Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires

le 10 Septembre 2021

Par : Seham ALZEEB
Titre : Construction d'une table de mortalité d'expérience en assurance emprunteur et impact sur les engagements de l'assureur

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires :
Guillaume BIESSY
Guillaume GONNET
Fabrice HAMON

Entreprise :
Harmonie Mutuelle
Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA :
Brice FRANKE

Directeur de mémoire en entreprise :
David LEGOFF
Signature :

Invité :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

EURIA
EURo Institut d'Actuariat
6, avenue le Gorgeu
CS 93837
29238 Brest Cedex 3
T +33 (0)2 98 01 66 55
euria@univ-brest.fr

Résumé

En assurance de personnes, l'évaluation des provisions techniques à partir de la meilleure estimation des flux de trésorerie nécessite de prendre en compte l'expérience du portefeuille assuré. Afin d'évaluer la meilleure valeur possible de leurs engagements, les assureurs sont incités à la construction d'une table de mortalité d'expérience.

Harmonie mutuelle souhaite construire une table de mortalité d'expérience, pour un portefeuille d'assurance de prêts, et analyser son impact sur ses engagements envers ses adhérents et son capital de solvabilité.

Nous avons, dans un premier temps, étudié les statistiques du portefeuille, il sera tout d'abord question de leur fiabilité et de leur suffisance afin de réaliser notre étude. Ensuite, dans la deuxième partie, nous avons déterminé les taux bruts de mortalité par la méthode de Kaplan-Meier.

Dans la troisième partie, nous avons utilisé quatre modèles d'ajustement de la mortalité : deux modèles relationnels (hasard proportionnel et Brass), un modèle endogène paramétrique (ajustement logistique) et un modèle endogène non paramétrique (Whittaker-Henderson).

La quatrième partie est consacrée à comparer et valider les modèles d'ajustement afin de choisir la table d'expérience la plus fidèle aux observations.

Enfin, une réévaluation des engagements de l'assureur est réalisée afin d'étudier les impacts du changement de la loi de mortalité sur le provisionnement ainsi que sur la solvabilité de la mutuelle.

Mots clefs : Assurance emprunteur, Kaplan-Meier, hasard proportionnel, Brass, Logits, Whittaker-Henderson, Provisions Mathématiques, Best Estimate, Capital de Solvabilité Requis (SCR), Solvabilité II.

Abstract

In life and health insurance, the assessment of technical provisions based on the best estimate of cash flows requires taking into account the experience of the insured portfolio. In order to assess the best estimation of their commitments, insurers are encouraged to construct an experience mortality table.

Harmonie Mutuelle wants to build an experience mortality table for a credit insurance portfolio, and to analyze its impact on its commitments towards its assureds and its solvency capital.

We first studied the portfolio statistics to be sure of their reliability and their sufficiency to carry out our study. In the second part, we determined the death rates by the Kaplan-Meier method using the experience data.

The third part is dedicated to test four mortality adjustment methods : two relational models (proportional hazard and Brass), a parametric endogenous model (logistic adjustment) and a non-parametric endogenous model (Whittaker -Henderson).

The fourth part is devoted to validate and compare the different adjustments in order to keep the most fitted one with the real observations.

Finally, we reevaluate the insurer's commitments in order to study the impacts of the new mortality table on the provisions as well as the impact on the mutual's solvency.

Keywords : Credit insurance, Kaplan-Meier, proportional hazard, Brass, Logits, Whittaker-Henderson, Mathematical Provisions, Best Estimate, Solvency Capital requirement (SCR), Solvency II.

Note de synthèse

Mots clefs : Assurance emprunteur, Kaplan-Meier, hasard proportionnel, Brass, Logits, Whittaker Henderson, Provisions Mathématiques, Best Estimate, Capital de Solvabilité Requis (SCR), Solvabilité II.

L'assurance emprunteur, est une assurance temporaire de prévoyance, souscrite pour garantir qu'un emprunt soit assuré en cas de décès, d'incapacité ou d'invalidité de l'emprunteur. C'est une assurance non obligatoire au sens du Code des Assurances, mais elle est indispensable pour l'obtention d'un crédit auprès d'un établissement prêteur. Ce contrat couvre le remboursement des échéances du prêt, en totalité ou en partie, en cas de survenance de l'un des risques assurés.

Pour garantir le paiement des échéances du prêt en cas de décès, l'assureur doit constituer des provisions au passif de son bilan. Ces provisions résultent de la différence entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré. Si ces provisions sont inadaptées, l'assureur sera confronté à une perte technique, ce qui impectera négativement ses fonds propres.

Les tables de mortalité constituent un outil statistique essentiel pour le provisionnement, et sont encadrées par la réglementation. En pratique, des tables de mortalité réglementaires peuvent être utilisées par les assureurs par défaut. Toutefois, la réglementation précise dans quelles conditions l'assureur peut utiliser ses propres tables d'expérience construites à partir des données de la population concernée par son portefeuille et certifiées par un actuaire agréé indépendant.

➤ Objectif de l'étude

Une table de mortalité d'expérience a été certifiée pour le provisionnement des contrats du portefeuille des emprunteurs étudié en 2020, cette table est cependant plus prudente que la réalité. En effet, elle est construite en éliminant les adhésions des trois dernières années pour enlever l'effet de la sélection médicale, ainsi qu'en ajoutant une

marge de prudence indispensable à la certification. Le but de ce mémoire est de construire une table de mortalité best estimate pour analyser ses impacts sur les provisions mathématiques, les provisions Best Estimate Vie ainsi que sur la solvabilité de la mutuelle.

➤ Caractéristiques du portefeuille des emprunteurs étudié

Le portefeuille emprunteur qui fait l'objet de notre étude est composé d'environ 50 produits avec des versions différentes. Il inclut deux types d'assurance, soit la cotisation est en fonction du capital restant dû (CRD) et l'âge atteint annuellement, soit en fonction du capital initial (CI) et de l'âge au jour de l'adhésion. Les emprunteurs sont assurés suite à une sélection médicale allant d'une simple déclaration de bonne santé à des examens médicaux plus approfondis. L'âge limite de souscription à la garantie décès qui constitue le sujet de notre étude est de 55 à 79 ans avec une durée du prêt limite de 20 à 35 ans et une durée moyenne souscrite d'un prêt de 11.7 ans (à cause du remboursement anticipé du prêt ou le changement d'assureur).

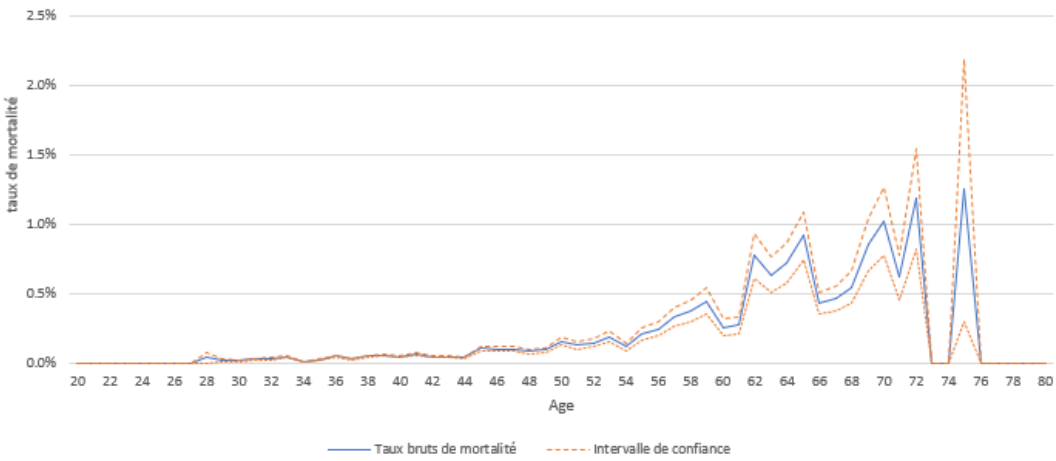
➤ Statistiques du portefeuille des emprunteurs étudié

La période d'étude couvre les exercices de 2008 à 2019. Cette durée longue se justifie par le faible nombre de décès du portefeuille emprunteur, et l'intérêt d'avoir un échantillon plus important. Nous disposons d'une exposition totale de 298 000 assurés avec 222 décès. Le portefeuille a été rajeuni par le développement des volumes depuis 2017, l'âge moyen des assurés diminue depuis 2017, pour atteindre 39.1 en 2019.
Enfin, le sex ratio est totalement stable depuis 2010 avec 52% d'hommes dans l'exposition ce qui légitime la construction d'une table de mortalité unisexe.

➤ Estimation des taux bruts de mortalité

L'estimateur de Kaplan-Meier permet d'estimer la fonction de survie des individus à chaque instant de décès en comptabilisant à chacun de ces moments le nombre exact de personnes présentes dans le portefeuille. Ce modèle permet de ne faire aucune hypothèse sur la loi sous-jacente des décès, il est non paramétrique. De plus, il prend en compte facilement les censures à droite et les troncatures à gauche de la durée de vie.

A partir de la fonction de survie estimée par Kaplan-Meier, nous avons déduit les taux bruts de mortalité du portefeuille emprunteurs sur l'intervalle [20ans ; 90ans].
Le graphique ci-dessous présente les taux de décès bruts estimés selon la méthode de Kaplan-Meier et l'intervalle de confiance à 95% associés :



Taux bruts de mortalité du portefeuille des emprunteurs

Les taux bruts estimés par Kaplan Meier mettent en évidence le petit volume de données disponibles, à travers la volatilité de la courbe obtenue.

➤ Lissage des taux bruts de mortalité

Le choix s'est porté sur les modèles qui ont montré une efficacité dans l'ajustement de la mortalité des échantillons de faible volumétrie.

➟ **Modèle exogène :**

Les modèles exogènes ou relationnels sont les plus envisageables, surtout pour une estimation plus robuste de la mortalité pour les âges élevés. Et cela, en s'appuyant sur une référence externe et positionnant la mortalité du portefeuille par rapport à cette référence.

- **Modèle à hasard proportionnel** : C'est une méthode classique qui consiste à positionner une table d'expérience par rapport à une table de référence. Son principe est d'appliquer un taux d'abattement aux taux d'une table de référence $q_x = \alpha \times q_x^{\text{réf}}$. Le calibrage est réalisé en minimisant une distance de khi-deux entre les taux bruts et ajustés de mortalité. Nous avons choisi comme table de référence la table réglementaire TH00-02 et une combinaison entre 52% de la table TH00-02 et 48% de la table TF00-02.
- **Modèle de Brass** : Brass propose une relation entre le logarithme d'une fonction de la probabilité de décès des emprunteurs et celle de la population de référence, $logit(\hat{q}_x) = \alpha + \beta \times logit(q_x^{rf}) + \epsilon_x$, avec ϵ_x un bruit blanc gaussien. L'avantage de la fonction logit, est qu'elle est une fonction allant de $[0;1]$ dans R. Elle est donc parfaitement adaptée pour modéliser les probabilités. Nous avons choisi comme table de référence la table TH00-02. Le calibrage

est réalisé sur la plage d'âges [28 ; 60] (ayant la plus petite erreur quadratique moyenne) en minimisant la distance sur la base du critère des moindres carrés.

- **Modèle endogènes :**

  - **Modèle des logits** : Ce modèle se base sur une régression linéaire de la fonction logit des taux de mortalité par rapport aux âges (variable explicative)

    $$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \epsilon_x$$

    avec ϵ_x un bruit blanc gaussien. Le calibrage est ainsi réalisé sur la tranche d'âges [30 ; 60] (tranche ayant la plus petite erreur quadratique moyenne) par la minimisation de la distance sur la base des moindres carrées.
  - **Modèle des logits avec âge charnière** : En général nous observons à des âges charnières x_c des décrochages ou des modifications de la mortalité. Le modèle des logits sous-estime la mortalité dans la plupart des tranches d'âges, donc il était plus pratique de considérer un modèle de type :

    $$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 (x - x_c)^{\lambda} 1_{\{x \geq x_c\}} + \epsilon_x$$

    Le calibrage a été réalisé sur la plage d'âges [30 ; 60]. Pour optimiser par rapport à l'âge charnière, nous avons testé différents âges et nous avons cherché à minimiser une erreur quadratique entre les taux observés et les taux théoriques.
  - **Whittaker Henderson** : La méthode de Whittaker-Henderson a comme principe de combiner un critère de régularité S et un critère de fidélité F et de rechercher les taux ajustées qui minimisent $M = F + h \times S$ avec

    $$F = \sum_{i=1}^{p} w_i (q_i - \hat{q}_i)^2 \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

    Cette méthode étant non paramétrique, évite les problématiques du calibrage des paramètres, surtout pour des données non volumineuses. Nous avons réalisé la modélisation sur la plage d'âge [28 ; 60] qui donne la plus petite erreur quadratique. Cette méthode étant non paramétrique, nous avons estimé les taux lissés en testant plusieurs valeurs des paramètres h et z, pour choisir la courbe qui est la plus fidèle aux taux de mortalité empiriques et la plus régulière.

➤ Validation et comparaison des modèles et table retenue

Afin de choisir la courbe des taux de mortalité la plus conforme aux données observées, nous avons réalisé différents tests de façon à valider l'adéquation des taux ajustés à la mortalité empirique. Nous avons validé la qualité des modèles d'ajustement sur la plage d'âges [28 ; 60] représentant 95.2% du capital restant dû et 93% de l'effectif global.

- **Test de khi-deux d'adéquation** : Nous avons réalisé un test de khi-deux d'adéquation pour comparer globalement les données observées aux données théoriques attendues. En effet, nous considérons une variable aléatoire D_2 qui mesure globalement les erreurs entre les taux ajustés q_x et ceux observés $\hat{q}_x$.

  L'hypothèse du test est acceptée pour tous les modèles d'ajustement. On ne rejette donc pas l'hypothèse selon laquelle les taux ajustés sont conformes aux taux lissés.

- **Vérification de la fidélité à la mortalité observée** : Le critère de fidélité est une méthode qui consiste à calculer la distance entre les taux empiriques et les taux théoriques. Plus la somme des distances tend vers zéro, plus la table de mortalité estimée est fidèle à la réalité.

- **Régularité des taux ajustés** : Le critère de régularité est la somme des carrés des différences d'ordre z des taux ajustés. Plus cet indicateur tend vers zéro, plus les taux de mortalité ajustés sont considérés comme réguliers.

- **Ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus** : Une méthode simple et pragmatique, qui permet de vérifier la fidélité de la table construite à la mortalité observée. Un ratio (Décès observés / Attendus) proche de 1 montre une bonne capacité de la table à prédire la mortalité d'expérience.

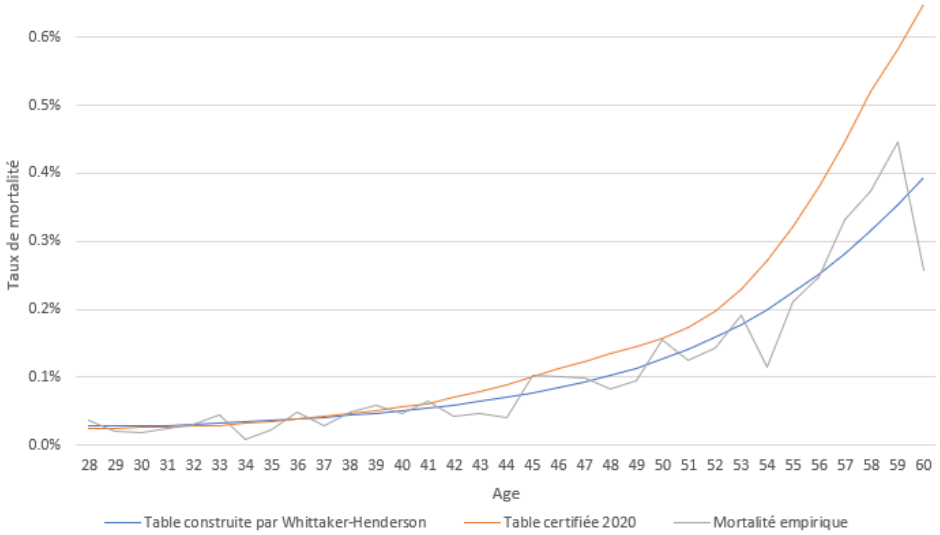
- **Bandes de confiance de Kaplan-Meier** : Les bandes de confiance des taux bruts de mortalité de Kaplan-Meier doivent encadrer les taux théoriques avec une probabilité de 95%.

Critère de comparaison / Modèle	Hasard proportionnel (TH00-02)	Hasard proportionnel (52% TH + 48% TF)	Brass	Logits	Logits + xc	Whittaker-Henderson
Test de Khi-Deux						x
Critère de fidélité						x
Critère de régularité			x			
Ratio Décès Observés / Décès Attendus						x
Bandes de Confiance						x

La méthode de Whittaker-Henderson a permis d'obtenir les taux ajustés les plus proches des taux bruts, ce qui montre que la mortalité estimée par ce modèle est la plus conforme à la réalité.

➤ Comparaison entre la table 2020 et la table best estimate construite

Le graphe ci-dessous illustre la comparaison entre la table de mortalité certifiée en 2020 et la loi de mortalité best estimate construite :



Comparaison entre les taux de la table 2020 et la table best estimate construite

A partir de l'âge 35 les taux de mortalité de la table certifiée en 2020 deviennent plus élevés que ceux estimés par Whittaker-Henderson.

➤ Impacts de la table de mortalité

- **Impact sur l'évaluation des provisions mathématiques** :

PM nette au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	PM nette au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
5,938,748	2,217,597	-63%

PM Brute au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	PM Brute au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
14,285,883	5,464,529	-62%

Impact de la table best estimate sur l'évaluation des provisions mathématiques

Les provisions mathématiques nettes diminuent de 63% avec la table best estimate. En effet cette table étant plus favorable sur les âges supérieurs à 35 ans,

celle-ci a un impact bénéfique dans le calcul des PM de la quasi-totalité des assurés, car même si un assuré souscrit avant l'âge de 35 ans, dès la première année, le calcul de sa PM prend en compte la tarification de tous les âges futurs jusqu'à la fin du prêt.

- **Impact sur l'évaluation des provisions Best Estimate de primes Vie** :

BE central brut au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	BE central brut au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
1,418,112	-5,638,549	-7,056,662

Impact sur l'évaluation des provisions Best Estimate primes Vie

Les BE Vie centraux obtenus par la table best estimate que nous avons construite sont négatifs, les primes ou flux entrants sont supérieurs aux flux sortants (les engagements de l'assuré sont plus élevés que ceux de l'assureur), ce qui tend à démontrer que le portefeuille est globalement rentable.
Sur la base des taux de mortalité obtenus, des analyses complémentaires à une maille plus fine (produit, CSP...) pourraient être menées, conduisant à un ajustement "sur-mesure" des tarifs en fonction de la cible.

- **Impact sur le SCR Vie et SCR santé SLT** :

SCRlife	Avec la table certifiée 2020	Avec la table best estimate construite	Impact
Exigence de capital - Risque de souscription vie	10,679,839	9,027,067	-1,652,772

SCRhealth SLT	Avec la table certifiée 2020	Avec la table best estimate construite	Impact
Exigence de capital - Risque de souscription Santé SLT	6,162,321	5,605,306	-557,015

Impact de la table sur le SCR Vie et santé SLT

Les SCR Vie et SCR santé SLT du portefeuille des emprunteurs diminuent avec la table construite, l'impact des chocs étant réduit. Globalement, les fonds propres d'Harmonie Mutuelle augmentent avec la nouvelle table car les passifs du bilan diminuent. De même, le ratio de solvabilité augmente de 0.6% avec la nouvelle table. Ainsi, plus nous provisionnons, plus nous augmentons le besoin en solvabilité en cas d'une crise économique.

Executive summary

Keywords : Credit insurance, Kaplan-Meier, proportional hazard, Brass, Logits, Whittaker-Henderson, Mathematical Provisions, Best Estimate, Solvency Capital requirement (SCR), Solvency II.

Credit insurance is a temporary death and disability insurance underwritten to ensure that a loan is insured in case of death, incapacity, or disability of the borrower. Based on the Insurance Code, this is a non-compulsory insurance, but it is essential to obtain a credit from lending institutions. This contract covers the payment of the loan maturities, in whole or in part, in case of occurrence of one of the insured risks.

To guarantee the payment of the loan maturities in case of death, the insurer must make provisions on the liabilities side of their balance sheet. These provisions result from the difference between the commitments of the insurer and those of the insured If these provisions are poorly optimized then the insurer will face a technical loss and will be obliged to use their own funds.

Mortality tables are the essential statistical tool for provisioning, these tables are controlled by the regulations. In practice, insurers can use regulatory mortality tables by default. However, the regulations specify under which conditions the insurer can use their own experience tables constructed from its concerned population data and certified by an independent chartered actuary.

➤ Study objective

An experience mortality table has been certified in 2020 for the provisioning of the credit insurance portfolio contracts, this table is more cautious than reality. In fact, this table is built by eliminating the insureds of the last three years to remove the selective effect, which is due to medical selection, as well as by adding a caution margin. The purpose of this thesis is to build a best estimate mortality table to optimize technical provisions and to analyze the impacts of this table on the mathematical provisions, the

Best Estimate provisions as well as on the solvency of the mutual.

➤ Credit insurance portfolio characteristics

The credit insurance portfolio which is the subject of our study is made up of around 50 products with different versions. It includes two types of insurance, either the contribution is based on the outstanding capital (CRD) and the insured age reached annually, or it depends on the initial capital (CI) and the age on the day of underwriting. Borrowers are medically selected by a simple declaration of good health or medical examinations. The limited age to underwrite the death guarantee which is the subject of our study is 55 to 79 years with a loan term of 20 to 35 years and an average loan duration of 11.7 years (due to early payment of the loan or a change of insurer).

➤ Credit insurance portfolio statistics

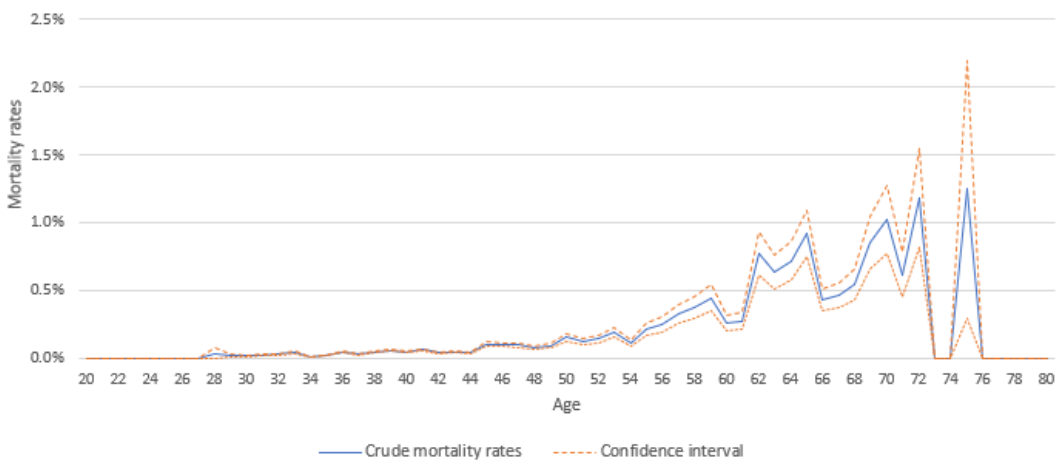
The study period covers the years 2008 to 2019. This long duration is justified by the low number of deaths in the credit insurance portfolio, and the advantage of having a larger sample. We have a total exposure of 298,000 and 222 deaths. The portfolio has been rejuvenated by the development of volumes since 2017, the average age of policyholders has been decreasing since 2017, reaching 39.1 in 2019.

Finally, the sex ratio has been completely stable since 2010 with 52% of men in the exhibition so we will have consistency in the mortality table and mortality can therefore be approximated by a unisex law.

➤ Crude death rates estimation

The Kaplan-Meier estimator makes it possible to estimate the survival function of individuals at each moment of death by counting at each of these moments the exact number of people present in the portfolio. Thus, this model makes it possible to make no assumption on the underlying distribution of deaths, and it is a non-parametric model. Moreover, it easily takes into account right censors and left truncations of the lifetime.

From the survival function estimated by Kaplan-Meier,the crude mortality rates of the credit insurance portfolio over the interval [20 years ; 90 years] was deduced. The graph below shows the crude death rates estimated using the Kaplan-Meier method and the 95% confidence interval :



Crude mortality rates of the borrowers' portfolio

The volatility of the mortality rates curve is caused by the small volume of data available.

➤ Crude mortality rates adjustment

We have chosen models which are effective in adjusting the mortality of small samples.

➟ **Exogenous model :**

Exogenous or relational models are the most feasible, especially for a more robust mortality estimation for older ages. And this by relying on an external benchmark and positioning the portfolio's mortality in relation to this reference.

- **Proportional hazard model** : This is a classic method which consists of positioning an experience table relative to a reference table. Its principle is to apply an abatement rate to the mortality rates of a reference table, $q_x = \alpha \times q_x^{\text{ref}}$. Calibration is done by minimizing a chi-square distance between crude and adjusted mortality rates. We have chosen the regulatory table TH00-02 and a combination between 52 % of the TH00-02 table and 48 % of that of the TF00-02 as reference tables.
- **Brass model** : Brass proposes a relation between the logarithm of a function of the probability of death of borrowers and that of the reference population, $logit(\hat{q}_x) = \alpha + \beta \times logit(q_x^{ref}) + \epsilon_x$, where ϵ_x is gaussian white noise.
  The importance of the logit function is that it goes from $[0; 1]$ in R. Then it is perfectly suited to model the probabilities. We have chosen the TH00-02 table as a reference table. The calibration is done on the age range $[28; 60]$ by minimizing the distance based on the least squares criterion.

➟ **Endogenous models :**

- **Logits model** : This model is based on a linear regression of the logit function of death rates over ages (explanatory variable)

$$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \epsilon_x$$

where ϵ_x is gaussian white noise. The calibration is thus done on the age range [30 ; 60] (being the range with the smallest mean squares error) by minimizing the distance based on least squares.

- **Logits model with pivotal age** : In general, we observe at ages x_c dropouts or changes in mortality. The logits model underestimates mortality in most age groups, so it was more practical to consider a model of the type :

$$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 (x - x_c)^{\lambda} 1_{\{x \geq x_c\}} + \epsilon_x$$

The calibration was done on the age group [30 ; 60]. To optimize the pivotal age, we tested different ages and sought to minimize a squared error between the observed rates and the theoretical rates.

- **Whittaker Henderson** : The principle of the Whittaker-Henderson method is to combine a regularity criterion S and a fidelity criterion F and to find the adjusted rates which minimize $M = F + h \times S$ with

$$F = \sum_{i=1}^{p} w_i (q_i - \hat{q}_i)^2 \text{ and } S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

This method being non-parametric, avoids the problems of the calibration of the parameters, especially for non-voluminous data. We calibrated this model on the age range [28 ; 60], which gives the smallest squared error. This method being non-parametric, we estimated the smoothed rates by testing several values of the parameters h and z, to choose the curve which is the most faithful to the empirical death rates and the most regular.

➤ Validation and comparison of models and selected table

In order to choose the most consistent mortality rate curve with the observed data, we carried out various tests in order to validate the adequacy of the adjusted rates for empirical mortality. We validated the quality of the adjustment models over the age range [28 ; 60] representing 95.2% of the outstanding capital and 93% of the overall exposure.

- **Chi-square fit test** : We performed a chi-square fit test to globally compare the observed data to the expected theoretical data. Indeed, we consider a random

variable D_2 which globally measures the errors between the adjusted rates q_x and those observed $\hat{q}_x$.

The test hypothesis is accepted for all fit models. We therefore do not reject the hypothesis stating that the adjusted rates are consistent with the smoothed rates.

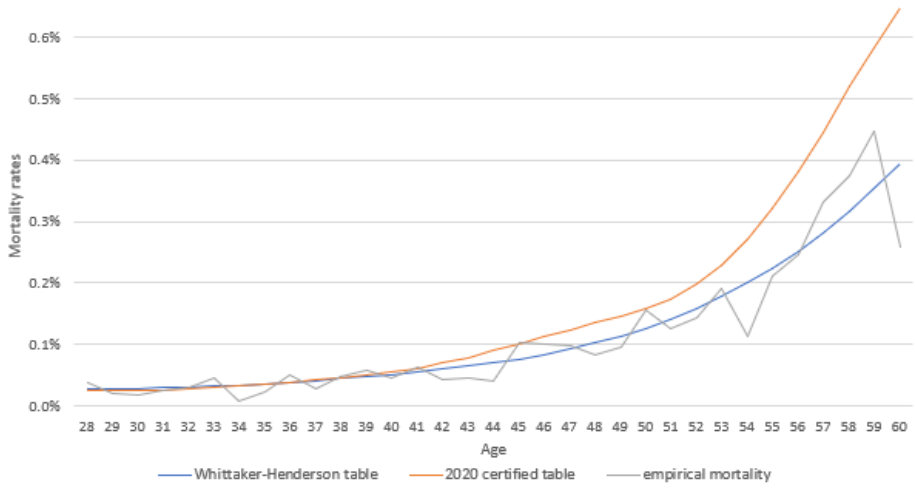
- **Verification of the fidelity to observed mortality** : The fidelity criterion is a method which consists in calculating the distance in absolute value between the empirical rates and the theoretical rates. The more the sum of the distances tends towards zero, the more the estimated mortality table is faithful.
- **Adjusted rates regularity** : The regularity criterion is the sum of the squares of the z-order differences of the adjusted rates. The more this indicator tends towards zero, the more adjusted death rates are considered regular.
- **Ratio of the number of observed deaths over those expected** : A simple and pragmatic method, which allows to check the reliability of the constructed table to observed mortality. An Observed / Expected Deaths ratio close to 1 shows the table's good ability to predict experimental mortality.
- **Kaplan-Meier confidence bands** : The confidence bands of Kaplan-Meier crude death rates should surround the theoretical rates with a probability of 95%.

Comparison criteria / Model	Proportional Hazard (TH00-02)	Proportional Hazard (52% TH + 48% TF)	Brass	Logits	Logits + xc	Whittaker-Henderson
Chi-square fit test						x
Fidelity criterion						x
Regularity criterion			x			
Ratio of Observed deaths / Expected deaths						x
Confidence Bands						x

The Whittaker-Henderson method gives the closet adjusted rates to the crude rates, showing that the estimated mortality by this model is the most consistent with reality.

➤ Comparison between the 2020 table and the constructed best estimate table

The graph below illustrates the comparison between the certified mortality table in 2020 and the constructed best estimate mortality table :



Comparison between the 2020 table and the best estimate table

From age 35 onwards, mortality rates for the certified table in 2020 are higher than those estimated by whittaker-Henderson.

➤ **Mortality table impacts**

- **Impact on the evolution of mathematical provisions** :

Net MP with the 2020 certified table on 31/12/2020	Net MP with the best estimate table on 31/12/2020	Evolution
5,938,748	2,217,597	-63%

Gross MP with the 2020 certified table on 31/12/2020	Gross MP with the best estimate table on 31/12/2020	Evolution
14,285,883	5,464,529	-62%

Impact of the best estimate table on the evolution of mathematical provisions

The net mathematical provisions decrease by 63% with the best estimate table. As this table is more favorable for ages over 35, it has a beneficial impact in the calculation of MPs for almost all policyholders, because even if an insured subscribes before the age of 35, from the first year, the calculation of his PM takes into account the pricing of all future ages until the end of the loan.

- **Impact on the valuation of Life Best Estimate provisions** :

Gross central BE on 31/12/2020 with the 2020 certified table	Gross central BE on 31/12/2020 with the best estimate table	Evolution
1,418,112	-5,638,549	-7,056,662

Impact on the valuation of Life premium Best Estimate provisions

The central Life BE obtained by the best estimate table that we have constructed is negative, so the premiums or the inflows are greater than the outflows (the insured's commitments are higher than those of the insurer).
Since the mortality rates of the best estimate table constructed approach the pricing table, this explains the decrease in PMs and central BEs, so a review of the premiums can be carried out.

- **Impact on the Life SCR and health SLT SCR** :

SCRlife	With the 2020 certified table	With the best estimate table	Impact
Capital requirement - Life underwriting risk	10,679,839	9,027,067	-1,652,772

SCRhealth SLT	With the 2020 certified table	With the best estimate table	Impact
Capital requirement - Health SLT underwriting risk	6,162,321	5,605,306	-557,015

Impact of the mortality table on the Life SCR and health SLT SCR

The Life SCR and health SLT SCR of the borrowers' portfolio decrease with the constructed table, therefore the loss of the portfolio decreases following a shock. The level of equity needed to absorb shocks decreases.
Harmonie Mutuelle's equity increases with the new table because the liabilities of the balance sheet decrease. The solvency ratio increases by 0.6% with the new table, therefore over-provisioning decreases the solvency of the company. In fact, the more we provision the more we increase the need for solvency in the event of an economic crisis.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à vivement remercier M. David Legoff, responsable du Service Inventaire Technique, mon encadrant d'entreprise, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et m'avoir permis de réaliser ce mémoire. Je tiens également à le remercier pour sa confiance, sa disponibilité ainsi que le partage de ses connaissances et de son expertise.

Aussi, je remercie M. Anthony Nahelou, mon tuteur académique d'alternance ainsi que M. Mohammed Bennouna, mon encadrant académique de mémoire, pour leur suivi, leurs conseils et leur encadrement.

Je remercie l'équipe Inventaire Technique particulièrement Justine Gaubert, Fatima Lmouchter et Jean-Baptiste Croguennec et je témoigne toute ma reconnaissance pour leur aide dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'EURIA et les intervenants professionnels responsables de ma formation, pour avoir assuré la partie théorique du mémoire.

Table des matières

Introduction et motivations **1**

1 Cadre de l'étude **5**
1.1 Le contexte 5
1.1.1 Présentation d'Harmonie Mutuelle 5
1.1.2 Définition de l'assurance emprunteur 8
1.2 Les clauses de résiliation en assurance emprunteur 9
1.3 Risque de mortalité 10
1.3.1 Evolution de la mortalité en France 11
1.4 Règlementation solvabilité II 12
1.4.1 De solvabilité I à solvabilité II 12
1.4.2 Les trois piliers de solvabilité II 13
1.4.3 Les exigences quantitatives (Pilier 1) 13
1.5 Description du portefeuille emprunteur 17
1.5.1 Caractéristiques du portefeuille 17
1.5.2 Statistiques descriptives 18

2 Construction d'une table de mortalité **22**
2.1 Définition de la table de mortalité 22
2.1.1 Type des tables de mortalité 23
2.2 Outils de construction de la table de mortalité 25
2.2.1 La durée de vie humaine comme une variable de durée 25
2.2.2 Censures et troncatures 26
2.3 Estimation non paramétrique des taux bruts de mortalité 27
2.3.1 Estimateur de Kaplan-Meier de la survie 27
2.4 Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité 28
2.5 Bandes de confiance des taux bruts de mortalité 30

3 Lois de mortalité appliquées aux taux bruts **31**
3.1 Modèle à hasard proportionnel 31
3.1.1 Application numérique 33
3.2 Modèle de Brass 35
3.2.1 Application numérique 36
3.3 Modèle des Logits 40
3.3.1 Application numérique 40
3.4 Modèle des Logits avec âge charnière 42
3.4.1 Application numérique 43
3.5 Whittaker Henderson 46
3.5.1 Application numérique 48

4 Validation, comparaison des modèles et table retenue **51**
4.1 Test de khi-deux d'adéquation 51
4.2 Vérification de la fidélité à la mortalité observée 53
4.3 Régularité des taux ajustés 54
4.4 Ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus 55
4.5 Encadrement des taux lissés par les bandes de confiance de Kaplan-Meier 56
4.6 Comparaison entre la table 2020 et la table best estimate construite . . . 58

5 Impacts de la table de mortalité **61**
5.1 Impacts sur l'évaluation des provisions mathématiques 61
5.2 Impact sur l'évaluation du Best Estimate Vie Central 64
5.3 Impact sur l'évaluation du SCR vie et santé SLT 66
5.4 Impact sur les engagements totaux et le ratio de solvabilité 70

Conclusion **72**

Annexes **73**

A Modèle à hasard proportionnel **73**

B Brass avec une combinaison des tables TH00-02 et TF00-02 **74**

C Estimation des taux bruts par la méthode de Hoem **77**

Bibliographie **82**

Table des figures

1 *Exemple de l'impact du changement de la table de mortalité sur les PM* 3

1.1 *Evolution des FP d'Harmonie Mutuelle entre 2018 et 2020* 6
1.2 *Ratios de couverture de SCR et MCR d'Harmonie Mutuelle* 7
1.3 *Evolution du C.A d'Harmonie Mutuelle entre 2018 et 2020* 7
1.4 *Evolution de la mortalité en France* 11
1.5 *Les trois piliers de Solvabilité II* 13
1.6 *Passage du bilan comptable au bilan Solvabilité II* 14
1.7 *Comparaison de l'exposition par âge* 20
1.8 *Fréquence des sinistres et exposition des contrats par année* 21

2.1 *Taux bruts de mortalité du portefeuille* 29
2.2 *Bandes de confiance des taux bruts de mortalité du portefeuille* 30

3.1 *Lissage de la mortalité empirique par le modèle à hasard proportionnel* 33
3.2 *Prolongement des taux de mortalité du modèle à hasard proportionnel* 34
3.3 *Test de linéarité des logits* 36
3.4 *Test de bruit blanc des résidus du modèle de Brass* 38
3.5 *Test de normalité des résidus du modèle de brass* 38
3.6 *Lissage de la mortalité empirique par la méthode de Brass* 39
3.7 *Prolongement des taux de mortalité de Brass* 39
3.8 *Lissage de la mortalité empirique par la méthode des Logits* 41
3.9 *Prolongement des taux de mortalité de la méthode des Logits* 42
3.10 *Erreur quadratique en fonction de l'âge charnière* 43
3.11 *Ajustement de la mortalité par la méthode des Logits avec âge charnière* . . . 44
3.12 *Comparaison entre le lissage des taux bruts par le modèle des Logits avec et sans âge charnière* 44
3.13 *Choix des paramètres de Whittaker-Henderson* 49
3.14 *Lissage de la mortalité empirique par la méthode de Whittaker-Henderson* . . 50
3.15 *Prolongement des taux théoriques de Whittaker-Henderson* 50

4.1 *Comparaison des modèles de lissage* 53
4.2 *Encadrement de la table retenue par les bandes de confiance de Kaplan-Meier* 57
4.3 *Table de mortalité retenue plus une marge de prudence* 58
4.4 *Comparaison entre la table 2020 et la table best estimate construite* 59

5.1 *Architecture modulaire des risques pour le calcul de SCR dans la formule standard* 67

B.1 *Taux de mortalité ajustés par la méthode de Brass* 74
B.2 *Histogramme du nombre de décès estimé par les modèles de Brass* 75

C.1 *Comparaison entre les taux bruts de mortalité estimés par la méthode de Kaplan-Meier à ceux estimés par Hoem* 78
C.2 *Bandes de confiance des taux bruts de Hoem* 79
C.3 *Intervalle de confiance des taux théoriques de Whittaker-Henderson* 80

Liste des tableaux

1.1 *Répartition du portefeuille selon les états du contrat* 18
1.2 *Statistiques élémentaires du portefeuille emprunteur* 19
1.3 *Evolution du sexe ratio du portefeuille* 19
1.4 *Répartition du Capital Restant Dû par tranche d'âges* 20

3.1 *Taux d'abattement du modèle à hasard proportionnel* 33
3.2 *RMSE par rapport aux tranches d'âges du modèle de BRASS* 37
3.3 *RMSE par rapport aux tranches d'âges du modèle des Logits* 41

4.1 *Comparaison des distances de khi-deux des modèles d'ajustement* 52
4.2 *Fidélité des taux ajustés aux taux bruts* 54
4.3 *Régularité des taux ajustés* 55
4.4 *Comparaison des décès observés aux décès attendus* 56
4.5 *Ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus* 56
4.6 *Distance de khi-deux pour la table retenue* 58
4.7 *Comparaison entre le nombre de décès estimés par la table 2020 et ceux par la table best estimate* 59

5.1 *Evolution des provisions mathématiques brutes* 63
5.2 *Evolution des provisions mathématiques nettes* 63
5.3 *Evolution du Best Estimate de primes Vie* 65
5.4 *Impact de la table sur le SCR souscription vie* 69
5.5 *Impact de la table sur le SCR souscription santé similaire à la vie* 70
5.6 *Impact de la table sur les engagements totaux de la mutuelle* 70

B.1 *Comparaison des décès estimés par les modèles de Brass* 75
B.2 *Comparaison de la fidélité et de la distance de khi-deux entre les modèles de Brass* 76

Introduction et motivations

L'assurance emprunteur est une assurance indispensable lors de la souscription d'un crédit. Elle est souscrite pour garantir qu'un emprunt soit assuré en cas de décès, d'incapacité/invalidité de l'emprunteur. Lorsque l'un de ces événements survient, l'assureur rembourse les échéances du prêt, en totalité ou en partie, selon la nature du sinistre.

Harmonie mutuelle proposant une telle couverture est exposée à de fortes dépenses, et durant plusieurs années. Elle doit alors constituer un montant de provisions au passif de son bilan afin d'être certaine de pouvoir respecter ses engagements envers les assurés.

Les provisions mathématiques résultent principalement du phénomène dit « inversion du cycle de production » qui signifie qu'en assurance l'entreprise perçoit d'abord la prime et verse la prestation après, contrairement à une société industrielle qui fournit la prestation et perçoit le coût de la prestation par la suite. Ainsi en assurance, le client a une créance permanente vis-à-vis de l'assureur qui doit constituer des provisions en mettant de côté une grande partie des primes qui lui sont versées par l'assuré pour pouvoir honorer ses engagements futurs (payer ses dettes envers l'assuré).

La provision mathématique (PM) sous Solvabilité I et le Best-Estimate (BE) sous Solvabilité II ont pour objet de prendre en compte le risque de mortalité de l'adhérent. Il s'agit du résultat de la différence entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré, ils permettent à l'assureur d'honorer ses prestations en cas de survenance d'un sinistre. Compte tenu de l'importance de ces provisions en assurance emprunteur, nous avons mené une étude à ce sujet.

Il est important de signaler que pour tarifier et provisionner les produits en cas de décès, la réglementation spécifie les tables de mortalité à utiliser par les assureurs (TH00-02 pour la population masculine et TF00-02 pour celle féminine), sauf s'ils disposent d'une table de mortalité d'expérience, qui restera quoi qu'il en soit prudente. Or, l'uti-

lisation des tables règlementaires ne permet pas de prendre en compte le risque de mortalité que représente le portefeuille assuré. En effet, la population étudiée ne présente pas nécessairement les mêmes caractéristiques que la population de référence. En plus, le fait remarquable ces dernières années est l'accroissement de la durée de vie humaine.
De ce fait, cette standardisation de table de mortalité peut aboutir à une situation de sur tarification et de sur provisionnement. Une telle situation peut provoquer des pertes techniques ainsi qu'une moindre compétitivité sur le marché.

Voici un compte de résultat simplifié d'une entreprise d'assurance :

Charges	Produits	
Sinistres	Primes	Marge technique et financière
Charges de provisions	Produits financiers	
Frais de l'assureur	Chargements / Prélèvements	Marge de gestion

Ainsi, si l'assureur se base sur des tables de mortalité qui ne reflètent pas la sinistralité réelle de son portefeuille il se verra très probablement confronté à des pertes techniques, à minima les premières années de développement du portefeuille. En effet, la dotation aux provisions est une charge à payer ultérieurement, c'est une opération comptable qui consiste à constater la dépréciation d'un actif.
Donc, les provisions techniques correspondent à une part très importante du passif du bilan de l'entreprise, c'est une charge liée à l'exercice en cours dont le montant n'est pas connu, alors son estimation doit se faire d'une manière optimale pour éviter les pertes, mais aussi prudente pour s'abstenir d'utiliser les fonds propres et ainsi pouvoir respecter les termes du contrat.

Une table de mortalité d'expérience a été certifiée pour le provisionnement des contrats du portefeuille étudié en 2020. Cette table fait suite à une précédente table d'expérience, certifiée en 2015 et parvenue au terme de sa durée de validité de 5 ans applicable en matière de certification de table de mortalité.
La table certifiée en 2020 est plus prudente que la réalité, en effet, elle est construite en éliminant les adhésions des trois dernières années pour enlever l'effet de la sélection médicale ainsi qu'en ajoutant une marge de prudence. Or, dans l'environnement Solvabilité II et le logique de la meilleure estimation des engagements, une table best estimate qui reflète la mortalité des adhérents est plus envisageable.

Le but de ce mémoire est de construire une table de mortalité best estimate pour optimiser les provisions techniques et pour analyser les impacts de cette table sur les provisions mathématiques (Solvabilité I), les provisions Best Estimate (Solvabilité II)

ainsi que sur le capital économique et le ratio de solvabilité de la mutuelle, couvrant ainsi l'ensemble des métriques utiles pour le choix de la table de mortalité.

Il est à mentionner qu'en construisant sa table de mortalité, l'assureur est confronté à :

- **un risque d'estimation des paramètres** du modèle retenu, qui est principalement dû aux fluctuations d'échantillonnage lorsque la taille du portefeuille n'est pas assez grande,
- **un risque de choix du modèle** pour l'estimation des taux de mortalité, qui est dû à un mauvais choix du modèle ou au changement de la tendance de mortalité au cours du temps.

Pour ces raisons nous avons décidé de tester différents modèle d'ajustement de la mortalité pour en choisir enfin celui qui induit les taux les plus conformes à la réalité :

→ Deux modèles exogènes qui utilisent une référence externe (dans ce cas un risque de choix de la table de référence existe alors nous l'avons minimiser en testant deux tables de référence) ;

→ Un modèle paramétrique endogène (un risque de calibrage des paramètre existe principalement à cause du volume relativement faible du portefeuille) ;

→ Un modèle non paramétrique et endogène qui s'est avéré le plus efficace à ajuster les taux bruts.

Après construction de la table, il est intéressant d'apercevoir l'impact de la mortalité d'expérience et ses répercussions sur le provisionnement.

→ Prenons un exemple de trois emprunteurs du portefeuille étudié et regardons l'impact du changement de la table sur les provisions mathématique (PM) au 31/12/2020

	Assuré 1	Assuré 2	Assuré 3
Date d'effet du contrat	01-01-2020	10-01-2020	11-01-2020
Age	28	39	49
Durée du prêt (en mois)	357	240	120
Capital initial	342,685	275,000	94,136
Capital restant dû	337,666	264,230	92,311
Taux du prêt	0.9%	0.6%	0.9%
durée courue (en mois)	11	11	11
Prime vie HT	146	46	228
PM Bruts table certifiée 2020	2,313	2,018	1,054
PM Bruts table best estimate	1,883	1,484	601
Impact	-19%	-26%	-43%

FIGURE 1 – *Exemple de l'impact du changement de la table de mortalité sur les PM*

Les taux de mortalité de la table best estimate étant inférieurs à ceux de la table certifiée, surtout pour les âges élevés, ils ont un impact bénéfique dans le calcul des PM des trois assurés. En effet, quelque soit l'âge de souscription de l'emprunteur, dès la première année, le calcul de sa PM prend en compte la tarification de tous les âges futurs jusqu'à la fin du prêt. En effet, les provisions sont à considérer sur l'ensemble de la vie du contrat et non par âge à la souscription.

En 2016, le passage de Solvabilité I à la directive Solvabilité II a remplacé les provisions techniques dites « prudentes » par les provisions techniques Best Estimate (en valeur de marché). Les provisions Best Estimate de primes sont comparables aux provisions mathématiques sauf qu'elles sont estimées sur la base de la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA [1]. Ici, le changement de loi de mortalité aboutit à un impact important sur les provisions Best Estimate, ainsi que sur le Capital de Solvabilité Requis.

- **Le premier chapitre** de cette étude présentera Harmonie Mutuelle et son secteur d'activité. Nous présenterons également l'assurance emprunteur, la directive Solvabilité II et ses aspects quantitatifs. Une attention au risque de décès et les tables de mortalité y sera portée.

  Ce chapitre abordera ensuite les statistiques et les caractéristiques du portefeuille des emprunteurs étudié.

- **Le deuxième chapitre** portera sur l'estimation des taux bruts de mortalité des emprunteurs par la méthode de Kaplan-Meier.
- **Le troisième chapitre** sera consacré à l'ajustement des taux bruts de mortalité en utilisant des modèles de différentes natures.
- **Le quatrième chapitre** sera destiné à valider et comparer les différentes tables ajustées en se basant sur différents critères. Une comparaison entre la table retenue et la table certifiée sera menée.
- **Le cinquième chapitre** analysera les impacts sur l'évolution des provisions mathématiques (S1), sur les provisions Best Estimate Vie (S2), sur le SCR souscription Vie et santé SLT du portefeuille étudié uniquement, ainsi que sur le SCR et le ratio de solvabilité de la mutuelle.

1. European Insurance and Occupational Pensions Authority

Chapitre 1

Cadre de l'étude

1.1 Le contexte

1.1.1 Présentation d'Harmonie Mutuelle

Harmonie Mutuelle, est une société mutualiste française, née de la fusion de plusieurs mutuelles jusqu'à septembre 2012.

Pour mieux répondre aux défis de santé et de protection sociale qui impactent la vie de ses adhérents, Harmonie Mutuelle a participé à la construction du Groupe VYV en septembre 2017. Le groupe VYV est le premier acteur mutualiste de santé et de protection sociale en France et le premier opérateur national privé non-lucratif de services de soins et d'accompagnement, créé le 13 septembre 2017 du rassemblement de 14 mutuelles et groupements, au total près d'une centaine de mutuelles.
Le groupe VYV couvre près de 11 millions de personnes et plus de 88 000 entreprises clientes.

Harmonie Mutuelle est agréée pour pratiquer les activités d'assurance relevant des branches 1 (accident), 2 (maladie), 20 (vie-décès) et 21 (nuptialité-natalité) prévues à l'article R211-2 du Code de la Mutualité. Elle protège près de 5 millions de personnes dont 65 000 entreprises clientes.

Selon la définition qui en est donnée par le Code de la Mutualité, « *la mutuelle est un groupement ayant la capacité civile, dont la création est soumise à déclaration. Le statut de la mutuelle relève du principe de l'autogestion. Elle poursuit un but non lucratif menant dans l'intérêt de ses membres, moyennant le versement d'une cotisation, à des actions de prévoyance, de solidarité et d'entraide.* »[18]

Harmonie Mutuelle est une entreprise soumise aux dispositions du Livre II du code de la mutualité, elle est à but non lucratif.

L'activité Non-Vie d'Harmonie Mutuelle intègre principalement :

- L'assurance et la gestion des garanties santé et du régime légal de la Protection Universelle Maladie (PUMa).
- L'assurance et la gestion d'indemnisation forfaitaire journalière en cas d'hospitalisation.

Représentant plus de 98% des cotisations acquises brutes de réassurance en santé et prévoyance en 2020.

Pour la première fois depuis la création d'Harmonie Mutuelle, le chiffre d'affaires **Vie** représente plus de 1% du chiffre d'affaires total de la mutuelle. La mutuelle a ainsi renforcé et diversifié son activité d'assureur de risque à branche longue à la suite de l'acquisition d'un portefeuille intégrant de la prévoyance et de l'assurance emprunteur.

Les chiffres ci-dessous constituent les principaux indicateurs de l'activité de la mutuelle au titre de l'exercice 2020. Ils permettent d'évaluer de façon précise la santé financière de la mutuelle.

➤ **Fonds propres**

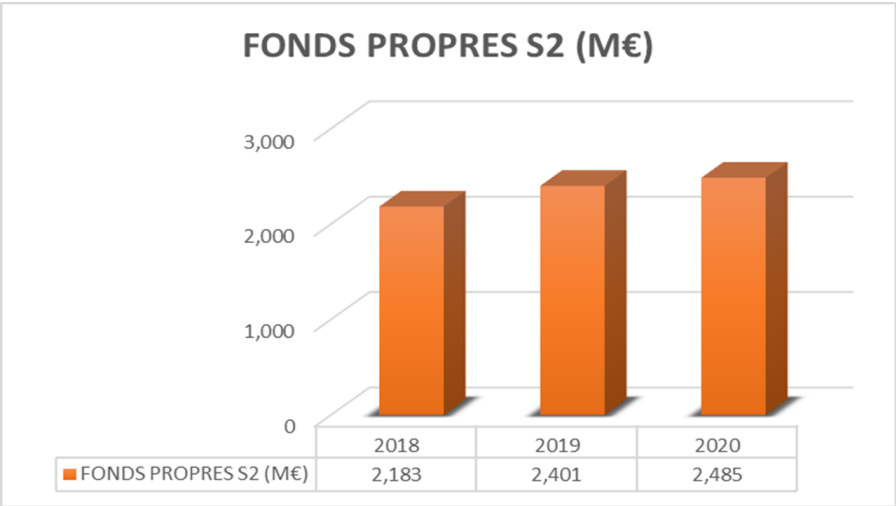


FIGURE 1.1 – *Evolution des FP d'Harmonie Mutuelle entre 2018 et 2020*

Une progression des fonds propres de la mutuelle de 84 millions d'euros par rapport à 2019 à hauteur de 2,5 milliards d'euros au 31 décembre 2020.

➤ **Ratios de couverture**

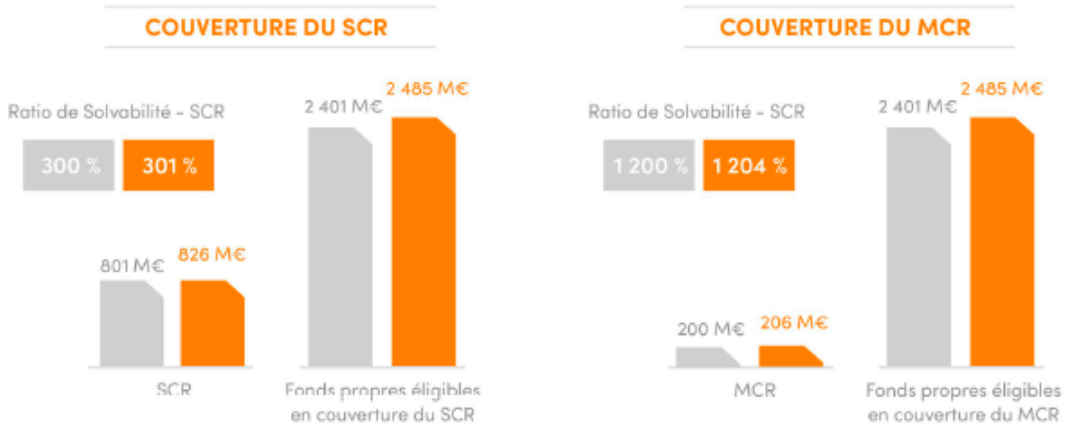


FIGURE 1.2 – *Ratios de couverture de SCR et MCR d'Harmonie Mutuelle*

Une stabilité du ratio de solvabilité qui progresse d'un point, 301% en 2020 par rapport à 300% en 2019.

➤ **Chiffre d'affaires**

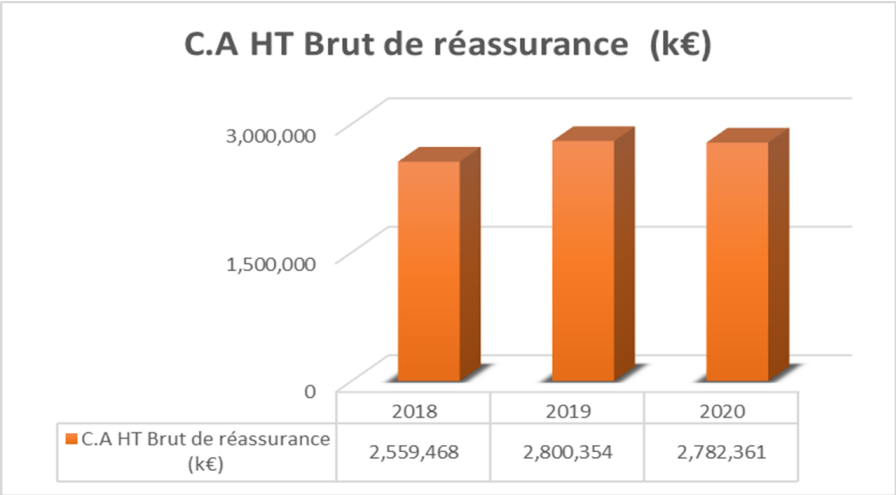


FIGURE 1.3 – *Evolution du C.A d'Harmonie Mutuelle entre 2018 et 2020*

En 2020, la mutuelle a réalisé 2,8 milliards de chiffre d'affaires Hors Taxes dont 80,7% a été redistribué en faveur de ses adhérents en complémentaire santé.

1.1.2 Définition de l'assurance emprunteur

L'assurance emprunteur est une assurance temporaire, qui couvre tout ou une partie des échéances ou du capital restant dû d'un emprunt en cas de survenance de certains événements et en contrepartie du versement de primes.

Ces événements sont le plus souvent :

- **Le décès :**
  La garantie décès est toujours présente dans un contrat d'assurance emprunteur, mais avec un âge limite de couverture. Le risque de décès n'est donc pas systématiquement couvert jusqu'au terme du prêt.

- **L'incapacité temporaire de travail totale ou partielle (ITT) :**
  La garantie ITT pourra être mise en jeu suite à une maladie ou un accident, qui oblige l'assuré à interrompre temporairement toute activité professionnelle.

- **L'invalidité permanente totale (IPT) :**
  La garantie IPT sera mise en jeu suite à un accident ou une maladie qui rend l'emprunteur totalement incapable d'exercer une activité pouvant procurer des gains lié à l'activité qu'il exerçait au moment du sinistre. La mise en jeu de l'IPT n'est possible que si l'assuré présente un taux d'incapacité au moins égal à 66%, évalué selon un barème médical indiqué dans le contrat d'assurance.

- **L'invalidité permanente partielle (IPP) :**
  La couverture IPP sera appliquée suite à un accident ou une maladie qui empêche l'emprunteur partiellement d'exercer une activité qui peut lui fournir des gains lié à l'activité qu'il exerçait au moment du sinistre. La mise en place de l'IPP n'est possible que si l'assuré présente un taux d'incapacité au moins égal à 33%, évalué selon un barème médical indiqué dans le contrat d'assurance.

- **La perte totale et irréversible d'autonomie (PTIA) :**
  La garantie PTIA pourra être mise en place si l'assuré répond aux conditions suivantes :

  - se trouve incapable d'exercer une activite pouvant lui générer une rémunération,
  - se trouve dans l'obligation absolue et définitive d'avoir recours à une assistance totale et constante d'une tierce personne pour effectuer les actes de la vie quotidienne (se déplacer, se nourrir, faire sa toilette),
  - ne pas avoir atteint l'âge limite prévu au contrat (en général 60 ou 65 ans ou bien l'âge de départ en retraite).

- **La perte d'emploi :**
  La garantie « Perte d'emploi » ne peut être mise en jeu que si l'emprunteur a été licencié dans le cadre d'un contrat à durée indéterminée, et que l'arrêt de l'activité

qu'il exerce à titre principal ouvre droit au versement des « indemnités chômage » auprès de Pôle Emploi.

Les conditions permettant de bénéficier d'une indemnisation sont souvent restrictives et peuvent différer d'un contrat à l'autre, par exemple la démission de l'emploi ne garantit pas le versement des prestations. Certains contrats peuvent même exiger d'avoir de l'ancienneté dans l'entreprise ou de ne pas être en période d'essai au moment de la souscription. Cette garantie porte normalement un délai de carence et une franchise.
A noter que cette garantie n'est pas incluse dans la couverture du portefeuille étudié.

Selon la Fédération française de l'assurance (FFA), *le marché de l'assurance emprunteur pesait 9,8 milliards d'euros en 2019, dont 7 milliards pour les assurances de prêts immobiliers, 2 milliards pour les crédits consommation et le reste pour les prêts professionnels.*

Enfin, ce bilan révèle que les garanties perte d'emploi sont très peu souscrites dans les contrats d'assurance de prêt. Cette dernière ne représente que **2% des cotisations**, bien loin de la garantie décès, qui représente plus de **71% des cotisations**, et des garanties incapacité/invalidité, avec **27% des cotisations**.

1.2 Les clauses de résiliation en assurance emprunteur

Globalement en assurance emprunteur, deux types de clause de résiliation existent :

→ **Les rachats anticipés de prêts :**
Les rachats anticipés de prêts résultent d'une part, d'un remboursement anticipé du prêt à cause d'une hausse de liquidité (héritage, regroupement de prêts...) ou de la vente du bien assuré et d'autre part de la conjoncture. Ajoutons que l'obtention d'un prêt moins coûteux sera possible en cas de baisse des taux du marché.

→ **Les changements d'assurance de prêts :**
Le cadre législatif de l'assurance emprunteur a évolué depuis quelques années pour simplifier le changement de l'assureur et pour ouvrir la concurrence sur le marché de l'assurance des prêts. Il est alors possible, à tout moment de l'emprunt, de résilier l'assurance pour un contrat plus avantageux.

- **Loi Murcef (2001) :**
  Cette loi interdit la vente d'un crédit immobilier et d'une assurance de façon combinée.
- **Loi Châtel (2008) :**
  Cette loi concerne plus globalement les contrats reconductibles automatiquement. Elle oblige les organismes de crédit de préciser à l'assuré par écrit la possibilité de résilier son assurance emprunteur.

- **Loi Lagarde (2010) :**
  Cette loi met en place le principe de déliaison des contrats de crédit immobilier et d'assurance emprunteur à niveau de garantie équivalente. Elle donne à l'emprunteur, à compter d'une durée de vie minimum de son contrat, le droit de changer son assurance et de souscrire une autre assurance auprès d'un autre organisme, à condition que les garanties soient similaires. Il s'agit d'ouvrir la concurrence pour obtenir des taux plus intéressants et de donner aux emprunteurs le droit de choisir leurs assurances.
- **Loi Hamon (2014) :**
  Cette loi complète la Loi Lagarde, elle donne la possibilité de résilier et de changer d'assurance crédit immobilier à n'importe quel moment pendant les 12 premiers mois qui suivent la souscription d'assurance.
- **L'amendement Bourquin (2017) :**
  Cette dernière offre le droit à l'emprunteur de résilier annuellement son assurance de prêt. Alors il devient possible de changer à date d'anniversaire son assurance de prêt immobilier.

Ces lois protègent l'emprunteur et ses droits en tant que consommateur des produits d'assurances, mais de l'autre côté elles impactent fortement l'expérience de l'assureur à cause des chutes et plus particulièrement les chutes anti-sélectives. Le risque de chute résulte de la tendance des assurés (surtout en bonne santé) à résilier leurs contrats et les mauvais risques à les maintenir, surtout en présence d'une sélection médicale, conduisant à détériorer l'expérience de l'assureur en matière de mortalité. Cela se traduit par une volatilité des "bons" risques, qui vont chercher une couverture plus attrayante, et une dégradation de la qualité du portefeuille de l'assureur, qui ne conserve que les "mauvais" risques.

La mise en place de ces lois pousse les assureurs à estimer l'impact de cette mesure sur leur consommation en capital de solvabilité. En effet, le risque de rachat est le risque que le contrat d'assurance devienne sans objet, cela impacte les engagements des deux parties, l'assuré et l'assureur.

1.3 Risque de mortalité

Nos vies comportent des incertitudes et des risques. Parfois, l'incertitude est liée à la question de savoir si un événement se produira "et si je deviens invalide ? Vais-je atteindre l'âge de la retraite ?". Dans d'autres cas, un événement, tel que la mort, se produira définitivement ; par conséquent, le risque est lié au moment choisi pour l'événement "tout le monde mourra, mais nous ne savons pas quand". La gestion des risques des individus est fortement liée à la mortalité car elle détermine les probabilités de mourir et de survivre.

Le risque de mortalité est le risque qu'une compagnie d'assurance puisse souffrir financièrement parce qu'un très grand nombre de ses assurés-vie décède avant la durée de vie prévue.

Les actuaires travaillant pour les compagnies d'assurance se fondent sur les tables de mortalité pour faire des hypothèses éclairées sur la durée de vie de leurs assurés. Grâce à ces estimations, ils peuvent avoir une idée de ce qu'ils estimeront en primes par rapport à ce qu'ils paieront en prestations de décès ou en rente. Si un grand nombre de leurs assurés décède avant leur espérance de vie moyenne, les assureurs risquent de constater un déséquilibre entre les primes et les sinistres.

1.3.1 Evolution de la mortalité en France

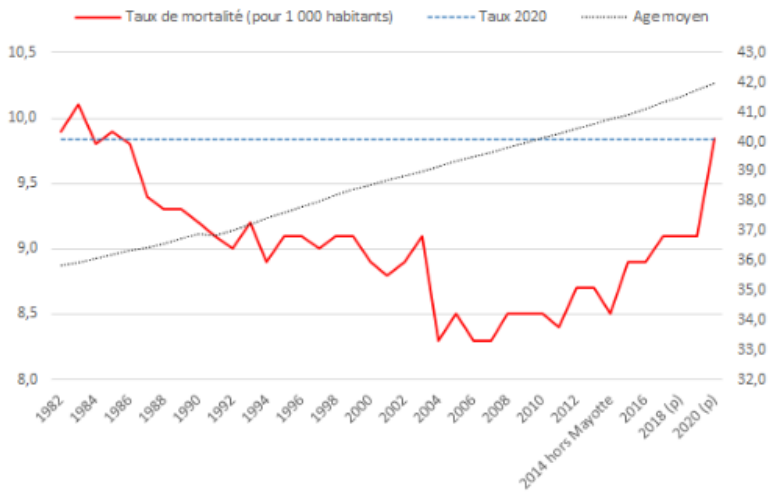


FIGURE 1.4 – *Evolution de la mortalité en France*

La mortalité en France est orientée à la baisse de 1982 à 2004. L'effet du vieillissement de la population française depuis les années 2000 conduit à une augmentation du taux de décès de 0,6 à 0,8% par année.

La mortalité globale en France est au niveau de celle de l'année 1986. Comme en 1986 la population était en moyenne 6 ans plus jeune qu'en 2020, on en déduit que les taux de mortalité à chaque âge étaient plus élevés que ceux de 2020. En d'autres termes, le risque de mortalité d'un individu est, en 2020, plus faible, toutes choses égales par ailleurs, qu'en 1986.[24]

1.4 Règlementation solvabilité II

Comme indiqué précédemment, une des caractéristiques de l'activité de l'assurance est l'inversion du cycle de production, ce qui rend les organismes d'assurance sensibles à l'évolution de plusieurs facteurs socioéconomiques.

Solvabilité II est un régime prudentiel mis en place depuis le 1er janvier 2016 dans le cadre d'une réforme européenne de la règlementation des organismes d'assurance. Ce régime introduit pour la première fois un cadre prudentiel harmonisé, sain et robuste pour les assureurs. Il est basé sur le profil de risque de chaque compagnie d'assurance individuelle afin de promouvoir la comparabilité, la transparence et la compétitivité.

1.4.1 De solvabilité I à solvabilité II

Nous rappellerons, dans cette partie, les règles applicables sous Solvabilité I, puis, dans un second temps, nous présenterons le nouveau régime prudentiel Solvabilité II.

La directive Solvabilité I, mise en place en 1973, régit l'activité d'assurance jusqu'au 31 décembre 2015, elle repose sur une évaluation prudente des provisions techniques qui doivent être couvertes par des actifs assurant une diversification et une congruence.

La solvabilité des sociétés d'assurance est mesurée par le calcul de l'Exigence de Marge de Solvabilité (EMS). Ce besoin de capital est rapporté aux capitaux propres de l'entité pour former le ratio de solvabilité de l'entité.
Ce besoin de capital (EMS) se mesure différemment selon la branche d'activité.

Au cours de ses 40 ans d'existence, le régime «Solvabilité I» a montré des faiblesses structurelles. Il n'était pas sensible à un certain nombre de risques clés, notamment les risques de marché, de crédit et opérationnels, qui n'étaient pas du tout pris en compte dans les exigences de fonds propres ou n'étaient pas correctement pris en compte dans l'approche du modèle unique. Ce manque de sensibilité au risque a eu les conséquences suivantes :

- En raison de son modèle simpliste, Solvabilité I ne conduit pas à une évaluation précise des risques de chaque assureur ;
- Il ne garantit pas une intervention adéquate des superviseurs ;
- Il n'implique pas une allocation optimale du capital, c'est-à-dire une allocation efficace en termes de risque et de rendement pour l'entreprise.

1.4.2 Les trois piliers de solvabilité II

Le règlement Solvabilité II se décline selon trois piliers :

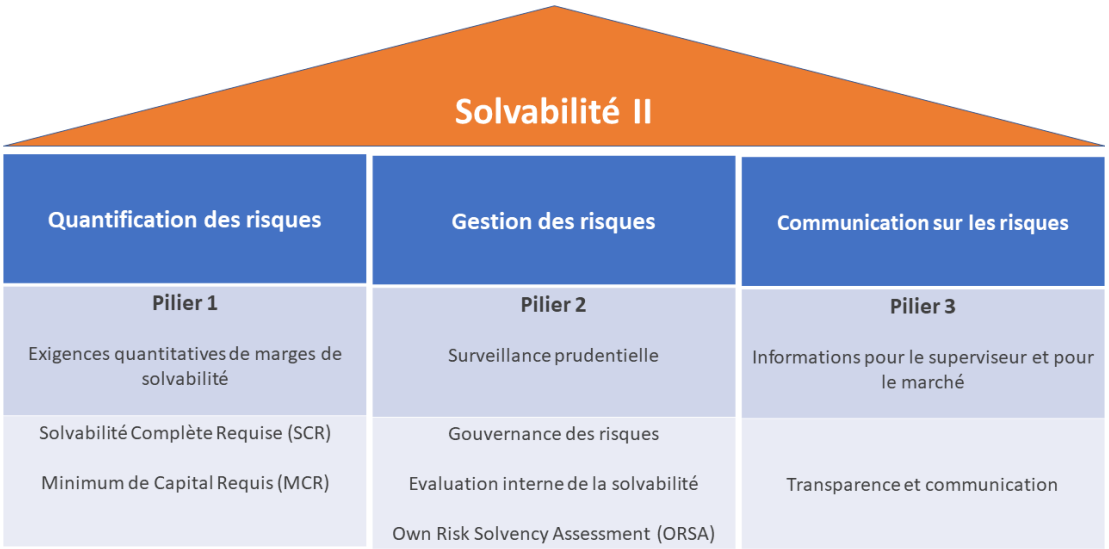


FIGURE 1.5 – *Les trois piliers de Solvabilité II*

1.4.3 Les exigences quantitatives (Pilier 1)

➤ **Le bilan prudentiel**

Elles se traduisent par un nouveau bilan prudentiel, où les actifs et passifs sont évalués en valeur de marché, avec pour objectif de définir un niveau de fonds propres, permettant de couvrir des exigences en capital, elles-mêmes basées sur l'application d'une formule standard ou d'un modèle interne :

→ **Solvency Capital Requirement (SCR)**

→ **Minimum Capital Requirement (MCR)**

Dans le but d'harmoniser les bilans des entreprises d'assurance de l'Union Européenne, le régime Solvabilité II impose des principes de la valorisation des actifs et des passifs. Les actifs et les passifs, sous Solvabilité I, étaient valorisés en valeur comptable, alors que leur valorisation sous Solvabilité II se fait en valeur de marché.

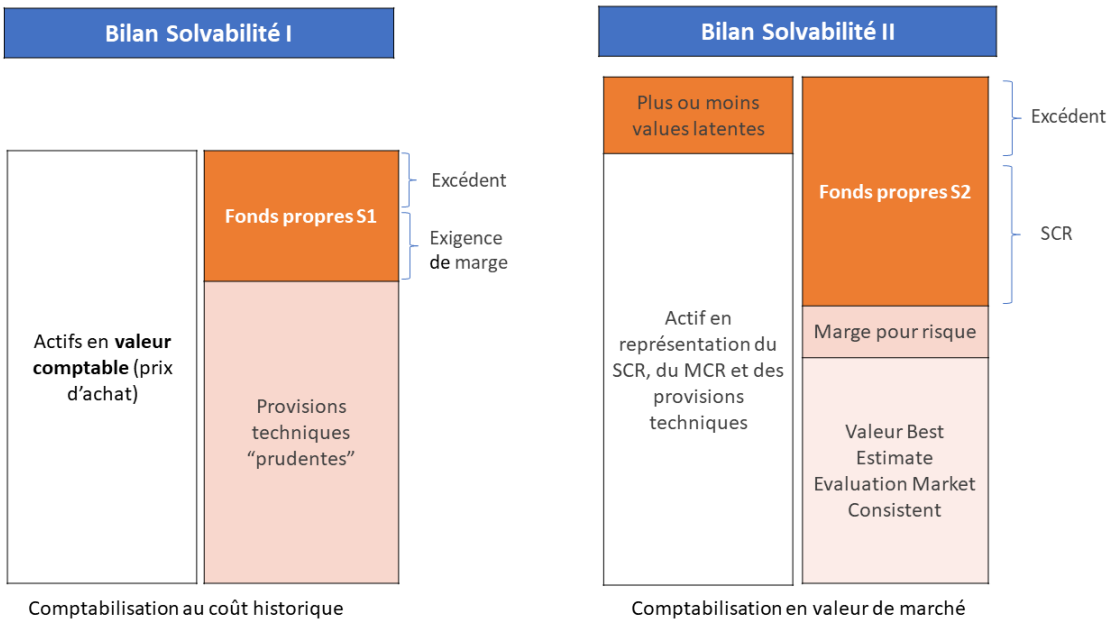


FIGURE 1.6 – *Passage du bilan comptable au bilan Solvabilité II*

➤ Provisions techniques

Le passage de Solvabilité I à Solvabilité II a marqué la fin du calcul des provisions techniques dites « prudentes » pour les remplacer par le calcul des provisions techniques selon la valeur de marché. Cette nouvelle méthode d'estimation permet d'évaluer les provisions techniques d'une manière plus consistante avec le marché.

Sous Solvabilité II, les provisions techniques sont la somme :

- → d'une meilleure estimation « Best Estimate » des engagements d'assurance ;
- → d'une marge pour risque « Risk Margin ».

➔ **La meilleure estimation :** La meilleure estimation, ou « Best Estimate », est la moyenne pondérée par leur probabilité (p_i) des flux futurs de trésorerie (F_i), compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents.

$$BE = \sum_i \frac{F_i \times p_i}{(1+\tau_i)^i}$$

où τ_i les taux sans risque et i le nombre d'années de projection.

Les flux du Best Estimate doivent tenir compte des :

- primes, dans la limite de la frontière des contrats (-)
- prestations : règlements de sinistres, prestations décès, rentes servies... (+)
- frais administratifs, de gestion des sinistres, de gestion des investissements, d'acquisition et généraux (+)

L'« European Insurance And Occupational Pensions Authority » (EIOPA) a la charge de publier pour chaque devise, les différents éléments permettant d'actualiser les flux (courbe de taux sans risque + ajustements).

→ **La marge pour risque :** La marge pour risque correspond au montant à rajouter au Best Estimate afin que le montant total des provisions techniques correspond au montant que les organismes d'assurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements. L'idée est qu'un éventuel organisme repreneur des engagements devrait disposer de fonds propres, immobilisés à un coût supérieur aux produits qu'elle en retirerait.

$$RM = 6\% \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

➤ **Les exigences de capital : SCR et MCR**

→ **Solvency Capital Requirement (SCR)** : c'est le montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau 99,5%. Autrement dit, le SCR représente le capital permettant d'absorber un éventuel choc dû à la survenance dans l'année, d'événements extrêmes, ne se produisant qu'une fois tous les 200 ans.

Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

→ Horizon 1 an.

→ Continuité d'exploitation.

→ Prise en compte de l'effet de diversification des risques (corrélations), ainsi que les techniques d'atténuation du risque.

→ Calculé au moins 1 fois par an.

→ Suivi permanent par l'entreprise.

→ Le SCR doit être immédiatement recalculé en cas de déviation du profil de risque.

- **Minimum Capital Requirement (MCR)** : Niveau minimum de fonds propres assurant avec une probabilité de 80% ne pas être en faillite à horizon d'un an. Le MCR est le capital minimum que doit détenir la compagnie d'assurance pour conserver son agrément. Il est compris entre 25% et 45% du SCR.

Ratio de solvabilité

Le ratio de solvabilité est un pourcentage qui exprime la capacité d'une entreprise à honorer ses engagements et rembourser ses dettes.

En d'autres termes, c'est un indicateur, exprimé en pourcentage, qui vise à maintenir la stabilité du système financier de l'entreprise et à rassurer les clients sur la bonne santé financière de leur assureur.

Nous pourrons distinguer deux ratios :

- le rapport entre les fonds propres (FP) économiques éligibles et le SCR (désigné également par ratio de couverture du SCR) :

$$\text{Ratio de couverture SCR} = \frac{FP}{SCR}$$

  En cas de non couverture du SCR, l'organisme a deux mois pour remettre à l'ACPR un plan de rétablissement réaliste. L'organisme doit, ensuite, prendre les mesures nécessaires pour rétablir, dans les six mois après constatation du défaut de couverture, le niveau requis de ses fonds propres éligibles ou pour réduire son profil de risques afin de garantir à nouveau la couverture du SCR.

- le rapport entre les fonds propres et le MCR (désigné également par ratio de couverture du MCR) :

$$\text{Ratio de couverture MCR} = \frac{FP}{MCR}$$

  En cas de non couverture du MCR l'organisme d'assurance a un mois pour remettre à l'ACPR un plan de financement à court terme réaliste. Celui-ci doit permettre de ramener dans les trois mois les fonds propres de base au moins au niveau du MCR ou de réduire le profil de risque de l'organisme pour garantir la couverture du MCR.

  Si la couverture du MCR n'a pas été rétablie au bout de 3 mois (délai non prorogeable), l'ACPR retire à l'organisme son agrément

1.5 Description du portefeuille emprunteur

1.5.1 Caractéristiques du portefeuille

Le portefeuille emprunteur qui fait l'objet de cette étude est composé d'environ 50 produits avec des versions différentes. Les produits ont des caractéristiques différentes sur plusieurs points : type d'assurance, sélection médicale, âge et durée limite, limite de capitaux, et réassurance.

- **Type d'assurance**

  Deux types d'assurance emprunteur sont commercialisés. Soit le montant des cotisations est fonction du capital restant dû et de l'âge atteint annuellement (CRD), soit il est fonction du capital initial et de l'âge atteint au jour de l'adhésion (CI).

- **Sélection médicale**

  A la souscription d'un contrat d'assurance emprunteur, l'assuré a des formalités médicales à respecter en fonction du montant du capital souscrit et l'âge de l'assuré. Ces formalités médicales peuvent aller de la déclaration de bonne santé à des examens médicaux plus approfondis. En fonction des résultats, l'assuré peut soit payer des surprimes, soit avoir des pathologies exclues des garanties, soit se voir refuser l'assurance.

  Il est nécessaire de noter que si l'assurance n'est pas obligatoire, les assurés ayant un niveau de risque élevé ont un intérêt supérieur à la moyenne à souscrire un contrat d'assurance : c'est **le phénomène de l'antisélection**. Ainsi, pour éviter les risques déficitaires sur ses contrats, l'assureur sélectionne les risques.
  La sélection médicale est un moyen pour gérer le risque d'antisélection. En effet, l'assureur n'est pas en mesure de distinguer si l'emprunteur présente un risque élevé ou faible de mourir, il peut proposer un prix qui reflète la probabilité moyenne de perte ce qui cause un effet de sélection adverse parce que ce sont les mauvais assurés qui demeurent dans le portefeuille.

- **Ages limites**

  L'âge limite de souscription à la garantie décès est de 55 à 79 ans selon les produits. L'âge limite de garantie du décès est de 70 à 91 ans selon les produits.

- **Durée limite**

  La durée limite du prêt est de 20 à 35 ans selon les produits et le type de prêt. En moyenne, dans ce portefeuille, la durée souscrite d'un prêt est de 16,5 ans. Les assurés peuvent rembourser leur prêt plus tôt ou changer d'assurance. Ce qui fait que la durée observée moyenne d'un prêt est de 11,7 ans.

- **Limite des capitaux**

  Le capital minimum garanti est de 5000€. Le montant maximum de capital garanti pour un même assuré ne peut pas dépasser les 2 000 000€.

➤ **Réassurance**

Les contrats sont réassurés dans des traités de réassurance proportionnelle, en excédent de plein ou en quote-part.

1.5.2 Statistiques descriptives

Dans cette section, nous étudions la base des données du portefeuille sur la période d'observation 01/01/2008 – 31/12/2019, l'extraction du portefeuille a été réalisée au 30/06/2020. Cette base a été constituée en ajoutant les données de 2019 aux données cumulées au 31/12/2018.

➤ **Volume du portefeuille**

Le contrat peut avoir 3 états possibles : En cours, Résilié, Clos.
En théorie :

- Si le contrat est en cours, il n'y a pas de date de résiliation et la date de fin de prêt n'est pas dépassée
- Si le contrat est résilié, une date et un motif de résiliation sont associés.
- Si le contrat est clos, la date de fin de prêt est dépassée et il n'y a pas de date de résiliation.

La répartition du portefeuille selon les états du contrat est la suivante :

Statut	Contrats au 30-06-2020
En cours	70,469
Résilié	53,580
Clos	7,111
Total	**131,160**

TABLE 1.1 – *Répartition du portefeuille selon les états du contrat*

➤ Statistiques élémentaires du portefeuille au 31-12-2019

Année	Nombre de décès	Exposition	Nombre d'assurés	Fréquence	Age moyenne
2008	10	15,906	25,180	0.063%	36.4
2009	15	17,907	27,510	0.084%	37.2
2010	13	19,261	31,295	0.067%	37.9
2011	27	21,220	34,513	0.127%	38.3
2012	15	22,156	34,901	0.068%	39.0
2013	19	22,871	36,500	0.083%	39.6
2014	21	22,867	34,816	0.092%	40.4
2015	20	21,973	34,639	0.091%	41.3
2016	24	22,240	37,574	0.108%	41.8
2017	15	31,059	53,031	0.048%	39.8
2018	22	37,639	58,889	0.058%	39.1
2019	21	42,409	69,742	0.050%	39.1

TABLE 1.2 – *Statistiques élémentaires du portefeuille emprunteur*

Nous observons un total de 222 décès qui ont été enregistrés sur le portefeuille entre 2008 et 2019. L'âge moyen des assurés était en augmentation jusqu'en 2016, il diminue depuis 2017, pour atteindre 39.1 en 2019, ce qui rend le portefeuille plus jeune, et cela nous explique le faible nombre de décès.

L'exposition a fortement augmenté à partir de l'année 2017.

Le nombre d'assurés est en hausse chaque année avec une accélération du développement depuis 2017.

➤ Evolution du sexe ratio

Année	% Homme
2008	54%
2009	53%
2010	52%
2011	52%
2012	52%
2013	52%
2014	52%
2015	52%
2016	52%
2017	52%
2018	52%
2019	52%
Moyenne	**52%**

TABLE 1.3 – *Evolution du sexe ratio du portefeuille*

La répartition hommes/femmes dans le portefeuille est stable dans les années d'observation, ce qui légitime la construction d'une table de mortalité unisexe. De plus, il est important de noter que plus la proportion des femmes augmente dans le portefeuille étudié, plus il devient rentable, et cela est expliqué par la durée de vie des femmes qui est plus élevée que celle des hommes.

- **Evolution de l'exposition par âge entre 2008 et 2019**

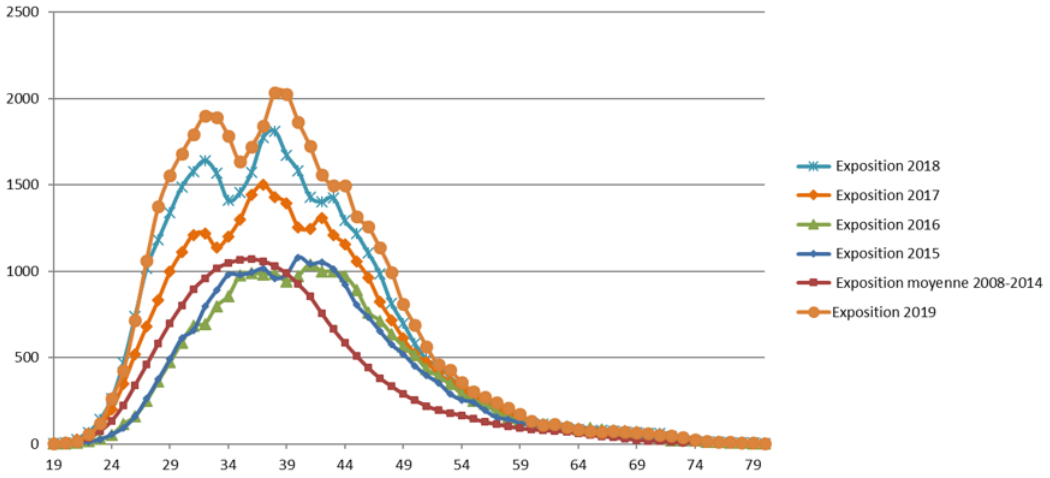


FIGURE 1.7 – *Comparaison de l'exposition par âge*

Depuis 2017 le poids des jeunes est devenu plus important. Cela est dû au rajeunissement du portefeuille et au changement de la cible commerciale attirant les âges jeunes.

- **Répartition du Capital Restant Dû par tranche d'âges**

Age	Effectif	% Capital restant dû
<28	3.7%	4.3%
28-35	29.3%	40.4%
36-40	23.7%	26.3%
41-45	19.4%	17.3%
46-50	11.7%	8.0%
51-55	5.9%	2.3%
56-60	3.1%	0.9%
>60	3.3%	0.5%
Total	100%	100%

TABLE 1.4 – *Répartition du Capital Restant Dû par tranche d'âges*

L'exposition au risque est la plus élevée pour les âges 28 à 55, elle est faible pour les plus jeunes et les assurés âgés.

➤ **Evolution de la sinistralité**

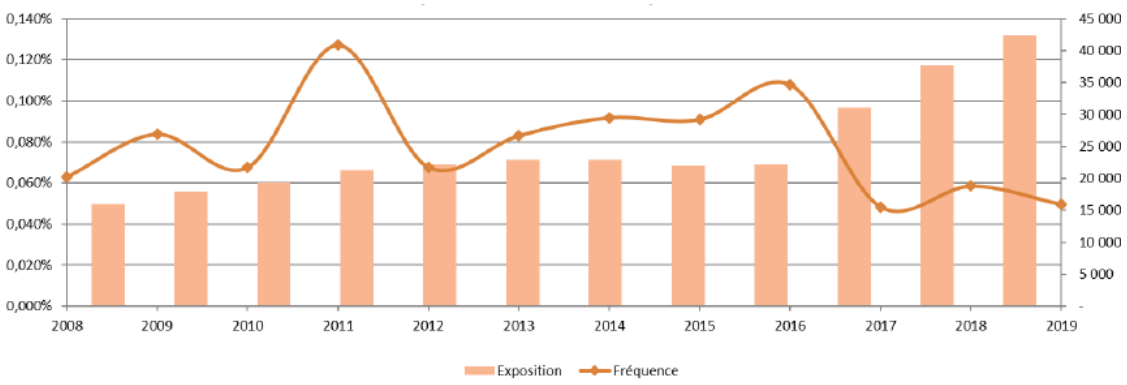


FIGURE 1.8 – *Fréquence des sinistres et exposition des contrats par année*

L'exposition et la fréquence des sinistres sont stables entre 2012 et 2016, contrairement aux années 2017 à 2019 où l'exposition augmente et le nombre de sinistres diminue.
Ceci provient d'un aléa favorable de la mortalité à l'arrivée de nombreux prêts assurés sous sélection et du rajeunissement que cela induit.

En général, le portefeuille en développement, montre une sinistralité faible, compte tenu des effets de la sélection (adhésions récentes), et du changement de la cible commerciale qui conduit à sélectionner des assurés plus jeunes qu'auparavant.

Chapitre 2

Construction d'une table de mortalité

2.1 Définition de la table de mortalité

En assurance décès, les risques couverts dépendent de la durée de vie de l'assuré. Dès lors, une estimation de la mortalité ou de la durée de vie de l'assuré est une préoccupation majeure de l'assureur. En d'autres termes, l'assureur doit être en mesure d'estimer le nombre de décès ou de survivants pour un groupe d'assurés sur une période donnée. Pour ce faire, il s'appuie sur des statistiques de mortalité présentées sous forme de tableaux appelés «tables de mortalité». Ces tableaux, à condition qu'ils soient certifiés, constituent un élément essentiel qui est au centre de toutes les activités d'une compagnie d'assurance. En effet, ils permettent à l'assureur d'estimer la probabilité de décès ou de survie de l'assuré pour fixer le prix et calculer les provisions.
La table de mortalité est donc constituée de données statistiques relatives à la mortalité d'un groupe de personnes. Elle donne pour chaque âge x et jusqu'à un âge limite w :

- Le nombre de survivants à l'âge x, noté l_x.
- Le nombre de décès constatés entre l'âge x et $x+1$, noté $d_x = l_x - l_{x+1}$.

L'âge w est l'âge au-delà duquel il n'y a plus de survivants.

➤ **Les probabilités de survie et de décès**

- **Probabilité de survie** : c'est la probabilité qu'un individu d'âge x soit en vie dans k années, c'est-à-dire la probabilité qu'un individu d'âge x atteigne l'âge $x+k$, noté ${}_kp_x$, avec

$$ {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} $$

  Remarque : ${}_1p_x$ est la probabilité qu'un individu d'âge x soit vivant à la fin de l'année. Dans ce cas, il est simplement noté p_x.

- **Probabilité de décès** : c'est la probabilité qu'un individu d'âge x décède dans les k années à venir ou la probabilité qu'un individu d'âge x décède avant l'âge $x+k$, noté ${}_kq_x$, avec

$$ {}_kq_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} = 1 - {}_kp_x $$

  Remarque : ${}_1q_x$ est la probabilité de mourir dans l'année, il est simplement noté q_x.

2.1.1 Type des tables de mortalité

Les tables de mortalité constituent l'outil statistique de premier rang utilisé par les assureurs pour la tarification et le provisionnement, ces tables sont encadrées par la réglementation.

En pratique, différentes tables réglementaires peuvent êtres utilisés par défaut, et la réglementation définit les conditions dans lesquelles l'assureur peut utiliser ses propres tables.

- **Les tables réglementaires :**

  Via le Code de la Sécurité Sociale, le code des Assurances, et le Code de la Mutualité, la réglementation spécifie clairement quelles tables sont à utiliser par les assureurs.
  Les tables réglementaires comportent :

  - **Les tables TH00-02 et TF00-02 :**

    Par l'arrêté de 20 décembre 2005, ces tables ont été homologuées pour la tarification et le provisionnement en cas de décès et en cas de vie.

    Ces tables reposent sur les observations INSEE de 2000 à 2002, de la population masculine pour la TH et féminine pour la TF, et sont applicables aux contrats d'assurance vie depuis le premier juillet 1993.

  - **Les tables TGF05 et TGH05 :**

    L'arrêté de premier août 2006 homologue l'utilisation des nouvelles tables de génération féminines et masculines : TGF05 et TGH05.

    Ces tables sont obtenues à partir des observations sur la population générale INSEE de 1962 à 2000 et de la mortalité des bénéficiaires de contrats de rentes observée sur la période 1993-2005.

    Ces tables sont utilisables par sexe pour la tarification et le provisionnement des contrats rentes viagères depuis le premier janvier 2007.

- **Les tables d'expérience** :

  Une alternative, possible depuis 1993, permet l'utilisation d'une table d'expérience certifiée par un actuaire indépendant agréé par l'Institut des Actuaires. Il

s'agit dans ce cas d'estimer les taux de décès à partir des données de la population concernée ou d'une population exposée à un risque identique. La table est valide de 2 ans sans suivi annuel à 5 ans avec un suivi annuel.

En effet, l'article A335-1 du Code des Assurances, A212-10 du Code de la Mutualité et A931-10-10 du Code de la Sécurité Sociale, permet aux assureurs, dans certaines conditions, de construire des tables d'expérience sur la base des données propres au portefeuille au lieu des tables officiellement en vigueur, pour autant qu'elles permettent de mieux estimer les engagements contractuels.

Evidemment, si l'assureur utilise des bases techniques qui ne reflètent pas la sinistralité réelle de la population couverte, il se verra probablement confronté à des pertes techniques et il sera obligé d'utiliser ses fonds propres pour pouvoir honorer les termes du contrat, la prime initiale devenant insuffisante pour financer les arrérages à servir. De là nous trouvons l'importance des tables d'expérience qui permettent de modéliser la mortalité en établissant une étude précise d'une population donnée. Les assureurs ont tout intérêt à adopter ce type de tables, parce qu'ils peuvent mieux cerner le risque de mortalité intrinsèque à leur portefeuille, et appréhender notamment le phénomène d'antisélection.

En pratique la construction d'une table d'expérience comprend trois étapes :

- **La construction** de la table de mortalité qui repose sur des modèles statistiques très avancés.
- **La certification initiale** par un actuaire agréé indépendant de l'organisme concerné et habilité à cet effet par une association d'actuaires reconnue par l'Autorité de contrôle.
- **Le suivi annuel** destiné à garantir la pérennité du droit d'utilisation de la table.

Selon la charte de la certification et de suivi des tables de mortalité établie par l'institut des actuaires :
L'actuaire exprime sa certification dans son rapport final de certification destinée à permettre la constitution de provisions suffisantes et prudentes. Il doit dans son rapport final de certification :

- *valider les données utilisées et leurs sources, qu'elles soient internes ou externes à l'entreprise,*
- *vérifier les hypothèses de travail et les modalités utilisées pour construire les tables de mortalité ou les lois de maintien en incapacité de travail ou en invalidité,*
- *s'assurer que les principes de prudence communément admis ont été respectés, eu égard aux risques induits (en particulier stabilité des tables ou des lois de maintien),*

– *définir précisément les conditions d'application et de validité des éléments certifiés, les statistiques ou tableaux de bord à préparer périodiquement par l'entreprise pour permettre le suivi des résultats d'expérience.[5]*

2.2 Outils de construction de la table de mortalité

La durée de survie désigne le temps écoulé jusqu'à la survenance d'un certain événement. L'évènement que nous étudions est le décès, c'est le passage irréversible entre deux états (vivant et mort). L'analyse de la durée de vie est alors l'étude du délai de survenance de cet événement.

2.2.1 La durée de vie humaine comme une variable de durée

Dans la suite du mémoire, nous nous plaçons dans l'univers de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous supposons une variable aléatoire X positive ou nulle, et absolument continue, représentant la durée de survie. La loi de probabilité de X peut être définie par l'une des cinq fonctions équivalentes suivantes :

- **Fonction de survie**

  La fonction de survie est, la probabilité de survivre jusqu'à un instant t fixé, c'est à-dire :

$$S(t) = \mathbb{P}(X > t)$$

- **Fonction de répartition**

  La fonction de répartition est le complément de la fonction de survie, c'est la probabilité de mourir avant un instant t fixé, c'est-à-dire :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - S(t)$$

- **Densité de probabilité**

  La densité de probabilité représente la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après un instant t fixé :

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{i \to 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq X \leq t + i)}{i}$$

- **Fonction de hasard ou taux de décès**

  Le taux de décès, désigne la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après un instant t fixé, sachant qu'il a survécu jusqu'au temps t :

$$h(t) = \lim_{i \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < X \leq t + i \,|\, X > t)}{i} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

- **Fonction de hasard cumulée**

  La fonction de hasard cumulée est la dérivée du taux de mortalité h :

$$H(t) = \int_0^t h(s)\,ds = -\ln S(t)$$

  Alors nous pouvons déduire une expression de la fonction de survie à partie de la fonction de hasard ou la fonction de hasard cumulée :

$$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)$$

2.2.2 Censures et troncatures

Le problème des données manquantes, incomplètes ou erronées est l'une des caractéristiques des données de survie. En effet, les données de survie sont souvent imparfaites à cause de deux phénomènes distincts : la censure et la troncature. Ces phénomènes proviennent du fait que la variable aléatoire X est soumise à diverses perturbations qui peuvent être indépendantes ou non du phénomène étudié.

➤ **Censure :**

Nous parlons de censure lorsque nous disposons d'une information partielle sur la valeur de la variable aléatoire X modélisant la durée.

En d'autres termes X est dite censurée par une variable aléatoire de censure C si nous observons C au lieu de X.

→ **Censure gauche :** La durée de vie est dite censurée à gauche, si nous savons seulement qu'elle est inférieure à une certaine date connue $X < C$.

→ **Censure droite :** La durée de vie est dite censurée à droite si nous savons seulement qu'elle est supérieure à une certaine valeur connue $X > C$. Dans ce cas pour chaque individu nous observons les variables aléatoires suivantes :

$$T_i = inf(X_i, C)$$

$$D_i = \begin{cases} 1 & si\ X_i \leq C \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $i = (1, ..., n)$ et n est le nombre des individus auxquels sont associées les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ de même loi que X.

- **Troncature :**
  - **Troncature gauche :** X est dite tronquée à gauche par une variable aléatoire de troncature T, si X n'est observable que si elle est supérieure à T ($X > T$). Alors T est la variable aléatoire de troncature gauche.
    Dans la plupart du temps les individus ne sont pas observés depuis l'origine, mais depuis l'âge (ou l'ancienneté) atteint au début de la période d'observation.
  - **Troncature droite :** Nous disons qu'il y a troncature à droite lorsque X n'est observée que si elle est inférieure à T. Alors T est la variable aléatoire de troncature droite.

Les censures à droite sont très courantes dans nos données étudiées, car elles sont causées par deux sources :

- 58.8% des emprunteurs ne sont pas décédés ni sortis avant la date de fin de l'observation (de l'étude), le phénomème de décès dans ce cas est censuré par la date de fin de l'observation,
- 40.9% des cas l'emprunteur quitte le portefeuille avant de décéder (rachat, résiliation, clôture), la censure est dans ce cas la date de sortie de l'emprunteur.

0.3% ce qui est très peu sont décédés avant la date d'observation et donc non censurés (nous n'avons pas de décès après la date d'observation)

2.3 Estimation non paramétrique des taux bruts de mortalité

2.3.1 Estimateur de Kaplan-Meier de la survie

L'estimateur de Kaplan-Meier permet d'estimer la fonction de survie des individus à chaque instant de décès en comptabilisant à chacun de ces moments le nombre exact de personnes présentes dans le portefeuille.

Ainsi, ce modèle permet de ne faire aucune hypothèse sur la loi sous-jacente des décès, il est non paramétrique. De plus, nous verrons que les censures et les troncatures peuvent facilement être prises en compte avec cet estimateur.

Soit $k \geq 1$ et des instants $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k = \infty$

Notons $I_j =]t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., k$. A chaque instant t_j, $j = 1, ..., k$ nous définissons :

- n_j le nombre des individus exposés au risque à l'instant t_{j-1}
- c_j le nombre de censures durant l'inetrvalle I_j
- m_j le nombre de décès durant l'inetrvalle I_j

Alors la propabilité de décéder dans l'intervalle de temps I_j, sachant que l'individu était vivant en t_{j-1} peut être estimée comme suit :

$$\hat{q}_j = \mathbb{P}(X \leq t_j | X > t_{j-1}) = \frac{m_j}{n_j - c_j}$$

D'où, nous pouvons exprimer la fonction de survie en fonction des q_j :

$$\begin{aligned}\hat{S}_x(t_{j_0}) = \mathbb{P}(X > t_{j_0}) &= \mathbb{P}(X > t_{j_0}, X > t_{j_0-1}, X > t_{j_0-2}, ..., X > t_0) \\ &= \mathbb{P}(X > t_{j_0} | X > t_{j_0-1}) \times \mathbb{P}(X > t_{j_0-1} | X > t_{j_0-2}) \times ... \times \mathbb{P}(X > t_0)\end{aligned}$$

D'où

$$\hat{S}_x(t_{j_0}) = \prod_{j=1}^{j_0} \left(1 - \hat{q}_j\right) \ \forall \ j_0 \in \{1, ...k\}$$

Remarque : En enlevant les c_j des sujets exposés, nous surestimons la probabilité de décès $\hat{q}_j$.

Kaplan et Meier (1958) ont repris ces estimateurs en faisant tendre $\delta_k = \sup_{j=1...,k} |t_j - t_{j-1}|$ vers 0 et k vers $+\infty$, en d'autres termes la longueur de chaque intervalle I_j tend vers 0.

Ils ont montré que

$$\hat{S}_x(t) \underset{\substack{\delta_k \to 0 \\ k \to +\infty}}{\longrightarrow} \hat{S}_{KM}(t) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{m_i}{n_i}\right)^{1_{\{T_i^* \leq t\}}}$$

Avec :

- $T_1^*, ..., T_k^*$ sont les k valeurs distinctes des durées non censurées ordonnées parmis $(T_1, ...T_n)$
- m_i est le nombre de décès à la date T_i^*
- $n_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{T_j \geq T_i^*\}}$ est le nombre de sujets exposés à la date T_i^*

2.4 Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité

L'estimateur de la fonction de survie de Kaplan meier ne retient aucune hypothèse sur la répartition des décès, mais il permet d'obtenir des intervalles de confiance linéaires en s'appuyant sur l'estimateur de Greenwood de la variance de la fonction de survie estimée à un âge x :

$$\hat{V}\left[\hat{S}_{KM}(x)\right] = \hat{S}_{KM}(x)^2 \times \sigma(x)^2$$

avec $\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1,\dots,n}^{T_i^*<x} \frac{m_i}{(n_i-m_i)n_i}}$.

D'où l'expression approchée des bornes de l'intervalle de confiance ponctuel de $S(x)$ à l'âge x :

$$\hat{S}_{KM}(x) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{V}\left(\hat{S}_{KM}(x)\right)}$$

où $t_{\frac{\alpha}{2}}$ désigne le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite et $1-\alpha$ désigne le niveau de confiance.

Nous déduisons ainsi l'intervalle de confiance des taux bruts de mortalité

$$\hat{q}_x = 1 - \frac{\hat{S}_{KM}(x+1)}{\hat{S}_{KM}(x)}$$

Les taux bruts du portefeuille emprunteur sont obtenus avec l'estimateur de Kaplan Meier sur l'intervalle [20 ans ; 90 ans], en utilisant les données constitués les variables suivantes : « la date d'effet du contrat », « la date de naissance de l'assuré », et « la date de sortie de l'assuré » (qui correspond à la date de survenance ou à la date de fin théorique).
La figure ci-dessous présente les taux bruts estimés par Kaplan Meier avec l'intervalle de confiance à 95% :

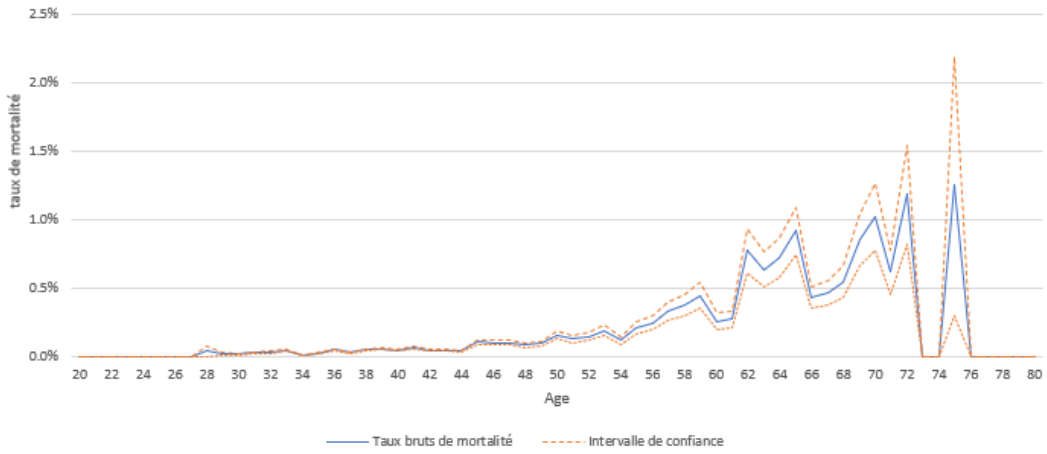


FIGURE 2.1 – *Taux bruts de mortalité du portefeuille*

Les taux bruts estimés par Kaplan Meier mettent en évidence le petit nombre de données disponibles, à travers certains accidents de la courbe (aléas vers 60 ans puis 66-69 ans) voire l'absence d'observations dans des âges plus élevés et peu représentés dans l'exposition (73 ans et plus) ou très jeunes.

2.5 Bandes de confiance des taux bruts de mortalité

Généralement, nous avons deux types d'intervalles de confiance pour la fonction de survie : les intervalles de confiance ponctuels à un âge x fixé présentés ci-dessus, et les bandes de confiance pour tous les âges compris entre deux âges x_{min} et x_{max}. Dans un contexte d'analyse des taux de décès, et en notant que $q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$ le choix des bandes de confiance est plus approprié.

Ces bandes de confiance sont définies par :

$$\hat{S}_{KM}(x) \pm c_\alpha(a_{x_{min}}, a_{x_{max}})\sqrt{\hat{V}\left(\hat{S}_{KM}(x)\right)}$$

avec

$$a_x = \frac{n\sigma^2(x)}{1 + n\sigma^2(x)}$$

n étant la taille de l'échantillon et $c_\alpha(a_{x_{min}}, a_{x_{max}})$ le coefficient de confiance (issu de tables présentées en annexe de Klein et Moeschberger [2003]).
La construction des bandes de confiance nécessite que $0 < a_{x_{min}} < a_{x_{max}} < 1$.
Les bandes de confiance linéaires présentent l'avantage d'être proportionnelles aux intervalles de confiance ponctuels linéaires.

Pour les applications numériques, nous retenons $x_{min} = 28$ et $x_{max} = 60$ avec un niveau de confiance de $1 - \alpha = 95\%$, nous retrouvons $c_\alpha(a_{28}, a_{60}) = 3.0338$ (cf. Klein et Moeschberger [2003])[9] [8].
Le graphique ci-dessous présente les taux de décès bruts estimés selon la méthode de Kaplan-Meier et les bandes de confiance à 95% associés :

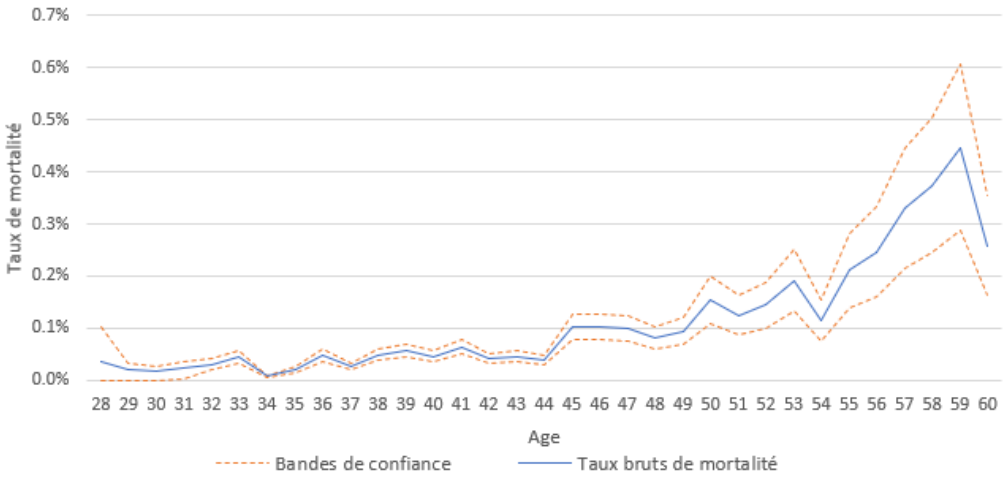


FIGURE 2.2 – *Bandes de confiance des taux bruts de mortalité du portefeuille*

Chapitre 3

Lois de mortalité appliquées aux taux bruts

3.1 Modèle à hasard proportionnel

Le volume de données, surtout pour les âges élevés avec une faible exposition au risque, rend les modèles exogènes ou relationnels les plus envisageables, surtout pour une estimation plus robuste de la mortalité pour les âges élevés. Cela en s'appuyant sur une référence externe consistant à positionner la mortalité du portefeuille par rapport à cette référence.

Le modèle à hasard proportionnel est un modèle classique qui consiste à positionner une table d'expérience par rapport à une table de référence. Son principe est d'appliquer un taux d'abattement (ou de majoration) aux taux d'une table de référence.

Les modèles de positionnement reliant les risques de mortalité de deux populations différentes ont été énoncés pour la première fois en (1927) par Derrick. Mais la première formalisation de cette relation était en (1972) par Cox [4] d'où le modèle est connu par « modèle à hasard proportionnel de Cox ».[29]

Nous cherchons α tel que $q_x = \alpha \times q_x^{réf}$ pour tout âge x, avec $q_x^{réf}$ les taux de mortalité de la population de référence.
La justification de ce choix est que si nous supposons que la fonction de hasard h est constante entre deux âges entiers, alors :

$$h(x) = -ln(1 - q_x)$$

En effet

$$\begin{aligned}
q_x &= 1 - p_x \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > x+1 \,|\, X > x) \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(X > x+1)}{\mathbb{P}(X > x)} \\
&= 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} \\
&= 1 - exp\left(-\int_x^{x+1} h(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= 1 - exp(-h(x)), \text{ si } h(s) = h(x),\ \forall s \in [x, x+1[
\end{aligned}$$

Nous considérons un modèle à hasard propotionnel (cf. Annexe A) :

$$h(x) = \alpha h(x)^{réf}$$

où $h(x)^{réf}$ est la fonction hazard associée à la population de référence.

Alors en utilisant $h(x) = -ln(1 - q_x)$, nous obtenons :

$$ln(1 - q_x) = \alpha ln(1 - q_x^{réf})$$

Par développement limité, lorsque les q_x sont faibles, nous obtenons. :

$$q_x = \alpha q_x^{réf}$$

Pour estimer α, nous considérons l'écart entre le nombre de décès observés et le nombre de décès théoriques corrigés par l'abattement avec α.

Nous observons les décès empiriques $\hat{D}_x$ et l'exposition au risque L_x pour chaque âge x, alors nous obtenons les décès théoriques comme suit :

$$D_x = \alpha q_x^{réf} L_x$$

Nous cherchons α soit :

- en utilisant un critère global : $\sum_x D_x = \sum_x \hat{D}_x$ d'où :

$$\alpha = \frac{\sum_x \hat{D}_x}{\sum_x q_x^{réf} L_x}$$

- en minimisant une distance de khi-deux :

$$\chi^2 = \sum_x L_x \frac{(\hat{q}_x - \alpha q_x^{réf})^2}{\alpha q_x^{réf}}$$

3.1.1 Application numérique

Pour diminuer le risque du choix de la table de référence, nous avons choisi de comparer l'abattement de la table réglementaire TH00-02 à celui d'une somme pondérée des tables TH et TF00-02. Nous rappelons que le portefeuille est constitué de 52% d'hommes et 48% de femmes, alors la table de référence est composée de 52% de la table TH ajoutée à 48% de la table TF.

Le calibrage a été réalisé sur des tranches d'âges pour des raisons de prudence, et en minimisant une distance de khi-deux.

Age	Taux d'abattement TH	Taux d'abattement TH-TF
30-49	23.25%	31.79%
50-59	27.82%	38.53%
60-70	37.82%	52.78%

TABLE 3.1 – *Taux d'abattement du modèle à hasard proportionnel*

Les taux d'abattements de la table TH sont moins élevés que ceux de la combinaison des deux table car la mortalité des hommes est plus élevée que celle des femmes.
Ci-dessous le résultat de l'ajustement de la mortalité empirique :

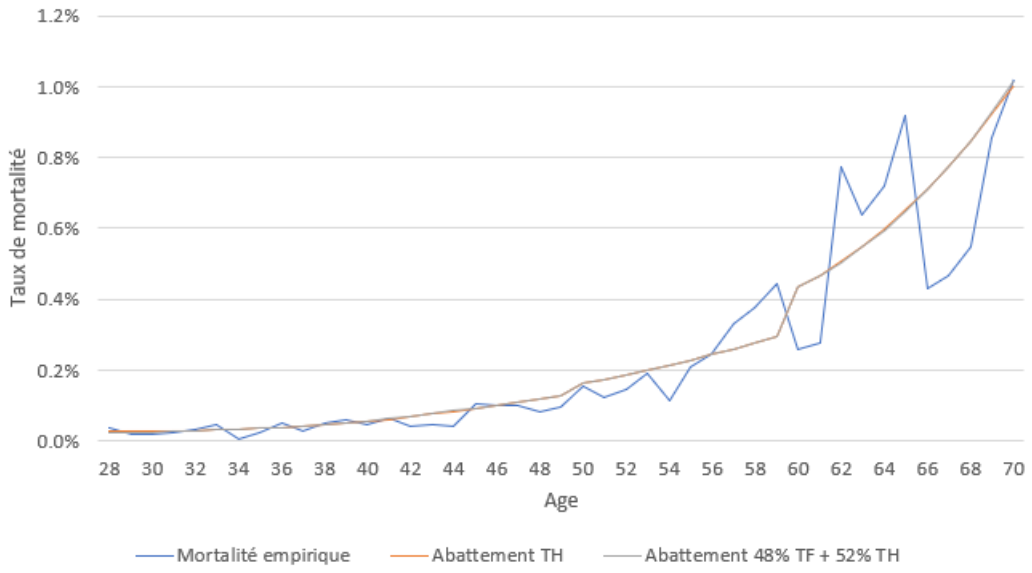


FIGURE 3.1 – *Lissage de la mortalité empirique par le modèle à hasard proportionnel*

En raison d'une faible exposition au risque et d'un nombre restreint de sinistres sur ces plages d'âges, il sera sans risque d'appliquer les paramètres calibrés pour prolonger la table entre 18 et 29 et entre 71 et 80. Ainsi, nous avons appliqué les taux d'abattement de la plage d'âges [30; 49] pour obtenir les taux de mortalité des âges 18 à 29 et ceux

de la plage d'âge [60 ; 70] pour obtenir la mortalité de 71 à 80.

Le graphe ci-dessous illustre le prolongement des taux de mortalité :

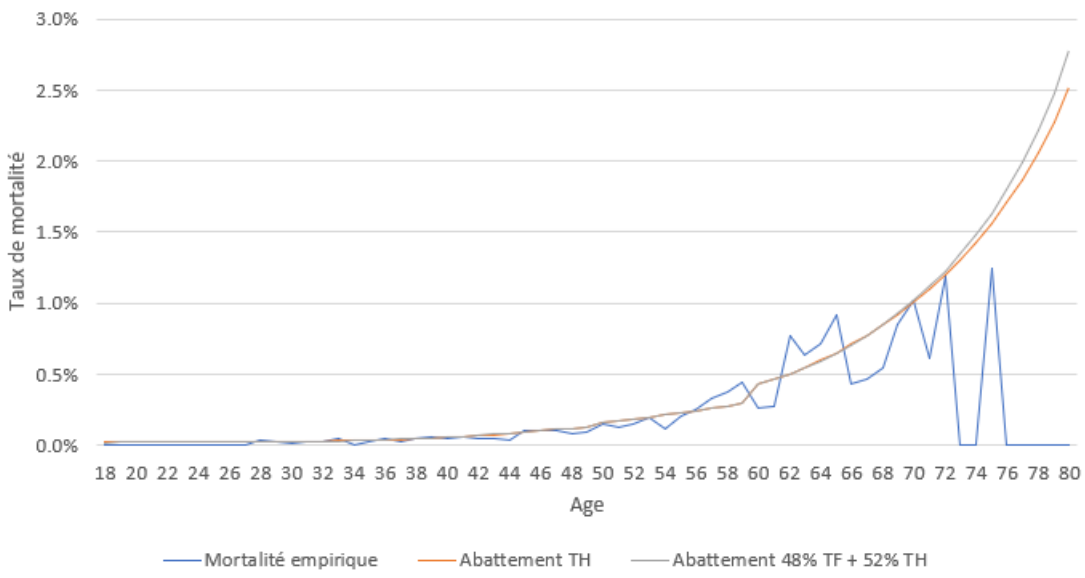


FIGURE 3.2 – *Prolongement des taux de mortalité du modèle à hasard proportionnel*

3.2 Modèle de Brass

La relation de hasard proportionnel a été mise en question par Brass en (1971)[30]. Brass propose une relation entre les indicateurs de mortalité à l'aide d'une transformation logistique.

$$logit(\hat{q}_x) = \alpha + \beta \times logit(q_x^{réf}) + \epsilon_x$$

avec

$$logit(q_x) = ln\left(\frac{q_x}{1 - q_x}\right)$$

et ϵ_x sont des bruits blancs gaussiens, $\hat{q}_x$ les taux bruts de mortalité et $q_x^{réf}$ les taux de mortalité de la table TH00-02.

Cette équation établie une relation entre le logarithme d'une fonction de la probabilité de décès de la population étudiée et celle de la population de référence.
En fixant les paramètres α et β sur une période, nous pourrons obtenir la mortalité future pour la population modélisée à partir des taux de mortalité futurs de la population de référence.

Cette relation nous permet à partir de deux paramètres seulement (α et β) de capter un lien entre la population étudiée et la population de référence, et ainsi de refléter la tendance dans le temps de la mortalité modélisée.

L'importance de la fonction logit, c'est qu'elle est une fonction allant de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Elle est donc parfaitement adaptée pour modéliser les probabilités. Elle a aussi l'avantage d'être simple et facilement utilisable dans un but prospectif.

Les taux ajustés de la table utilisée sont obtenus en inversant la fonction logistique :

$$q_x = \frac{exp(y_x)}{1 + exp(y_x)}$$

avec $y_x = \alpha + \beta \times \ln\left(\frac{q_x^{réf}}{1-q_x^{réf}}\right)$

Les paramètres α et β sont estimés en minimisant la distance D sur la base du critère de moindres carrés pondérés :

$$D = \sum_x L_x(\hat{q}_x - q_x)^2$$

avec L_x est l'exposition au risque de décès à l'âge x.

3.2.1 Application numérique

La table règlementaire françaises TH00-02 a été choisie comme table de référence, compte tenu qu'elle décrit la mortalité du portefeuille.

Un test sur une somme pondérée des table TH/TF00-02 par les probabilités des hommes et femmes dans le portefeuille a été aussi mené dans l'étude (cf. Annexe B).

En premier lieu, nous avons testé la linéarité entre les logits des fonctions de mortalité :

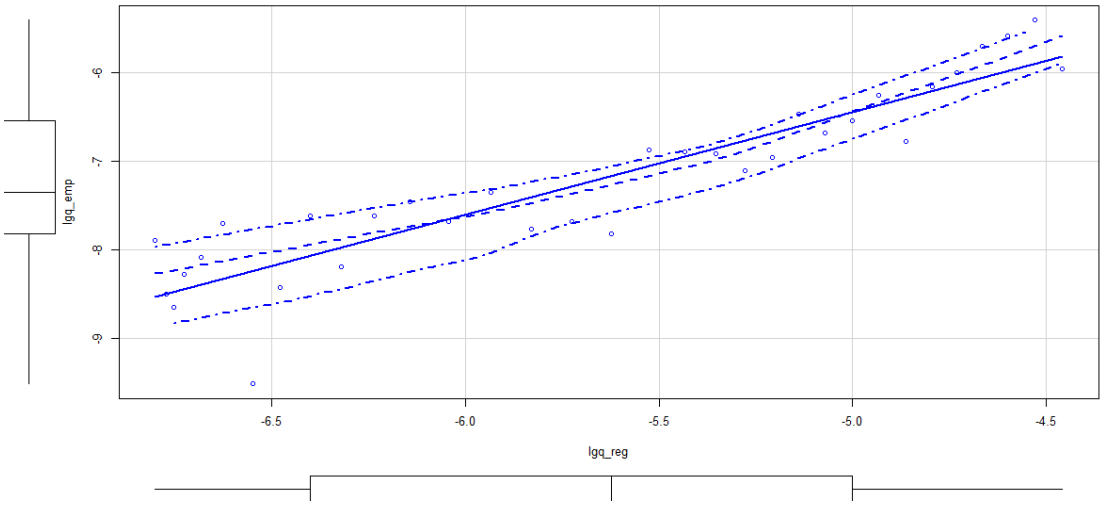


FIGURE 3.3 – *Test de linéarité des logits*

Nous observons une relation linéaire entre les logits des taux de mortalité de la population assurée et générale.

En second lieu, nous avons testé le calibrage sur différentes plages d'âges, et nous avons choisi le modèle ayant la plus petite erreur quadratique moyenne (RMSE).

Remarque :
L'erreur quadratique moyenne (RMSE) est un indice qui fournit une indication par rapport à la variabilité de la qualité de la prédiction. La RMSE peut être reliée à la variance du modèle. Il est intéressant de normaliser cet indicateur pour l'exprimer comme un pourcentage de la valeur moyenne des observations, et qu'il soit plus facile à interpréter :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(q_x - \hat{q}_x)^2}{n}} \text{ , avec } n \text{ le nombre d'observations}$$

Ci-dessous les RMSE des modèles testés :

BRASS	RMSE
28-60	0.04102%
30-60	0.04259%
35-60	0.04653%
28-65	0.09722%
30-65	0.10261%
35-65	0.11131%
28-70	0.11462%
30-70	0.11736%
35-70	0.12530%

TABLE 3.2 – *RMSE par rapport aux tranches d'âges du modèle de BRASS*

La tranche d'âges [28 ; 60] présente la plus petite erreur quadratique moyenne, alors nous l'avons choisi pour la modélisation.

Le modèle que nous avons retenu après calibrage est le suivant :

$$logit(\hat{q}_x) = 1.27196 \times logit(q_x^{réf})$$

Nous avons enlevé l'intercept dans le calibrage, pour éliminer le biais de niveau. En effet, après calibrage avec intercept et comparaison du nombre de décès estimé par le modèle à celui observé réellement, nous avons remarqué une sous-estimation de la mortalité au niveau des plages d'âge jeunes ce qui va impacter le provisionnement.

Un test de normalité et un test de bruit blanc des résidus ont été réalisés, afin de valider le modèle.

→ **Test de bruit blanc**

Le test de Portmenteau regroupe les différents coefficients de la fonction d'autocorrélation empirique en une seule statistique de test pour construire un test de bruit blanc.

La statistique du test de "Ljung-Box" et la statistique du test de "Box-Pierce" sont les deux variantes du test de "Portmenteau", convergentes vers une loi de khi-deux.

Plus précisément, les hypothèses testées sont :
H0 : X est un bruit blanc
H1 : X n'est pas un bruit blanc.

```
        Box-Pierce test

data:  Residu
X-squared = 0.0089546, df = 1, p-value = 0.9246
```

FIGURE 3.4 – *Test de bruit blanc des résidus du modèle de Brass*

L'hypothèse H1 est rejetée, les résidus sont des bruits blancs.

→ **Test de normalité**

Nous avons réalisé un "QQ-Plot normal", c'est un diagramme qui permet de comparer la distribution des résidus à la distribution dite normale ou gaussienne.

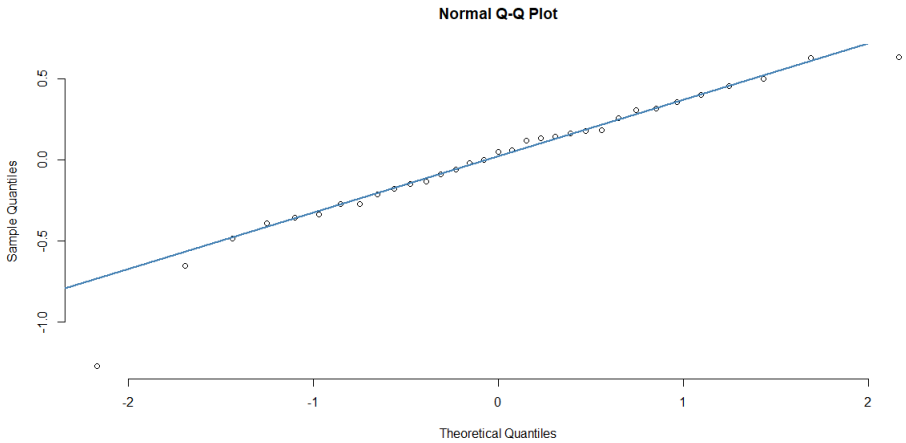


FIGURE 3.5 – *Test de normalité des résidus du modèle de brass*

Nous remarquons que les résidus suivent la loi normale. Alors les résidus sont des bruits blancs gaussiens, et le modèle est validé.

Le graphe ci-dessous illustre le résultat du lissage des taux bruts de mortalité en appliquant le modèle de Brass :

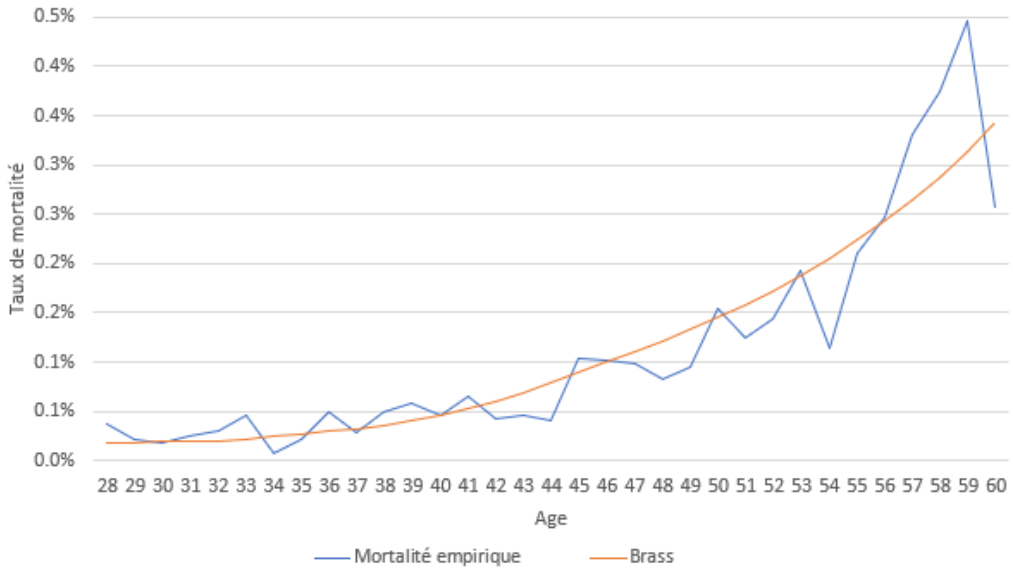


FIGURE 3.6 – *Lissage de la mortalité empirique par la méthode de Brass*

Le prolongement de la table ne pose pas de problème dans la mesure où les assurés qui ont entre 61 et 80 ans représentent 0.5% du capital restant dû du portefeuille, donc il paraît légitime et sans risque de prolonger la loi de Brass de 61 à 80. De même pour les assurés qui ont entre 18 et 27 qui représentent 4.35% du capital restant dû et ne représentent aucun sinistre.

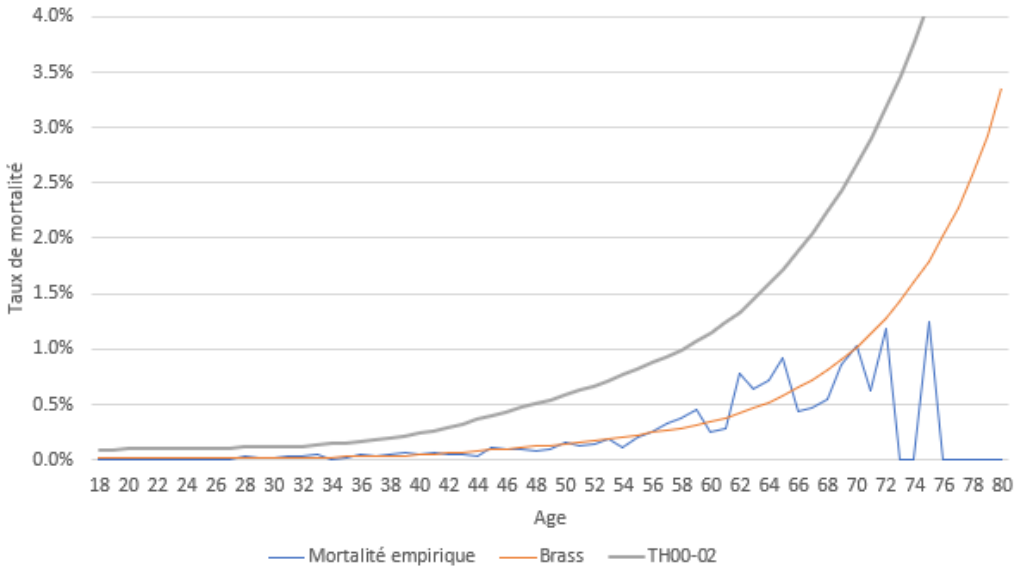


FIGURE 3.7 – *Prolongement des taux de mortalité de Brass*

3.3 Modèle des Logits

Par définition, $q_x \in]0,1[$ comme dans le cas de la régression logistique nous pouvons définir les logits des q_x par :

$$logit(q_x) = ln\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right) \in]-\infty,+\infty[$$

Il est alors possible de réaliser une régression linéaire des logits par rapport à des variables explicatives du type :

$$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 z_{1,x} + ... + \theta_p z_{p,x} + \epsilon_x$$

d'où nous déduisons par inversion de la fonction logit le modèle pour les q_x :

$$q_x(\theta) = \frac{\exp(\theta \cdot z_x)}{1+\exp(\theta \cdot z_x)}$$

avec :
$\theta = (\theta_0, ..., \theta_p)$
$z_x = (1, z_{1,x}, ..., z_{p,x})$ les variables explicatives et
$u \cdot v$ = produit scalaire.

Nous considérons que $q_x(\theta)$ dépend seulement de l'âge c'est-à-dire :

$$\boxed{logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \epsilon_x}$$

avec ϵ_x est un bruit blanc gaussien.

Alors, nous avons la relation suivante :

$$q_x(\theta) = \frac{\exp(\theta_0 + \theta_1 x)}{1+\exp(\theta_0 + \theta_1 x)}$$

Nous obtenons ainsi les paramètres θ_0 et θ_1 par une régression linéaire simple si nous observons x et q_x.

Ce modèle a montré une efficacité dans l'ajustement de la mortalité pour des groupes non volumineux.

3.3.1 Application numérique

Nous avons testé le calibrage sur différents groupes d'âge, et nous avons retenu le modèle ayant la plus petite erreur quadratique moyenne (RMSE).

Les résultats sont les suivants :

LOGITS	RMSE
30-60	0.041418%
28-60	0.042759%
35-60	0.044101%
30-65	0.085720%
35-65	0.087664%
28-65	0.091065%
28-70	0.111067%
30-70	0.113139%
35-70	0.120693%

TABLE 3.3 – *RMSE par rapport aux tranches d'âges du modèle des Logits*

Le modèle retenu est celui calibré sur la plage d'âges [30 ; 60] :

$$logit(\hat{q}_x) = -11.62496 + 0.09908x$$

Ce modèle est validé, en montrant que les résidus sont des bruits blancs gaussiens.

Ci-dessous le résultat du lissage sur les tranches d'âges [30 ; 60] :

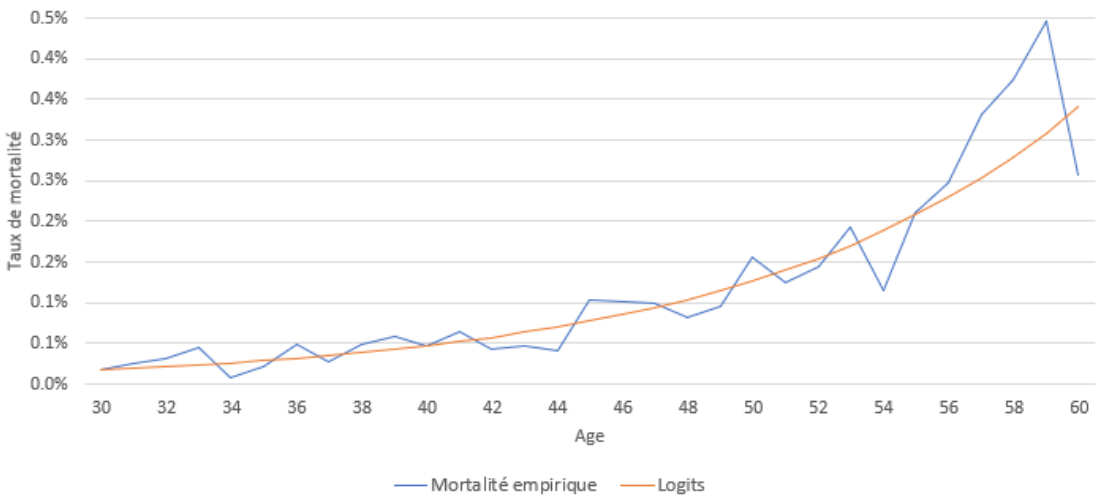


FIGURE 3.8 – *Lissage de la mortalité empirique par la méthode des Logits*

Le prolongement de la table de a été réalisé en appliquant les paramètres calibrés sur les âges de 18 à 29 et 61 à 80.

Le graphe ci-dessous illustre le résultat de l'ajustement avec le modèle des Logits :

FIGURE 3.9 – *Prolongement des taux de mortalité de la méthode des Logits*

3.4 Modèle des Logits avec âge charnière

Le modèle des Logits suppose que les logits des taux de mortalité ont une tendance linéaire sur la plage d'âges considérée. Mais, cela ne peut pas être toujours vrai parce qu'en général nous observons à des âges charnières x_c des décrochages ou des modifications (des accélérations de la mortalité par exemple).

Après comparaison des taux de décès observés à ceux estimés par le modèle des logits, nous avons observés une sous estimation dans la plupart des tranches d'âges, donc il était plus pertinent de considérer un modèle de type :

$$\boxed{logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 (x - x_c)^{\lambda} 1_{\{x \geq x_c\}} + \epsilon_x}$$

où x_c est l'âge charnière au delà duquel la mortalité augmente.

Donc nous devrons estimer θ_0, θ_1 et θ_2 et éventuellement λ, si nous ne choisissons pas sa valeur. Nous pourrons également optimiser la valeur de x_c.

Nous calibrons le modèle pour $x < x_c$,

$$logit(\hat{q}_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \epsilon_x$$

Nous obtenons les paramètres θ_0 et θ_1 par une régression simple.

Pour estimer le paramètre θ_2, nous définissons $y = logit(\hat{q}_x) - (\theta_0 + \theta_1 x)$, ce qui nous donne la relation suivante

$$y = \theta_2 (x - x_c)^{\lambda} + \epsilon_x$$
$$ln(y) = ln(\theta_2) + \lambda ln(x - x_c)$$

D'ou nous pourrons avoir θ_2 et λ par une régression simple.

3.4.1 Application numérique

Le calibrage a été réalisé sur la plage d'âges [30 ; 60]. Pour optimiser par rapport à l'âge charnière, nous avons testé différents âges et nous avons cherché à minimiser une erreur quadratique entre les taux observés et les taux théoriques.

$$\textbf{Erreur quadratique} = \sum_n (q_x - \hat{q}_x)^2$$

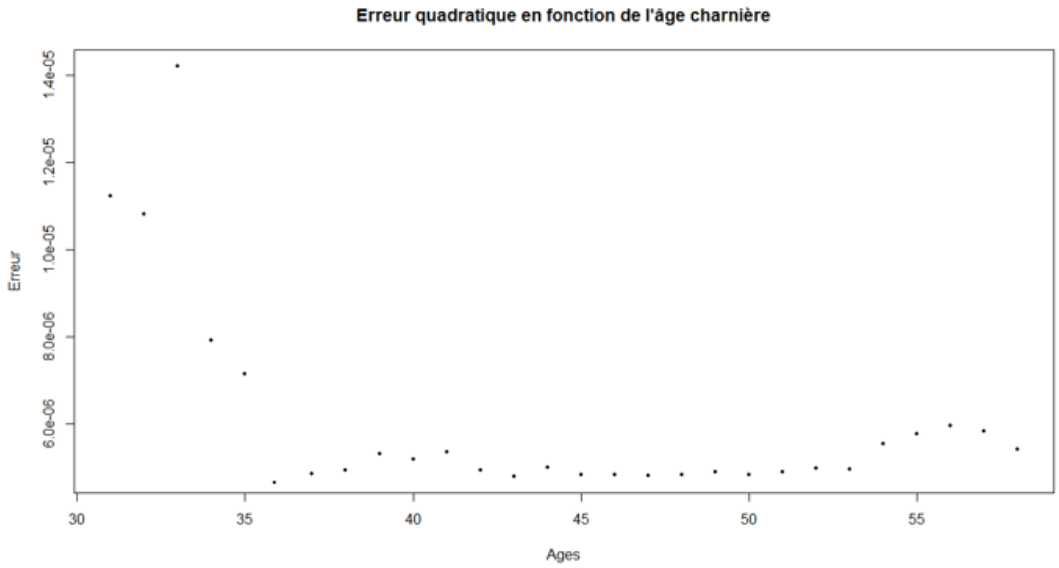


FIGURE 3.10 – *Erreur quadratique en fonction de l'âge charnière*

Après la détermination de l'âge charnière optimal $x_c = 36$, le modèle qui est retenu est le suivant :

$$logit(\hat{q}_x) = -10.42098 + 0.06415x + 0.02899(x - x_c)^{1.1} 1_{\{x \geq 36\}}$$

Le graphe ci-dessous compare le résultat du lissage par la méthode des Logits sans et avec x_c=36

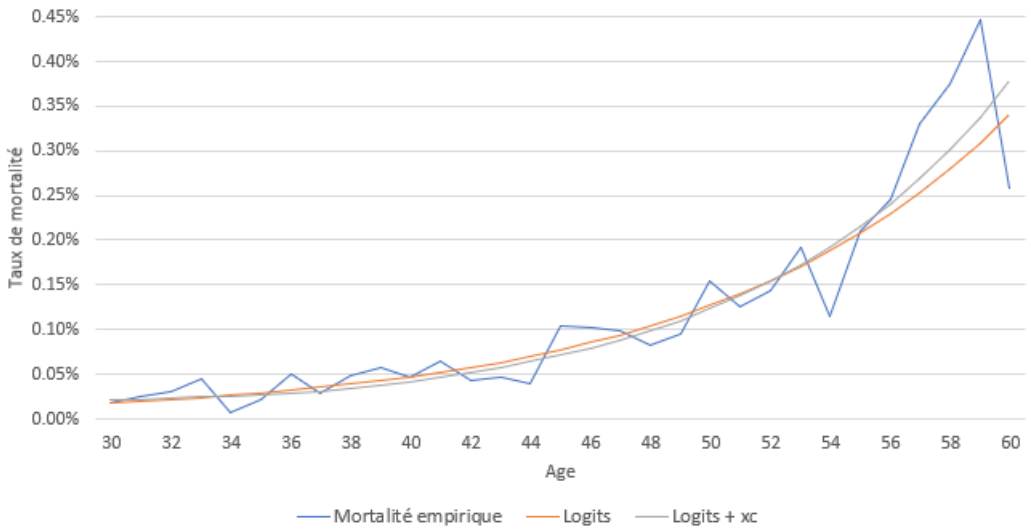


FIGURE 3.11 – *Ajustement de la mortalité par la méthode des Logits avec âge charnière*

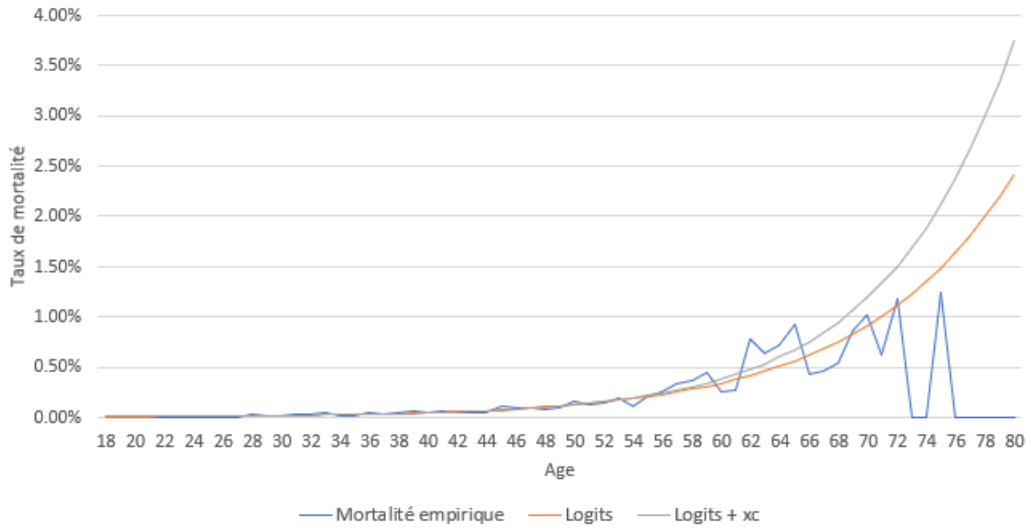


FIGURE 3.12 – *Comparaison entre le lissage des taux bruts par le modèle des Logits avec et sans âge charnière*

L'ajustement avec $x_c = 36$ résout le problème de la sous-estimation de la mortalité pour les âges élevés, mais pas pour les âges plus petits que 50. En plus la mortalité ajustée augmente d'une façon très rapide après cet âge et s'éloigne de la réalité. A noter que le modèle des logits avec âge charnière a été conçu pour expliquer le comportement de la

mortalité après 80 ans.

3.5 Whittaker Henderson

La méthode de Whittaker-Henderson [16] a comme principe de combiner un critère de régularité et un critère de fidélité et de rechercher les taux ajustés qui minimisent la somme des deux critères.

Cette méthode étant non paramétrique, évite les problématiques du calibrage des paramètres surtout dans notre cas, où nous disposons d'une profondeur historique relativement faible pouvant contraindre la robustesse des paramètres.

Tout d'abord, nous fixons les poids (w_i) correspondant à la proportion des effectifs par âge.

Nous posons alors :

le critère de la **fidélité** :

$$F = \sum_{i=1}^{p} w_i (q_i - \hat{q}_i)^2$$

et le critère de **régularité** :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

où :

- q_i les taux ajustés recherchés
- $\hat{q}_i$ les taux bruts
- p le nombre d'âges analysés.
- z un paramètre du modèle
- Δ l'opérateur de différenciation tel que :

  $$\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$$

  Par récurrence,

  $$\Delta^n u(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} u(x+j)$$

Le critère de régularité s'écrit alors :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2 = \sum_{i=1}^{p-z} \left(\sum_{j=0}^{z} \binom{z}{j} (-1)^{z-j} q_{i+j} \right)^2$$

où q_{i+j} est le taux de mortalité ajusté de l'âge $i+j$.

Le critère à minimiser est une combinaison linéaire de la régularité et de la fidélité, le poids de chacun des deux termes étant contrôlé par un paramètre h :

$$M = F + h \times S$$

h étant un réel positif qui permet de contrôler l'influence que l'on souhaite donner à F et S. Plus h est grand, plus la minimisation accorde de l'importance au critère S et l'allure de la courbe devient régulière. Plus h est petit, plus la minimisation porte sur le critère F et impose à la courbe lissée de se rapprocher des données brutes.

La solution de ce problème d'optimisation satisfait aux conditions :

$$\frac{\partial M}{\partial q_i} = 0\,,\ 1 \leq i \leq p$$

La résolution de ce système d'équations peut être effectuée à l'aide de quelques manipulations matricielles.

Pour ce faire, nous posons

$$q = (q_i)_{1 \leq i \leq p}\,,\ \hat{q} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq p}\,,\ w = diag(w_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ et } \Delta^z q = (\Delta^z q_i)_{1 \leq i \leq p}$$

Avec ces notations on peut écrire

$$F = (q - \hat{q})' w (q - \hat{q})$$

Pour ce qui concerne le critère de régularité,

$$S = (\Delta^z q)' \Delta^z q$$

Pour détailler l'écriture de S, nous introduisons la matrice K_z de taille $(p-z, p)$, dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre z avec une alternance du signe, le premier terme étant positif pour z pair.

Nous donnons deux exemples de la matrice K_z pour expliciter les notations :

pour $p = 3$ et $z = 1$, nous obtenons

$$K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $p = 5$ et $z = 2$, nous obtenons

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le critère de régularité s'écrit alors :

$$S = (\Delta^z q)' \Delta^z q = (K_z q)' K_z q$$

Ce qui permet d'écrire le critère M et de le développer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} M &= (q - \hat{q})' w (q - \hat{q}) + h q' K'_z K_z q \\ &= q' w q - 2 q' w \hat{q} + \hat{q}' w \hat{q} + h q' K'_z K_z q \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la dérivée de M :

$$\frac{\partial M}{\partial q} = 2wq - 2w\hat{q} + 2hK'_z K_z q$$

La résolution de $\frac{\partial M}{\partial q} = 0$ nous conduit à l'expression des taux ajustés :

$$\boxed{q^* = (w + hK'_z K_z)^{-1} w\hat{q} = C^{-1} w\hat{q}}$$

En pratique, l'inversion de la matrice symétrique positive $C = w + hK'_z K_z$ peut être réalisée par la décomposition de Cholesky.[25]

3.5.1 Application numérique

Nous avons modélisé le modèle de Whittaker-Henderson sur la plage d'âges [28 ; 60], qui donne la plus petite erreur quadratique.

Cette méthode étant non paramétrique, nous avons estimé les taux lissés en testant plusieurs valeurs des paramètres h et z, pour choisir la courbe qui est la plus fidèle aux taux de mortalité empiriques.

Choix du paramètre z :
La première étape consiste ainsi à choisir le paramètre z de la modélisation qui va permettre de jouer fortement sur la régularité de la courbe obtenue et donc d'impacter inversement la fidélité aux données brutes. Nous avons fixé $h = 1000$, pour $z = 1$ nous obtenons une droite horizontale, de même pour $z = 2$ nous obtenons une droite qui suit les données brutes mais qui s'éloigne de la réalité et ne respecte pas la forme exponentielle de la courbe, de plus nous remarquons un taux négatif pour l'âge 28 à 30 ce qui n'est pas réaliste.

Une valeur de z égale à 3 ou 4 donne une courbe qui se rapproche de la réalité, la forme exponentielle de la droite est respectée. Les valeurs de z acceptables sont ainsi 3 et 4.

Nous présentons ici le graphique permettant de choisir entre les valeurs de z :

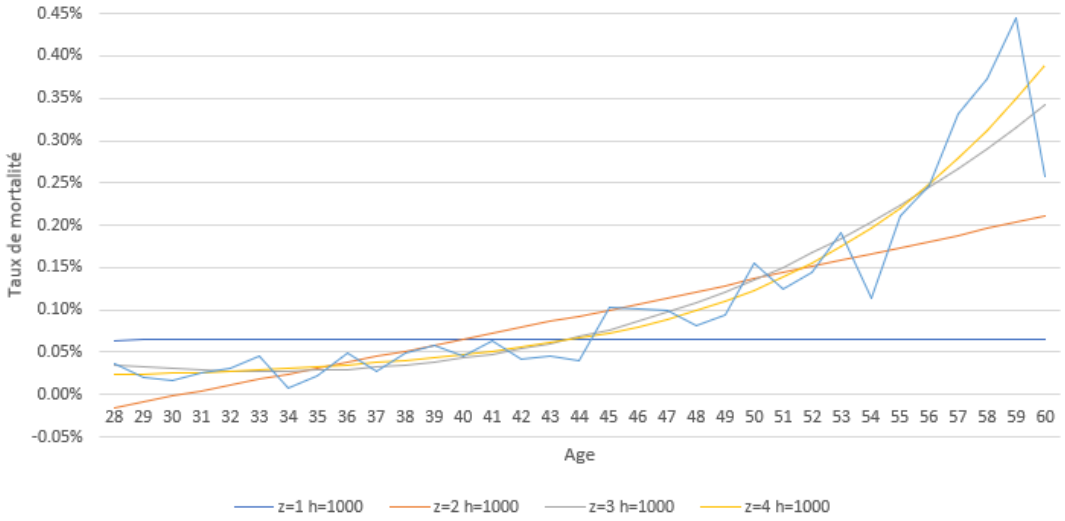


FIGURE 3.13 – *Choix des paramètres de Whittaker-Henderson*

Pour le choix entre $z = 3$ et $z = 4$, nous avons remarqué une irrégularité des taux de mortalité entre l'âge 28 et 33 (décroissance) pour $z = 3$, mais pour $z = 4$ l'accroissement de la courbe est respectée, alors nous retenons $z = 4$.

Choix du paramètre h :
Le réel h permet de contrôler l'influence que l'on souhaite donner à la fidélité (si h est petit, la fidélité est privilégiée, si h est grand alors nous accordons l'importance à la régularité). Pour $z = 4$, nous avons testé le lissage pour des valeurs de h entre 1 et 1000, nous avons remarqué une décroissance de la mortalité entre 28 et 31 ce qui est fidèle aux taux bruts mais n'est pas réaliste, cette irrégularité a diminué en augmentant h pour disparaitre avec $h = 1000$.

Le graphe ci-dessous illustre l'ajustement de la mortalité pour $z = 4$ et $h = 1000$:

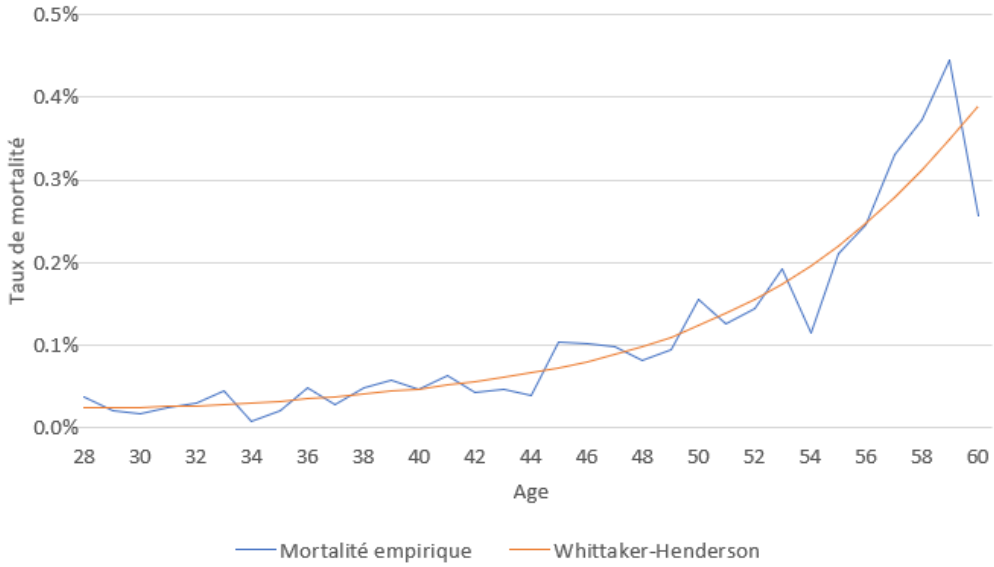


FIGURE 3.14 – *Lissage de la mortalité empirique par la méthode de Whittaker-Henderson*

Le prolongement de la table de l'âge 18 à 27 et 61 à 80 a été réalisé par un ajustement logistique de type :

$$logit(q_x) = \theta_0 + \theta_1 x + \epsilon_x$$

avec q_x les taux ajustés par Whittaker-Henderson.

Ci-dessous le résultat du prolongement de la table :

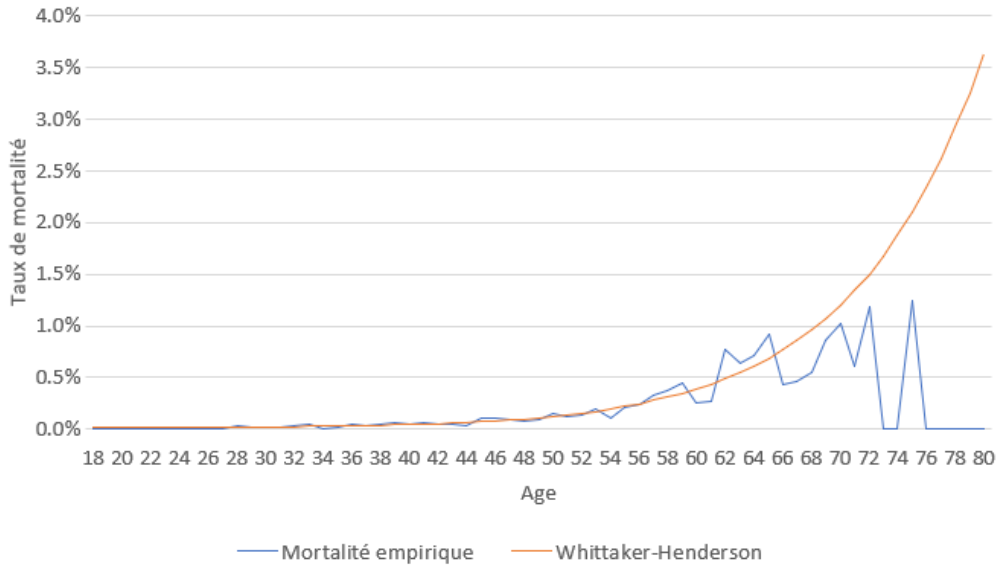


FIGURE 3.15 – *Prolongement des taux théoriques de Whittaker-Henderson*

Chapitre 4

Validation, comparaison des modèles et table retenue

Afin de choisir les taux de mortalité les plus conformes aux données observées, nous avons mis en place différents tests de façon à valider l'adéquation des taux ajustés à la mortalité empirique, et ainsi retenir ce que nous considérons comme le meilleur modèle.

Nous avons validé la qualité des modèles d'ajustement sur la plage d'âges [28 ; 60] qui représente 95.2% du capital restant dû et 93% de l'effectif global, afin de s'assurer de la robustesse et la cohérence du modèle et de retenir la table la plus adaptée à notre portefeuille.

4.1 Test de khi-deux d'adéquation

Une fois l'ajustement des taux bruts déterminé, il convient de tester si les taux ajustés représentent bien la mortalité observée.

Nous avons réalisé un test de khi-deux d'adéquation pour comparer globalement les données observées aux données théoriques attendues.

Les hypothèses testées sont :

H0 : les données estimées sont conformes aux données observées.
H1 : les données estimées ne sont pas conformes aux données observées.

En effet, nous considérons la variable aléatoire D_2 qui donne la mesure globale des erreurs entre les valeurs ajustées q_x et observés $\hat{q}_x$

$$D_2 = \sum_{x_{min}}^{x_{max}} L_x \frac{(\hat{q}_x - q_x)^2}{q_x}$$

avec L_x est l'exposition au risque de décès à l'âge x.

D_2 suit une loi de khi-deux sous l'hypothèse selon laquelle l'ajustement est une bonne représentation des taux de décès bruts.

Nous rejetons l'hypothèse selon laquelle les écarts entre $\hat{q}_x$ et q_x sont dus au hasard, si $D_2 > \chi^2_{0.05}(d)$ où $\chi^2_{0.05}(d)$ est la valeur limite au seuil de 5% d'une loi de khi-deux à d degrés de liberté. Avec d est égale au nombre d'oservations n moins le nombre de paramètres à estimer.

Dans le cas de l'ajustement de Whittaker-Henderson, le nombre de degrés de liberté est determiné par la formule suivante :

$$n - \mathrm{tr}\left(C^{-1} \times (h \times S)\right)$$

où tr désigne la trace.

Il faut noter que cette statistique permet de comparer les modèles entre eux sur des plages définies. La plus petite valeur de D_2 signifie que la courbe des taux théoriques est la plus conforme à celle des taux bruts.

Modèle d'ajustement	Distance de khi-deux	khi-deux
Whittaker-Henderson	14.35	46.19
Hasard proportionnel TH	15.47	44.99
Hasard proportionnel TH+TF	15.79	44.99
Logit avec âge charnière	18.43	42.56
Logits	18.61	43.77
Brass	20.37	44.99

TABLE 4.1 – *Comparaison des distances de khi-deux des modèles d'ajustement*

Nous remarquons alors que l'hypothèse H_0 est acceptée pour tous les modèles d'ajustement. On ne rejette donc pas l'hypothèse selon laquelle les lois des taux bruts et taux lissés ou ajustés suivent la même distribution.

Le modèle de Whittaker-Henderson donne la plus petite distance entre les taux bruts et les taux ajustés, ce qui montre que la mortalité estimée par ce modèle est la plus conforme à la réalité.

4.2 Vérification de la fidélité à la mortalité observée

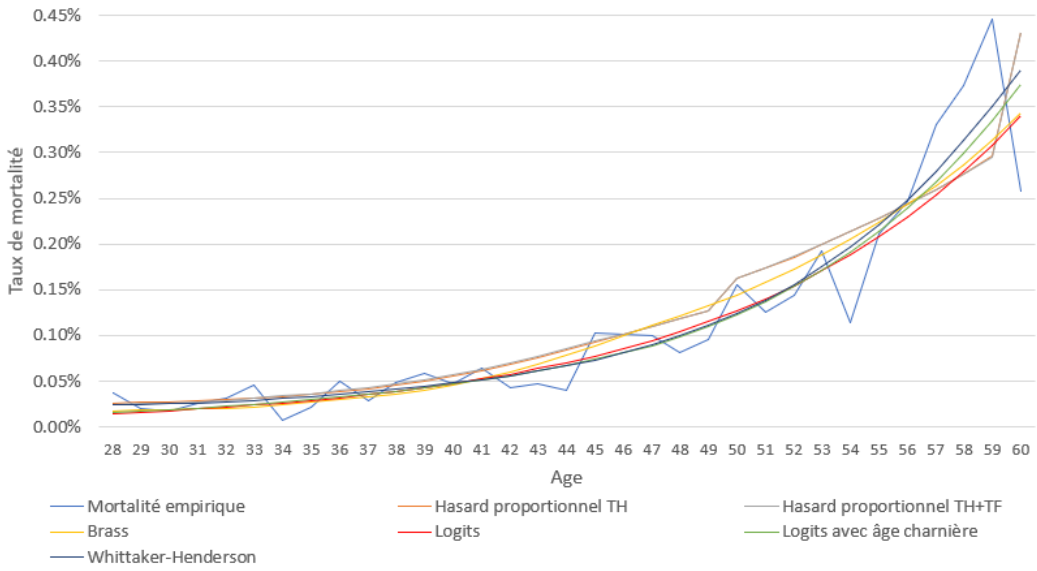


FIGURE 4.1 – *Comparaison des modèles de lissage*

D'après la figure ci dessus, nous remarquons à première vue que la courbe lissée par le modèle à hasard proportionnel renvoie des taux supérieurs aux taux bruts (entre l'âge 41 et 55), alors nous sommes en présence d'un risque de surestimation de la sinistralité avec cette méthode de lissage. Aussi nous remarquons que les modèles de Logits et de Brass sous-estime la mortalité aux âges inférieurs à 33.

Ce n'est pas très évident de comparer les modèles sur le graphe ci-dessus, alors nous avons calculé pour chacune de ces méthodes un critère de fidélité.

Le critère de fidélité est une méthode qui consiste à calculer la distance entre les taux empiriques et les taux théoriques.

$$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} |\hat{q}_x - q_x|$$

La qualité des lissages sera vérifiée alors par application de ce critère qui repose sur le fait que plus la somme des distances des taux bruts aux taux ajustés tend vers zéro plus la table de mortalité estimée est fidèle à la réalité.

Voici les résultats obtenus :

Modèle d'ajustement	Distance en valeur absolue
Whittaker-Henderson	0.00798
Logits avec âge charnière	0.00815
Logits	0.00866
Brass	0.00890
Hasard proportionnel TH	0.01039
Hasard proportionnel TH+TF	0.01042

TABLE 4.2 – *Fidélité des taux ajustés aux taux bruts*

La méthode de Whittaker-Henderson permet d'obtenir les taux ajustés les plus proches des taux bruts alors que le modèle à hasard proportionnel est le moins fidèle à la réalité.

4.3 Régularité des taux ajustés

Un autre indicateur qui mesure la qualité du lissage est le critère de régularité de la table ajustée.

Plus la somme des carrés des différences d'ordre z des taux ajustés tend vers zéro, plus les taux de mortalité ajustés sont considérés comme réguliers.

$$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} (\Delta^z q_x)^2 \to 0$$

Soit pour $z = 1$

$$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} (q_{x+1} - q_x)^2 \to 0$$

et pour $z = 2$

$$\sum_{x_{min}}^{x_{max}} (q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x)^2 \to 0$$

Ci-dessous les résultats obtenus pour z=1 et z=2 :

Modèle d'ajustement	Critère de régularité z=1	Critère de régularité z=2
Brass	6.5E-07	1.0E-08
Logits	7.0E-07	7.5E-09
Whittaker-Henderson	1.1E-06	1.6E-08
Logits avec âge charnière	1.2E-06	2.1E-08
Hasard proportionnel TH	2.3E-06	2.5E-06
Hasard proportionnel TH+TF	2.4E-06	2.6E-06

TABLE 4.3 – *Régularité des taux ajustés*

Le critère de régularité est plus proche de zéro avec la méthode de Brass et Logits que la méthode de Whittaker-Henderson. Toutefois les écarts restent relativement faibles. Les taux estimés par le modèle à hasard proportionnel sont les moins réguliers, parcequ'ils sont calibrés par tranche d'âges.

4.4 Ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus

Il s'agit d'une méthode simple et pragmatique qui permet de vérifier la fidélité de la table construite à la mortalité observée. Cette vérification consiste à appliquer la table lissée au portefeuille étudié afin de calculer le nombre de décès attendus sur la période d'étude.

Le nombre de décès attendus noté A est alors comparé au nombre de décès observés noté O.

L'analyse du ratio O/A peut-être réalisée au niveau global du portefeuille, sans distinction par âge, nous obtenons ainsi une vision de la qualité globale de l'ajustement. Puis il sera intéressant de calculé ce ratio d'une façon plus fine, sur des sous-groupes.

Un ratio O/A proche de 1 montre une bonne capacité de la table à prédire la mortalité d'expérience. La proximité de 1 de ce ratio dépendra de la taille du portefeuille étudié. L'intérêt est d'identifier les tranches d'âges sur lesquels la table surestime ($O/A < 1$) ou sous-estime ($O/A > 1$) la mortalité observée.

Voici les résultats obtenus pour les différents modèles d'ajustement :

Age	%Effectif	%CRD	Décès observés	Hasard proportionnel TH	Hasard proportionnel TH+TF	Brass	Logits	Logits avec âge charnière	Whittaker-Henderson
28-35	29.3%	40.4%	24	26	26	19	19	20	24
36-40	23.7%	26.3%	32	33	33	26	27	28	29
41-45	19.4%	17.3%	31	43	44	39	36	35	35
46-50	11.7%	8.0%	32	42	42	41	36	34	34
51-55	5.9%	2.3%	24	34	34	32	29	30	30
56-60	3.1%	0.9%	26	26	26	26	25	27	28
Total	93.0%	95.2%	169	205	206	184	173	173	180

TABLE 4.4 – *Comparaison des décès observés aux décès attendus*

Age	%Effectif	%CRD	Décès observés	Hasard proportionnel TH	Hasard proportionnel TH+TF	Brass	Logits	Logits avec âge charnière	Whittaker-Henderson
28-35	29.3%	40.4%	24	0.91	0.93	1.29	1.26	1.21	0.98
36-40	23.7%	26.3%	32	0.98	0.96	1.24	1.17	1.16	1.11
41-45	19.4%	17.3%	31	0.72	0.70	0.79	0.85	0.88	0.89
46-50	11.7%	8.0%	32	0.76	0.76	0.77	0.90	0.94	0.94
51-55	5.9%	2.3%	24	0.70	0.70	0.74	0.82	0.81	0.80
56-60	3.1%	0.9%	26	0.98	0.98	1.01	1.04	0.97	0.93
Total	93.0%	95.2%	169	0.82	0.82	0.92	0.98	0.98	0.94

TABLE 4.5 – *Ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus*

Le modèle à hasard proportionnel sur-estime le nombre de décès sur la tranche d'âges [41 ; 55] ce qui impacte les provisions best-estimate. Les modèles de Brass et Logits sous-estiment la mortalité sur la plage d'âges [28 ; 40], ce qui les rend imprudents surtout sur les tranches d'âges où nous avons la plus grande exposition au risque.

Le ratio O/A du modèle Whittaker-Henderson est le plus proche de 1 sur toutes les tranches d'âges, ce qui confirme une meilleure fidélité du modèle à la réalité.

Au vu des différentes métriques de validation calculés précédemment dans ce chapitre, le modèle de Whittaker-Henderson présente de meilleurs résultats de validation et est plus conforme aux taux de mortalité observés. De ce fait nous retenons pour la suite de nos études la table de mortalité estimée par le modèle de Whittaker-Henderson.

4.5 Encadrement des taux lissés par les bandes de confiance de Kaplan-Meier

Ci-dessous la représentation graphique du lissage par Whittaker-Henderson, ainsi que les bandes de confiance des taux bruts de Kaplan-Meier à 95% :

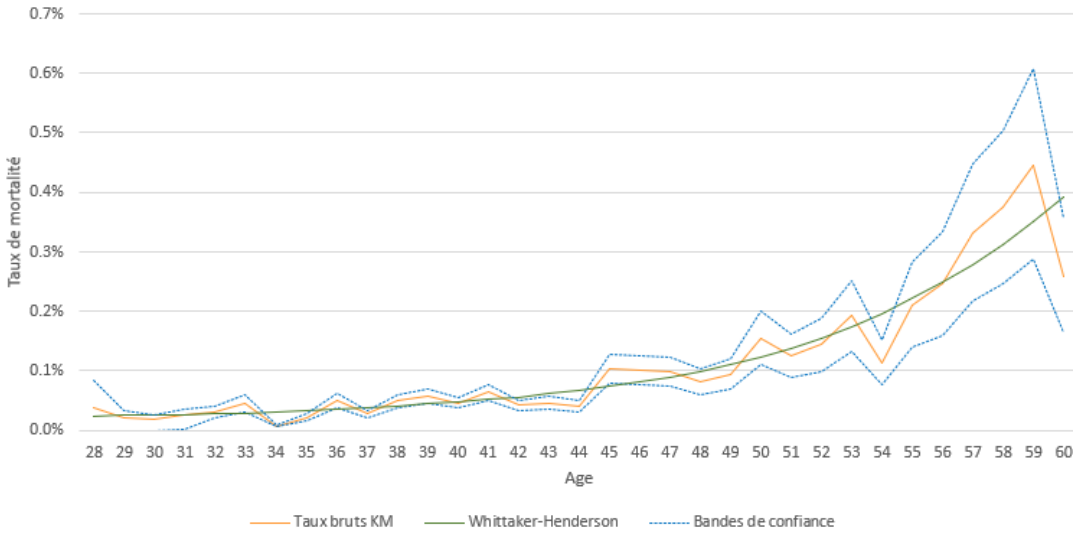


FIGURE 4.2 – *Encadrement de la table retenue par les bandes de confiance de Kaplan-Meier*

Les taux de mortalité ajustés sortent des bandes de confiance à quelques âges mais pas d'une façon très marquée, du fait de la finesse des bandes de confiance de Kaplan-Meier et de la volatilité des taux bruts de mortalité.

Nous avons validé la qualité de l'ajustement de Whittaker-Henderson, mais cela n'élimine pas le risque d'estimation des taux de mortalité qui est bien représenté par le graphe ci-dessus et qui est dû aux fluctuations d'échantillonnage.

En complément, les taux bruts de mortalité ont été estimés par la méthode de Hoem[8]. Les taux obtenus par Hoem sont très proches de ceux estimés par la méthode de Kaplan-Meier. Or, l'intervalle de confiance ainsi que les bandes de confiance des taux bruts de Hoem sont plus larges et contiennent l'intégralité des taux ajustés (cf. Annexe C).

Pour ne plus avoir des dépassements de la bande de confiance inférieure nous avons calibré une marge de prudence de 0.0034% (nous avons ajouté une marge de prudence arbitraire puis nous l'avons optimisé en minimisant une distance de khi-deux entre les taux ajustés et les taux observés) sur la tranche d'âges [36 ; 50], notamment où les taux bruts dépassent les taux ajustés ($O/A > 1$).

Nous obtenons les résultats suivants :

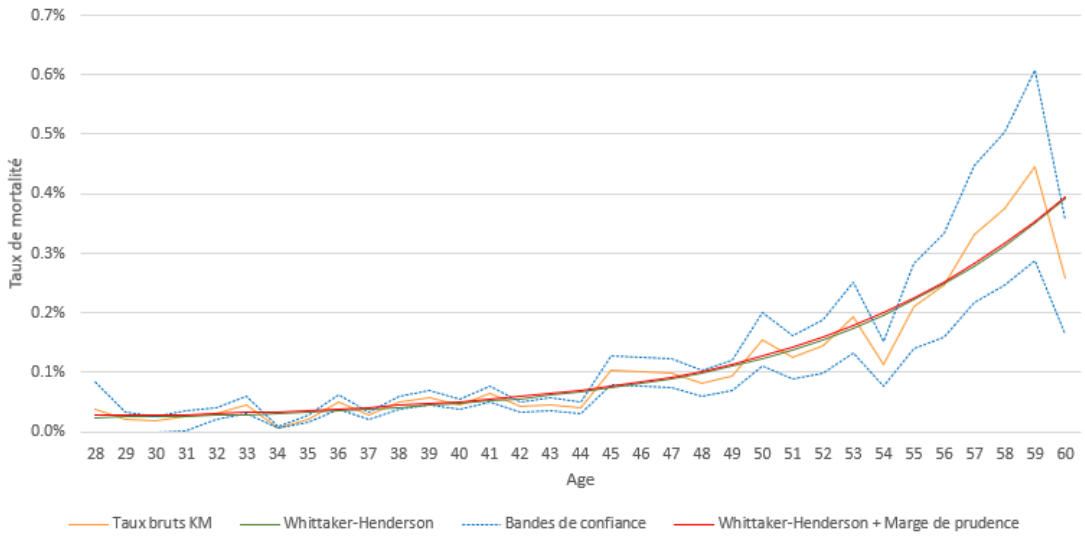


FIGURE 4.3 – *Table de mortalité retenue plus une marge de prudence*

Le nombre de dépassements de la bande de confiance inférieure est diminué de 4 à 1 (âge 45) ce qui est négligeable.

Pour valider et vérifier la fidélité de cette table, nous avons calculé la distance de khi-deux des taux bruts aux taux ajustés. Nous obtenons les résultats suivants :

Modèle d'ajustement	Distance de khi-deux	khi-deux
Whittaker-Henderson + marge de prudence	14.06	46.19
Whittaker-Henderson	14.35	46.19

TABLE 4.6 – *Distance de khi-deux pour la table retenue*

La marge de prudence ajoutée aux taux ajustés n'impacte pas le résultat du test de khi-deux qui est toujours accepté.

A noter que le ratio du nombre de décès estimés sur ceux observés reste toujours très proche de 1 pour toutes les tranches d'âges.

4.6 Comparaison entre la table 2020 et la table best estimate construite

Avant de mesurer l'impact de la table retenue sur le provisionnement et le capital économique, une comparaison entre la table de mortalité certifiée en 2020 et la loi de mortalité best estimate construite est réalisée.

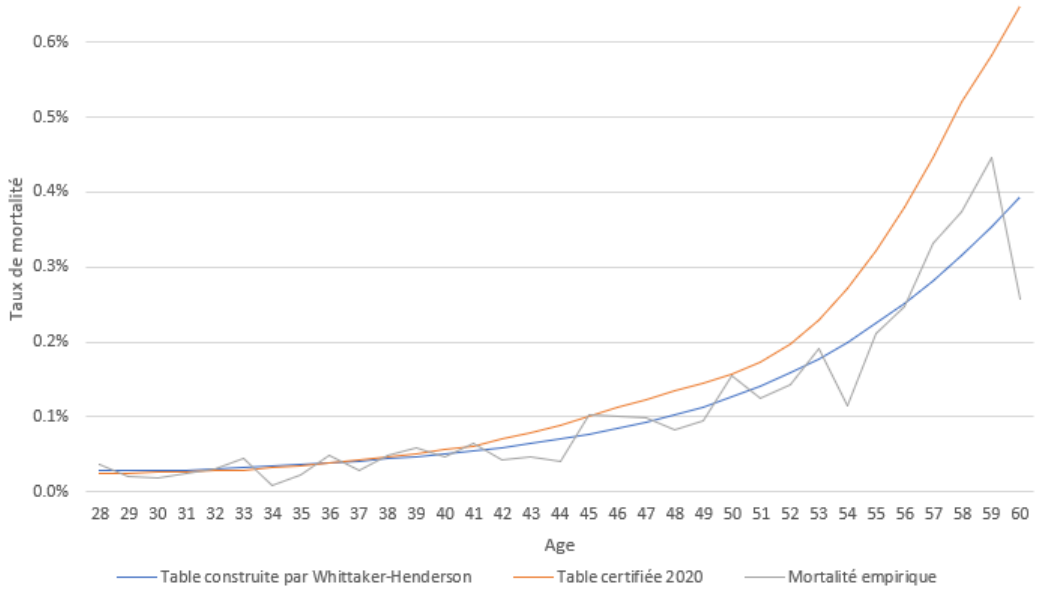


FIGURE 4.4 – *Comparaison entre la table 2020 et la table best estimate construite*

Age	%Effectif	%CRD	Décès observés	Whittaker-Henderson	Table certifiée 2020
18-27	3.7%	4.3%	0	3	3
28-35	29.3%	40.4%	24	27	25
36-40	23.7%	26.3%	32	31	33
41-45	19.4%	17.3%	31	37	45
46-50	11.7%	8.0%	32	35	46
51-55	5.9%	2.3%	24	31	40
56-60	3.1%	0.9%	26	28	45
61-80	3.3%	0.5%	53	86	114
Total	**100%**	**100%**	**222**	**278**	**351**

TABLE 4.7 – *Comparaison entre le nombre de décès estimés par la table 2020 et ceux par la table best estimate*

A partir de l'âge 35 les taux de mortalité de la table certifiée en 2020 sont plus élevés que ceux estimés par Whittaker-Henderson, majorant le nombre de décès estimés. Cela a un impact bénéfique dans le calcul des PM de la quasi-totalité des assurés, car même si un assuré souscrit avant l'âge de 35 ans, dès la première année, le calcul de sa PM prend en compte la tarification de tous les âges futurs jusqu'à la fin du prêt.

Notons que la table 2020 est construite en enlevant les adhésions récentes (2017 à 2019) et cela pour éliminer l'effet de la sélection médicale et le rajeunissement du portefeuille, ainsi qu'en ajoutant une marge de prudence.

Chapitre 5

Impacts de la table de mortalité

5.1 Impacts sur l'évaluation des provisions mathématiques

Nous appelons provisions mathématiques (PM) le total des réserves calculées pour chaque contrat en cours, à la clôture de chaque exercice comptable de l'assureur.

Nous avons déjà noté que les PM sont la conséquence de l'inversion du cycle de production, elles sont le résultat d'une dette de l'assureur vis-à-vis l'assuré.
Cette dette est égale à la différence à la date de calcul entre ce que l'assureur doit à l'assuré et ce que ce dernier lui doit au titre des primes.

Alors la PM est défini comme la différence entre la valeur actuelle probable des engagements futurs de l'assureur et celle de toutes les primes futures à payer par l'assuré. Nontons ${}_tV_x$ les provisions mathématiques calculées à la date $x+t$, x étant l'âge de l'assuré à la date de l'effet du contrat.

${}_tV_x$= VAP [1](engagements futurs de l'assureur) - VAP (engagements futurs de l'assuré)

L'engagement assureur est calculé de la manière suivante :

$$\text{VAP (engagements futurs de l'assureur)} = \sum_{k=0}^{n-t} \text{CRD}_{k+t} \times {}_k p_{x+t} \times q_{x+t+k} \times \frac{1}{(1+r)^{k+1-\frac{1}{2}}}$$

1. Valeur Actuelle Probable

Avec,

- x, l'âge de l'assuré à la date d'effet du contrat.
- t, la durée courue entre le début du prêt et la date d'arrêté (par différence de millésime).
- ${}_kp_{x+t}$ probabilité pour un assuré d'âge $x+t$ d'être encore en vie à $x+t+k$.
- q_{x+t+k} probabilité pour un assuré d'âge $x+t+k$ de décéder avant $x+t+k+1$.
- CRD_{k+t} le capilal restant dû pour chaque année restante du prêt de l'assuré, correspondant à la prestation de l'assureur en cas de décès de l'assuré.
- r, le taux d'actualisation.

L'engagement de l'assuré est calculé de la manière suivante :

$$\text{VAP (engagements futurs de l'assuré)} = \sum_{k=0}^{n-t} \text{Prime Pure}_{k+t} \times {}_k p_{x+t} \times \frac{1}{(1+r)^{k+1-\frac{1}{2}}}$$

Avec,

- x, l'âge de l'assuré à la date d'effet du contrat.
- t, la durée courue entre le début du prêt et la date d'arrêté.
- ${}_kp_{x+t}$ probabilité pour un assuré d'âge $x+t$ d'être encore en vie à $x+t+k$.
- Prime Pure_{k+t} la prime pure d'assurance pour chaque année restante du prêt de l'assuré pour la garantie décès.
- r, le taux d'actualisation.

Pour obtenir la PM, une interpolation linéaire calculée aux dates anniversaires qui encadrent la date de calcul est réalisée.

$$PM = \max\left(\alpha \times {}_t V_x + (1-\alpha) \times {}_{t+1} V_x \,; 0\right)$$

Avec α , le nombre de jours entre la date anniversaire du contrat et la date de calcul rapporté au nombre de jour de l'année de calcul. **La PM n'est prise en compte que si elle est positive**.

Puisque les VAP des engagements dépendent des propabilités de survie et de décès de l'emprunteur du moment de la souscription de son contrat jusqu'à la fin de son prêt, alors évidemment le changement de la table aura un impact sur l'estimation des provisions mathématiques.

Voici les résultats de l'évolution de la PM brute de réassurance par tranches d'âges :

Age	Effectif	%CRD	PM Brute au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	PM Brute au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
<28	3.7%	4.3%	210,638	200,597	-5%
28-35	29.3%	40.4%	2,665,974	1,567,946	-41%
36-40	23.7%	26.3%	3,512,327	1,320,719	-62%
41-45	19.4%	17.3%	3,235,649	910,309	-72%
46-50	11.7%	8.0%	2,468,825	651,715	-74%
51-55	5.9%	2.3%	1,288,750	466,113	-64%
56-60	3.1%	0.9%	568,171	188,060	-67%
>60	3.3%	0.5%	335,548	159,070	-53%
Total	100.0%	100%	14,285,883	5,464,529	-62%

TABLE 5.1 – *Evolution des provisions mathématiques brutes*

Les provisions mathématiques sont cédées **proportionnellement** aux réassureurs. Alors nous obtenons la PM nette en retranchant le PM cédée de la PM brute.

$$PM_{nette} = PM_{brute} - PM_{cédée}$$

Réassurance proportionnelle :
Un réassureur prend en charge une proportion d'un risque moyennant une proportion identique de la prime payée par l'assuré et paie, en cas de réalisation du risque, le sinistre dans la même proportion.

Ci-dessous les résultats de l'évolution de la PM nette de réassurance par groupe d'âges :

Age	Effectif	%CRD	PM nette au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	PM nette au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
<28	3.7%	4.3%	98,111	93,532	-5%
28-35	29.3%	40.4%	1,074,474	624,327	-42%
36-40	23.7%	26.3%	1,364,884	488,808	-64%
41-45	19.4%	17.3%	1,272,736	342,602	-73%
46-50	11.7%	8.0%	1,060,903	270,988	-74%
51-55	5.9%	2.3%	625,575	226,686	-64%
56-60	3.1%	0.9%	270,394	89,943	-67%
>60	3.3%	0.5%	171,673	80,711	-53%
Total	100.0%	100%	5,938,748	2,217,597	-63%

TABLE 5.2 – *Evolution des provisions mathématiques nettes*

La table best estimate étant plus favorable sur les âges supérieurs à 35 ans, celle-ci a un impact bénéfique dans le calcul des PM de la quasi-totalité des assurés, car même

si un assuré souscrit avant l'âge de 35 ans, dès la première année, le calcul de sa PM prend en compte la tarification de tous les âges futurs jusqu'à la fin du prêt. En effet, les provisions sont à considérer sur l'ensemble de la vie du contrat et non par âge à la souscription.

Une diminution de la mortalité entraine une baisse importante dans les prestations à verser (l'engagement de l'Assureur) avec un impact à la baisse sur la PM. Il est à noter que l'engagement de l'assuré augmente car une diminution de la mortalité entraine une hausse des effectifs des assurés en vie cotisant et donc une hausse du nombre de cotisations à percevoir par l'assureur.
Le gain de provisions serait considérable puisqu'il peut aller de -5% à -74% sur les contrats en portefeuille si nous étions amenés à utiliser la table best estimate dans le calcul des provisions (ce qui n'est pas envisageable car la certification nécessite une marge de prudence).

La table best estimate pourrait réduire les montants des provisions immobilisés. Elle pourrait également donner lieu à des analyses tarifaires fines (par produit) et ainsi réviser les grilles à des niveaux particulièrement concurrentiels.

En effet, la table best estimate ayant des taux de mortalité plus faibles sur la quasi-totalité des tranches d'âges, la table de tarification actuelle se rapproche de la table best estimate dans la plupart des cas, ce qui diminue d'autant le montant de la provision.

5.2 Impact sur l'évaluation du Best Estimate Vie Central

- **La provision Best estimate pour primes** :
  Le Best Estimate pour primes est l'actualisation des flux entrants et flux sortants qui résultent d'une nouvelle année d'activité.

$$BE = \sum_{t=0}^{n} \frac{(\text{Flux sortants})_t - (\text{Flux entrants})_t}{(1+r)^t}$$

  Les flux entrants comprennent les primes et recours qui seront encaissé, et les flux sortants comprennent les prestations qui seront versées dans les années futures au titre des sinistres survenus, ainsi que les frais engendrés par ces prestations tout en respectant la frontière de contrats.

  Avec r, les taux sans risque issus de la courbe des taux sans risque founie par l'EIOPA, et n est le nombre d'années de projection (ici c'est la durée du prêt).

Notons que le BE de primes peut être négatif, dans le cas où les encaissements sont supérieurs aux décaissements. L'actualisation est appliquée en milieu d'année avec la courbe de taux sans risque de l'EIOPA.

- **Frontières du contrat** :
  La notion de frontière des contrats est importante dans la définition du périmètre du BE de primes, c'est l'étape préalable à la mise en œuvre du calcul du BE. Les contrats existants sont projetés jusqu'à extinction des prêts.

- **Rachats** :
  Une courbe de taux de rachats est déterminée à partir de l'observation des rachats des trois années précédant l'arrêté (de N-3 à N-1). Cette courbe de taux est calculée de 0 à 17 ans d'ancienneté avec report du taux de rachat à 17 ans sur les années suivantes. Les taux de rachats impactent directement les engagements (assuré/assureur et Vie/Non-Vie). Nous rappelons que les rachats incluent à la fois les remboursements anticipés de prêts qui rendent le contrat d'assurance sans objet et les résiliations ayant pour objectif un changement d'assureur de la part de l'assuré.

Voici le résultat de l'impact de la table construite sur le BE Vie central Brut :

Age	Effectif	%CRD	BE central brut au 31/12/2020 avec la table certifiée 2020	BE central brut au 31/12/2020 avec la table construite	Evolution
<28	3.7%	4.3%	529,637	567,701	38,064
28-35	29.3%	40.4%	2,801,656	2,537,652	-264,003
36-40	23.7%	26.3%	339,914	-1,066,265	-1,406,179
41-45	19.4%	17.3%	-525,649	-2,494,872	-1,969,223
46-50	11.7%	8.0%	-794,560	-2,335,262	-1,540,702
51-55	5.9%	2.3%	-316,203	-1,184,994	-868,790
56-60	3.1%	0.9%	-75,843	-712,644	-636,801
>60	3.3%	0.5%	-540,839	-949,867	-409,028
Total	100.0%	100.0%	1,418,112	-5,638,549	-7,056,662

TABLE 5.3 – *Evolution du Best Estimate de primes Vie*

Les BE centraux obtenus par la table best estimate que nous avons construite sont négatifs, les primes ou les flux entrants sont supérieurs aux flux sortants (les engagements de la mutuelle). Le portefeuille emprunteur peut donc globalement être considéré comme rentable.

Les taux de mortalité de la table de provisionnement ont diminué alors les engagements de la mutuelle diminuent. En plus ces taux s'approchent de la table de tarification ce qui explique la diminution du BE central.

5.3 Impact sur l'évaluation du SCR vie et santé SLT

Dans cette partie, nous analysons l'impact de la table de mortalité sur le SCR [2] souscription vie et SCR santé SLT [3] du portefeuille des emprunteurs ainsi que l'impact sur la solvabilité d'Harmonie mutuelle.

Nous rappelons que le SCR représente le capital permettant d'absorber un éventuel choc dû à la survenance dans l'année, d'événements extrêmes, ne se produisant qu'une fois tous les 200 ans. En d'autres termes, le SCR est la Value At Risk (VaR) des fonds propres au seuil de 99,5% sur un horizon d'un an.

Le SCR est calculé avec la formule standard. Il pourrait-être calculé avec un modèle interne qui doit être approuvé par les autorités de contrôle.

L'approche formule standard est une approche modulaire qui repose sur trois étapes fondamentales :

- Etape 1 : la détermination d'un capital économique pour chaque risque élémentaire.
  Le capital économique est la différence au temps $t = 0$ entre les fonds propres (FP) centraux et les FP choqués.
- Etape 2 : l'agrégation des capitaux au sein de chaque module de risques ou agrégation intra-modulaire ;
- Etape 3 : l'agrégation des capitaux des différentes modules agrégation inter-modulaire.

  L'agrégation des capitaux se fait à l'aide de matrices de corrélation présentes en annexe 4 de la directive 2009-138. Cela permet de tenir compte des effets de diversification dans l'architecture de chaque module de risque.

Le SCR est la somme de trois éléments :

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{operationnel} + Ajustement$$

Avec :

- BSCR : SCR de base ou "Basic SCR", correspond au capital de solvabilité requis, avant tout ajustement, combinant le capital économique des 5 risques majeurs, auquel nous ajoutons ensuite le SCR « risque intangible » calculé à partir des actifs intangibles.
- $\text{SCR}_{operationnel}$: SCR risque opérationnel, risque de perte lié aux procédures humaines, aux fraudes, aux négligences ou aux événements extérieurs.

2. Solvency Capital Requirement
3. Similar to Life Techniques

→ *Ajustement* : capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques, et par les impôts différés.

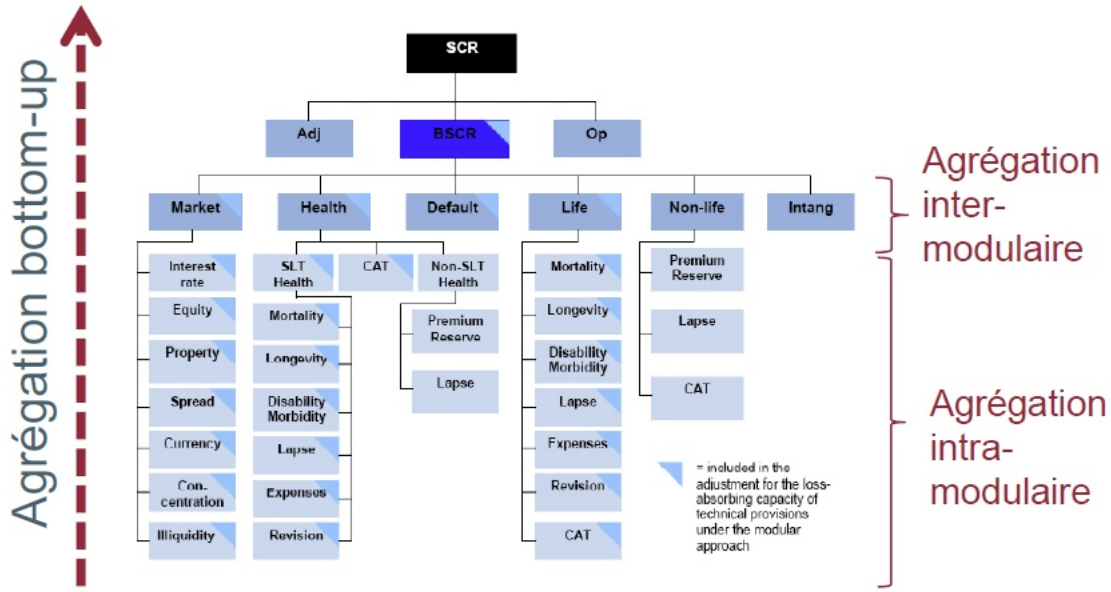


FIGURE 5.1 – *Architecture modulaire des risques pour le calcul de SCR dans la formule standard*

La figure ci-dessus illustre l'architecture de la formule standard servant au calcul du SCR.

Le BSCR se compose de l'agrégation des capitaux économiques pour chaque module de risque. L'agrégation se réalise grâce à la matrice de corrélation produite par l'EIOPA.

$$\text{BSCR} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}_{i,j}.\text{SCR}_i.\text{SCR}_j} + \text{SCR}_{intangibles}$$

Avec :

→ $\text{Corr}_{i,j}$ le coefficient "i, j" issu de la matrice de corrélation ;

→ SCR_i le SCR relatif au module i.

→ $\text{SCR}_{intangibles}$ est le SCR calculé pour les actifs incorporels

De manière générale, le calcul du SCR par module est le suivant :

$$\text{SCR}_{risque} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrRisque}_{i,j}.\text{SCR}_i.\text{SCR}_j}$$

Avec :

→ $\text{CorrRisque}_{i,j}$ est la corrélation entre les sous-modules d'un même risque, issue des matrices de corrélation de l'EIOPA.

→ SCR_i est le SCR du sous-module i

Le SCR des sous-modules est obtenu de la variation de la NAV [4] après application des chocs définis dans les spécifications de l'EIOPA. Le calcul des SCR élémentaires consiste alors à mesurer l'impact d'un scénario dégradé sur la NAV. Cette variation qui résulte du choc est considérée comme le niveau de fonds propres nécessaire pour absorber ce choc. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\text{SCR} = NAV - NAV_{choc} &= (Actif - BE_{choc}) - (Actif_{choc} - BE_{choc}) \\ &= (BE_{choc} - BE) - (Actif - Actif_{choc})\end{aligned}$$

Nous allons nous focaliser par la suite sur :

- **le risque de souscription vie** : qui intègre le calcul d'exigence de capital lié aux risques qui touchent à un contrat portant sur la vie de l'assuré. Cela tient compte des risques de mortalité, de longévité, d'incapacité/invalidité, de rachat, de frais, de révision (concerne les rentes) et des catastrophes.
- **le risque de souscription santé SLT** : qui intègre le calcul d'exigence de capital lié aux engagements d'assurance santé menés sur des bases techniques similaires à l'assurance vie. Cela tient compte des risques de mortalité, de longévité, d'incapacité/invalidité, de rachat, de frais et de révision.

Les chocs appliqués aux sous-risques sont brièvement décrits ci-dessous :

Module de risque	***Choc***
Mortalité	Augmentation de 15% des taux de mortalité
Longévité	Réduction de 20% des taux de mortalité
Rachat	Choc à la baisse: -50% du taux d'exercice des options de cessation Choc à la hausse: +50% du taux d'exercice des options de cessation Choc massif: exercice d'une option de cessation sur 40% des contrats
Incapacité/Invalidité	Augmentation de 35% des taux d'entrée en incapacité/invalidité la première année (puis +25% les années suivantes)
Frais	Augmentation de 10% des frais / +1% d'inflation des frais
Révision	Augmentation de 4% des prestations soumises à un risque de révision
Catastrophe	Augmentation de 0,15pp du taux de mortalité

4. Net Asset Value (Fonds propres)

Pour la garantie décès nous appliquons des chocs de mortalité, de rachat, de frais et de catastrophe. Augmenter la longévité est bénéfique pour l'assureur car il diminue l'engagement de l'assureur et donc les provisions best estimate. Le choc d'invalidité est traité pour la garantie invalidité.

En effet, le choc incapacité/invalidité s'applique aux contrats qui garantissent l'arrêt de travail.
Pour l'assurance emprunteur l'ensemble de la garantie incapacité/invalidité est traité dans le LoB [5] santé SLT.

Pour le calcul du SCR santé SLT en plus du choc incapacité/invalidité, nous appliquons aussi des chocs de longévité, de rachat, de frais et de catastrophe. Ici la longévité augmente les engagements de l'assureur, car plus la durée de vie de l'emprunteur augmente plus l'assureur continue à verser les rentes (les échéances du prêt).

Le choc de révision ne s'applique pas pour un contrat emprunteur, car les prestations son fixés au départ et elles sont indépendantes de la sinistralité et de l'environnement juridique.

Voici les résultats de l'impact de la table sur le SCR Vie et santé SLT du portefeuille des emprunteurs :

➤ **SCR souscription Vie :**

SCRlife	**Avec la table certifiée 2020**	**Avec la table best estimate construite**	**Impact**
Exigence de capital - Risque de souscription vie	10,679,839	9,027,067	-1,652,772
Effets de diversification	-5,108,458	-3,995,444	1,113,015
Somme des composants de risque	15,788,297	13,022,511	-2,765,787

TABLE 5.4 – *Impact de la table sur le SCR souscription vie*

5. Line of Business. La segmentation par branche d'activité permet de gérer des groupes de risques homogènes

➤ **SCR souscription Santé SLT :**

SCRhealth SLT	**Avec la table certifiée 2020**	**Avec la table best estimate construite**	**Impact**
Exigence de capital - Risque de souscription Santé SLT	6,162,321	5,605,306	-557,015
Effets de diversification	-1,825,005	-1,992,089	-97,084
Somme des composants de risque	7,987,326	7,527,395	-459,931

TABLE 5.5 – *Impact de la table sur le SCR souscription santé similaire à la vie*

Le SCR comme nous l'avons déjà noté est la perte du portefeuille que l'assureur ne doit pas dépasser qu'avec une probabilité de 0.5%. Le SCR diminue avec la table construite donc la perte du portefeuille diminue suite à un choc. Le niveau des FP nécessaire pour absorber les chocs diminue.

5.4 Impact sur les engagements totaux et le ratio de solvabilité

Voici l'impact de la table best estimate sur les engagements de la mutuelle :

(€)	Table certifiée 2020	Table Best Estimate construite	Ecart
Best Estimate net	306,392,424	301,241,118	-5,151,306
Marge de risque	44,071,944	43,688,210	-383,734
Provisions nettes S1	528,434,492	524,713,340	-3,721,152
Fonds Propres (FP)	2,484,718,648	2,486,033,717	1,315,069
Ajustement	-83,604,217	-84,103,036	-498,819
SCR	825,711,280	824,497,692	-1,213,588
Ratio de solvabilité (FP/SCR)	300.9%	301.5%	0.6%
SCR Chute NSLT	76,059,487	76,059,487	0
SCR P&R NSLT	481,569,755	481,569,755	0
SCR Santé NSLT	487,539,203	487,539,203	0
SCR Santé SLT	6,162,321	5,605,306	-557,015
SCR Vie	15,306,159	13,878,935	-1,427,224
SCR Défaut	72,625,295	72,625,295	0

TABLE 5.6 – *Impact de la table sur les engagements totaux de la mutuelle*

Comme nous l'avons déjà vu, les provisions mathématiques et les provisions Best Estimate du portefeuille emprunteur évoluent à la baisse à cause de la diminution des taux de mortalité, ce qui diminue les provisions totaux de la mutuelle.

La marge de risque se calcule en fonction du SCR (comme nous l'avons déjà noté dans la partie 1.4.3), donc elle évolue à la baisse.

Les fonds propres sont obtenus en retranchant les passifs des actifs, ici les passifs du bilan diminuent et les fonds propres augmentent avec la nouvelle table.

Le ratio de solvabilité augmente de 0.6% avec la nouvelle table, donc sur-provisionner a un impact sur la solvabilité de l'entreprise à la baisse, plus nous provisionnons plus nous augmentons le besoin en solvabilité en cas d'une crise économique.

Conclusion

Le dispositif règlementaire solvabilité II augmente l'importance accordée à la construction des tables de mortalité d'expérience afin d'optimiser au mieux les provisions. L'intérêt de ces tables d'expérience réside dans la prise en compte du risque de mortalité associé au portefeuille étudié. A cette fin, nous avons observé différents types de modèles d'ajustement de la mortalité qu'il convient de sélectionner soigneusement en fonction des caractéristiques du portefeuille.

L'étude menée sur la population des emprunteurs confirme que le portefeuille étudié connaît une mortalité plus faible que celle de la table certifiée en 2020, actuellement utilisée. En effet, la table est construite sous un angle plutôt statistique que prudent, comme cela est le cas pour la table certifiée en 2020.

Comme nous l'avions anticipé, cette table a engendré un impact sensible sur le provisionnement de la mutuelle. Ainsi une baisse dans les provisions permet de s'interroger sur la possibilité d'une révision de la tarification des nouveaux produits, et avoir des primes plus concurrentielles sur le marché.

La valeur négative des provisions Best Estimate tend également à montrer que le portefeuille étudié est globalement rentable.

Avec la table construite, le ratio de couverture du SCR total augmente légèrement, en effet, le portefeuille des emprunteurs n'est pas volumineux par rapport à la complémentaire santé qui constitue la plus grande part du chiffre d'affaires de la mutuelle. Néanmoins, si le portefeuille se développe dans le futur, un calibrage au plus juste des tarifs sur la mortalité réelle devrait permettre à la mutuelle d'augmenter ses parts de marché tout en pilotant l'équilibre technique de son portefeuille.

Annexe A

Modèle à hasard proportionnel

Il s'agit le plus souvent de modèles semi-paramétriques dans lesquels nous nous donnons une fonction de survie de base $B(t)$ et nous supposons que la fonction de survie de la population étudiée est de la forme :

$$S_\theta(t) = B(t)^\theta$$

où θ paramètre > 0 inconnu.
Si nous supposons que la variable aléatoire X, de fonction de survie S_θ admet une densité alors :

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= -S'_\theta(x) \\ &= -\theta B'(x) B(x)^{\theta-1} \\ &= \theta f(x) B(x)^{\theta-1} \end{aligned}$$

où f est la densité associée à B.

d'où

$$h_\theta(t) = \frac{f_\theta(t)}{S_\theta(t)} = \frac{\theta f(t)}{B(t)} = \theta h(t)$$

où h est la fonction hazard associée à B.

Nous avons deux cas :

- Soit B et h sont connues (à un paramètre près), dans ce cas nous estimons un nombre fini de paramètres et le modèle devient paramétrique ;
- Soit B et h sont inconnues, dans ce cas le modèle devient semi-paramétrique.[27]

Annexe B

Brass avec une combinaison des tables TH00-02 et TF00-02

En appliquant le modèle de Brass, nous somme confrontés au risque du choix de la table de référence. La table réglementaire TH00-02 est choisie car elle décrit bien la forme de la courbe de mortalité du portefeuille étudié. Or, le portefeuille comme nous l'avons noté est constitué de 52% d'hommes et 48% de femmes, donc c'était envisageable de tester le modèle de Brass en utilisant comme référence la combinaison de 52% de la table TH00-02 et 48% de la table TF00-02.
Ci-dessous le résultat du lissage des taux bruts :

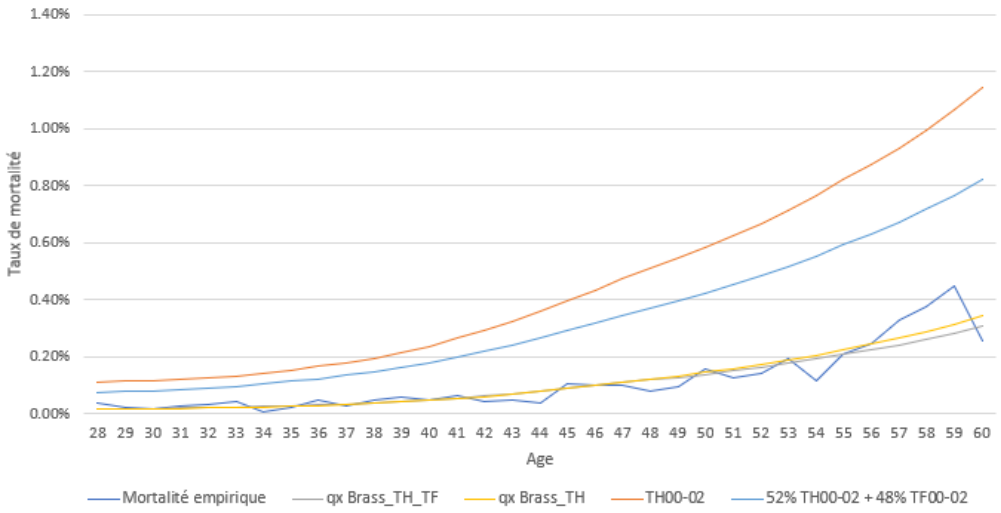


FIGURE B.1 – *Taux de mortalité ajustés par la méthode de Brass*

Les taux de mortalité ajustés sont très proches avec les deux table de référence. Nous avons alors estimé le nombre de décès attendus par tranche d'âges :

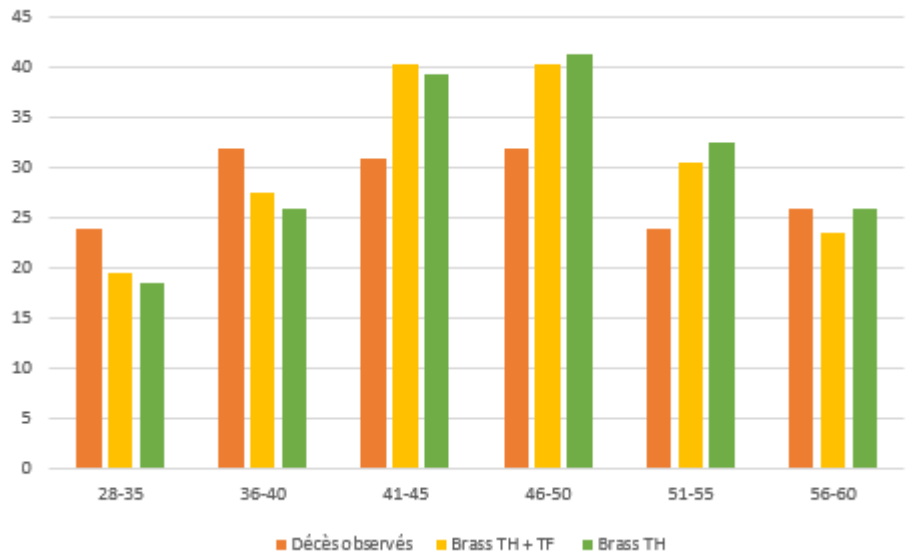


FIGURE B.2 – *Histogramme du nombre de décès estimé par les modèles de Brass*

Ages	Décès observés	Brass TH + TF	Brass TH
28-35	24	19	19
36-40	32	28	26
41-45	31	40	39
46-50	32	40	41
51-55	24	30	32
56-60	26	24	26
Total	169	182	184

TABLE B.1 – *Comparaison des décès estimés par les modèles de Brass*

Avec la combinaison des deux tables, les taux estimés sont plus prudents au niveau de la tranche d'âges [28 ; 45] mais moins prudents sur les autres tranches.

Le modèle de Brass sous-estime la mortalité sur la plage d'âges [28 ; 40] avec les deux choix, ce qui ne le rend pas prudent surtout sur les groupes d'âge où nous avons la plus grande exposition au risque.

Nous avons ainsi calculé le critère de fidélité et la distance de khi-deux :

Modèle / Critère	Critère de fidélité	Distance de khi-deux
Brass TH00-02	0.0089	20.4
Brass 52%TH + 48% TF	0.0092	23.0

TABLE B.2 – *Comparaison de la fidélité et de la distance de khi-deux entre les modèles de Brass*

Le modèle de Brass avec la table TH00-02 donne des taux ajustés plus fidèles aux observations.

Annexe C

Estimation des taux bruts par la méthode de Hoem

Les taux bruts $\hat{q}_x$ sont estimés en rapportant le nombre de décès observé D_x à l'exposition au risque L_x :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{L_x}$$

La figure ci-dessous illuste les taux bruts de Kaplan-Meier et de Hoem :
Les taux de mortalité estimés par Hoem sont très proches des taux de Kaplan-Meier.

Nous avons ajusté les taux bruts de Hoem par la méthode de Whittaker-Henderson, pour vérifier si les taux théoriques sont encadrés par l'intervalle de confiance de Hoem pour tous les âges avec une probabilité de 95%.

Intervalle de confiance

L'estimateur de Hoem considère que les décès suivent une loi binomiale. Alors nous approximons la loi des taux bruts par une loi normale, et nous remplaçons la variance théorique par la variance estimée, i.e :

$$q_x \sim \mathcal{N}\left(\hat{q}_x, \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{L_x}}\right)$$

D'où nous déduisons l'intervalle de confiance ponctuel des taux ajustés q_x à l'âge x :

$$\left(q_x \in \hat{q}_x \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{L_x}}\right) = 1 - \alpha$$

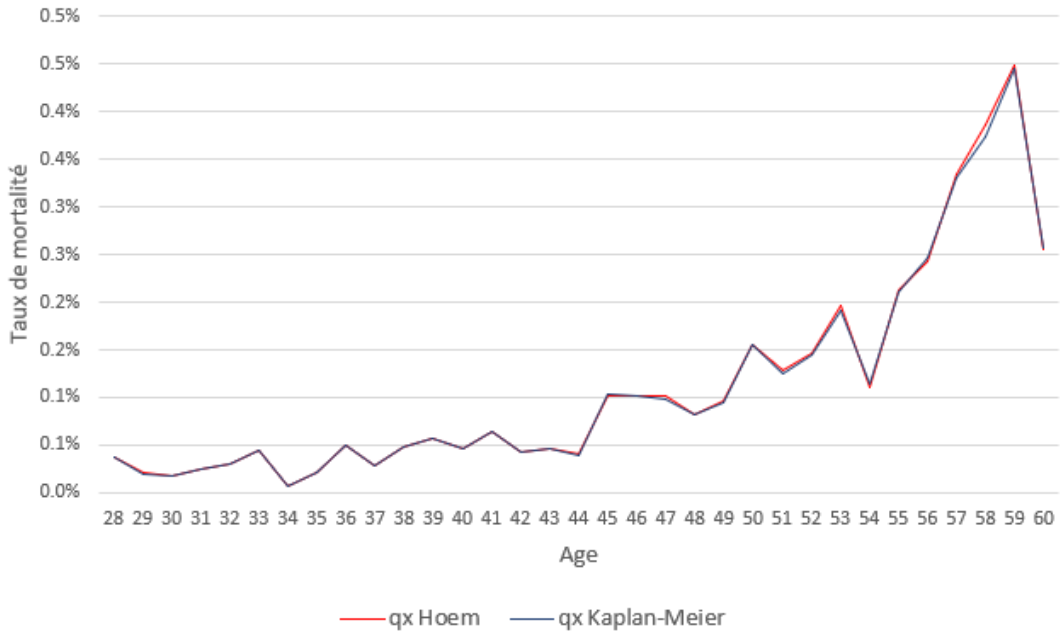


FIGURE C.1 – *Comparaison entre les taux bruts de mortalité estimés par la méthode de Kaplan-Meier à ceux estimés par Hoem*

avec $u_{\frac{\alpha}{2}}$ désigne le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite et $1-\alpha$ désigne le niveau de confiance.

Bandes de confiance

Comme nous l'avons noté, puisque nous souhaitons encadrer les taux de mortalité sur tous les âges d'une tranche d'âges, les bandes de confiance sont plus envisageable.

Or, les bandes de confiance sur une plage d'âges $[x_0; x_0+n]$ (n un nombre entier positif) peuvent être représentées comme une collection d'intervalles de confiance pour les âges appartenant à $[x_0; x_0+n]$ constuits simultanément.

Si nous considérons un intervalle de confiance à l'âge x à un niveau $1-\beta$

$$\mathbb{P}\left(q_x \in \hat{q}_x \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{L_x}}\right) = 1-\beta$$

Nous pourrons alors construire les bandes de confiance au seuil α sur la plage d'âges $[x_0; x_0+n]$, en constituant des intervalles de confiance ponctuels pour chaque âge dans l'intervalle $[x_0, x_0+n]$ au seuil β

$$\mathbb{P}\left(q_x \in \hat{q}_x \pm u_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}{L_x}},\ x \in [x_0, x_0+n]\right) = 1-\alpha$$

avec $\beta = 1-(1-\alpha)^{\frac{1}{(n+1)}}$

La figure ci-dessous illustre les taux bruts, les intervalles de confiance, les bandes de confiance et les taux ajustés par Whittaker-Henderson sur la plage d'âges [28 ; 60] :

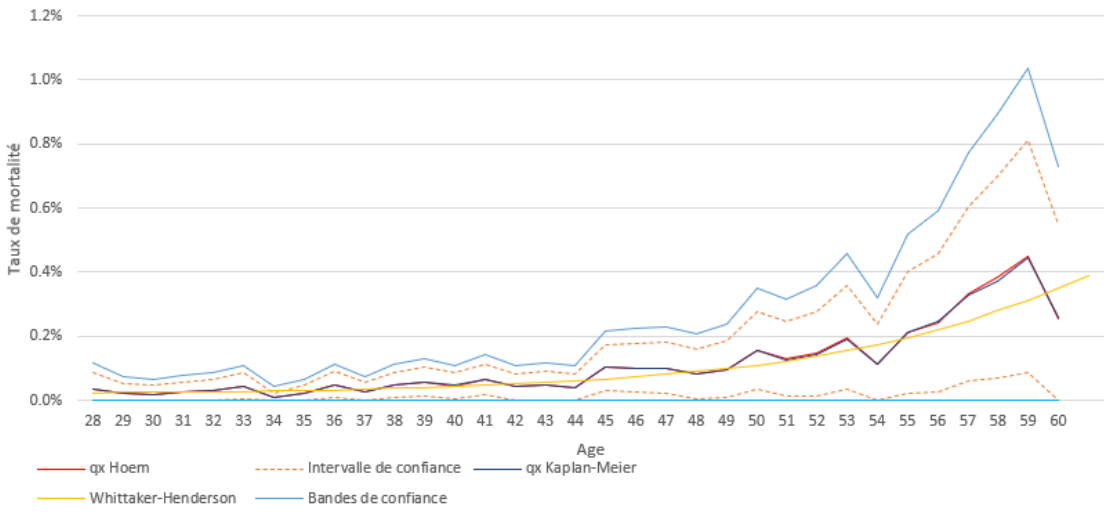


FIGURE C.2 – *Bandes de confiance des taux bruts de Hoem*

Les taux de décès théoriques se situent tous dans les bandes de confiance des taux bruts de Hoem.

A noter que nous avons aussi encadrer les taux bruts de mortalité par l'intervalle de confiance des taux théoriques, pour valider que les taux ajustés représentent bien les taux observés.

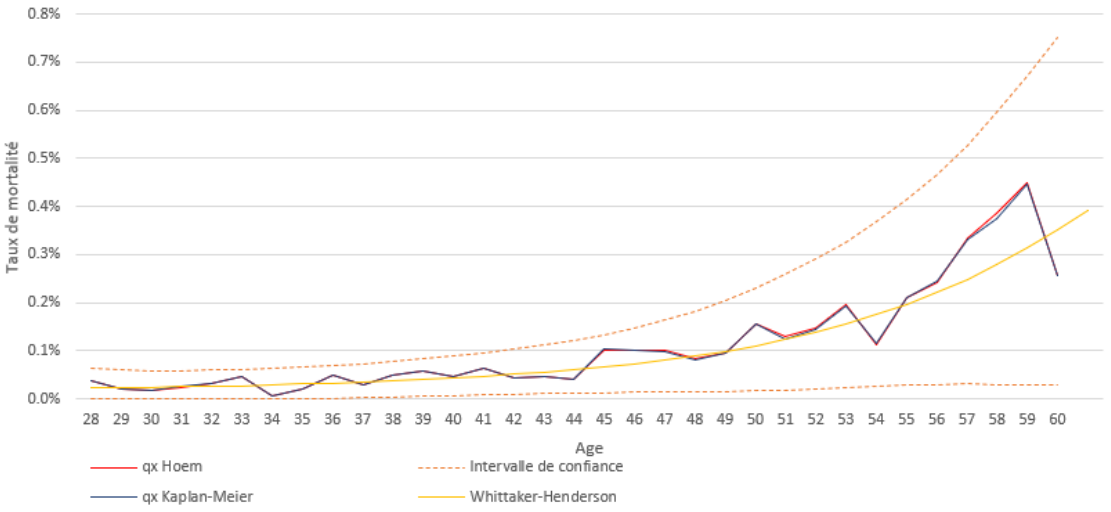


FIGURE C.3 – *Intervalle de confiance des taux théoriques de Whittaker-Henderson*

Les taux bruts se situent à l'intérieur des intervalles de confiance théoriques à 95%, ce qui montre que la table d'expérience représente correctement la réalité.

Bibliographie

[1] ACPR. Assurance emprunteur, Novembre 2020. https ://www.abe-infoservice.fr/assurance/assurance-emprunteur.

[2] Rania BOUYEKHF. Construction et validation de tables de mortalité prospectives en cas de petits échantillons. 2016.

[3] Jacques-Olivier BUSI. Assurance emprunteur : les délégations n'ont toujours pas décollé en 2019, Juillet 2020. lelynx.fr.

[4] D.R. Cox. Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 34(N°2), 1972.

[5] Institut des actuaires. Charte de la certification et de suivi des tables de mortalité et des lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité. 2002.

[6] Antoine DELWARDE et al. Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie. *Bulletin français d'actuariat*, Vol. 6(N°12) :77–102, 2004.

[7] Frédéric PLANCHET et Aymric KAMEGA. Construction de table de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation. *Bulletin français d'actuariat*, Vol. 13(N°25) :5 – 33, 2013.

[8] Frédéric PLANCHET et Aymric KAMEGA. Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience. 24/11/2010.

[9] John P. KLEIN et Melvin L. MOESCHBERGER. *Survival analysis techniques for censored and truncated data*. Springer, 2013.

[10] Laurent DEVINEAU et Mohammed BENNOUNA. Modélisation et agrégation des risques. 2020-2021. Support de cours EURIA.

[11] Laureline HERBAUT. Etude de la mortalité des personnes victimes d'accidents médicaux. Mai 2017.

[12] Marc HOROVITZ. Contexte reglementaire prudentiel et comptable. 2020-2021. Support de cours EURIA.

[13] Catherine HUBER-CAROL. Durées de survie tronquées et censurées. *Journal de la société statistique de Paris*, Vol. 13(N°4) :3–23, 1994.

[14] Aymric KAMEGA. Construction de tables d'expérience et mesure des risques associés. 2014. Support de cours EURIA.

[15] Aymric KAMEGA. Introduction à solvabilité 2 applications de mesure des risques. Décembre 2015. Support de cours EURIA.

[16] Frank E. KNORR. Multidimensional whittaker-henderson graduation. *TSA*, Vol. 36, 1984.

[17] Robert LANGMEIER. Etude de différentes méthodes d'ajustement de tables de mortalité : application aux données d'une compagnie d'assurance. 2000.

[18] Législafrance. Code de la mutualité. www.legifrance.gouv.fr.

[19] Législafrance. Code des assurance. www.legifrance.gouv.fr.

[20] Stéphane MENDY. Etude d'un contrat d'assurance emprunteur dans le contexte solvabilité 2. 2017. Mémoire d'actuariat.

[21] Alain MOEGLIN. Mathématiques des assurances de personnes. 2020. Support de cours EURIA.

[22] Harmonie Mutuelle. Rapports sur la solvabilité et la situation financière, 2020. https ://www.harmonie-mutuelle.fr/web/harmonie-mutuelle/solvabilite-2.

[23] Anthony NAHELOU. Modèles de durée. 2020-2021. Support de cours EURIA.

[24] Frédéric PLANCHET. Taux de mortalité en france depuis 1982, 17 janvier 2021. L'actualité des techniques actuarielles.

[25] Frédéric PLANCHET. Modèles de durée. 2020-2021. Support de cours ISFA.

[26] Philippe SAINT-PIERRE. Introduction à l'analyse des durées de survie. 2015.

[27] Franck VERMET. Modèles de durée. 2020-2021. Support de cours EURIA.

[28] Thomas GUILLON VERNE. Construction de tables de mortalité d'expérience sur de petits échantillons pour l'estimation de la sinistralité décès. 2015. Mémoire d'actuariat.

[29] Marie-Bérangère VIVILLE. Comparaison de méthodes d'ajustement de la mortalité des rentiers dans un but prospectif. Mémoire d'actuariat.

[30] Brass W. *Methods for estimating fertility and mortality from limited and defective data*. Laboratories for Population Statistics Occasional Publication, 1971.