

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Papa Kora NDOYE

Titre Allocation du Risk Capital par LoB : Impacts FRPS et Analyse de rentabilité

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des

*Actuaires : Mme Catherine PIGEON ; Mr
Arnaud COHEN ; Mme Florence PICARD*

Membres présents du jury de l'ISFA

Mr Stéphane LOISEL



Entreprise :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Rémi SAUCIE

Signature :


Invité : Mr Adrien

Nom : SURU

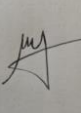
Signature :

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise


Rémi SAUCIE, le 24/03/2021

Signature du candidat


Papa Kora NDOYE, le 24/03/2020

Résumé

Selon la directive de la Solvabilité II, les compagnies d'assurance sont amenées à calculer un capital de solvabilité requis dit SCR (Solvency Capital Requirement) pour garantir la solvabilité de l'assureur. Cette évaluation qui repose sur un calcul de Value-at-Risk correspond au montant de fonds propres économiques que doit détenir la compagnie d'assurance lui permettant de faire face à une ruine totale dans un horizon d'un an et à un seuil de probabilité de 99,5%.

Bien que ce capital soit calculé en vision Entité Juridique tel que recommandé par le régulateur, la vision management qui découle de l'allocation par ligne de Business constitue un enjeu majeur pour les compagnies d'assurance et notamment chez les grands groupes assureurs généralistes qui développent une large gamme de produits (Epargne, Retraite, Prévoyance, Santé et Emprunteurs).

En effet, l'allocation du SCR permet de quantifier d'une part le risque que supporte chaque business, mais aussi et surtout de mesurer la rentabilité des différentes gammes de produits et de prévoir des actions de pilotage pour améliorer leur profitabilité. L'allocation du capital par business permet aussi de se projeter sur des problématiques de cession et de rachat de produits en termes d'impact sur le risque global de la compagnie. Ainsi, l'allocation du capital au même titre que le résultat opérationnel constitue un vrai support décisionnel pour le management.

Par ailleurs, la possibilité de création d'une nouvelle Entité des Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire (FRPS) suite à L'ordonnance n_2017-484 du 6 avril 2017, relative à la création d'organismes dédiés à l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire et à l'adaptation des régimes de retraite supplémentaire en unités de rente, génère un impact non négligeable dans le Risk de l'assurance vie et son allocation par Business. La compréhension de cette déformation est un enjeu clé pour les compagnies d'assurance vie.

Dans ce mémoire, nous nous focaliserons principalement sur la problématique de l'allocation du SCR d'une compagnie d'assurance vie qui est un exercice différent de la méthodologie de détermination du capital de solvabilité réglementaire de l'entité juridique en l'occurrence. Cependant, l'allocation reste un exercice complémentaire et surtout incontournable d'un point de vue managérial. Nous apporterons ainsi non seulement une vision du SCR que consomme chaque module de risque, mais aussi le coût de risque de chaque business de l'assurance vie afin de piloter leurs différentes rentabilités. Nous proposerons une approche de projection du SCR dans le cadre du Processus Budgétaire, ainsi que les limites de pilotage de la solvabilité qui en découlent. Nous compléterons par la suite par une mesure d'impacts de la création d'une entité juridique FRPS dans le risque de l'assurance vie.

Mots clés

Solvabilité II, ACPR, EIOPA, Bilan, Actif, Passif, formule standard, modèle interne, mesure de risque, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk, sensibilité, copule, Fonds Propres, BEL, matrice de corrélation, risque standalone, diversifié, agrégation, facteur de diversification, rentabilité, charge de capital, RORARC, ROE, ORSA, Allocation du capital par type de risque, Méthode Proportionnelle, Marginale, Euler, Shapley, Allocation du capital par LoB, Scaling, FRPS, Processus Budgétaire.

Abstract

According to the Solvency II directive, insurance companies are required to calculate a Solvency Capital Requirement SCR to guarantee the solvency of the company. This assessment, which is based on a Value-at-Risk calculation, corresponds to the amount of economic own funds that the insurance company must hold, allowing it to face total ruin within a one-year horizon and at a probability threshold by 99.5%.

Despite being calculated from a Legal Entity perspective as recommended by the Regulator, the Management vision resulting from the allocation by line of business is a major issue for insurance companies and in particular for large general insurance groups which develop a wide range of insurance products (savings, pensions, protection, health and loans).

The SCR allocation allows to measure and quantify on the one hand the risk that each business bears, and on the other the profitability of the various product ranges so that management actions can be planned to improve their profitability. The SCR allocation by line of business also allows to project issues of product sales and repurchases in terms of the impact on the overall risk of the company. Thus, the SCR allocation supports the decision-making process of management, similar to operating profit.

In addition, the possibility of creating a new Supplementary Professional Retirement Fund Entity (FRPS) following Ordinance n° 2017-484 of April 6, 2017, related to the creation of bodies dedicated to the exercise of the activity supplementary occupational retirement plans and the adaptation of supplementary retirement plans in pension units, generates a significant impact on the SCR of life insurance and its allocation by line of business. Understanding this distortion is a key issue for life insurance companies.

In this memory, we will mainly focus on the issue of the SCR allocation of a life insurance company, which is a different exercise from the methodology for determining the regulatory solvency capital of the legal entity in this case. However, the allocation remains an essential exercise from a managerial point of view. We will thus provide not only a vision of the SCR consumed by each risk module, but also the cost of risk of each life insurance business in order to manage their different profitability. We will propose an approach for projecting the SCR within the framework of the Planning Process, as well as the resulting solvency control limits. We will then complete with a measure of the impact on the risk of a life insurance company after the creation of an FRPS legal entity.

Keywords

Solvency II, ACPR, EIOPA, Balance Sheet, Asset, Liabilities, standard formula, internal model, risk measure, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk, sensitivity, copula, Owns Funds, BEL, correlation matrix, standalone risk, diversify, aggregation, diversification factor, profitability, capital intensity, RORARC, ROE, ORSA, Capital allocation by type of risk, proportional method, Marginal, Euler, Shapley, Capital allocation by LoB, Scaling, pension funds, Planning Dialogue.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements à l'ensemble du corps professoral de l'Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) qui m'a permis de bénéficier d'une formation de très grande qualité. Une mention particulière est adressée à mon tuteur académique, Stéphane Loisel, Directeur du laboratoire SAF pour m'avoir accompagné pour la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Maria Angeles JIMENEZ IGLESIAS, Responsable de l'équipe Pilotage des risques Vie et Santé pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour sa disponibilité, pour ses conseils avisés, mais aussi pour le suivi de mes travaux durant ce mémoire.

Je tiens à remercier Adrien SURU, Responsable de l'équipe Contrôle et Pilotage IARD pour tout le temps qu'il a consacré à la relecture de ce mémoire, mais également pour ses remarques et commentaires très pertinents.

Merci à l'ensemble de la Direction des Risques d'Allianz France avec Emeric DE SOUANCE à sa tête, pour leur accueil et l'attention qu'ils ont accordée à ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier particulièrement mon tuteur Rémi SAUCIE, Directeur Financier d'Allianz France pour m'avoir fait confiance et intégré dans ses équipes, mais aussi pour le suivi de ce mémoire ainsi que pour tout son soutien à sa réalisation.

A Mor, Papa Khalifa et Milla

Sommaire

Résumé.....	2
Abstract	3
Remerciements	4
Présentation du Groupe Allianz.	9
Introduction.....	10
1 Les outils mathématiques de l'analyse du risque.....	12
1.1 Définition et propriétés d'une mesure	13
1.1.1 Chargement de sécurité.....	13
1.1.2 Mesure de risque cohérente	14
1.1.3 Mesure de risque comonotone additive.....	15
1.2 Les différentes mesures de risque.....	15
1.2.1 L'écart-type et la variance.....	15
1.2.2 La Value-at-Risk (VaR)	16
1.2.3 La Tail-Value-at-Risk (TVAR)	17
1.3 La Value-at-Risk comme mesure de risque pour évaluer le capital économique.	18
1.3.1 Pourquoi la VaR ?	18
1.3.1 Les différentes approches de la Value-at-Risk	18
1.3.2 Les limites de la Value-at-Risk en Assurance	19
1.4 Les copules comme outil de modélisation de la dépendance.....	19
1.4.1 Rappels et notations	19
1.4.2 Définition des copules.....	20
1.4.3 Copules elliptiques	22
1.4.4 Copules archimédiennes	23
1.4.5 Mesure de la dépendance.....	25
1.5 Conclusion.....	26
2 L'apport d'un modèle interne pour dépasser les limites de la formule standard, en particulier en matière de modélisation actifs passifs	27
2.1 La réglementation Solvabilité II	28
2.1.1 Contexte et enjeux de Solvabilité II.....	28
2.1.2 Une réglementation sous trois piliers	28
2.1.3 Un bilan en valeur économique	29
2.1.4 Un capital économique sous contraintes.....	31
2.2 Un modèle interne pour mieux appréhender le risque.....	32
2.2.1 La formule standard et ses limites	32
2.2.2 Le modèle interne	34
2.2.3 Méthodologie de calcul dans le modèle interne	36
2.3 Le modèle actif - passif	38
2.3.1 Présentation de l'architecture du modèle ALIM.....	38
2.3.2 Le modèle ALIM en pratique : <i>Crediting Strategy & Investment Strategy</i>	39

2.4	Techniques de valorisation de la distribution des fonds propres économiques.....	40
2.4.1	La méthode des Simulations dans les Simulations	40
2.4.2	Les méthodes paramétriques : Least Square Monte-Carlo et Curve Fitting.....	41
2.4.1	La méthode des portefeuilles répliquants	42
2.5	Conclusion.....	44
3	Agrégation et méthodes d'allocation par type de risque.....	45
3.1	Agrégation dans le cadre de la formule standard	46
3.1.1	Méthodologie d'agrégation dans le cadre de la formule standard	46
3.1.2	Représentation et interprétation graphique	47
3.2	Agrégation dans le cadre du modèle interne	48
3.2.1	Présentation des risques de modèle Interne	48
3.2.2	Principe d'agrégation dans un modèle interne.....	50
3.2.3	Quels sont les avantages à considérer une copule Gaussienne dans le modèle interne ?	52
3.2.4	Des gains et pertes estimés par des scénarios de Monte-Carlo	53
3.2.5	Calibration de la matrice de corrélation	53
3.2.6	Prise en compte des Effets Croisés (Cross-Effects)	55
3.2.7	Le capital Add-on.....	56
3.2.8	Prise en compte des impôts différés.....	57
3.2.9	Présentation des données utilisées pour les applications	58
3.3	Allocation de la diversification entre les différents risques	60
3.3.1	Définitions et Approche de l'allocation.....	61
3.3.2	Méthode proportionnelle	63
3.3.3	Méthode marginale.....	64
3.3.1	Méthode de Shapley	64
3.3.2	Méthode d'Euler	65
a	Interprétation graphique de la méthode d'Euler dans le cadre de la formule standard.....	66
b	Application de la méthode d'Euler.....	67
3.4	Comparaison des méthodes	68
3.5	Conclusion.....	69
4	Proposition de méthode d'allocation par ligne de business : pilotage de la rentabilité	70
4.1	Présentation de l'allocation par ligne de business	71
4.1.1	Définition et contexte	71
4.1.2	Les différentes LoB de l'assurance de Personnes	73
4.1.3	De la vision compagnie à la vision portefeuille : le principe de Scaling	74
4.1.4	Principe de l'allocation par ligne de Business	75
a	Principe d'allocation du risque standalone	75
b	Principe d'allocation de la diversification	76
4.2	Sensibilité des risques de marché.....	77
4.2.1	Descriptif des variables et des chocs	77
a	Les variables à choquer	77
b	Les chocs sur les facteurs de risques.....	78
4.2.2	Sensibilité par ligne de Business	78
4.2.3	Prise en compte de la Provision Pour Participation aux Excédent (PPE)	79
4.2.4	Prise en compte des produits financiers de la réserve de capitalisation.....	80
4.3	Sensibilité des risques non marché	81
4.3.1	Descriptif des variables et des chocs	82
4.3.2	Sensibilité par ligne de busines	83

4.4	Particularité du Risque opérationnel.....	84
4.5	Allocation du Risque standalone par ligne de business.....	84
4.6	Calcul de la diversification	88
4.6.1	Diversification par la méthode d'Euler.....	88
4.6.2	Application numérique de la diversification	89
4.7	Mesure de rentabilité	91
4.7.1	Le résultat opérationnel et le revenu net d'impôts	92
a	Le solde de souscription Vie	92
b	Le solde de réassurance	92
c	Les charges d'Acquisition et de Gestion.....	93
d	Le résultat financier.....	93
4.7.2	Mesure de rentabilité par ligne de business.....	93
4.7.3	Pilotage de la rentabilité : un exercice difficile en réalité.....	95
4.8	Conclusion.....	97
5	Pilotage du capital de solvabilité : projection budgétaire et limites.....	98
5.1	Méthodologie de projection du SCR dans le cadre du processus budgétaire	99
5.1.1	Contexte	99
5.1.2	Conditional Value-at-Risk CVaR et Sensibilité	99
5.1.3	Projection des risques standalones avec les approximations Delta-Gamma	101
a	Approximation Delta	101
b	Approximation Delta-Gamma	101
c	Application à la projection des risques standalones de marché.....	102
5.1.4	Diversification et allocations	102
5.2	Limites du Ratio de Solvabilité : Ratio de management et Barrières	103
5.2.1	Management Ratio.....	104
5.2.1	Barrières liées au Management Ratio.....	105
5.3	Limites de niveau 2	106
5.3.1	Limite de gap de duration	106
5.3.1	Limite de sensibilité des Actions	106
5.3.1	Limite ratio Crédit VaR	106
5.4	Conclusion.....	107
6	Création de FRPS : Vers un calcul de capital de solvabilité plus économique en assurance vie	108
6.1	FRPS : création dans une perspectives d'améliorer la solvabilité de l'assurance vie .	109
6.1.1	Evolution de la réglementation européenne des fonds de pensions et spécificités en France	110
6.1.2	Description des principaux produits d'épargne-retraite supplémentaire	111
a	Articles 39.....	111
b	Articles 83.....	111
c	Articles 82.....	112
d	IFC.....	112
e	Madelin.....	112
f	PERP.....	112
g	CRH	112
h	PER.....	113
6.1.3	Portefeuille Allianz Vie transféré en contrat FRPS.....	113
6.2	Evolution des règles de solvabilité des contrats FRPS.....	115
6.2.1	Une sortie de la réglementation Solvabilité II motivée par une contestation française	115

6.2.2	FRPS : vers des règles de solvabilité plus adaptées que la réglementation Solvabilité II	116
a	Des règles quantitatives proches de « Solvabilité I » complétées par des tests de résistance.....	116
b	Système de gouvernance et de la gestion des risques.....	118
6.2.3	Estimation du risque capital de l'entité FRPS	119
6.3	Création de FRPS : Impacts dans le Risk Capital de Allianz Vie.....	120
6.3.1	Impact sur le Ratio de solvabilité	120
6.3.1	Impact sur les sensibilités	121
6.3.1	Impact sur la durée des engagements du passif	121
6.3.2	Impacts sur le risque standalone	122
6.3.3	Impacts sur la diversification.....	123
6.3.1	Impacts charge de capital sur BEL.....	125
6.4	Conclusion.....	125
	Conclusion	126
	Bibliographie.....	128
	Annexes	129
	Présentation de l'allocation du risque Standalone par LoB	129
	Présentation de l'allocation du risque diversifié par LoB.....	130
	Présentation de l'allocation du risque Standalone par LoB post FRPS	131
	Présentation de l'allocation du risque diversifié par LoB post FRPS	132

Présentation du Groupe Allianz.

Fondé en 1890 à Berlin, le groupe Allianz est une société européenne de type holding d'origine allemande. Implanté dans l'ensemble des continents du monde, le groupe Allianz a son siège social à Munich. Le groupe Allianz est le premier assureur européen par sa capitalisation boursière, et le second gestionnaire d'actifs au monde par l'intermédiaire de ses deux filiales AGI et PIMCO notamment.

Le portefeuille d'activités d'Allianz est très varié, l'assurance dommages aux particuliers et aux entreprises, l'assurance vie et maladie, l'activité bancaire, la gestion d'actifs, l'assurance-crédit et l'assistance.

A titre informatif en 2019, Allianz comptait :

- 147 000 collaborateurs et 100 millions de clients dans plus de 70 pays,
- 2 268 milliards d'actifs gérés
- Un chiffre d'affaires de 142 milliards d'euros et un résultat opérationnel de 11.9 milliards d'euros.
- Un Combined Ratio de 95.5% et un Ratio de Solvabilité de 212%

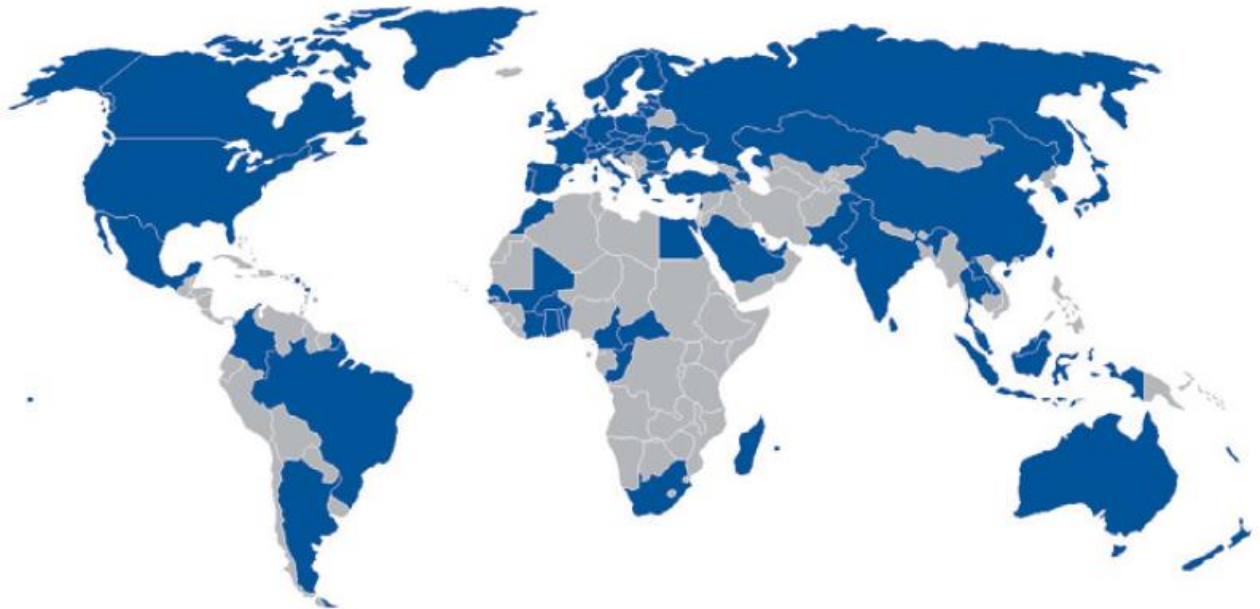


Table 0 : Carte de présence d'Allianz dans le monde

Introduction

Depuis l'officialisation de la réglementation Solvabilité II en janvier 2013, les compagnies d'assurance déterminent un capital économique requis pour garantir leur solvabilité face aux risques encourus. Cette évaluation qui repose sur un calcul de Value-at-Risk permet, a priori, de faire face, avec une probabilité quasi certaine de 99,5%, à une ruine économique dans un horizon d'un an. Des montants de besoin en capital élémentaire sont calculés pour chaque type de risque avant d'être agrégés au niveau de la compagnie, bénéficiant ainsi de la diversification entre ces facteurs de risques à travers leurs matrices de corrélations, mais aussi entre les différents portefeuilles d'investissements. Pour évaluer ce capital, l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) préconise l'utilisation d'une formule standard basée sur une approche d'agrégation intra-modulaire (entre les facteurs de risques d'un même module) puis inter-modulaire (entre les différents modules) prenant en compte des dépendances standards prédéfinies par le régulateur. Cependant, pour mieux refléter son profil de risque, les compagnies d'assurance qui le souhaitent peuvent affiner leur calcul en développant leur propre modèle interne, sous l'approbation de l'ACPR.

Qu'il soit avec la formule standard ou un modèle interne, le capital de solvabilité requis est réglementairement évalué par entité juridique. Ainsi, la mesure de la contribution de chaque type de risque ainsi que de chaque ligne de business dans ce capital devient un enjeu majeur pour les grands groupes assureurs généralistes qui proposent une large gamme de produits à leurs assurés. En effet, l'allocation du SCR permet de quantifier d'une part le risque que supporte chaque business, mais aussi et surtout permet de mesurer la rentabilité des différentes gammes de produits et de prévoir des actions de pilotage pour améliorer leur profitabilité.

Toujours dans le cadre du pilotage du ratio de solvabilité, les compagnies d'assurance réalisent, dans le cadre du Processus Budgétaire, une projection du capital de solvabilité et ainsi du ratio de solvabilité sur un horizon de trois ans. En plus de planifier le Ratio de Solvabilité à moyen terme, cet exercice permet aussi de définir les différentes limites que l'entreprise se fixera pour piloter la solvabilité des années à venir notamment en termes de Ratio de Management ou de gap de duration.

Par ailleurs, les compagnies d'assurance françaises ont émis des contestations vis-à-vis du traitement des engagements de retraite professionnelle supplémentaire dans la réglementation Solvabilité II. Ces contestations qui concernent principalement l'horizon de projection très court d'un an alors que la duration des contrats de retraite est d'environ 15 ans ou la modélisation des provisions techniques avec un taux d'intérêt de marché au lieu d'un taux historique, rendent le calcul du capital de solvabilité de la retraite inadapté dans la réglementation Solvabilité II. C'est dans ce cadre que l'Ordonnance n° 2017-484 du 6 avril 2017, relative à la création d'organismes dédiés à l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire et à l'adaptation des régimes de retraite supplémentaire en unités de rente offre la possibilité aux entreprises de créer une nouvelle entité Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire (FRPS). Cette création a généré des impacts non négligeables dans la solvabilité des compagnies d'assurance vie et de l'allocation du capital par ligne de business, dont la compréhension est un enjeu clé pour leur pilotage.

Dans ce mémoire, nous proposerons dans un premier temps de rappeler les outils mathématiques de la mesure de risque. Nous y rappellerons les différentes mesures de risque ainsi que leurs propriétés. Aussi, nous expliquerons pourquoi la Value-at-Risk est la mesure de risque qui respecte la condition du régulateur Solvabilité II tout en conduisant au plus petit niveau de capital. Nous finirons ce premier chapitre en démontrant le rôle primordial des copules dans la modélisation de la dépendance des variables aléatoires de risques, notamment dans le cadre d'un modèle interne.

Dans un deuxième temps, nous exposerons l'apport de modèle interne pour dépasser les limites de la formule standard après avoir passé en revue le contexte, les piliers et les principes de la réglementation Solvabilité II. Nous y présenterons le modèle actif-passif chez Allianz avant de finir ce chapitre par rappeler les différentes techniques de valorisation de la distribution des fonds propres économiques.

Dans la troisième partie du mémoire, nous proposerons différentes méthodes d'allocation du capital de solvabilité par type de risque après avoir exposé les problématiques d'agrégation dans le cadre de la formule standard ou du modèle interne. Nous proposerons des interprétations graphiques pour illustrer l'agrégation ainsi que l'allocation par la méthode d'Euler dans le cadre de la formule standard. Nous comparerons enfin les différentes méthodes d'allocation proposées dans ce mémoire en nous basant sur des cas pratiques d'application de calcul de capital de solvabilité avec un modèle interne.

La quatrième partie proposera une méthode d'allocation par ligne de business basée sur la sensibilité de la Valeur Présente des Flux Futurs aux différents facteurs de risques et pour chaque produit d'un portefeuille d'actifs donné. L'allocation par ligne de business capitalisera sur l'allocation par type de risque qui a permis de déterminer la quantité de risque diversifié que supporte chaque segment. Cette allocation "*horizontale*" par segment de risque sera déclinée "*verticalement*" sur les lignes de produits qui découlent des différents portefeuilles d'actifs. Nous attribuerons ainsi une vision de consommation de risque à chaque ligne de business de l'assurance vie. Nous finirons cette partie par analyser la rentabilité en termes de revenus sur le capital requis immobilisé dit RORC (Return on Risk Capital) ou de revenus rapportée aux fonds propres dit ROE (Return on Equity) avec une application au portefeuille d'Allianz.

Dans la cinquième partie du mémoire, nous décrivons une méthodologie de projection du capital de solvabilité et du Ratio de Solvabilité en fonction de la projection du bilan et basée sur une approche Delta-Gamma. Par la suite on donnera les principales limites pertinentes en termes de pilotage du capital de solvabilité et du Ratio de Solvabilité à court et moins termes.

La dernière partie du mémoire sera consacrée aux différents impacts de la création de l'entité FRPS dans le capital de solvabilité de l'assurance vie. Nous commencerons par rappeler les différentes évolutions du marché de la retraite supplémentaire en France et en Europe. Nous y mesurerons ainsi les différentes déformations du risque capital requis ainsi que des allocations par types de risques et par lignes de business.

1 Les outils mathématiques de l'analyse du risque

« Cette partie du mémoire est inspirée de la Thèse de Pierre-Emmanuel THEROND portant sur la mesure et gestion des risques en assurance et présentée devant l'Université Claude Bernard – Lyon 1 en 2007, mais aussi du cours de Frédéric Planchet sur les copules dispensé à l'ISFA »

L'activité de l'assurance est caractérisée par la présence permanente de risques de plusieurs natures. L'assureur supporte un risque assuré moyennant une prime. Malgré l'effet de mutualisation que bénéficie l'assurance, ne demander que la prime pure reviendrait à garantir la perte de l'assureur en moyenne une année sur deux. La maîtrise de l'information du risque assuré est donc nécessaire pour compléter la prime pure d'un chargement de sécurité qui compenserait l'imperfection de la mutualisation. Dans ce cadre, les régulateurs imposent un certain nombre de règles aux assureurs dont la constitution d'un capital réglementaire de solvabilité. Ainsi, la gestion des risques occupe une place clé en assurance dans le sens où elle intègre également l'évaluation de ce capital basée sur un exercice d'agrégation des risques, nécessitant donc un choix de mesure de risque adéquate.

Dans ce premier paragraphe, nous allons résumer les outils mathématiques usuels de mesure et de comparaison des risques. On y développera ainsi les caractéristiques particulières d'une mesure de risque utilisable pour mesurer les capitaux économiques dans le cadre de la Solvabilité II, en l'occurrence la Value-at-Risk. Mais aussi on y développera les structures de dépendance à travers les copules.

1.1 Définition et propriétés d'une mesure

Nous reprenons ici la définition d'une mesure de risque telle qu'elle est formalisée dans Denuit et Charpentier (2004).

Définition 1.1. *Mesure de risque*

Introduisons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et \mathcal{I} l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur cet espace.

On appelle mesure de risque toute application $\rho : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ associant une variable aléatoire de risque $X \in \mathcal{I}$ à un réel $\rho(X) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Nous nous intéressons par la suite à une variable aléatoire de risque $X \in \mathcal{I}$, de densité f_X supposée continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

$\rho(X)$ représente un montant monétaire dont la compagnie doit disposer pour se couvrir contre le risque X . Plus le montant monétaire $\rho(X)$ est important, plus l'actif X est risqué et « critique »

Une mesure de risque permet donc d'associer un réel à un risque. La comparaison entre deux variables aléatoires étant souvent compliquée, la mesure de risque va permettre de comparer deux réels.

En particulier, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque lorsqu'ils existent. Même si un grand nombre d'applications peuvent répondre à la définition de mesure de risque (fonctionnelle réelle positive d'une variable aléatoire), il est souvent exigé d'une mesure de risque d'avoir certaines propriétés pour être « satisfaisante ».

1.1.1 Chargement de sécurité

Définition 1.2. *Chargement de sécurité*

- Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque $X \in \mathcal{I}$, on a $\rho(X) \geq E[X]$.

Cette notion est étroitement liée à celle de la tarification. Une mutualisation des risques n'est pas parfaite du fait de la volatilité résiduelle de la sinistralité. La prime pure détermine l'espérance des pertes, ce qui correspond au montant de sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur pour le risque supporté. Ne connaissant pas précisément le montant des sinistres à survenir, un assureur qui suppose une distribution des pertes symétriques et qui donne un tarif basé uniquement sur une prime pure va perdre de l'argent au moins une année sur deux environ. Cette situation peut même conduire à la faillite en l'absence de fonds propres suffisants.

Une marge de sécurité s'avère ainsi nécessaire à rajouter à l'espérance des pertes. Ceci se traduit par une prime de risque supérieure à l'exigence de la mutualisation.

Le chargement de sécurité peut être déterminé :

- **proportionnellement à la prime pure** avec un coefficient de proportionnalité reflétant l'idée que l'assureur a de la volatilité de son propre risque.

- **dépendamment de l'écart-type des pertes** ; cette approche pose problème dans le sens où elle rajouterait un chargement de sécurité aussi en cas de gain.
- **dépendamment d'un certain quantile des pertes** ; même si elle garantit une prime suffisante dans certains cas de pertes déterminées en avance, cette approche ne fournit aucune information sur ces cas de pertes techniques.

1.1.2 Mesure de risque cohérente

En pratique, on exige fréquemment qu'une mesure de risque ρ possède une partie des caractéristiques suivantes :

- **Invariance par translation** : $\rho(X + c) = \rho(X) + c ; \forall X \in \mathcal{L}, \forall c \in \mathbb{R}$
- **Sous-additive** : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) ; \forall X, Y \in \mathcal{L}$
- **Homogénéité** : $\rho(cX) \leq c\rho(X) ; \forall X \in \mathcal{L}, \forall c \in \mathbb{R}_+$
- **Monotonie** : $Pr[X < Y] = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) ; \forall X, Y \in \mathcal{L}$

Dans le cadre de l'assurance et du calcul de capital de solvabilité requis, certains de ces caractéristiques ont une interprétation :

- Invariance par translation : l'ajout d'une perte certaine à un risque augmente de la même façon la mesure de ce risque.
- Sous-additive : cette caractéristique représente le gain de diversification que deux sous-risques pris ensemble génèrent du fait de la corrélation entre eux. Ainsi le capital requis après agrégation de deux risques est inférieur à la somme des besoins en capital de chaque risque pris séparément
- Homogénéité : un changement de devise par exemple ne va pas impliquer de risque supplémentaire.
- Monotonie : un actif moins risqué va générer moins de capital de solvabilité

L'association de ces quatre axiomes se traduit par une notion de cohérence d'une mesure de risque

Définition 1.3. *Mesure de risque cohérente*

Une mesure de risque invariante par translation, sous-additive, homogène et monotone est dite cohérente.

L'utilisation d'une mesure de risque cohérente permet un cadre mathématique confortable même si elle ne traduit pas les réalités économiques et peut s'avérer inefficace dans certains cas d'études. C'est le cas notamment du critère d'homogénéité qui ne prend pas en compte correctement les effets de changement de devise qui peuvent être plus que proportionnels sur la mesure du risque.

Aussi, le critère de sous-additivité qui se traduit par la diversification ne réduit pas réellement la probabilité de ruine, même s'il permet à l'entreprise de décentraliser ses activités sans générer un capital supplémentaire.

On verra plus tard que cette notion de cohérence n'est pas toujours vérifiée par les mesures de risques les plus utilisées actuellement en finance ou en assurance. C'est notamment le cas du Value-at-Risk (VaR) qui est la mesure de risque phare dans le cadre de la Solvabilité II.

1.1.3 Mesure de risque comonotone additive

En guise de rappel, un vecteur aléatoire $(X_1; X_2) \in \mathbb{I}^2$, de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 , est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0; 1]$ telle que $(X_1; X_2)$ a la même loi que :

$$(F_1^{-1}(U); F_2^{-1}(U))$$

Définition 1.4. Mesure de risque comonotone additive

On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque ρ telle que :

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2); \text{ pour tous vecteurs comotonnes } (X_1; X_2) \in \mathbb{I}^2$$

Dans le contexte de calcul de capital de solvabilité, une mesure de risque comonotone ne génère pas de bénéfice de diversification quand elle est additive. Les deux risques ne se mutualisent donc pas. Pour une mesure utilisée pour déterminer un capital de solvabilité, cette propriété est souhaitable puisque, dès que le risque U se produit, les risques X_1 et X_2 se produisent également avec une ampleur croissante avec celle de U .

1.2 Les différentes mesures de risque

Dans ce chapitre, on présentera les mesures de risque les plus usuelles.

1.2.1 L'écart-type et la variance

Par intuition, l'écart-type et la variance sont les premières mesures de risque à avoir été utilisées et notamment dans le critère de Markowitz (moyenne-covariance) dans la théorie d'évaluation des actifs. Ces deux mesures de risques sont calculées en fonction de la volatilité du risque et plus la volatilité d'une variable aléatoire est élevée, plus son risque est fort.

Pour tout risque $X \in \mathbb{I}$, l'expression de son écart-type est donnée par :

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E[X])^2]} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}$$

D'où la variance :

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$

Dans le contexte assurantiel, l'interprétation de l'écart-type est limitée dans le sens où il est symétrique et pénalise autant les pertes que les profits. En effet, la mesure de l'écart-type ne tient pas en compte du signe des écarts à la moyenne. Sans oublier que l'écart-type n'est pas une mesure cohérente car elle ne satisfait pas les critères de monotonie et d'invariance par translation.

1.2.2 La Value-at-Risk (VaR)

A l'origine, la notion de Value-at-Risk s'est d'abord développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans les problématiques assurantielles.

La Value-at-Risk est la mesure de risque sur laquelle repose le référentiel prudentiel Solvabilité II pour l'évaluation de capital de solvabilité réglementaire.

Définition 1.5. La Value-at-Risk (VaR)

La Value-at-Risk (VaR) de niveau α associé au risque $X \in \mathcal{I}$ est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \text{Inf} \{x \mid Pr[X \leq x] \geq \alpha\}$$

On notera par $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$ où F_X^{-1} désigne la fonction quantile de la loi de X . On rappelle que, dans le cas général, la fonction quantile est la pseudo-inverse de la fonction de répartition, soit

$$F_X^{-1}(p) = \text{Inf} \{x \mid F(X) \geq p\}$$

La Value-at-Risk a l'avantage d'être simple et facile à expliquer. En effet, la $VaR(X, \alpha)$ est le montant qui permet de couvrir le montant de sinistre engendré par le risque X avec une probabilité α . La probabilité α est à déterminer en fonction du niveau de sécurité que la compagnie considère.

Le concept du VaR est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société, disposant d'un montant de « ressources » égal à (X, α) , assure un unique risque X , sa probabilité de ruine est égale à $1 - \alpha$.

La Value-at-Risk présente cependant deux principales limites : elle ne permet pas de capter le comportement de la distribution au-delà du seuil et les effets de diversification ne peuvent pas être pris en compte du fait qu'elle n'est pas une mesure sous-additive.

Ce dernier point de la Value-at-Risk peut se démontrer à l'aide d'un contre-exemple : soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres $(2 ; 1)$ et $(2 ; 2)$, alors

$$\exists \alpha \in]0; 1[, VaR(X + Y, \alpha) > VaR(X, \alpha) + VaR(Y, \alpha)$$

On rappelle qu'une variable aléatoire X de loi de Pareto $Par(\alpha ; \theta)$ a pour fonction de répartition

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\alpha \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Sa fonction quantile est donnée par :

$$F_X^{-1}(p) = \theta[(1 - p)^{-1/\alpha} - 1]$$

Le fait que la VaR n'est pas sous-additive peut poser un problème dans le cas de modèle interne car la loi de Pareto est fréquemment utilisée pour la modélisation des valeurs extrêmes.

Néanmoins, on note que la formule standard utilise des hypothèses qui sont basées sur des lois normales ou log-normales. Et dans ce cas, la VaR est sous-additive pour $\alpha = 99.5\%$, c'est-à-dire dans les queues de distribution.

Ainsi, la VaR au niveau $\alpha = 99.5\%$ est la référence en termes de calcul de capital de solvabilité.

Par ailleurs, les Value-at-Risk ont un certain nombre de « bonnes » propriétés mathématiques parmi lesquelles le fait que pour toute fonction g croissante et continue à gauche, on a :

$$VaR(g(X), \alpha) = g(VaR(X, \alpha)).$$

Ceci découle de cette propriété en prenant $g = F_1^{-1} + F_2^{-1}$ et $X = U$, que les VaR sont comonotones additives puisque pour tout $\alpha \in]0; 1[$, on a :

$$VaR((F_1^{-1} + F_2^{-1})(U), \alpha) = (F_1^{-1} + F_2^{-1})(VaR(U, \alpha))$$

1.2.3 La Tail-Value-at-Risk (TVAR)

La Tail-Value-at-Risk, notée $TVaR$, est une alternative à la Value-at-Risk qui est aussi souvent utilisée dans le cadre des modèles internes en assurance. Cependant cette mesure de risque est plus complexe à mettre en œuvre dans le sens où on doit mesurer une espérance sur les valeurs extrêmes d'une distribution que l'on n'observe pas directement la plupart du temps. En effet la $TVaR$ correspond à l'espérance conditionnelle de la variable de risque sachant que celle-ci dépasse la VaR de niveau α

Définition 1.6. La Tail-Value-at-Risk ($TVaR$)

La Tail-Value-at-Risk ($TVaR$) de niveau α associé au risque $X \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp$$

La $TVaR$ peut aussi s'exprimer en fonction de la VaR :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} E[(X - VaR(X, \alpha))^+]$$

On peut déduire de cette expression que pour tout $\alpha \in]0; 1[$, $TVaR(X, \alpha) < +\infty \Leftrightarrow E[X] < +\infty$

Par ailleurs, le deuxième terme du membre de droite représente la perte moyenne au-delà de la VaR , la $TVaR$ est donc très sensible à la forme de la queue de distribution.

La $TVaR$ est une mesure comonotone additive. Elle inclut un chargement de sécurité car pour tout

$$\alpha \geq 0; TVaR(X, \alpha) \geq TVaR(X, 0) = E[X]$$

Mais contrairement à la VaR , la $TVaR$ est une mesure sous-additive donc elle est cohérente. Cependant, ce critère est à considérer avec prudence dans la mesure où une mesure de risque peut être cohérente pour une certaine loi ou de niveau utilisé.

1.3 La Value-at-Risk comme mesure de risque pour évaluer le capital économique.

1.3.1 Pourquoi la VaR ?

Dans le cadre du choix de la mesure de risque permettant de déterminer le capital de solvabilité optimal au sens de la Solvabilité II, le régulateur pose une condition appelée « condition du régulateur ». Pour $\varepsilon \in]0; 1[$ et pour tous risques X_1 et $X_2 \in \mathcal{I}$, la mesure de risque ρ doit vérifier l'inégalité suivante :

$$E \left[(X_1 + X_2 - \rho(X_1 + X_2))^+ \right] + \rho(X_1 + X_2)\varepsilon \leq \sum_{i=1}^2 \left\{ E \left[(X_i - \rho(X_i))^+ \right] + \rho(X_i)\varepsilon \right\}$$

Dans cette inégalité, on peut interpréter ε comme étant le coût de l'immobilisation du capital économique. En effet, le second terme du premier membre de l'inégalité peut s'interpréter comme étant la rémunération à l'actionnaire qui a mobilisé le capital $\rho(X_1 + X_2)$ pour la compagnie. Trois principales propriétés découlent de cette inégalité pour $\varepsilon \in]0; 1[$:

- Pour les $TVaR_p$ telles que $p > 1 - \varepsilon$
- Pour les $VaR_{1-\varepsilon}$
- Pour toute mesure de risque sous-additive ρ telle que $\rho(X) \geq Var(X, 1 - \varepsilon)$

En conclusion : la VaR de niveau $1 - \varepsilon$ est la mesure de risque qui respecte la condition du régulateur tout en conduisant au plus petit niveau de capital.

Pour un seuil de confiance α et un horizon de gestion donné, la VaR correspond au montant de perte probable du portefeuille liée à des variations défavorables. Elle vérifie l'égalité :

$$Pr[\text{perte} > VaR] = 1 - \alpha$$

La spécification de l'horizon de calcul et du seuil de confiance est primordiale pour l'utilisation de la VaR .

1.3.1 Les différentes approches de la Value-at-Risk

En pratique, on peut appréhender le calcul de la VaR de trois manières différentes :

- **La VaR analytique** basée sur le passé et qui repose sur trois hypothèses de simplification : l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille, la normalité des facteurs de risques et la relation de linéarité entre les facteurs de risques et la valeur du portefeuille. Identifier les facteurs de risques et mesurer les corrélations entre eux sont les principales difficultés de cette approche.
- **La VaR historique** qui, à la différence de la VaR analytique, n'impose pas d'hypothèses sur la loi des facteurs de risques, même s'il est nécessaire d'avoir un modèle sous-jacent pour les estimer. La VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risques. Cette approche est très utilisée dans la pratique car son concept est simple, elle est facile à implémenter. Néanmoins, la difficulté repose sur le besoin d'un grand nombre d'observations pour estimer un quantile, condition assez rare à réaliser en pratique assurantielle.

- **La VaR Monte-Carlo** consiste à valoriser le portefeuille en appliquant ces facteurs simulés. Il suffit alors de calculer le quantile correspondant tout comme pour la méthode de la VaR historique. La principale différence avec la VaR historique repose sur le fait que cette dernière utilise les facteurs passés, alors que la VaR Monte-Carlo utilise les facteurs simulés qui nécessite beaucoup plus de temps de calcul et d'effort de modélisation.

1.3.2 Les limites de la Value-at-Risk en Assurance

L'adaptation de la VaR à l'assurance pose certaines difficultés. En effet, les contrats d'assurance peuvent inclure des options (rachats, arbitrages ou versements) qui font beaucoup fluctuer la variable sur laquelle la VaR est indexée, c'est-à-dire les encours. Sans oublier les durées de vie des contrats d'assurance et principalement en vie qui sont beaucoup plus longues que celles des contrats bancaires classiques, ce qui amène à reconsidérer la question de l'horizon de calcul de la VaR.

En effet, un portefeuille bancaire possède une valeur de marché facile à calculer. En revanche, même si la valeur de l'actif d'un produit d'assurance est simple à calculer, la valeur du passif elle est plus complexe à appréhender car il n'existe pas de marché où cette valeur est échangée. La principale difficulté réside ainsi sur la modélisation du passif à cause des options cachées qu'il engendre.

1.4 Les copules comme outil de modélisation de la dépendance

De nombreuses situations pratiques et en l'occurrence l'agrégation des risques dans le cadre du calcul du capital économique nécessitent de prendre en compte la dépendance stochastique entre variables aléatoires de risque. Pour ce faire, il est nécessaire d'identifier la densité jointe de ces variables aléatoires pour ainsi capter leur structure de dépendance. Néanmoins, cette fonction de répartition n'est pas facile à appréhender. Les copules présentent de nombreux avantages pour modéliser de tels phénomènes.

Il est important de rappeler que la dépendance et la corrélation sont des notions différentes. En effet, deux variables aléatoire X et Y sont indépendantes signifie que X et Y sont non corrélées mais la réciproque est fautive sauf dans le cas où X et Y sont gaussiennes car la dépendance devient alors entièrement caractérisée par le coefficient de corrélation.

Le contre-exemple le plus intuitif est le cas où $X \sim N(0,1)$ et $Y = X^2$ alors $cov(X, Y) = E(X^3) = 0$.

1.4.1 Rappels et notations

Soit une variable aléatoire de risque $X \in \mathcal{I}$, sa fonction de répartition F est définie par

$$F(x) = P(X < x).$$

F est continue à droite et possède des limites à gauche. On définit en conséquence l'inverse généralisée de F par

$$F^{-1}(y) = \inf \{x / F(x) \geq y\}.$$

La variable $U = F(X)$ est distribuée selon une loi uniforme sur $[0,1]$, puisque

$$P(U \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = u$$

1.4.2 Définition des copules

Définition 1.7. Copule

Une copule de dimension n est une fonction C définie sur $[0,1]^n$ et à valeurs dans $[0,1]$ qui possèdent les propriétés suivantes :

- $C_n(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$ **(1)**
- $\sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 (-1)^{k_1 + \dots + k_n} C(u_1^{k_1}, \dots, u_n^{k_n}) \geq 0$; $u_i \in [0,1]$ **(2)**

On en déduit que C est une fonction de répartition d'un vecteur dont les composantes sont uniformes. En effet, la condition (2) exprime le fait que

$$P(u_1^1 \leq X_1 \leq u_1^2, \dots, u_n^1 \leq X_n \leq u_n^2) \geq 0 \text{ et en considérant que}$$

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(X_1 \leq u_1, \dots, X_n \leq u_n)$$

De plus, si on considère les distributions réelles univariées F_1, \dots, F_n , alors

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

devient alors la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire dont les lois marginales sont les lois F_1, \dots, F_n . En effet, pour toute variable aléatoire X de fonction de répartition F , $U = F(X)$ est une loi uniforme sur $[0,1]$.

Les copules apparaissent ainsi comme un outil naturel pour construire des distributions multivariées.

De plus, lorsque les distributions marginales sont suffisamment régulières on a le théorème de représentation suivant qui permet une écriture plus aisée et interprétable de la notion de copule :

Théorème 1.1. Sklar

Si F est une distribution de dimension n dont les lois marginales F_1, \dots, F_n , sont continues, alors il existe une copule unique telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Cette copule unique exprime toute la structure de dépendance. Dans ce cas, on pourra alors parler de la copule associée au vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . La copule d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est alors la fonction de répartition du vecteur aléatoire $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.

L'intérêt majeur de la copule est de pouvoir simuler une variable aléatoire multivariée à partir de ses lois marginales et de sa copule unique. Il suffit ainsi de générer un échantillon (U_1, \dots, U_n) à partir de la copule et de construire l'échantillon voulu grâce à la relation :

$$(X_1, \dots, X_n) = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n))$$

Cependant, notons qu'il est toujours possible de définir une copule, même lorsque les marginales ne respectent pas la condition de continuité, cependant elle n'est plus unique et perd alors tout l'intérêt d'être associé au vecteur aléatoire.

En effet, on peut toujours poser :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Avec les inverses généralisés des marginales :

$$F_j^{-1}(u) = \mathbf{inf} \{t / F_j(t) \geq u\}$$

En pratique, le théorème de Sklar est très utile pour les applications à l'assurance. L'étude de l'agrégation des risques peut se décomposer ainsi en une première étape d'analyse des risques individuellement et en une seconde qui consiste à analyser la structure de dépendance entre les variables aléatoires de ces mêmes risques.

A présent, on va introduire les notions de borne de Fréchet, de monotonie et l'inégalité de Tchen qui jouent un rôle important dans l'analyse de copules.

Définition 1.8. Bornes de Fréchet – comonotonie - anticomonotonie

On pose par définition : $C^-(u_1, \dots, u_n) = \max(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0)$ et

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$$

On a pour toute copule C et tout u dans $[0,1]^n$:

$$C^-(u) \leq C(u) \leq C^+(u)$$

- La borne supérieure est atteinte avec le vecteur (U, \dots, U) où la variable aléatoire U suit une loi uniforme sur $[0,1]$. On en déduit que $C^+(\cdot)$ Est bien une copule. Ce résultat reste vrai à une transformation strictement croissante des composantes près ; on parle alors de variables **comonotoniques**.
- En dimension 2, la borne inférieure est atteinte avec le couple de variables aléatoires $(U, 1 - U)$; on parle alors de variable **anti-comonotoniques**
- En dimension supérieure à 2, la fonction $C^-(\cdot)$ N'est pas une copule.

Remarquons aussi que si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire et h_1, \dots, h_n sont des fonctions strictement croissantes, alors $h(X) = (h_1(X_1), \dots, h_n(X_n))$ a la même copule que X .

Définition 1.9. Inégalité de Tchen

Soit un vecteur (X, Y) et sa structure de dépendance C ; ϕ une fonction super modulaire de $R^2 \rightarrow R$; (X^-, Y^-) (resp. (X^+, Y^+)) la version anticomonotone (resp. comonotone) du couple de variables aléatoires (X, Y) , alors on a :

$$E(\phi(X^-, Y^-)) \leq E(\phi(X, Y)) \leq E(\phi(X^+, Y^+))$$

Cette inégalité est une conséquence directe de l'existence des bornes de Fréchet :

$$C^-(u, v) = \mathbf{max}(u + v - 1, 0) \leq C(u) \leq C^+(u) = \mathbf{min}(u, v)$$

Elle est très utile en assurance et en réassurance. Elle permet de déterminer les bornes tarifaires dans le cadre d'un traité *stop loss* par exemple. Mais elle joue aussi un rôle important en modélisation de rente viagère sur plusieurs têtes dans le sens où elle est parfois utilisée pour calculer la surmortalité observée de la seconde tête au décès de la première. En effet, elle permet d'observer une surmortalité de l'ordre de 5 ans à la suite du décès de la première tête.

Ainsi, pour définir la structure de dépendance des risques du portefeuille considéré, il devient alors nécessaire de trouver une copule adaptée. Nous présentons les copules elliptiques et archimédiennes les plus fréquemment utilisées dans les manuels.

1.4.3 Copules elliptiques

Considérons $M_p(\mathcal{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p^2

Définition 1.10. Copules elliptiques

On appelle loi elliptique continue de paramètre de position $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{R}^n$ et de matrice symétrique définie positive $\Sigma \in M_p(\mathcal{R})$ si sa densité f peut s'écrire pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$:

$$f(x) = (\det \Sigma)^{\frac{-1}{2}} g((x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)')$$

avec $(x - \mu)'$ désignant la transposée de $(x - \mu)$ et g une fonction à valeurs positives vérifiant :

$$\int_{\mathcal{R}^n} g(xx') dx = 1$$

On appelle, $\zeta(\mu, \Sigma, g)$ la famille elliptique associée au paramètre de position μ , à la matrice symétrique définie positive Σ et à la fonction g à valeurs positives. Cette appellation vient du fait que les courbes de niveaux de la densité sont en général des ellipses.

- Si $\Sigma = kI_p$ avec $k > 0$ et I_p est la matrice identité, la loi est dite sphérique.
- Si des lois elliptiques sont associées à la même fonction g , alors elles font partie de la même famille elliptique.
- La matrice Σ est la matrice de corrélation entre les risques considérés

Une copule est dite elliptique si elle est la copule d'une loi elliptique. La copule gaussienne et la copule de Student sont les deux copules elliptiques les plus fréquentes.

➤ **La copule gaussienne** de dimension p est définie, pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in [0; 1]^p$

$$C(u_1, \dots, u_p) = \Phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_p))$$

La fonction de distribution ϕ^{-1} est la fonction inverse de la distribution normale centrée réduite univariée. En utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et en décrivant la

formule définissant la copule gaussienne, on peut déduire aisément la copule gaussienne de dimension p par :

$$C(u_1, \dots, u_p) = \frac{1}{\det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta(\Sigma^{-1} - I_p)\beta'\right)$$

Avec I_p , la matrice unité de $M_p(\mathcal{R})$ et $\beta = (\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_p))$.

La copule gaussienne est peu adaptée aux valeurs extrêmes dans le sens où elle ne présente pas de dépendance de queue. Cependant, son importance réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multivariée. En effet, la modélisation d'une structure de dépendance d'un échantillon par une copule gaussienne est cohérente avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation linéaire.

➤ **La copule de Student** de dimension p est définie, pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in [0; 1]^p$ par :

$$C(u_1, \dots, u_p) = \frac{f_{l,\Sigma}(t_l^{-1}(u_1), \dots, t_l^{-1}(u_p))}{\prod_{i=1}^p f_l(t_l^{-1}(u_i))}$$

Dans cette formule, t_l^{-1} est la fonction inverse de la distribution normale centrée réduite univariée à l degrés de liberté, $f_{l,\Sigma}$ et f_l sont respectivement les densités de probabilité et univariée de la loi de Student centrée réduite et Σ sa matrice de corrélation.

La copule de Student est la copule sous-jacente à une distribution multivariée de Student. Elle est construite de la même manière que la copule gaussienne mais à partir de la distribution de Student centrée réduite. Cependant et contrairement à la copule gaussienne, elle capte les dépendances extrêmes positives comme négatives à travers son degré de liberté.

Les copules elliptiques ne sont pas très bien adaptées en assurance car elles s'appliquent à des distributions symétriques.

1.4.4 Copules archimédiennes

Introduites par GENEST et MACKAY en 1986, les copules archimédiennes résident d'une transformation des marginales rendant les composantes indépendantes. En notant par ϕ , le générateur, la transformation associée est notée par $\omega(u) = \exp(-\phi(u))$. Ainsi :

$$\omega(C(u_1, \dots, u_n)) = \prod_{i=1}^n \omega(u_i)$$

Définition .1.11. Copules archimédiennes

Par définition, une copule archimédienne de générateur ϕ est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)) \text{ si } \sum_{i=1}^n \phi(u_i) \leq \phi(0)$$

Et $C(u_1, \dots, u_n) = 0$ sinon.

Avec un générateur qui doit vérifier la condition d'être de classe C^2 , c'est-à-dire que $\phi(1) = 0$, $\phi'(u) \leq 0$ et $\phi''(u) > 0$.

Par ailleurs, elle peut être définie à travers un conditionnement par une variable aléatoire positive Y dite de structure vérifiant 3 points :

- La transformé de Laplace de Y est $\psi = \phi^{-1}$
- Les variables aléatoires Z_i sont indépendantes conditionnellement à Y
- $P(Z_i \leq z | Y) = \omega(F_{Z_i}(z))^Y$

Alors la copule du vecteur (Z_1, \dots, Z_n) est $C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))$. On retrouve ainsi la situation d'indépendance via le conditionnement.

Cette génération de copule présente un double intérêt. En effet, elle permet de générer une grande variété de familles de copules sous des formes analytiques closes. Les copules archimédiennes sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Copule	Générateur
<i>Indépendance</i>	$-\ln(u)$
<i>Clayton</i>	$u^{-\theta} - 1, \theta \geq 0$
<i>Franck</i>	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \theta \neq 0$
<i>Gumbel</i>	$-(\ln(u))^\theta, \theta \geq 1$

Table 1.1 : Exemples de copules archimédiennes

On rappelle que le paramètre θ mesure le degré de dépendance entre les risques. Plus il est élevé plus la dépendance est forte et une valeur positive de θ indique une dépendance positive.

- La copule de Gumbel traite uniquement les dépendances positives. Elle est particulièrement adaptée à l'assurance pour étudier les structures de dépendances entre risques. En effet, la copule de Gumbel est très efficace pour représenter des risques dont la structure de dépendance est plus accentuée sur la queue supérieure.
- La copule de Franck permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives mais ne traite pas de dépendance de queue.
- A l'instar de la copule de Gumbel, la copule de Clayton ne permet de modéliser que les dépendances positives. Contrairement à la copule de Gumbel, elle détermine la structure de dépendance sur les événements de faible intensité.

Les copules archimédiennes ont donc le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques, où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure sont différents.

L'une des applications directes des copules en assurance réside dans le cadre de l'agrégation des risques lorsque la mesure de risque choisie est la VaR . En effet :

$$VaR(X_i, \alpha) = F_{X_i}^{-1}(\alpha).$$

Dans le cas de deux risques et en se basant sur la définition d'une copule, on peut écrire :

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_{x_1+x_2 \leq x} dC\left(\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)\right).$$

On peut ainsi voir que la VaR de la somme dépend des distributions marginales et de la copule.

Une fois que les dépendances sont établies, les coefficients de corrélations permettent de les mesurer. C'est l'objet de la partie suivante.

1.4.5 Mesure de la dépendance

Plusieurs mesures de la dépendance entre variables aléatoires existent en statistique. Malgré qu'il soit une mesure imparfaite de la dépendance, le coefficient de corrélation de Pearson reste de plus loin la plus connue. Pour deux variables aléatoires de risque X et $Y \in \mathcal{I}$:

➤ **Le coefficient de corrélation de Pearson** est défini par :

$$r(X, Z) = \left(\frac{\text{cov}(X, Z)}{\sqrt{V(X)V(Z)}} \right)$$

Ce coefficient semble très peu satisfaisant pour la mesure de dépendance car, en plus de la composante copule, des marginales sont toujours présentes dans son expression.

Sachant que $(X, Z) = 1 \Leftrightarrow Z = aX + b$, le coefficient de corrélation de Pearson n'intègre que la composante linéaire de la dépendance, ce qui l'empêche d'être une vraie mesure de dépendance.

En plus, en utilisant l'inégalité de Tchen, on peut déduire que :

$$\left(\frac{\text{cov}(F_X^{-1}(U), F_Z^{-1}(1-U))}{\sqrt{V(X)V(Z)}} \right) \leq r(X, Y) \leq \left(\frac{\text{cov}(F_X^{-1}(U), F_Z^{-1}(U))}{\sqrt{V(X)V(Z)}} \right)$$

Ce qui veut dire que toutes les valeurs comprises entre -1 et +1 ne sont pas atteignables si l'on fixe les marginales.

Pour pallier les grands défauts du coefficient de Pearson, d'autres mesures ont été proposées pour des corrélations non affines de variables aléatoires.

➤ **Le rho de Spearman** est défini comme étant le coefficient de corrélation de Pearson évalué non pas sur les variables en elles-mêmes, mais sur leurs rangs respectifs. Il élimine ainsi par construction l'effet de dépendance aux lois marginales. C'est une mesure de concordance.

Si le couple de variables aléatoires (X, Z) de fonctions de répartition marginales continues F_X et F_Z et si le couple (X^\perp, Z^\perp) indépendant de (X, Z) et possède les mêmes marginales, le Rho de Spearman ρ est donné par :

$$\rho(X, Z) = 3[P((X - X^\perp)(Z - Z^\perp) > 0) P((X - X^\perp)(Z - Z^\perp) < 0)]$$

On établit ci-dessous la relation entre les Rho de Spearman et le coefficient de corrélation de Pearson :

$$\rho(X, Z) = r(F_X(X), F_Z(Z))$$

- **Le Tau de Kendall** est indépendant des marginales. Il représente la différence entre la probabilité de concordance des rangs et la probabilité de discordance des rangs et est donné par l'expression suivante :

$$\tau(X, Z) = [P((X - X^\perp)(Z - Z^\perp) > 0) - P((X - X^\perp)(Z - Z^\perp) < 0)]$$

Si $F_{X,Z}$ est la fonction de répartition jointe de (X, Z) , le Tau de Kendall peut s'écrire de la façon suivante :

$$\tau(X, Z) = E(F_X(X), F_Z(Z)) - 1 = 4E(F_{X,Z}(X, Z) - 1)$$

Et si on considère la fonction $sign(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 sinon, un estimateur du Tau de Kendall est donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} sign\left\{\left((x_j - x_i)(z_j - z_i)\right)\right\}$$

Si on se restreint aux copules archimédiennes, on peut vérifier facilement que le Tau de Kendall s'écrit à l'aide du générateur de la copule par la formule suivante :

$$\tau = 1 + 4 \times \int_0^1 \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} du$$

Explicitement, $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ dans le cas de la copule de Gumbel et $\tau = 1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$ pour la copule de Franck.

On note que le Tau de Kendall prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$, contrairement au coefficient de corrélation de Pearson.

On rappelle que comme dans le cas du coefficient de corrélation linéaire, la nullité des trois mesures $r(X, Z)$, $\rho(X, Z)$ ou $\tau(X, Z)$ n'implique pas que les variables aléatoires X et Z soient indépendantes. En effet, les coefficients sont nuls pour une distribution construite avec la copule cubique et des marginales symétriques et pourtant les variables ne sont pas indépendantes par construction.

1.5 Conclusion

L'objet de ce premier chapitre était de présenter en quelques pages les outils mathématiques utilisés dans le domaine de l'assurance pour mesurer et comparer des risques. Nous avons ainsi souligné le fait que la méthodologie ou l'approche généralement retenue en termes d'évaluation ou de calcul dépend de la nature spécifique des risques concernés. Ainsi, nous avons pu démontrer que la VaR au niveau $\alpha = 99.5\%$ est la mesure référence en termes de calcul de capital de solvabilité dans le sens où elle est sous-additive dans les queues de distribution. A travers le théorème de Sklar, nous avons pu voir que la théorie des copules présente un grand intérêt dans l'agrégation des risques et particulièrement quand la mesure choisie est la VaR car elle montre que la VaR de la somme de variables aléatoires de risque dépend des distributions marginales de chacun de ces risques et de sa copule unique. Ces notions mathématiques sont essentielles pour mieux appréhender la notion de SCR sur toutes ses formes et notamment dans le chapitre qui suit, où nous allons voir l'apport d'un modèle interne pour dépasser les limites de la formule standard.

2 L'apport d'un modèle interne pour dépasser les limites de la formule standard, en particulier en matière de modélisation actifs passifs

Dans ce chapitre, on commencera par introduire le contexte réglementaire de la Solvabilité II dans lequel ce mémoire s'inscrit. Puis, on développera le cadre du modèle interne mis en place par Allianz pour mieux appréhender son risque et répondre ainsi aux exigences réglementaires en passant par un descriptif du modèle actif passif. On finira cette partie en explicitant les différentes techniques d'évaluation du capital économique.

2.1 La réglementation Solvabilité II

2.1.1 Contexte et enjeux de Solvabilité II

Dans la suite de Solvabilité I, l'introduction de la directive Solvabilité II au 1^{er} Janvier 2016 a pour but de moderniser les règles de solvabilité applicables aux compagnies d'assurance afin de les inciter à améliorer leur gestion des risques et ainsi de mieux renforcer la protection des assurés, mais aussi d'assurer une réglementation harmonisée au sein de l'Union Européenne.

En effet, Solvabilité I prévoyait une marge de solvabilité déterminée proportionnellement des primes collectées et/ou les sinistres payés ou à provisionner. La réglementation Solvabilité II passe à des directives plus élaborées intégrant différents modules de risque tels que risque de marché, risque de crédit, risque de souscription vie et non vie ou risque opérationnel, et s'appuie désormais sur des valorisations d'actif et de passif aux valeurs de marché dites « juste valeur » au sens comptable IFRS. Ces directives obligent donc les assureurs à des règles comptables et de gestion prudentielle spécifiques et réglementées, afin d'être en capacité d'honorer leurs engagements.

Rappelons que l'activité d'une compagnie d'assurance basée sur un ***cycle inversé*** est assez singulière dans le sens où l'assureur collecte ses primes, les investit dans les marchés financiers sous forme d'actifs parfois durant plusieurs années en attendant le paiement d'un éventuel sinistre, contrairement à une activité classique où le bien ou service est livré avant ou au moment de son paiement. L'assureur fixe ainsi donc son prix de vente en se basant uniquement sur une estimation de son coût de revient dont il ignore réellement le montant et la date d'acquiescement. Dans le cadre des contrats courts (en moyenne 1 an de durée) comme l'assurance automobile ou habitation, l'assureur peut réévaluer son prix a fortiori au cas par cas et limite ainsi son risque. Pour les contrats plus longs comme c'est le cas en général en assurance vie avec une durée en moyenne de 10 ans, la durée avant le paiement des sinistres probables devient longue, ce qui amplifie le risque de solvabilité de l'assureur.

A l'instar de son homologue bancaire « Bâle II », Solvabilité II s'articule autour de trois piliers : une exigence quantitative du risque, une exigence qualitative du risque et une exigence de communication transparente des risques.

2.1.2 Une réglementation sous trois piliers

Initiée par la Commission Européenne sous les recommandations de l'EIOP (European Insurance and Occupational Pensions Authority), le régime prudentiel Solvabilité II est construit autour de trois piliers réglementaires comme résumés dans la figure 1 ci-après :

➤ Pilier 1 : exigences quantitatives

Le pilier 1 détermine les exigences quantitatives à respecter, notamment le calcul d'un capital réglementaire qui reflète le profil de risque économique de l'assureur. Le pilier 1 harmonise la méthode d'évaluation des provisions techniques et les exigences de capital à savoir :

- **Le Minimum Capital Requirement (MCR)** qui correspond au montant de Capital Minimum Requis en dessous duquel l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACPR) intervient pour rétablir la santé financière de l'assureur. Le MCR est le dernier niveau avant l'état de ruine, il est déterminé à partir du *SCR*.

- **Solvency Capital Requirement (SCR)** qui représente le montant de Capital de Solvabilité Requis pour absorber des chocs importants : il correspond au niveau de fonds propres permettant de limiter le risque de ruine à horizon un an à un niveau très faible de 0.5%.

Ces montants de capital sont modélisés soit par une formule standard, un modèle interne développé par chaque compagnie et validée par l'ACPR ou un modèle mixte appelé aussi modèle interne partiel.

➤ **Pilier 2 : exigences qualitatives**

Le pilier 2 exige la mise en place de dispositifs qualitatifs de gouvernance des risques. Il assure une gestion des risques saine et prudente de la compagnie à travers la mise en place d'un dispositif interne de maîtrise des risques exposés tout en assurant le suivi de l'état de solvabilité. Le pilier 2 impose ainsi une mise en place de fonctions clés tels que l'actuariat, l'audit interne ou la conformité et la gestion des risques, en plaçant cette dernière au cœur des décisions managériales. Mais aussi une surveillance de la qualité de données utilisées et la mise en place du dispositif interne de maîtrise des risques ORSA (Own Risk and Solvency Assessment).

➤ **Pilier 3 : Exigence de communication financière**

Le Pilier 3 fixe la discipline de marché en promouvant la transparence des informations financières, à des fins de communication interne, externe et de contrôle.

Solvabilité II		
Pilier I Exigences quantitatives	Pilier II Exigences qualitatives	Pilier III communication transparente
Evaluation des provisions techniques	Mise en place de système de gouvernance des risques	Discipline et communication du marché
Détermination des besoins de capital: MCR et SCR	Identification et gestion des Risques : ORSA	Rapports prudentiels
Modalités de calcul: formule standard ou modèle interne	Contrôle interne	Modalités de calcul: formule standard ou modèle interne

Figure 2.1 : Les trois piliers de Solvabilité II

2.1.3 Un bilan en valeur économique

Du fait de l'inversion du cycle de production et des spécificités des risques supportés, le bilan d'une entreprise d'assurance présente des différences fortes par rapport à une entreprise traditionnelle. La réglementation solvabilité impose aux assureurs d'établir leur bilan en valeur économique dont une figure simplifiée est représentée sur la figure ci-dessous :

ACTIF	PASSIF
Actifs en valeur de marché	Net Asset Value NAV (EoAL)
	Risk Margin RM
	Best Estimated of Liabilities BEL

Figure 2.2 : Représentation simplifiée de bilan Solvabilité II

L'actif est principalement représenté par les placements financiers. En effet, l'assureur place les primes qu'il reçoit en instruments financiers, dans l'attente du paiement des sinistres et de rémunérer ainsi les passifs. Notons que les assureurs sont parmi les plus gros investisseurs dans les marchés, selon l'ACPR, on comptait au total 2 493 milliards d'euros d'encours actifs en 2018 en France. Contrairement à Solvabilité I, l'actif, composé de portefeuille d'actifs financiers, est évalué en valeur de marché, i.e. sa valeur à la date d'évaluation et plus à sa valeur d'acquisition.

Au passif, les Provisions Techniques (*PT*) qui sont définies comme étant le montant intégral des engagements de l'assureur sont les plus représentées. Elles représentent la somme d'une estimation en vision *BEL* (*Best Estimated Liabilities*) des engagements de l'assureur complétée d'une marge pour risque ou *RM* (*Risk Margin*). Les fonds propres économiques ou fonds propres Solvabilité II appelés *NAV* (*Net Asset Value*) sont ce qui reste de l'actif après que les provisions techniques sont couvertes. On parle aussi d'Excédent de l'Actif sur le Passif ou *Excess of Assets over Liabilities* (*EoAL*).

$$PT = BEL + RM$$

- **Le Best Estimated Liabilities ou BEL** est la meilleure estimation des obligations futures de l'assureur. Il correspond à la valeur actuelle nette des cash-flows probables futurs du passif (primes, prestations, frais ...) des contrats en stock à la date de calcul sous la probabilité risque neutre.

$$BEL = \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t \geq 1} \delta_t \cdot P_t | \mathcal{F}_t \right]$$

Avec :

- Q la probabilité risque neutre, i.e. que les instruments financiers se comportent comme des actifs sans risque et leurs prix actualisés sont des martingales impliquant qu'en moyenne, les processus de prix évoluent au taux sans risque.
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$; r_s est le taux sans risque facteur d'actualisation des flux entre à la date t
- \mathcal{F}_0 est la filtration caractérisant l'information financière du marché disponible à la date $t = 0$
- P_t est le cash-flow du passif à la date t et est \mathcal{F}_t – mesurable. Aucun nouveau contrat n'est

souscrit.

D'une manière simple, le cash-flow en date t est donné par : $P_t = Primes_t - Sinistres_t - Frais_t$

- **Le Risk Margin ou RM** représente le coût d'immobilisation du capital nécessaire pour couvrir les risques assurantiels. C'est la marge pour risque par rapport à l'incertitude des provisions Best Estimate. Sa formule est donnée par :

$$RM = CoC \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_t)^t}$$

Où :

- r_t représente le taux zéro-coupon
 - $CoC = 6\%$ est le coût du capital. Sa valeur est définie par la réglementation.
 - SCR_t représente le capital de solvabilité requis pour les risques actuariels à la date t
- **La Net Asset Value ou la NAV** : constituée par les fonds propres disponibles, la NAV représente l'espérance des marges futures R_t sous la probabilité risque neutre. Elle est représentée par la différence entre la valeur de marché des actifs et les provisions techniques quand elles sont déterminées.

$$NAV_t = Actifs_{en\ valeur\ de\ marché} - PT_t$$

Sinon, la NAV est l'actualisation des résultats R_t (gain ou pertes) d'assurance espérés durant la projection.

$$NAV = \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=1}^T \delta_t \cdot R_t | \mathcal{F}_0 \right]$$

R_t peut être décomposé en une somme de :

- **résultat technique** = solde de souscription – commissions – frais généraux
- et
- **résultat financier** = produits des placements nets des frais de placements – la participation aux bénéfices versée aux assurés

Comme nous l'avons déjà souligné dans le pilier 1 de la réglementation Solvabilité II, les fonds propres doivent respecter des critères bien définis tels que nous allons le voir dans la partie suivante.

2.1.4 Un capital économique sous contraintes

La réglementation Solvabilité II impose aux institutions assurantielles de disposer d'une marge suffisante de fonds propres pour se couvrir d'éventuels chocs provoqués par des événements de fluctuations importantes imprévues dans les marchés financiers. Cette marge doit lui permettre de se couvrir d'une ruine économique à l'horizon d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. En d'autres termes, la compagnie d'assurance doit détenir un niveau de fonds propres économiques suffisamment supérieur au MCR. Ce niveau de fonds propres correspond au SCR. Détenir un SCR réglementaire signifie que l'actif couvre le passif et la NAV est suffisamment positive pour éviter une ruine.

Cependant, même si la compagnie n'atteint pas ce niveau de *SCR*, elle ne doit en aucun cas détenir un capital économique inférieur au Minimum Capital Requirement *MCR*, faute de quoi son agrément pourrait lui être retiré pour une raison de non-solvabilité.

Rappelons comme nous l'avons vu à la partie 1.3 que la mesure de risque retenue par la réglementation Solvabilité II est la $VaR_{99,5\%}$, ce qui se traduit mathématiquement si on considère FP_1 le montant de fonds propres dans un an par :

$$P[FP_1 \geq 0] \geq 99.5\%$$

De plus, si on considère :

- FP_0 le montant de fonds propres économiques à $t=0$,
- $Z(0,1)$ le facteur d'actualisation des cash-flows entre la date $t = 0$ et $t = 1$ représentant le prix d'un zéro-coupon de maturité 1 en $t = 0$,
- $q_{0.5\%}$ le quantile à 0.5% de la distribution des fonds propres à un an

Alors, le capital économique K à l'horizon un an se déduit par :

$$K = FP_0 - Z(0,1) \cdot q_{0.5\%} \cdot FP_1$$

La détermination du quantile à 0.5% et par conséquent du *SCR* nécessite de connaître la distribution des fonds propres à l'horizon un an. Ceci constitue un exercice difficile à modéliser compte tenu des options que dispose généralement un contrat d'assurance comme le rachat partiel ou global en assurance vie. Aussi, le fait que le phénomène de rachat peut être corrélé avec les taux d'intérêt bas à l'actif, cette dépendance entre l'actif et le passif peut rendre la tâche encore plus compliquée.

La directive Solvabilité II préconise l'utilisation d'une formule standard pour déterminer le *SCR*, mais donne aussi l'opportunité de mieux spécifier son risque à travers un modèle interne total ou partiel. Cependant l'assureur a l'obligation de comparer le résultat du modèle interne avec celui de la formule standard. Dans la partie suivante, on va explorer la formule standard et le modèle interne.

2.2 Un modèle interne pour mieux appréhender le risque

Sous Solvabilité II, deux choix de méthodologies sont disponibles pour l'assureur dans le cadre de l'évaluation du *SCR* : la formule standard, définie par la directive ou un modèle interne validé par l'autorité de contrôle Prudentiel ACPR.

2.2.1 La formule standard et ses limites

Définie par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority), la formule standard est basée sur un paramétrage des chocs avec des données moyennes des organismes d'assurances d'Europe. Le calcul du capital économique basé sur la formule standard consiste à évaluer le bilan central, puis de réévaluer ce même bilan après application d'un choc instantané pour chaque risque.

$$K_i = FP^{central} - FP_i^{choc}$$

- K_i le capital associé au risque élémentaire i
- $FP^{central}$ les fonds propres du bilan économique à $t = 0$

- FP^{choc} les fonds propres obtenus après application de choc instantané correspondant au quantile à 0.5% de la distribution du risque élémentaire i

On trouvera ci-dessous une schématisation du choc :

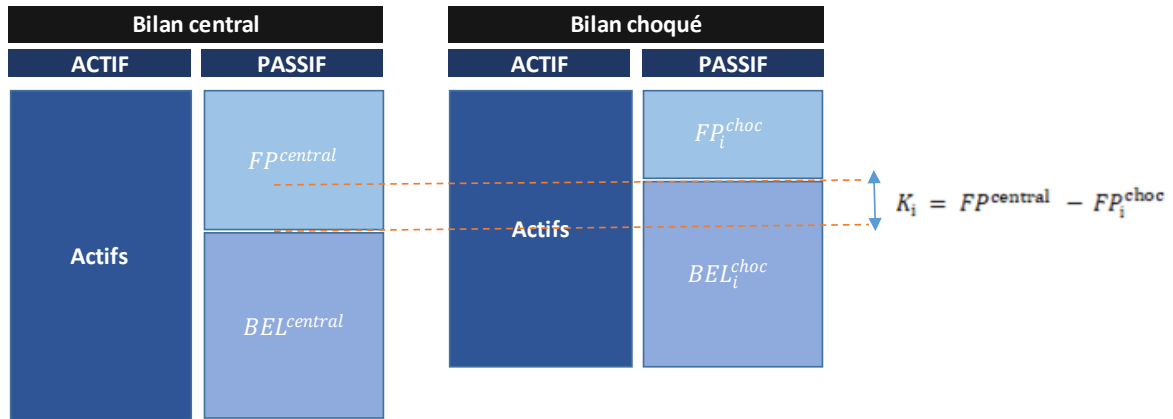


Figure 2.3 : Bilan choqué en formule standard

Les risques sont organisés en modules regroupant chacun plusieurs risques élémentaires i . Basée sur une approche « Bottom-up », le capital de chaque risque élémentaire K_i est évalué, puis agrégé à l'aide des matrices de corrélations définies par la formule au sein de chaque module de risques p (on parle d'agrégation intra-modulaire), et enfin entre chaque module de risque (agrégation inter-modulaire). Ci-dessous la cartographie des risques dans le cadre de la formule standard :

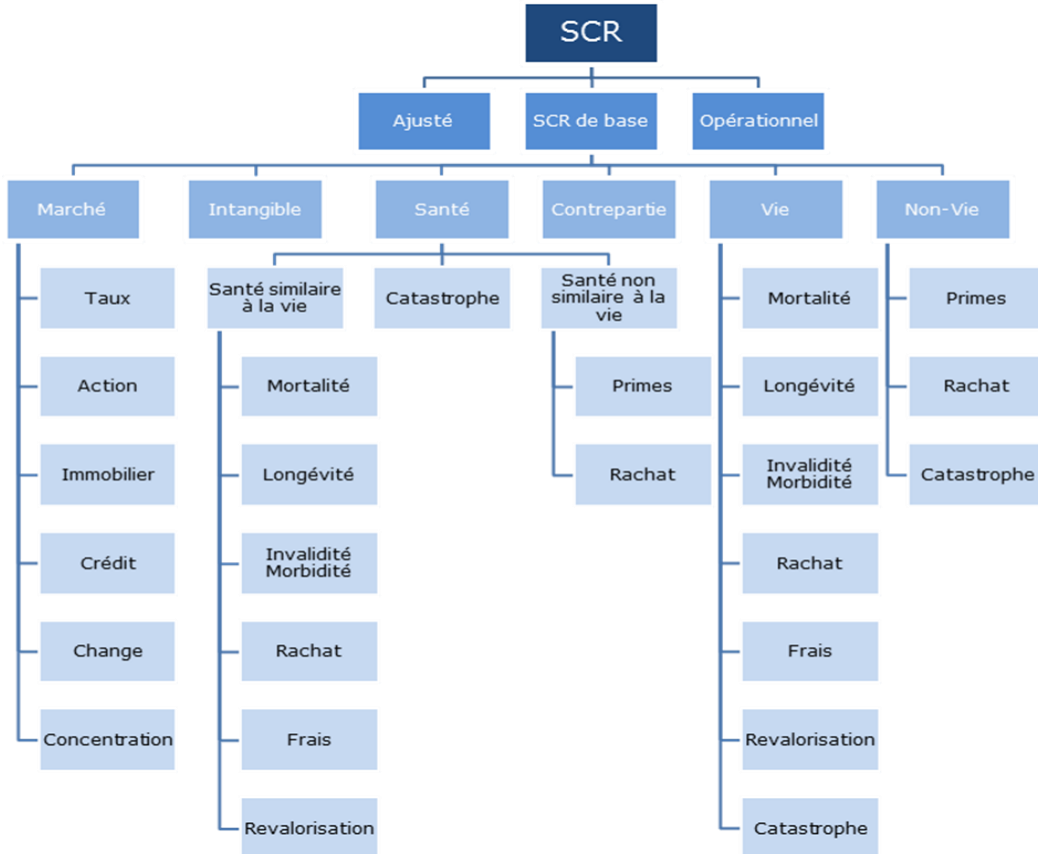


Figure 2.4 : Matrice des risques de la formule standard de Solvabilité II

- La formule de **l'agrégation intra-modulaire** est donnée par :

$$SCR_p = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_p^2} \rho_{i,j}^{R_p} \cdot K_i K_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^{R_p}$ le coefficient de corrélation entre les risques i et j du module p
- R_p l'ensemble de tous les risques du module p

- La formule de **l'agrégation inter-modulaire** est donnée par :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in P^2} \rho_{i,j}^P \cdot SCR_i SCR_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^M$ le coefficient de corrélation entre les modules i et j du module
- P l'ensemble de tous les modules, $dim(P) = 6$

le SCR final est obtenu après intégration du risque opérationnel et la prise en compte des ajustements d'impôts différés.

$$SCR = BSCR + SCR_{\text{opérationnel}} + Adj$$

On développera plus en détails l'agrégation et l'allocation des risques dans le chapitre 3 du mémoire.

La formule standard est simple d'implémentation et d'utilisation. Cependant, sa limite majeure réside sur le fait qu'elle a été développée pour être appliquée à toutes les entreprises d'assurance de l'Union européenne qui disposent de politiques d'investissement différents. La cartographie des risques de la formule n'est donc pas adaptée à toutes les compagnies. Aussi, elle surestime le capital de solvabilité dans le sens où elle utilise des coefficients de diversification pas très optimistes et sans distinction entre la nature des branches. De plus, à cause de l'équivalence des chocs entre les risques utilisés, l'estimation du quantile à 99.5% est une pure approximation.

Ainsi le recours à un modèle interne s'impose comme une alternative quasi incontournable pour un assureur généraliste ayant fait le souhait de s'y investir. Allianz développe son propre modèle interne partiel qui sera présenté par la suite. Cependant, l'utilisation d'un modèle interne est très règlementée par le régulateur. L'approbation de ce dernier est nécessaire avant l'utilisation d'un modèle interne.

2.2.2 Le modèle interne

Refléter son propre risque et prendre en considération son exposition spécifique sont deux points primordiaux dans le processus de calcul de capital de solvabilité. L'utilisation d'un modèle interne permet de modéliser le SCR en se basant sur une cartographie des risques plus réelle et donc plus proche de la réalité de son propre portefeuille d'assurance. Chez Allianz, le modèle interne est développé avec la structure des risques telle qu'indiquée sur la figure 6 ci-dessous. Même si cette cartographie est structurée sur 6 modules de risques, on peut remarquer à vue d'œil des différences majeures avec celle de la formule standard. Par exemple, le risque de Crédit est modélisé en dehors

du module marché et le module santé disparaît du modèle interne d'Allianz. Les risques actions sont pris en compte avec une distinction actions cotées et actions non-cotées.

Il est primordial de noter que la réglementation ne permet aucune opportunité d'arbitrage entre les deux méthodologies. Une compagnie qui fait le choix développer un modèle interne ne pourra pas revenir en formule standard.

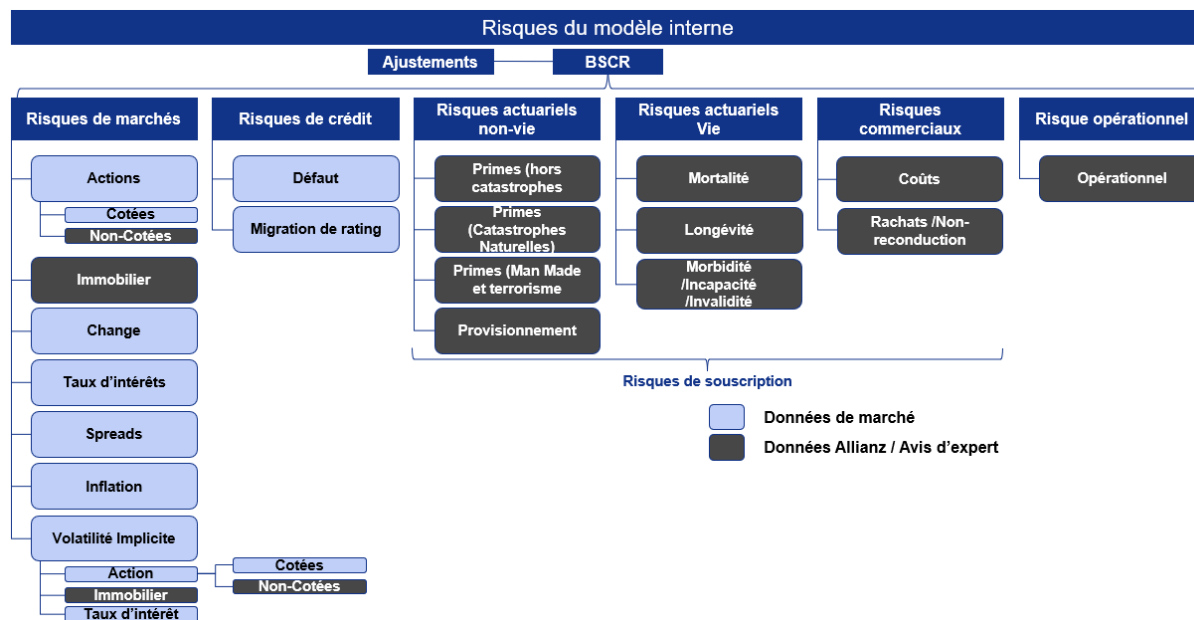


Figure 2.5 : Cartographie des risques modèle interne Allianz

On distingue 6 modules de risques, distribués chacun sur plusieurs risques élémentaires :

- Le risque de marché qui est principalement lié à une perte potentielle de valeur du portefeuille d'actions, d'obligations ou d'immobiliers sur un horizon donné, engendrée par un environnement financier défavorable. L'actif des risques de marché est modélisé par la loi Log-Normale à l'exception de celui du risque Inflation qui est modélisé avec une Loi-Normale, alors que le passif est modélisé avec les portefeuilles répliquants. Nous développons cette méthode plus-bas dans ce chapitre.
- Le risque de crédit qui est défini comme le risque de pertes imprévisibles sur la valeur de marché d'un portefeuille ou de créances (opérations de réassurance par exemple) en raison d'une baisse de qualité du crédit ou complètement du défaut des contreparties en raison de la non-exécution des transactions. L'actif de ce risque est modélisé par une loi empirique et son passif par des coefficients d'absorption.

Ces deux premiers modules de risque sont principalement calculés avec des paramètres de corrélation et de volatilité estimés avec des données de marché tandis que les catégories de risques suivants utilisent totalement des données internes ou des avis d'experts.

- les risques actuariels non-vie, qui couvrent, net de réassurance et sur un horizon d'un an, le risque de sous-provisionnement lié à la sous-estimation des sinistres survenus et le risque de sous-tarifification lié à la sous-estimation de la sinistralité à survenir. Les risques non-vie de prime non-catastrophe et de provisionnement suivent la distribution d'une matrice de flux, alors que les primes catastrophiques sont des pertes extrêmes, estimées au travers de scénarios. Ils sont estimés par des lois empiriques.

- les risques actuariels vie qui composent les risques liés à la mortalité, la longévité, l'incapacité et l'invalidité. Ils engendrent aussi les risques d'incertitudes sur le comportement des assurés comme les taux de rachat, choix d'arbitrage ou de versements. Les distributions des risques longévité, morbidité et mortalité se font respectivement par une Loi-Log-Normale-Inverse, Loi-Normale et Loi-Log-Normale et sont calibrées par des chocs. Les risques catastrophes sont modélisés par une Loi-Empirique.
- les risques commerciaux, qui engendrent les risques de coût d'acquisition des nouveaux contrats ou de gestion du stock plus élevés que prévus et les risques de rachats et de non-renouvellement des contrats. Les risques de frais suivent une Loi-Normale alors que ceux de rachat et de rachat massif suivent respectivement une Loi-Log-Normale-Inverse et Loi-Empirique.
- le risque opérationnel, lié à des événements ayant un impact sur les dommages aux biens des entreprises tels que panne IT, inondation des locaux ou fraude interne ou externe. Le risque opérationnel suit une Loi-Empirique.

Nous nous focaliserons dans ce mémoire aux problématiques de risques liés à l'assurance vie. A présent, nous allons détailler la méthodologie de calcul dans le modèle interne d'Allianz.

2.2.3 Méthodologie de calcul dans le modèle interne

L'un des principaux objectifs du modèle interne est de déterminer une distribution empirique des pertes de fonds propres économiques $(\Delta FP_k)_{k=1,\dots,P}$, écart de la variation des valeurs de marché de l'actif et du *Best Estimate of Liabilities* pour chaque distribution k . Le modèle interne d'Allianz estime cette distribution à l'aide de $P = 50\,000$ simulations élémentaires et puis en considérant conjointement les pertes associées à chacun des risques modélisés pour prendre en compte les effets croisés ou l'agrégation.

$$\Delta FP_k = \Delta Actif_k - \Delta BEL_k; k = 1, \dots, P$$

Où ;
$$\Delta FP_k = (Actif_k - Actif_{BE}) - (BEL_k - BEL_{BE}); k = 1, \dots, P$$

Puis, en ordonnant les pertes, le SCR se déduit en prenant le quantile à 0.5% de la distribution qui correspond à la 250^{ème} (0.5%*50 000) pire perte obtenue avec une approche *Value-at-Risk*.

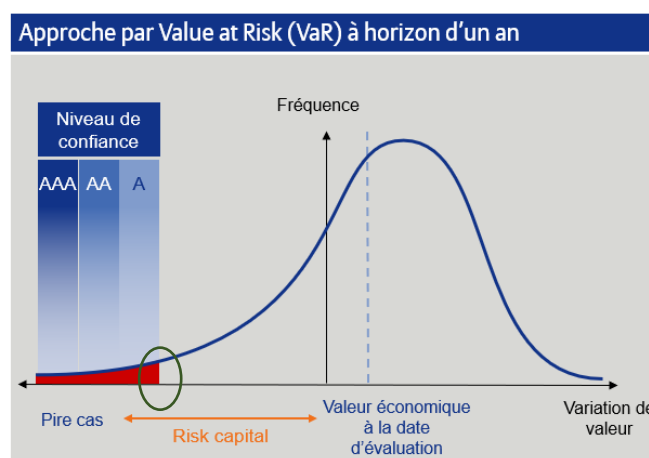


Figure 2.6 : Distribution empirique des fonds propres économiques

Pour apporter plus de précisions au calcul de son SCR, Allianz utilise la Value-at-Risk Harrel-Davis qui attribue un poids plus élevé aux scénarios autour du quantile. En termes d'erreur statistique, cet estimateur est plus robuste que la Value-at-Risk pour les quantiles extrêmes du fait qu'il utilise une bande plate de scénarios autour du quantile 0.5% au lieu de ne considérer que celui-ci.

Considérant un niveau de quantile α et P scénarios, puis en posant :

$$p_1 = (P + 1) \cdot \alpha \quad \text{et} \quad p_2 = (P + 1) \cdot (1 - \alpha)$$

Et en notant la fonction de répartition bêta incomplète :

$$I_{p_1, p_2}(x) = \int_0^x t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} dt$$

Alors, la Value-at-Risk Harrel Davis à un niveau de quantile α et pour P est donnée par :

$$VaR_{\alpha}^{HD} = \sum_{k=1}^P w_k^{(P, \alpha)} \Delta FP_k$$

Où :

$$w_k^{(P, \alpha)} = I_{p_1, p_2}\left(\frac{k}{P}\right) - I_{p_1, p_2}\left(\frac{k-1}{P}\right)$$

Et le capital économique se déduit par :

$$SCR = VaR_{0.5\%}^{HD}$$

Les poids Harell-Davis pour $P = 50\,000$ scénarios et un seuil $\alpha = 0.5\%$ sont illustrés sur la figure ci-après : les scénarios 200 à 300 (i.e. -50 et +50 autour du scénario de la VaR) sont attribués à un poids important.

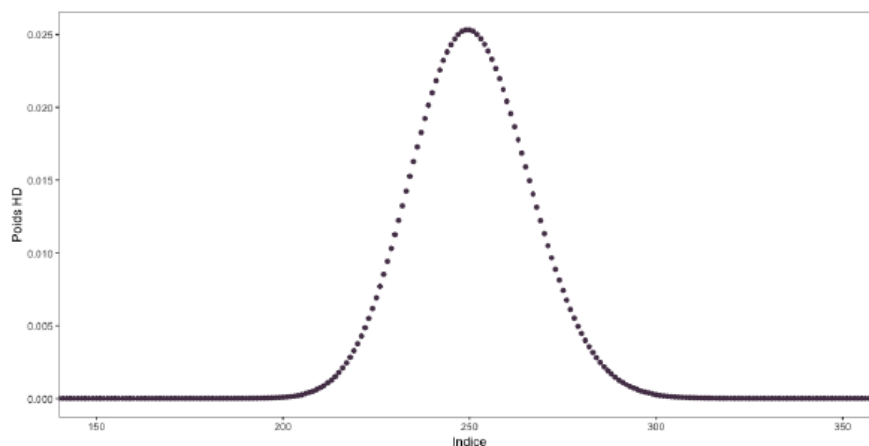


Figure 2.7 : Poids Harrell-Davis $P=50\,000$ scénarios

Le calcul du capital économique se déroule en trois étapes décrites brièvement ci-dessous :

- Modélisation des distributions marginales : risque standalone

Les facteurs de risques sont indexés sur des indices de marché différents, ce qui se traduit par une possibilité de modéliser différentes distributions telles la loi normale ou log-normale. Cependant, il est primordial d'utiliser la plus représentative distribution pour chaque facteur de risque. Allianz utilise les données historiques de marché ou des avis experts pour déterminer les risques standalones.

➤ **Prise en compte des effets croisés**

Cette étape intègre la prise en compte des structures de dépendance entre les risques pris individuellement dans la première étape. En effet, plusieurs facteurs de risques peuvent intervenir simultanément. Quand il existe une structure de dépendance, leurs interactions sont mesurées et intégrées par leurs corrélations. A titre d'exemple, si le risque longévité augmente, les prestations sont payées plus longtemps, générant ainsi plus de flux et donc plus de frais de gestion. Le risque de longévité est donc positivement corrélé avec le risque de coût. Cette étape réduit le besoin en capital des risques longévité et coût pris simultanément.

➤ **Agrégation des risques**

La dernière étape est l'agrégation des risques à travers la distribution conjointe des variations de NAV par portefeuille et puis par entité juridique. La valeur du SCR se déduit en prenant le quantile à 99,5 % de 50 000 scénarios primaires de la VaR Harrell-Davis.

Le modèle interne intègre un modèle actif passif qui permet de répliquer le passif dans les marchés financiers. Le chapitre suivant présente le modèle d'Allianz *ALIM Asset and Liabilities Interaction Management* qui permet de modéliser les interactions entre l'actif et le passif du bilan.

2.3 Le modèle actif - passif

Comme son nom l'indique, le modèle Allianz *ALIM Asset and Liabilities Interaction Management* permet de modéliser les interactions entre l'actif et le passif dans le temps. *ALIM* projette les cash-flows selon différents scénarios déterministes et stochastiques et simule ainsi l'évolution du bilan économique d'Allianz. D'une manière générale, *ALIM* intègre les hypothèses commerciales, les engagements contractuels lors des souscriptions des contrats d'assurance, le comportement dynamique des assurés et la stratégie financière de l'entreprise et en déduit des variations de , puis un *SCR*.

2.3.1 Présentation de l'architecture du modèle ALIM

Comme représenté ci-après, le modèle Actif-passif *ALIM* comporte principalement quatre modules, correspondant aux différents inputs nécessaires pour calculer la valeur économique des engagements.

- **Scénario** : ce module détermine différents scénarios de marché basés par exemple sur le rendement des actions ou la maturité et le prix des obligations. Il définit les trajectoires économiques à la date d'évaluation pour valoriser l'actif d'une part et projeter les cash-flows du passif.
- **Actif** : le module Actif comporte les cash flows des placements financiers. Les investissements financiers sont détaillés par type d'investissement (par exemple obligations / obligations d'état, etc...) et par type d'actif (appelé aussi fonds ou cantons) qui est soit un regroupement de produits de mêmes caractéristiques, soit un seul produit cantonné. Le module Actif valorise les flux de l'actif en valeur de marché comme préconisé par la réglementation pour en déduire

un résultat financier du bilan économique Solvabilité II, mais aussi pour le bilan comptable IFRS. On rappelle que le rôle de l'actif est de répliquer le mieux possible le passif.

- **Passif** : le module Passif considère en entrée la projection des flux déterministes agrégés des contrats d'assurance en les combinant avec les conditions particulières de souscription telles que le taux de participation aux bénéfices ou le taux de chargement par exemple. Un scénario « central » basé sur une seule trajectoire est calculé avec les informations du marché actuel. Ensuite, le modèle va déformer les flux de passif en fonction de l'environnement économique en prenant en compte les rachats dynamiques et les liens entre produits (arbitrages et transferts de rentes).
- **Management Action** : ce dernier module en charge de modéliser les interactions actif-passif, impacte principalement les actifs du bilan. Il gère la stratégie d'investissement définissant l'allocation cible des actifs ainsi que la politique de participation aux bénéfices des fonds euro.

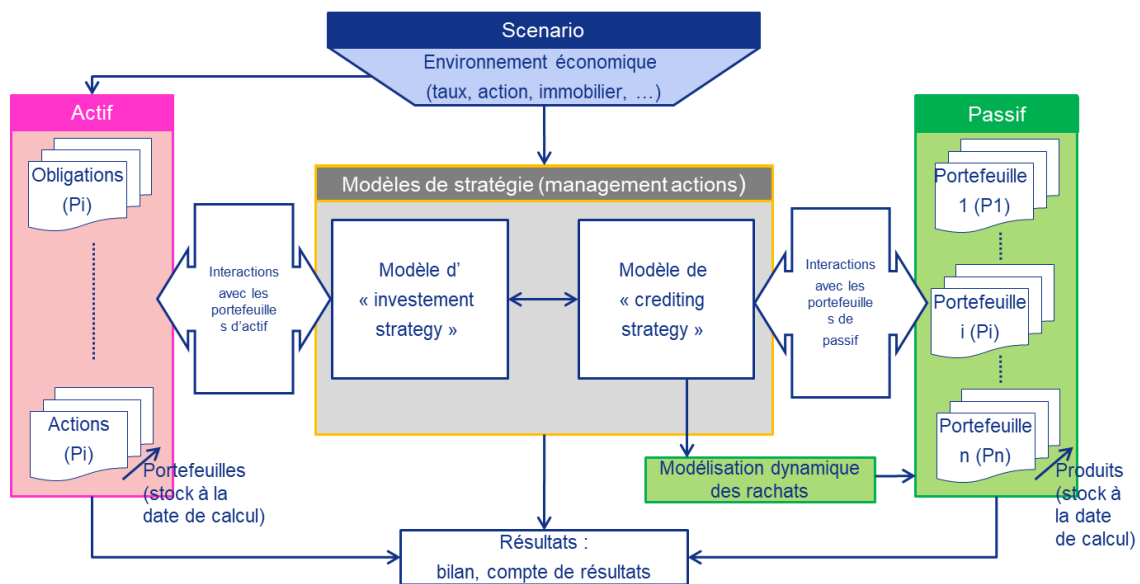


Figure 2.8 : Schématisation du modèle ALIM

2.3.2 Le modèle ALIM en pratique : *Crediting Strategy & Investment Strategy*

En pratique, le modèle Actif-Passif *ALIM* combine l'*Investment Strategy IS* et le *Crediting Strategy CS* :

- **L'Investment Strategy (IS)** ou stratégie d'investissement est la politique d'investissement à moyen terme mise en place par Allianz pour répliquer le passif dans le marché des placements financiers. En pratique et avec une marge de tolérance, l'Investment Strategy détermine les pourcentages d'allocation par classe d'actifs en fonction de l'environnement économique. Des achats et des ventes d'actifs sont alors réalisés pour atteindre l'allocation cible. L'IS impacte donc le taux de rendement des actifs et ainsi donc le taux de participation au bénéfice. Cette stratégie agit sur la partie Actif du bilan.

En effet, l'assureur doit redistribuer aux assurés 85% des produits financiers réalisés avec la réplication du passif sous forme d'une *Provision de Participation aux Excédent PPE* dans un délai de 8 ans avec la possibilité de dotation ou de reprise selon le rendement réaliser chaque année à l'actif.

- A l'actif, si nous notons r le taux de rendement financier, l'assureur doit redistribuer un taux de Participation au bénéfice $85\% \cdot r$
- Au passif, les assurés ont déjà reçu une valorisation à la hauteur d'un Taux Minimum Garantie t_{mg}
 - Si $t_{mg} > 85\%r$, l'assureur va reprendre de la PPE en le diminuant d'un montant de $t_{mg} - 85\%r$
 - Si $t_{mg} < 85\%r$, l'assureur va doter son stock de PPE de l'excédent $t_{mg} - 85\%r$

Le respect de la redistribution de la Participation est géré par le *Crediting Strategy*.

- La **Crediting Strategy (CS)** correspond donc à la politique de participation aux bénéfices mise en place par Allianz France pour ses contrats en euros. Le *Crediting Strategy* tient compte des rendements à l'actif et la mise en règle par rapport à la réglementation contractuelle de minimum de Participation aux Bénéfices à redistribuer aux assurés. Pour proposer un contrat d'assurance vie attractif, le *Crediting Strategy* peut choisir de redistribuer plus que le minimum légal. Cette stratégie interagit donc avec le passif du bilan.

A présent, nous allons introduire les différentes techniques d'évaluation de la distribution de fonds propres et notamment la méthode des portefeuilles répliquants qui est celle utilisée par Allianz.

2.4 Techniques de valorisation de la distribution des fonds propres économiques

Dans le cadre de garantie de sa solvabilité, plusieurs méthodes de simulation sont disponibles pour déterminer le *BEL* et le quantile à 0.5% de la distribution des pertes de fonds propres à horizon un an. Nous en présenterons certaines dans ce chapitre avec des graphiques (source Archives-ouvertes HAL).

2.4.1 La méthode des Simulations dans les Simulations

La méthode des « Simulations dans les Simulations » notée « SdS », basée sur des simulations de Monte-Carlo, est l'approche la plus précise pour le calcul du capital économique et donc plus conforme à la réglementation Solvabilité II. Comme représentée sur la figure ci-dessous, la méthode « SdS » se déroule en deux étapes cumulant des estimations en univers monde-réel et de risque-neutre :

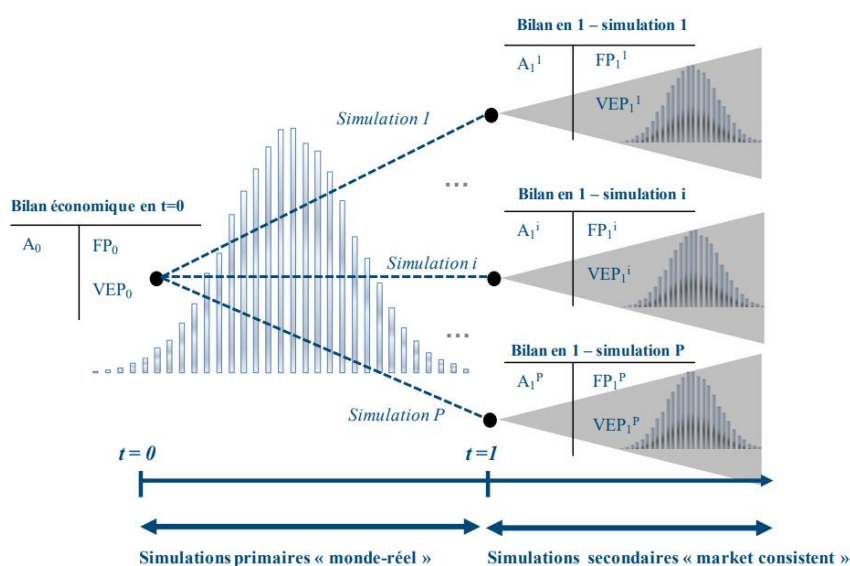


Figure 2.9 : Illustration de la méthode des Simulations dans la simulation

- P simulations primaires réalisées en univers monde-réel pour la première année, ce qui permet de calculer le quantile à 0.5% de la distribution des fonds propres économiques de fin de première année.
- S simulations secondaires en univers risque neutre sur les 59 années suivantes, simulées conditionnellement aux P réalisations primaires, ce qui permet de déduire le SCR .

Ces deux niveaux de simulations cumulés se traduisent par P simulations primaires de distribution des fonds propres correspondant chacune à la moyenne de ses S simulations secondaires successives.

On peut donc écrire, pour chaque $k = 1, \dots, P$:

$$FP_k = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S FP_k^s$$

Dans la pratique et selon la taille des compagnies d'assurance, cette méthode peut coûter beaucoup de temps de calcul : chez Allianz, on estimerait la durée de ce calcul à 2 ans (*50 000 simulations primaires X au moins 1 000 simulations secondaires*) du fait de la multiplicité des produits et des facteurs de risques. La méthode « SdS » a donc l'avantage d'être plus précise et plus conforme à la réglementation Solvabilité II. Cependant, elle présente un inconvénient majeur qui est le facteur temps de calcul. En plus, les probabilités monde-réel et risque-neutre ne sont pas équivalentes, ce qui poserait des problématiques de distribution. Par conséquent, des méthodes alternatives plus opérationnelles ont été développées pour calculer le SCR .

2.4.2 Les méthodes paramétriques : Least Square Monte-Carlo et Curve Fitting

Les méthodes paramétriques consistent à une linéarisation de la relation entre les fonds propres disponibles et un certain nombre F (avec $F < P$) de facteurs de risques de marché pertinents r_f parmi les P simulations primaires (ou un nombre Z (avec $Z < S$) de facteurs de risques de marché pertinents r_z parmi les S simulations secondaires) à travers une fonction f calibrée par la régression des Moindres carrés ordinaires. L'estimation des fonds propres est donnée par :

- Curve Fitting: $FP = f(r_1, \dots, r_f)$
- Least Square Monte-Carlo: $FP = f(r_1, \dots, r_z)$

Le but de ces méthodes est d'abord de déterminer les facteurs de risques pertinents avec un impact existant sur les fonds propres, puis de calibrer la fonction de lien f minimisant l'écart quadratique de l'estimation et enfin en déduire le SCR .

On accélère ainsi la procédure la méthode « SdS » à travers la méthode *curve fitting* en réduisant le nombre de simulations de $P \times S - F \times S$ ou de $P \times S - P \times Z$ avec la méthode *Least Square Monte-Carlo*.

Même si les méthodes paramétriques accélèrent la procédure d'évaluation du SCR , le facteur temps de calcul reste important dans le cas des grands groupes compte tenu de la multiplicité des produits et des risques auxquels ils ont à faire face. De plus, elles ne donnent pas beaucoup d'informations sur la structure du passif et l'erreur quadratique n'est pas très simple à mesurer.

Ainsi Allianz a opté pour la méthode des portefeuilles répliquants.

2.4.1 La méthode des portefeuilles répliquants

Le principe de la méthode des portefeuilles répliquants est de générer un portefeuille d'instruments financiers simples qui permet de refléter au mieux les caractéristiques des passifs et principalement ces options et garanties et selon les P scénarios primaires considérés. En effet, le passif d'une compagnie d'assurance vie peut être assimilé à une option financière garantissant un certain montant de capital et un niveau de rentabilité. Parmi les options et garanties, on peut citer :

- **le taux minimum garanti (TMG)** qui est la récompense contractuelle annuelle promise par la compagnie à l'assuré pour rendre plus attractif le contrat proposé.
- **La Participation aux Bénéfices (PB)** qui est le partage minimum règlementaire d'une part de son résultat financier et technique aux assurés des contrats en euros soumis à cette règlementation. Cette participation peut être redistribuée immédiatement aux assurés ou faire l'objet d'une Provision pour Participation aux Excédents (PPE) qui sera attribuée au plus tard dans les 8 ans à venir.
- **la garantie plancher** : cette option qui concerne les contrats en Unités de Comptes consiste à garantir un montant d'épargne minimal à l'assuré en cas de décès quelle que soit l'évolution des marchés financiers.
- **l'option de rachat** : l'assuré peut décider de racheter son contrat, et de récupérer ainsi le montant partiel ou total de son épargne.

Comme illustré ci-après, cette méthode consiste à approximer le *BEL* à l'aide de la valeur de marché d'une combinaison linéaire d'instruments financiers *RP* qui le répliquent. Ces instruments financiers utilisés se doivent d'être assez simples pour pouvoir être évalués à l'aide de formules fermées (ou de méthodes numériques peu coûteuses en temps de calcul). Ainsi, il n'est plus nécessaire de conserver les simulations secondaires pour déterminer le *SCR*.

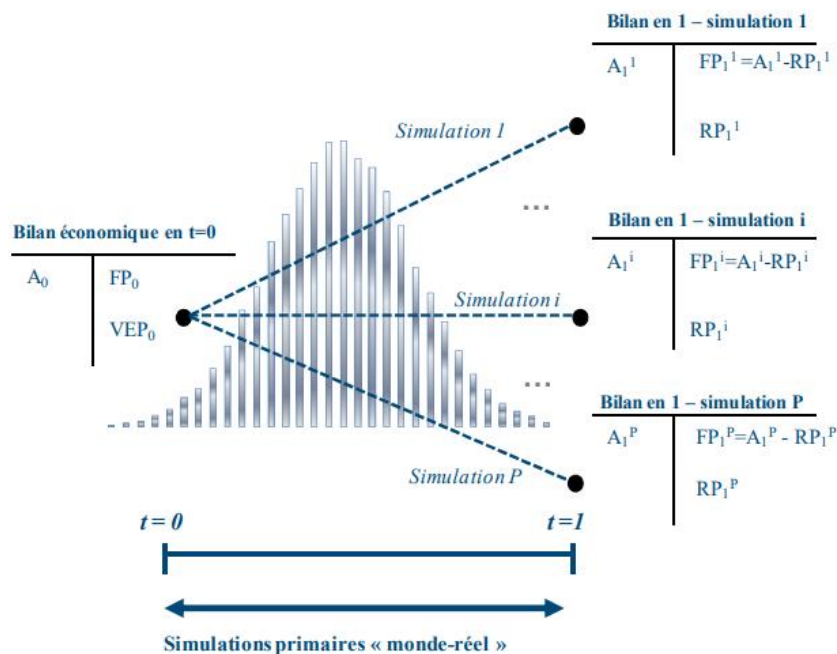


Figure 2.10 : Illustration de la méthode des portefeuilles répliquants

Cette méthode a donc le mérite non seulement de réduire davantage encore le temps de calcul, mais aussi de générer une distribution de fonds propres économiques facile et rapide. Cependant, elle est soumise à un jugement d'experts et ne s'applique qu'aux risques de marché. Actuellement, Allianz utilise la méthode des portefeuilles répliquants dans son modèle interne et à partir de la modélisation actif-passif dans ALIM.

Pour illustrer la méthode des portefeuilles répliquants, nous proposons de donner un exemple pratique d'un contrat d'épargne en euros sans option de rachat et sans chargements, de maturité $M = 5$ ans, à prime unique initiale $P = 1000$ €, avec une garantie de $TMG = 1\%$, de $PB = 85\%$. L'actif de ce contrat est alloué à 10% d'actions et 90% d'obligations zéro-coupon à un taux $r = 3\%$.

La Provision Mathématique (appelée aussi *Pay – Off* ou *PO*) de ce contrat à terme sera égale à la somme du montant certain P_1 de sa prime initiale P valorisée du TMG et de la valeur éventuelle P_2 complémentaire à condition que le $TMG < 85\% * r$, dans le cadre de la participation aux bénéficiaires. En d'autres termes, l'assuré récupérera un montant total tel que :

$$PO = P_1 + P_2$$

Ce contrat peut donc ainsi être répliqué grâce à un portefeuille d'actifs financiers composé d'obligations *Zéro – Coupon* de maturité 5 ans à un taux de 1% et des options d'achat appelés *call* de maturité 5 ans. En effet,

- $P_1 = 1000 \times (1 + 0.01)^5 = 1000 \times \text{Zéro – Coupon} (1\%, 5 \text{ ans})$
- $P_2 = 0.85 \times \max \left(1000 \times \left[0.1 \times \frac{S_5}{S_0} + 0.9 \times (1 + 0.03)^5 \right] - P_1; 0 \right)$
 $= 0.85 \times \max \left(1000 \times \left[0.1 \times \frac{S_5}{S_0} + 0.9 \times (1 + 0.03)^5 \right] - 1000 \times (1 + 0.01)^5; 0 \right)$
 $= 0.85 \times 1000 \times 0.1 \times \max \left(\frac{S_5}{S_0} - \left[\frac{(1 + 0.01)^5 - 0.9 \times (1 + 0.03)^5}{0.1} \right]; 0 \right)$
 $= 85 \times \max \left(\frac{S_5}{S_0} - 0.077\%; 0 \right)$
 $= 85 \times \text{call}(7.7\%; 5)$

Avec S_0 et S_5 les valeurs respectives de l'action sous-jacent à $t = 0$ et $t = 5$.

Il s'agit alors d'un call de *Nominal 85*, de *maturité 5 ans* et de *strike 7.7%*.

Par conséquent, le *Pay-Off* est donné par :

$$PO = 1000 \times \text{Zéro – Coupon} (1\%, 5 \text{ ans}) + 85 \times \text{call}(7.7\%; 5)$$

En réalité, les contrats d'assurances vie sont un peu plus compliqués à répliquer que notre cas pratique simplifié à cause de nombreux paramètres supplémentaires à prendre en considération tels que le taux de rachat ou des chargements, une maturité plus longue, les frais, l'allocation dynamique des actifs, la diversité des produits d'un même portefeuille, etc. Cependant notre exemple pratique donne une vision compréhensible de la pratique de la méthode des portefeuilles répliquants.

A présent, nous allons illustrer dans le chapitre suivant les méthodes d'agrégation et d'allocation du *SCR* par type de risque.

2.5 Conclusion

L'objectif de cette deuxième partie était de présenter une vision complète de la réglementation sous Solvabilité II et notamment ses contraintes de *MCR* et de *SCR* pour les entités juridiques assurantielles. Nous avons vu également que le *SCR* peut-être modélisé par la formule standard ou un modèle interne total ou partiel et à travers différentes approches dont la plus répandue reste la méthode des portefeuilles répliquants. Le modèle interne d'Allianz France ainsi que son modèle Actif-Passif ont ainsi été passés en revue, exposant ainsi les interactions entre l'actif et le passif d'une entreprise d'assurance vie. Le *SCR* ainsi calculé est la base principale de travail pour l'exercice d'allocation par type de risque ainsi que par ligne de Business que nous allons aborder dans les deux chapitres suivants. A présent, nous allons proposer, dans le chapitre qui suit, différentes méthodes d'allocation du SCR par type de risque.

3 Agrégation et méthodes d'allocation par type de risque

Dans le cadre du calcul du *SCR* avec la formule standard, les risques élémentaires sont regroupés par modules de risques : intra-modulaire et inter-modulaire. Tandis que le modèle interne détermine une distribution empirique des pertes de fonds propres économiques à l'aide de plusieurs simulations (Monte-Carlo) élémentaires, puis en considérant conjointement les pertes associées à chacun des risques pour prendre en compte les effets croisés via les copules. Chez Allianz par exemple, le facteur de diversification qui mesure le rapport entre le *SCR* diversifié et la somme des risques standalones des facteurs primaires était de 49% en 2019. En d'autres termes, les corrélations entre les risques primaires et puis entre les modules de risque ont permis de baisser le *SCR* standalone de 51%. On parle de bénéfice de diversification. Le *SCR* est une vision de risque diversifié et consolidé au niveau de la compagnie. Cependant, son allocation par type de risque qui consiste en la mesure de la part que contribue chaque risque élémentaire (ou chaque module de risque) dans le *SCR* diversifié est un enjeu majeur pour les compagnies d'assurance et notamment dans le cadre du dispositif ORSA. Aussi, la maîtrise de cette allocation est capitale dans le sens où elle permet de saisir l'intensité du risque de chaque poche d'affectation du passif afin de les comparer, de déduire leur rentabilité et de piloter la politique d'investissement. Ce chapitre traite les problématiques de méthodologie d'agrégation et d'allocation par type de risque dans une vision globale de l'assurance vie avant de l'appliquer par la suite dans un cas pratique particulier de compagnie d'assurance vie.

3.1 Agrégation dans le cadre de la formule standard

La matrice des risques dans le cadre de la formule standard est disponible à la *Figure 5* du chapitre précédent. Si on reprend les notations de la partie 2.2 de ce même chapitre, on peut schématiser les étapes du calcul du BSCR et sa représentation graphique dans les parties suivantes.

3.1.1 Méthodologie d'agrégation dans le cadre de la formule standard

Dans le cadre de la formule standard, les risques sont organisés en modules regroupant chacun plusieurs risques élémentaires i . Basé sur une approche « Bottom-up », le capital de chaque risque élémentaire K_i est évalué, puis agrégé à l'aide des matrices de corrélation définies par la formule au sein de chaque module de risques p (on parle d'agrégation intra-modulaire), et enfin entre chaque module de risque (agrégation inter-modulaire). La méthodologie peut être schématisée comme ci-dessous :



Figure 3.1 : Illustration des étapes de calcul du BSCR dans le cadre de la formule standard.

- La formule de l'**agrégation intra-modulaire** est donnée par :

$$SCR_p = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_p^2} \rho_{i,j}^{RP} \cdot K_i K_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^{RP}$ le coefficient de corrélation entre les risques i et j du module p
- R_p l'ensemble de tous les risques du module p

- La formule de l'**agrégation inter-modulaire** est donnée par :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in P^2} \rho_{i,j}^P \cdot SCR_i SCR_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^M$ le coefficient de corrélation entre les modules i et j du module
- P l'ensemble de tous les modules

Dans le cas particulier où $P = 2$; on a :

$$BSCR_{I+J} = \sqrt{\rho_{I,I} \cdot SCR_I SCR_I + \rho_{J,J} \cdot SCR_J SCR_J + \rho_{I,J} \cdot SCR_I SCR_J + \rho_{J,I} \cdot SCR_J SCR_I}$$

$$BSCR_{I+J} = \sqrt{SCR_I^2 + SCR_J^2 + 2 \rho_{I,J} \cdot SCR_I SCR_J}$$

Car $\rho_{I,I} = \rho_{J,J} = 100\%$ et $\rho_{I,J} = \rho_{J,I}$

Le cas de $P = 2$ peut être représenté graphiquement en utilisant la formule d'Al-Kachi.

3.1.2 Représentation et interprétation graphique

Tout d'abord, on va rappeler le théorème d'Al-Kashi.

Théorème 3.1. Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. Si on note par a, b et c les côtés respectifs opposés aux sommets A, B et C et par α, β et γ les angles respectifs aux sommets A, B et C , on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)} \\ b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)} \end{cases}$$

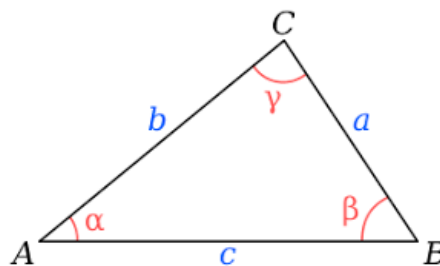


Figure 3.2 : Théorème d'AL-Kashi

Si on considère par $SCR_{I+J} = a, SCR_I = b, SCR_J = c$ et $\rho_{I,J} = -\cos(\alpha)$

L'angle α est donné par la corrélation entre les risques I et J : $\alpha = \cos^{-1}(-\rho_{I,J}) = \cos^{-1}(\rho_{I,J})$ car la fonction cosinus est paire.

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \rho_{I,J} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow$ absence totale de corrélation ; les deux risques varient de manière indépendante comme par exemple le risque de rachat et de mortalité. Dans ce cas la diversification est uniquement liée à la sous-additivité de la VaR



- Si $\alpha = 0$; $\cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \rho_{I,J} = -1 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc}$, on parle de corrélation négative parfaite. Dans ce cas le bénéfice de diversification est maximal. Ce cas de corrélation est très rare à trouver, voire même impossible.



- Si $\alpha = \pi$; $\cos(\alpha) = -1 \Rightarrow \rho_{I,J} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc}$, on parle de corrélation positive parfaite. Dans ce cas, le bénéfice de diversification est nul. Ce cas de corrélation est aussi très rare à trouver, voire même impossible.



Supposons par exemple que $c = 50$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, alors la corrélation est positive et :

$$a = \sqrt{50^2 + 50^2 + 2 \times 0.5 \times 50 \times 50} = 87$$

Or, $b + c = 100$, le bénéfice de diversification est donc de 13.

si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alors la corrélation devient négative et le bénéfice de diversification est plus important :

$$a = \sqrt{50^2 + 50^2 - 2 \times 0.5 \times 50 \times 50} = 50$$

On aperçoit alors que le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1 et plus il s'éloigne de 0, meilleure est la corrélation. Cependant, le bénéfice de diversification est plus important dans les corrélations négatives car les risques tendent à varier dans des sens opposés. Nous allons présenter l'agrégation dans le cadre de modèle interne dans la partie suivante.

3.2 Agrégation dans le cadre du modèle interne

Dans ce chapitre, nous décrivons les différentes méthodes d'agrégation des facteurs de risques au niveau entité dans le cadre de modèle interne.

3.2.1 Présentation des risques de modèle Interne

Ci-dessous, nous présentons les modules de risques de modèle interne avec leurs différentes caractéristiques :

- **Les risques de marché** peuvent être additifs ou multiplicatifs. Les distributions des facteurs de risques élémentaires sont déduites de l'historique des données marché quand ils sont cotés et par avis d'expert dans le cas contraire. Notons que le risque Spread est considéré séparément.

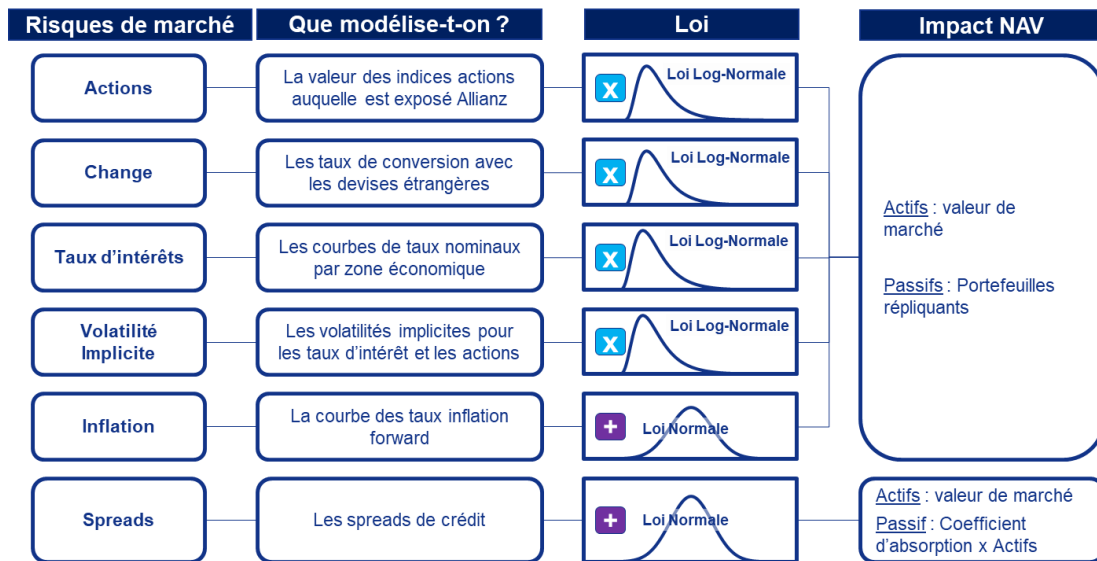


Figure 3.3 : Les risques de marché

- **Le risque de crédit** suit une distribution empirique :

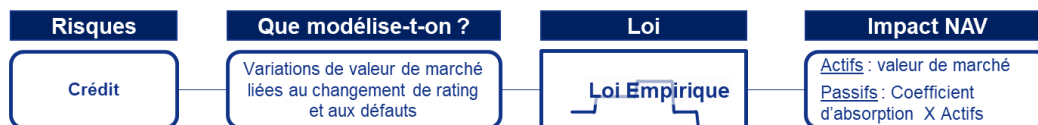


Figure 3.4 : Le risque de crédit

- **Les risques Actuariels Vie** : la calibration des distributions se fait à l'aide d'un choc, par exemple en considérant une hausse de 20% de la mortalité.

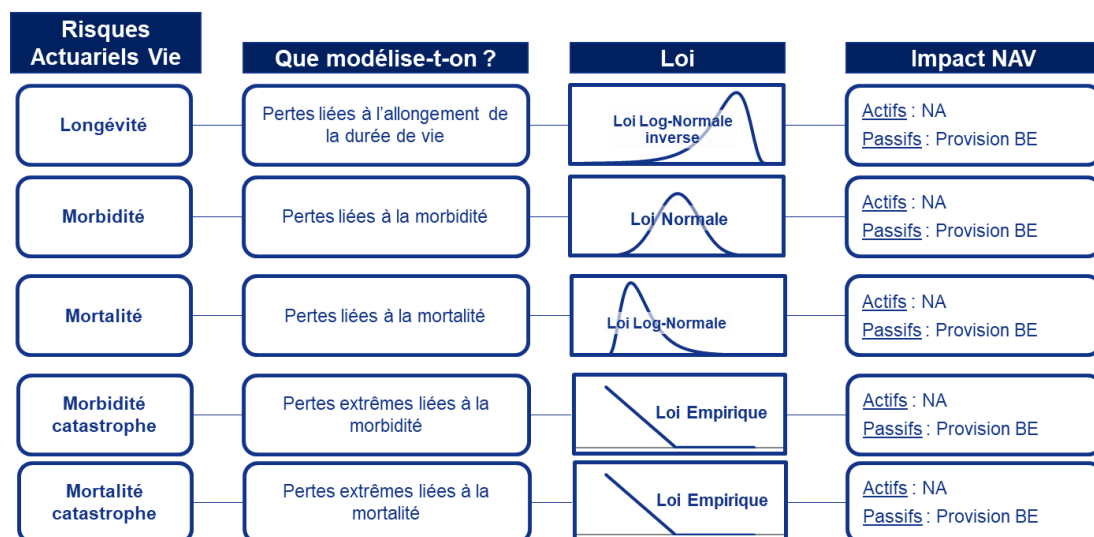


Figure 3.5 : Les risques Actuariels Vie

- **Les risques Actuariels Non-Vie** : les risques de primes catastrophe sont des pertes extrêmes estimées au travers des scénarios alors que ceux de primes non-catastrophe ou de provisions suivent la distribution d'une matrice de flux.

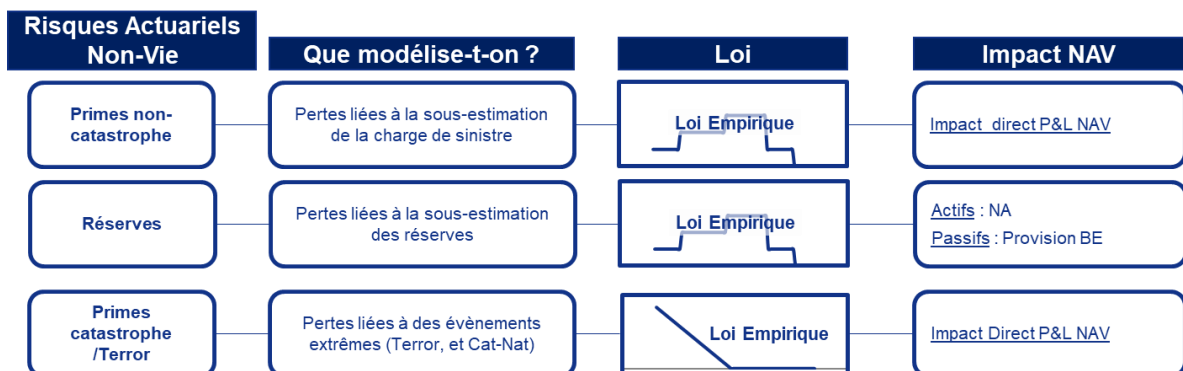


Figure 3.6 : Les risques Actuariels Non-Vie

- **Le risque de souscription**

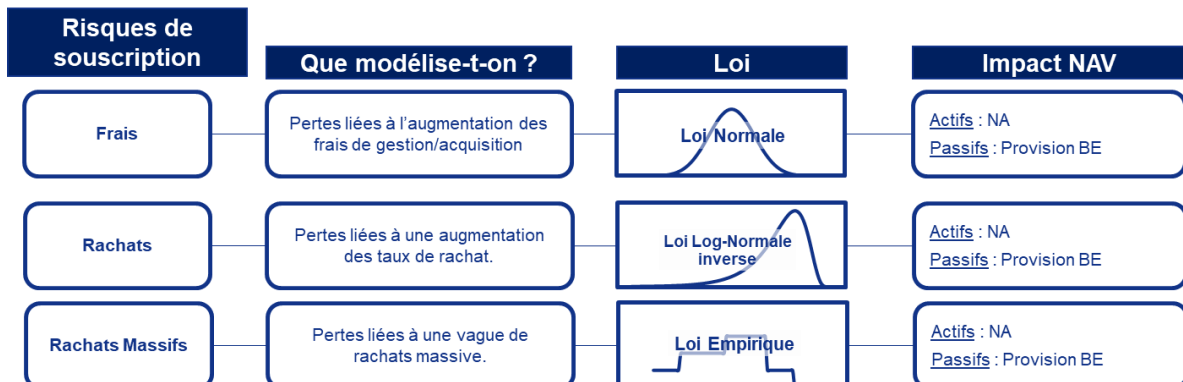


Figure 3.7 : Les risques de souscription

- **Le risque Opérationnel**



Figure 3.8 : Le risque opérationnel

3.2.2 Principe d'agrégation dans un modèle interne

L'un des principaux objectifs du modèle interne est de déterminer une distribution empirique des pertes de fonds propres économiques $(\Delta FP_k)_{k=1,\dots,P}$, écart de la variation des valeurs de marché de l'actif et du *Best Estimate of Liabilities* ou *BEL* pour chaque distribution k . Cette distribution est estimée à l'aide de P simulations élémentaires et puis en considérant conjointement les pertes associées à chacun des risques modélisés pour prendre en compte les effets croisés ou l'agrégation.

$$\Delta FP_k = \Delta Actif_k - \Delta BEL_k; k = 1, \dots, P$$

Où ;
$$\Delta FP_k = (Actif_k - Actif_{BE}) - (BEL_k - BEL_{BE}); k = 1, \dots, P$$

Puis, en ordonnant les pertes, le *SCR* se déduit en prenant le quantile à 0.5% de la distribution qui correspond à la *pème* ($0.5\% * P$) pire perte obtenue avec une approche *Value-at-Risk* ou *VaR*. Pour apporter plus de précision au calcul du *SCR*, Allianz utilise la *VaR Harrell – Davis* qui est plus robuste que la *VaR* en termes d'erreur statistique pour les quantiles extrêmes du fait qu'il utilise une bande plate de scénarios autour du quantile 0.5% au lieu de ne considérer que celui-ci. La *VaR Harrell – Davis* attribue ainsi un poids plus élevé aux scénarios autour du quantile.

Dans un modèle interne, l'étape d'agrégation peut-être réalisée suivant les deux approches suivantes :

- **Agrégation par étapes intra-modulaire et inter-modulaire** (comme dans le cadre de la formule standard) : cette approche réduit considérablement les informations de dépendance à incorporer dans l'agrégation. Bien que cela simplifie le paramétrage, les dépendances au niveau du facteur de risque sont moins granulaires. En effet, les dépendances des facteurs du module risque de marché avec les facteurs de risques Actuariels Vie ne sont incorporées qu'au global et non en détail. La diversification entre facteurs de risques est alors minimisée.
- **Agrégation en une seule étape** : dans cette approche, tous les facteurs de risques sont agrégés en une seule étape au niveau de l'entité. Combinée à l'approche d'agrégation des copules, cette approche basée sur un scénario complet donne une distribution conjointe de tous les facteurs de risques élémentaires. Ainsi, toutes les dépendances des facteurs de risques sont pleinement prises en compte lors de l'agrégation au niveau entité. Ce type d'agrégation sera considéré dans la suite. Cependant, une agrégation au niveau module de risques peut être calculée. Par exemple le *SCR* du module Risques de marché est en l'occurrence évalué en considérant les corrélations entre les risques élémentaires de ce même module.

Comme nous l'avons souligné dans le premier chapitre, un cadre commun et assez générique pour obtenir la distribution conjointe est l'utilisation des copules. En effet, celles-ci séparent les informations sur les distributions marginales de la structure de dépendance à travers le théorème de Sklar.

Pour rappel, le théorème de Sklar stipule que si F est une distribution de dimension n dont les lois marginales F_1, \dots, F_n , sont continues, alors il existe une copule unique C qui exprime toute la structure de dépendance telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Le concept de copule lui-même ne fait aucune hypothèse sur les distributions marginales et la séparation de la structure de dépendance n'introduit aucune restriction. Ainsi, la structure de dépendance et les distributions marginales peuvent être gérées indépendamment par différents composants du modèle. L'utilisation des copules nécessite à la fois le choix du type de copule et le paramétrage de la copule choisie. Allianz a opté pour des copules gaussiennes comme motivé dans la section suivante. En effet, en plus d'être facile d'implémentation, les copules gaussiennes offrent la possibilité de prendre en compte la corrélation des facteurs de risques à l'aide d'une matrice de corrélation.

3.2.3 Quels sont les avantages à considérer une copule Gaussienne dans le modèle interne ?

L'utilisation des copules non paramétriques nécessiterait une quantité élevée de jointures historiques des réalisations de tous les facteurs de risques qui ne sont manifestement pas disponibles.

L'utilisation d'une T-Copulas qui est une extension de copule gaussienne mais avec une queue de dépendance paramétrique, nécessiterait de définir un paramètre de dépendance de queue avec des possibilités limitées d'estimations empiriques ou d'analyses comparatives. De plus, le paramètre ou la force de la dépendance de la queue serait la même pour tous les types de risques.

Quant aux Copules archimédiennes, elles ne conviennent pas vraiment dans la pratique dans le sens où elles emploient une structure de dépendance différente et non paramétrée par des corrélations.

Parmi les copules paramétriques, la copule gaussienne est paramétrée en revanche par des corrélations par paires. Elle garantit des performances techniques très satisfaisantes avec un nombre élevé de facteurs de risques. Ces corrélations peuvent être estimées à partir de données historiques en cas de facteurs de risques marché puis complétées par des jugements d'experts, ce qui les rend donc facile à implémenter.

Rappelons que la copule gaussienne de dimension p est définie pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in [0; 1]^p$

$$C(u_1, \dots, u_p) = \Phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_p))$$

La fonction de distribution ϕ^{-1} est la fonction inverse de la distribution normale centrée réduite univariée. En utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et en décrivant la formule définissant la copule gaussienne, on peut déduire aisément la copule gaussienne de dimension p par :

$$C(u_1, \dots, u_p) = \frac{1}{\det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta(\Sigma^{-1} - I_p)\beta'\right)$$

Avec I_p , la matrice unité de $M_p(\mathcal{R})$ et $\beta = (\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_p))$.

Même si la copule gaussienne suppose une structure de dépendance normale multivariée, notez à nouveau que les distributions marginales ne sont pas supposées normales. Surtout, la copule gaussienne n'introduit aucune limite au niveau des distributions marginales utilisées pour les facteurs de risques.

En effet, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, la loi marginale des facteurs de risques peut être Normale, Log-Normale, Log-Normale-Inverse ou Empirique. La copule gaussienne présente une dépendance de queue faible. Cependant le SCR est déterminé à un niveau de 99.5% où la dépendance est encore existante, comme on peut le voir sur la figure 3.9.

La copule gaussienne est échantillonnée avec un certain nombre de scénarios aléatoires ou scénarios de Monte-Carlo. En raison de besoins importants de stockage et de puissance de calcul, le nombre de scénarios Monte-Carlo ne peut pas être augmenté arbitrairement, laissant une erreur d'échantillonnage. Pour garder cette erreur sous contrôle, des tests statistiques sont mis en œuvre et l'ensemble de scénarios de Monte-Carlo est maintenu constant tout au long d'une année.

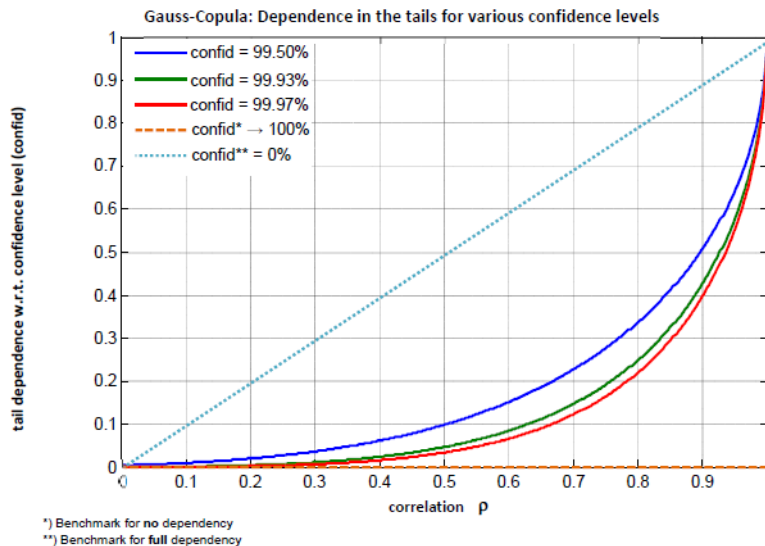


Figure 3.9 : Dépendance de la queue de copules gaussiennes

3.2.4 Des gains et pertes estimés par des scénarios de Monte-Carlo

Une simulation de Monte-Carlo génère des échantillons aléatoires répétés d'une certaine variable aléatoire. En pratique les échantillons peuvent être considérés comme indépendants. Dans le cadre de l'agrégation des risques, la variable en question est le vecteur des facteurs aléatoires de risque $X \in \mathbb{I} / X = (X_1, \dots, X_n)$. En d'autres termes, des échantillons aléatoires conjoints des facteurs de risques pertinents sont générés et ainsi une distribution empirique de X est obtenue. Le SCR du vecteur de risque X est déterminé à partir de cette approximation avec une erreur d'approximation correspondante à l'erreur de Monte-Carlo. Plus le nombre d'itérations est élevé, moins l'erreur de Monte-Carlo est importante. Dans le modèle interne Allianz, le nombre de simulations Monte-Carlo généré pour le calcul du SCR est de 50 000 itérations. Compte tenu de la non-linéarité de la majeure partie des instruments financiers, les simulations sont soumises à une erreur de Monte-Carlo importante, qui doit être considérée lors de la prise de décisions liées à la gestion de ces simulations. En conséquence, plusieurs approches sont mises en œuvre pour réduire la volatilité due à cette erreur :

- La matrice de corrélation est maintenue stable tout au long de l'année. Cela permet également de maintenir les nombres aléatoires de copules tout au long de l'année, ainsi seules les volatilités des facteurs de risques de marché sont modifiées.
- La graine et donc l'ensemble de scénarios sont choisis pour minimiser l'erreur de Monte-Carlo pour les facteurs de risques importants.
- Le SCR est calculé à partir de la moyenne sur plusieurs points des distributions en utilisant la VaR de Harrell-Davis au lieu de la VaR simple.
- Les queues pour les distributions marginales fortement asymétriques sont stabilisées.

3.2.5 Calibration de la matrice de corrélation

La copule gaussienne est calibrée par une matrice de corrélation, donc pour chaque couple de facteurs de risques (X_i, X_j) avec $i < j$, un facteur de corrélation r_{ij} doit être déterminé. Pour les facteurs de

risques de marché, des données empiriques basées sur des séries chronologiques sont utilisées pour estimer les facteurs de corrélation. Autrement, les jugements d'experts sont utilisés dans un processus structuré basé sur la taxonomie des risques. Pour améliorer la gestion de la matrice de corrélation, sa taille est réduite en mappant certains facteurs de risques sur d'autres. En effet, les facteurs de risques qui se révèlent parfaitement corrélés à un autre facteur de risque se voient imposer des chocs identiques, mis en correspondance avec leur homologue et éliminés de la matrice de corrélation. La matrice de corrélation qui en résulte doit être optimisée pour lui garantir cohérence (semi-définition positive) et stabilité. Ci-dessous un exemple de nuage de points corrélés et non corrélés d'une loi uniforme ainsi qu'une matrice de corrélation déduite à partir des données Allianz.

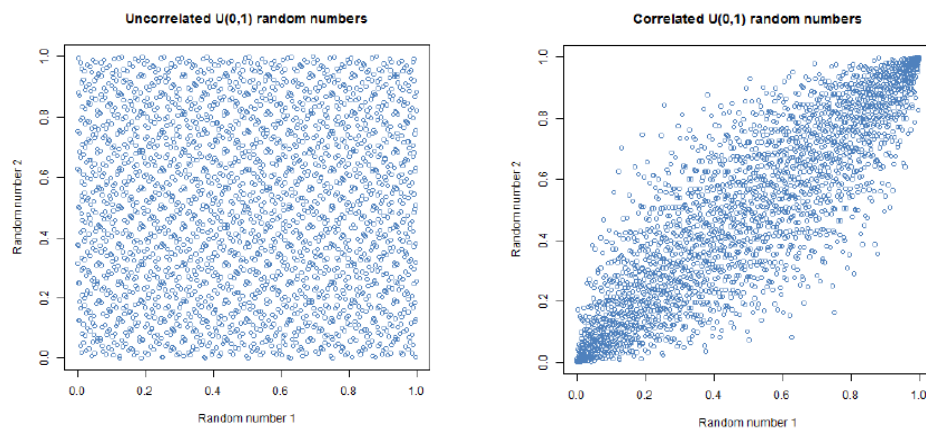


Figure 3.10 : Nuage de points $U(0,1)$ non-corrélés

Nuage de points $U(0,1)$ corrélés

	Actions	Taux d'Intérêts	Inflation	Immobilier	Change	Actions Volatilité	Taux d'Intérêts Volatilité	Spreads	crédit	Mortalité	Mortalité Catastrophe	Morbidité	Morbidité Catastrophe	Longévité	Rachats	Rachats Massifs	Coûts	Opérationnel
Actions	100%	-39%	-49%	32%	-26%	70%	29%	64%	30%	2%	28%	3%	28%	0%	-1%	0%	-2%	15%
Taux d'Intérêts	-39%	100%	25%	-4%	-9%	-30%	-11%	-29%	-2%	-2%	-21%	-4%	-21%	0%	9%	2%	4%	-7%
Inflation	-49%	25%	100%	-26%	34%	-52%	-15%	-26%	-17%	3%	-2%	5%	9%	3%	-2%	0%	30%	11%
Immobilier	32%	-4%	-26%	100%	-6%	21%	19%	36%	42%	-2%	17%	-3%	16%	0%	5%	1%	4%	14%
Change	-26%	-9%	34%	-6%	100%	-34%	-13%	-19%	-8%	1%	-7%	0%	-5%	1%	0%	-1%	6%	-3%
Actions Volatilité	70%	-30%	-52%	21%	-34%	100%	35%	44%	18%	0%	26%	3%	25%	0%	0%	1%	-2%	13%
Taux d'Intérêts Volatilité	29%	-11%	-15%	19%	-13%	35%	100%	34%	12%	0%	20%	1%	20%	0%	0%	1%	1%	9%
Spreads	64%	-29%	-26%	36%	-19%	44%	34%	100%	38%	-1%	26%	-2%	25%	-1%	5%	2%	7%	18%
crédit	30%	-2%	-17%	42%	-8%	18%	12%	38%	100%	1%	3%	2%	3%	0%	22%	6%	18%	19%
Mortalité	2%	-2%	3%	-2%	1%	0%	0%	-1%	1%	100%	28%	26%	25%	-43%	6%	6%	20%	0%
Mortalité Catastrophe	28%	-21%	-2%	17%	-7%	26%	20%	26%	3%	28%	100%	29%	82%	-44%	3%	5%	17%	21%
Morbidité	3%	-4%	5%	-3%	0%	3%	1%	-2%	2%	26%	29%	100%	28%	2%	9%	0%	41%	20%
Morbidité Catastrophe	28%	-21%	9%	16%	-5%	25%	20%	25%	3%	25%	82%	28%	100%	0%	3%	6%	21%	22%
Longévité	0%	0%	3%	0%	1%	0%	0%	-1%	0%	-43%	-44%	2%	0%	100%	5%	0%	21%	1%
Rachats	-1%	9%	-2%	5%	0%	0%	0%	5%	22%	6%	3%	9%	3%	5%	100%	7%	36%	0%
Rachats Massifs	0%	2%	0%	1%	-1%	1%	1%	2%	6%	6%	5%	0%	6%	0%	7%	100%	6%	15%
Coûts	-2%	4%	30%	4%	6%	-2%	1%	7%	18%	20%	17%	41%	21%	21%	36%	6%	100%	19%
Opérationnel	15%	-7%	11%	14%	-3%	13%	9%	18%	19%	0%	21%	20%	22%	1%	0%	15%	19%	100%

Figure 3.11 : Matrice de corrélation issue du modèle interne Allianz en 2020

La matrice de corrélation utilisée dans le cadre de notre étude est représentée ci-avant : c'est une matrice simplifiée de celle d'Allianz utilisée courant l'année 2019.

Nous pouvons noter que la meilleure corrélation (très négative de -52%) est entre les risques Actions-volatilité et Inflation tandis que la pire corrélation (très positive de 70%) est entre Actions et Actions-volatilité ou Spread.

3.2.6 Prise en compte des Effets Croisés (Cross-Effects)

Il existe des risques qui ne sont pas explicitement attribués à aucun des segments de risques décrits précédemment, mais qui résultent de l'interaction de différentes catégories de risques. Ces interactions entre les facteurs de risques et les catégories de risques peuvent être divisées en deux classes :

- **Dépendances stochastiques** : quelle est la probabilité que les événements se produisent simultanément ? Cette classe est capturée dans le modèle interne par les corrélations entre les facteurs de risques et à travers les copules utilisées.
- **Dépendances fonctionnelles** : quel est l'impact si les événements se produisent simultanément ? Ces dépendances simultanées, en revanche, ne sont pas implicitement captées dans le modèle interne. Elles doivent donc être modélisées explicitement via une forme fonctionnelle.

En effet, la conception du modèle interne n'incorpore pas tous les facteurs de risques en une seule approche unifiée. Ainsi, certains composants sont modélisés séparément a posteriori et introduits au calcul du SCR global. Les effets croisés sont définis comme la différence entre la somme des impacts individuels de différents chocs autonomes et impact du choc combiné.

Considérant par $P\&L_{MC}$ l'estimation des gains et pertes de Monte-Carlo, l'effet croisé dû aux facteurs de risques stressés X_S^1 et X_S^2 dans le scénario S est donné par :

$$\text{Effets - croisés } (X_S^1, X_S^2) = P\&L_{MC}(X_S^1, X_S^2) - \sum_{i=1}^2 P\&L_{MC}(X_S^i)$$

Cette formule peut être schématisée comme ci-après :

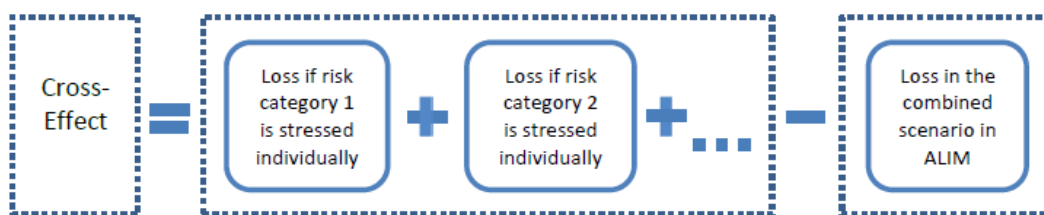


Figure 3.12 : Schéma des effets croisés

Notons bien que les effets croisés sont nettement différents de l'effet dit de diversification résultant d'une corrélation entre les facteurs de risques. Alors que la diversification réduit le SCR global, tant que les facteurs de risques ne sont pas parfaitement corrélés positivement, les effets croisés peuvent soit aggraver soit atténuer les pertes. Les effets croisés considérés généralement comme significatifs et pertinents pour les calculs du SCR et qui font l'objet d'un suivi et de mesures appropriées sont :

- **Risque élémentaire Spread vs. le module de risques de marché** : en effet, contrairement aux autres risques élémentaires de marché qui sont modélisés via les portefeuilles répliquants, le passif du risque Spread est déterminé par des coefficients d'absorption qui sont appliqués à l'actif. Ainsi, les effets croisés entre les types de risques de marché sont couverts

implicitement, à l'exception de ceux du Spread qui sont modélisés séparément. Un effet croisé est donc ainsi intégré.

- **Risque élémentaire Crédit vs. le module de risques de marché** : En effet, pour les activités d'assurance vie, le risque de crédit est divisé en un risque de crédit basé sur la meilleure estimation (BE) et un risque de crédit. Les effets croisés du risque de crédit représentent alors la différence entre le risque de crédit BE et le risque de crédit dans des conditions de marché difficiles.
- On note aussi le combiné **module de risques de marché vs. Modules de risques de non-marché**.

Ci-dessous, on peut voir l'impact de l'effet croisé sur notre matrice de corrélation ci-dessus : comme souligné, l'impact est concentré majoritairement sur le risque Spread.

	Spreads	crédit
Actions	-1.5819%	0.0000%
Taux d'Intérêts	-0.3599%	0.0000%
Inflation	1.1371%	0.0000%
Immobilier	-0.7557%	0.0000%
Change	0.4318%	0.0000%
Actions Volatilité	-0.2151%	0.0000%
Taux d'Intérêts Volatilité	-0.2693%	0.0000%
Spreads	0.0000%	0.1888%
crédit	0.1888%	0.0000%
Mortalité	-0.0005%	0.0000%
Mortalité Catastrophe	-0.3815%	0.0000%
Morbidité	-0.0530%	0.0000%
Morbidité Catastrophe	-0.3150%	0.0000%
Longévité	0.0969%	0.0000%
Rachats	-0.0567%	0.0000%
Rachats Massifs	0.0106%	0.0000%
Coûts	0.0419%	0.0000%
Opérationnel	-0.2405%	0.0000%

Figure 3.13 : Impact des effets croisés issus du modèle interne Allianz en 2020

3.2.7 Le capital Add-on

Le calcul du capital Add-on peut concerner différents points selon les particularités des modèles internes ou des recommandations de l'ACPR. En effet, ces correctifs a posteriori du SCR peuvent être justifiés par un déficit de corrélations dans les matrices, une réplification des portefeuilles du passif insatisfaisante ou pour absorber une diversification non recommandée comme dans le cas des fonds cantonnés dits Ring Fenced Funds (ou RFF).

➤ Add-On du risque opérationnel

Le risque opérationnel est évalué selon un avis d'expert. Les corrélations entre le risque opérationnel et les autres risques peuvent donc s'avérer trop prudentes ou pas assez du point de vue de l'ACPR. Dans ce cas l'ACPR peut demander de réajuster avec un capital add-on équivalent à l'utilisation d'une matrice qui aurait des coefficients de corrélation à un niveau recommandé (par exemple 0.5) entre le risque opérationnel et tous les autres risques. Le calcul du montant à ajuster est détaillé comme suit :

- Calcul du $SCR_{Modèle}$ avec la matrice de corrélation définie a priori par le modèle interne de la compagnie.

- Ensuite, on calcule un SCR_{Add-On} a posteriori en utilisant une matrice de corrélation prenant en compte les corrélations recommandées par le régulateur entre le risque opérationnel et les autres risques. Les corrélations entre les autres risques (hors risque opérationnel) restent inchangées dans la nouvelle matrice. Seules les lignes et colonnes correspondant au risque opérationnel varient en étant forcées à la valeur cible (par exemple 0.5). Ce type de capital Add-On est très majoritairement représenté avec plus de 80%.
- Le capital add-on correspond à la différence $SCR_{Add-On} - SCR_{Modèle}$

En général, le capital Add-On Risque Opérationnel vient augmenter le SCR du modèle interne pour des raisons de corrélations a priori trop prudentes.

➤ Particularité des Portefeuilles Cantonnés ou Ring Fenced Funds (*RFF*)

Sous Solvabilité II, les fonds cantonnés ne doivent pas se diversifier avec les autres portefeuilles d'assurance vie et baisser ainsi le SCR global. Ici, il s'agit de la diversification « verticale » entre les portefeuilles d'actifs et non spécifiquement entre les segments de risques. Nous reviendrons sur cette diversification « verticale » plus largement dans le chapitre 4. Le SCR des *RFF* doit être évalué comme s'ils étaient une compagnie à part entière. Dans les modèles internes en général, il n'est pas possible de séparer leurs effets. Ainsi le SCR final se retrouve diversifié entre les *RFF* et les autres fonds. Un capital Add-On est ainsi calculé a posteriori puis rajouté au SCR global pour annuler ce bénéfice de diversification non permis. Si on considère par :

- SCR_{Global} : le SCR diversifié global de la compagnie avec les *RFF*
- SCR_{global}^{out} : le SCR diversifié global de la compagnie hors les *RFF*
- SCR_{RFF} : le SCR diversifié des *RFF*

Le capital Add-on des *RFF* doit vérifier : $Add - on_{RFF} = SCR_{global}^{out} + SCR_{RFF} - SCR_{Global}$

➤ Add-On de l'erreur liée aux portefeuilles répliquants

La technique des portefeuilles répliquants est une méthode d'approximation et, à ce titre, une erreur d'approximation en résulte. En outre, les indicateurs de performance clés du portefeuille répliquant utilisés pour la validation du portefeuille répliquant doivent être vérifiés au niveau d'agrégation pertinent pour des besoins réglementaires. Par exemple, le coefficient R^2 qui est la statistique qui mesure l'écart entre une variable explicative et la variable à expliquer doit être supérieur à 97%. Si la qualité de la réplique est insuffisante dans la queue de distribution pertinente pour le SCR , une majoration de ce dernier doit être appliquée sous forme de capital Add-On pour contrebalancer de manière prudente.

L'avantage du concept de capital Add-on est d'établir un lien étroit entre la qualité des portefeuilles répliquants et l'impact sur le SCR . Aussi, le calcul d'un capital Add-On incite les compagnies à améliorer encore la qualité de leurs portefeuilles répliquants.

3.2.8 Prise en compte des impôts différés

Le montant d'impôt différé dans le bilan en valeur de marché est calculé en tenant compte des informations fiscales IFRS à travers la formule suivante :

$$DT_{MVBS} = DT_{IFRS} + (NAV_{IFRS Adj} - NAV_{MVBS Adj}) \times Taxe\ rate_1 + (AV_{Equity IFRS} - AV_{Equity MVBS}) \times Taxe\ rate_2$$

Avec :

- *MVBS* : Market Value Balance Sheets (Bilan en valeur de marché)
- *DT_{IFRS}* : Taxes différées du résultat comptable *IFRS*
- *NAV_{IFRS Adj}* : Total des Fonds propres en vision comptable *IFRS*
- *NAV_{MVBS Adj}* : Total des Fonds Propres en vision *MVBS*
- *Taxe rate₁* : Tau d'imposition tranche 1 de la compagnie ou du pays
- *Taxe rate₂* : Tau d'imposition tranche 2 de la compagnie ou du pays
- *AV_{Equity IFRS}* : Valeur de l'Actif comptable
- *AV_{Equity IFRS}* : Valeur de l'Actif vision *MVBS*

Cette formule est évaluée pour le bilan de base et pour le bilan choqué. Un impact impôts est alors déterminé :

$$Impact\ Impôts = DT_{Base} - DT_{Choc}$$

Si $DT > 0$, on parle de Taxe Différée à l'Actif ou *DTA* et l'impôt provient de l'Actif ; sinon on parle de Taxe Différée au Passif ou *DTL*. Dans ce cas l'impôt provient du passif.

La différence des impôts différés dans le bilan en valeur de marché dans le cas de base et dans le cas de choc entraîne l'allègement fiscal théoriquement admissible dans le calcul du capital de solvabilité.

3.2.9 Présentation des données utilisées pour les applications

Le *SCR* que nous allons utiliser pour l'allocation du capital est synthétisé ci-dessous : les montants de risque standalone correspondent aux données de la compagnie Allianz Vie de fin juin 2020, donc avant la création de l'Entité FRPS. D'ailleurs, l'objet du dernier chapitre de ce mémoire traitera les impacts de la création de cette nouvelle entité sur l'allocation du *SCR*. Pour des raisons de confidentialité, une diversification de ces risques standalone a été effectuée manuellement avec la matrice de corrélation simplifiée de la même compagnie. Puis le taux d'impôt ainsi que le taux de capital Add-On constaté pour Allianz Vie à la même période de l'année sont appliqués au risque diversifié pour reconstruire le capital de solvabilité final. Le risque diversifié ainsi représenté et utilisé pour nos cas pratiques est légèrement différent du capital de solvabilité comptable officiel d'Allianz Vie de juin 2020, mais reste très cohérent pour des applications.

milliers €

Somme des Risques Standalone	8,186,402
Risques de Marché	5,714,415
Risque Taux d'Intérêts	406,741
Risque Change	240,712
Risque Spreads	1,851,243
Risque Inflation	924,810
Risque Actions	922,115
Risque Immobilier	449,665
Risque Taux d'Intérêts Volatilité	506,941
Risque Actions Volatilité	412,189
Risque de crédit	662,682
Risques Actuariels Vie	733,789
Risque Mortalité	7,491
Risque Mortalité Catastrophe	18,691
Risque Morbidité	22,411
Risque Morbidité Catastrophe	36,396
Risque Longévité	648,800
Risques de souscription	848,766
Risque Rachats	116,881
Risque Rachats Massifs	362,214
Risque Coûts	369,671
Risque Opérationnel	226,749

milliers €

SCR net	4,016,278
Capital Add-On	414,445
Impôts Différés	-454,933
SCR	4,056,766
Risque de Marché Diversifié	2,835,400
Risque de crédit	662,682
Risques Actuariels Vie Diversifié	641,023
Risques de souscription diversifié	578,020
Risque Opérationnel	226,749

Figure 3.14 : Risque diversifié par module de risque

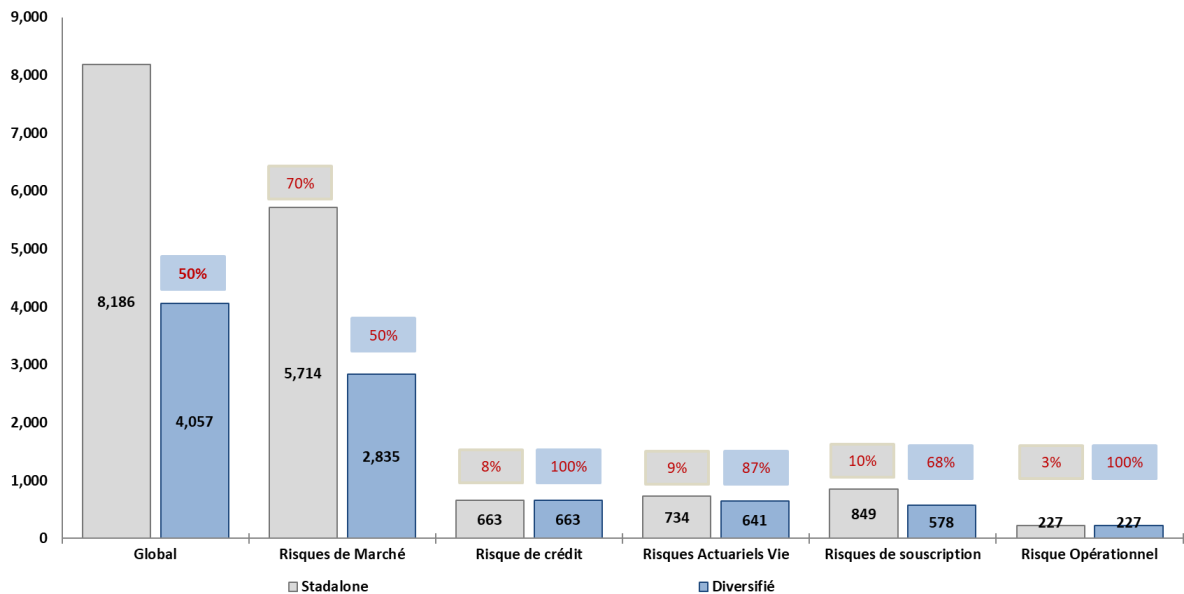


Figure 3.15 : Risque diversifié par module de risque

Le risque standalone qui représente la somme des risques élémentaires est de 8.2 milliards d'euros. Le risque marché est le module dominant avec 70% suivi de loin des risques de souscription à 10%. Le risque de spreads est le risque majoritaire du module marché à 32%, mais aussi de toute la compagnie à 23%. Le SCR est diversifié à 50%, faisant passer le risque à 4 milliards d'euros après agrégation des facteurs de risques, i.e. 50% des sommes de standalone. Les risques de marché constituent le module qui se diversifie le mieux avec un facteur de diversification de 50% alors que le module de risques actuariels vie présente la pire diversification à 87%. Les risques de crédit et opérationnel sont modélisés tous seuls, ils ne présentent aucune diversification intra-modulaire.

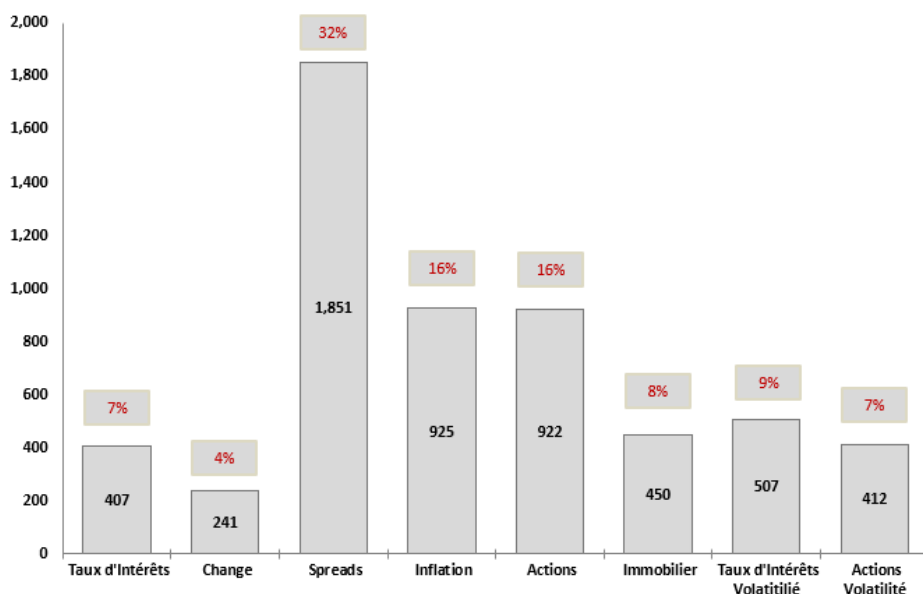


Figure 3.16 : Risque standalone du Module Risque de marché

Les impôts différés représentent -11% du risque diversifié et un capital Add-on +10% est rajouté a postériori. Ce qui se traduit par un SCR net après impôts différés et post Capital Add-On de 4 milliards d'euros.

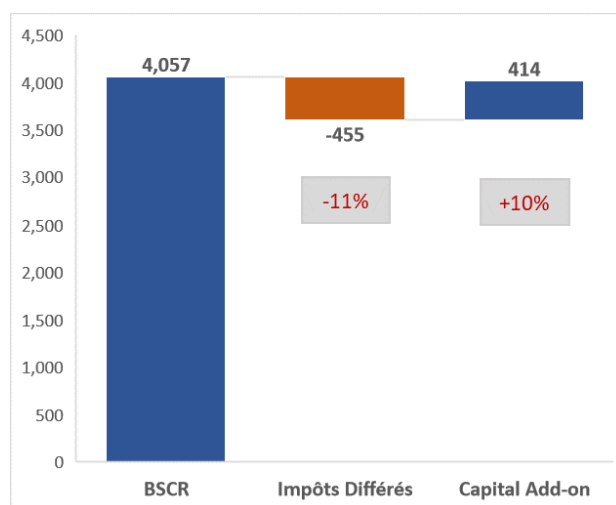


Figure 3.17 : SCR après impôts et après Capital Add-On

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les différentes méthodes d'allocation de ce SCR diversifié sur les différents risques élémentaires.

3.3 Allocation de la diversification entre les différents risques

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les facteurs de risques se diversifient grâce aux corrélations entre elles lors de l'agrégation au niveau compagnie, faisant ainsi baisser la somme des risques élémentaires. On parle de risque diversifié et de bénéfice de diversification. Même si le risque capital des facteurs de risques est évalué par risque élémentaire, la diversification elle est disponible uniquement au niveau compagnie et module dans les modèles internes. L'allocation de capital permet d'allouer le bénéfice de diversification entre les différents risques élémentaires (ou segments) et permet ainsi de déterminer le volume de capital diversifié qu'ils consomment.

L'enjeu est important pour les compagnies d'assurances, notamment dans le cadre du dispositif *ORSA* de la directive Solvabilité II qui a pour objectif de piloter l'activité de la compagnie en fonction de son appétence et de sa tolérance au risque. Notons que pour les compagnies comme Allianz qui utilisent un modèle interne partiel, un montant de capital diversifié par modules de risques (module risque de marché ou risques actuariels vie par exemple) peut être évalué. Nous rappelons que l'appétence au risque correspond au niveau de risque que la compagnie considère légitime de prendre compte tenu du rendement cible alors que la tolérance au risque est définie comme le niveau de risque maximal fixé aux différents niveaux de décisions et en fonction de son appétence au risque. La compagnie pourra déterminer la consommation ainsi que la profitabilité des différentes destinations du passif.

3.3.1 Définitions et Approche de l'allocation

L'allocation du capital de solvabilité est définie à partir d'une mesure de risque et d'une méthode d'allocation qui doit respecter des critères de cohérence. Dans le cadre de l'assurance, cette mesure de risque reste la *VaR*. Les différentes méthodes usuelles d'allocation quant à elles seront développées dans les parties suivantes. On appellera **segment**, le risque unitaire concerné par l'allocation et notera pour la suite :

- $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{I}$, les segments aléatoires unitaires de risque qui doivent se partager le risque à allouer,
- $\mathcal{N} = \{X_1, \dots, X_n\}$, l'ensemble de tous les segments risques unitaires
- $X_{\mathcal{N}} \in \mathcal{I}$: le risque conjoint des n segments qui doivent se partager le risque à allouer,
- $\rho(X_{\mathcal{N}})$: la mesure du risque diversifié du module ou de l'entité avec la mesure de risque ρ ,
- $\rho(X_i)$: le risque unitaire du segment i mesuré avec la mesure de risque ρ ,
- θ : la méthode d'allocation considérée,
- $\rho^\theta(X_i/X_{\mathcal{N}})$: la contribution du segment i mesuré avec la mesure de risque ρ et la méthode d'allocation θ au risque global $\rho(X_{\mathcal{N}})$,

A présent, nous allons introduire la notion d'impact marginal.

Définition 3.1. Impact marginal

Considérons un segment $X_i \in \mathcal{I}$ et un module de risque \mathcal{M} comme un sous-ensemble de \mathcal{N} contenant X_i . L'impact marginal du segment X_i sur $\rho(X_{\mathcal{M}})$ après cession d'une fraction h de X_i est défini par :

$$S_i(h, \mathcal{M}) = \frac{\rho(X_{\mathcal{M}}) - \rho(X_{\mathcal{M}} - hX_i)}{h}$$

L'impact marginal mesure la baisse que la cession d'une fraction h du segment X_i engendre sur le risque relatif du module \mathcal{M} . Ce taux d'accroissement est utile dans la détermination de la contribution du segment X_i . La valeur fractionnée h dépend, elle, de la méthode d'allocation considérée. Elle est considérée infiniment petit si les segments sont fractionnables comme dans la méthode d'Euler et est égale à 1 si les fragments sont atomiques comme dans la méthode marginale.

Définition 3.2. Méthode d'allocation de capital par type de risque

Basée sur le calcul des contributions au risque via des clés d'allocation, une méthode d'allocation du capital diversifié $\rho(X_N)$ sur les segments $X_1 \dots X_n \in \mathcal{T}$ est définie d'une manière générale comme suit :

$\Lambda_\theta^N : A \rightarrow R^n$ qui à chaque mesure de risque ρ associe un unique vecteur de contribution au risque des segments $X_i : (\rho^\theta(X_1/X_N), \dots, \rho^\theta(X_n/X_N))$.

Une méthode d'allocation de capital sur les segments de risques doit être cohérente pour être admise.

Définition 3.3. Méthode d'allocation de capital par type de risque cohérente

Une méthode d'allocation ρ^θ de capital $\rho(X_N)$ sur les segments de risques X_i est dite cohérente si elle vérifie les caractéristiques suivantes :

- **Full allocation:** $\sum_{i=1}^n \rho^\theta(X_i/X_N) = \rho(X_N)$

Cette caractéristique est essentielle dans le principe d'allocation de capital dans la mesure où elle garantit une allocation totale du risque diversifié. La somme des capitaux alloués est ainsi égale au capital initial à allouer

- **Riskless Allocation :** si X_i est non risqué, alors $\rho^\theta(X_i/X_N) = 0$; un segment non risqué ne supporte aucune allocation de capital.
- **No undercut :** pour tout $m < n$, $\sum_{i=1}^m \rho^\theta(X_i/X_N) \leq \rho(\sum_{i=1}^m X_i)$

Cela signifie que, le montant de risque alloué à un segment de risque (ou un module de risque) est inférieur au risque du segment (ou global des segments) du fait de la diversification prise en compte dans le capital global à allouer.

- **Symétrique :** si on considère deux segments X_i et X_j de \mathcal{M} tels que $S_i(h, \mathcal{M}) = S_j(h, \mathcal{M})$, alors :

$$\rho^\theta(X_i/X_M) = \rho^\theta(X_j/X_M)$$

Grace à la propriété de symétrie, deux segments ayant le même impact marginal par rapport à tout sous-ensemble doivent avoir la même contribution au risque.

- **RORAC compatibilité (Return On Risk Adjusted Capital):** A l'instar du *ROE (Return On Equity)*, le *RORAC* est un indicateur de rentabilité, défini comme le quotient d'un indicateur de performance et d'un indicateur de risque. Le *RORAC* permet de mesurer la rentabilité ajustée du risque du capital alloué à l'activité et de les comparer entre elles.

Définition 3.4. RORAC compatibilité

La contribution au risque $\rho^\theta(X_i/X_N)$ du segment X_i calculé par la méthode d'allocation Λ_θ^N est *RORAC*- compatible, s'il existe un réel $\varepsilon_i > 0$ et h vérifiant $0 < h < \varepsilon_i$ tel que pour tout X_i :

$$RORAC(X_i/X_N) > RORAC(X_N) \Rightarrow RORAC(X_N + hX_i/X_N) > RORAC(X_N)$$

Une méthode d'allocation est dite *RORAC*- compatible si elle fournit des contributions au risque *RORAC*- compatibles.

Ce critère de rentabilité est très déterminant dans l'aide au pilotage de l'activité des branches. En effet, du point de vue risque-rentabilité, si la rentabilité post-allocation d'un segment X_i est plus élevée que la rentabilité globale, il devient possible et d'une manière certaine d'améliorer cette dernière en ajoutant une quantité h suffisamment petite du segment i . En d'autres termes, si la rentabilité du portefeuille global se dégrade après ajout d'une part h d'un segment, alors il ne sera pas judicieux de développer ce segment. Nous revenons plus amplement sur le pilotage de la rentabilité dans la partie 4 de ce mémoire.

A présent, nous allons introduire les méthodes usuelles d'allocation du capital.

3.3.2 Méthode proportionnelle

La méthode proportionnelle est une allocation basée sur le risque capital standalone. Le SCR diversifié est ainsi alloué selon une clé basée sur la répartition des risques unitaires avec la formule suivante :

$$\rho^P(X_i/X_N) = \alpha_i \times \rho(X_N) \text{ avec :}$$

$$\alpha_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^N \rho(X_j)}$$

Cette méthode est simple à mettre en place. Elle est ainsi très utile, notamment dans le cas où il est difficile d'évaluer l'impact marginal de chacun des segments. Cependant, elle présente une limite majeure qui est de ne pas prendre en compte les corrélations entre les segments de risques dans les clés de répartition, même si elle conserve les effets liés au bénéfice de diversification dans l'assiette d'allocation. Appliquée à nos données, la méthode proportionnelle donne le résultat ci-dessous :

Allocation SCR		Méthode proportionnelle		
		α_i	$\rho^P(X_i/X_N)$	Facteur de diversification
SCR (milliers €)	4,056,766			
Somme des Risques Standalone	8,186,402	100%	4,056,766	50%
Taux d'Intérêts	406,741	5.0%	201,560	50%
Change	240,712	2.9%	119,285	50%
Spreads	1,851,243	22.6%	917,382	50%
Inflation	924,810	11.3%	458,289	50%
Actions	922,115	11.3%	456,953	50%
Immobilier	449,665	5.5%	222,831	50%
Taux d'Intérêts Volatilité	506,941	6.2%	251,214	50%
Actions Volatilité	412,189	5.0%	204,260	50%
crédit	662,682	8.1%	328,392	50%
Mortalité	7,491	0.1%	3,712	50%
Mortalité Catastrophe	18,691	0.2%	9,262	50%
Morbidité	22,411	0.3%	11,106	50%
Morbidité Catastrophe	36,396	0.4%	18,036	50%
Longévité	648,800	7.9%	321,512	50%
Rachats	116,881	1.4%	57,920	50%
Rachats Massifs	362,214	4.4%	179,495	50%
Coûts	369,671	4.5%	183,190	50%
Opérationnel	226,749	2.8%	112,365	50%

Figure 3.18 : Application de la méthode proportionnelle

Comme nous pouvons le voir, la méthode proportionnelle conserve la part des risques unitaires pour son allocation. Le facteur de diversification de l'entité au global reste aussi le même pour les segments de risques. Ce qui n'est pas très intuitif.

3.3.3 Méthode marginale

Comme son nom l'indique, la méthode marginale permet d'allouer le capital global selon l'impact marginal des segments unitaires. Cette méthode consiste en deux étapes : le calcul de la différence entre le besoin en capital du portefeuille global \mathcal{N} et $\mathcal{N}\setminus\{X_i\}$ correspondant au portefeuille \mathcal{N} privé du segment X_i dont on évalue la contribution et puis de normaliser ce calcul pour conserver la propriété de « Full Allocation ».

$$\rho^M(X_i/X_{\mathcal{N}}) = \beta_i \times \rho(X_{\mathcal{N}}) \text{ avec :}$$

$$\beta_i = \frac{\rho(X_{\mathcal{N}}) - \rho(X_{\mathcal{N}\setminus\{X_i\}})}{\sum_{j=1}^n \{\rho(X_{\mathcal{N}}) - \rho(X_{\mathcal{N}\setminus\{X_j\}})\}} = \frac{S_i(1, \mathcal{N})}{\sum_{j=1}^n S_j(1, \mathcal{N})}$$

L'inconvénient principal de cette méthode réside dans le fait qu'elle s'intéresse uniquement à la contribution marginale des segments de risques à l'ensemble, et non par modules de risque. La méthode marginale est basée sur l'hypothèse que l'activité correspondant au segment de risque X_i ne peut exister par le biais d'elle-même et doit forcément être cumulée avec d'autres. La méthode marginale donne le résultat suivant :

Allocation SCR		Méthode Marginale				
SCR (milliers €)	4,056,766	$\rho(X_{\mathcal{N}\setminus\{X_i\}})$	$S_i(1, \mathcal{N})$	β_i	$\rho^M(X_i/X_{\mathcal{N}})$	Facteur de diversification
Somme des Risques Standalone	8,186,402		11,537,394	100%	4,056,766	50%
Taux d'Intérêts	406,741	3,574,926	481,840	4%	169,424	42%
Change	240,712	3,611,773	444,994	4%	156,468	65%
Spreads	1,851,243	2,225,019	1,831,747	16%	644,077	35%
Inflation	924,810	3,803,295	253,471	2%	89,125	10%
Actions	922,115	2,999,172	1,057,594	9%	371,870	40%
Immobilier	449,665	3,372,435	684,332	6%	240,624	54%
Taux d'Intérêts Volatilité	506,941	3,384,078	672,688	6%	236,530	47%
Actions Volatilité	412,189	3,392,191	664,576	6%	233,677	57%
crédit	662,682	3,237,649	819,117	7%	288,017	43%
Mortalité	7,491	3,578,301	478,466	4%	168,238	2246%
Mortalité Catastrophe	18,691	3,573,565	483,202	4%	169,903	909%
Morbidité	22,411	3,576,214	480,553	4%	168,971	754%
Morbidité Catastrophe	36,396	3,565,551	491,215	4%	172,721	475%
Longévité	648,800	3,504,297	552,470	5%	194,259	30%
Rachats	116,881	3,560,527	496,239	4%	174,487	149%
Rachats Massifs	362,214	3,541,676	515,091	4%	181,116	50%
Coûts	369,671	3,476,395	580,372	5%	204,070	55%
Opérationnel	226,749	3,507,339	549,428	5%	193,189	85%

Figure 3.19 : Application de la méthode marginale

Le résultat ci-dessus montre que la proportionnalité disparaît du fait de la prise en compte de l'impact marginal des segments unitaires de risque. Cependant le risque Spread reste majoritaire avec 16% du risque alloué. Le bénéfice de diversification change pour chaque segment. Il s'améliore pour le risque Spread avec 35% contre 50% pour la méthode proportionnelle.

3.3.1 Méthode de Shapley

L'approche de Shapley est une méthode discrète inspirée de la théorie des jeux coopératifs. Dans un jeu coopératif, les joueurs qui y participent ont la possibilité de se concerter et de s'engager à coopérer avant de définir la stratégie à adopter. On appelle coalition quand une coopération se forme. C'est

donc une méthode qui va s'intéresser non seulement à la contribution marginale de chaque segment à l'ensemble mais aussi à tous les modules de risques possibles.

Si on note par :

- m : le cardinal de la coalition \mathcal{M}
- \mathcal{C}_i : l'ensemble des coalitions avec le segment X_i

Alors, la contribution de X_i par la méthode de Shapley s'écrit :

$$\rho^S(X_i/X_N) = \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{C}_i} \frac{(m-n)!(n-m)!}{n!} \times (\rho(X_{\mathcal{M}}) - \rho(X_{\mathcal{M} \setminus \{X_i\}}))$$

Cette méthode est assez complexe à mettre en place à cause de la multitude des segments de risques et des coalitions possibles. En effet, elle nécessiterait beaucoup de ressources pour les calculs. Nous ne ferons pas d'application numérique de cette approche dans ce mémoire.

3.3.2 Méthode d'Euler

Contrairement aux méthodes discrètes explicitées ci-dessus, la méthode d'Euler est continue. En effet, cette méthode d'allocation permet de répartir le capital global de solvabilité en se basant sur l'impact marginal infinitésimal de chaque segment. La contribution du segment X_i par la méthode d'Euler est définie par la limite quand h tend vers 0 de son impact marginal :

$$\rho^E(X_i/X_N) = \lim_{h \rightarrow 0} (S_i(h, \mathcal{N})) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\rho(X_N) - \rho(X_N - hX_i)}{h} \right)$$

Vérifiant tous les critères de cohérence, la méthode d'Euler dispose de formes différentes selon la mesure de risque employée. Dans le cadre de la VaR, l'allocation au segment X_i est donnée par :

$$VaR^E(X_i/X_N) = E[X_i/X_N = VaR(X_N, \alpha)]$$

Sous Solvabilité II, la réglementation a retenu l'allocation par la méthode d'Euler couplée avec la mesure de risque de la VaR.

Dans la pratique, si on note par $(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}$ la matrice de corrélation de X_N , la contribution marginale C_{X_u} du risque élémentaire X_u à l'écart-type σ_{X_N} du risque global X_N est définie comme la dérivée partielle de σ_{X_N} par rapport à l'écart-type σ_{X_u} multiplié par l'écart-type σ_{X_u} :

$$C_{X_u} = \frac{\partial \sigma_{X_N}}{\partial \sigma_{X_u}} \sigma_{X_u}$$

En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$C_{X_u} = \frac{\sum_{v=1}^n \sigma_{X_u} \sigma_{X_v} \sigma_{X_u X_v}}{\sigma_{X_N}}$$

En posant :

$$\omega_{X_u} = \frac{C_{X_u}}{\sigma_{X_N}}$$

Et par :

$VaR_{(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}}(X_N, \alpha)$, le calcul de risque de X_N par agrégation des composantes unitaires avec la matrice de corrélation

$$(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}$$

on a :

$$\rho_{VaR}^E(X_u/X_N) = \omega_{X_u} \times \rho(X_N); \text{ avec}$$

$$\omega_{X_u} = \frac{\sum_{v=1}^n \rho(X_u)\rho(X_v)\sigma_{X_u X_v}}{VaR_{(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}}(X_N, \alpha)}$$

a Interprétation graphique de la méthode d'Euler dans le cadre de la formule standard.

Dans le cadre de la formule standard, les formules de l'allocation du risque agrégé $\{X_u + X_v\}$ aux deux facteurs de risques X_u et X_v par la méthode d'Euler est donnée par :

$$VaR^E(X_u/\{X_u + X_v\}) = \frac{\rho(X_u)}{\rho(\{X_u + X_v\})} \times (\rho(X_u) + \sigma_{uX_v}\rho(X_v))$$

et

$$VaR^E(X_v/\{X_u + X_v\}) = \frac{\rho(X_v)}{\rho(\{X_u + X_v\})} \times (\rho(X_v) + \sigma_{uX_v}\rho(X_u))$$

Graphiquement, nous pouvons interpréter, par la méthode des projections, les contributions des risques unitaires X_u et X_v comme étant les projections orthogonales des deux côtés du triangle sur le troisième côté qui les agrège.

Tout d'abord, rappelons le théorème des projections orthogonales.

Théorème 3.2. Théorème des projections orthogonales

Soit ABC un triangle quelconque, le côté AB est égal à la somme des projections AC et de BC sur AB. Cette égalité est aussi vérifiée pour les deux autres côtés BC et AC.

Ainsi, si on considère notre triangle énoncé dans la partie 3.1.2, nous pouvons écrire que :

$$\begin{cases} a = c \cos(\beta) + b \cos(\gamma) & (1) \\ b = a \cos(\gamma) + c \cos(\alpha) & (2) \\ c = b \cos(\alpha) + a \cos(\beta) & (3) \end{cases}$$

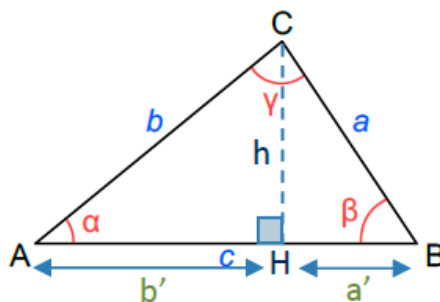


Figure 3.20 : Théorème des projections orthogonales

En considérant H , la projection orthogonale de C sur le côté AB et en posant $a' = BH$, on a :

$$a' = a \cos(\beta)$$

Aussi, d'après l'équation (1), on peut écrire : $\cos(\beta) = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \cos(\gamma)$

Et puis,

$$a' = \frac{a}{c} \times (a - b \cos(\gamma))$$

De la même manière, on démontre aussi que :

$$b' = \frac{b}{c} \times (b - a \cos(\gamma))$$

On peut ainsi vérifier l'hypothèse de « **Full Allocation** » :

$$c = a' + b' = \frac{1}{c} (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma))$$

Et

$$c^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma))$$

D'où

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$$

En conclusion, le risque c qui correspond à l'agrégation des risques a et b est bien alloué aux segments de risques a et b avec les contributions respectives a' et b' vérifiant $a' + b' = c$.

b Application de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler appliquée à nos données donne le résultat suivant :

Allocation SCR		Méthode d'Euler			
SCR (milliers €)	4,056,766	$\sum_{v=1}^n \rho(X_u) \rho(X_v) \sigma_{X_u X_v}$	ω_{X_u}	$\rho_{VAR}^E(X_u/X_N)$	Facteur de diversification
Somme des Risques Standalone	8,186,402		100%	4,056,766	50%
Taux d'Intérêts	406,741	-200,872,440,982	0.1%	3,709	1%
Change	240,712	-82,313,002,487	-0.8%	-31,291	-13%
Spreads	1,851,243	5,374,325,975,936	43.7%	1,770,942	96%
Inflation	924,810	-170,457,623,793	-1.0%	-40,144	-4%
Actions	922,115	2,082,818,069,973	16.4%	666,820	72%
Immobilier	449,665	742,586,704,173	6.1%	248,466	55%
Taux d'Intérêts Volatilité	506,941	782,333,124,952	6.3%	256,179	51%
Actions Volatilité	412,189	668,511,024,324	5.4%	217,079	53%
crédit	662,682	1,278,395,562,398	10.4%	423,591	64%
Mortalité	7,491	-963,526,397	0.0%	-187	-3%
Mortalité Catastrophe	18,691	15,557,513,268	0.1%	5,340	29%
Morbidité	22,411	6,955,735,446	0.1%	2,226	10%
Morbidité Catastrophe	36,396	44,253,952,021	0.4%	14,501	40%
Longévité	648,800	475,420,585,822	4.9%	198,123	31%
Rachats	116,881	69,042,403,628	0.6%	22,823	20%
Rachats Massifs	362,214	193,841,110,523	1.6%	66,725	18%
Coûts	369,671	444,087,049,236	3.5%	141,970	38%
Opérationnel	226,749	271,542,941,122	2.2%	89,893	40%

Figure 3.21 : Application de la méthode d'Euler

Avec une allocation majoritaire de 45%, le risque Spread se diversifie très peu à 96% tandis que les risques de Change, Inflation et Mortalité ont un impact positif dans le SCR global. Les facteurs de diversification semblent plus stables dans la méthode d'Euler et notamment pour les risques actuariels vie. Le risque de Taux se diversifie quasiment complètement avec un facteur de diversification à 1% pendant que le risque spread enregistre la pire diversification avec un facteur de 96%

Les différentes méthodes d'allocation seront comparées dans la partie suivante.

3.4 Comparaison des méthodes

Le résultat des différentes méthodes d'allocation par type de risque est synthétisé dans le tableau ci-dessous :

Allocation SCR		Méthode proportionnelle		Méthode Marginale		Méthode d'Euler	
		α_i	Facteur de diversification	β_i	Facteur de diversification	ω_{X_u}	Facteur de diversification
SCR (milliers €)	4,056,766						
Somme des Risques Standalone	8,186,402	100%	50%	100%	50%	100%	50%
Taux d'Intérêts	406,741	5.0%	50%	4%	42%	0.1%	1%
Change	240,712	2.9%	50%	4%	65%	-0.8%	-13%
Spreads	1,851,243	22.6%	50%	16%	35%	43.7%	96%
Inflation	924,810	11.3%	50%	2%	10%	-1.0%	-4%
Actions	922,115	11.3%	50%	9%	40%	16.4%	72%
Immobilier	449,665	5.5%	50%	6%	54%	6.1%	55%
Taux d'Intérêts Volatilité	506,941	6.2%	50%	6%	47%	6.3%	51%
Actions Volatilité	412,189	5.0%	50%	6%	57%	5.4%	53%
crédit	662,682	8.1%	50%	7%	43%	10.4%	64%
Mortalité	7,491	0.1%	50%	4%	2246%	0.0%	-3%
Mortalité Catastrophe	18,691	0.2%	50%	4%	909%	0.1%	29%
Morbidité	22,411	0.3%	50%	4%	754%	0.1%	10%
Morbidité Catastrophe	36,396	0.4%	50%	4%	475%	0.4%	40%
Longévité	648,800	7.9%	50%	5%	30%	4.9%	31%
Rachats	116,881	1.4%	50%	4%	149%	0.6%	20%
Rachats Massifs	362,214	4.4%	50%	4%	50%	1.6%	18%
Coûts	369,671	4.5%	50%	5%	55%	3.5%	38%
Opérationnel	226,749	2.8%	50%	5%	85%	2.2%	40%

Figure 3.22 : Synthèse des différentes méthodes d'Allocation

Même si le résultat des trois méthodes est assez différent, chacun alloue le capital de solvabilité majoritairement au risque Spread : 23% pour la méthode proportionnelle, 16% pour la méthode marginale et jusqu'à 44% pour la méthode d'Euler. Les diversifications des segments de risques de marché sont majoritairement inférieures à la diversification globale de l'entité pour la méthode d'Euler. Le phénomène est inversé pour les risques non marché.

Par ailleurs, la diversification des segments de risques semble plus cohérente avec la méthode d'Euler dans le sens où cette approche continue intègre en entier les pouvoirs de diversification de chaque segment de risque au risque global. Les méthodes discrètes intègrent soit partiellement les corrélations entre les risques comme dans le cas des approches de Shapley ou marginale, soit ne les intègrent pas du tout avec le calcul proportionnel. De ce fait, la méthode d'Euler est l'approche réglementaire préconisée par le régulateur pour l'allocation du capital par type de risque. A cet effet, cette même approche sera maintenue pour l'allocation par ligne de produits qui sera développée dans le chapitre suivant.

La conséquence principale pour les assureurs de l'utilisation de l'allocation par la méthode d'Euler réside dans le fait que le risque supporté est très majoritairement financier et plus précisément de type Spread (44%), suivi de Actions (16%) contre seulement 0.1% Taux et 5% Longévité. Aussi, ces

facteurs de risques majoritaires en assurance vie se diversifient beaucoup moins que les plus petits risques (96% de facteur de diversification pour le Spread, 72% pour Actions contre 31% pour la Longévité, 1% pour les Taux et 50% au global compagnie). En d'autres termes, nous sommes tentés de dire que les compagnies d'assurance vie peuvent encore améliorer leur risque en adoptant une politique d'investissement qui viserait à réduire leurs volumes de Spread et d'Actions en faveur des instruments de taux par exemple. Mais la réalité est tout autre dans la mesure où les instruments de taux sont tous soumis à un risque de Spread. Plus une compagnie investit sur les instruments de taux, plus elle augmente son risque de Spread, sauf si elle arrive à investir sur des obligations avec des notations élevées de types AAA ou AA, ce qui est très compromettant du point de vue de leur très faible rentabilité. Le risque de Spread se présente donc comme une nécessité pour l'assurance vie. D'autre part, le risque de Spread prend mal en compte les stratégies d'investissements sur le long terme détenus jusqu'à leur échéance des compagnies d'assurance, ce qui rend en réalité leurs conséquences surévaluées en Solvabilité II du point de vue de pas mal de praticiens.

3.5 Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons présenté l'agrégation des segments de risques ainsi que les méthodes usuelles d'allocation du risque diversifié qui en découle. Une agrégation intra-modulaire et puis inter-modulaire est réalisée dans le cadre de la formule standard, alors que des gains et pertes sont estimés avec la méthode de Monte-Carlo et puis une déduction des corrélations via une copule bien choisie dans le cadre de modèle interne. Par ailleurs, l'allocation par la méthode d'Euler est l'approche privilégiée par la réglementation Solvabilité II du fait de sa continuité et de la prise en compte de l'impact marginal infinitésimal de chaque segment de risque. Elle semble proposer une diversification des segments de risques plus stable que dans les autres méthodes. Nous notons aussi que le risque Spread est le risque majoritaire de l'assurance vie. Dans le chapitre qui suit, nous allons encore plus loin que l'allocation par type de risque. En effet nous y proposerons une approche complète de l'allocation par ligne de business du risque diversifié et alloué sur les types de risque par la méthode d'Euler.

4 Proposition de méthode d'allocation par ligne de business : pilotage de la rentabilité

Dans ce chapitre, nous allons proposer une méthode d'allocation du *SCR* sur les différentes lignes de business (*LoB*) basée sur la sensibilité de la Valeur Présente des Flux Futurs (*pvfp*) aux différents facteurs de risques et pour chaque produit d'un portefeuille d'actifs donné. Le travail déjà réalisé dans le chapitre précédent nous sera d'une grande utilité. En effet, il nous a permis de déterminer la quantité de risque standalone et diversifié que supporte chaque segment. Cette allocation "*horizontale*" par segment de risque sera déclinée "*verticale*" sur les lignes de produits qui découlent des différents portefeuilles d'actifs.

Dans le cadre du pilotage de la rentabilité, cette vision de *SCR* par *LoB* constitue un réel support décisionnel supplémentaire pour le management des compagnies d'assurances et notamment chez les grands groupes généralistes qui développent une large gamme de produits (Epargne, Retraite, Prévoyance, Santé et Emprunteurs). Aussi, pour les compagnies avec des actionnaires, le capital est une ressource précieuse et il est important de savoir pour les tops managers où allouer ce capital, sur quelles activités en priorité.

En effet, l'allocation du *SCR* par *LoB* permet de quantifier d'une part le risque que supporte chaque ligne de produits dans chaque segment et pour l'entité au global, mais aussi et surtout de mesurer leur rentabilité et de prévoir des actions de pilotage pour améliorer leur profitabilité et ainsi celle de la compagnie. L'Allocation du capital par *LoB* permet ainsi de se projeter sur des problématiques de cession et de rachat de produits en termes d'impact sur le risque global de la compagnie.

Après une présentation de la méthode d'allocation par ligne de business, nous allons développer la méthode d'allocation du risque standalone via la sensibilité de la *pvfp* aux différents segments de risques et pour chaque produit avec une distinction entre les risques de marché et les risques non-marché. Nous évoquerons par la suite la problématique de diversification par la matrice de corrélation de la compagnie en prenant en compte les portefeuilles d'actifs et les produits qui les composent avant de terminer par une vision de pilotage de la rentabilité.

4.1 Présentation de l'allocation par ligne de business

4.1.1 Définition et contexte

L'allocation du capital de solvabilité au niveau des lignes de Business est basée sur l'existence de plusieurs portefeuilles Actifs/Passifs (appelé aussi « Canton ») que composent une Entité Juridique. En effet, la modélisation des distributions des pertes de fonds propres dans le cadre du calcul du risque est déterminée par portefeuille d'actifs avant d'être agrégée au niveau de la compagnie. Un portefeuille d'actifs regroupe les investissements de plusieurs produits issus de différentes lignes de business. Il est soit Euros (*EUR*), soit Unités de Comptes (*UC*) et peut-être cantonné, c'est-à-dire distribué sur plusieurs produits, ou non-cantonné et réduit à son unique produit. Une ligne de business est un ensemble homogène de produits investis sur différents portefeuilles d'actifs et qui présentent des caractéristiques communes. Un produit est investi sur un « unique » portefeuille d'actifs et est attribué à une « unique » ligne de business.

La principale problématique de l'allocation du capital par *LoB* repose sur la clé d'allocation à utiliser. Dans ce mémoire, nous proposons une allocation basée sur la sensibilité de la Valeur Présente des Flux Futurs (*pvfp*) à chaque segment de risque et pour chaque produit d'un portefeuille d'actifs donné.

A l'instar des méthodes d'allocation par type de risque, l'allocation du capital de solvabilité par *LoB* doit respecter les propriétés de cohérence (vues à la définition 3.3 de la partie 3.3.1). Un traitement spécifique appelé Scaling sera recouru pour faire respecter le critère de « Full Allocation » au niveau de chaque facteur de risque considéré au niveau global de la compagnie. L'allocation du *SCR* par ligne de business peut être schématisé comme ci-dessous :

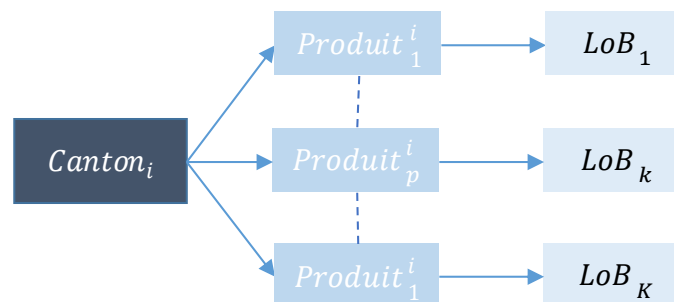


Figure 4.1 : Principe de l'allocation par LoB

Pour la suite, on notera par :

- $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{I}$, les segments aléatoires unitaires de risque qui doivent se partager le risque à allouer
- $\mathcal{N} = \{X_1, \dots, X_n\}$
- $X_{\mathcal{N}} \in \mathcal{I}$: le risque conjoint des n segments qui doivent se partager le risque à allouer
- $\{(Canton_i)_{i=1 \dots Q}\}$: l'ensemble des Q portefeuilles d'actif de la compagnie d'assurance considérée

- $\left\{ \left(\text{Produit}_j^i \right)_{j=1\dots P} \right\}$: l'ensemble des P produits appartenant au portefeuille Canton_i
- $\left\{ \left(\text{LoB}_k \right)_{k=1\dots K} \right\}$: l'ensemble des K LoB de la compagnie considérée
- $\left(\text{Scaling}_i(X_j) \right)_{j=1\dots n}$: le montant de Scaling du segment de risque X_j , c'est-à-dire le montant de correction à apporter à la somme des capitaux des portefeuilles d'actifs pour satisfaire la propriété de « full allocation » au niveau de chaque segment de risque. Cette notion est développée dans la partie 4.1.3 ci-après.
- $\left(\text{Scaling}_i^k(X_j) \right)_{j=1\dots n}$: le montant de Scaling du segment de risque X_j alloué au produit k du Canton_i
- $\left(\left(\left(\text{Sensi}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) \right)_{j=1\dots n} \right)_{i=1\dots Q} \right)_{k=1\dots P}$: la sensibilité du produit i au facteur de risque X_j et au sein du Canton_i

➤ **La propriété de « Full Allocation » pour les risques standalones**

- Pour chaque portefeuille d'actif Canton_i et pour chaque segment de risque X_j , la propriété de « Full Allocation » de Canton_i pour X_j est vérifiée par la formule suivante :

$$\rho_{\text{Canton}_i}(X_j) = \sum_{k=1}^P \rho_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j)$$

Avec :

$$\rho_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) = \text{Sensi}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) \times \rho_{\text{Canton}_i}(X_j)$$

- Pour chaque segment de risque X_j , la propriété de « Full Allocation » de X_j sera donnée par la formule suivante :

$$\rho(X_j) = \sum_{i=1}^Q \rho_{\text{Canton}_i}(X_j) = \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) + \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \text{Scaling}_i^k(X_j)$$

Puis :

$$\rho(X_j) = \sum_{i=1}^K \rho_{\text{LoB}_i}(X_j)$$

- Et pour la compagnie au global $\mathcal{N} = \{X_1, \dots, X_n\}$, la propriété de « Full Allocation » de $\mathcal{N} = \{X_1, \dots, X_n\}$ sera donnée par la formule suivante :

$$\sum_{j=1}^n \rho(X_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^Q \rho_{\text{Canton}_i}(X_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) + \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \text{Scaling}_i^k(X_j) \right)$$

Puis :

$$\sum_{j=1}^n \rho(X_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K \rho_{\text{LoB}_i}(X_j)$$

➤ **La propriété de « Full Allocation » pour les risques diversifiés**

- Pour chaque portefeuille d'actifs $Canton_i$ et pour chaque segment de risque X_j , la propriété de « Full Allocation » de $Canton_i$ pour X_j est vérifiée par la formule suivante :

$$VaR_{Canton_i}^E (X_j/X_N) = \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^k} (X_j/X_N)$$

- Pour chaque segment de risque X_j , la propriété de « Full Allocation » de X_j est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} VaR^E (X_j/X_N) &= \sum_{i=1}^Q VaR_{Canton_i}^E (X_j/X_N) \\ &= \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^k} (X_j/X_N) + \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P Scaling_i^k (X_j/X_N) \end{aligned}$$

Puis :

$$VaR^E (X_j/X_N) = \sum_{k=i}^K \rho_{LoB_i} (X_j/X_N)$$

- Et pour la compagnie au global X_N , la propriété de « Full Allocation » de X_N est donnée par la formule suivante :

$$\rho (X_N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^Q VaR_{Canton_i}^E (X_j/X_N) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^k} + \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P Scaling_i^k (X_j/X_N) \right)$$

Puis :

$$\rho (X_N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K VaR_{LoB_i}^E (X_j/X_N)$$

4.1.2 Les différentes LoB de l'assurance de Personnes

L'allocation par Lobs proposée dans ce mémoire traite des produits d'assurance de personnes. L'entité étudiée en application propose toutes les gammes de produits d'assurance de personnes comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Ligne de Business
Emprunteur Collectif
Emprunteur Individuel
Epargne Individuelle
Prevoyance Collective
Prevoyance Individuelle
Retraite Collective
Retraite Individuelle
Sante Collective
Sante Individuelle

Figure 4.2 : Représentation des LoB en Assurance de Personnes

4.1.3 De la vision compagnie à la vision portefeuille : le principe de Scaling

Le SCR est modélisé par portefeuille d'actifs avant d'être agrégé au niveau compagnie réglementaire. En effet, chaque portefeuille d'actifs engendre sa propre diversification « horizontale » entre les risques à travers sa propre matrice de corrélation entre les types de risques. Intuitivement, le numéro de simulation qui correspond à la VaR pour chaque portefeuille d'actifs est différent. Il en va de même pour celui de l'entité juridique au global. Un bénéfice de diversification « verticale » est ainsi naturellement généré lors de l'agrégation de tous les portefeuilles d'actifs au niveau du type de risque de la compagnie : la somme « verticale » des risques standalones par portefeuille d'actifs de chaque segment de risque est supérieure au risque standalone de ce même segment vu globalement au niveau de la compagnie. Ce qui génère un montant de Scaling pour chaque type de risque au niveau de la compagnie à reventiler sur tous les portefeuilles et leurs produits respectifs. Ce montant de Scaling est donné par :

- Pour le risque X_j en vision standalone :

$$Scaling (X_j) = \rho (X_j) - \sum_{i=1}^Q \rho_{Canton_i} (X_j)$$

- Pour le risque X_j en vision diversifié :

$$Scaling (X_j/X_N) = \rho (X_j/X_N) - \sum_{i=1}^Q VaR_{Canton_i}^E (X_j/X_N)$$

	Risque standalone		Risque diversifié	
	X_i	X_i	X_N	X_i
	$\sum_{i=1}^n \rho (X_i)$	$\rho (X_i)$	$\rho (X_N)$	$VaR^E (X_i/X_N)$
	=	=	=	=
	$\sum_{i=1}^n Scaling (X_i)$	$Scaling (X_i)$	$\sum_{i=1}^n Scaling (X_j/X_N)$	$Scaling (X_i)$
	+	+	+	+
Canton₁	$\sum_{i=1}^n \rho_{Canton_1} (X_i)$	$\rho_{Canton_1} (X_i)$	$\sum_{i=1}^n \rho_{Canton_1} (X_N)$	$VaR_{Canton_1}^E (X_i/X_N)$
	$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \end{matrix}$
Canton_Q	$\sum_{i=1}^n \rho_{Canton_Q} (X_i)$	$\rho_{Canton_Q} (X_i)$	$\sum_{i=1}^n \rho_{Canton_Q} (X_N)$	$VaR_{Canton_Q}^E (X_i/X_N)$

Figure 4.3 : Schéma du principe de Scaling

Le principe de l'allocation par LoB proposée est détaillé dans la partie ci-après.

4.1.4 Principe de l'allocation par ligne de Business

La méthodologie d'allocation du capital de solvabilité par *LoB* proposée dans le cadre de ce mémoire est basée sur la sensibilité de la Valeur Présente des Flux Futurs (*pvfp*) aux différents facteurs de risques et pour chaque produit d'un portefeuille d'actifs donné. Cette sensibilité correspond donc à l'allocation du risque de perte (à la suite des chocs réalisés sur les facteurs de risques) de résultats futurs pour chaque segment de risque aux différents produits du canton. Alors que la Valeur Présente des Flux Futurs d'un produit donné correspond aux résultats annuels futurs de l'assureur estimés sur ce produit jusqu'à son extinction. Ces résultats futurs sont ramenés (actualisés) à la date d'aujourd'hui. Par la suite, on appellera sensibilité du produit *i*, la contribution (ou le poids) au risque de perte de résultat du produit *i* au sein du canton considéré qui le comprend. La sensibilité sera utilisée comme clé d'allocation du capital de solvabilité standalone de chaque facteur de risque par produit et puis par déduction pour chaque *LoB*.

L'avantage de l'utilisation de cette sensibilité comme clé d'allocation du capital par produit réside sur le fait que c'est un recalcul du risque à la maille produit. Même si ce recalcul du risque unitaire est différent du calcul officiel du modèle interne, il constitue la plus proche référence en termes d'allocation. Plusieurs autres clés basées sur des stocks pourraient être utilisées, en l'occurrence les Provisions Techniques ou les *BEL*, mais celles-ci seraient cantonnées uniquement à une partie du résultat. Nous verrons plus tard dans le mémoire que les clés d'allocations basées sur ces indicateurs de volumétrie ont finalement des dynamiques assez proches de celles de la méthodologie proposée dans ce mémoire, mais enregistrent des disparités non négligeables entre l'épargne et la retraite.

Cette procédure d'allocation sera déclinée en deux phases qui consistent d'abord à allouer les risques standalones unitaires des segments de risque via les sensibilités et avec la prise en compte des Scalings nécessaires à la propriété de « **Full Allocation** » et puis de les agréger avec la matrice de corrélation de la compagnie considérée. Un second Scaling est effectué pour respecter la propriété de « Full Allocation » du risque diversifié de chaque facteur de risque.

a Principe d'allocation du risque standalone

Comme représentée sur la figure ci-dessous, cette phase se décline sous trois étapes :

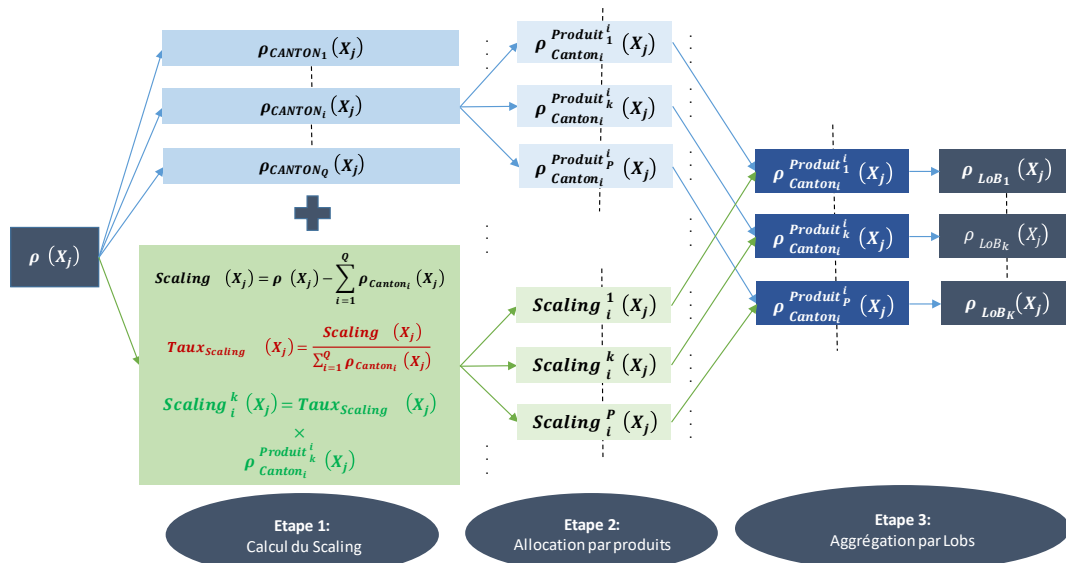


Figure 4.4 : Principe d'allocation des risques standalones

- **Calcul des Scalings des facteurs de risques** : comme nous l'avons déjà vu auparavant, le Scaling correspond majoritairement au bénéfice de diversification « verticale » généré lors de l'agrégation des portefeuilles d'actifs au niveau de la compagnie. Les montants de risques standalones par portefeuille d'actif proviennent du modèle interne au même titre que les risques par entité. Le fait de calculer un taux de Scaling et de l'appliquer en plus au montant de risque déjà alloué par produit permet de conserver cette même allocation pour le Scaling.
- **Allocation par produits** : cette étape consiste à allouer les risques standalones par portefeuille provenant du modèle interne sur les différents produits en utilisant les sensibilités. Puis un taux de Scaling unique et propre à chaque segment de risque est appliqué à toutes les lignes de produits concernés par le portefeuille d'actifs pour garantir la propriété de « Full Allocation ».
- **Agrégation par LoB** : Pour chaque produit du Canton considéré, on additionne la ligne de l'allocation provenant du montant d'origine modèle interne et celui du Scaling pour en faire une seule. Cette somme d'allocation est affectée à la LoB à laquelle le produit appartient. L'agrégation du montant de risque standalone alloué à une LoB est la somme de toutes les allocations vers tous les produits de la LoB en l'occurrence et dans tous les portefeuilles d'actifs.

b Principe d'allocation de la diversification

La phase de diversification se décline à son tour aussi en trois étapes, comme indiqué sur la figure suivante :

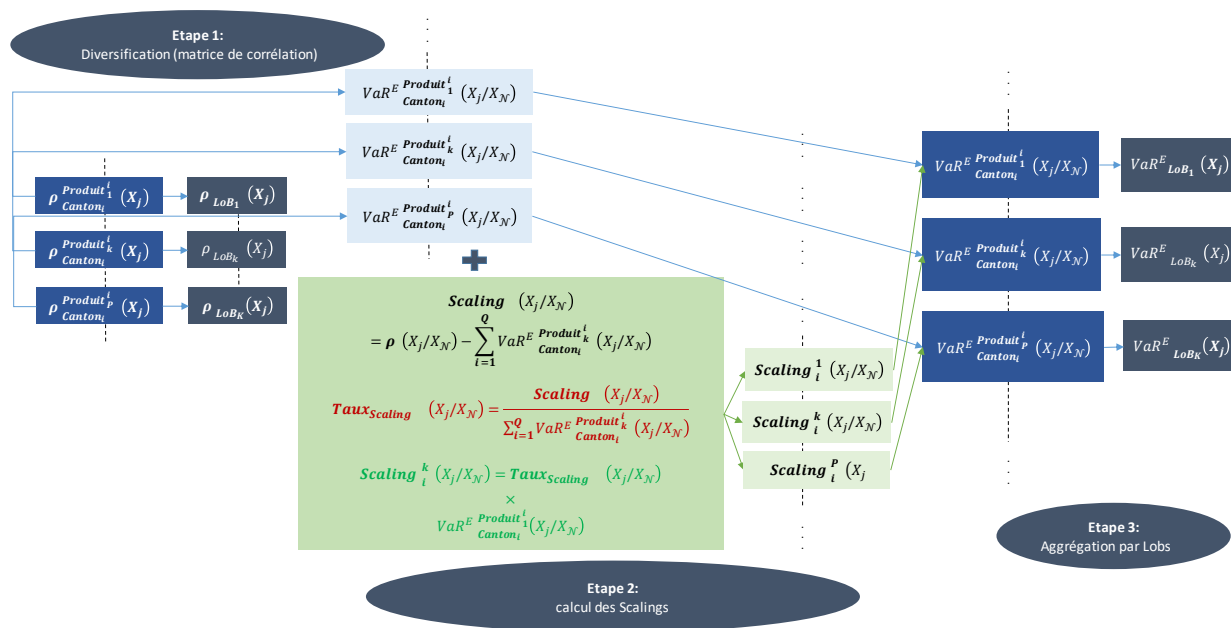


Figure 4.5 : Principe d'allocation des risques diversifiés

- **Diversification par la matrice de corrélation de la compagnie** : cette étape réalise le produit matriciel des risques standalones par produit par la matrice de corrélation de la compagnie. Ce produit matriciel fournit une première version de la diversification.
- **Calcul des Scalings de diversification** : Un taux de Scaling propre à chaque segment de risque est appliqué à toutes les lignes de produits concernés par le portefeuille d'actifs.

- **Agrégation par LoB** : Pour chaque produit du Canton considéré, on additionne la ligne de l'allocation provenant du montant du produit matriciel et celui du Scaling pour en faire une seule. Puis le principe est le même que pour l'agrégation lors de la phase standalone.

Dans les deux parties suivantes, nous présenterons comment déterminer ces sensibilités en distinguant les sensibilités des facteurs de risques de marché des risques non-marché.

4.2 Sensibilité des risques de marché

Afin de déterminer les sensibilités par produit des risques de marché, nous réalisons différents « Runs » en production dans *ALIM*. Ces différents « Runs » sont paramétrés avec la base de données détaillée du Passif, de l'Actif et des Investissements, mais aussi les scénarios économiques considérés ainsi que les différents chocs pertinents à stresser aux facteurs de risques et les variables des scénarios *BE* (ou scénario central) sur lesquelles portent ces chocs.

Les stress-tests à réaliser consistent à la projection des flux futurs de chaque produit sur un horizon de 60 ans, à la maille portefeuille d'Actif/Produit. Les chocs de volatilité nécessitent 5 000 trajectoires alors que les autres chocs classiques en nécessitent 1 000. Les trajectoires sont réalisées autour de la *VaR* avec autant d'itérations que de chocs prévus.

Les variables stressées à la maille produit et les différents chocs réalisés sur les facteurs de risques sont développés dans la partie qui suit.

4.2.1 Descriptif des variables et des chocs

a Les variables à choquer

Les variables choquées et utilisées sont les suivantes : en sortie de modèle, le scénario central et celui choqué sont observés par Canton et par produits.

- ***pvfp*** (*Present Value of Future Profit*) : ou Valeur Présente des Profits Futurs qui est assimilée à la *NAV* ou les fonds propres par produits.
- ***pv_PPE*** (*Provision Pour Participation aux Excedents*) qui représente la valeur présente de la ***PPE*** future.

La *PPE* est disponible uniquement au global de la compagnie, elle sera ainsi allouée manuellement sur les portefeuilles d'actifs soumis et puis aux produits concernés.

- ***pv_ResCapi*** :
Valeur Présente des produits financiers de la reserve de capitalisation

La *pv_ResCapi* ne sera disponible qu'à la maille compagnie. Un retraitement sera effectué pour l'allouer sur les différents portefeuilles d'actifs qui y sont soumis et puis vers les produits concernés.

- ***pv_Liab*** : qui correspondent au *BEL*
- ***pv_Prime*** : Valeur Présente des primes futures
- ***pv_Reserve*** : Valeur Présente des Provisions Techniques

Ces deux dernières variables $pv_Reserve$ et pv_Prime ne sont pas choquées, seules les BE sont disponibles en sortie de modèle.

Par la suite, on considère un produit comme risqué pour les facteurs de risques de marché si et seulement si :

$$pvfp_{BE} - pvfp_{choc} > 0.$$

En somme, quand un produit est considéré comme risqué, une part du risque provenant du portefeuille d'actifs auquel il appartient lui sera alloué en prorata. Cette allocation sera ajustée le cas échéant de l'allocation de la PPE et de la réserve de capitalisation.

b Les chocs sur les facteurs de risques

Afin de déterminer les montants de risque par produit, les variables $pvfp$, pv_PPE , $pv_ResCapi$ et pv_Liab sont toutes stressées avec les chocs sur les segments de risques suivants :

- **Action** (*Action_Baisse_20*) : ce choc considère une baisse de 20% au niveau des actions.
- **Action Volatilité**: (*Action_VOL_Baisse_25* et *Action_VOL_Hausse_25*) : ce choc considère respectivement une baisse de 25% et une hausse de 25% au niveau des actions.
- **Immobilier** (*Immobilier_Baisse_20*) : ce choc considère une baisse de 20% au niveau des valeurs immobilières.
- **Inflation** (*Inflation_Hausse_100*) : ce choc considère une hausse de 100 bps au niveau de l'inflation.
- **Taux d'Intérêt** (*Intérêt_Hausse_100* et *Intérêt_Baisse_100*) : ces chocs considèrent respectivement une hausse de 100 bps et une baisse de 100 bps au niveau du taux d'intérêt.
- **Taux d'Intérêt Volatilité** (*Intérêt_Vola_Hausse_25* et *Intérêt_Vola_Baisse_25*) : ces chocs considèrent respectivement une hausse de 25% et une baisse de 25% de la volatilité du taux d'intérêt.
- **Change, Spread et Crédit** (*PHPRF_SII*) : ce choc est une agrégation de scénario ATS + choc Crédit + choc Crédit Spread. En effet, ces risques ne sont pas modélisés dans le modèle interne, une méthodologie basée sur l'absorption est nécessaire.

Une fois les chocs de variables de risques réalisés sur les segments de risques de marché, nous pouvons déterminer les sensibilités sur ces mêmes segments.

4.2.2 Sensibilité par ligne de Business

Dans cette partie, nous considérons en plus les suivantes :

- $\left(\left(\left(\text{Sensi_RM}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k} (X_j) \right)_{j=1\dots n} \right)_{i=1\dots Q} \right)_{k=1\dots P}$: la sensibilité de $pvfp$ au risque marché X_j pour le produit k du Canton_i

- $\left(\left(\left(RM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) \right)_{j=1\dots n} \right)_{i=1\dots Q} \right)_{k=1\dots P}$: le risque marché lié au facteur de risque de marché X_j pour le produit k du $Canton_i$

Alors le risque lié au facteur de risque de marché X_j pour le produit k du $Canton_i$ est définie par :

- **Pour les chocs volatilités** : Action Volatilité et taux d'Intérêts Volatilité

$$RM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = \text{Max} \left[\text{Max} (pvfp_{BE} - pvfp_{Hausse} (X_j); 0); \text{Max} (pvfp_{BE} - pvfp_{baisse} (X_j); 0) \right]$$

En effet, un choc volatilité permet d'évaluer mieux le risque dans le sens où les deux sens de variations sont pris en compte. Considérer le maximum du risque entre un scénario de hausse et de baisse revient à maintenir le facteur (hausse ou baisse) qui génère le risque. En effet, un facteur de risque ne peut générer un risque en cas de baisse et de hausse en même temps, mais uniquement un seul.

- **Pour les autres chocs** :

$$RM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = \text{Max} (pvfp_{BE} - pvfp_{Choc} (X_j); 0)$$

La sensibilité liée au facteur de risque de marché X_j pour le produit k du $Canton_i$ se déduit donc par :

$$Sensi_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = \frac{RM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}{\sum_{k=1}^P RM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}$$

Une fois que les sensibilités aux chocs sont calculées, nous pouvons intégrer les impacts *PPE* et produits financiers des réserves de capitalisation. Un nouveau risque sera donc ainsi évalué avec une nouvelle réalité risqué-non risqué à reconsidérer.

4.2.3 Prise en compte de la Provision Pour Participation aux Excédent (PPE)

Par soucis de simplification dans le modèle Actif-Passif, les variations de *PPE* liées à la Crediting Strategy sont portées, uniquement par le Portefeuille Général de l'assurance vie (*PG Vie*) alors que les pertes permettant de verser moins de Participation aux Bénéfices et reprendre plus de *PPE* proviennent en partie des autres fonds soumis au Minimum règlementaire. Rappelons que la Crediting Strategy correspond à la politique de participation aux bénéfices mise en place par une compagnie d'assurance pour ses contrats en euros. Elle tient compte des rendements à l'actif et la mise en règle par rapport à la réglementation contractuelle de minimum de Participation aux Bénéfices à redistribuer aux assurés.

Un retraitement manuel sera ainsi effectué pour allouer en partie le risque de pertes de *PPE* sur les différents autres portefeuilles d'actifs soumis règlementairement et puis vers les produits concernés. D'un point de vue analytique, on allouera la *PPE* uniquement aux risques de marché dans le sens où c'est un quotient du résultat financier qui provient des placements financiers. Pour chaque facteur de risque, la variation de *PPE* à allouer aux produits est donnée par :

$$RM_PPE_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) = pv_PPE_{BE} - pv_PPE_{Choc}(X_j)$$

Deux conditions sont nécessaires pour qu'un produit soit éligible à une allocation de la variation de PPE:

- Le produit k du $Canton_i$ doit être risqué pour le choc sur le facteur de risque X_j

$$pvfp_{BE} - pvfp_{Choc}(X_j) > 0$$

En d'autres termes :

$$\mathbb{1}_{[Risqué(Produit^i_k)]} = 1$$

- Le produit k du $Canton_i$ doit être soumis à de la Participation minimum règlementaire

$$\mathbb{1}_{[minPB(Produit^i_k)]} = 1$$

Sous ces deux conditions, la sensibilité de la variation de la PPE est donnée par :

$$Sensi_PPE_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) = \frac{\mathbb{1}_{[minPB(Produit^i_k)]} \times \mathbb{1}_{[Risqué(Produit^i_k)]} \times RM_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j)}{\sum_{k=1}^P \left[\mathbb{1}_{[minPB(Produit^i_k)]} \times \mathbb{1}_{[Risqué(Produit^i_k)]} \times RM_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) \right]}$$

La PPE est allouée sur la base de la Valeur Présente des résultats futurs $pvfp$. Ce choix est principalement motivé par le fait que la PPE est une redistribution d'une partie de ce résultat aux assurés qui en sont éligibles. Cette clé d'allocation est donc justifiée du fait de sa corrélation directe avec la PPE à redistribuer.

4.2.4 Prise en compte des produits financiers de la réserve de capitalisation

Également par soucis de simplification, La $pv_ResCapi$ est disponible uniquement à la maille compagnie en sortie de modèle. Au même titre que la PPE, la variation des produits financiers provenant de la réserve de capitalisation a aussi besoin d'être allouée. Mais celle-ci sera destinée, au prorata de la Valeur Présente des BEL choquée, uniquement au produit risqué et appartenant au Portefeuille Général PG :

$$\mathbb{1}_{[PG]} = 1$$

Cette variation s'écrit :

$$RM_ResCapi_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) = pv_ResCapi_{BE} - pv_ResCapi_{Choc}(X_j)$$

Sous ces deux conditions, la sensibilité de la variation des produits financiers provenant de la réserve de capitalisation s'écrit :

$$Sensi_ResCapi_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) = \frac{\mathbb{1}_{[PG]} \times \mathbb{1}_{[Risqué(Produit^i_k)]} \times pv_Liab_{Choc}^{Produit^i_k}(X_j)}{\sum_{k=1}^P \left[\mathbb{1}_{[PG]} \times \mathbb{1}_{[Risqué(Produit^i_k)]} \times pv_Liab_{Choc}^{Produit^i_k}(X_j) \right]}$$

Le choix d'allocation de ces produits financiers portant sur les *BEL* repose sur la corrélation directe entre le résultat financier et les Provisions Techniques. En effet, les *BEL* sont le reflet au passif des investissements à l'actif qui ont généré ce résultat financier.

En somme, nous pouvons donc déduire le Risque global après allocation de la PPE et des produits financiers issus de la réserve de capitalisation par :

$$RM_{Global}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j) = Max \left[RM_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) + Sensi_{PPE}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j) \times RM_{PPE}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j) + Sensi_{ResCapi}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j) \times RM_{ResCapi}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j); 0 \right]$$

Un nouveau risque qui peut changer de sens est calculé post-allocation des écarts de produits financiers et de *PPE*. Il est donc à considérer uniquement quand il est positif, d'où la prise en compte du maximum avec zéro. Les sensibilités définitives se déduisent ainsi par :

$$Sensi_{Def}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j) = \frac{RM_{Global}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j)}{\sum_{k=1}^P RM_{Global}^{Produit^i_k}_{Canton_i}(X_j)}$$

En guise d'exemple, nous pouvons considérer le portefeuille d'actifs que nous appellerons *Ex_Canton* issu de nos données. Ce canton possède quatre produits Epargne Individuelle. Les sensibilités de *pvfp* pour chaque segment de risque et pour tous les produits de ce canton sont représentées sur la figure ci-dessous. On peut bien y apercevoir que les risques Crédit, Spread et Change sont alloués avec les mêmes clés d'allocation. Ce portefeuille ne possède pas de risque inflation.

Canton	Produit	LoB	Action	Taux d'intérêt	Inflation	Immobilier	Action Volatilité	Taux d'intérêt Volatilité	Change	Crédit	Sprad
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod1	Epargne Individuelle	20%	20%	0%	2%	21%	19%	20%	20%	20%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod2	Epargne Individuelle	2%	6%	0%	7%	5%	5%	5%	5%	5%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod3	Epargne Individuelle	50%	52%	0%	50%	52%	53%	51%	51%	51%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod4	Epargne Individuelle	28%	22%	0%	42%	22%	22%	24%	24%	24%
			100%	100%	0%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Figure 4.6 : Sensibilité des risques de marché exemple canton

La sensibilité des risques non-marché nécessite une approche différente du fait de la différence de modélisation de ces risques comparés aux risques de marché. Cette approche est présentée dans la partie suivante.

4.3 Sensibilité des risques non marché

Pour les risques non-marché, seuls les *BEL* sont choqués. Les paramètres de choc sont calibrés une fois par an.

Par la suite, on considère un produit comme risqué pour les facteurs de risques non-marché si et seulement si :

$$pv_{Liab}_{choc} - pv_{Liab}_{BE} > 0.$$

On notera le risque correspondant pour tout facteur de risque non-marché X_j par :

$$RNM_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j) = \text{Max}(pv_Liab_{choc}(X_j) - pv_Liab_{BE}; 0)$$

Et pour chaque choc élémentaire Y_j :

$$Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(Y_j) = \text{Max}(pv_Liab_{choc}(Y_j) - pv_Liab_{BE}; 0)$$

4.3.1 Descriptif des variables et des chocs

Afin de déterminer les montants de risque par produits, la variable **pv_Liab** est stressée avec 22 chocs élémentaires agrégés finalement sur 8 segments de risques non-marché. Les chocs sont définis ci-dessous :

➤ **Mortalité** : *MORT_LEVEL_UP* (Choc de niveau sur la mortalité chaque année) et *MORT_LEVEL_UP* (Choc de niveau sur la première année).

Ce choc est déterminé par :

$$\sqrt{\text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(MORT_LEVEL_UP))^2 + \text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(MORT_VOLA_UP))^2}$$

➤ **Mortalité Catastrophe** : *MORT_CALAM* qui est un choc extrême en cas de catastrophe sur la mortalité.

Ce choc est défini par :

$$\text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(MORT_CALAM))$$

➤ **Longévité** : *LONG_TREND_DOWN* (Choc de niveau sur la longévité de la première année) et *LONG_VOL_DOWN* (Choc de dérive par rapport aux hypothèses sur la longévité).

On définit ce choc par :

$$\sqrt{\text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(LONG_TREND_DOWN))^2 + \text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(LONG_VOLA_DOWN))^2}$$

➤ **Rachats** : *PH_BEH_LEVEL_DOWN* (Choc de niveau à la baisse sur les rachats chaque année) et *PH_BEH_LEVEL_UP* (Choc de niveau à la hausse sur les rachats chaque année).

Ce choc est donné par :

$$\sqrt{\text{MAX}(\text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(PH_BEH_LEVEL_DOWN)), \text{MAX}(0, Choc_{Canton_i}^{Produit^i_k}(PH_BEH_LEVEL_UP)))}$$

➤ **Rachats Massifs** : *PH_BEH_MASS* (Choc extrême en cas de rachat massif), *PH_BEH_VOLA_DOWN* (Choc de niveau à la baisse sur les rachats chaque année) et *PH_BEH_VOLA_UP* (Choc de niveau à la hausse sur les rachats chaque année).

Il est défini par :

$$\sqrt{\text{MAX}(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{PH_BEH_VOLA_UP})), \text{MAX}(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{PH_BEH_VOLA_DOWN})) + \text{MAX}(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{PH_BEH_MASS}))}$$

➤ **Morbidité**

MORB_LEVEL, DISAB_LEVEL, MAINT_INCAP_LEVEL, MAINT_EMP, MAINT_INVAL_LEVEL.

On le définit par :

$$\sqrt{(\text{MORB_LEVEL}, \text{DISAB_LEVEL}, \text{MAINT_INCAP_LEVEL}, \text{MAINT_EMP}, \text{MAINT_INVAL_LEVEL}) * (\text{MORB_LEVEL_Matrix} * (\text{MORB_LEVEL}, \text{DISAB_LEVEL}, \text{MAINT_INCAP_LEVEL}, \text{MAINT_EMP}, \text{MAINT_INVAL_LEVEL})^t)}$$

Où

- $(\text{MORB_LEVEL}, \text{DISAB_LEVEL}, \text{MAINT_INCAP_LEVEL}, \text{MAINT_EMP}, \text{MAINT_INVAL_LEVEL})$ est la matrice ligne constituée des valeurs des impacts du choc de chacun de ces facteurs de risques sur le scénario central,

- $(\text{MORB_LEVEL}, \text{DISAB_LEVEL}, \text{MAINT_INCAP_LEVEL}, \text{MAINT_EMP}, \text{MAINT_INVAL_LEVEL})^t$ est la matrice colonne, transposée de la précédente,

- *MORB_LEVEL_Matrix* est la matrice d'agrégation du risque MORBIDITE

➤ **Morbidité Catastrophe :**

DISAB_VOLA, MAINT_INVAL_VOLA, MAINT_INCAP_VOLA, MORB_CALAM

➤ **Coûts :** *MAINT_EXP_LEVEL* (9% des frais fixes de gestion sur toute la durée de la projection) et *NEW_BUS_EXP* (Risque d'augmentation des frais fixes d'acquisition de 1^{ère} année).

➤ Ce choc est donné par :

$$\sqrt{\text{MAX}\left(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{MAINT_EXE_LEVEL})\right)^2 + \text{MAX}\left(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{NEW_BUS_EXE})\right)^2 + 2 * 50\% * \text{MAX}\left(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{MAINT_EXE_LEVEL})\right) * \text{MAX}\left(0, \text{Choc}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(\text{NEW_BUS_EXE})\right)}$$

4.3.2 Sensibilité par ligne de business

Dans cette partie, nous considérons en plus les suivantes :

- $\left(\left(\left(\text{Sensi_RNM}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j)\right)_{j=1\dots n}\right)_{i=1\dots Q}\right)_{k=1\dots P}$: la sensibilité de *pv_Liab* au risque non-marché X_j pour le produit k du *Canton_i*

La sensibilité liée au facteur de risque non-marché X_j pour le produit k du *Canton_i* se déduit donc par :

$$\text{Sensi_NM}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j) = \frac{\text{RNM}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j)}{\sum_{k=1}^P \text{RNM}_{\text{Canton}_i}^{\text{Produit}_k^i}(X_j)}$$

Si nous reprenons le portefeuille *Ex_Canton* en guise d'exemple, les sensibilités de *pv_Liab* pour chaque segment de risque non-marché et pour tous les produits de ce canton sont représentées sur la figure ci-dessous. On peut bien y apercevoir que ce portefeuille ne possède pas de risque Longévité, Mortalité, Morbidité et Morbidité Catastrophique.

Canton	Produit	LoB	Longévité	Rachats	Rachats massifs	Coûts	Mortalité	Mortalité Catastrophique	Morbidité	Morbidité Catastrophique
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod1	Epargne Individuelle	0%	43%	0%	20%	0%	27%	0%	0%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod2	Epargne Individuelle	0%	14%	21%	4%	0%	12%	0%	0%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod3	Epargne Individuelle	0%	21%	54%	49%	0%	62%	0%	0%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod4	Epargne Individuelle	0%	22%	25%	27%	0%	0%	0%	0%
			0%	100%	100%	100%	0%	100%	0%	0%

Figure 4.7 : Sensibilité des risques non-marché ASAC

4.4 Particularité du Risque opérationnel

Le risque opérationnel est disponible uniquement à la maille compagnie en sortie du modèle interne. Il est directement alloué en se basant sur la somme des *BEL* et des primes. Ce choix d'allocation est inspiré d'avis d'experts. Le risque opérationnel est donc alloué selon la formule ci-après :

$$Sensi_{Canton_i}^{Produit^i_k} (Opérationnel) = \frac{pv_Liab_{BE}^{Produit^i_k} + pv_Prime_{BE}^{Produit^i_k}}{\sum_{k=1}^P (pv_Liab_{BE}^{Produit^i_k} + pv_Prime_{BE}^{Produit^i_k})}$$

Si nous reprenons l'exemple du portefeuille *Ex_Canton* sa part d'allocation au risque opérationnel est donnée par :

Canton	Produit	LoB	Opérationnel
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod1	Epargne Individuelle	1%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod2	Epargne Individuelle	0%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod3	Epargne Individuelle	2%
Ex_Canton	Ex_Canton_Prod4	Epargne Individuelle	2%
			5%

Figure 4.8 : Sensibilité du risque opérationnel ASAC

Le Canton *Ex_Canton* consomme alors au global 5% du risque standalone opérationnel.

4.5 Allocation du Risque standalone par ligne de business

Nous rappelons que l'allocation des risques standalone est basée sur les sensibilités aux segments de risques. Ainsi pour un *Canton_i* et pour le facteur de risque *X_j*, le risque standalone alloué au produit *k* est donné par :

➤ Si *X_j* est un risque de marché :

$$\rho_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = Sensi_Def_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) \times \rho_{Canton_i} (X_j)$$

Et :

$$Scaling_i^k (X_j) = Sensi_Def_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) \times Scaling (X_j)$$

Avec :

$$Sensi_Def_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = \frac{RM_Global_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}{\sum_{k=1}^P RM_Global_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}$$

➤ Si X_j est un risque non-marché :

$$\rho_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = Sensi_NM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) \times \rho_{Canton_i} (X_j)$$

Avec :

$$Sensi_NM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j) = \frac{RNM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}{\sum_{k=1}^P RNM_{Canton_i}^{Produit^i_k} (X_j)}$$

➤ Pour le risque opérationnel :

$$\rho_{Canton_i}^{Produit^i_k} (Opérationnel) = Sensi_{Canton_i}^{Produit^i_k} (Opérationnel) \times \rho_{Canton_i} (X_j)$$

Avec :

$$Sensi_{Canton_i}^{Produit^i_k} (Opérationnel) = \frac{pv_Liab_{BE}^{Produit^i_k} + pv_Prime_{BE}^{Produit^i_k}}{\sum_{k=1}^P (pv_Liab_{BE}^{Produit^i_k} + pv_Prime_{BE}^{Produit^i_k})}$$

➤ Puis, la vision par **LoB** :

$$\rho (X_j) = \sum_{i=1}^K \rho_{LoB_i} (X_j)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho (X_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K \rho_{LoB_i} (X_j)$$

Le résultat de l'allocation du risque standalone par ligne de business est synthétisé dans le tableau ci-dessous : le taux de Scaling standalone calculé est de -18%.

Le risque standalone est majoritairement alloué à 65% à l'Epargne Individuelle qui est le Business majoritaire d'Allianz couvrant à elle seule 72% des BEL. La retraite collective arrive en deuxième position avec 21% d'allocation au global. La Retraite individuelle arrive juste après avec 7% du capital alloué. Les LoB Santé et Emprunteur supportent le moins de capital du fait de leur petite taille.

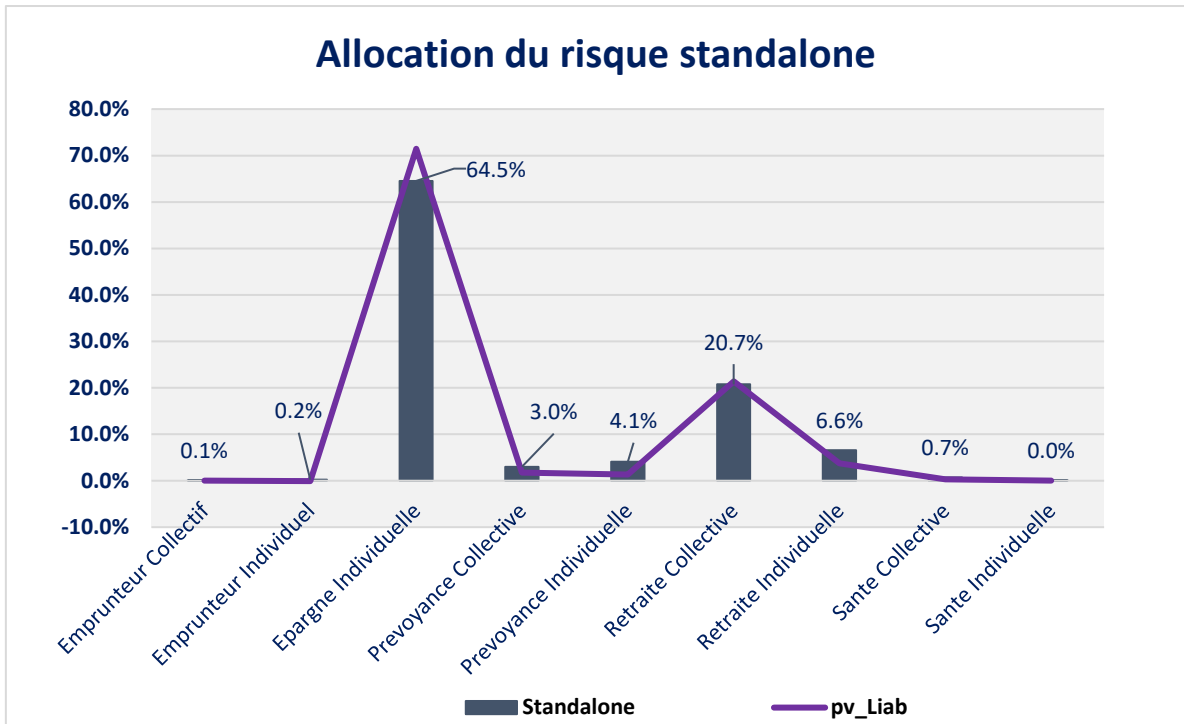


Figure 4.9 : Résultat de l'allocation du risque standalone par LoB

Par ailleurs, nous constatons sur la figure ci-dessous et comme annoncé précédemment que l'allocation du capital standalone par LoB basés sur les *pv_pvfp* a une tendance assez proche de l'allocation basée sur les *pv_Liab* et *pv_Reserve*.

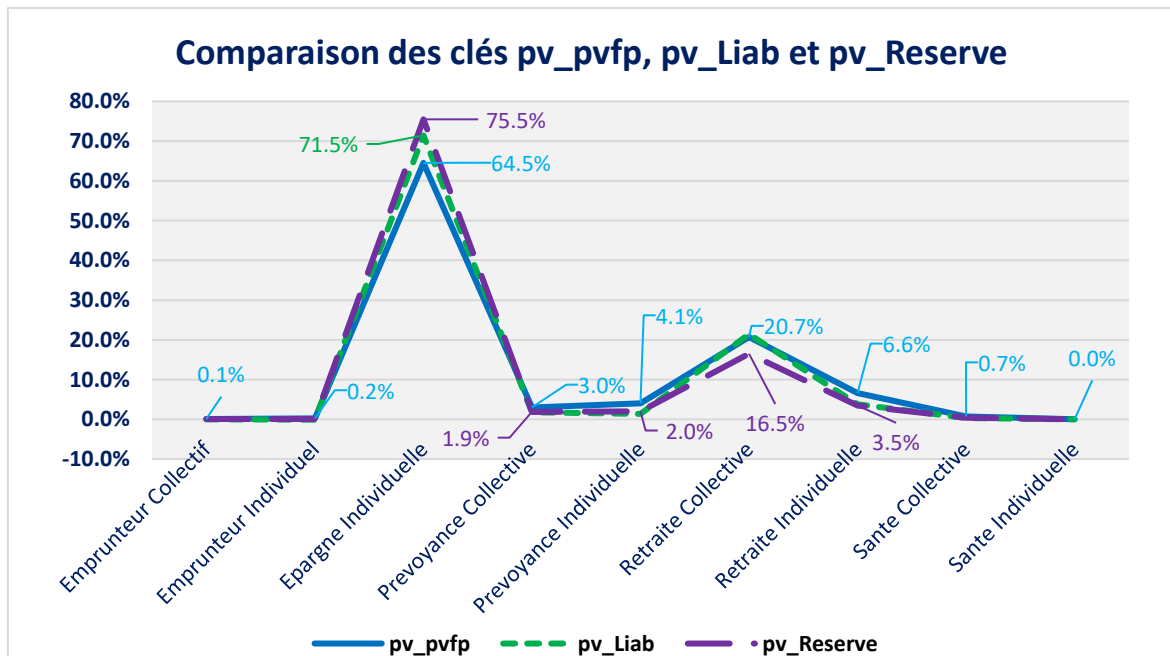


Figure 4.10 : Comparaison des clés standalones *pv_pvfp*, *pv_Liab* et *pv_Reserve*

Cependant, nous enregistrons des disparités importantes au niveau des LoB Epargne Individuelle et Retraite Collective : une clé d'allocation basée sur les *pv_Reserve* attribuerait +11% de risque à

l'épargne en faveur de la retraite et de la prévoyance alors que la *pv_Liab* en affecterait +4%. Nous notons aussi que des clés basées sur les stocks *pv_Liab* et *pv_Reserve* fixeraient l'information de charge de capital rapportée à ces stocks pour toutes les lignes de business du fait de la proportionnalité. Ainsi, il ne serait pas possible d'analyser ce ratio qui fournit une information capitale du risque rapporté aux stocks immobilisés. Ce ratio sera développé plus tard dans ce chapitre.

Le choix de la clé d'allocation participe ainsi au pilotage du risque et de la rentabilité par ligne de business. En effet, dans notre cas de données par exemple, utiliser une clé basée sur les stocks et principalement sur les *pv_Reserve*, affecterait plus de capital à l'Epargne aux dépens de la Retraite et de la Prévoyance. Donc, si améliorer la profitabilité de la Prévoyance est prioritaire sur celle de l'Epargne, basculer les clés de répartition sur les stocks aux dépens des *pv_pvf* serait plus pertinent dans le sens où ce mécanisme permettrait déjà de faire un grand pas pour cet objectif. Ainsi, selon l'appétence du top Manager, le choix de la clé d'allocation peut lui être délégué selon ces différentes options.

Le tableau complet de synthèse du résultat de l'allocation du capital par ligne de business est disponible en Annexe.

L'allocation du capital par ligne de Business est réalisée à un instant donné et reflète la réalité des produits à cet instant bien précis. Ainsi, pour des raisons de cohérence évidentes, il est souhaitable que la méthodologie conserve une certaine stabilité dans le temps. Comme nous pouvons le constater sur la représentation ci-dessous de l'évolution de la clé *pv_pvf* sur les trois dernières années, la pertinence de son choix est aussi basé sur sa sensibilité dans le temps, malgré les différences de politiques d'investissement ou du pilotage du Business entre les années.

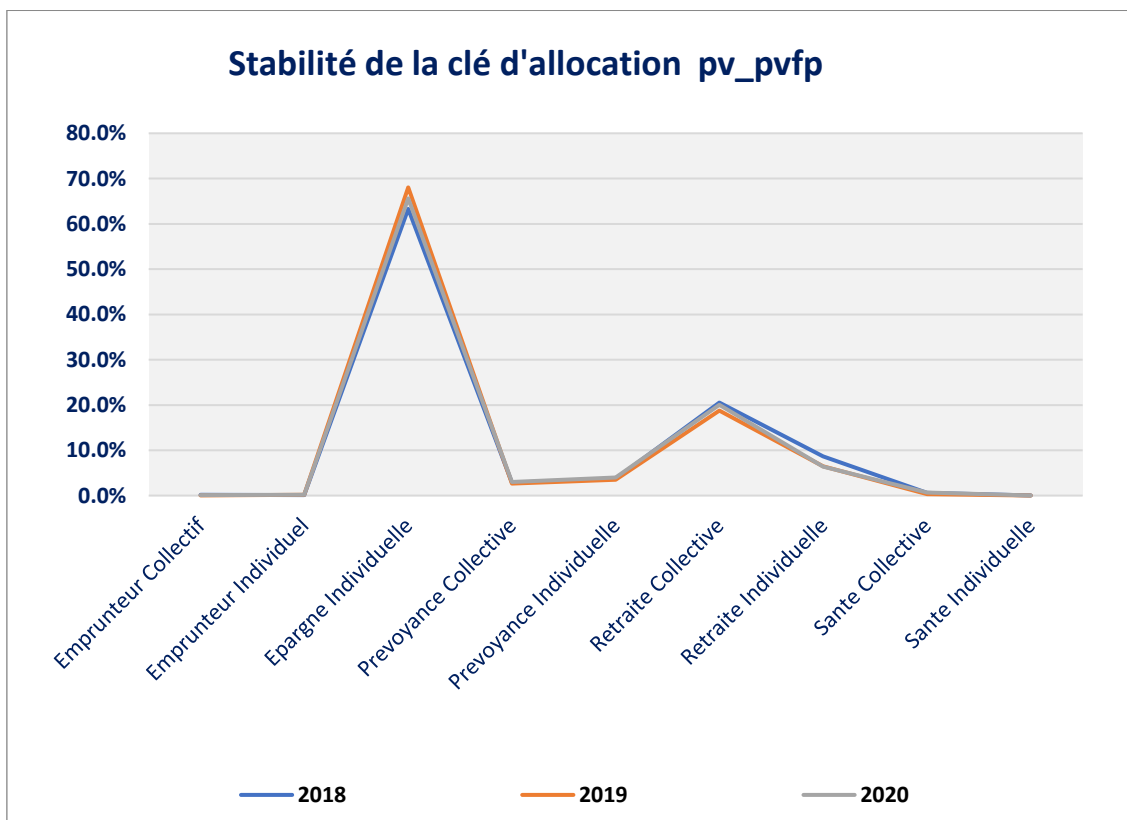


Figure 4.11 : Comparaison des clés standalones *pv_pvf*, *pv_Liab* et *pv_Reserve*

4.6 Calcul de la diversification

4.6.1 Diversification par la méthode d'Euler

Rappelons brièvement dans le cadre de la $VaR_{(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}}(X_{\mathcal{N}}, \alpha)$, le calcul de risque de $\rho_{VaR}^E(X_u/X_{\mathcal{N}})$ par agrégation des composantes unitaires avec la matrice de corrélation $(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}$ est donné par :

$$\rho_{VaR}^E(X_u/X_{\mathcal{N}}) = \omega_{X_u} \times \rho(X_{\mathcal{N}}); \text{ avec}$$

$$\omega_{X_u} = \frac{\sum_{v=1}^n \rho(X_u)\rho(X_v)\sigma_{X_u X_v}}{VaR_{(\rho_{uv})_{u,v=1,\dots,n}}(X_{\mathcal{N}}, \alpha)}$$

Cette formule évaluée pour chaque ligne de produit nous permet de diversifier le risque capital de ce produit au global et de déduire $\rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_{\mathcal{N}})$. Ce capital diversifié sera par la suite alloué sur tous les segments de risques via la méthode d'Euler et de déterminer ainsi les $\rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}})$. Comme nous l'avons annoncé auparavant, cette diversification par produit via la matrice de corrélations issue des scénarios de P&L ne coïncide pas avec celle venant du modèle interne. En d'autres termes, nous avons :

$$\rho(X_j/X_{\mathcal{N}}) \neq \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}})$$

$$\rho(X_{\mathcal{N}}) \neq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}})$$

Cette différence comprend :

- l'écart généré par l'application de la matrice de corrélations simplifiée à un niveau produit et non ajustée dans le modèle interne.
- La diversification des portefeuilles d'investissement au sein de la compagnie.

Pour pallier cette différence et retrouver la propriété de « Full Allocation », on introduit un facteur de Scaling.

$\rho(X_j/X_{\mathcal{N}})$ et $\rho(X_{\mathcal{N}})$ sont donc donnés par :

$$\rho(X_j/X_{\mathcal{N}}) = \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}}) + Scaling(X_j/X_{\mathcal{N}})$$

$$\rho(X_{\mathcal{N}}) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}}) + Scaling(X_j/X_{\mathcal{N}}) \right)$$

Avec :

$$Scaling(X_j/X_{\mathcal{N}}) = \rho(X_j/X_{\mathcal{N}}) - \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{Canton_i}^{Produit^i_k}(X_j/X_{\mathcal{N}})$$

Pour allouer ce Scaling, un taux de Scaling unique pour chaque segment de risque est calculé et appliqué en plus à la diversification par la matrice de corrélations. Il est donné par :

$$\text{Taux_Scaling} (X_j/X_N) = \frac{\rho (X_j/X_N) - \sum_{i=1}^Q \sum_{k=1}^P \rho_{\text{Canton}_i^{\text{Produit}_k^i}} (X_j/X_N)}{\rho (X_j/X_N)}$$

Puis, la vision par **LoB** se dessine par agrégation des produits :

$$\rho (X_j/X_N) = \sum_{i=1}^K \rho_{\text{LoB}_i} (X_j/X_N)$$

$$\rho (X_N) = \sum_{j=1}^n \rho (X_j/X_N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K \rho_{\text{LoB}_i} (X_j/X_N)$$

4.6.2 Application numérique de la diversification

Le résultat de l'allocation du risque diversifié par ligne de business est synthétisé dans le graphique ci-dessous : le taux de Scaling calculé et appliqué est de -6%.

Le tableau complet du résultat diversifié est disponible en Annexe.

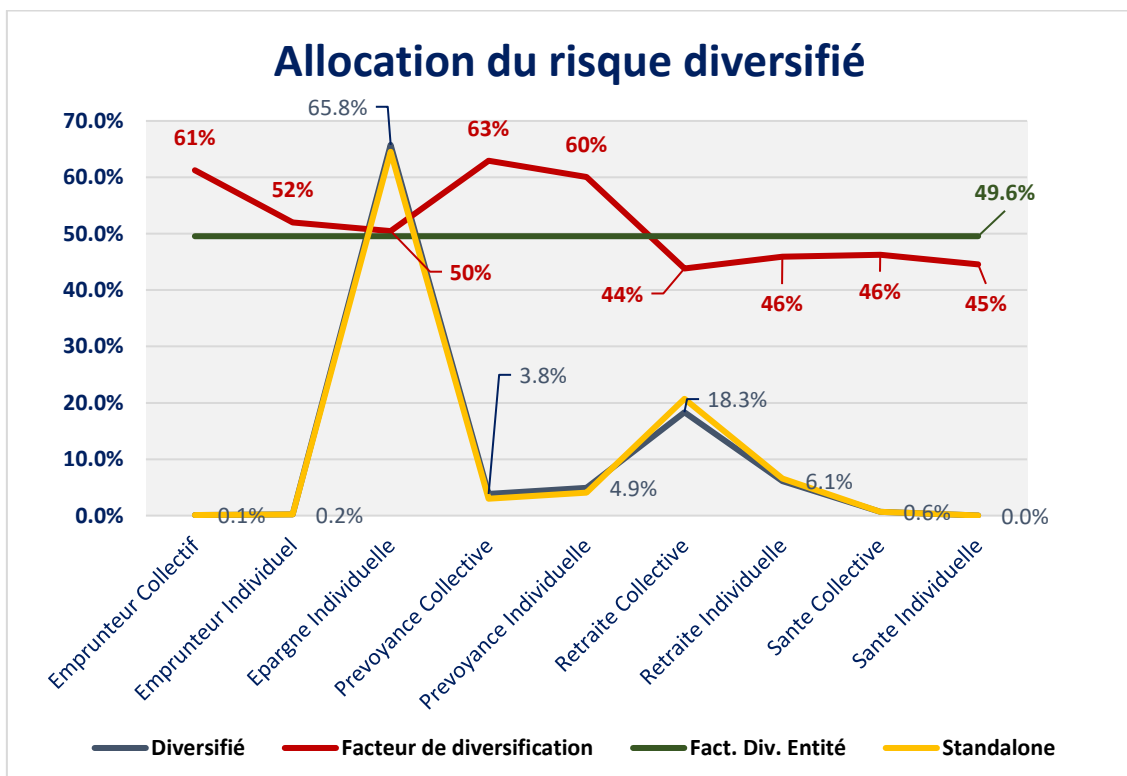


Figure 4.12 : Résultat de l'allocation du risque diversifié par LoB

Le risque diversifié est majoritairement alloué à 66% à l'Epargne Individuelle pour la même principale raison que le risque standalone. La Retraite Collective arrive en deuxième position avec 18% d'allocation au global. Les LoB Santé et Emprunteur supportent le moins de capital.

Par ailleurs, Les *LoB* Epargne Retraite et Santé présentent de meilleures diversifications qui sont supérieures à la diversification moyenne de la compagnie, alors que les autres *LoB* Emprunteur et Prévoyance ont des diversifications plus faibles que l'Entité au global. Cela s'explique par le fait que les produits Epargne et Retraite comportent en partie des produits multi-supports (une part d'unités de comptes) et que les produits Santé ont une durée très courte alors que les autres *LoB* Emprunteur et Prévoyance sont des produits mono-supports avec des durées plus ou moins longues. Ceci se traduit par une baisse de l'allocation du risque diversifié par rapport au standalone sur les *LoB* Epargne Retraite et Santé et une hausse sur les autres *LoB*.

A présent, nous allons introduire la notion de charge de capital. Ce ratio est très bien suivi dans les compagnies d'assurances dans le sens où il mesure le montant de risque supporté rapporté au volume de passif ou de provisions immobilisées. En guise d'information, ce ratio est en général quatre fois plus important pour les contrats en Euros que pour les contrats en unités de comptes. En d'autres termes, les contrats en Euros coûtent quatre fois plus cher en capital que les contrats en unités de comptes. En plus d'une faible rentabilité des contrats en Euros à cause des garanties de valorisation dans un contexte de taux bas, cette disparité pousse les compagnies d'assurances à modifier les profils des contrats d'assurance vie nouvellement commercialisés avec une tendance à améliorer leur taux d'unités de comptes. Comme souligné auparavant, cette information capitale ne serait plus disponible en cas d'utilisation de clés d'allocation basées sur les stocks de *pv_Liab* ou de *pv_Reserve*.

La charge de capital sur les *pv_Liab* et sur les *pv_Reserve* sont représentées ci-dessous :

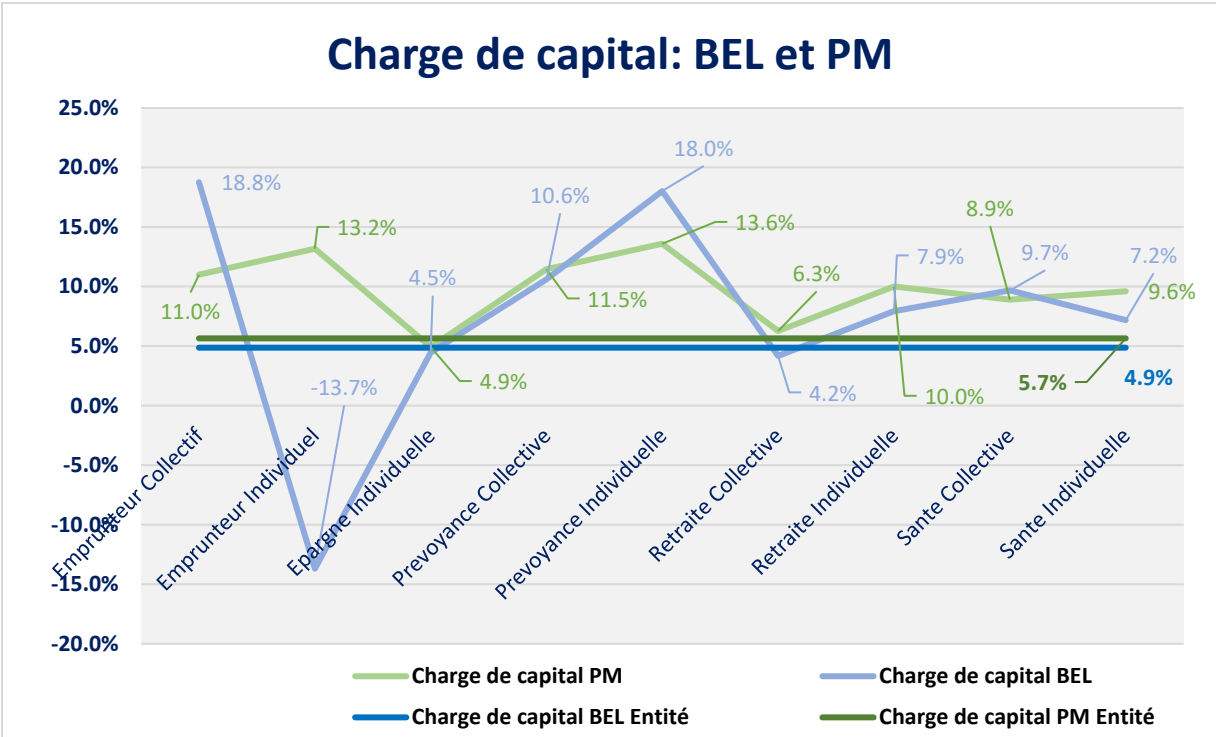


Figure 4.13 : charge de capital sur BEL et sur PM

La charge de capital diversifiée est de 5% sur les *BEL* et 5.7% sur les Provisions Techniques. L'Epargne Individuelle et la Retraite enregistrent les plus faibles charges de capital respectivement à 4,5% et 4,2% sur les *BEL*, alors que la Prévoyance et l'Emprunteur engendrent les plus fortes charges. En d'autres termes, les lignes de business Epargne et Retraite consomment moins de risque capital que les autres. Ceci s'explique par le fait que les contrats Epargne et Retraite sont des multi-supports,

c'est-à-dire avec des supports en Euros et en Unités de Comptes, alors que les contrats de prévoyance sont des mono-support Euros. Nous soulignons aussi que la charge de capital se mutualise assez bien au sein de la compagnie. En effet, grâce aux contrats multi-supports, l'Epargne et la Retraite tirent les autres lignes de business à une charge de capital plus raisonnable que celle de la majeure partie des *LoB*.

Par ailleurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous, nous retrouvons aussi les mêmes résultats observés à la phase d'allocation des risques standalones concernant la comparaison des clés Stocks et notre méthodologie basée sur les *pv_pvfp*. Nous constatons que l'allocation du capital diversifié par *LoB* basée sur les *pv_pvfp* a aussi une dynamique assez proche que l'allocation tenant compte des *pv_Liab* ou *pv_Reserve*. Aussi, utiliser une clé basée sur les stocks et principalement sur les *pv_Reserve*, affecterait plus de capital diversifié à l'Epargne aux dépens de la Prévoyance. Donc, si améliorer la rentabilité de la Prévoyance est prioritaire sur celle de l'Epargne, basculer les clés de répartition sur les stocks aux dépens des *pv_pvfp* serait encore plus pertinent dans le sens où ce mécanisme permettrait de baisser le risque de la Prévoyance.

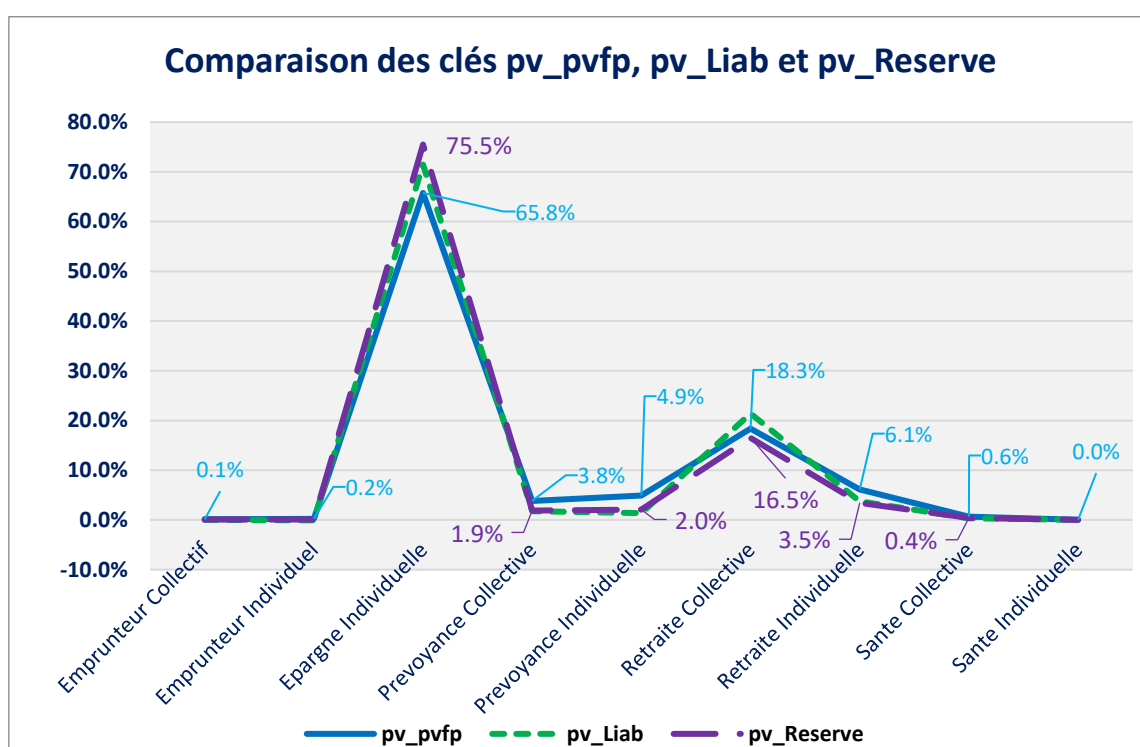


Figure 4.14 : Comparaison des clés diversifiées *pv_pvfp*, *pv_Liab* et *pv_Reserve*

Les indicateurs de mesure de risque sont très déterminants dans le pilotage du risque. Néanmoins ils doivent être couplés avec la notion de rentabilité pour leur donner plus de sens.

4.7 Mesure de rentabilité

Return On Risk Adjusted Capital ou *RORAC* et Return On Equity ou *ROE*, sont des indicateurs de rentabilité, définis comme le quotient de l'indicateur de Résultat Opérationnel Net d'Impôts ou (*NI*) et de l'indicateur de capital de solvabilité. Quand le résultat opérationnel est aussi alloué par ligne de business, ces indicateurs de rentabilité qui sont régulièrement observés par Entité Juridique peuvent aussi être calculés par *LoB* afin de mesurer leur rentabilité individuelle et marginale pour la compagnie et de les comparer entre elles.

4.7.1 Le résultat opérationnel et le revenu net d'impôts

Le Résultat Opérationnel (*OP*) est la somme du Solde De Souscription (*SDS*), du Solde De Réassurance (*SDR*), de la Charge d'Acquisition et de Gestion (*CAG*) et du Résultat Financier net de participation aux bénéficiés (*RFN*):

$$OP = SDS + SDR + CAG + RFN$$

Le Résultat Net d'impôts (*NI*) est le résultat opérationnel imputé de l'impôts sur les sociétés :

$$NI = OP - Impôts$$

a Le solde de souscription Vie

D'un point de vue Business, le solde de souscription est la rémunération de l'assureur aux actes liés à la souscription du contrat, la gestion annuelle du stock, mais aussi des flux entrants ou sortants sur le contrat notamment les versements, les sinistres, les rachats ou les arbitrages. Le solde de souscription regroupe donc les chargements d'acquisition, les chargements de gestion du stock annuel, les chargements liés à la gestion des prestations des sinistres, des rachats ou des arbitrages, mais aussi les gains et pertes techniques liés au boni-mali de provisionnement. Le solde de souscription est détaillé ci-dessous :

- **Assurance Vie**

+ Versements des primes	+ chargements d'acquisition
- Prestations	+ chargements prestations
- Rachats	+ pénalité sur rachat
- Variation Provisions Mathématiques	+ chargements sur encours et frais d'arbitrage
+ Gains techniques	+ gains techniques
+ Autres	+ autres chargements
= Solde de souscription	= marge de l'assureur

- **Prévoyance et Santé**

Charge brute exercice courant	}	+ Primes acquises
Charge brute exercices antérieurs		- Prestations - survenance courante
	}	- Provision - survenance courante
		- Prestations - survenances antérieures
		- Variation des provisions (antérieures)
		- Frais de gestion de sinistres
		- Variation provision frais de gestion
		+ Solde des rentes
		= Solde de souscription

b Le solde de réassurance

Le solde de réassurance est le résultat lié aux flux de réassurance. Le résultat de réassurance est représenté ci-dessous :

Charge brute exercice courant	}	- Primes acquises cédées
Charge brute exercices antérieurs		+ commissions de réassurance
		+ Prestations cédées - survenance courante
		+ Prestations cédées - survenances antérieures
		= Solde de réassurance

c Les charges d'Acquisition et de Gestion

Les charges d'acquisition et de gestion représentent tous les frais liés au fonctionnement de la compagnie qu'ils soient fixes ou non. Le compte de charges d'acquisition et de gestion est représenté ci-dessous :

- Frais de gestion Acquisition
- Frais de gestion d'Administration
- commissions d'Acquisition
- commissions d'Administration
= Charge d'Acquisition et de Gestion

d Le résultat financier

Les charges d'acquisition et de gestion représentent tous les frais liés au fonctionnement de la compagnie. Le compte de charges d'acquisition et de gestion est représenté ci-dessous :

+ Produits financiers	+ chargements sur placement
- Participation aux résultats	+ chargement sur résultat
= Marge financière	= marge de l'assureur

→ Participations aux résultats =
 + Intérêt technique
 + Participation aux bénéfices (payée, incorporée au PM, provisionnée)
 ⇨ Règle de distribution de la PB ou PPE (sur 8 années maximum)

La problématique de l'allocation du Résultat Net d'Impôts réside principalement sur l'allocation du résultat financier et les Charges d'Acquisition et de Gestion. En effet, les produits financiers sont modélisés par compagnie et portefeuille d'actifs. Son allocation par ligne de business est réalisée avec des clés basées sur les Provisions techniques, tandis que les charges d'acquisition et de gestion sont calculées par compagnie et centres de coûts. Elles sont généralement allouées en prorata des primes (pour les frais liés à l'acquisition) et des Provisions Techniques (pour les frais liés à la gestion ou coûts fixes).

4.7.2 Mesure de rentabilité par ligne de business

Pour chaque ligne de business LoB_i , nous définissons ses ratios de rentabilité liés au capital de solvabilité comme ci-dessous :

➤ $RORAC_{LoB_i}$: Return On Risk Adjusted Capital par:

$$RORAC_{LoB_i} = \frac{NI_{LoB_i}}{SCR_{LoB_i}} \quad \text{et} \quad RORAC = \frac{NI}{SCR}$$

➤ $SII ROE_{LoB_i}$: Return On Risk Adjusted Capital du LoB_i par:

$$SII ROE_{LoB_i} = \frac{NI_{LoB_i}}{CAC_{LoB_i}} \quad \text{et} \quad SII ROE = \frac{NI}{CAC}$$

Le capital alloué cible correspond à la part de capital que le Groupe Allianz doit considérer comme la contribution de Allianz Vie au SCR du Groupe. Il ne doit donc pas comprendre les éléments de redistribution, en l'occurrence la PPE et la réserve de capitalisation. Ainsi, le Capital Alloué Cible est défini au sein du Groupe Allianz comme étant le SCR impacté des effets suivants :

- Un facteur de contribution multiplicatif de l'Entité Juridique α tel que $0 < \alpha < 1$ au SCR du Segment auquel elle appartient : 86% pour Allianz Vie au sein du Segment Vie et Santé.
- Un choc combiné Actions - Taux d'Intérêts : (-30% ; -100 bps) dans notre cas. L'impact Fonds Propres aussi est pris en compte pour le choc combiné.
- Un Buffer : 135%.
- La réduction du Stock de Provisions pour Participation aux Excédents (PPE).
- La réduction de la réserve de capitalisation.

Le Capital Alloué Cible ou (CAC) sera par la suite alloué avec la même allocation que le SCR .

En termes de RORC, nous avons les rentabilités ci-dessous pour notre portefeuille :

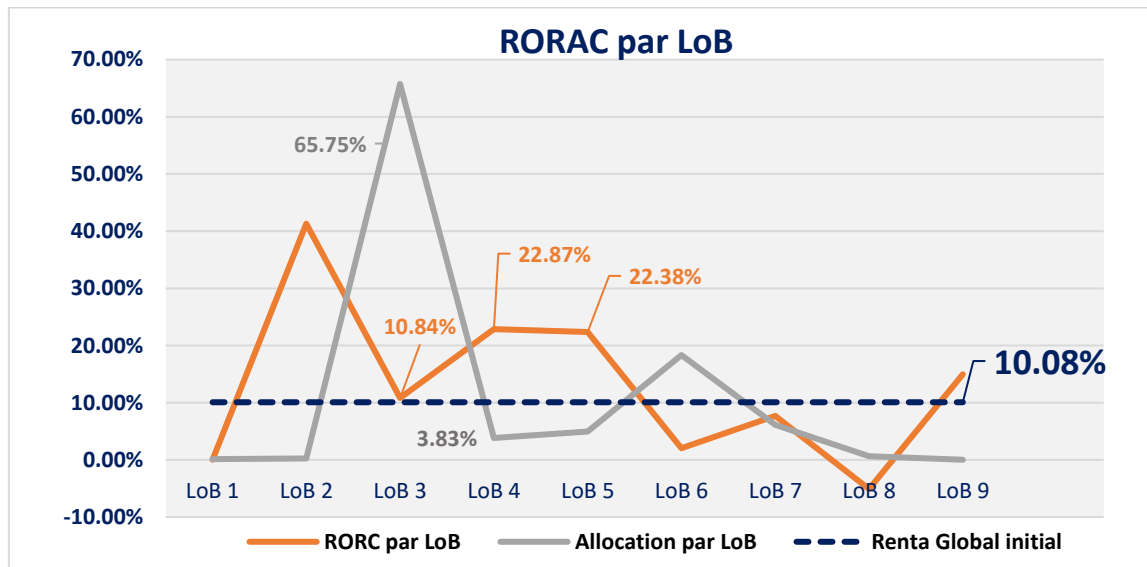


Figure 4.15 : RORAC par LoB

Dans notre portefeuille d'assurance, la rentabilité globale en termes de $RORAC$ est de 10.08% au global compagnie. Cependant le plus gros Business LoB_3 correspondant à l'Epargne possède une rentabilité supérieure à celle de la compagnie au global. Alors que le deuxième plus gros Business

LoB_6 , en l'occurrence la Retraite Collective, affiche une rentabilité moindre que celle globale compagnie. D'ailleurs nous expliciterons plus en détails l'impact positif de l'exclusion de la Retraite de l'assurance vie au global via la création de *FRPS* au chapitre suivant. Par ailleurs, la LoB_5 est aussi très rentable à 22.9%, d'où un potentiel d'amélioration de la rentabilité globale en développant cette ligne de business, comme nous le verrons dans la partie suivante.

4.7.3 Pilotage de la rentabilité : un exercice difficile en réalité

Dans un contexte de taux d'intérêt très bas et de faibles marges d'assurance, les assureurs ont pris de nombreuses mesures pour accroître leurs revenus et réduire leurs coûts au fil des années. Pour atteindre ces résultats, les compagnies d'assurance ont principalement concentré leurs efforts sur le pilotage de la rentabilité à travers d'un de Résultat Opérationnel cible, mais aussi de son ratio sur le *SCR* ou le *CAC*. L'allocation par ligne de business des indicateurs de Résultat Net et de Risque permet de piloter aussi, d'une manière économiquement plus fine, la rentabilité par *LoB* en parallèle.

A cet effet et grâce à la théorie de la mesure de *RORAC* compatibilité, la compagnie peut déterminer sur quelle activité il doit investir davantage et pour quelle ligne de business afin d'améliorer, de manière certaine, la rentabilité de l'entité juridique d'assurance en l'occurrence.

En effet, si nous reprenons la définition de *RORAC* compatibilité vue à la partie 3.3.1 pour un segment de risque X_i et pour une Ligne de Business LoB_k alors il existe un réel $\varepsilon_i > 0$ et h et h' vérifiant $0 < h < \varepsilon_i$ et $0 < h' < \varepsilon_i$ tels que :

$$RORAC(X_i/X_N) > RORAC(X_N) \Rightarrow RORAC(X_N + hX_i/X_N) > RORAC(X_N)$$

$$RORAC(LoB_i/X_N) > RORAC(X_N) \Rightarrow RORAC(X_N + h'LoB_i/X_N) > RORAC(X_N)$$

$$RORAC_{LoB_k}(X_i/X_N) > RORAC(X_i/X_N) \Rightarrow RORAC_{LoB_k+h'LoB_k}(X_i/X_N) > RORAC(X_i/X_N)$$

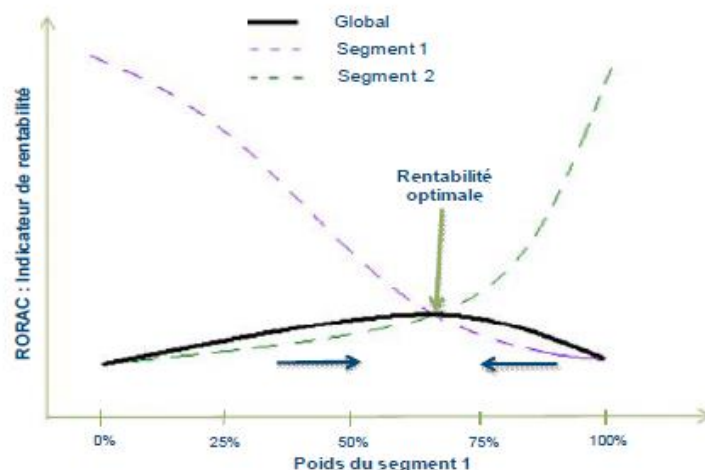


Figure 4.16 : Illustration du RORAC pour deux segments de risques

Nous pouvons illustrer comme ci-avant la notion de *RORAC* compatibilité pour un portefeuille composé de deux segments de risques. La rentabilité globale est optimale lorsque les *RORAC* post-allocation des

deux segments de risques sont égaux. Autrement, il est certainement possible d'améliorer cette rentabilité en ajoutant une part du segment qui propose la rentabilité supérieure.

Ainsi, du point de vue du risque-rentabilité, si la rentabilité post-allocation d'un segment X_i est plus élevée que la rentabilité globale, il devient possible et d'une manière certaine d'améliorer cette dernière en ajoutant une quantité h suffisamment petite du segment X_i . De la même manière, si la rentabilité post-allocation d'une ligne de business LoB_k est plus élevée que la rentabilité globale, il devient possible et d'une manière certaine d'améliorer cette dernière en développant en plus une quantité h' de nouveau produit suffisamment petite du LoB_k . En d'autres termes, si la rentabilité du portefeuille global se dégrade après ajout d'une part h d'un segment, ou h' d'une LoB_k , alors il ne sera pas judicieux de développer ce segment ou cette ligne de business.

Appliqué à nos données, développer de 5% l'activité de Prévoyance Individuelle (LoB_5), qui affiche un taux de rentabilité supérieur à celui de la compagnie au global, permettrait à notre compagnie d'assurance d'augmenter sa rentabilité de +0.02%, la faisant passer de 10.08% à 10.10%, ceci en conservant la rentabilité de toutes les LoB_k constante, mais en bougeant très légèrement les allocations. Nous représentons l'impact du pilotage sur le graphique ci-après :

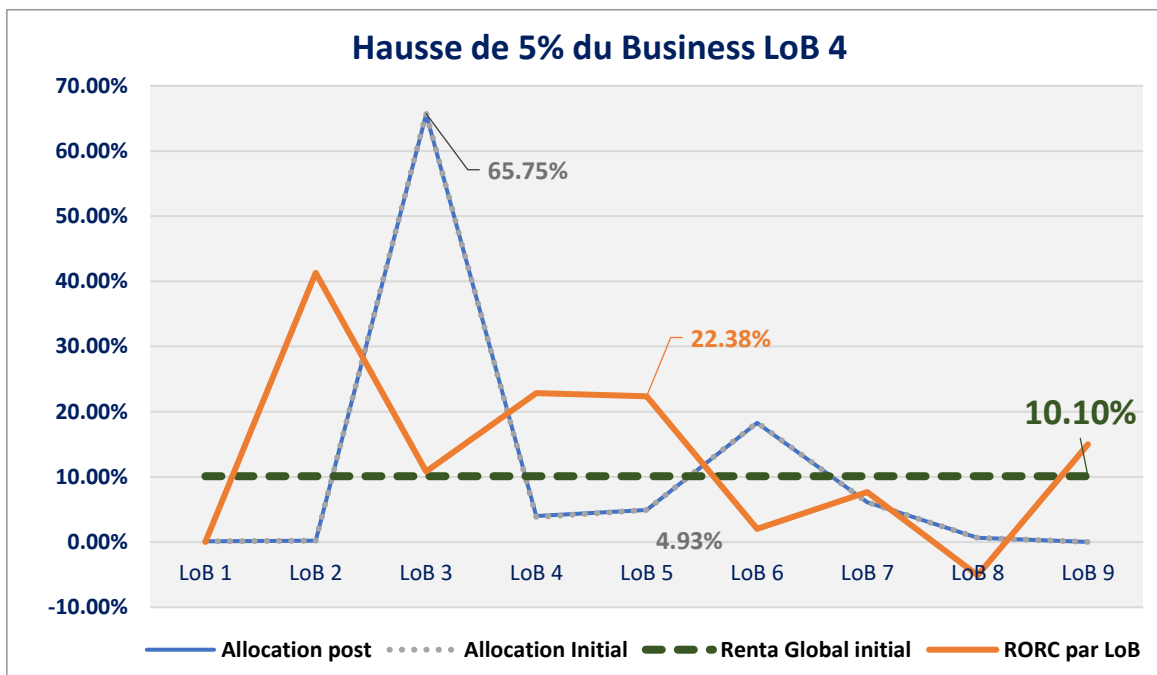


Figure 4.17 : Illustration du Pilotage de RORARC

Dans la pratique et compte tenu de la réalité très complexe des marchés financiers, le pilotage des Ratios de rentabilité n'est pas une chose simple dans le sens où il existe un réel conflit d'intérêt entre le résultat opérationnel et les indicateurs de risque. En effet, certaines politiques peuvent générer des impacts totalement opposés entre le résultat et le risque.

A titre d'exemple, quand une société d'assurance décide de baisser sa durée à l'actif pour réduire son gap de durée, elle prend aussi en même temps la décision d'investir sur des actifs financiers à plus courts termes, ce qui se traduit par ailleurs par une baisse de son rendement financier et ainsi de la baisse de son résultat opérationnel. En terme générale, à moins d'optimiser « parfaitement » son profil d'investissement, une stratégie qui vise à baisser son appétence au risque se traduisant par

une baisse du capital de solvabilité s'accompagne en majeure partie par une baisse de résultat. Cependant, le couple (*baisse de risque - baisse de résultat*) peut engendrer une hausse de la rentabilité comme il peut en générer une baisse.

Ainsi les compagnies ont besoin de redoubler de vigilance en termes de projection pour que les actions menées a priori à propos des types d'investissement ou au niveau des produits au profit de la rentabilité permettent de retrouver le résultat escompté a posteriori. Ces actions peuvent se décliner sous forme de cessions de parties des produits qui ne bénéficient pas à la mutualisation de toute une *LoB* ou compagnie ou de clôturer en run-off un produit existant et en le remplaçant par un nouveau encore plus évolutif et plus en phase avec les réalités actuelles de marché ; exiger une part plus importante d'unités de comptes, ou des pénalités en cas de rachats sur du court terme par exemple. Les ratios de rentabilité par *LoB*, en plus de ceux sur l'Entité Juridique permettent de cibler les produits les plus vulnérables et ainsi d'apporter des actions de pilotage adaptées et efficaces.

4.8 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthodologie structurée d'allocation du capital de solvabilité par ligne de business basée sur les sensibilités de la Valeur Présente des flux futurs aux différents facteurs de risques par produits au sein des portefeuilles d'actifs. Le risque standalone est alloué en utilisant les clés de répartition basées sur ces sensibilités avant de calculer une diversification via la matrice des corrélations des facteurs de risques. Pour des raisons de diversification entre les portefeuilles d'actifs et de l'utilisation de matrice simplifiée, un Scaling est réalisé pour le risque standalone et diversifié.

Les résultats de ce chapitre nous ont montré que la ligne de Business Epargne consomme la plus grosse part de risque suivie de la Retraite, alors que les produits Santé et Emprunteur en consomment moins.

D'autre part, les risques Epargne, Retraite et Santé se diversifient mieux tandis que la Prévoyance et l'Emprunteur possèdent les pires diversifications. Cependant, avec des charges de capital les plus faibles, l'Epargne et la Retraite consomme le moins de risque pour les capitaux alloués en raison de leurs profils de contrats multi-supports. Aussi, en termes de pilotage de RORAC, il est possible d'augmenter la rentabilité globale d'une compagnie en développant une ligne de business plus profitable que l'entité dans son ensemble.

Nous avons aussi pu démontrer le lien direct entre le pilotage du risque et celui de la rentabilité et que ces deux indicateurs cohabitent avec un conflit d'intérêt réel dont la maîtrise est néanmoins nécessaire pour la continuité de la compagnie.

Nous consacrons le chapitre suivant à la projection du *SCR* dans le cadre du processus budgétaire et son pilotage à travers les limites.

5 Pilotage du capital de solvabilité : projection budgétaire et limites

Dans le cadre du processus budgétaire annuel et au même titre que le résultat opérationnel, les compagnies d'assurance doivent réaliser une projection du capital de solvabilité et de leur Ratio de Solvabilité en fonction de la projection du bilan sur un plan de trois années. Cette projection qui se doit de donner la vision Best Estimate du *SCR* de la compagnie sur l'horizon considéré compte tenu de la stratégie globale de la compagnie, mais aussi de son appétence et tolérance au risque, présente un enjeu double. En effet, en plus de donner le Ratio de Solvabilité à moyen terme, elle permet aussi de définir les différentes limites que l'entreprise se fixera pour piloter la solvabilité des années à venir notamment en termes de Ratio de Management ou de gap de duration.

Dans ce chapitre, nous allons décrire brièvement les principes généraux de la méthodologie de projection du capital de solvabilité basée sur la modélisation des risques standalones qui seront diversifiés par la suite avec les facteurs de diversification d'une période de référence, en l'occurrence la clôture comptable de fin juin. Par la suite on donnera les principales limites pertinentes en termes de pilotage du capital de solvabilité à court et moins termes.

5.1 Méthodologie de projection du *SCR* dans le cadre du processus budgétaire

Dans cette partie, nous allons proposer une méthode succincte d'estimation du risque capital alternative au calcul du *VaR* du modèle interne qui réduit considérablement l'effort de traitement, bien qu'au prix d'une précision réduite, mais limitée et maîtrisée dans le cadre d'un processus budgétaire.

5.1.1 Contexte

L'évaluation prospective de la solvabilité à trois ans fait partie intégrante du processus budgétaire annuel. Le ratio de couverture de solvabilité est projeté en deux étapes à partir des données au 30 juin de l'année en cours.

Dans un premier temps, le bilan est projeté : les actifs financiers sont projetés par la direction des Investissements, les provisions techniques par la direction de l'Actuariat et les taxes par la direction de la Fiscalité. Les autres postes sont réputés stables.

Dans un second temps, la Direction des Risques projette le *SCR* et ainsi la marge de solvabilité à partir du bilan projeté. Cette projection de *SCR* est réalisée à travers de méthodes simplifiées telles que la méthode *Delta – Gamma*.

Avant de développer la méthode de projection, nous allons introduire la notion de *CVaR*, Valeur à Risque Conditionnelle ou Conditional Value-at-Risk.

5.1.2 Conditional Value-at-Risk *CVaR* et Sensibilité

Définition 5.1. La Conditional Value-at-Risk (*CVaR*)

La Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) de niveau α associé au risque $X \in \mathcal{I}$ est donnée par :

$$CVaR(X, \alpha) = E[X / X > VaR(X, \alpha)]$$

La *CVaR*, correspondant à la *TVaR* lorsque la fonction de répartition de X est continue, est une mesure de risque qui permet de corriger les défauts de la *VaR*. Il s'agit en fait de la perte moyenne des cas où la perte est supérieure à la *VaR*. C'est donc une espérance conditionnelle.

Contrairement à la *VaR* et au même titre que la *TVaR*, la *CVaR* est une mesure sous-additive, donc cohérente.

Par ailleurs, une mesure de sensibilité donne le changement de la valeur d'un portefeuille ou d'une grandeur économique donnée pour un changement de valeur de facteurs qui le composent à travers des chocs. Cette mesure, couramment utilisée pour les portefeuilles d'options ou la durée ou la convexité d'une obligation, est le principe de base de calcul du risque.

Cette notion, qui se rapproche de la notion de l'élasticité, permet aussi de mesurer et de comparer la variation relative de cette grandeur économique par rapport à la variation de ses différentes composantes.

Rapportée à la notion du risque capital, la sensibilité du *SCR* ($\rho(X_N)$) et de la contribution du segment de risque X_j par rapport à la baisse (ou hausse) de :

➤ $\pm s \%$ ($0 < s \% < 1$) du prix des actions est mesurée par :

$$sensi_{\rho(X_N)}(\text{Actions} \pm s\%) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_N/(\text{Actions} \pm s\%))}{\rho(X_N)}$$

➤ $\pm s' \text{ bps}$ ($0 < s'$) du taux d'intérêt est mesurée par :

$$sensi_{\rho(X_N)}(IT \pm s' \text{ bps}) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_N/(IT \pm s' \text{ bps}))}{\rho(X_N)}$$

La *CVaR* et la sensibilité des Fonds propres peuvent être illustrées de la manière suivante :

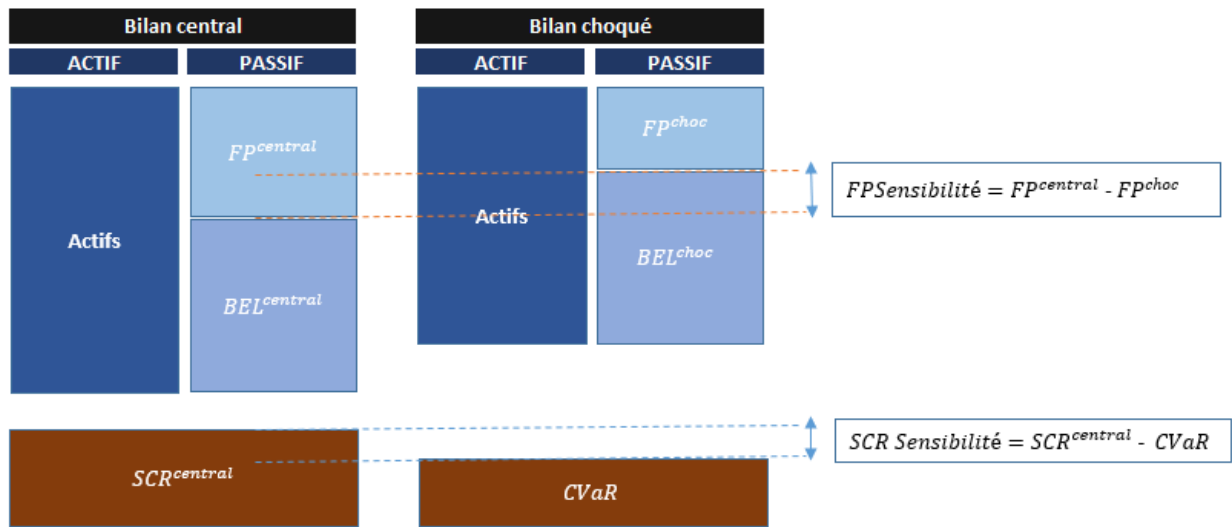


Figure 5.1 : Illustration de la *CVaR* et de la sensibilité des Fonds Propres

D'après le résultat des sensibilité des fonds propres et des *CVaR* en 2020, nous pouvons constater que le Ratio de Solvabilité est plus sensible au choc combiné *Actions -30 ; Taux d'Intérêt -100 bps* (-62%), suivi du choc *Spread +100 bps* (-56%) et de *Taux d'Intérêt -100 bps* (-49%). Depuis plusieurs années, le choc combiné *Actions -30%* et *Taux d'intérêt -100 bps* est le choc le plus important.

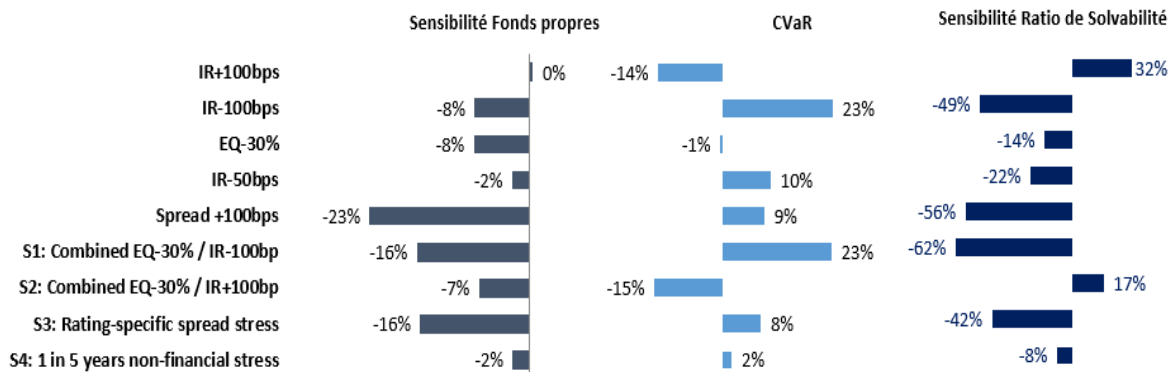


Figure 5.2 : Sensibilité du Ratio de Solvabilité Allianz Vie en 2020

5.1.3 Projection des risques standalones avec les approximations Delta-Gamma

Le Processus Budgétaire permet de poser un cadre de discussion pour une aide à la prise de décision en matière de stratégie et de pilotage de la compagnie et de discuter la projection des indicateurs de solvabilité et de rentabilité à horizon du plan stratégique.

Dans ce cadre, les projections réalisées pour le Planning Dialogue prennent en compte des hypothèses commerciales, techniques et financières et des plans d'action cohérents avec la stratégie générale de la compagnie d'assurance, en cohérence avec les évolutions attendues de l'environnement des marchés financiers et du contexte concurrentiel. Les projections sont effectuées lors des travaux du Processus Budgétaire de l'année en cours qui se déroulent en général de juin à Novembre.

La projection des $\rho(X_j)$ sur les périodes du processus budgétaire suit une approche générale séparant le risque de marché et le risque non-marché.

Les risques non-marché sont évolués proportionnellement au *BEL* ou des fonds propres alors que les risques de marché sont projetés selon l'approche *Delta – Gamma*.

A présent, nous introduisons les principes d'approximation *Delta – Gamma*.

a Approximation Delta

La méthode d'approximation *Delta* nécessite les sensibilités du premier ordre appelé *Delta*. Cette approximation est généralement appliquée pour les options et la duration des obligations. Le principe de cette approche est basé sur la philosophie selon laquelle le changement des rendements d'un instrument peut être approximé en multipliant la variation des rendements du sous-jacent avec la sensibilité correspondante de l'instrument. Même si cette forme d'approche marche bien pour les instruments financiers « linéaires », sa principale limite est qu'elle a tendance à dévier pour les instruments non linéaires, comme dans la plupart des instruments dans les marchés financiers. L'approximation *Delta* est définie comme suit :

$$\Delta(V) = \text{Delta} \times \Delta(X)$$

- $\Delta(V)$ est le changement de la valeur de l'instrument
- $\Delta(X)$ est le changement de la valeur du sous-jacent
- *Delta* est le dérivé de premier ordre de l'instrument par rapport au sous-jacent

Pour ajuster la déviation liée à la non-linéarité de certains instruments financiers, l'approximation *Delta – Gamma*, intègre le dérivé second dans son estimation.

b Approximation Delta-Gamma

La méthode d'approximation *Delta – Gamma* est similaire à l'approche d'approximation *Delta*, mais avec un ordre de sensibilité supérieur, appelé *Gamma*, permettant d'inclure la sensibilité du *Delta*. Dans la vie réelle, les portefeuilles d'investissement sont composés d'instruments non linéairement liés aux facteurs de risque sous-jacents, ainsi l'approximation *Delta* se comporte mal en raison de

l'hypothèse impliquée (car la dérivée de premier ordre n'est rien que la pente de la courbe en un point donné). Le remède naturel à cela est d'incorporer le dérivé d'ordre suivant. L'approximation *Delta – Gamma* nécessite le calcul du dérivé d'ordre deux, *Gamma*, en plus du *Delta* et les rendements de chaque instrument sont calculés avec la méthode comme suit :

$$\Delta (V) = \text{Delta} \times \Delta (X) + \frac{1}{2} \times \text{gamma} \times \Delta (X)^2$$

- *Gamma* est le dérivé du deuxième ordre de l'instrument par rapport au sous-jacent.

La méthode *Delta – Gamma* fonctionne raisonnablement bien pour les instruments non linéaires simples (tels que les obligations sans options put / call) comme la courbure de la relation avec le facteur de risque sous-jacent peut être approximée par la mesure de la convexité.

c Application à la projection des risques standalones de marché

Dans le cadre de la projection des risques standalones de marché, la méthodologie est basée sur une approche d'approximation *Delta – Gamma*. L'accent est mis sur le risque actions, le risque de taux d'intérêt, le risque de spread de crédit, le risque immobilier ainsi que le risque d'inflation.

Dans la configuration de base, aucune contrainte n'est appliquée. On suppose que les risques élémentaires évoluent en fonction de l'évolution de l'exposition ou de la durée du Dollar. L'idée de cette approche est de faire évoluer le risque standalone proportionnellement à l'évolution de son exposition dans les marchés ou de son équivalent de durée du Dollar. Les risques volatilité sont évolués à la même proportion que les risques unitaires des facteurs indexés.

Le montant de risque élémentaire de la période t par rapport au risque unitaire de la période $t - 1$ est donc donné par :

$$\rho_{(t)}(X_i) = \rho_{(t-1)}(X_i) \times \frac{\Delta_{(t)}}{\Delta_{(t-1)}}$$

Dans le cas du risque Actions, le *Delta* et le *Gamma* sont indexés à l'évolution de l'exposition. Ils seront indexés sur la durée du Dollar pour les Risques de Taux, de Spread et de l'Inflation.

L'hypothèse principale de projection avec cette approche est de maintenir constantes les conditions économiques de marché. En revanche, si la compagnie est en mesure d'estimer des changements à venir, il est suggéré de les inclure dans les évolutions du *Delta* exposition ou dans la convexité du Dollar en conséquence.

5.1.4 Diversification et allocations

La diversification est basée sur l'utilisation des facteurs de diversification de chaque segment de risque de la période de référence. Ces facteurs de diversification sont déduits de l'allocation du *SCR* par type de risque avec la méthode d'Euler de la référence considérée. Les clés d'allocation par lignes de business de cette même période seront utilisées pour allouer le capital par ligne de business sur la durée du plan. Ces clés peuvent être ajustées des réalités commerciales si des déformations importantes sont constatées durant les années de projection.

Ainsi, pour chaque segment de risque X_j et pour chaque ligne de business LoB_i :

- Le facteur de diversification de X_j est donné par :

$$fd(X_j) = \frac{\rho(X_j/X_N)}{\rho(X_j)}$$

- Son allocation à la LoB_i est donné par :

$$LoB_i(X_j) = \frac{\rho_{LoB_i}(X_j/X_N)}{\rho(X_j/X_N)}$$

Puis, pour chaque période de projection t :

$$\rho^t(X_j/X_N) = fd(X_j) \times \rho^t(X_j)$$

Et

$$\rho_{LoB_i}^t(X_j/X_N) = LoB_i(X_j) \times \rho^t(X_j/X_N)$$

Et ainsi le SCR pour chaque période de projection t :

$$\rho^t(X_N) = \sum_{j=1}^n \rho^t(X_j/X_N) = \sum_{j=1}^n fd(X_j) \times \rho^t(X_j)$$

Et

$$\rho^t(X_N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K \rho_{LoB_i}^t(X_j/X_N) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K LoB_i(X_j) \times \rho^t(X_j/X_N)$$

Les objectifs de Ratio de Solvabilité projeté lors du Processus Budgétaires sont donnés ci-dessous :

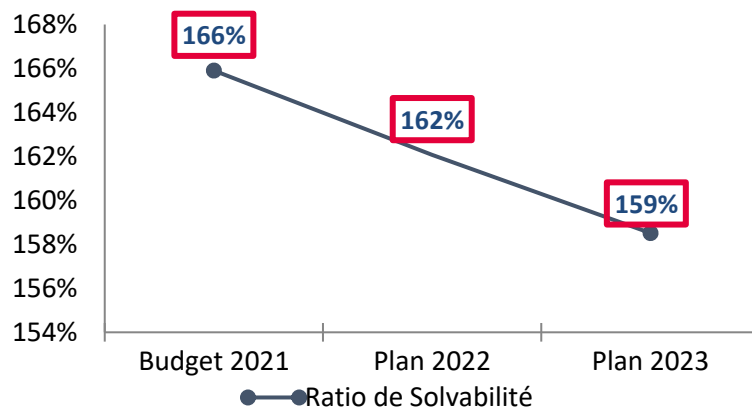


Figure 5.3 : Ratio de Solvabilité Allianz Vie Processus Budgétaire 2020

Selon les travaux réalisés sur base d'hypothèses commerciales et de marché à fin juin 2020, le ratio de solvabilité d'Allianz Vie devrait rester à un niveau satisfaisant sur toute la durée du plan à trois ans. A défaut, et conformément aux principes de gestion retenus par Allianz, des actions spécifiques seraient entreprises si la solvabilité devient à passer en dessous de certaines barrières que nous développerons dans le chapitre suivant.

5.2 Limites du Ratio de Solvabilité : Ratio de management et Barrières

Le management ratio et ses barrières constituent les limites de niveau 1.

5.2.1 Management Ratio

Nous pouvons définir la notion de « Management Ratio », ou ratio de solvabilité cible optimal, comme le niveau de solvabilité qui garantit le respect des exigences réglementaires, même après des contraintes financières ou des pertes liées à l'activité. Un buffer supplémentaire est éventuellement considéré dans le cadre de modèle interne ; +15% par exemple pour Allianz. Cette notion permet d'assurer une gestion efficace du capital, dans le sens où la compagnie doit s'assurer qu'elle conserve un niveau suffisant de solvabilité prudentielle en cas de scénarios défavorables. Elle doit également s'assurer que tout capital excédentaire inutile peut être transféré dans l'horizon du plan, s'il n'y a pas de contraintes réglementaires pour conserver ce capital au niveau de la compagnie.

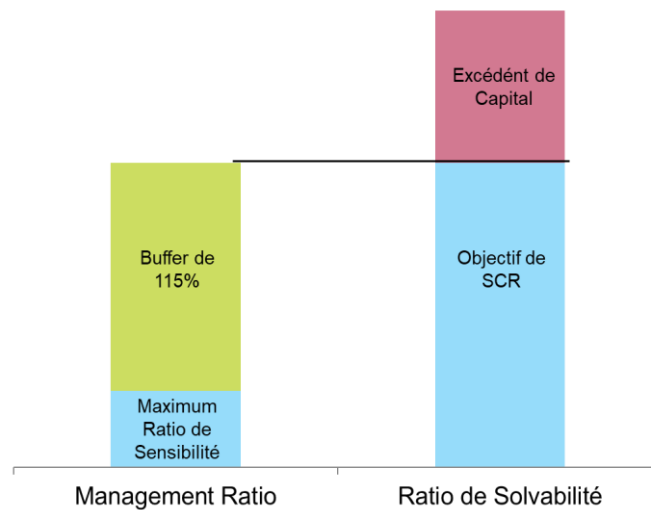


Figure 5.4 : Illustration du Management Ratio

Le Management Ratio est déterminé selon les sensibilités prévisionnelles de l'année du Budget du processus budgétaire. Par exemple, le Management Ratio de l'année 2021 est calculé à partir du résultat de projection du risque de l'année 2021 effectué lors du processus budgétaire de 2020. Il reste constant pour un cycle annuel. La sensibilité du ratio de solvabilité est la clé pour libérer du capital par une exigence de capital moindre. Les chocs considérés sont résumés ci-dessous :

Modèle Interne	Formule Standard
S1 : Actions -30% and Taux d'Intérêts -100 bps	S1 : Actions -30% and Taux d'Intérêts -100 bps
S2 : Actions -30% and Taux d'Intérêts +100 bps	S2 : Actions -30% and Taux d'Intérêts +100 bps
S3 : Choc Spread de 0-150 bps, selon la notation et la volatilité historique du Spread	S3 : Choc Spread de 0-150 bps, selon la notation et la volatilité historique du Spread
S4 : 1 à 5 ans de perte non financière modélisée	S4 : 1 à 5 ans perte d'assurance modélisée

Figure 5.5 : Sensibilités utilisées pour le calcul du Management Ratio

Ainsi, la formule du Management Ratio MR est donnée par :

- Formule Standard :

$$MR = 100\% + \text{Max} \left[\text{abs} \left(\text{sensi}_{S_i}(RS II) \right) \right]$$

- Modèle Interne :

$$MR = 115\% + \text{Max} \left[\text{abs} \left(\text{sensi}_{S_i}(RS II) \right) \right]$$

Avec $i = 1..4$ et $RS II$, le Ratio de Solvabilité II projeté au Budget de l'entité correspondante.

5.2.1 Barrières liées au Management Ratio

L'objectif des limites est d'encadrer de manière simple et transparente la capacité à porter des risques, en adéquation avec les sensibilités aux risques et les fonds propres disponibles de la compagnie. Au même titre que le ratio de gestion, les limites barrières sont définies en cohérence avec la stratégie de gestion des risques de la compagnie et restent stables tout au long du cycle annuel. Le Management Ratio est complété des barrières de risque suivantes :

- **La Barrière Supérieure :**

La Barrière Supérieure BS est donnée par :

$$BS = \text{Management Ratio} + \text{Max} \left\{ 25\% \times \text{Max} \left[\text{abs} \left(\text{sensi}_{S_i}(RS II) \right) \right]; 10\% \right\}$$

Elle correspond à une marge supérieure minimale de 10% sur le Management Ratio. Si cette barrière est atteinte, des mesures contingentes à la hausse sont prises.

- **La Barrière d'Alerte :**

La Barrière d'Alerte BA est donnée par :

$$BA = \text{Management Ratio} - \text{Max} \left\{ 25\% \times \text{Max} \left[\text{abs} \left(\text{sensi}_{S_i}(RS II) \right) \right]; 10\% \right\}$$

Elle correspond à une marge inférieure minimale de 10% sur le Management Ratio. Si cette barrière est atteinte, un plan d'urgence est mis en place pour ramener la capitalisation au Management Ratio.

- **L'Action Barrière :**

L'Action Barrière AB est donnée par :

$$AB = \text{Management Ratio} - \text{Max} \left\{ 50\% \times \text{Max} \left[\text{abs} \left(\text{sensi}_{S_i}(RS II) \right) \right]; 15\% \right\}$$

Elle correspond à une marge inférieure minimale de 15% sur le Management Ratio. Si cette barrière est atteinte, un plan d'urgence est appliqué pour ramener la capitalisation au Management Ratio

Ci-dessous, le Management Ratio d'Allianz et ses différentes barrières en 2019 et 2020 :

		Processus Budgétaire 2020	Processus Budgétaire 2019	
Level 1	Management ratio	156%	169%	▼
	Alert barrier	146%	156%	▼
	Action barrier	136%	142%	▼
	Upper barrier	167%	183%	▼

Figure 5.6 : Management Ratio et Barrières

Nous notons que les Ratios de Solvabilité prévus pour les années à venir sont tous supérieurs au Management Ratio de 2020. Ces limites baissent en 2020 par rapport à 2019, principalement du fait de la situation défavorable prévue au niveau des marchés financiers.

5.3 Limites de niveau 2

Dans le cadre du pilotage de la solvabilité, d'autres limites sont aussi définies. Les limites de niveau 2 représentent le budget maximum autorisé et adapté à chaque facteur de risque. Ces limites portent principalement sur le gap de duration entre l'actif et le passif, la sensibilité du risque Actions et le ratio de crédit VaR.

5.3.1 Limite de gap de duration

La limite de gap de duration correspond au gap de duration maximum toléré entre l'actif et le passif. Fixée généralement à moins d'une année, cette limite permet de piloter principalement la duration de l'actif, de telle sorte qu'elle ne soit pas très éloignée de celle des engagements au passif. L'une des priorités d'Allianz est de continuer à baisser son gap de duration de plus de moitié cette année à travers le pilotage de cette limite.

5.3.1 Limite de sensibilité des Actions

Cette limite correspond à la sensibilité maximale des fonds propres tolérée après un choc de -30% de la valeur des Actions. Elle est calculée sur la projection de l'année du Budget comme étant le minimum entre 125% de la valeur absolue de l'impact du choc et 115% de l'écart entre les fonds propres et le SCR choqués :

$$\begin{aligned}
 & \text{Limite Sensibilité } EQ_{-30\%} \\
 & = \text{Min} \{ 125\% \\
 & \quad \times \text{abs} [\text{Sensibilité } EQ_{-30\%}^{\text{Budget}} (\text{Fonds Propres})]; 115\% [(\text{Fonds Propres}_{\text{choc}} \\
 & \quad - \text{SCR}_{\text{choc}})] \}
 \end{aligned}$$

Cette limite, pilotée au niveau du Groupe, permet de piloter particulièrement l'aversion au risque Actions.

5.3.1 Limite ratio Crédit VaR

La limite du ratio de crédit VaR vise à piloter le risque de crédit. Déterminé par le Groupe, Il correspond au rapport entre le risque standalone Crédit rapporté à son exposition.

Les limites de niveau 2 de 2020 et de 2019 sont représentées ci-dessous :

		Processus Budgétaire 2020	Processus Budgétaire 2019	
Level 2	EQ sensitivity limit	-853	-906	▲
	Credit VaR (ratio) limit	2.60%	2.40%	▼
	Duration gap limit, years	-0.3	-0.7	▲

Figure 5.7 : Limites de niveau 2

Principalement, l'objectif d'Allianz est donc ainsi de limiter encore davantage ses facteurs de risques en 2021.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré l'importance du processus budgétaire dans le cadre du pilotage d'une société d'assurance. En effet, cet exercice annuel présente un double enjeu : définir les objectifs de solvabilité des trois prochaines années, mais aussi définir des barrières d'alerte pertinentes pour piloter cette solvabilité, dont le ratio de gestion qui définit le niveau de capitalisation minimum qui permettrait de maintenir le ratio solvabilité à 100%. Ces différentes alertes et limites permettent ainsi d'anticiper des actions pour relever le ratio de solvabilité à un niveau planifié en cas de nécessité.

Aussi, dans le cadre de ses projections budgétaires, Allianz Vie se fixe un objectif de solvabilité très solide à 162% en moyenne jusqu'en 2023, tout en réduisant ses principaux facteurs de risques. Cependant, une attention toute particulière sera accordée à l'évolution du ratio de solvabilité durant l'année 2021 afin d'agir de façon adaptée aux conditions difficiles de marché prévues.

6 Création de FRPS : Vers un calcul de capital de solvabilité plus économique en assurance vie

Le contexte économique actuel de taux d'intérêt bas associé à l'augmentation de l'espérance de vie rend difficile l'équilibre et la rentabilité des contrats de retraite qui sont en effet très exposés aux risques de taux et de longévité. C'est dans ce cadre que l'Ordonnance n°2017-484 du 6 avril 2017, relative à la création d'organismes dédiés à l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire et à l'adaptation des régimes de retraite supplémentaire en unités de rente offre la possibilité aux entreprises de créer une nouvelle entité Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire (*FRPS*). Ce nouveau dispositif réglementaire permet aux assureurs de transférer leurs produits de retraite professionnelle vers ce nouvel organisme plus profitable.

En effet les *FRPS* sont soumis à des exigences quantitatives plus adaptées aux engagements longs tels qu'ils sont confrontés par rapport à la directive de la Solvabilité II. La création de l'entité *FRPS* génère donc un impact non négligeable dans le *SCR* de l'assurance vie et ses allocations par types de risques et par Business. La compréhension de cette déformation est un enjeu clé pour les compagnies d'assurance vie. Dans ce chapitre nous proposons de mesurer ces différents impacts.

6.1 FRPS : création dans une perspectives d'améliorer la solvabilité de l'assurance vie

Relative à la transparence, à la lutte contre la corruption et à la modernisation de la vie économique, La Loi Sapin 2 a été officiellement adoptée en novembre 2016 par les parlementaires. A travers son Article 114, elle prévoit notamment d'autoriser par voie d'ordonnancement la création des Fonds de Retraite Professionnelle dite *FRPS* sans obligation d'appliquer la réglementation Solvabilité II. Ces fonds de pension « à la française » concernent uniquement la partie supérieure du troisième pilier de la retraite en France, en l'occurrence l'Épargne Retraite Supplémentaire d'Entreprise qui est à caractère facultatif.

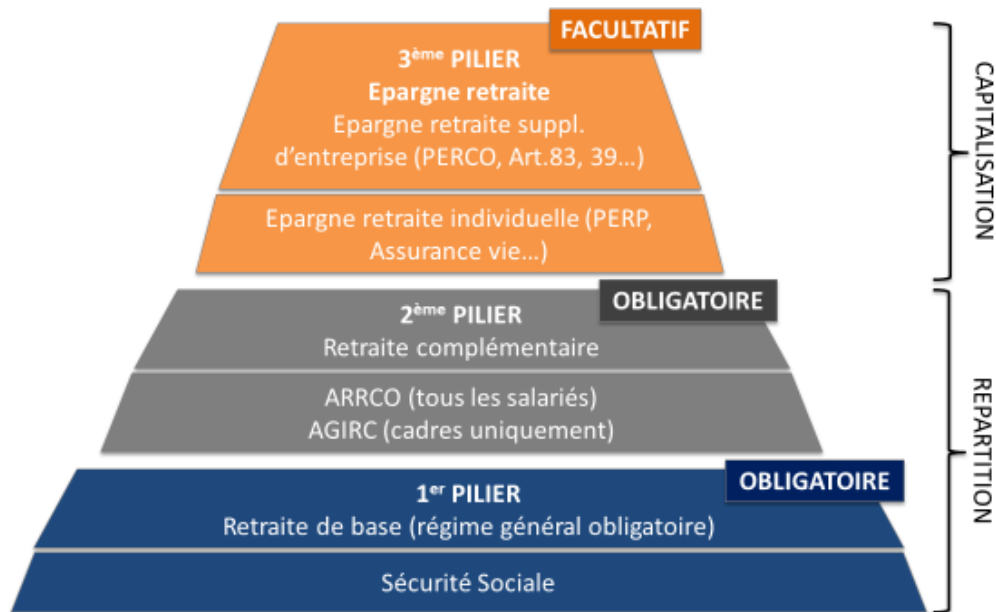


Figure 6.1 : La Retraite en France (source BSI Economics).

En complément des deux régimes de base et complémentaire, le dispositif d'épargne et de retraite supplémentaire couvre l'épargne retraite collective ou individuelle professionnelle appelée aussi retraite « surcomplémentaire ». Facultatif, ce régime par capitalisation n'a légalement aucun caractère obligatoire contrairement aux piliers 1 et 2 de la retraite en France. Nous notons aussi que le terme « retraite professionnelle supplémentaire » concerne aussi bien les régimes de retraite facultatifs par capitalisation, proposés par certaines compagnies à leurs salariés, que les produits d'épargne retraite individuelle souscrits par les travailleurs indépendants dans le cadre de la Loi Madelin, ou souscrits à titre privé, comme le PERP.

Contrairement au reste de l'Union Européenne, les « fonds de pension » (dérivée de l'expression anglaise pension funds) en France ne couvrent pas les régimes complémentaires AGIRC et ARRCO respectivement prévus pour tous les salariés ou uniquement les cadres. Ils restent cloisonnés à l'unique partie des organismes de retraite supplémentaire par capitalisation gérée par les assureurs, ce qui crée un décalage avec la vision européenne de « fonds de pension ».

Par la suite, nous définirons un fonds de pension comme « *un fonds collectif d'épargne à caractère professionnel, alimenté par des contributions patronales et/ou individuelles, chargé de collecter, détenir et investir des actifs dans un cadre indépendant de l'entreprise, en vue d'assurer le paiement futur de prestations aux adhérents* ».

Un fonds de pension doit donc être avant tout « indépendant » avant d'être spécialisé dans la gestion de l'épargne et de la retraite. Ainsi les contrats retraite par capitalisation gérés par des organismes assureurs aux activités multiples ne sont pas des fonds de pension. Le *FRPS* a ainsi pour vocation de créer des fonds de pensions « à la française » pour la première fois en France.

6.1.1 Evolution de la réglementation européenne des fonds de pensions et spécificités en France

Dans l'optique de faciliter la concurrence européenne à la commercialisation des produits de retraite supplémentaire, la Commission Européenne et le Parlement Européen ont mis à jour la directive européenne IORP 1 (Institutions for Occupational Retirement Provision) de 2003 (directive 2003/41/CE), qui règlemente les « fonds de pension » et les activités de retraite professionnelle. L'Article 20 de cette même directive autorise notamment « les entreprises établies dans les Etats membres à recourir aux services d'institutions de retraite professionnelle agréées dans d'autres Etats membres ».

Grâce à la disposition prévue par son Article 4 et ne possédant pas d'organisme dédié contrairement aux Pays-Bas par exemple, la France a choisi en 2006 de réserver la gestion des contrats de retraite professionnelle supplémentaire uniquement aux compagnies d'assurance lors de la transcription en droit français de la directive IORP. A l'époque une autre alternative conforme à la directive IORP, qui consistait à transférer les engagements issus de ces contrats de retraite vers une Institution de Retraite Professionnelle ou IRP, s'offrait aussi à la France. Cet agrément IRP permettait notamment, par rapport à la directive Solvabilité I en vigueur, des règles d'investissement très avantageuses en plus d'une souplesse de tarification, notamment avec l'utilisation d'une table de mortalité moins prudente que la table réglementaire. Pourtant la France, comme une majeure partie des pays de l'Union, ont décidé de ne pas transférer leurs engagements de retraite professionnelle vers ces dits canton IRP et ont préféré les conserver au sein des organismes assurantiels, mettant ainsi en échec le projet d'harmonisation du traitement de cette branche.

Même si l'arrivée de la réglementation Solvabilité II en janvier 2016 portant sur les activités d'assurance a commencé à changer la donne au niveau européen, la directive Omnibus II (directive 2014/51/CE), nommée « Transitoire IORP » et publiée en 2014, prévoyait déjà une mesure transitoire pour les engagements de retraite professionnelle gérés par des organismes assureurs, permettant ainsi aux cantons IRP d'échapper à la réglementation Solvabilité II jusqu'en décembre 2019.

La refonte de la directive IORP, baptisée IORP II et publiée en décembre 2016, a confirmé le décalage entre les exigences de Solvabilité II applicables aux organismes français sans cantons IRP, et les exigences prudentielles IORP dont relèvent les « fonds de pension ». IORP II va plus loin dans l'ouverture du marché européen, en permettant notamment le transfert de contrats de retraite professionnelle entre les Etats membres. Ainsi, la Loi Sapin 2, parue fin 2016, permet au gouvernement de créer, par son Ordonnance parue au Journal officiel le 7 avril 2017, de nouveaux organismes ayant pour objet l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire au titre de Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire ou FRPS. Cette création nécessite un agrément de l'ACPR (Article 9 de la directive IORP 2 ou Article 3 du décret FRPS). L'ACPR disposait de neuf mois jusqu'en 2018 et de six mois depuis pour se prononcer à partir de la date de réception du dossier complet.

Pour doper dès le début la collecte sur les *FRPS*, la directive vise un objectif de transfert des engagements en cours plutôt que de créer de nouveaux produits dédiés. Les encours sont estimés en 2015 à près de 158 milliards d'Euros d'après la FFA, Fédération Française de l'Assurance.

Nous pouvons représenter les dates clés de l'évolution du marché de la retraite professionnelle avec le schéma ci-après :

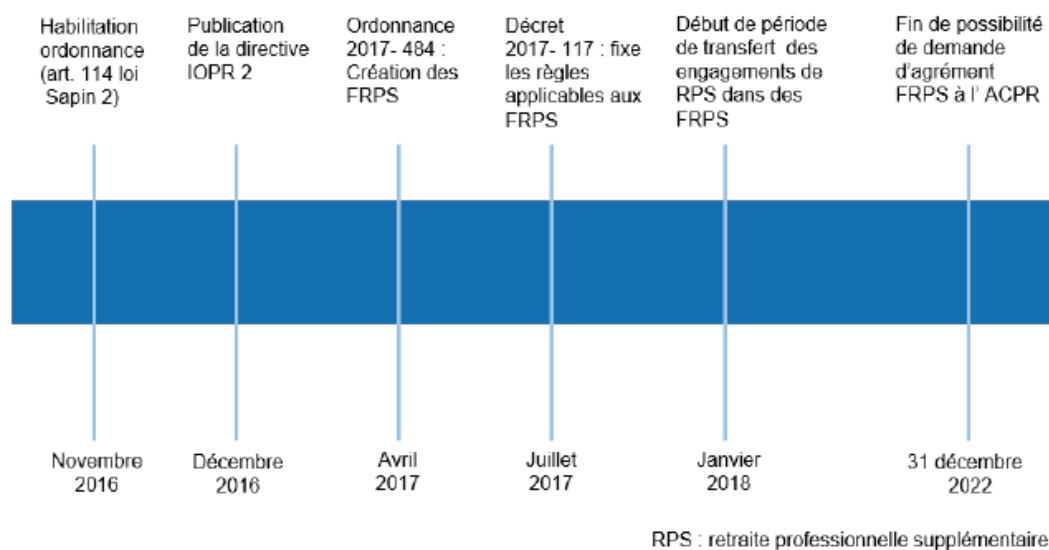


Figure 6.2 : Mise en place de FRPS.

6.1.2 Description des principaux produits d'épargne-retraite supplémentaire

Les principaux produits d'épargne-retraite supplémentaire sont décrits ci-dessous.

a Articles 39

Les Articles 39 sont des contrats de retraite supplémentaire à **prestations définies**, appelés ainsi en référence à l'article du Code général des Impôts qui régit son régime fiscal. Ce contrat d'assurance qui est destiné aux cadres et cadres dirigeants sont entièrement financés par l'employeur des bénéficiaires. Son objectif est de permettre à une entreprise de constituer à ses salariés un complément de revenu qui leur sera versé sous forme de rente viagère lors de leur départ en retraite. Le contrat « Article 39 » bénéficie d'avantages fiscaux et sociaux pour l'entreprise (exonération de charges sociales et fiscales sur les primes versées par l'entreprise, sous conditions). Récemment réformés par l'Ordonnance du 3 juillet 2019, les contrats « Article 39 » ne comportent plus de condition d'achèvement de carrière dans l'entreprise pour bénéficier des prestations.

b Articles 83

Les Articles 83 sont des contrats de retraite supplémentaire à **cotisations définies**. Seul le taux de cotisation est fixé au contrat et non le montant de la prestation, le niveau de rente à la sortie n'est donc pas défini. L'Article 83 fait référence à l'article du Code Général des Impôts (CGI) qui porte sur les sommes et cotisations déductibles du revenu imposable. Ce contrat collectif à adhésion obligatoire est souscrit par l'entreprise au profit de tout ou partie de son personnel. Il permet de constituer un complément de retraite par capitalisation et procure à terme aux salariés qui en bénéficient une retraite supplémentaire versée sous forme de rente viagère. Le contrat « Article 83 » bénéficie d'exonérations de charges sociales sur les cotisations. Le contrat de retraite Article 83 n'est plus commercialisable depuis le 1er octobre 2020, même si les versements restent possibles sur ce type de contrat. Il a été remplacé par le PERE obligatoire.

c Articles 82

Contrat de retraite supplémentaire, la principale différence par rapport aux contrats de type « Article 39 » et « Article 83 » est l'adhésion facultative. L'Article 82 fait référence à l'article du Code Général des Impôts (CGI). C'est l'entreprise qui met en place ce placement afin de faire bénéficier tout ou partie de ses salariés. Ce contrat permet au salarié de bénéficier d'un complément de revenu au moment de son départ en retraite. Les cotisations versées par l'employeur sur le contrat retraite Article 82 ne sont pas exonérées d'impôt sur le revenu, ni de cotisations sociales, car elles sont considérées comme un supplément de rémunération. En revanche, les prestations ne sont pas fiscalisées à la sortie.

d IFC

Lors du départ à la retraite de ses salariés, chaque entreprise doit verser des Indemnités de Fin de Carrière (IFC). Il s'agit d'une obligation légale. Le montant de cette indemnité est défini par la loi, la convention collective applicable à l'entreprise, l'accord d'entreprise ou le contrat de travail du salarié concerné. Cette obligation peut représenter une part importante des engagements sociaux de l'entreprise. L'employeur peut procéder à l'externalisation des indemnités de fin de carrière en souscrivant un contrat d'assurance spécifique appelé contrat IFC.

e Madelin

Le contrat dit Madelin est un produit d'épargne retraite individuelle, permettant de se constituer une retraite supplémentaire servie sous forme de rente, réservée aux travailleurs indépendants et aux professions libérales. Une variante, le « Madelin agricole » est de son côté réservé aux agriculteurs. Les versements sont encadrés et bénéficient d'avantages fiscaux. Lors du départ en retraite, l'épargne accumulée est transformée en rente, qui vient s'ajouter aux pensions de retraite. Depuis le 1^{er} octobre 2020, les contrats Madelin ne sont plus commercialisés et les PER individuels ont pris leur suite. Toutefois les versements resteront possibles sur les anciens contrats Madelin.

f PERP

Le plan d'épargne retraite populaire (PERP) est un contrat d'assurance vie destiné à la constitution d'une épargne retraite. Accessible à tous, le PERP est en principe dénoué sous forme de rente viagère au moment du départ en retraite, avec toutefois quelques exceptions. Il fait l'objet d'une fiscalité particulière, les versements effectués sur le PERP sont déductibles, dans une certaine limite, de l'impôt sur le revenu. En contrepartie, la rente viagère (tout comme la sortie de capital) versée au moment de la retraite est imposable, au même titre qu'une pension de retraite. Depuis le 1^{er} octobre 2020, les PERP ne sont plus commercialisés et les PER individuels ont pris leur suite. Toutefois les versements resteront possibles sur les anciens contrats PERP.

g CRH

Complémentaire Retraite des Hospitaliers, régime complémentaire de retraite destinée aux agents hospitaliers du secteur public, régi par les Articles L441 du Code des assurances. Ce contrat permet de bénéficier d'avantages fiscaux, les cotisations versées sont déductibles de l'impôt sur le revenu.

h PER

Le Plan Epargne Retraite (PER) est le nouveau dispositif d'épargne retraite issu de la Loi Pacte et le seul commercialisé depuis le 1^{er} octobre 2020. Le PER est décliné en trois versions : un PER individuel et deux PER entreprise (PER obligatoire et PER collectif). Ce socle juridique commun harmonise les règles qui régissent les contrats d'épargne retraite supplémentaire. L'objectif d'un PER est l'acquisition d'une rente viagère ou le versement en capital, payable à la date de liquidation de la pension dans un régime obligatoire de retraite ou à l'âge légal de départ à la retraite.

Le PER peut prendre les formes suivantes :

- PER individuel (PERIN) : ce dispositif a vocation à remplacer les contrats de retraite supplémentaire individuels, tels que le PERP, le contrat Madelin notamment.
- PER entreprise collectif (PERECO) : ce plan correspond au plan d'épargne retraite collectif (PERCO).
- PER entreprise obligatoire (PERO) : ce contrat remplace le contrat collectif « Article 83 ».

Les volumes transférés par Allianz France vers sa filiale *FRPS* Allianz Retraite seront explicités dans la partie ci-après.

6.1.3 Portefeuille Allianz Vie transféré en contrat FRPS

Allianz France a obtenu l'agrément pour la création d'un « Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire » (*FRPS*) parmi les plus gros de France. Le Collègue de l'ACPR a ainsi validé le transfert d'une partie de son activité retraite à sa nouvelle filiale Allianz Retraite depuis le 4 septembre 2020, à effet rétroactif au 1^{er} janvier.

Avec 13 milliards d'Euros d'encours, et plus de 650 000 particuliers et 20 000 entreprises couvertes, Allianz Retraite se positionne déjà comme un acteur majeur de la retraite en France. L'entité Allianz Retraite est une filiale de l'entité Allianz Vie et est traitée en tant que titre de participation à l'actif du bilan d'Allianz Vie. Les volumes transférés en *FRPS* sont représentés ci-dessous :

Allianz France a transféré vers sa nouvelle filiale Allianz Retraite dans le cadre du *FRPS* un montant de Provision Mathématique moyen de 13 milliards d'Euros dont 13% de contrats en unités de comptes. Les montants de Provision Globale de Gestion et de PPE sont respectivement de 184 millions d'Euros et de 280 millions d'Euros. Les Fonds Propres transférés sont de l'ordre de 2.1 milliards d'Euros.

Les transferts sont représentés de manière globale ci-après :

Volume Allianz Retraite en juin 2020 en Millions €	
Provisions Mathématiques	12 600
	<i>Dont UC</i> 13%
Provision Globale de Gestion	184
Provision pour Participation aux Excédents	280
Fonds Propres	2 097

Figure 6.3 : Volumétrie Allianz Retraite

Allianz Retraite est composée d'un portefeuille général et de huit cantons. La répartition des Provisions Mathématiques par portefeuilles est disponible ci-dessous :

Fonds	PM moy 2020	Tx tech moyen
PG AT	2 246	2.42%
HOSPI R1	2 223	
HOSPI R2	1 065	
GRIV (Assurance Vie)	416	
GRIV (Madelin)	110	
GRIV (Article 83)	21	
Az Retraite Long Terme	2 559	1.37%
CREA	1 454	1.90%
PERP ANCRE	819	0.00%
Total	10 914	

Figure 6.4 : PM Allianz Retraite euros par cantons

Les engagements concernent essentiellement des contrats L.441, Article 39 et 83, représentant respectivement 30,59%, 21,80% et 23,52% des PM. Allianz Retraite porte également des engagements sur des Article 82, PERP, Madelin et IFC, de manière moins significative, comme indiqué dans le tableau de données par gammes de produits suivant :

30/09/2020	Type de produit	PM (en M€)		Part de PM	
		Euro	UC	Euro	UC
Phase de constitution	Collectif - Article 39	187.91	56.62	1.50%	0.45%
	Collectif - Article 83	1 555.22	426.69	12.39%	3.40%
	Collectif - IFC	68.29	422.73	0.54%	3.37%
	Individuel - Article 82	0.44	-	0.00%	
	Individuel - TNS Madelin / Agricole	528.08	342.36	4.21%	2.73%
	Individuel - PERP	679.70	352.45	5.42%	2.81%
	Individuel - PER	4.01	10.85	0.03%	0.09%
	Autres	65.43	-	0.52%	
	Sous-Total	3 089.08	1 611.70	24.61%	12.84%
Phase de restitution	Collectif - Article 39	2 492.21	-	19.86%	
	Collectif - Article 83	970.61	-	7.73%	
	Individuel - Article 82	34.99	-	0.28%	
	Individuel - TNS Madelin / Agricole	247.99	-	1.98%	
	Individuel - PERP	168.97	-	1.35%	
	Autres	96.73	-	0.77%	
	Sous-Total	4 011.50	-	31.96%	
L.441	Compl Retraite Hospitaliers	3 293.87	-	26.24%	
	GRIV	545.54	-	4.35%	
	Sous-Total	3 839.42	-	30.59%	
	Total	10 940.00	1 611.70	87.16%	12.84%

Figure 6.5 : PM Allianz Retraite par produits

Avec la création des FRPS, la réglementation de solvabilité a évolué pour la retraite en France. Nous présenterons les différentes évolutions règlementaires dans la partie suivante.

6.2 Evolution des règles de solvabilité des contrats FRPS

Bien que la réglementation Solvabilité II ait prévu, à travers son « paquet branches longues » d'Omnibus II, la possibilité d'appliquer des mesures spécifiques aux « branches longues », telle que la retraite, les organismes assurantiels français ont fait naître des contestations a priori fondées.

6.2.1 Une sortie de la réglementation Solvabilité II motivée par une contestation française

Pour rappel, plusieurs aménagements non cumulables et sou validation préalable du régulateur, visant à diminuer les engagements des organismes assureurs existent déjà dans le régime prudentiel Solvabilité II. En effet, dans le cadre de la modélisation du risque prudentiel Solvabilité II, les compagnies d'assurance ont la possibilité :

- d'appliquer une correction au niveau de la volatilité de la courbe des taux sans risque règlementée par l'EIOPA pour actualiser les engagements. On parle de « *Correction Volatilité* » ;
- d'appliquer un ajustement à la courbe des taux sans risque sous conditionnement d'adossement du passif. On parle d' « *Ajustement Egalisateur* » ;
- de lisser sur seize années, via une prime sur la courbe des taux, la hausse des Provisions Techniques générées par le passage à une évaluation Best Estimate en Solvabilité II par rapports à Solvabilité 1. On parle de « *Transitoire Taux* » ;
- d'étendre, en cas d'événement exceptionnel, la période autorisée de non-couverture du SCR sur une durée de sept ans.

Malgré ses différentes mesures, les compagnies d'assurances françaises ont émis des contestations vis-à-vis du traitement des engagements de retraite professionnelle supplémentaire dans la réglementation Solvabilité II.

Ces contestations, a priori justifiées, sont principalement dues aux décalages de réalités suivants :

- **Horizon beaucoup plus long** : les contrats de retraite s'apprécient à un horizon long (plus d'un an) alors que Solvabilité impose une vision prospective du risque à horizon court (instantané ou au plus un an).
- **Une méthode d'évaluation Best Estimate des Provisions Techniques défavorables** : Solvabilité II préconise d'utiliser le taux d'intérêt de marché au lieu du taux historique pour l'actualisation des flux, ce qui pénalise davantage les engagements longs en période de taux bas, comme observé durant les dernières années.
- **Une charge de capital trop forte** : La méthode d'évaluation du SCR sous la réglementation Solvabilité II conduit à une charge de capital très corrélée du niveau de risque pris au niveau des investissements, alors que la pratique des fonds de pension des autres pays en Europe est contraire.
- **Volatilité excessive du Ratio de Solvabilité II** : Solvabilité II préconise l'évaluation des éléments du Bilan en juste valeur, rendant ce dernier très sensible aux conditions de marché.

Ce phénomène a pour conséquence de rendre très volatile le ratio de Solvabilité II, comme représenté sur la figure ci-dessous pour les principaux assureurs français entre 2014 et 2016.

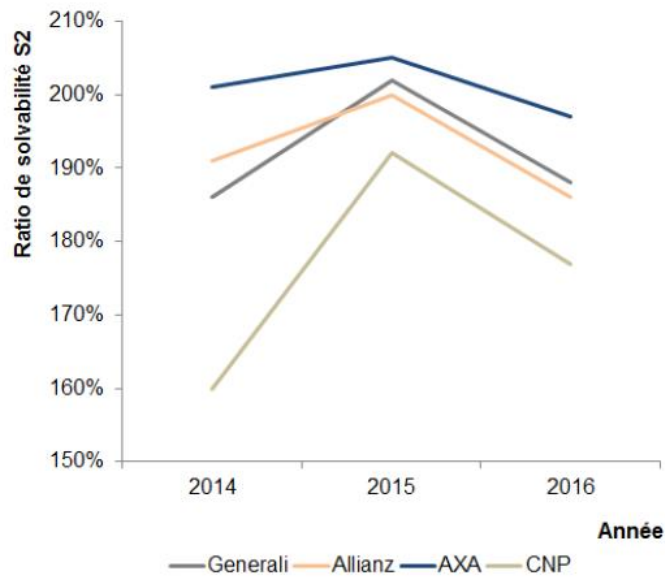


Figure 6.6 : Evolutions des Ratios de Solvabilité II

Toutes ces réclamations ont naturellement abouti à la création du régime FRPS avec une souplesse supplémentaire à la modélisation des risques en l'intégrant dans la norme européenne. D'autres part, la création de régimes *FRPS* permet à la France de concourir d'une manière plus loyale à l'ouverture du marché européen de plus en plus concurrentiel.

6.2.2 FRPS : vers des règles de solvabilité plus adaptées que la réglementation Solvabilité II

Les règles prudentielles applicables aux *FRPS* en réponse aux différents critiques sont principalement d'ordre quantitative, de gouvernance et de gestion des risques.

- a Des règles quantitatives proches de « Solvabilité I » complétées par des tests de résistance

- **Horizon de projection**

Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, le *SCR* correspond au montant de capital minimum requis pour un assureur lui permettant d'absorber les chocs potentiels à horizon un an avec une probabilité de 99,5%. Cet horizon très court d'un an pose en réalité un gros problème en termes d'allocation des actifs de la retraite qui vise en réalité à couvrir les engagements du passif en tenant compte de leur durée qui est en réalité beaucoup plus longue à quinze ans en moyenne. Ce décalage de durée poussait les assureurs vers une orientation obligataire en diminuant leurs poches actions, ce qui se traduit par une augmentation du risque dans le contexte actuel de taux bas. L'horizon de projection de la réglementation *FRPS* a été ainsi adapté à la durée moyenne des contrats de la retraite. En effet, à la suite de plusieurs préconisations, un groupe de travail *FRPS* qui a étudié les différentes propositions a préconisé un horizon de projection à dix ans jugé plus adapté aux engagements de retraite.

- **Evaluation des Provisions Mathématiques**

Dans le cadre de la réglementation *FRPS*, les Provisions Mathématiques du Passif correspondent aux montants comptables sociaux comme en Solvabilité I. Ces engagements sont actualisés au taux de marché dans Solvabilité II, alors que le cadre *FRPS* retient une actualisation au taux historique.

Les revalorisations futures comme dans le cas des rentes par exemple ne sont pas comptabilisées dans le bilan, ce qui minimise considérablement les risques financiers.

La réglementation *FRPS* prévoit également la possibilité d'utiliser des tables de mortalité plus favorables et plus adaptées à la population assurés que les tables réglementaires TGF et TGH. Aussi, la *PPE* constituée dans le cadre de la revalorisation des contrats assurés peut être versée sur un horizon de quinze ans au lieu de huit ans traditionnellement.

- **Exigence Minimale de Marge de Solvabilité forfaitaire**

Dans la sous-section 2 du décret *FRPS* - 060317, l'Article R. 385-2-1 présente le niveau d'exigence minimal de marge de solvabilité. Cette exigence forfaitaire retient des principes proches de Solvabilité I pour la détermination de la charge minimale en capital réglementaire à laquelle est éventuellement ajusté un capital Add-On provenant des tests de résistance.

Cette exigence s'établit comme la somme des éléments suivants :

- 4% des provisions mathématiques (ainsi qu'un pourcentage des capitaux sous risque) au titre des garanties exprimées en Euros ;
- 1% des provisions mathématiques au titre des garanties exprimées en Unités de Compte, dès lors qu'aucun risque de placement n'est assumé, et 4% de ces provisions dans le cas contraire (ainsi qu'un pourcentage des capitaux sous risque dès lors qu'un risque de mortalité est assumé).

Le cadre prudentiel quantitatif, appliqué aux entités *FRPS*, est renforcé par des tests de résistance. Ces tests de résistance, définis à l'Article R. 385-4 du Code des assurances, consistent à l'évaluation de la solvabilité, à un horizon de dix ans, sous différents scénarios de stress par rapport à un scénario central (correspondant au prolongement des conditions économiques).

- **Tests de résistance règlementaires**

Le cadre prudentiel quantitatif, appliqué aux entités *FRPS*, est renforcé par des tests de résistance. Ces tests de résistance, définis à l'Article R. 385-4 du Code des assurances, consistent à l'évaluation de la solvabilité, à un horizon de dix ans, sous différents scénarios de stress par rapport à un scénario central (correspondant au prolongement des conditions économiques).

Ces stress tests consistent notamment à l'application de :

- Choc du rendement des réinvestissements obligataires (rendement diminué du maximum entre une baisse relative de 40 % et une baisse absolue de 0,75 %, sans toutefois pouvoir être inférieur à 0 % ou supérieur à 3,5 %),
- Choc du rendement des actifs non amortissables (diminution de 30 %),
- Choc de longévité (taux de mortalité à tout âge réduit de 10 %).

Les conditions et hypothèses pour effectuer ces projections sont précisées par l'Arrêté du 14 août 2017, publié au JO le 6 septembre 2017, et dont les principales caractéristiques sont :

- La projection est effectuée sur les dix exercices suivant la clôture de l'exercice précédent ;
- Les primes projetées correspondent à la moyenne des primes encaissées au cours des trois derniers exercices ;
- Les frais de gestion projetés sont estimés de façon cohérente avec les hypothèses du calcul de la provision de gestion ;
- L'allocation des actifs est inchangée pour l'ensemble de la période projetée ;
- La mortalité projetée est cohérente avec les hypothèses utilisées pour le calcul des provisions mathématiques.

Par ailleurs, les plus-values latentes sont admissibles en couverture de l'exigence de marge de solvabilité si elles ne sont pas exceptionnelles. Elles ne peuvent pas dépasser 15% au niveau Entité solo. Au niveau du Groupe, l'Exigence Minimale de Marge de Solvabilité ne peut pas être couverte par plus de 50% des plus-values-latentes. Au-delà, la règle de l'entité solo s'applique.

En cas de non-couverture de la marge sur l'un des exercices de l'horizon de temps, un plan de convergence devra être soumis à l'ACPR. En cas d'insuffisance du plan, l'ACPR a la possibilité d'exiger une marge de solvabilité renforcée. La couverture de marge de solvabilité d'Allianz Retraite est de 450% en 2020.

Couverture de Marge Allianz Retraite en juin 2020 en Millions €	
Fonds Propres	2 097
Exigence Minimale de Marge de Solvabilité Solo	466
Couverture de Marge de Solvabilité	450%
Contribution à la Marge de Solvabilité Groupe	707

Figure 6.7 : Couverture de la marge de solvabilité Allianz Retraite

b Système de gouvernance et de la gestion des risques

Le cadre de la réglementation *FRPS* prévoit des règles pour le système de gouvernance et de gestion des risques proches de Solvabilité II.

- Système de gouvernance (Organisation, dirigeants, fonctions clés)
- Politiques écrites, ORSA
- Reporting : SFCR, RSR, états annuels / trimestriels, rapport ORSA
- Règles d'investissement

6.2.3 Estimation du risque capital de l'entité FRPS

Pour des besoins de pilotage économique des risques et d'optimisation de son bilan, Allianz réalise un calcul biennuel du SCR de sa filiale Allianz Retraite en utilisant un modèle interne partiel. En parallèle du pilotage règlementaire FRPS, le pilotage économique permet de prendre en compte l'ensemble des risques sur le long terme. Ce calcul est basé sur des chocs des facteurs de risques et une agrégation des risques unitaires provenant de ces chocs à travers une matrice de corrélation simplifiée. En complément, des indicateurs de pilotage des risques tels que le gap de durée ou les limites de risque sont aussi fixés et suivis. En effet, le calcul règlementaire du régime de retraite professionnelle complémentaire, basé sur les volumes de provisions techniques, n'est pas suffisant pour piloter le réel profil de risque supporté.

Dans ce cadre, le capital de solvabilité standalone calculé en 2020 est de 1 785 millions d'Euros. Comme pour Allianz avant création FRPS, le risque Spread est majoritaire dans le portefeuille d'Allianz Retraite à 27%. Cependant, la structure du portefeuille de risque a complètement évolué pour Allianz Retraite par rapport à Allianz Vie avant l'exclusion de FRPS.

En effet, le risque longévité devient un facteur majeur juste derrière le Spread avec 25% du risque standalone global contre 8% pour Allianz Vie avant l'exclusion de FRPS. Le risque longévité lié à l'allongement de l'espérance de vie est donc un facteur plus important pour la retraite complémentaire que pour l'Épargne, dû à la durée longue des passifs des FRPS, environ 15 ans. Le risque de Crédit est le troisième risque des fonds de pension avec 9% du portefeuille des FRPS.

Par ailleurs, les risques actuariels vie et de souscription et notamment de rachats, qui sont des phénomènes liés à l'épargne, disparaissent quasiment des fonds de pension, pendant que les parts de risques financiers (hors Spread et Crédit) baissent pour des raisons de réduction de volume d'actifs et de la forte augmentation de la Longévité, du Spread et du Crédit. Le détail de ce résultat est synthétisé ci-dessous :

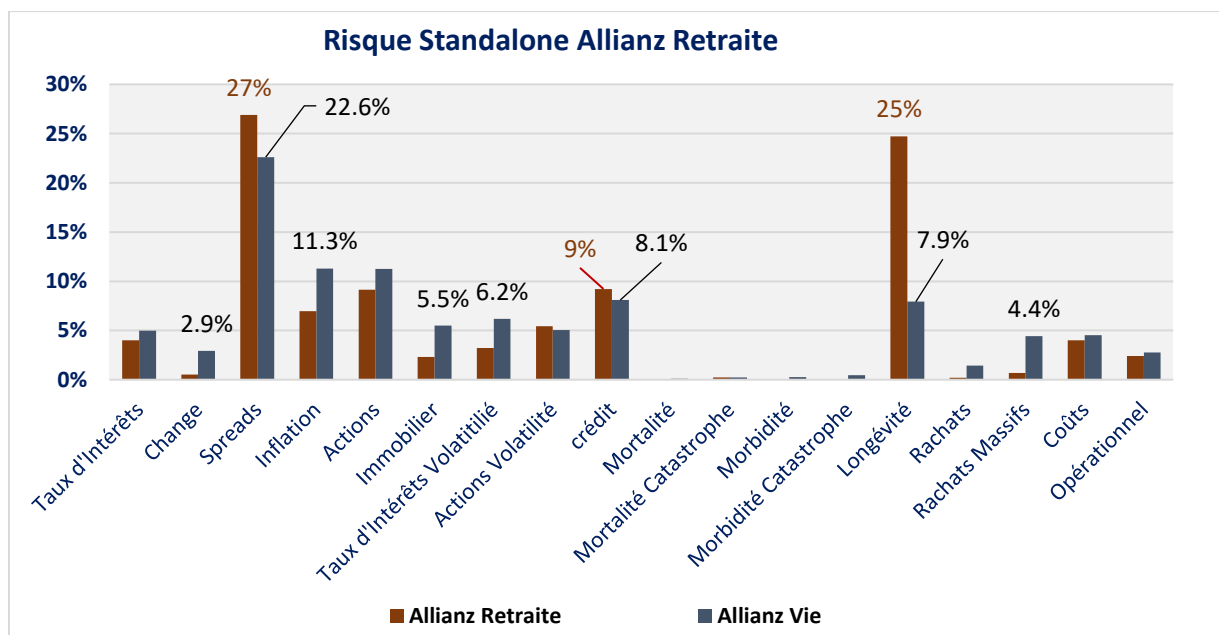


Figure 6.8 : Risque Standalone Allianz Retraite

Avec un facteur de diversification de 50%, le risque standalone se diversifie à 897 Millions d'Euros, comme représenté ci-dessous :

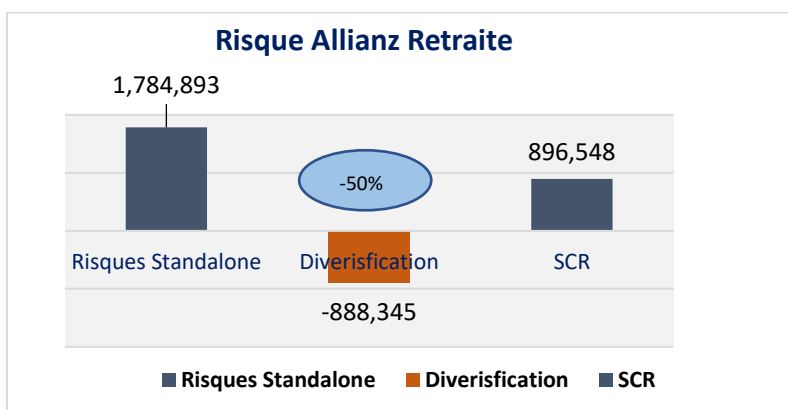


Figure 6.9 : Risque Allianz Retraite

6.3 Création de FRPS : Impacts dans le Risk Capital de Allianz Vie

6.3.1 Impact sur le Ratio de solvabilité

Même si Allianz Vie absorbait bien la retraite professionnelle dans son portefeuille d'avant avec une solvabilité solide de 156%, la création de la filiale Allianz Retraite a eu un impact positif sur son Ratio de Solvabilité passant à 194% ; soit une augmentation absolue de 37 bps, correspondant à +24% d'évolution par rapport à la situation avant FRPS. Cette évolution s'explique principalement par une forte baisse de 28% du risque supporté dû à l'homogénéisation du risque épargne alors que les fonds propres eux n'ont évolués que de -11%.

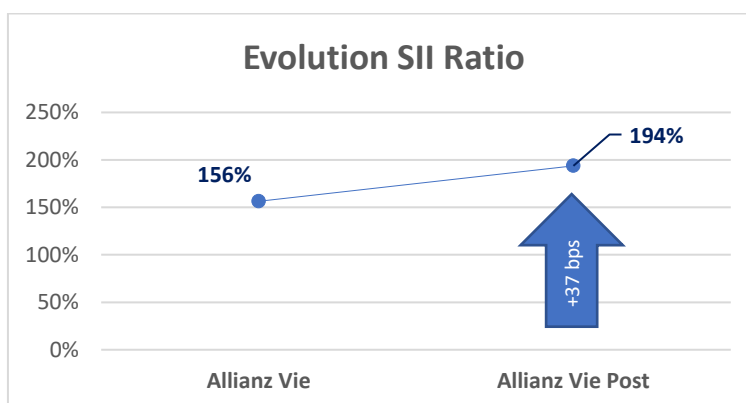


Figure 6.10 : Evolution du SII Ratio post FRPS

En effet, la réglementation Solvabilité II était défavorable au portefeuille de la retraite professionnelle et donc de sa mutualisation au sein d'Allianz Vie pour cause de modélisation inadaptée tel qu'un horizon de projection trop court ou une évaluation des provisions techniques avec des taux de marché.

Ainsi, du fait de ne plus supporter réglementairement la solvabilité de la retraite supplémentaire, l'assurance vie augmente sa solidité financière. Nous allons développer un peu plus les explications de l'évolution du capital de solvabilité dans les parties suivantes.

Nous désignerons par la suite Allianz Vie Post, Allianz Vie après exclusion de la retraite professionnelle complémentaire.

6.3.1 Impact sur les sensibilités

La création de la filiale Allianz Retraite a amélioré la sensibilité des risques financiers comme on peut le voir sur la figure ci-avant. Ceci s'explique principalement par un effet volume dû à l'exclusion du portefeuille de la retraite professionnelle de l'entité Assurance vie d'Allianz. En effet, Allianz Vie est moins exposé aux risques de marché suite à l'exclusion du passif des FRPS.

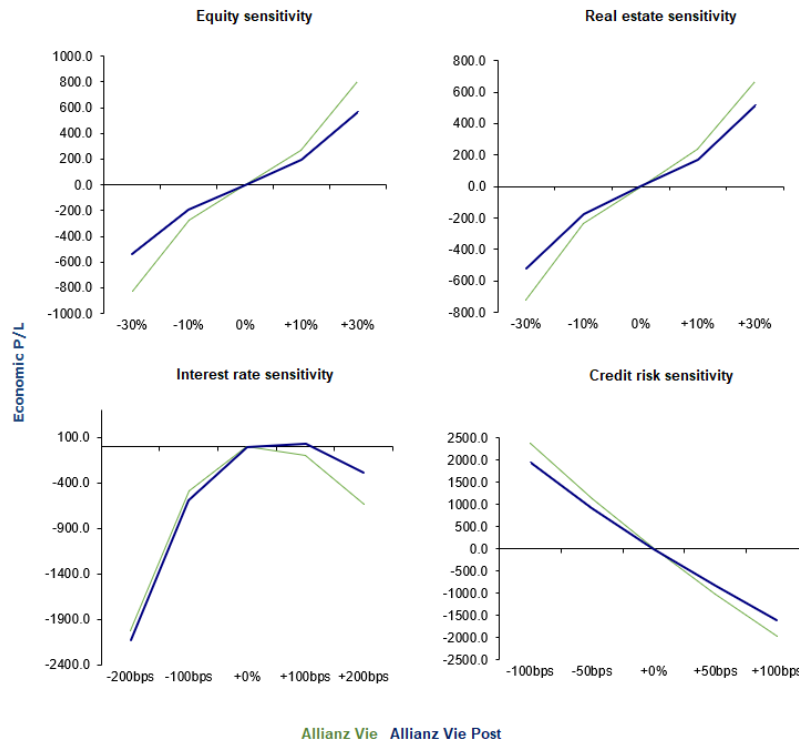


Figure 6.11 : Evolution des sensibilités post FRPS

6.3.1 Impact sur la durée des engagements du passif

L'impact de la création de la filiale Allianz Retraite sur la durée du passif de l'assurance vie d'Allianz est de -0.42 année (-4%).

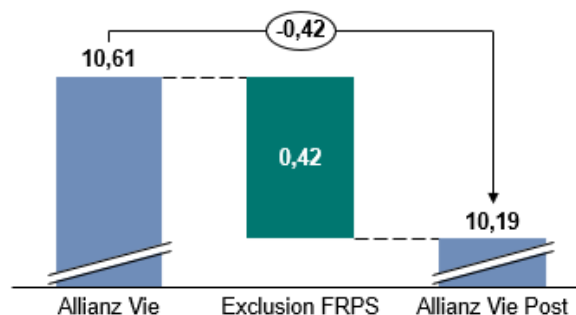


Figure 6.12 : Evolution de la durée du passif post FRPS

Cette baisse de durée s'explique principalement par le fait que les contrats transférés accumulés historiquement dans le portefeuille général de l'assurance vie sont déclinés en rente vers le nouveau portefeuille de la filiale *FRPS* avec donc des durées plus longues que le portefeuille général vie. Ceci se traduit par ailleurs par une hausse de la durée du passif d'Allianz Retraite. Aussi, ces produits de retraite transférés possèdent des taux garantis plus élevés en moyenne de +2% que le taux moyen du portefeuille général vie. La baisse de la durée du passif entraîne une hausse du gap de durée.

6.3.2 Impacts sur le risque standalone

Le risque standalone de l'assurance vie d'Allianz a baissé de 22% à la suite de l'exclusion de la retraite complémentaire vers Allianz Retraite. Très corrélée avec la baisse des *BEL* (-19%), cette diminution du risque standalone s'explique principalement par la chute du risque de Longévité (-90%), combiné avec le décrochage du risque de crédit (et crédit Spread (-24%), de l'Action Volatilité (-28%) et de l'immobilier (-24%).

En effet, le risque de Longévité, lié au risque de l'augmentation de la durée de vie des assurés affecte plus principalement la retraite due à la durée longue des engagements (15 ans en moyenne). De plus, la durée du passif devient plus courte pour l'entité d'assurance vie d'Allianz à la suite de l'exclusion des contrats *FRPS*. La retraite était donc la source principale de risque de longévité de l'assurance vie avant *FRPS*.

Les risques financiers ont principalement évolué avec l'effet volume, en l'occurrence de la baisse des investissements générée par la création de l'entité Allianz Retraite. En effet, pour ne pas léser les assurés de part et d'autre, les transferts vers *FRPS* ont été réalisés d'une manière proportionnelle, maintenant ainsi l'allocation d'actif plus ou moins stable. La retraite était donc un principal contributeur des risques financiers de l'assurance vie avant *FRPS*.

Les risques de souscription vie (rachats, rachat de masse...), actuariels vie (mortalité, morbidité...) baissent de peu, beaucoup moins que la baisse globale du risque. En effet, ces risques sont plus liés aux problématiques de l'assurance vie que de la retraite.

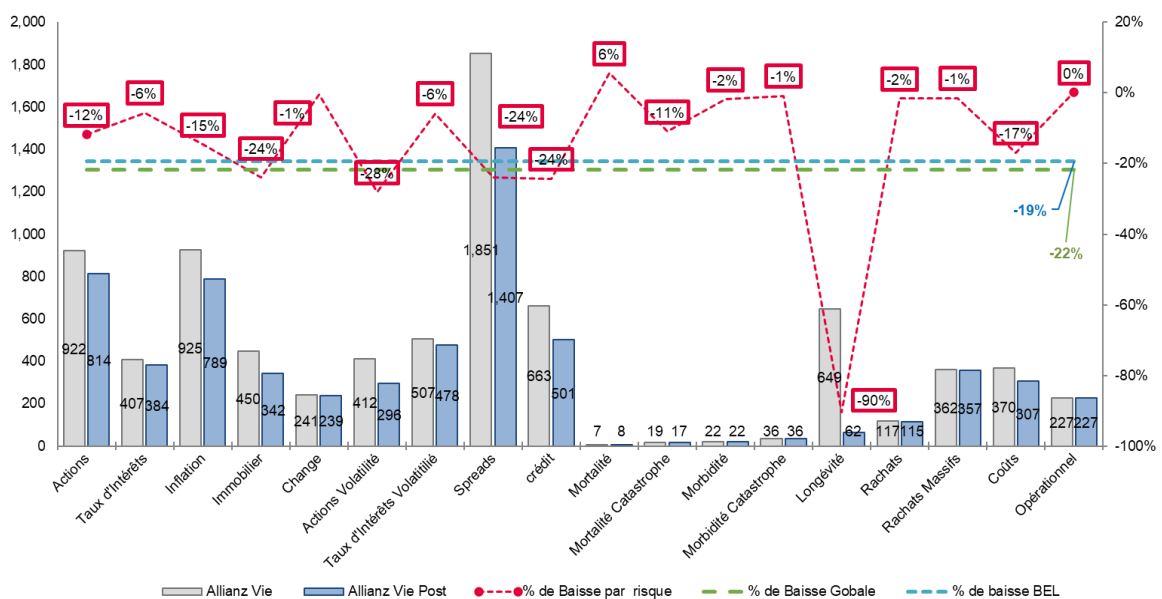


Figure 6.13 : Evolution du risque Standalone post FRPS

Concernant l'allocation du capital par ligne de business représentée ci-dessous, la Retraite supporte beaucoup moins de risques qu'avant, en défaveur principalement de l'Épargne Individuelle. L'allocation du risque standalone passe respectivement pour la Retraite Collective et Individuelle de 21% à seulement 4.5% et de 7% à 1%, alors que la contribution de l'Épargne grimpe de 65% à 84% du risque standalone global de Allianz Vie après l'exclusion de FRPS. L'allocation aux autres lignes de business reste quasi stable. En effet, Allianz Retraite est issue uniquement de transferts de portefeuilles provenant de la Retraite Collective et Individuelle.

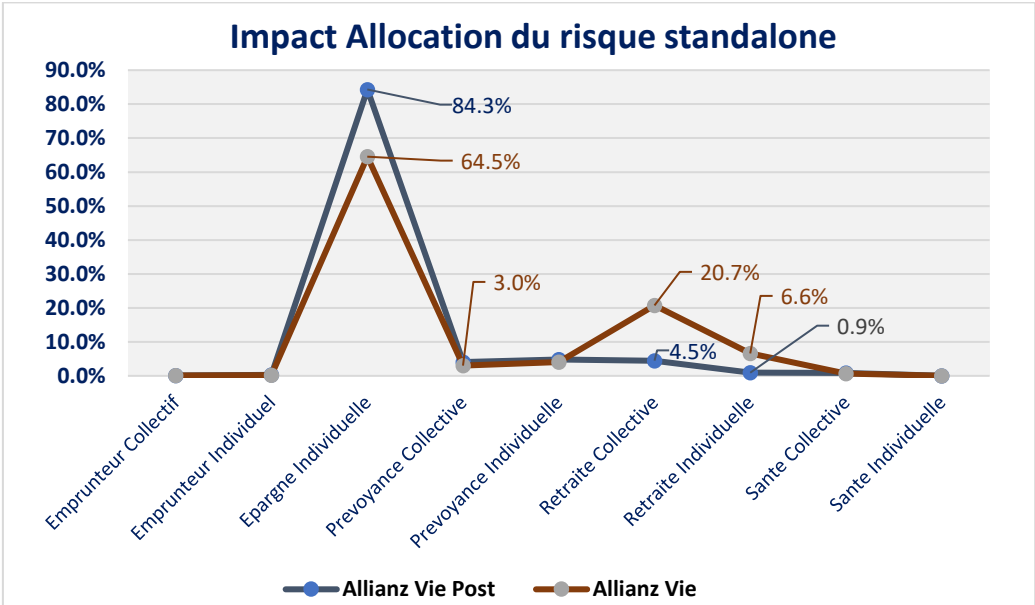


Figure 6.14 : Evolution de l'allocation du risque standalone par LoB Post FRPS

6.3.3 Impacts sur la diversification

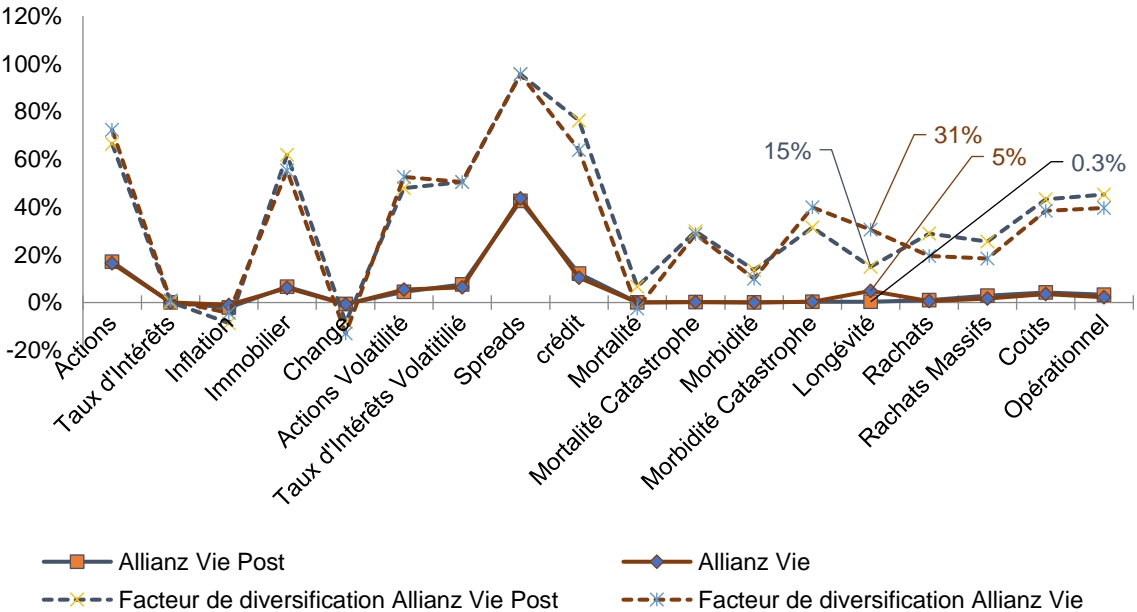


Figure 6.15 : Evolution de l'allocation du risque diversifié par segment Post FRPS

Le risque capital standalone d'Allianz Vie post-FRPS se diversifie à 49%, soit un peu mieux qu'avant (50%).

L'allocation par segment de risque (par la méthode d'Euler) baisse principalement pour la Longévité, passant de 5% à 0.3%, en défaveur des autres risques d'actions et de souscription vie., ce qui s'explique par la forte baisse du risque standalone de longévité couplée d'une bien meilleure diversification de ce même risque. En effet, le risque de Longévité se diversifie deux fois mieux qu'avant (15% contre 31%) du fait de l'exclusion des produits de la retraite possédant les facteurs de longévité les plus risqués du fait de leur longue durée. Le peu de risques de longévité (moins risqués qu'avant) restant dans l'assurance vie profite mieux de la diversification avec les autres produits de l'assurance vie. Cependant, la diversification des autres facteurs de risques baisse principalement. En effet, les autres facteurs de risques bénéficient moins du fort potentiel de diversification du risque de longévité (31%) que les contrats de retraite générés au sein de l'assurance d'avant exclusion. Les autres segments de risques se diversifient quasiment moins bien qu'avant du fait de l'exclusion des contrats FRPS, générant ainsi moins de possibilités de diversification entre produits.

Concernant l'allocation du capital diversifié par ligne de business, la Retraite supporte beaucoup moins de risques qu'avant, en défaveur principalement de l'Epargne Individuelle. L'allocation du risque diversifié passe respectivement pour la Retraite Collective et Individuelle de 18% à seulement 6% et de 6% à 1%, alors que la contribution de l'Epargne grimpe de 66% à 81% du risque diversifié global de Allianz Vie après l'exclusion de FRPS. L'allocation aux autres lignes de business reste quasi stable.

La ligne de Business Retraite collective qui est la LoB la plus impactée par l'exclusion de FRPS perd presque 50% de son pouvoir de diversification. En effet, cette LoB dépourvue de son risque de longévité perd le pouvoir de diversification de ce risque qui était de 31% avant l'exclusion FRPS. De plus, le Spread, qui se diversifie très mal (80%), devient un risque principal de la retraite collective. Contrairement à la retraite collective, l'Epargne Individuelle se diversifie un peu mieux du fait de la baisse des volumes de Spread à la suite de la création du FRPS. La diversification des autres lignes de business reste quasi stable.

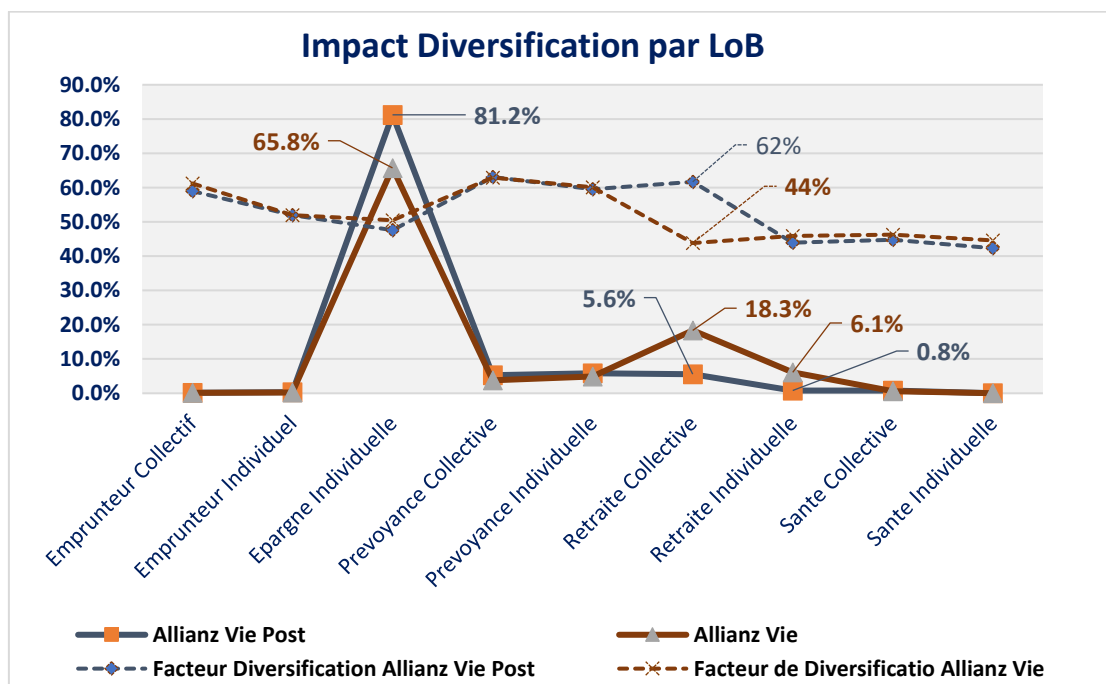


Figure 6.16 : Evolution de l'allocation du risque diversifié par LoB Post FRPS

6.3.1 Impacts charge de capital sur BEL

La charge de capital sur *BEL* globale s'améliore de peu, passant de 4.9% à 4.7%. En d'autres termes, le montant de risque supporté ramené aux Best Estimates des provisions techniques est plus faible. Ceci s'explique par une baisse du *SCR* plus importante que celle des *BEL*, en raison d'une meilleure diversification. La charge de capital de la Retraite collective baisse du fait de la baisse du risque due à l'exclusion du facteur longévité avec les FRPS. L'épargne qui affiche une part de risque plus élevée enregistre une charge de capital plus élevée. Ainsi la charge de capital de l'assurance s'améliore avec l'exclusion des FRPS.

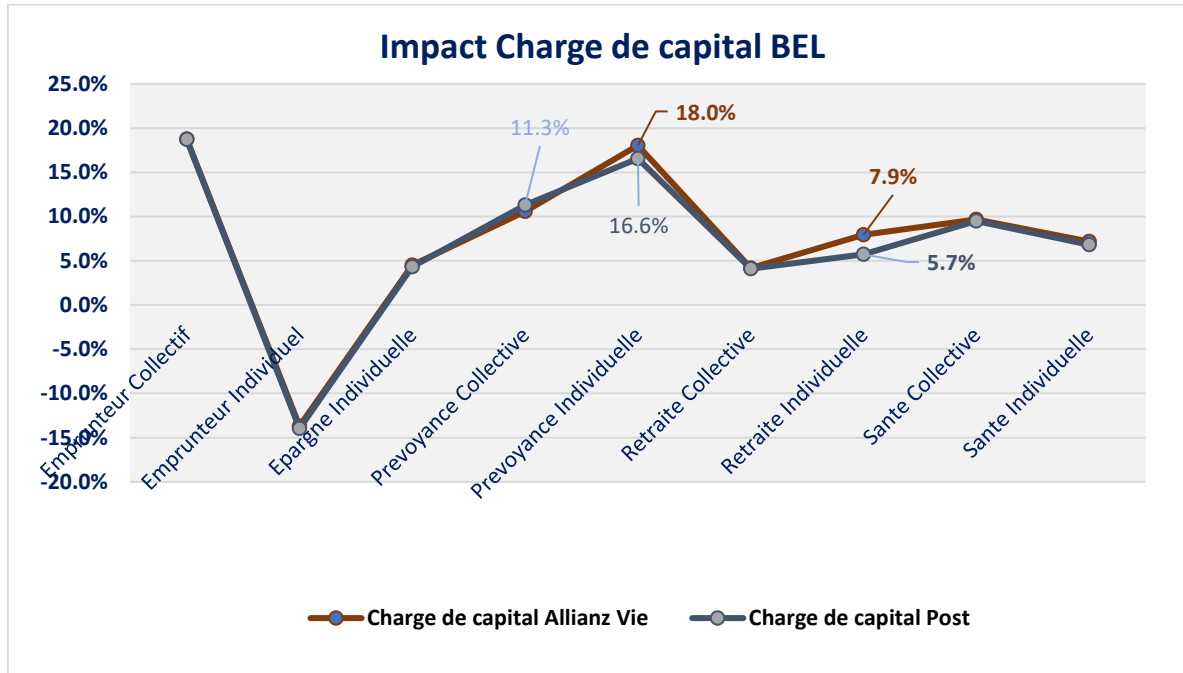


Figure 6.17 : Evolution de la charge de capital par LoB Post FRPS

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu voir les différents impacts que la création du régime *FRPS* génère dans l'assurance vie en termes de modélisation du Capital de Solvabilité. L'exclusion du régime de retraite, dont la modélisation réglementaire Solvabilité II ne convenait pas vraiment à la modélisation de son risque, a permis d'améliorer le *SCR* et le ratio de solvabilité de l'assurance vie à travers une meilleure diversification due à une meilleure homogénéisation des risques. La charge de capital se retrouve ainsi améliorée en conséquence avec une baisse du risque plus importante que celle des Provisions. Cette homogénéisation se traduit par une baisse du gap de durée, mais aussi des sensibilités des risques. Pendant que le risque de Spread devient encore plus conséquent qu'avant, le risque longévité, majoritairement porté par la retraite, baisse considérablement de 90%, ce qui se traduit par une forte baisse de l'exposition des portefeuilles retraite encore restant dans l'assurance vie en défaveur de l'épargne. Pendant que la retraite se diversifie deux fois moins bien du fait de la forte réduction du risque longévité qui générerait une diversification importante auparavant, l'épargne elle se diversifie un peu mieux avec la baisse des volumes de Spread.

Conclusion

Calculer le *SCR* est un exercice complexe du fait de la modélisation des gains de diversification générés lors de l'agrégation des risques au niveau de l'entité, d'une part par les corrélations entre les facteurs de risques, mais aussi par la diversité des lignes de business commercialisées par la compagnie d'autre part. En effet, l'évaluation du *SCR* est d'abord basée sur le calcul de montants de besoin en capital élémentaire pour chaque type de risque. Puis ces montants de risque élémentaires sont agrégés au niveau de la compagnie, bénéficiant ainsi de la diversification.

La formule standard est basée sur une approche d'agrégation intra-modulaire (entre les facteurs de risques d'un même module) puis inter-modulaire (entre les différents modules) prenant en compte des dépendances standards prédéfinies par le régulateur. Même si elle est simple d'implémentation et d'utilisation, sa cartographie des risques n'est donc pas adaptée à toutes les compagnies. En plus, elle a tendance à surestimer le capital de solvabilité dans le sens où elle utilise des coefficients de diversification pas très optimistes, sans oublier le fait que sa méthode d'agrégation n'utilise pas toutes les diversifications possibles entre les risques unitaires. Ainsi, nous avons pu voir que l'apport de l'utilisation du modèle interne dans la modélisation des risques est principalement basé sur sa cartographie des risques plus proche de la réalité du portefeuille de l'entreprise. Aussi, son approche d'agrégation en une seule étape, basée sur la modélisation des dépendances par les copules, considère toutes les corrélations possibles entre les types de risques, maximisant ainsi le bénéfice de diversification. Des capitaux add-on liés à l'imperfection des modèles internes sont éventuellement rajoutés a posteriori au *SCR* calculé. Ces capitaux correspondent à la mise en cohérence des matrices de corrélations comme dans le cadre du risque opérationnel, de l'annulation de la prise en compte de la diversification des *RFF* non permise avec l'assurance vie ou de l'ajustement des méthodes de répliation.

En raison de la modélisation de la diversification au global de l'entité, la problématique de répartition par type de risque se pose naturellement dans le sens où elle permet d'évaluer la contribution de chaque facteur au risque agrégé au niveau de la compagnie et de contribuer ainsi à l'analyse de leur rentabilité. Pour répondre à la problématique d'allocation du *SCR* par type de risque, plusieurs méthodes d'allocation cohérentes discrètes ou continues, avec différents degrés de prise en compte des dépendances entre les risques, ont été traitées dans ce mémoire avec des cas pratiques. Simple à mettre en place et utile quand il est impossible de déterminer les impacts marginaux, la méthode proportionnelle à la faiblesse de ne pas prendre en compte les diversifications entre les facteurs de risques. La méthode marginale quant à elle ne s'intéresse qu'à la contribution marginale des segments de risques à l'ensemble, et non par module de risque alors que l'approche Shapley, très compliquée à mettre en place car inspirée de la théorie des jeux coopératifs, intègre les interactions entre modules.

Ainsi, la méthode d'Euler est l'approche retenue par la réglementation en raison de son critère de continuité propre et de prise en compte de toutes les interactions marginales entre les risques. Nous avons pu démontrer que la conséquence de l'utilisation de la méthode d'Euler dans l'assurance vie à travers notre cas pratique réside dans le fait que le risque supporté est majoritairement de type Spread (44%), suivi de Actions (16%) contre seulement 0.1% Taux et 5% Longévité. Aussi, ces facteurs de risques majoritaires en assurance vie se diversifient beaucoup moins que les plus petits risques (96% de facteur de diversification pour le Spread, 72% pour Actions contre 31% pour la Longévité, 1% pour les Taux et 50% au global compagnie). En d'autres termes, l'assurance vie peut encore améliorer son risque en adoptant une politique d'investissement qui viserait à réduire ses volumes de Spread et d'Actions en faveur des instruments de taux avec des notations très élevées de type AAA ou AA par exemple sans trop compromettre sa rentabilité.

Par ailleurs, l'allocation de ce capital diversifié par ligne de business apporte une information capitale pour le top management. Cette information contribue notamment à l'analyse de la rentabilité de chaque Business commercialisé par le groupe d'assurance qui lui accorde une importance toute particulière. Ainsi, nous avons proposé dans ce mémoire une méthodologie structurée et stable d'allocation du capital de solvabilité par ligne de business. Nous avons pu démontrer que, par un effet volume, l'épargne consomme la plus grosse part de risque de l'assurance vie, suivie de la retraite, alors que la santé et l'emprunteur en consomment moins. D'autre part, les risques Epargne, Retraite et Santé se diversifient mieux tandis que la Prévoyance et l'Emprunteur possèdent les pires diversifications. Cependant, avec les charges de capital les plus faibles, l'Epargne et la Retraite consomment le moins de risques pour les capitaux alloués en raison de leurs profils de contrats multi-supports. Aussi, en termes de pilotage de RORAC, nous avons démontré à travers nos données qu'il est possible d'augmenter la rentabilité globale de la compagnie en développant l'activité de la prévoyance individuelle qui enregistre une meilleure rentabilité que l'entité dans son ensemble. Nous avons ainsi pu mettre en exergue, à travers le calcul de la rentabilité, le lien direct entre le risque et le résultat qui cohabitent ensemble avec un conflit d'intérêt réel dont la maîtrise est néanmoins nécessaire pour assurer la rentabilité de la compagnie.

Nous avons aussi démontré dans ce mémoire que le processus budgétaire joue un rôle primordial dans le cadre du pilotage du risque d'une société d'assurance. En effet, cet exercice annuel présente un double enjeu : définir les objectifs de solvabilité à moyen terme, tout en définissant les barrières d'alerte pertinentes pour piloter cette solvabilité, dont le ratio de gestion qui définit le niveau de capitalisation minimum qui permettrait de maintenir le ratio Solvabilité à un niveau cible optimal de 100% au minimum. Ces différentes alertes et limites permettent ainsi d'anticiper des actions pour relever le ratio de solvabilité si nécessaire à ce niveau cible prévu.

Avec la création des FRPS, nous avons proposé de mesurer les impacts sur la solvabilité d'assurance vie, mais aussi, pour les allocations par ligne de business. Dans ce mémoire, nous avons pu aussi démontrer que la création du régime *FRPS* est une aubaine pour l'assurance en termes de modélisation du Capital de Solvabilité. L'exclusion du régime de retraite, dont la modélisation règlementaire Solvabilité II ne convenait pas vraiment à la modélisation de son risque, a permis d'améliorer le *SCR* et le ratio de solvabilité de l'assurance vie. D'autre part, le risque Longévité, qui est un risque principalement Retraite, a pratiquement disparu de la modélisation du capital de l'assurance vie, ce qui se traduit par une moindre part de risque et d'une moins importante diversification de la retraite. Aussi, la diversification ainsi que la charge de capital de l'assurance vie est meilleure du fait de l'homogénéisation des risques supportés à travers l'exclusion des *FRPS*.

Comme son nom l'indique, l'allocation du capital par ligne de business est une mesure de risque du business au sein de l'entité considérée. Les lignes de business bénéficient ainsi de la diversification avec les autres produits en dehors de leurs business, en plus de la diversification des produits appartenant à la ligne de business considérée. Cette évaluation du risque est donc a priori inférieure à la mesure basée en « standalone » où la ligne de business est considérée seule dans le modèle interne. Ainsi, selon la perspective prévue sur un produit ou un regroupement de produits, cette information doit être communiquée avec beaucoup de prudence. En effet, il ne serait pas prudent de promettre au top manager un impact risque égal à l'allocation attribuée à une ligne de business en cas de projet de cession du business dans le sens où il est naturellement moindre du fait de la perte de bénéfice de diversification engendré par la sortie de ce périmètre.

Bibliographie

- [1] Documents internes Allianz : « Formation Solvabilité II »
- [2] Documents internes Allianz : « Formation Assurances »
- [3] Documents internes Allianz : « Documentation modèle interne »
- [4] Thèse « Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière », Pierre-Emmanuel THEROND. [15 juin 2017], UCBL.
- [5] Cours MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES : « Introduction à la théorie des copules », Frédéric PLANCHET. [2017-2018], ISFA.
- [6] Mémoire d'actuaire « Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II », DECUPERE Sophie. [2011], ENSAE.
- [7] Mémoire d'actuaire, « Alternative aux portefeuilles répliquants pour le calcul des fonds propres économiques », BEGLIOMINI Sandy. [2019], ENSAE.
- [8] Mémoire d'actuaire, « Méthodes de sélection d'instruments financiers pour le calibrage de portefeuilles répliquants », PONNUSAMY Styven. [2020], ISUP.
- [9] Mémoire d'actuaire, « Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler », GRANDPERRIN Lucas. [2018], ISFA.
- [10] Mémoire d'actuaire, « Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques : Modélisation et Simulation », ARMEL Kamal. [2010], EURIA.
- [11] Mémoire d'actuaire, « Allocation stratégique d'actif pour un contrat d'assurance retraite soumis à Solvabilité II. Perspectives offertes par les FRPS », LERNOUT Marine. [2017], ESSEC.
- [12] Mémoire d'actuaire, « La différence de gestion du risque entre un contrat placé sous la réglementation FRPS et son équivalent sous Solvabilité II », CHEVALIER Alexandre. [2017], EURIA.
- [13] Archives-ouvertes (HAL), « Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II », DEVINEAU Laurent, LOISEL Stéphane. [2009], Institut des Actuaire.
- [14] Archives-ouvertes (HAL), « Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II », DEVINEAU Laurent, CHAUVIGNY Matthieu. [2010], Institut des Actuaire.

Annexes

Présentation de l'allocation du risque Standalone par LoB

Synthèse Allocation pa LoB Risque Standalone en milliers €		Risque de marché	Risque non-marché	Risque Opérationnel	Total	pv_Liab	pv_Reserve
Compagnie Standalone		6,377,098	1,582,555	226,749	8,186,402	83,284,124	71,771,632
Somme des Canton		7,775,892	1,616,777	226,749	9,619,418		
Scaling		- 1,398,794	- 34,222	0	- 1,433,017		
Taux Scaling					-18%		
Sensibilité par LoB	Emprunteur Collectif	0.1%	0.2%	0.3%	0.1%	0.0%	0.1%
	Emprunteur Individuel	0.1%	0.6%	0.8%	0.2%	-0.1%	0.1%
	Epargne Individuelle	69.0%	44.9%	74.5%	64.5%	71.5%	75.5%
	Prevoyance Collective	3.1%	2.9%	2.6%	3.0%	1.8%	1.9%
	Prevoyance Individuelle	4.4%	2.7%	4.1%	4.1%	1.3%	2.0%
	Retraite Collective	17.2%	36.2%	13.7%	20.7%	21.4%	16.5%
	Retraite Individuelle	5.8%	10.3%	2.6%	6.6%	3.8%	3.5%
	Sante Collective	0.3%	2.1%	1.4%	0.7%	0.3%	0.4%
	Sante Individuelle	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%
					9.8%	11.4%	
Allocation par LoB	Emprunteur Collectif	4,507	3,584	618	8,709	30.6%	18.0%
	Emprunteur Individuel	7,185	9,494	1,745	18,424	-26.3%	25.3%
	Epargne Individuelle	4,403,364	710,817	168,833	5,283,015	8.9%	9.8%
	Prevoyance Collective	194,530	46,345	5,863	246,738	16.8%	18.2%
	Prevoyance Individuelle	280,947	42,451	9,320	332,719	30.0%	22.6%
	Retraite Collective	1,093,924	572,275	31,153	1,697,352	9.5%	14.3%
	Retraite Individuelle	370,879	163,399	5,870	540,148	17.3%	21.8%
	Sante Collective	21,093	32,688	3,209	56,990	20.9%	19.3%
	Sante Individuelle	667	1,502	139	2,307	16.1%	21.6%

Présentation de l'allocation du risque diversifié par LoB

Synthèse Allocation pa LoB Risque Diversifié en milliers €		Risque de marché	Risque non-marché	Risque Opérationnel	Total	pv_Liab	pv_Reserve	
Diversification compagnie Méthode d'Euler		3,515,353	451,521	89,893	4,056,766	83,284,124	71,771,632	
Diversification produits Méthode d'Euler		3,736,647	479,945	95,551	4,312,143			
Scaling		- 221,294	- 28,424	- 5,659	- 255,377			
Taux Scaling		-6%						
Sensibilité par LoB	Emprunteur Collectif	0.1%	0.4%	0.3%	0.1%	0.0%	0.1%	
	Emprunteur Individuel	0.1%	0.9%	1.0%	0.2%	-0.1%	0.1%	
	Epargne Individuelle	68.9%	39.6%	74.7%	65.8%	71.5%	75.5%	
	Prevoyance Collective	3.9%	3.2%	2.4%	3.8%	1.8%	1.9%	
	Prevoyance Individuelle	5.2%	2.8%	3.9%	4.9%	1.3%	2.0%	
	Retraite Collective	16.6%	33.0%	13.2%	18.3%	21.4%	16.5%	
	Retraite Individuelle	4.8%	17.1%	2.6%	6.1%	3.8%	3.5%	
	Sante Collective	0.3%	2.8%	1.7%	0.6%	0.3%	0.4%	
	Sante Individuelle	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	
		55.1%	28.5%	39.6%	49.6%	4.9%	5.7%	
Facteur de diversification par LoB	Emprunteur Collectif	74%	48%	47%	61%	18.8%	11.0%	
	Emprunteur Individuel	62%	44%	53%	52%	-13.7%	13.2%	
	Epargne Individuelle	55%	25%	40%	50%	4.5%	4.9%	
	Prevoyance Collective	71%	31%	37%	63%	10.6%	11.5%	
	Prevoyance Individuelle	65%	30%	38%	60%	18.0%	13.6%	
	Retraite Collective	53%	26%	38%	44%	4.2%	6.3%	
	Retraite Individuelle	45%	47%	39%	46%	7.9%	10.0%	
	Sante Collective	58%	39%	49%	46%	9.7%	8.9%	
	Sante Individuelle	48%	43%	49%	45%	7.2%	9.6%	
Allocation par LoB	Emprunteur Collectif	3,332	1,712	288	5,332			
	Emprunteur Individuel	4,442	4,207	931	9,580			
	Epargne Individuelle	2,421,484	178,748	67,121	2,667,352			
	Prevoyance Collective	138,686	14,411	2,198	155,295			
	Prevoyance Individuelle	183,567	12,754	3,532	199,854			
	Retraite Collective	582,936	149,154	11,886	743,977			
	Retraite Individuelle	168,427	77,258	2,308	247,992			
	Sante Collective	12,160	12,636	1,561	26,356			
	Sante Individuelle	319	640	68	1,028			

Présentation de l'allocation du risque Standalone par LoB post FRPS

Synthèse Allocation pa LoB Risque Standalone en milliers €		Risque de marché	Risque non-marché	Risque Opérationnel	Total	pv_Liab	pv_Prime	pv_Reserve
Compagnie Standalone		5,250,310	924,145	227,000	6,401,455	67,091,366	4,219,303	59,894,698
Sensibilité par LoB	Emprunteur Collectif	0.1%	0.4%	0.3%	0.1%	0.0%	4.2%	0.1%
	Emprunteur Individuel	0.1%	1.0%	0.9%	0.3%	-0.1%	14.5%	0.1%
	Epargne Individuelle	85.4%	78.1%	85.5%	84.3%	88.7%	0.1%	90.5%
	Prevoyance Collective	3.9%	5.4%	2.9%	4.1%	2.2%	14.1%	2.3%
	Prevoyance Individuelle	4.9%	4.3%	4.7%	4.8%	1.7%	43.4%	2.5%
	Retraite Collective	4.4%	5.3%	3.5%	4.5%	6.4%	2.6%	3.7%
	Retraite Individuelle	0.8%	1.9%	0.5%	0.9%	0.7%	0.0%	0.4%
	Sante Collective	0.4%	3.5%	1.6%	0.9%	0.4%	20.4%	0.5%
	Sante Individuelle	0.0%	0.2%	0.1%	0.0%	0.0%	0.8%	0.0%
						9.5%	151.7%	10.7%
Allocation par LoB	Emprunteur Collectif	4,822	3,500	695	9,017	31.7%	5.0%	18.6%
	Emprunteur Individuel	7,690	9,087	2,018	18,796	-26.9%	3.1%	25.8%
	Epargne Individuelle	4,481,585	721,932	194,126	5,397,643	9.1%	255310.9%	10.0%
	Prevoyance Collective	206,451	49,614	6,623	262,689	17.9%	44.3%	19.4%
	Prevoyance Individuelle	258,042	39,458	10,578	308,078	27.8%	16.8%	21.0%
	Retraite Collective	229,800	48,760	8,017	286,577	6.6%	257.4%	13.1%
	Retraite Individuelle	39,455	18,000	1,184	58,640	13.0%	0.0%	22.1%
	Sante Collective	21,802	32,313	3,603	57,718	21.2%	6.7%	19.5%
	Sante Individuelle	663	1,480	155	2,298	16.1%	6.7%	21.5%

Présentation de l'allocation du risque diversifié par LoB post FRPS

Synthèse Allocation pa LoB Risque Diversifié en milliers €		Risque de marché	Risque non-marché	Risque Opérationnel	Total	pv_Liab	pv_Prime	pv_Reserve
Diversification compagnie Méthode d'Euler		2,775,549	286,344	102,807	3,164,700	67,091,366	4,219,303	59,894,698
Sensibilité par LoB	Emprunteur Collectif	0.1%	0.2%	1.1%	0.2%	0.0%	4.2%	0.1%
	Emprunteur Individuel	0.2%	0.6%	2.9%	0.3%	-0.1%	14.5%	0.1%
	Epargne Individuelle	81.6%	77.4%	81.3%	81.2%	88.7%	0.1%	90.5%
	Prevoyance Collective	5.4%	4.3%	2.6%	5.2%	2.2%	14.1%	2.3%
	Prevoyance Individuelle	6.1%	3.0%	5.3%	5.8%	1.7%	43.4%	2.5%
	Retraite Collective	5.2%	10.5%	1.4%	5.6%	6.4%	2.6%	3.7%
	Retraite Individuelle	0.8%	1.3%	0.1%	0.8%	0.7%	0.0%	0.4%
	Sante Collective	0.5%	2.6%	5.0%	0.8%	0.4%	20.4%	0.5%
	Sante Individuelle	0.0%	0.1%	0.3%	0.0%	0.0%	0.8%	0.0%
		52.9%	31.0%	45.3%	49.4%	4.7%	75.0%	5.3%
Facteur de diversification par LoB	Emprunteur Collectif	75%	17%	161%	59%	-18.7%	3.0%	11.0%
	Emprunteur Individuel	65%	20%	145%	52%	-14.0%	1.6%	13.4%
	Epargne Individuelle	51%	31%	43%	48%	4.3%	121612.3%	4.7%
	Prevoyance Collective	73%	25%	41%	63%	11.3%	28.0%	12.2%
	Prevoyance Individuelle	66%	22%	52%	60%	16.6%	10.0%	12.5%
	Retraite Collective	63%	62%	18%	62%	4.1%	158.8%	8.1%
	Retraite Individuelle	56%	20%	11%	44%	5.7%	0.0%	9.7%
	Sante Collective	61%	23%	143%	45%	9.5%	3.0%	8.7%
	Sante Individuelle	52%	21%	203%	42%	6.8%	2.8%	9.1%
Allocation par LoB	Emprunteur Collectif	3,594	599	1,122	5,315			
	Emprunteur Individuel	4,999	1,843	2,935	9,777			
	Epargne Individuelle	2,266,006	221,515	83,539	2,571,061			
	Prevoyance Collective	150,722	12,296	2,707	165,725			
	Prevoyance Individuelle	169,326	8,691	5,451	183,469			
	Retraite Collective	145,217	30,090	1,470	176,776			
	Retraite Individuelle	21,991	3,637	124	25,752			
	Sante Collective	13,349	7,361	5,142	25,852			
	Sante Individuelle	346	312	315	973			