent un vecteur. l'unité applique alors une transformation linéaire de ces données. Finalement, il est appliqué une fonction d'activation "g" aux résultats précédents pour obtenir une sortie sous forme de nombre.
En principe toutes les unités ont la même fonction d'activation, mais ce n'est pas une règle fixe. Concrètement, chaque unité a ses propres paramètres $w_{l,u}$ et $b_{l,u}$ ou u est l'index de l'unité et l l'index de la couche. Le vecteur $y_{l,1}$ de chaque unité est défini comme :$[y_{l,1}^{(1)}, y_{l,1}^{(2)}, y_{l,1}^{(3)}, y_{l,1}^{(4)}]$. Le vecteur x dans la première couche est défini comme : $[x^{(1)}, ..., x^{(D)}]$.
Pour résoudre une problème de classification (tendance Haussière ou baissière), la dernière couche contient généralement une seule unité. Le fait que la dernière fonction d'activation g_{last} de la dernière couche soit une fonction logistique permet d'avoir un modèle de classification binaire. Les fonctions habituellement retenues sont la fonction tangente hyperbolique TanH similaire à une fonction logistique et ReLU.

$$tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$relu(z) = \begin{cases} step(z) = 0 \text{ si } z < 0 \\ step(z) = 1 \text{ si } z > 0 \end{cases}$$

5.2.2 Long Short-Term Memory networks, or LSTMs for short

Les réseaux neuronaux récurrents (*Recurrent Neural Networks : RNN*) sont utilisés pour classifier - prédire, ici la hausse ou la baisse probable des supports.
Un RNN, contient des boucles. L'idée est que chaque unité "u" d'une couche récurrente "l" (*layer*) à un état évalué réellement (*real-valued state*) $h_{l,u}$. L'état peut être vu comme la mémoire d'une unité. [14] Dans un RNN, chaque unité "u" dans chaque couche "l" reçoit deux données en entrée (le vecteur des état provenant de la couche précédente "l-1" et le vecteur des états provenant de cette même couche "l" provenant de l'étape de temps précédente.
La forme de RNN la plus efficace est le réseau neuronal récurrent à portes (*gated RNN*). Le modèle LSTM (*Long short-term memory*) fait partie de cette sous-famille de RNN. La lecture, l'écriture et la suppression des données dans chaque unité est contrôlée par les fonctions d'activation qui prennent une valeur entre [0,1].
Au niveau du modèle LSTM nous avons trois « portes » pour chaque cellule.

- La porte d'entrée.
- La porte d'oubli
- La porte de sortie

Les portes du modèle LSTM sont des fonctions sigmoïdes d'activation $sig(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$, c'est-à-dire qu'elles génèrent une valeur comprise entre 0 ou 1 et dans la plupart des cas

soit 0 ou 1. La fonction sigmoïde est utilisée car elle ne donne que des valeurs positives ou nulles.

- 0 signifie que la porte bloque tout.
- 1 signifie que la porte laisse tout passer.

Les équations pour les portes dans le modèle LSTM sont ainsi :

$$\begin{cases} i_t = \sigma(w_i[h_{t-1}, x_t] + b_i) \\ f_t = \sigma(w_f[h_{t-1}, x_t] + b_f) \\ o_t = \sigma(w_o[h_{t-1}, x_t] + b_o) \end{cases}$$

Ou :
i_t représente la porte d'entrée
f_t représente la porte d'oubli
o_t représente la porte de sortie
σ représente la fonction sigmoïde.
w_x représente le poids respectif des portes des neurones
h_{t-1} est la sortie du bloc précédent au temps t-1
x_t est la donnée d'entrée (input) au temps présent (t)
b_x est le biais pour les portes (x) respectives

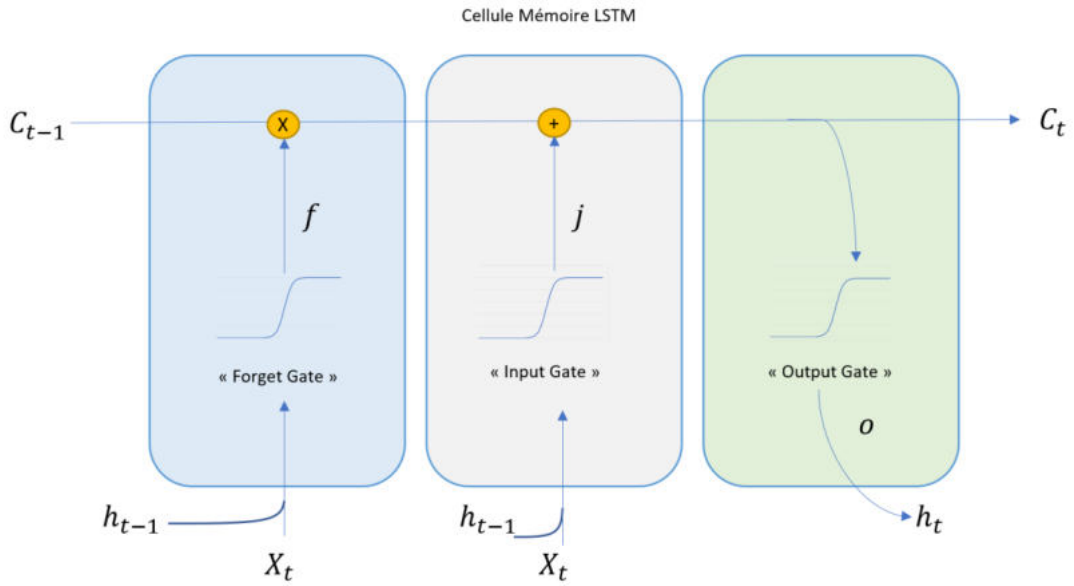


FIGURE 5.3 – Cellule mémoire LSTM

i_t est l'équation pour la porte d'entrée qui nous indique quelles nouvelles informations nous allons obtenir dans cet état de la cellule.
f_t est l'équation pour la porte d'oubli qui nous indique quelles informations nous devons ne pas traiter dans cet état de la cellule. o_t est l'équation pour la porte de sorti qui est utilisé pour fournir l'activation de la sortie finale (*output*) du block LSTM au pas de

temps t.
Les équations pour l'état de la cellule c_t, pour l'état candidat de la cellule $\widetilde{c_t}$ et la sortie finale sont ainsi :

$$\widetilde{c_t} = tanh(w_c[h_{t-1}, x_t + b_c])$$

$$c_t = f_t \times c_{t-1} + i_t \times \widetilde{c_t})$$

$$h_t = o_t \times tanh(c^t)$$

A chaque pas de temps, notre état de la cellule connait ce qui est nécessaire d'oublier de l'étape précédente et ce qui est nécessaire de prendre en compte pour le pas de temps concerné. Ainsi à chaque pas de temps nous avons pour le modèle LSTM :

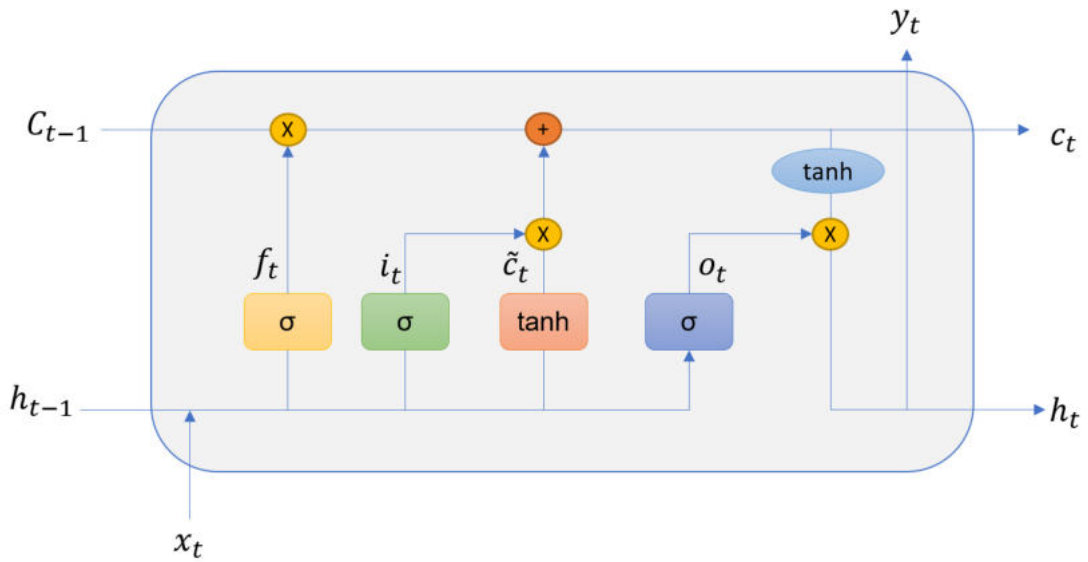


FIGURE 5.4 – Cellule mémoire LSTM

Application numérique et étude comparative
Les paramètres des modèles ont été estimés sur la base d'apprentissage. La base de validation a permis d'exclure le sur-apprentissage. Les modèles ont ensuite été testés sur une période de 3 ans (2018 - 2020) Pour le modèle MLP, les entrées ont été centrées et réduites et les sorties ont été renormalisées.
Pour le Multilayer Perceptrons(MLP)
Nous obtenons :

MLP	FR0000120073	Réel	Ecart	FR0000120271	Réel	Ecart
02/07/2018	100,41357	97,227	3,28%	42,681927	49,333	-13,48%
01/01/2019	99,68486	96,455	3,35%	42,265373	45,192	-6,48%
01/01/2020	107,89694	126,7	-14,84%	45,69699	48,851	-6,46%

TABLE 5.3 – Performance de prédiction (hausse / baisse) du modèle MLP

LSTM Stacked	FR0000120073	Réel	Ecart	FR0000120271	Réel	Ecart
02/07/2018	101,91881	97,227	4,83%	45,373722	49,333	-8,03%
01/01/2019	98,76942	96,455	2,40%	39,134865	45,192	-13,40%
01/01/2020	104,645294	126,7	-17,41%	42,262497	48,851	-13,49%

TABLE 5.4 – Performance de prédiction (hausse / baisse) du modèle LSTM

En fonction des années et des supports, nous avons soit une surperformance du modèle MLP soit une surperformance du modèle LSTM. Pour l'année 2018, le modèle LSTM est plus performant quelque soit le support mais pour les années 2019 et 2020 le modèle MLP surperforme. Ces deux modèles ont la tendance à sous estimer les valeurs. Cependant, dans le cadre de l'aide à la décision, pour faciliter les projections de l'assureur par rapport à la duration de ses encours, un intervalle (enveloppe - couloir) semble plus intéressant. Les franchissements à la hausse pouvant déclencher la vente et inversement, ce qui nous amène a tester deux modèles d'enveloppes.

Chapitre 6

Proposition d'un modèle mathématique de nappe

6.1 Modèle de la nappe / enveloppe de confiance

Une stratégie de projection plus intuitive peut consister à projeter la valeur d'un titre dans le temps (V_t) à l'intérieur d'une nappe ou enveloppe de confiance. Ce modèle basé sur les travaux de François Chauvet, intervenant au CNAM dans la chaire Finance a développé un indicateur de risque (ex-ante) appelé le *Tracking at risk*. Le principe est de créer une ou des enveloppes bornant les évolutions probables d'un support ou d'un portefeuille, avec pour chacune d'elle un niveau de confiance sur le principe de la VAR (*Value at Risk*). Mathématiquement, pour obtenir une forme d'enveloppe la fonction racine carré est utilisée. [30]
Le *tracking at Risk* (TAR) :

$$T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \times \sigma^T_{\beta_{p-b}}\right)^2 + \left(\phi^{-1} \times \frac{1+\alpha}{2} \times \sigma^T_{e_{p-b}}\right)^2}$$

Ou : $T_{p-b}\left(\alpha_3 T\right)$ est le TAR du titre à un horizon de temps T, et un niveau de confiance α
$\sigma^T_{\beta_{p-b}}$ est la tracking error systématique du portefeuille à un horizon de temps T
$\sigma^T_{e_{p-b}}$ est la tracking error spécifique du portefeuille à un horizon de temps T
$\phi^{-1}(\alpha)$est l'inverse de la fonction de distribution cumulée de la loi normale

Concrètement, nous pouvons projeter la valeur dans une enveloppe ou nappe ce qui nous donnera un intervalle de confiance à chaque instant. Par simplification et prise en compte de la tendance de long-moyen terme du titre ou du portefeuille, nous proposerons une projection, faite sur la base d'une projection de la valeur dans le temps de type :
Option N°1 :

$$V_T = V_0 + n_t \times \frac{\sigma}{\lambda}$$

Option N°2 :

$$V_T = V_0 + n_t \times \sqrt{\sigma \times \lambda}$$

Ce modèle, devra satisfaire deux contraintes :

$$\begin{cases} Max\left(\sum_{i=1}^{n} V_{bi} \leq V_i \leq V_{hi}\right); V_{bi} \geq V_i \mapsto 0; V_i \geq V_{hi} \mapsto 0 \\ \text{Min RSME}\left(\sum_{i=1}^{n} (V_i - V_{bi})^2 + (V_{hi} - V_i)^2\right) \end{cases}$$

La détermination du modèle consistera à déterminer le λ satisfaisant au mieux ces deux contraintes. Pour obtenir le λ le plus petit, en réalité, nous élargirons la parabole conique au début pour utiliser le λ le plus important possible et donc avoir le RSME le plus faible.
Nous utiliserons également la pente de la moyenne mobile à l'échelle de la projection soit dans notre exemple 30 semaines. Nous utiliserons ainsi les formules pour l'intervalle de la nappe de
Pour l'option N°1 : - pour les titres ayant un faible écart type σ :

$$V_{Ht} = V_0 + p \times t + \sum_{i=1}^{5} \sigma \times \mathbb{1}_{1 \leq i \leq 5} + \sum_{i=6}^{10} \frac{\sigma}{10} \times \mathbb{1}_{6 \leq i \leq 10} + \sum_{i=11}^{\infty} (n_t - 10) \times \frac{\sigma}{\lambda} \times \mathbb{1}_{i \geq 10}$$

$$V_{Bt} = V_0 + p \times t - \sum_{i=1}^{5} \sigma \times \mathbb{1}_{1 \leq i \leq 5} - \sum_{i=6}^{10} \frac{\sigma}{10} \times \mathbb{1}_{6 \leq i \leq 10} - \sum_{i=11}^{\infty} (n_t - 10) \times \frac{\sigma}{\lambda} \times \mathbb{1}_{i \geq 10}$$

- pour les titres ayant un important écart type σ nous allons inclure la pente p pour prendre en compte la tendance de moyen terme du support, nous obtenons ainsi pour les enveloppes hautes et basses les équations :

$$V_{Ht} = V_0 + p \times t + (n_t \times \frac{\sigma}{\lambda})$$

$$V_{Bt} = V_0 + p \times t - (n_t \times \frac{\sigma}{\lambda})$$

Pour l'option N°2 :

$$V_{Ht} = V_0 + p \times t + \sqrt{\frac{n_t}{\sigma \times \lambda}}$$

$$V_{Bt} = V_0 + p \times t - \sqrt{\frac{n_t}{\sigma \times \lambda}}$$

Pour le support FR0000060402, nous obtenons les données avec prise en compte de la pente ou sans prise en compte de la pente (suffixe des courbes sp) :

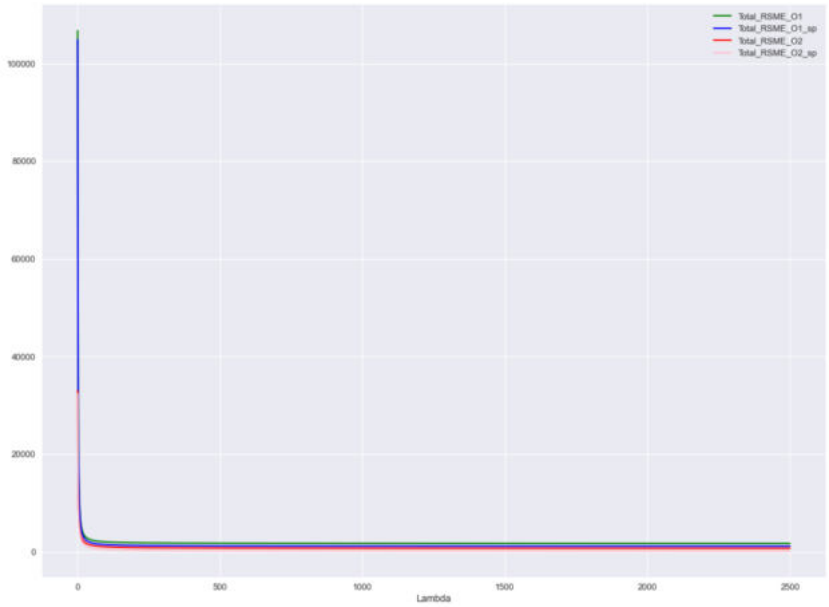


FIGURE 6.1 – RSME Prise en compte de la pente du support FR0000060402

Pour l'option N°1, nous obtenons :

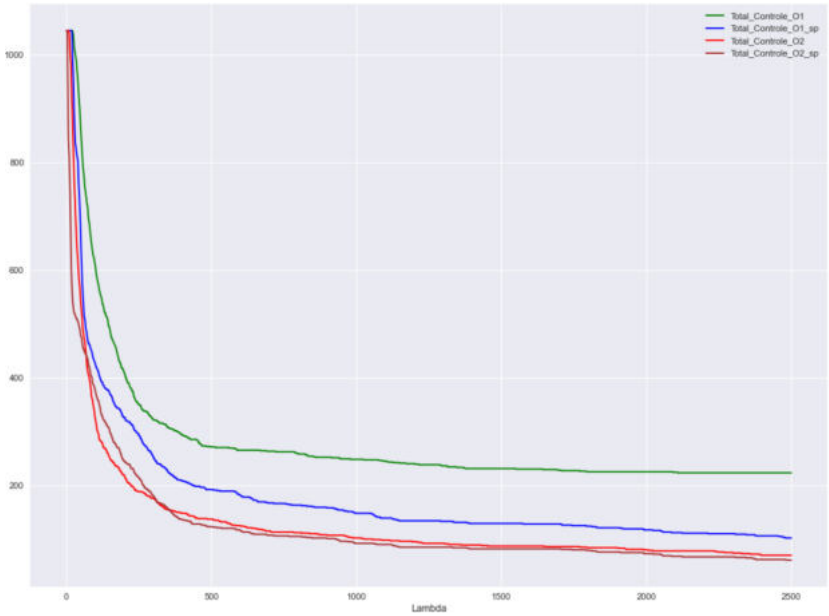


FIGURE 6.2 – Contrôle de données dans la nappe du support FR0000060402 en fonction du lambda

Pour l'option N°2, nous obtenons :

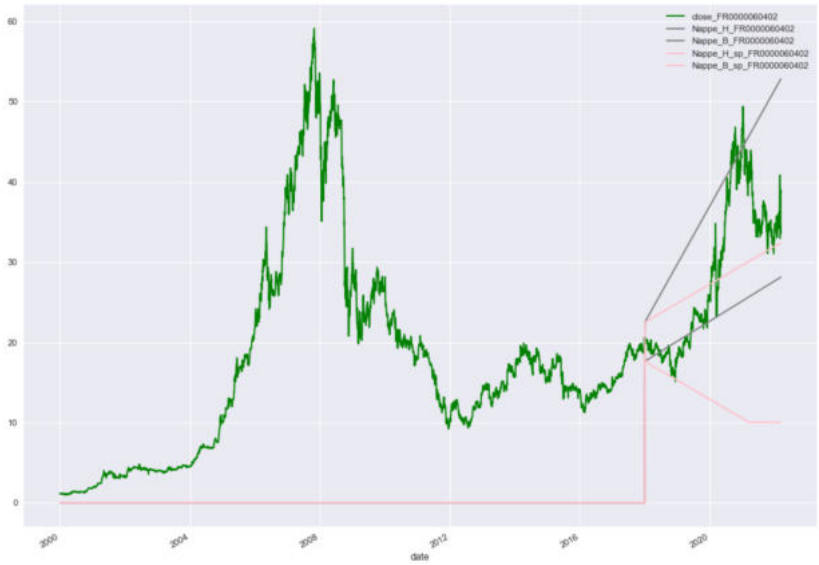


FIGURE 6.3 – Nappe du support FR0000060402 : Option 2

Il convient cependant d'introduire une autre contrainte au modèle :
L'écart entre le point haut et le point bas de la projection ne doit pas dépasser 1/3 de la valeur du titre a l'initialisation de la projection, à défaut l'utilité même du modèle est remise en cause. En conclusion, le modèle simplifié de la nappe est donc de type
Option N°1 : $V_t = V_0 + p \times t + n_t \times \frac{\sigma}{\lambda}$
Option N°2 : $V_t = V_0 + p \times t + \sqrt{\frac{n_t}{\Sigma \times \lambda}}$

Avec satisfaction des trois contraintes nous obtenons :

FIGURE 6.4 – Nappe du FR0000060402 avec option 2 et influence de la pente

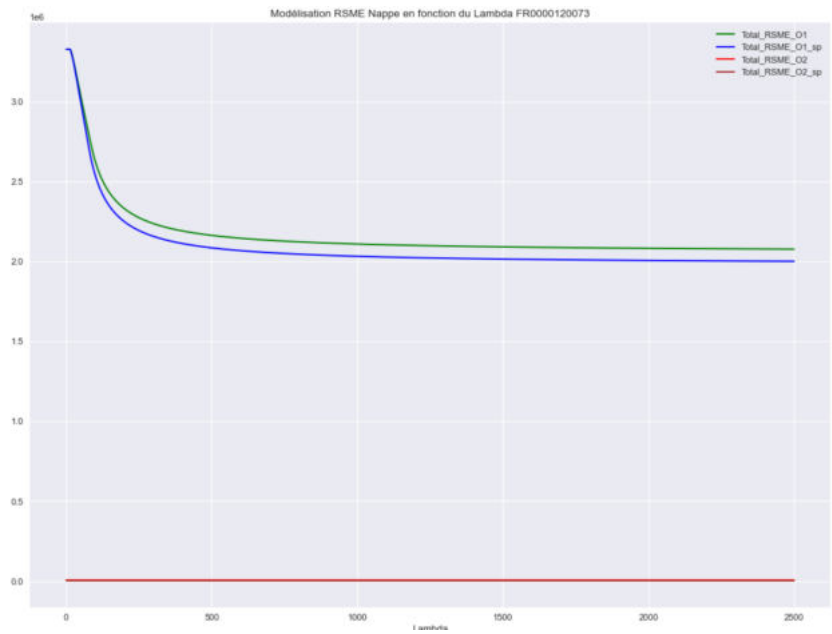


FIGURE 6.5 – RSME en fonction du lambda du FR0000120073

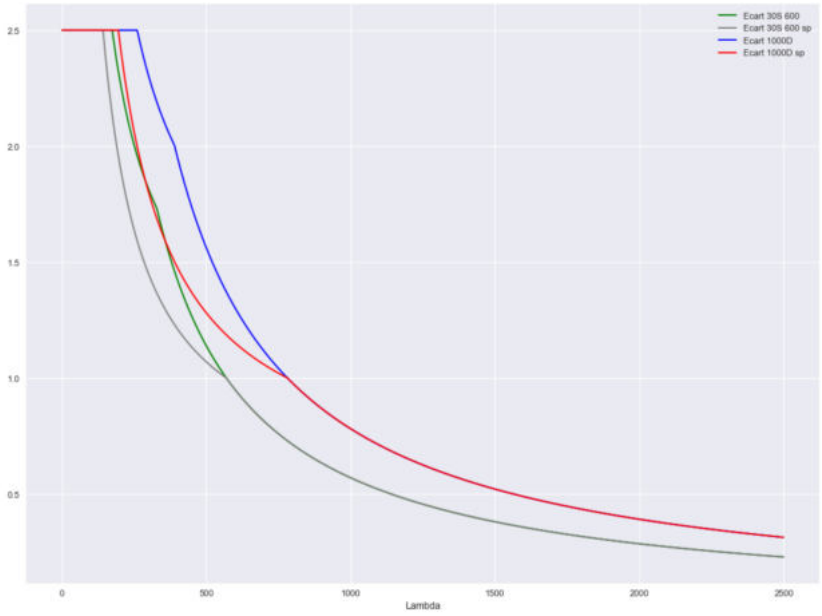


FIGURE 6.6 – intervalle de modélisation FR0000120073

Nous constatons que pour notre cible d'un intervalle de 1/3 de la valeur initiale du titre au début de la projection, nous avons un λ supérieur à 2300.
Pour cette valeur de λ supérieur à 2342, sur un total de 1498 dates projetées, nous avons une valorisation incluse, dans la nappe, 203 fois sans la prise en compte de la pente et 638 fois avec. Nous constatons cependant que dès que λ est supérieur à 1500, nous avons un intervalle de l'ordre de 50%. Par exemple pour le un λ de 1561 nous avons un intervalle final de 0.50 fois la valeur initiale du titre et un taux de présence dans la nappe de 726 pour le modèle avec pente et de 236 pour le modèle sans pente, soit respectivement un taux de 48,5% et 16%.

Nous obtenons ainsi les nappes pour l'option N°1 pour un λ de 2500 versus un λ de 1500 :

FIGURE 6.7 – Modélisation de la nappe du FR0000120073 avec un lambda de 2500

FIGURE 6.8 – Modélisation de la nappe du FR0000120073 avec un lambda de 1500

FIGURE 6.9 – Modélisation de la nappe du FR0000120073 avec un lambda de 1, option 2

Le modèle de la nappe présente l'intérêt de pouvoir générer des arbitrages automatiques :

- par des ventes en cas de sous performance lorsque la valeur du titre franchie l'intervalle par le bas $S_i(t) < S_i^B(t)$
- par des achats en cas de sur performance lorsque la valeur du titre franchie l'intervalle par le haut$S_i(t) > S_i^H(t)$

Il peut être affiné par complexification en pondérant les projections par l'introduction des données du secteur (pente de la tendance et écart type), ainsi que par les données du marché (pente de la tendance et écart type). Les pondérations peuvent ainsi représenter les corrélations du secteur et du marché par rapport aux titre projeté. Cette complexification, introduit cependant de nouvelles variables qui rend le modèle moins robuste.

6.2 Proposition d'un modèle privé

L'implémentation par les modèles privés de type "Prophet" du groupe Meta (Facebook), permet également d'avoir une enveloppe de confiance. Ce type de modèle est basé sur un modèle de régression additive qui va décomposer la série temporelle en trois composants principaux. Il est basé sur l'interférence bayésienne. Ce modèle peut être écrit comme :

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \epsilon_t$$

Avec :
g(t) la fonction de la tendance

s(t)la fonction de la saisonnalité
h(t) les effets des vacances ou jours fériés
et ϵ_t correspond aux résidus.

FIGURE 6.10 – Modèle privé de la nappe

Chapitre 7

Analyse de la performance des modèles prédictifs

Les modèles prédictifs sont différents aussi bien en termes d'approches que de performances.

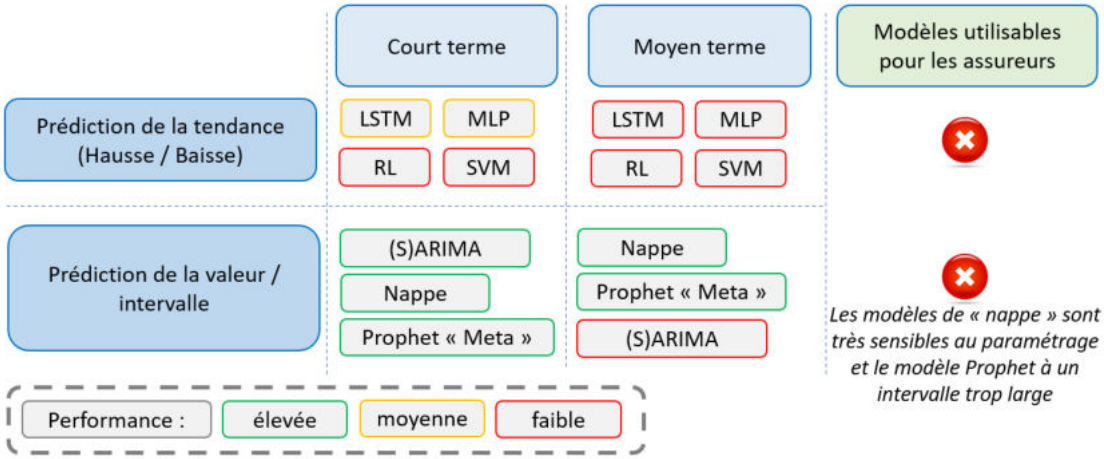


FIGURE 7.1 – Tableau comparatif des performances des modèles à court et moyen terme

Ces modèles restent utiles, par rapport à des scénarios stochastiques surtout extrêmes, car ils sont intégrables dans des algorithmes d'allocation d'actifs, particulièrement les modèles de nappe (ou d'enveloppe). Informatiquement, leur intérêt est de permettre de générer des ordres basées sur le franchissement de ces enveloppes.

- à la hausse pour déclencher des ordres d'achats ou
- à la baisse pour déclencher des ordres de ventes.

Cependant qu'ils soient basés sur des approches mathématiques, statistiques ou des lois d'expérience, les modèles sont dans l'incapacité d'anticiper les chocs et de préserver les encours des assurés des baisses induites par les crises. Nous le voyons clairement sur les

graphiques, avec le choc de 2020 lié au Covid 19.
Par ailleurs, ces modèles sont basés sur des supports unitaires et donc sans prise en compte des opportunités d'arbitrage, sujet que nous allons désormais aborder. La seconde faiblesse est de ne pas pouvoir dire sur quel autre support investir et dans quelle proportion pour maximiser les gains c'est la raison pour laquelle nous allons tenter de définir un modèle basé sur les évènements.

Chapitre 8

Les "Event-Driven Models"

Nous allons construire plusieurs modèles sur la base d'un ensemble d'indicateurs. :

- Pour les supports inclus dans le modèle, les critères sont :
  - l'écart type du titre à 5 jours, 20 jours, 60 jours, 120 jours et 10 jours
  - la moyenne mobile du titre à 5 jours, 20 jours, 60 jours, 120 jours et 10 jours
  - le rendement a 1 jour, 5 jours, 1 mois, 3 mois, 6 mois, 30 semaines, 1 an.
  - les variations intra-journée.
  - la pente des différentes courbes natives ou d'indicateurs
- Nous allons également utiliser les référentiels :
  - Indice sectoriel de type Français
  - Indice de marché de type CAC 40
  - des indices du prix de l'énergie :
    - cours du pétrole,
    - cours du gaz
    - cours du charbon
    - cours de l'uranium
    - ...

Sur ces référentiels, les indicateurs des supports seront également définis. Nous allons utiliser plusieurs concepts :

- La surperformance/sous-performance (S/P) c'est-à-dire la comparaison de performance d'un titre par rapport à l'indice du secteur ou du marché. Concrètement, si sur une période de temps t, le support gagne 2% et l'indice gagne 3%, nous aurons un manque a gagner de 1%, soit une sous performance du titre.
- la cassure à l'achat, lui est basé sur une cassure de la volumétrie des achats à la hausse.
- la force relative qui est le ratio prix du titre / prix de l'indice
- Les Avancées / Déclins (A.D), c'est-à-dire la différence entre le nombre de titre en hausse et ceux en diminution. Sur cette base, nous pouvons en déduire un indice momentum qui est la moyenne mobile a 200 jours de l'A.D

A l'initialisation, nous allons définir le montant et la pondération investis dans chaque titre ainsi que la pondération maximale par titre afin de diversifier et limiter les risques.

Nous allons présenter le modèle pour les actions.
Nous intègrerons ensuite dans ce modèle simplifié trois poches.

- la poche "action",
- la poche "obligation" et
- la poche "trésorerie".

En effet le temps que les actifs désinvestis soient à nouveau réinvestis, nous utiliserons la poche trésorerie qui par défaut sera rémunéré au taux de 0%. Cette poche sera également augmentée des dividendes et coupons et diminués des frais.
Nous allons initier ce modèle en utilisant les pondérations correspondant à l'investissement à dire d'expert réalisé précédemment, ainsi qu'en définissant les pondérations maximales quel que soit l'instant t.
Soit :

Support	Libellé	Initialisation	Pondération maximale
FR0000120073	AIR LIQUIDE SA	30%	50%
FR0000060402	ALBIOMA SA	10%	30%
FR0010208488	ENGIE	10%	30%
FR0010242511	EDF	0%	20%
FR0011726835	GTT	0%	20%
FR0013269123	RUBIS	10%	30%
AN8068571086	SCHLUMBERGER	0%	20%
FR0000120271	TOTAL ENERGIES	40%	50%

TABLE 8.1 – Pondération initiale et maximale des supports de la poche "action"

L'une des problématiques souvent rencontré est la nécessité de vendre pour réaliser la plus-value si la tendance à l'horizon escompté devient défavorable ou pour limiter les pertes en cas de moins-values sans probabilité satisfaisante de retour à l'objectif de placement.

Préalablement à la modélisation, nous étudierons la matrice de corrélation des supports au 01.01.2018 en incluant deux trackers de matières premières liées à l'énergie :

- le pétrole (Brent : ISIN : CX0009677409) et
- le gaz (Gaz Naturel : ISIN : XD0002745517).

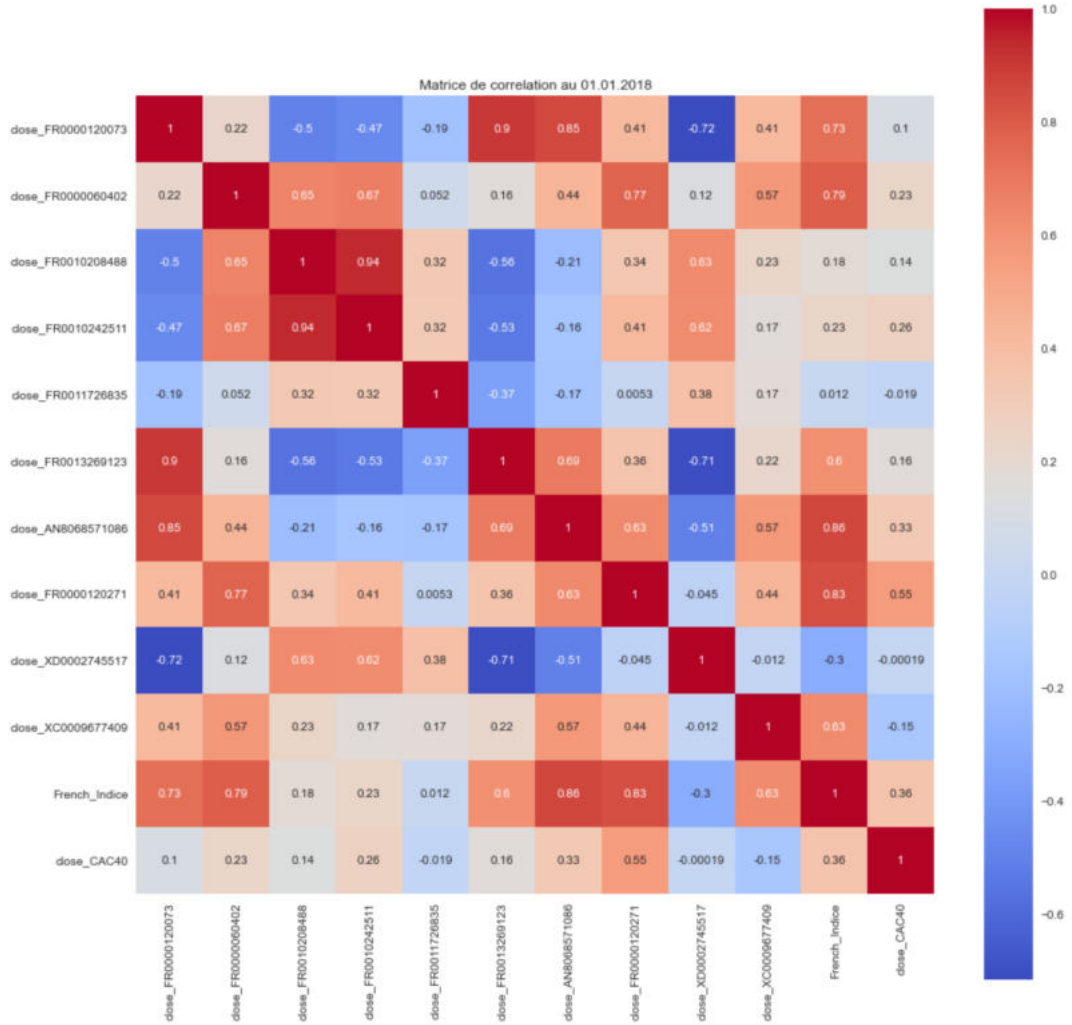


FIGURE 8.1 – Matrice de correlation entre les supports et les indices énergie au 01.01.2018

Nous constatons :

- une corrélation importante (0.904875) entre FR0013269123(RUBIS) et FR0000120073 (Air Liquide)
- une corrélation importante (0.937469) entre FR0010208488(ENGIE) et FR0011726835 (GTT)
- une corrélation négative (-0.717930) entre XD0002745517(gaz) et FR0000120073 (Air Liquide)

Nous ne constatons pas de corrélation significative entre les cours de ces deux matières premières et un quelconque support ou même l'indice sectoriel constitué.
Paradoxalement, nous constatons même une corrélation négative (> -0,7) entre le XD0002745517 (gaz) et Air liquide (FR0000120073) et Rubis (FR0013269123).
Nous pouvons donc supposer que les **cours de ces matières premières sera un signal faible de prédiction de la tendance du secteur**.
Nous présenterons trois modèles principaux de gestion **active** du portefeuille.

8.1 Proposition N°1 : Un modèle d'apprentissage par renforcement sur un titre

Dans cet algorithme que nous allons utiliser pour un seul titre : Air liquide, le choix d'acheter, de vendre et de garder la position est lié à l'évolution du prix du titre [29]. Il est basé sur le "*Q-learning*" ou l'approche est le DQN "*Deep-Q-Network*" qui est une adaptation des arbres de décision : TD : "*Tree Decision*".
Nous allons poser les variables :
S : un ensemble d'état
A : un ensemble d'actions (achat ou vente)
P : Probabilité de transition
R : Fonction de récompense (P&L [1] >0)
γ : Facteur d'actualisation des récompenses futures.
p_t : le prix du support à l'instant t.
d_t : la fonction d'activation.
τ : la taille de la fenêtre de temps.

Ainsi, à chaque état une paire de possibilité (a : achat, s : vente : "*Sell*") existe et l'algorithme va déterminer la récompense (R : récompense "*Reward*" : P&L >0) à passer d'un état s vers a et inversement. Pour les états, nous utilisons une fonction sigmoïde de la différence entre deux positions passées de la valeur de marché du titre. Ainsi :

$$S_t \text{ est décrit par } d_{t-\tau-1}, d_{t-1}, d_t$$

Ou

$$d_t = \text{sigmoid}(p_t - pt - 1)$$

A chaque pas de temps t, nous démarrons d'un état S_t et nous prenons une décision d'achat ou de vente en fonction de la Q-value : $a_t = \max Q(s_t, a)$. Avec l'action a_t(achat ou vente) nous observons la récompense R_{t+1} et nous passons à l'état suivant : S_{t+1}. L'action de vente ou de conservation ne génère pas de récompense.
La fonction d'évaluation est ainsi mise à jour :

$$Q(s_t, a) \leftarrow Q(s_t, a) + \alpha(R_{t-1} + \gamma Q(S_{t+1}, a_t) - Q(s_t, a_t))$$

1. Profit and Loss : Compte de résultat

Nous obtenons ainsi pour le titre AIR LIQUIDE, dans un des scénarios :
Pour un investissement d'une action d'AIR LIQUIDE le 03/01/2000 pour 31,875 euros, suite aux achats et au ventes successives ou les coûts de transactions sont négligés ainsi que la fiscalité nous arrivons à un profit de 101,7 euros.
En comparaison, pour un investissement d'une action d'AIR LIQUIDE le 03/01/2000 pour 31,875 euros nous arrivons, sans aucune transaction, au 10/03/2022 à 141,96 euros soit un profit de 110,85 euros supérieur à l'algorithme.

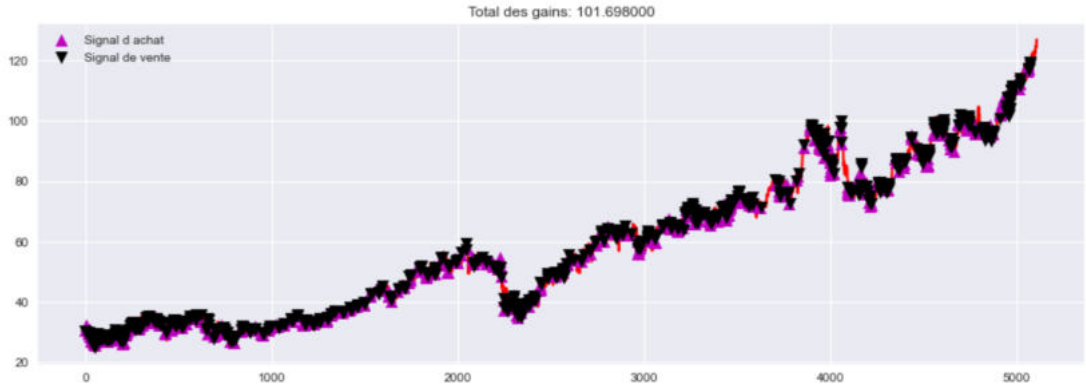


FIGURE 8.2 – Approche du Deep-Q-Network sur Air liquide

8.2 Proposition N°2 : Un modèle d'apprentissage par renforcement sur l'ensemble des titres du secteur d'activité.

L'idée ici va être de définir le portefeuille ayant une allocation optimale, en fonction de l'état actuel du portefeuille.
Pour rappel nous nous situons au 02.01.2018.
L'algorithme va être entraîné sur la base du *Deep Q-Learning* et son objectif va être d'allouer le poids de chaque titre dans le portefeuille à une fréquence définie. Contrairement à la proposition 1, nous utiliserons ici la fonction de récompense "*Reward Function*" basé sur le ratio Sharpe, méthodologie la plus utilisée [33]. Le ratio de Sharpe est un indicateur qui mesure la performance d'un portefeuille en tenant compte du risque. La formule est donnée par :

$$S = \frac{R - r}{\sigma}$$

Avec R le rendement espéré, r le taux sans risque et σ l'écart type du taux de rendement du portefeuille considéré.
La définition de la fréquence de ré-allocation est un paramètre du modèle, et pour définir le critère d'optimisation, nous utiliserons les modèles de DQN : *Deep Q-Networks*.
Nous allons ainsi obtenir des "épisodes" qui correspondent à l'apprentissage progressif du modèle. A l'initialisation le modèle utilise une part d'aléatoire dans ses décisions

d'arbitrage. Plus le temps avance, plus les modèles sont en mesure de définir la stratégie optimale.
A la dernière étape, nous obtenons la répartition de la rentabilité en pourcentage par support du secteur énergie de :

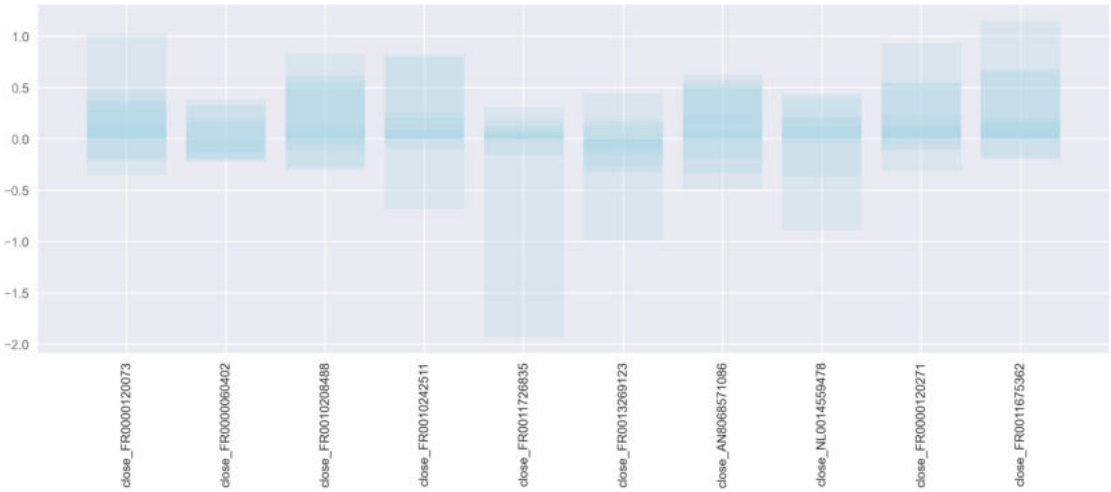


FIGURE 8.3 – Répartition des supports avec l'approche du *Deep-Q-Network* sur le portefeuille Énergie

Nous avons ainsi :

FIGURE 8.4 – Approche du *Deep-Q-Network* sur le portefeuille énergie

La performance du modèle est sensiblement identique à celle de l'indice Français du secteur. Nous pouvons également constater la répartition successive du poids des supports

au fur et à mesure des arbitrages. Ainsi entre le deuxième arbitrage en t=180 jours et au 5eme arbitrage en t=540 nous avons :

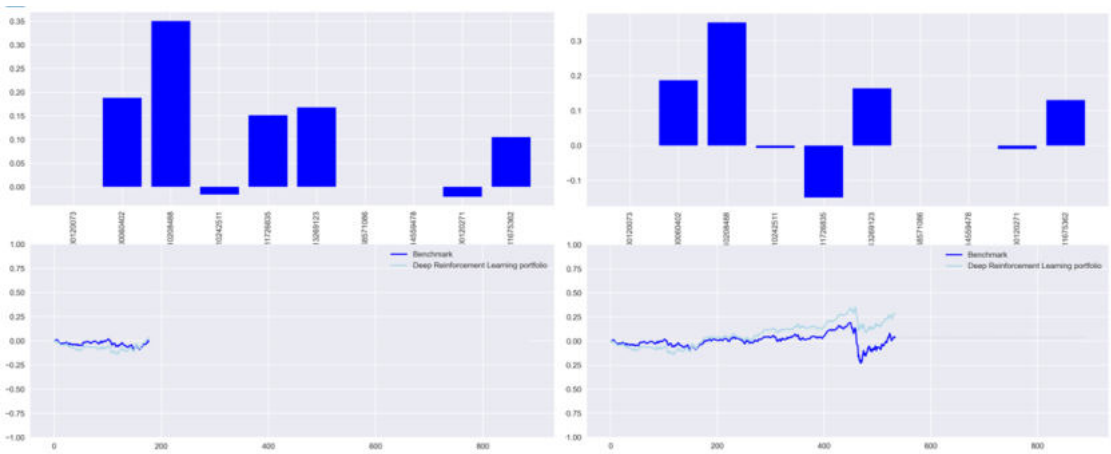


FIGURE 8.5 – Répartition successive des supports du portefeuille énergie à t=180 et t=540

Puis à la clôture de la période au 10 mars 2022 (en jours ouvrés) :

FIGURE 8.6 – Répartition et performance finale des supports du portefeuille énergie

Nous devons nuancer la performance du modèle. En effet en fonction des premières répartitions aléatoires du modèle d'achat et de vente, nous obtenons pour le même algorithme des performances très différentes en fonction des itérations.
Ainsi si nous présentons deux autres itérations nous obtenons :

FIGURE 8.7 – Performance finale des supports du portefeuille énergie : répartition initiale aléatoire N°1

FIGURE 8.8 – Performance finale des supports du portefeuille énergie : répartition initiale aléatoire N°2

Pour pouvoir comparer les performances pures des modèles nous allons initialiser les pondérations définies avec la méthode d'analyse financière.
Nous obtenons :

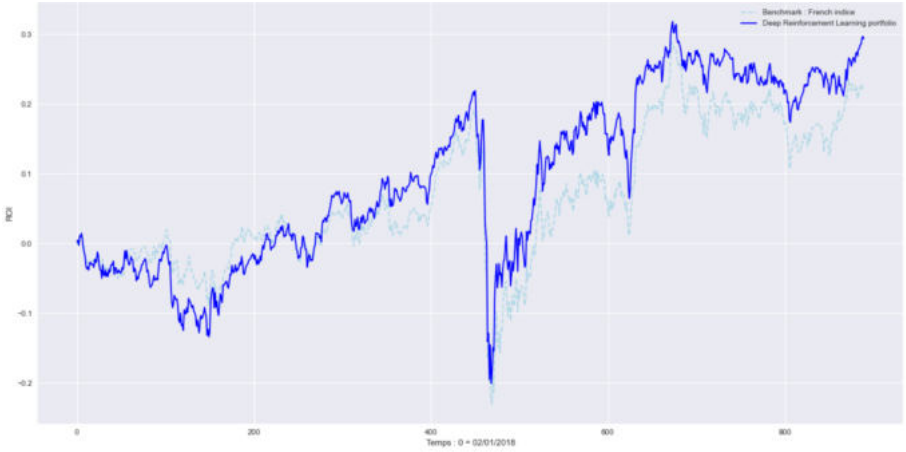


FIGURE 8.9 – Performance finale des supports du portefeuille énergie : répartition initiale basée sur l'analyse financière

Cette initialisation a permis de surperformer l'indice. Cependant, nous constatons que le modèle n'a pas été en mesure de neutraliser le choc Covid de 2020.
De plus, il convient de noter que les performances de ce type de modèle sont relativement sensibles. Par exemple, si nous utilisons les 8 ans d'apprentissage avec un début au 01/01/2010, nous obtenons les résultats suivants :

FIGURE 8.10 – Performance finale des supports du portefeuille énergie, apprentissage long (2010-2017)

Le modèle n'a pas subi le choc de 2019, mais il semble a contre temps car sur 2021 - 2022, sa performance baisse alors que le marché est en croissance. Cette situation pose des problématiques d'explication de performance.
Nous constatons,in fine, une performance inférieure à l'indice Français du secteur énergie, malgré 8 ans d'apprentissage. Notons cependant que l'algorithme a eu une performance

supérieure à celui de l'indice Français la majeure partie du temps, y compris pour les chocs de 2008 et 2019.

8.2.1 Analyse critique dans la prédiction des algorithmes de machine learning

La problématique des algorithmes ci-dessus basés sur du machine learning est que leur interprétation est difficile (effet boite noire). Sachant de plus que le "marché" est fait par un nombre d'acteurs de plus en plus petit. La main invisible d'Adam Smith a disparu depuis la concentration de pouvoir des banques centrales, des gérants de fonds systémiques de type BlackRock (9 070 Milliards d'euros) et Vanguard (7 900 Milliards d'euros) pour un total de capitalisation boursière mondiale estimé à 100 000 milliards d'euros. Les 10 premiers gérants de fonds détiennent 41,13% de la capitalisation boursière.
Leurs pouvoirs de "lobbying" et leurs transactions sur le marché ont un rôle déterminant sur le marché.

Gestionnaire	Actifs sous gestions en milliards d'euros
Blackrock (U.S)	9 070
Vanguard Group (U.S)	7 900
UBS groupe (Switzerland)	3 520
Strate street global advisors (U.S)	3 050
Fidelityinvestments (U.S)	2 920
Allianz group (Allemagne)	2 530
JP morgan (U.S) 2	2 510
Goldman Sachs	2 060
Bank of new york Mellon (U.S)	1 960
PIMCO (U.S) 1	1 920
Morgan Stanley (U.S)	1 900
Amundi (France)	1 790
Total Top 10	41 130

TABLE 8.2 – Capitaux sous gestion des 10 premiers gérants mondiaux

En conséquence, nous allons proposer un nouveau modèle basé sur des critères plus intelligibles afin de voir, si nous pouvons mieux assurer le capital investi et donc réduire le risque d'activation de la garantie biométrique évoquée dans la première partie.

8.3 Proposition N°3 : Un modèle basé sur les valeurs et variations d'un ensemble de variables de type trading

Nous présenterons un modèle basé sur un algorithme principal d'achat et de vente en fonction de critères multiples. Nous allons progressivement complexifier ce modèle pour l'optimiser, nous présenterons ainsi 3 versions à contraintes croissantes. Le principe du

modèle va être de disposer deux de deux poches, un poche action et une poche trésorerie.

- Les ventes d'actions seront affectées en à une ligne de trésorerie
- Les achats d'actions seront prélevés sur la ligne de trésorerie dans la limite maximale attribuée par titre dans la fiche produit.

Les données en entrées du modèle seront :

- La liste des titres du secteur étudié,
- les limites maximales d'investissement sur la base de dires d'experts.
- les cours des titres,
- les variations de cours entre t et t-n
- les écarts-types, moyenne mobiles entre t et t-n
- les sur-performances
- les avancés / déclins
- la force relative de chaque titre
- le PER

L'hypothèse est que le modèle est alimenté, chaque jour, par les cours de clôture soit par approximation 30 minutes avant la clôture de la séance. Dans le monde réel, il serait alimenté en continu, mais la nature des flux serait différente. Il est à noter que sur les écarts de cours entre la clôture J et l'ouverture J+1 sont marginaux. Pour le CAC40 FR0003500008, depuis le 3 janvier 2000, l'écart moyen est de 0,01848%. cf annexe [A9].

8.3.1 Synthèse des contraintes des 3 modèles de "Trading"

Règles	Modèle N°1	Modèle N°2	Modèle N°3
N°1 : Achat si - le marché est haussier (*Bull*), - le secteur est haussier (*Bull*) - le titre est haussier (*Bull*) - les volumes sont en croissance (moyenne mobile 5 jours). La part investie sera alors le maximum entre l'écart du poids du titre dans le portefeuille et la limite maximale d'investissement et le montant disponible dans la ligne trésorerie	Oui	Oui	Oui
N°2 : Vente si - Le titre est baissier et passe en dessous de sa moyenne mobile à 30 semaines pendant au moins 2 jours consécutifs.	Oui	Oui	Oui
N°3 : Achat si - Le titre est haussier et le titre superforme de 15% l'indice du secteur sur la base d'une performance à 3 mois.	Non	Oui	Oui
N°4 : Vente si - Le titre est sousperforme de 15% l'indice du secteur sur la base d'une performance à 3 mois.	Non	Oui	Oui
N°5 : Vente au prorata si - le capital investi atteint 150% du capital d'origine, 25% de la valeur est désinvestie et sécurisée sur un compte de dépôt à terme que nous considérerons rémunéré à 0%	Non	Non	Oui

TABLE 8.3 – Synthèse des contraintes des 3 modèles de Trading

8.3.2 Performances des modèles de "Trading"

Le détail des performances par modèles avec le nombre de transactions associées est en annexe.

FIGURE 8.11 – Performance comparée des modèles de "Trading" dynamique sur la poche action

Nous constatons que les modèles de Trading (N°1, N°2 et N°3) basés sur une gestion dynamique des actifs au jour le jour permettent une surperformance par rapport à la gestion passive.
Remarque : L'actualisation des données au 31.08.2022 pour prendre en compte le conflit Ukrainien montre une surperformance du modèle de Trading N°3 qui sécurise les gains et investi prioritairement sur les titres qui superforment l'indice sectoriel.

8.3.3 Synthèse du modèle de Trading retenu (N°3)

Performances du modèle de 2018 à 2022

En rajoutant les gains liés aux dividendes perçus nous obtenons :

date	Contre-valeur euro poche action	Contre-valeur euro toutes poches	Dividendes	Total position	Rendement Total	Rendement annualisé
02/01/2018	100 000,00	100 000,00	0,00	100 000,00		
02/01/2019	96 626,56	96 626,56	1 470,59	98 097,15	**-1,90%**	**-1,90%**
02/01/2020	120 119,41	120 119,41	3 260,93	123 380,34	23,38%	11,69%
30/06/2020	137 136,17	137 136,17	4 776,54	141 912,71	41,91%	16,77%
04/01/2021	134 473,03	171 594,20	5 350,58	176 944,78	76,94%	25,65%
03/01/2022	100 653,66	144 677,84	5 904,23	150 582,07	50,58%	12,65%
30/08/2022	98 371,34	180 159,35	6 738,08	186 897,44	86,90%	19,31%

TABLE 8.4 – Performance du modèle de trading N°3 de 2018 à 2022

Nous constatons des performances hors fiscalité et frais, relativement élevées car le modèle est paramétré pour capter et sécuriser la plus-value par des arbitrages en cas de choc de marché. Nous constatons en effet que pour les années 2021 et 2022, nous avons respectivement 21,63% et 45,39% de l'encours qui ont été sécurisés au niveau de la poche trésorerie.

Remarque : Dans nos modélisations, nous n'avons pas encore tenu compte des coûts de transaction. Si les études [23] font état de leur importance, il apparaît cependant que les assureurs ou les bancassureurs ont des filiales bancaires permettant de les réduire. Les mutuelles en fonction de leurs encours ont également la capacité de négocier ces frais. L'étude des conditions tarifaires montrent que les frais sont dans la fourchette ci-dessous :

Catégorie	Fourchette Basse	Fourchette Haute
Droit de garde	0,2 bp	0,6 bp
Frais de transaction (achat / vente) Tenue du passif des fonds, Exécution des ordres, Tenue des comptes, Règlement / livraison, Attestation...	2 euros / Titre / compte 1 euro (titre Euroclear simple détenu par IF [2]) 30 euros (titre non Euroclear simple détenu par IF) 15 euros (titre Euroclear simple détenu par autre IF)	30 euros / Titre / compte 3 euros (titre Euroclear simple détenu par autre IF) 5 euros (titre Euroclear simple détenu par IF) 100 euros (titre non Euroclear simple détenu par IF)
Virement domestique	0,5 euro	1 euro
Traitement des OST, Création d'ISIN, Distribution de dividende, Fusion / absorption, Liquidation / scission, Remboursement partiel, Changement de dénomination	50 euros / ISIN	3000 euros / ISIN

TABLE 8.5 – Conditions tarifaires basses et hautes des dépositaires

Les assureurs ont une capacité de négociation des frais en fonction de leur pouvoir de marché (encours sous gestion) et de leur relation avec une éventuelle banque dans le cadre d'un groupe de Bancassureur.
Concernant les unités de compte, il existe une pratique courante de rétro-commissions qui augmente le résultat de l'assureur. Concrètement, les gérants de fonds vont reverser une partie des frais de gestion d'unité de compte facturés à l'assuré au bénéfice de l'assureur [3].
L'observation du marché donne une fourchette de rétro-commission de [0% à 3%] avec un taux moyen d'environ 0,6% de l'encours sous gestion délégué annuel. Les rétrocessions sont réalisées au niveau support (ISIN) et non gestionnaire de fond (exemple : EDP : Edmont de Rotchild, LBPAM, ODDO...)

3. La base de la facturation est en général la position d'inventaire en fin de mois (valeur boursière) sur laquelle le taux de rétro-commission contractuel est appliqué prorata temporis

Performances du modèle sur 11 ans

Nous allons présenter successivement la performance globale du modèle puis la plus ou moins value latente pour identifier les points en dessous du capital investis de nature en activer la garantie biométrique.

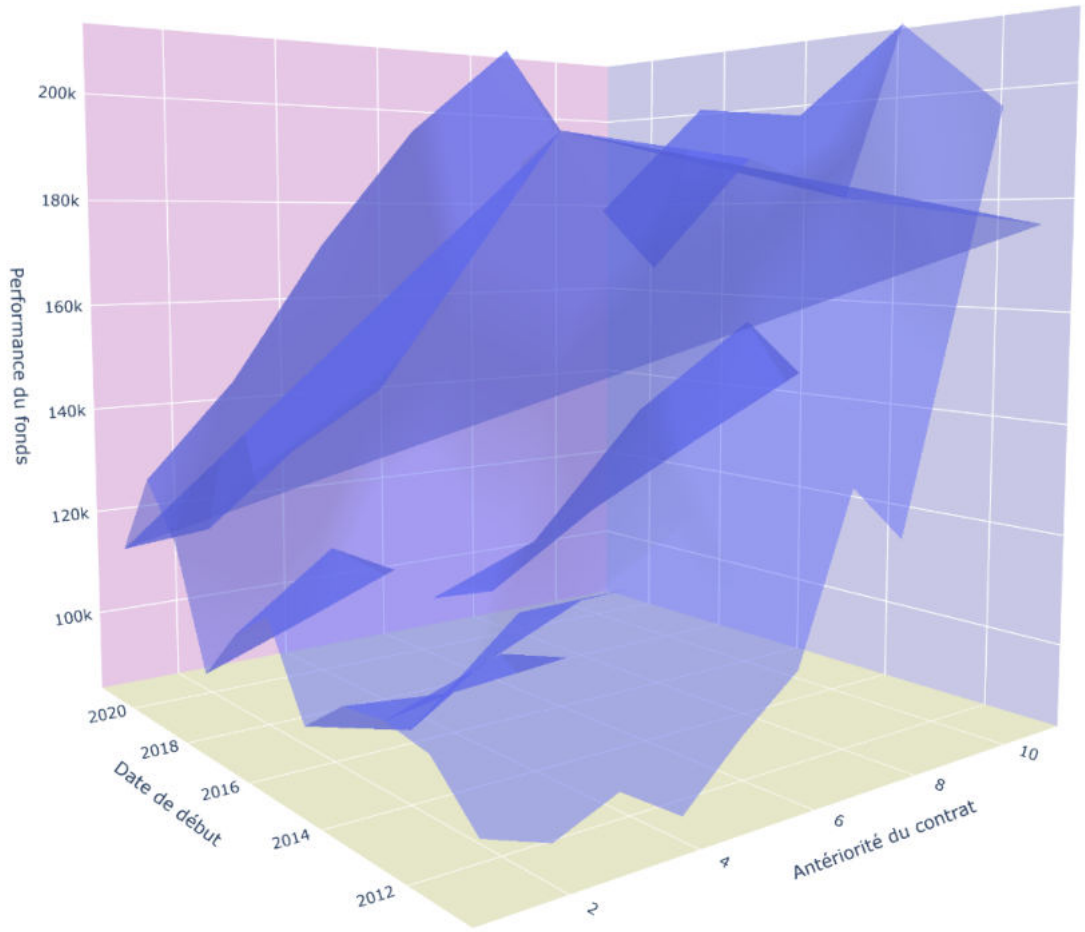


FIGURE 8.12 – Performance finale du modèle Trading dynamique N°3 sur 11 ans

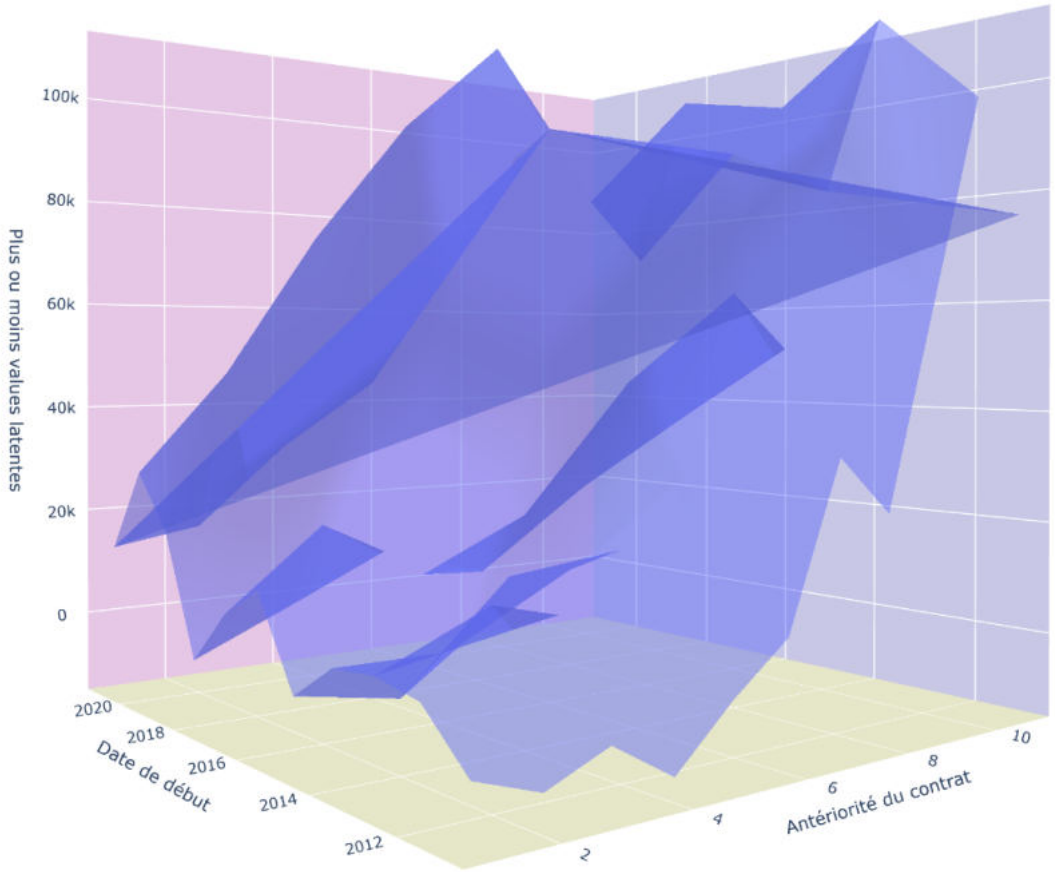


FIGURE 8.13 – Plus ou moins values latentes du modèle Trading dynamique N°3 sur 11 ans

Nous constatons trois rares périodes de moins values latentes la première année en 2011, 2015 et 2018. Le modèle a généré une plus value très importante les autres années et en croissance avec l'antériorité de l'investissement.

Performances moyennes du modèle : poche "actions"

La performance moyenne par antériorité de la poche action du support énergie (Base : 2011 a 2022) est :

Antériorité du contrat	Moyenne de Performance	Moyenne de performance annualisée	Moyenne du nombre de transactions
1	6,84%	6,84%	6,73
2	12,61%	6,31%	44,70
3	28,79%	9,60%	155,60
4	31,69%	7,92%	210,63
5	47,61%	9,52%	285,00
6	56,43%	9,40%	350,50
7	63,90%	9,13%	473,00
8	73,02%	9,13%	533,00
9	84,55%	9,39%	527,00
10	95,36%	9,54%	380,50
11	75,44%	6,86%	831,00

TABLE 8.6 – Performance moyenne par antériorité du modèle de trading N°3 sur la poche action du secteur énergie

Nous constatons que les performances de ce modèle sont correctes, particulièrement lorsque nous corrélons ces performances aux nombres de transactions annuelles moyennes, qui rappelons le, sont généralement des frais fixes pour les assureurs.
Nous allons procéder à la prise en compte

- des frais sur encours
- de la fiscalité prélevées au fil de l'eau sur les dividendes (FLAT TAX)
- du coût bancaires des transactions
- de l'éventuelle activation de la garantie biométrique

L'encours final sera égal à la somme des valeurs boursières additionnée des dividendes auxquels ont été déduits la fiscalité (FLAT TAX).
La déduction entre les frais sur encours et les frais bancaires va nous donner la marge technique de l'assureur sur ses placements.
Les performances pour l'assureur sont :

Années	Moyenne Encours final brut	Moyenne Frais cumulés sur encours	Moyenne des transactions (Nb)	Moyenne du taux des charges bancaires sur frais
1	107 761,59	1 293,14	6,73	1,04%
2	114 567,42	2 749,62	44,70	3,25%
3	132 896,75	4 784,28	155,60	6,50%
4	136 058,05	6 530,79	210,63	6,45%
5	153 124,95	9 187,50	285,00	6,20%
6	163 280,09	11 756,17	350,50	5,96%
7	171 687,43	14 421,74	473,00	6,56%
8	181 902,57	17 462,65	533,00	6,10%
9	194 300,55	20 984,46	527,00	5,02%
10	205 873,86	24 704,86	756,00	6,12%
11	186 089,27	24 563,78	581,00	4,73%

TABLE 8.7 – Performance moyenne par antériorité pour l'assureur du modèle retenu de trading N°3 sur la poche action du secteur énergie

Les performances pour l'assuré sont :

Année	Moyenne de l'encours final net	Moyenne de la performance nette assuré	Moyenne de la performance annualisée
1	106 468,45	6,47%	6,47%
2	111 817,81	11,82%	5,91%
3	128 112,47	28,11%	9,37%
4	129 527,26	29,53%	7,38%
5	143 937,45	43,94%	8,79%
6	151 523,92	51,52%	8,59%
7	157 265,69	57,27%	8,18%
8	164 439,92	64,44%	8,05%
9	173 316,09	73,32%	8,15%
10	181 168,99	81,17%	8,12%
11	161 525,49	61,53%	5,59%

TABLE 8.8 – Performance moyenne par antériorité pour l'assuré du modèle de trading retenue (N°3) sur la poche action du secteur énergie

Nous constatons que les performances nettes pour l'assuré sont positives et supérieures aux taux servis par les assureurs sur leurs fonds euro. Pour mémoire, selon l'ACPR, le taux de rendement moyen était de 1,46% en 2019, contre 1,70% en 2018 et 2017, 1,80% en 2016, 2,30% en 2015, 2,50% en 2014 et 2,80% en 2013 [37].
Nous allons à présent tester le modèle sur différents secteurs.

8.3.4 Robustesse et axes d'amélioration du modèle de "Trading" retenu

Le modèle de trading retenu (N°3), au niveau de la poche "actions" a été testé sur plusieurs secteurs :

- Aéronautique
- Automobile
- Énergie
- Immobilier
- Industrie
- Finance
- Santé

Les performances sont les suivantes (représentation graphique ci-après).

Poche actions Capital T0 : 100 000 euros	02/01/2019	02/01/2020	04/01/2021	03/01/2022	30/08/2022
Industrie	101 056,72	107 301,42	**98 865,68**	130 554,47	105 972,47
Immobilier	**88 080,97**	140 219,57	138 638,28	130 734,58	112 960,53
Automobile	**69 613,93**	**96 507,91**	**93 907,62**	**92 397,46**	**64 446,50**
Finance	**83 096,32**	112 684,09	115 425,91	122 800,90	114 913,46
Santé	**97 109,39**	123 332,15	141 956,57	156 354,81	152 578,61
Aéronautique	111 570,15	135 156,62	110 495,16	131 611,81	121 393,95
Énergie	**98 131,96**	114 833,16	158 445,38	129 618,54	154 295,05
Panier équi-pondéré	**92 665,63**	118 576,42	122 533,51	127 724,65	118 080,08

TABLE 8.9 – Position des UC sectorielles de 2018 à 2022 en valeur boursière

date	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	4,5 ans
UC Industrie	1,06%	7,30%	**-1,13%**	30,55%	5,97%
UC Immobilier	**-11,92%**	40,22%	38,64%	30,73%	12,96%
UC Automobile	**-30,39%**	**-3,49%**	**-6,09%**	**-7,60%**	**-35,55%**
UC Finance	**-16,90%**	12,68%	15,43%	22,80%	14,91%
UC Santé	**-2,89%**	23,33%	41,96%	56,35%	52,58%
UC Aeronautique	11,57%	35,16%	10,50%	31,61%	21,39%
UC Energie	**-1,87%**	14,83%	58,45%	29,62%	54,30%
Panier équi-pondéré	**-7,33%**	18,58%	22,53%	27,72%	18,08%
Fonds euro taux annuel moyen	1,80%	1,50%	1,30%	1,30%	à venir
Fonds euro taux cumulé	1,80%	3,33%	4,67%	6,03%	à venir

TABLE 8.10 – Performance cumulée du modèle sur les UC sectorielles : Modèle Trading N°3

Nous constatons que :

- sur les 7 secteurs testés, 6 génèrent une plus value latente à terme.
- Le choc du Covid19 a été atténué, il aurait cependant pu être réduit par l'intégration de données *intra-days* dans le modèle. En effet, au mois de mars 2020 des baisses journalières de supports de l'ordre de 10% ont été constatées, par exemple (-8.51% le 12 mars 2020 et -9,81% sur WENDEL ou encore -16,25% le 12 mars 2020 sur ALTAREA).
- Le secteur automobile est en moins value, inférieure à l'indice "automobile", cf annexe. Le secteur "automobile" est baissier sur l'ensemble des supports, le modèle n'a pas arbitré suffisamment vers la poche trésorerie pour sécuriser les encours.
- les performances brutes (hors produits financiers et frais) sont très supérieures au taux servies sur le fonds euro.

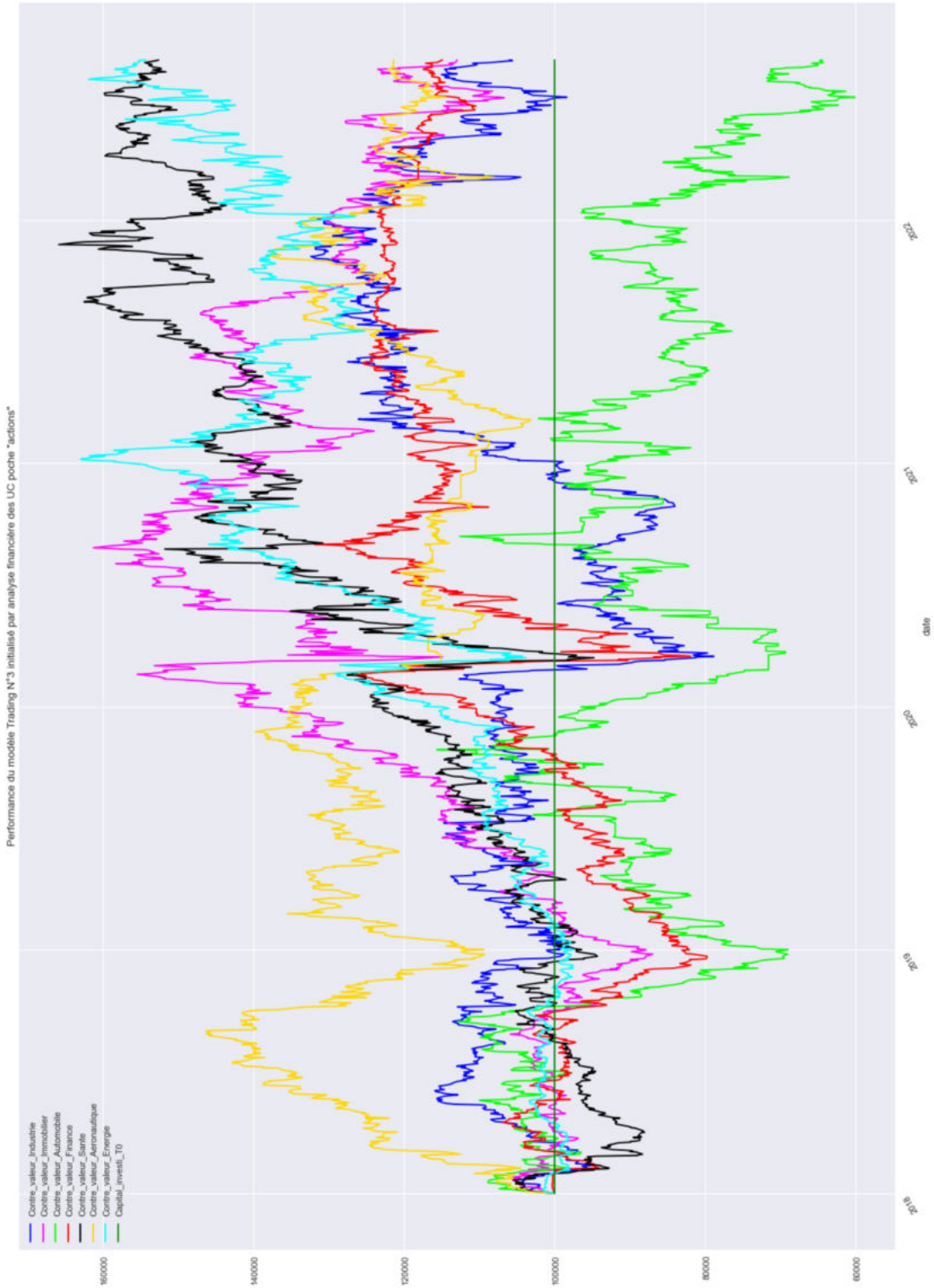


FIGURE 8.14 – Performance du modèle de trading sur la poche "actions" sur plusieurs secteurs

8.3.5 Performances du modèle retenu avec les deux poches : actions et obligations

L'intégration de la poche "obligations" avec une part de 60%, en complément de la part actions pour 40%, dans le support UC énergie, nous donne les performances ci-dessous. Notons que les hausses et des baisses importantes en forme de "dents de scie" correspondent aux tombées de coupons de la poche "obligations" et à l'impact sur les cotations associées. Au 1er janvier 2022, la valeur de marché brute est de 122 144,30 euros dont 7 587,22 euros de produits financiers. L'UC "Énergie" avec les deux poches "actions" et "obligation" à une performance brute totale de 22,14% et une performance brute totale annualisée de 5,54%.

FIGURE 8.15 – Performance du modèle avec les deux poches : 40% actions et 60% obligations VS benchmark 100% actions en gestion passive

La performance de l'UC "Énergie" avec les deux poches sur 11 ans par antériorité est décrite ci-dessous :

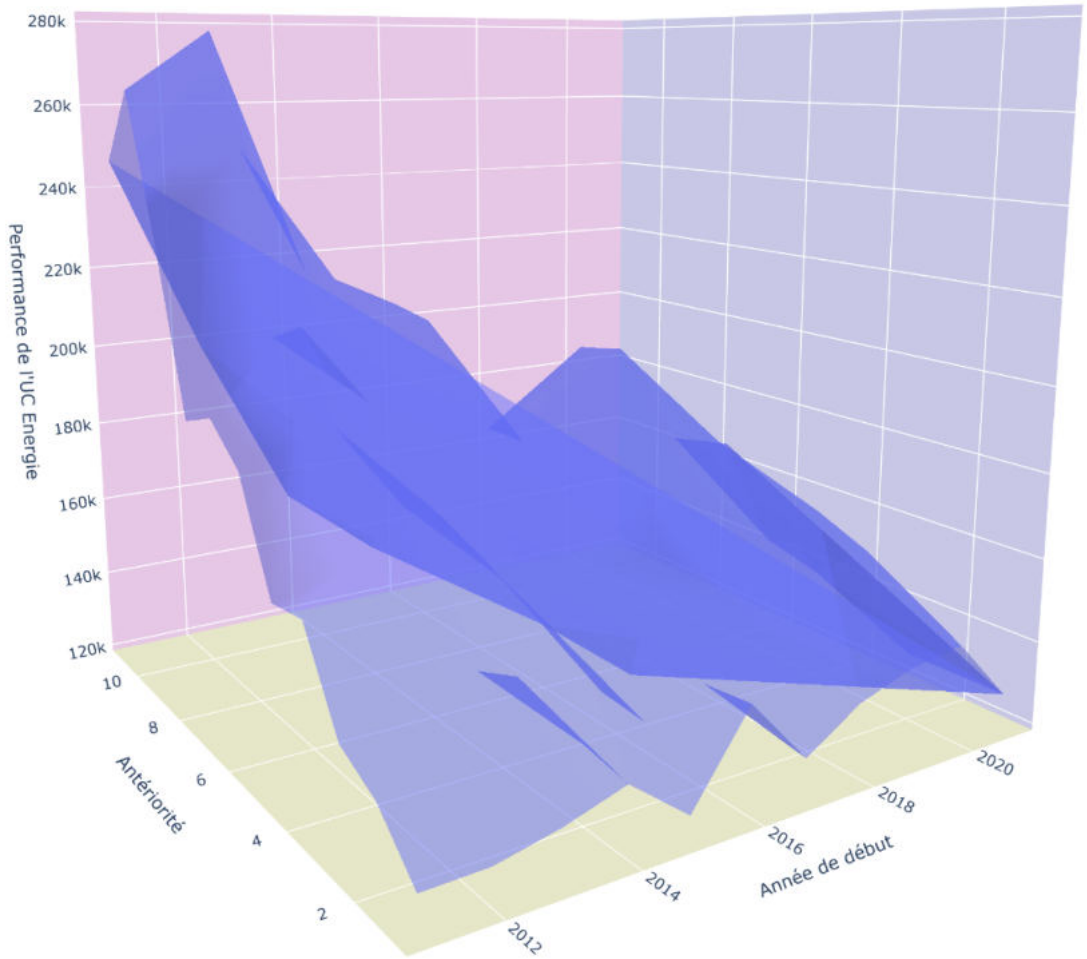


FIGURE 8.16 – Performance UC (actions& obligations) du modèle Trading dynamique N°3 sur 11 ans

Nous obtenons :

Antériorité du contrat	Encours brut moyen	Moyenne de Performance brute	Moyenne de Performance Annualisé
1	132 336,72	32,34%	32,34%
2	147 887,60	47,89%	23,94%
3	157 253,61	57,25%	19,08%
4	176 889,47	76,89%	19,22%
5	176 512,56	76,51%	15,30%
6	188 840,79	88,84%	14,81%
7	197 399,47	97,40%	13,91%
8	203 843,59	103,84%	12,98%
9	223 677,37	123,68%	13,74%
10	232 631,80	132,63%	13,26%
11	246 485,88	146,49%	13,32%

TABLE 8.11 – Performance moyenne brute (produits financiers inclus hors frais et fiscalité) par antériorité pour l'assuré du modèle retenu de trading (N°3) sur l'UC secteur énergie

Nous pouvons conclure que, même en incluant les frais et la fiscalité, les performances de ce type de modèle prudentiel sont correctes.

Chapitre 9

Conclusion Partie II

Les méthodologies d'allocation d'actifs en fonction de la méthode sous-jacente utilisée, offrent des performances diverses.
La méthode d'analyse financière pure souffre du manque de réactivité lors des chocs financiers, ce qui entraine des pertes à court terme, pouvant être évitée par sécurisation sur une poche trésorerie. Par exemple le Titre Berkshire Hataway a subi les baisses importantes -23,52% au début du covid et au début du conflit ukrainien. (Cf annexe [A15])
La méthode la plus efficace est la technique de "Trading" initialisée par analyse financière pour la poche action ;
Cette méthodologie a surperformé la méthode de machine learning par renforcement à initialisation identique.
Nous obtenons ainsi les performances du 01.01.2018 au 03.01.2022 de :

Classement	Méthode	Performance Nette 03/01/2022
3	Machine Learning "par renforcement"	24%
2	Analyse Financière	34,32%
1	Trading 1, Trading 2, Trading 3	50,58%

Table 9.1 – Classement des méthodes d'allocation

Cependant, nous devons complexifier ce modèle en intégrant une proportion variable entre les poches et en prenant en compte les contraintes d'allocation du passif. L'objectif,pour l'assureur proposant ce type de garantie, est d'avoir la meilleure adéquation entre l'actif et le passif, c'est ce que nous proposerons en partie 3 sur la base du modèle le plus efficient défini en partie 2 (Trading N°3).

Troisième partie

Modélisation des UC sectorielles et des garanties associées (dynamique)

Objectif et démarche

Rappelons que depuis les années 80, les assureurs sont très sensibles aux problématiques de gestion Actif -Passif ou ALM (*Assets and Liabilities Management*) puisque plus de 198 compagnies dans le monde ont fait faillite en raison des critères macro-économiques [26].
Dans la partie III, l'objectif va être d'optimiser le modèle retenu de la partie II (modèle Trading N°3) en intégrant :

- l'**évolution de l'environnement** dont principalement les changements de **taux de marché** qui historiquement impactent de manière différenciée les performances des catégories d'actif.
- les **contraintes du passif** avec les **lois de rachats** associées

La démarche suivie va consister à intégrer des problématiques ALM de plus en plus complexes afin d'identifier la pertinence de rajouter des contraintes dans le modèle par rapport à l'activation de la garantie biométrique.
Nous réfléchirons ainsi aux trois problématiques :

- fiscales qui réduisent la performance
- d'ajustement Actif / Passif
- de réallocation inter-poche avec les deux approches **déterministes** et **stochastiques**.

Nous allons donc comparer quatre modèles pour conclure sur les éléments les plus important à prendre en compte pour l'assureur :

- le premier axé sur la **stabilité** (CPPI)
- le second axé sur l'**environnement** externe (Taux)
- le troisième axé sur le **passif** de l'assureur (Duration)
- le quatrième axé sur la **performance** (Réallocation stochastique intra-poche).

Présentons les règles des quatre modèles d'optimisation.

Contraintes	Modèle CPPI	Modèle Taux (déterministe)	Modèle passif (duration)	Modèle stochastique
Poche "Action"				
N°1 : Achat si - le marché est haussier (*Bull*), - le secteur est haussier (*Bull*) - le titre est haussier (*Bull*) - les volumes sont en croissance (moyenne mobile 5 jours). La part investie sera alors le maximum entre l'écart du poids du titre dans le portefeuille et la limite maximale d'investissement et le montant disponible dans la ligne trésorerie	Oui	Oui	Oui	Oui
N°2 : Vente si - Le titre est baissier et passe en dessous de sa moyenne mobile à 30 semaines pendant au moins 2 jours consécutifs.	Oui	Oui	Oui	Oui
N°3 : Achat si - Le titre est haussier et le titre superforme de 15% l'indice du secteur sur la base d'une performance à 3 mois.	Oui	Oui	Oui	Oui
N°4 : Vente si - Le titre est sousperforme de 15% l'indice du secteur sur la base d'une performance à 3 mois.	Oui	Oui	Oui	Oui
N°5 : Vente au prorata si - le capital investi atteint 150% du capital d'origine, 25% de la valeur est désinvestie et sécurisée sur un compte de dépôt à terme que nous considérerons rémunéré à 0%	Oui	Oui	Oui	Oui
Poche "Obligation"				
Durée non perpétuelle	Oui	Oui	Oui	Oui
Taux de rendement actuariel supérieur à 1,7%	Oui	Oui	Oui	Oui
Notation supérieure à BBB& Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

TABLE 1 – Synthèse des modèles avec contraintes externes - partie N°1/2

Contraintes	Modèle CPPI	Modèle Taux (déterministe)	Modèle passif (duration)	Modèle stochastique
Réallocation				
Réallocation en fonction des taux de marché	Non	Oui	Oui	Non
Réallocation en fonction du passif (duration)	Non	Non	Oui	Oui
Réallocation en fonction de la performance	Non	Non	Non	Oui

TABLE 2 – Synthèse des modèles avec contraintes externes - partie N°2/2

Chapitre 1

Rappel des éléments fiscaux

En préambule nous rappelons quelques éléments fiscaux issus de la législation et de son interprétation dans le bulletin Officiel des Finances publiques et Impôts : [10]
Les fonds communs de placement sont régis soit par la directive 2009/65/CE du Parlement européen et du Conseil du 13 juillet 2009 portant coordination des dispositions législatives, réglementaires et administratives concernant certains organismes de placement collectif en valeurs mobilières (directive « OPCVM IV » ou « UCITS IV ») soit par la directive 2011/61/UE du Parlement européen et du Conseil du 8 juin 2011 sur les gestionnaires de fonds d'investissement alternatifs.
En application des dispositions de l'article L. 214-8 &L. 214-24-34 du Code Monétaire Financier, un fonds commun de placement (FCP : organisme sui generis), qui n'a pas la personnalité morale, est une copropriété d'instruments financiers et de dépôts dont les parts sont émises et rachetées à la demande, selon le cas, des souscripteurs ou des porteurs à la valeur liquidative majorée ou diminuée, selon les cas, des frais et commissions. Les parts peuvent être admises aux négociations sur un marché réglementé.
Notons que les gains réalisés par les fonds dans le cadre de leur gestion n'entrent pas dans le champ d'application du I de l'article 150-0 A du code général des impôts (CGI), à la condition qu'aucune personne physique agissant directement ou par personne interposée ne possède plus de 10 Ainsi, le régime fiscal des sommes ou valeurs réparties par le fonds commun de placements aux porteurs de parts personnes physiques est notamment défini à l'article 137 bis du CGI, au 3 de l'article 158 du CGI, à l'article 193 du CGI et à l'article 199 ter A du CGI.
Le fait générateur de l'imposition personnelle de chacun des porteurs de parts d'un fonds commun de placement réside, non pas dans l'encaissement par le dépositaire des produits provenant du portefeuille ou des autres valeurs ou sommes composant les actifs du fonds, mais dans la mise en paiement effective de ces produits par le gérant du fonds, c'est-à-dire leur redistribution ou répartition entre les membres du fonds (CGI, art. 137 bis, I-al. 1). Les sommes ou valeurs réparties par un fonds commun de placement constituent en principe des revenus de capitaux mobiliers perçus par les porteurs de parts à la date de cette répartition (CGI, art. 137 bis, I-al. 1).

Pour les porteurs de parts domiciliés fiscalement en France, ce que nous supposerons dans notre modélisation, la somme allouée à chaque part à l'occasion de toute répartition effectuée par le fonds est ventilée en fonction de sa nature et son origine (couponnage) pour permettre au bénéficiaire de déclarer distinctement la fraction de la somme répartie au regard du régime fiscal qui leur aurait été appliqué si les revenus n'avaient pas transité par le fonds (BOI-RPPM-RCM-10-40).
Ainsi, les porteurs de parts personnes physiques sont soumis à l'impôt sur le revenu dans les conditions de droit commun sur les produits répartis par le fonds selon leur nature (dividendes, intérêts, etc.).
Pour la détermination de l'impôt sur le revenu dû par le bénéficiaire des sommes réparties par le fonds, l'abattement de 40% est applicable à la fraction de ces sommes ayant la nature de dividendes éligibles au dit abattement lorsque, toutes conditions étant par ailleurs remplies, ce contribuable opte pour l'imposition de l'ensemble de ses revenus mobiliers suivant le barème progressif de l'impôt sur le revenu (BOI-RPPM-RCM-20-15).
En synthèse simplificatrice :

- Les plus ou moins-values sont imposées au niveau de la vente des supports sur la base de la variation de valeur liquidative : $VL_t - VL_{t0}$ des parts correspondant aux actifs gérés.
- Les coupons et dividendes sont, eux, imposés au fil de l'eau.

Chapitre 2

Problématiques ALM : Stratégies classiques adaptées au produit modélisé

L'objectif de la gestion Actif Passif est de réaligner les valeurs nettes comptables et la duration de l'actif et du passif [43], [24]. Le décalage entre actif et passif est lié au fait que les gérants de fonds souhaitent des investissements obligataires plus longs et plus rémunérateurs pour augmenter leur marge.
Anecdotiquement, les allemands ont les durations de contrats d'assurance vie les plus longues du marché européen et les italiens les plus courtes. Le pilotage ALM est ainsi basé sur les interactions naturelles qui existent entre actif et passif comme les vagues de rachat précoces poussant à la vente d'obligations...
La modélisation des taux est déterminante dans le processus de gestion actif/passif des portefeuilles d'assurance vie. Un scénario de hausse des taux génère une baisse de la valeur de marché des obligations, poids prépondérant dans les portefeuilles d'actifs. L'assureur s'il doit vendre des obligations de manière prématuré à un niveau inférieur au capital investi augmenté des frais prélevés peut connaitre de pertes si les valeurs cédées sont inférieures à ce montant.
L'ALM vise à

- maximiser l'immunisation par :
  - l'équilibre de duration entre son actif et son passif
  - l'adossement des flux de cash-flow sur ceux de passif
- limiter les risques de réinvestissement
- limiter les risques de liquidation

Les principaux modèles sont les modèles ALM stochastiques basés sur de multiples scénarios. Tout l'enjeu va être de définir les modalités de valorisations des actifs et du passif afin de déterminer les indicateurs de financier a estimer (résultat, rentabilité, marge...).

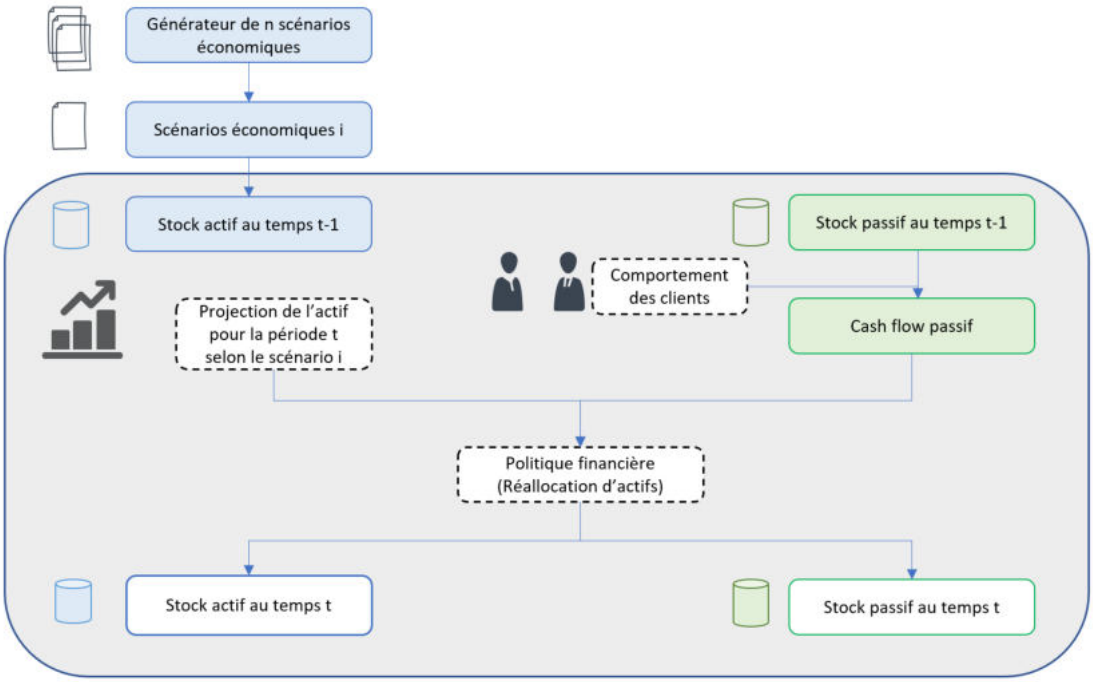


FIGURE 2.1 – Modélisation ALM stochastiques basés sur de multiples scénarios

2.1 Modélisation coté "Actif"

Coté "Actif", nous détaillerons ainsi les modélisations ALM classiques des trois catégories principales de nos supports :

- les obligations d'entreprises
- les actions
- la trésorerie

2.1.1 Les obligations d'entreprises :

Notons qu'une obligation d'entreprise est valorisée en deux parties :

- une partie remboursée y compris en cas de défaut
- une partie dont le remboursement dépend du défaut

Désignons : $MV^i(t)$: la valeur de marché projetée d'une obligation d'entreprise à la date t dans le scénario i.
RV : la valeur de remboursement de l'obligation
T la maturité
t_r est le taux sans risque de maturité correspondant additionné d'une prime de risque $\delta_{dfaut}(t)$ est la situation de défaut. C'est une indicatrice qui est égale à 0 si défaut et 1 autrement. $R^i(N, t, T - t/2)^{T-\frac{t}{2}}$ est le taux de l'obligation dans le cadre du scénario i, à

la date t, avec une maturité $T-\frac{t}{2}$ et une note N. $D(T-\frac{t}{2})$ est le déflateur correspondant à la maturité $T-\frac{t}{2}$.

$$MV^i(t) = RV \times \left(\frac{(1-t_r) \times \delta_{defaut}(t)}{(1+R^i(N,t,T-\frac{t}{2}))^{T-\frac{t}{2}}} + t_r \times D(T-\frac{t}{2}) \right)$$

Pour l'évolution de N : la notation d'entreprise, un scénario Stochastique d'évolution est habituellement implémenté. En entrée du modèle, une matrice de probabilité d'évolution d'une note à l'autre est intégrée (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, DEFAULT : soit 10 possibilités).
Remarque : La norme Solvabilité II impose à minima 7 notations.
Ces probabilités d'évolutions ne sont pas figées dans le temps. Pour prendre en considération cette problématique, une chaine de Markov inhomogène doit être appliquée. La composante dynamique de la matrice est généralement basée sur le modèle COX INGERSOLL ROSS (CIR). Nous avons ainsi :

$$dX_t = a(b-X_t)dt + \sigma\sqrt{(X_t)}dW_t$$

La matrice A de passage du niveau de crédit est diagonalisée :

$$A = P \times D \times P^{-1}$$

Avec P la matrice constituée des vecteurs propres de A et D.

$$D = \begin{matrix} d_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & d_{10} \end{matrix}$$

Habituellement, il y a une transformation en dynamique $D \rightarrow \widehat{D_t} = E\left[e^{\int_0^t X_s ds} \times D\right]$ ou t désigne le nombre de période. Nous obtenons :

$$\widetilde{D_t} = \begin{matrix} \widetilde{d_1(t)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \widetilde{d_{10}(t)} \end{matrix}$$

$$\widetilde{D_t} = E\left[e^{(\int_0^t X_s ds)) \times D}\right]$$

avec $t \in [0, M]$,pour chaque période de projection

$$\widetilde{d_t} = E\left[e^{(d_i \times \int_0^t X_s ds))}\right]$$

Avec i la notation de 1 à 10.
Le processus de COX INGERSOLL ROSS vérifie que pour tout α et β nous avons :

$$E\left[e^{-\alpha \times X_t - \beta \times (\int_0^t X_s ds)}\right] = e^{-\alpha \times f(\alpha;\beta,t) - X_0 \times g(\alpha,\beta,t)}$$

Avec les fonctions f et g correspondant à :

$$f(\alpha,\beta,t) = -\frac{2}{\sigma^2} \times ln(\frac{2\gamma e^{\frac{\gamma t-1}{\gamma}}}{\sigma^2\alpha(e^{\gamma t}-1)+\gamma-b+e^{\gamma_i t}\times(\gamma_i+b)}$$

$$\gamma_i = \sqrt{b^2-2d_i\sigma^2}$$

$$g(0,-d_i,t) = \frac{-2d_i(e^{\gamma_i}t-1)}{\gamma_i-b+e^{\gamma_i t}(\gamma_i+b)}$$

La matrice de crédit dynamique sera ainsi :

$$\widetilde{A_t} = P \times \widetilde{D_t} \times P^{-1}$$

2.1.2 Les actions :

Les actions ont théoriquement un rendement, plus élevé que les obligations, associé à une volatilité plus importante. Les scénarios sur les actions à chaque période (semestre par exemple) nous permettent d'avoir une valeur de marché :

$$MV_j^i(t) = MV_j^i(t-1) \times (1 + t^{i,j}_{croissance}(t) - t^{i,j}_{dividende}(t))$$

Avec : Le scénario i
L'actif risqué j $t^{i,j}_{croissance}(t)$ le taux de croissance de l'actif risqué j dans le scénario i à l'instant t
$t^{i,j}_{dividende}(t)$ le taux de dividende de l'actif risqué j dans le scénario i à l'instant t

2.1.3 Le CASH :

Le cash est augmenté :
- du versement des coupons des obligations a taux variable : $C_0(t)$
- du versement des coupons de dividende des actions : D(t)
- du remboursement du nominal des obligations qui arrivent à maturité N(t)
- des intérêts par le placement du cash

$$\text{Cash(t)} = \text{Cash(t-1, apres réalocation d'actif)} \times (1 + r^i(t,1)) + C_0(t) + D(t) + N(t)$$

2.2 Modélisation coté "Passif"

Le passif correspond à l'engagement de l'assureur décrit par les "models points" ou produits souscrits.
Dans le cadre du produit étudié, le passif sera impacté par
- les couts relatifs à la prime commerciale
- les coûts des commissions commerciales de l'encours

– le coût de la garantie biométrique que nous tentons de limiter par l'allocation dynamique.

Notons le passif de l'assureur correspondant à :

$$P(t_0) = \frac{F(t_0)}{(1+t_m)^{n_m}}$$

t_m est le taux d'actualisation mensuel est :
n_m est le nombre de mois avant échéance statistiquement prévue est fixée
$F(t_0)$ correspond au flux versé par l'assuré en t=0 net de chargement.
Par simplification du modèle pour éviter les problématiques de gestion de pile FIFO à l'actif nous considèrerons qu'une prime investie correspond à un contrat. Nous avons ainsi à chaque période, un passif net de chargement de :

$$P(t) = P(t-1) \times (1+t_m)$$

$$P(t) = F(t_0) \times (1+t_m)^{(n_t - n_m)}$$

2.3 Modélisation Actif et Passif du produit

Dans le produit que nous modélisons au niveau de l'actif, En t=0 nous avons investi dans i actifs :

$$A(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i,0} \times Val_{i,0}$$

En t=t nous avons un actif correspondant à

$$A(t_t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t) + \sum_{t=0}^{t} \sum_{i=1}^{\infty} RevA_i(t_t)$$

$$A(t_t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i,t} \times Val_{i,t}(t_t) + \sum_{t=0}^{t} \sum_{i=1}^{\infty} RevA_i(t_t)$$

Avec :
$RevA_i(t_t)$ le revenu cumulé de l'actif i à l'instant t.
$Val_{i,t}$ la valeur de marché de l'actif i en t.
$q_{i,t}$ est la quantité de titre i à l'instant t.
Le surplus brut (positif ou négatif) dégagé est :

$$Sur_P(t_t) = A(t_t) - P(t_0) = A(t_t) - A(t_0)$$

Dans le produit proposé nous utiliserons un taux d'actualisation t_m égal à 0, attendu que l'assureur s'engage a verser le capital initial si une garantie biométrique est activée.

Nous noterons :
f_m : le taux de frais mensuel prélevé
g_m : le taux de correspondant à la garantie biométrique.

Soit, en net, nous avons :

$$Sur_P(t_t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t) + \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{\infty} RevA_i(t_t) - \sum_{t=0}^{t}\sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t) \times (f_t + g_t) - P(t_0)$$

La garantie de l'assureur n'interviendra en t que si

1. le surplus est négatif
2. l'assuré exerce un rachat ou décède et
3. cet exercice intervient dans le cadre d'une garantie biométrique.

En conséquence nous avons un total de garantie de :

$$G(t_t) = Sur_P(t_t) \times \mathbb{1}_{S<0} \times \mathbb{1}_{Rachat} \times \mathbb{1}_{\text{garantie biométrique}}$$

L'objectif va donc être de piloter les actifs afin que nous obtenons min $G(t_t)$
Nous allons introduire 3 catégories d'actifs dans cette modélisation simplifiée. Nous investirons sur les obligations, les actions et nous conserverons une ligne de trésorerie. Ces investissements constitueront les 3 poches de notre support sectoriel. Nous poserons j=1 pour les obligations, j=2 pour les actions et j=3 pour la trésorerie nous obtenons alors :

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{\infty} A_{j.i}(t_t)$$

Il existe différentes stratégies, mais nous devrons dans notre modèle piloter la pondération des différents actifs. Nous introduirons ainsi :

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_{1.i}(t_t)}{\sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_{2.i}(t_t)}{\sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t)}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_{3.i}(t_t)}{\sum_{i=1}^{\infty} A_i(t_t)}$$

Avec :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Il existe plusieurs stratégies d'allocation d'actifs.

- la première "**fixed-mix**" qui consiste en des **rebalancements périodiques** des actifs d'une poche à une autre pour **conserver une proportion constante**. Cette technique de l'assurance de portefeuille à proportion constante : CCPI

"*Constant Proportion Porfolio Insurance*" présente cependant un inconvénient majeur, elle consiste a prélever la surperformance d'une poche pour la transférer dans la sous-performance des autres poches. Nous rencontrons ce principe sur certains fonds euro.

- la technique des **rebalancements périodiques non constants** est utilisée par exemple pour les produits de retraite où sur la base d'un vecteur d'allocation les parts de chaque poche suivent une trajectoire dans le temps. Concrètement la proportion des actions, contrairement à celle des obligations, décroit au fur et à mesure du temps pour arriver à terme à une très large proportion d'obligations. Cette idée souffre du même inconvénient que précédemment.
- l'**allocation tactique** est basée sur des analyses à court-terme sur la base d'indicateurs de type rendement/risque sur chaque poche d'actif. L'inconvénient de cette approche est la non prise en compte de la vision stratégique à long terme.
- l'**allocation basée des modèles d'ALM dynamiques dont la base est la programmation stochastique multi-périodique** (*multistage stochastic programming*). Yasuda (Compagnie d'assurance Yasuda) dans cette option a ainsi combiné des outils de prise de décision et de gestion de risque.

Les études universitaires tendent à indiquer que les techniques de programmation stochastique surperforment la programmation dynamique et la stratégie Fixed-Mix. Leur intérêt est non pas d'avoir des valeurs uniques en sortie mais des processus stochastiques. Ainsi, la politique optimale d'allocation définie initialement est corrigées des recours ultérieurs correspondant a chaque réalisation possible des éléments aléatoires définis dans le processus stochastique à des actions correctrices. Nous devons cependant dès à présent noter que les performances de la programmation stochastique vont dépendre du nombre de périodes du modèle et donc dans le modèle que nous allons proposer, nous allons tenter de modéliser, une stratégie d'allocation qui combine à la fois une vision à court terme et une vision stratégique. En effet, il ne faut pas se priver de l'opportunité de céder les supports en plus-values dans le cas d'une tendance baissière et ou de choc (Covid, Crise 2008...), de stocker la valeur dans une poche de trésorerie avant de la réinvestir ultérieurement. A défaut le coût potentiel de la garantie serait augmenté sans cette latitude. Nous utiliserons ainsi le modèle dynamique le plus performant de la partie N°2 (modèle de trading N°3) que nous adapterons aux contraintes ci-dessous. La vision stratégique, sera prise en compte dans le modèle par l'évolution de la répartition des poches en fonction :

- de critères réels
  - Les courbe de taux d'intérêt seront utilisés pour déterminer une tendance d'inflation, de taux bas...
  - les vecteurs (de rachats prévus, de frais...)
  - modification de rating des supports
- De critères projetés issus du modèle ALM
  - Courbe des taux
  - les vecteurs
  - ...

Nous utiliserons comme benchmark, une proportion constante des indicateurs sectoriels

et un processus stochastique avec recours.

Chapitre 3

Proposition du modèle d'allocation d'actif avec intégration dynamique des contraintes "Passif"

Au sein des entités assurantielles, pour chaque produit commercialisé, une fiche "produit" est réalisée afin de fixer les contraintes d'investissements. Concrètement, la fiche produit va contenir

- les fourchettes de pondération par typologie d'actif d'investissement souhaité,
- la qualité des actifs souhaités,
- les durations attendues...

L'idée dans cette partie est donc d'actualiser à périodicité définie les contraintes d'investissement avec l'évolution du portefeuille de contrat au passif et et de les intégrer dans le modèle que nous avons retenu dans la partie II . L'objectif étant d'adapter le portefeuille d'actifs aux projections du passifs et donc d'ajuster le modèle en introduisant un processus de rétro action ou de feedback. Les données entrantes du modèle relatives au Passif pourront être les données réelles et/ou les données issues des projections des modèles ALM. Nous pouvons par exemple citer : 1.Une courbe des taux prévoyant une période de hausse des taux (inflation)

$$[i_1, i_2, i_3, ..., i_n]$$

2. Une courbe (matrice) d'évolution des anticipations de rachat τ (changement d'hypothèse, ou d'expérience) par année :

$$[\tau_{1.N}, \tau_{2.N}, \tau_{3.N}, ..., \tau_{n.N}]$$

$$[\tau_{1.N+1}, \tau_{2.N+1}, \tau_{3.N+1}, ..., \tau_{n.N+1}]$$

Les modèles d'allocation stratégique d'actifs couplés à des modèles ALM sont apparus au Japon avec la compagnie d'assurance **Yasuda** qui a implémenté un modèle basé sur une programmation stochastique multi-période qui combine des outils de prise de décision et gestion des risques. Il y a trois grandes idées dans ces modèles :

- Soit une **stratégie Fixed-Mix** qui implique un rebalancement périodique des actifs de façon à conserver constante la composition du portefeuille basé sur un vecteur (entre ses différentes catégories) au début de chaque sous-période. Nous pouvons par exemple citer les notions de CPPI (Constant proportion PorfolioInsurance - Perold et Sharpe).
- Soit des options qui relèvent plus de la stratégie d'investissement à court terme
- Soit une vision plus tactique qui vise à procéder a des arbitrages fréquents sur le court et moyen terme.

Nous nous positionnerons sur une vision intermédiaire.
Des ajustements seront réalisés au niveau du poids des portefeuilles en fonction de l'objectif initial afin de profiter des opportunités du marché.
L'allocation stratégique est basée sur une anticipation à long terme des rendements et du risque. Nous avons pu constater en 2008 et 2020, des chocs importants sur les marchés ont impliqué des arbitrages rapides de l'ordre de la journée pour réduire les pertes. Il est donc nécessaire de pouvoir arbitrer rapidement sur le secteur "action" afin de stocker les plus-values dans une poche de trésorerie le temps que les conditions macro-économiques permettent un réinvestissement sans subir les tendances baissières (*bear*) de court et moyen terme.
Pour illustrer l'allocation dynamique des poches de l'unité de compte, nous comparerons 4 méthodes.

- La première illustration sera un **modèle CPPI classique** qui nous servira de *benchmark*.
- La seconde illustration va intégrer un **modèle d'allocation des poches sur base déterministe en fonction de taux**.
- La troisième illustration va intégrer un **modèle d'allocation des poches sur base déterministe en fonction de taux avec en complément, l'intégration de l'allocation des obligations par duration** en fonction d'un vecteur de flux prévisionnel de rachat
- La dernière illustration va intégrer un **modèle d'allocation des poches sur base d'un processus stochastique avec recours**.

Pour les applications numériques, nous considèrerons que le montant investi est de 100 000 euros. Nous supposerons que ce montant correspond à 10 contrats de 10 000 euros, avec des dates de rachats totaux prévisionnelles définies dans un vecteur. La configuration sera une répartition initiale de 60% en obligations et 40% en actions. Nous initions à nouveau ce modèle au 01.01.2018.
Concrètement, en plus du traitement quotidien du modèle que nous avons défini dans la partie II du mémoire, nous intégrons un module supplémentaire a périodicité annuelle ou inférieure qui va :

- Désinvestir a la main de l'utilisateur, les supports ayant un score (rating) inférieur au seuil (exemple BBB-)
- Réallouer les parts entre les poches actions et obligations
  - Un exemple déterministe
  - Un exemple stochastique

- En option : modifier les obligations dans la poche obligations sur la base de la duration des montants de rachats prévus dans le vecteur d'input du modèle afin de voir l'impact dans l'adossement des flux actif / passif au niveau de la valorisation des UC.

3.1 Problématiques ALM pour les unités de compte :

La politique ALM du fonds euro vise à optimiser au mieux la duration des supports avec les échéances prévisibles des sinistres (rachats, décès).
Pour les unités des comptes, la valeur de rachat correspond à la valeur liquidative, indépendamment de la duration des supports du fonds.
Certains supports obligataires sont volatiles, et ont une trajectoire concave.
Sauf problématique de risque crédit / score, la valeur des obligations, se rapproche de leur valeur au pair à l'approche de leur maturité.
Cet élément est a prendre en compte dans le cadre du pilotage de la garantie plancher sur les UC. Par exemple le support obligataire : FR0011022474, Engie S.A. 5,95% 11/11 de maturité 16/03/2111 a connu une forte chute début 2022 avec l'inflation croissante alors même que le taux nominal est de 5,95% très largement supérieur au taux d'intérêt de marché en vigueur sans que le score de l'entité correspondant au support se soit dégradé (S&P : BBB+/A-2).

FIGURE 3.1 – Engie S.A. 5,95% 11/11 Bond FR0011022474 | Source : (boerse-frankfurt.de)

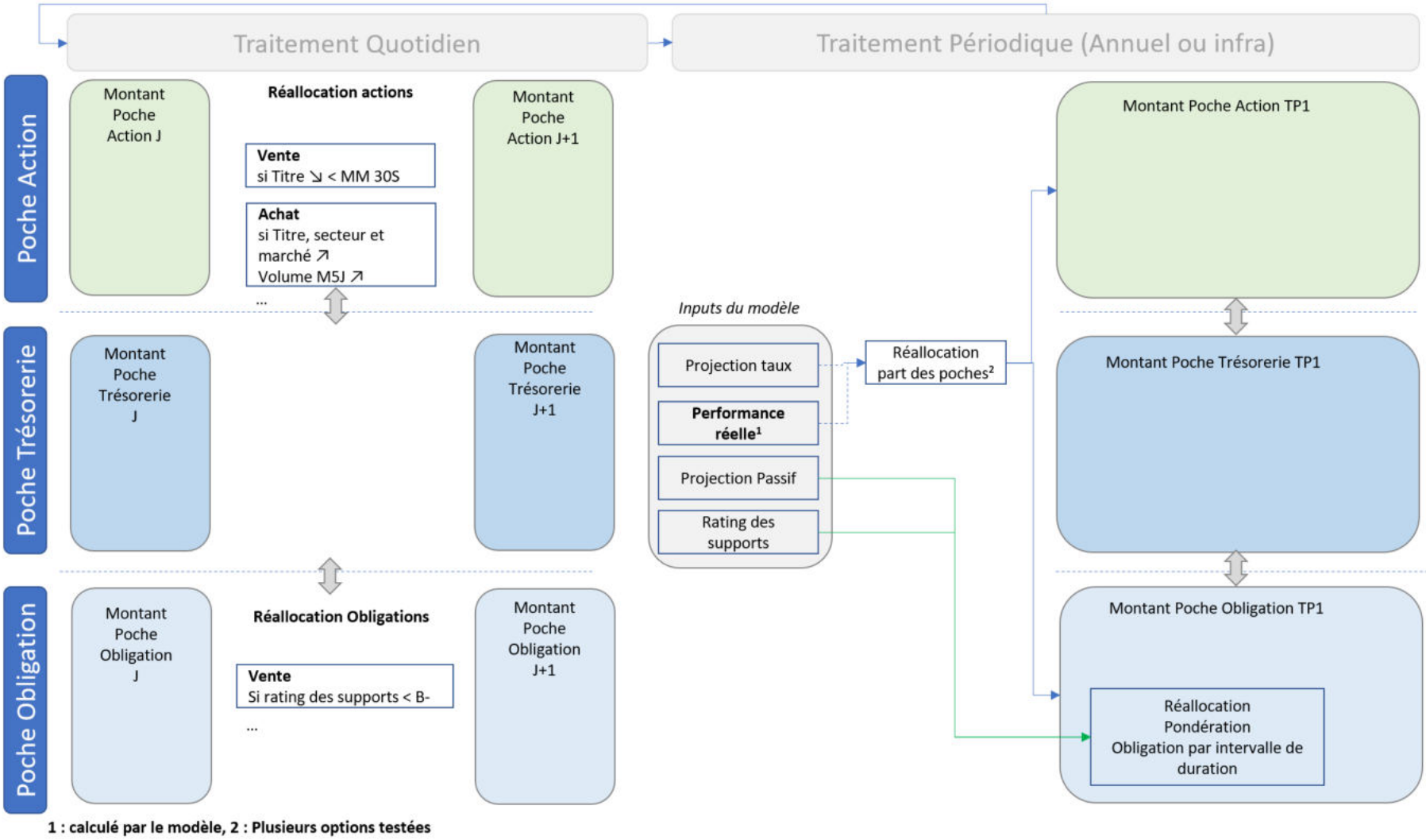


FIGURE 3.2 – Schéma du modèle et des options associées

Chapitre 4

Le modèle CPPI (Constant proportion Porfolio Insurance)

Nous allons utiliser le modèle d'allocation de type *CPPI* comme *benchmark* des autres modèles dynamiques. Le but est d'évaluer l'éventuelle valeur ajoutée de l'allocation dynamique avec contraintes du passif par rapport aux deux modèles retenus dans la partie II, c'est-à-dire indice pour les obligations et modèle de trading N°1 pour les actions. Nous posons les contraintes d'une répartition :

$$\text{en } t_0 \begin{cases} p_a = 0,4 \text{ et } p_o = 0,6 \\ p_a + p_o + p_t = 1 \end{cases}$$

avec p_a la pondération de la poche action
avec p_o la pondération de la poche obligation
avec p_t la pondération de la poche trésorerie

A chacune des 6 dates clefs [1] de comparaison, nous procédons a une réallocation des poches si les encours valorisés en valeurs de marché ont un écart de plus de 10% en valeur absolu de l'intervalle assigné.
Nous obtenons après réallocation les performances ci-dessous, que nous comparons aux modèles plus complexes :

1. 02/01/2018, 02/01/2019, 02/01/2020, 01/07/2020, 04/01/2021, 01/07/2021, 03/01/2022

date	Actions	Obligations	Produits financiers	Total	Performance	Performance annualisée
02/01/2018	40 000	60 000				
02/01/2019	38 650,62	59 481,34	1 923,21	100 055,17	0,06%	0,06%
02/01/2020	48 047,76	59 481,34	3 171,65	110 700,75	10,70%	5,35%
01/07/2020	55 085,95	63 592,29	4 470,94	123 149,18	23,15%	9,26%
04/01/2021	71 718,95	66 406,16	5 660,01	143 785,12	43,79%	14,60%
01/07/2021	58 362,72	66 406,16	6 349,48	131 118,36	31,12%	8,89%
03/01/2022	57 331,05	57 226,03	7 587,22	122 144,31	**22,14%**	5,54%

Table 4.1 – Performance du modèle CPPI de l'UC "énergie"

Chapitre 5

Le modèle N°1 : allocation des poches sur la base déterministe en fonction de taux

Le produit modélisé vise à offrir une garantie plancher pour les évènements biométriques couverts. Les rachats hors cause n'enclenchant pas cette garantie, nous ajusterons les actifs aux contraintes réelles ou prévues de la garantie plancher.
L'idée est donc d'injecter dans le modèle d'allocation d'actif :

- Le vecteur des montants projetés du besoin de liquidité pour les rachats de nature à activer la garantie (*model point*)
- les courbes de taux et leur impact projetés sur les actifs à échéance déterminée
- le vecteur des ratings des supports pour réallocation en cas de dégradation.
- les changements d'expériences et d'hypothèses sur l'activation des garanties biométriques
- les différentes projections du passif.

Ensuite le modèle va déterminer un scénario de réallocation d'actif. Par exemple :

- en cas de baisse des taux, le modèle va repondérer la part des actions à la hausse,
- en cas de hausse des taux, le modèle va repondérer la part des actions à la baisse et privilégier les obligations à échéance plus courte et taux élevés, le temps que les taux n'augmentent plus de manière significative.

Nous allons faire évoluer le modèle défini par l'algorithme dans la partie II avec les contraintes ALM.
Notons que les inputs pour les courbes de taux les plus utiles sont

- les courbes de taux EIOPA (*Risk Free Rate*) ou
- les courbes de taux d'inflation (TI) réelle via l'indice des prix à la consommation harmonisés (IPCH) [1] disponibles sur EUROSTAT.

1. https ://ec.europa.eu

Courbe Échéance	1	5	10
RFR 20180131	-0,23%	0,54%	1,08%
TI 20180131	-0,66%	-0,08%	0,61%
RFR 20190131	-0,27%	0,14%	0,67%
TI 20190131	-0,63%	-0,30%	0,25%
RFR 20200131	-0,47%	-0,36%	-0,12%
TI 20200131	-0,62%	-0,52%	-0,24%
RFR 20210131	-0,64%	-0,49%	-0,24%
TI 20210131	-0,69%	-0,73%	-0,54%
RFR 20220131	-0,22%	0,18%	0,41%
TI 20220131	-0,76%	-0,57%	-0,30%
RFR 20220630	1,27%	1,78%	2,18%
TI 20220630	0,29%	1,33%	1,58%

TABLE 5.1 – Taux d'inflation et sans risque (RFR) utilisés dans le modèle déterministe

Le modèle que nous allons présenter va ainsi réallouer les poches "actions" et "obligations" avec comme contrainte la sélection de supports ayant une rentabilité supérieure ou égale au taux sélectionné additionné de la marge de l'assureur.

Les résultats sont :

FIGURE 5.1 – Performance du modèle avec réallocation déterministe en fonction des taux

Nous constatons que ce modèle (versus le Benchmark 100% action) :

- Est beaucoup moins volatile : les chocs de 2019 et 2020 sont fortement réduits. Nous avons une légère contre valorisation en dessous de l'investissement fin 2019 qui aurait pu générer l'activation de la garantie de l'assureur si un rachat avait été déclenché dans cette intervalle. Il est à noter que la contrevaleur n'intègre pas les montants des coupons et les dividendes.
- Le nombre de transactions est faible même s'il est plus important que les modèles de la partie II sans réallocation des poches.

Les performances sont :

Date debut	02/01/2018	02/01/2018	02/01/2018	02/01/2018
Date fin	01/01/2019	01/01/2020	01/01/2021	01/01/2022
Duree	1	2	3	4
Encours T0	100 000,00	100 000,00	100 000,00	100 000,00
NB Transaction	4	4	6	8
Encours final actions	68 692,37	80 383,21	110 911,76	92439,94
Encours final obligations	29439,59	34449,95	47533,61	37178,60
Encours final toutes poches	98 131,96	114 833,16	158 445,38	129 618,54
Coupons	1 334,97	1 598,43	2 543,69	3 711,95
Dividendes	588,24	1 861,00	3 293,52	3 749,91
Fiscalité	576,96	1 037,83	1 751,16	2 238,56
Frais sur encours	1 193,74	2 831,00	5 921,63	6 589,85
Encours net toutes poches	98 861,43	115 461,59	158 360,97	130 490,55
Encours net post fiscalite	98 284,47	114 423,76	156 609,80	128 251,99
PMV latente nette	-1 715,53	14 423,76	56 609,80	28 251,99
Rentabilité assuré totale	-1,72%	14,42%	56,61%	28,25%
Rentabilité assuré annualisée	-1,72%	7,21%	18,87%	7,06%
Résultat assureur (frais de gestion déduit : 0,4% encours)	801,21	2 371,67	5 287,84	6 071,37
Résultat assureur (frais de gestion déduit) si sortie de 1 contrat en fin d'année (10000 euros) avec activation de la garantie	629,66	2 371,67	5 287,84	6 071,37

TABLE 5.2 – Performance de la réallocation des poches dans le modèle déterministe de taux

Nous constatons que l'activation potentielle de la garantie n'intervient que la première année, ce qui confirme les résultats de la partie I qui avaient conclu que plus les contrats sont anciens, moins la garantie est susceptible d'être activée en raison des produits financiers qui compensent les moins values.

Chapitre 6

Le modèle N°2 : allocation des poches sur base déterministe avec prise en compte de la duration

Ce modèle N°2 complète le modèle N°1 en intégrant un module qui réalloue périodiquement les obligations pour cadrer aux flux de rachat prévus coté passif. Concrètement, a chaque période, les montants de rachat par années sont affectés à des intervalles et la part obligation de ces rachats sur le passif va être investi proportionnellement (sous la contrainte de rating) sur les supports disponibles dans cet intervalle. Si un montant de rachat prévisionnel ne peut se voir affecté d'obligations dans période concernée en raison d'absence de support satisfaisant aux contraintes sur le marché alors ce montant est ajouté au montant de l'intervalle supérieur.

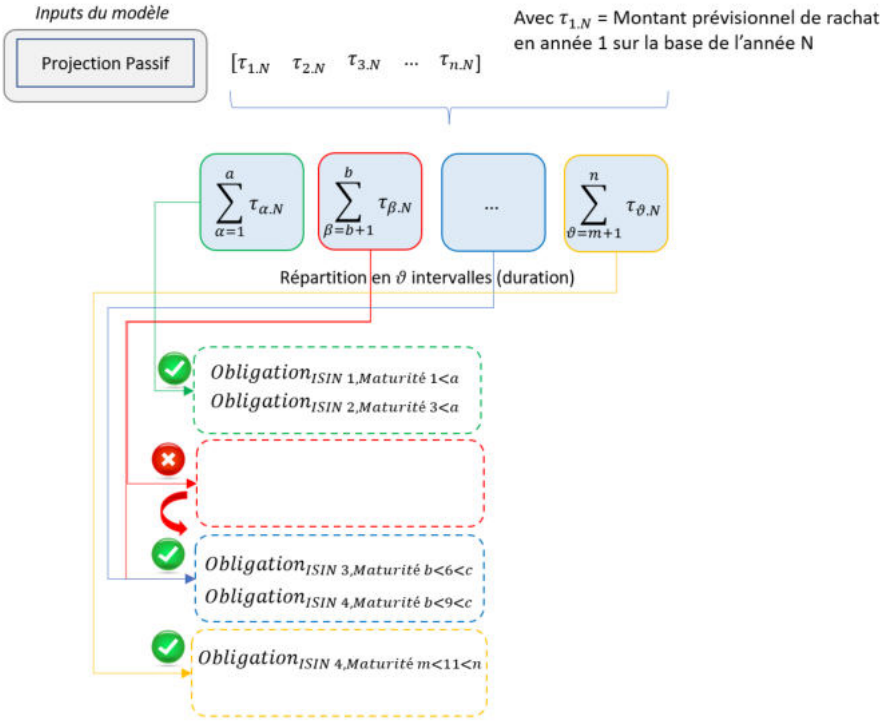


FIGURE 6.1 – Présentation de la réallocation des obligations par intervalle de duration

Dans notre exemple, nous retiendrons les tranches :

- $[0, 5ans]$
- $[6, 10ans]$
- [11 ans et plus]

Les résultats sont :

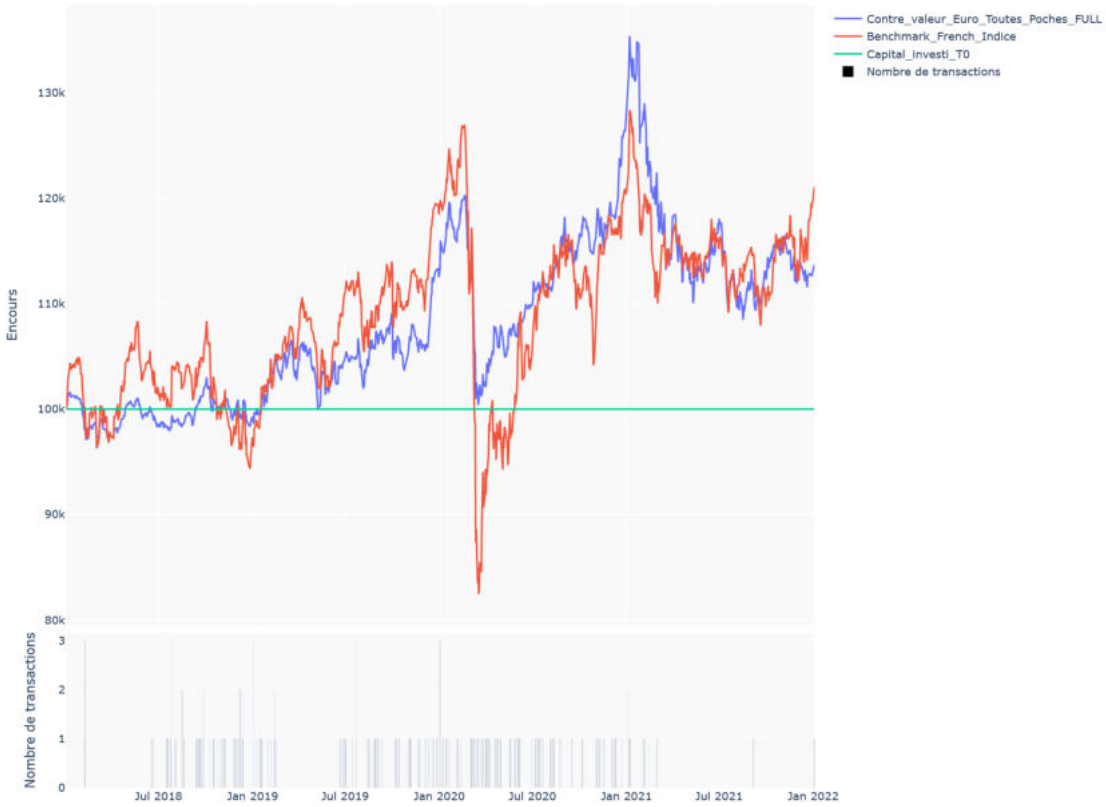


FIGURE 6.2 – Performance du modèle avec réallocation déterministe en fonction des taux et de la duration

Nous constatons que ce modèle (versus le Benchmark 100% action) :

- est beaucoup moins volatile : les chocs de 2019 et 2020 sont fortement réduits. Nous avons une légère contre valorisation en dessous de l'investissement fin 2019 qui aurait pu générer l'activation de la garantie de l'assureur si un rachat avait été déclenché dans cette intervalle.
- le nombre de transactions est faible.
- même si les différences de performance en intégrant la duration ne sont pas significatives avec le modèle N°1, elles sont même sensiblement inférieures sur certaines périodes.

Les performances sont :

Date debut	02/01/2018	02/01/2018	02/01/2018	02/01/2018
Date fin	01/01/2019	01/01/2020	01/01/2021	01/01/2022
Duree	1	2	3	4
Encours T0	100 000,00	100 000,00	100 000,00	100 000,00
NB Transaction	4	4	6	10
Encours final actions	68 692,37	80 383,22	111 951,93	82 376,47
Encours final hors trésorerie sécurité	68 692,37	80 383,22	111 951,93	87 420,46
Encours final obligations	29 439,54	34 449,95	47 979,40	35 304,20
Encours final toutes poches	98 131,96	114 833,16	159 931,32	122 724,67
Coupons	1 334,97	1 821,68	2 791,65	3 958,45
Dividendes	588,24	1 861,00	3 293,52	3 788,96
Fiscalité	576,96	1 104,80	1 825,55	2 324,22
Frais sur encours	1 193,74	2 834,77	5 982,09	6 262,71
Encours net toutes poches	98 861,43	115 681,06	160 034,41	124 209,38
Encours net postfiscalite	98 284,47	114 576,26	158 208,86	121 885,15
PMV latente nette	-1 715,53	14 576,26	58 208,86	21 885,15
Rentabilité Totale	-1,72%	14,58%	58,21%	21,89%
Rentabilité Annualisée	-1,72%	7,29%	19,40%	5,47%
Résultat assureur (frais de gestion déduit : 0,4% encours)	798,29	2 372,05	5 341,95	5 765,87
Résultat assureur (frais de gestion déduit) si sortie de 1 contrat en fin d'année (10000 euros) avec activation de la garantie	626,74	2 372,05	5 341,95	5 765,87

TABLE 6.1 – Performance de la réallocation des poches dans le modèle déterministe de taux avec prise en compte de la duration

Chapitre 7

Le modèle avec programmation stochastique avec recours (annuel)

La programmation stochastique est un "cadre de modélisation des problèmes d'optimisation incluant l'incertitude" [1] [1]. Elle vise donc à intégrer des **paramètres aléatoires dans la résolution des modèles**. Les modèles de programmation stochastiques sont basés sur des outils de traitements mathématiques poussés :

- analyse de convexité
- théorie de la dualité
- ...

La programmation stochastique a n recours est basée sur n+1 décisions, la première au début et ensuite a chacune des n recours. Les recours visent a compenser les éventuelles conséquences négatives dues à la décision initiale et jusqu'aux n-1 décisions précédentes. Concrètement, à l'initialisation, une décision est prise sur la base d'un ou plusieurs éléments incertains. Ensuite a chaque recours (fin de période définie) et après la réalisation des variables aléatoires, des décisions supplémentaires sont prises pour éviter que les contraintes du modèle ne soient pas respectées.
Dans le cas qui nous intéresse, nous allons avoir comme choix d'intégrer à ce modèle la composition d'un portefeuille d'actifs financiers et plus particulièrement la composition des poches. L'objectif est que la composition du portefeuille nous donne in fine une valeur du portefeuille supérieure ou égale a l'objectif de rendement fixé.
La forme générale d'un programme stochastique est :

$$\begin{cases} \min_x c(\omega)' x \\ \text{s.c } A(\omega).x \geq b(\omega) \\ x \geq 0, \omega \in \Omega \end{cases}$$

Avec :
x un vecteur de $n \times 1$ décisions et une variable aléatoire de fonction ω.
c, A, B des données de tailles connues $(n \times 1, m \times n, m \times 1)$

1. Définition du COSP (Committee On Stochastic Programming)

ω un vecteur d'évènement aléatoire
Remarque : La forme évoluée de la forme générale intègre le fait que certaines contraintes ne soient pas respectées, tout en cherchant à limiter les probabilités de dépassements. Cela correspond aux modèles "*chance-constrained models*".

$$\begin{cases} \min_x c(\omega)' x \\ \text{s.c } A(\omega).x \geq b(\omega) \\ P\left\{G(\omega)x \geq h(\omega) \geq \alpha\right\} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dans le cadre d'un processus de décision dynamique, (programmation stochastique avec recours) un ensemble de décisions est pris à l'initialisation sur la base des informations disponibles, et les décisions sont ajustées lorsque l'incertitude a disparu. Le concept de recours vise a prendre des actions correctives après réalisation de l'évènement aléatoire qui en l'espèce sera la rentabilité respective des poches.
Dans l'étape d'initialisation, nous avons la valeur de la variable de contrôle x Au moment du recours nous disposons de l'information certaine sur l'évènement qui était aléatoire et nous prenons la décision de recours y afin de corriger l'erreur sur la prévision de cet évènement. Le problème d'optimisation est de choisir les valeurs optimales de x et y. La décision prise à l'initialisation (x) est indépendante du scénario pouvant avoir lieu à l'étape suivante du recours. Il s'agit de la propriété de non anticipation. Lorsque nous avons plusieurs recours (k), l'optimisation vise a minimiser le cout de la décision à l'initialisation et le coût espéré du recours effectué a chaque étape suivante.
Posons ω une variable aléatoire discrète pouvant avoir s valeurs possibles : $(\omega_1, ..., \omega_s)$ avec les probabilités $(p_1, ..., p_s)$ ou chaque valeur $\omega_i, i = 1, ..., s$ correspond à un scénario. Pour un recours nous avons :

$$\begin{cases} \min_x c' x + E_\omega(Q(x, \omega)) \\ \text{s.c } A(x) = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avec :

$$Q(x, \omega) = \min_y q(\omega)' y)$$

$$s.cT(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_k}$$

$E_\omega(Q((x, \omega))$ est fournie par les 4 éléments suivants :

- un ensemble Y qui décrit l'ensemble réalisable des actions de recours, par exemple :

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^{n_k} | y \geq 0\}$$

- un vecteur de coûts de recours : $q : n_k \times 1$
- une matrice de recours $W : s \times n_k$

– une matrice T de technologie reliant x a y : $T : n_k \times n$

La première partie du programme minimise le coût direct de la première étape, $c^{'}x$ additionné de l'espérance du coût du recours (fonction de recours) : $E_\omega(Q(x,\omega))$ avec la contrainte Ax=b. Le coût du recours dépend donc de la décision initiale (valeur x) et de l'élément aléatoire ω.

La deuxième partie du programme décrit comment choisir les décisions qui forment $y(\omega)$ pour minimiser le coût de recours $q(\omega)'y$ compte tenu d'une contrainte liée aux actions de recours elles-mêmes : $T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega)$

Pour k recours nous avons :

$$\begin{cases} \min_{x_i} c^{'}x_i + E_{\omega^2}\min\left(c_2(x_2(\omega^2)\,;\omega^2) + ... + E_{\omega^k}\min\left(c_k(x_k(\omega^k);\omega^k)\right)\right. \\ \text{s.c } W_1x_1 = h_1 \\ W_2x_2(\omega^2) + T_1(\omega^2)x_1 = h_2(\omega^2) \\ W_ix_i(\omega^i) + T_{i-1}(\omega^i)x_{i-1}(\omega^{i-1}) = h_i(\omega^i), i = 3, ..., k \\ x_1 \geq 0, x_i(\omega^i) \geq 0, i = 2, ..., k \end{cases}$$

Avec W_i représente des matrices connues de tailles $m_i \times n_i$

h_1 représente un vecteur connu dans $\mathbb{R}^{m_i}$

$h_i(i = 2, ..., m_i)$ représente un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^{m_i}$

$T_i(i = 1, ..., k-1)$ représente des matrices aléatoires de tailles $m_i \times (n_i - 1)$

$x_i(i = 1, ..., k)$ représente le vecteur de décisions à l'étape i avec $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ pour i>1

ωi représente l'historique des évènements aléatoire jusqu'à l'étape i.

Nous allons appliquer la programmation stochastique avec recours pour déterminer les parts actions et obligations qui génèrent la rentabilité la plus élevée. L'initialisation étant est en 2018, nous allons utiliser 4 : 1 par an (2019 à 2022) sur la base des rentabilités des poches des années concernées. Le Package RSOME [2] pour Python sera utilisé à cet effet. Son principe est :

2. https ://xiongpengnus.github.io/rsome

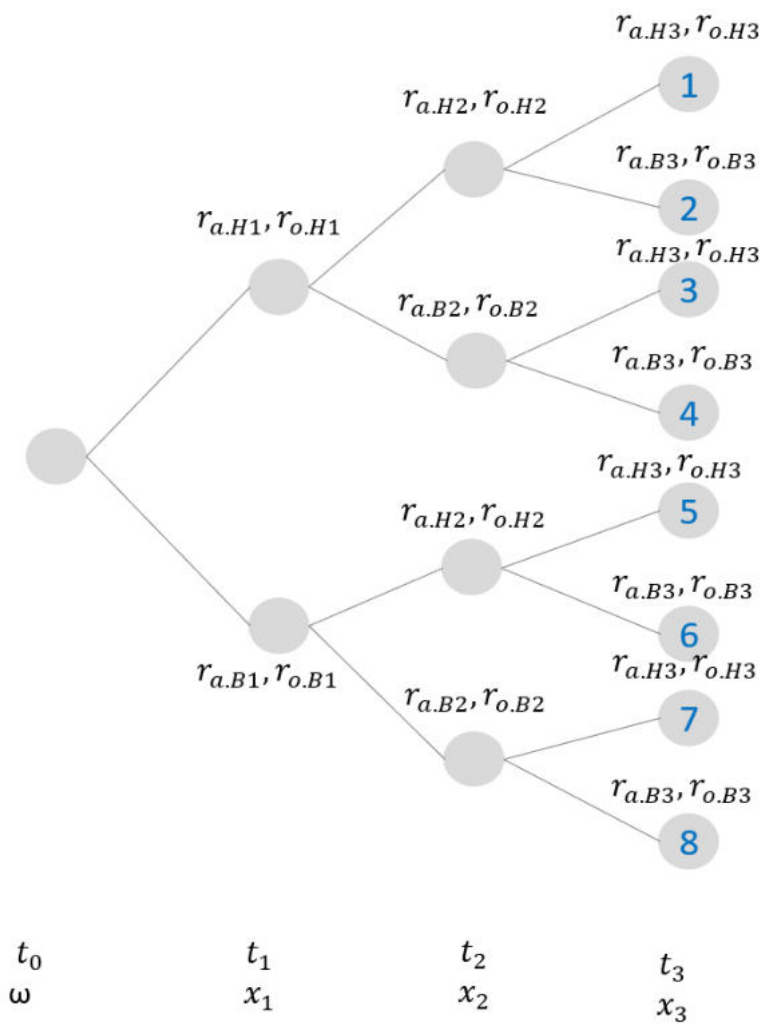


FIGURE 7.1 – Illustration des inputs de la programmation stochastique

Les résultats du package python "RSOME : Robust Stochastic Optimization Made Easy" sont fortement contraints par les données en entrées du modèle[3]. Si nous injectons des performances récents (année N-1), Il bascule 100% des encours sur la poche "action" dès le 1er recours 2019. A chaque recours de 2020 à 2022, nous n'avons pas de réallocation sur la poche "obligation", ce qui limite l'intérêt de l'application numérique de ce type de méthode. Nous obtenons de fait, les résultats équivalent à ceux de la partie II. Il est donc nécessaire d'introduire d'autres contraintes de pourcentage minimal de détention de la poche obligation, ce qui n'est pas accessible en standard et revient à développer un package dédié, hors cadre du présent document.

3. D'autres packages "msppy" et via gurobi existent mais relèvent de licence commerciale.

Si nous injectons des performances plus pondérées correspondant à la moyenne mobile de 5 ans sur les poches nous obtenons, les réallocations ci-dessous qui sous performent l'allocation basée sur les taux courts, mais sont plus prudentes.

Catégorie	2019	2020	2021
Actions	27,87%	33,26%	26,06%
Obligations	72,13%	66,74%	73,94%

La résolution de l'allocation par programmation stochastique est bien plus performance 87,5% d'atteinte des objectifs par rapport à la résolution par méthode déterministe : 50% des objectifs [12].
Nous obtenons les résultats :

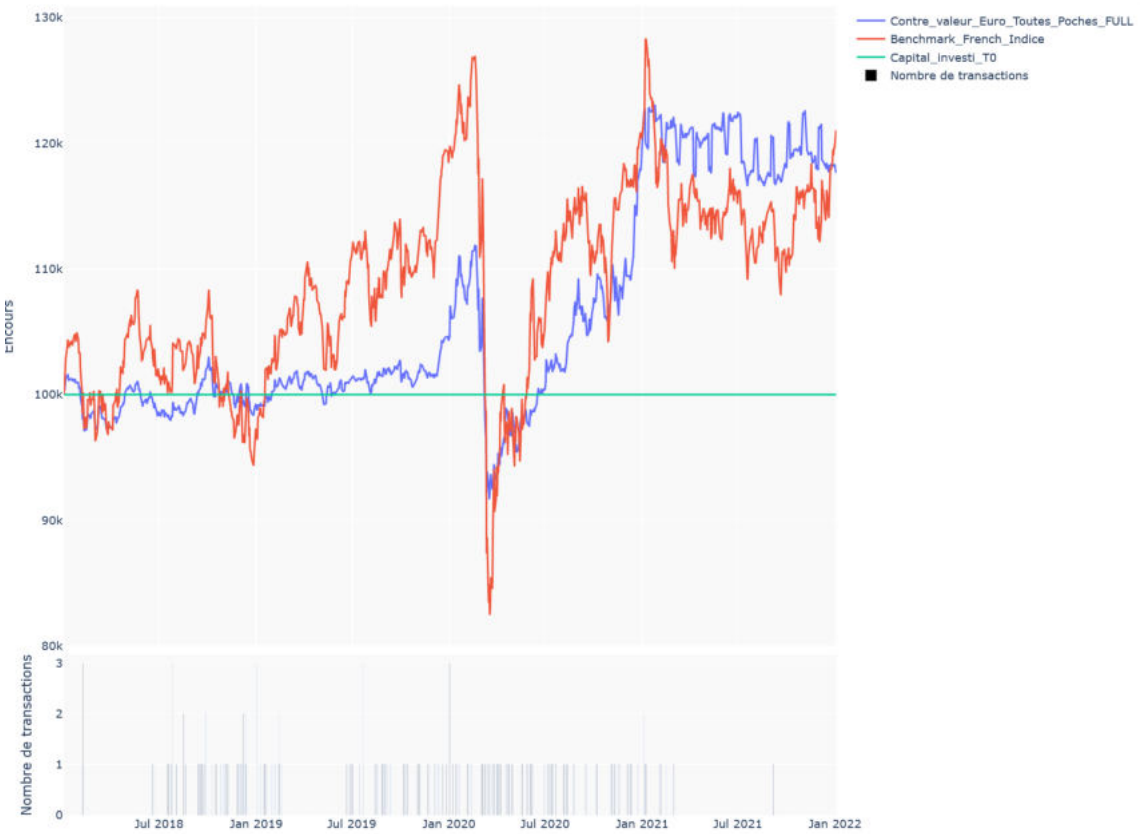


FIGURE 7.2 – Performance avec réallocation avec programmation stochastique

Chapitre 8

Synthèse des modèles

Les modèles étudiés dans la partie III, nous donnent les performance suivantes :

Modèle	Encours final	Encours final avec produits financiers	Performance totale	Performance annualisée
Modèle CPPI [1]	114 557,09	122 144,31	22,14%	5,54%
Modèle déterministe sans duration	129 618,54	137 080,40	37,08%	9,27%
Modèle déterministe avec duration	122 724,67	130 472,08	30,47%	7,62%
Modèle Stochastique	**138 207,76**	**147 248,19**	47,25%	11,81%

Table 8.1 – Comparatif des performances de réallocation des poches

Le modèle [2] de la partie II a été adapté pour prendre en compte les contraintes du passif de l'assureur tout en sachant qu'il est impacté par la trajectoire spécifique des obligations à l'approche de leur échéance.
La prise en compte de l'environnement externe (taux d'intérêt, d'inflation...) est déterminante pour piloter la réallocation entre les supports.
Cette réallocation peut être

- déterministe sur des scénarios prédéfinis avec une performance accrue de manière sensible lorsque nous prenons en compte la duration.
- stochastique avec une forte contrainte des données d'entrée du modèle. Cependant, une fois calibré, la littérature fait état d'une performance largement supérieure. [1]

L'intégration de réallocations basées sur la programmation stochastique avec recours tout en ayant une gestion tactique des actions et des obligations au jour le jour est le plus efficace pour l'encours final. In fine la réallocation basée sur la performance inclut de fait implicitement la contrainte des taux de marché. Les mouvements entre les poches

2. "Trading N°3"

peuvent limiter la réalisation des produits financiers, il est donc nécessaire de prendre en compte la plage de versements des coupons à venir dans les modèles.
L'étude doit être approfondie sur les autres secteurs pour confirmer la meilleure stratégie de réallocation et le critère le plus sensible sur le pilotage des garanties biométriques par l'intermédiaire de la gestion d'actifs, en effet le modèle de trading N°1 initialement testé avait conclu a une surperformance de la ré allocation stochastique sur la seule partie de la valeur boursière.

Chapitre 9

Pour aller plus loin : SII, IFRS 17, impact des investisseurs institutionnels sur les cours

9.1 Solvency II

La part des UC liée aux provisions mathématiques (passif) doit être couverte par la même quantité d'unités de compte coté actif. Cela fait l'objet du "*Solvency II unit matching*" qui implique la mise en place de contrôles.
Au niveau de Solvabilité II, deux interprétations sont ouvertes sur les unités de compte. Certains assureurs considèrent que les contrats d'assurance vie sont mixtes (fonds euro et UC)
D'autres considèrent que les contrats sont en UC sont portés exclusivement par l'assuré. Dans ce dernier cas, les UC n'impactent pas le MSR et SCR.
Si les assureurs considèrent que les contrats sont mixtes, alors il y a un calcul du delta de PVFCF entre le scénario central et le scénario choqué qui va impacter le SCR.
Pour les garanties planchers, habituellement les assureurs impactent le SCR au niveau du non modélisé. Notons que les garanties biométriques présentées couvrent des risques vie et non vie qui impliqueront juridiquement un contrat tripartite avec deux assureurs un pour la branche vie et un pour la branche non vie [15] [17] [16].
Des formules simplifiées utilisent un ratio basé sur les provisions mathématiques modélisées et les provisions mathématiques non modélisées. La contribution des garanties planchers au SCR est ainsi obtenu par la multiplication du SCR par ce ratio :

$$\frac{\text{provisions mathématiques non modélisées}}{\text{provisions mathématiques modélisées}}$$

9.2 IFRS 17

Au niveau d'IFRS 17, les produits d'assurance vie vont être soumis de manière obligatoire au modèle VFA (Variable Fee Approach).
L'ensemble des flux prévisionnels va être intégré dans le calcul de la PVFCF (*Present Value of Fullfillment Cash Flows*).
La différence entre la PVFCF et le RA (*Risk Adjustment*) va donner si un gain est prévu pour l'assureur, un montant de CSM (*Contractual Service Margin*) et a défaut une LC (*Loss Component*).
L'impact de la garantie proposée va impacter la CSM par l'intermédiaire de la TVOG (*Time Value Of Guarantee*) en la diminuant si la garantie réellement constatée est supérieure au flux prévisionnels.
Les calculs sont en principe réalisées à la maille Produit x Profitabilité et plus généralement pour le pilotage interne à la maille **Produit x Profitabilité x génération**.
L'impact d'une garantie générant une perte de rentabilité sur un contrat sera donc compensée par les autres contrats du portefeuille.
En effet, nous pouvons nous rappeler les résultats de la partie I et de la partie III qui tendent à montrer que le ratio coût de la garantie / montant des frais est encadré dans un intervalle.

9.3 Impact de la volumétrie sur les cours

Les investisseurs institutionnels gèrent des encours importants. La question qui se pose est d'identifier l'impact des ordres de ces opérateurs sur les cours.

9.3.1 Y a-t-il une corrélation entre les volumes échangés et les variations de cours ?

Le calcul de la variation intra-day que ce soit en variation absolue (cours au plus haut Cours au plus bas) ou en variation réelle (Cours de clôture - Cours d'ouverture) ne permet pas de conclure a une quelconque corrélation entre un fort volume d'échanges et une variation de cours.

Par exemple, pour les supports actions du secteur énergie, nous obtenons les corrélations :

Support	Corrélation variation intra-day vs Volume
FR0000060402	0,5
FR0000120073	0,48
FR0010242511	0,48
FR0010208488	0,44
FR0011726835	0,29
FR0011675362	0,47
FR0013269123	0,34
AN8068571086	0,56
NL0014559478	0,79
FR0000120271	0,43

TABLE 9.1 – Corrélation entre la variation intra-day et le volume échangé par support

L'illustration sur le support FR0000060402, montre que les volumes échangés ne sont pas en lien, avec les variations journalières. D'autres illustrations sont en annexes [A16].

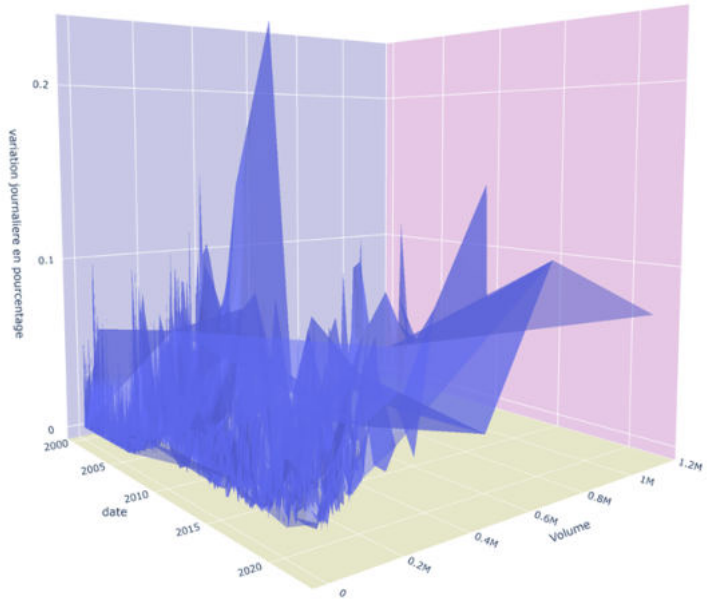


FIGURE 9.1 – Correlation volumétrie et variation de cours du FR0000060402

Si nous essayons de détecter une corrélation en intégrant les dates de chocs connues, nous constatons un décalage entre les variations de cours et les volumes. Les forts volumes sont en avance de jours sur les variations de prix.

FIGURE 9.2 – Variation (cours haut - cours bas) / cours ouverture vs volumétrie du FR0000060402

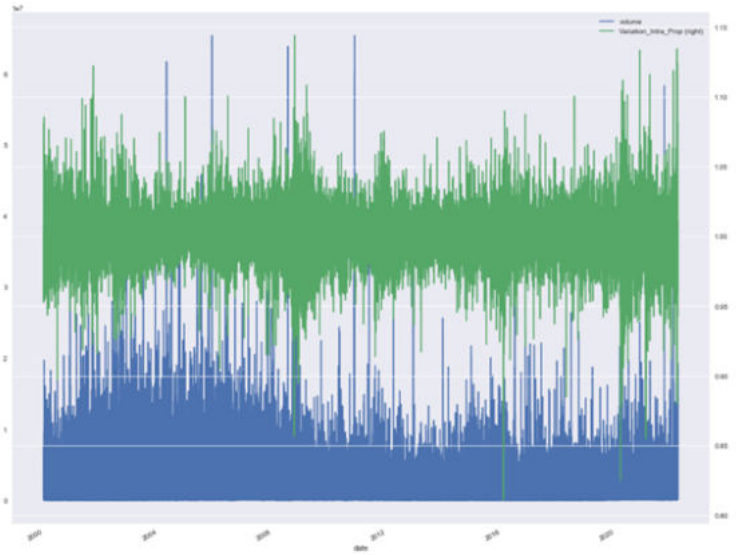


FIGURE 9.3 – Variation (cours clôture - cours ouverture) / cours ouverture vs volumétrie du FR0000060402

Chapitre 10

Conclusion

Aujourd'hui, les acteurs de l'assurance qui ont un fonds euro sont soumis aux contraintes réglementaires[1] et privilégient souvent les obligations d'état. Ainsi, il existe une véritable opportunité de **financer l'économie** en proposant une part croissante d'unités de compte pilotées et intelligibles assorties de la garantie en capital sur les grands évènements de la vie.
Flécher des actifs partiellement stériles vers l'économie est un accord gagnant à plusieurs titres :

- pour les **assurés** qui auront une plus forte espérance de rentabilité et une plus forte représentation mentale de la volatilité des encours.
- pour les **assureurs** : par exemple flécher 10% du montant des comptes de dépôts ou de livret revient à doubler la taille d'un assureur de type CARDIF (Branche assurance vie de BNPP) et a augmenter de 150% son résultat en raison du taux de frais supérieur des UC sur le fonds euro pour un coût en capitaux propres maitrisé par la gestion non déléguée des actifs.
- pour l'**État** qui collectera plus d'impôts et aura moins de problématiques de chômage et
- pour l'**économie** qui sera mieux financée.

Dans la **première partie** nous avons vu que les garanties biométriques sont viables sur les portefeuilles réels. En effet même sur des environnements statiques, le coût des garanties biométriques ne relève que de quelques pourcentages des frais collectés, pourcentage pouvant être réduit par une gestion dynamique des actifs par l'assureur.
La **seconde partie** nous a montré qu'il était possible de modéliser des unités de compte prudentes dont l'objectif est de sécuriser les fonds investis. La rentabilité est ainsi supérieure aux performances du fonds euro avec une volatilité fortement réduite. Trois modèles ont été particulièrement performants. Le choix discrétionnaire de l'un d'eux, relève pour la direction concernée de la capacité à expliquer les évolutions et les arbitrages associés au comité exécutif. Les modèles d'analyse financière et de trading sont plus intelligibles. Les performances du modèle d'apprentissage par renforcement sont proches mais à contre balancer par la capacité d'explication claire aux décideurs.

1. Article R332-3 Code des assurances

Dans la **troisième partie**, nous avons vu que nous pouvons modéliser des unités de compte pour les ajuster au mieux à l'évolution du marché et au passif de l'assureur. La prise en compte du passif permet de limiter les risques de liquidité en cas de modification de l'environnement. Par nature, les unités de compte n'ont pas les mêmes contraintes qu'un fonds euro en raison de la valeur liquidative.
Les résultats montrent que l'hybridation est la solution la plus efficiente puisque l'homme et la machine ne sont pas à l'abri de lacunes :

- les **modèles** ne peuvent pas s'ajuster en fonction des contraintes extérieurs qui sont de plus en plus nouvelles (taux négatifs, injection de liquidité, concentration des acteurs...)
- l'**humain** ne peut pas intégrer une trop grande quantité d'informations, les analyser et décider de manière aussi réactive que le peut un modèle.

Cependant, l'humain est le seul en mesure d'ajuster un modèle dont la performance se réduit et sera in fine le seul responsable.
Deux facteurs favorisent le développement du produit présenté.

- la part d'actifs non investie dans l'économie réelle (compte courant, dépôts a terme, livrets...) est croissante ces dernières années. Les encours sur le livret A n'ont pas varié malgré la baisse des taux et une inflation nettement supérieure à ces derniers en 2022. Malgré les tentatives des assureurs et de l'État de financier l'économie réelle avec des produits à terme plus long (eurocroissance, PER...) les encours de ces produits restent marginaux, le PER ne représente que 1,7% des encours d'assurance vie malgré la défiscalisation aux versements associés.
- le besoin de plus en plus présent dans la société de donner du sens à ses investissements avec les certifications RSE, ISR (ESG)...

Pour aller plus loin nous pourrions poursuivre les travaux en

- élargissant la zone géographique, les catégories... (le coût des données via Bloomberg a limité cet élargissement dans le cadre de cette étude)
- prenant en compte les dividendes et les coupons à venir en tant que contrainte du modèle de programmation stochastique
- affinant les modèles avec par exemple prise en compte du risque de change
- ...

Annexe A

Annexes explicatives

A.1 Sondage investissement

Questionnaire
Ce questionnaire comporte 5 questions. Durée estimée 1 minute 30
Catégorie socio-professionnelle :
Sexe : Féminin - Masculin
Age ans
Question 1 : Si vous aviez de l'argent à placer, vous investiriez dans (par ordre de préférence de 1 à 4) :

Choix	Catégorie	Sous catégorie
Choix	Actions (PEA ou assimilé)	
	Choix	Grandes entreprises ou équivalent
	Choix	PME ou équivalent
Choix	Assurance vie	
	Choix	Fonds euro
	Choix	Unités de compte
Choix	Livret d'épargne ou équivalent	

Table A.1 – Choix de la question N°1

Question 2 : Votre 1er choix a été choisi : (par ordre de préférence de 1 à 4)

Catégorie	**Sous catégorie**
Autonomie	
Choix	Je suis autonome
Compréhension	
Choix	Je comprends son fonctionnement
Choix	J'ai une idée de son évolution dans le temps
Autonomie	
Choix	Court terme
Choix	Moyen terne
Choix	Long terme

Table A.2 – Choix de la question N°2

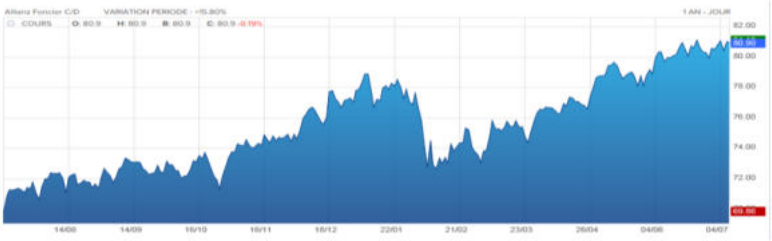
Question N°3 : Si vous deviez investir en assurance vie dans l'une des 5 unités des comptes ci-dessous dans laquelle investiriez vous à priori ?

Choix	**Libellé UC**
Choix	Allianz Foncier
Choix	BNPP Plan Intl Derivatives C Cap
Choix	MS INVF US Growth AH
Choix	Echequier Agressor
Choix	Fidelity Germany A-Dis-EUR

Table A.3 – Choix de la question N°3

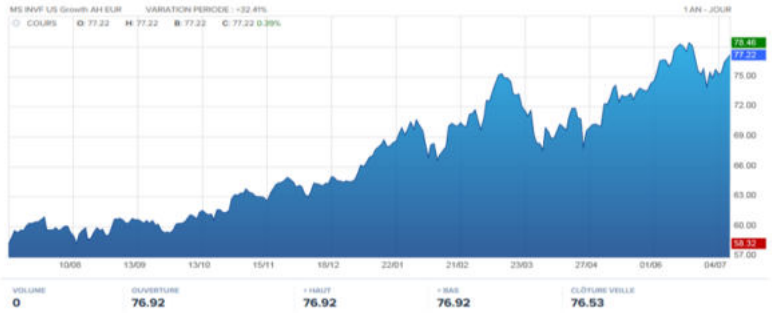
Question 4 : Si nous rajoutons les informations financières ci-dessous sur quel support investirez vous ?

Allianz Foncier : ISIN : FR0000945503 - Allianz Global Investors GmbH
Cours 81.050 EUR : +0.75%
Catégorie Morningstar : Immobilier - Indirect Zone Euro
Risque du fonds : 5/7

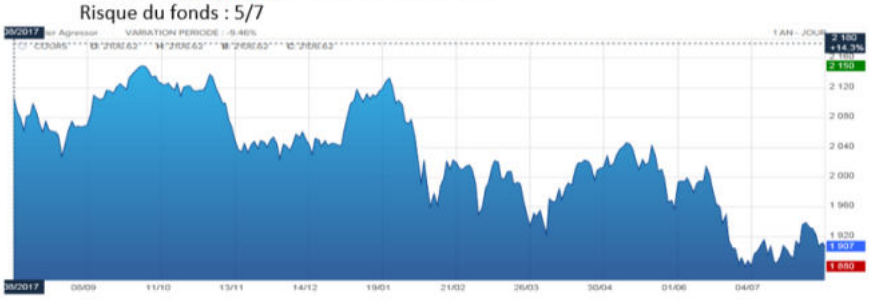


BNPP Plan Intl Derivatives C Cap – ISIN LU0258897114 - BNP Paribas Asset Management Luxembourg
Cours : 14.910 EUR -0.86%
Catégorie Morningstar : Alt - Global Macro
Risque du fonds : 6/7
Aucun graphique disponible (cotation non journalière)

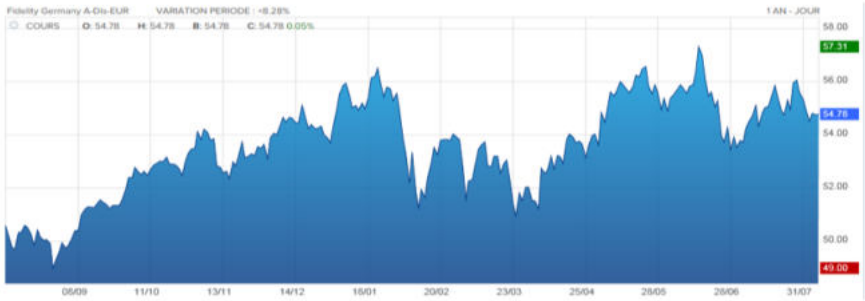
MS INVF US Growth AH – ISIN LU0266117414 - Morgan Stanley Investment Management (ACD) Limited
Cours : 76.920 EUR +0.51%
Catégorie Morningstar Actions Secteur Autres
Risque du fonds : 5/7



ECHIQUIER Agressor – ISIN : FR0010321802 - La Financière de l'Echiquier
Cours 1 907.330 EUR -0.27%
Catégorie Morningstar : Actions Europe Flex Cap
Risque du fonds : 5/7



Fidelity Germany A-Dis-EUR - ISIN : LU0048580004 - Fidelity (FIL Inv Mgmt (Lux) S.A.)
Cours 54.780 EUR : +0.05%
Catégorie Morningstar : Actions Allemagne Gdes Cap
Risque du fonds : 6/7



Question 5 : Si nous vous disions dans quoi et comment est investi l'unité de compte (Actions, Obligations...) investiriez vous plus ?
Oui - Non

A.2 Résultat du sondage investissement

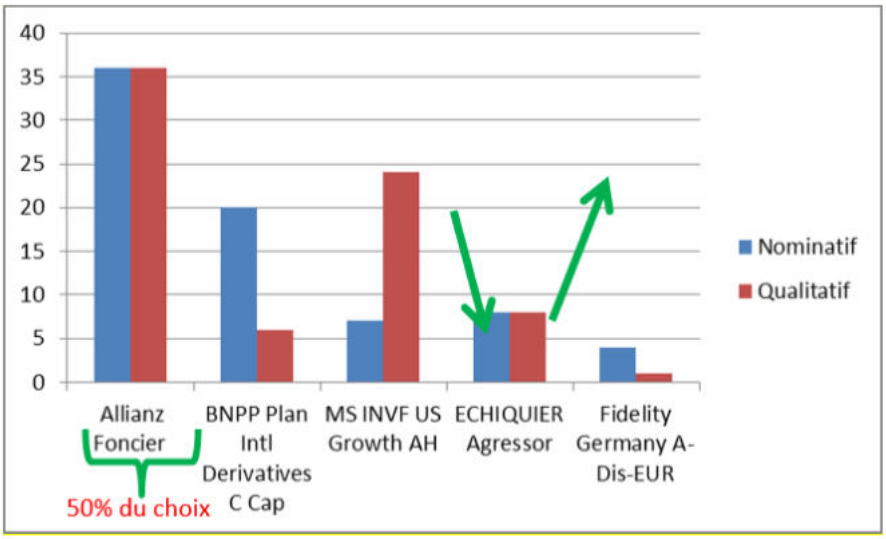


FIGURE A.1 – Question 3 et 4 : Support sélectionné

FIGURE A.2 – Question 4 : Support sélectionné avec informations financières

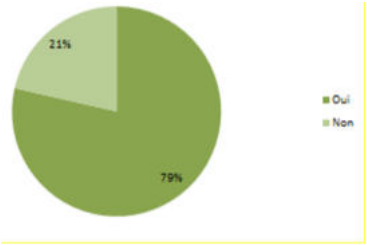


FIGURE A.3 – Question 5 : Investirez vous plus ?

A.3 Descriptif des garanties biométriques et actes déclencheurs associés

Catégorie	**Garantie**	**Acte juridique déclencheur**	**Délai d'activation**
Changement administratif	Mariage	Acte de mariage	1 mois
Changement administratif	PACS	Acte de PACS	1 mois
Changement administratif	Divorce	Acte de divorce	1 mois
Changement administratif	Rupture de PACS	Acte de divorce	1 mois
Changement d'état de santé	Incapacité	taux d'incapacité supérieur ou égal à une norme contractuelle médicalement constaté	1 mois
Changement d'état de santé	Invalidité	taux d'invalidité supérieur ou égal à une norme contractuelle médicalement constaté	1 mois
Changement d'état de santé	Décès	Acte de décès	1 mois
Changement de la structure familiale	Naissance d'un enfant	Acte de naissance	1 mois
Changement patrimonial majeur	Chômage	Justificatif d'inscription au chômage	1 mois
Changement patrimonial majeur	Surendettement	Attestation d'ouverture de procédure de surendettement de la banque de France	1 mois
Changement patrimonial majeur	Retraite	Acte d'ouverture des droits à la retraite	1 mois
Changement patrimonial majeur	Achat de la résidence principale	Acte notarié	1 mois
Changement patrimonial majeur	Financement des études supérieures d'un enfant	Attestation d'inscription pour un montant supérieur ou égal au montant fixé dans les conditions générales	1 mois
Changement patrimonial majeur	Création d'entreprise	Production du K BIS	1 mois

TABLE A.4 – Liste des garanties biométriques et actes déclencheurs associés

A.4 Base de données source et méthodologie de génération de données de synthèse

A.4.1 Description de la base de données

La base de données source est constituée de multiples champs dont la liste ci-dessous qui nous intéresse pour les travaux :

Champs	**Nature**	**Liste**
Numéro de contrat	Numérique	Incrémentation
Statut du contrat	Alphabétique	Liste fermée [A,C]
Date de création du contrat	Date	Donnée paramétrée
Date de clôture du contrat	Date	Donnée paramétrée
Catégorie	Alphabétique	Liste fermée [H,F,D]
Age	Numérique	Liste fermée [0,...,130]
Département	Numérique	Liste fermée [01,...,99]
Code postal	Numérique	Liste fermée [01,...,99999]
Encours	Numérique	Variable $\in \mathbb{R}_+$
Quartile	Numérique	Liste fermée calculée [1,...,4]
Part en euro	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part en UC	Numérique	Pourcentage déductible [0,...,100%]
Nombre d'UC	Numérique	Liste d'entier fermée [0,...,11]
Part d'UC N°1	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°2	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°3	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°4	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°5	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°6	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°7	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°8	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°9	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°10	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]
Part d'UC N°11	Numérique	Pourcentage [0,...,100%]

TABLE A.5 – Caractéristiques de la base de donnée

A.4.2 Méthodologie de production de la base de données

La production d'une nouvelle base de données peut être réalisée sur la base de trois méthodes [44], [18].

- L'échantillonnage, la méthode de Monte-Carlo -*Bootstrap*
- Les méthodes de machine learning de type : réseaux antagonistes génératifs : *Generative Adversarial Networks* et *kernel density estimation* comme le package "synthpop" sur R ou "ydata-synthetic" sous python.
- La reproduction statistique

Méthode	Avantages	Inconvénients
Échantillonnage systématique	technique facile	peut donner une échantillon non représentatif
Échantillonnage stratifié	gains de précision	difficile d'assurer le caractère homogène et pas de déformation
Generative Adversarial Networks	génère des données qui ressemblent aux données initiales	difficulté de paramétrage
Reproduction synthétique	Permet de générer des bases déformées en modifiant les paramètres	Méthode plus empirique avec contrôle par double test de Kolmogorov-Smirnov et divergence

TABLE A.6 – Avantages et inconvénients des méthodes

L'objectif de la production des données synthétiques va être de préserver des caractéristiques des données sources comme les "attributs numériques". Le choix retenu dans ce mémoire est la reproduction statistique qui présente l'avantage en modifiant les paramètres de pouvoir choquer la base pour faire des simulations.

Synthèse de la méthodologie

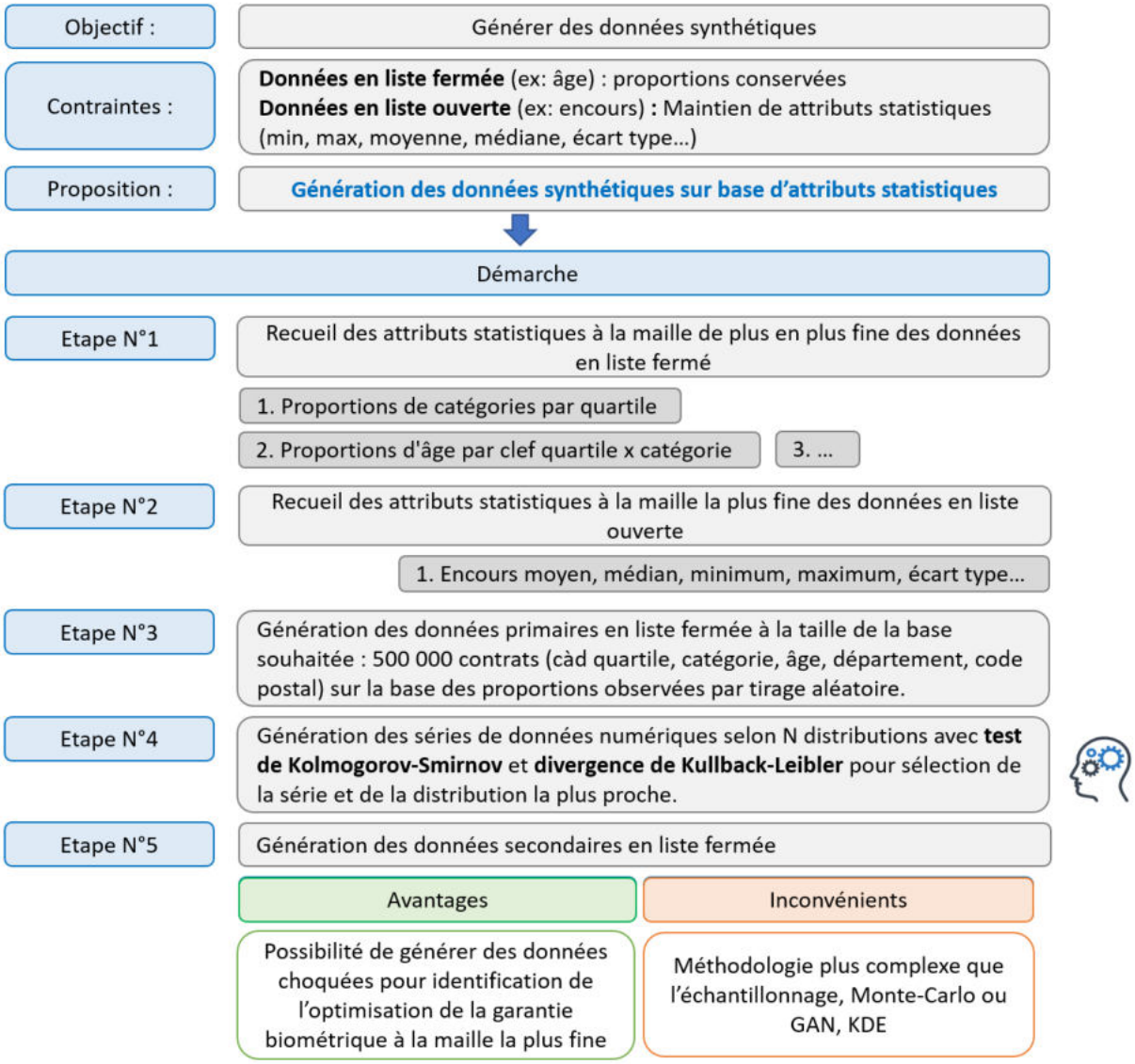


FIGURE A.4 – Synthèse de la méthodologie de génération des données synthétiques sur base d'attributs statistiques

Étape N°1 : identification des attributs en liste fermée

La première étape consiste a identifier les caractéristiques de chaque quantile de contrats. Concrètement, pour le premier quartile, nous avons déterminé la proportion de chaque catégorie : p_{HQ1} Hommes,p_{FQ1} Femmes et p_{DQ1} Demoiselles.
Pour chaque clef "Quartile x Catégorie", nous avons ensuite déterminé la proportion

de chaque catégorie par age. Concrètement, pour les hommes du premier quartile, nous avons déterminé la proportion de chaque age :

- proportion des hommes d'un an : $p_{age-1-HQ1}$
- proportion des hommes de deux ans : $p_{age-2-HQ1}$
- ...
- proportion des hommes de cent trente ans : $p_{age-130-HQ1}$

De manière équivalente pour chaque clef "Quartile x Catégorie x age", nous avons ensuite déterminé la proportion de chaque département.
Ensuite pour chaque clef "Quartile x Catégorie x age x département", nous avons déterminé la proportion de chaque code postal complet.

Étape N°2 : identification des attributs en liste ouverte

Pour les attributs en liste ouverte, comme les encours qui appartiennent à l'ensemble $\mathbb{R}_+$, nous avons extrait à la maille la plus fine : "Quartile x Catégorie x age x Code postal" les attributs :

- encours minimum
- encours maximum
- encours moyen
- encours médian
- écart type
- ...

Étape N°3 : génération des données primaires en liste fermée

Notre objectif est de générer une base de N : 500 000 contrats. L'intérêt est de disposer d'un nombre de contrats représentatif et de continuer à bénéficier de l'avantage de la loi de grands nombres.
Les données primaires sont le quartile, la catégorie, l'age et le code postal. Ces données sont produites sur la base d'un tirage aléatoire entre 0 et 1 qui en fonction de la proportion permet l'affectation d'une valeur. Par exemple, si nous avons 40% d'"hommes", 50% de "femmes" et 10% de "demoiselles", les probabilités cumulatives permettent l'affectation d'une catégorie. A titre d'illustration, si le tirage aléatoire donne 0,56, alors si nous posons les probabilités cumulatives pour affectation, nous affectons la catégorie : "Femmes" :

- Résultat $\in [0, 0.4]$: Hommes
- Résultat $\in [0.401, 0.899]$: Femmes
- Résultat $\in [0.9, 1]$: Demoiselles

Cette méthodologie comporte un léger biais, qui est l'affectation de l'ordre des probabilités cumulées. Cependant le tirage d'un grand nombre permet de neutraliser ce biais.
Compte tenu des données sur les $500000 \times 0,25$ contrats du premier quartile, les 125 000 tirages vont permettre l'affectation des 125 000 catégories.
Ce même processus est reproduit pour les ages, départements et codes postaux.

Étape N°4 : génération des données primaires en liste ouverte

Au niveau le plus fin : "Quartile x Catégorie x Age x Code postal", nous avons généré plusieurs séries selon plusieurs distributions principales :

- distribution uniforme
- distribution gaussienne
- distribution gamma
- distribution beta
- ...

Pour valider notre distribution :
Le test de Kolmogorov-Smirnov est le test d'hypothèse utilisé à chaque étape pour vérifier que la **distribution utilisée permet au niveau de l'échantillon de données synthétiques de suivre la même loi que la base de donnée source**.
Le principe est que "si la statistique K-S est petite ou la valeur p élevée, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse selon laquelle les distributions des deux échantillons sont identiques" ce qui signifie que si la statistique de Kolmogorov-Smirnov est petite et la valeur de p est élevée nous pouvons retenir que la loi utilisée modélise bien l'échantillon. Le test est d'autant moins sensible que l'échantillon est petit. La fonction : "ks_2samp" du package Python "scipy" est utilisée a cet effet.
Pour estimer la dissimilarité entre les données synthétiques et les données de la base source au niveau des deux distributions de probabilités, la divergence de Kullback-Leibler(ou divergence K-L ou encore entropie relative) est utilisée.
Sur la base de ces deux indicateurs, nous avons pu sélectionner la série de la distribution la plus proche de la réalité.
Objectif : Notre objectif est de générer une série de données synthétiques, qui suivait la distribution la plus proche de la base de données source. Les contraintes du modèle étaient le minimum, le maximum, l'encours moyen, l'encours médian, l'écart type...
Procédure : Nous allons illustrer notre méthode avec la distribution gaussienne. Concrètement, sur R, le package "Runuman", permet via la fonction **unorm** de définir une série gaussienne sous contraintes :
Par exemple, si nous supposons que nous avons 68 demoiselles au prorata des 500 000 contrats, d'age 17 ans, au niveau du code postal 75001 pour le quartile 1 qui a un encours moyen de 250 euros, une médiane de 275 euros, un écart type de 120 euros, un encours minimum de 50 euros et maximum de 470 euros nous avons la capacité de produire une série aléatoire sous contrainte :
$Demoiselle_Q 1_7 5 < -urnorm(n = 68, mean = 250, sd = 120, lb = 50, ub = 470)$
La fonction va générer une série de 68 valeurs avec les caractéristiques demandées et nous pouvons comparer les contraintes estimées et le résultat de la fonction. Par itération, de la fonction, nous pouvons choisir la série ayant le moins d'écart.

Nous obtenons ainsi :

itération	Min	1st Quartile	Median	Mean	3rd Quartile	Max	sd
1	63.89	142.41	214.95	244.15	335.44	463.77	111.82
2	**69.61**	**203.39**	**248.07**	**272.22**	**359.26**	**468.16**	**121.53**

TABLE A.7 – Attributs statistiques des itérations de la fonction en tableau

Nous sélectionnons ainsi la série de la 2ème itération qui sera intégrée dans le dataframe au niveau du champs encours à la maille "Quartile 1 x Demoiselle x 17 ans x 75001"

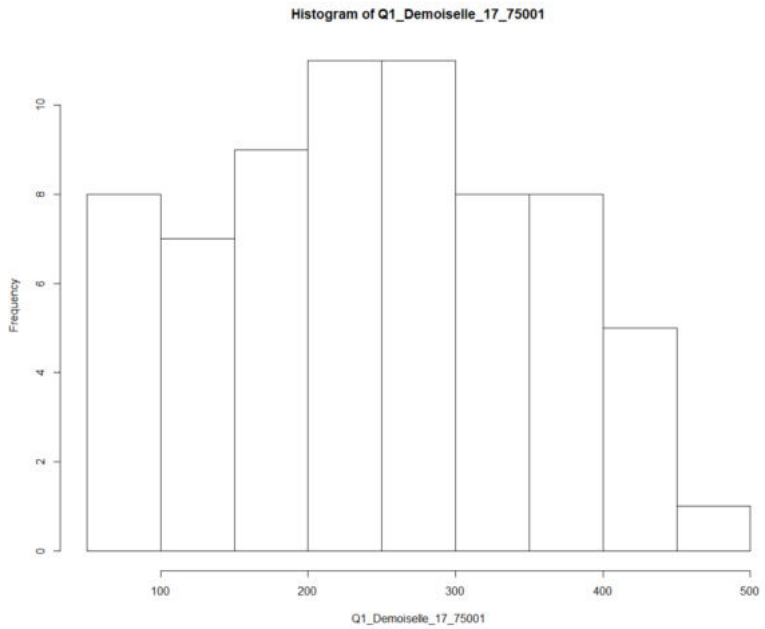


FIGURE A.5 – Itération aléatoire N°1 de la fonction à la maille : Quartile 1 x Demoiselles x age 17 x code postal 75001

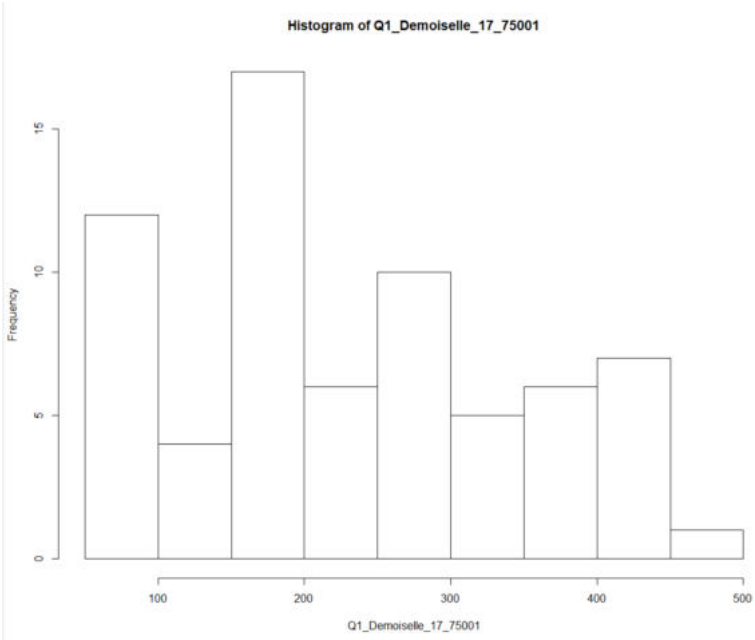


FIGURE A.6 – Itération aléatoire N°2 de la fonction à la maille : Quartile 1 x Demoiselles x age 17 x code postal 75001

Le test de Kolmogorov-Smirnov permet de valider que la 2eme série a le test de Kolmogorov-Smirnov le plus faible et la valeur p la plus élevée.

Étape N°5 : génération des données secondaires en liste fermée

La part euro et la part UC sont générées par tirage aléatoire en fonction de la pondération observée dans le portefeuille.
Si la part UC est non nulle, le nombre d'UC est tiré aléatoirement et affecté en fonction de la pondération dans le portefeuille du nombre d'UC.
Pour chaque UC définie précédemment, la quantité investie est tirée aléatoirement et affecté en fonction de la pondération observée par UC dans le portefeuille à la maille concernée.

Contrôle de cohérence : Analyse de la base de donnée générée

L'intérêt de générer des données de synthèse sur la base d'une matrice d'attributs statistiques permet, en modifiant des paramètres, de générer une base choquée. Par exemple, nous pouvons paramétrer plus d'encours moyen pour les hommes de 55 ans de catégories CSP++ à 75016 et de voir les impacts sur la simulation des garanties biométriques. En effet si dans le mémoire les résultats ont été agrégés, ils ont été calculés à une maille bien plus fine.
Choquer la base par modification de paramètre comporte un biais qui est de considérer que la distribution serait identique, mais toutes choses étant égales par ailleurs, cette

méthodologie permet d'obtenir très rapidement un ordre de grandeur avant de faire ensuite des études plus complètes.
Si le test de Kolmogorov-Smirnov et la divergence de Kullback-Leibler sont utilisés pour constituer la base de données synthétiques l'objectif de la première partie sur les garanties biométriques et de voir les modalités possibles de réduction de la garantie biométrique pour l'assureur. Le pilotage de la garantie biométrique peut être fait par l'intermédiaire de franchise ou d'exclusion de profils à identifier ce que permet la génération de données de synthèse sur base d'attributs statistiques mais que ne permettrait pas les autres techniques.
En effet, il est particulièrement intéressant de voir quelle typologie d'assurés représentent le plus de risque d'activation de la garantie biométriques. Intuitivement, nous pouvons penser qu'un femme de 40 ans titulaire d'un contrat de 2000 euros en moins value de 150 euros ne va pas divorcer pour activer la garantie. Cependant, nous pouvons nous poser la question de l'opportunité d'arbitrage d'un homme avec un encours de 20 millions d'euros et une moins value latente de 2 millions d'euros.

A.5 Résultat du GSE Scénarios 2 et 3

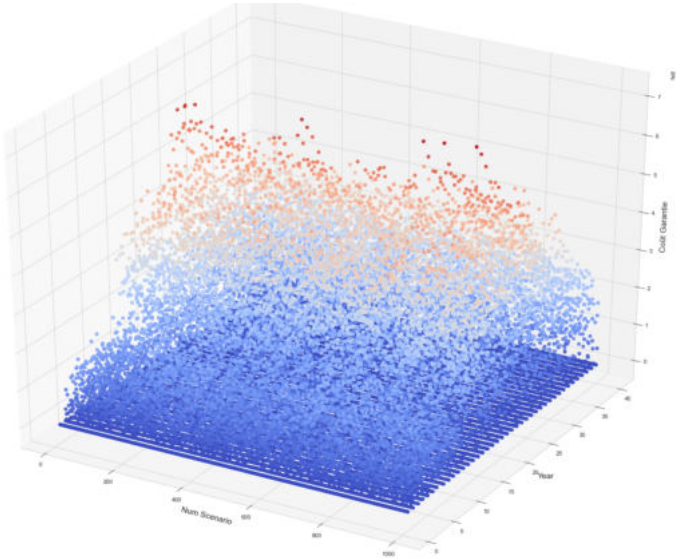


FIGURE A.7 – Cout des garanties toutes causes : Scénario 2

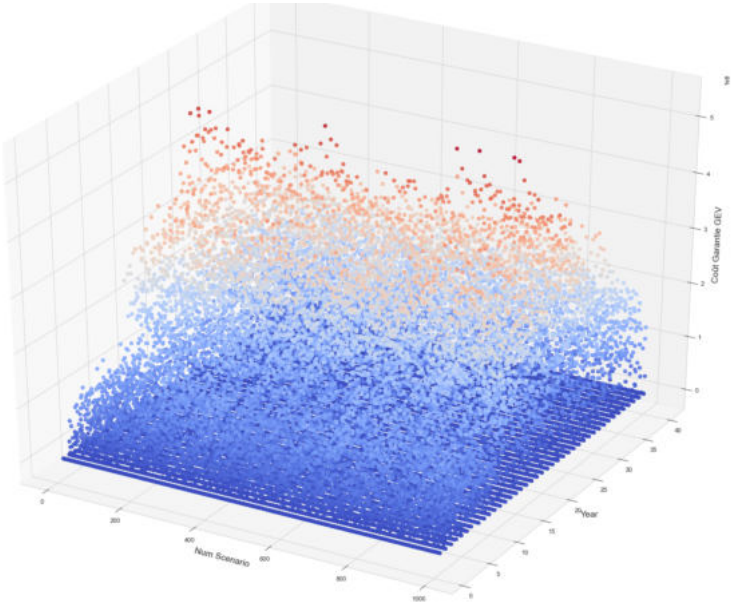


FIGURE A.8 – Cout des garanties grands évènements de la vie : Scénario 2

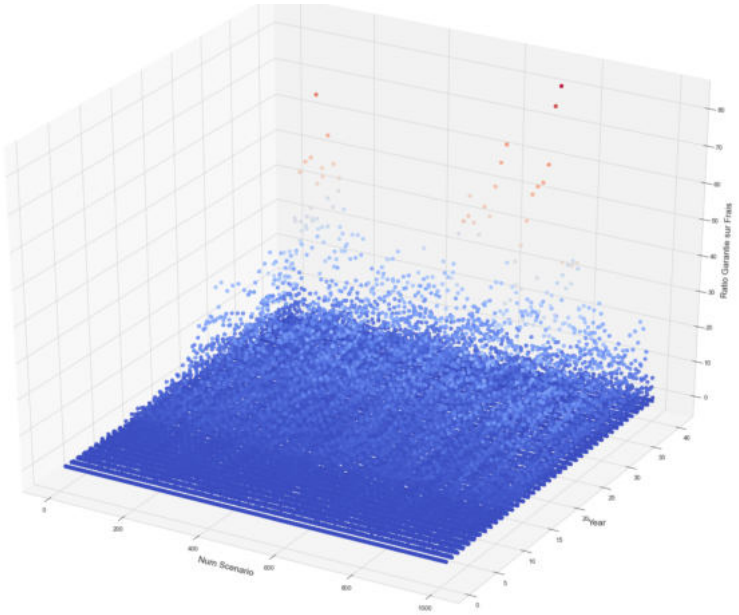


FIGURE A.9 – Évolution du ratio garanties grands évènements de la vie sur frais : Scénario 2

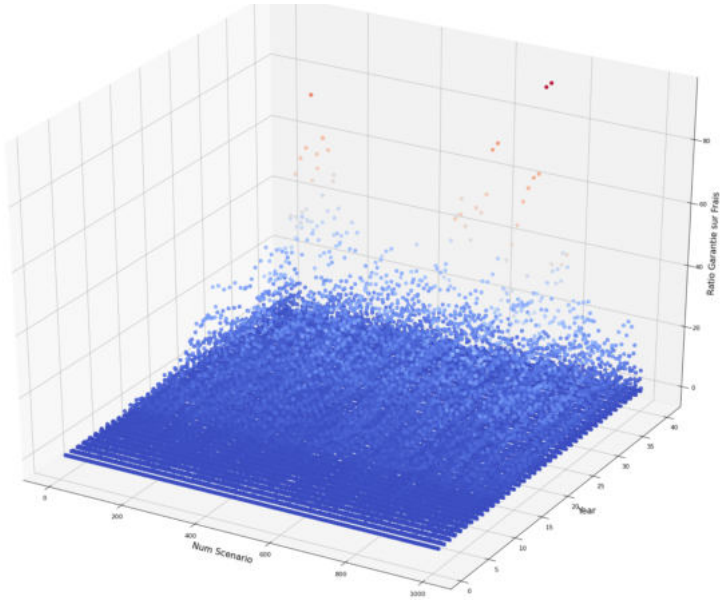


FIGURE A.10 – Cout des garanties toutes causes : Scénario 3

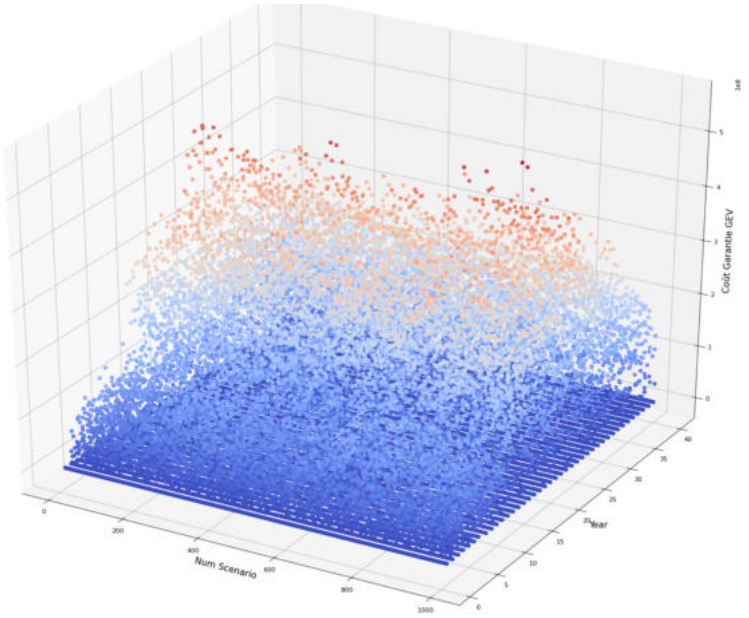


FIGURE A.11 – Cout des garanties grands évènements de la vie : Scénario 3

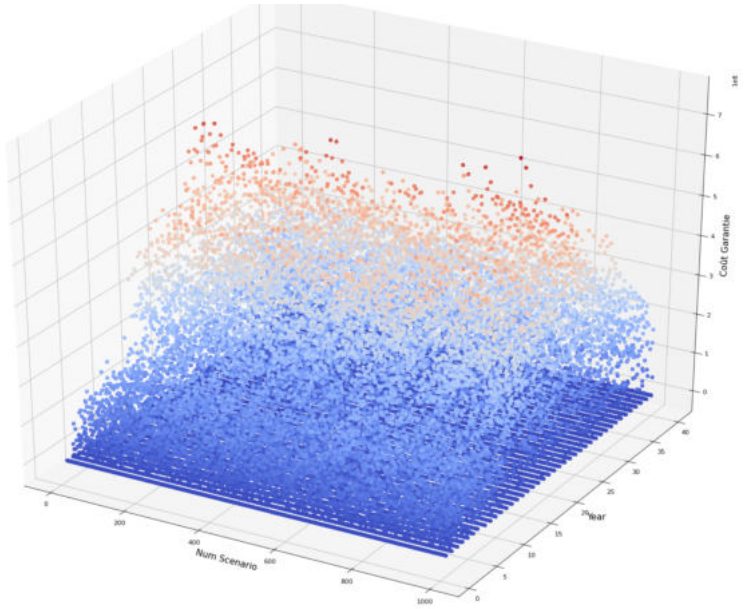


FIGURE A.12 – Évolution du ratio garanties grands évènements de la vie sur frais : Scénario 3

A.6 PII : Modèles linéaires

Méthode	Total Energie	FR0000120271	Succès	Air Liquide	FR0000120073	Succès	Indice	Energie	Succès
Analyse linéaire discriminante	73	85	50,93%	119	97	55,69%	24	30	52,15%
Analyse linéaire discriminante	441	473		378	478		483	535	
Random Forest	231	249	50,37%	236	249	52,43%	214	245	49,81%
Random Forest	283	309		261	326		293	320	

A.7 PII : ARCH

Dans ARCH nous avons :

$$\epsilon_t = \sigma_t \omega_t$$

Ou est ω_t le bruit blanc discret avec une moyenne a 0 et une variance a 1.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2$$

α_0 et α_1 sont des paramètres du modèle. Nous posons que ϵ_t est un ARCH (*autoregressive conditional heteroskedastic model of order unity* (ARCH(1)). Nous avons alors :

$$\epsilon_t = \omega_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2}$$

En faisant l'extension a des *lags* (différence entre valeurs mobiles correspondant au nombre : lag) supérieurs nous avons : ARCH(p) =

$$\epsilon_t = \omega_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_p \epsilon_{t-i}^2}$$

Si nous généralisons, nous avons : GARCH(p) *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model of Order p*, Ou

$$\epsilon_t = \sigma_t \omega_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

α_i et β_j sont des paramètres du modèle.

A.8 PII : Autre modèle de machine learning : Convolutional Neural Network models : CNN

Nous obtenons :

CNN	FR0000120073	Réel	Ecart	FR0000120271	Réel	Ecart
02/07/2018	100,57548	97,227	3,44%	41,29067	49,333	-16,30%
01/01/2019	98,397865	96,455	2,01%	42,51393	45,192	-5,93%
01/01/2020	105,37221	126,7	-16,83%	39,582985	48,851	-18,97%

A.9 Historique des écarts ouverture - clôture CAC40

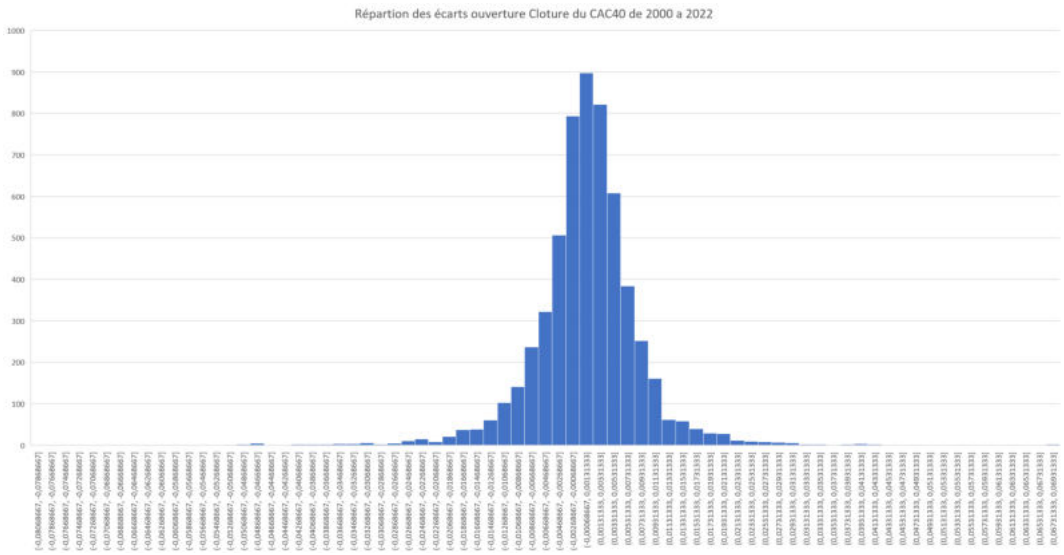


FIGURE A.13 – Historique des écarts ouverture clôture du CAC40

A.10 Performance détaillée du modèle "trading 1" sur le secteur "Énergie"

FIGURE A.14 – Performance finale modèle Trading dynamique N°1

A.11 Performance détaillée du modèle "trading 2" sur le secteur "Énergie"

FIGURE A.15 – Performance finale modèle Trading dynamique N°2

A.12 Performance détaillée du modèle "trading 3" sur le secteur "Énergie"

FIGURE A.16 – Performance finale modèle Trading dynamique N°3

A.13 Performance du modèle "trading 1" sur le secteur "aéronautique"

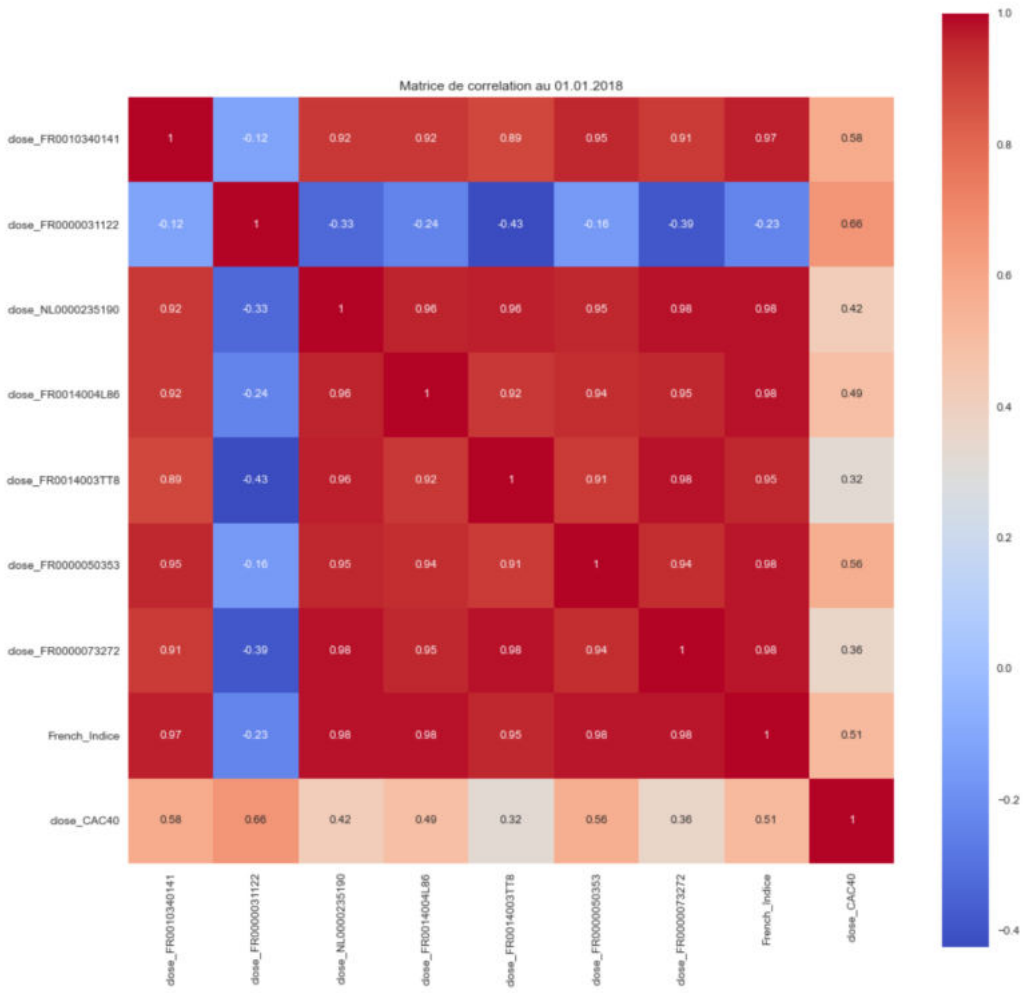


FIGURE A.17 – Matrice de corrélation du secteur aéronautique

FIGURE A.18 – Performance du secteur aéronautique : poche actions hors produits financiers

A.14 Performance du modèle "trading 1" sur le secteur "santé"

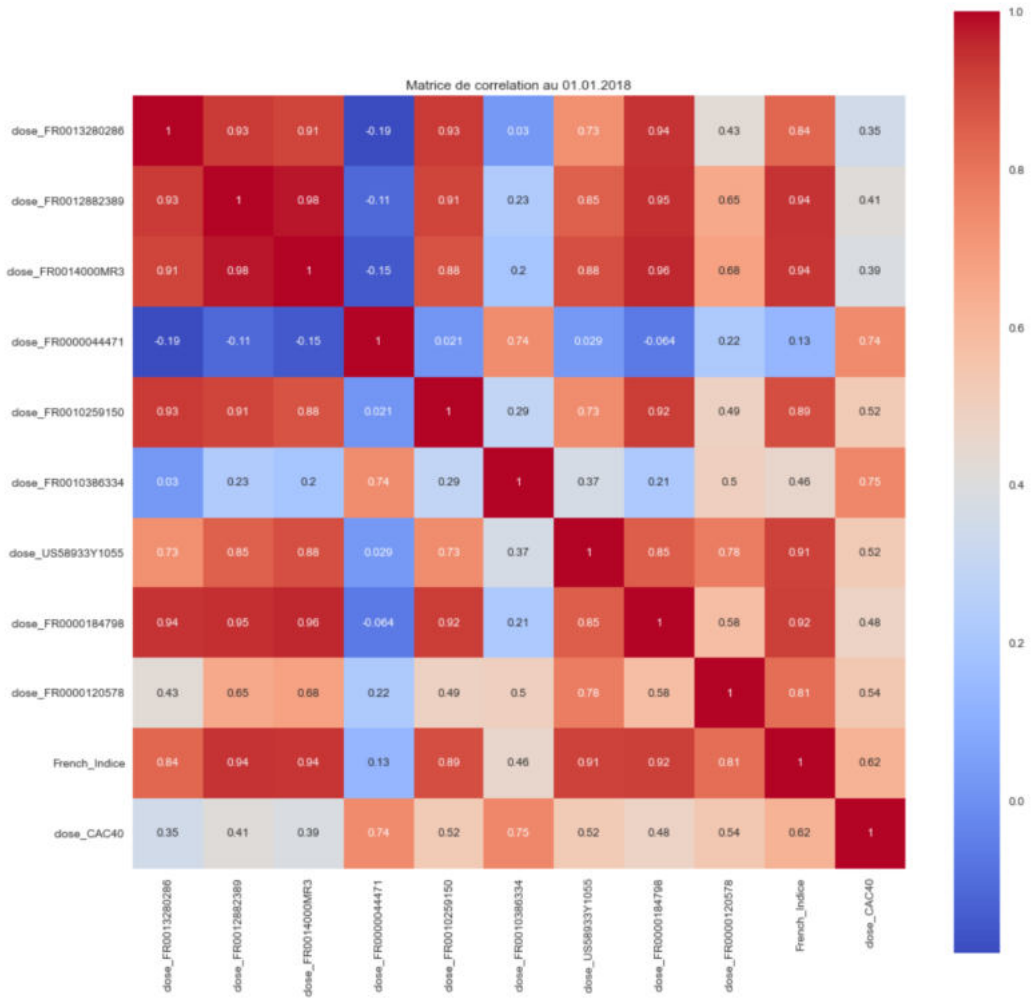


FIGURE A.19 – Matrice de corrélation du secteur "santé"

FIGURE A.20 – Performance du secteur "santé" : poche actions hors produits financiers

A.15 Performance Berkshire Hattaway

FIGURE A.21 – Performance Berkshire Hattaway

A.16 Autres illustrations de l'impact du volume sur le cours

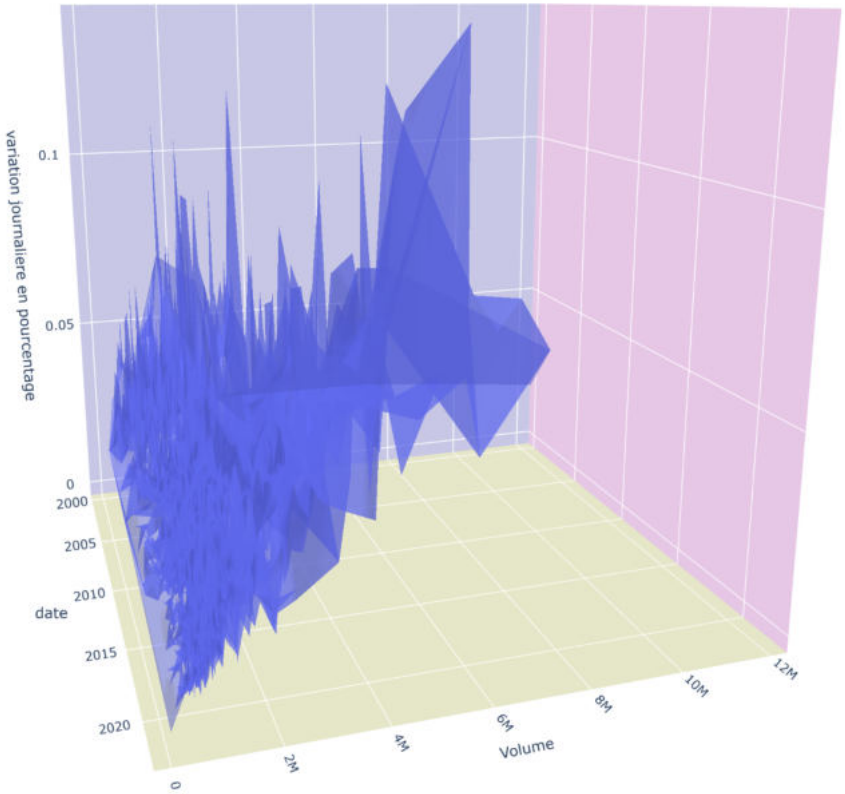


FIGURE A.22 – Corrélation volumétrie et variation du cours : FR0000120073

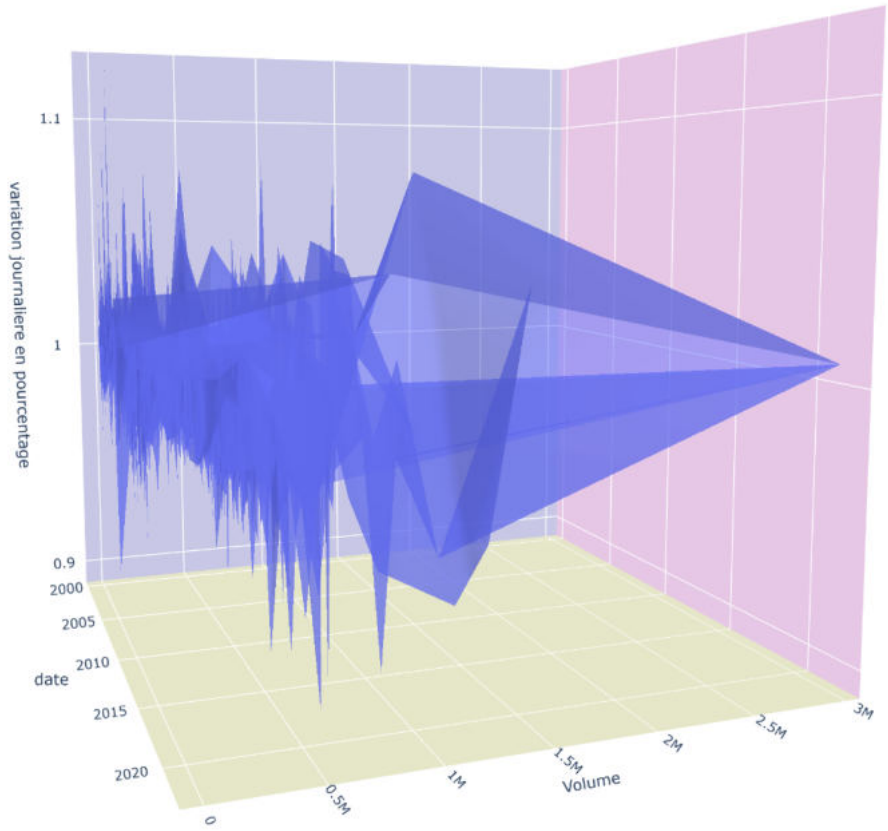


FIGURE A.23 – Corrélation volumétrie et variation du cours : FR0013269123

Annexe B

Lexique

Acronyme	Correspondance
GTC	Garantie toutes causes
GEV	Garantie Grands Événements de la Vie
GSE	Générateur de scénarios économiques
CRR	Cox-Ross-Rubinstein
LS	Longstaff-Schwartz
SII	Solvabilité 2

Bibliographie

[1] Alaeddine Faleh& Planchet, F. (2012). *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs.* Economica.

[2] Aragon, Y. (2016). *Séries temporelles avec R.* Edp sciences.

[3] Ashfaq, Nazish & Nawaz, Z. (2021). A comparative study of different machine learning regressors for stock market prediction. *Cornell University*, 1(Avril).

[4] Assureurs, F. (2022). Nos chiffres clefs : Per - collecte 39,4 milliards d'euros. *France Assureurs*, 1(Mai).

[5] Aubry, L. (2014). *Mémoire : Optimisation de stratégies de gestion actif-passif dynamiques.* IA.

[6] Aït-Kacimi, N. (2022). Le fonds le plus performant de l'histoire a gagne 48 pct en 2021. *Les échos*, 1(Janvier).

[7] Berd, A. (2012). *Journal of Investment Strategies.* Risk Journam.

[8] Bhattacharjee, Indronil & Bhattacharja, P. (2019). Stock price prediction : A comparative study between traditional statistical approach and machine learning approach. *Conference : 4th International Conference on Electrical Information and Communication Technology (EICT)*, 1(Décembre).

[9] Bloch, R. (2019). Assurance vie : au tour d'aviva d'imposer des barrières à l'entrée sur ses fonds euros. *Les Echos*, 1(octobre).

[10] bofip (2022). https ://bofip.impots.gouv.fr/bofip/854-pgp.html. *bofip.impots.gouv*, 1(Juin).

[11] Bourbonnais, R & Terraza, M. (2019). *Analyse des series temporelles.* Dunaud.

[12] Brige, John & Louveaux, F. (2012). *Introduction to stochastic Programming.* Springer.

[13] Bris, Eric & de Varenne, F. (2007). *Insurance from underwriting to derivatives.* Wiley Finance.

[14] Burkov, A. (2019). *The Hundred-Page Machine Learning Book.* Andriy Burkov.

[15] Charpentier (2014). *Computational Actuarial Science with R.* Chapman and Hall/CRC.

[16] Charpentier, A. et Denuit, M. (2005). *Mathématiques de l'assurance non-vie - tome 2.* Economica.

[17] Charpentier, Arthur & Denuit, M. (2004). *Mathématiques de l'assurance non-vie - tome 1.* Economica.

[18] Chatterjee, S. & Firat, A. (2007). *Generating data with identical statistics but dissimilar graphics : A follow up to the Anscombe dataset.* The American Statistician.

[19] Chen, C.-C. (2019). An analysis on investment performance of machine learning : An empirical examination on taiwan stock market. *International Journal of Economics and Financial issues*, 1(Juillet).

[20] Cobbaut, Robert & Gillet, R. (2019). *La gestion de portefeuille.* DE BOECK SUP.

[21] Cottin, M. (2014). *Mémoire : provisionnement de la garantie plancher : alternatives de modélisations.* IA.

[22] Deisenroth, M. P. (2020). *Mathematics for Machine Learning.* Cambridge University Press.

[23] Fang, H. . R. Q. (2016). *Arnott & Wagner 1990 - A two stage stochastic mixed-integrer program modelling and hybrid solution approach to portfolio selection problems.* Information Sciences, 289.

[24] FARAHVASH, P. (2020). *Asset-Liability and Liquidity Management.* John Wiley.

[25] Fraysse, H. (2012). *Mémoire : Construction d'un générateur de scénarios économiques à sauts permettant la prise en compte de scénarios de crises.* IA.

[26] Giandomenico, R. (2010). *Asset Liability Management in Insurance Companies and Banks : Quantitative Models.* LAP Lambert Academic Publishing.

[27] Gobet, N. E. K. R. (2011). *Les outils stochastiques des marches financiers.* Ecole Polytechnique Eds.

[28] Graham, B. (2018). *L'investisseur intelligent.* Valor.

[29] HariomTatsat, S. P. . L. B. (2020). *Machine Learning & Data Science Blueprint for Finance.* o'reilly.

[30] Hervé, P. (2012). *Allocation d'actifs.* Economica.

[31] Hull, J. (2021). *Option, Futures et autres actifs dérivés.* PEARSON.

[32] Hult, Henrik & Lindskog, F. (2012). *Risk and Portfolio Analysis.* Springer.

[33] Inglese, L. (2005). *Successful Algorithmic Trading.* Economica.

[34] INSEE (2021). *Le patrimoine économique national.* INSEE.

[35] Jorion, p. (2006). *Value at risk.* McGraw-Hill Professional.

[36] Kalaiselvi, N & Pushpavalli, S. (2020). A comparative study on stock market prediction. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 1(Juin).

[37] Karayan, R. (2021). Assurance vie : Le palmares 2020 des fonds en euros. *L'argus de l'assurance*, 1(janvier).

[38] L Halls-Morre, M. (2020a). *Advanced Algorithmic Trading.* QuantStart.

[39] L Halls-Morre, M. (2020b). *Successful Algorithmic Trading.* QuantStart.

[40] Madge, S. (2015). Predicting stock price direction using support vector machines. *Priceton - Work Report Spring 2015*, 1(avril).

[41] MANTEL, Antoine & Merlus, S. (2003). *Rapport sur les contrats en unités de compte à garantie plancher.* CCA - ACPR.

[42] MOGHAR, Adie & HAMICHE, M. (2020). Stock market prediction using lstm recurrent neural network. *Procedia Computer Science*, 1(avril).

[43] Monnier, J. b. (2019). *Mémoire : Pilotage ALM et référentiels "market consistent" en assurance vie.* IA.

[44] Narayanan, A. (2017). *Synthetic Data Generator For User Behavioral Analytics Systems.* Ottawa-Carleton Institute of Computer Science.

[45] Ndanga wandji, C. (2017). *Mémoire : Stratégies financières d'un fonds euro dans un environnement de taux bas.* IA.

[46] Palerm, T. (2006). *Mémoire : Tarification de garnaties plancher en cas de vie.* IA.

[47] Portait, Rolland & de Poncet, P. (2014). *Finance de marché.* Dalloz.

[48] Rey, F. (2014). *Mémoire : les rachats en assurance-vie : enjeux et modélisation.* IA.

[49] Sakhare, N. (2019). Performance analysis of regression based machine learning techniques for prediction of stock market movement. *K L University*, 1(Mars).

[50] Sapporta, G. (2011). *Probabilités, analyse des données et statistique.* Technip.

[51] Shen, Jingyi & Omair Shafiq, M. (2020). Short-term stock market price trend prediction using a comprehensive deep learning system. *Journal of Big Data - Springer*, 1(Aout).

[52] Shrivastava, S. (2017). Performance analysis of data mining techniques for stock price forecasting. *International Journal of Engenieering Reseaech and Technology*, 1(May).

[53] Simovici, D. (2018). *Mathematical Analysis for Machine Learning and Data Mining.* World Scientific.

[54] Tuffery, S. (2017). *Data Mining et statistiques décisionnelles.* Technip.

[55] Wassim, E. (2018). *Mémoire : Leviers d'amélioration de la solvabilité et du résultat des compagnies d'assurance-vie en période de taux bas.* IA.

[56] Weinstein, S. (1995). *Secret pour gagner en bourse.* Valor.

[57] www.iii.org (2021). facts-statistics-annuities. *www.iii.org*, 1(Juin).