Institut des ACTUAIRES

Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 09 février 2021

Par : Marius MASSON
Titre : Leviers sur la solvabilité en assurance vie dans un contexte de taux bas

Confidentialité : ☑ Non ☐ Oui (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

Entreprise :
Nom : Optimind
Signature :

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Gillot Guillaume
Nom : Ourraoui Amine
Signature :

Membres présents du Jury du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

Le secteur de l'assurance-vie en France fait face à une crise sans précédent avec un contexte de taux bas qui perdure. Si cette situation économique stagne ou se dégrade, les assureurs pourraient ne plus couvrir les exigences requises par Solvabilité 2 d'ici quelques années. En effet, les contrats des fonds en euros classiques dont le fonds général est majoritairement composé d'obligations, ne sont plus rentables et dégradent la solvabilité des assureurs. Ces derniers vont donc devoir agir pour mettre en place des leviers et redresser leur ratio de solvabilité dans un futur proche.

Dans ce mémoire, les impacts d'un nouveau fonds en euros garanti à 98% ainsi que d'une nouvelle politique de distribution de participation aux bénéfices discrétionnaire sont analysés. Ces études mettent en évidence qu'il est possible pour les assureurs de ralentir la chute de leur solvabilité, même si ces deux leviers ne suffisent pas à compenser totalement le contexte des taux bas.

Les moyens d'action utilisés par les assureurs peuvent avoir des effets les uns sur les autres et doivent donc être examinés simultanément. Pour répondre à cette problématique, une méthode d'interpolation en plusieurs dimensions est proposée dans ce mémoire pour agréger les deux leviers étudiés de façon optimale, et pour pouvoir combiner un plus grand nombre de leviers de manière théorique.

Mots-clés : *assurance-vie*, *fonds en euros*, *Solvabilité 2*, *taux bas*, *Asset and Liability Management*, *optimisation.*

Abstract

The life insurance industry in France is facing a crisis characterised by a drop of interest rates and that none of us have been able to see in our lifetimes. If this economic context lasts or gets worse, insurers could no longer be able to cover the requirement of Solvency 2. In fact classic euro fund contracts, whose premiums are mostly invested in bonds, are no longer profitable for insurers. Therefore, they will have to react in order to set up management actions and redress their solvency ratio in the foreseeable future.

In this thesis, 98% guaranteed euro fund's effect as well as a new discretionary profit-sharing distribution policy are analyzed. These studies show that it's possible for insurers to slow the fall in their solvency, although these two management actions are not enough to compensate the low interest rates environment.

Management actions set up by insurers can affect each other and therefore need to be considerates simultaneously. To answer this problem, a multi-dimensional interpolation method is proposed in this paper to aggregate the two studied management actions optimally, and to be able to combine a greater number of management actions in a theoretical way.

Keywords : *life insurance*, *euro fund*, *Solvency 2*, *low rates*, *Asset and Liability Management*, *optimisation*.

Note de Synthèse

Contexte de taux bas et problématique associée

La cause principale du contexte de taux bas actuel est liée à la politique monétaire menée par la banque centrale européenne ces dernières années. En effet, suite à la crise financière de 2008 et la crise de 2010 des dettes souveraines la politique monétaire de la banque centrale européenne a consisté à baisser les taux d'intérêt afin de relancer l'économie et l'inflation, menant ainsi l'Union européenne dans un contexte de taux bas.

Le fonds en euros représente une grande majorité de l'épargne des Français. Les primes sont investies majoritairement dans des obligations qui sont des titres émis par les entreprises ou les États pour emprunter de l'argent. Le rendement des obligations et du fonds en euros sont donc liés directement au contexte de taux bas et par conséquent la chute du rendement des obligations a entraîné inéluctablement la chute du rendement du fonds en euros. De plus, les assureurs ont des contraintes de solvabilité à respecter notamment les contraintes quantitatives du pilier 1 de la directive solvabilité 2 qui sont de plus en plus contraignantes avec cette baisse des rendements du fonds en euros.

Si cette situation perdure ou se dégrade, les obligations avec un meilleur rendement vont arriver à leur maturité et les assureurs vont devoir investir de plus en plus dans des obligations dont le rendement est plus faible. La rentabilité de l'assureur pourrait donc encore diminuer et sa solvabilité serait dégradée par la même occasion. C'est pourquoi les assureurs doivent agir et s'adapter au contexte économique.

Pour faire face à ce contexte de taux bas, les assureurs ont bénéficié d'une mesure prise par l'État à la fin décembre 2019 qui les autorise à intégrer une partie de leur provision pour participation aux bénéfices dans leurs fonds propres, améliorant ainsi leur solvabilité. Cependant, cette mesure n'est pas une solution durable et donne seulement un peu plus de temps aux assureurs pour trouver des moyens de lutter contre les taux bas. Les assureurs ont déjà commencé à agir en mettant en place divers leviers, qui consistent à mettre en place de nouveaux contrats comme l'eurocroissance dont la réglementation a été instaurée par l'État ou encore de créer un nouveau fonds en euros. Ils ont également orienté la collecte vers l'UC pour permettre un transfert de risque de l'assureur vers l'assuré, ils ont revu l'allocation d'actifs au sein de leur portefeuille pour optimiser le couple rendement/risque et ont mis en place des politiques et stratégies commerciales innovantes.

La conjoncture actuelle et la recherche de leviers posent donc la problématique de ce mémoire qui est de savoir dans quelle mesure les assureurs peuvent lutter contre les taux bas. La méthodologie adoptée dans ce mémoire est d'étudier deux leviers parmi ceux cités précédemment, à savoir les impacts d'un nouveau fonds en euros dont le capital n'est plus garanti à 100% et une nouvelle politique de distribution de participation aux bénéfices discrétionnaire. Les leviers sont analysés en détaillant pour chacun leurs hypothèses, leurs impacts sur la solvabilité et leurs limites.

Afin d'effectuer ces études, un portefeuille fictif représentant un assureur-vie moyen au 31/12/2019 est créé. Ce portefeuille est composé de contrats multisupports dont les TMG varient entre 0% brut de frais de gestion sur encours et 4% net de frais de gestion sur encours. Les contrats possèdent tous la même politique de revalorisation par rapport à la participation aux bénéfices contractuelle. Les assurés ont la possibilité d'arbitrer vers le fonds en euros ou vers l'UC et de racheter leurs contrats de manière totale ou partielle à tout moment. Ainsi les résultats obtenus représentent le plus fidèlement possible le marché actuel de l'assurance-vie. Différents indicateurs de solvabilité sont calculés grâce à un modèle implémenté sous VBA permettant notamment le calcul du SCR par la formule standard.

Le fonds en euros nouvelle génération

Le principe de ce premier levier est d'étudier l'impact au bout de 5 ans d'un nouveau fonds en euros dont la garantie du capital ne serait plus de 100% mais de 98 %. Cette baisse de garantie pourrait permettre aux assureurs d'avoir une marge de manœuvre plus importante pour dynamiser l'allocation d'actifs et rechercher du rendement. Les résultats seront donc donnés à T=5 ans pour ce levier dans le but de simuler l'arrivée progressive des nouveaux contrats dans le portefeuille. La mise en place de ce nouveau fonds en euros nécessite plusieurs hypothèses et notamment l'introduction d'un paramètre α correspondant à la proportion de l'encours des nouveaux contrats au bout de 5 ans sur l'ensemble du portefeuille.

Les hypothèses principales prises ici sont qu'il y a 8% de nouvelles affaires par an sur l'ensemble du portefeuille et que la distribution des contrats entre T=0 et T=5 ans est semblable à celle des contrats eurocroissance entre 2014 et 2019. Une optimisation de α est alors effectuée tenant compte de la PVFP et du SCR à 5 ans.

$$\alpha_{optimal} = \underset{\alpha \in [0\%,5\%]}{\arg\max} \frac{(PVFP_\alpha - coût_\alpha)}{SCR_\alpha}.$$

La fonction coût représente les coûts d'acquisition supplémentaires à l'acquisition de ces nouveaux contrats uniquement. Dans cette étude, 4 fonctions de coût sont étudiées pour permettre de prendre en compte plusieurs situations économiques possibles. Les fonctions à optimiser associées sont présentées dans la figure 1.

Dans les cas des scénarios 1, 2 et 4 la conclusion est simple. Plus il y a de nouveaux contrats dans le portefeuille de l'assureur, plus ce dernier voit sa solvabilité s'améliorer. Cependant, à cause de coûts importants pour les fortes valeurs de α dans le scénario 3, la valeur de α optimale n'est plus de 5% mais de 3,88%. Dans tous les scénarios les impacts sur les indicateurs de solvabilité sont les mêmes. La PVFP est fortement augmentée suite à un coût des options et des garanties qui diminue. Le SCR vie diminue également suite à des contrats qui sont globalement moins coûteux pour l'assureur. L'évolution des principaux indicateurs dans le cas du scénario 3 est présentée dans le tableau 1.

Les limites de ce premier levier sont liées aux hypothèses prises. En effet, les différentes fonctions de coût étudiées jouent un rôle important dans les résultats obtenus. De plus, il n'est pas possible de prévoir avec exactitude comment les contrats vont évoluer entre T=0 et T=5, les limites proviennent donc de variables très difficiles à modéliser comme le comportement des assurés face à ces nouveaux contrats car les assureurs ne possèdent aucune donnée dessus. Ces limites étant incontournables, plusieurs scénarios sont étudiés pour effectuer des études sur des cas qui pourraient arriver théoriquement.

Dans les résultats qui précèdent, seul un gain sur la solvabilité de l'assureur a été pris en compte.

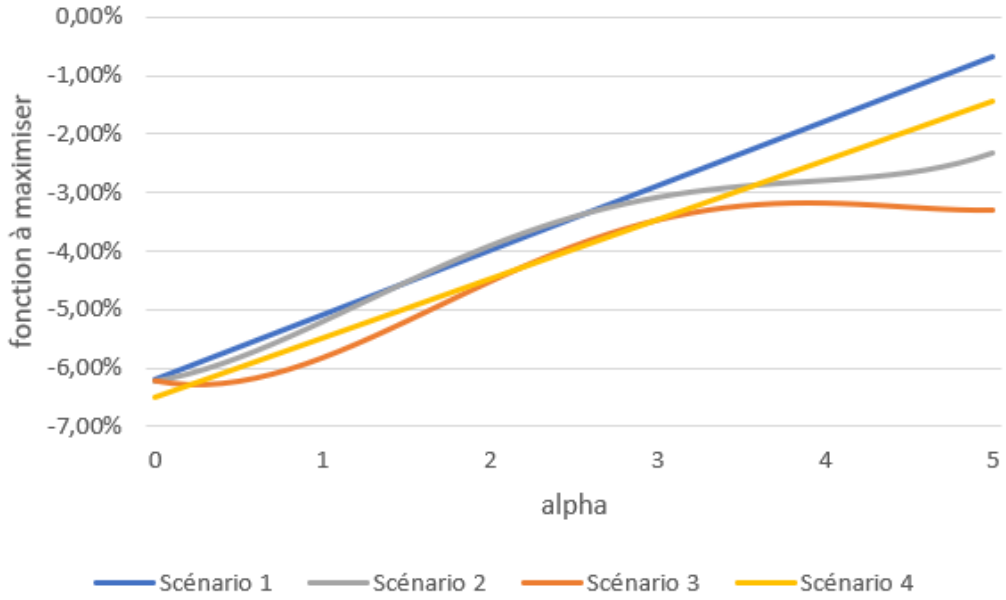


FIGURE 1: Fonctions à optimiser

Indicateurs	Société type sans nouveaux contrats	Avec α=3.88%	évolution
BEL	2568,76 M€	2560,5 M€	-0,32%
Ratio de solvabilité	131%	138%	+7%
SCR	146,27 M€	145,13 M€	-0,8%
SCR_{vie}	14,11 M€	13,91 M€	-1,4%
$SCR_{marché}$	121,6 M€	120,97 M€	-0,5%
$PVFP$	-9,10 M€	-1,06 M€	+8,04 M€

TABLE 1: Impact des nouveaux contrats sur les indicateurs avec alpha optimal

Cependant, l'assuré qui prend un risque avec ces nouveaux contrats pourrait attendre des gestes commerciaux de la part de l'assureur ou encore une revalorisation de sa provision mathématique plus importante. L'assureur devra donc trouver un bon équilibre entre gain assuré et gain assureur et également prendre en compte la concurrence des autres assureurs commercialisant le même type de nouveaux contrats.

Une nouvelle politique de distribution de participation aux bénéfices discrétionnaire

Le principe de ce levier est de revoir la méthode de distribution de participation aux bénéfices discrétionnaire, c'est-à-dire de revoir le montant de revalorisation de la provision mathématique des assurés qui est à la discrétion de l'assureur. L'idée est ici d'avantager les assurés possédant une forte proportion d'UC, ayant pour objectif double d'inciter les assurés à arbitrer vers l'UC et d'orienter les rachats. En effet, une nouvelle hypothèse de distribution de la part euro/UC au sein du portefeuille a été prise selon laquelle plus les TMG des contrats sont importants, plus la part en unité de compte est faible car ces contrats n'ont pas besoin d'UC pour avoir un bon rendement. Ainsi les contrats avec un TMG plus faible sont avantagés par cette nouvelle politique.

L'introduction d'une fonction priorité, dépendant de la proportion en UC des contrats et de la proportion de la PM euro sur l'ensemble du portefeuille est alors effectuée.

$priorite(proportion\ UC, proportion\ PM\ euro) = (e^{\gamma \times proportion\ UC} - 1) \times proportion\ PM\ euro, \gamma \in \mathbb{R}^*.$

Le paramètre γ va influer sur la manière dont la participation aux bénéfices est distribuée, si γ est grand les inégalités entre les assurés sont fortes et inversement.

Suite à l'étude de la fonction du ratio de solvabilité en fonction du paramètre γ, il s'avère que cette fonction est strictement croissante puis strictement décroissante. Une méthode semblable à une méthode dichotomique appelée méthode du nombre d'or est alors appliquée pour obtenir la meilleure valeur de γ.

La méthode renvoie alors une valeur optimale de γ de 8,76. Cette valeur de γ a pour impact un rachat plus fort des contrats ayant un TMG de 1% et un rachat plus faible de ceux ayant des TMG de 0%. Ceci a pour conséquence d'augmenter la PVFP et de diminuer le SCR vie à travers la baisse du SCR rachat et du SCR longévité car le TMG moyen du portefeuille a diminué. L'évolution des principaux indicateurs pour la valeur optimale de γ est présentée dans le tableau 2.

Indicateurs	Nouveau portefeuille	avec $\gamma = 8,76$	évolution
BEL	2295,39 M€	2292,4 M€	-0,1%
Ratio de solvabilité	193,7%	197,01%	+3,4%
SCR	116,1 M€	115,8 M€	-0,24%
SCR_{vie}	14,4 M€	14,18 M€	-1,5%
$SCR_{marché}$	101,2 M€	101,22 M€	+0.02%
$PVFP$	23,94 M€	27,55 M€	+15%

Table 2: Impact du levier optimisé sur les indicateurs

Les limites de ce levier sont que la répartition euro/UC va changer l'optimisation du paramètre γ car cela intervient directement dans la fonction priorité. De plus, cette fonction a été choisie arbitrairement pour effectuer les études mais d'autres fonctions auraient pu convenir également.

Les résultats précédents ne reflètent pas encore le fait que les assurés pourraient être incités à arbitrer vers l'UC suite à la mise en place de cette stratégie. Cependant, il est impossible de prévoir la réaction des assurés et donc leur comportement. C'est pourquoi des études de sensibilités sont faites montrant que le ratio de solvabilité peut encore s'améliorer s'il y a un arbitrage plus fort vers l'UC.

Ce levier permet donc d'améliorer la solvabilité dans une plus faible mesure que le premier car il ne s'agit que d'une politique à adopter par l'assureur qui n'inclue pas de coûts supplémentaires comme pour le premier levier.

Une méthode pour agréger différents leviers

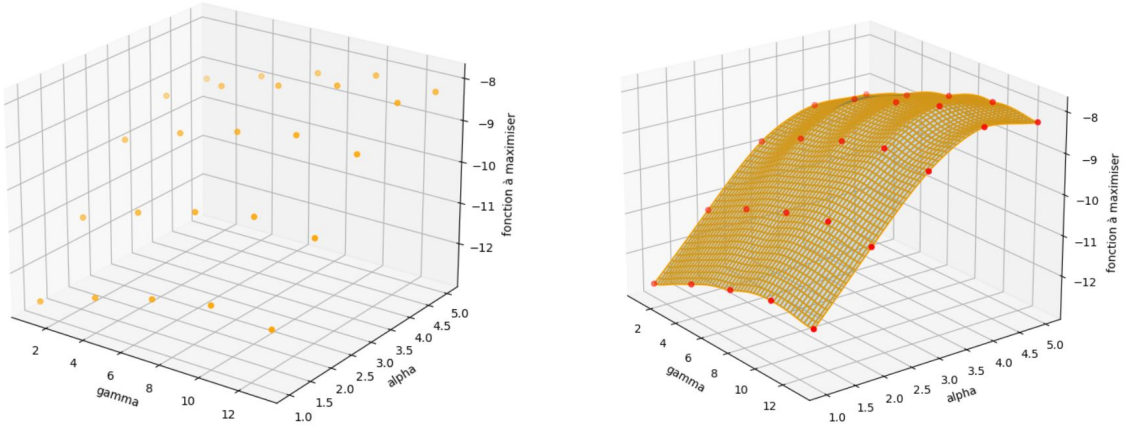
Une fois l'analyse des deux leviers effectuée il est intéressant de se demander comment obtenir le couple (α,γ) optimal. Les deux valeurs pour ces paramètres ne sont pas forcément les mêmes que celles obtenues précédemment sur l'étude de chaque levier indépendemment de l'autre.

Pour agréger deux leviers ou plus, il existe des méthodes telles que la méthode "naïve" ou la méthode levier par levier. La première consiste à effectuer toutes les possibilités pour les leviers donnant lieu à un résultat optimal global, mais à des temps de calcul exponentiels et donc cette méthode n'est pas applicable. La méthode levier par levier, qui est la plus utilisée, consiste comme son nom l'indique à optimiser un premier levier, puis de partir de cette optimisation pour effectuer l'étude d'un deuxième levier et ainsi de suite. Cette méthode est rapide, mais il est probable d'obtenir un résultat optimal local car toutes les combinaisons ne sont pas testées.

Ce mémoire propose donc une méthode d'interpolation en plusieurs dimensions, ayant pour objectif de trouver une solution proche d'un résultat optimal global tout en effectuant moins de calculs que la méthode "naïve".

La première étape consiste à choisir la méthode d'interpolation. Les effets des leviers sur les indicateurs de solvabilité n'étant pas connus à l'avance, il n'est pas pertinent d'effectuer une méthode par interpolation de Lagrange à cause du phénomène de Runge. En effet, sur l'interpolation lagrangienne de certaines fonctions, l'erreur d'interpolation augmente avec le degré du polynôme d'interpolation. L'interpolation par splines cubiques est alors adoptée pour l'agrégation des leviers car elle permet une meilleure interpolation quelle que soit la fonction à étudier.

La méthode d'interpolation en 3 dimensions est implémentée sous python afin d'agréger les deux leviers ci-dessus. Il faut néanmoins prendre des hypothèses concernant les deux leviers pour appliquer cette méthode. Par exemple la fonction coût du scénario 3, la fonction à optimiser à T=5 ans et les conditions sur les nouvelles affaires sont les mêmes que pour le premier levier. De même, la répartition euro/UC du et la fonction priorité du deuxième levier ont été adoptées.



(a) Points d'interpolation de la surface finale

(b) Interpolation finale vue du dessus

FIGURE 2: Application de la méthode aux deux leviers

Les résultats obtenus par une descente de gradient sur la surface tracée montrent qu'il est possible d'obtenir des performances meilleures en temps de calcul que la méthode "naïve" et de trouver une optimisation meilleure que celle obtenue pour la méthode levier par levier comme le montre le tableau 3. Cette méthode est généralisable à l'agrégation de N leviers en passant d'une interpolation à 3 dimensions à une interpolation à N+1 dimensions.

Enfin, cette méthode possède des limites intrinsèques à chaque levier qui sont donc de plus en plus nombreuses quand le nombre de leviers augmente. De plus elle requiert que les leviers soient compa-

Méthode utilisée	Valeur à maximiser	Simulations à effectuer	Temps de calcul
Méthode "naïve"		481 601	environ 20 000 jours
Méthode levier par levier	-1,60%	10	10 heures
Méthode d'interpolation	-1,50%	25	environ 1 jour

Table 3: Performances des différentes méthodes

tibles et pourraient éventuellement donner des erreurs d'interpolation si le nombre de points à tester est trop petit.

Approfondissements potentiels

Des développements sur le modèle ALM ont été effectués comme l'implémentation de l'arbitrage permettant des études plus précises sur les leviers. D'autres améliorations telles que l'intégration de la PDD ou du rating des obligations pourraient également permettre une analyse plus fine des impacts des différents moyens d'action.

Deux leviers ont été étudiés dans ce mémoire. Une étude sur un plus grand nombre de stratégies telles que la recherche d'une allocation d'actifs ou encore une gestion plus efficaces des plus ou moins values latentes aurait permis d'observer si le contexte de taux bas peut être totalement compensé. La méthode d'interpolation aurait pu avoir un impact encore plus fort en révélant des effets conjoints inattendus entre les différents moyens d'action, montrant ainsi son utilité par rapport à la méthode levier par levier. Enfin d'autres indicateurs de solvabilité ou même des études sur la rentabilité pourraient compléter les travaux de ce mémoire.

Conclusion

L'impact de l'environnement de taux bas se traduit de manière critique dans la durée sur le modèle économique de l'assurance-vie en euros. Une inertie importante nécessite d'anticiper au maximum les actions de management. En effet, la mise en place de certains leviers comme le fonds en euros nouvelle génération ou une collecte orientée vers l'UC peut prendre du temps et auront des effets importants à long terme. Il est donc indispensable pour les assureurs de commencer à agir pour lutter contre les taux bas.

Les études sur les deux leviers ont permis de montrer qu'il était possible de redresser la solvabilité des assureurs, mais aussi qu'ils ne suffisent pas à compenser totalement un univers où les taux restent bas. La méthode d'interpolation a permis de tirer le maximum des effets de ces deux leviers étudiés simultanément. Ces résultats sont encourageants car l'agrégation d'un plus grand nombre de leviers pourrait permettre en théorie de compenser le contexte de taux bas.

Synthesis note

The low interest rate environment and correlated issues

The monetary policy pursued by the ECB in the past few years is why today, we are going through a very low interest rate environment. Indeed, after the financial crisis of 2008 and the european sovereign debt crisis of 2010 the ECB's monetary policy consisted in decreasing interest rates, leading the European Union into a low interest rate environment.

The euro fund represents a large majority of the French's savings. Premiums are mostly invested in bonds, which are loans made by companies or governments. The yield on bonds and consequently on the euro funds is directly correlated to the low interest rate environment and any drop of the yield on bonds would automatically lead to a decline of the euro fund. Moreover, insurers have many restrictions that must be observed. The european directive Solvency 2 had set out 3 pillars in order to define the requirements that every insurer needs to reach. The first one consists of quantitative restrictions. These lasts are more and more binding due to euro fund's decline.

If this economic context lasts or gets worse, bonds with high yields will mature and insurers will have to invest more and more in bonds with lower yields. Insurer's profitability could decrease further and its solvency would be worsen at the same time. This is why insurers must act and have to adapt to the economic context.

In order to deal with this low interest rate environment, insurers benefited from a State measure at the end of december 2019 allowing them to include a part of their profit-sharing provision in their own funds, enhancing their solvability. However, this measure is not a solution that lasts. It only gives more time to insurers to find ways to fight against low interest rates. Insurers have already begun to set some management actions, like selling new contracts such as "eurocroissance" funds whose regulation was set up by the State or to create a new euro fund. They also shifted a part of collection of insurance premiums from euro funds to units of account with the aim of transferring risk from insurers towards insureds. They reviewed their asset allocation within their portfolios to optimize the risk/return profile and set up new business policies and strategies.

The low interest rate environment and these researches of management actions are the main topic of this thesis, which is to know to what extent insurers can fight against low rates. The methodology adopted in this thesis is to study two management actions among those mentioned above, impacts of a new euro fund whose capital is no longer 100% guaranteed and a new discretionary profit-sharing distribution policy. These management actions are analyzed considering their assumptions, their impact on isurers's solvency and their limits.

In order to perform these studies, a notional portfolio of an average life insurer at 12/31/2019 is created thanks to data recovery. This portfolio is composed of multiple unit-linked contracts with

minimum rates guarantee ranging from 0% net of management expenses to 4% gross of management expenses. Contracts have the same revaluation policy for the contractual profit sharing. Insured persons can switch their capital from the euro funds to units of account and to surrender their contracts at any time. Thus results achieved reflect most closely the current market of life insurance. Many solvency indicators are computed thanks to a model developed with VBA, allowing to compute SCR using the standard formula.

The new generation euro fund

The principle of this first action management is to study the impact at the end of 5 years of a new fund in euros whose capital guarantee would no longer be 100% but 98%. This reduction in guarantee could allow insurers to boost asset allocation and search yield. Results are therefore given at time T =5 years for this management action in order to simulate the development of these new contracts. The new euro funds's set up needs to take some assumptions and in particular the introduction of a parameter α which represents the outstanding portfolio of new contracts over a period of 5 years.

Two mains asumptions are made here :

- The new business contracts are about 8% of the whole portfolio.
- The evolution of these new business contracts between T=0 and T=5 years is almost the same as the eurocroissance one between 2014 and 2019.

An optimization of the parameter α is done taking into account the PVFP and the SCR at 5 years.

$$\alpha_{optimal} = \underset{\alpha \in [0\%,5\%]}{\arg\max} \frac{(PVFP_\alpha - coût_\alpha)}{SCR_\alpha}.$$

The function "coût" represents additional acquisition costs for the acquisition of the new contracts only. In this study 4 cost functions are considered in order to study several possible economic situations. The associated functions which have to be optimized are presented in the figure 3. In the case of scenarios 1, 2 and 4 the conlcusion is simple. The more there are new contracts in the insurer's portfolio, the more its solvency improves. However, due to important costs for large values of α in scenario 3, the best value of α is no longer 5% but 3.88%. In all scenarios, the impacts on the solvency are the same. PVFP increases a lot thanks to a decreasing cost of options and guarantees and life SCR therefore decreases with contracts which are on average less expensive for insurers. The evolution of the main indicators in the case of scenario 3 is presented in table 4.

Indicators	typical insurer without new contracts	with α=3.88%	evolution
BEL	2568,76 M€	2560,5 M€	-0,32%
Solvency ratio	131%	138%	+7%
SCR	146,27 M€	145,13 M€	-0,8%
SCR_{life}	14,11 M€	13,91 M€	-1,4%
SCR_{market}	121,6 M€	120,97 M€	-0,5%
$PVFP$	-9,10 M€	-1,06 M€	+8,04 M€

Table 4: Impacts of the new generation euro fund

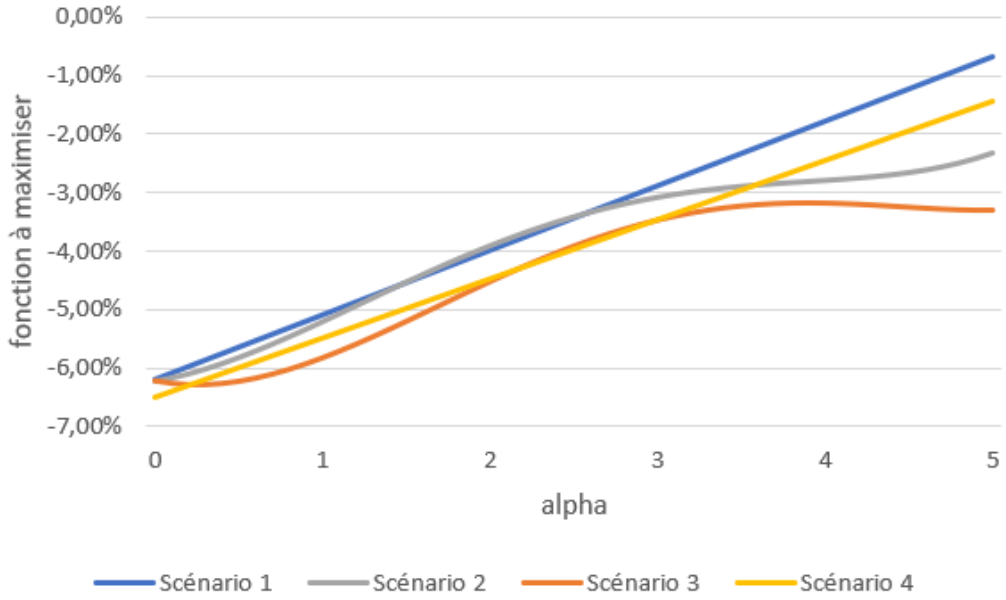


Figure 3: Results according to the different cost functions

The limits of this first action management are correlated to the asumptions that had been taken. Indeed, the different cost functions studied play an relevant role in the results obtained . Moreover, it's not possible to predict in a more accurate way how contracts will evolve between T=0 and T=5 years, limits come from variables that are very difficult to model such as insureds's behavior towards these new contracts because insurers don't have data on this. These limits can't be ignored, some scenarios are studied in order to test some cases that can theoretically happen.

In the previous results, there is only a gain on the solvency of the insurer. However, insureds who take risks with these new contracts may expect commercial actions from the insurer or a better reappraisal of its reserves. Insurer will have to reach a balance between a gain for him and a gain for insureds and will have to take in account competition with other life insurers who want to set up these new contracts.

A new discretionary profit-sharing distribution policy

The principle of this management action is to revisit the discretionary profit-sharing distribution policy, which means reviewing the revaluation of the reserves that usually is made within the insurance company. The idea here is to ensure insureds possessing a large portion of units of account, with a twofold purpose: make people switch their capital from the euro fund to the units of account one and bias surrenders. Indeed, an assumption concerning the distribution of the part euro funds/units of account was taken and consists in having a higher percentage of capital on euro's funds for the biggest minimum guaranteed rate because they don't need units of account to have yield. Thus this new strategy benefits to the contracts with a lower minimum guaranteed rate.

The introduction of a priority function, depending on proportion of units of account and portion of the capital of euro's funds compared to the entire portfolio is made.

$$priority(proportion\ UC, proportion\ PM\ euro) = (e^{\gamma \times proportion\ UC} - 1) \times proportion\ PM\ euro, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

The parameter γ will affect the way profit-sharing is distributed, if γ is important, inequalities between

insureds are important too and vice versa.

According to the study of the function solvency ratio depending on γ, it turns out that this function is strictly increasing then strictly decreasing. An algorithm which looks like a dichotomic method called golden-section search is used to find the best value of γ.

The method gives an optimal value of γ of 8,76. This value of γ is due to a stronger surrender of contracts with a minimum guaranteed rate of 1 % and a lower surrender of those with a minimum guaranteed rate of 0 %. This has as a consequence the increase of the PVFP and the decrease of the life SCR through a diminution of surrender SCR and of the longevity SCR because the average minimum guaranteed rate of the portfolio has decreased. The evolution of the main indicators for the optimal value of γ is presented in table 5.

Indicators	New portfolio	with $\gamma = 8,76$	evolution
BEL	2295,39 M€	2292,4 M€	-0,1%
Solvency ratio	193,7%	197,01%	+3,4%
SCR	116,1 M€	115,8 M€	-0,24%
SCR_{life}	14,4 M€	14,18 M€	-1,5%
SCR_{market}	101,2 M€	101,22 M€	+0.02%
$PVFP$	23,94 M€	27,55 M€	+15%

Table 5: Impacts of the second managment action on indicators

An important limit to this management action is the assumption made on the distribution of the part euro funds/units of account which will change the optimization of γ because it's directly linked to the priority functions. Moreover, this function had been chosen arbitrarily in order to make studies, but a lot of functions could also have been suitable.

The previous results don't show yet the fact that this policy could encourage insureds to switch their capital from the euro funds to units of account. Howerver, it's impossible to predict their reaction and their behavior. That's why additional studies are done, showing that the solvency ratio can improve further if there is a stronger switch of capital from the euro funds to units of account.

This management action allows an improvement of the solvency ratio, which is lower than for the one given by first management action because it's a policy that doesn't include any additional costs. Whereas the new euro fund does.

A method to aggregate management actions

Once the analysis of the two levers has been carried out, it is interesting to think about a new way to determine the optimal pair (α, γ). These numbers are not necessarily the same as those computed previously on the study of each management action independently.

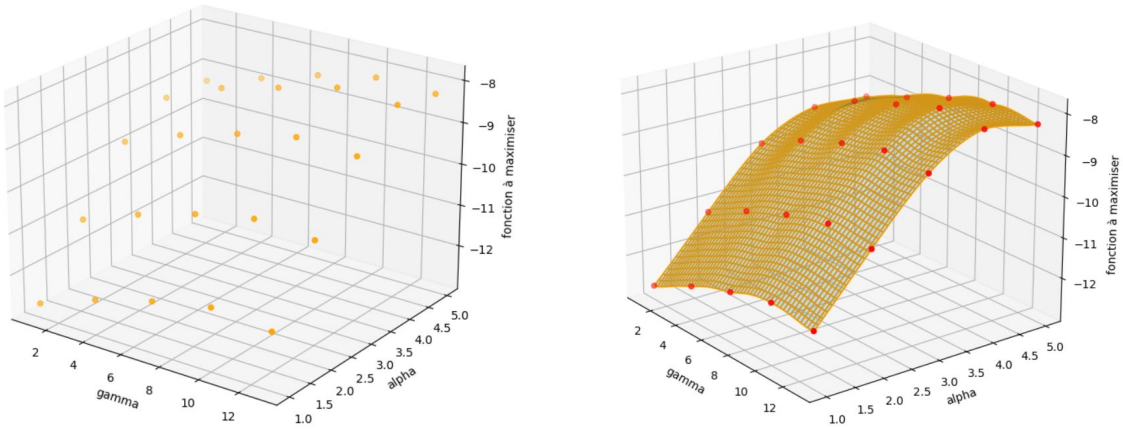
In order to aggregate two management actions or more, there are methods such as the naïve method and the management action by management action method. The first one consists in studying all the management actions options given that allow us to do a better optimization of the overall result,

but to exponential computing time and therefore this method is not used. The second one, which is the most used, consists in optimizing one management action, then begining with this optimization to study a second management action and so forth. This method is fast, but it's likely to get a local result because all possible combinations are not tested.

This thesis suggests an interpolation method in various dimensions, the main goal here is to find a solution which is close to an optimal overall result and not having much computation to do than the first method presented.

The first step consists in choosing an interpolation method. Management actions consequences on solvency's indicators are not known before studying them, it's not appropriate then to use the Lagrange interpolation because of Runge phenomenon. Indeed, on the Lagrange interpolation of some functions, the interpolation error increases with the degree of the polynomial interpolation. Cubic splines interpolation is chosen in order to aggregate management actions because in either case, it allows a better interpolation.

The interpolation method in 3 dimensions is implemented using Python with the aim of studying both management actions presented above. However, assumptions must be taken concerning the two management actions for the purposes of applying this method. For example, the cost function used in scenario 3, the function to optimize at T=5 years and assumptions about new business are the same as those of the first management action. Similarly, the new distribution of the part euro funds/units of account and function priority of the second management action stay the same.



(a) Interpolation points of initial surface

(b) Top view of final interpolation

Figure 4: Results of interpolation method for the two management actions

The recollected data using a gradient descent on the surface shows that it is possible to have less computing time than the first aggregating method and to find a better optimization than the one obtained in the second method as shown in figure 6. This various dimensions interpolation can be generalized to the aggregation of N management actions by going from a 3-dimensional interpolation to an N+1 dimensional interpolation.

This method has its own limits because of each management action which will be more and more plentiful with the increasing of management actions. Moreover, it requires that the management actions can be studied at the same time and could possibly give interpolation errors if the number of points to be tested is too small.

Method used	function to be maximized	number of simulations	Computation time
first aggregating method		481 601	around 20 000 days
second method	-1,60%	10	10 hours
interpolation method	-1,50%	25	around 1 day

Table 6: Performance of the different methods

Potential deepenings

Developments of the ALM model have been made such as the possibility of moving capital from one fund to another, these developments allow better accuracy on studies. Other improvements like the addition of bonds rating or of reserves like PDD could have permitted an upgrade of our vision of the impacts.

Two management actions have been studied in this thesis. A study on more management actions such as a new asset allocation or a better managment on unrealised gains or losses would have made it possible to observe whether or not all the management actions would, in theory, compensate the low interest rate environment. In addition to this, the interpolation method could have had an even stronger impact by revealing unexpected joint effects between the various management actions, therefore showing how this method is useful. Finally, other solvency indicators or even studies on profitability could supplement what was done in this thesis.

Conclusion

The impact of the low interest rate environment is a huge issue for life insurers with a euro fund. A significant inertia requires to anticipate as much as possible the management actions. In fact, setting up some management actions, such as the new generation euro fund or getting a higher proportion of units of account, may take time. Thus, it is critical for insurers to act against low rates.

Studies on the two management actions have shown that it is possible to improve insurer's solvency, although they do not fully compensate in a world with low rates. The interpolation method made possible to get the most out of the each management action studied simultaneously. These results are optimistic because of the aggregation of a bigger number of management actions could theoretically totally compensate the low interest rate environment.

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps Christophe Eberlé, président d'Optimind, pour m'avoir permis de réaliser mon stage au sein de son entreprise ainsi que l'ensemble des membres de la practice Actuarial Financial Services pour leur accueil.

Je remercie plus particulièrement mes encadrants, Amine Ourraoui, Guillaume Gillot et Pierre Poret pour leurs conseils, leurs idées ainsi que le temps qu'ils ont pu me consacrer. Je remercie également mon tuteur académique Quentin Guibert pour sa disponibilité et ses nombreux retours qui ont contribué grandement à l'avancement de ce mémoire.

Merci égalementà mes collègues stagiaires Clara Kibler, Arthur Pelle, Bisous Razafindrabary, Florian Montmeat ainsi que les actuaires consultants pour leur bonne humeur au quotidien.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de ma famille, mes amis ainsi que Bertille pour leur soutien sans faille.

Table des matières

Résumé **3**

Abstract **4**

Note de Synthèse **5**

Synthesis note **11**

Remerciements **17**

Table des matières **19**

Introduction **23**

1 L'assurance-vie, réglementation et notions importantes **25**

1.1 Généralités sur l'assurance-vie et l'épargne 25

1.1.1 Présentation de l'activité 25

1.1.2 Les différents contrats en assurance-vie 26

1.1.3 La tridimensionnalité des contrats 28

1.1.4 La constitution de l'épargne 30

1.1.5 La restitution de l'épargne 30

1.1.6 Le provisionnement 31

1.1.7 Les principaux risques en assurance-vie 32

1.2 La réglementation Solvabilité 2 34

1.2.1 Description et intérêt de Solvabilité 2 34

1.2.2 Les trois piliers de Solvabilité 2 35

1.2.3 Calcul des différents indicateurs de solvabilité 35

1.2.4 Le ratio de solvabilité 40
1.3 Le contexte des taux bas 41
1.3.1 La situation économique et ses conséquences sur l'épargne 41
1.3.2 Les solutions pour faire face à ce contexte économique 43

2 Présentation du modèle ALM épargne et du portefeuille étudié 47

2.1 Présentation du modèle ALM utilisé 47
2.1.1 Les générateurs de scénarios économiques 47
2.1.2 La modélisation du passif 51
2.1.3 La modélisation de l'actif 51
2.1.4 Le fonctionnement d'ensemble du modèle 52
2.2 Les différentes hypothèses du modèle 52
2.2.1 Implémentation des rachats 53
2.2.2 Implémentation de l'arbitrage 55
2.2.3 Politique de participation aux bénéfices 58
2.2.4 Stratégie d'investissement 59
2.3 Caractéristiques de la société type 59
2.3.1 L'actif 60
2.3.2 Le passif 61
2.4 Résultats du modèle sur le portefeuille moyen 62
2.5 Limites du modèle 65

3 Leviers d'optimisation sur les différents indicateurs 67

3.1 Les contrats euros nouvelle génération 67
3.1.1 Protocole et hypothèses 67
3.1.2 Résultats obtenus 71
3.1.3 Limites de ce levier 75
3.1.4 Un gain pour l'assureur et pour l'assuré 76
3.1.5 Études de sensibilité sur l'hypothèse de New-Business 78
3.2 Politique du taux servi 78
3.2.1 Protocole et hypothèses 79
3.2.2 Résultats obtenus 83

3.2.3 Limites de ce levier et pistes d'amélioration 87

4 Agrégation des différents leviers **91**

4.1 Théorie sur la méthode d'interpolation 91

4.1.1 Le phénomène de Runge 91

4.1.2 L'interpolation par splines cubiques 92

4.1.3 Le problème de maximisation 95

4.1.4 Limite du modèle théorique 97

4.2 La méthode en dimension 3 98

4.2.1 Interpolation en dimension 3 98

4.2.2 Analyse des résultats 99

4.3 Limites de la modélisation et améliorations possibles 103

4.3.1 Les limites de l'application du modèle 103

4.3.2 Approfondissements possibles 104

Conclusion **107**

Bibliographie **108**

A Annexes **111**

A.1 Détails sur la logique floue appliquée à l'arbitrage 111

A.1.1 Les ensembles flous 111

A.1.2 Fonctions d'appartenance 112

A.1.3 matrices de décision 112

A.2 Résultats sur les différentes méthodes d'interpolation 112

A.2.1 Application des splines pour le levier 1 113

A.2.2 Tableaux nécessaires à la construction des points d'interpolation 114

Introduction

Suite à la crise financière de 2008 et à la crise de la dette dans la zone euro en 2010, la politique monétaire de la Banque centrale européenne a consisté à baisser les taux directeurs pour maintenir un taux d'inflation proche de 2% en Europe. Alors que les fonds en euros représentent une majorité de l'épargne des Français, cette baisse des taux est la cause de la chute des rendements du fonds en euros car ce dernier est investi en grande partie dans des obligations. Ce contexte économique marque la fin d'une ère pour l'assurance-vie qui subira des changements dans un futur proche afin de s'adapter à la conjoncture. En effet, la solvabilité des assureurs s'est détériorée ces dernières années et une période de taux bas durable ou de taux négatifs pourrait amener les assureurs à ne plus respecter les exigences quantitatives relatives à la directive Solvabilité 2. Afin de lutter contre ce contexte économique difficile, un arrêté ministériel datant de décembre 2019 autorise les assureurs à intégrer une partie de leur provision de participation aux bénéfices afin d'améliorer leur solvabilité.

Cependant, cette mesure ne fait que donner du temps aux assureurs pour mettre en place d'autres leviers. Ces derniers innovent donc en proposant des nouveaux contrats comme l'eurocroissance en 2014 ou plus récemment avec la mise en place d'un nouveau fonds en euros. Les assureurs ont également commencé à orienter leur collecte vers les unités de compte afin de transférer le risque vers les assurés. Une gestion efficace de leur provision pour participation aux bénéfices dans le but de lisser les taux servis aux assurés dans le temps et des optimisations concernant l'achat et la vente des actifs peuvent aussi permettre de lutter contre les taux bas. Il existe d'autres leviers comme des changements de stratégie sur l'allocation des actifs pour optimiser le couple rendement/risque du portefeuille ou encore des politiques commerciales ayant pour but de réduire l'exposition des portefeuilles aux risques des taux bas.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier des leviers potentiels pour les assureurs du secteur de l'assurance-vie afin de contrôler leur solvabilité dans ce contexte de taux bas. Les études ont été menées sur un portefeuille fictif ayant pour objectif de répliquer celui d'un assureur commercialisant des contrats multisupports.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres. Le premier reprend les notions importantes de l'assurance-vie, les réglementations auxquelles sont soumis les assureurs et pose le contexte économique actuel. Le second présente le modèle ALM utilisé pour les études ainsi que les données du portefeuille exploitées. Ensuite le chapitre 3 porte sur l'analyse des effets de deux leviers dont disposent les assureurs. Le premier est la mise en place d'un nouveau contrat fonds en euros dont le principe est de réduire la garantie du capital de l'assuré pour pouvoir investir de manière plus risquée. Cette prise de risque peut alors permettre de meilleurs rendements et être un gain potentiel à la fois pour l'assureur et pour l'assuré. Le second est la refonte de la politique de distribution de la participation aux bénéfices discrétionnaire dans le but double de contrôler les rachats et d'inciter les assurés à arbitrer vers les unités de compte. Dans le dernier chapitre, un modèle sera proposé pour agréger plusieurs leviers en simultanément de manière à optimiser leurs résultats et les temps de calculs associés.

Chapitre 1

L'assurance-vie, réglementation et notions importantes

1.1 Généralités sur l'assurance-vie et l'épargne

1.1.1 Présentation de l'activité

Il est question d'assurance lorsqu'un souscripteur paie une somme d'argent appelée prime pour transférer un risque que court un assuré à un assureur qui devra verser une prestation auprès d'un ou plusieurs bénéficiaires s'il y a une réalisation de ce risque.

Le bénéficiaire, le souscripteur et l'assuré peuvent être la même personne ou des personnes complètement différentes.

L'assurance-vie est un cas particulier de l'assurance où le risque repose sur le décès ou la survie de l'assuré. De ce fait il est question de branche longue car la durée de vie du contrat peut aller jusqu'à des dizaines d'années. Comme tout commerce confrontant un vendeur et un acheteur, représenté ici respectivement par l'assureur qui vend des contrats et l'assuré qui en achète, chaque partie attend quelque chose de ce commerce :

- **Intérêts pour les assurés :** L'assurance-vie est généralement présentée comme le placement préféré des français avec près de 1800 milliards d'euros d'encours, une des raisons principales à cela est l'ensemble des avantages fiscaux que représente ce secteur. En effet, il existe des avantages au niveau de la fiscalité sur le revenu ou encore sur l'héritage.

  En complément des avantages cités ci-dessus, cette activité permet aux assurés d'épargner, l'épargne est une somme qui n'est pas utilisée dans l'immédiat et qui est mise de côté. Il est question d'épargne liquide lorsque les sommes sont en espèces ou déposées sur des comptes comme le livret A ou d'épargne investie lorsque les sommes sont investies sur des placements. L'assurance-vie a pour but du point de vue des assurés non seulement d'épargner, mais aussi de faire fructifier leur capital grâce aux rendements obtenus suite aux investissements effectués.

- **Intérêts pour les assureurs** : La rémunération des assureurs provient de manière générale du transfert du risque de l'assuré vers l'assureur.

Dans le contexte plus spécifique de l'épargne, les gains de l'assureur sont principalement liés à une partie des gains des investissements et à des chargements provenant des primes, de la gestion des contrats ou de la restitution de l'épargne. Tous ces éléments sont fixés dans les contrats et sont fréquemment différents d'un assuré à un autre.

D'après le site de la Banque de France (2020c) l'encours de l'épargne en France au premier trimestre 2020 est de 5 186,7 milliards d'euros, ce chiffre est en hausse moyenne de plus de 4 % par an depuis 2012 ce qui montre la part importante de l'épargne dans "l'éducation financière" des Français. De plus le taux d'épargne par rapport aux revenus bruts disponibles est au premier trimestre 2020 de 15,7 %, ce taux est supérieur à la majorité des taux observés dans les autres pays.

L'assurance-vie représente une partie de l'épargne investie et est le mode d'épargne le plus utilisé par les français car il représente à lui seul près de 40 % de l'épargne totale en France en 2020. En comparaison l'épargne réglementée regroupant les plus de 55 millions de livrets A, les livrets bleus, les livrets d'épargne populaire, les livrets jeunes et d'autres livrets ne représentent que 15 % de l'épargne totale en 2020.

1.1.2 Les différents contrats en assurance-vie

Il existe deux grandes "familles" de contrat en assurance-vie :

- Les contrats en cas de vie :

  Ici, c'est le fait que l'assuré reste en vie qui va déclencher les prestations de l'assureur, voici les principaux contrats existants et leurs caractéristiques :

  Les contrats de retraite ou d'épargne : L'assuré va verser des primes périodiques, libres ou une prime unique, en échange l'assureur lui versera un montant qui peut être réparti sur une durée fixée ou jusqu'au décès de l'assuré. Pour la retraite, c'est la mort qui met fin au contrat tandis que pour l'épargne, il s'agit du moment où l'assuré récupère son épargne.

  Les contrats de capital différé : L'assuré va verser des primes périodiques, libres ou une prime unique, en échange l'assureur versera un capital si l'assuré est en vie à la date de fin du contrat déterminée dans ce dernier.

- Les contrats en cas de décès :

  La mort de l'assuré sera le déclenchement du versement de prestations, voici au même titre que les contrats en cas de vie les principaux contrats existants :

  Les contrats vie entière : L'assuré va verser des primes périodiques ou une prime unique, en échange l'assureur versera une rente ou un capital aux bénéficiaires. Le contrat prend fin suite au décès de l'assuré, le capital sera donc touché dans tous les cas.

  Les contrats assurance temporaire décès : Les caractéristiques de ces contrats sont les mêmes que celles des contrats vie entière à l'exception de la durée du contrat qui est fixée au préalable, le capital n'est donc pas assuré.

Les contrats d'épargne seront étudiés dans ce mémoire, ils se divisent majoritairement en deux

catégories :

- Les contrats monosupports :

  Par définition il s'agit de contrats dont le placement repose sur un unique support d'investissement. Ce support d'investissement peut être un fonds en euros ou une unité de compte.

  Les contrats en euros : Pour les contrats en euros il existe un TMG (Taux Minimum Garanti) sur les contrats qui correspond à un montant de revalorisation minimum, il est indépendant des évolutions des marchés financiers et l'assureur se doit de reverser ce taux chaque année dans tous les cas. La garantie est donc un certain montant. Schématiquement si un assuré verse 100 euros avec un taux minimum garanti de 1%, son capital au bout d'un an sera de 101 euros minimum.

  Le risque est ici porté par l'assureur qui s'engage à verser une certaine somme, le rendement de ce type de contrat est faible surtout ces dernières années. La part concernant le fonds en euros reste majoritaire en épargne car les Français sont généralement averses au risque et préfèrent un rendement plus faible à un risque de perdre du capital.

  Les contrats en unités de compte (UC) : L'investissement est effectué sur des supports financiers. La garantie peut être un nombre de parts de supports financiers. Si un assuré verse 100 euros qui sont investis en 4 parts à 25 euros d'une action, un assuré recevra au terme du contrat la valeur de ces 4 actions et peut donc se retrouver avec un capital plus faible qu'à l'instant initial.

  Le risque est donc porté par l'assuré, en contrepartie le rendement moyen est supérieur à un contrat en euro. Le contrat est monosupport si l'épargne est investie sur une seule unité de compte.

  Des contrats plus récents émergent comme l'eurocroissance pour assurer un rendement intéressant à l'assuré tout en n'étant pas risqué pour ce dernier, cependant le capital investi est bloqué pendant une certaine période.

- Les contrats multisupports :

  Il existe également des contrats dits **multisupports** qui proposent une partie en euro et une partie en UC, le risque est alors porté à la fois par l'assureur et par l'assuré et le rendement moyen est supérieur à celui du contrat en euros.

  Pour les contrats multisupports, l'assuré doit choisir un mode de gestion pour l'aider ou non à gérer son contrat entre les différents fonds d'investissement. Les modes de gestion les plus courants sont les suivants :

  - La gestion libre dans laquelle l'assuré est le seul à décider quels sont les supports d'investissement et quelle est la part d'euros ou d'UC qu'il va détenir. Ce mode de gestion est déconseillé aux personnes ne connaissant pas bien le secteur de l'assurance-vie.
  - La gestion pilotée qui ressemble à la gestion libre dans laquelle l'assureur propose des options à l'assuré. Ces options peuvent lui permettre de ne pas descendre en dessous d'un certain montant de perte ou de sécuriser des gains par exemple.

- La gestion profilée est une gestion faite par l'assureur et dépendant du profil de risque de l'assuré. Si l'assuré est averse au risque l'investissement aura une grande part sur le fonds Euro. Au contraire, un assuré qui prendra plus de risques et qui aura une part d'UC plus importante.

- La gestion à horizon est une gestion pour les contrats de longues durées, l'objectif étant d'avoir un investissement de moins en moins risqué plus on s'approche de la fin du contrat.

- La gestion sous mandat qui est laissée à un organisme privé ou à l'assureur, l'assuré n'a donc aucun pouvoir sur l'investissement dans les différents fonds.

1.1.3 La tridimensionnalité des contrats

Cette section se place du point de vue de l'assuré, d'après la présentation des principaux contrats, ces derniers peuvent être représentés par un triplet (a,b,c) où a est la valeur de rendement, b celle du risque et c celle de la disponibilité. Les valeurs de ce triplet sont quantitatives, elles ont été fixées entre 0 et 1 pour l'explication mais ces valeurs sont arbitraires. Plus le rendement s'approche de 1 plus l'assuré fera des bénéfices, plus le risque se rapproche de 1 plus le risque sera du côté de l'assureur et plus la disponibilité se rapproche de 1 plus l'assuré disposera de son épargne à n'importe quel moment. Les valeurs a, b et c dépendent de chaque assuré, par exemple deux assurés ayant un contrat de disponibilité 0,5 ne vont pas considérer une disponibilité moyenne de la même manière. Pour le premier une disponibilité de 0,5 peut correspondre à 2 ans pendant lesquels l'épargne est indisponible et peut correspondre à 5 ans pour le second.

Les contrats évoluent dans un espace en trois dimensions dans la figure 1.1. Les valeurs sont données à titre indicatif et les contrats sont placés de sorte à respecter leur description de la section précédente. Le contrat euro possède un triplet (0,1,1), les contrats multisupports (0.5,0.5,1), le contrat eurocroissance (1,1,0) et les contrats en UC (1,0,1). En théorie, le contrat multisupport pourrait être représenté par plusieurs triplets, suivants la proportion des différents supports.

L'assuré cherchera donc à maximiser ces trois variables. D'après cette vision des contrats, il est possible de penser que les contrats qui peuvent théoriquement exister forment un plan dont la somme des variables du triplet (a,b,c) est égale à 2 comme représenté par la figure 1.2a dans cet exemple. La réalité est bien plus complexe car le choix des contrats dépend de nombreux facteurs tels que l'aversion au risque des assurés ainsi que le besoin de chaque personne qui est différent.

Cependant on imagine facilement qu'il n'est pas possible de mettre en place un contrat parfait qui aurait un rendement de 1, un risque de 1 et une disponibilité de 1 car il n'est pas possible que ce contrat soit rentable pour l'assureur. En réalité les contrats "vivent" dans un plan avec des "creux" et des "bosses" comme le montre la figure 1.2b.

Chaque point correspond donc à des contrats qu'il serait en théorie possible de commercialiser possédant des caractéristiques différentes, des chargements et des TMG plus ou moins importants qui jouent sur la rentabilité, des fonds différents qui vont faire varier le risque et des durées pendant lesquelles le capital sera bloqué qui vont impacter la disponibilité. Ces points sont placés de manière arbitraire pour montrer la diversité réelle des contrats, ce mémoire se concentrant sur la mise en place d'un de ces contrats.

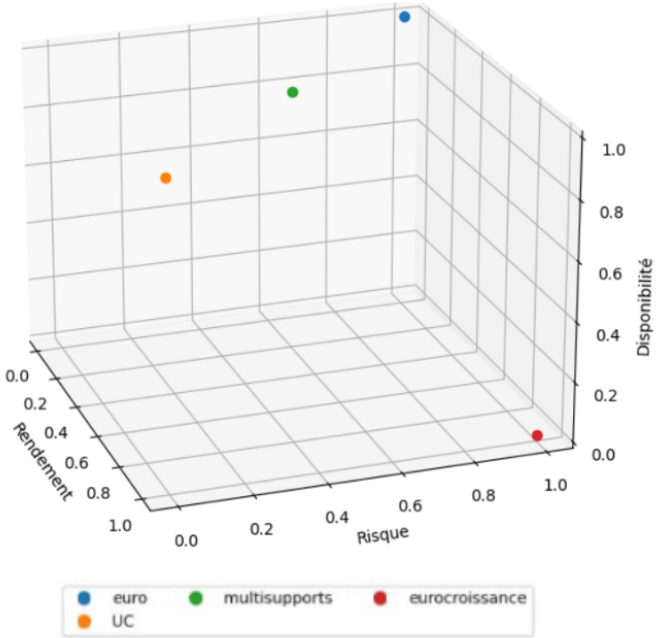
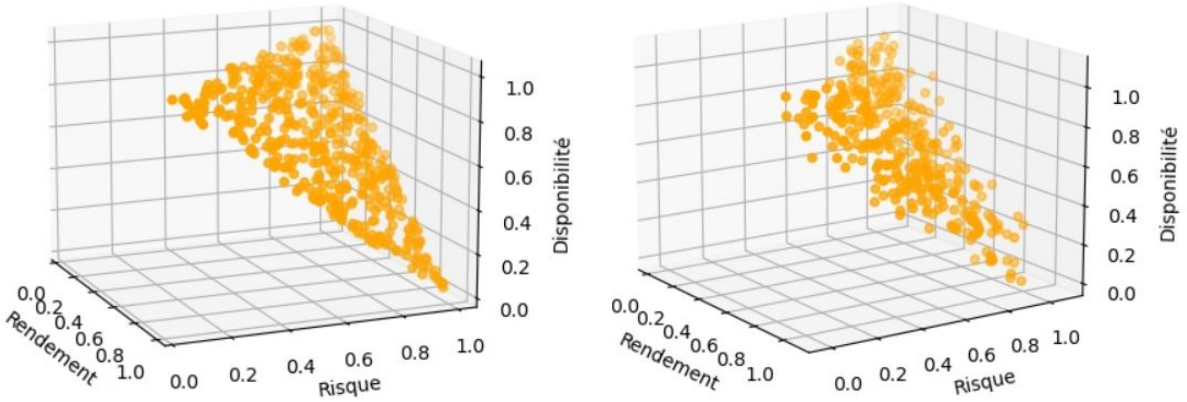


FIGURE 1.1: Les différents types de contrats existants



(a) Idée reçue (b) Réalité

FIGURE 1.2: Environnement des contrats

1.1.4 La constitution de l'épargne

La constitution est la genèse de l'épargne, il s'agit de la période durant laquelle l'assuré va verser une ou plusieurs primes afin de constituer son capital. On parle de prime unique pour un versement en une seule fois, de primes périodiques pour des versements qui respectent un échéancier ou alors de primes libres pour des versements choisis par l'assuré (qui doivent quand même respecter certains critères prévus dans le contrat).

La somme qu'un assuré va donner ne sera pas la même que celle qui sera placée sur les fonds d'investissement. Les frais de versement sont la cause de ce phénomène et sont généralement assez faibles (entre 0% et 5% majoritairement). Ainsi pour un versement de 100 euros avec des frais de versement de 1%, 99 euros seront investis.

Les chargements sur encours (aussi appelés frais de gestion) sont des qui s'appliquent de manière périodique à l'ensemble de l'investissement de l'assuré. Ces chargements sont majoritairement inférieurs à 1% et servent à rémunérer l'assureur qui gère les contrats. En moyenne les frais de gestion pour les contrats en euros sont inférieurs aux frais de gestion des contrats en UC.

L'épargne sera également revalorisée chaque année pour la part en euros grâce au TMG et à la participation aux bénéfices, pour la part en UC elle sera revalorisée grâce à l'évolution de la valeur liquidative des unités de compte. La participation aux bénéfices (PB) est un principe clé de l'assurance-vie. Il s'agit d'un montant minimum que l'entreprise doit reverser à ses assurés au titre des bénéfices réalisés, son calcul est le suivant.

$$Participation\ minimale\ aux\ bénéfices = Participation\ au\ solde\ technique +$$

$$Participation\ au\ solde\ financier - Intérêts\ techniques.$$

La participation au solde technique vaut 90 % du bénéfice technique (si positif) ou 100 % de la perte technique (si négatif). La participation au solde financier est de 85% du bénéfice financier (si positif) ou nulle (si négatif). Les intérêts techniques correspondent aux montants reversés avec le TMG.

Certains contrats d'épargne sont caractérisés par un taux de PB contractuel qui donne lieu à un montant à reverser obligatoirement chaque année. Dans un second temps le montant restant sera en partie reversé aux assurés et viendra alimenter une provision énoncée par la suite. La partie reversée aux assurés est choisie suivant la volonté de l'assureur, ce montant est appelé participation aux bénéfices discrétionnaire.

Au terme de cette phase de constitution l'assuré aura obtenu un certain montant appelé le capital.

1.1.5 La restitution de l'épargne

La restitution est l'étape qui vient après la constitution de l'épargne, l'assureur doit alors reverser le capital accumulé à l'assuré. Les assurés peuvent disposer de leur épargne au terme du contrat ou parfois avant l'échéance de ce dernier que ce soit de manière partielle ou totale, deux types de restitution sont alors possibles :

- **La sortie en rente** qui peut être viagère (jusqu'au décès de l'assuré) ou non, il est alors question de contrats épargne-retraite. Si la rente est viagère, il se peut que le montant perçu par l'assuré soit supérieur ou inférieur au montant accumulé par ce dernier, il existe des options en cas de décès pour reverser une partie de la rente à son conjoint par exemple.

  La rente est calculée à l'aide d'une table de mortalité qui indique les probabilités de décès entre deux âges. Il faut également tenir compte du facteur temps de l'argent, la valeur d'un euro dans un an n'est pas la même que la valeur d'un euro aujourd'hui, il est alors question d'actualisation ou de capitalisation. Le calcul de la prime pure fait donc intervenir la VAP (Valeur Actuelle Probable) prenant en compte le facteur d'actualisation, noté i dans la littérature, qui est calculé à partir du TME (Taux Moyen d'emprunt d'État).

  Exemple de calcul de rente : Un assuré a 65 ans et décide de recevoir son capital de 100 000 euros sous forme de rente viagère, la calcul de sa rente est le suivant.

$$100000 = R \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{65+k}}{l_{65}} \times (\frac{1}{1+i})^k.$$

  R est le montant de la rente, l_k correspond au nombre de personnes restantes à l'âge k sur un groupe d'individus, ainsi $\frac{l_{66}}{l_{65}}$ correspond à la probabilité de mourir entre 65 et 66 ans. Ces valeurs peuvent se lire dans les tables de mortalité et il existe des nombres de commutation qui servent à simplifier les calculs.

  Généralement le montant des rentes viagères est calculé à partir des tables de mortalité des femmes car les assureurs appliquent un principe de prudence.

- **La sortie en capital** permet à une date donnée de reprendre tout ou partie de son capital et est soumise également à une fiscalité suivant des règles précises. Lors de sorties en capital périodiques, la différence avec la rente est que le capital diminuera au fur et à mesure et ne sera pas un montant dû par l'assureur, le capital peut donc s'épuiser.

  Le choix de sortie en capital est intéressant pour des assurés souhaitant obtenir leur capital immédiatement que ce soit pour un projet particulier ou des raisons personnelles. Le choix de sortir en rentes est généralement utilisé pour les assurés souhaitant gonfler les rentes de leur retraite.

Il existe également des sorties mixtes qui consistent à reprendre une proportion α en sortie en capital et une proportion $1 - \alpha$ en rentes viagères. Le choix de la restitution dépend donc entièrement des besoins des assurés.

1.1.6 Le provisionnement

Les primes versées par les assurés sont investies par l'assureur dans des obligations (qui sont des titres émis par les entreprises ou les Etats pour emprunter de l'argent), des actions cotées en bourse ou non, des OPCVM (Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières) ou encore dans l'immobilier.

Les entreprises doivent chaque année établir un bilan qui est un tableau contenant l'actif (ce que l'entreprise détient) et le passif (ce que l'entreprise doit). Dans ce bilan figurent également les fonds

propres, il s'agit de la richesse accumulée par l'entreprise. Plusieurs provisions se situent au passif de ce bilan, parmi elles :

- **La provision mathématique** qui correspond à ce que doit probablement l'assureur à l'assuré. Elle est calculée comme $PM(t) = VAP(Assureur) - VAP(Assuré)$. En pratique cette valeur ne peut pas être négative car en assurance-vie l'assuré a le droit de résilier son contrat à tout moment. On doit donc calculer pour chaque contrat la PM pour avoir la PM totale qui sera inscrite au bilan.
- **La provision pour participation aux bénéfices ou la provision pour participation aux excédents**, aussi notées PPB ou PPE, respectivement utilisées pour les assureurs et pour les mutuelles, utilisent le principe de participation aux bénéfices décrit précédemment.
  L'assureur peut décider soit de distribuer la participation aux bénéfices d'une année donnée, soit de doter la PPB. Le montant alloué à la PPB devra alors être distribué sous 8 ans, cette stratégie est usuellement adoptée par les assureurs pour lisser le montant de participation aux bénéfices et ainsi satisfaire les assurés de manière continue dans le temps.
- **La provision pour aléa financier (PAF)** est destinée à couvrir une baisse de rendement de l'actif. Cette baisse étant un danger pour les engagements de l'assureur envers ses assurés, si elle dépasse un certain montant l'assureur doit doter la PAF pour combler cette baisse de rendement. Cette provision ne concerne pas les contrats en unités de compte.
- **La provision globale de gestion (PGG)** est destinée à couvrir les frais de gestion non prévus dans la tarification et se calcule par groupe de contrats. Elle complète la PM et la valeur probable des frais est prise en compte dans cette dernière.
- **la provision pour risque d'exigibilité (PRE)** concerne les actifs spécifiés dans l'article R343-10 du Code des assurances. La PRE sera dotée si la valeur nette comptable de l'ensemble de ces actifs est supérieure à la valeur de marché des actifs totale. Le montant doté dépend de cette différence et des caractéristiques des actifs.

Il existe également des provisions liées à l'actif comme **la provision pour dépréciation durable (PDD)** destinée à couvrir une baisse durable de la valeur des actifs non-obligataires. Contrairement à la PRE cette provision est calculée non pas sur l'ensemble des actifs concernés mais ligne à ligne.

La réserve de capitalisation est une réserve qui doit être mise en place par tous les assureurs. Elle est dotée quand une entreprise réalise une plus-value sur une obligation et est reprise en cas de moins-value. Plus cette réserve est élevée, plus l'entreprise sera protégée contre une hausse des taux d'intérêt. Cette réserve pousse l'assureur à ne pas vendre des obligations en cas de baisse des taux pour réaliser des bénéfices, afin de ne pas avoir à investir sur des obligations avec des rendements plus faibles.

1.1.7 Les principaux risques en assurance-vie

L'assurance-vie est une activité risquée du fait de son caractère aléatoire. Deux groupes de risque se distinguent, parmi eux le risque de souscription qui représente les risques liés aux contrats assurés. Dans le risque de souscription, il y a dans un premier temps l'assuré qui possède des droits et des options concernant son contrat. Le comportement qu'adoptera celui-ci est difficilement modélisable et peut représenter un risque conséquent pour l'assureur.

Il existe une option relative aux contrats d'épargne qui est **l'option de rachat**. Elle permet à l'assuré de retirer son épargne (ou une partie) à n'importe quel moment, ce qui est un risque majeur pour un assureur car il peut se retrouver à vendre des investissements à une valeur inférieure à leur valeur d'achat. Ainsi, de grosses vagues de rachats peuvent causer la faillite des assureurs s'ils n'y sont pas préparés. Executive Life, une compagnie d'assurance-vie américaine, a réalisé "une moins-value sur l'ensemble du portefeuille à l'actif de 2,6 milliards de dollars" suite à des rachats massifs d'après l'article de François de Varenne (1998). Ces rachats massifs sont la conséquence d'une perte de confiance des assurés suite à la réalisation de moins-values sur le portefeuille.

Il y a une distinction entre les rachats structurels et les rachats conjoncturels. Les premiers sont modélisés à partir d'études statistiques sur les portefeuilles, les assurés rachetant leurs contrats à des moments où la fiscalité est avantageuse par exemple. Ils dépendent alors entièrement des caractéristiques des assurés et de leurs contrats. Les seconds dépendent du contexte économique, du taux de participation aux bénéfices servi aux assurés, des taux de revalorisation du marché et de nombreux autres paramètres. Ils sont difficiles à modéliser à partir de données car il n'existe pas d'historique de contextes économiques avec de nombreuses crises par exemple.

La baisse des rachats est également un risque à prendre en compte pour les assureurs. Dans une période où les taux sont bas les assureurs vont devoir continuer à revaloriser les contrats et donc investir beaucoup dans des rendements faibles. Certains contrats d'assurance-vie ne sont pas rachetables pour éviter des problèmes d'anti-sélection (comme les contrats de retraite).

Une autre option que les assurés possèdent est **l'option d'arbitrage**. Elle est inhérente aux contrats multisupports et permet à l'assuré de changer le pourcentage d'UC et d'euros de son contrat, ainsi si l'UC se porte bien il peut prendre le risque d'investir plus sur de l'UC et inversement avec l'euro. Le risque est alors pour l'assureur de se retrouver avec une vague d'arbitrage vers l'euro, mettant en danger sa solvabilité. De même que pour l'option de rachat, il existe des arbitrages dits structurels ou conjoncturels. Des chargements peuvent être appliqués par exemple lors d'un arbitrage vers l'euro pour palier à ce risque.

Le risque de souscription est également composé de risques qui proviennent des assurés mais qui sont indépendant de la volonté de ces derniers.

Le risque de mortalité et **le risque de longévité** ne doivent pas être négligés en épargne car ils peuvent respectivement avoir les mêmes conséquences que les hausses des rachats et les baisses des rachats. En effet, si la mortalité est importante l'assureur devra reverser plus rapidement que prévu le capital et la situation est semblable à une hausse des rachats. Si la mortalité est moins importante il y a alors plus d'assurés dans le portefeuille ce qui est semblable à une baisse des rachats. Les conséquences seront sensiblement les mêmes mais les catégories d'assurés touchés pas nécessairement, le risque de longévité est par exemple plus dangereux pour un assureur possédant des assurés âgés tandis qu'une baisse des rachats peut toucher n'importe quel portefeuille, possédant des assurés d'âges différents.

Il existe également des risques qui ne sont pas liés aux choix des assurés mais liés aux marchés financiers. Si la valeur des actifs du portefeuille d'une compagnie d'assurance se dégrade, cette dernière pourrait ne pas être en mesure d'honorer ses contrats. Ces risques forment le deuxième grand groupe de risque qui est appelé le risque de marché.

Un des risques majeurs ici est **le risque de taux**. Il existe un risque "double" si les taux remontent car la valeur des obligations détenues sera alors diminuée et cela pourrait éventuellement entraîner des

vagues de rachats. Les rachats impliqueraient alors une perte pour les assureurs qui devraient vendre leurs obligations. Si les taux baissent et de manière durable, il est possible que l'assureur ait du mal à servir des taux hauts sur des contrats plus anciens possédant des TMG importants. Des taux qui restent bas de manière durable ont déjà causé la faillite de plusieurs assureurs notamment au Japon avec la faillite de Nissan Mutual Life en 1997 ou encore de Tokyo Mutual Life en 2001 dont les cas sont recensés dans l'article de l'ACPR (2014).

Certains risques peuvent dégrader la valeur des actifs possédés tels que **le risque sur l'immobilier** et **le risque action** qui sont associés respectivement à une variation du prix de l'immobilier et à une variation du prix des actions. La crise de 2008 est un exemple concret de ce genre de risque avec la compagnie d'assurance AIG qui a perdu environ 100 milliards de dollars cette année d'après l'article de Rinny Gremaud (2009). **Le risque de spread** qui correspond à une diminution de la valeur de certains actifs suite à une variation du spread de crédit est un risque lié aux actifs. Le spread de crédit est une prime qui tient compte du risque d'un actif par rapport à un actif non risqué, ce risque dépend majoritairement des obligations émises par les entreprises.

En dehors des deux grands groupes de risque présentés, il existe également des risques qui ne sont pas exclusivement liés au secteur de l'assurance tels que **le risque lié aux actifs incorporels** qui peuvent être liés à des procédés de fabrication et des brevets ou encore **le risque opérationnel** concernant le personnel (erreurs, fraudes...) ou des problèmes de sécurité et de logiciels.

1.2 La réglementation Solvabilité 2

1.2.1 Description et intérêt de Solvabilité 2

Les entreprises d'assurance et de réassurance sont soumises à de nombreuses réglementations notamment pour préserver les intérêts des assurés. Des régimes prudentiels ont été mis en place afin de protéger les assurés contre une faillite de leur assureur tel que le régime prudentiel Solvabilité 2, régime de niveau européen qui est effectif depuis le 1 janvier 2016 et qui succède au régime Solvabilité 1. Les textes relatifs à Solvabilité 2 sont disponibles sur le site de la Banque de France (2019).

Les principaux acteurs de Solvabilité 2 sont :

- La Commission Européenne qui est à l'initiative de cette directive.
- L'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) qui transmet des recommandations à la Commission Européenne sur l'évaluation des risques et contribue à faire évoluer le régime prudentiel.
- L'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) qui effectue des contrôles réglementaires.

Solvabilité 1 définissait un montant minimal de fonds propres à détenir suivant le portefeuille d'une entreprise appelé l'EMS (Exigence Minimale de marge de Solvabilité). Cependant ce montant ne dépendait ni de l'investissement d'une société, ni des caractéristiques des contrats. Le calcul était différent en assurance non-vie et en assurance-vie, pour cette dernière la marge de solvabilité détaillée dans l'article R334-13 du Code des assurances donne le calcul suivant pour la majorité des entreprises.

$$EMS = 4\%\ PM\ épargne \times ratio\ réassurance + 0.3\%\ capitaux\ sous\ risque \times ratio\ réassurance.$$

Deux assurances identiques sauf pour le TMG moyen des contrats qui serait de 1% dans la première et 5% dans la deuxième ont la même EMS d'après ce calcul, leur besoin en fonds propres n'est pourtant pas le même.

Deux assureurs identiques sauf pour l'allocation de leurs actifs auront également la même EMS alors que les actions qui sont plus risquées demandent un montant de fonds propres bien plus important que les obligations.

C'est pourquoi Solvabilité 2 propose des calculs de fonds propres en adéquation avec les risques d'une compagnie, en plus de proposer une harmonisation des règles à un niveau européen.

1.2.2 Les trois piliers de Solvabilité 2

Solvabilité 2 s'organise autour de 3 piliers, qui ont chacun une intention différente :

- Le pilier 1 : Des exigences quantitatives

  Il s'agit du pilier le plus important dans le cadre de ce mémoire car le pilier 1 détermine des exigences de solvabilité à respecter tels que le SCR (Solvency Capital Requirement) et le MCR (Minimum Capital Requirement) dont les calculs seront détaillés par la suite.

- Le pilier 2 : Des exigences qualitatives

  Il s'agit de dispositions concernant la gouvernance et la gestion des risques des entreprises. L'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) permet une meilleure gestion de la compagnie suivant ses propres risques et d'évaluer des risques qui n'étaient pas pris en compte par le pilier 1 comme le risque de réputation. Le risque de réputation est l'image que les personnes ont de l'entreprise, ce risque est réel car les assurés ne vont pas venir dans une entreprise dont ils ont eu des mauvais échos. Les analyses doivent venir compléter les résultats du pilier 1 et non les remplacer.

- Le pilier 3 : Reporting

  Ce pilier a pour objectif de rendre transparent des informations financières de la compagnie à la fois à destination du public et à destination des autorités de contrôle. Des rapports tels que les QRT (Quantitative Reporting Templates) ou les SFCR (Solvency and Financial Conditions Reports) doivent être publiés suivant un calendrier précis.

La figure 1.3 issue d'une formation en interne récapitule les trois piliers et leur contenu respectif.

1.2.3 Calcul des différents indicateurs de solvabilité

Les indicateurs de solvabilité vont influer sur le bilan de l'assureur, qui met en avant la situation financière de l'entreprise avec ce qu'elle possède à l'actif et ce qu'elle doit au passif. La figure 1.4 issue de la même formation que la figure précédente donne une présentation générale et agrégée de ce bilan.

Les placements sont constitués par exemple d'actions, d'obligations ou d'immobilier et correspondent en général à l'investissement des primes des assurés.

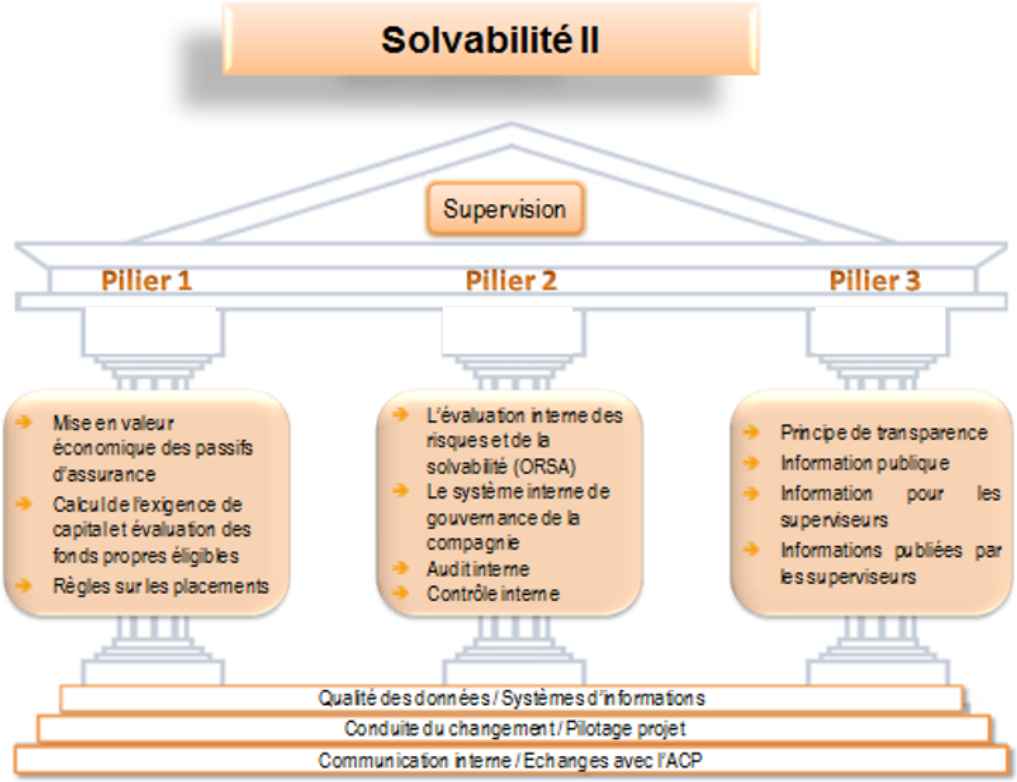


FIGURE 1.3: La directive Solvabilité 2

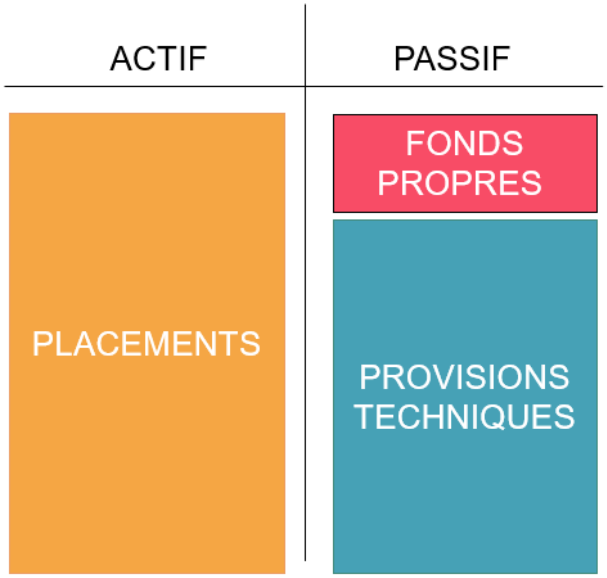


FIGURE 1.4: Bilan simplifié de l'assureur

Les provisions techniques correspondent aux provisions des assureurs pour respecter leurs engagements et les fonds propres à la différence entre les placements et les provisions techniques.

Un des objectifs de ce mémoire étant d'optimiser la solvabilité des assureurs, voici une présentation des indicateurs qui seront utiles pour les travaux effectués.

Le BEL

Le Best Estimate Liability (BEL) aussi appelé Best Estimate (BE) par abus de langage, correspond d'après l'article 77 de la directive du Parlement Européen et Conseil de l'Union Européenne (2009) à "la meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents."

En épargne et en retraite, son calcul est effectué grâce à des modèles ALM (Asset and Liability Management) dont le principe sera évoqué par la suite, l'objectif étant de capter les interactions entre l'actif et le passif. En effet, le montant que l'assureur devra aux assurés dépend de l'évolution des actifs car la revalorisation de l'épargne dépend de ces derniers. Le BEL doit être calculé le plus précisément possible et les hypothèses liées à l'actif et au passif doivent être réalistes.

Il faut également faire attention concernant le taux d'actualisation (donné par l'EIOPA) utilisé car une légère variation dans ce taux peut modifier considérablement le BEL.

La NAV

La NAV (Net Asset Value) correspond aux fonds propres de la compagnie et est calculée de la manière suivante.

$$NAV(t) = Actif(t) - BEL(t).$$

Actif(t) correspond à la valeur de marché des actifs à un instant donné.
BEL(t) correspond à l'indicateur étudié dans la section précédente.

La NAV est utile pour le calcul des SCR par module. Ce dernier représente l'impact d'un risque sur les fonds propres si l'assureur subissait un choc, ainsi la formule est la suivante pour les modules des SCR.

$$SCR_{module} = Max(NAV(t) - NAV_{choc}(t), 0).$$

Le MCR

Le MCR (Minimum Capital Requirement) est comme son nom l'indique, un montant de fonds propres minimum pour exercer l'activité d'assurance, il est calculé trimestriellement.

Il est obtenu en appliquant une formule concernant les primes et les provisions techniques données par l'ACPR dans le règlement délégué (UE) 2015/35 Commission Européénne (2014), il doit ensuite être ajusté pour se situer entre 25 % et 45 % du SCR et pour respecter un certain plancher suivant

l'activité de la compagnie.
Si les fonds propres sont plus petits que le MCR, l'ACPR intervient et l'assureur ne peut plus exercer son activité.

Le SCR et le BSCR

Par définition, le SCR (Solvency Capital Requirement) est le montant de fonds propres que l'assureur doit détenir pour éviter la ruine dans 199 cas sur 200 à horizon 1 an.

Il existe deux méthodologies pour calculer le SCR, le calcul étant effectué au moins une fois par an.

La formule Standard

La formule standard est la méthode la plus répandue et celle sur laquelle ce mémoire se concentre. Le calcul est simplifié et guidé par le pilier 1 de Solvabilité 2.

En formule standard, le SCR se calcule de la manière suivante.

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}.$$

SCR_{op} est le risque opérationnel lié par exemple au personnel ou au risque de défaillance des logiciels ou du matériel utilisé. Il existe une formule donnée par l'EIOPA pour le calculer mais il est possible d'utiliser des méthodes statistiques pour l'évaluer.

Adj est l'ajustement au titre des impôts différés et des pertes des provisions techniques : le SCR est calculé pour un scénario qui est très défavorable à un assureur par définition, si ce scénario se réalise la participation aux bénéfices sera drastiquement réduite du fait du contexte économique mauvais ainsi que des impôts différés qui seront plus importants.

BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) correspond au montant de fonds propres qui devrait être détenu par la compagnie afin de couvrir les 6 grandes catégories détaillées dans le tableau 1.1.

Risque :	Impacté par exemple par :
Marché	Etat des marchés financiers
Intangible	Valeur des actifs incorporels
Contrepartie	La réassurance
Santé	Les rachats, la longévité, la mortalité
Vie	Les rachats, la longévité, la mortalité
Non-vie	Souscription

Table 1.1: Risques compris dans le BSCR

La matrice de corrélation du tableau 1.2 permet alors de calculer le BSCR.

Il vient alors la formule suivante.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangible}.$$

Corrélations	$SCR_{marché}$	$SCR_{contrepartie}$	SCR_{vie}	$SCR_{santé}$	$SCR_{non-vie}$
$SCR_{marché}$	1,00	0,25	0,25	0,25	0,25
$SCR_{contrepartie}$	0,25	1,00	0,25	0,25	0,50
SCR_{vie}	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00
$SCR_{santé}$	0,25	0,25	0,25	1,00	0,00
$SCR_{non-vie}$	0,25	0,50	0,00	0,00	1,00

TABLE 1.2: Corrélations entre les grands groupes de risques

$\rho_{i,j}$ correspond au coefficient de corrélation entre le risque i et le risque j, les SCR de cette formule sont calculés de la même manière grâce à une matrice de corrélation et en appliquant des chocs donnés.

Le $SCR_{Intangible}$ correspond à 80% des actifs incorporels qui peuvent être des brevets ou de la technologie.

Exemple pour le risque de mortalité : Ce risque est intégré dans le calcul du SCR_{vie}, d'après le règlement délégué (UE) 2015/35 de la COMMISSION EUROPÉNNE (2014) : "L'exigence de capital pour risque de mortalité [...] est égale à la perte de fonds propres de base des entreprises d'assurance et de réassurance résultant de la hausse soudaine permanente de 15 % des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques."

Sur ce document, il est possible de retrouver les informations relatives à chaque choc et comment ces derniers sont agrégés dans chaque module de risque.

La figure 1.5 représente schématiquement les composantes du SCR.

Le modèle interne

Le modèle interne est plus compliqué et plus coûteux à mettre en œuvre, il a besoin d'être validé par les autorités de contrôle. Cependant le calcul du SCR est plus adapté à la compagnie qui utilise cette méthode.

Le but de cette méthode est d'obtenir une distribution de fonds propres à un an et d'estimer le quantile à 0,5 %. La méthode la plus courante et qui demande beaucoup de calculs est la méthode "Simulations Dans les Simulations" (SDS) décrite par L.DEVINEAU et S.LOISEL (2009). Le principe est d'effectuer des simulations primaires et pour chaque simulation primaire d'effectuer des simulations secondaires ce qui implique une complexité importante.

Il existe des méthodes permettant d'obtenir des résultats plus rapidement telles que la méthode "Simulations Dans les Simulations Accélérée" (SDSA) exposée par L.DEVINEAU et S.LOISEL (2009) qui consiste à se focaliser sur les pires scénarios en réduisant le nombre de simulations secondaires ou l'approche forme paramétrique qui a pour objectif d'obtenir la distribution de fonds propres à l'aide d'une formule fermée.

Il existe également un mixte entre ces deux méthodologies qui est le modèle partiel interne qui ne sera pas abordé dans ce mémoire.

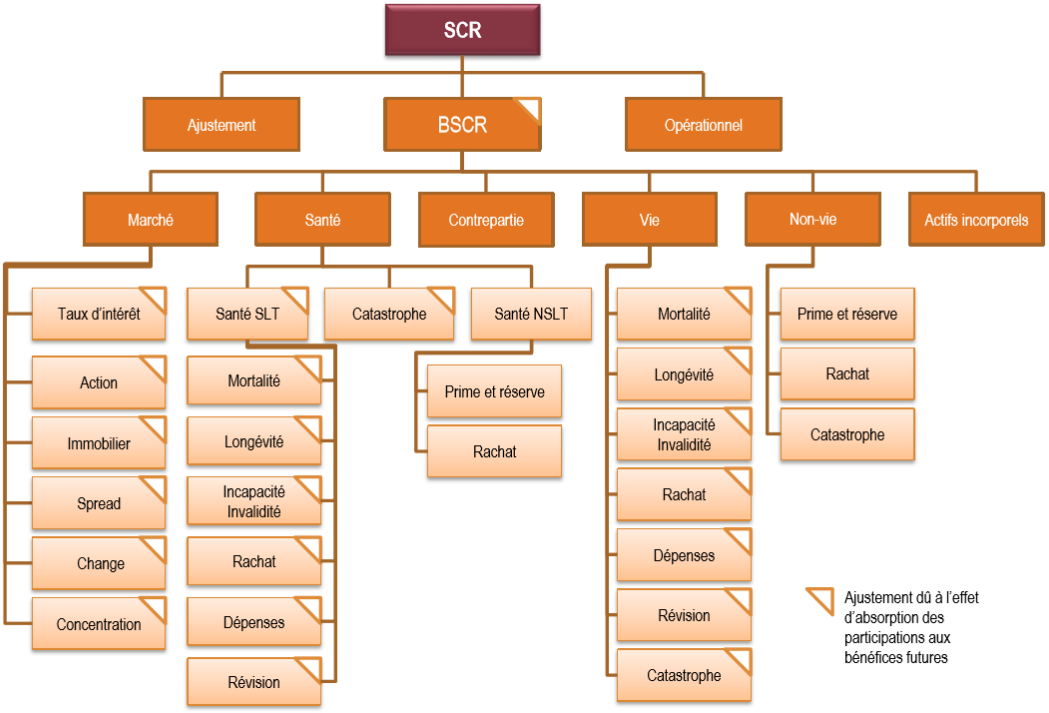


FIGURE 1.5: Composantes du SCR en formule standard, source OPTIMIND (2017)

Si les fonds propres sont plus petits que le SCR mais plus grands que le MCR défini juste après, l'ACPR intervient et propose un plan de rétablissement qui sera différent selon l'état de la compagnie.

1.2.4 Le ratio de solvabilité

Le ratio de solvabilité est un indicateur très important qui est souvent étudié car il tient compte de l'actif et du passif d'un assureur, son calcul est le suivant.

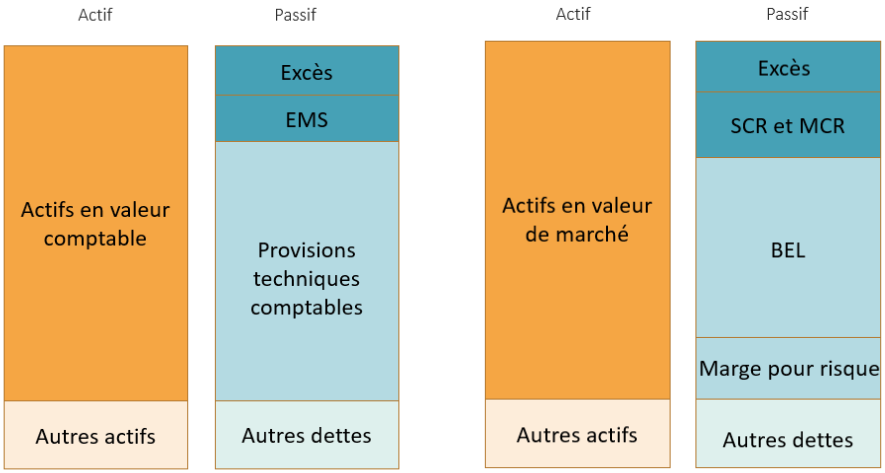
$$ratio\ de\ solvabilité = \frac{Fonds\ propres\ admissibles}{SCR}.$$

Plus ce ratio est élevé plus l'assureur couvre ses risques, d'après ce qui précède il doit être supérieur à 100%. Il est également un indicateur fort pour l'ACPR et les investisseurs, l'entreprise a donc tout intérêt à contrôler ce ratio.

Évolution du bilan sous Solvabilité 2

Les indicateurs étant présentés, Solvabilité 2 apporte une transformation des bilans des entreprises qui étaient en valeur historique, vers un bilan en valeur de marché pour être plus cohérent avec l'état économique des assureurs et des risques qu'ils portent. La figure 1.6 présente cette évolution du bilan.

EMS correspond à l'exigence de marge de solvabilité qui était calculée sous solvabilité 1.
Le BEL n'est pas suffisant pour évaluer de manière précise le passif, c'est pourquoi il faut y ajouter une marge de risque qui correspond au coût d'immobilisation des fonds propres d'une entreprise pour



(a) Sous solvabilité 1 (b) Sous solvabilité 2

FIGURE 1.6: Évolution du bilan

assumer les engagements de ses contrats jusqu'à leur terme. La marge de risque est également importante en cas de reprise du passif par une autre société d'assurance. Il est calculé grâce à la méthode Cost Of Capital (COC) de la manière suivante.

$$marge\ de\ risque = CoC \times \sum_{t0} \frac{SCR(t)}{(1 + r(t+1))^{t+1}}.$$

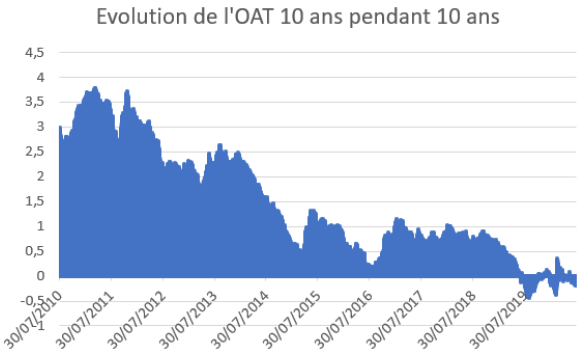
CoC est le taux de coût du capital qui est fixé à 6%.
$SCR(t)$ correspond aux capitaux de solvabilité futurs décrits dans le règlement délégué (UE) 2015/35 de la COMMISSION EUROPÉNNE (2014). Il existe plusieurs méthodes pour les obtenir comme par exemple supposer que le SCR à l'instant t sera proportionnel au BEL à l'instant t. $r(t)$ est le taux sans risque pour une durée t, il est souvent obtenu en regardant la courbe EIOPA.

1.3 Le contexte des taux bas

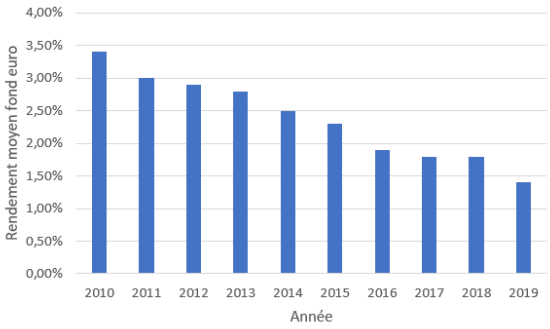
1.3.1 La situation économique et ses conséquences sur l'épargne

Comme le montre la figure 1.7a dont les données sont issues du site de la BANQUE DE FRANCE (2020d), les taux d'intérêts sont plus que jamais à un niveau extrêmement bas. Le seuil symbolique de 0 a même été dépassé le 25 juin 2019 pour l'OAT 10 ans qui correspond à un emprunt d'Etat négatif à horizon 10 ans. Ces valeurs posent un problème aux assureurs qui investissent majoritairement dans des obligations (en moyenne de 66,1 % pour les assureurs vie français d'après l'article de la FFA (2019)). Il y a donc une corrélation forte entre rendement du fonds Euro et le rendement des obligations.

L'assurance-vie est particulièrement touchée par ce contexte de taux bas car des rendements importants ont été promis aux assurés il y a plusieurs années et le rendement des actifs n'a pas cessé de diminuer. La diminution du rendement des actifs entraîne donc une baisse des engagements avec des taux garantis bas sur les nouveaux contrats du fonds Euro. Ce fonds représente plus de 70% des encours



(a) Evolution de l'OAT 10 ans pendant 10 ans



(b) Rendement moyen du fonds Euro, FFA (2020)

FIGURE 1.7: Lien entre les taux bas et la chute des rendements du fonds Euro

en assurance-vie. Si cette situation perdure, il faut s'attendre au développement de nouveaux produits plus risqués pour relancer la rentabilité pour les assurés en assurance-vie et remplacer petit à petit le fonds Euro. Ce remplacement a déjà commencé avec l'évolution des contrats UC et multisupports ces dernières années. La figure 1.8 dont les données proviennent du site de la FFA (2020) (Fédération Française de l'Assurance) met en avant le fait que même si les supports en euros sont prédominants, ils ont subi une baisse ces dernières années. Les pourcentages sur ce graphique correspondent à la part des cotisations de chaque support, ainsi en 2019 le support euros correspondait à 72% des cotisations, contre 28% pour les supports UC et eurocroissance. La proportion des cotisations sur le fonds en euros est en baisse avec une chute de 15 % en 10 ans.

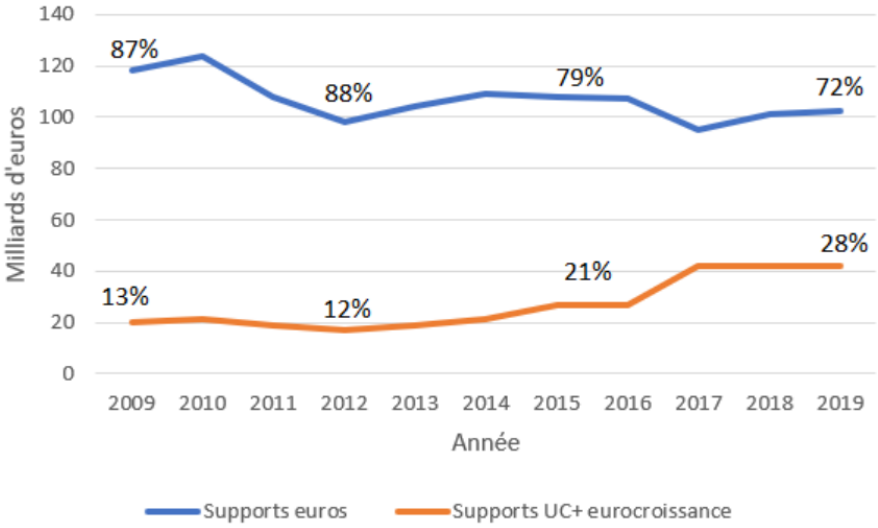


FIGURE 1.8: Cotisations par type de support

Le risque de marché étant un risque majeur pour le calcul du SCR sous Solvabilité 2, il est de plus en plus contraignant pour les assureurs de détenir des actions dans le cadre d'un fonds en euros. Cependant ces dernières et les actifs équivalents en terme de risque sont indispensables pour assurer un rendement plus important que celui des obligations afin d'honorer les engagements des assureurs. Ces derniers sont bloqués dans un contexte économique qui ne permet pas d'envisager des solutions

à court terme car il n'est pas prévu prochainement que la Banque centrale européenne modifie sa politique monétaire dans le but de sortir des taux bas. Un choc de hausse des taux pourrait engendrer des vagues de rachats et des réalisations de moins-values sur les actifs détenus tandis qu'une longue période de taux bas donnerait du mal aux assureurs à respecter leurs engagements.

1.3.2 Les solutions pour faire face à ce contexte économique

Pour aider les assureurs à faire face à cette situation économique, un arrêté ministériel datant du 28 décembre 2019 propose d'intégrer sous certaines conditions une partie de la PPB aux fonds propres, ce qui a pour conséquence d'augmenter la solvabilité des assureurs. Les conditions qui doivent être réunies pour pouvoir bénéficier de cette manœuvre sont :

- Le résultat du compte de résultat technique de l'année est négatif.
- Le montant du capital requis par solvabilité 2 n'est pas atteint.
- L'assureur doit présenter un plan dans lequel il est décrit comment la PPB sera restituée aux assurés les prochaines années, ce plan doit être validé par l'ACPR.

L'ACPR donne une formule pour calculer la part de PPB admissible qui peut être ajoutée aux fonds propres.

$$PPB_{admissible} = PPB_{totale} - PPB7ans - PPB_{pré-affectée} - montant\ enveloppe.$$

$PPB7ans$ est le total de PPB qui doit impérativement être versé l'année suivante, $PPB_{pré-affectée}$ le montant de PPB décidé l'année précédente et *montant enveloppe* qui correspond au montant lié à l'article A132-3 du Code des assurances.

Ce montant doit ensuite être évalué économiquement par les assureurs pour l'intégrer aux fonds propres, l'ACPR donne trois exemples de valorisation économique que les assureurs peuvent appliquer.

Cet arrêté est controversé car d'un côté, la PPB est par définition un montant qui appartient aux assurés, le fait que les assureurs puissent l'intégrer à leurs fonds propres est donc critiquable. D'un autre côté, ce montant est intégré aux fonds propres mais cela ne change rien à ce que les assurés percevront car cette provision leur appartient toujours.

Les assureurs doivent alors innover pour lutter contre les taux bas et ont mis en place plusieurs leviers pour faire face à ce contexte économique.

Parmi eux il existe des leviers liés à **la gestion actif-passif**, il peut s'agir d'optimiser une allocation d'actifs donnée par rapport à un portefeuille d'assurés, l'idée étant de trouver le meilleur compromis pour l'entreprise en terme de rendement de l'actif et en terme de solvabilité. Cette optimisation peut également être effectuée en prenant des hypothèses sur l'évolution de la courbe des taux et du contexte économique en général.

Concernant la recherche d'allocation optimale, de nombreux mémoires ont abordé le sujet proposant des hypothèses différentes et des moyens de résolution possédant chacun des avantages et des inconvénients. Par exemple le mémoire de Tambrun (2019) se concentre sur une hypothèse de remontée rapide des taux d'intérêt, permettant ainsi d'étudier de manière précise l'allocation optimale

dans ce cas. Les résultats montrent qu'il est possible d'améliorer le couple rendement risque en augmentant la part d'obligations à taux variable, ce qui est cohérent avec le scénario d'une hausse des taux. Bien que l'allocation trouvée est satisfaisante dans d'autres scénarios, toutes les combinaisons d'allocations et tous les scénarios économiques ne peuvent pas être envisagés pour réaliser les études.

D'autres mémoires se focalisent sur les problèmes d'optimisation proposant des méthodes différentes comme le mémoire de Allag (2008) proposant une étude par algorithme génétique, qui est une méthode peu utilisée dans le domaine de l'actuariat. Cette méthode permet d'obtenir des temps de calcul raisonnables en faisant converger l'algorithme vers une certaine allocation d'actifs. Cependant il n'est pas garanti que la répartition obtenue soit la meilleure et le paramétrage peut s'avérer compliqué.

Quelle que soit l'étude l'assureur a besoin de prendre en compte ses contrats et ses engagements, ce qui rend complexe ce levier car les allocations optimales sont différentes pour chaque assureur et varient en fonction du temps et du contexte économique. De plus, toutes les allocations d'actifs ne peuvent pas être testées car les temps de calcul seraient trop importants.

Les limites de ce levier sont sensiblement les mêmes d'un mémoire à l'autre, la plus importante provient de la combinatoire qui engendre des hypothèses fortes que ce soit sur les scénarios étudiés, les indicateurs choisis pour l'optimisation ou encore le nombre d'allocations à tester qui est potentiellement infini. De plus, les assureurs doivent trouver un équilibre car un investissement plus risqué leur permettrait d'avoir un rendement meilleur. Cependant, cela aurait pour effet d'augmenter les contraintes liées à la directive Solvabilité 2, alors que ces contraintes sont de plus en plus importantes.

Certains leviers concernent les produits, des nouveaux produits ont fait surface tel que l'eurocroissance en 2014 pour remplacer le fonds en euros, proposant ainsi des contrats respectant l'aspect tridimensionnel vu dans la première section et ayant un triplet (rendement, risque, disponibilité) différent des contrats usuels.

Les contrats eurocroissance ont donc fait l'objet d'études avant leur lancement par exemple par Abdelli (2014) et continuent d'être étudiés comme par Stern (2019). Différents axes d'études sont alors possibles comme la solvabilité de l'assureur, la rentabilité pour l'assureur ou l'assuré.

Le point important qui s'avère être une limite est la réaction d'un assuré face à un tel produit. En effet l'exemple de l'eurocroissance illustre bien cette limite car ces contrats qui apparaissaient comme une alternative au fonds en euros n'ont pas eu le succès souhaité et ont été un échec commercial.

C'est cette idée de nouveaux contrats que Spirica, une filiale appartenant à Crédit Agricole Assurances, a choisi de suivre en créant un Fonds Euro Nouvelle Génération dans lequel la garantie de capital n'est plus de 100 % pour un contrat en euros "classique" mais de 98 %. Ce changement permet d'investir plus sur l'immobilier et les actions et permet d'espérer un rendement meilleur sur le long terme, tout en prenant un risque léger de voir son capital diminuer. De plus suite à la loi Pacte et la refonte des contrats eurocroissance simplifiant ce contrat et donnant une meilleure visibilité aux assurés, Spirica lance son contrat eurocroissance avec un objectif de rendement supérieur à 3 % net par an. Il a été choisi dans ce mémoire d'étudier ces nouveaux contrats en prenant compte les conséquences d'un tel produit, à la fois sur la rentabilité des contrats des assurés, sur la solvabilité et sur la rentabilité des assureurs.

Un autre type de levier est basé sur des approches commerciales, ces leviers peuvent être par exemple des incitations à souscrire sur le fonds UC ou à arbitrer vers l'UC pour des contrats multisupports exis-

tants. Ces incitations prennent des formes différentes, il peut s'agir d'avantages sur les chargements, des avantages de revalorisation sur le fonds en euros pour les contrats multisupports qui provient d'une participation aux bénéfices discrétionnaire plus importante ou encore de bonifier le rendement des UC à partir d'un certain montant comme dans les contrats Lib'RT proposés par CNP Assurances. Il a été décidé dans ce mémoire d'effectuer des études sur la manière dont la participation aux bénéfices discrétionnaire est distribuée, pour optimiser les impacts sur les rachats et l'arbitrage.

Cet environnement de taux bas pèse sur la solvabilité de l'assureur, qui doit faire face à des risques de plus en plus conséquents. C'est dans ce contexte que ce mémoire propose l'étude de leviers que les assureurs peuvent mettre en place pour se préparer au contexte économique de demain.

Chapitre 2

Présentation du modèle ALM épargne et du portefeuille étudié

L' ALM (Asset and Liability Management), aussi appelée la gestion actif-passif, est l'étude de l'évolution de l'actif et du passif d'une société. Le but est d'effectuer des projections sur un horizon de temps donné à l'aide d'un modèle ALM afin d'évaluer l'impact des risques auxquels les sociétés d'assurance-vie sont soumises et de capter les différents phénomènes liés à l'interaction entre l'actif et le passif. Ces projections sont des outils d'aide à la décision et sont devenus indispensables aux assureurs qui recherchent à maximiser le rendement tout en minimisant les risques.

Les différentes politiques menées par les assureurs peuvent alors être étudiées qu'il s'agisse de la stratégie de répartition des actifs ou encore de la politique de taux servis concernant la participation aux bénéfices. Les modèles ALM sont capables de prédire en moyenne l'évolution du bilan, du compte de résultat d'une entreprise et les différents indicateurs de rentabilité ou de solvabilité comme le SCR ou le ratio de solvabilité, les indicateurs choqués issus des différentes projections permettent alors le calcul des exigences de capital provenant de Solvabilité 2.

2.1 Présentation du modèle ALM utilisé

Le modèle présenté est un modèle ALM épargne implémenté sur Excel et VBA. Il permet la projection des flux d'une compagnie d'assurance possédant des contrats multisupports et investissant sur des obligations (gouvernementales et corporates), des actions et de l'immobilier.

Ce modèle va prendre en entrée différents scénarios économiques afin de projeter le passif et l'actif d'une entreprise, les sections suivantes indiquent comment le modèle utilisé fonctionne. Des détails complémentaires sur le modèle ALM sont disponibles dans la troisième partie du mémoire de Tambrun (2019).

2.1.1 Les générateurs de scénarios économiques

Les GSE (Générateurs de Scénarios Économiques) sont des outils permettant de créer des scénarios économiques. Les scénarios économiques sont des évolutions possibles dans le temps de différentes quantités financières telles que la courbe des taux sans risque, la valeur des actions, la valeur de l'im-

mobilier...

Pour comprendre le fonctionnement des scénarios économiques il est nécessaire de définir quelques notions :

Les **zéro-coupons** sont des obligations particulières qui paient 1 à maturité et ne versent pas de coupons pendant leur durée de vie. Le prix à la date $t \in [0, T]$ d'un zéro-coupon de maturité T est noté B(t,T). Le prix des obligations détenues sera calculé comme étant une combinaison linéaire des zéro-coupons.

Les **taux forward** sont définis à partir du prix des zéro-coupons comme étant $f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} ln(B(t,T))$. Le taux court noté r_t est lié au taux forward avec la formule $r_t = f(t,t)$.

Les **déflateurs** sont les facteurs d'actualisation qui seront utilisés pour le calcul des flux du passif, ils sont notés D(t,T) pour une actualisation entre un temps t et T et sont obtenus à partir du taux court de la manière suivante.

$$D(t,T) = e^{\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s}.$$

Des modèles mathématiques vont être utilisés afin de projeter le taux court, qui permet d'obtenir les prix des zéro-coupons (et donc des obligations) ainsi que les déflateurs.

Les différents indices sont projetés à l'aide de modèles mathématiques, les modèles ne pouvant pas tous être utilisés en risque neutre et en monde réel. Deux GSE sont utilisés dans le cadre de ce mémoire :

Un GSE risque neutre

Le modèle de Hull & White a été retenu pour les taux d'intérêt, pour la valeur des actions et de l'immobilier ce sera le modèle de Black & Scholes qui sera appliqué.

Par la suite la probabilité $\mathbb{Q}$ correspondra à la probabilité risque neutre. L'univers risque neutre est utilisé pour calculer le BEL et les exigences en capital de Solvabilité 2, il intègre une certaine prudence car en réalité le rendement des actifs est égal au taux sans risque augmenté d'une prime de risque suivant l'actif concerné. Plus le portefeuille d'une entreprise contient des actifs risqués plus le BEL sera sous-estimé.

<u>Le modèle de Hull & White :</u> Il s'agit d'une généralisation du modèle de Vasicek présenté dans la section suivante, la dynamique du taux spot est donnée par la formule

$$dr_t = (b(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Le modèle de Hull & White permet d'incorporer la courbe des taux initiale grâce au terme b(t), ce qui n'était pas permis par le modèle de Vasicek simple. Néanmoins les calculs liés à cette fonction peuvent s'avérer coûteux.

En appliquant le lemme d'Ito comme pour le modèle de Vasicek et en écrivant la formule en r_{t+h}, la discrétisation exacte de ce modèle est obtenue.

$$r_{t+h} = r_t e^{-ah} + y(t+h) - y(t)e^{-ah} + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2ah}}{2a}}\epsilon.$$

h est le pas de discrétisation, ϵ suit une loi normale de paramètres (0,1) et y est une fonction dépendant des prix des zéro-coupons à la date t=0. Les paramètres a et σ sont obtenus en minimisant la différence entre les prix calculés par le modèle et les prix de marché.

Le modèle de Black & Scholes : Soient W_t un mouvement brownien, A_t le prix d'un actif à l'instant t (immobilier ou action), r_t le taux court présenté précédemment et σ la volatilité de l'actif supposée constante, l'équation différentielle suivie par l'actif A_t est donnée par

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma dW_t.$$

La solution de cette équation est

$$A_t = A_0 e^{(\int_0^t \sigma \, \mathrm{d}W_s + \int_0^t (r_s - \frac{\sigma^2}{2}) \, \mathrm{d}s)}.$$

Une discrétisation exacte peut être obtenue.

$$A_{t+h} = A_t e^{(\int_t^{t+h} r_s \, \mathrm{d}s - \frac{\sigma^2}{2} h) + \sigma \sqrt{h} \epsilon}.$$

h est le pas de discrétisation et ϵ suit une loi normale de paramètres (0,1).

L'avantage du modèle de Black & Scholes est qu'il est facile à implémenter compte tenu de sa discrétisation exacte, la seule calibration vient de la volatilité de l'actif. Il possède plusieurs inconvénients comme le fait d'avoir une volatilité constante ce qui n'est pas le cas sur le marché, des scénarios extrêmes mal représentés et le fait de ne pas prendre en compte les sauts boursiers qui sont observables en réalité.

La courbe des taux est calibrée sur l'Euribor 3 mois avec une valeur de l'UFR (Ultimate Forward Rate) à 3,9%, les taux d'intérêt sont donnés dans la figure 2.1 .

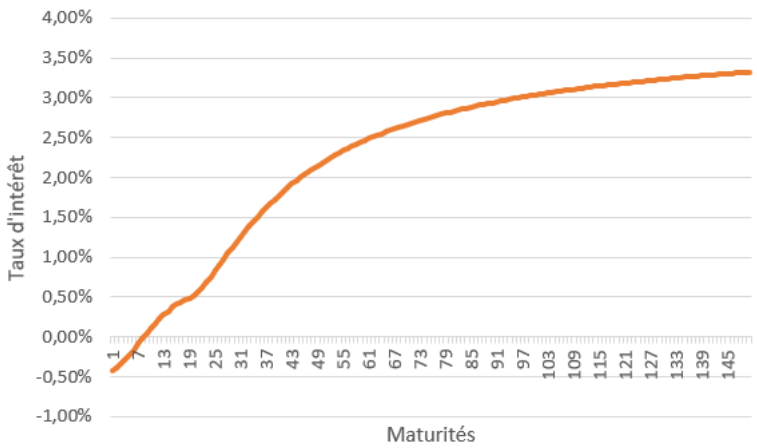


FIGURE 2.1: Courbe des taux

Pour les modèles de Black & Scholes, les valeurs de σ retenues sont de 5% pour l'immobilier et de 17,8% pour les actions.

Un GSE risque réel

Le modèle de Vasicek est adopté pour les taux d'intérêt et pour la valeur des actions et de l'immobilier ce sera le modèle de Black & Scholes qui sera appliqué.

Par la suite la probabilité $\mathbb{P}$ correspondra à la probabilité monde réel. Le GSE monde réel est utilisé pour des études sur la rentabilité telle que l'optimisation de l'allocation d'actifs ou l'évaluation des risques du pilier 2 de la directive Solvabilité 2 car les prix calculés seront plus proches de ce qui arrivera dans le futur.

<u>Le modèle de Vasicek :</u> Soient $a, b, \sigma > 0$ et W_t un mouvement brownien, le taux court suit la dynamique suivante.

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Le théorème de Girsanov permet de passer de la probabilité monde réel à la probabilité risque neutre par la formule

$$dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - \lambda dt.$$

λ représente la prime de risque supposée constante ici.
L'équation devient alors

$$dr_t = a(b - \frac{\sigma\lambda}{a} - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

En posant $c = b - \frac{\sigma\lambda}{a}$ et $X_t = r_t - c$, il vient

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

. En appliquant le lemme d'Ito à $e^{at}X_t$, la solution est donnée par

$$X_t = e^{-at}X_0 + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, \mathrm{d}W_s^{\mathbb{Q}}.$$

Sous $\mathbb{Q}$, X_t suit une loi normale de paramètres $(e^{-at}X_0, \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}\, \mathrm{d}s)$ qui est facile à simuler.

Les paramètres a, b, σ et λ représentant respectivement la vitesse de retour à la moyenne du taux court, sa valeur moyenne, sa volatilité et la valeur du risque. La calibration de ce modèle s'effectue à partir de données historiques par la méthode des moindres carrés ordinaire. Ainsi la prime de risque sera calibrée à travers le paramètre c qui représente le retour à la moyenne.

Le modèle de Vasicek a pour particularité de prendre en compte les taux négatifs et de posséder une discrétisation exacte qui rend facile son implémentation. Son point faible est que le modèle ne reproduit pas exactement la courbe des zéro-coupons initiale donnée par l'EIOPA.

La discrétisation exacte du modèle de Vasicek est alors

$$r_{t+h} = r_t e^{-ah} + c(1 - e^{-ah}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2ah}}{2a}}\epsilon,$$

où h est le pas de discrétisation et ϵ suit une loi normale de paramètres (0,1).

Dans le cadre du monde réel, pour appliquer Black & Scholes le terme r_s est remplacé par un μ

constant correspondant à la rentabilité de l'actif, ce terme μ est calibré pour l'immobilier sur l'IEIF, sur l'Eurotoxx50 avec réinvestissement des dividendes pour les parts investies en UC et sur le CAC 40 pour la part action du fonds en euros.

Pour le modèle de Vasicek, la calibration en pas mensuels donne des valeurs approximatives de $a = 0,4\%$, $b = -2\%$ et $\sigma = 0,057\%$, la calibration des deux modèles de Black & Scholes est donnée dans le tableau 2.1.

Actifs	μ	σ
Immobilier	0,710%	4,490%
Actions	0,580%	4,624%

TABLE 2.1: Calibration de Black & Scholes en monde réel

2.1.2 La modélisation du passif

En épargne le nombre d'assurés est très important, les assurés ont donc été regroupés par groupe d'assurés ayant des caractéristiques communes, ces groupes d'assurés sont appelés Model Points (notés MP dans la suite).

Dans le modèle les assurés sont regroupés par des caractéristiques de leur contrat et des caractéristiques personnelles. Les informations relatives aux assurés sont leur âge, leur ancienneté fiscale et leur sexe. Les informations relatives à leur contrat sont le TMG, les frais de gestion sur encours ou le taux de participation aux bénéfices contractuel. Le taux de participation aux bénéfices contractuel permet de calculer un montant minimal qui devra être reversé aux assurés sous 8 ans, la politique de distribution de participation aux bénéfices est détaillée dans la section 2.2.3. Les assurés peuvent arbitrer vers le fonds en euros ou vers l'UC sans frais supplémentaires.

Cette modélisation du passif permet d'étudier des contrats multisupports avec des MP possédant des provisions mathématiques en euros et en UC. Ainsi l'étude d'un contrat en euros est possible en mettant des provisions mathématiques nulles pour la part en UC. Il est également possible d'étudier des contrats en UC uniquement en mettant des provisions mathématiques nulles sur la part en euros.

D'autres entrées sont à renseigner comme les tables de mortalité TH 00-02 et TF 00-02, de rachat qui seront détaillées dans la section 2.2.1.

2.1.3 La modélisation de l'actif

L'assureur investit sur des obligations (gouvernementales et corporates), des actions et de l'immobilier dans le modèle étudié.

Les actions et l'immobilier ne rapportent pas de dividendes ni de loyers et sont modélisés par un MP chacun regroupant la somme allouée à ces actifs. Ces MP possèdent chacun un taux de plus-value latente ainsi qu'un taux de turn-over automatique qui correspond au pourcentage de l'actif en question qui sera vendu quel que soit le contexte à l'année n+1.

Après chaque année de projection le modèle va effectuer un rebalancement de l'actif en suivant la

stratégie définie à la section 2.2.4. Un montant sera à acheter ou vendre sur chaque actif pour respecter l'allocation souhaitée en fin d'année. Concernant l'achat et la vente des actions et de l'immobilier, l'assureur réalisera des plus ou moins values suivant le cours de ces actifs. Pour les obligations l'achat est effectué au pair, ce qui veut dire que la valeur nette comptable est égale au nominal. Si la vente des obligations est nécessaire, un taux de vente est appliqué à l'ensemble du portefeuille.

Le rendement de la trésorerie évolue quand à lui au taux zéro-coupon un an.

2.1.4 Le fonctionnement d'ensemble du modèle

Cette section présente dans un premier temps comment les différents indicateurs sont obtenus pour un unique scénario. Les différentes données rentrées dans le modèle (actif et passif) sont récupérées dans un premier temps et vont subir les étapes suivantes :

- Un vieillissement du portefeuille est effectuée en vieillissant l'actif avec la maturité des obligations et le passif avec les tables de mortalité.
- L'évolution des rendements des actifs donnent lieu à un calcul des produits financiers dépendant donc des différents scénarios.
- Les flux entrants et sortants sont ensuite déterminés en tenant compte des frais, des décès, des chargements mais aussi des rachats dont la présentation est donnée dans la section 2.2.1.
- Un rebalancement des actifs est ensuite effectué en suivant la stratégie de la section 2.2.4.
- La revalorisation des contrats qui est liée à la fois aux variations des valeurs des unités de compte et à la distribution de la participation aux bénéfices dont la stratégie est détaillée dans la section 2.2.3.
- Un reporting est également présent et permet de consulter le compte de résultat et le bilan de l'assureur pour la période de projection.

Ces étapes vont être répétées autant de fois qu'il y a de scénarios économiques, la valeur du BEL et des indicateurs sera alors la moyenne des valeurs obtenues sur les différents scénarios économiques. Il est alors question de la méthode de Monte-Carlo. Le logigramme présenté sur la figure 2.2 montre les étapes du calcul du BEL pour le cas de 1000 scénarios, le BEL de chaque scénario est calculé comme la somme des flux actualisés sur la durée de projection (T dans cet exemple).

2.2 Les différentes hypothèses du modèle

Le modèle est supposé en runoff, c'est à dire qu'il n'intègre pas de nouveaux contrats après le début des projections, l'horizon de projection est alors fixé à 40 ans car il est supposé qu'une grande majorité des contrats sera arrivée à son terme 40 ans après l'instant de projection. Après 39 ans de projection il reste une minorité de contrats qui n'ont pas été rachetés et pour lesquels les assurés ne sont pas décédés.

Un scénario déterministe appelé **scénario équivalent certain** est donné par le GSE, ce scénario est obtenu uniquement à partir de données connues à t=0 et possède deux principales utilités :

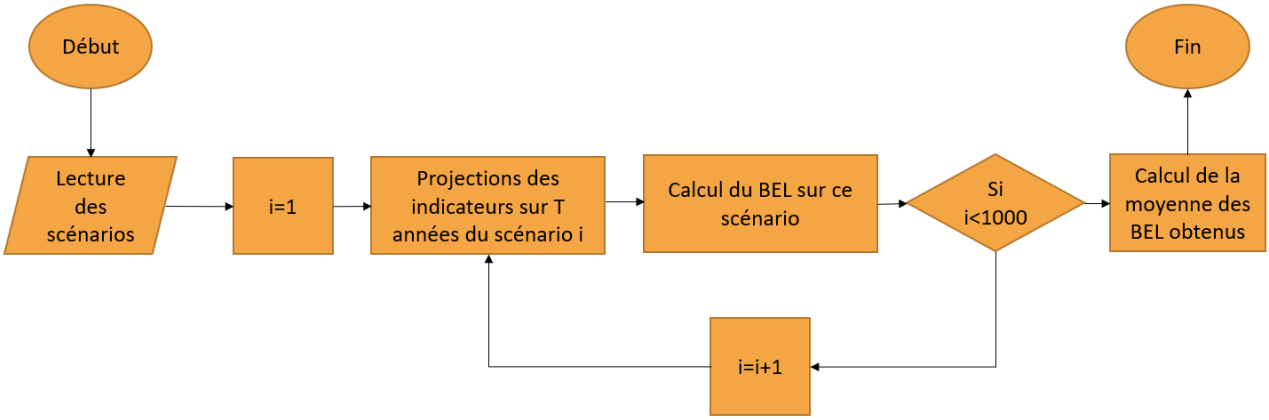


FIGURE 2.2: Méthode de calcul du BEL

- Premièrement le scénario permet le bon développement du modèle ALM car sur un scénario déterministe l'écart entre ce qui est projeté au passif et à l'actif doit être nul, cet écart est appelé écart de convergence. Il permet donc de détecter une erreur de modélisation lorsque les simulations sont effectuées en stochastique par la suite.

- Dans un second temps l'utilisation de ce scénario permet de calculer combien vont coûter les garanties et les options liées aux contrats telles que le TMG, la PB, l'option de rachat ou l'arbitrage. Ce coût est calculé en regardant la différence de fonds propres entre le scénario déterministe et les fonds propres issus du scénario central stochastique.

L'écart de convergence est calculé depuis le bilan Solvabilité 2 avec la formule ci-dessous.

$$\textit{écart de convergence} = \frac{\textit{total passif} - \textit{total actif}}{\textit{total actif}}.$$

Lors des simulations stochastiques cet écart doit être le plus proche possible de zéro et si le modèle est bien implémenté plus le nombre de scénarios sera important, plus l'écart de convergence va tendre vers 0. S'il n'y a pas de fuite du modèle, l'écart restant provient de la convergence imparfaite du GSE RN (le nombre de scénario est limité). En contrepartie plus le nombre de scénarios sera élevé plus les temps de calculs le seront également, il a été choisi dans la suite de mémoire d'effectuer les simulations à partir de 1000 scénarios qui représentent un bon couple précision/vitesse car il permet d'obtenir un écart de convergence compris entre -0,1% et 0,1% pour tous les tests qui seront effectués dans ce mémoire.

Les calculs des exigences de Solvabilité 2 sont effectués à l'aide de la formule standard présentée dans la partie 1 de ce mémoire, les tables de corrélation et les chocs à appliquer sont donc renseignés dans le modèle.

2.2.1 Implémentation des rachats

Dans le modèle les rachats sont calculés comme la somme de rachats structurels et de rachats conjoncturels.

Les rachats structurels sont calibrés sur un historique et dépendent de l'ancienneté fiscale des contrats. Le graphique ci-dessous met en avant un pic de rachat à 8 ans qui est en terme de fiscalité l'année la plus intéressante pour un rachat du point de vue de l'assuré.

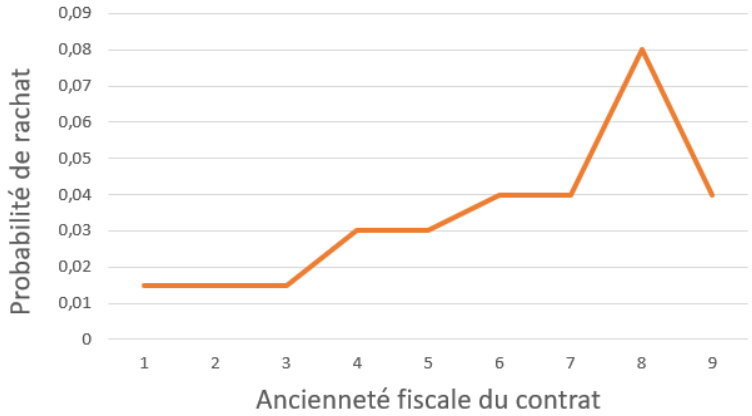


FIGURE 2.3: Les rachats structurels

Le taux de rachats conjoncturels est modélisé par une fonction dépendant du taux servi par l'assureur notée TS et du taux attendu par l'assuré noté TA. Cette fonction est suggérée par l'ACPR (2013) et est définie de la façon suivante.

$$taux_{rachat\ structurel}(TS, TA) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } TS - TA < \alpha \\ RC_{max} \times \frac{TS-TA-\beta}{\alpha-\beta} & \text{si } \alpha < TS - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < TS - TA < \gamma \\ RC_{min} \times \frac{TS-TA-\gamma}{\delta-\gamma} & \text{si } \gamma < TS - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } TS - TA > \delta \end{cases}$$

Plus l'écart entre le taux servi et le taux attendu est important, plus l'assuré aura tendance à racheter. Un seuil maximal et un seuil minimal sont fixés et il existe un plateau dans lequel l'assuré ne rachète pas si la différence entre le taux servi et le taux attendu est trop petite. Un taux de rachat négatif n'a en soit pas de sens, il correspond dans le modèle à une augmentation de la provision mathématique.

Les valeurs des seuils et des planchers α, β, γ, δ, RC_{min} et RC_{max} sont comprises entre des valeurs minimales et maximales comme dans le tableau 2.2. Dans le modèle les valeurs des paramètres ont été choisis au milieu des plafonds min et des plafond max.

La loi utilisée dans notre modèle est illustrée avec la figure 2.4.

	α	β	γ	δ	RC_{min}	RC_{max}
Plafond max	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Plafond min	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%
Modèle utilisé	-5%	-1%	1%	3%	-5%	30%

TABLE 2.2: Encadrement du rachat structurel

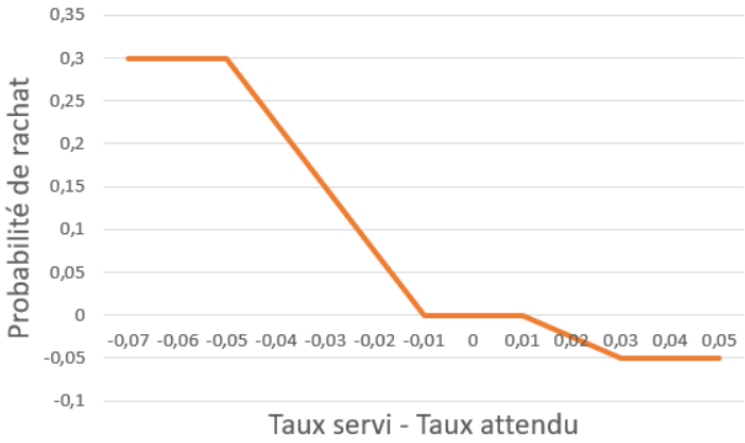


FIGURE 2.4: Les rachats conjoncturels

2.2.2 Implémentation de l'arbitrage

L'arbitrage n'est pas implémenté dans le modèle d'origine ce qui rend moins précis les calculs des indicateurs et limite les leviers d'optimisation de solvabilité. L'arbitrage étant un sujet de mémoire à part entière, cette section et les résultats utilisés sont repris du chapitre 5 du mémoire de B.AUFFRET et S.BOUHZILA (2016) à propos de la méthode floue appliquée à l'arbitrage.

L'idée de la logique floue est d'essayer de répliquer la manière dont le cerveau humain prend des décisions à l'aide de variables d'entrées qui sont approximatives et subjectives, l'arbitrage étant également une de ces décisions. Lorsqu'un assuré prend la décision d'arbitrer vers l'euro ou vers l'UC, il regarde plusieurs critères tel que le rendement des UC à une date donnée sans faire un choix par rapport à un montant de rendement précis mais par rapport au fait que le rendement est selon lui bon ou mauvais. Ainsi le rendement des UC est appelé une variable floue et une progression de la valeur des UC peut être considérée à la fois comme bonne à 40 % et très bonne à 60 %. Les notions de "bonne" ou "très bonne" sont qualifiés d'ensembles flous et il est alors question de fonction d'appartenance car chaque situation peut appartenir à plusieurs ensembles flous.

Schématiquement la logique floue va prendre en entrée des variables quantitatives pour les transformer en variables floues, ces variables floues vont donner lieu à des décisions floues, dans notre cas le fait d'arbitrer un peu, beaucoup ou pas du tout par exemple. Ensuite ces décisions vont être transformées de manière à ce qu'elles ne soient plus floues et nous donner un montant d'arbitrage précis.

Les trois grandes étapes de la logique floue sont :

- La Fuzzification : Cette étape est celle dans laquelle on va choisir des variables d'entrées et de sorties et les transformer en variables floues, tout en créant les fonctions d'appartenance pour chacune des variables. Les trois variables explicatives retenues par régression logistique dans le mémoire étudié sont l'ancienneté du contrat, le taux d'UC du contrat ainsi que l'évolution du cours de l'UC. Les variables de sortie sont ici les taux d'arbitrage observés de l'euro vers l'UC et de l'UC vers l'euro.

  Les ensembles flous pour chaque variable ont été obtenus par Classification Ascendante Hiérarchique (CAH), l'idée étant de placer les assurés dans des classes les plus proches en terme d'arbitrage

par rapport à chacune des variables. Par exemple les trois classes obtenues pour l'ancienneté dans le cadre de l'arbitrage vers l'euro sont une ancienneté comprise entre 1 et 6 ans, une ancienneté comprise entre 7 et 18 ans et une ancienneté supérieure strictement à 18 ans. Les ensembles flous de l'arbitrage correspondent à des entiers compris entre 1 et 5, 1 étant un niveau d'arbitrage faible et 5 un niveau d'arbitrage élevé.

Pour chaque ensemble précisé il est nécessaire d'obtenir une fonction d'appartenance à la variable en question. Il a été choisi dans le mémoire étudié de créer ces fonctions d'appartenance à partir de la distance entre le taux d'arbitrage des individus et du taux moyen de chaque classe, ces fonctions ont été ensuite simplifiées et normalisées. Par exemple une évolution de l'UC de -2,5 % appartient à 50% à l'ensemble 2 et à 50 % à l'ensemble 3 pour cette variable. Ces ensembles 2 et 3 peuvent être qualifiés respectivement de rendements mauvais et de rendements très mauvais du point de vue des assurés.

- Le moteur d'inférence : Une matrice de décision doit être établie pour relier chaque combinaison d'ensembles flous aux ensembles flous de sortie. Par exemple pour un taux d'UC faible, une ancienneté faible et une évolution faible de l'UC la décision d'arbitrer vers l'euro ou vers l'UC sera de 1 qui correspond à un très faible taux d'arbitrage. Il y a 3 variables floues avec 3 ensembles flous chacune et 2 variables de sorties ce qui donne $3^3 \times 2 = 54$ règles de décision différentes. Ces règles sont définies à partir de statistiques sur les arbitrages passés, chaque assuré correspond dans ce modèle à un maximum de 2 ensembles par variable et donc à potentiellement 8 règles de décision.

  Chaque règle de décision est associée à un degré d'activation, ce dernier étant calculé comme le minimum des appartenances des fonctions. Pour un assuré ayant une ancienneté de degré 100 % dans le premier ensemble, de taux d'UC de degré 50 % du premier ensemble et de degré 50 % du deuxième ensemble avec une évolution appartenant à 100 % au premier ensemble, le degré d'activation de la décision sera de $min(1, 0.5, 1) = 0.5$.

  Pour chaque assuré les degrés d'activation doivent être agrégés afin de créer une fonction d'activation qui donne un résultat flou final. La méthode de Larsen énonce que la fonction d'activation de chaque décision correspond au résultat flou de la variable de sortie proportionnellement au degré d'activation de cette décision. Par exemple si une règle de décision donne un arbitrage "fort" avec un degré d'activation de 0.5, cette règle de décision ne comptera que pour un degré de 0.5. Ces fonctions d'activation sont alors superposées car les conclusions qui sont les plus probables sont celles avec le plus grand degré d'activation. Finalement une fonction d'appartenance liée à l'arbitrage est établie pour chaque assuré.

- La défuzzification : La conclusion obtenue à l'étape précédente est floue et il est nécessaire de revenir à des variables quantitatives pour obtenir un taux d'arbitrage réel. La méthode du centre de gravité est alors appliquée, la fonction d'appartenance forme un polygone avec l'axe des abscisses et le taux d'arbitrage final sera l'abscisse associé au centre de gravité du polygone en question. Cette méthode permet de donner du poids aux décisions avec le plus grand degré d'activation. Il est cohérent de penser que si le montant d'arbitrage est à 90 % très élevé et à 10 % élevé que le résultat sera plus proche du montant très élevé.

  La figure 2.5 donne un exemple de défuzzification pour un assuré ayant obtenu une fonction d'appartenance suite à l'étape précédente.

La figure 2.6 donne une version schématique de la logique floue avec ses grandes étapes.

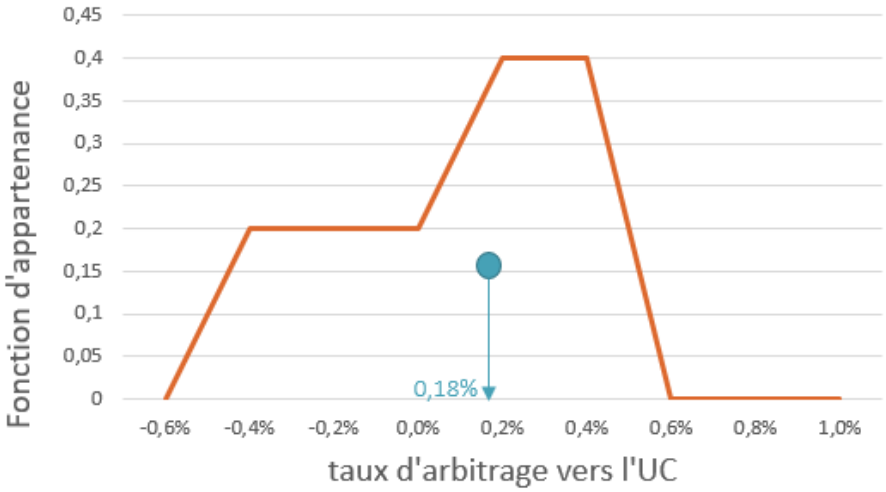


FIGURE 2.5: Fonctionnement de la logique floue

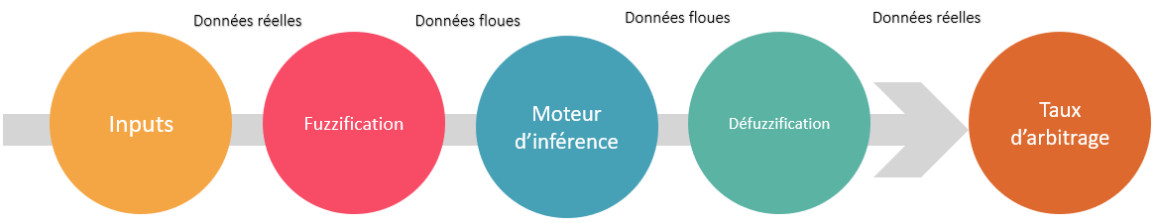


FIGURE 2.6: Fonctionnement de la logique floue

L'avantage d'utiliser la méthode floue pour implémenter les arbitrages est qu'elle essaie de répliquer les décisions prises par les assurés tout en utilisant des données passées.

Cette implémentation possède quelques limites, le modèle est basé sur une base de données qui n'est peut-être pas représentative des assurés d'une société moyenne telle que nous cherchons à la représenter. De plus, les études ont été réalisées sur des données collectées entre 2003 et 2014 et il est possible que la vision et la connaissance des assurés de l'assurance-vie aient évolué, modifiant ainsi les comportements d'arbitrage.

Les différentes fonctions d'appartenance et les matrices de décision qui ont été reprises du mémoire étudié et utiles à l'implémentation de l'arbitrage sont regroupées dans l'annexe A.

2.2.3 Politique de participation aux bénéfices

Pour rappel, les sociétés d'assurance-vie chaque année doivent reverser un montant lié à la participation aux bénéfices. Ce montant doit être distribué sous 8 ans ce qui laisse une liberté à l'assureur concernant la distribution de ce montant.

Le modèle ALM propose trois possibilités concernant la politique de taux servi :

- La première méthode consiste à calculer un montant total qui sera servi aux assurés. Ce montant est calculé à partir du montant minimal réglementaire de participation aux bénéfices sur l'ensemble du portefeuille.

  Cette somme va être diminuée par les taux minimum garantis, les frais de gestion et les participations aux bénéfices contractuelles.

  Ce qu'il restera de disponible donnera lieu à un taux individuel qui est proportionnel au montant investi par chaque assuré, ce taux sera appelé taux réglementaire par la suite.

- La deuxième méthode consiste à établir un taux cible du côté de l'assureur, qui est calibré à partir du taux sans risque dans le modèle (qui est un taux attendu par l'assuré). Le taux réglementaire est alors calculé de la même manière que pour la première méthode, il y a alors deux possibilités :

  Si le taux cible est plus grand que le taux réglementaire, on va reprendre le montant correspondant à la différence dans la PPB (dans la mesure du possible).

  Si le taux réglementaire est plus grand que le taux cible, on va doter la PPB du montant correspondant à la différence.

  Cette stratégie permet de lisser les taux servis dans le temps pour réduire le risque de rachats à la hausse.

- La troisième méthode est une variation de la deuxième dans laquelle l'assureur va diminuer ses rendements financiers afin de servir le taux cible si la PPB n'est pas suffisante. Cette méthode doit faire l'objet d'études pour décider s'il est intéressant de vouloir servir le taux cible dans n'importe quel cas, quitte à prendre une partie des gains de l'assureur.

La principale limite de ces méthodes est le choix des taux cibles pour l'assureur et des taux cibles pour l'assuré qui ne sont pas représentatifs de ce qui est pratiqué. Ce mémoire proposera donc une meilleure vision du taux cible assureur prenant en compte l'état économique de la société et une estimation plus précise des taux attendus pour les assurés.

2.2.4 Stratégie d'investissement

L'allocation de l'actif de la société à l'instant initial est renseigné dans le modèle ALM car elle est indispensable aux projections qui seront effectuées. Les rachats et les décès vont obliger les assureurs à désinvestir des actifs modifiant ainsi l'allocation initiale, c'est pourquoi il est nécessaire de décider d'une stratégie d'investissement qui est propre à l'assureur.

La stratégie implémentée dans le modèle est une stratégie usuelle appelée la stratégie à poids constants, l'objectif étant de toujours se ramener à l'allocation initiale comme le montre la figure 2.7 issue d'une formation ALM d'Optimind.

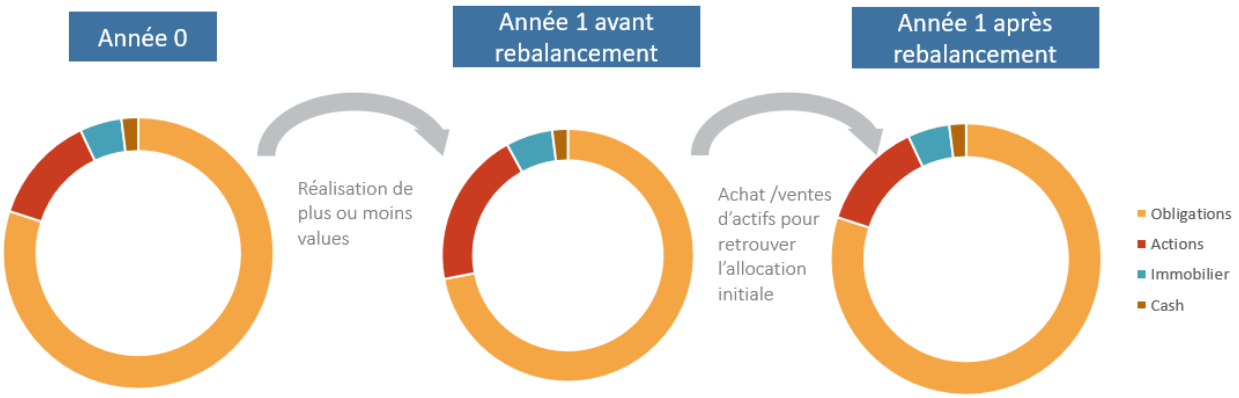


FIGURE 2.7: Stratégie d'investissement utilisée

Il existe une variante de cette stratégie d'investissement qui n'est pas implémentée dans le modèle, elle consiste à fixer des intervalles de proportion des actifs à respecter après le rebalancement. Ces intervalles sont moins stricts pour les assureurs et sont en pratique utilisés par les assureurs utilisant la stratégie à poids constants.

2.3 Caractéristiques de la société type

Avant d'étudier les différents leviers des assureurs sur la solvabilité, il paraît pertinent de reproduire la société type d'assurance-vie proposant des contrats épargnes multisupports. En effet, les données initiales peuvent complètement changer les résultats obtenus sur les différents indicateurs ce qui pourrait entraîner des résultats aberrants par la suite. Les entrées seront donc extraites de données publiques et d'un benchmark sur les SFCR (Solvency and Financial Condition Report) regroupant les plus grandes entreprises à la fin 2019. Les valeurs obtenues caractérisent une société type au 31/12/2019 et ne prennent pas en compte l'évolution du contexte économique au-delà de cette date.

2.3.1 L'actif

Le premier résultat récupéré est l'allocation d'actifs présenté figure 2.8, les informations provenant de la base excel Asset Exposures du site EIOPA (2020) Insurance Statistics ont été adaptées pour respecter la version simplifiée d'allocation renseignée dans le modèle utilisé. Le tableau 2.3 donne une présentation de l'actif en valeur de marché et en valeur nette comptable en millions d'euros. Parmi les obligations, la moitié correspond à des obligations gouvernementales et l'autre moitié à des obligations corporates.

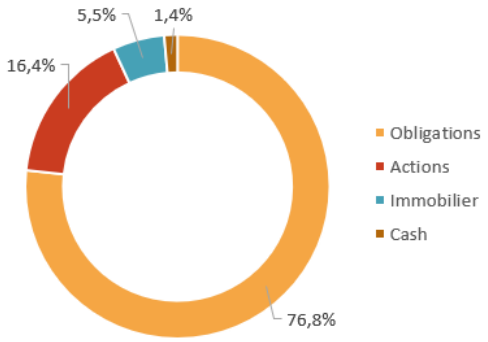


FIGURE 2.8: Composition de l'actif en valeur nette compatble

Actifs	Valeur de marché	Valeur nette comptable
Obligations	1530,2 M€	1327,5 M€
Actions	353,6 M€	282,9 M€
Immobilier	111 M€	94,6 M€
Cash	23,8 M€	23,8 M€

TABLE 2.3: Répartition de l'actif

Ces actifs possèdent des taux de plus-value latentes calculés en faisant le quotient de la valeur de l'actif à un instant t par sa valeur comptable. Les taux utilisés proviennent du site de la BANQUE DE FRANCE (2020a) dont les valeurs ont été extrapolées.

Le taux de turn-over automatique qui correspond à la proportion vendue chaque année est de 15% pour les actions et de 8% pour l'immobilier.

Concernant les obligations, le détail a été repris de données clients ajustées à la taille de notre portefeuille. Les obligations sont composées à 50% d'obligations gouvernementales et à 50 % d'obligations corporates, de maturités allant de 1 à 20 ans comme dans le tableau 2.4. Les pourcentages donnés sont liés au type d'obligations regardé. Par exemple les obligations gouvernementales de maturité 1 correspondent à 4% du total des obligations gouvernementales (en valeur nette comptable) et les obligations d'entreprises de maturité 1 correspondent à 4% du total des obligations d'entreprises (toujours en valeur nette comptable).

Le modèle n'intégrant pas de risque de spread, un spread de 0,5% est appliqué sur les obligations

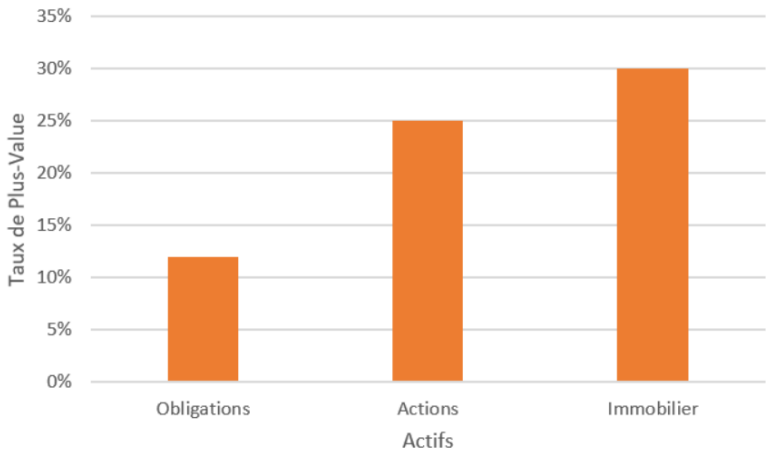


FIGURE 2.9: Taux de plus-values latentes

corporate pour tenir compte de la prise de risque associée à ces obligations. Cette hypothèse est valable car les valeurs de marché sont reconstituées dans le modèle à partir des valeurs nettes comptables et des taux de coupons, ne créant pas d'écart de convergence du modèle.

2.3.2 Le passif

La composition du passif sous Solvabilité 1 est issue de la base Excel Balance Sheet du site EIOPA (2020) Insurance Statistics et d'un benchmark effectué par Optimind et sont regroupées dans le tableau 2.5 .

En proportion, les contrats UC représentent 16% des provisions mathématiques contre 84% pour les contrats euros. Pour ces derniers, la structure de la figure 2.10 pour le TMG a été retenue :

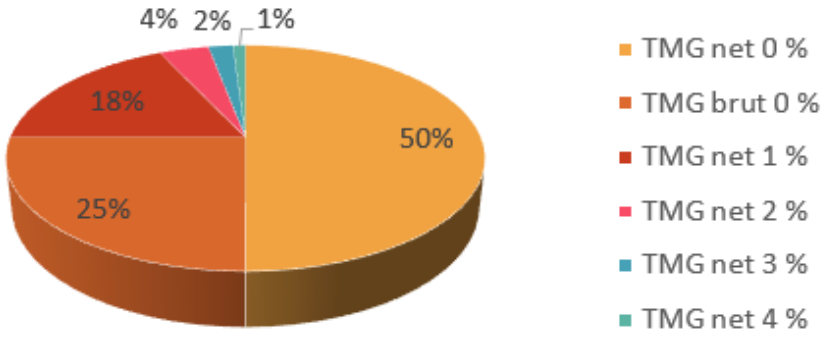


FIGURE 2.10: Répartition des TMG des contrats

Concernant également les contrats, les souscripteurs des contrats sont des hommes de moyenne d'âge 45 ans. Les taux de chargement sur encours sont de 0,60 % par an pour la partie en euros et de 0,70 % par an pour la partie UC. Il n'y a pas de frais supplémentaires pour les assurés rachetant leurs

Maturités	Gouvernementales	Corporates
1	4%	7%
2	4%	4%
3	2%	5%
4	2%	6%
5	2%	12%
6	4%	12%
7	5%	12%
8	5%	11%
9	7%	11%
10	8%	8%
11	9%	4%
12	8%	3%
13	8%	2%
14	8%	2%
15	7%	1%
16	4%	0%
17	4%	0%
18	2%	0%
19	2%	0%
20	5%	0%

TABLE 2.4: Allocation et maturité des obligations

Données Passif au 31/12/2019	En millions d'euros
Réserve de Capitalisation	18,1 M€
PPB	54,5 M€
FP	221 M€
PM UC	321,2 M€
PM Euros	1654,5 M€

TABLE 2.5: Éléments du passif de la société type

contrats ou pour l'arbitrage que ce soit de l'euro vers l'UC ou dans l'autre sens.

2.4 Résultats du modèle sur le portefeuille moyen

La figure 2.11 présente le bilan Solvabilité 2 obtenu suite à la simulation risque-neutre regroupant la part en euros et la part en UC. La PVFP (Present Value of Future Profits) est un indicateur de rentabilité qui mesure la valeur actuelle des profits générés par les contrats dans le futur et vaut environ 30,1 millions d'euros (en brut). La PVFP provenant de la part en euros est de 4,1 millions d'euros et celle provenant de la part en UC est de 26 millions d'euros. Le calcul de la PVFP est donné par la formule suivante pour un scénario j donné.

$$PVFP_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{Resultat\ assureur_{i,j}}{(1+\tau_{i,j})^i}.$$

où $Resultat\ assureur_{i,j}$ correspond au résultat de l'assureur l'année i pour un scénario j, qui comprend les revenus de l'assureur (provenant des placements et des chargements sur encours) auxquels ont été retranchés la revalorisation des contrats, les frais et les commissions de l'assureur. $\tau_{i,j}$ correspond quant à lui au taux d'actualisation de l'année i pour un scénario j. La PVFP est alors obtenue en effectuant la moyenne des PVFP sur l'ensemble des scénarios.

Bilan S2 (Euro + UC)			
Actif		Passif	
Obligations	1530,2 M€	PVFP	30,1 M€
Actions	353,7 M€	BEL Euros	1997,7M€
Immo	111 M€	RM Euros	17,6 M€
Cash	23,9 M€	BEL UC	292,4M€
UC	321,2 M€	RM UC	2,2 M€
Total	2340 M€	Total	2340 M€

FIGURE 2.11: Bilan Solvabilité 2

La PVFP permet de déterminer le coût des options et des garanties des contrats, et dans le cadre de nos contrats les coûts liés au TMG et à la participation aux bénéfices. Ce coût est obtenu en faisant la différence entre la PVFP déterministe qui représente le scénario moyen parmi les 1000 issus du GSE et la PVFP stochastique.

Les capitaux propres ne sont pas intégrés dans le modèle et n'apparaissent donc pas dans ce bilan, ils seront supposés constants dans les études qui suivent.

Après application des chocs et de la formule standard, le modèle renvoie en valeurs approchées un BSCR net de capacité d'absorption de 104,1 millions d'euros et un SCR Opérationnel de 10,4 millions d'euros. Le SCR total est donc de $SCR = 104,1 + 10,4 = 114,5$ millions d'euros. La capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques est donc contenu dans le BSCR net, les impôts différés ne sont pas traités dans ce modèle.

Les deux modules qui rentrent en action lors du calcul du BSCR pour un assureur ne proposant que des contrats d'épargne sont le SCR vie et le SCR de marché, les sous-modules présentés sur les figures 2.12 et 2.13 donnent des informations précises sur les risques auxquels la compagnie est le plus sensible. Les détails des SCR sont donnés nets de capacité d'absorption ici, ce sera également le cas pour les autres présentations des SCR vie et SCR de marché par la suite. La diversification du SCR vie est de 25,1% et est de 15,5% pour le SCR de marché.

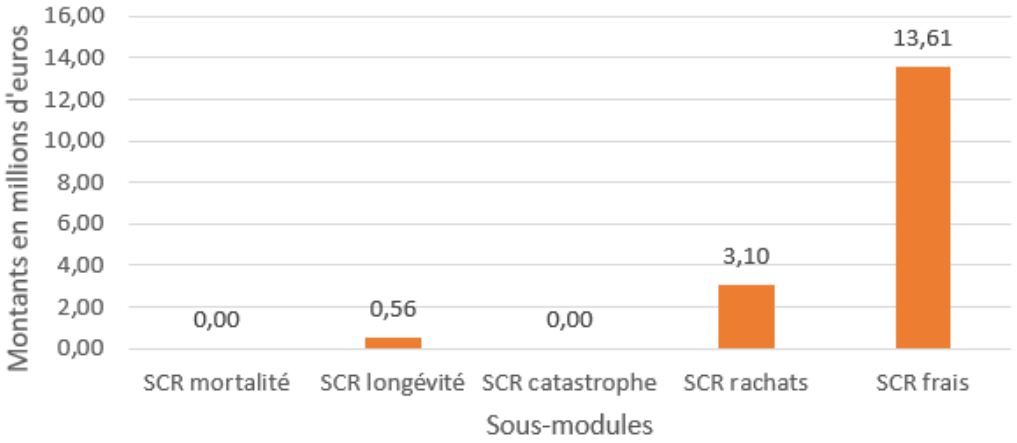


FIGURE 2.12: Module SCR vie

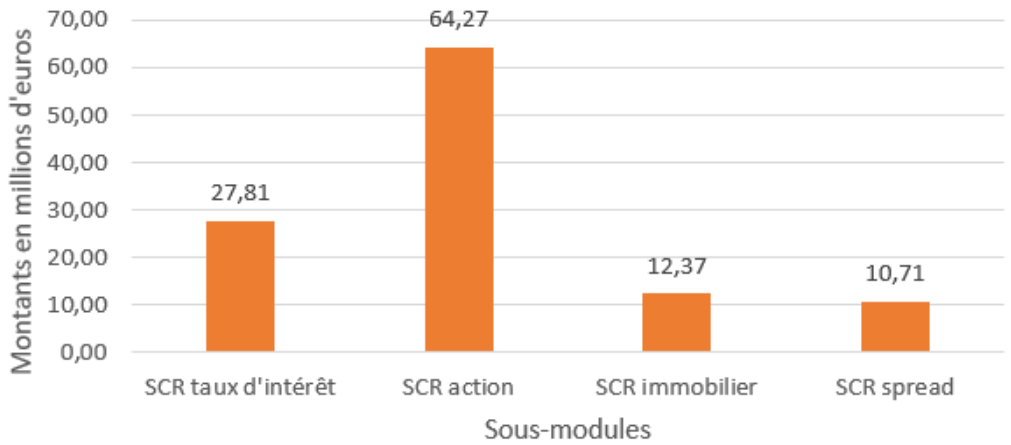


FIGURE 2.13: Module SCR marché

Le portefeuille de cette société est plus sensible à un choc de longévité qu'à un choc de mortalité, ce qui est concordant avec un SCR rachat qui provient d'un choc de rachat à la baisse et non d'un choc de rachat à la hausse.

La marge de risque est de 19,7 millions d'euros et le ratio de solvabilité pour cette société type est d'environ 202 %, l'assureur type actuel selon le modèle couvre donc deux fois ses risques.

Pour la suite les études sur les différents indicateurs seront donnés par leurs valeurs et en % des valeurs obtenues dans cette section. Ainsi, si un levier fait diminuer le SCR de 10 %, il s'agira d'un SCR de $114,5 \times (1 - 0,1) = 103,05$ millions d'euros.

2.5 Limites du modèle

Bien que le modèle soit assez complet il n'intègre pas toutes les informations qui pourraient décrire la compagnie : certaines provisions ne sont pas modélisées telles que la PDD ou la PRE. De plus les différentes classes d'actifs sont en réalité plus nombreuses, l'immobilier ne rapporte pas de loyer et les actions ne rapportent pas de dividendes.

Pour les obligations, le rating (qui désigne la probabilité de défaut de l'obligation) n'est pas pris en compte. Cette limite peut entraîner un impact non-négligeable surtout si le risque est grand, dans le cas étudié avec un spread de 0,5% sur les obligations corporates l'impact de cette limite est moins important.

Le choc de concentration qui caractérise le manque de diversification n'est pas modélisé, le choc de spread est calculé grâce à un proxy par souci de simplicité car le rating n'est pas intégré, ces éléments rendent donc le calcul du SCR moins précis. De plus, les ajustements pour impôts différés ne sont pas traités dans ce modèle.

Les actions et les valeurs immobilières sont représentées par un model point chacun, la réalité est bien plus complexe et par exemple pour les actions il est préférable d'avoir des models points différents pour des actions plus prudentes ou des actions plus risquées.

Ces améliorations n'ont pas été implémentées car elles sont complexes à modéliser et le gain en précision sur les projections n'est pas considérable.

De plus, les temps de calculs pour les projections sur 1000 scénarios peuvent aller jusqu'à une heure et demie si tous les chocs sont à calculer, cet élément peut être un frein du côté des assureurs qui voient ce modèle comme un outil de pilotage et qui doivent effectuer des centaines de tests de sensibilité afin de prendre des décisions pour la gestion de leur organisme. Ce problème sera étudié dans la partie 4 de ce mémoire et une solution sera proposée pour réduire le nombre de simulations.

Chapitre 3

Leviers d'optimisation sur les différents indicateurs

3.1 Les contrats euros nouvelle génération

Le premier levier étudié ici est la mise en place d'un nouveau produit, ce produit étant semblable au produit mis en place par Spirica décrit dans le premier chapitre de ce mémoire.

Pour rappel, le triplet rendement, risque et disponibilité caractérise les différents contrats. L'idée de ce contrat appelé le fonds euros nouvelle génération est à partir du fonds euros classique possédant un triplet (0,1,1), qui correspond pour l'assuré à un rendement faible, un risque faible et une disponibilité de l'argent épargné à n'importe quel moment, de passer à un nouveau fonds euros de caractéristiques (β,1-β,1) où $\beta \in [0, 1]$.

Du point de vue de l'assuré, le rendement serait légèrement meilleur mais le risque légèrement supérieur. Cette prise de risque provient de la baisse du capital garanti tandis que la hausse du rendement provient de l'investissement plus risqué possible par l'assureur lié à cette baisse de garantie. Le capital garanti qui diminue correspond donc à la valeur de β dans le triplet (β,1-β,1) et vient donc augmenter le rendement tout en augmentant le risque pour l'assuré.

Cette perte de garantie est due à des frais de gestion supérieurs à la moyenne et le montant garanti par le contrat de Spirica est de 98% par rapport au fonds euro qui était de 100%. Ainsi dans le modèle les contrats de ce nouveau produit sont des contrats possédant un TMG brut de 0% avec des frais de gestion sur encours de 2%.

Ce produit est une bonne alternative pour les assurés ne souhaitant pas prendre de risques avec les UC, pour rester sur un fonds euros tout en espérant un rendement meilleur que le fonds euros actuel en gardant une disponibilité du capital à contrario des contrats eurocroissance.

3.1.1 Protocole et hypothèses

Il a été décidé de s'intéresser à l'évolution de la solvabilité suite à la mise en place d'un tel produit et à sa rentabilité au niveau de l'assureur et au niveau de l'assuré.

Pour cela, le critère d'optimisation retenu est un paramètre α qui sera la proportion de nouveaux contrats au bout de 5 ans sur l'ensemble du portefeuille. Ce nombre sera également appelé par la suite la proportion cible de nouveaux contrats, par exemple si au bout de 5 ans $\alpha = 2\%$ et si la provision mathématique du portefeuille vaut 1000 alors la provision mathématique relative aux nouveaux contrats sera de 20.

Dans le but d'étudier la solvabilité et la rentabilité à un horizon de 5 ans, des hypothèses concernant les entrées du GSE monde réel et du GSE risque neutre ont été prises :

- **Le GSE monde réel** : Concernant les entrées de ce GSE, il a été décidé pour obtenir les scénarios économiques à T=1 de garder la calibration à partir de l'historique faite à l'année 0, tout en partant des taux à l'année 1 (obtenus en appliquant la formule de Vasicek sans le bruit). Pour les modèles de Black & Scholes, la calibration des paramètres est également conservée et la formule est appliquée sans le bruit pour obtenir les valeurs du cours de l'immobilier et du cours des actions. Pour obtenir le GSE au bout de 2 ans ou plus la même méthode est appliquée. Un seul scénario est alors obtenu et permet de projeter le portefeuille en monde-réel, ce scénario est le scénario déterministe.

  Le rendement de l'immobilier et le rendement des actions sont supposés constants sur toute la projection et ont pour valeur respectivement 7,78% et 5,84%. Cette trajectoire moyenne a été générée dans le but d'obtenir une représentation la plus précise possible du portefeuille dans 5 ans.

- **Le GSE risque neutre** : Concernant les entrées de ce GSE risque neutre à l'instant T=5 la courbe EIOPA a été décalée de 5 années, les autres inputs du GSE sont considérés être les mêmes sur les 5 ans.

Les projections des MP du passif et de l'actif se feront en monde réel, avant d'obtenir en T=5 les indicateurs de solvabilité avec une projection en risque neutre.

Le New-Business a été intégré au modèle ALM qui était en "runoff", avec un taux de nouvelles affaires moyen de 8% par an obtenu à partir de données clients. De plus le contrat étant nouveau il semble compliqué d'obtenir des valeurs élevées pour α car des nouveaux contrats à 5 ans ne peuvent pas représenter à eux seuls une haute proportion des provisions mathématiques (accumulées depuis une dizaine d'années pour plusieurs contrats différents), un seuil maximal de $\alpha = 5\%$ a été retenu.

Il a été nécessaire de prendre des hypothèses concernant la manière dont la proportion cible de nouveaux contrats est atteinte. En effet, les MP passifs sont chaque année à renseigner en entrées du modèle ALM pour projeter l'année suivante, il faut donc avoir une hypothèse sur la répartition du nombre de contrats jusqu'à ces 5 ans. L'hypothèse qui a été choisie est de considérer que l'évolution de la proportion des contrats serait la même que pour les contrats eurocroissance. Ce produit étant instauré depuis 2014 un historique de 5 ans est disponible pour le nombre de contrats liés à ce produit sur le site de la FFA (2020). Le graphique 3.1 représente l'évolution des contrats eurocroissance de 2014 à 2019.

Cette évolution indique que sur la totalité du nombre de contrats eurocroissance 5 ans après son lancement, 43% des contrats ont été souscrits l'année 1. L'évolution des contrats euros nouvelle génération suivra alors l'exemple suivant. Si l'objectif du nombre de contrats au bout de 5 ans doit être de 100, la première année il y aura 43 contrats, puis 59 la deuxième (au total), jusqu'à obtenir les 100 contrats

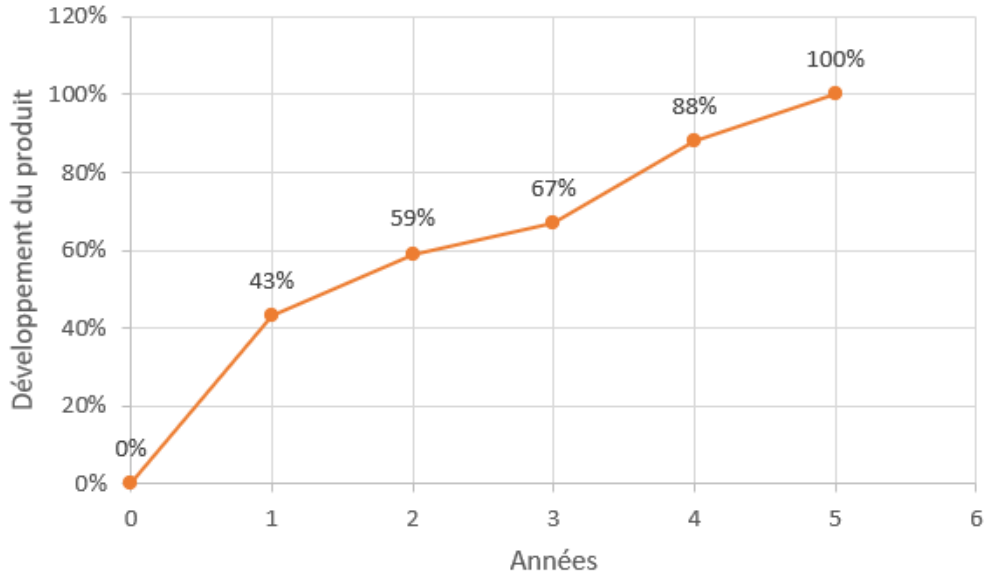


FIGURE 3.1: Évolution relative des contrats eurocroissance depuis 2014

au bout de 5 ans.

Le fait que l'eurocroissance n'ait pas été un produit ayant eu un succès commercial important n'entrave pas cette hypothèse car l'étude est portée sur la variation relative du nombre de contrats. De plus, cette courbe est interprétable commercialement avec une forte évolution la première année liée à une publicité potentielle et à une intrigue des assurés sur un produit "nouveau" puis une évolution qui semble linéaire dans le temps les années suivantes.

Par la suite lorsqu'il est question du nombre de simulations, il s'agira non pas du nombre de scénarios utilisés pour le modèle ALM mais au nombre de fois qu'il faut lancer le modèle. La principale contrainte de ce levier est le temps de calcul associé aux tests par rapport au paramètre α, en effet pour N valeurs de α différentes, on a

$$nb\ simulations = N \times (5 + 1).$$

5 correspond au nombre de simulations en monde réel et 1 la simulation en risque neutre pour obtenir les valeurs des indicateurs.

La valeur de N a été fixée à 6 avec des valeurs de alpha allant de 0% à 5% par pas de 1%. Les valeurs intermédiaires sont obtenues en effectuant des interpolations entre les valeurs calculées.

Le paramètre α optimal sera déterminé de la manière suivante

$$\alpha_{optimal} = \underset{\alpha \in [0\%, 5\%]}{\arg\max} \frac{(PVFP_\alpha - coût_\alpha)}{SCR_\alpha},$$

où $PVFP_\alpha$, SCR_α sont respectivement les montants de la PVFP et du SCR pour α donné à horizon 5 ans.

Une fonction $coût_\alpha$ va permettre de prendre en compte l'investissement de l'entreprise pour l'acquisition des nouveaux contrats. Cette fonction coût est une hypothèse forte qui va influer grandement sur l'optimisation du paramètre α, c'est pourquoi plusieurs fonctions de coût seront testées et les résultats seront analysés suivant la fonction de coût choisie. Il a été choisi de tester les 4 fonctions de coût détaillées dans la figure 3.2.

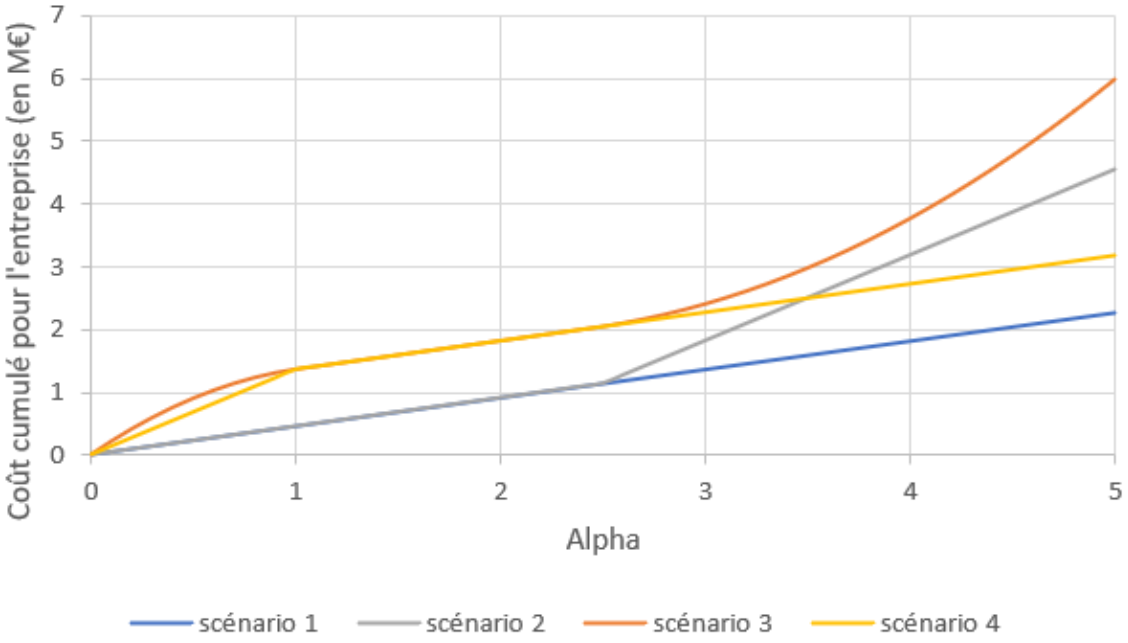


FIGURE 3.2: Coûts liés aux nouveaux contrats uniquement

Les valeurs numériques des coûts énoncés par la suite sont calibrées à partir d'informations de marché et ont été utilisées pour appliquer la modélisation choisie. Un coût de mise en place de contrat n'a pas été intégré car ce coût est fixe et ne viendra donc pas influer sur l'optimisation du paramètre α. En effet, cela revient juste à considérer un décalage sur la fonction à optimiser qui serait le même sur tout l'intervalle de l'étude.

- Le scénario 1 est un scénario simple dans lequel l'assureur va payer des coûts d'acquisition égaux à 2% des primes des nouveaux contrats.

- Le scénario 2 est un scénario dans lequel l'assureur possède déjà un portefeuille conséquent. Un seuil a été fixé à 2,5%. Ce seuil correspond au pourcentage de PM des nouveaux contrats au bout de 5 ans de la mission étudiée. Il a été considéré qu'avant ce seuil, les coûts d'acquisition sont de 2% des primes pour simuler des frais similaires à ceux du scénario 1. Pour un assureur important il y a un effet saturation du marché qui provient du fait que par exemple 5% des contrats peut correspondre à un grand montant. Cette saturation est modélisée ici par des coûts d'acquisition trois fois plus importants pour les contrats acquis au-dessus du seuil car il sera de plus en plus difficile d'obtenir des nouveaux contrats lorsque α augmentera.

- Le scénario 3 reprend le cadre d'un assureur ayant un portefeuille conséquent, en ajoutant une aversion du risque des assurés avec la bosse obtenue pour les faibles valeurs de α , représentant les assurés qui ont "peur" d'un nouveau contrat avec une nouvelle garantie du capital. De plus pour tenir compte de la réalité du marché les variations de coûts d'acquisition sont moins brutales que

dans le scénario précédent. Ainsi les coûts d'acquisition pour des valeurs de $\alpha < 1$ sont supposés de 4% des primes. La suite de la courbe suit les hypothèses du scénario 2, c'est à dire avec une saturation du marché qui rend de plus en plus difficile l'augmentation de la valeur de α.

- Le scénario 4 situe le cas d'un petit assureur ou d'un assureur nouveau. Les coûts d'acquisition des contrats seront importants pour les faibles valeurs de α afin que les assurés aient confiance en cet assureur qui est nouveau et qui commercialise des contrats ayant une garantie de 98%. Cependant l'augmentation du paramètre α sera moins coûteux pour les grandes valeurs car il est plus facile pour ce type d'assureur de remplacer 5 ou 10 % de son portefeuille par ces nouveaux contrats. Les coûts d'acquisition sont alors supposés de 2% des primes concernant les nouveaux contrats lorsque α augmente.

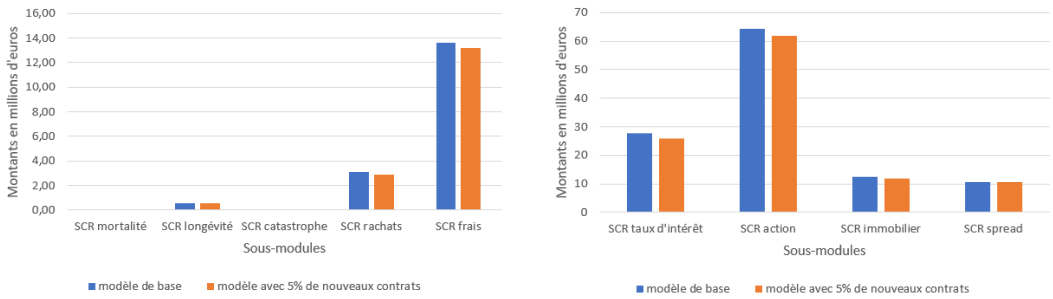
3.1.2 Résultats obtenus

Afin de voir quels sont les impacts d'un tel levier sur la solvabilité de l'assureur voici dans un premier temps l'évolution des différents indicateurs dans le tableau 3.1 en supposant qu'à l'instant initial le passif de l'assureur type était constitué à 5% de ce type de contrats (en % de la PM totale). Ensuite les modules SCR vie et de marché sont présentés sur la figure 3.3 en respectant la forme imposée à la fin du chapitre 2 dans le but d'expliquer plus en détail les variations des indicateurs.

Les données relatives aux indicateurs de ce tableau sont exprimées en millions d'euros, sauf pour le ratio de solvabilité qui reste un pourcentage, la PVFP sera exprimée en brut dans les résultats de ce mémoire.

Indicateurs	Société type	Avec 5% des nouveaux contrats	évolution
BEL	2290,1 M€	2279,4 M€	-0,46%
Ratio de solvabilité	202%	217%	+15%
SCR	114,5 M€	111,5 M€	-2,6%
SCR_{vie}	13,8 M€	13,2 M€	-4,2%
$SCR_{marché}$	99,7 M€	96,4 M€	-2,3%
$PVFP$	30,1 M€	40,6 M€	+34,8%

TABLE 3.1: Impact des nouveaux contrats sur les indicateurs



(a) Module SCR vie (b) Module SCR marché

FIGURE 3.3: Détail des modules SCR vie et SCR de marché avec et sans new business

Les nouveaux contrats améliorent donc la solvabilité générale de l'entreprise type bien qu'ils ne représentent que 5 % du portefeuille. Chaque indicateur est légèrement amélioré en dehors de la PVFP

qui a été augmentée de manière significative car cette valeur était peu élevée de base. L'augmentation de la PVFP peut s'expliquer par celle des frais provenant des nouveaux contrats, il est également possible de comparer les différences entre la PVFP stochastique et la PVFP déterministe dans les deux cas pour évaluer le coût des options et garanties de nos contrats. Pour la société type cette différence vaut 76,11 millions d'euros et pour le cas où les nouveaux contrats représentent 5% du portefeuille initial cette différence est de 70,09 millions d'euros. Cette importante diminution montre bien la baisse des coûts liés aux TMG des contrats du portefeuille qui correspond à un gain de 6,02 millions d'euros.

Le SCR vie a été diminué suite à une baisse du SCR rachat et du SCR de frais, ces résultats étaient prévisibles car il est moins dangereux pour l'assureur de garder des contrats dont la garantie est plus faible. Concernant le SCR de marché, tous les sous-modules ont diminué légèrement de la même proportion, traduisant une exposition moins forte aux variations du marché. La diversification du SCR vie est passée de 25% à 26% ce qui est une bonne chose pour la gestion des risques de ce sous-module. Cependant la diversification du SCR marché à diminué de 15,5% à 14,4% .

Jusqu'à la fin de cette section, les résultats seront donnés à horizon 5 ans, permettant ainsi d'être en accord avec la définition du paramètre α. Le tableau 3.2 présente les différentes valeurs pour les 4 scénarios présentés à la section précédente et sont exprimées en pourcentage.

fonction à maximiser	Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3	Scénario 4
$\alpha = 0$	-6,22	-6,22	-6,22	-6,22
$\alpha = 1$	-5,20	-5,20	-5,83	-5,83
$\alpha = 2$	-3,90	-3,90	-4,53	-4,53
$\alpha = 3$	-2,76	-3,07	-3,48	-3,39
$\alpha = 4$	-1,84	-2,78	-3,19	-2,47
$\alpha = 5$	-0,74	-2,31	-3,31	-1,36

TABLE 3.2: Variations de la fonction à maximiser suivant les différents scénarios

Le graphique de la figure 3.4 présente la fonction que l'assureur cherche à minimiser suivant les différents scénarios. Ce graphique permet de mettre en avant des résultats intéressants.

Pour le scénario 1, la conclusion est que la fonction à maximiser est strictement croissante lorsque α augmente. Les coûts d'acquisition sont constants et la seule différence entre les différents points de la fonction est le gain qui provient des nouveaux contrats, qui augmente avec α. La réponse à la question posée est alors très simple, dans ce scénario la situation de l'assureur s'améliorera avec l'augmentation du nombre de nouveaux contrats.

Dans le cas du scénario 4 la conclusion sera la même. L'assureur a tout intérêt à voir la part de nouveaux contrats augmenter dans son portefeuille. Cependant, les coûts liés à la difficulté de lancer le produit se font légèrement ressentir avec un petit décalage par rapport au scénario 1 qui commence dès $\alpha = 1$.

Les points obtenus pour le scénario 2 sont semblables à ceux du scénario 1 pour $\alpha < 3$, qui correspond aux valeurs de α plus petites que le seuil défini. Au delà de ce seuil les coûts d'acquisition vont augmenter drastiquement, menant dans un premier temps à une amélioration plus faible des résultats entre $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$. Il est alors envisageable qu'au-delà d'une certaine valeur de α en dehors de notre étude la fonction va commencer à décroître. Cependant, même si le gain est affaibli la solution reste de prendre un maximum de ces nouveaux contrats.

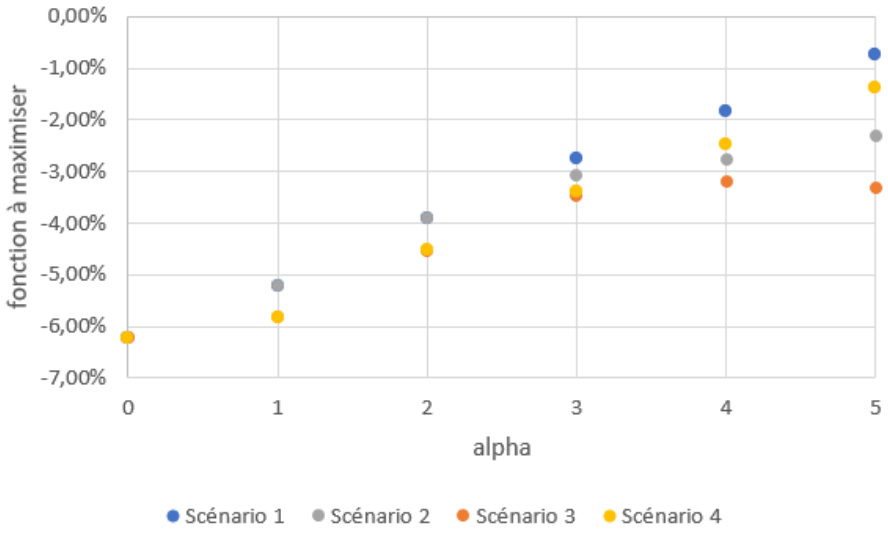


FIGURE 3.4: fonction que l'assureur cherche à maximiser

Le scénario 3 possède une conclusion différente car les coûts d'acquisition sont dès le départ légèrement plus importants, menant ainsi à une décroissance de la fonction à maximiser car l'acquisition des contrats coûte plus cher que ce qu'ils peuvent rapporter, il va alors falloir mettre en place une méthode pour déterminer le maximum de la fonction. La fonction à maximiser peut être approchée linéairement pour les scénarios 1 et 4, pour obtenir les valeurs intermédiaires des scénarios 2 et 3, il a été décidé d'effectuer une interpolation de Lagrange sur les points disponibles. La théorie impose l'existence et l'unicité d'un polynôme de degré au plus 5 passant par ces 6 points qui interpole la fonction à maximiser.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_1, b_2, ..., b_n$ des réels, le but est de trouver une fonction polynomiale y de degré au plus n-1 telle que $y(a_i) = b_i$, où $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$

L'idée de cette méthode est d'utiliser le principe de superposition :

- Il faut dans un premier temps déterminer n polynômes notés $L_1, L_2, ..., L_n$ de degré n-1 tels que $\forall i, j \in [\![1\ ;\ n]\!]^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le delta de Kronecker. Les L_i sont appelés polynômes de Lagrange élémentaires et sont calculés avec la formule

$$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

  Il est remarquable que ce polynôme s'annule en chaque point d'interpolation sauf un où la valeur du polynôme est 1.

- Dans un second temps une combinaison linéaire des polynômes élémentaires est effectuée de telle sorte que le polynôme total ait pour valeur b_i en a_i. Ce polynôme vaut

$$y(X) = \sum_{i=1}^{n} L_i(X) \times b_i.$$

  Il est alors trivial que le polynôme en question passe exactement par chaque point d'interpolation et est de degré maximum N-1 par combinaison linéaire de polynôme de degré N-1.

Après calculs les polynômes de la forme $\frac{(PVFP_\alpha - coût_\alpha)}{SCR_\alpha} = \sum_{i=0}^{5} c_i \times \alpha^i$ sont obtenus, où les valeurs des coefficients de Lagrange sont données dans le tableau 3.3.

i	c_i scénario 2	c_i scénario 3
0	-6,22	-6,22
1	0,48	-0,57
2	0,78	1,25
3	-0,26	-0,29
4	$1,92 \times 10^{-2}$	$9,6 \times 10^{-3}$
5	$9,2 \times 10^{-4}$	$1,75 \times 10^{-3}$

TABLE 3.3: Coefficients interpolation Lagrange

La figure 3.5 regroupe les résultats précédents, il est alors possible de déterminer le maximum des fonctions pour le scénario 3 en annulant simplement la dérivée du polynôme.

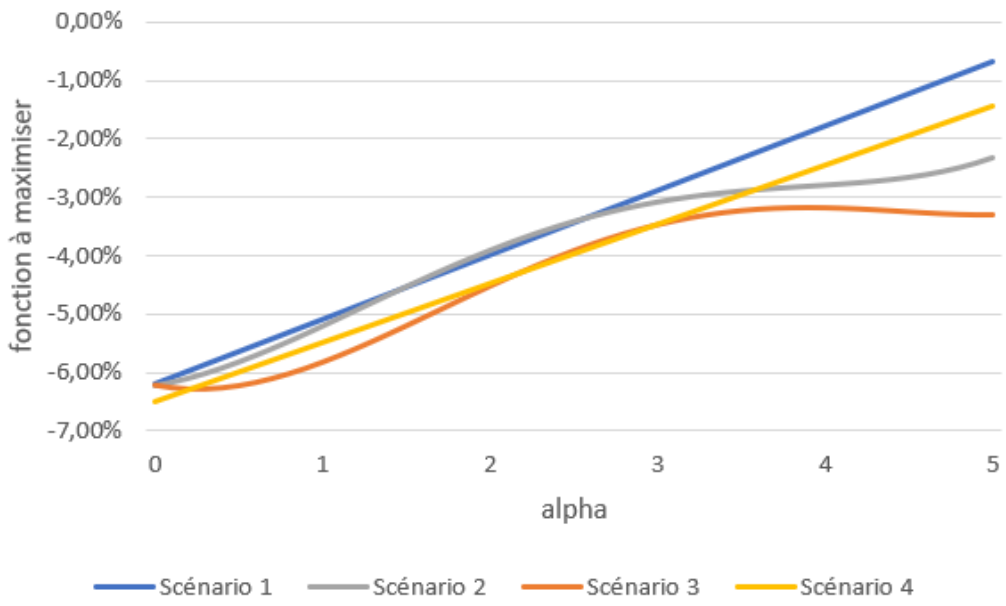


FIGURE 3.5: Interpolations de la fonction à maximiser

Sur l'intervalle étudié, il a été déterminé que la valeur de α optimale pour les scénarios 1,2 et 4 est de 5. La proportion optimale de nouveaux contrats à T=5 ans par rapport aux hypothèses de coûts mises en place est de 3,88 % pour le scénario 3. Il aurait également été possible d'appliquer la même méthode au scénario 2 en utilisant plus de points pour l'interpolation et en étendant l'intervalle d'étude. Afin de vérifier la cohérence de ce résultat, il est possible de comparer par exemple la valeur de la fonction obtenue avec l'interpolation de Lagrange à la valeur réelle de cette fonction pour valider le modèle dans un premier temps.

Pour le scénario 3, la valeur de la fonction obtenue par les simulations est de -3,19% et la formule de Lagrange donne pour $\alpha = 3,88\%$ une valeur interpolée de -3,20%. L'écart est alors de 0,01% ce qui est acceptable comme marge d'erreur.

Dans un second temps, voici dans le tableau 3.4 les variations des différents indicateurs de solva-

bilité avec la proportion optimale dans le cas du scénario 3. Les valeurs sont moins importantes que celles présentées dans la partie présentation des contrats euros nouvelle génération car le coût de l'assureur n'avait pas été pris en compte. Les données sont comparées à celles de la société type avec du new business à la date T=5 mais sans intégration des nouveaux contrats. Les valeurs sont données en millions d'euros (sauf pour le ratio de solvabilité qui reste un pourcentage).

Indicateurs	Société type sans nouveaux contrats	Avec α=3.88%	évolution
BEL	2568,76 M€	2560,5 M€	-0,32%
Ratio de solvabilité	131%	138%	+7%
SCR	146,27 M€	145,13 M€	-0,8%
SCR_{vie}	14,11 M€	13,91 M€	-1,4%
$SCR_{marché}$	121,6 M€	120,97 M€	-0,5%
$PVFP$	-9,10 M€	-1,06 M€	+8,04 M€

TABLE 3.4: Impact des nouveaux contrats sur les indicateurs avec alpha optimal

Les résultats qui sont présentés relèvent d'un portefeuille de contrats individuels, c'est pourquoi il semble difficile de modifier le TMG des contrats déjà présents dans le portefeuille et que seule une partie des nouveaux contrats possèdent des frais de gestion sur encours à 2%. Dans le cas d'un contrat collectif, l'assureur pourrait négocier avec le distributeur pour par exemple changer tous les contrats en des contrats semblables à ceux étudiés dans cette section. Une telle mesure pourrait donc améliorer grandement la solvabilité, au vu de la manière dont les indicateurs évoluent pour uniquement 5% de nouveaux contrats.

3.1.3 Limites de ce levier

Les limites de ce levier proviennent des hypothèses majeures prises pour la mise en place du new business, ces hypothèses sont au nombre de deux :

- **L'évolution du nombre de contrats** : Il a été décidé de prendre une évolution semblable à celle des contrats eurocroissance lors de leur sortie pour avoir une évolution jusqu'aux 5 ans. En réalité cette évolution ne sera pas exactement la même pour ce produit car la publicité faite autour de ce dernier et la réaction des assurés seront différentes ici (le contexte économique n'étant également pas le même qu'il y a 6 ans).

  Cependant des tests ont été effectués en modifiant la manière dont évoluent la proportion de nouveaux contrats pour atteindre le pourcentage α. Les résultats ont montré que l'impact sur les différents indicateurs était très faible et l'optimisation du nombre de contrats cible serait sensiblement la même.

- **Le coût de commercialisation** : Pour rappel 4 fonctions de coût ont été étudiées, les résultats ont montré que ces fonctions influaient de manière significative sur les résultats obtenus. En effet, si la courbe pour le scénario 3 de la figure 3.5 est analysée de plus près, une convexité apparaît pour les petites valeurs de α, puis la courbe semble linéaire pour des valeurs de α "moyennes" avant de devenir concave pour les grandes valeurs de α. Cette tendance est exactement celle opposée de la figure 3.2 pour le même scénario car la fonction observée faisait apparaître le coût de manière négative.

Ce point se retrouve également sur les autres scénarios, ces résultats montrent que la fonction étudiée est fortement sensible aux coûts d'acquisition fixés en amont et c'est d'ailleurs pour cela que les formes des courbes de la figure 3.5 sont différentes.

Le choix de la fonction à optimiser joue également un rôle important sur les résultats obtenus. Par exemple si le but avait été de regarder uniquement le SCR les résultats auraient pu être différents, certains assureurs auront tendance à regarder comment optimiser leur solvabilité, d'autre leur rentabilité ou encore un mixte des deux.

3.1.4 Un gain pour l'assureur et pour l'assuré

L'étude qui a été menée ne prend en compte cependant que le côté de l'assureur et pas de l'assuré, les améliorations proviennent alors de la garantie diminuée par rapport au fonds en euros classique. Il est alors intéressant de regarder la rentabilité au niveau des assurés, qui peut être augmentée suite à une allocation des actifs plus risquée. Le fait de ne pas avoir tenu compte de cette allocation dans les sections précédentes constitue également une limite concernant la précision des indicateurs car ces derniers dépendent de l'interaction actif-passif et donc par extension de l'allocation d'actifs.

Pour illustrer cette rentabilité au niveau de l'assuré suite à la mise en place des nouveaux contrats, les résultats qui suivent ont pour objectif de ne pas améliorer la solvabilité de l'entreprise, la proportion d'actions est alors augmentée tout en gardant un ratio de solvabilité constant pour l'assureur. Grâce à cette méthode les effets sur le rendement pour l'assuré seront mis en avant.

L'étude suivante reprend le cas du scénario 1 et donc l'hypothèse selon laquelle les coûts d'acquisition des nouveaux contrats sont les mêmes que ceux des anciens contrats. Ce scénario étant choisi, le taux cible de nouveaux contrats a été fixé à 5 % car les résultats précédents ne sont pas remis en cause par cet ajout et l'objectif de ce mémoire reste l'optimisation de la solvabilité des assureurs. Afin de retrouver une allocation telle que la solvabilité de l'assureur soit la même que celle avant intégration de ce levier, il a été décidé d'augmenter progressivement la part d'actions jusqu'à retrouver le moment où le ratio de solvabilité est de 131% à T=5.

L'indicateur de rendement regardé pour l'assuré est l'évolution moyenne de la revalorisation de sa provision mathématique au cours du temps, tenant compte des TMG des contrats et des résultats financiers de l'assureur. Les résultats du tableau 3.5 sont appliqués aux models points dans notre cas. Ainsi, l'année 3, si l'allocation d'actifs n'est pas effectuée, les assurés auront en moyenne 1,54% en plus sur leurs contrats par rapport à l'année précédente. L'augmentation de la proportion d'actions permet d'augmenter de 0,19% cette année la revalorisation des PM pour cette année.

Les résultats montrent que la rentabilité de l'assureur augmente avec l'allocation de l'actif, ce résultat est cohérent car les résultats financiers sont plus importants dans cet exemple. Les valeurs sont cependant faibles car la proportion finale est assez faible comparativement à tout le portefeuille. Il a été décidé de fixer dès T=0 une part d'actions plus grande dans le portefeuille, c'est pourquoi l'évolution de la revalorisation est presque constante dans le temps. Cependant, un assureur prudent aurait dû en pratique augmenter la part d'actions chaque année afin de ne pas prendre de risques. Cette augmentation qui varie au cours du temps doit alors prendre en compte le nombre de nouveaux contrats vendus chaque année.

Année	avant allocation actif	après allocation actif	évolution
T=1	1,76%	1,91%	+0,15%
T=2	1,59%	1,79%	+0,20%
T=3	1,54%	1,73%	+0,19%
T=4	1,44%	1,65%	+0,21%
T=5	1,32%	1,53%	+0,21%

TABLE 3.5: Croissance de la rentabilité pour les assurés

La rentabilité a été étudiée sur l'ensemble du portefeuille. En pratique l'assureur pourrait créer des contrats "privilèges" (ici les nouveaux contrats) afin d'améliorer la revalorisation de la provision mathématique de ces contrats uniquement et de récompenser ainsi les assurés de leur prise de risque.

Ce levier met alors un choix crucial qui relève du commercial, ce choix doit être fait par rapport à la manière dont les assurés sont avantagés et quelle est l'évolution de la solvabilité et rentabilité de l'assureur.

Un choix entièrement porté sur des gains pour l'assureur ne va pas pousser les assurés à souscrire aux nouveaux contrats avec une garantie plus faible qu'auparavant et un rendement similaire. De plus le coût de mise en place de ces contrats serait important car l'aversion au risque dans ce cas va rendre les coûts d'acquisition encore plus importants et donc réduire la manœuvre de l'assureur sur ce levier.

Au contraire si le choix est entièrement porté par l'assuré, l'assureur n'a pas d'intérêt direct car cela ne lui apporterait rien de commercialiser les nouveaux contrats. Il est cependant imaginable de rechercher des effets indirects tels que de la publicité pour l'assureur à travers ce genre de contrats, etc.

Le tableau 3.6 montre en effet que ce choix se pose car pour une allocation donnée il est possible à la fois d'augmenter la rentabilité de l'assuré et la solvabilité de l'assureur. Les valeurs proviennent également du scénario 1 et sont fixées à T=5, le terme "variation PM assurés" correspond dans ce cas à l'évolution de la PM moyenne de l'assuré entre T=0 et T=5.

Indicateurs	Situation initiale	après allocation actif et après nouveaux contrats	évolution
ratio de solvabilité	134%	139%	+5%
variation PM assurés	+7,8%	+8,2%	+0,4%

TABLE 3.6: Gains assureur et assuré

En pratique, les assureurs doivent prendre en compte la concurrence avant de prendre la décision entre le partage des gains assureurs/assurés pour éviter un paradoxe de Bertrand. En effet, si un assureur choisit de privilégier les assurés que ce que font les autres assureurs du marché, les assurés vont choisir de souscrire des contrats chez cet assureur. Cependant, cette stratégie peut être appliquée par un autre assureur, puis par d'autres à leur tour. Ce mécanisme mènerait à un gain nul pour l'assureur et c'est pourquoi il faudrait en théorie dans l'intérêt des assureurs que le gain pour l'assuré soit limité.

3.1.5 Études de sensibilité sur l'hypothèse de New-Business

Pour ce levier l'hypothèse selon laquelle il y a 8% d'affaires nouvelles par an a été prise. Afin de savoir si cette hypothèse influe grandement les résultats ou non, une étude avec 4% et 12% d'affaires nouvelles est effectuée.

Afin de prendre en compte l'effet volume, c'est à dire la taille du portefeuille, les variations des différents indicateurs sont étudiées en tenant compte de la provision mathématique totale. Il a été décidé de comparer les fonctions $\frac{Variation\ PVFP_\alpha}{PM}$ et $\frac{Variation\ SCR_\alpha}{PM}$. Par exemple, $Variation\ PVFP_3$ pour une hypothèse d'affaires nouvelles donnée vaudra $PVFP_{\alpha=3} - PVFP_{\alpha=0}$ pour observer le gain de PVFP pour cette valeur de α. Les variations du SCR et de la PVFP sont analysées ici, c'est pourquoi les résultats ne dépendent pas des différentes fonctions de coût d'acquisition présentées pour ce levier.

Les valeurs des provisions mathématiques étant élevées, les résultats des deux fonctions présentés précédemment sont regroupés dans les tableaux 3.7 et 3.8 et sont donnés en points de base.

α	4% d'affaires nouvelles	8% d'affaires nouvelles	12% d'affaires nouvelles
$\alpha = 1$	8,8	8,7	8,7
$\alpha = 2$	19,3	19,1	18,9
$\alpha = 3$	28,8	28,6	28,5
$\alpha = 4$	36,8	36,5	36,4
$\alpha = 5$	46,0	45,6	45,4

Table 3.7: Gain de PVFP

α	4% d'affaires nouvelles	8% d'affaires nouvelles	12% d'affaires nouvelles
$\alpha = 1$	-1,52	-1,51	-1,51
$\alpha = 2$	-2,67	-2,64	-2,66
$\alpha = 3$	-3,96	-3,93	-3,95
$\alpha = 4$	-5,21	-5,17	-5,19
$\alpha = 5$	-6,25	-6,18	-6,18

Table 3.8: Gain de SCR

Ces résultats montrent que l'hypothèse sur le pourcentage d'affaires nouvelles sur l'ensemble du portefeuille ne modifie presque pas les résultats. En effet, ces derniers évoluent de la même manière que la provision mathématique, c'est pourquoi les chiffres d'une colonne à l'autre sont sensiblement les mêmes.

3.2 Politique du taux servi

Le second levier étudié dans ce mémoire concerne la participation aux bénéfices, après avoir servi le TMG et la PB contractuelle, il reste un montant qui ira pour une partie doter la PPB, l'autre partie est appelée PB discrétionnaire. Cette PB discrétionnaire est distribuée aux assurés à la discrétion de l'assureur comme son nom l'indique.

L'idée de ce levier va être dans un premier temps de trouver comment mieux modéliser le taux cible assureur et le taux cible assuré, correspondant respectivement au taux que l'assureur va chercher à servir à ses assurés et au taux attendu par ces derniers, ces deux taux étant des éléments conséquents car ils sont à la base des rachats conjoncturels. Dans un second temps, une stratégie concernant la distribution de la PB discrétionnaire de manière astucieuse sera mise en place.

Contrairement au premier levier, il y a moins d'inconnues à maîtriser du point de vue de l'assureur car ce dernier connaît théoriquement la manière dont les assurés réagissent face à un taux servi, des historiques étant disponibles sur les rachats conjoncturels. De plus cette stratégie ne présente pas un coût commercial ou une aversion au risque des assurés à prendre en compte. Dans toute la section concernant ce levier, les études ont été réalisées à T=1 contrairement à la section précédente.

3.2.1 Protocole et hypothèses

Dans le modèle épargne le taux cible assuré est égal au TME et le taux assureur au taux assuré diminué d'une constante. Le problème de cette modélisation est qu'elle ne tient pas compte de la richesse de l'assureur, qui pourrait être amené certaines années à servir des taux importants alors que l'année en question est mauvaise. La modélisation suivante pour ces taux a alors été adoptée pour une année N donnée.

$$taux\ assuré(N) = \frac{1}{2} \times TME(N) + \frac{1}{2} \times TME(N-1).$$

Ce nouveau taux assuré permet de prendre en compte une inertie du TME car en pratique s'il y a une forte progression ou une chute du TME l'assuré ne s'attendra pas d'une année à une autre à un taux énormément différent. Le taux assuré étant défini, la formule suivante pour le taux cible assureur a été retenue.

$$taux\ assureur(N) = \lambda \times taux\ rendement\ actif(N) + \nu \times taux\ assuré(N).$$

Ainsi le taux que visera l'assureur tiendra compte à la fois de sa richesse à travers le TRA (Taux de Rendement de l'Actif) qui correspond au taux que rapportent les actifs vendus et du taux attendu par l'assuré qui doit être pris en compte pour ne pas avoir de rachats massifs.

Les valeurs de λ et ν seront obtenues à partir d'un historique grâce à une régression linéaire multiple par la méthode des moindres carrés ordinaires. Les données depuis 2014 des taux assureurs, des TRA et des taux assurés ont respectivement été obtenues grâce au site de la FFA (2020), des données clients et du site de la Banque de France (2020b) et sont résumées dans le tableau 3.9.

Année	taux assureur	TRA	taux assuré
2014	2,50%	3,51%	1,98%
2015	2,30%	3,07%	1,28%
2016	1,90%	3,18%	0,69%
2017	1,80%	3,02%	0,68%
2018	1,80%	2,56%	0,82%
2019	1,40%	2,48%	0,49%

Table 3.9: Données pour modéliser le taux assureur

Les résultats de la régression multiple concernant le nouveau taux cible assureur sont regroupés dans le tableau 3.10, le coefficient de détermination R^2 associé est de 0,99 ce qui traduit une régression de qualité.

Paramètre	*valeur*
λ	$0,40$
ν	$0,52$

TABLE 3.10: Paramètres de la régression multiple

Une fois la calibration effectuée, il reste à déterminer la stratégie de distribution de la PB discrétionnaire. Il a été choisi d'avantager les contrats possédant une forte proportion d'UC car ces contrats sont moins coûteux en terme de solvabilité et sont généralement les contrats dont les TMG sont assez faibles. Cependant le portefeuille initial ne contient que des contrats ayant la même proportion Euo/UC, une hypothèse a donc été faite sur une nouvelle distribution des proportions Euro/UC suivant le TMG des contrats présentée dans la figure 3.6, de manière à respecter les valeurs de 16% d'UC et de 84% d'euros totales sur le portefeuille.

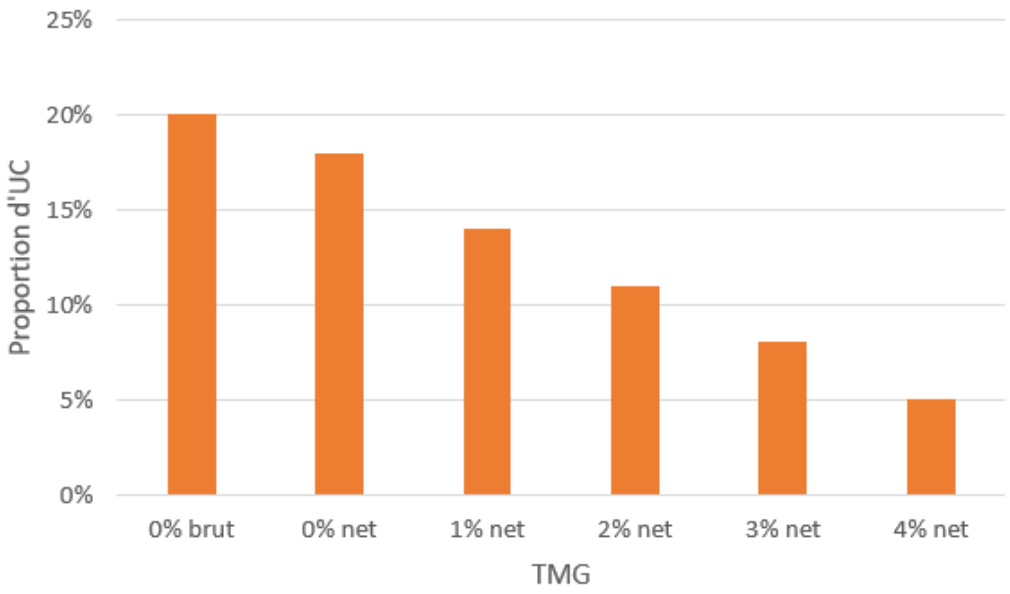


FIGURE 3.6: Nouvelle distribution de la proportion UC du portefeuille

Il a été choisi d'avantager les contrats possédant plus d'UC par une fonction priorité dépendant de la proportion d'UC et du montant de la PM euro par rapport à la PM euro du portefeuille. Le but étant d'avantager beaucoup plus les contrats dont la proportion d'UC est importante, cette fonction doit posséder une dérivée seconde positive afin de transmettre cet effet d' "accélération" forte de la fonction priorité. La fonction retenue est la suivante, où *proportion PM euro* est la proportion d'euro

du modèle point sur le montant du fonds euro du portefeuille total.

$priorite(proportion\ UC, proportion\ PM\ euro) = (e^{\gamma \times proportion\ UC} - 1) \times proportion\ PM\ euro, \gamma \in \mathbb{R}^*.$

La figure 3.7 montre l'évolution de cette fonction avec le paramètre γ. Cette fonction permet ensuite

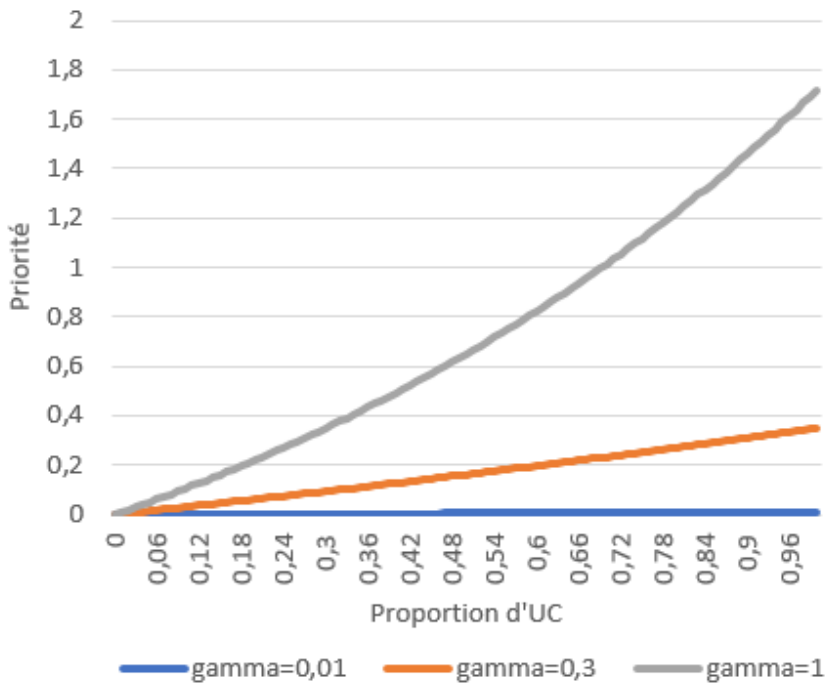


FIGURE 3.7: Importance du paramètre γ dans la modélisation

de déterminer la part de la PB discrétionnaire à distribuer aux assurés. En effet, si S est la PB discrétionnaire et N le nombre d'assurés possédant des $priorité_1, priorité_2, ..., priorité_N$,, le montant de PB discrétionnaire pour l'assuré k noté $PB\ dicrétionnaire_k$ vaut

$$PB\ dicrétionnaire_k = S \times \frac{priorité_k}{\sum_{i=1}^{N} priorité_i}.$$

Exemple : Il y a 100 euros à distribuer parmi 3 assurés avec une valeur de γ, des PM et des proportions euro/UC telles que $priorité_1 = 3$, $priorité_2 = 1,5$ et $priorité_3 = 0,5$. En appliquant la formule il vient $PB\ dicrétionnaire_1 = 60$ euros, $PB\ dicrétionnaire_2 = 30$ euros et $PB\ dicrétionnaire_3 = 10$ euros.

La courbe bleue de la figure 3.7 correspond au cas où la mise en place de cette fonction priorité n'a pas d'impact majeur comparé au modèle de base car les priorités des assurés sont très proches. En effet, le cas $\gamma = 0$ correspondrait à une priorité nulle pour tous les assurés, donc à un cas où la proportion d'UC n'influe pas sur la PB discrétionnaire.

Dans le cas contraire où $\gamma >> 1$, toute la PB discrétionnaire serait attribuée aux assurés dont la proportion d'UC serait supérieure aux autres, cette solution n'est pas stable en pratique car elle est supposée entraîner un grand nombre de rachats chez une majorité d'assurés ne recevant rien ou presque de la PB discrétionnaire.

Ces deux remarques montrent que s'il existe une valeur de γ telle que la situation de l'assureur

soit meilleure que celle du modèle de base, alors une optimisation du paramètre γ est réalisable.

Du point de vue de l'assureur ce levier possède deux faces intéressantes :

- **Un contrôle théorique des rachats :** Cet aspect sera étudié dans un premier temps car il est facilement mesurable à l'aide du modèle épargne. La théorie voudrait que cette méthode entraîne des rachats sur les contrats qui coûtent chers en solvabilité à l'assureur à cause de leur TMG important. Cependant les contrats possédant un fort TMG seront satisfaits de leur rendement même avec une PB discrétionnaire faible, il est alors attendu pour l'assureur des rachats sur les TMG moyens (1% et 2% pour le portefeuille étudié) au détriment des TMG faibles qui resteront plus facilement grâce à la revalorisation provenant de la PB discrétionnaire.
- **Une incitation à arbitrer vers l'UC :** De telles mesures sur la distribution de la PB discrétionnaire vont impacter les choix des assurés qui vont chercher à optimiser leur rendement. En supposant que les assureurs rendent publiques les informations sur des rendements plus importants pour les contrats dont la part en UC est plus importante, certains assurés vont vouloir arbitrer vers l'UC. Néanmoins cet aspect est difficilement mesurable car plusieurs facteurs rentrent en jeu comme la réaction des assurés qui est encore une fois difficilement modélisable ou encore la façon dont les assureurs vont mettre en avant ces nouvelles incitations d'arbitrage. De plus les arbitrages ont été calibrés sur un historique qui n'intégrait pas ces nouvelles mesures, il faudrait en théorie attendre quelques années après la mise en place de ce levier pour pouvoir décrire de manière plus précise l'évolution des arbitrages. Cependant des analyses de sensibilité sur l'arbitrage seront effectuées dans la section pistes d'amélioration afin d'étudier cet aspect de ce levier.

À l'instar du premier levier, une valeur de γ maximale doit être déterminée. Il suffit alors de trouver une valeur de γ suffisamment grande notée γ_{max} pour que la situation de l'assureur soit pire que celle du modèle de base, l'optimisation à faire serait alors pour $\gamma \in]0, \gamma_{max}]$.

L'optimisation retenue a été tout d'abord concentrée sur le ratio de solvabilité pour obtenir la valeur de $\gamma_{optimal}$ et reprenait la méthode de Lagrange présentée dans le levier 1 pour interpoler des valeurs de γ, ces dernières étant infinies. Le paramètre γ optimal est donc déterminé de la manière suivante

$$\gamma_{optimal} = \arg\max_{\gamma \in \mathbb{R}^*} (\textit{ratio de solvabilité}_\gamma).$$

Les premiers résultats ont mené à une conjecture selon laquelle le ratio de solvabilité est strictement croissant sur l'intervalle $]0, \gamma_{optimal}]$ puis strictement décroissant sur l'intervalle $]\gamma_{optimal}, \gamma_{max}]$. La fonction du ratio de solvabilité en fonction de γ est alors appelée fonction unimodale, c'est à dire que le maximum local sera également le maximum global. L'interpolation de Lagrange n'est alors pas la meilleure solution car il est possible de trouver le maximum local avec plus de précision. L'algorithme adapté suivant découle de la méthode du nombre d'or de Kiefer (1953) et a été retenu pour déterminer le maximum, où ϕ^{-1} vaut l'inverse du nombre d'or, c'est à dire $\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

L'algorithme dichotomique permet de réduire de moitié l'intervalle étudié, qui est meilleur que la méthode du nombre d'or qui réduit l'intervalle d'un rapport $1 - \phi^{-1}$. Cependant cet algorithme a un avantage considérable dans notre cas, grâce aux propriétés du nombre d'or le nombre de points à évaluer à chaque itération est de 1 contre 2 pour la méthode dichotomique, ce qui permet une convergence plus rapide vers la valeur recherchée. De plus cette méthode nous assure d'avoir des

Algorithme 1 La méthode du nombre d'or

Entrée: $precision > 0, \gamma_{max} > 0$
Sortie: $\gamma_{optimal}$
  $a \leftarrow 0$
  $b \leftarrow \gamma_{max}$
  $c \leftarrow a + (b - a) \times \phi^{-1}$
  $d \leftarrow b - (b - a) \times \phi^{-1}$
  tant que $b - a > precision$ **faire**
    si $ratio\ de\ solvabilité(c) > ratio\ de\ solvabilité(d)$ **alors**
      $a \leftarrow d$
      $d \leftarrow c$
      $c \leftarrow a + (b - a) \times \phi^{-1}$
    sinon
      $b \leftarrow c$
      $c \leftarrow d$
      $d \leftarrow b - (b - a) \times \phi^{-1}$
    fin si
  fin tant que
  $\gamma_{optimal} \leftarrow a$

valeurs exactes pour les indicateurs étudiés contrairement à la méthode d'interpolation, il n'y a donc pas d'erreurs commises pour l'obtention de la solution.

3.2.2 Résultats obtenus

Suite au changement du taux cible assureur et du taux cible assuré dans le modèle et à la modification de la distribution des proportions euro/UC du portefeuille, il est nécessaire avant de chercher à faire varier le paramètre γ d'obtenir les valeurs des différents indicateurs du modèle de base. Le tableau 3.11 recense ces valeurs en millions d'euros sauf pour le ratio de solvabilité. Les valeurs sont sensiblement les mêmes que celles du modèle présenté à la fin de la section 2.4, cependant une légère baisse du ratio de solvabilité et de la PVFP ainsi qu'une légère hausse du SCR sont remarquées et peuvent être expliquées par le fait que les contrats dont le TMG est important sont encore plus coûteux qu'avant car ces derniers possèdent une part d'UC plus faible.

Indicateurs	Nouveau portefeuille
BEL	2295,39 M€
Ratio de solvabilité	193,7%
SCR	116,1 M€
SCR_{vie}	14,4 M€
$SCR_{marché}$	101,2 M€
$PVFP$	23,94 M€

Table 3.11: Impact des nouvelles hypothèses sur les indicateurs

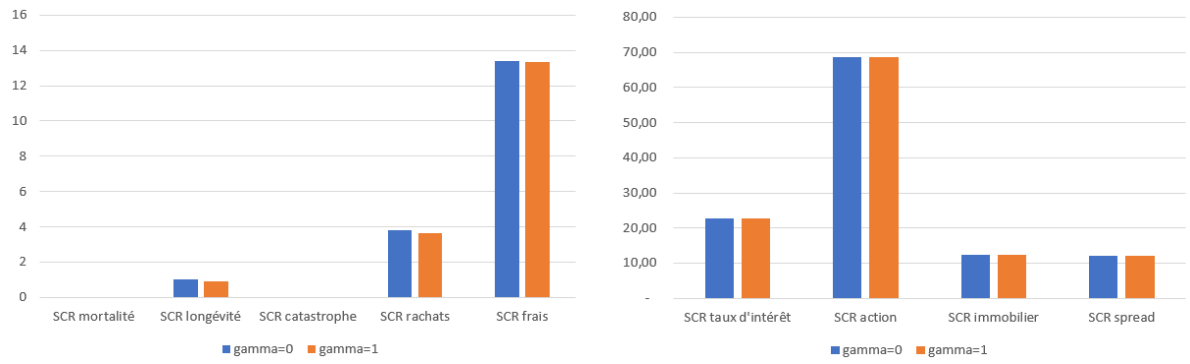
Les fonctions priorités étant implémentées dans le modèle, il est indispensable de montrer qu'un paramètre γ peut améliorer la situation de l'assureur. En prenant une valeur de $\gamma = 1$ les indicateurs évoluent de la manière suivante.

Indicateurs	Nouveau portefeuille	avec $\gamma = 1$	évolution
BEL	2295,39 M€	2294,09 M€	-0%
Ratio de solvabilité	193,7%	195%	+1,3%
SCR	116,1 M€	115,9 M€	-0,1%
SCR_{vie}	14,4 M€	14,34 M€	-0,4%
$SCR_{marché}$	101,2 M€	101,21 M€	+0,01%
$PVFP$	23,94 M€	25,19 M€	+5,2%

TABLE 3.12: Impact du levier sur les indicateurs

Le tableau 3.12 montre une amélioration globale des indicateurs de solvabilité, la figure 3.8 présente le détail des SCR vie et de marché, qui peuvent laisser place à l'interprétation suivante. La PVFP augmente suite au départ des TMG égaux à 1% car le portefeuille est en moyenne moins coûteux pour l'assureur. Cependant le SCR reste environ constant parce que la provision mathématique totale est supérieure à celle du nouveau portefeuille, ceci provient du fait que plusieurs assurés avec un TMG de 1% ont racheté leurs contrats mais en comparaison les assurés avec un TMG à 0% qui ont racheté sont beaucoup moins nombreux. En effet les comptes de résultat montrent une baisse des rachats conjoncturels de 5% alors que la PM sur le fonds euros totale des assurés dont le TMG est de 1% est passée de 386,7 millions d'euros à 373,73 millions d'euros.

Les variations au sein du $SCR_{marché}$ sont pour la majorité des très légères hausses car la provision mathématique totale a légèrement augmenté. Néanmoins une baisse du SCR rachat et une légère baisse du SCR longévité sont remarquables dans le SCR_{vie}, ces baisses témoignent du fait qu'il est désormais moins dangereux de garder les contrats actuels plus longtemps car le TMG moyen des assurés a diminué. Une optimisation du paramètre γ est alors réalisable.



(a) Module SCR vie (b) Module SCR marché

FIGURE 3.8: Détail des modules SCR vie et SCR de marché avec et sans le paramètre γ

Afin d'appliquer la méthode du nombre d'or, il est nécessaire de trouver une valeur de γ_{max} telle que *ratio de solvabilité*$(\gamma_{max}) < 193,7\%$, 193,7% étant le ratio de solvabilité pour une valeur de γ=0, ce qui revient à ne pas implémenter le levier. Cependant une valeur de γ aberrante n'apporte aucun intérêt à l'optimisation qui va suivre car le but est de restreindre l'intervalle d'étude de ce levier, des valeurs espacées de γ ont donc été testées et il a été choisi de garder la plus petite valeur qui respecte le critère ci-dessus.

Les valeurs testées sont $\gamma = 5$, $\gamma = 10$, $\gamma = 15$ et $\gamma = 20$, la valeur de γ_{max} conservée est $\gamma_{max} = 20$ pour laquelle *ratio de solvabilité*$(\gamma_{max}) = 193\% < 193,7\%$. Il est intéressant de regarder d'où provient cette baisse du ratio de solvabilité, les autres indicateurs restent stables sauf pour le SCR vie qui subit des modifications. En effet, l'assureur est passé d'un état où le risque était que les assurés restent longtemps dans le portefeuille à un risque que les assureurs décèdent rapidement. Le SCR rachat n'est plus lié au risque de rachats à la baisse mais au risque de rachats à la hausse, une explication de ce phénomène est que les rachats totaux ont été multipliés par 1,5 car le γ_{max} correspond par définition à un cas où les inégalités entre les assurés sont très importantes, le risque de voir d'autres assurés racheter en masse leurs contrats peut être problématique pour l'assureur car ce dernier doit effectuer des moins-values latentes pour rembourser ses assurés. De plus, le TMG moyen va fortement augmenter dans cette situation car les contrats avec des forts TMG ($> 1\%$) sont les seuls (avec les assurés très prioritaires) qui ne vont pas racheter.

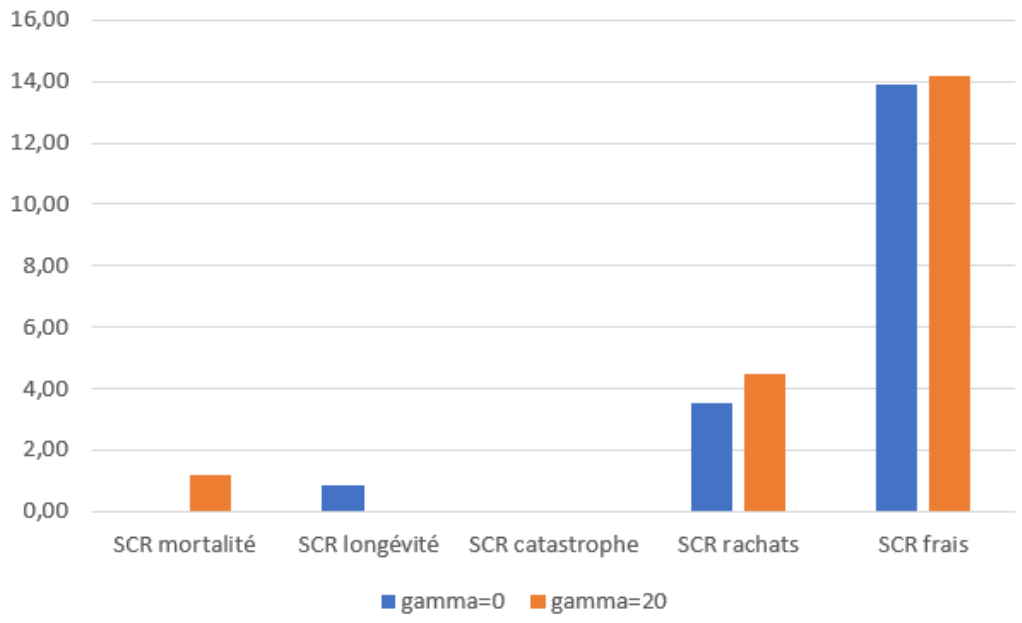


FIGURE 3.9: Détail du SCR vie pour γ_{max}

La valeur de γ_{max} étant fixée, il reste à définir une précision pour l'application de l'algorithme. Cette précision à été fixée à 1 arbitrairement et représente l'erreur maximale commise sur le paramètre $\gamma_{optimal}$. Le tableau 3.13 résume le déroulement de l'algorithme étape par étape en mettant en avant les valeurs des variables, pour une meilleure lisibilité le ratio de solvabilité a été écrit RS et est précis au centième près.

La valeur de b-a sur la dernière itération étant bien plus petite que la précision choisie l'algorithme s'arrête, la valeur de $\gamma_{optimal}$ retenue est alors la dernière valeur pour a soit $\gamma_{optimal} = 8,76$. Pour

Itération	a	b	c	d	b-a	RS(a)	RS(b)	RS(c)	RS(d)
1	0	20	12,36	7,64	20	193,7%	193,0%	196,82%	197,02%
2	0	12,36	7,64	4,72	12,36	193,7%	196,82%	197,02%	196,46%
3	4,72	12,36	9,44	7,64	7,64	196,46%	196,82%	197,01%	197,02%
4	7,64	12,36	10,56	9,44	4,72	197,02%	196,82%	197,0%	197,01%
5	7,64	10,56	9,44	8,76	2,92	197,02%	197,0%	197,01%	197,0%
6	8,76	10,56	9,87	9,44	1,80	197,01%	197,0%	197,01%	197,01%
7	8,76	9,87	9,44	9,18	1,11	197,01%	197,01%	197,01%	197,01%
8	8,76	9,44	9,18	9,02	0,68				

TABLE 3.13: Déroulement de l'algorithme

illustrer cette valeur obtenue il est considéré que deux assurés appelés assuré 1 et assuré 2 constituent le portefeuille. La PM euros de chaque assuré est de 500 euros et l'assuré 1 possède 20% d'UC sur son contrat, pour seulement 10% pour l'assuré 2. En effectuant le rapport des fonctions priorités (notées *priorité* 1 et *priorité* 2 dans cet exemple, il est possible de déterminer le montant de PB discrétionnaire obtenu pour chaque assuré.

$$\frac{priorité\ 1}{priorité\ 2} = \frac{\frac{1}{2} \times exp^{0,2\times 8,76}}{\frac{1}{2} \times exp^{0,1\times 8,76}} = exp^{0,1\times 8,76} \simeq 2,4.$$

Le premier assuré obtiendra donc environ 2,4 fois plus de PB discrétionnaire que l'assuré 2, en lien avec le fait qu'il possède en proportion deux fois plus d'UC.

Les dernières lignes du tableau et la figure 3.10 sur laquelle les calculs de l'algorithme sont regroupés montrent un effet assez inattendu : il existe un "plateau" pour lequel les variations de γ ne font pas ou peu varier les indicateurs de solvabilité dont le ratio de solvabilité. Bien que la valeur de γ donne en théorie des différences entre les assurés de plus en plus grandes lorsque γ augmente, ce plateau correspond à des valeurs de γ pour lesquelles les rachats conjoncturels sont sensiblement les mêmes. Le taux de rachats conjoncturels est alors plus grand pour les contrats à TMG 1% et est plus petit pour les TMG 0% bruts et nets.

Cet algorithme a nécessité le calcul de 10 valeurs, 4 à la première itération puis 1 à chaque itération entre la deuxième et la septième (les calculs n'étant pas faits à l'itération 8). Un algorithme dichotomique classique aurait nécessité une itération de moins, cependant le nombre de calculs aurait été de 5 valeurs à la première itération et de 2 valeurs entre la deuxième et la sixième, soit un total de 15 valeurs. La méthode du nombre d'or est donc particulièrement adaptée ici car elle fait gagner 1/3 du temps de calcul par rapport à la méthode dichotomique. Le temps de calcul passe de 15 heures pour la méthode dichotomique classique à 10 heures pour la méthode du nombre d'or. Le tableau 3.14 présente les résultats sur les différents indicateurs du portefeuille avec levier optimisé et sans implémentation du levier.

Les résultats de ce levier ne sont pas aussi bénéfiques pour l'assureur que ceux du premier, cela est dû au fait que ce levier ne coûte rien à mettre en place pour l'assureur car il s'agit juste d'une politique de distribution de la participation aux bénéfices discrétionnaire.

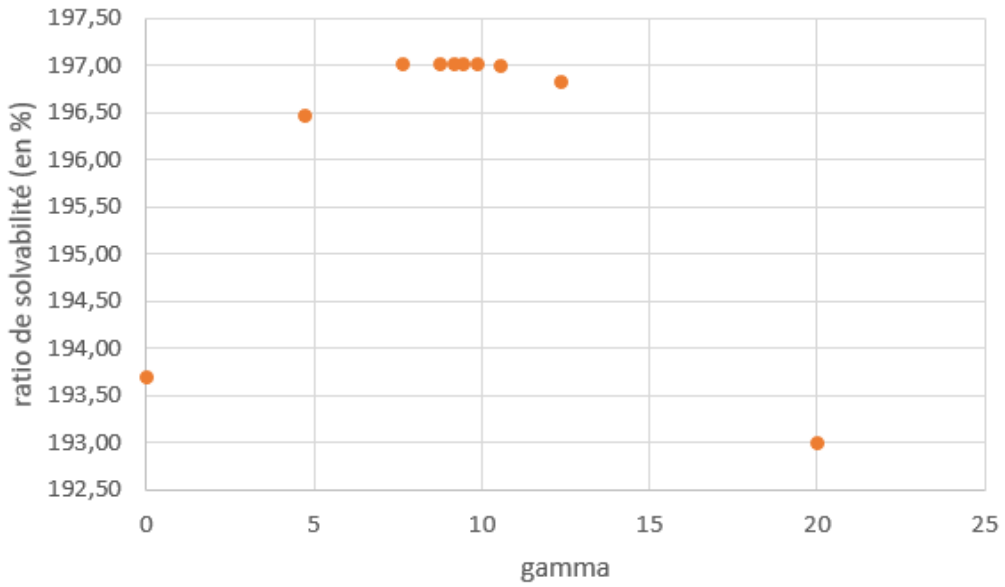


FIGURE 3.10: Ratios de solvabilité calculés pour l'algorithme

Indicateurs	Nouveau portefeuille	avec $\gamma = 8,76$	évolution
BEL	2295,39 M€	2292,4 M€	-0,1%
Ratio de solvabilité	193,7%	197,01%	+3,4%
SCR	116,1 M€	115,8 M€	-0,24%
SCR_{vie}	14,4 M€	14,18 M€	-1,5%
$SCR_{marché}$	101,2 M€	101,22 M€	+0.02%
$PVFP$	23,94 M€	27,55 M€	+15%

TABLE 3.14: Impact du levier optimisé sur les indicateurs

3.2.3 Limites de ce levier et pistes d'amélioration

Les limites de ce levier proviennent comme pour le levier précédent des différentes hypothèses qui ont été prises et qui sont discutables, les deux principales hypothèses étant :

- **Le choix de la distribution EURO/UC :**Les assureurs ne mettant pas à disposition toutes les données concernant leur passif, la nouvelle distribution, bien que choisie rationnellement par rapport au TMG des contrats, pourrait ne pas correspondre à celle des assureurs en réalité.

  La limite mise en avant ici vient du fait que ce levier est très sensible à cette distribution. En effet si les contrats dont le TMG est moyen possèdent une part d'UC plus importante que les contrats avec un TMG faible, les rachats porteront majoritairement sur les contrats dont les TMG sont faibles, et le gain en solvabilité provenant du départ des TMG moyens serait alors amoindri.

- **La fonction priorité adoptée :** La fonction exponentielle choisie pour créer une fonction priorité respectait le critère de dérivé seconde positive, cependant elle n'est pas unique et une infinité d'autres fonctions aurait pu être utilisée. Un moyen de contrer partiellement cette limite aurait

été de comparer les résultats sur plusieurs familles de fonctions (exponentielles, quadratiques...) et déterminer la meilleure par la suite mais cela aurait demandé beaucoup de temps de calcul pour le faible intérêt apporté à ce mémoire.

Cette limite est néanmoins à nuancer car la fonction choisie constitue bien un levier et l'optimisation qui découle de cette fonction donne des résultats satisfaisants pour un assureur qui n'avait pas mis en place une politique de distribution de PB discrétionnaire. Le choix de la fonction ne remet donc pas en cause les résultats présentés.

Comme énoncé dans la section protocole et hypothèses de ce levier les études ont principalement porté sur le contrôle théorique des rachats grâce à la nouvelle distribution de la PB discrétionnaire, les données étant facilement vérifiables. L'incitation à l'arbitrage vers l'UC n'a pas été prise en compte à cause des lourdes hypothèses qui auraient été nécessaires à la quantification de cet aspect de ce levier. En effet les arbitrages ont été obtenus sur des historiques et donc sur des données qui ne contiennent pas l'effet de ce nouveau levier, il faudrait donc voir comment évoluent les arbitrages à travers le temps si des études exactes doivent être réalisées sur les estimations des indicateurs de solvabilité.

Toutefois, il est possible en partant de la solution optimale déterminée par l'algorithme d'effectuer des études de sensibilité si par exemple l'arbitrage, provenant potentiellement d'une envie des assurés de gagner plus grâce à la PB discrétionnaire et de l'incitation commerciale mise en place par les assureurs, avait été augmenté par exemple de 0,05% ou de 0,1% suite à l'élaboration de ce levier. Les études de sensibilité de ces arbitrages sont regroupées dans le tableau 3.15, il en ressort que cet aspect du levier permet alors d'augmenter légèrement les résultats concernant la solvabilité.

Indicateurs	$\gamma_{optimal} = 8,76$	+0.05% d'arbitrage vers l'UC	+0,1% d'arbitrage vers l'UC
BEL	2292,4 M€	2292,0 M€	2291,8 M€
Ratio de solvabilité	197,01%	197,26%	197,49%
SCR	115,8 M€	115,8 M€	115,8 M€
SCR_{vie}	14,18 M€	14,18 M€	14,17 M€
$SCR_{marché}$	101,22 M€	101,20 M€	101,18 M€
PVFP	27,55 M€	27,62 M€	27,71 M€

Table 3.15: Impact de l'incitation d'arbitrage sur les indicateurs

Une des raisons qui impliquent que les résultats de ce levier soient moins importants que ceux du premier est le fait que les taux d'intérêt soient bas. En effet, les taux bas viennent réduire le taux de rendement de l'actif, et donc par la même occasion le taux que l'assureur va chercher à reverser aux assurés. Les résultats qui vont suivre ont donc pour objectif de montrer l'intérêt de ce levier dans le cas d'une remontée du rendement des actifs.

Afin de modéliser une remontée du rendement de l'actif deux scénarios sont étudiés. Un premier scénario pour lequel les taux de plus-values latentes des obligations augmentent de 4% puis de 8% en T=0, toutes choses égales par ailleurs. Pour permettre de prendre en compte le fait que les assurés vont attendre de plus en plus des taux servis importants, il faut prendre une hypothèse sur ce taux attendu.

$$taux\ assuré(N) = \frac{1}{2} \times taux\ assuré(N-1) + \frac{1}{2} \times taux\ assuré(N-2).$$

La valeur de γ choisie pour les études de sensibilité provient de l'optimisation effectuée précédemment et est donc de 8,76. En pratique il faudrait recalculer une valeur de γ optimale suivant les différentes

remontées des rendements de l'actif en appliquant une nouvelle fois la méthode du nombre d'or.

Les tableaux 3.16 et 3.17 montrent les variations des indicateurs dans les deux scénarios envisagés avec et sans application de ce deuxième levier. Ces résultats montrent que dans le cas d'une remontée du rendement de l'actif, les impacts de ce levier seraient beaucoup plus importants et sont du même ordre de grandeur que les résultats obtenus par le levier 1.

Indicateurs	$\gamma = 0$	$\gamma = 8,76$	évolution
BEL	2 353,4 M€	2 349,08 M€	-0,18%
Ratio de solvabilité	217%	222%	+5%
SCR	110,3 M€	109,8 M€	-0,45%
SCR_{vie}	14,3 M€	14,0 M€	-2,1%
$SCR_{marché}$	95,1 M€	95,1 M€	+0%
$PVFP$	38,9 M€	43,31 M€	+13,9%

TABLE 3.16: Scénario +4% des taux de plus-values latentes des obligations

Indicateurs	$\gamma = 0$	$\gamma = 8,76$	évolution
BEL	2 393,9 M€	2 388,3 M€	-0,23%
Ratio de solvabilité	237%	245%	+8%
SCR	105,9 M€	105,2 M€	-0,7%
SCR_{vie}	14,3 M€	13,9 M€	-2,6 %
$SCR_{marché}$	90,6 M€	90,6 M€	+0%
$PVFP$	51,6 M€	57,4 M€	+11,24%

TABLE 3.17: Scénario +8% des taux de plus-values latentes des obligations

Chapitre 4

Agrégation des différents leviers

L'agrégation des leviers amène plusieurs problèmes et pose plusieurs questions sur le mode opératoire qui peut avoir l'air simple au premier regard. Si l'assureur s'intéresse à l'agrégation de N leviers possédant chacun $M_1, M_2, ..., M_N$ possibilités, le nombre de simulations à faire est de $M_1 \times M_2 \times ... \times M_N$. Les simulations étant très coûteuses en temps de calcul cette solution qui sera appelée méthode naïve ne peut pas être mise en place en pratique. De plus le nombre de possibilités n'est pas toujours fini comme le montrent les leviers du chapitre 3.

Une solution moins coûteuse consiste à étudier un levier, effectuer une optimisation de ce levier et à partir de cette optimisation étudier un autre levier. Les étapes sont ainsi réitérées pour agréger un à un les différents leviers. Cette méthode est appliquée car le nombre de simulations est alors de $M_1 + M_2 + ... + M_N$ et permet de réduire considérablement les temps de calcul. Par la suite cette méthode sera appelée la méthode levier par levier.

Cependant l'inconvénient majeur de cette solution est que toutes les possibilités ne sont pas testées. Il est alors possible d'obtenir une optimisation locale et non pas globale. C'est pourquoi ce chapitre propose une méthode nommée méthode d'interpolation pour réduire les temps de calculs et le nombre de simulations à effectuer, tout en gardant une solution globale proche de celle qui aurait été obtenue en effectuant $M_1 \times M_2 \times ... \times M_N$ simulations.

4.1 Théorie sur la méthode d'interpolation

4.1.1 Le phénomène de Runge

La méthode proposée est celle utilisée pour l'optimisation du paramètre α du chapitre 3, c'est à dire une méthode d'interpolation qui sera adaptée dans un premier temps à la dimension 3 avec l'interpolation d'une surface et dans un second temps à la dimension N. Le nombre de simulations de cette technique est donc de $\frac{M_1}{k_1} \times \frac{M_2}{k_2} \times ... \times \frac{M_N}{k_N}$, où $k_1, k_2, ..., k_N$ sont choisis par l'assureur suivant la précision souhaitée sur l'optimisation (de telle sorte que les quotients $\frac{M_i}{k_i}, \forall i \in [\![1\ ;\ n]\!]$ soient entiers).

Le nombre de possibilités pouvant être grand, l'interpolation de Lagrange n'est pas adaptée à cause du phénomène de Runge, ce phénomène met en avant que l'interpolation n'est pas forcément meilleure lorsque le degré d'interpolation augmente.

La figure 4.1 présente ce phénomène avec l'interpolation lagrangienne de la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ étudiée sur l'intervalle $[-5, 5]$. La qualité de l'interpolation de la courbe bleue se dégrade au fur et à mesure que le degré d'interpolation augmente pour cette fonction, l'interpolation de Lagrange passant par 11 points représentée par la courbe grise exprime des erreurs d'interpolation importantes notamment sur les bords de l'intervalle étudié. Ce phénomène peut venir du fait que la fonction étudiée possède des dérivées importantes ou encore la façon dont les points d'interpolation sont placés qui peut faire diverger la constante de Lebesgue, qui borne l'erreur d'interpolation.

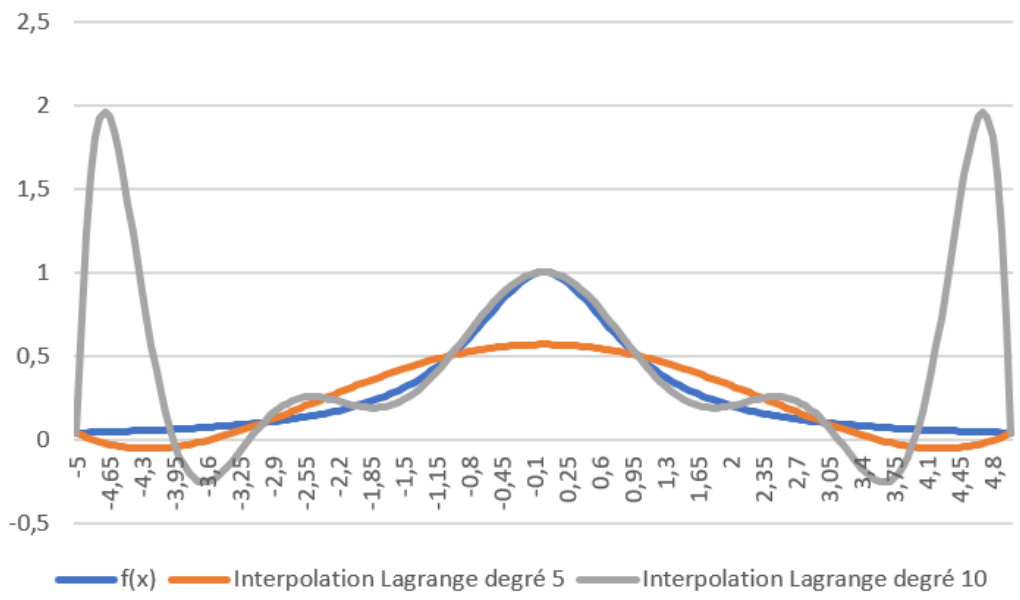


FIGURE 4.1: Le phénomène de Runge

Il a alors été décidé d'utiliser dans cette méthode l'interpolation par splines, qui a pour avantage de pouvoir interpoler avec un degré déterminé à l'avance. Cette méthode est plus prudente car avant d'étudier des leviers il est impossible de savoir exactement comment les indicateurs évoluent et le risque grandit à mesure que le nombre de leviers mis en jeu augmente. Concernant le levier 1, il a été déterminé a posteriori que l'interpolation pour le nombre de points étudiés ne varie presque pas entre les deux méthodes. En effet, l'annexe B.1 compare les résultats pour le levier 1 uniquement avec les deux méthodes d'interpolation et le résultat pour α optimal est le même.

4.1.2 L'interpolation par splines cubiques

Cette section est reprise de l'article de GUILLOD (2008) présentant les principales techniques d'interpolation et d'approximation ainsi que leurs avantages et inconvénients.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_1, b_2, ..., b_n$ des réels, le but est de trouver une fonction y telle que $y(a_i) = b_i$ où $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.

Le principe va être de former la fonction y de telle sorte qu'elle soit le regroupement de fonctions

polynomiales de degré au plus k sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}], \forall i \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$. La spline, qui par définition est une fonction polynomiale par morceaux, est la fonction y recherchée qui répond au problème posé.

Le regroupement de ces fonctions pose des problèmes concernant la continuité et la dérivabilité de la fonction y formée, pour avoir une fonction la plus régulière possible il faut alors augmenter le degré de chaque polynôme k. En effet il faut choisir un polynôme de degré au moins égal à K pour avoir une fonction y dérivable K-1 fois. Un choix se créé opposant d'un côté une nécessité d'avoir un k suffisamment élevé pour avoir une fonction régulière et un k suffisamment faible pour éviter le phénomène de Runge comme pour l'interpolation de Lagrange ou des temps de calculs trop longs. C'est pour répondre à cette problématique que les splines cubiques sont utilisées.

Les splines cubiques sont donc des splines formées de polynômes au plus de degré 3 sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, ce qui permet à la fonction y d'être de classe $\mathcal{C}^2$ et de ne pas "coûter trop cher" en temps de calcul. Ce sont les splines les plus utilisées en pratique car le caractère $\mathcal{C}^2$ apporte un côté harmonieux à l'interpolation et possède des caractéristiques intéressantes pour l'industrie.

La figure 4.2 compare l'interpolation de Lagrange de degré 10 de la fonction f définie à la section précédente et l'interpolation de la fonction f par splines cubiques si les mêmes points d'interpolation sont pris initialement. Pour cette fonction les résultats sont clairs et montrent que l'interpolation par splines est très précise contrairement à l'interpolation de Lagrange. La somme des erreurs en valeur absolue sur 1000 points a été calculée à titre informatif, elle est de 1,82 pour l'interpolation par splines et de 58,28 pour l'interpolation de Lagrange.

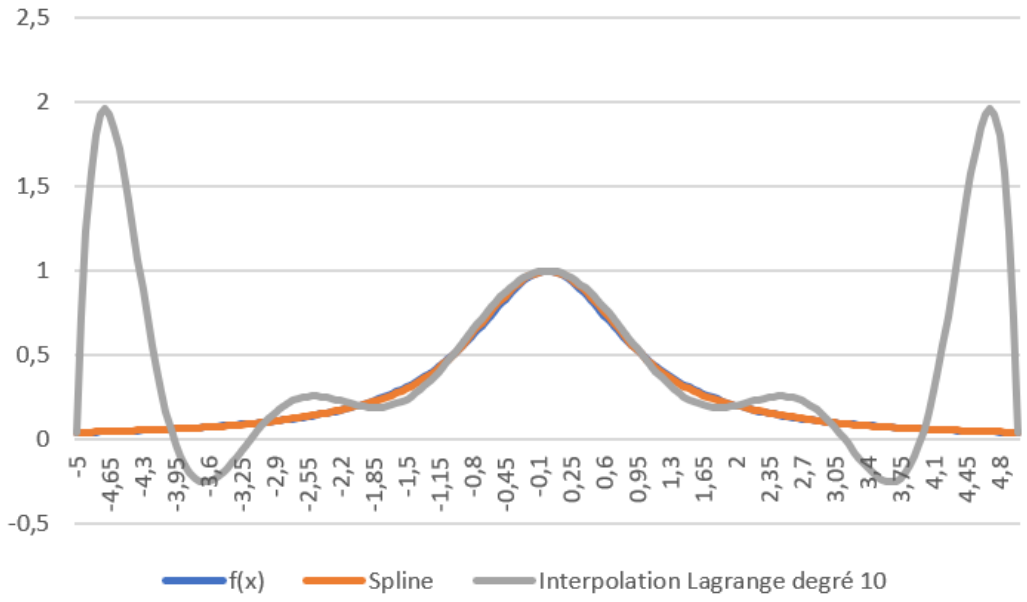


FIGURE 4.2: Avantage des splines cubiques pour l'interpolation

Notons $y_j, j \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$ les n-1 fonctions polynômes, n-1 correspondant au nombre d'intervalles entre les n points à interpoler. La spline doit respecter les critères suivants :

- Pour chaque $y_j, j \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$, il faut que $y_j(a_j) = b_j$ et que $y_j(a_{j+1}) = bj + 1$.

- Pour chaque $y_j, j \in [\![1\ ;\ n-2]\!]$, il faut que $y'_j(a_{j+1}) = y'_{j+1}(a_{j+1})$.
- Pour chaque $y_j, j \in [\![1\ ;\ n-2]\!]$, il faut que $y''_j(a_{j+1}) = y''_{j+1}(a_{j+1})$.

Au global il existe donc $(n-1)\times 2+(n-2)+(n-2) = 4n-6$ équations. Cependant les inconnues qui permettent de construire la spline sont les coefficients de chaque y_j, et sont donc au nombre de $4 \times (n-1)$ car les y_j sont de degré 3, le problème possède donc deux degrés de liberté. La méthode usuelle consiste à rendre nulle la dérivée seconde sur les extrémités de la spline, rajoutant ainsi les deux équations $y''_1(a_1) = 0$ et $y''_{n-1}(a_n) = 0$, il est alors question de spline "naturelle".

Le système peut alors se mettre sous forme matricielle et il existe des techniques d'inversion de matrice adaptées à ce problème comme celle expliquée par Yahiko (2015) pour réduire la complexité des calculs de cubique à linéaire.

Exemple de calcul d'une spline : Considérons une fonction f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$. Notons $y_1(x) = a_1 \times x^3 + b_1 \times x^2 + c_1 \times x + d_1$ et $y_2(x) = a_2 \times x^3 + b_2 \times x^2 + c_2 \times x + d_2$ les deux polynômes de degré 3 au plus constituant la spline recherchée, d'après ce qui précède le résolution du problème revient dans le cas de splines cubiques naturelles à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} d_1 & = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 & = 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 & = 1 \\ 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 & = 0 \\ 3a_1 + 2b_1 + c_1 - 3a_2 - 2b_2 - c_2 & = 0 \\ 6a_1 + 2b_1 - 6a_2 - 2b_2 & = 0 \\ 2b_1 & = 0 \\ 12a_2 + 2b_2 & = 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{cases} a_1 & = -0.5 \\ b_1 & = 0 \\ c_1 & = 1.5 \\ d_1 & = 0 \\ a_2 & = 0.5 \\ b_2 & = -3 \\ c_2 & = 4.5 \\ d_2 & = -1 \end{cases}$$

La figure 4.3 montre la spline obtenue qui passe bien par les points d'interpolation souhaités et qui est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2]$.

Dans le cadre de la dimension 3, l'interpolation d'une surface est alors possible en effectuant le produit tensoriel des splines cubiques obtenus, les points d'interpolation sont alors situés sur une grille en 3 dimensions. Supposons que ces points d'interpolation sont notés c_{ij} où $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $j \in [\![1\ ;\ n]\!]$. La

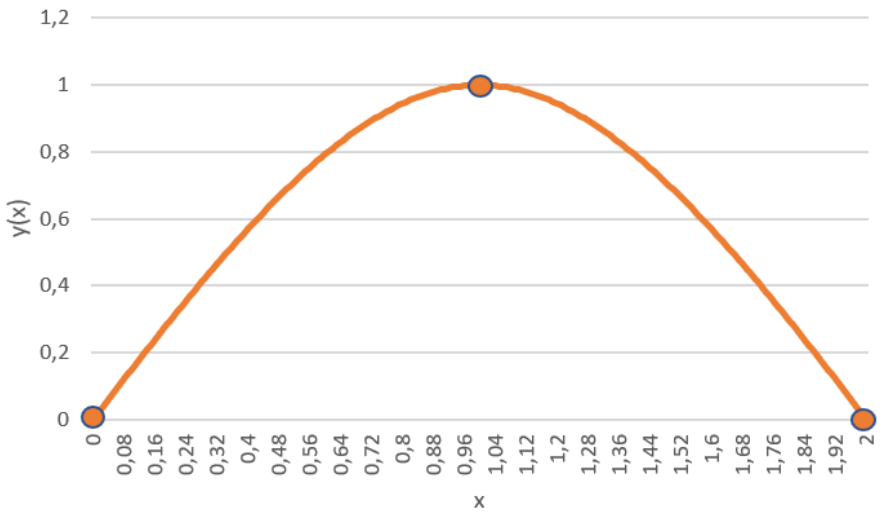
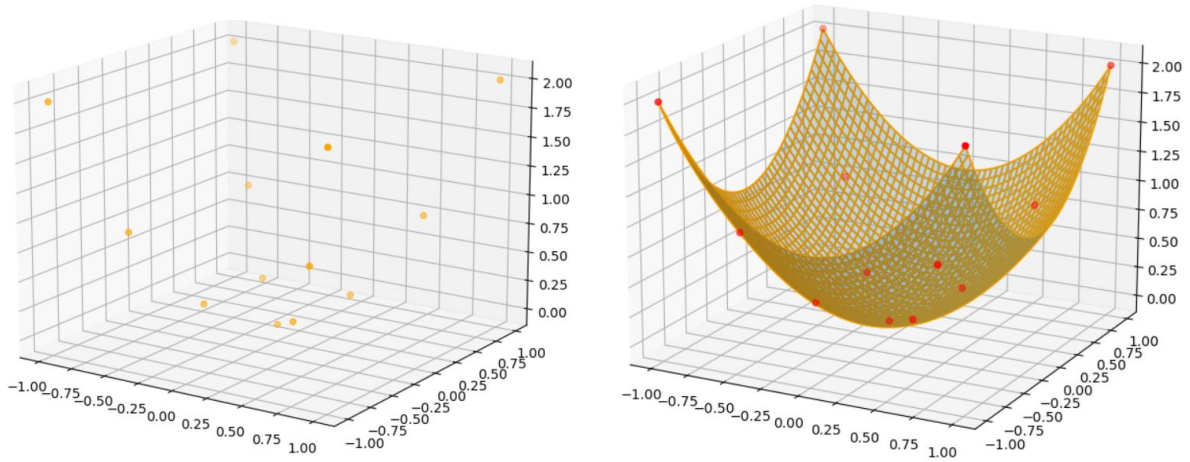


FIGURE 4.3: Spline obtenue et ses points d'interpolation

surface paramétrée est obtenue de la manière suivante.

$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i(u) \times y_j(v) \times c_{ij}.$$

Cette méthode peut être vue comme une interpolation où les points d'interpolation sont des courbes. Elle a été implémentée sous python afin de pouvoir interpoler n'importe quelle surface à partir de points possédant 3 coordonnées, la figure 4.4 montre l'interpolation d'une paraboloïde elliptique à partir de seulement quelques points.



(a) Input du programme

(b) Output du programme

FIGURE 4.4: Interpolation d'une paraboloïde elliptique

4.1.3 Le problème de maximisation

La dernière étape de la méthode utilisée est de trouver un n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_N)$, correspondant à l'étude de N leviers simultanément, qui maximise par exemple des indicateurs de solvabilité comme le

ratio de solvabilité. C'est ici que le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction va être intéressant pour le problème.

La méthode de minimisation retenue est la méthode de descente de gradient qui permet de trouver le minimum d'une fonction. Dans le cas d'une maximisation il suffit donc de trouver le minimum de l'opposé de la fonction pour en obtenir un maximum.

Cette méthode consiste dans le cas de la dimension 3 à se placer sur un point de la surface et d'en calculer le gradient, qui est la généralisation de la dérivée quand l'étude est faite sur plusieurs variables. Le point se déplace alors vers l'endroit où la pente est la plus forte et ce processus sera répété jusqu'à ce que le gradient atteigne une valeur faible (donc que la pente soit faible). Ainsi, le point se déplace vers un endroit de la surface où la valeur à minimiser est plus petite.

Cependant cette méthode nécessite de trouver le pas de manière approximative car un pas trop grand ne fait pas converger la descente de gradient tandis qu'un pas trop faible fait converger la méthode trop lentement. De plus si la fonction n'est pas convexe, il se peut que le minimum obtenu soit un minimum local alors que tout ce chapitre porte sur le fait de ne pas trouver de solution locale. Pour palier à ce second problème, l'algorithme utilisé va partir de plusieurs valeurs de la surface obtenue pour obtenir un grand nombre de minima locaux et choisir le plus petit.

La fonction aléatoire(a,b) utilisée dans l'algorithme suivant tire un nombre aléatoire entre a et b. Il a été choisi de partir de 100 point initiaux sur la surface pour obtenir avec une très forte probabilité l'optimal global. En pratique pour vérifier que 100 points initiaux suffisent, il est possible de compter le nombre de fois que l'optimum global est obtenu sur ces 100 points initiaux. Si ce nombre dépasse par exemple 50% des points (50 dans cet exemple), le nombre de points initiaux est suffisant, sinon il faut l'augmenter. Il aurait également été possible de se placer sur 100 points répartis uniformément dans les intervalles étudiés.

L'algorithme suivant correspond à un exemple d'application pratique de cette méthode dans le cas d'une interpolation pour l'étude de 2 leviers de paramètres (a_1, a_2) dont les valeurs sont comprises entre 1 et 10. Il a été choisi de minimiser à titre d'exemple le SCR dans l'algorithme présenté.

Algorithme 2 Algorithme de descente de gradient adapté :

Entrée: $pas > 0, n > 0, precision > 0$
Sortie: $a_{1\ optimal}, a_{2\ optimal}$
  $a_{1\ optimal} \leftarrow 999999$
  $a_{2\ optimal} \leftarrow 999999$
  pour $i = 1$ à 100 **faire**
    $a_{1\ initial} \leftarrow aléatoire(1, 10)$
    $a_{2\ initial} \leftarrow aléatoire(1, 10)$
    tant que $||\nabla SCR(a_{1\ initial}, a_{2\ initial})|| > precision$ **faire**
      $a_{1\ initial} \leftarrow a_{1\ initial} - pas \times \frac{\partial SCR(a_{1\ initial}, a_{2\ initial})}{\partial a_{1\ initial}}$
      $a_{2\ initial} \leftarrow a_{2\ initial} - pas \times \frac{\partial SCR(a_{1\ initial}, a_{2\ initial})}{\partial a_{2\ initial}}$
    fin tant que
    si $SCR(a_{1\ initial}, a_{2\ initial}) < SCR(\gamma_{optimal}, \alpha_{optimal})$ **alors**
      $a_{1\ optimal} \leftarrow a_{1\ initial}$
      $a_{2\ optimal} \leftarrow a_{2\ initial}$
    fin si
  fin pour

Dans le cas général de l'optimisation de N leviers simultanément et d'une minimisation ou maximisation d'un indicateur de solvabilité, il est possible d'utiliser l'algorithme présenté dans cette section. En effet, le gradient s'applique également pour un plus grand nombre de variables.

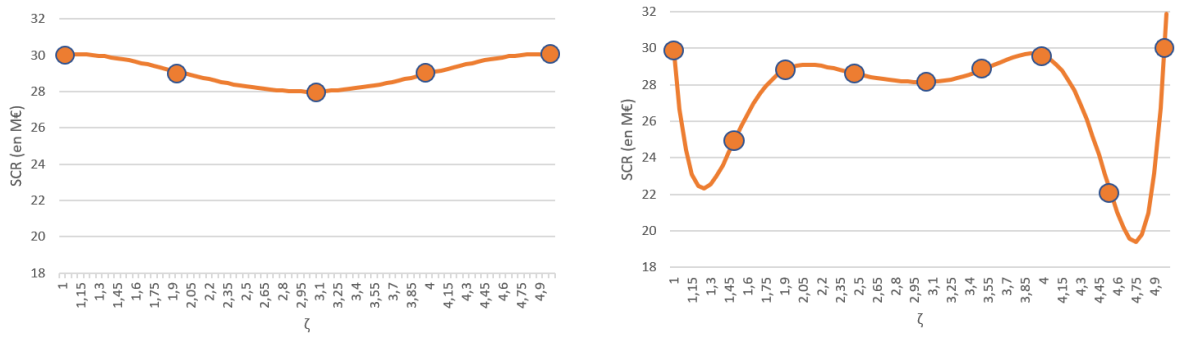
4.1.4 Limite du modèle théorique

Comme vu dans les sections précédentes le modèle mis en place permet d'agréger différents leviers dans le but de gagner du temps, de ne pas avoir à regarder les leviers les uns après les autres et ainsi se retrouver avec une optimisation globale et non-locale. Cependant ce modèle est basé sur certaines hypothèses qui représentent des limites sur cette modélisation :

- **Le type de levier utilisé** : Tous les leviers ne peuvent pas être intégrés à ce modèle, tout ce qui précède est valable pour des leviers d'optimisation dont la valeur à optimiser est continue comme pour les valeurs de α et γ.

  Cependant les leviers liés par exemple à l'utilisation d'une politique ou d'une autre sont assimilés à des leviers avec un nombre fini de valeurs à optimiser (dans cet exemple les deux valeurs possibles peuvent être la politique 1 ou la politique 2). Ces leviers peuvent donc être intégrés au modèle sans effectuer d'interpolations et augmenter ainsi la complexité de la même manière qu'une variable non-continue.

- **Les fortes variations des indicateurs** : Des erreurs d'interpolation peuvent apparaître si les leviers étudiés provoquent des variations importantes des indicateurs de solvabilité. Ainsi pour un levier i si l'indicateur SCR est optimisé par rapport à une variable ζ, si $SCR_i'(\zeta)$ est très grand, alors les erreurs d'interpolation seront plus importantes et il est possible de rater de l'information sur la minimisation totale comme le montrent les graphiques de la figure 4.5.



(a) Interpolation sur 5 points

(b) Interpolation sur 9 points

FIGURE 4.5: Optimisation de ζ avec dérivée importante

Les dérivées de la fonction $SCR(\zeta)$ pour $\zeta \in [1, 2]$ et pour $\zeta \in [4, 5]$ sont importantes, c'est pourquoi la minimisation sur la première figure donne un ζ optimal de 3 avec une valeur de SCR de 28 millions d'euros tandis que la minimisation de la deuxième figure donne un ζ optimal de 4,75 avec une valeur de SCR de 19,75 millions d'euros.

Cet exemple illustre bien le fait que cette méthode n'est pas adaptée pour des leviers dont les variations sont grandes par rapport aux variables à optimiser.

- **La compatibilité des leviers :** Les deux leviers utilisés pour l'application de la méthode en dimension 3 doivent être compatibles et doivent pouvoir être étudiés simultanément. Il est possible que deux leviers ne puissent pas exister en même temps par exemple s'il s'agit de deux politiques de gestion de la participation aux bénéfices différentes et la modélisation ne peut alors plus être appliquée. Par exemple si la politique d'un premier levier consiste à doter les premières années la PPB quitte à avoir des rachats les premières années, ce levier est incompatible avec le fait de vouloir utiliser dès aujourd'hui la PPB pour limiter les rachats même si dans le futur la PPB pourrait être nulle. Le premier levier possède une vision long terme et le second une vision plus court terme, les rendant impossibles à étudier simultanément.

  Il existe une solution simple pour palier à ce problème : Si la méthode est appliquée en dimension N (avec donc N-1 leviers) et que deux leviers sont incompatibles, il est possible d'appliquer deux fois la méthode en dimension N-1 (avec donc N-2 leviers) afin d'isoler les deux leviers qui sont incompatibles sans impacter les autres leviers. La solution sera celle qui optimise les indicateurs étudiés parmi les deux méthodes de dimension N-1.

- **Les indicateurs étudiés :** Ce chapitre se concentre sur l'étude d'une fonction étudiée uniquement. En pratique ce n'est pas le seul indicateur qui intéressera les assureurs, c'est pourquoi il est possible d'étendre les travaux effectués en cherchant à utiliser N-1 leviers pour optimiser non pas la fonction choisie mais par exemple une combinaison linéaire de plusieurs indicateurs qu'un assureur a besoin d'optimiser.

  Pour répondre à cette limite des recherches mathématiques sont effectuées sur l'optimisation multiobjectif, permettant d'optimiser simultanément plusieurs variables appelées objectifs. Ces méthodes ont fait l'objet de mémoires par exemple avec l'étude des algorithmes évolutionnistes par Echchelh (2019) ou plus particulièrement des algorithmes génétiques par Monin (2014).

4.2 La méthode en dimension 3

4.2.1 Interpolation en dimension 3

Pour pouvoir appliquer la méthode en dimension 3 dans le cadre de ce mémoire, il faut dans un premier temps choisir quels seront les deux leviers étudiés, sur quelles étendues se base l'étude et quelle sera la variable à optimiser :

- Les leviers étudiés dans cette section sont le levier concernant les nouveaux contrats dont le paramètre à optimiser est le pourcentage de nouveaux contrats au bout de 5 ans noté α ainsi que le levier concernant la participation aux bénéfices qui est optimisé grâce à la variable γ représentant les inégalités de distribution de PB discrétionnaire.

- Il a été choisi que l'interpolation de cette section se base sur 25 points, ce qui permet 5 valeurs différentes par levier (5^2). Ce choix permet un bon compromis entre le temps de calcul et la précision souhaitée pour optimiser les différents leviers. Les étendues d'étude des leviers ont été basées sur les valeurs des optimisations du chapitre 3 afin de trouver une valeur optimale globale de l'étude.

Ainsi la valeur de α sera comprise entre $[1\%, 5\%]$ par pas de 1% tandis que la valeur de γ sera comprise entre $[1, 13]$ par pas de 3.

- La dernière variable représente celle à optimiser suivant les paramètres α et γ, elle doit être choisie judicieusement pour correspondre à tous les leviers utilisés. Il a donc été décidé que cette variable serait ressemblante à celle utilisée pour le levier 1 intégrant ainsi le coût du new business, pour rappel cette fonction est la suivante.

$$(\alpha_{optimal}, \gamma_{optimal}) = \underset{\substack{\alpha\in[1\%,5\%]\\ \gamma\in[1,13]}}{\arg\max}\left(\frac{PVFP_{\alpha,\gamma} - coût_{\alpha}}{SCR_{\alpha,\gamma}}\right).$$

où $PVFP_{\alpha,\gamma}$, $SCR_{\alpha,\gamma}$ sont respectivement les montants de la PVFP et du SCR pour α et γ donné à horizon 5 ans, la projection du portefeuille sera effectuée en monde réel avant d'effectuer une simulation risque-neutre à T=5 ans.

$coût_{\alpha}$ va permettre de prendre en compte l'investissement de l'entreprise en suivant l'hypothèse ci-dessous. Il a été choisi de prendre l'hypothèse de coût du scénario 3 de la section 3.1.1 afin de montrer une application concrète de la méthode présentée.

Des hypothèses provenant de chaque levier telle que l'étudie du portefeuille à 5 ans pour le premier levier ou telle que la nouvelle répartition d'euros et d'UC dans le portefeuille pour le deuxième levier ont été conservées afin de mener cette étude.

Le tableau 4.1 représente les valeurs obtenues des différents indicateurs qui serviront à créer la surface à interpoler, par soucis de lisibilité les résultats sont donnés en pourcentage. Le détail du calcul de la fonction à optimiser est donné dans l'annexe B.2.

Les points ont été placés sur le graphique 4.6 où le paramètre α est donné en pourcentage, ils serviront à l'interpolation de la surface qui devra passer par chacun de ces points.

Les résultats de l'interpolation sont présentés dans les figures 4.7 et 4.8, proposant des angles de vue différents pour mieux visualiser la figure en trois dimensions.

4.2.2 Analyse des résultats

L'application de la méthode de descente de gradient à la surface de la partie précédente donne une valeur maximale de $\alpha = 3,88\%$ et de $\gamma = 9,65$, il est possible alors de vérifier sur la figure 4.8 que ces valeurs sont cohérentes avec le maximum de la fonction. Cette vérification semble juste et est ici possible graphiquement car le cas est restreint à la dimension 3. La surface étant concave, tous les points initiaux de l'algorithme convergent vers le même couple optimal. La recherche de maximum aurait donc pu être effectuée à partir d'un unique point, cependant dans le cas général la surface n'est pas nécessairement concave et un nombre de points initiaux plus important doit être choisi.

Dans un premier temps, il est possible de juger de l'interpolation de la solution en comparant les résultats à ceux du modèle ALM pour les valeurs α et γ trouvées à la section précédente. Cependant avec les modifications effectuées pour calculer la fonction à maximiser, l'erreur commise est difficilement interprétable (elle pourrait être compensée avec une hausse de la PVFP et du SCR à la fois).

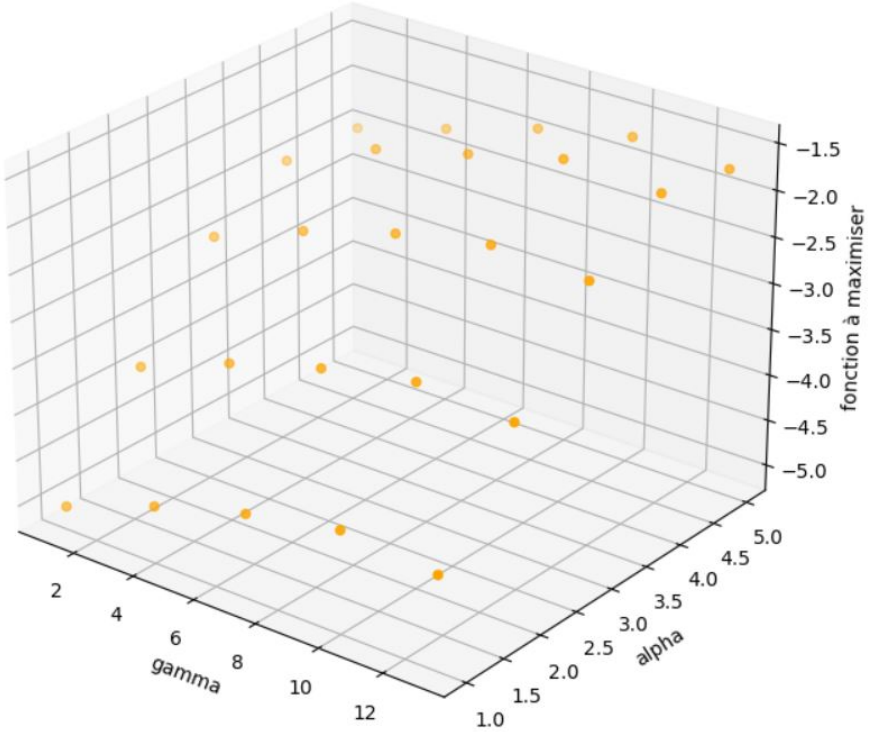


FIGURE 4.6: Points d'interpolation de la surface finale

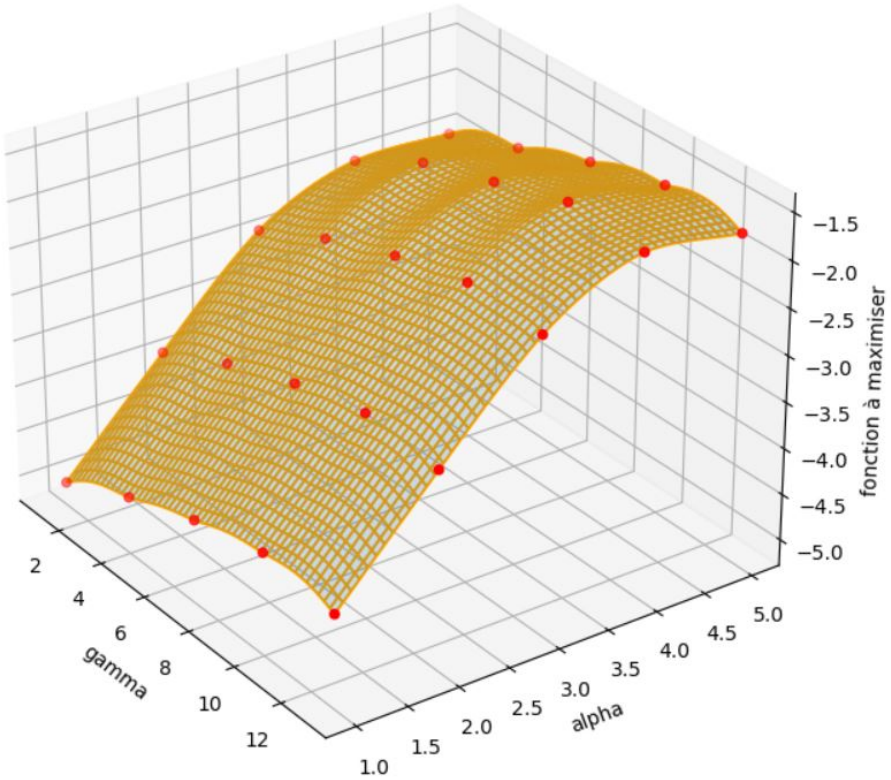


FIGURE 4.7: Interpolation finale

Combinaison	fonction à maximiser
$\gamma = 1, \alpha = 1\%$	-5,03
$\gamma = 1, \alpha = 2\%$	-3,94
$\gamma = 1, \alpha = 3\%$	-2,93
$\gamma = 1, \alpha = 4\%$	-2,49
$\gamma = 1, \alpha = 5\%$	-2,51
$\gamma = 4, \alpha = 1\%$	-4,66
$\gamma = 4, \alpha = 2\%$	-3,56
$\gamma = 4, \alpha = 3\%$	-2,55
$\gamma = 4, \alpha = 4\%$	-2,06
$\gamma = 4, \alpha = 5\%$	-2,22
$\gamma = 7, \alpha = 1\%$	-4,37
$\gamma = 7, \alpha = 2\%$	-3,27
$\gamma = 7, \alpha = 3\%$	-2,26
$\gamma = 7, \alpha = 4\%$	-1,81
$\gamma = 7, \alpha = 5\%$	-1,92
$\gamma = 10, \alpha = 1\%$	-4,17
$\gamma = 10, \alpha = 2\%$	-3,07
$\gamma = 10, \alpha = 3\%$	-2,06
$\gamma = 10, \alpha = 4\%$	-1,56
$\gamma = 10, \alpha = 5\%$	-1,71
$\gamma = 13, \alpha = 1\%$	-4,26
$\gamma = 13, \alpha = 2\%$	-3,14
$\gamma = 13, \alpha = 3\%$	-2,11
$\gamma = 13, \alpha = 4\%$	-1,61
$\gamma = 13, \alpha = 5\%$	-1,75

TABLE 4.1: Points d'interpolation sous forme de tableau

Pour ces valeurs de α et γ, le coût est de 3,51 millions d'euros, le SCR à 5 ans est de 144,93 millions d'euros et la PVFP à 5 ans est de 1,3 millions d'euros, donnant une valeur de la fonction à maximiser de -1,52% contre -1,50% pour la solution obtenue à l'aide de l'interpolation. Les erreurs commises sont très faibles et ce phénomène s'explique facilement car le maximum se trouve proche d'un point d'observation.

Il est intéressant de regarder quels auraient été les résultats si l'optimisation des deux leviers avait été faite en étudiant un des leviers, puis en partant de cette optimisation pour étudier le second levier. Si l'étude avait été menée d'abord sur le levier 2, une valeur optimale de $\gamma = 8,76$ aurait été trouvée comme solution pour ce levier. Suite au changement de portefeuille lié à la nouvelle répartition de la proportion d'UC, il faut alors relancer des calculs pour obtenir un nouvel α optimal. Ces calculs reviennent dans le cas de cette méthode à lancer les calculs avec $\gamma = 8,76$, sans refaire tous les calculs de la partie sur le levier 1, l'optimal trouvé est pour $\alpha = 3,88\%$.

Cette valeur peut être obtenue à partir des figures 4.7 et 4.8, l'étude est effectuée sur un plan du graphique de l'interpolation avec une valeur fixée de γ. Par application du second levier la valeur de la fonction à maximiser est de -1,60%.

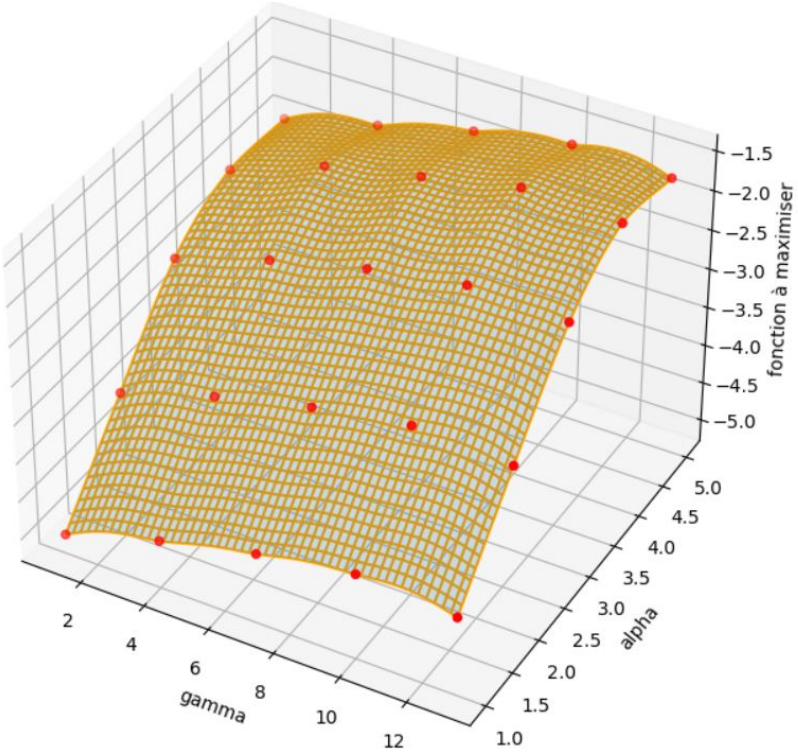


FIGURE 4.8: Interpolation finale vue du dessus

L'amélioration proposée par cette méthode n'est pas flagrante, mais permet déjà de montrer qu'elle peut être source d'optimisation des leviers. Les résultats proches obtenus entre les deux méthodes proviennent du fait que les leviers sont plutôt indépendants entre eux. En effet lorsque les figures 4.7 et 4.8 sont observées, en se plaçant à une valeur de γ fixée il est possible de reconnaître la forme de la courbe liée à la fonction coût du scénario étudié. De plus, à α fixé la "parabole" de l'étude du deuxième levier est également présente.

Néanmoins, il existe un effet conjoint, qui est que plus la valeur de α augmente, plus la parabole du γ optimal se décale vers la droite, créant ainsi la différence d'optimisation entre la méthode classique et celle implémentée.

Une telle précision sur le résultat aurait demandé pour la méthode naïve d'effectuer $401 \times 1201 = 481601$ simulations contre seulement $5^2 = 25$ dans le cas de la méthode d'interpolation, ce qui représente un temps de 20 000 jours environ contre 1 jour. La méthode levier par levier quand à elle nécessite seulement 10 simulations mais donne une légère erreur sur les paramètres à optimiser.

Le tableau 4.2 récapitule les performances de chaque méthode où la méthode naïve n'ayant pas été appliquée.

Méthode utilisée	Valeur à maximiser	Simulations à effectuer	Temps de calcul
Méthode naïve		481 601	environ 20 000 jours
Méthode levier par levier	-1,60%	10	10 heures
Méthode d'interpolation	-1,50%	25	environ 1 jour

TABLE 4.2: Performances des différentes méthodes

4.3 Limites de la modélisation et améliorations possibles

4.3.1 Les limites de l'application du modèle

L'application de la méthode aux deux leviers présentés dans ce mémoire a la particularité de contourner les limites générales du modèle évoquées dans la section 4.1.3. En effet, les deux leviers sont parfaitement compatibles et mettent en jeu des variables continues. De plus les analyses de ces deux leviers ont déjà été effectuées au chapitre précédent et assurent la faible variation des indicateurs qui pourraient en théorie donner des erreurs d'interpolation importantes. Néanmoins d'autres limites spécifiques à ce choix de leviers apparaissent et ne doivent pas être négligées.

- **Les limites de chaque levier** : Chaque levier possédait des limites et ces limites se retrouvent donc dans le modèle appliqué. Par exemple, le fait de choisir le scénario 3 pour le levier concernant les nouveaux contrats influent beaucoup sur les résultats car il est possible sur les surfaces de retrouver l'allure de la fonction de coût choisie. De même les limites du levier deux sont à prendre en compte comme la nouvelle répartition du portefeuille concernant la part des contrats sur le fonds euros et les contrats UC.

- **Le modèle** : Les limites provenant du modèle comme l'absence de certaines provisions ou encore la non prise en compte du rating des obligations interviennent forcément dans les résultats donnés.

- **Les effets conjoints :** Un des principaux objectifs de cette méthode est de mettre en avant des effets conjoints entre les leviers qui n'auraient pas pu être détectés en dehors de l'utilisation des modèles ALM. Malheureusement l'application aux deux leviers de ce mémoire ne montre pas d'effets conjoints inattendus et qui prouvent que cette méthode peut être bien plus performante dans certains cas.

  Le seul effet conjoint remarquable est que plus le paramètre α sera grand, plus l'optimisation du paramètre γ donnera lieu à des valeurs plus grandes, sans pour autant être très différentes.

- **Des leviers de différentes "tailles" :** Il est facilement remarquable que ces deux leviers n'ont pas le même poids car les effets du levier sur les nouveaux contrats sont bien plus importants. Il est alors plus compliqué d'analyser les résultats car les différences de résultats sur le paramètre γ sont beaucoup plus faibles.

  Il est possible également que certains leviers soient complètement "effacés" par d'autres dans les cas où un levier serait très important ou un levier possède des effets très mineurs sur les résultats.

4.3.2 Approfondissements possibles

L'agrégation d'un plus grand nombre de leviers

L'un des avantages les plus importants que présente la méthode implémentée est qu'elle peut se généraliser à la dimension N, permettant l'agrégation de N-1 leviers pour optimiser une variable. Des leviers concernant la recherche d'une allocation d'actifs ou encore une gestion plus efficaces des plus ou moins values latentes auraient pu être ajoutés par exemple pour effectuer des études en dimension 5. Cependant, les résultats ne peuvent pas être représentés sur des graphiques lisibles dans ce cas comme pour l'application en dimension 3 qui a été réalisée.

L'interpolation se ramène alors à un produit tensoriel de dimension N, et peut alors être vue comme une interpolation où les "points d'interpolation" sont des espaces de dimension N-1. Le problème en utilisant cette technique est que les temps de calcul (pour l'interpolation) peuvent devenir très grands quand N augmente.

L'algorithme de maximisation reste viable car l'idée de gradient s'étend facilement en dimension supérieure. Néanmoins une vérification graphique du maximum comme celle qui a été faite dans l'application de la méthode en dimension 3 n'est plus possible, et un risque (faible mais existant) d'obtenir une solution locale et non pas globale existe.

Le gain de temps apporté par cette méthode n'est pas négligeable, pour N leviers possédant chacun M possibilités, le nombre de simulations passe de M^N à $(\frac{M}{k})^N$, soit un gain exponentiel en fonction de N.

Gain de précision

Les erreurs commises dans la méthode qui a été étudiée proviennent des erreurs d'interpolation, la question est donc de savoir comment il est possible de gagner en précision sans pour autant augmenter inexorablement les temps de calcul.

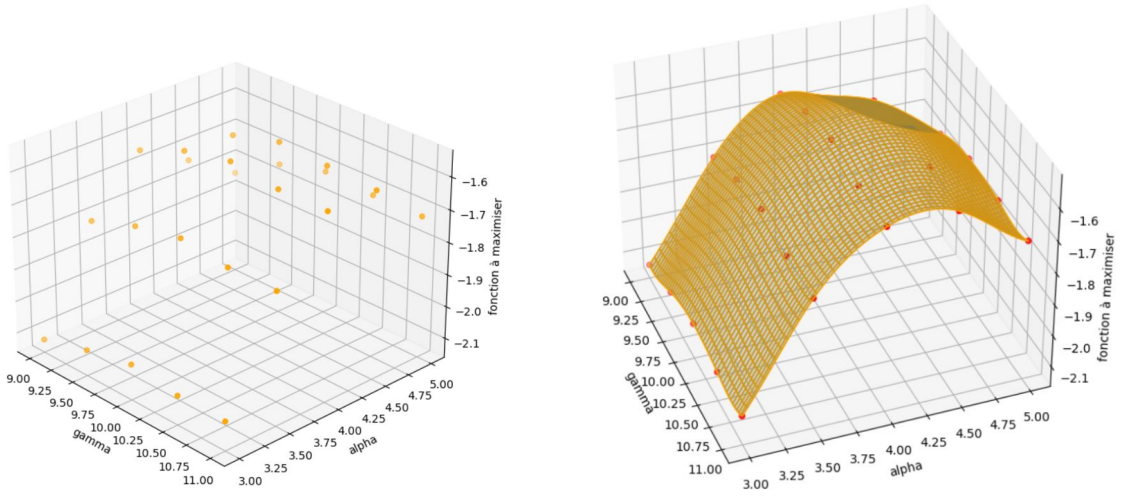
Une solution naïve consisterait à augmenter le nombre de points choisis initiaux, par exemple en passant de 5 points par levier à 10 points par levier pour la méthode appliquée en dimension 3, la précision serait alors augmentée mais le nombre de calculs à effectuer passe de 25 à 100.

Une autre solution est envisageable pour contourner ce problème, il est possible de garder le même nombre de calculs mais d'appliquer plusieurs fois la méthode en changeant les points d'interpolation initiaux. En effet après application de la méthode, il est possible de l'utiliser à nouveau en choisissant des points d'interpolation proches de la solution optimale obtenue la première fois. Il est alors possible d'effectuer une troisième fois la méthode en se rapprochant encore plus des vraies valeurs et en réduisant les erreurs d'interpolation.

Pour le cas de la dimension 3 et de l'exemple, la solution apportée fait augmenter de 25 à 50 le nombre de points totaux contre une augmentation de 25 à 100 pour la solution naïve. Dans le cas général le nombre de simulations est exponentiel avec la solution naïve et linéaire avec la solution apportée.

Pour appliquer cette méthode à l'étude des deux leviers, il est possible suite aux résultats de la

première interpolation de recentrer les points initiaux de la grille d'interpolation. Pour rester dans le cas de 5 simulations par levier et donc un total de 25 simulations, il est par exemple possible de recentrer l'étude sur des valeurs de α comprises entre $[3\%, 5\%]$ par pas de 0,5% tandis que la valeur de γ sera comprise entre $[9, 11]$ par pas de 0,5. Les résultats de cette interpolation sont donnés sur la figure 4.9.



(a) Points d'interpolation de la surface finale

(b) Interpolation finale

FIGURE 4.9: Interpolation sur une grille de départ plus fine

La fonction à maximiser est ici de -1,52%, rendant ainsi l'erreur pratiquement nulle (moins de 0,01% sur cette fonction). Ce "zoom" sur la grille d'interpolation initiale permet alors d'obtenir des résultats beaucoup plus précis car l'erreur sur la valeur de la fonction à optimiser a été divisée par 5 environ.

Suite à ces résultats obtenus une nouvelle problématique apparaît. Est-il possible de réduire les intervalles d'études dès le début pour partir directement d'intervalles plus précis pour l'étude des leviers ? La grille de points choisie initialement va influer sur la précision de ce modèle et sur les erreurs liées à l'interpolation. Pour l'application de la méthode la grille de points a été déterminée de manière à étudier un intervalle important en prenant des pas constants pour α et γ. La question est donc de savoir comment choisir de manière plus optimale la grille de départ. Cependant si cette étape n'est pas réfléchie il est possible de se concentrer sur des points éloignés du maximum recherché et donc de perdre de l'information sur les autres endroits de la grille, menant ainsi à des erreurs plus importantes que celles avec des pas constants.

Les résultats de ce chapitre ont montré que lorsque les effets conjoints des leviers sont faibles, l'optimal de ces leviers étudiés simultanément sera proche de l'optimal de chaque levier étudié de manière indépendante. La stratégie qui peut alors être mise en place est de quantifier les effets conjoints entre les leviers. Si les effets conjoints sont importants il est nécessaire de prendre un pas constant pour ne pas perdre de l'information, à l'inverse si un levier n'influe pas sur les autres étudiés, il est possible de concentrer les points de la grille initiaux vers des valeurs qui rendront l'interpolation plus précise.

Afin d'illustrer cette stratégie voici un exemple dans le cas de l'agrégation de 4 leviers nommés L_1, L_2, L_3 et L_4. La première étape est de déterminer une matrice d'effets conjoints entre les différents leviers. Il est supposé pour cette illustration que les valeurs des effets conjoints entre deux leviers peuvent être "Faibles", "Moyens" et "Forts". Ces trois valeurs peuvent être en pratique déterminées

par un expert ou par des tests rapides en comparant les leviers deux à deux sur certains points uniquement.

Supposons que la matrice obtenue soit celle obtenue dans le tableau 4.3.

	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		Faibles	Forts	Moyens
L_2	Faibles		Faibles	Faibles
L_3	Forts	Faibles		Moyens
L_4	Moyens	Faibles	Moyens	

TABLE 4.3: Matrice des effets conjoints

Cette matrice doit logiquement être symétrique car l'analyse des effets conjoints est commutative. À partir de cette matrice, s'il existe un levier pour lequel tous les effets conjoints avec les autres leviers sont faibles, alors il est possible de changer la grille initiale pour appliquer la méthode d'interpolation. Pour cet exemple cette action est possible uniquement pour le levier 2. Il est alors possible d'étudier ce levier 2 seul pour cibler les valeurs qui améliorent ce levier et obtenir les points qui donneront des résultats plus précis.

Il est possible d'appliquer cette stratégie à la méthode en trois dimensions présentée dans ce chapitre. En effet, si "Levier New Business" correspond au levier sur les nouveaux contrats du nouveau fonds en euros et "Levier PB" au levier de participation aux bénéfices discrétionnaire, les résultats permettent d'affirmer que la matrice des effets conjoints a la forme de celle du tableau 4.4.

	Levier New Business	Levier PB
$LevierNewBusiness$		Faibles
$LevierPB$	Faibles	

TABLE 4.4: Matrice des effets conjoints concernant les deux leviers

Étant donné que cette matrice ne contient que les valeurs "Faibles", il est possible pour ces deux leviers de changer leur intervalle d'étude et donc d'obtenir une grille déjà plus précise. Il est alors possible de réduire la taille de la grille d'interpolation pour obtenir directement les résultats de la figure 4.9.

Conclusion

Les résultats obtenus dans ce mémoire montrent la gravité des risques courus par les assureurs du secteur de l'assurance vie si ces derniers n'agissent pas les prochaines années et que le contexte de taux bas perdure. Par exemple leur ratio de solvabilité pourrait chuter d'environ 10% par an, les menant à un ratio de solvabilité plus petit que 1 et ainsi à une intervention de l'ACPR. Cette chute est liée à celle du fonds en euros classique et aux taux minimum garantis que les assureurs auront de plus en plus de mal à servir suite à des rendements de plus en plus faibles. Les assureurs doivent donc revoir ce fonds en euros et trouver des leviers pour contrôler leur solvabilité.

Le premier levier qui a été étudié dans ce mémoire est l'impact de nouveaux contrats en euros dont le capital ne serait pas garanti à 100% mais à 98%. Les résultats ont montré que ces contrats peuvent apporter à la fois un gain pour la solvabilité de l'assureur et un gain pour l'assuré car cette garantie plus basse peut être accompagnée d'une allocation d'actifs plus risquée et ainsi d'un meilleur rendement. Ce levier a un impact majeur car il permettrait à lui seul de gagner une dizaine de points sur le ration de solvabilité à horizon 5 ans. Néanmoins il faut prendre en compte le fait que les assurés ne sont peut être pas prêts à prendre ce risque et que la collecte sur ces nouveaux contrats sera sûrement plus faible que sur des contrats classiques.

Le second levier qui traite de la refonte de la distribution de participation aux bénéfices discrétionnaire mise en place dans ce mémoire a montré qu'il était possible de contrôler un peu mieux les rachats, de plus ce levier pourrait être une incitation à l'arbitrage vers les unités de compte, ce qui serait bénéfique pour l'assureur. Les impacts de ce levier sont moins forts que pour ceux du premier, néanmoins il faut tenir compte du fait que ce levier ne représente aucun coût pour l'assureur car il s'agit uniquement d'une politique choisie.

Le modèle mis en place dans la dernière partie de ce mémoire propose une manière nouvelle d'étudier plusieurs leviers à la fois grâce à l'interpolation de surfaces ou d'hyperplans, afin de capter des éventuels interactions entre ces leviers. Les analyses ont permis de montrer que ce type de modèle était indispensable pour trouver des optima globaux sur un ensemble de moyens d'action. Cependant un tel modèle possède des limites qui sont propres à chacun des leviers utilisés et au modèle utilisé. Ces limites proposent une optimisation qui peut donc être entachée d'erreurs lorsque le nombre de leviers augmente.

Bibliographie

Abdelli, H. (2014). L'Euro croissance: une solution rentable pour les clients? Comparaison des performances de l'Eurocroissance avec celles du fonds Euro. Mémoire d'actuaire. ISFA.

ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. Memofin. Rapp. tech. URL : https://memofin-media.s3.eu-west-3.amazonaws.com/uploads/library/pdf/20130527-ONC-2013%5B1%5D.pdf (visité le 05/08/2020).

ACPR (2014). Défaillances dans le secteur de l'assurance vie au Japon dans les décennies 1990 et 2000. ACPR Banque de France. *Analyses et synthèses* 30, p. 8. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20140526-defaillances-dans-secteur-assurance-vie-japon-decennies-1990-et-2000.pdf (visité le 29/09/2020).

Allag, L. (2008). modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel de Solvabilité 2. Mémoire d'actuaire. ISFA.

Banque de France (2019). Solvabilité 2. ACPR Banque de France. URL : https://acpr.banque-france.fr/europe-et-international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii (visité le 30/07/2020).

Banque de France (2020a). Bulletin de la Banque de France. Publication Banque de France, p. 7. URL : https://publications.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/bdf227-4_placements_assureurs_vf.pdf (visité le 16/08/2020).

Banque de France (2020b). Les indices obligataires. Banque de France. URL : https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-indices-obligataires (visité le 30/07/2020).

Banque de France (2020c). Placements et patrimoine des menages aux 1er et 2e trimestres 2020. Banque de France. URL : https://www.banque-france.fr/statistiques/epargne-et-comptes-nationaux-financiers/epargne-des-menages (visité le 10/07/2020).

Banque de France (2020d). Taux indicatifs des bons du Trésor et OAT. Banque de France. URL : https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/taux-indicatifs-des-bons-du-tresor-et-oat (visité le 30/07/2020).

B.Auffret et S.Bouhzila (2016). Analyse et pilotage d'un portefeuille de contrats multi-suppports au travers de la logique floue. Mémoire d'actuaire. Centre d'Études Actuarielles.

Commission Europénne (2014). Règlement délégué (UE) 2015/35 du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE. OJ L. 12.

Echchelh, M. (2019). Approche multicritère du pilotage stratégiqueen assurance IARD. Mémoire d'actuaire. ENSAE.

EIOPA (2020). Insurance statistics. EIOPA. URL : https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/insurance-statistics_en#AboutEIOPAinsurancestatistics (visité le 16/08/2020).

FFA (2019). L'assurance française : données clés 2019. FFA. URL : https://www.ffa-assurance.fr/etudes-et-chiffres-cles/assurance-francaise-donnees-cles-par-annee (visité le 05/08/2020).

FFA (2020). Études et chiffres clés. FFA. URL : https://www.ffa-assurance.fr/etudes-et-chiffres-cles (visité le 02/11/2020).

François de Varenne (1998). L'assurance vie aux États-Unis : histoire d'une crise. *Revue d'économie financière* 48, p. 171. URL : https://www.persee.fr/doc/ecofi_0987-3368_1998_num_48_4_4589#ecofi_0987-3368_1998_num_48_4_T9_0169_0000 (visité le 29/09/2020).

Guillod, T. (2008). Interpolations, courbes de Bézier et B-Splines. *Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences* 34, p. 8-11. URL : http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no34/art3-34.pdf (visité le 12/11/2020).

Kiefer, J. (1953). Sequential Minimax Search for a Maximum. T. 4. Statistics and Computing Series 3. American Mathematical Society.

L.Devineau et S.Loisel (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat* 10.17. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00365363v2/document (visité le 15/07/2020).

Monin, C. (2014). Optimisation multiobjectif de l'allocation stratégique par un algorithme génétique. Mémoire d'actuaire. ISFA.

Optimind (2017). Formation Solvabilité 2 Optimind.

Parlement Européen et Conseil de l'Union Européenne (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.

Rinny Gremaud (2009). AIG a perdu 100 milliards de dollars en 2008. Le Temps. URL : https://www.letemps.ch/economie/aig-perdu-100-milliards-dollars-2008 (visité le 12/09/2020).

Stern, M. (2019). Euro-croissance : Analyse de la transformation du produit prévue par la loi PACTE. Mémoire d'actuaire. Université Paris-Dauphine.

Tambrun, H. (2019). Allocation stratégique d'actifs en épargne dans le cadre d'une remontée rapide des taux d'intérêt. Mémoire d'actuaire. ISFA.

Yahiko (2015). Introduction à l'interpolation numérique. Développez.com. URL : https://yahiko.developpez.com/tutoriels/introduction-interpolation/?page=page_8 (visité le 25/10/2020).

Annexe A

Annexes

A.1 Détails sur la logique floue appliquée à l'arbitrage

A.1.1 Les ensembles flous

Ensemble flou	Taux Arb_in
[>=20, 19]	0,09%
[12, 11, 18, 17, 10, 14, 16, 8, 13, 15, 9, 7]	0,28%
[6, 5, 1, 4, 3, 2]	0,50%

(a) Ensembles flous de l'ancienneté pour l'arbitrage vers l'euro

Ensemble flou	Taux Arb_in
[>=20, 19]	0,09%
[12, 11, 18, 17, 10, 14, 16, 8, 13, 15, 9, 7]	0,28%
[6, 5, 1, 4, 3, 2]	0,50%

(b) Ensembles flous de l'ancienneté pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.1: Ensembles flous de l'ancienneté

Ensemble flou	Taux Arb_in
[>=90, 80, 85]	0,28%
[70, 60, 25, 65, 30, 35, 45, 55]	0,46%
[15, <=10, 75, 50, 20, 40]	0,60%

(a) Ensembles flous de la part d'UC pour l'arbitrage vers l'euro

Ensemble flou	Taux Arb_in
[>=20, 19]	0,09%
[12, 11, 18, 17, 10, 14, 16, 8, 13, 15, 9, 7]	0,28%
[6, 5, 1, 4, 3, 2]	0,50%

(b) Ensembles flous de la part d'UC pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.2: Ensembles flous de la part d'UC

Ensemble flou	Taux Arb_in
[3%, 4%, -1%, 0%, 2%, 7%, 1%, -2%]	0,28%
[-4%, -5%, -3%]	0,53%
[-10%, -9%, -7%, -6%]	0,92%

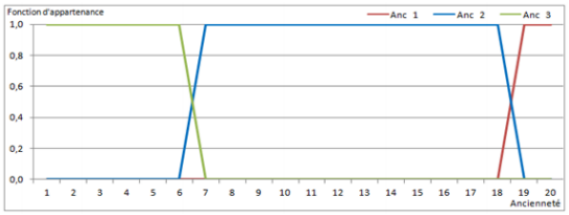
(a) Ensembles flous du CAC pour l'arbitrage vers l'euro

Ensemble flou	Taux Arb_in
[3%, 4%, -1%, 0%, 2%, 7%, 1%, -2%]	0,28%
[-4%, -5%, -3%]	0,53%
[-10%, -9%, -7%, -6%]	0,92%

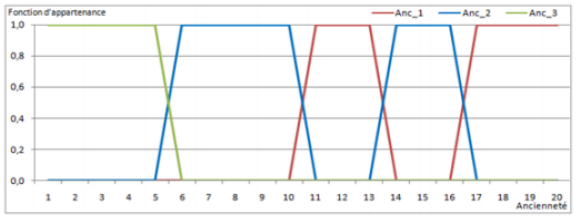
(b) Ensembles flous du CAC pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.3: Ensembles flous du CAC

A.1.2 Fonctions d'appartenance

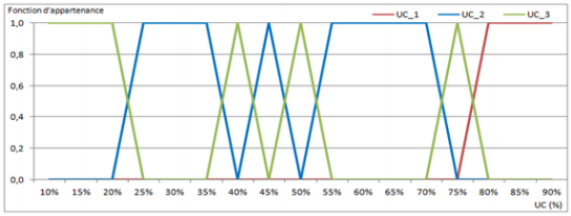


(a) Fonctions d'appartenance de l'ancienneté pour l'arbitrage vers l'euro

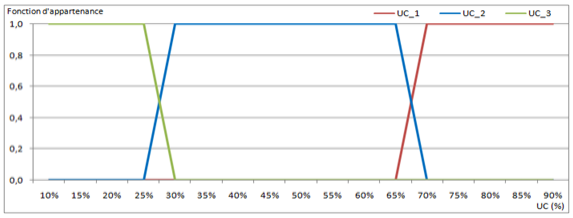


(b) Fonctions d'appartenance de l'ancienneté pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.4: Fonctions d'appartenance de l'ancienneté

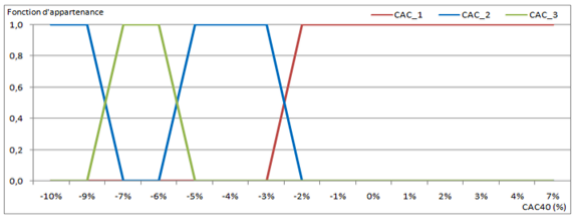


(a) Fonctions d'appartenance de la part d'UC pour l'arbitrage vers l'euro

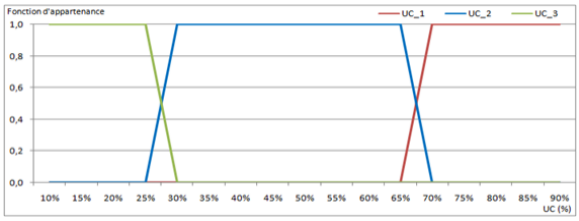


(b) Fonctions d'appartenance de le la part d'UC pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.5: Fonctions d'appartenance de la part d'UC



(a) Fonctions d'appartenance du CAC pour l'arbitrage vers l'euro



(b) Fonctions d'appartenance du CAC pour l'arbitrage vers l'UC

FIGURE A.6: Fonctions d'appartenance du CAC

A.1.3 matrices de décision

A.2 Résultats sur les différentes méthodes d'interpolation

Les valeurs données dans cette annexe sont toutes liées, comme pour le chapitre 4, à des analyses concernant le scénario 3 décrit dans la section protocole et hypothèses du chapitre 3.

	Ancienneté_1			Ancienneté_2			Ancienneté_3		
	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3
TxUc_1	1	1	1	1	2	1	2	1	1
TxUc_2	2	2	2	2	3	5	2	4	3
TxUc_3	2	2	5	2	4	5	3	4	5

FIGURE A.7: Matrice de décision des arbitrages vers euro

	Ancienneté_1			Ancienneté_2			Ancienneté_3		
	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3	Cac40_1	Cac40_2	Cac40_3
TxUc_1	1	1	1	1	2	2	3	3	4
TxUc_2	1	1	1	2	2	2	4	4	4
TxUc_3	1	1	1	2	2	3	5	5	5

FIGURE A.8: Matrice de décision des arbitrages vers l'UC

A.2.1 Application des splines pour le levier 1

Afin de justifier que les interpolations de lagrange proposées dans la partie résultats obtenus concernant l'étude du premier levier sont valables et ne font pas apparaître de phénomènes de Runge, une interpolation par splines cubiques a été effectuée à postériori.

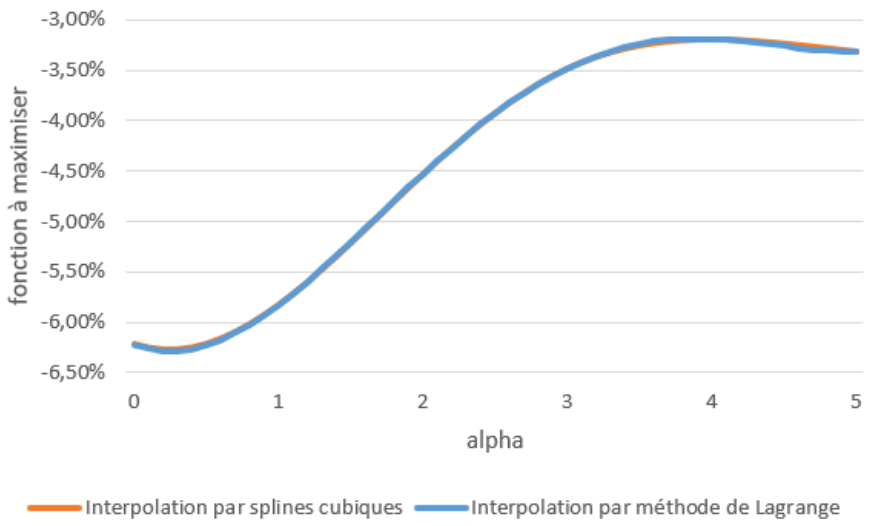


FIGURE A.9: Comparaison des méthodes d'interpolation

Les résultats de cette étude sur la figure A.9 montre des valeurs très proches pour les deux méthodes, donnant ainsi des valeurs optimales de α pour ce scénario égales à 3,88% dans les deux cas.

A.2.2 Tableaux nécessaires à la construction des points d'interpolation

Les tableaux A.1, A.2 et A.3 regroupent les valeurs, en millions d'euros, qui ont servi à calculer les points afin d'appliquer la méthode du chapitre 4 sur les deux leviers étudiés.

	$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 7$	$\gamma = 10$	$\gamma = 13$
$\alpha = 1$	145,94 M€	145,84 M€	145,70 M€	145,66 M€	145,70 M€
$\alpha = 2$	145,59 M€	145,48 M€	145,37 M€	145,33 M€	145,37 M€
$\alpha = 3$	145,24 M€	145,13 M€	145,01 M€	145,01 M€	145,01 M€
$\alpha = 4$	144,91 M€	144,90 M€	144,90 M€	144,89 M€	144,89 M€
$\alpha = 5$	144,60 M€	144,47 M€	144,34 M€	144,30 M€	144,30 M€

Table A.1: Valeurs du SCR

	$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 7$	$\gamma = 10$	$\gamma = 13$
$\alpha = 1$	-5,98 M€	-5,43 M€	-5,00 M€	-4,71 M€	-4,85 M€
$\alpha = 2$	-3,91 M€	-3,37 M€	-2,93 M€	-2,64 M€	-2,75 M€
$\alpha = 3$	-1,85 M€	-1,29 M€	-0,87 M€	-0,57 M€	-0,65 M€
$\alpha = 4$	0,17 M€	0,78 M€	1,15 M€	1,51 M€	1,44 M€
$\alpha = 5$	2,37 M€	2,80 M€	3,23 M€	3,53 M€	3,48 M€

Table A.2: Valeurs de la PVFP

	$\gamma = 1$	$\gamma = 4$	$\gamma = 7$	$\gamma = 10$	$\gamma = 13$
$\alpha = 1$	1,37 M€	1,37 M€	1,37 M€	1,37 M€	1,37 M€
$\alpha = 2$	1,82 M€	1,82 M€	1,82 M€	1,82 M€	1,82 M€
$\alpha = 3$	2,41 M€	2,41 M€	2,41 M€	2,41 M€	2,41 M€
$\alpha = 4$	3,77 M€	3,77 M€	3,77 M€	3,77 M€	3,77 M€
$\alpha = 5$	6,00 M€	6,00 M€	6,00 M€	6,00 M€	6,00 M€

Table A.3: Valeurs des coûts d'acquisition