

**Mémoire présenté le :**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Yannis BIOLAY

Titre : Intégration des filiales financières régulées dans  
l'optimisation du couple rendement-risque et déclinaison  
tactique de la stratégie optimale d'investissement long terme

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)  
*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

*Signature*

*Entreprise :*

*Nom : Caisse des Dépôts et Consignations*

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

*Nom : Benoît FACHE*

*Signature : Benoît Fache*

*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

***Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)***

*Signature du responsable entreprise*

*Benoît Fache*

*Signature du candidat*

*YB*



Groupe Caisse des Dépôts  
Institut de Science Financière et d'Assurances  
Université Lyon 1



# Mémoire d'admission à l'Institut des Actuaires

Intégration des filiales financières régulées  
dans l'optimisation du couple  
rendement-risque et déclinaison tactique de la  
stratégie optimale d'investissement long terme

Auteur : BIOLAY Yannis  
Tuteur en entreprise : FACHE Benoît  
Tutrice pédagogique : JIAO Ying  
Date : Mars 2021



## Résumé

**Mots clés :** Déclinaison tactique, optimisation dynamique, métaheuristique, optimisation par essais particuliers, couple rendement-risque, filiales financières régulées, agrégats réglementaires, générateur de scénarios économiques

---

Le Groupe Caisse des Dépôts établit annuellement ses enveloppes d'investissements dans différentes classes d'actifs à horizon 5 ans en arbitrando entre les volontés d'investissement des filiales (vision *bottom-up*) et l'optimisation financière du portefeuille (vision *top-down*).

L'optimisation *top-down* se base sur une métaheuristique, l'optimisation par essais particuliers, pour optimiser le couple rendement risque :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [\text{Rentabilité économique sur 5 ans } (\omega)] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible à 5 ans } (\omega) < 0) \leq \alpha \end{aligned}$$

où  $\omega$  représente les enveloppes à optimiser, "Ecart à la cible" la métrique de solvabilité du Groupe ( $\iff$  différence entre une métrique de richesse et une métrique de risque), et  $\alpha$  le seuil d'appétence au risque.

A la suite de l'augmentation de l'exposition de la Caisse des Dépôts et Consignations dans le Groupe La Poste et dans SFIL, les filiales financières régulées ont vu leur importance croître dans la stratégie de pilotage du Groupe. Le modèle d'optimisation *top-down* doit donc être adapté pour mieux intégrer les profils de risque de ces filiales particulières. La modélisation de leurs agrégats réglementaires sera ainsi abordée.

Les enveloppes d'investissements finales sont réparties annuellement sur la période de projection. Or, l'exercice d'optimisation étant revu annuellement, les enveloppes d'investissements à horizon 1 an revêtent ainsi une importance particulière. Ces dernières ne faisaient jusqu'alors pas l'objet d'une optimisation à part entière et étaient le fruit d'un investissement linéaire des enveloppes globales sur la projection. Leur optimisation sera alors étudiée.



---

## Abstract

**Keywords :** Tactical declination, dynamic optimization, metaheuristic, particule swarm optimization, risk/return ratio, regulated financial subsidiaries, regulatory aggregates, economic scenario generator.

---

Caisse des Dépôts Group annually determines its five-year investment budgets in various asset classes by arbitrating between the investment wishes of the subsidiaries (called bottom-up) and the financial optimization of the portfolio (called top-down).

The top-down optimization is based on a metaheuristic, the particle swarm optimization, to optimize the risk/return ratio :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [\text{Profitability over the next 5 years } (\omega)] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{P}(\text{5-years deviation from target } (\omega) < 0) \leq \alpha \end{aligned}$$

where  $\omega$  represents the investment budgets to be optimized, "Deviation from target" the Group's solvency metric ( $\iff$  difference between a wealth metric and a risk metric), and  $\alpha$  the risk appetite threshold.

Due to Caisse des Dépôts et Consignations's new exposure in La Poste Group and SFIL, the regulated financial subsidiaries have become increasingly important in the Group's management strategy. Therefore, the top-down optimization model must be updated to better integrate the risk profiles of these particular subsidiaries. The modeling of their regulatory aggregates will thus be mentioned.

The final investment budgets are distributed annually over the projection period. However, since the optimization exercise is reviewed annually, the one-year investment budgets are particularly important. Until now, these were not subject to a full optimization exercise and were the result of a linear investment of the global envelopes over the projection period. Hence, their optimization will be implemented.

---



## Remerciements

Je souhaite ici remercier tout particulièrement mon tuteur entreprise Benoît Fache, pour ton accompagnement tout au long de ce mémoire et de ces 2 années en général, pour les conseils et l'expertise que tu as bien voulu me partager ainsi que pour ta bonne humeur à toute épreuve malgré cette période peu joviale. Je suis sincèrement ravi de t'avoir eu comme maître d'apprentissage, et de t'avoir désormais comme collègue !

Merci également à Ying Jiao pour vos conseils avisés et toujours pertinents, votre expertise, ainsi que pour tout le temps que vous aurez bien voulu m'accorder en tant que tutrice pédagogique.

Elise et Stéphane, merci de m'avoir fait profiter de votre expertise sur le processus ASM et pour les bons conseils dont vous avez pu me faire part depuis mon arrivée à la Caisse.

J'en profite pour remercier toute l'équipe Allocation et Mesure de Solvabilité pour les bons moments passés au quotidien malgré cette période particulière. Cela a indéniablement participé à la réussite de ce projet.

Remerciements encore à mes amis, pour cette belle aventure humaine passée à vos côtés tout au long de ma scolarité. C'est également grâce à vous si j'en suis là aujourd'hui. J'espère que, vous aussi, vous finaliserez les différents projets qui vous tiennent à coeur.

Merci enfin à ma famille, et plus spécialement à mes chers parents sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, pour tous les efforts auxquels vous avez bien voulu consentir afin de me permettre de devenir qui je suis aujourd'hui et dont ce mémoire est un aboutissement supplémentaire !



## Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Cadre du mémoire et environnement de la mission</b>	<b>10</b>
1.1 Rôle de la Caisse des Dépôts et Consignations dans l'économie française . . . . .	10
1.2 Direction Financière de la Section Générale . . . . .	11
1.3 Principes du modèle prudentiel . . . . .	12
1.4 Allocation Stratégique Macro-économique . . . . .	12
1.5 Programmation Financière Pluriannuelle . . . . .	13
<b>2 Modélisation adoptée dans l'exercice d'allocation</b>	<b>15</b>
2.1 Classes d'actifs . . . . .	15
2.2 Classes de passifs . . . . .	16
2.3 Générateur de scénarios économiques . . . . .	16
2.4 Enveloppes et diffusion du bilan . . . . .	18
2.4.1 Enveloppes d'investissements . . . . .	18
2.4.2 Diffusion des classes d'actifs hors taux . . . . .	19
2.4.3 Diffusion de la poche Taux . . . . .	20
2.5 Générateur de scénarios financiers et mesure de risque . . . . .	21
2.6 Métrique de richesse . . . . .	23
2.7 Métrique de solvabilité . . . . .	23
2.8 Métrique de rentabilité . . . . .	23
<b>3 Optimisation du couple rendement-risque</b>	<b>25</b>
3.1 Rappels généraux sur les problèmes d'optimisation . . . . .	25
3.2 Formulation du problème d'optimisation . . . . .	25
3.2.1 Un problème d'optimisation "difficile" . . . . .	26
3.3 Mise en place de l'optimisation . . . . .	27
3.3.1 Exemples de métaheuristiques non linéaires disponibles . . . . .	27
3.3.2 Principes de l'optimisation par essais particuliers . . . . .	30
3.3.3 L'OEP utilisée par la Caisse des Dépôts et Consignations dans le cadre de l'ASM . . . . .	33
3.3.4 Parallélisation de l'algorithme . . . . .	33
3.3.5 Variabilité des résultats . . . . .	35
<b>4 Intégration des filiales financières régulées</b>	<b>38</b>
4.1 Cadre réglementaire . . . . .	38
4.2 Intégration dans l'ASM . . . . .	39
4.2.1 Echanges avec les filiales et identification de leurs facteurs de risques . . . . .	39
4.2.2 Tentative de modélisation de <i>spread</i> . . . . .	40
4.2.3 Projection des <i>RWA</i> . . . . .	42
4.2.4 Projection du <i>CET1</i> . . . . .	43

4.3	Modifications sur le problème d'optimisation . . . . .	44
4.3.1	Variables et contraintes du problème d'optimisation . . . . .	44
4.3.2	Mesure de risque . . . . .	44
4.3.3	Mesure de richesse . . . . .	45
4.3.4	Mesure de rentabilité . . . . .	45
4.4	Impact sur l'allocation . . . . .	46
4.5	Conclusion sur l'intégration des filiales financières régulées dans le modèle ASM . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Déclinaison à 1 an de l'algorithme d'optimisation</b>	<b>49</b>
5.1	Besoin métier d'une déclinaison à 1 an des investissements . . . . .	49
5.2	Les options envisageables . . . . .	50
5.2.1	Investissement linéaire : Ratio de 1/5ème des enveloppes à 5 ans . . . . .	50
5.2.2	Optimisation synchrone sur 1 an et sur les 4 années suivantes . . . . .	51
5.2.3	Optimisation dynamique en 2 temps : Optimisation à 1 an, puis optimisation sur les 4 années restantes . . . . .	51
5.3	Programmation dynamique de type Bellman sur les 5 ans de projection . . . . .	53
5.4	Définition des métriques comparatives des modèles . . . . .	56
5.4.1	Temps de calcul . . . . .	56
5.4.2	Facilité de convergence de l'algorithme . . . . .	56
5.4.3	Précision / Variabilité des résultats . . . . .	57
5.4.4	Facilité de paramétrage par la gouvernance par rapport à l'existant . . . . .	57
5.4.5	Interprétabilité et réponse au besoin métier . . . . .	57
5.5	Hypothèses de modélisation . . . . .	57
5.6	Résultats de la modélisation et réajustement du modèle synchrone . . . . .	59
5.6.1	Validation de l'implémentation technique . . . . .	59
5.6.2	Modèle de référence . . . . .	60
5.6.3	Modèle synchrone . . . . .	61
5.6.4	Modèle synchrone contraint . . . . .	65
5.6.5	Modèle Dynamique . . . . .	69
5.6.6	Synthèse et appréciation des différents modèles d'optimisation testés pour la déclinaison à 1 an des investissements . . . . .	72
5.7	Sensibilités . . . . .	73
5.7.1	Sensibilités sur l'appétence au risque à horizon 1 an comme aide à la décision . . . . .	73
5.7.2	Sensibilités sur l'appétence au risque à horizon 5 ans . . . . .	77
5.7.3	Sensibilités sur le générateur de scénarios économiques . . . . .	79
5.8	Axes d'amélioration . . . . .	81
5.8.1	<i>Backtesting</i> du modèle ASM . . . . .	81
5.8.2	Meilleure modélisation du <i>spread</i> pour affiner la modélisation des <i>RWA</i> . . . . .	82
5.8.3	Modélisation des dépôts juridiques . . . . .	82
5.8.4	Programmation dynamique - programmation stochastique . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>
	<b>Annexes</b>	<b>89</b>



## Introduction

Le Groupe Caisse des Dépôts est un grand pôle financier public ancré dans l'Histoire française. A l'intersection du domaine public et du secteur privé concurrentiel, le Groupe est entièrement dédié au service de l'intérêt général, avec comme unique objectif celui de faire grandir la France sur le long terme.

Chaque année, le Groupe établit lors d'un processus de programmation financière pluriannuelle ses enveloppes d'investissements à horizon 5 ans. Ces enveloppes sont le fruit d'une comparaison entre une allocation dite *bottom-up*, représentant les volontés d'investissement des filiales, et une allocation dite *top-down* basée sur l'optimisation financière du portefeuille. L'arbitrage entre ces deux allocations est finalement réalisé par le Directeur Général du Groupe.

L'allocation *top-down* résulte de l'optimisation du couple rendement-risque. A partir du bilan à date, une projection des grandeurs économiques et financières est réalisée au travers d'un générateur de scénarios économiques. Ces multiples projections permettent en premier lieu la diffusion du bilan du Groupe Caisse des Dépôts, puis l'établissement de différentes métriques afin d'appuyer à terme la sélection de l'allocation optimale. Parmi les métriques calculées, on retrouve notamment la rentabilité économique, ou encore "l'écart à la cible" qui est la différence entre une métrique de richesse (le capital économique) et une métrique de risque (les besoins en fonds propres), permettant de rendre compte de la solvabilité du Groupe conformément à ce qui est réalisé dans le modèle interne du Groupe Caisse des Dépôts.

L'allocation *top-down* cherche ainsi à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [\text{Rentabilité économique sur 5 ans } (\omega)] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible à 5 ans } (\omega) < 0) \leq \alpha \\ & \text{Augmentation de fonds propres fixée} \\ & \text{Enveloppes d'investissement bornées} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  représente le seuil d'appétence au risque et  $\omega$  les enveloppes d'investissements nets.

Ce problème, qui consiste à optimiser une fonction non linéaire sous une contrainte de solvabilité non linéaire également est peu traité dans la littérature. Ce type de problème est difficilement résoluble par des algorithmes déterministes en un temps acceptable. C'est pourquoi la Caisse des Dépôts et Consignations utilise une métaheuristique dite des "essaims particuliers". Cette dernière s'inspire du monde du vivant, notamment des animaux qui vivent et fonctionnent en essaims. Ces animaux possèdent en effet des capacités limitées individuellement, mais ils arrivent à résoudre des problèmes complexes grâce à leur organisation collective. Ce type d'algorithme a comme avantages de ne pas nécessiter d'hypothèses de régularité sur la contrainte et de retourner une solution dans un temps maîtrisé. Mais, en contrepartie, cet algorithme d'optimisation n'assure pas nécessairement de converger vers un optimum global.

L'année 2020 a été marquée par la création d'un grand pôle financier public. En tête de groupe, la Caisse des Dépôts et Consignations est devenue l'actionnaire majoritaire du Groupe La Poste, détenant La Banque Postale elle-même actionnaire majoritaire de CNP Assurances. De même, avec l'acquisition quasi-totale de la SFIL et compte tenu des participations déjà détenues dans Bpifrance Financement, les filiales financières régulées du Groupe Caisse des Dépôts ont revêtu une toute nouvelle ampleur dans sa stratégie de pilotage. De ce fait, une meilleure prise en compte de ces filiales est nécessaire, et ce dès l'exercice d'allocation *top-down*.



Ce mémoire propose donc dans un premier temps d'intégrer une modélisation plus fine des filiales financières régulées dans le processus d'allocation *top-down*.

Les enveloppes d'investissement en question sont optimisées à horizon 5 ans, en cohérence avec le principe de long terme qui régit le Groupe Caisse des Dépôts. Pour obtenir ces enveloppes optimisées, une hypothèse d'investissement linéaire de ces enveloppes est actuellement retenue sur la projection. Les investissements ne font donc pas l'objet d'une optimisation temporelle, et seuls leurs montants sont optimisés en fin de projection.

Or, les enveloppes d'investissements nets à horizon 5 ans font l'objet d'une revue annuelle. L'enveloppe d'investissement à horizon 1 an revêt donc une importance particulière compte tenu de cette réévaluation annuelle. Ainsi, dans le contexte économique actuel (crise du COVID, taux bas, plan de relance auquel le Groupe Caisse des Dépôts participe), la stratégie de retranscription des enveloppes à 5 ans en des enveloppes à 1 an par application d'un ratio de 1/5ème est une hypothèse qui mériterait d'être remise en question. Par exemple, dans un contexte de taux bas, il peut être dommage d'investir en taux fixe sur le début de la période de projection dans le cas où le générateur de scénarios économiques prévoirait une remontée des taux sur la période.

Ainsi, un besoin métier se fait de plus en plus ressentir quant à la déclinaison à 1 an des investissements en sortie de l'algorithme d'optimisation. Dans ce mémoire, on se propose donc dans un second temps de vérifier si l'ajout d'une allocation "tactique" au processus ASM est souhaitable, ou si l'hypothèse d'un investissement linéaire des enveloppes de production nouvelle reste suffisamment confortable.

# 1 Cadre du mémoire et environnement de la mission

## 1.1 Rôle de la Caisse des Dépôts et Consignations dans l'économie française

Quoi de mieux, pour présenter une institution financière, que de citer son dirigeant ?

Ainsi, pour présenter le Groupe Caisse des Dépôts, je citerai Mr. Éric LOMBARD son actuel directeur général : "La Caisse des Dépôts est au cœur de la vie des français, chacun d'entre nous a un rapport avec elle : celui qui alimente son livret A, cet autre qui achète un bien immobilier, ou encore le fonctionnaire qui cotise pour sa retraite. . . Ce rôle unique de gestionnaire de fonds a été confié en 1816 par la loi afin de restaurer la confiance des français, une confiance alors mise à mal par les guerres napoléoniennes financées en partie par l'épargne de tous. . . "

204 ans plus tard, le fonctionnement de la Caisse des Dépôts et Consignations (CDC) reste unique. La CDC n'a pas d'équivalent, car elle n'est ni une banque commerciale privée, ni un établissement public sous la tutelle de l'État. Indépendante, sans actionnaires, la CDC est une institution publique placée sous la surveillance et la protection la plus spéciale du Parlement.

Comme le souligne Mr. LOMBARD : "Tous les français sont concernés, car si la plupart d'entre eux ne savent pas que nous gérons, sécurisons, rémunérons une partie de leurs fonds, ils sont encore moins nombreux à savoir ce que nous en faisons ! Des prêts par exemple pour financer la construction de logements sociaux, d'écoles, la réhabilitation thermique de bâtiments publics. . . Des projets d'intérêt général qui nécessitent un temps long, pouvant durer jusqu'à 80 ans ! [ . . . ] Évoluer c'est aller plus loin et nous le faisons en conservant ce qui fait notre différence et notre raison d'être : la gestion de confiance pour le compte de tiers, le financement de long terme au service de l'intérêt général et donc dans l'intérêt de nous tous."

Au sein de l'Établissement public, 2 entités se distinguent : d'une part, le Fonds d'Épargne dont les ressources proviennent principalement de l'épargne réglementée centralisée (Livret A, Livret de Développement Durable et Solidaire, Livret d'Épargne Populaire), et qui transforme la majeure partie de cette épargne réglementée en prêts de long terme, finançant ainsi des programmes d'investissements prioritaires ; d'autre part, la Section Générale qui gère quant à elle les dépôts juridiques, consignations, comptes bancaires inactifs et contrats d'assurance vie en déshérence.

Cette distinction est effectuée afin de bien différencier les deux mandats incombant à chacune d'entre elle. Autrement dit, elle assure le fait que l'argent investi dans le livret A soit bien consacré au financement du logement social à travers le Fonds d'Épargne, et que l'argent provenant des dépôts juridiques serve effectivement à financer l'économie française et à préserver les intérêts stratégiques de la France. Le Fonds d'Épargne et la Section Générale ont donc des expositions structurellement très différentes.

En outre, la CDC est composée de 6 "métiers" <sup>1</sup> :

1. **La Banque des Territoires** : Elle conseille, finance et opère tous les projets auprès des collectivités locales, des organismes de logement social, des entreprises publiques locales et des professions juridiques pour des territoires plus durables, inclusifs, attractifs et connectés. Elle relève à la fois du périmètre du Fonds d'Épargne et de la Section Générale.

---

1. Équivalent à des *Business Units*

2. **Bpifrance**<sup>1</sup> : Accompagne les entreprises avec un continuum d'offres de financement (prêts, garanties, prises de participation, conseil et accompagnement) à toutes les étapes de leur développement, en France et à l'international. Ce métier ne relève que de la Section Générale.
3. **Retraites et solidarités** : Il s'agit du métier historique de gestionnaire de mandats publics. La Caisse des Dépôts et Consignations gère 70 mandats de protection sociale, notamment les retraites d'un Français sur cinq et l'application "Mon compte formation".
4. **Gestions d'actifs (GDA)** : Gère l'ensemble des placements financiers de la Caisse des Dépôts (obligations, actions, non coté, immobilier, forêts...). Ce métier est le 1<sup>er</sup> gérant d'actifs de statut public, ainsi que le 4<sup>ème</sup> investisseur institutionnel français. Dans toutes les classes d'actifs, GDA est un investisseur responsable, avec comme spécificité un investissement orienté long terme. On y retrouve la prépondérance d'une gestion directe, et des investissements majoritairement réalisés en France et en Europe. Ce métier relève du périmètre du Fonds d'Épargne et de la Section Générale.
5. **Gestion des participations stratégiques** : Elle accompagne dans la durée le développement de ses filiales dont les résultats financiers soutiennent les missions d'intérêt général de la CDC (Transdev, Egis, Icade, Compagnie des Alpes, RTE, CDC Habitat...). Ce métier relève de la Section Générale.
6. **La Poste**<sup>2</sup> : Ce début d'année 2020 marque la création d'un grand pôle financier public, rendu possible par la Loi PACTE [19], avec l'arrivée de la CDC en tant qu'actionnaire majoritaire du Groupe La Poste, détenant La Banque Postale, elle-même actionnaire majoritaire de CNP Assurances. Le Groupe Caisse des Dépôts devient ainsi un nouveau grand pôle financier public possédant un bilan consolidé de près de 1000 milliards d'euros et devient par la même occasion un des organismes de financement public les plus importants au monde.

## 1.2 Direction Financière de la Section Générale

La Direction des Finances du Groupe CDC (DFIN) est en charge du pilotage financier du Groupe dans l'ensemble de ses composantes comptables, financières, prudentielles, économiques et extra-financières. Elle assure la solidité financière ainsi que son pilotage financier et économique, et garantit les équilibres de bilan du Groupe CDC. Elle produit les résultats financiers sociaux et consolidés, pilote l'atterrissage et donne une vision prospective annuelle et pluriannuelle des investissements et des équilibres de bilan. Elle est en charge de la gestion du portefeuille d'actifs de la Section Générale dont elle assure le pilotage et la gouvernance.

DFIN est construite autour de 3 départements : le département de la gestion comptable et réglementaire (DFINC), le département de contrôle de gestion et planification à moyen terme (DFINP), et le département du pilotage de bilan et de la gestion financière (DFINB). L'organisation est complétée de deux services qui ont en charge respectivement les études et conjonctures économiques et financières, et la politique durable du Groupe.

Au sein du département DFINB, l'équipe Programmation financière et pilotage de la solvabilité a comme principales missions tout ce qui a trait à la Solvabilité du Groupe. Cela inclue le développement, le backtesting

1. Filiale de la Caisse des Dépôts et Consignations

2. Filiale de la Caisse des Dépôts et Consignations

et les évolutions du modèle prudentiel de mesure de la solvabilité du Groupe CDC (qui sert de référence au pilotage de la solvabilité), la production des métriques de type bâloises de solvabilité, le pilotage de la trajectoire de la solvabilité du Groupe, la coordination du dispositif d'évaluation de la solvabilité et le processus ICAAP, ou encore la contribution à la gestion de dossiers financiers spécifiques (M&A par exemple) sur les aspects solvabilité.

### 1.3 Principes du modèle prudentiel

La Section Générale possède 2 modèles de Solvabilité. L'un est un modèle Standard Bâle III utilisant les pondérations standards, l'autre est un modèle interne que l'on appelle modèle prudentiel.

Le modèle prudentiel de la CDC est soumis à une spécificité légale. En effet, l'article R 518-30-2 du Code Monétaire et Financier autorise explicitement la CDC à disposer de son propre modèle prudentiel, de par la particularité des risques qu'elle porte, en cohérence avec sa place particulière dans l'économie française. En effet, le Groupe CDC a un rôle contracyclique, assurant un rôle de financeur mobilisateur et soutenant une certaine dynamique au service des entreprises. En outre, son bilan est relativement différent du bilan des autres banques. L'utilisation du modèle prudentiel comme modèle de pilotage a été confirmée par la loi PACTE du 22 mai 2019, complétée par le décret 2020-94 du 5 février 2020 relatif au contrôle interne et externe de la CDC. Ce dernier a fait évoluer les modalités de gouvernance et de supervision du Groupe<sup>1</sup>.

La CDC se doit d'assurer une solidité financière particulièrement exigeante. Pour ce faire, elle utilise dans son modèle prudentiel une métrique de risque (Besoins en Fonds Propres ou Exigences en Fonds Propres) basée tantôt sur la *Value at Risk* à 99,99% à horizon 6 mois ou 1 an, tantôt sur des *stress models*, ou encore sur des méthodes se voulant plus standards. En parallèle de cette métrique de risque, elle utilise une mesure de richesse (le Capital Economique) correspondant schématiquement aux capitaux propres part du Groupe. Enfin, la différence entre le Capital Economique et les Besoins en Fonds Propres est appelé écart à la cible et correspond à la métrique de pilotage principale du modèle prudentiel. A noter qu'il existe des passerelles entre les différentes mesures évoquées à l'instant et les ratios appréciables dans le modèle Standard.

### 1.4 Allocation Stratégique Macro-économique

L'Allocation Stratégique Macro-économique (ASM) est un processus visant à optimiser par macro-classes d'actifs (Actions, *private equity*, taux, immobilier, infrastructures) les enveloppes d'investissements du Groupe CDC sur les 5 prochaines années à partir de différentes métriques financières (résultat, richesse, risque) selon une vision *top down*. Ce processus se base sur une approche simplificatrice du modèle prudentiel.

Le périmètre considéré dans l'ASM est récapitulé dans le bilan investisseur simplifié ci-dessous :

---

1. L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), qui était auparavant chargée d'émettre un avis quant au modèle prudentiel de la CDC et d'examiner le respect des dispositions bancaires et financières qui lui sont applicables sans pouvoir toutefois décider de sanctions à son égard, assure désormais une supervision "classique" de la CDC. Par la même occasion, la Commission de Surveillance devient l'organe délibérant, vis-à-vis notamment de la stratégie en matière de risques. Elle « fixe le besoin de fonds propres et de liquidité adaptés au risque, en se référant à un modèle prudentiel qu'elle détermine. Elle approuve des limites globales d'exposition au risque et en assure la surveillance. » (Article L.518.7 du Code monétaire et financier).

Actif	Passif
Actions	Fonds Propres
Private Equity	
Infrastructures	Dépôts
Immobilier	
Taux	Emissions

FIGURE 1 – Bilan investisseur simplifié considéré dans le cadre de l'ASM

L'ASM s'appuie sur un générateur de scénarios économiques. Pour chaque trajectoire et enveloppes d'investissements à horizon 5 ans données, une projection du bilan agrégé du Groupe y est effectuée, ainsi qu'un calcul de la richesse et du risque en fin de trajectoire. Enfin, on procède à la maximisation du couple rendement-risque à l'aide d'un algorithme d'optimisation non linéaire. Ces éléments seront exposés plus en détail dans les sections 2 et 3.

## 1.5 Programmation Financière Pluriannuelle

L'ASM s'inscrit dans un cadre plus global qu'on appelle la Programmation Financière Pluriannuelle (PFP). La PFP estime les investissements à réaliser sur les 5 prochaines années par le Groupe Caisse des Dépôts, ainsi que la projection de ses différentes métriques financières (résultat, solvabilité, liquidité).

Elle est le fruit d'une confrontation entre l'approche *top-down* (l'ASM), et le *bottom-up*. Ce dernier traduit les souhaits agrégés des différents métiers (voir section 1.1) et recense donc les projets d'investissements des 6 métiers pour les 5 prochaines années.

Cette confrontation permet alors au Directeur Général d'arbitrer sur une allocation à horizon 5 ans, qui sera alors déclinée par année. Des projections plus fines sont alors réalisées sur la base de cette allocation, selon 3 scénarios économiques déterminés par l'équipe des économistes du Groupe CDC.

Le processus de l'ASM (et plus globalement encore de la PFP) requiert donc la participation d'un nombre important d'intervenants de divers secteurs. Ainsi, bien que la modélisation y soit simplifiée par rapport au

modèle prudentiel, le paramétrage nécessite l'agrégation d'un nombre conséquent d'*inputs*.

Le processus de la PFP est annuel. Les échéances de l'année 2020 sont récapitulées dans le schéma ci-dessous :

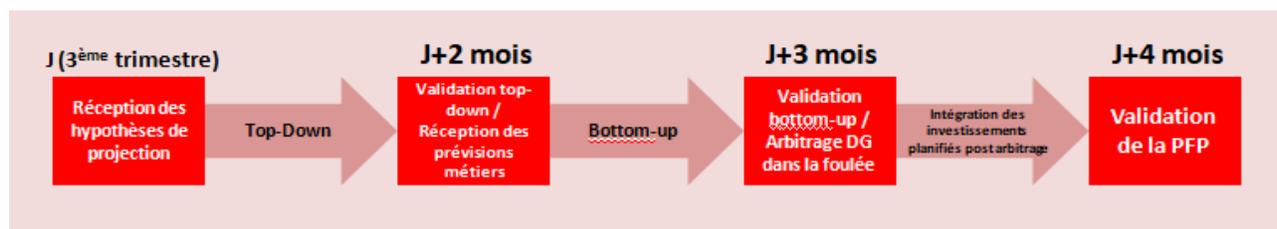


FIGURE 2 – Schéma et calendrier de la PFP

Le processus de la PFP tend chaque année à être de plus en plus serré. Cela nécessite d'implémenter des outils plus rapides et plus flexibles, notamment s'agissant de l'ASM.

## 2 Modélisation adoptée dans l'exercice d'allocation

Dans cette partie, la modélisation adoptée dans le cadre de l'ASM sera explicitée.

Pour rappel, l'objectif de l'exercice d'ASM est de déterminer des enveloppes d'investissements à horizon 5 ans. Une vision long-terme est donc adoptée dans la modélisation. Cette dernière correspond à une vision simplifiée du modèle prudentiel en termes de modélisation du bilan, compte tenu de l'objectif de l'exercice et des contraintes techniques qu'il présente. Les grandes lignes de la modélisation sont donc exposées ci-après.

### 2.1 Classes d'actifs

Les classes d'actifs considérées sont des classes d'actifs long terme, conformément à l'objectif de l'exercice ASM. Les classes d'actifs court terme telles que la trésorerie sont donc exclues du périmètre ASM. On distingue alors les classes d'actifs suivantes :

1. **Actions** : La classe action regroupe les portefeuilles d'actions cotées, ainsi que certaines participations cotées et non cotées. Elle est majoritairement composée d'investissements en actions françaises.
2. **Private Equity** : La classe *Private Equity* agrège les divers portefeuilles de capital investissement :
3. **Infrastructures** : Cette classe d'actifs représente les investissements réalisés dans des infrastructures et projets d'infrastructures.
4. **Immobilier Résidentiel** : L'immobilier résidentiel représente les investissements engagés dans de l'immobilier à usage d'habitation.
5. **Immobilier Tertiaire** : L'immobilier tertiaire regroupe quant à lui les investissements réalisés dans de l'immobilier non résidentiel, tel que des bureaux, des hôtels, etc.
6. **Taux Fixe** : Les obligations en taux fixe sont des obligations dont les flux ont été fixés lors de l'émission et sont donc connus à chaque instant.
7. **Taux Variable** : Les obligations à taux variable possèdent quant à elle des coupons indexés sur un taux de référence, à savoir l'EURIBOR 3 mois (auquel un *spread* est ajouté). Ce point sera détaillé dans la section 2.4.3.

Chaque classe d'actifs est associée à un indice (*inputs* fixés). On répertorie les différentes associations dans le tableau ci-dessous :

Portefeuille	Indice
<i>Private Equity</i>	LPXVENPI
Actions	CAC 40
Immobilier Résidentiel	IPD
Immobilier Tertiaire	IEIF
Infrastructures	50% SIETRA + 50% SX6E
Taux	<i>Swap</i> Euro

## 2.2 Classes de passifs

Le passif agrégé est représenté en 3 sous-catégories :

1. **Fonds Propres** : On considère dans cette classe les fonds propres initiaux qui viendront s'incrémenter des fonds propres durs, à savoir le résultat (diminué du versement à l'Etat<sup>1</sup>) et les deltas des fonds propres latents.
2. **Dépôts juridiques** : Cette classe de passifs est un cas spécifique à la Section Générale. Elle regroupe les dépôts des notaires, les AJMJ, les consignations, les comptes bancaires inactifs et contrats d'assurance vie en déshérence. Il est essentiel de considérer cette classe de passifs, car des variations d'encours sur ce périmètre influencent la façon dont sont gérés les actifs du Groupe.

La majorité de l'encours de cette classe de passifs provient des dépôts des notaires. Ces derniers sont schématiquement le fruit d'échanges de biens immobiliers entre un acheteur et un vendeur. La modélisation des dépôts est donc basée sur l'hypothèse simplificatrice que l'assiette des dépôts évolue d'une part avec les rendements de l'immobilier résidentiel (effet prix), et d'autre part avec le nombre de transactions (effet volume). On modélise alors l'encours des dépôts de la façon suivante :

$$D_{t+1} = D_t * (1 + R_{\text{résidentiel}}) * (1 + R_{\text{transactions}})$$

avec  $D_t$  le cours des dépôts à l'instant  $t$ ,  $R_{\text{résidentiel}}$  le rendement de l'immobilier résidentiel et  $R_{\text{transaction}}$  le rendement des transactions.

En outre, il est nécessaire de considérer la loi d'écoulement des dépôts, correspondant à une image de l'écoulement prévue de ces dépôts au fil des années. Cette loi d'écoulement est tirée du modèle prudentiel

3. **Emissions de long-terme** : Il s'agit de la variable d'ajustement du bilan dans le sens où elle permet d'équilibrer l'actif et le passif investisseurs long terme. Elle est donc égale à la différence entre l'agrégation des valeurs bilan des classes d'actifs et la somme des fonds propres et de l'encours des dépôts.

## 2.3 Générateur de scénarios économiques

Comme son nom l'indique, le générateur de scénarios économiques (GSE) sert à projeter des situations économiques sur un horizon de temps donné selon différentes hypothèses.

Dans le cadre de l'ASM, on appellera par abus de langage générateur de scénarios économiques le modèle visant à projeter le cours des indices liés aux différentes classes d'actifs, ainsi que l'encours des dépôts. Ces variables sont projetées sur 5 ans avec un pas de temps mensuel.

---

1. La Caisse des Dépôts et Consignations participe en effet au budget de l'Etat en lui versant une certaine somme qui pourrait s'apparenter à un dividende

Le générateur de scénarios économiques a déjà fait l'objet d'une étude approfondie ([16] Tchner, 2018). Nous rappellerons toutefois les grandes lignes de ce dernier dans cette section.

Le générateur de scénarios économiques utilisé dans le cadre de l'ASM s'appuie sur une profondeur d'historique de 20 ans, prise sur un pas de temps mensuel. On se retrouve donc au final avec des séries de 240 rendements par facteur de risque. Cela permet en premier lieu de disposer de suffisamment de données sur ces séries pour pouvoir satisfaire les estimations à réaliser lors des diverses études statistiques menées au cours de l'ASM, mais également d'avoir une profondeur d'historique assez large pour capter des chocs relativement sévères.

Le GSE fait également appel à une structure de dépendance par corrélation, pour plusieurs raisons dont celle principale que le bilan de la CDC ne dépend pas significativement de l'inflation. La modélisation des classes d'actifs adoptée dans le GSE se rapproche de la modélisation préconisée par Alghrim ([1] Ahlgrim et al., 2005), bien que ce dernier s'appuie sur l'inflation pour déterminer les taux d'intérêts et le rendement des actions, ce qui n'est pas le cas dans l'exercice ASM.

En outre, le GSE est construit selon une structure linéaire des scénarios plutôt qu'une structure par arbres, principalement pour des raisons de temps de calcul. En effet, au vu de l'horizon de projection (60 mois), le nombre de noeuds aurait augmenté de façon exponentielle, augmentant le temps de calcul et réduisant ainsi le nombre de scénarios pouvant être considérés. Or, l'importance du GSE étant déterminante dans la diffusion du bilan, un nombre conséquent de scénarios a préféré être envisagé, d'où le choix de la structure linéaire des scénarios.

Concrètement, 1000 scénarios économiques sont simulés à horizon 5 ans. Pour chacune des variables, on projette le cours de façon mensuelle en considérant le tirage aléatoire d'une marginale. Cette marginale appartient à l'une des 5 lois suivantes :

- Loi Gaussienne
- Loi *SkewNormale*
- Loi *NIG*
- Loi *NIG* à laquelle on rajoute une contrainte conservatrice sur la queue gauche de la distribution
- Loi Historique Gaussienne (Estimation non paramétrique basée sur la méthode des noyaux gaussiens)

Afin d'élire la marginale finalement retenue, on va tester, dans l'ordre des marginales ci-dessus évoquées :

- Si la  $CVaR_{90\%}$  de la loi testée est plus conservatrice que la  $CVaR_{90\%}$  empirique<sup>1</sup>
- Si les tests de Jarque-Bera et Kolmogorov-Smirnov sont concluants à 90% de confiance
- Si le *QQ-plot* valide le conservatisme de la loi testée sur la loi empirique<sup>2</sup>

Les trajectoires économiques sont centrées sur une trajectoire prédéfinie qu'on appelle scénario central, définie par l'équipe des économistes du Groupe Caisse des Dépôts. Il s'agit de l'un des 3 scénarios mentionnés dans la partie 1.5.

---

1. Dans le cas des betas, on teste également que la  $CVaR_{90\%}$  de la loi testée soit plus conservatrice que la  $CVaR_{90\%}$  empirique pour la distribution inversée

2. Sur la queue gauche de distribution pour les facteurs de risque autres que les betas, sur les deux queues en ce qui concerne les betas

La structure de dépendance par corrélation utilisée est la copule gaussienne<sup>1</sup>.  
A titre illustratif, on obtient la diffusion suivante pour l'indice IEIF :

### Trajectoires sur 5 ans pour l'IEIF

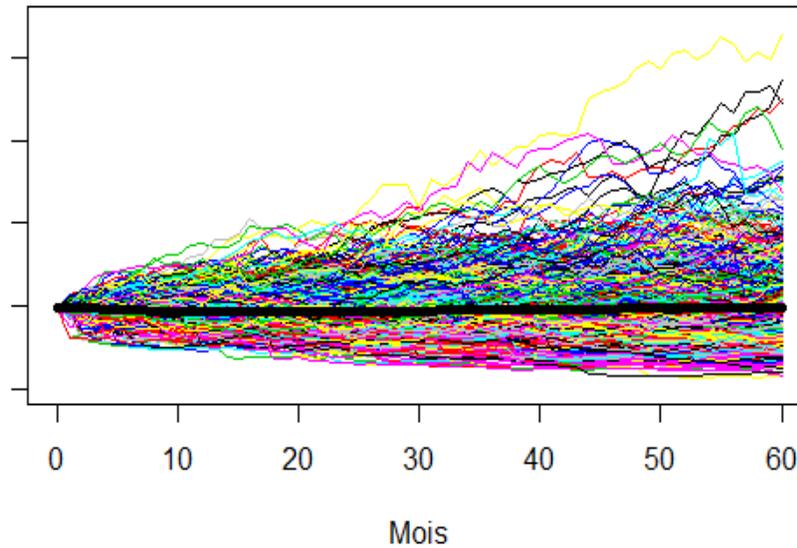


FIGURE 3 – Diffusion sur 5 ans de l'indice IEIF sur 1000 scénarios économiques et sur le scénario central (en noir)

## 2.4 Enveloppes et diffusion du bilan

### 2.4.1 Enveloppes d'investissements

Les enveloppes d'investissements à horizon 5 ans sont les variables du programme d'optimisation de l'ASM. Elles sont au nombre de 12 :

$$\omega = (\omega_{\text{Actions}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Private Equity}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Infrastructures}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Immobilier résidentiel}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Immobilier tertiaire}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Taux fixe}}, \omega_{\text{Taux variable}})$$

Ces 12 enveloppes d'investissements représentent la production nouvelle à investir sur les 5 prochaines années en valeur bilan : 2 enveloppes sont allouées à la poche taux en distinguant l'investissement en taux fixe et en taux variable, puis il y en a 2 pour chacune des 5 classes d'actifs hors taux, l'une concernant l'investissement à réaliser par la Section Générale uniquement (vision sociale), l'autre par la Section Générale et les filiales (vision consolidée).

1. Une étude est actuellement menée en parallèle pour actualiser cette hypothèse

Cette distinction entre vision sociale et vision consolidée est nécessaire afin de déterminer le montant de versement à l'Etat. Ce dernier est calculé par une fonction dépendant du résultat social et du résultat consolidé. Le résultat social relève des normes comptables *French*. Ainsi, il est égal (brut d'impôts) aux revenus des actifs sociaux, augmenté du dégagement de plus-value, auxquels on retranche les provisions, le coût du passif social et des frais généraux<sup>1</sup>. Le résultat consolidé, quant à lui, relève des normes comptables IFRS. De ce fait, une distinction est réalisée entre les actifs en Juste Valeur par Résultat ou JVR, et ceux en Juste Valeur par capitaux propres ou JVOCI. Il est égal (en brut) aux revenus des actifs, augmenté des deltas des plus ou moins values latentes des actifs en JVR, auxquels on retranche des frais généraux et le coût du passif du périmètre consolidé.

La répartition des poches en JVR ou JVOCI est récapitulée dans le tableau ci-dessous :

Poche	Affectation
Actions	JVOCI
Infrastructures	JVOCI
Immobilier Tertiaire	JVOCI
Immobilier Résidentiel	JVOCI
<i>Private equity</i>	JVR

Pour chacune de ces enveloppes, des contraintes d'enveloppe minimum et maximum sont fixées afin de déterminer l'espace de recherche des enveloppes admissibles. Ces contraintes sont fixées d'une part selon les souhaits d'investissement des filiales sur les 5 prochaines années, mais également sur des hypothèses telles que la profondeur de marché.

#### 2.4.2 Diffusion des classes d'actifs hors taux

Les classes d'actifs hors taux<sup>2</sup> suivent la même logique de diffusion sur les 5 ans. A l'initialisation, on considère pour chaque scénario économique  $s$  et pour chacune des classes d'actifs  $CA$  la valeur de marché initiale  $X_{CA,s}(0)$ . Ensuite, à chaque itération  $t$ , on fait varier la valeur de marché avec le log-rendement  $R_{CA,s}(t)$  simulé au travers du GSE. Cela revient à déterminer l'évolution de la valeur de marché au fil du temps dans chacun des scénarios. Parallèlement, on investit chaque mois 1/60ème de l'enveloppe d'investissement  $E$  allouée à la classe d'actifs considérée. Mathématiquement, cela revient à :

$$X_{CA,s}(t+1) = X_{CA,s}(t) * e^{R_{CA,s}(t)} + \frac{E}{60} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

Ainsi déterminée, la diffusion de ces poches d'actifs hors taux permet de déterminer le rendement en termes de revenus (hors rendement en capital donc) de la façon suivante :

$$\text{Revenus}_{CA,s}(t) = X_{CA,s}(t) * \text{Taux}_{CA} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

1. Il s'agit là encore d'une vision simplifiée, compte tenu des différents agrégats réalisés dans l'exercice d'ASM  
2. Actions, *Private Equity*, Infrastructures, Immobilier Résidentiel, Immobilier Tertiaire

où :

- $X_{CA,s}(t)$  est le stock à l'instant  $t$  défini ci-dessus
- $Taux_{CA}$  correspond à des dividendes ou des loyers selon la classe d'actifs considérée. Ce taux, mensuel, est supposé constant au cours de la projection et se base sur des prévisions estimées par l'équipe des économistes du groupe CDC.

### 2.4.3 Diffusion de la poche Taux

Qu'il s'agisse de la poche de taux fixe ou de la poche de taux variable, un échéancier est considéré. Le stock de la poche en question va donc s'écouler selon l'échéancier, et les tombées<sup>1</sup> qui en découlent sont réinvesties. Par ailleurs, la production nouvelle de la poche est incrémentée. On distingue donc, pour chacune de ces 2 poches de taux, 3 aspects distincts : le stock, le réinvestissement des tombées, et la production nouvelle.

Concernant le taux variable :

Tout d'abord, s'agissant du stock, le taux d'intérêt retenu est le taux EURIBOR 3 mois, qu'on augmente du *spread* historique du stock.

Pour le réinvestissement des tombées, le principal est séparé selon le poids de chaque maturité dans le stock. Enfin, la production nouvelle est investie sur une maturité courte à taux EURIBOR 3 mois augmenté d'un *spread*. Cela permet de contrer une éventuelle augmentation des dépôts, puisque l'influence des variations dans les dépôts par rapport au scénario central sera captée par la maturité "courte" (au regard de la Caisse des Dépôts).

A propos du taux fixe :

Le stock est rémunéré à un taux connu avant la projection.

La production nouvelle et le réinvestissement des tombées sont investis sur toutes les maturités de 1 à 20 ans selon le profil de maturité initiale. Autrement dit, les investissements sur la poche de taux fixe se font à des maturités dans les mêmes proportions que la répartition de ces maturités à l'initialisation. Des coupons annuels sont versés. Cette vision des choses est en accord avec le fait que la CDC est un investisseur de long terme qui poursuit sa stratégie d'investissement dans le temps.

Pour rappel, l'un des trois mots d'ordre du groupe CDC est "Long Terme". De ce fait, les obligations à taux fixe (qui correspondent à l'actif de couverture des dépôts, ces derniers étant rémunérés à taux fixe) sont généralement de long terme et conservées jusqu'à leur maturité, dans une stratégie dite HTM (Hold To Maturity). La Caisse des Dépôts achetant principalement des obligations de maturité longue, elle table donc sur les obligations à taux variable pour couvrir les hausses et baisses sur les dépôts de court terme. La stratégie de gestion actif-passif prise en compte dans l'ASM consistera alors à prendre en compte les hausses et les baisses de l'encours des dépôts par rapport au scénario central (mentionné en fin de paragraphe 2.3).

L'enveloppe de taux  $E_{\text{taux},s,t}$  est donc déterminée selon la formule ci-dessous :

$$E_{\text{taux}, s, t+1} = E_{\text{taux}, \text{scénario central}, t+1} + \alpha_{\text{taux}} * [D_{s,t+1} - D_{s,t} - (D_{\text{scénario central}, t+1} - D_{\text{scénario central}, t})]$$

---

1. Investissements des années précédentes arrivant à terme

où :

- $\text{taux} \in \{\text{taux fixe, taux variable}\}$
- $\alpha_{\text{taux}}$  est la proportion d'excédent de dépôts alloué à la poche de taux considérée. La proportion allouée au taux fixe est plus élevée que celle allouée au taux variable, conformément à la volonté de détention à long terme. Cette proportion est calibrée sur la proportion de dépôts s'écoulant après un an, sur la base de l'historique de la Caisse des Dépôts et Consignations.
- $D_{s,t}$  est le montant des dépôts à l'instant  $t$  dans le scénario  $s$ .

## 2.5 Générateur de scénarios financiers et mesure de risque

Afin d'estimer différentes variables utiles au calcul des besoins en fonds propres, un générateur de scénarios financiers a été implémenté pour projeter à horizon un an, au bout des 5 ans de projection, ces différentes variables.

La méthodologie est globalement similaire à celle utilisée dans le générateur de scénarios économiques en termes de projection statistique des variables, de nombre de scénarios, etc. Les différences majeures sont exposées ci-après :

1. La projection n'a lieu que sur un an, en accord avec une optique de calcul de besoins en fonds propres
2. Les variables initiales sont les projections à 5 ans du générateur de scénarios économiques.
3. Un raffinement est également effectué sur le taux. Là où le GSE projette les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$  d'un modèle Nelson Siegel à 2 facteurs de risque, le GSF projette les 4 Betas d'un modèle de Nelson Siegel Svensson à 4 facteurs de risque. Ces 4 betas sont initialement calibrés sur la courbe zéro-coupons moyenne donnée par le GSE à 5 ans.

Les Besoins en Fonds Propres (BFP) représentent le montant nécessaire pour couvrir les risques auxquels le portefeuille est exposé. Dans le modèle ASM, on calcule au bout des 5 ans de projection le BFP à horizon 1 an de la façon suivante pour chaque scénario économique  $s$  :

$$\begin{aligned} \text{BFP à 5 ans}_s &= m_{\text{échelle quantile}} * VaR_{99\%}[V_{\text{actions},s} + V_{\text{private equity},s} + V_{\text{infrastructures},s}] \\ &+ m_{\text{échelle quantile}} * VaR_{99\%}[V_{\text{flux taux fixe},s}] \\ &+ b_{\text{tertiaire}} * V_{\text{tertiaire},s} + b_{\text{résidentiel}} * V_{\text{résidentiel},s} + b_{\text{infrastructures}} * V_{\text{infrastructures},s} \\ &+ b_{\text{crédit taux fixe}} * V_{\text{crédit taux fixe},s} + b_{\text{crédit taux variable}} * V_{\text{crédit taux variable},s} \\ &- \text{Diversification}_{\frac{\text{Actions}}{\text{Taux}}} - \text{Diversification}_{\frac{\text{Actions}}{\text{Immo}}} \end{aligned}$$

où :

- $m_{\text{échelle quantile}}$  est un coefficient visant à passer d'une  $VaR$  99% à une  $VaR$  99.99% qui est le pourcentage de  $VaR$  retenu dans le modèle prudentiel pour le calcul des BFP. On détermine ce coefficient selon des rapports entre des quantiles à 99.99% et 99% d'une loi gaussienne<sup>1</sup>. Ce choix est expliqué opérationnellement par un souci de temps de calcul.
- $V_{\text{actions},s}$  (respectivement  $V_{\text{private equity},s}$  et  $V_{\text{infrastructures},s}$ ) est la valeur à un an de la poche actions (resp. PE, infra). Elle dépend du facteur de risque actions (resp. PE, infra)  $R_{\text{actions}}(\text{resp. PE, infra}),s$  qui correspond au rendement du prix de la poche actions (resp. PE, infra) dans le scénario financier  $s$  du générateur de scénarios financiers. Ainsi,  $V_{\text{actions}}(\text{resp. PE, infra}),s = S_{\text{actions}}(\text{resp. PE, infra}),s * (1 + R_{\text{actions}}(\text{resp. PE, infra}),s)$  où  $S_{\text{actions}}(\text{resp. PE, infra}),s$  est l'assiette en risque de la poche actions (resp. PE, infra) au bout des 5 ans de projection du GSE dans le scénario  $s$ .
- $V_{\text{flux taux fixe}} = \sum_m Flux_m * \frac{1}{1+ZC(m,\beta_{1,s},\beta_{2,s},\beta_{3,s},\beta_{4,s},\lambda)}$ . Il s'agit de la valeur actuelle des flux de taux fixe<sup>2</sup>. Les 4 betas, permettant de calculer les taux zéro-coupons de maturité  $m$  (en années) selon un modèle de Nelson Siegel Svensson à 4 facteurs  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $\beta_4$  à horizon 12 mois, sont les variables projetées dans le générateur de scénarios financiers.
- $b_{\text{résidentiel}}$  et  $b_{\text{tertiaire}}$  sont des pondérations forfaitaires figées dans le cadre de l'ASM. Elles sont déterminées dans un modèle spécifique d'évaluation du risque porté par les actifs immobilier locatif utilisés dans le cadre du modèle prudentiel CDC.
- $V_{\text{résidentiel},s}$  et  $V_{\text{tertiaire},s}$  sont respectivement les valorisations du portefeuille résidentiel et tertiaire dans le scénario financier  $s$ .
- $b_{\text{infrastructures}}$  est une pondération forfaitaire figée dans le cadre de l'ASM.
- $b_{\text{crédit taux fixe}}$  et  $b_{\text{crédit taux variable}}$  sont des pondérations forfaitaires figées dans le cadre de l'ASM pour prendre en compte le risque de crédit.
- $V_{\text{crédit taux fixe},s}$  et  $V_{\text{crédit taux variable},s}$  sont respectivement les valorisations du portefeuille de taux fixe et taux variable dans le scénario financier  $s$ .
- La diversification entre actions et immobilier tient compte d'un certain coefficient. La diversification entre actions et taux est calculée quant à elle comme la différence entre une  $VaR$  globale actions et taux et la somme de la  $VaR$  actions et de la  $VaR$  taux.

Il est nécessaire de préciser que les Besoins en Fonds Propres estimés au moyen de cette formule dépendent bien évidemment de l'enveloppes d'investissements  $\omega$  prévue sur la période de projection. Pour cette raison, la notation BFP à 5 ans $_s(\omega)$  sera désormais utilisée.

A propos du choix de la  $VaR$  comme mesure de risque pour le calcul des besoins en fonds propres : Il est bien connu que la  $VaR$  ne prend pas en compte la distribution de la perte, ce qui représente un inconvénient majeur de cette mesure de risque et qui fait qu'on lui préfère parfois les mesures de risque de type  $CVaR$  ou

1. Ce rapport vaut approximativement 1,6.

2. Y compris les dépôts et l'immobilier. En effet, l'immobilier peut s'apparenter à une obligation : l'achat d'un bien s'apparente à l'achat de l'obligation, les loyers versés peuvent être perçus comme des coupons, et la revente du bien correspond au remboursement de l'obligation

*Expected Shortfall.* Toutefois, l'utilisation d'une *VaR* comme mesure de risque dans l'ASM permet de garder une cohérence entre ce qui y est réalisé et ce qui est réalisé dans le modèle prudentiel (qui est pour rappel le modèle interne utilisé par le Groupe CDC pour conduire sa solvabilité, et dont l'utilisation est validée par la commission de surveillance et le Parlement). Le recours à ces mesures de risque dans le cadre de l'ASM s'éloignerait ainsi du traitement réalisé dans le modèle prudentiel au travers d'une *VaR* 99.99% qui est déjà très conservatrice. L'intégration de ces autres mesures seraient donc purement indicatives et n'ont donc pas été envisagées dans ce mémoire.

## 2.6 Métrique de richesse

Le Capital Economique (CE) est la métrique représentant la richesse du Groupe CDC. On souhaite déterminer dans le cadre de l'ASM le capital économique à 5 ans. Schématiquement, il est calculé pour chaque scénario économique  $s$  avec la formule suivante :

$$\text{CE à 5 ans}_s = FP_{\text{consolidés non latents initiaux}} + \sum_{i=1}^5 \text{Résultat consolidé net}_{i,s} + f[FP_{\text{consolidés latents},s}, BFP_s]$$

où  $f$  est une fonction qui pondère le latent par un coefficient dépendant de l'écart entre les Fonds Propres et les Besoins en Fonds Propres.

À l'image des Besoins en Fonds Propres, le Capital Economique dépend lui aussi de l'enveloppe d'investissements  $\omega$  prévue au cours de la projection. On utilisera donc la notation suivante par la suite :  $\text{CE à 5 ans}_s(\omega)$ .

## 2.7 Métrique de solvabilité

En accord avec le modèle prudentiel, la métrique de solvabilité se base dans l'ASM sur l'écart à la cible. Ce dernier est défini de la façon suivante :

$$\text{Ecart à la cible}_s(\omega) = \text{CE à 5 ans}_s(\omega) - \text{BFP à 5 ans}_s(\omega)$$

Concrètement, cette métrique informe sur la solvabilité du Groupe CDC à horizon 5 ans. Le but recherché est que l'écart à la cible soit positif. Cela induirait en effet que le capital économique (la métrique de richesse) est supérieur aux besoins en fonds propres (la métrique de risque), et constitue alors un bon indicateur de la solidité financière du Groupe.

## 2.8 Métrique de rentabilité

La métrique de rentabilité considérée dans l'ASM est le *Return on Equity*, i.e. la rentabilité économique. Il s'agit de la variable à maximiser dans le problème d'optimisation détaillé dans la partie 3. On définit dans le modèle ASM pour chaque scénario économique  $s$  la rentabilité économique annuelle moyenne sur les 5

années de projection de la façon suivante :

$$ROE_s = \frac{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\text{Résultat consolidé}_{i,s} + \Delta \text{Latent}_{i,s}) * (1 - \text{impôts}_i)}{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \text{FP consolidés}_{i,s}}$$

Le résultat consolidé est le même que celui explicité en section 2.4.1. Les deltas de latent correspondent quant à eux aux variations annuelles de valeur de marché des actifs en JVOCI.

De même que dans les sous-chapitres précédents, le  $ROE$  dépend de l'enveloppe d'investissements  $\omega$  considérée lors de la projection. On utilisera donc désormais la notation  $ROE_s(\omega)$ .

## 3 Optimisation du couple rendement-risque

### 3.1 Rappels généraux sur les problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation est défini par une fonction objectif  $f$ , associée à un espace de recherche  $\Omega$ . Le but est de trouver la solution  $\omega^* \in \Omega$  rendant  $f(\omega^*)$  optimale. Selon le problème auquel on fait face, on recherche soit le minimum soit le maximum de la fonction  $f$ .

S'il y a uniquement une fonction  $f$  qui nécessite d'être optimisée, le problème d'optimisation sera dit mono-objectif. Si plusieurs fonctions doivent être optimisées, on parlera alors de problème d'optimisation multi-objectif. Enfin, si la "topologie" de  $f$  change au fil du temps, le problème d'optimisation sera alors qualifié de dynamique.

En outre, l'espace de recherche  $\Omega$  n'est pas forcément constitué uniquement de solutions acceptables. En effet, le problème d'optimisation peut être adossé à des contraintes d'égalité ou d'inégalité rendant les solutions candidates  $\omega \in \Omega$  admissibles ou non.

### 3.2 Formulation du problème d'optimisation

Le problème rencontré dans l'ASM consiste à maximiser une métrique de rentabilité sous contrainte de solvabilité. On parle également d'optimisation du couple rendement-risque.

La métrique de rentabilité envisagée est la rentabilité économique (le *ROE*) telle que définie dans la partie 2.8. En ce qui s'agit de la contrainte de solvabilité, comme évoqué dans la partie 1 à propos des principes du modèle prudentiel, le Groupe CDC se base sur la métrique de pilotage qu'est l'écart à la cible (2.7), égal à la différence entre le capital économique (2.6) et le BFP (2.5).

Concrètement, le problème d'optimisation considéré dans l'ASM vise à maximiser l'espérance de rentabilité selon les scénarios économiques sur les 5 années de projection, sous 3 contraintes :

- Une contrainte de **solvabilité** : la probabilité d'être en situation d'écart à la cible négatif à horizon 5 ans se doit d'être inférieure à un certain seuil  $\alpha$ , qu'on appellera appétence au risque dans la suite du mémoire par abus de langage<sup>1</sup> et fixé par la gouvernance.
- Une contrainte **métier** : chacune des enveloppes d'investissements  $\omega_i$  se doit de respecter des bornes minimum et maximum, comme évoqué en fin de partie 2.4.1.
- Une contrainte **budgétaire** : la somme des enveloppes d'investissements doit être égale à un certain montant fixe, nommé augmentation de la taille de bilan.

Mathématiquement, cela revient à résoudre :

---

1. A ne pas confondre avec le dispositif d'Appétit Pour le Risque (APR)

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [ROE_s(\omega) \text{ sur 5 ans}] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega) \text{ à 5 ans} < 0) \leq \alpha \\ & C_{\min_i} \leq \omega_i \leq C_{\max_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, 12\} \\ & \sum_{i=1}^{12} \omega_i = \text{Augmentation de la taille de bilan} \end{aligned}$$

### 3.2.1 Un problème d'optimisation "difficile"

Plusieurs méthodes permettent de résoudre un problème d'optimisation. Chacune d'entre elle présente des avantages et des inconvénients.

Par exemple, si la fonction objectif présente des caractéristiques telles que la convexité, la continuité, ou bien la dérivabilité, il est possible d'utiliser des méthodes de résolution dites déterministes. On retrouve parmi celles-ci les méthodes de programmation linéaire, quadratique, la méthode du simplexe, la méthode de Newton, ou bien encore la méthode du gradient ([15] Nocedal et Wright, 2000).

Toutefois, les hypothèses requises quant à la fonction objectif ne sont pas toujours vérifiées, auquel cas le problème d'optimisation sera qualifié de "difficile".

Or, en ce qui concerne le problème d'optimisation rencontré par le Groupe CDC, plusieurs aspects le rendent "difficile" :

Tout d'abord, la combinaison entre la fonction objectif et la contrainte. En effet, la fonction objectif (rentabilité économique) est une fonction non linéaire en les enveloppes d'investissements, et la contrainte (probabilité d'écart à la cible négatif) est non linéaire également. Il s'agit alors d'un problème peu commun dans la littérature.

De plus, le nombre de scénarios envisagés est un point clé de la modélisation. On considère en effet 1000 scénarios économiques, qu'on multiplie par 1000 scénarios financiers pour calculer les besoins en fonds propres. Cela revient à considérer 1000 x 1000 scénarios, soit un million de scénarios pesant sur les ressources de calcul. Le temps de calcul représente donc un point critique dans le choix de la méthode d'optimisation retenue, surtout dans un contexte opérationnel tel que celui de l'ASM.

Enfin, l'espace de recherche est un point d'attention crucial. En effet, chaque variable équivaut à une dimension de l'espace de recherche, ce qui revient dans notre cas à considérer 12 dimensions. Bien que des contraintes d'enveloppes minimum et maximum soient fixées pour chacune des variables, l'espace de recherche reste dense, d'autant plus que les variables peuvent en quelque sorte être considérées comme continues<sup>1</sup> et peuvent atteindre une valeur de plusieurs milliards. Le nombre de solutions admissibles peut donc être perçu comme infini. Ainsi, il est nécessaire d'élire un algorithme possédant de bons attributs en termes d'exploration de l'espace de recherche.

1. Enveloppes d'investissements en euros, les variables peuvent donc aussi être discrétisées à la centime par exemple

### 3.3 Mise en place de l'optimisation

Étant donné le problème d'optimisation considéré dans le cadre de l'ASM, les méthodes déterministes ont tout de suite été écartées puisqu'elles n'auraient pas permis a priori de converger en un temps fini. Le choix final s'est alors vite porté sur des méthodes stochastiques appelées métaheuristiques.

L'intérêt des métaheuristiques réside dans le fait que leurs structures sont adaptables à un grand nombre de problèmes d'optimisation, et permettent de trouver une solution approchée en un temps "maîtrisé". Cependant, comme cela vient d'être évoqué, il ne s'agit que d'une solution approchée. Les métaheuristiques, en contrepartie d'un temps de calcul considérablement réduit, ne présentent aucune garantie de convergence vers la solution optimale.

Dans les faits, cette solution est préférée : il est plus important dans l'exercice ASM d'obtenir une approximation de la solution optimale<sup>1</sup> en un temps acceptable opérationnellement, plutôt qu'une valeur exacte obtenue dans un laps de temps trop long.

#### 3.3.1 Exemples de métaheuristiques non linéaires disponibles

##### Recuit Simulé

Il s'agit d'une méthode d'optimisation dont le principe fut initialement appliqué dans le domaine de la métallurgie. Le but recherché était de minimiser l'énergie d'un système en alternant les phases de réchauffement à température élevée et de refroidissement<sup>2</sup>.

Cet algorithme a été développé parallèlement par ([13] Kirkpatrick et al., 1983) et ([4] Cerny, 1985). Il repose sur l'algorithme de Metropolis ([14] Metropolis et al., 1953).

À l'initialisation, il est nécessaire de définir une solution admissible  $\omega$  (qui correspond dans le cadre de la métallurgie à un niveau d'énergie), et une température  $T$ .

À chaque itération, une nouvelle solution admissible est envisagée. Si la solution minimise la fonction objectif (i.e. si la nouvelle énergie est plus basse que l'ancienne meilleure solution), elle est acceptée. Sinon, elle est acceptée avec la probabilité  $e^{-\frac{f(\omega_i) - f(\omega_{min})}{T}}$ . Puis la température  $T$  décroît selon une loi spécifiée.

Ce schéma est répété jusqu'à convergence de l'algorithme.

L'architecture de cet algorithme le rend la plupart du temps facilement adaptable à tout type de problème. Toutefois, il présente 2 inconvénients majeurs, à savoir le nombre de paramètres à optimiser d'une part (valeurs des paramètres à initialiser, loi de décroissance, etc), et sa vitesse de convergence d'autre part qui peut vite devenir contraignante.

##### Colonies de fourmis

À l'image du problème d'optimisation dit "du voyageur de commerce" souhaitant réaliser le plus court trajet entre les différentes villes dans lesquelles il doit vendre ses marchandises, des éthologues ont remarqué

1. Puisque pour rappel l'allocation optimale dite *top-down* est confrontée a posteriori à une allocation *bottom-up* et est ainsi le fruit d'un arbitrage

2. Ce processus est appelé recuit

que les fourmis empruntaient souvent le plus court chemin pour se rendre à une source de nourriture, à l'image du schéma ci-dessous :

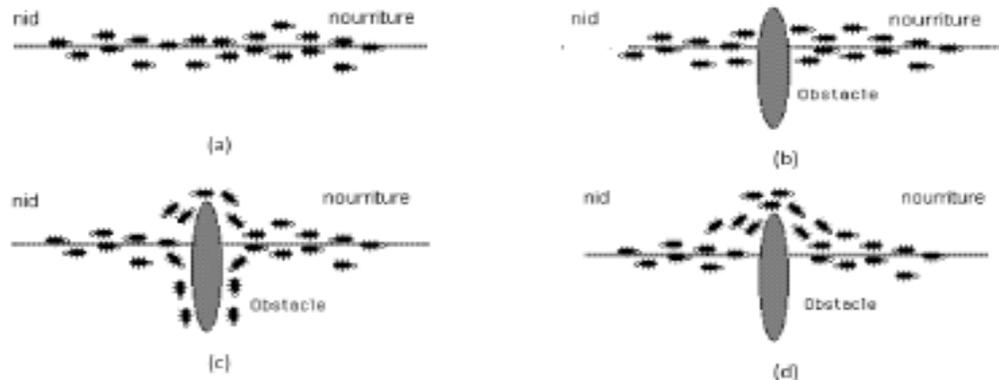


FIGURE 4 – Schéma de résolution d'un problème par une colonie de fourmis emprunté à ([6] Cooren, 2008) / (a) Etat initial / (b) Rencontre du problème / (c) Recherche du trajet optimal / (d) Prédominance du chemin optimal

Individuellement, la fourmi possède des fonctions cognitives réduites, mais peut collectivement résoudre des problèmes complexes grâce à l'utilisation des phéromones. En déposant des phéromones décrivant "l'avancée de leur travail", les fourmis créent un système portant le nom de stigmergie et transmettent par ce biais des informations à leurs semblables. De ce fait, dans le schéma ci-dessus, suite à l'introduction de l'obstacle les fourmis vont tester les 2 chemins admissibles. Le chemin le plus court sera plus vite jonché de phéromones de fourmis. La prédominance de ces phéromones attirera davantage de fourmis sur ce chemin au détriment du chemin le plus long, jusqu'à ce que le chemin optimal soit emprunté quasi-systématiquement.

Les algorithmes de colonies de fourmis (Colomi et al., [5] 1992, Dorigo et al., [7] 1996) sont ainsi construits selon 4 composantes :

- La mémoire des solutions déjà testées (correspond au chemin emprunté par la fourmi, sur lequel elle a déposé ses phéromones) ;
- La visibilité, qui permet de diriger les fourmis sur des chemins relativement proches pour éviter qu'elles empruntent de longs trajets en s'éloignant trop ;
- L'intensité de la piste, correspondant à la quantité de phéromones déposée sur le trajet ;
- L'évaporation des phéromones, afin que les fourmis évitent de se retrouver piégées dans des solutions sous-optimales.

Cette méthode de résolution est intéressante dans le cas du problème d'optimisation de l'ASM, dès lors qu'elle présente une possibilité de parallélisation évidente de l'algorithme colonie de fourmis, permettant ainsi de réduire le temps de calcul. Cependant, le nombre de "chemins" admissibles dans le cadre de l'ASM (au regard de l'espace de recherche) étant quasiment infini, l'algorithme colonies de fourmis ne semble a priori

pas être l'algorithme d'optimisation non linéaire le plus approprié pour notre problème.

## Algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires tirent leur origine de l'évolution biologique des espèces, et s'inspirent de la théorie darwiniste en termes de sélection naturelle. Parmi les différents algorithmes évolutionnaires disponibles, l'un d'entre eux est particulièrement utilisé dans le cadre de problèmes d'optimisation à variables discrètes : l'algorithme génétique ([11] Goldberg, 1989).

L'algorithme génétique emploie un vocabulaire précis, détaillé ci-dessous :

- Les individus : Ce sont les solutions envisagées du problème. Ils peuvent prendre comme valeur l'ensemble des solutions admissibles de l'espace de recherche.
- La population : Représente l'ensemble des individus.
- Une génération : Représente un cycle d'évolution, l'équivalent d'une itération de l'algorithme. Elle est composée de 3 phases :
  1. La sélection : Etape durant laquelle des individus de la population sont sélectionnés pour créer la future génération. Cela peut se faire par tirage aléatoire, ou selon la valeur qu'ils retournent après application de la fonction objectif, ou encore en utilisant une méthode élitiste sélectionnant les meilleurs individus, etc.
  2. Le croisement : A partir des individus parents sélectionnés dans l'étape précédente, des enfants sont créés en échangeant des parties de chromosomes<sup>1</sup> des parents.
  3. La mutation : Elle peut être de 2 types. L'une consiste à modifier aléatoirement certains chromosomes des parents, l'autre à carrément introduire de nouveaux individus dans la population afin de poursuivre l'exploration de l'espace de recherche.

Ainsi, à chaque itération, la population évolue et suit son exploration de l'espace de recherche. Il est alors possible de faire son choix de population nouvelle parmi les individus parents, les individus enfants, les individus créés si le 2ème type de mutation a été envisagé, ou encore les individus de la population initiale. Le choix de modélisation est donc vaste et varie selon le but du problème d'optimisation.

---

1. les chromosomes représentant dans notre cas les enveloppes d'investissement  $\omega_i$

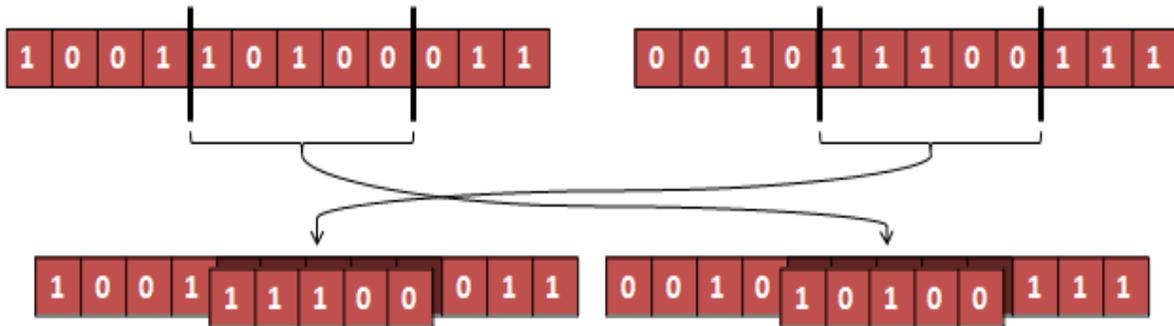


FIGURE 5 – Exemple d'opérateur de croisement

Un algorithme génétique avait été implémenté et testé dans le cadre de l'ASM ([16] Tchner, 2018). Toutefois, les résultats obtenus étaient moins robustes que ceux obtenus avec l'autre méthode d'optimisation envisagée (l'optimisation par essais particuliers) et cet algorithme n'avait donc pas été retenu.

### 3.3.2 Principes de l'optimisation par essais particuliers

Kennedy et Eberhart proposent en 1995 ([12] Kennedy et Eberhart, 1995) un algorithme basé sur le déplacement des animaux fonctionnant en essaims, à l'image des poissons ou des abeilles. Appelée Optimisation par Essais Particulaires (OEP), cette méthode permet de rassembler des intelligences individuelles limitées en une intelligence globale à travers les interactions locales que les individus de l'essaim (qu'on appellera désormais particules) ont avec leurs voisins proches.

Le déplacement des individus répond de 3 facteurs :

1. Un facteur physique, lié au principe d'inertie : La particule a tendance à suivre la direction dans laquelle elle allait à l'instant précédent.
2. Un facteur cognitif, qui correspond à la mémoire individuelle : La particule a tendance à retourner vers l'endroit où elle a croisé le plus de nourriture.
3. Un facteur social, caractérisant l'intelligence collective : L'individu se fie à ses voisins et se dirige vers l'endroit où le groupe a croisé le plus de nourriture.

La nourriture que recherche l'essaim correspond dans notre cas à la valeur de la fonction objectif au regard de la position de l'essaim. Graphiquement, le déplacement des particules peut être schématisé de la sorte :

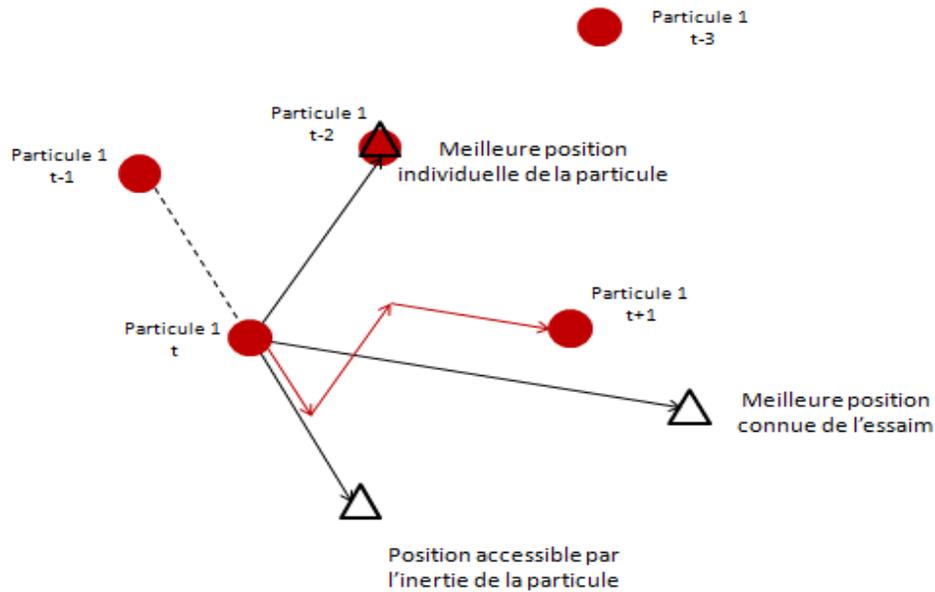


FIGURE 6 – Détermination du déplacement futur d'une particule

Mathématiquement, celui-ci se calcule ainsi :

$$v_{i,j}(t+1) = I * v_{i,j}(t) + \alpha * U[0,1] * (p_{i,j} - x_{i,j}(t)) + \beta * U[0,1] * (g_{i,j} - x_{i,j}(t))$$

où :

- $v_{i,j}(t)$  représente le vecteur de déplacement de la particule  $i$  à l'instant  $t$  dans la dimension  $j$  de l'espace de recherche
- $x_{i,j}(t)$  représente la position de la particule  $i$  à l'instant  $t$  dans la dimension  $j$
- $I$  est le coefficient d'inertie de la particule
- $p_{i,j}$  représente la position où la particule  $i$  a rencontré le maximum de la fonction objectif dans la dimension  $j$  (maximum particulier)
- $\alpha$  représente la force de rappel de la particule vers son maximum particulier
- $g_{i,j}$  représente la position du maximum global, i.e. le plus grand des maxima particuliers rencontrés par les particules (maximum global)
- $\beta$  représente la force de rappel de la particule vers le maximum global

—  $U[0,1]$  représente un tirage aléatoire uniforme entre 0 et 1.

La position de la particule à l'itération suivante se calcule donc ainsi :

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1)$$

Puis la fonction objectif est calculée pour chacune de ces nouvelles positions au regard de la contrainte. Si la valeur de la fonction objectif est plus grande que l'ancien maximum particulier de la particule, ce dernier est remplacé par la valeur de la nouvelle position. Le même raisonnement s'applique pour le maximum global.

D'autres composantes dans l'architecture des OEP peuvent déterminer leurs performances :

1. **Les restrictions de déplacement** : Au cours des multiples itérations de l'algorithme, il est possible que la formule de déplacement des particules les amènent à se déplacer en dehors de l'espace de recherche. La prise en compte de ces particules serait contre-productive, puisqu'elles pourraient amener l'algorithme à converger vers une solution non admissible. Plusieurs solutions existent pour remédier à cet effet. L'une consiste à ne pas calculer la fonction objectif si la particule se retrouve en dehors de l'espace de recherche. Toutefois, si les particules ne sont pas amenées à revenir vers l'espace de recherche, il est probable qu'à terme une majorité des particules finissent leur course en dehors de celui-ci. On peut alors envisager de forcer les particules à rester dans l'espace de recherche. 2 solutions existent alors, à savoir faire rebondir ou faire s'écraser les particules sur les bornes.
2. **Le "graphe d'influence"** : Il s'agit du niveau de connexion des particules entre elles. Elles peuvent partager leurs informations (maxima particuliers rencontrés) à l'ensemble des autres particules afin de déterminer un maximum global parmi toutes les particules, ou bien les partager à seulement quelques particules voisines afin de créer plusieurs maximum globaux "locaux". Ce facteur jouera principalement sur le temps de calcul et sur l'exploration de l'espace de recherche. Là où la première méthode convergera plus vite en explorant moins l'espace de recherche donc en se précipitant probablement plus facilement vers un optimum local, la deuxième offrira possiblement de meilleurs résultats en explorant mieux l'espace de recherche, contre un temps de calcul accru.

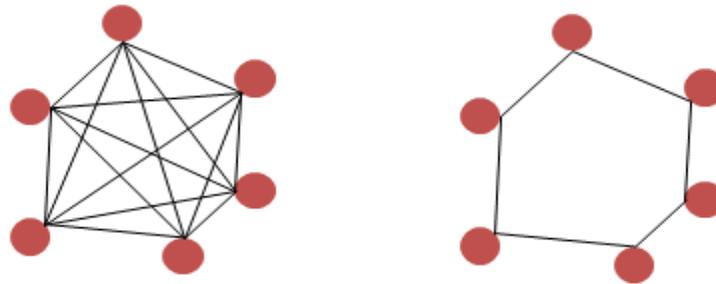


FIGURE 7 – Relations envisageables entre 6 particules : Partage global ou local des informations

### 3.3.3 L'OEP utilisée par la Caisse des Dépôts et Consignations dans le cadre de l'ASM

Pour rappel des paragraphes précédents, le choix retenu d'implémenter une OEP dans le cadre de l'ASM a été motivé par les contraintes d'espace de recherche important et de temps de calcul le plus faible possible dans un contexte opérationnel. La problématique du temps de calcul a ainsi défavorisé la possibilité d'implémenter des algorithmes de recuit simulé, et l'algorithme de colonies de fourmis a été invalidé par le nombre de solutions admissibles probablement trop important. Enfin, les résultats obtenus avec l'algorithme génétique étaient moins probants que pour l'OEP, d'où ce choix final.

Dans l'algorithme actuellement utilisé, les paramètres suivants ont été fixés :

- Nombre de particules : 100
- $I = 1/\sqrt{t}$
- $\alpha = 0.5$
- $\beta = 1$ , afin que les particules aient une force de rappel vers le maximum global plus forte que la force de rappel vers leurs maxima particuliers respectifs

Le graphe d'influence considéré consiste en un partage global des informations, où le maximum global est commun à toutes les particules et connu de toutes d'entre elles. Cela est justifié par la volonté de converger assez rapidement pour se permettre de relancer plusieurs fois l'algorithme afin d'obtenir différentes simulations et effectuer des tests de variabilité (voir partie 3.3.5).

De même, il a été choisi une méthode de déplacement par écrasement sur les bornes de l'espace de recherche. Ainsi, les particules se déplacent uniquement dans l'espace de recherche et vérifient donc systématiquement les contraintes métiers (contraintes d'enveloppes évoquées en début de chapitre). Dans le cadre de l'ASM, il est également important de se concentrer sur le respect de la contrainte budgétaire, imposant que la somme des allocations proposées soit égale à un montant  $\Omega$  fixé en *input*. Si la nouvelle allocation proposée ne satisfait pas la contrainte budgétaire, l'allocation est alors proportionnée de façon à respecter cette dernière.

Il est également nécessaire d'envisager des critères d'arrêt. L'un, classique, consiste à fixer un nombre d'itérations maximum afin que l'algorithme s'arrête en cas de non convergence "rapide", ainsi que pour favoriser la comparaison entre différentes simulations le cas échéant. De même, un critère d'arrêt est défini sur la vitesse moyenne des particules. Si cette dernière est inférieure à un certain seuil, alors on considère que l'algorithme a convergé et on le stoppe.

### 3.3.4 Parallélisation de l'algorithme

L'un des avantages de l'algorithme par essais particuliers est qu'il est facilement parallélisable.

Sans contre-ordre, les calculs effectués lors de la programmation sur ordinateur ont généralement lieu grâce à ce qu'on appelle le calcul séquentiel. Cela consiste en l'exécution d'un traitement étape par étape. Chaque opération se déclenche une fois que l'opération précédente est terminée, même si deux opérations sont indépendantes :

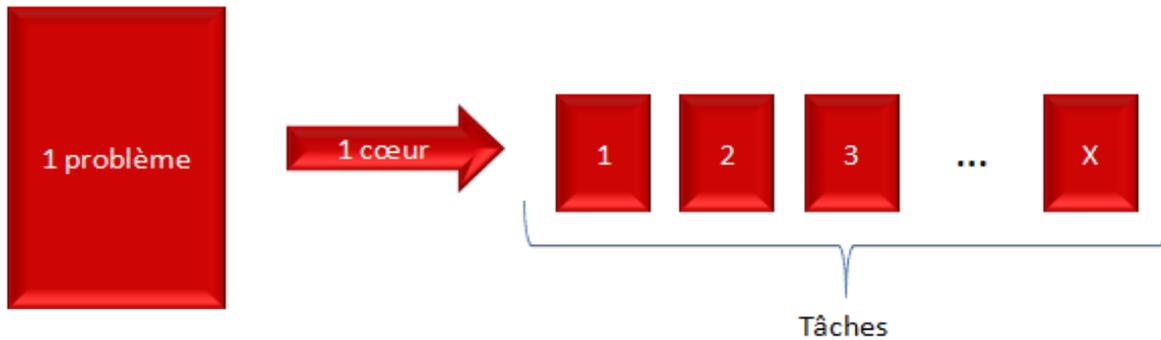


FIGURE 8 – Architecture du calcul séquentiel

L'évolution technologique a permis aux machines de calcul telles que nos ordinateurs de posséder plusieurs processeurs. Il a alors été possible d'envisager des méthodes alternatives au calcul séquentiel, comme par exemple les architectures parallèles.

La parallélisation consiste à mettre en oeuvre des architectures d'électronique numérique afin de traiter des informations de manière simultanée, permettant ainsi de réaliser un nombre d'opérations plus important pour une même période de temps, ou de diminuer le temps de calcul nécessaire au traitement d'une même opération en calcul séquentiel :

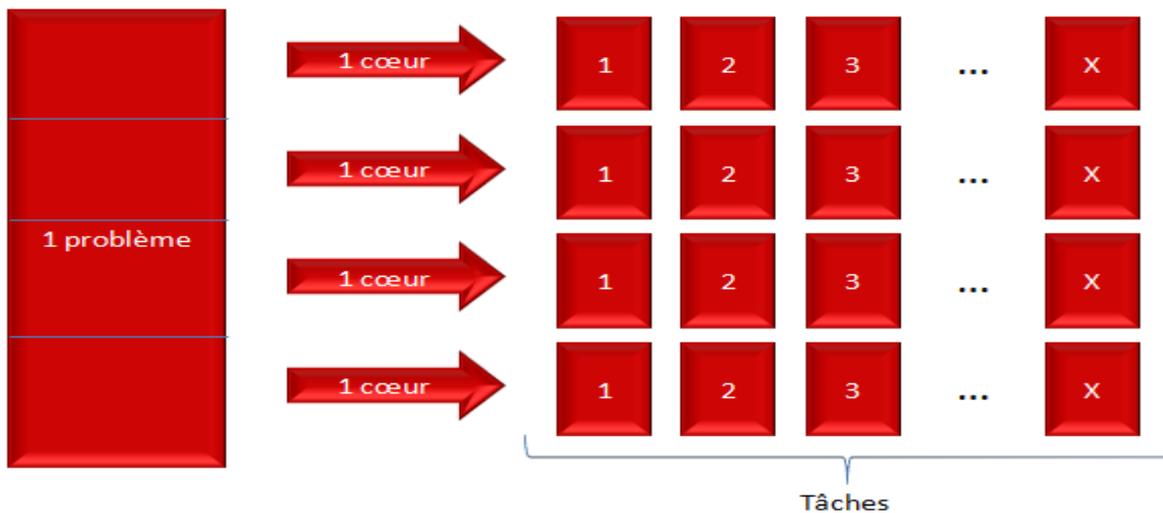


FIGURE 9 – Architecture du calcul parallèle

Pour que les différents éléments puissent être exécutés en parallèle, il est nécessaire qu'ils soient indépendants, que l'on puisse détecter cette indépendance, et qu'il existe suffisamment de ressources informatiques pour réaliser le calcul parallèle.

Ces informations étant vérifiées dans le cas de l'ASM, un calcul parallèle a donc été implémenté. A titre informatif, l'algorithme d'optimisation tournait environ 1h avant parallélisation. Après parallélisation, le temps

de calcul est d'une douzaine de minutes environ, soit un temps de calcul divisé par 5.

### 3.3.5 Variabilité des résultats

Comme évoqué dans le sous-chapitre traitant des algorithmes d'optimisation par essais particuliers, un inconvénient majeur de ces derniers réside dans le fait qu'il n'est pas garanti de converger vers un optimum global.

En effet, selon la paramétrisation du déplacement des particules au cours des différentes itérations de l'algorithme, ce dernier est dirigé plus ou moins rapidement vers un optimum, qu'il soit local ou global. La variabilité en sortie du modèle est donc relativement dépendante de la paramétrisation de l'algorithme.

A titre d'exemple, voici la variabilité observée sur 60 simulations de l'ASM l'année dernière, où le point bleu représente la 1ère simulation qui était de fait l'allocation finalement retenue :

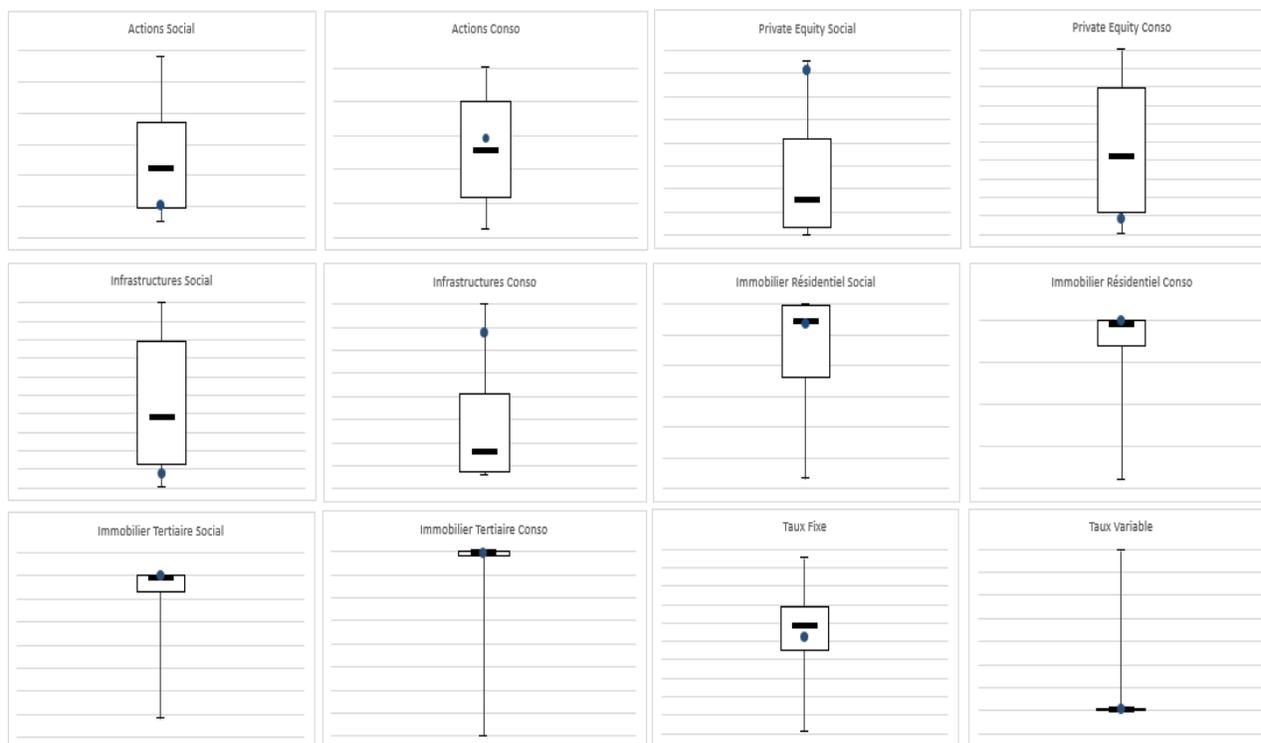


FIGURE 10 – Variabilité sur 60 allocations en sortie du modèle

La variabilité des solutions possibles après optimisation pour un niveau de ROE similaire est donc relativement importante.

Une solution a donc été proposée pour maîtriser la variabilité de l'algorithme. A titre informatif, la parallélisation du code évoquée dans le sous-chapitre précédent permet désormais de faire tourner une soixantaine de simulations en une nuit. Il est donc possible de générer plusieurs simulations de l'algorithme d'optimisation

afin d'obtenir un spectre plus large de différentes allocations optimales éligibles à ce problème d'optimisation.

Il avait été envisagé de choisir l'allocation maximisant des métriques ciblées telles que le ROE ou l'écart à la cible à horizon 5 ans. Toutefois, cette règle n'est pas satisfaisante dans le sens où elle ne tient pas compte des enveloppes d'investissements et peut de ce fait retourner des allocations « extrêmes » sur certaines poches, notamment sur la poche actions.

Il a donc été décidé de considérer une alternative tenant compte des enveloppes d'investissements. L'idée est de retenir une allocation possédant des enveloppes « médianes » par rapport à différentes simulations de l'algorithme d'optimisation.

On génère plusieurs simulations de l'algorithme d'optimisation, de l'ordre d'une soixantaine par exemple. Pour chaque allocation considérée, on calcule le critère de *scoring* suivant :

$$\text{Critère} = \sqrt{\frac{1}{12} * \sum_{i=1}^{12} \left( \frac{(\omega_i - \hat{\omega}_i)^2}{\text{borne sup}_i - \text{borne inf}_i} \right)^2}$$

où :

1.  $\omega_i$  représente l'enveloppe allouée à la classe d'actifs  $i$  dans la simulation considérée
2.  $\hat{\omega}_i$  est la moyenne sur toutes les simulations de l'enveloppe allouée à la classe d'actifs  $i$
3. borne sup $_i$  et borne inf $_i$  sont respectivement les contraintes d'enveloppes supérieures et inférieures de la classe d'actifs  $i$

Ce critère, s'inspirant du *RMSE*<sup>1</sup>, doit être minimisé. Cela permet un double effet : d'une part, discriminer les allocations s'éloignant trop significativement de leur moyenne (effet quadratique) comme sur la poche actions par exemple ; d'autre part, il a été décidé de rajouter une dimension liée aux contraintes d'enveloppes pour contenir les chances d'obtenir des allocations "extrêmes" sur les classes d'actifs où les contraintes d'enveloppes seraient plus resserrées. Enfin, le ratio est passé au carré à l'intérieur de la racine afin d'assurer une homogénéité par rapport au *RMSE* quant à l'unité de calcul.

Avec cette méthodologie, en se basant sur l'ASM réalisée en 2019, l'allocation minimisant ce critère aurait été la suivante :

---

1. *Root Mean Square Error* =  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_i - \hat{\omega}_i)^2}$



FIGURE 11 – Allocation retenue selon différents critères préfixés parmi 60 allocations

Le point bleu correspond à l'allocation retenue en 2019, le point jaune correspond au critère consistant à maximiser le ROE, et le point marron correspond au critère de *scoring* susmentionné.

Ainsi, cette nouvelle méthodologie permettrait de retenir une allocation globalement "médiane". En effet, cette allocation est présente 10 fois sur 12 entre le 1er et le 3ème quartile des 60 allocations générées lors de cette étude, contre 8 fois sur 12 pour l'ASM de l'année dernière.

## 4 Intégration des filiales financières régulées

Une filiale financière régulée au sens du Groupe Caisse des Dépôts est, comme son nom l'indique, une filiale bancaire ou assurantielle soumise à la réglementation Bâloise, ou la réglementation dite "Solvabilité II".

Suite aux opérations visant à intégrer davantage La Poste et SFIL dans le portefeuille CDC, les filiales financières régulées ont revêtu une nouvelle importance dans la stratégie de pilotage du Groupe.

Avant l'intégration de La Poste et de SFIL, les filiales financières régulées considérées par le Groupe Caisse des Dépôts englobaient les participations au sein de CNP Assurances et de Bpifrance Financement. Compte tenu de leur poids dans le portefeuille, elles étaient jusque-là modélisées dans l'ASM en tant que simples participations et venaient de ce fait participer à la poche actions. Ainsi, la modélisation sur ces filiales répondait au même principe que les autres filiales et ne tenait pas compte de leur particularité.

Aujourd'hui, suite à l'entrée en portefeuille de SFIL et surtout de la Banque Postale, filiale de La Poste et nouvel actionnaire majoritaire de CNP Assurances, le poids que représentent ces filiales financières régulées dans le portefeuille du Groupe CDC a augmenté significativement. Le Groupe CDC considère ainsi 3 filiales financières régulées : La Banque Postale, SFIL, et Bpifrance Financement. Il a donc été décidé de revoir leur modélisation dans l'ASM en s'inspirant du traitement de ces filiales dans le modèle prudentiel, et de créer une variable qui leur est dédiée au sein du programme d'optimisation.

### 4.1 Cadre réglementaire

Les 3 filiales financières régulées actuellement considérées dans le Groupe Caisse des Dépôts relèvent toutes de la réglementation Bâloise [17], qui sera donc la seule à être évoquée dans ce sous-chapitre.

La réglementation dite "Bâloise" existe depuis 1974. Elle fût créée par le Comité de Bâle<sup>1</sup>, une instance internationale chargée de concevoir des règles bancaires internationales. Les règles édictées par ce Comité forment les "accords de Bâle" et visent à assurer la stabilité du système bancaire mondial, de garantir un contrôle efficace des banques et de promouvoir une coopération entre les superviseurs bancaires. Le comité de Bâle est composé des gouverneurs des banques centrales ainsi que des représentants des autorités de supervision bancaire des 27 pays membres<sup>2</sup>.

Malgré le fait qu'il établisse des normes, des standards techniques et des recommandations de supervision et de régulation du secteur bancaire au niveau mondial, le Comité de Bâle ne possède aucun pouvoir d'autorité supranationale. De ce fait, les documents qu'il publie ne sont pas juridiquement contraignants. Toutefois, ses membres sont moralement tenus de s'appliquer à les respecter.

Afin d'assurer le financement de l'économie tout en maîtrisant les risques de faillite bancaire, les accords de Bâle I ont introduit le principe prudentiel intitulé "ratio de solvabilité". Celui-ci prend la forme suivante :

1. Hébergé aujourd'hui par la Banque des Règlements Internationaux à Bâle, qui peut être considérée comme "la Banque des banques centrales", bien qu'elle n'ait pas de pouvoir hiérarchique sur ces dernières.

2. 28 en comptant l'Union Européenne

$$\text{Ratio de solvabilité} = \frac{\text{Fonds Propres pruden tiels}}{\text{Actifs pondérés par les risques (RWA}^1)} > \text{Seuils fixés par le régulateur}$$

Les accords de Bâle II reprennent ce principe en promouvant une approche par les risques au dénominateur du ratio. A la suite de ces accords, certaines insuffisances sont alors identifiées. Parmi ces dernières, les fonds propres des banques sembleraient insuffisants à la fois en quantité et en qualité.

Afin de répondre à cette insuffisance, les accords de Bâle III, qui ont été transposés officiellement dans l'Union Européenne grâce à la directive européenne *CRD IV*<sup>2</sup>, proposent des exigences plus strictes en termes de qualité et de quantité du capital, ainsi qu'en termes d'inclusion dans les fonds propres réglementaires. Autrement dit, Bâle III opère une réforme du numérateur du ratio de solvabilité, en accordant une définition plus restrictive des fonds propres, et plus particulièrement en ce qui concerne les fonds propres "durs". En résultent 3 niveaux de ratios réglementaires ; le premier, appelé ratio *CET1*<sup>3</sup>, est basé sur les fonds propres de base de catégorie 1 (les fonds propres "durs") et doit dépasser un certain seuil<sup>4</sup>.

## 4.2 Intégration dans l'ASM

En cohérence avec le cadre réglementaire, les filiales financières régulées sont intégrées dans le modèle prudentiel par leurs agrégats réglementaires, autrement dit par leurs montants de *RWA*, de fonds propres "durs" (ou fonds propres *CET1*), et les limites *Risk Appetite Framework (RAF)* déterminées par les filiales. Il a donc été décidé d'intégrer ces éléments dans l'ASM en se basant sur le même principe.

### 4.2.1 Echanges avec les filiales et identification de leurs facteurs de risques

Afin d'intégrer les *RWA* et les *CET1* des différentes filiales financières régulées dans l'ASM, la première étape consistait à contacter séparément les 3 filiales financières régulées précitées afin d'identifier pour chacune d'entre elles les facteurs de risque significatifs pouvant influencer sur leurs niveaux de *RWA* ou de *CET1*.

Les éléments abordés ont été les suivants :

- Leurs *CET1* et *RWA* évoluent-ils en fonction des facteurs de risque présents dans l'ASM ?<sup>5</sup>
- Quels facteurs de risque influent sur leurs fonds propres *CET1* / sur leurs *RWA* ?

En guise de réponse, les informations suivantes ont pu être déterminées :

- L'évolution des *RWA* et *CET1* des différentes filiales est globalement indépendante de l'évolution des facteurs de marché présents dans l'ASM (donc de ce fait indépendants des scénarios économiques modélisés), mis à part une sensibilité des OCI de CNP Assurances sur le taux et les actions.

---

1. *Risk Weighted Assets*

2. De son nom complet *Capital Requirement Directive IV*

3. *Common Equity Tier 1*

4. Bâle III exige que ce seuil soit de 4.5% au minimum [18]

5. Voir section 2.1

- Des sensibilités peuvent être observées sur le *CET1* ou sur les *RWA* en considérant certains *spreads* spécifiques.

Malgré le caractère "macro" adopté dans la modélisation de l'exercice ASM, une tentative de modélisation de l'évolution des *spreads* mis en avant lors des discussions avec les filiales a été effectuée afin d'essayer de faire évoluer les *RWA* et *CET1* des filiales financières régulées dans les scénarios économiques, autrement qu'au travers des sensibilités de l'OCI de CNP Assurances.

#### 4.2.2 Tentative de modélisation de *spread*

2 études ont été menées afin d'essayer d'intégrer une modélisation du *spread* à l'ASM. L'une se base sur une modélisation par régression linéaire, l'autre par *Machine Learning*. Dans ces 2 études, l'objectif était de trouver une relation entre un *spread* testé et les facteurs de marché présents dans l'ASM, ou des facteurs qui leur étaient liés (comme la volatilité par exemple). De cette façon, 5 *spreads* souverains et *spreads corporate* ont été étudiés.

##### 1. Modélisation par régression linéaire

Des régressions linéaires ont été menées pour chacune des variables à expliquer (les différents *spreads*) en fonction des variables explicatives (les facteurs de risque du modèle ASM ainsi que des variables qui leurs sont liées).

Les 5 régressions réalisées possèdent des R2 ajustés compris entre 0.25 et 0.75. Toutefois, les hypothèses nécessaires pour réaliser une régression linéaire ne sont pas forcément toutes vérifiées, comme le récapitule le tableau ci-dessous<sup>1</sup> :

	Résidus						
	R <sup>2</sup> ajusté	Indépendance		Homogénéité	Normalité		Linéarité
		Graphique	Test statistique	Graphique	Graphique	Test statistique	Graphique
Spread 1	0,25	Non	Non	Non	Non	Non	Oui
Spread 2	0,34	Non	Non	Non	Non	Non	Oui
Spread 3	0,67	Non	Non	Non	Non	Non	Non
Spread 4	0,75	Non	Non	Non	Oui	Oui	Non
Spread 5	0,62	Non	Non	Oui	Non	Non	Non

FIGURE 12 – Tableau récapitulatif de l'application de régressions linéaires sur les 5 *spreads* testés

Les tests statistiques utilisés pour vérifier la validité ou non des différentes hypothèses susmentionnées sont les suivants :

- **Indépendance : Test de Durbin Watson** dont l'hypothèse nulle est la non-autocorrélation des résidus de la régression au 1er retard.

1. Différents graphiques sont disponibles en annexes

— Normalité :

- (a) **Test de Shapiro** dont l'hypothèse nulle est la normalité de la série de données testées. Ce test fait toutefois l'objet de différentes critiques à propos de sa robustesse. Le test suivant a donc été utilisé afin de confirmer ou d'invalider les résultats du test de Shapiro.
- (b) **Test de Jarque-Bera** dont l'hypothèse nulle est que la série de données est distribuée selon une loi normale.

Compte tenu des résultats médiocres et de la non-vérification des hypothèses, la piste d'une modélisation par régression linéaire a donc été abandonnée.

2. Modélisation par *Machine Learning*

La régression linéaire nécessitant une hypothèse de multicollinéarité parfaite, certaines combinaisons de variables ne sont pas déterminables dans les régressions linéaires, comme par exemple une combinaison "Taux *swaps* - Pente des taux *swaps*". Cette multicollinéarité parfaite n'est cependant pas requise dans certaines applications de *Machine Learning* telles que les modélisations par arbres de régression.

Une étude complémentaire a donc été menée en tentant cette fois-ci de modéliser l'évolution des *spreads* par arbres de régression.

Malheureusement, les arbres optimaux possèdent soit une granularité trop forte pour l'exercice ASM :

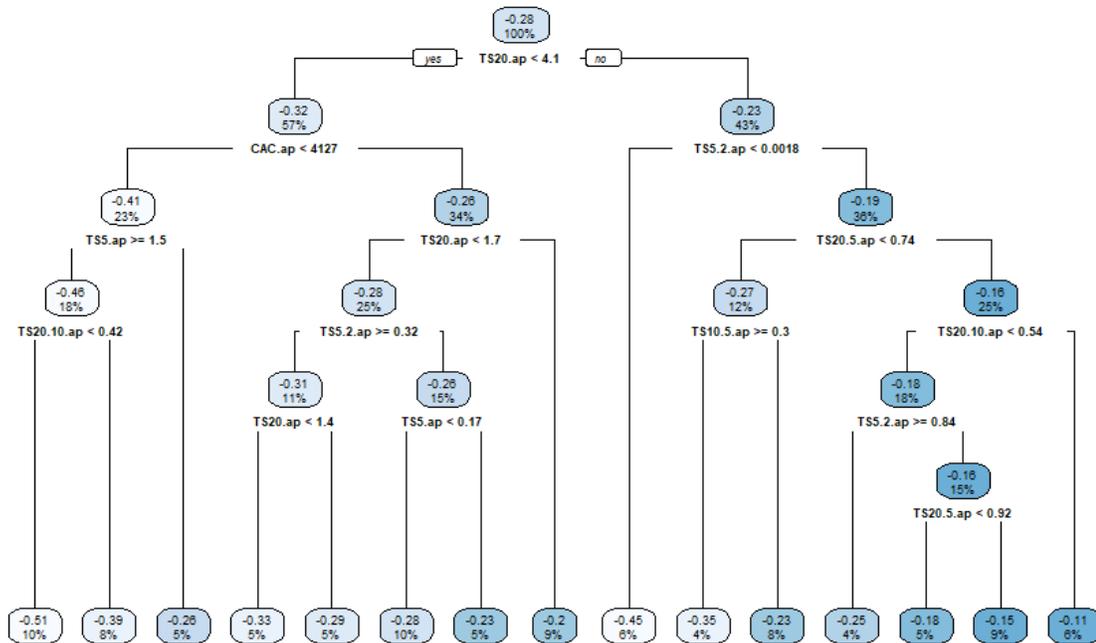


FIGURE 13 – Arbre de régression optimal pour le spread n°3

soit une distribution trop étendue en sortie :

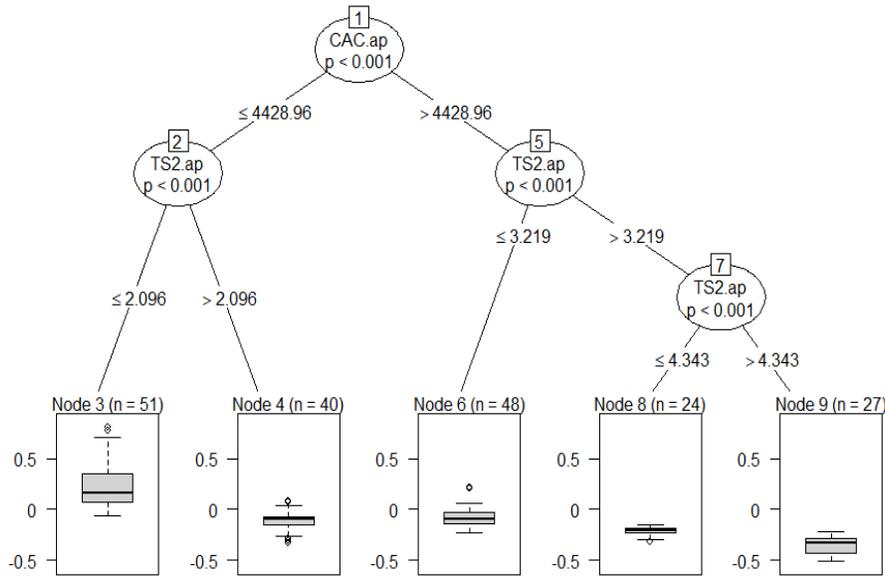


FIGURE 14 – Arbre de régression optimal et distribution en sortie pour le spread n°4

Ainsi, les modélisations testées par l'application de méthodes *Machine Learning* n'ont également pas mené à des résultats probants pour l'intégration d'une modélisation de *spread corporate* ou souverain dans l'exercice ASM.

### 3. Conclusion de l'exercice

Compte tenu des résultats médiocres obtenus sur ces 2 précédentes tentatives de modélisation, et au regard du calendrier de production de l'ASM, la gouvernance a décidé de reporter à plus tard les recherches sur la modélisation du spread. Dans ces circonstances, aucun autre algorithme n'a pu être testé.

#### 4.2.3 Projection des *RWA*

La modélisation de *spread* dans les scénarios économiques n'ayant pu être intégrée pour ce premier exercice, et les *RWA* n'étant pas sensibles aux différents facteurs de risque de l'ASM, il en retourne que les *RWA* ne sont pas sensibles aux différents scénarios économiques. Afin de rester proche de la modélisation adoptée dans l'ASM, tout en ayant une méthodologie commune à toutes les filiales financières régulées, il a donc été décidé de projeter le montant de *RWA* de chaque filiale  $RWA_{filiale}$  à l'instant  $t$  de la façon suivante :

$$RWA_{filiale}(t+1) = RWA_{filiale}(t) + \frac{E}{60} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

où  $E$  représente le montant de  $RWA$  supplémentaires à allouer sur la période de projection. En effet, la variable du programme d'optimisation attribuée aux différentes filiales régulées correspond à un montant de  $RWA$  supplémentaires sur les 5 ans de projection. Cela permet d'instaurer un pilotage plus axé sur la consommation en fonds propres.

A l'image de la diffusion des classes d'actifs, on détermine pour chacune des filiales financières régulées des contraintes minimales et maximales de  $RWA$  supplémentaires sur la période.

En outre, les équilibres de bilan sont conservés en retranscrivant le montant de  $RWA$  en valeur bilan au travers d'une pondération moyenne ( $RW$  moyen) calculé en *input*. Ce surplus comptabilisé à l'actif est alors égal au passif grâce à la poche émissions comme expliqué dans la partie 2.2.

**NB :** Il a été remonté des échanges avec les filiales que les impacts réglementaires tels que Bâle III revisité (plus communément surnommé Bâle IV) sont significatifs sur le montant de  $RWA$ . Toutefois, l'enveloppe de  $RWA$  supplémentaires étant investie linéairement sur la période, il n'est pas possible de modéliser précisément cet impact en cours de projection.

Il est tout de même possible de les intégrer soit en estimant l'impact réglementaire sur le niveau de  $RWA$  et de l'affecter dès le début de la projection, soit de le considérer dans la contrainte minimale de  $RWA$  supplémentaires à affecter sur la période. Cette deuxième méthode permettrait alors d'intégrer cet impact linéairement sur la période.

Concernant l'impact qu'aurait Bâle III revisité sur le niveau de  $RWA$  des filiales financières régulées, la gouvernance a décidé de ne pas le considérer dans l'exercice ASM, compte tenu de la non-certitude sur la date d'entrée en vigueur de la réforme pour le Groupe Caisse des Dépôts.

#### 4.2.4 Projection du $CET1$

A l'instar de la diffusion des classes d'actifs hors taux, on met à disposition du modèle un input déterminant le "rendement" des filiales financières régulées. Ce taux de rendement est déterminé grâce aux "Plans Moyen Terme" que ces filiales envoient annuellement à la Section Générale et qui renseignent sur leurs prévisions d'évolution sur les 5 prochaines années, notamment en termes de résultat et de  $RWA$ . Ainsi, il est possible de définir pour chaque année un taux de rendement des  $RWA$  par filiale.

La projection des niveaux de  $RWA$  évoquée dans le paragraphe précédent permet ainsi de déterminer le "rendement" des filiales financières régulées selon la formule suivante :

$$\text{Revenus}_{\text{filiale}}(t) = RWA_{\text{filiale}}(t) * \text{Taux}_{\text{filiale}} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

où :

—  $RWA_{\text{filiale}}(t)$  est le niveau de  $RWA$  à l'instant  $t$  tel que défini dans le sous-chapitre précédent

- Taux  $_{filiale}$  correspond au "rendement" des  $RWA$ , permettant d'estimer le résultat généré par la filiale selon son niveau de  $RWA$ . Ce taux, annuel, est supposé constant au cours de la projection.

Ce revenu estimé viendra donc participer au résultat consolidé évoqué dans la partie 2.4.1, comme s'il augmentait le  $CET1$  de la filiale financière régulée. De même, il a été possible de déterminer des sensibilités du latent OCI de CNP Assurances aux facteurs de risque actions et taux considérés dans l'ASM. Il est donc possible de modéliser un "latent" selon le scénario économique pour La Banque Postale au travers des sensibilités communiquées par CNP Assurances. Ce "latent" vient alors également augmenter le niveau de  $CET1$ .

### 4.3 Modifications sur le problème d'optimisation

#### 4.3.1 Variables et contraintes du problème d'optimisation

Les variables du problème d'optimisation, jusqu'alors au nombre de 12 pour les 12 enveloppes d'investissements à horizon 5 ans, seraient alors portées au nombre de 15 en ajoutant une variable d'enveloppe de  $RWA$  supplémentaires par filiale financière régulée. Les variables seraient donc :

$$\begin{aligned} & (\omega_{\text{Actions}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Private Equity}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Infrastructures}_{\text{Social, Conso}}, \\ & \omega_{\text{Immobilier résidentiel}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Immobilier tertiaire}_{\text{Social, Conso}}, \omega_{\text{Taux fixe}}, \\ & \omega_{\text{Taux variable}}, \omega_{RWA \text{ La Banque Postale}}, \omega_{RWA \text{ SFIL}}, \omega_{RWA \text{ Bpifrance Financement}}) \end{aligned}$$

La contrainte d'appétence au risque n'est pas modifiée par l'ajout de ces variables et par les modifications apportées à la modélisation de l'ASM, conséquence de ce qui est exposé dans les sous-parties du sous-chapitre 4.3 suivantes.

Comme évoqué plus en amont, les 3 variables allouées aux 3 filiales financières régulées possèdent pour chacune des bornes supérieures et inférieures, et respectent de ce fait la contrainte métier du problème d'optimisation.

Enfin, s'agissant de la contrainte budgétaire, celle-ci reste inchangée, à ceci près que l'augmentation de la taille de bilan concerne uniquement les classes d'actifs et n'intègre donc pas les filiales financières régulées.

#### 4.3.2 Mesure de risque

Afin de se conformer à l'exercice ASM, il est nécessaire de définir une part de risque attribuable aux filiales financières régulées. Pour ce faire, on s'inspire encore une fois du traitement qui leur est réservé dans le modèle prudentiel. Les Besoins en Fonds Propres attribuables à chacune des filiales financières régulées est donc calculé de la façon suivante :

$$BFP_{filiale}(t) = RWA_{filiale}(t) * Limite_{RAF_{filiale}} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, 59\}$$

où :

- $RWA_{filiale}(t)$  est le niveau de  $RWA$  d'une filiale financière régulée à l'instant  $t$
- Limite  $RAF_{filiale}$  correspond à la limite ou le seuil que la filiale a déterminé dans son propre appétit aux risques ( $RAF$ ) ou dans son exercice d' $ICAAP$ , au-delà du minimum réglementaire exigible. Ce taux, que l'on considère comme le taux de conversion des  $RWA$  en BFP, est supposé constant au cours de la projection.

Ces besoins en fonds propres viennent alors s'ajouter aux BFP calculés en partie 2.5.

#### 4.3.3 Mesure de richesse

Il est également nécessaire de modifier la métrique de richesse définie dans la partie 2.6 pour l'adapter à cette nouvelle modélisation, conformément à ce qui est réalisé dans le modèle prudentiel.

Pour rappel, le capital économique (qui correspond à la mesure de richesse) était jusqu'alors défini de la façon suivante :

$$CE \text{ à } 5 \text{ ans}_s = FP_{\text{consolidés non latents initiaux}} + \sum_{i=1}^5 \text{Résultat consolidé net}_{i,s} + f[FP_{\text{consolidés latents},s}, BFP_s]$$

On lui apporte alors les modifications suivantes :

$$CE \text{ à } 5 \text{ ans}_s = FP_{\text{consolidés non latents initiaux, hors ffr}} + (CET1 - VNC)_{\text{initiaux des ffr}} + \sum_{i=1}^5 \text{Résultat consolidé net}_{i,s} + f[(CET1 - VNC), FP_{\text{consolidés latents},s}, BFP_s]$$

où  $VNC$  correspond à la valeur nette comptable des filiales financières régulées, et  $f$  est une fonction qui pondère le latent par un coefficient dépendant de l'écart entre les BFP, l'équivalent fonds propres, et le  $CET1$  des filiales financières régulées.

#### 4.3.4 Mesure de rentabilité

La formule permettant de calculer la rentabilité ne change pas. Toutefois, les éléments qui la composent se voient légèrement modifiés :

- Le résultat consolidé intègre le résultat estimé des filiales financières régulées tel qu'évoqué précédemment ;
- Le latent s'entend y compris les sensibilités quote-parisées sur le latent OCI de CNP Assurances ;
- Les Fonds Propres intègrent les 2 éléments précités d'une année sur l'autre.

## 4.4 Impact sur l'allocation

Les résultats seront présentés de la sorte :

1. Pour des problématiques de confidentialité des données, les niveaux de rentabilité, de probabilité d'écart à la cible négatif, ou les différents montants évoqués dans les tableaux à suivre seront anonymisés par des inconnues. Toutefois, dans le but de comparer les modèles entre eux, seules les informations du modèle initial seront anonymisées par des inconnues, et celles du modèle testé seront comparées par rapport aux inconnues du modèle initial.
2. Toujours en raison de la confidentialité des données, les différents graphiques ne présenteront pas d'échelle pour ne pas permettre d'avoir le montant exact des enveloppes optimales. Toutefois, le lecteur pourra s'appuyer sur des barres en arrière-plan pour pouvoir comparer les allocations entre elles, de façon proportionnelle. Des repères sur le nombre de barres sont affichés à la place de l'axe vertical. A noter toutefois : l'espacement entre les barres du graphique des classes d'actifs et l'espacement entre les barres du graphique des RWA ne représentent pas le même montant, pour des raisons d'échelle principalement.
3. Enfin, la gouvernance a souhaité que le lien entre les allocations et les différentes classes d'actifs et filiales financières régulées ne puisse pas être identifiable distinctement. Pour pallier à cette problématique :
  - Les classes d'actifs de la partie 2.1 ont été classées par ordre décroissant de niveau de risque, et leurs noms ont été anonymisés : La classe "actif 1" est la classe d'actifs la plus risquée, et la classe "actif 7" est la moins risquée.
  - Les noms des filiales financières régulées (ffr) ont été anonymisés (ffr 1 / ffr 2 / ffr 3) pour ne pas permettre d'établir un lien direct.

L'impact sur l'allocation s'est tout d'abord observé de façon opérationnelle. En effet, le rajout de 3 variables au problème d'optimisation implique un espace de recherche avec plus de dimensions. Ce dernier ayant comme dimension le nombre de variables, il est passé de 12 à 15 dimensions. Cela s'est traduit par un temps de calcul accru d'un ratio similaire lors de chaque simulation de l'algorithme.

L'allocation optimale en sortie de l'algorithme a été la suivante pour les différentes classes d'actifs et les RWA des filiales financières régulées :

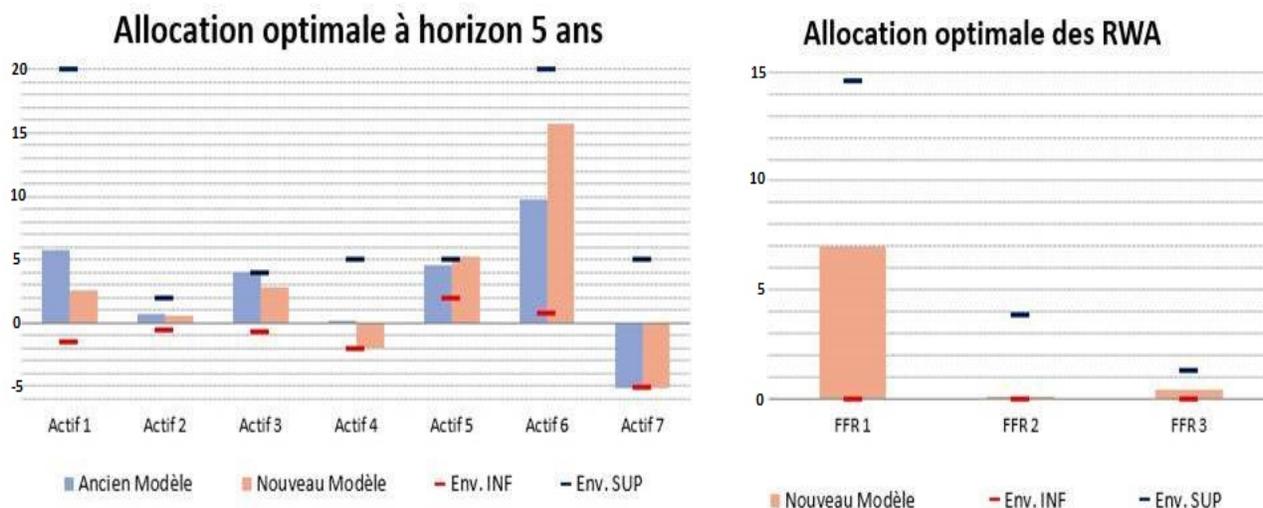


FIGURE 15 – Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle classique (ancien modèle) et modèle avec filiales régulées (nouveau modèle)

A noter que l'allocation finalement retenue dans la nouvelle méthodologie se base également sur le critère de *scoring* défini dans la partie 3.3.5, la différence étant que le critère intègre également les 3 nouvelles poches de *RWA*.

L'impact sur les métriques est quant à lui récapitulé ci-après :

	Ancien modèle	Nouveau modèle
<i>ROE</i> moyen sur 5 ans	$x$ %	$x + 0.9$ %
Écart à la cible moyen à 5 ans	$y$ Md€	$y - 0,57$ Md€

On observe donc, pour une même probabilité d'écart à la cible négatif à horizon 5 ans donnée, un meilleur *ROE* moyen sur 5 ans. Pourtant, les investissements dans les classes d'actifs risquées ont diminué, alors que ces poches sont considérées comme génératrices de rentabilité. Cet accroissement de la rentabilité se fait en contrepartie d'un risque plus élevé, matérialisé par une diminution de l'écart à la cible moyen à horizon 5 ans. Autrement dit, l'écart entre la métrique de richesse et la métrique de risque calculées en fin de trajectoire s'amenuise. A l'inverse, les investissements dans les classes d'actifs considérées comme plus sûres ont quant à eux augmenté.

### Comment expliquer cet effet ?

Lors de la mise en place de cette nouvelle méthodologie, il a été remarqué que le passage de simple participation action à une prise en compte conforme au modèle prudentiel des filiales financières régulées génèrait d'emblée une dégradation de l'écart à la cible initial. Cela sous-entend que la méthodologie précédente sous-quantifiait le risque porté par ces filiales, ce qui n'est pas incohérent dans le sens où la modélisation comme simple participation faisait dépendre les filiales financières régulées du CAC 40 et de sa volatilité, là où on pourrait plutôt s'attendre à une stabilité sur ces filiales du fait qu'elles soient régulées. En outre, cette nouvelle prise en compte du risque augmente ce dernier par effet de levier : on ne prend plus seulement en compte l'investissement dans les fonds propres de la filiale en question mais bel et bien tout son actif, ce qui

revient à considérer non seulement ses fonds propres mais également sa dette.

En effet, le ratio de conversion de  $RWA$  en BFP est pour rappel la limite  $RAF$  communiquée par la filiale financière régulée, en accord avec le traitement réalisé dans le modèle prudentiel. Or, compte tenu du fait que seul le  $CET1$  est reconnu au sein du capital économique, l'utilisation d'une limite  $RAF$  globale<sup>1</sup> apparaît comme une hypothèse très conservatrice. Cette hypothèse reste ainsi conforme à la politique du Groupe Caisse des Dépôts d'assurer une solidité financière, mais génère de fait une quantité conséquente de risque sur le périmètre des filiales financières régulées.

Ainsi, il faut garder en tête que l'enveloppe de  $RWA$  supplémentaires va venir peser fortement sur le montant de BFP du Groupe. Cela explique en grande partie pourquoi l'investissement optimal estimé avec cette nouvelle méthodologie a un profil plus "sécurisé" : le poids sur les besoins en fonds propres étant déjà conséquent avec l'enveloppe de  $RWA$  supplémentaires des filiales financières régulées, l'allocation d'actifs a donc moins de marge pour prendre des risques. On note ainsi une baisse de l'investissement sur les classes d'actifs risquées (par rapport à la méthodologie initiale) pour basculer sur des classes d'actifs moins risquées.

De l'autre côté de la balance, les  $RWA$  n'étant pas sensibles aux facteurs de marché, ils génèrent dans la modélisation adoptée le même montant de résultat quel que soit le scénario économique envisagé. Cela a pour effet de venir solidifier la base du résultat dans les scénarios économiques défavorables (malgré la baisse engendrée par les sensibilités sur le latent OCI de CNP Assurances chez La Banque Postale) augmentant de fait le  $ROE$  moyen sur 5 ans, ce dernier étant une espérance basée sur les scénarios économiques. Voilà en partie pourquoi on observe une hausse du  $ROE$  moyen sur 5 ans.

#### 4.5 Conclusion sur l'intégration des filiales financières régulées dans le modèle ASM

Compte tenu des délais de production de plus en plus restreints sur le processus ASM, la mise en place d'une méthodologie similaire à celle adoptée dans le modèle prudentiel est une avancée notoire pour le modèle ASM. Certes, certains aspects de la modélisation pourraient être affinés, comme la modélisation du *spread* qui n'a malheureusement pas abouti, afin d'ajouter une meilleure prise en compte des profils de risques des filiales financières régulées au fonctionnement si particulier. Toutefois, il est nécessaire de rappeler qu'il s'agit d'un premier exercice et que d'autres pistes de développement pourront être envisagées à l'avenir.

Cette nouvelle méthodologie reste opérationnellement cohérente, le temps de calcul ayant certes augmenté mais restant acceptable avec des simulations de 18 minutes et 30 secondes en moyenne. En effet, il serait toujours possible de faire tourner au minimum une quarantaine de simulations en une nuit, ce qui permettrait d'avoir un nombre suffisant d'allocations pour pouvoir utiliser le critère de *scoring* comme appui pour la sélection de l'allocation finale.

Somme toute, le modèle semble réagir plutôt correctement à la nouvelle méthodologie et aux variations des inputs, et permet une meilleure prise en compte du risque sur les filiales régulées ainsi que sur les classes d'actifs plus classiques afin de proposer une stratégie d'investissements cohérente avec le souhait de maintenir la solidité financière de la Caisse des Dépôts. La gouvernance a ainsi pu apprécier cette évolution du modèle, et l'a finalement validée lors des comités ad-hoc. Cette dernière sera donc pérennisée pour les exercices à venir.

---

1. Définie sur le périmètre  $CET1+AT1+AT2$

## 5 Déclinaison à 1 an de l'algorithme d'optimisation

Le problème d'optimisation qui intervient dans le cadre de l'ASM se base sur différentes métriques (risque, richesse, solvabilité, rentabilité), calculées soit en fin de projection comme la  $VaR_{99,99\%}$ , soit sur les 5 années de projection à l'image du  $ROE$ .

Cet horizon temporel de 5 ans, que l'on peut considérer comme étant à long terme, se justifie par le fait que, compte tenu de son rôle d'intérêt général et de sa place dans l'économie française, le Groupe Caisse des Dépôts met en place une stratégie de "long terme" et non "tactique". Les variables optimisées dans le problème d'optimisation sont donc les enveloppes d'investissements nets à horizon 5 ans<sup>1</sup> :

$$\omega = (\omega_{\text{Actions}}, \omega_{PE}, \omega_{\text{Infra}}, \omega_{\text{Immo T}}, \omega_{\text{Immo R}}, \omega_{TF}, \omega_{TV}, \omega_{RWA})$$

Les différentes contraintes du modèle, telles que les contraintes d'enveloppes (contraintes métier), d'augmentation de taille de bilan (contrainte budgétaire) ou encore de probabilité d'écart à la cible négatif sont également considérées à horizon 5 ans.

### 5.1 Besoin métier d'une déclinaison à 1 an des investissements

Bien que les enveloppes d'investissements nets soient optimisées à horizon 5 ans dans le cadre de l'ASM, les investissements finalement arbitrés par le directeur général du Groupe (dans le cadre de la Programmation Financière Pluriannuelle, voir partie 1.5) sont quant à eux répartis année par année sur la période de projection dans une stratégie d'investissements de long terme. Concrètement, cette stratégie consiste à investir chaque année grossièrement 1/5ème des enveloppes à horizon 5 ans arbitrées par le Directeur Général. En outre, ces enveloppes d'investissements sont revues annuellement : l'investissement prévu en première année est donc particulièrement important puisqu'il s'agit du seul qui sera effectivement réalisé.

De même, le coefficient de 1/5ème appliqué pour transcrire les investissements à 5 ans en investissements annuels ne correspond peut-être pas à la meilleure stratégie d'investissement. Par exemple, dans un contexte de taux bas, investir 1/5ème de l'enveloppe attribuée au taux fixe ne constitue probablement pas la meilleure conduite à adopter, d'autant plus si l'on prévoit une remontée des taux sur la période de projection. De même, le plan de relance engagé par l'État français lors de la crise COVID et auquel la Caisse des Dépôts participe à hauteur de 26 milliards d'euros prévoit un investissement massif en actions sur les 2 prochaines années. Des ajustements sur la stratégie d'investissements au cours de la projection pourraient donc permettre une meilleure gestion de cette stratégie d'investissement des productions nouvelles au regard des hypothèses de projection envisagées, ainsi que donner un avis éclairé sur la tendance d'investissements à adopter.

On observe donc un besoin croissant de la part des métiers d'une déclinaison à 1 an des enveloppes d'investissements optimisées. De ce fait, la seconde problématique de ce mémoire consiste à étudier si le ratio de 1/5 appliqué sur les enveloppes d'investissements à horizon 5 ans est une stratégie d'investissement raisonnable, ou

1. On réalise ici un affichage simplificateur en ne mentionnant pas la distinction entre vision sociale et vision consolidée sur les poches Actions, *Private Equity*, Infrastructures, Immobilier Tertiaire et Immobilier Résidentiel. Toutefois elle est toujours considérée dans le modèle pour les raisons (de versement à l'Etat notamment) évoquées en partie 2.4.1.

si une déclinaison de ces investissements à 1 an dans le programme d'optimisation pourrait être plus bénéfique.

## 5.2 Les options envisageables

Il va donc être question dans ce chapitre de comparer les avantages et inconvénients de différents programmes d'optimisation qui permettraient de mettre en place cette allocation tactique et répondre à la problématique posée.

A propos de cette dernière : Malgré le besoin métier d'une déclinaison à 1 an des enveloppes d'investissements, il ne faut pas perdre la cohérence avec le modèle prudentiel et le processus de PFP. De ce fait, il est nécessaire de garder une dynamique de projection à long terme en accord avec le rôle premier et primordial du Groupe CDC. Autrement dit, la projection doit toujours avoir lieu sur 5 ans et non pas sur 1 an uniquement.

Dans la suite de ce mémoire, on notera  $\omega$  le vecteur des variables à 1 an et des variables de 2 à 5 ans :

$$\omega = \{(Production\ nouvelle\ en\ année\ 1), (Production\ nouvelle\ des\ années\ 2\ à\ 5)\}$$

### 5.2.1 Investissement linéaire : Ratio de 1/5ème des enveloppes à 5 ans

Une comparaison sera réalisée entre les différents modèles pour tester leur robustesse. Ces différents modèles seront comparés au modèle déjà implémenté et qui considère que les enveloppes optimisées à horizon 5 ans sont investies linéairement chaque année à hauteur de 1/5ème des enveloppes. Ce modèle d'investissement linéaire sera nommé par la suite "modèle de référence" et correspond donc au modèle "classique", considéré post-intégration des filiales financières régulées. Le problème d'optimisation est donc le même que celui évoqué en partie 3, à savoir :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [ROE_s(\omega) \text{ sur } 5 \text{ ans}] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega) \text{ à } 5 \text{ ans} < 0) \leq \alpha \\ & C_{min_i} \leq \omega_i \leq C_{max_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\ & \sum_{i=1}^{12} \omega_i = \text{Augmentation de la taille de bilan} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \frac{1}{5} (\omega_{Actions}, \omega_{PE}, \omega_{Infra}, \omega_{Immo\ T}, \omega_{Immo\ R}, \omega_{TF}, \omega_{TV}, \omega_{RWA})_{5 \text{ ans}}, \right. \\ & \left. \frac{4}{5} (\omega_{Actions}, \omega_{PE}, \omega_{Infra}, \omega_{Immo\ T}, \omega_{Immo\ R}, \omega_{TF}, \omega_{TV}, \omega_{RWA})_{5 \text{ ans}} \right\} \end{aligned}$$

Afin de réaliser cette optimisation, il est uniquement nécessaire d'optimiser les enveloppes d'investissements à horizon 5 ans, qui sont alors investies linéairement sur la période de projection. De ce fait, seules 15

variables doivent être optimisées dans ce modèle.

### 5.2.2 Optimisation synchrone sur 1 an et sur les 4 années suivantes

Une autre proposition d'algorithme résulte de l'idée qu'on pourrait doubler le nombre de variables du problème d'optimisation en cherchant à optimiser directement le couple  $\omega$ . Autrement dit, les 30 variables qui composent  $\omega$  seraient optimisées de manière synchrone.

La formalisation mathématique du problème d'optimisation serait donc identique au problème d'optimisation du modèle de référence (défini dans la sous-partie précédente), l'unique différence résidant dans la définition des variables à optimiser, qui seraient alors :

$$\omega = \{(\omega_{\text{Actions}}, \omega_{\text{PE}}, \omega_{\text{Infra}}, \omega_{\text{Immo T}}, \omega_{\text{Immo R}}, \omega_{\text{TF}}, \omega_{\text{TV}}, \omega_{\text{RWA}})_{1 \text{ an}},$$

$$(\omega_{\text{Actions}}, \omega_{\text{PE}}, \omega_{\text{Infra}}, \omega_{\text{Immo T}}, \omega_{\text{Immo R}}, \omega_{\text{TF}}, \omega_{\text{TV}}, \omega_{\text{RWA}})_{2 \text{ à } 5 \text{ ans}}\}$$

### 5.2.3 Optimisation dynamique en 2 temps : Optimisation à 1 an, puis optimisation sur les 4 années restantes

Une optimisation dynamique sur 2 périodes temporelles peut également être envisagée. Celle-ci consisterait à optimiser dans un premier temps uniquement les enveloppes d'investissements à 1 an selon le programme d'optimisation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E} [ROE_s(\omega_1) \text{ sur } 1 \text{ an}] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega_1) \text{ à } 1 \text{ an} < 0) \leq \alpha_{1an} \\ & C_{\min_i, 1an} \leq \omega_{i, 1an} \leq C_{\max_i, 1an} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\ & \sum_{i=1}^{12} \omega_{i, 1an} = \text{Augmentation de la taille de bilan sur } 1 \text{ an} \end{aligned}$$

où les variables à optimiser seraient :

$$\omega_1 = (\omega_{\text{Actions}}, \omega_{\text{PE}}, \omega_{\text{Infra}}, \omega_{\text{Immo T}}, \omega_{\text{Immo R}}, \omega_{\text{TF}}, \omega_{\text{TV}}, \omega_{\text{RWA}})_{1 \text{ an}}$$

Une fois les enveloppes d'investissements à horizon 1 an déterminées, il serait alors possible de procéder à une deuxième optimisation en cherchant à résoudre le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned}
 \text{max} \quad & \mathbb{E} [ROE_s(\omega_1, \omega_{2-5}) \text{ sur 5 ans}] \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega_1, \omega_{2-5}) \text{ à 5 ans} < 0) \leq \alpha \\
 & C_{\min_i, 2-5\text{ans}} \leq \omega_{i, 2-5\text{ans}} \leq C_{\max_i, 2-5\text{ans}} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\
 & \sum_{i=1}^{12} \omega_{i, 2-5\text{ans}} = \text{Augmentation de la taille de bilan sur les années 2 à 5}
 \end{aligned}$$

où :

—  $\omega_{2-5}$  contient les variables à optimiser (les variables composant  $\omega_1$  étant déjà optimisées) sous la forme :

$$\omega_{2-5} = (\omega_{\text{Actions}}, \omega_{\text{PE}}, \omega_{\text{Infra}}, \omega_{\text{Immo T}}, \omega_{\text{Immo R}}, \omega_{\text{TF}}, \omega_{\text{TV}}, \omega_{\text{RWA}})_{2 \text{ à } 5 \text{ ans}}$$

- $ROE_s(\omega_1, \omega_{2-5})$  sur 5 ans correspond au  $ROE$  généré sur 5 ans compte tenu de l'investissement optimal  $\omega_1$  réalisé la 1ère année de projection et l'investissement  $\omega_{2-5}$  testé.
- Ecart à la cible<sub>s</sub>( $\omega_1, \omega_{2-5}$ ) à 5 ans est l'écart à la cible généré en fin de projection par un investissement optimal  $\omega_1$  en 1ère année de projection et un investissement  $\omega_{2-5}$  donné sur les 4 années suivantes.

Il serait alors possible d'obtenir un couple optimal  $\omega = (\omega_1, \omega_{2-5})$ .

Toutefois, une interrogation se pose d'emblée ! En effet, la recherche de la variable  $\omega_{2-5}$  qui maximise le  $ROE$  sur 5 ans se basera donc en quelque sorte sur une donnée "en entrée" qui n'est autre que l'enveloppe  $\omega_1$  optimisée en amont. Le fait de maximiser en premier lieu uniquement le 15-uplet  $\omega_1$  pourrait alors empêcher le modèle de considérer des couples d'allocations optimales  $(\omega_1, \omega_{2-5})$  qui pourraient apporter une meilleure rentabilité sur 5 ans.

De ce fait, et compte tenu du fait que le but de l'ASM reste d'obtenir la meilleure rentabilité à horizon 5 ans plutôt que la meilleure rentabilité à horizon 1 an, il va être nécessaire de déterminer plusieurs allocations optimales à horizon 1 an  $\omega_1$ , puis de calculer pour chacune d'entre elles différentes allocations optimales  $\omega_{2-5}$  qui leur seraient associées et qui permettraient de maximiser le  $ROE$  à horizon 5 ans selon le schéma suivant :

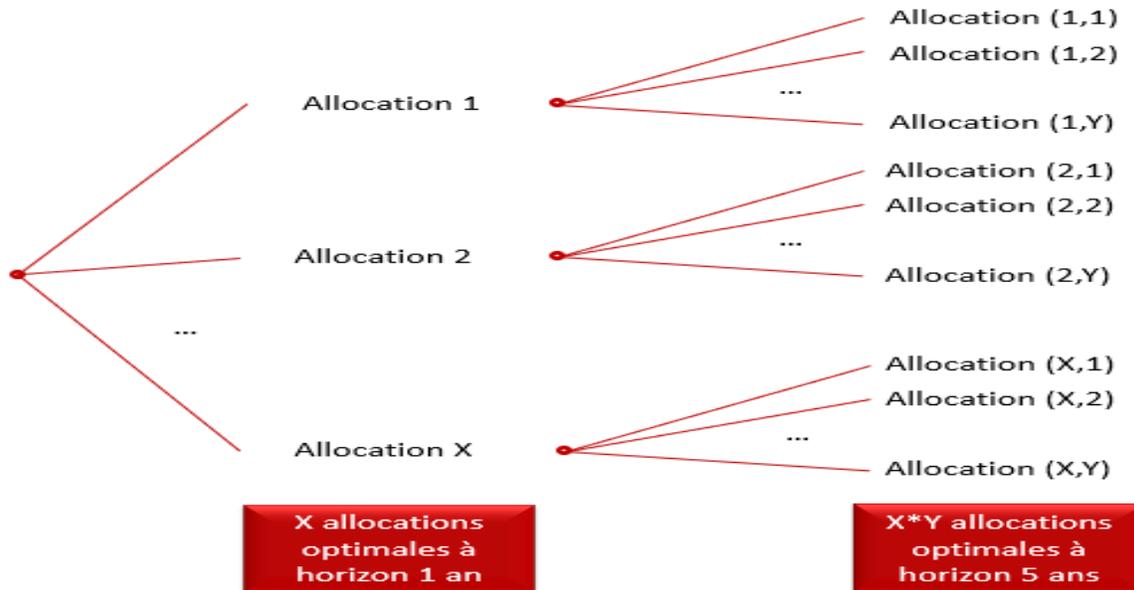


FIGURE 16 – Schéma de l'optimisation dynamique testée

### 5.3 Programmation dynamique de type Bellman sur les 5 ans de projection

Il pourrait également être envisageable de considérer une optimisation dynamique de type Bellman. Ce type d'optimisation, qui consisterait en une série d'optimisations de sous-ensembles en temps discret, est évoqué dans ([3] Bellman, 1954).

Pour mettre en place ce type d'optimisation, il est nécessaire de formaliser le programme d'optimisation sous un autre point de vue que celui présenté jusqu'alors. Pour ce faire, on introduit la notion de variable d'état. Les variables d'état sont les variables du problème qui résument l'information sur les décisions passées. Ainsi, la décision d'investissement à une date donnée ne se base que sur les valeurs des variables d'état à cette date. Ces variables permettraient alors de déterminer les BFP, le capital économique, et la rentabilité économique.

Les variables d'état du modèle ASM sont :

- La valeur bilan à date de chaque classe d'actifs et de passifs
- La valeur de marché à date de chaque classe d'actifs et de passifs
- Les flux du gap de taux à date
- Les fonds propres « durs » à date
- Le montant de *RWA* des filiales financières régulées à date

— L'année

Ainsi, pour avancer d'un pas de temps au suivant, il suffit de connaître la valeur de ces variables d'état pour calculer toutes les variables du modèle. La fonction de transition pour obtenir la valeur des variables d'état entre 2 dates est la suivante :

$$X_{t+1} = T(X_t, t, d_t, z_t^s) = \begin{cases} VB(X_t, t, d_t) \\ VM(X_t, t, d_t, z_t^s) \\ \text{Gap\_Taux}(X_t, t, d_t, z_t^s) \\ \text{Résultat\_conso}(X_t, t, d_t, z_t^s) \\ RWA(X_t, t, d_t) \\ t + 1 \end{cases}$$

où :

- $X_t$  le vecteur des variables d'état à la date  $t$
- $d_t$  la décision d'investissement de la production nouvelle à la date  $t$
- $z_t^s$  les rendements annuels à la date  $t$  dans le scénario économique  $s$
- La fonction  $VB$  donne la valeur bilan des actifs à la date  $t+1$ , en fonction de la valeur bilan des actifs à la date  $t$  et de la décision d'investissement de la production nouvelle à la date  $t$
- La fonction  $VM$  donne la valeur de marché des actifs à la date  $t+1$ , en fonction de la valeur de marché des actifs à la date  $t$ , de la décision d'investissement de la production nouvelle à la date  $t$  et des rendements économiques de l'année  $t$ . Elle permet de déterminer, en complément de la fonction  $VB$ , les  $PMVL$  qui viendront incrémenter les fonds propres.
- La fonction  $\text{Gap\_Taux}$  donne les flux du gap de taux à la date  $t+1$ , en fonction du gap de taux à la date  $t$ , de la décision d'investissement de la production nouvelle à la date  $t$  et des rendements économiques de l'année  $t$
- La fonction  $RWA$  donne le montant de  $RWA$  par filiale financière régulée à la date  $t+1$ , en fonction du montant de  $RWA$  à la date  $t$  et de la décision d'investissement à la date  $t$
- La fonction  $\text{Résultat\_conso}$  donne la valeur du résultat consolidé à la date  $t+1$ , en fonction des flux de revenus des actifs et des charges des passifs.

On peut donc réécrire le programme d'optimisation de référence de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \max_d \quad & \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^5 f \left( X_t, z_t^s, \frac{1}{5}d, t \right) \middle| I_0 \right] \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbb{P} [g (X_5, z_6^{s \text{ financiers}}) < 0 | I_0] \leq \alpha \\
 & C_{\min_i} \leq d_i \leq C_{\max_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\
 & \sum_{i=1}^{12} d_i = \text{Augmentation de la taille de bilan}
 \end{aligned}$$

avec :

- $I_0$  l'information disponible en début de projection
- $f$  la fonction de rentabilité annuelle
- $g$  la fonction d'écart à la cible, pouvant elle-même être décomposée en deux sous-fonctions renvoyant respectivement les montants de capital économique et de BFP

Pour se ramener au cadre théorique de modélisation de Bellman, on modifie la fonction d'utilité  $f$  : au lieu de la rentabilité économique, on retient les revenus économiques totaux (revenus des actifs augmentés des PMVL latentes moins les charges du passif). Ceci permet de capter presque totalement l'information de la rentabilité économique (au dénominateur égal aux fonds propres près) et d'avoir une fonction d'utilité additive sur les 5 ans. Par ailleurs, il serait plutôt nécessaire de considérer 5 contraintes d'écart à la cible annuelles, portant sur la probabilité d'écart à la cible négatif pour chaque année.

On peut alors réécrire le programme d'optimisation dynamique en cadre Bellman de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \max_{\{d_1, \dots, d_5\}} \quad & \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^5 f_{\text{Bellman}} (X_t, z_t^s, d_t, t) \middle| I_0 \right] \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbb{P} [g_{\text{Bellman}} (X_t, z_{t+1}^{s \text{ financiers}}) < 0 | I_0] \leq \alpha_t \quad \forall t \in \{1, \dots, 5\} \\
 & C_{\min_{t,i}} \leq d_{t,i} \leq C_{\max_{t,i}} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \text{ et } \forall t \in \{1, \dots, 5\} \\
 & \sum_{t=1}^5 \sum_{i=1}^{12} d_{t,i} = \text{Augmentation de la taille de bilan}
 \end{aligned}$$

Toutefois, une distinction des investissements optimaux année après année ne répondrait pas spécialement aux besoins présents de l'exercice ASM. En effet, cette nouvelle granularité fine sur les hypothèses de modélisation engendrerait une complexité supplémentaire et non forcément utile compte tenu des objectifs et besoins actuels, et engagerait par ailleurs la gouvernance à fixer année après année des niveaux d'appétence au risque, exercice auquel elle n'est pas habituée (mis à part l'appétence au risque à horizon 5 ans).

Pour cette raison, ce type de programme d'optimisation ne sera pas implémenté et testé dans ce mémoire.

## 5.4 Définition des métriques comparatives des modèles

Dans l'objectif de comparer les différents modèles pré-cités, ci-après sont définies différentes statistiques et critères qualitatifs permettant de classer les modèles entre eux. En effet, l'ASM étant un subtil mélange entre modélisation et appréciation, il serait inenvisageable de ne pas considérer ces 2 types de métriques dans la sélection du modèle adéquat.

### 5.4.1 Temps de calcul

Le temps de calcul est effectivement un critère de décision crucial dans le choix de modélisation, et ce depuis que l'ASM a été choisi comme processus d'allocation *top-down*. Le calendrier de production de l'ASM tendant à être de plus en plus contraint, il est nécessaire de pouvoir réduire le temps de calcul au maximum tout en assurant une robustesse statistique de l'étude en réalisant suffisamment de simulations pour pouvoir utiliser le critère de *scoring*.

Étant donné que les simulations peuvent être réalisées pendant la nuit, il est envisageable de faire tourner les simulations pendant une douzaine d'heures environ. Cette contrainte horaire est difficilement modifiable étant donné le fait qu'il faut se laisser du temps pour étudier les résultats, les comprendre, voire refaire tourner d'autres simulations si des hypothèses de projections venaient à être modifiées, et mettre en forme les résultats à des fins de reporting. Ainsi, pendant ce laps de temps de 12 heures, il va être possible de résoudre plus ou moins de fois l'algorithme d'optimisation et donc d'obtenir un nombre plus ou moins important d'allocations optimales.

Plutôt que de déterminer combien de simulations il est possible de faire tourner en 12 heures pour chacun des modèles testés, on testera plutôt le temps de calcul moyen nécessaire sur un nombre défini de solutions optimales.

Dans le cas du 3ème modèle d'optimisation présenté, basé sur une optimisation dynamique en 2 temps, se pose la problématique de l'obtention des  $\zeta$  solutions optimales. En effet, ce modèle nécessitant  $x$  allocations optimales à horizon 1 an et  $y$  allocations optimales à horizon 5 ans pour chacune des optimisations à 1 an, le total des simulations  $x*y$  doit être égal à  $\zeta$ .

### 5.4.2 Facilité de convergence de l'algorithme

Dans le cas de contraintes d'enveloppes et/ou d'appétence au risque trop sévères, qui peuvent être accompagnées d'hypothèses de projection peu favorables compte tenu des expositions du Groupe (d'autant plus en cette période de COVID, si l'on considère les hypothèses de rendement en capital par exemple), il est possible que l'algorithme d'optimisation ait plus ou moins de facilité à converger vers un optimum. Ainsi, il sera intéressant d'étudier si l'algorithme converge avec plus ou moins d'aisance lors des simulations réalisées.

Un critère quantitatif est défini : un certain nombre (fixe) de simulations sera effectué en une nuit sur chacun des modèles. Le but recherché sera de récolter un certain nombre de solutions optimales en sortie du modèle. Toutefois, dans le cas où l'algorithme d'optimisation ne convergerait pas lors de certaines simulations, rien ne garantit qu'il sera possible d'obtenir le nombre souhaité de solutions optimales. Le taux de convergence est alors défini de la façon suivante :

$$\frac{\min(\text{Nombre (nb) fixe de solutions optimales souhaité, nb de solutions effectivement obtenu})}{\min(\text{Nb de simulations pour obtenir assez de solutions, nb maximum de simulations réalisables en une nuit})}$$

### 5.4.3 Précision / Variabilité des résultats

Comme évoqué en partie 3, la variabilité des résultats en sortie de l'algorithme d'optimisation par essais particuliers est importante (et fait d'ailleurs l'objet d'un suivi par la Direction des Risques), surtout dans le cadre de l'allocation *top-down*. Il conviendra donc d'étudier, pour chaque modèle envisagé, la variabilité de ce dernier afin d'estimer son comportement par rapport au modèle initial. Cette variabilité pourra être appréciée en considérant la variabilité des enveloppes optimales, ou encore la distribution de l'écart à la cible selon les scénarios économiques.

### 5.4.4 Facilité de paramétrage par la gouvernance par rapport à l'existant

L'ASM, en tant qu'allocation *top-down*, est un exercice relativement jeune (4-5 ans d'ancienneté), qui a demandé de la pédagogie lors de sa mise en place et lors des évolutions méthodologiques du modèle (comme pour l'introduction des filiales financières régulées dans le modèle) et qui est suivi de très près par la gouvernance. Elle fait sans cesse l'objet de nouveaux développements, qu'ils soient préconisés par la Direction des Risques ou de l'Audit suite à des revues techniques du modèle, ou qu'ils soient volontaires comme ce qui est réalisé dans ce mémoire par exemple.

Il est donc primordial que le modèle retenu présente des paramètres sur lesquels la gouvernance puisse garder la main. Jusqu'à présent, les paramètres clés du modèle soumis pour validation à la gouvernance sur la période de projection sont le niveau d'appétence au risque et l'augmentation de la taille de bilan, tous deux à horizon 5 ans.

### 5.4.5 Interprétabilité et réponse au besoin métier

Enfin, il est également essentiel de s'assurer que le modèle répond convenablement au besoin métier de déclinaison des investissements à horizon 1 an, que les interactions qui se passent entre les différentes métriques lors de l'application du modèle puissent être perceptibles, et enfin qu'il reste cohérent dans son comportement lorsque les paramètres et/ou contraintes du modèle d'optimisation sont modifiés.

## 5.5 Hypothèses de modélisation

La distinction des enveloppes d'investissements à horizon 1 an dans la stratégie d'investissements demande de nouvelles hypothèses de modélisation. Ces dernières sont donc répertoriées ci-dessous :

### 1. Projection des variables économiques et financières

Afin d'assurer la comparabilité des modèles entre eux, ces derniers se basent sur un seul et même générateur de scénarios économiques. De la même façon, le générateur de scénarios financiers utilisé

en fin de projection est le même entre tous les modèles.

En outre, le modèle d'optimisation dynamique requiert une estimation du risque après la 1ère année de projection. Il a donc été décidé de conserver le générateur de scénarios financiers comme outil de projection pour calculer la métrique de risque en fin de 1ère année. Le GSF correspondant dans les faits à une projection de rendements sur une année, plutôt qu'une projection du cours, il peut donc être adapté aux différentes composantes projetées à horizon un an. Les tendances de projection utilisées étant des tendances moyennes, on utilise donc le même GSF à 1 an qu'à 5 ans, ce qui permet de garder une cohérence dans les métriques de risque utilisées au cours du processus.

## 2. Les contraintes du modèle d'optimisation :

S'agissant de la contrainte d'appétence au risque, la même appétence au risque à 1 an que l'appétence au risque à 5 ans sera conservée dans un premier temps. Cette hypothèse peut paraître surprenante à première vue dans le sens où cela revient à considérer que le risque d'être dans une situation défavorable à 5 ans peut finalement être supporté à horizon 1 an.

Toutefois, les scénarios sont généralement moins défavorables à 1 an qu'ils ne le sont à 5 ans. Ce faisant, garder la même appétence au risque revient à s'autoriser des investissements plus risqués la première année mais qui doivent être rattrapés en cours de projection pour être conformes à l'appétence au risque en fin de projection. Cette vision colle donc au contraire avec le raisonnement long-termiste de la Caisse des Dépôts : Les investissements réalisés étant concrètement des investissements au service de l'intérêt général et de long terme, il peut-être envisageable de se retrouver temporairement en deçà de la contrainte de risque en début de projection, tant qu'on se rattrape sur les années suivantes.

Cette vision n'est pas dénuée de sens compte tenu des 2 précisions ci-après :

- (a) La métrique de risque telle qu'évoquée précédemment est la plus contraignante des 3 métriques de risque considérées dans le modèle prudentiel, avec les "seuil de surveillance" et "seuil minimum" tous deux définis par leurs propres hypothèses. De ce fait, ne pas atteindre le seuil de besoins en fonds propres temporairement n'est pas "problématique" tant que le capital économique (la mesure de richesse) reste au dessus des deux autres seuils mentionnés.
- (b) L'exercice ASM ne tient pas compte des éventuelles actions managériales qui peuvent être mises en place selon l'état de la solvabilité du Groupe et selon sa position par rapport aux seuils mentionnés ci-dessus, et qui dégageraient des marges additionnelles pour gonfler l'écart à la cible.

Par ailleurs, les contraintes d'enveloppes sont également diluées à horizon 1 an afin de contraindre les investissements du même horizon temporel. Pour ce faire, on distingue les contraintes purement "métier" (qui supposent des investissements fixés année par année et qu'il est donc possible d'identifier très clairement pour la 1ère année) des contraintes plus théoriques (telles que les hypothèses de profondeur de marché à horizon 5 ans, fixées à dire d'experts) qu'on considère linéaires sur la projection et qui contribuent donc à hauteur de 1/5ème aux contraintes d'enveloppes à 1 an.

Enfin, la contrainte budgétaire sur la 1ère année de projection correspond à 1/5ème de la contrainte budgétaire à horizon 5 ans.

### 3. Le nombre de simulations

Le nombre d'optimisations optimales souhaité pour les différentes études à mener a été fixé à 15. Cette décision résulte principalement d'un changement de conditions de travail en cours de mémoire, duquel résulte une diminution de la puissance de calcul à disposition. Pour cette raison, le nombre de simulations réalisables en 12h sur le modèle de référence n'est plus que de 25 simulations. Ainsi, 25 simulations ont été lancées pendant les multiples nuits dédiées à ce mémoire ; mais pour se prémunir d'une part de l'éventuelle non-convergence de l'algorithme lors des simulations (qui est pour rappel un critère d'appréciation des modèles testés), tout en permettant d'assurer une certaine robustesse statistique à l'étude, il a été décidé de conserver uniquement les 15 premières allocations optimales valides en sortie.

### 4. Le critère de *scoring* comme détermination de l'allocation optimale

Comme évoqué en partie 3.3.5, un critère de *scoring* est utilisé afin de renseigner sur l'aspect médian d'une allocation donnée. Malgré la déclinaison des enveloppes d'investissements à 1 an, le critère de *scoring* restera inchangé et déterminera le caractère médian des enveloppes à horizon 5 ans. De ce fait, il sera utilisé (dans le cadre du modèle synchrone et du modèle dynamique) sur les enveloppes d'investissements à horizon 5 ans, résultant pour rappel de la somme des enveloppes à 1 an et des enveloppes sur les années 2 à 5.

## 5.6 Résultats de la modélisation et réajustement du modèle synchrone

### 5.6.1 Validation de l'implémentation technique

Afin de vérifier la bonne implémentation technique des modèles d'optimisation synchrone et dynamique, un test instinctif de validation a été mené. Celui-ci consiste, pour chacun des 2 modèles testés, à calculer les différentes métriques (rentabilité, richesse, risque) selon une certaine enveloppe d'investissements à 5 ans donnée, et à vérifier que ces métriques sont strictement les mêmes que celles données par le modèle de référence.

Pour ce faire, on injecte d'une part une enveloppe d'investissements à horizon 5 ans dans le modèle de référence (par exemple 1 Md€ en actions et 2 Md€ en taux fixe, et 0€ partout ailleurs). Cette enveloppe est alors répartie linéairement sur la période de projection. En parallèle, on injecte dans les modèles synchrone et dynamique une enveloppe d'investissements égale à 1/5ème de l'enveloppe à 5 ans en année 1 et 4/5ème de l'enveloppe à 5 ans sur le reste de la projection (soit, dans notre exemple, une enveloppe de 200 M€ d'actions et 400 M€ de taux fixe en année 1 et des enveloppes respectives de 800 M€ et 1,6 Md€ sur les 4 années suivantes). Les métriques de rentabilité, de risque et de richesse en sortie des 3 modèles devraient donc être les mêmes en tout point. L'inverse signifierait qu'une ou plusieurs fonctions ont été mal codées.

Une batterie de tests a ainsi été menée sur diverses allocations, basées tantôt sur les contraintes d'enveloppes inférieures, supérieures, tantôt sur des allocations comprises entre ces contraintes, ou encore sur des allocations qui dépassaient ces contraintes, et enfin sur des allocations alliant ces différentes stratégies. Toutes ces allocations ont alors donné les mêmes résultats en termes de *ROE*, *BFP*, capital économique, ou encore

écart à la cible.

L'implémentation technique des modèles étant de ce fait validée, les simulations ont pu être lancées.

### 5.6.2 Modèle de référence

Ci-après sont rappelés les choix d'affichage des résultats déjà évoqués en partie 4.4 :

1. Pour des problématiques de confidentialité des données, les niveaux de rentabilité, de probabilité d'écart à la cible négatif, ou les différents montants évoqués dans les tableaux à suivre seront anonymisés par des inconnues. Toutefois, dans le but de comparer les modèles entre eux, seules les informations du modèle de référence seront anonymisées par des inconnues, et celles des modèles testés seront comparées par rapport aux inconnues du modèle de référence.
2. Toujours en raison de la confidentialité des données, les différents graphiques ne présenteront pas d'échelle pour ne pas permettre d'avoir le montant exact des enveloppes optimales. Toutefois, le lecteur pourra s'appuyer sur des barres en arrière-plan pour pouvoir comparer les allocations entre elles, de façon proportionnelle. Des repères sur le nombre de barres sont affichés à la place de l'axe vertical.

L'espacement entre ces barres sont les mêmes entre tous les graphiques d'allocations d'actifs à suivre, afin de pouvoir facilement comparer les allocations en termes proportionnels. Autrement dit, le montant que représente l'espacement entre deux barres du graphique d'allocation à horizon 1 an est le même que le montant que représente l'espacement entre deux barres du graphique d'allocation à horizon 5 ans : seule l'échelle d'affichage diffère ! Il s'agira du même principe pour les graphiques d'allocation de *RWA*. A noter toutefois : l'espacement entre les barres des graphiques des classes d'actifs et l'espacement entre les barres des graphiques de *RWA* ne représentent pas le même montant, pour des raisons d'échelle principalement.

3. Enfin, la gouvernance a souhaité que le lien entre les allocations et les différentes classes d'actifs et filiales financières régulées ne puisse pas être identifiable distinctement. Pour pallier à cette problématique :
  - Les classes d'actifs de la partie 2.1 ont été classées par ordre décroissant de niveau de risque, et leurs noms ont été anonymisés : La classe "actif 1" est donc la classe d'actifs la plus risquée, et la classe "actif 7" est la moins risquée.
  - Les noms des filiales financières régulées (ffr) ont été anonymisés (ffr 1 / ffr 2 / ffr 3) pour ne pas permettre d'établir un lien direct.

Les allocations en sortie du modèle de référence seront dévoilées dans les graphiques des sous-chapitres suivants lors de la comparaison des différents modèles entre eux. Seront uniquement exposées ici les métriques comparatives évoquées en partie 5.4, pour le modèle de référence :

Temps de calcul	23mn20
Convergence de l'algorithme	44%
Variabilité des résultats	La variabilité des résultats est relativement importante, surtout sur les enveloppes de la classe Actions
Facilité de paramétrage par la gouvernance	Méthodologie inchangée par rapport à l'existant. La gouvernance est donc habituée à l'exercice.
Interprétation et réponse au besoin métier	La méthodologie ne répond pas au besoin métier

FIGURE 17 – Synthèse des métriques comparatives pour le modèle de référence

### 5.6.3 Modèle synchrone

Le modèle synchrone a été testé, et l'allocation optimale en sortie du modèle est présentée ci-dessous :

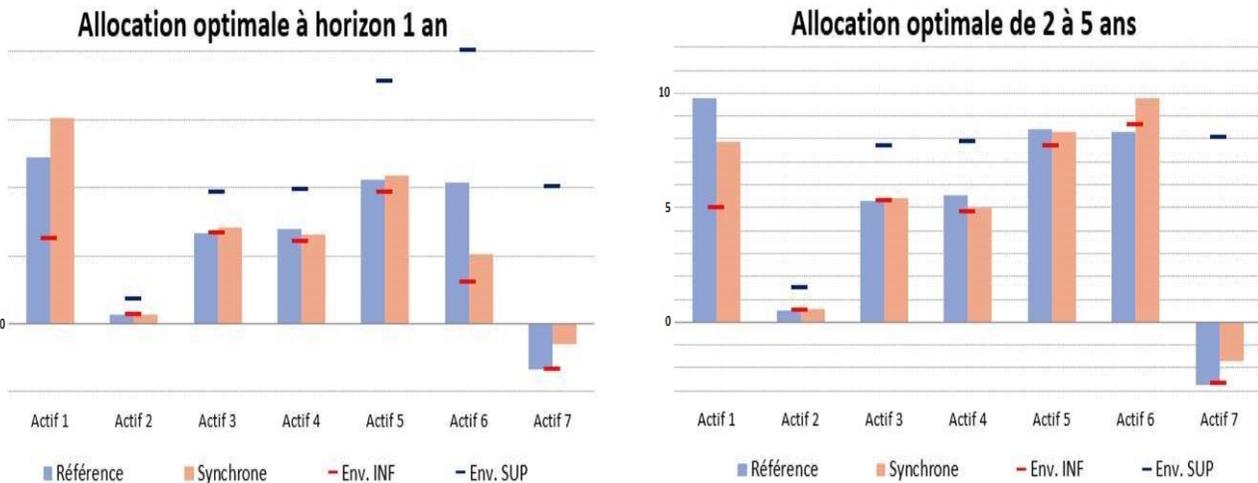


FIGURE 18 – Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle synchrone et modèle de référence

Le lecteur notera que l'allocation de l'actif 6 sur la 2ème période de projection pour le modèle de référence semble plus faible que la contrainte d'enveloppe inférieure. Il s'agit là d'un biais d'affichage : les contraintes d'enveloppes minimales affichées sont celles du modèle synchrone. Comme ces contraintes ont été recalibrées sur les données prévues pour la 2ème période de projection, il est donc possible que cette contrainte soit plus grande que 4/5ème des contraintes à 5 ans. Or l'allocation du modèle de référence correspondant à 4/5ème des enveloppes optimales à 5 ans, on se retrouve ainsi dans ce cas de figure.

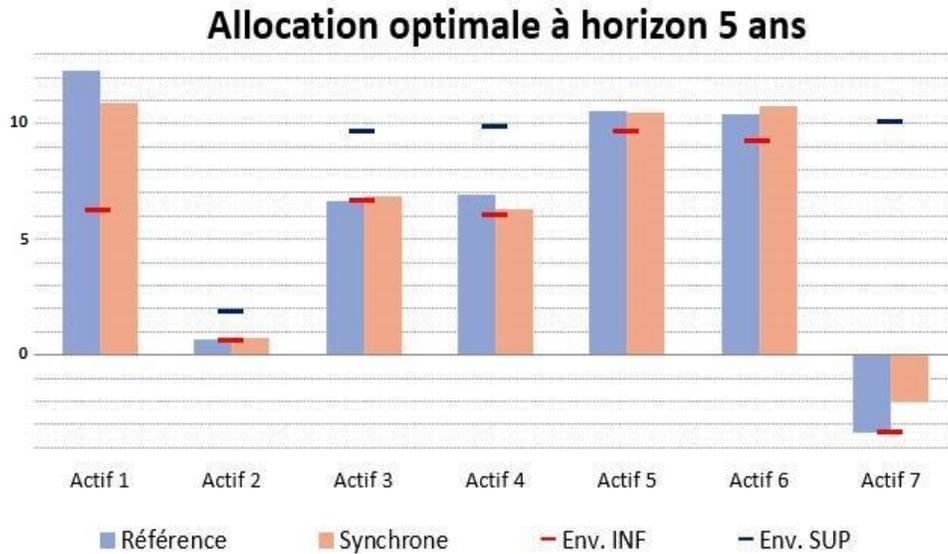


FIGURE 19 – Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle synchrone et modèle de référence

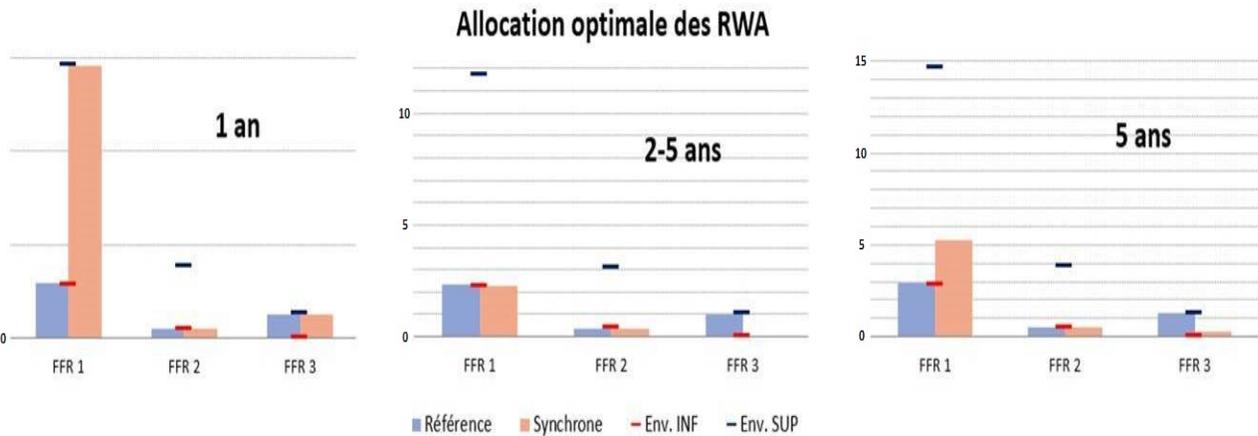


FIGURE 20 – Allocations optimales des RWA : modèle synchrone et modèle de référence

La première remarque sur cette allocation vient d’une augmentation marquée de l’enveloppe des RWA de la filiale financière régulée n° 1. Les RWA n’évoluant pas en fonction des scénarios économiques, ils sont relativement soumis aux taux de rentabilité qu’on leur attribue en *input*. Si ce taux de rentabilité est suffisamment élevé, la filiale financière pourra se voir attribuer une allocation optimale de RWA supplémentaires plus importante que la contrainte minimale. Dans le cas où le taux de rentabilité serait trop faible, l’allocation d’un RWA supplémentaire pourrait générer plus de besoins en fonds propres que de rentabilité, auquel cas l’algorithme d’optimisation n’allouera qu’une enveloppe proche de la contrainte inférieure. C’est le cas par exemple de la filiale régulée n° 2.

Cet investissement supplémentaire de *RWA* en 1ère année dans le modèle synchrone va donc générer des revenus plus importants sur toute la période de projection. En contrepartie, les *RWA* étant de gros consommateurs de BFP, l'allocation portant uniquement sur les classes d'actifs sera légèrement plus sécurisée, ce qui s'observe par une diminution de la poche Actions à horizon 5 ans par rapport au modèle de référence. Toutefois, on observe malgré tout une augmentation de l'investissement en actions la première année (mais un investissement moindre sur la fin de la projection), ce qui lui permet de bénéficier des scénarios haussiers du GSE.

Cette allocation permet ainsi d'augmenter la rentabilité annualisée moyenne sur les 5 années de projection. Cela est principalement dû aux interactions évoquées ci-dessus, permises par la possibilité qu'on offre au modèle de gérer ses investissements en 2 temps. En outre, l'écart à la cible moyen (ainsi que la distribution de l'écart à la cible) en fin de projection sont très similaires :

	Modèle de référence	Modèle synchrone
ROE annualisé moyen sur 5 ans	x%	x+0,07%
Écart à la cible moyen à 5 ans	y Md€	y-0.03 Md€

Un autre point fort de cette méthodologie concerne la variabilité des enveloppes en sortie du modèle synchrone :

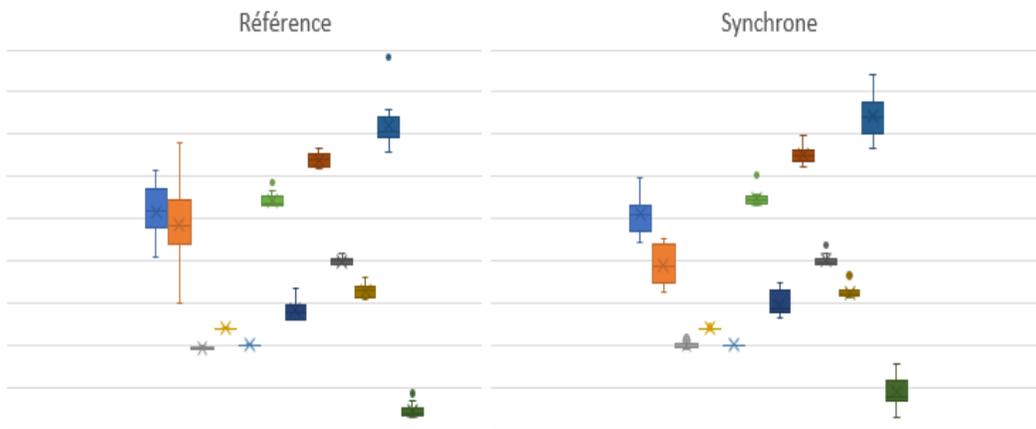


FIGURE 21 – Variabilité des enveloppes en sortie du modèle : Référence VS synchrone

On observe une plus faible variabilité sur les allocations optimales en sortie du modèle synchrone sur la poche Actions (les 2 boîtes à moustache les plus à gauche<sup>1</sup>, les enveloppes étant pour rappel distinguées entre vision sociale et consolidée), ce qui laisse à penser que l'optimum en sortie pourrait être "global".

Cependant, en laissant la possibilité au modèle d'investir différemment sur les 2 périodes de projection, ce dernier va profiter de cette liberté supplémentaire pour prendre plus de risque sur une ou plusieurs périodes (la première année de projection dans le cas présent) et ainsi augmenter la rentabilité, tout en ne restant

1. Les enveloppes ne sont pas ici triées par ordre de risque décroissant

soumis qu'à une contrainte d'appétence au risque uniquement en fin de projection.

Cette prise de risque supplémentaire s'observe concrètement lorsqu'on reconstruit les métriques à horizon 1 an ...

	Modèle de référence	Modèle synchrone
ROE moyen sur 1 an	x%	x+0,15%
Écart à la cible moyen à horizon 1 an	y Md€	y-1 Md€
P(EC<0) à horizon 1 an	z %	z+11%

... ainsi qu'en observant la distribution de l'écart à la cible à horizon 1 an selon les scénarios économiques :

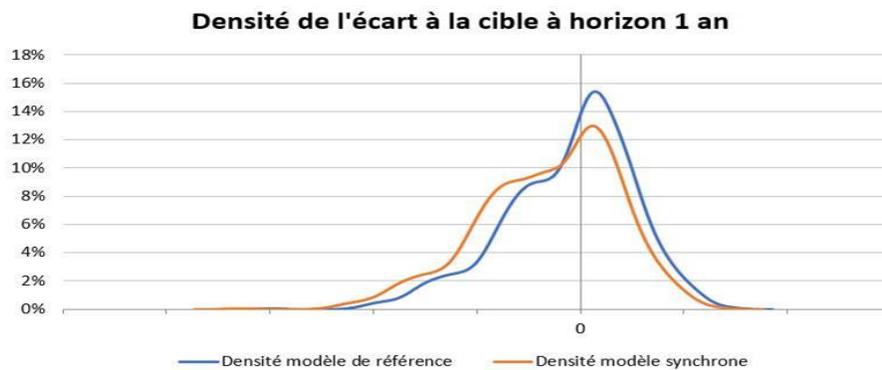


FIGURE 22 – Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an : modèle synchrone et modèle de référence

On observe très clairement l'aplatissement de la distribution et l'épaississement de la queue de distribution des pertes.

Cette observation soulève la question de la non maîtrise du risque en 1ère année de projection. Tout comme dans le modèle de référence, il n'est pas possible de maîtriser le profil de risque que procurent les enveloppes de productions nouvelles en cours de projection, et probablement encore moins en déclinant les enveloppes d'investissements à horizon 1 an ce qui autorise le modèle à "abuser de ses libertés" en quelque sorte. Un nouvel algorithme d'optimisation sera donc défini dans le sous-chapitre suivant : celui-ci sera inspiré du modèle présent avec une optimisation synchrone des enveloppes à horizon 1 an et des enveloppes sur le reste de la projection. Sauf qu'en plus de cela, ce nouveau modèle intégrera des contraintes à horizon 1 an pour permettre de maîtriser le profil de risque en cours de projection.

Ci-après sont exposées les métriques comparatives du modèle présent et du modèle de référence :

	Référence	Synchrone
Temps de calcul	23mn20	23 minutes 15 secondes en moyenne
Convergence de l'algorithme	44%	71%
Variabilité des résultats	Enveloppes : relativement importante (Actions)	- Enveloppes : Augmente légèrement sur la poche taux mais baisse sensiblement sur la poche actions - Ecart à la cible 1 an : Aplatissement de la distribution Ecart à la cible 5 ans : Similaire
Facilité de paramétrage par la gouvernance	Identique au réalisé	- Méthodologie de fixation de l'appétence au risque à 5 ans identique - Nécessite de valider une augmentation de la taille de bilan en année 1 (exercice nouveau)
Interprétation et réponse au besoin métier	Mauvaise réponse au besoin métier	- La méthodologie répond pleinement au besoin métier - Le risque en année 1 n'est pas contrôlable par le métier et est à la main libre de l'algorithme.

FIGURE 23 – Synthèse des métriques comparatives pour le modèle synchrone

Ces métriques rendent compte du fait que les 2 algorithmes ont un temps de calcul globalement égal. Toutefois, le fait que le modèle synchrone prenne plus de risque en cours de projection permet à l'algorithme de converger plus facilement vers un optimum, ce qui épargnerait du temps de calcul lors des productions futures en réduisant le nombre de simulations non-convergentes qui prennent par définition plus de temps à se terminer (le critère d'arrêt sur la vitesse moyenne n'étant pas atteint, c'est le critère d'arrêt du nombre de simulations qui sera déclencheur de l'arrêt de l'algorithme).

De même, cet algorithme synchrone permet de répondre au besoin métier, sans lui permettre toutefois de maîtriser la prise de risque supplémentaire lors de la première année de projection. La gouvernance n'aurait quant à elle qu'à valider l'augmentation de la taille de bilan souhaitée sur la 1ère année, ce qui représente quand même un exercice nouveau pour elle. La fixation de l'appétence au risque à horizon 5 ans serait quand à elle inchangée par rapport à l'exercice qu'elle a l'habitude de réaliser. Il apparaît cependant inconcevable de proposer à la gouvernance un algorithme permettant de distinguer les enveloppes d'investissements en cours de projection sans en maîtriser le profil de risque.

#### 5.6.4 Modèle synchrone contraint

Comme évoqué dans la partie précédente, on introduit ici un modèle s'inspirant du modèle synchrone mais permettant de maîtriser la prise de risque lors de la première année de projection afin d'être en mesure d'en contrôler le profil de risque. On intègre de ce fait des contraintes à horizon 1 an de la même façon que ce qui est réalisé dans le modèle dynamique, mais sans toutefois maximiser le *ROE* sur un an. Le problème d'optimisation est alors modifié de la sorte :

$$\begin{aligned}
 \text{max} \quad & \mathbb{E} [ROE_s(\omega) \text{ sur 5 ans}] \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega) \text{ à 1 an} < 0) \leq \alpha_1 \\
 & \mathbb{P}(\text{Ecart à la cible}_s(\omega) \text{ à 5 ans} < 0) \leq \alpha_5 \\
 & C_{\min_{i,1an}} \leq \omega_{i,1an} \leq C_{\max_{i,1an}} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\
 & C_{\min_{i,2-5ans}} \leq \omega_{i,2-5ans} \leq C_{\max_{i,2-5ans}} \quad \forall i \in \{1, \dots, 15\} \\
 & \sum_{i=1}^{12} \omega_{i,1an} = \text{Augmentation de la taille de bilan sur 1 an} \\
 & \sum_{i=1}^{12} \omega_{i,2-5ans} = \text{Augmentation de la taille de bilan entre les années 2 et 5}
 \end{aligned}$$

La probabilité d'écart à la cible à horizon 1 an a été fixée comme celle à horizon 5 ans, conformément à l'hypothèse retenue pour le modèle dynamique. Des sensibilités seront réalisées dans la partie 5.7.1 pour étudier les impacts de probabilités d'écart à la cible plus restrictives.

L'allocation en sortie du modèle est la suivante :

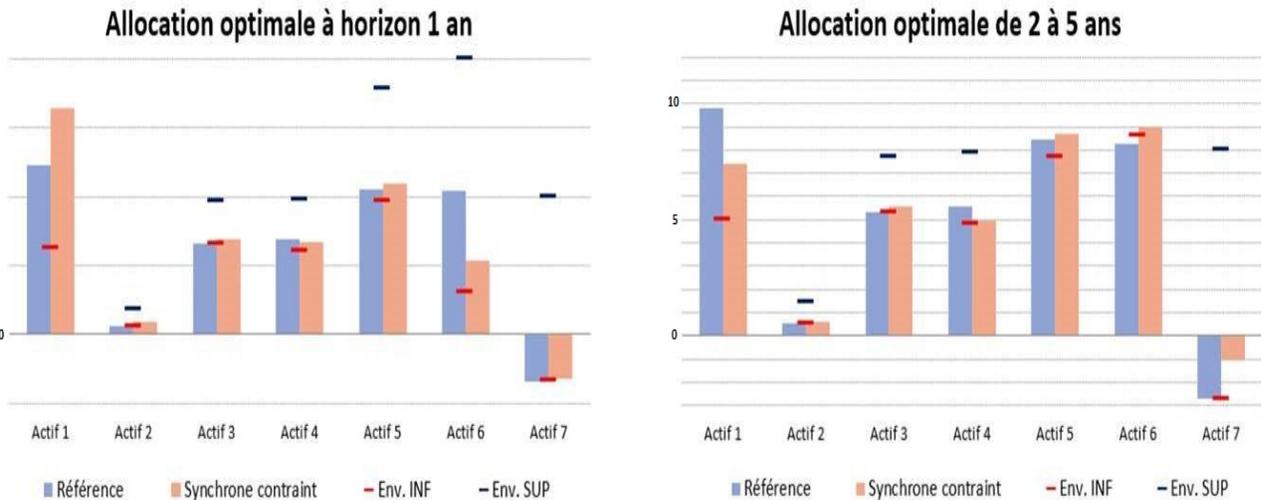


FIGURE 24 – Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle synchrone contraint et modèle de référence

### Allocation optimale à horizon 5 ans

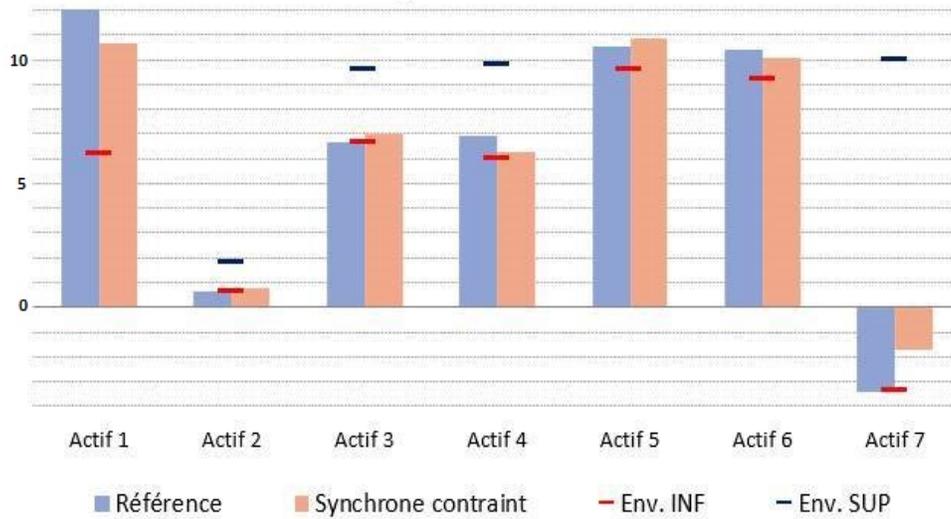


FIGURE 25 – Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle synchrone contraint et modèle de référence

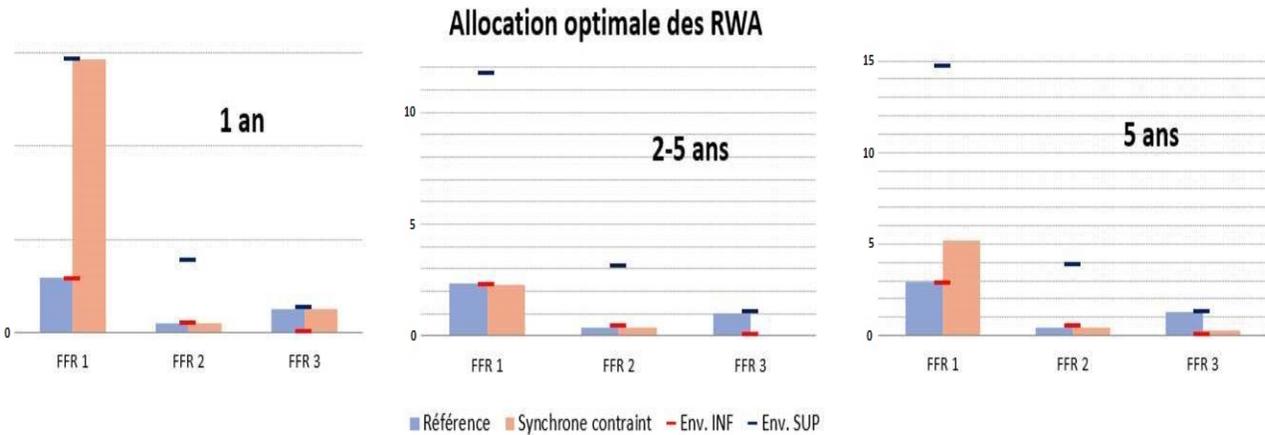


FIGURE 26 – Allocations optimales des RWA : modèle synchrone contraint et modèle de référence

On observe globalement les mêmes résultats que dans la partie précédente, ce qui est dû au fait que l'appétence au risque à 1 an reste relativement élevée (ce qui sera pour rappel *challenge* dans le sous-chapitre lié aux sensibilités) :

	Modèle de référence	Modèle synchrone contraint
ROE annualisé moyen sur 5 ans	$x\%$	$x+0,07\%$
Écart à la cible moyen à 5 ans	$y$ Md€	$y-0.04$ Md€
ROE moyen sur 1 an	$z\%$	$z+0,16\%$
Écart à la cible moyen à horizon 1 an	$\beta$ Md€	$\beta-1$ Md€
$P(EC<0)$ à horizon 1 an	$\alpha'$ %	$\alpha'+12\%$

La variabilité des allocations optimales en sortie de l'algorithme sont également semblables suite à la modification apportée à l'algorithme, ce qui reste encourageant :

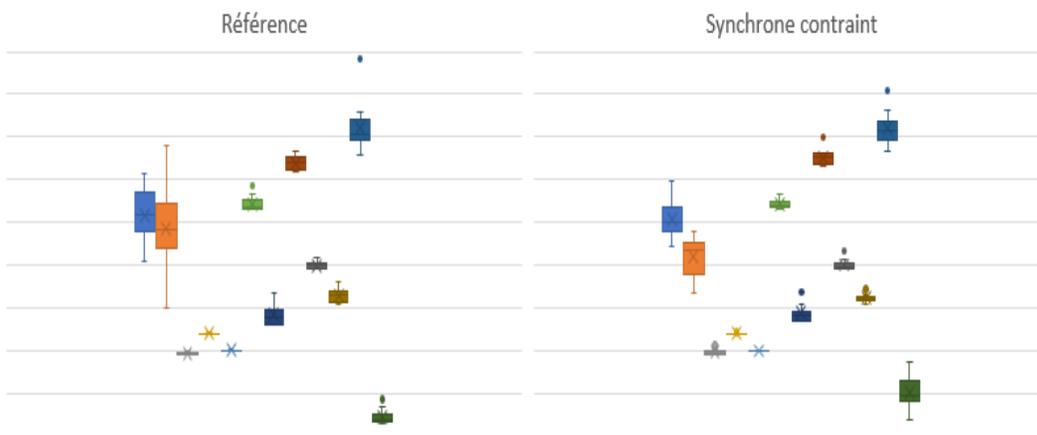


FIGURE 27 – Variabilité des allocations optimales en sortie des modèles de référence et synchrone contraint

Des différences majeures sont cependant observées avec le modèle précédent lorsqu'on s'intéresse aux métriques comparatives :

	Référence	Synchrone contraint
Temps de calcul	23mn20	34 minutes 45 secondes en moyenne
Convergence de l'algorithme	44%	94%
Variabilité des résultats	Enveloppes : relativement importante (Actions)	- Enveloppes : Augmente légèrement sur la poche taux mais baisse sensiblement sur la poche actions - Ecart à la cible 1 an : Aplatissement de la distribution - Ecart à la cible 5 ans : Similaire
Facilité de paramétrage par la gouvernance	Identique au réalisé	- Méthodologie de fixation de l'appétence au risque à 5 ans identique - Fixation de l'appétence au risque à horizon 1 an (exercice nouveau) - Nécessite de valider une augmentation de la taille de bilan en année 1 (exercice nouveau)
Interprétation et réponse au besoin métier	Mauvaise réponse au besoin métier	- La méthodologie répond pleinement au besoin métier - Permet de contrôler le risque en cours de projection par le métier

FIGURE 28 – Synthèse des métriques comparatives pour le modèle synchrone

S'agissant du temps de calcul moyen, celui-ci augmente d'environ 50%. Cela s'explique par le fait que, lors de l'optimisation, chaque particule est amenée à calculer les différentes métriques permettant de vérifier la

validité des contraintes (Besoins en fonds propres, capital économique) à horizon 1 an, ce qui n'avait pas lieu jusqu'alors. Cependant, l'assurance de vérifier la contrainte de risque à horizon 1 an permet en contrepartie à l'algorithme de converger avec plus de facilité.

Bien que ce type de modèle réponde de façon très satisfaisante au besoin métier en déclinant les enveloppes d'investissements à horizon 1 an et en permettant par la même occasion de maîtriser le profil de risque en cours de projection, ce modèle va nécessiter que la gouvernance s'engage encore un peu plus sur l'exercice ASM en fixant un niveau d'appétence au risque à horizon 1 an, ce qui représentera un nouvel exercice pour elle.

### 5.6.5 Modèle Dynamique

En ce qui concerne l'algorithme d'optimisation dynamique, ce dernier renvoie en sortie de modèle une allocation relativement proche des allocations renvoyées par les 2 précédents modèles sur la première année de projection, mais bien plus sécurisée sur la deuxième période de projection :

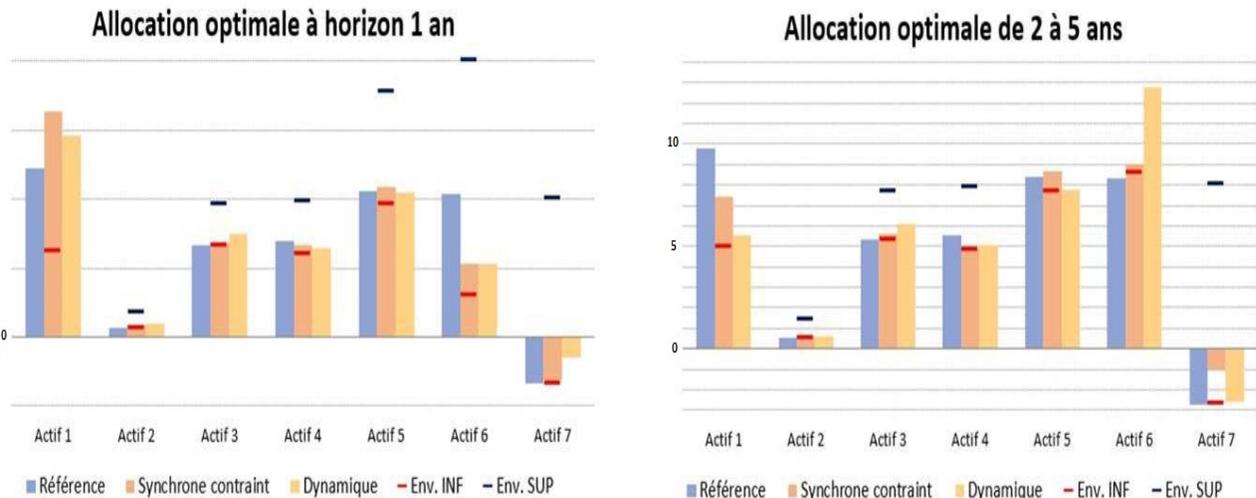


FIGURE 29 – Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique

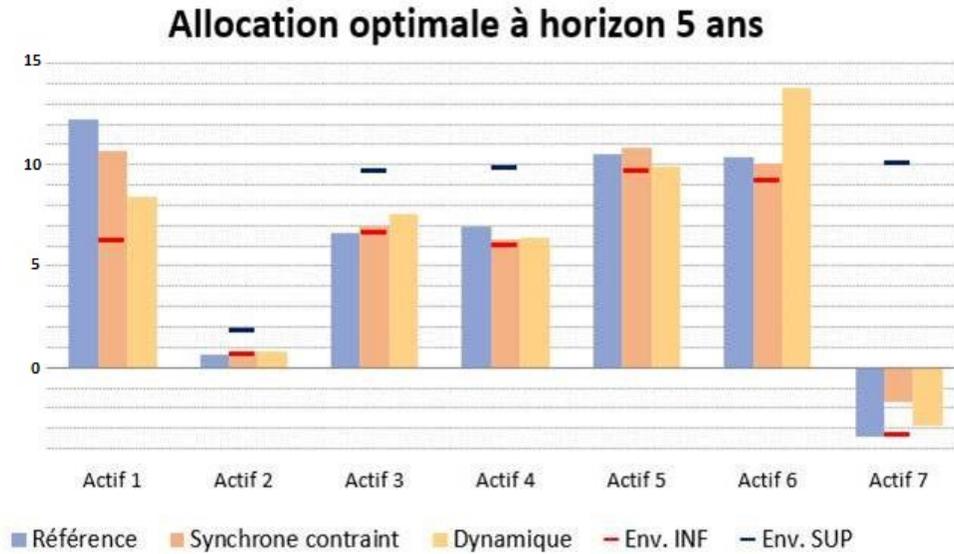


FIGURE 30 – Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique

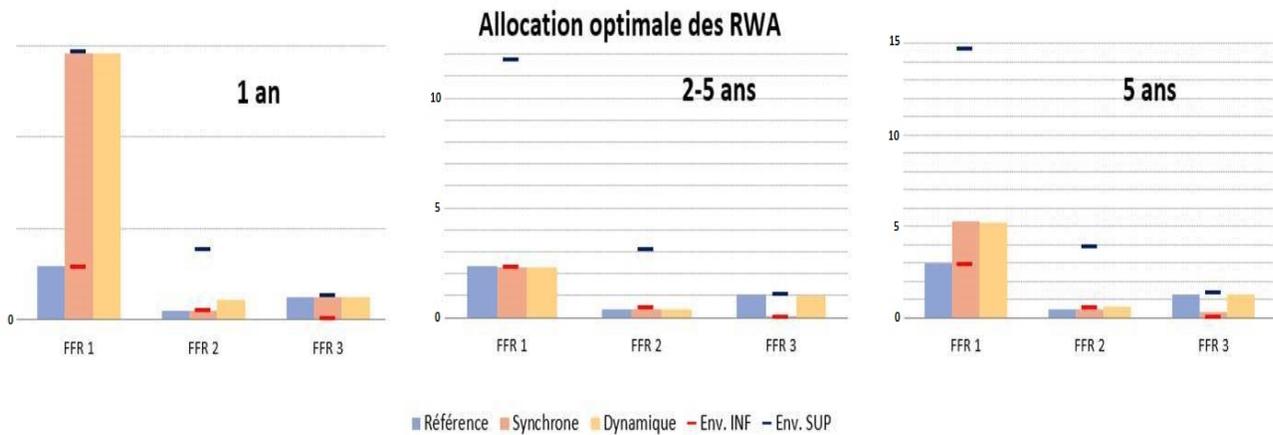


FIGURE 31 – Allocations optimales des RWA : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique

De la même manière que les modèles précédemment testés, la prise de risque supplémentaire en 1ère année de projection entraîne une déformation de la distribution de l'écart à la cible en année 1 :

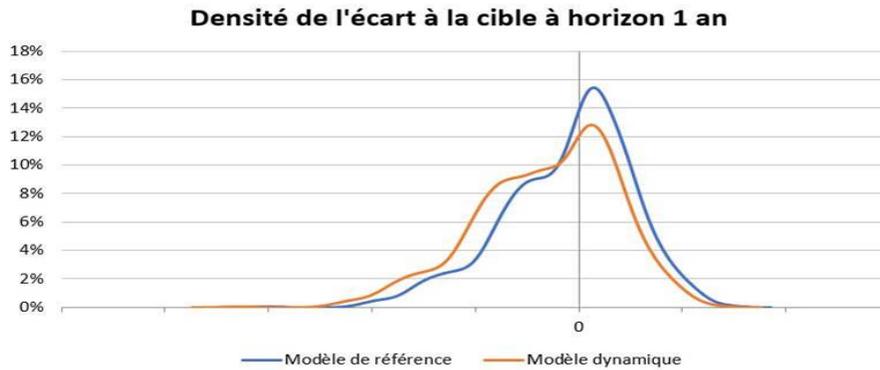


FIGURE 32 – Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an : modèle dynamique et modèle de référence mais très peu en fin de projection :

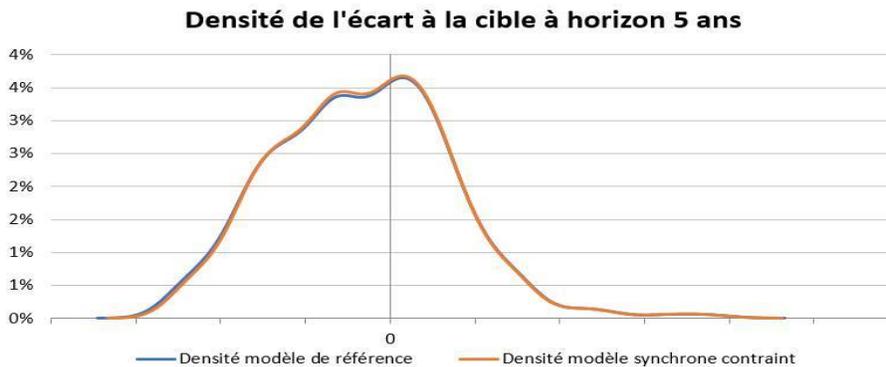


FIGURE 33 – Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans : modèle dynamique et modèle de référence

L'optimisation des rentabilités économiques à 1 an et 5 ans ont un impact clair sur les métriques en sortie qui sont les plus hautes sur les différents modèles évoqués :

	Modèle de référence	Modèle dynamique
ROE annualisé moyen sur 5 ans	$x\%$	$x+0,09\%$
ROE moyen sur 1 an	$y\%$	$y+0,16\%$
Écart à la cible moyen à 5 ans	$z$ Md€	$z+0.1$ Md€
Écart à la cible moyen à horizon 1 an	$\beta$ Md€	$\beta-1$ Md€
$P(EC<0)$ à horizon 1 an	$\alpha'$ %	$\alpha'+12\%$

Malgré la maximisation de la rentabilité légèrement plus importante que les autres modèles, des difficultés viennent nuancer la bonne première impression donnée par le modèle :

	Référence	Synchrone contraint	Dynamique
Temps de calcul	23mn20	34mn45	36 minutes 20 secondes en moyenne
Convergence de l'algorithme	44%	94%	16%
Variabilité des résultats	Enveloppes : relativement importante (Actions)	- Enveloppes : Moins variables - Distribution EC 1 an plus aplatie - EC 5 ans similaire	- Enveloppes : Non étudié compte tenu du nombre de simulations ayant effectivement convergé - Ecart à la cible 1 an : Aplatissement de la distribution - Ecart à la cible 5 ans : Similaire
Facilité de paramétrage par la gouvernance	Identique au réalisé	- APR 5 ans identique - APR 1 an à déterminer (nouveau) - Taille de bilan 1 an à valider (nouveau)	- Méthodologie de fixation de l'appétence au risque à 5 ans identique - Fixation de l'appétence au risque à horizon 1 an (exercice nouveau) - Nécessite de valider une augmentation de la taille de bilan en année 1 (exercice nouveau)
Interprétation et réponse au besoin métier	Mauvaise réponse au besoin métier	- Réponse pertinente - Contrôle du risque à 1 an par le métier	- La méthodologie répond pleinement au besoin métier (meilleure rentabilité en prime) - Permet de contrôler le risque en cours de projection par le métier - Méthodologie s'éloigne du concept premier de l'ASM

FIGURE 34 – Synthèse des métriques comparatives pour le modèle dynamique

D'une part, le temps de calcul moyen augmente nettement à l'image du modèle synchrone contraint et pour la même raison que ce dernier : la duplication des contraintes à horizon 1 an augmente le temps de calcul de quelques secondes pour une particule, mais compte tenu du nombre de particules et du caractère itératif du processus, ces secondes se transforment en minutes.

Problématique plus importante encore : Cet algorithme d'optimisation modifie légèrement la vision de l'exercice ASM (qui est d'optimiser la rentabilité à horizon 5 ans) en maximisant dans un premier lieu la rentabilité à 1 an, puis en la maximisant à horizon 5 ans. De ce fait, si les enveloppes d'investissements optimales obtenues à 1 an sont trop contraignantes, alors l'algorithme pourra possiblement ne pas réussir à contre-balancer cette prise de risque excessive en année 1 sur le reste de la projection. C'est ce qui s'est passé lors des différentes simulations réalisées avec ce type d'algorithme. Les simulations en année 1 étant trop risquées, l'algorithme n'a finalement pas convergé sur le reste de la projection, générant ainsi un faible taux de convergence comme affiché dans les métriques comparatives.

Enfin, tout comme le modèle synchrone contraint, ce modèle dynamique va demander de la pédagogie de la part de la gouvernance pour fixer une nouvelle probabilité d'appétence au risque à horizon 1 an. En contrepartie, ce type d'algorithme apporte une réponse idéale au besoin métier tout en permettant de contrôler son profil de risque en cours de projection.

### 5.6.6 Synthèse et appréciation des différents modèles d'optimisation testés pour la déclinaison à 1 an des investissements

Les différents modèles d'optimisation testés convergent globalement sur le type de stratégie d'investissements à adopter : Prendre plus de risques la 1ère année en investissant davantage sur les classes d'actifs risquées, et en augmentant le niveau supplémentaire de *RWA* sur le périmètre filiales financières régulées. Les *RWA* étant pour rappel de gros consommateurs de BFP, cette prise de risque en 1ère année de projection entraîne globalement une dégradation de l'écart à la cible moyen à horizon 1 an ainsi que de sa distribution selon les scénarios économiques modélisés, par rapport au modèle de référence où l'investissement est linéaire sur la projection. Les différents modèles prévoient toutefois une reprise sur la fin de la projection ce qui ramène les métriques en fin de projection à leurs niveaux modélisés dans le modèle de référence.

Ainsi, l'appréciation de ces modèles ne saurait se faire sur les allocations données en sortie. Il faut plutôt

les comparer au regard des différentes métriques comparatives établies en partie 5.4.

Le modèle synchrone a l'avantage technique de permettre une répartition des enveloppes d'investissements en 2 temps, ce qui lui permet d'augmenter le niveau de rentabilité sur la projection. Le temps de calcul moyen reste similaire au modèle de référence, ce qui est appréciable. Toutefois, la gouvernance ne pourra pas accepter la non-maîtrise des interactions que présente cet algorithme en ne permettant pas de contrôler le niveau de risque sur la 1ère année de projection. Ce modèle, bien que prometteur, ne sera donc pas présenté à la gouvernance.

On lui préférera le modèle synchrone contraint, son double qui présente quant à lui la possibilité de définir l'appétence au risque supportable lors de la 1ère année de projection. Cette maîtrise du profil de risque se fait au sacrifice du temps de calcul moyen qui augmente grossièrement de 50%. Il s'agit toutefois de son seul "défaut" véritable. Cet algorithme assure un très bon taux de convergence, dans un temps certes augmenté mais qui reste acceptable avec du recul. Cette réponse répondrait convenablement au besoin métier et, bien que la gouvernance devra fixer un niveau d'appétence au risque supplémentaire, elle pourra s'appuyer sur des calculs de sensibilités sur l'appétence au risque pour pouvoir se décider. Enfin, la variabilité en sortie d'algorithme paraît à première vue mieux maîtrisée qu'elle ne l'était dans le modèle de référence s'agissant de la variabilité des allocations d'actifs, notamment sur la poche actions.

Enfin, le modèle dynamique présente la meilleure réponse qui puisse être apportée au besoin métier, en permettant de contrôler son niveau de risque à 1 an et à 5 ans, ainsi qu'en présentant les meilleures métriques de rentabilité économique parmi les modèles testés, à quelques bps près. Toutefois, ces quelques bps de rentabilité supplémentaire ne sauraient justifier le faible taux de convergence que présente l'algorithme. En effet, la convergence de ce dernier est fortement soumise aux enveloppes d'investissements optimales sur la 1ère année de projection qui peuvent provoquer la non-convergence finale de l'algorithme. Cela accroît fortement le risque opérationnel puisque rien ne peut garantir que l'algorithme convergera pendant la nuit où les simulations seront lancées, et cela peut mettre l'utilisateur en difficulté compte tenu des calendriers de production de plus en plus restreints.

Le modèle présentant le meilleur compromis semble donc être le modèle synchrone contraint.

Ce modèle va donc faire l'objet dans les sous-chapitres suivants de calcul de sensibilités afin d'étudier sa robustesse.

## 5.7 Sensibilités

### 5.7.1 Sensibilités sur l'appétence au risque à horizon 1 an comme aide à la décision

Il a été clairement évoqué que la gouvernance sera tenue de choisir, dans ce nouveau modèle d'optimisation synchrone des investissements à horizon 1 an et horizon 5ans avec contraintes de même horizon, un niveau d'appétence au risque à horizon 1 an. Cet exercice sera un exercice nouveau pour les membres de la gouvernance, puisqu'ils étaient habitués jusqu'alors à choisir uniquement un niveau d'appétence au risque à horizon 5 ans.

Pour les aider dans cette prise de décision, des sensibilités sont réalisées sur le niveau d'appétence au risque à horizon 1 an. On réalise de ce fait 3 sensibilités par rapport au modèle initial du même type qu'on

appellera "Référence" pour les sensibilités à venir. L'appétence au risque à un an initiale étant déjà relativement élevée (cette dernière étant égale à l'appétence au risque à horizon 5 ans elle-même relativement élevée par rapport aux exercices précédents à cause des hypothèses de projection peu favorables sur le rendement en capital notamment, effet de la crise COVID, au regard des expositions du Groupe CDC), on ne considérera que des sensibilités à la baisse : Baisse de 5%, 10% et 15% d'appétence au risque à horizon 1 an. A noter que la sensibilité de 15% représente le minimum de convergence : en dessous de ce niveau, le modèle ne réussit plus à converger vers une solution optimale.

On obtient alors les résultats suivants :

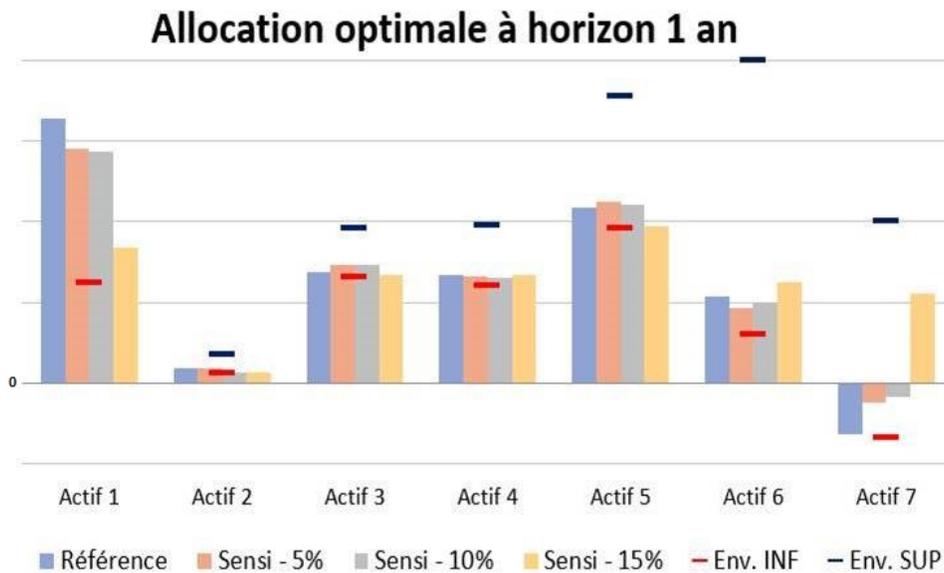


FIGURE 35 – Allocations optimales à horizon 1 an selon le niveau d'appétence au risque

### Allocation optimale de 2 à 5 ans

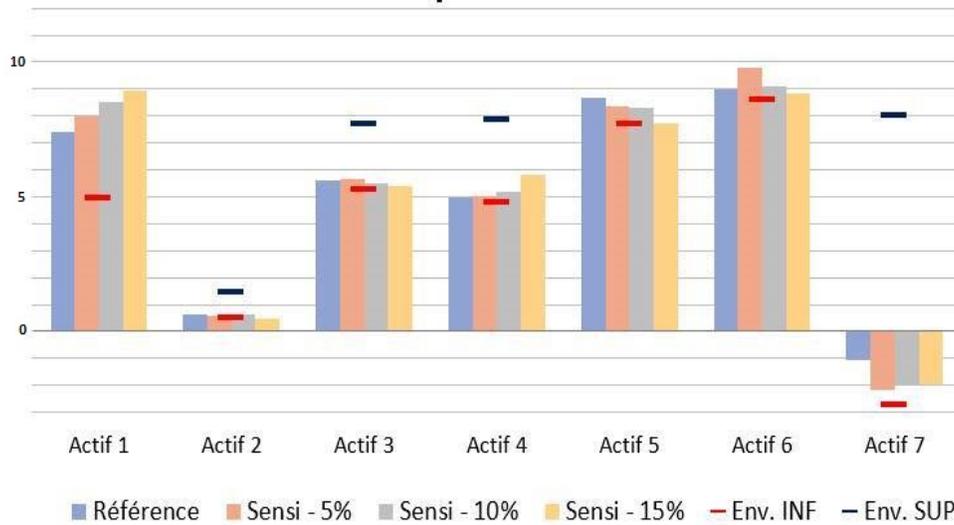


FIGURE 36 – Allocations optimales sur la période de projection de 2 à 5 ans selon le niveau d'appétence au risque

### Allocation optimale à horizon 5 ans

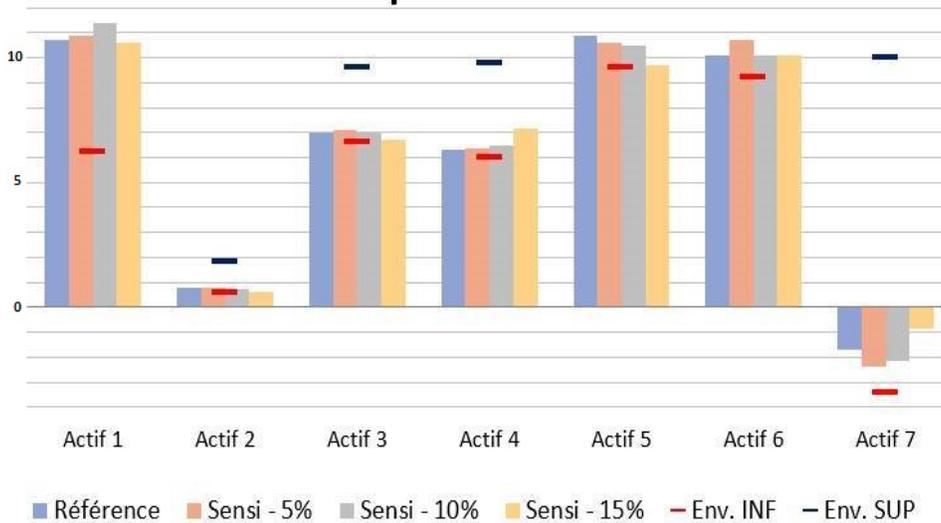


FIGURE 37 – Allocations optimales à horizon 5 ans selon le niveau d'appétence au risque

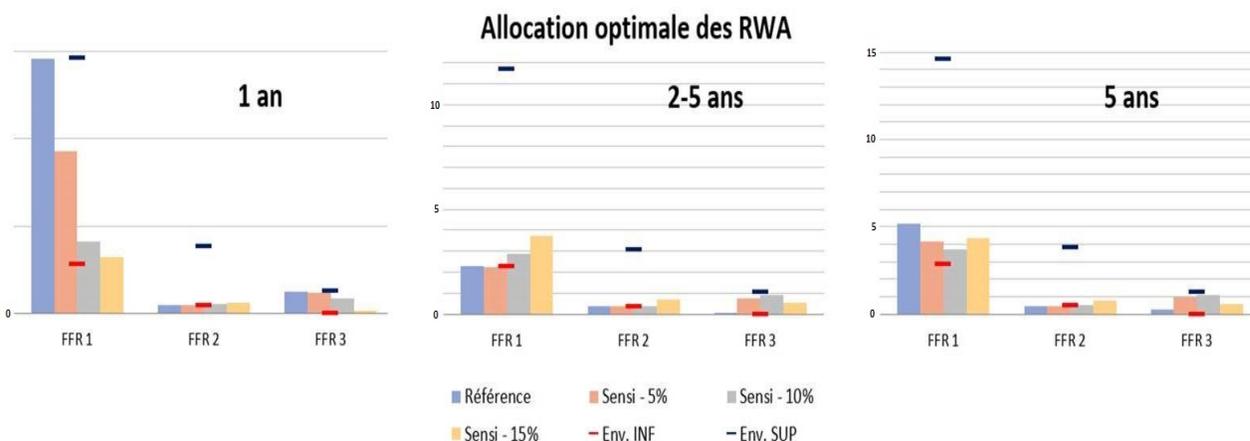


FIGURE 38 – Allocations de *RWA* optimales selon le niveau d'appétence au risque et la période de projection considérée

On constate sur ces graphiques que les enveloppes optimales à horizon 5 ans suivent globalement la même tendance d'investissements. Les différents écarts constatés sont relativement mineurs et proviennent de la variabilité de l'algorithme.

Les phénomènes intéressants sont liés aux enveloppes optimales en cours de projection. En effet, on remarque que plus l'appétence au risque à horizon 1 an est faible, plus l'allocation en sortie du modèle se veut sécurisée : les investissements sur les classes d'actifs les plus risquées décroissent, tout comme les allocations supplémentaires de *RWA* et à l'inverse des investissements sur les classes d'actifs moins risquées qui eux augmentent.

Parallèlement, plus l'écart entre l'appétence au risque à 1 an et l'appétence au risque à 5 ans se veut important, plus l'allocation optimale sur les années 2 à 5 qui en découle va vouloir rattraper le manque à gagner et devenir risquée en augmentant son investissement sur les classes d'actifs risquées ou les *RWA* au détriment des classes d'actifs plus sécurisées favorisées sur la première période de projection.

Les métriques en sortie restent cohérentes avec les allocations renvoyées :

	Modèle initial	APR - 5%	APR - 10%	APR - 15%
ROE annualisé moyen sur 5 ans	x%	x-0,03%	x-0,06%	x-0,11%
Écart à la cible moyen à 1 an	y Md€	y+0.5 Md€	y+0.9 Md€	y+1.3 Md€
Écart à la cible moyen à 5 ans	z Md€	z Md€	z-0.04 Md€	z Md€

En réduisant la probabilité d'écart à la cible négatif à horizon 1 an, la rentabilité économique moyenne sur les 5 années de projection serait donc réduite de quelques points de base mais permettrait d'augmenter sensiblement l'écart à la cible moyen à la fin de la 1ère année de projection sans pour autant changer l'écart à la cible moyen en fin de projection. Cet impact s'observe également sur la distribution de l'écart à la cible à horizon 1 an dont la queue de distribution des pertes s'amincit au fur et à mesure que l'appétence au risque diminue :

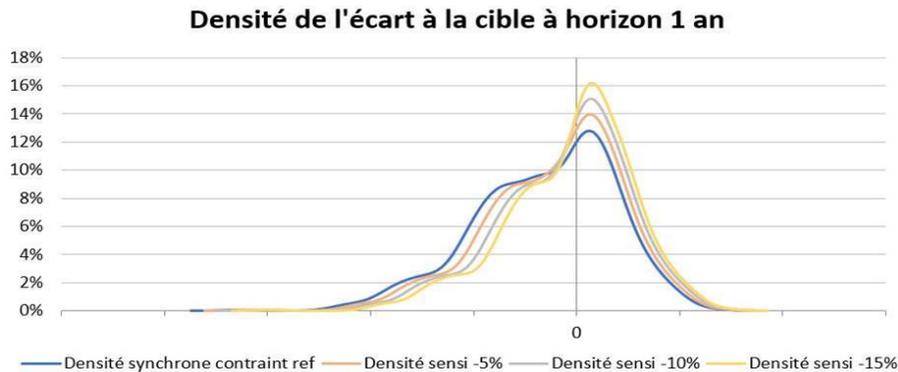


FIGURE 39 – Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an selon le niveau d'appétence au risque du même horizon

Ces sensibilités se révèlent essentielles pour la gouvernance puisqu'elles lui permettent d'obtenir une meilleure appréciation des trajectoires de solvabilité auxquelles elle pourra alors s'attendre sur l'année à venir compte tenu des hypothèses de projection et au regard du niveau de risque qu'elle souhaite porter.

### 5.7.2 Sensibilités sur l'appétence au risque à horizon 5 ans

Compte tenu du fait que ce nouveau modèle permet d'engendrer plus de rentabilité en cours de projection, une investigation a été menée sur si l'appétence au risque à horizon 5 ans pouvait être diminuée par rapport au modèle de référence. Pour rappel, l'appétence au risque à horizon 5 ans initialement choisie pour l'étude est le niveau d'appétence au risque minimal qui assurait la convergence du modèle de référence. On a donc testé, par tranche de 5% d'appétence au risque, la convergence de l'algorithme. Il s'est avéré que ce nouveau modèle permet de baisser, dans ce cas présent, l'appétence au risque à horizon 5 ans minimale de 5%.

Toutefois, ce nouveau modèle permettait de fixer, pour l'appétence au risque à horizon 5 ans initiale, une appétence au risque à horizon 1 an inférieure de 15% (comme vu dans la sensibilité précédente). En baissant la probabilité d'écart à la cible à horizon 5 ans de 5%, il n'est alors possible de baisser la probabilité d'écart à la cible à horizon 1 an qu'à 10% en dessous (par rapport à la probabilité initiale, soit 5% en dessous de la nouvelle appétence au risque à horizon 5 ans testée). Cela est lié au fait qu'une appétence au risque à horizon 1 an inférieure de 15% à l'initiale ne permettrait pas d'engranger assez de rentabilité sur la projection pour obtenir assez de scénarios d'écart à la cible positif en fin de projection.

L'allocation optimale en sortie du modèle se veut donc plus sécurisée en fin de trajectoire avec cette nouvelle appétence au risque :

### Allocation optimale à horizon 5 ans

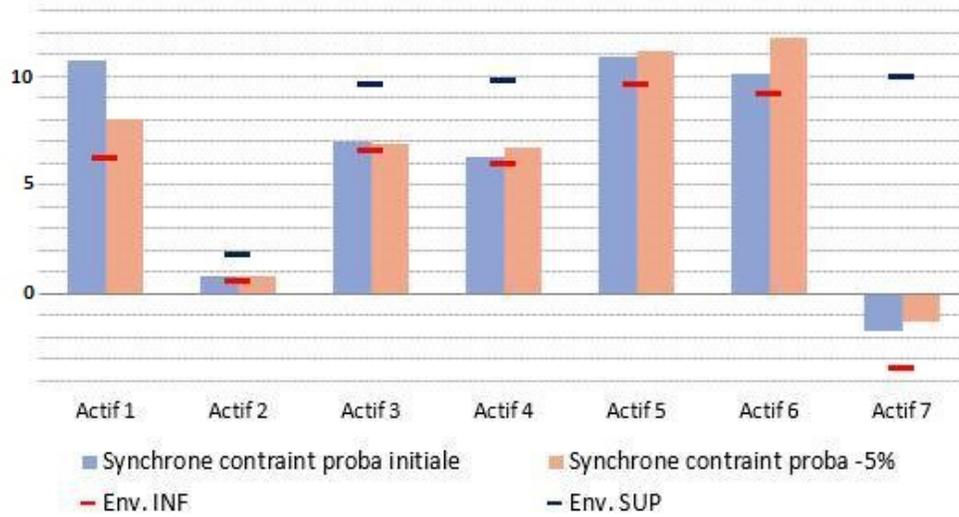


FIGURE 40 – Allocations optimales à horizon 5 ans du modèle synchrone contraint selon son appétence au risque à horizon 5 ans

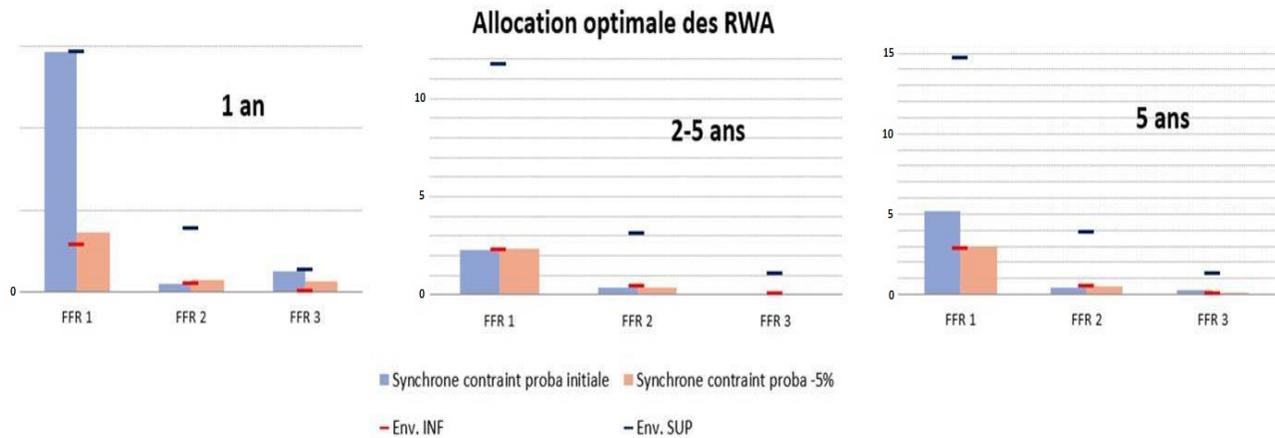


FIGURE 41 – Allocations optimales de RWA à horizon 5 ans du modèle synchrone contraint selon son appétence au risque à horizon 5 ans

On observe également une distribution à horizon 5 ans moins étendue sur les pertes :

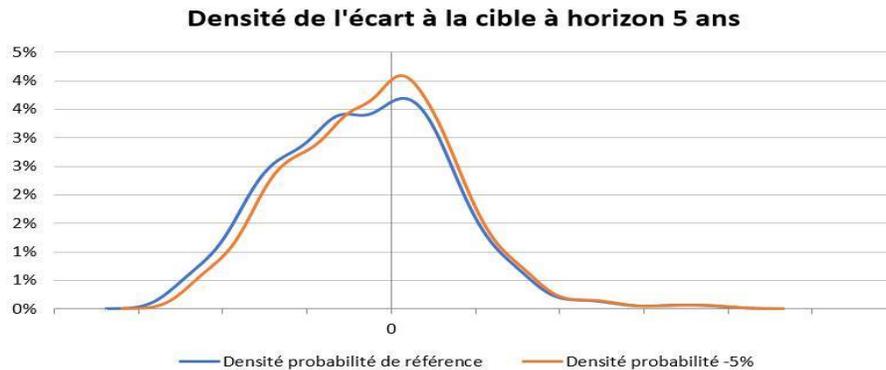


FIGURE 42 – Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans selon le niveau d'appétence au risque du même horizon

Ces résultats sont encourageants dans le sens où cette nouvelle méthodologie permettrait de baisser l'appétence au risque à horizon 5 ans par rapport au modèle de référence, ce qui peut s'avérer utile dans des périodes de tensions économiques et financières comme celle que nous traversons actuellement et où l'avenir est incertain. Il serait par exemple possible d'augmenter l'appétence au risque à horizon 1 an pour s'autoriser temporairement un écart à la cible moins confortable et aider l'économie française à se redresser (ce qui est le rôle contra-cyclique de la Caisse des Dépôts et Consignations) tout en réduisant l'appétence au risque à horizon 5 ans afin de revenir dans une situation de solvabilité plus solide.

### 5.7.3 Sensibilités sur le générateur de scénarios économiques

Les 2 générateurs de scénarios économiques et financiers respectivement utilisés pour la projection du bilan et pour le calcul des métriques de risque (dont la *VaR*) sont des éléments centraux de la modélisation.

Pour les besoins de l'optimisation, on considère pour rappel 1000 scénarios dans le GSE, et 1000 scénarios dans le GSF. Ce chiffre permet d'avoir un nombre relativement élevé de scénarios pour pouvoir rendre l'étude suffisamment fiable, mais pas trop important pour pouvoir obtenir une allocation optimale en sortie du modèle en un temps relativement acceptable.

Toutefois, si aucune optimisation n'est réalisée, il peut être intéressant d'augmenter le nombre de scénarios afin d'affiner la modélisation, notamment l'impact de la stratégie optimale d'investissements sur la distribution de l'écart à la cible à horizon 5 ans.

Cette étude a été menée. Avec le nouveau modèle d'optimisation synchrone contraint d'une part et la stratégie d'investissements optimale donnée par ce modèle (en partie 5.6.4) d'autre part, on a alors porté les nombres de scénarios économiques et financiers à hauteur de 10 000 chacun. Ce faisant, la modélisation est à la fois plus fine dans une optique de projection du bilan, mais également lors des calculs des différentes *VaR* pour déterminer les besoins en fonds propres.

La distribution de l'écart à la cible est alors modifiée de la sorte :

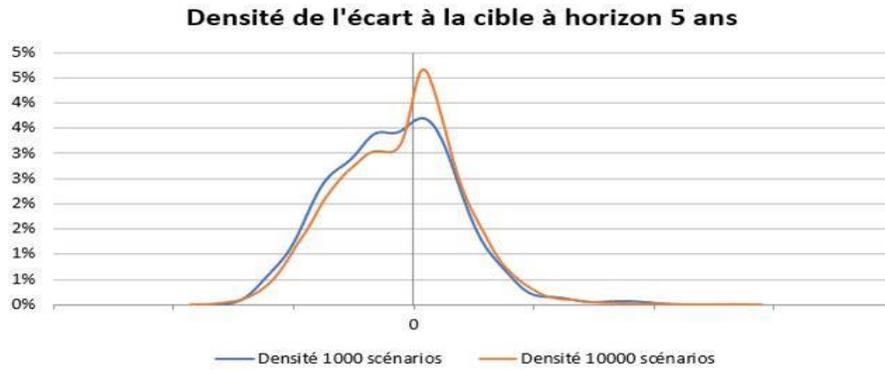
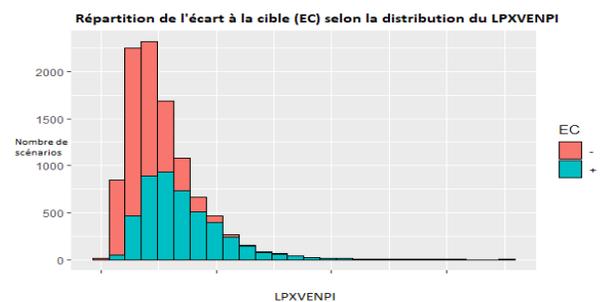
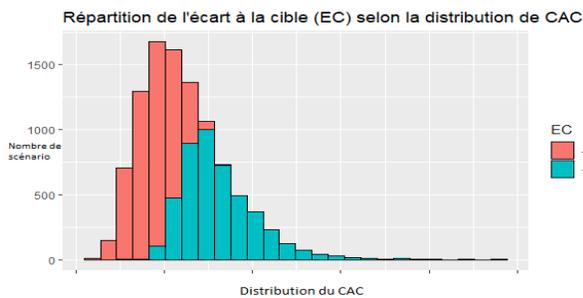


FIGURE 43 – Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans selon le nombre de scénarios économiques et financiers modélisés

Cet affinement de la modélisation a ses avantages. On remarque en effet que l'augmentation du nombre de scénarios considérés a pour effet d'amincir la queue de distribution des pertes, augmenter le nombre de scénarios aux alentours de l'écart à la cible prévu dans le scénario central (ce qui crée le pic sur la densité basée sur 10 000 scénarios) et de légèrement la décaler vers un niveau moins sévère. En outre, la probabilité d'écart à la cible négatif à horizon 5 ans diminue de 6.5%.

Malheureusement,, il est inenvisageable de réaliser cet affinement de la modélisation dans une optique d'optimisation. Le passage de 1000 scénarios économiques et 1000 scénarios financiers à 10000 de chaque multiplie approximativement par 100 le temps d'obtention des métriques en sortie d'algorithme, ce qui ferait trop augmenter le temps de calcul pour obtenir une allocation optimale.

De plus, le modèle d'allocation *top-down* étant complexe, il n'est pas toujours évident de connaître les interactions entre les allocations optimales, le GSE, et les métriques en sortie du modèle. Une petite étude supplémentaire a donc été menée dans le but de déterminer à quels facteurs de risque projetés dans le GSE l'allocation est le plus soumise. La répartition des scénarios d'écart à la cible négatifs a été réalisée selon la distribution de ces facteurs de risque. Les résultats sont présentés ci-dessous :



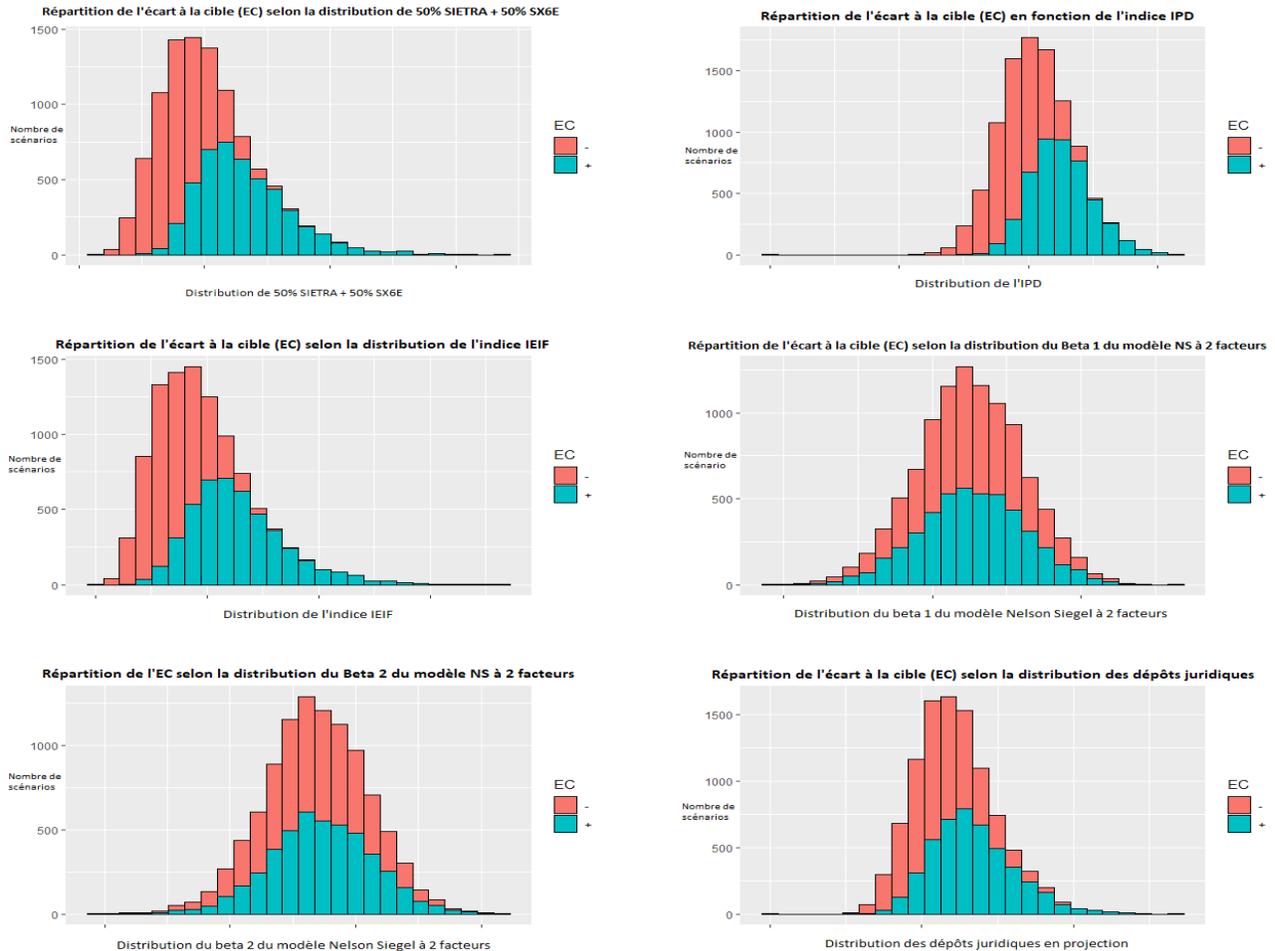


FIGURE 44 – Répartition des 10000 scénarios d'écart à la cible selon la distribution des différents facteurs de risque et indices de projection

Ces différents graphiques tendent à confirmer que les scénarios qui atterrissent en écart à la cible négatif en fin de projection sont a priori liés à une projection défavorable des classes d'actifs auxquelles le Groupe Caisse des Dépôts est plus spécialement exposé, à savoir le risque actions (auquel l'indice CAC est associé dans l'ASM) et les risques immobiliers (auxquels sont associés les indices IPD et IEIF).

## 5.8 Axes d'amélioration

### 5.8.1 Backtesting du modèle ASM

Des travaux primaires de *backtesting* ont également été menés. L'idée a été de paramétrer le modèle de référence de l'ASM avec les mêmes hypothèses de projection que celles utilisées pour réaliser la PFP (partie 1.5). Ainsi, compte tenu des enveloppes d'investissements arbitrées par le directeur général, une trajectoire

de solvabilité a été établie en projetant les besoins en fonds propres et le capital économique sur la période de projection dans le modèle de référence ASM. Cette trajectoire a alors été comparée à la trajectoire modélisée dans l'exercice PFP et qui constitue la trajectoire de Solvabilité officielle du Groupe CDC sur les 5 prochaines années.

Ces premiers travaux de *backtesting* ont globalement révélé :

- que les risques liés aux filiales financières régulées et à l'immobilier sont quasiment identiques en fin de projection, ce qui conforte sur le choix des hypothèses de calculs du risque retenues sur ces classes d'actifs.
- les risques des classes infrastructures et taux sont légèrement surestimés, mais cela n'est pas réellement problématique au regard des montants impliqués sur ces 2 classes d'actifs.
- Le risque de crédit est globalement sous-estimé, mais là encore cela reste acceptable compte tenu des encours dont il retourne par rapport à la classe actions.
- Le risque sur le périmètre Actions et *Private Equity* est quant à lui surestimé. Les premières investigations tendent à montrer que le ratio de passage d'une  $VaR_{99}\%$  à une  $VaR_{99.99}\%$  est une hypothèse plutôt conservatrice, ce qui est en soi cohérent avec la façon d'être du Groupe Caisse des Dépôts, mais qui l'est peut-être trop fortement. Des études sur le sujet seront ainsi menées dans les prochaines semaines.

### 5.8.2 Meilleure modélisation du *spread* pour affiner la modélisation des *RWA*

Malgré les tentatives infructueuses de modélisation du *spread* présentées en partie 4.2.2., il serait quand même bénéfique de parvenir à modéliser les variations de ce dernier pour arriver à modéliser plus finement la projection des *RWA* notamment et tenir encore mieux compte des profils de risque des filiales financières régulées dans l'exercice ASM suite à ce premier exercice.

En effet rappelons que, dans la modélisation finalement adoptée, seuls les sensibilités du latent *OCI* de CNP Assurances dépendent des scénarios économiques et font ainsi varier le niveau de *CET1* des filiales financières régulées. Quant aux *RWA*, ces derniers ne dépendent pas des scénarios économiques mais seulement de la production nouvelle. Ce comportement n'est pas réellement représentatif des projections réalisées dans le cadre de la PFP, où les trajectoires de *RWA* sont relativement différentes en fonction des 3 scénarios publiés par les économistes du Groupe CDC. Ainsi, il serait préférable d'affiner la modélisation du *spread* afin d'intégrer des variations de *RWA* conformes aux données remontées par les filiales régulées.

Cette modélisation du *spread* pourrait éventuellement être réalisée en intégrant la variable *spread* au GSE, stratégie que la gouvernance avait préféré écarter au début des expérimentations dans un souci de simplicité, mais qui au regard des résultats paraît difficilement contournable.

### 5.8.3 Modélisation des dépôts juridiques

La modélisation des dépôts juridiques sera également amenée à être reconsidérée. Les économistes du Groupe Caisse des Dépôts et les chargés d'étude de l'équipe des risques de bilan ont récemment mis en

lumière le fait que les dépôts juridiques possèdent une partie "stable".

L'idée est que, même en période de crise, il y aura toujours un certain montant en dessous duquel le niveau des dépôts juridiques ne pourra, avec une forte probabilité, décroître. Par exemple, la loi Eckert mande les banques et les assurances de transférer à la Caisse des Dépôts les montants placés sur des comptes bancaires inactifs depuis plus de 10 ans, et ce jusqu'à 30 ans (le montant sera ensuite reversé à l'État), ou jusqu'à ce qu'un bénéficiaire se manifeste. Ces montants varient en général très peu et participent ainsi à l'observation d'un montant minimal de dépôts juridiques.

Cela viendra donc modifier la modélisation adoptée dans le générateur de scénarios économiques, ce qui viendra donc impacter le gap de taux considéré. Toutefois, au regard des besoins en fonds propres qu'affiche le modèle prudentiel, l'impact sur la modélisation dans l'exercice ASM devrait être minime, le risque de taux ne représentant qu'une petite fraction du risque total.

#### 5.8.4 Programmation dynamique - programmation stochastique

Les différentes études réalisées dans ce mémoire par l'utilisation des modèles synchrones et "dynamique" tendent à montrer qu'en autorisant au modèle de réguler ses investissements au cours de la projection plutôt que de les investir linéairement chaque année, ce dernier pourrait réussir à prévoir de plus fortes rentabilités que la stratégie déterminée dans le modèle initial, sans forcément augmenter son risque pour autant.

On peut alors croire que si on autorise le modèle d'allocation *top-down* à distinguer les investissements non pas sur 2 périodes temporelles, mais sur 5 (donc en déterminant les allocations optimales annuelles), celui-ci suivrait la même tendance et déterminerait une stratégie de long-terme encore plus rentable que dans le modèle proposé dans ce mémoire, et permettrait peut-être d'accroître davantage la diminution de l'appétence au risque minimale à horizon 5 ans, comme ce qui a pu avoir lieu avec le modèle synchrone contraint.

A la lumière de ces éléments, il pourrait être intéressant dans le cadre d'une prochaine étude d'implémenter le modèle d'allocation de type Bellman (voir partie 5.3). Bien que ce type de modélisation s'éloignerait de l'esprit ASM tel qu'il était entendu jusqu'alors et serait probablement davantage sensible aux hypothèses annuelles (de projection du GSE par exemple), il aurait les avantages pratiques de permettre des changements de modélisation en cours de projection. Par exemple, il serait possible d'intégrer les modifications liées à l'entrée en vigueur des normes désormais appelées (de façon non officielle) Bâle IV de façon précise en cours de projection, ce qui n'est pas le cas actuellement. De même, il pourrait permettre d'ajuster la vitesse d'augmentation de la taille de bilan sur la projection, ce qui est possible uniquement sur 2 périodes de temps avec le modèle proposé dans ce mémoire. Cela pourrait s'avérer utile dans des périodes telles que celle traversée actuellement où le Groupe CDC s'engagerait dans un plan de relance et devrait investir massivement sur un horizon de temps plus court.

Enfin, des modèles encore plus sophistiqués que les modèles d'optimisation dynamique semblent avoir vu le jour au cours des 2 dernières décennies. Ils font appel à de la programmation stochastique, et de nombreuses recherches ont déjà vu le jour s'agissant des applications aux modèles ALM ([8] Faleh, 2011)([9] Faleh, 2015).

## 6 Conclusion

Ce mémoire avait comme objectifs d'une part d'adapter le modèle d'optimisation du couple rendement-risque à horizon 5 ans en vision *top-down* suite à la nouvelle dimension qu'ont pris les filiales financières régulées dans l'exposition du Groupe Caisse des Dépôts en 2020, et d'autre part de décliner les enveloppes d'investissements optimales à horizon 1 an en une allocation tactique pour répondre à un besoin métier croissant.

Dans un premier temps, les filiales financières régulées ont donc été modélisées plus finement au travers de leurs agrégats réglementaires (*CET1*, *RWA* et limite *RAF*), en accord avec leur traitement dans le modèle prudentiel du Groupe Caisse des Dépôts. 3 nouvelles variables leur ont été dédiées dans le programme d'optimisation, qui visera alors à déterminer le montant optimal de *RWA* supplémentaires à allouer à ces filiales dans le but de maximiser la rentabilité économique du Groupe CDC tout en vérifiant les différentes contraintes, notamment celle d'appétence au risque à horizon 5 ans.

La solution apportée sur le traitement des filiales régulées dans cet exercice d'allocation a été présentée à la gouvernance lors de l'exercice 2020, et celle-ci a alors décidé de l'adopter, actant de fait son utilisation lors des exercices à venir. En effet, les profils de risque de ces filiales sont désormais mieux pris en compte dans la projection des différentes métriques régissant l'exercice *top-down*, ce qui permettra de mieux éclairer le Directeur Général lors de son arbitrage des enveloppes à intégrer à l'exercice de Programmation Financière Pluriannuelle en fin de processus.

Des axes d'améliorations peuvent bien évidemment être identifiés et pourront être étudiés lors des exercices à venir, comme par exemple une modélisation plus fine de la projection d'un ou de plusieurs *spreads*, afin d'assurer une meilleure prise en compte des profils de risques des filiales régulées et de l'évolution de leurs *RWA* en fonction du scénario économique, et donc de déterminer au final une allocation optimale encore plus "précise" sur ce périmètre.

Concernant la déclinaison tactique à horizon 1 an des enveloppes d'investissements optimales, 2 algorithmes d'optimisation ont été confrontés au modèle d'optimisation classique utilisé lors des précédents exercices, qui pour rappel investit linéairement les enveloppes sur la période de projection. L'un consiste en une optimisation synchrone des enveloppes d'investissements nets et de *RWA* supplémentaires à horizons 1 an et 5 ans, sous contraintes d'appétence au risque d'horizons similaires. L'autre étudie l'optimisation dynamique des investissements, en déterminant en deux temps les enveloppes qui maximisent la rentabilité économique la 1ère année, puis sur les 5 ans.

Bien que l'algorithme dynamique présente de meilleurs résultats en termes de maximisation de la rentabilité économique sur les 5 ans, ce dernier présente un risque opérationnel élevé. En effet, du fait que sa convergence à horizon 5 ans soit significativement soumise aux enveloppes maximisant la rentabilité économique sur la 1ère année, rien n'assure que l'algorithme convergera lors des différentes simulations réalisées en période de production de l'exercice ASM, ce qui présente un fort risque opérationnel.

C'est l'une des raisons pour lesquelles l'algorithme synchrone lui sera préféré. Ce dernier présente certes une maximisation de la rentabilité économique à horizon 5 ans légèrement plus faible que celle obtenue avec le modèle dynamique, mais elle reste tout de même supérieure à celle du modèle classique, tout en permettant à la gouvernance de maîtriser son appétence au risque à horizon 5 ans et à horizon 1 an. Il permet également de converger avec plus de facilité que le modèle classique, et l'appétence au risque à horizon 5 ans minimale



requis pour permettre la convergence de l'algorithme a pu être diminuée par rapport à l'appétence au risque minimale initiale.

En outre, cet algorithme présente l'attrait pratique de se défaire en partie de la rigidité de l'ancien algorithme en autorisant le gestionnaire actif-passif à se défaire d'une partie des contraintes d'investissement linéaire. Par exemple, il pourrait désormais prévoir d'augmenter l'enveloppe cible d'investissements totaux sur la première année, ce qui pourrait être très utile dans le contexte actuel de plan de relance auquel le Groupe Caisse des Dépôts participe en investissant 26 milliards d'euros sur les 2 prochaines années.

Cet algorithme synchrone n'a pas pu être présenté à la gouvernance lors de l'exercice précédent, les travaux étant à leurs débuts à l'époque, mais il est prévu de le faire lors du prochain exercice officiel. La gouvernance aura comme responsabilité de fixer le niveau d'appétence au risque à horizon 5 ans, comme à l'accoutumée, et devrait en outre fixer le niveau d'appétence au risque à horizon 1 an. Cette dernière tâche serait un exercice nouveau pour la gouvernance. Toutefois, elle pourrait être aidée, comme pour l'exercice à horizon 5 ans, de sensibilités sur l'appétence au risque à horizon 1 an afin d'appuyer son choix.

Somme toute, cet algorithme allierait donc une réponse satisfaisante au besoin métier de déclinaison à 1 an des investissements, une efficacité opérationnelle indéniable, et une certaine robustesse de l'algorithme d'optimisation par essais particuliers (relativement rare sur la place) qui a très bien réussi à s'adapter à la nouvelle méthodologie adoptée dans le modèle ainsi qu'à ses nouvelles contraintes, au détriment uniquement d'un temps de calcul rallongé, mais pas éliminatoire !

Ce nouveau modèle présentant globalement de meilleurs résultats sur 2 périodes d'investissements, nous sommes en mesure de nous demander ce qu'il en serait sur 5 périodes, autrement dit en cherchant à optimiser des enveloppes annuelles. D'autres formes d'algorithmes pourraient alors être envisagées, telles que les méthodes de programmation dynamique, introduites par Richard Bellman, ou encore les méthodes plus récentes mais pas moins reconnues de programmation stochastique. Leur étude pourrait donc être envisagée, sous réserve que leur utilisation ne fasse pas perdre son sens à l'exercice *top-down* et à sa vision de long terme si chère au Groupe Caisse des Dépôts.

## Références

- [1] AHLGRIM K., D'ARCY S., GORVETT R. (2005) « *Modeling financial scenarios : a framework for the actuarial profession* » in *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 177-238
- [2] ARNAUD S. (2019) « *Optimisation de réassurance pour algorithme génétique* », mémoire d'admission à l'Institut des Actuaire, Institut du Risk Management (IRM)
- [3] BELLMAN R. (1954) « *The theory of dynamic programming* » in *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 60, n° 6, 503-515
- [4] CERNY V. (1985) « *Thermodynamical approach to the travelling salesman problem* » in *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 41-51
- [5] COLORNI A., DORIGO M., MANIEZZO V. (1991) « *Distributed Optimization by Ant Colonies* » in *Proceedings of European Conference on Artificial Life*, 1-13, Elsevier Publishing
- [6] COOREN Y. (2008) « *Perfectionnement d'un algorithme adaptatif d'optimisation par essaim particulière : application en génie médical et en électronique* », thèse de doctorat, Université Paris-Est, TEL archives ouvertes
- [7] DORIGO M., MANIEZZO V., COLORNI A. (1996) « *Ant System : optimization by a colony of cooperating agents* » in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 26, n° 1, 1-13
- [8] FALEH A. (2011) « *Un modèle de programmation stochastique pour l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné* », article laboratoire SAF (<http://docs.isfa.fr/labo/2011.16.pdf>)
- [9] FALEH A. (2015) « *ALM et allocation stratégique d'actifs : cas des régimes de retraite et des fonds de pension* », mémoire d'admission à l'Institut des Actuaire, Centre d'Etudes Actuarielles.
- [10] GILLOT G. (2020) « *Générateur de scénarios économiques en monde réel : approche par Markov Switching* », mémoire d'admission à l'Institut des Actuaire, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA)
- [11] GOLDBERG D. (1989) « *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning* », Addison-Wesley Publishing Company
- [12] KENNEDY J., EBERHART R. (1995) « *Particle Swarm Optimization* » in « *Proceedings of the IEEE International Conference On Neural Networks* », 1942-1948
- [13] KIRKPATRICK S., GELATT C., VECCHI M. (1983) « *Optimization by simulated annealing* » in *Science*, vol. 220, n° 4598, 671-680
- [14] METROPOLIS N., ROSENBLUTH A., ROSENBLUTH M., TELLER A., TELLER E. (1953) « *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines* » in *The Journal of Chemical Physics*, vol. 21, n° 6, 1087-1092
- [15] NOCEDAL J., WRIGHT S. (2006) « *Numerical Optimization* », 2<sup>ème</sup> édition, Springer
- [16] TCHERNER G. (2018) « *Risques et rentabilité d'un portefeuille : définition de mesures basées sur un générateur de scénarios économiques* », mémoire d'admission à l'Institut des Actuaire, ENSAE ParisTech
- [17] <https://www.bis.org/bcbs/index.htm?m=3%7C14> , Organisation du comité de Bâle sur le contrôle bancaire et ses publications
- [18] <https://www.consilium.europa.eu/fr/policies/banking-union/single-rulebook/capital-requirements/> , Exigences de fonds propres dans le secteur bancaire

[19] <https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000038496102/> , Loi PACTE : Impacts pour la Caisse des Dépôts et Consignations – articles 107 à 116 – et redistribution de l'actionnariat du Groupe La Poste – article 151

## Table des figures

1	Bilan investisseur simplifié considéré dans le cadre de l'ASM . . . . .	13
2	Schéma et calendrier de la PFP . . . . .	14
3	Diffusion sur 5 ans de l'indice IEIF sur 1000 scénarios économiques et sur le scénario central (en noir) . . . . .	18
4	Schéma de résolution d'un problème par une colonie de fourmis emprunté à ([6] Cooren, 2008) / (a) Etat initial / (b) Rencontre du problème / (c) Recherche du trajet optimal / (d) Prédominance du chemin optimal . . . . .	28
5	Exemple d'opérateur de croisement . . . . .	30
6	Détermination du déplacement futur d'une particule . . . . .	31
7	Relations envisageables entre 6 particules : Partage global ou local des informations . . . . .	32
8	Architecture du calcul séquentiel . . . . .	34
9	Architecture du calcul parallèle . . . . .	34
10	Variabilité sur 60 allocations en sortie du modèle . . . . .	35
11	Allocation retenue selon différents critères préfixés parmi 60 allocations . . . . .	37
12	Tableau récapitulatif de l'application de régressions linéaires sur les 5 <i>spreads</i> testés . . . . .	40
13	Arbre de régression optimal pour le spread n°3 . . . . .	41
14	Arbre de régression optimal et distribution en sortie pour le spread n°4 . . . . .	42
15	Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle classique (ancien modèle) et modèle avec filiales régulées (nouveau modèle) . . . . .	47
16	Schéma de l'optimisation dynamique testée . . . . .	53
17	Synthèse des métriques comparatives pour le modèle de référence . . . . .	61
18	Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle synchrone et modèle de référence	61
19	Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle synchrone et modèle de référence . . . . .	62
20	Allocations optimales des <i>RWA</i> : modèle synchrone et modèle de référence . . . . .	62
21	Variabilité des enveloppes en sortie du modèle : Référence VS synchrone . . . . .	63
22	Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an : modèle synchrone et modèle de référence . . . . .	64
23	Synthèse des métriques comparatives pour le modèle synchrone . . . . .	65
24	Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle synchrone contraint et modèle de référence . . . . .	66
25	Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle synchrone contraint et modèle de référence . . . . .	67
26	Allocations optimales des <i>RWA</i> : modèle synchrone contraint et modèle de référence . . . . .	67
27	Variabilité des allocations optimales en sortie des modèles de référence et synchrone contraint	68
28	Synthèse des métriques comparatives pour le modèle synchrone . . . . .	68
29	Allocations optimales sur les 2 périodes de projection : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique . . . . .	69
30	Allocations optimales à horizon 5 ans : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique . . . . .	70
31	Allocations optimales des <i>RWA</i> : modèle de référence, modèle synchrone contraint, et modèle dynamique . . . . .	70
32	Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an : modèle dynamique et modèle de référence . . . . .	71



33	Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans : modèle dynamique et modèle de référence . . . .	71
34	Synthèse des métriques comparatives pour le modèle dynamique . . . . .	72
35	Allocations optimales à horizon 1 an selon le niveau d'appétence au risque . . . . .	74
36	Allocations optimales sur la période de projection de 2 à 5 ans selon le niveau d'appétence au risque . . . . .	75
37	Allocations optimales à horizon 5 ans selon le niveau d'appétence au risque . . . . .	75
38	Allocations de <i>RWA</i> optimales selon le niveau d'appétence au risque et la période de projection considérée . . . . .	76
39	Densité de l'écart à la cible à horizon 1 an selon le niveau d'appétence au risque du même horizon . . . . .	77
40	Allocations optimales à horizon 5 ans du modèle synchrone contraint selon son appétence au risque à horizon 5 ans . . . . .	78
41	Allocations optimales de <i>RWA</i> à horizon 5 ans du modèle synchrone contraint selon son appé- tence au risque à horizon 5 ans . . . . .	78
42	Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans selon le niveau d'appétence au risque du même horizon . . . . .	79
43	Densité de l'écart à la cible à horizon 5 ans selon le nombre de scénarios économiques et financiers modélisés . . . . .	80
44	Répartition des 10000 scénarios d'écart à la cible selon la distribution des différents facteurs de risque et indices de projection . . . . .	81

## Annexes

### 1- Modèle NSSF utilisé dans le générateur de scénarios financiers

Le modèle NSSF (Nelson Siegel Svensson à 4 facteurs de risque) est utilisé pour décrire la dynamique des taux zéro-coupon. Le taux ZC à la maturité  $\tau$  est ainsi calculé de la façon suivante :

$$ZC_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2}(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - e^{-\tau/\lambda_1}}{\tau/\lambda_1} + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\tau/\lambda_1}}{\tau/\lambda_1} - e^{-\tau/\lambda_1} \right) + \beta_4 e^{-\tau/\lambda_2} \left( \frac{\tau}{\lambda_2} \right)^2$$

### 2- Lois marginales considérées dans le générateur de scénarios économiques

Comme évoqué dans la partie 2.3, différentes lois sont considérées pour projeter les différentes variables.

On y retrouve :

1. La loi normale de moyenne  $\mu$  et de densité  $\sigma$ , ayant pour fonction densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. La loi Skew-normale, ou loi normale asymétrique, dont la densité est :

$$g(x) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x)$$

où :

- $\alpha$  est le paramètre de position.  $\alpha < 0$  signifie que la distribution est asymétrique vers la gauche.  $\alpha = 0$  revient à considérer une loi normale.  $\alpha > 0$  indique que la distribution est asymétrique vers la droite.
- $\phi$  la densité de la loi normale centrée réduite
- $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

3. La loi NIG (Normal-Inverse Gaussian) dont la fonction de répartition est :

$$H(x) = \frac{\alpha \delta K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\delta \gamma + \beta(x - \mu)}$$

où :

- $K_1$  désigne une fonction de Bessel particulière
- $\alpha$  est le paramètre de largeur des queues
- $\beta$  est le paramètre d'asymétrie
- $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
- $\delta$  est le paramètre d'échelle
- $\mu$  est le paramètre de position

4. Une loi NIG à laquelle est assorti un facteur pénalisant sur la fonction de log-vraisemblance afin que sa  $CVaR_{90\%}$  soit inférieure à la  $CVaR$  empirique. Ainsi, la fonction de log-vraisemblance de la loi NIG-contrainte est de la forme :

$$\text{Log}V_{NIG-c} = \text{Log}V_{NIG} - \alpha * \delta_{\text{CVaR empirique}} < \text{CVaR estimée}$$

avec  $\alpha$  le facteur pénalisant.

5. La loi historique gaussienne. Il s'agit d'une méthode d'estimation non paramétrique par noyau gaussien. Elle vise à estimer la densité d'un échantillon de variable en s'appuyant sur une fonction  $K$  appelée noyau. Pour une estimation par noyau gaussien, la fonction  $K$  équivaut à la fonction densité d'une loi normale centrée réduite  $\phi$ .

En considérant un échantillon de  $n$  réalisations  $x_1, \dots, x_n$  d'une variable aléatoire de densité  $f$ , l'estimation suivante est réalisée :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{hn} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

où  $h$  est un paramètre de lissage. Plus il est grand, plus le lissage est important.