

**Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 10/11/2021**

Par : **Julien ROCHON**

Titre : **Valorisation de la clause de participation aux bénéfices dans un environnement
de réassurance pour un risque prévoyance**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière
M.Quentin GUIBERT

Entreprise :

Nom : SCOR Global Life

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Directrice du mémoire en entreprise :

Nom : Mme Samantha PHU PIN

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice de mémoire Mme Samantha PHU PIN pour son encadrement dans la réalisation de cet exercice. Ses précieux conseils tout au long de mon année d'alternance auront été déterminants pour moi.

Je remercie également M.Lamberto GALASSO, M.Thomas CHAMBOLLE, M.Julien PELLETIER ainsi que M.Quentin GUIBERT pour leur relecture et leur regard critique sur le travail effectué.

Je tiens enfin à remercier l'ensemble de l'équipe Pricing du Marché Français de SCOR Global Life pour son accueil et pour m'avoir permis de réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions possibles.

Résumé

La clause de participation aux bénéfices (PB) d'un traité de réassurance engage le réassureur à reverser à l'organisme assureur une partie de ses bénéfices réalisés sur ce traité. Il est primordial pour le réassureur d'intégrer cette clause au processus de tarification du traité puisqu'il s'expose à une perte de rentabilité significative. Inclure un report de perte sur la clause de PB permet au réassureur de lisser le résultat technique en cas de déficit en imputant les pertes sur les bénéfices futurs.

L'objectif de ce mémoire est de développer une méthodologie permettant une valorisation de cette clause dans le cadre de traités proportionnel, non proportionnel ou une combinaison des deux. Nous étudions les cas avec et sans report de pertes. Nous cherchons à déterminer le chargement supplémentaire adapté à appliquer à la prime pure pour couvrir la participation aux bénéfices.

Nous travaillons sur un portefeuille simulé de Travailleurs Non Salariés couverts par des garanties arrêt de travail (incapacité et invalidité) et décès.

Après avoir développé la méthodologie en démontrant l'existence et l'unicité d'un tel chargement, nous utilisons une simulation de Monte Carlo afin de simuler la trajectoire de la sinistralité et du provisionnement. Cette simulation nous permet d'obtenir une expression numérique du chargement. Nous analysons ensuite la sensibilité aux paramètres du traité et aux caractéristiques du portefeuille simulé.

Enfin, nous appliquons la méthodologie à des cas pratiques.

Mots clés : réassurance, participation aux bénéfices, risque incapacité, risque invalidité, risque décès, Monte Carlo, provisionnement

Abstract

The profit sharing clause included in a reinsurance treaty can have a huge impact on the reinsurer's result. Indeed, he is committed to give back a part of the annual profit on the contract. Therefore, an inadequate pricing of a treaty with profit sharing could lead to significant losses for the reinsurer.

The goal of this paper is to price the profit sharing clause included in a reinsurance treaty concerning personal protection of self-employed individuals. We tackle both proportional and non proportional treaties and we focus on disability risk and mortality risk. We show that the pricing of this clause consist in adding a supplementary loading on the pure premium.

Firstly, we show that the loading is satisfying an equation with a unique solution. Then we simulate the annual sinistrality of the portfolio and its reserves until expiration in order to solve the equation through a Monte Carlo simulation. After an analysis of a standard case, we study the impact of each parameters of the treaty and each features of the portfolio on the loading.

To finish with, we discuss business cases where the methodology can be relevant.

Keywords : reinsurance, profit sharing, disability risk, mortality risk, Monte Carlo, reserving

Table des matières

Introduction	1
I Chapitre introductif	3
1 La réassurance	4
1.1 Principes de la réassurance	4
1.2 Les schémas de réassurance	5
1.3 Les clauses de réassurance	10
2 Les risques décès et arrêt de travail	14
2.1 Le risque décès	14
2.2 Le risque arrêt de travail	14
2.3 L'incapacité temporaire de travail	14
2.4 L'incapacité permanente de travail ou invalidité	16
2.5 Les produits TNS en cas d'arrêt de travail	18
II Aspects méthodologiques	21
3 Chargement supplémentaire pour couvrir la clause de Participation aux Bénéfices	22
3.1 Notations	22
3.2 Cas 1 : taux techniques égaux : $r^{DC} = r^{AT} = r$	23
3.3 Cas 2 : taux techniques différents : $r^{DC} \neq r^{AT}$	29
4 Simulation de la charge de sinistres	36
4.1 Le portefeuille et ses caractéristiques	36
4.2 Algorithme de simulation	38
5 Provisionnement	51
5.1 Introduction	51
5.2 Provisionnement sur les différents traités	54
III Analyses et utilisation des résultats	59
6 Valorisation de la clause de PB	60
6.1 Paramètres par défaut de la simulation	60
6.2 Caractéristiques par défaut du portefeuille simulé	60
6.3 Valorisation	62
7 Analyse des sensibilités	67
7.1 Sensibilité aux paramètres du modèle pour un traité type QP+XS	67
7.2 Sensibilité aux caractéristiques du portefeuille	75

8 Cas pratiques d'utilisation	77
8.1 Cas pratique 1 : <i>Loss Ratio</i> < 100%	77
8.2 Cas pratique 2 : <i>Loss Ratio</i> > 100%	82
8.3 Cas pratique 3 : conséquence d'une déviation de sinistralité pour la cédante et le réassureur	83
8.4 Critique et améliorations de la modélisation	84
Conclusion	87
Références	88
Note de synthèse	89
Executive summary	94
Annexes	99
A Convergence de la méthode avec report de perte	99
B Définition, lois et Théorèmes	101
B.1 Lois des grands nombres	101
B.2 Inégalité Triangulaire	101
B.3 Théorème Central Limite	101
B.4 <i>Value at Risk</i>	101
C Tables	102
C.1 Les tables TH 00-02 et TF 00-02	102
C.2 Les statistiques du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC)	102
D Caractéristiques des assurés du portefeuille et tableaux de sensibilités	104
D.1 Paramètres des lois utilisées pour la simulation du portefeuille fictif	104
D.2 Tableaux de sensibilités	104

Table des figures

1	Schéma des opérations d'assurance	4
2	Répartition de la charge de sinistres d'une QP 20%	6
3	Taux de cession d'un excédent de plein ($R = 10$ et $C = 30$) en fonction du capital assuré	7
4	Répartition de la charge de sinistres d'un 20 XS 40	8
5	Répartition de la charge de sinistres d'un <i>Stop Loss</i> 105 SL 130	9
6	Répartition de la charge de sinistres d'une combinaison d'une QP 20% et d'un 30 XS 50	9
7	États d'un assuré en arrêt de travail	14
8	Pyramide représentant l'ordre des prestations perçues en cas d'arrêt de travail	15
9	Exemple de barème de calcul du taux d'invalidité	16
10	Passages d'états	39
11	Décès en première année	40
12	L'assuré reste valide toute l'année 1	41
13	L'assuré passe en incapacité en année 1	41
14	L'assuré sort de l'incapacité sans passer par l'invalidité	42
15	Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ sans invalidité	43
16	Évolution de la charge de sinistres si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ sans invalidité	43
17	Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ sans invalidité	44
18	L'assuré passe en invalidité	45
19	Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ avec invalidité	46
20	Évolution de la charge de sinistres si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ avec invalidité	47
21	Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ avec invalidité	48
22	Incapacité	52
23	Invalidité	52
24	Provisions du décès en invalidité en attente en fin d'année 1 et 2 en fonction de l'âge	53
25	Convergence de α_n avec la procédure du théorème du point fixe	62
26	Convergence de α_n avec une recherche dichotomique	62
27	Équilibrage de $\mathbb{E}[R_G]$ grâce au chargement	63
28	Part de la PB pour chaque garantie	63
29	Évolution de α par rapport à c	67
30	Évolution de α par rapport à f^{PB}	69
31	Évolution de α par rapport à t^{PB}	71
32	Positivité de la variable B	72
33	Évolution de α par rapport à QP	73
34	Évolution de α par rapport à PRIO	74
35	Évolution de α par rapport à POR	74
36	Évolution de α par rapport à la taille du portefeuille	75
37	Évolution de α par rapport à l'âge moyen du portefeuille	76
38	Distribution empirique de R_G	77
39	Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 10\%$	79

40	Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 50\%$	79
41	Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 90\%$	80
42	Critère de valorisation de la PB	90
43	Passages d'états	90
44	Évolution de α par rapport aux paramètres du traité (coûts du réassureur, frais, taux de PB)	91
45	Évolution de α par rapport à la taille du portefeuille	92
46	Cas pratique 1	92
47	Princing criteria of the PS clause	94
48	Transition states	95
49	Additional loading α as a function of treaty parameters (reinsurer's costs, PB cost, PB rate)	96
50	Additional loading α as a function of the portfolio size	96
51	Business case 1	97
52	Distribution empirique $R_1^{PB,AT}$	99
53	Distribution empirique de $R_1^{PB,DC}$	100
54	Taux de transition	103

Liste des tableaux

1	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré décède dans l'année 1	40
2	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré est valide en fin d'année 1	41
3	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré redevient valide dans l'année 1	43
4	Charges annuelles de sinistres du réassureur sort de son incapacité dans l'année 2	44
5	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré sort de son incapacité dans l'année 3	45
6	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 1	46
7	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 2	47
8	Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 3	49
9	Matrices des sinistres DC	49
10	Matrices des sinistres AT	50
11	Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 1	54
12	Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 1	55
13	Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 2	55
14	Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 2	56
15	Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 3	57
16	Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 3	57
17	Paramètres par défaut du traité	60
18	Caractéristiques par défaut du portefeuille	61
19	Rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ pour différents niveaux de t^{PB} et f^{PB}	64
20	Indicateur de résultat global pour différents niveaux de t^{PB}	78
21	Niveau de $VaR_{90\%}(R_G)$ pour différents niveaux de t^{PB}	80
22	Couples optimaux pour différents niveaux de f^{PB}	81
23	$\mathbb{E}[R_G]$ pour différents niveaux de (t^{PB}, f^{PB})	82
24	$\frac{\mathbb{E}[R_G^{ASS}]}{PP^{ASS}}$ pour différents niveaux de (t^{PB}, α)	83
25	$\frac{\mathbb{E}[R_G^{REASS}]}{PP^{REASS}}$ pour différents niveaux de (t^{PB}, α)	83
26	Paramètres des lois pour le portefeuille fictif	104
27	Sensibilité de α au frais réel du réassureur c	104
28	Sensibilité de α au frais du compte de PB f^{PB}	105
29	Sensibilité de α au taux de PB t^{PB}	105
30	Sensibilité de α à r^{DC}	105
31	Sensibilité de α à r^{AT}	106
32	Sensibilité de α à la taille du portefeuille	106
33	Sensibilité de α à l'âge moyen du portefeuille	106
34	Sensibilité de α à l'ancienneté de la sélection médicale	107
35	Sensibilité de α à la part moyenne du salaire garantie en incapacité	107
36	Sensibilité de α à la part moyenne du salaire garantie en invalidité	107

Introduction

Le traité de réassurance est un contrat entre un organisme assureur et son réassureur. Comme tout contrat, il contient des clauses qui impactent son coût. Une mauvaise appréciation de ces clauses peut exposer les parties signataires à des conséquences financières délétères.

La participation aux bénéfices (PB) fait partie des clauses les plus fréquemment incluses sur les traités de réassurance signés sur le marché. Elle permet à l'organisme assureur d'adapter sa couverture en réassurance et de partager les résultats qui se dégageraient tout au long de la durée de vie du traité. Cette clause oblige le réassureur à calibrer correctement ses chargements afin de couvrir ses frais et rémunérer ses capitaux immobilisés. En effet, en instaurant une participation aux bénéfices, l'espérance des résultats actualisés du réassureur devient négative en l'absence d'un chargement adapté.

L'objectif de ce mémoire est de calibrer le chargement supplémentaire à appliquer à la prime pure de réassurance pour garantir la rentabilité du réassureur. Ce coût est difficile à estimer puisqu'il nécessite de projeter le portefeuille sur la durée de vie du traité afin d'anticiper les sinistres et les provisions futurs. La connaissance de ce chargement permettra au réassureur de piloter les négociations avec la cédante selon sa stratégie commerciale. Nous nous intéressons à la valorisation de cette clause sur un portefeuille de Travailleurs Non Salariés (TNS).

Dans leurs mémoires réalisés en 2009 et 2017, Razvan Ionescu (ISFA, [1]) et Audrey Genebrier (CNAM, [2]) traitent de la valorisation de la clause de PB sur respectivement un traité non proportionnel sur le risque invalidité et un traité proportionnel sur le risque décès en emprunteur.

Or usuellement les contrats prévoyance des TNS regroupent à la fois des garanties décès et arrêt de travail (incapacité et invalidité). De plus, les montages de réassurance sur lesquels s'applique la clause de PB couplent des traités proportionnels et non proportionnels.

Ce mémoire s'appuie sur leurs travaux et développe une méthodologie plus générale de valorisation de la clause de participation aux bénéfices (consolidation des risques décès et arrêt de travail et combinaison de traités proportionnel et non proportionnel).

Pour cela, nous présenterons dans un chapitre introductif la réassurance et ses principes, avec un focus particulier sur le mécanisme de la PB. Nous aborderons également les risques décès et arrêt de travail (incapacité et invalidité) en mettant l'accent sur le cas des TNS.

Ensuite, nous partirons du compte de résultats du réassureur et du compte de PB afin de mettre en équation le chargement supplémentaire nécessaire pour faire face à la clause de PB. Nous démontrerons l'existence et l'unicité de ce chargement et développerons une procédure simple pour le déterminer.

Puis, nous simulerons un portefeuille en nous appuyant sur des données d'expérience et de l'INSEE qui servira de base à notre étude. Nous modéliserons la trajectoire de la sinistralité annuelle ainsi que les provisions mathématiques afin de résoudre l'équation du chargement à l'aide d'une simulation de Monte Carlo.

Après une analyse des premiers résultats sur les traités avec et sans report de pertes, nous étudierons la sensibilité du chargement aux différents paramètres du modèle ainsi qu'aux caractéristiques du portefeuille simulé.

Enfin nous mettrons en place des cas pratiques d'utilisation de cette modélisation sur des exemples business.

Première partie

Chapitre introductif

1 La réassurance

1.1 Principes de la réassurance

1.1.1 Définition

La réassurance est définie comme « l'assurance des sociétés d'assurance ». A ce titre, un réassureur n'est pas en contact direct avec l'assuré final mais intervient auprès des organismes d'assurance souhaitant céder tout ou partie d'un risque sur un portefeuille d'assurés.

Dans une opération de réassurance, on appelle « cédante », la société qui cède son risque.

Un réassureur peut lui aussi choisir de transférer une partie du risque qu'il réassure dans une opération dite de « rétrocession » ([3]). Les rétrocessionnaires sont principalement d'autres réassureurs de taille plus importante ou des fonds de pension.

Ces opérations sont résumées sur la figure 1.

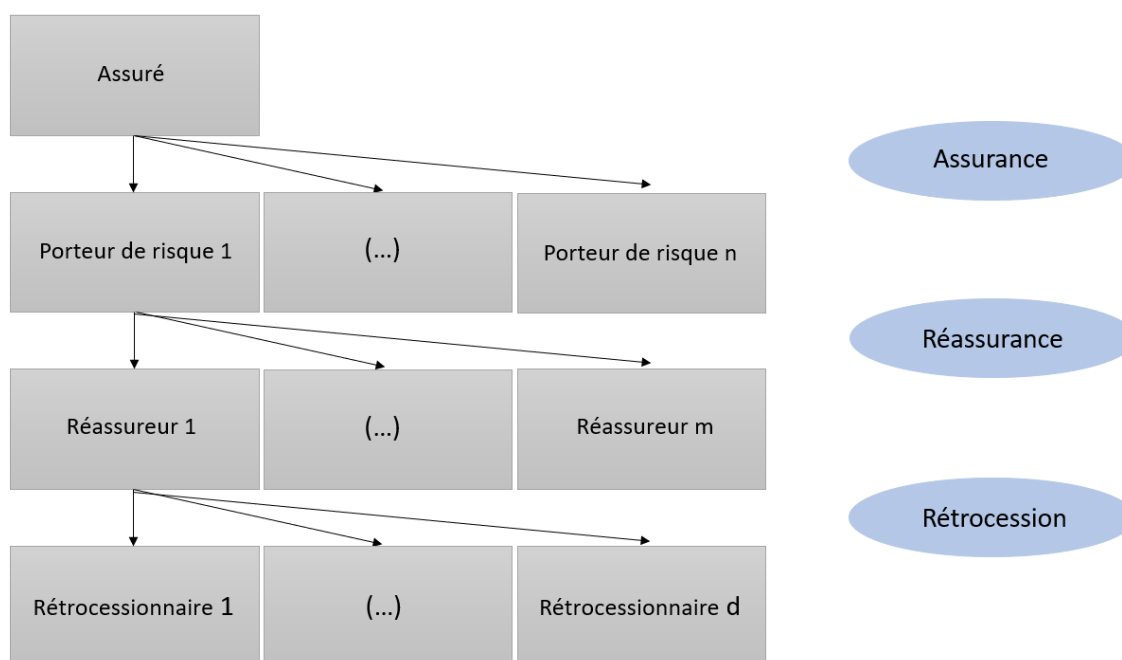


FIGURE 1 – Schéma des opérations d'assurance

La plupart des traités de réassurance portent sur une année et seuls les sinistres ayant lieu durant la période de couverture concernent le traité. Cette période peut aussi être étendue à une génération avec un engagement jusqu'à expiration naturelle des polices. Dans ce cas, c'est la date d'adhésion qui fait foi.

1.1.2 Objectifs de la réassurance

Les objectifs principaux de la réassurance pour la cédante sont les suivants ([4]) :

- Absorber les fluctuations annuelles des résultats en lissant les écarts statistiques de la sinistralité d'un portefeuille
- Se couvrir en cas de catastrophe et donc réduire la probabilité de ruine
- Augmenter sa capacité de souscription en compensant un manque de fonds propres
- Augmenter les fonds propres disponibles (et donc améliorer sa solvabilité) en libérant les fonds propres affectés à la couverture du risque cédé

- Bénéficier d'un effet de diversification (Solvabilité 2)

Le réassureur peut également proposer divers services faisant appel à ses connaissances sur la modélisation actuarielle comme par exemple la tarification de produits d'assurance complexes ou encore l'analyse actuarielle de risques exceptionnels. En effet, étant présent sur une grande partie des risques assurables à travers le monde, il possède des informations et des expertises sur les différents produits qu'il peut mettre à disposition de ses clients.

1.1.3 Les types de réassurance

Par le biais des opérations de réassurance facultative, les sociétés d'assurance peuvent transférer des risques de pointe. Par ailleurs, elles ont également la possibilité de céder le risque associé à un portefeuille entier de polices d'assurance en optant pour une couverture par un traité de réassurance (obligatoire).

Il existe un autre type de réassurance assez peu répandu : la réassurance dite « facultative obligatoire », dans laquelle l'assureur choisit les risques d'un portefeuille qu'il souhaite transférer au réassureur. Le réassureur est alors tenu d'accepter ces risques, au contraire de la réassurance facultative.

1.1.4 Conséquence pour le réassureur

Le réassureur intervient sur une multitude de risques hétérogènes (risques de pointe, complexes ou de fluctuation). Structurer son portefeuille afin de mutualiser les risques et réaliser un bénéfice consiste en un équilibrage Vie, Non vie et géographique pour certains risques catastrophes. Une autre possibilité est de transférer les risques qui excèdent sa capacité en effectuant des opérations de récession (figure 1).

1.2 Les schémas de réassurance

1.2.1 La réassurance proportionnelle

Dans ce type de traité, les primes et les sinistres sont répartis entre l'assureur et le réassureur selon un ratio défini de manière contractuelle. La cession est basée sur le risque.

Traité en Quote Part

Dans la réassurance en Quote Part (QP), le réassureur perçoit un taux de cession fixe $\alpha\%$ des primes des branches visées dans le traité en échange de la couverture de $\alpha\%$ des sinistres ayant lieu sur la période de survenance du traité. Ce taux de cession est fixé à la signature du traité. Ainsi, dans ce type de contrat, le sort de la cédante et du réassureur sont très liés.

Ces traités sont particulièrement utiles lors du lancement d'un nouveau produit sur lequel l'expérience sur les sinistres est limitée. Pour les autres produits d'assurance, ces traités permettent de réduire le risque de modification structurelle de la sinistralité sur la totalité d'un portefeuille.

Un taux de cession élevé traduit un manque d'expérience du risque assuré de la cédante.

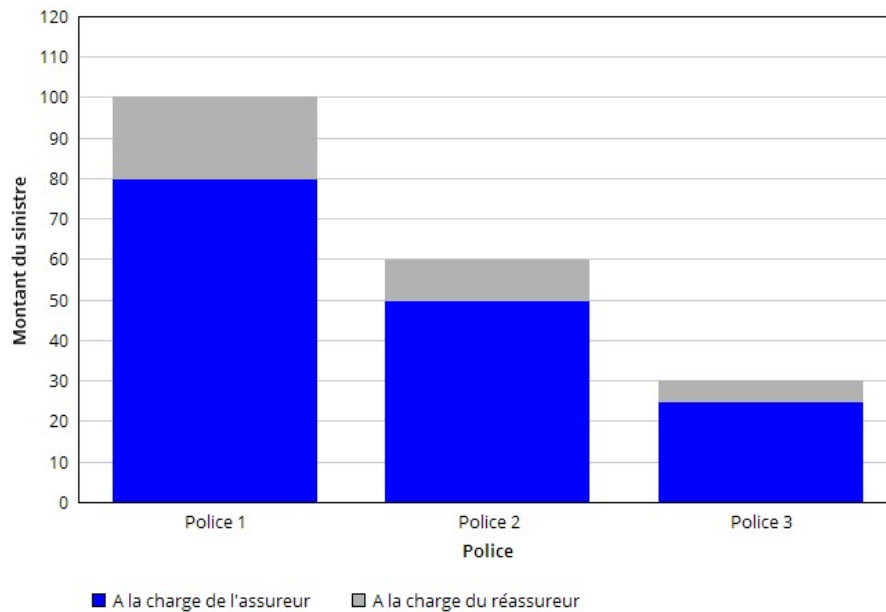


FIGURE 2 – Répartition de la charge de sinistres d'une QP 20%

Traité en Excédent de Plein

Dans un traité de réassurance en excédent de plein, le réassureur n'est pas exposé à l'ensemble des risques du portefeuille à l'inverse de la Quote Part. En effet, un plein de rétention est calculé pour chaque police. Il correspond au montant maximum que la cédante est prête à payer par sinistre. C'est aussi un traité proportionnel, car les primes et les sinistres sont partagés selon un taux de cession calculé à l'avance et différent pour chaque police.

En effet si le plein de rétention est fixé à R , la capacité du réassureur à C et que le montant de capital assuré pour le risque i est fixé à K_i , on définit alors le taux de cession α_i de la police par l'expression suivante :

$$\alpha_i = \max\left(\frac{\max(K_i; C) - R}{K_i}; 0\right) = \left(\frac{\max(K_i; C) - R}{K_i}\right)^+$$

En cas de sinistre, la répartition de la charge de sinistre entre l'assureur (ASS) et le réassureur (REASS) s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_i^{ASS} = \min(S_i; R) + \max(S_i - C; 0) \\ S_i^{REASS} = [\max(S_i; C) - R]^+ \end{cases}$$

Cette structure de réassurance est utilisée par l'assureur pour garder une plus grande partie des primes que sur un schéma en Quote Part puisque la cédante conserve l'intégralité du risque et donc de la prime si le montant du capital assuré est inférieur au plein de rétention. L'excédent de plein permet également d'augmenter la capacité de souscription afin de développer l'activité de la compagnie, tout en limitant la perte importante de primes de la Quote Part.

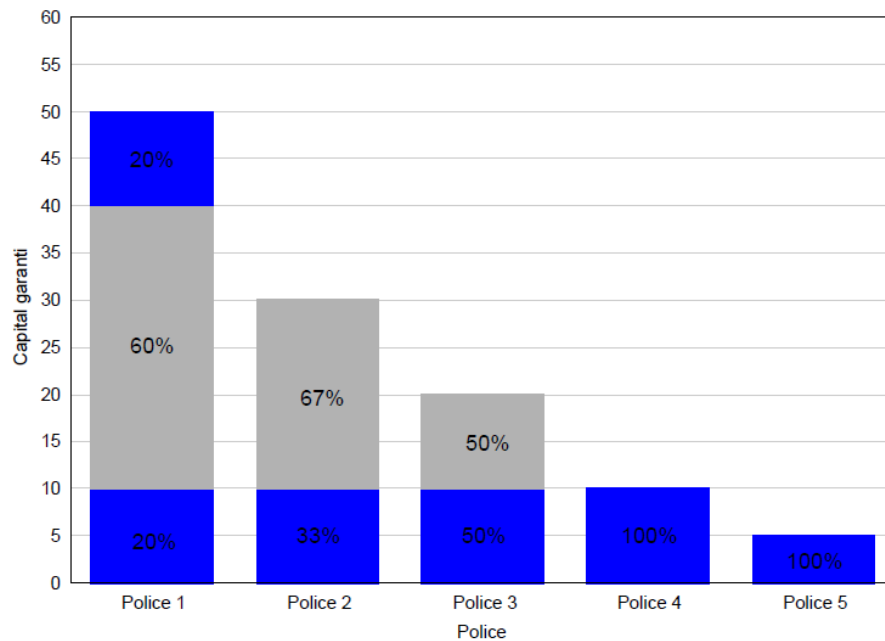


FIGURE 3 – Taux de cession d'un excédent de plein ($R = 10$ et $C = 30$) en fonction du capital assuré

1.2.2 La réassurance non proportionnelle

Dans ce type de traité, il n'existe pas de ratio de partage des primes et des sinistres défini contractuellement. La cession est basée sur le sinistre. Comme l'indique son nom, le partage du sort est asymétrique entre les parties : le réassureur intervient lorsque les sinistres individuels ou agrégés dépassent un seuil appelé priorité (qui peut être défini par tête ou par évènement). Le réassureur va alors prendre en charge le surplus de sinistralité jusqu'à ce que sa charge de sinistres atteigne un second seuil appelé portée.

Le coût de la réassurance est estimé par le réassureur en fonction de la sinistralité observée au cours des dernières années (tarification par expérience ou sinistralité) et de la charge de sinistres attendue à cause de la composition des risques couverts (tarification par exposition). Le réassureur demande alors à la cédante le versement d'une prime de réassurance à la signature du traité.

Ces traités sont généralement utilisés pour protéger l'assureur contre la survenance de sinistre de forte intensité.

Traité en Excédent de Sinistre

Les traités de réassurance en Excédent de Sinistre ou XS se composent de deux catégories :

- Excédent de risque par risque/tête
- Excédent de risque par évènement

Excédent de sinistre par risque :

Dans ce type de schéma, le réassureur prend en charge pour chaque police d'assurance le montant de sinistre dépassant la priorité (PRIO) du traité. La couverture n'est pas illimitée car elle s'arrête à un montant maximum appelé portée (POR). En cas de sinistre S , le réassureur paie la somme suivante :

$$\min(\max((S - \text{PRIO}); 0); \text{POR})$$

Ces deux paramètres (priorité et portée) sont définis contractuellement et sont uniques pour l'ensemble des polices concernées par le traité.

Excédent de sinistre par évènement :

A la différence du précédent, dans ce type de traité, le réassureur intervient uniquement si le sinistre est associé à un évènement. Un évènement étant caractérisé par une sinistralité portant à minima sur plusieurs têtes : on parle de « nombre de tête dans la franchise ». La couverture entre en vigueur dès lors que la franchise est dépassée.

Ce type de traité est largement utilisé pour couvrir les risques catastrophes de type évènement météorologique extrême, nucléaire ou terroriste.

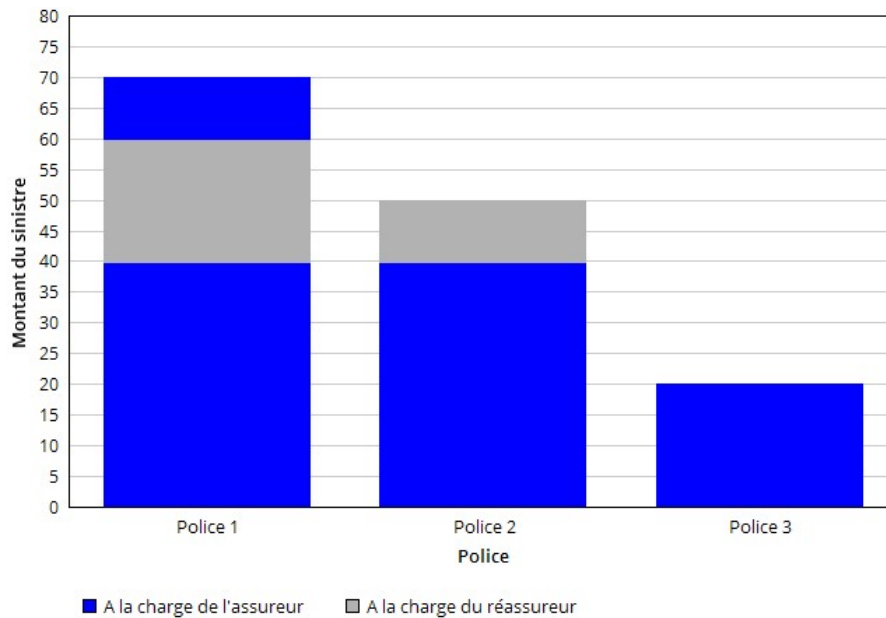


FIGURE 4 – Répartition de la charge de sinistres d'un 20 XS 40

Traité en Excédent de Perte annuelle ou *Stop Loss*

Ce type de traité est identique au fonctionnement de l'XS par tête à la différence que la priorité et la portée sont appliquées à l'ensemble du portefeuille : les deux paramètres sont définis en fonction du rapport sinistres sur primes (S/P) de la cédante appelé *Loss Ratio*.

La priorité et la portée apparaissent alors sous la forme d'un pourcentage de ce *Loss Ratio*.

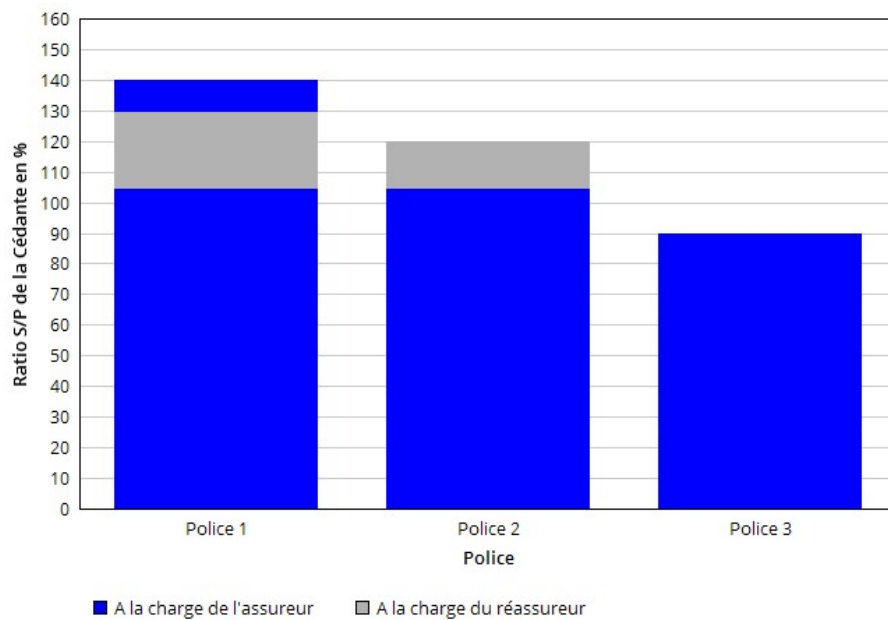


FIGURE 5 – Répartition de la charge de sinistres d'un *Stop Loss* 105 SL 130

1.2.3 Combinaison de réassurances

En pratique, certains contrats font appel à différents schémas de réassurance sur un même portefeuille. En effet, combiner un XS avec une QP peut permettre à la cédante de se couvrir à la fois contre un risque de modification structurelle de la sinistralité et aussi contre des « accidents de sinistralité » de ses assurés.

L'XS intervient sur la conservation de la cédante dans la QP comme illustré sur la figure 6.

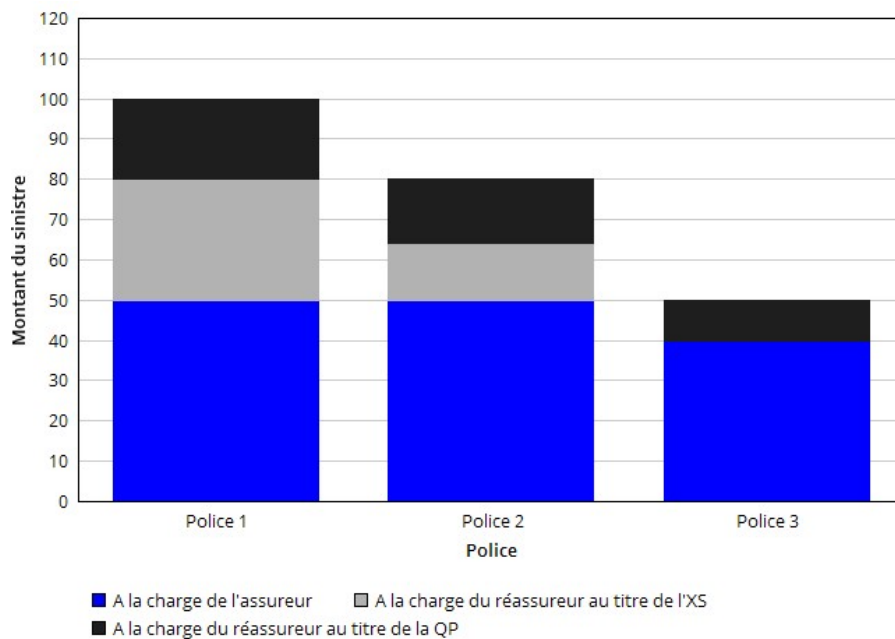


FIGURE 6 – Répartition de la charge de sinistres d'une combinaison d'une QP 20% et d'un 30 XS 50

1.3 Les clauses de réassurance

Dans cette partie, quelques clauses classiques des traités de réassurance seront abordées. Nous mettrons l'accent sur la clause de participation aux bénéfiques (PB) qui est le sujet de ce mémoire.

1.3.1 *Annual Aggregate Deductible et Annual Aggregate Limit*

Ces clauses sont appliquées par traité, sur l'engagement annuel total du réassureur. En pratique, elles sont utilisées pour minimiser le risque du réassureur et réduire le tarif d'une réassurance non proportionnelle.

Annual Aggregate Deductible (AAD)

Cette clause fixe une franchise sur l'engagement annuel total du réassureur. Ainsi, tous les sinistres restent à la charge de l'assureur jusqu'à ce que l'engagement du réassureur dépasse la valeur de l'AAD.

La charge de sinistres du réassureur est définie de la façon suivante :

$$S^{REASS} = \left[\left(\sum_i \min((S_i - PRIO)^+; POR) \right) - AAD \right]^+$$

Annual Aggregate Limit (AAL)

Cette clause a pour but de limiter l'engagement annuel total du réassureur à la valeur de l'AAL. Elle permet au réassureur de limiter sa couverture et de se prémunir contre le risque de ruine en lui évitant d'avoir un engagement potentiellement infini.

La charge de sinistres du réassureur est définie de la façon suivante :

$$S^{REASS} = \min \left(\sum_i \min((S_i - PRIO)^+; POR); AAL \right)$$

1.3.2 Reconstitution de garantie

Dans le cadre d'un traité XS, si le montant d'un sinistre dépasse la somme $PRIO + POR$, nous parlons d'absorption de la portée. Dans ce cas, la partie restante du sinistre ($S - (PRIO + POR)$) revient à la charge de la cédante.

Afin de bénéficier d'une couverture supplémentaire en cas de survenance d'un tel évènement, la cédante peut demander d'inclure une clause de reconstitution de garantie (éventuellement illimitée) dans le traité ([5]). Cette clause fonctionne de la manière suivante : si la cédante demande n reconstitutions alors le réassureur paiera jusque $n + 1$ fois la portée.

La reconstitution de garantie nécessite en contrepartie le paiement d'une prime additionnelle représentant un pourcentage de la prime de réassurance au prorata des capitaux absorbés et ou de la durée restant à couvrir.

1.3.3 Clause de stabilité

La clause de stabilité est utilisée pour prendre en compte l'inflation dans le calcul du développement d'un sinistre sur plusieurs années. En effet, si un sinistre se développe sur une longue durée, l'inflation peut accélérer le passage du seuil de la priorité et donc engager le réassureur.

Pour s'en prémunir, le réassureur peut demander d'inclure une clause de stabilité dans le traité. Actuellement, sur le marché français, tous les traités XS de la branche Responsabilité Civile (RC) incluent cette clause puisque les sinistres de cette branche possèdent souvent une longue période de développement.

1.3.4 La participation aux bénéfices

Un traité de réassurance peut prévoir une clause permettant une restitution partielle à la cédante des profits réalisés par le réassureur sur le traité. Cette clause appelée « clause de participation aux bénéfices », instaure la tenue d'un compte de résultat intermédiaire, appelé « compte de participation aux bénéfices ». Le montant de la participation aux bénéfices est calculé par application du taux de participation aux bénéfices, défini contractuellement, sur le résultat de ce compte intermédiaire.

Cas sur un exercice comptable

Le compte de PB

Nous utiliserons dans ce mémoire les notations définies par R.Ionescu dans son mémoire [1] :

- PP : prime pure unique versée par la cédante au réassureur
- S : sinistralité globale à la charge du réassureur
- t^{PB} : taux de participation aux bénéfices
- f^{PB} : frais (en taux) du réassureur négociés contractuellement
- PB : montant de participation aux bénéfices reversé par le réassureur à la cédante
- R^{PB} : résultat du compte de PB

Compte de PB	
S $f^{PB} \times PP$	PP

Le résultat du compte de PB s'écrit :

$$R^{PB} = PP - S - f^{PB} \cdot PP$$

Ainsi la cédante recevra de la part du réassureur le montant suivant au titre de la participation aux bénéfices :

$$PB = t^{PB} \times \max(R^{PB}; 0)$$

Cas sur plusieurs exercices comptables : PB versée annuellement

Dans la réalité, tous les contrats d'assurance et les traités de réassurance bien que renouvelés annuellement, impliquent une exposition pluri-annuelle. Il est alors logique de s'intéresser au cas où la PB est versée annuellement sur la période de couverture du traité.

La clause de participation aux bénéfices permet à la cédante de récupérer une partie des profits techniques réalisés par le réassureur. Afin de limiter l'impact de cette clause sur ses résultats pour les années futures, le réassureur peut demander d'introduire un report de pertes. Cette option permet de reporter le résultat négatif du compte de PB d'une année à la suivante. Elle est classique dans les traités possédant une clause de PB car elle permet au réassureur d'éviter de subir seul les mauvais résultats techniques du compte de PB alors qu'il doit systématiquement partager ses bénéfices.

Ce cas sera développé dans la suite du mémoire.

Nous nous plaçons dans le cas d'un traité démarrant le 1 janvier de l'année 1.

Sans report de pertes :

Nous reprenons les notations supplémentaires introduites par R.Ionescu dans son mémoire [1] :

- S_k : charge de sinistres globale du réassureur sur l'année k
- PM_k : provisions mathématiques constituées au 01/01/ k
- R_k^{PB} : résultat du compte de PB au 31/12/ k
- r : taux d'intérêt constant

Le compte de PB s'écrit de la façon suivante avec $k \geq 2$:

Compte de PB au 31/12/1	Compte de PB au 31/12/ k
S_1	S_k
$f^{PB} \times PP$	PM_{k-1}
PM_1	$r \times PM_{k-1}$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} R_1^{PB} = PP - S_1 - f^{PB} \times PP - PM_1 \\ R_k^{PB} = PM_{k-1} \times (1+r) - S_k - PM_k \end{cases}$$

Et nous avons encore :

$$PB_k = t^{PB} \times \max(R_k^{PB}; 0)$$

Avec report de pertes :

Le compte de PB s'écrit de la façon suivante avec $k \geq 2$:

Compte de PB au 31/12/1	Compte de PB au 31/12/ k
S_1	S_k
$f^{PB} \times PP$	PM_{k-1}
PM_1	$r \times PM_{k-1}$
	$-\min(R_{k-1}^{PB}, 0)$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} R_1^{PB} = PP - S_1 - f^{PB} \times PP - PM_1 \\ R_k^{PB} = PM_{k-1} \times (1+r) - S_k - PM_k + \min(R_{k-1}^{PB}, 0) \end{cases}$$

Et nous avons toujours :

$$PB_k = t^{PB} \times \max(R_k^{PB}; 0)$$

Une Provision Technique Spéciale (PTS) peut être prévue avant la détermination de la PB pour contenir les pertes. La PTS est gérée et capitalisée par la cédante à un taux défini à la signature du traité. Elle est alimentée chaque année par un pourcentage fixé du résultat et permet d'absorber les pertes en cas de résultat déficitaire du compte de PB.

Les deux cas possibles sont :

- Le résultat technique de l'année est positif : la PTS est augmentée d'une partie du résultat technique jusqu'à ce qu'elle atteigne un certain seuil. Le surplus restant au delà du seuil est partagé entre la cédante et le réassureur en appliquant le taux de PB
- Le résultat technique est négatif : le déficit est puisé dans la PTS afin de rééquilibrer le résultat à une valeur nulle.

2 Les risques décès et arrêt de travail

2.1 Le risque décès

Le risque décès peut comporter plusieurs garanties :

- Capital garanti en cas de décès (accident, double effet, frais d'obsèques)
- Rente conjoint
- Rente éducation

Une sélection médicale est classiquement effectuée pour la signature d'un contrat d'assurance ayant une garantie en cas de décès sauf dans le cas des contrats collectifs.

2.2 Le risque arrêt de travail

Le risque arrêt de travail se décline sous deux formes ([6]) :

- l'incapacité temporaire de travail (ITT)
- l'incapacité permanente de travail (IPT) ou invalidité

Ces deux risques sont associés à une perte de rémunération par incapacité à exercer une ou sa profession.

L'ITT a une durée maximale de 36 mois. Au delà, l'assuré est considéré en incapacité permanente de travail (IPT) : la consolidation de l'arrêt de travail est actée par le médecin.

Les différents passages d'états d'un assuré en arrêt de travail sont résumés dans la figure 7.

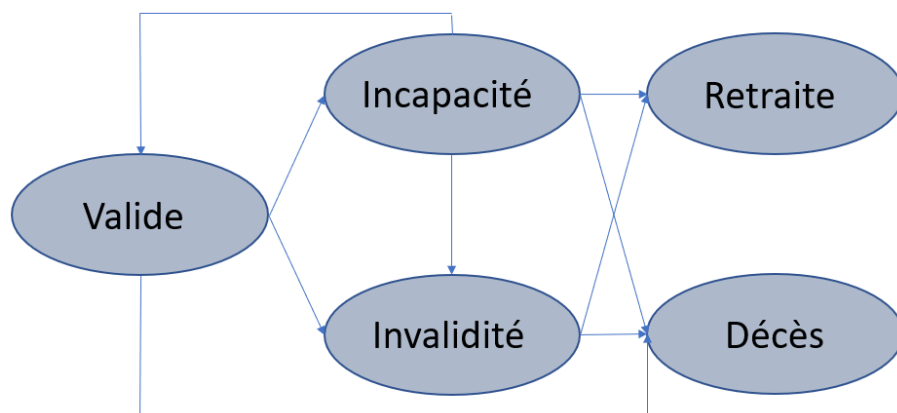


FIGURE 7 – États d'un assuré en arrêt de travail

2.3 L'incapacité temporaire de travail

2.3.1 Définition

L'incapacité temporaire de travail correspond à la période pendant laquelle une personne malade, hospitalisée ou victime d'un accident est dans l'incapacité d'exercer sa profession. Cette incapacité est temporaire et nécessite d'être constatée par un médecin. Elle est à l'origine d'une perte de revenus pour le travailleur.

2.3.2 Les prestations en cas d'incapacité temporaire

La perte de revenus générée par l'incapacité temporaire de travail peut être compensée par un régime de base et des régimes complémentaires (figure 8).

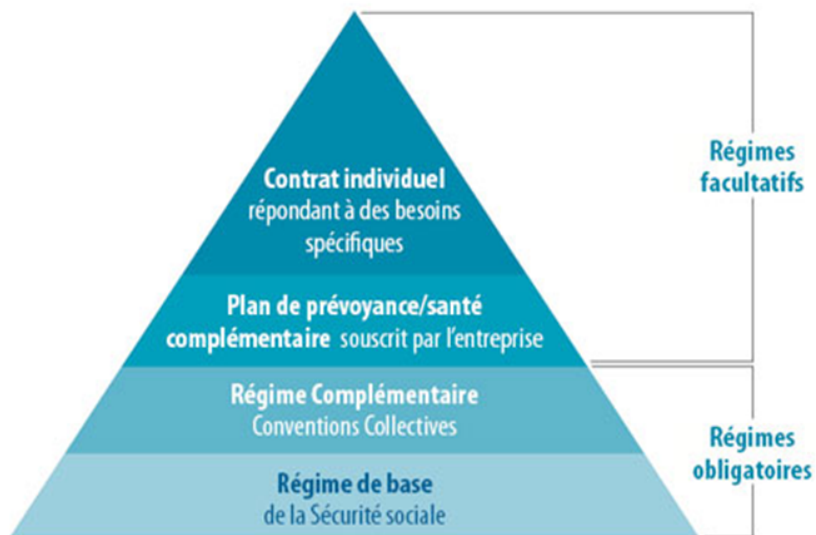


FIGURE 8 – Pyramide représentant l'ordre des prestations perçues en cas d'arrêt de travail

Prestations de la Sécurité Sociale (régime obligatoire)

Selon son régime, le travailleur bénéficie de différentes prestations de l'Assurance Maladie (Sécurité Sociale) en cas d'ITT. Par exemple en ce qui concerne les ITT pour maladie ordinaire ou accident non professionnel :

- l'Assurance Maladie indemnise un salarié du privé à hauteur de 50% de son salaire dans la limite de 1,8 fois le Smic mensuel (soit 2798,24€) pendant une durée maximale de 1 an après d'un délai de carence de 3 jours ([7])
- L'indemnisation des fonctionnaires est fixée quant à elle à 100% du salaire pendant 3 mois, puis 50% de son salaire pendant au maximum 9 mois supplémentaires
- Les Travailleurs Non Salariés (TNS) bénéficient généralement d'une couverture moindre par rapport au régime précédent. Selon leur profession, les TNS relèvent en effet de différentes caisses appliquant souvent un délai de carence très élevé et une durée d'indemnisation moindre.

L'indemnisation par le régime de prévoyance collective

La loi impose aux entreprises d'une certaine taille, d'inscrire les salariés sur un régime de prévoyance collective (Conventions Collectives) afin de garantir un complément de salaire en plus de l'indemnisation de l'Assurance Maladie en cas d'arrêt de travail. Ce complément de salaire dépend de l'ancienneté du salarié dans l'entreprise.

L'indemnisation par l'employeur

En l'absence de Convention Collective plus favorable, l'employeur est contraint par la loi de compléter la couverture de la Sécurité sociale. En cas d'absence pour maladie ou accident, ce complément doit permettre au salarié d'atteindre, en tenant compte des indemnités journalières de la Sécurité sociale ([8]) :

- 90% de sa rémunération pendant les 30 premiers jours
- deux tiers de cette même rémunération pendant les 30 jours suivants

Les durées d'indemnisation sont augmentées de 10 jours par période entière de 5 ans d'ancienneté en plus de la durée d'une année requise pour pouvoir prétendre à cette indemnisation complémentaire, sans que chacune d'elle puisse dépasser 90 jours.

L'indemnisation par le régime de prévoyance individuelle

Tous les travailleurs ont la possibilité de souscrire à des contrats d'assurance individuels afin de compléter leur salaire si celui-ci n'est pas entièrement pris en charge par leur régime social et/ou leur employeur en cas d'arrêt de travail.

2.4 L'incapacité permanente de travail ou invalidité

2.4.1 Définitions

Définition de l'Assurance Maladie

Selon l'Assurance Maladie, une personne est reconnue comme invalide si sa « capacité de travail et de gain est réduite d'au moins deux tiers à la suite d'une maladie ou d'un accident ». Cela signifie que la personne n'est pas en mesure de toucher un salaire supérieur à 33% de la rémunération standard des travailleurs de sa catégorie et exerçant dans sa région.

L'Assurance Maladie distingue 3 catégories d'invalidité :

- Catégorie 1 : Invalide capable d'exercer une activité rémunérée
- Catégorie 2 : Invalide absolument incapable d'exercer une profession quelconque
- Catégorie 3 : Invalide qui, étant absolument incapable d'exercer une profession, est, en plus, dans l'obligation d'avoir recours à l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie quotidienne

Le médecin-conseil de la caisse primaire d'assurance maladie (CPAM) détermine la catégorie d'invalidité.

Autre définition pour les contrats d'assurance

Les assureurs préfèrent distinguer le statut d'invalide en différents niveaux avec une classification autre que celle de l'Assurance Maladie. En effet, ils utilisent un taux d'invalidité calculé à partir de la combinaison d'un taux d'invalidité fonctionnelle et d'un taux d'incapacité professionnelle. On parle de barème croisé.

		Invalidité Fonctionnelle										
		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Invalidité professionnelle	0%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	10%	0,00%	10,00%	15,87%	20,80%	25,20%	29,24%	33,02%	36,59%	40,00%	43,27%	46,42%
	20%	0,00%	12,60%	20,00%	26,21%	31,75%	36,84%	41,60%	46,10%	50,40%	54,51%	58,48%
	30%	0,00%	14,42%	22,89%	30,00%	36,34%	42,17%	47,62%	52,78%	57,69%	62,40%	66,94%
	40%	0,00%	15,87%	25,20%	33,02%	40,00%	46,42%	52,41%	58,09%	63,50%	68,68%	73,68%
	50%	0,00%	17,10%	27,14%	35,57%	43,09%	50,00%	56,46%	62,57%	68,40%	73,99%	79,37%
	60%	0,00%	18,17%	28,84%	37,80%	45,79%	53,13%	60,00%	66,49%	72,68%	78,62%	84,34%
	70%	0,00%	19,13%	30,37%	39,79%	48,20%	55,93%	63,16%	70,00%	76,52%	82,77%	88,79%
	80%	0,00%	20,00%	31,75%	41,60%	50,40%	58,48%	66,04%	73,19%	80,00%	86,53%	92,83%
	90%	0,00%	20,80%	33,02%	43,27%	52,41%	60,82%	68,68%	76,12%	83,20%	90,00%	96,55%
100%	0,00%	21,54%	34,20%	44,81%	54,29%	63,00%	71,14%	78,84%	86,18%	93,22%	100,00%	

FIGURE 9 – Exemple de barème de calcul du taux d'invalidité

Le taux d'invalidité est obtenu par la formule suivante :

$$Taux = \sqrt[3]{(Invalidité\ fonctionnelle)^2 \times Invalidité\ professionnelle}$$

2.4.2 Les prestations en cas d'invalidité

Le statut d'invalidé donne lieu à diverses prestations, souvent sous forme de rente (ou pension), jusqu'à l'âge de départ à la retraite.

Les prestations de la Sécurité sociale

La rente versée par la Sécurité Sociale est calculée sur la base d'un salaire annuel moyen. Elle est obtenue à partir des 10 meilleures années de salaire (salaires soumis à cotisations dans la limite du plafond annuel de la Sécurité Sociale, soit 41 136 € par an en 2021). La rente est calculée en tenant compte de la catégorie d'invalidité, dans les conditions suivantes :

- 1^{ère} catégorie : 30% du salaire moyen avec un montant mensuel minimum de 293,96 € et maximum de 1 028,40 €
- 2^{ème} catégorie : 50% du salaire moyen avec un montant mensuel minimum de 293,96 € et maximum de 1 714,00 €
- 3^{ème} catégorie : 50% du salaire moyen auquel s'ajoute une majoration pour le besoin de l'assistance d'une tierce personne avec un montant mensuel minimum de 1 419,26 € (293,96 € + 1 126,41 €) et maximum de 2 839,29 € (1 714,00 € + 1 126,41 €)

Le régime de la Sécurité Sociale prévoit une prise en charge de l'invalidité à partir d'un certain taux d'invalidité, cependant les prestations versées sont limitées et la rente peut ne pas compenser la perte de revenus subie par le salarié.

Les prestations du contrat de prévoyance collective

Le contrat de prévoyance collective a pour but de compléter le salaire net par le versement d'une rente qui sera revalorisée jusqu'à l'âge de la retraite. Selon les contrats, cette rente compensera totalement ou partiellement la perte de revenus réelle.

Les prestations du contrat de prévoyance individuelle

Tous les travailleurs ont la possibilité de souscrire à des contrats d'assurance individuelle afin de compléter leur salaire si celui-ci n'est pas entièrement pris en charge par leur régime social et/ou leur employeur en cas d'invalidité. Ce complément est limité par leur salaire, au cumul des différents régimes.

2.5 Les produits TNS en cas d'arrêt de travail

Les TNS regroupent à la fois les artisans, les commerçants, les agriculteurs et les professions libérales, médicales et paramédicales. Ils représentent 3 062 100 personnes en 2019 d'après l'INSEE.

En cas de maladie, d'accident ou de décès, les travailleurs indépendants et leur famille sont moins bien protégés que les salariés. La différence de traitement entre les TNS et les salariés notamment due aux différences d'indemnisation des régimes de base conduit les TNS à souscrire des régimes complémentaires.

Aujourd'hui, seule la moitié des caisses verse des indemnités en cas d'ITT au sein des professions libérales et en appliquant un délai de carence de 90 jours.

La crise sanitaire a mis en lumière cette carence de couverture puisque l'Etat a dû verser des indemnités à titre exceptionnel financées par l'Assurance Maladie. Ainsi, la loi de Financement de la SS pour 2021 a défini un dispositif prévoyant le versement d'indemnités journalières (IJ) en cas d'arrêt de travail à tous les affiliés à la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse des Professions Libérales (CNAVPL) dès le 1^{er} juillet 2021 ([9]). Ces IJ seront percevables après seulement 3 jours de délai de carence et jusqu'au 91^{ème} jour. Le montant de ces IJ représente 1/730^e du revenu annuel avec un plafond à 169€ (3 PASS) et un plancher à 22€ (40% du PASS)

En contrepartie de cette indemnisation en cas d'arrêt de travail, les affiliés à la CNAVPL se verront demander une cotisation supplémentaire. Cette cotisation représente 0,30% des Bénéfices Non commerciaux calculés sur une assiette minimale de 40% du PASS et maximale de 3 PASS.

Pour les TNS n'exerçant pas une profession libérale, le traitement est différent. L'indemnisation journalière est fixée à 1/730^{ème} du revenu annuel après un délai de carence de 7 jours (3 en cas d'hospitalisation) et pendant une période maximale de 1 an.

Afin d'assurer un maintien de revenu en cas d'arrêt de travail, les TNS souscrivent à des contrats de prévoyance individuelle TNS à condition d'être à jour dans le versement des cotisations au régime obligatoire.

2.5.1 Les produits de prévoyance individuelle TNS

Un contrat d'assurance prévoyance TNS permet à l'assuré de protéger sa famille en cas de décès et de maintenir ses revenus en cas d'arrêt de travail.

Les garanties que peuvent comporter un contrat prévoyance TNS sont :

- Garantie Décès (accident, double effet, rente éducation et rente conjoint)
- Invalidité
- Incapacité temporaire de travail

Particularités des contrats TNS

Les contrats TNS ne sont en général pas forfaitaires en raison de la difficulté à respecter le principe de non enrichissement. Ces contrats sont donc la plupart du temps indemnitaires avec un choix de la franchise et de l'IJ adapté au chiffre d'affaires.

Ensuite, l'âge de liquidation de la retraite pouvant être plus élevé que celui du régime de base, le contrat définit un âge maximum de versement des prestations.

2.5.2 Autre particularité : les contrats prévoyance "Madelin"

Les Travailleurs non salariés non agricoles ont la possibilité de souscrire à un contrat prévoyance « Madelin », depuis la loi n° 94-126 du 11 février 1994.

L'avantage des contrats Madelin est d'ordre fiscal. En effet, un TNS détenant un contrat prévoyance Madelin peut déduire de son chiffre d'affaires toutes les cotisations versées au titre de ce contrat. Ces déductions sont effectives uniquement si la sortie du contrat est en rente.

En contrepartie de cette déductibilité, les indemnités journalières en cas d'arrêt de travail sont à réintégrer dans le revenu professionnel de l'année si l'activité professionnelle se poursuit. En cas d'arrêt de l'activité professionnelle, les indemnités journalières sont soumises à l'impôt sur le revenu.

Enfin, ces contrats peuvent être souscrits avec deux formes de cotisations :

- Le montant des cotisations est fonction de l'âge atteint de l'assuré et augmente chaque année ou par tranche de 5 ans (avantageux pour un assuré jeune mais peut engendrer des augmentations brutales).
- Le montant des cotisations est fixe sur toute la durée du contrat (permet de stabiliser les charges de l'assuré et peut être intéressant sur le long terme). On parle de contrat de type « âge à l'adhésion ». Cela suppose pour le porteur de risque de constituer une Provision pour Risques Croissants (PRC).

Ainsi, il est fréquent que les TNS souscrivent à des contrats individuels couvrant à la fois les garanties arrêt de travail et décès. Ces contrats peuvent faire l'objet d'une couverture en réassurance de type obligatoire (traité) combinant une QP et un XS sur la rétention de la QP. Le traité peut contenir une clause de participation aux bénéfices que le réassureur doit prendre en compte dans son étude de rentabilité. L'objectif de ce mémoire est donc de valoriser cette clause de PB pour garantir la rentabilité du réassureur sur le traité. Nous déterminons ensuite le taux de PB acceptable pour le réassureur en fonction des paramètres du traité dans différents cas pratiques.

Deuxième partie

Aspects méthodologiques

Nous nous plaçons sur un portefeuille de travailleurs non salariés couverts par un traité de réassurance pour les risques incapacité, invalidité et décès. Les caractéristiques de couverture sont :

- Durée du traité : 1 an.
- En cas de décès, un capital prédéfini est garanti
- En cas d'incapacité, un pourcentage du salaire est garanti
- En cas de passage en état d'invalidité, que l'on va considérer binaire dans l'étude, un pourcentage du salaire est garanti

Le traité prend effet le 01/01 de l'année 1.

La couverture en réassurance se constitue à la fois d'une Quote Part (QP) et d'un excédent de sinistre s'appliquant sur la rétention de la QP. La cédante verse au réassureur, en contrepartie de cette couverture, une prime unique de réassurance à la signature du traité. Les provisions mathématiques génèrent chaque année des revenus financiers certains à hauteur du taux technique associé à chaque garantie (arrêt de travail et décès) : le risque financier est exclu de l'étude.

L'engagement du réassureur porte sur les sinistres survenus sur une année et s'étend jusqu'à la clôture de ces sinistres. C'est-à-dire que l'assuré sort du portefeuille couvert par le traité dès qu'une des situations suivantes se produit à la fin d'une année (31/12) :

- L'assuré est valide
- L'assuré a atteint l'âge de la retraite
- L'assuré est décédé dans l'année

3 Chargement supplémentaire pour couvrir la clause de Participation aux Bénéfices

Cette section développe la méthode mise en oeuvre pour garantir la rentabilité du réassureur en présence d'une PB. Après avoir défini les notations utilisées, nous analysons les comportements du résultat du réassureur afin de démontrer la nécessité d'ajouter un chargement supplémentaire à la prime pure en cas de présence d'une clause de PB.

Nous cherchons ensuite à déterminer la valeur de ce chargement via un algorithme en l'isolant dans une équation fermée et démontrons l'unicité de la solution de cette équation en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

3.1 Notations

Ce mémoire se place à la suite de celui présenté par Razvan Ionescu. Par conséquent, nous allons reprendre certaines de ses notations pour plus de clarté et introduire de nouvelles variables :

- r^{DC} : taux technique Vie
- r^{AT} : taux technique Non Vie
- c : coûts réels du réassureur (charges salariales, locaux,...), à appliquer à la prime pure
- f^{PB} : frais du réassureur négociés dans la clause de PB, à appliquer à la prime pure
- t^{PB} : taux de participation aux bénéfices
- R_k^{DC} : résultat du réassureur pour l'année k sur la garantie décès (DC)
- R_k^{AT} : résultat du réassureur pour l'année k sur la garantie arrêt de travail (AT)
- $R_k^{PB,DC}$: résultat du compte de participation aux bénéfices pour l'année k sur la garantie DC

- $R_k^{PB,AT}$: résultat du compte de participation aux bénéfices pour l'année k sur la garantie AT
- S_k^{DC} : charge de sinistres globale du portefeuille pour l'année k sur la garantie DC
- S_k^{AT} : charge de sinistres globale du portefeuille pour l'année k sur la garantie AT
- $S_{REASS,k}^{DC}$: sinistralité du portefeuille à la charge du réassureur pour l'année k sur la garantie DC
- $S_{REASS,k}^{AT}$: sinistralité du portefeuille à la charge du réassureur pour l'année k sur la garantie AT
- PM_k^{DC} : provisions mathématiques du portefeuille en fin d'année k sur la garantie DC
- PM_k^{AT} : provisions mathématiques du portefeuille en fin d'année k sur la garantie AT
- $PP^{DC} = \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 1} \frac{S_{REASS,k}^{DC}}{(1+r^{DC})^k} \right]$: prime pure DC (vision réassureur)
- $PP^{AT} = \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 1} \frac{S_{REASS,k}^{AT}}{(1+r^{AT})^k} \right]$: prime pure AT (vision réassureur)
- $PP = PP^{AT} + PP^{DC}$: prime pure totale du traité
- $R_G = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{R_k^{AT}}{(1+r^{AT})^k} + \frac{R_k^{DC}}{(1+r^{DC})^k} \right)$: résultat global du traité pour le réassureur
- $\mathbb{E}[R_G]$: indicateur de résultat global
- α : chargement supplémentaire à appliquer à la prime pure afin de couvrir la clause de participation aux bénéfices.

Nous considérons deux taux techniques différents : r^{DC} et r^{AT} .

En effet, le décès, considéré comme un risque Vie, est actualisé avec le taux technique Vie noté ici r^{DC} . Au contraire, l'arrêt de travail, considéré comme un risque Non Vie, est actualisé avec le taux technique Non Vie noté ici r^{AT} .

3.2 Cas 1 : taux techniques égaux : $r^{DC} = r^{AT} = r$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de différencier les comptes de résultats relevant de l'arrêt de travail et du décès. La variable R_G se réécrit :

$$R_G = \sum_{k \geq 1} \frac{R_k}{(1+r)^k}$$

3.2.1 Résultats du réassureur

Nous avons vu dans le chapitre introductif que la présence d'une clause de PB impliquait l'établissement d'un compte de participation aux bénéfices. La participation aux bénéfices est ensuite versée en fonction de la valeur du solde de ce compte en fin d'année.

Résultats du compte de Participation aux Bénéfices :

Compte de PB au 31/12/1		Compte de PB au 31/12/k	
$f^{PB} \cdot PP(1+c+\alpha)$	$PP(1+c+\alpha)$	PM_k	PM_{k-1}
$r \cdot f^{PB} \cdot PP(1+c+\alpha)$	$r \cdot PP(1+c+\alpha)$	S_k	$r \times PM_{k-1}$
S_1			
PM_1			

$$\begin{cases} R_1^{PB} = PP(1+c+\alpha)(1+r) - f^{PB}PP(1+c+\alpha)(1+r) - S_1 - PM_1 \\ R_k^{PB} = PM_{k-1}(1+r) - S_k - PM_k \quad k \geq 2 \end{cases}$$

La participation aux bénéfices est ensuite calculée en appliquant le taux de participation aux bénéfices sur le résultat R_k^{PB} :

$$PB_k = t^{PB} \times \max(R_k^{PB}; 0)$$

Nous pouvons maintenant écrire les comptes de résultat du réassureur :

Résultats du Réassureur :

Compte au 31/12/1		Compte au 31/12/k	
$f \cdot PP(1+r)$	$PP(1+c+\alpha)$	PM_k	PM_{k-1}
S_1	$r \cdot PP(1+c+\alpha)$	S_k	$r \times PM_{k-1}$
PM_1		$t^{PB} \max(R_{k-1}^{PB}; 0)$	
$t^{PB} \max(R_1^{PB}, 0)$			

$$\begin{cases} R_1 = PP(1+c+\alpha)(1+r) - c \cdot PP(1+r) - S_1 - PM_1 - t^{PB} \max(R_1^{PB}, 0) \\ R_k = PM_{k-1}(1+r) - S_k - PM_k - t^{PB} \max(R_k^{PB}, 0) \quad k \geq 2 \end{cases}$$

L'objectif de ce mémoire est de déterminer, en fonction des différentes caractéristiques du traité de réassurance, le chargement supplémentaire α permettant d'avoir l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[R_G] = 0$$

3.2.2 Absence de la clause de participation aux bénéfices

Nous montrons dans cette section qu'en l'absence de la clause de participation aux bénéfices, nous avons :

$$\mathbb{E}[R_G] = 0$$

En effet, en l'absence de participation aux bénéfices et du chargement supplémentaire, les résultats du réassureur s'écrivent plus simplement :

$$\begin{cases} R_1 = PP(1+c)(1+r) - c \cdot PP(1+r) - S_1 - PM_1 \\ R_k = PM_{k-1}(1+r) - S_k - PM_k \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_G] &= \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[R_k]}{(1+r)^k} \\ &= \frac{1}{1+r} \times [PP(1+r) - \mathbb{E}[S_1] - \mathbb{E}[PM_1]] + \sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E}[PM_{k-1}](1+r) - \mathbb{E}[S_k] - \mathbb{E}[PM_k]}{(1+r)^k} \\ &= PP - \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[S_k]}{(1+r)^k} - \frac{\mathbb{E}[PM_1]}{1+r} + \sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E}[PM_{k-1}](1+r) - \mathbb{E}[PM_k]}{(1+r)^k} \end{aligned}$$

Or, avec les conventions définies précédemment $PM_0 = PM_N = 0$ et $PP = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \frac{S_k}{(1+r)^k} \right]$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_G] &= \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[S_k]}{(1+r)^k} - \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[S_k]}{(1+r)^k} - \frac{\mathbb{E}[PM_1]}{1+r} + \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[PM_{k-1}](1+r) - \mathbb{E}[PM_k]}{(1+r)^k} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[PM_{k-1}]}{(1+r)^{k-1}} - \frac{\mathbb{E}[PM_k]}{(1+r)^k} \\ &= \mathbb{E}[PM_0] - \frac{\mathbb{E}[PM_N]}{(1+r)^N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en l'absence de participation aux bénéfices, la somme des résultats futurs actualisés du réassureur est nulle en espérance. C'est-à-dire que la prime unique versée par la cédante à la signature du traité permet de couvrir, en espérance, les frais du réassureur et la sinistralité à sa charge.

3.2.3 Ajout de la clause de Participation au Bénéfices sans chargement supplémentaire

Dans cette section, nous montrons que $\mathbb{E}[R_G]$ est négative lorsqu'il n'y a pas de chargement supplémentaire. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_G] &= \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[R_k]}{(1+r)^k} \\ &= \frac{1}{1+r} \times [-\mathbb{E}[PM_1] - t^{PB} \mathbb{E}[\max(R_1^{PB}; 0)]] + \sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E}[PM_{k-1}](1+r) - \mathbb{E}[PM_k] - t^{PB} \mathbb{E}[\max(R_k^{PB}; 0)]]}{(1+r)^k} \\ &= -t^{PB} \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[\max(R_k^{PB}; 0)]]}{(1+r)^k} \end{aligned}$$

Or comme $\mathbb{E}[\max(R_k^{PB}; 0)] \geq 0$, nous obtenons, en l'absence de chargement supplémentaire :

$$\mathbb{E}[R_G] \leq 0$$

3.2.4 Équation vérifiée par le chargement supplémentaire

Dans cette partie, nous démontrons que pour remonter l'espérance du résultat global R_G du réassureur à une valeur nulle, il faut que le chargement supplémentaire α soit solution d'une certaine équation.

Nous cherchons à avoir $\mathbb{E}[R_G] = 0$ en présence d'une clause de participation aux bénéfices et d'un chargement supplémentaire α .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_G] &= \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[R_k]}{(1+r)^k} \\ 0 &= \alpha \cdot PP - t^{PB} \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[\max(R_k^{PB}; 0)]]}{(1+r)^k} \end{aligned}$$

Ainsi α doit être solution de l'équation suivante :

$$\alpha = t^{PB} \left(\frac{1}{1+r} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_1^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] + \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] \right)$$

Soit

$$\alpha = t^{PB} \left(\mathbb{E} \left[(1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{S_1}{PP} + \frac{PM_1}{PP} \right) \right]^+ + \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] \right) \quad (1)$$

3.2.5 Résolution de l'équation

Existence et unicité

Nous allons prouver l'existence et l'unicité de la solution α de l'équation précédente. Cette démonstration sera menée dans un cas sans report de pertes.

Dans le cas sans report de pertes, toutes les grandeurs $\mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right]$ sont indépendantes de α donc nous posons :

$$A = t^{PB} \cdot \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right]$$

Et nous obtenons :

$$\alpha = t^{PB} \left(\mathbb{E} \left[(1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r} \left(\frac{S_1}{PP} + \frac{PM_1}{PP} \right) \right]^+ \right) + A$$

En définissant maintenant la fonction H comme ceci :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto t^{PB} \left(\mathbb{E} \left[(1+c+x)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r} \left(\frac{S_1}{PP} + \frac{PM_1}{PP} \right) \right]^+ \right) + A \end{aligned}$$

Nous obtenons alors que α est solution de l'équation suivante :

$$\alpha = H(\alpha)$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème du point fixe de Banach ([10]) afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1).

Théorème du point fixe de Banach

Nous rappelons tout d'abord que x est un point fixe de f si $f(x) = x$

Application k -lipschitzienne : Soient E et F deux espaces métriques. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite k -lipschitzienne s'il existe une constante k telle que pour tout couple (x, y) de points de $E \times E$ on ait l'inégalité suivante :

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Application contractante : Avec les hypothèses précédentes on dit que l'application f est contractante si f est k -lipschitzienne avec une constante $k < 1$.

Énoncé du théorème : Soit E un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante, alors il existe un unique point fixe $x \in E$.

Si x_0 est un point quelconque de E et si on pose pour tout entier n , $x_n = f(x_{n-1})$, alors la suite récurrente (x_n) est une suite de Cauchy convergente et sa limite est l'unique point fixe x de f .

Application du théorème

Montrons que la fonction H est contractante :

Soit X une variable aléatoire positive.

Nous définissons la fonction $G_X(y)$ par

$$G_X(y) = \mathbb{E}[(y - X)^+]$$

En utilisant une intégration par parties il vient :

$$\begin{aligned} G_X(y) &= \int_0^{\infty} (y - t)^+ f_X(t) dt \\ &= \int_0^y (y - t) f_X(t) dt \\ &= \int_0^y F_X(t) dt \end{aligned}$$

Comme $F_X(t) \leq 1$ puisque c'est une fonction de répartition nous avons alors :

$$\begin{aligned} |G_X(y_1) - G_X(y_2)| &= \left| \int_0^{y_1} F_X(t) dt - \int_0^{y_2} F_X(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{y_1} dt - \int_0^{y_2} dt \right| \\ &\leq |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

En posant $y = (1 + c + x)(1 - f^{PB})$ et $X = \frac{S_1 + PM_1}{PP}$ nous retrouvons :

$$H(x) = t^{PB} \cdot G_X(y)$$

Ainsi en posant $y_1 = (1 + c + \alpha_1)(1 - f^{PB})$ et $y_2 = (1 + c + \alpha_2)(1 - f^{PB})$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} |G_X(y_1) - G_X(y_2)| &\leq |y_1 - y_2| \\ \left| \frac{H(\alpha_1)}{t^{PB}} - \frac{H(\alpha_2)}{t^{PB}} \right| &\leq |(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - f^{PB})| \\ \left| \frac{H(\alpha_1)}{t^{PB}} - \frac{H(\alpha_2)}{t^{PB}} \right| &\leq |(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - f^{PB})| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{|H(\alpha_1) - H(\alpha_2)| \leq t^{PB}(1 - f^{PB})|\alpha_1 - \alpha_2|}$$

La fonction H est contractante si $t^{PB}(1 - f^{PB})$ est toujours strictement inférieur à 1, ce qui est toujours vrai sauf si $t^{PB} = 1$ et $f^{PB} = 0$. Ce cas est celui où la PB est versée à 100% mais le compte de PB n'est pas chargé. Cette situation est suffisamment illusoire pour être écartée de l'étude.

⇒ Conclusion : la fonction H est **contractante**.

Nous pouvons alors appliquer le théorème du point fixe de Banach pour affirmer qu'il existe bien une solution à l'équation (1), et que celle-ci est unique.

3.2.6 Procédure de calcul du chargement α

Dans cette section, nous développons une méthode de détermination du chargement supplémentaire α en utilisant la fonction H introduite dans la partie précédente.

En effet, le théorème de Banach affirme que l'unique solution de l'équation $\alpha = H(\alpha)$ est limite de la suite de Cauchy définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_{n+1} = H(\alpha_n) \end{cases}$$

De plus, en notant $\boxed{k = t^{PB}(1 - f^{PB})}$, nous avons :

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = |H(\alpha_n) - H(\alpha_{n-1})| \leq k \cdot |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |\alpha_1 - \alpha_0|$$

Nous pouvons alors écrire pour $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+p} - \alpha_n| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} |\alpha_{n+i+1} - \alpha_{n+i}| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \right) |\alpha_1 - \alpha_0| \\ &\leq k^n \cdot \frac{1 - k^p}{1 - k} |\alpha_1 - \alpha_0| \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} |\alpha_1 - \alpha_0| \end{aligned}$$

En faisant tendre $p \rightarrow \infty$, l'inégalité précédente devient :

$$\boxed{|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |\alpha_1 - \alpha_0|}$$

Nous estimons la valeur du chargement α par itérations successives avec la procédure suivante en s'arrêtant une fois que l'erreur est inférieure à ϵ :

Initialisation :

- $\alpha_0 = 0$
- $\alpha_1 = H(\alpha_0)$
- $\alpha = \alpha_1$
- $\epsilon = 10^{-5}$
- $n = 1$

Traitement :

Tant que $\epsilon < \frac{k^n}{1-k} |\alpha_1 - \alpha_0|$:

- $\alpha = H(\alpha)$
- $n = n + 1$

Sortie :

Renvoyer α

Nous avons donc un algorithme de recherche du point fixe de la fonction H qui converge avec une vitesse géométrique, plus rapide qu'une recherche dichotomique (vitesse de convergence linéaire).

Malgré l'absence de preuve théorique de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas avec report de pertes, la procédure précédente fonctionne et permet de déterminer une valeur pour le chargement α .

3.3 Cas 2 : taux techniques différents : $r^{DC} \neq r^{AT}$

Dans ce cas, la variable R_G reprend sa forme initiale :

$$R_G = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{R_k^{AT}}{(1+r^{AT})^k} + \frac{R_k^{DC}}{(1+r^{DC})^k} \right)$$

Ce cas nécessite de séparer les comptes relatifs à la garantie décès (DC) et à la garantie arrêt de travail (AT) puisque les résultats sont actualisés à des taux différents.

3.3.1 Résultats du réassureur

Compte de PB et du réassureur sur la partie décès

Résultats du compte de Participation aux Bénéfices pour le DC :

Compte de PB au 31/12/1	Compte de PB au 31/12/k
$f^{PB} \cdot PP^{DC} (1 + c + \alpha)$ $r^{DC} \cdot f^{PB} \cdot PP^{DC} (1 + c + \alpha)$ α S_1^{DC} PM_1^{DC}	PM_k^{DC} S_k^{DC}
$PP^{DC} (1 + c + \alpha)$ $r^{DC} \cdot PP^{DC} (1 + c + \alpha)$	PM_{k-1}^{DC} $r^{DC} \times PM_{k-1}^{DC}$

$$\begin{cases} R_1^{PB,DC} = PP^{DC}(1+c+\alpha)(1+r^{DC}) - f^{PB}PP^{DC}(1+c+\alpha)(1+r^{DC}) - S_1^{DC} - PM_1^{DC} \\ R_k^{PB,DC} = PM_{k-1}^{DC}(1+r^{DC}) - S_k^{DC} - PM_k^{DC} \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Nous pouvons écrire les comptes de résultats du réassureur

Résultats du Réassureur :

Compte au 31/12/1		Compte au 31/12/k	
$c \cdot PP^{DC}(1+r)$	$PP^{DC}(1+c+\alpha)$	PM_k^{DC}	PM_{k-1}^{DC}
S_1^{DC}	$r^{DC} \cdot PP^{DC}(1+c+\alpha)$	S_k^{DC}	$r^{DC} \times PM_{k-1}^{DC}$
PM_1^{DC}		$t^{PB} \max(R_{k-1}^{PB,DC}; 0)$	
$t^{PB} \max(R_1^{PB,DC}; 0)$			

$$\begin{cases} R_1^{DC} = PP^{DC}(1+c+\alpha)(1+r^{DC}) - c \cdot PP^{DC}(1+r^{DC}) - S_1^{DC} - PM_1^{DC} - t^{PB} \max(R_1^{PB,DC}; 0) \\ R_k^{DC} = PM_{k-1}^{DC}(1+r^{DC}) - S_k^{DC} - PM_k^{DC} - t^{PB} \max(R_k^{PB,DC}; 0) \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Compte de PB et du réassureur sur la partie arrê de travail (AT)

Résultats du compte de Participation aux Bénéfices pour l'AT :

Compte de PB au 31/12/1		Compte de PB au 31/12/k	
$f^{PB} \cdot PP^{AT}(1+c+\alpha)$	$PP^{AT}(1+c+\alpha)$	PM_k^{AT}	PM_{k-1}^{AT}
$r^{AT} \cdot f^{PB} \cdot PP^{AT}(1+c+\alpha)$	$r^{AT} \cdot PP^{AT}(1+c+\alpha)$	S_k^{AT}	$r^{AT} \times PM_{k-1}^{AT}$
S_1^{AT}			
PM_1^{AT}			

$$\begin{cases} R_1^{PB,AT} = PP^{AT}(1+c+\alpha)(1+r^{AT}) - f^{PB}PP^{AT}(1+c+\alpha)(1+r^{AT}) - S_1^{AT} - PM_1^{AT} \\ R_k^{PB,AT} = PM_{k-1}^{AT}(1+r^{AT}) - S_k^{AT} - PM_k^{AT} \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant écrire les comptes de résultats du réassureur

Résultats du Réassureur :

Compte au 31/12/1		Compte au 31/12/k	
$c \cdot PP^{AT}(1+r)$	$PP^{AT}(1+c+\alpha)$	PM_k^{AT}	PM_{k-1}^{AT}
S_1^{AT}	$r^{AT} \cdot PP^{AT}(1+c+\alpha)$	S_k^{AT}	$r^{AT} \times PM_{k-1}^{AT}$
PM_1^{AT}		$t^{PB} \max(R_{k-1}^{PB,AT}; 0)$	
$t^{PB} \max(R_1^{PB,AT}; 0)$			

$$\begin{cases} R_1^{AT} = PP^{AT}(1+c+\alpha)(1+r^{AT}) - c \cdot PP(1+r^{AT}) - S_1^{AT} - PM_1^{AT} - t^{PB} \max(R_1^{PB,AT}; 0) \\ R_k^{AT} = PM_{k-1}^{AT}(1+r^{AT}) - S_k^{AT} - PM_k^{AT} - t^{PB} \max(R_k^{PB,AT}; 0) \quad k \geq 2 \end{cases}$$

3.3.2 Équation du chargement supplémentaire

L'objectif reste le même : celui de déterminer, en fonction des différentes caractéristiques du contrat de réassurance, le chargement supplémentaire α permettant d'avoir l'égalité suivante :

$$\boxed{\mathbb{E}[R_G] = 0}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_G] &= \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[R_k^{AT}]}{(1+r^{AT})^k} + \frac{\mathbb{E}[R_k^{DC}]}{(1+r^{DC})^k} \\ 0 &= \alpha \cdot (PP^{DC} + PP^{AT}) - t^{PB} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[\max(R_k^{PB,DC}, 0)]}{(1+r^{DC})^k} + \sum_{k=1}^N \frac{\mathbb{E}[\max(R_k^{PB,AT}, 0)]}{(1+r^{AT})^k} \right) \end{aligned}$$

En développant les deux sommes pour $k = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha &= t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left[\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right]^+ \right] \\ &+ t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left[\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right]^+ \right] \\ &+ t^{PB} \left(\sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{R_k^{PB,DC}}{PP} \right)^+ \right]}{(1+r^{DC})^k} + \frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{R_k^{PB,AT}}{PP} \right)^+ \right]}{(1+r^{AT})^k} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

En définissant maintenant la fonction H comme suit :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto H^{DC}(x) + H^{AT}(x) \end{aligned}$$

Avec les fonctions H^{DC} et H^{AT} définies similairement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H^{DC} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left[\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+x)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right]^+ \right] + A^{DC} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H^{AT} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left[\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+x)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right]^+ \right] + A^{AT} \end{aligned}$$

Où les constantes A^{DC} et A^{AT} sont définies de la façon suivante :

$$A^{DC} = t^{PB} \sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{R_k^{PB,DC}}{PP} \right)^+ \right]}{(1+r^{DC})^k}$$

$$A^{AT} = t^{PB} \sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E} \left[\left(R_k^{PB,AT} / PP \right)^+ \right]}{(1 + r^{AT})^k}$$

Alors, α est solution de l'équation suivante :

$$\alpha = H^{DC}(\alpha) + H^{AT}(\alpha) = H(\alpha)$$

3.3.3 Application du théorème

Afin d'appliquer le théorème du point fixe de Banach, nous devons prouver que notre nouvelle fonction H est également contractante.

Par un raisonnement similaire au cas où les taux techniques seraient égaux nous pouvons déduire les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |H^{DC}(\alpha_1) - H^{DC}(\alpha_2)| \leq \frac{PP^{DC}}{PP} \cdot t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2| \\ |H^{AT}(\alpha_1) - H^{AT}(\alpha_2)| \leq \frac{PP^{AT}}{PP} \cdot t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2| \end{cases}$$

Ainsi, nous montrons que $H = H^{DC} + H^{AT}$ est bien contractante.

En effet, nous savons que :

$$\begin{aligned} |H(\alpha_1) - H(\alpha_2)| &= |H^{DC}(\alpha_1) + H^{AT}(\alpha_1) - [H^{DC}(\alpha_2) + H^{AT}(\alpha_2)]| \\ &= |H^{DC}(\alpha_1) - H^{DC}(\alpha_2) + H^{AT}(\alpha_1) - H^{AT}(\alpha_2)| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a + b| \leq |a| + |b|$, nous obtenons :

$$|H(\alpha_1) - H(\alpha_2)| \leq |H^{DC}(\alpha_1) - H^{DC}(\alpha_2)| + |H^{AT}(\alpha_1) - H^{AT}(\alpha_2)|$$

Nous utilisons les 3 inégalités ci-dessus en se rappelant que $PP = PP^{DC} + PP^{AT}$, pour déduire que

$$\begin{aligned} |H(\alpha_1) - H(\alpha_2)| &\leq \frac{PP^{DC}}{PP} \cdot t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2| + \frac{PP^{AT}}{PP} \cdot t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2| \\ &\leq \left(\frac{PP^{DC}}{PP^{DC} + PP^{AT}} + \frac{PP^{AT}}{PP^{DC} + PP^{AT}} \right) \cdot t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2| \end{aligned}$$

Nous retrouvons la même inégalité pour notre nouvelle fonction H :

$$|H(\alpha_1) - H(\alpha_2)| \leq t^{PB}(1 - f^{PB}) \cdot |\alpha_1 - \alpha_2|$$

Donc H est contractante si et seulement si $t^{PB}(1 - f^{PB}) < 1$.

Nous considérons l'inégalité précédente comme vraie pour la suite pour les mêmes raisons de crédibilité que la précédente section.

Nous appliquons le théorème du point fixe de Banach qui nous affirme qu'il existe un unique point vérifiant $H(\alpha) = \alpha$.

La deuxième partie du théorème nous permet de construire une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers le point fixe de la fonction H avec une vitesse géométrique.

3.3.4 Procédure de calcul du chargement α

La procédure de calcul du chargement est parfaitement similaire à celle développée dans le cas où les taux techniques sont identiques.

3.3.5 Remarques sur ce cas

Remarque sur l'hypothèse d'absence de report de pertes

Comme énoncé au début de cette partie, cette démonstration est valable dans un cas sans report de pertes. En effet, dans ce cas, les résultats $R_k^{PB,DC}$ et $R_k^{PB,AT}$ avec $k \geq 2$ sont indépendants de α . Néanmoins, en pratique, l'option de report de pertes est présente de façon quasi-systématique dans les traités de réassurance signés sur le marché français.

Malgré l'absence de preuve théorique de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas avec report de pertes, nous remarquons que la procédure précédente fonctionne empiriquement et permet de déterminer la valeur du chargement α (une explication pratique est donnée en annexe A). Cet algorithme sera donc utilisé dans les cas avec ou sans report de pertes pour la production des résultats dans la section 4.

Remarque sur la PB réellement versée

La différenciation des taux techniques nous oblige à séparer le compte relatif à la garantie arrêt de travail et celui relatif à la garantie décès. Cette séparation, nécessaire pour la projection des résultats futurs dans R_G , n'est pas forcément prise en compte dans le calcul de la PB réellement versée.

La PB réellement versée peut s'exprimer de la façon suivante :

$$PB^{v1} = t^{PB} \times \max(R^{PB,AT} + R^{PB,DC}, 0)$$

Alors que notre séparation nous oblige à exprimer le versement de PB comme la somme d'une partie relative à la garantie décès et une partie relative à la garantie arrêt de travail.

$$PB^{v2} = t^{PB} \times \max(R^{PB,AT}, 0) + t^{PB} \times \max(R^{PB,DC}, 0)$$

Néanmoins cette modélisation est prudente puisque l'inégalité suivante sera toujours satisfaite :

$$PB^{v2} \geq PB^{v1}$$

En surévaluant la PB versée (dans certains cas), le chargement α nécessaire pour rééquilibrer R_G augmentera.

3.3.6 Estimation de la fonction $H(x)$

Nous sommes en mesure de calculer le chargement α dans le cas où la fonction H est explicitement connue. Cette fonction H fait intervenir des espérances de variables aléatoires qui ne sont pas déterminables analytiquement. Le but de la section suivante est d'approcher la fonction H en utilisant la loi des grands nombres (annexe B).

En simulant des trajectoires aléatoires indépendantes pour les variables aléatoires S_k^{DC} , S_k^{AT} , PM_k^{DC} , PM_k^{AT} , nous pouvons approcher la fonction par la moyenne arithmétique de ces trajectoires. En définissant n^{simu} comme le nombre de simulation, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha \approx & t^{PB} \cdot \frac{1}{n^{simu}} \sum_{i=1}^{n^{simu}} \left(\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC,(i)}}{PP} + \frac{PM_1^{DC,(i)}}{PP} \right) \right)^+ \\ & + t^{PB} \cdot \frac{1}{n^{simu}} \sum_{i=1}^{n^{simu}} \left(\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT,(i)}}{PP} + \frac{PM_1^{AT,(i)}}{PP} \right) \right)^+ \\ & + t^{PB} \cdot \frac{1}{n^{simu}} \sum_{i=1}^{n^{simu}} \left(\sum_{k=2}^N \frac{\left(R_k^{PB,DC,(i)} / PP \right)^+}{(1+r^{DC})^k} + \frac{\left(R_k^{PB,AT,(i)} / PP \right)^+}{(1+r^{AT})^k} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Vitesse de convergence de la méthode :

Nous définissons la variable aléatoire Y comme :

$$\begin{aligned} Y = & t^{PB} \cdot \left(\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+x)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right)^+ \\ & + t^{PB} \cdot \left(\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+x)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right)^+ \\ & + t^{PB} \left(\sum_{k=2}^N \frac{\left(R_k^{PB,DC} / PP \right)^+}{(1+r^{DC})^k} + \frac{\left(R_k^{PB,AT} / PP \right)^+}{(1+r^{AT})^k} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Dans un premier temps, nous fixons $x \in \mathbb{R}$

Ainsi nous avons

$$H(x) = \mathbb{E}[Y]$$

Nous définissons ensuite

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n^{simu}} \sum_{k=1}^{n^{simu}} Y_k$$

et

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(Y)$$

D'après le Théorème Central Limite (TCL, annexe B) :

$$\sqrt{n^{simu}} \cdot \left(\bar{Y}_n - H(x) \right) \xrightarrow[n^{simu} \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

La vitesse de convergence de la méthode est donc en \sqrt{n} , ce qui est lent. La variance joue un rôle important puisque plus elle est grande, moins l'approximation risque d'être efficace ([11])

Précision de la méthode :

Nous construisons des intervalles de confiance asymptotiques à l'aide du TCL et du Lemme de Slutsky.

La variance n'étant pas connue, nous pouvons l'estimer par méthode de Monte Carlo.

Notons alors

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n^{simu}} \sum_{k=1}^{n^{simu}} (Y_k - \bar{Y}_n)^2$$

Par la loi forte des grands nombres :

$$\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow[n^{simu} \rightarrow +\infty]{p.s-\mathbb{P}} \sigma^2$$

Ensuite si $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ nous avons le résultat suivant d'après le TCL et le lemme de Slutsky :

$$\lim_{n^{simu} \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{n^{simu}} \cdot \frac{\bar{Y}_n - H(x)}{\hat{\sigma}_n} \in [-a, a] \right) = \mathbb{P}(G \in [-a, a])$$

Or

$$\sqrt{n^{simu}} \cdot \frac{\bar{Y}_n - H(x)}{\hat{\sigma}_n} \in [-a, a] \iff H(x) \in \left[\bar{Y}_n \pm \frac{a\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n^{simu}}} \right]$$

Maintenant en faisant varier x entre 0 et 3 et en utilisant 1000 simulations nous avons :

$$\hat{\sigma}_n \leq 0.2$$

Ainsi pour un niveau de confiance de 95% ($a = 1.96$), nous avons l'intervalle suivant

$$H(x) \in \left[\bar{Y}_n \pm 0.04\% \right]$$

Cette précision est jugée suffisante pour obtenir notre chargement. Nous utiliserons donc 1000 simulations pour la méthode de Monte Carlo.

4 Simulation de la charge de sinistres

Nous nous intéressons à la simulation des charges de sinistres annuelles S_k . Cette modélisation est effectuée à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo sur un portefeuille fictif.

L'entrée en état d'incapacité de l'assuré entraîne « l'ouverture » d'un sinistre.

Nous considérons que l'engagement du réassureur sur le traité est annuel et jusque expiration des sinistres. Sur la durée du traité, nous supposons que l'assuré ne peut subir qu'un unique passage en incapacité et que ce passage a lieu le 01/01. Conformément à la règle de consolidation de l'arrêt de travail au bout de 36 mois, l'incapacité peut perdurer jusqu'au 31/12 de l'année 3 du traité. De plus, l'engagement étant annuel, si un assuré est valide en fin de la première année, il sort du portefeuille couvert par le traité. Dans le cas d'un assuré qui reviendrait à un état valide après une période d'incapacité, nous considérons que le sinistre est « clôturé » et que l'assuré sort du portefeuille couvert par le traité.

Dans notre modélisation, le passage en invalidité a toujours lieu après un passage en incapacité.

Nous nous intéressons ici au cas où les taux techniques sont différenciés. Comme détaillé dans la section 3, cela implique une séparation des comptes relatifs au décès et à l'arrêt de travail. Par conséquent, cette séparation concerne également les sinistres :

- S^{DC} concernera les sinistres relatifs à la garantie décès.
- S^{AT} concernera les sinistres relatifs à la garantie arrêt de travail.

4.1 Le portefeuille et ses caractéristiques

4.1.1 Sélection médicale

La sélection médicale est un processus permettant à l'assureur de mieux connaître son risque et d'affiner le cas échéant, le tarif de ses garanties décès, après appréciation par un médecin de l'état de santé de l'assuré. Si l'état de santé de l'assuré est considéré comme « bon », un abattement sur la table de mortalité utilisée est appliqué pour celui-ci. En revanche, si les résultats du questionnaire révèlent que l'état de santé de l'assuré est « mauvais », alors une majoration est appliquée. Dans certains cas, la couverture d'assurance peut être refusée.

Dans notre étude, nous faisons l'hypothèse que l'effet de la sélection médicale est systématiquement positif ou nul (la table de mortalité utilisée est abattue). L'abattement appliqué sera fonction de la date de la dernière sélection médicale effectuée.

Nous utiliserons les abattements suivants :

- 20% si la dernière sélection médicale date de 0 à 3 ans
- 10% si la dernière sélection médicale date de 4 à 6 ans
- 0% si la dernière sélection médicale a plus de 6 ans

4.1.2 Franchises

En prévoyance individuelle, il existe des franchises pour la garantie incapacité. Ces franchises réduisent le risque de l'assureur en éliminant les sinistres de faible durée. Elles sont exprimées en nombre de jours et dépendent de la caisse d'assurance à laquelle l'assuré est rattaché (voir chapitre introductif). Par exemple, un cas courant est d'avoir une franchise de base de 15 jours ramenée à 3 jours en cas d'hospitalisation. L'assureur commence à verser des prestations à partir du 16^{ème} jour d'arrêt de travail ou à partir du 4^{ème} jour en cas d'hospitalisation.

Dans notre étude, nous ne mettons pas en place de franchise puisque les durées passées en incapacité seront exprimées en mois. Ainsi, l'intérêt de la franchise devient moindre puisqu'elle ne permet plus de capter les arrêts de travail de très faible durée, et vient juste réduire légèrement la charge de sinistres.

4.1.3 Âge de départ à la retraite

Dans un contrat couvrant l'incapacité et l'invalidité, l'âge de départ à la retraite est celui à partir duquel les prestations cessent d'être versées. Dans notre étude, cet âge sera noté C et sera égal par hypothèse à 64 ans. Ce choix est dû à l'arrêt de la table de maintien en invalidité du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC, annexe C) qui est utilisée dans la modélisation.

De plus, nous prendrons pour hypothèse que les individus âgés de plus de 62 ans ne sont pas couverts en cas d'invalidité car ils passent automatiquement à la retraite.

4.1.4 Le portefeuille fictif

Pour effectuer notre modélisation nous allons simuler un portefeuille fictif de $n = 1000$ individus dont les caractéristiques sont tirées aléatoirement dans l'ordre suivant pour chaque individu :

1. $\hat{\text{age}} \sim \mathcal{N}(\mu^{\hat{\text{age}}}; \sigma^{\text{age}})$ qui est borné à gauche par 22 et à droite par 62.
2. $s \sim \mathcal{N}(\mu^s; \sigma^s)$: salaire de l'individu qui est borné à gauche par 0
3. $K_{dc} \sim \mathcal{N}(\mu^K; \sigma^K)$: capital garanti en cas de décès, qui est borné à gauche par 0
4. $a \sim \mathcal{N}(\mu^a; \sigma^a)$: part du salaire garantie en état d'incapacité, qui est bornée à gauche à 0.5 et à droite par 1
5. $b \sim \mathcal{N}(\mu^b; \sigma^b)$: part du salaire garantie en état d'invalidité, qui est bornée à gauche à 0.5 et à droite par 1
6. $\text{anciennete_selection_med} \sim \mathcal{N}(\mu^{asm}; \sigma^{asm})$: ancienneté de la dernière sélection médicale effectuée sur l'individu, qui est bornée à gauche par 0 et à droite par 20

Les paramètres par défaut des lois normales sont détaillés dans l'annexe D.

4.1.5 Récupération des paramètres

La première étape est de récupérer à partir des tables du BCAC, de la TH-TF (annexe C) et des données d'expérience de SCOR, les éléments suivants selon l'âge de l'assuré :

- Les q_{val-dc} : probabilités de décès en état « valide ».
- Les incidences $i_{val-inc}$ de l'entrée en incapacité de travail
- Les distributions du temps passé en incapacité T_{inc} en mois
- Les incidences $i_{inc-inv}(T)$ de l'entrée en invalidité après avoir passé T mois en incapacité
- Les distributions du temps passé en invalidité T_{inv} en années

Nous retenons les variables aléatoires suivantes pour chaque individu du portefeuille :

- Décès de l'assuré : $B_{deces} \sim \mathcal{B}(1; q_{val-dc})$
- L'entrée en incapacité de travail : $B_{inc} \sim \mathcal{B}(1; i_{val-inc})$
- Le temps passé en état d'incapacité : T_{inc}
- L'entrée en invalidité après avoir passé T mois en incapacité : $B_{inv}(T) \sim \mathcal{B}(1; i_{inc-inv}(T))$
- Le temps passé en état d'invalidité : T_{inv}

4.1.6 Incidence du décès en incapacité

Pour les q_{val-dc} , nous utilisons les Best Estimate décès SCOR qui correspondent aux données d'expérience. Ces q_x présentent des abattements par rapport à la TH-TF mais ne segmentent pas la population selon son état (valide, incapable, invalide) qui est pourtant un facteur discriminant pour la mortalité.

En ce qui concerne les q_{inc-dc} , probabilités de décès en état d'incapacité, nous utilisons la TH-TF en raison d'un manque de données. Nous respectons ainsi l'inégalité suivante, pour tous les âges :

$$q_{val-dc} \leq q_{inc-dc}$$

4.1.7 Gestion de l'invalidité pour la Quote Part et pour l'excédent de sinistre

Soit un portefeuille de n assurés âgés de 22 à 62 ans. L'âge de départ à la retraite, supposé commun à tout le portefeuille, est égal à 64 ans. Nous prenons pour convention que les sinistres sont réglés dès leur survenance. Sur un traité proportionnel, les sinistres surviennent sur une période maximum de $N = 62 - 22 = 40$ années et les provisions mathématiques sont constituées sur une période de $N-1$ années. Le règlement des sinistres ayant lieu l'année de leur survenance, par convention, $PM_N = 0$. Sur cette base, nous considérons que sur un traité proportionnel, la provision de maintien en invalidité est actualisée chaque année jusqu'à la sortie de l'état d'invalidité.

A contrario, sur les traités non proportionnels, nous considérons que le passage en invalidité d'un assuré déclenche le versement, au moment de la survenance, de l'intégralité de sa provision de maintien en invalidité et de sa provision pour décès en état d'invalidité. Cela nous permet de clôturer le sinistre de l'assuré. Ainsi, sur ce type de traité, par convention, $PM_3 = 0$ avec la possibilité d'avoir des provisions mathématiques uniquement sur les deux premières années.

4.2 Algorithme de simulation

Pour chaque année, la charge de sinistres totale modélisée est la somme des sinistres individuels des n assurés : pour $k \geq 1$

$$S_k = \sum_{i=1}^n S_k^{(i)}$$

Nous cherchons à modéliser la charge de sinistres globale en utilisant une simulation de Monte-Carlo.

Nous nous plaçons sur un contrat couvert par un excédent de sinistres par risque (de priorité notée PRIO et de portée notée POR) et une Quote Part (QP). Dans le développement de cet algorithme, l'expression des sinistres en cas d'invalidité de l'assuré fera intervenir, dans le cadre d'un traité XS, les provisions mathématiques (PM) associées au maintien de l'assuré en invalidité et à son décès en invalidité. Les formules de ces PM sont explicitées dans le chapitre 4.

La charge de sinistres de l'assuré i pour l'année k est notée :

$$S_k^{(i)}$$

La sinistralité de l'assuré i à la charge du réassureur pour l'année k est notée :

$$S_{REASS,k}^{(i)}$$

avec :

- $REASS = XS$ pour un excédent de sinistre par risque
- $REASS = QP$ pour une Quote Part
- $REASS = QP + XS$ pour un contrat combinant une Quote Part et un excédent de sinistre par risque

Cet algorithme se compose de 6 étapes qui vont être déroulées pour chaque assuré du portefeuille. Les 6 étapes suivent le schéma de la figure 10.

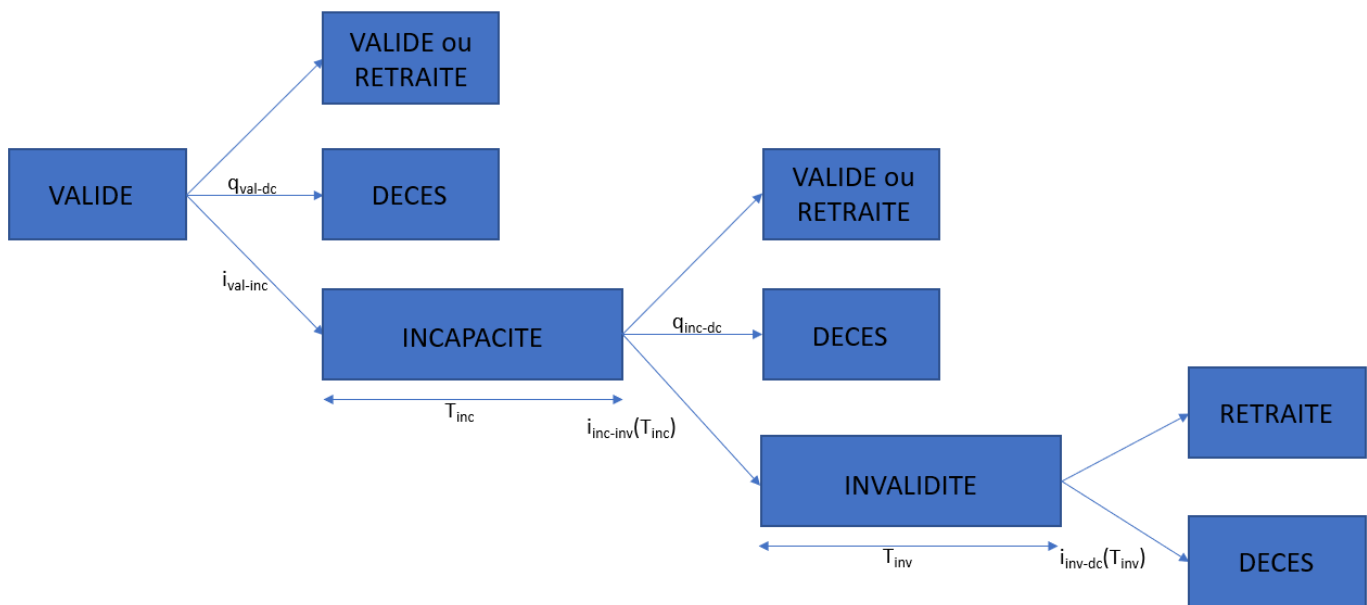


FIGURE 10 – Passages d'états

Soit un assuré i d'âge x :

Étape 1 : Simulation du décès en première année

Nous tirons $B_{val-dc}^{(i)}(x) \sim \mathcal{B}(1; q_{val-dc}(x))$

Si $B_{val-dc}^{(i)}(x) = 1$ alors l'assuré décède en première année. La figure 11 nous montre sur quelle branche du schéma 10 nous nous trouvons.

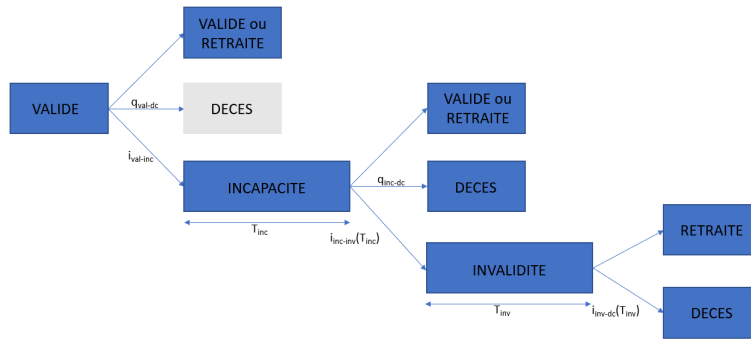


FIGURE 11 – Décès en première année

Les sinistres annuels totaux au titre de cet assuré sont :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Les charges de sinistres annuelles du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées sur le tableau 1.

TABLEAU 1 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l’assuré décède dans l’année 1

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = 0$
XS	$S_{XS,k}^{DC,(i)} = \min(\max(S_k^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$S_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = 0$

Si $B_{val-dc}^{(i)}(x) = 0$ alors l’assuré ne décède pas la première année, nous passons à l’étape 2.

Étape 2 : Simulation du passage en incapacité

Nous tirons $B_{val-inc}^{(i)}(x) \sim \mathcal{B}(1; i_{val-inc}(x))$

Si $B_{val-inc}^{(i)}(x) = 0$, l’assuré ne passe pas en incapacité (il reste valide à la fin de l’année). La figure 12 nous montre sur quelle branche du schéma 10 nous nous trouvons.

Nous pouvons montrer que $S_{T_{inc}}^{-1}(U_{inc})$ est bien égal en loi à T_{inc} . En effet si on définit F_T la fonction de répartition de T_{inc} et $V \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

$$F_T(T_{inc}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} V$$

Or si $V \sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors $1 - V \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Ainsi,

$$U_{inc} \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 - V \iff U_{inc} \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 - F_T(T_{inc}) \iff U_{inc} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_{T_{inc}}^{-1}(U_{inc})$$

Nous en déduisons :

$$T_{inc} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_{T_{inc}}^{-1}(U_{inc})$$

Étape 4 : Simulation du passage en invalidité

Nous tirons $B_{inv}^{(i)}(T_{inc}^{(i)}) \sim \mathcal{B}(1; i_{val-inc}(T_{inc}^{(i)}, x))$

Si $B_{inv}^{(i)}(T_{inc}^{(i)}) = 0$ alors l'assuré sort de son état d'incapacité à la fin des $T_{inc}^{(i)}$ mois. $S_k^{(i)} = 0$ et ne passe pas en invalidité. Il sort soit pour cause de décès, soit en raison d'un retour à un état de valide. Nous passons à l'étape 5

Si $B_{inc}^{(i)}(x) = 1$ alors l'assuré entre en état d'invalidité et on passe à l'étape 6

Étape 5 : Simulation du décès en sortie d'incapacité et calcul des sinistres

La figure 14 nous montre sur quelles branches du schéma 10 nous nous trouvons.

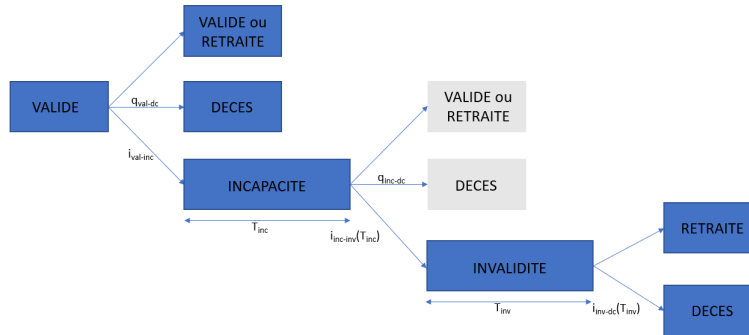


FIGURE 14 – L'assuré sort de l'incapacité sans passer par l'invalidité

Si $T_{inc}^{(i)} \geq 12$, alors nous cherchons à déterminer si la sortie de l'incapacité est due à un décès (l'hypothèse d'un décès en première année, i.e lorsque $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ est déjà testée à l'étape 1). Nous tirons donc :

$$B_{inc-dc}^{(i)}(x + \lfloor T_{inc}^{(i)} \rfloor) \sim \mathcal{B}(1; q_{inc-dc}(x + \lfloor T_{inc}^{(i)} \rfloor))$$

- Si $B_{inc-dc}^{(i)}(x + \lfloor \frac{T_{inc}^{(i)}}{12} \rfloor) = 0$ alors l'assuré retourne à un état de valide à la fin de son incapacité.
- Si $B_{inc-dc}^{(i)}(x + \lfloor \frac{T_{inc}^{(i)}}{12} \rfloor) = 1$ alors l'assuré sort de son état d'incapacité pour cause de décès.

Si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ alors :



FIGURE 15 – Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ sans invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = T_{inc}^{(i)} \times a^{(i)} \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 3.

TABEAU 3 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré redevient valide dans l'année 1

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = 0$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,k}^{DC,(i)} = 0$	$S_{XS,k}^{AT,(i)} = \min(\max(S_k^{AT,(i)} - PRIO; 0); POR)$
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = 0$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{AT,k}^{DC,(i)}$

Si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ alors :

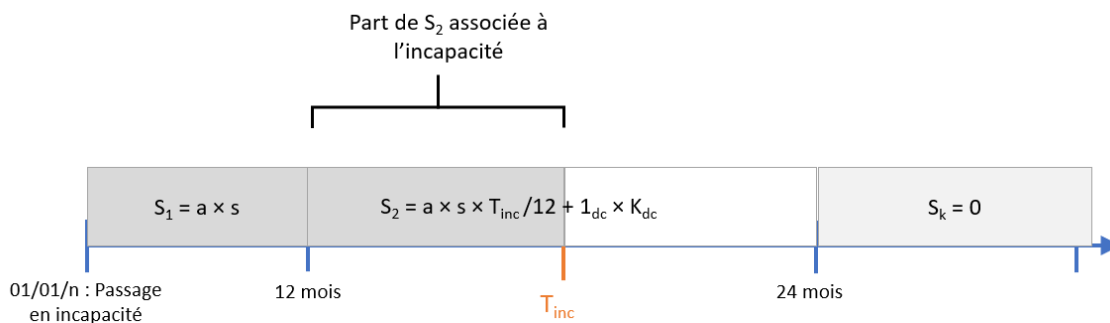


FIGURE 16 – Évolution de la charge de sinistres si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ sans invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

Pour l'arrêt de travail :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = a^{(i)} \times s^{(i)} \\ S_2^{AT,(i)} = (T_{inc}^{(i)} - 12) \times a^{(i)} \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq 3 \end{cases}$$

Pour le décès :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = 0 \\ S_2^{DC,(i)} = B_{inc-dc}^{(i)}(x+1) \times K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq 3 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 4.

TABLEAU 4 – Charges annuelles de sinistres du réassureur sort de son incapacité dans l'année 2

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,k}^{DC,(i)} = \min(\max(S_k^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$S_{XS,k}^{AT,(i)} = \min(\max(\sum_{j=1}^k S_j^{AT,(i)} - PRIO; 0); POR)$ $- \sum_{j=1}^{k-1} S_j^{AT,(i)}$
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{AT,(i)}$

Si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ alors :

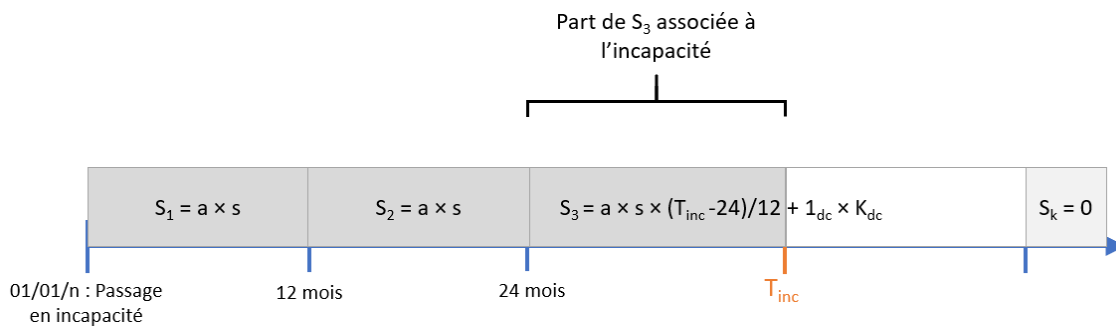


FIGURE 17 – Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ sans invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

Pour l'arrêt de travail :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = S_2^{AT,(i)} = a^{(i)} \times s^{(i)} \\ S_3^{AT,(i)} = (T_{inc}^{(i)} - 24) \times a^{(i)} \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq 4 \end{cases}$$

Pour le décès :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = S_2^{DC,(i)} = 0 \\ S_3^{DC,(i)} = B_{inc-dc}^{(i)}(x+2) \times K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq 4 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 5.

TABLEAU 5 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré sort de son incapacité dans l'année 3

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,k}^{DC,(i)} = \min(\max(S_k^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$S_{XS,k}^{AT,(i)} = \min(\max(\sum_{j=1}^k S_j^{AT,(i)} - PRIO; 0); POR) - \sum_{j=1}^{k-1} S_j^{AT,(i)}$
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{AT,(i)}$

Étape 6 : Simulation du temps $T_{inv}^{(i)}$ passé en invalidité et calcul des sinistres

La figure 18 nous montre sur quelle branche du schéma 10 nous nous trouvons.

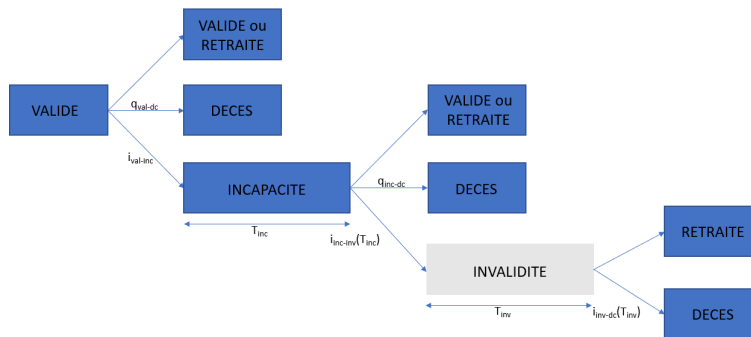


FIGURE 18 – L'assuré passe en invalidité

Nous tirons $U_{inv}^{(i)} \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et nous en déduisons le temps passé en invalidité par la formule $T_{inv} = S_{T_{inv}}^{-1}(U_{inv}^{(i)}, x)$ où $S_{T_{inv}}^{-1}$ est la fonction de survie inverse.

Ensuite si $T_{inv}^{(i)}$ est inférieur au nombre d'années restant (à la date d'entrée en état d'invalidité) pour atteindre l'âge de la retraite ($T_{inv}^{(i)} < C - age - T_{inc}^{(i)}$), cela signifie que l'assuré est sorti de son état d'invalidité avant la retraite donc, nécessairement, qu'il est décédé avant l'âge de départ à la retraite.

Si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ alors :

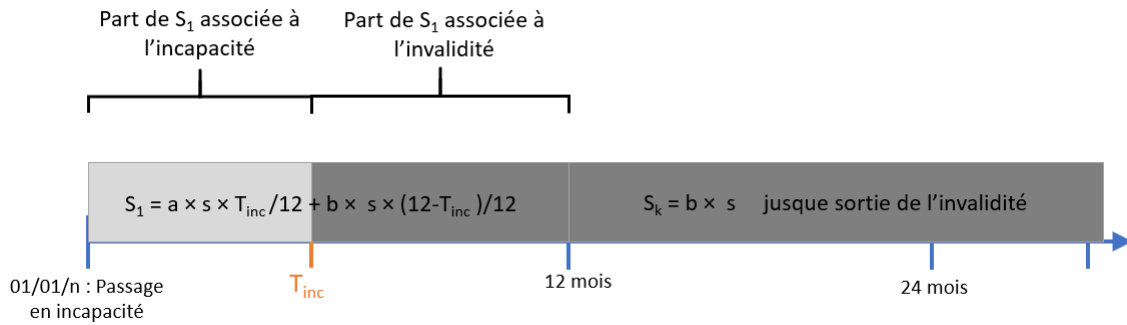


FIGURE 19 – Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \leq 12$ avec invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

Pour l'arrêt de travail :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = [T_{inc}^{(i)} \times a^{(i)} + (12 - T_{inc}^{(i)}) \times b^{(i)}] \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = b^{(i)} \times s^{(i)} \quad 2 \leq k \leq T_{inv}^{(i)} + 1 \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 2 \end{cases}$$

Pour le décès :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = \dots = S_{T_{inv}^{(i)}}^{DC,(i)} = 0 \\ S_{T_{inv}^{(i)}+1}^{DC,(i)} = \mathbb{1}_{T_{inv}^{(i)} < C-age} \times K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 2 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 6.

TABLEAU 6 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 1

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,T_{inv}^{(i)}+1}^{DC,(i)} = \min(\max(S_{T_{inv}^{(i)}+1}^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$S_{XS,1}^{AT,(i)} = \min(\max(S_1^{AT,(i)} + PM_{maintien,(i)}^{inval}(2) + PM_{deces,(i)}^{inval}(2) - PRIO; 0); POR)$ puis $S_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$ pour $k \geq 2$
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{AT,(i)}$

Si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ alors :

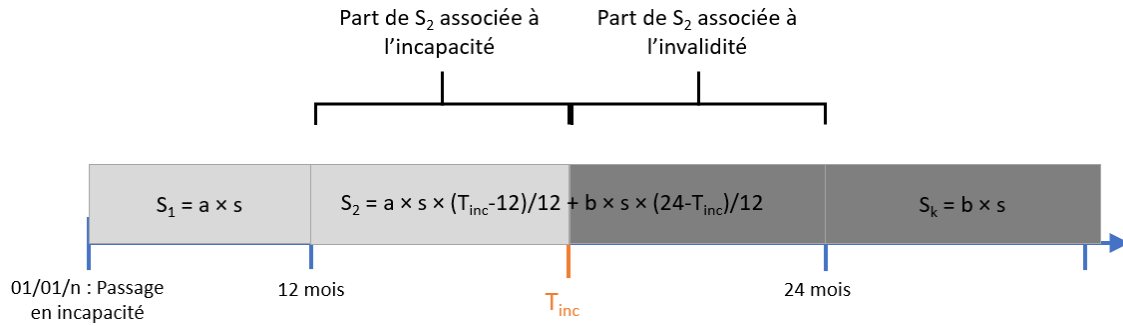


FIGURE 20 – Évolution de la charge de sinistres si $12 \leq T_{inc}^{(i)} \leq 24$ avec invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

Pour l'arrêt de travail :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = a^{(i)} \times s^{(i)} \\ S_2^{AT,(i)} = [(T_{inc}^{(i)} - 12) \times a^{(i)} + (24 - T_{inc}^{(i)}) \times b^{(i)}] \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = b^{(i)} \times s^{(i)} \quad 3 \leq k \leq T_{inv}^{(i)} + 2 \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 3 \end{cases}$$

Pour le décès :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = \dots = S_{T_{inv}^{(i)}+1}^{DC,(i)} = 0 \\ S_{T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} = \mathbb{1}_{T_{inv}^{(i)} < C-age-2} \times K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 3 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 7.

TABLEAU 7 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 2

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} = \min(\max(S_{T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$S_{XS,1}^{AT,(i)} = \min(\max(S_1^{AT,(i)} - PRIO; 0); POR)$ $S_{XS,2}^{AT,(i)} = \min(\max(\sum_{j=1}^2 S_j^{AT,(i)} + PM_{maintien}^{inval,(i)}(3) + PM_{deces}^{inval,(i)}(3) - PRIO; 0); POR) - S_{XS,1}^{AT,(i)}$ <p>puis $S_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$ pour $k \geq 3$</p>
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{AT,(i)}$

Si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ alors :

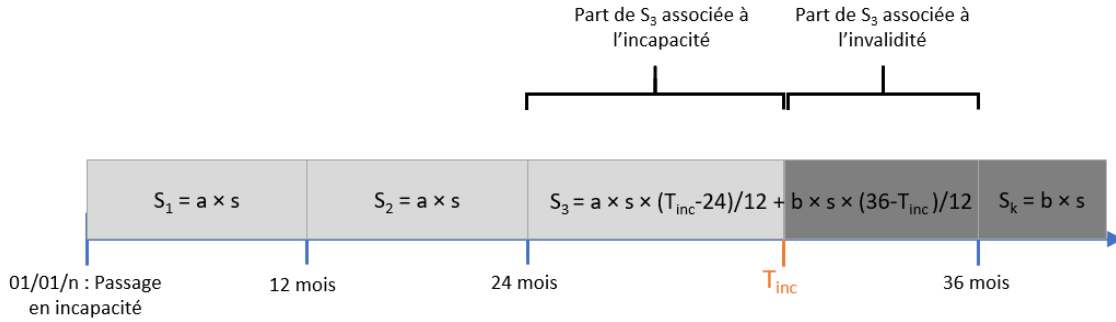


FIGURE 21 – Évolution de la charge de sinistres si $T_{inc}^{(i)} \geq 24$ avec invalidité

Les sinistres annuels associés à cet assuré i sont les suivants :

Pour l'arrêt de travail :

$$\begin{cases} S_1^{AT,(i)} = S_2^{(i)} = a^{(i)} \times s^{(i)} \\ S_3^{AT,(i)} = [(T_{inc}^{(i)} - 24) \times a^{(i)} + (36 - T_{inc}^{(i)}) \times b^{(i)}] \times \frac{s^{(i)}}{12} \\ S_k^{AT,(i)} = b^{(i)} \times s^{(i)} \quad 4 \leq k \leq T_{inv}^{(i)} + 3 \\ S_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 4 \end{cases}$$

Pour le décès :

$$\begin{cases} S_1^{DC,(i)} = \dots = S_{T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} = 0 \\ S_{T_{inv}^{(i)}+3}^{(i)} = \mathbb{1}_{T_{inv}^{(i)} < C-age-3} \times K_{dc}^{(i)} \\ S_k^{(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv}^{(i)} + 4 \end{cases}$$

Les charges annuelles de sinistres du réassureur au titre de cet assuré sont explicitées dans le tableau 8.

TABLEAU 8 – Charges annuelles de sinistres du réassureur si l'assuré devient invalide dans l'année 3

Traité	Sinistres DC	Sinistres AT
QP	$S_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times S_k^{DC,(i)}$	$S_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times S_k^{AT,(i)}$
XS	$S_{XS,T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} = \min\left(\max(S_{T_{inv}^{(i)}+2}^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR\right)$	$S_{XS,k}^{AT,(i)} = \min\left(\max\left(\sum_{j=1}^k S_j^{(i)} - PRIO; 0\right); POR\right)$ $- \sum_{j=1}^{k-1} S_{XS,j}^{(i)} \text{ pour } k \leq 2$ $S_{XS,3}^{AT,(i)} = \min\left(\max\left(\sum_{j=1}^3 S_j^{(i)} + PM_{\text{maintien},(i)}^{inval(4)}\right. \right. (4)$ $\left. \left. + PM_{\text{deces},(i)}^{inval(4)} - PRIO; 0\right); POR\right) - \sum_{j=1}^2 S_{XS,j}^{AT,(i)}$ <p style="text-align: center;">puis $S_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$ pour $k \geq 4$</p>
QP + XS	$S_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = S_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{DC,(i)}$	$S_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = S_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times S_{XS,k}^{AT,(i)}$

En répétant cette simulation un nombre n^{simu} de fois pour chaque assuré i et en sommant les sinistres par année et par simulation, nous obtenons deux matrices des sinistres où sont situées les différentes trajectoires aléatoires des sinistralités annuelles à la charge du réassureur en arrêt de travail et en décès.

Le tableau 9 représente la matrice obtenue pour les sinistres relatifs à la garantie décès.

TABLEAU 9 – Matrices des sinistres DC

	Année 1	Année 2	...	Année N
Simulation 1	$S_{1,1}^{REASS,DC}$	$S_{1,2}^{REASS,DC}$...	$S_{1,N}^{REASS,DC}$
Simulation 2	$S_{2,1}^{REASS,DC}$	$S_{2,2}^{REASS,DC}$...	$S_{2,N}^{REASS,DC}$
...
Simulation nb_simu	$S_{1,1}^{REASS,DC}$	$S_{nb_simu,2}^{REASS,DC}$...	$S_{nb_simu,N}^{REASS,DC}$

Le tableau 10 représente la matrice obtenue pour les sinistres relatifs à la garantie arrêt de travail.

TABLEAU 10 – Matrices des sinistres AT

	Année 1	Année 2	...	Année N
Simulation 1	$S_{1,1}^{REASS,AT}$	$S_{1,2}^{REASS,AT}$...	$S_{1,N}^{REASS,AT}$
Simulation 2	$S_{2,1}^{REASS,AT}$	$S_{2,2}^{REASS,AT}$...	$S_{2,N}^{REASS,AT}$
...
Simulation nb_simu	$S_{1,1}^{REASS,AT}$	$S_{nb_simu,2}^{REASS,AT}$...	$S_{nb_simu,N}^{REASS,AT}$

5 Provisionnement

5.1 Introduction

5.1.1 Introduction et notations

Ce chapitre a pour but de mettre en place les formules de provisionnement qui seront utilisées par la suite dans les modèles associés aux différents traités.

Nous avons vu dans le chapitre précédent sur la simulation de la sinistralité que les sinistres susceptibles de toucher le réassureur proviennent d'assurés en état d'incapacité, d'invalidité ou décédés. Le réassureur doit donc estimer ces différentes pertes pour chaque assuré en probabilisant les passages d'états et les maintiens.

Dans les différents cas, nous découperons le provisionnement total à l'échelle des n assurés, de sorte que pour chaque année $k \geq 1$:

$$PM_k = \sum_{i=1}^n PM_k^{(i)}$$

Dans notre périmètre, qui est composé de ces 3 garanties (incapacité et invalidité et décès), il existe 6 provisionnements à prendre en compte.

Les trois premiers concernent la garantie arrêt de travail :

- le provisionnement du maintien de l'incapacité noté $PM_{\text{maintien}}^{\text{incap}}$
- le provisionnement de l'invalidité en attente noté $PM_{\text{attente}}^{\text{inval}}$
- le provisionnement du maintien en invalidité noté $PM_{\text{maintien}}^{\text{inval}}$

Les trois suivants concernent la garantie décès :

- le provisionnement du décès en invalidité en attente $PM_{\text{deces}}^{\text{inval_attente}}$
- le provisionnement du décès en incapacité noté $PM_{\text{deces}}^{\text{incap}}$
- le provisionnement du décès en invalidité noté $PM_{\text{deces}}^{\text{inval}}$

Pour les expressions des provisions, nous utiliserons les notations suivantes :

- ${}_i p_t^{\text{inc}}$: probabilité de maintien en incapacité jusqu'au mois i au moins, pour un assuré ayant une ancienneté de t mois en état d'incapacité
- ${}_u p_t^{\text{inv}}$: probabilité de maintien en invalidité jusqu'à l'année k au moins, pour un assuré ayant une ancienneté de u années en état d'invalidité
- ${}_i \bar{p}_t^{\text{inc}}$: probabilité de maintien en incapacité jusqu'au mois i exactement (sortie de l'état d'incapacité à l'issue du mois t), pour un assuré ayant une ancienneté de t mois en état d'incapacité
- ${}_u \bar{p}_t^{\text{inv}}$: probabilité de maintien en invalidité jusqu'à l'année k exactement (sortie de l'état d'invalidité à l'issue de l'année t soit pour cause de décès soit en raison d'un passage à la retraite), pour un assuré ayant une ancienneté de u années en état d'invalidité
- C : âge fin de départ à la retraite. Dans la modélisation C est pris égal à 64 ans

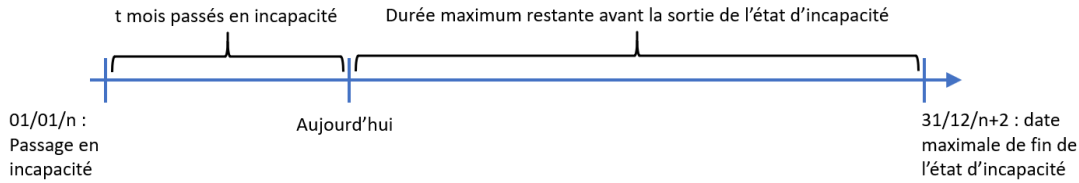


FIGURE 22 – Incapacité

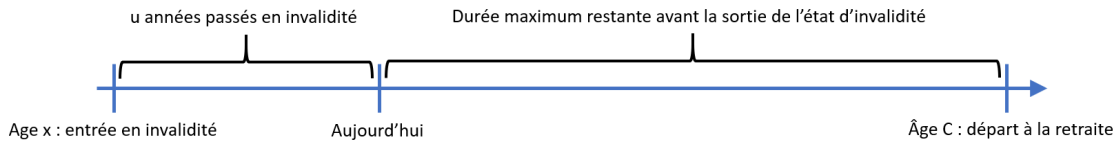


FIGURE 23 – Invalidité

5.1.2 Expressions des provisions mathématiques

Nous nous plaçons sur une vision assureur.

Provisionnement du maintien de l'incapacité :

Après avoir passé $t-1$ mois en état d'incapacité ($t = 13$ ou 25 en pratique) :

$$PM_{\text{maintien}}^{\text{incap}}(t) = \sum_{i=t}^{36} v^{(i-t+1)/12} \times {}_i p_t^{\text{Inc}} \times a \times \frac{s}{12}$$

Provisionnement de l'invalidité en attente :

Après avoir passé $t-1$ mois en état d'incapacité ($t = 13$ ou 25 en pratique) :

$$PM_{\text{attente}}^{\text{inval}}(t) = \sum_{i=t}^{36} v^{(i-t+1)/12} \times {}_i \bar{p}_t^{\text{Inc}} \times i_{\text{inc-inv}}(i) \times PM_{\text{maintien}}^{\text{inval}}([i])$$

Provisionnement du décès en invalidité en attente :

Après avoir passé $t-1$ mois en état d'incapacité ($t = 13$ ou 25 en pratique) :

$$PM_{\text{inval_attente}}^{\text{deces}}(t) = \sum_{i=t}^{36} v^{(i-t+1)/12} \times {}_i \bar{p}_t^{\text{Inc}} \times i_{\text{inc-inv}}(i) \times PM_{\text{deces}}^{\text{inval}}([i])$$

Remarque : Dans la formule, le montant $PM_{\text{inval_attente}}^{\text{deces}}(t)$ qui inclut déjà la probabilité de décéder en invalidité (avant la retraite), est multiplié par une probabilité de passage en invalidité (sachant le nombre de mois passés en incapacité). Le montant total de cette provision sera donc relativement faible par rapport aux autres. Ainsi, il arrive qu'il soit parfois négligé.

Néanmoins, nous pouvons voir sur la figure 24 que la provision peut tout de même être importante, notamment si l'assuré est toujours en incapacité à la fin de la deuxième année. En effet, pour $K_{dc} = 100$, la provision au titre du décès pour l'invalidité en attente peut représenter jusqu'à 8% de K_{dc} (voir figure 24). Elle sera donc bien incluse à notre étude.

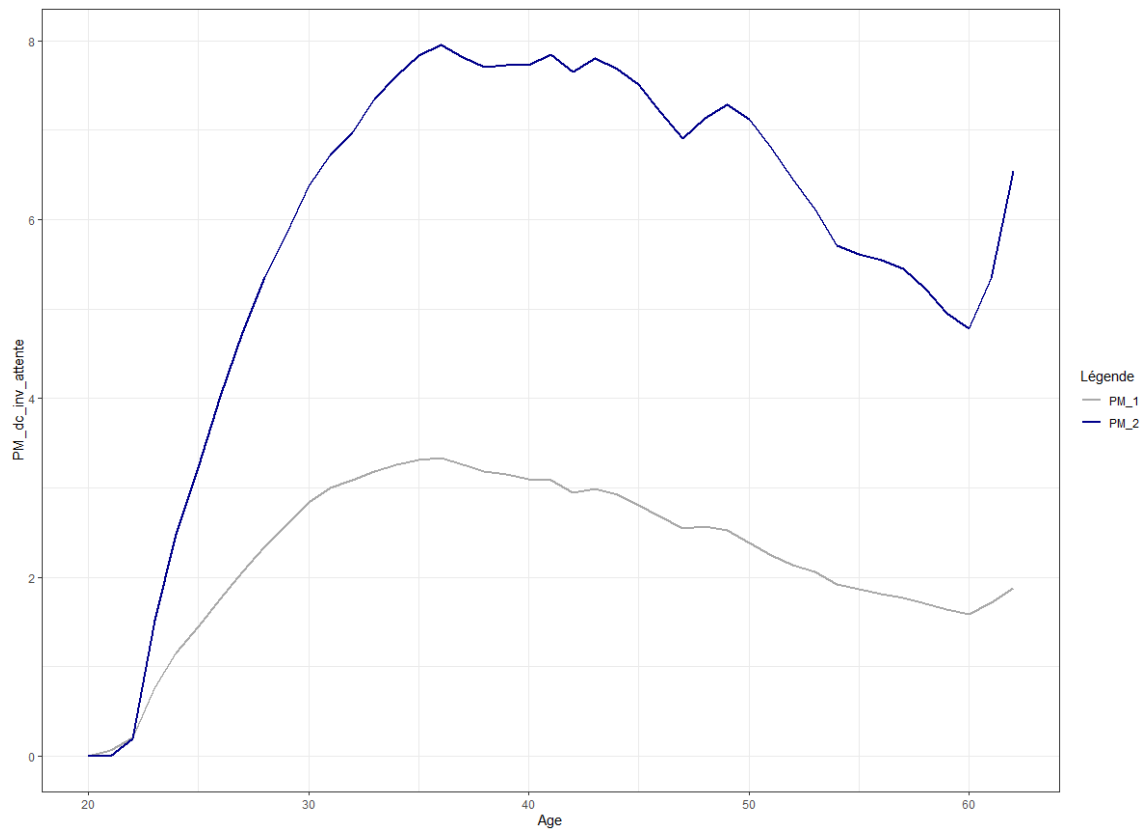


FIGURE 24 – Provisions du décès en invalidité en attente en fin d’année 1 et 2 en fonction de l’âge

Provisionnement du décès en incapacité :

Après avoir passé $t-1$ mois en état d’incapacité ($t = 13$ ou 25 en pratique) :

$$PM_{deces}^{incap}(t) = \sum_{i=t}^{36} v^{(i-t+1)/12} \times {}_i\bar{p}_t^{Inc} \times q_{inc-dc}(i) \times K_{dc}$$

Provisionnement du maintien en invalidité :

Après avoir passé u années en état d’invalidité :

$$PM_{maintien}^{inval}(u) = \sum_{k=1}^{C-age-u} v^k \times {}_k p_u^{Inv} \times b \times s$$

Provisionnement du décès en invalidité :

Après avoir passé u années en état d’invalidité :

$$PM_{deces}^{inval}(u) = \sum_{k=1}^{C-age-u-1} v^k \times {}_k \bar{p}_u^{Inv} \times K_{dc}$$

Remarque : si un assuré sort de l’état d’invalidité avant son départ à la retraite, c’est forcément pour cause de décès.

5.2 Provisionnement sur les différents traités

Nous nous intéressons ici au cas où les taux techniques sont différents pour l'arrêt de travail et le décès. Comme expliqué dans la section 2, les comptes sont séparés. Cette séparation concerne également les provisions mathématiques :

- PM^{DC} : provisions mathématiques relatives à la garantie décès.
- PM^{AT} : provisions mathématiques relatives à la garantie arrêt de travail.

5.2.1 Cas 0 : Pas de passage en incapacité

Le traité est signé pour un an et la modélisation ne prend en compte qu'une seule génération : si l'assuré est toujours valide à la fin de la première année, il sortira de notre cadre d'étude. Par conséquent, il n'y aura plus de provisionnement au titre de cet assuré.

5.2.2 Cas 1 : $T_{inc} \leq 12$ mois

Retour à l'état valide après un temps T_{inc} passé en incapacité

Dans ce cas, il n'y a pas de provisions mathématiques associées à cet assuré pour les années suivantes (au titre de ce traité) que ce soit pour la garantie décès ou arrêt de travail puisque nous considérons que l'assuré sort du portefeuille couvert par le traité (la durée de traité étant de 1 an).

TABLEAU 11 – Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 1

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = 0$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = 0$
XS	$PM_{XS,k}^{DC,(i)} = 0$	$PM_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$
QP + XS	$PM_{QP+XS}^{DC,(i)} = 0$	$PM_{QP+XS}^{AT,(i)} = 0$

Passage en état d'invalidité après un temps T_{inc} passé en incapacité

Dans ce cas nous avons pour la garantie arrêt de travail :

$$\begin{cases} PM_k^{AT,(i)} = PM_{maintien,k}^{inval,(i)}(k) & 1 \leq k \leq T_{inv} - 1 \\ PM_k^{AT,(i)} = 0 & k \geq T_{inv} \end{cases}$$

Puis, pour la garantie décès :

$$\begin{cases} PM_k^{DC,(i)} = PM_{deces,k}^{inval,(i)}(k) & 1 \leq k \leq T_{inv} - 1 \\ PM_k^{DC,(i)} = 0 & k \geq T_{inv} \end{cases}$$

TABLEAU 12 – Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 1

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times PM_k^{DC,(i)}$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times PM_k^{AT,(i)}$
XS	$PM_{XS,k}^{DC,(i)} = 0$	$PM_{XS,k}^{AT,(i)} = 0$
QP + XS	$PM_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = PM_{QP,k}^{DC,(i)}$	$PM_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = PM_{QP,k}^{AT,(i)}$

5.2.3 Cas 2 : $12 \leq T_{inc} \leq 24$ mois

Retour à l'état valide après un temps T_{inc} passé en incapacité

Nous avons pour la garantie arrêt de travail :

$$\begin{cases} PM_1^{AT,(i)} = PM_{\text{maintien}}^{\text{incap},(i)}(13) + PM_{\text{attente}}^{\text{inval},(i)}(13) \\ PM_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Puis, pour la garantie décès :

$$\begin{cases} PM_1^{DC,(i)} = PM_{\text{deces}}^{\text{incap},(i)}(13) + PM_{\text{inval_attente}}^{\text{deces},(i)}(13) \\ PM_k^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq 2 \end{cases}$$

TABLEAU 13 – Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 2

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times PM_k^{DC,(i)}$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times PM_k^{AT,(i)}$
XS	$PM_{XS,k}^{DC,(i)} = \min(\max(PM_k^{DC,(i)} - \text{PRIO}; 0); \text{POR})$	$PM_{k,XS}^{AT,(i)} = \min(\max(\sum_{j=1}^k S_j^{AT,(i)} + PM_k^{AT,(i)} - \text{PRIO}; 0); \text{POR}) - \sum_{j=1}^{k-1} S_{j,XS}^{AT,(i)}$
QP + XS	$PM_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = PM_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{DC,(i)}$	$PM_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = PM_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{AT,(i)}$

Passage en état d'invalidité après un temps T_{inc} passé en incapacité

Nous avons pour la garantie arrêt de travail :

$$\begin{cases} PM_1^{AT,(i)} = PM_{\text{maintien}}^{\text{incap},(i)}(13) + PM_{\text{attente}}^{\text{inval},(i)}(13) \\ PM_k^{AT,(i)} = PM_{\text{maintien}}^{\text{inval},(i)}(k-1) \quad 2 \leq k \leq T_{inv} \\ PM_k^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq T_{inv} + 1 \end{cases}$$

Puis, pour la garantie décès :

$$\begin{cases} PM_1^{DC,(i)} = PM_{deces,1}^{incap,(i)} (13) + PM_{inval_attente}^{deces,(i)} (13) \\ PM_k^{DC,(i)} = PM_{deces,k}^{inval,(i)} (k-1) & 2 \leq k \leq T_{inv} \\ PM_k^{DC,(i)} = 0 & k \geq T_{inv} + 1 \end{cases}$$

TABLEAU 14 – Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 2

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times PM_k^{DC,(i)}$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times PM_k^{AT,(i)}$
XS	$PM_{XS,1}^{DC,(i)} = \min(\max(PM_1^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR)$	$PM_{1,XS}^{AT,(i)} = \min(\max(S_1^{AT,(i)} + PM_1^{AT,(i)} - PRIO; 0); POR) - S_{1,XS}^{AT,(i)}$ Puis $PM_{XS,k}^{AT,(i)} = 0 \quad k \geq 2$
QP + XS	$PM_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = PM_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{DC,(i)}$	$PM_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = PM_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{AT,(i)}$

5.2.4 Cas 3 : $T_{inc} \geq 24$ mois

Retour à l'état valide après un temps T_{inc} passé en incapacité

Nous avons pour la garantie arrêt de travail :

$$\begin{cases} PM_k^{AT,(i)} = PM_{maintien}^{incap,(i)} (12k + 1) + PM_{attente}^{inval,(i)} (12k + 1) & 1 \leq k \leq 2 \\ PM_k^{AT,(i)} = 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

Puis, pour la garantie décès :

$$\begin{cases} PM_k^{DC,(i)} = PM_{deces}^{incap,(i)} (12k + 1) + PM_{inval_attente}^{deces,(i)} (12k + 1) & 1 \leq k \leq 2 \\ PM_k^{DC,(i)} = 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

TABLEAU 15 – Provisions si l'assuré redevient valide dans l'année 3

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times PM_k^{DC,(i)}$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times PM_k^{AT,(i)}$
XS	$PM_{XS,k}^{DC,(i)} = \min\left(\max(PM_k^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR\right)$	$PM_{k,XS}^{AT,(i)} = \min\left(\max\left(\sum_{j=1}^k S_j^{AT,(i)} + PM_k^{AT,(i)} - PRIO; 0\right); POR\right) - \sum_{j=1}^{k-1} S_{j,XS}^{AT,(i)}$
QP + XS	$PM_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = PM_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{DC,(i)}$	$PM_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = PM_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{AT,(i)}$

Passage en état d'invalidité après un temps T_{inc} passé en incapacité

Nous avons pour la garantie arrêt de travail :

$$\begin{cases} PM_k^{AT,(i)} = PM_{maintien}^{incap,(i)}(12k+1) + PM_{attente}^{inval,(i)}(12k+1) & 1 \leq k \leq 2 \\ PM_k^{AT,(i)} = PM_{maintien}^{inval,(i)}(k-2) & 3 \leq k \leq T_{inv} + 1 \\ PM_k^{AT,(i)} = 0 & k \geq T_{inv} + 2 \end{cases}$$

Puis, pour la garantie décès :

$$\begin{cases} PM_k^{DC,(i)} = PM_{deces}^{incap,(i)}(12k+1) + PM_{inval_attente}^{deces,(i)}(12k+1) & 1 \leq k \leq 2 \\ PM_k^{DC,(i)} = PM_{deces}^{inval,(i)}(k-2) & 3 \leq k \leq T_{inv} + 1 \\ PM_k^{DC,(i)} = 0 & k \geq T_{inv} + 2 \end{cases}$$

TABLEAU 16 – Provisions si l'assuré devient invalide dans l'année 3

Traité	Provisions DC	Provisions AT
QP	$PM_{QP,k}^{DC,(i)} = QP \times PM_k^{DC,(i)}$	$PM_{QP,k}^{AT,(i)} = QP \times PM_k^{AT,(i)}$
XS	$PM_{XS,1}^{DC,(i)} = \min\left(\max(PM_1^{DC,(i)} - PRIO; 0); POR\right)$	$PM_{k,XS}^{AT,(i)} = \min\left(\max\left(\sum_{j=1}^k S_j^{AT,(i)} + PM_k^{AT,(i)} - PRIO; 0\right); POR\right) - \sum_{j=1}^{k-1} S_{j,XS}^{AT,(i)}$ Puis $PM_{XS,k}^{DC,(i)} = 0 \quad k \geq 3$
QP + XS	$PM_{QP+XS,k}^{DC,(i)} = PM_{QP,k}^{DC,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{DC,(i)}$	$PM_{QP+XS,k}^{AT,(i)} = PM_{QP,k}^{AT,(i)} + (1 - QP) \times PM_{XS,k}^{AT,(i)}$

Troisième partie

**Analyses et utilisation des
résultats**

6 Valorisation de la clause de PB

6.1 Paramètres par défaut de la simulation

Taux techniques

Les taux techniques Vie et Non Vie sont pris égaux à ceux du 1^{er} janvier 2021. C'est à dire 0% pour le taux Vie et 0,02% pour le taux Non Vie.

Niveaux de Priorité et Portée

Les niveaux de priorité et portée sont étalonnés à l'aide d'un portefeuille de Travailleurs Non Salariés de SCOR. En effet, ces niveaux sont calibrés de telle sorte que 20% des capitaux sous risque soient supérieurs à la priorité et que 0,25% des capitaux sous risque traversent la portée.

Autres paramètres

Les valeurs par défaut des autres paramètres (frais réel du réassureur, frais de PB, taux de PB) sont pris en fonction des caractéristiques classiques des traités de réassurance signés sur le marché français.

TABLEAU 17 – Paramètres par défaut du traité

Paramètre	Valeur par défaut
Taux technique Vie r^{DC}	0%
Taux technique Non Vie r^{AT}	0,02%
Quote Part QP	50%
Priorité PRIO	150 000
Portée POR	300 000
Taux de PB t^{PB}	50%
Frais de PB f^{PB}	5%
Coûts réels du Réassureur c	10%

6.2 Caractéristiques par défaut du portefeuille simulé

Âge moyen du portefeuille

L'âge moyen sera pris égal à l'âge moyen d'un portefeuille d'assurés TNS. Nous le fixons à 42 ans en cohérence avec les données de l'INSEE.

Salaire moyen

Le salaire moyen est segmenté par âge. A l'aide des données de l'INSEE ([1]), nous établissons que le salaire moyen de tout TNS confondus est de l'ordre de $age \times 1000$.

Autres caractéristiques

Les autres caractéristiques du portefeuille simulé (capital moyen garanti en cas de décès, part moyenne du salaire garanti en cas d'incapacité et d'invalidité, ancienneté moyenne de la sélection médicale) sont calibrées sur un portefeuille de TNS de SCOR.

TABLEAU 18 – Caractéristiques par défaut du portefeuille

Caractéristique	Valeur par défaut
Nombre d'individus	1000
Âge moyen	42 ans
Salaire moyen	$1000 \cdot \text{âge}$
Capital moyen garanti en cas de décès K_{dc}^{moy}	$3 \cdot \text{salaire}$
Part moyenne du salaire garantie en cas d'incapacité a^{moy}	90%
Part moyenne du salaire garantie en cas d'invalidité b^{moy}	70%
Ancienneté sélection médicale moyenne	4 ans

6.3 Valorisation

6.3.1 Valorisation de la clause de PB sur la combinaison d'une QP et d'un XS avec report de pertes

Convergence

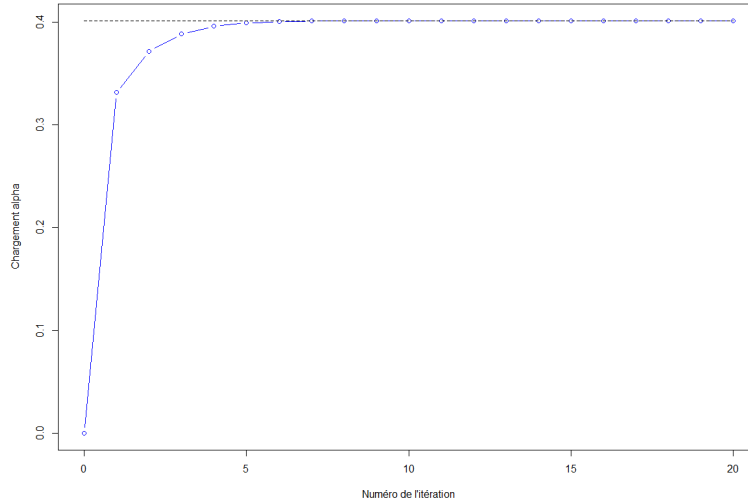


FIGURE 25 – Convergence de α_n avec la procédure du théorème du point fixe

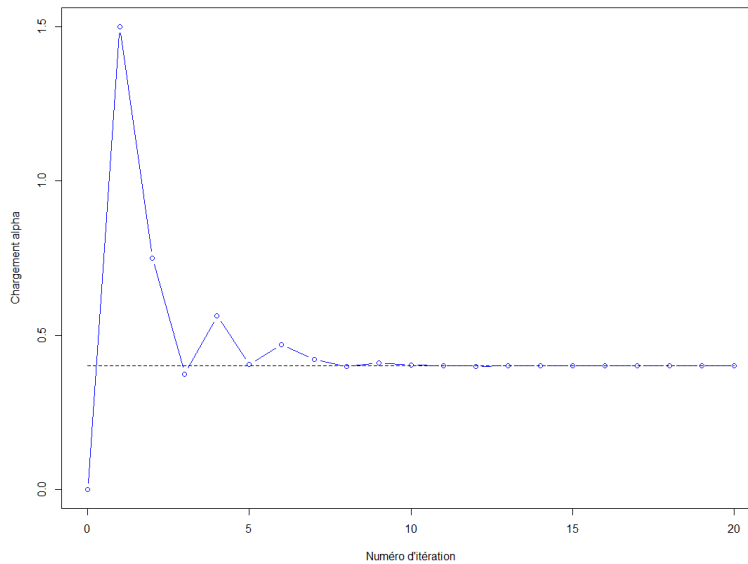


FIGURE 26 – Convergence de α_n avec une recherche dichotomique

Les figures 25 et 26 nous montrent que la convergence est très rapide avec l'utilisation de la procédure du théorème du point fixe : nous entrons dans un intervalle de 10% d'erreur autour du point fixe au bout du troisième tirage.

Nous observons que la convergence est meilleure que celle d'une recherche dichotomique sur l'intervalle [0, 3] (nous prenons une borne supérieure à 3 puisque le chargement α peut parfois excéder 100% avec certains jeux de paramètres).

En prenant les paramètres par défaut définis précédemment nous obtenons un chargement de

$$\alpha = 40,13\%$$

Équilibrage du résultat global sur la projection de la génération étudiée

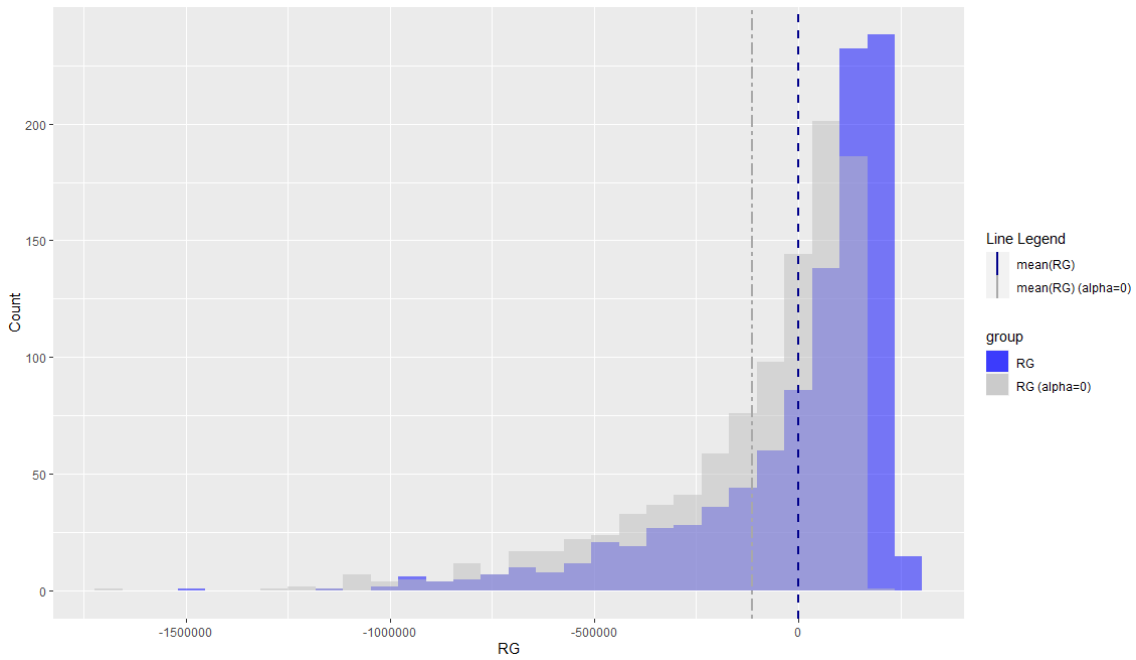


FIGURE 27 – Équilibrage de $\mathbb{E}[R_G]$ grâce au chargement

Sur la figure 27, nous observons que l’ajout du chargement supplémentaire adapté aux caractéristiques du portefeuille et aux paramètres du traité permet de remonter l’espérance de l’indicateur de résultat global, notée $\mathbb{E}[R_G]$ à 0. Nous notons que l’ajout d’une clause de PB dégrade la rentabilité du réassureur en l’absence de chargement.

Part de la PB pour chaque garantie

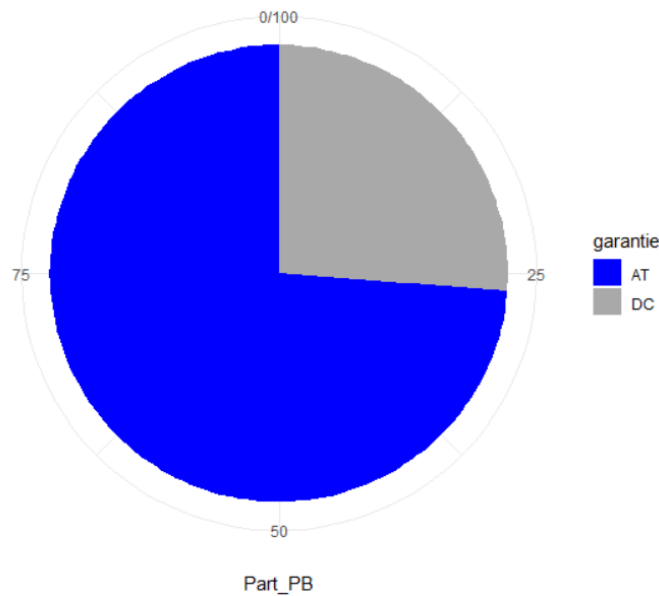


FIGURE 28 – Part de la PB pour chaque garantie

La figure 28 nous montre que la part de la PB reversée par le réassureur est majoritairement due à la garantie arrêt de travail. Ce résultat est directement lié à la part de sinistralité de chaque garantie sur le traité puisque la modélisation développée ne prévoit qu'un seul chargement pour la clause de PB, commun aux deux garanties malgré le fait que ces deux dernières soient traitées dans des comptes séparés.

Effet de mutualisation des garanties

Nous pouvons néanmoins étudier l'effet de mutualisation des deux garanties dans le cas plus réaliste où elles sont traitées sur un même compte de résultat. Pour cela il est nécessaire (dans notre modélisation) de faire l'hypothèse que les taux techniques Vie et Non Vie sont égaux pour pouvoir actualiser les résultats futurs.

Nous pouvons dans ce cas comparer les chargements supplémentaires dans le cas où les garanties décès et arrêt de travail sont traitées sur le même compte (nous noterons le chargement α_1) et dans le cas où elles sont traitées sur deux comptes séparés (nous noterons le chargement α_2).

Il est cohérent d'avoir toujours $\alpha_1 < \alpha_2$ puisque dans le cas 2, la PB versée est toujours supérieure.

TABLEAU 19 – Rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ pour différents niveaux de t^{PB} et f^{PB}

$f^{PB} t^{PB}$	20%	40%	50%	60%	80%
5%	46,8%	64,2%	68,8%	72,4%	80,9%
10%	42,6%	60,4%	64,9%	68,3%	75,1%
15%	37,9%	56,5%	60,9%	64,1%	69,3%
20%	32,9%	52,3%	56,8%	59,9%	63,9%

Nous observons sur le tableau 19 que l'effet de mutualisation des risques arrêt de travail et décès est plus important lorsque t^{PB} est faible puisque le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ devient moins important.

6.3.2 Sans report de pertes

En prenant les paramètres par défaut définis précédemment, nous obtenons sans report de pertes un chargement :

$$\alpha^{\overline{RP}} = 42,94\%$$

Ce chargement est supérieur à celui obtenu en présence d'une clause de PB avec report de pertes. Cela est cohérent puisque l'option de report de pertes permet à l'assureur de partager son sort avec la cédante en cas de résultat négatif. Sans cette clause, les positions de l'organisme assureur et du réassureur vis-à-vis du traité sont déséquilibrées : le réassureur verse une PB en cas de résultat excédentaire mais subit seul les pertes en cas de résultat déficitaire.

Cette option diminue le résultat du compte de PB à partir du deuxième exercice. Ainsi, la PB diminue et le chargement également.

Cherchons à démontrer analytiquement que $\alpha^{\overline{RP}} > \alpha$. Nous définissons $R_k^{PB, \overline{RP}}$, le résultat du compte de PB en l'absence de report de pertes.

Pour une meilleure visibilité, nous nous restreignons au cas où les taux techniques Vie et Non Vie sont égaux : $r^{DC} = r^{AT} = r$.

Nous avons, pour $k \geq 2$, en cas de report de pertes :

$$\begin{cases} R_1^{PB} = PP - S_1 - f^{PB} \times P - PM_1 \\ R_k^{PB} = PM_{k-1} \times (1 + r) - S_k - PM_k + \min(R_{k-1}^{PB}, 0) \end{cases}$$

Puis, sans report de pertes :

$$\begin{cases} R_1^{PB, \overline{RP}} = PP - S_1 - f^{PB} \times P - PM_1 \\ R_k^{PB, \overline{RP}} = PM_{k-1} \times (1+r) - S_k - PM_k \end{cases}$$

Ainsi nous avons $R_1^{PB} = R_1^{PB, \overline{RP}}$ et pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} R_k^{PB} - R_k^{PB, \overline{RP}} &= \min(R_{k-1}^{PB}; 0) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 2$,

$$R_k^{PB} \leq R_k^{PB, \overline{RP}}$$

Or les chargements α et $\alpha^{\overline{RP}}$ vérifient les équations :

$$\begin{cases} \alpha = t^{PB} \left(\frac{1}{1+r} \mathbb{E} \left[(1+c+\alpha)(1-f^{PB})(1+r) - \frac{S_1}{PP} - \frac{PM_1}{PP} \right]^+ + \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] \right) \\ \alpha^{\overline{RP}} = t^{PB} \left(\frac{1}{1+r} \mathbb{E} \left[(1+c+\alpha)(1-f^{PB})(1+r) - \frac{S_1}{PP} - \frac{PM_1}{PP} \right]^+ + \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB, \overline{RP}}}{PP}; 0 \right) \right] \right) \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\alpha - \alpha^{\overline{RP}}}{t^{PB}} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{(1+r)^k} \cdot \left(\mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] - \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB, \overline{RP}}}{PP}; 0 \right) \right] \right)$$

Or comme $PP > 0$ et par croissance de l'application $x \mapsto \max(0, x)$, nous avons :

$$\max \left(\frac{R_k^{PB, \overline{RP}}}{PP}; 0 \right) \geq \max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right)$$

Puis par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB}}{PP}; 0 \right) \right] - \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{R_k^{PB, \overline{RP}}}{PP}; 0 \right) \right] \leq 0$$

Alors :

$$\frac{\alpha - \alpha^{\overline{RP}}}{t^{PB}} \leq 0$$

Donc nous en concluons :

$$\boxed{\alpha^{\overline{RP}} \geq \alpha}$$

6.3.3 Valorisation de la clause de PB sur une QP et sur un XS

Valorisation de la clause de PB sur une QP seule

En reprenant les paramètres par défaut définis précédemment, nous obtenons pour un traité proportionnel (QP de 50%) un chargement de

$$\boxed{\alpha = 31,573\%}$$

Valorisation de la clause de PB sur un XS seul

En reprenant les paramètres par défaut définis précédemment, nous obtenons pour un traité XS (Priorité à 150 000 et Portée à 300 000) un chargement de

$$\alpha = 64,709\%$$

La différence s'explique par la volatilité des résultats sur un traité XS. En effet, sur une QP le réassureur intervient sur tous les sinistres à la différence d'un XS où les sinistres sont tronqués. Cela permet d'ajuster sa prime pure avec une meilleure précision. La volatilité des résultats entraîne alors une augmentation de la PB et du chargement α .

7 Analyse des sensibilités

7.1 Sensibilité aux paramètres du modèle pour un traité type QP+XS

7.1.1 Coûts réels du réassureur

Nous faisons varier les coûts du réassureur (c) entre 0% et 30% avec un pas de 2% pour observer la variation du chargement supplémentaire et du résultat.

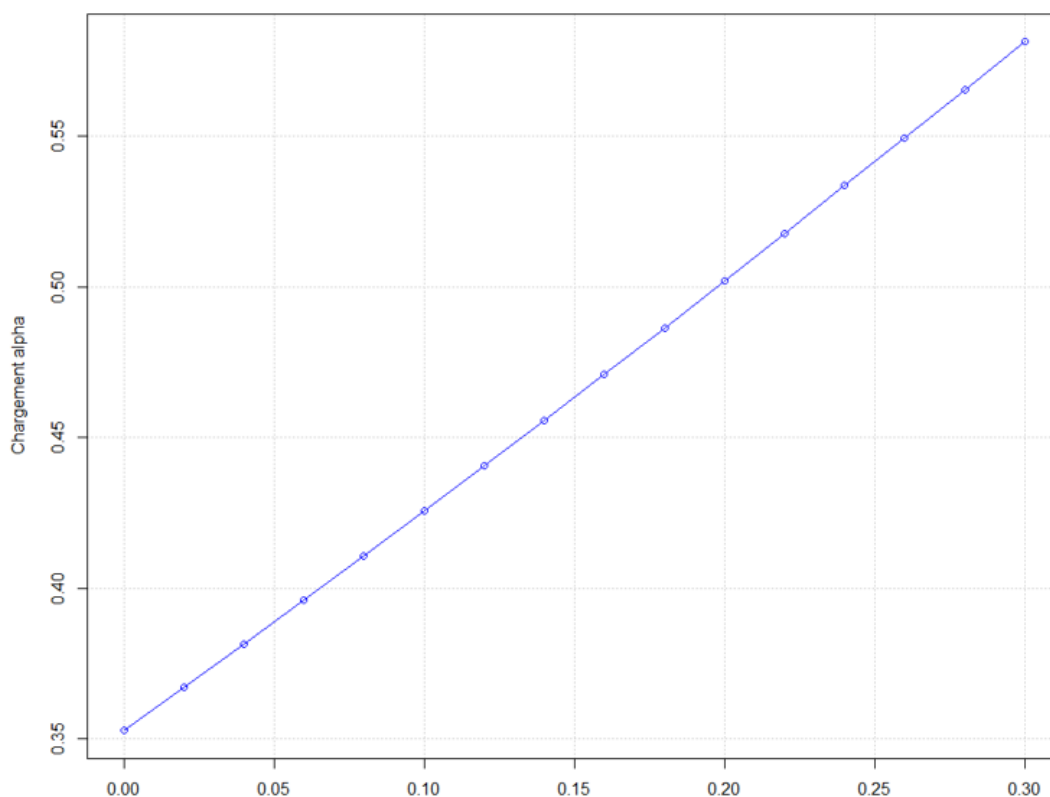


FIGURE 29 – Évolution de α par rapport à c

Interprétation :

Nous observons une croissance affine du chargement nécessaire pour couvrir la clause de PB lorsque les frais du réassureur augmentent, tous paramètres égaux par ailleurs. L'augmentation des frais du réassureur induit une augmentation du résultat du compte de PB pour la première année. Ce compte étant déjà bénéficiaire en moyenne (annexe A), devient encore plus excédentaire. Nous avons alors logiquement une augmentation de la participation aux bénéfices versée en première année. Ainsi, la couverture de la clause nécessite un chargement α plus élevé.

Cherchons maintenant à trouver analytiquement une expression de la pente de cette courbe.

Nous partons de l'équation vérifiée par α :

$$\begin{aligned} \alpha = & t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left(\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right)^+ \right] \\ & + t^{PB} \cdot \mathbb{E} \left[\left(\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right)^+ \right] \\ & + t^{PB} \left(\sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E} \left[\left(R_k^{PB,DC} / PP \right)^+ \right]}{(1+r^{DC})^k} + \frac{\mathbb{E} \left[\left(R_k^{PB,AT} / PP \right)^+ \right]}{(1+r^{AT})^k} \right) \end{aligned}$$

Nous faisons ensuite les hypothèses cohérentes empiriquement (voir annexe A où nous observons que $R_1^{DC,PB}$ et que $R_1^{DC,PB}$ sont généralement positifs) que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right)^+ \right] = \mathbb{E} \left[\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right]$$

et que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right)^+ \right] = \mathbb{E} \left[\frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) - \frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right]$$

Nous pouvons sortir les premières parties des espérances puisqu'elles ne sont pas aléatoires. Nous récrivons l'équation vérifiée par α :

$$\begin{aligned} \alpha = & t^{PB} \cdot \left[\frac{PP^{DC}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) + \frac{PP^{AT}}{PP} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) \right] + A \\ = & t^{PB} (1+c+\alpha)(1-f^{PB}) + A \end{aligned}$$

où $A = t^{PB} \left(\cdot \mathbb{E} \left[-\frac{1}{1+r^{DC}} \left(\frac{S_1^{DC}}{PP} + \frac{PM_1^{DC}}{PP} \right) \right] + \cdot \mathbb{E} \left[-\frac{1}{1+r^{AT}} \left(\frac{S_1^{AT}}{PP} + \frac{PM_1^{AT}}{PP} \right) \right] \right) + t^{PB} \left(\sum_{k=2}^N \frac{\mathbb{E} \left[\left(R_k^{PB,DC} / PP \right)^+ \right]}{(1+r^{DC})^k} + \frac{\mathbb{E} \left[\left(R_k^{PB,AT} / PP \right)^+ \right]}{(1+r^{AT})^k} \right)$ est constant par rapport à c et α .

Nous en déduisons la pente de la courbe :

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dc} = \frac{t^{PB}(1-f^{PB})}{1-t^{PB}(1-f^{PB})}}$$

L'application numérique pour les valeurs par défaut définies en 6.1 nous donne $\frac{d\alpha}{dc} = 0.905$, ce qui est cohérent avec le graphique.

En effectuant une régression linéaire de type $\alpha = A \times c + B$ sur ces données, nous avons les résultats suivants :

$$\begin{cases} A = 0.7628965 \\ B = 0.3504058 \\ R^2 = 0.9997 \end{cases}$$

Le coefficient est significatif à tous les niveaux de confiance habituels (1%, 5%).

Nous retrouvons un résultat proche de celui déterminé analytiquement. La différence peut s'expliquer par l'approximation effectuée sur la formule du chargement α pour le calcul analytique.

7.1.2 Frais du réassureur au titre du compte de participation aux bénéfices

Nous faisons varier les frais du compte de PB (f^{PB}) entre 0% et 30% avec un pas de 2% pour observer la variation du chargement supplémentaire.

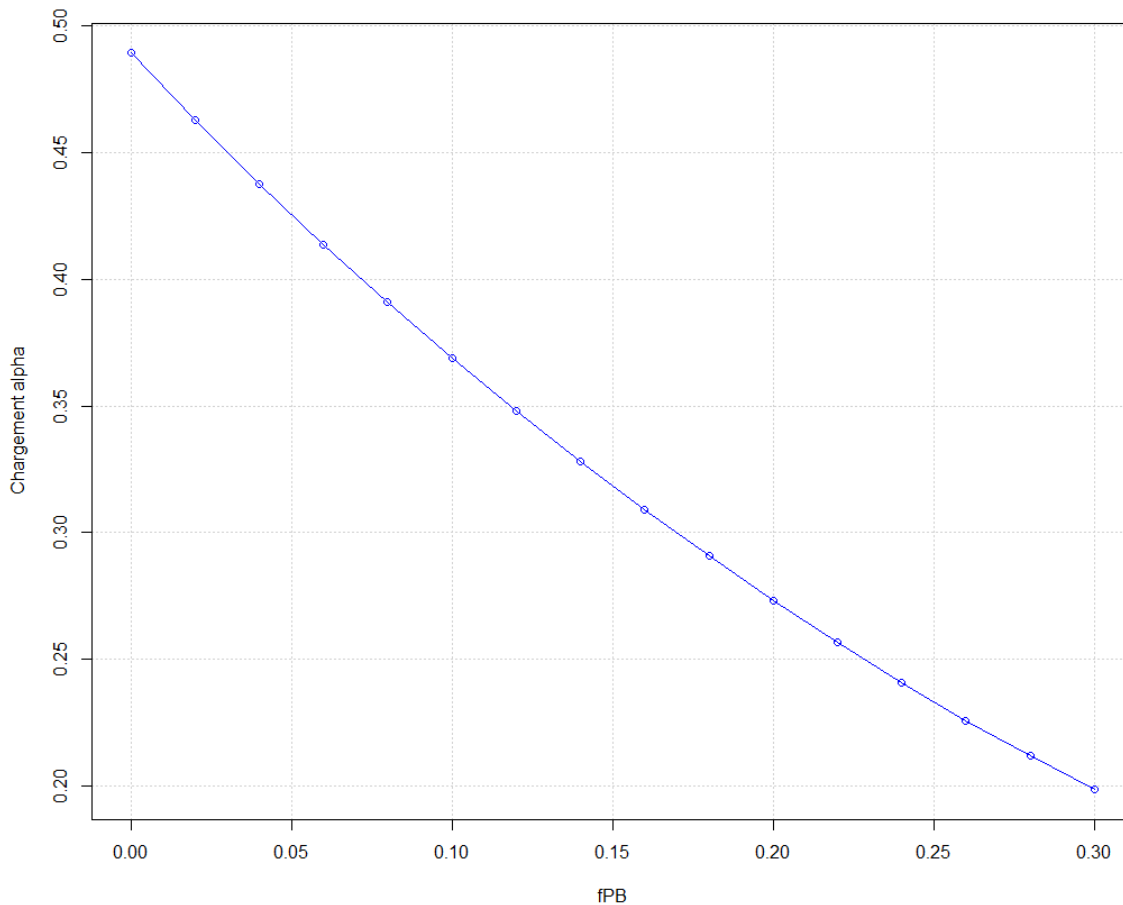


FIGURE 30 – Évolution de α par rapport à f^{PB}

Interprétation :

Nous observons une décroissance légèrement convexe du chargement : l'augmentation des frais de PB, tous paramètres égaux par ailleurs, induit une diminution du résultat du compte de PB en première année (qui est quasi systématiquement bénéficiaire) et donc une diminution de la participation aux bénéfices versée cette année. Ainsi, le chargement α nécessaire pour couvrir la clause diminue logiquement : lorsque f^{PB} devient élevé, la clause de PB fait intervenir des montants plus faibles.

Cherchons maintenant à prouver la convexité de la courbe :

Nous repartons de la même équation établie sur l'analyse précédente :

$$\alpha = t^{PB}(1 + c + \alpha)(1 - f^{PB}) + A$$

où A est constant par rapport à f^{PB} et α .

Ainsi en réajustant nous avons :

$$\alpha = \frac{t^{PB}(1+c)(1-f^{PB})}{1-t^{PB}(1-f^{PB})}$$

Nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{df^{PB}} &= \frac{-t^{PB}(1+c) \cdot (1-t^{PB}(1-f^{PB})) - t^{PB} \cdot (t^{PB}(1+c)(1-f^{PB}))}{(1-t^{PB}(1-f^{PB}))^2} \\ &= \frac{-t^{PB}(1+c)}{(1-t^{PB}(1-f^{PB}))^2} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d(f^{PB})^2} &= -t^{PB}(1+c) \cdot \frac{-2 \cdot t^{PB}(1-t^{PB}(1-f^{PB}))}{(1-t^{PB}(1-f^{PB}))^4} \\ &= \frac{2(t^{PB})^2(1+c)(1-t^{PB}(1-f^{PB}))}{(1-t^{PB}(1-f^{PB}))^4} \end{aligned}$$

Or comme nous avons, par hypothèse (adoptée à la section 3), $1 > 1 - t^{PB}(1 - f^{PB}) > 0$, nous en déduisons :

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{d(f^{PB})^2} > 0}$$

D'où la légère convexité observée sur la figure.

7.1.3 Taux de participation aux bénéfices

Nous faisons varier le taux de PB (t^{PB}) entre 0% et 95% avec un pas de 5% et nous observons son impact sur le chargement α , tous paramètres constants par ailleurs.

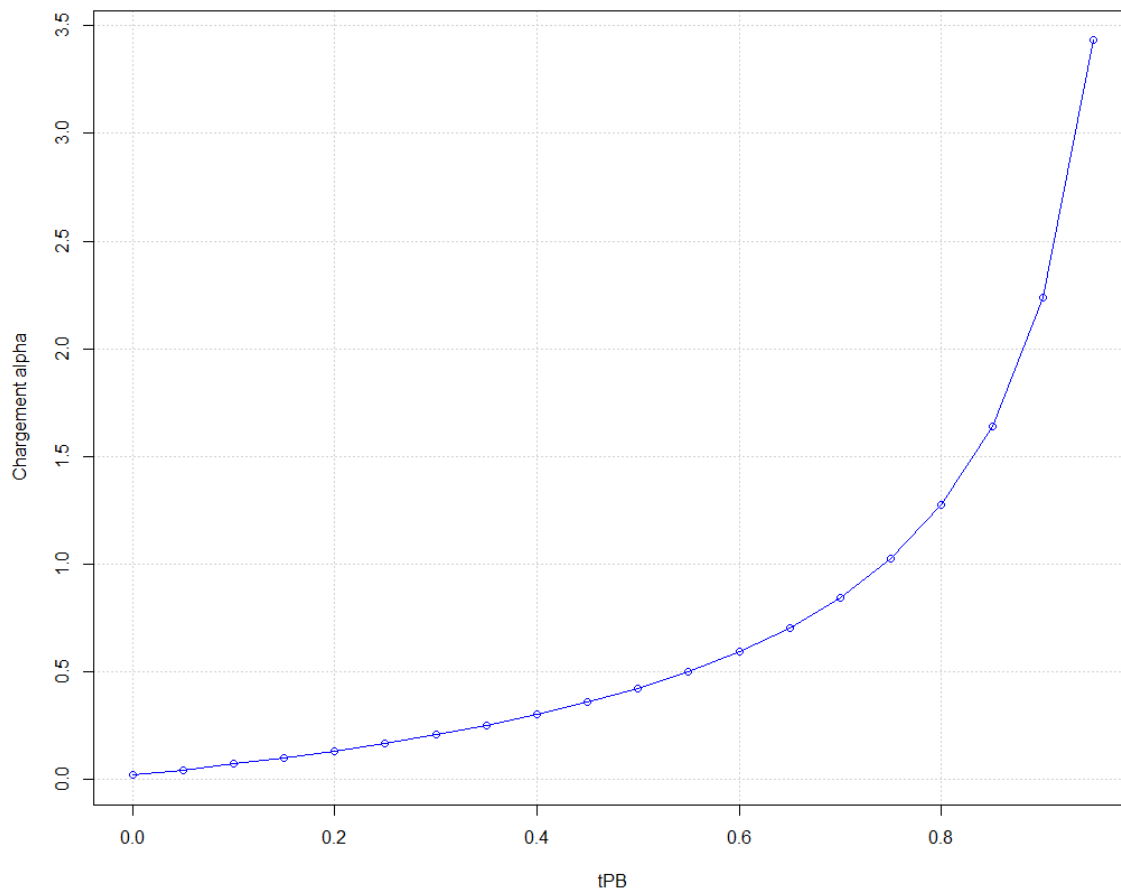


FIGURE 31 – Évolution de α par rapport à t^{PB}

Interprétation :

Nous observons une augmentation convexe du chargement : lorsque le taux de PB t^{PB} augmente, le montant de participation aux bénéfices à reverser croît pour chaque année où le résultat du compte de PB est supérieur à 0. Ainsi, une augmentation du chargement α est nécessaire pour couvrir la PB versée.

Il est également cohérent d'avoir un chargement $\alpha \approx 0\%$ lorsque $t^{PB} = 0\%$. Si nous ne versons pas de participation aux bénéfices, il n'y a pas lieu d'ajouter un chargement supplémentaire pour couvrir cette clause. Sur le graphique, le chargement α est légèrement supérieur à 0 puisqu'il vient couvrir la différence entre la PP estimée et la somme actualisée des sinistres sur la trajectoire réelle simulée. Le chargement initialement introduit pour ramener l'indicateur de résultat global $\mathbb{E}[R_G]$ à 0 en présence de la clause de PB vient ici uniquement couvrir une légère déviation de la sinistralité sur la trajectoire réelle simulée.

Cherchons maintenant à démontrer analytiquement la convexité de la courbe.

Nous repartons de la formule pour établir que

$$\alpha = t^{PB}(1 + c + \alpha)(1 - f^{PB}) + t^{PB} \cdot A$$

où A est indépendant de t^{PB} et de α .

Ainsi nous en déduisons que :

$$\alpha = \frac{t^{PB} [(1 + c)(1 - f^{PB}) + A]}{1 - t^{PB}(1 - f^{PB})}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt^{PB}} &= \frac{[(1 + c)(1 - f^{PB}) + A][1 - t^{PB}(1 - f^{PB})] + (1 - f^{PB}) \cdot t^{PB} [(1 + c)(1 - f^{PB}) + A]}{(1 - t^{PB}(1 - f^{PB}))^2} \\ &= \frac{(1 + c)(1 - f^{PB}) + A}{(1 - t^{PB}(1 - f^{PB}))^2} \end{aligned}$$

Puis,

$$\frac{d^2\alpha}{d(t^{PB})^2} = \frac{[(1 + c)(1 - f^{PB}) + A] \cdot 2(1 - f^{PB})(1 - t^{PB}(1 - f^{PB}))}{(1 - t^{PB}(1 - f^{PB}))^4}$$

Le signe de $\frac{d^2\alpha}{d(t^{PB})^2}$ dépend donc entièrement de la positivité de $B = (1 + c)(1 - f^{PB}) + A$.

La variable B est aléatoire et ne possède pas de support clairement défini. Ainsi, nous traçons un histogramme empirique sur 1000 simulations de la variable B (figure 32).

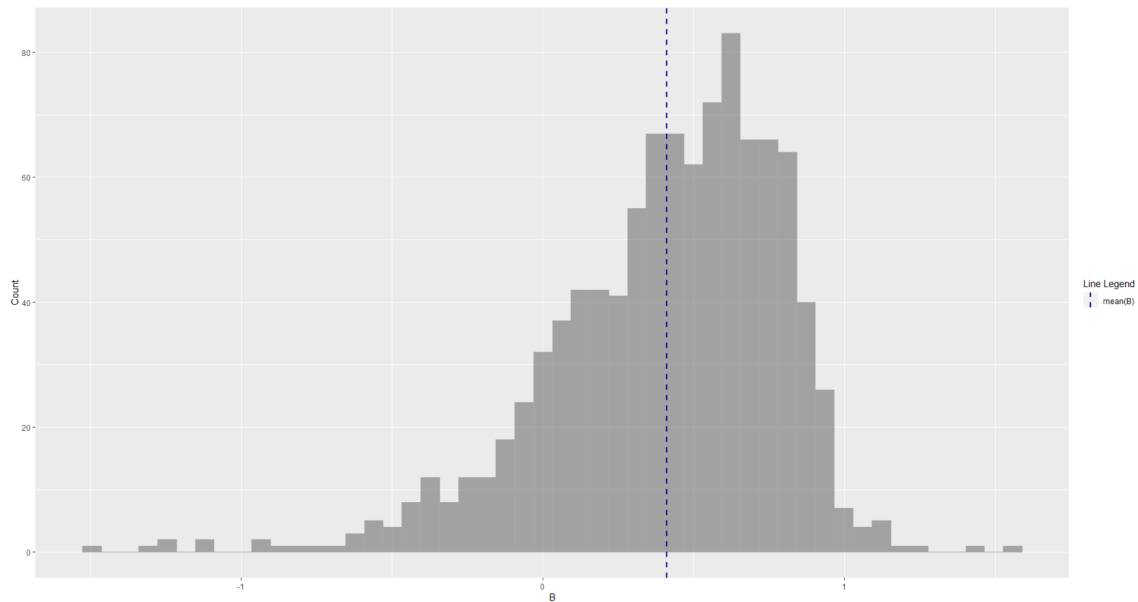


FIGURE 32 – Positivité de la variable B

Sur ces 1000 simulations, nous obtenons une moyenne empirique de $\bar{B} = 0.41$ et un quantile à 10% de 0.0473914. Ainsi, nous pouvons considérer que

$$\frac{d^2\alpha}{d(t^{PB})^2} > 0$$

D'où la convexité observée sur le graphique.

7.1.4 Paramètres de la couverture du traité de réassurance

Quote Part

Nous faisons varier la Quote Part de 0% à 95% avec des pas de 5% et nous observons l'impact de cette variation, toutes choses égales par ailleurs, sur le chargement α .

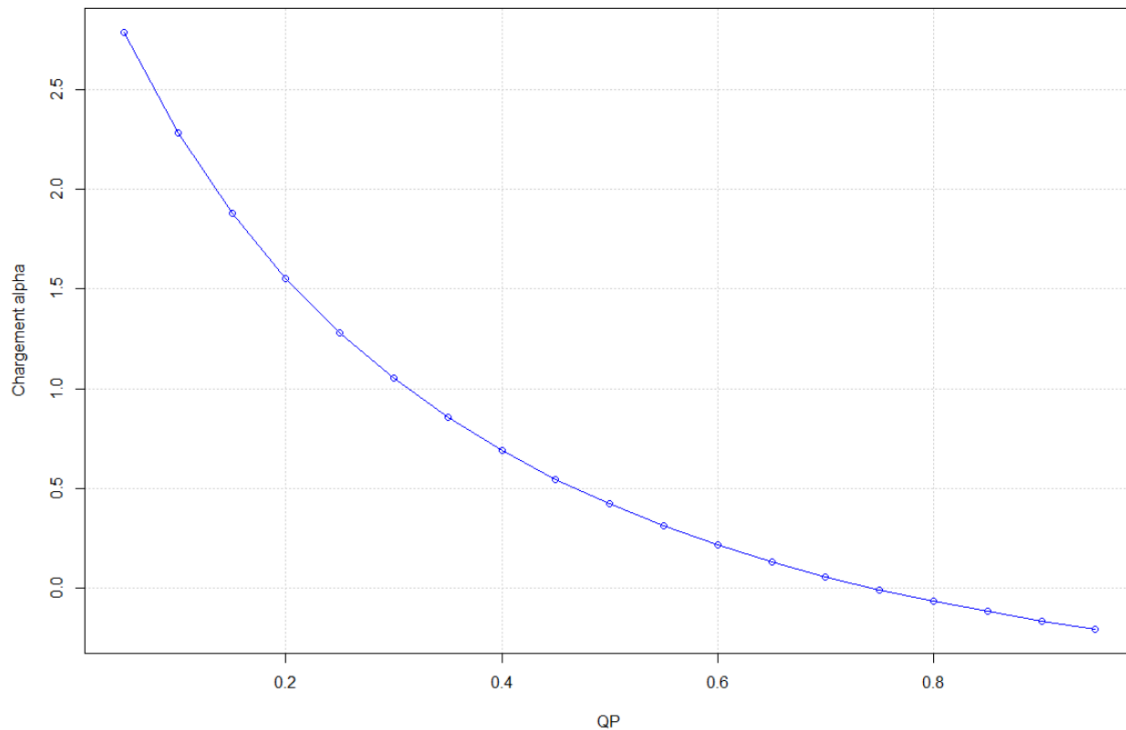


FIGURE 33 – Évolution de α par rapport à QP

Interprétation :

Nous observons que la QP a un impact négatif important sur le chargement α . La décroissance s'explique par le fait qu'une QP faible fait porter plus de poids à l'XS sur le contrat de réassurance. Or l'XS apporte de la volatilité au résultat du réassureur et du compte de PB. Cela entraîne donc une augmentation de la PB et donc du chargement supplémentaire. En faisant croître la QP, on atténue la volatilité et α diminue.

Dans le tableau, nous observons que α devient négatif entre 70% et 80%. Cela signifie que l'espérance de l'indicateur de résultat global $\mathbb{E}[R_G]$ reste strictement positif en prenant en compte la PB et sans ajouter de chargement supplémentaire α . Le chargement supplémentaire étant défini dans la section 3 comme le chargement nécessaire pour ramener $\mathbb{E}[R_G]$ à une valeur nulle, il devient alors négatif.

Néanmoins, il est évident que dans une telle situation, le réassureur n'appliquera en aucun cas un chargement négatif dans son processus de tarification. En revanche, si cette étude est menée par la cédante, il est probable qu'elle négocie une augmentation de sa commission de réassurance.

Priorité et Portée

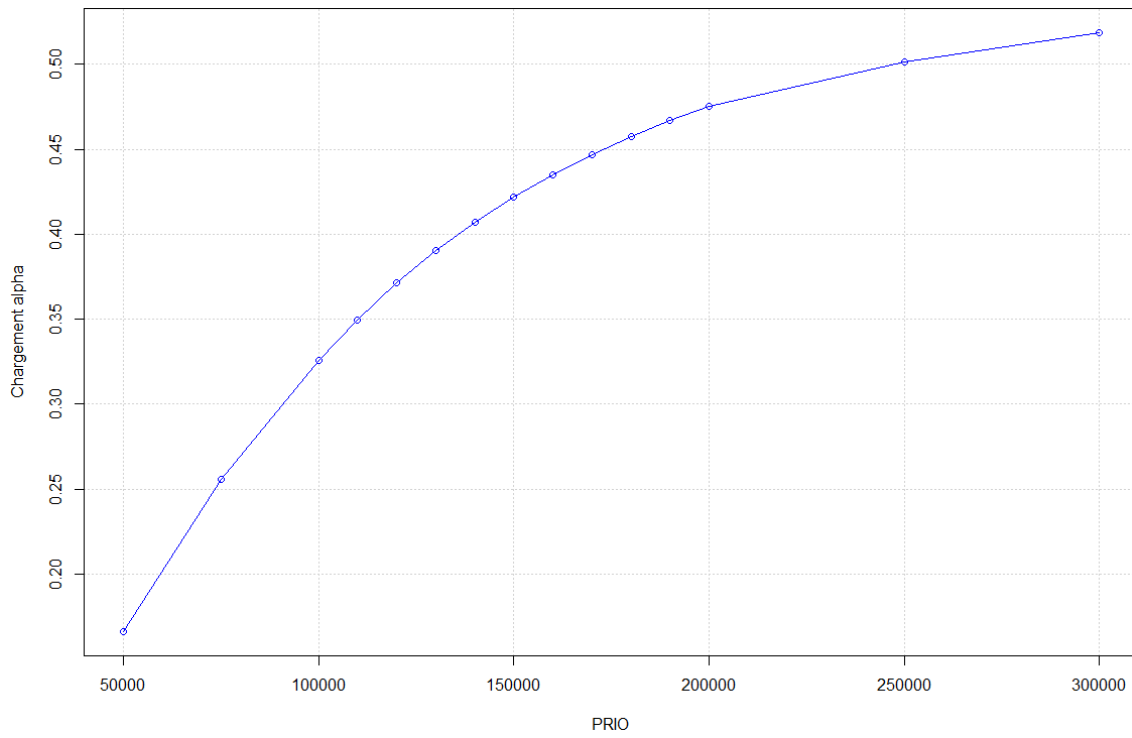


FIGURE 34 – Évolution de α par rapport à PRIO

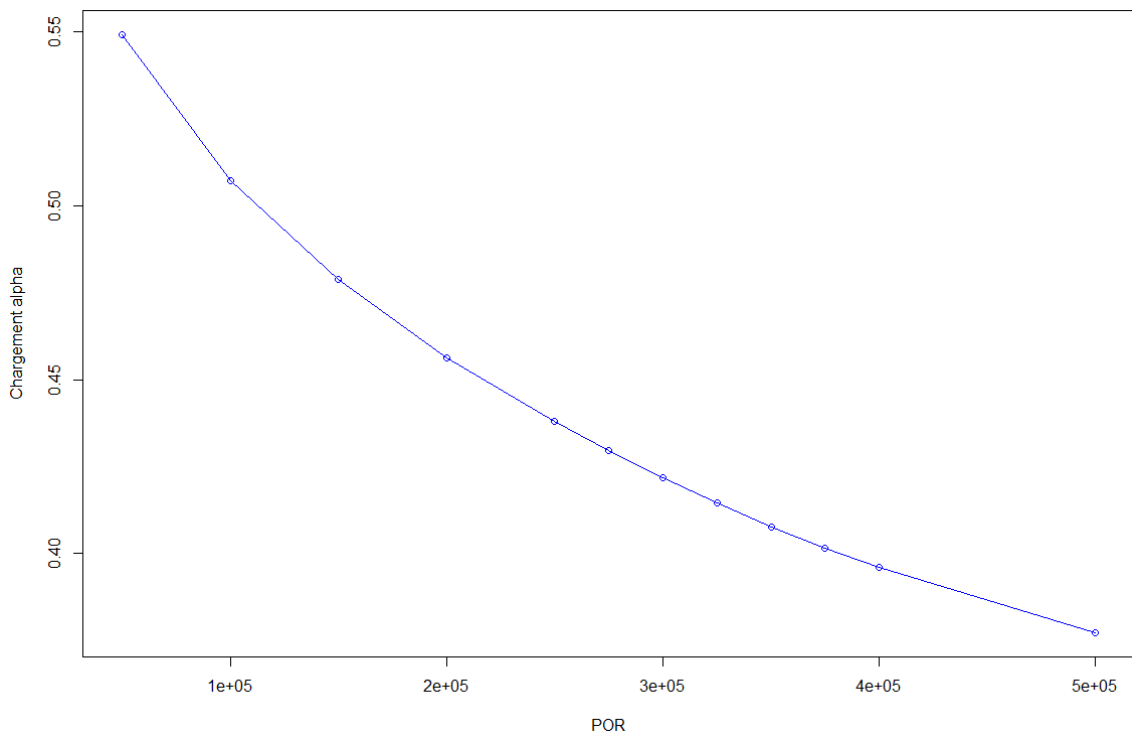


FIGURE 35 – Évolution de α par rapport à POR

Interprétation :

L'augmentation de la priorité vient diminuer la part de sinistralité à la charge du réassureur. La calibration de la prime pure est donc effectuée sur un résultat moins stable et les résultats du compte de PB sont plus volatils. Ainsi, la PB augmente et le chargement α croît également.

A contrario, l'augmentation de la portée, toutes choses égales par ailleurs, vient accroître la part de sinistralité et diminuer la volatilité du résultat du réassureur et du compte de PB. La part de PB reversée décroît entraînant une baisse du chargement α . Nous observons que cette décroissance est concave.

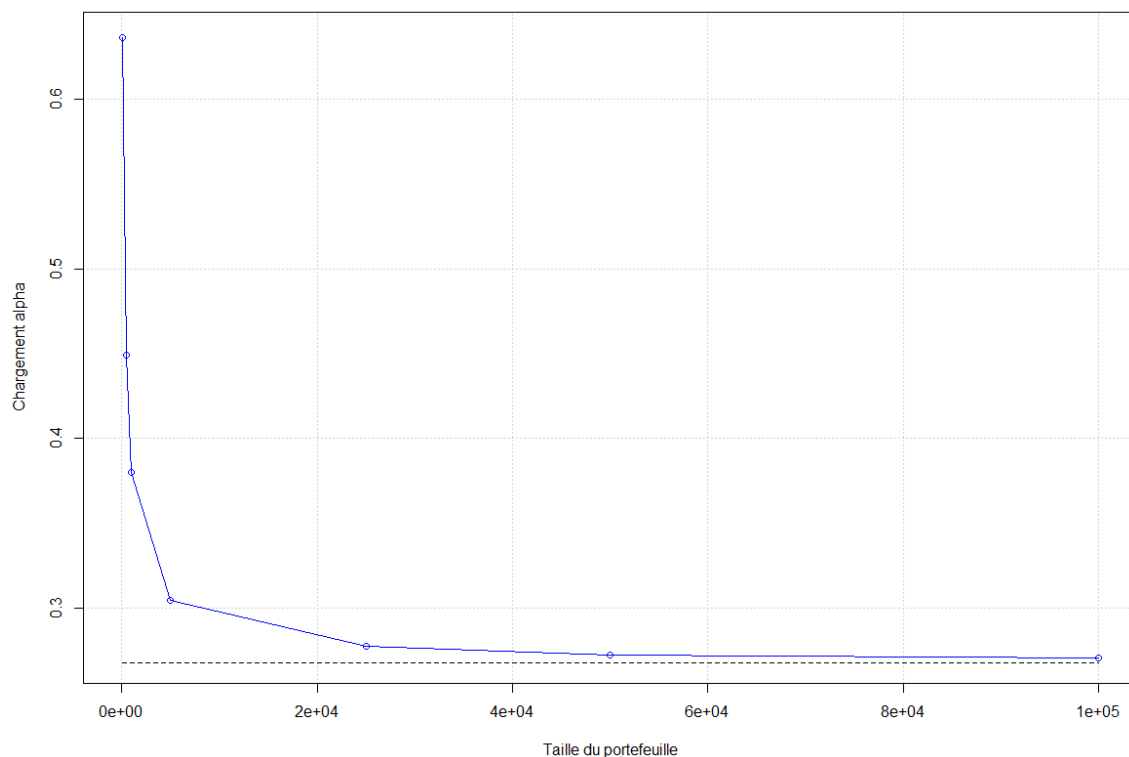
7.2 Sensibilité aux caractéristiques du portefeuille**7.2.1 Taille du portefeuille**

FIGURE 36 – Évolution de α par rapport à la taille du portefeuille

Interprétation :

Nous observons une décroissance que nous pouvons qualifier d'exponentielle. Elle est due à une meilleure mutualisation des risques (à la fois décès et arrêt de travail) lorsque le nombre d'assurés dans le portefeuille augmente. Cette mutualisation permet de réduire le chargement jusqu'à une asymptote.

Cela est cohérent avec une option très particulière parfois rédigée dans certains traités : la clause de PB prend effet uniquement si la taille du portefeuille dépasse un certain seuil prédéfini. Nous voyons que le réassureur cherche par là à limiter le coût de la PB. Cette option est relativement courante lorsque la cédante demande une PB sur un nouveau produit d'assurance sur lequel sa capacité de souscription est incertaine.

7.2.2 Âge moyen du portefeuille

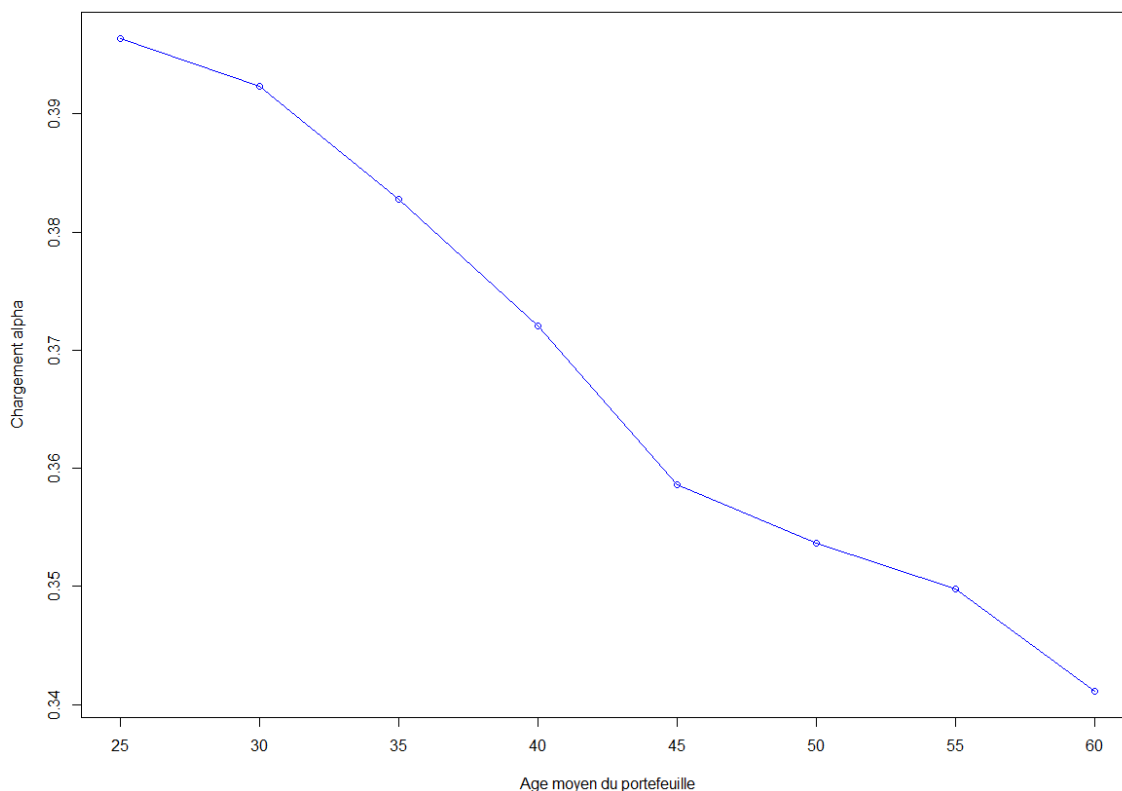


FIGURE 37 – Évolution de α par rapport à l'âge moyen du portefeuille

Interprétation :

Nous observons que l'augmentation de l'âge moyen du portefeuille entraîne une diminution des montants de sinistres potentiels en arrêt de travail puisque les assurés se rapprochent de l'âge de départ à la retraite. Ainsi, la part de la volatilité du résultat du réassureur qui était due aux assurés restant en invalidité est réduite puisque la durée de maintien en arrêt de travail est plus courte et plus certaine. Par conséquent, le chargement α décroît.

Les tableaux des sensibilités abordées dans cette partie ainsi que ceux relatifs à la sensibilité du chargement à d'autres paramètres sont disponibles en annexe D.

8 Cas pratiques d'utilisation

8.1 Cas pratique 1 : *Loss Ratio* < 100%

Soit une Quote Part de 50% où le *Loss Ratio* (non chargé) S/PP est connu. La cédante souhaite instaurer une clause de participation aux bénéfices. Le réassureur possède un seuil de rentabilité limite acceptable qui se manifeste par un niveau de *Value at Risk* à 90% ($Var_{90\%}$).

L'objectif est dans un premier temps de déterminer le taux de PB limite au dessus duquel l'indicateur de résultat global du réassureur devient négatif. Face à un taux de PB plus élevé que cette limite, le réassureur a deux possibilités :

- Accepter une rentabilité dégradée (indicateur de résultat global négatif) et maintenir son tarif
- Demander une prime de réassurance supplémentaire sous la forme d'un chargement adapté

Dans un second temps, le but sera donc de trouver le couple (α, t^{PB}) le plus adapté à son seuil de rentabilité dans le cas où le réassureur choisit la deuxième possibilité.

Nous considérons que le *Loss Ratio* est connu et est de

$$LR = \frac{S}{PP} = 70\%$$

8.1.1 Cas 1 : Pas de participation aux bénéfices et pas de chargement

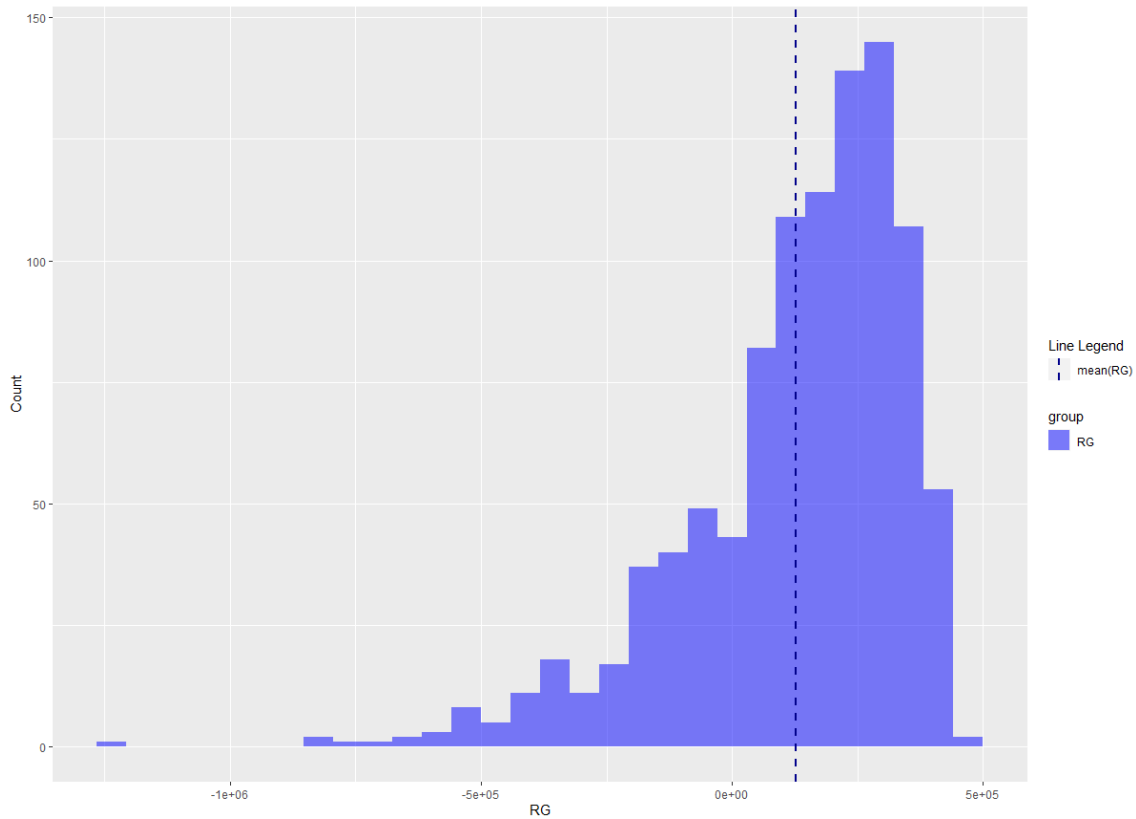


FIGURE 38 – Distribution empirique de R_G

Sur 1000 simulations, nous avons :

$$\mathbb{E}[R_G] \approx \overline{R_G} = 138\,215$$

La rentabilité du réassureur est très intéressante, le *Loss Ratio* étant bien en dessous de 1. Il est classique dans ce cas de voir la cédante demander d'inclure une clause de participation aux bénéfices pour réduire sa perte de résultat due à la couverture en réassurance.

8.1.2 Cas 2 : Participation aux bénéfices sans chargement supplémentaire

Dans cette partie, nous allons voir que l'ajout de la participation aux bénéfices permet à la cédante de récupérer une partie des bénéfices réalisés par le réassureur sur ce contrat.

Néanmoins, si le réassureur n'applique pas de chargement pour couvrir cette clause, nous allons voir qu'à partir d'un certain niveau de PB, le résultat dégagé par le réassureur ne suffit plus à couvrir ses frais et sa rentabilité est dégradée (indicateur de résultat global négatif).

TABLEAU 20 – Indicateur de résultat global pour différents niveaux de t^{PB}

t^{PB}	$\mathbb{E}[R_G]$
0%	138 215
5%	125 383
10%	112 550
15%	99 718
20%	86 886
25%	74 053
30%	61 221
35%	48 388
40%	35 556
45%	22 723
50%	9 891
55%	-2 940
60%	-15 773
65%	-28 605
70%	-41 438
75%	-54 270
80%	-67 102
85%	-79 935
90%	-92 767
95%	-105 600

L'indicateur de résultat global du réassureur va rester positif en moyenne jusqu'à un taux de PB égal à 53,5%. Au delà de ce niveau de PB, $\mathbb{E}[R_G]$ sera négative et le réassureur ne couvrira plus ses frais généraux. Il est donc nécessaire d'appliquer un chargement supplémentaire α en vue de couvrir la clause de participation aux bénéfices.

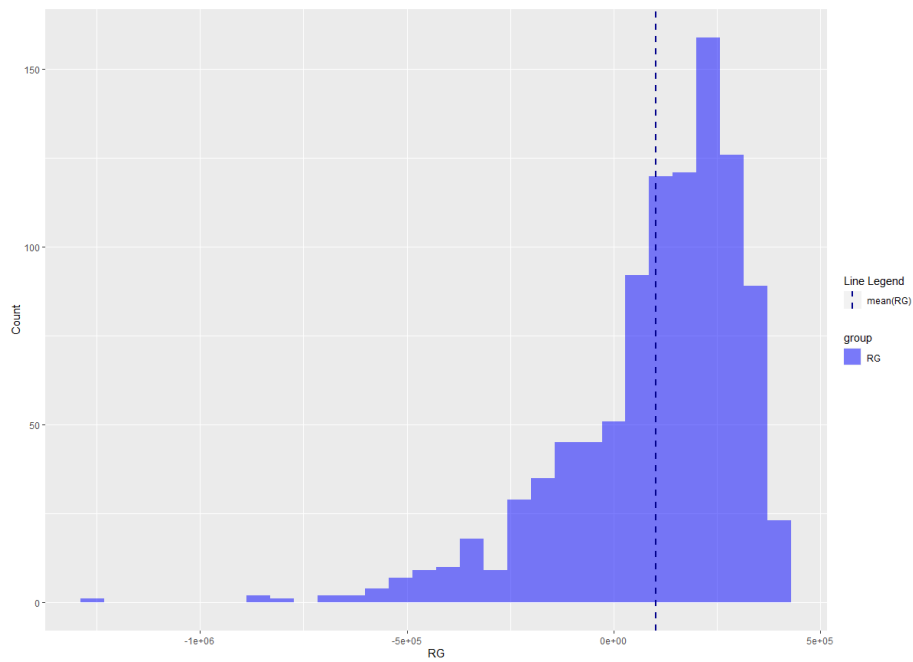


FIGURE 39 – Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 10\%$

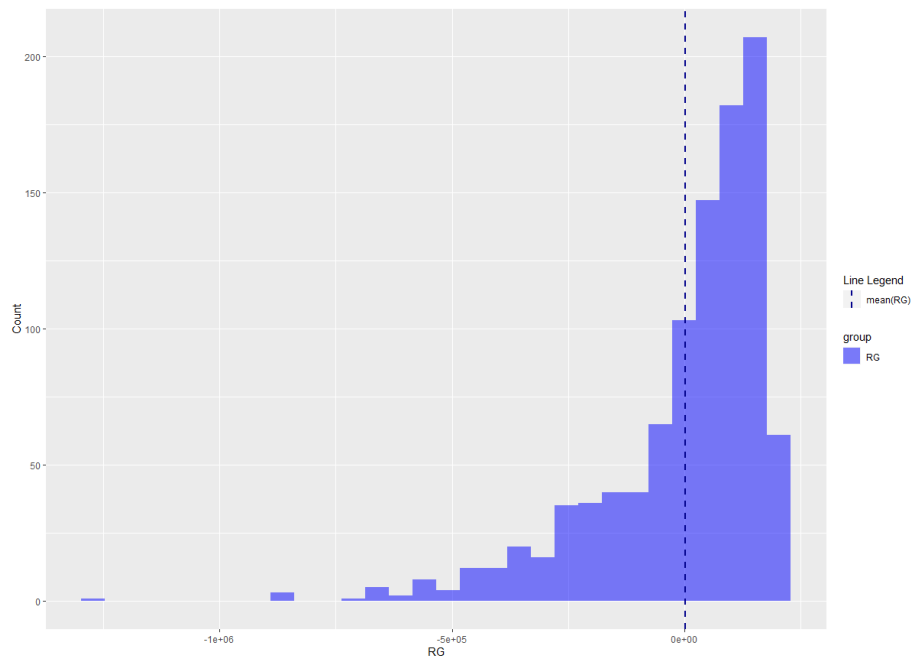


FIGURE 40 – Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 50\%$

Nous remarquons que l'augmentation du taux de PB diminue le résultat global du réassureur R_G . Afin de couvrir la clause PB et de limiter également la volatilité du résultat, nous allons chercher le couple (α, t^{PB}) que le réassureur doit proposer à la cédante pour satisfaire ses contraintes de résultat moyen et de volatilité.

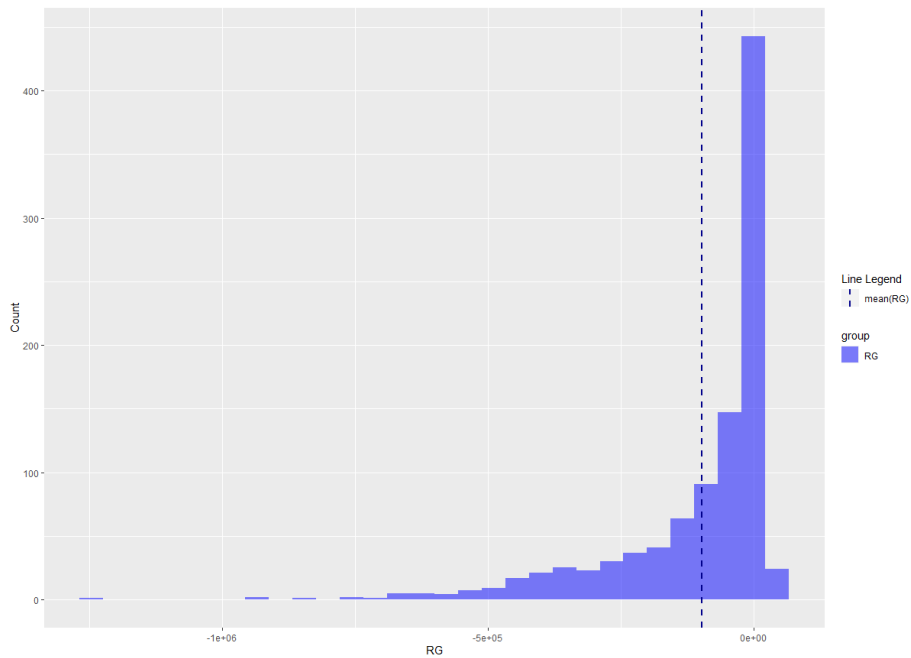


FIGURE 41 – Distribution empirique de R_G avec $t^{PB} = 90\%$

8.1.3 Cas 3 : Participation aux bénéfices et chargement

Dans cette section, nous cherchons à trouver le couple (α, t^{PB}) le plus adapté au seuil de rentabilité du réassureur.

Si le réassureur veut minimiser sa prise de risque et la volatilité de son résultat, la meilleure stratégie est de proposer un taux de PB très élevé couvert par un chargement très élevé. La volatilité du résultat du compte de participation aux bénéfices sera laissée à la cédante et en contrepartie, le réassureur recevra de manière certaine un pourcentage supplémentaire de la prime pure. Cette diminution de volatilité est observée sur les figures 39, 40 et 41.

Dans le tableau suivant, nous observons la décroissance des *Value at Risk* au niveau 90% de R_G pour un α ajusté de façon à avoir l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[R_G] = 0$$

TABLEAU 21 – Niveau de $VaR_{90\%}(R_G)$ pour différents niveaux de t^{PB}

t^{PB}	$VaR_{90\%}(R_G)$
55%	-238 143
60%	-226 651
65%	-221 319
70%	-217 587
75%	-211 036
80%	-208 294
85%	-205 258
90%	-201 728
95%	-199 376

Nous considérons ici que le seuil de rentabilité du réassureur est le suivant :

$$\begin{cases} E[R_G] = 0 \\ VaR_{90\%}(R_G) = -225\,000 \end{cases}$$

La calibration du chargement et du taux de PB à ces deux exigences nous donne en résultat le couple optimal suivant :

$$\begin{cases} t^{PB} = 65\% \\ \alpha = 14.3\% \end{cases}$$

Ajustement du couple (t^{PB}, α) grâce aux frais du compte de PB

Pour un seuil de rentabilité défini par :

$$\begin{cases} E[R_G] = 0 \\ VaR_{90\%}(R_G) = -225\,000 \end{cases}$$

Nous pouvons avoir les différents couples optimaux en fonction des frais du compte de participation aux bénéfices :

TABLEAU 22 – Couples optimaux pour différents niveaux de f^{PB}

f^{PB}	t^{PB}	α
2%	$t^{PB} = 65\%$	$\alpha = 19,97\%$
5%	$t^{PB} = 65\%$	$\alpha = 14,31\%$
10%	$t^{PB} = 70\%$	$\alpha = 12,89\%$
15%	$t^{PB} = 75\%$	$\alpha = 10,26\%$
20%	$t^{PB} = 80\%$	$\alpha = 6,70\%$

Nous observons que conformément aux résultats de l'analyse de la sensibilité à f^{PB} , l'augmentation de f^{PB} entraîne une diminution du chargement supplémentaire α .

De plus, le couple optimal adapté au seuil de rentabilité du réassureur évolue de façon claire lorsque les frais du compte de participation aux bénéfices augmentent. En effet, en augmentant les frais, le résultat du compte de PB diminue ainsi que le montant reversé au titre de la PB. De ce fait, dans le cas d'un *Loss Ratio* connu de 70%, le réassureur est capable de supporter un t^{PB} plus élevé avant que son indicateur de résultat global ne devienne négatif, ce qui explique l'augmentation du taux de PB et la baisse du chargement α .

Ainsi, si la cédante souhaite instaurer un taux de PB plus élevé que le seuil admissible du réassureur, ce dernier peut diminuer sa perte de rentabilité (dans le cas où il maintient son tarif), en exigeant des frais de PB plus élevés.

8.2 Cas pratique 2 : *Loss Ratio* > 100%

Nous nous plaçons sur un nouveau produit lancé par une cédante couvert par une QP de 50%. La tarification en première année a été sous évaluée et le *Loss Ratio* de

$$LR = \frac{S}{PP} = 115\%$$

La cédante annonce une augmentation de ses tarifs de 35% pour ses assurés afin d'améliorer le résultat technique du traité et viser un *Loss Ratio* de 80%.

Elle anticipe une forte rentabilité du réassureur avec ces nouveaux tarifs et souhaite donc inclure une clause de PB au traité. Le réassureur devant maintenir son tarif, il a pour seule option de négocier les frais du compte de PB (f^{PB}) afin d'améliorer sa rentabilité. Néanmoins, ces frais ne doivent pas excéder 20%, sous peine de très probablement essuyer un refus de la cédante.

TABLEAU 23 – $\mathbb{E}[R_G]$ pour différents niveaux de (t^{PB}, f^{PB})

$f^{PB} \quad t^{PB}$	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
5%	34 870	18 168	1 467	-15 234	-31 936	-48 637	-65 339	-82 040	-98 742
10%	36 511	21 451	6 391	-8 669	-23 729	-38 789	-53 849	-68 909	-83 970
15%	38 099	24 626	11 154	-2 318	-15 790	-29 263	-42 735	-56 208	-69 680
20%	39 629	27 687	15 745	3 802	-8 139	-20 081	-32 023	-43 965	-55 908

Le tableau 23 montre que pour garder une rentabilité positive, le réassureur peut accepter un taux de PB jusque 40% si la cédante accepte des frais de PB à 20%. Au delà de 40%, le rentabilité du réassureur passera forcément en territoire négatif.

Critique :

Une augmentation de tarif de 35% est en pratique « hors marché » et peu probable. Il est plus réaliste qu'un plan de redressement pluri-annuel lisse l'effort de revalorisation sous peine de perdre des assurés. Il faudrait alors projeter et simuler des générations pour avoir des comptes consolidés.

Néanmoins, les assureurs souhaitent toujours prendre en compte un horizon de redressement le plus court possible.

8.3 Cas pratique 3 : conséquence d'une déviation de sinistralité pour la cédante et le réassureur

Soit un traité en QP seule (dont tous les paramètres sont ceux par défaut) couvrant un portefeuille de TNS (dont toutes les caractéristiques sont celles par défaut).

Dans ce cas pratique, le réassureur anticipe un *Loss Ratio* $LR = \frac{S}{PP} = 100\%$.

Il calibre son chargement supplémentaire α couvrant la clause de PB en adéquation avec cette anticipation.

Nous nous intéressons à l'impact d'une déviation de sinistralité (sur le scénario réel) sur le ratio $\frac{\mathbb{E}[R_G]}{PP}$. Cet impact est étudié à la fois pour le réassureur et la cédante.

Pour la cédante nous considérons le rapport $\frac{\mathbb{E}[R_G^{ASS}]}{PP^{ASS}}$ où

- PP^{ASS} est la prime pure nette de réassurance.
- $R_G^{ASS} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{R_k^{AT,ASS}}{(1+r^{AT})^k} + \frac{R_k^{DC,ASS}}{(1+r^{DC})^k} \right)$ est le résultat global du traité pour la cédante

Les tableaux 24 et 25 présentent l'évolution du ratio $\frac{\mathbb{E}[R_G]}{PP}$ en fonction du *Loss Ratio* et du couple (t^{PB}, α) pour la cédante et le réassureur.

TABLEAU 24 – $\frac{\mathbb{E}[R_G^{ASS}]}{PP^{ASS}}$ pour différents niveaux de (t^{PB}, α)

<i>Loss Ratio</i> (t^{PB}, α)	(10%, 4%)	(20%, 9%)	(40%, 22%),	(50%, 32%)	(60%, 44,4%)	(80%, 94%)	(90%, 162%)
80%	21%	22%	25%	26%	28%	32%	35%
100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
120%	-20%	-21%	-23%	-24%	-26%	-29%	-32%

TABLEAU 25 – $\frac{\mathbb{E}[R_G^{REASS}]}{PP^{REASS}}$ pour différents niveaux de (t^{PB}, α)

<i>Loss Ratio</i> (t^{PB}, α)	(10%, 4%)	(20%, 9%)	(40%, 22%),	(50%, 32%)	(60%, 44,4%)	(80%, 94%)	(90%, 162%)
80%	19%	18%	15%	13%	12%	8%	5%
100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
120%	-19%	-23%	-17%	-16%	-14%	-11%	-9%

Nous remarquons tout d'abord que lorsque le scénario $\frac{S}{P} = 100\%$ se produit, la cédante et le réassureur ont un indicateur global de résultat nul. Cela est cohérent puisque le chargement α est calibré de sorte à couvrir parfaitement la clause de PB pour un *Loss Ratio* fixé à 100%. Ainsi, lorsque le taux de PB est de 90%, même en reversant une prime au réassureur majorée par un chargement α de 162%, la cédante se retrouve avec un indicateur de résultat nul puisqu'elle va récupérer une partie très importante de cette prime en PB au cours de la vie du traité.

En ce qui concerne le scénario d'une déviation de sinistralité entraînant un *Loss Ratio* de 80%, la rentabilité devient positive pour la cédante et le réassureur. Nous observons que ce gain de rentabilité est d'autant plus fort pour la cédante que le taux de PB est élevé. Inversement, le gain de rentabilité du réassureur décroît lorsque le taux de PB augmente. Cela est cohérent puisque dans le cas d'un *Loss Ratio* inférieur à 100%, sans clause de PB, les deux acteurs (cédante et réassureur) font des bénéfices. En présence d'une clause de PB et d'un scénario où le *Loss Ratio* est de 100%, le réassureur anticipe des résultats annuels moins élevés et sous-estime ainsi le montant reversé à la cédante au titre de la PB. Le chargement supplémentaire α est alors sous-estimé. Cela explique la dégradation de la rentabilité du réassureur lorsque le taux de PB augmente. Le partage du sort, caractéristique classique de la QP, n'a plus lieu.

Si le scénario d'un *Loss Ratio* de 120% se réalise, le partage du sort est aussi fortement réduit mais les deux acteurs ont dans ce cas un résultat global qui est déficitaire en espérance. En effet, en calibrant son chargement

sur un *Loss Ratio* de 100%, le réassureur surestime le montant de PB reversé à la cédante. Le chargement supplémentaire α est également surestimé. Ainsi, à mesure que le taux de PB augmente, c'est le réassureur qui voit sa rentabilité s'améliorer tandis que celle de la cédante se dégrade.

8.4 Critique et améliorations de la modélisation

8.4.1 Critique

L'objectif même de la participation aux bénéficiaires est pour la cédante de récupérer une partie des bénéficiaires du réassureur. Ainsi, nous pouvons nous questionner sur l'intérêt de la cédante à mettre en place un tel mécanisme. En se plaçant de son point de vue, d'autres scénarii sont possibles : si elle anticipe de bons résultats, elle aurait peut-être intérêt à diminuer la QP cédée plutôt que d'accepter un chargement supplémentaire qui supprimerait (en espérance) ses potentiels gains au titre de cette clause. La mise en place d'une PB impliquant un chargement supplémentaire, la prime de réassurance sera de facto plus élevée. Le financement de la PB revêt de plus un caractère certain (puisqu'il est payé dès le début du traité) alors que la promesse de résultat reste soumise à aléa. A contrario, si la priorité de la cédante est de diminuer son exposition aux risques, la mise en place d'une PB est sans doute un coût acceptable pour elle. Tout dépend de sa stratégie économique et de son équilibre entre rentabilité et solvabilité souhaité.

Par conséquent, cette méthodologie s'inscrit surtout comme un outil d'aide à la décision pour le réassureur lors de ses négociations commerciales avec la cédante. Elle lui permet de voir où se trouve son point d'équilibre et les limites acceptables pour garantir son résultat.

8.4.2 Améliorations

En ce qui concerne la modélisation, plusieurs améliorations peuvent être envisagées pour se rapprocher au mieux de la réalité du marché.

L'ajout d'une Provision Technique Spéciale (PTS) ou d'une Provision d'Égalité (PE) permet de lisser les pertes du compte de PB et éviter un versement de PB trop important en première année par rapport à la sinistralité globale du traité. De plus, la fiscalité avantageuse de la PE peut permettre au réassureur d'améliorer sa rentabilité en cas de résultat négatif.

Notre modélisation est celle d'une QP structurée (il n'y a pas de versement de commission de réassurance, en contrepartie, une PB est mise en place). Il est possible de modéliser la commission de réassurance versée par le réassureur à la cédante à la signature d'un traité en QP classique. L'intérêt est cependant limité car cela se matérialise par l'ajout d'une ligne dans les comptes. Toutefois, certaines QP (peu fréquentes sur le marché) font appel à un mécanisme de commissions à échelle : le versement ainsi que le montant de la commission de réassurance sont conditionnés au niveau d'atteinte du *Loss Ratio* du portefeuille en vision réassureur : plus le *Loss Ratio* est faible, plus le montant de commission sera élevé. L'impact sur la PB est donc non négligeable.

Il serait également intéressant d'analyser le cas d'un traité avec engagement par génération de souscription : ce type d'engagement nécessiterait de projeter le portefeuille jusqu'à expiration naturelle des polices en faisant des hypothèses sur les sorties annuelles (chutes) du portefeuille pour résiliation. Dans ce cas, il est également possible de considérer une modélisation d'éventuels plans de redressement s'étalant sur plusieurs années. Dans la même veine, les traités pluriannuels (souvent portant sur 3 ans de production) soulèvent d'autres problématiques en fonction du moment du paiement de la PB (chaque année ou à la fin du traité).

La prise en compte d'un taux de revalorisation des rentes d'invalidité (pour suivre l'évolution du PASS) peut également apporter un complément dans la vision du risque.

Enfin, inclure un aléa aussi bien pour les tables utilisées que pour les taux techniques (modélisation stochastique) permettrait de considérer plus finement le risque biométrique et le risque financier.

Il faut cependant garder à l'esprit que le développement de certains de ces axes peut apporter une plus forte complexité au modèle, par la multiplication des hypothèses. Dans un environnement business, l'équilibre entre rapidité de mise à jour, gain de précision, accessibilité du modèle à tous les utilisateurs doit rester optimal.

Conclusion

Nous avons montré que la clause de participation aux bénéfices (PB) d'un traité de réassurance a un impact significatif sur le résultat du réassureur et que la mise en place d'un chargement adapté à la prime pure du traité est nécessaire pour garantir sa rentabilité.

Nous avons étudié le cas d'un traité de réassurance en Quote Part, en Excédent de Sinistre (ou une combinaison des deux) s'appliquant à un portefeuille de Travailleurs Non Saliés (TNS) couvert par des garanties arrêt de travail (incapacité et invalidité) et décès.

Nous avons démontré l'existence et l'unicité du chargement supplémentaire pour couvrir la clause de PB en utilisant le théorème de Banach. Ce théorème induit une procédure simple pour déterminer le chargement.

Cette procédure nécessitant le calcul d'espérances de variables aléatoires complexes, nous avons mis en place une méthode de Monte Carlo.

Cette méthode de Monte Carlo implique une simulation des charges de sinistres et des provisions annuelles pour chaque assuré du portefeuille. La simulation est réalisée en intégrant des passages d'états modélisés à l'aide des tables TH-TF 002 et des tables du Bureau Commun d'Assurance des Collectives.

Une fois la méthodologie mise en place, nous l'avons mise en pratique sur les différents types de traités. Nous avons étudié le cas où la clause de PB ne contient pas d'option de report de pertes. Nous démontrons analytiquement que ce cas nécessite un chargement plus élevé.

Nous avons ensuite analysé la sensibilité aux paramètres du traité et aux caractéristiques du portefeuille couvert et ainsi donné un outil de pilotage direct de l'évolution du chargement en fonction des paramètres clefs.

Enfin, nous avons considéré des cas pratiques pour des problématiques business. Parmi eux, celui d'une cédante ayant un portefeuille au *Loss Ratio* stable de 70% qui souhaite introduire une clause de PB sur le traité. Le réassureur possède une exigence de positivité du résultat et un niveau de rentabilité limite qui se manifeste par un seuil de *Value at Risk* à 90%. En nous basant sur ces données, nous avons appliqué la méthodologie précédente et déterminé un couple optimal (taux de PB, chargement supplémentaire) que le réassureur doit proposer à la cédante pour satisfaire ses exigences. Les autres cas pratiques ont montré l'impact sur la clause de PB d'une augmentation des tarifs de la cédante et celui d'une déviation de sinistralité.

Cette méthodologie, applicable à d'autres risques tels que l'emprunteur ou la dépendance, nécessite cependant une connaissance du portefeuille couvert pour fournir un résultat pertinent. Elle pourrait être perfectionnée en intégrant une provision technique de stabilité permettant d'absorber, dans certains cas, les déficits du compte de PB. De plus, les tables utilisées dans cette étude sont figées pour toute la durée de couverture du traité et ne prennent pas en compte d'éventuelles améliorations. Ainsi, il pourrait être intéressant d'introduire un aléa sur les tables afin de modéliser ces évolutions. Enfin, un autre complément de l'étude pourrait être une modélisation plus fine de l'évolution des taux techniques Vie et Non Vie qui sont pris constants dans ce mémoire.

Références

- [1] Razvan IONESCU. Valorisation de la clause de participation aux bénéfices des traités de réassurance non proportionnels sur le risque invalidité". *Institut de Science Financière et d'Assurances*, 2009.
- [2] Audrey GENE BRIER. Valorisation de la clause de participation aux bénéfices de traités de réassurance proportionnelle multi-périodes pour des garanties décès. *CNAM*, 2017.
- [3] Evelyne MLYNARCZYK. Technique et pratique de la réassurance. 2014.
- [4] Jabbar SOUMAHORO Messan K. HUKPORTIE Joseph Luc FOADING, Zakaye DJIBO. Pratique de la réassurance vie. *CICA-Re*, 2016.
- [5] Jocelyne DE LA CRUZ. Les risques événements naturels tempêtes - couvertures de réassurances traditionnelles et non traditionnelles. 2009.
- [6] Damien LANGJAHR Gwendoline DOMEQ. Assurances collectives, risque arrêt de travail : mise en place d'un indicateur d'évolution du risque à court terme. 2013.
- [7] Assurance Maladie. Arrêt de travail pour maladie. *ameli.fr*, 2021.
- [8] Ministère du travail. L'indemnisation légale des absences pour maladie ou accident. 2021.
- [9] ACTELIOR. Indemnités journalières cnavpl et prévoyance tns. 2021.
- [10] Fatima ABBAS. Etude de quelques théorèmes du point fixe et leurs applications. 2015.
- [11] Idris KHARROUBI. Méthodes de monte carlo. *Sorbonne Université*.

Note de synthèse

Les traités de réassurance possèdent de nombreuses clauses qui peuvent modifier l'exposition au risque du réassureur. La participation aux bénéfices (PB) est l'une des plus utilisées sur le marché. Cette clause implique l'établissement d'un compte de PB et permet à l'assureur de récupérer une partie des résultats du réassureur lorsque le traité est excédentaire. Ainsi, il est primordial pour le réassureur de la prendre en compte dans son processus de tarification du traité. En effet, l'absence d'un chargement supplémentaire adapté peut altérer fortement la rentabilité le réassureur.

L'objectif de ce mémoire est de développer une méthodologie générale de valorisation de la clause de participation aux bénéfices sur un portefeuille de Travailleurs Non Salarié (TNS) en s'appuyant sur les travaux réalisés par Razvan Ionescu (ISFA, 2009) et Audrey Genebrier (CNAM, 2017). Leurs mémoires abordent la clause de PB respectivement sur un traité non proportionnel sur le risque invalidité et un traité proportionnel sur le risque décès en emprunteur. La méthodologie développée ici prend en compte les risques décès et arrêt de travail (incapacité et invalidité). Elle est applicable sur un traité proportionnel ou non proportionnel mais également sur la combinaison des deux, puisque ce cas est fréquent sur les portefeuilles TNS. Nous nous restreignons au cas où le traité proportionnel est une Quote Part (QP) et le traité non proportionnel est un Excédent de Sinistre par risque (XS).

Dans un premier chapitre introductif, nous présentons la réassurance et les risques arrêt de travail et décès en mettant l'accent sur le cas des TNS.

Nous développons tout d'abord les principes et les objectifs de la réassurance avant de présenter les différents types de traités. Nous abordons ensuite les clauses classiques des traités en détaillant plus précisément le mécanisme de la PB. Enfin, nous définissons les risques décès et arrêt de travail en explicitant les différents organismes versant des prestations. Nous abordons la particularité des TNS, qui sont généralement très peu couverts par le régime général obligatoire en cas d'arrêt de travail, et les contrats de prévoyance individuelle auxquels ils souscrivent.

Dans un deuxième chapitre, nous traitons des aspects méthodologiques.

En préambule, il est important de préciser que la participation aux bénéfices n'est pas prélevée sur le compte de résultat du réassureur mais sur un compte spécifique appelé compte de participation aux bénéfices sur lequel le réassureur négocie des frais.

Après avoir défini les notations, nous élaborons le compte de résultat du réassureur et le compte de participation aux bénéfices en faisant attention d'associer aux risques leurs taux techniques respectifs : actualisation avec le taux technique Vie pour la garantie décès et actualisation avec le taux technique Non Vie pour la garantie arrêt de travail. La clause de PB conduit le réassureur à calibrer un chargement supplémentaire à sa prime pure.

Une première étape de nos travaux consiste donc à isoler ce chargement avec l'hypothèse de nullité de l'espérance des résultats actualisés sur toute la période de couverture du traité (indicateur de résultat global, noté R_G). Nous prouvons, au préalable, qu'en l'absence de ce chargement supplémentaire, l'indicateur de résultat global est toujours négatif pour un traité possédant une clause de PB. Ainsi, l'ajout de la clause sans chargement supplémentaire est contre-productive pour le réassureur.

En isolant le chargement (noté α), nous pouvons définir une fonction pour laquelle celui-ci se trouve être le point fixe.

$$\boxed{\mathbb{E}[R_G] = 0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\alpha = H(\alpha)}$$

FIGURE 42 – Critère de valorisation de la PB

Après avoir démontré le caractère « contractant » de la fonction H, nous appliquons le théorème du point fixe de Banach afin d'affirmer l'existence et l'unicité du chargement. Le théorème nous fournit également une procédure simple pour s'approcher arbitrairement du point fixe à une vitesse géométrique et donc plus rapidement qu'une recherche dichotomique (vitesse de convergence linéaire).

Notons que la fonction faisant intervenir des espérances de variables aléatoires complexes, nous utiliserons une méthode de Monte Carlo afin de s'en approcher. En utilisant le Théorème Central Limite, nous déterminons des intervalles de confiance asymptotiques pour la fonction H et choisissons un nombre de simulations pour la méthode de Monte Carlo.

De ce fait, il est nécessaire de simuler la charge de sinistres et le provisionnement pour chaque année au titre de l'arrêt de travail et du décès.

Concernant l'estimation des charges annuelles de sinistres, la simulation de Monte Carlo consiste à modéliser un portefeuille fictif de TNS. Ce portefeuille contient pour chaque assuré les caractéristiques suivantes : âge, salaire (qui est fonction de l'âge), part du salaire garantie en cas d'incapacité, part du salaire garantie en cas d'invalidité, capital garanti en cas de décès (fonction du salaire), ainsi que l'ancienneté de la sélection médicale. Toutes ces caractéristiques sont simulées à partir de variables aléatoires suivant des lois Normales (parfois tronquées) où les paramètres sont calibrés sur des données d'expérience ou bien sur les données de l'INSEE.

Ensuite, nous développons la méthode de détermination des charges annuelles de sinistres sur la période de couverture du traité. Pour chaque assuré nous simulons ses transitions sur les différents états (voir figure 42) afin de lui associer des charges annuelles de sinistres.

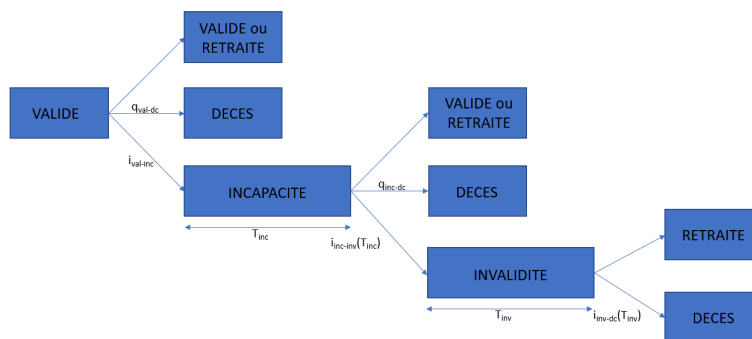


FIGURE 43 – Passages d'états

Pour effectuer ces passages d'états nous utilisons les tables TH-TF 002 pour la mortalité, sur lesquelles nous appliquons des abattements qui sont fonction de l'ancienneté de la sélection médicale. En ce qui concerne l'incapacité et l'invalidité, nous utilisons les tables du Bureau Commun d'Assurances des Collectives qui se composent d'une table de maintien en incapacité, une table de transition entre les états d'incapacité et d'invalidité ainsi qu'une table de maintien en invalidité. Nous disposons d'une table d'expérience pour l'entrée en incapacité.

En sommant les coûts de chaque sinistre individuel nous obtenons les sinistralités annuelles du réassureur dans le cadre d'un traité proportionnel, non proportionnel ou une combinaison des deux.

S'agissant des provisions mathématiques, pour obtenir les provisionnements annuels du réassureur sur la période de couverture du traité, nous nous ramenons à l'échelle de l'assuré. Nous utilisons la simulation sur ses transitions dans les différents états. Nous définissons pour chaque fin d'année, en fonction de l'état de l'assuré, les provisions mathématiques à constituer au titre de l'arrêt de travail et du décès.

Une fois ces simulations terminées, nous sommes en mesure d'avoir une estimation de la fonction H. Nous pouvons alors déterminer le chargement supplémentaire en recherchant le point fixe de la fonction H à l'aide de la procédure simple donnée par le théorème du point fixe de Banach.

Dans un troisième chapitre nous analysons les résultats de cette méthodologie et précisons un cas d'utilisation.

La partie théorique étant présentée, nous analysons graphiquement les résultats de la méthodologie développée dans les sections précédentes. Nous étudions l'impact du chargement supplémentaire sur le résultat global des différents traités : Quote Part (QP), Excédent de Sinistre (XS) et combinaison d'une QP et d'un XS. Nous observons que pour des niveaux de Priorité/Portée/QP équivalents, le chargement supplémentaire à appliquer pour une combinaison de couverture en réassurance (QP+XS) se situe entre celui d'une QP seule et d'un XS seul. Cela s'explique par le fait que dans le cas d'un XS, le réassureur n'intervient que sur les risques de pointe (plus rare) donc la tarification est soumise à plus d'aléas (fréquence et intensité des pointes). En revanche, sur une QP, le réassureur intervient sur l'ensemble des sinistres : la tarification en prime pure est précise et le résultat du traité est moins volatile. Cette meilleure tarification explique que le chargement supplémentaire est plus faible.

Enfin, nous étudions le cas où la clause de PB ne comporte pas de condition de report de pertes. Nous démontrons que l'absence de cette option entraîne nécessairement une augmentation de la valeur du chargement.

Pour compléter notre étude, nous analysons des sensibilités du chargement supplémentaire aux différents paramètres du traité et aux caractéristiques du portefeuille.

Nous observons une corrélation quasiment linéaire du chargement supplémentaire aux coûts réels du réassureur (coûts fixes servant à couvrir les frais généraux). Lorsque ces coûts réels du réassureur augmentent, le résultat du compte de PB et celui du réassureur augmentent, et la PB versée suit la même évolution. Ainsi, le chargement supplémentaire nécessaire pour couvrir cette clause croît également.

En adoptant une hypothèse sur la formule générique de ce chargement nous démontrons analytiquement cette linéarité. Cette hypothèse nous permet également de démontrer la convexité de la relation entre le chargement et le taux de PB servi ainsi que les frais du compte de participation aux bénéfices.

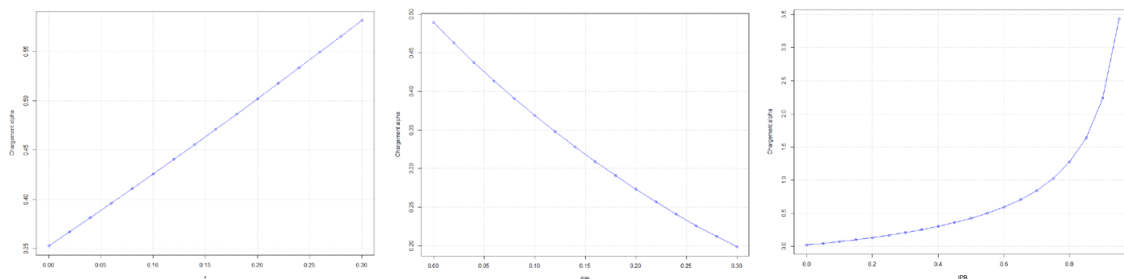


FIGURE 44 – Évolution de α par rapport aux paramètres du traité (coûts du réassureur, frais, taux de PB)

Concernant la sensibilité du chargement aux différentes caractéristiques du portefeuille simulé, nous observons que certaines d'entre elles ont des impacts déterminants sur le chargement. En particulier, l'augmentation de la taille du portefeuille tend à corriger la volatilité des résultats sur le portefeuille initial avec une meilleure prédiction des charges annuelles globales de sinistres, ce qui va améliorer la précision de la tarification en prime pure et réduire la valeur du chargement.

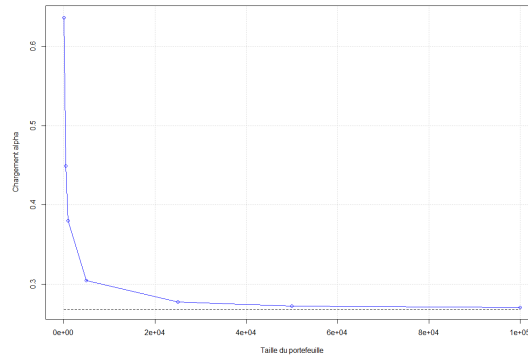


FIGURE 45 – Évolution de α par rapport à la taille du portefeuille

Enfin, pour valider nos travaux, nous développons des cas pratiques d'utilisation sur des problématiques business. Le premier cas est celui où le *Loss Ratio* du portefeuille couvert est connu et inférieur strictement à 100%. La cédante souhaite introduire une clause de participation aux bénéfices sur le contrat.

Ainsi, notre objectif est dans un premier temps de déterminer le seuil de taux de PB acceptable au dessus duquel l'indicateur global de résultat du réassureur devient négatif. Au-delà de ce seuil, le réassureur a deux possibilités : accepter une rentabilité fortement dégradée (indicateur de résultat global négatif) ou demander une prime supplémentaire sous la forme d'un chargement. Dans ce deuxième cas, nous déterminons le couple (taux de PB, chargement supplémentaire) que le réassureur doit proposer à la cédante afin de satisfaire ses contraintes de positivité de l'indicateur de résultat global et de seuil minimal de rentabilité. Pour déterminer le seuil de rentabilité nous utilisons un seuil de *Value at Risk* (VaR) à 90% de l'indicateur de résultat global.

Les résultats montrent qu'en fixant un *Loss Ratio* de 70% sur le portefeuille, le réassureur est en mesure d'accepter un taux de participation (noté t^{PB}) aux bénéfices jusque 50% sans rajouter de chargement supplémentaire pour l'ajout de cette clause. Au-delà de ce seuil, l'indicateur de résultat global devient négatif, le réassureur doit appliquer un chargement supplémentaire à la prime pure pour maintenir sa rentabilité. Pour des taux de participation aux bénéfices supérieurs à 50%, nous calculons le chargement adapté pour équilibrer l'espérance de résultat du réassureur et nous déterminons le niveau de VaR pour les différents taux de PB. A partir de ces niveaux de VaR, le réassureur choisit son seuil de rentabilité et nous obtenons donc un couple (taux de PB, chargement supplémentaire) à proposer à la cédante qui satisfait les exigences du réassureur.



FIGURE 46 – Cas pratique 1

Le deuxième cas pratique part d'un *Loss Ratio* connu de 115% et d'une augmentation des tarifs de la cédante afin de rééquilibrer le résultat technique. Cette dernière souhaite introduire une PB sur le traité où le réassureur ne peut modifier son tarif. Ainsi en négociant les frais du compte de PB, nous montrons que le réassureur peut accepter un taux de PB allant jusque 40% en maintenant une rentabilité positive.

Le dernier cas pratique prend en compte une déviation de sinistralité sur le scénario réel par rapport au scénario anticipé par le réassureur. Nous nous intéressons à l'impact de cette déviation sur la rentabilité de la

cédante et celle de l'assureur en fonction du taux de participation aux bénéfices. Lorsque le *Loss Ratio* est supérieur à celui anticipé, une augmentation du taux de PB profite au réassureur et dégrade la rentabilité de la cédante. Lorsque le *Loss Ratio* est inférieur à celui anticipé par le réassureur, sa rentabilité baisse au profit de celle de la cédante.

Pour conclure, nous pouvons affirmer que l'introduction d'une clause de PB nécessite un ajustement à la tarification d'un traité de réassurance. Son impact peut être neutralisé en appliquant un chargement supplémentaire à la prime pure, qui permet de garantir la rentabilité du réassureur. En effet, une connaissance des caractéristiques du portefeuille et des paramètres du traité nous permet de simuler les charges annuelles de sinistres et les provisionnements annuels afin d'estimer le coût de la clause de PB sur toute la période de couverture du traité.

Néanmoins, l'analyse des sensibilités montre que certaines variables ont un impact significatif sur le chargement supplémentaire. Ainsi, une connaissance imparfaite des caractéristiques du portefeuille ou des paramètres du traité peut rendre le chargement estimé assez imprécis.

Face à ces incertitudes, nous montrons que cette méthodologie peut être un outil d'aide à la négociation commerciale lorsqu'une cédante souhaite introduire une participation aux bénéfices sur un traité excédentaire : à partir d'un seuil de rentabilité, nous estimons un couple optimal (taux de PB, chargement supplémentaire) à proposer à la cédante.

Cette méthodologie, facilement applicable à d'autres types de risque tels que la dépendance et l'emprunteur, pourrait être perfectionnée en intégrant une provision technique de stabilité permettant d'absorber les pertes en cas de résultat déficitaire du compte de PB. Aussi, la prise en compte d'évolutions sur les tables utilisées et sur les taux techniques Vie et Non Vie pourrait apporter un complément à l'étude.

Executive summary

Reinsurance treaties have many clauses that can alter the risk exposure of the insurer. Profit-Sharing (PS) is one of the most widely used in the market. This clause involves the preparation of special account and allows the insurer to recover part of the reinsurer's results when the treaty is in surplus. Thus, it is essential for the reinsurer to take it into account in its pricing process. Indeed, the absence of a suitable additional load may alter the profitability of the reinsurer. The aim of this paper is to develop a general methodology for valuing the Profit-Sharing clause on a portfolio of self employed individuals based on the work done by Razvan Ionescu (ISFA, 2009) and Audrey Genebrier (CNAM, 2017). Their papers address the PS clause on a non-proportional treaty covering disability risk and a proportional treaty covering borrower risk respectively. The methodology developed here takes into account the risks of death and work stoppage (disability and invalidity). It is applicable on a proportional or non-proportional treaty but also on the combination of the two, since this case is frequently observed on the self employed portfolios. Our work is restricted to the case where the proportional treaty is a Quote Part (QP) and the non-proportional treaty is a Excess of Loss (XL)

In an opening chapter, we present reinsurance, work stoppage risk and death risk, highlighting the case of self employed individuals.

We first develop the principles and objectives of reinsurance and we present the different types of treaties. We then discuss the traditional treaty clauses with focus on the profit sharing mechanism. In a second part, we define death risk and work stoppage risk. We list the various entities providing compensations. We discuss the particularity of self-employed workers, who are generally poorly covered by the compulsory general scheme in case of work stoppage. Then, we tackle the individual insurance contracts they subscribe to face this lack of coverage.

In a second chapter, we deal with methodological aspects.

First of all, it is important to specify that the profit sharing is not taken from the reinsurer's profit and loss account but from a special account called profit sharing account on which the reinsurer negotiates a fee. After defining the notations, we write the reinsurer's income statement and the PS profit and loss account. We associate risks with their technical rates : discounting death results with the Life technical rate and discounting work stoppage results with the Non-Life technical rate. We set our pricing criterion, which is the nullity of the expectation of the discounted results over the entire period of coverage of the treaty (global result indicator). We prove analytically that in the absence of additional loading, this global result indicator is always negative. From this criterion, we can isolate the additional loading (noted α) which can then be defined as the fixed point of a certain function H.

$$\boxed{\mathbb{E}[R_G] = 0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\alpha = H(\alpha)}$$

FIGURE 47 – Pricing criteria of the PS clause

After proving that the function H is indeed contracting, we apply the Banach theorem in order to assert the existence and uniqueness of this additional loading. The theorem also gives us a simple procedure to arbitrarily approach the fixed point at a geometric speed. The function H involves expectations of random variables

that are complex to determine analytically. Thus, we use a Monte Carlo method, based on the law of large numbers, to approximate these expectations. We determine a confidence interval for the loading using the Central Limit Theorem.

Furthermore, it is necessary to simulate the claims and reserves for each year concerning work stoppage and death in order to approximate H . This is the subject of the following two sections.

The first step of this Monte Carlo simulation is to model a fictitious portfolio of self-employed workers. This portfolio contains for each insured the following characteristics : age, salary (which is a function of age), share of salary guaranteed in case of incapacity, share of salary guaranteed in case of disability, capital guaranteed in case of death (a function of salary), as well as the seniority of the medical selection. All these characteristics are simulated from random variables following Normal laws (sometimes truncated) where the parameters are calibrated on a portfolio of TNS or on INSEE data. Then, we develop the method for determining the annual cost of claims over the period of coverage of the treaty. For each insured, we simulate his transitions on the different states (valid-unable-disabled-death) in order to associate him with annual claims costs.

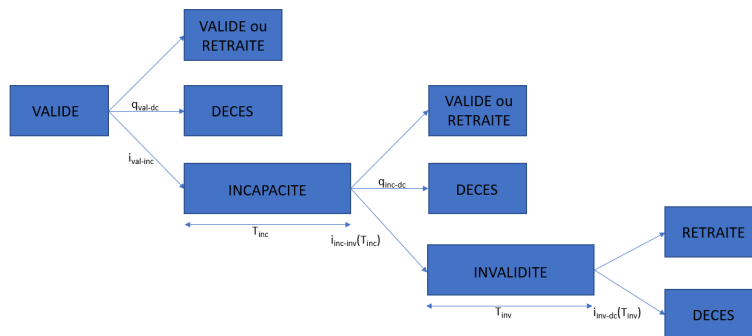


FIGURE 48 – Transition states

To carry out these transitions we use the TH-TF 002 tables for mortality, on which we apply abatements that are a function of the age of the medical selection. For incapacity and invalidity, we use the tables of the Bureau Commun d'Assurances des Collectives, which are composed of a table of maintenance in incapacity, a table of transition between the states of incapacity and invalidity, and a table of maintenance in invalidity. We have an experience table for entry into disability.

By summing the costs of each individual claim we obtain the reinsurer's annual claims experience under a proportional, non-proportional or combination treaty.

In a third section, we address the issue of reserving. In order to obtain the reinsurer's annual reserving over the treaty period, we also go back to the level of the insured. We use the simulation on its transitions in the different states. We define for each end of year, according to the state of the insured, the reserves to be constituted for the work stoppage and the death.

Once these simulations are completed, we are able to have an estimate of the function H . We can then estimate the additional loading by searching for the fixed point of the function H using the simple procedure given by the Banach theorem.

In a third chapter we analyze the results of this methodology and specify a case of use.

In a third section, we graphically analyze the results of the methodology developed in the previous sections. We study the impact of the additional loading on the overall result of the different treaties : Quote Share (QP),

Excess of Loss (XL) and combination of a QP and an XL. We observe that for equivalent Priority/Span/QP levels, the additional loading to be applied for a combination of reinsurance coverage (QP+XL) is between that of a QP and an XL. This is because the reinsurer is rarely charged for the XL, so its pure premium pricing may be more imprecise. On the other hand, on a QP, the reinsurer is involved on all the claims : the pure premium pricing is more accurate and the treaty result is less volatile. This better pricing explains why the additional loading is lower.

Finally, we study the case where the PS clause does not include a loss carry-forward condition. We show that the absence of this option necessarily leads to an increase in the value of the load.

In the fourth section, we analyze the sensitivities of the supplementary loading to the different treaty parameters and portfolio characteristics. We observe an almost linear dependence of the supplementary loading on the reinsurer's actual costs. When the reinsurer's actual costs increase, the result of the PS special account and the reinsurer's result increase, and the PS paid follows the same evolution. By adopting an assumption about the generic formula for this loading, we demonstrate analytically this linear dependence, and we also demonstrate the convexity of the relationship between the loading and the PS rate paid and the negotiated cost of the PS account.

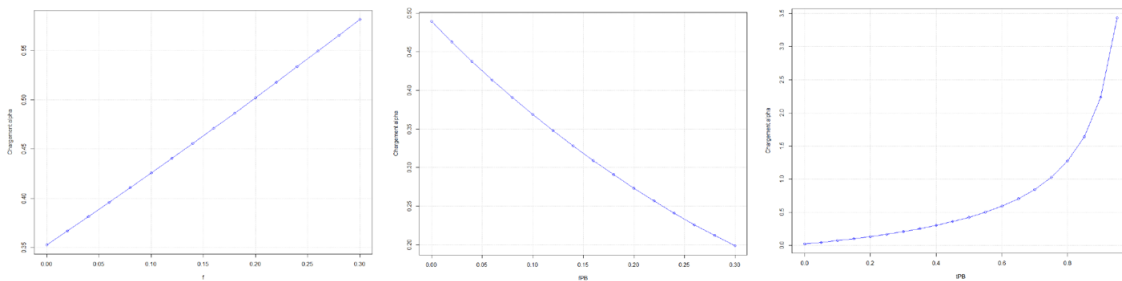


FIGURE 49 – Additional loading α as a function of treaty parameters (reinsurer's costs, PB cost, PB rate)

In a fifth section, we analyze the sensitivity of the supplementary loading to the different characteristics of the simulated portfolio.

We observe that certain characteristics have a decisive impact on the loading. Indeed, the increase in the size of the portfolio tends to correct the volatility of the results on the initial portfolio with a better prediction of the global annual loss expenses, which will improve the accuracy of the pure premium pricing and reduce the value of the loading.

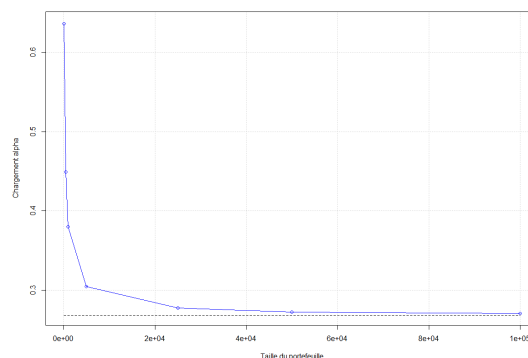


FIGURE 50 – Additional loading α as a function of the portfolio size

In a sixth and final section, we develop a practical use case on a business problem. We consider the case where the *Loss Ratio* of the covered portfolio is known and strictly less than 100%. The ceding company wishes to introduce a profit sharing clause on the contract. Thus, our first objective is to determine the threshold of acceptable PS rate above which the global result indicator of the reinsurer becomes negative. Beyond this threshold, the reinsurer has two options : to accept a strongly deteriorated profitability (negative global result indicator) or to ask for an additional premium in the form of a loading. In this second case, we determine the pairing of PB rate and additional loading that the reinsurer must propose to the ceding company in order to satisfy its constraints of a positive overall profitability indicator and a minimum profitability threshold. To determine the profitability threshold, we use a *Value at Risk* (VaR) at 90% of the global result indicator.

The results show that by fixing a *Loss Ratio* of 70% on the portfolio, the reinsurer is able to accept a profit sharing rate (noted t^{PB}) of up to 50% without adding an additional load for the addition of this clause. Above this threshold, the overall result indicator becomes negative, the reinsurer must apply an additional loading to the pure premium to keep the treaty profitable. For profit sharing rates above 50%, we calculate the appropriate loading to balance the reinsurer's earnings expectation and determine the VaR level for the different PB rates. From these VaR levels, the reinsurer chooses its break-even point and we obtain a couple, PB rate, additional loading, to propose to the cedant that satisfies the reinsurer's requirements.



FIGURE 51 – Business case 1

The second practical case starts with a known *Loss Ratio* of 115% and an increase in the cedant's prices in order to rebalance the technical result. The latter wishes to introduce a PB on the treaty where the reinsurer cannot modify its price. Thus, by negotiating the costs of the PB account, we show that the reinsurer can accept a PB rate of up to 40% while maintaining a positive profitability.

The last case study takes into account a deviation of the loss experience in the actual scenario compared to the scenario anticipated by the reinsurer. We are interested in the impact of this deviation on the profitability of the cedant and the insurer as a function of the profit sharing rate. When the *Loss Ratio* is higher than expected, an increase in the PB rate benefits the reinsurer and worsens the profitability of the cedant. When the *Loss Ratio* is lower than the one expected by the reinsurer, its profitability decreases to the benefit of the cedant.

At the end of this paper, we can state that the profit sharing clause needs to be integrated into the pricing of a reinsurance treaty. Its impact can be neutralized by applying an additional loading to the pure premium, which guarantees the reinsurer's profitability. Indeed, a knowledge of the characteristics of the portfolio and the parameters of the treaty allows us to simulate the annual claims expenses and reserves in order to estimate the cost of the PS over the entire treaty coverage period. Nevertheless, we have seen in the sensitivity analysis that some variables have a significant impact on the loading. Thus, an imperfect knowledge of the portfolio characteristics or of the treaty parameters can make the estimated loading rather inaccurate. In a classic practical case, we show that this methodology can be a tool to help commercial negotiation when a ceding company wishes to introduce a profit sharing on a treaty in surplus. By defining a break-even point for the profitability, we estimate an optimal couple (PS rate, loading) to propose to the ceding company. This methodology, which is easily applicable to other types of risk such as long-term care risk and borrower risk, could be perfected by integrating a technical stability provision to absorb losses in the event of a deficit in the PS account. Also, taking into account changes in the tables used and in the Life and Non-Life technical rates could complement the study

Annexes

A Convergence de la méthode avec report de perte

En sortant du cadre théorique et en adoptant une approche pratique, nous pouvons tenter d'expliquer que cet algorithme converge vers notre solution même dans le cas où le contrat prend en compte un report de pertes. En effet, nous avons :

$$\begin{cases} R_1^{PB,DC} = PP^{DC}(1+c+\alpha)(1+r^{DC}) - f^{PB}PP^{DC}(1+f+\alpha)(1+r^{DC}) - S_1^{DC} - PM_1^{DC} \\ R_1^{PB,AT} = PP^{AT}(1+c+\alpha)(1+r^{AT}) - f^{PB}PP^{AT}(1+f+\alpha)(1+r^{AT}) - S_1^{AT} - PM_1^{AT} \end{cases}$$

La prime chargée pour toute la génération est prélevée en année 1, donc les résultats DC et AT de la première année sont généralement positifs (et le sont toujours en espérance).

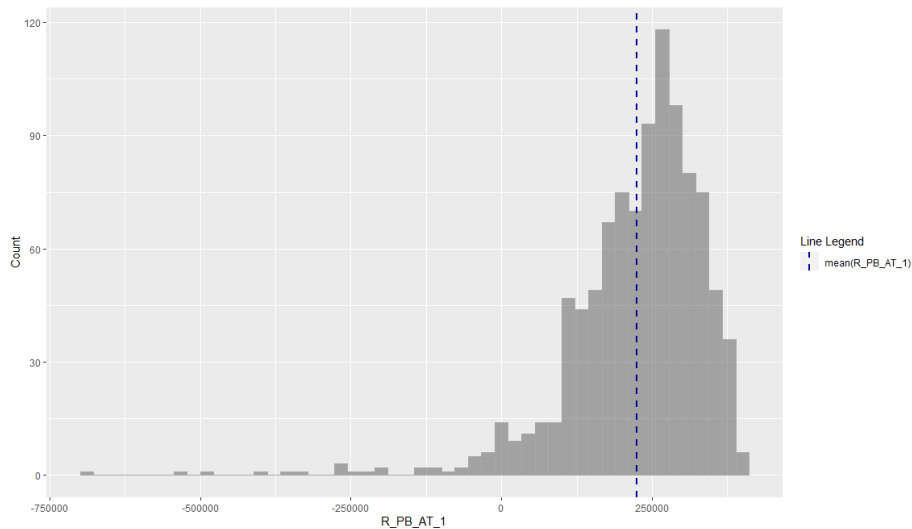


FIGURE 52 – Distribution empirique $R_1^{PB,AT}$

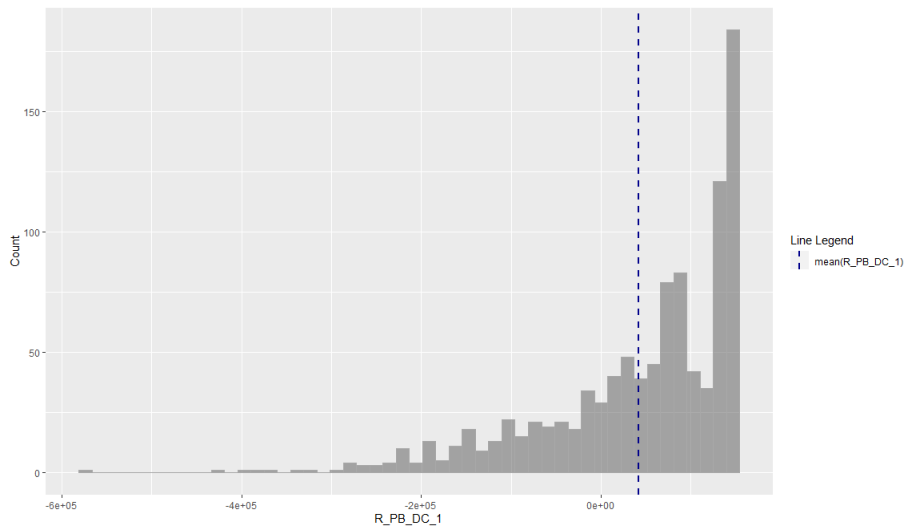


FIGURE 53 – Distribution empirique de $R_1^{PB,DC}$

Les graphiques nous montrent que la remarque précédente est surtout valable pour l'arrêt de travail.

Le report de pertes a donc rarement lieu de l'année 1 à l'année 2 : le paramètre α n'apparaît pas dans $R_k^{PB,AT}$ et $R_k^{PB,DC}$ pour $k \geq 2$. Nous pouvons alors considérer les $R_1^{PB,AT}$ et $R_1^{PB,DC}$ pour $k \geq 2$ comme constants par rapport à α dans l'équation 4 et la démonstration précédente tient toujours.

B Définition, lois et Théorèmes

B.1 Lois des grands nombres

B.1.1 Loi forte des grands nombres

Considérons n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \dots, X_n \sim X$ tel que $\mathbb{E}[X] = \mu$ existe

Si la variable X est intégrable (i.e $\mathbb{E}[|X|] < \infty$) alors $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement vers μ .

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mu \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

B.1.2 Loi faible des grands nombres

Considérons n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \dots, X_n \sim X$ admettant une espérance $\mathbb{E}[X] = \mu$. Alors $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers μ :

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon\right) = 0$$

B.2 Inégalité Triangulaire

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ nous avons l'inégalité suivante :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

B.3 Théorème Central Limite

Considérons n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \dots, X_n \sim X$
Supposons que l'espérance $\mathbb{E}[X] = \mu$ et la variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ existent et soient finis.

En posant $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, nous avons alors :

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

B.4 Value at Risk

La *Value at Risk* (VaR) est un indicateur correspondant au niveau de perte qui ne devrait pas être dépassé avec une probabilité donnée β , sur un horizon temporel donné. Dans ce mémoire, l'horizon temporel correspond à l'extinction du portefeuille. La VaR dépend donc de :

- la distribution des résultats du portefeuille
- le niveau de probabilité β

Statistiquement, la VaR_β peut être défini comme le quantile de niveau $(1-\beta)$ à de la distribution du résultat.

C Tables

C.1 Les tables TH 00-02 et TF 00-02

Les tables de mortalité constituent un outil primordiale dans la tarification des produits d'assurance relatifs à l'activité Vie d'un organisme d'assurance.

Les tables TH 00-02 et TF 00-02 sont construites sur une base de données relatives à la population française dans sa globalité (population féminine pour la TF 00-002 et masculine pour la TH 00-02), publiées par l'INSEE. En l'absence de tables d'expérience plus adaptées à son risque, un organisme d'assurance est contraint par le code des Assurances à utiliser ces tables pour la tarification des contrats prenant en compte les risques suivants :

- risque décès : on utilise la TH 00-02
- risque Vie : on utilise la TF 00-002

On utilise différentes tables pour les risques décès et vie pour des raisons de prudence dans la tarification puisque les femmes ont une espérance de vie supérieure à celle des hommes (76 ans pour les hommes dans la TH 00-002 et 83.5 ans pour les femmes dans la TF 00-002).

C.2 Les statistiques du Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC)

Il existe relativement peu de statistiques publiques sur l'arrêt de travail que ce soit pour les maintiens en incapacité et invalidité ou encore pour la transition incapacité-invalidité. Le Bureau Commun d'Assurances des Collectives (BCAC) a donc construit en 2013 trois lois sur la base des données fournies par un panel d'organismes assureurs. Ces trois lois rendues publiques, sont utilisées majoritairement pour le calcul de provisions réglementaires. Dans ces lois, la catégorie socio professionnelle ainsi que le sexe ne sont pas pris en compte afin de simplifier les résultats. Il reste pourtant évident que ces deux caractéristiques ont une influence importante sur les maintiens en incapacité et en invalidité ainsi que sur le passage en invalidité.

Voici les trois lois proposées par le BCAC :

C.2.1 Loi de maintien en incapacité

Cette table présente les effectifs de personnes en état d'incapacité en fonction de l'âge à la survenance de l'arrêt de travail (20 à 65 ans) et l'ancienneté de l'arrêt de travail en mois (0 à 36 mois)

C.2.2 Loi de passage en invalidité

Cette table indique le nombre de transition de l'état d'incapacité vers l'état d'invalidité en fonction de l'âge à la survenance de l'arrêt de travail et l'ancienneté de l'arrêt.

La figure montre bien que le nombre de transition est relativement faible jusqu'au 36ème mois où le taux de transition augmente brusquement. Cela s'explique par la consolidation de l'arrêt de travail au bout de 3 ans.

C.2.3 Loi de maintien en invalidité

Cette table indique les effectifs de personnes en invalidité en fonction de l'âge à l'entrée dans l'état d'invalidité (20 à 64 ans) et l'ancienneté en année dans cet état (0 à 42 ans). Cette table suppose un départ à la retraite à 62 ans.

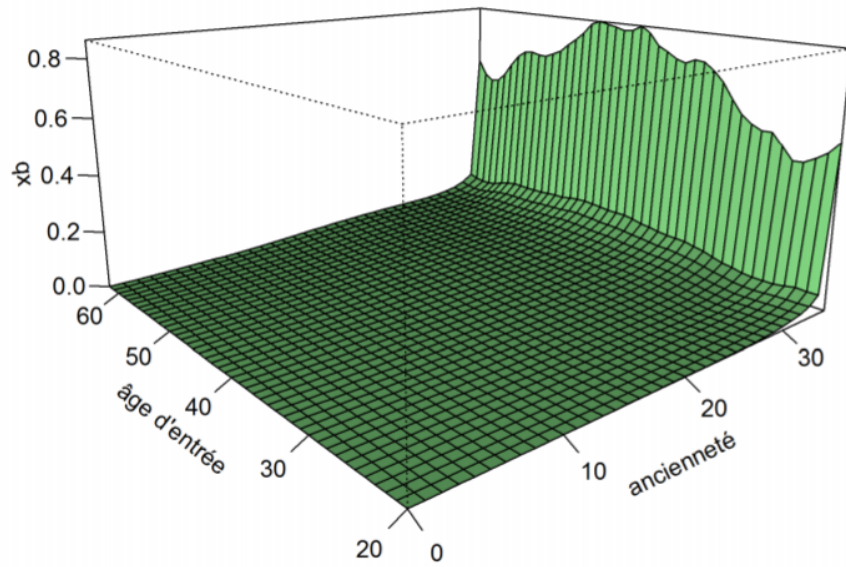


FIGURE 54 – Taux de transition

C.2.4 Remarque sur les lois

Afin de conserver la simplicité des lois, la Catégorie Socio Professionnelle (CSP) ainsi que le sexe, bien qu'ayant une influence importante sur les incidences et les maintiens (en incapacité et en invalidité) ne sont pas pris en compte dans les tables du BCAC.

D Caractéristiques des assurés du portefeuille et tableaux de sensibilités

D.1 Paramètres des lois utilisées pour la simulation du portefeuille fictif

Le tableau suivant présente les paramètres des lois utilisées pour la simulation des caractéristiques de chaque assuré du portefeuille fictif :

TABLEAU 26 – Paramètres des lois pour le portefeuille fictif

Caractéristique c	Moyenne μ^c	Écart type σ^c
âge	42	8
s	$1000 \times \text{âge}$	$500 \times \text{âge}$
K_{dc}	$3 \times s$	$0,5 \times s$
a	90%	0.005
b	70%	0.005
ancienneté sélection méd	4	2

Ces paramètres sont calibrés sur un portefeuille TNS.

D.2 Tableaux de sensibilités

TABLEAU 27 – Sensibilité de α au frais réel du réassureur c

Frais c	Chargement α
0%	35,27%
2%	36,70%
4%	38,14%
6%	39,61%
8%	41,08%
10%	42,56%
12%	44,06%
14%	45,58%
16%	47,10%
18%	48,65%
20%	50,20%

TABLEAU 28 – Sensibilité de α au frais du compte de PB f^{PB}

Frais de PB f^{PB}	Chargement α
0%	48,93%
2%	46,29%
4%	43,78%
6%	41,38%
8%	39,09%
10%	36,89%
12%	34,80%
14%	32,80%
16%	30,88%
18%	29,06%
20%	27,31%

TABLEAU 29 – Sensibilité de α au taux de PB t^{PB}

Taux de PB t^{PB}	Chargement α
0%	2,14%
10%	7,31%
20%	13,46%
30%	20,95%
40%	30,33%
50%	42,56%
60%	59,39%
70%	84,50%
80%	127,38%
90%	223,95%

TABLEAU 30 – Sensibilité de α à r^{DC}

r^{DC}	Chargement α
-2%	40.56%
-1%	41.40%
-0.5%	41.79%
-0.3%	41.95%
-0.2%	42.03%
-0.1%	42.10%
0%	42.18%
0.1%	42.25%
0.2%	42.33%
0.3%	42.40%
0.5%	42.55%
1%	42.90%
2%	43.59%
3%	44.23%
5%	45.44%
10%	48.11%

TABLEAU 31 – Sensibilité de α à r^{AT}

r^{AT}	Chargement α
-2%	31.36%
-1%	36.88%
-0.5%	39.51%
-0.3%	40.55%
-0.2%	41.06%
-0.1%	41.57%
0%	42.08%
0.1%	42.58%
0.2%	43.08%
0.3%	43.58%
0.5%	44.57%
1%	47.01%
2%	51.74%
3%	56.30%
5%	64.88%
10%	83.70%

TABLEAU 32 – Sensibilité de α à la taille du portefeuille

Taille du portefeuille	Chargement α
100	63,63%
500	44,93%
1000	38%
5000	30,44%
25000	27,75%
50000	27,22%
100000	27,06%

TABLEAU 33 – Sensibilité de α à l'âge moyen du portefeuille

Âge moyen	Chargement α
25 ans	40,9%
30 ans	43,17%
35 ans	46,65%
40 ans	36,75%
45 ans	36,08%
50 ans	33,67%
55 ans	30,09%
60 ans	29,24%

TABLEAU 34 – Sensibilité de α à l'ancienneté de la sélection médicale

Ancienneté en année	α
1	49.45%
2	43.59%
3	36.91%
4	43.26%
5	36.73%
6	41.12%
7	29.81%
8	34.60%
9	28.71%
10	38.98%

TABLEAU 35 – Sensibilité de α à la part moyenne du salaire garantie en incapacité

a_{moy}	Chargement α
10%	51.22%
20%	60.85%
30%	54.56%
40%	47.09%
50%	52.83%
60%	42.33%
70%	41.91%
80%	36.52%
90%	43.75 %

TABLEAU 36 – Sensibilité de α à la part moyenne du salaire garantie en invalidité

b_{moy}	Chargement α
10%	32.14%
20%	45.15%
30%	38.72%
40%	43.72%
50%	45.22%
60%	38.15%
70%	31.03%
80%	44.83%
90%	42.88%