Mémoire présenté le 12 juillet 2017
en vue de l'obtention du titre d'Actuaire de l'Institut des Actuaires
par **Quentin Pierrot**

suite à son stage effectué dans le cadre de la **filière Actuariat ESSEC-ISUP**

Etude de la performance de la gestion à horizon dans le cadre de l'épargne retraite

Confidentialité ☒ NON ☐ OUI (durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus
Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

Membres présents du jury de la filière :

-
-
-

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

-
-
-
-
-

Entreprise : Deloitte Tax & Consulting Luxembourg
Directeur du mémoire en entreprise : Thierry Flamand

Invité :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise :

Résumé

Mots clés : gestion à horizon, gestion pilotée, cycle de vie, stratégie d'investissement, épargne retraite, contributions définies

Le viellissement de la population européenne vient mettre en péril l'équilibre des systèmes de retraite du 1er pilier, financés par répartition. Les prestations de retraite reçues au titre de l'Etat ont donc vocation à diminuer et les régimes complémentaires du deuxième pilier financés par capitalisation jouent un rôle croissant dans la constitution des pensions de retraite. Or, dans le contexte actuel de taux bas, les fonds euros n'apportent plus nécessairement un rendement suffisant aux yeux des épargnants. La question de la « bonne » stratégie d'investissement, combinant rendement *et* sécurité, se pose donc plus que jamais. Dans ce mémoire, nous étudions la performance de la gestion dite à horizon, gestion qui repose sur une désensibilisation progressive de l'épargne au support actions.

Nous nous situons dans le cadre simplifié où des cotisations mensuelles sont investies sur une durée de 35 ans dans un univers d'investissement à 3 actifs (actions, obligations et placement monétaire). Nous comparons alors la stratégie à horizon à des stratégies plus classiques à l'aune de trois analyses. Notre première analyse consiste à réaliser un simple *backtesting* des différentes stratégies à partir de données historiques. Dans la deuxième analyse, nous reconstituons l'évolution de l'épargne selon les différentes stratégies à partir de données simulées par *bootstrap* des données historiques. Enfin, nous portons un regard prospectif sur la question posée en modélisant et simulant les rendements des différents supports d'investissement.

La logique rétrospective des deux premières analyses ne permet pas de conclure à une domination de la gestion à horizon sur les stratégies d'investissement plus classiques. L'analyse prospective montre en revanche que dans un environnement économique différent de celui des soixante dernières années, la gestion à horizon permet d'obtenir des rendements intéressants tout en possédant des propriétés de consolidation de l'épargne que n'ont pas les stratégies classiques aux rendements similaires.

Abstract

Keywords: life cycle, target date, investment strategy, pension plan, defined contributions

In Europe, demographic ageing jeopardises the equilibrium of the first pillar of the pension system, funded on a pay-as-you-go basis. Pension benefits received under this pillar thus tend to decrease and fully funded second pillar supplementary schemes have an increasing role to play. However, in a low interest rate environment, euro funds' yields are no longer attractive and finding the best investment strategy, which combines performance and security, is more pressing than ever. In this study, we review the performance of the life cycle strategy, strategy that is based on a progressive reduction of the equitiy proportion in the portfolio.

We work in a simplified framework where monthly contributions are invested over 35 years in a three assets (stocks, bonds, money market) investment universe. We compare the life cycle strategy to more traditional strategies through three analyses. First, we simply backtest all the strategies based on historical data. Then, we reconstruct the different strategies using data produced by a bootstrapping of the historical data used for the backtesting. Finally, we run a prospective analysis by modelling and simulating the yields of the assets.

The first two analyses do not reveal any domination of the life cylce strategy over traditional ones. However, the prospective analysis shows that in an economic environment that is very different from the one observed during the last sixty years, the life cycle strategy can be a good way to reach interesting yields while having a reduced volatility at the end of the investment period compared to traditional strategies with similar yields.

Remerciements

J’adresse tout d’abord mes remerciements à Thierry FLAMAND, *partner* et actuaire à Deloitte Luxembourg, pour m’avoir donné l’opportunité de réaliser ce stage, pour avoir suggéré ce sujet de mémoire passionnant et avoir encadré mes travaux.

Ces remerciements s’étendent à toute l’équipe actuariat et assurance de Deloitte Luxembourg, toujours disponible pour répondre à mes questions et aux côtés de laquelle j’ai énormément appris.

Je tiens à remercier également ma responsable académique pour ce mémoire, Marie KRATZ, pour m’avoir donné envie de rejoindre la filière actuariat et m’avoir aiguillé dans mon parcours tant sur les aspects académiques que professionnels. Je remercie donc plus globalement l’ESSEC et l’ISUP pour m’avoir permis de profiter d’un enseignement de qualité au sein de cette filière.

Je remercie enfin ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs efforts de relecture.

Sommaire

VOCABULAIRE ET TYPOGRAPHIE 6

INTRODUCTION 7

1. CONTEXTE 10

1.1. LES RETRAITES EN EUROPE 10
1.2. LES RETRAITES AU LUXEMBOURG 12
1.2.1. Le 1er pilier 12
1.2.2. Le 2e pilier 13
1.3. LA GESTION A HORIZON : ETUDES REALISEES 16
1.4. STRUCTURE DE L'ANALYSE MENEE 19

2. ANALYSE FONDEE SUR DES DONNEES HISTORIQUES 20

2.1. DEFINITION DES STRATEGIES D'INVESTISSEMENT 20
2.2. DONNEES ET PARAMETRES DE L'ETUDE 23
2.2.1. Données et durée de cotisation 23
2.2.2. Montant des cotisations 29
2.2.3. Modalités de gestion 31
2.3. ANALYSE 1 - METHODE 32
2.4. ANALYSE 2 - METHODE 33
2.4.1. Principe général 33
2.4.2. Générer des nombres aléatoires 34
2.5. RESULTATS DES ANALYSES 1 ET 2 37
2.5.1. Rappels méthodologiques 37
2.5.2. Résultats 41
2.5.3. Test sur 10 ans 51

3. ANALYSE 3 : MODELISATION 58

3.1. MODELE ACTIONS 59
3.1.1. Présentation du modèle 59
3.1.2. Données et calibration 60
3.2. MODELE DE TAUX 61
3.2.1. Présentation du modèle 61
3.2.2. Données et calibration 64
3.3. INTEGRER LA CORRELATION ENTRE LES ACTIFS 68
3.3.1. La décomposition de Cholesky 68
3.3.2. Application 69
3.4. SIMULATION ET RESULTATS 71
3.4.1. Simulation des rendements 71
3.4.2. Résultats 72

4. L'ATOUT MAJEUR DE LA GESTION A HORIZON 83

CONCLUSION 87

BIBLIOGRAPHIE 89

ANNEXES 91

Vocabulaire et typographie

Dans tout le mémoire, les expressions « gestion à horizon », « gestion pilotée », « stratégie d'investissement basée sur le cycle de vie » et « stratégie à cycle de vie » sont utilisées comme synonymes. Nous les employons donc sans distinction. Par ailleurs, nous considérons les expressions « taux spot » et « taux zéro-coupon » comme synonymes, et justifions cela en section 3.2.2.

Lorsque nous utilisons les termes « pension légale » et « pension complémentaire », nous nous référons aux pensions reçues respectivement au titre des piliers 1 et 2 du système de retraites tels que définis dans la partie 1.

Par « désensibilisation de l'épargne », nous entendons la réduction de l'exposition au risque de marché, c'est-à-dire la réduction de la composante actions du portefeuille. Pour désigner à la fois le placement obligataire et le placement monétaire, nous utilisons le terme générique « produit de taux ».

Lorsque la traduction française de certains termes anglais est inexistante, équivoque ou inutilisée en pratique, nous conservons l'expression originale. Nous parlerons donc par exemple de *bootstrapping* pour faire référence à une technique de rééchantillonnage de données, ou bien de *backtesting* lorsqu'il s'agit d'analyser *a posteriori* quelle aurait été la performance d'une stratégie d'investissement si elle avait été appliquée dans le passé.

Nous utilisons les acronymes suivants :

- PERCO : Plan d'Epargne Retraite Collectif
- EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority
- AFG : Association Française de la Gestion financière
- IRPP : Impôt sur le Revenu des Personnes Physiques

Les références bibliographiques sont présentées selon la norme internationale ISO 690 et les citations sont faites selon le système numérique. Pour chaque ressource utilisée, un numéro est indiqué entre parenthèses et la référence complète figure à ce numéro dans la bibiliographie. Les numéros sont incrémentés à chaque nouvelle ressource citée et en cas de citation ultérieure d'une ressource déjà citée, le même numéro est utilisé.

Les équations importantes sont numérotées entre crochets.

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'étudier la performance de la gestion dite « à horizon » dans le cadre des plans de pension complémentaires à contributions définies proposés par les entreprises et financés par capitalisation. La gestion à horizon intervient en effet avant tout dans ce type de plan. En France par exemple, dans le cadre du PERCO[1] (Plan d'Epargne Retraite Collectif), la loi[2] impose désormais une option construite sur le modèle de la gestion pilotée. D'après un communiqué de presse de l'Association Française de Gestion (AFG) de juin 2012 (1), cette option est retenue pour environ un tiers des PERCO. De la même manière, aux Etats-Unis, l'épargne retraite placée dans les plans *401K*[3] est souvent liée à des fonds à horizon, ou *target date funds*. Enfin, l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority), dans le cadre du projet de création des produits personnels de pension paneuropéens, recommande (2) de proposer une option par défaut fondée sur la gestion à horizon.

La gestion à horizon peut se définir de la manière suivante : afin d'optimiser l'épargne-pension du futur retraité en termes de rendement et de sécurité, les sommes cotisées par ce dernier sont allouées à différents supports d'investissement en fonction de son âge et de la date de départ à la retraite prévue. Jeune actif, l'individu voit ses cotisations investies selon un profil dynamique à dominante actions. En milieu de carrière, le profil d'investissement est plus équilibré afin d'entamer la consolidation de l'épargne constituée. Enfin, à mesure que la retraite approche, l'épargne est peu à peu reportée sur des actifs peu risqués pour cristalliser les éventuelles plus-values et éviter les déboires d'une chute soudaine des marchés à l'aube d'une sortie en rente ou en capital. On retrouve donc schématiquement les trois phases suivantes :

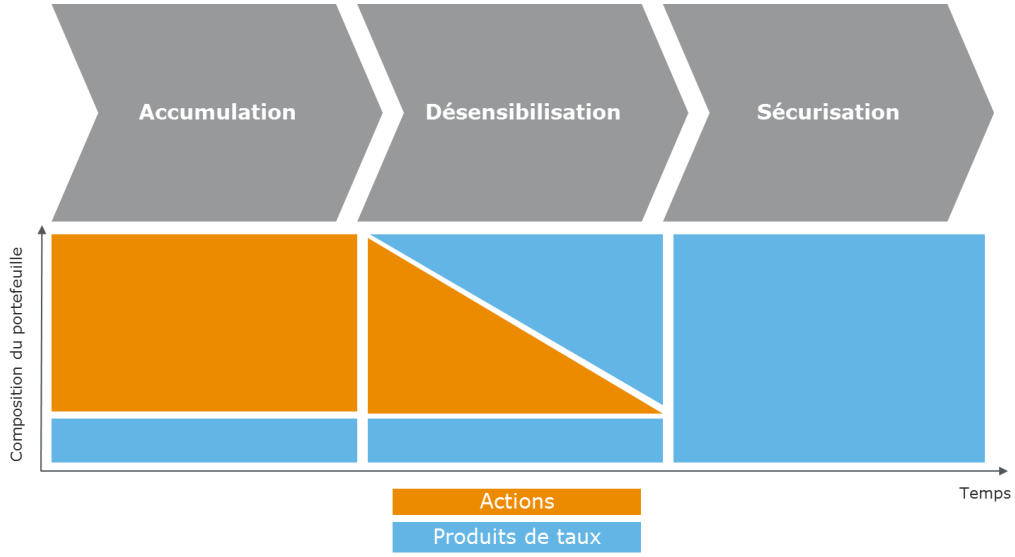


Illustration 1 – Les principales phases de la gestion à horizon (illustration reprise du guide de bonnes pratiques de l'AFG) (3)

[1] Créé en 2003, le PERCO fait partie des dispositifs collectifs d'épargne salariale qui peuvent être mis en place dans l'entreprise, avec la participation, l'intéressement, le Plan d'Epargne d'Entreprise (PEE) ou Interentreprise (PEI).

[2] Article 3334-11 du Code du Travail, modifié par la Loi n° 2010-1330 du 9 novembre 2010 portant réforme des retraites

[3] Equivalent américain du PERCO

La gestion à horizon offre une solution de délégation de la gestion de l'épargne-retraite qui répond à un double objectif : préserver l'épargne constituée par l'individu et apporter une performance supérieure aux fonds en euro. Comme en atteste l'Illustration 2, l'époque des rendements euros élevés est désormais révolue. Les épargnants, autrefois dispensés de l'épineuse question de la « bonne » stratégie d'investissement — les fonds euros combinant rendement et sécurité — sont, dans le contexte actuel de taux bas, obligés d'y apporter une réponse.

Illustration 2 – Evolution du taux français à 10 ans

Concrètement, la gestion « à horizon » peut être mise en place de différentes manières :

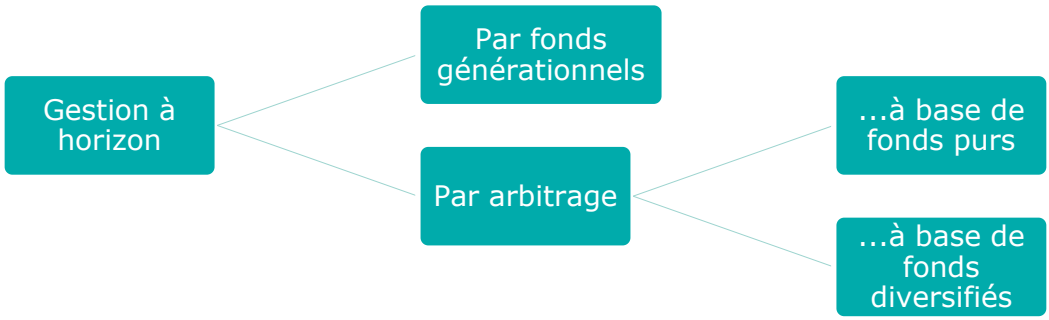


Illustration 3 – Les différentes techniques de gestion pilotée

Dans le cadre d'une gestion pilotée par fonds générationnel, l'intégralité de l'épargne est versée dans un fonds unique dont l'allocation d'actif est calibrée par rapport à un horizon donné. Chaque individu investit donc dans le fonds qui correspond à son horizon. L'horizon est généralement

défini par plage de quelques années. Exemple : « fonds pour la génération prenant sa retraite entre 2025 et 2030 ».

Dans le cadre d'une gestion par arbitrage, l'épargne est répartie entre différents fonds et est rééquilbrée à échéance régulière. Les fonds purs sont des fonds constitués intégralement de la même classe d'actif (100 % d'actions par exemple). Ainsi, il est très facile d'établir la répartition entre les fonds lorsque l'on travaille avec des fonds purs. Pour une allocation à 50 % en actions et 50 % en obligations par exemple, il suffit d'allouer 50 % de l'épargne sur le fonds actions et 50 % sur le fonds obligations. Les fonds diversifés correspondent chacun à un profil d'investissement plus ou moins risqué (exemples : profil d'investissement prudent, équilibré, dynamique), mais contiennent eux-mêmes plusieurs classes d'actifs. Il faut donc procéder à une décomposition par fonds pour connaître l'allocation de l'épargne entre les différents actifs.

L'horizon d'une gestion pilotée peut tout aussi bien être l'âge de départ à la retraite que l'âge probable de décès d'un individu. Dès lors, la gestion à horizon peut intervenir dans la phase de constitution d'une épargne retraite mais aussi dans la phase de consommation de cette épargne. Dans le premier cas –qui est celui des produits de retraite que nous nous proposons d'étudier dans le contexte Luxembourgeois– l'objectif est de maximiser le capital constitué au terme avec un certain niveau de sécurité. Dans le second, il est de maximiser le taux de consommation annuel de l'épargne tout en (i) minimisant le risque de faillite et (ii) maximisant le capital au terme qui sera transmis aux ayants droit de l'individu suite à son décès.

L'intérêt que présentent les plans de retraite complémentaire gérés « à horizon » est évident : au lieu de devoir déterminer à échéance régulière la répartition de leur épargne entre les différents fonds proposés, les bénéficiaires des plans de pension choisissent dès leur affiliation une stratégie globale qui tient déjà compte de l'objet de leur investissement (complément de revenu pour la retraite) et de son profil temporel (allocation d'actifs optimisée en fonction de la date de départ à la retraite prévue). Cette approche peut néanmoins paraître à la fois trop simple et trop compliquée. Trop simple, car nul doute que les appétits au risque parfois divergents des différents affiliés ne peuvent tous être satisfaits par cette stratégie d'investissement « clés en mains ». Trop compliquée, car rien n'indique a priori qu'une telle stratégie sera plus performante qu'une stratégie figée à répartition constante entre les différents supports sur toute la période d'investissement. La gestion à horizon sera dans tous les cas plus coûteuse qu'une stratégie figée (charge opérationnelle et coûts de transaction supérieurs), et plus risquée pour l'affilié qu'un fonds euro à taux garanti.

Les produits gérés à horizon représentent-ils donc la meilleure alternative du point de vue des affiliés ? L'apparente tranquilité apportée par ces produits ne cache-t-elle pas une certaine opacité pour l'affilié, qui devra s'informer en détail sur l'allocation de son épargne à une date donnée ? Si l'on estime que le capital constitué ne sera consommé que progressivement tout au long de la période de retraite, ne faudrait-il pas ralentir la désensibilisation de l'épargne et augmenter l'horizon de temps défini ? Enfin, comment déterminer un niveau de risque acceptable pour la constitution d'un revenu aussi essentiel, et dans quelle mesure l'âge doit-il influencer l'allocation optimale ?

1. Contexte

1.1. Les retraites en Europe

Comme le résume bien Mariette GRZEBIENOWSKI dans son mémoire d'actuaire (4), les systèmes de retraite en Europe sont très hétérogènes. « La nature du régime (volontaire ou obligatoire), le véhicule de financement, les règles appliquées aux cotisations, le mode de financement... ne sont pas coordonnés. ». Malgré ces disparités, tous ces systèmes ont en commun le principe des trois piliers :

« - Le premier pilier est composé des retraites versées par l'Etat et il est financé selon le mécanisme de répartition. Il assure un minimum social aux retraités et est obligatoire au niveau national. Il est régi par une forte solidarité entre les générations.

- Le deuxième pilier est constitué des régimes de retraite professionnels. Il fonctionne généralement par capitalisation, ce qui entraîne la constitution de réserves.

- Enfin, le troisième pilier est représenté par les régimes de retraite souscrits à titre individuel.

Pour s'assurer un revenu au moment du départ à la retraite, les salariés de l'Union européenne font appel à ces trois sources » :

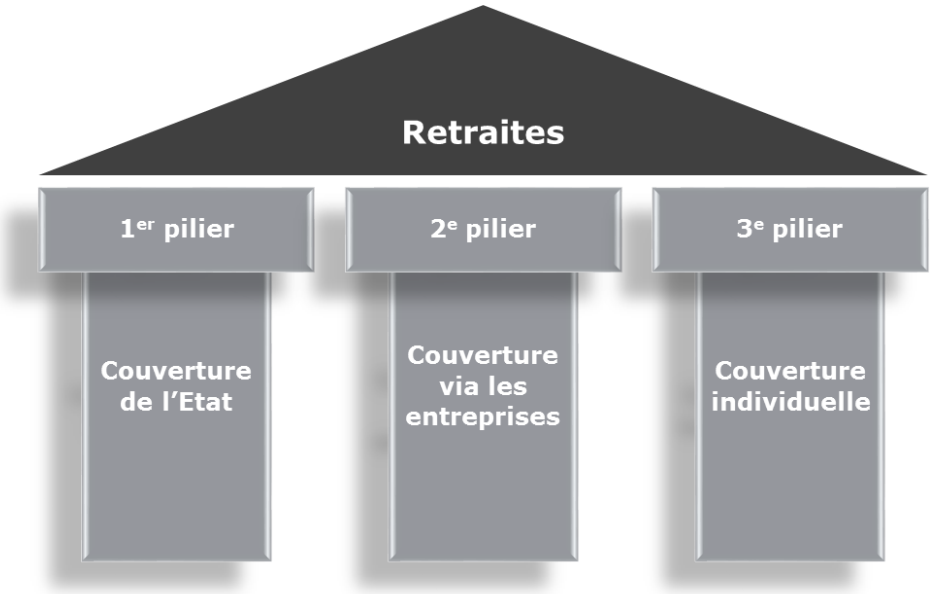


Illustration 4 – La composition par piliers des systèmes de retraite (illustration reprise du mémoire d'actuaire de Manon COUDERT) (5)

Au sein des régimes obligatoires (1er pilier), on distingue généralement les systèmes « bismarckiens » des systèmes « beveridgiens », dont on peut résumer les principales caractéristiques dans le tableau suivant :

	Système d'inspiration « bismarckienne »	**Système d'inspiration « beveridgienne »**
Logique	Assurantielle	Assistancielle
Bénéficiaires	Travailleurs qui cotisent	Citoyens (universalité du système)
Mode de financement	Cotisations	Impôt
Prestations	Proportionnelles aux cotisations	Forfaitaires
Exemple (classification schématique)	France, Allemagne	Royaume-Uni, Pays-Bas

Le viellissement de la population européenne vient mettre en péril l'équilibre des systèmes du 1er pilier, financés par répartition. En effet, avec l'allongement de la durée des prestations de retraite et la dégradation du ratio $\frac{nombre\ d'actifs}{nombre\ de\ retraités}$, la pérénité de ce type de système ne peut être assurée que par une augmentation des prélèvements sur les actifs (montant des cotisations/durée de cotisation) et/ou une diminution des prestations de retraite. Les prestations de retraite reçues au titre de l'Etat ont donc vocation à diminuer et les régimes complémentaires du deuxième pilier financés par capitalisation jouent un rôle croissant dans la constitution des pensions de retraite. On constate ainsi une démocratisation de l'adhésion aux plans de pension complémentaires relevant du 2e pilier et les modalités d'investissement proposées aux adhérents de ces plans sont devenues un sujet d'utilité publique. Le scandale d'Enron révélé en 2001 est symptomatique des enjeux économiques et sociaux qui entourent l'épargne retraite. Dans le cas d'Enron, de nombreux employés mal informés avaient investi une grande partie de leur épargne-retraite en actions Enron. Suite à la faillite de l'entreprise, ces employés ont perdu la quasi totalité de l'épargne correspondante.

Les plans de pension complémentaire peuvent être à adhésion obligatoire ou facultative et on distingue les types de financement suivants :

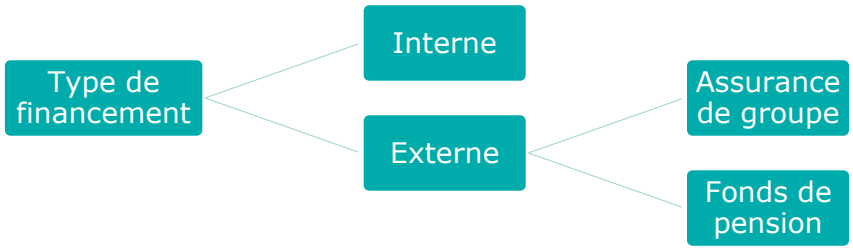


Illustration 5 – Les types de financement des régimes de pension complémentaire

Le mode de financement du régime découle du type de régime. Dans le cas des régimes internes, les engagements de l'entreprise sont financés par une provision au passif du bilan de l'entreprise. Ce mode de financement historique est relativement dangereux pour les affiliés puisque les actifs représentatifs des provisions ne sont pas cantonnés et la promesse donnée n'est donc pas garantie en cas de faillite de l'entreprise. C'est pourquoi la plupart des Etats essaient de se retirer des régimes internes au profit des régimes externes, où un organisme (compagnie d'assurance ou fonds de pension) reçoit les cotisations des adhérents et s'occupe du versement des pensions de retraite. L'engagement de l'organisme externe est variable selon les cas, mais le patrimoine constitué au titre de la promesse de pension est distinct du patrimoine de l'entreprise.

1.2. Les retraites au Luxembourg

1.2.1. Le 1er pilier

Le régime de pension luxembourgeois est passé d'un ensemble de régimes socioprofessionnels autonomes à un mécanisme national homogène de redistribution des revenus d'inspiration bismarckienne. Le financement du régime est assuré par des cotisations. « Dans le régime des salariés, les cotisations sont supportées à raison d'un tiers (respectivement 8 % chacun) par les employeurs, les salariés et l'État. Le taux de cotisation est donc, au total, de 24 % de l'assiette cotisable, laquelle est comprise entre le salaire social minimum[4] et cinq fois ce salaire. » (6) Les mesures d'amélioration du niveau des prestations ont été nombreuses, comme le principe d'ajustement au niveau réel des salaires (1964), l'achat rétroactif (1969, 1999) ou bien l'abaissement de l'âge à la retraite anticipée à 57 ans (1991). Le Luxembourg figure donc au palmarès des meilleurs régimes de pension européens avec sa 6e place en termes de taux de remplacement net[5] (taux de remplacement net de 89 % des gains de pré-retraite) et sa 1ère place en termes de patrimoine retraite net[6] (14,4 fois les gains bruts annuels). Le patrimoine retraite net correspond à la valeur actualisée du flux des prestations de retraite, compte tenu des impôts et cotisations de sécurité sociale dus par les retraités sur leur pension. La 1ère place du Luxembourg sur ce critère s'explique par le niveau relativement élevé des pensions, l'exemption d'impôt (voir Tableau 2), l'espérance de vie élevée de la population (19,4 ans à 65 ans contre 19,3 ans pour l'OCDE (7)) et une législation permettant des départs à la retraite relativement précoces.

Cependant, le régime de pension luxembourgeois se situe dans un paradoxe, que résume bien Robert Kieffer (8): malgré une situation financière excellente (réserves de 3,7 fois le montant annuel des prestations à fin 2010, soit 10,5 milliards d'euros), le régime est promis à un déséquilibre à long terme. En effet, le niveau actuel des prestations garanties risque d'exercer une « insoutenable pression à long terme sur les finances publiques ». Les projections de la prime de répartition pure (taux de cotisation nécessaire au financement des dépenses annuelles en l'absence de réserves) aboutissent au chiffre de 60 %[7] alors que le taux de cotisation est de 24 %. Cette situation n'a été viable jusqu'à présent que grâce à l'augmentation très forte du nombre de cotisants (160.000 en 1985, 380.000 en 2008). Or, ces cotisants vont créer une nouvelle

[4] Au 1er janvier 2017, le salaire social minimum mensuel brut pour les individus qualifiés de 18 ans et plus est de 2.398,30 EUR

[5] OCDE (2016), Taux de remplacement nets des pensions (indicateur). doi: 10.1787/ca6686a8-fr (Consulté le 14 septembre 2016). Le taux de remplacement net se définit comme les droits à retraite individuels nets divisés par le salaire net, compte tenu de l'IRPP et des cotisations de sécurité sociale versés par les salariés et les retraités.

[6] OCDE (2016), Patrimoine retraite net (indicateur). doi: 10.1787/3fc884e2-fr (Consulté le 14 septembre 2016)

[7] Dans un scénario de stagnation de l'emploi

vague de bénéficiaires à l'avenir et il faudra de nouveaux cotisants pour pouvoir financer les dépenses associées.

1.2.2. Le 2e pilier

Cadre général :

Les informations de cette partie sont tirées en grande partie du florilège édité en 2009 à l'occasion du 10e anniversaire la loi-cadre du 8 juin 1999 qui encadre les pensions complémentaires d'entreprises (9).

L'avant-propos de Pierre Doyen, conseiller juridique chez ESOFAC Luxembourg, est très clair : « Aujourd'hui, le thème des pensions complémentaires est plus que jamais d'actualité. Avec le vieillissement de la population, les régimes de sécurité sociale seront mis sous pression. […] Dans le futur, il deviendra en conséquence essentiel de pouvoir disposer d'un revenu complémentaire à sa retraite, notamment par le biais des régimes institués au sein des entreprises. »

La loi a défini l'IGSS[8] comme autorité de contrôle et veut favoriser le développement du financement des retraites profesionnelles par le biais de structures externes, notamment les fonds de pension[9]. Elle instaure également un régime fiscal uniforme pour les différents types de régimes de financement (interne et externe, voir l'Illustration 5) afin de contrebalancer la domination flagrante des régimes internes.

La loi-cadre du 8 juin 1999 transpose certaines directives européennes (directive 77/187/CEE sur le maintien des droits en cas de transfert d'entreprises et directive 80/987/CEE sur la protection des travailleurs salariés en cas d'insolvabilité de l'employeur) qui visent à protéger les salariés en cas d'insolvabilité de l'employeur. La tendance en matière de plan de pension est à une régression des plans à prestations définies en faveur des plans à contributions définies. Depuis 2002, pour protéger les droits des affiliés à un régime interne en cas de faillite de l'entreprise, les entreprises disposant d'un régime interne doivent cotiser au PSVaG allemand : en cas de faillite de l'employeur, le PSVaG intervient pour la couverture des droits acquis.

Le financement des plans de pension complémentaires doit se faire selon un plan de financement déposé auprès de l'IGSS et contrôlé par un gestionnaire agréé.

Fiscalité :

La commission européenne s'est prononcée en faveur du système d'imposition EET[10] (Exemption-Taxation-Taxation) : exonération d'impôt pour les cotisations des employeurs et les revenus/plus-values d'investissement, imposition des prestations de retraite. Ainsi, beaucoup d'Etats ont choisi d'imposer les revenus au fur et à mesure de leur mise à disposition effective. Le Luxembourg, où travaillent beaucoup de frontaliers, a opté pour le principe d'imposition à l'entrée[11] dans le but d'éviter un déficit de recettes fiscales. En effet, les cotisations patronales constituent une dépense déductible pour l'employeur, et le départ de nombreux récipiendaires de pensions occasionne une déperdition fiscale à l'étranger qui empêche l'Etat de récupérer l'équivalent de ces dépenses déductibles sur un revenu imposable. La logique fiscale

[8] Inspection Générale de la Sécurité Sociale
[9] Loi du 8 juin 1999 créant les fonds de pension sous forme de société d'épargne-pension à capital variable
[10] Pour une comparaison des systèmes d'imposition dans les principaux pays européens, voir Tableau 2
[11] Imposition des versements patronaux au taux de 20 %

luxembourgeoise est donc celle du TEE (Taxation-Exemption-Exemption) : financement taxé, revenus/plus-values d'investissement et prestations exonoérées.

Les allocations, cotisations et primes d'assurance à un régime complémentaire de pension ainsi que les dotations faites par l'employeur à un régime interne constituent une rémunération imposable au taux de 20% (articles 95 et 142 de la loi modifiée du 4 décembre 1967 concernant l'impôt sur le revenu). Elles sont également soumises à la taxe rémunératoire IGSS de 0,9 %. Les prestations sont exonérées d'impôt sur le revenu mais sont soumises à la contribution à l'assurance dépendance à concurrence de 1,4 %.

Véhicules de financement :

Dans le cadre des régimes externes, différents véhicules de financement peuvent entrer en jeu selon le type de prestation proposé par l'employeur :

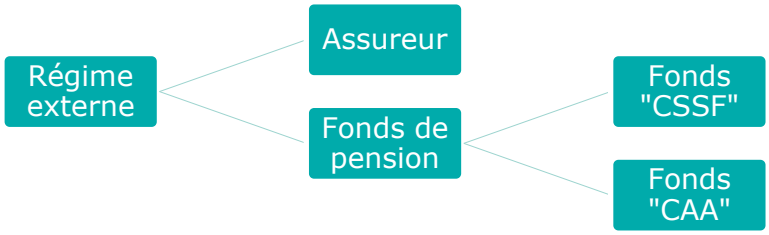


Illustration 6 – Les différents véhicules de financement des régimes complémentaires luxembourgeois

Les fonds « CSSF »[12] relèvent du secteur financier et sont soumis à la surveillance prudentielle de la Commission de Surveillance du Secteur Financier (CSSF), tandis que les fonds « CAA »[13] relèvent du secteur des assurances, contrôlé par le Commissariat aux Assurances (CAA). Les principales différences entre ces véhicules de financement peuvent être résumées dans le tableau suivant :

[12] Société d'épargne pension à capital variable (sepcav) et Association d'épargne pension (assep)
[13] Tels que définis à l'article 3 du règlement grand-ducal du 31 août 2000

	Fonds de pension « CSSF »	Fonds de pension « CAA »	Assurance de groupe
Obligation de la structure externe	Obligation de moyens[14] → en cas de rendement insuffisant des actifs, l'employeur « sponsor » du plan doit combler le déficit de couverture. En cas de difficultés de l'employeur, possible diminution du niveau des avantages pour le futur.		Obligation de résultat
Type de prestations de retraite (DC=contributions définies, DB=prestations définies)	SEPCAV : DC ASSEP : DB, DC	DB, DC	DB, DC
Garantie de l'employeur	SEPCAV : Non ASSEP : possible, mais non obligatoire	Obligatoire	Garantie fournie par l'assureur
Restrictions d'investissement	Principe de prudence	Restrictions quantitatives	Principe de prudence (Solvabilité II)

Tableau 1 – Comparaison des différents véhicules de financement

Les défis d'avenir du 2e pilier du système de retraite luxembourgeois sont les suivants :

- La question de l'affiliation des fonds de pension au PSVaG. En effet, les fonds externes n'y sont pas affiliés tandis qu'en Allemagne ils cotisent à raison de 20 % du taux de cotisation des plans internes. Cette question est de taille car dans la situation actuelle, en cas de plan externe et de faillite de l'employeur sponsor, les droits des affiliés sont réduits en fonction des actifs restant dans le fonds
- La question de l'abaissement du taux d'imposition de 20 % qui s'applique aux cotisations
- Le traitement des professions libérales et des indépendants (actuellement exclus mais inclus dans le projet de loi portant réforme de l'assurance pension)
- La déductibilité fiscale du taux d'intérêt technique dans le cadre des régimes internes
- La revue des bases techniques (taux d'actualisation et table de mortalité) du financement minimum

[14] Un fonds CSSF pourrait théoriquement avoir une obligation de résultat, mais il n'en existe pas au Luxembourg. Les fonds de pension à obligation de résultat sont en revanche courants au Royaume-Uni et aux Pays-Bas

1.3. La gestion à horizon : études réalisées

Dans son mémoire d'actuaire (10), Fabienne Hirrien questionne l'adéquation de la gestion à horizon au besoin des assurés dans le cadre français des contrats d'assurance retraite individuelle. Elle développe la remarque suivante : si l'option de sortie choisie est la rente, ce qui est généralement le cas, alors « l'optimisation ne porte […] plus sur les flux réellement perçus mais sur un flux 'fictif' ». Ainsi, « considérer les flux réels conduit à reculer l'horizon et par conséquent à ralentir la désensibilisation de l'épargne ». En effet, dans une telle situation, les flux réels sont les annuités de la rente qui seront perçues chaque année jusqu'au décès alors que la stratégie est calibrée par rapport à la date de départ à la retraite. Il serait donc plus judicieux de paramétrer la stratégie en fonction de la duration moyenne de la perception des annuités plutôt qu'en fonction de la date de réception du premier flux.

Cette observation soulève de nombreuses questions mais ne sera néanmoins pas intégrée dans notre étude. En effet, les plans de pensions luxembourgeois ne proposent généralement pas de sortie en rente, ou alors à des tarifs très peu attractifs (tarification par le biais de tables de mortalité allemandes prudentes et de taux techniques très bas). La domination de la sortie en capital est dûe à l'absence d'harmonisation des conventions fiscales entre les différents pays de l'Union Européenne. Une sortie en rente peut par exemple s'avérer fiscalement très désavantageuse pour les travailleurs frontaliers souhaitant passer leur retraite en dehors du Grand-Duché. La sortie en capital permet à ces travailleurs d'éviter une double imposition. Le tableau suivant issu d'une communication de commission des communautés européennes (11) permet de mieux comprendre la situation :

E= Exemption **T= Taxation**	**Cotisations**	**Revenus des investissements et plus-values de l'institution de retraite**	**Prestations**
Luxembourg	T (20%)	E	E
France	E	E	T
Belgique	E	E	T
Allemagne	E/T	E	T/E
Italie	E	T	T

Tableau 2 – Comparaison des systèmes fiscaux des principaux pays européens (vue schématique)

Ainsi, un individu travaillant au Luxembourg et souhaitant recevoir sa pension de retraite sous forme de rente en France subit une double imposition : imposition sur les cotisations au Luxembourg et sur les annuités de la rente en France.

Cette remarque est également l'occasion pour nous de rappeler que l'option de sortie en capital se développe dans certains pays européens, comme au Royaume-Uni où la réforme des retraites de 2014 permet aux retraités de retirer des actifs de leur fonds de retraite sans limite de plafond (12). Cette tendance, comme les difficultés des régimes par répartition, renforce l'intérêt de l'étude de la gestion à horizon.

Spitzer et Singh (13) étudient la performance de la gestion à horizon dans le contexte de la consommation de l'épargne accumulée par un retraité et dans un modèle à deux actifs (actions/obligations). Le retraité s'est constitué un capital-retraite, placé sur les deux actifs, et en retire un certain pourcentage chaque année pour subvenir à ses besoins. Les mesures de risque et de performance utilisées dans l'étude sont les suivantes :

Mesure du risque	Probabilité que le retraité ait épuisé son épargne avant 30 ans, *i.e.* probabilité que la performance de gestion du patrimoine ne permette pas de compenser les retraits effectués pendant 30 ans
Mesure de la performance	Capital résiduel à l'issue de 30 années de retraits (optique de transmission)

Les auteurs mettent à l'épreuve différentes stratégies de gestion à horizon (désensibilisations linéaire et brusque de l'épargne) et montrent qu'elles apportent des probabilités de ruine supérieures aux stratégies d'allocation actions/obligations figées à 50, 60 ou 70 % d'actions. Ils montrent également que la gestion à horizon apporte des montants de capital résiduel inférieurs aux stratégies actions/obligations à répartition figée à 50, 60 ou 70 % d'actions.

Dans un autre article (14), Spitzer et Singh étudient différentes stratégies de désinvestissement dans un modèle à deux actifs (actions/obligations). Chaque année, un certain pourcentage[15] de l'épargne accumulée par un retraité est consommée et le désinvestissement correspondant peut se faire :

- En retirant d'abord les actions du portefeuille
- En retirant d'abord les obligations du portefeuille
- En retirant d'abord l'actif le plus performant sur la dernière année (règle dynamique)
- En retirant d'abord l'actif le moins performant sur la dernière année (règle dynamique)
- En retirant actions et obligations de telle sorte que les proportions initiales[16] restent constantes

Les auteurs montrent notamment que le fait de retirer les actions du portefeuille en premier (plutôt que les obligations) ne diminue pas le risque de ruine (risque d'épuiser la totalité de l'épargne en moins de 30 ans) et a même un impact négatif sur le capital résiduel (niveau de l'épargne après 30 ans de retraits annuels).

Ces résultats vont à contre-courant de l'intuition selon laquelle la stratégie à horizon est la stratégie la plus performante au regard du couple rendement/risque sur un investissement de long terme. Le portefeuille « à horizon » apporte un rendement inférieur aux portefeuilles lourdement chargés en actions, tout en ne diminuant pas significativement le risque de ruine. C'est ici qu'un élément de taille doit être clarifié : comment définir le risque ?

- Doit-on le définir comme la variance du capital probable au terme, ou bien, dans l'esprit de la probabilité de ruine, comme la probabilité qu'il soit inférieur à un certain niveau ?
- Si une stratégie est associée à une variance élevée mais rapporte dans tous les cas plus qu'une autre stratégie qui pourtant possède une variance très faible, peut-on dire que la première stratégie est plus risquée ?

[15] Des taux de retrait de 3, 4, 5, 6 et 7 % sont testés
[16] 5 proportions initiales d'actions sont testées : 30, 40, 50, 60 et 70 %

- En ce qui concerne le rendement, on peut imaginer une stratégie dont le capital au terme a une espérance très élevée mais une médiane égale à 0. Une telle stratégie est-elle plus enviable pour un investisseur individuel qu'une stratégie à l'espérance plus faible mais à la médiane positive[17] ?

Nous remarquons bien que les métriques de mesure de la performance d'un investissement ont toutes leurs limites. A cette complexité s'ajoutent les paramètres psychologiques propres à l'aversion au risque des différents individus. Ainsi, les investisseurs sont sensibles à la probabilité de perte mais aussi à la magnitude de la perte. A ce propos, Ravi Jagannathan montre par exemple (15) que pour des ménages avec une aversion relative au risque constante et à partir d'un certain niveau d'aversion au risque, l'allocation optimale en actions est indépendante de l'horizon de temps, car la possibilité de perte considérable compense la quasi-certitude de performance supérieure à celle des obligations.

Enfin, William Reichenstein rappelle un article (16) que l'allocation d'actifs optimale pour un individu donné dépend de l'intégralité de son patrimoine. Dès lors, des éléments tels que la possession d'une maison, d'un appartement en location ou d'une entreprise familiale, tout comme la perspective d'un héritage, l'existence d'un prêt immobilier ou de salaires futurs incertains doivent être pris en compte pour définir une stratégie véritablement optimale. Il rappelle également qu'un portefeuille composé uniquement d'obligations n'est pas moins volatile qu'un portefeuille comprenant 20% d'actions et 80% d'obligations par exemple, grâce à la diversification. Une exposition nulle au marché actions ne semble donc pas justifiée, même à l'aube de la retraite[18].

Une étude très complète de l'OCDE (17) a été menée sur les stratégies d'investissement par défaut des plans à contributions définies. Le résultat de l'étude est que la performance d'une stratégie dépend fortement de la période de cotisation et de l'option de sortie choisie (rente, retraits programmés, retraits variables). Face aux stratégies dynamiques et aux stratégies figées (voir l'Illustration 8), les stratégies à cycle de vie sont relativement efficaces sur des périodes de cotisation « courtes », de l'ordre de 20 ans. La stratégie à cycle de vie la plus efficace est celle qui maintient une exposition aux actions constante pendant la plus grande partie de la période d'investissement, puis passe rapidement aux obligations sur les 10 dernières années. C'est donc un profil de désensibilisation qui sera testé dans notre étude.

La vraie conclusion de cette étude de l'OCDE, comme celle de notre recoupement des études existantes, est qu'il n'y a pas de stratégie qui convienne à toutes les situations et que la valeur ajoutée de la stratégie à horizon — loin de faire consensus — demande d'être étayée.

[17] Cet argument sera repris dans l'analyse des résultats, en section 1.1.1

[18] Dans notre étude, nous ne réduirons donc jamais à 0 la part d'actions dans les portefeuilles gérés à horizon, même en fin de période d'investissement

1.4. Structure de l'analyse menée

Dans ce mémoire, nous analysons la performance de la gestion à horizon dans une logique comparative.

Nous devons donc suivre les étapes suivantes :

Illustration 7 – La structure de l'analyse menée

Notre analyse est structurée à partir des 3 possibilités qui s'offrent à nous à l'étape 4 :

- Utiliser directement des données historiques
- Simuler des données par ré-échantillonnage (*bootstrapping*) des données historiques
- Simuler des données à partir d'un modèle calibré sur des données historiques

Nous allons donc d'abord mener une analyse à partir de données historiques, brutes dans un premier temps (Analyse 1), puis ré-échantillonnées (Analyse 2). L'étude des données historiques brutes revient à effectuer un *backtesting* des différentes stratégies dans le temps, en répondant à la question suivante : qu'auraient-donné les différentes stratégies si elles avaient été appliquées dans le passé ? Nous remarquerons cependant que le *backtesting* a des limites et que les résultats qu'il fournit ne nous éclairent que partiellement sur la performance de la gestion à horizon. Pour sortir du cadre purement rétrospectif de cette première analyse, nous simulerons des données par *bootstrapping* et comparerons la performance des différentes stratégies sur un grand nombre d'échantillons simulés. Enfin, pour porter un regard véritablement prospectif sur le problème posé, nous analyserons l'intérêt de la gestion à horizon dans le contexte actuel sur la base d'une modélisation et de données simulées (Analyse 3).

2. Analyse fondée sur des données historiques

2.1. Définition des stratégies d'investissement

L'objet de notre étude est la performance de la gestion à horizon. La définition de la stratégie associée à cette gestion est donc cruciale. La définition des stratégies concurrentes l'est également étant donné le caractère comparatif de notre analyse.

Nous limitons l'univers d'investissement à 3 classes d'actifs :

- Actions
- Obligations
- Placement monétaire

Ainsi, chacune des stratégies que nous mettons à l'épreuve dans cette étude est définie par une matrice qui décrit l'évolution de la répartition du portefeuille entre les différentes classes d'actifs au cours du temps :

	% actions	**% obligations**	**% placement monétaire**
Période 1			
Période 2			
…			
Période n			

Pour distinguer les différents modes de gestion offerts par les assureurs, nous pouvons reprendre la typologie d'une étude de l'OCDE sur les retraites (17):

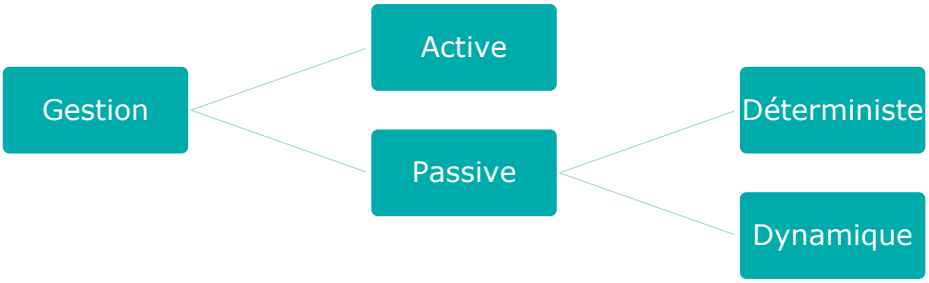


Illustration 8 – Les différents modes de gestion proposés par les assureurs

Dans la gestion active, l'allocation d'actifs est très souple. Le gestionnaire de l'épargne dispose d'une certaine liberté dans le choix des actifs et peut donc profiter de certaines tendances de marché pour effectuer des arbitrages conjoncturels. Ce mode de gestion fait intervenir une expertise en continu et implique donc des frais de gestion relativement élevés. La gestion passive, à l'inverse, est plus rigide, mais moins coûteuse. La stratégie d'investissement est définie au contrat selon des règles qui peuvent être déterministes ou dynamiques.

Exemple de règle d'allocation déterministe sur une durée 20 ans :

Années 1 à 10	**Années 11 à 20**
50% actions, 50% obligations	100% obligations

Exemple de règle d'allocation dynamique :

- Allocation initiale de l'épargne sur 2 fonds : 50% sur le fonds 1, 50% sur le fonds 2
- A la fin de chaque mois, 15% de l'épargne du fonds le moins performant sur le mois est alloué au fonds le plus performant.

La gestion à horizon est une stratégie passive et déterministe, que nous allons comparer à d'autres stratégies passives déterministes. Nous laissons donc de côté les règles d'allocation dynamiques, moins courantes dans le cadre des produits de retraite. Des travaux très intéressants ont néanmoins été produits sur ces stratégies dynamiques. Nous pouvons notamment citer Spitzer et Singh (14) qui analysent les différentes stratégies de désinvestissement que peuvent mettre en œuvre les retraités devant liquider peu à peu leurs placements pour obtenir un revenu de retraite complémentaire.

Comme le font remarquer Spitzer et Singh dans leur étude (13) sur les fonds à horizon (« *target date funds* »), il existe un grand nombre de variations autour du thème de la gestion à horizon. En effet, plusieurs stratégies peuvent avoir en commun le principe de gestion basée sur le cycle de vie mais avoir des rythmes de désensibilisation de l'épargne très différents. Or, le profil de désensibilisation est crucial et influence grandement la performance et le risque d'une stratégie à horizon, notamment à cause du poids des gains/pertes de marché en fin de période d'investissement[19]. Pour tenir compte de cette diversité, nous définissons donc 3 stratégies de gestion à horizon :

[19] Une illustration de ce phénomène est proposée à la section 1.1.1 — voir le Graphique 6

Stratégie	Description
1 : désensibilisation linéaire de l'épargne	La proportion d'actions dans le portefeuille décroît linéairement dans le temps pour atteindre la proportion finale cible
2 : désensibilisation tardive	La proportion d'actions dans le portefeuille reste forte sur toute la durée de l'investissement, exception faite des dernières années où elle décroît brutalement pour atteindre la proportion finale cible
3 : désensibilisation rapide	La proportion d'actions dans le portefeuille décroît rapidement vers sa proportion finale cible et reste ensuite constante jusqu'à la fin de l'investissement

Ces différents rythmes de désensibilisation peuvent s'illustrer de la façon suivante :

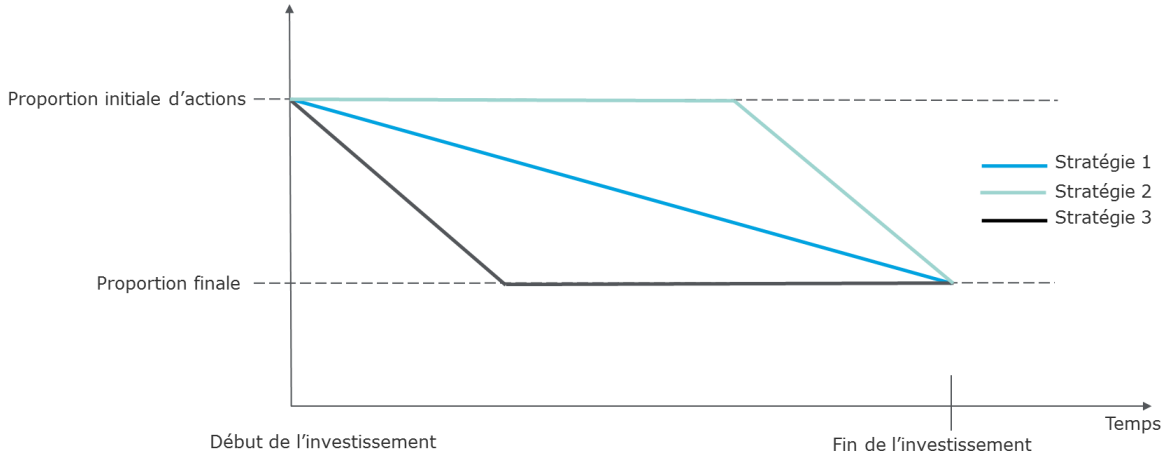


Illustration 9 – Les 3 stratégies de désensibilisation de l'épargne

La proportion initiale d'actions est fixée à 75 % et la proportion finale est fixée à 5 %. Sur les 4 grilles proposées par un acteur du marché (prudente, équilibrée, dynamique et offensive), notre hypothèse d'allocation initiale se trouve entre la grille dynamique et la grille offensive.

Les stratégies concurrentes à l'aune desquelles nous évaluons la gestion à horizon sont des stratégies à proportion d'actions constante tout au long de la période, comme présenté ci-dessous :

Stratégie	Proportion d'actions dans le portefeuille
4	30 %
5	40 %
6	50 %
7	60 %
8	70 %
9	80 %
10	10 %

La stratégie 10 correspond à la stratégie de placement « classique » d'un assureur : 10 % placés en actions, 85 % en obligations et 5 % en monétaire tout au long de la période d'investissement. Pour les stratégies 1 à 9, en revanche, la répartition de la part non-action entre les deux produits

de taux (obligataire et monétaire) varie dans le temps. Sur cette part non-action, la proportion d'obligations est dominante sur toute la période, exception faite des dernières années où la part non-action est reportée en grande partie sur le placement monétaire.

La répartition de la part non-action pour les stratégies 1 à 9 aura donc l'allure suivante :

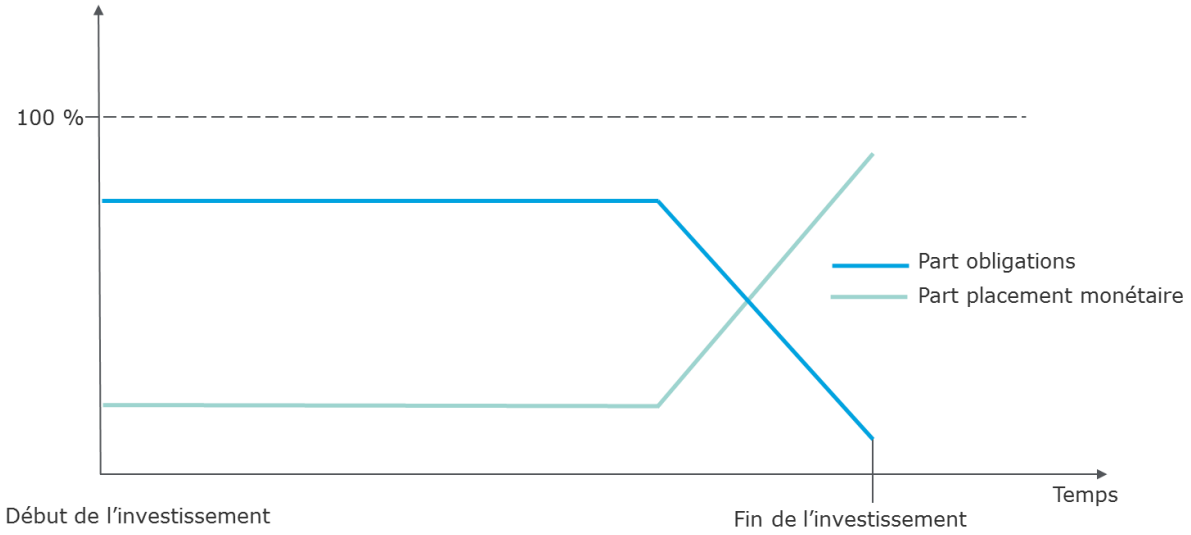


Illustration 10 – Répartition de la part non-action entre les différents produits de taux, strategies 1 à 9

A titre de repère, la proportion d'actions des stratégies 4 et 5 (30-40 % d'actions) est typique de ce que l'on peut observer dans les stratégies d'investissement des fonds de pension Belges d'encours élevé (supérieur à 125 millions d'euros).

2.2. Données et paramètres de l'étude

2.2.1. Données et durée de cotisation

<u>Les données récoltées</u> :

Les produits de retraite complémentaire sont des produits d'investissement de très long terme. Cet horizon temporel constitue une contrainte majeure pour la collecte de données. Celles-ci doivent en effet être disponibles sur une période de plusieurs dizaines d'années, à la fréquence la plus fine possible et pour des classes d'actifs libellés dans la même devise[20].

Compte tenu de ces contraintes, nous avons dû nous écarter du contexte européen et nous placer dans le contexte américain pour lequel nous avons trouvé un historique de rendements depuis 1954 pour 3 actifs libellés en dollar. Nous utilisons donc les données suivantes :

Classe d'actif	Indicateur utilisé
Actions	S&P 500
Obligations	T-Bond maturité 10 ans
Placement monétaire	T-Bill maturité 3 mois

[20] Afin d'éviter les distortions liées aux effets de change

Le S&P500 est un indice de référence en ce qui concerne les actions des sociétés américaines à forte capitalisation. Il est déterminé à partir de la capitalisation boursière de 500 sociétés cotées au New York Stock Exchange ou au NASDAQ. Ces 500 sociétés couvrent aujourd'hui plus des trois quarts de la capitalisation boursière américaine totale (18). Le lien vers les données est donné dans (19).

Les Treasury bonds sont des obligations à long terme (maturité de 10 à 30 ans) émises par le gouvernement américain. Ces obligations fournissent des coupons tous les 6 mois et sont considérées comme non risquées. Le lien vers les données est donné dans (20).

Les Treasury bills sont des obligations à court terme (maturité de 3 mois à 1 an) émises par le gouvernement américain. Ces obligations ne paient pas de coupon intermédiaire : le rendement est obtenu par la différence entre le paiement initial et le versement final. Garanties par le gouvernement et de maturié courte, ce sont les obligations américaines les moins risquées (21). Elles constituent donc un bon indicateur pour le placement monétaire dans un contexte américain. Remarque : les taux de rendement récoltés sont ceux observés sur le marché secondaire. Le lien vers les données est donné dans (22).

<u>Calcul des rendements et statistiques descriptives</u> :

Nous avons reconstitué les données des rendements mensuels des 3 actifs de référence choisis sur la période allant de janvier 1954 à juillet 2016. Pour les T-bills de maturité 3 mois et les T-bonds de maturité 10 ans, nous avons transformé les rendements annuels (r_{annuel}) de la base de données en rendements mensuels ($r_{mensuel}$) de telle sorte que :

$$(1 + r_{annuel}) = (1 + r_{mensuel})^{12}$$

Soit :

$$r_{mensuel} = (1 + r_{annuel})^{\frac{1}{12}} - 1$$

Pour le S&P500, nous avons défini le rendement mensuel comme suit :

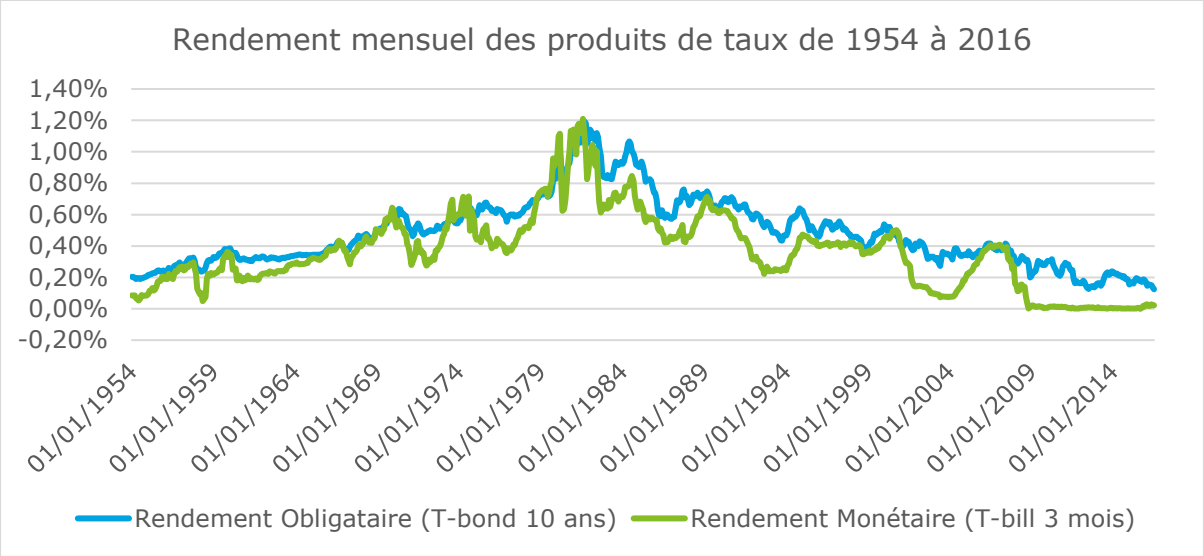
$$r_{mensuel} = \frac{Indice_{mois\ N+1} - Indice_{mois\ N}}{Indice_{mois\ N}}$$

Voici quelques indicateurs à propos de ces rendements mensuels :

	Support actions (S&P500)	**Support obligataire (T-bond 10 ans)**	**Support monétaire (T-bill 3 mois)**
Moyenne	0,69 %	0,48 %	0,36 %
Ecart-type	4,20 %	0,22 %	0,24 %
Minimum	-21,76 %	0,12 %	0,00 %
Maximum	16,30 %	1,19 %	1,21 %
Coefficient d'asymétrie (Skewness)	-0,42	0,81	0,66
Coefficient d'excès d'applatissement (Kurtosis)	1,74	0,37	0,65

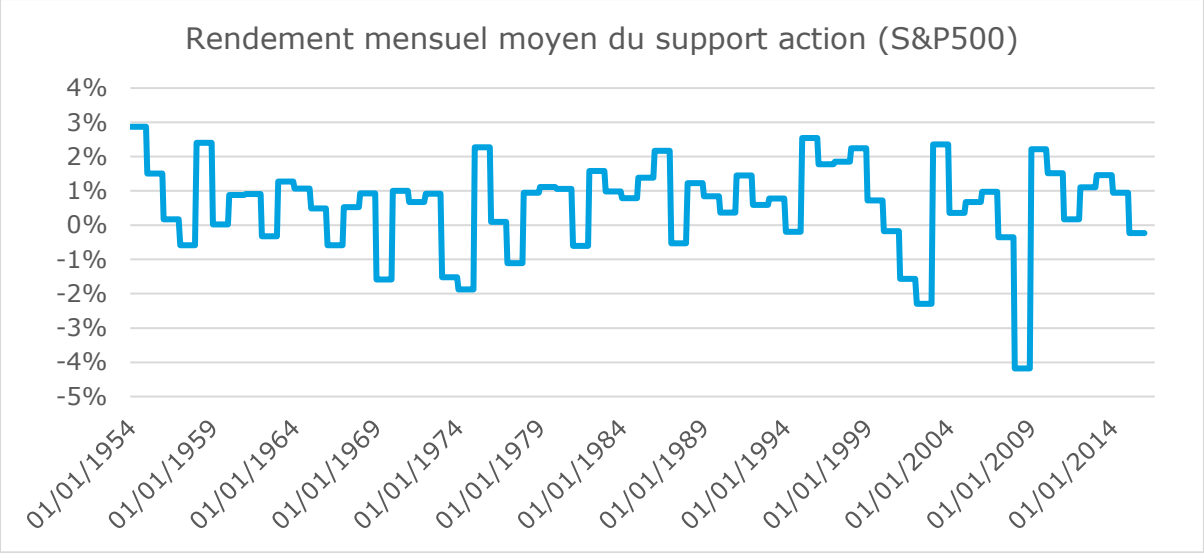
Matrice de corrélation des rendements mensuels	Actions	Monétaire	Obligataire
Actions	100 %		
Monétaire	-4,5645 %	100 %	
Obligataire	-2,779 %	92,252 %	100 %

Ainsi, sur la période de 63 ans considérée, le support actions rapporte en moyenne 8,6 % par an ($8{,}6\,\% = (1 + 0{,}69\,\%)^{12} - 1$), le support obligataire 5,9 % par an et le support monétaire 4,4 %. Ces chiffres permettent de classer les supports de manière cohérente en termes d'espérance de rendement. Les rendements moyens des produits de taux paraissent très élevés compte tenus des chiffres actuellement observés sur les marchés, mais s'expliquent par l'amplitude de l'historique utilisé, qui comprend des périodes de forts rendements pour les produits de taux (le début des années 1980 par exemple).



Graphique 1

Les rendements mensuels du support actions sont trop volatiles pour être représentés de manière lisible sur un graphique. En représentant les rendements mensuels constants par année correspondant aux rendements annuels, on obtient en revanche une fonction en escalier qui permet de visualiser le rendement du support actions :



Graphique 2

Si l'on regarde désormais les volatilités, on remarque sans surprise que le support actions — qui possède l'espérance de rendement la plus élevée — a la volatilité la plus forte, de l'ordre de 14,6 % par an[21] ($14{,}6\,\% = \sqrt{12} \times 0{,}69\,\%$). Il peut néanmoins paraître surprenant que la volatilité des taux monétaires (de l'ordre de 0,85 % par an) soit supérieure à celle des taux obligataires (de l'ordre de 0,76 % par an), étant donné que les placements monétaires sont supposés être moins risqués que les placements obligataires. C'est ici une limite de l'assimilation de la volatilité au risque, qui est en l'occurrence le risque de défaut de la contrepartie. Ainsi, bien que les placements monétaires soient moins risqués que les placements obligataires, les taux à court terme sont plus volatils que les taux à long terme. Les taux à court terme sont en effet régulièrement manipulés, pour contrôler le niveau d'inflation par exemple, et sont donc soumis à de nombreux chocs conjoncturels. Les taux longs reflètent eux un équilibre de long terme du marché, moins sensible à ces chocs conjoncturels.

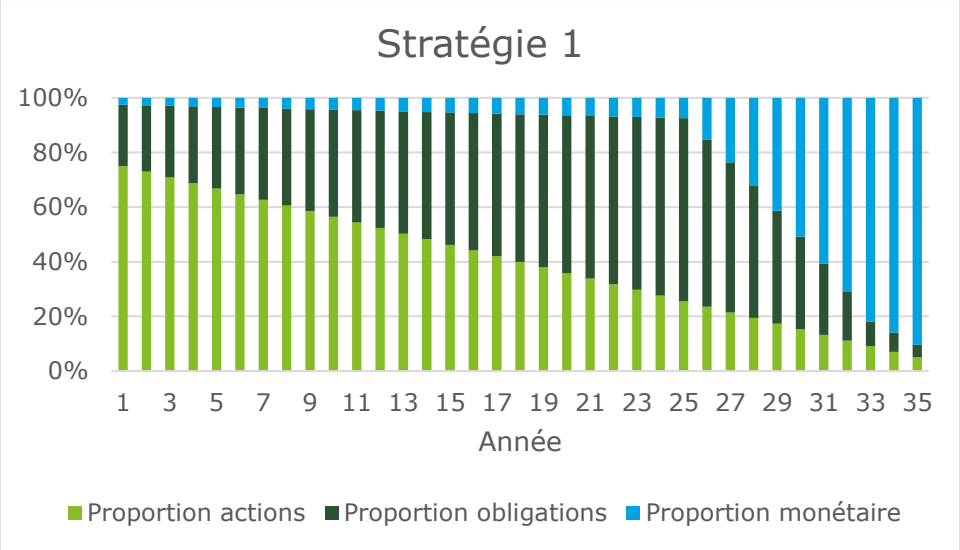
Les valeurs de skewness et de kurtosis n'apportent pas d'information saillante sur les rendements et confirment seulement que ces derniers ont une distribution leptokurtique. Les distributions des rendements ont donc des queues plus épaisses que la loi normale aux extrémités, et donc des valeurs « extrêmes » plus fréquentes.

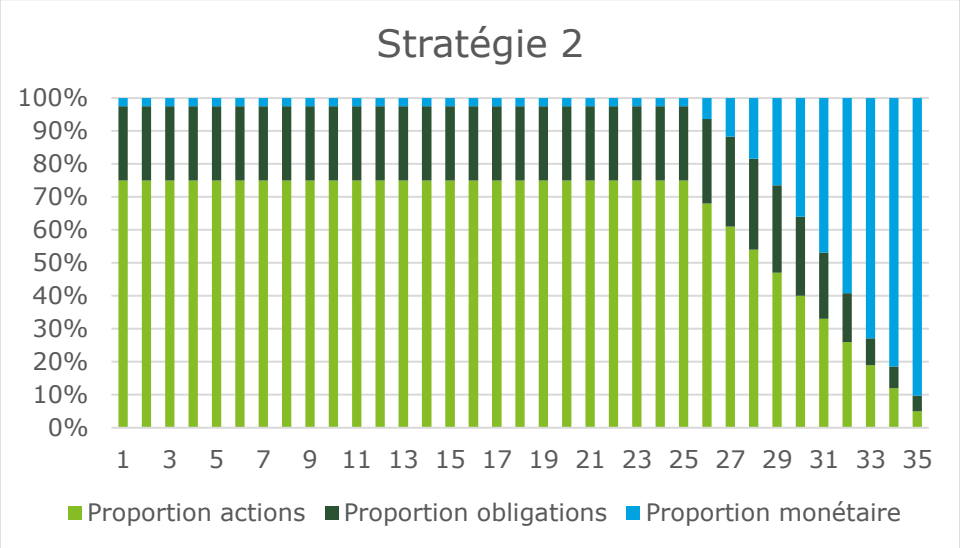
<u>Durée de cotisation</u> :

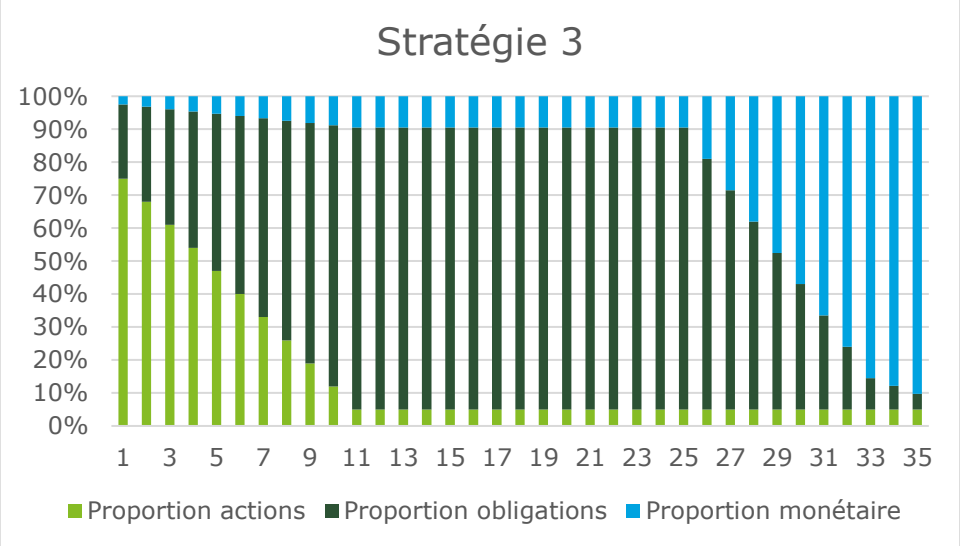
Nous disposons d'un historique de près de 62 ans (de janvier 1954 à juillet 2016). Nous fixons le nombre d'années de cotisation à **35 ans**. On peut par exemple imaginer que l'individu commence à cotiser à 25 ans et part à la retraite à 60 ans. Si l'on souhaite obtenir un nombre satisfaisant d'échantillons, la profondeur historique des données disponibles ne nous permet pas de fixer une période de cotisation beaucoup plus élevée.

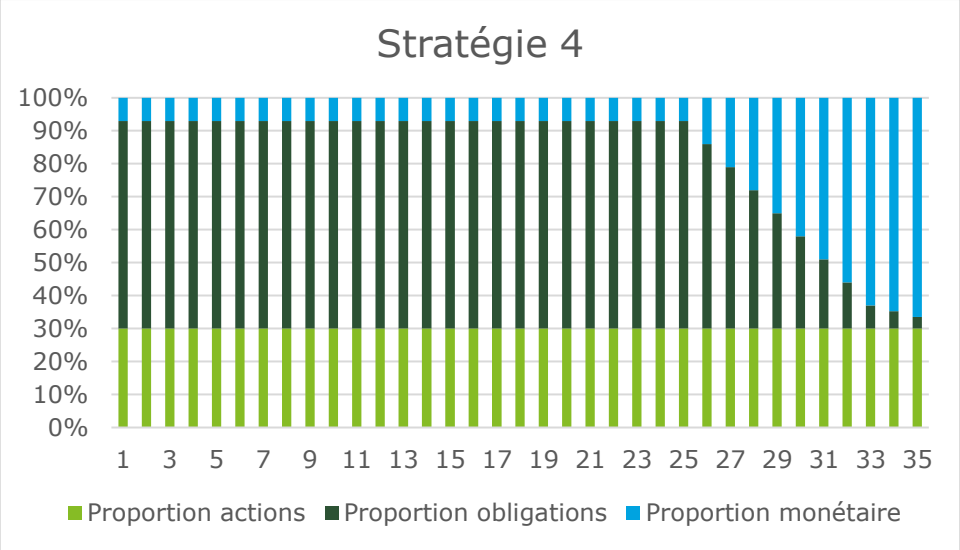
Sur 35 ans, le portefeuille des principales stratégies définies en partie 2.1 présente donc les répartitions suivantes :

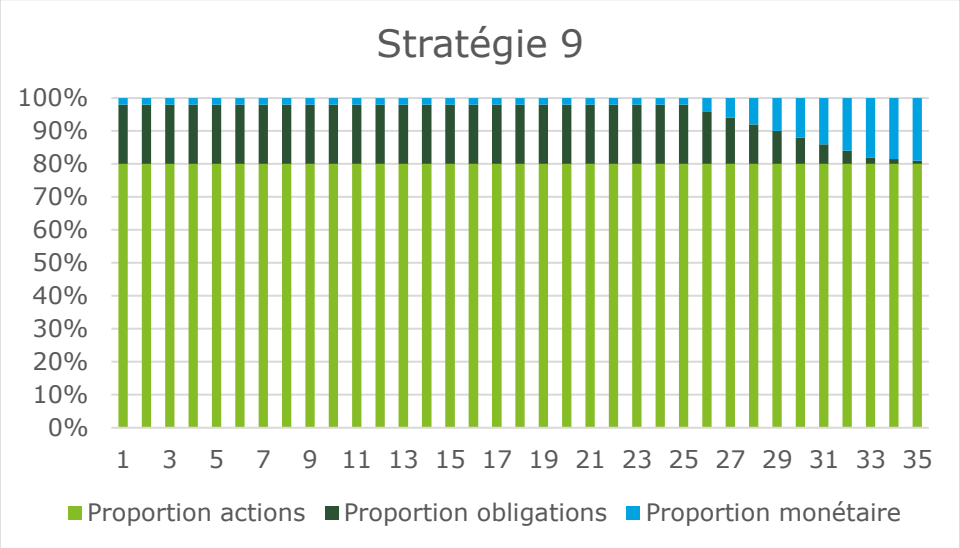
[21] La volatilité est communément échelonnée d'une unité temporelle à une autre en utilisant la règle de proportionnalité à la racine carrée du temps

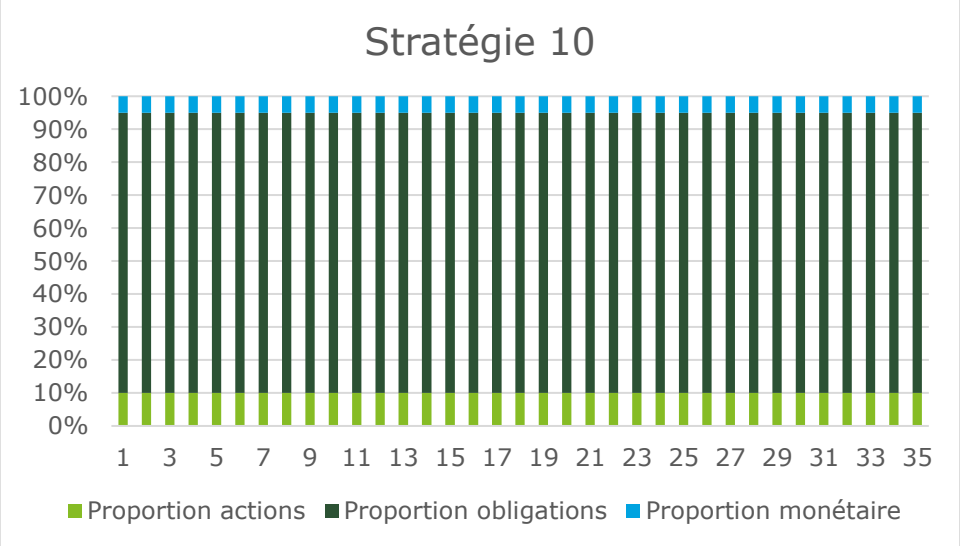

Stratégie 1
100%
80%
60%
40%
20%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Année
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire


Stratégie 2
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire


Stratégie 3
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire


Stratégie 4
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire


Stratégie 9
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire


Stratégie 10
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
Proportion actions
Proportion obligations
Proportion monétaire

2.2.2. Montant des cotisations

Nous considérons que les cotisations sont payées tous les mois pendant les 35 années de cotisation. Les cotisations sont supposées payées en début de mois et la cotisation du mois m est définie comme suit :

$$Cotisation_{mois\ m} = Salaire_{mois\ m} \times taux\ de\ cotisation$$

Le taux de cotisation est supposé constant dans le temps et égal à **6 %** du salaire.

Le salaire du mois m est défini par les relations suivantes :

$$Salaire_{mois\ m} = \frac{Salaire_{année\ n}}{12}$$

avec :

$$n = \begin{cases} \frac{m}{12}\ si\ \left\lfloor \frac{m}{12} \right\rfloor = \frac{m}{12} \\ \left\lfloor \frac{m}{12} \right\rfloor + 1\ sinon \end{cases}$$

où [.] désigne l'opérateur partie entière.

Le salaire annuel est par ailleurs simplement défini par récurrence :

$$Salaire_{année\ 0} = 36.000\ €\ (soit\ 3.000\ €\ mensuels)$$

$$Salaire_{année\ n} = Salaire_{année\ 0} \times (1 + progression\ salariale\ annuelle)^n$$

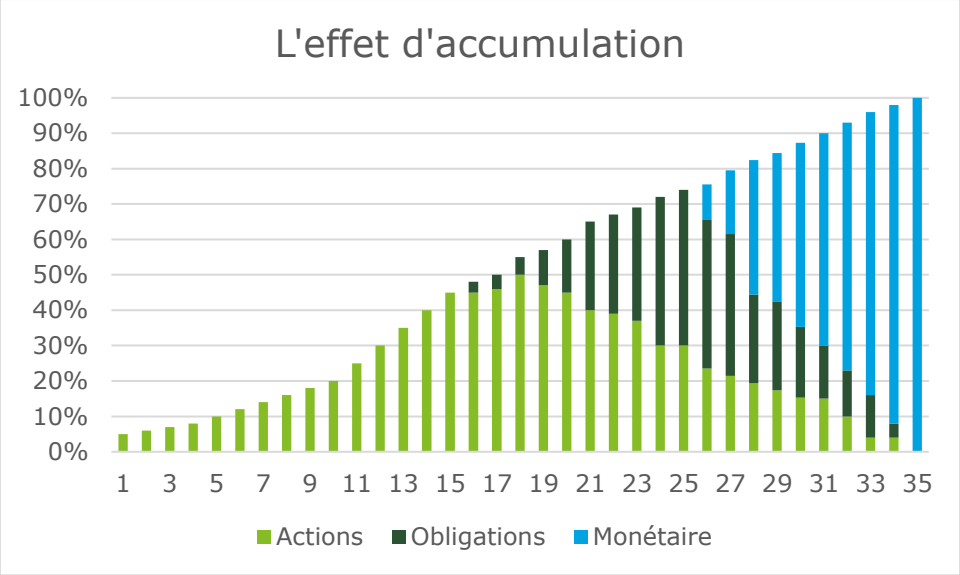
La progression salariale annuelle est supposée constante dans le temps et égale à **2 %**. Les revalorisations salariales ont lieu en fin d'année.

Ces modalités de définition des montants cotisés sont très simplificatrices. En effet :

- La progression salariale d'un individu n'est en général pas constante tout au long de sa carrière
- Le taux de cotisation peut évoluer dans le temps
- Les versements effectués sur un plan de pension ne sont pas forcément réguliers

Néanmoins, notre objectif étant d'étudier la performance des stratégies d'investissement, nous n'avons pas souhaité ajouter un niveau de complexité au niveau de ces paramètres de l'étude. Nous sommes en revanche conscients que les résultats obtenus peuvent être sensibles aux hypothèses retenues quant au taux de cotisation, au taux de croissance du salaire et à la régularité des versements. Ces paramètres influencent en effet l'accumulation du capital (hors effet de marché) dans le temps.

Pour illustrer notre propos, voici un exemple d'accumulation du capital (hors effet de marché) dans le temps, inspiré du guide professionnel déjà cité en introduction (3) :

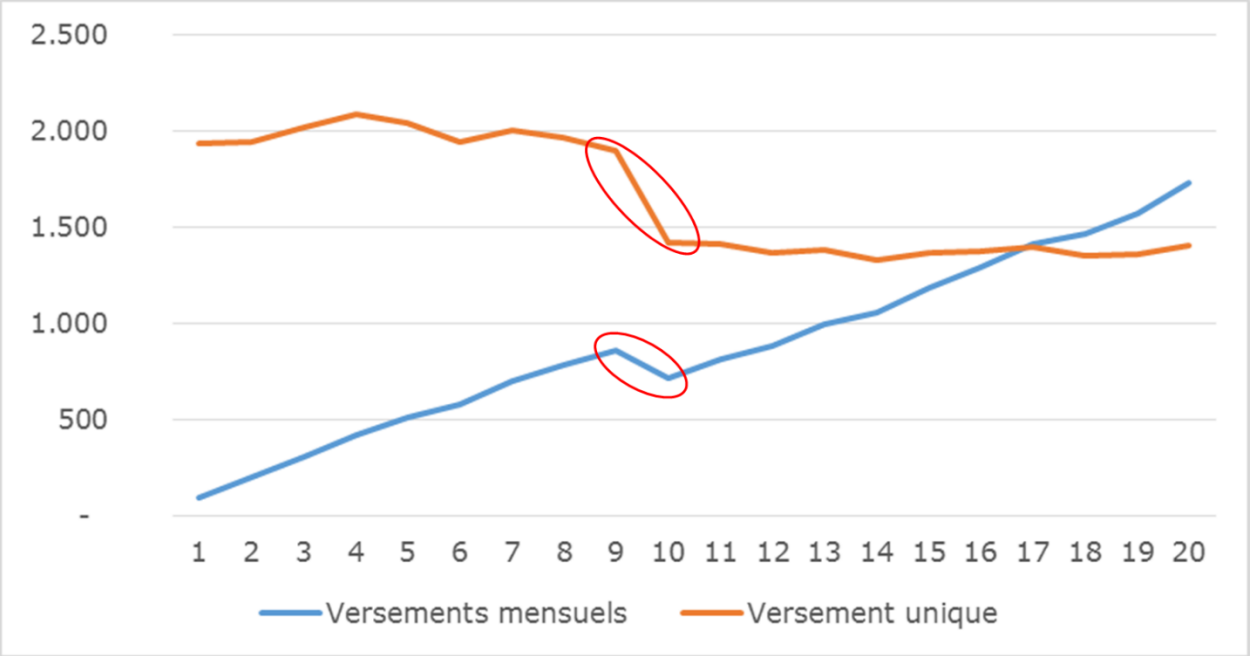


Ce type de graphique permet d'identifier les périodes d'exposition maximale sur certaines classes d'actifs (exemple : exposition maximale aux actions à 50% du total cotisé en année 18) et de visualiser la progressivité de la désensibilisation (qui commence ici en année 19). A répartition du portefeuille et fréquence de versement constants, une variation du taux de cotisation ou du taux de croissance du salaire pourra faire croître/décroître l'exposition maximale en % du total cotisé. A répartition du portefeuille, taux de cotisation et taux de croissance salariale constants, un décalage de versement pourra lui déplacer la période d'exposition maximale. D'où la sensibilité des résultats aux hypothèses que nous avons retenues.

Remarques :

- Des versements réguliers permettent de lisser les effets de marché via une mutualisation des investissements en bas de cycle et des investissements en haut de cycle.
- La progressivité de la désensibilisation est cruciale en cas de chocs sur les marchés. En effet, si un choc à la baisse affecte le marché actions et que la désensibilisation s'effectue brutalement juste après ce choc, le capital du salarié sera durablement affecté.

A titre d'illustration, nous avons comparé l'évolution d'un investissement à prime unique à celui d'un investissement à prime mensuelle sur une durée de 20 ans. Dans les deux cas la somme des primes investies vaut 2.000. Les rendements sont générés de manière aléatoire sur l'intervalle [-5 % ; 5 %] sauf pour l'année 10 où un choc de -25 % est appliqué. Les résultats sont les suivants :



On remarque que la périodicité des versements réduit l'impact du choc de l'année 10, là où l'épargne constituée par le versement unique est durablement entamée. Plus le choc arrive tôt dans la période d'investissement, plus la différence finale entre les deux scénarios est importante. Dans notre exemple, la différence au terme est de 326.

2.2.3. Modalités de gestion

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne la gestion de l'investissement :

- La totalité de l'épargne est rééquilibrée chaque mois pour respecter la répartition définie
- L'assureur ne prélève pas de frais d'entrée
- L'assureur ne prélève pas de frais de gestion ou de transaction (notamment frais d'arbitrage liés au rééquilibrage mensuel de l'épargne)

La non prise en compte des frais de gestion ou de transaction est une hypothèse simplificatrice que nous faisons pour ne pas ajouter un niveau de complexité supplémentaire au problème. En ne différenciant pas les frais de gestion propres aux différentes stratégies, nous nous concentrons sur la performance des stratégies de placement. Nous sommes toutefois conscients que toutes les stratégies n'ont pas le même coût pour l'assureur (donc pour l'assuré). Néanmoins, le fait de ne travailler qu'avec des stratégies passives déterministes (voir l'Illustration 8) atténue la gravité de cette simplification. La non-différenciation des frais de gestion entre les différentes stratégies aurait été beaucoup plus problématique en présence de stratégies à gestion active ou à gestion passive dynamique. De même, une étude s'intéressant aux différents types de gestion pilotée (fonds générationnel *vs* arbitrage à base de fonds, voir l'Illustration 3) devrait nécessairement intégrer une prise en compte plus fine des frais de gestion.

Avant de présenter les résultats, voici une description des 2 analyses qui sont menées à partir des données historiques.

2.3. Analyse 1 - Méthode

La première analyse que nous menons à partir des données historiques récoltées est le *backtesting* des différentes stratégies. Déterminer ce qu'auraient donné les différentes stratégies définies en 2.1 sur les données récoltées en 2.2.1 est en effet une première étape naturelle pour étudier la performance de la gestion à horizon.

Notre objectif est d'obtenir, pour chacune des stratégies d'investissement définies en 2.1, la distribution du capital constitué à l'issue des 35 ans de cotisation. Pour cela, nous devons donc reconstituer les investissements et les rééquilibrages historiques sur plusieurs périodes. Nous définissons donc une fenêtre de 35 ans que nous faisons glisser le long de notre historique de données avec un pas d'un mois. Pour chaque fenêtre et chaque stratégie, nous reconstituons la série d'investissements et de rééquilibrages à partir de nos différentes hypothèses pour obtenir le capital constitué au terme.

Voici une illustration du concept de fenêtre glissante ainsi qu'un tableau présentant les avantages et inconvénients de l'approche:

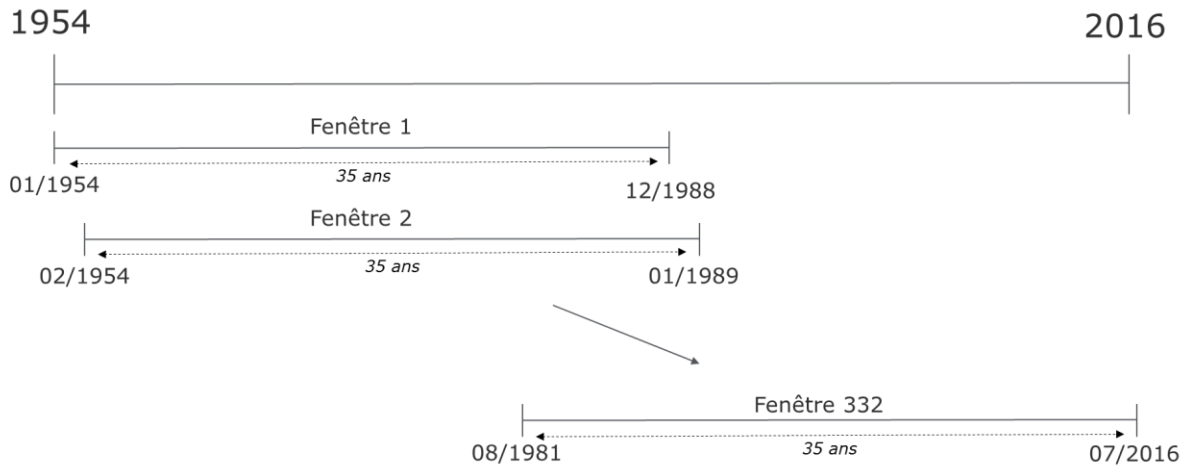


Illustration 11 – Le concept de fenêtre glissante

Avantages	**Inconvénients**
• Préserve la corrélation entre les rendements des différents supports • Préserve l'autocorrélation	• Permet de générer peu d'échantillons • Les échantillons ne sont pas indépendants • Sur-pondère les données situées au milieu de la période, qui apparaissent dans plus d'échantillons que les données situées aux marges

Nous tenons à insister sur une limite très importante de cette approche. Les fenêtres glissantes que nous utilisons ne sont pas indépendantes. Avec un pas d'un mois, deux fenêtres successives ont

plus de 99,5 % de données en commun (418 mois sur 420, 420 étant le nombre de mois sur 35 ans). Dès lors, s'il existe une période de « boom » pour un actif donné, la stratégie lourdement chargée sur cet actif sortira gagnante dans toutes les fenêtres glissantes comprenant cette période de « boom ». Il y a donc un biais lié au recoupement des fenêtres glissantes utilisées. Malheureusement, ce biais est difficilement évitable étant donné l'horizon de temps qui nous intéresse dans cette étude. Avec moins de 70 ans d'historique, il n'aurait même pas été possible de construire 2 fenêtres indépendantes.

Il faudra donc garder un regard critique sur les résultats de l'approche par *backtesting*. C'est pourquoi nous complétons cette approche par une analyse alternative plus prospective.

2.4. Analyse 2 - Méthode

2.4.1. Principe général

Le principe du *bootstrapping* est de simuler des séries temporelles à partir des données existantes, selon un processus de sélection aléatoire avec remise[22].

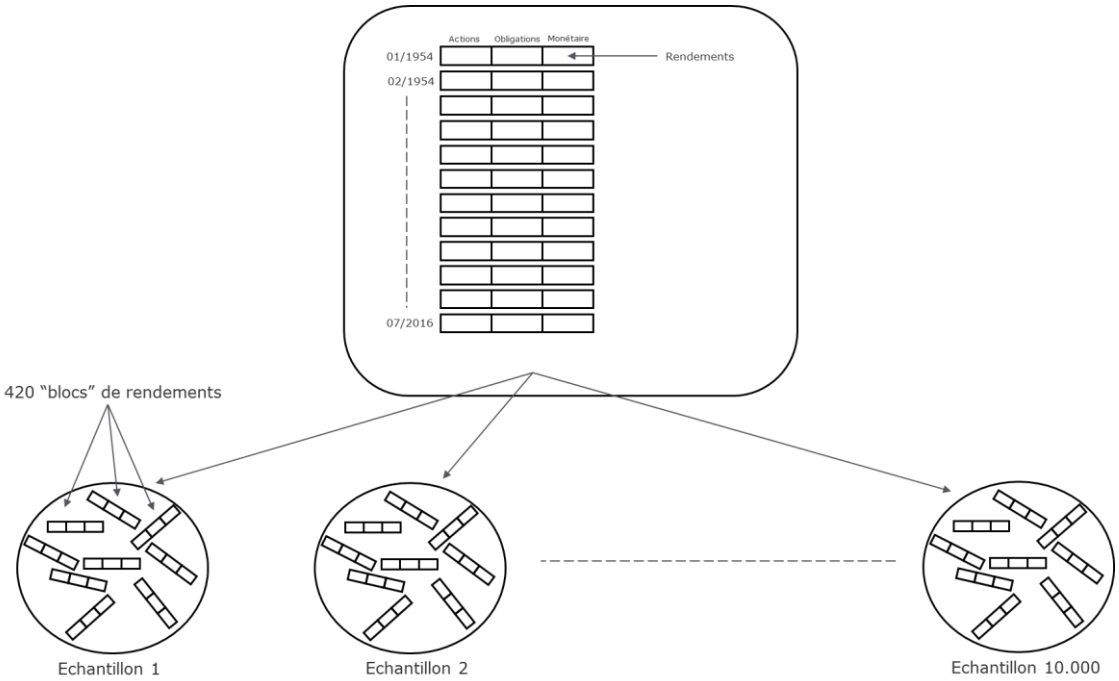


Illustration 12 – La méthode de *bootstrapping* utilisée

Comme illustré ci-dessus, nous partons des séries temporelles des trois actifs et nous reconstituons 10.000 séries temporelles (échantillons) de 420 mois (*i.e.* 35 années) en piochant des données de manière aléatoire. La sélection se fait avec remise, de telle sorte qu'une observation peut être piochée plusieurs fois. Les données sélectionnées sont les rendements des trois actifs à une date donnée. Ainsi, pour chaque observation sélectionnée, les rendements des trois actifs sont des

[22] Il existe de nombreuses méthodes de bootstrap. Nous ne présentons ici que la méthode retenue dans l'étude.

rendements correspondant à la même date. Voici un petit tableau résumant les forces et faiblesses de l'approche par *bootstrap* :

Avantages	**Inconvénients**
• Perment de générer un grand nombre d'échantillons • Préserve la corrélation entre les rendements des différents supports pour une année donnée	• Ne préserve pas l'autocorrélation des rendements dans le temps (surestime la variation des rendements d'une période à l'autre) • Ne préserve pas la tendance du retour à la moyenne (*mean reversion*)

Avant de présenter les résultats des analyses 1 et 2, il convient de préciser ici de quelle manière nous effectuons cette sélection « aléatoire » des rendements. Faisons pour cela un point sur la méthode de génération de nombres aléatoires que nous avons utilisée. Cette partie nous sera également utile pour l'analyse 3.

2.4.2. Générer des nombres aléatoires

Dans le cadre d'une simulation de type *bootstrapping* ou d'une simulation stochastique pure, il est nécessaire de pouvoir simuler des réalisations de différentes lois de probabilité. Or, toute simulation d'une loi de probabilité demande d'être capable de générer des nombres aléatoires distribués selon la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1]. Dans le cadre du *bootstrapping*, ces nombres aléatoires seront transformés pour obtenir des nombres entiers aléatoires au sein d'un intervalle donné (voir Méthode 1 plus bas). Dans le cadre d'une simulation stochastique pure, l'inverse de la fonction de répartition de la loi voulue est appliquée à ces nombres aléatoires afin d'otenir des nombres aléatoires distribués selon cette loi (voir Méthode 2 plus bas). Il faut donc porter une attention particulière au générateur de nombres aléatoires utilisé. En effet, un générateur ne possédant pas de bonnes propriétés de réplication de la loi uniforme pourrait biaiser les résultats de la simulation.

Ainsi, le générateur proposé par Excel (fonction Rnd) est couramment remplacé en pratique par l'un des 2 algorithmes suivants : le Mersenne Twister (Matsumoto et Nishimura, 1997) ou le Tore mélangé. Nous avons retenu pour notre étude l'algorithme du Tore mélangé. Il s'agit d'un générateur dit quasi-aléatoire, c'est-à-dire basé sur la construction de suites à faible discrépance (i.e. à bonne équi-répartition sur l'intervalle de définition donné). L'algorithme du Tore mélangé s'appuie sur les nombres premiers et est très intéressant pour ses propriétés (bonne équi-répartition des suites générées sur l'intervalle unité, rapidité de convergence, faible dépendance terme à terme) et sa relative simplicité de mise en œuvre. Nous en donnons la description ci-dessous. Pour une étude comparative des différents générateurs de nombres aléatoires, on peut se référer au chapitre 4 dans (23).

L'algorithme du tore *non-mélangé* donne à la n^e réalisation de la d^{e} variable aléatoire uniforme sur [0,1] à simuler la valeur u_n :

$$u_n = n\sqrt{p_d} - [n\sqrt{p_d}] \qquad [1]$$

où :

- p_d est le d^{e} nombre premier

- [.] désigne l'opérateur partie entière

Dans l'algorithme du tore *mélangé*, au lieu d'utiliser le nombre u_n lors du n^{e} tirage de la loi uniforme sur [0,1], on utilise u_m où m est choisi de manière aléatoire dans l'ensemble des entiers naturels.

Ainsi, pour générer N réalisations d'une variable uniforme sur [0,1], il faut choisir un nombre premier p_d et appliquer la relation :

$$u_m = u_{\varphi(n)} \qquad [2]$$

où :

- $\varphi(n) = [\alpha \times N \times \tilde{u} + 1]$
- u_m suit la relation [1]
- [.] désigne l'opérateur partie entière
- $\alpha \geq 1$
- $\tilde{u}$ est la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme

Dans cette étude, nous utilisons donc la relation [2] pour générer des variables aléatoires de loi uniforme sur [0,1]. Comme le suggèrent les auteurs, nous utilisons :

- $\alpha = 10$
- $\tilde{u}$ générée par le générateur Rnd d'Excel

Méthode 1 :

Pour générer un nombre entier aléatoire sur l'intervalle $[a, b]$, avec a et b des entiers naturels et $a < b$, on procédera de la manière suivante :

1) Générer un tirage aléatoire x d'une variable de loi uniforme sur l'intervalle [0,1] grâce à l'algorithme du tore mélangé décrit ci-dessus
2) Calculer : $y = a + [b \times x]$, où [.] désigne l'opérateur partie entière

   - y est la simulation recherchée

Méthode 2 :

Pour simuler des nombres aléatoires distribués selon la loi normale centrée réduite, nous utilisons la méthode de la transformée inverse, qui repose sur le principe suivant :

1) Générer un tirage aléatoire x d'une variable de loi uniforme sur l'intervalle [0,1] grâce à l'algorithme du tore mélangé décrit ci-dessus
2) Calculer y tel que $\Phi(y) = x$, avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir :

$$\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$\forall \, a \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

   - y est le résultat recherché

Remarque : la méthode de la transformée inverse, introduite par Lévy-Rosenblatt, peut être utilisée pour simuler des variables aléatoires suivant d'autres lois de probabilités. L'inverse de la fonction de répartition existe parfois sous forme analytique (pour la loi Exponentielle, la loi de Cauchy ou la loi logistique par exemple). Dans les autres cas, l'étape 2) est réalisée par des méthodes

numériques. Dans le cas de la loi normale, il n'existe pas de forme analytique de l'inverse de la fonction de répartition. Nous utilisons donc la fonction Excel NORMINV.

La méthode de la transformée inverse repose sur la propriété suivante :

Soit F une fonction de répartition et F^{-1} son inverse, définie comme suit :

$$F^{-1}(u) = inf\{\, x \mid F(x) \geq u \,\} \qquad (0 < u < 1)$$

Alors :

U suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,1] ⇒ $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F

En effet :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Pr(F^{-1}(U) \leq x) = \Pr\big(U \leq F(x)\big) = F(x)$ car U suit une loi uniforme

<u>Algorithme utilisé dans l'analyse 2</u> :

Dans l'approche par *bootstrapping*, nous devons générer 10.000 échantillons de 420 triplets de rendements.

Nous utilisons le schéma de programmation suivant, où :

- i désigne le numéro de l'échantillon
- N=420 est le nombre de blocs de rendement à tirer de manière aléatoire pour chaque échantillon
- 751 est le nombre d'observations (nombre de mois entre janvier 1954 et juillet 2016)

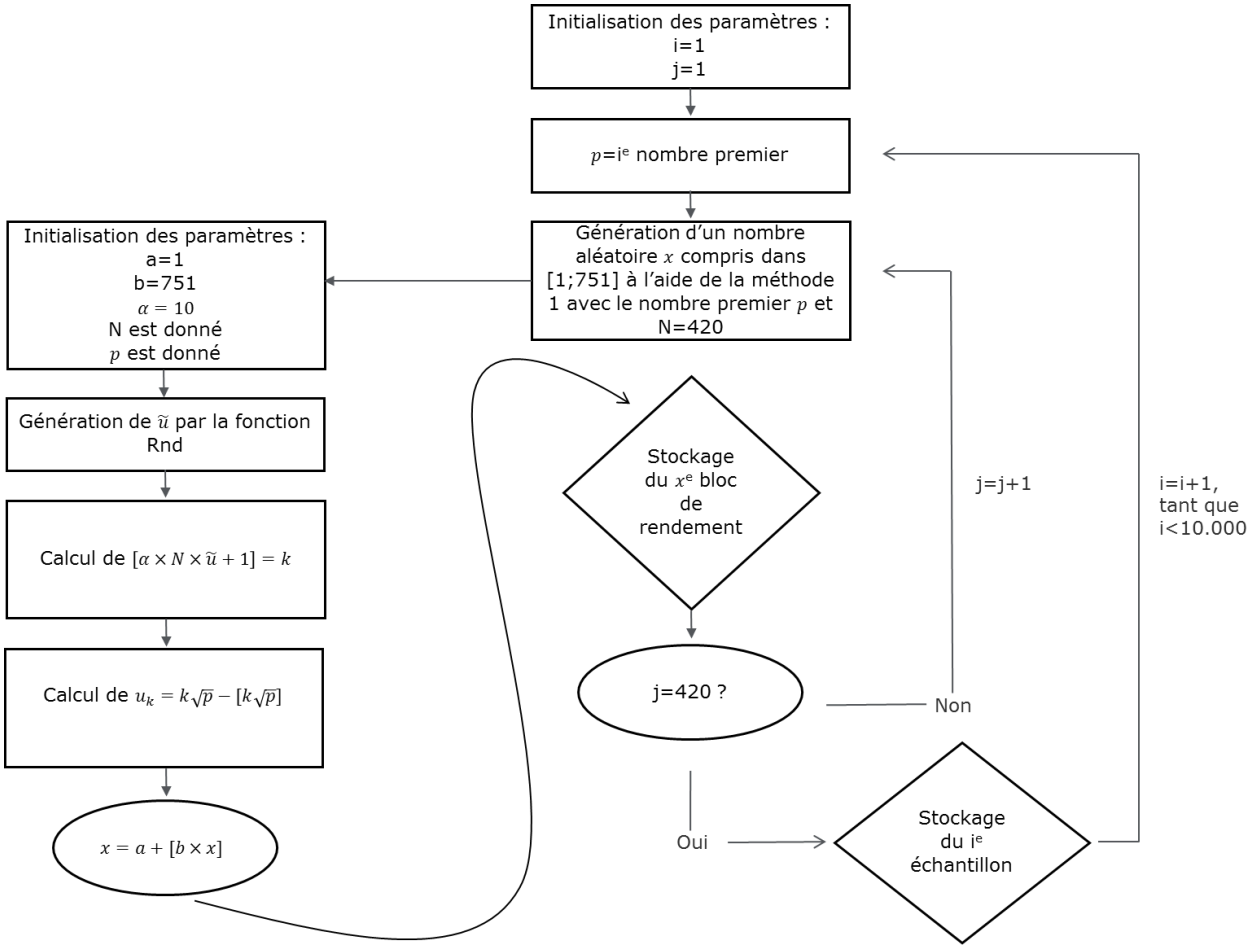


Illustration 13 – Schéma de programmation utilisé dans l'analyse 2

2.5. Résultats des analyses 1 et 2

2.5.1. Rappels méthodologiques

<u>Rappels sur l'analyse 1</u> :

Nous avons défini une fenêtre glissante de 35 ans sur l'historique allant de janvier 1954 à juillet 2016. En faisant glisser la fenêtre avec pas mensuel, nous obtenons 332 périodes dont voici un échantillon :

Numéro période	Date de début	Date de fin
1	01/1954	12/1988
2	02/1954	01/1989
…	…	…
332	08/1981	07/2016

En ce qui concerne les flux investis, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- Le salaire mensuel de départ de l'individu est de 3.000
- Le taux de croissance annuel du salaire est de 2 %
- Le taux de cotisation est de 6 %

A partir de toutes ces hypothèses, nous réalisons un backtesting des 10 stratégies décrites en 2.1 sur les 332 périodes présentées ci-dessus. Ainsi, l'individu investi chaque mois 6 % de son salaire dans les différents supports selon les grilles propres à chacune des stratégies. A la fin de chaque mois, la totalité de l'épargne et la nouvelle cotisation sont rééquilibrées selon les allocations de la grille propre à la stratégie en question, et ainsi de suite.

Exemple simplifié pour une stratégie imaginaire sur une période de 2 mois :

Mois	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	50 %	25 %	25 %
2	25 %	25 %	50 %

Mois	Rendement actions	Rendement obligations	Rendement monétaire
1	1 %	0,5 %	0,2 %
2	2 %	0,45 %	0,25 %

Mois	Salaire	Cotisation	Placement actions	Placement obligations	Placement monétaire	Epargne fin du mois
1	3000	$3000 \times 6\,\% = 180$	$180 \times 50\,\% \times (1 + 1\,\%) = x_1$	$180 \times 25\,\% \times (1 + 0{,}5\,\%) = x_2$	$180 \times 25\,\% \times (1 + 0{,}2\,\%) = x_3$	$x = x_1 + x_2 + x_3$
2	3000 (la revalorisation a lieu en fin d'année – on suppose que le mois 1 n'est pas le dernier mois de l'année)	$3000 \times 6\,\% = 180$	$(x + 180) \times 25\,\% \times (1 + 2\,\%)$	$(x + 180) \times 25\,\% \times (1 + 0{,}45\,\%)$	$(x + 180) \times 50\,\% \times (1 + 0{,}25\,\%)$	y

Pour chacune des 332 périodes, nous calculons le capital obtenu au terme des 35 annnées d'investissement (l'équivalent du y de l'exemple simplifié ci-dessus), et nous déterminons :

- Le rang de chaque stratégie selon ce capital au terme (rang allant de 1 à 10, 1 étant le meilleur rang)
- La stratégie « gagnante » sur la période, *i.e.* celle qui aurait procuré le plus gros capital au terme
- La stratégie « perdante » sur la période, *i.e.* celle qui aurait procuré le capital au terme le plus faible

Pour chaque stratégie, nous calculons quelques indicateurs statistiques usuels sur les capitaux obtenus au terme :

- La moyenne, définie par : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, où n désigne le nombre d'observations et où x_i désigne l'observation i. Dans notre cas nous aurons $n = 332$
- La médiane, *i.e.* la valeur x^* telle que 50 % capitaux au termes obtenus soient inférieurs ou égaux à x^* 50 % soient supérieurs ou égaux à x^*
- L'écart-type empirique, défini par : $S_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$
- Les 2,5^{e} et 10^{e} centiles, *i.e*. les valeurs en-dessous desquelles se situent respectivement 2,5 % et 10 % des données

<u>Rappels sur l'anlayse 2</u> :

L'analyse 2 revient à reconstituer les 10 stratégies sur 10.000 séries temporelles simulées selon la méthode décrite en 2.4.2.

Pour ces 10.000 périodes, nous déterminons les mêmes indicateurs que pour l'analyse 1 : rang de la stratégie, stratégie gagnante, stratégie perdante.

Pour chacune des 10 stratégies, nous calculons les mêmes indicateurs statistiques usuels que pour l'analyse 1 (avec cette fois n=10.000).

<u>Rappels sur les stratégies</u> :

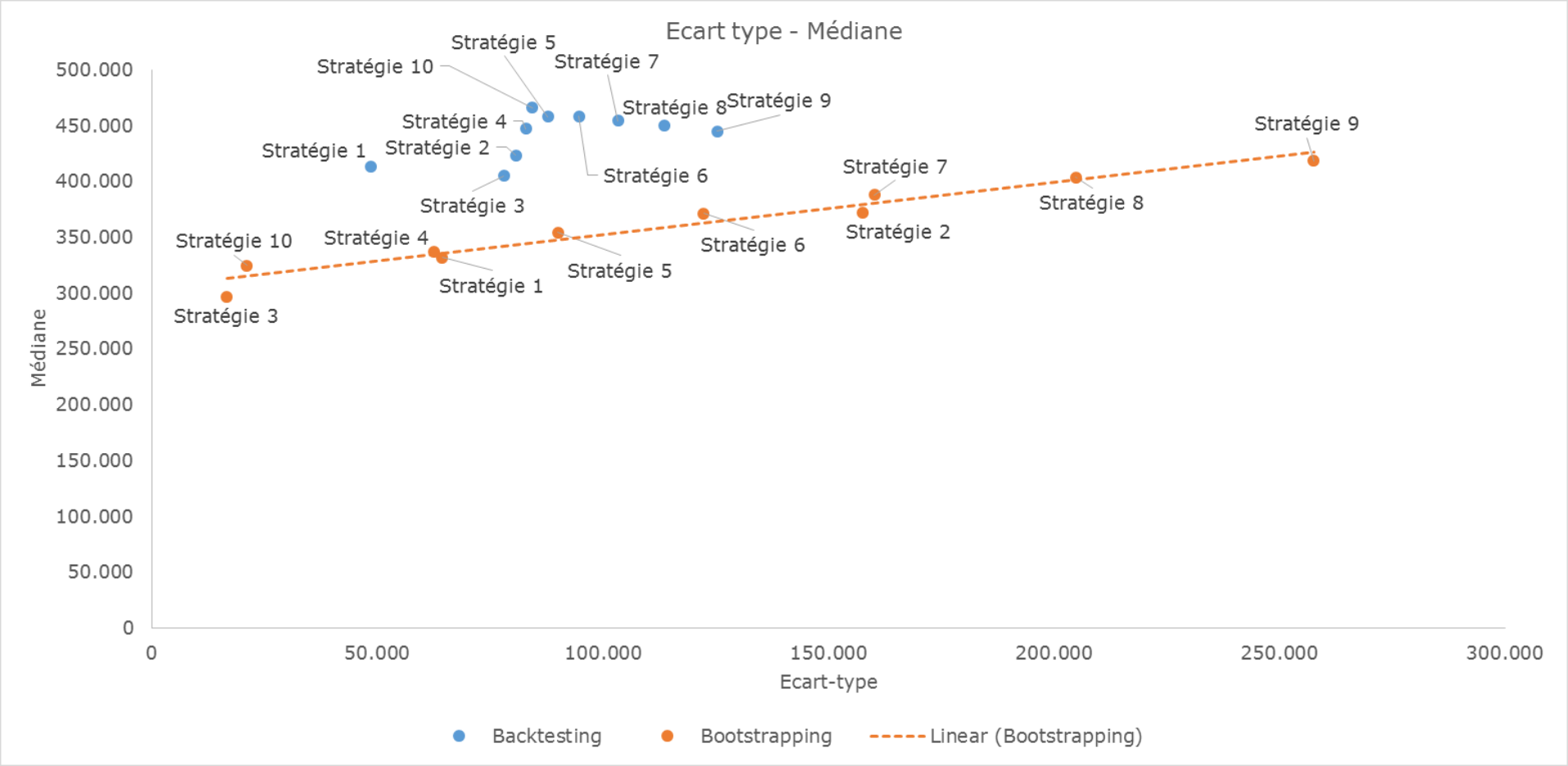
Pour rappel, voici un tableau récapitulatif des caractéristiques de chacune des stratégies :

	Type de stratégie	Description
Stratégie 1	Gestion à horizon, désensibilisation linéaire	Proportion initiale actions : 75 % Proportion finale actions : 5 %
Stratégie 2	Gestion à horizon, désensibilisation tardive	
Stratégie 3	Gestion à horizon, désensibilisation rapide	
Stratégie 4	Proportion d'actions fixe à 30 %	-
Stratégie 5	Proportion d'actions fixe à 40 %	-
Stratégie 6	Proportion d'actions fixe à 50 %	-
Stratégie 7	Proportion d'actions fixe à 60 %	-
Stratégie 8	Proportion d'actions fixe à 70 %	-
Stratégie 9	Proportion d'actions fixe à 80 %	-
Stratégie 10	Gestion de l'assureur	Portefeuille fixe : 85 % obligations, 10 % actions, 5 % monétaire

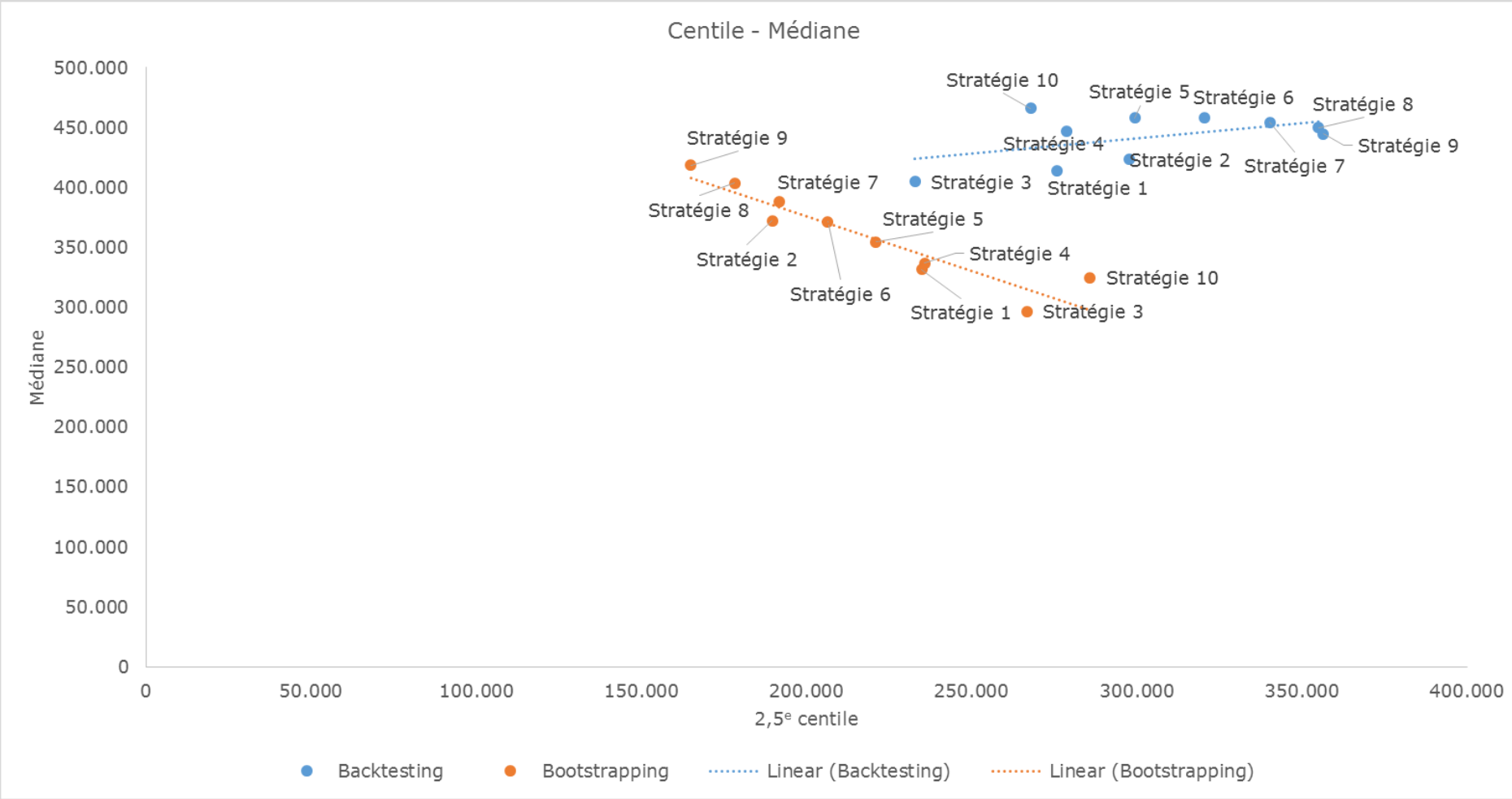
Code couleur
Gestions à horizon
Proportion d'actions fixes de 30 à 80 %
Gestion de l'assureur

Le détail de la répartition des portefeuilles des différentes stratégies dans le temps est fourni en annexe.

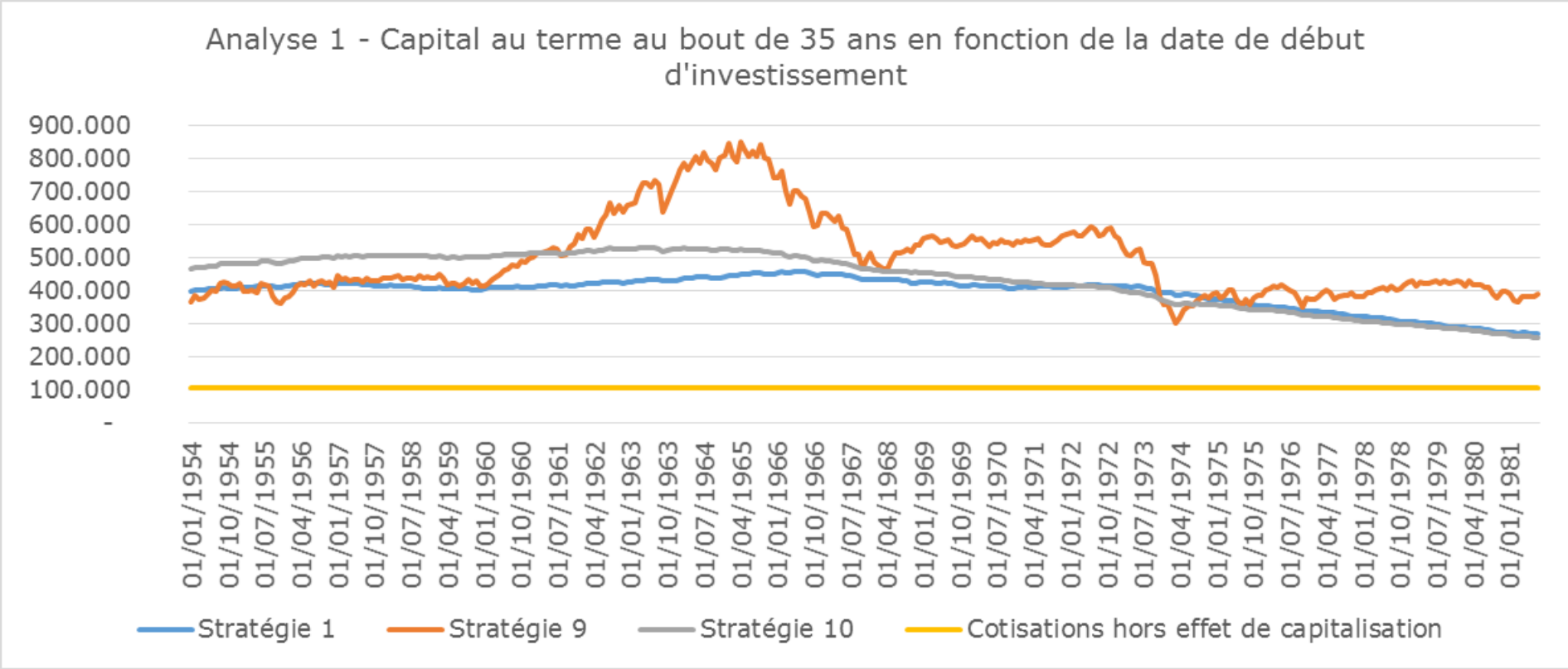
2.5.2. Résultats



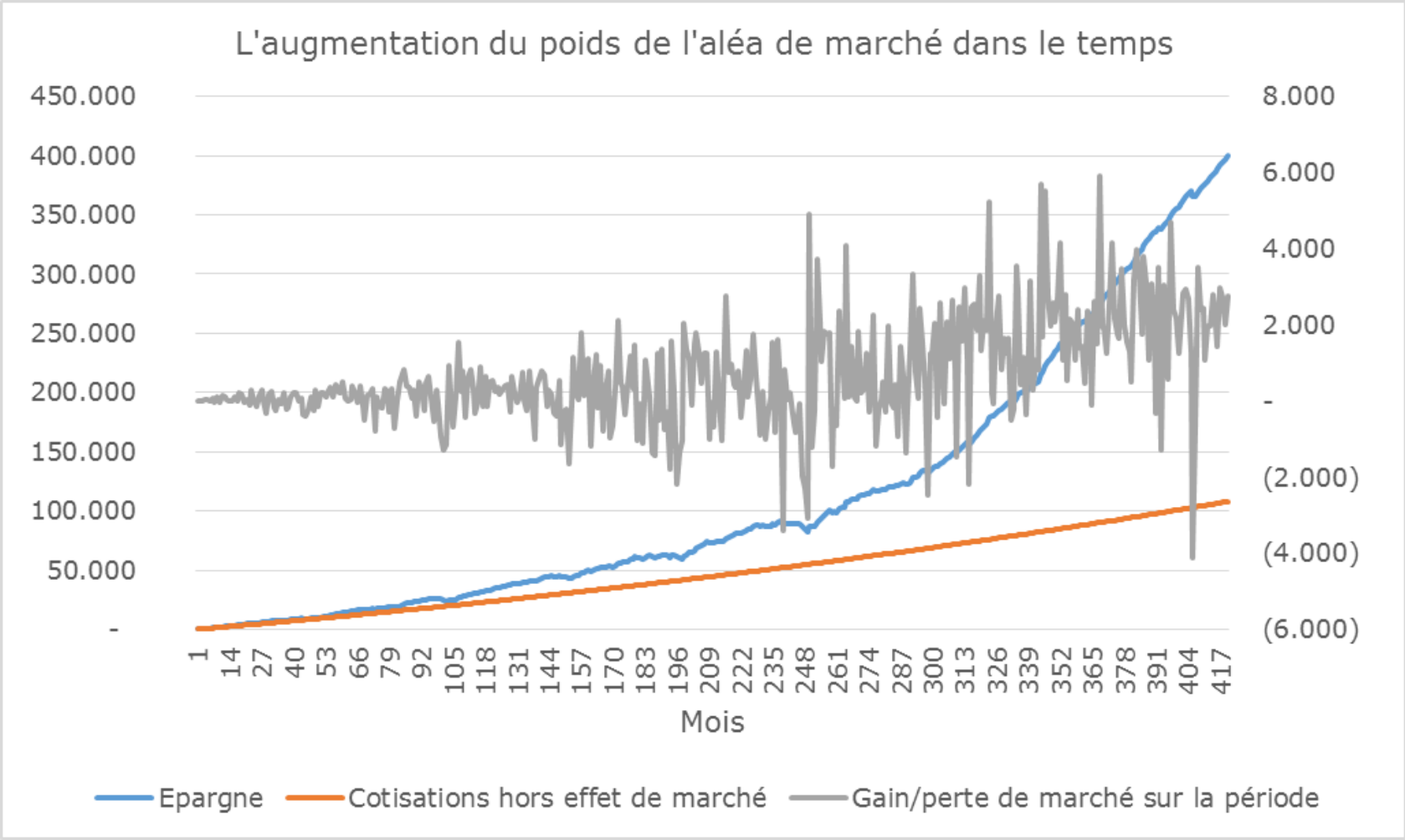
Graphique 3


Centile - Médiane
500.000
450.000
400.000
350.000
300.000
250.000
200.000
150.000
100.000
50.000
0
Médiane
0
50.000
100.000
150.000
200.000
250.000
300.000
350.000
400.000
2,5e centile
Stratégie 10
Stratégie 5
Stratégie 6
Stratégie 8
Stratégie 9
Stratégie 4
Stratégie 2
Stratégie 7
Stratégie 3
Stratégie 1
Stratégie 9
Stratégie 7
Stratégie 8
Stratégie 5
Stratégie 2
Stratégie 4
Stratégie 10
Stratégie 6
Stratégie 1
Stratégie 3
Backtesting
Bootstrapping
Linear (Backtesting)
Linear (Bootstrapping)

Graphique 4


Analyse 1 - Capital au terme au bout de 35 ans en fonction de la date de début d'investissement
900.000
800.000
700.000
600.000
500.000
400.000
300.000
200.000
100.000
-
01/01/1954
01/10/1954
01/07/1955
01/04/1956
01/01/1957
01/10/1957
01/07/1958
01/04/1959
01/01/1960
01/10/1960
01/07/1961
01/04/1962
01/01/1963
01/10/1963
01/07/1964
01/04/1965
01/01/1966
01/10/1966
01/07/1967
01/04/1968
01/01/1969
01/10/1969
01/07/1970
01/04/1971
01/01/1972
01/10/1972
01/07/1973
01/04/1974
01/01/1975
01/10/1975
01/07/1976
01/04/1977
01/01/1978
01/10/1978
01/07/1979
01/04/1980
01/01/1981
Stratégie 1
Stratégie 9
Stratégie 10
Cotisations hors effet de capitalisation

Graphique 5


L'augmentation du poids de l'aléa de marché dans le temps
450.000
400.000
350.000
300.000
250.000
200.000
150.000
100.000
50.000
-
8.000
6.000
4.000
2.000
-
(2.000)
(4.000)
(6.000)
1
14
27
40
53
66
79
92
105
118
131
144
157
170
183
196
209
222
235
248
261
274
287
300
313
326
339
352
365
378
391
404
417
Mois
Epargne
Cotisations hors effet de marché
Gain/perte de marché sur la période

Graphique 6

Graphique 3

On remarque sur le Graphique 3 que l'écart-type augmente avec la proportion d'actions dans le portefeuille, et ce linéairement avec la médiane dans le cas de l'analyse 2, comme l'illustre la droite en pointillés.

Aucune stratégie ne se distingue des autres dans l'analyse 2. En effet, les points de chaque stratégie sont schématiquement tous situés sur la même droite, attestant donc d'un compromis [médiane - écart-type] équivalent. Au prisme de cette analyse, le choix de la stratégie d'investissement dépendra seulement de l'aversion au risque de l'individu. On remarquera que la performance moyenne des stratégies est sensiblement plus faible dans l'analyse 2, comme l'indique la dernière ligne du Tableau 5 présenté ci-après. Notre analyse du Tableau 6, présenté ci-après, permet d'expliquer ce phénomène. On notera également que l'écart-type moyen et l'étendue des écart-types des différentes stratégies sont plus élevés dans l'analyse 2. Ceci s'explique par le grand nombre de scénarios à l'œuvre dans cette analyse. Enfin, on soulignera également que la stratégie 1 (gestion à horizon – désensibilisation linéaire) et la stratégie 4 (proportion fixe d'actions – 30 %) apportent des capitaux au terme aux profils quasiment identiques.

L'analyse 1 est plus différenciante. S'y distinguent 2 stratégies : la n° 1 (gestion à horizon – désensibilisation linéaire) et la n° 10 (stratégie de l'assureur). La n° 1 possède un écart-type très faible par rapport aux autres stratégies (48.592 contre 94.533 en moyenne pour les autres stratégies), pour une médiane certes légèrement inférieure (413.543 contre 445.099 en moyenne pour les autres stratégies). Grossièrement, choisir la stratégie 1 revient à renoncer à 32.000 de médiane pour diviser l'écart-type du capital au terme par deux. Les autres stratégies à horizon (n° 2 et 3) sont dominées par cette stratégie. La stratégie n° 10 possède elle la meilleure médiane toutes stratégies confondues tout en ayant le 5e meilleur (*i.e.* plus faible) écart-type.

Graphique 4

Si l'on utilise maintenant le 2,5e centile comme mesure de risque, les résultats sont déconcertants. En effet, le classement des différentes stratégies selon le 2,5e centile dans l'analyse 1 est quasiment l'opposé de celui obtenu dans l'analyse 2. A titre d'illustration, si dans l'analyse 1 la stratégie 9 possède le 2,5e centile le plus élevé, elle possède le plus faible dans l'analyse 2. De telles différences sèment plus d'interrogations qu'elles n'éliminent de doutes. Selon l'analyse 1, les stratégies à forte poche actions (7, 8 et 9) ressortent comme les grandes gagnantes avec à la fois des capitaux médians au terme plus élevés et des mesures de risque plus favorables que pour les autres stratégies. Les stratégies à horizon n'ont — au prisme de cette analyse — aucun intérêt. Selon l'analyse 2 en revanche, les stratégies 7, 8 et 9 apparaissent comme les plus performantes en médiane mais également comme les plus risquées.

La technique du *boostrapping* fait-elle injustement du tort aux stratégies à forte poche actions en ignorant l'auto-corrélation des rendements ou bien révèle-elle, par le grand nombre de simulations, le risque qu'elles font porter à ceux qui les choisissent ? Sans pouvoir trancher de manière définitive, nous pouvons avancer que les résultats de l'analyse 2 sont plus cohérents car on y observe la corrélation négative entre risque et performance[23]. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que dans les deux analyses, seule la stratégie 10 s'éloigne nettement de la tendance linéaire formée par le nuage de points, et ce dans le sens favorable. On remarquera également que le 2,5e centile moyen est sensiblement plus faible dans l'analyse 2 — en atteste la dernière

[23] Pour écarter tout biais éventuel lié à l'utilisation du 2,5e centile dans l'analyse 1, nous avons effectué un test en remplaçant cet indicateur par le minimum, puis par la moyenne des valeurs inférieures au 2,5e centile (l'équivalent d'un *expected shortfall* empirique). Les résultats observés avec ces 2 autres indicateurs sont très similaires et corroborent donc le constat contre-intuitif suivant : dans le cadre du *backtesting,* les stratégies les plus chargées en actions sont les moins risquées

ligne du Tableau 4 —, différence qui s'explique par le grand nombre de scénarios à l'œuvre dans cette analyse.

Graphique 5, Graphique 6

Le Graphique 5 illustre bien le surcroît de volatilité inhérent aux stratégies dominées par une forte poche actions (stratégie 9) comparé à la gestion à horizon (stratégie 1) ou à ce que nous appelons la gestion de l'assureur (stratégie 10). Le Graphique 6 représente l'évolution de l'épargne, des cotisations hors effet de marché (échelle de gauche) et des gains/pertes de marché (échelle de droite) pour la stratégie 1 sur la période janvier 1954-décembre 1988. On y remarque l'effet de volume qui — engendré par l'augmentation progressive de l'épargne — fait logiquement croître la magnitude des pertes/gains de marché dans le temps. Cet effet lié à la périodicité des versements est déterminant pour la performance et le risque des stratégies d'investissement. D'où l'importance et l'effet différenciant de l'allocation du portefeuille en fin de période.

Voici maintenant les résultats numériques des analyses 1 (*backtesting*) et 2 (*bootstrapping*) :

	Gagnante		**Perdante**		**Rang moyen**		**Classement selon rang moyen**	
Analyse	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	0%	3%	15%	3%	8,2	6,6	10	8
Stratégie 2	17%	15%	26%	12%	5,9	5,0	6	5
Stratégie 3	0%	1%	58%	68%	8,0	8,3	9	10
Stratégie 4	0%	0%	0%	1%	6,2	6,6	8	9
Stratégie 5	0%	0%	0%	0%	5,3	5,7	5	6
Stratégie 6	0%	0%	0%	0%	4,7	5,0	4	4
Stratégie 7	0%	0%	0%	0%	4,1	4,3	3	3
Stratégie 8	0%	1%	0%	0%	3,6	3,8	2	2
Stratégie 9	57%	60%	1%	17%	3,1	3,4	1	1
Stratégie 10	26 %	21%	0%	0%	5,9	6,4	7	7

Tableau 3

Colonne "Gagnante" : proportion (%) des fenêtres glissantes (analyse 1) /scénarios (analyse 2) dans lesquels la stratégie apporte le capital au terme le plus élevé.

Colonne "Perdante" : proportion (%) des fenêtres glissantes (analyse 1) /scénarios (analyse 2) dans lesquels la stratégie apporte le capital au terme le plus faible.

En regardant tout d'abord les colonnes « Gagnante » / « Perdante », on remarque sur le Tableau 3 ci-dessus la domination écrasante de la stratégie 9 — la plus chargée en actions — qui rapporte le plus gros capital au terme dans respectivement 57 % (analyse 1, par *backtesting*) et 60 % (analyse 2, par *bootstrapping*) des cas ; et apporte le plus mauvais capital au terme dans respectivement 1 % et 17 % des cas. Parmi les stratégies à horizon, celle où l'épargne est désensibilisée tardivement (stratégie 2) fournit les meilleurs résultats sans pour autant être convaincante : si cette stratégie est gagnante dans respectivement 17 % et 15 % des cas, elle est perdante dans 26 % et 12 % des scénarios. Le portefeuille de l'assureur, en revanche, est gagnant dans plus de 20 % des scénarios toute analyse confondue tout en ne perdant jamais. Il ressort donc comme la meilleure alternative à un portefeuille lourdement chargé en actions.

Néanmoins, il est important de relativiser l'image rendue par ces deux premières colonnes de résultats. En effet, l'étiquetage gagnant/perdant risque de disqualifier à tort des stratégies potentiellement très performantes mais toujours battues par une stratégie plus extrême. Pour rectifier cela, nous avons calculé le rang moyen de chaque stratégie ainsi que différents indicateurs statistiques usuels.

Le classement selon le rang moyen relativise grandement la performance de la stratégie de l'assureur (stratégie 10), qui arrive en 7e position dans nos deux analyses. Le classement selon le rang moyen semble être directement fonction de la proportion en actions du portefeuille. Ainsi, dans les deux analyses, les 4 premières places du classement sont obtenues par les stratégies à proportion d'actions fixe, et les stratégies sont d'autant mieux classées qu'elles sont lourdement chargées en actions. Parmi les stratégies à horizon, les stratégies 1 et 3 figurent dans les 3 dernières places du classement dans les 2 analyses. La stratégie 2 (chargée à 75 % en actions sur les 25 premières années) est mieux classée.

Le détail des indicateurs statistiques usuels obtenus sur le capital au terme est présenté dans les tableaux qui suivent.

	Ecart-type		**2,5e centile**		**10e centile**	
Analyse	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	48.592	64.377	275.899	234.940	306.681	263.994
Stratégie 2	80.643	157.622	297.579	189.602	330.712	238.883
Stratégie 3	78.062	16.593	232.774	266.628	258.170	276.796
Stratégie 4	82.904	62.480	278.720	235.758	309.184	267.151
Stratégie 5	87.812	90.040	299.357	221.033	329.544	260.170
Stratégie 6	94.674	122.325	320.546	206.393	347.506	252.143
Stratégie 7	103.373	160.216	340.217	191.780	361.862	243.832
Stratégie 8	113.673	204.823	354.971	178.246	373.244	234.959
Stratégie 9	125.280	257.521	356.467	164.956	381.580	225.367
Stratégie 10	84.376	21.075	267.790	285.802	298.468	299.130
Moyenne	89.939	115.707	302.432	217.514	329.695	256.242

Tableau 4

	Moyenne		Médiane		Rang selon moyenne		Rang selon médiane	
Analyse	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	396.164	339.293	413.543	331.662	9	8	9	8
Stratégie 2	435.309	403.147	423.263	372.228	7	4	8	4
Stratégie 3	383.111	297.094	404.753	296.495	10	10	10	10
Stratégie 4	431.293	341.910	446.993	336.748	8	7	6	7
Stratégie 5	447.825	364.711	457.869	354.408	5	6	3	6
Stratégie 6	463.279	389.365	458.138	371.370	4	5	2	5
Stratégie 7	477.492	416.038	454.138	387.893	3	3	4	3
Stratégie 8	490.312	444.911	449.966	403.487	2	2	5	2
Stratégie 9	501.598	476.181	444.692	418.298	1	1	7	1
Stratégie 10	435.463	325.405	466.075	324.679	6	9	1	9
Moyenne	446.185	379.805	441.943	359.727				

Tableau 5

	Rendement mensuel moyen			Ecart-type rendement		
Analyse	*1*	*2*	*Données*	*1*	*2*	*Données*
Actions	0,69%	0,69%	0,69 %	4,34%	4,19%	4,20 %
Obligations	0,59%	0,48%	0,48 %	0,21%	0,22%	0,22 %
Monétaire	0,47%	0,36%	0,36 %	0,23%	0,24%	0,24 %

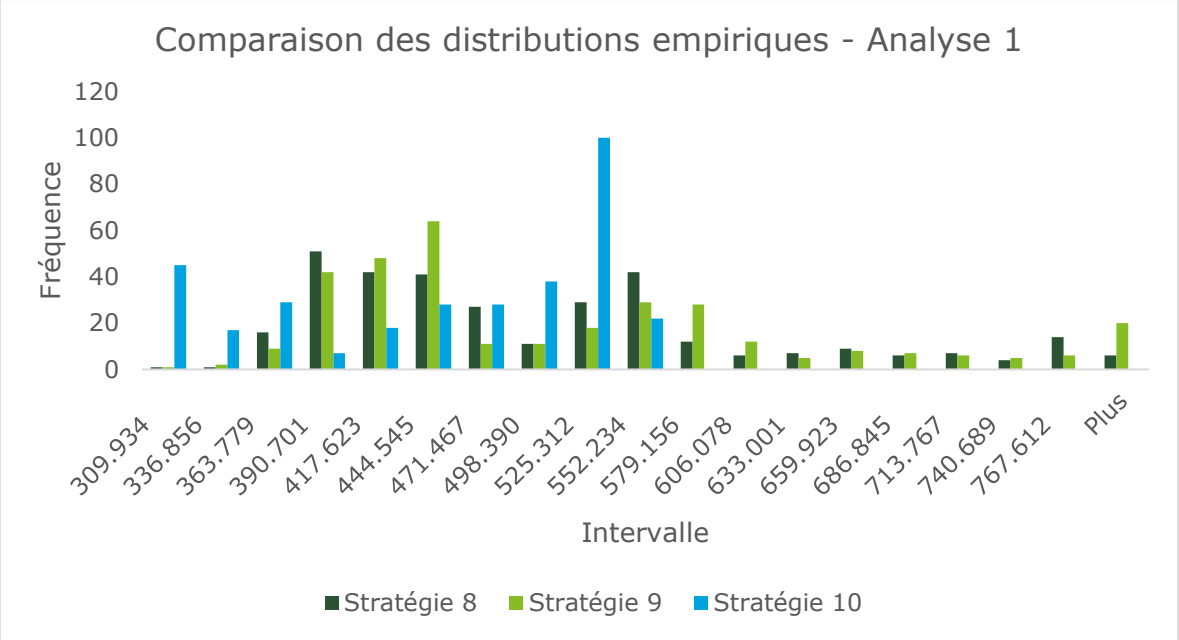
Tableau 6

Le Tableau 6 compare la moyenne et l'écart-type obtenus pour les différents actifs dans les analyses 1 et 2[24] à la moyenne et l'écart-type des données source (déjà présentés en section 2.2.1). Les résultats obtenus dans l'analyse 2 convergent bien vers les résultats calculés sur les données source. On remarque en revanche de légères différences entre les résultats obtenus dans l'analyse 1 et les résultats des données source : le rendement moyen des produits de taux y est notamment plus élevé. Cela s'explique par le biais méthodologique que nous avons décrit en section 2.3 : en effet, la méthode des fenêtres glissantes sur-pondère les données situées en milieu d'échantillon par rapport aux données situées aux marges de celui-ci. Or, on remarque aisément dans le Graphique 1 que les rendements des produits de taux sont bien plus élevés dans le milieu de l'échantillon qu'aux marges. D'où les rendements moyens des produits de taux supérieurs à ceux des données source.

Le Tableau 5 compare le rang des stratégies selon la moyenne et selon la médiane du capital au terme obtenu dans les différents scénarios. Ce rang est identique dans l'analyse 2 mais varie fortement dans l'analyse 1. A titre d'illustration, la stratégie 10, 6e selon la moyenne, est 1ère selon la médiane et la stratégie 9, 1ère selon la moyenne, arrive 7e selon la médiane. Ces différences sont symptomatiques de la difficulté qui entoure la mesure de la « performance » d'une stratégie et du biais que peut introduire le choix d'un indicateur non-adapté. Pour y voir

[24] Pour l'analyse 1 (analyse 2), il s'agit de la moyenne de la moyenne des rendements obtenus sur les 332 fenêtres (10.000 fenêtres) analysées et de la moyenne des écart-types obtenus sur les 332 fenêtres (10.000) analysées

plus clair, regardons les distributions empiriques des capitaux au terme obtenus dans l'analyse 1 pour les stratégies qui connaissent les plus fortes variations de classement entre la moyenne et la médiane.



Graphique 7

On remarque sur le Graphique 7 que les capitaux au terme des analyses 8 et 9 prennent certaines valeurs « extrêmes » (au-delà de 767.612) compte tenu de leur dominante actions — valeurs qui gonflent la moyenne du capital au terme alors qu'elles ne représentent respectivement que 2 et 6 % des scénarios. La question qui se pose est donc la suivante : dans le cadre de la constitution d'une épargne retraite, l'investisseur individuel se positionnera-t-il plus par rapport à une moyenne ou bien par rapport à une médiane ? Nous penchons pour la seconde option. En effet, en présence de valeurs extrêmes très peu probables, l'investisseur préférera la meilleure stratégie en termes de médiane et non la meilleure stratégie selon un indicateur « biaisé » par quelques observations. En d'autres termes, les distributions des capitaux au terme étant asymétriques, nous considérons que la médiane est un indicateur plus robuste de la tendance centrale des données observées. C'est pourquoi nous l'avons choisi dans les représentations graphiques.

Conclusion :

La sensibilité des résultats aux différents paramètres de l'étude est symptomatique de la complexité du problème que nous étudions. Les résultats sont à la fois sensibles à la définition de la mesure du risque (écart type *vs* centile dans notre cas) et aux caractérisques des rendements (cf. Tableau 6). Les stratégies à horizon ne ressortent pas comme particulièrement performantes par rapport à des stratégies plus simples, que ce soit en termes de maximisation du capital ou de minimisation du risque. Parmi les stratégies à horizon, seule la stratégie n° 1 ressort, et ce dans l'analyse 1. Or, ce bon positionnement peut s'expliquer par le biais introduit par la méthode du *backtesting*, biais que nous avons décrit dans l'analyse du Tableau 6 (distorsion à la hausse du rendement des produits de taux). De surcroît, si seule la stratégie 1 s'est démarquée, la stratégie 4 procure des résultats très proches. Il semblerait donc possible de répliquer les effets de la désensibilisation au risque action à partir d'un portefeuille à proportion fixe d'actions. En l'occurrence, la moyenne de la part action du portefeuille de la stratégie 1, pondérée par les flux investis, est égale à 27 %. La proximité des résultats des stratégies 1 et 4 semble donc indiquer qu'une stratégie à proportion d'actions fixe donnera les mêmes résultats qu'une stratégie à horizon à proportion d'actions moyenne identique.

Si pour être réelle, la domination d'une stratégie doit se manifester au prisme de différentes analyses, aucune stratégie n'est réellement dominante au regard des comparaisons proposées, et la stratégie qui ressort néanmoins le plus n'est pas une stratégie à horizon mais celle de l'assureur (n° 10). Ainsi, à la question « La gestion à horizon aurait-elle apporté une véritable plus-value comme outil de diminution du risque pour un investissement d'une durée de 35 ans dans le contexte américain des 60 dernières années ?», nous répondons par la négative.

Remarque sur les résultats du Tableau 3:

La surperformance des stratégies fortement exposées aux actions illustre le phénomène de diversification temporelle : sur un placement de très long terme, les stratégies orientées actions sont très intéressantes car les aléas du marché sont absorbés sur la durée et le rendement moyen — ici très élevé — finit par émerger.

A titre d'illustration, nous avons calculé sur les données historiques brutes les statistiques suivantes pour 3 investissements à **versement unique** effectués respectivement à 100 % sur le support actions, 100 % sur le support obligations et 100 % sur le support monétaire :

	1 mois	**1 an**	**5 ans**	**10 ans**	**20 ans**	**35 ans**
Nombre de périodes	751	740	692	632	512	332
Surperformance actions vs obligations	56 %	53 %	52 %	58 %	52 %	52 %
Surperformance actions vs monétaire	57 %	74 %	59 %	66 %	58 %	97 %
Fréquence rendement actions positif	60 %	82 %	80 %	90 %	100 %	100 %

Nous remarquons sur ce tableau que l'accroissement de la durée d'investissement :

(i) Est relativement neutre sur la surperformance du placement 100 % actions par rapport au placement 100 % obligations
(ii) Engendre une surperformance quasi certaine du placement 100 % actions par rapport au placement 100 % monétaire, mais uniquement pour le très long terme (35 ans)
(iii) Diminue la probabilité de perte en capital pour le placement 100 % actions.

Le point (iii) illustre bien le phénomène de diversification temporelle : si sur une durée d'1 mois les investissements en actions n'ont été rémunérateurs que dans 60 % des cas, ils l'ont été dans tous les cas pour des durées de 20 et 35 ans.

Le point (i) peut en revanche sembler contradictoire avec les résultats observés. En effet, si sur 35 ans un placement 100 % actions n'a apporté un meilleur résultat qu'un placement 100 % obligations que dans 52 % des cas, pourquoi observe-t-on une telle domination des stratégies les plus chargée en actions (stratégie 9 notamment) sur les stratégies composées en grande partie d'obligations (notamment la stratégie 10 à 85 % d'obligations) ? Deux phénomènes permettent d'expliquer cela :

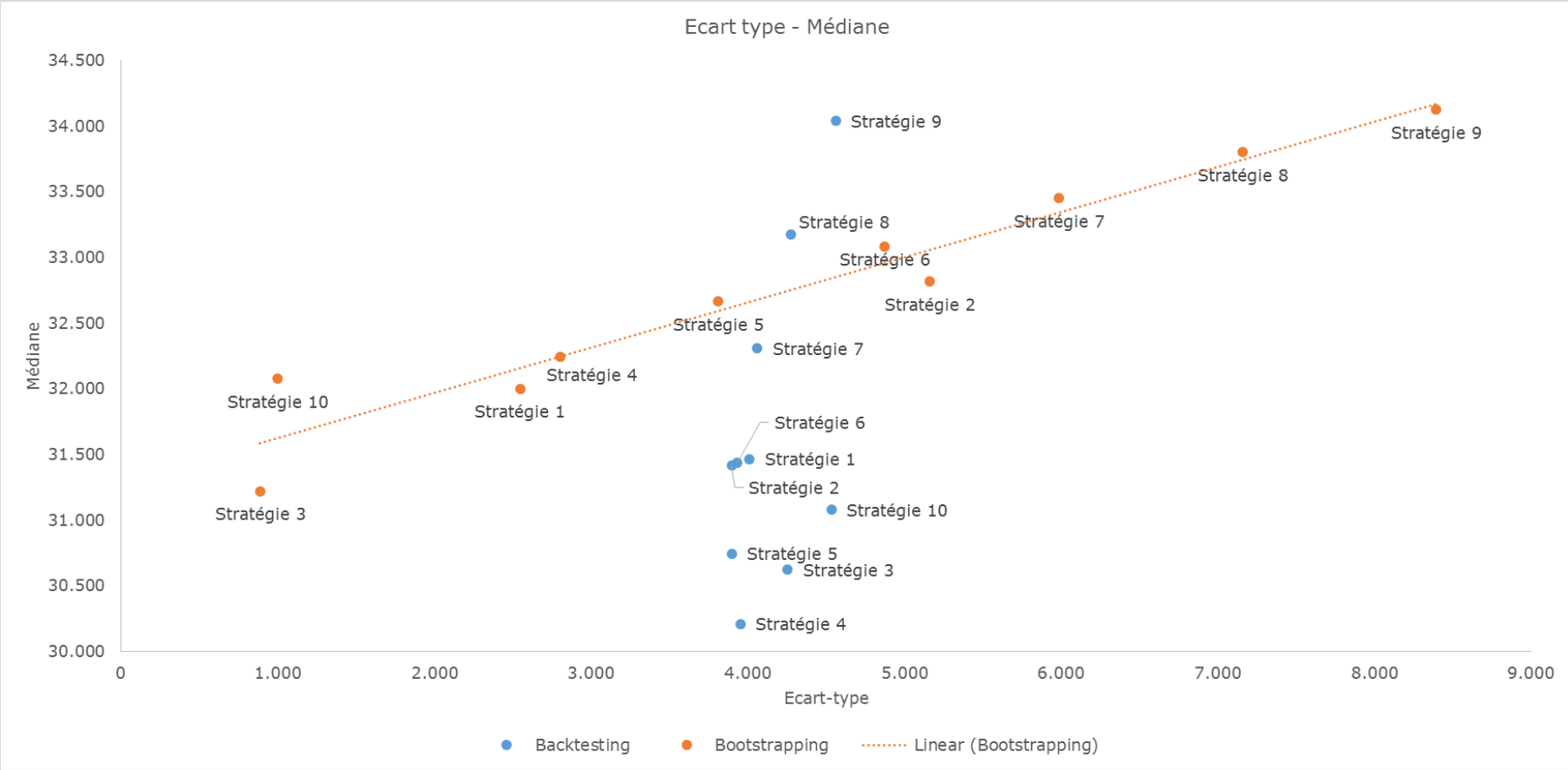
- Le tableau ci-dessus compare des investissements à versement unique alors que les stratégies répliquées dans l'analyse 1 sont à versement périodique. Or, les conséquences de chocs à la baisse — que l'on observe plus sur les actions que sur les obligations — sont très pénalisantes dans le cas d'un investissement à versement unique, comme illustré en section 2.2.3. Dès lors, la surperformance sur 35 ans du placement 100 % actions sur le placement 100 % obligations serait certainement supérieure à 52 % dans le cas de versements périodiques.
- Le tableau ci-dessus n'illustre qu'une variable binaire qui indique si le placement actions apporte un rendement supérieur au placement obligations. Il ne tient pas compte de l'effet de volume, c'est-à-dire de la mesure dans laquelle le rendement du premier placement est supérieur à celui du second. Le Graphique 5 est à ce propos très instructif. On y remarque en effet que lorsque le capital au terme de la stratégie 9 est inférieur à celui de la stratégie 10, il ne l'est que de peu ; tandis que lorsqu'il est supérieur, il l'est de beaucoup. Dès lors, deux stratégies à sur/sous-performance égales peuvent avoir des capitaux moyens/médians au terme très différents.

Pour écarter le phénomène qui tend à estomper le risque associé aux placements actions lorsque la durée de détention est très longue, nous avons répliqué les analyses 1 et 2 sur une durée plus courte : 10 ans.

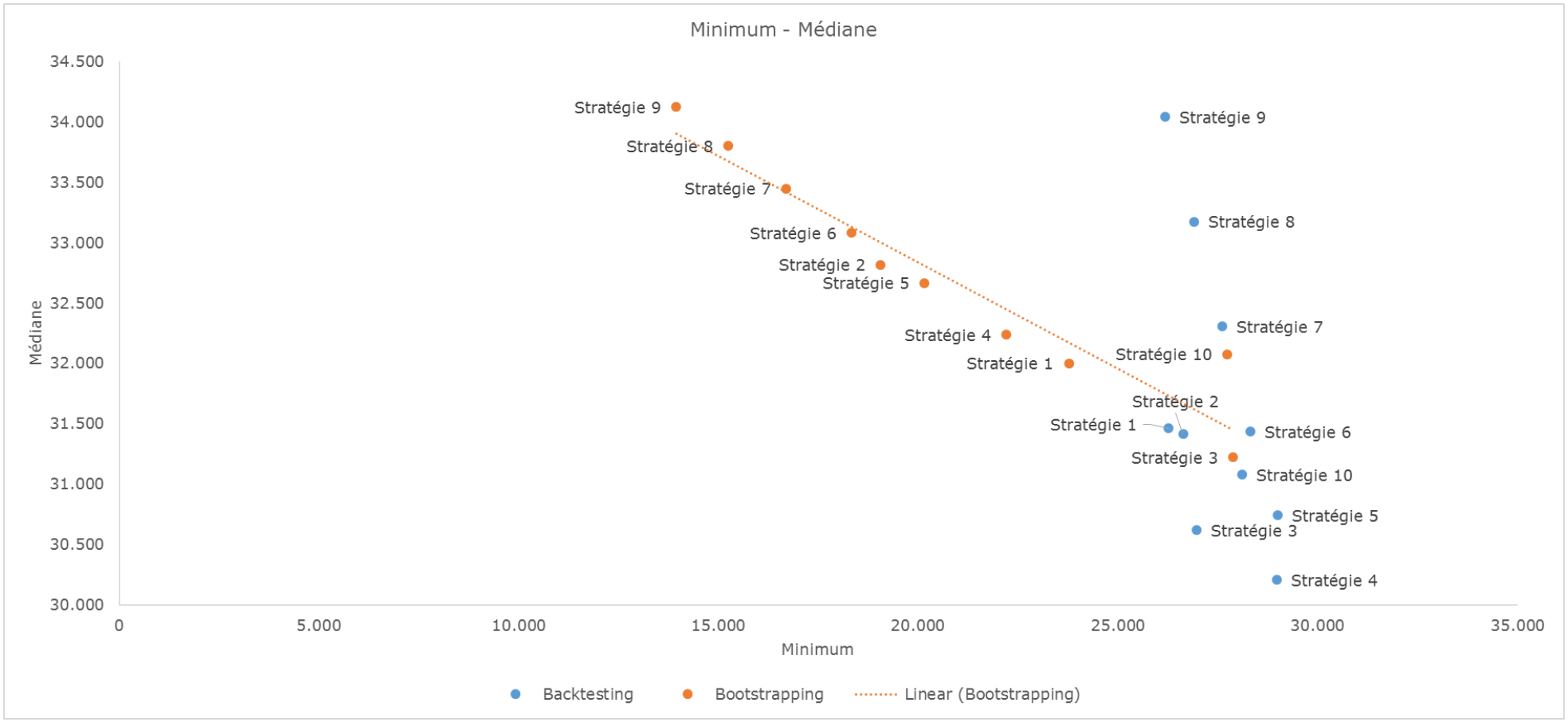
2.5.3. Test sur 10 ans

Nous mettons cette fois à l'épreuve les stratégies 1 à 10 sur une période de 10 ans. La désensibilisation se fait sur les 3 dernières années pour la stratégie 2 et sur les 3 premières pour la stratégie 3. L'analyse 1 se base sur 6 fenêtres temporelles *indépendantes* de 10 ans qui couvrent la période allant de janvier 1954 à décembre 2013. Pour l'analyse 2, nous simulons toujours 10.000 échantillons mais qui contiennent cette fois 120 blocs de rendements mensuels.

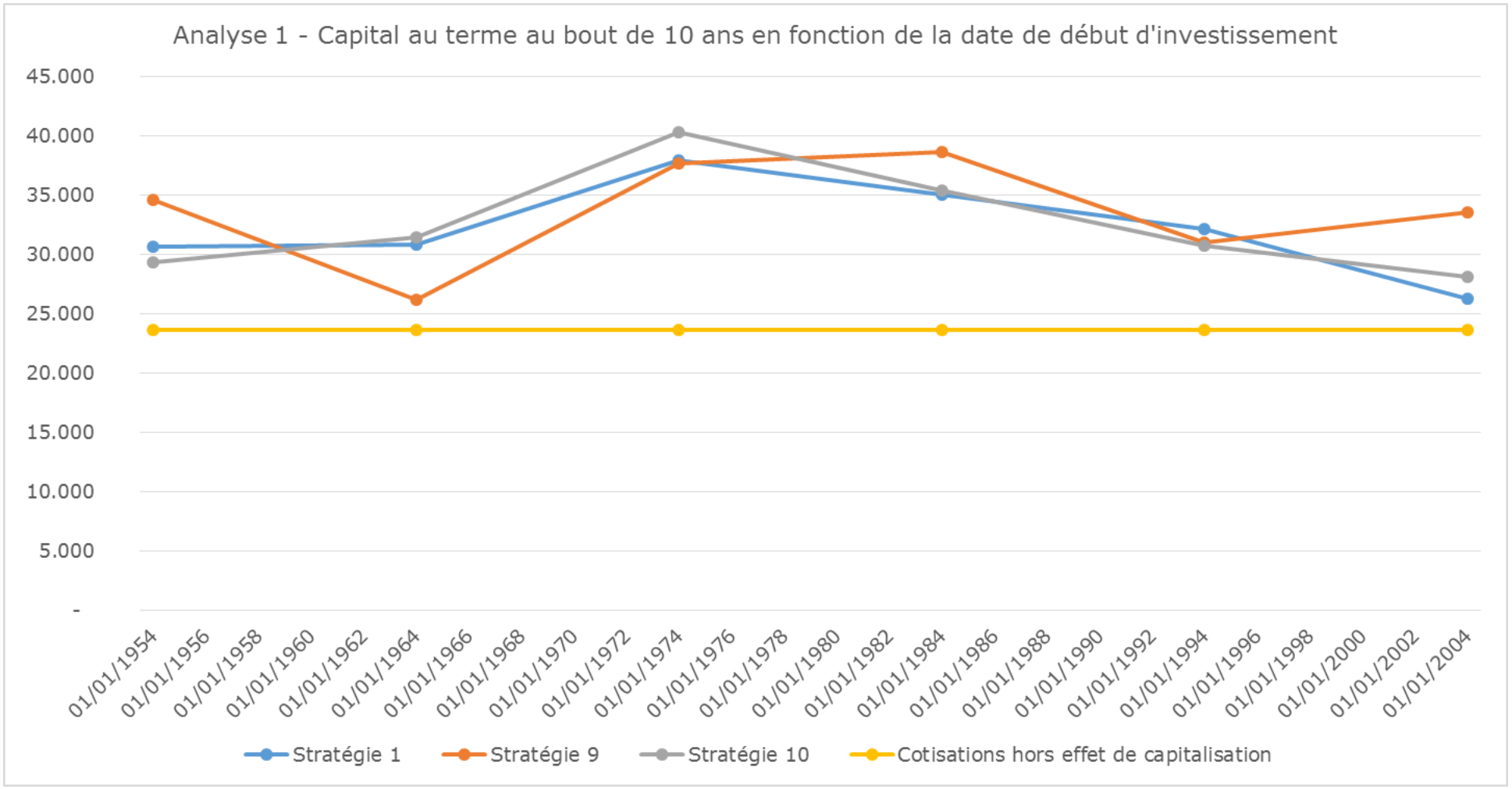
La répartition détaillée des stratégies 1 à 3 figure en annexe. La répartition des stratégies 4 à 10 suit la même logique que précédemment.


Ecart type - Médiane
34.500
34.000
33.500
33.000
32.500
32.000
31.500
31.000
30.500
30.000
Médiane
0
1.000
2.000
3.000
4.000
5.000
6.000
7.000
8.000
9.000
Ecart-type
Stratégie 9
Stratégie 8
Stratégie 7
Stratégie 6
Stratégie 2
Stratégie 5
Stratégie 4
Stratégie 10
Stratégie 1
Stratégie 3
Backtesting
Bootstrapping
Linear (Bootstrapping)

Graphique 8


Minimum - Médiane
34.500
34.000
33.500
33.000
32.500
32.000
31.500
31.000
30.500
30.000
Médiane
0
5.000
10.000
15.000
20.000
25.000
30.000
35.000
Minimum
Stratégie 9
Stratégie 8
Stratégie 7
Stratégie 6
Stratégie 2
Stratégie 5
Stratégie 4
Stratégie 1
Stratégie 9
Stratégie 8
Stratégie 7
Stratégie 10
Stratégie 2
Stratégie 1
Stratégie 6
Stratégie 3
Stratégie 10
Stratégie 5
Stratégie 3
Stratégie 4
Backtesting
Bootstrapping
Linear (Bootstrapping)

Graphique 9



Graphique 10

L'apport de l'analyse 1 est ici limité de par le nombre limité de périodes testées. Cette analyse permet simplement de voir que sur les 6 tranches indépendantes de 10 années couvrant la période 1954-2013, la stratégie 9 (correspondant à 80 % d'actions dans le portefeuille) est la plus performante à la fois en médiane et en moyenne. Les indicateurs de risque sont dans ce cas difficilement interprétables.

L'analyse 2 procure des résultats relativement similaires à ceux obtenus sur 35 ans. On remarque en particulier sur le Graphique 8 et le Graphique 9 que la stratégie 10 se démarque favorablement de la tendance linéaire formée par les autres stratégies. Les stratégies à horizon ne se démarquent pas particulièrement. La stratégie 3 (désensibilisation rapide) procure les meilleurs indicateurs de risque mais au sacrifice de la performance. Les stratégies 7 à 9 apparaîssent comme particulièrement risquées mais à leur excès de risque correspond un excès « proportionnel » de performance, ne permettant pas d'affirmer qu'elles sont dominées par d'autres stratégies.

Les résultats numériques détaillés sont les suivants :

	Gagnante		**Perdante**		**Rang moyen**		**Classement selon rang moyen**	
Analyse	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	17%	3%	17%	4%	6,3	6,2	8	9
Stratégie 2	0%	17%	17%	17%	6,0	5,4	7	5
Stratégie 3	0%	5%	17%	51%	6,7	7,2	9	10
Stratégie 4	0%	0%	17%	2%	6,7	6,1	9	8
Stratégie 5	0%	0%	0%	0%	5,8	5,6	6	6
Stratégie 6	0%	0%	0%	0%	5,2	5,1	4	4
Stratégie 7	0%	0%	0%	0%	4,8	4,8	3	3
Stratégie 8	0%	0%	0%	0%	4,3	4,5	2	2
Stratégie 9	50%	52%	17%	25%	4,0	4,2	1	1
Stratégie 10	33%	23%	17%	2%	5,2	5,7	4	7

Tableau 7

Les résultats du Tableau 7 sont similaires à ceux du Tableau 3 : schématiquement, plus la composante actions est forte, plus le classement de la stratégie est bon.

	Ecart-type		2,5e centile[25]	10e centile	Minimum	
Analyse	*1*	*2*	*2*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	4.013	2.547	27.637	29.011	26.273	23.771
Stratégie 2	3.897	5.162	24.764	27.223	26.628	19.062
Stratégie 3	4.255	888	29.582	30.129	26.974	27.882
Stratégie 4	3.953	2.805	27.230	28.920	28.982	22.204
Stratégie 5	3.897	3.813	26.087	28.286	29.007	20.154
Stratégie 6	3.933	4.874	24.970	27.623	28.311	18.325
Stratégie 7	4.061	5.988	23.923	26.951	27.608	16.694
Stratégie 8	4.274	7.160	22.867	26.269	26.901	15.238
Stratégie 9	4.563	8.394	21.850	25.615	26.190	13.939
Stratégie 10	4.534	999	30.181	30.817	28.115	27.731
Moyenne	4.138	4.263	25.909	28.085	27.499	20.500

Tableau 8

	Moyenne		Médiane		Rang selon moyenne		Rang selon médiane	
Analyse	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*2*
Stratégie 1	32.128	32.160	31.463	32.000	8	8	4	9
Stratégie 2	32.102	33.337	31.414	32.818	9	5	6	5
Stratégie 3	31.776	31.248	30.621	31.220	10	10	9	10
Stratégie 4	32.198	32.389	30.209	32.239	7	7	10	7
Stratégie 5	32.507	32.931	30.744	32.665	6	6	8	6
Stratégie 6	32.800	33.485	31.437	33.081	4	4	5	4
Stratégie 7	33.077	34.053	32.306	33.449	3	3	3	3
Stratégie 8	33.337	34.635	33.174	33.802	2	2	2	2
Stratégie 9	33.578	35.231	34.039	34.124	1	1	1	1
Stratégie 10	32.530	32.089	31.078	32.077	5	9	7	8
Moyenne	32.603	33.156	31.648	32.748				

Tableau 9

	Rendement mensuel moyen			Ecart-type rendement		
Analyse	*1*	*2*	*Données*	*1*	*2*	*Données*
Actions	0,69%	0,69%	0,69 %	4,34%	4,19%	4,20 %
Obligations	0,59%	0,48%	0,48 %	0,21%	0,22%	0,22 %
Monétaire	0,47%	0,36%	0,36 %	0,23%	0,24%	0,24 %

Tableau 10

[25] Indicateur non applicable à l'analyse 1, pour laquelle nous n'avons que 6 observations

<u>Conclusion</u> :

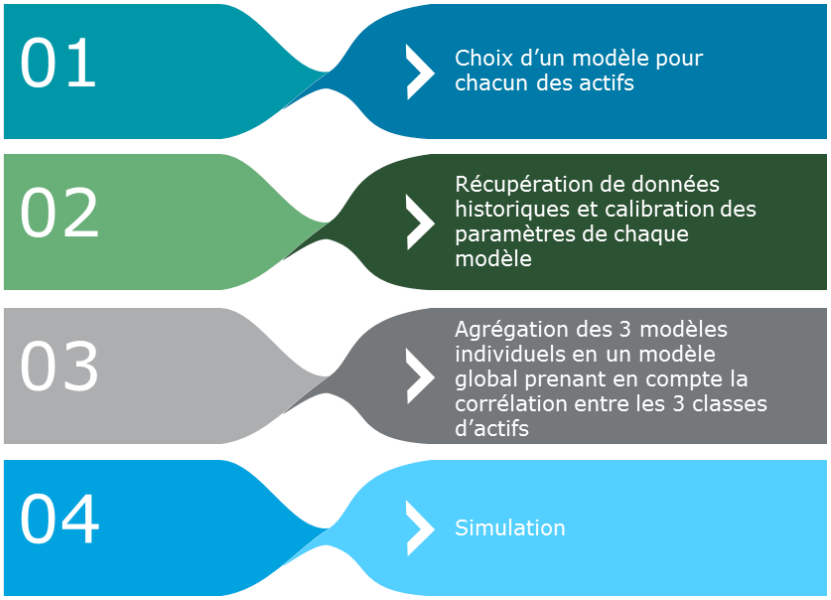
La réduction de la période d'investissement n'apporte pas d'élément majeur qui contredise les conclusions de l'analyse menée sur 35 ans.

Les analyses que nous avons menées jusqu'à présent ne nous ont pas permis de faire émerger des arguments saillants en faveur de la gestion à horizon. Il faut néanmoins garder à l'esprit que ces analyses reposent sur des données historiques marquées par l'âge d'or des marchés actions. Dans un tel contexte, il est finalement naturel que les stratégies prudentes ou à horizon ne se soient pas démarquées des stratégies orientées actions. Or, l'histoire récente a été marquée par des marchés actions herratiques et des produits de taux moins rémunérateurs qu'auparavant. Il n'est donc pas exclu que, bien que sans réel intérêt au vu du passé, les stratégies à horizon présentent une plus-value tangible dans un environnement économique plus instable. En effet, les performances du passé ne sont pas nécessairement représentatives des performances futures. C'est pourquoi nous avons jugé utile de mener une analyse véritablement prospective.

3. Analyse 3 : modélisation

L'objectif de l'analyse prospective est d'aller au-delà de l'approche historique afin d'envisager des scénarios possibles pour l'avenir. Cette partie est plus technique car elle nous demande de modéliser les rendements des différents actifs dans le temps. Le cadre de l'analyse est le même que celui des analyses 1 et 2 : nous supposons un univers d'investissement à 3 classes d'actifs et nous allons comparer les performances des stratégies 1 à 10, sur 35 ans. Néanmoins, la contrainte d'historique étant moins pesante que pour les analyses précédentes, nous allons ici nous placer dans le contexte des marchés européens. En effet, si pour les analyses 1 et 2 les données provenaient directement des observations historiques, dans l'analyse 3 les données historiques servent seulement à calibrer les paramètres des différents modèles.

Notre approche comprend 4 étapes :



Les forces et faiblesses de cette approche sont liées aux caractéristiques des modèles et de la méthode d'aggrégation choisis, que nous présentons ci-après.

Pour notre modèle actions comme pour notre modèle de taux, nous nous sommes principalement basés sur la théorie présentée dans les manuels de Planchet *et al.* (23), de Lamberton et Lapeyre (24) et de Hull (25). L'étude de Gibson et al. (26) et le mémoire d'actuaire de Florent Wilhelmy (27) nous ont également servi de base pour comprendre les différents modèles de taux et leurs limites.

3.1. Modèle actions

3.1.1. Présentation du modèle

Nous supposons, comme dans le cadre du modèle de Black-Scholes, que le prix de l'action suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité σ et une dérive μ constantes[26] :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \qquad [3]$$

où :

- S_t est le prix de l'action
- W_t est un processus de Wiener, *i.e.* un processus stochastique à valeurs réelles possédant les caractéristiques suivantes :
  - $W_0 = 0 \; presque \; sûrement$
  - Les accroissements de W sont indépendants : $W_{t+u} - W_t$ est indépendant de la tribu $\sigma(W_s : s \leq t)$ pour tout $u \geq 0$.
  - Les accroissements de W sont gaussiens et stationnaires (l'accroissement ne dépend que de la taille de l'intervalle de temps en question) : $W_{t+u} - W_t \sim N(0,u)$
  - W a des trajectoires continues : W_t est continu en t avec la probabilité 1

Dès lors, on peut réécrire l'équation [3] de la manière suivante :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, S_t \, \varepsilon \sqrt{dt}, \text{ avec } \varepsilon \sim N(0,1) \qquad [4]$$

En effet :

$$dW_t = W_{t+dt} - W_t \sim N(0, dt)$$

et :

$$\varepsilon \; suit \; une \; loi \; normale \; \Rightarrow \varepsilon\sqrt{dt} \; suit \; une \; loi \; normale, \text{ caractérisée par :}$$

$$E\left(\varepsilon\sqrt{dt}\right) = \; E(\varepsilon)\sqrt{dt} = 0$$

$$VAR\left(\varepsilon\sqrt{dt}\right) = \sqrt{dt}^2 \; VAR(\varepsilon) = dt$$

Le processus peut être discrétisé de la manière suivante :

$$\Delta S_{t+\Delta t} = S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \, \Delta t + \sigma \, S_t \, \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \text{ où } \Delta t \text{ est le pas de temps choisi}$$

Le rendement de l'action peut donc être modélisé par l'équation suivante :

$$\frac{\Delta S_{t+\Delta t}}{S_t} = \mu \, \Delta t + \sigma \, \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad [5]$$

[26] Ceci est le processus le plus utilisé pour décrire le comportement du prix d'une action

3.1.2. Données et calibration

Comme avancé en introduction de la partie 3, nous souhaitons profiter de cette partie modélisation pour utiliser des données du marché européen et ainsi être plus cohérents avec le contexte luxembourgeois. Pour calibrer les paramètres du modèle présenté en 3.1.1, nous utilsons les données mensuelles de l'EURO STOXX 50 de décembre 1986 à octobre 2016. L'EURO STOXX 50 est un indice boursier représentatif de la performance des plus grandes capitalisations boursières de la zone euro. Il est composé de 50 sociétés et est redéfini chaque année en fonction de l'évolution des capitalisations boursières. Le lien vers les données est donné dans (28).

Voici une illustration de l'évolution de l'indice sur la période considérée :

Graphique 11

Nous calculons les log-rendements mensuels définis par :

$$r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right),$$

où i désigne le mois n° i et S_i le niveau de l'indice à la fin du mois n° i.

On calcule le rendement moyen, défini par $\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$, où n désigne le nombre d'observations (ici $n = 358$).

On obtient $\bar{r} \simeq 0{,}34\ \%$.

Dans l'équation [5], μ désigne le rendement annuel espéré composé en continu. Par additivité des log-rendements, on aboutit à l'estimation suivante :

$$\hat{\mu} = 12 \times \bar{r} \simeq 4{,}13\ \%$$

Dans l'équation [5], σ désigne la volatilité (écart-type) annuelle des log-rendements. On estime donc σ de la façon suivante :

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}}{\sqrt{\tau}},$$

où τ désigne la longueur de chaque période en années.

On a donc $\tau = \frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$ et on aboutit finalement à :

$$\hat{\sigma} \simeq 18{,}72\ \%$$

3.2. Modèle de taux

3.2.1. Présentation du modèle

Parmi les modèles stochastiques de la courbe des taux d'intérêt, on distingue généralement les modèles d'équilibre des modèles de déformation de la courbe des taux. Dans les modèles d'équilibre, une description de l'économie selon certaines hypothèses permet de déterminer un processus stochastique pour le taux instantané. Sont ensuite dérivés de ce taux instantané, de manière endogène, la structure par terme des taux et le prix des différents instruments de taux. Le principal inconvénient des modèles d'équilibre est qu'ils n'épousent pas parfaitement la structure par termes des taux observée sur le marché, qui est un *output* du modèle. Dans les modèles construits par déformation, à l'inverse, cette structure est un paramètre du modèle, et est donc parfaitement reproduite.

Dans cette partie, nous utilisons les notations suivantes :

- $P(t,T)$ est le prix en t ($t \in [0,T]$) d'une obligation zéro-coupon versant 1 euro à la maturité T

- $R(t,T)$ est le taux d'intérêt instantané continument composé sur la période $[t,T]$, aussi appelé taux zéro-coupon, *i.e.* le taux continu constant tel que :

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \qquad [6]$$

- r_t est le taux court instantané, à savoir :

$$r_t = \lim_{T \to t} R(t,T) \qquad [7]$$

Le taux instantané est pensé comme un processus aléatoire. Ainsi, entre t et $t+dt$ on peut emprunter et prêter au taux r_t, qui est incertain car soumis à un aléa de marché.

Nous avons choisi de manière pragmatique le modèle de Vasicek. C'est en effet un modèle simple à comprendre et très utilisé dans le monde de la finance. Elaboré en 1977, c'est un modèle d'équilibre à structure affine qui décrit les mouvements de taux par une seule source de risque de marché.

Dans ce modèle le taux court instantané suit, sous la probabilité historique P, un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad [8]$$

avec :

- b la moyenne long-terme du taux court instantané
- σ la volatilité du taux court
- W_t un processus de Wiener (sous P) tel que défini dans l'équation [3]
- a la vitesse de retour à la moyenne ($a > 0$)

Le modèle de Vasicek est notamment connu pour sa propriété de retour à la moyenne. En effet, on voit aisément dans l'équation [8] que :

$$r_t < b \Rightarrow b - r_t > 0 \Rightarrow a(b - r_t)dt > 0$$

Ainsi, lorsque le taux court est inférieur à sa moyenne de long-terme, l'espérance de variation instantanée de r_t (la partie déterministe de dr_t) est positive. L'effet opposé est à l'œuvre lorsque le taux court est supérieur à sa moyenne de long-terme. Cette propriété de retour à la moyenne est importante dans un modèle de taux car contrairement aux actions par exemple, les taux n'ont pas de tendance sur longue période et ne peuvent augmenter indéfiniment.

Nous savons qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité historique P — la probabilité dite « risque neutre », notée Q — sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Sous cette probabilité Q, l'équation [8] devient :

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t \qquad [9]$$

où :

- $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$
- $\widetilde{W}_t = W_t + \lambda t$, processus de Wiener sous Q[27]
- λ est le prix de marché du risque que l'on suppose constant

<u>Remarque</u> :

$$\lambda(r,t) = \frac{\mu(r,t) - r}{\sigma(r,t)},$$

avec :

- $\mu(r,t)$ le rendement de l'obligation zéro-coupon
- $\sigma(r,t)$ la volatilité du rendement de l'obligation zéro-coupon
- r le taux sans risque

$\lambda(r,t) \times \sigma(r,t)$ nous donne donc l'excès de rendement de l'obligation zéro-coupon par rapport au taux sans risque et $\lambda(r,t)$ désigne le prix de marché « unitaire » (par unité de volatilité) du risque de taux d'intérêt.

Le prix de marché du risque peut être lui-même modélisé séparémment mais nous le considérons constant pour des raisons de simplicité. Ainsi, nous travaillons en monde risque neutre avec l'équation [9] et n'estimons que 3 paramètres : b_λ, a et σ. L'estimation du prix de marché du risque est comprise dans l'estimation de b_λ.

[27] Cette propriété découle du théorème de Girsanov

Sous nos hypothèses, le modèle de Vasicek fournit des formules explicites pour le *pricing* des produits de taux standards. Une méthode de résolution classique consiste à associer $P(t,T)$ — le prix d'un zéro-coupon de nominal 1 de maturité T en $t < T$ — à la forme suivante :

$$P(t,T) = exp(A(t,T) + B(t,T)r_t)$$

La valeur du zéro-coupon est alors donnée par :

$$P(t,T) = \exp\left\{\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}(R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right\} \quad [10]$$

avec :

$$R_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

L'équation [6] nous donne l'expression des taux zéro-coupon :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(P(t,T)\right)$$

En substituant $P(t,T)$ par son expression de l'équation [10], les taux zéro-coupon sont donnés par :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left\{\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}(R_\infty - r_t) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right\} \quad [11]$$

Enfin, dans une optique de simulation, l'équation [9] peut être discrétisée de la façon suivante :

$$\Delta r_{t+\Delta t} = r_{t+\Delta t} - r_t \approx a(b_\lambda - r_t)\Delta t + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t} \quad [12]$$

où :

- $\varepsilon \sim N(0,1)$
- Δt est le pas de temps choisi

De par sa simplicité, le modèle de Vasicek possède quelques inconvénients :

- Le taux court suit un processus gaussien et est donc négatif avec une probabilité non nulle. Cet inconvénient peut être vu comme un avantage à l'époque actuelle où les taux sont négatifs pour certaines maturités.
- Les variations des taux sont parfaitement corrélées entre elles.
- La courbe des taux zéro-coupon obtenue avec le modèle n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes de courbes obtenues sur les marchés. On ne peut par exemple pas obtenir de courbes inversées puis croissantes, ni de courbes à un creux et une bosse.
- Le modèle est endogène, c'est-à-dire qu'il définit entièrement la courbe des taux zéro-coupon. Il n'est pas possible de passer les observations de marché en entrée du modèle.

Il existe de nombreux autres modèles de taux. Parmi les plus connus, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985) répond au problème de la positivité du taux court et le modèle de Hull et White

(1990) reprend la structure du modèle de Vasicek en faisant de la moyenne long-terme du taux court une fonction déterministe du temps.

Voici un tableau récapitulatif des modèles classiques du taux court indiqués fréquemment dans les manuels de cours :

Modèle	**Processus suivi par le taux court**
Merton (1973)	$dr_t = bdt + \sigma dW_t$
Vasicek (1977)	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$
Dothan (1978)	$dr_t = bdt + \sigma r_t dW_t$
Cox, Ingersoll, Ross (1985)	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$
Ho, Lee (1986)	$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$
Hull, White (Vasicek étendu, 1990)	$dr_t = (\theta(t) - \beta r_t)dt + \sigma dW_t$
Black, Karasinski (1991)	$d\log(r_t) = (\theta(t) - \beta \log(r_t))dt + \sigma dW_t$

Pour prendre en compte les différences de corrélation entre les taux court terme et les taux long terme et pour évaluer des produits de taux faisant intervenir différentes maturités, il existe également des modèles à plusieurs facteurs tels que le modèle de Brennan et Schwatz (1982) ou les modèles gaussiens à deux facteurs.

3.2.2. Données et calibration

Pour calibrer le modèle de taux qui servira de base à la simulation des rendements des produits de taux (placements monétaire et obligataire), nous devons intégrer l'information la plus récente concernant les taux d'intérêt à court, moyen et long terme pour un placement représentatif du niveau de risque que nous souhaitons reproduire. En ce qui concerne les placements obligataires et monétaires réalisés dans le cadre des plans de pension, nous estimons que le niveau de risque associé à des obligations de haute qualité (notation AA) émises par des entreprises de la zone euro et libellées en euro serait cohérent. C'est pourquoi nous calibrons le modèle à partir d'une structure par termes des taux zéro-coupon représentative de telles obligations.

Nous avons extrait les taux zéro-coupon de l'indice Bloomberg « BS 165 EUR EUROPE CORPORATE AA+, AA, AA- » au 31 décembre 2016. Cet indice peut être considéré comme un bon indicateur de la performance des obligations d'entreprises de la zone euro, libellées en euros et de haute qualité. Il est donc représentatif des produits de taux utilisés dans le cadre des plans de pension qui nous intéressent. Les données sources Bloomberg ainsi que la description détaillée de l'indice sont fournies en annexe.

Remarque : pour construire notre courbe des taux cible, nous partons de la courbe Bloomberg des taux zéro-coupon et non de la courbe des taux de rendement *yield to maturity*, car nous souhaitons dériver des taux *forward* implicites. Le taux de rendement « simple » (*yield to maturity)* correspond au taux de rendement interne des flux de trésorerie liés à l'achat et à la conservation d'une obligation jusqu'à son terme, c'est-à-dire le taux qui, appliqué indistinctement à toutes les maturités, égalise le prix de marché de l'obligation et la valeur actuelle des coupons futurs et du remboursement du nominal. Ce taux de rendement repose sur une hypothèse forte – l'hypothèse selon laquelle les coupons peuvent être réinvestis à ce même taux de rendement. Or, en réalité, les flux de trésorerie intermédiaires sont vulnérables à une variation des taux d'intérêt. Le taux de rendement *yield to maturity* fait donc fi du risque de réinvestissement, contrairement au taux zéro-coupon pour lequel ce risque est inexistant de par l'absence de flux intermédiaires. Par ailleurs, les expressions « taux spot » et « taux zéro-coupon » peuvent être considérées comme synonymes, à l'exception suivante : si les taux zéro-coupon sont observés

sur le marché par le biais des obligations zéro-coupon, les taux *spot* sont des re-constructions théoriques de taux zéro-coupon non observables sur le marché. En effet, dans beaucoup de cas, il n'existe pas de marché liquide d'obligations zéro-coupon et les taux zéro-coupon doivent donc être déduits des obligations à coupon par des méthodes numériques et sous certaines hypothèses (la méthode de *bootstrapping* sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage permet par exemple de re-calculer des taux zéro-coupon). Lorsque nous parlons de « structure par teme des taux d'intérêt », nous faisons référence à la courbe représentant le taux zéro-coupon (annualisé) en fonction de la maturité.

La structure par terme des taux fournie par Bloomberg ne concerne que certaines maturités, dont la plus élevée est de 30 ans. Or, nous avons besoin dans le cadre de cette étude d'une structure par termes des taux couvrant toutes les maturités jusqu'à 45 ans[28]. Nous interpolons (entre 10 et 15, 20 et 25, 25 et 30 ans) et extrapolons (après 30 ans) donc la courbe partielle fournie par Bloomberg selon la méthodologie de Smith-Wilson utilisée par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) pour construire sa courbe des taux sans risque de référence. Une documentation détaillée de la méthodologie de Smith-Wilson est disponible sur le site de l'EIOPA[29]. Sur ce même site, l'EIOPA met à disposition un outil Excel permettant d'utiliser la méthodologie de Smith-Wilson à partir de données source. C'est à partir de cet outil que nous avons réalisé l'interpolation/extrapolation.

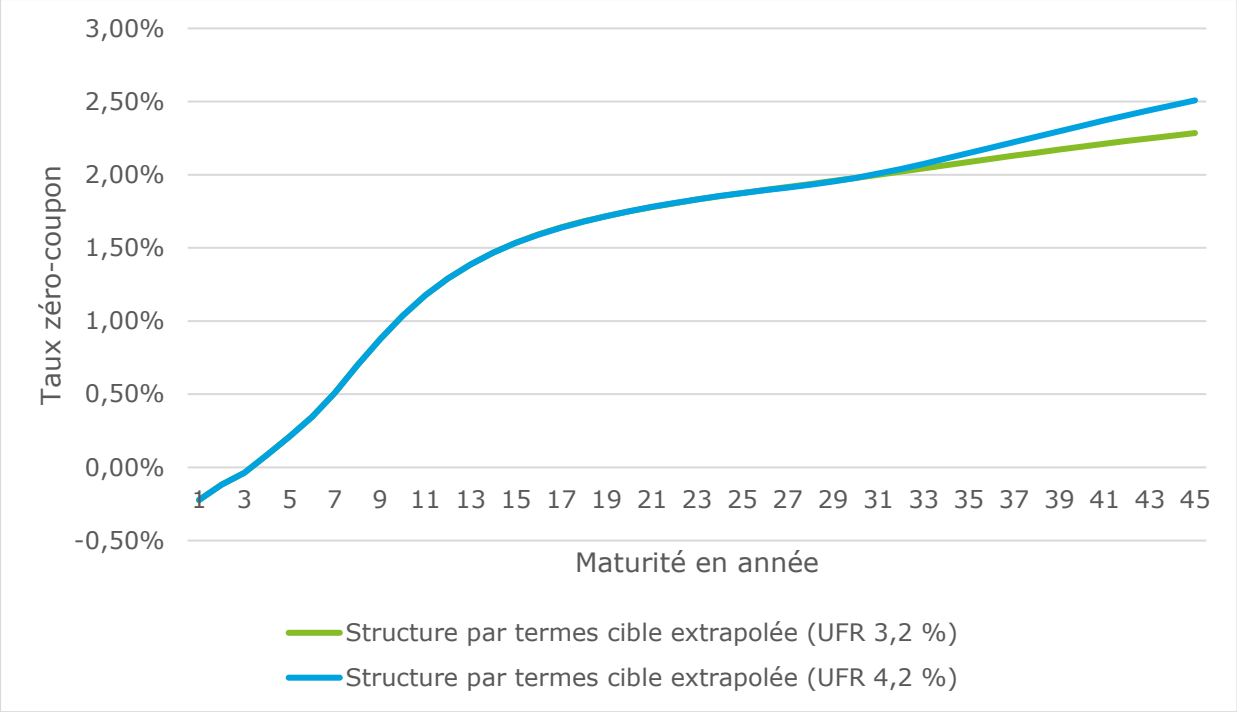
Voici les paramètres utilisés et la courbe cible obtenue :

- Last Liquid Point (LLP) : 30 ans (assimilé au dernier point de la courbe des taux Bloomberg)
- Convergence point : $\max(LLP + 40, 60) = 70$
- Convergence tolerance : 1 point de base (valeur utilisée par l'EIOPA)
- Convergence speed (a) : 0,10 (calculé par l'outil)
- Ultimate Forward Rate (UFR) : 3,2 %

L'UFR utilisé par l'EIOPA au 31 décembre 2016 pour les monnaies de l'Espace Economique Européen est de 4,2 %. Il peut donc paraître incohérent d'utiliser une valeur inférieure pour construire une courbe des taux *spot* correspondant à un placement risqué. Or, après avoir testé l'extrapolation sur la base d'un UFR de 4,2 %, nous avons jugé plus cohérent de le réduire d' 1 %. Comme l'illustre le Graphique 12, la courbe obtenue paraît en effet plus cohérente et ne présente pas de « saut » après le LLP contrairement à la courbe obtenue avec l'UFR de 4,2 %. L'UFR de 4,2 % est d'ailleurs reconnu par la profession comme n'étant plus représentatif des conditions de marché et est en cours de re-calibration.

[28] Avec une période d'investissement de 35 ans et un placement obligataire assimilé aux taux à 10 ans (voir fin de la section 3.2.2), nous devons effectivement déterminer une structure par termes des taux allant jusqu'à 35 + 10 = 45 ans.

[29] https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures, document [Risk-free interest rate technical documentation] et outil Excel [Smith-Wilson risk-free interest rate extrapolation tool], consulté le 28/12/2016



Graphique 12

Nous retenons donc la courbe verte ci-dessus comme structure par terme cible pour la calibration du modèle.

Remarque : pour déterminer une structure par terme des taux cible, une solution alternative aurait été de partir d'une courbe des taux zéro-coupon sans-risque (celle de l'EIOPA ou bien de la Banque Centrale Européenne par exemple) et d'y ajouter un *spread* représentatif de l'excédent de rendement associé au niveau de risque que nous souhaitons reproduire. Or, cette méthode aurait entraîné deux difficultés principales : le choix de la courbe des taux sans risque et celui du *spread*. Aurait-il fallu se baser sur la courbe des taux EIOPA malgré les taux criticables sur les maturités élevées (en lien avec l'UFR de 4,2 % mentionné ci-dessus) ? Aurait-il fallu appliquer un *spread* constant ou bien un *spread* variable en fonction de la maturité ? Sur la base de quel panier d'obligations aurait-on dû déterminer le *spread* ? Face à ces questions, nous avons jugé que le poids des hypothèses méthodologiques serait moins important dans la solution que nous avons retenue.

L'équation [11] de la section 3.2.1 nous donne l'expression du taux zéro-coupon de maturité T en fonction de a, b_λ, σ et r_0, le taux court initial. Nous pouvons donc utiliser cette expression pour déterminer les paramètres a, b_λ et σ qui épousent le mieux la structure par terme cible définie ci-dessus. En pratique, on assimile le taux instantané r_t au taux au jour le jour. Nous pouvons donc raisonnablement nous baser sur l'EONIA (Euro OverNight Index Average) pour initialiser r_t. L'EONIA est en effet le taux de référence des dépôts interbancaires effectués au jour le jour dans la zone euro. Au 30 décembre 2016, l'EONIA était de -0,329 %[30]. Nous posons donc $r_0 = -0{,}329\ \%$.

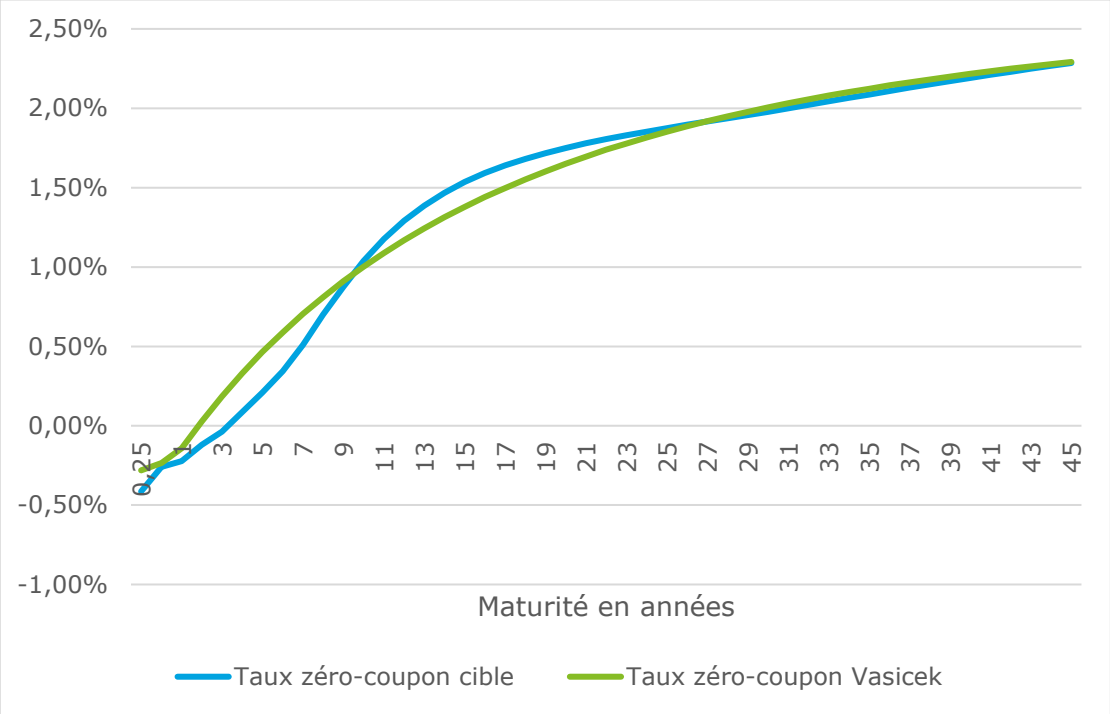
Calibrer le modèle revient donc à chercher les paramètres a, b_λ et σ qui minimisent l'écart au carré[31] entre les valeurs théoriques données par l'équation [11] et les valeurs cibles.

[30] Source : http://fr.euribor-rates.eu/eonia.asp, consulté le 16 janvier 2017

[31] La méthode des moindres carrés est ici choisie pour sa simplicité de mise en oeuvre. D'autres techniques d'optimisation seraient évidemment envisageables.

Les résultats de l'estimation sont les suivants :

Paramètre	Valeur optimale
$\widehat{a}$	10,73 %
$\widehat{b_\lambda}$	3,29 %
$\widehat{\sigma}$	0,92 %

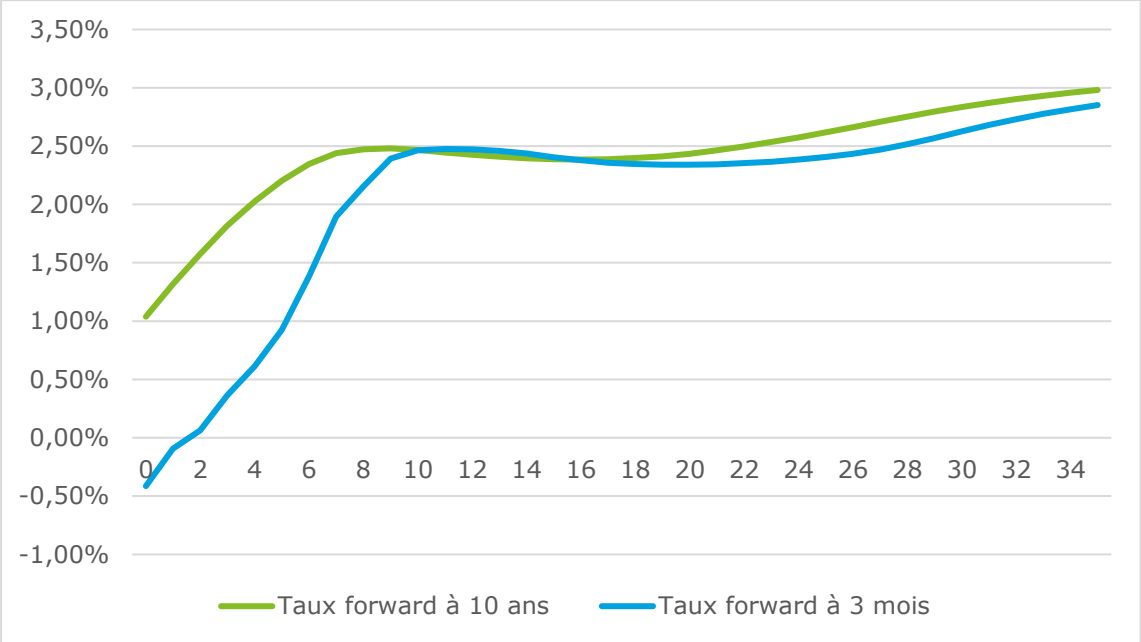


Graphique 13

On remarque sur le Graphique 13 que le modèle capte l'allure générale de la courbe des taux cible mais pas ses changements complexes de pente. En effet, si l'on schématise, la courbe des taux cible est d'abord convexe puis concave, avec un point d'inflexion autour de la maturité 10 ans. La courbe du modèle, d'allure concave, épouse bien la courbe cible sur les maturités longues mais peine à capter le changement de pente qui a lieu entre 1 et 15 ans. Cette incapacité du modèle à reproduire une structure par termes des taux relativement complexe est l'une des limites que nous avons soulevées en section 3.2.1. La question à laquelle il nous faut donc répondre est la suivante : dans quelle mesure ce biais de modèle est-il acceptable ? Doit-on purement et simplement rejeter la modélisation par le biais de ce type de modèle ou bien est-il tout de même pertinent d'utiliser le modèle pour effectuer des simulations ? Notre réponse est nuancée. Nous proposons donc l'approche hybride suivante afin de conserver les avantages des approches déterministes et stochastiques tout en en évitant les écueils respectifs :

(i) Utiliser une approche purement déterministe pour les produits de taux, en associant les rendements du placement monétaire (obligataire) aux taux forward à 3 mois (10 ans) implicites de la structure par terme des taux cible. Cette approche permet d'éviter le biais du modèle de taux et se base uniquement sur l'anticipation des marchés au 31

décembre 2016. En revanche, elle ne permet pas d'obtenir un indicateur de dispersion pour les rendements des produits de taux et ne permet pas non plus, si elle est combinée à une modélisation stochastique des rendements actions, de prendre en compte la dépendance entre le marché actions et le marché de taux. Les taux forward implicites de la structure par termes des taux cible sont les suivants :



Graphique 14

(ii) Utiliser également une approche stochastique à partir du modèle calibré ci-dessus, c'est-à-dire générer un grand nombre de trajectoires aléatoires du taux court et en déduire les taux à 3 mois (10 ans) impliqués par chacune de ces trajectoires pour obtenir les rendements du placement monétaire (obligataire). Cette approche comprend un biais de modèle qu'il est nécessaire d'analyser (convergence des simulations vers la structure par terme des taux cible) mais permet d'obtenir un indicateur de dispersion pour les rendements des produits de taux et permet également de corréler les aléas du marché actions aux aléas du marché de taux dans une optique de simulation.

3.3. Intégrer la corrélation entre les actifs

3.3.1. La décomposition de Cholesky

Nous disposons désormais d'un modèle actions et d'un modèle de taux. Les équations [5] et [12] nous offrent une discrétisation des processus stochastiques à l'œuvre et nous permettent donc de simuler les rendements des 3 actifs de notre modèle. Or, il est reconnu que les marchés actions et les marchés de taux d'intérêt n'évoluent pas de manière totalement indépendante. Simuler les sources d'aléa que sont les ε des équations [5] et [12] sans prendre en compte leur dépendance reviendrait donc à nier ce phénomène.

Il faut donc trouver un moyen d'estimer et de prendre en compte cette dépendance. Or, le caractère malléable de la notion de dépendance rend cette tâche relativement complexe. Une solution retenue en pratique est de générer des ε corrélés linéairement, en les simulant non pas à partir de lois normales centrées réduites univariées indépendantes mais à partir d'une loi normale multi-dimensionnelle (dans notre cas de dimension 2) définie par un vecteur d'espérances et une matrice de variance-covariance. La décomposition de Cholesky est un résultat d'algèbre qui permet dans ce cas, à partir d'une matrice de variance-covariance Γ, d'un vecteur d'espérances m et d'une variable aléatoire de loi normale multi-dimensionnelle $N(0, Id_d)$, de construire une variable aléatoire de loi $N(m, \Gamma)$.

Le théorème de Cholesky avance ceci :

Soit Γ une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire A à diagonale positive telle que $\Gamma = A^t A$. A est appelée racine carrée de Γ, ou bien « décomposée de Cholesky de Γ », et on note $A = \sqrt{\Gamma}$.

En particulier, si on se donne Γ une matrice symétrique définie positive, si $X \sim N(0, Id_d)$ suit une loi centrée d-dimensionnelle alors on dispose d'une construction explicite d'une variable aléatoire de loi $N(m, \Gamma)$. En effet, il existe une unique matrice A triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $\Gamma = A^t A$. Or, si on pose $Y = m + AX$, il découle de ce qui précède que $Y \sim N(m, \Gamma)$.

En effet :

$$E(Y) = E(m + AX) = m + AE(X) = m$$

Et :

$$\Gamma_Y = E\left(\left(Y - E(Y)\right)^t \left(Y - E(Y)\right)\right) = E\left(AX^t(AX)\right) = E(AX^t X^t A) = AE(X^t X)^t A = A^t A = \Gamma$$

De plus, Y suit une loi gaussienne car toutes ses composantes sont des combinaisons linéaires des composantes de X qui sont des lois gaussiennes indépendantes.

On a donc bien $Y \sim N(m, \Gamma)$.

3.3.2. Application

Les modèles action et taux sont régis par les équations discrétisées suivantes :

$$\frac{\Delta S_{t+\Delta t}}{S_t} = \mu\, \Delta t + \sigma_1\, \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta r_{t+\Delta t} = r_{t+\Delta t} - r_t \approx a(b_\lambda - r_t)\Delta t + \sigma_2\, \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t}$$

Pour prendre en compte la dépendance entre le marché actions et le marché de taux, nous allons donc générer ε_1 et ε_2 à partir d'une loi normale bi-dimensionnelle Y aux caractéristiques suivantes :

- Vecteur d'espérances : $m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Matrice de variance-covariance : $\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}$

Remarques :

- $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$ et $\varepsilon_2 \sim N(0,1)$ donc $\sigma_1^2 = VAR(\varepsilon_1) = 1$ et $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2} = 1$. Il en va de même pour σ_2^2 et σ_2.
- $cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = \rho_{12}$, où ρ_{12} désigne le coefficient de corrélation linéaire entre ε_1 et ε_2.

Par construction, une matrice de variance-covariance est symétrique définie positive. Par application du théorème de Cholesky, il existe donc une matrice A triangulaire inférieure à diagonale positive telle que $\Gamma = A^t A$. Si on pose $Y = m + AX$, avec $X \sim N(0, Id_2)$, on aura donc, d'après ce qui précède, $Y \sim N(m, \Gamma)$.

Calcul de A :

$$\Gamma = A^t A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ac = \rho_{12} \\ c^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \rho_{12} \\ b = \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \rho_{12} X_1 + \sqrt{1 - \rho_{12}^2} X_2 \end{bmatrix} \quad [13]$$

où X_1 et X_2 sont des variables indépendantes de loi normale centrée réduite.

La corrélation entre le cours des actions et le niveau du taux d'intérêt instantané étant négative, on posera pour la suite $\rho_{12} = -0{,}25$.

3.4. Simulation et résultats

Nous reproduisons sur 35 ans les 10 mêmes stratégies que dans les analyses 1 et 2 à partir de rendements mensuels modélisés à l'aide des méthodes décrites en sections 3.1, 3.2 et 3.3. Nous simulons pour cela 10.000 trajectoires de rendements aléatoires et calculons les mêmes indicateurs de risque et de performance que dans les analyses 1 et 2.

Comme annoncé en fin de section 3.2.2, nous réalisons deux analyses :

- **Analyse 3** : simulation des rendements des actions et des produits de taux
- **Analyse 3 bis** : simulation des rendements des actions et utilisation des taux forward implicites (déterministes) de la structure par terme cible pour les rendements des produits de taux

3.4.1. Simulation des rendements

Analyse 3 :

La simulation des 10.000 scénarios s'effectue de la manière suivante :

1. Initialisation des paramètres
   - $\Delta t = \frac{1}{12}$, $\rho_{12} = -0{,}25$ (voir section 3.3.2)
   - Modèle actions : $\mu = 4{,}13\,\%$, $\sigma_1 = 18{,}72\,\%$, $S_0 = 100$ (voir section 3.1.2)
   - Modèle de taux : $a = 10{,}73\,\%$, $\sigma_2 = 0{,}92\,\%$, $b_\lambda = 3{,}29\,\%$, $r_0 = -0{,}329\,\%$ (voir section 3.2.2)
   - Nombre de scénarios : 10.000

2. Boucle principale (boucle 1) : chaque itération permet de générer 1 scénario

   a. Boucle imbriquée dans la boucle principale (boucle 2) : chaque itération permet de générer le rendement mensuel du placement action et de projeter le taux d'intérêt instantané d'un mois
   b. Transformation de la trajectoire aléatoire du taux instantané en rendements mensuels de maturité 3 mois (placement monétaire) et 10 ans

Nous souhaitons simuler 10.000 scénarios de 35 années de rendements. Pour chaque scénario, nous devons donc simuler $35\ années \times 12\ mois/an = 420$ rendements mensuels pour chacun des 3 supports d'investissement. La boucle **1** est donc itérée 10.000 fois et la boucle **2**, 540 fois.

La boucle 2 comprend les étapes suivantes :

- Utiliser la méthode 2 de la section 2.4.2 pour générer 1 réalisation aléatoire de X_1 et X_2, variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite
- Utiliser l'égalité [13] (voir section 3.3.2) pour en déduire ε_1 et ε_2, nombres aléatoires corrélés
- Utiliser l'équation [5] (voir section 3.1.1) et ε_1 pour obtenir une simulation du rendement actions et stocker le résultat
- Utiliser l'équation [12] (voir section 3.2.1) et ε_2 pour projeter le taux d'intérêt instantané ($r_{t+\Delta t} = r_t + \Delta r_{t+\Delta t}$) et stocker sa valeur

Les 420 premières itérations servent à déterminer les rendements mensuels des actions et à projeter le taux d'intérêt instantané sur 35 ans. Les 120 itérations suivantes servent à poursuivre la projection du taux d'intérêt instantané jusqu'à 45 ans. L'étape 2.b. permet de transformer la trajectoire du taux instantané sur 45 ans en rendements monétaire (rendement à 3 mois) et obligataire (rendement à 10 ans).

La structure de l'algorithme peut donc s'écrire de la manière simplifiée suivante :

«

Pour i allant de 1 à 10.000

Pour j allant de 1 à 540

Si j≤420 alors : calcul du rendement actions et projection du taux court – stockage des résultats

Si j>420 : projection du taux court – stockage du résultat

Passage au j suivant

Calcul des 420 rendements monétaire et obligataire à partir des 540 taux courts – stockage des résultats

Passage au i suivant

»

<u>Analyse 3 bis</u> :

Le principe est le même que pour l'analyse 3. La partie relative au modèle de taux y est simplement supprimée car les données utilisées sont déterministes.

3.4.2. Résultats

Les résultats de la simulation sont les suivants :

Rendement mensuel →	Actions	Obligations	Monétaire
Moyenne empirique (Analyse 3)	0,34%	0,22%	0,19%
Moyenne théorique (Analyse 3 bis)	0,34%	0,20%[1]	0,17%[1]
Ecart-type empirique (Analyse 3)	5,40%	0,09%	0,13%
Ecart-type théorique (Analyse 3 bis)	5,40%	0,03%[1]	0,07%[1]

Tableau 11

[1]Il s'agit des statistiques descriptives obtenues sur les taux forward implicites (à 10 ans et à 3 mois) de la structure par terme des taux cible, présentés au Graphique 14.

Matrice de corrélation des rendements mensuels Analyse 3	Actions	Monétaire	Obligataire
Actions	100 %		
Monétaire	-2,177 %	100 %	
Obligataire	-3,147 %	54,509 %	100 %

Tableau 12

Matrice de corrélation des rendements mensuels Analyse 3 bis	Actions	Monétaire	Obligataire
Actions	100 %		
Monétaire	-0,013 %	100 %	
Obligataire	0,027 %	91,707 %	100 %

Tableau 13

Pour rappel, les données historiques utilisées pour les analyses 1 et 2 avaient les caractéristiques suivantes :

Rendement mensuel →	Support actions (S&P500)	Support obligataire (T-bond 10 ans)	Support monétaire (T-bill 3 mois)
Moyenne	0,69 %	0,48 %	0,36 %
Ecart-type	4,20 %	0,22 %	0,24 %

Tableau 14

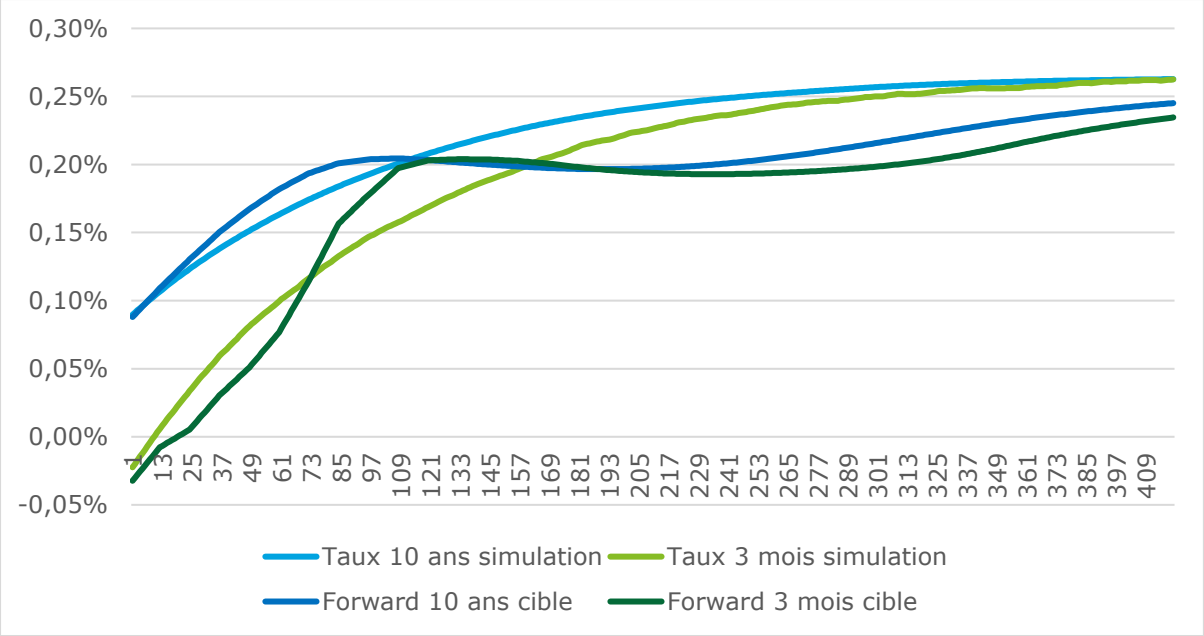
Matrice de corrélation des rendements mensuels	Actions	Monétaire	Obligataire
Actions	100 %		
Monétaire	-4,565 %	100 %	
Obligataire	-2,779 %	92,252 %	100 %

Tableau 15

<u>Convergence des modèles</u> :

La deuxième colonne du Tableau 11 indique que le modèle actions converge bien vers les paramètres définis en section 3.1.2. Les deux autres colonnes du même tableau montrent que la convergence du modèle de taux est plutôt bonne pour la moyenne mais moins pour l'écart-type. Ces différences proviennent de l' « imperfection » du modèle de taux, décrite en section 3.2.2 et notamment illustrée dans le Graphique 13.

A titre d'illustration, voici une comparaison des taux forward implicites de la structure par termes des taux cible (taux utilisés pour l'analyse 3 bis - repris du Graphique 14) et de la moyenne des taux à 3 mois et 10 ans simulés (moyenne des 10.000 simulations de l'analyse 3) :



Graphique 15

Les résultats produits par le modèle de Vasicek utilisé dans l'analyse 3 ne reproduisent pas parfaitement la structure complexe des taux forward implicites mais en captent l'allure générale via des courbes concaves. Le creux formé par les taux forward cibles à partir du mois 100 entraîne une surestimation des taux par le modèle, à l'origine de la supériorité des rendements moyens empiriques par rapport aux rendements moyens théoriques (voir Tableau 11).

On remarque dans le Tableau 13 que la corrélation entre les rendements des deux produits de taux et ceux des actions est proche de 0. Cela est cohérent étant donné que ces corrélations ne sont pas modélisées dans le cadre de l'analyse 3 bis. C'est d'ailleurs une des limites de l'analyse, soulevée en fin de section 3.2.2.

Dans le Tableau 12, le coefficient de corrélation linéaire de 54,509 % entre les rendements obligataires et monétaires peut paraître contradictoire avec notre affirmation de la section 3.2.1 selon laquelle, dans le cadre du modèle de Vasicek, les variations de taux sont parfaitement corrélées entre elles. Il n'en est rien. La corrélation entre les taux zéro-coupon définis par l'équation [11] est effectivement de 1. Or, nous n'avons pas utilisé cette équation pour simuler les taux à 3 mois/10 ans mais la trajectoire projetée du taux instantané[32]. D'où la différence observée.

Comparaison des données obtenues à celles utilisées dans les analyses 1 et 2 :

Une simple comparaison du Tableau 11 au Tableau 14 indique que les caractéristiques des rendements modélisés pour l'analyse 3 dans le contexte européen sont très différentes de celles des rendements historiques du contexte américain utilisés dans les analyses 1 et 2 :

- Support actions : dans l'analyse 3, le rendement mensuel est divisé par deux et l'écart-type est plus élevé
- Support obligataire : dans l'analyse 3, le rendement mensuel est beaucoup plus faible mais l'écart-type également

[32] Tel que décrit dans l'algorithme de la section 3.4.1

- Support monétaire : remarque similaire à celle du support obligataire

Dans l'analyse 3, le rendement du support actions est plus faible que celui du support monétaire utilisé dans les analyses 1 et 2, et possède un écart-type près de 23 fois plus élevé. Ces différences extrêmes confirment notre remarque conclusive de la section 2.5.3. Comparativement au cadre des analyses 1 et 2, le support actions apparaît donc — dans le cadre de l'analyse 3 — comme beaucoup moins attractif et les produits de taux sont à la fois moins rémunérateurs et moins volatiles.

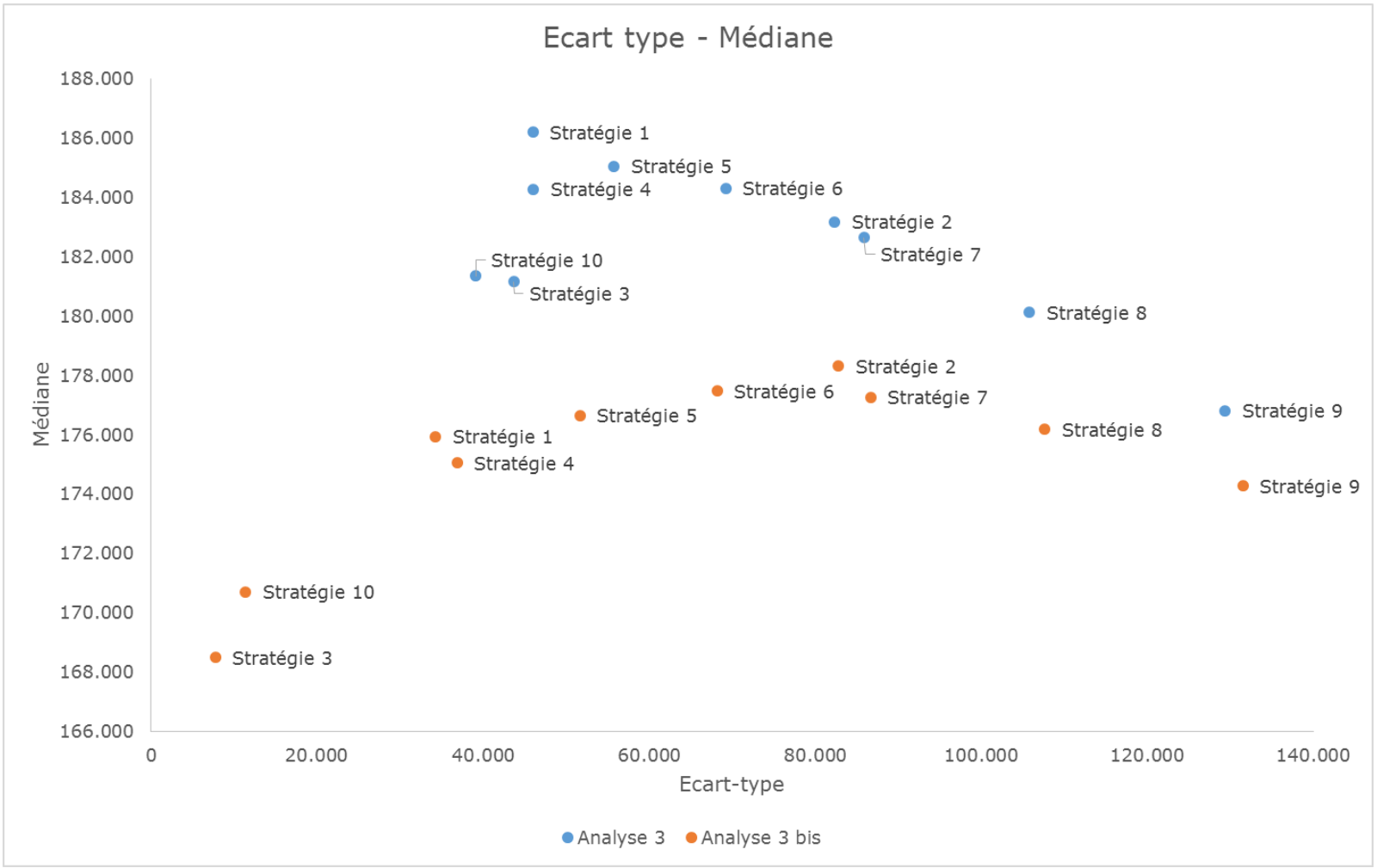
On remarque dans le Tableau 13 que la corrélation entre les rendements des deux produits de taux est très similaire à celle des données utilisées dans les analyses 1 et 2 (voir Tableau 15).

Pour l'analyse 3, les corrélations obtenues entre les rendements (voir Tableau 12 et Tableau 15) des différents supports sont cohérentes, en termes de signe et d'ordre de grandeur, à celles observées dans les analyses 1 et 2. La corrélation entre le rendement monétaire et le rendement obligataire est néanmoins sensiblement inférieure dans l'analyse 3. Notre interprétation est que cela est dû au biais introduit par notre définition « indirecte » [33] des taux à 3 mois et à 10 ans, dérivés de la projection du taux instantané.

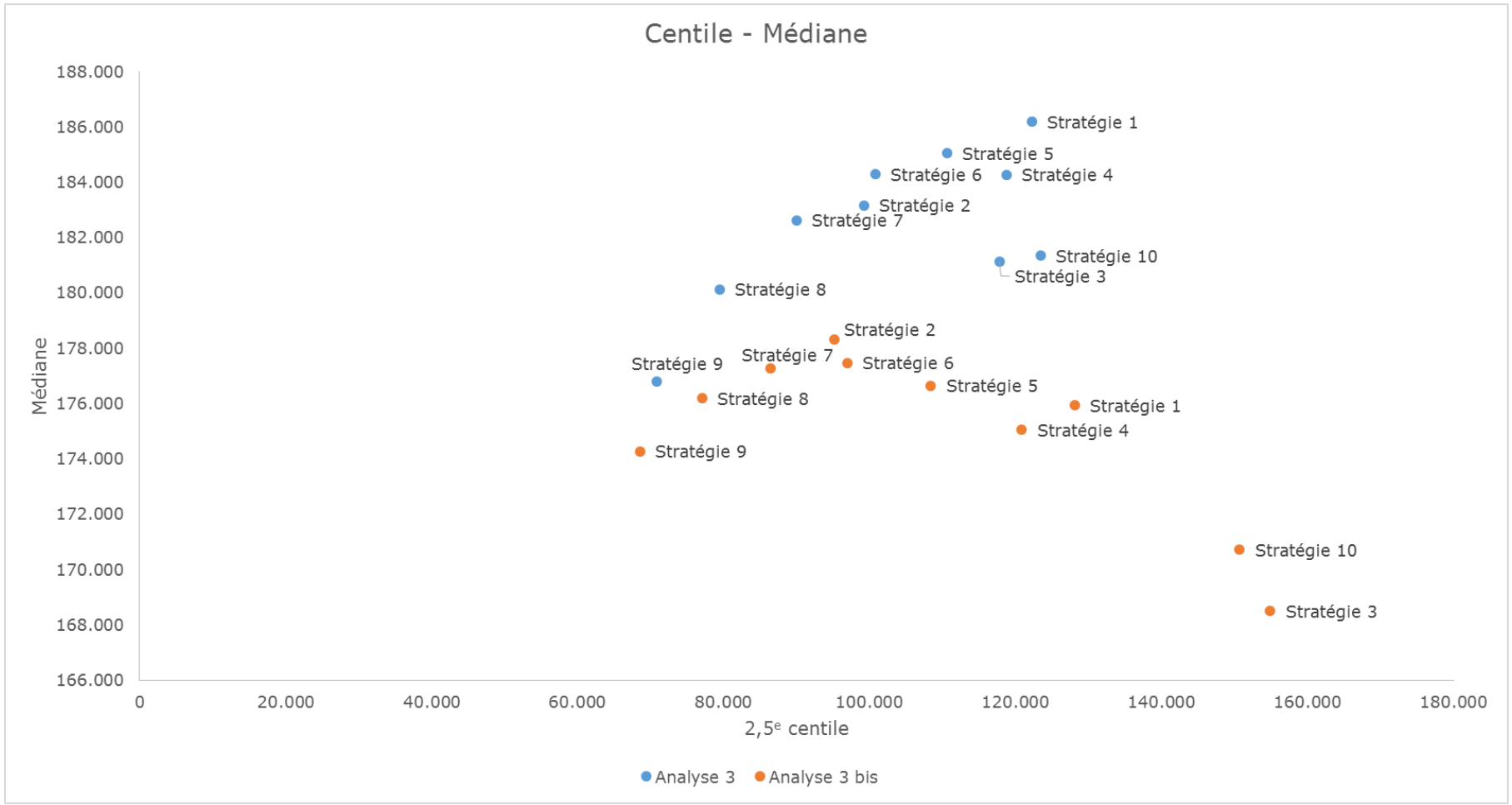
Réplication des 10 stratégies à partir des données simulées :

A partir des séries temporelles modélisées, nous reconstituons les 10 stratégies décrites en 2.1 et nous obtenons les résultats suivants :

[33] Tel que décrit dans l'algorithme de la section 3.4.1



Graphique 16



Graphique 17

	Gagnante		Perdante		Rang moyen		Classement selon rang moyen	
Analyse	*3*	*3 bis*	3	3 bis	3	3 bis	3	3 bis
Stratégie 1	8%	9%	3%	3%	5,2	5,4	1	5
Stratégie 2	18%	20%	14%	14%	5,4	5,2	5	2
Stratégie 3	26%	21%	31%	39%	5,7	6,2	8	10
Stratégie 4	1%	1%	0%	0%	5,3	5,5	4	7
Stratégie 5	1%	1%	0%	0%	5,3	5,3	2	4
Stratégie 6	1%	1%	0%	0%	5,3	5,2	3	1
Stratégie 7	1%	1%	0%	0%	5,5	5,3	6	3
Stratégie 8	1%	2%	0%	0%	5,7	5,4	9	6
Stratégie 9	31%	34%	41%	38%	6,0	5,7	10	8
Stratégie 10	11%	10%	11%	6%	5,6	5,8	7	9

Tableau 16

Colonne "Gagnante" : proportion (%) des scénarios dans lesquels la stratégie apporte le capital au terme le plus élevé.

Colonne "Perdante" : proportion (%) des scénarios dans lesquels la stratégie apporte le capital au terme le plus faible.

	Ecart-type		2,5e centile		10e centile	
Analyse	*3*	*3 bis*	*3*	*3 bis*	*3*	*3 bis*
Stratégie 1	46.016	34.260	122.180	128.044	140.585	141.849
Stratégie 2	82.368	82.824	99.181	95.145	120.037	115.849
Stratégie 3	43.680	7.742	117.775	154.860	136.367	159.307
Stratégie 4	46.066	36.898	118.713	120.844	138.194	136.819
Stratégie 5	55.789	51.699	110.595	108.368	132.248	127.454
Stratégie 6	69.218	68.189	100.741	96.934	123.394	118.214
Stratégie 7	85.887	86.710	90.000	86.346	113.334	109.403
Stratégie 8	105.830	107.664	79.421	77.035	104.195	101.038
Stratégie 9	129.390	131.530	70.776	68.555	94.879	93.017
Stratégie 10	39.126	11.381	123.387	150.636	140.831	157.178
Moyenne	70.337	61.890	103.277	108.677	124.406	126.013

Tableau 17

	Moyenne		Médiane		Rang selon moyenne		Rang selon médiane	
Analyse	*3*	*3 bis*	*3*	*3 bis*	*3*	*3 bis*	*3*	*3 bis*
Stratégie 1	192.465	180.576	186.193	175.942	7	7	1	6
Stratégie 2	201.934	196.837	183.172	178.315	3	4	5	1
Stratégie 3	186.544	168.897	181.147	168.510	9	10	8	10
Stratégie 4	190.906	180.006	184.271	175.046	8	8	4	7
Stratégie 5	193.929	185.417	185.047	176.656	6	6	2	4
Stratégie 6	197.395	191.079	184.299	177.480	5	5	3	2
Stratégie 7	201.384	197.008	182.633	177.269	4	3	6	3
Stratégie 8	205.956	203.220	180.131	176.186	2	2	9	5
Stratégie 9	211.068	209.730	176.814	174.283	1	1	10	8
Stratégie 10	186.132	171.373	181.353	170.712	10	9	7	9
Moyenne	196.771	188.414	182.506	175.040				

Tableau 18

Au regard des analyses 3 et 3 bis, la stratégie 9 est beaucoup moins dominante que dans les analyses 1 et 2. Elle possède même le plus mauvais rang moyen et le 3e plus mauvais rang moyen dans les analyses 3 et 3 bis respectivement (voir Tableau 16). Ceci est une conséquence directe des caractéristiques des données utilisées : dans les analyses 3 et 3 bis, le placement action est beaucoup moins attractif que dans le cadre des analyses 1 et 2.

Les stratégies 3 et 10 se démarquent par leurs indicateurs de risque mais possèdent une médiane de capital au terme sensiblement inférieure à celles des autres stratégies.

Au global, la stratégie stratégie 1 (gestion à horizon – désensibilisation linéaire) semble présenter le meilleur compromis performance-risque. Justifions-nous.

Au prisme de l'analyse 3 :

- La stratégie 1 possède le meilleur rang moyen (Tableau 16) et la meilleure médiane (Tableau 18)
- Tout en ayant la meilleure médiane, elle possède le 3e meilleur écart-type et le 2e meilleur centile (Graphique 16, Graphique 17)

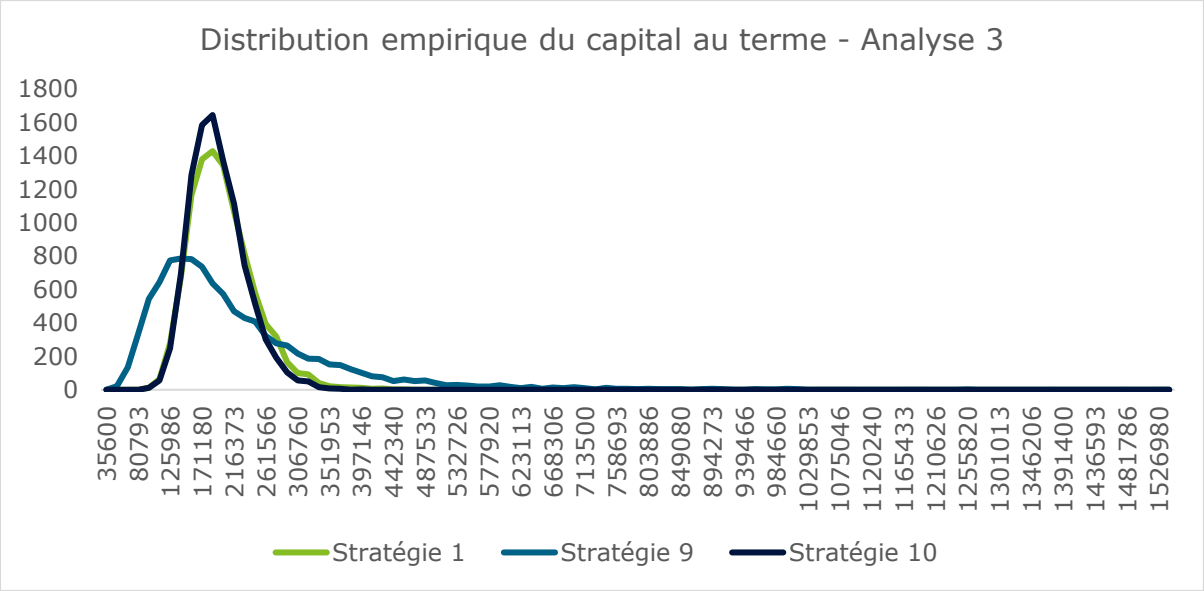
Au prisme de l'analyse 3 bis :

- Comparée à la stratégie qui possède la meilleure médiane (stratégie 2 : gestion à horizon – désensibilisation tardive de l'épargne), la stratégie 1 possède une médiane certes 1,3 % plus faible, mais un écart-type 59 % plus faible et un 2,5^{e} centile 35 % plus élevé

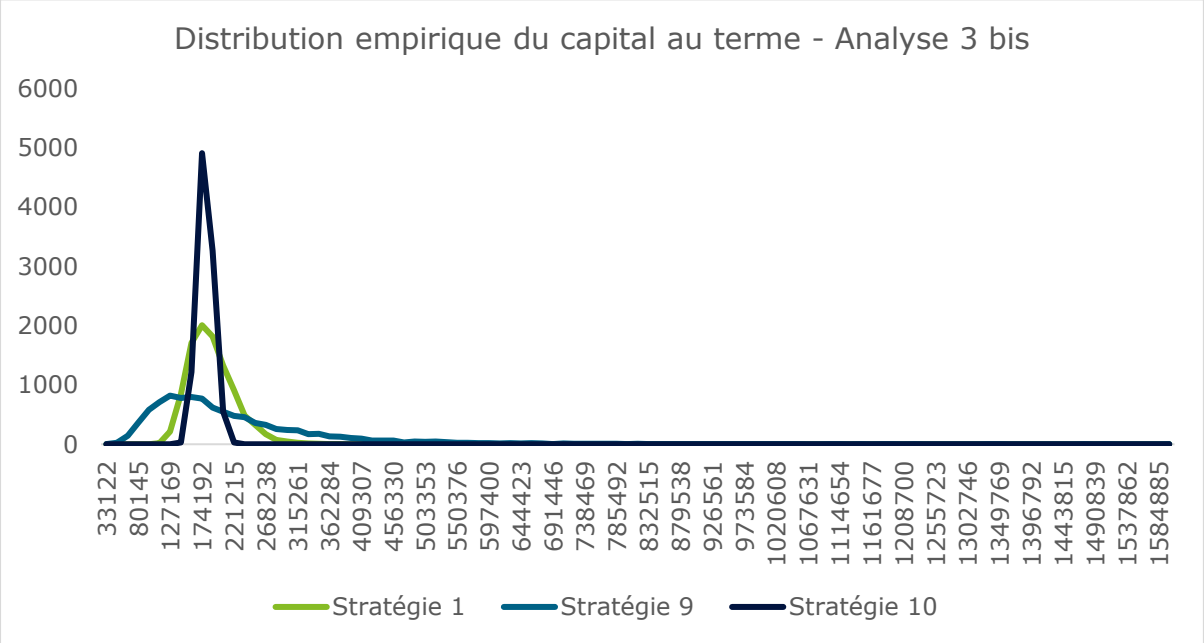
La plus-value de la gestion à horizon, incarnée ici par la stratégie 1, semble donc se manifester dans ces analyses, mais à au moins deux réserves près :

(i) La stratégie 1 n'apporte que les 7e meilleurs capitaux moyens au terme dans les 2 analyses (Tableau 18)
(ii) La stratégie 4 (30 % d'actions) apporte des résultats très proches de ceux de la stratégie 1

Le point (i) nous place face à la même interrogation qu'en section 1.1.1 : est-il plus juste de raisonner par rapport à une médiane ou bien par rapport à une moyenne ? Pour traduire cette question graphiquement, représentons les distributions empiriques des capitaux au terme de la stratégie 1, de la stratégie 9 (qui possède, elle, la meilleure moyenne dans les 2 analyses) et de la stratégie 10 (à titre comparatif).



Graphique 18

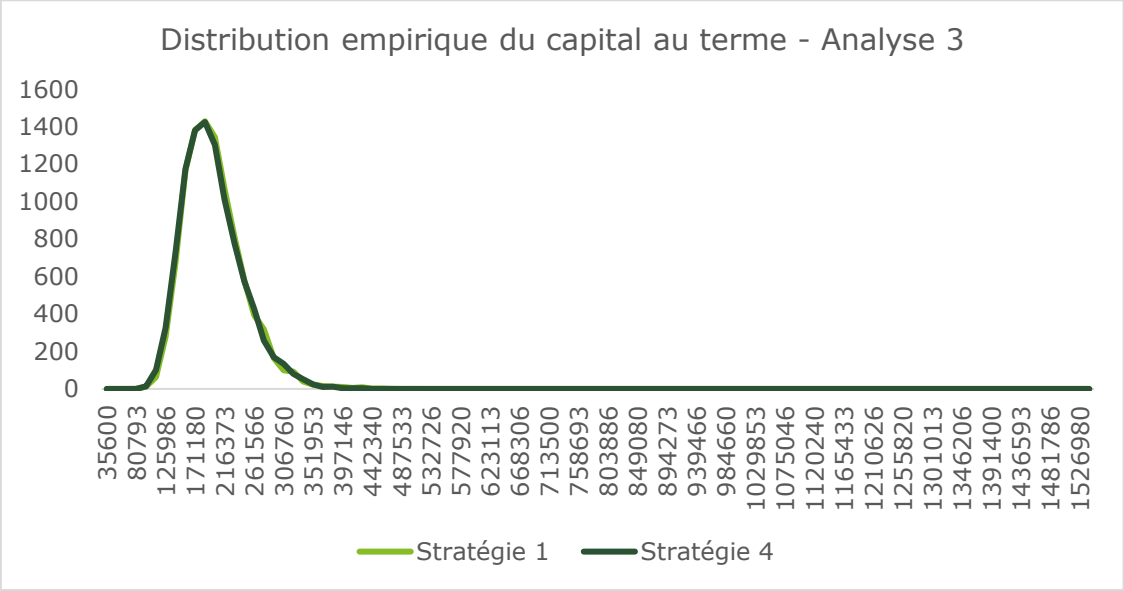


Graphique 19

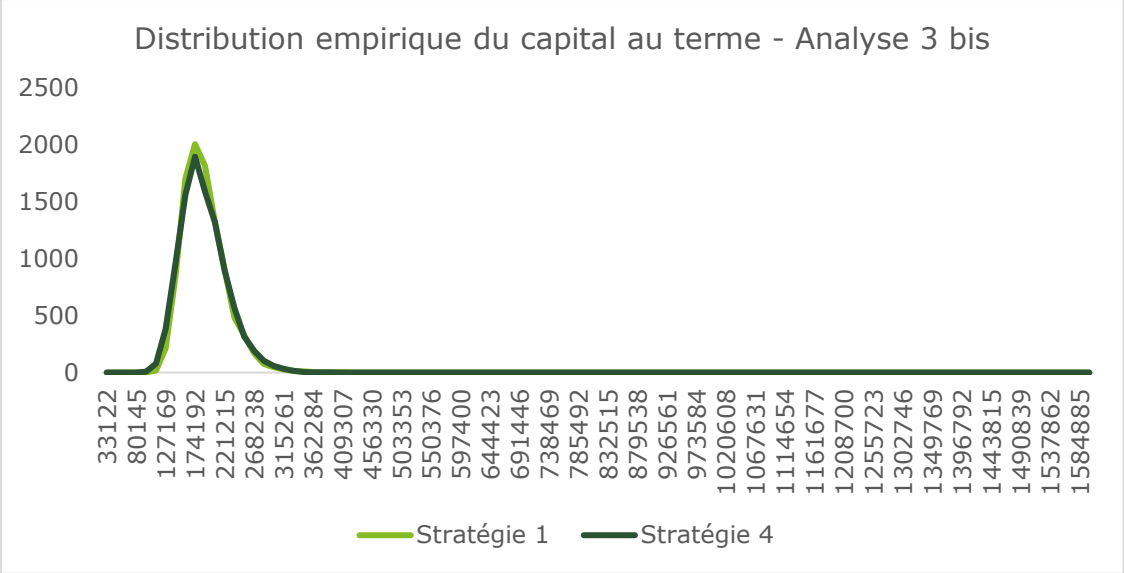
Sur le Graphique 18 comme sur le Graphique 19, l'asymétrie de la distribution du capital au terme associé à la stratégie 9 est manifeste (coefficient d'asymétrie arrondi égal à 2,5 dans les deux cas). La présence de valeurs extrêmes explique la moyenne élevée mais justifie également notre choix de la médiane comme « meilleur » indicateur de la tendance centrale observée. La stratégie

1 ne s'expose pas autant aux capitaux « faibles » qu'une stratégie très dynamique (stratégie 9) et possède un potentiel de capital « élevé » supérieur à celui d'une stratégie très prudente (stratégie 10).

Le point (ii) nous place face une autre interrogation déjà rencontrée en section 1.1.1 : la désensibilisation de l'épargne — principe central de la gestion à horizon — a-t-elle un intérêt ? La similitude des résultats fournis par la stratégie 1 et la stratégie 4 (voir résultats précédents, ainsi que le Graphique 20 et le Graphique 21), que l'on observait déjà dans les analyses 1 et 2, ne nous permet pas d'affirmer que la stratégie 1 domine la stratégie 4. Elle nous pousse plutôt à conclure qu'il existe une stratégie à proportion d'actions fixe qui apporte le même profil [performance, risque] que la stratégie à horizon.



Graphique 20



Graphique 21

Dès lors, à distribution du capital au terme identique à celle d'une stratégie à proportion fixe d'actions, une stratégie gérée à horizon peut-elle tout de même se démarquer ? Nous répondons par l'affirmative. Pour comprendre pourquoi, il ne faut pas seulement s'intéresser au capital constitué au terme des 35 années d'investissement, mais également à la dynamique avec laquelle se constitue ce capital. C'est sur cette dynamique que la gestion à horizon possède des propriétés intéressantes. Expliquons-nous.

4. L'atout majeur de la gestion à horizon

On peut considérer schématiquement que la principale source d'aléa sur l'épargne constituée provient des marchés actions. Dans le cas d'une stratégie à proportion d'actions figée, l'exposition à l'aléa est donc constante sur toute la durée de l'investissement (sans même parler de l'effet de volume illustré au Graphique 6), tandis qu'elle est décroissante dans une gestion à horizon. Dès lors, contrairement aux stratégies figées, la gestion à horizon sera marquée par une phase finale de « sécurisation » (voir Illustration 1) au cours de laquelle la volatilité du capial sera relativement faible, permettant ainsi à l'épargnant d'avoir une certaine visibilité sur le résultat final de son investissement. Cette « visibilité » sur le résultat final est un critère de performance qualitatif/psychologique qu'il est difficile de quantifier mais qui ne doit absolument pas être ignoré. En effet, elle peut constituer un argument commercial puissant pour convaincre les affiliés. En proposant une gestion à horizon, l'assureur pourrait ainsi mettre en avant une distribution du capital au terme similaire celle d'un investissement relativement dynamique *et* une visibilité raisonnable sur le captital constitué au cours des dernières années d'investissement.

Pour quantifier la « sécurisation » de l'épargne apportée par la gestion à horizon, nous avons calculé 2 indicateurs dans le cadre des 4 analyses menées dans ce mémoire :

- La variation mensuelle moyenne absolue du capital au cours des 5 dernières années de l'investissement de 35 ans
- Le *maximum drawdown* du capital au cours des 5 dernières années de l'investissement, c'est-à-dire la perte consécutive maximale observée sur les 5 dernières années d'investissement[34].

[34] La restriction du calcul du *maximum drawdown* aux 5 dernières années d'investissement est une hypothèse forte dont il faut garder les implications à l'esprit. Il n'est en effet pas exclu qu'une stratégie dont le *drawdown* est faible sur les 5 dernières années possède un *drawdown* élevé sur une autre période.

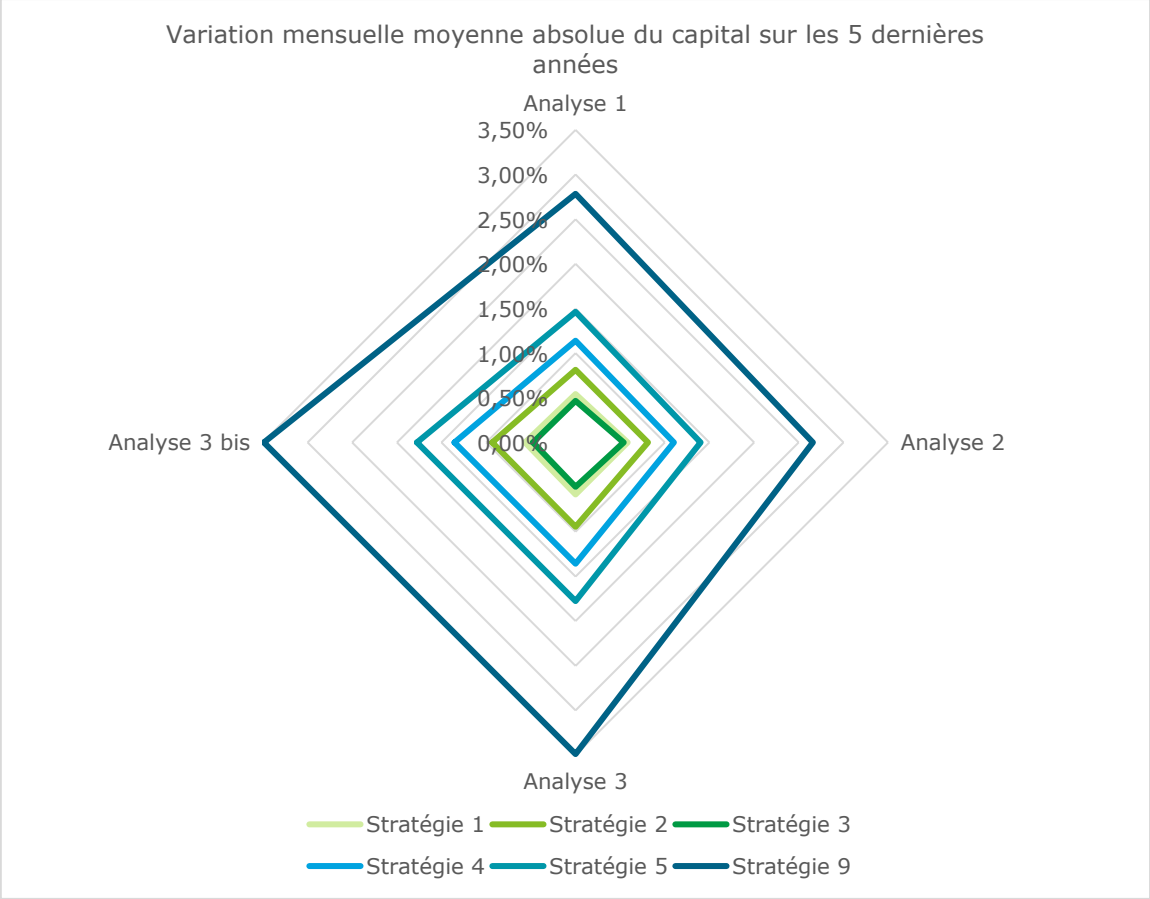
Les résultats sont les suivants :

	Variation mensuelle moyenne			
Analyse	*1*	*2*	*3*	*3 bis*
Stratégie 1	0,54%	0,58%	0,58%	0,56%
Stratégie 2	0,81%	0,81%	0,94%	0,93%
Stratégie 3	0,47%	0,54%	0,50%	0,48%
Stratégie 4	1,14%	1,10%	1,36%	1,35%
Stratégie 5	1,46%	1,40%	1,78%	1,77%
Stratégie 6	1,79%	1,71%	2,20%	2,20%
Stratégie 7	2,12%	2,02%	2,63%	2,63%
Stratégie 8	2,45%	2,34%	3,06%	3,06%
Stratégie 9	2,78%	2,66%	3,49%	3,49%
Stratégie 10	0,64%	0,67%	0,60%	0,59%
Moyenne	1,42%	1,38%	1,71%	1,71%

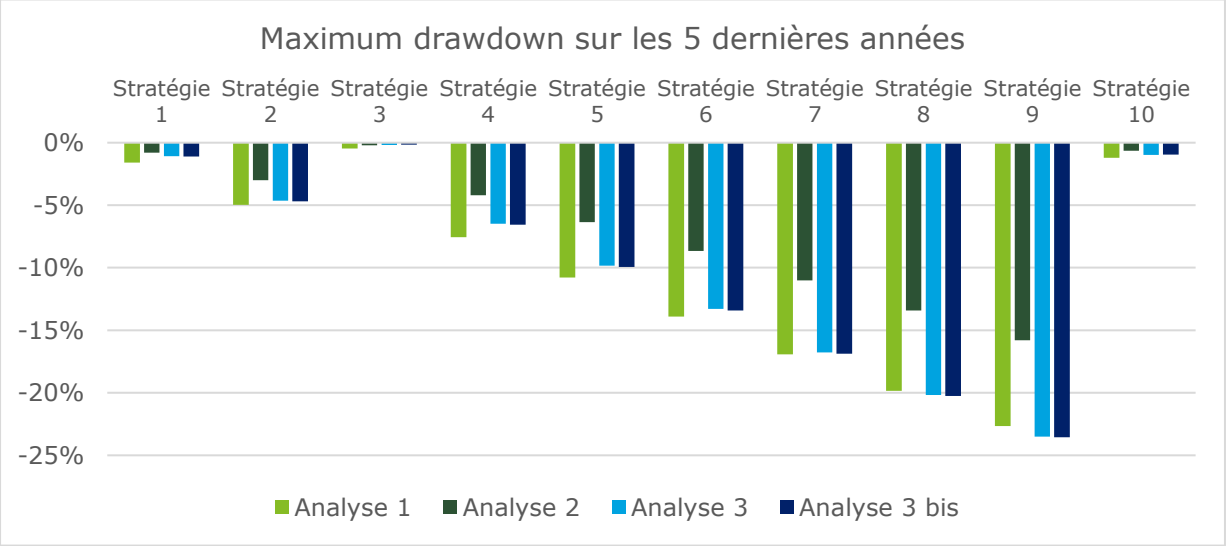
Tableau 19

	Maximum drawdown			
Analyse	*1*	*2*	*3*	*3 bis*
Stratégie 1	-1,59%	-0,79%	-1,09%	-1,11%
Stratégie 2	-4,97%	-3,00%	-4,63%	-4,70%
Stratégie 3	-0,47%	-0,22%	-0,17%	-0,17%
Stratégie 4	-7,55%	-4,20%	-6,47%	-6,56%
Stratégie 5	-10,79%	-6,35%	-9,83%	-9,94%
Stratégie 6	-13,92%	-8,65%	-13,30%	-13,41%
Stratégie 7	-16,94%	-11,01%	-16,77%	-16,87%
Stratégie 8	-19,85%	-13,41%	-20,19%	-20,26%
Stratégie 9	-22,65%	-15,81%	-23,52%	-23,56%
Stratégie 10	-1,21%	-0,63%	-0,97%	-0,96%
Moyenne	-9,99%	-6,41%	-9,69%	-9,75%

Tableau 20



Graphique 22



Graphique 23

Si l'on reprend la comparaison des stratégies 1 et 4, l'étude de la stabilité du capital sur les 5 dernières années d'investissement permet d'argumenter en faveur de la stratégie 1 : dans les 4 analyses menées, la stratégie 1 possède sur les 5 dernières années une variation moyenne du capital au moins 1,8 fois inférieure à celle de la stratégie 4 (voir Tableau 19), et un maximum drawdown au moins 4,75 fois inférieur (voir Tableau 20). La stratégie 2, stratégie à horizon au profil le plus dynamique, est exposée en moyenne[35] à 53 % au support actions et possède plus de stabilité que les stratégies 4 à 6, pourtant moins exposées (voir Graphique 22 et Graphique 23).

[35] Moyenne pondérée par les cotisations hors effet de capitalisation

Conclusion

L'étude de la performance d'une stratégie d'investissement est une entreprise complexe dont les conclusions sont fragilisées par la multitude de choix à faire pour mener à bien la réflexion : choix de l'approche, choix des données, choix des modèles, définition des notions de risque et de performance, etc. C'est pourquoi nous avons tenté de multiplier les regards sur le problème initial afin d'extraire, par recoupement des observations, des éléments de réponse « résistants » aux changements d'approche et d'hypothèses. Au vu des analyses 1, 2, 3, et 3 bis, notre conviction est la suivante.

Grâce à la périodicité des investissements et à l'effet de la diversification temporelle, un portefeuille à proportion d'actions fixe mais raisonnable qui serait conservé sur une longue durée procurera un capital au terme aux caractéristiques similaires à celles qu'il serait possible d'obtenir avec une gestion à horizon. La gestion à horizon n'apporte donc pas de plus-value sur le résultat final de l'investissement. En revanche, la désensibilisation de l'épargne propre aux stratégies à horizon est un principe intuitif, séduisant et surtout rassurant pour l'investisseur. Cette désensibilisation permet notamment de minimiser la volatilité du capital en fin de période et procure donc plus de visibilité qu'une stratégie comprenant toujours une poche action non négligeable sur les dernières années d'investissement. Par ailleurs, dans un contexte économique où l'option par défaut qu'est le taux garanti atteint ses limites, la gestion à horizon peut constituer une alternative intéressante pour réorienter les investisseurs à la recherche de rendement. Le principal défi pour les assureurs restera de convaincre les investisseurs potentiels du bien-fondé de cette stratégie, non manifeste au regard d'une simple analyse rétrospective (voir conclusions de l'analyse 1). La gestion à horizon, dont nous reprenons les éléments clés dans le schéma conclusif ci-dessous, présente donc un intérêt limité mais réel.

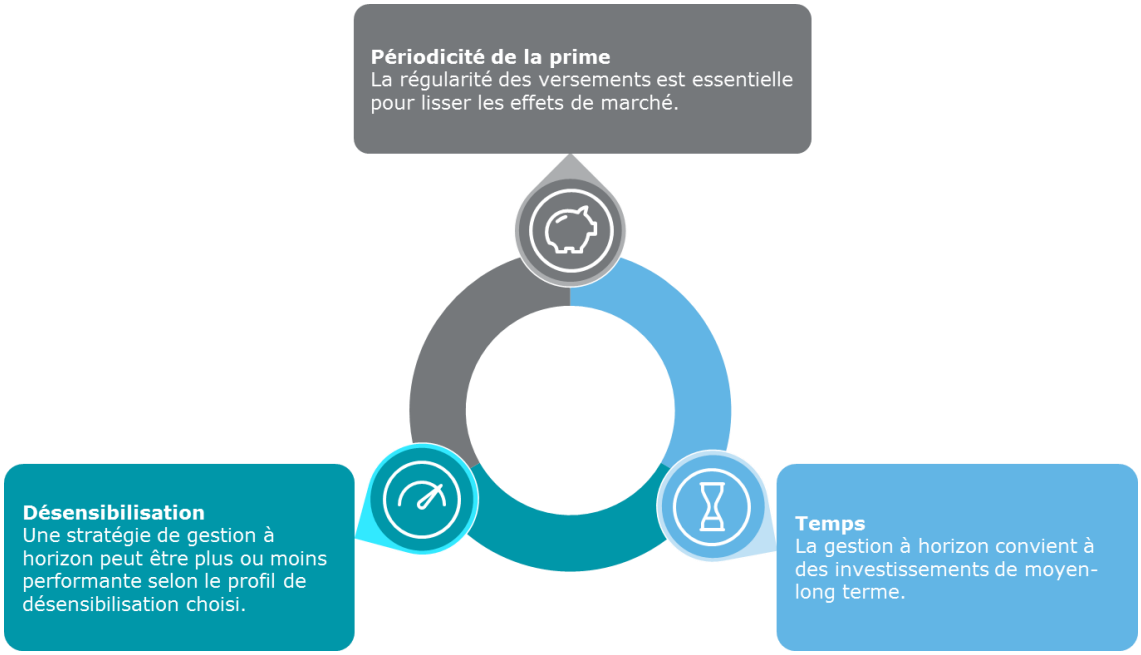


Illustration 14 – Les 3 éléments clés de la gestion à horizon

Par manque de temps et par soucis de proportionalité de la complexité des méthodes utilisées à l'objet du mémoire, nous n'avons pas exploré les pistes d'amélioration suivantes :

- Mener une analyse de sensibilité sur les différents paramètres de reconstitution des stratégies
    - Tester différentes trajectoires salariales correspondant à des profils type de carrière
    - Utiliser un taux de cotisation variable
    - Tester l'impact de l'interruption des cotisations pendant une période donnée
    - Analyser un éventail plus large de durées de cotisation
    - Répliquer l'analyse 3 sur la base d'autres paramètres pour le modèle de taux/le modèle actions/la corrélation entre le marché actions et le marché de taux

- Utiliser un modèle de taux plus raffiné pour l'analyse prospective
    - Modèle par déformation qui épouse parfaitement la structure par termes des taux observée sur le marché (modèle de Ho-Lee par exemple)
    - Modèle de taux *forward* qui permet de simuler directement les taux *forward* (G2++ par exemple)
    - Modèle plus adapté aux environnements de taux négatifs (SABR par exemple)

- Affiner la détermination de la proportion d'actions fixe qui permet de répliquer une stratégie à horizon donnée en termes de distribution du capital au terme

- Quantifier plus précisémment le gain de stabilité apporté par la gestion à horizon sur la fin de la durée d'investissement

- S'assurer que les stratégies stables sur la fin de la durée d'investissement ne sont pas démesurément erratiques en début/milieu d'investissement, en comparant par exemple l'évolution du *maximum drawdown* des stratégies tout au long de la durée de l'investissement

Bibliographie

1. Communiqué de presse du 7 juin 2012. *Site officiel de l'Association Française de la Gestion financière.* [En ligne] Consulté le 13 septembre 2016. http://www.afg.asso.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=4362%3Agestion-pilotee-des-perco--lafg-publie-un-guide-professionnel&catid=501%3A2012&lang=en.

2. EIOPA. *EIOPA's advice on the development of an EU single market for personal pension product (PPP).* 2016. EIOPA-16/457.

3. Guide professionnel sur la gestion pilotée du PERCO. *Site officiel de l'Association Française de la Gestion financière.* [En ligne] Consulté le 13 septembre 2016. http://www.afg.asso.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=4362%3Agestion-pilotee-des-perco--lafg-publie-un-guide-professionnel&catid=501%3A2012&lang=en.

4. Grzebienowski, Mariette. *Vers une harmonisaiton européenne des retraites complémentaires - Le rôle de l'actuaire.* 2002.

5. Coudert, Manon. *La gestion regroupée de plusieurs fonds de pension européens par un Cross-border IORP.* 2014.

6. Le régime luxembourgeois de sécurité sociale - salariés. *Site officiel du Centre des Liaisons Européennes et Internationales de Sécurité Sociale (CLEISS).* [En ligne] http://www.cleiss.fr/docs/regimes/regime_luxembourg-salaries.html.

7. OCDE. *Panorama des pensions 2015 - Les indicateurs de l'OCDE et du G20.* 2015.

8. Kieffer, Robert. *L'impossible réforme du système de pension au Luxembourg.* s.l. : Caisse Nationale d'Assurance Pension, 2011.

9. Berns, Louis, et al. *Régimes complémentaires de pension au Luxembourg. Bilan et perspectives dix ans après la loi-cadre.* s.l. : Anthemis, 2009.

10. Hirrien, Fabienne. *La gestion à horizon des contrats d'assurance retraite individuelle en unités de compte.* 2002.

11. *Elimination des entraves fiscales à la fourniture transfrontalière des retraites professionnelles.* s.l. : Commission au Conseil, au Parlement Européen et au Comité Economique et Social, 2001.

12. Salti, Stéphanie. Le Royaume-Uni repense son système de retraite. *L'AGEFI Hebdo.* 2014.

13. Spitzer, J. J. et Singh, S. *Shortfall risk of target-date funds during retirement.* 2008, Business-Economics Faculty Publications. Paper 13.

14. Spitzer, J. J. et Singh, S. *Is rebalancing a portfolio during retirement necessary ?* 2007, Journal of Financial Planning 20, pp. 46-57.

15. Jagannathan, Ravi et Kocherlakota, Narayana R. Why should older people invest less in stocks than younger people? *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review.* 1996, Summer 1996.

16. Reichenstein, William. Basic Truths About Asset Allocation: A Consensus View Among the Experts. *American Association of Individual Investors, October 1996.* 1996.

17. Antolín, Pablo, Payet, Stéphanie et Yermo, Juan. *Assessing Default Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans.* s.l. : OECD working papers on finance, insurance and private pensions, 2010.

18. Fiche d'information S&P 500. [En ligne] S&P Dow Jones Indices, 31 8 2016. http://www.spindices.com/idsenhancedfactsheet/file.pdf?calcFrequency=M&force_download=true&hostIdentifier=48190c8c-42c4-46af-8d1a-0cd5db894797&indexId=340.

19. Données S&P 500. *Quandl.* [En ligne] Consulté le 2 septembre 2016. https://www.quandl.com/data/YAHOO/INDEX_GSPC-S-P-500-Index.

20. Données Treasury Bond 10 ans. *Quandl.* [En ligne] Consulté le 2 septembre 2016. https://www.quandl.com/data/FRED/GS10-10-Year-Treasury-Constant-Maturity-Rate.

21. Définition du T-Bill. *Investopedia.* [En ligne] Consulté le 2 septembre 2016. http://www.investopedia.com/terms/t/treasurybill.asp.

22. Données T-Bill 3 mois. *Quandl.* [En ligne] Consulté le 2 septembre 2016. https://www.quandl.com/data/FRED/DTB3-3-Month-Treasury-Bill-Secondary-Market-Rate.

23. Frédéric Planchet, Pierre Thérond, Marc Juillard. *Modèles financiers en assurance - Analyses de risque dynamiques.* s.l. : Economica, 2011. ISBN 978-2-7178-5970-6.

24. Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* s.l. : Ellipses, 1992. ISSN : 1154-483 X.

25. Hull, John C. *Options, Futures, and Other Derivatives - Seventh Edition.* 2008.

26. R. Gibson, F.-S. Lhabitant, D. Talay. *Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature.* June 2001.

27. Wilhelmy, Florent. *Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif.*

28. Données EURO STOXX 50. *Quandl.* [En ligne] Consulté le 31 octobre 2016. https://www.quandl.com/data/YAHOO/INDEX_STOXX50E-EuroStoxx-50-Index.

Annexes

Stratégie 1 – Répartition entre les différents supports (35 ans)[36]

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	73%	24%	3%
3	71%	26%	3%
4	69%	28%	3%
5	67%	30%	3%
6	65%	32%	4%
7	63%	34%	4%
8	61%	35%	4%
9	59%	37%	4%
10	56%	39%	4%
11	54%	41%	5%
12	52%	43%	5%
13	50%	45%	5%
14	48%	47%	5%
15	46%	48%	5%
16	44%	50%	6%
17	42%	52%	6%
18	40%	54%	6%
19	38%	56%	6%
20	36%	58%	6%
21	34%	60%	7%
22	32%	61%	7%

[36] La somme des trois proportions est parfois différente de 100 % car les chiffres présentés sont arrondis au pourcent

23	30%	63%	7%
24	28%	65%	7%
25	26%	67%	7%
26	24%	61%	15%
27	21%	55%	24%
28	19%	48%	32%
29	17%	41%	41%
30	15%	34%	51%
31	13%	26%	61%
32	11%	18%	71%
33	9%	9%	82%
34	7%	7%	86%
35	5%	5%	90%

Stratégie 2 – Répartition entre les différents supports (35 ans)

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	75%	23%	3%
3	75%	23%	3%
4	75%	23%	3%
5	75%	23%	3%
6	75%	23%	3%
7	75%	23%	3%
8	75%	23%	3%
9	75%	23%	3%
10	75%	23%	3%
11	75%	23%	3%

12	75%	23%	3%
13	75%	23%	3%
14	75%	23%	3%
15	75%	23%	3%
16	75%	23%	3%
17	75%	23%	3%
18	75%	23%	3%
19	75%	23%	3%
20	75%	23%	3%
21	75%	23%	3%
22	75%	23%	3%
23	75%	23%	3%
24	75%	23%	3%
25	75%	23%	3%
26	**68%**	**26%**	**6%**
27	61%	27%	12%
28	54%	28%	18%
29	47%	27%	27%
30	40%	24%	36%
31	33%	20%	47%
32	26%	15%	59%
33	19%	8%	73%
34	12%	7%	81%
35	5%	5%	90%

Stratégie 3 – Répartition entre les différents supports (35 ans)

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	68%	29%	3%
3	61%	35%	4%
4	54%	41%	5%
5	47%	48%	5%
6	40%	54%	6%
7	33%	60%	7%
8	26%	67%	7%
9	19%	73%	8%
10	12%	79%	9%
11	**5%**	**86%**	**10%**
12	5%	86%	10%
13	5%	86%	10%
14	5%	86%	10%
15	5%	86%	10%
16	5%	86%	10%
17	5%	86%	10%
18	5%	86%	10%
19	5%	86%	10%
20	5%	86%	10%
21	5%	86%	10%
22	5%	86%	10%
23	5%	86%	10%
24	5%	86%	10%
25	5%	86%	10%

26	5%	76%	19%
27	5%	67%	29%
28	5%	57%	38%
29	5%	48%	48%
30	5%	38%	57%
31	5%	29%	67%
32	5%	19%	76%
33	5%	10%	86%
34	5%	7%	88%
35	5%	5%	90%

Allocation en produits de taux pour les stratégies 4 à 9

Année	Part obligations	Part monétaire
1	90%	10%
2	90%	10%
3	90%	10%
4	90%	10%
5	90%	10%
6	90%	10%
7	90%	10%
8	90%	10%
9	90%	10%
10	90%	10%
11	90%	10%
12	90%	10%
13	90%	10%

14	90%	10%
15	90%	10%
16	90%	10%
17	90%	10%
18	90%	10%
19	90%	10%
20	90%	10%
21	90%	10%
22	90%	10%
23	90%	10%
24	90%	10%
25	90%	10%
26	**80%**	**20%**
27	70%	30%
28	60%	40%
29	50%	50%
30	40%	60%
31	30%	70%
32	20%	80%
33	10%	90%
34	7,5%	93%
35	5%	95%

Stratégie 1 – Répartition entre les différents supports (10 ans)

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	67%	30%	3%
3	59%	37%	4%
4	52%	44%	5%
5	44%	51%	6%
6	36%	58%	6%
7	28%	65%	7%
8	21%	48%	32%
9	13%	26%	61%
10	5%	5%	90%

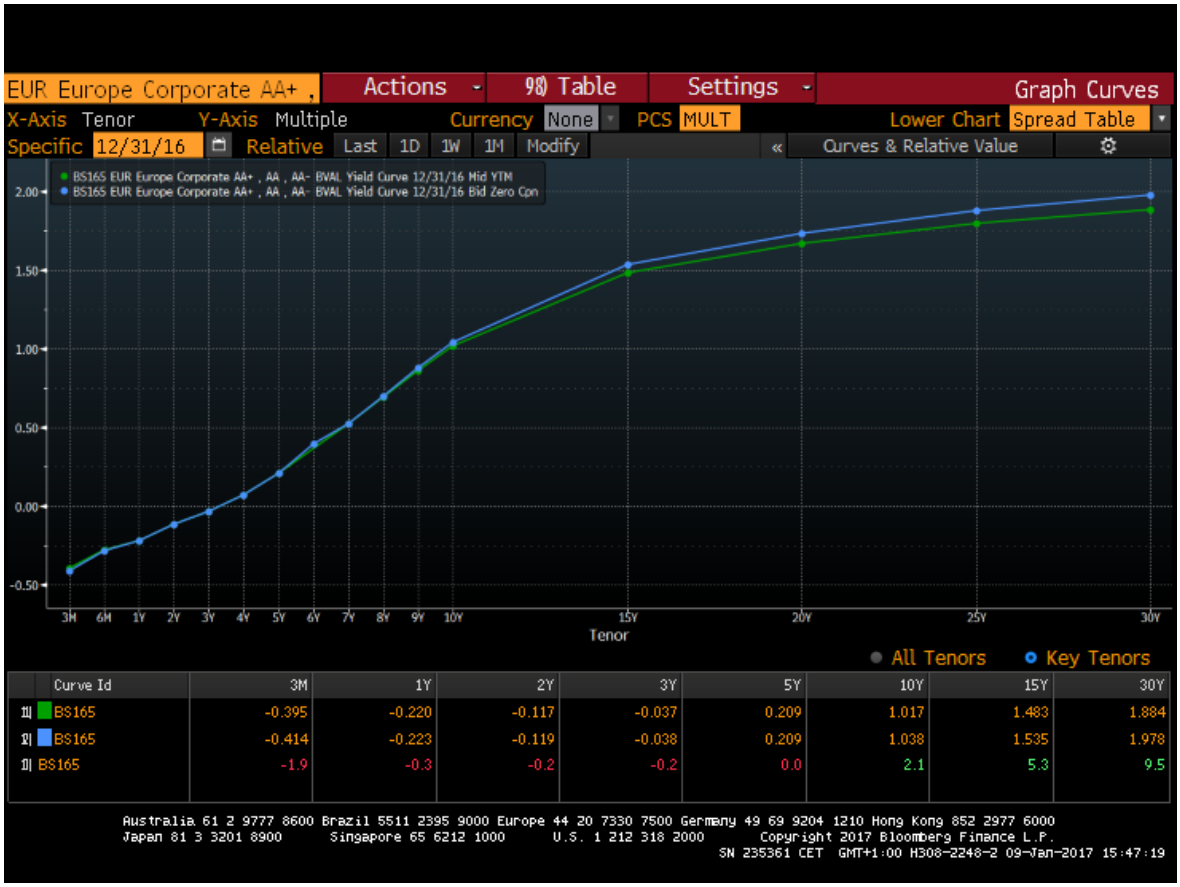
Stratégie 2 – Répartition entre les différents supports (10 ans)

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	75%	23%	3%
3	75%	23%	3%
4	75%	23%	3%
5	75%	23%	3%
6	75%	23%	3%
7	75%	23%	3%
8	**52%**	**29%**	**19%**
9	28%	22%	50%
10	5%	5%	90%

Stratégie 3 – Répartition entre les différents supports (10 ans)

Année	Proportion actions	Proportion obligations	Proportion monétaire
1	75%	23%	3%
2	52%	44%	5%
3	28%	65%	7%
4	5%	86%	10%
5	5%	86%	10%
6	5%	86%	10%
7	5%	86%	10%
8	**5%**	**57%**	**38%**
9	5%	29%	67%
10	5%	5%	90%

Section 3.2.2 - Indice Bloomberg « BS 165 EUR EUROPE CORPORATE AA+, AA, AA- » (extraction réalisée le 12/01/2017)



BVSC016 1y -0.1 3y 0.01 5y 0.26 7y 0.58 10y 1.09 20y 1.75 30y 1.96
EUR Europe Corporate AA+ , AA , AA- BVAL Yield Curve
Europe Obligations corporate
60 Envoyer en p.j.
Description de titre
1) Graphe de crb | GC »
Taux de courbe
Taux (pb)
Mté
2) Pondérations de composants | MEMB »
vs 01/05
Taux (pb)
Mté
Caractéristiques
Devise EUR
ID courbe BS165 Corp
Rating AA
ID Bloomberg BVSC0165 Index
FIGI BBG006Z3KC20
Rulemaker Bloomberg
Type Credit/Corp
Sous-type Composite , Par (Coupon) , Unsecured
Fréquence de pricing Daily
Source de pricing BVAL
Détails sur courbe
The yield curve is constructed daily with bonds that have BVAL prices at the market close. The BVAL curve is populated with EUR denominated senior unsecured fixed rate bonds issued by European companies with a BBG composite rating of AA+ , AA or AA-. To view a graph of this curve and its constituents, run {GC <Go>}. For more information about BVAL prices and valuation, please visit {BVLI <Go>}.
Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 2395 9000 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2017 Bloomberg Finance L.P.
SN 235361 CET GMT+1:00 H381-431-2 09-Jan-2017 14:01:36