

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 14/03/2022

Par : **Matthias Schaeffer**
Titre : **Impact des choix de modélisation sur la valorisation
de portefeuille d'un assureur vie et définition d'un
indicateur de rentabilité**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : Milliman

Nom :

Signature :



*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : P-E Arrouy et P. Bonnefoy

Signature :



**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

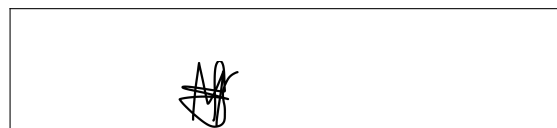
Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

Mots clés : Environnement économique, générateur de scénarios économiques, Solvabilité II, valorisation ALM, rentabilité, modélisation.

Sous la réglementation Solvabilité II, les entreprises d'assurance doivent valoriser les passifs et actifs présents sur leur bilan de manière cohérente avec le marché, ou encore, à leur juste valeur. Ceci impose une valorisation dans un cadre risque neutre et des scénarios économiques dans un univers risque neutre. La vision de la rentabilité est prospective et se fait en calculant des flux futurs probables sur la base d'hypothèses de modélisation.

Les générateurs de scénarios économiques (GSE) sont incontournables pour une modélisation des interactions actif-passif ou modélisation ALM adaptée. Il est impératif pour les assureurs de disposer d'un modèle ALM afin de gérer activement l'allocation de l'actif et de pouvoir respecter les engagements pris auprès des assurés. Pour effectuer cette gestion actif passif, l'assureur doit avoir des hypothèses sur l'évolution de l'actif et sur le comportement des assurés à un horizon donné. Interviennent ainsi les GSE, où l'on projette stochastiquement des facteurs de risque à un horizon fixé.

Dans un contexte de taux bas, voire négatifs, la rentabilité des assureurs sur les fonds euros est basse et nécessite un suivi de la part de l'assureur qui doit s'assurer que les taux qu'il propose sont compétitifs. La mesure de la rentabilité d'un portefeuille de contrats est ainsi au coeur de ce mémoire. Une telle mesure de rentabilité nécessite cependant des hypothèses de modélisation, nécessaires à la génération d'un environnement économique cohérent avec le marché et à la projection des facteurs de risque dans une optique de valorisation. Il est notamment nécessaire d'avoir des modèles de taux nominaux adaptés, pouvant générer des taux faibles ou négatifs, tels que le G2++, le Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM) ou le Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM (DDSVLMM). Le choix du modèle définit l'environnement économique généré et impacte alors le résultat du modèle ALM et les indicateurs Solvabilité II de l'assureur ainsi que sa rentabilité.

Ce mémoire s'intéresse alors dans un premier temps aux choix de modélisation effectués lors de la construction du générateur de scénarios économiques. Dans un second temps, on s'intéresse à un modèle ALM simplifié et à la construction d'un portefeuille représentatif au possible du marché de l'assurance vie français. Après avoir configuré ces deux outils, nous nous attardons sur la définition de rentabilité, sur sa transposition au domaine de l'assurance Vie et sur la construction d'un indicateur de rentabilité pertinent. Enfin, nous étudions de manière quantitative l'impact des choix de modélisation sur la VIF et sur l'indicateur de rentabilité.

Ce mémoire rappelle ainsi d'abord les axes majeurs de Solvabilité II avant de s'intéresser à la modélisation du GSE, les étapes de calibrage, de simulation et de validation. Trois modèles de taux sont retenus : le G2++, DDLMM et DDSVLMM. Les autres facteurs de risque retenus sont : les taux réels, un indice action, modélisé par un modèle de Black Scholes with Deterministic Volatility (BSDV) puis le modèle Stochastic Volatility with Jump Diffusion (SVJD) et un indice immobilier. Vient ensuite le détail des hypothèses ALM retenues et le fonctionnement du modèle ALM utilisé ainsi que la définition d'un indicateur de rentabilité qui permet une étude quantitative sur l'impact des choix de modélisation.

Pour cela nous réalisons une étude historique de la valeur de l'indicateur, ainsi qu'une vérification de sa cohérence, puis nous effectuons 9 sensibilités au 31/12/20 à partir d'un scénario de référence, où nous évaluons l'impact des choix de modélisation, de leur calibrage, des corrélations et de certaines hypothèses faites.

Abstract

Key words : Economic environment, economic scenario generator, Solvency II, ALM valuation, profitability, modeling.

Under the Solvency II regulation, insurance companies must value the liabilities and assets on their balance sheet in a market consistent fashion, or at their fair value. This requires a valuation in a risk-neutral framework and therefore economic scenarios in a risk-neutral universe. profitability is defined in a prospective fashion and requires the calculation of probable future profits.

Economic scenario generators (ESG) are essential for an adapted modeling of assets and liabilities or ALM modeling, which is crucial for insurers, for whom it is imperative to actively manage their asset allocation in order to meet the commitments made to policyholders. To perform this asset liability management, the insurer must make hypotheses on the evolution of the assets and on the behavior of the policyholders over a given horizon. The ESG model allows to project risk factors stochastically over a fixed time horizon.

In a context of low or even negative rates, the profitability of euro funds is low and insurers must monitor their profitability, in order to insure they are able to offer rates consistent with those found on the market. The measure of profitability is therefore at the core of this thesis. Such a measure of profitability requires certain modelling hypotheses, necessary to generate economic scenarios consistent with the market and required for the projection of risk factors for valuation purposes. It is therefore necessary to have adapted nominal rate models that can generate low or negative rates, such as the G2++, Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM) or the Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM (DDSVLMM) models.

This thesis begins by focusing on the modeling choices made during the construction of the economic scenario generator. We then shift our focus on a simplified ALM model and on the construction of a portfolio that is representative of the French life insurance market. After configuring these tools, we linger on the definition of profitability, it's transposition to the life insurance domain and the construction of a relevant profitability indicator. Finally, we study the quantitative impact of the modeling choices on the VIF and on the value of the profitability indicator.

This thesis first recalls the major pillars of Solvency II before focusing on the modeling of the GSE, the calibration, simulation and validation steps. Three rate models are retained : G2++, DDLMM and DDSVLMM. The other risk factors retained are : real rates, an equity index, modeled by a Black Scholes with Deterministic Volatility (BSDV) model and then a Stochastic Volatility with Jump Diffusion (SVJD) model and a real estate index. Following this, we detail the ALM assumptions used and the functioning of the ALM model, as well as the definition of a profitability indicator that allows for a quantitative study of the impact of the modeling choices.

In order to do this, we carry out a historical study of the indicator, back-tested with public available data of profitability and followed by 9 sensitivities at the 31/12/20 based on a reference scenario, where we evaluate the impact of the choice of models, their calibration, the correlations and a few assumptions that were made.

Note de Synthèse

Contexte de l'étude

Depuis la mise en place de la réglementation Solvabilité II, les assureurs doivent valoriser leur bilan en valeur de marché. Cette valorisation porte sur les contrats d'assurance Vie proposés par les assureurs, qui peuvent être considérés comme des ensembles d'options et de garanties financières proposées aux assurés. La nécessité de valoriser en valeur de marché impose de se placer dans l'univers risque neutre, où l'on projette un ensemble de facteurs de risque avec un grand nombre de simulations. Pour ce faire, les assureurs utilisent des générateurs de scénarios économiques (GSE), qui permettent de simuler des trajectoires des facteurs de risque sur un horizon de projection donné. Les générateurs de scénarios économiques sont indispensables pour la modélisation des conditions futures de marché et la valorisation en valeur de marché du bilan impose une approche qui doit être cohérente avec le marché, ou "market consistent", les prix des actifs simulés par le GSE devant être cohérents avec ceux observés sur le marché.

La vision de la rentabilité des assureurs passe par une valorisation de leur bilan. Pour ce faire, les assureurs font appel à un modèle ALM. Il s'agit d'un outil de modélisation des flux d'actif et de passif en tenant compte de leur interactions. Ces interactions sont modélisées par la revalorisation des contrats, la stratégie d'investissement ou encore par le comportement des groupes d'assurés. Le fonctionnement du modèle nécessite des tables de scénarios économiques stochastiques, fournies par le générateur de scénarios économiques. Ces tables permettent de calculer la juste valeur des options et garanties inhérentes aux contrats constitutifs du portefeuille. On comprend alors que les choix de modélisation issus du GSE impactent la valorisation du bilan d'un assureur, et de fait sa rentabilité, et font ainsi l'objet de nombreux débats. Enfin, pour rester compétitifs et proposer des produits adaptés, il est indispensable pour les assureurs d'avoir un outil de suivi de leur rentabilité leur permettant d'interpréter les résultats de la valorisation de leur bilan.

L'objet de ce mémoire est alors de définir un indicateur de suivi de rentabilité et d'évaluer les choix de modélisation sur la rentabilité d'un assureur Vie.

Choix de modélisation GSE

4 facteurs de risque sont retenus dans le cadre du générateur de scénarios économiques : les taux nominaux, les taux réels, un indice action et un indice immobilier. Le choix des modèles est déterminant dans l'implémentation du GSE et nous avons retenu plusieurs modèles pour les taux nominaux et l'indice action, qui sont les facteurs de risques les plus explicatifs dans les résultats de valorisation.

Le choix des modèles retenus dans le cadre de ce mémoire a été dicté par une étude sur 21 acteurs principaux du marché de l'assurance Vie en France, avec une attention donnée à la possibilité de générer des taux négatifs et à l'existence de formules fermées ou semi-fermées. Cette étude révèle une utilisation majoritaire du DDSVLMM : 13 acteurs contre 8 acteurs utilisant le DDLMM. Il est donc naturel de prendre en compte au moins ces deux modèles, représentatifs de ceux utilisés sur le marché français. Les modèles retenus pour les taux nominaux sont alors : le G2++ pour ses caractéristiques détaillées ci-après, le Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM) et le Displaced Diffusion with Stochastic Volatility Libor Market Model (DDSVLMM) qui exhibent l'ensemble des caractéristiques listées.

Le DDLMM simule le taux forward déplacé d'une constante positive (shift) suit une dynamique log-normale, sous la probabilité forward neutre associée. Notons que les taux forward sont des données de marché observables. D'autre part, l'ajout du shift permet de réduire l'explosivité du modèle, de répliquer plus fidèlement les volatilités de swaptions de marché de faibles maturités et tenors et de mieux tenir compte de l'effet de skew de volatilité.

Le DDSVLMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM) est une extension du Libor Market Model introduit par Joshi&Rebonato (2003). Il s'agit d'un modèle adapté du DDLMM, toujours avec la présence du paramètre de shift α mais aussi avec l'ajout d'une variance stochastique. La complexité supplémentaire est liée à la volatilité, ici remplacée par un processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR) de retour à la moyenne. Enfin, du fait de son utilisation partagée avec le DDLMM chez les acteurs du marché, il est intéressant d'observer l'effet de l'ajout de la volatilité stochastique.

Le modèle G2++ est une extension du modèle de Hull&White. Il permet d'obtenir une formule fermée sur les prix des obligations zero coupon à partir des prix observables sur le marché et de ses différents paramètres. Le calibrage peut être fait de manière relativement simple en faisant appel à une méthode dite de freezing. De plus, le modèle reproduit parfaitement la courbe des taux initiale et permet de générer des courbes de taux réalistes. La génération de taux négatifs est d'ailleurs possible.

Une étude similaire pour la modélisation de l'indice action nous a permis d'isoler deux modèles : le modèle de Black Scholes à volatilité déterministe (BSDV) et le modèle à diffusion de sauts avec volatilité stochastique (SVJD). Le modèle BSDV donne un processus log-normal à volatilité par terme déterministe. Le calibrage est réalisé en considérant la structure par terme de la volatilité locale comme constante par morceaux.

Le modèle SVJD (Stochastic Volatility with Jump Diffusion model) apporte plusieurs nouveautés par rapport au modèle BSDV. En effet, il combine le modèle de volatilité stochastique de Heston et le modèle de saut de Merton pour tenir compte des discontinuités qui peuvent impacter les indices boursiers. La composante de volatilité stochastique permet de répliquer la structure temporelle des volatilités implicites du marché à la monnaie (ATM) et de prendre en compte le smile de volatilité, donc les données hors de la monnaie (AFM).

Les taux réels sont modélisés à l'aide d'un Gaussian Libor Market Model (GLMM) et l'indice immobilier par un modèle de Black Scholes à volatilité constante (BSCV). Les choix de modélisation sont récapitulés dans le tableau suivant. Le GLMM est calibré à l'aide de BEIR : breakeven inflation rate, qui sont des mesures de l'inflation attendue, basée sur des données de marché.

Modélisation de l'économie EUR

Probabilité	Risque neutre			
Facteur de risque	Taux nominaux	Indice action	Indice immobilier	Taux réels
Modèles retenus				
Modèles	DDLMM, DDSVLMM, G2++	BSDV, SVJD	BSCV	GLMM
Corrélation	Matrice de corrélation obtenue par réplication de corrélations historiques cibles			
Calibrage				
Instruments	Swaptions	Volatilités implicites	Volatilités implicites	BEIR curve
Optimisation	Minimisation selon la méthode des moindres carrés			

Indicateur de rentabilité

Il est essentiel pour un assureur d'avoir un outil de suivi de sa rentabilité mais la définition d'un tel indicateur soulève plusieurs problématiques : S'intéresse-t-on à une branche d'activité en particulier ? Regarde-t-on la rentabilité sur un an ou à long terme ? Quelles grandeurs retenir dans la définition de l'indicateur ?

Il est d'abord nécessaire d'établir une définition au sens large de la rentabilité, que nous transposerons ensuite au domaine de l'assurance Vie.

Nous désignons par rentabilité d'un capital sa capacité à produire des revenus. Il faut ainsi être en mesure de comparer le profit réalisé et les fonds investis pour obtenir un tel profit. Nous distinguerons deux types de rentabilité :

- La rentabilité comptable est définie comme le rapport entre le gain effectué (appelé résultat) et les capitaux investis, qui peuvent comprendre les fonds issus de l'entreprise et ceux empruntés.

$$\text{Rentabilité Comptable} = \frac{\text{Résultats}}{\text{Capitaux investis}}$$

La rentabilité comptable permet d'évaluer le capital dégagé par l'investissement de capitaux. Son calcul est nécessaire à l'entreprise d'assurance, pour déterminer si les attentes des actionnaires sont atteintes et à quel point l'entreprise dégage de la rentabilité et crée de la valeur. Dans un premier temps l'entreprise cherche à connaître la rentabilité de l'actif, qui correspond à la rentabilité comptable. Dans un deuxième temps elle

s'intéresse à la rentabilité des capitaux propres.

- Nous désignons par rentabilité financière la rentabilité des capitaux propres, qui se calcule en mesurant le rapport entre le résultat net et les capitaux propres (ressources internes à l'entreprise).

$$\text{Rentabilité financière} = \frac{\text{Résultats nets}}{\text{Capitaux propres}}$$

L'entreprise peut s'endetter ce qui fera gonfler sa rentabilité financière mais cela inclut un risque supérieur du point de vue des actionnaires qui doit être pris en compte dans leur exigence de rentabilité.

Dans le domaine de l'assurance Vie, les produits sont à long terme. Le bilan et le compte de résultat ne donnent alors qu'une vision partielle des gains effectués. Il s'agit d'adopter une vision sur plusieurs exercices, qui tient compte des résultats futurs et des contrats déjà en cours pour être en mesure d'obtenir une vision précise de la rentabilité de l'entreprise d'assurance. La rentabilité comptable n'est pas suffisante pour capturer la rentabilité de l'entreprise car elle ne donne une vision qu'à un seul instant, avec des conditions données (comportement des clients, du marché, etc.). Il faut ainsi projeter le compte de résultat, en faisant des hypothèses cohérentes avec le marché pour les années futures. Ceci permet d'estimer la rentabilité attendue, sur un portefeuille de contrats comme dans notre cadre.

La première mesure de rentabilité, en sortie du modèle ALM, est la Value of Inforce (VIF). Sa valeur permet de mesurer le gain futur revenant à l'assureur généré par les contrats du portefeuille. C'est donc un premier indicateur pertinent dans notre mémoire et nous le détaillons plus ci-après. La VIF représente la valeur actuelle des profits futurs net d'imposition (Present Value of Future Profits ou PVFP) à laquelle on retire le coût d'immobilisation du capital (CoC).

$$VIF = PVFP - CoC$$

Ainsi, l'établissement de la VIF est basé sur une projection de profits futurs et ce à partir de la situation actuelle du portefeuille. Il faut donc projeter des comptes de résultats sur l'ensemble de la durée d'activité. Cette mesure est particulièrement intéressante dans notre cas car elle donne le gain réel effectué (selon des hypothèses réalistes) en tenant compte des frais liés à l'activité de l'entreprise d'assurance. Une valeur de VIF positive permet d'affirmer que le portefeuille crée un gain de valeur et est profitable aux actionnaires.

La PVFP représente la valeur actuelle des futurs profits probables (nets d'imposition), liés au portefeuille considéré. Elle permet d'évaluer de manière prospective la rentabilité des contrats dans la durée et dépasse ainsi une vision à un seul exercice, proposée par un bilan comptable et financier sur une année donnée.

Le coût d'immobilisation du capital, ou CoC, donne le coût d'immobilisation de l'exigence réglementaire en capital imposée par Solvabilité II. La réglementation imposant aux acteurs d'immobiliser des fonds propres, il est cohérent de prendre en compte le coût associé dans le calcul de la rentabilité. Il s'agit en effet d'un manque à gagner car ce capital est revalorisé uniquement avec le taux sans risque, plus faible que le taux de revalorisation souhaité par les actionnaires. Dans le calcul de la VIF, ce coût est retranché de la PVFP.

A ce titre, nous définissons un indicateur se basant sur des grandeurs facilement interprétables et qui correspondent aux exigences de l'assurance Vie (rentabilité prospective se basant sur plusieurs exercices notamment) :

- La VIF, détaillée ci haut ;
- La Provision Mathématique (PM) : Il s'agit du constituant le plus significatif des provisions techniques. La PM correspond à la valeur actuelle de l'engagement auprès des assurés, il s'agit de flux à payer probables.

Nous avons alors :

$$\text{Indicateur} = \frac{VIF}{PM}$$

La VIF fait le lien avec la rentabilité du portefeuille de contrats comme nous l'avons détaillé au dessus et la PM représente la plus grande partie des provisions techniques et il s'agit de flux à payer probables, ce qui peut s'assimiler

à un besoin en fond propre simplifié. Cette grandeur est d'une part plus simple à obtenir qu'un SCR, car elle est aisément modélisable au sein d'un modèle ALM et ne nécessite pas plusieurs sensibilités pour être définie et permet d'autre part de faire un lien direct avec les capitaux propres de l'entreprise définis auparavant. De plus, l'utilisation de la PM plutôt que d'un SCR permet de s'affranchir des questions liées à la volatilité du SCR.

Cet indicateur est défini en base 100 à partir de l'ensemble de paramètres suivants et les résultats des sensibilités sur l'indicateur seront en référence aux paramétrages de référence suivants.

Facteur de risque	Modèle	Date de valorisation	Simulations	Horizon	TMG net
Taux nominaux	DDLMM (Shift 10%)	31/12/2020	3000	40 ans	0,34%
Indice action	BSDV (dividendes CIR)				
Indice immobilier	BSCV (volatilité 10%)				
Taux réels	GLMM				

Modèle ALM

Les tables de scénarios économiques issues du GSE sont utilisées en entrée d'un modèle ALM simplifié, qui réalise la valorisation du bilan d'un assureur Vie fictif détenant le portefeuille d'actifs de la composition suivante : 81% d'obligations à taux fixe, 11% d'actions, 3% de trésorerie, modélisée par du cash et 5% d'actifs immobiliers. La stratégie d'allocation des actifs de l'assureur est supposée constante au cours du temps et établie à la date initiale de valorisation. De plus, la proportion en valeur de marché de chaque actif présent dans le portefeuille est supposée fixe au cours de la projection. A chaque année de projection il s'agit donc d'effectuer des achats et des ventes d'actifs pour s'assurer de retrouver la composition initiale du portefeuille représentée ci-dessous.

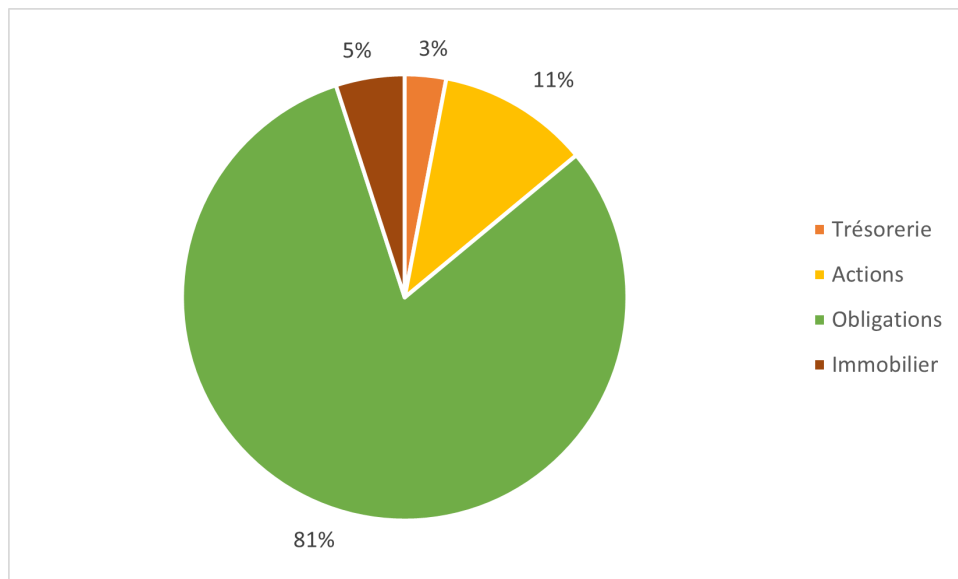


FIGURE 1 – Composition du portefeuille d'actifs

Nous modélisons 4 actifs dans le bilan considéré : les obligations sans risque, les actions, la trésorerie et l'immobilier. Dans une optique de simplification des analyses les provisions techniques seront modélisées par les provisions mathématiques, la réserve de capitalisation ainsi que la provision pour participation aux bénéfices. Enfin, les options et garanties des contrats d'assurance Vie proposés sont modélisées par le Taux Minimal Garanti (TMG), la participation aux bénéfices (PB) et l'option de rachat.

Pour évaluer de manière quantitative l'impact des choix de modélisation sur la VIF et sur l'indicateur de rentabilité, nous avons réalisé une étude historique des valeurs de l'indicateur entre 2017 et 2020 ainsi que 9 sensibilités, dont le détail est donné ci après. Notons que nous considérons le modèle DDLMM comme modèle de référence au cours de

ce mémoire du fait de la stabilité de son calibrage pour différents jeux de données et de sa robustesse. Ces critères en particulier font du DDLMM un modèle pertinent pour comparer l'impact de différents paramètres.

1. Evolution historique de l'indicateur

Nous réalisons avant tout une étude sur les données annuelles au 31/12 de chaque année depuis le 31/12/2017 et jusqu'au 31/12/2020 des valeurs obtenues de l'indicateur pour analyser son évolution en fonction de l'environnement économique avant de quantifier l'impact des choix de modélisation. L'évolution de l'indicateur est directement liée au niveau de la courbe des taux et aux taux générés par le modèle. Entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020, les taux ont chuté et on observe une baisse de plus de 40% de la valeur de l'indicateur.

2. Impact du G2++

Nous comparons d'abord les résultats de VIF et de la valeur de l'indicateur avec les modèles G2++ et DDLMM, différents en terme de calibrage et de distribution des taux générés. Les taux générés étant plus faibles pour le G2++, une baisse de la VIF et donc de l'indicateur est observée à hauteur de 6%.

3. Impact du DDSVLMM

Nous évaluons l'impact de l'équivalent du DDLMM avec l'ajout d'une volatilité stochastique. Ce modèle est le plus répandu chez les acteurs de la place, son impact est alors très intéressant. Ici encore, on retrouve une baisse de l'indicateur, de 4%, due à l'introduction de la volatilité stochastique et aux taux de rendement de l'actif observés sur la projection.

4. Impact du calibrage du DDSVLMM

Etant le modèle le plus répandu chez les assureurs et bancassureurs, son calibrage est aussi un sujet d'intérêt. Certains modèles ne sont généralement calibrés qu'à partir de swaptions à la monnaie (ATM), ce qui n'est pas le cas du DDSVLMM reproduisant le smile de volatilité. Nous évaluons ici l'effet d'un calibrage à la monnaie uniquement, qui conduit à des volatilités de swaptions Monte-Carlo plus faibles et ainsi à une hausse de la valeur de l'indicateur.

5. Impact du paramètre de shift

Le paramètre de shift est un paramètre déterminant dans la distribution des taux générés par les modèles DDLMM et DDSVLMM. Sa valeur fait débat et chaque acteur considère sa propre valeur. Nous évaluons ici l'impact du shift sur la VIF et l'indicateur. Plus la valeur du shift augmente, plus la distribution des taux est déplacée vers les taux négatifs, ce qui augmente la proportion de trajectoires négatives et plus la valeur de l'indicateur chute.

6. Niveau de dividendes du BSDV

Les actions étant le deuxième actif le plus représentatif de la plupart des portefeuilles des assureurs Vie (au moins sur les fonds euros), il est intéressant d'observer les variations des résultats de valorisation en fonction du niveau de dividendes. Une hausse du niveau de dividendes résulte en des moins-values plus adverses et en une hausse de la provision pour risque d'exigibilité, très coûteuse sur la VIF.

7. Impact du SVJD

L'ajout de la volatilité stochastique et de la diffusion de sauts apporte des nouveautés par rapport au BSDV. Ce modèle, plus représenté que le BSDV par les bancassureurs est plus complexe, son impact est alors un sujet d'intérêt chez les assureurs "classiques". Le SVDJ semble apporter un effet de diversification lié à une baisse de la corrélation action/taux 10 ans (induite par l'ajout de la composante à saut) et donne des volatilités implicites des Call ATM plus élevées, résultant en un gain de valeur de l'indicateur.

8. Calibrage du SVJD

Après avoir évalué l'impact du modèle SVJD, nous regardons l'effet de son calibrage. Le marché des dérivés actions est un marché avec des positions très généralement à court terme, et propose des maturités maximales pour les calls / puts côtés autour de 3 à 4 ans. L'extrapolation des données a ainsi un rôle important. Une mauvaise extrapolation conduit à une sous estimation des volatilités implicites des Call ATM et donc à un gain de valeur de l'indicateur à hauteur de 5%.

9. Impact de la corrélation

Les corrélations entre les actifs sont déterminantes, d'autant plus entre les actions et les taux, actifs majoritaires des portefeuilles d'assureurs. Nous évaluons ici l'impact d'une baisse de corrélation entre l'indice action et les taux zero coupons de maturité 1 an et 10 ans. La baisse de corrélation apporte un gain de diversification notable, visible sur les taux de rendement de l'actif et donc une hausse de la valeur de l'indicateur.

10. Impact des hypothèses ALM

Le TMG caractérise les options et les garanties proposées par l'assureur et au-delà des choix issus du GSE, son impact est déterminant sur les résultats de VIF et de rentabilité. Avec l'augmentation du TMG, la part des profits revenant à l'assureur baisse, ainsi que la valeur de l'indicateur. L'hypothèse retenue dans l'ALM a un impact majeur sur la valorisation particulièrement dans l'environnement de taux bas actuel.

Comme cela est visible sur la figure suivante, les choix de modélisation GSE et ALM nécessitent un intérêt tout particulier. Les modèles de taux, particulièrement le G2++, peuvent induire des baisses de valeur de VIF et de l'indicateur de rentabilité, tandis qu'un calibrage réalisé avec une base de volatilités de calls sur indice action incomplète peut avoir un impact significatif sur la VIF et sur la rentabilité. Le calibrage des paramètres embarqués, comme le shift, donne aussi des variations conséquentes des indicateurs Solvabilité II et nécessite une étude dédiée pour être objectif. Toutes les sensibilités démontrent qu'il est essentiel d'accorder une attention particulière aux choix de modélisation du générateur de scénarios économiques et du modèle ALM afin d'apprécier la rentabilité de l'assureur de façon pertinente.

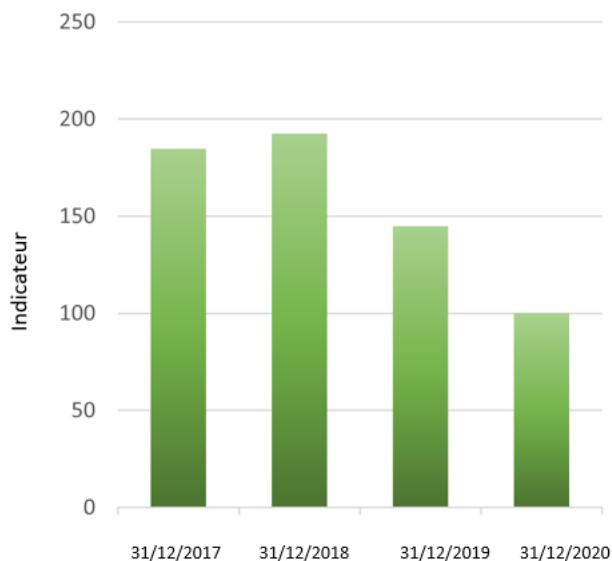


FIGURE 2 – Evolution historique de la valeur de l'indicateur

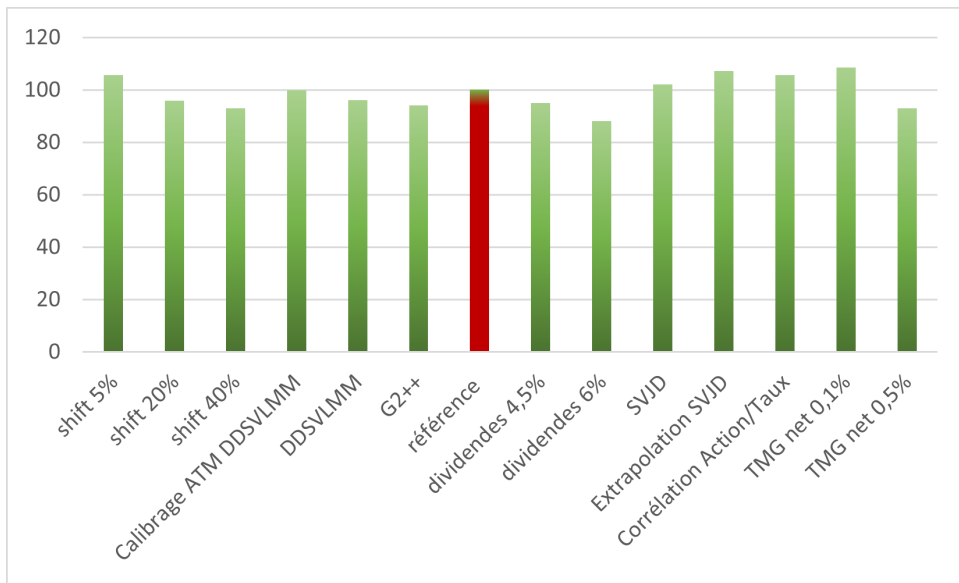


FIGURE 3 – Résultats des sensibilités sur l'indicateur

Executive Summary

Context of the study

Under Solvency II insurers are required to value their balance sheet in a market consistent fashion. This valuation concerns the life insurance contracts offered by insurers, which can be considered as sets of options and financial guarantees offered to policyholders. The market consistent valuation requires us to place ourselves in a risk-neutral universe, where we project a set of risk factors with a large number of simulations. With those requirements in mind, insurers use economic scenario generators (ESG), which can simulate a large number of risk factor trajectories over a given projection horizon. Economic scenario generators are essential in order to model future market conditions, and the market valuation of the balance sheet requires an approach that must be consistent with the market, since the asset prices simulated by the GSE must be consistent with those observed on the market.

Insurers then use an ALM model, or asset-liability management tool, which consists in modeling asset and liability flows by taking into account interactions between them, notably through the revaluation strategy, the investment strategy and policyholder behavior. These interactions require stochastic scenarios, derived from the GSE, in order to establish the fair value of the options and guarantees of the insurance contracts in the portfolio. It is therefore understandable that the modeling choices made throughout the use of the GSE have an impact on the valuation of an insurer's balance sheet and are the subject of much debate. Finally, in order to remain competitive and informed, an indicator to monitor insurers profitability is essential, as many exist : Return on Equity, Market consistent embedded value, etc.

The purpose of this thesis is therefore to define an indicator of profitability and to evaluate the impact of modeling choices on the profitability of a life insurer.

GSE modeling choices

Four risk factors are considered in the economic scenario generator : nominal rates, real rates, an equity index and a real estate index. The choice of models is a determining factor in the implementation of the GSE and we retain several models for nominal rates and the equity index, the most explanatory risk factors in the valuation results.

First of all, a study of the different nominal rate models available on the market allowed us to isolate the desired modeling characteristics. The possibility of generating negative rates is essential and the existence of closed formulas for the price of caps, or semi-closed formulas for the price of swaptions are also determining factors. The selected models for nominal rates are : the G2++, the Displaced Diffusion Libor Market Model (DDLMM) and the Displaced Diffusion with Stochastic Volatility Libor Market Model (DDSVLMM), which exhibit all the characteristics listed above.

The DDLMM model simulates a forward rate, shifted by a positive constant (shift), and following a lognormal dynamic under the associated neutral forward probability. The forward rates are observable market data, unlike the instantaneous forward rates used in the class of models exhibited by Heath Jarrow Morton (HJM). On the other hand, the addition of the shift parameter allows to reduce the explosiveness of the model, to replicate closely the volatilities of market swaptions of low maturities and tenors, and to better account for the volatility skew.

The DDSVLMM, or LMM+, is an extension of the LMM model proposed by Joshi and Rebonato (2003). This model is adapted from the DDLMM by adding a stochastic variance process. This model allows for a calibration of the volatility smile but requires an additional discretization of the volatility process. Finally, because of its shared popularity with the DDLMM among life insurers, it is interesting to observe the effect of adding stochastic volatility.

The G2++ model is an extension of the Hull&White model. It overcomes one of the classic limitations of one-factor short rate models, which induce a perfect correlation between rates and maturities of the yield curve. The introduction of a second random source within the short rate process significantly improves the quality of replication, and allows for a correlation within the term structure of interest rates.

A similar study for the modeling of the stock index has allowed us to isolate two models : the deterministic volatility Black Scholes model (BSDV) and the stochastic volatility jump diffusion model (SVJD). The BSDV model gives a lognormal process with a time dependant deterministic volatility. This extension of the standard Black Scholes model retains a simplicity of implementation and calibration and adds a time dependence to the volatility process. The calibration is performed by considering the term structure of the local volatility as a piecewise constant.

The SVJD model is an extension of the Merton and Heston models. It was initially developed for the valuation of American options in a mixed framework of stochastic volatility and jumps. It efficiently replicates the optionality associated with the volatility risk (time and strike dependence) and incorporates lognormal jumps. Semi-closed formulas for the valuation of call and put options are available but the numerous parameters of the model make it a more complex tool to calibrate than the BSDV model.

Real rates are modeled using a Gaussian Libor Market Model (GLMM) while the real estate index is modeled by a Black Scholes constant volatility model (BSCV). The modeling choices are summarized in the following table.

Modeling of the EUR economy				
Risk neutral	Probability			
Risk factor	Nominal rates	Equity index	Real estate index	Real rates
Retained models				
Models	DDLMM, DDSVLMM, G2++	BSDV, SVJD	BSCV	GLMM
Correlation	Correlation matrix obtained by the replication of historical targets			
Calibration				
Instruments	Swaptions	Implicit volatilities	Implicit volatilities	BEIR curve
Optimisation	Minimization according to the least squared method			

Profitability indicator

It is essential for an insurer to have tool for monitoring its profitability. However, the definition of such an indicator raises several issues : from what point of view is profitability measured ? Are we interested in a particular line of business ? Which variables should be included in the definition of the indicator ? In this thesis, we are interested in profitability from the point of view of the insurer's results and not from the point of view of shareholders, which is the focus of several other indicators such as Return on Equity and New Business Value. Moreover, we are interested in the savings branch of a fictitious insurer, which we model through a portfolio that will be detailed later on. Finally, the choice of the quantities retained is made by starting from the definitions of accounting and financial profitability and by transposing them to the insurance domain.

$$\text{Accounting profitability} = \frac{\text{Results}}{\text{Invested funds}}$$

and financial profitability :

$$\text{financial profitability} = \frac{\text{Net results}}{\text{Own funds}}$$

With these definitions in mind, we can transpose the definition of profitability to the life insurance field. Since the balance sheet and income statement only partially represent the insurer's profitability, it is essential to adopt an approach over several years, taking into account the present value of future results.

Given this, we define an indicator based on easily interpretable quantities, the VIF (Value of Inforce) and the MP (Mathematical provision) :

$$\text{Indicator} = \frac{\text{VIF}}{\text{MP}}$$

The VIF being the present value of future results and the MP representing the most significant part of the technical provisions. This indicator is defined in base 100 from the following set of parameters and the results of the sensitivities on the indicator will be in reference to the following reference settings.

Risk factor	Model	Valuation date	Simulations	Horizon	Minimal guaranteed rate
Nominal rates	DDLMM (Shift 10%)	31/12/2020	3000	40 years	0,34%
Equity index	BSDV (dividends CIR)				
Real estate index	BSCV (volatility 10%)				
Real rates	GLMM				

ALM model

The economic scenario tables generated with the GSE are used as input to a simplified ALM model, which values the balance sheet of a fictitious life insurer holding a portfolio of assets with the following composition : 81% of fixed-rate bonds, 11% of equities, 3% of cash, modeled by cash, and 5% of real estate assets. The insurer’s asset allocation strategy is assumed to be constant over time and established at the initial valuation date. In addition, the proportion in market value of each asset in the portfolio is assumed to be fixed over the course of the projection. In each year of the projection, assets are bought and sold to ensure that the initial composition of the portfolio is maintained as shown below :

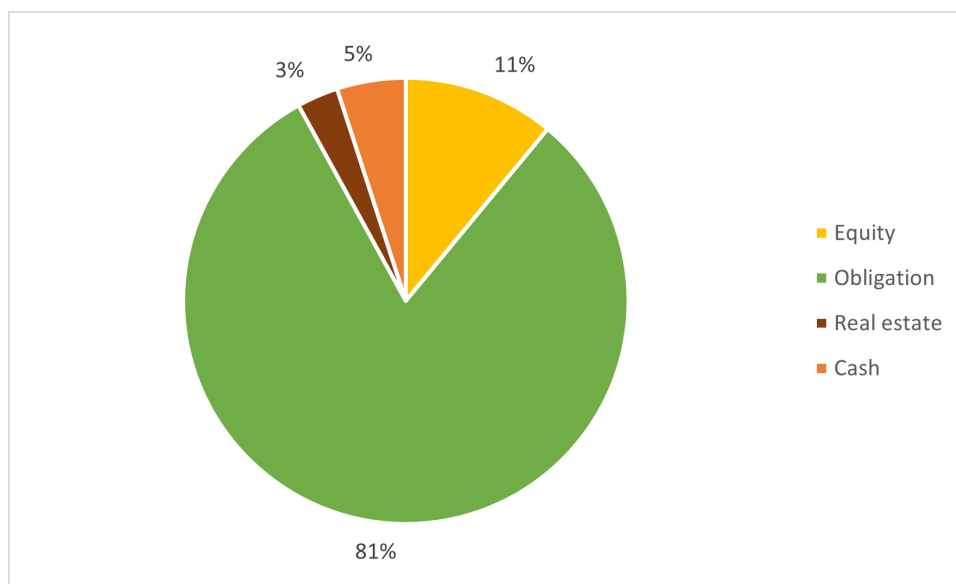


FIGURE 4 – Asset repartition in the initial portfolio

We model 4 assets in the considered balance sheet : risk-free bonds, equities, cash and real estate. In order to simplify the analysis, the technical reserves are modeled by the mathematical reserves and the capitalization reserve. Finally, the optionality related to the proposed life insurance contracts is modeled by the Minimum Guaranteed Rate (MGR), the profit sharing rate and a buy out option.

In order to evaluate in a quantitative way the impact of the modeling choices on the VIF and the evolution of the value of our profitability indicator, we have carried out a historical study of the indicator’s value between 2017 and 2020 as well as 8 sensitivities, the details of which are given below. Note that most of the sensitivities are made in reference to the DDLMM model, which we consider as a reference model in view of the stability of its calibration, which makes it a very suitable reference model for our study.

1. Historical study of the indicator

First of all, we carry out a study on the annual data at 31/12 since 2017 and until 2020 of the values obtained from the indicator to analyze its evolution according to the economic environment, before quantifying the impact of the modeling choices. The evolution of the indicator is directly linked to the level of the yield curve and the rates generated. Between 2019 and 2020, rates have significantly fallen and we observe a drop of more than 40% in the value of the indicator.

2. Impact of the G2++ model

We first compare the results of VIF and the indicator value with the G2++ and DDLMM models, which are different in terms of calibration and distribution of the generated rates. This is the most obvious analysis of the rate models chosen. As the generated rates are lower for the G2++, a decrease of the VIF and therefore of the value of the indicator is observed.

3. Impact of the DDSVLMM model

We evaluate the impact of the DDLMM equivalent with the addition of stochastic volatility. This model is the most common among market participants, and its impact is therefore very interesting. Here again, we find a decrease in the value of the indicator, due to the additional optional cost induced by the stochastic volatility.

4. Impact of calibration of the DDSVLMM

Being the model most used by insurers, its calibration is also a subject of interest. Some models can be calibrated only with at the money data, which is not the case for the DDSVLMM reproducing the volatility smile. In this paper, we evaluate the effect of the absence of OTM data on the DDSVLMM model. Calibration to ATM only data leads to an underestimation of the Monte Carlo volatilities generated and thus to an increase in the value of the indicator.

5. Impact of the shift parameter

The shift parameter is a key parameter in the distribution of rates generated by the DDLMM and DDSVLMM models. Its value has been debated and each actor considers its own value. Here we evaluate the impact of the shift on the VIF. The more the value of the shift increases, the more the rate distribution is shifted towards negative rates and the more the value of the indicator falls.

6. Dividend level in the BSDV framework

As equities are the second most representative asset in most life insurers' portfolios (at least for euro funds), it is interesting to observe the variations in valuation results according to the level of dividends. An increase in the level of dividends results in higher capital losses and an increase in the provision for exigibility risk, which is very costly on the VIF.

7. Impact of the SVJD model

The addition of stochastic volatility and jump diffusion is a novelty compared to the BSDV model. The SVJD model, preferred to BSDV by bank insurers, replicates the optionality linked to volatility, and its impact is therefore a subject of interest for traditional insurers. The SVDJ model seems to bring a diversification effect counterbalancing the higher volatilities generated, resulting in a gain of value of the indicator.

8. Calibration of the SVJD model

After having assessed the impact of the SVJD model, we look at the effect of its calibration. Between data up to 3 years and data up to 20 years, the extrapolation has a major role that we quantify here. The absence

of data leads to a clear underestimation of equity volatilities and thus to a substantial gain in the value of the indicator.

9. Impact of the correlation

Correlations between assets are crucial, especially between equities and interest rates, which are the main assets of insurers' portfolios. We evaluate the impact of a decorrelation between equities and nominal rates. The decorrelation brings a significant gain in diversification and therefore an increase in the value of the indicator.

10. Impact of ALM hypothesis

The MGR characterizes the optionality of the guarantees offered by the insurer and, beyond the choices made by the GSE, its impact is decisive on the results of VIF. As the MGR increases, the insurer's share of profits decreases, and so does the value of the indicator.

As can be seen in the following figure, the GSE and ALM modeling choices require special attention. The nominal rate models, especially the G2++ model, can induce a drop in the value of VIF, while a calibration performed with too little data or a poor choice of data can have a significant impact on VIF and profitability. The calibration of meta parameters, such as the shift, also results in significant variations of the Solvency II indicators and requires a dedicated study to be objectified. All the sensitivities demonstrate that it is essential to pay particular attention to the modeling choices of the economic scenario generator.

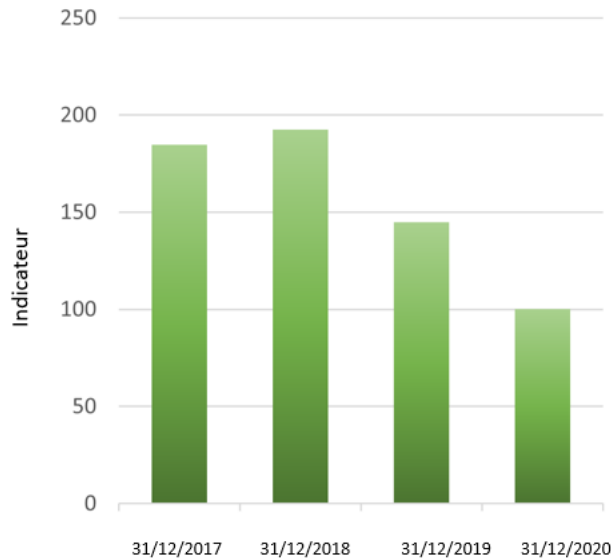


FIGURE 5 – Evolution of the indicator

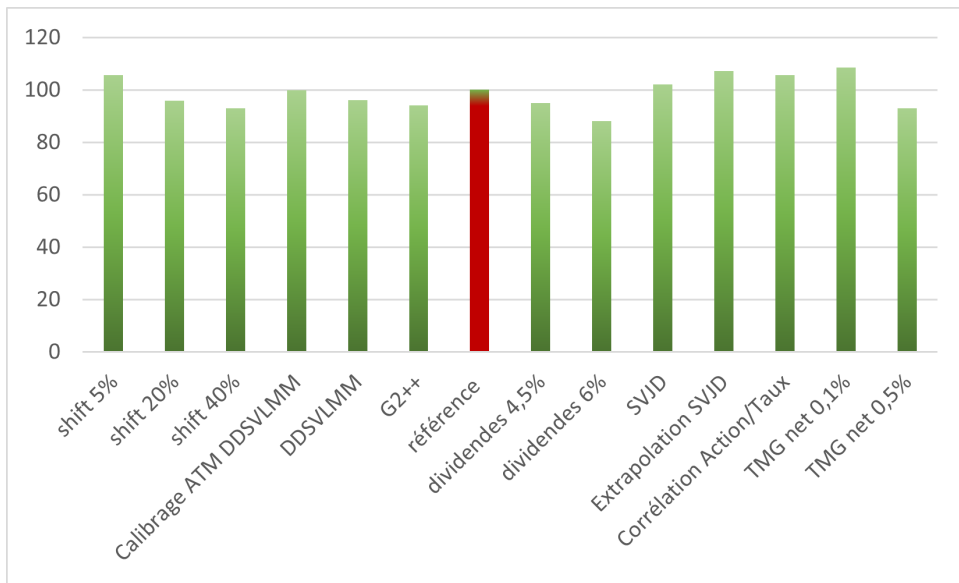


FIGURE 6 – Sensitivities results

Remerciements

Je souhaite d'abord remercier Alexandre Boumezoued, directeur de l'équipe R&D au sein de Milliman Paris pour son enseignement à l'ENSAE et pour m'avoir accordé un entretien avec mes futurs maîtres de stage.

Je tiens ensuite particulièrement à adresser mes remerciements à Paul Bonnefoy et Pierre-Edouard Arrouy, mes maîtres de stage pour leur disponibilité, leur pédagogie et leur soutien durant le stage et la rédaction de ce mémoire. Leur aide et leurs conseils ont été très précieux et vont bien au-delà du mémoire.

Je souhaite également remercier Julien Vedani et Emmanuel Avril pour leur aide et leurs conseils sur la valorisation du bilan en assurance Vie et sur l'interprétation des résultats obtenus.

Je suis reconnaissant à toute l'équipe R&D pour l'ambiance de travail proposée pendant ces 6 mois et pour les échanges que nous avons pu entretenir sur différents sujets.

Enfin, je souhaite remercier l'ensemble de mes professeurs à l'ENSAE qui ont su cultiver mon intérêt pour l'actuariat et pour la qualité des cours proposés.

Table des matières

1	Contexte de l'étude	1
1.1	Solvabilité II	1
1.1.1	Focus sur le pilier 1	2
1.1.2	Focus sur le pilier 3	3
1.2	Introduction aux GSE	3
1.2.1	Vision risque neutre	4
1.3	Fonctionnement d'un GSE	4
2	Générateurs de scénarios économiques	6
2.1	Modèles de taux retenus	6
2.1.1	DDLMM	6
2.1.2	DDSVLMM ou LMM+	10
2.1.3	G2++	12
2.1.4	Modèle de taux réels	15
2.2	Comparaison des modèles	15
2.3	Modélisation de l'indice action	16
2.3.1	BSDV	16
2.3.2	SVJD	17
2.3.3	Comparaison des modèles action	18
2.4	Modélisation de l'indice immobilier	18
2.5	Structure de dépendance	18
2.5.1	Corrélations	18
2.5.2	Retraitements	21
2.6	Validation	21
2.6.1	Tests de martingalité	21
2.6.2	Tests de market consistency et de repricing	23
2.7	Choix du nombre de scénarios économiques	25
2.8	Générateurs de nombres pseudos aléatoires et fuite de modèle	27
2.9	Mise en place opérationnelle	29
2.10	Intégration dans un modèle ALM	31
3	Modèle ALM	32
3.1	Bilan d'un assureur vie	32
3.2	Définition d'un modèle ALM	33
3.2.1	Présentation	33
3.2.2	Modélisation de l'actif	36
3.2.2.1	Hypothèses	36
3.2.2.2	Trésorerie	36
3.2.2.3	Obligations	36
3.2.2.4	Indice action	37
3.2.2.5	Indice immobilier	37
3.2.3	Modélisation du Passif	37

3.2.3.1	Hypothèses	37
3.2.3.2	Best Estimate	38
3.2.4	Retour sur le TMG et la PB	39
3.2.5	Fonctionnement de l'outil ALM	39
3.2.5.1	Hypothèses	40
3.2.5.2	Mise en oeuvre	43
3.2.6	Résultats du modèle ALM	46
4	Rentabilité d'un assureur vie	51
4.1	Définition d'un indicateur de rentabilité	52
4.1.1	Construction de l'indicateur	52
4.1.2	Backtesting de l'indicateur	54
4.2	Etude historique de l'indicateur	54
4.2.1	Valeurs obtenues	54
4.2.2	Etude trimestrielle entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020	60
4.2.3	Backtesting de l'indicateur	62
4.3	Sensibilité de l'indicateur aux choix de modélisation	63
4.3.1	Impact du G2++	63
4.3.2	Impact du DDSVLMM	65
4.3.3	Impact du calibrage des modèles de taux	67
4.3.4	Impact du paramètre de shift	68
4.3.5	Choix de modélisation de l'indice action	71
4.3.6	Impact de la corrélation	77
4.3.7	Impact des hypothèses ALM	78
4.3.8	Choix des modèles en fonction des profils d'investissement	79
4.3.9	Ouverture sur une remontée des taux	80
A	Outils financiers	84
A.1	Taux d'intérêts	84
A.2	Taux forward	85
A.3	Taux swap	85
A.4	Courbes de taux	86
A.4.1	Courbe de taux swap	86
A.4.2	Courbe EIOPA	86
A.5	Univers risque neutre	86
B	Schéma de discrétisation d'Alfonsi	88

Table des figures

1	Composition du portefeuille d'actifs	vi
2	Evolution historique de la valeur de l'indicateur	viii
3	Résultats des sensibilités sur l'indicateur	ix
4	Asset repartition in the initial portfolio	xii
5	Evolution of the indicator	xiv
6	Sensitivities results	xv
1.1	Les 3 piliers de Solvabilité II	2
2.1	Test sur les déflateurs modèle DDLMM	22
2.2	Test sur les déflateurs modèle G2++	22
2.3	Test sur l'indice action modèle BSDV	23
2.4	Test de Market consistency pour le modèle BSDV	24
2.5	Heatmap des corrélations Monte-Carlo	25
2.6	Test de martingalité sur le taux zéro coupon 10 ans avec 3000 trajectoires au 31/12/2020	26
2.7	Test de martingalité sur le taux zéro coupon 10 ans avec 1000 trajectoires au 31/12/2020	27
2.8	Volumes de swaptions ATM échangées	29
2.9	Volume échangé ATM fonction du tenor	30
2.10	Volume de swaptions AFM échangées tenor 10 ans	30
3.1	Etapas de revalorisation des PM	46
3.2	Répartition des VNC des actifs et allocation cible	47
3.3	Evolution des VM, VC et de la PM	47
3.4	Evolution du taux de PMVL	48
3.5	Boxplot du taux de rendement de l'actif	49
3.6	Boxplot du taux servi	49
3.7	Cash flows actualisés de résultats futurs	49
3.8	Cash flows actualisés de passif	49
3.9	VAN de marge futures	50
4.1	Courbes EIOPA	55
4.2	Enveloppe quantile pour le taux ZC 10 ans du DDLMM au 31/12/2020	56
4.3	Enveloppe quantile pour le taux ZC 10 ans du DDLMM au 31/12/2019	56
4.4	Taux zéro coupon moyens de maturité 10 ans	57
4.5	VAN de marge au 31/12/2019 vs. 31/12/2020	57
4.6	Taux de PMVL au 31/12/2019 et au 31/12/2020	58
4.7	Volatilités Monte-Carlo de swaptions ATM au 31/12/2019 et au 31/12/2020	59
4.8	Volatilités implicites de calls ATM au 31/12/2019 et au 31/12/2020 utilisées pour le calibrage du modèle action	60
4.9	Taux minimaux de maturité 10 ans générés	61
4.10	Taux moyen de maturité 10 ans générés	61
4.11	Volatilités implicites de calls ATM utilisées pour le calibrage du modèle action	62
4.12	Distribution des VAN de marges futures du DDLMM et du G2++	64

4.13	Enveloppes quantiles pour les modèles DDLMM et G2++ pour le taux ZC 10 ans	65
4.14	VAN de marges futures des modèles DDSVLMM et DDLMM	66
4.15	Enveloppes quantiles pour les modèles DDLMM et DDSVLMM pour le taux ZC 10 ans	66
4.16	Taux de rendement de l'actif moyens pour les modèles DDLMM et DDSVLMM	67
4.17	Taux ZC moyen de maturité 10 ans en fonction du calibrage	68
4.18	Taux ZC minimal de maturité 10 ans en fonction du calibrage	68
4.19	Diffusion des taux 10 ans avec shift 10% et 5 %	70
4.20	Diffusion des taux 10 ans avec shift 20% et 40 %	70
4.21	Evolution du taux de PMVL avec le niveau de dividendes	72
4.22	Volatilités des calls ATM pour les modèles BSDV et SVJD	73
4.23	Taux de PMVL pour les modèles SVJD et BSDV	74
4.24	Proportion de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG	74
4.25	Corrélation de l'indice action aux taux ZC 1 an et 10 ans en fonction du modèle	75
4.26	Smile de volatilité pour des calls de maturité 20 ans sur les données à 3 ans et à 20 ans	76
4.27	Smile de volatilité Monte-Carlo pour des calls de maturité 20 ans	76
4.28	Evolution de la corrélation Monte-Carlo de l'indice action avec les taux nominaux 1 an et 10 ans . .	77
4.29	Proportion des trajectoires où le TRA est inférieur au TMG	79

Liste des tableaux

3.1	Bilan économique d'un assureur	32
3.2	Caractéristiques des classes d'actifs à la date initiale de valorisation	40
3.3	Taux de PMVL et coupon de la poche obligataire	42
3.4	allocation cible des actifs	42
4.1	Evolution annuelle de l'indicateur	55
4.2	Evolution trimestrielle de la valeur de l'indicateur	60
4.3	Variation des résultats nets des branches épargnes entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020	63
4.4	Impact du G2++	64
4.5	Impact du DDSVLMM	65
4.6	Impact des données de calibrage du DDSVLMM	67
4.7	Intervalles retenus pour le paramètre de shift	69
4.8	Impact de la valeur du shift	70
4.9	Impact du niveau de dividendes	71
4.10	Impact du modèle SVJD	73
4.11	Impact des données de calibrage du SVJD	75
4.12	Impact de la corrélation	77
4.13	Impact du TMG pour le modèle DDLMM	78
4.14	Impact du TMG pour le modèle G2++	78

Introduction

Ce mémoire s'intéresse à deux aspects : la construction d'un indicateur de valeur agrégée cohérent d'une part et l'impact de l'environnement économique et des choix de modélisation sur la valorisation d'un portefeuille en assurance Vie, d'une part.

Assureurs et assurés sont liés à relativement long terme par des polices d'assurance Vie : en échange d'une prime initiale de souscription, l'assuré bénéficie de rémunérations garanties. Comme les assureurs ont de nombreux contrats, avec des garanties différentes en fonction des groupes d'assurés, qui peuvent exercer des options propres au contrat au cours du temps, la valorisation des produits d'assurance Vie est relativement complexe. Cette valorisation nécessite des méthodes de simulations aléatoires afin de capturer l'ensemble des garanties pouvant être exercées et le comportement des groupes d'assurés, fonction de divers environnements économiques.

Intervient alors le premier outil utilisé dans ce mémoire, les Générateurs de Scénarios Economiques (GSE) qui sont devenus indispensables aux compagnies d'assurance. Ces derniers permettent l'obtention de simulations aléatoires des facteurs de risque majeurs liés à une économie et donc d'obtenir un environnement économique décrit par les facteurs de risques retenus.

Les scénarios économiques obtenus sont de grand intérêt pour les assureurs/réassureurs qui peuvent les utiliser pour divers objectifs principaux :

- Calcul des capitaux réglementaires : Sous Solvabilité 2 les compagnies d'assurance doivent immobiliser une quantité de capitaux donnée afin de faire face à des conditions de marché très adverses. Ce montant est lié à la valorisation financière du passif de l'entreprise, projeté sous les conditions les plus adverses simulées par le GSE.
- Rééquilibrage des actifs : Pour respecter ses engagements futurs l'assureur doit parfois modifier la composition de ses portefeuilles d'actifs, les choix effectués sont fonction des hypothèses ALM et des scénarios simulés par le GSE.
- Calcul des provisions techniques : Il s'agit de la meilleure estimation ou Best Estimate des engagements de l'assureur. Ici l'intérêt du GSE est la projection des contrats plus complexes sous les conditions économiques simulées, afin de déterminer la prime d'assurance versée par les souscripteurs.

Le second outil utilisé au cours du mémoire est un modèle ALM simplifié, qui permet d'effectuer la valorisation du bilan de l'assureur sur la base des scénarios issus du GSE. Nous détaillerons les hypothèses retenues ainsi que les principaux résultats en sortie du modèle. La valorisation ainsi effectuée nous permet de définir une mesure de rentabilité à partir des grandeurs modélisées et obtenues.

Il apparait que le GSE est indispensable à la valorisation des contrats et que les choix de modélisation sous-jacents ont un impact sur les résultats obtenus par l'assureur et sa rentabilité. Après avoir rappelé les différents modèles utilisés, le cadre de simulation et les hypothèses de notre modèle ALM, nous nous proposons d'étudier leur impact sur la VIF ou Value of Inforce et sur la rentabilité. La VIF permet de mesurer le gain futur revenant à l'assureur et représente la valeur actuelle des profits futurs nets d'imposition (Present Value of Future Profits ou PVFP) à laquelle on retire le coût d'immobilisation du capital (CoC).

$$VIF = PVFP - CoC$$

La rentabilité sera définie au cours du mémoire en utilisant cette première grandeur de VIF et l'on mesurera l'impact des choix de modélisation sur l'indicateur de rentabilité.

Contexte de l'étude

Ce chapitre s'intéresse à la présentation de notre étude, en y redéfinissant le cadre réglementaire, notamment avec des rappels sur solvabilité II, et en introduisant un outil prépondérant dans ce mémoire : les générateurs de scénarios économiques (GSE). Nous y rappellerons également les enjeux de ce mémoire avec l'importance du choix des modèles pour un assureur.

1.1 Solvabilité II

Solvabilité II est une directive dont le but est la prévention du risque systémique ainsi que la protection du système financier. Pour cela, solvabilité II repose sur 3 grands piliers :

- Pilier 1 : il s'agit des exigences quantitatives, qui définissent la valorisation des actifs et des passifs, les exigences de capital et leur calcul, en d'autres termes ce pilier permet la construction du bilan économique. Nous porterons un intérêt particulier au pilier 1, qui régit le cadre réglementaire des calculs présentés ce mémoire.
- Pilier 2 : concerne des exigences qualitatives, regroupant la gouvernance et la gestion des risques ainsi que l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment).
- Pilier 3 : définit les règles de reporting à destination du public et du superviseur, afin d'accroître la transparence de l'information. Nous portons aussi un intérêt à ce pilier car nous étudions dans ce mémoire des SFCR (Solvency and Financials Conditions Report), rapports annuels contenant notamment des données quantitatives annuelles sur une entreprise d'assurance donnée.

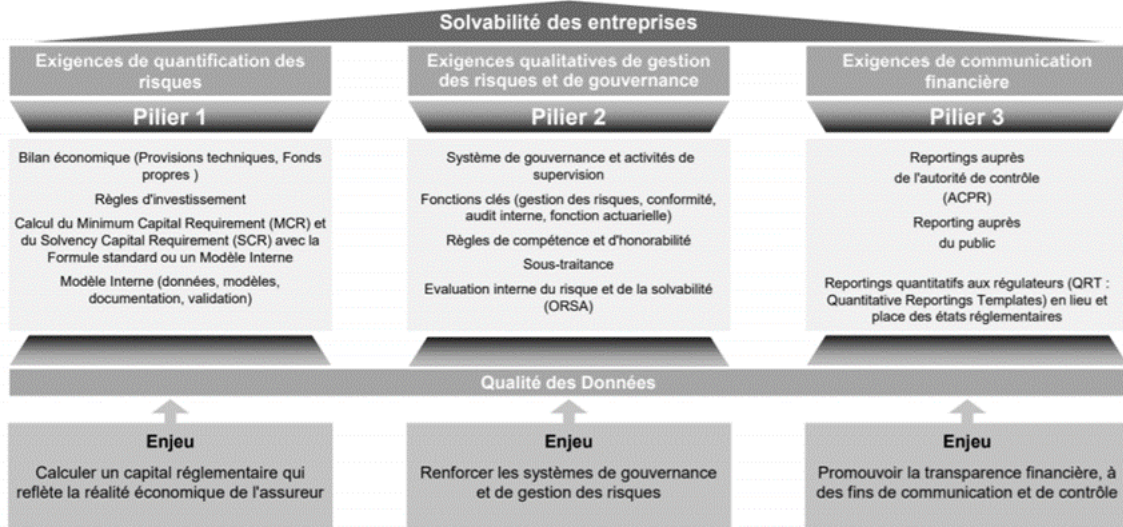


FIGURE 1.1 – Les 3 piliers de Solvabilité II

1.1.1 Focus sur le pilier 1

Comme ce pilier définit le cadre réglementaire autour de la valorisation du bilan des assureurs, cette section s’y intéresse plus en détail.

L’article 75 de la Directive Solvabilité II établit l’objectif d’une évaluation économique et cohérente avec le marché des postes du bilan : "Les actifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d’une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes. Les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d’une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes."

Solvabilité II régit le calcul des provisions techniques, en fonction du caractère répliquable du passif de l’assureur. On considère qu’un contrat est répliquable si l’ensemble de ses flux peut être répliqué par un portefeuille d’instruments financiers. Dans le cas d’un contrat d’assurance répliquable, les provisions techniques sont égales à la valeur de marché du portefeuille de réplification.

Dans le cas où le passif de l’assureur n’est pas répliquable les provisions techniques sont égales au Best Estimate, qui correspond à la valeur probable actualisée des flux futurs de trésorerie. L’actualisation se faisant avec la courbe des taux zéro coupon ou courbe EIOPA et en incluant une marge pour risque. En pratique, le marché n’est pas suffisamment liquide, actif ou transparent et les risques d’assurance sont généralement considérés comme non répliquables.

Formellement, le calcul du Best Estimate se définit comme suit :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left(\sum_{t \geq 1} D(0, t) F_t \right)$$

Avec :

- \mathbb{P} la probabilité historique
- \mathbb{Q} la probabilité risque-neutre
- $D(0, t)$ le déflateur à la date t , fonction du taux sans risque
- F_t les flux de trésorerie en t

Les risques d'assurance n'étant pas répliquables, on ajoute une marge pour risque au Best Estimate, elle correspond à une marge de prudence dans le calcul des provisions techniques. La marge pour risque est définie de façon à assurer que les provisions techniques sont équivalentes à ce que demanderait une entreprise d'assurance ou de réassurance qui devrait honorer les engagements pris. Formellement :

$$RM = CoC \sum_{t \geq 0} SCR(t) D(0, t + 1)$$

avec CoC le taux de coût du capital, SCR le capital de solvabilité requis et r_{t+1} le taux sans risque de maturité $t + 1$.

La définition de la marge pour risque introduit la notion de SCR, ou capital de solvabilité requis, dont le calcul est également régi par le pilier 1 de solvabilité II. Le SCR est alors défini comme le capital minimum requis de façon à pouvoir absorber un mouvement adverse des fonds propres économiques à hauteur de 0,5% à horizon annuel. C'est donc la Value at Risk ou VaR à 99,5% de la distribution des pertes en fonds propres économiques. On rappelle que la VaR correspond à une fonction quantile associée à une loi de probabilité. En d'autres termes, pour une variable aléatoire X dans \mathbb{R} et pour $\alpha \in [0; 1]$ on a

$$VaR(X, \alpha) = \inf\{x \mid P(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}$$

En pratique, il existe deux méthodes de calcul du SCR :

- La formule standard : une série de chocs est effectuée au sein de chaque module de risque, donnant lieu à des sous capitaux associés à des modules de risque, ensuite agrégés pour avoir un capital par module de risque et suit encore une agrégation pour obtenir le SCR final.
- Le modèle interne : Le calcul du SCR dépend directement du profil de risque de l'assureur et est généralement calculé par simulation en projetant l'activité de l'assureur à l'aide de scénarios risque neutre afin d'obtenir le quantile à 0,5% de la distribution des fonds propres économiques.

1.1.2 Focus sur le pilier 3

Ce mémoire faisant appel à des rapports publiés par les entreprises d'assurance, nous détaillons ici le dernier pilier de Solvabilité II. Le pilier 3 encadre la communication de divers éléments qui peuvent être de nature quantitative ou qualitative auprès du marché (qui peut être le régulateur ou bien le public). Ainsi les entreprises d'assurance doivent produire deux rapports : un SFCR, diffusé au public et un RSR, communiqué au régulateur.

Ces deux rapports sont produits et communiqués annuellement et doivent recenser certains éléments, dont :

- Un détail poussé de l'activité de l'entreprise et de ses résultats, sur ses différentes branches d'activité.
- Une revue de la gouvernance en place et de la gestion des risques adoptée.
- L'établissement d'un profil de risque, mettant l'accent sur certains risques clés pour l'entreprise, comme le risque de crédit, de marché, de souscription...
- Un détail des calculs de solvabilité portant sur les actifs et les passifs (surtout sur les provisions techniques).
- Système de gestion des fonds propres et d'établissement du ratio de couverture.

Les SFCR sont ainsi très utiles pour monitorer une évolution de ratio de couverture ou de rentabilité sur certaines branches d'activité.

1.2 Introduction aux GSE

Les générateurs de scénarios économiques sont un outil devenu essentiel aux entreprises d'assurance, pour effectuer une gestion adéquate de leurs risques. Les GSE sont régis par solvabilité II et permettent de répondre aux

exigences réglementaires imposées, où il faut quantifier et mesurer les options inhérentes aux produits d'assurance.

De plus, la nécessité d'adopter une modélisation du comportement, toujours en évolution, des divers acteurs du marché et du marché en lui-même a légitimé l'utilisation des GSE. L'apparition des taux faibles voire négatifs a permis l'émergence de nouveaux modèles, avant écartés par plusieurs acteurs, ce qui démontre la nécessité d'une certaine prudence relative à l'utilisation des GSE, au vu de leur complexité de calibrage et de la diversité de choix de données et de modèles. La valorisation des postes du bilan se fait dans l'univers risque neutre, nous nous intéressons aux GSE risque neutre, qui supposent certaines hypothèses que nous présentons ci après.

1.2.1 Vision risque neutre

Il existe deux types d'univers de simulation pour un GSE.

- L'univers monde réel, où les paramètres sont estimés à partir de données de marché historiques et dont le but est de produire des scénarios économiques proches au possible de la réalité économique.
- L'univers risque neutre qui permet de générer des scénarios cohérents avec le marché, ou market consistent, dans un but de valorisation sous solvabilité II. En effet, solvabilité II demande aux assureurs de valoriser le passif de leur compagnie dans l'hypothèse où celui-ci peut être assimilé à un produit échangeable sur les marchés financiers.

C'est donc dans cet univers risque neutre que nous nous plaçons.

Les polices d'assurances étant des contrats comportant un certain nombre d'options activables par les assurés ainsi que des garanties de prestations, les trajectoires simulées par les GSE doivent nécessairement être stochastiques afin de rendre compte de la variété des comportements possibles des assurés sous différentes trajectoires économiques. De plus, les actifs des assureurs étant principalement constitués d'obligations, la modélisation des taux d'intérêt a été au centre des préoccupations des assureurs. Nous attacherons ainsi un intérêt particulier aux modèles de taux au cours de ce rapport.

Les modèles composant les GSE sont choisis par les assureurs selon les risques financiers qu'ils souhaitent prendre en compte dans la valorisation de leur bilan. Sur le marché européen, ils peuvent inclure jusqu'à sept facteurs de risques à modéliser : taux d'intérêt, nominaux et inflation, indices boursiers, indices immobiliers, défaut de contrepartie ou taux de change.

Dans le cadre de ce mémoire nous ne modéliserons que les 4 premiers facteurs (ou drivers). La valorisation du bilan assurantiel se fait alors par le biais d'un modèle ALM, régissant les interactions actif passif et leur revalorisation et dont les entrées sont les scénarios économiques générés par le GSE.

1.3 Fonctionnement d'un GSE

Avant de détailler les étapes de fonctionnement d'un générateur de scénarios économique, nous rappelons quelques propriétés essentielles d'un GSE risque neutre.

Notion de Market consistency

Solvabilité II impose une valorisation du bilan cohérente avec le marché. Notre se place donc dans le cadre de l'univers risque neutre. La valorisation des instruments financiers non cotés peut alors se faire uniquement à l'aide de l'ensemble des prix, en résultat de la complétude de marché supposée par l'univers risque neutre. Cependant, comme nous étudions des passifs, ici dans le domaine de l'assurance vie, l'information de marché n'est en pratique pas directement observable. C'est pourquoi les différents acteurs recourent à des approches "mark-to-model" pour effectuer la valorisation de leur bilan assurantiel. Ces approches sont basées sur des modèles mathématiques, calibrés à l'aide d'informations de marché. Les facteurs de risque les plus utilisés et les plus significatifs sont des facteurs de risque financiers, ce qui permet aux modèles d'intégrer et d'utiliser des données de marché, ce qui permet d'appliquer le critère de cohérence avec le marché.

Les modèles doivent donc pouvoir répliquer un grand nombre de prix de produits dérivés, et pour satisfaire les exigences du critère de market consistency il est possible de choisir des modèles spécifiques, répliquant précisément les données de marché.

Fonctionnement

Le fonctionnement du GSE se décompose en trois étapes :

- Le calibrage des modèles sur les données de marché.
- La génération et projection des courbes de taux et des indices de chaque facteur de risque.
- La validation des projections obtenues, par des tests de martingalité et de repricing.

Le calibrage des modèles désigne le processus au cours duquel les paramètres permettant la meilleure réplcation des données de marché sont identifiés. Il repose sur deux étapes : l'établissement de formules analytiques pour les prix induits par le modèle (qui sont donc fonction des paramètres de ce dernier) lorsque cela est possible. Cette étape permet de réaliser en un temps raisonnable, l'optimisation numérique au cours de laquelle la distance entre ces prix modèles et les prix de marché est minimisée.

La simulation désigne quant à elle la diffusion des dynamiques des différents modèles embarqués au sein du GSE. Cette étape repose sur la simulation d'aléas régis par une structure de dépendance. Dans les GSE risque-neutre, une copule gaussienne dont le paramètre est une matrice de corrélation, est quasi systématiquement considérée.

La validation des tables de scénarios générées comprend plusieurs tests afin d'attester de la qualité des scénarios et du bon respect des propriétés imposées, par la réglementation et par le contexte économique actuel. On peut notamment citer les tests de martingalité et de repricing, détaillés dans la section **2.6 Validation**.

Les modèles de taux de la famille du LIBOR Market Model (LMM) sont aujourd'hui les plus utilisés en assurance, en particulier le DDLMM (Displaced Diffusion with LMM) et le DDSVLMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM) qui permettent de générer des taux négatifs. D'autres modèles de taux sont souvent considérés, comme le modèle gaussien à deux facteurs ($G2++$) dérivé du modèle de Hull&White, permettant lui aussi de générer des taux négatifs. Une comparaison de ces différents modèles est proposée dans le chapitre suivant.

Générateurs de scénarios économiques

Ce chapitre s'intéresse plus en détail aux GSE, notamment aux modèles retenus, à leur calibrage, simulation et validation, ainsi qu'à l'intégration des résultats dans un modèle ALM.

Comme nous l'avons vu précédemment, Solvabilité II impose une valorisation dans l'univers risque neutre. Afin de valoriser leur passifs, les assureurs utilisent un GSE calibré à partir d'instruments financiers dont les prix sont cotés sur le marché. Récapitulons les caractéristiques souhaitées pour les modèles retenus (taux et indice action) dans le cadre d'un générateur de scénarios économiques risque neutre.

Il est idéal d'avoir des modèles permettant de retrouver le prix des instruments financiers observables. Le modèle doit par ailleurs pouvoir parfaitement répliquer la structure par terme initiale. Cette propriété est testée dans le cadre des tests de validation de notre GSE. La reproduction du smile de volatilité, qui lie la volatilité au niveau des strikes, est aussi importante. Enfin il apparaît incontournable dans le contexte actuel de pouvoir générer des taux négatifs, de manière asymétrique si possible. Nous rajoutons un critère d'interprétabilité et un critère d'explosivité des taux lors de la projection, qui peut poser des problèmes opérationnels lors des simulations. Nous récapitulerons sous forme de tableau les caractéristiques des 3 modèles de taux retenus (G2++, DDSVLMM et DDLMM) et des deux modèles action (BSDV et SVJD) après les avoir détaillés plus formellement.

2.1 Modèles de taux retenus

Cette section s'intéresse aux 3 modèles de taux retenus et à leurs caractéristiques. Nous commençons par détailler, avec un niveau de granularité important, le modèle DDLMM, qui sera considéré comme modèle de référence tout au long de ce mémoire. Le choix des modèles retenus, des données utilisées et de certaines valeurs choisies est détaillé dans la section **2.9 Mise en place opérationnelle**.

2.1.1 DDLMM

Selon ce modèle le taux forward déplacé d'une constante positive (shift) suit une dynamique log-normale, sous la probabilité forward neutre associée. Les taux forward sont des données de marché observables, contrairement aux taux forward instantanés utilisés dans la classe de modèles exhibée par Heath Jarrow Morton (HJM). D'autre part, l'ajout du shift permet de réduire l'explosivité du modèle, de répliquer plus fidèlement les volatilités de swaptions de marché de faibles maturités et tenors et de mieux tenir compte de l'effet de skew de volatilité. Le shift a été établi à 10% et objectivé par une étude dédiée. Cette étude est détaillée dans la section résultats.

Dynamique des taux forward

Considérons, pour tout $k \in N^*$, pour tout $t \in [0, k]$, $\tilde{F}_k(t)$ le taux forward annuel déplacé d'une constante $\alpha \leq 0$, appelée shift. Ce taux est construit à partir du taux forward $F_k(t)$, d'expiration k et maturité $k + 1$

$$\tilde{F}_k(t) = F_k(t) + \alpha$$

avec

$$F_k(t) = \left(\frac{P(t,k)}{P(t,k+1)} - 1 \right) \text{ et } P(t, k) \text{ est la valeur en } t \text{ du zéro coupon de maturité } k.$$

Sous la probabilité $k + 1$ - forward neutre ($k \in N^*$), mesure dépendant ainsi de k , associée au numéraire $P(t, k + 1)$, la dynamique du taux forward déplacé $(\tilde{F}_k(t))_{t \in [0, k]}$ s'écrit :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \times \sum_{q=1}^p \xi_k^q(t) dZ_{k+1}^q(t)$$

$Z_{(k+1)q \in [1, p]}^q$ est un mouvement brownien multi-dimensionnel sous la probabilité $k+1$ - forward neutre, où $p \geq 1$ un entier égal au nombre de facteurs du modèle) et où ξ_k^q (fonction déterministe définie sur $[0, k]$) caractérise la volatilité du taux forward déplacé \tilde{F}_k associé au q^{eme} mouvement brownien Z_{k+1}^q .

Il faut néanmoins exprimer la dynamique de l'ensemble des taux forwards sous la même probabilité, ce qui permet de les diffuser conjointement. On définit alors la mesure spot-Libor ([9] d'après l'ouvrage de Brigo et Mercurio), notée \mathbb{Q} , qui peut être assimilée à la probabilité risque neutre et qui permet d'écrire la dynamique des taux forward pour n'importe quelle maturité. La dynamique sous la mesure spot-Libor de tout taux forward déplacé s'écrit alors :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \times \left[\sum_{j=m(t)}^k \left[\frac{\tilde{F}_j(t) \sum_{q=1}^p \xi_j^q(t) \xi_k^q(t)}{1 + F_j(t)} \right] dt + \sum_{q=1}^p \xi_k^q(t) dZ^q(t) \right]$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $m(t)$ est la maturité venant après t , et $(Z^q)_{q \in [1, p]}$ un mouvement Brownien multi-dimensionnel sous la mesure spot-Libor.

Corrélation inter forward

Notons $\rho_{i,j}$, $0 \leq i \leq j \leq N$, la corrélation entre les forwards F_i et F_j . Pour $t \in [0, i]$

$$\rho_{i,j}(t) = \sum_{q=1}^p \beta_i^q(t) \beta_j^q(t)$$

Les $(\beta_i^q(t))_{i \in \mathbb{N}^*, q \in [1, p]}$ sont des fonctions déterministes dépendant du temps appelées facteurs d'exposition et vérifiant $\sum_{q=1}^p (\beta_i^q(t))^2 = 1$.

Nous rajoutons l'hypothèse que les facteurs d'exposition sont des fonctions constantes par morceaux, dépendant du temps restant à maturité. C'est-à-dire : $\forall k \leq i \in \mathbb{N}^*, \forall q \in [1, p]$ et $\forall t \in]k - 1, k]$

$$\beta_i^q(t) = b_{i-(k-1)}^q$$

Les paramètres b_i^q sont ensuite objectivés avant le processus de calibration.

Volatilité

La structure de volatilité $\sigma_k(t)$ est décomposée en 2 facteurs paramétriques. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in]k - 1, k]$

$$\sigma_k(t) = f(t) \times g(k-t)$$

La fonction f est appelée fonction d'échelle, appliquant un facteur d'échelle sur toutes les volatilités des forwards, à chaque date de projection $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$f(t) = \theta + (1 - \theta) \times e^{-\kappa \times t}, (\theta, \kappa) \in (\mathbb{R}^+)^2.$$

θ est le niveau asymptotique d'échelle et κ est la vitesse de convergence vers ce niveau.

La fonction g spécifie la forme de la structure de volatilité des forwards et dépend du temps restant à maturité, telle que, $\forall u \in \mathbb{R}^+$

$$g(u) = (bu + a) \times e^{-cu} + d, (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^+)^4$$

De cela on pose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [0, k]$

$$\xi_k^q(t) = \sigma_k(t) \beta_k^q(t).$$

Cette paramétrisation est courante car elle permet de reproduire les pics de volatilité observés lorsque le temps restant à maturité est faible puis d'introduire une décroissance lente.

Calibrage

Les swaptions font partie des dérivés de taux les plus échangés du marché. Ils constituent la principale source de calibrage des modèles de taux nominaux risque-neutre de place. Cette partie présente des formules fermées approchées pour estimer les volatilités de swaptions dans le cadre du modèle DDLMM, puis précise les choix de calibrage retenus ainsi que les données considérées. Le principe du calibrage du modèle consiste à déterminer les paramètres minimisant l'écart entre les prix swaptions de marché et les prix swaptions dits prix modèles obtenus grâce aux formules fermées, à l'aide d'une méthode des moindres carrés.

Utilisation de la formule de Bachelier

Nous faisons ici appel à une approximation pour déduire des formules fermées pour les volatilités de swaption. A chaque date $t \in [0, k]$, le taux swap, noté $S_{k,N}(t)$, est défini par :

$$S_{k,N}(t) = \frac{P(t,k) - P(t,N)}{A_{k,N}(t)}$$

$A_{k,N}(t)$ l'annuité :

$$A_{k,N}(t) = \sum_{i=k}^{N-1} P(t, i+1)$$

Le modèle DDLMM donne la dynamique des taux forward. Il faut donc exprimer le taux swap en fonction de taux forward pour connaître sa dynamique

Pour tout $t \in [0, k]$,

$$S_{k,N}(t) = \frac{\sum_{j=k}^{N-1} P(t, j+1) F_j(t)}{A_{k,N}(t)} = \sum_{j=k}^{N-1} w_j^{k,N}(t) F_j(t)$$

Pour tout $j \in [k, N-1]$, pour tout $t \in [0, k]$

$$w_j^{k,N}(t) = \frac{P(t, j+1)}{A_{k,N}(t)}$$

Notons $Q^{k,N}$ la mesure de probabilité, de numéraire $A_{k,N}(t)$, sous laquelle le taux swap $S_{k,N}(t)$ est une martingale. Notons $(Z_q^{k,N})_{q \in [1,N]}$ le mouvement Brownien associé. Sous $Q^{k,N}$ le taux swap est une martingale. Ainsi, le lemme d'Itô multidimensionnel donne :

$$\begin{aligned} dS_{k,N}(t) &= \\ &= \sum_{j=k}^{N-1} \frac{\partial S_{k,N}(t)}{\partial F_j} dF_j(t) \\ &= \sum_{j=k}^{N-1} \frac{\partial S_{k,N}(t)}{\partial F_j} (F_j(t) + \alpha) \left(\sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t) dZ_{k,N}^q(t) \right) \\ &= \sum_{q=1}^{N_f} \left(\sum_{j=k}^{N-1} \gamma_j(t) \right) dZ_{k,N}^q(t) \end{aligned}$$

$Z_{k,N}^q(t)$ est un mouvement Brownien sous $Q^{k,N}$ et pour tout $j \in k, N-1$, pour $t \in [0, k]$:

$$\gamma_j(t) = \frac{\partial S_{k,N}(t)}{\partial F_j} \xi_j^q(t) (F_j(t) + \alpha)$$

L'hypothèse simplificatrice, dite de Rebonato, consiste à approcher $w_j^{k,N}(t) \approx w_j^{k,N}(0)$, pour tout j . Sous cette hypothèse, pour tout $j \in k, N-1$, pour tout $t \in [0, k]$:

$$\gamma_j(t) \approx w_j^{k,N}(0) \xi_j^q(t) (F_j(0) + \alpha)$$

Pour tout $t \in [0, k]$:

$$dS_{k,N}(t) \approx \gamma_{k,N}^*(t) \times dW_{k,N}^*(t)$$

avec

$$\gamma_{k,N}^*(t) = \sqrt{\sum_{q=1}^p \left(\sum_{j=k}^{N-1} w_j^{k,N}(0) \xi_j^q(t) (F_j(0) + \alpha) \right)^2}$$

et $W_{k,N}^*$ est un mouvement Brownien sous $Q^{k,N}$. Pour un jeu de paramètres donné $\Theta = (a, b, c, d, \theta, \kappa) \in (\mathbb{R}^+)^6$ et $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, les prix théoriques de swaption de maturité k , tenor $N-k$ et strike K , notés $PS_{k,N}^{Th}$, sont donnés par la formule de Bachelier :

$$PS_{k,N}^{Th}(K) = A_{k,N}(0) \Gamma_{k,N}^* \sqrt{k} \left(\tilde{d}_1 \Phi(\tilde{d}_1) + \varphi(\tilde{d}_1) \right)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ sa densité et avec :

$$\tilde{d}_1 = \frac{S_{k,N}(0) - K}{\Gamma_{k,N}^* \sqrt{k}}$$

$$\Gamma_{k,N}^* = \sqrt{\frac{1}{k} \int_0^k \gamma_{k,N}^*(t)^2 dt} \approx \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k,N}^*(i)^2}$$

Simulation des taux forward

L'objectif est de simuler la courbe des taux de tenor maximal M , sur H périodes. Il est possible de simuler les taux forward avec la relation de récurrence suivante :

Pour tout $k \in [0, (H+M)-1]$, $j \in [0, \min(k, H)-1]$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k(j) \exp & \left[\left(\sum_{i=m(j+1)}^k \left(\frac{\tilde{F}_i(j) \sum_{q=1}^p \xi_{i-m(j+1)+1}^q \xi_{k-m(j+1)+1}^q}{1+F_i(j)} \right) - \sum_{q=1}^p \frac{\xi_{k-m(j+1)+1}^q}{2} \right) + \left(\sum_{q=1}^p \xi_{k-m(j+1)+1}^q \times \varepsilon_j^q \right) \right] \\ & = \tilde{F}_k(j) \exp \left[\left(\sum_{i=j+1}^k \left(\frac{F_i(j) \sum_{q=1}^p \xi_{i-j}^q \xi_{k-j}^q}{1+F_i(j)} \right) - \sum_{q=1}^p \frac{\xi_{k-j}^q}{2} \right) + \left(\sum_{q=1}^p \xi_{k-j}^q \times \varepsilon_j^q \right) \right] \end{aligned}$$

Pour tout $q \in [1, p]$, pour tout $j \in [0, H-1]$, $\varepsilon_j^q := (Z^q(j+1) - Z^q(j))$ suit une loi normale centrée réduite sous la mesure spot Libor. Par indépendance des mouvements Browniens Z^q , $q \in [1, p]$, les variables aléatoires $(\varepsilon_j^q)_{j \in [0, H-1]}$ sont indépendantes. De plus, pour tout $k \in [0, H+M-1]$ et $j \in [0, \min(k, H-1)]$ le calcul de $F_k(j+1)$ se base sur :

- L'échantillon $(\varepsilon_j^q)_{q \in [1, p]}$
- Les $(F_i(j))_{i \in [j+1, k]}$ valeurs du taux forward aux temps j

On peut ainsi calculer les prix zéro coupon $P(k, k+m)_{k \in [0, H], m \in [1, M]}$ à partir des taux forward avec les étapes suivantes :

1. Initialisation : pour tout $k \in [1, H]$, $P(k, k) = 1$
2. Récurrence : pour tout $k \in [1, H]$, pour tout $m \in [1, M]$,

$$P(k, k+m) = P(k, k+m) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{P(k, k+i+1)}{P(k, k+i)} = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{1+F_{k+i}(k)}$$

Enfin, les déflateurs sont obtenus en suivant les étapes :

1. Initialisation : $D(0) = 1$;
2. Récurrence : pour tout $k \in [0, H-1]$,

$$D(k+1) = D(k) \times P(k, k+1).$$

Synthèse

Dans le cadre de ce modèle les taux forwards shiftés, qui correspondent aux quantités $F_k + \alpha$ sont positives. On peut ainsi remarquer que les taux forwards ne dépassent jamais négativement la valeur $-\alpha$. Pour le modèle DDLMM, il est possible d'obtenir des formules semi fermées pour le pricing des actifs utilisés pendant le calibrage, à savoir des caps et des swaptions. Le paramètre de shift donne par ailleurs la possibilité de reproduire le skew de volatilité. Son objectivation fait l'objet d'une étude dédiée, détaillée dans la section **4.3.4 Impact du paramètre de shift**.

Enfin on peut noter que le DDLMM est aujourd'hui très utilisé par les acteurs de la place, de par sa capacité à générer des taux négatifs, la possibilité de reproduire le skew de volatilité, la présence de formules fermées sur les prix de swaptions et sur les volatilités des taux swap shiftés.

2.1.2 DDSVLMM ou LMM+

Le DDSVLMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM) est une extension du Libor Market Model introduit par Joshi&Rebonato (2003) et est un modèle adapté du DDLMM, toujours avec la présence du paramètre de shift α mais aussi avec l'ajout d'une variance stochastique. La complexité supplémentaire est liée à la volatilité, ici remplacée par un processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR) de retour à la moyenne.

Le modèle DDSVLMM, aussi appelé LMM+ sur la place, repart du cadre donné par le DDLMM :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \times \sum_{q=1}^p \xi_k^q(t) dZ_{k+1}^q(t)$$

La structure de volatilité du DDSVLMM est stochastique. La fonction d'échelle f du DDLMM est remplacée par un processus V de variance dont la dynamique est donnée par un processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dépendant de 4 paramètres, et presque sûrement positif :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW(t)$$

Les mouvements Browniens Z_k^q sont corrélés au mouvement Brownien W à l'aide d'un paramètre de corrélation ρ . Les paramètres du processus CIR $(\kappa, \theta, \varepsilon, V(0))$ sont strictement positifs et vérifient la condition de Feller suivante qui permet d'assurer presque sûrement que le processus n'atteint pas zéro :

$$\varepsilon^2 < 2\kappa\theta$$

κ désigne la vitesse de retour à la moyenne du processus. Ainsi, plus κ est grand, plus la variance aura tendance à se stabiliser autour de sa moyenne rapidement. Sa moyenne asymptotique est désignée par θ . ε représente la variabilité autour de sa moyenne.

Calibrage

Du fait de la volatilité stochastique, le pricing des swaptions avec le DDSVLMM nécessite d'utiliser la fonction caractéristique du log-rendement du taux swap forward sous-jacent à la swaption. Le principe de la valorisation est le suivant :

- Etude de la dynamique du log ratio du taux swap forward shifté entre la date $k=0$ et la maturité N .
- Expression analytique de la fonction caractéristique sous la mesure risque neutre
- Expression du prix la swaption en fonction de la fonction caractéristique, qui est elle-même fonction des paramètres du modèle

Cette approche permet d'obtenir une formule analytique pour le prix de la swaption qui dépend des 8 paramètres du modèle DDSVLMM. Cette formule nécessite des calculs d'intégrales numériques, on obtient ainsi des formules semi fermées.

Simulation

Le processus de simulation est basé sur la récurrence suivante en reprenant les notations de la section **2.1.1 DDLMM** :

Pour $k < N$ et un pas de temps annuel pour $i < k$:

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_k(i+1) \\ &= \tilde{F}_k(i) \exp \left[- \int_i^{i+1} V_t \left(\gamma_k(t) \cdot \sigma_{k+1}(t) + \frac{\|\gamma_k(t)\|^2}{2} \right) dt + \int_i^{i+1} \sqrt{V_t} \gamma_k(t) \cdot d\mathbf{W}_t \right] \\ &= \tilde{F}_k(i) \exp \left[\int_i^{i+1} V_t \left(\sum_{j=m(t)}^k \frac{F_j(t) + \alpha}{1 + F_j(t)} \gamma_k(t) \cdot \gamma_j(t) - \frac{\|\gamma_k(t)\|^2}{2} \right) dt + \int_i^{i+1} \sqrt{V_t} \gamma_k(t) \cdot d\mathbf{W}_t \right] \end{aligned}$$

W est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre.

Notons que la simulation du processus de volatilité requiert une discrétisation supplémentaire et l'évaluation numérique peut se faire à l'aide d'un schéma de type Euler ou Alfonsi.

Synthèse

L'ajout de ce modèle est la possibilité de calibrer le smile de volatilité avec l'introduction de la variance stochastique. Le DDSVLMM permet également de générer des taux négatifs avec le paramètre de shift, ce qui est essentiel. Tout

comme pour le DDLMM, le paramètre de shift fait l'objet d'une étude dédiée séparément des autres paramètres du modèle, ce qui simplifie par ailleurs le calibrage. Comme nous l'avons vu les paramètres du processus de variance sont interprétables et il est possible d'obtenir des formules semi fermées au coût d'une discrétisation supplémentaire. La reproduction du smile de volatilité en fait un modèle utilisé chez les assureurs, la principale contrainte étant la complexité de calibrage et de diffusion.

2.1.3 G2++

Ce modèle, extension du modèle de Hull&White, permet de combler une des limites classiques des modèles de taux courts à un facteur, qui induisent une corrélation parfaite entre les taux et les maturités de la courbe de taux. Nous pouvons ici reproduire les formes typiques de volatilités induites tout en ayant une évolution des prix des zéros coupons plus réaliste. Notons $P(t, T)$ le prix au temps t d'un zéro coupon de maturité T .

Dynamique des taux courts :

Sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , le processus de taux court $(r(t))_{t \geq 0}$ est donnée par :

$$r(t) = x(t) + y(t) + g(t)$$

avec

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_t^A \quad dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_t^B$$

Ici $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^A, W_t^B)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien bi-dimensionnel de corrélation instantanée ρ telle que

$$d \langle W_t^1, W_t^2 \rangle = \rho dt$$

a, b , sont les paramètres de retour à la moyenne et σ, η sont les volatilités des taux courts. la fonction $t \mapsto g(t)$ est une fonction déterministe de déplacement, qui permet d'ajuster la structure par terme initiale des taux d'intérêts. Sous forme matricielle on obtient :

$$dX_t = -AX_t dt + \Sigma dW_t$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Calcul des prix des zéros coupons

Soit $P(t, T)$ le prix au temps t d'un zéro coupon de maturité T . Notons \mathcal{F}_t la filtration engendrée par les processus x et y . Son prix de non arbitrage est donné par :

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Comme $\int_t^T r_s ds$ suit une distribution normale (cf [9] **Brigo and Mercurio (2006) p.146**) le prix en t est obtenu en calculant la transformée de Laplace d'une variable aléatoire Gaussienne, dont on connaît la forme fermée. On obtient alors le prix suivant :

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T \varphi(s) ds - B_1(t, T)x(t) - B_2(t, T)y(t) - \frac{1}{2}V(t, T)}$$

avec

$$\begin{aligned} B_i(t, T) &= \frac{1}{A_{ii}} (1 - e^{-A_{ii} \times (T-t)}) \\ V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} (T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}) + \frac{\eta^2}{b^2} (T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b}) \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t - B_1(t, T) - B_2(t, T) + \frac{1}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(T-t)}) \right) \end{aligned}$$

Supposons que nous disposons d'une structure par terme initiale des prix des zéros coupons $T \mapsto P^{Mkt}(0, T)$. Notons $T \mapsto f^{Mkt}(0, T)$ le taux forward instantané donné par $f^{Mkt}(0, T) = -\partial_T \log(P^{Mkt}(0, T))$. Alors (cf Brigo and Mercurio) on obtient :

$$g(t) = f^{Mkt}(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at}) + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bt})^2 + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-at}) (1 - e^{-bt})$$

Ainsi, le prix du zéro coupon obtenu par le modèle G2++ s'écrit :

$$P(t, T) = \frac{P^{Mkt}(0, T)}{P^{Mkt}(0, t)} e^{A(t, T)}$$

$A(t, T)$ vérifie

$$A(t, T) = \frac{1}{2} (V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) - B_1(t, T)x(t) - B_2(t, T)y(t)$$

Calibrage

Pour le modèle G2++, le calibrage est réalisé sur le prix des swaptions et est facilité par la méthode de freezing introduite par Pellser-Schrager (cf [25]), qui consiste à considérer la valeur de certains termes stochastiques comme leur valeur en 0.

Notons $i = n, \dots, N$ un ensemble de dates et considérons un pas de temps annuel. Selon [9] Brigo et Mercurio, le prix $PS_{n, N}(K)$ d'une swaption de strike K et de maturité n s'exprime sous la forme suivante :

$$PS_{n, N}(K) = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} A_{n, N}(n) (S_{n, N}(n) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$S_{n, N}$ est le taux swap forward défini comme dans les sections précédentes. On prend l'annuité $A_{n, N}(t)$, définie dans la section 2.1.1 DDLMM comme numéraire et on en déduit la mesure suivante :

$$\frac{d\mathbb{Q}^{n, N}}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t = \frac{e^{-\int_t^T r_s ds} A_{n, N}(n)}{A_{n, N}(t)}$$

Ce qui donne :

$$PS_t(K) = A_{n, N}(t) E^{\mathbb{Q}^{n, N}} \left[(S_{n, N}(n) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

La connaissance de la fonction de répartition de $S_{n, N}(n)$ sous la mesure $\mathbb{Q}^{n, N}$ définie permet de pricer la swaption. Il s'agit donc de déterminer la dynamique de $(S_{n, N}(t))_{t \geq 0}$ sous $\mathbb{Q}^{n, N}$. Ce calcul ainsi que l'approximation de Schrager et Pellser permettant d'obtenir une forme simplifiée du taux swap $S_{n, N}(t)$ est détaillé dans [25] SCHRAGER, D. and PELSSER A.J. [2006] et n'est pas présenté ici.

L'expression obtenue est :

$$S_{n,N}(t) = S_{n,N}(0) + \sigma_{n,N}G$$

$$G \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Avec

$$\sigma_{n,N}^2 := \text{Var}(S_{n,N}(n))$$

En réinjectant l'approximation ainsi obtenue dans la formule du prix de la swaption décrite plus haut on obtient une formule fermée sur le prix des swaptions.

Simulation des taux courts

En appliquant la formule d'Itô sur les processus $(e^{at}x(t))_{t \geq 0}$ et $(e^{bt}y(t))_{t \geq 0}$ on obtient

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u^1$$

$$y(t) = y(s)e^{-b(t-s)} + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_u^2$$

$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ suit une loi Gaussienne bi-dimensionnelle de paramètres

$$\mu = \begin{bmatrix} x(t-1)e^{-a} \\ y(t-1)e^{-b} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a}) & \rho \frac{\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)}) \\ \rho \frac{\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)}) & \frac{\eta^2}{2b} (1 - e^{-2b}) \end{bmatrix}$$

On a ainsi :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mu +$$

La simulation est alors basée sur la récurrence suivante. Soient les dates de projection annuelles $0 < \dots < T-1 < T$

$$\begin{bmatrix} x(i) \\ y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(i-1)e^{-a} \\ y(i-1)e^{-b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma \sqrt{\frac{(1-e^{-2a})}{2a}} Z_1^i \\ \eta \sqrt{\frac{(1-e^{-2b})}{2b}} (\gamma Z_1^i + \sqrt{1-\gamma^2} Z_2^i) \end{bmatrix}$$

$Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont deux variables de loi normales indépendantes et γ tel que :

$$\gamma = \frac{\frac{\rho}{a+b} (1 - e^{-(a+b)})}{\sqrt{\frac{(1-e^{-2a})}{2a} \frac{(1-e^{-2b})}{2b}}}$$

En reprenant les notations précédentes, la simulation des taux courts est basée sur le principe de récurrence suivant. A chaque date de projection i , la connaissance de $x(i)$ et $y(i)$ permet de calculer :

- Pour chaque ténor $m > 0$, on calcule le prix zéro coupon $P(i, i+m)$ avec les formules détaillées précédemment
- On calcule le déflateur $D(i)$ comme suit

$$D(i) = e^{-\sum_{j=0}^i x(j)+y(i)+g(i)}$$

Synthèse

Le modèle G2++ permet d'obtenir une formule fermée sur les prix des obligations zero coupon à partir des prix observables sur le marché et des différents paramètres du G2++. Le calibrage peut être fait de manière relativement simple en faisant appel à une méthode dite de freezing. De plus, le modèle reproduit parfaitement la courbe des taux initiale et permet de générer des courbes de taux réalistes. La génération de taux négatifs est d'ailleurs possible.

Notons que le modèle repose sur des taux courts, ce qui dégrade l'interprétabilité du modèle. Enfin, il ne permet pas de reproduire précisément la surface de volatilité des produits dérivés.

2.1.4 Modèle de taux réels

Nous utilisons un modèle de marché basé sur les taux forward réels, appelé Gaussian LMM ou GLMM. Il permet de répliquer de façon exacte la courbe des taux réels initiales. La courbe des taux initiale est donnée en entrée du modèle et le modèle permet une réplication parfaite.

2.2 Comparaison des modèles

Il est idéal d'avoir des modèles de taux permettant de retrouver le prix des instruments financier observables. Le modèle doit par ailleurs supposer l'absence d'opportunités d'arbitrage, ce qui revient à demander au modèle de pouvoir parfaitement répliquer la structure par terme initiale des taux. Cette propriété est testée dans le cadre des tests de validation de notre GSE. La reproduction du smile de volatilité, qui lie la volatilité au niveau des strikes, est aussi importante. Enfin il apparait incontournable dans le contexte actuel de pouvoir générer des taux négatifs, de manière asymétrique si possible. Nous rajoutons un critère d'interprétabilité et un critère d'explosivité des taux lors de la projection, qui peut poser des problèmes opérationnels lors des simulations. Récapitulons sous forme de tableau les caractéristiques des 3 modèles de taux retenus.

Critère	G2++	DDLMM	DDSVLMM
Interprétabilité	+	++	++
AOA	oui	oui	oui
Formule fermée	fermée	fermée	semi fermée
Explosivité	-	+	++
Taux négatifs	oui	oui	oui
Smile	-	+	++
Calibrage	+	+	+++
Diffusion	+	+	++

Les notations retenues pour les critères d'interprétabilité, d'explosivité, de smile, de calibrage et de diffusion correspondent à :

— - : faible

— + : modéré

— ++ : fort

— +++ : très fort

2.3 Modélisation de l'indice action

Après avoir détaillé les modèles de taux nominaux retenus nous nous intéressons à la modélisation de l'indice action. Les modèles considérés sont : Black Scholes à volatilité déterministe (BSDV) et Black Scholes à volatilité stochastique (SVJD)

2.3.1 BSDV

Le modèle régit les rendements totaux de l'action. Notons $S(t)$ l'indice action de rendement au temps $t \in [0, T]$. Le modèle suppose l'existence d'une fonction de volatilité déterministe $\sigma_{loc}(t)$, telle que sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , la dynamique de S est la suivante

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t) dt + \sigma_{loc}(t) dW_t^S$$

r est le taux court stochastique généré par le modèle des taux nominaux et W^S est un mouvement Brownien standard sous \mathbb{Q} . La fonction σ_{loc} , fonction de volatilité locale du modèle est déterminée de sorte à reproduire la volatilité implicite de marché des call ou put européens à la monnaie.

Calibrage

On considère la volatilité locale comme déterministe et fonction du temps. De plus, on suppose que c'est une fonction constante par morceaux, telle que pour $t \in [k, k+1[$:

$$\sigma_{loc}(t) = \sigma_{loc}(k)$$

Alors pour des maturités allant jusqu'à N :

$$\sigma_{imp}(N)^2 = \int_0^N \sigma_{loc}(t)^2 dt = \sum_{k=1}^N \int_{k-1}^k \sigma_{loc}^2(s) ds = \sum_{k=1}^N (k-1) \sigma_{loc}^2(k-1)$$

On peut extraire une structure par terme des volatilités implicites des données de marché pour des maturités allant de $1/N$:

$$\{\sigma_{imp}^{Mkt}(1), \dots, \sigma_{imp}^{Mkt}(N)\}$$

On en déduit directement les volatilités implicites constantes par morceaux

Simulation

Pour chaque pas de temps k , on considère une variable aléatoire X_k suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. La simulation du rendement total de l'indice action se fait alors comme suit :

$$S(k) = \frac{S(k-1)}{P(k-1, k)} \exp \left(X_k \sqrt{\int_{k-1}^k \sigma_{loc}(t)^2 dt} - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k \sigma_{loc}(t)^2 dt \right)$$

Avec

$$\int_{k-1}^k \sigma_{loc}(t)^2 dt = k-1 \sigma_{loc}^2(k-1)$$

Dividendes

Avec des dividendes on obtient dynamique suivante :

$$\frac{dSP(t)}{SP(t)} = (r(t) - q(t)) dt + \sigma_{loc}(t) dW_t^S$$

q dénote le taux de dividende instantané stochastique dont la dynamique est supposée être régie par un processus CIR, $\forall t \geq 0$

$$dq(t) = k(\mu - q(t)) dt + \vartheta q(t) \sigma dW_t$$

$q(0)$, κ , μ , σ sont des constantes positives, κ désigne le paramètre de vitesse de retour à la moyenne, μ correspond la moyenne de long-terme, σ est le paramètre de volatilité, ρ est la corrélation instantanée telle que

$$\langle dW_t^S; dW_t \rangle = \rho dt$$

Les paramètres de la dynamique du taux de dividendes instantané sont déterminés de sorte à vérifier la condition de Feller $2\kappa\mu > \sigma^2$ pour assurer la stricte positivité du taux.

2.3.2 SVJD

Le modèle SVJD (Stochastic Volatility with Jump Diffusion model) apporte plusieurs nouveautés par rapport au modèle BSDV. En effet, il combine le modèle de volatilité stochastique de Heston et le modèle de saut de Merton pour tenir compte des discontinuités qui peuvent impacter les indices boursiers. La composante de volatilité stochastique permet de répliquer la structure temporelle des volatilités implicites du marché à la monnaie (ATM) et de prendre en compte le smile de volatilité, donc les données hors de la monnaie (AFM).

Le couplage des modèles de Merton et de Heston donne la diffusion suivante avec S le rendement total de l'indice action et V le processus stochastique de volatilité :

$$\begin{cases} dS(t) = S(t) \left(r(t) dt + \sqrt{V(t)} dW_t^S + dN_t \right) \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^V \end{cases}$$

N est un processus de Poisson composé avec une intensité λ des sauts gaussiens de moyenne μ et de volatilité σ . Les mouvements browniens W^S et W^V sont corrélés à l'aide du paramètre ρ , qui caractérise la corrélation entre la volatilité stochastique et l'indice action.

$$dW_t^S \cdot dW_t^V = \rho dt$$

Le modèle SVJD induit des formules semi-fermées pour le prix des Call et des Put Européens. Ces formules sont obtenues par l'expression de la fonction caractéristique du log-rendement de l'indice action et reposent sur le calcul d'intégrales numériques. Les formules semi-fermées dépendent de 8 paramètres : $\{\kappa, \theta, \epsilon, V(0), \rho\}$ pour la composante Heston et $\{\lambda, \mu, \sigma\}$ pour la composante de Merton (les deux composantes étant supposées indépendantes).

Le modèle SVJD est ainsi un modèle complet, qui permet de prendre en compte des sauts observés sur le marché, mais reste moins utilisé de par sa complexité d'implémentation et de calibrage.

2.3.3 Comparaison des modèles action

Les modèles BSDV et SVJD étant quelques peu différents nous nous proposons de synthétiser les caractéristiques principales associées à chaque modèle.

Critère	BSDV	SVJD
Pratique de la place	+++	+
Nombre d'aléas	1	5
Calibrage du smile	Non	Oui
Complexité de la diffusion	-	+ (coût acceptable avec une discrétisation supplémentaire)
Complexité du calibrage	-	++

Les notations retenues pour les critères "Pratique de place", "Complexité du calibrage" et "Complexité de la diffusion" correspondent à :

- - : faible
- + : modéré
- ++ : fort
- +++ : très fort

2.4 Modélisation de l'indice immobilier

Pour modéliser l'immobilier une volatilité constante est généralement préférée. Cette approche est particulièrement intéressante lorsqu'il n'y a pas (ou peu) de données de marché disponibles pour la volatilité implicite.

Nous considérons ainsi le même modèle que pour l'indice action standard mais avec une volatilité constante : un modèle BSCV (Black & Scholes with Constant Volatility). La volatilité est considérée comme fixée à 10 % et le taux de dividendes est fixé à 4,5%. Ces choix des valeurs de volatilité et du niveau de dividendes sont justifiés dans la section **2.9 Mise en place opérationnelle**.

2.5 Structure de dépendance

La structure de dépendance retenue entre les différents facteurs du GSE est une copule gaussienne : l'ensemble des mouvements browniens intervenant dans les dynamiques des modèles du GSE sont corrélés selon une matrice de corrélation instantanée, appelée matrice de corrélation du GSE. Cette approche pré-suppose d'exprimer l'ensemble des équations de diffusion des modèles sous une même probabilité, avant de procéder à la simulation des scénarios économiques. Les dynamiques et leur discrétisation ont été présentées dans les sections précédentes sous la probabilité risque neutre, que nous réutilisons pour les corrélations entre facteurs de risques.

2.5.1 Corrélations

Cette section décrit le calibrage de la matrice de corrélation du GSE. On fait l'hypothèse que les composantes browniennes apparaissant dans les modèles multifactoriels, comme le modèle DDLMM à deux facteurs, présentent la même corrélation avec les autres composantes browniennes. La construction de la matrice de corrélation du GSE est réalisée en quatre étapes :

- l'estimation de corrélations historiques entre des facteurs de risque observables. Les facteurs de risque observables sont des données de marché observables associée à un facteur de risque. Par exemple, pour les taux nominaux le facteur de risque observable associée est la variation de la valeur du taux zéro coupon nominal. Pour l'indice action il s'agit des log rendements de l'indice déflaté.
- la définition théorique des corrélations entre facteurs de risque observables. Cette caractérisation théorique est fonction des paramètres de la matrice de corrélation du GSE et du modèle choisi.
- l'estimation des paramètres de la matrice de corrélation qui permettent d'égaliser les corrélations historiques avec les corrélations théoriques calculées.
- la validation des corrélations cibles avec les corrélations Monte-Carlo (corrélations obtenues par simulation) entre les facteurs de risque observables.

Calibrage

Dans un premier temps, chaque facteur de risque doit être associé à une contrepartie observable, les taux zero coupon nominaux sont la contrepartie observable des taux nominaux par exemple. On se référera aux tableaux à la fin de cette section pour les détails associés. Le lecteur pourra aussi y trouver des informations sur les données utilisées pour le calibrage et leur granularité.

En ce qui concerne les instruments utilisés, nous avons retenu les taux swap contre Euribor 6 mois pour construire un historique de la courbe des taux nominaux. L'Euro Stoxx 50, indice boursier qui regroupe 50 sociétés de la zone euro, en fonction de leur capitalisation boursière, est sélectionné pour modéliser l'action. Au regard de la multitude d'indices immobiliers du marché, nous avons retenu les données de l'INSEE pour leur grande profondeur d'historique.

Les corrélations historiques entre les facteurs historiques sont basées sur les maturités de référence 1 an et 10 ans pour les taux nominaux. Le tableau ci dessous récapitule les données utilisées, leur profondeur et leur granularité.

Données	Source	Granularité	Départ de l'observation
Courbe des taux nominaux	Refinitiv	Monthly	31/01/1999
Real interest rate curve	Refinitiv	Monthly	31/07/2008
Equity indices	Refinitiv	Monthly	31/01/1999
Real estate indices	INSEE	Yearly	31/12/2000

On fait appel au coefficient de corrélation linéaire empirique pour l'estimation des corrélations historiques. On définit $(x_i, y_i); 1 \leq i \leq n$ les réalisations indépendantes de deux variables X et Y , On peut alors estimer le coefficient de corrélation par :

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}$$

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{\sigma}_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i)$$

Les corrélations historiques sont présentées dans le tableau suivant :

	taux nominaux 1Y	taux nominaux 10Y	taux réels 1Y	EUR DOM EQ	Indice Immobilier
taux nominaux 1Y	100%	53%	18%	35%	10%
taux nominaux 10Y	53%	100%	-3%	24%	1%
taux réels 1Y	18%	-3%	100%	-34%	-18%
Indice action	35%	24%	-34%	100%	16%
Indice Immobilier	10%	1%	-18%	16%	100%

On exprime alors la dynamique du facteur de risque observable en fonction des paramètres des modèles, ce pour chaque modèle retenu. Lorsque ces dynamiques sont établies sous la probabilité risque neutre, il reste à exprimer les corrélations entre les dynamiques en fonction des browniens associés et enfin d'égaliser la corrélation théorique avec la corrélation cible, résultat d'une estimation empirique. Exprimons ces étapes formellement : on se donne deux facteurs de risque observables, que nous identifierons par A et B . Ces facteurs de risque observables sont alors associés à des facteurs de risque économiques, que l'on suppose dépendants de ces mouvements browniens unidimensionnels. On cherche alors à déterminer la fonction g telle que :

$$\rho_{AB}^{thorique} = f(\rho_{AB}^{GSE})$$

$\rho^{thorique}$ désigne la corrélation théorique entre les facteurs observables et ρ^{GSE} correspond à la corrélation entre les browniens supposés régir la diffusion des facteurs économiques. On fait ensuite l'hypothèse que $\rho_{AB}^{thorique} = \rho_{AB}^{cible}$ avec ρ_{AB}^{cible} la corrélation historique entre les facteurs de risque observables. Ainsi :

$$\rho_{AB}^{GSE} = g^{-1}(\rho_{AB}^{cible})$$

Cela permet d'établir une correspondance entre les corrélations historiques et théoriques. En d'autres termes, un lien est établi entre les facteurs browniens et les facteurs de risque observables. Le tableau suivant illustre cette matrice dans le cadre de notre étude.

	Taux nominaux facteur 1	Taux nominaux facteur 2	Taux réels facteur 1	Taux réels facteur 2	Indice action	Indice Immobilier
Taux nominaux facteur 1	100%	0%	57%	57%	24%	20%
Taux nominaux facteur 2	0%	100%	57%	57%	24%	20%
Taux réels facteur 1	57%	57%	100%	0%	-12%	14%
Taux réels facteur 2	57%	57%	0%	100%	-12%	14%
Indice action	24%	24%	-12%	-12%	100%	18%
Indice Immobilier	20%	20%	14%	14%	18%	100%

Il faut désormais vérifier que la matrice satisfait certaines contraintes nécessaires à la simulation de la copule gaussienne.

2.5.2 Retraitement

On souhaite diffuser les drivers avec un pas annuel, dans cette optique nous faisons appel à la décomposition de Cholesky. D'après le théorème de décomposition de Cholesky, pour Ω une matrice réelle symétrique définie positive, Il existe une unique matrice réelle triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\Omega = TT'$

On simule un vecteur X de n aléas gaussiens indépendants. Sous les hypothèses du théorème énoncé ci-dessus, on peut appliquer la décomposition de Cholesky $\Omega = TT'$ avec Ω la matrice de corrélation du GSE et T une matrice réelle triangulaire inférieure. Le vecteur CX est alors corrélé comme souhaité.

La matrice de corrélation du GSE doit ainsi vérifier 3 conditions :

- La matrice doit être symétrique
- La matrice doit être définie positive
- La matrice doit avoir une diagonale unitaire

Il est cependant possible, et en pratique courant, que la matrice obtenue ne soit pas définie positive. Il faut donc appliquer des retraitements si nécessaire, ce qui est probable avec un nombre de facteurs de risque élevé. On retient alors l'approche d'Higham pour apporter les retraitements nécessaires. Cette approche est entièrement reprise de [18]

2.6 Validation

Comme nous l'avons décrit avant, la valorisation du bilan sous Solvabilité II s'accompagne de contraintes. En particulier la valorisation doit se faire dans un cadre risque neutre et doit vérifier la propriété de market consistency. Pour vérifier le respect de ces contraintes et s'assurer de la qualité des scénarios générés, nous mettons en place des tests de validation. Il s'agit de tests de martingalité, des tests de market consistency et de tests repricing. Au cours de cette section nous désignerons par N le nombre de simulations, 3000 dans le cadre de notre étude, et par H l'horizon de projection, fixé à 50 ans.

2.6.1 Tests de martingalité

L'objectif est d'assurer que les propriétés théoriques associées aux modèles sous jacents sont bien respectées par les trajectoires générées par le générateur de scénarios économiques. Nous détaillons ensuite chaque test.

Les tests de martingalité : Ces tests consistent en une vérification sur les prix actualisés des actifs. On vérifie ici leur caractère martingale via une table de scénarios risque neutre et un calcul d'espérance par la méthode de Monte-Carlo. Les facteurs de risques sont simulés 3000 fois puis sont actualisés avec les déflateurs donnés par la table du GSE, et enfin moyennés. Le tableau suivant récapitule les grandeurs théoriques et leurs estimateurs empiriques.

Test martingale	Valeur théorique	Estimateur empirique
Déflateur	$E(D(0, t)) = P(0, t)$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D^i(0, t)$
ZC nominal	$E(D(0, t)P(t, T)) = P(0, t)$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D^i(0, t)P^i(0, t)$
Indice immobilier	$E(D(0, t)A_t) = P(0, t)$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D^i(0, t)A_t^i$
Indice action	$E(D(0, t)I_t) = P(0, t)$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D^i(0, t)I_t^i$

Résultats des tests de martingalité

Nous illustrons ici les résultats des tests de martingalité pour les déflateurs et l'indice action avec un intervalle de confiance de 95%.

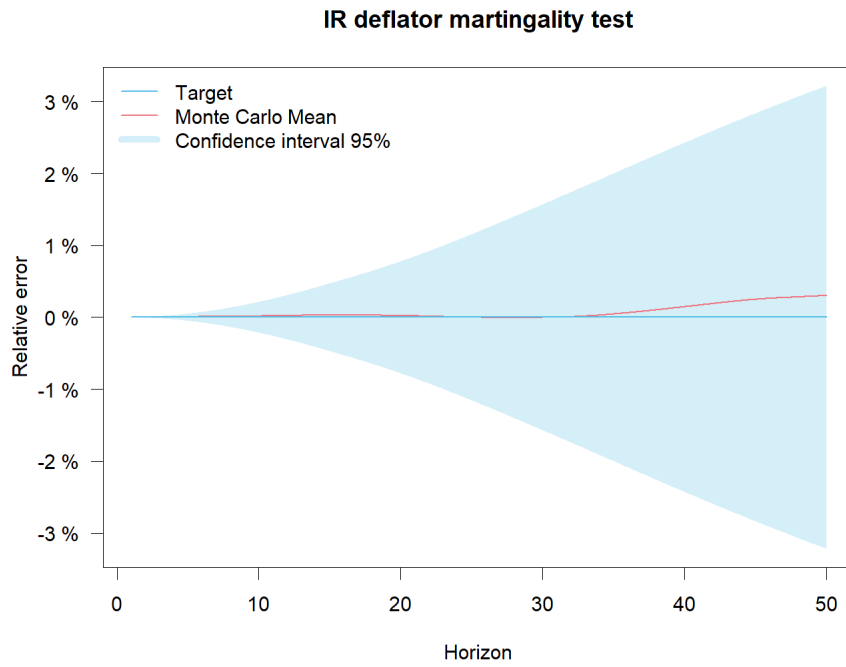


FIGURE 2.1 – Test sur les déflateurs modèle DDLMM

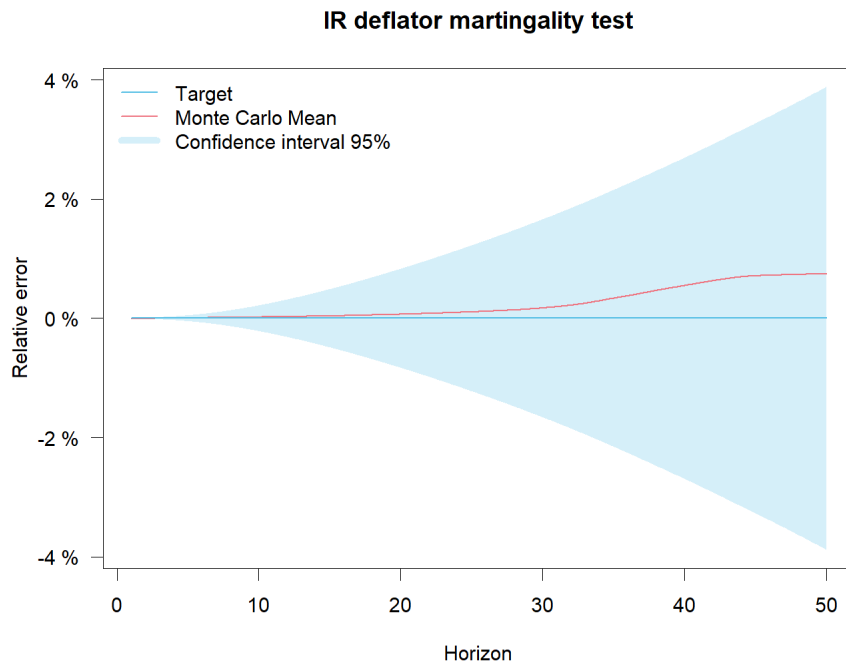


FIGURE 2.2 – Test sur les déflateurs modèle G2++

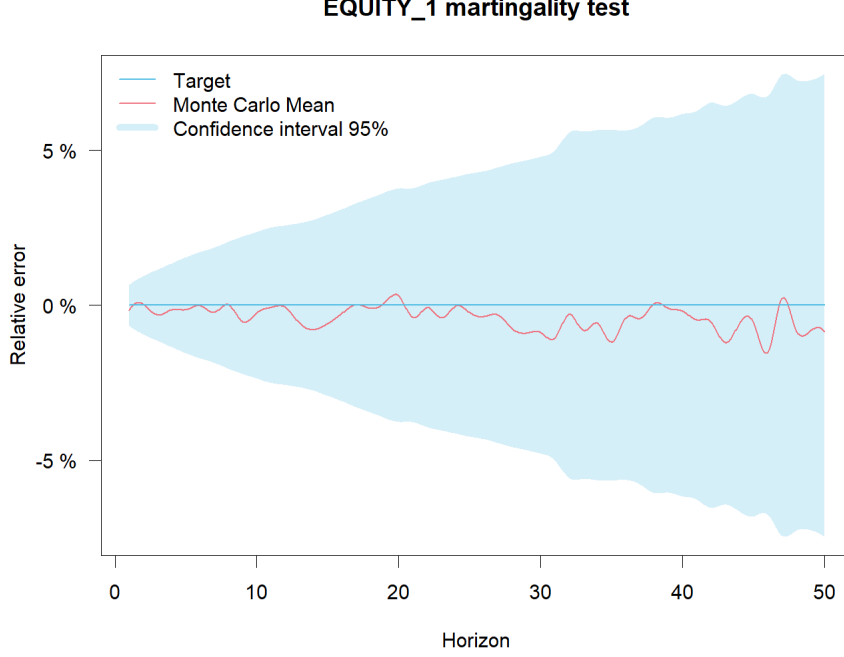


FIGURE 2.3 – Test sur l'indice action modèle BSDV

2.6.2 Tests de market consistency et de repricing

Pour valider la market-consistency des tables générées. Nous donnons un exemple sur l'indice action. On teste la market consistency de l'indice action simulé puis on effectue un test de repricing Monte-Carlo qui consiste à comparer les volatilités locales dites Monte-Carlo et les volatilités locales de marché.

Plus précisément, le calcul des volatilités locales basé sur les log rendements déflatés permet de vérifier que les scénarios générés sont en accord avec les cotations de marché des volatilités implicites.

Calcul des volatilités

On note $(r_s^s(j))_{j \in [1, N]}$ les log rendements annuels de l'indice action sur la période $[j - 1, j]$, $1 \leq j \leq N$. On a ainsi :

$$r_S^{(s)}(j) = \ln \left(\frac{D^{(s)}(j)S^{(s)}(j)}{D^{(s)}(j-1)S^{(s)}(j-1)} \right)$$

Les log rendements déflatés $(r_S^{(1)}(j), \dots, r_S^{(N_s)}(j))$ sont indépendants et identiquement distribués, suivants une loi normale. La volatilité Monte-Carlo en j , $1 \leq j \leq N$, est alors estimée par :

$$\widehat{\sigma}_S(j-1) = \sqrt{\frac{1}{N_s-1} \sum_{s=1}^{N_s} \left(r_S^{(s)}(j) - \widehat{\mu}_S(j) \right)^2} \text{ avec } \widehat{\mu}_S(j) = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} r_S^{(s)}(j)$$

En agrégeant ces volatilités Monte-Carlo on arrive à l'estimateur suivant :

$$\widehat{\sigma}_{S,imp}(j) = \frac{1}{j} \sqrt{\sum_{i=0}^{j-1} \widehat{\sigma}_S(i)^2}$$

On peut alors comparer cette quantité avec la volatilité implicite de marché $\sigma_{imp}^{Mkt}(j)$.

Notons qu'il existe aussi des tests de market consistency pour les taux nominaux. Le principe reste sensiblement le même : on calcule d'abord le prix des swaptions à l'aide de formules de pricing. On convertit ensuite le prix en volatilité et enfin on calcule l'écart absolu entre les volatilités Monte-Carlo et les volatilités de marché.

Résultats des tests de repricing et Market consistency

Les volatilités implicites de marché et les volatilités implicites estimées par la méthode de Monte-Carlo présentée ci-dessus sont tracées sur la figure suivante pour le modèle log-normal à volatilité déterministe dépendante du temps avec simulations.

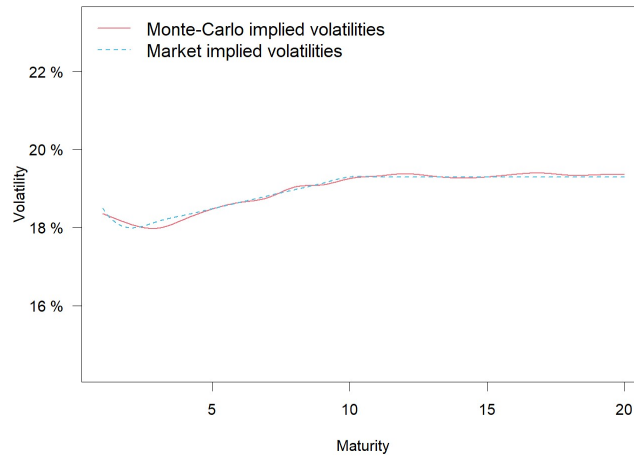


FIGURE 2.4 – Test de Market consistency pour le modèle BSDV

Validation des corrélations

Nous vérifions ici que la matrice obtenue avec les corrélations Monte-Carlo (corrélations définies dans la section **2.5 Structure de dépendance**) est satisfaisante. Plus précisément on valide les corrélations Monte-Carlo entre les facteurs de risque, simulés avec les modèles de diffusions établis dans les sections précédentes, en vérifiant que les valeurs historiques sont bien répliquées dans les scénarios.

La validation est effectuée pour une table de scénarios économiques au 31/12/2020 avec 3000 simulations et une matrice de corrélation retraitée basée sur 3000 scénarios et moyennée sur 40 années de projection.

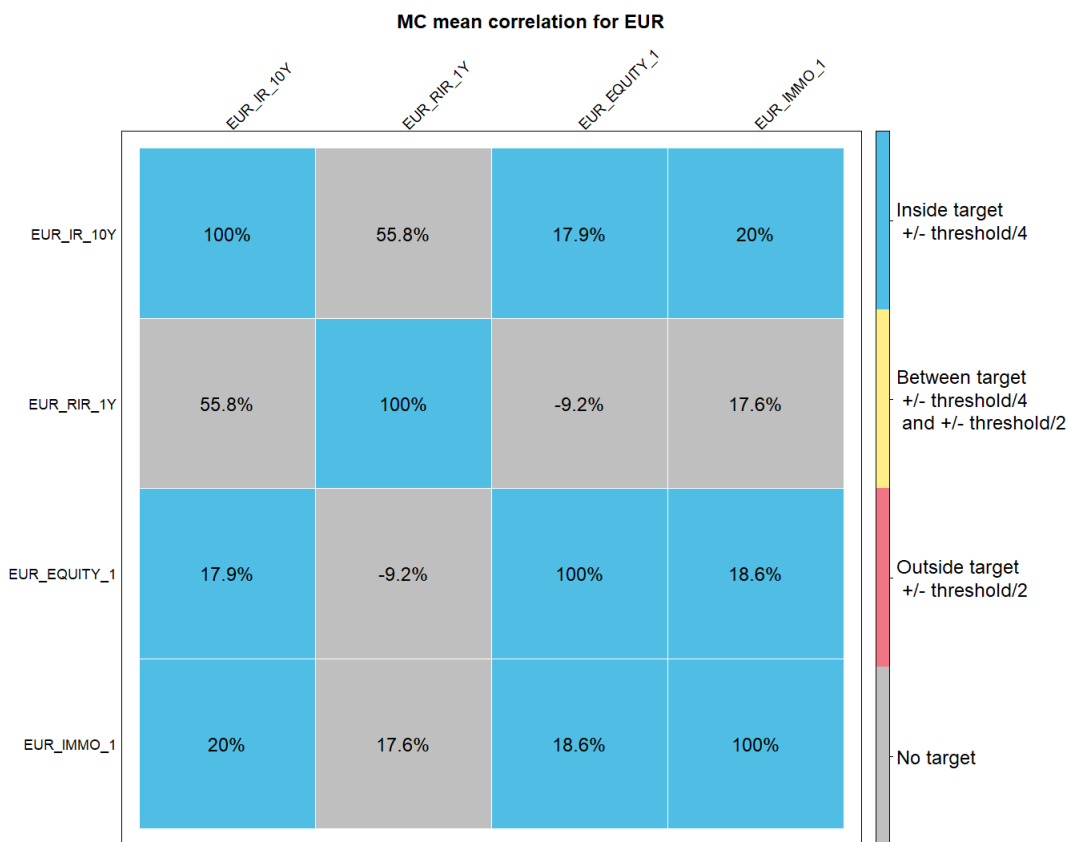


FIGURE 2.5 – Heatmap des corrélations Monte-Carlo

En définissant le seuil d’acceptabilité à 25%, on obtient une erreur maximale de 2,5%, ce qui assure une réplication des corrélations satisfaisante. Au vu des résultats ci dessus, les données générées par le GSE satisfont pleinement les contraintes réglementaires et attestent de la qualité des scénarios utilisés dans la suite de notre étude.

2.7 Choix du nombre de scénarios économiques

Le nombre de trajectoires générées par le GSE impacte le temps de calcul ainsi que la précision des calculs effectués. Le choix du nombre de trajectoires repose sur le théorème central limite qui permet de calculer un intervalle de confiance autour de la valeur du Best Estimate. Le choix du nombre de trajectoires est alors déterminé par la proximité à cet intervalle théorique. Il est aussi important de noter que la volatilité des données influe sur la qualité des tests de validation.

Les pratiques du marché concernant le nombre de trajectoires sont en accord avec la revue de l’ACPR de décembre 2020 : "une incertitude à 95% inférieure à 0,2% du BE correspond à une pratique de marché généralement observée". Pour répondre à ce critère il est nécessaire de générer au minimum 1000 trajectoires. Au vu du grand nombre de tables générées dans le cadre de ce mémoire et de la diversité temporelle dans le choix des données (données trimestrielles, annuelles datant de 2017 jusqu’à 2020) le choix du nombre de scénarios s’est porté à 3000, ce qui permet de respecter les bonnes pratiques du marché et d’avoir des intervalles de confiance à 95% stables sur l’ensemble des tables générées.

De plus, le nombre de scénarios permet de diminuer la fuite de modèle, qui atteste aussi de la qualité du générateur de scénarios économiques. Nous reviendrons plus en détail sur la notion de fuite de modèle et sur l’impact du nombre de trajectoires dans la section suivante.

Les graphiques suivants présentent les intervalles de confiance pour les tests de martingalité sur les taux zéro coupon 10 ans au 31/12/2020 pour 1000 trajectoires et 3000 trajectoires.

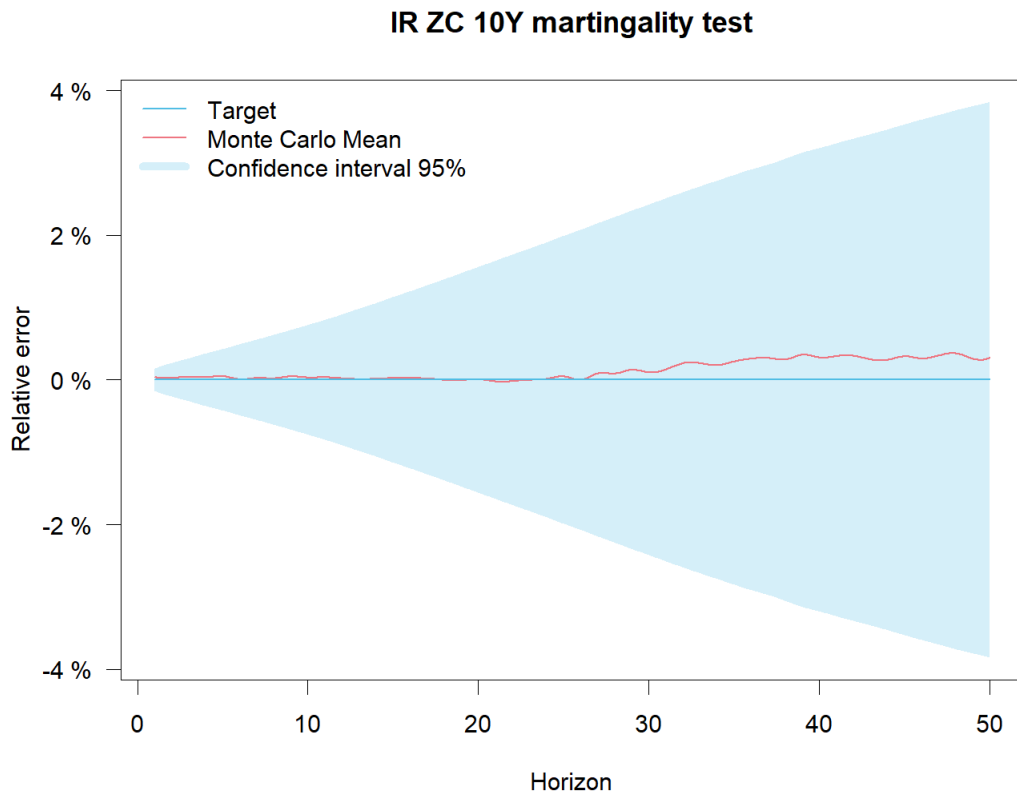


FIGURE 2.6 – Test de martingalité sur le taux zéro coupon 10 ans avec 3000 trajectoires au 31/12/2020

IR ZC 10Y martingality test

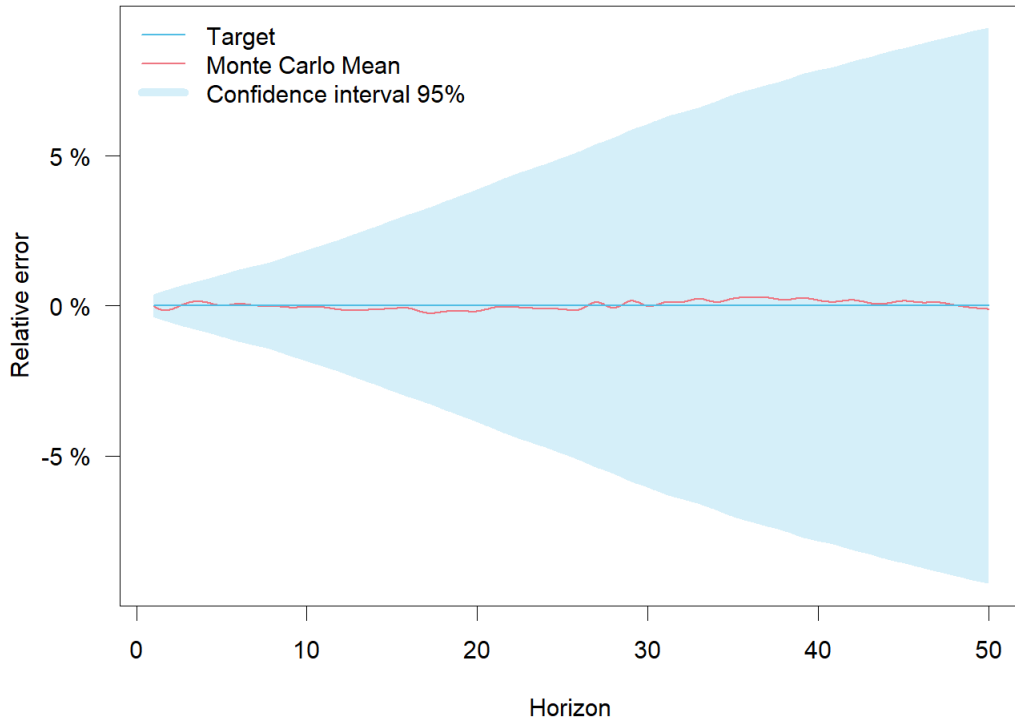


FIGURE 2.7 – Test de martingalité sur le taux zéro coupon 10 ans avec 1000 trajectoires au 31/12/2020

2.8 Générateurs de nombres pseudos aléatoires et fuite de modèle

Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires reposent sur 3 grandes étapes pour générer des suites de nombres $(U_k)_{k \geq 0}$:

- Etape 1 : $s_0 \in S$ est la graine choisie. La graine choisie au cours de ce mémoire a été fixée à la suite d'études déjà effectuées pour les suites de Sobol. Notons que l'utilisation d'une même graine permet d'obtenir la même séquence de nombres .
- Etape 2 : $s_{k+1} = f(s_k)$ où $f : S \rightarrow S$ est appelée fonction de transfert. Cette fonction est l'élément caractéristique du générateur de nombres pseudo-aléatoires.
- Etape 3 : $U_{k+1} = g(s_{k+1})$ où $g : S \rightarrow [0, 1]$ est appelée fonction de sortie. Cette fonction permet de convertir les nombres pseudo-aléatoires s_1, \dots, s_n en nombres dans $[0, 1]$.

S étant fini, on comprend que le générateur de nombres pseudo-aléatoires génère à un certain moment la même séquence qu'initialement, ce temps de retour se nomme la période du générateur. Plus la période est longue, plus le générateur est performant.

Les générateurs de nombres pseudos-aléatoires les plus courants sont le Mersenne Twister et le Sobol. Afin de de justifier le choix du Sobol dans le cadre de ce mémoire, nous rappelons d'abord le cadre théorique, puis nous nous intéressons à la notion de fuite de modèle.

Soit n le nombre de trajectoires que l'on veut générer en dimension d , i.e on désigne par $(u_{i,j})_{i \in [[0,n]], j \in [[0,d]]}$ la jème

composante de la trajectoire i tel que :

$$u_{i,j} = i_1 v_{1,j} \oplus i_2 v_{2,j} \oplus i_3 v_{3,j} \oplus \dots \oplus i_r v_{r,j}$$

- V : la matrice ($r \times r$) triangulaire supérieure dont les colonnes (v_1, \dots, v_r) ont pour composantes $(v_{k,l})_{k,l \in [[0,r]]^2} = \frac{m_{k,l}}{2^k}$ i.e. ce sont les composantes en base 2 des nombres $(m_{k,l})_{k,l \in [[0,r]]^2}$ appelés direction.
- (i_j) : la j -ème composante en base 2 du nombre i .

Le générateur Sobol se base ainsi sur la matrice V , plus précisément sur les nombres direction . Ces nombres sont fournis par leur auteur Frances Kuo. Si $V = Id$, alors nous retrouvons la séquence de Van Der Corput en base 2 . En dimension d , nous avons besoin de d séquences de nombres direction, obtenus comme suit :

$$(m_{i,j}) = 2c_{1,j}m_{i-1,j} \oplus 2^2c_{2,j}m_{i-2,j} \oplus \dots \oplus 2^{q-1}c_{q-1,j}m_{i-q+1,j} \oplus 2^q m_{k-q,j} \oplus m_{k-q,j}$$

Avec

- $(m_{1,j}, \dots, m_{q,j})$ initialisées de telle sorte que ces nombres soient impairs et plus petits que 2^j
- $(c_{1,j}, \dots, c_{q-1,j})$ sont les coefficients en base 2 d'un polynôme de degré q tel que :
 - le polynôme soit irréductible
 - la plus petite puissance de p pour laquelle le polynôme divise $x^p + 1$ est $p = 2^q - 1$.

Nous passons par la suite à la notion de fuite de modèle.

En accord avec la définition donnée par l'ACPR dans sa revue "Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques" de décembre 2020 : La "fuite de modèle" ou "leakage" représente l'écart entre la valeur de marché de l'actif et l'espérance des flux de trésorerie actualisés d'autre part. L'expression de ces flux permet de faire apparaître le BE et la VIF, qui sont les grandeurs d'intérêts de ce mémoire.

$$\text{Fuite de modèle} = \text{VM(actif)} - \text{PV (Flux de trésorerie)} = \text{VM(actif)} - \text{BE} - \text{VIF}$$

Le nombre de scénarios utilisés étant fini, l'égalité ne peut être vérifiée strictement pour un calcul stochastique avec un nombre de trajectoires fini. Cependant, comme mentionné dans la section précédente, l'augmentation du nombre de trajectoires utilisés permet de limiter la fuite de modèle, en addition avec le choix du générateur de nombres pseudo aléatoires. Le tableau suivant récapitule les effets du choix du générateur de nombres pseudo aléatoires et du nombre de scénarios sur la fuite de modèle au 31/12/2020.

Nombre de trajectoires	Générateur de nombres pseudo aléatoires	Leakage
1000	Sobol	7 bp
1000	Mersenne Twister	11 bp
3000	Sobol	2 bp
3000	Mersenne Twister	6 bp

Les résultats présentés ci dessus ont orientés le choix du nombre de scénarios à 3000 et le choix du générateur de nombre pseudo aléatoires vers le Sobol, en accord avec une fuite de modèle faible à 2bp pour 3000 scénarios et l'utilisation du Sobol.

2.9 Mise en place opérationnelle

Il existe de nombreux modèles utilisés sur le marché, calibrés avec des données qui peuvent être très différentes et avec des paramètres embarqués tout aussi différents. Cette section a ainsi pour but de justifier les choix effectués au cours de l'utilisation du GSE.

Modèles de taux choisis

Le choix des modèles retenus dans le cadre de ce mémoire a été dicté par une étude sur 21 acteurs principaux du marché de l'assurance vie en France. Cette dernière révèle une utilisation majoritaire du DDSVLMM : 13 acteurs contre 8 acteurs utilisant le DDLMM. Il est donc naturel de prendre en compte ces deux modèles, représentatifs de ceux utilisés sur le marché français. Nous considérons cependant le modèle DDLMM comme modèle de référence au cours de ce mémoire du fait de la stabilité de son calibrage pour différents jeux de données et de sa robustesse. Ces critères en particulier font du DDLMM un modèle pertinent pour comparer l'impact de différents paramètres.

Le choix du G2++ a été fait dans une optique de comparaison. En effet, il s'agit d'une extension naturelle du modèle de Hull&White qui est l'un des premiers modèles de taux nominaux à avoir été utilisé. De plus, ses différences en terme de calibrage et de distribution générées permettent de mettre en évidence certaines caractéristiques des modèles plus coûteuses sur la VIF.

Données de calibrage

Le calibrage des modèles de taux repose ici sur des données à la monnaie (ATM) et des données hors de la monnaie (AFM), essentielles pour calibrer précisément le skew du DDLMM et la volatilité stochastique du DDSVLMM.

Afin de réaliser une première sélection de données de swaptions (maturités, tenors, strikes), une étude de la liquidité des swaptions sur le marché OTC est réalisée, via le DTCC Data Repository, qui est un organisme centralisant les données de transaction sur les produits dérivés. Les tableaux suivants illustrent un exemple de comparaison des volumes de swaptions échangées :

		ATM												
<i>M/T</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	>30
1	0.0%	0.4%	0.5%	0.1%	1.1%	0.1%	0.1%	0.0%	0.1%	8.5%	1.2%	5.9%	1.8%	17.9%
2	0.0%	0.5%	0.1%	0.1%	1.2%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	4.3%	0.1%	0.6%	0.0%	2.6%
3	0.0%	1.2%	0.1%	0.2%	1.2%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	3.0%	0.2%	0.7%	0.0%	2.0%
4	0.0%	0.9%	0.1%	0.1%	1.2%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	1.9%	0.1%	0.4%	0.0%	1.9%
5	0.0%	1.7%	0.1%	0.0%	3.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	5.5%	0.5%	1.0%	0.0%	5.6%
7	0.0%	0.7%	0.0%	0.0%	0.6%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	1.4%	0.0%	0.4%	0.0%	1.5%
10	0.0%	1.3%	0.0%	0.0%	0.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	4.3%	0.4%	1.5%	0.6%	2.4%
15	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.3%	0.0%	0.7%
20	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.0%	0.3%	0.1%	1.3%
25	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%
>30	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%

FIGURE 2.8 – Volumes de swaptions ATM échangées

Tenor	Proportion
1	0.2%
2	9.8%
3	1.1%
4	0.6%
5	13.1%
6	0.2%
7	0.8%
8	0.1%
9	0.1%
10	45.9%
15	4.8%
20	23.3%

FIGURE 2.9 – Volume échangé ATM fonction du tenor

AFM Tenor 10 ans												
M/Stk	-250 bp	-200 bp	-150 bp	-100 bp	-50 bp	0	50 bp	100 bp	150 bp	200 bp	250 bp	
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	21.5%	3.8%	0.2%	0.4%	0.1%	0.0%	
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	10.8%	1.8%	0.1%	0.2%	0.3%	0.0%	
3	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	7.6%	1.0%	0.2%	0.0%	0.2%	0.0%	
4	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	4.9%	0.6%	0.5%	0.2%	0.0%	0.0%	
5	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	13.9%	1.1%	0.4%	0.1%	0.1%	0.0%	
7	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	3.5%	0.9%	0.1%	0.4%	0.1%	0.0%	
10	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.2%	10.9%	6.2%	0.3%	0.1%	0.1%	0.0%	
15	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.4%	1.9%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	
20	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.5%	2.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	
25	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.4%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	
>30	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.5%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	

FIGURE 2.10 – Volume de swaptions AFM échangées tenor 10 ans

Au vu des volumes échangés, nous considérons des données ATM pour des maturités allant jusqu'à 30 ans, pour des tenors de valeurs dans [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25, 30].

Pour les données AFM nous limitons les strike relatifs à l'intervalle $[-100bps; 100bps]$. L'analyse des tenors montre que le tenor 10 ans est le plus échangé, il s'agit donc du tenor de référence retenu pour les données AFM dans le cadre de notre étude.

Modèles actions choisis

Pour arrêter notre choix sur les modèles action, la modélisation des dividendes et son niveau, nous avons étudié 6 assureurs et 5 bancassureurs en France. 5 des 6 assureurs utilisent le modèle BSDV, contre 1 utilisant le SVJD et 3 des 5 bancassureurs utilisent un modèle de type SVJD contre 2 qui utilisent un BSDV.

Il est donc naturel d'étudier ces deux modèles, constitutifs à part entière du marché de l'assurance vie en France. L'indice utilisé est quasiment exclusivement l'Euro Stoxx 50, qui correspond à l'indice que nous modélisons. Bien entendu un portefeuille très réaliste aurait probablement d'autres expositions, comme au S&P500, mais nous ne modélisons que l'Euro Stoxx 50 dans une optique de simplification des analyses ALM.

Pour la simulation des dividendes, il est parfois difficile d'obtenir des informations précises sur la modélisation exacte et sur le niveau choisi mais l'étude menée indique qu'une majorité des acteurs (secteurs confondus) considère un modèle de dividende stochastique avec des niveaux moyens compris entre 2,5% et 3%. Dans une optique plus conservatrice, nous avons opté pour une modélisation des dividendes avec un processus CIR pour l'indice action, avec un niveau moyen autour de 2,9%.

Niveau de volatilité immobilier

L'analyse des volatilités historiques de divers indices immobilier (INSEE, EDHEC IEIF, IPD, . . .) associés à différentes zones géographiques (Paris vs France, Europe globale, Allemagne, UK) et différentes typologies d'investissements (logements vs immobilier d'entreprises) conduit à des niveaux estimés inférieurs à 10%

Les valeurs les plus élevées sont obtenues pour Europe retail (9,0%) et pour UK residential (7,7%). Par conservatisme, un majorant de volatilité fixé à 10% est considérée pour la génération des trajectoires d'indice immobilier.

Niveau de loyers

Le niveau de loyer (ou dividendes) est considéré comme constant au cours du temps. Le taux est alors fixé à 4,5%, ce qui correspond au taux médian à partir de différentes estimations des taux de loyer en France (en particulier entre l'immobilier parisien et l'ensemble de l'immobilier français).

2.10 Intégration dans un modèle ALM

Un modèle ALM est un modèle de gestion actif-passif permettant de modéliser les flux et les interactions de l'actif et du passif. Ceci est notamment fait via la modélisation du comportement des assurés, la politique de revalorisation adoptée ainsi que la stratégie d'investissement. La modélisation de ces interactions entre l'actif et le passif fait appel à des tables de scénarios stochastiques, afin de capturer la juste valeur des options et garanties liées aux contrats d'assurance vie proposés. Ainsi, le modèle ALM prend en entrée les tables issues du GSE, qui contiennent le détail des actifs et leur réalisation sur un grand nombre de trajectoires. Il reste au modèle ALM à avoir les caractéristiques du passif, qui sont aussi données en entrée et généralement regroupées en Model Points de passif : groupe de contrats d'assurés aux caractéristiques similaires.

Dans d'autres termes, les scénarios stochastiques générées par le générateur de scénarios économiques utilisés dans un modèle ALM, permettent une valorisation cohérente avec le marché, en lien avec la contrainte de market-consistency imposée par Solvabilité II. Les simulations effectuées par une entreprise d'assurance doivent être en lien les risques associés au portefeuille valorisé. Une entreprise d'assurance doit donc être en mesure d'expliquer auprès du régulateur le choix de ses modèles et de ses résultats à l'issue du calibrage du GSE. Ainsi, l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques, au préalable d'une valorisation à l'aide d'un modèle ALM, donne lieu à une réflexion sur l'univers de projection et de valorisation (ici l'univers risque-neutre), les actifs à modéliser, les modèles mathématiques associés et les données de calibrage à considérer. Nous détaillons le modèle ALM et les points mentionnés ci-dessus dans la partie suivante.

Modèle ALM

Cette partie s'intéresse aux choix de modélisation et aux hypothèses faites au sein du modèle ALM, nécessaires pour quantifier l'impact de l'environnement économique et du choix des modèles du GSE sur la valorisation d'un portefeuille en assurance vie. Nous y définissons le Best Estimate, la VIF, le bilan économique, la modélisation des actifs et passifs et les étapes de valorisations de l'ALM.

Les compagnies d'assurance proposent plusieurs types de contrats d'assurance vie ; les plus communs étant les fonds en unité de comptes, dénotés fonds UC, et les fonds en euros. Ces derniers constituant la plus grande partie des contrats des assureurs français, il était assez courant de ne modéliser que les fonds en euros, mais dans un contexte de taux bas voire négatifs, les assureurs voient leur rentabilité diminuer, car très dépendante des revenus financiers générés par les primes investies dans les obligations à taux fixe. Cela explique la tendance toujours croissante de réorientation vers les fonds UC. Ces supports ne garantissent pas le capital versé et sont investis sur des supports plus risqués comme l'immobilier ou l'action et donc plus rémunérateurs à long terme pour l'assuré que les fonds en euros. De plus, les obligations en termes de fonds propres réglementaires diminuent grâce aux unités de compte.

3.1 Bilan d'un assureur vie

Le bilan économique, ou bilan Solvabilité II, est une photographie à un instant donné du patrimoine de l'entreprise. C'est un bilan prospectif où l'évaluation des actifs et passifs y est réalisée en valeur de marché. Comme la valorisation doit vérifier la propriété de market consistency il est nécessaire de passer par une vision économique du bilan. Ce bilan est alors prospectif et équilibré.

Actifs	Passifs
Trésorerie	Net Asset Value (NAV)
Actions	Actif Net Réévalué (ANR)
	Value of Inforce (VIF)
Obligations	Best Estimate des engagements (BE)
Immobilier	

TABLE 3.1 – Bilan économique d'un assureur

Ici l'ANR représente la valeur économique des fonds propres comptables (actifs immobilisés).

Dans le cadre de ce mémoire nous nous intéresserons particulièrement aux résultats de VIF pour étudier l'impact des choix de modélisation et de l'environnement économique :

- **Best Estimate** : Les provisions techniques en Best Estimate correspondant à la valeur actuelle nette probable des flux futurs (prestations, frais, commissions, primes) associés aux contrats existants à la date d'évaluation. Il s'agit de l'évaluation économique des engagements de l'assureur.
- **VIF** : La VIF se définit comme la valeur probable des cash flows futurs perçus liés au portefeuille d'assurance.

3.2 Définition d'un modèle ALM

Une gestion active de l'allocation des actifs est indispensable à un assureur qui doit satisfaire ses engagements pris auprès des assurés. Deux aspects clés dans cette gestion active sont la modélisation du comportement probable des actifs au cours de la durée de l'engagement, et la modélisation du comportement des assurés. Intervient alors un outil essentiel, le modèle ALM.

Le modèle ALM est au coeur du processus de valorisation des assureurs Vie. Par la projection de différents flux, comptables et de trésorerie par exemple, le modèle ALM rend possible la modélisation des concepts ci-dessous :

- L'actif de l'assureur modélisé : caractérisé par sa valeur comptable et sa valeur de marché
- Le passif de l'assureur modélisé et tous les flux associés : rachats, primes, décès, provisionnement etc.
- L'approche stratégique et financière de l'assureur modélisé, regroupant notamment la politique d'allocation des actifs, d'achat et de vente.
- La stratégie de revalorisation de l'assureur modélisé, qui comprend le TMG, la PB et la PPE, dont les définitions sont données dans la suite de ce chapitre.
- Les fonds propres et leur évolution, en fonction des résultats, dividendes etc.

Nous rappelons qu'afin d'effectuer une valorisation sous le cadre réglementaire imposé par Solvabilité II, le calcul des indicateurs Solvabilité II et plus généralement du bilan économique doit se faire sous dans l'univers risque neutre et sous l'hypothèse d'AOA et dans un univers market consistent.

3.2.1 Présentation

Les inputs suivants dans un modèle ALM :

- Les scénarios économiques générés par le GSE, la loi de mortalité choisie et la modélisation des rachats retenue (conjoncturels, structurels ou les deux).
- Les caractéristiques des actifs : Pour chaque actif on précise la VNC (Valeur nette comptable), le taux de PMVL (Plus ou moins-values Latentes), la maturité de l'actif en question, la VM (Valeur de marché), La duration des obligations, le coupon et le nominal. A titre d'exemple nous modélisons l'indice action par un actif de VNC égale à 110 millions, un taux de PMVL initial de 0,15 et une VM de 127 millions.
- L'allocation d'actifs cible
- Les caractéristiques du passif : L'âge moyen du groupe d'assuré modélisé ainsi que le produit assurantiel modélisé : taux d'imposition, taux de frais de gestion, taux de chargement, PB réglementaire, etc...
- Les valeurs initiales des constituants des provisions : On se donne une valeur initiale de PM (Provision mathématique), une provision pour participation aux excédents et une réserve de capitalisation.

- Le détail des lois de rachats et de revalorisation financière

Nous définissons les termes utilisés ci après :

Type de contrats

- **Contrats d'assurance vie en euros** : Ce sont les fonds privilégiés par les épargnants désirant protéger leur capital. Le capital de départ est augmenté des intérêts cumulés et est garanti par l'assureur. Ainsi le capital garanti augmente en fonction du taux de rendement et ne peut diminuer. Le risque est donc entièrement supporté par l'assureur. Le rendement se décompose en deux éléments : le taux minimum garanti (TMG) et la participation aux bénéfices (PB). Les provisions pour ce type de fonds sont essentiellement réalisées avec des obligations qui garantissent un rendement fixe.
- **Contrats d'assurance vie en unités de compte** : Le capital est investi dans des actifs plus diversifiés : actions, obligations et parts de fonds communs de placement. De par la nature plus risquée des placements, ces contrats offrent des rendements plus élevés et répondent ainsi au besoin de rendement supérieur. Contrairement aux fonds euros, ces fonds ne sont pas libellés en euros mais en unités de comptes dont la valeur fluctue en fonction du marché. L'assuré a ainsi une certaine quantité d'unités de compte garanties mais leur valeur ne l'est pas. On comprend alors que le risque est supporté par l'assuré.

Dans le cadre de ce mémoire les contrats retenus sont des contrats individuels à prime unique que nous considérons comme payée immédiatement par l'ensemble des assurés. La participation aux bénéfices des assurés est encadrée par une clause de participation aux bénéfices contractuelle qui fixe un taux de participation aux bénéfices (PB) minimum régi par l'article L.132-29 du code des assurances. Le mécanisme de PB utilisé est explicité en détail dans les paragraphes suivants.

Provisions techniques

- **Provision mathématique (PM)** : Il s'agit du constituant le plus significatif des provisions techniques. Dans certains cas l'approximation provisions techniques = PM est acceptable. Sa définition est donnée par l'article R.343-3 du code des assurances : il s'agit de la "différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés". L'article précise aussi qu'une estimation des frais futurs de gestion de l'assureur est nécessaire sur la période "au-delà de la durée de paiement des primes ou de la date du prélèvement du capital constitutif". Il s'agit ainsi de flux à payer probables qui constituent la PM.
- **Provision pour participation aux bénéfices (PPB)** : La PPB (ou PPE, Provision pour Participation aux Excédents) correspond à une réserve de participation aux bénéfices. Elle permet de lisser les rendements obtenus et de garantir la stabilité de la rémunération des assurés. Alternativement et même plus couramment la PPE peut permettre à l'assureur de faire face à ses engagements malgré des résultats à la baisse. L'assureur ayant jusqu'à huit ans pour distribuer pour écouler la participation aux bénéfices, la partie non distribuée de la PB dote une réserve qui constitue la PPE.
- **Réserve de capitalisation (RC)** : La RC est un autre constituant des provisions techniques. Selon l'article R.343-3 du code des assurances, cette réserve est "destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu". La RC est dotée par les plus-values constatées et diminuée à hauteur des moins-values.

Interactions Actif passif

- **Le Taux de Participation aux Bénéfices (PB)** : En vertu de l'article L.132-29 du code des assurances, un assureur Vie doit reverser une partie de ses bénéfices aux assurés : "Les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation et les fonds de retraite professionnelle supplémentaire font participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'ils réalisent, dans les conditions fixées par arrêté du ministre chargé de l'économie". Le montant minimal de la participation aux bénéfices est déterminé à partir d'un compte de participation aux résultats avec le détail suivant. Cette participation aux bénéfices est à hauteur de 90% du bénéfice technique et 85% des produits financiers réalisés par l'assureur, en accord avec l'article A.132-11 du

code des assurances : "Le compte de participation comporte en dépenses la participation de l'assureur aux bénéfices de la gestion technique, qui est constituée par le montant le plus élevé entre 10% du solde créditeur des éléments précédents et 4,5% des primes annuelles. Il est ajouté en recette du compte de participation aux résultats une part des produits financiers. Cette part est égale à 85% du solde d'un compte financier". Notons cependant que la répartition de la PB n'est pas encadrée par le code des assurances et se fait à la discrétion du conseil d'administration de l'organisme d'assurance.

- **Taux minimum garanti (TMG)** : C'est le rendement financier minimum garanti par le contrat, il est fixé, contrat par contrat, chaque année par l'assureur sans excéder 85% du rendement des actifs de l'assureur au cours des 2 derniers exercices. Ce taux est déterminant car, ajouté à la PB, il représente la rémunération des fonds en euros en plus de la participation aux bénéfices. Le TMG se présente donc comme une borne inférieure du taux servi aux assurés, que l'assureur doit respecter quels que soient les performances réalisées et les rendements obtenus. Ainsi, c'est un paramètre contractuel clé pour l'assureur qui doit être capable d'honorer ses engagements en fin d'année et rester compétitif sur le marché.
- **L'option de rachat** : Le rachat d'un contrat correspond à la décision de l'assuré de se voir restituer l'argent versé. Les flux de passif sont alors modifiés et cette décision peut être adverse pour l'assureur dans le cas où l'actif est en situation de moins-value au moment du rachat. Il existe deux types de rachats. Le premier est le rachat dynamique, directement liée à l'attractivité de l'offre de l'assureur et à la satisfaction de l'assuré en regard à cette offre. Si les taux de revalorisation proposés par l'assureur sont en baisse par rapport aux taux précédents ou bien plus faibles que ceux proposés par la concurrence, le client peut exercer son option de rachat, il s'agira alors d'un rachat dynamique ou conjoncturel. Notons que la valeur de rachat ne peut être inférieure à la provision mathématique en accord avec l'article L.132-24 du code des assurances. Le deuxième type de rachat est le rachat structurel, qui correspond à un besoin en liquidité de la part de l'assuré. Il est modélisé en décrivant le comportement moyen des assurés et en moyennant en fonction d'un regroupement de critères (sexe, âge, ancienneté du contrat, etc...). L'option de rachat est limitée à certains contrats et le droit à rachat est limité pour les contrats collectifs de retraite à des cas limités, en accord avec l'article L.132-23 du code des assurances : "Les contrats d'assurance en cas de vie dont les prestations sont liées à la cessation d'activité professionnelle, y compris les contrats qui relèvent du régime de retraite complémentaire institué par la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique, ne comportent pas de possibilité de rachat. Les contrats qui relèvent du régime de retraite complémentaire institué par la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique peuvent prévoir, à la date de liquidation des droits individuels intervenant à partir de la date de cessation d'activité professionnelle, une possibilité de rachat dans la limite de 20 % de la valeur des droits individuels résultant de ces contrats. La convention d'assurance de groupe dénommée complémentaire retraite des hospitaliers peut également prévoir, à la date de liquidation des droits individuels intervenant à partir de la date de cessation d'activité professionnelle, une possibilité de rachat dans la limite de 20 % de la valeur des droits individuels garantis par la convention à la date de liquidation". Notons que l'option de rachat est assimilable à un Put. En effet, l'assuré a un droit de vente à un montant garanti au préalable.
- **La garantie décès** : Cette garantie assure à un ou des bénéficiaires le versement d'un capital en cas de décès de la personne assurée

Dans le cadre de ce mémoire, on modélise l'option de rachat ainsi que le TMG et la participation aux bénéfices.

On considère un bilan comptable où les actifs ne peuvent être que de 4 type : trésorerie (cash), obligations à taux fixe, actions et immobilier. De plus, on ne modélise que les PM, la RC et la PPE au passif. Le niveau de fonds propres restant constant au cours de la projection, ils ne sont pas projetés. Dans le bilan simplifié, on négligera la marge pour le risque et on désignera par A_t , la valeur de marché des actifs. Ci-dessous, une visualisation des bilans comptables et économiques simplifiés :

Actif	Passif	Actif	Passif
Trésorerie	PM	A_t	VIF_t
Actions	RC		BE_t
Obligations	PPE		
Immobilier			

3.2.2 Modélisation de l'actif

Nous choisissons de modéliser les classes d'actifs suivantes : cash, obligations, indice action et indice immobilier. Cette section s'intéresse à la modélisation de ces différents actifs au sein du modèle ALM.

3.2.2.1 Hypothèses

Dans la suite du mémoire nous supposons que :

- Les actifs sont considérés comme infiniment divisibles
- Le marché est liquide, c'est à dire que l'achat ou la vente d'actifs est possible à tout instant
- Aucun coût de transaction n'est généré par l'achat d'actifs
- La stratégie d'allocation de l'assureur est constante durant la projection. Les actifs sont alors rebalancés annuellement pour respecter cela
- Les obligations achetées ont des caractéristiques définies à $t = 0$. Elles sont au pair, sans risque et avec un temps restant à maturité donné

3.2.2.2 Trésorerie

La trésorerie est caractérisée entièrement par les valeurs comptables et les valeurs de marché. La capitalisation se fait chaque année au taux r_t selon la relation suivante :

$$dB_t = r_t B_t dt$$

Dans ces conditions la valeur de comptable est égale à la valeur d'achat et la valeur de marché est revue à chaque pas de projection. Un cas particulier est celui où l'assureur emprunte de l'argent, autrement dit l'actif affiche une valeur négative. Dans ce cas on considère que des intérêts sont payés par l'assureur, au même taux de revalorisation de la trésorerie r_t .

3.2.2.3 Obligations

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous ne modélisons que des obligations à taux fixe, au pair en regard à la date d'achat et sans risque. Notre pas de temps étant annuel, la valeur de marché à la date $t \geq 0$ d'une obligation de nominal N , avec des coupons annuels notés c et de maturité T , s'exprime en écrivant les flux de l'obligation actualisés à l'aide des taux zero coupon. En reprenant les notations mathématiques définies dans la section **Générateurs de scénarios économiques** on obtient :

$$VM(t) = \sum_{t+1}^T cP(t, i) + NP(t, T)$$

Le calcul de la VNC se fait par l'actualisation des flux à l'aide du taux de rendement actuariel (TRA) :

$$VNC(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{c}{(1+TRA)^{i-t}} + \frac{N}{(1+TRA)^{t-T}}$$

Il est donc nécessaire de disposer de la maturité T de l'obligation, de son nominal N et de sa valeur d'achat pour les calculs des VM et VNC au sein du modèle ALM.

Dans la suite du mémoire les obligations sont considérées à taux fixe annuel et au pair lors de leur achat.

3.2.2.4 Indice action

L'indice action suit un modèle BSDV, Black Scholes à volatilité déterministe. Ce modèle a été détaillé précédemment. 3 caractéristiques sont exhibées pour modéliser le portefeuille action :

- sa valeur de marché
- sa valeur comptable qui correspond à sa valeur d'achat
- son taux de dividendes

Considérons une action A et r_a son taux de rendement annuel tel que :

$$r_a(N) = \frac{A_N}{A_{N-1}} - 1$$

Notons r_d le taux de rendement annuel des dividendes défini par :

$$r_d(N) = \frac{A_N}{A_{N-1}} - \frac{A_N^*}{A_{N-1}^*}$$

Les valeurs de marché, notées VM_{action} , et les dividendes, notés Div sont réévaluées à chaque date de projection selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned} VM_{action}(31/12/N) &= VM_{action}(31/12/N - 1)(1 + r_a(N))(1 - r_d(N)) \\ Div(31/12/N) &= VM_{action}(31/12/N - 1)(1 + r_a(N))r_d(N) \end{aligned}$$

3.2.2.5 Indice immobilier

La dynamique de l'indice immobilier suit un processus de Black Scholes à volatilité constante, avec prise en compte des loyers, par un processus constant de taux de loyers fixé à 4,5%. Les caractéristiques renseignées dans le modèle ALM sont les valeurs de marché et comptables ainsi qu'un taux de loyer.

3.2.3 Modélisation du Passif

Après avoir modélisé l'actif, nous nous intéressons au passif, avec les éléments pris en compte et quelques rappels sur le Best Estimate des engagements.

3.2.3.1 Hypothèses

Nous ne prenons en compte que les éléments les plus importants figurant au bilan pour modéliser le passif, à savoir :

- Des fonds propres, que nous considérons comme fixes et entrés en input du modèle ALM
- La réserve de capitalisation, notée RC

- Les provisions mathématiques, où l'on segmente les contrats en groupes ayant des caractéristiques homogènes, groupes que nous appelons Model Points. Les Model Points sont entièrement caractérisés par les données suivantes :
 - une PM (valeur donnée initialement comme point de départ à l'algorithme)
 - une maturité globale du Model Point
 - un taux minimal garanti
 - un taux de participation aux bénéfices
 - un taux de chargement sur encours

La modélisation adoptée de l'entreprise d'assurance suppose qu'il n'y a ni production future, ni nouveaux arrivants. De plus, il est supposé qu'un unique versement est effectué par les assurés pour la constitution de leur contrat d'épargne. Ce versement est effectué en $t = 0$ et plus aucun versement n'est réalisé dans la suite. Bien que Solvabilité II suppose des projections basées sur des contrats futurs : "les projections de dépenses sont fondées sur l'hypothèse que l'entreprise souscrira de nouveaux contrats à l'avenir" (article 31 du Règlement Délégué), ce mémoire fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de nouveaux arrivants dans une optique de simplification du modèle ALM et des interprétations des résultats.

Nous nous attardons ici sur la notion d'effet perceptible par les assurés, comme définie dans l'article 18 du règlement délégué : "Pour déterminer si la couverture d'un événement ou d'une garantie financière n'a pas d'effet perceptible sur l'économie d'un contrat, les entreprises tiennent compte de tous les potentiels flux futurs de trésorerie pouvant découler du contrat.

Les entreprises ne considèrent que les prestations comportent une garantie financière ayant un effet perceptible sur l'économie d'un contrat uniquement si ladite garantie financière est liée au paiement des primes futures et octroie à l'assuré, souscripteur ou bénéficiaire du contrat d'assurance un avantage financier perceptible avec une substance commerciale.

Les entreprises considèrent que la couverture d'un événement incertain spécifié, affectant de façon préjudiciable l'assuré, a un effet perceptible sur l'économie du contrat lorsque la couverture octroie au bénéficiaire un avantage financier non négligeable."

Cette notion est importante car elle permet de pouvoir justifier la projection ou non de certaines primes car l'assuré doit posséder un intérêt certain à continuer à verser des primes. En effet, dans le cas où le taux garanti serait nul, la projection de primes programmées n'apporte aucun effet perceptible pour l'assuré. Dans notre cas, il s'agit d'une prime unique payée à l'initialisation du contrat et l'on suppose que tous les contrats ont la même date de prise d'effet. Dans ces conditions on ne peut pas parler de projection de primes futures. De plus, le taux garanti fixé dans le cadre de ce mémoire n'est jamais nul, dans le cas de primes programmées il serait alors censé de prendre en compte la projection de primes futures car il y aurait un effet perceptible pour l'assuré.

3.2.3.2 Best Estimate

On rappelle que le Best Estimate correspond à la valeur probable actualisée des flux futurs de trésorerie. L'actualisation se fait avec la courbe des taux zéro coupon. Formellement, le calcul du Best Estimate se définit comme suit :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left(\sum_{t \geq 1} D(0, t) F_t \right)$$

Avec :

- \mathbb{P} la probabilité historique avec les notations déjà utilisées.
- \mathbb{Q} la probabilité risque-neutre

- $D(0, t)$ le déflateur à la date t , fonction du taux sans risque
- F_t les flux de trésorerie au temps t

L'espérance est calculée par une méthode de Monte-Carlo, sur N simulations et à partir des taux sans risques fournis par l'EIOPA, qui permettent le calcul du Best Estimate par la valeur actuelle des flux futurs.

Le calcul du Best Estimate fait intervenir des cash-flows de passifs qui représentent des sorties de provision mathématique. Ces sorties surviennent dans 3 cas :

- Le rachat du contrat par l'assuré
- L'arrivée à maturité du contrat
- Le décès de l'assuré

Notons qu'à l'issue de la projection, l'encours de la provision mathématique restante s'ajoute aux flux précédents. De même pour 85% des plus-values latentes. Les 15% restantes et la réserve de capitalisation s'ajoutent au résultat de VIF. Notons qu'en cas de moins-values latentes à l'issue de la projection, l'entièreté des moins-values sont déduites de la VIF.

3.2.4 Retour sur le TMG et la PB

Comme nous l'avons défini précédemment, le taux minimal garanti est un minimum de revaloriation annuelle des PM. L'assureur doit au moins verser le TMG aux assurés et est aussi dans l'obligation de redistribuer un pourcentage donné des produits financiers réalisés. Ces produits financiers offrent deux options à l'assureur : il peut soit revaloriser directement la provision mathématique, soit doter la provision pour participation aux excédents. Pour rester attractif auprès des assurés, l'assureur se fixe un taux cible, supérieur au TMG, qu'il doit atteindre. Le taux effectivement servi peut ensuite être revu à la hausse, en utilisant la PPE ou en cas de réalisation de plus-values sur des actifs non obligataires, ces derniers alimentant la RC. En d'autres termes, si un pourcentage donné des produits financiers sont plus élevés que la cible fixée, l'assureur peut servir le taux cible et alimenter la PPE avec la différence restante. Notons que cela s'apparente à un floor car un taux minimal est garanti, avec la possibilité d'obtenir un rendement supérieur dépendant du rendement de l'actif, lorsque celui-ci est supérieur au TMG.

En complément à cela, du fait d'un environnement de taux très adverse pour les assureurs Vie, où l'actif net réévalué baisse, un arrêté ministériel (datant de décembre 2019) autorisant les assureurs vie à intégrer une partie de la provision pour participation aux bénéfices (PPB) dans le calcul de leurs fonds propres de couverture afin d'améliorer leur solvabilité est entré en vigueur. Cet arrêté peut être appliqué si les conditions suivantes sont réunies :

- lorsque le solde du compte de résultat technique de l'assurance vie du dernier exercice comptable est négatif ;
- que le capital de solvabilité requis pour les organismes soumis à Solvabilité 2 ou l'exigence minimale de marge pour les organismes non soumis, n'est plus couvert.

Cela ne modifie pas les méthodes actuelles de calcul des BE, ni n'impacte le calcul du SCR et permet à l'assureur d'améliorer sa solvabilité (sous les conditions à remplir).

3.2.5 Fonctionnement de l'outil ALM

Cette section récapitule les différents choix de modélisation effectués pour l'actif et le passif et présente le portefeuille fictif étudié, sa composition, ses caractéristiques, ainsi que certains choix effectués dans un but de simplification des analyses futures.

3.2.5.1 Hypothèses

La valorisation du bilan a lieu dans la majorité des cas au 31/12/2020, il sera spécifié lorsque cela n'est pas le cas. Nous considérons uniquement l'économie EUR, avec 3000 simulations et un horizon de projection de 50 années.

Portefeuille fictif étudié

On suppose que la compagnie d'assurance étudiée ne commercialise que des contrats en euros et que son passif s'élève à 1Md d'euros d'encours. Ces contrats constituent un unique Model Point caractérisé par :

- un TMG net (après chargement sur encours) fixé à 0.34%
- un taux de chargement sur encours de 0.55%
- un taux de PB contractuel de 85% s'appliquant sur les résultats financiers de l'assureur
- un âge moyen au sein du groupe d'assurés pris égal à 60 ans, avec une ancienneté de 5 années
- une PM initiale de 943 millions d'euros
- une réserve de capitalisation initiale de 14 millions d'euros

Le portefeuille d'actifs de la compagnie fictive modélisée regroupe des obligations, des actions, des actifs immobiliers et de la trésorerie. Le tableau suivant récapitule les caractéristiques de chaque classe d'actif à la date initiale de valorisation :

	VNC en M d'euros	PMVL en t=0	VM en M d'euros
Trésorerie	30	0	30
Actions	110	0.15	127
Obligations	810	0.13	915
Immobilier	50	0.32	66
	Somme = 1000		Somme = 1138

TABLE 3.2 – Caractéristiques des classes d'actifs à la date initiale de valorisation

Le portefeuille obligataire considéré est composé de $N_0 = 15$ obligations, respectant les hypothèses émises dans la section **3.2.2.3 Obligations** et achetées sur une fenêtre glissante de 14 ans et de temps restant à maturité M de 15 ans au moment de l'achat. Une obligation achetée il y a 14 ans arrive donc à maturité dans un an, réciproquement, une obligation achetée il y a un an arrive à maturité dans 14 années. De plus, les obligations sont toutes achetées à une valeur égale à VNC_0 , ce qui permet de calculer la VNC initiale totale du portefeuille, comme le produit de VNC_0 et N_0 .

$$VNC_{port}(0) = VNC_0 * N_0$$

Le nominal associé à chaque obligation vaut ainsi :

$$\frac{VNC_{port}(0)}{VNC_0}$$

Une fois les valeurs nettes comptables et les valeurs de marché du portefeuille connues en $t = 0$, il s'agit de calculer les taux de coupon ainsi que les valeurs de marché de chaque obligation du portefeuille en $t = 0$. Une première idée serait d'utiliser le taux au pair, calculé à partir de la courbe des taux, comme taux de coupon. Cependant, les taux

ayant diminué depuis la date d'achat de la majorité des obligations, cette hypothèse serait trop forte et les taux de coupons obtenus seraient trop éloignés de ceux retrouvés chez les assureurs.

Nous utilisons donc le taux de plus ou moins-values latentes pour déterminer le taux de coupon. Notons r_{PMVL}^T le taux de PMVL d'une obligation de maturité T et de VNC initiale $VNC_{port}^T(0)$. Comme nous considérons des obligations au pair, la VNC d'une obligation de nominal 1 est également de valeur $VNC_{port}^T(0) = 1$ et est constante. Le calcul de la valeur de marché de l'obligation, que nous notons $VM^T(0)$, est alors égal à $1 + r_{PMVL}^T$. Le coupon c^T est ensuite calculé tel que l'on ait la relation suivante :

$$VM^T(0) = c^T \sum_{t+1}^T P(0, t) + P(0, T)$$

On en déduit c^T :

$$c^T = \frac{VM^T(0) - P(0, T)}{\sum_{t+1}^T P(0, t)}$$

Le calcul de c^T reposant sur le taux de PMVL, il reste à déterminer ce taux pour chacune des obligations du portefeuille.

En $t = 0$, supposons que les obligations étant au pair ont été acquises années auparavant. La valeur nette comptable d'une telle obligation, de maturité $T = M - n$ est alors égale à 1. Nous considérons alors le taux de coupon de cet obligation comme étant égal au taux swap de maturité 15 ans, ce à la date d'achat de l'obligation. Ce taux est noté $S_M(-n)$ et la valeur de marché est calculée comme suit :

$$S_M(-n) \sum_{t+1}^T P(0, t) + P(0, T)$$

Le taux de PMVL associé vaut alors :

$$\tilde{r}_{PMVL}^T = VM^T(0) = S_M(-n) \sum_{t+1}^T P(0, t) + P(0, T)$$

Notre hypothèse donne une répartition acceptable des taux de PMVL mais il peut subsister un souci de cohérence avec le taux de PMVL liée à la poche obligataire du portefeuille. Pour résoudre cela nous effectuons l'ajustement suivant afin de retrouver un taux de PMVL obligataire aux alentours de 13% :

$$r_{PMVL}^T = \alpha \tilde{r}_{PMVL}^T$$

Le taux de PMVL s'exprime donc comme suit :

$$\begin{aligned} r_{PMVL} &= \frac{VM_{port}(0)}{VNC_{port}(0)} - 1 \\ &= \frac{\sum_{T=1}^M VM_{port}^T(0)}{MxVNC_{port}^T(0)} - 1 \\ &= \frac{\sum_{T=1}^M VNC_0(r_{PMVL}^T + 1)}{MxVNC_{port}^T(0)} - 1 \\ &= \frac{\sum_{T=1}^M r_{PMVL}^T}{M} \\ &= \alpha \frac{\sum_{T=1}^M \tilde{r}_{PMVL}^T}{M} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi la valeur du paramètre α . Son estimation permet pour chaque obligation de calculer son taux de PMVL, puis son taux de coupon, en vertu la relation décrite précédemment. Les caractéristiques de la poche obligataire ainsi obtenue sont présentées dans le tableau suivant :

Achat	Temps restant à maturité	Taux de PMVL en %	Coupon en %
31/12/2005	1	4.37	4.02
31/12/2006	2	9.82	4.52
31/12/2007	3	12.1	3.96
31/12/2008	4	16.32	4.48
31/12/2009	5	18.82	4.63
31/12/2010	6	17.11	4.51
31/12/2011	7	15.51	4.33
31/12/2012	8	21.64	3.64
31/12/2013	9	12.1	1.98
31/12/2014	10	15.39	2.20
31/12/2015	11	12.69	1.65
31/12/2015	12	15.78	2.49
31/12/2017	13	15.98	2.52
31/12/2018	14	7.36	1.47
31/12/2019	15	0.00	1.18

TABLE 3.3 – Taux de PMVL et coupon de la poche obligataire

Allocation cible

Rappelons que l'allocation cible, établie en $t = 0$ est supposée constante au cours de la projection, c'est à dire que la proportion des actifs (calculée en valeur de marché) est constante au cours du temps. Pour respecter cette contrainte il faut alors effectuer divers investissements et ventes, pour s'assurer d'avoir les proportions fixées initialement dans le modèle ALM. Ce rebalancement est effectué en début de période. L'allocation cible des actifs est récapitulée dans le tableau suivant :

Trésorerie	0.03
Actions	0.11
Obligations	0.80
Immobilier	0.06

TABLE 3.4 – allocation cible des actifs

Table de mortalité

On considère comme déterministe la mortalité des assurés. Elle suit donc une loi établie dans la table règlementaire TH 00-02, utilisée pour les contrats d'assurance Vie. Notons que les prestations liées à un décès sont versées avant l'étape de revalorisation des contrats.

Prise en compte des rachats

L'option de rachat du contrat fait partie des options proposées dans un contrat d'assurance Vie. Nous proposons de détailler plus cette option et de justifier notre choix de ne modéliser uniquement les rachats structurels.

Les rachats structurels sont habituellement modélisés à l'aide de données historiques propres à l'entreprise d'assurance, ce en fonction du contrat, de son ancienneté, de l'âge de l'assuré, etc.... Cela permet de prendre en compte le comportement moyen des assurés et de s'attendre à un nombre de rachats sur la base de l'expérience passée. Les rachats dynamiques ou conjoncturels sont quant à eux plus difficiles à modéliser, majoritairement du fait du faible nombre de données à disposition. Pour leur modélisation l'ACPR recommande d'exprimer le taux de rachats dynamiques en fonction de l'écart entre le taux attendu (taux référence du marché) et le taux effectivement servi aux assurés. Ceci sous la forme suivante :

$$RC = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } TS - TA < \alpha \\ RC_{max} \frac{TS - TA - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq TS - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq TS - TA < \gamma \\ RC_{min} \frac{TS - TA - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq TS - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } TS - TA \geq \delta \end{cases}$$

α étant un seuil, en deçà duquel les rachats sont constants et égaux à la valeur maximale. Les paramètres β et γ représentent des seuils d'indifférence, respectivement à la baisse et à la hausse du taux servi. Il n'y a pas de rachats sur l'écart observé est entre ces valeurs. δ donne le seuil au-delà duquel les rachats sont à leur minimum.

Cependant par souci de simplicité et, selon des dires d'experts, au vu de la faible influence globale des rachats conjoncturels nous ne modélisons que les rachats structurels dans le cadre de ce mémoire. Ils ont été fixés à dire d'experts à un taux constant de 5.5%.

3.2.5.2 Mise en oeuvre

Une table de scénario économique, issue du GSE, est fournie en entrée du modèle ALM, qui effectue six étapes à chaque pas de projection annuel, pour vieillir l'actif et le passif au bilan de l'entreprise d'assurance :

- **Étape 1** : Vieillessement de l'actif
- **Étape 2** : Réallocation des actifs
- **Étape 3** : Vieillessement du passif (mortalité)
- **Étape 4** : Calcul du taux servi et revalorisation des PM
- **Étape 5** : Vieillessement du passif (rachat et maturités atteintes)
- **Étape 6** : Calcul des bilans comptables et économiques.

Détaillons rapidement l'organisation des actifs en couches :

Pour chaque classe d'actif, on enregistre sous forme de couches les VC et VM par unité de nominal, ainsi que le nominal. La trésorerie ne nécessite qu'une seule couche qui suffit à stocker l'évolution de ces valeurs au cours du temps. En effet, la VNC et la VM sont constantes au cours de la projection.

Notons H l'horizon de projection. Pour l'indice action et l'indice immobilier il faut $H + 1$ couches pour stocker l'évolution des valeurs. En effet, des achats et des ventes sont possibles chaque année, il faut donc conserver leur valeur de marché et leur valeur d'achat qui peut différer d'une couche à l'autre. Pour les obligations il est aussi possible d'acheter et de vendre à chaque pas de projection. On crée donc une ligne chaque année, contenant initialement une VM et une VMC de 1, et la maturité entrée en inupt du modèle ALM. Le coupon est alors calculé suivant le calcul de la section **3.2.5.1 Hypothèses**. Il faut alors $H + N_0$ le nombre d'obligations initial pour les actifs de la

poche obligataire.

Passons désormais aux étapes elles mêmes de l'algorithme ALM :

Vieillessement de l'actif

Le modèle ALM début chaque pas de projection par le vieillissement des stocks d'actifs. Comme nous l'avons vu dans les sections **3.2.2.2 Trésorerie** et **3.2.2.4 Indice action**, la trésorerie est capitalisée au taux sans risque r_t , alors que les valeurs de marché des indices actions, immobilier et des obligations évoluent en fonction de l'environnement économique entre les années $t - 1$ et t .

Une fois l'étape de vieillissement des actifs terminée, on peut regrouper les produits financiers réalisés et 4 types :

- les dividendes générés par les actions
- les coupons des actifs de la poche obligataire
- les loyers associés aux actifs immobiliers
- les intérêts générés avec la capitalisation de la trésorerie

Chaque année de projection, les VM de tous les actifs (sauf la trésorerie) sont recalculées et mises à jour. Le temps restant à maturité des obligations est diminué d'une année et le nominal des obligations arrivées à maturité s'ajoute à la trésorerie.

Réallocation de l'actif

A chaque début de période, le modèle ALM procède à une réallocation ou rebalancement des actifs. Ce rebalancement permet de respecter l'allocation cible définie initialement en entrée du modèle. Les actifs étant organisés en couche, comme expliqué dans le début de cette section, on crée une nouvelle couche pour chaque classe d'actif et on détermine les montants à investir dans les couches créées ainsi que les montants à désinvestir des couches plus anciennes. Le désinvestissement suit la règle First In First Out : les actifs acquis en premier sont les premiers désinvestis. Les flux générés par les différents actifs du portefeuille vont de paire avec la réalisation de PMVL, qui dotent la réserve de capitalisation en cas de cession d'obligation ou qui sont enregistrées en tant que produits financiers pour les cessions liées à l'immobilier ou aux actions. Si la réserve de capitalisation venait à être vidée ou bien dans le cas de moins-values réalisées sur la poche obligataire, les moins-values sont déduites des résultats financiers de l'assureur.

Notons :

- $VM_{actif}(t)$, la valeur de marché de l'actif au temps t
- $VM_{port}(t)$, la valeur de marché du portefeuille global
- $VM_{cible}(t) = \alpha VM_{port}(t)$, la valeur de marché cible, i.e valeur de marché à atteindre
- N_{actif} le nominal de l'actif.

On peut distinguer deux cas :

- $VM_{actif}(t) \geq VM_{cible}(t)$: l'actif doit alors être vendu pour $N_{actif} - \frac{N_{actif} VM_{cible}(t)}{VM_{actif}(t)}$
- inversement, l'actif doit être acheté pour $\frac{N_{actif} VM_{cible}(t)}{VM_{actif}(t)} - N_{actif}$

A l'issue de cette étape de réallocation des actifs, les produits financiers sont repris sur la trésorerie.

Vieillessement du Passif

Le vieillissement du passif regroupe plusieurs facteurs : les rachats, l'arrivée à maturité des contrats et la mortalité. A chaque pas de temps le modèle prend en compte la mortalité, modélisée dans la section **3.2.5.1 Prise en compte de la mortalité**, puis les rachats structurels avant de procéder à la revalorisation. Une fois l'étape de revalorisation des provisions mathématiques (détaillée juste après) terminée, les contrats sont vieillis d'un an : l'âge des assurés ainsi que l'ancienneté des contrats augmente d'un an et le temps restant à maturité diminue d'une année. Les rachats structurels se basant sur l'ancienneté des contrats, leur vieillissement est aussi pris en compte. Pour rappel, les rachats structurels sont fixés à 5.5%. Enfin, pour les contrats à maturité, l'épargne accumulée est reversée aux assurés concernés, ce qui entraîne une diminution des PM, répercutée sur la trésorerie.

Revalorisation des PM

Cette section reprend les notions de TMG, taux de PB et de taux cible. Le lecteur pourra se référer à la section **3.2.1 Présentation** pour un rappel sur la définition de ces termes.

Comme nous considérons des fonds euros, l'assureur garanti le montant de l'épargne des assurés placée sur le fond. Ainsi, sa valeur ne peut pas diminuer et elle est revalorisée annuellement en fonction du TMG et de la part bénéfices de l'assureur sur l'année qui doivent être reversés. Cette part reversée des bénéfices réalisés avec l'épargne des assurés est fixée à un minimum de 85% par la réglementation. Enfin, l'assureur prélève chaque année un pourcentage donné de l'encours des contrats, pour prendre en charge les frais et se donner une marge financière. Ce pourcentage prélevé est appelé taux de chargement, il vient diminuer le taux de revalorisation de la PM et est fixé lors de l'établissement du contrat.

Nous proposons de formaliser l'étape de revalorisation ci après :

$$\begin{aligned} \text{Revalorisation des PM} &= \text{PM avant prestations} \times \max(TMG, \beta r^{PB} r_a) + PPE(8\text{ans}) \\ \text{--- } \beta &= \frac{PPE+RC+PM}{PM} \end{aligned}$$

Les termes PPE, PM et RC représentent les provisions avant le versement des prestations et r_a désigne le taux de rendement de l'actif, calculé comme le ratio des produits financiers générés par l'actif sur la valeur comptable de l'actif.

On peut ainsi distinguer trois termes dans la revalorisation des PM. Le premier terme $\text{PM avant prestations} \times TMG$ représente simplement la revalorisation minimale. Le deuxième facteur multiplicatif $\beta \times r^{PB} \times r_a$ correspond à la participations aux bénéfices et le terme $PPE(8\text{ans})$ correspond à la part dotée en PPE 8 années auparavant. Cette valeur de 8 ans vient du fait que l'assureur peut, par la réglementation, observer un délai maximal de 8 ans entre la réalisation de bénéfices et le reversement d'une partie de ces bénéfices aux assurés. Cela permet une attribution différée de la PB, via une mise en réserve jusqu'à 8 ans. Les autres sorties de PPE servent à atteindre un taux cible supérieur au taux minimal garanti et sont retranscrites dans les flux de trésorerie. Inversement, une revalorisation garantie supérieure à celle donnée par le TMG donne lieu à une augmentation de trésorerie. Notons que l'assureur peut faire appel à un mécanisme d'extériorisation des plus-values latentes sur l'action et l'immobilier, dans l'optique de répondre à ses engagements contractuels et réglementaires. Nous précisons ce mécanisme d'extériorisation ci après.

Dans le cadre de notre mémoire, l'extériorisation est effectuée par VC décroissante des couches. Sur chaque couche évaluée, lorsque la VC est inférieure à la VM, une partie ou la totalité de cette couche est transférée vers la dernière couche dont la VC est égale à la VM (toujours dans l'ordre des couches classées selon une VC décroissante). Notons que l'extériorisation des plus-values latentes est compensée par une diminution de la trésorerie.

Le mécanisme de revalorisation des PM est résumé dans la figure suivante.

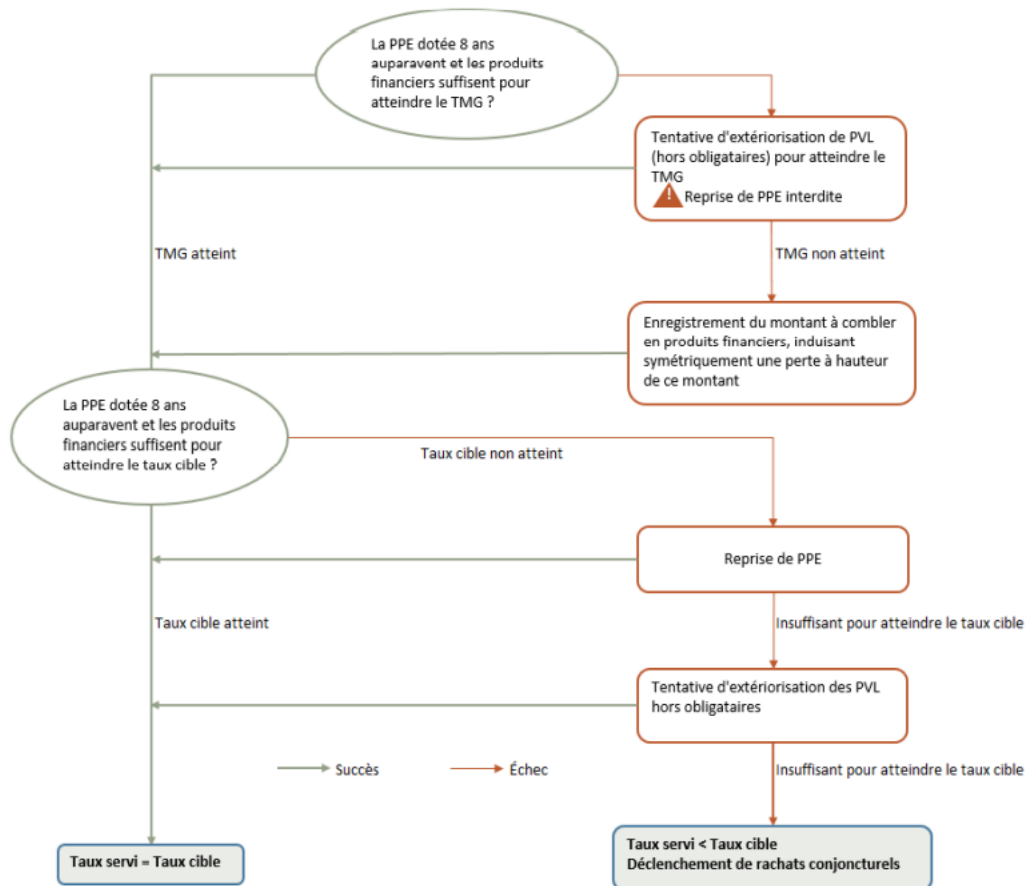


FIGURE 3.1 – Etapes de revalorisation des PM

On supposera tout au long de notre étude que l'assureur verse uniquement la revalorisation minimale dictée par le taux minimal garanti et au delà, il verse 85% des bénéfices réalisés à l'aide de l'épargne des assurés. Rappelons que les rachats dynamiques ne sont pas modélisés. De ce fait, l'assureur n'a pas à chercher à atteindre un taux cible afin de les éviter.

3.2.6 Résultats du modèle ALM

Nous présentons dans cette section les résultats de l'algorithme ALM pour une valorisation au 31/12/2020 pour le modèle de taux nominaux DDLMM et le modèle action BSDV, avec 3000 simulations et un horizon de projection de 40 ans.

Récapitulons d'abord la composition du portefeuille étudié et l'allocation cible de l'actif.

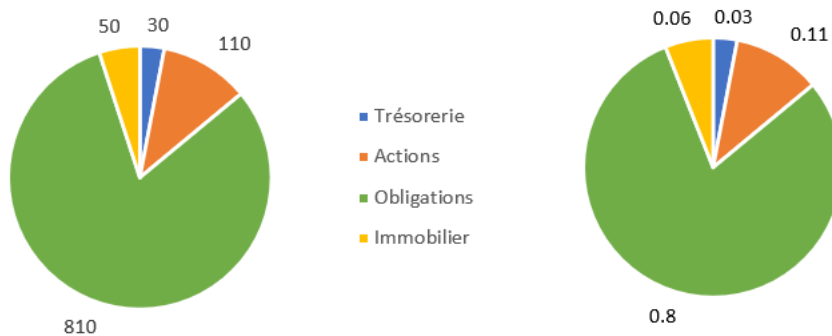


FIGURE 3.2 – Répartition des VNC des actifs et allocation cible

Au 31/12/2020 l'évolution des VC et VM globales (regroupant toutes les classes d'actifs) et l'écoulement de la PM sont les suivants :

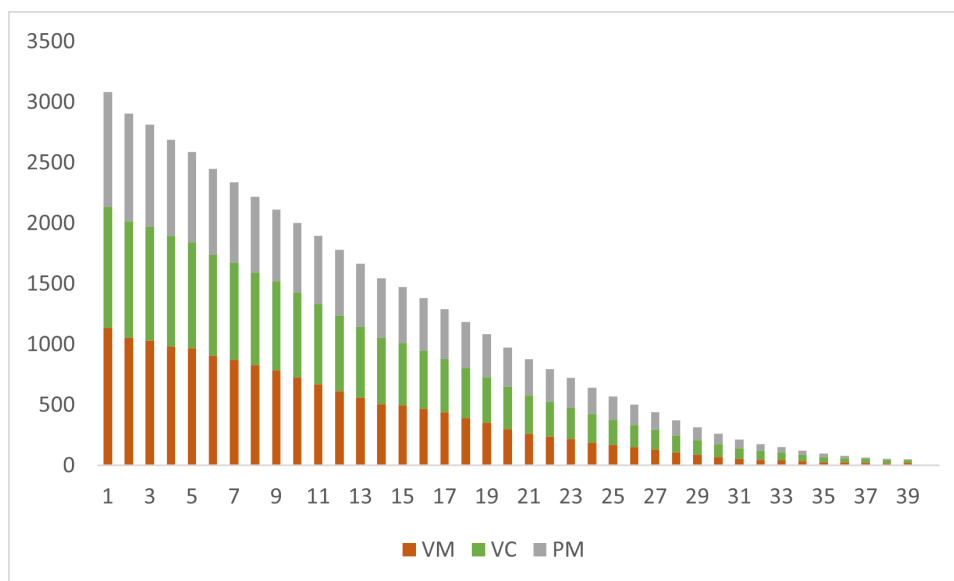


FIGURE 3.3 – Evolution des VM, VC et de la PM

Il est possible d'observer une diminution progressive de l'encours au passif. Ceci est dû aux rachats structurels annuels fixés à 5.5% ainsi qu'au décès d'assurés. L'étape de revalorisation des PM ne permet pas de compenser ces sorties car le taux médian observé sur l'ensemble de la projection est en dessous de 3%. Malgré un stock de plus-values sur les premières années de projection, l'actif est rapidement en situation de moins-value, comme cela est visible sur la figure suivante.

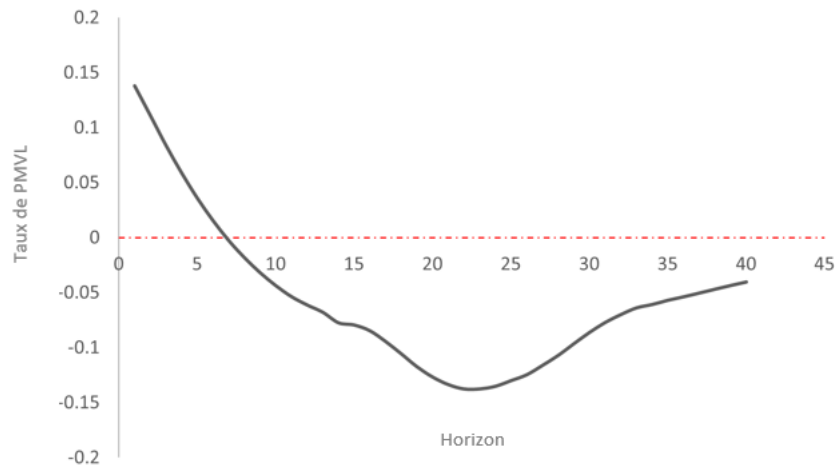


FIGURE 3.4 – Evolution du taux de PMVL

De plus, on peut également remarquer que le BE est supérieur aux PM, car il intègre le coût des options et garanties associées aux contrats d'épargne en euros détenus par les assurés, comme en atteste la table suivante :

VIF	BE	Duration du passif
64,8	1073	13,8

Finalement, les figures suivantes donnent l'évolution de plusieurs quantités importantes, dont le taux de rendement de l'actif, qui régit en grande partie le taux servi aux assurés. On observe logiquement une évolution similaire des taux de rendement de l'actif et du taux servi, même si le taux servi ne peut être plus faible que le TMG. Des flux de passifs et de flux de résultats sont aussi tracés. Les rachats étant fixés à un taux structurel de 5,5% le taux de chute est principalement déterminé par l'arrivée à maturité des contrats et par la mortalité sur certaines années.

Enfin l'histogramme de la valeur actuelle nette (VAN) est tracé, il représente somme des cash-flows actualisés de résultats. Les flux de passif et de résultat, sont globalement à la baisse, ce qui s'explique par un écoulement de la PM au cours de la projection. En effet, suite aux rachats, à la mortalité croissante avec les années de projection et à l'arrivée à maturité de contrats, la PM se vide progressivement. Notons finalement que la distribution des VAN de marges futures est très asymétrique avec une queue de distribution très épaisse à gauche, vers les valeurs extrêmes négatives. Cette asymétrie traduit le fait que les valeurs négatives extrêmes de résultats et de taux de rendement de l'actif sont plus impactantes que des valeurs positives car l'assureur doit atteindre un taux largement supérieur au taux de rendement de l'actif sur ces trajectoires très adverses, ce qui affecte négativement ses résultats.

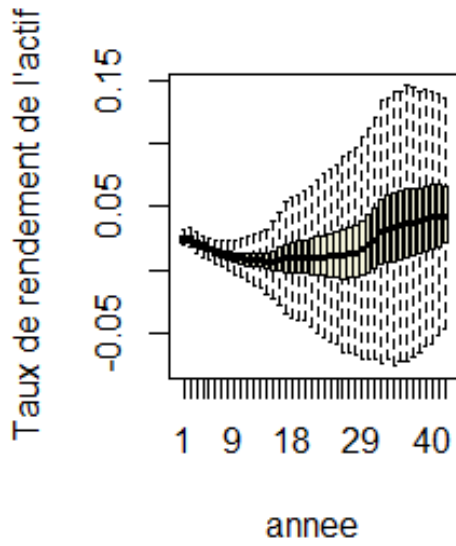


FIGURE 3.5 – Boxplot du taux de rendement de l'actif

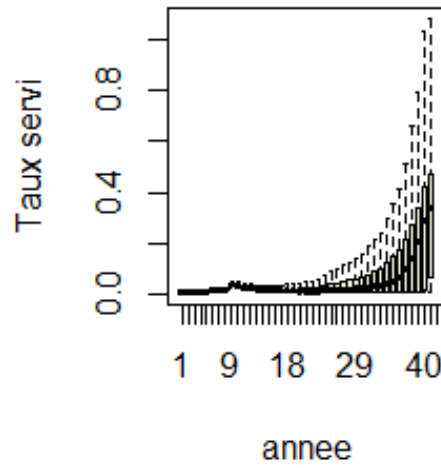


FIGURE 3.6 – Boxplot du taux servi

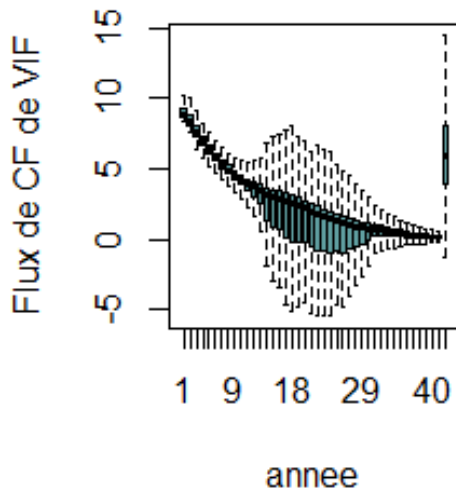


FIGURE 3.7 – Cash flows actualisés de résultats futurs

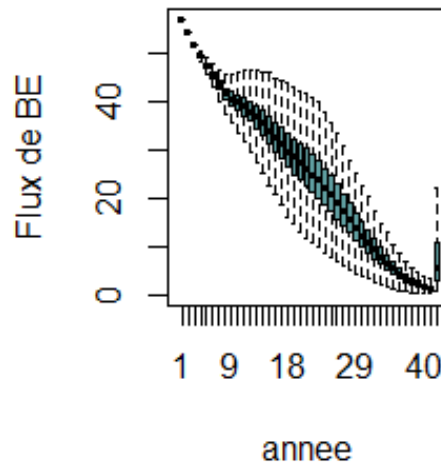


FIGURE 3.8 – Cash flows actualisés de passif

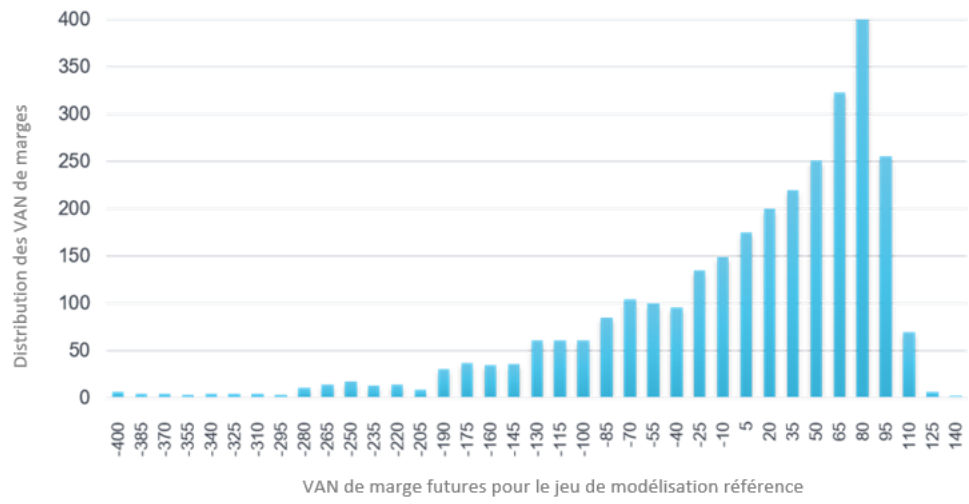


FIGURE 3.9 – VAN de marge futures

Rentabilité d'un assureur vie

Il s'agit dans cette section de définir l'indicateur de rentabilité utilisé dans notre étude et d'observer les résultats des valorisations ALM obtenus, pour ainsi évaluer quantitativement l'impact des choix de modélisation sur la VIF et le Best Estimate, à partir des tables de scénarios économiques générées par notre GSE. Il est aussi intéressant d'évaluer l'impact de certains paramètres embarqués, propres aux modèles de taux DDLMM et DDSVLMM. En effet, ce sont notamment des paramètres dont la valeur peut varier fortement entre les différents assureurs.

L'étude des résultats se penchera sur plusieurs questions : quel est l'impact des données utilisées sur l'indicateur de rentabilité et sur les indicateurs Solvabilité II ? Quel est l'impact du calibrage ? Quels liens peuvent être faits entre les résultats obtenus et les distributions générées par chaque modèle ?

La VIF sera l'indicateur Solvabilité II de référence pour l'analyse des résultats du fait qu'il s'agit d'un indicateur quantitatif, important dans la valorisation de produits d'assurance vie et facilement interprétable.

Comme nous l'avons décrit dans le début de ce mémoire, nous avons retenus trois modèles de taux, de niveaux de complexité différents, comptant un modèle de taux courts à 2 facteurs ($G2++$), et deux modèles de marché à 2 deux facteurs (DDLMM et DDSVLMM). Nous rappelons les caractéristiques notables de chaque modèle, afin d'avoir un premier aperçu de possibles explications aux impacts sur la VIF et le Best Estimate.

Le modèle DDLMM :

Il s'agit d'une extension du modèle LMM, avec l'ajout d'un paramètre de shift permettant la génération de taux négatifs. Le calibrage est réalisé sur les swaptions et est basé sur les taux forward, il permet une réplication satisfaisante des prix ou volatilités de swaption. Plus complexe à calibrer que le $G2++$, dépendant de 6 paramètres il permet de reproduire partiellement le skew de volatilité. On rappelle que le skew de volatilité décrit l'observation que pour un même sous-jacent et une même maturité, toutes les options n'ont pas la même volatilité implicite sur le marché. Les modèles de marché constituent la famille de modèle la plus utilisée par les compagnies d'assurance, comme nous l'avons observé avec un benchmark auprès d'une vingtaine d'assureurs français.

Le modèle DDSVLMM :

Les taux sont obtenus par un calibrage des paramètres de la dynamique des taux forward et non plus à partir d'une modélisation des taux courts comme le $G2++$ et permet une bonne réplication des prix ou volatilités de swaptions. La complexité de calibrage et de simulation sont les facteurs limitants de ce modèle, qui introduit un processus de volatilité stochastique par rapport au DDLMM. La discrétisation du processus CIR de volatilité peut s'avérer délicate suivant les paramètres calibrés mais le DDSVLMM permet la réplication du smile et du skew de volatilité. On rappelle que le smile de volatilité désigne une augmentation de la volatilité implicite d'une option avec l'écart au prix d'exercice du sous-jacent,

Le modèle $G2++$:

Le calibrage du $G2++$ dépend de 5 paramètres, et le modèle permet de répliquer parfaitement la structure par terme des taux initiale. De plus, il est possible de générer des taux négatifs, caractéristique indispensable dans le

contexte actuel. Enfin on notera que le G2++ est un modèle gaussien, pour lequel il est possible d'exprimer la dynamique du taux forward annuel shifté de 100%.

4.1 Définition d'un indicateur de rentabilité

Avant de définir un indicateur, il est nécessaire d'établir une définition au sens large de la rentabilité. Nous proposerons ensuite cette définition au domaine de l'assurance Vie.

Nous désignons par rentabilité d'un capital, sa capacité à produire des revenus. Il faut ainsi être en mesure de comparer le profit réalisé et les fonds investis pour obtenir un tel profit. Nous distinguerons deux types de rentabilité :

La rentabilité comptable est définie comme le rapport entre le gain effectué (appelé résultat) et les capitaux investis, qui peuvent comprendre les fonds issus de l'entreprise et ceux empruntés.

$$\text{Rentabilité Comptable} = \frac{\text{Résultats}}{\text{Capitaux investis}}$$

La rentabilité comptable permet d'évaluer le capital dégagé par l'investissement de capitaux. Son calcul est nécessaire à l'entreprise d'assurance, pour déterminer si les attentes des actionnaires sont atteintes et à quel point l'entreprise dégage de la rentabilité et crée de la valeur. Dans un premier temps l'entreprise cherche à connaître la rentabilité de l'actif, qui correspond à la rentabilité comptable. Dans un deuxième temps elle s'intéresse à la rentabilité des capitaux propres.

Nous désignons par rentabilité financière la rentabilité des capitaux propres, qui se calcule en mesurant le rapport entre le résultat net et les capitaux propres (ressources internes à l'entreprise)

$$\text{Rentabilité financière} = \frac{\text{Résultats nets}}{\text{Capitaux propres}}$$

La rentabilité financière sépare ainsi la rentabilité comptable et un effet de levier. L'entreprise peut s'endetter ce qui fera gonfler sa rentabilité financière mais cela inclut un risque supérieur du point de vue des actionnaires qui doit être pris en compte dans leur exigence de rentabilité.

Dans le domaine de l'assurance Vie, les produits sont à long terme. Le bilan et le compte de résultat ne donnent alors qu'une vision partielle de son enrichissement. Il s'agit d'adopter une vision sur plusieurs exercices, qui tient compte des résultats futurs et des contrats déjà en cours pour être en mesure d'obtenir une vision précise de la rentabilité de l'entreprise d'assurance. La rentabilité comptable n'est pas suffisante pour capturer la rentabilité de l'entreprise car elle ne donne une vision qu'à un seul instant, avec des conditions données (comportement des clients, du marché, etc.). Il faut ainsi projeter le compte de résultat, en faisant des hypothèses cohérentes avec le marché pour les années futures. Ceci permet d'estimer la rentabilité attendue, sur un portefeuille de contrats comme dans notre cadre.

La rentabilité attendue permet également de définir des rendements à atteindre et un niveau de participation aux bénéfices dépassant le seuil réglementaire à adopter, sans menacer la rentabilité. L'établissement des hypothèses de projection est essentiel pour la rentabilité finale mesurée, ces hypothèses sont détaillées dans la partie **3 Modèle ALM**.

4.1.1 Construction de l'indicateur

Pour définir un indicateur propre à notre étude, il est nécessaire de faire un état des lieux des différents indicateurs de rentabilité utilisés dans le domaine de l'assurance Vie.

La première mesure de rentabilité est la Value of Inforce (VIF). Sa valeur permet de mesurer le gain futur revenant à l'assureur, généré par les contrats du portefeuille. C'est donc un premier indicateur pertinent dans notre mémoire et nous le détaillons plus ci après. La VIF représente la valeur actuelle des profits futurs net d'imposition (Present

Value of Future Profits ou PFVP) à laquelle on retire le coût d’immobilisation du capital (CoC).

$$VIF = PVFP - CoC$$

Ainsi, l’établissement de la VIF est basé sur une projection de profits futurs et ce à partir de la situation actuelle du portefeuille. Il faut donc projeter des comptes de résultats sur l’ensemble de la durée d’activité. Cette mesure est particulièrement intéressante dans notre cas car elle donne le gain réel effectué (selon des hypothèses réalistes) en tenant compte des frais liées à l’activité de l’entreprise d’assurance. Une valeur de VIF positive permet d’affirmer que le portefeuille crée un gain de valeur et est profitable aux actionnaires.

La PVFP représente la valeur actuelle des futurs profits probables (nets d’imposition), liés au portefeuille considéré. Elle permet d’évaluer de manière prospective la rentabilité des contrats dans la durée et dépasse ainsi une vision à un seul exercice, proposée par un bilan comptable et financier sur une année donnée.

Le coût d’immobilisation du capital, ou CoC, donne le coût d’immobilisation de l’exigence réglementaire en capital imposée par Solvabilité II. La norme imposant aux acteurs d’immobiliser des fonds propres, il est raisonnable de prendre en compte le coût associé dans le calcul de la rentabilité. Il s’agit en effet d’un manque à gagner car ce capital est revalorisé uniquement avec le taux sans risque, plus faible que le taux de revalorisation souhaité par les actionnaires. Dans le calcul de la VIF, ce coût est retranché de la PVFP.

Le deuxième indicateur, courant en assurance est la New Business Value (NBV). Il s’agit d’une mesure de rentabilité en regard aux nouvelles affaires, prenant en compte des flux issus de nouveaux contrats à la suite d’un effort commercial, qui tient compte de la VIF liée aux nouveaux contrats acquis par l’entreprise. La NBV mesure ainsi les profits futurs générés sur l’année par les nouveaux contrats. Son calcul est similaire à la VIF (pour les nouveaux contrats) et dégage une rentabilité prospective importante dans le domaine de l’assurance Vie. Nous étudions cependant un portefeuille déjà constitué et en run-off et sommes donc concernés par la rentabilité des contrats en cours et non des nouvelles affaires.

Le dernier indicateur de rentabilité que nous avons retenu lors de l’état des lieux effectué est le Return On Equity (ROE), qui permet d’évaluer la rentabilité de l’investissement effectué par l’actionnaire. Cet indicateur est donné par le rapport des bénéfices effectués et des capitaux propres de l’entreprise. Le ROE représente le rendement dégagé pour une unité de capitaux propres investis et se calcule en divisant le résultat net sur une année par les capitaux propres investis par les actionnaires. Il est alors aisément obtenu et interprétable. Il est cependant à noter que cet indicateur ne considère la rentabilité que sur un exercice, ce qui constitue une courte période au vu de la durée des contrats d’assurance et ne permet donc pas d’évaluer la rentabilité d’un portefeuille dans sa globalité.

A ce titre, nous définissons un indicateur se basant sur des grandeurs facilement interprétables et qui correspondent aux exigences de l’assurance Vie (rentabilité prospective se basant sur plusieurs exercices) :

- La VIF, détaillée ci haut ;
- La Provision Mathématique (PM) détaillée dans la section **3.2.1 Présentation**.

Nous avons alors :

$$\text{Indicateur} = \frac{VIF}{PM}$$

La VIF fait le lien avec la rentabilité du portefeuille de contrats comme nous l’avons détaillé au dessus et la PM représente la plus grande partie des provisions techniques et il s’agit de flux à payer probables, ce qui peut s’assimiler à un besoin en fond propre simplifié. Cette grandeur est d’une part plus simple à obtenir qu’un SCR, car elle est aisément modélisable au sein d’un modèle ALM et ne nécessite pas plusieurs sensibilités pour être définie et permet d’autre part de faire un lien direct avec les capitaux propres de l’entreprise définis auparavant. De plus, l’utilisation de la PM plutôt que d’un SCR permet de s’affranchir des questions liées à la volatilité du SCR. L’évolution de la PM au cours du temps est visualisé dans la section **3.2.6 Résultats du modèle ALM**. L’indicateur ainsi défini donne une vision prospective de la rentabilité, basée sur des résultats futurs et permet de capturer la rentabilité du portefeuille constitué pour ce mémoire pour toute sa durée de vie. Notons que cet indicateur est défini en base

100 à partir de l'ensemble de paramètres suivants et les variations de l'indicateur seront en référence à ce jeu de paramétrage.

Facteur de risque	Modèle	Date de valorisation	Simulations	Horizon	TMG net
Taux nominaux	DDLMM (Shift 10%)	31/12/2020	3000	40 ans	0,34%
Indice action	BSDV (dividendes CIR)				
Indice immobilier	BSCV (volatilité 10%)				
Taux réels	GLMM				

4.1.2 Backtesting de l'indicateur

Afin de pouvoir vérifier la cohérence des valeurs de l'indicateur obtenues et de son évolution, une recherche des données publiques exploitables a été effectuée. Parmi elles, les Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière (SFCR) publiés annuellement par les entreprises ont été identifiés. Depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité II au 1er janvier 2016, et plus spécifiquement du Pilier 3, ces rapports sont produits par les différents assureurs de place dans le cadre des exigences de reporting exigées par le régulateur. Le Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière (SFCR) des entreprises d'assurance, rend compte de l'exercice écoulé sur l'année donnée.

Le SFCR présente l'entreprise d'assurance ainsi que son activité, en donnant une vision d'ensemble dans le cadre de Solvabilité II, et en apportant des explications sur sa performance et sur son système de gouvernance. L'intérêt principal du SFCR est qu'il permet d'apprécier la solvabilité de l'entreprise d'assurance, des méthodes utilisées à des fins de valorisation et le système de gestion des fonds propres de l'entreprise. Le SFCR détaille également les écarts notables observés en comparaison à l'exercice précédent.

Dans le cadre du backtesting de l'indicateur, nous nous intéressons plus particulièrement aux résultats des branches épargnes sur une dizaine d'assureurs vie. Comme notre portefeuille modélise celui d'un assureur épargne, il semble cohérent de se limiter à cette branche en particulier. Les valeurs de l'indicateur et les données extraites des SFCR sont présentées dans la section **4.2.3 Backtesting de l'indicateur** à la suite de l'analyse de l'évolution temporelle de l'indicateur.

4.2 Etude historique de l'indicateur

Cette section s'intéresse à l'évolution historique de la valeur de l'indicateur de rentabilité défini précédemment. Nous y étudierons les raisons des variations obtenues en analysant les données de marché utilisées en entrée et les valeurs Monte-Carlo générées par les différents modèles utilisés. Entre fin 2019 et fin 2020, l'effet de la crise sanitaire est très nettement visible sur les marchés financiers, sur le marché de taux et marché action notamment. Nous détaillons ces effets et leur impact sur la rentabilité du portefeuille considéré.

4.2.1 Valeurs obtenues

Le tableau suivant récapitule les valeurs obtenues :

Date de valorisation	Valeur de l'indicateur	Variation (par rapport à l'année précédente)
31/12/2017	184	Début
31/12/2018	192	+4,3%
31/12/2019	144	-25%
31/12/2020	100	-30,5%

TABLE 4.1 – Evolution annuelle de l'indicateur

Entre le 31/12/19 et le 31/12/20, on observe une baisse de 44% de la valeur de l'indicateur, ce qui constitue une baisse significative. Une analyse détaillée de l'évolution de la valeur de l'indicateur est effectuée entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020 dans la suite de cette section. Une étude similaire entre les autres dates peut être effectuée pour décomposer l'évolution de l'indicateur depuis le 31/12/2017. Au niveau des taux fournis par l'EIOPA, la différence est d'environ 1% sur toute la courbe. A horizon 20 ans les taux sont négatifs au 31/12/2020, taux très adverses pour la rentabilité.

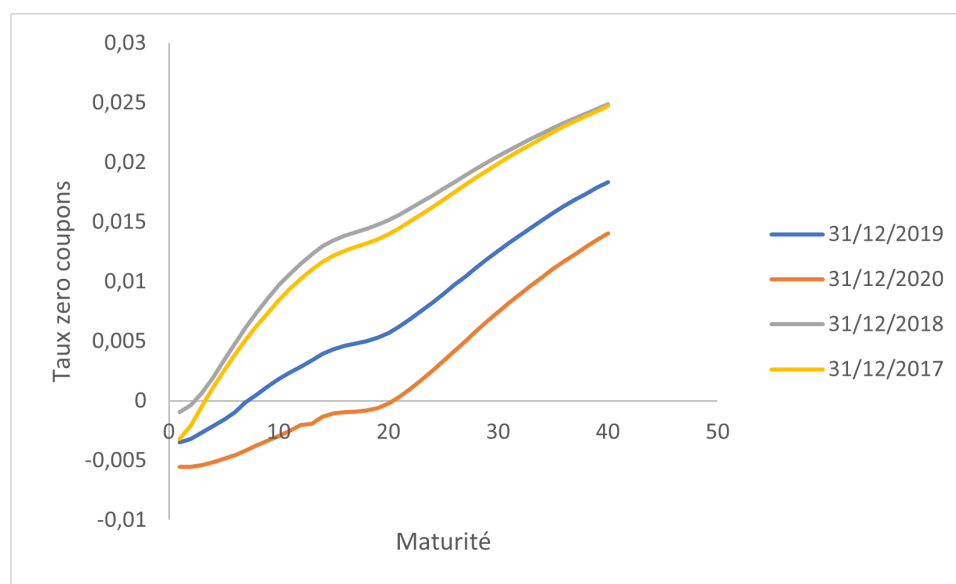


FIGURE 4.1 – Courbes EIOPA

Cette différence se retrouve au niveau des taux générés par le DDLMM, où l'on observe des taux moyens plus faibles pour 2020. Cet effet peut se traduire graphiquement à l'aide d'enveloppes quantiles représentant la distribution des taux générés, où les taux générés sont plus élevés en 2019.

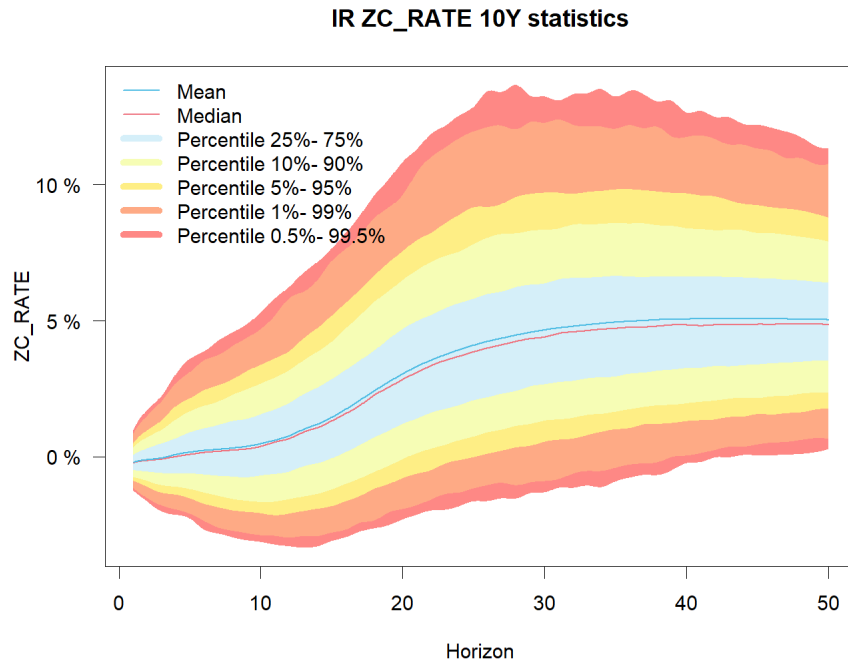


FIGURE 4.2 – Enveloppe quantile pour le taux ZC 10 ans du DDLMM au 31/12/2020

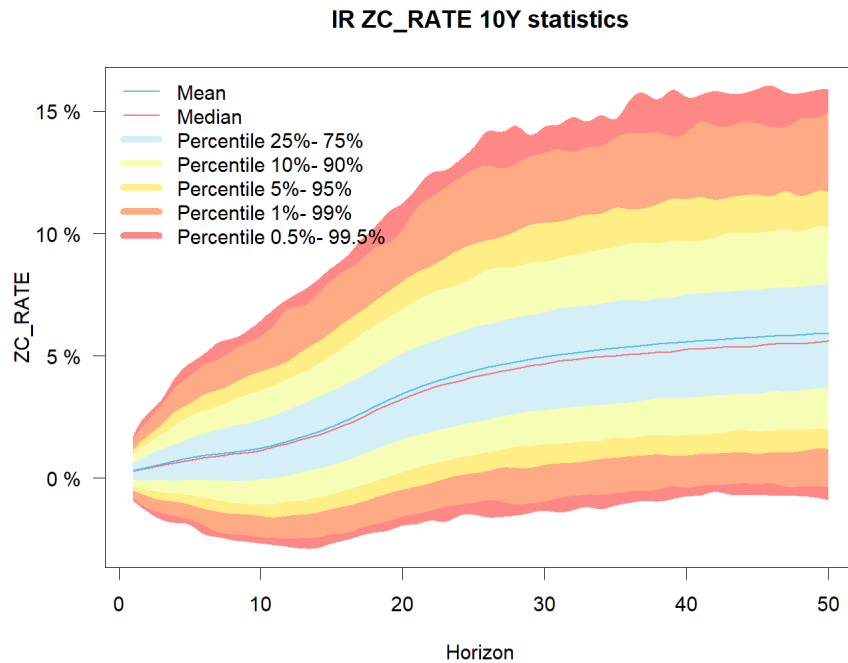


FIGURE 4.3 – Enveloppe quantile pour le taux ZC 10 ans du DDLMM au 31/12/2019

Le taux nominal moyen, généré sur les trajectoires Monte-Carlo, de maturité 10 ans confirme cette impression, avec un écart moyen de l'ordre de 50bp.

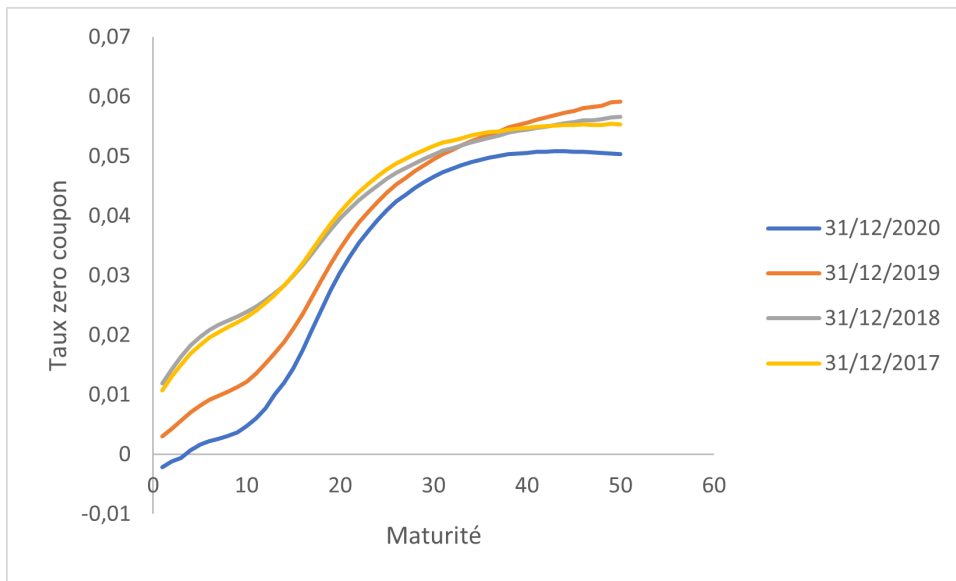


FIGURE 4.4 – Taux zéro coupon moyens de maturité 10 ans

Une grande partie de l'impact réside ainsi dans les taux générés et particulièrement dans les taux faibles. La distribution des valeurs actuelles nettes de marges futures (VAN de marges futures) montre en effet une queue de distribution à gauche bien plus épaisse pour 2020 que pour 2019, ce qui explique la baisse de VIF observée. Les VAN de marges futures correspondent aux flux futurs actualisés de marge futures calculées de l'assureur.

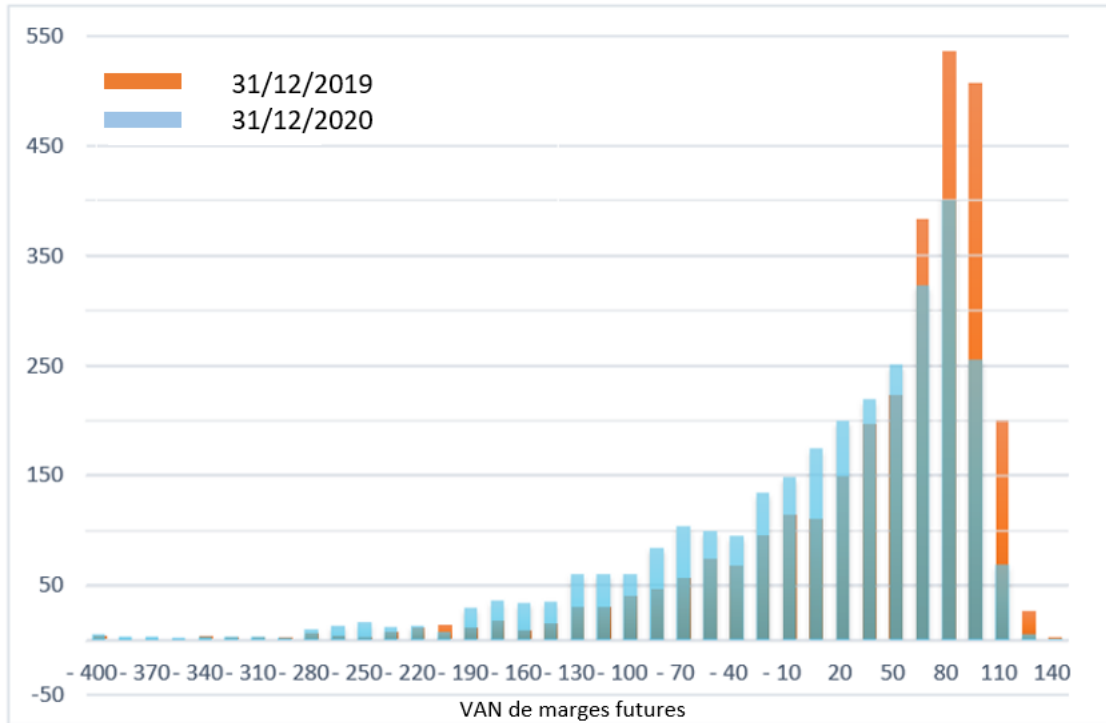


FIGURE 4.5 – VAN de marge au 31/12/2019 vs. 31/12/2020

Evolution des Plus ou Moins Values Latentes (PMVL)

Une baisse de la valeur de l'indicateur comme celle observée devrait s'accompagner de moins-values latentes plus importantes en 2020. En effet, en accord avec la figure 4.27, le taux de PMVL moyen chute nettement entre les années 10 et 30 de l'année de projection pour la projection effectuée à partir du 31/12/2020 comparé à celle au 31/12/2019. Avant la dixième année de projection, l'assureur dispose d'un stock de plus-values latentes et au-delà l'actif se retrouve en situation de moins-value, situation accentuée en 2020, ce qui explique l'écart progressif observé. Sur ces années de projection, d'importantes moins-values sont réalisées par l'assureur pour une valorisation effectuée fin 2020, ce qui corrobore une baisse de VIF et ainsi de la valeur de l'indicateur.

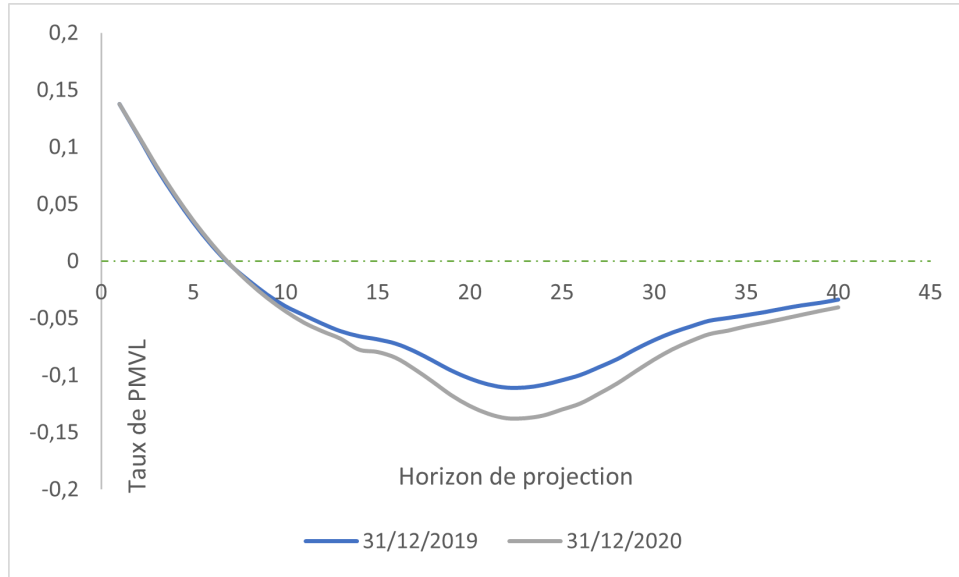


FIGURE 4.6 – Taux de PMVL au 31/12/2019 et au 31/12/2020

Volatilité de swaption

Nous nous intéressons ensuite à la volatilité des swaptions. Les swaptions étant les instruments sur lesquels le modèle de taux est calibré, une augmentation des volatilités de swaption de marché entraîne généralement une augmentation de la volatilité des taux générés par le modèle. Nous cherchons donc à quantifier l'impact de ces volatilités de swaptions. L'évolution des volatilités implicites de swaptions ATM entre les deux dates met en lumière des niveaux de volatilités différents entre les zones de la surface de volatilité, ce qui ne permet pas de disposer d'éléments probants pour quantifier l'impact de ces données de marché sur l'évolution de l'indicateur. Une analyse similaire peut être effectuée sur les données AFM, c'est pourquoi une analyse de mouvement est effectuée dans la suite.

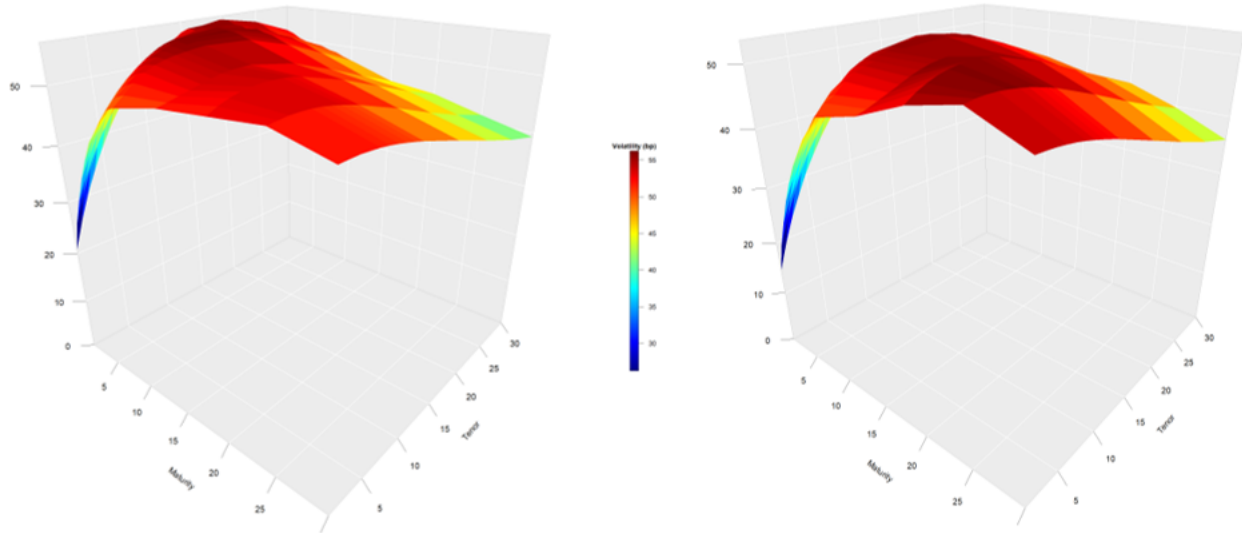


FIGURE 4.7 – Volatilités Monte-Carlo de swaptions ATM au 31/12/2019 et au 31/12/2020

Nous proposons ainsi d'étudier plus précisément l'effet de l'évolution des volatilités implicites de swaptions sur les résultats de VIF.

Pour ce faire nous utilisons ce que l'on appelle une analyse de mouvement sur les volatilités : Les volatilités implicites de swaptions au 31/12/2020 sont associées à la courbe des taux du 31/12/2019 afin de calibrer le modèle de taux. Les données de marché des autres modèles restent inchangées. Cela permet de déterminer l'impact exact dû aux volatilités des swaptions.

La valorisation est ainsi faite au 31/12/2019 avec les deux sets de volatilité, ce qui permet d'évaluer l'impact de la volatilité. On obtient alors une valeur de l'indicateur de 144 pour les données du 31/12/2019 avec les volatilités de swaptions au 31/12/2020, contre une valeur de 145 pour les données de 2019. L'impact de la volatilité de swaptions sur la VIF se situe en dessous des 1%. Nous pouvons donc confirmer que la grande partie de la variation observée liée aux taux nominaux est due aux taux plus faibles et que la volatilité des taux ne joue que peu dans la valorisation sur le portefeuille étudié.

Volatilité action

Pour approfondir l'étude historique des valeurs de l'indicateur, nous proposons d'analyser l'effet des volatilités implicites de calls ATM utilisées pour le calibrage du modèle de l'indice action. Ces dernières sont plus élevées au 31/12/2020. On peut mesurer son impact de la même façon que précédemment avec une analyse de mouvement : on utilise les volatilités action du 31/12/2020 pour calibrer le modèle de l'indice action au 31/12/2019, les données des autres modèles restant inchangées. On obtient alors une VIF de 90,7 contre une VIF de 93,5 avec les volatilités du 31/12/2019. Ceci constitue un impact relatif de 4% au total sur les 44% de variation de VIF observés entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020.

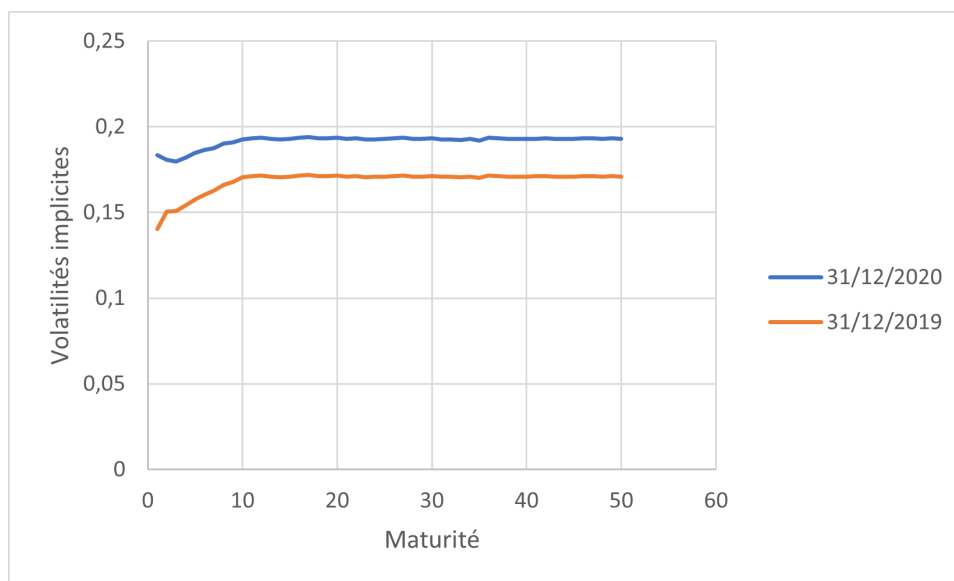


FIGURE 4.8 – Volatilités implicites de calls ATM au 31/12/2019 et au 31/12/2020 utilisées pour le calibrage du modèle action

4.2.2 Etude trimestrielle entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020

Dans le cadre de l’analyse de l’évolution de l’indicateur nous avons aussi généré les tables de scénarios économiques correspondant aux données trimestrielles entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020. Cela permet d’avoir une meilleure décomposition de l’évolution globale annuelle et de suivre l’évolution des courbes de taux qui comptent pour une grande part des impacts observés. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Date	Indicateur	Variation (par rapport au 31/12/2020)
31/12/2019	144	44%
31/03/2020	135	35%
30/06/2020	111	11%
30/09/2020	105	5%
31/12/2020	100	0%

TABLE 4.2 – Evolution trimestrielle de la valeur de l’indicateur

Pour comprendre cette évolution nous nous en referons d’abord aux statistiques descriptives des taux générés par le modèle DDLMM à chaque date, notamment les taux minimaux générés et les taux moyens. Ce sont en effet les éléments les plus explicatifs (les taux faibles étant très adverses pour les assureurs). Les graphiques suivants présentent ces courbes en particulier.

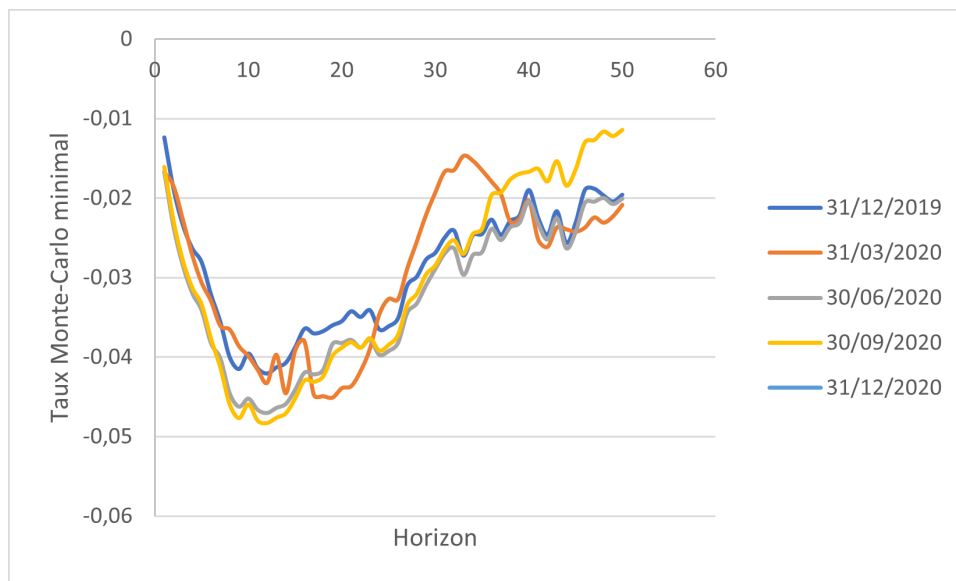


FIGURE 4.9 – Taux minimaux de maturité 10 ans générés

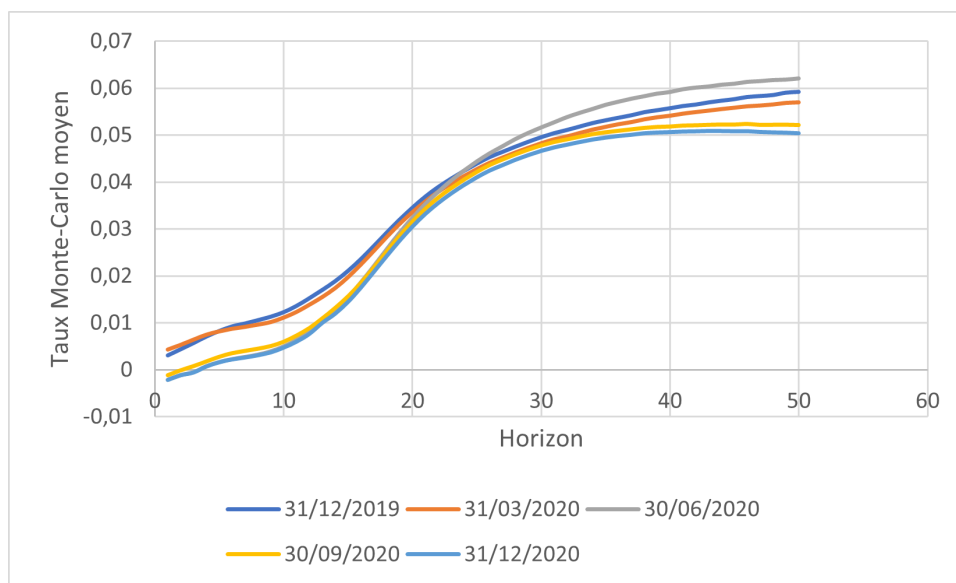


FIGURE 4.10 – Taux moyen de maturité 10 ans générés

Les taux minimaux générés par le modèle sont graduellement plus faibles entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020 et baissent avec chaque trimestre, au moins pour les faibles et moyennes maturités, allant jusqu'à 20 ans. Ce sont ces valeurs, dont le minimum est atteint entre les années 10 et 20 pour chaque trimestre, qui pèsent le plus au bilan de l'assureur. En effet, une courbe initialement plus basse sur les maturités court-termes et moyen-termes et plus élevée à long-terme verra les déflateurs associés à son actualisation augmenter avec la maturité et les taux plus élevés. L'impact de la valeur actualisée associée aux maturités à long terme est donc moindre que celle associée aux courtes maturités, où les taux sont plus faibles. La même analyse est valide pour les taux moyens, qui sont plus faibles pour chaque trimestre passé, au moins sur les maturités allant jusqu'à 20 ans.

L'évolution de la valeur de l'indicateur respecte ainsi l'ordonnement des taux moyens et minimaux générés sur les courtes et moyennes maturités : plus les taux sont faibles sur ces maturités, plus la VIF est faible et donc plus l'indicateur est faible. On notera cependant une hausse des taux minimaux au 31/03/2020, au dessus de ceux du 31/12/2019, entre les années 25 et 38 tandis qu'on observe une baisse de 10% de la valeur de l'indicateur. Pour expliquer cela, nous regardons les volatilités action (plus explicatives que les volatilités de swaptions comme nous

l'avons établi précédemment) entre les deux dates et reprenons le principe de l'analyse de mouvement effectuée entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020 sur les volatilités actions. Les volatilités sont présentées dans le graphique suivant :

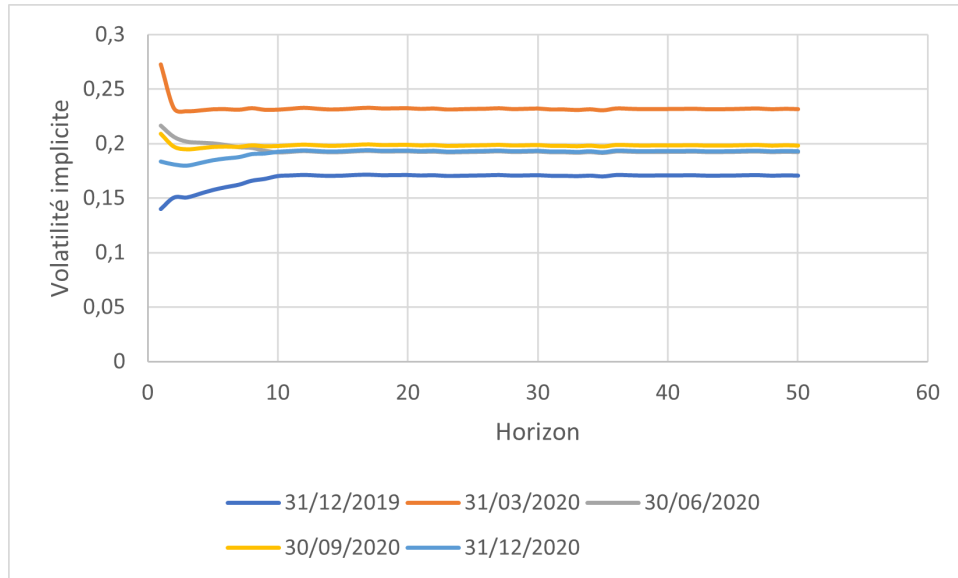


FIGURE 4.11 – Volatilités implicites de calls ATM utilisées pour le calibrage du modèle action

La volatilité moyenne au 31/03/20 est au dessus de celle de 2019, de l'ordre de 7,5%. Ici l'analyse de mouvement donne un impact à la baisse sur l'indicateur de 5% pour les volatilités action, qui explique en partie pourquoi l'impact reste à la baisse malgré un pic des taux minimaux entre les années 25 et 38 de l'horizon de projection.

En conclusion, la valeur de l'indicateur baisse progressivement entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020, suite à une baisse continue des taux nominaux donnés par les courbes EIOPA et une baisse des taux générés par le GSE sur les maturités courtes et moyennes. S'ajoute à cela l'effet de l'augmentation des volatilités actions qui compensent des niveaux de taux plus élevés sur certains pas de projection.

4.2.3 Backtesting de l'indicateur

Comme nous l'avons vu, la valeur de l'indicateur a fortement chuté entre 2019 et 2020, et chuté de manière constante sur les trimestres constitutifs de ces années. Les SFCR n'étant publiés que annuellement il est difficile de disposer de données permettant de backtester notre étude trimestrielle. Dans ces conditions, nous présentons les valeurs extraites des SFCR pour les exercices correspondant au 31/12/2019 et au 31/12/2020. Le tableau suivant détaille la variation observée sur les résultats nets sur l'activité épargne entre 31/12/2019 et le 31/12/2020.

Entreprise	Variation du résultat net de la branche épargne entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020
Allianz Vie	-25,1%
AXA Vie	-38%
AGPM Assurance	-35,9%
CNP (France)	-26,4%
Aviva	-15,1%
Covéa	-25,5%
Predica	-28%
Crédit Agricole	-24%
Generali	-26%
AG2R	-36%

TABLE 4.3 – Variation des résultats nets des branches épargnes entre le 31/12/2019 et le 31/12/2020

La variation moyenne observée sur l'ensemble des acteurs est de -28%.

Il semble que l'indicateur surestime la baisse de VIF entre 31/12/2019 et le 31/12/2020 mais capture bien l'évolution générale de la rentabilité des branches épargnes en particulier. Rappelons que nous utilisons un portefeuille fictif en run off, avec un bilan simplifié, qui ne capture pas tous les investissements effectués, et un outil ALM simplifié lui aussi. Les choix effectués par les entreprises pour limiter la baisse de la rentabilité ne sont pas modélisés dans notre cadre, l'analyse étant focalisée sur les choix de modélisation GSE et les données utilisées.

4.3 Sensibilité de l'indicateur aux choix de modélisation

Après avoir étudié en détail l'impact des données historiques sur la VIF et la valeur de notre indicateur, nous nous proposons d'étudier l'impact des choix de modélisation à une date donnée, en débutant par le choix du modèle de taux. Les données utilisées sont les mêmes pour chaque modèle, il s'agit des courbes règlementaire EIOPA et des volatilités implicites de swaptions au 31/12/2020. Nous évaluons ainsi quantitativement l'impact des modèles de taux.

Comme nous l'avons vu lors de la section dédiée au choix des modèles retenus, le modèle DDLMM est un modèle de taux relativement courant sur le marché de l'assurance vie . De plus, compte tenu de la stabilité de calibrage, il se pose comme modèle de référence pour un suivi d'évolution de l'indicateur et de la VIF. Les analyses présentées dans cette section seront alors effectuées en comparaison au modèle DDLMM, sauf mention contraire.

4.3.1 Impact du G2++

Le modèle DDLMM, que nous considérons comme modèle de référence pour la comparaison des résultats, donne une valeur de VIF à 130,5M d'euros. Le modèle G2++ donne quant à lui une VIF de 125,2M, soit 6% de moins. L'impact sur le BE est de 0,74%.

Modèle de taux nominaux	VIF	Indicateur	Variation
DDLMM	64,6	100	0%
G2++	60,8	94	-6%

TABLE 4.4 – Impact du G2++

Ainsi, pour un assureur, l'utilisation du modèle G2++ plutôt que celle du DDLMM, revient à calculer des profits futurs plus faibles et conduit à une estimation plus élevée des engagements. Dans le cadre de notre portefeuille, le modèle DDLMM estime à hauteur de 5M de les profits futurs par rapport au G2++.

Cet impact sur la VIF est observable via la distribution des VAN de marges futures tracées ci-dessous avec en bleu la distribution associée au DDLMM et en vert celle associée au G2++ :

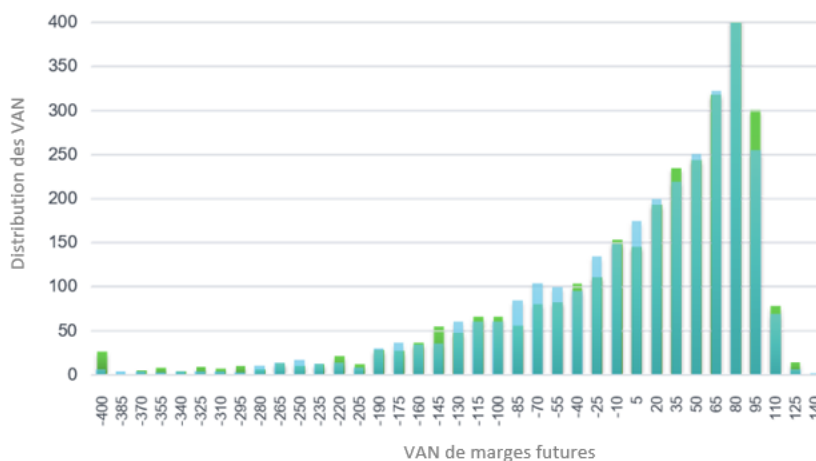


FIGURE 4.12 – Distribution des VAN de marges futures du DDLMM et du G2++

La queue de distribution à gauche est plus épaisse pour le modèle G2++, ce qui correspond à plus de trajectoires très adverses pour l'assureur et donc une VIF plus faible. Les taux négatifs étant adverses pour les fonds en euros, on devrait retrouver une plus grande concentration de taux négatifs pour le modèle G2++ que pour le modèle DDLMM. Les enveloppes quantiles de chaque modèle sont représentées ci-dessous :

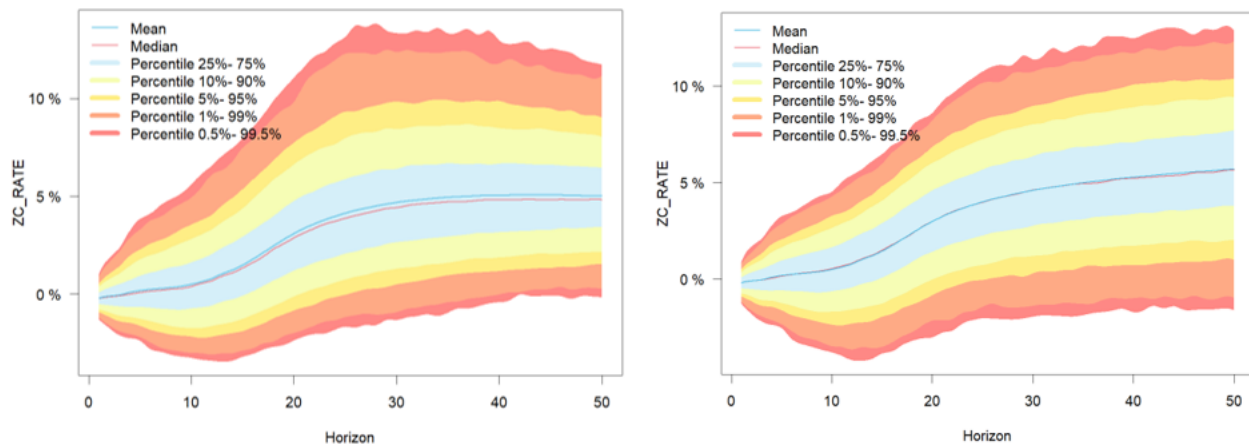


FIGURE 4.13 – Enveloppes quantiles pour les modèles DDLMM et G2++ pour le taux ZC 10 ans

On retrouve bien le fait que le calibrage du G2++ engendre des taux plus faibles en proportion et en valeur, ce qui rejoint une distribution des VAN de marges futures ayant une queue de distribution plus épaisse pour le G2++. Le modèle G2++ étant un modèle gaussien, il est normal de retrouver de tels cônes de diffusion.

Synthèse

Le modèle G2++ induit une perte de 6% de VIF par rapport au DDLMM, induisant une baisse de la valeur de l'indicateur de 100 à 94, du fait de la génération de taux négatifs plus extrêmes.

4.3.2 Impact du DDSVLMM

Après avoir étudié deux modèles avec des différences assez notables, sur les taux générés notamment, nous regardons l'impact du DDSVLMM du point de vue de l'assureur.

Modèle de taux nominaux	VIF	Indicateur	Variation
DDLMM	64,6	100	0%
DDSVLMM	62	96	-4%

TABLE 4.5 – Impact du DDSVLMM

Le DDSVLMM ajoute un processus de volatilité stochastique dans la dynamique du taux forward, par rapport au DDLMM. Le calibrage étant néanmoins sensiblement le même, l'impact vient alors nécessairement des taux générés et de la volatilité Monte-Carlo associée à ces taux. Comme précédemment, analysons la distribution des VAN de marges futures.

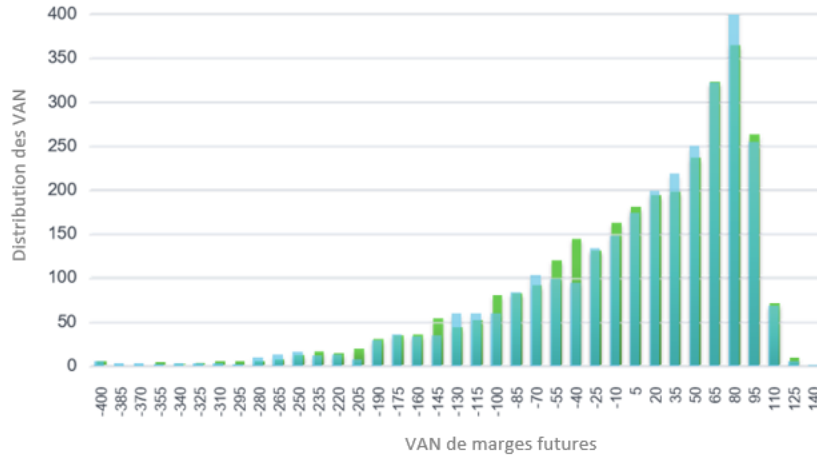


FIGURE 4.14 – VAN de marges futures des modèles DDSVLMM et DDLMM

L'explication de l'impact par les enveloppes quantiles est moins directe que pour le modèle G2++. Rappelons que les taux négatifs sont particulièrement adverses du fait qu'une trajectoire de taux négatifs n'est pas compensée par une trajectoire de taux élevés. En effet, les déflateurs associés à des taux élevés vont être très faibles et donc ces trajectoires impacteront très peu le bilan, au contraire des taux négatifs. L'explosivité relative des taux observée pour le modèle DDSVLMM, due à la volatilité stochastique ajoutée est donc peu impactante sur les profits futurs, d'autant plus que sur les trajectoires de taux élevés une grande partie du profit réalisé est reversée aux assurés.

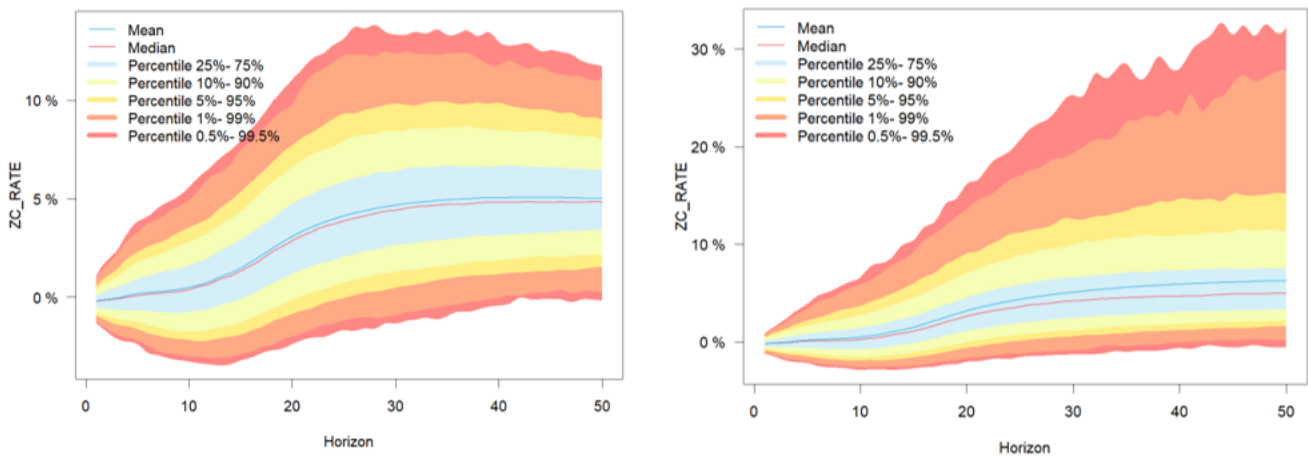


FIGURE 4.15 – Enveloppes quantiles pour les modèles DDLMM et DDSVLMM pour le taux ZC 10 ans

Pour approfondir l'analyse de l'impact du modèle DDSVLMM, nous nous intéressons au taux de rendement de l'actif (TRA). Plus précisément, nous étudions le nombre de fois où le TRA est inférieur au TMG pour le DDSVLMM et pour le DDLMM.

On trouve 4 années supplémentaires où le TRA est inférieur au TMG pour le DDSVLMM. On rappelle que le TMG correspond à une revalorisation minimale obligatoire à atteindre. Dans ces conditions un TRA moyen en dessous du TMG consiste en une perte d'argent pour l'assureur.

L'analyse de plusieurs trajectoires adverses pour les modèles considérés donne les TRA moyens suivants sur les années de projection :

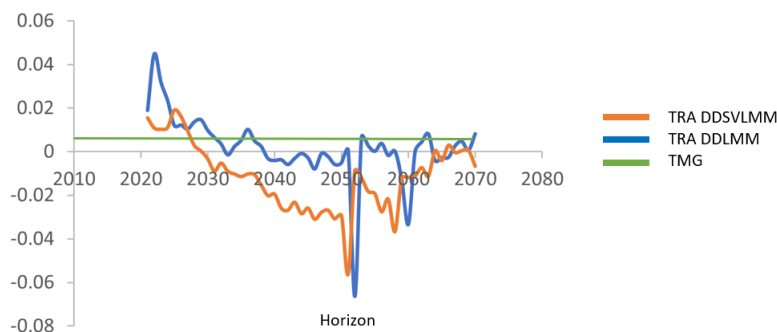


FIGURE 4.16 – Taux de rendement de l'actif moyens pour les modèles DDLMM et DDSVLMM

On observe bien des TRA plus faibles pour le modèle DDSVLMM que pour le modèle DDLMM et des TRA généralement en dessous du TMG. Ce qui corrobore une valeur de VIF plus faible.

Synthèse

Le modèle DDSVLMM s'accompagne d'une plus grande volatilité des trajectoires, comme en attestent les cônes de diffusion, et résulte en une plus grande concentration de VAN de marges futures négatives, induisant une baisse de 4% de la VIF et de la valeur de l'indicateur, qui baisse de 100 à 96.

4.3.3 Impact du calibrage des modèles de taux

Calibrage du DDSVLMM

Le DDSVLMM pouvant reproduire le smile et le skew de volatilité, il est nécessaire de calibrer le modèle avec des données hors de la monnaie ou AFM (Away-From-the-Money). Cependant, d'autres modèles ne sont généralement calibrés qu'à partir de swaptions à la monnaie (ATM), nous évaluons ainsi l'impact d'un calibrage uniquement à la monnaie sur le DDSVLMM.

Calibrage ATM

Dans le cadre de notre étude, le calibrage du DDSVLMM est effectué à partir :

- d'une surface de volatilité de swaptions ATM, pour les maturités 1 à 5, 7, 10, 15, 20, 25 et 30 ans.
- d'une surface de volatilité de swaptions AFM de tenor 10 ans, pour les maturités 1 à 5, 7, 10, 15, 20, 25 et 30 ans, et des strikes relatifs à l'ATM variant entre -1% et +1% au 31/12/2020. Les strikes relatifs retenus sont -1%, -0,5%, -0,25%, 0,25% et 1%. Les strikes plus extrêmes sont exclus par manque de liquidité.
- de la courbe des taux EIOPA au 31/12/2020.

L'impact observé est le suivant :

Données de calibrage	VIF	Indicateur	Variation
ATM+AFM	64,6	100	0%
ATM	65,5	101	+1%

TABLE 4.6 – Impact des données de calibrage du DDSVLMM

La différence dans les données de calibrage induit une différence dans les taux générés, le taux zero coupon moyen de maturité 10 ans pour les données uniquement à la monnaie est plus élevé que pour un calibrage intégrant des données AFM. Par ailleurs, le smile de volatilité est très mal reproduit, avec une sous estimation nette des volatilités pour le calibrage uniquement à la monnaie. Ces observations sont retranscrites dans les graphiques suivants :

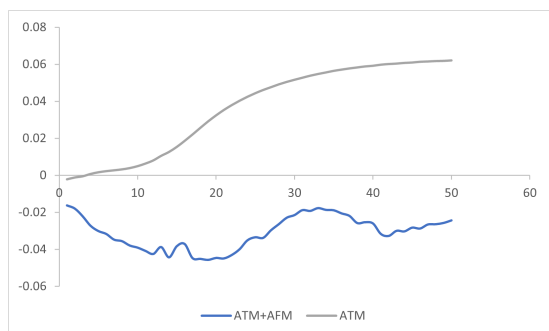


FIGURE 4.17 – Taux ZC moyen de maturité 10 ans en fonction du calibrage

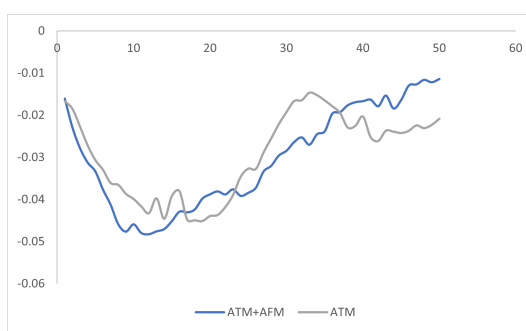


FIGURE 4.18 – Taux ZC minimal de maturité 10 ans en fonction du calibrage

Le calibrage uniquement à la monnaie n'étant pas adapté au DDSVLM, du fait de la volatilité stochastique, il apparaît essentiel d'intégrer au calibrage des données de swaptions AFM au risque pour l'assureur de sous-estimer ses engagements.

4.3.4 Impact du paramètre de shift

Objectivation du shift

La prise en compte d'un coefficient de déplacement, aussi appelé paramètre de shift, permet de simuler des taux négatifs. Il s'agit d'un paramètre embarqué de l'ESG, c'est à dire qu'il n'est pas intégré au processus de calibrage du modèle, mais objectivé en amont dans une étude dédiée. Cette étude s'effectue suivant 4 critères listés puis détaillés ci-dessous :

- l'intégration du coefficient de déplacement dans le processus de calibrage ;
- l'impact du coefficient de déplacement sur la market consistency ;
- l'impact du coefficient de déplacement sur les taux explosifs ;
- l'impact du coefficient de déplacement sur les taux négatifs.

Pour objectiver un premier intervalle de valeurs possibles pour le shift, ce dernier est intégré dans le processus de calibrage du DDLMM. Cela est possible car le DDLMM intègre des formules fermées pour les swaptions dépendant du paramètre de shift, ce dernier peut donc être calibré. Le calibrage est effectué à partir de la fonction cible et des volatilités de swaptions normales ATM et AFM. Un très grand nombre de valeurs initiales pour l'ensemble des paramètres du modèle est utilisé pour initialiser l'algorithme d'optimisation. L'étude de l'erreur quadratique en fonction du shift initial et du shift calibré permet une première élimination des valeurs non satisfaisantes du shift, conduisant à une trop forte erreur quadratique de la fonction cible.

La deuxième analyse consiste à évaluer l'impact du shift sur la *market consistency*. Afin de valider les formules théoriques de valorisation des swaptions, des tests de repricing sont effectués, pour 150 valeurs du shift réparties dans l'intervalle [1%,50%]. Le modèle est calibré à shift fixé puis 10 000 trajectoires de taux nominaux à horizon 50 ans sont simulées à partir des paramètres estimés. Le pricing Monte-Carlo des swaptions est ensuite effectué sur ces trajectoires. Les volatilités de marché et les volatilités Monte-Carlo sont comparées, le critère de performance utilisé étant l'écart absolu moyen pour différentes zones des surfaces de volatilité en fonction de la valeur du shift. Il s'agit de l'ATM, l'AFM pour les strikes relatifs négatifs et de l'AFM pour les strikes relatifs positifs. Les résultats permettent d'objectiver un second intervalle de valeurs possibles pour le shift qui assurent le respect suffisant des

contraintes de market consistency.

Dans un troisième temps, on s'intéresse au lien entre le shift et les taux explosifs. En effet, le shift est un paramètre qui permet de contrôler l'explosivité des taux nominaux inhérente aux modèles log-normaux. En environnement de taux bas, l'asymétrie de la distribution log-normale entraîne une sur-pondération des événements pour lesquels les taux sont très élevés, si le shift est faible. À l'inverse, augmenter le shift diminue la pondération de ces événements car lorsque le shift tend vers l'infini, la distribution des taux se rapproche d'une distribution normale. Le troisième intervalle objectivé doit permettre de limiter le nombre de taux explosifs simulés. La présence de ces derniers n'est pas souhaitable car elle peut s'avérer problématique pour les modèles ALM. Pour pallier ce phénomène, il est possible de considérer un seuil maximal, appelé cap, au-dessus duquel les taux sont figés. Néanmoins, il est préférable d'éviter ce type d'approche pouvant impacter significativement les tests de martingalité ainsi que la market consistency des scénarios économiques. Comme précédemment, le modèle est calibré pour des valeurs du shift réparties dans l'intervalle $[1\%;50\%]$ et 10 000 trajectoires sont simulées. L'analyse des quantiles de taux à 95% et à 99% sur l'ensemble des trajectoires en fonction du shift, pour différentes maturités permet de statuer sur un nouvel intervalle de valeurs possibles permettant de respecter les contraintes d'explosivité des taux.

La quatrième et dernière étude concerne l'impact du shift sur les taux négatifs. Le shift permet la modélisation de taux forward à valeurs dans l'intervalle $]-\alpha, +\infty[$. Il est essentiel de pouvoir simuler des taux négatifs dans le contexte actuel de taux bas. Toutefois, l'intervalle doit être choisi avec attention car un coefficient de déplacement trop faible peut engendrer des taux simulés très bas qui s'avèrent coûteux pour le modèle ALM. De manière similaire à la troisième étude, le tracé des quantiles à 5% et à 1% sur les 10 000 trajectoires en fonction du shift, pour différentes maturités permet de délimiter les bornes d'un quatrième intervalle.

Le tableau suivant récapitule l'intervalle retenu pour chaque étape d'objectivation du paramètre de shift.

Etape d'objectivation	Intervalle retenu
Calibrage	$[0\%,10\%]$
Market consistency	$[5\%,50\%]$
Explosivité	$[1\%,50\%]$
Trajectoires négatives	$[2\%,20\%]$

TABLE 4.7 – Intervalles retenus pour le paramètre de shift

Finalement, l'intersection des quatre intervalles déterminés fournit une objectivation des possibles valeurs du shift, nous retenons l'intervalle $[5\%,10\%]$. Par conservatisme, nous avons retenu le majorant de 10%.

Après avoir objectivé un intervalle donné pour le paramètre de shift nous pouvons étudier son impact sur la VIF pour les valeurs extrêmes de l'intervalle : 5% et 10% ainsi que pour des valeurs proches de celles utilisées historiquement par certains assureurs : 20% et 40%.

Impact de la valeur du shift

L'objectivation du paramètre de shift ayant été faite à partir du modèle DDLMM, nous présentons l'impact de la valeur du shift sur le DDLMM.

Valeur du shift	VIF	Indicateur	Variation
5%	68,2	106	6%
10%	64,6	100	0%
20%	61,9	96	-4%
40%	60,1	93	-7%

TABLE 4.8 – Impact de la valeur du shift

Comme le paramètre de shift déplace la distribution des taux vers les taux négatifs, l'augmentation de la valeur du shift accroît l'occurrence de taux négatifs, ce qui impacte négativement la VIF. Les résultats obtenus sont ainsi cohérents. Plus le shift augmente, plus la VIF diminue et donc la valeur de l'indicateur diminue. Cela peut être vérifié en étudiant les enveloppes quantiles obtenues pour chaque valeur de shift :

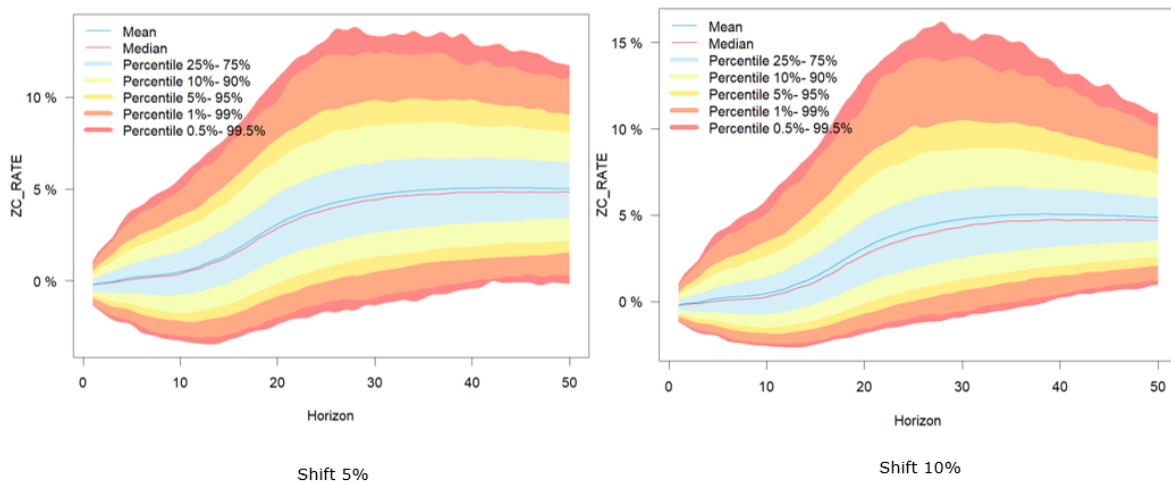


FIGURE 4.19 – Diffusion des taux 10 ans avec shift 10% et 5 %

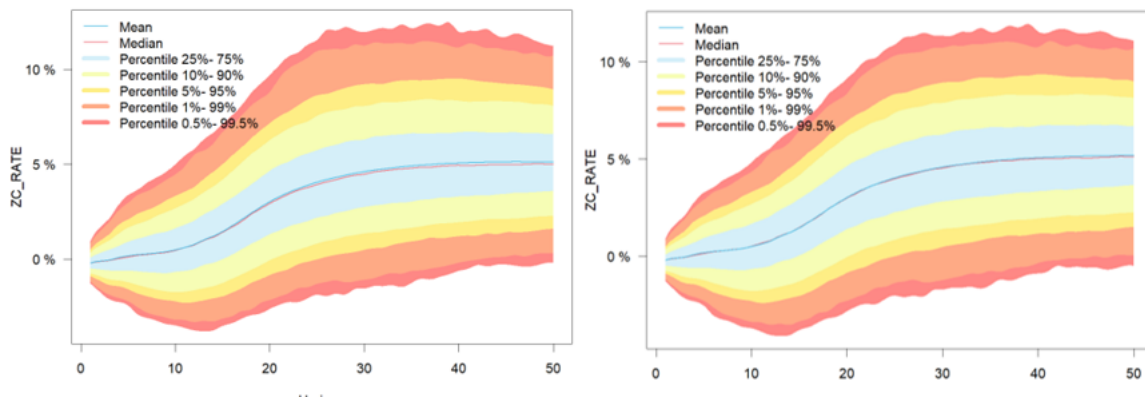


FIGURE 4.20 – Diffusion des taux 10 ans avec shift 20% et 40 %

Synthèse

L'impact du paramètre de shift sur la VIF est ainsi assez intuitif ; plus le shift augmente, plus la distribution des taux est déplacée vers les taux négatifs, i.e plus on observe de trajectoires adverses pour le fond en euros et donc des profits futurs plus faibles.

4.3.5 Choix de modélisation de l'indice action

Deux modélisations de l'indice action ont été étudiées lors de nos travaux. Un sondage auprès des assureurs a révélé que le modèle BSDV était très représenté chez les assureurs classiques, tandis que le SVJD comptait pour 40% des bancassureurs interrogés. Nous considérons alors le modèle BSDV comme modèle de référence. Nous évaluons dans un premier temps l'impact du taux de dividendes dans notre cadre de référence (modèle BSDV), puis dans un second temps l'impact lié à la modélisation avec le SVJD et son calibrage.

Niveau de dividendes

Dans la partie dédiée aux GSE **3.2.2.3** nous avons décrit la modélisation des dividendes avec un processus CIR de moyenne 2,9% de taux de dividendes. Dans cette section, uniquement nous modélisons les dividendes par un taux fixe, soit de 3%, qui semble être autour du niveau de référence chez les acteurs interrogés, soit 4,5%, niveau de dividendes aussi exploité par certains acteurs mais qui apparaît au-dessus du niveau historique ou des anticipations du marché et enfin 6%, niveau très élevé mais qui permet d'appliquer un choc important et d'avoir des résultats d'autant plus clairs.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Niveau de dividendes	VIF	Indicateur	Variation
3%	64,6	100	0%
4,5%	61,4	95	-5%
6%	56,8	88	-12%

TABLE 4.9 – Impact du niveau de dividendes

On peut noter une baisse de 5% de la valeur de VIF pour un niveau de dividendes de 4,5% et une baisse de 12% lorsque les dividendes passent à 6%.

Lorsque l'on fait varier le niveau de dividendes à la hausse le risque de liquidité augmente et l'assureur doit provisionner plus en cas de moins-values réalisées sur les actifs. Intervient alors la notion de Provision pour Risque d'Exigibilité ou PRE.

"La provision pour risque d'exigibilité (PRE) a pour fonction de permettre à l'entreprise d'assurance de faire face à ses engagements dans le cas de moins-value de certains actifs (C. assur., art. R. 332-20)." d'après l'arrêté du code des assurances sur la PRE. En complément il s'agit de noter que la PRE ne s'applique pas aux actifs obligataires, en accord avec l'article R343-3 du code des assurances. On rappelle qu'une situation de moins-value latente se produit lorsque que la VNC de l'actif dépasse sa valeur globale.

On vérifie de plus que le niveau des moins-values réalisées augmente avec le niveau de dividendes, ce qui corrobore une dotation d'autant plus élevée de la PRE et une VIF d'autant plus faible que le niveau de dividendes est élevé. Le mécanisme en jeu expliquant cela est présenté dans le paragraphe suivant.

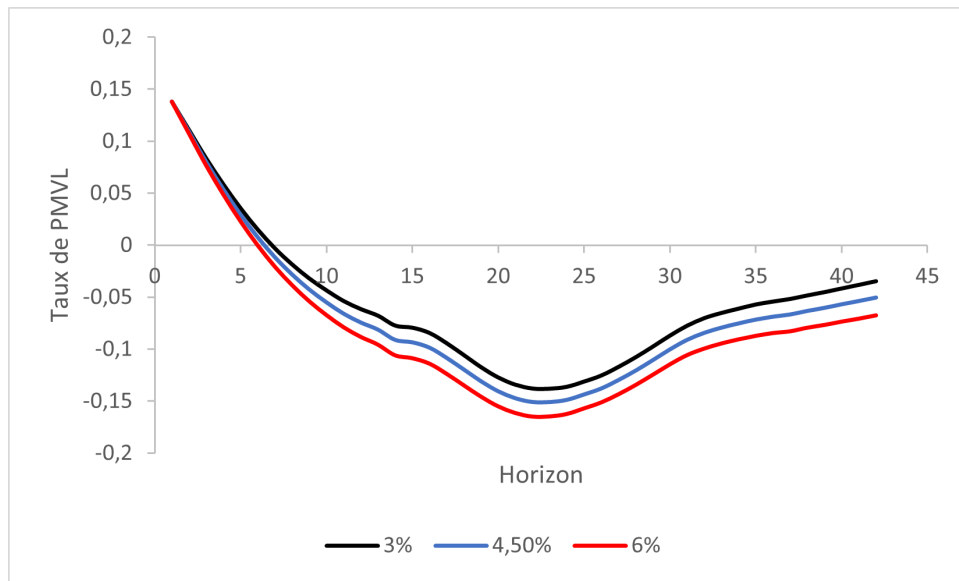


FIGURE 4.21 – Evolution du taux de PMVL avec le niveau de dividendes

Dans notre cas, la PRE explose d'autant plus que le niveau de dividendes augmente et est très coûteuse en profits. En effet, pour une situation de moins-value donnée, le passage de taux de dividendes de 3% à un niveau plus élevé aggrave la moins-value, l'actif devant reverser un rendement en accord avec la hausse des dividendes.

La dotation plus importante de la PRE avec le niveau de dividendes est due à l'effet asymétrique de la PRE et du mécanisme de participation aux bénéfices en général. En effet, le provisionnement pèse au bilan et même lors de plus-values réalisées, la part de la PRE enlevée des provisions compte en tant que résultats financier de l'assureur et doit être reversée en grande partie aux assurés, en accord avec la PB réglementaire fixée à 85% et dont le mécanisme est rappelé dans la section **3.2.1 Présentation** de partie détaillant le modèle ALM.

En conclusion, il est indispensable d'avoir une modélisation adaptée des dividendes, soit par un niveau constant représentatif du niveau global des actifs du portefeuille, soit par un processus CIR centré autour du niveau global estimé. Une mauvaise modélisation peut conduire à un provisionnement sur la PRE considérable et affecter grandement la VIF.

Modèle SVJD

Le modèle SVJD est un modèle complet intégrant une volatilité stochastique et une diffusion de sauts. Il n'est cependant pas le plus populaire car les processus de calibrage et simulation sont complexes et les phénomènes de smile / skew de volatilité s'atténuent rapidement sur le marché des dérivés vanilles actions (dès les maturités supérieures à 2 ans). Toutefois, il permet une réplication du smile et skew de volatilité et est donc intéressant pour un portefeuille adapté (avec des investissements sur le marché des dérivés actions sur des maturités courtes pour capter adéquatement les effets de smile et de skew de volatilité). Nous regardons ainsi l'impact de l'utilisation du modèle SVJD comparé à sa contrepartie, le BSDV, plus simple d'implémentation et moins coûteux en temps de calcul.

Le résultat obtenu est le suivant :

Modèle action	VIF	Indicateur	Variation
BSDV	64,6	100	0%
SVJD	65,9	102	+2%

TABLE 4.10 – Impact du modèle SVJD

Les taux générés étant les mêmes, l'impact réside dans la volatilité implicites liée à l'indice action, le taux de PMVL et le taux de rendement de l'actif.

Le modèle BSDV n'étant calibré que sur des données à la monnaie, nous comparons les volatilités Monte-Carlo ATM générées par les deux modèles. Les volatilités Monte-Carlo des calls ATM sont représentées dans le graphique suivant :

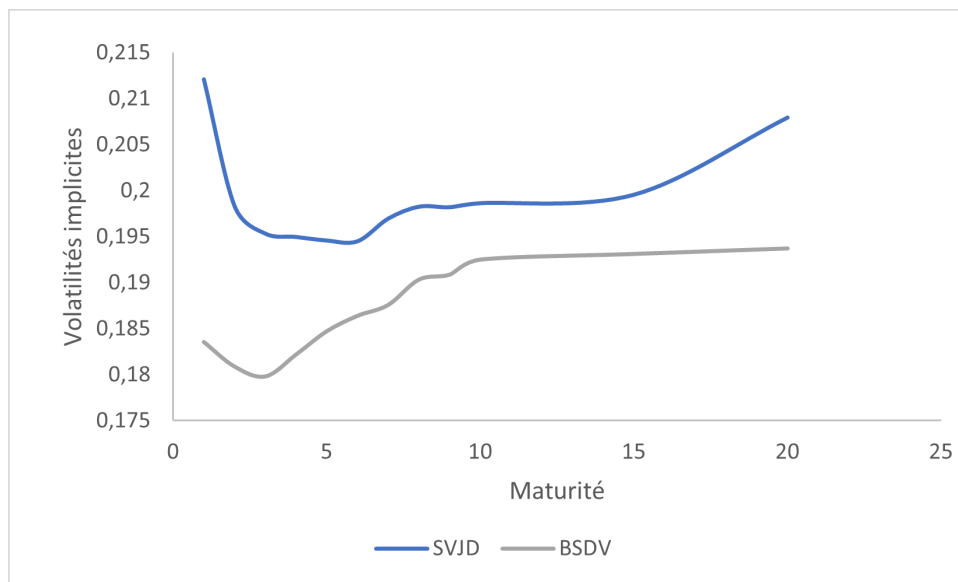


FIGURE 4.22 – Volatilités des calls ATM pour les modèles BSDV et SVJD

Le modèle SVJD semble surestimer de l'ordre de 2% les volatilités à la monnaie à horizon 20 ans. On peut ici bien parler de surestimation graphique car le modèle BSDV réplique parfaitement les volatilités de marché, ainsi le modèle SVJD les surestime. A première vue cela devrait entraîner une augmentation du coût des options et garanties inclus dans les contrats des assurés et causer un impact contraire à celui observé. Nous analysons alors le taux de PMVL et le pourcentage de trajectoire où le TRA est inférieur au TMG pour chaque modèle pour expliquer la variation observée.

Les figures suivantes présentent les évolutions observées pour chaque grandeur :

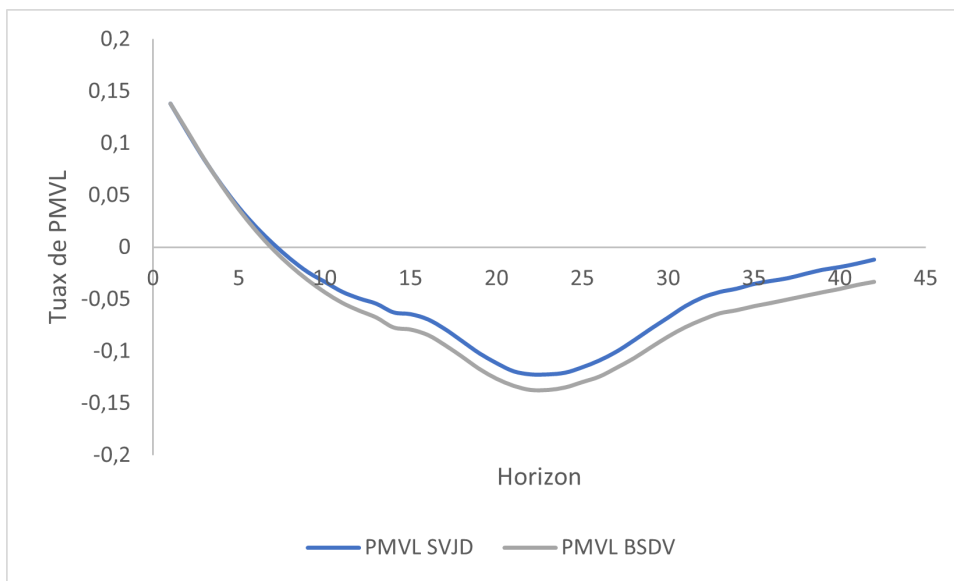


FIGURE 4.23 – Taux de PMVL pour les modèles SVJD et BSDV

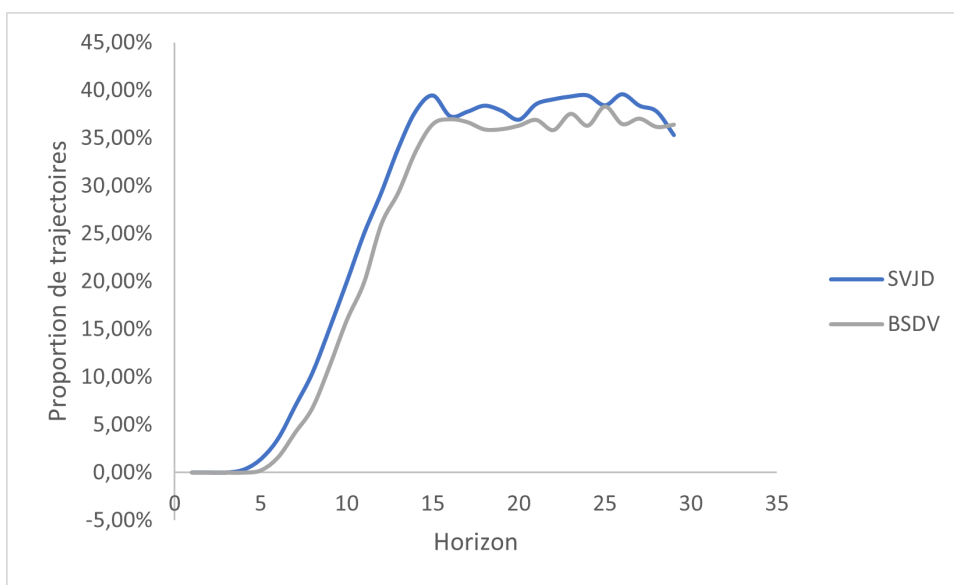


FIGURE 4.24 – Proportion de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG

Nous pouvons d’abord observer qu’il y a de plus faibles moins-values latentes dans le cas du SVJD, ce qui explique une partie de l’impact observé. A titre de rappel, les moins-values entraînent une baisse des résultats et une dotation de la PRE, dont l’effet asymétrique induit une diminution de la VIF. Dans le même sens, il y a plus de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG dans le cas du BSDV, ce qui corrobore des trajectoires plus adverses pour le BSDV et donc une VIF plus faible.

Le taux de PMVL, plus favorable au modèle SVJD s’explique par un effet de diversification induit par le modèle. En effet, les corrélations induites entre les facteurs de risques observables action et taux nominaux pour le SVJD sont plus faibles que pour le BSDV. Le gain de VIF peut alors s’expliquer par un gain de diversification. L’évolution des corrélations entre l’indice action et les taux ZC 1 an et 10 ans montre bien une corrélation plus faible induite par le modèle SVJD, due à l’ajout de la composante à saut dans le modèle. La baisse de corrélation est présentée dans la figure suivante.

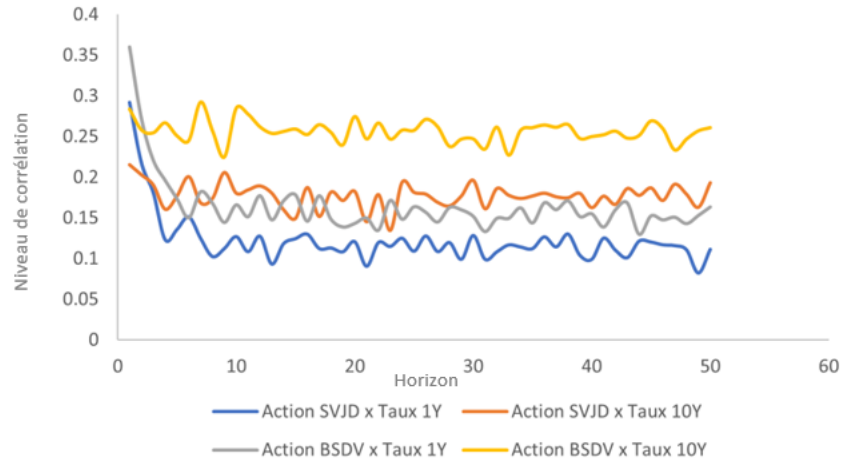


FIGURE 4.25 – Corrélation de l'indice action aux taux ZC 1 an et 10 ans en fonction du modèle

Le choix du modèle action doit aussi donner lieu à des réflexions sur le portefeuille à valoriser, les données utilisées pour le processus de calibrage (à la monnaie exclusivement ou non) ainsi que sur le coût opérationnel supplémentaire induit par la complexité plus grande de calibrage et de simulation.

Calibrage du SVJD

Pour les données actions, il est très souvent nécessaire d'extrapoler les valeurs à partir des données disponibles. Cela s'explique par le fait que le marché des dérivés actions est un marché avec des positions généralement à court terme, et donc propose des maturités maximales pour les calls et les puts côtés autour de 3 à 4 ans. Une mauvaise extrapolation peut avoir des effets notables sur le bilan d'un assureur, d'autant plus si la part d'actions dans le portefeuille considéré est grande. Pour évaluer cet impact, nous considérons des données jusqu'à 3 ans qui seront ensuite extrapolées jusqu'à un horizon 20 ans, et des données sur 20 ans directement. Ces volatilités ont été fournies par le fournisseur de données financières IHS Markit (voir [23]). IHS Markit dispose de contributeurs ayant des expositions long-termes sur le marché action, permettant ainsi de définir un consensus de marché pour les volatilités implicites à long terme et de mettre en place des méthodologies d'extrapolation robustes et précises. Les résultats de VIF et de valeur d'indicateur sont présentées dans le tableau suivant.

Données de calibrage	VIF	Indicateur	Variation
Surface disponible à 20 ans	64,6	100	0%
Surface disponible à 3 ans	67,8	105	+5%

TABLE 4.11 – Impact des données de calibrage du SVJD

Les caractéristiques des données considérées sont présentées ci dessous :

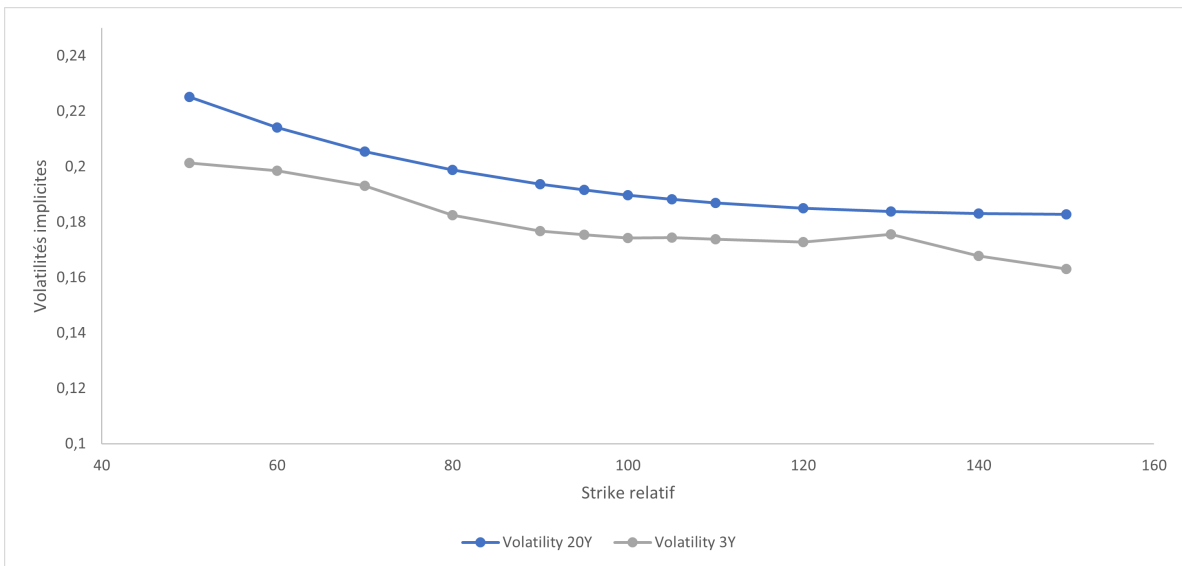


FIGURE 4.26 – Smile de volatilité pour des calls de maturité 20 ans sur les données à 3 ans et à 20 ans

Il est tout de suite observable que les volatilités sont sous-estimées par une mauvaise extrapolation du fait de l'absence de données. Cette observation est retrouvée sur les volatilités Monte-Carlo générées par le modèle, comme en atteste le graphe ci dessous :

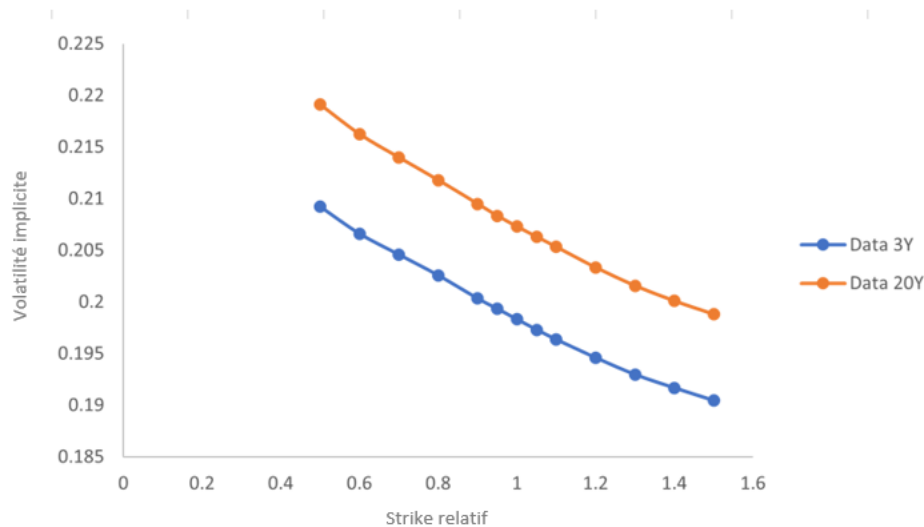


FIGURE 4.27 – Smile de volatilité Monte-Carlo pour des calls de maturité 20 ans

A partir de cela, nous observons un impact global de +5% pour les données 3Y en comparaison des données 20Y. La sous estimation de la volatilité des données mal extrapolées réduit le coût des options et garanties inclus dans les contrats des assurés du jeu de données originel et augmente ainsi la VIF.

Il apparait alors nécessaire de disposer de données de volatilités de calls sur indice action suffisamment complètes au regard des maturités du portefeuille, au risque d'avoir une mauvaise extrapolation des volatilités et de sous estimer les engagements de l'assureur.

4.3.6 Impact de la corrélation

La corrélation entre les différents facteurs de risques est un paramètre important à considérer. Au vu de la composition de notre portefeuille, intégrant majoritairement des obligations sans risques et des actions, nous nous intéressons ici à l'influence de la corrélation entre l'indice action et les taux nominaux. Pour ce faire nous partons d'une corrélation de référence objectivée à 25% et observons l'effet sur la VIF lorsque la corrélation est de -20%. L'impact observé est présenté dans le tableau suivant :

Corrélation Action/Taux	VIF	Indicateur	Variation
25%	64,6	100	0%
-20%	68,2	106	+6%

TABLE 4.12 – Impact de la corrélation

Cet impact provient du gain de diversification obtenu en réduisant la corrélation entre les taux et l'indice action. La variation ne pouvant pas s'expliquer par les taux comme précédemment, car les taux générés sont identiques. Ce gain de diversification se traduit en un gain de VIF. En effet, la diversification réduit l'adversité des trajectoires ; une trajectoire de taux négative a davantage de chance d'être profitable sur l'indice action. Le graphe suivant illustre l'évolution de la corrélation entre les facteurs de risque.

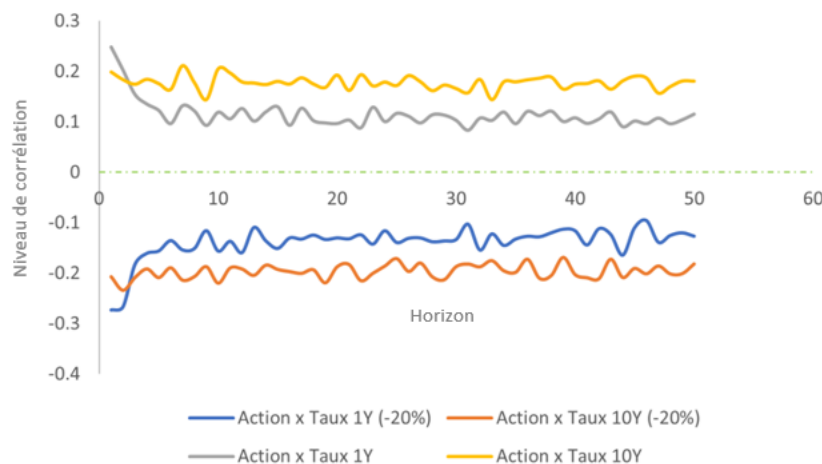


FIGURE 4.28 – Evolution de la corrélation Monte-Carlo de l'indice action avec les taux nominaux 1 an et 10 ans

Nous regardons dans la suite le taux de rendement de l'actif. Sur l'ensemble des années de projection, le taux de rendement moyen de l'actif est de -1,2% pour le scénario de référence contre 0,01% avec une corrélation fixée à -20%.

En conclusion, une baisse de la corrélation de l'indice action avec les taux nominaux induit une hausse visible de la valeur de VIF et peut donc pousser l'assureur à sous-estimer ses engagements. Il est donc essentiel d'estimer correctement les corrélations entre les facteurs de risques et de vérifier la qualité des corrélations Monte-Carlo générées par le GSE, comme détaillé dans la section **2.5 Structure de dépendance** du chapitre 2.

4.3.7 Impact des hypothèses ALM

Cette section s'intéresse à l'impact de certaines hypothèses ALM en fonction du modèle de taux nominaux. Nous regardons dans un premier temps le TMG, défini dans la section **3.2.1 Présentation**. Nous évaluerons d'abord l'effet du TMG pour un modèle donné, puis son impact en fonction du modèle choisi.

Pour rappel, le TMG définit le taux minimal de revalorisation annuelle des provisions mathématiques. Réglementairement, l'assureur doit garantir au minimum le TMG aux assurés et distribuer un pourcentage donné des produits techniques et financiers réalisés au cours de l'année par le mécanisme de participation aux bénéficiaires. Grâce à ces produits, il peut au choix revaloriser immédiatement la PM ou doter la PPE. Afin de limiter les rachats dynamiques, l'assureur doit proposer un taux meilleur que celui du marché. On rappelle que dans le cadre de notre étude uniquement les rachats structurels sont modélisés. Si les produits financiers sont supérieurs à la cible, l'assureur peut distribuer la cible et doter la différence en PPE.

Nous comparons ici les modèles DDLMM et G2++, plus éloignés l'un de l'autre, plutôt que le DDLMM et le DD-SVLMM pour accentuer et quantifier l'impact du TMG. Trois valeurs de TMG (net) sont considérées : 0,1%, 0,3% et 0,5%. La figure suivante récapitule les valeurs obtenues :

TMG net	VIF	Indicateur	Variation
0,3%	64,6	100	0%
0,1%	65,9	109	+9%
0,5%	65,9	93	-7%

TABLE 4.13 – Impact du TMG pour le modèle DDLMM

TMG net	VIF	Indicateur	Variation
0,3%	63,4	98	-2%
0,1%	67,9	105	+5%
0,5%	58	90	-11%

TABLE 4.14 – Impact du TMG pour le modèle G2++

Tout d'abord, on constate que les résultats de VIF issus du DDLMM comme du G2++ tendent à décroître lorsque l'hypothèse de TMG augmente et à croître lorsque le TMG diminue. Ces résultats semblent cohérents avec l'intuition selon laquelle plus les garanties offertes à l'assuré sont élevées (ici le taux minimal garanti), plus l'assureur puise dans ces résultats financiers et plus l'assureur provisionne pour satisfaire ces garanties. La valeur de VIF décroît ainsi logiquement lorsque le TMG augmente.

On constate également des valeurs de VIF plus élevées pour le modèle DDLMM et ce pour les trois scénarios testés. On se referra à la partie sur l'impact du choix du modèle pour l'analyse de ce résultat, dû en grande partie à la queue de distribution à gauche des taux nominaux plus épaisse pour les taux générés par le G2++. De plus, l'effet de l'augmentation du TMG à partir de conditions normales de marché (i.e TMG net à 0,3%) semble affecter plus le modèle G2++ que le DDLMM, avec une variation de -11% de VIF pour le premier contre -7,1% pour le second pour un TMG variant de 0,3 à 0,5%. Réciproquement l'effet de la baisse du TMG de 0,3% à 0,1% semble affecter plus le DDLMM que le G2++, avec une variation de +9% pour le premier et +5% pour le second. Pour expliquer ces variations différentes de VIF en fonction du modèle, nous analysons l'impact des trajectoires adverses pour le DDLMM

et le G2++ en traçant la proportion de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG. Le tracé est présenté ci dessous :

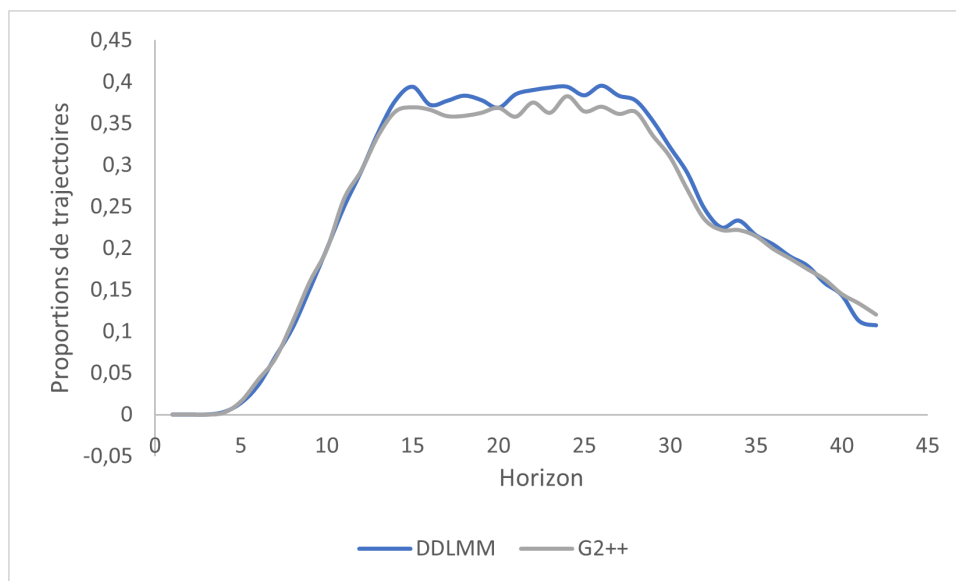


FIGURE 4.29 – Proportion des trajectoires où le TRA est inférieur au TMG

On observe que les conditions semblent plus adverses pour le DDLMM, où plus de trajectoires pour lesquelles le TRA est inférieur au TMG sont retrouvées. Une augmentation du TMG revient alors à augmenter plus significativement le nombre de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG pour le modèle G2++. En effet, le modèle DDLMM donnant déjà lieu à une proportion plus grande de ce type de trajectoires, l'augmentation du TMG aura un effet moindre.

Réciproquement, une baisse du TMG revient à diminuer la proportion de trajectoires où le TRA est inférieur au TMG de manière plus significative pour le modèle DDLMM, donc un impact plus fort est observé sur ce modèle en cas de baisse du TMG.

La valeur du TMG définie dans les contrats et donc l'hypothèse retenue dans l'ALM a un impact majeur sur la valorisation, particulièrement dans l'environnement de taux bas actuel.

4.3.8 Choix des modèles en fonction des profils d'investissement

Tout au cours de ce mémoire nous avons étudié l'impact des choix de modélisation sur la rentabilité d'un assureur vie. Afin d'inscrire ce mémoire dans un cadre concret nous nous intéressons aux choix pertinents de modèles en fonction du profil d'investissement considéré. Le tableau suivant présente une synthèse des conclusions effectuées au cours de cette partie pour ces profils. Notons cependant que ces conclusions sont basées et valables pour des investissements en regard à des produits d'assurance vie similaires au possible à ceux décrits au cours de ce mémoire, avec des groupes d'assurés également similaires. De plus, les conclusions présentées ci dessous reflètent une réflexion quant à la qualité des scénarios économiques générés et non quant à la rentabilité de l'assureur.

assureur et profil d'investissement	modèle considéré
profil d'investissement sur des produits de taux avec des données peu volatiles	DDLMM ou DDSVLMM
profil d'investissement sur des produits de taux avec des données à forte volatilité	DDSVLMM
profil d'investissement avec une part non négligeable d'actions, bancassuranceur par exemple	SVJD
Assureur avec des contraintes fortes en temps de calcul et mise en place opérationnelle	G2++ ou DDLMM et BSDV

Rappelons également que le crédit n'est pas modélisé ici, à l'instar du risque de change. Les profils d'investissement considérés ne s'orientent que vers les actifs modélisés au cours de ce mémoire.

4.3.9 Ouverture sur une remontée des taux

Le contexte de nos travaux a été un contexte de taux bas voire négatifs. Nous proposons ici quelques pistes de réflexion sur les conséquences d'une remontée des taux sur les assureurs Vie.

Les assureurs Vie sont exposés au risque de taux, en particulier au risque d'une hausse des taux. Ce risque existe car les assureurs offrent des possibilités de rachat des contrats et il existe des opportunités d'arbitrage. En effet, si une hausse des taux devait se manifester, un assuré aurait raison de racheter son contrat pour se diriger vers des placements plus attractifs, le contrat actuel de l'assuré étant basé sur une ensemble d'obligations achetées dans un contexte de taux bas et n'étant pas à maturité. Dans le cas de rachats, l'assureur doit vendre ses actifs qui seront alors en situation de moins-value latente, car le capital de l'assuré est garanti (sur les fonds euros). La valeur de l'actif détenue par l'assureur diminue tandis que son engagement est le même.

Nous devons cependant distinguer différents cas de remontée des taux.

Si nous considérons une remontée modérée des taux alors la rentabilité de l'assureur serait améliorée, en effet le rendement des placements obligataires serait amélioré (une fois la vente des actifs effectuée ou bien une fois la maturité atteinte) et la hausse des taux ne serait pas assez significative pour causer de nombreux rachats de la part des assurés.

Une remontée importante des taux aura un impact baissier sur la valeur de marché des obligations détenues par l'assureur qui devra refaire son stock d'obligations avant de pouvoir profiter de cette remontée. Pour pouvoir reconstituer son stock obligataire l'assureur doit alors vendre les actifs qu'il possède ou bien attendre leur maturité. Dans le premier cas, il doit vendre un actif en situation de moins-value latente, ce qui pèse sur sa rentabilité et dans le second cas, l'assureur ne peut offrir un rendement équivalent à celui du marché sans utiliser les réserves à sa disposition. Nous détaillerons les mécanismes permettant à l'assureur de se couvrir d'une potentielle remontée des taux à la fin de ce chapitre.

De plus, une remontée importante des taux pour des maturités long-termes uniquement n'aura pas le même impact sur la rentabilité. Aucun impact ne serait constaté si les maturités concernées sont après le Last Liquid Point, tandis qu'une remontée sur les taux courts ou à moyennes maturités (ici avant 20 ans) serait très adverse pour les assureurs qui devraient faire face à de nouveaux contrats bien plus rentables proposés avec des placements obligataires et un risque de rachat bien plus élevé.

Enfin, une remontée des taux peut être accompagnée d'un changement de régime au niveau des corrélations (principalement au niveau de la corrélation action/taux). L'étude des corrélations historiques entre les taux et l'action sur les périodes de remontées de taux pourrait mettre en évidence un tel phénomène. A cet effet, nous avons analysé les corrélations entre les taux 10 ans et l'indice action Euro Stoxx 50 entre le 30/01/2000 et le 31/12/2020.

Les périodes entre le 31/12/2000 et le 31/12/2003 ont globalement été des période de baisse de taux, accompagnées d'une corrélation entre le taux 10 ans et l'indice action variant entre 0,7 et 0,9 mais ne permettant pas de mettre

en évidence des périodes de remontées de taux assez significatives pour être notées. Cependant, l'année 2005 nous a permis d'illustrer un changement de régime de corrélation que nous présentons dans le tableau suivant.

Période	Variation du taux 10 ans	Corrélation
28/02/2005-31/08/2005	Baisse (0,6%)	-0,64
31/08/2005-30/11/2005	Hausse (0,4%)	0,41

La corrélation sur l'ensemble de l'année 2005 étant de -0,54 (année globalement à la baisse pour les taux 10 ans), la hausse des taux sur le dernier trimestre met bien en évidence un changement de régime de la corrélation qui redevient positive. Une observation similaire peut être faite sur les années 2006-2007 et 2008. Le tableau suivant détaille nos observations.

Période	Variation du taux 10 ans	Corrélation
30/06/2006-30/11/2006	Baisse (0,4%)	-0,93
30/11/2006-30/06/2007	Hausse (0,9%)	0,93
29/02/2008-30/06/2008	Hausse (0,7%)	-0,53
30/06/2008-31/03/2009	Baisse (0,7%)	0,94

Sur l'année 2006-2007, la hausse observée des taux conduit à une inversion de la corrélation (par rapport à la baisse observée des taux). La corrélation annuelle, établie entre le 30/06/2006 et le 30/06/2007 étant de 0,7. Un changement du régime de corrélation est aussi observable en 2008, où une remontée des taux de 0,7 % conduit à une corrélation négative tandis qu'une baisse des taux du même acabit donne une corrélation de 0,94. La corrélation annuelle sur l'année 2008 étant de 0,6.

Malgré ces observations, il est important de noter qu'une remontée des taux n'entraîne pas systématiquement une inversion du signe de la corrélation entre les taux 10 ans et l'indice action considéré. Cependant, nous avons pu observer qu'une remontée des taux s'accompagne généralement d'une baisse de la corrélation, par rapport au cas d'une baisse des taux, comme l'illustre le tableau suivant :

Période	Variation du taux 10 ans	Corrélation
31/08/2010-31/01/2011	Hausse (1,2%)	0,65
30/06/2011-31/01/2012	Baisse (1,3%)	0,78
31/01/2016-31/07/2016	Baisse (0,4%)	0,83
31/07/2016-31/01/2017	Hausse (0,6%)	0,78

Les périodes 2010-2012 et 2016-2017 permettent de mettre en évidence une baisse de corrélation en lien avec une remontée des taux. Cette analyse reste sommaire et peut être approfondie avec une étude du régime de corrélation en lien avec d'une part les variations de taux, et d'autre part la volatilité des taux considérés. Nous avons eu l'occasion de détailler d'effet d'une baisse de corrélation entre l'indice action et les taux 10 ans dans la dernière partie ce mémoire et au vu des observations présentées sur les régimes de corrélation, il peut s'agir d'un point de départ intéressant à approfondir si une remontée des taux venait à être observée.

On notera que l'augmentation de l'inflation serait aussi adverse pour les assureurs. Les rendements des fonds en euros étant déjà faibles et compensant à peine, voire pas, l'inflation. Son augmentation aggraverait la dégradation de la rentabilité des assureurs Vie. Notons que le contexte de la crise sanitaire actuelle a donné lieu à des mesures mises en place par les banques centrales qui ont tendance à créer massivement de la monnaie et donc à augmenter

l'inflation.

Les assureurs peuvent néanmoins se couvrir des risques inhérents à une remontée des taux. Le risque de rachat peut être appréhendé par la mise en place de pénalités de rachats, comme autorisé par le code des assurances. Le risque lié aux arbitrages (retour vers les fonds euros ou UC) peut être pris en compte avec une orientation des produits proposés, vers les fonds UC dans un contexte de taux bas (comme on l'observe aujourd'hui) ou bien par un retour aux fonds euros dans le cas d'une remontée des taux. Une couverture se basant sur un regroupement de portefeuille, les uns sensibles à une hausse des taux et les autres en bénéficiant, est aussi envisageable. Enfin, la PPB, définie dans la section **3.2.1 Présentation** est une réserve permettant de faire face à des résultats à la baisse. Elle garantit en effet une stabilité sur la rémunération des assurés, qui est fixée avec un minimum de revalorisation au TMG et doit nécessairement être atteinte.

L'ensemble de ces points constituent des axes de réflexion et des premières analyses sur le risque de remontée des taux.

Conclusion

Il s'agissait dans ce mémoire d'évaluer quantitativement les choix de modélisation au sein d'un GSE risque neutre, en valorisant le bilan d'un assureur fictif possédant un portefeuille représentatif de ceux trouvés sur le marché français de l'assurance Vie. Cette analyse de l'impact de choix de modélisation passe par la construction d'un indicateur de rentabilité central à ce mémoire.

Le travail bibliographique préliminaire et une étude auprès de plusieurs acteurs de la place nous a permis de prendre connaissance des différents modèles de taux nominaux et modèles actions utilisés, de leur particularités et des données de calibrage. Les modèles de taux étudiés à l'issue de ce travail sont le G2++, le DDLMM (Displaced Diffusion Libor Market Model) et le DDSVLMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM) pour les taux nominaux et le BSDV (Black Scholes with Deterministic Volatility) et SVJD (Stochastic Volatility with Jump Diffusion) pour l'indice action. Les queues de distributions à gauche générées par les modèles de taux étant prépondérantes dans l'analyse des résultats des modèles de taux et les volatilités des calls à la monnaie pour l'indice action étant très explicatives pour les modèles action, les variations de VIF et de l'indicateur observées sont cohérentes. Une queue de distribution à gauche plus épaisse traduit en effet une concentration plus importante de trajectoires de taux négatifs, adverses pour la rentabilité des assureurs Vie. De même, une augmentation de la volatilité des calls à la monnaie résulte en un coût des options et garanties plus élevé pour l'assureur.

Une fois les modèles de taux et action étudiés, nous nous sommes intéressés à la construction d'un modèle ALM simplifié, alimenté par nos tables de scénarios économiques. Les hypothèses ALM ont été effectuées afin d'être en mesure d'analyser clairement les effets induits par chaque choix de modélisation sur la rentabilité d'un assureur vie. Pour refléter au mieux l'impact déterminé par chacune des neuf sensibilités effectuées, il a été nécessaire de comprendre en profondeur chaque modèle et les données sous-jacentes utilisées pour leur calibrage. Le choix des données de calibrage a fait l'objet d'une attention particulière et de plusieurs sensibilités. L'absence d'une base de donnée suffisante de volatilités implicites ou une mauvaise extrapolation conduisant souvent à une sous-estimation des volatilités implicites des calls et à une hausse de la valeur de VIF et de l'indicateur.

C'est sur la définition de la rentabilité et sur la construction d'un indicateur pertinent que nous nous sommes ensuite penchés. Ces travaux ont été possibles à la suite d'un nouveau travail bibliographique sur les indicateurs existants, sur la définition globale de la rentabilité et sur les caractéristiques des portefeuilles de contrats en assurance Vie afin de transposer la définition au domaine de l'assurance. Un travail de validation de nos résultats de rentabilité a été réalisé. A cet effet, une recherche des données publiques exploitables a été effectuée. Parmi elles, les rapports sur la Solvabilité et la Situation Financière (SFCR) publiés annuellement par les entreprises ont été identifiés et nous ont permis de backtester annuellement l'indicateur. Nous avons pu obtenir une évolution de la rentabilité observée cohérente avec celle extraite des SFCR.

Enfin, l'évaluation de l'impact apporté par les choix de modélisation sur la rentabilité a été analysé, mené par un travail de compréhension sur les données, paramètres, processus de calibrage de chaque modèle et distributions générées. Nous avons également étudié l'impact du paramètre de shift, inhérent aux modèles DDLMM et DDSVLMM et l'impact du niveau de dividendes pour les modèles action. Dans les deux cas une étude des valeurs historiques choisies par les assureurs et de celles utilisées actuellement a permis de mettre en lumière des impacts sur la rentabilité significatifs. Notre étude ayant effectuée dans un contexte de taux bas nous nous sommes enfin posés la question de la conséquence d'une remontée des taux sur les assureurs Vie et les moyens à leur disposition pour se couvrir d'un tel risque.

Tout au long de ce mémoire, il est apparu que les choix de modélisation et le choix des données sont déterminants pour un assureur, tant au niveau de la qualité des scénarios économiques générés, qu'au niveau de la rentabilité de l'assureur, et doivent ainsi faire l'objet d'une attention particulière.

Outils financiers

La compréhension et l'utilisation des modèles retenus nécessitent une attention particulière aux notions et outils financiers fondamentaux, qui interviennent dans la construction du modèle et les processus de calibrage et de validation. Les notations utilisées sont en bonne partie issues de l'ouvrage Brigo et Mercurio [9] et des cours de Peter Tankov [26] : pricing and hedging of financial derivatives.

A.1 Taux d'intérêts

Définition 1 : (Compte de marché monétaire) Un compte de marché monétaire se définit comme un investissement capitalisé continûment au taux sans risque r_t . Notons $B(t)$ sa valeur en $t \geq 0$. L'équation différentielle suivante donne alors sa dynamique :

$$dB(t) = r_t B(t) dt \quad , \quad B(0) = 1$$

Définition 2 (Déflateur) Le déflateur, aussi appelé facteur d'actualisation, noté $D(t, T)$ entre les instants t et T , dénote la valeur en t d'une unité monétaire (un euro dans le cadre de ce mémoire) au temps T . Formellement :

On considère généralement le taux r comme déterministe, néanmoins dans une optique de valorisation de produits financiers fonction de taux d'intérêts, une dynamique stochastique du taux court est nécessaire.

Définition 3 (Temps restant à maturité) Il s'agit de la différence $T - t$ entre l'instant t et la maturité noté T . Il est dénoté par $\tau(t, T)$ dans la suite de ce mémoire.

Définition 4 (Obligation zéro coupon) Il s'agit d'un titre financier versant un euro à sa maturité T . C'est le seul flux généré. Notons $P(t, T)$ sa valeur en t . Pour un taux court déterministe on retrouve $P(t, T) = B(t, T)$, la valeur du compte monétaire.

Définition 5 (Taux spot composé continûment) C'est le taux $R(t, T)$ applicable en t pour une maturité donnée T , tel qu'un investissement d'une valeur de $P(t, T)$ capitalisé à ce taux donne un euro à T . Formellement :

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1 \text{ ou encore } R(t, T) = \frac{-\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

Définition 6 (Taux spot composé simplement) C'est le taux $L(t, T)$ applicable en t pour une maturité donnée T , tel qu'un investissement d'une valeur de $P(t, T)$ à ce taux croît de façon proportionnelle au temps restant à maturité et rapporte un euro à T . Formellement :

$$(1 + L(t, T) \tau(t, T)) P(t, T) = 1 \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

Définition 7 (Taux spot composé annuellement) C'est le taux constant $Y(t, T)$ applicable en t pour une maturité donnée T , tel qu'un investissement d'une valeur de $P(t, T)$ à ce taux et réinvesti une seule fois par an donne un euro à T . Formellement :

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1 \quad \text{avec } 0 \leq t \leq T$$

Définition 8 (Taux court) C'est le taux $r(t)$ à l'instant t , défini comme limite quand $T \rightarrow t^+$ des taux spot présentés ci-haut.

A.2 Taux forward

Les taux forward sont généralement définis par le biais un contrat forward ; ou FRA (Forward Rate Agreement). Ces taux sont caractérisés par trois instants : t , date à laquelle on considère le taux, T sa date d'expiration et S sa maturité.

Définition 9 (Forward Rate Agreement) On note $FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K)$ un contrat forward à l'instant t , de nominal N , de date d'expiration T et maturité S . Le détenteur de ce contrat reçoit un taux fixe K en S , et verse un taux fixe $L(T, S)$ entre T et S . Le pay-off reçu par le détenteur en S s'écrit :

$$N \tau(T, S)(K - L(T, S))$$

On peut alors déterminer la valeur d'un contrat forward en remarquant qu'un montant de $P(t, T)$ en t est équivalent à un montant de $\frac{1}{P(T, S)}$ en S . Ainsi :

$$FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N[P(t, S) \tau(T, S) K - P(t, T) + P(T, S)]$$

Il existe un unique taux K qui annule le contrat en t , c'est le taux forward.

Définition 10 (Taux forward composé simplement) C'est le taux $F(t, T, S)$ applicable en t pour une date d'expiration T et une maturité S , tel que

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right)$$

Définition 11 (Taux forward instantané) C'est le taux $f(t, T)$, limite du taux forward quand $T \rightarrow S$. Formellement :

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}$$

A.3 Taux swap

Le contrat swap est une généralisation du FRA par lequel on échange des flux à taux fixe contre des flux à taux variable à des dates de paiements fixées. Le taux swap est défini par le biais du contrat swap.

Définition 12 (Contrat swap forward) Considérons les dates de paiement T_i , $i \in \{0, M\}$, $T_0 = t$. Notons $T = \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ et $\tau = \tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta$, où $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $\beta \in [\alpha + 1, M]$. On définit un swap forward receveur, évalué en t , de nominal N , ténor $T_\beta - T_\alpha$ et maturité T_β comme un contrat dont le détenteur reçoit un flux fixe, $\tau_i K$ en échange d'un flux variable, $\tau_i L(T_i - T_{i-1})$, à chaque date $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. On note ce contrat $RFS(t, \tau, T, N, K)$. Sa valeur en t s'écrit :

$$RFS(t, \tau, T, N, K) = N \sum_{\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i))$$

On peut définir de manière similaire un swap payeur, noté $PFS(t, \tau, T, N, K)$.

Définition 13 (taux swap forward) De manière analogue au taux forward, le taux swap forward en t , noté $S_{\alpha, \beta}(t)$, correspond au taux fixe qui annule la valeur du contrat $RFS(t, \tau, T, N, K)$ en t . Il s'écrit alors :

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i}$$

Définition 14 (taux swap) Le taux swap en t , noté $S_{\beta}(t)$ correspond au taux swap forward pour $T_{\alpha} = t$. Formellement :

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1 - P(t, T_{\beta})}{\sum_{\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i}$$

Définition 15 (swaption) Considérons les dates $T_0 \leq \dots \leq T_M$, deux entiers α, β compris entre 0 et M , et les dates de paiement $T = T_{\alpha}, \dots, T_{\beta}$. Une swaption est un contrat offrant la possibilité d'entrer dans un swap de strike K , à la maturité T_{α} avec un ténor $T_{\beta} - T_{\alpha}$. Si l'on reçoit le taux fixe il s'agit d'une swaption receveuse et inversement pour une swaption payeuse. Le payoff de la swaption payeuse s'écrit :

$$(\sum_{\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i)))^+$$

A.4 Courbes de taux

Cette section propose de s'intéresser à deux courbes : la courbe de taux swap et les courbes de taux zéro coupon.

A.4.1 Courbe de taux swap

Il s'agit de la courbe construite à partir des taux swap interbancaires ; généralement les taux Euribor pour des maturités de 1 jour à 9 mois et les taux swap fixes pour des maturités de 1 an à 30 ans.

A.4.2 Courbe EIOPA

La courbe EIOPA correspond à la courbe zéro coupon réglementaire, construite à partir de l'extrapolation et interpolation de la courbe de taux swap pour les maturités manquantes. La courbe EIOPA peut être ajustée pour tenir compte de l'ajustement de crédit (CRA) et d'un ajustement de volatilité (VA). L'ajustement de crédit vise à ajuster le spread de crédit entre les taux swap sur IBOR et les taux interbancaires overnight. L'ajustement de volatilité vient lisser les mouvements de spread sur l'ensemble des actifs obligataires inscrits au bilan.

On définit la maturité 20 ans pour le taux swap comme le dernier point liquide de la courbe, ou Last Liquid Point (LLP). Au-delà du LLP la courbe est extrapolée par la méthode de Smith Wilson avec une période de convergence fixée à 40 ans, vers un taux forward ultime (Ultimate Forward Rate ou UFR) fixé à 3,75% au 31/12/2020.

A.5 Univers risque neutre

Afin de pouvoir définir formellement l'univers risque neutre il s'agit d'effectuer quelques rappels sur les numéraires et sur la probabilité risque neutre, outils mathématiques fondamentaux dans la recherche de formules fermées pour le prix d'options dérivées.

Définition 16 (Numéraire) Un numéraire est un instrument financier ne versant aucun dividende et dont le prix est toujours strictement positif.

Théorème 1 (Changement de numéraire) Considérons un numéraire N et supposons l'existence d'une probabilité Q^N , équivalente à la probabilité historique P et telle que le prix de tout actif X exprimé dans le numéraire N sous Q^N soit une martingale. Formellement :

$$\frac{X_t}{N_t} = E^N \left[\frac{X_T}{N_T} | F_t \right] \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

Considérons maintenant un numéraire U arbitraire. Il existe une probabilité Q^U , équivalente à P telle que le prix de tout actif Y exprimé dans le numéraire U soit une martingale sous Q^U . Formellement :

$$\frac{Y_t}{U_t} = E^U \left[\frac{Y_T}{U_T} | F_t \right] \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

On définit alors la densité de Radon-Nykodym pour Q^U :

$$\frac{dQ^U}{dQ^N} = \frac{U_T N_0}{N_T U_0}$$

La densité de Radon Nykodym permet de passer d'un univers de probabilité à un autre et permet notamment de définir l'univers risque neutre et forward neutre en choisissant le numéraire approprié.

Définition 17 (Univers risque neutre) Il s'agit de l'univers ayant le compte monétaire $B(t)$ pour numéraire.

Propriété 1 (Martingalité et drift) Soit X un actif financier sans flux avant sa maturité. D'après le théorème 1, le processus $\left(\frac{X_t}{B(t)} \right)_{t \geq 0}$ est une martingale sous la probabilité associée à B , soit la probabilité risque neutre que nous notons Q . De plus, sous la probabilité risque neutre, le drift de la dynamique d'un actif X est la valeur X_t de cet actif multiplié par le taux sans risque r_t . En effet, il suffit d'appliquer le lemme d'Itô à $(t, X_t) \rightarrow \frac{X_t}{B(t)}$ et d'utiliser que le drift d'une martingale est nul.

Définition 18 (Univers T-Forward Neutre) Il s'agit de l'univers ayant le zéro coupon $P(t, T)$ pour numéraire. Cela est très utile lorsque le produit dérivé à évaluer à une maturité identique au zéro coupon. Le taux forward $F(t, S, T)$ composé simplement est une martingale dans l'univers T-forward-neutre. Formellement :

$$E^T [F(t, S, T) | F_u] = F(u, S, T)$$

On a aussi la relation suivante :

$$E^T [L(S, T) | F_u] = F(u, S, T)$$

Relation qui donne que le taux forward composé simplement sur $[S, T]$ correspond à l'espérance sous la probabilité forward neutre du taux instantané $L(S, T)$ composé simplement.

Schéma de discrétisation d'Alfonsi

Cette section se base sur l'article d'Aurélien Alfonsi sur les schémas de discrétisation des processus CIR [4].

Soit v un processus CIR. Sa dynamique est donnée par, pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_t \\ (\kappa, \theta, v_0, \xi) \in (\mathbb{R}_+^*)^4 \text{ avec } 2\frac{\kappa\theta}{\xi^2} \geq 1 \end{cases}$$

Alfonsi remarque qu'on peut écrire, en notant $\tau_i = t_{i+1} - t_i$:

$$\begin{aligned} v_t &= v_0 + \int_0^t \kappa(\theta - v_s)ds + \xi \int_0^t \sqrt{v_s}dW_s \\ &= \lim \left[v_0 + \sum_{i;t_i < t} \kappa(\theta - v_{t_i})\tau_i + \xi \sum_{i;t_i < t} \sqrt{v_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right] \\ &= \lim \left[v_0 + \sum_{i;t_i < t} \kappa(\theta - v_{t_{i+1}})\tau_i + \xi \sum_{i;t_i < t} \sqrt{v_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \xi \sum_{i;t_i < t} (\sqrt{v_{t_{i+1}}} - \sqrt{v_{t_i}})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right] \\ &\quad (\text{simplification du dernier terme car } d\langle \sqrt{v_t}, W_t \rangle = \xi dt/2) \\ &= \lim \left[v_0 + \sum_{i;t_i < t} \kappa(\theta - v_{t_{i+1}})\tau_i + \xi \sum_{i;t_i < t} \sqrt{v_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \xi \sum_{i;t_i < t} \frac{\xi^2}{2} \tau_i \right] \\ &= \lim \left[v_0 + \sum_{i;t_i < t} \left(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{2} - \kappa v_{t_{i+1}} \right) \tau_i + \xi \sum_{i;t_i < t} \sqrt{v_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right] \end{aligned}$$

La dernière égalité nous mène à considérer le schéma implicite suivant :

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \left(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{2} - \kappa v_{t_{i+1}} \right) \tau_i + \xi \sqrt{v_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Quand $2\kappa\theta > \xi^2$ et $\kappa > 0$, $\sqrt{v_{t_{i+1}}}$ est l'unique racine positive du polynôme du second degré suivant :

$$P(X) = (1 + \kappa\tau_i)X^2 - \xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})X - \left(v_{t_i} + \left(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{2} \right) \tau_i \right)$$

dont la résolution aboutit à :

$$v_{t_{i+1}} = \left(\frac{\xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\Delta_{t_i}}}{2(1 + \kappa\tau_i)} \right)^2$$

avec : $\Delta_{t_i} = \xi^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 4\left(v_{t_i} + \left(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{2}\right)\tau_i\right)(1 + \kappa\tau_i)$.

On peut également procéder selon le même raisonnement mais en partant de la dynamique de $\sqrt{v_t}$ vérifiant :

$$d\sqrt{v_t} = \frac{\kappa\theta - \xi^2/4}{2\sqrt{v_t}}dt - \frac{k}{2}\sqrt{v_t}dt + \frac{\xi}{2}dW_t$$

L'écriture du schéma implicite mène à la résolution d'un autre polynôme du second degré en $\sqrt{v_{t_{i+1}}}$:

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2}\tau_i\right)v_{t_{i+1}} - \left(\frac{\xi}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{v_{t_i}}\right)\sqrt{v_{t_{i+1}}} - \frac{\kappa\theta - \xi^2/4}{2}\tau_i = 0$$

De même, il existe une unique racine positive vérifiant :

$$v_{t_{i+1}} = \left(\frac{\frac{\xi}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{v_{t_i}} + \sqrt{\Delta'_{t_i}}}{2(1 + \frac{\kappa}{2}\tau_i)}\right)^2$$

avec : $\Delta'_{t_i} = \left(\frac{\xi}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{v_{t_i}}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\kappa}{2}\tau_i\right)(\kappa\theta - \xi^2/4)\tau_i$.

Un développement de Taylor à l'ordre 1 en τ_i et 2 en $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$, i.e. qui conserve les termes en $(t_{i+1} - t_i)$, $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ et $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$, donne pour le premier schéma présenté :

$$v_{t_{i+1}} \approx v_{t_i}(1 - \kappa\tau_i) + \xi\sqrt{v_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{\xi^2}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + (\kappa\theta - \frac{\xi^2}{2})\tau_i$$

et pour le second :

$$v_{t_{i+1}} \approx v_{t_i}(1 - \kappa\tau_i) + \xi\sqrt{v_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{\xi^2}{4}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + (\kappa\theta - \frac{\xi^2}{4})\tau_i$$

Ces expansions de Taylor suggèrent à Alfonsi dans [4], la famille de schémas de discrétisation explicites $E(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq \kappa\theta - \frac{\xi^2}{4}$ suivante :

$$v_{t_{i+1}} = \left(\left(1 - \frac{\kappa}{2}\tau_i\right)\sqrt{v_{t_i}} + \frac{\xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{2\left(1 - \frac{\kappa}{2}\tau_i\right)}\right)^2 + \left(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{4}\right)\tau_i + \lambda[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - \tau_i]$$

Bibliographie

- [1] A.Chancel. Mémoire d'actuariat impact des modèles de taux sur les évaluations Solvabilité II en assurance vie. 2017.
- [2] ACPR. La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en france au premier semestre 2019.
- [3] ACPR. La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en france au premier semestre 2020.
- [4] Aurelien Alfonsi. On the discretization schemes for the cir (and besse squared) processes.
- [5] P-E Arrouy. Mémoire d'actuariat, corrélations dans les générateurs de scénarios économiques en univers risque neutre. 2015.
- [6] D.S Bates. Jumps and stochastic volatility : Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. The Review of Financial Studies. 1996.
- [7] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. 1973.
- [8] F. Borel-Mathurin and J.Vedani. Market-consistent valuation : a step towards calculation stability. 2019.
- [9] D. Brigo and F. Mercurio. Interest rate models-theory and practice : with smile, inflation and credit (edited). 2007.
- [10] A. Chaix. Notes de cours Ensaе instruments financiers. 2020.
- [11] M. Chauvigny. Notes de cours Ensaе assurance vie et techniques de valorisation. 2020.
- [12] ACPR Banque de France. règles prudentielles de Solvabilité II. 2019.
- [13] Institut des actuaires. Les générateurs de scénarios économiques. 2018.
- [14] M. Edasser. Quels leviers pour les compagnies d'assurance vie en période de taux bas. 2017.
- [15] EIOPA. Risk-free interest rate term structures (2020b). 2020.
- [16] FFA. L'assurance vie à fin décembre 2020.
- [17] D. Fontanes. Mémoire d'actuariat, Analyse de l'impact des modèles de taux sur le best estimate. 2016.
- [18] N. J. Higham. Computing the nearest correlation matrix a problem from finance, IMA journal of Numerical Analysis.
- [19] J. C. Hull and A. White. Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation of the libor market model. 2000.
- [20] J.Lafond. Mémoire d'actuariat valorisation économique d'un contrat d'épargne multi-supports. 2010.
- [21] N. El Karoui. Note de cours couverture des risques dans les marchés financiers. 2003.
- [22] P. Bonnefoy L. Devineau, P-E. Arrouy and A. Boumezoued. Fast calibration of the libor market model with stochastic volatility and displaced diffusion. 2017.

- [23] IHS Markit Milliman. Data quality and economic scenarios generators, focus on equity implied volatilities. 2020.
- [24] Bonnefoy P. Mémoire d'actuariat, implémentation et calibrage d'un générateur de scénarios Économiques : impact sur la volatilité du solvency capital requirement. 2016.
- [25] D.F Schragger and A.J Pelsser. Pricing swaptions and coupon bond options in affine term structure model, Mathematical Finance. 2006.
- [26] P. Tankov. Notes de cours Ensaé pricing et couverture de produits dérivés. 2020.
- [27] L. Wu and F. Zhang. Libor market model with stochastic volatility. Journal of Industrial & Management Optimization. 2006.