Mémoire présenté le : 11 mai 2021

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Timothée BOTREL

Titre : Modélisation risque-neutre du risque de crédit

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut des Actuaires signature

Membres présents du jury de l'ISFA

Entreprise : Assurances du Crédit Mutuel
Nom : *Nicolas JAEGER*
Signature :
Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : Nicolas JAEGER
Signature :
Invité :
Nom :
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Sommaire

Remerciements **4**

Résumé **5**

Abstract **6**

Disclaimer **7**

Synthèse **8**

Introduction **15**

Aspects théoriques **16**

1 Solvabilité 2 ..... **17**

1.1 Principes généraux 17
1.2 Vision économique du bilan 17
1.3 Le capital de solvabilité requis 18
1.4 Probabilité risque neutre 20
1.5 La courbe des taux sans risque 20
1.6 Générateur de Scénarios Economiques 24

2 Le risque de crédit **28**

2.1 Introduction au risque de crédit 28
2.2 Modélisation du risque de crédit 28

3 Le modèle Longstaff, Mithal et Neis (LMN) **31**

3.1 Description du modèle LMN 31
3.2 Limites de la discrétisation 34
3.3 Avantages du modèle LMN 35

Impacts opérationnels **36**

4 Intégration du crédit dans les scénarios économiques **37**

4.1 Calibrage des paramètres 37
4.2 Processus de risque neutralisation 38
4.3 Matrice de corrélation 40
4.4 Modèle mono rating et ACP 41
4.1 Test de martingalité 45

5 Intégration au sein du modèle ALM **48**

5.1 Introduction au modèle ALM 48
5.2 Comptabilisation du défaut 49
5.3 Présentation du portefeuille d'étude 51

Analyse du ratio de solvabilité 58

6 Mesures d'impacts S2 59

6.1 Best Estimate 59
6.2 Scénario équivalent certain 60
6.3 Scénarios stochastiques 62
6.4 Time Value of Options and Guarantees TVOG 63
6.5 SCR de marché 63
6.6 Ratio de solvabilité 66

7 Sensibilités sur le ratio de solvabilité 67

7.1 Loss Given Default (LGD) 67
7.2 Allocation d'actifs et réinvestissement 69
7.3 Paramètres du modèle LMN 71
7.4 Analyse des résultats 76

Conclusion 80

Références 82

Tables des figures 83

Liste des tableaux 85

Annexes 86

Remerciements

Je tiens à remercier Nicolas Jaeger pour son accompagnement en tant que tuteur de mémoire. Son encadrement ainsi que ses lectures pointilleuses ont été d'un réel soutient tout long cette étude.

Je remercie Blanche de Villette pour sa disponibilité tout au long de mon expérience au sein de ses équipes aux Assurances du Crédit Mutuel.

Je remercie Jean-Baptiste le Noir de Carlan pour son investissement sur le sujet et également pour ses conseils avisés.

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble du corps enseignant de l'ISFA qui s'est révélé indispensable dans la consolidation et l'apprentissage des connaissances de l'actuariat.

Enfin, je souhaite également remercier toutes les personnes que j'ai pu rencontrer lors de mon parcours professionnel ainsi que ma famille qui m'a soutenu durant ce long chemin qui mène au titre d'actuaire.

Résumé

Ce mémoire traite du risque de crédit en univers risque neutre et de son implémentation dans le modèle de projection. L'objectif est d'en évaluer l'impact sur la valorisation économique du bilan et plus globalement sur la solvabilité d'un fonds euro classique.

En premier lieu seront abordés les modèles de risque de crédit communément répandus dans le secteur de l'assurance. Après avoir expliqué les avantages et inconvénients du modèle finalement retenu, sa diffusion au sein du Générateurs de Scénarios Economiques (GSE) sera explicitée.

Dans un second temps, un travail sur les impacts opérationnels du modèle Longstaff, Mithal et Neis (LMN) sera effectué, en particulier les ajustements nécessaires au processus de risque neutralisation et de matérialisation du défaut dans les produits financiers seront étudiés.

Enfin, une analyse de sensibilité sur les éléments constituant le bilan économique S2 tels que le Best Estimate (BE) ou le capital de solvabilité requis (SCR), sera présentée pour mettre en avant l'importance de la calibration afin de garantir des résultats fiables et robustes.

Mots clés : risque de crédit, univers risque neutre, modèle LMN, Générateur de Scénarios Economiques, Best Estimate, SCR, ratio de solvabilité, fuite de modèle, fonds euros, assurance vie, TVOG, volatilité

Abstract

The study deals with credit risk in a risk neutral universe and its implementation in the cash-flow projection model. This aims at assessing the credit risk impact on balance sheet with a market consistent approach and more globally on the solvability of a saving fund.

At first, a global review of the credit risk model commonly used by industry will be performed. After having clarified the pros and cons of the existing models, an implementation in the Economic Scenarios Generator will be conducted.

In the meantime, the operational impact of the Longstaff, Mithal and Neis (LMN) model will be outlined. In particularly the adjustment made to the risk neutralization process to comply with the arbitrage free condition and its consequence on financial products.

Finally, several sensitivity tests will be performed on the main parameters of the LMN model. Impact on the Best Estimate of Liabilities (BEL) and the Solvency Capital Requirement (SCR) will be presented.

Keywords : Credit risk, Risk neutral universe, LMN model, Economics Scenarios Generator, Best Estimate, SCR, solvency ratio, PVFP, model error, life insurance, TVOG, volatility

Disclaimer

Par souci de confidentialité, les données présentées dans ce mémoire ont été préalablement transformées en respectant la structure interne. Les ordres de grandeurs restent toutefois cohérents avec les données officielles.

Synthèse

Contexte réglementaire

Depuis l'entrée en vigueur de la directive Solvabilité 2, les assureurs sont soumis à une valorisation économique de leur bilan en cohérence avec les marchés, de sorte que leur actifs et passifs doivent être valorisés à leur juste valeur. La norme actuelle s'articule autour de trois piliers, dont le premier vise à établir les exigences de capital requis au moyen d'une formule standard ou d'un modèle interne. L'objectif est de mettre en évidence via un modèle de projection des flux, les principaux facteurs de risque auxquels l'assureur peut être soumis.

Dès lors qu'un risque est jugé matériel par la compagnie d'assurance, un traitement adéquat au sein du modèle de projection doit être effectué. C'est à ce titre, que le risque de taux d'intérêt et le risque action sont intégrés dans la plupart des Générateurs de Scénarios Economiques (GSE) et diffusés ensuite dans le modèle de projection des flux. Dans cette continuité d'amélioration de contrôle et d'évaluation des risques, il apparait inéluctable d'ajouter le risque de crédit à la liste des risques financiers majeurs.

Contexte économique

La baisse continue des taux de rendement des fonds euros, en partie due à la détention de dettes souveraines dont les taux d'intérêts sont devenus négatifs, contraignent les assureurs vie à orienter leurs allocations d'actifs vers des titres plus risqués à défaut de diminuer la garantie en capitale offerte dans les contrats d'assurance vie classique. L'une des grandes classes d'actifs qui en tire profit sont les titres de dettes privées. En effet, le cadencement des flux de ces obligations est adapté au cycle inversé de l'assurance. Elles suscitent donc l'appétit des investissements des fonds euros et les obligations d'entreprises atteignent désormais une part considérable dans le bilan des sociétés d'assurance vie. Ce cumul d'investissements se retrouve notamment dans le bilan des principaux bancassureurs français comme en témoigne la lecture des rapports narratifs :

	ACM Vie	CNP Assurances	Prédica	Cardif Vie	Sogécap	BPCE Vie
Obligations risquées (en % VNC totale)	46%	30%	43%	46%	30-40%	52%
Rating moyen	A	A	---	A	A-	BBB+

Or, ce transfert d'investissement n'est pas sans conséquence du point de vue de la solvabilité des assureurs lors de l'évaluation du risque de marché dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2.

Au vu des enjeux économiques et réglementaires, une modélisation du risque de crédit s'impose pour de nombreux acteurs. C'est l'objectif de ce mémoire que d'en présenter les aspects théoriques et les impacts opérationnels sur le modèle de projection.

Aspects théoriques

En théorie, le risque de crédit est défini comme la perte potentielle que peut subir un agent économique suite à un événement de crédit touchant l'une de ses contreparties. En pratique, celui-ci peut se décomposer en trois sous-risques :

- Risque de changement de notation : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à une dégradation de notation de l'émetteur.

- Risque d'écartement des spreads : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à une hausse du spread de crédit sur les marchés financiers.

- Risque de défaut : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à l'occurrence du défaut d'un émetteur. Autrement dit, son incapacité à tenir ses engagements de paiement d'intérêt ou de nominal de la créance.

Dans l'univers de Solvabilité 2, une distinction est faite entre les titres obligataires souverains et privés. Les premiers sont exonérés de risque de crédit tandis que les seconds y sont exposés. En distinguant les obligations privées des obligations sans risque via la prise en compte du défaut, il est alors possible d'estimer l'impact du risque de crédit dans le calcul des fonds propres économiques et du Best Estimate.

La première étape consiste à définir le modèle de diffusion du spread stochastique en univers risque neutre au sein du GSE. Parmi les différentes familles de modèles existants dans la littérature financière, celui retenu appartient aux modèles dits à forme réduite, il s'agit du modèle de Longstaff, Mithal et Neis (LMN). Celui-ci repose sur une vision probabiliste de défaut instantané, avec λ_t la probabilité instantanée de défaut par unité de temps. Dans ce contexte, la probabilité de survie en fonction de l'intensité de défaut s'écrit comme :

$$\mathbb{P}(survie\ jusqu'\text{à}\ t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$$

Par ailleurs, l'une des particularités du modèle LMN réside dans la structure de la dynamique du processus d'intensité de défaut du type Cox-Ingersoll-Ross (CIR) qui lui est associée. En effet, les contraintes de positivité et de retour à la moyenne conduisent à retenir un processus d'intensité de défaut tel que :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t$$

Avec :

- α/β : la moyenne à long terme de l'intensité de défaut,
- σ : la volatilité,
- W : le mouvement brownien unidimensionnel associé au risque de crédit,
- (α, β, σ) sont des constantes positives tels que : $\alpha < \sigma^2 < 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$.

Sous ce référentiel, la relation entre prix risqués et prix sans risque, pour une obligation zéro coupon, est obtenue par formule fermée :

$$P_R(t,T) = P_{sans\ risque}(t,T) \times (1 - LGD \times \bar{Q}(t,T)_R)$$

Avec $\bar{Q}(t,T)_R$ la probabilité de faire défaut avant T pour un émetteur de rating R:

$$\bar{Q}(t,T)_R = 1 - A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T-t) \times \exp(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T-t)\lambda_t^R)$$

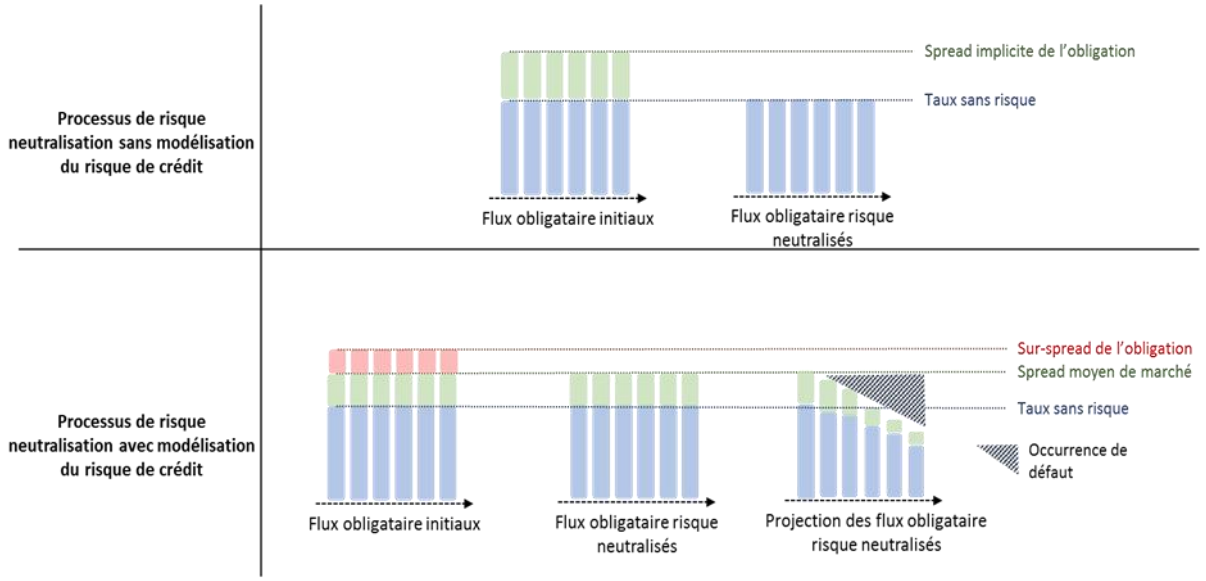
Ainsi, le spread de crédit associé à une obligation de maturité m et un rating R en t est donnée par :

$$spread_R(t, t+m) = -\frac{1}{m} ln\big(LGD \times A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m) \exp\big(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m)\lambda_t^R\big) + 1 - LGD\big)$$

La seconde étape consiste à calibrer les paramètres du modèle LMN pour respecter le critère de *market-consistency*. L'objectif est de répliquer la courbe des prix risqués observée sur les marchés financiers par minimisation des écarts quadratiques entre les spreads de marché et les spreads de modèle. A l'issue de cette étape, les paramètres finaux du modèle LMN sont fixés et le processus de risque neutralisation peut être enclenché.

L'une des propriétés fondamentales des générateurs de scénarios économiques risque neutre est de générer des prix d'actifs sans prime de risque et cohérent avec les prix observés sur les marchés. Autrement dit, les actifs ne diffèrent que par leur volatilité, contrairement à la probabilité monde réel. Dans le cas des obligations, les prix de marché observés à un instant donné contiennent bien souvent une prime de risque. Le processus de risque neutralisation vise donc à supprimer ce spread implicite inclus dans les coupons et le nominal afin de répliquer le taux sans risque.

Sans modélisation du risque de crédit, les flux sont réduits de manière proportionnelle, de manière à répliquer le taux sans risque. Avec l'ajout du risque de crédit qui par nature modifie les flux futurs des obligations risquées, l'ajustement devient progressif.



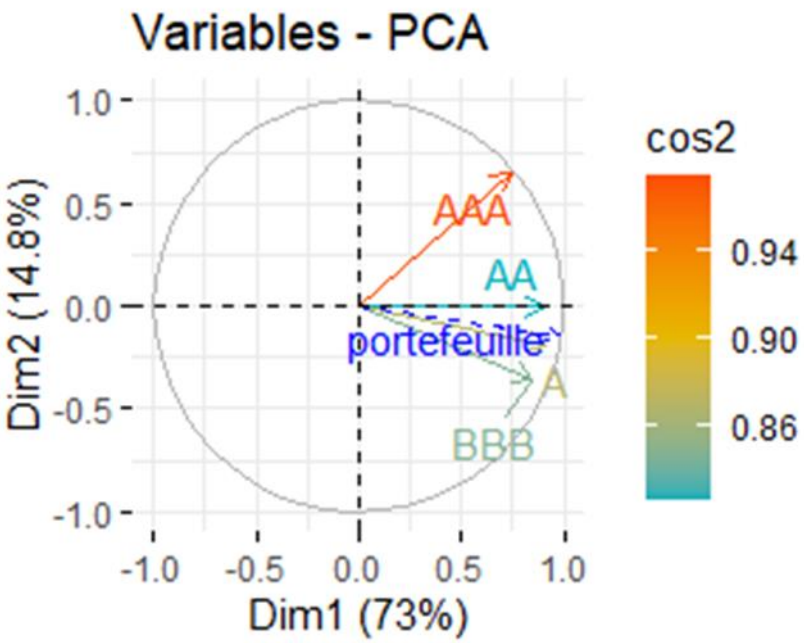
Cet ajustement des flux respecte le principe de risque neutralité qui assure une réplication du taux sans risque en moyenne.
In fine, les produits financiers des obligations risquées seront plus importants en début de projection pour diminuer de manière progressive en fonction de l'intensité de défaut.

Enfin, une réflexion autour d'une modélisation multi rating ou mono rating a été abordée. En effet, le modèle LMN permet de diffuser une intensité de défaut propre à chaque groupe de rating présent en portefeuille. La condition sine qua none à cela est de générer autant de mouvements browniens indépendants que de classes de rating existantes.

Le recours aux méthodes descriptives multidimensionnelles, telles que l'analyse par composantes principales (ACP) sur les niveaux de rating s'étalonnant de AAA à BBB pour une période d'observation conséquente, permet d'apporter plus de contexte à la question considérée.

Parmi les indicateurs obtenus, le cercle de corrélation met en évidence le fait que :

- Les variables sont positivement corrélées.
- Une bonne qualité de représentation des variables où plus de 70% de l'information est représentée par la composante principale.



Au vu des résultats obtenus par l'ACP, il paraît acceptable d'opter pour une modélisation d'un rating unique basé sur le rating moyen du portefeuille.

<u>Analyses</u>

Le ratio de solvabilité est le rapport entre les fonds propres économiques disponibles et ceux requis, soit :

$$Ratio\ de\ solvabilité = \frac{Fonds\ propres}{SCR}$$

C'est un indicateur clé pour le secteur de l'assurance, aussi bien pour le pilotage interne de l'entreprise que pour la communication externe vis-à-vis du régulateur et des investisseurs. Il caractérise la solvabilité de l'entreprise et témoigne de sa robustesse.

Pour illustrer cette étude, un fonds euro classique est considéré avec des données économiques et comptables arrêtées au 31/12/2019. Dans ce contexte, la modélisation du spread de crédit stochastique a un impact final de 3 points sur le ratio de solvabilité :

	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit
Fonds propres	2 000	1 992
SCR final	1 000	1 012
Ratio de solvabilité	200%	197%

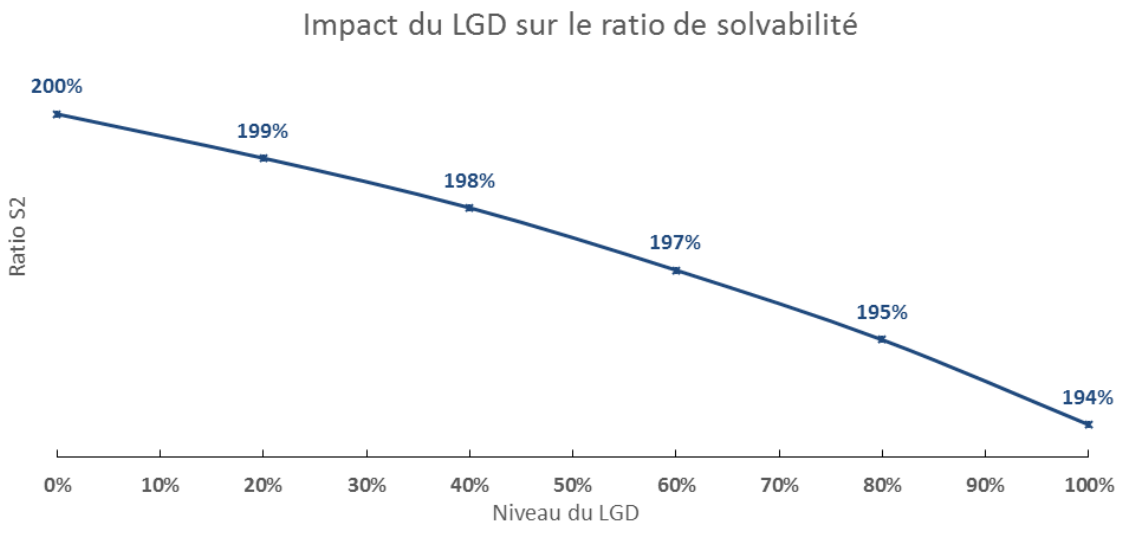
Pour mieux interpréter cet impact, une étude de sensibilité du ratio de solvabilité aux principaux paramètres du modèle LMN a été réalisée.

- Sensibilité au LGD

La notion de Loss Given Default (LGD) intervient lors d'un défaut constaté sur obligation. Dans ce cas particulier où le débiteur est dans l'impossibilité d'honorer ses engagements vis-à-vis des créanciers, ces derniers récupèrent tout même une partie du capital initialement investi, on parle alors de taux de recouvrement. En contrepartie ce qui est définitivement perdu, le LGD est donné par :

$$LGD = 1 - Taux\ de\ recouvrement$$

Celui-ci est un élément clé dans la modélisation du risque de crédit via le choix de convention retenu en cas de défaut. Dans le cadre de ces travaux, le LGD retenu est fixé à 60%. Cependant, une variation de LGD sur les projections risque neutre n'est pas négligeable, comme le démontre le graphique ci-dessous.



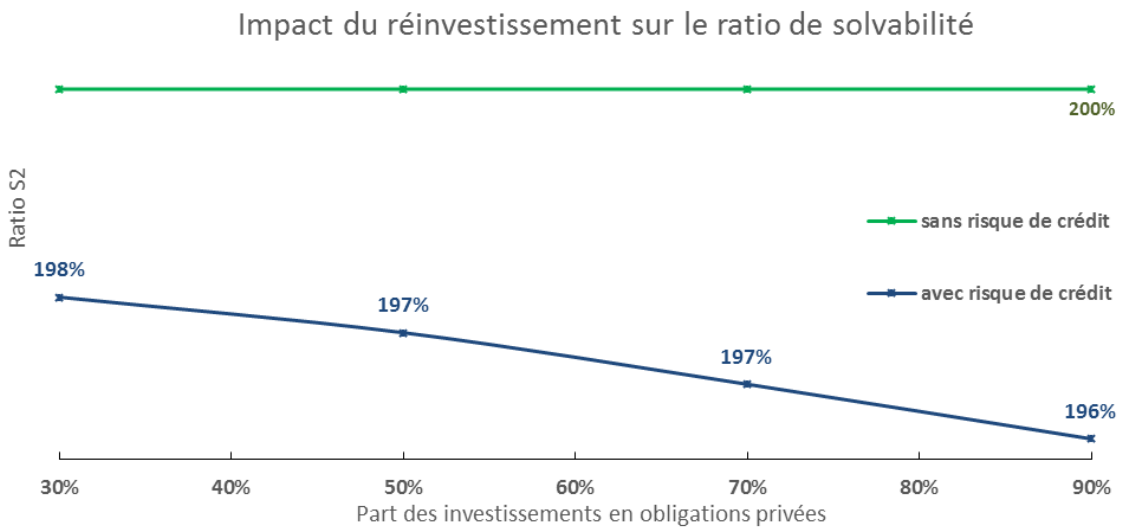
Ces résultats sont toutefois conformes aux attentes, à savoir une corrélation négative entre ces deux grandeurs. En effet, un LGD proche de 1 implique une perte plus importante sur les flux futurs en cas de défaut et inversement pour un LGD proche de 0.

- Sensibilité aux réinvestissements

L'hypothèse de continuité d'activité implique un écoulement naturel des provisions mathématiques. De même, les arrivées à échéance des titres obligataires entraînent un écoulement naturel de l'actif. Pour maintenir à la fois l'équilibre actif-passif et les cibles

d'allocations d'actifs, des réinvestissements obligataires sont nécessaires. Le montant de ces réinvestissements oscille entre 5% et 20% de l'actif total au cours de la projection.

Ainsi, il semble nécessaire d'étudier la sensibilité du ratio de solvabilité à la composition du réinvestissement obligataire. En effet, le type de réinvestissement va déformer progressivement la proportion d'obligation sans risque et risquées au sein du portefeuille d'actifs.

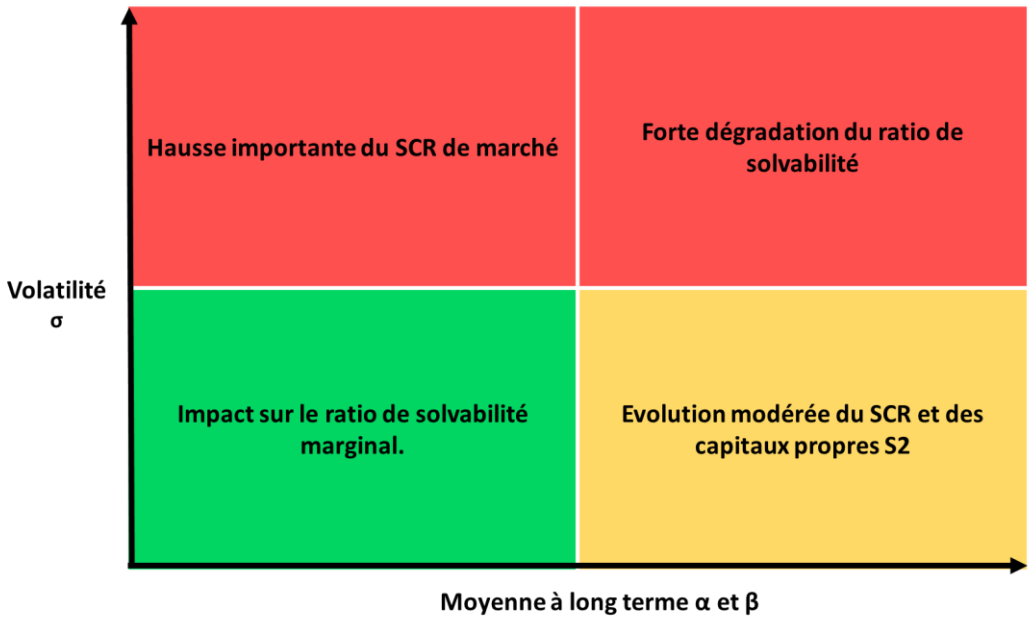


En l'absence de modélisation du risque de crédit, la composition du réinvestissement obligataire en cours de projection n'influe pas sur le ratio de solvabilité. Les obligations étant achetées au pair dans le modèle et la volatilité étant identique pour les obligations souveraines et privées, les produits financiers sont donc inchangés.

Avec l'ajout d'un spread de crédit stochastique la situation est différente. La volatilité des obligations privées devient plus élevée que celle des obligations sans risque. Ainsi, on observe une décroissance du ratio de solvabilité en fonction de la part des investissements en obligation privées. Plus le poids des obligations éligibles au risque de crédit est élevé plus le ratio de solvabilité est dégradé.

- Sensibilité aux paramètres

Enfin, une succession de tests de sensibilité unitaire sur les paramètres (α, β, σ, λ_0) du modèle LMN a été réalisée. L'objectif étant de capter la sensibilité du ratio de solvabilité à une variation d'un de ces paramètres, l'ensemble des autres conditions restant inchangées. Ces résultats ont permis de mettre en évidence la présence de zones de risques, représentées ci-dessous.



Conclusion

La prise en compte des spreads de crédit stochastique implique une plus forte volatilité au sein du portefeuille d'actifs et par conséquent mène à une augmentation du coût des options et garanties incluses dans les contrats.

Par ailleurs, la capacité d'absorption par les passifs est moins importante pour le crédit que pour les mouvements de taux d'intérêt. Ces derniers touchent à la fois l'actif via la revalorisation et le passif via le taux d'actualisation. Tandis que pour le risque de crédit, seul le mécanisme de participation aux bénéfices joue le rôle d'amortisseur pour les fluctuations à l'actif.

Au-delà de la capacité d'absorption, d'autres leviers peuvent atténuer la hausse de la volatilité de la valeur de marché des obligations telle que la stratégie d'allocation d'actifs et également la réserve de capitalisation. Dès lors qu'une obligation est maintenue jusqu'à échéance et que la stratégie d'allocation du modèle n'est pas basée sur la valeur de marché des actifs, les variations de spread ont un impact limité sur le résultat. En effet dans ce cas particulier, seuls les défauts survenus viennent diminuer les produits financiers, ces mêmes produits financiers qui ont été ajustés à la hausse par le processus de risque neutralisation.

Finalement, la modélisation du risque de crédit a un impact plus important pour les scénarios stochastiques qui comportent des cessions d'actifs obligataires conséquentes. Ceci intervient notamment dans les scénarios extrêmes où le fond fait face à des rachats massifs.

Introduction

Les politiques monétaires successives d'assouplissement quantitatif menées par les banques centrales depuis plusieurs années ont abouti à un environnement globalisé de taux extrêmement bas. Les conséquences économiques sont multiples, en particulier dans le secteur de l'assurance vie, où les acteurs majeurs doivent repenser le principe même du fonds euro.

L'érosion des taux de rendements des fonds euros, en partie due à la détention de dettes souveraines dont les taux d'intérêt sont négatifs, contraignent les assureurs vie à orienter leur allocation d'actifs vers d'autres classes d'actifs. Ce qui est le cas des obligations d'entreprises dont le poids dans le bilan des sociétés d'assurance ne cesse d'augmenter pour atteindre plus d'un tiers des investissements.

Ce transfert d'investissement n'est pas sans conséquence du point de vue de la solvabilité des assureurs lors de l'évaluation du risque de marché dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2. En effet, le risque de crédit des obligations d'entreprises est à considérer au même titre que le risque de taux d'intérêt ou le risque action.

L'enjeu de la directive Solvabilité 2 est de permettre aux entreprises d'assurance d'adopter une gestion de leur capital en cohérence avec leur profil de risque. Or, avec la crise du coronavirus, les besoins de financement des entreprises ont fortement augmenté, ce qui se traduit par une hausse record des émissions de titres de dette publique et privée.

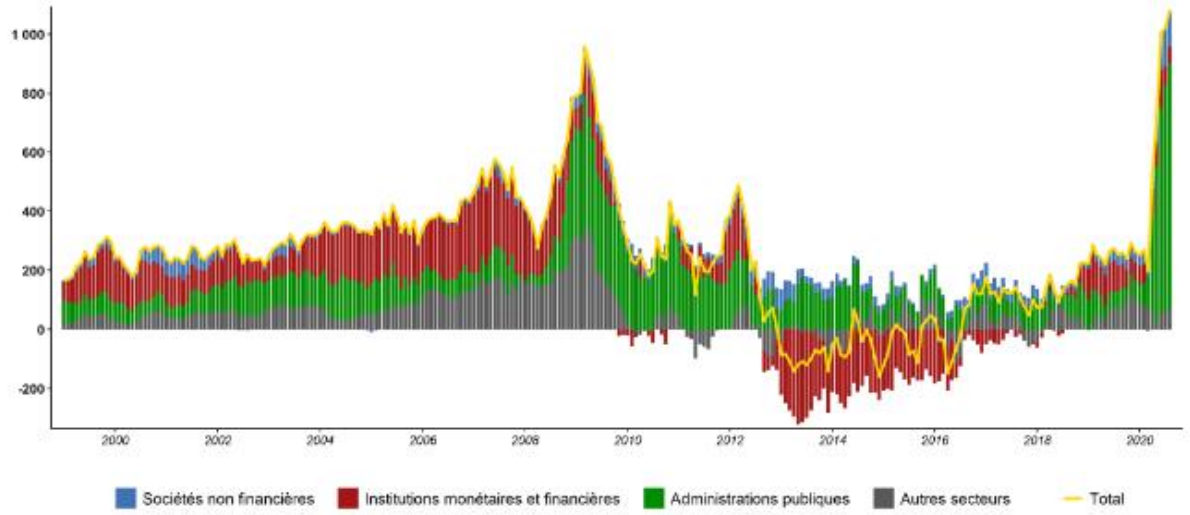


Figure 1 : émissions nettes en milliard d'euros, de titres de dettes en zone euro par secteur émetteur. Source [1]Banque Centrale Européenne.

Au vu de l'ampleur de l'accumulation de dette par les divers agents économiques, le risque de crédit est à considérer comme un risque de marché majeur et une prise en compte dans le modèle de projection devient nécessaire.

[1] https://blocnotesdeleco.banque-france.fr/sites/default/files/billet_188_fr.pdf

Aspects théoriques

1 Solvabilité 2

1.1 Principes généraux

Entrée en application depuis le 1er janvier 2016, Solvabilité 2 se présente comme un ensemble de règles fixant le régime de solvabilité applicable aux entreprises d'assurances de l'Union Européenne.

Les règles prudentielles de Solvabilité 2 s'articulent en trois piliers :

- Pilier 1 : exigences quantitatives. Les exigences quantitatives établissent les règles de valorisation des actifs et des passifs ainsi que les exigences de capital requises. Ces dernières sont calculées au moyen d'une formule standard, ou un modèle interne.
- Pilier 2 : exigences qualitatives. Ce pilier englobe les politiques internes de gouvernance et de gestion des risques des entreprises d'assurance. L'autre pan des exigences qualitatives repose sur l'évaluation propre des risques de la solvabilité (*ORSA)*.
- Pilier 3 : informations à destination du public et du superviseur. Le troisième pilier vise à apporter de la transparence à travers la publication d'informations harmonisées par chaque organisme auprès du régulateur, ainsi que du public.

De ces trois piliers découle un nouveau référentiel de gestion des compagnies d'assurance au sein desquelles les spécificités du bilan sont redéfinies.

1.2 Vision économique du bilan

L'approche retenue par Solvabilité 2 se veut plus orientée vers une vision économique pour mieux refléter le profil de risque de l'assureur. L'idée sous-jacente est d'estimer le prix d'échange d'une compagnie d'assurance sur le principe de l'offre et de la demande des marchés économiques.
Cela se traduit notamment par le passage d'un bilan comptable à un bilan économique, schématisé ci-dessous :

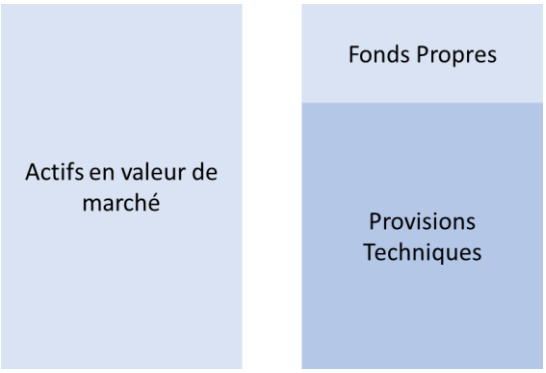


Figure 2 - Bilan économique S2 simplifié

Une vision plus détaillée du passif permet d'écrire les Provisions Techniques (PT) comme la somme d'une meilleure estimation des engagements (BE) et d'une marge de risque (RM). Soit :

- Le Best Estimate (BE) se calcule comme l'espérance de la valeur actuelle nette probable des flux futurs (prestations, frais, commissions, primes) sous l'hypothèse de continuité d'activité. Mathématiquement il se calcule :

$$BE = \mathrm{E}\left[\sum_{t\geq 0} \frac{Flux_t}{(1+r_t)^t}\right]$$

- La marge de risque (RM) s'interprète comme une provision complémentaire au Best Estimate calculée comme étant le coût d'immobilisation d'un montant de fonds propres égal au SCR sur la durée résiduelle des engagements de l'assureur.

$$RM = CoC \times \sum_{t\geq 0} \frac{SCR_t}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$$

  Avec :
  - r_t le taux sans risque en t,
  - SCR_t le SCR en t (*Solvency Capital Requirement*),
  - CoC le coût en capital fixé à 6%.

Quant aux fonds propres économiques, les principaux éléments éligibles sont :
- Capitaux propres S1,
- Plus ou moins-values latentes sur fonds propres,
- Marges futures,
- Le montant de participations aux bénéfices admissible,
- Impôts différés,
- Dette subordonnée.

1.3 Le capital de solvabilité requis

C'est dans le pilier I que le règlement prudentiel de Solvabilité 2 définit le capital de solvabilité requis, le SCR précédemment évoqué. Il est censé représenter le niveau de fonds propres minimum à détenir. Concrètement, deux approches sont préconisées pour le calculer :

- <u>Modèle interne</u> : unique à chaque entreprise d'assurance, le modèle interne se base sur une calibration des chocs propres à l'entreprise. L'utilisation d'un modèle interne est soumise à l'approbation du régulateur.
- <u>Formule Standard</u> : cette approche uniforme est basée sur un panel de chocs par catégorie de risques dont la calibration est commune à chaque assureur et définie par l'organisme européen EIOPA. Une vision modulaire est appliquée pour obtenir une mesure globale de risque en agrégeant les chocs.

La structure modulaire, également appelée « pieuvre SCR », est schématisée ci-dessous :

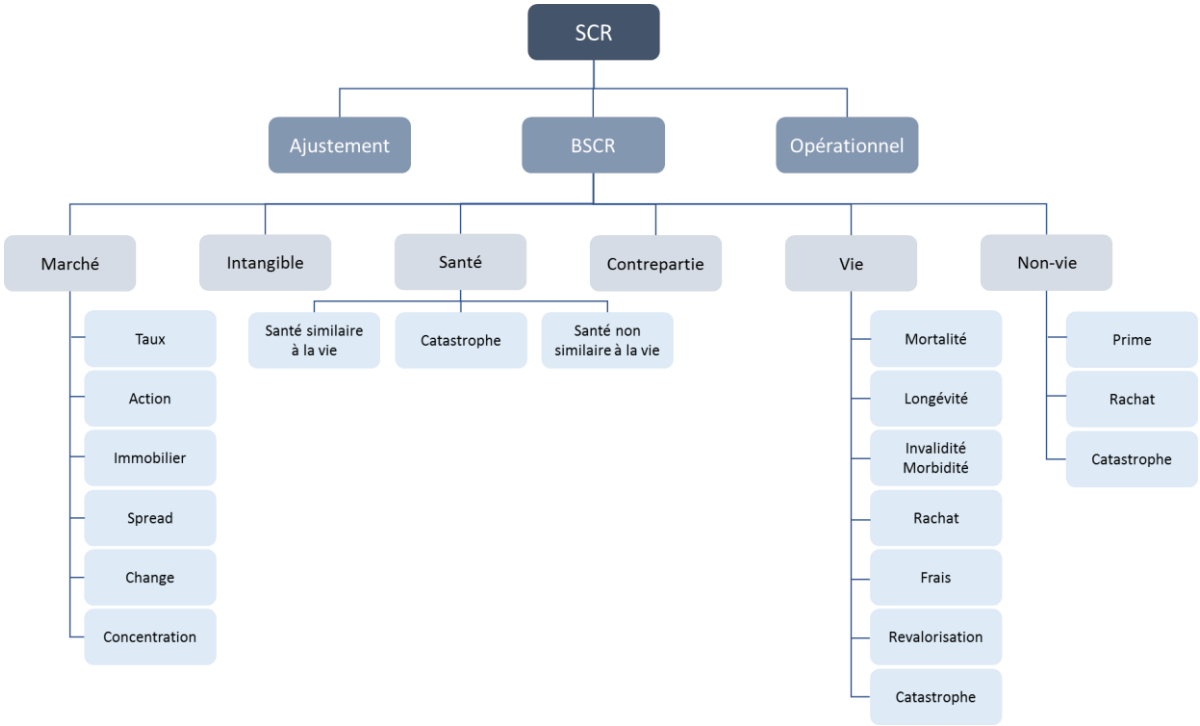


Figure 3 : Structure modulaire de la formule standard pour le calcul du SCR

Le calcul s'effectue de bas en haut avec l'usage de matrices d'agrégations fournies par la directive S2. L'idée sous-jacente à cette approche est d'attribuer une exigence de capital réglementaire à chaque facteur de risque. Cela se traduit mathématiquement par un calcul du SCR associé au module m comme :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

Avec

- $\rho_{i,j}$ le coefficient de corrélation entre les facteurs de risque i et j,
- SCR_i le capital associé au risque i.

Enfin le capital de solvabilité requis est calculé de la façon suivante :

$$SCR = BSCR + Ajustement + SCR_{opérationnel}$$

Où :

- $BSCR$ est la résultante du capital requis pour couvrir les six grandes catégories de risques.
- $Ajustement$ qui prend en compte la capacité d'absorption des pertes des provisions techniques et des impôts différés.
- $SCR_opérationnel$ le capital requis au titre du risque opérationnel.

Toutes ces notions propres au cadre de Solvabilité 2 et destinées à faciliter la lecture de la valeur intrinsèque d'une entreprise d'assurance se doivent d'être définies dans un univers économique commun.

1.4 Probabilité risque neutre

La valeur actuelle d'un actif ou d'un passif d'assurance dépend en partie de l'univers de probabilité dans lequel il est situé. Ainsi, l'un des aspects de Solvabilité 2 est d'établir un cadre de probabilité qu'il est possible de décrire entièrement, contrairement à l'univers de probabilité historique pour lequel l'incertitude règne.

C'est dans ce contexte qu'est introduite la probabilité dite « risque neutre » dont les principales caractéristiques sont :

- L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) : il n'est pas possible pour un agent économique de trouver une stratégie lui permettant de gagner de l'argent avec une probabilité strictement positive à partir d'un investissement nul
- Le marché complet : tout flux financier futur peut être répliqué par un portefeuille composé de l'actif sans risque et d'actifs risqués.

La condition de complétude du marché assure l'unicité de la mesure martingale et celle d'absence d'opportunité d'arbitrage son existence. Dans ce contexte, tous les actifs ont le même rendement moyen qui est égal à celui du taux sans risque. Ainsi, le prix de chaque actif est défini comme sa valeur actuelle et est totalement déterminé par :

- Le montant des flux futurs espérés de l'actif sous la probabilité risque neutre.
- L'actualisation de ces flux aux taux sans risque.

1.5 La courbe des taux sans risque

La définition et la construction de la courbe des taux sans risque nécessite d'introduire les notions préliminaires suivantes.

Prix zéro coupon

Une obligation zéro coupon se définit comme un contrat garantissant le versement à terme d'une unité de monnaie à son détenteur. Il y a donc une absence de flux entre la date de paiement et de remboursement. En notant T la maturité de l'obligation zéro coupon considérée, son prix vérifie :

$$P(T,T) = 1$$

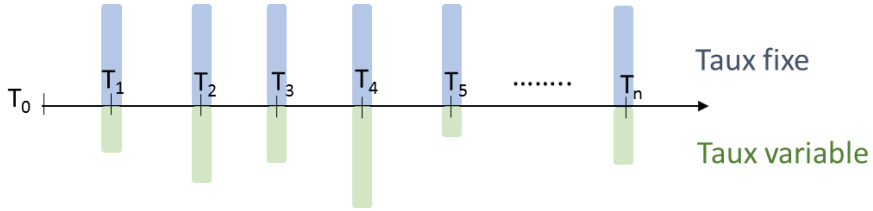
Et

$$\forall t \leq T \quad P(t,T) = e^{-r(T-t)}$$

Où, r est le taux d'intérêt spot en convention continue et supposé constant.

Taux swap

Un swap de taux d'intérêt se définit comme un contrat de gré à gré, dans lequel deux parties sont liées par un échange d'un taux variable contre un taux fixe. Pour la suite, nous considérons un contrat swap d'échéance *T*, de taux fixe *K*, de taux variable le Euribor *E*, de dates de paiements T_i et de nominal *N*. De sorte que les flux échangés dans le cas où le taux fixe est reçu en échange du versement du taux variable se schématisent comme suit :



Plus précisément, ce contrat peut se séparer en une jambe fixe dont le prix initial est donné par :

$$Jambe\ Fixe\ (0) = \sum_{i=1}^{n} N \times P(0, T_i) \times (T_i - T_{i-1}) \times K$$

Avec $P(0,T_i)$ le prix d'une obligation zéro coupon de maturité T_i en $t=0$.

De même le prix initial jambe variable est donnée par :

$$Jambe\ Variable\ (0) = \sum_{i=1}^{n} N \times (T_i - T_{i-1}) \times E(T_{i-1}, T_i)$$

Où,

$$E(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \times \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1\right)$$

Ce qui donne,

$$Jambe\ Variable\ (0) = \sum_{i=1}^{n} N \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1\right)$$

On obtient ainsi par raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) :

$$Jambe\ Variable\ (0) = N \times \sum_{i=1}^{n} (P(0, T_{i-1}) - P(0, T_i)) = N \times (1 - P(0, T))$$

Le swap payeur est le contrat dans lequel, on verse le taux fixe pour recevoir le taux variable et l'inverse pour le swap receveur. Ainsi son prix est donné par :

$$\Pi^{\text{payeur}}(\mathrm{t}, \mathrm{K}, \mathrm{N}) = \mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} \big(P(\mathrm{t}, t_{i-1}) - P(\mathrm{t}, t_i)\big) - NK \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{t}, t_i) \times (t_i - t_{i-1})$$

$$= \mathrm{N}\big(P(\mathrm{t}, t_0) - P(\mathrm{t}, \mathrm{t_n})\big) - NK \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{t}, t_i) \times (t_i - t_{i-1})$$

On définit le taux swap comme le taux qui égalise le taux swap payeur et receveur. Autrement dit le taux K^{eq} tel que :

$$\Pi^{\text{payeur}}(t, K^{eq}, N) = \Pi^{\text{receveur}}(t, K^{eq}, N)$$

Finalement pour $t=0$

$$K^{eq} = taux\ swap_T = \frac{1 - P(0,T)}{\sum_{i=1}^{n}(P(0,t_i) \times (t_i - t_{i-1}))}$$

Taux zéro coupon

Les taux zéro coupon découlent du taux swap abordé ci-dessus. La courbe des taux sans risque repose sur les taux swap qui présentent l'avantage d'être liquides sur un ensemble important de maturités. Cette courbe des taux sans risque est donc calculée de manière itérative :

Pour la première maturité :

$$P(0, T_1) = \frac{1}{1 + T_1 \times taux\ swap_{T1}}$$

Puis les maturités suivantes :

$$P(0, T_i) = \frac{1 - Taux\ swap_{Ti} \sum_{j=1}^{i-1} P(0, T_j) \times (T_j - T_{j-1})}{1 + (T_i - T_{i-1}) \times taux\ swap_{Ti}}$$

Ultimate Forward Rate

La construction de la courbe des taux S2 de référence se base sur les taux swap vus précédemment. Ces taux d'intérêt sont ensuite utilisés pour actualiser les engagements très long terme des assureurs. Cependant, pour de tels horizons de projection (généralement entre 40 et 60 ans), il n'existe pas de marché suffisamment profond, liquide et transparent pour alimenter la courbe des taux S2.

Pour pallier à ce problème, l'EIOPA a introduit les notions suivantes :

- Last Liquid Point (LLP) : dernier point d'observation des swaps de taux d'intérêt estimé comme liquide. Il est défini par monnaie et est fixé à 20 ans pour l'euro. Une extrapolation du type Smith-Wilson est réalisée pour les points au-delà du LLP.

- Ultimate Forward Rate (UFR) : taux ultime de référence vers lequel les taux forward de la courbe des taux S2 doivent converger. Le point de convergence correspond au maximum entre 60 ans et LLP + 40 ans.

Au 1er janvier 2019, l'UFR pour l'euro a été fixé à 3.90%.

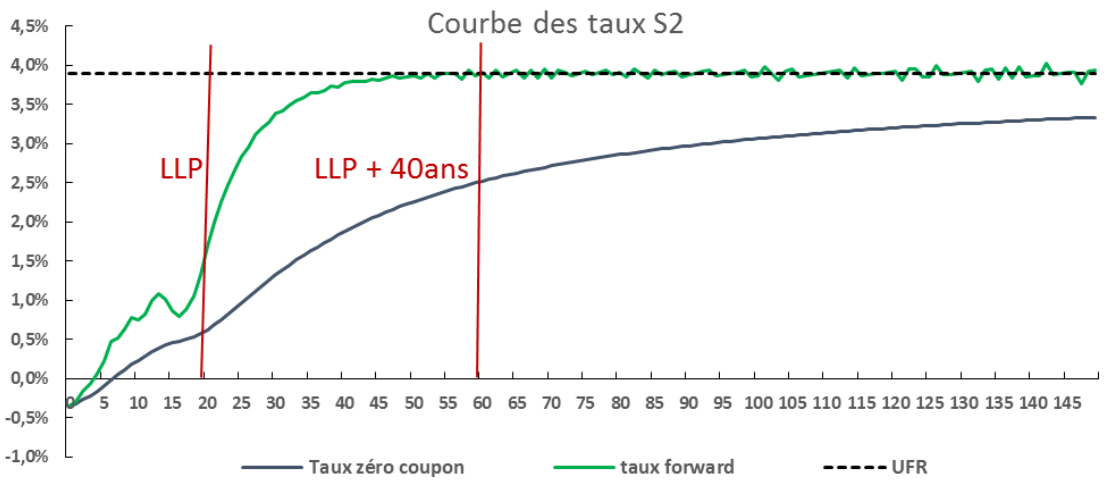


Figure 4 : convergence des taux forward vers l'UFR pour la courbe des taux EIOPA au 31-12-2019

Credit Risk Adjustment (CRA)

Le credit risk adjustment est un ajustement à la baisse effectué à la courbe des taux pour tenir du compte du risque crédit intrinsèque au swap. Le taux flottant n'étant pas collatéralisé, il subsiste donc une prime de risque dans la valeur de marché des taux swap de référence.
Il est fixé à 10 bps par l'EIOPA pour l'année 2019.

Volatility Adjustement (VA)

Le VA est mesure contra-cycle destinée à compenser la volatilité des spreads présente dans le portefeuille de référence d'actifs sur les engagements long terme des assureurs. Il se présente comme une prime ajoutée à la courbe des taux sans risque. L'EIOPA le calcule pour chaque arrêté et le VA a été fixé à 7bps au 31/12/2019.

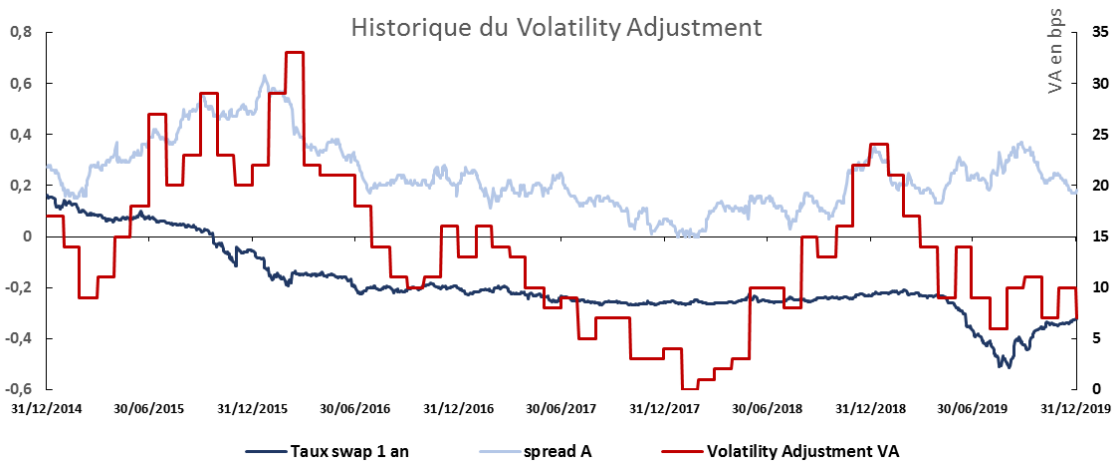


Figure 5 : chronique d'historique du VA (échelle de droite) comparée à celles du taux swap 1 an et du spread A (échelle de gauche).

Dans un contexte de taux bas prolongé, la prise en compte du VA pour l'épargne a un effet bénéfique sur la solvabilité, dès lors que celui-ci est positif. En effet, il diminue la valeur des engagements (BE) et augmente mécaniquement les fonds propres économiques.

1.6 Générateur de Scénarios Economiques

Le règlement délégué précise que pour certains types de contrats d'assurance vie, notamment ceux donnant lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles, les méthodes par simulation sont susceptibles de produire un calcul plus approprié du Best Estimate. Ainsi, l'intérêt du Générateur de Scénarios Economiques (GSE) est de générer les simulations sous-jacentes au calcul du Best Estimate.

De manière plus générale, le GSE est défini par K. ARMEL[1] comme : « un modèle mathématique reproduisant l'environnement économique. Il est utilisé pour produire des simulations du comportement joint des valeurs du marché financier et des variables économiques sur un horizon d'intérêt. »

Pour rappel, le cadre de Solvabilité 2 repose sur une évaluation en valeur de marché des actifs et des passifs d'assurance. Ainsi, nous pouvons observer l'objectif premier du GSE, qui est de répondre à cette problématique d'évaluation en valeur de marché dans un univers risque neutre, de sorte qu'il n'existe pas de prime de risque et que les différents actifs ne diffèrent que par leur volatilité.

Pour ce faire, plusieurs facteurs de risques peuvent être simulés tels que :

- le prix des actions,
- le prix de l'immobilier,
- les taux courts,
- le processus de défaut obligataire,
- la gestion alternative.

Ces facteurs de risque sont simulés en respectant une contrainte majeure de cohérence avec le marché financier, on parle alors de scénarios market-consistent. En d'autres termes, le générateur de scénarios économiques est calibré de façon à retrouver les prix des produits dérivés observables sur le marché (caps, floors, call, put…).

Parmi les facteurs de risques, l'un des plus structurants pour les projections en univers risque neutre est sans doute celui des taux.

[1] Présentation du 13 avril 2020 à l'ISFA : Comment définir la qualité d'un générateur de scenarios économiques destine à évaluer le best-estimate épargne en €?

1.6.1 Modèle de taux Hull-White à un facteur

Un très large choix de modèles de taux existe dans la littérature financière, ici, seul le modèle de taux Hull-White à un facteur sera introduit et utilisé par la suite. Il s'agit d'un cas particulier de l'approche proposée par Heath, Jarrow et Morton (HJM) dont la méthodologie permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt.

Dans le cadre de travail HJM, la dynamique du taux forward instantané est supposée vérifier l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t$$

Avec :

- W_t un mouvement brownien,
- $\sigma(t,T)$ un processus de volatilité,
- $\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$ qui s'impose par la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage,
- $f(0,T)$ la courbe des taux forward instantanés issue des marchés financiers.

Dans le modèle Hull-White à un facteur, le processus de volatilité des taux forward instantanés définit ci-dessus vaut :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-k(T-t)}$$

Or, le prix d'un zéro coupon d'échéance T à l'instant t vérifie la dynamique suivante :

$$\frac{\mathrm{dB(t,T)}}{\mathrm{B(t,T)}} = \mathrm{r(t)dt} + \sigma(\mathrm{t,T})\mathrm{d}\widehat{\mathrm{W}}(\mathrm{t})$$

En déroulant la formule d'Ito, après calcul on obtient l'expression :

$$\mathrm{B(t,T)} = \mathrm{B(0,T)}\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{r_s ds} + \int_0^t \sigma(\mathrm{s,T})\mathrm{dW_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(\mathrm{s,T})\mathrm{ds}}$$

Dans le cas où T=t, l'équation se simplifie par :

$$\mathrm{B(t,t)} = 1 = \mathrm{B(0,t)}\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{r_s ds} + \int_0^t \sigma(\mathrm{s,t})\mathrm{dW_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(\mathrm{s,t})\mathrm{ds}}$$

Pour enfin établir la formule fermée de valorisation des prix zéro coupon :

$$\mathrm{B(t,T)} = \frac{\mathrm{B_m(0,T)}}{\mathrm{B_m(0,t)}}\mathrm{e}^{\int_0^t (\sigma(\mathrm{s,T}) - \sigma(\mathrm{s,t}))\mathrm{dW_s} - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(\mathrm{s,T}) - \sigma^2(\mathrm{s,t}))\mathrm{ds}}$$

Le modèle de taux courts Hull-White à un facteur s'avère relativement bien adapté au cadre actuel des taux durablement bas, puisque les taux courts suivent une loi normale et peuvent donc prendre des valeurs négatives. Il est également possible d'estimer la proportion de taux négatifs obtenu par le modèle.

La probabilité d'avoir des taux négatifs vérifie la relation suivante :

$$P(R < 0) = P(PZC > 1)$$

Ce qui donne après calcul

$$P(R < 0) = 1 - N\left(\frac{\log\left(\frac{B_m(0,T)}{B_m(0,t)}\right) + \frac{\sigma^2}{4\lambda^3} * T1 * (T2 * T1 + 2 * T3^2)}{\frac{\sigma}{\lambda} * T1 * \sqrt{\frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})}}\right)$$

Avec respectivement,
$T1 = (1 - e^{-\lambda(T-t)})$; $T2 = (1 - e^{-2\lambda t})$; $T3 = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$; $T4 = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s$

Par ailleurs, la modélisation d'un seul facteur est suffisante pour capter le risque principal de translation de la courbe des taux d'intérêt.

Au-delà des aspects théoriques, ce modèle présente l'avantage d'une relative simplicité de mise œuvre.

1.6.2 Modèle Actifs risqués

L'un des modèles les plus répandus et celui qui sera utilisé pour diffuser l'indice action est le modèle de Black & Scholes, de type log-normal :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t \times dt + \sigma \times dW_t$$

Avec les notations suivantes :

- S_t le prix de l'action à l'instant t,
- r_t le taux sans risque à l'instant t,
- σ le paramètre de volatilité du prix de l'action,
- W_t un mouvement brownien.

L'indice est simulé en utilisant une méthode de proche en proche, consistant à discrétiser la formule de la dynamique, soit en univers risque neutre :

$$S_{t+dt} = S_t e^{\left(r_t - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt} \times N(0,1)}$$

A noter que l'indice projetant la classe d'actif assimilée à l'immobilier se base également sur un processus stochastique géométrique de type Black & Scholes mais calibré avec des paramètres différents.

1.6.3 Mouvement Brownien

La modélisation stochastique des indices implique de générer des mouvements browniens géométriques qui sont la composante même du caractère aléatoire des simulations. Autant de mouvements browniens indépendants sont nécessaires que de classes d'actifs présentes dans le modèle de projection. Hormis le risque de crédit, quatre sont répertoriées à ce stade :

- Taux (modèle Hull-White à 1 facteur),
- Actions (Black & Scholes),
- Gestion Alternative (Black & Scholes),
- Immobilier (Black & Scholes).

Les mouvements browniens utilisés pour la diffusion des indices retenus ont la caractéristique d'être à incrément gaussien tel que :

$$W_{t+u} - W_t \sim N(0,1)$$

Ainsi, l'une des fonctionnalités primaires du générateur de scénarios économiques est de pouvoir générer des nombres aléatoires qui alimenteront les simulations Monte Carlo.
Pour cela, nous avons recours au générateur Mersenne Twister. Ce dernier est un générateur de nombres pseudo-aléatoires qui se base sur un nombre premier de Mersenne $2^{19937} - 1$. Il s'avère être de bonne qualité et assure une robustesse pour les tests de martingalité.

2 Le risque de crédit

2.1 Introduction au risque de crédit

En théorie, le risque de crédit est défini comme la perte potentielle que peut subir un agent économique suite à un événement de crédit touchant l'une de ses contreparties. En pratique, celui-ci peut se décomposer en trois sous-risques :

- Risque de changement de notation : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à une dégradation de notation de l'émetteur.

- Risque d'écartement des spreads : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à une hausse du spread de crédit sur les marchés financiers.

- Risque de défaut : baisse de la valeur de marché d'un actif suite à l'occurrence du défaut d'un émetteur. Autrement dit, son incapacité à tenir ses engagements de paiement d'intérêt ou de nominal de la créance.

De par sa nature, le risque de crédit concerne principalement les titres obligataires qui sont des outils financiers comportant une émission d'une dette qui doit être remboursée à terme. Or, dans l'univers de Solvabilité 2, une distinction est faite entre les titres obligataires souverains et privés. Les premiers sont exonérés de risque de crédit tandis que les seconds y sont exposés.

	Poids des dettes privés dans l'allocation d'actifs	Durée de détention moyenne de ces titres
France	43%	5 ans
Europe	32%	4 ans

Tableau 1 : Chiffres sur les titres obligataires privés, source : Report on insurers' asset and liability management in relation to the illiquidity of their liabilities.

Au vu du poids considérable que représente l'investissement par les compagnies d'assurance dans les titres obligataires privés, une modélisation du risque de crédit (au même titre que le risque de taux, actions ou immobilier…) dans le calcul des fonds propres économiques et du Best Estimate s'impose.

2.2 Modélisation du risque de crédit

Il existe trois grandes familles de modèles de diffusion des spreads de crédit en univers risque neutre :

- Modèles structurels : l'approche repose sur le principe de la firme de Merton dans lequel la notion de défaut intervient lorsque la valeur totale des actifs d'une entreprise devient inférieure à un seuil fixé préalablement. Le bilan simplifié de l'entreprise est présenté comme un passif composé d'une dette prenant la forme

d'un zéro coupon d'échéance T et d'un actif en valeur de marché qui suit un processus log-normal sous la probabilité risque neutre. Soit :

Actifs de l'émetteur	Passifs de l'émetteur
Actif A(t) = FP(t) + L(t)	Fonds Propres FP(t)
	Dette L(t)

Tableau 2 : bilan économique de la firme de Merton.

De la théorie des options découle la dynamique de ce portefeuille et l'éventualité d'un défaut constaté à l'échéance T lorsque $A(T) < L(T)$.

- Modèle de notation de crédit : approche développée par Jarrow, Lando et Turnbull (modèle JLT), qui repose sur une simulation de transition de notation de crédit via des matrices stochastiques. L'idée sous-jacente de ce modèle est que l'obligation est subdivisée à chaque pas de projection et transite dans chaque état de notation, le principe est schématisé ci-dessous :

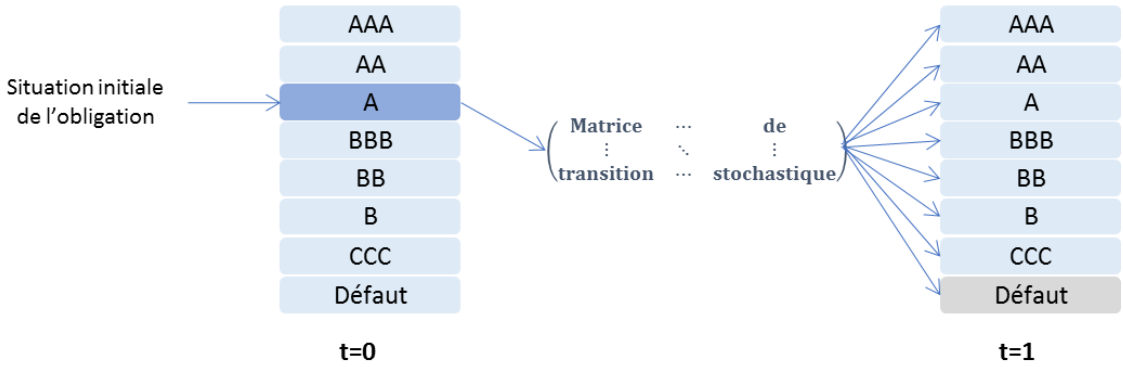


Figure 6 : illustration du modèle JLT entre deux pas de temps de projection.

L'itération de ce processus jusqu'à échéance de l'obligation initiale implique qu'une certaine quantité du nominal fasse défaut.

- Modèles à forme réduite (ou à intensité) : parmi cette famille, on fait référence en particulier au modèle de Longstaff, Mithal et Neis (LMN) et aux modèles à surplus d'intensité. L'approche de ces modèles consiste à raisonner en probabilité de défaut espéré. Dans ces modèles, on constate une quantité de défaut par unité de temps d'où la notion d'intensité. Ici, seul le modèle LMN sera abordé plus en détail et mis en application dans le cadre de Solvabilité 2 pour une compagnie d'assurance vie.

2.2.1 Convention de recouvrement

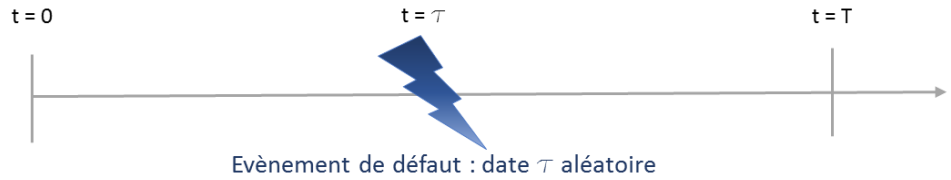
Dans le cas où l'entreprise émettrice de dettes vient à faire défaut suite à une impossibilité d'honorer ses engagements vis-à-vis des créanciers, ces derniers récupèrent bien souvent une partie du capital initialement investi, on parle alors de taux de recouvrement. Ce taux de recouvrement permet d'introduire la notion de perte en cas de défaut, le LGD qui se définit comme :

$$LGD = 1 - Taux\ de\ recouvrement$$

Celui-ci est un élément clé dans la modélisation du risque de crédit via le choix de convention retenu en cas de défaut.

Par principe, un zéro coupon risqué de maturité T se définit comme un titre garantissant l'obtention d'une unité de monnaie en T si l'émetteur ne fait pas défaut entre t=0 et t=T.

Dans le cas, où celui fait défaut avant la maturité T du zéro coupon risqué, deux cas se présentent :



Occurrence du défaut	Cas 1 : recouvrement en date de défaut	Cas 2 : recouvrement à maturité
$\tau \leq T$: défaut avant maturité	Le créancier récupère 1-LGD unité de monnaie en date t = τ	Le créancier récupère 1-LGD unité de monnaie en date t = T

Figure 7 : conventions de recouvrement en cas de défaut d'un ZC risqué

De ces deux cas découlent deux formules de prix possibles pour le zéro coupon risque, noté $P_{risqué}(t,T)$. En notant, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration associée à l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{Q})$ et $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité risque neutre.

<u>Cas 1 : recouvrement en cas de défaut</u>

$$P_{risqué}(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{\int_t^{\tau} r(s)ds} 1_{\tau\leq T}(1-LGD) + e^{-\int_t^T r(s)ds} 1_{\tau>T} | \mathcal{F}_t, \tau > t\right)$$

<u>Cas 2 : recouvrement à maturité</u>

$$P_{risqué}(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{\int_t^{T} r(s)ds} 1_{\tau\leq T}(1-LGD) + e^{-\int_t^T r(s)ds} 1_{\tau>T} | \mathcal{F}_t, \tau > t\right)$$

Ce qui permet de scinder en deux parties, soit :

$$P_{risqué}(t,T) = P_{sans\ risqué}(t,T) \times [\mathbb{Q}(\tau > T | \mathcal{F}_t, \tau > t) + (1-LGD)(1-\mathbb{Q}(\tau > T | \mathcal{F}_t, \tau > t))]$$

L'option 2, celle d'un recouvrement à maturité en cas de défaut sera retenue pour la suite. Autrement dit, si une obligation fait défaut en cours de vie, celui-ci sera constaté via un remboursement partiel uniquement à maturité. Cette option présente l'avantage de simplifier les calculs pour la suite de l'étude.

3 Le modèle Longstaff, Mithal et Neis (LMN)

Dans le cadre de ce mémoire, le modèle à forme réduite de type LMN a été retenu pour la modélisation du risque de crédit en univers risque neutre. Dans cette partie seront abordées les principales caractéristiques du modèle ainsi que la formulation du prix d'une obligation risquée avec prise en compte du défaut.

3.1 Description du modèle LMN

Introduit dans un article paru en 2004 par Longstaff, Mithal et Neis[1] le modèle LMN qui porte leurs noms appartient à la famille des modèles à intensité. Il repose sur une vision probabiliste de défaut instantané. Soit, en notant λ l'intensité de défaut.

$$\mathbb{P}(défaut\ entre\ t\ et\ t+dt | survie\ jusqu'\text{à}\ t) = \lambda_t dt$$

Ce qui revient à interpréter λ_t comme la probabilité instantanée de défaut par unité de temps. On en déduit la probabilité de survie en fonction de l'intensité de défaut.

$$\mathbb{P}(survie\ jusqu'\text{à}\ t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$$

La particularité du modèle LMN réside dans la structure de la dynamique du processus d'intensité de défaut du type Cox-Ingersoll-Ross (CIR) qui lui est associée. En effet, les contraintes de positivité et de retour à la moyenne conduisent à un processus d'intensité de défaut tel que :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t$$

Avec :

- α/β : la moyenne de long terme de l'intensité de défaut,
- σ : la volatilité,
- W : le mouvement brownien unidimensionnel associé au risque de crédit,
- λ_0 : l'intensité de défaut initiale,
- (α, β, σ) sont des constantes positives tels que : $\alpha < \sigma^2 < 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$.

3.1.1 Prix d'une obligation risquée

Avec la formule de valorisation d'une obligation risquée sous la convention d'un recouvrement à maturité mentionné à la partie 2.2.1, nous pouvons établir que son prix noté B vérifie :

[1] Longstaff F. A., Mithal S. and Neis E. Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? new evidence from the credit default swap market. National Bureau of Economic Research, 2004.

$$B(c,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[c\int_0^T \exp(-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds)dt\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T (r_t+\lambda_t)dt\right]$$
$$+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(1-LGD)\int_0^T \lambda_t \exp(-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds)dt\right]$$

Avec *c*, le taux de coupon de fixe de l'obligation et T sa maturité. Une explication littéraire de chacun des trois termes présents dans l'équation ci-dessus nous donne :

- Premier : valeur actualisée des coupons.
- Deuxième : valeur actualisée du nominal (supposé égal au remboursement du principal).
- Troisième : valeur actualisée des paiements versés en cas de défaut.

Ici, les flux obligataires sont actualisés au taux sans risque ajusté de l'intensité de défaut. Or, sous l'hypothèse d'indépendance, on obtient l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T r_t+\lambda_t dt)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T r_t dt)\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T \lambda_t dt)\right]$$

Le premier terme de la décomposition est l'actualisation au taux sans risque, autrement dit le prix d'un zéro coupon sans risque de maturité T. Quant au second terme, des calculs plus approfondis et inspirés de l'article de Cox, Ingersoll et Ross (1985) sont nécessaires pour obtenir une formule fermée.

Soit :

$$F(\lambda,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T \lambda_t dt)\right]$$

Cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} + (\alpha-\beta\lambda)\frac{\partial F}{\partial\lambda} - \frac{\partial F}{\partial T} - \lambda F = 0$$

Avec comme condition initiale $F(\lambda,0) = 0$. Une solution à cette équation aux dérivées partielles est de la forme :

$$F(\lambda,T) = A(T)\mathrm{e}^{\lambda B(T)}$$

Où *A* et *B* sont deux fonctions telles que *A(0)=0* et *B(0)=1* pour respecter la condition initiale précédemment évoquée.

En injectant la solution proposée dans l'équation aux dérivées partielles, celle-ci devient :

$$-\left(A'(T)e^{\lambda B(T)} + \lambda A(T)B'(T)e^{\lambda B(T)}\right) + (\alpha-\beta\lambda)A(T)B(T)e^{\lambda B(T)}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda A(T)B^2(T)e^{\lambda B(T)} - \lambda A(T)e^{\lambda B(T)} = 0$$

Puis en factorisant par $F(\lambda, T)$:

$$\left(\alpha\beta - \frac{A'}{A}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - B' - \beta B - 1\right)\lambda = 0$$

Chacun des deux membres sont nuls, ce qui donne finalement le système suivant :

$$\begin{cases} A' = \alpha B A \\ \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - B' - \beta B = 1 \end{cases}$$

Sachant que *A(0)=0*, nous obtenons :

$$\begin{cases} A(T) = \exp(\alpha \int_0^T B(t)dt) \\ F(\alpha, T) = \exp(\alpha \int_0^T B(t)dt + \lambda B(T)) \end{cases}$$

La résolution de la seconde équation dans laquelle intervient B s'avère plus délicate et nécessite de reconnaitre une équation de Riccati, pour affirmer que :

$$B(T) = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi T})}$$

En injectant dans *A*, on obtient alors la formule explicite :

$$A(T) = exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t\right) \times \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}$$

Avec les quantités ϕ et κ définies telles que :

- $\phi = \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}$
- $\kappa = \frac{\beta + \phi(\beta, \sigma)}{\beta - \phi(\beta, \sigma)}$

3.1.2 Relation entre prix d'une obligation sans risque et risquée

Une fois établies ces formules quelques peu complexes, il est plus aisé d'obtenir la relation entre prix risqués et prix sans risque. Le pricing d'un zéro coupon de rating R et de maturité T est obtenu par formule fermée :

$$P_R(t, T) = P_{sans\ risque}(t, T) \times (1 - LGD \times \bar{Q}(t, T)_R)$$

Avec $\bar{Q}(t, T)_R$ la probabilité de faire défaut avant T pour un émetteur de rating R:

$$\bar{Q}(t, T)_R = 1 - A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T - t) \times \exp(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T - t)\lambda_t^R)$$

3.1.3 Passage aux spreads

La formule permettant de calculer le spread de crédit en t, associé à une maturité m et un rating R est donnée par :

$$spread_R(t, t+m) = -\frac{1}{m}\ln\left(\frac{P_R(t, t+m)}{P_{sans\ risque}(t, t+m)}\right)$$

Soit, après simplification :

$$spread_R(t, t+m) = -\frac{1}{m}ln\big(LGD \times A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m)\exp\big(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m)\lambda_t^R\big) + 1 - LGD\big)$$

3.2 Limites de la discrétisation

Un des enjeux du modèle LMN est sa discrétisation en un pas de temps adapté à une projection de flux d'un contrat d'assurance vie. En effet, une des sources d'erreur de modèle peut être une discrétisation trop grossière. Pour trouver un équilibre entre vitesse de calcul et finesse de discrétisation, un pas de temps semi-annuel sera privilégié. La discrétisation est effectuée via un schéma de type Euler tel que :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + (\alpha - \beta\lambda_k) \times \frac{1}{2} + \sigma\sqrt{\frac{1}{2} \times \lambda_k} \times W_k$$

Or, avec ce type de discrétisation, le processus d'intensité de défaut λ peut prendre des valeurs négatives rendant la racine carrée non définie à l'itération suivante. Pour y remédier, une discrétisation plus adaptée est proposée :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + (\alpha - \beta\lambda_k) \times \frac{1}{2} + \sigma\sqrt{max\left(\frac{1}{2} \times \lambda_k; 0\right)} \times W_k$$

Un choix de discrétisation alternatif consiste à prendre la valeur absolue pour assurer une stricte positivité du processus d'intensité de défaut λ, soit :

$$\lambda_{k+1} = \left|\lambda_k + (\alpha - \beta\lambda_k) \times \frac{1}{2} + \sigma\sqrt{\frac{1}{2} \times \lambda_k} \times W_k\right|$$

La condition initiale $\lambda_0 > 0$ permet d'éviter d'avoir une racine carrée non définie.

Le choix du type de discrétisation impacte directement la valeur des spreads de crédit du modèle LMN. En effet, la valeur théorique de l'espérance de la probabilité de survie en fonction de l'intensité de défaut est donnée par :

$$E^{\mathbb{Q}}\left(exp\left(-\int_0^T \lambda_s ds\right)\right) = A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T) \times \exp(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T) \times \lambda_0)$$

En effet, lors de l'implémentation numérique, l'intégrale stochastique ci-dessus est approximée par :

$$E^{\mathbb{Q}}\left(exp\left(-\int_k^{k+1} \lambda_t dt\right)\right) \approx e^{-\frac{1}{2}dt(\lambda_k+\lambda_{k+1})}$$

L'écart avec la valeur théorique peut varier assez considérablement en fonction du jeu de paramètres $(\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0)$ initial, comme en témoigne les graphiques ci-dessous.

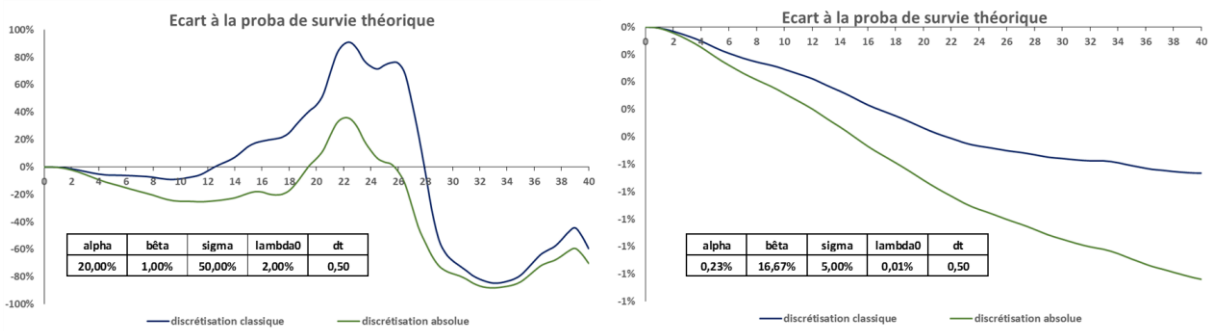


Figure 8 : approximation de l'intégrale stochastique en fonction de la discrétisation

3.3 Avantages du modèle LMN

Le modèle LMN présente l'avantage d'avoir des formules fermées pour le calcul des zéro coupons risqués et une bonne réplication des courbes des taux risqués de marché. En effet, la possibilité de dupliquer le jeu de paramètres par classe de ratings disponibles permet une meilleure paramétrisation du modèle.

Enfin, le modèle LMN a été préféré au modèle JLT, car ce dernier implique une complexité d'implémentation plus élevée pouvant conduire à des temps de développement et de calculs plus importants. Cette complexité supplémentaire réside principalement dans :

- La gestion des calculs matriciels de transitions de rating.
- La mise en place du découpage en strates de notation de chacune des lignes de l'inventaire d'actif et de la gestion indépendante de ces différentes strates dans la stratégie financière.

Impacts opérationnels

4 Intégration du crédit dans les scénarios économiques

4.1 Calibrage des paramètres

Le calibrage du modèle LMN s'effectue à partir des courbes de marché spot de taux risqués pour des maturités annuelles issues de Bloomberg. L'indice Bloomberg utilisé regroupe un panier d'obligations risquées assurant une certaine liquidité.

La calibration des paramètres du modèle LMN, à savoir (α, β, σ, λ_0), est effectuée par minimisation des écarts quadratiques entre les spreads de marché et les spreads de modèle via un solveur. Pour rappel, le spread théorique initial d'un zéro coupon de rating R et de maturité m est obtenu via la formule fermée suivante :

$$spread_R(0,m) = -\frac{1}{m} ln\big(LGD \times A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m) \exp\big(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(m)\lambda_0^R\big) + 1 - LGD\big)$$

La suite du calibrage consiste à minimiser l'écart relatif entre le spread théorique ci-dessus et le spread de marché.

Soit, en notant (α^*, β^*, σ^*, λ_0^*) le jeu de paramètres retenu au 31/12/2019 :

$$(\alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \lambda_0^*) = Argmin_{(\alpha,\beta,\sigma,\lambda_0)} \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{spread\ théorique\ (t) - spread\ marché(t)}{spread\ marché\ (t)} \right)^2$$

Finalement, on obtient l'approximation de la courbe de marché spot suivante :

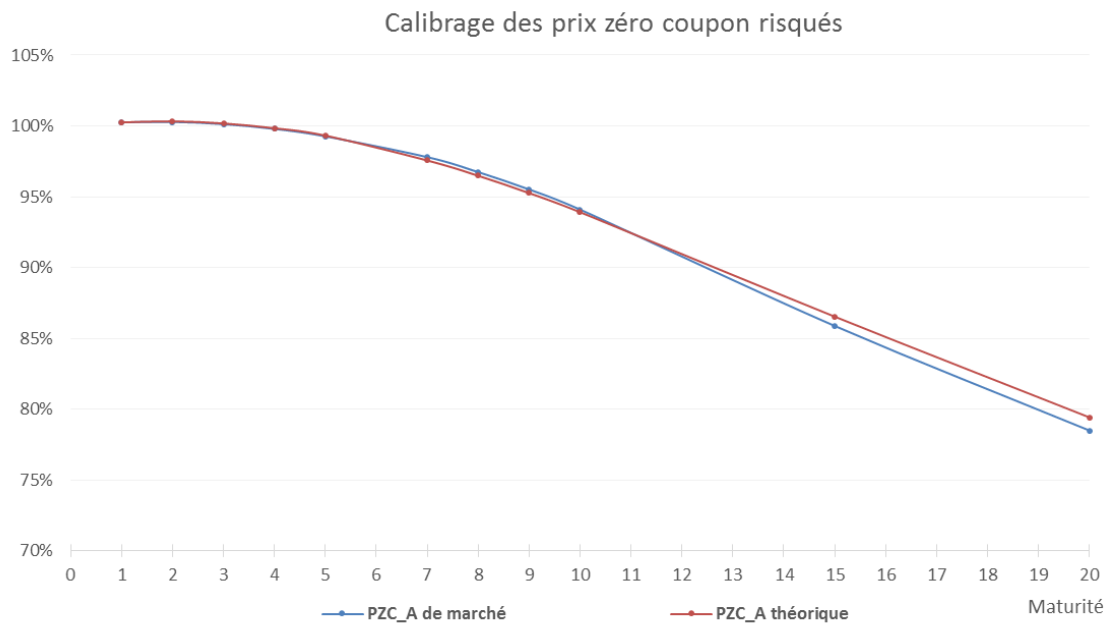


Figure 9 : calibrage de la courbe des taux risqués du rating A

Le Loss Given Default (LGD) est supposé constant à 60%. Il correspond aux statistiques historiques obtenues par les agences de notation[1]. Une analyse de sensibilité sur ce paramètre sera effectuée dans la partie finale.

4.2 Processus de risque neutralisation

4.2.1 Sans risque de crédit

Il a été évoqué à la section 1.6 l'intérêt d'un générateur de scénarios économiques (GSE) ainsi que les propriétés de la probabilité risque neutre. Ainsi, les GSE qui recourent à la probabilité risque neutre doivent générer des prix d'actifs sans prime de risque et cohérent avec les prix observés sur les marchés. Autrement dit, les actifs ne diffèrent que par leur volatilité, contrairement à la probabilité monde réel.

Or, les prix de marché observés à un instant donné contiennent bien souvent une prime de risque. Le processus de risque neutralisation vise donc à supprimer ce spread implicite inclus dans les coupons et le nominal afin de répliquer le taux sans risque.

La valeur boursière étant inchangée par ce processus de risque neutralisation, nous devons retrouver l'égalité suivante :

$$VM_{marché} = VM_{théorique}$$

Or, dans le cas d'une obligation à taux fixe :

$$VM_{théorique} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(1+r_i)^i} + \frac{N}{(1+r_m)^m}$$

Avec :

- c_i le coupon,
- N le nominal,
- m la maturité,
- r_i le taux sans risque issu de la courbe des taux sans risque initiale.

Ainsi pour retrouver l'égalité, il convient d'ajuster les coupons et le nominal de la manière suivante :

$$c_i^{ajusté} = c_i \times \frac{VM_{marché}(0)}{VM_{théorique}(0)}$$

Et,

$$N^{ajusté} = N \times \frac{VM_{marché}(0)}{VM_{théorique}(0)}$$

[1] Annual default study: Defaults will rise modestly in 2019 amid higher volatility

Finalement, tous les flux sont réduits de manière proportionnelle, pour respecter les contraintes de l'univers risque neutre :

$$VM_{marché} = VM_{théorique}^{ajusté} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{ajusté}}{(1+r_i)^i} + \frac{N^{ajusté}}{(1+r_m)^m}$$

4.2.2 Avec risque de crédit

L'implémentation du risque de crédit dans le modèle de projection modifie le processus de risque neutralisation des actifs obligataires. Désormais, les flux des actifs obligataires éligibles au risque de crédit sont ajustés de manière à refléter l'écart entre le spread implicite du titre et le spread moyen de son rating.

A ce stade nous savons que le prix théorique d'une obligation risquée dans le cadre du modèle LMN s'écrit :

$$VM_{théorique}(0) = \sum_{i=1}^{m} c_i \times P_{risqué}(0,i) + N \times P_{risqué}(0,m)$$

Où, pour rappel :

$$P_{risqué}(0,i) = P(0,i) \times \left(1 - LGD \times \left(1 - \exp(-\int_0^i \lambda_t dt)\right)\right)$$

Une première étape consiste à abattre les flux proportionnellement :

$$c_i' = c_i \times \frac{VM_{marché}(0)}{VM_{théorique}(0)}$$

La seconde étape consiste à prendre en compte le défaut et le critère de martingalité risque neutre, finalement le prix modélisé d'une obligation risquée devient :

$$VM_{oblig}(t) = S^R(0,t)\left[\sum_{i=t+1}^{m} c_i' \times P_{risqué}(t,i) + N' \times P_{risqué}(t,m)\right]$$
$$+\left(1 - S^R(0,t)\right)(1 - LGD)\left[\sum_{i=t+1}^{m} c_i' \times P(t,i) + N' \times P(t,m)\right]$$

Avec, la probabilité de survie entre 0 et t d'une obligation risquée de rating R :

$$S^R(0,t) = exp\left(-\int_0^t \lambda_u^R du\right)$$

A noter que dans le second terme de l'équation les flux sont actualisés aux taux sans risque contrairement aux flux du premier terme. Ceci s'explique par le fait que ces flux sont certains et proviennent des défauts constatés.

Pour comparer avec et sans risque de crédit, une synthèse du processus de risque neutralisation est présentée ci-dessous :

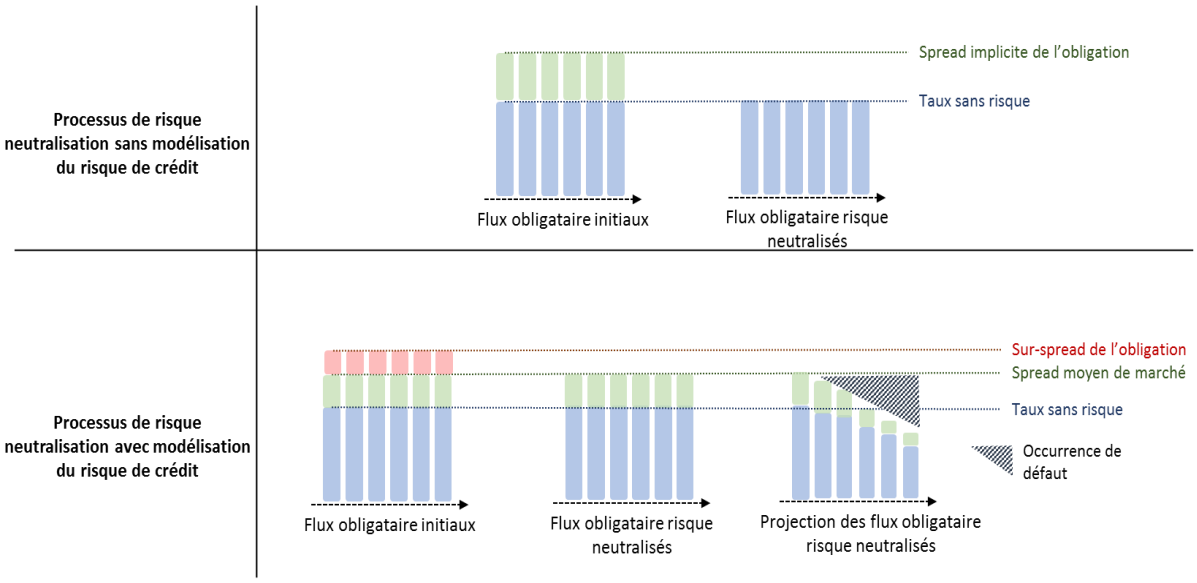


Figure 10 : risque neutralisation avec et sans risque de crédit

Les flux obligataires ne sont plus réduits de manière proportionnelle mais sont ajustés de manière progressive. De sorte que le principe de risque neutralité soit respecté afin de répliquer le taux sans risque en moyenne.
In fine, les produits financiers des obligations risquées seront plus importants en début de projection pour diminuer de manière progressive en fonction de l'intensité de défaut.

4.3 Matrice de corrélation

Une visualisation de l'historique du niveau de spreads de crédit sur les 20 dernières années met en évidence une forte corrélation entre les ratings obligataires.

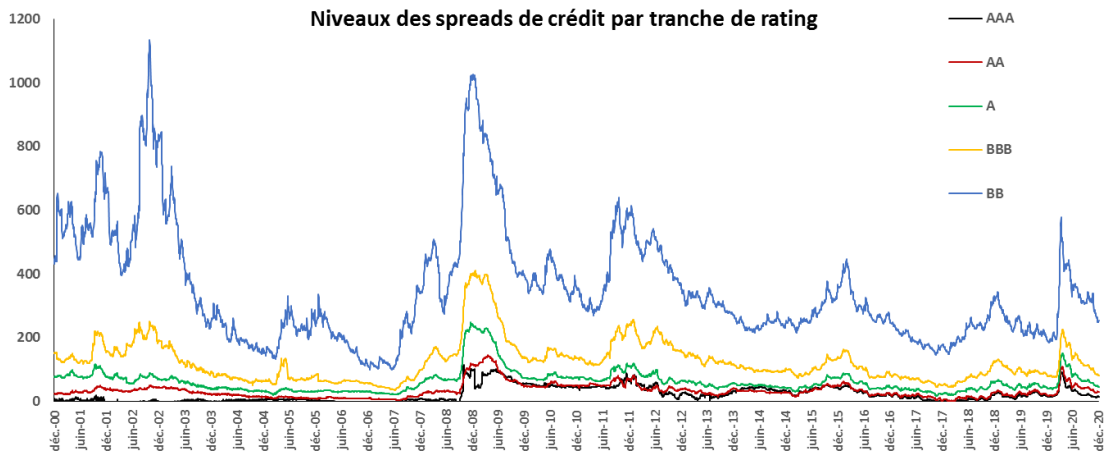


Figure 11 : historique du niveau des spreads de crédit de 2000 à 2020

Les niveaux de ces corrélations obtenues sont renseignés dans la matrice ci-dessous :

Corrélations	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	100%	80%	68%	60%	36%
AA	80%	100%	94%	89%	73%
A	68%	94%	100%	95%	83%
BBB	60%	89%	95%	100%	90%
BB	36%	73%	83%	90%	100%

Tableau 3 : Matrice de corrélations historiques entre les spreads de crédit au 31/12/2019.

Un deuxième type de corrélation, celui-ci avec les autres classes d'actifs, est également observable et nécessaire à la projection du risque de crédit au sein du générateur de scénarios économiques. En utilisant la même source de données :

Corrélation	Taux	Actions	Immobilier	Gestion Alternative
Spread A	0%	-25%	25%	-25%

Une corrélation négative entre le spread de crédit et les actions s'interprète économiquement par le fait qu'un écartement de spreads de crédit est un signe d'incertitude vis-à-vis de la pérennité de l'entreprise qui se traduit bien souvent par une baisse de la valeur de ses actions.

4.4 Modèle mono rating et ACP

Le principe de l'émission d'un titre de dette via une obligation privée ou public est l'endettement d'un agent économique sous promesse de remboursement au terme. La qualité des emprunts diffère naturellement d'un émetteur à un autre, d'un secteur à un autre ou encore de la priorité de remboursement. Pour normaliser et comparer la qualité des obligations, des notations sont attribuées à chacune d'elles par des agences de notations. Ces notes s'échelonnant graduellement de AAA (qualité supérieure) à CCC (investissement hautement spéculatif). Solvabilité 2 introduit une notion simplifiée de notation, le Credit Quality Steps (CQS) :

Rating	Indice
AAA	0
AA	1
A	2
BBB	3
BB	4
B&-	5
Non notée	7

Tableau 4 : table de correspondance notation de crédit et CQS de Solvabilité 2.

Dans un objectif de diversification de son portefeuille d'actifs, un assureur aura tendance à répartir les investissements obligataires du fonds sur plusieurs ratings, le tout dans le respect des conventions de gestion du fond.

Ainsi pour la modélisation du risque de crédit via le modèle LMN, la question de la prise en compte de chacun des ratings présents dans le portefeuille ou bien du recours à des regroupements peut se poser.

En effet, nous avons pu voir que la diffusion de l'intensité stochastique de défaut dans le cadre du modèle LMN est donnée par :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t$$

A ce stade, deux choix sont possibles pour l'intensité de défaut :

- Mutli rating : chaque catégorie de notation modélisée possède sa propre intensité de défaut. Ce qui implique qu'un mouvement brownien est nécessaire par notation pour bien prendre en compte les spécificités de chaque niveau de spread.

- Mono rating : l'intensité de défaut est calibrée sur le rating moyen du portefeuille d'actifs. Un unique mouvement brownien indépendant pour le risque de crédit est alors nécessaire.

Pour apporter plus de contexte à la décision finale, une analyse en composantes principales est proposée dans la suite de l'étude.

Analyse en Composantes Principales

L'analyse en Composantes Principales (ACP) fait partie des méthodes descriptives multidimensionnelles dont l'un des objectifs est de détecter des éventuels regroupements de variables. Dans notre démarche, l'ACP permet de synthétiser les variables en une ou plusieurs variables décorrélées entre elles. Le principe réside dans l'utilisation de matrice des variances-covariances pour réduire le nombre de dimension de l'espace initial.

Notions préliminaires de l'ACP

Dans un cadre général, les mesures sont représentées sous forme d'une matrice $n\,x\,p$ avec p le nombre de variables et n le nombre d'individus. Soit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^p \end{pmatrix}$$

Avec les notations suivantes :

- x^j la j-ème variables,
- x_i le i-ème individu.

Chaque individu x_i est associé à un poids $p_i>0$ tel que l'ensemble des poids vérifie :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

L'objectif de l'ACP porte sur la recherche de sous-espace affines de dimension $d<p$ maximisant l'inertie de la projection orthogonale du nuage sur le sous-espace. L'inertie se

définit comme étant la somme pondérée des carrés des distances des individus au centre de gravité. Elle matérialise la dispersion du nuage de points. Mathématiquement, l'ACP consiste à maximiser la quantité suivante :

$$\max_{H} \sum_{i} p_i \|\widehat{x_i^H}\|^2$$

Les projections sur les nouveaux axes seront les composantes principales.

Nous retiendrons l'indicateur de qualité de la représentation de l'individu i sur l'axe Δ_{u_j} est exprimé par la quantité cos2 tel que :

$$Cos2(i) = \frac{\left(c_i^j\right)^2}{\|x_i\|^2}$$

Avec c_i^j la i-ème coordonnée de l'individu *i* sur le *j-ème* axe principal du sous espace affine de projection.

Analyse des résultats

Dans le cas précis de cette étude, les variables considérées seront les niveaux de rating disponibles, à savoir de AAA à BBB sur une période d'observation de 20 ans. L'analyse des résultats se fait via le logiciel R et les packages (« FactoMineR » et « factoextra »).

L'ACP porte sur la variation journalière des spreads de crédit. Par ailleurs, ces variables seront centrées réduites.

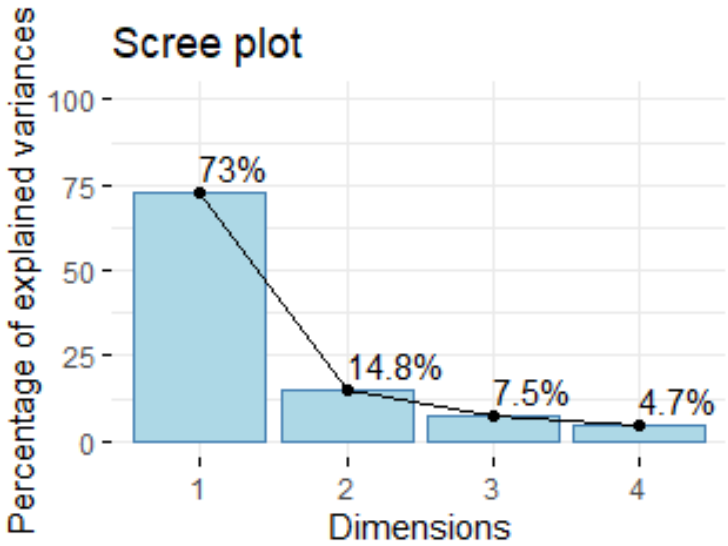


Figure 12 : graphique valeurs propres, fonction R : fviz_eig()

Le graphique ci-dessus donne le profil des valeurs propres et nous renseigne sur la décomposition factorielle. Le premier facteur concentre quasiment les trois-quarts de la totalité de l'inertie. Autrement dit, 73% des informations contenues dans les données sont expliquées par la première composante principale.

L'analyse des données se poursuit par une représentation graphique du cercle des corrélations. Ce dernier permet de mettre en évidence la corrélation entre les variables et les deux premières composantes principales de l'ACP.

Par soucis de clarté, une variable synthétique nommée *portefeuille* a été ajoutée. Celle-ci représente l'évolution journalière des spreads de crédit pondérée par le poids des ratings présents dans le portefeuille d'actifs.

Par ailleurs, une coloration des variables en fonction de leur qualité de représentation est ajoutée via la fonctionnalité cos2 sous *R* (cosinus carré).
Ainsi pour une variable donnée, un cos2 proche d'un est synonyme d'une bonne qualité de représentation.

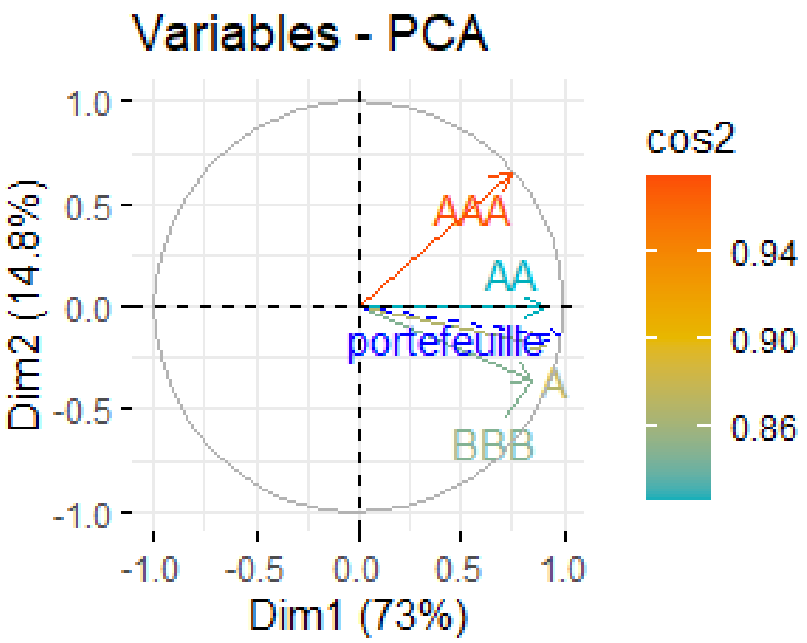


Figure 13 : cercle des corrélations colorée, R : fviz_pca_var ()

Ce cercle de corrélation met en évidence deux choses :

- Les variables sont positivement corrélées, car toutes regroupées.
- Une bonne qualité de représentation des variables, car toutes éloignées de l'origine.

A première lecture du cercle des corrélations, il ressort que le spread AA est représentatif du spectre de spreads initialement retenu, à savoir de AAA à BBB. Cependant, en considérant la variable synthétique *portefeuille*, le spread A est le plus adapté. Pour rappel, cette variable synthétique tient compte de la pondération des spreads composants l'inventaire d'actifs obligataires du portefeuille de l'étude.

Au vu des résultats obtenus par l'ACP, il semble acceptable d'opter pour une modélisation du risque de crédit mono-rating. Celui-ci étant calibré sur le rating moyen du portefeuille considéré.

4.1 Test de martingalité

Une série de tests de martingalité est effectuée sur la diffusion des spreads stochastiques en univers risque neutre. En effet, comme le précise la notice ACPR 5.15 relative au calcul des provisions techniques[1], les scénarios issus du GSE doivent faire l'objet de tests statistiques.

Les tests proposés réalisent une comparaison sur la base des prix effectifs calculés directement sur les scénarios en sortie du GSE. Dans le cadre du risque de crédit, le respect du critère d'absence d'opportunité d'arbitrage (le prix de tout actif de marché actualisé au taux sans risque est une martingale sous la probabilité risque neutre) est vérifié via les deux tests suivants :

- Test du déflateur risqué :

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\big(D(t) \times \big[S^R(t) + (1 - LGD)\big(1 - S^R(t)\big)\big]\big) = P^R(0, t)$$

- Test du ZC risqué :

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\big(D(t) \times \big[S^R(t)P^R(t, T) + \big(1 - S^R(t)\big)(1 - LGD)P(t, T)\big]\big) = P^R(0, T)$$

Avec les notations suivantes :

- La probabilité de survie entre 0 et t d'une obligation de rating R:

$$S^R(t) = exp\left(-\int_0^t \lambda_u^R du\right)$$

- Le prix en date t d'un zéro coupon de maturité T et de rating R: $P^R(t, T)$
- Le prix en date t d'un zéro coupon sans risque de maturité T: $P(t, T)$
- Le déflateur en date t: $D(t) = \exp(-\int_0^t r_s ds)$

La validation de ces tests de martingalité est effectuée via un test de Student qui s'avère être bien adapté pour des tirages de type Monte Carlo. En effet, celui sert comparer la moyenne observée à la moyenne théorique avec un indicateur de significativité. En fixant un seuil à 5%, le graphique des p-valeurs nous permet de valider l'hypothèse de martingalité.

[1] https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/media/2017/09/25/20151218-notice-solvabilite2-provisions-techniques.pdf

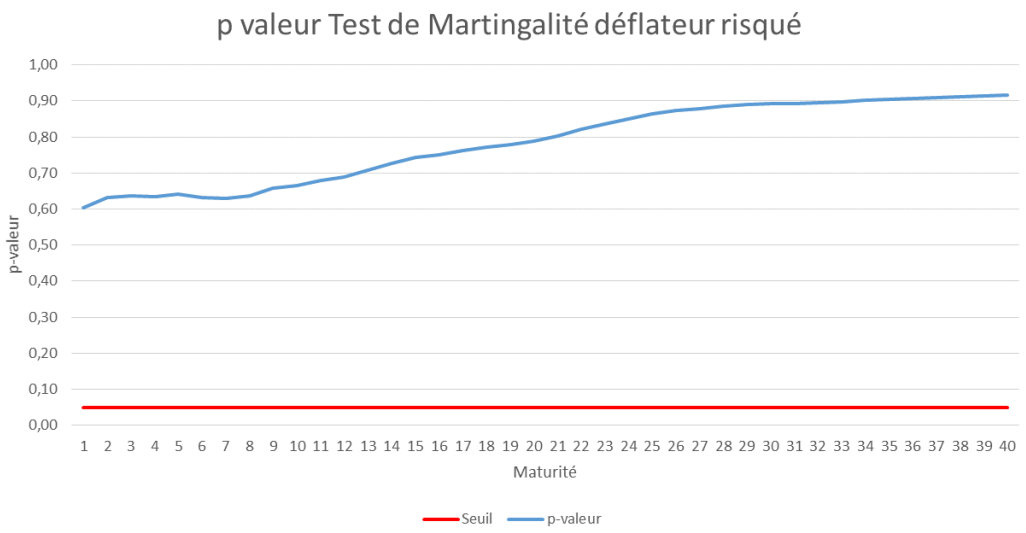


Figure 14 : p-valeur de la statistique du test de Student pour le déflateur risqué de rating A

L'analyse de ces tests de martingalité est primordiale pour s'assurer de la cohérence avec la probabilité risque neutre et de maitriser la fuite de modèle.

4.4.1 Fuite de modèle

La fuite de modèle est définie comme l'écart existant entre la valeur de marché noté VM de l'actif d'une part, et l'espérance des flux de trésorerie actualisés d'autre part, composés du BE et des marges futures noté VIF. Soit :

$$fuite\ de\ modèle = VM_{actif} - BE - VIF$$

En pratique cette égalité ne peut être satisfaite dans le cas de calculs stochastiques dans la mesure où le nombre de scénarios utilisés est fini et qu'il subsiste donc une erreur de convergence.
Afin que ces tests soient conclusifs, des seuils de tolérance doivent être définis.

4.4.2 Seuil de tolérance

Une des principales sources de fuite de modèle est la qualité des jeux de scénarios économiques stochastiques. Ainsi, il convient de définir des seuils de tolérances sur les tests de martingalité. Par ailleurs, ces tests peuvent être rapportés à la valeur de marché des actifs pour mieux les objectiver. A titre d'exemple, une fuite de modèle de 0,5% pour un organisme dont les fonds propres représentent 10% de la VM équivaut à une incertitude de 5% sur les fonds propres de cette société. Ci-dessous, un exemple de boucle de rétroaction sur le calibrage du modèle :

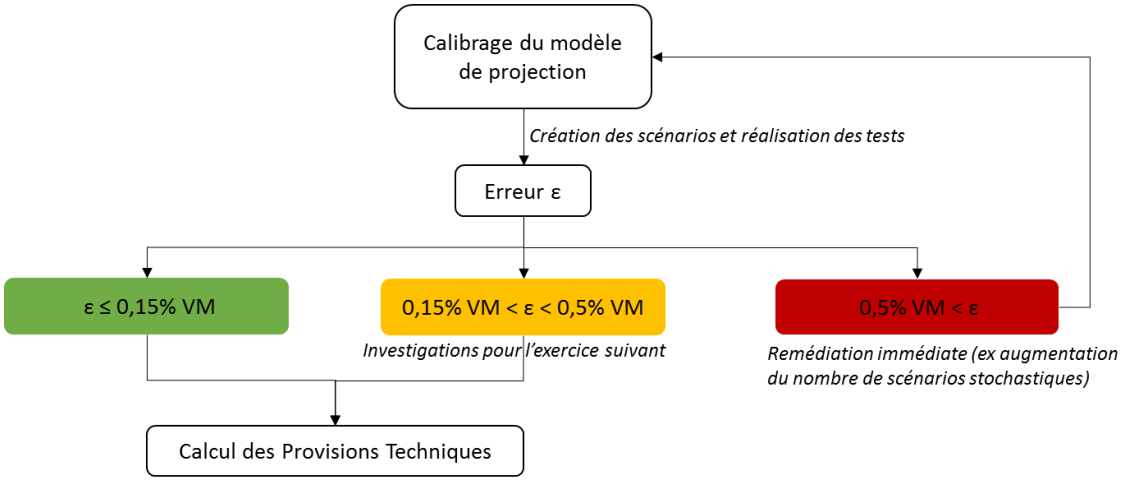


Figure 15 : seuil de tolérance et boucles de rétroactions

Dans la suite de l'étude, la fuite de modèle sera allouée prudemment de la manière suivante :

- Si positive : la fuite de modèle est répartie au prorata entre les marges futures et le Best Estimate.
- Si négative : la fuite de modèle vient diminuer les marges futures.

5 Intégration au sein du modèle ALM

5.1 Introduction au modèle ALM

La plupart des contrats d'assurances vie distribués en France intègrent un mécanisme de participation aux bénéfices, des garanties financières et des options contractuelles. Or, ces mécanismes induisent une asymétrie entre assureur et assuré notamment en cas de perte financière. Cette asymétrie doit être considérée dans l'évaluation des engagements comme le prévoit l'article 15 du règlement délégué. Il en résulte la nécessité de projeter ces mécanismes via un modèle ALM.

Un modèle ALM consiste à projeter les actifs, les passifs et leurs interactions pour établir les flux futurs qui en découlent. Ce modèle ALM a donc pour objectif de refléter la vie d'un contrat d'assurance vie en prenant compte les conditions économiques extérieures, les décisions de gestions internes et réglementaires de l'entreprise ainsi que le comportement des assurés. Une illustration de ce principe établie par Planchet et Leroy [1] est proposée ci-dessous :

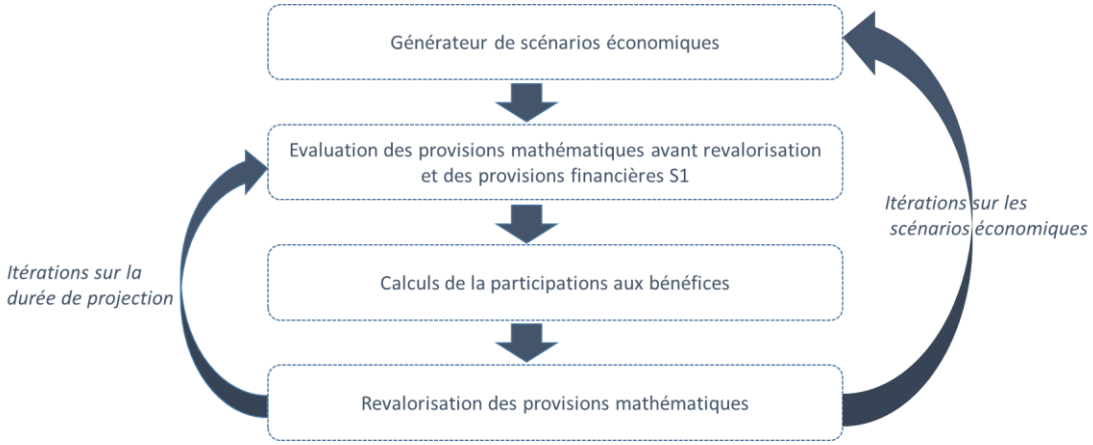


Figure 16 : modèle actif-passif de calcul des provisions

L'intégration du crédit stochastique au sein du modèle ALM intervient en amont au niveau du générateur de scénarios économiques via la diffusion de l'intensité de défaut puis dans un second temps au niveau du calcul des produits financiers à distribuer via la prise en compte du défaut.

[1] Engagement best estimate d'un contrat d'épargne en € - F. Planchet et G. Leroy

5.2 Comptabilisation du défaut

L'impact du risque de crédit dans la valorisation des obligations risquées a été abordé dans la partie précédente, ainsi pour une obligation risquée de maturité *t*, de rating *R* et de nominal *N* délivrant un coupon annuel fixe *c*, nous savons que sa valeur *V(t)* en *t* est donnée par :

$$V(t) = exp\left(-\int_0^t \lambda_s^R ds\right) \times \left\{\sum_{k=t+1}^{T} cP^R(t,k) + N\,P^R(t,T)\right\} + \left(1 - exp\left(-\int_0^t \lambda_s^R ds\right)\right) \times (1 - LGD)\left\{\sum_{k=t+1}^{T} c \times P(t,k) + N \times P(t,T)\right\}$$

Avec :

- La probabilité de survie d'une obligation de rating *R* entre 0 et *t*:

$$S^R(t) = exp\left(-\int_0^t \lambda_u^R du\right)$$

- Le prix en date t d'un zéro coupon de maturité *T* et de rating *R*: $P^R(t,T)$.
- Le prix en date t d'un zéro coupon sans risque de maturité *T*: $P(t,T)$.

Il est important de souligner ici que la valorisation des obligations risquées tient compte du risque de défaut futur. Ce qui n'est pas le cas pour la production financière de l'année et de la valorisation comptable, qui sont uniquement impactées par le risque de défauts survenus jusqu'à présent. Pour quantifier la notion de défauts survenus jusqu'à la date considérée, on définit le coefficient de survie comme :

$$CoefS(R,t_0,t) = 1 - LGD \times \left(1 - exp\left(-\int_{t_0}^t \lambda_s^R ds\right)\right)$$

Tel que défini, ce coefficient de survie va venir impacter l'ensemble des éléments clés de la production financière de la manière suivante :

- Paiement de coupon en t : $c(t) \times CoefS(R,t_0,t)$ où c(t) correspond au montant de coupon initialement prévu en t hors défaut.

- Remboursement du capital en t : $Remb(t) \times CoefS(R,t_0,t)$ où Remb(t) correspond à la valeur de remboursement initialement prévue en t hors défaut.

Le coefficient de survie est une fonction décroissante au cours du temps, car le processus d'intensité de défaut λ est à valeurs positives.

Ce premier graphique illustre la vitesse de décroissance de la fonction de survie en fonction du niveau du LGD, toutes choses égales par ailleurs. Plus le coefficient de survie diminue plus les pertes matérialisées sur les produits financiers seront conséquentes.

Le Loss Given Defaut ne pouvant être calibré par formule fermée comme le sont les paramètres ($\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0$) du modèle LMN, son estimation devra faire l'objet d'une attention particulière.

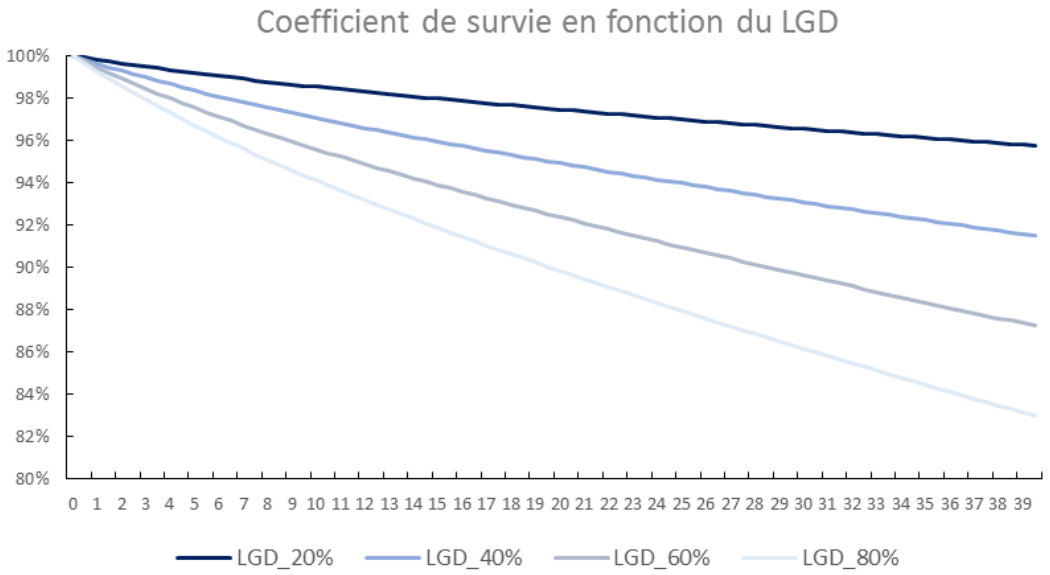


Figure 17 : coefficient de survie en fonction du LGD

Lors de simulation stochastique, les valeurs prises par le processus d'intensité de défaut λ_t vont impacter la comptabilisation du défaut. En effet, d'une simulation à l'autre, le coefficient de survie peut varier de manière significative, toutes choses égales par ailleurs.

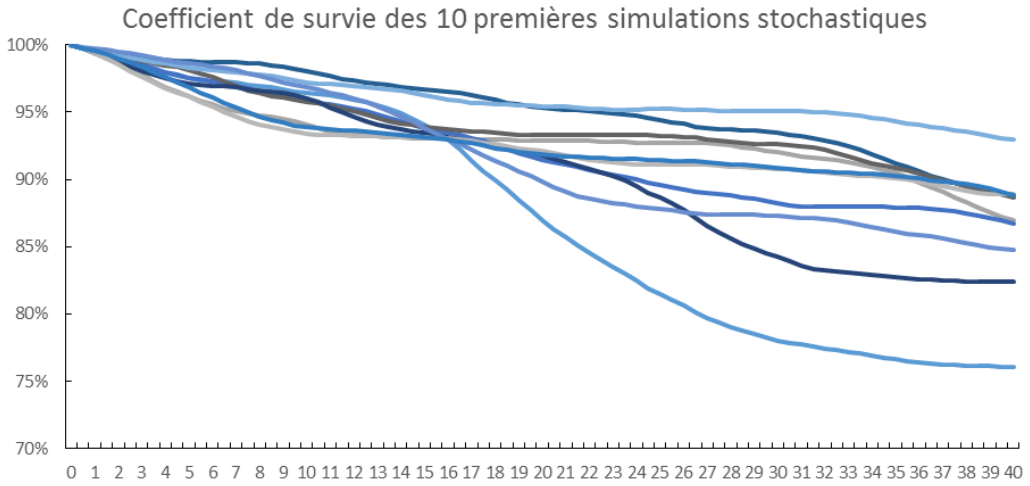


Figure 18 : coefficient de survie des dix premières simulations stochastiques

5.3 Présentation du portefeuille d'étude

Les hypothèses structurantes du fonds euros pour lequel l'implémentation du risque de crédit a été réalisée, seront abordées dans la suite de cette section.

5.3.1 Caractéristiques de l'actif

L'allocation d'actifs en valeur nette comptable (VNC) du fonds en euro considéré est représentée ci-dessous :

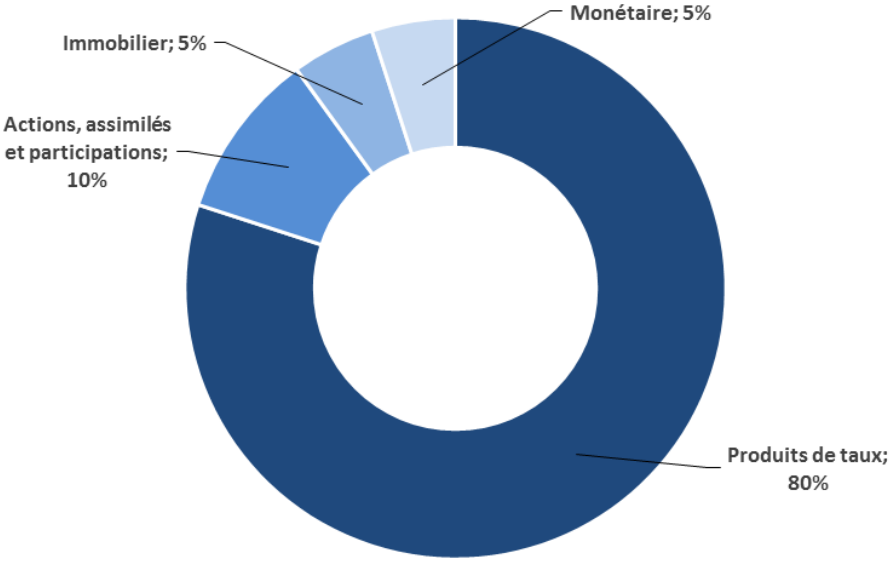


Figure 19 : allocation d'actifs en valeurs de marché

La composition du portefeuille obligataire en termes de qualité de rating est exposée ci-dessous :

en VNC	31/12/2019
AAA - A	80%
BBB ou moins – Non noté	20%
Total	100%

Tableau 5 : qualité de notation du portefeuille obligataire

Concernant l'échéancier obligataire, les titres souverains sont investis sur des maturités plus longues tandis que les titres privés, sur lesquels le risque de crédit sera pris en compte, sont investis sur des maturités plus courtes.

5.3.2 Caractéristiques du passif

Parmi l'ensemble des provisions présentent au bilan des assureurs vie, les principales abordées dans ce mémoire sont :

La provision mathématique (PM)

En assurance vie, la PM représente la valeur des engagements vis-à-vis des souscripteurs. Son calcul s'effectue de manière rétrospective et tient compte des primes perçues ainsi que des intérêts financiers.

La provision pour participation aux bénéfices (PPB)

La PPB découle du mécanisme discrétionnaire de redistribution des bénéfices auprès des assurés. Pour rappel, la participation aux bénéfices est un droit accordé aux assurés de participer au résultat financier généré par les investissements du fonds général. Ce partage est encadré par les conditions générales de vente du contrat et par le code des Assurances, via une règle de partage minimum. Cette participation est discrétionnaire, elle est soit créditée instantanément aux PM des assurés soit dotée en provision pour participation aux bénéfices (PPB). Le montant de participation aux bénéfices ne peut être règlementairement inférieur à 85% des bénéfices financiers et 90% des bénéfices techniques.

Il faut ainsi distinguer deux catégories de participations aux bénéfices :

- La PB réglementaire, qui se calcul au globale de l'entité et encadrée par le code des assurances.
- La PB contractuelle, qui désigne la clause de participation aux bénéfices telle que définie dans les conditions générales de ventes du contrat.

Le montant de produit financiers distribués aux assurés tient compte à la fois de PB réglementaire et contractuelle. En effet, celui-ci doit respecter chacune de ces deux contraintes. De manière plus générale, le montant de produits financiers distribués est bien souvent régi par un algorithme classique de ce type :

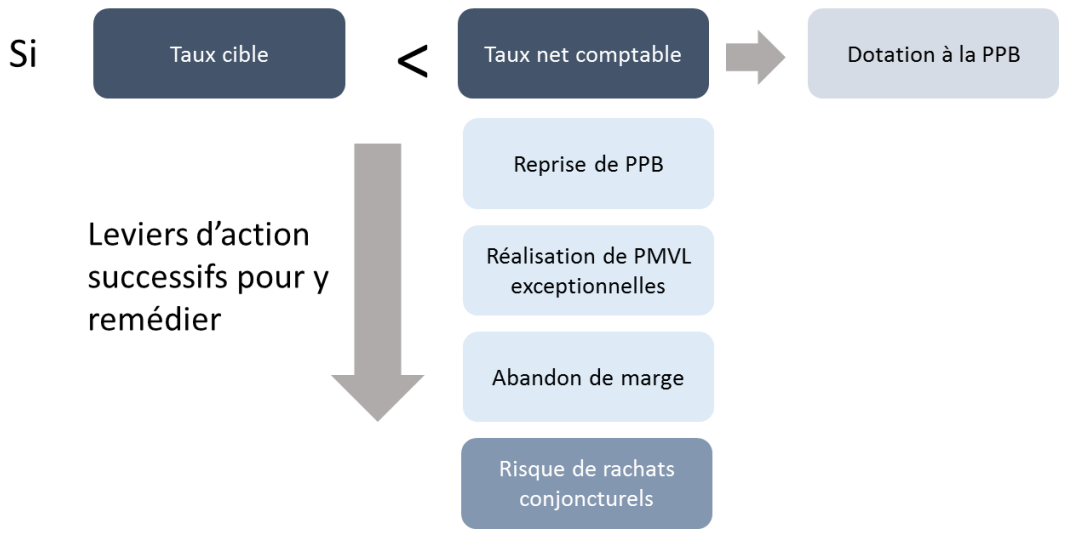


Figure 20 : Schéma simplifié d'un algorithme de participation au bénéfice pour un fonds euro classique.

Les règles de distribution future de la PPB sont également encadrées par le code des assurances et permettent à l'assureur de lisser son taux servi au fil du temps. Par ailleurs, une partie de la PPB est éligible au calcul des fonds propres depuis un arrêté ministériel de décembre 2019.

La réserve de capitalisation (RC)

La RC est un mécanisme comptable visant à limiter les achats-ventes spéculatifs sur les actifs R.343-9 et lutter contre la dépréciation de ces titres. L'objectif est de garantir aux assurés que le rendement comptable d'une obligation soumise à la RC sera maintenu. Ainsi, lors d'une vente d'un actif R.343-9 les plus ou moins-value latentes réalisées (PMVL) n'interviennent pas directement dans les produits financiers mais sont intégrées à la RC qui est alimentée par ce procédé.

La provision pour dépréciation durable (PDD)

La PDD est une provision à l'actif du bilan qui vise à diminuer le montant de l'actif en valeur comptable si l'on estime qu'un titre est en dépréciation durable. Cela se traduit par une situation de moins-value latente significative au regard de sa valeur comptable sur la période de 6 mois consécutifs précédant l'arrêté. Le critère de moins-value significative peut être défini pour les actions françaises en fonction de la volatilité constatée soit 20% de la valeur comptable lorsque les marchés sont peu volatiles, ce critère étant porté à 30% lorsque les marchés sont volatiles.

La provision pour risque d'exigibilité (PRE)

La PRE est une provision technique qui est passée en cas de moins-value latente constatée sur l'ensemble de la poche des actifs R343-10, nette de PDD. La dotation annuelle est dans la plupart des cas, égale au huitième de la moins-value latente nette globale, soit un étalement sur huit ans de la perte. Suivant la rédaction de la clause de participation aux bénéfices, ces variations peuvent ne pas être prises en compte dans le compte de PB et donc dans la PB distribuable.

Rachats conjoncturels

Ce type de rachat vient s'ajouter aux rachats structurels et tiennent compte des conditions économiques de marché. Les rachats structurels représentent le montant de rachat auquel l'assureur doit faire face en rythme de croisière, ils sont calibrés sur l'historique du fonds et dépendent fortement de la fiscalité du contrat.
Les rachats conjoncturels sont censés capter la sensibilité des assurés au taux servi face à un éventuel compétiteur extérieur. Ainsi, des rachats conjoncturels sont déclenchés lorsque l'écart entre le taux cible et le taux servi est trop important. De plus, ces rachats sont d'autant plus importants que l'écart de compétitivité (taux cible – taux servi) est grand. Les Orientations Nationales Complémentaires ONC[1], proposent une illustration de la modélisation du mécanisme de rachats conjoncturels auxquels les assureurs vie sont exposés.

[1] https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/20140318_enseignements_annexes_techniques_vie_2013__0.pdf

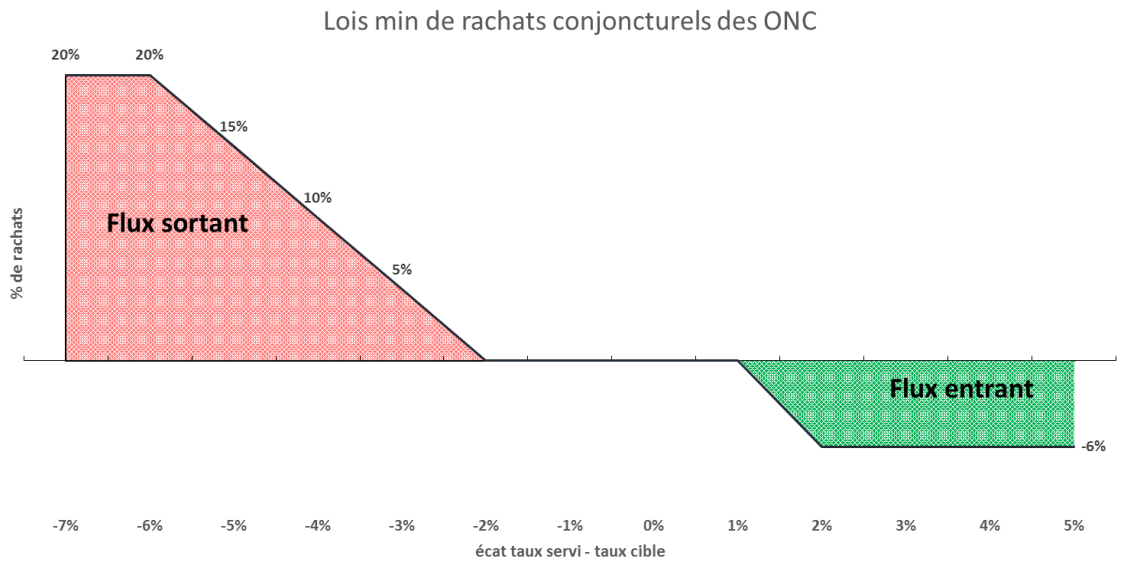


Figure 21 : illustration de la loi min de rachats conjoncturels issue des ONC

5.3.3 Règles de gestions

Parmi l'ensemble des hypothèses de règles de gestions visant à reproduire les interactions actif-passif et la politique de gestion interne, seules quelques-unes seront exposées :

Taux cible

Il s'agit du taux attendu par les assurés des contrats d'épargne en euros. On le définit comme un objectif de rémunération sur l'année que l'assureur se fixe à atteindre dans la limite de ses moyens. Le taux cible est fonction d'indicateurs de marchés extérieurs comme le taux OAT[1] 10ans et d'indicateurs de performance interne pour prendre en compte l'inertie du portefeuille.

Pilotage de l'allocation d'actifs

Cela regroupe à la fois la stratégie d'allocation d'actifs et la politique de réinvestissement. Pour cette étude, l'allocation d'actifs entre les différentes classes d'actifs modélisées (actions, immobiliers, obligations…) est statique (répartition constante dans le temps) et basée sur la valeur nette comptable. Les réinvestissements obligataires sont effectués au pair (prix d'achat égal au nominal) et répartis entre souverain et privé sur des maturités fixes de 10 ans.

Dotation reprise de la réserve de Provision Participation aux Bénéfices

Pour rappel, la PPB est une réserve alimentée par la part de la performance du fonds euros qui n'est pas distribuée immédiatement aux assurés. De manière générale, elle est dotée lors de bonne performance financière et reprise les moins bonnes années. Dans les hypothèses de projections, le taux de PPB rapporté à la provision mathématique sera borné à un montant maximum.

[1] OAT : Obligation Assimilable du Trésor, sont des emprunts d'état, souvent pris comme référence pour le marché obligataire français.

5.3.4 Scénarios économiques

Pour cette étude, les principaux indices du jeu de scénarios économiques risque neutre utilisé sont présentés ci-dessous :

- Le déflateur qui est utilisé pour actualiser l'ensemble des flux.

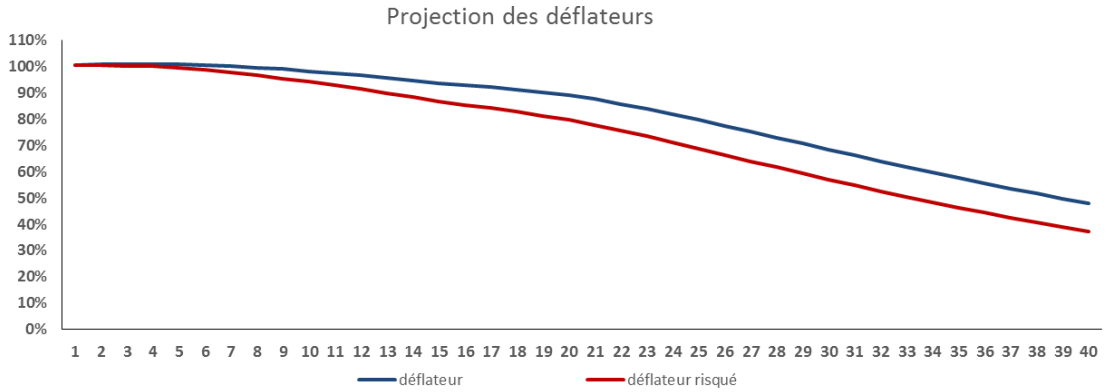


Figure 22 : évolution du déflateur sans risque et avec risque de crédit sur les 40 années de projection

- Le taux 10 ans qui est un indice phare pour la projection du taux cible et des réinvestissements.

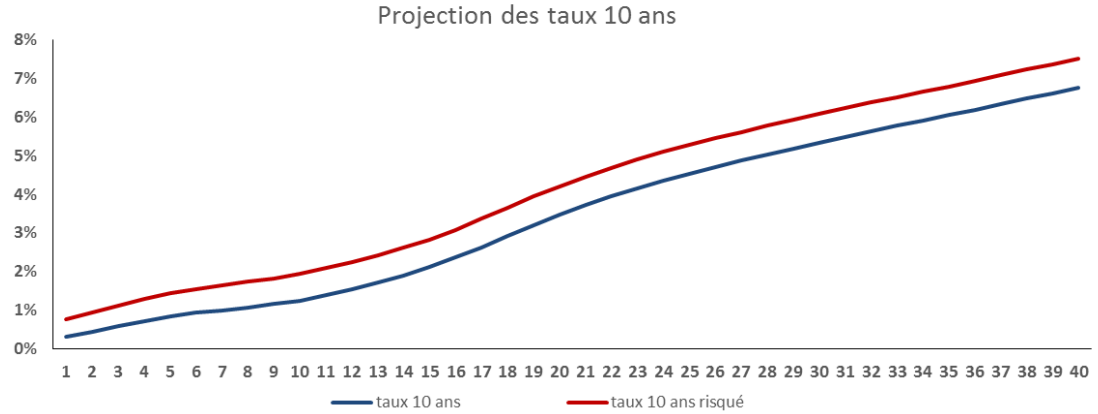


Figure 23 : évolution du taux 10 ans sans risque et avec risque de crédit sur les 40 années de projection

- L'indice Actions source considérable d'aléa financier dans le bilan économique.

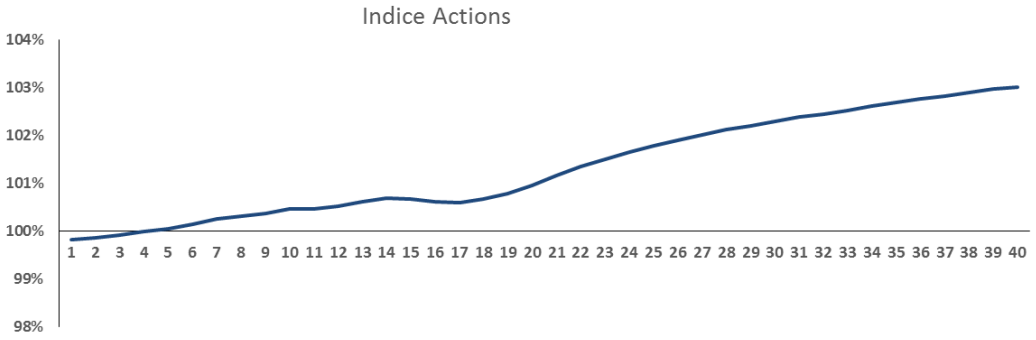


Figure 24 : évolution de l'indice Actions sur les 40 années de projection

La performance négative de l'indice Actions en début de projection est la conséquence directe des taux courts sans risque S2 négatifs et de l'hypothèse de dividende. En effet, l'une des propriétés des simulations risque neutre est le fait que tous les actifs, dividende compris, doivent rapporter en moyenne le taux sans risque.

- La diffusion des spreads de crédit en scénarios stochastiques via le modèle LMN.

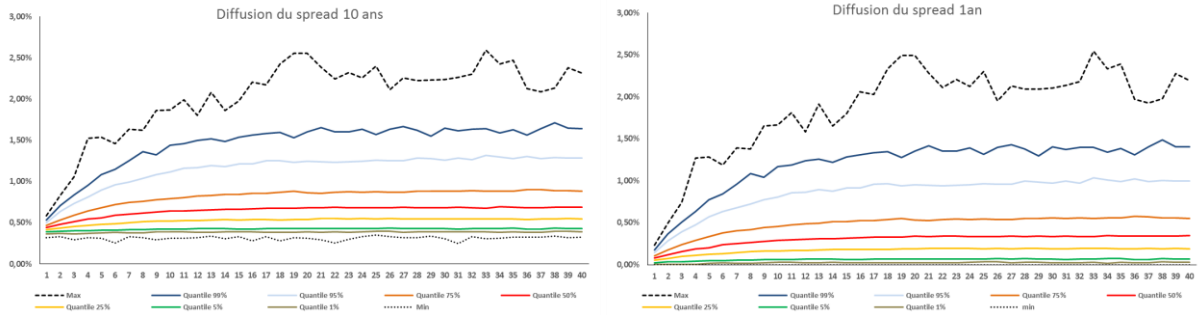


Figure 25 : étude des quantiles des spreads 1an et 10 ans au cours la projection risque neutre.

La dispersion des spreads de crédit présentée en figure 25 met en avant la nouvelle source d'aléa financier introduite par la prise en compte du risque de défaut des obligations privées. Par ailleurs, en figure 26, nous pouvons observer la superposition croissante des spreads de crédit par maturité au cours de la projection.

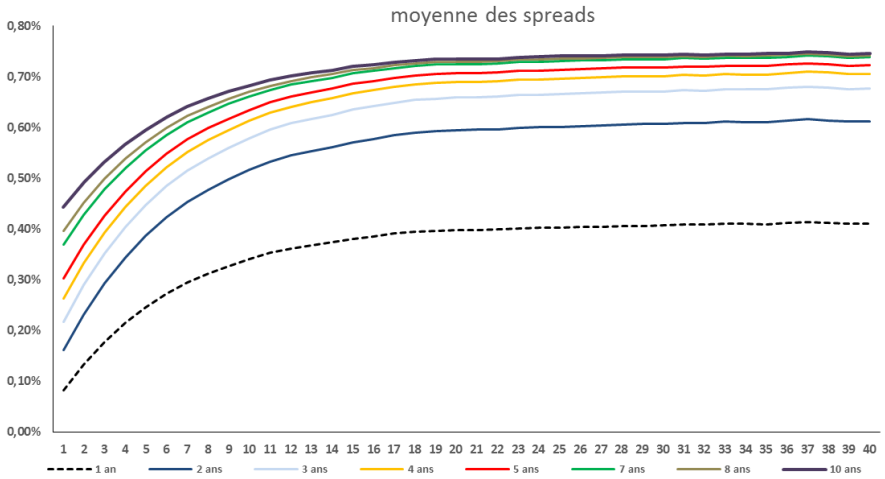


Figure 26 : niveau moyen des spreads de crédit par maturité.

Enfin, en analysant la dispersion des facteurs de survie issus du modèle LMN à 1 an pour les obligations de notation A, on constate une hausse de la volatilité en fin de projection.

Plus ce facteur de survie converge rapidement vers 0, plus les défauts seront importants pour la trajectoire considérée. A titre d'exemple sur la figure 27 ci-dessous, dans un scénario extrême plus de la moitié du nominal des obligations risquées vont faire défaut sur les 20 premières années.

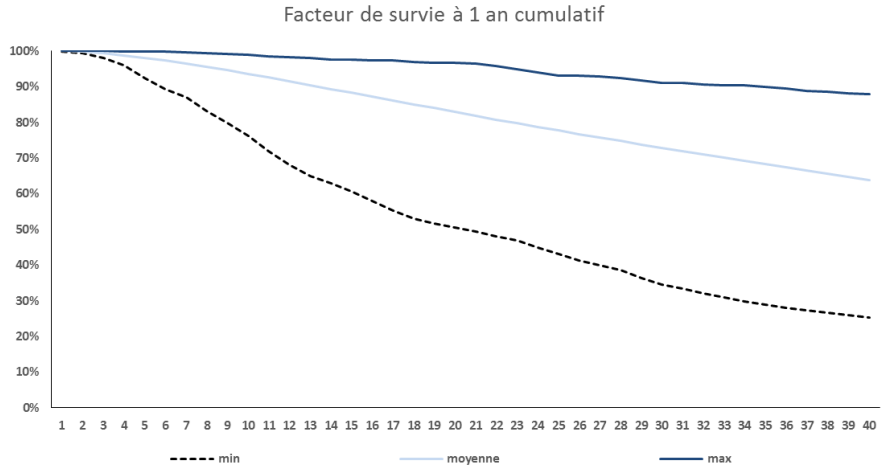


Figure 27 : facteur de survie cumulatif du modèle LMN à 1 an pour les obligations risquées A

Le facteur de survie moyen au bout de 10 ans est d'environ 95%. Autrement dit, pour toutes les obligations risquées en portefeuille à l'inventaire initial et de maturité 10 ans, 5% de leur nominal fera défaut si elles sont conservées jusqu'à leur terme.

Analyse du ratio de solvabilité

6 Mesures d'impacts S2

6.1 Best Estimate

Pour rappel, le Best Estimate fait partie intégrante des provisions techniques du bilan sous Solvabilité 2. Le BE se calcule comme l'espérance de la valeur actuelle nette probable des flux futurs (prestations, frais, commissions, primes) sous l'hypothèse de continuité d'activité. Mathématiquement il se calcule :

$$BE = \mathrm{E}\left[\sum_{t\geq 0} \frac{Flux_t}{(1+r_t)^t}\right]$$

Dans le cas d'un contrat d'assurance vie classique investi sur un fonds en euro, les principaux flux constituants le BE sont :

- rachats (structurels et conjoncturels),
- sinistres (décès, invalidités),
- frais,
- commissions.

Le schéma ci-dessous donne un ordre de grandeur du poids de ces flux constituants le Best Estimate d'un contrat classique d'assurance vie.

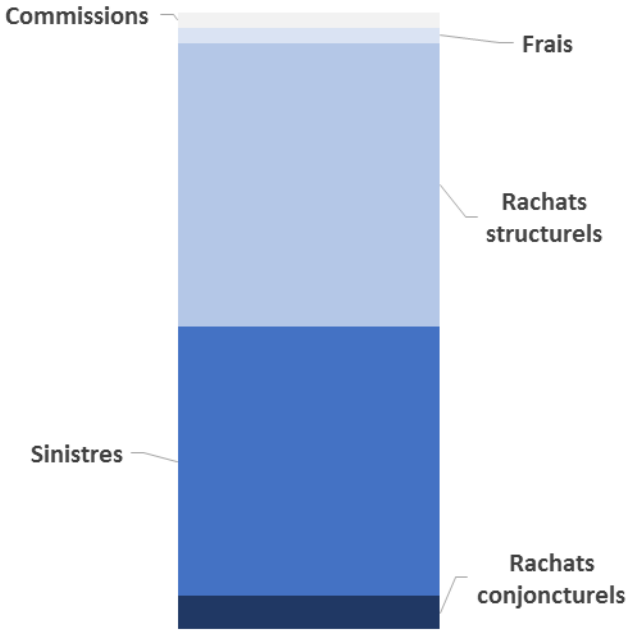


Figure 28 : décomposition en base 100 des flux constituants le Best Estimate

D'une simulation à l'autre le montant de ces prestations varient avec les conditions économiques, le taux de revalorisation, la composition du fonds à l'actif et au passif.

6.2 Scénario équivalent certain

Une première analyse des impacts de la modélisation du risque de crédit sur le scénario déterministe central, appelé également scénario équivalent certain, peut s'avérer utile pour comprendre l'évolution du ratio de solvabilité du fonds euro étudié. Ce scénario est caractérisé par la trajectoire pour laquelle toutes les classes d'actifs reproduisent le taux sans risque.

Le premier indicateur étudié sera le taux de rendement des actifs (TRA) du fonds euro avec et sans modélisation du risque de crédit. Celui ce calcul comme ceci :

$$TRA_t = \frac{Produits\ financiers_t}{Encours\ moyen_t}$$

L'encours moyen est une estimation des provisions mathématiques qui prend compte des flux de passifs survenus en cours d'année (rachats, décès, versements...). Les produits financiers se décomposent en revenus récurrents (amortissement, dividende, loyer, coupon…), revenus exceptionnels (réalisation de plus ou moins-value latentes) et des variations de provisions comptables telles que la PDD, RC.

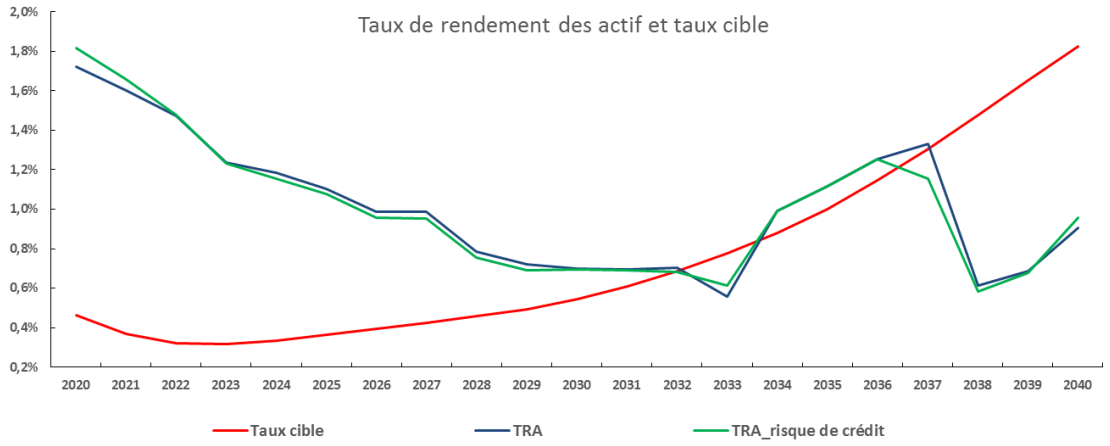


Figure 29 : évolution du taux de rendement des actifs dans le scénario déterministe avec et sans modélisation du risque de crédit.

Le taux cible tel que modélisé est indépendant du risque de crédit, ainsi il reste identique après l'évolution de modèle. La tendance haussière du taux cible en deuxième partie de projection est la conséquence directe des estimations de la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA et en particulier de la convergence long terme vers l'UFR.

Concernant le taux de rendement des actifs, on constate un impact non négligeable du risque de crédit sur celui-ci. La section 4.2 sur le processus de risque neutralisation a mis en évidence une déformation des flux obligataires. En effet, la prise en compte du défaut en univers risque neutre induit un montant de coupon plus important en début de projection. Ce montant de coupon perçu tend ensuite à diminuer en cours de projection avec la survenance de défaut.

Graphiquement, on observe un TRA avec risque de crédit légèrement plus élevé en début de projection et plus faible en cours de projection. Les effets de réinvestissements font que ce cycle de chevauchement des courbes se répète.

Toutes choses égales par ailleurs, un niveau de TRA plus élevé permet de doter davantage à la provision pour participation aux bénéfices (PPB), ce qu'on observe ci-dessous.

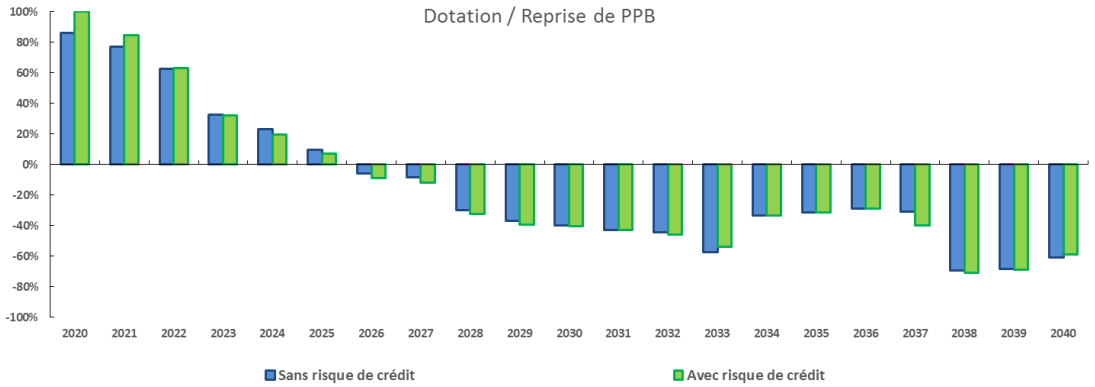


Figure 30 : chronique de dotation/reprise de la réserve de Provision pour Participation aux Bénéfice après correction des contraintes de 8 ans et du seuil de PPB/PM maximum

De manière générale, se constituer une provision pour participation aux bénéfices en période de taux bas via des dotations plus importantes améliore la robustesse du fonds. Cependant, la hausse des dotations n'est que provisoire, car la matérialisation des défauts conduit vite à une dotation moindre suivie d'une reprise plus importante pour compenser le manque de produit financier pour servir le taux cible.

Enfin, au vu des résultats obtenus sur le Best Estimate, il apparait que la modélisation du risque de crédit via le modèle LMN a peu d'impact sur le bilan S2 de l'assureur, puisqu'on observe une faible variation.

en % du BE	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit	Variation
Best Estimate	100%	99.99%	-0.01%

Tableau 6 : impact du risque de crédit sur le Best Estimate en scénario déterministe

Une analyse plus détaillée de ces résultats montre que la baisse du Best Estimate suite à la prise en compte du risque de crédit est principalement expliquée par la variation de la provision pour participation aux bénéfices. En effet, le taux de rendement des actifs dans le scénario avec risque de crédit étant légèrement plus élevé dans les premières années de projection permet une plus forte dotation à la PPB car le taux cible est lui inchangé. Une réserve de PPB plus importante permet un meilleur lissage du taux servi et une meilleure absorption des chocs de marché, ce qui se traduit par une augmentation des marges et diminution des engagements futurs.

Une analyse des résultats en stochastique s'impose donc pour affiner cette première interprétation.

6.3 Scénarios stochastiques

Comme le prévoit l'article 15 du règlement délégué, le calcul des provisions techniques par approche stochastique est plus approprié pour les contrats d'assurance vie donnant lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles.

L'approche stochastique consiste à simuler une multitude de scénarios économiques issus du Générateur de Scénarios Economiques abordé en section 1.6 et à projeter les flux reliant assureur et assuré sur chacun d'entre eux. Enfin, les grandeurs économiques étudiées comme le Best Estimate sont calculées en prenant la moyenne arithmétique des flux actualisés dans chacun des scénarios.

L'objectif de cette approche de type Monte Carlo est de capter la dissymétrie qui existe entre assureur et assuré. Par exemple, la présence d'une garantie en capital valable à tout moment sur les contrats investis sur le fonds euros induit le fait que les pertes financières ne peuvent être partagées avec les assurés. Adopter une vision moyenne permet notamment d'étudier le comportement du fonds dans des situations défavorables.

La représentation du taux de rendement moyen des actifs avec et sans la modélisation du risque de crédit montre à nouveau un léger sur-rendement en début de projection qui est dû à la risque neutralisation avec le risque de crédit.

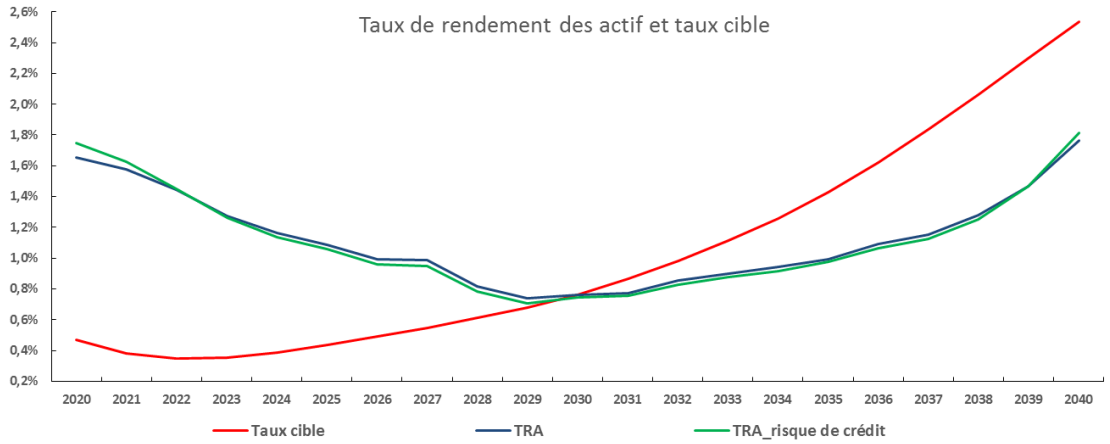


Figure 31 : évolution de la moyenne du taux de rendement des actifs en stochastique avec et sans modélisation du risque de crédit

en % du BE	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit	Variation
Best Estimate	101.73%	101.80%	+0.07%

Tableau 7 : impact du risque de crédit sur le Best Estimate en scénarios stochastiques

Ici, en stochastique le Best Estimate augmente suite à la modélisation du risque de crédit. Contrairement au scénario déterministe, où l'aléa financier n'existe pas, en scénario stochastique la volatilité des actifs financiers coûte à l'assureur. Il semble donc naturel que l'ajout d'un aléa financier supplémentaire, à savoir l'intensité de défaut, vient augmenter la valeur des engagements de l'assureur. Cette divergence de comportement

entre scénario déterministe et stochastique met avant le coût des options et garanties financières.

6.4 Time Value of Options and Guarantees TVOG

La Time Value of Options and Guarantees, notée TVOG est une notion qui découle des options et des garanties incluses dans les contrats d'assurance vie, comme évoqué au paragraphe précédent. Une des façons les plus répandues pour estimer cette TVOG est de la calculer comme étant l'écart entre le Best Estimate déterministe et stochastique central, soit :

$$TVOG = BE^{sto} - BE^{det}$$

La TVOG permet également d'évaluer l'asymétrie du risque présent dans les contrats d'assurance vie, en captant une partie de la volatilité des actifs financiers qui peuvent engendrer de lourdes pertes pour l'assureur et l'amener à subir une perte en fonds propres pour honorer ses engagements.

Soit l'évolution de la TVOG après prise en compte du risque de crédit via le modèle LMN :

en % du BE	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit
Best Estimate stochastique	101.73%	101.80%
Best Estimate déterministe	100%	99.99%
TVOG	1.73%	1.81%

Tableau 8 : Variation de la TVOG après modélisation du risque de crédit au 31/12/2019.

L'implémentation du risque de crédit provoque une augmentation du coût des options et garanties de près de 5% aux conditions économiques de marché du 31/12/2019. Cette augmentation est due à la hausse de volatilité amenée par la modélisation du risque de crédit stochastique.

6.5 SCR de marché

Le SCR de marché est le module le plus impacté par la modélisation du risque de crédit. Ainsi une attention particulière y sera apportée pour comprendre l'évolution du SCR de marché avant et après modélisation du risque de crédit.

Il a été défini en section 1.3 le SCR de marché comme étant une composante du BSCR et qu'il se décompose en six sous modules, à savoir :

- taux d'intérêt,
- actions,
- immobilier,
- spread,
- change,
- concentration.

Ci-dessous une représentation du poids de chacun des sous-modules du SCR de marché :

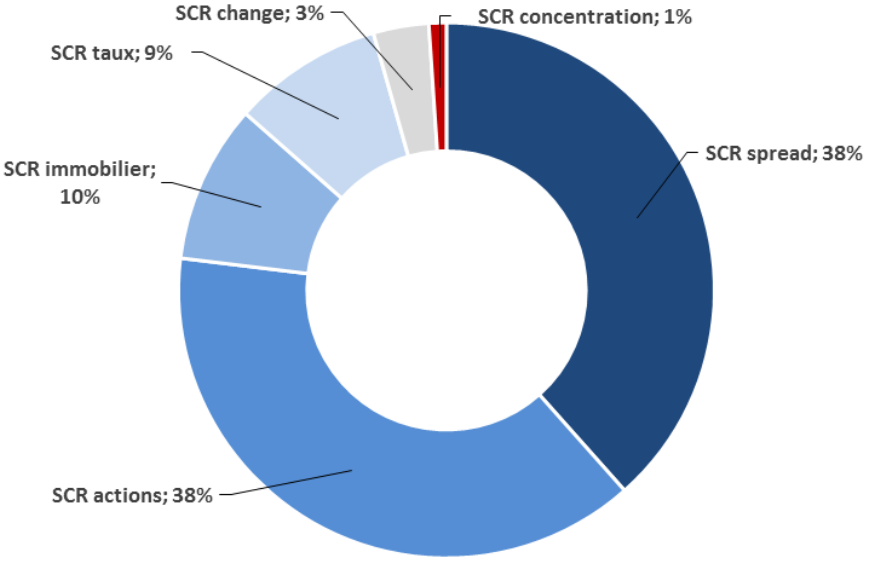


Figure 32 : Détails du SCR de marché au 31/12/2019

Pour chacun de ces sous modules, les actifs du portefeuille considéré sont soumis à un ensemble de chocs forfaitaires propre au module. La variation de la valeur de marché permet de calculer le SCR brut :

$$SCR_{brut} = \Delta VM = VM_{central} - VM_{choquée}$$

Ensuite, le SCR net tient compte des interactions actif-passif, via les variations du Best Estimate avant et après choc :

$$SCR_{net} = \Delta VM - \Delta BEL = VM_{central} - VM_{choquée} - (BEL_{central} - BEL_{choqué})$$

Afin d'analyser les variations du SCR de marché, il est nécessaire de définir la notion de capacité d'absorption des passifs. Ce principe est une conséquence de l'interaction actif-passif. En effet, lors de l'estimation des engagements de l'assureur suite aux chocs forfaitaires sur les actifs, le mécanisme discrétionnaire de redistribution des richesses joue un rôle d'absorption. Ainsi :

$$Capacité\ d'absorption = BEL_{central} - BEL_{choqué}$$

Ce qui donne finalement :

$$SCR_{net} = SCR_{brut} - Capacité\ d'absorption$$

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SCR de marché avec et sans modélisation du risque de crédit.

En M€	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit	Variation
SCR de marché	800	807	7

Tableau 9 : impact du risque de crédit le SCR de marché.

En approfondissant l'analyse sur le SCR de marché via les sous-modules qui le constituent, on observe une hausse générale des SCR, en particulier des sous-modules suivants :

- taux,
- actions,
- spread,
- immobilier,
- change.

A noter que le SCR brut est inchangé par la prise en compte du spread stochastique, en effet ni la valeur de marché initiale ni le niveau du choc sont affectés par celui-ci. Au vu de l'augmentation du SCR de marché avec modélisation du risque de crédit, on en déduit par conséquence une diminution de la capacité d'absorption. Ci-dessous une illustration du mécanisme d'absorption et sa dégradation suite à la prise en compte du risque de crédit.

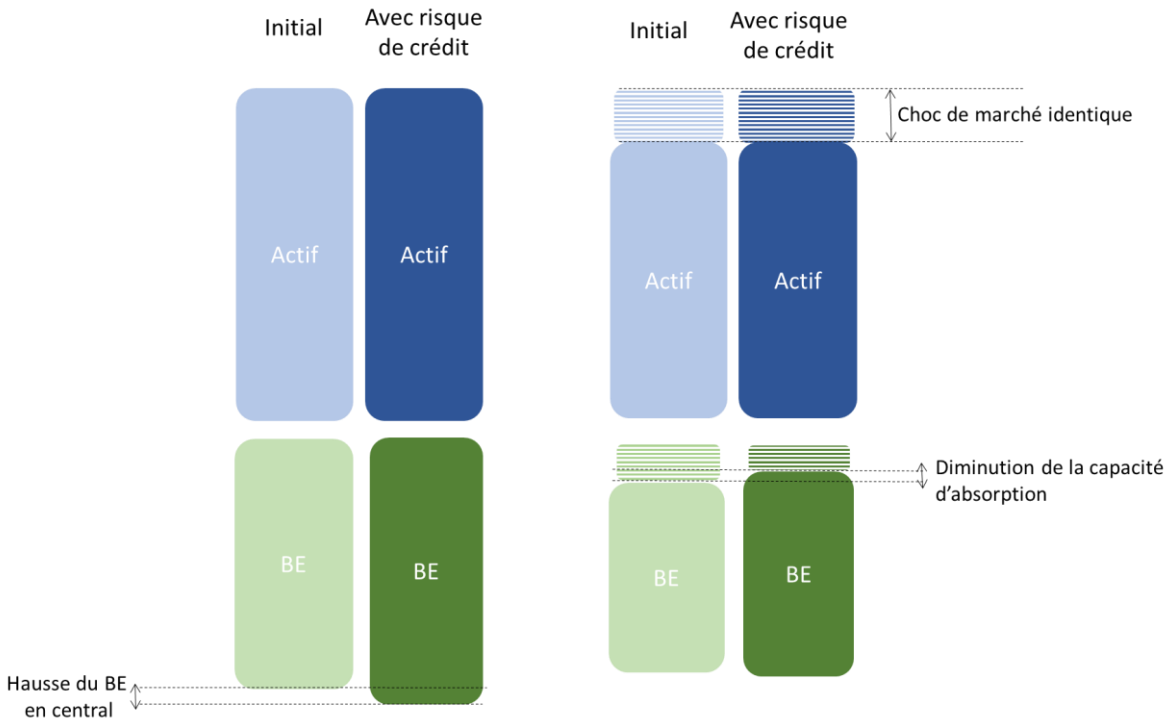


Figure 33 : capacité d'absorption avant et après modélisation du risque de crédit

La modélisation du risque de crédit et la matérialisation du défaut dans les projections stochastiques ajoutent de la volatilité au bilan et augmentent finalement le SCR. Ceci se traduit par une hausse du SCR de marché.

6.6 Ratio de solvabilité

La vision économique du bilan détaillée à la section 1.2 a introduit le principe des fonds propres économiques comme étant la différence entre la valeur de marché des actifs et celle des provisions techniques. De la notion de fonds propres économiques et du capital de solvabilité requis découle le ratio de solvabilité.

Le ratio de solvabilité est le rapport entre les fonds propres économiques disponibles et ceux requis, soit :

$$Ratio\ de\ solvabilité = \frac{Fonds\ propres}{SCR}$$

C'est un indicateur clé pour le secteur de l'assurance, aussi bien pour le pilotage interne de l'entreprise que pour la communication externe vis-à-vis du régulateur et des investisseurs. En effet, il caractérise la solvabilité de l'entreprise et disposer d'un ratio de solvabilité conséquent et stable dans le temps est un signal de robustesse pour le marché.

La modélisation du spread de crédit stochastique a finalement un impact mesuré de 3 points sur le ratio de solvabilité :

	Sans risque de crédit	Avec risque de crédit
Fonds propres	2 000	1 992
SCR final	1 000	1 012
Ratio de solvabilité	200%	197%

Tableau 10 : impact du risque de crédit sur le ratio de solvabilité au 31/12/2019

Si l'impact final sur le ratio de solvabilité n'est que de 3 points dans les conditions telles que définies pour l'arrêté réglementaire du 31/12/2019, une analyse sur la sensibilité du ratio de solvabilité reste souhaitable.

7 Sensibilités sur le ratio de solvabilité

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à une analyse de sensibilité sur le ratio de solvabilité. L'enjeu est de mettre en avant les paramètres prépondérants du modèle LMN afin de garantir une meilleure calibration et une robustesse des résultats. Par ailleurs, les tests de sensibilités permettent également d'avoir une première base de données pour mieux prédire les variations de ratios de solvabilité futurs en fonction des conditions économiques.

7.1 Loss Given Default (LGD)

Pour rappel, le Loss Given Default intervient lorsque l'émetteur de l'emprunt obligataire fait défaut et qu'une partie des flux futurs est définitivement perdue. L'estimation du LGD pour des besoins de modélisation repose soit sur les rapports fournis par les sociétés de notations telles que S&P, Moody's ou Fitch soit à dire d'expert.

Le recueil de données nécessaires à l'estimation du LGD est possible lors de défauts constatés sur les marchés financiers. Or ces derniers interviennent souvent en période de crise, dans laquelle la plupart des indicateurs économiques sont stressés. Ainsi obtenir une estimation moyenne du LGD comme le nécessite le modèle LMN est assez délicat. A titre indicatif, le graphique ci-dessous recense l'ensemble des défauts en nombre et en montant survenu depuis 1970. On observe une dispersion des défauts concentrée autour de chocs de marché, et une tendance haussière aussi bien pour le nombre de défaut que pour le montant.

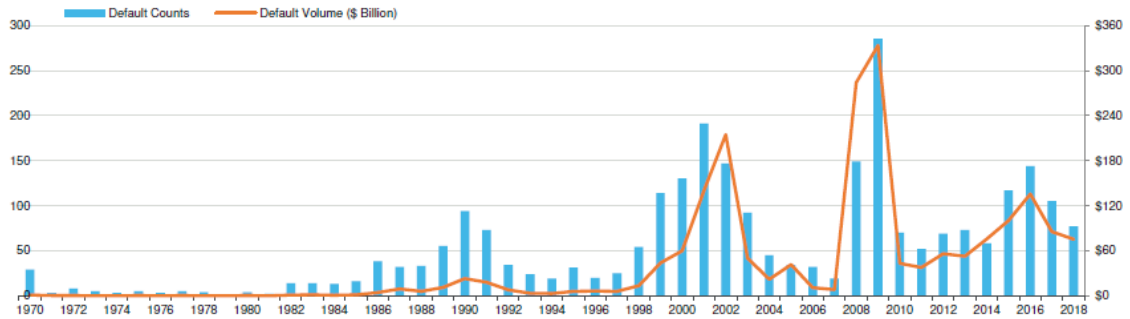


Figure 34 : comptabilisation des défauts en nombre et montant depuis 1970, source : Moody's Investors Service.

Dans le cadre de cette étude le LDG est fixé à 60%. Cette estimation repose sur une note d'analyse publiée par S&P consacrée aux obligations d'entreprises européennes de 2003 à 2019. La cohérence entre le périmètre de la note d'analyse et l'exposition du portefeuille d'actifs obligataire, majoritairement européen, justifie le niveau du LGD.

Cependant, l'impact du LGD sur les projections risque neutre n'est pas négligeable, comme le démontre le graphique ci-dessous.

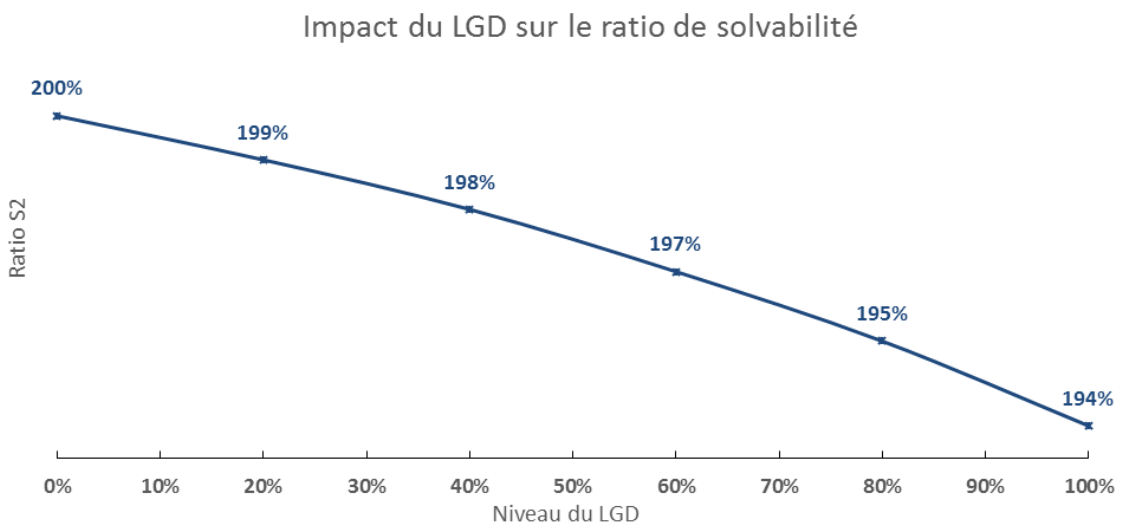


Figure 35 : ratio de solvabilité en fonction du niveau du LGD retenu, toutes choses égales par ailleurs.

Les résultats obtenus sur la sensibilité du ratio de solvabilité au LGD sont conformes aux attentes, à savoir une corrélation négative entre ces deux grandeurs. En effet, un LGD proche de 1 implique une perte plus importante sur les flux futurs en cas de défaut et inversement pour un LGD proche de 0.

On remarque également que lorsque le LGD est égal à 0, nous retrouvons le cas initial, c'est-à-dire le modèle sans risque de crédit. En effet, nous savons que les prix zéro coupons risqué et sans risque sont liés par la formule suivante :

$$P_R(t,T) = P_{sans\ risque}(t,T) \times (1 - LGD \times \bar{Q}(t,T)_R)$$

Avec $\bar{Q}(t,T)_R$ la probabilité de faire défaut avant T pour un émetteur de rating R.

$$\bar{Q}(t,T)_R = 1 - A_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T-t) \times \exp(B_{(\alpha,\beta,\sigma)}(T-t)\lambda_t^R)$$

Dans le cas particulier où le LGD est nul, le prix d'un zéro coupon risqué et sans risque est identiques. Le spread étant nul, la valorisation des obligations est équivalente avec et sans le modèle LMN.

7.2 Allocation d'actifs et réinvestissement

L'une des hypothèses fondamentales des calculs réglementaires dans le cadre de solvabilité, est la continuité d'activité. Seuls les contrats en stock au moment du calcul sont projetés jusqu'à leur extinction, sans prendre en compte de nouveaux clients. Ceci impacte les règles de gestion du fonds et provoque une décollecte naturelle qui se traduit par un écoulement graduel des provisions mathématiques.

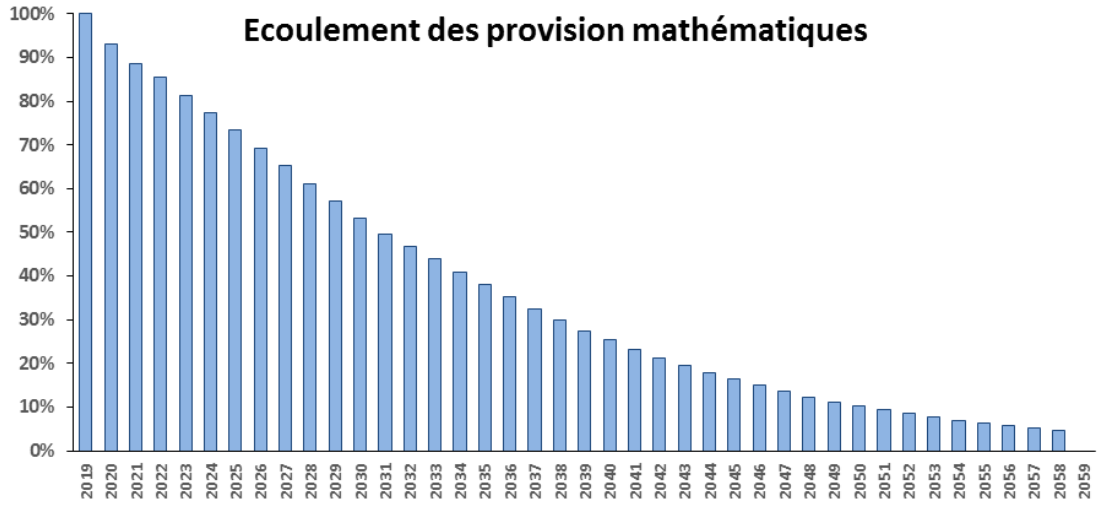


Figure 36 : projection du montant des provisions mathématiques pour le calcul réglementaire de solvabilité annuel.

Dans le cas présent, l'allocation d'actifs est statique, c'est-à-dire que la part de chaque classe d'actif est constante dans le temps). Ainsi, à chaque pas de temps du modèle des achats/ventes d'actifs sont nécessaires pour respecter cette contrainte. Une rotation des actifs obligataires, qui par principe ont une date d'échéance, s'opère alors pour maintenir la cible d'investissement du portefeuille.

Le graphique ci-dessous illustre le pourcentage des réinvestissements effectués tout au long de la projection rapporté à l'encours total du portefeuille.

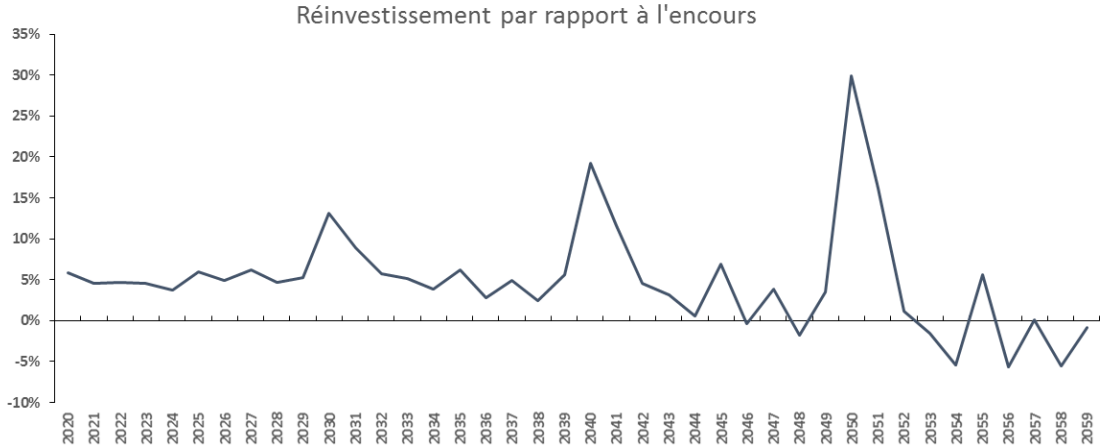


Figure 37 : pourcentage de réinvestissement issu du modèle de projection. Les pics successifs sont expliqués par la maturité fixe de réinvestissement de 10ans.

Par ailleurs, le monétaire et les remboursements de nominaux sont utilisés en priorité pour régler les prestations. A cela s'ajoute le fait que la proportion des autres classes d'actifs augmente mécaniquement en raison de la baisse des encours. Ce qui entrainement que les réinvestissements sont essentiellement orientés vers des obligations et du monétaire.

L'objectif de cette partie est de mettre en avant la sensibilité du ratio de solvabilité à la composition du réinvestissement obligataire. En effet, le type de réinvestissement va déformer progressivement la proportion d'obligations sans risque et risquées au sein du portefeuille d'actifs.

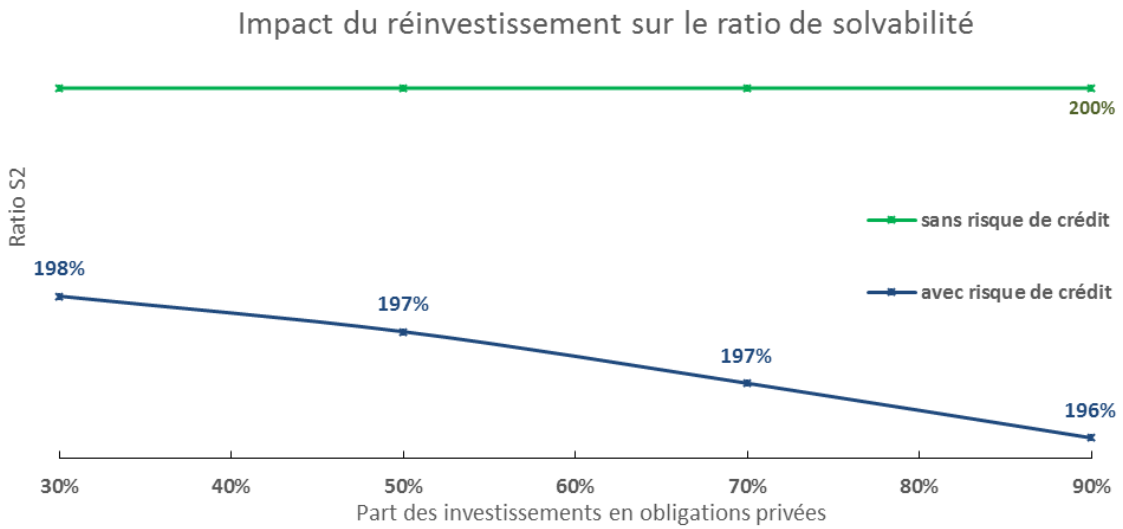


Figure 38 : ratio de solvabilité en fonction du niveau de la part de réinvestissement en obligations privées soumises au risque de crédit sur des maturités fixes de 10ans.

En l'absence de modélisation du risque de crédit, la composition du réinvestissement obligataire en cours de projection n'influe pas sur le ratio de solvabilité. Les obligations étant achetées au pair dans le modèle et la volatilité étant identique pour les obligations souveraines et privées, les produits financiers sont donc inchangés.

Avec l'ajout d'un spread de crédit stochastique la situation est différente. La volatilité des obligations privées devient plus élevée que celle des obligations sans risque. Ainsi, on observe une décroissance du ratio de solvabilité en fonction de la part des investissements en obligations privées. Plus le poids des obligations éligibles au risque de crédit est élevé plus le ratio de solvabilité est dégradé. Cette dégradation reste modérée car une baisse de 3 points de ratio est constatée pour un réinvestissement de 30% risquées -70% sans risque et de 90% risquées – 10% sans risque.

7.3 Paramètres du modèle LMN

La dynamique de l'intensité de défaut dans le cadre du modèle LMN est définie par l'équation suivante :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t$$

Avec, pour rappel :

- α/β : la moyenne à long terme de l'intensité de défaut,
- σ : la volatilité,
- W : le mouvement brownien unidimensionnel associé au risque de crédit,
- λ_0 : l'intensité de défaut initial.

Dans le cadre de l'analyse des sensibilités sur le ratio de solvabilité, il convient d'étudier l'impact de chacun des paramètres du modèle LMN sur les résultats finaux. Pour y parvenir, une suite de tests unitaires est réalisée en ne modifiant qu'un seul paramètre, l'ensemble des autres conditions restant inchangées. Les résultats sont présentés ci-après.

7.3.1 Alpha

Une sensibilité à la hausse et à la baisse sur le paramètre α sont étudiées. Pour rappel, ce paramètre caractérise la moyenne à long terme du processus d'intensité de défaut.

	Paramétrage
Sensibilité hausse	α+0.1%
Sensibilité baisse	α-0.1%

L'impact de cette modification de paramétrage sur l'intensité de défaut est représenté dans le graphique ci-dessous.

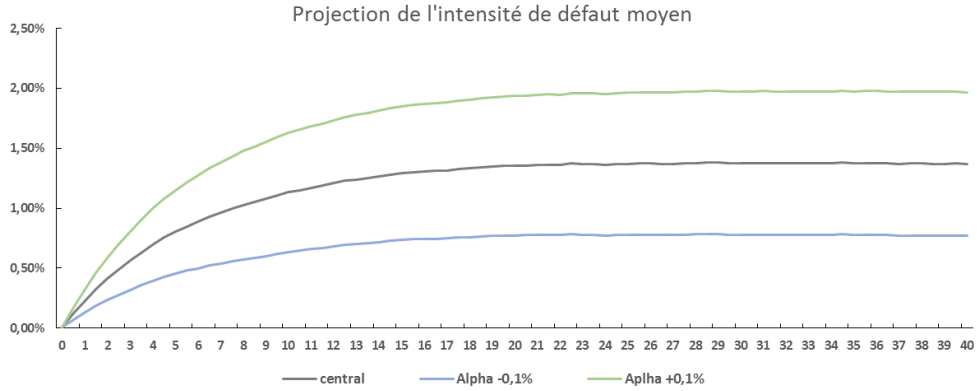


Figure 39 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre alpha.

Les sensibilités sur le paramètre α se traduisent par une translation de la moyenne à long terme de l'intensité de défaut. Une intensité de défaut plus élevée implique un montant plus important de défaut mais également un niveau de spread plus important. Au global,

on constate une augmentation du ratio de solvabilité lors d'une diminution du paramètre α et inversement.

	Calibrage central	Paramètre α+0.1%	Paramètre α-0.1%
Ratio de solvabilité	197%	- 1pts	+ 1pts

Tableau 11 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre alpha.

7.3.2 Beta

Une sensibilité à la hausse et à la baisse sur le paramètre β sont étudiées. Pour rappel, ce paramètre caractérise la moyenne à long terme du processus d'intensité de défaut.

	Paramétrage
Sensibilité hausse	β+10%
Sensibilité baisse	β-10%

L'impact de cette modification de paramétrage sur l'intensité de défaut est représenté dans le graphique ci-dessous.

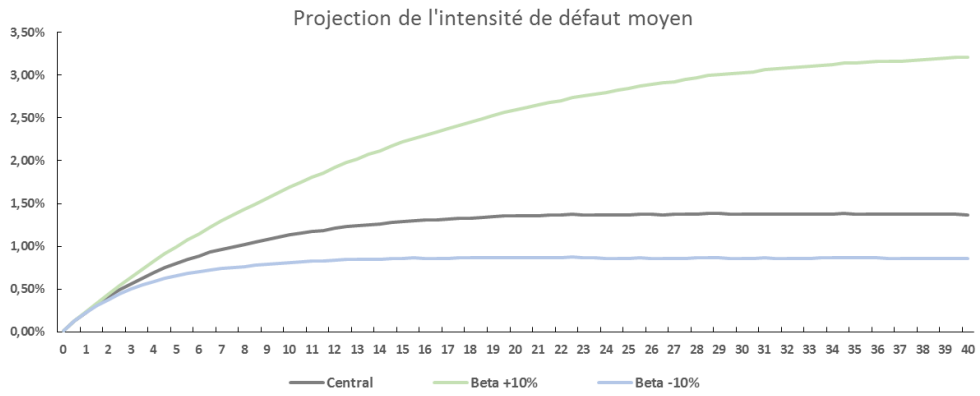


Figure 40 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre beta.

Les sensibilités sur le paramètre β se traduisent par une déformation de la moyenne à long terme de l'intensité de défaut. Une intensité de défaut plus élevée implique un montant plus important de défaut mais également un niveau de spread plus important. Au global, on constate une baisse du ratio de solvabilité lors d'une augmentation du paramètre β et inversement.

	Calibrage central	Paramètre β+10%	Paramètre β-10%
Ratio de solvabilité	197%	- 2pts	+ 1pt

Tableau 12 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre beta.

7.3.3 Sigma

Deux niveaux de sensibilité à la hausse sur le paramètre σ sont étudiés. Pour rappel, ce paramètre caractérise la volatilité du processus d'intensité de défaut.

	Paramétrage
Sensibilité hausse 1	σ+5%
Sensibilité hausse 2	σ+15%

L'impact de cette modification de paramétrage sur l'intensité de défaut est représenté dans le graphique ci-dessous.

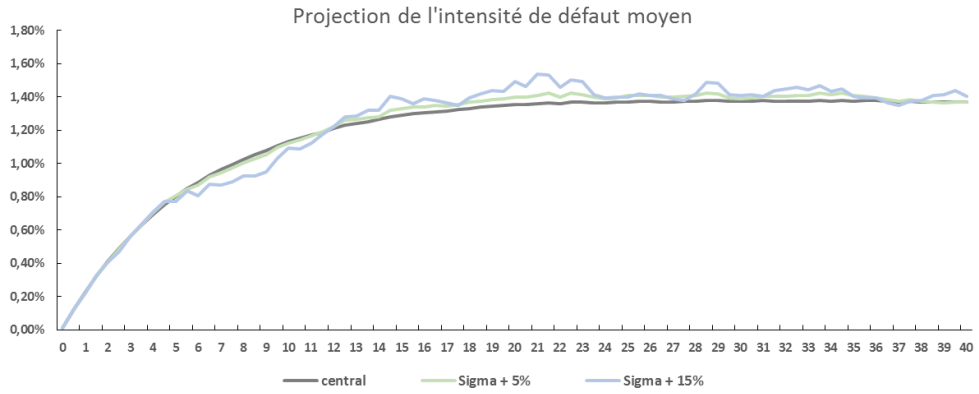


Figure 41 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre sigma.

Les sensibilités sur le paramètre σ se traduisent par une oscillation plus forte autour du jeu de calibrage central du processus d'intensité de défaut. Une hausse de la volatilité implique une plus grande disparité des spreads de crédit. La volatilité est un facteur qui s'avère couteux dans l'univers de Solvabilité 2. Dans le cas particulier des fonds en euros, une hausse de la volatilité d'un actif financier se répercute bien souvent par une diminution de ratio. Cette règle est vérifiée dans le cas présent, comme le témoigne le tableau ci-dessous.

	Calibrage central	Paramètre σ+5%	Paramètre σ+15%
Ratio de solvabilité	197%	- 2pts	- 9pts

Tableau 13 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre beta.

7.3.4 Lambda initial

Deux niveaux de sensibilité à la hausse sur le paramètre λ_0 sont étudiés. Pour rappel, ce paramètre caractérise l'intensité de défaut initial.

	Paramétrage
Sensibilité hausse 1	λ_0 +0.1%
Sensibilité hausse 2	λ_0 +1.0%

L'impact de cette modification de paramétrage sur l'intensité de défaut est représenté dans le graphique ci-dessous.

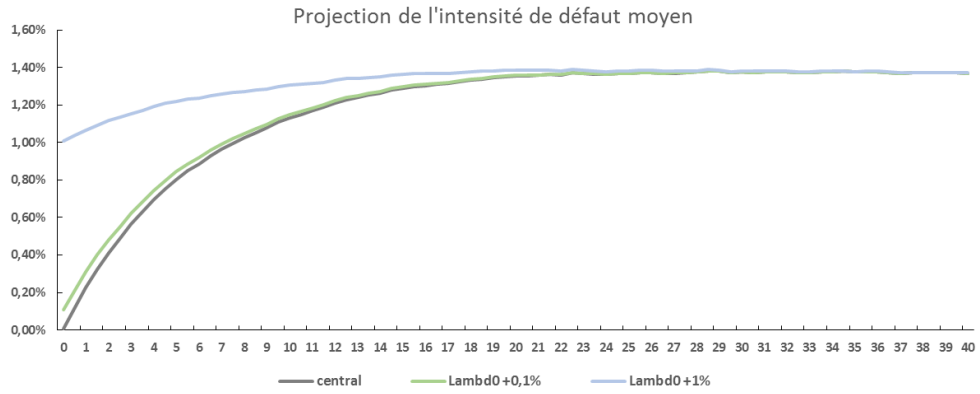


Figure 42 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre lambda initial.

Les sensibilités sur le paramètre λ_0 se traduisent par une translation du point de départ mais ne modifie pas la moyenne à long terme du processus d'intensité de défaut. Nous en concluons que seuls les spreads des premières années vont être modifiés et que l'impact final sur le ratio de solvabilité sera modéré.

	Calibrage central	Paramètre λ_0 +0.1%	Paramètre λ_0 +1%
Ratio de solvabilité	197%	0 pt	+ 1pt

Tableau 14 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre lambda initial.

7.3.5 Calibration et zones de risques

Cette analyse de sensibilité réalisée sur l'ensemble des paramètres du modèle LMN de risque de crédit, permet de mettre en évidence les zones de risque en univers risque neutre. La matrice ci-dessous synthétise à une échelle macro les impacts de la calibration du modèle LMN sur les indicateurs de solvabilité.

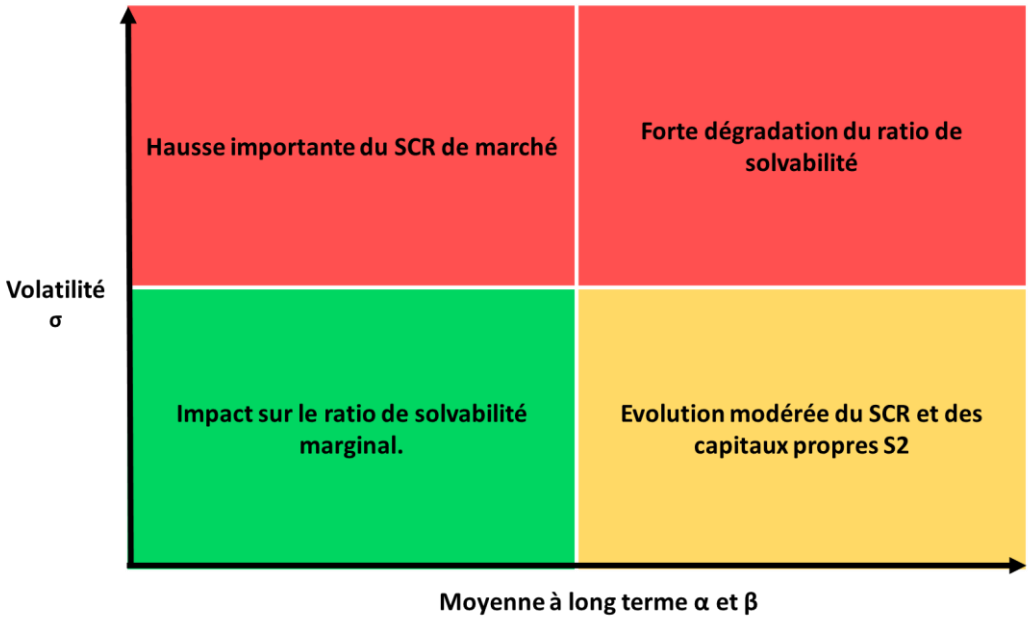


Figure 43 : Zones de risques du paramétrage du modèle LMN

7.4 Analyse des résultats

Au vu de l'impact marginal sur le ratio de solvabilité de l'intégration du spread stochastique via le modèle LMN, une analyse est nécessaire. Toutefois, l'impact négatif constaté est conforme aux attentes. En effet, la prise en compte de la volatilité des spreads conduit à une augmentation de la volatilité des valeurs de marché et donc à une augmentation du coût des options et garanties incluses dans les contrats.

Par ailleurs, la volatilité de la valeur de marché du portefeuille induite par la modélisation des spreads stochastiques est de même nature que le risque action ou immobilier c'est-à-dire qu'il n'est pas directement compensé par un ajustement des passifs ce qui est le cas pour les mouvements de courbe de taux. En effet, les taux d'actualisation des flux du passif ne sont pas impactés par un choc de spread. Seul le mécanisme de participation aux bénéfices joue un rôle d'amortisseur.

Les mécanismes qui peuvent atténuer la hausse de la volatilité de la valeur de marché des obligations sont d'une part la stratégie d'allocation d'actifs du modèle et d'autre la réserve de capitalisation. En effet, dès lors qu'une obligation est maintenue jusqu'à échéance et que la stratégie d'allocation du modèle n'est pas basée sur la valeur de marché des actifs, les variations de spread ont un impact limité sur le résultat. En effet dans ce cas particulier, seuls les défauts survenus viennent diminuer les produits financiers, ces mêmes produits financiers qui ont été ajustés à la hausse par le processus de risque neutralisation.

Finalement, la modélisation du risque de crédit a un impact plus important pour les scénarios stochastiques qui comportent des cessions d'actifs obligataires conséquentes. Ceci intervient notamment dans les scénarios extrêmes où le fonds fait face à des rachats massifs. Pour mieux le visualiser, nous allons dérouler une trajectoire très adverse parmi les simulations.

Scénario extrême

Pour la simulation sélectionnée, le coefficient de survie ainsi que le spread 10 sont présentés ci-dessous. Pour rappel, le coefficient de survie est défini comme tel :

$$CoefS(R, t_0, t) = 1 - LGD \times \left(1 - exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda_s^R ds\right)\right)$$

Ici dans la représentation graphique, il s'agit du coefficient de survie cumulatif. La sensibilité du portefeuille d'obligations risquées étant d'environ 6,5ans, quasiment 15% du stock initial fera défaut sur la toute la projection.

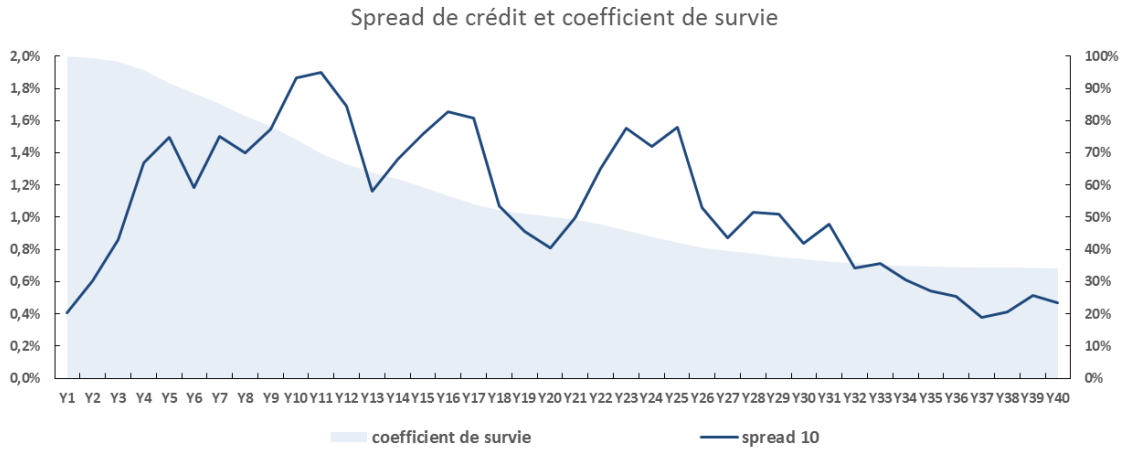


Figure 44 : projection du coefficient de survie et du spread 10 ans pour les obligations privées de rating A.

Les niveaux de spread des obligations privées de rating A sur cette simulation sont élevés. Ils atteignent jusqu'à 200bps quand le spread moyen stochastique est d'environ 65bps. Cela aura une incidence directe sur la valeur de marché du portefeuille obligataire.

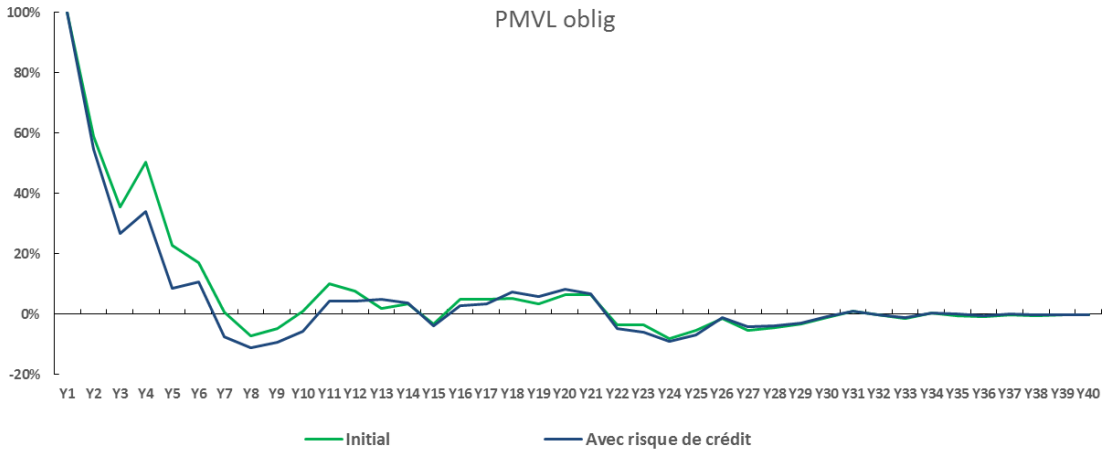


Figure 45 : montant de plus ou moins-values latentes sur le portefeuille obligataire de taux fixe.

La modélisation du risque crédit engendre une érosion plus marquée du stock de plus-value-latente obligataire. L'écartement des spreads est la principale raison de l'écart existant entre les deux courbes. L'algorithme de rebalancement du portefeuille d'actifs n'étant pas basé sur la valeur de marché, l'impact final est moins important.

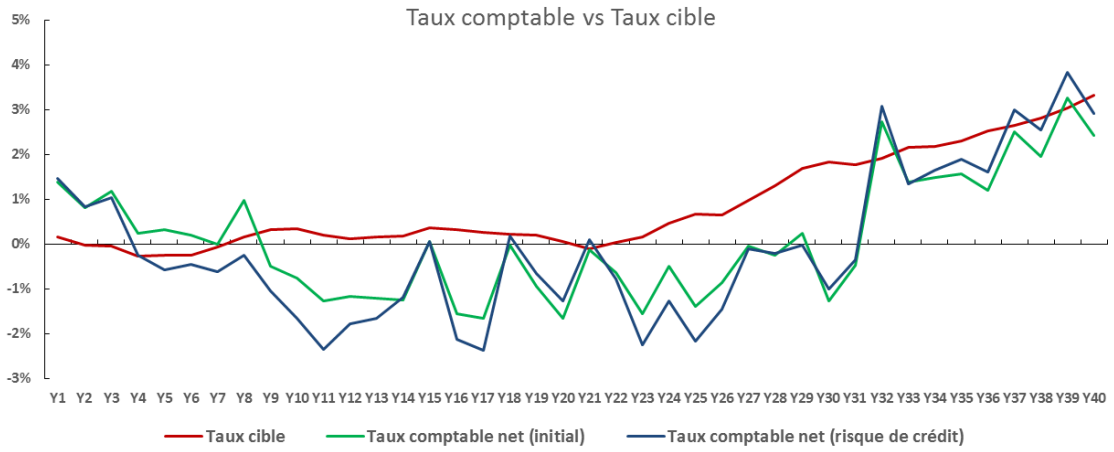


Figure 46 : évolution du taux comptable net avec et sans risque de crédit en fonction du taux cible.

La matérialisation du défaut sur le nominal et les coupons se répercute lourdement sur les produits financiers de l'assureur. Le taux cible reste inchangé par la modélisation du risque de crédit. Par conséquent, à niveau de richesse initial équivalent, le taux servi sera moins important dans le scénario avec le risque de crédit. En effet, la réserve de PPB sera reprise plus rapidement pour combler les pertes financières et atteindre les attentes du client.
Finalement on constate, pour cette trajectoire extrême, une augmentation du déficit de compétitivité. En effet, l'écart entre le taux servi et le taux cible s'accentue avec la prise en compte du défaut obligataire.

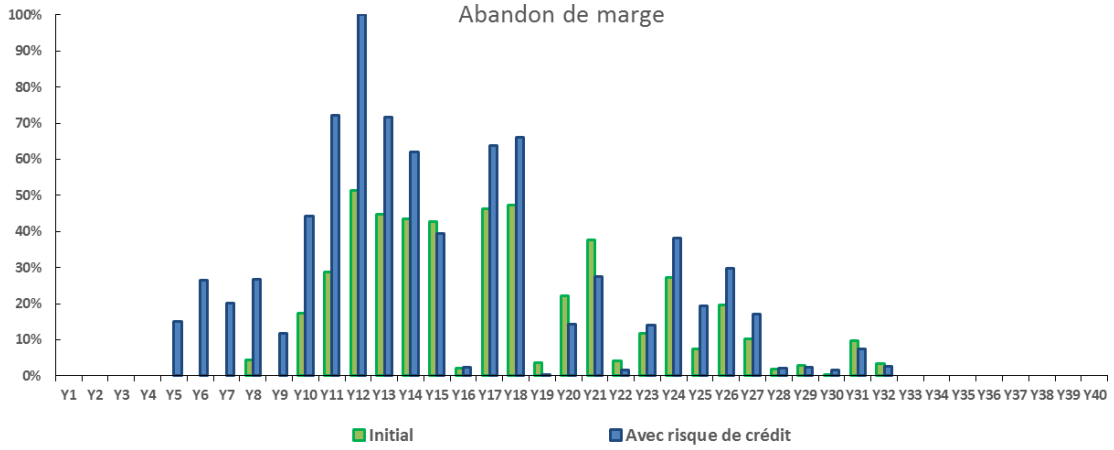


Figure 47 : abandon de marge réalisé au cours de la projection avec et sans risque de crédit.

Dans ce scénario extrême, le recourt à un abandon de marge pour augmenter le taux cible est inévitable. Le montant cumulé total d'abandon de marge augmente d'environ 60% avec la modélisation du risque de crédit.

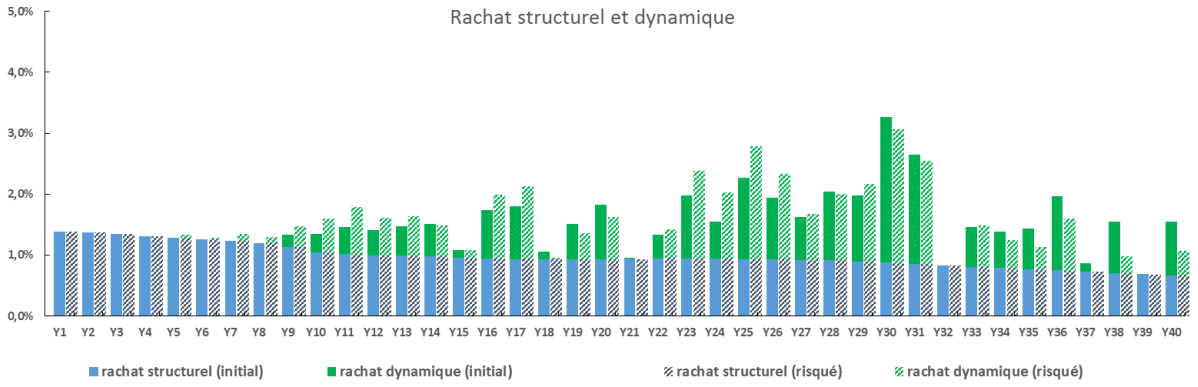


Figure 48 : chronique de rachat structurel et dynamique avec et sans risque de crédit.

Malgré les abandons de marge pour réduire l'écart entre le taux servi et le taux cible, celui reste trop important et expose le fonds à des rachats dynamiques. Si les rachats structurels sont quasi identiques d'un scénario à l'autre, les rachats dynamiques, eux, varient sensiblement. Les quantités de défaut importantes sur le début de projection dégradent le rendement comptable et provoque davantage de rachats dynamiques. Sur la fin de projection, le surendement initial engrangé par les spreads et le réinvestissement obligataire bénéficient aux fonds et on constate une diminution des rachats dynamiques comparé au scénario initial sans risque de crédit.

Finalement, l''illustration de ce scénario extrême a permis de mettre en évidence les pertes en capital engendrées par la modélisation du risque de crédit. Les variations sur les indicateurs S2 sont très prononcées avec une hausse importante du Best Estimate de plus de 10% sur cette simulation extrême.

Conclusion

Ces travaux sur la modélisation du risque de crédit en univers risque neutre s'inscrivent dans un objectif d'adéquation entre le bilan économique et le profil de risque de l'entreprise d'assurance. Cette évolution du modèle de projection vise à produire des calculs plus appropriés des provisions techniques et des fonds propres économiques. En effet, la plupart des contrats d'assurance vie donnent lieu à des prestations discrétionnaires qui dépendent des rendements financiers ou qui comportent des garanties financières et contractuelles. Ainsi il convient de valoriser ces caractéristiques en ayant recours à des simulations stochastiques risque neutre.

L'intégration du risque de crédit dans le Générateur de Scénarios Economiques puis sa diffusion au sein du modèle de projection des flux impacte négativement la valeur du portefeuille. Cependant, l'impact valeur observé sur le portefeuille est bien en ligne avec les attentes. La prise en compte de la volatilité des spreads conduit à une augmentation naturelle de la volatilité des valeurs de marché et donc in fine à une augmentation du coût des options et garanties incluses dans les contrats.

Le recours au modèle à intensité Longstaff Mithal et Neis (LMN) est conforté par la présence de formules fermées pour le pricing des obligations risquées et dans celui des spreads de crédit. De plus, le modèle LMN n'interfère pas avec les notations de crédit ce qui facilite son implémentation dans le modèle ALM. Contrairement au modèle JLT, où les obligations risquées transitent d'une notation à une autre, les obligations conservent leur notation tout au long de la projection au sein du modèle LMN.

Force est de constater que l'impact final sur le ratio de solvabilité reste mesuré et que les limites d'appétit aux risques sont amplement respectées. Ce constat est à considérer avec précaution dans la mesure où les tests de sensibilités ont mis en évidence l'importance du jeu de calibration initial sur le ratio de solvabilité.

Dans la lignée des modèles de diffusion du risque de taux d'intérêt, actions et immobilier, le risque de crédit dépend fortement des conditions de marchés initiales et des caractéristiques du passif via les mécanismes d'interaction actif-passif. Avec l'ajout d'un nouvel aléa, la citation de Pierre Dac prend tout son sens, encore plus en univers risque neutre : « Les prévisions sont difficiles surtout lorsqu'elles concernent l'avenir ».

Références

[1] Longstaff F. A., Mithal S. and Neis E. Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? new evidence from the credit default swap market. National Bureau of Economic Research, 2004.

[2] A theory of the term structure of interest rates - John c. Cox, Jonathan e. Ingersoll, jr., and Stephen a. Ross 1985.

[3] Construction et utilisation de scénarios économiques dans le contexte de Solvabilité 2 – Frédéric Planchet

[4] Report on insurers' asset and liability management in relation to the illiquidity of their liabilities - EIOPA

[5] Générateur de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratique - ACPR

[6] Extension du Longstaff-Mithal-Neis : Application à la diffusion des prix en univers monde réel dans un cadre arbitrage-free – Timothée Fabre

[7] Modélisation des risques de crédit au sein d'un moteur de cash-flows actuariel en assurance vie – Jung Jing

[8] Intégration du spread de crédit stochastique dans la modélisation ALM d'un assureur Vie – Emilie Sabourin

[9] Modélisation du risque de crédit – ISFA – Jiao Ying

[10] Calibrating LMN model to compute best estimates in life insurance – Yacine Laïdi et Frédéric Planchet -

[11] Modélisation du risqué de crédit dans les modèles actuariels : état de l'art et application à un générateur de scenarios économiques – Hedi Lakhdhar

[12] Beelzebub's Telephone Directory - John Authers Deutsche Bank –

[13] Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions – Duffie, Pan et Singleton November 2000

[14] S&P European Corporate Recoveries Over 2003-2019: The Calm Before The COVID-19 Storm.

Tables des figures

Figure 1 : émissions nettes en milliard d'euros, de titres de dettes en zone euro par secteur émetteur. Source Banque Centrale Européenne. 15
Figure 2 - Bilan économique S2 simplifié 17
Figure 3 : Structure modulaire de la formule standard pour le calcul du SCR 19
Figure 4 : convergence des taux forward vers l'UFR pour la courbe des taux EIOPA au 31-12-2019 23
Figure 5 : chronique d'historique du VA (échelle de droite) comparée à celles du taux swap 1 an et du spread A (échelle de gauche). 23
Figure 6 : illustration du modèle JLT entre deux pas de temps de projection. 29
Figure 7 : conventions de recouvrement en cas de défaut d'un ZC risqué 30
Figure 8 : approximation de l'intégrale stochastique en fonction de la discrétisation 35
Figure 9 : calibrage de la courbe des taux risqués du rating A 37
Figure 10 : risque neutralisation avec et sans risque de crédit 40
Figure 11 : historique du niveau des spreads de crédit de 2000 à 2020 40
Figure 12 : graphique valeurs propres, fonction R : fviz_eig() 43
Figure 13 : cercle des corrélations colorée, R : fviz_pca_var () 44
Figure 14 : p-valeur de la statistique du test de Student pour les zéro coupons risqués de maturité 10 et de rating A 46
Figure 15 : seuil de tolérance et boucles de rétroactions 47
Figure 16 : modèle actif-passif de calcul des provisions 48
Figure 17 : coefficient de survie en fonction du LGD 50
Figure 18 : coefficient de survie des dix premières simulations stochastiques 50
Figure 19 : allocation d'actifs en valeurs de marché 51
Figure 20 : Schéma simplifié d'un algorithme de participation au bénéfice pour un fonds euro classique. 52
Figure 21 : illustration de la loi min de rachats conjoncturels issue des ONC 54
Figure 22 : évolution du déflateur sans risque et avec risque de crédit sur les 40 années de projection 55
Figure 23 : évolution du taux 10 ans sans risque et avec risque de crédit sur les 40 années de projection 55
Figure 24 : évolution de l'indice Actions sur les 40 années de projection 56
Figure 25 : étude des quantiles des spreads 1an et 10 ans au cours la projection risque neutre. 56
Figure 26 : niveau moyen des spreads de crédit par maturité. 56
Figure 27 : facteur de survie cumulatif du modèle LMN à 1 an pour les obligations risquées A 57
Figure 28 : décomposition en base 100 des flux constituants le Best Estimate 59
Figure 29 : évolution du taux de rendement des actifs dans le scénario déterministe avec et sans modélisation du risque de crédit. 60
Figure 30 : chronique de dotation/reprise de la réserve de Provision pour Participation aux Bénéfice après correction des contraintes de 8 ans et du seuil de PPB/PM maximum 61
Figure 31 : évolution de la moyenne du taux de rendement des actifs en stochastique avec et sans modélisation du risque de crédit 62
Figure 32 : Détails du SCR de marché au 31/12/2019 64
Figure 33 : capacité d'absorption avant et après modélisation du risque de crédit 65

Figure 34 : comptabilisation des défauts en nombre et montant depuis 1970, source : Moody's Investors Service. 67
Figure 35 : ratio de solvabilité en fonction du niveau du LGD retenu, toutes choses égales par ailleurs. 68
Figure 36 : projection du montant des provisions mathématiques pour le calcul réglementaire de solvabilité annuel. 69
Figure 37 : pourcentage de réinvestissement issu du modèle de projection. Les pics successifs sont expliqués par la maturité fixe de réinvestissement de 10ans. 69
Figure 38 : ratio de solvabilité en fonction du niveau de la part de réinvestissement en obligations privées soumises au risque de crédit sur des maturités fixes de 10ans. 70
Figure 39 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre alpha. . 71
Figure 40 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre beta. 72
Figure 41 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre sigma.. 73
Figure 42 : Projection de l'intensité de défaut moyen en fonction du paramètre lambda initial. 74
Figure 43 : Zones de risques du paramétrage du modèle LMN 75
Figure 44 : projection du coefficient de survie et du spread 10 ans pour les obligations privées de rating A. 77
Figure 45 : montant de plus ou moins-values latentes sur le portefeuille obligataire de taux fixe. 77
Figure 46 : évolution du taux comptable net avec et sans risque de crédit en fonction du taux cible. 78
Figure 47 : abandon de marge réalisé au cours de la projection avec et sans risque de crédit. 78
Figure 48 : chronique de rachat structurel et dynamique avec et sans risque de crédit. 79

Liste des tableaux

Tableau 1 : Chiffres sur les titres obligataires privés, source : Report on insurers' asset and liability management in relation to the illiquidity of their liabilities. 28
Tableau 2 : bilan économique de la firme de Merton. 29
Tableau 3 : Matrice de corrélations historiques entre les spreads de crédit au 31/12/2019. 41
Tableau 4 : table de correspondance notation de crédit et CQS de Solvabilité 2. 41
Tableau 5 : qualité de notation du portefeuille obligataire 51
Tableau 6 : impact du risque de crédit sur le Best Estimate en scénario déterministe 61
Tableau 7 : impact du risque de crédit sur le Best Estimate en scénarios stochastiques 62
Tableau 8 : Variation de la TVOG après modélisation du risque de crédit au 31/12/2019. 63
Tableau 9 : impact du risque de crédit le SCR de marché. 65
Tableau 10 : impact du risque de crédit sur le ratio de solvabilité au 31/12/2019 66
Tableau 11 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre alpha. 72
Tableau 12 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre beta. 72
Tableau 13 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre beta. 73
Tableau 14 : Sensibilité du ratio de solvabilité en fonction du paramètre lambda initial. 74
Tableau 16 : décomposition des capitaux propres S2 89

Annexes

- <u>Equation de Riccati</u>

Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme :

$$y' = q_0(x) + q_1(x) \times y + q_2(x) \times y^2$$

Où $q_0, q_1 et\ q_2$ sont trois fonctions choisies comme continues sur un intervalle commun à valeurs réelle ou complexe.

- <u>Valorisation des obligations à taux fixe</u>

Nous avons pu démontrer dans la partie 3 spécifique au modèle LMN, la formule de valorisation d'une obligation risquée:

$$B(c,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[c\int_0^T \exp(-\int_0^t (r_s + \lambda_s)ds)dt\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^T (r_t + \lambda_t)dt\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(1 - LGD)\int_0^T \lambda_t \exp(-\int_0^t (r_s + \lambda_s)ds)dt\right]$$

Il est possible d'obtenir une formule fermée de la valorisation des obligations à taux fixe :

$$B(c,T) = c\int_0^T D(t)F(\lambda,t)dt + D(T)F(\lambda,T) + (1 - LGD)\int_0^T D(t)W(\lambda,t)dt$$

Avec :

$$D(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^t r_s ds)\right]$$

$$F(\lambda,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(-\int_0^t \lambda_s ds)\right]$$

$$W(\lambda,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\lambda_t \exp(-\int_0^t \lambda_s ds)\right]$$

Nous avons pu démontrer que

$$F(\lambda,T) = A(T)\mathrm{e}^{\lambda B(T)}$$

Où

$$A(T) = exp\left(\frac{\alpha(\beta+\phi)}{\sigma^2}t\right) \times \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi T}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}$$

$$B(T) = \frac{\beta-\phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1-\kappa e^{\phi T})}$$

Avec les quantités ϕ et κ définies telles que :

- $\phi = \sqrt{2\sigma^2+\beta^2}$
- $\kappa = \frac{\beta+\phi(\beta,\sigma)}{\beta-\phi(\beta,\sigma)}$

Reste à obtenir la formule de

$$W(\lambda,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\lambda_t \exp(-\int_0^t \lambda_s ds)\right]$$

Duffie, Pan et Singleton dans leur article paru en 2000, ont démontré que la fonction W vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2} + (\alpha-\beta\lambda)\frac{\partial W}{\partial\lambda} - \lambda W - \frac{\partial W}{\partial T} = 0$$

Avec la condition initiale $W(\lambda,0) = \lambda$

La fonction W étant solution de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus, elle est alors de la forme suivante :

$$W(\lambda,T) = (G(T)+H(T)\lambda)e^{\lambda L(T)}$$

Où G, H et L sont des fonctions vérifiant : G(0)=L(0)=0 et H(0)=1 pour respecter la condition initiale de W.

En introduisant cette solution dans l'EDP, nous obtenons :

$$(-G'+\alpha(H+GL)) + \left(-H'GL' + \alpha HL - \beta(H+GL) + \frac{1}{2}\sigma^2(2HL+GL^2) - G\right)\lambda$$
$$+\left(-(HL'+\beta HL) + \frac{1}{2}\sigma^2 HL^2 - H\right)\lambda^2 = 0$$

Chacun des termes est donc nul, soit :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L = 1 \\ (\alpha+\sigma^2)HL - \beta H + G\left(\frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L - 1\right) = H' \\ \alpha(H+GL) = G' \end{cases}$$

Le système se simplifie pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L = 1 \\ (\alpha + \sigma^2)HL - \beta H = H' \\ \alpha(H + GL) = G' \end{cases}$$

Comme développé dans la section 3.1.1 sur le prix des obligations, la fonction L admet pour solution :

$$L(T) = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi T})}$$

Puis pour H :

$$H(T) = \exp\left((\alpha + \sigma^2)\int_0^T L(s)ds - \beta T\right)$$

Après calculs on trouve finalement :

$$H(T) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi\sigma^2}{\sigma^2}T\right)\left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+2}$$

Et la fonction G :

$$G(T) = \frac{\alpha}{\phi}(e^{\phi} - 1)\exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2}T\right)\left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1}$$

Avec pour rappel, les quantités ϕ et κ définies telles que :

- $\phi = \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}$
- $\kappa = \frac{\beta + \phi(\beta,\sigma)}{\beta - \phi(\beta,\sigma)}$

- Analyse des capitaux propres S2

a	Capitaux propres French GAAP
b	(+) PVL sur fonds propres
c	(+) Ajustement Actifs intangibles
	(1) Total ANR (a)+(b)+(c)
e	(+) Marges Epargne - Retraite
f	(+) Marges épargne UC
g	(+) Marges prévoyance
h	(+) PPE admissible
i	(-) Marge pour risque
	(2) Total Marges (e)+(f)+(g)+(h)-(i)
	(1)+(2) Total capitaux propres Solvabilité 2

Tableau 15 : décomposition des capitaux propres S2