IRM | institut du risk management

Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire de l'Institut du Risk Management et l'admission à l'Institut des actuaires le

Par : Lucie Forgereau et Dorothée Bary

Titre : Prise en compte du risque de crédit dans le calcul du Best Estimate Solvabilité II en assurance vie

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Entreprise : Milliman

Nom : Jérôme Nebout, Directeur Général

Signature et Cachet :

MILLIMAN SAS
14, Avenue de la Grande Armée
75017 PARIS
Tél. : +33 1 42 99 15 60
SIREN : 501 636 534

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Bertrand Lespinasse

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature(s) du candidat(s)

Forgereau

Secrétariat :

Bibliothèque :

REMERCIEMENTS

Nous souhaitons remercier tout d'abord, notre Directeur de Mémoire, M. Bertrand Lespinasse, pour son aide et son soutien tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Nous remercions également chaleureusement toute l'équipe R&D de Milliman Paris pour leur disponibilité et leurs conseils techniques toujours avisés et pertinents.

Nous remercions enfin Jérôme Nebout et Eric Serant pour nous avoir fait confiance et pour nous avoir donné l'opportunité de suivre la Formation d'Actuaire de l'institut du Risk Management.

RESUME

Mots Clés : *Risque de Crédit, Spread de Crédit, Valorisation risque-neutre, Best Estimate, Modèle à forme réduite, Modèle à notation de crédit, Modèle de Jarrow, Lando et Turnbull, Modèle de Longstaff, Mithal et Neis, Transition de rating, Risque-neutralisation, Obligations corporate, Obligations govies.*

Avec un actif composé à près de 80% d'obligations, dont plus de la moitié d'obligations corporate, le risque de crédit constitue un des principaux risques pour les assureurs vie français. Pourtant, la majorité d'entre eux ne l'appréhende pas correctement dans leur calcul du Best Estimate Solvabilité II (maintien d'une approche déterministe dite de « risque-neutralisation »). L'Autorité de Contrôle Prudentielle et de Résolution demande aujourd'hui aux principaux acteurs de mettre en place une modélisation stochastique du risque de crédit dans leur calcul de Best Estimate.

Le présent mémoire a pour objectif de proposer des solutions concrètes et opérationnelles pour la mise en place d'une telle modélisation.

Après avoir passé en revue les principales familles de modèles de diffusion du risque de crédit, nous identifions celles adaptées à un calcul de Best Estimate (modèles à forme réduite et modèles à notation de crédit) et nous analysons plus en détail deux modèles représentatifs de ces familles :

- Le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull,
- Le modèle de Longstaff, Mithal et Neis.

Au-delà des aspects théoriques propres à ces modèles, notre étude couvre également les aspects pratiques et opérationnels de la mise en place d'une telle modélisation.

Ces travaux sont mis en application au sein d'un modèle ALM représentatif du marché français de l'assurance vie. Nous quantifions ainsi l'impact de cette modélisation sur les différents indicateurs Solvabilité II et nous réalisons plusieurs sensibilités (sensibilités financières, sensibilités sur le passif et sur la stratégie ALM) afin de voir comment cet impact évolue dans ces différentes situations.

ABSTRACT

Keywords : *Credit risk, Credit spread, Risk-neutral valuation, Best Estimate, Reduced-form model, Credit rating model, Jarrow-Lando-Turnbull Model, Longstaff-Mithal-Neis Model, Rating transition, Risk-neutralization, Corporate bonds, Govies.*

With an asset composed of nearly 80% of bonds, over half of which are corporate bonds, the credit risk constitutes one of the main risk for the French life insurers. However, most of them do not capture it properly in their Solvency II Best Estimate calculation (there are still using a deterministic approach known as “risk-neutralization”). The French Supervisor is now requesting from the main companies to implement a stochastic modelling of the credit risk in their Best Estimate valuation.

This paper aims to propose practical and operational solutions for the implementation of this stochastic modelling.

After having reviewed the main classes of credit risk diffusion models, we identify those that seem most suited for a use in a Best Estimate valuation (reduced-form models class and credit rating models class) and we analyze in greater detail one representative model for each classes:

- The Jarrow, Lando and Turnbull model,
- The Longstaff, Mithal and Neis model,

Beyond the theoretical aspects related to these models, our study also covers practical and operational aspects linked to the implementation of credit risk modeling.

These works are put into practice within an ALM model representative of the French life insurance market. We quantify the impact of this modelling on the different Solvency II indicators and we compute several sensitivities (financial sensitivities, sensitivities on the liability and on the financial strategy) in order to quantify how this impact is modified in these different situations.

TABLE DES MATIERES

GLOSSAIRE

ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) :

Autorité administrative indépendante, sans personnalité morale, qui surveille l'activité des banques et des assurances en France.

EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) :

Organe consultatif indépendant auprès du Parlement européen, au Conseil de l'Union européenne et la Commission européenne. L'EIOPA est une des trois autorités européennes de surveillance du Système européen de supervision financière, l'autre étant pour le secteur bancaire (Autorité bancaire européenne), la dernière pour le secteur des valeurs mobilières (Autorité européenne des marchés financiers). Ce comité regroupe, pour le domaine des assurances, l'ensemble des autorités de contrôle des états participants dans le cadre de la réforme Solvabilité II.

French GAAP (Generally Accepted Accounting Principles) :

Normes de comptabilité françaises.

Martingale :

En calcul stochastique, une martingale désigne un processus stochastique (famille de variables aléatoires indexées par le temps) tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date est la valeur à cette même date.

Obligation « corporate » :

Obligation émise par un émetteur privé

Obligation « govies » :

Obligation émise par un état.

Option vanille :

Produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance, pendant un temps donné ou à une date fixée. Le terme vanille désigne les options standards, les plus répandues et les plus simples de type call ou put par opposition aux options exotiques plus complexes (options lookback ou à barrière).

Réserve de capitalisation :

Réserve alimentée par les plus-values réalisées sur les cessions d'obligations et reprise symétriquement uniquement en cas de réalisation de moins-values sur ce type d'actifs. Ce mécanisme de dotation/reprise permet de lisser les résultats correspondant aux plus ou moins-values réalisées sur des obligations cédées avant leur terme, en cas de mouvements de taux.

SCR (Solvency Capital Requirement) :

Capital cible requis dans le cadre du projet de réglementation européenne, Solvabilité II. Le SCR correspond au montant de fonds propres estimé comme nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle. Son calcul est basé sur l'exposition aux risques liés à l'activité des organismes d'assurance, c'est-à-dire principalement le risque de souscription, le risque de crédit, le risque opérationnel, le risque de liquidité et le risque de marché.

SICAV (sociétés d'investissement à capital variable) :

Type d'investissement financier de diversification. Il s'agit d'une société qui a pour objectif de mettre en commun les risques et les bénéfices d'un investissement en valeurs mobilières (actions, obligations…), titres de créances négociables, repos et autres instruments financiers.

1. INTRODUCTION

Le bilan économique Solvabilité II repose sur le calcul du Best Estimate, qui constitue la meilleure estimation de la valeur des engagements de l'assureur. Cette estimation se doit de prendre en compte la valeur des options et garanties financières incluses dans les contrats (notamment pour les contrats d'épargne en Euro français : garantie en capital éventuellement assortie d'un taux minimum garanti, et option de rachat), en respectant certains critères, notamment ceux de « risque-neutralité » et de « market-consistency ».

Pour ce faire, les modèles de calcul du Best Estimate mettent en œuvre des valorisations stochastiques (approche « Monte-Carlo ») consistant à évaluer les engagements de l'assureur sur un grand nombre de scénarios aléatoires générés sous la probabilité risque-neutre. Ces scénarios reposent sur la projection stochastique des variables financières influant sur le résultat financier des actifs en représentation des engagements.

L'actif des assureurs vie français étant constitué de près de 80% d'obligations (dont plus de la moitié d'obligations « corporate »), le risque de crédit obligataire, et les variables financières qui lui sont liées (niveau des spreads, taux de défaut) influent nécessairement sur le résultat financier des actifs en représentation des engagements et devraient donc être pris en compte dans les scénarios économiques stochastiques utilisés pour la valorisation du Best Estimate. Or, ce n'est pas le cas chez la majorité des assureurs vie. La plupart conserve encore une approche dite de « risque-neutralisation » qui consiste à supprimer la prime de risque associée au risque de crédit et à négliger le risque de défaut associé. Si cette approche permet de respecter le principe de risque-neutralité, elle ne traduit pas du tout la volatilité associée au risque de crédit et risque ainsi de sous-estimer le coût des options et garanties financières.

Le présent mémoire a pour objectif de proposer des solutions concrètes et opérationnelles pour la mise en place d'une modélisation explicite de risque de crédit dans le calcul stochastique du Best Estimate sur les contrats d'assurance Vie du marché Français.

Après avoir passé en revue les principales familles de modèles de diffusion du risque de crédit existant dans la littérature, nous identifions celles dont les caractéristiques sont adaptées à une utilisation dans un calcul de Best Estimate (famille des modèles à forme réduite et famille des modèles à notation de crédit) et nous analysons plus en détail deux modèles représentatifs de chacune de ces familles :

- Le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT),
- Le modèle de Longstaff, Mithal et Neis (LMN).

Au-delà des aspects théoriques propres à ces modèles (équation de diffusion des spreads de crédit et formule de valorisation associées), notre étude couvre également les aspects pratiques et opérationnels de la mise en place d'une telle modélisation : calibrage de l'ESG, adaptation des tests de martingalité des scénarios économiques, adaptation des inputs du modèle ALM, modification de l'étape de risque-neutralisation, adaptation des formules de valorisation…

Ces travaux sont mis en application au sein du modèle ALM « France Vie », développé par Milliman sous le logiciel Prophet, qui agrège l'ensemble des données du marché Français. L'implémentation d'une modélisation explicite du risque de crédit dans ce modèle (selon les deux approches JLT et LMN) nous permet de quantifier l'impact de cette modélisation sur les indicateurs Solvabilité II suivants :

- Best Estimate,
- SCR,
- Ratio de couverture (fonds propres disponibles rapportés au SCR).

Plusieurs sensibilités sont réalisées (sensibilités financières, sensibilités sur le passif et sur la stratégie ALM) afin de voir comment l'impact de la modélisation des spreads de crédit évolue dans ces différentes situations.

2. LE PRINCIPE DU CALCUL DU BEST ESTIMATE SOUS SOLVABILITE II : UNE VALORISATION STOCHASTIQUE ET RISQUE-NEUTRE

2.1. RAPPELS REGLEMENTAIRES

La notion de « Best Estimate » des provisions techniques et les principes de calcul associés sont définis dans les différents textes liés à la Directive Solvabilité II. Si les grands principes sont déjà définis dans le texte de Niveau 1 (la Directive elle-même), les détails du calcul et la mise en œuvre pratique sont décrits dans les textes de niveau 2 et 3 (Règlement délégué et notices de l'ACPR). Il est important de revenir à ces textes pour comprendre ensuite la façon dont ils sont appliqués à la prise en compte du risque de crédit dans le calcul du Best Estimate.

2.1.1 La définition du Best Estimate comme l'espérance mathématique des flux futurs

La Directive Solvabilité II définit la méthodologie de valorisation des passifs d'assurance qui doivent correspondre au « *montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance.* » (Article 76-2 de la Directive). Ce montant correspond à la somme du Best Estimate et de la Risk-Margin (Article 76-1 de la Directive).

Le Best Estimate est défini comme la valeur actualisée des flux futurs probabilisés : « *Le Best Estimate correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents*. » (Article 77-2 de la Directive).

La notion de flux futurs probabilisés renvoie directement à la notion mathématique d'espérance en probabilité. Ainsi le Best Estimate peut être défini comme suit :

$$Best\ Estimate = E\left[\sum_t ZC(0,t) \times F_t\right] \qquad (1)$$

Où :

- F_t correspond aux flux futurs payés par l'assureur en date t
- Et $ZC(0,t)$ aux facteurs d'actualisation entre la date 0 et la date t

2.1.2 L'exigence d'une valorisation « market consistent »

Le principe d'une valorisation « market-consistent », c'est-à-dire cohérente avec les prix observés sur les marchés financiers est également énoncé dans la directive : « *Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché)* » (Article 76 – 3 de la Directive).

Cette notion de valorisation « market-consistent » renvoie à la notion de valorisation d'instruments financiers en théorie financière, réalisée en probabilité risque-neutre cohérente avec le prix des instruments financiers observables sur les marchés. L'espérance (1) ci-dessus s'écrit donc plus précisément :

$$Best\ Estimate = E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_t ZC(0,t) \times F_t\right] \qquad (2)$$

Où :

- $\mathbb{Q}$ désigne la probabilité risque neutre cohérente avec les prix des instruments financiers observés sur les marchés

2.1.3 La prise en compte de l'ensemble des options et garanties financières incluses dans les contrats

L'article 79 de la Directive stipule que pour le calcul des provisions techniques (et donc du Best Estimate), « *les entreprises d'assurance et de réassurance doivent tenir compte de la valeur des garanties financières et de toute option contractuelle incluses dans leurs contrats d'assurance et de réassurance* ». Les principales options et garanties financières incluses dans les contrats d'assurance vie français sont décrites au paragraphe 2.2.1 ci-dessous.

L'article 32 du règlement délégué précise cette prise en compte : *« Lors du calcul de la meilleure estimation, les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de l'ensemble des éléments suivants:*

(a) toutes les garanties financières et options contractuelles incluses dans leurs contrats d'assurance et de réassurance;

(b) tous les facteurs susceptibles d'influer sur la probabilité que les preneurs exerceront les options contractuelles ou réaliseront la valeur des garanties financières »

Les « facteurs susceptibles d'influer […] » couvrent, entre autre, les variables financières impactant le taux de rendement financier de la compagnie, et notamment le niveau des spreads de crédit dont dépend la valorisation des obligations détenues en portefeuille.

2.1.4 La méthodologie de valorisation

Les notices ACPR (textes de niveau 3 de la Directive Solvabilité II) précisent la mise en œuvre opérationnelle de cette valorisation.

L'article 5.11 de la notice ACPR dédiée aux Provisions Techniques indique deux méthodes possibles pour la valorisation des coûts et options financières :

- L'utilisation de « *formules fermées* »
- La mise en place d'une *« évaluation stochastique »*

Le recours à des formules fermées est très difficile pour les contrats d'Assurance Vie français. En effet, ceux-ci comportent des options complexes, faisant intervenir des éléments discrétionnaires (participation aux bénéfices discrétionnaire accordée par l'assureur, comportement des assurés,…) qui ne peuvent pas être modélisés aisément par des options « vanilles » pour lesquelles des formules fermées sont disponibles. Néanmoins, une très faible minorité d'assureurs a recours à une méthodologie dite de « replicating portfolio » qui repose indirectement sur l'utilisation de formules fermées. Dans cette approche, le passif est répliqué par une combinaison (souvent complexe) d'instruments financiers pour lesquels des formules fermées de valorisation sont disponibles.

Dans la suite de notre étude, nous nous concentrerons sur la seconde méthode de valorisation, basée sur une approche stochastique, qui correspond à la méthode retenue par la grande majorité des compagnies d'Assurance Vie en France. Nous détaillons le principe de cette approche dans la section 2.2.2 ci-dessous.

2.1.5 La définition du taux sans risque

En parallèle de la définition du Best Estimate et de ses méthodes de calcul, les textes Solvabilité II imposent un autre élément essentiel pour la suite de notre propos : la définition du taux sans risque. Il convient de noter que cette définition est largement conventionnelle. Plus que d'une vérité mathématique ou financière, celle-ci résulte de plusieurs années de discussions et de compromis entre l'industrie, l'EIOPA et les instances européennes.

Les textes définissent le taux sans risque à partir de la courbe des taux swap (qui correspond aux taux du marché interbancaire) à laquelle plusieurs retraitements sont appliqués :

- Les taux sont diminués du Credit Risk Adjusment (CRA) avec pour objectif de retirer des taux swap la prime de risque liée au risque de crédit des contreparties bancaires. Au 31/12/2017, cet ajustement était calibré à -10 bps[1]
- Les taux sont augmentés du Volatility Adjusment (VA), précédemment nommé « prime de liquidité ». L'ajout de cette prime a donné lieu à beaucoup de discussions entre l'industrie et les autorités européennes. La raison d'être de cette prime est de tenir compte de la capacité des assureurs à détenir leurs investissements obligataires à long terme, leur permettant de ne pas subir pleinement la volatilité des marchés de taux, notamment celle liée aux problèmes de liquidité. Cette prime est donc calibrée comme une fraction du spread estimé sur un portefeuille obligataire type des assureurs européens. Lorsque les spreads obligataires s'écartent, le VA augmente ce qui permet aux assureurs d'actualiser leurs flux de passif sur un taux plus élevé. La diminution du Best Estimate qui en résulte permet de compenser partiellement la baisse des valeurs de marché des actifs obligataires. Au 31/12/2017, cet ajustement était calibré à + 4 bps[1].
- Au-delà de la dernière maturité pour laquelle il existe un marché suffisamment liquide pour définir un taux swap fiable (Last Liquid Point), la courbe des taux est prolongée vers un taux long terme (Ultimate Forward Rate ou UFR) calibré sur des bases macro-économiques. Pour les taux Euro, le Last Liquid Point est fixé à 20 ans et la courbe converge en 40 ans vers un UFR actuellement fixé à 4,05 bps.

2.2. L'UNIVERS RISQUE-NEUTRE ET LA VALORISATION DES OPTIONS INCLUSES DANS LES CONTRATS

2.2.1 Les options incluses dans les contrats d'Epargne en Euros

Le marché français de l'assurance reste largement dominé par les contrats d'Epargne-Retraite en Euros (qui représentent au 31/12/2017 81% des provisions mathématiques[2]).

Le contrat d'Epargne en Euros français offre les garanties suivantes :

- Une garantie en capital assortie d'une option de rachat,
- Eventuellement un Taux Minimum Garanti (TMG), venant revaloriser chaque année le capital,
- Une garantie de participation aux bénéfices techniques et financiers.

Ces garanties font naitre des options au bénéfice de l'assuré :

- L'assuré a la possibilité de racheter son épargne quand il le souhaite, à une valeur de rachat garantie qui ne pourra être inférieure au capital initial revalorisé d'un éventuel TMG et de la participation aux bénéfices attribuée chaque année jusqu'au rachat.
- La présence de taux minimum garanti (TMG) et/ou de clauses de participation aux bénéfices techniques et financiers induit un partage asymétrique des résultats financiers entre assureur

[1] *Source : eiopa.europa.eu, publication mensuelle de la structure de la courbe des taux sans risque (fichier Excel EIOPA_RFR_20171231_Term_Structures)*

[2] *Source : données France Vie 2017, voir section 4.1.1*

et assurés. Ce partage asymétrique est au bénéfice de l'assuré qui se voit attribuer une partie des résultats financiers et techniques lorsqu'ils sont positifs mais ne supporte aucune perte lorsque les résultats sont négatifs.

Il convient de noter que dans l'environnement de taux très bas actuel, même un TMG à 0% constitue une garantie financière très matérielle, qui vient réduire significativement la valeur de portefeuille (VIF) et, de façon équivalente, augmenter le Best Estimate.

2.2.2 Le principe de la valorisation Monte-Carlo de ces options

La valeur de ces options ne peut pas être quantifiée par une projection des flux du contrat sur un unique scénario déterministe moyen. En effet, le coût de ces options, qui sont généralement en dehors de la monnaie, n'apparait pas dans un scénario central. Ce n'est qu'en cas de scénarios financiers défavorables (par exemple, scénario de faible rendement financier pour l'option liée au TMG ou scénario de remontée brutale des taux pour l'option de rachat) que le coût pour l'assureur, lié à la présence de ces options, se fait sentir. Il est alors nécessaire de balayer l'univers des possibles pour évaluer correctement le coût de ces options. On parle de projection stochastique (voir rappel réglementaire en section 2.1.4). Cette approche est utilisée depuis plusieurs décennies en finance pour évaluer le prix des options échangées sur les marchés, mais elle est plus récente dans le domaine de l'assurance (apparition de la Market Consistant Embedded Value au début des années 2000).

Cette approche repose sur le principe de valorisation Monte-Carlo, consistant à approcher l'espérance des flux futurs par la moyenne de ces flux sur un grand nombre de scénarios. Selon le théorème central limite, l'estimateur de la moyenne converge (en probabilité) vers l'espérance à une vitesse proportionnelle à la racine carrée du nombre de scénarios.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t} ZC(0,t)_i \times F_{t,i} \xrightarrow[Probabilité]{n\to\infty} E^{\boldsymbol{Q}}\left[\sum_{t} ZC(0,t) \times F_t\right] = Best\ Estimate \qquad (3)$$

La valorisation du Best Estimate repose donc sur la projection, sur un grand nombre de scénarios stochastiques, des flux futurs du contrat. Pour mesurer correctement le coût des options et garanties financières incluses dans les contrats, ces scénarios stochastiques doivent intégrer l'ensemble des « aléas » impactant la réalisation de ces options, et notamment l'ensemble des variables financières dont dépendent les rendements financiers de l'assureur.

2.2.3 La projection stochastique risque-neutre et maket-consistant des variables financières

Comme demandé par les textes Solvabilité II (cf paragraphe 2.1.2), les scénarios économiques sur la base desquels l'approche stochastique décrite précédemment est mise en œuvre doivent être market-consistent et risque-neutres.

2.2.3.1 Risque-neutralité

En marché complet, la probabilité risque-neutre correspond à l'unique probabilité, équivalente à la probabilité historique, sous laquelle le processus de prix des actifs actualisé est martingale. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme « risque-neutre » : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque). L'existence et l'unicité de cette probabilité est l'une des conséquences des hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude des marchés. La théorie financière démontre que le prix d'un instrument financier correspond à l'espérance des flux générés par l'instrument évaluée sous la probabilité risque-neutre. De façon similaire à l'évaluation des instruments financiers en finance de marché, le calcul du Best Estimate est basé sur le calcul d'une espérance sous cette même probabilité.

L'exigence de risque-neutralité impose donc que les variables financières projetées conduisent à des espérances de rendements moyen égales au taux sans risque pour chacun des actifs ; le taux sans risque étant défini comme rappelé ci-dessus (paragraphe 2.1.5).

2.2.3.2 Caractère Market-consistent

Le caractère « Market-Consistent » impose que les variables financières projetées soient cohérentes avec les prix des instruments financiers observés par les marchés. Autrement dit, que l'utilisation des scénarios économiques produits permette de recalculer les prix de marché par une méthode de Monte-Carlo.

2.2.3.3 Exemple de mise en œuvre concrète sur les principales variables financières projetées par les assureurs Vie

Les principales variables financières projetées jusqu'à présent par les assureurs vie dans leur modèle de Best Estimate sont listées dans le tableau ci-dessous. Pour chacune d'elles, la méthodologie utilisée pour assurer le caractère risque-neutre et market-consistent est précisée :

Risque-neutralité et caractère market-consistent des principales variables financières		
	Risque-neutralité / Martingalité	**Caractère Market-Consistent**
Courbes des taux sans risque	La dynamique des taux sans risque doit assurer le caractère martingale de la projection et donc la cohérence avec la courbe des taux sans risque actuelle. Les scénarios produits doivent donc vérifier les propriétés suivantes : - A chaque date de projection t, l'espérance des facteurs d'actualisation au taux sans risque doit converger vers le prix du zéro-coupon de maturité t sur la courbe des taux initiale : **E[Ft]=ZC(0,t)** *(où Ft correspond au facteur d'actualisation et ZC(0,t) le prix du zéro-coupon déduit de la courbe des taux initiale)* - A chaque date de projection t, l'espérance du prix du zéro-coupon nominal arrivant à échéance en T actualisé au taux sans risque doit converger vers le prix du zéro-coupon nominal de maturité t+T sur la courbe des taux nominaux initiale **E[Ft×ZC(t,T)]=ZC(0,t+T)**	La projection des taux sans risque doit être en ligne à la fois avec le prix des obligations sans risque et avec le prix des instruments optionnels de taux tels que les swaptions, les caps/floors, etc... La cohérence avec le prix des obligations sans risque se ramène à la cohérence avec la courbe des taux zéro-coupon sans risque qui est assurée par le caractère risque-neutre (cf ci-contre). La cohérence avec les instruments optionnels de taux permet de calibrer le niveau de volatilité du modèle de taux d'intérêt.
Rendement des actions	Le rendement moyen des actions doit être égal aux taux sans risque. Autrement dit, l'ensemble de la prime de risque action est annulée. Ce qui se traduit de la façon suivante : A chaque date de projection t, l'espérance des indices action actualisés aux taux sans risque converge vers 1. **E[FtSt]=1** *(où Ft correspond au facteur d'actualisation et St le niveau de l'indice action)*	La distribution des rendements actions doit être en ligne avec le prix des options échangées sur les marchés, ce qui implique que la volatilité du modèle de projection soit en ligne avec la volatilité implicite du moment.
Rendement des	Le rendement moyen de l'immobilier doit être égal aux taux sans risque, ce qui se traduit de la façon suivante :	Il n'existe pas de marché optionnel suffisamment liquide sur les placements immobilier qui puisse être utilisé pour calibrer

placements immobilier	A chaque date de projection t, l'espérance des indices actions actualisés au taux sans risque converge vers 1. **E[FtIt]=1** *(où Ft correspond au facteur d'actualisation et It le niveau de l'indice immobilier)*	la volatilité de l'indice immobilier projeté. Comme le prévoient les textes Solvabilité II dans ce cas, le niveau de volatilité est calibré sur la base de la volatilité historique.

2.3. L'APPLICATION DE CES PRINCIPES AU RISQUE DE CREDIT

2.3.1 La méthodologie utilisée jusqu'à présent : la risque-neutralisation

Les placements des assureurs Vie français comportent une part importante d'obligations risquées : environ 45% d'obligations corporate[3], auxquels viennent s'ajouter 35% d'obligations govies dont certaines présentent également un risque de crédit significatif.

Ces obligations offrent généralement un sur-rendement par rapport au taux sans-risque qui vient rémunérer le risque plus important qu'elles comportent (ce point est détaillé dans la partie 3.1.1). On parle de spread de crédit. Ce spread de crédit est variable dans le temps et une variation de spread entraine une variation du prix des obligations risquées :

- Une hausse du spread de crédit entraine une dévalorisation du prix de l'obligation risquée (celle-ci est jugée comme plus risquée que précédemment[4])
- Une baisse du spread de crédit entraine une revalorisation du prix de l'obligation risquée (celle-ci est jugée comme moins risquée que précédemment[5])

Le risque de crédit et le niveau de spread de crédit qui en découle constituent donc une source de variabilité très importante dans la valeur des placements des compagnies d'Assurance Vie. Pourtant, jusqu'à très récemment, cette variable financière n'était quasiment jamais projetée dans les modèles de valorisation stochastique des Assureurs Vie français, qui se contentaient de projeter les taux sans risque et les autres actifs risqués (actions, immobiliers).

Cette « occultation » du risque de crédit au sein des projections financières imposait aux assureurs d'effectuer un retraitement préalable sur leurs obligations risquées afin de maintenir le caractère risque-neutre de leur projection. En effet, comme mentionné précédemment, les obligations risquées offrent un sur-rendement qui se traduit généralement par un coupon plus élevé que celui des obligations sans risque. Ce coupon plus élevé n'est pas compatible avec l'exigence de risque-neutralité des projections (qui impose que tous les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque) et il est nécessaire de le retirer. C'est ce qu'on appelle communément la « risque-neutralisation » des obligations. Tout comme on retire la prime de risque action dans les projections risque-neutre, l'opération de risque-neutralisation consiste à retirer la prime de risque que constitue le sur-rendement des obligations risquées.

Le retraitement effectué doit garantir la risque-neutralité de la projection, autrement dit le caractère martingale du prix de l'obligation risquée. La relation suivante doit donc être vérifiée (le prix initial de l'obligation risquée est égal à l'espérance sous la probabilité risque-neutre des flux futurs de l'obligation):

[3] *Source : données France Vie 2017, voir section 4.1.1*

[4] *Une hausse du spread de crédit peut également résulter d'une augmentation de l'aversion au risque ou de l'émergence d'autres produits concurrentiels*

[5] *Symétriquement, une baisse du spread de crédit peut également résulter d'une diminution de l'aversion au risque ou de la disparition/raréfaction de produits concurrentiels*

$$Pr(0,T) = E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} F_t \times C \times N + \ F_T \times N\right] \qquad (4)$$

Où :

- $Pr(0,T)$ correspond au prix en $t = 0$ de l'obligation risquée de maturitée T
- C variable aléatoire correspondant au coupon de l'obligation en l'absence de défaut de l'émetteur et égale à 0 en cas de défaut.
- N variable aléatoire correspondant au nominal de l'obligation en l'absence de défaut de l'émetteur et égale à 0 en cas de défaut.
- F_t correspond au facteur d'actualisation au taux sans risque entre 0 et t

Si on néglige (comme le faisaient jusqu'à présent les assureurs) le risque de défaut de ces obligations risquées, l'ensemble des flux futurs est certain (l'espérance du facteur d'actualisation devenant le prix du zéro-coupon). On peut donc retirer le terme d'espérance, et l'équation devient

$$P_r(0,T) = \sum_{t=1}^{T} ZC(0,t) \times C \times N + \ ZC(0,T) \times N \qquad (5)$$

(avec $ZC(0,t)$ correspondant ici au prix d'une obligation zéro-coupon non risquée de maturité t)

Mais dans le cas d'une obligation risquée, cette équation n'est pas vérifiée puisque le coupon est supérieur au taux sans risque. Dans l'exemple simplifié d'une obligation de maturité 10 ans au pair offrant un coupon de 4% alors que le taux sans risque est supposé égal à 1,5% pour toutes les maturités, la valeur actualisée des flux est égale à 123% du nominal, et se situe donc très au-dessus de la valeur de marché de l'obligation (100% du nominal). Cette décote observée sur la valeur de marché traduit évidement le risque lié à l'obligation et (notamment) la probabilité que les coupons ne soient pas payés et/ou que le nominal ne soit pas remboursé.

L'opération de risque-neutralisation consiste donc à retraiter les flux de l'obligation pour que l'équation ci-dessus soit vérifiée. Il existe deux grandes méthodes pour le faire :

- Soit on ne diminue que le taux de coupon (en laissant le remboursement final égal à 100% du nominal). Dans notre exemple, le taux de coupon qui permet d'égaliser les deux membres de l'équation est évidement égal à 1,5%, soit le taux sans risque. Dans ce cas, opération de risque-neutralisation va consister à retrancher du coupon tout l'écart entre le taux de coupon risqué (4%) et le taux sans risque.
- Soit on diminue à la fois les coupons et le remboursement final dans les mêmes proportions. Dans l'exemple précédent, cela reviendrait à diviser le coupon et le remboursement final par 123%.

Suite à l'opération de risque-neutralisation, les assureurs projetaient donc des obligations risquées avec des paramètres techniques modifiés (taux de coupon, remboursement final, taux actuariel), en s'assurant ainsi du caractère risque-neutre de leur projection.

2.3.2 Les limites de la risque-neutralisation

Si la risque-neutralisation permet bien de maintenir le caractère risque-neutre de la projection, il ne permet pas d'obtenir une valorisation Best Estimate cohérente. En effet, comme vu précédemment, le risque de crédit et le spread de crédit qui en découle constituent une source de variabilité importante, rendant les obligations risquées significativement plus volatiles : en plus de la volatilité liée à la variabilité des taux sans risque, les obligations risquées sont soumises à des fluctuations liées à l'anticipation des marchés sur le niveau du risque de crédit. Lorsque les spreads de crédit s'écartent de 1%, cela a le même effet sur le prix des obligations risquées qu'une hausse de 1% des taux sans risque.

Le graphique ci-dessous démontre sur la période récente que les spreads de crédit peuvent être beaucoup plus volatiles que les taux sans risque.

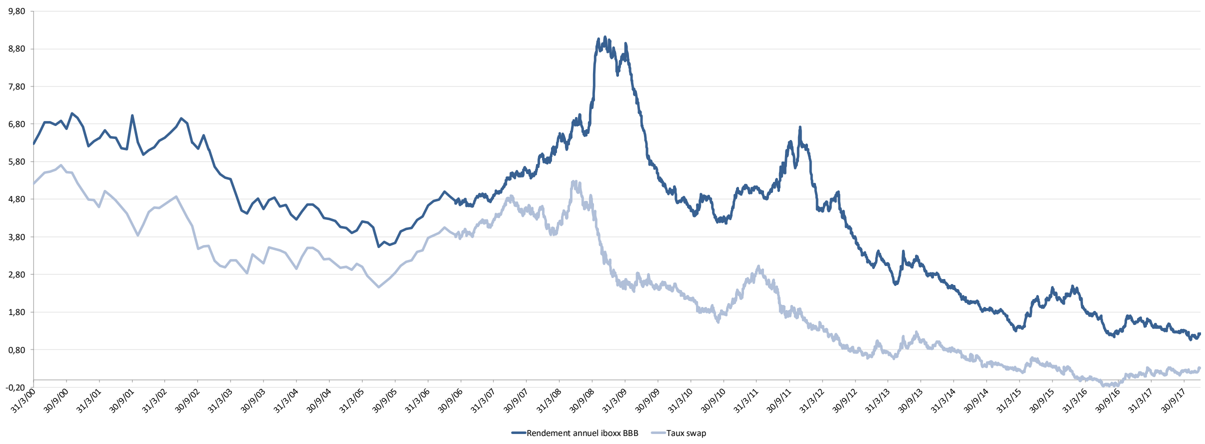


Figure 1 : Comparaison des taux SWAP et des rendements obligataires BBB d'avril 1999 à décembre 2017[6]

Le graphique ci-dessous présente l'évolution journalière sur les années passées des spreads de crédit corporate sur les notations AA, A et BBB.

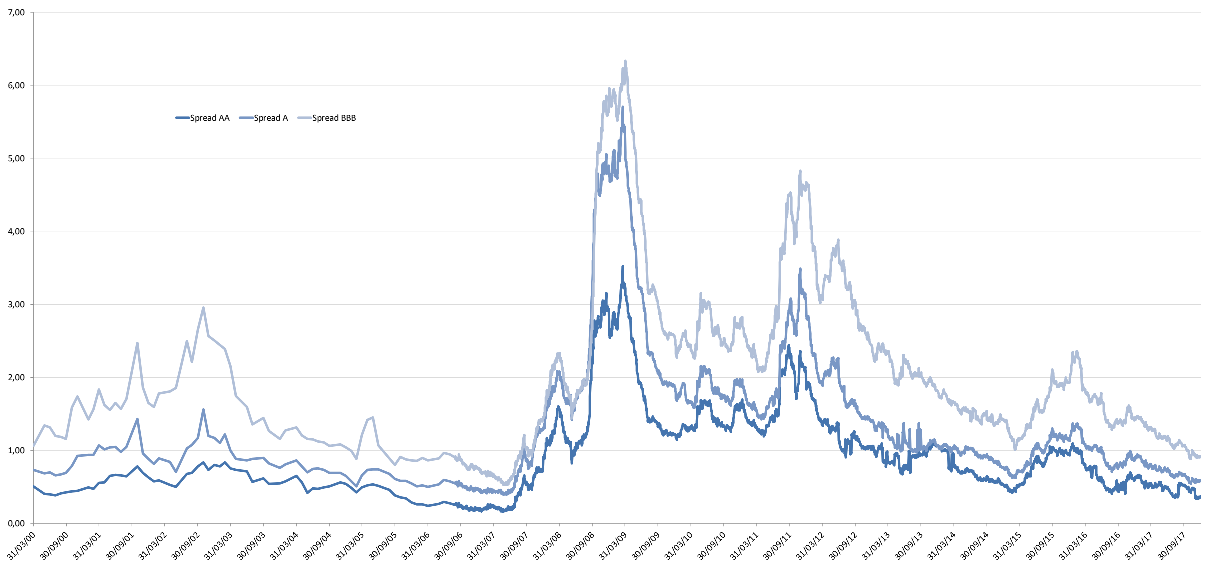


Figure 2 : Comparaison des spreads corporates AA, A et BBB d'avril 1999 à décembre 2017[4]

[6] *Source des données : products.markit.com*

L'approche par risque-neutralisation utilisée jusqu'à présent par la majorité des assureurs vie conduit donc à sous-estimer significativement la volatilité des valeurs de marché de leurs actifs. Or cette volatilité impacte directement la valeur des options et garanties financières incluses dans leurs contrats. Plus la volatilité des placements est élevée plus le coût de ces options est important. Négliger la volatilité apportée par le risque de crédit (qui concerne plus de 45% du portefeuille obligataire) conduit donc, a priori, à sous-estimer le Best Estimate.

2.3.3 Vers une modélisation complète du risque de crédit

Les premiers assureurs français à avoir modélisé explicitement le risque de crédit de façon stochastique dans leur modèle risque-neutre de Best Estimate sont ceux qui se sont orientés vers la mise en place d'un modèle interne sous Solvabilité II. En effet, dans ce type de modèle, en amont de la projection risque-neutre, il est nécessaire de réaliser une projection monde-réel à horizon 1 an à partir de laquelle le SCR est calculé (sur la base du quantile à 99,5% de la distribution). Ces projections monde-réel ont naturellement inclus une projection stochastique des spreads de crédit (condition nécessaire pour prendre en compte le risque de spread dans le calcul du SCR). Dès lors, il semblait naturel pour ces assureurs de développer également une projection stochastique des spreads de crédit dans les projections risque-neutre servant au calcul du Best Estimate.

Par la suite, les revues de l'ACPR réalisées sur les modèles risque-neutre de calcul du Best Estimate des principaux assureurs vie ont systématiquement conduit à une recommandation demandant la prise en compte stochastique des spreads de crédit.

A l'heure actuelle, moins d'une quinzaine d'acteurs français a déjà implémenté cette approche stochastique pour les spreads de crédit, mais on peut légitimement penser que cette approche va largement se généraliser dans les années qui viennent.

3. LES MODELES DE RISQUE DE CREDIT ADAPTES A UNE MODELISATION RISQUE-NEUTRE

3.1. QU'EST-CE QUE LE RISQUE DE CREDIT ?

3.1.1 La définition du risque de crédit

Le risque de crédit obligataire peut être défini comme la perte potentielle que peut subir le détenteur d'une obligation suite à un événement de crédit touchant l'émetteur de l'obligation. De manière plus précise, le risque de crédit englobe deux notions qui diffèrent en fonction de l'événement de crédit à l'origine des pertes :

- le risque de défaut : ce risque correspond à l'incapacité de l'emprunteur à honorer ses engagements, c'est-à-dire à rembourser sa dette (principal + coupons). Dans une telle situation, les créanciers (détenteurs de l'obligation) sont susceptibles de subir une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant dû.
- le risque de dégradation de la qualité de crédit : ce risque correspond à une détérioration de la santé financière de l'émetteur obligataire. Il en résulte une hausse de la prime de risque (ou spread, cf ci-après) et une baisse de la valeur de marché du titre. Dans cette situation, le détenteur de l'obligation subit une perte s'il est amené à céder le titre obligataire (réalisation d'une moins-value)

Ces deux risques sont évidemment inter-corrélés : si la survenance d'un évènement de défaut entraine nécessairement la dégradation de la qualité de crédit (et la notation associée, cf. ci-après), la dégradation de la qualité de crédit peut également entrainer une difficulté pour l'émetteur à se refinancer sur les marchés entrainant éventuellement un événement de défaut.

3.1.2 Les notations de crédit

La qualité de crédit d'un émetteur ou d'un titre obligataire donné peut-être évaluée par une notation (ou « rating ») attribuée par une agence de notation financière indépendante. Le rating est soumis à une surveillance continue qui peut donner lieu à une révision.

Les agences de notation les plus fréquemment citées sont Moody's, Standard & Poor's et Fitch Ratings. Le tableau de la page suivante détaille l'échelle de notation de ces agences.

Les agences de notation ont fait l'objet de critiques importantes ces dernières années :

- Certaines agences de notation ont été critiquées du fait de notations largement surévaluées. Les crises financière récentes ont démontré que les différents ratings peuvent être revus rapidement à la baisse (lors de la crise des subprimes les agences Moody's, Standard and Poor's, Fitch ont pendant plusieurs années donné la meilleure notation financière (AAA) aux placements de type CDO avant de se rendre compte qu'il fallait brutalement l'abaisser. De même, en 2008, la banque d'investissement multinationale Lehman Brothers est notée « A » la veille de son effondrement…).
- Par ailleurs les agences sont critiquées pour leur manque d'indépendance et le risque de conflit d'intérêt lié à leur mode de financement : ce sont en effet les émetteurs qui rémunèrent les agences pour l'établissement de leur notation. Selon le barème 2009 de Standard & Poor's pour les États-Unis par exemple, une entreprise doit verser au minimum 70 000 dollars au début du processus de notation, puis un abonnement de «surveillance» atteignant environ la moitié de cette somme initiale. Chaque fois qu'elle émet de la dette sur les marchés, elle

s'acquitte alors en plus d'une commission de 0,045 % de la transaction. 90 % du chiffre d'affaires des agences de notation provient des entités notées.

Dans la suite de notre étude, nous retiendrons les 7 classes de notations principales (plus la classe correspondant au défaut) présentées dans la table ci-dessous (AAA, AA, A BBB, BB, B, CCC, D).

	Standard & Poor's		**Fitch**		**Moody's**		**Interprétation financière**
	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	
Investissement	A1+	AAA	F1+	AAA	P1	Aaa	Meilleure qualité de signature possible. Capacité de remboursement extrêmement élevée non susceptible d'être affectée par les événements extérieurs.
		AA+		AA+		Aa1	Excellente qualité de signature. Capacité de remboursement très élevée, non significativement vulnérable.
		AA		AA		Aa2	
		AA–		AA –		Aa3	
	A1	A+	F1	A+		A1	Très bonne qualité de signature. Capacité de remboursement élevée, mais éventuellement vulnérable aux changements de conjoncture économique.
		A		A		A2	
	A2	A–	F2	A–	P2	A3	
		BBB+		BBB+		Baa1	Bonne qualité de signature. Capacité de remboursement satisfaisante mais pouvant être affectée par des changements de conjoncture défavorable.
	A3	BBB	F3	BBB	P3	Baa2	
		BBB–		BBB–		Baa3	
Spéculatif	B	BB+	B	BB+	Not prime	Ba1	Spéculatif. Risque de défaut non négligeable, particulièrement, en cas de conjoncture défavorable.
		BB		BB		Ba2	
		BB–		BB–		Ba3	
		B+		B+		B1	Hautement spéculatif. Risque de crédit significatif, mais avec une marge de sécurité rémanente. Engagements financiers encore tenus. Possibilité de redressement.
		B		B		B2	
		B–		B–		B3	
	C	CCC	C	CCC		Caa	Risque de défaut élevé. Capacité de remboursement conditionnelle à des restructurations. CC indique un défaut probable. C indique un défaut de paiement imminent.
		CC		CC		Ca	
		C		C		C	
	D	D	D	D		D	Défaut

3.1.3 La définition du spread de crédit et son mode de calcul

Le spread de crédit désigne le surplus de rendement offert par une obligation risquée par rapport à une obligation sans risque, rémunérant notamment le risque de crédit associé à l'obligation.

Le spread de crédit se définit donc par rapport à un taux sans risque qui reste à préciser. Longtemps, les taux des emprunts d'état ont été utilisés. Mais suite aux dernières crises financières (notamment la crise de la dette dans la zone euro en 2011), il devient de plus en plus difficile de considérer les emprunts d'état comme sans risque. La directive Solvabilité II prévoit un taux sans risque basé sur la courbe des taux swap (cf. paragraphe 2.1.5). Nous retiendrons donc ce taux sans risque dans la suite de notre étude.

Le spread de crédit correspond alors à l'écart de taux actuariel dont il faut décaler de façon uniforme et parallèle la courbe des taux sans risque pour, en actualisant les flux financiers de l'obligation sur cette nouvelle courbe, aboutir au prix, constaté sur le marché, de l'obligation.

$$P_r(0,T) = \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{(1 + r_t + s)} \times C \times N \right] + \frac{1}{(1 + r_T + s)} \times N \qquad (6)$$

Où :

- $P_r(0,T)$ correspond au prix en $t = 0$ de l'obligation risquée de maturité T
- C correspond au coupon de l'obligation risquée
- N correspond au nominal de l'obligation risquée
- r_t correspond au taux sans risque entre 0 et t
- s correspond au spead de crédit

3.1.4 Les différentes composantes du spread de crédit

Le sur-rendement que constitue le spread de crédit ne rémunère pas exclusivement le risque de défaut de l'obligation. En effet, on constate historiquement que le spread est très largement surestimé par rapport à la probabilité de défaut historique des obligations.

Pour démontrer ce décalage entre le spread de crédit et le risque de défaut réel de l'obligation, nous avons réalisé l'analyse suivante, basée sur la matrice de transition de rating proposée par Standard & Poors. Cette matrice donne la probabilité pour une obligation d'une notation initiale donnée de migrer vers une autre notation (ou de tomber en défaut) à horizon 1 an.

Matrice de transition de rating à horizon un an au 31/12/2017

		Notation au bout d'un an							
		AAA	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**Default**
Notation initiale	***AAA***	89.8%	9.4%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%
	AA	0.5%	90.5%	8.2%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%
	A	0.0%	1.8%	92.2%	5.5%	0.3%	0.1%	0.0%	0.1%
	BBB	0.0%	0.1%	3.7%	91.4%	4.0%	0.5%	0.1%	0.2%
	BB	0.0%	0.0%	0.1%	5.4%	85.5%	7.5%	0.6%	0.8%
	B	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	5.8%	84.7%	5.1%	4.1%
	CCC	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.7%	15.6%	51.5%	31.8%
	Default	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%

On lit sur cette matrice que la probabilité pour une obligation notée A de tomber en défaut à horizon 1 an est de l'ordre de 0,1%. Or le spread offert par les obligations corporate court terme noté A a été en moyenne de 1,5% sur les 19 dernières années (il n'est jamais descendu en dessous de 0,4% et à même pu monter jusqu'à 5,7% en 2009). Ce qui signifie qu'à horizon 1 an, le sur-rendement offert par l'obligation (1,5% du nominal) est très supérieur à la perte moyenne attendu liée au défaut (0,1% du nominal).

Cette surestimation se vérifie également sur des obligations plus long-terme. Pour simuler la migration de crédit d'une obligation et sa probabilité de tomber en défaut à horizon de la maturité (par exemple 10 ans), nous composons la matrice ci-dessus 10 fois. Le graphique suivant illustre la migration de rating d'une obligation initialement notée A :

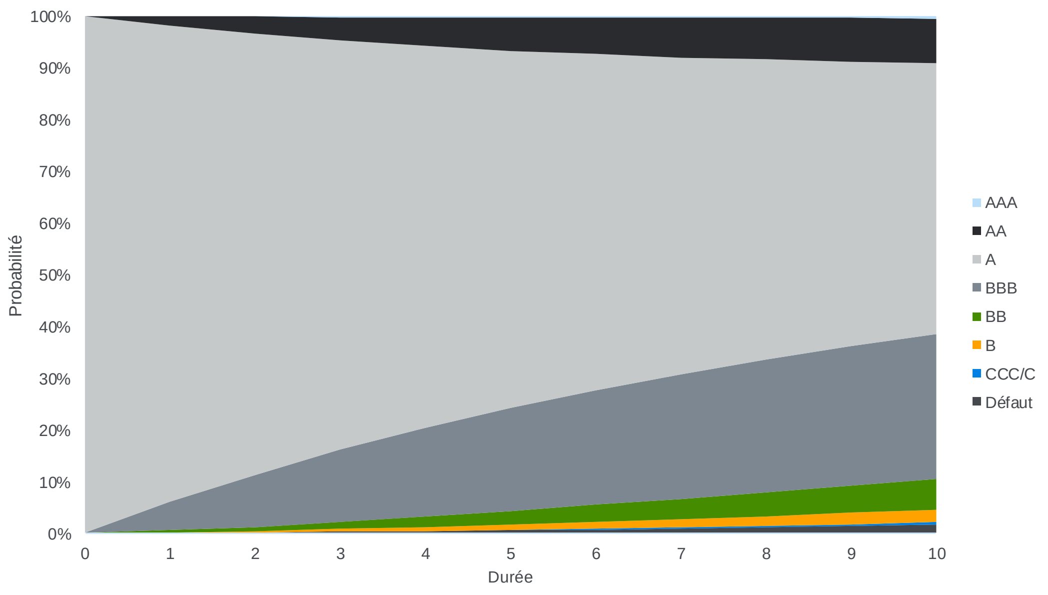


Figure 3 : Transition de rating et défaut à 10 ans d'une obligation initialement notée A

On voit sur le graphe ci-dessus que la probabilité que l'émetteur de l'obligation fasse défaut à horizon 10 ans reste inférieur à 2%, ce qui est bien inférieur au sur-rendement apporté par un spread de 1,6% sur 10 ans. Le graphique ci-dessous compare :

- La probabilité de défaut cumulée sur X années pour une obligation initialement notée A
- Avec le sur-rendement perçu par le détenteur de l'obligation du fait du spread de crédit supposé égal à 1,6% (ce qui correspond au spread moyen des obligations A)

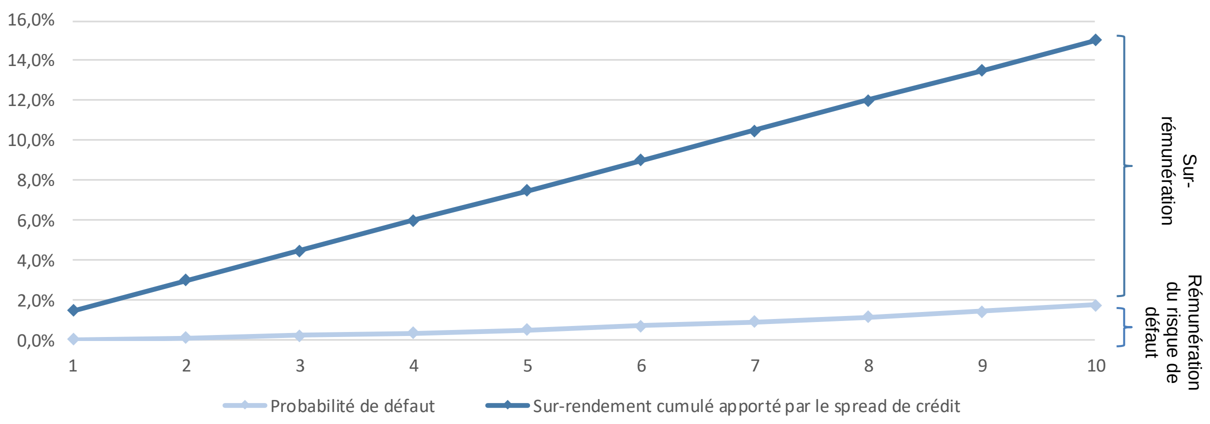


Figure 4 : Comparaison de la probabilité de défaut et du sur-rendement cumulé lié au spread de crédit

La sur-rémunération identifiée ci-dessus rémunère des risques additionnels :

- Le risque d'écartement des spreads conduisant à une perte en valeur de marché,

- Le risque de volatilité supplémentaire (par rapport à une obligation sans risque) lié à la volatilité des spreads,
- Le risque de liquidité qui peut se matérialiser dans certaines conditions de marché par une décôte supplémentaire sur le prix de cession.

Il convient de noter que les assureurs ne sont pas nécessairement fortement exposés à ces risques additionnels qui impactent uniquement la valeur de marché des obligations. Tant que l'assureur a la possibilité de porter le titre obligataire jusqu'à son échéance, les fluctuations de valeur de marché n'impactent généralement pas directement son résultat. En effet, en comptabilité French Gaap, les obligations sont comptabilisées au coût amorti. Cette comptabilisation au coût amorti est cependant remise en cause lorsque la dépréciation en valeur de marché est trop importante (passage d'une Provision pour Dépréciation Durable).

Les assureurs Vie ont d'ailleurs utilisé l'argument de leur faible exposition au risque d'écartement des spreads pour obtenir de l'EIOPA l'introduction du « Volatility Adjustment » (précédemment désigné sous le terme de « Prime de Liquidité »), qui permet de compenser (via l'ajout d'une prime de liquidité à la courbe des taux sans risque utilisée pour l'actualisation du passif) l'écartement des spreads non lié à la composante de risque de défaut.

3.1.5 Le risque de crédit govies

3.1.5.1 Le risque de crédit govies au cours des dernières années

On parle d'obligations « govies » lorsque l'émetteur est un état (contrairement aux obligations « corporate » lorsque le titre est émis par un émetteur privé). Le risque de crédit et ses différentes composantes (risque de défaut, risque d'écartement des spreads, risque de liquidité) sont présents pour les emprunts govies aussi bien que corporate. On peut prendre en exemple la crise des emprunts d'état survenue en 2011, au cours de laquelle on a pu observer un écartement très significatif des spreads des emprunts d'état de la zone Euro. Cet écartement des spreads a bien entendu touché la Grèce, mais s'est également propagé à plusieurs états européens, tels que le Portugal, l'Irlande et même, dans une moindre mesure, l'Italie ou l'Espagne.

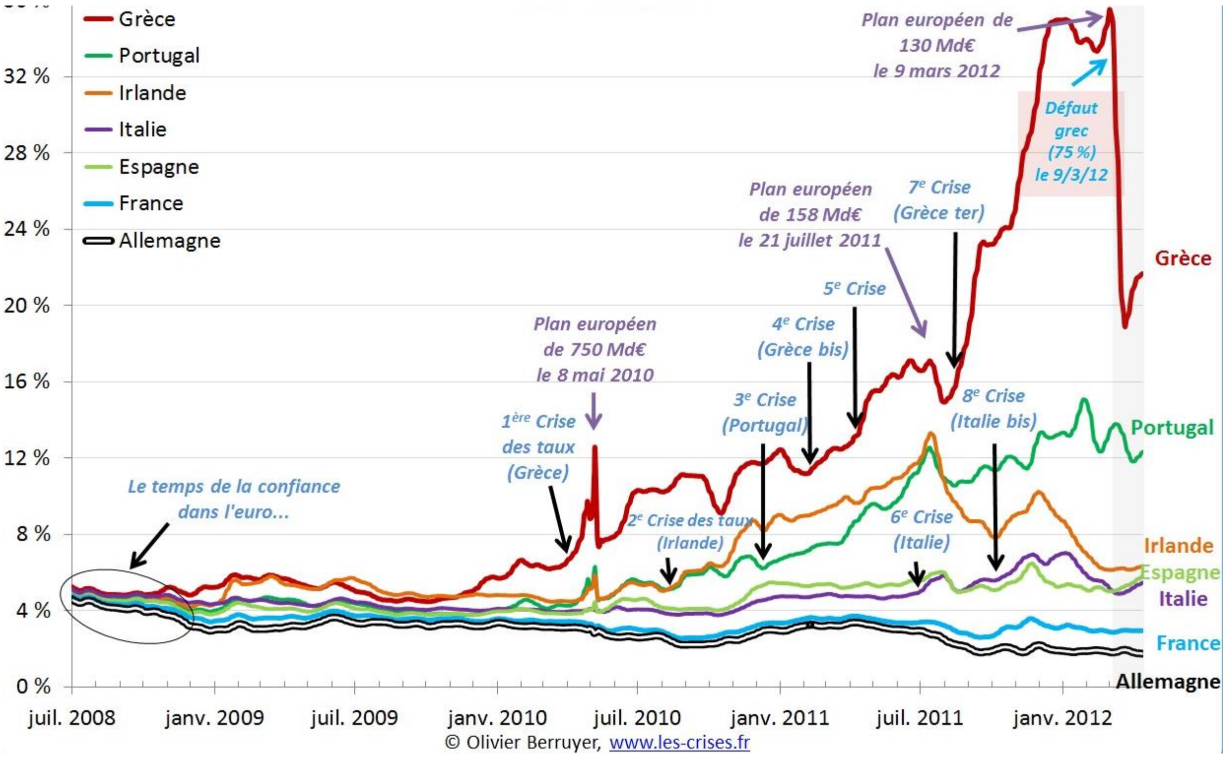


Figure 5 : Evolution du taux d'intérêt de l'emprunt d'Etat à 10 ans de pays de la zone Euro 07/2008-04/2012 (source des données : les-crises.fr)

Le graphique ci-dessus compare les taux d'intérêt des emprunts d'état au moment de cette crise et jusqu'au défaut de la Grèce survenu en mars 2012. Le spread entre les emprunts grecs et allemands a pu atteindre 30 points plus de 3 mois avant le défaut de la Grèce. Les spreads entre les emprunts portugais ou irlandais et allemands ont quant à eux dépassé les 10 points.

A l'inverse, au cours des dernières années, on a également pu observer des spreads de crédit négatifs entre les taux allemands et français et la courbe des taux swap :

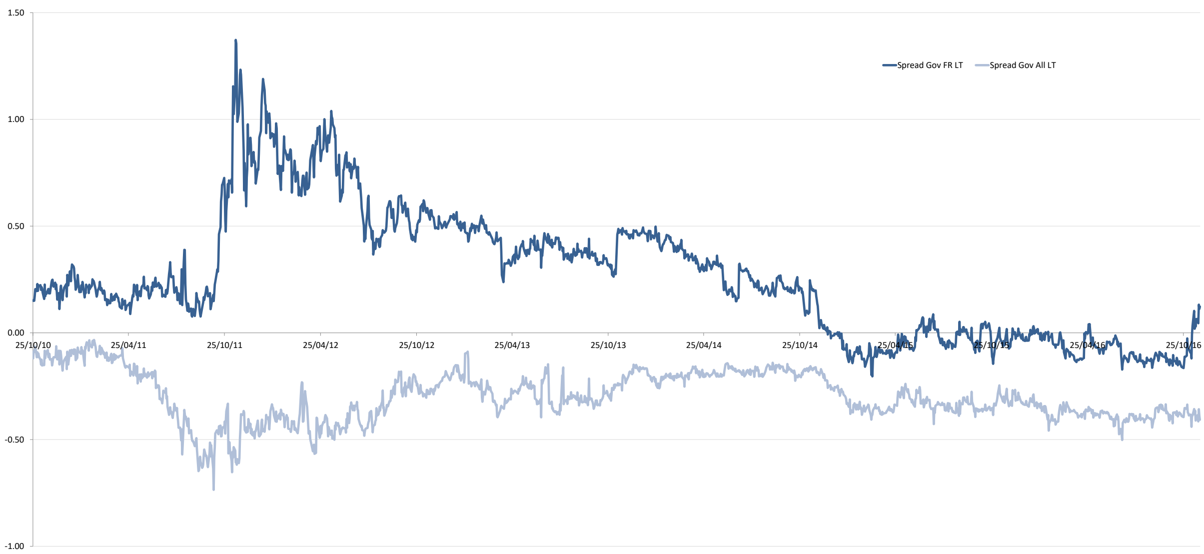


Figure 6 : Comparaison des spreads d'état français et allemand long terme sur les 6 dernières anneés (source des données : products.markit.com)

Cette observation remet en cause la définition même de la courbe des taux swap comme courbe des taux sans risque retenue pour les calculs Solvabilité II. Cela pose également une difficulté supplémentaire dans la modélisation des spreads de crédit govies pour le calcul du Best Estimate. En effet la plupart des modèles disponibles (notamment le modèle Jarrow, Lando et Turnbull et le modèle Longstaff, Mithal et Neis présentés ci-après) ne génèrent que des spreads de crédit positifs. Ces épisodes de spreads négatifs ne pourront donc pas être reproduits dans les scénarios générés ; mais plus gênant encore, le modèle ne pourra pas être initialement calibré sur la base de spreads négatifs.

Une façon de contourner cette difficulté est de supprimer ces spreads négatifs de la courbe retenue pour le calibrage (en floorant les spreads à 0) et capter le spread négatif dans la risque-neutralisation (voir paragraphe 4.1.3.4) via le calibrage d'un écart de spread négatif qui sera maintenu constant tout au long de la projection. Cette solution n'est qu'imparfaite puisqu'elle ne permet pas de reproduire fidèlement les épisodes de spreads de crédit négatifs.

3.1.5.2 Le risque govies sous Solvabilité II

Sous Solvabilité II, le risque des emprunts d'état de la zone Euro a un statut particulier puisqu'il n'est pas pris en compte dans les calculs de SCR formule standard : le SCR spread ne concerne que les emprunts corporate et les emprunts govies émis par des états hors de la zone Euro (ou par des états de la zone Euro quand l'emprunt n'est pas émis dans la monnaie nationale). Cette exclusion du calcul du SCR résulte d'un consensus politique et pas d'une véritable absence de risque lié aux emprunts de la zone Euro.

Si le risque govies est expressément exclu du calcul du SCR (du moins dans la formule standard), rien n'est précisé pour le calcul du Best Estimate. Pour les assureurs exposés de façon significative aux états périphériques de la zone Euro, il paraitrait légitime d'intégrer ce risque à leur calcul de Best Estimate. Cette prise en compte pourrait d'ailleurs leur être imposée par l'ACPR. Le fait est, qu'actuellement, la majorité des acteurs ayant modélisé le risque de crédit de façon stochastique dans leur modèle de projection, a limité cette prise en compte au seul risque de crédit corporate.

Dans la suite de l'étude, nous nous concentrerons sur le risque de crédit corporate.

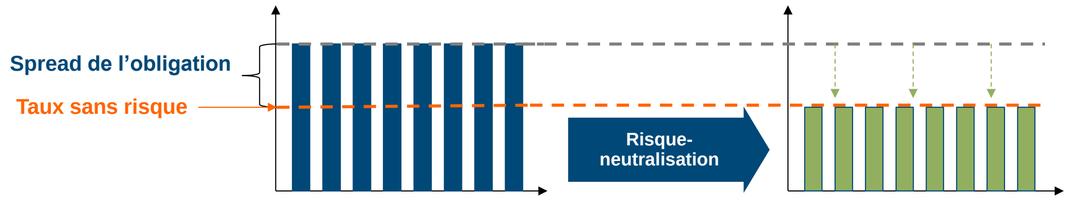
3.2. LA MODELISATION RISQUE-NEUTRE ET MARKET CONSISTENT DU RISQUE DE CREDIT

Une modélisation risque-neutre et market-consistent du risque de crédit doit permettre de générer des scénarios stochastiques de prix d'obligations risquées (ou de spreads de crédit, ce qui est équivalent à partir du moment où l'on dispose d'une projection des taux sans risque) qui respectent les conditions suivantes :

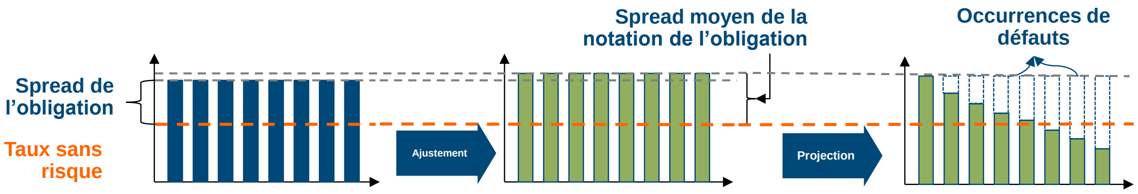
- Sur ces scénarios, l'espérance de rendement des obligations risquées est égale au taux sans risque (le prix actualisé des obligations est martingale sous la probabilité risque-neutre),
- Les prix recalculés à partir de ces scénarios (notamment les prix d'obligations risquées) sont cohérents avec les prix de marché.

3.2.1 Principe de risque-neutralisation

Pour rappel, lorsque les spreads de crédit ne sont pas modélisés, la risque neutralisation consiste à annuler le spread de crédit contenu dans les coupons pour ainsi retrouver le taux sans risque, et ce, en diminuant proportionnellement l'ensemble des flux de l'obligation.

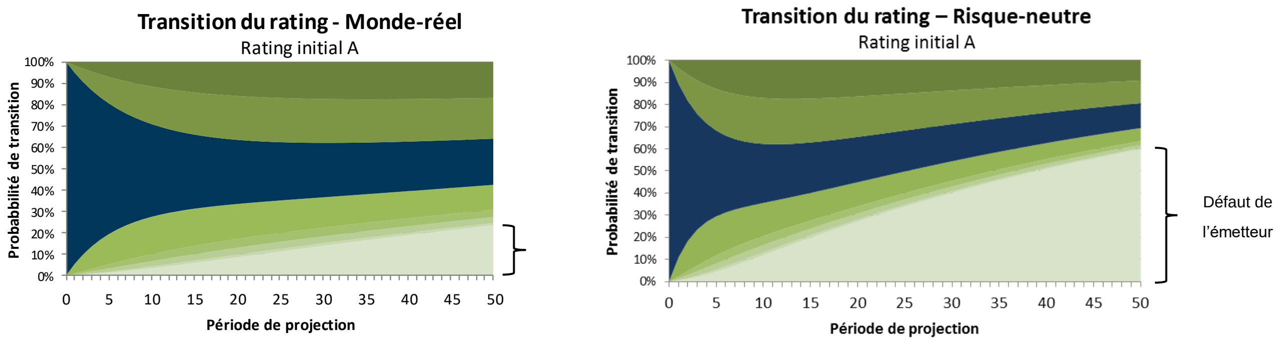


Lorsque le spread de crédit est modélisé, les flux sont ajustés de manière à refléter l'écart entre le spread implicite de l'obligation et le spread moyen de son rating : en début de projection, les flux sont élevés car ils incluent le spread moyen du rating de l'obligation et en cours de projection les flux sont ajustés des occurrences de défaut, ils diminuent progressivement. Ainsi sur l'ensemble de la projection, le rendement moyen de l'obligation correspond au rendement obtenu sans modélisation du spread de crédit.



Cependant, comme le démontre la section précédente, le spread de crédit ne rémunère pas uniquement le risque de défaut de l'émetteur mais également le risque d'écartement des spreads lié à la volatilité des spreads ainsi que le risque de liquidité. Dans un univers risque-neutre, l'ensemble des actifs doit rapporter le taux sans risque, or dans les modèles de crédit, seul le risque de défaut est modélisé. La conséquence première de cette observation est la nécessité de renforcer la probabilité de défaut des émetteurs par rapport à une vision monde réel de manière à diminuer les flux en cours de projection et ainsi retrouver les prix de marché.

Pour exemple le graphique suivant présente une comparaison de la diffusion des notations en vision monde-réel versus risque-neutre.



La probabilité de défaut d'un émetteur noté initialement A se situant autour de 20% à horizon 50 ans en univers monde-réel se retrouve renforcée à près de 60% en univers risque-neutre.

3.2.2 Les données utilisées pour le calibrage

3.2.2.1 Principe

Comme présenté en partie 2.2.3, les modèles financiers utilisés dans un calcul de Best Estimate doivent être à la fois risque-neutre et market-consistent. Ce dernier point implique que les modèles utilisés doivent permettre de répliquer les prix des instruments financiers observés sur les marchés. Le calibrage va alors consister à ajuster les paramètres du modèle de façon à égaliser les prix d'instruments financiers calculés par le modèle (si possible par formule fermée, sinon par méthode de Monte-Carlo) aux prix de marché.

Il reste à définir la nature des instruments financiers retenus pour ce calibrage. Nous avons vu au paragraphe 2.2.3.3, que pour les autres variables financières (taux, action), on utilise des instruments optionnels pour calibrer la volatilité des modèles (Swaptions pour les modèles de taux, Call et Put pour les modèles actions). En effet, seuls les prix des instruments financiers qui ne dépendent pas linéairement du sous-jacent donnent réellement de l'information sur le niveau de volatilité de ce sous-jacent (le prix des actions à un instant t ne donne pas d'information sur la volatilité implicite des actions à ce même instant, il faut observer les prix des options vanille pour obtenir le niveau de la volatilité implicite). Il semblerait donc logique de retenir également des instruments financiers optionnels pour calibrer les modèles de spread de crédit. Ces instruments financiers existent, il s'agit des Credit Default Swap (CDS).

3.2.2.2 Présentation des Credit Default Swap

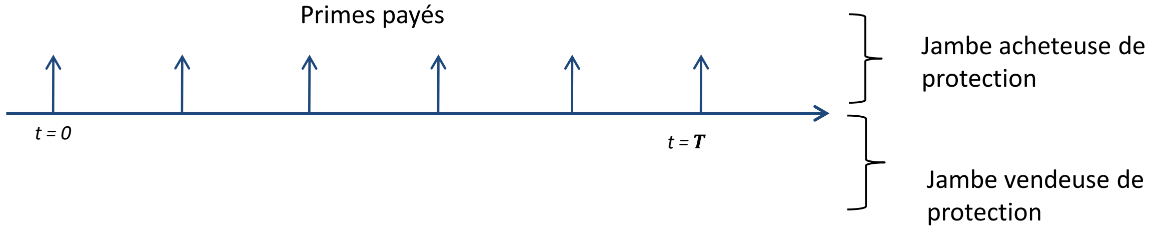
Les Credit Default Swap sont des dérivés de crédit simples et liquides, dont les prix reflètent les anticipations du marché. Un CDS est un contrat par lequel l'acheteur de la protection se couvre contre un événement affectant la solvabilité d'une entreprise de référence (faillite, restructuration) moyennant le paiement d'une prime au vendeur de la protection. Le vendeur s'engage alors en cas de survenance de l'événement à payer à l'acheteur les flux correspondant au notionnel du CDS ajusté du taux de recouvrement.

Un CDS est donc défini par les caractéristiques suivantes :

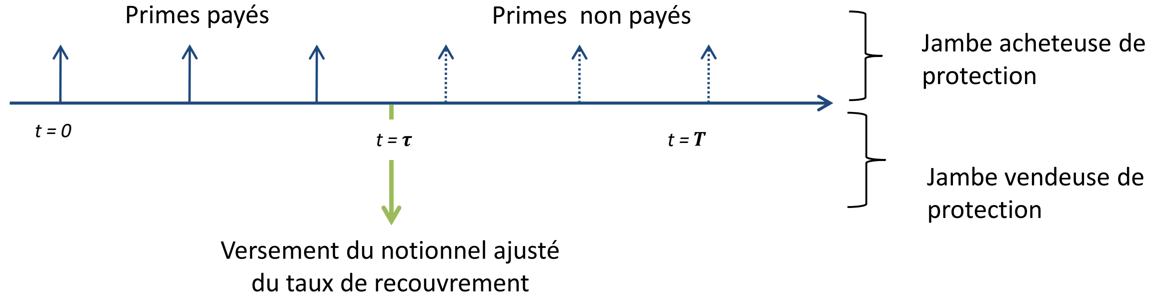
- Sens : achat ou vente de la protection
- Entité de référence : émetteur pour lequel l'acheteur du CDS cherche à se protéger (entreprise, état, banque,…)
- Sous-jacent : emprunt émis par l'entité de référence
- Nominal : montant total garanti par le CDS
- Maturité : date d'échéance du CDS
- Evénement de crédit : événement déclenchant le CDS, il est déterminé à la signature du contrat (faillite, restructuration de la dette, défaut de paiement, …)
- Prime : montant payé par l'acheteur au vendeur du CDS, elle est exprimée en pourcentage du nominal

Le schéma ci-dessous présente les flux relatifs à un CDS :

En cas de non survenance de l'événement de crédit



En cas de survenance de l'événement de crédit



En t_0, date d'achat/vente du CDS de maturité T, dont la prime annuelle vaut P et de notionnel N, la valeur actuelle probable de la jambe acheteuse de la protection peut alors s'écrire :

$$jambe\ acheteuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} \quad (7)$$

Où $\tilde{q}_{r,K}(t_0, t)$correspond à la probabilité de défaut entre t_0 et t

La valeur actuelle probable de la jambe vendeuse de la protection peut quant à elle s'écrire :

$$jambe\ vendeuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau = t\}}}_{\substack{Probabilité\ de\ faire\ défaut \\ exactement\ l'année\ t}} \quad (8)$$

Le prix du CDS correspond à la différence entre les valeurs actuelles probables des jambes acheteuse et vendeuse.

3.2.2.3 Autres instruments utilisés en pratique

Même si les CDS semblent être théoriquement les instruments les plus adaptés pour le calibrage risque-neutre d'un modèle de crédit, en pratique, ce ne sont pas ces instruments qui sont utilisés. On constate en effet que la totalité des acteurs qui ont mis en place des modèles de crédit risque-neutre réalisent plutôt un calibrage sur la seule base des prix d'obligations risquées. En effet, même si les obligations risquées ne constituent pas des instruments optionnels, le prix de ces obligations ne dépend pas linéairement du niveau des spreads. La formule suivante rappelle la formule du prix d'un zéro-coupon risqué en fonction du niveau de spread *s* :

$$ZC_r(0, T) = \frac{1}{(1 + r_T + s)} \quad (9)$$

On constate que la relation entre le prix du zéro-coupon risqué et le niveau du spread n'est pas linéaire. Du fait de cette non-linéarité, le prix du zéro-coupon risqué dépend de la volatilité future du spread. Il est donc possible de tirer de ce prix observé sur les marchés, l'information de la volatilité implicite du spread. C'est ce qui est fait en pratique par la totalité des acteurs.

Dans la suite de ce mémoire, nous présenterons plus en détail les méthodologies de calibrage sur différents modèles de spread de crédit. Autant que possible, nous essayerons de présenter à la fois le calibrage sur la base des prix de zéro-coupons risqués mais également sur la base des CDS.

3.3. LES DIFFERENTES FAMILLES DE MODELE DE DIFFUSION DU RISQUE DE CREDIT

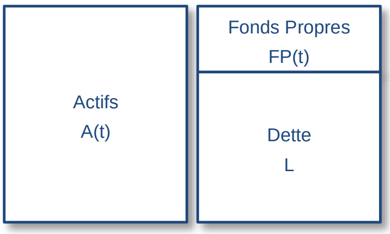
Différentes familles de modèles permettant la diffusion des spreads de crédit existent, ces familles sont présentées ci-après :

- Les modèles structurels : modèle de la firme de Merton, modèle de Black-Cox
- Les modèles à forme réduite (ou à intensité) : modèles de Longstaff, Mithal et Neis (LMN), CIR++ intensity model ;
- Les modèles de notation de crédit : modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT)

3.3.1 Les modèles structurels

Les approches structurelles de modélisation du risque de défaut d'un émetteur sont apparues dans les années 1970 sous l'impulsion de Black and Scholes (1973) et Merton (1974). Dans ces approches, la valorisation d'un zéro-coupon risqué est basée sur la modélisation du bilan de l'émetteur de l'obligation.

Merton propose alors une représentation simplifiée du bilan d'un émetteur reposant sur l'égalité à toute date *t* de l'actif et du passif : $\forall\, t\,, A(t) = FP(t) + L(t)$



Où :

- $A(t)$ est la valeur des actifs de l'émetteur en valeur de marché, supposée suivre une dynamique de type Black Scholes c'est-à-dire définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = (\mu - d).dt + \sigma.dW(t) \qquad (10)$$

  Où μ est l'espérance de rendement des actifs, d le dividende versé aux actionnaires, σ la volatilité du rendement et W un mouvement Brownien.

- $FP(t)$ est la valeur des fonds propres de l'émetteur en valeur de marché
- L est la dette obligataire de l'émetteur, zéro-coupon de nominal L et d'échéance *T*

En T, deux cas sont possibles :

- $A(T) \geq L$, la valeur des actifs est supérieure au montant de la dette. L'émetteur est en capacité de rembourser sa dette L aux créanciers et $FP(T) = A(T) - L$ aux actionnaires
- $A(T) < L$, la valeur des actifs est inférieure au montant de la dette et ne permet pas un remboursement intégral de la dette aux créanciers. L'émetteur est en situation de défaut et rembourse $A(T)$ aux créanciers

Dès lors, le payoff des créanciers peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\min(A(T), L) = L - \max(L - A(T), 0) \qquad (11)$$

Les fonds propres peuvent donc être assimilés à un call (option d'achat) sur la valeur des actifs avec pour prix d'exercice le montant de la dette L.

La valeur de la dette peut quant à elle être assimilée à une dette sans risque financée en partie par un put (option de vente) sur la valeur des actifs avec pour prix d'exercice le montant de la dette L.

Sous l'hypothèse que le taux sans risque est constant et en situation d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage alors le prix du zéro-coupon risqué peut être écrit, $\forall\, t \leq T$:

$$L(t,T) = L.e^{-r(T-t)} - Put(strike\ L)$$

$$L(t,T) = L.e^{-r(T-t)} - \left(L.e^{-r(T-t)}.N(-d_2) - A(t).N(d_1)\right) \qquad (12)$$

Avec N la fonction de répartition d'une loi normale $N(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A(t)}{L}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad (13)$$

La relation de parité call-put permet de réécrire l'équation de la manière suivante :

Parité call-put :

$$Call\ (strike\ L) + L.e^{-r(T-t)}. = Put\ (strike\ L) + A(t)$$

$$L.e^{-r(T-t)} - Put(strike\ L). = Call\ (strike\ L) + A(t)$$

$$L(t,T) = L.e^{-r(T-t)}.N(d_2) + A(t).\left(1 - N(d_1)\right) \qquad (14)$$

Le spread défini comme le surplus de rendement par rapport à une obligation sans risque est donné par l'expression suivante :

$$S(t,T) = \frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{Le^{-r(T-t)}}{L(t,T)}\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(N(d_2) + \frac{A(t)}{Le^{-r(T-t)}}.N(-d_1)\right) \qquad (15)$$

On constate alors que lorsque t tend vers T, date de maturité de l'obligation risquée, alors le spread tend vers :

- 0 si $A(T) \geq L$

- $+\infty$ si $A(T) < L$

Ce modèle implique que la valeur d'un zéro-coupon risqué est une fonction croissante de la valeur des actifs de l'émetteur et que le spread tend vers 0 lorsque la maturité de la dette tend vers 0.

Il existe cependant un certain nombre de limites et d'inconvénients à l'implémentation du modèle de Merton et plus généralement aux modèles structurels :

- Modèle relativement simpliste qui ne tient pas compte des différents niveaux de séniorité des dettes portées par l'émetteur, ce qui se révèlerait beaucoup trop compliqué à mettre en œuvre dans un modèle de calcul
- Le défaut ne peut se produire qu'à une date unique : la date de maturité de la dette
- La structure de taux sans risque est plate et déterministe
- La situation financière de l'émetteur (niveau d'actif A(t), de dette L et de fonds propres FP(t)) ainsi que le niveau de volatilité de son actif (paramètre σ) sont difficilement observables
- Pour le calibrage du modèle, il est nécessaire de disposer de la structure par terme des spreads ; il convient donc de connaître la valeur de la dette pour chacune des maturités. Dans les faits, cette information n'est pas nécessairement disponible.

Le modèle de Merton a été par la suite raffiné afin de lever les nombreuses objections soulevées à l'époque (déformation de la structure par termes des taux d'intérêt, dynamique des actifs de l'émetteur, anticipation du défaut, …). Parmi les évolutions des modèles structurels, nous pouvons citer les travaux de :

- Black Cox (1976), extension du modèle de Merton qui autorise un défaut de l'émetteur avant l'échéance de sa dette mais pour lequel le taux d'intérêt reste fixe
- Longstaff et Schwartz (1995) dont le modèle utilise une modélisation stochastique du taux d'intérêt.

Au-delà de ces critiques usuelles du modèle de Merton, ce modèle n'est pas adapté à la projection de l'actif d'un portefeuille d'assurance composé d'un très grand nombre de lignes obligataires. En effet, il faudrait pour cela construire un modèle pour chacun des émetteurs obligataires et récupérer leur situation financière (niveau d'actif, niveau d'endettement). Cela ne semble pas faisable en pratique. Cela a poussé les acteurs du marché à se concentrer sur d'autres techniques de modélisation basées sur la probabilité de survenance du défaut et son intensité plutôt que sur la modélisation de sa survenance en elle-même.

3.3.2 Les modèles à forme réduite

Dans les modèles à forme réduite ou à intensité de défaut, l'objectif est de modéliser, par rating ou par classe de rating, l'intensité de défaut d'une diffusion.

Dans les modèles structurels, le défaut est directement lié à la valeur de l'entreprise, et, dans les modèles les plus simplistes, la date de défaut est même connue. Ici, le principe est tout autre, il n'est pas question d'expliquer la cause du défaut, ni de modéliser la valeur de l'entreprise (ie de l'émetteur) mais de modéliser la probabilité de défaut ou de survie d'un émetteur :

$$P(\tau > t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \qquad (16)$$

où

- τ est une variable aléatoire représentant la date aléatoire de défaut de l'émetteur
- λ_s représente l'intensité de défaut, diffusée à l'aide d'un processus stochastique

Moyennant une hypothèse d'indépendance entre le prix des zéro-coupon et de l'intensité de défaut ainsi qu'un taux de recouvrement noté LGD, le prix d'un zéro-coupon risqué peut donc être écrit sous la forme suivante :

$$ZC_r(t,T) = ZC(t,T).[1 - LGD + LGD \times P(t,T)] \quad (17)$$

avec

- $ZC(t,T)$ le prix du zéro-coupon sans risque
- $P(t,T)$ la probabilité de survie entre t et T

Les modèles à intensité de défaut modélisent donc la dynamique des intensités de défaut par classe de rating (R) : $(\lambda_t^R)_{t\geq 0}$. Le risque de défaut étant plus important pour les ratings plus faibles, les surplus d'intensité doivent être positifs : $\lambda_t^{AA} - \lambda_t^{AAA}$, $\lambda_t^{BBB} - \lambda_t^{A}$, …

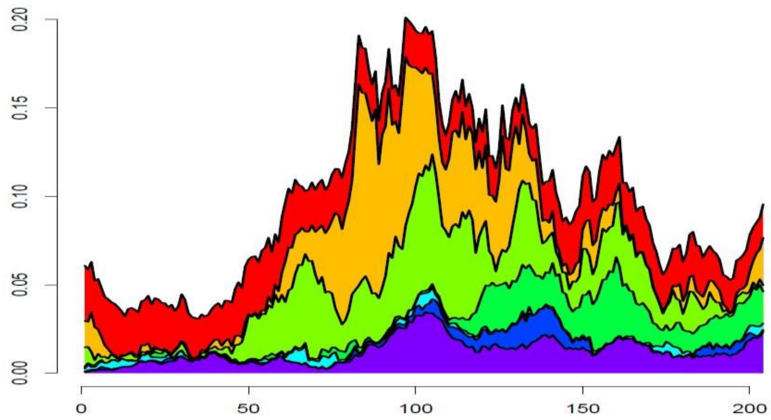


Figure 7 : Représentation des intensités de défaut par classe de rating

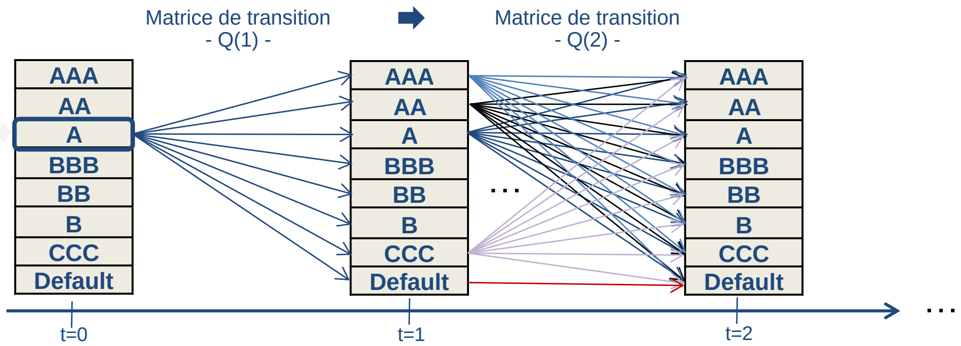
Les modèles à forme réduite ou à intensité ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Parmis les modèles les plus cités dans la littérature financière, on retrouve :

- Les modèles de Longstaff, Mithal et Neis (LMN),
- Le modèle CIR++,

Le principal avantage de ce type de modèles réside dans sa compatibilité avec tous les modèles market consistent de taux sans risque. De plus, l'utilisation d'une formule fermée pour la valorisation du zéro-coupon risqué permet une implémentation simple dans les modèles de calcul du Best Estimate. Cependant, il convient de noter que ces modèles ne permettent pas de modéliser les changements de rating de l'émetteur au cours de la vie du zéro-coupon ; les probabilités de défaut sont donc estimées uniquement sur la base du rating initial de l'émetteur, cristallisé en début de projection.

3.3.3 Les modèles à notation de crédit

L'objectif de ces modèles est de simuler les changements de rating des émetteurs des obligations risquées à l'aide de matrice de transition. Le prix d'une obligation risquée et ainsi le spread de crédit de l'obligation sont alors calculés à partir des probabilités de défaut.



Le prix d'un zéro-coupon risqué de rating initial R peut donc être écrit sous la forme suivante :

$$\mathrm{ZC}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{R})}(t,T) = ZC(t,T).\left(1 - LGD + LGD.P(t,T)\right) \qquad (18)$$

avec

- $ZC(t,T)$ le prix du zéro-coupon sans risque
- $P(t,T)$ la probabilité de survie entre t et T
- LGD le loss given default, il correspond au montant de perte en cas de défaut

Cette famille de modèles présente les avantages suivants :

- compatibilité avec tous les modèles market consistent de taux sans risque
- implémentation simple du fait de formules fermées pour le calcul des prix de zéro-coupon risqués
- prise en compte les changements de rating des émetteurs sur l'horizon de projection

Le modèle le plus répandu de nos jours est le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull, il fait l'objet d'une présentation détaillée dans la section suivante.

3.4. FOCUS SUR LE MODELE DE JARROW, LANDO ET TURNBULL (JLT)

Dans les modèles à notation de crédit comme le modèle JLT, la notation de l'émetteur est considérée comme une variable fondamentale dans la description du processus de défaut. Le modèle JLT a fait l'objet d'une publication dans The Review of Financial Studies en 1997, il s'agit du prolongement des travaux de Jarrow et Turnbull publiés en 1995.

Dans ce modèle, à l'instar des modèles à intensité de défaut, l'idée n'est pas d'expliquer la cause du défaut ou de modéliser la valeur de l'entreprise (ie de l'émetteur) mais de modéliser les transitions de notation sur l'horizon de projection du modèle de manière à déduire les probabilités de défaut.

A l'heure actuelle, le modèle JLT est le modèle prédominant utilisé par le marché de l'Assurance Vie français notamment car il permet d'affiner la stratégie financière dans les modèles de projection ALM en prenant en compte des opérations de rebalancement de l'actif en fonction de l'évolution des ratings des obligations :

- Vente des obligations lorsque le rating est en-dessous d'une limite prédéfinie,

- Rebalancement régulier du portefeuille de sorte à respecter une structure par rating cible pour le portefeuille obligataire.

3.4.1 Description du modèle

La modélisation des spreads de crédit proposée par le modèle JLT repose sur trois étapes :

Etape 1 :

Obtention de la matrice de transition de rating à un an monde-réél ; cette matrice, notée Q est généralement obtenue via les agences de rating telles que Moody's, Standard & Poor's ou Fitch.

Matrice de transition de rating à horizon un an au 31/12/2017

		Notation au bout d'un an							
		AAA	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**Default**
Notation initiale	***AAA***	89.8%	9.4%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%
	AA	0.5%	90.5%	8.2%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%
	A	0.03%	1.8%	92.2%	5.5%	0.3%	0.1%	0.0%	0.1%
	BBB	0.0%	0.1%	3.7%	91.4%	4.0%	0.5%	0.1%	0.2%
	BB	0.0%	0.0%	0.1%	5.4%	85.5%	7.5%	0.6%	0.8%
	B	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	5.8%	84.7%	5.1%	4.1%
	CCC	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.7%	15.6%	51.5%	31.8%
	Default	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%

Nous supposons que la matrice Q peut être diagonalisée et que ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Ainsi, nous pouvons trouver $M \in GL_K(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = diag\left(\left(D_{i,i}\right)_{i \in [\![1,K]\!]}\right)$ avec $D_{i,i} > 0$ pour tout $i \in [\![1,K]\!]$, tels que

$$Q = MDM^{-1}$$

Pour chaque $i \in [\![1,K]\!]$ on pose $d_i := \ln\left(D_{i,i}\right)$ pour introduire la matrice de génération définie par

$$\Lambda = \ln(Q) = M.ln(D).M^{-1} = M.D_\Lambda.M^{-1} \quad (19)$$

La matrice Λ correspond donc au « logarithme » de la matrice de transition monde-réel. Ou, vu en sens inverse, la matrice de transition monde-réel correspond à « l'exponentiel » de la matrice Λ. D_Λ correspond à la matrice diagonale de Λ. C'est cette matrice diagonale qui va par la suite être rendue aléatoire (cf. étape suivante). On reviendra à la matrice de transition en prenant l'exponentiel et en réappliquant les matrices de passage M^{-1} et M.

Etape 2 :

La matrice D_Λ est alors choquée aléatoirement par un processus stochastique $\left(\pi(t)\right)_t$ nommé prime de risque qui suit un processus CIR, processus stochastique défini par l'équation différentielle stochastique suivante et supposé indépendant du processus de taux sans risque (il tire son nom de Cox Ingersoll et Ross qui ont introduit ce processus en mathématique financière) :

$$d\pi(t) = \alpha\big(\mu - \pi(t)\big)dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (20)$$

où

- $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre
- α est la vitesse de retour à la moyenne de la prime de risque
- μ est la moyenne de long terme
- σ est la volatilité de la prime de risque
- la condition de Feller $2\alpha\mu > \sigma^2$ permet d'assurer la stricte positivité de π à toute date t (permet de ne pas annuler les probabilités de transition)

Les paramètres $\left(\alpha, \mu, \sigma, \pi(0)\right)$ sont les quatre paramétres du modèle JLT devant être estimés.

On obtient alors la matrice de transition de rating choquée suivante :

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \pi(t)\Lambda = M.\pi(t)D_{\Lambda}.M^{-1} \qquad (21)$$

Cette étape permet de passer d'une matrice de transition de rating déterministe à une matrice de transition de rating stochastique.

Etape 3 :

Calcul par formule fermée des probabilités de défaut et/ou de survie associées à chaque rating.

Soit $Q(R(T) = K | R(t) \neq K) = \bar{Q}(t,T)_{iK}$ la probabilité de faire défaut avant T sachant que l'émetteur n'a pas fait défaut avant t , où $R(t)$ est la variable représentant le rating de l'émetteur à une date t et où K représente état de défaut.

$\bar{Q}(t,T)_{iK}$ est une fonction simple des paramètres du modèle $\left(\alpha, \mu, \sigma, \pi(0)\right)_{iK}$:

$$\bar{Q}(t,T)_{iK} = \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma_{ij}\Sigma_{jK}^{-1}\left(exp\left(A_j\left(T-t,(\alpha,\mu,\sigma)\right) - \pi(t)\, B_j\left(T-t,(\alpha,\sigma)\right)\right) - 1\right) \qquad (22)$$

où

- $\nu_j(\alpha,\sigma) := \sqrt{\alpha^2 - 2\, D_{jj}\, \sigma^2}$
- $A_j\left(m,(\alpha,\mu,\sigma)\right) := \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} ln\left(\frac{2\,\nu_j(\alpha,\sigma)\, e^{\frac{\left(\alpha+\nu_j(\alpha,\sigma)\right)m}{2}}}{\left(\nu_j(\alpha,\sigma)+\alpha\right)\left(e^{\nu_j(\alpha,\sigma)m}-1\right)+2\nu_j(\alpha,\sigma)}\right)$
- $B_j\left(m,(\alpha,\sigma)\right) \coloneqq \frac{-\,2\Lambda_{jj}\left(e^{\nu_j(\alpha,\sigma)\,m}-1\right)}{\left(\nu_j(\alpha,\sigma)+\alpha\right)\left(e^{\nu_j(\alpha,\sigma)m}-1\right)+2\nu_j(\alpha,\sigma)}$

Le spread peut alors être exprimé selon la formule suivante :

$$Spread_i(t,t+m) = -\frac{1}{m}\ln\left(\frac{ZC_r^{(i)}(t,t+m)}{ZC(t,t+m)}\right) = -\frac{1}{m}\ln(1 - LGD \times \bar{Q}(t,t+m)_{iK}) \qquad (23)$$

Où

- $ZC_r^{(i)}(t,t+m)$ est le prix en t d'un zéro-coupon risqué arrivant à échéance en $t+m$ et provenant d'un émetteur noté i

- $ZC(t,t+m)$ est le prix en t d'un zéro-coupon sans risque arrivant à échéance en $t+m$

Soit

$$L_i(t,t+m) = ZC(t,t+m).\left(1 - LGD \times \bar{Q}(t,t+m)_{iK}\right) \qquad (24)$$

3.4.2 Valorisation des obligations

Le prix modèle en date t d'une obligation risquée de principal N_{t+m} et versant chaque année comprise entre t et $t+m$ un coupon C_s dont l'émetteur est noté $i \in [\![1, K-1]\!]$ en date t pour la maturité $m > 0$ est :

$$P_{oblig}(t) = \sum_{k=1}^{K-1} \underbrace{\tilde{q}_{i,k}(t_0, t)}_{\substack{proba.\ de\ passer\ en\ état \\ k\ entre\ t_0\ et\ t}} . \underbrace{\left\{ \sum_{s=t+1}^{t+m} C_s ZC_r^{(k)}(t, s) + N_{t+m} \times ZC_r^{(k)}(t, t+m) \right\}}_{Cash-flows\ actualisés\ en\ t}$$

$$+ \underbrace{\tilde{q}_{i,K}(t_0, t)}_{\substack{proba.\ de\ faire\ défaut \\ entre\ t_0\ et\ t}} . \underbrace{(1 - L_{GD}). \left\{ \sum_{s=t+1}^{t+m} C_k \times ZC(t, s) + N_{t+m} \times ZC(t, t+m) \right\}}_{Cash-flows\ actualisés\ en\ t\ si\ défaut\ avant\ t} \quad (25)$$

Si l'obligation n'a pas fait défaut en t, on actualise ses cash-flows et si l'obligation a fait défaut en t, les flux sont pondérés par le taux de recouvrement et ils sont alors actualisés avec les taux sans risque puisque le défaut ayant déjà eu lieu, le risque de défaut est désormais neutralisé.

Retraitement du coupon en période t :

$$Coupon(t) = C_t . (1 - LGD \times \tilde{q}_{i,K}(t_0, t)) \quad (26)$$

3.4.3 Valorisation des CDS

On note τ la date de défaut de l'entité de référence. L'entité de référence a un rating r en date t_0

L'acheteur de protection paye une prime annuelle P tant que l'entité de référence n'a pas fait défaut. En cas de défaut de l'entité de référence, le vendeur de protection paye à l'acheteur un montant égal au nominal N (et l'acheteur cesse ensuite de payer la prime annuelle P).

Valorisation de la jambe acheteuse de protection :

$$jambe\ acheteuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} \quad (27)$$

$$jambe\ acheteuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{[1 - \tilde{q}_{r,K}(t_0, t)]}_{Probabilité\ de\ ne\ pas\ faire\ défaut\ entre\ t_0\ et\ t} \quad (28)$$

Où $\tilde{q}_{r,K}(t_0, t)$ correspond à la probabilité de défaut entre t_0 et t, qui est directement lisible dans la matrice $\bar{Q}(t_0, t)$ définie ci-dessus

Valorisation de la jambe vendeuse de protection :

$$jambe\ vendeuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau = t\}}}_{\substack{Probabilité\ de\ faire\ défaut \\ exactement\ l'année\ t}} \quad (29)$$

$$jambe\ vendeuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times \sum_{i=1}^{K-1} \underbrace{\tilde{q}_{r,i}(t_0, t-1)}_{\substack{Probabilité\ de\ passer \\ de\ la\ notation\ r\ à\ la \\ notation\ i\ (différente \\ du\ défaut)\ entre\ t_0\ et\ t-1}} \times \underbrace{[\tilde{q}_{i,K}(t-1, t)]}_{\substack{Probabilité\ de\ faire\ défaut \\ en\ année\ t\ sachant\ que\ l'entité \\ n'avait\ pas\ fait\ défaut\ en\ année\ t-1 \\ et\ était\ noté\ i}} \quad (30)$$

Valorisation du CDS :

Le prix du CDS correspond à la différence entre la valeur de la jambe acheteuse et vendeuse :

$$CDS(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0,t) \times [1 - \tilde{q}_{r,K}(t_0,t)] - \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0,t) \times \sum_{i=1}^{K-1} \tilde{q}_{r,i}(t_0,t-1) \times \tilde{q}_{i,K}(t-1,t) \quad (31)$$

3.4.4 Calibrage

3.4.4.1 Calibrage sur prix d'obligation risqué

Pour chaque prix d'obligation risquée de notation i et de maturité m observé sur les marchés, on déduit le spread :

$$Spread_i^{mkt}(t,t+m) = -\frac{1}{m}\ln\left(\frac{ZC_r^{(i)}(t,t+m)}{ZC(t,t+m)}\right) \quad (32)$$

Les 4 paramètres $(\alpha,\mu,\sigma,\pi(0)) = \theta$ sont ensuite estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires via$(\hat{\alpha},\hat{\mu},\hat{\sigma},\widehat{\pi(0)}) = \hat{\theta}$, résultat de la minimisation de la fonction $f(\theta)$, somme des carrés des écarts entre les spreads de marché et les spreads théoriques sur l'ensemble des maturités et des rating concernés :

$$f(\theta) = \underset{2\alpha\mu>\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{\substack{m\in\mathcal{M} \\ i\in\kappa}} \left(Spread_i^{mkt}(0,m) - Spread_i(0,m;\theta) \right)^2 \quad (33)$$

Où m est la maturité, i le rating et $Spread_i(0,m;\theta)$ le spread calculé par formule fermée à partir des paramètres du modèle ($Spread_i(t,t+m) = -\frac{1}{m}\ln(1 - LGD \times \bar{Q}(t,t+m)_{iK})$

Et sous la contrainte $2\alpha\mu > \sigma^2$ (condition de Feller permettant de garantir la stricte positivité du processus π à toute date).

Afin de réaliser ce calibrage, deux types de données sont nécessaires en input du modèle :

- Les courbes des spreads de crédit par rating ou classe de rating en date de calcul
- La matrice de transition de rating historique (telle que décrite en section 3.4.1) fournie par les agences de notation.

3.4.4.2 Calibrage sur CDS

Les 4 paramètres $(\alpha,\mu,\sigma,\pi(0)) = \theta$ sont estimés en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires directement aux prix de CDS

$$f(\theta) = \underset{2\alpha\mu>\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{\substack{m\in\mathcal{M} \\ i\in\kappa}} \left(CDS_i^{mkt}(0,m) - CDS_i(0,m;\theta) \right)^2 \quad (34)$$

Où m est la maturité, i le rating et $\mathrm{CDS_i}(0,\mathrm{m};\theta)$ le prix du CDS calculé par formule fermée à partir des paramètres du modèle

3.4.5 Simulation

A partir des paramètres estimés et de la formule de valorisation, on obtient les prix théoriques des zéro-coupon risqués à chaque date et pour chacun des. Ces informations sont alors intégrées aux tables de scénarios économiques, augmentant alors considérablement leur volume comme le montre l'illustration suivante. Soient $i \in [\![1;n]\!]$ la simulation, $m \in [\![1;M]\!]$ la maturité, $t \in [\![1;T]\!]$ la période et AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC les classes de rating prises en compte :

Définition de la table initiale (avant prise en compte des spreads de crédit) :

	Simulation	Driver	Maturité	$t = 0$	$t = 1$	…	$t = T$
	…	…	…	…	…	…	…
Déflateur, inflation, indices action et immobilier, dividende action et immobilier	i	Déflateur	n/a	1	$D^i(1)$		$D^i(T)$
	i	Indice action	n/a	$S(0)$	$S^i(1)$		$S^i(T)$
	i	Dividende action	n/a				
	i	Indice immo.	n/a	$Immo(0)$	$Immo^i(1)$		$Immo^i(T)$
	i	Dividende immo.	n/a				
	i	Inflation (IPC)	n/a	$I(0)$	$I^i(1)$		$I^i(T)$
Taux nominaux par maturité	i	ZC nominal	$m = 1$	$P_n^i(0,1)$	$P_n^i(1,2)$		$P_n^i(T,T+1)$
	…	…	…				
	i	ZC nominal	$m = M$	$P_n^i(0,M)$	$P_n^i(1,M+1)$		$P_n^i(T,T+M)$
Taux réels par maturité	i	ZC réel	$m = 1$	$P_r^i(0,1)$	$P_r^i(1,2)$		$P_r^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC réel	$m = M$	$P_r^i(0,M)$	$P_r^i(1,M+1)$		$P_r^i(T,T+M)$
	…	…	…	…	…	…	…

Définition de la table résultante :

	Simulation	Driver	Maturité	$t = 0$	$t = 1$	…	$t = T$
	Table initiale						
Taux ZC AAA	i	ZC risqué AAA	$m = 1$	$P_{AAA}^i(0,1)$	$P_{AAA}^i(1,2)$		$P_{AAA}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué AAA	$m = M$	$P_{AAA}^i(0,M)$	$P_{AAA}^i(1,M+1)$		$P_{AAA}^i(T,T+M)$
Taux ZC AA	i	ZC risqué AA	$m = 1$	$P_{AA}^i(0,1)$	$P_{AA}^i(1,2)$		$P_{AA}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué AA	$m = M$	$P_{AA}^i(0,M)$	$P_{AA}^i(1,M+1)$		$P_{AA}^i(T,T+M)$
…	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué CCC	$m = 1$	$P_{CCC}^i(0,1)$	$P_{CCC}^i(1,2)$		$P_{CCC}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué CCC	$m = M$	$P_{CCC}^i(0,M)$	$P_{CCC}^i(1,M+1)$		$P_{CCC}^i(T,T+M)$
Probabilités de transition de rating	i	Proba. annuelle AAA → AAA	n/a	$p_{AAA \to AAA}(0,1)$	$p_{AAA \to AAA}(1,2)$		$p_{AAA \to AAA}(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	Proba. annuelle $CCC \to Défaut$	n/a	$p_{CCC \to D}(0,1)$	$p_{CCC \to D}(1,2)$		$p_{CCC \to D}(T,T+1)$

3.5. FOCUS SUR LE MODELE LONGSTAFF, MITHAL ET NEIS (LMN)

3.5.1 Description du modèle

Le modèle Longstaff, Mithal et Neis (LMN), à la différence du modèle JLT présenté précédemment, est un modèle de crédit basé sur l'utilisation d'intensités de défaut. Dans ce modèle multi-rating, l'émetteur d'une dette ne peut pas changer de rating ou de classe de rating au cours du temps ; les deux seules évolutions possibles au cours de la vie d'une obligation sont :

- L'émetteur 'survit' jusqu'à la maturité du titre,
- L'émetteur fait défaut avant l'arrivée à échéance du titre.

Le modèle décrit la dynamique des intensités de défaut par rating ou classe de rating. Dans la suite nous allons considérer sept classes de rating : AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC. Pour chacune de ces classes de rating, notée *i*, une intensité de défaut $(\lambda_t^i)_t$ est modélisée.

Les intensités de défaut sont modélisées, en univers risque-neutre, par des processus CIR, processus stochastiques définis par l'équation différentielle stochastique suivante et supposés indépendant du processus de taux sans risque, $\forall\, i \in \Gamma$:

$$d\lambda^i(t) = \alpha^i\left(\mu^i - \lambda^i(t)\right)dt + \sigma^i\sqrt{\lambda^i(t)}dW^{\mathbb{Q}}(t) \qquad (35)$$

où

- $\Gamma = \{AAA\,;\ AA\,;\ A\,;\ BBB\,;\ BB\,;\ B\,;CCC\}$
- $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre
- α est la vitesse de retour à la moyenne
- μ est la moyenne de long terme
- σ est la volatilité de l'excès d'intensité de défaut
- la condition de Feller $2\alpha\mu > \sigma^2$ permet d'assurer la positivité de λ à toute date t

Les paramétres $\left(\alpha^i, \mu^i, \sigma^i, \lambda^i(0)\right)$ sont les quatre paramétres du modèle LMN devant être estimés, pour chacun des sept ratings de l'ensemble Γ.

Pour tout rating i de Γ, on note τ^i la date de défaut de l'émetteur d'une obligation ; à la date de valorisation t cet émetteur est noté i.

Le prix modèle en date t d'une obligation zéro-coupon risquée dont l'émetteur est noté $i \in \Gamma$ en date t maturant en T est :

$$ZC_r^{(i)}(t,T) = ZC(t,T).\left[q(t,T-t,i) + (1-LGD)(1-q(t,T-t,i)\right] \qquad (36)$$

Où

- $q(t,T-t,i)$ est la probabilité de survie entre t et T d'un émetteur noté i en t
- LGD est le loss given default, il correspond au montant de perte en cas de défaut.

La probabilité de survie s'exprime de la façon suivante :

$$q(t,T-t,i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[exp\left(-\int_t^T \lambda_i(s)ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad (37)$$

Puisque λ_i suit un modèle CIR, cette espérance se calcule de façon exacte, comme suit :

$$q(t,T-t,i) = A_i(T-t)\exp\left(-B_i(T-t)\pi_t^i\right) \quad (38)$$

avec A_i et B_i des fonctions simples des paramétres $\left(\alpha^i,\mu^i,\sigma^i,\lambda^i(0)\right)$:

- $A_i(T-t) = \left[\frac{2\tilde{\gamma}_i exp\left(\frac{(\tilde{\gamma}_i+\tilde{\alpha}_i)(T-t)}{2}\right)}{2\tilde{\gamma}_i+(\tilde{\gamma}_i+\tilde{\alpha}_i)(\exp((T-t)\tilde{\gamma}_i)-1)}\right]^{\frac{2\tilde{\alpha}_i\tilde{\mu}_i}{\sigma_i^2}}$
- $B_i(T-t) = \left[\frac{2[exp((T-t)\tilde{\gamma}_i)-1]}{2\tilde{\gamma}_i(\tilde{\gamma}_i+\tilde{\alpha}_i)[exp((T-t)\tilde{\gamma}_i)-1]}\right]$
- $\tilde{\gamma}_i = \sqrt{\tilde{\alpha}_i^2 + 2\sigma_i^2}$

Le spread peut alors être exprimé selon la formule suivante :

$$Spread_i(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{ZC_r^{(i)}(t,T)}{ZC(t,T)}\right)$$

$$= -\frac{1}{T-t}\ln\left((1-LGD) + LDG.q(t,T-t,i)\right)$$

$$= -\frac{1}{T-t}\ln\left(REC + (1-REC).q(t,T-t,i)\right) \quad (39)$$

Où

- $ZC_r^{(i)}(t,T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon risqué maturant en T et provenant d'un émetteur noté i
- $ZC(t,T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon maturant en T
- REC est le montant recouvrable en cas de défaut

3.5.2 Valorisation des obligations

Le prix modèle (après versement du coupon) en date t d'une obligation risquée de principal N_{t+m} et versant chaque année comprise entre t et $t+m$ un coupon C_s et dont l'émetteur est noté $i \in \Gamma$ en date t pour la maturité $m > 0$ est :

$$P_{oblig}(t) = \underbrace{e^{-\int_0^t \lambda^i(s)ds}}_{facteur\ de\ survie\ S(t;i)} . \left(\sum_{k=t+1}^{t+m} C_k.ZC_r^{(i)}(t,k) + N_{t+m}.ZC_r^{(i)}(t,t+m)\right) \quad (40)$$

où

- $ZC_r^{(i)}(t,k)$ est le prix en t d'un zéro-coupon risqué maturant en k et provenant d'un émetteur noté i

Retraitement du coupon en période t :

$$Coupon(t) = C_t \times \left[e^{-\int_0^t \lambda^i(s)ds} + (1 - LGD) \int_0^t \lambda^i(u) e^{-\int_0^u \lambda^i(s)ds} du \right] \quad (41)$$

3.5.3 Valorisation des CDS

On note τ la date de défaut de l'entité de référence. L'entité de référence a un rating i en date t_0

L'acheteur de protection paye une prime annuelle P tant que l'entité de référence n'a pas fait défaut. En cas de défaut de l'entité de référence, le vendeur de protection paye à l'acheteur un montant égal au nominal N (et l'acheteur cesse ensuite de payer la prime annuelle P).

Valorisation de la jambe acheteuse de protection :

$$jambe\ acheteuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} \quad (42)$$

$$jambe\ acheteuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{q(t_0, t - t_0, i)}_{\substack{Probabilité\ de\ survie \\ entre\ t_0\ et\ t}} \quad (43)$$

Où $q(t_0, t - t_0, i)$, correspondant à la probabilité de survie de l'entité de référence notée i, est calculable par formule fermée à partir des paramètres du modèle

Valorisation de la jambe vendeuse de protection :

$$jambe\ vendeuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau = t\}}}_{\substack{Probabilité\ de\ faire\ défaut \\ exactement\ l'année\ t}} \quad (44)$$

$$jambe\ vendeuse(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times \underbrace{q(t_0, t - 1 - t_0, i)}_{\substack{Probabilité\ de\ survie \\ entre\ t_0\ et\ t-1}} \times \underbrace{[1 - q(t - 1, t - (t - 1), i)]}_{\substack{Probabilité\ de\ faire\ défaut \\ en\ année\ t\ sachant\ que\ l'entité \\ n'avait\ pas\ fait\ défaut\ en\ année\ t-1}} \quad (45)$$

Valorisation du CDS :

Le prix du CDS correspond à la différence entre la valeur de la jambe acheteuse et vendeuse :

$$CDS(t_0) = \sum_{t=t_0}^{T} P \times ZC(t_0, t) \times q(t_0, t - t_0, i)$$
$$- \sum_{t=t_0}^{T} N \times ZC(t_0, t) \times q(t_0, t - 1 - t_0, i) \times [1 - q(t - 1, t - (t - 1), i)] \quad (46)$$

3.5.4 Calibrage

L'objectif du calibrage est de déterminer pour chacun des ratings de l'ensemble Γ les quatres paramétres $\left(\alpha^i, \mu^i, \sigma^i, \pi^i(0)\right)$ du modèle.

3.5.4.1 Calibrage sur prix d'obligation risqué

Comme pour le modèle JLT, le calibrage sur la base des prix d'obligations risquées se fait en minimisant l'écart entre les spreads calculés par le modèle et les spreads de marché déduits comme suit des prix des obligations risquées :

Pour chaque prix d'obligation risquée de notation i et de maturité m observé sur les marchés, on déduit le spread :

$$Spread_i^{mkt}(t,t+m) = -\frac{1}{m}\ln\left(\frac{ZC_r^{(i)}(t,t+m)}{ZC(t,t+m)}\right) \quad (47)$$

Les 4 paramètres $\left(\alpha^i,\mu^i,\sigma^i,\lambda^i(0)\right) = \theta$ sont ensuite estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires via $\left(\widehat{\alpha^i},\widehat{\mu^i},\widehat{\sigma^i},\widehat{\lambda^i(0)}\right) = \hat{\theta}$, résultat de la minimisation de la fonction $f(\theta)$, somme des carrés des écarts entre les spreads de marché et les spreads théoriques sur l'ensemble des maturités et des ratings concernés :

$$f(\theta) = \underset{2\alpha\mu>\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{\substack{m\in\mathcal{M} \\ i\in\kappa}} \left(Spread_i^{mkt}(0,m) - Spread_i(0,m;\theta) \right)^2 \quad (48)$$

NB : la minimisation des écarts quadratiques se fait sous la condition de Feller $2\alpha\mu > \sigma^2$ qui assure la positivité des processus λ^i

3.5.4.2 Calibrage sur CDS

Le calibrage peut aussi se faire sur prix de CDS en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires directement aux prix de CDS :

$$f(\theta) = \underset{2\alpha\mu>\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{\substack{m\in\mathcal{M} \\ i\in\kappa}} \left(CDS_i^{mkt}(0,m) - CDS_i(0,m;\theta) \right)^2 \quad (49)$$

Où m est la maturité et i le rating et $CDS_i(0,m;\theta)$ le prix du CDS calculé par formule fermée à partir des paramètres du modèle (cf formule ci-dessus).

3.5.5 Simulation

A partir des paramètres estimés lors du calibrage, on met en place un schéma de discrétisation d'Alfonsi qui permet d'obtenir l'intensité de défaut à pas mensuel, de façon récursive, comme suit :

$$\lambda^i(t+\Delta t) = \left[\left(1-\frac{\widehat{\alpha_i}}{2}\Delta t\right)\sqrt{\lambda^i(t)} + \frac{\widehat{\sigma_i}\sqrt{\Delta t}\varepsilon(t)}{2\left(1-\frac{\widehat{\alpha_i}}{2}\Delta t\right)}\right]^2 + \Delta t\left(\widehat{\alpha_i}\widehat{\mu_i} - \frac{\widehat{\sigma_i}^2}{4}\right) \quad (50)$$

Avec $\Delta t = \frac{1}{12}$ et $\varepsilon(t)$ obtenu par simulation d'une loi normale centrée réduite.

Une fois les valeurs $\lambda^i(t)$, simulées, on obtient les prix théoriques des zéro-coupon risqués à chaque date et pour chacun des ratings. Ces informations sont alors intégrées aux tables de scénarios économiques, augmentant alors considérablement leur volume comme le montre l'illustration suivante. Soient $i \in [\![1;n]\!]$ la simulation, $m \in [\![1;M]\!]$ la maturité, $t \in [\![1;T]\!]$ la période et AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC les classes de rating prises en compte :

Définition de la table initiale (avant prise en compte des spreads de crédit) :

	Simulation	Driver	Maturité	$t = 0$	$t = 1$	…	$t = T$
	…	…	…	…	…	…	…
Déflateur, inflation, indices action et immobilier, dividende action et immobilier	i	Déflateur	n/a	1	$D^i(1)$		$D^i(T)$
	i	Indice action	n/a	$S(0)$	$S^i(1)$		$S^i(T)$
	i	Dividende action	n/a				
	i	Indice immo.	n/a	$Immo(0)$	$Immo^i(1)$		$Immo^i(T)$
	i	Dividende immo.	n/a				
	i	Inflation (IPC)	n/a	$I(0)$	$I^i(1)$		$I^i(T)$
Taux nominaux par maturité	i	ZC nominal	$m = 1$	$P_n^i(0,1)$	$P_n^i(1,2)$		$P_n^i(T,T+1)$
	…	…	…				
	i	ZC nominal	$m = M$	$P_n^i(0,M)$	$P_n^i(1,M+1)$		$P_n^i(T,T+M)$
Taux réels par maturité	i	ZC réel	$m = 1$	$P_r^i(0,1)$	$P_r^i(1,2)$		$P_r^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC réel	$m = M$	$P_r^i(0,M)$	$P_r^i(1,M+1)$		$P_r^i(T,T+M)$
	…	…	…	…	…	…	…

Définition de la table résultante :

	Simulation	Driver	Maturité	$t = 0$	$t = 1$	…	$t = T$
	Table initiale						
Taux ZC AAA	i	ZC risqué AAA	$m = 1$	$P_{AAA}^i(0,1)$	$P_{AAA}^i(1,2)$		$P_{AAA}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué AAA	$m = M$	$P_{AAA}^i(0,M)$	$P_{AAA}^i(1,M+1)$		$P_{AAA}^i(T,T+M)$
Taux ZC AA	i	ZC risqué AA	$m = 1$	$P_{AA}^i(0,1)$	$P_{AA}^i(1,2)$		$P_{AA}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué AA	$m = M$	$P_{AA}^i(0,M)$	$P_{AA}^i(1,M+1)$		$P_{AA}^i(T,T+M)$
…	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué CCC	$m = 1$	$P_{CCC}^i(0,1)$	$P_{CCC}^i(1,2)$		$P_{CCC}^i(T,T+1)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	ZC risqué CCC	$m = M$	$P_{CCC}^i(0,M)$	$P_{CCC}^i(1,M+1)$		$P_{CCC}^i(T,T+M)$
Facteurs de survie	i	Facteur de survie AAA	n/a	$S(0,AAA)$	$S(1,AAA)$		$S(t,AAA)$
	…	…	…	…	…	…	…
	i	Facteur de survie CCC	n/a	$S(0,CCC)$	$S(1,CCC)$		$S(t,CCC)$

3.5.6 Variante du modèle LMN permettant d'obtenir des spreads de crédit croissants par notation

Un des défauts reprochés au modèle LMN est qu'il n'assure pas la croissance des spreads de crédit avec les notations : il est possible dans certaines simulations d'avoir un spread de crédit de la notation BBB inférieur au spread de crédit de la notation A. Dans la réalité, il peut bien évidemment arriver qu'une obligation donnée, notée BBB, ait, à un moment précis, un spread inférieur à une autre obligation notée A, mais en moyenne sur toutes les obligations, il est très rare d'observer des inversions d'ordre de spread entre les classes de notation. Or, dans l'utilisation que nous souhaitons faire de ce modèle, c'est bien un comportement moyen des différentes classes de notation que nous cherchons à reproduire.

Pour obtenir un spread croissant avec la dégradation du rating, il convient de s'assurer que l'intensité de défaut augmente elle aussi avec la dégradation du rating ; cela se traduit par la relation suivante :

$$M \leq M' \Rightarrow \lambda_t^M \leq \lambda_t^{M'}$$

Une façon de vérifier cette relation est d'utiliser des processus CIR, non pas pour modéliser directement les intensités de défaut, mais pour modéliser les excès d'intensité de défaut d'une notation à l'autre :

$$\lambda_t^i = \sum_{m=1}^{i} \pi_t^m \qquad (51)$$

où les π_t^m sont appelés excès d'intensité de défaut, strictement positifs.

Ainsi, les intensités de défaut sont positives et l'intensité augmente avec la dégradation du rating.

$\lambda_t^i - \lambda_t^{i-1} = \pi_t^i$ représente l'excès d'intensité dû au passage du rating $i-1$ au rating i.

Les excès d'intensité de défaut sont modélisés, en univers risque-neutre, par des processus CIR, processus stochastiques définis par l'équation différentielle stochastique suivante et supposés indépendant du processus de taux sans risque, $\forall\, i \in \Gamma$:

$$d\pi^i(t) = \alpha^i \left(\mu^i - \pi^i(t)\right) dt + \sigma^i \sqrt{\pi^i(t)} dW^{\mathbb{Q}}(t) \qquad (52)$$

où

- $\Gamma = \{AAA\,;\ AA\,;\ A\,;\ BBB\,;\ BB\,;\ B\,;CCC\}$
- $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre,
- α est la vitesse de retour à la moyenne
- μ est la moyenne de long terme
- σ est la volatilité de l'excès d'intensité de défaut
- la condition de Feller $2\alpha\mu > \sigma^2$ permet d'assurer la positivité de π à toute date t

On a comme pour le modèle LMN de base, le prix modèle en date t d'une obligation zéro-coupon risquée dont l'émetteur est noté $i \in \Gamma$ en date t maturant en T est :

$$ZC_r^{(i)}(t,T) = ZC(t,T).[q(t,T-t,i) + (1-LGD)(1-q(t,T-t,i)] \qquad (53)$$

Où

- $q(t,T-t,i)$ est la probabilité de survie entre t et T d'un émetteur noté i en t
- LGD est le loss given default, il correspond au montant de perte en cas de défaut.

$$q(t,T-t,i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[exp\left(-\int_t^T \lambda_i(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \qquad (54)$$

Puisque $\lambda_t^i = \sum_{m=1}^{i} \pi_t^m$ et que les π_i suivent un modèle CIR, cette espérance se calcule de façon exacte, comme suit :

$$q(t, T-t, i) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{i} \left(A_i(T-t) + B_i(T-t)\pi_t^i\right)\right) \qquad (55)$$

avec A_i et B_i des fonctions simples des paramétres $\left(\alpha^i, \mu^i, \sigma^i, \pi^i(0)\right)$:

- $A_i(T-t) = \frac{2\tilde{\alpha}_i\tilde{\mu}_i}{\sigma_i^2} \ln\left(\frac{2\tilde{\gamma}_i + (\tilde{\gamma}_i + \tilde{\alpha}_i)\left(e^{\tilde{\gamma}_i(T-t)} - 1\right)}{2\tilde{\gamma}_i e^{\frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_i + \tilde{\alpha}_i)(T-t)}}\right)$
- $B_i(T-t) = \frac{\frac{\left(1 - e^{-\tilde{\gamma}_i(T-t)}\right)}{\tilde{\gamma}_i}}{\left[1 - \frac{\frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_i - \tilde{\alpha}_i)\left(1 - e^{-\tilde{\gamma}_i(T-t)}\right)}{\tilde{\gamma}_i}\right]}$
- $\tilde{\gamma}_i = \sqrt{\tilde{\alpha}_i^2 + 2\sigma_i^2}$

4. APPLICATION A UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE VIE REPRESENTATIVE DU MARCHE FRANCAIS

4.1. METHODOLOGIE

4.1.1 Description de la compagnie fictive « France Vie »

4.1.1.1 Principe d'une société fictive représentative du marché français

Nous avons souhaité illustrer notre étude en mesurant l'impact de la prise en compte des spreads de crédit dans le calcul du Best Estimate sur la base d'une société fictive représentative du marché de l'Assurance Vie en France. Dans la suite de l'étude, nous désignerons cette société fictive sous le nom de « France Vie ».

La société fictive France Vie a été constituée en cumulant l'ensemble des données du marché français de l'Assurance Vie (agrégation des actifs et des passifs). Ses caractéristiques correspondent donc à la moyenne du marché, les règles de projection utilisées sont en ligne avec les règles de projection usuellement rencontrées sur le marché. Ceci s'applique notamment :

- A la répartition des actifs de la compagnie (en type, duration, etc.),
- Aux passifs (type de produits, niveau de TMG, loi de rachats, etc.),
- Aux règles de projection (calcul de la participation aux bénéfices, réalignement des actifs en cours de projection, gestion des réserves, etc.).

Les données utilisées pour constituer France Vie sont pour la plupart issues de données publiques, publiées par la Fédération Française d'Assurance, par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution ou bien directement par les compagnies d'assurance elles-mêmes (dans leur rapport annuel notamment). Certains éléments sont également basés sur la connaissance du marché français développée par le cabinet Milliman.

Sur la base de ces éléments, un modèle a été constitué permettant le calcul du Best Estimate et l'évaluation du SCR formule standard de la société France Vie :

- Sur l'épargne en Euros ce modèle est stochastique et est implémenté sous le logiciel Prophet,
- Sur l'épargne en unités de compte ce modèle est déterministe et implémenté sous Excel.

La modélisation stochastique des spreads de crédit ne concerne donc que le modèle stochastique d'épargne en Euros.

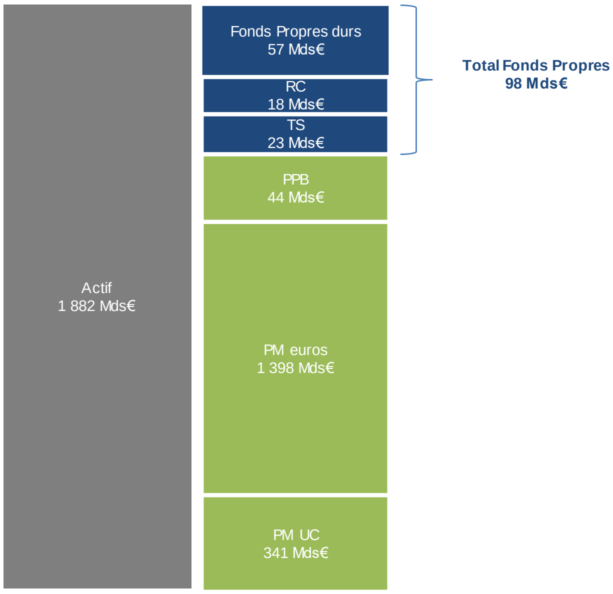
4.1.1.2 Bilan social au 31/12/2017

Le bilan social de la société France Vie est constitué en agrégeant les données totales du marché français, et notamment :

- Les provisions mathématiques, en distinguant les provisions mathématiques en Euros des provisions mathématiques en unités de compte,
- La provision pour participation aux bénéfices (PPB ci-après),
- La réserve de capitalisation,
- Les titres subordonnés,
- Les fonds propres durs,

- Le montant total de l'actif.

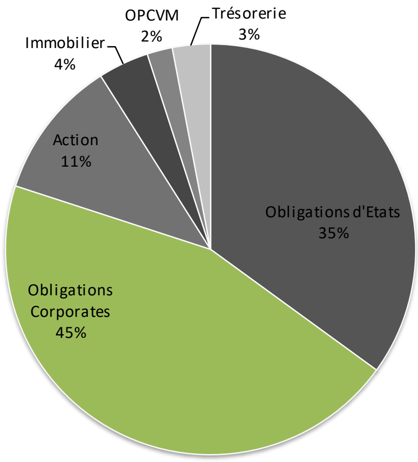
Au 31/12/2017, on obtient le bilan social suivant :



4.1.1.3 Description du portefeuille d'actif

Le portefeuille d'actif de France Vie est lui aussi obtenu en agrégeant les données totales du marché de l'Assurance Vie français (données agrégées publiées par la Fédération Française d'Assurance et données individuelles, notamment dans l'Etat Détaillé des Placements annexés aux compte).

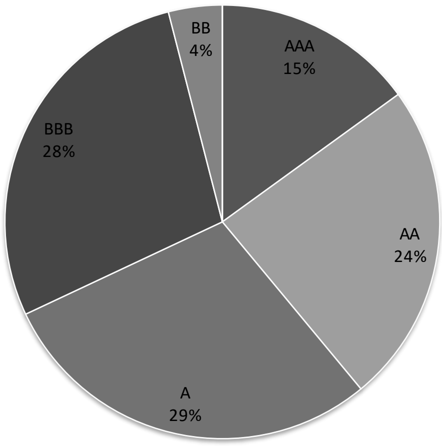
Au 31/12/2017, la composition (en valeur nette comptable) du portefeuille d'actif de France Vie est la suivante :



On constate que le poids des investissements obligataires est majeur (80% du portefeuille), avec une part d'obligations issues d'émetteurs privés (obligations « corporate ») très importante (environ 45% du portefeuille total).

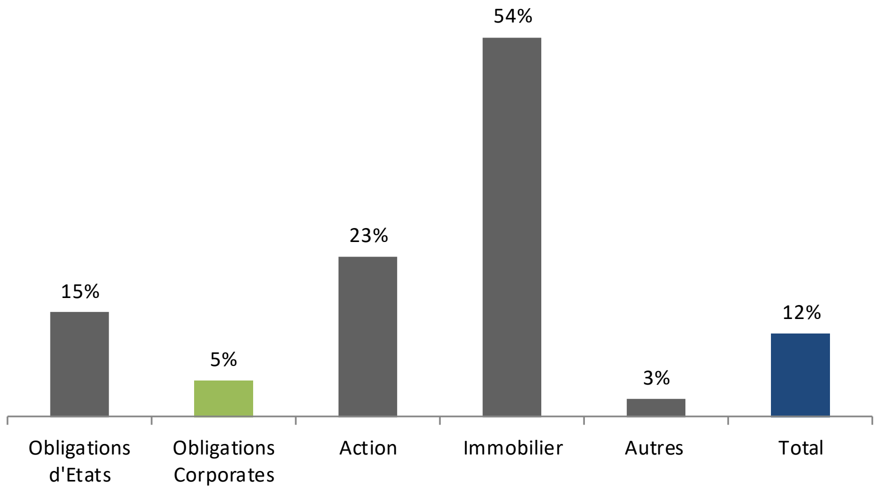
Il est intéressant de noter que le poids des investissements en obligations corporate n'a cessé d'augmenter ces dernières années. En effet, en prévision de l'entrée en vigueur de Solvabilité II, les assureurs vie ont progressivement diminué leur part d'investissement action (-6 points par rapport à 2007) au profit de l'investissement en obligations corporate (+ 10 points depuis 2007). Ce mouvement est renforcé par la baisse des taux qui pousse les assureurs vie à aller chercher de meilleurs taux de rendement en investissant sur des obligations de plus en plus risquées.

Au sein du portefeuille d'obligations corporate, la répartition par classe de notations est la suivante :



Comme attendu, les placements obligataires des assureurs vie sont principalement « investment grade », c'est-à-dire de notation BBB ou meilleure, les placements non investment grade représentant moins de 5% du portefeuille. Plus de 50% du portefeuille est constitué d'obligation de notation AA ou A.

Le niveau de plus-value latente sur les différentes classes d'actif est le suivant :



On note un niveau de plus-values latentes significatif sur les placements obligataires du fait de la baisse des taux intervenue ces dernières années. Il convient de noter que ce niveau de plus-values a sensiblement reculé au cours de l'année 2017 du fait de la remontée des taux observée sur l'année.

4.1.1.4 Description du passif

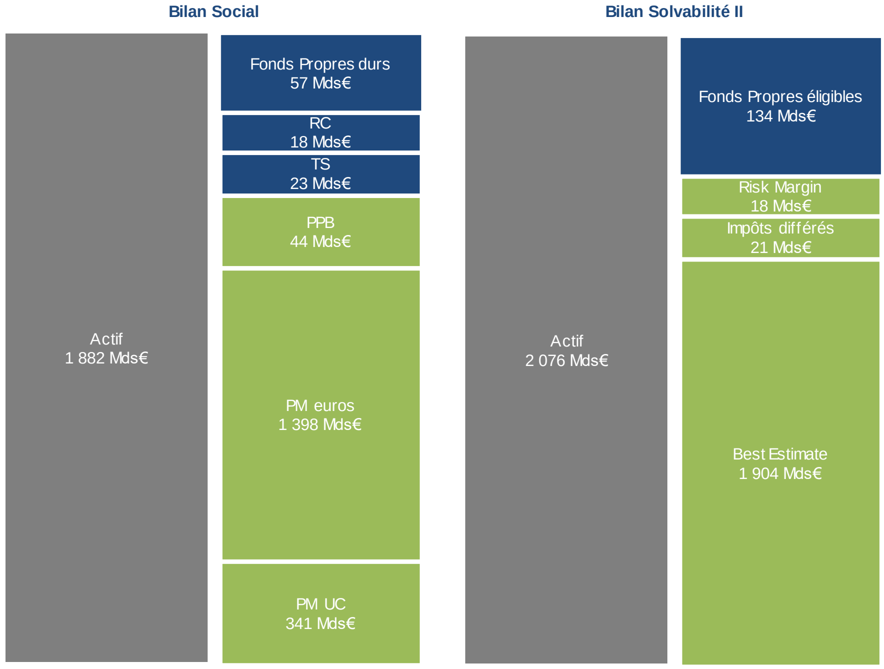
Le portefeuille de passif de France Vie est lui aussi constitué par l'agrégation des données du marché français. Il est composé à 80% d'encours en euros et à 20% d'encours en unités de compte (pour rappel, la modélisation stochastique des spreads de crédit mise en place dans le cadre de notre étude ne concerne que le portefeuille d'épargne en Euros).

Concernant les contrats d'épargne en euros, la structure de taux minimum garantie (TMG) est similaire à celle du marché français, avec une part significative de TMG nuls, mais également une fraction non négligeable de TMG élevés, pour un niveau moyen de TMG s'élevant à 0,5% Le tableau ci-dessous résume la structure de TMG utilisée :

Répartition des taux minimum garantie au sein de France Vie au 31/12/2017	
Classe de TMG	**Poids au sein des placements Euros**
TMG inférieur à 2%	86%
TMG compris entre 2% et 3%	4%
TMG supérieur à 3%	10%

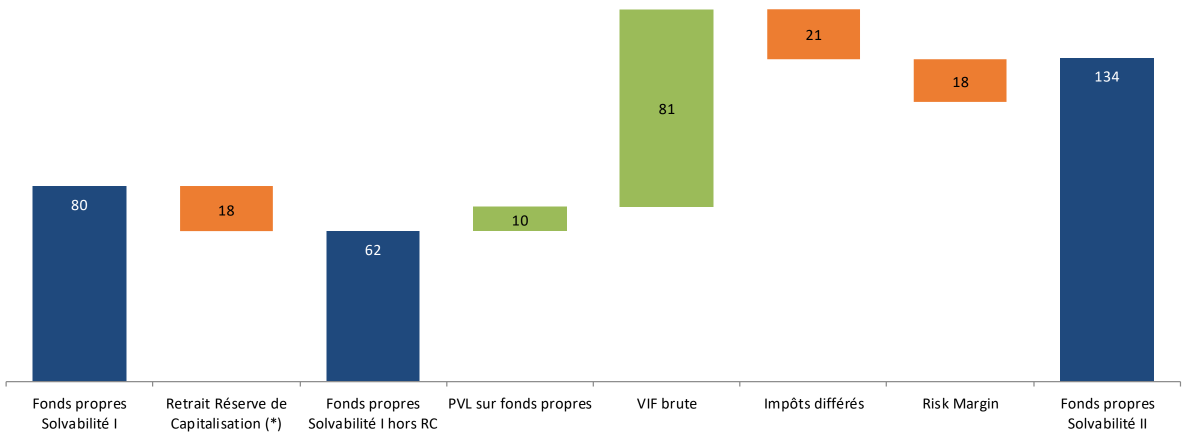
4.1.1.5 Situation de solvabilité

L'utilisation de notre modèle de valorisation nous a permis de constituer le bilan prudentiel suivant pour la société France Vie au 31/12/2017 :



Le niveau de fonds propres s'élève à 134 Milliards d'Euros (contre 98 Milliards d'euros dans le bilan social), ce qui représente 7,5% des provisions mathématiques. Le passage des fonds propres Solvabilité I aux fonds propres Solvabilité II est détaillé dans le graphique ci-dessous.

Passage des fonds propres Solvabilité I aux fonds propres Sovabilité II

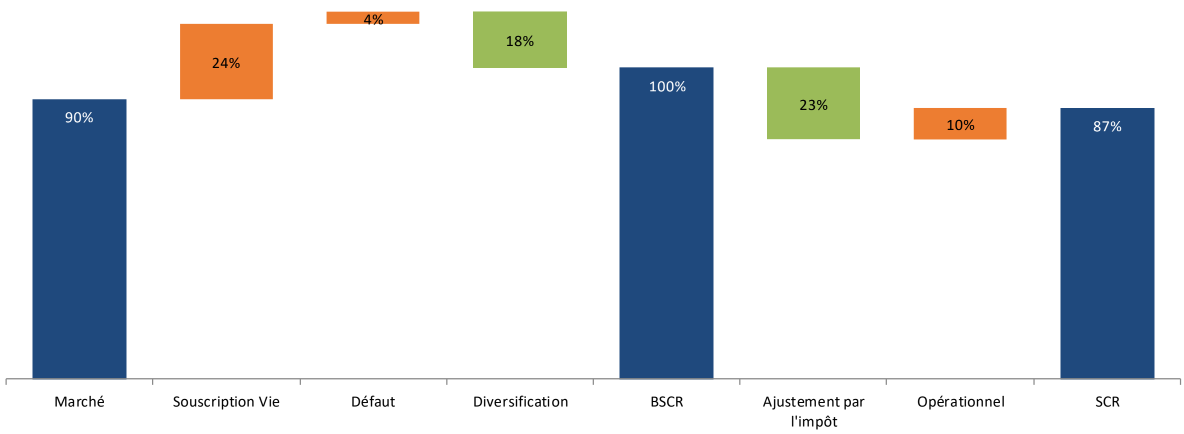


** Sous Solvabilité II, la réserve de capitalisation est projetée dans le modèle, ses éventuelles reprises sont partagées entre actionnaire et assurés par le jeux des règles ALM et l'algorithme de participation aux bénéfices. La réserve de capitalisation en fin de projection est reprise à 100% pour l'actionnaire*

Notre modèle nous a également permis de réaliser les calculs de la formule standard pour la société France Vie, conduisant à un SCR de 77.5 Milliards d'Euros (soit 4.3% des PM) et à un ratio de solvabilité de 172%.

Le SCR formule standard se décompose de la façon suivante :

SCR formule standard (en % du BSCR)



4.1.2 Modèle de valorisation ALM utilisé

4.1.2.1 Principe

Comme nous l'évoquions dans la section 2.1.3, l'article 79 de la Directive Solvabilité 2 impose la prise en compte de l'ensemble des options et garanties financières dans le calcul du Best Estimate.

L'évaluation des options et garanties financières repose dans notre modèle sur une approche de type Monte-Carlo : projection simultanée de l'actif et du passif de France Vie sur un horizon de projection de 40 ans sur un ensemble de 3000 scénarios économiques indépendants.

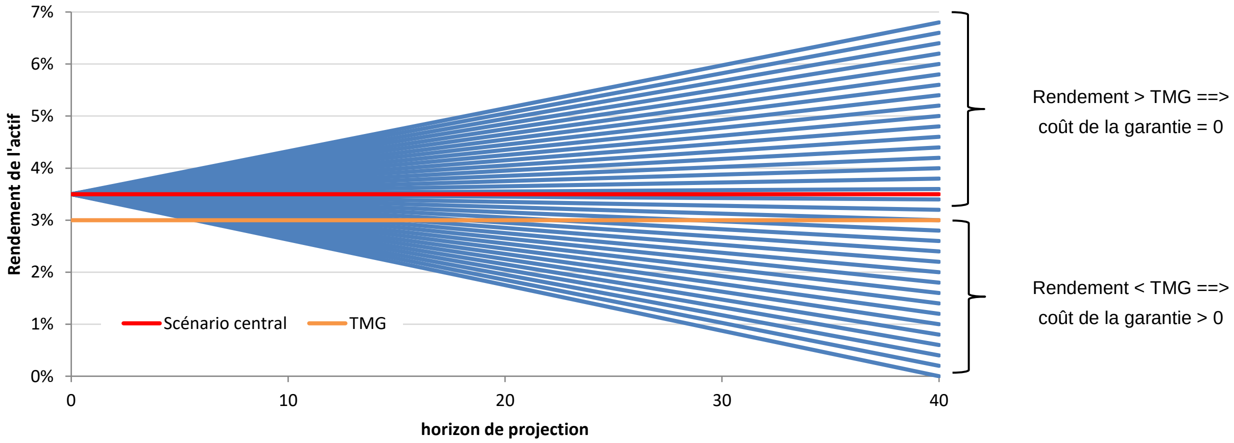
Pour rappel, le Best Estimate correspond donc à la valeur actualisée des flux futurs des contrats projetés sur l'ensemble de ces scénarios économiques :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t} ZC(0,t)_i \times F_{t,i} \xrightarrow[\text{Probabilité}]{n\to\infty} E^{\boldsymbol{Q}}\left[\sum_{t} \mathrm{ZC}(0,\mathrm{t}) \times F_t\right] = Best\ Estimate \qquad (56)$$

Illustration de la prise en compte des options et garanties financières dans un modèle ALM stochastique : soit un contrat d'épargne offrant une garantie de taux de 3%. Le coût de cette garantie est défini comme le minimum entre le taux garanti et le taux de rendement de l'actif de l'assureur.

Dans un modèle ALM déterministe, si le taux de rendement de l'actif est supérieur au taux minimum garanti alors le coût de la garantie est nul.

Dans notre modèle ALM stochastique, si le taux de rendement de l'actif est en moyenne égal à celui du scénario déterministe, il peut en revanche prendre 3 000 valeurs différentes comme l'illustre le schéma suivant. Le coût de la garantie est alors non nul.



4.1.2.2 Classes d'actifs modélisés

Le modèle utilisé pour notre étude permet la modélisation des classes d'actifs suivantes :

- Obligations couponnées à taux fixe,
- Obligations couponnées à taux variable : les coupons des titres de cette catégorie sont calculés en référence à un taux obligataire auquel une marge actuarielle à l'achat est retranchée,
- Obligations zéro coupon,
- SICAV Obligataires de distribution et de capitalisation : une sensibilité par rapport au taux 10 ans est modélisée pour cette classe d'actifs,
- Actions : le taux de dividende des actions est égal à 2%. Cette catégorie regroupe les actions en direct, les SICAV actions et les produits structurés à dominante actions,
- Immobilier : le taux de loyer est égal à 4%. Cette catégorie regroupe les immeubles détenus en direct et les parts de Sociétés Civiles Immobilières,
- Trésorerie (SICAV monétaire),

4.1.2.3 Règle de partage des bénéfices entre assureurs et assurés

Le modèle ALM comporte des règles permettant de modéliser la revalorisation attribuée aux contrats et de moduler le niveau des rachats du portefeuille en fonction de l'environnement économique.

Les règles implémentées pour le calcul de la participation aux bénéfices sont les suivantes :

- En cours d'année, les sorties sont revalorisées d'un pourcentage du taux servi pour le stock de contrats au cours de l'exercice précédent.
- En fin d'année, le modèle calcule :
    - Les produits financiers totaux nets des intérêts crédités au TMG et de la participation aux bénéfices servis aux sorties et des intérêts crédités au TMG servis au stock de contrats,
    - Les chargements sur encours et sur produits financiers,
    - La charge de participation aux bénéfices au-delà du taux minimum garanti calculée avec une cible de revalorisation correspondant au taux attendu par les assurés.
- Le modèle compare ensuite les produits financiers totaux nets avec la somme des chargements sur encours et sur produits financiers et de la participation aux bénéfices cible :
    - Si les produits financiers ne permettent pas de satisfaire ces contraintes, une reprise de la PPE (sans limitation) est effectuée puis des réalisations de plus-values latentes sur les actions, l'immobilier et les SICAV obligataires sont mises en œuvre. En cas d'insuffisance de ces deux opérations, le modèle procède à une réduction de la participation aux bénéfices servie aux assurés. La réduction de la participation aux bénéfices est effectuée de manière à servir un taux global de revalorisation (i.e. TMG et participation aux bénéfices) commun pour tous les contrats, tout en respectant la contrainte de TMG.
    - Si la réduction de la participation aux bénéfices n'est pas suffisante, le modèle constate une perte.
- Dès lors que la participation aux bénéfices cible est atteinte, le reliquat de production financière est doté à la PPE.

Des rachats conjoncturels supplémentaires aux rachats totaux structurels modélisés par ailleurs sont pris en compte dans le modèle : ces rachats conjoncturels sont fonction de l'écart entre la cible de revalorisation et le taux de participation aux bénéfices effectivement versé. La méthodologie de calcul des rachats conjoncturels est détaillée dans la section suivante.

4.1.2.4 Rachats dynamiques

La garantie des valeurs de rachat sur toute la durée des contrats est une caractéristique offerte par les produits d'épargne en euros.

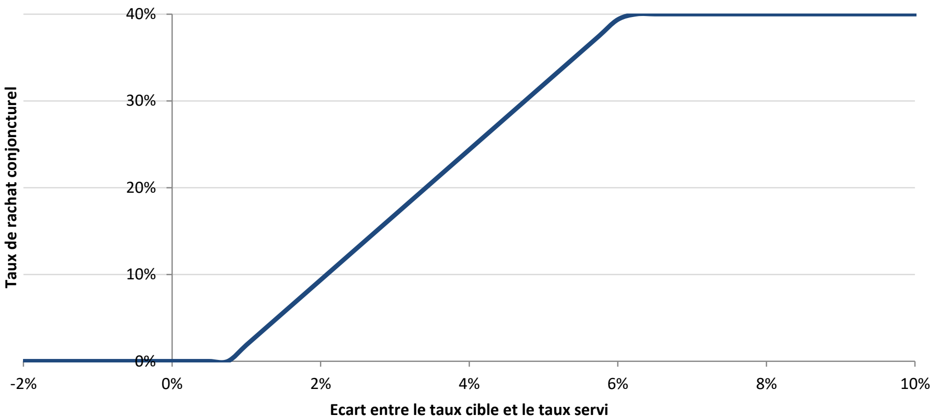
Afin de mesurer la valeur temps de cette garantie financière, le modèle ALM utilisé prévoit une composante conjoncturelle dans les rachats modélisés. Plus précisément, un niveau de rachat complémentaire est ajouté aux hypothèses de rachats structurels.

Le taux de rachat est conjoncturel est fonction de l'écart entre le taux servi et le taux attendu par les assurés, il est défini par les composantes suivantes :

- Taux de rachat maximum, $TauxMax = 40\%$
- Ecart entre taux servi et taux attendu au-delà duquel les assurés commencent à racheter, $SeuilMax = 0{,}75\%$

- Coefficient de pente, $Sens = 7{,}5$

$$Min\ (TauxMax\ ; Sens.\,(Taux\_cible(t-1) - Taux\_servi(t-1) - SeuilMax)$$



4.1.2.5 Calcul de la VIF et du Best Estimate

La projection des flux futurs via le modèle ALM permet de déterminer le Best Estimate dont les éléments constitutifs sont les suivants :

- Prestations (décès et rachats),
- Primes,
- Commissions,
- Frais,
- Part des richesses résiduelles finales revenant aux assurés : provisions mathématiques, provision pour participation aux bénéfices et plus-values latentes (la réserve de capitalisation, la PRE ainsi que les moins-values latentes finales reviennent à l'actionnaire).

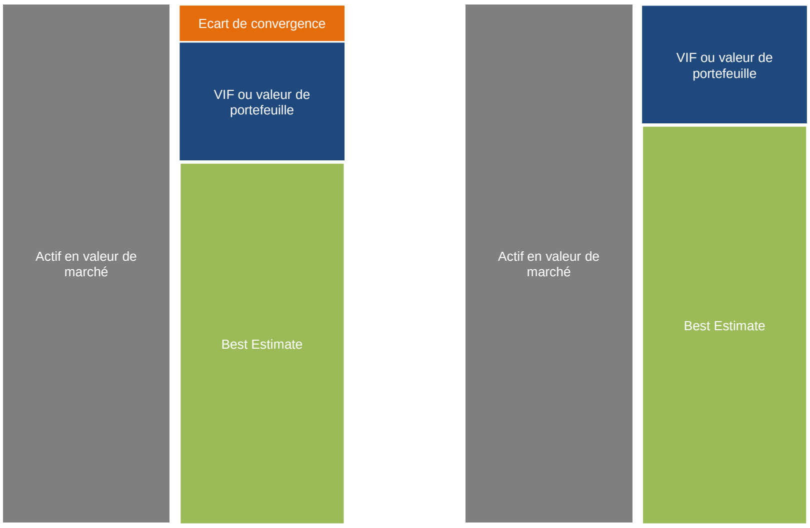
Le Best Estimate correspond donc aux flux de trésorerie futurs attendus. La projection permet également le calcul de la Valeur de l'In Force ou valeur de portefeuille correspondant à la valeur actualisée des résultats futurs sur l'ensemble des scénarios économiques.

Pour rappel, le bilan Solvabilité II simplifié d'une compagnie d'assurance peut être représenté de la façon suivante : $VM(0) = VIF + BE$ avec $VM(0)$ la valeur de marché initiale des actifs.

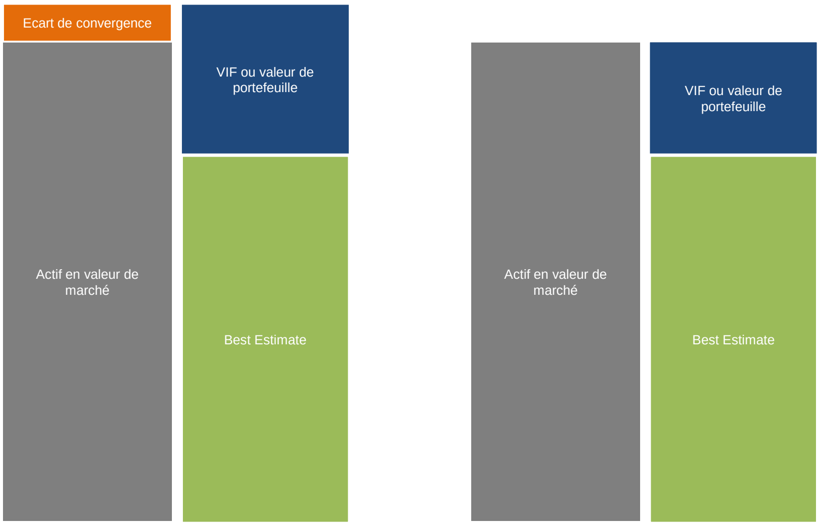
Or il est fréquent de constater que cette égalité n'est pas parfaitement respectée dans les projections ALM, l'écart entre la valeur de marché initiale des actifs, la VIF et le Best Estimate est appelé écart de convergence. Il provient en général des scénarios économiques (nombre de scénarios, explosivité, martingalité) ou encore de limites propres au modèle de projection.

La directive Solvabilité II précise que les compagnies d'assurance doivent limiter ces erreurs de valorisation et s'assurer du caractère prudent de l'estimation des engagements. Pour cela, lorsqu'un écart de convergence est constaté, il est chez la majorité des acteurs traité de la manière suivante :

Cas 1 : $VM(0) > VIF + BE \Rightarrow EC > 0$ alors l'EC est affecté au Best Estimate



Cas 2 : $VM(0) < VIF + BE \Rightarrow EC < 0$ alors l'EC est vient dimuner la valeur de portefeuille



4.1.3 Prise en compte des spreads de crédit dans l'outil ALM

Sauf mention contraire, cette partie sera illustrée sur le cas du modèle JLT, qui correspond aux modifications les plus importantes dans l'outil ALM puisqu'il met en œuvre des transitions de rating.

4.1.3.1 Préalable : définition des notations

Définition des notations (modèle JLT):

Dans la suite de notre étude, nous utiliserons les notations suivantes :

- $Q_{(t,l)}$ désigne la matrice de transition entre *t* et *t+1*, pour la trajectoire *l*
- $\tilde{Q}_{(t,T,l)}$ désigne la matrice de transition entre *t* et *T*, pour la trajectoire *l*
- $p_{(R,t,T,,l)}$ désigne la probabilité de défaut entre *t* et *T*, en sachant que le titre à la notation *R* à la date *t*, et ce pour la trajectoire *l*

$$p_{(R,t,T,l)}=\tilde{Q}_{(t,T,l)}(R,D)$$

  - *Où D est la dernière classe de notation, correspondant au défaut*
  - $\tilde{Q}_{(0,T,l)}(R,D)$ *désigne donc le coefficient situé sur la Rième ligne et Nième colonne (la dernière colonne, correspondant au défaut) qui correspond à la probabilité pour un titre noté R en date t d'être en défaut en date T*

- $s_{(R,t,T,l)}$ désigne le coefficient de survie entre t et T, en sachant que le titre à la notation R à la date t, et ce pour la trajectoire l

$$s_{(R,t,T,l)} = 1 - LGD \times p_{(R,t,T,l)}$$

  - *Où LGD correspond au taux de perte en cas de défaut.*

- $ZC(t,m,l)$ désigne le prix en t du zéro-coupon sans risque de maturité *m, pour la trajectoire l*
- $ZC_r^{(R)}(t,m,l)$ désigne le prix en t du zéro-coupon risqué de notation R de maturité *m*

$$ZC_r^{(R)}(t,m,l) = ZC(t,m,l) \times \left[1 - LGD \times \tilde{Q}_{(t,T,l)}(R,D)\right]$$

Cette équation peut également se réécrire de la façon suivante :

$$ZC_r^{(R)}(t,m,l) = ZC(t,m,l) \times \frac{1}{\left(1 + SpotSpread_{(R,t,T-t,l)}\right)^{(T-t)}}$$

  - *Où $SpotSpread_{(R,t,m,l)}$ correspond au spread de maturité m pour la notation R à la date t sur la trajectoire l, calculé de la façon suivante :*

$$SpotSpread_{(R,t,m,l)} = \left(\frac{1}{1 - LGD \times \tilde{Q}_{(t,t+m,l)}(R,D)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$$

- $\widetilde{ZC}_r^{(R,s)}(t,m,l)$ désigne le prix en t du zéro-coupon de maturité *m* coté *R* à la date *s<t, pour la trajectoire l*

$$\widetilde{ZC}_r^{(R,s)}(t,m,l) = \sum_{r=1}^{N-1}\left[\tilde{Q}_{(s,t,l)}(R,r) \times ZC_r^{(r)}(t,m,l)\right] + (1 - LGD) \times \tilde{Q}_{(s,t,l)}(R,D) \times ZC(t,m,l) \qquad (57)$$

4.1.3.2 Adaptation des inputs du modèle

4.1.3.2.1 Adaptation des tables de scénarios économiques

Comme indiqué dans les parties 3.4.5 et 3.5.5, la mise en place d'une projection stochastique des spreads de crédit nécessite d'enrichir significativement les tables de scénarios économiques utilisées.

Pour le modèle JLT, les tables de scénarios économiques sont complétées avec :

- Pour chaque classe de notation, le niveau du spread pour chaque maturité et chaque pas de temps c'est-à-dire 7 « blocs » de 40x40 données pour chaque scénarios dans le cas d'une projection sur 40 ans de courbe de taux de maturité 40 pour les 7 classes de notation « classiques » : AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC)
- Le niveau de la prime de risque à chaque pas de temps t
- Le niveau de l'intégrale de la prime de risque entre 0 et t pour chaque pas de temps t

Pour le modèle LMN, les tables de scénarios économiques sont complétées avec :

- Pour chaque classe de notation, le niveau du spread pour chaque maturité et chaque pas de temps c'est-à-dire 7 « blocs » de 40x40 données pour chaque scénarios dans le cas d'une projection sur 40 ans de courbe de taux de maturité 40 pour les 7 classes de notation « classiques » : AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC)
- Pour chaque classe de notation, le facteur de survie pour chaque pas de temps

Cet enrichissement des sorties des tables de scénarios économiques entraine une augmentation considérable de leur volumétrie.

Le tableau ci-dessous résume la volumétrie d'une table de scénario économique classique (i.e. sans modélisation des spreads de crédit) en supposant une projection jusqu'à 40 ans, des courbes de taux de maturité 40 ans et 3000 scénarios économiques :

Volumétrie d'une table de scénario classique (ie sans modélisation des spreads de crédit)	
Composantes de la table	**Quantité de données**
Courbes des taux nominal (1 taux par maturité et par pas de temps pour chaque scénario)	40x40x3000 = 4 800 000
Courbes des taux réel (1 taux par maturité et par pas de temps pour chaque scénario)	40x40x3000 = 4 800 000
Rendement des actions (1 rendement par pas de temps pour chaque scénario)	40x3000 = 120 000
Rendement de l'immobilier	40x3000 = 120 000
TOTAL	**9 840 000 données**

Le tableau ci-dessous comptabilise la quantité de données supplémentaires à ajouter à la table de scénarios économiques dans le cas de l'utilisation d'un modèle JLT :

Volumétrie d'une table de scénario intégrant la modélisation des spreads de crédit – modèle JLT	
Composantes de la table	**Quantité de données**
Taux nominaux, taux réel, actions et immobilier (cf. ci-dessus)	9 840 000
Spread de crédit pour chaque classe de notation, chaque maturité et chaque pas de temps	7x40x40x3000 = 33 600 000
Prime de risque	40x3000 = 120 000
Intégrale de la prime de risque	40x3000 = 120 000
TOTAL	**43 680 000 données**

Le tableau ci-dessous comptabilise la quantité de données supplémentaires à ajouter à la table de scénarios économiques dans le cas de l'utilisation d'un modèle LMN :

Volumétrie d'une table de scénario intégrant la modélisation des spreads de crédit – modèle LMN	
Composantes de la table	**Quantité de données**
Taux nominaux, taux réel, actions et immobilier (cf. ci-dessus)	9 840 000
Spread de crédit pour chaque classe de notation, chaque maturité et chaque pas de temps	7x40x40x3000 = 33 600 000
Facteur de crédit pour chaque notation et chaque pas de temps	7x40x3000 = 840 000
TOTAL	**44 280 000 données**

L'intégration des spreads de crédit multiplie par un facteur supérieur à 4 la volumétrie de la table de scénarios économiques. Ce phénomène est à prendre en compte lors de la mise en place d'un tel modèle. En effet, les temps de chargement et de traitement de ces tables au sein des modèles ALM peuvent être significativement augmentés. Il est nécessaire ensuite de manipuler ces tables par approche matricielle (et non ligne à ligne) afin de limiter les temps de calcul.

4.1.3.2.2 Autres inputs

En plus des informations transmises au sein de la table de scénarios économiques, les données suivantes doivent également être passées en input du modèle :

- Pour le modèle JLT, la matrice de transition initiale qui sera choquée dans chaque simulation à partir de la prime de risque π
- Le taux de recouvrement des obligations en défaut. Ce taux doit correspondre à celui pris en compte au moment du calibrage.

4.1.3.2.3 Préparation des données – Cas du modèle JLT

Dans le cas du modèle JLT, il est nécessaire de reconstituer les matrices de transition de chaque simulation à partir de la matrice de transition initiale et des primes de risque projetées à chaque date (ainsi que de leur valeur intégrée). Ces matrices peuvent être calculées une fois pour toutes en début de projection et stockées en vue des calculs futurs (cela évite d'avoir à les recalculer à chaque valorisation obligataire ce qui augmenterait significativement les temps de calcul).

On calcule et stocke :

- l'ensemble des matrices de transition à la date d'évaluation, pour tous les horizons (années entières) et toutes les trajectoires,
- l'ensemble des matrices de transitions d'horizon une demie année, pour toutes les années de projection et toutes les trajectoires.

Calcul des matrices de transition d'horizon 1 an

Les matrices de transition d'horizon 1 an correspondent aux matrices de probabilités de transition d'un état à un autre entre deux années consécutives.

Notations :

- *D* la matrice diagonale
- *Σ* la matrice de transition
- *λ(m,l)* l'*integrated value* de la période *m* et la trajectoire *l* (information en lecture directe des scenarios)
- *Q(m,l) la matrice de transition entre* m *et* m+1*, pour la trajectoire* l

La *i*-ème ligne de la *j*-ème colonne de la matrice *Q(m,l)* correspond à la probabilité de passer de l'état (notation ou état de défaut) *i* à l'état *j* entre les périodes *m* et *m+1*.

Formule de calcul :

$$Q_{(m,l)} = \Sigma \cdot \exp(\lambda_{(m,l)} \cdot D) \cdot \Sigma^{-1} \quad (58)$$

Calcul des matrices de transition à la date d'évaluation pour tous les horizons

Les matrices de transition d'horizon supérieur à 1 an s'obtiennent par multiplication des matrices de transition d'horizon 1 an.

Notations :

- Q(m,l) la matrice de transition entre *m* et *m+1*, pour la trajectoire *l*
- $\tilde{Q}_{(0,k,l)}$ la matrice de transition entre *0* et *k*, pour la trajectoire *l*

Formule de calcul :

$$\tilde{Q}_{(0,k,l)} = \prod_{m=0,m<k} Q_{(m,l)} \quad (59)$$

Output :

Les matrices de transition à la date d'évaluation sont stockées dans une matrice à 4 dimensions Ω(i,j,k,l), où :

- i *désigne la notation initiale,*

- j *la notation future probable,*
- k *l'horizon,*
- *et* l *la trajectoire.*

4.1.3.3 Adaptation des tests de martingalité en sortie de l'ESG

Les tests de martingalité visent à vérifier le caractère risque-neutre des scénarios économiques. Ils consistent à vérifier le respect du critère de martingalité de l'ensemble des instruments financiers sous la probabilité de projection $\mathbb{Q}$ (censée correspondre à la probabilité risque-neutre).

Ces tests sont classiquement faits sur les déflateurs, les zéro-coupon sans risque, les actions et l'immobilier. En cas de modélisation des spreads de crédit, ces tests doivent être complétés par des tests similaires sur les déflateurs risqués et les zéro-coupon risqués.

4.1.3.3.1 Test de déflateur risqué

Le test consiste à vérifier que le pay-off moyen d'un zéro-coupon risqué, de rating *R* donné, de maturité t, actualisé à la courbe des taux nominaux, est égal à la valeur de marché initiale de ce zéro-coupon.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t)\left(\underbrace{1}_{\substack{\text{Pay-off du zéro-}\\ \text{coupon si pas de}\\ \text{défaut avant la date t}}} \times \underbrace{\left(1-\tilde{Q}_{(0,t)}(R,D)\right)}_{\substack{\text{Probabilité qu'il n'y ait}\\ \text{pas de défaut avant}\\ \text{la date t}}} + \underbrace{(1-LGD)}_{\substack{\text{Pay-off du zéro-}\\ \text{coupon en cas de}\\ \text{défaut avant la date t}}} \times \underbrace{\tilde{Q}_{(0,t)}(R,D)}_{\substack{\text{Probabilité d'un}\\ \text{défaut avant la}\\ \text{date t}}}\right)\right] = ZC_r^{(R)}(0,t) \qquad (60)$$

- Où D(t) désigne le déflateur à la date t
- (1-LGD) correspond au taux de recouvrement

Dans l'équation ci-dessus, l'espérance est approchée par son estimateur de la moyenne sur l'ensemble des scénarios économiques produits :

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[D(t,l)\left(1 \times \left(1-\tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,D)\right) + (1-LGD) \times \tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,D)\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} ZC_r^{(R)}(0,t) \qquad (61)$$

Le test sera considéré comme satisfait si le prix « Monte-Carlo » (membre de gauche de l'équation) est suffisament proche du prix théorique (membre de droite). Pour un modèle bien convergent, le test sera d'autant plus satisfaisant que le nombre de scénarios économiques générés sera important.

Ce test est à réaliser pour chaque rating R et chaque maturité t.

4.1.3.3.2 Test de ZC risqué

Le test consiste à vérifier que pour toute date *t* < *T*, le prix moyen actualisé en 0 d'un ZC risqué :

- de rating *R* en 0,
- de rating aléatoire *k* probable en *t*,
- de maturité *T-t*

est égal au prix d'un ZC de rating *R* en 0 et de maturité *T*.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t)\left(\sum_{k=1}^{K-1}\tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,k)ZC_r^{(k)}(t,T)+(1-LGD)\times\tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,D)ZC(t,T)\right)\right]=ZC_r^{(R)}(0,t)\quad(62)$$

Dans l'équation ci-dessus, l'espérance est approchée par son estimateur de la moyenne sur l'ensemble des scénarios économiques produits :

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[D(t,l)\left(\sum_{k=1}^{K-1}\tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,k)ZC_r^{(k)}(t,T)\,1+(1-LGD)\times\tilde{Q}_{(0,t,l)}(R,D)ZC(t,T)\right)\right]\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}ZC_r^{(R)}(0,t)\quad(63)$$

De la même façon, le test sera considéré comme satisfait si le prix « Monte-Carlo » (membre de gauche de l'équation) est suffisamment proche du prix théorique (membre de droite).

Ce test est normalement à réaliser pour chaque rating R, chaque maturité T et chaque date intermédiaire t. En pratique cela conduirait à un trop grand nombre de tests, et seules quelques dates intermédiaires sont testées.

4.1.3.4 Adaptation de l'étape de risque-neutralisation

Comme présenté en section 0, l'introduction de la modélisation des spreads de crédit ne supprime pas totalement l'étape de risque-neutralisation. En effet, même si le sur-rendement correspondant au spread n'a plus à être retiré en début de projection, il est nécessaire d'ajuster ce spread sur le niveau de spread moyen de la classe de notation. Cette étape permet de retrouver la valeur de marché du titre en actualisant les flux futurs sur la courbe des taux risquée correspondant à la notation de l'obligation.

Pour une obligation de notation initiale R et de maturité T, l'ajustement est calculé de façon à respecter l'égalité suivante :

$$VBours_0=\frac{1}{Adj}\sum_{Ti=1}^{T}\left[C_i^{réel}\cdot\widetilde{ZC}_r^{(R)}(0,T_i)\right]+\widetilde{ZC}_r^{(R)}(0,T)\cdot N^{réel}\quad(64)$$

Par la suite on notera C_i et N les coupons et le nominal après risque-neutralisation, avec

$$C_i=\frac{1}{Adj}C_i^{réel}$$

$$N=\frac{1}{Adj}N^{réel}$$

Une fois les coupons et le nominal ajustés, il est nécessaire de recalculer le taux actuariel à l'achat r_a qui permet de retrouver la valeur comptable amortie de l'obligation. Pour une obligation de notation initiale R et de maturité T, le taux r_a est calculé de façon à respecter l'égalité suivante :

$$VAmort_0=\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i}{(1+r_a)^{T_i-t}}+\frac{N}{(1+r_a)^{T_N-t}}\quad(65)$$

Remarque : Contrairement au calcul de la valeur boursière, le calcul de la valeur actuarielle ne fait pas intervenir de probabilité de défaut. En effet, le taux actuariel comptable est calculé en supposant que l'obligation ne fait pas défaut jusqu'à maturité. Par la suite l'éventuelle survenance d'un défaut entrainera une perte comptable.

4.1.3.5 Adaptation des formules de valorisation

Les formules de valorisation des obligations sont modifiées pour tenir compte des transitions de rating et du défaut éventuel.

Pour une obligation de notation initiale R achetée à la date t_0 ($t_0=0$ si l'obligation est présente dans le stock initial et $t_0>0$ si l'obligation a été achetée en cours de projection) et de maturité T, la valeur de marché à la date t, dans la simulation l, est la suivante :

$$VBours_t = \frac{1}{Adj} \sum_{Ti=t+1}^{T} \left[C_i^{réel} \cdot \widetilde{ZC}_r^{(R,t_0)}(t, T_i - t) \right] + \widetilde{ZC}_r^{(R,t_0)}(0, T - t) \cdot N^{réel} \qquad (66)$$

Pour rappel $\widetilde{ZC}_r^{(R,t_0)}(t,m,l)$ désigne le prix en t du zéro-coupon de maturité *m* coté *R* à la date *s<t, pour la trajectoire l*

$$\widetilde{ZC}_r^{(R,t_0)}(t,m,l) = \sum_{r=1}^{N-1} \left[\underbrace{\tilde{Q}_{(t_0,t,l)}(R,r)} \times ZC_r^{(r)}(t,m,l) \right] + (1 - LGD) \times \underbrace{\tilde{Q}_{(t_0,t,l)}(R,D)} \times ZC(t,m,l) \qquad (67)$$

Ces termes prennent en compte le fait que le titre initialement de notation R a pu migrer de notation (où même faire défaut) entre la date d'achat t_0 et la date actuelle t → Cela modélise donc les migrations passées (autrement dit, à la date t, le titre n'a plus une notation unique mais une multitude de notation avec une probabilité associée à chacune d'elle

Et $\mathrm{ZC}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{r})}(\mathrm{t,m,l})$ désigne le prix en t du zéro-coupon risqué de notation r de maturité *m*

$$ZC_r^{(r)}(t,m,l) = ZC(t,m,l) \times \left[1 - LGD \times \underbrace{\tilde{Q}_{(t,T,l)}(r,D)} \right] \qquad (68)$$

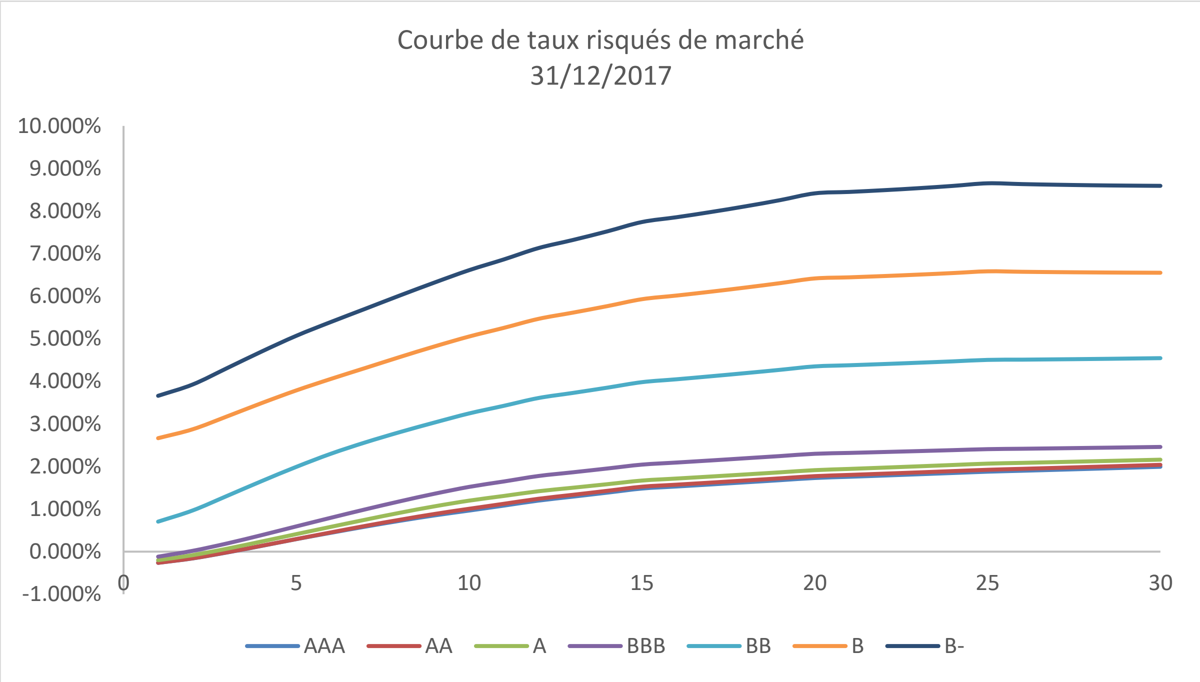
Ce terme prend en compte le fait que le titre pourra faire défaut d'ici à sa maturité → Cela modélise donc les migrations futures

4.2. CALCULS REALISES ET RESULTATS OBTENUS

4.2.1 Résultat des calibrages des modèles de diffusion des spreads

Un calibrage des modèles JLT et LMN a été réalisée sur des données de marché au 31 décembre 2017. Le calibrage a été réalisé sur la base de prix d'obligations risquées.

Les courbes de taux risqués de marché utilisées pour le calibrage sont les suivantes :



Pour le modèle JLT, on utilise également la matrice de transition de rating suivante :

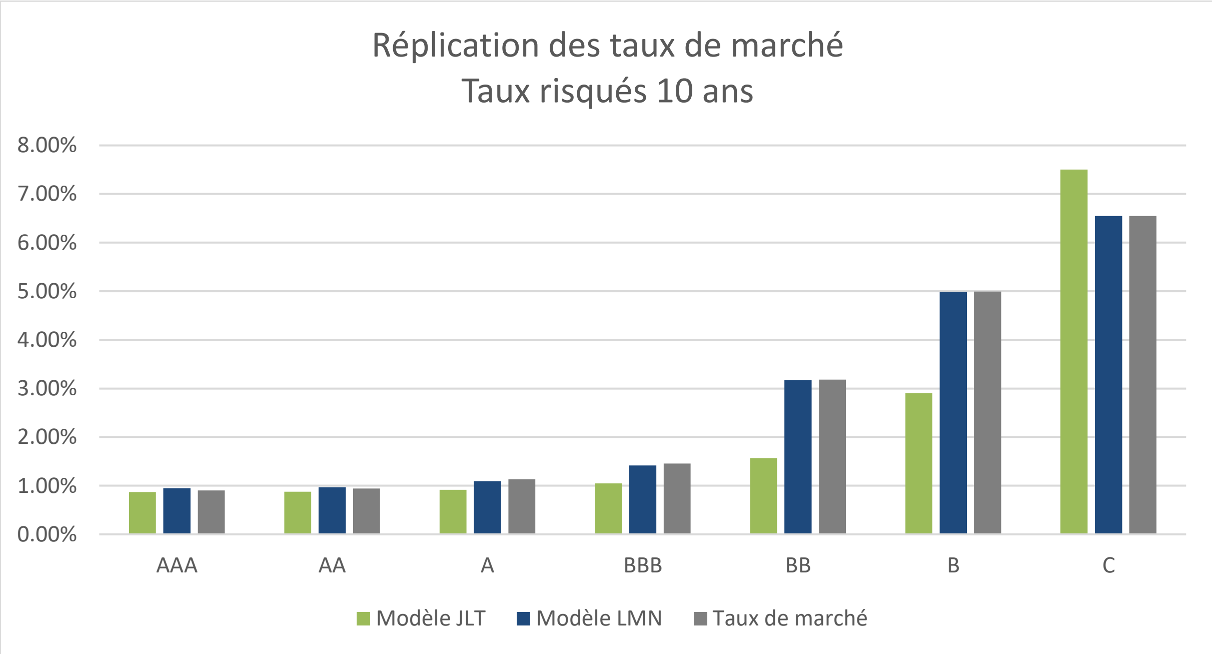
Matrice de transition de rating à horizon un an au 31/12/2017									
		Notation au bout d'un an							
		AAA	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**Default**
Notation initiale	***AAA***	89.8%	9.4%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%
	AA	0.5%	90.5%	8.2%	0.5%	0.1%	0.1%	0.0%	0.0%
	A	0.0%	1.8%	92.2%	5.5%	0.3%	0.1%	0.0%	0.1%
	BBB	0.0%	0.1%	3.7%	91.4%	4.0%	0.5%	0.1%	0.2%
	BB	0.0%	0.0%	0.1%	5.4%	85.5%	7.5%	0.6%	0.8%
	B	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	5.8%	84.7%	5.1%	4.1%
	CCC	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.7%	15.6%	51.5%	31.8%
	Default	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%

Comme décrit aux sections 3.4.4.1 et 3.5.4.1, le calibrage est réalisé en cherchant les valeurs des paramètres du modèle qui minimisent l'écart quadratique entre les spreads de marché et les spreads du modèle.

Pour le modèle JLT, il y a uniquement 4 paramètres à calibrer $\left(\alpha, \mu, \sigma, \pi(0)\right)$ puisque l'ensemble du modèle n'est régi que par un unique processus stochastique (π_t).

Pour le modèle LMN, il y a 28 paramètres à calibrer puisque chacune des 7 classes de notations est régie par un processus stochastiques dépendant de 4 paramètres $\left(\alpha^i, \mu^i, \sigma^i, \lambda^i(0)\right)$.

Les deux graphiques suivants illustrent les résultats de calibrage en comparant les taux risqués obtenus pour chacun des taux modèles pour chaque notation et pour la maturité 10 ans avec les taux de marché.



On observe que le modèle LMN réplique très bien les taux de marché sur l'ensemble des notations alors que le modèle JLT sous-estime nettement les taux risqués sur les notations BBB, BB et BB (mais également dans une moindre mesure sur les notations AAA, AA et A) et les surestime sur la notation C. Un constat similaire est fait pour les autres maturités.

Cette différence dans la qualité de réplication des prix de marché s'explique par le nombre de degré de liberté différents dans les deux modèles :

- Le modèle JLT qui ne dispose que de 4 paramètres à calibrer ne présente pas suffisamment de « degrés de liberté » pour répliquer chaque taux risqué, sur chacune des 7 notations et sur l'ensemble des maturités.
- Au contraire, le modèle LMN qui dispose de 4 paramètres indépendants à calibrer pour chaque classe de notation, réussit à répliquer correctement les courbes de taux risqués pour chaque notation (4 degrés de liberté sont suffisant pour avoir une bonne réplication d'une courbe de taux).

4.2.2 Impact d'une modélisation stochastique des spreads de crédit sur la VIF et le Best Estimate euros

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des impacts de la modélisation des spreads de crédit sur la valeur de portefeuille et le Best Estimate des contrats d'épargne retraite en euros pour les deux modèles de spread présentés dans les sections précédentes.

Impact de la modélisation des spreads sur la VIF et le Best Estimate			
(Mds€)	**Absence de modélisation des spreads de crédit**	**Modélisation des spreads de crédit - modèle JLT**	**Modélisation des spreads de crédit - modèle LMN**
PVFP - (A) (valeur actualisée des résultats, scénario forward)	80 668	80 417 *-0.3%*	80 537 *-0.2%*
TVOG - (B) (valeur temps des options et garanties financières)	-36 330	-37 935 *4.4%*	-38 513 *6.0%*
VIF - (C) = (A) + (B)	44 338	42 482 *-4.2%*	42 024 *-5.2%*
Best Estimate - (D)	1 600 322	1 602 178 *0.1%*	1 602 637 *0.1%*
Ecart de convergence	0.03%	0.08%	0.12%

On constate que quel que soit le modèle utilisé, la modélisation des spreads de crédit est quasiment sans impact sur le scénario déterministe forward. Cela s'explique par le fait que, même si l'introduction des défauts de crédit modifie la cadence de production financière (cf. section 4.2.2.1), la projection reste risque-neutre, autrement dit, le rendement moyen des actifs sur la durée de projection reste le même.

En revanche, la modélisation stochastique des spreads entraine une augmentation significative du coût des options et par conséquent une baisse de la valeur de portefeuille de 4.2% avec le modèle JLT et 5.2% avec le modèle LMN. Cette augmentation s'explique par l'accroissement de la volatilité liée à la modélisation stochastique des spreads et des défauts.

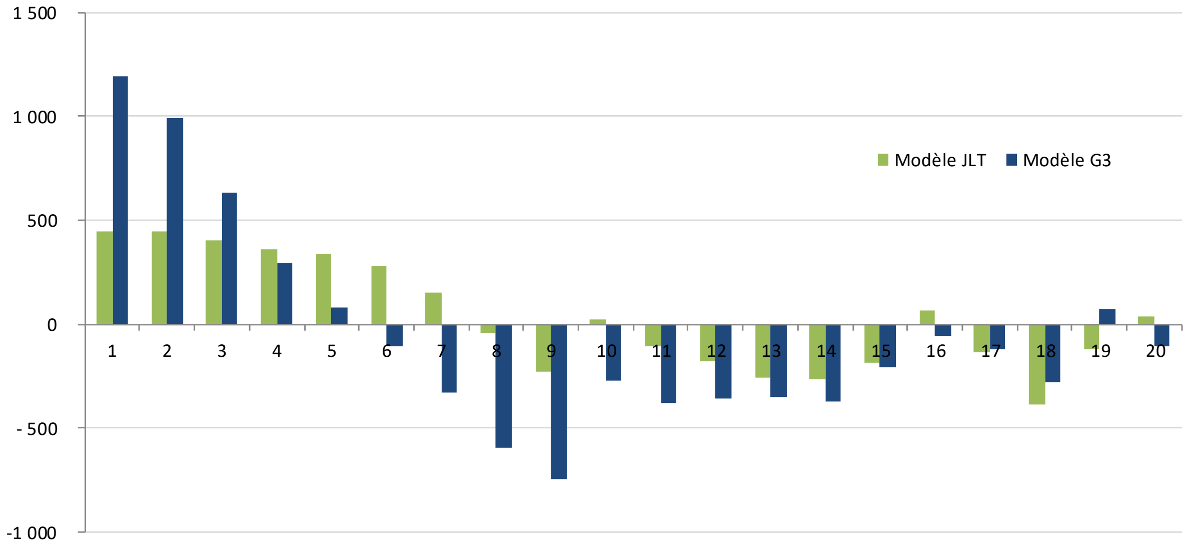
On constate que les impacts sont relativement proches entre le modèle JLT et le modèle LMN ce qui est plutôt rassurant car les deux modèles ont été calibrés avec les mêmes données de marché et sont censés fournir tous les deux une valorisation market-consistent du portefeuille d'épargne en euro. L'impact légèrement plus faible observé avec le modèle JLT s'explique vraisemblablement par le fait que le calibrage imparfait obtenu sur ce modèle (lié au faible nombre de degrés de liberté) conduit à une sous-estimation des taux risqués, et donc des spreads de marché, sur les principales notations en portefeuille (cf section 4.2.1).

4.2.2.1 Analyse de l'impact sur la PVFP

Dans le scénario déterministe forward, l'évolution de la courbe des taux d'intérêt suit les taux forward calculés sur la base de la courbe des taux en vigueur à la date de valorisation et tous les actifs rapportent le taux sans risque. Nécessaire au calcul de la TVOG, le scénario forward permet également la construction et l'analyse du compte de résultat[7] (faussé par l'effet « moyenne » dans une projection stochastique).

[7] *Les comptes de résultats sont présentés en annexe*

Ainsi, il est possible d'analyser l'impact de la modélisation des spreads sur la production financière au cours de la projection comme présenté sur le graphique ci-dessous.



Ecart de production financière avec le scénario forward sans modélisation des spreads de crédit

Ce graphique présente, pour les deux modèles étudiés, le différentiel de production financière observé entre une projection avec modélisation des spreads de crédit et une projection sans modélisation des spreads de crédit. Pour les deux modèles on observe le même phénomène (qui avait été anticipé de façon théorique en section 3.2.1) :

- En début de projection, la production financière est supérieure à celle obtenue dans une projection sans modélisation des spreads de crédit. En effet, lorsque le risque de crédit n'est pas pris en compte, la risque-neutralisation conduit à réduire dès le début de la projection la part du coupon correspondant à la prime de risque liée au crédit. Alors que, lorsque le risque de crédit est pris en compte, le coupon n'est quasiment pas modifié en début de projection.
- Mais au cours de la projection, l'écart se réduit et finit par s'inverser. Cela est lié au fait que les défauts se produisent au cours du temps réduisant peu à peu les flux versés par les obligations. En fin de projection, la production financière est inférieure à celle de la projection sans prise en compte du risque de crédit. En moyenne sur toute la durée de projection, le volume de production financière est comparable sur les projections avec et sans prise en compte du risque de crédit puisque ces projections sont toutes les deux risque-neutre (la production financière moyenne est égale au taux sans risque)

4.2.2.2 Analyse de l'impact sur la VIF et le Best Estimate

Le tableau suivant présente l'impact sur les différentes composantes de la valeur de portefeuille de la modélisation du risque de crédit avec les deux modèles étudiés :

Décomposition de la valeur de portefeuille euros					
(Mds€)	**Absence de modélisation des spreads de crédit**	**Modélisation des spreads de crédit - modèle JLT**		**Modélisation des spreads de crédit - modèle LMN**	
Chargements	99 346	97 582	*-1 764*	96 415	*-2 931*
Produits financiers sur RC et PPE	35 885	35 836	*-49*	35 889	*4*
PB minimale	-29 053	-29 090	*-36*	-28 853	*200*
Commissions	-37 604	-37 476	*129*	-37 325	*279*
Frais	-29 046	-28 989	*57*	-28 983	*63*
Variations de PRE	633	623	*-10*	631	*-2*
RC fin actualisée	4 217	4 052	*-166*	4 282	*65*
PRE fin actualisée	811	804	*-7*	819	*7*
Plus Values fin actualisées	39	37	*-1*	40	*1*
Moins Values fin actualisées	-889	-897	*-8*	-892	*-3*
VIF	**44 338**	**42 482**	*-1 856*	**42 024**	*-2 314*

L'impact négatif sur la valeur de portefeuille est principalement portée par le poste « Chargements », cela s'explique de la façon suivante : les défauts survenus (qui peuvent être conséquents dans certains scénarios stochastiques) réduisent la production financière. Lorsque celle-ci devient insuffisante, l'assureur n'a plus la capacité de prélever la totalité de ses marges : il est contraint de réduire les chargements prélevés afin de payer le taux minimum garanti à l'assuré.

Décomposition du Best Estimate euros					
(Mds€)	**Absence de modélisation des spreads de crédit**	**Modélisation des spreads de crédit - modèle JLT**		**Modélisation des spreads de crédit - modèle LMN**	
Primes	-129 521	-129 428	*93*	-129 396	*125*
Prestations	1 649 857	1 651 857	*2 000*	1 652 365	*2 508*
Frais	38 186	38 120	*-66*	38 115	*-72*
Commissions	37 604	37 476	*-129*	37 325	*-279*
PM fin actualisée	3 736	3 683	*-53*	3 736	*-1*
PPE fin actualisée	241	259	*18*	267	*26*
Plus Values fin actualisées	219	211	*-7*	226	*7*
Best Estimate	1 600 322	1 602 178	*1 856*	1 602 637	*2 314*

L'impact sur le Best Estimate correspond à l'exact opposé de l'impact sur la valeur de portefeuille (en effet la valeur de marché n'est pas impactée et la relation VM = BE + VIF reste vérifiée).

L'impact positif sur le Best Estimate est principalement porté par une augmentation des prestations. On observe-là l'effet du caractère optionnel de l'engagement envers l'assuré. En effet, la modélisation du risque de crédit rend la production financière obligataire plus volatile :

- Sur les scénarios où la production financière obligataire est supérieure à la moyenne (moins de défaut), une grande partie de ce surplus (au moins 85% du fait de la contrainte de PB minimum réglementaire) est affecté à l'assuré via la participation aux bénéfices : le montant de prestations augmente.
- Sur les scénarios où la production financière obligataire est inférieure à la moyenne (plus de défaut), le déficit de production financière est en grande partie supporté par l'actionnaire qui réduit ses chargements (cf ci-dessus) : le montant de prestations n'est que très partiellement réduit.

Au global l'impact est donc positif sur le volume de prestations.

4.2.3 Impact d'une modélisation stochastique des spreads de crédit sur le SCR formule standard

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des impacts de la modélisation des spreads de crédit sur le taux de couverture de la compagnie France Vie pour les deux modèles de spread présentés dans les sections précédentes.

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II					
(Mds€)	**Absence de modélisation des spreads de crédit**	**Modélisation des spreads de crédit - modèle JLT**		**Modélisation des spreads de crédit - modèle LMN**	
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 586	*-1 856*	79 128	*-2 314*
dont VIF euros	44 338	42 482	*-1 856*	42 024	*-2 314*
dont VIF UC	37 104	37 104	*0*	37 104	*0*
Risk Margin	-18 003	-17 910	*93*	-17 852	*151*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0*	64 104	*0*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0*	26 499	*0*
Impôts totaux	-20 500	-19 942	*559*	-19 922	*578*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**132 337**	***-1 205***	**131 956**	***-1 586***
BSCR	88 918	88 367	*-550*	88 805	*-113*
dont SCR marché	80 071	79 570	*-501*	80 045	*-26*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0*	3 493	*0*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 156	*-135*	21 107	*-185*
SCR opérationnel	9 116	9 125	*8*	9 127	*10*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 942	*559*	-19 922	*578*
SCR net d'impôts	**77 534**	**77 550**	***17***	**78 009**	***476***
Taux de couverture Solvabilité II	**172%**	**171%**	***-2%***	**169%**	***-3%***
Surplus	56 008	54 787	*-1 221*	53 946	*-2 061*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1.9%	2.0%	*0.1%*	2.1%	*0.1%*

Les impacts sur la valeur de portefeuille présentés précédemment se retrouvent sur les fonds propres éligibles, après absorption par l'impôt.

Concernant le SCR, l'impact reste limité et est principalement porté par la réduction de l'ajustement pour impôt du fait de la baisse des impôts différés passifs liés à la diminution de la VIF. Le faible impact sur le SCR laisse à penser que l'augmentation du coût des options liée à la modélisation du spread de crédit reste relativement similaire entre la simulation centrale et les simulations choquées qui sous-tendent le calcul du SCR.

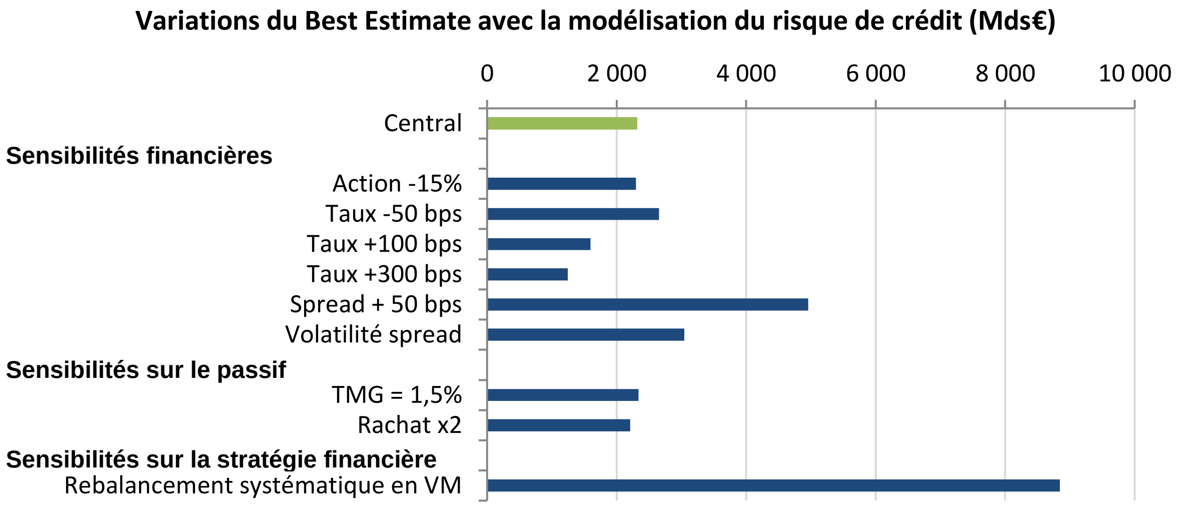
Au global, l'impact sur le taux de couverture reste relativement limité : il n'est que de 2 points avec le modèle JLT et de 3 points avec le modèle LMN. Cette différence entre les deux modèles s'explique là encore par le calibrage imparfait sur le modèle JLT qui conduit à une sous-estimation des spreads.

4.2.4 Sensibilités

Des sensibilités ont été réalisées afin de mesurer l'impact de la modélisation des spreads de crédit dans différentes conditions de marché et dans le cas de modification des engagements de l'assureur.

Les temps de calcul étant augmentés de manière sensible lors de la mise en place de la modélisation des spreads de crédit, il a été décidé de ne mener les sensibilités que sur un seul des deux modèles de diffusion des spreads. Etant donné les difficultés de calibrage inhérentes au modèle JLT, il a été décidé de retenir plutôt le modèle LMN pour la réalisation de ces sensibilités.

Les graphiques suivants présentent une vision synthétique des résultats obtenus tandis que les sections suivantes détaillent pour chacune des sensibilités menées, le principe de la sensibilité (y compris implications opérationnelles), les résultats et leur analyse.



Le graphique ci-dessus détaille l'impact de la modélisation stochastique du risque de crédit dans différentes situations stressées (et non l'impact du stress lui-même, qui, lui, pourra être observé dans les sections suivantes, détaillant chacune des sensibilités). Les stress réalisés portent :

- Sur des conditions économiques : niveau et volatilité des spreads, niveau des taux, niveau des marchés actions
- Sur les caractéristiques ou les lois de comportement du passif : niveau moyen du TMG et loi de rachat
- Sur la stratégie financière : mode de rebalancement du portefeuille d'actifs

Une première observation d'ensemble des sensibilités réalisées conduit à remarquer que l'impact en montant sur la valeur de portefeuille de l'intégration des spreads de crédit est assez stable, hormis :

- Pour les sensibilités portant sur le niveau des spreads ou la volatilité des spreads. En effet, une augmentation de la volatilité des spreads (prise en compte via le calibrage du modèle LMN) engendre une augmentation de la volatilité des obligations et donc une augmentation du coût des options. De même, une augmentation du niveau moyen des spreads va également élargir la dispersion des spreads de crédit (le même niveau de volatilité s'appliquant à un spread moyen plus élevé).
- Pour la sensibilité portant sur la stratégie financière (ce point est analysé en section 4.2.4.34.2.4.2)

4.2.4.1 Sensibilités financières

Impact du niveau des spreads

Nous mesurons ici l'impact de la modélisation des spreads de crédit dans les cas où le niveau des spreads augmente de 50 bps. Opérationnellement, la réalisation de cette sensibilité a nécessité le recalibrage des scénarios économiques ainsi qu'une nouvelle étape de risque neutralisation des actifs obligataires (NB : afin d'avoir la meilleure comparabilité entre les deux simulations, nous avons supposé que ce niveau de spread plus élevé n'impactait pas le niveau initial des obligations).

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans le tableau ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
	Situation centrale			Hausse des spreads de 50 bps		
(Mds€)	Sans spread	Avec spreads		Sans spread	Avec spreads	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 904 219	1 909 187	*0,3%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	81 498	76 538	*-6,1%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-18 014	-17 507	*-2,8%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 113	64 113	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 502	26 502	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 521	-19 323	*-5,8%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**133 578**	**130 323**	***-2,4%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	88 904	88 098	*-0,9%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	80 050	79 519	*-0,7%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	21 305	20 690	*-2,9%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	9 117	9 139	*0,2%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 521	-19 323	*-5,8%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**77 499**	**77 914**	***0,5%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**172%**	**167%**	***-3,0%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	56 079	52 410	*-6,5%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	1,9%	2,1%	*10,6%*

On note qu'une hausse des spreads de crédit augmente significativement l'impact négatif de la modélisation du risque de crédit sur la valeur de portefeuille et donc sur les fonds propres éligibles

Solvabilité II. Cela se comprend aisément puisque la volatilité supplémentaire liée à la modélisation stochastique mise en œuvre va porter sur un niveau de spread plus important.

Impact du niveau des taux

Nous mesurons ici l'impact de la modélisation des spreads de crédit dans différents environnements de taux d'intérêt :

- Baisse des taux d'intérêt de -50 bps par rapport à leur niveau du 31/12/2017
- Hausse des taux d'intérêt de +100 bps par rapport à leur niveau du 31/12/2017
- Hausse des taux d'intérêt de +300 bps par rapport à leur niveau du 31/12/2017

Opérationnellement, la réalisation de ces sensibilités a nécessité le recalibrage des scénarios économiques).

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans les tableaux ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	**Situation centrale**			**Baisse des taux de 50 bps**		
	Sans spread	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 935 891	1 938 372	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	50 040	47 345	*-5,4%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-18 452	-18 455	*0,0%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 121	64 113	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 506	26 502	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-10 985	-10 304	*-6,2%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**111 231**	**109 201**	***-1,8%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	97 830	97 005	*-0,8%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	89 031	88 182	*-1,0%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	21 721	21 723	*0,0%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	9 260	9 271	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-10 985	-10 304	*-6,2%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**96 105**	**95 972**	***-0,1%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**116%**	**114%**	***-1,7%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	15 126	13 229	*-12,5%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	4,2%	4,3%	*2,5%*

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	**Situation centrale**			**Hausse des taux de 100 bps**		
	Sans spread	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 859 096	1 861 035	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	126 384	124 896	*-1,2%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-19 316	-19 226	*-0,5%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 104	64 121	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 499	26 506	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-32 952	-32 610	*-1,0%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**164 718**	**163 688**	***-0,6%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	78 788	79 193	*0,5%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	68 577	69 063	*0,7%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	23 182	23 068	*-0,5%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	8 914	8 923	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-30 196	-30 338	*0,5%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**57 506**	**57 777**	***0,5%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**286%**	**283%**	***-1,1%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	107 212	105 911	*-1,2%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	-0,9%	-0,9%	*-8,0%*

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	**Situation centrale**			**Hausse des taux de 300 bps**		
	Sans spread	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 804 958	1 807 299	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	180 973	179 956	*-0,6%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-24 730	-24 604	*-0,5%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 121	64 173	*0,1%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 506	26 527	*0,1%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-47 705	-47 489	*-0,5%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**199 165**	**198 563**	***-0,3%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	66 571	65 935	*-1,0%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	50 766	50 202	*-1,1%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	30 454	30 250	*-0,7%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	8 670	8 681	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-25 906	-25 690	*-0,8%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**49 336**	**48 925**	***-0,8%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**404%**	**406%**	***0,5%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	149 830	149 637	*-0,1%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	-3,3%	-3,3%	*-0,4%*

On constate que l'impact négatif de la modélisation stochastique des spreads de crédit sur la valeur de portefeuille (et donc sur les fonds propres éligibles Solvabilité II) est plus importante lorsque les taux d'intérêt sont bas.

Cela s'explique par le fait qu'en situation de taux bas, l'option de TMG offerte à l'assuré (même avec un TMG à 0%) est plus proche de la monnaie. Autrement dit, le rendement financier moyen généré par le portefeuille suffit à peine à payer les chargements de l'assureur et le TMG moyen du contrat. Dès lors, la volatilité autour de ce rendement moyen (notamment celle générée par la modélisation des spreads de crédit) subit un traitement dissymétrique à la défaveur de l'assureur :

- En cas de baisse du rendement (par exemple lorsque les défauts sont plus importants qu'en scénario central), la baisse du résultat financier est entièrement supportée par l'assureur
- Alors qu'en cas de hausse du rendement (par exemple lorsque les défauts sont plus faibles qu'en scénario central), le surcroit de résultat financier est partagé entre assureur et assuré (schématiquement l'assuré reçoit au moins 85% de ce surcroit de produits financiers du fait de la règle de PB minimum réglementaire)

Lorsque les taux sont plus élevés, l'option de TMG est plus en dehors de la monnaie. Dans ce cas, les variations négatives du rendement peuvent être (au moins partiellement) partagées avec l'assuré.

Les effets croisés des variations de taux d'intérêt et de la prise en compte des spreads de crédit sont plus difficilement lisibles. En effet, on observe que :

- dans le cas d'une légère hausse des taux d'intérêt, la prise en compte des spreads de crédit conduit à augmenter le SCR (et inversement que dans le cas d'une légère baisse des taux d'intérêt, la prise en compte des spreads de crédit conduit à diminuer le SCR). Ces effets peuvent s'expliquer par un mécanisme de compensation entre SCR et VIF : dans le cas d'une baisse des taux, l'impact plus négatif de la prise en compte des spreads de crédit étant déjà impacté dans la VIF centrale, l'écart entre VIF choquée et VIF centrale se réduit (d'où la réduction des SCR).
- En revanche, dans le cas d'une très forte hausse des taux d'intérêt, la prise en compte des spreads de crédit conduit à diminuer légèrement le SCR. Le sens opposé de l'impact (par rapport à un choc de taux plus limité) pourrait être lié au fait que la situation économique initiale (avant intégration de la modélisation des spreads) est significative plus favorable dans ce cas.

Il convient cependant de noter que les impacts sur les SCR sont plus difficiles à interpréter puisqu'ils découlent d'application de trois sensibilités successives (impact de la sensibilité sur les taux, impact de l'ajout des spreads de crédit et impact des chocs de SCR) dont les effets croisés sont difficilement interprétables.

Impact du taux de richesse initiale (niveau des actions et de l'immobilier)

Nous mesurons ici l'impact de la modélisation des spreads de crédit après une baisse de 15% du niveau des marchés actions et immobilier.

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans le tableau ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	Situation centrale			Baisse du niveau des actions de 15%		
	Sans spread	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 877 827	1 880 126	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	65 290	62 990	*-3,5%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-17 574	-17 583	*0,1%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	62 453	62 453	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	25 816	25 816	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-15 560	-14 989	*-3,7%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**120 424**	**118 686**	***-1,4%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	90 110	89 476	*-0,7%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	81 496	80 843	*-0,8%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	20 886	20 886	*0,0%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	8 998	9 009	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-15 560	-14 989	*-3,7%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**83 548**	**83 495**	***-0,1%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**144%**	**142%**	***-1,4%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	36 876	35 191	*-4,6%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	2,9%	3,0%	*3,3%*

On constate que la baisse des marchés actions et immobilier a peu d'impact sur l'impact de la prise en compte des spreads de crédit. En effet, si les impacts relatifs sont plus importants c'est simplement parce que la valeur de portefeuille et le SCR avant modélisation des spreads sont plus faibles. Les impacts en valeur absolu restent sensiblement les mêmes.

Impact de la volatilité des spreads

Nous mesurons ici l'impact de la modélisation des spreads de crédit après une hausse de la volatilité des spreads de crédit. Opérationnellement, cette sensibilité a été réalisée sans modifier les prix de marché des obligations risquées utilisées pour le calibrage, mais en forçant les paramètres de volatilité σ du modèle LMN à être 50% plus élevés que dans le run central (un nouveau calibrage sous contrainte du modèle a été réalisé). Cette manipulation a permis d'obtenir des scénarios stochastiques plus volatiles, toute chose égale par ailleurs.

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans le tableau ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	Situation centrale			Hausse de la volatilité des spread		
	Sans spread	Avec spreads		Sans spread	Avec spreads	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 904 038	1 907 090	*0,2%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	81 442	78 399	*-3,7%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-18 003	-17 840	*-0,9%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 104	64 104	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 499	26 499	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 500	-19 736	*-3,7%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**133 541**	**131 426**	***-1,6%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	88 918	88 345	*-0,6%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	80 071	79 585	*-0,6%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	21 292	21 079	*-1,0%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	9 116	9 130	*0,2%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 500	-19 736	*-3,7%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**77 534**	**77 739**	***0,3%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**172%**	**169%**	***-1,8%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	56 008	53 687	*-4,1%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	1,9%	2,1%	*6,7%*

On constate que la hausse de la volatilité des spreads augmente l'impact négatif sur la valeur de portefeuille de la modélisation des spreads de crédit. Cela se comprend aisément puisqu'une hausse de la volatilité des actifs sous-jacents entraine une augmentation du coût des options incluses dans le contrat d'épargne en Euro.

On observe en revanche une augmentation du SCR plus faible que celle obtenue avec un niveau de volatilité plus bas. Cela signifie que l'impact négatif de la hausse de la volatilité est plus élevé en scénario central que dans les scénarios choqués correspondant aux SCR. Cela peut s'expliquer par le niveau de « moneyness » de l'option :

- En scénario central, l'option offerte aux assurés (garantie en capital) est proche de la monnaie, dès lors, elle est très sensible à une augmentation de la volatilité
- Dans les scénarios de stress correspondant aux SCR, l'option est vraisemblablement déjà « dans la monnaie », dès lors la valeur temps des options est plus faible (la valeur temps est basculée en valeur intrinsèque) et la sensibilité au niveau de volatilité est plus faible

4.2.4.2 Sensibilités sur le passif

Impact de la composition initiale du passif (niveaux de TMG)

Nous mesurons ici l'impact d'une modification du niveau de TMG du passif : le TMG moyen initialement à 0,5% a été augmenté à 1,5%. Opérationnellement, cette sensibilité a été réalisée en modifiant le poids des classes de TMG les plus élevés dans les model points de passif.

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans les tableaux ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
	Situation centrale			TMG à 1,5%		
(Mds€)	**Sans spread**	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 947 843	1 950 180	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	37 638	35 300	*-6,2%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-34 740	-34 648	*-0,3%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 104	64 104	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 499	26 499	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-4 602	-4 027	*-12,5%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**88 898**	**87 227**	***-1,9%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	140 134	139 030	*-0,8%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	122 469	121 401	*-0,9%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	42 024	41 862	*-0,4%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	9 313	9 324	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-4 602	-4 027	*-12,5%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**144 845**	**144 326**	***-0,4%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**61%**	**60%**	***-1,5%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	-55 948	-57 099	*2,1%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	8,2%	8,3%	*0,8%*

La première observation que nous pouvons faire est que la modification du niveau de TMG moyen du passif a un impact très sensible sur la situation de Solvabilité de la compagnie (le taux de couverture s'effondre de 172% à 61%).

Dans cette situation, l'impact négatif sur la valeur de portefeuille de la mise en place d'une modélisation des spreads de crédit est plus importante en valeur relative mais d'un niveau similaire en montant absolu. L'impact sur le SCR est moins négatif qu'en scénario central (on observe même une réduction du SCR). Cela peut s'expliquer par le fait que la hausse du TMG modifie la « moneyness » de l'option offerte aux assurés. Notamment après les stress correspondant aux SCR, l'option de TMG est clairement dans la monnaie, dès lors, l'augmentation de la volatilité liée à la mise en place de la modélisation des spreads de crédit a moins d'impact sur la valeur de l'option.

Impact des rachats

Nous mesurons ici l'impact d'une modification des taux de rachats du portefeuille. Les taux de rachats ont été doublés par rapport à leur niveau initial.

Les résultats sont présentés de manière synthétique dans les tableaux ci-dessous :

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	**Situation centrale**			**Doublement des taux de rachat**		
	Sans spread	**Avec spreads**		**Sans spread**	**Avec spreads**	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 600 047	1 602 258	*0,1%*
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	44 613	42 402	*-5,0%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-11 097	-11 039	*-0,5%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 104	64 104	*0,0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 499	26 499	*0,0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-9 923	-9 389	*-5,4%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**114 195**	**112 577**	***-1,4%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	62 092	62 007	*-0,1%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	56 704	56 641	*-0,1%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	2 534	2 534	*0,0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	13 139	13 086	*-0,4%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	7 200	7 210	*0,1%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-9 923	-9 389	*-5,4%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**59 369**	**59 828**	***0,8%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**192%**	**188%**	***-2,2%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	54 827	52 749	*-3,8%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	2,0%	2,1%	*5,8%*

Dans une situation où les taux de rachats sont plus élevés, on observe un impact plus négatif de la mise en place des spreads de crédit :

- La diminution de la VIF est plus importante
- L'augmentation du SCR est légèrement plus élevée

Cela s'explique par le fait que la hausse du taux de rachat perturbe l'adossement actif-passif du portefeuille : l'augmentation des montants de rachats chaque année conduit à céder des obligations avant terme. Or c'est justement dans ce cas que la modélisation des spreads de crédit est pénalisante (en effet, si les obligations sont détenues jusqu'à maturité, la volatilité en valeur de marché liée à la modélisation stochastique des spreads n'impacte pas l'assureur).

4.2.4.3 Sensibilités relative à la stratégie financière

La stratégie financière des modèles ALM du marché français repose quasiment systématiquement sur la définition d'une allocation d'actif cible, qui peut être exprimée sur la valeur de marché ou sur la valeur nette comptable. Une fois cette allocation cible définie, il existe deux types d'approches au sein des modèles pour atteindre cette cible (suivant l'approche retenue la cible est atteinte plus ou moins rapidement) :

1. **Stratégie sur flux** : Les seuls mouvements d'actifs autorisés sont ceux découlant des flux d'actifs (dividendes, coupons, remboursements) nets des flux de passifs (sorties, primes,…), on ne crée pas de flux supplémentaire pour la stratégie financière. Autrement dit, on n'achète ni ne vend d'actifs en dehors des achats ou ventes rendus nécessaires par le paiement des prestations ou l'investissement des flux positifs. Les achats ou ventes sont réalisés sur les

différentes classes d'actifs et alloués de manière à minimiser l'écart entre l'asset mix réel et un asset mix cible. Cette stratégie ne garantit pas que l'allocation cible puisse être atteinte chaque année (si le flux net de l'année est trop faible, l'achat ou la vente correspondante peut ne pas être suffisante pour se recaler sur l'allocation cible).

2. **Rebalancement systématique** : Chaque année, les actifs sont systématiquement réalignés sur l'allocation cible. Pour ce faire, on vend (sans limite) la quantité d'actifs nécessaire. Dans le cas d'une allocation cible définie en valeur de marché, cette stratégie peut conduire à vendre et acheter une quantité relativement importante d'actifs du fait de la volatilité de la valeur de marché des différentes classes.

Les calculs présentés précédemment sur la société France vie ont été réalisés sur la base d'une stratégie sur flux. La sensibilité présentée ci-dessous est réalisée en modifiant la stratégie financière pour intégrer un rebalancement systématique du portefeuille basé sur une allocation cible en valeur de marché.

Décomposition du taux de couverture Solvabilité II						
(Mds€)	Situation centrale			Modification de la stratégie financière		
	Sans spread	Avec spreads		Sans spread	Avec spreads	
Best Estimate	1 600 322	1 602 637	*0,1%*	1 600 633	1 609 477	***0.6%***
VIF brute d'IS, brute de RM	81 442	79 128	*-2,8%*	81 131	72 287	*-10.9%*
Risk Margin	-18 003	-17 852	*-0,8%*	-17 942	-18 068	*0.7%*
Fonds Propres	64 104	64 104	*0,0%*	64 104	64 104	*0.0%*
Titres Subordonnés	26 499	26 499	*0,0%*	26 499	26 499	*0.0%*
Impôts totaux	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 438	-18 195	*-11.0%*
Fonds Propres Eligibles	**133 541**	**131 956**	***-1,2%***	**133 355**	**126 627**	***-5.0%***
BSCR	88 918	88 805	*-0,1%*	89 470	89 863	*0.4%*
dont SCR marché	80 071	80 045	*0,0%*	80 589	80 306	*-0.4%*
dont SCR de défaut des contreparties	3 493	3 493	*0,0%*	3 493	3 493	*0.0%*
dont SCR de souscription vie	21 292	21 107	*-0,9%*	21 394	21 184	*-1.0%*
SCR opérationnel	9 116	9 127	*0,1%*	9 116	9 151	*0.4%*
Ajustement pour impôts	-20 500	-19 922	*-2,8%*	-20 438	-18 195	*-11.0%*
SCR net d'impôts	77 534	78 009	*0,6%*	**78 149**	**80 819**	***3.4%***
Taux de couverture Solvabilité II	172%	169%	*-1,8%*	**171%**	**157%**	***-14%***
Surplus	56 008	53 946	*-3,7%*	55 206	45 808	*-17.0%*
SCR net de VIF nette de RM/PM	1,9%	2,1%	*6,0%*	2.0%	2.5%	*26.5%*

La modification de la stratégie financière (d'une stratégie sur flux vers un rebalancement systématique basé sur une allocation cible en valeur de marché) conduit à une forte augmentation de l'impact de la modélisation stochastique des spreads de crédit. La baisse de la VIF dépasse 10% et le taux de couverture Solvabilité II perd 14 points.

Cet effet est lié au fait que la stratégie financière incluant un rebalancement systématique conduit à vendre et à céder chaque année un volume d'obligations beaucoup plus important. En effet, comme le rebalancement est basé sur la valeur de marché, dès qu'il y a un mouvement de marché (évolution des taux d'intérêt, des spreads de crédit ou même des marchés actions), le poids des différentes classes d'actif évolue et nécessite d'être réaligné pour correspondre toujours à la cible. Or c'est justement lorsque les obligations sont cédées que l'impact de la modélisation des spreads de crédit se fait sentir (tant que les obligations sont détenues jusqu'à maturité, la volatilité en valeur de marché liée à la modélisation stochastique des spreads n'impacte pas l'assureur).

5. LES LIMITES DE NOTRE ETUDE ET LES APPROFONDISSEMENT POSSIBLES

5.1. UNE MODELISATION UNIQUEMENT RISQUE-NEUTRE ?

Notre étude ne couvre que la modélisation du risque de crédit risque-neutre, utilisée au sein d'une valorisation de Best-Estimate. Les modèles que nous avons choisi de présenter et les méthodes de calibrage associées sont spécifiquement conçus pour des projections risque-neutre et ne sont pas nécessairement adaptés à d'autres usages.

Pourtant, les assureurs sont également amenés à réaliser des projections économiques en univers monde-réel, par exemple dans le cadre des exercices suivants :

- Etudes ALM : par exemple, choix d'une allocation optimale maximisant l'espérance de rendement monde-réel sous une contrainte de risque définie comme une Value-at-Risk à X% à horizon Y années en univers monde-réel.
- Mise en place d'un modèle interne : il est alors nécessaire de projeter l'ensemble du bilan économique à horizon 1 an en univers monde-réel. Le risque de crédit doit nécessairement être intégré.
- Exercice ORSA : par exemple, définition du capital ORSA comme le niveau de fonds propres nécessaires pour maintenir un taux de couverture Solvabilité II de plus de X% à horizon Y années dans plus de Z% des cas - ce calcul est nécessairement réalisé en univers monde-réel.

Il est donc nécessaire pour les assureurs de s'interroger également sur les modèles qui peuvent être utilisés pour modéliser le risque de crédit en univers monde-réel. D'un point de vue opérationnel, il peut être intéressant d'utiliser le même modèle que celui mis en place pour la probabilité risque-neutre. En effet, cela permet de limiter les adaptations au sein de l'ESG et du modèle ALM :

- Le module de diffusion des scénarios économiques au sein de l'ESG reste identique,
- Le format des tables de scénarios économiques passé en input du modèle ALM est inchangé,
- Les formules de valorisation utilisées au sein du modèle ALM sont maintenues.

La production de scénarios monde-réel est possible avec les deux modèles présentés dans notre étude en adaptant la méthodologie de calibrage :

- Pour le modèle LMN, il suffit de calibrer les paramètres de volatilité (σ), de moyenne de long terme (μ) et de vitesse de retour à la moyenne (α) sur des historiques de spreads monde-réel.
- Pour le modèle JLT, le calibrage est plus complexe car le paramètre de prime de risque $\pi(t)$ n'est pas directement observable sur l'historique ; mais ce paramètre peut être déduit à partir d'un historique de spread court-terme car on montre que $\pi(t)$ peut s'écrire comme une fonction linéaire des spreads court-terme (dont les coefficients dépendent des coefficients de la matrice de transition).

Même si l'adaptation des modèles JLT et LMN à l'univers monde-réel est possible, ces derniers ne constituent pas nécessairement les modèles les plus adaptés à cet univers. Il existe des modèles spécifiquement conçus pour une modélisation monde-réel, qui permettent de mieux reproduire les propriétés observées sur l'historique (moyennes de long terme, volatilités de long terme, hétéroscédasticité, auto-corrélation, etc.). On peut notamment citer :

- Le modèle ACP Vasicek, basé sur une Analyse en Composantes Principales (ACP) des variations de spreads ou de taux risqués,

- Le modèle Nelson-Siegel-Vasicek, basé sur une paramétrisation de la courbe des spreads ou des taux risqués.

5.2. EXTENSION POSSIBLE AU RISQUE DE CREDIT GOVIES

Notre étude n’a couvert que le risque de crédit des obligations privées (obligations corporate) et non le risque lié aux obligations émises par les états (obligations govies). Cela correspond à la pratique de la quasi-totalité des assureurs ayant mis en place une modélisation stochastique du risque de crédit. En effet, dans la grande majorité des cas, les assureurs ont adopté une approche similaire à celle de la formule standard Solvabilité II, dans laquelle les obligations govies (au moins celles émises par un état de la zone euro dans sa propre monnaie) sont supposées sans risque de crédit (le SCR spread est nul).

Cependant, l’absence de risque de crédit dans la formule standard Solvabilité est plus une convention (issue de négociations) qui n’a pas nécessairement de réalité économique. En effet, le risque de crédit des obligations govies est bien réel, et la crise des emprunts d’état de 2011 en témoigne. S’il peut sembler légitime pour les assureurs de ne pas se pénaliser plus que nécessaire dans leur calcul de Best Estimate Solvabilité II en prenant en compte le risque de crédit govies (puisque la formule standard elle-même ne « reconnait » pas ce risque), il serait dangereux d’occulter ce risque dans le calcul d’autres indicateurs d’aide à la décision de la compagnie (calcul du capital ORSA, étude ALM).

Dès lors, il convient de s’interroger sur la possibilité d’adapter les modèles de risque de crédit que nous avons présentés ici au risque de crédit souverain. Une telle adaptation est possible, mais deux difficultés apparaissent :

- Les deux modèles présentés ne permettent de générer que des spreads de crédit positifs. Or, dans l’historique récent, on observe pour certains pays (et selon la référence de taux sans risque choisie) un niveau de spread négatif (c’est le cas notamment pour l’Allemagne et la France quand on observe le spread par rapport aux taux swap). Un tel phénomène ne pourra donc pas être généré par les deux modèles envisagés, et encore plus gênant, il n’est pas possible de calibrer un modèle dans une situation initiale de spread déjà négatif. Deux possibilités s’offrent alors pour contourner cette difficulté :
    - Il est possible de considérer les pays à spread négatif comme réellement sans risque et les exclure du périmètre de modélisation du risque de crédit govies. Le risque de crédit govies serait alors modélisé uniquement pour les pays a priori plus risqués (par exemple uniquement pour les *PIIGS*[8] de la zone Euro).
    - Si l’on souhaite néanmoins maintenir ces pays dans le périmètre de modélisation du risque de crédit govies, il est possible de calibrer le modèle avec une courbe de spreads initialement nulle. Dans ce cas, c’est l’étape de risque-neutralisation qui va permettre de prendre en compte la négativité du spread : l’ajustement calculé à cette étape permettra de corriger l’écart entre le spread nul pris en compte dans le calibrage et le spread réel qui, lui, est négatif. Cette « correction » sera ensuite maintenue constante tout au long de la projection.
- Il peut s’avérer difficile d’obtenir des données de calibrage suffisamment fiables, notamment en ce qui concerne la matrice de transition de rating nécessaire à la mise en place du modèle JLT. En effet, même si certaines publications existent, il est difficile d’obtenir une matrice de transition de rating calibrée uniquement sur des obligations govies du fait du très faible nombre d’émetteurs. La solution consistant à utiliser la même matrice de transition que pour le risque

[8] Acronyme servant à désigner les membres supposément les plus faibles de l’Eurozone, suite à l’éclatement de la bulle des subprimes et la crise des dettes souveraines : Portugal, Italie, Irlande, Grèce, Espagne.

corporate ne semble pas entièrement satisfaisante, car, même si les états disposent également de notations de crédit censées refléter le même risque que pour les émetteurs privés, la nature des deux risques est sensiblement différente : la dégradation de la notation d'un état ou même la survenance d'un évènement de défaut ne répondent pas aux mêmes mécanismes que ceux en œuvre pour un émetteur privé du fait de la dimension politique associée.

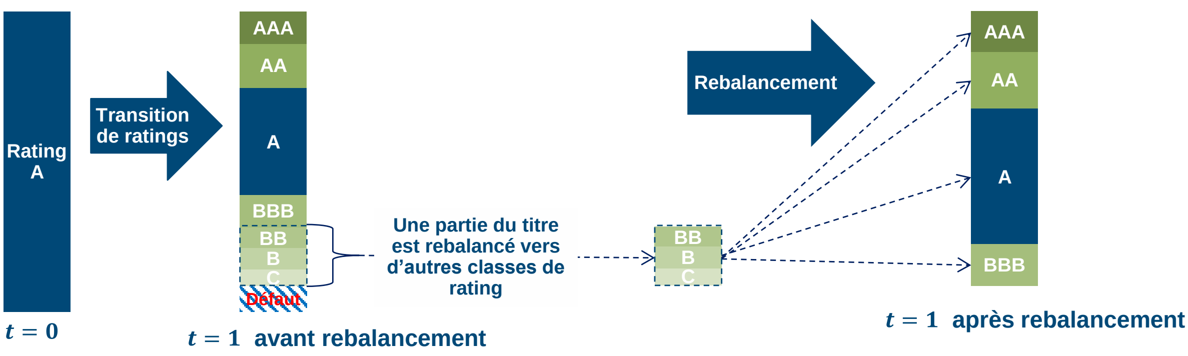
5.3. IMPACT DE LA STRATEGIE D'INVESTISSEMENT RELATIVE AU CREDIT

Nos mesures d'impact ont été réalisées sur la base d'un modèle ALM qui met en œuvre une stratégie d'investissement relativement simple, avec une allocation cible fixe, à la fois en terme de classe d'actifs mais également de notation au sein de la classe obligataire (même si deux modes de rebalancement ont été testés – cf. 4.2.4.3). Si cela correspond bien à la stratégie usuellement implémentée au sein des modèles ALM des assureurs du marché français, cela ne correspond pas nécessaire à leur pratique réelle. En effet, les assureurs ont souvent, en pratique, des stratégies d'investissement un peu plus sophistiquées, et notamment sur le crédit. Ces stratégies peuvent avoir deux logiques :

- Une logique d'optimisation de la rentabilité : par exemple en choisissant de surpondérer la classe de notation qui, à un instant 't', présente le meilleur ratio « Rendement / Coût en capital ».
- Une logique de gestion du risque : par exemple en choisissant de céder un titre si sa notation se dégrade en dessous d'un certain niveau.

Une fois la modélisation stochastique du risque de crédit mise en place, il serait intéressant de tester l'impact réel de ces stratégies.

Si les deux modèles étudiés (JLT et LMN) permettent de mettre en œuvre la première stratégie décrite (optimisation du ratio Rendement / Coût en capital sur chaque scénario), seul le modèle JLT permet de mettre en place des stratégies basées sur l'évolution de la notation (puisque c'est le seul à intégrer des transitions de rating). Il convient cependant de noter que, même si le modèle JLT intègre des transitions de rating, la prise en compte des stratégies basées sur la notation n'est pas immédiate. En effet, dans ce modèle, la transition de rating est réalisée en probabilité. Autrement dit, même dans un scénario donné, un titre ne passe pas d'une classe A à une classe B. Dès le premier pas de temps, il passe de sa notation initiale unique (A dans l'exemple ci-dessous), à une multitude de notations pondérées par les probabilités de transition. Dès lors, si on souhaite céder tous les titres de notation inférieure à BBB par exemple, il convient, dans le modèle, de céder les « morceaux » de titres dont les notations est inférieure à BBB. Ce mécanisme complexifie l'algorithme ALM et augmente significativement le volume des données traitées (pour chaque titre, il faut, en réalité, stocker un vecteur dont chaque dimension correspond aux différentes notations).



Au-delà de ces considérations liées à l'implémentation dans le modèle, on peut se demander l'impact que pourraient avoir de telles stratégies sur la valeur du Best Estimate. Et il n'est pas certain que cet impact soit favorable :

- Si les stratégies basées sur des logiques d'optimisation de la rentabilité (choix de la classe d'actifs présentant le meilleur ratio « rendement / Coût en capital ») ont évidemment du sens en monde-réel, ce n'est pas le cas en univers risque-neutre. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, en risque-neutre le rendement moyen de toutes les classes d'actifs est égal au taux sans risque. Même si une classe de notation présente un meilleur rendement initialement (un spread plus élevé), les défauts futurs vont venir réduire ce rendement pour qu'il soit en moyenne égal au taux sans risque. Il n'y a donc aucun intérêt à aller vers plus de risque, même si le couple Rendement/Coût en capital est meilleur : cela ne ferait qu'augmenter la volatilité pour le même niveau de rendement moyen et donc renchérir le coût des options et garanties financières.
- Pour les stratégies consistant à céder les titres lorsque leur notation se dégrade, là encore, l'impact sur le Best Estimate risque d'être défavorable. En effet, cela revient à céder l'obligation lorsque le spread s'est écarté et que l'obligation est vraisemblablement en moins-value. On entérine donc des pertes de façon définitive.

Même si l'on n'attend pas d'impact favorable de ces stratégies sur le calcul du Best Estimate, il peut être utile de les intégrer au modèle dans un souci de réalisme et pour mesurer leur impact dans d'autre contexte (étude ALM, ORSA , etc…).

6. CONCLUSION

Dans un contexte où la demande de l'autorité de contrôle d'intégrer une modélisation stochastique explicite du risque de crédit au calcul du Best Estimate se fait de plus en plus pressante, notre étude permet d'identifier deux modèles de diffusion du spread de crédit (modèle LMN et modèle JLT) bien adaptés à une modélisation risque-neutre de ce risque.

Nous avons pu mettre en lumière les avantages et inconvénients de ces modèles :

- Pour le modèle JLT : l'avantage de simuler explicitement les transitions de rating qui permet d'apporter du réalisme au modèle et d'intégrer des stratégies d'actifs basées sur la notation, mais avec la contrainte de calculs plus lourds au sein du modèle ALM (gestion des matrices de transition, découpage des titres par classe de rating,…)
- Pour le modèle LMN, l'avantage d'un modèle plus simple et qui permet pourtant une meilleure réplication des prix de marché (du fait de son plus grand nombre de degrés de liberté), mais sans modélisation explicite des transitions de rating.

Au-delà des aspects théoriques liés à ces modèles, nous nous sommes également efforcés de détailler autant que possible les aspects pratiques et opérationnels de la mise en place d'une telle modélisation :

- Calibrage de l'ESG
- Adaptation des tests de martingalité des scénarios économiques
- Adaptation des inputs du modèle ALM
- Modification de l'étape de risque-neutralisation
- Adaptation des formules de valorisation

D'après nos mesures d'impact réalisées sur un modèle ALM complet, l'implémentation d'une modélisation explicite du risque de crédit au sein d'un calcul de Best Estimate conduit, en moyenne sur le marché français, à un impact relativement modéré, traduisant la bonne adéquation actif-passif des assureurs et leur capacité à détenir les obligations jusqu'à terme ; de sorte qu'ils ne sont pas impactés par les fluctuations en valeur de marché apporté par la volatilité des spreads de crédit. Ce résultat est cependant à nuancer pas les observations suivantes :

- Comme démontré par nos mesures, l'impact pourrait être beaucoup plus important pour un acteur de marché présentant une moins bonne adéquation actif/passif ou dont la stratégie financière conduit à céder des obligations avant terme de façon plus importante.
- Nos mesures d'impact ne couvrent que la modélisation du risque de crédit des obligations corporate (ce qui correspond à la pratique actuelle des assureurs ayant mis en place ce type de modélisation). Mais il existe également un risque de crédit significatif sur les obligations govies, qui représentent près de la moitié du portefeuille obligataire du marché français. La prise en compte de ce risque devrait conduire à augmenter l'impact sur les métriques Solvabilité II.

7. BIBLIOGRAPHIE

Références académiques sur les modèles de risque de crédit

[1] Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Models - Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit,* Corrected 3rd printing 2007.

[2] Jarrow RA, Lando D, Turnbull SM*, "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads",* The Review of Financial Studies 1997, Vol 10, No 2, pp. 481-523.

[3] Lando, D., & Skødeberg, T. M. (2002). *Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. journal of banking & finance,* 26(2-3), 423-444.

[4] Longstaff, F. A., Mithal, S., & Neis, E. (2005). *Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? New evidence from the credit default swap market.* The Journal of Finance, 60(5), 2213-2253.

[5] Kulkarni A., Mishra A., Thakker J., *"How good is Merton Model at assessing credit risk?" Evidence from India*

[6] Duffie, D., & Singleton, K. J. (1999). *Modeling term structures of defaultable bonds. The review of financial studies, 12(4), 687-720.*

[7] Arvanitis, A., Gregory, J., & Laurent, J. P. (1999). *Building models for credit spreads. Journal of Derivatives, 6, 27-43.*

Références relatives à Solvabilité II

[8] Directive 2009/138/CE Du Parlement Européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)

[9] Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE

[10] NOTICE ACPR « Solvabilité II » Provisions techniques (y compris mesures « branches longues ») en date du 17/12/2015

Références utilisées pour le calibrage du modèle France Vie

[11] Fédération Française de l'Assurances – Tableau de Bord de l'assurance en 2017

[12] Fédération Française de l'Assurances – Les Assurances de Personnes – Données clés 2017

[13] Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) – Les chiffres du marché français de la banque et de l'assurance 2017

8. ANNEXES

Compte de résultat projeté sur le scénario central – Sans modélisation des spreads de crédit

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
Primes	13 118	12 065	11 059	10 105	9 201	8 375	7 633	6 971	6 376	5 830	5 329	4 869	4 447	4 062	3 710
Prestations	- 96 846	- 94 263	- 92 574	- 91 130	- 89 765	- 87 357	- 84 078	- 79 769	- 75 757	- 71 927	- 69 518	- 65 067	- 61 793	- 58 115	- 54 762
dont décès	*- 40 432*	*- 41 142*	*- 42 096*	*- 42 860*	*- 43 665*	*- 43 932*	*- 43 647*	*- 42 868*	*- 41 920*	*- 40 555*	*- 39 608*	*- 37 327*	*- 35 529*	*- 33 417*	*- 31 438*
dont rachats totaux	*- 22 261*	*- 21 238*	*- 20 413*	*- 19 903*	*- 19 153*	*- 17 985*	*- 16 516*	*- 14 502*	*- 12 740*	*- 11 564*	*- 10 934*	*- 10 160*	*- 9 685*	*- 9 172*	*- 8 724*
dont rachats partiels	*- 34 153*	*- 31 883*	*- 30 065*	*- 28 367*	*- 26 946*	*- 25 440*	*- 23 915*	*- 22 399*	*- 21 098*	*- 19 808*	*- 18 976*	*- 17 580*	*- 16 579*	*- 15 526*	*- 14 600*
dont maturités	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de provisions	76 087	73 707	69 638	61 183	60 915	61 437	61 431	55 380	52 817	39 591	50 798	43 686	42 826	39 126	37 918
PM début	*1 397 597*	*1 321 510*	*1 247 803*	*1 178 164*	*1 116 981*	*1 056 066*	*994 629*	*933 198*	*877 818*	*825 001*	*785 409*	*734 611*	*690 925*	*648 099*	*608 973*
PM fin	*1 321 510*	*1 247 803*	*1 178 164*	*1 116 981*	*1 056 066*	*994 629*	*933 198*	*877 818*	*825 001*	*785 409*	*734 611*	*690 925*	*648 099*	*608 973*	*571 055*
Frais totaux	- 1 961	- 1 888	- 1 812	- 1 733	- 1 654	- 1 577	- 1 504	- 1 436	- 1 371	- 1 310	- 1 251	- 1 194	- 1 140	- 1 088	- 1 039
Commissions	- 3 544	- 3 467	- 2 990	- 3 024	- 2 606	- 2 436	- 2 260	- 2 177	- 2 048	- 1 887	- 1 763	- 1 657	- 1 597	- 1 478	- 1 388
Variation de PRE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE début	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE fin	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de RC	-	-	-	-	- 55	-	- 1 894	- 61	26	920	63	-	13	-	-
RC début	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 455*	*18 455*	*20 348*	*20 409*	*20 383*	*19 463*	*19 400*	*19 400*	*19 387*	*19 387*
RC fin	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 455*	*18 455*	*20 348*	*20 409*	*20 383*	*19 463*	*19 400*	*19 400*	*19 387*	*19 387*	*19 387*
Produits financiers	41 934	49 369	27 702	41 891	21 310	18 493	17 093	18 794	17 714	13 069	11 882	10 734	12 918	10 632	9 885
Variation de PPE	- 22 020	- 27 531	- 6 527	- 10 468	6 128	6 104	6 113	5 442	5 241	18 082	6 472	10 476	6 571	8 726	7 428
PPE début	*44 541*	*66 561*	*94 093*	*100 620*	*111 088*	*104 960*	*98 855*	*92 742*	*87 301*	*82 060*	*63 978*	*57 506*	*47 030*	*40 459*	*31 733*
PPE fin	*66 561*	*94 093*	*100 620*	*111 088*	*104 960*	*98 855*	*92 742*	*87 301*	*82 060*	*63 978*	*57 506*	*47 030*	*40 459*	*31 733*	*24 305*
Résultat brut	**6 768**	**7 991**	**4 496**	**6 825**	**3 475**	**3 038**	**2 534**	**3 145**	**2 998**	**2 368**	**2 012**	**1 846**	**2 245**	**1 863**	**1 751**
Check	- 0	0	- 0	- 0	0	- 0	0	- 0	0	- 0	- 0	0	- 0	0	- 0

Zoom sur les obligations

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
VM	1 269 876	1 203 509	1 116 675	1 098 716	1 028 561	958 075	897 980	850 294	786 135	703 904	656 231	616 021	569 965	524 891	492 959
VNC	1 162 212	1 152 015	1 077 772	1 052 902	975 280	918 231	846 482	815 811	779 967	726 153	672 457	627 658	592 943	551 743	505 610
Taux de PMVL	9.3%	4.5%	3.6%	4.4%	5.5%	4.3%	6.1%	4.2%	0.8%	-3.1%	-2.4%	-1.9%	-3.9%	-4.9%	-2.5%
Revenu	31 666	30 168	26 540	22 854	19 900	16 000	13 627	12 393	10 908	11 646	9 694	9 331	10 178	9 149	9 279
PVR	-	-	-	-	69	10	1 896	141	62	21	14	-	1	-	-
MVR	-	-	-	-	14	2	3	79	84	941	77	-	14	-	-

Compte de résultat projeté sur le scénario central – Crédit modélisé à l'aide du modèle LMN

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
Primes	13 118	12 065	11 059	10 105	9 201	8 375	7 633	6 971	6 376	5 830	5 329	4 869	4 447	4 062	3 710
Prestations	-96 846	-94 259	-92 570	-91 122	-90 071	-87 647	-84 323	-79 974	-75 773	-71 885	-69 470	-65 154	-61 599	-57 865	-54 573
dont décès	*-40 432*	*-41 140*	*-42 094*	*-42 857*	*-43 799*	*-44 063*	*-43 761*	*-42 977*	*-41 936*	*-40 540*	*-39 588*	*-37 379*	*-35 430*	*-33 287*	*-31 341*
dont rachats totaux	*-22 261*	*-21 237*	*-20 412*	*-19 901*	*-19 229*	*-18 055*	*-16 573*	*-14 540*	*-12 739*	*-11 553*	*-10 923*	*-10 173*	*-9 650*	*-9 127*	*-8 689*
dont rachats partiels	*-34 153*	*-31 881*	*-30 063*	*-28 364*	*-27 043*	*-25 530*	*-23 989*	*-22 457*	*-21 099*	*-19 791*	*-18 959*	*-17 602*	*-16 519*	*-15 451*	*-14 543*
dont maturités	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de provisions	76 126	73 719	69 675	58 537	60 282	61 646	61 899	57 044	53 807	39 938	49 845	45 568	43 838	38 963	37 739
PM début	*1 397 597*	*1 321 471*	*1 247 751*	*1 178 077*	*1 119 539*	*1 059 257*	*997 612*	*935 713*	*878 668*	*824 861*	*784 924*	*735 079*	*689 511*	*645 674*	*606 710*
PM fin	*1 321 471*	*1 247 751*	*1 178 077*	*1 119 539*	*1 059 257*	*997 612*	*935 713*	*878 668*	*824 861*	*784 924*	*735 079*	*689 511*	*645 674*	*606 710*	*568 971*
Frais totaux	-1 961	-1 888	-1 812	-1 733	-1 654	-1 577	-1 504	-1 436	-1 371	-1 310	-1 251	-1 194	-1 140	-1 088	-1 039
Commissions	-3 557	-3 473	-3 004	-3 036	-2 627	-2 444	-2 246	-2 157	-2 032	-1 875	-1 757	-1 645	-1 574	-1 469	-1 372
Variation de PRE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE début	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE fin	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de RC	-	-	-	-	-58	-	-1 642	-62	25	1 086	64	-	-	-	-
RC début	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 458*	*18 458*	*20 100*	*20 162*	*20 137*	*19 051*	*18 987*	*18 987*	*18 987*	*18 987*
RC fin	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 458*	*18 458*	*20 100*	*20 162*	*20 137*	*19 051*	*18 987*	*18 987*	*18 987*	*18 987*	*18 987*
Produits financiers	42 897	49 782	28 757	42 882	22 520	18 559	16 398	16 863	16 411	11 988	11 807	10 597	11 410	10 363	9 056
Variation de PPE	-22 853	-27 889	-7 438	-8 648	6 080	6 137	6 223	5 566	5 331	18 436	7 422	8 760	6 594	8 846	8 079
PPE début	*44 541*	*67 394*	*95 283*	*102 721*	*111 369*	*105 290*	*99 153*	*92 930*	*87 364*	*82 033*	*63 597*	*56 175*	*47 415*	*40 821*	*31 974*
PPE fin	*67 394*	*95 283*	*102 721*	*111 369*	*105 290*	*99 153*	*92 930*	*87 364*	*82 033*	*63 597*	*56 175*	*47 415*	*40 821*	*31 974*	*23 895*
Résultat brut	**6 924**	**8 058**	**4 666**	**6 985**	**3 672**	**3 049**	**2 438**	**2 816**	**2 773**	**2 208**	**1 989**	**1 800**	**1 976**	**1 812**	**1 600**
Check	-0	0	0	-0	-0	-0	0	0	-0	-0	0	0	0	0	0

Zoom sur les obligations

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
VM	1 267 946	1 201 716	1 116 435	1 101 778	1 030 412	957 640	891 463	844 389	780 251	699 003	652 494	610 249	565 262	521 044	487 480
VNC	1 163 396	1 153 414	1 079 849	1 055 184	978 514	921 496	849 122	816 372	779 627	724 902	670 861	625 539	589 574	548 524	502 238
Taux de PMVL	9.0%	4.2%	3.4%	4.4%	5.3%	3.9%	5.0%	3.4%	0.1%	-3.6%	-2.7%	-2.4%	-4.1%	-5.0%	-2.9%
Revenu	32 539	30 613	27 600	24 024	21 101	15 993	12 050	10 712	9 761	10 762	9 367	8 387	8 972	8 933	8 434
PVR	-	-	-	-	73	12	1 698	139	62	10	14	-	-	-	-
MVR	-	-	-	-	15	2	57	77	84	1 096	79	-	-	-	-

Compte de résultat projeté sur le scénario central – Crédit modélisé à l'aide du modèle JLT

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
Primes	13 118	12 065	11 059	10 105	9 201	8 375	7 633	6 971	6 376	5 830	5 329	4 869	4 447	4 062	3 710
Prestations	-96 846	-94 261	-92 572	-91 127	-89 894	-87 493	-84 233	-79 897	-75 861	-71 999	-69 616	-65 196	-61 787	-58 050	-54 732
dont décès	*-40 432*	*-41 141*	*-42 095*	*-42 859*	*-43 722*	*-43 993*	*-43 718*	*-42 930*	*-41 972*	*-40 591*	*-39 660*	*-37 396*	*-35 526*	*-33 381*	*-31 422*
dont rachats totaux	*-22 261*	*-21 238*	*-20 413*	*-19 903*	*-19 185*	*-18 018*	*-16 553*	*-14 529*	*-12 760*	*-11 578*	*-10 951*	*-10 183*	*-9 684*	*-9 161*	*-8 719*
dont rachats partiels	*-34 153*	*-31 882*	*-30 064*	*-28 366*	*-26 987*	*-25 482*	*-23 962*	*-22 438*	*-21 129*	*-19 829*	*-19 005*	*-17 618*	*-16 577*	*-15 507*	*-14 591*
dont maturités	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de provisions	76 105	73 714	69 652	60 071	60 534	61 180	61 580	55 623	53 154	39 500	50 526	44 658	43 582	39 089	37 874
PM début	*1 397 597*	*1 321 491*	*1 247 777*	*1 178 125*	*1 118 054*	*1 057 521*	*996 341*	*934 762*	*879 139*	*825 985*	*786 485*	*735 959*	*691 301*	*647 719*	*608 630*
PM fin	*1 321 491*	*1 247 777*	*1 178 125*	*1 118 054*	*1 057 521*	*996 341*	*934 762*	*879 139*	*825 985*	*786 485*	*735 959*	*691 301*	*647 719*	*608 630*	*570 756*
Frais totaux	-1 961	-1 888	-1 812	-1 733	-1 654	-1 577	-1 504	-1 436	-1 371	-1 310	-1 251	-1 194	-1 140	-1 088	-1 039
Commissions	-3 550	-3 470	-2 996	-3 028	-2 617	-2 446	-2 264	-2 178	-2 046	-1 889	-1 765	-1 649	-1 585	-1 473	-1 380
Variation de PRE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE début	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PRE fin	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Variation de RC	-	-	-	-	-55	-	-1 739	-61	27	1 107	75	-	-	-	-
RC début	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 455*	*18 455*	*20 194*	*20 255*	*20 228*	*19 121*	*19 045*	*19 045*	*19 045*	*19 045*
RC fin	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 400*	*18 455*	*18 455*	*20 194*	*20 255*	*20 228*	*19 121*	*19 045*	*19 045*	*19 045*	*19 045*	*19 045*
Produits financiers	42 385	49 595	28 123	42 226	21 975	19 003	16 922	18 624	17 385	12 855	11 878	10 594	11 985	10 328	9 334
Variation de PPE	-22 410	-27 727	-6 891	-9 636	6 094	6 080	6 134	5 467	5 276	18 264	6 834	9 721	6 574	8 939	7 883
PPE début	*44 541*	*66 952*	*94 679*	*101 570*	*111 205*	*105 111*	*99 031*	*92 898*	*87 430*	*82 155*	*63 891*	*57 057*	*47 336*	*40 763*	*31 824*
PPE fin	*66 952*	*94 679*	*101 570*	*111 205*	*105 111*	*99 031*	*92 898*	*87 430*	*82 155*	*63 891*	*57 057*	*47 336*	*40 763*	*31 824*	*23 941*
Résultat brut	**6 841**	**8 028**	**4 564**	**6 879**	**3 584**	**3 122**	**2 529**	**3 113**	**2 939**	**2 359**	**2 009**	**1 802**	**2 075**	**1 806**	**1 649**
Check	-0	-0	-0	-0	0	-0	-0	0	-0	-0	-0	0	-0	0	-

Zoom sur les obligations

	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
VM	1 267 626	1 200 428	1 114 825	1 101 004	1 030 659	960 218	894 946	847 550	781 154	702 540	652 698	609 713	565 245	521 633	484 852
VNC	1 163 035	1 153 098	1 079 027	1 053 621	976 470	919 660	848 664	817 582	781 753	727 002	673 716	628 521	592 670	551 139	505 684
Taux de PMVL	9.0%	4.1%	3.3%	4.5%	5.5%	4.4%	5.5%	3.7%	-0.1%	-3.4%	-3.1%	-3.0%	-4.6%	-5.4%	-4.1%
Revenu	32 013	30 369	26 968	23 433	20 561	16 513	13 594	12 256	10 502	11 689	9 676	8 410	9 411	8 899	8 674
PVR	-	-	-	-	70	10	1 748	140	66	9	16	-	-	-	-
MVR	-	-	-	-	14	2	11	78	90	1 116	92	-	-	-	-