

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Mathieu Pavard

Titre : Valorisation d'un produit structuré sur le marché des changes

Confidentialité : NON (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

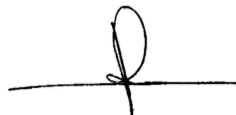
*Membres présents du jury de Signature
l'Institut des Actuaires*

Pierre-Alain PATARD
.....
.....
.....

*Membres présents du jury de
l'ISFA*

Diana DOROBANTU
.....
.....
.....

*Entreprise : SPAC Actuaires
Directeur de mémoire en entre-
prise :
Nom : Pierre MONTESINOS*


Signature : 

*Invité :
Nom :*


Signature :

*Autorisation de publication et
de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actua-
riels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Remerciements

J'aimerais remercier ici toutes les personnes impliquées de près ou de loin dans la réalisation de ce mémoire.

Le travail présenté dans les prochaines pages n'aurait pas été possible sans l'expertise et les conseils avisés de Pierre MONTESINOS. De la mise en place du projet jusqu'aux nombreuses relectures, en passant par les questions techniques du mémoire, son investissement à chaque étape de ce travail a été d'une aide inestimable.

Je remercie également Alexandre CALLE qui m'a aussi été d'une grande aide, notamment sur la mise en place du cadre de l'étude et la rigueur à apporter.

Je suis très heureux d'avoir pu travailler pendant un peu plus d'un an au sein de Spac Actuariers. Je tiens à remercier tous mes collègues pour leur accueil, leur gentillesse et leur aide sur de nombreux sujets.

Finalement, j'apporte avec ce mémoire un point final à mes études. Je remercie donc mes parents pour leur soutien durant toute cette période et bien avant, ainsi que leurs efforts pour se plonger dans ce mémoire. Je remercie finalement Yasmina pour ses recommandations et ses nombreuses relectures.

Résumé

Mots Clés : *Produits structurés, Taux de change, Indices equity, Correction quanto, Modèle de Heston, Réduction de variance, Monte Carlo.*

Les produits structurés sont construits sur mesure pour répondre à un besoin précis d'un investisseur. De ce fait, les mécanismes générant les flux financiers d'un tel produit peuvent être difficiles à appréhender, compliquant sa valorisation dans le cadre des normes IFRS.

Le produit structuré étudié ici verse des coupons et comporte une clause de versement du nominal à échéance. Ces différents flux sont soumis à conditions sur le niveau du taux de change EUR/USD ainsi que sur les performances de deux indices : le CAC 40 et le S&P 500. L'objectif du présent mémoire est de valoriser ce produit structuré.

La méthode de Monte Carlo pour la valorisation d'un instrument financier exige la projection des différents processus sous une mesure de probabilité risque neutre. Cependant, la structure du produit impose de considérer la cohabitation de deux économies, chacune ayant sa propre vision des risques du marché. Il en découle l'existence de deux univers risque-neutre, le premier enjeu de ce mémoire étant de faire le lien entre eux afin de procéder à la valorisation.

Cette étude s'appuiera systématiquement sur le modèle de Black & Scholes pour bien saisir les particularités de la modélisation du marché des changes dans un cadre simplifié. L'hypothèse de volatilité constante étant inadaptée à la durée de vie et la structure du produit, ces résultats seront transposés au modèle de Heston, à volatilité stochastique, qui servira à la valorisation.

Les mécanismes de structuration et la maîtrise des risques liés à ce produit seront étudiés en profondeur dans un souci d'information auprès de l'investisseur.

Abstract

Key words : *Structured products, Exchange rate, Equity indices, Quanto adjustment, Heston model, Variance reduction, Monte Carlo.*

Structured products are customized for a client, so that it is adapted to his specific needs. Hence, both understanding the mechanisms generating cash flows, and pricing such products in IFRS framework may be difficult.

The structured product considered in this work pays coupons and then the nominal value (all or part) at maturity. These cash flows rely on several conditions being the value of EUR/USD exchange rate and CAC 40 and S&P 500 performances. This Master's thesis aims at pricing this structured product.

By using Monte Carlo pricing method, one must make risk-neutral projections of the stochastic processes. However, we must consider the coexistence of two economies due to the product's construction. Each of these economies has its own vision of market risk. As a result, two risk-neutral probability universes exist. The first issue in that document is to establish the link between them in order to price the product.

The distinctiveness of modeling Foreign Exchange market will be systematically based on Black & Scholes model, having quite a simple framework. The assumption of a constant volatility is not appropriate to modeling such a product. Thus, all the results will be adapted to the Heston model. This stochastic volatility model will be used to price the structured product.

Both the structuring mechanisms and the risk management of this product will be studied with care, for the sake of investor's information.

Table des matières

Glossaire

Introduction

1

1 Contexte : présentation du produit

3

2 Modèle théorique

13

2.1	Modèle de Black & Scholes	13
2.1.1	Dynamique du taux de change sous la mesure Q^d	14
2.1.2	Formule de passage de Q^d à Q^e	16
2.1.3	Dynamique du taux de change sous la mesure Q^e	17
2.2	Modèle de Heston	17
2.2.1	Modèle de Cox Ingersoll Ross	19
2.2.2	Formule de passage de Q^d à Q^e	20
2.2.3	Dynamique du taux de change sous la mesure Q^e	21
2.2.4	Expression de la dynamique d'un actif en euros sous Q^d	21
2.3	Synthèse	24

3 Marché FX et options sur devises

28

3.1	Modèle de Garman-Kohlhagen	28
3.2	Butterfly et Risk-Reversal	31
3.3	Options sur devises	34
3.3.1	Plusieurs types de cotations	35
3.3.2	Plusieurs types de deltas	36
3.3.3	Delta ajusté ou non-ajusté ?	39
3.3.4	Delta spot ou forward ?	39
3.3.5	Bijection delta - strike	40

4 Projection par le modèle de Black & Scholes

42

4.1	Nappe de volatilité	43
4.2	Calibration du modèle de Black & Scholes	44
4.2.1	A l'aide des données implicites	44
4.2.2	A l'aide des données historiques	46
4.3	Calcul du drift	47
4.4	Simulation des processus stochastiques par le schéma d'Euler	50
4.5	Méthode de Monte Carlo et réduction de variance	50
4.6	Simulation du produit structuré	54
4.7	Résultats dans le cadre du modèle de Black & Scholes	57

4.7.1	Volatilité implicite	57
4.7.2	Volatilité historique	59
5	Modèle de Heston	61
5.1	Formule fermée de valorisation d'une option dans le modèle de Heston	61
5.2	Calibration du modèle de Heston	62
5.3	Simulation	66
5.3.1	Schéma d'Euler	66
5.3.2	Schéma de Kahl-Jackel	67
5.4	Implémentation	68
5.4.1	Validation des projections	68
5.4.2	Décomposition de Cholesky	70
5.4.3	Résultats dans le cadre du modèle de Heston	72
5.5	Analyse	75
5.5.1	Décomposition des flux financiers	75
5.5.1.1	Produit A : Coupons	76
5.5.1.2	Produit B : Option lock-in	79
5.5.1.3	Produit C : Barrière de remboursement	80
5.5.2	Sensibilités	82
5.5.2.1	Sensibilités aux variances à long terme	82
5.5.2.2	Sensibilité au cours initial du taux de change	84
5.5.2.3	Sensibilités aux différentes barrières sur le taux de change	85
5.5.2.4	Sensibilité au taux de coupon - Adapter la structure du produit	87
5.5.3	Structurer dans une logique de protection du capital	90
5.5.4	Effet d'une brusque variation des corrélations	92
	Conclusion	97
	Bibliographie	100
	A Nappes de volatilité	101

Glossaire

\mathbb{Q}^d : Probabilité risque neutre associée au dollar

\mathbb{Q}^e : Probabilité risque neutre associée à l'euro

$(U)_{t \geq 0}, (V)_{t \geq 0}, (W)_{t \geq 0}$: Mouvements browniens sous \mathbb{Q}^d

$(\hat{W})_{t \geq 0}, (\hat{V})_{t \geq 0}$: Mouvements browniens sous \mathbb{Q}^e

$(Y)_{t \geq 0}$: Taux de change EUR/USD. A l'instant t , 1€ vaut $\$Y_t$

$(r^d)_{t \geq 0}$: Taux d'intérêt en dollars

$(r^e)_{t \geq 0}$: Taux d'intérêt en euros

$(R^d)_{t \geq 0}$: Inverse du facteur d'actualisation en dollar

$(R^e)_{t \geq 0}$: Inverse du facteur d'actualisation au taux euro

$V_t^{d;pips}$: Prix d pips d'une option (USD par EUR)

$V_t^{\%d}$: Prix $\%d$ d'une option (USD par USD)

$V_t^{\%e}$: Prix $\%e$ d'une option (EUR par EUR)

$V_t^{e;pips}$: Prix e pips d'une option (EUR par USD)

$\Delta_t^{S;pips}$: Delta spot non-ajusté

$\Delta_t^{S\%}$: Delta spot ajusté

$\Delta_t^{F;pips}$: Delta forward non-ajusté

$\Delta_t^{F\%}$: Delta forward ajusté

Δ_t^{simple} : Delta simple

BC : Barrière de coupons

BLI : Barrière lock-in

BR : Barrière de remboursement

Introduction et contexte

Depuis 2002, dans un souci de transparence sur les marchés internationaux, toute entreprise européenne peut (et, dans certains cas, doit) se soumettre aux normes comptables IFRS/IAS (International Financial Reporting Standards / International Accounting Standards). Notamment, depuis 2005, les entreprises concernées se plient à la norme IAS 39 (Instruments financiers : Comptabilisation et évaluation), remplacée en 2014 par la norme IFRS 9 (Instruments financiers). La norme IFRS 9 indique un certain nombre de principes concernant la classification des actifs financiers et détermine les méthodes d'évaluation et de comptabilisation des différentes classes d'actifs. L'une de ces méthodes est dite *à la juste valeur*.

La juste valeur est définie par la norme comme "le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre parties bien informées, consentantes, et agissant dans des conditions de concurrence normale".

Dans ce contexte, une entreprise cliente de la société de conseil SPAC Actuaires, publiant ses comptes dans le référentiel IFRS, possède en portefeuille un produit structuré répondant à un besoin de placement des surplus de liquidités. Le client l'envisage sans objectif de rendement, comme une alternative à des placements longs ou trop risqués. A l'approche de la clôture comptable 2021, il souhaite réaliser une évaluation à la juste valeur du produit, à réitérer chaque année jusqu'à sa maturité, afin de le comptabiliser correctement.

Le produit structuré étudié dans ce mémoire est adossé à plusieurs éléments : le taux de change EUR/USD (Euro/Dollar) d'une part, les performances des indices actions CAC 40 et S&P 500 d'autre part. La valeur ajoutée de ce mémoire s'articulera autour de ces différents mécanismes. En particulier, en introduisant la notion de change dans notre produit, nous serons nécessairement amenés à étudier deux économies correspondant à deux devises distinctes (EUR et USD). Nous devons clarifier la manière dont ces deux économies coexistent, afin de poser un cadre clair pour notre étude.

Notre objectif est de valoriser un produit structuré complexe sur le marché des changes. Pour répondre à cette problématique, le présent mémoire suivra la structure suivante.

Nous reviendrons en détail sur le fonctionnement du produit structuré : nous en présentons les sous-jacents et les conditions sur ceux-ci pour générer les flux financiers.

Nous réaliserons l'évaluation en juste valeur par la méthode de Monte-Carlo. Il nous faudra donc établir un modèle de projection des trois sous-jacents. Nous présenterons alors ce qui constituera le coeur de notre travail : la cohabitation de deux économies, chacune ayant sa propre perception du risque. Cela entraîne l'existence de deux univers risque-neutres différents. Les conséquences en seront exposées dans le cas simplifié de Black & Scholes à titre pédagogique avant d'être appliquées au modèle de Heston, que nous avons sélectionné pour effectuer les projections.

Dans une troisième partie, nous présenterons les grands principes du marché des changes et les informations auxquelles nous aurons accès pour mener à bien notre étude.

Nous procéderons ensuite à la calibration des modèles de diffusion des trois processus, sur la base des nappes de volatilités implicites issues de Bloomberg. Nous présenterons la méthode de Monte Carlo et ses extensions, notamment la méthode des variables antithétiques dans le cadre de la réduction de variance. Suite à cela, nous serons en mesure d'estimer la juste valeur de notre produit par la moyenne empirique des flux financiers actualisés à la date de valorisation.

Finalement, nous mènerons une analyse des risques du produit. Nous étudierons la distribution des pertes et gains associés, les forces et faiblesses des différents composants du produit et les sensibilités du prix aux nombreux paramètres du produit.

Chapitre 1

Contexte : présentation du produit

Cette partie est dédiée à la description exacte des mécanismes du produit structuré. Dans un souci de confidentialité, les sommes engagées réellement ne seront pas communiquées. Ce mémoire a une visée d'application sur un exemple fictif, sachant que l'ensemble de nos résultats pourra facilement être adapté à un produit de la même famille mais avec une paramétrisation différente.

Un produit structuré est un produit financier combinant plusieurs instruments financiers plus ou moins liquides (actions, options, swaps...). Il est construit sur mesure par l'investisseur et sa banque pour répondre à un besoin précis. L'objectif d'un tel montage est d'optimiser le rendement de l'investissement tout en garantissant éventuellement tout ou partie du capital investi. La performance des produits structurés repose sur au moins un sous-jacent plus ou moins volatile selon l'objectif fixé.

Dans le cadre de ce mémoire, nous considérerons un produit structuré dont le sous-jacent est un taux de change. Nous verrons par la suite que si certains principes du marché equity sont transposables au marché des changes (ou marché FX, pour Foreign Exchange), un certain nombre de particularités sont à prendre en compte si l'on souhaite valoriser un produit sur ce marché. Dans la suite de cette partie, nous présenterons les différentes caractéristiques du produit étudié.

Pour désigner le taux de change, il est d'usage d'utiliser la notation FOR/DOM, qui désigne le prix du marché de la devise domestique (DOM, pour *domestic*) en devise étrangère (FOR, pour *foreign*). Dans notre cas, la monnaie domestique est le dollar (USD) et la monnaie étrangère l'euro (EUR). Ceci est une convention, due au fait que les options d'achat et de vente sur cette paire de devises sont systématiquement cotées en USD. Nous considérons donc le taux de change EUR/USD. Il est à noter que les termes "étrangère" et "domestique" ne font en aucun cas référence à une zone géographique. Ils désignent uniquement la monnaie de référence dans la paire de devises considérées, quelle que soit la nationalité de l'investisseur ou la devise qu'il utilise.

Dans tout ce mémoire, nous noterons Y_t la valeur du taux de change à la date t . Si le prix d'un actif en EUR à l'instant t est noté X_t , alors son prix en USD est $Y_t X_t$. Sur le marché des devises, nous pouvons également dire qu'avec 1€, un investisseur pourra acheter, à l'instant t ,

$\$Y_t$. A la date de valorisation du produit, le 31/12/2021, la valeur du taux de change EUR/USD était de 1,137 : 1€ pouvait s'acheter pour \$1,137.

Les flux financiers dépendront également des performances des indices equity CAC 40 et S&P 500, dont nous trouvons des descriptions sur Bloomberg :

- « L'indice S&P 500 est considéré comme le plus représentatif des sociétés américaines de grande capitalisation. Il est composé de 500 grandes sociétés US et représente environ 80% de la capitalisation boursière disponible. Il sert de base à une vaste gamme de produits d'investissement. »
- « L'indice CAC 40 est un indice pondéré par la capitalisation du flottant qui reflète la performance des 40 sociétés les plus importantes et les plus activement négociées sur Euronext Paris. C'est l'indicateur le plus largement utilisé pour le marché boursier parisien. L'indice sert de sous-jacent pour les produits structurés, fonds, ETF, options et contrats à terme. Il est géré par Euronext, la Bourse pan-européenne. »

Présentation sommaire du produit structuré

Le produit structuré est caractérisé par sa maturité de neuf ans, ainsi que par son nominal de 100 000 €. Les flux financiers seront tous versés à l'investisseur en euros et le prix à la date d'évaluation (31/12/2021) sera également donné en euros.

Notre produit comporte deux types de flux potentiels : des coupons versés trimestriellement durant toute la vie du produit et le remboursement total ou partiel du nominal à la maturité, le 31/12/2030. Les versements de ces flux financiers dépendent du niveau du taux de change à chaque échéance trimestrielle ou date de constatation (31/03, 30/06, 30/09 et 31/12 de chaque année entre 2022 et 2030) par rapport à différentes barrières :

- **Barrière de coupon (BC) :** A chaque date de constatation, si la valeur du taux de change EUR/USD est inférieure à cette barrière, il existe deux possibilités.
 - Le taux de change est inférieur ou égal à la barrière de coupon : l'investisseur bénéficie d'un coupon dont le taux est déterminé par la performance relative du CAC 40 par rapport au S&P 500 sur le trimestre écoulé, floorée à 0% et capée à 4%.
 - Le taux de change est supérieur à la barrière de coupon : aucun coupon n'est versé pour cette date de détachement.
- **Barrière lock-in (BLI) :** du nom de l'option lock-in, dont nous expliquerons le fonctionnement précis par la suite. Après une période de franchise de trois ans, à partir du 31/12/2024 et jusqu'au 30/09/2030 (dernière date de constatation avant la maturité) le taux de change à chaque date de constatation est également comparé à cette barrière.
 - Si le taux de change est inférieur ou égal à cette barrière pour au moins l'une des dates constatées, le produit devient à capital garanti à maturité. L'investisseur percevra le nominal le 31/12/2030.

- Dans le cas contraire, rien ne garantit à l'investisseur qu'il percevra le nominal à maturité.
- **Barrière de remboursement (BR) :** Cette barrière n'intervient qu'à la maturité du produit, le 31/12/2030. Dans le cas où la barrière lock-in n'a pas été franchie à la baisse au cours des vingt-quatre dates de constatation précédentes, le taux de change à maturité est comparée à cette dernière barrière.
 - Si le taux de change est inférieur à la barrière de remboursement, alors l'investisseur perçoit immédiatement l'intégralité du nominal.
 - Si le taux de change est supérieur à cette barrière, alors l'investisseur perçoit un remboursement partiel du nominal. Le taux de remboursement du nominal est alors une fonction décroissante du taux de change floorée à 0%.

Les valeurs fictives des différentes barrières dans le produit que nous étudions sont les suivantes :

BC	BLI	BR
1,5	1,15	1,6

TABLE 1.1 – Valeurs des trois barrières du produit

Après ce rapide aperçu du fonctionnement du produit structuré, présentons en détail les différents mécanismes mis en jeu.

Présentation détaillée des mécanismes du produit structuré

En ce qui concerne les coupons, leur détachement est conditionné par la valeur du taux de change EUR/USD à la date de détermination du sous-jacent. Les coupons sont détachés trimestriellement aux dates de détermination suivantes de chaque année : 31/03, 30/06, 30/09 et 31/12, jusqu'au 31/12/2030. A chacune de ces dates, le taux EUR/USD est examinée. Si elle est inférieure à la barrière de coupon fixée à 1,50 (1€ s'échange à moins de \$1,50), alors le coupon est versé. Dans le cas contraire, le produit continue sans verser de coupon.

Ce premier mécanisme est illustré sur la figure [I.1](#). Sur cet exemple, nous observons l'évolution du taux de change EUR/USD sur la première année de vie du produit. A chaque trimestre, nous comparons sa valeur avec la barrière de coupon (égale à 1,50). A la fin des trimestres 1 et 2, un coupon sera versé. A la fin du trimestre 3, le taux de change est supérieur à 1,50 : le coupon est définitivement perdu pour cette période. Enfin, à la fin du trimestre 4, le taux de change et de nouveau inférieur à 1,50 : le coupon est versé pour cette période. Ceci est résumé dans le tableau [I.2](#).

	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Détachement de coupon	✓	✓	✗	✓

TABLE 1.2 – Récapitulatif des cas de versement de coupon.

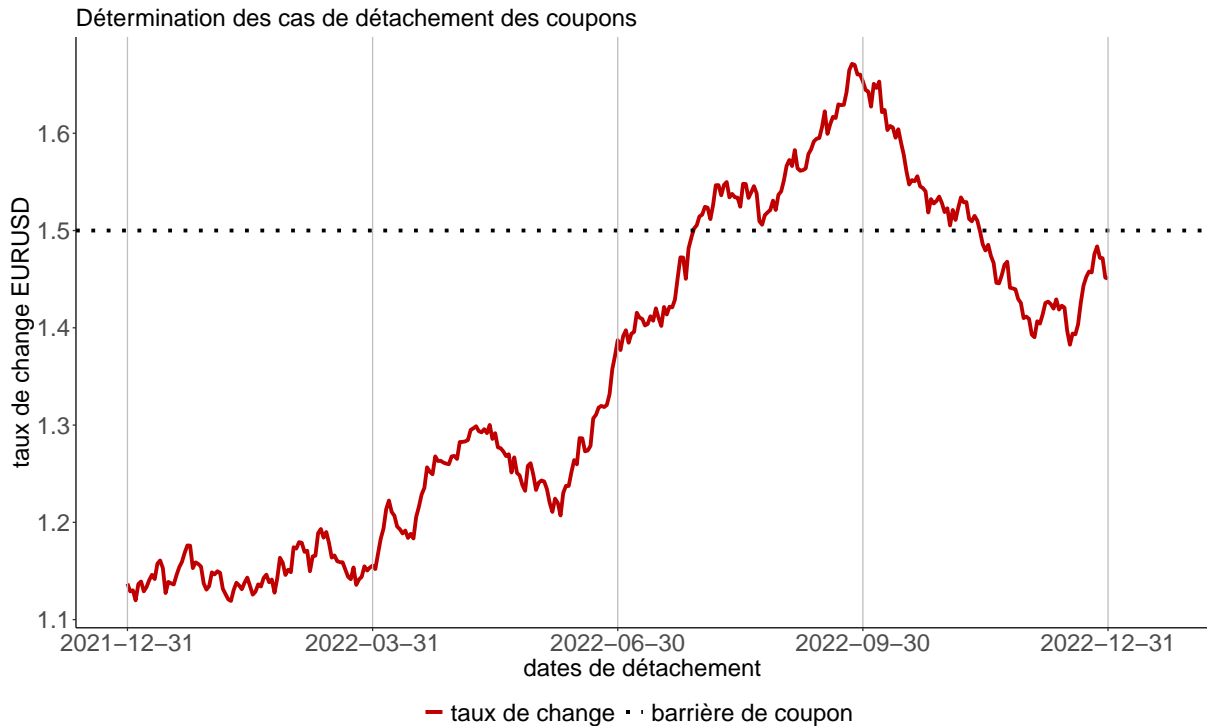


FIGURE 1.1 – Détermination des cas de détachement des coupons

En ce qui concerne le taux de coupon, il est lui aussi variable et dépend de la performance du CAC 40 par rapport au S&P 500. Ce taux sera borné entre 0% et un plafond, fixé à 4%.

La performance d'un indice sur une période donnée est définie comme le rapport entre la variation de la valeur de l'indice sur cette période et la valeur de l'indice au début de la période. Nous considérons, pour chaque date de versement de coupon, la performance des indices sur le trimestre écoulé (soit depuis la dernière date d'évaluation de coupon). Ainsi, pour le CAC 40, la performance à la date d'évaluation t sur une période δ se calcule comme suit :

$$\text{Performance}_t(\text{CAC 40}) = \frac{\text{CAC40}_t - \text{CAC40}_{t-\delta}}{\text{CAC40}_{t-\delta}}.$$

Ainsi, le taux de coupon c_t versé en t si la condition de versement est vérifiée s'exprime ainsi :

$$c_t = \min \left(\max \left(\frac{\text{Performance}_t(\text{CAC 40})}{\text{Performance}_t(\text{S\&P 500})} - 1 ; 0 \right) ; 4\% \right).$$

La figure [1.2](#) illustre de façon schématique les différents cas que nous pouvons rencontrer sur un trimestre en termes de performances relatives des deux indices. Les conséquences de ces cinq situations sont détaillées en tableau [1.3](#).

Ce récapitulatif des cas auxquels nous pouvons être confrontés montre plusieurs choses : tout d'abord, pour que le taux de coupon ne soit pas tronqué à 0%, il est nécessaire que les

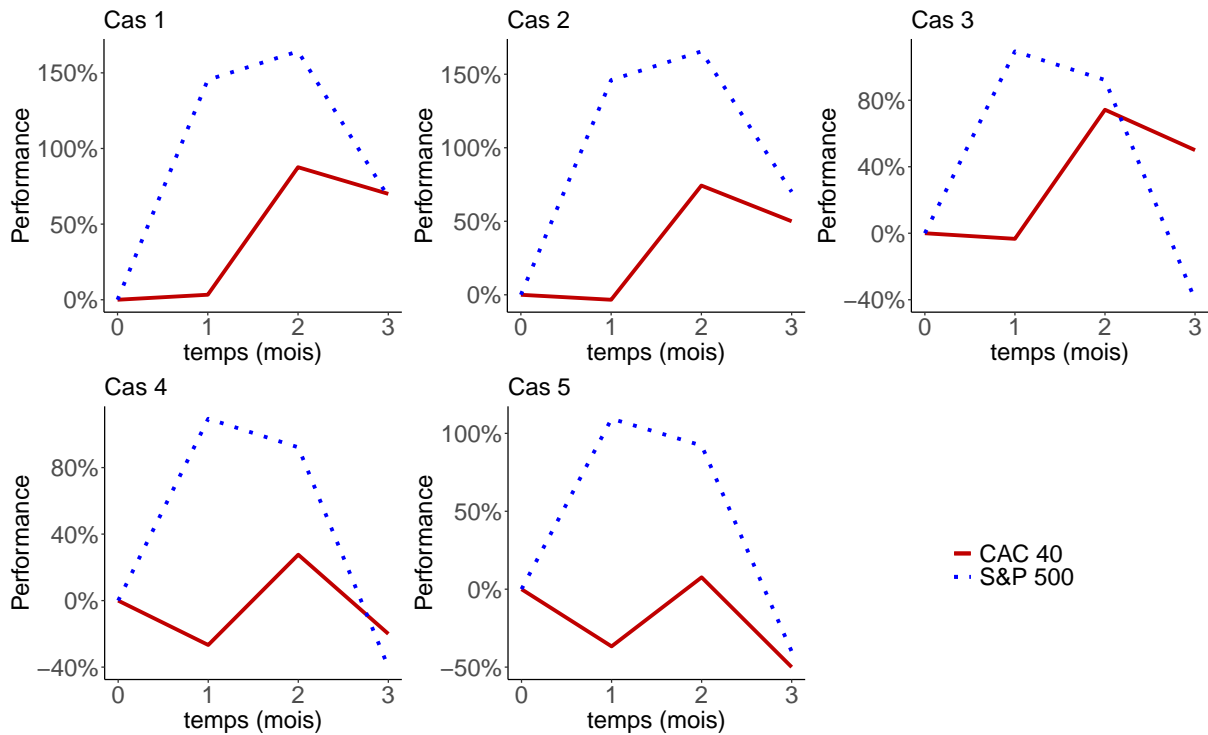


FIGURE 1.2 – Cas possibles de détachement de coupons

performances des deux indices soient du même signe. De plus, lorsque les deux performances sont positives (respectivement négatives), il faut que la performance du CAC 40 soit supérieure (respectivement inférieure) à celle du S&P 500 pour obtenir un taux de coupon positif. Enfin, seuls les cas où les performances trimestrielles des deux indices sont très proches l'une de l'autre mènent à des cas où le taux de coupon n'est tronqué ni à la hausse ni à la baisse. Ainsi, nous avons d'ores et déjà l'intuition que les coupons seront la plupart du temps tronqués. Nous ne pouvons cependant pas dire à ce stade si cette troncature se fera plus souvent à la hausse ou à la baisse.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
Performance CAC 40	+70%	+50%	+50%	-20%	-50%
Performance S&P 500	+68%	+70%	-40%	-40%	-40%
Performance relative	+2,94%	-29%	-25%	-50%	+25%
Taux de coupon	+2,94%	0%	0%	0%	+4%

TABLE 1.3 – Taux de coupons constatés dans les différents cas

Ainsi, en ce qui concerne le taux de coupon, l'investisseur attend des performances de même signe pour le CAC 40 et le S&P 500. Il s'expose alors à la corrélation entre les deux indices. Dans la partie [5.5.4](#), nous proposerons de mesurer l'impact de la corrélation entre les deux indices sur les montants des coupons et donc sur la valeur du produit. De plus, la performance en valeur absolue du CAC 40 doit être supérieure à celle du S&P 500. L'investisseur est donc également exposé aux volatilités de ces indices.

Certains produits structurés peuvent présenter un effet mémoire : si la condition de versement du coupon n'est pas vérifiée à la date de détermination, le coupon pourra tout de même être versé à une date de détermination ultérieure, en complément du coupon de cette nouvelle date, si la condition est vérifiée. En d'autres termes, tout versement de coupon entraîne le versement des coupons passés non-versés. Dans notre cas, il est spécifié que le produit étudié est sans effet mémoire.

La deuxième source de flux financiers est le remboursement du nominal à l'échéance du produit. Ce remboursement est également soumis à condition après une période de franchise de trois ans. A compter du trimestre 12 (31/12/2024), à chaque date de détermination, si le taux de change EUR/USD atteint un niveau inférieur ou égal à une nouvelle barrière, fixée à 1,15, le produit devient à capital garanti à l'échéance. On appelle ce mécanisme de garantie de capital une option *lock-in*, et la barrière introduite est appelée *barrière lock-in*.

A la maturité du produit, si l'option lock-in n'a pas été déclenchée sur les échéances précédentes, il est tout de même possible d'obtenir un remboursement partiel ou total du nominal, toujours en fonction du niveau du taux de change EUR/USD à la maturité du produit. Il existe trois possibilités distinctes à cette date, en ce qui concerne le taux de change :

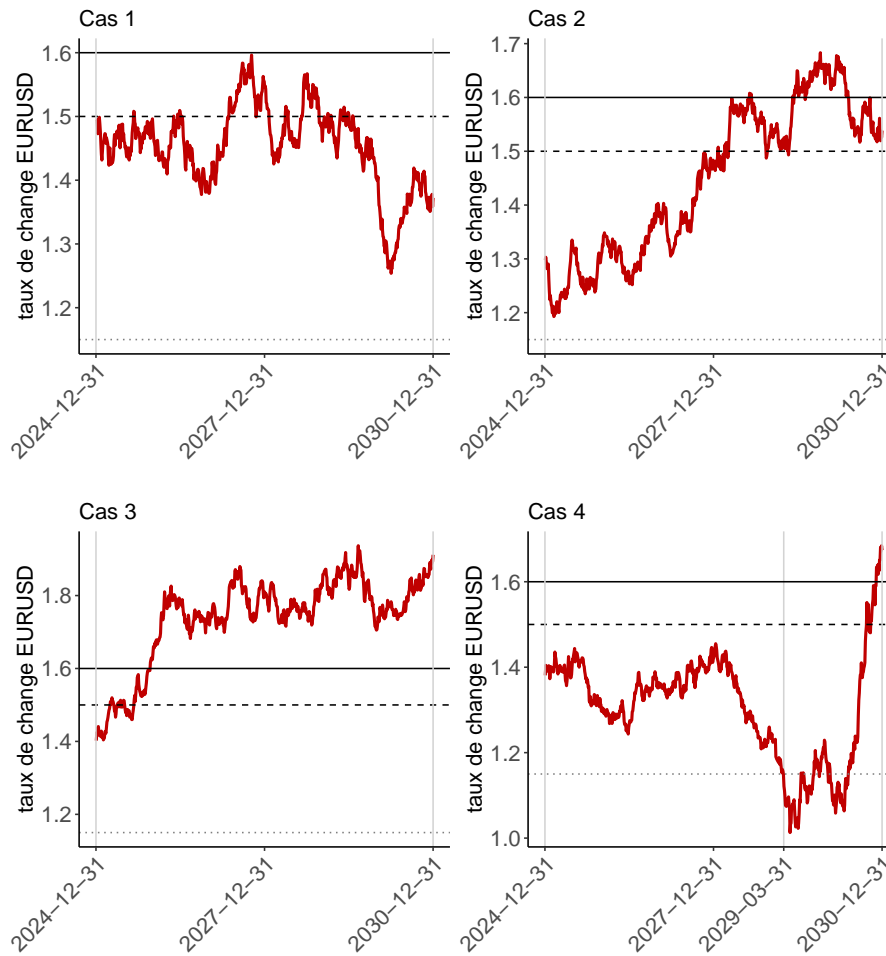
- Le taux EUR/USD est strictement inférieure à 1,50 (barrière de coupon) : versement du dernier coupon et remboursement intégral du nominal.
- Le taux EUR/USD est comprise entre 1,50 et 1,60 (barrière de remboursement) : perte du dernier coupon et remboursement intégral du nominal.
- Le taux EUR/USD est supérieure à 1,60 : perte du dernier coupon et remboursement partiel du nominal au taux $R = 100\% - 200\% \times \min(\max(\text{EUR/USD} - 1,6; 0); 0,5)$

De cette manière, le nominal est remboursé intégralement si le taux de change est inférieur à 1,6. Au delà, le taux de remboursement décroît linéairement selon le taux de change au 31/12/2030, avec une pente de -2. Ainsi, le nominal est complètement perdu si le taux de change est supérieur ou égal à 2,1.

Nous illustrons en figure [1.3](#) les différents cas listés ci-dessus concernant le remboursement du nominal et détaillons les résultats dans le tableau [1.4](#). Ce qui se passe avant la fin de la période de franchise (31/12/2024) ne nous intéresse pas en ce qui concerne le remboursement du nominal à l'échéance, c'est pourquoi les graphiques commencent à cette date.

Les cas numéros 1 à 3 présentent les différents cas de figure lorsque l'option lock-in n'a pas été déclenchée avant l'échéance du produit : le taux de change est resté supérieur à la barrière lock-in depuis la fin de la période de franchise de trois ans. Nous examinons alors uniquement la valeur terminale du taux de change afin de déterminer quel montant sera remboursé à l'investisseur.

- Dans le cas numéro 1, l'investisseur perçoit à la fois le dernier coupon et le remboursement intégral du nominal.



- Taux de change EUR/USD
- ⋯ barrière lock-in
- barrière de coupon
- barrière de capital

FIGURE 1.3 – Détermination des cas de remboursement du nominal

— Dans le cas numéro 2, le taux de change à maturité se trouve au dessus de la barrière de coupon mais en dessous de la barrière de nominal. Le dernier coupon est définitivement perdu, mais l'investisseur reçoit tout de même le remboursement intégral du nominal.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Y_T	1,37	1,54	1,91	1,67
Coupon	✓	✗	✗	✗
Lock In	✗	✗	✗	✓
Remboursement	100%	100%	37,65%	100%

TABLE 1.4 – Détail des différents cas possibles pour les flux à la dernière échéance

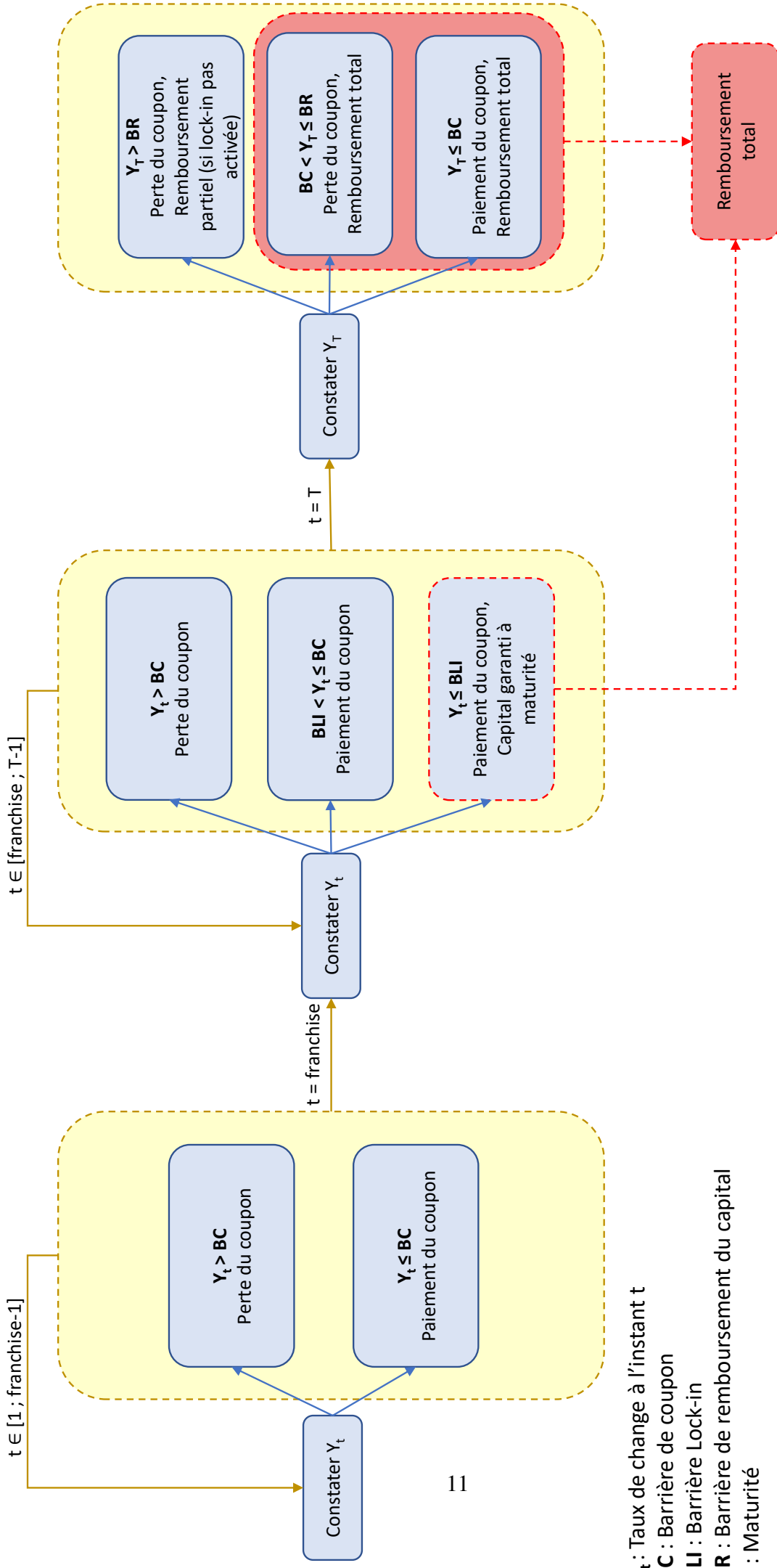
- Dans le troisième cas, le taux de change à maturité du produit est supérieur à la fois à la barrière de coupon et à la barrière de nominal. Dans ce dernier cas, l’investisseur perd le dernier coupon et reçoit un remboursement partiel du nominal investi initialement, selon la formule définie précédemment.
- Enfin, dans le cas numéro 4, nous constatons que la barrière lock-in est franchie à la date d’évaluation du 31/03/2029, soit après la fin de la période de franchise. Quoiqu’il puisse arriver par la suite, le nominal est donc garanti à l’échéance. Cependant, le dernier coupon sera perdu car le taux de change à la maturité est supérieur à la barrière de coupon.

Nous voyons ainsi, avant toute étude quantitative, que la valorisation d’un tel produit va dépendre des valeurs du taux de change EUR/USD et des performances relatives du CAC 40 et du S&P 500. Ce prix sera plus ou moins sensible à de nombreux paramètres, inhérents au produit (hauteur des différentes barrières, durée de vie du produit, bornes du coupon...) ou caractéristiques des dynamiques des processus (dépendants du modèle choisi et à déterminer lors de la calibration). Nous déterminerons les effets de ces paramètres sur le prix et nous pourrons mener une étude de sensibilités.

La figure en [page 11](#) résume le fonctionnement général de ce produit. Sur cette figure, nous reprenons les notations concernant les barrières de coupons (BC), lock-in (LI) et de remboursement (BR). Nous voyons que le fonctionnement du produit est séparé en trois blocs temporels (en jaune). Les itérations sur chacun des blocs sont représentées par des flèches en arrière. Dans le premier bloc, du 31/03/2022 au 30/09/2024, nous regardons à chaque trimestre si un coupon doit être versé. Le cas échéant, la formule du taux de coupon à appliquer est rappelée dans la légende. Dans le deuxième bloc (du 31/12/2024 au 30/09/2030), la franchise de l’option lock-in est terminée. Nous ajoutons une vérification de la condition de déclenchement de cette option à celle de la condition de détachement de coupon. Enfin, le dernier bloc porte uniquement sur la date d’échéance du produit (31/12/2030). Si l’option lock-in n’a pas été déclenchée, nous calculons la proportion du nominal qui sera remboursée grâce à la formule rappelée en légende. Finalement, nous observons le montant du coupon éventuellement versé.

La complexité du produit structuré rend difficile sa réplication par des instruments existants et liquides sur le marché. De plus, il n’existe pas de formule fermée donnant le prix de ce type de produit, bien qu’il soit certainement possible de pricer l’option lock-in à l’aide d’un arbre. Nous sommes donc contraints de procéder à une valorisation par la méthode de Monte Carlo.

Le cas particulier du marché des changes induit certaines spécificités dont nous devons te-



Y_t : Taux de change à l'instant t

BC : Barrière de coupon

BLI : Barrière Lock-in

BR : Barrière de remboursement du capital

T : Maturité

Taux de coupon : $c = \min \left[\max \left(\frac{Performance\ CAC\ 40}{Performance\ S\&P\ 500} - 1 ; 0 \right) ; 4\% \right]$

Remboursement partiel : $R = 100\% - 200\% * \min(\max(Y_T - BR ; 0) ; 0,5)$

nir compte dans le processus de valorisation. Premièrement, nous observons le taux de change EUR/USD ainsi que deux indices, sur lesquels les options sont cotées en EUR pour l'un et en USD pour l'autre. Nous avons donc affaire à deux économies distinctes, ayant chacune sa propre vision du risque. Un investisseur possédant la monnaie dans laquelle sont versés les flux du produit ne sera pas exposé aux mêmes risques qu'un investisseur possédant l'autre monnaie. Ce dernier devra en effet faire face au risque de change par exemple. Mathématiquement, cela se traduira par une distinction entre les mesures de probabilité risque-neutre associées à ces deux mondes. L'un des points d'attention et la principale valeur ajoutée de ce mémoire sera alors d'effectuer les projections des différents processus en jeu dans le même monde, c'est-à-dire sous la même mesure de probabilité risque neutre.

La première étape de notre travail consistera en l'étude théorique des modèles de Black & Scholes et de Heston pour la diffusion des processus du taux de change et des deux indices actions. En particulier, nous nous attacherons, dans chacun de ces deux modèles, à déterminer les modifications de leurs dynamiques lors du passage du monde risque-neutre USD au monde risque-neutre EUR et vice-versa. En l'occurrence, nous établirons les formules de passage pour l'espérance d'une variable aléatoire d'un monde à l'autre.

Si nous commençons par introduire le modèle de Black & Scholes, dans une approche qui peut sembler naïve, cette première étape constitue cependant une introduction intuitive aux calculs à effectuer lors de notre étude. Nous pourrions ensuite les adapter dans un cadre plus élaboré, à savoir le modèle de Heston.

Chapitre 2

Modèle théorique

Au vu de ce qui a été exposé précédemment, l'enjeu de notre étude sera la modélisation et la projection du taux de change et des deux indices actions. Le premier point d'attention concerne l'univers dans lequel se fera cette projection. En effet, les calibrations de ces trois modèles s'effectueront respectivement sous la probabilité risque neutre associée à l'EUR pour la dynamique du CAC 40 et sous la mesure risque-neutre associée à l'USD en ce qui concerne le taux de change et l'indice S&P 500. En effet, lors de la calibration, nous utiliserons des options dont les sous-jacents seront chacune de ces trois quantités. Ces options seront cotées en EUR lorsque le sous-jacent sera le CAC 40, et en USD dans les deux autres cas.

Lors de l'étape de projection, il sera nécessaire de considérer ces instruments sous la même mesure de probabilité. Dans une première approche, nous considérerons que le taux de change, le CAC 40 et le S&P 500 suivent chacun une dynamique de Black & Scholes. Dans cette partie, nous élaborerons nos résultats sur l'exemple de la dynamique du taux de change, sans perte de généralité lors de la transposition de ces résultats aux autres processus.

Nous savons déjà que l'hypothèse de volatilité constante sur une période de neuf ans rend le modèle de Black & Scholes inutilisable dans le cadre de notre étude. En effet, la présence de multiples barrières de différentes valeurs dans notre produit rend impossible la sélection d'une volatilité implicite unique, en particulier pour le taux de change. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons donc le modèle de Heston, qui a l'avantage d'introduire une volatilité stochastique et ainsi de se dispenser du choix de la volatilité. L'étude du modèle de Black & Scholes appliqué à notre étude nous servira à visualiser les principes théoriques mis en jeu dans la modélisation du produit structuré, avant de les appliquer au cadre plus complexe que nous avons retenu.

2.1 Modèle de Black & Scholes

Ce modèle comporte de nombreux inconvénients et ne sera pas adapté à notre problématique mais il est utilisé pour l'élaboration des nappes de volatilités. En effet, la volatilité implicite d'un sous-jacent, connaissant le prix d'une option de maturité et de strike fixés, est la volatilité permettant de retrouver ce prix dans la formule fermée de Black & Scholes.

Sous la probabilité risque neutre associée au dollar (notée \mathbb{Q}^d) le taux de change EUR/USD, noté $(Y)_{t \geq 0}$, suit la dynamique suivante :

$$dY_t = Y_t \mu dt + Y_t \sigma dW_t, \quad (2.1)$$

avec $(W)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^d .

Nous définissons R_t^d et R_t^e comme les inverses des facteurs d'actualisation respectivement au taux dollar r_t^d et euro r_t^e à l'instant t . Ils correspondent aux valeurs en t d'une unité monétaire capitalisée depuis $t = 0$ au taux correspondant. Ainsi :

$$\begin{cases} R_t^d = \exp\left(\int_0^t r_s^d ds\right), \\ R_t^e = \exp\left(\int_0^t r_s^e ds\right). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de taux d'intérêts constants en dollar et en euro (respectivement r^d et r^e), nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{cases} R_t^d = \exp(r^d t), \\ R_t^e = \exp(r^e t). \end{cases}$$

Notre objectif est de déterminer la dynamique du taux de change EUR/USD sous la probabilité risque neutre associée à l'euro, que nous noterons \mathbb{Q}^e .

En finance, $(R^d)_{t \geq 0}$ et $(R^e)_{t \geq 0}$ sont appelés les numéraires naturels associés aux mesures de probabilité \mathbb{Q}^d et \mathbb{Q}^e .

2.1.1 Dynamique du taux de change sous la mesure \mathbb{Q}^d

Considérons dans un premier temps un flux financier S_T , en EUR, à la date T . Un raisonnement similaire à celui que nous mènerons ici est disponible dans [Orta \(2019\)](#). Par absence d'opportunité d'arbitrage, les valeurs actualisées de ce flux en dollars et en euros sont respectivement :

$$\begin{cases} S_0 Y_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[S_T \frac{Y_T}{R_T^d} \right], \\ S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^e} \left[\frac{S_T}{R_T^e} \right]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Il en découle la formule de passage suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^e} \left[\frac{S_T}{R_T^e} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\frac{S_T}{R_T^e} \frac{Y_T}{Y_0} \frac{R_T^e}{R_T^d} \right].$$

Posons à présent le processus $(\eta)_{t \geq 0}$:

$$\eta_t = \frac{Y_t}{Y_0} \frac{R_t^e}{R_t^d}.$$

La valeur $Y_t \frac{R_t^e}{R_t^d}$ correspond à l'actif en euros R_t^e exprimé en dollars à l'instant t et actualisé au taux dollars. $(\eta)_{t \geq 0}$ est donc une martingale sous \mathbb{Q}^d . La multiplication par la constante déterministe $\frac{1}{Y_0}$ ne change rien à cet état de fait. Nous appliquons la formule d'Itô à ce processus.

$$\begin{aligned} d\eta_t &= \frac{\partial \eta_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta_t}{\partial Y_t} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial Y_t^2} d\langle Y \rangle_t, \\ &= \eta_t (r^e - r^d + \mu) dt + \eta_t \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Comme $(\eta)_{t \geq 0}$ est une martingale sous \mathbb{Q}^d , son drift sous cette mesure est nécessairement nul. En l'occurrence, nous obtenons le résultat suivant :

$$\mu = r^d - r^e. \quad (2.4)$$

Le résultat [2.4](#) est interprétable via un parallèle avec les actions. En abandonnant les notations un court instant, considérons un actif qui, sous une mesure risque neutre \mathbb{Q} , suit la dynamique suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

avec $(B)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous \mathbb{Q} . Or, en univers risque neutre, l'espérance de rendement doit être égale au taux sans risque, noté r . Si l'actif ne verse aucun dividende, l'espérance de rendement à l'instant t , noté $\frac{dX_t}{X_t}$, est égale à μ . Nous obtenons immédiatement $\mu = r$.

Posons maintenant l'hypothèse que l'actif verse un dividende au taux continu q . Sur un intervalle de temps $[t, t + dt]$, le flux de dividendes sera égal à $qX_t dt$. La rentabilité totale, notée G_t , de l'investissement pour l'acheteur de cet actif sur la période $[t, t + dt]$ résultera du gain en capital dX_t et du dividende $qX_t dt$. Nous écrivons donc la rentabilité instantanée de ce produit :

$$\begin{aligned} dG_t &= \frac{dX_t + qX_t dt}{X_t}, \\ &= \frac{dX_t}{X_t} + q dt, \\ &= (\mu + q) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

L'espérance de rentabilité est ici égale à $(\mu + q)$. Comme nous sommes sous la mesure risque neutre \mathbb{Q} , nous avons directement $\mu + q = r$, et finalement :

$$\mu = r - q.$$

Dans le cadre de notre étude, le rendement intrinsèque du taux de change EUR/USD est égal à $(r^d - r^e)$ sous la mesure \mathbb{Q}^d . Le taux de change se comporte comme une action cotée en dollars payant un dividende continu au taux sans risque en euros. Ce phénomène est décrit dans [Hull \(2007\)](#).

2.1.2 Formule de passage de \mathbb{Q}^d à \mathbb{Q}^e

Notre étude s'articule autour d'un produit adossé à un indice en dollars dont les coupons dépendent des performances d'un indice en euros. Il est fondamental de pouvoir passer de la mesure risque-neutre associée au dollar à celle associée à l'euro et vice-versa. En effet, lorsque nous simulerons les différents processus, il est important de les exprimer dans le même univers.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la définition de cette mesure \mathbb{Q}^e et à la transformation de la dynamique du taux de change lorsqu'on l'exprime sous la mesure \mathbb{Q}^e .

Le changement de mesure de probabilité que nous souhaitons effectuer nécessite l'introduction du théorème de Girsanov, dont voici une première version adaptée de [Girsanov \(1960\)](#). Cette version du théorème est donnée dans le cadre de Black & Scholes. Nous introduirons par la suite une version plus générale.

Théorème 1 ([Girsanov \(1960\)](#)). *Considérons un espace probabilisé $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$. Soit $\lambda = \{\lambda_t : t \in [0, T]\}$ un processus \mathcal{F}_t -mesurable tel que :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Il existe une mesure \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \lambda_t dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_t^2 dt \right),$$

et le processus $W^{\mathbb{Q}} = \left\{ W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \lambda_s ds : t \in [0, T] \right\}$ est un \mathbb{Q} -mouvement brownien.

Les équations [\(2.3\)](#) et [\(2.4\)](#) nous permettent d'écrire :

$$d\eta_t = \sigma \eta_t dW_t.$$

En appliquant la formule d'Itô au processus $(\ln(\eta))_{t \geq 0}$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} d \ln(\eta_t) &= \frac{\partial \ln(\eta_t)}{\partial \eta_t} d\eta_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln(\eta_t)}{\partial \eta_t^2} d\langle \eta \rangle_t, \\ &= \sigma dW_t - \frac{\sigma^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Puis à tout instant t :

$$\eta_t = \exp \left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right).$$

Par application du théorème de Girsanov, nous définissons la mesure risque neutre associée à l'euro :

$$\frac{d\mathbb{Q}^e}{d\mathbb{Q}^d} = \eta_t,$$

où $\lambda_t = -\sigma$ dans le Théorème de Girsanov. Ainsi, nous savons que $\hat{W} = \{W_t - \sigma t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^e .

Dans le reste de ce mémoire, lorsqu'une lettre désignera un mouvement brownien sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^d , cette même lettre surmontée d'un « ^ » désignera un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^e .

2.1.3 Dynamique du taux de change sous la mesure \mathbb{Q}^e

En considérant les équations (2.1) et (2.4), nous pouvons écrire sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^d :

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sigma dW_t, \\ &= Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sigma d(\hat{W}_t + \sigma t). \end{aligned}$$

Finalement, sous la mesure \mathbb{Q}^e :

$$dY_t = Y_t(r^d - r^e + \sigma^2)dt + Y_t\sigma d\hat{W}_t, \quad (2.5)$$

avec $(\hat{W})_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^e .

Le drift est augmenté de σ^2 lors du passage de la mesure risque-neutre USD à la mesure risque-neutre EUR, comme le montre l'équation (2.5).

Le principal atout du modèle de Black & Scholes est sa facilité de mise en oeuvre. Cet avantage est malheureusement largement contrebalancé par l'incapacité du modèle à reproduire la nappe de volatilité. Pour cette raison, nous lui préférons un modèle à volatilité stochastique, plus à même de répliquer la nappe des prix des options observées : le modèle de Heston.

Les différents résultats théoriques que nous venons d'exposer ne sont cependant pas inutiles : trouvés dans un cadre illustratif à visée pédagogique, ils nous serviront de fil conducteur pour valider les résultats théoriques que nous trouverons lors de notre étude du modèle de Heston. En effet, les grands principes que nous venons de présenter dans le cadre de la modélisation du taux de change EUR/USD par le modèle de Black & Scholes sont applicables à des modèles plus complexes, à quelques subtilités près.

2.2 Modèle de Heston

L'étude du modèle de Black & Scholes adapté à notre problématique a mis en lumière l'enjeu de cette étude et ce qui constituera la valeur ajoutée de ce mémoire : la détermination de la dynamique d'un processus (en l'occurrence le taux de change, le CAC 40 et le S&P 500) dans un univers risque neutre associé à une devise, connaissant sa dynamique dans l'univers risque neutre associé à l'autre devise.

Le modèle de Black & Scholes pose une hypothèse très forte : la volatilité du processus est constante dans le temps. Cela nous impose de choisir une unique valeur de volatilité pour la projection d'un processus à horizon neuf ans. Nous le verrons, la surface de volatilité implicite d'un sous-jacent est rarement plate, pourtant nous sommes contraints de sélectionner un unique point de cette nappe pour réaliser les projections. Dès lors, la manière de fixer cette volatilité est arbitraire et le résultat obtenu dans le cadre d'une valorisation par Monte-Carlo peut facilement être mis en doute.

Dans le [chapitre 4](#), nous reviendrons brièvement au modèle de Black & Scholes pour illustrer les conséquences de ces inconvénients. Nous en profiterons pour introduire les grands principes de la calibration et de la projection risque-neutre que nous utiliserons également dans le cadre du modèle de Heston.

Le modèle de [Heston \(1993\)](#) apporte une solution à ce problème en faisant suivre à la variance un processus stochastique. Cela permet de reproduire les déformations de la surface de volatilité et ainsi de réaliser une projection fidèle aux anticipations du marché. Pour cette raison, nous sélectionnons le modèle de Heston. Le processus de variance, carré de la volatilité, suit alors un modèle CIR, du nom de [Cox, Ingersoll, et Ross \(1985\)](#).

Sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^d , les dynamiques du taux EUR/USD et de sa variance s'écrivent :

$$\begin{cases} dY_t = Y_t \mu dt + Y_t \sqrt{\nu_t} dW_t, \\ d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t) dt + \varepsilon \sqrt{\nu_t} dU_t, \end{cases}$$

où $(W)_{t \geq 0}$ et $(U)_{t \geq 0}$ sont deux mouvements browniens sous \mathbb{Q}^d présentant une corrélation $\rho \in [-1, 1]$. Autrement dit :

$$d\langle W, U \rangle_t = \rho dt.$$

Nous procédons de la même manière que sous le modèle de Black & Scholes pour déterminer le drift du taux de change sous la mesure \mathbb{Q}^d . En reprenant les notations de la section [2.1](#) et en repartant du système d'équations [\(2.2\)](#), nous définissons le processus $(\eta)_{t \geq 0}$:

$$\eta_t = \frac{Y_t R_t^e}{Y_0 R_t^d},$$

auquel on applique la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d\eta_t &= \frac{\partial \eta_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta_t}{\partial Y_t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial Y_t^2} d\langle Y \rangle_t, \\ &= \eta_t (r^e - r^d + \mu) dt + \eta_t \sqrt{\nu_t} dW_t. \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que dans le modèle de Black & Scholes, nous savons que le processus $(\eta)_{t \geq 0}$ est une martingale sous la mesure \mathbb{Q}^d . Le drift de ce processus est donc nul et nous retrouvons comme précédemment :

$$\mu = r^d - r^e. \tag{2.6}$$

Passons maintenant à ce qui fait la différence entre le modèle de Heston et celui de Black & Scholes, la volatilité stochastique du processus.

2.2.1 Modèle de Cox Ingersoll Ross

La dynamique de la variance ν_t est un modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), de forme générale :

$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \varepsilon\sqrt{\nu_t}dU_t.$$

Le modèle CIR est utilisé en finance, notamment dans le cadre de la modélisation des taux courts. Il dérive directement du modèle de Vasicek mais, contrairement à ce dernier, n'autorise pas le processus à prendre des valeurs négatives. Ces deux modèles présentent un phénomène de retour à la moyenne (*mean reversion* en anglais). Cela signifie qu'à long terme, le processus suivant un modèle CIR se concentrera en moyenne autour d'une valeur déterminée lors de la calibration.

Il est possible d'interpréter les différents paramètres du modèle CIR comme suit :

- θ : Moyenne du processus ν à long terme,
- κ : Force de rappel vers la moyenne à long terme,
- ε : Racine carrée de la variance du processus.

Afin de mieux visualiser les rôles de ces différents paramètres, nous allons exprimer le processus $(\nu)_{t \geq 0}$ sous une autre forme, comme suggéré par [Jeanblanc, Yor, et Chesney \(2009\)](#). Posons la fonction $f(t, x) = x \exp(\kappa t)$ et appliquons lui la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} df(t, \nu_t) &= \frac{\partial f(t, \nu_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, \nu_t)}{\partial \nu_t} d\nu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, \nu_t)}{\partial \nu_t^2} d\langle \nu \rangle_t, \\ &= \kappa \theta \exp(\kappa t) dt + \varepsilon \exp(\kappa t) \sqrt{\nu_t} dU_t. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t , nous obtenons :

$$f(t, \nu_t) = \nu_0 + \theta(\exp(\kappa t) - 1) + \varepsilon \int_0^t \exp(\kappa s) \sqrt{\nu_s} dU_s.$$

Finalement, nous en déduisons une forme fermée de ν_t

$$\nu_t = \theta + (\nu_0 - \theta) \exp(-\kappa t) + \varepsilon \int_0^t \exp(-\kappa(t-s)) \sqrt{\nu_s} dU_s. \quad (2.7)$$

A partir de cette forme fermée, nous sommes en mesure de déterminer l'espérance et la variance de ν_t à tout instant t .

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d}[\nu_t] = \theta + (\nu_0 - \theta) \exp(-\kappa t),$$

donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d}[\nu_0] = \nu_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d}[\nu_t] = \theta.$$

Sous cette forme, nous voyons que le processus ν va s'éloigner de sa valeur initiale ν_0 pour se concentrer en moyenne autour de θ avec une vitesse exponentielle de paramètre κ . Plus κ sera élevé, plus le processus convergera vite vers sa moyenne à long terme θ .

En ce qui concerne la variance du processus CIR, nous écrivons :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{Q}^d}(\nu_t) &= \varepsilon^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\int_0^t \exp(-2\kappa(t-s)) \nu_s ds \right], \\ &= \varepsilon^2 \left(\int_0^t \exp(-2\kappa(t-s)) \theta ds + \int_0^t (\nu_0 - \theta) \exp(\kappa(s-2t)) ds \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\varepsilon \int_0^t \exp(-2\kappa(t-s)) \left(\int_0^s \exp(-\kappa(s-u)) \sqrt{\nu_u} dU_u \right) ds \right], \\ &= \frac{\varepsilon^2 \theta}{2\kappa} + \frac{\varepsilon^2 (\nu_0 - \theta)}{\kappa} \exp(-\kappa t) + \frac{\varepsilon^2 (\theta - 2\nu_0)}{2\kappa} \exp(-2\kappa t). \end{aligned}$$

Une fois les paramètres θ et κ fixés, la valeur de ε permet de déterminer entièrement la variance (et donc la volatilité) asymptotique du processus ν .

L'un des avantages de ce modèle est qu'il permet de contrôler le processus afin qu'il reste positif à tout instant t . Pour cela, il nous faut respecter la condition de Feller, évoquée dans les travaux de [Cox et al. \(1985\)](#) et dont nous trouverons une preuve dans [Jeanblanc, Yor, et Chesney \(2009\)](#) :

Lemme 1 (Condition de Feller). *Si la condition $2 \frac{\theta \kappa}{\varepsilon^2} \geq 1$ est vérifiée, alors le processus $(\nu)_{t \geq 0}$ restera strictement positif.*

La condition de Feller est un résultat théorique, obtenu en considérant un processus continu. Lorsque nous simulerons le processus $(\nu)_{t \geq 0}$, le temps sera discrétisé. Ceci nous amènera à des situations dans lesquelles la variance ν_t sera négative alors que la condition de Feller sera respectée. De plus, comme expliqué par [Andersen \(2006\)](#), il est rare que cette condition soit vérifiée. Nous devons alors veiller à contrôler les valeurs obtenues afin de conserver un cadre cohérent. Nous reviendrons ultérieurement sur la gestion de cette particularité lorsque nous implémenterons ce processus.

2.2.2 Formule de passage de \mathbb{Q}^d à \mathbb{Q}^e

Nous souhaitons à présent, tout comme dans le modèle de Black & Scholes, établir la mesure de probabilité risque neutre associée à l'euro ainsi que la dynamique du taux de change sous cette mesure, dans le cadre du modèle de Heston.

A partir du résultat [\(2.6\)](#), nous pouvons écrire la dynamique de $(\eta)_{t \geq 0}$ sous la mesure \mathbb{Q}^d .

$$d\eta_t = \eta_t \sqrt{\nu_t} dW_t.$$

Ainsi, par la formule d'Itô :

$$d(\ln(\eta_t)) = \sqrt{\nu_t} dW_t - \frac{1}{2} \nu_t dt.$$

Nous intégrons ce résultat entre 0 et t :

$$\ln(\eta_t) = \int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \nu_s ds.$$

Et enfin, nous arrivons à l'expression de η à tout instant t :

$$\eta_t = \exp \left(\int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \nu_s ds \right). \quad (2.8)$$

En appliquant le théorème de Girsanov, nous pouvons définir \mathbb{Q}^e la mesure de probabilité risque neutre associée à l'euro :

$$\frac{d\mathbb{Q}^e}{d\mathbb{Q}^d} = \eta_t$$

et $(\hat{W})_{t \geq 0} = \left\{ W_t - \int_0^t \sqrt{\nu_s} ds : t \geq 0 \right\}$ est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^e .

2.2.3 Dynamique du taux de change sous la mesure \mathbb{Q}^e

Nous avons donc, sous la mesure \mathbb{Q}^e :

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t \sqrt{\nu_t} d \left(\hat{W}_t + \int_0^t \sqrt{\nu_s} ds \right) \\ &= Y_t(r^d - r^e + \nu_t)dt + Y_t \sqrt{\nu_t} d\hat{W}_t \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tout comme dans le cadre de Black & Scholes, le drift du taux de change sous la mesure \mathbb{Q}^e est réhaussé de la variance du processus par rapport au drift sous la mesure \mathbb{Q}^d .

2.2.4 Expression de la dynamique d'un actif en euros sous \mathbb{Q}^d

Notre objectif est d'évaluer un produit dont le déclenchement des coupons et leur montant dépendent d'indices exprimés dans deux devises distinctes. Nous souhaitons donc pouvoir projeter la valeur d'un actif, exprimée dans une devise, sous la probabilité risque neutre associée à une autre devise.

Dans notre cas, connaissant la dynamique d'un actif en euros sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q}^e , nous allons exprimer sa dynamique sous la mesure \mathbb{Q}^d tout en conservant une expression en euros.

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Heston que nous avons défini précédemment. Considérons deux fonctions réelles α et β et un actif dont le prix en euros S_t^e à l'instant t suit la dynamique suivante sous la mesure \mathbb{Q}^e :

$$dS_t^e = \alpha(t, S_t^e)dt + \beta(t, S_t^e)d\hat{V}_t,$$

avec $(\hat{V})_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^e . Sous cette mesure, nous avons montré que le taux de change $(Y)_{t \geq 0}$ suit la dynamique :

$$dY_t = Y_t(r^d - r^e + \nu_t)dt + Y_t\sqrt{\nu_t}d\hat{W}_t.$$

Supposons que les mouvements browniens $(\hat{V})_{t \geq 0}$ et $(\hat{W})_{t \geq 0}$ sont corrélés avec un coefficient $\tilde{\rho} \in [-1, 1]$:

$$d\langle \hat{V}, \hat{W} \rangle_t = \tilde{\rho}dt. \quad (2.10)$$

Remarque : Le drift du processus $(S^e)_{t \geq 0}$ sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^e s'écrit nécessairement $\alpha(t, S_t^e) = S_t^e r^e$, dans la mesure où l'actif ne paye pas de dividende. En effet, si l'on considère le facteur de capitalisation $R_t^e = \exp(r^e t)$ et deux fonctions réelles α et β telles que :

$$dS_t^e = \alpha(t, S_t^e)dt + \beta(t, S_t^e)d\hat{V}_t,$$

alors nous définissons le processus $(\tilde{S}^e)_{t \geq 0} = \left\{ \frac{S_t^e}{R_t^e} : t \geq 0 \right\}$ représentant la valeur actualisée de l'actif S^e au taux sans risque en euros. Donc en appliquant la formule d'Itô à ce processus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^e &= \frac{\partial \tilde{S}_t^e}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{S}_t^e}{\partial S_t^e} dS_t^e + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}_t^e}{\partial S_t^e{}^2} d\langle S^e \rangle_t, \\ &= \frac{\alpha(t, S_t^e)}{R_t^e} dt + \frac{\beta(t, S_t^e)}{R_t^e} d\hat{V}_t - \frac{r^e S_t^e}{R_t^e} dt, \\ &= \frac{1}{R_t^e} (\alpha(t, S_t^e) - r^e S_t^e) dt + \frac{\beta(t, S_t^e)}{R_t^e} d\hat{V}_t. \end{aligned}$$

Or, sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^e telle que nous l'avons définie, $(\tilde{S}^e)_{t \geq 0}$ est une martingale. Le drift de ce processus est donc nul, ce qui implique nécessairement

$$\alpha(t, S_t^e) = r^e S_t^e.$$

Dans le cas où l'actif S^e verse une dividende au taux continu q , par un raisonnement analogue à celui suivi dans la partie [2.1.3](#), nous obtiendrions le résultat suivant :

$$\alpha(t, S_t^e) = S_t^e(r_t^e - q).$$

□

Dans le but d'établir la dynamique du prix de l'actif S^e sous la mesure \mathbb{Q}^d , nous aurons besoin d'une nouvelle formulation, plus générale, du théorème de Girsanov. Plus de détails sont disponibles dans [Brigo et Mercurio \(2006\)](#).

Théorème 2 (Girsanov). Soit $(X)_{t \geq 0}$ une martingale locale sous \mathbb{P} continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$. On définit Z , l'exponentielle stochastique de X , comme suit :

$$Z_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right).$$

Le processus $(Z)_{t \geq 0}$ est alors une martingale locale strictement positive et une nouvelle mesure \mathbb{Q} , équivalente à la mesure \mathbb{P} , peut être définie par sa densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t.$$

De plus, si $(A^{\mathbb{P}})_{t \geq 0}$ est une martingale locale sous la mesure \mathbb{P} , alors le processus $(A^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0} = \{A_t^{\mathbb{P}} - \langle A^{\mathbb{P}}, X \rangle_t : t \geq 0\}$ est une martingale locale sous \mathbb{Q} .

De cette reformulation, découle le corollaire suivant :

Corollaire 1. Si $(X)_{t \geq 0}$ est un processus continu et $(W^{\mathbb{P}})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{P} , alors le processus $(W^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0} = \{W_t^{\mathbb{P}} - \langle W^{\mathbb{P}}, X \rangle_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q} .

Nous avons montré dans la partie [2.2.2](#) que

$$\frac{d\mathbb{Q}^e}{d\mathbb{Q}^d} = \exp \left(\int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \nu_s ds \right)$$

et comme W est un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^d , en considérant $(X)_{t \geq 0} = \left\{ \int_0^t \sqrt{\nu_s} dW_s : t \geq 0 \right\}$ dans la deuxième version du théorème de Girsanov, nous posons $(\hat{W})_{t \geq 0}$ le mouvement brownien sous la mesure \mathbb{Q}^e défini par :

$$\begin{aligned} \hat{W}_t &= W_t - \langle W, X \rangle_t, \\ &= W_t - \int_0^t \sqrt{\nu_s} ds. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien sûr la même définition de $(\hat{W})_{t \geq 0}$ que dans la partie [2.2.2](#) de ce mémoire.

Grâce à cette reformulation du théorème de Girsanov, $(\hat{V})_{t \geq 0}$ étant un mouvement brownien sous \mathbb{Q}^e , nous savons qu'il existe $(V)_{t \geq 0}$, mouvement brownien sous \mathbb{Q}^d tel que :

$$\hat{V}_t = V_t - \langle V, \int_0^\cdot \sqrt{\nu_s} dW_s \rangle_t.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
V_t &= \hat{V}_t + \left\langle V, \int_0^\cdot \sqrt{\nu_s} d\hat{W}_s + \int_0^\cdot \nu_s ds \right\rangle_t, \\
&= \hat{V}_t + \left\langle \hat{V} + \left\langle V, \int_0^\cdot \sqrt{\nu_s} dW_s \right\rangle_t, \int_0^\cdot \sqrt{\nu_s} d\hat{W}_s \right\rangle_t, \\
&= \hat{V}_t + \left\langle \hat{V}, \int_0^\cdot \sqrt{\nu_s} d\hat{W}_s \right\rangle_t, \\
&= \hat{V}_t + \tilde{\rho} \int_0^t \sqrt{\nu_s} ds.
\end{aligned}$$

Finalement, en reprenant le processus $(S^e)_{t \geq 0}$, nous pouvons écrire sa dynamique sous la mesure \mathbb{Q}^d :

$$\begin{aligned}
dS_t^e &= S_t^e r^e dt + \beta(t, S_t^e) d\hat{V}_t, \\
&= S_t^e r^e dt + \beta(t, S_t^e) (dV_t - \tilde{\rho} \sqrt{\nu_t} dt), \\
&= [S_t^e r^e - \tilde{\rho} \sqrt{\nu_t} \beta(t, S_t^e)] dt + \beta(t, S_t^e) dV_t.
\end{aligned}$$

Dans le cas classique où $\beta(t, S_t^e) = S_t^e \sigma_t$, nous observons alors la dynamique suivante :

$$dS_t^e = S_t^e (r^e - \tilde{\rho} \sqrt{\nu_t} \sigma_t) dt + S_t^e \sigma_t dV_t.$$

Nous observons un drift corrigé de la quantité $-\tilde{\rho} \sqrt{\nu_t} \sigma_t$ lors du passage d'une mesure à l'autre. Ce phénomène s'appelle *correction de drift quanto*.

Cette correction du drift est due à la corrélation entre l'actif considéré et le taux de change. En effet, en cas d'indépendance entre ces deux processus ($\tilde{\rho} = 0$), nous observons immédiatement que la dynamique de cet actif reste la même quelle que soit la mesure considérée. La correction quanto peut être interprétée comme une différence de perception de l'évolution de la valeur d'un actif en euros entre les investisseurs européens et américains. L'ajustement du drift reflète la différence d'environnement entre les investisseurs dans les deux devises considérées. Ce phénomène est fondamental dans l'étude du marché FX et s'observe sur d'autres produits comme les quanto CDS (Credit Default Swap), étudiés notamment dans [Imbeault \(2012\)](#).

2.3 Synthèse

Le produit structuré servant de base à ce mémoire présentant de nombreuses complexités, une valorisation par réplication n'a pas été envisagée. Nous faisons alors le choix de réaliser une valorisation par simulations. En particulier, trois processus devront être simulés : le taux de change EUR/USD et deux indices equity : le cours du S&P 500 et celui du CAC 40.

Les deux indices equity ne sont pas directement échangés sur le marché. Cependant, les options d'achat et de vente ayant pour sous-jacent le CAC 40 sont cotées en EUR, tandis que celles portant sur le S&P 500 sont cotées en USD. Nous sommes donc confrontés à deux économies, entre lesquelles la transition se fait via le taux de change. Ce dernier étant lui-même

stochastique, le passage d'une économie à l'autre induit un nouveau risque pour les investisseurs du marché FX possédant l'une ou l'autre des monnaies. La perception du risque sera donc différente pour un investisseur en EUR et un investisseur en USD : il existe un univers risque neutre associé à l'EUR et un autre associé à l'USD, avec leurs mesures de probabilités risque-neutre associées (respectivement \mathbb{Q}^e et \mathbb{Q}^d).

Dès lors, les dynamiques du S&P 500 et du taux de change seront exprimées en premier lieu sous la mesure \mathbb{Q}^d et celle du CAC 40 sous la mesure \mathbb{Q}^e . Cependant, nous allons devoir comparer les performances attendues des deux indices sur chaque trimestre jusqu'à la maturité du produit pour déterminer les taux de coupons. Cette comparaison ne peut se faire que si les deux indices sont projetés dans un univers risque-neutre unique, le choix de cet univers important peu. C'est la raison pour laquelle nous devons, après avoir choisi un modèle pour les dynamiques des trois processus dans leur univers risque-neutre respectif, déterminer leur dynamique sous la mesure de probabilité risque-neutre associée à l'autre devise.

Nous avons détaillé dans un premier temps les calculs dans le cadre du modèle de Black & Scholes à des fins pédagogiques. Dans cette optique, nous implémenterons également ce modèle avant celui de Heston, dans le but d'en pointer les failles et de justifier l'utilisation d'un modèle plus élaboré. Nous savons en effet qu'une volatilité constante ne sera pas adaptée à une projection à aussi long terme. Nous verrons comment le modèle de Heston permet de corriger ce problème par l'introduction d'une volatilité stochastique.

Les équations présentées dans cette synthèse reprennent uniquement le modèle de Heston. Nous pouvons cependant retrouver immédiatement les équations du modèle de Black & Scholes en forçant les processus de variance à rester constants, réduisant ainsi le nombre d'équations.

Plus précisément, nous notons $(Y)_{t \geq 0}$, $(S)_{t \geq 0}$ et $(C)_{t \geq 0}$ les processus respectifs du taux de change, du S&P 500 et du CAC 40. Nous notons également q^C et q^S les taux de dividendes du CAC 40 et du S&P 500. En réalité, ces deux indices ne versent pas de dividende. q^C et q^S correspondent aux taux de dividendes versés par les entreprises les composant, déduits grâce au prix forward sur ces deux indices. Les indices CAC 40 GR (Gross Return) et S&P 500 TR (Total Return) sont appelés indices à dividendes réinvestis. Ils sont censés mieux refléter les performances des indices en supposant que les dividendes versés sont immédiatement réinvestis dans les entreprises composant l'indice. En ce qui concerne les indices que nous utilisons, les dividendes sont supposés perçus.

Sous la mesure de probabilité risque-neutre associée au dollar (\mathbb{Q}^d) :

$$\begin{cases} dY_t = Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sqrt{\nu_t}dW_t, \\ d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \varepsilon\sqrt{\nu_t}dU_t, \\ \rho dt = d\langle U, W \rangle_t, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dS_t = S_t (r^d - q^S) dt + S_t \sqrt{\nu_t^S} dW_t^S, \\ d\nu_t^S = \kappa^S (\theta^S - \nu_t^S) dt + \varepsilon^S \sqrt{\nu_t^S} dU_t^S, \\ \rho^S dt = d\langle U^S, W^S \rangle_t. \end{cases}$$

Sous la mesure de probabilité risque-neutre associée à l'euro (\mathbb{Q}^e) :

$$\begin{cases} dC_t = C_t (r^e - q^C) dt + C_t \sqrt{\nu_t^C} d\hat{W}_t^C, \\ d\nu_t^C = \kappa^C (\theta^C - \nu_t^C) dt + \varepsilon^C \sqrt{\nu_t^C} d\hat{U}_t^C, \\ \rho^C dt = d\langle \hat{U}^C, \hat{W}^C \rangle_t. \end{cases}$$

Ces trois modèles seront dans un premier temps calibrés séparément, dans leur monde respectif. Une fois ces calibrations effectuées, nous serons en mesure de simuler les trois processus dans l'univers risque neutre dans lequel ils sont exprimés ci-dessus, mais également dans l'autre, grâce aux formules de passages que nous avons détaillées précédemment. Il s'ensuit le tableau 2.1 qui récapitule les dynamiques des différents processus dans les deux univers risque-neutres.

	\mathbb{Q}^d	\mathbb{Q}^e
dY_t	$Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sqrt{\nu_t}dW_t$	$Y_t(r^d - r^e + \nu_t)dt + Y_t\sqrt{\nu_t}d\hat{W}_t$
$d\nu_t$	$\kappa(\theta - \nu_t)dt + \varepsilon\sqrt{\nu_t}dU_t$	$[\kappa(\theta - \nu_t) + \rho\varepsilon\nu_t]dt + \varepsilon\sqrt{\nu_t}d\hat{U}_t$
dS_t	$S_t(r^d - q^S)dt + S_t\sqrt{\nu_t^S}dW_t^S$	$S_t(r^d - q^S + \tilde{\rho}^S\sqrt{\nu_t^S}\sqrt{\nu_t})dt + S_t\sqrt{\nu_t^S}d\hat{W}_t^S$
$d\nu_t^S$	$\kappa^S(\theta^S - \nu_t^S)dt + \varepsilon^S\sqrt{\nu_t^S}dU_t^S$	$[\kappa^S(\theta^S - \nu_t^S) + \tilde{\rho}^S\varepsilon^S\sqrt{\nu_t^S}\sqrt{\nu_t}]dt + \varepsilon^S\sqrt{\nu_t^S}d\hat{U}_t^S$
dC_t	$C_t(r^e - q^C - \tilde{\rho}^C\sqrt{\nu_t^C}\sqrt{\nu_t})dt + C_t\sqrt{\nu_t^C}dW_t^C$	$C_t(r^e - q^C)dt + C_t\sqrt{\nu_t^C}d\hat{W}_t^C$
$d\nu_t^C$	$[\kappa^C(\theta^C - \nu_t^C) - \tilde{\rho}^C\varepsilon^C\sqrt{\nu_t^C}\sqrt{\nu_t}]dt + \varepsilon^C\sqrt{\nu_t^C}dU_t^C$	$\kappa^C(\theta^C - \nu_t^C)dt + \varepsilon^C\sqrt{\nu_t^C}d\hat{U}_t^C$

$$\begin{aligned} d\langle W, U \rangle_t &= \rho dt & d\langle W^S, U^S \rangle_t &= \rho^S dt & d\langle W^C, U^C \rangle_t &= \rho^C dt \\ d\langle W, W^S \rangle_t &= \tilde{\rho}^S dt & d\langle W, W^C \rangle_t &= \tilde{\rho}^C dt & d\langle W^S, W^C \rangle_t &= \rho^{SC} dt \\ d\langle W, U^S \rangle_t &= \tilde{\rho}^S dt & d\langle W, U^C \rangle_t &= \tilde{\rho}^C dt \end{aligned}$$

TABLE 2.1 – Transposition des dynamiques d'un monde à l'autre

Toutes les corrélations évoquées dans cette partie sont valables quel que soit l'univers risque-neutre considéré. Les paramètres des modèles de Black & Scholes et de Heston s'obtiendront grâce à la calibration que nous détaillerons par la suite. Les corrélations $\tilde{\rho}^S$, $\tilde{\rho}^C$ et ρ^{SC} seront obtenues grâce à l'étude de l'historique des accroissements journaliers des deux indices

et du taux de change.

Les coefficients $\bar{\rho}^C$ et $\bar{\rho}^S$ correspondent aux corrélations respectives des variances du CAC 40 et du S&P 500 avec le taux de change. En pratique, nous ne pourrions pas observer cette corrélation, et le changement d'univers risque-neutre pour la projection des deux variances s'en trouvera affecté. Une solution est de supposer que la corrélation entre la variance des indices et le taux de change est portée entièrement par le processus de l'indice. Ainsi, les coefficients $\bar{\rho}^C$ et $\bar{\rho}^S$ sont supposés nuls, et les processus de variance des deux indices suivent chacun une même dynamique quel que soit l'univers risque-neutre dans lequel on le considère.

Le cadre théorique de notre étude étant posé, penchons-nous à présent sur l'application concrète de cette modélisation. Nous aborderons dans les prochaines pages le fonctionnement des marchés financiers et en particulier le marché des changes, afin de bien comprendre l'environnement dans lequel nous travaillerons et la nature des données auxquelles nous aurons accès.

Chapitre 3

Marché FX et options sur devises

Produits les plus liquides sur le marché des changes, les options sur devises sont naturellement utilisées pour la calibration de modèles de taux de change. Un call sur devise (respectivement un put) donne le droit à son acheteur d'acheter (respectivement de vendre), à maturité T , une quantité fixée de devise étrangère dans sa propre monnaie, à un taux de change K (le prix d'exercice, ou strike).

Dans le cas d'un investisseur en USD achetant un call (respectivement un put) sur un notional de 1€, de maturité T et de strike K , l'investisseur aura la possibilité d'échanger 1€ contre $\$K$. Le payoff en T exprimé en dollars sera alors $[\omega (Y_T - K)]_+$, avec $\omega = +1$ dans le cas d'un call et $\omega = -1$ si l'on considère un put. Ainsi, nous pouvons exprimer V_t la valeur en dollars à tout instant $t \leq T$ d'une telle option :

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} [\exp(-r^d(T-t)) [\omega (Y_T - K)]_+ | \mathcal{F}_t]. \quad (3.1)$$

Nous commençons par montrer que, sous certaines hypothèses, il existe une formule explicite de ce prix, avant de présenter certaines stratégies utilisées en pratique pour le pricing d'options sur devise. Nous présenterons ensuite les particularités du marché des devises par rapport au marché equity, qui constitueront des points d'attention tout au long de notre étude.

3.1 Modèle de Garman-Kohlhagen

Le modèle de cotation d'une option sur devise est une adaptation du modèle de Black & Scholes au marché des changes, développée par [Garman et Kohlhagen \(1983\)](#). Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'on parle bien ici d'un modèle de cotation d'option, à ne pas confondre avec le modèle de diffusion du sous-jacent.

Tout comme dans le modèle de Black & Scholes, nous considérons que les taux d'intérêt en euros et dollars sont constants (respectivement r^e et r^d), de même que la volatilité σ du taux de change EUR/USD.

Ainsi, sous la mesure \mathbb{Q}^d , nous écrivons :

$$dY_t = Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sigma dW_t.$$

Par la formule d'Itô, nous déduisons la forme du processus $(Y)_{t \geq 0}$:

$$Y_t = Y_0 \exp \left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

Dans ce cadre, comme dans le modèle de Black & Scholes, nous disposons d'une formule fermée donnant le prix d'une option sur devise étrangère. Nous considérons dans un premier temps le prix d'un call sur un notional de 1€.

Tout au long de ce mémoire, V_t^C désignera la valeur d'un call, soit V_t avec $\omega = 1$ dans l'équation [3.1](#). A l'inverse, V_t^P indiquera le prix d'un put ($\omega = -1$). Nous écrivons :

$$\begin{aligned} V_t^C &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\exp(-r^d(T-t))(Y_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right], \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\exp(-r^d(T-t)) \left[Y_t \exp \left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma(W_T - W_t) \right) - K \right]_+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Nous utilisons alors le fait que r^d est constant, et que $(W_T - W_t)$ est une variable aléatoire indépendante de \mathcal{F}_t et suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, T-t)$. En posant Φ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite, nous écrivons :

$$\begin{aligned} V_t^C &= \exp(-r^d(T-t)) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} \left[\left[Y_t \exp \left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\Phi \right) - K \right]_+ \right], \\ &= \exp(-r^d(T-t)) \int_{\mathbb{R}} \left[Y_t \exp \left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi \right) - K \right]_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Définissons à présent l'intervalle d'intégration, c'est à dire l'intervalle sur lequel la fonction $\varphi \mapsto (Y_T - K)_+$ est non-nulle :

$$\begin{aligned} &Y_t \exp \left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi \right) - K > 0, \\ \Leftrightarrow \varphi &> -\frac{\ln \left(\frac{Y_t}{K} \right) + \left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ \Leftrightarrow \varphi &> -d_2, \end{aligned}$$

où l'on pose, de manière analogue aux notations du modèle de Black & Scholes sur le marché actions :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \left(\frac{Y_t}{K} \right) + \left(r^d - r^e + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$V_t^C = \exp(-r^d(T-t))Y_t \int_{-d_2}^{\infty} \exp\left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varphi^2}{2}\right) d\varphi \\ - \exp(r^d(T-t))K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varphi^2}{2}\right) d\varphi.$$

Il nous reste alors à calculer les deux intégrales. En ce qui concerne la première :

$$\int_{-d_2}^{\infty} \exp\left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varphi^2}{2}\right) d\varphi \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right) d\varphi, \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\varphi - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right) d\varphi.$$

Nous procédons au changement de variable $\psi = \varphi - \sigma\sqrt{T-t}$ pour en déduire :

$$\int_{-d_2}^{\infty} \exp\left(\left(r^d - r^e - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varphi^2}{2}\right) d\varphi \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right) d\psi, \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \left(1 - \mathcal{N}(-d_2 - \sigma\sqrt{T-t})\right), \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \left(1 - \mathcal{N}(-d_1)\right), \\ = \exp((r^d - r^e)(T-t)) \mathcal{N}(d_1),$$

avec \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour la seconde intégrale, nous obtenons :

$$\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varphi^2}{2}\right) d\varphi = 1 - \mathcal{N}(-d_2), \\ = \mathcal{N}(d_2).$$

Finalement, nous pouvons conclure sur la valeur du call sur devise :

$$V_t^C = Y_t \exp(-r^e(T-t)) \mathcal{N}(d_1) - K \exp(-r^d(T-t)) \mathcal{N}(d_2).$$

Un calcul similaire nous permet de calculer P_t , le prix à l'instant t d'une option de vente sur 1€ pour un investisseur en USD, de maturité T et de strike K , dont le payoff à maturité est $(K - Y_T)_+$:

$$V_t^P = K \exp(-r^d(T-t)) \mathcal{N}(-d_2) - Y_t \exp(-r^e(T-t)) \mathcal{N}(-d_1).$$

Nous obtenons donc une formule générale pour le pricing d'une option sur devise :

$$\begin{aligned}
V_t^{d;pips} &= \omega Y_t \exp(-r^e(T-t)) \mathcal{N}(\omega d_1) - \omega K \exp(-r^d(T-t)) \mathcal{N}(\omega d_2), \\
d_{1,2} &= \frac{\ln\left(\frac{Y_t}{K}\right) + \left(r^d - r^e \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
\omega &= \begin{cases} +1 & \text{si l'option est un call,} \\ -1 & \text{si l'option est un put,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ainsi, nous avons adapté le modèle de cotation de Black & Scholes au pricing d'options FX. Les raisons de la notation $V_t^{d;pips}$ seront expliquées dans la [section 3.3](#).

Dans la suite de ce mémoire, nous nous référerons à ce modèle indifféremment par les appellations *Garman-Kohlhagen* ou *Black & Scholes*

3.2 Butterfly et Risk-Reversal

A partir des options dont nous venons de donner une formule de valorisation, nous pouvons construire différentes stratégies d'investissement. Elles ont pour objectif de se prémunir de divers risques liés aux variations du taux de change. Nous en présenterons deux, qui sont utilisées en pratique pour le pricing d'options : les montages Risk Reversal et Butterfly. Ces stratégies consistent en l'achat et/ou la vente de plusieurs options portant sur le même sous-jacent et de même maturité.

Dans cette section, nous reprenons les notations des travaux de [Orta \(2019\)](#), fondés sur les écrits de [Clark \(2011\)](#) et [Wystup \(2006\)](#).

Un Risk Reversal est une stratégie financière permettant de répliquer quasiment la performance du sous-jacent, ou son inverse, en introduisant un palier de sécurité pour se prémunir de trop grandes variations. Pour approcher la performance du sous-jacent, l'investisseur doit vendre une option de vente et acheter une option d'achat de même maturité et de strikes respectifs K_1 et K_2 , tels que $K_1 \leq K_2$. Pour approcher la performance opposée à celle du sous-jacent, il suffit de vendre l'option d'achat et d'acheter l'option de vente. Dans les deux cas, le delta d'une telle stratégie sera très proche respectivement de 1 ou -1. Si les prix d'exercice des deux options sont égaux, alors le delta vaut ± 1 selon la situation.

Nous illustrons sur la figure [3.1](#) le payoff d'un risk-reversal répliquant la performance du taux de change EUR/USD, sans tenir compte des primes des options. Si nous avons choisi deux options de même strike à la monnaie, le graphe du payoff à maturité aurait reflété exactement la performance du sous-jacent à cette date. Ici, en choisissant un call de strike supérieur à celui du put, l'acheteur du risk-reversal peut créer un palier faisant office de marge de sécurité à la baisse du sous-jacent.

Dans le cadre qui nous intéresse, nous faisons appel à un call et un put hors de la monnaie (dont les prix d'exercices sont respectivement supérieurs et inférieurs à la valeur du taux de change). Sur le smile de volatilité à la maturité fixée pour les deux options, nous observons

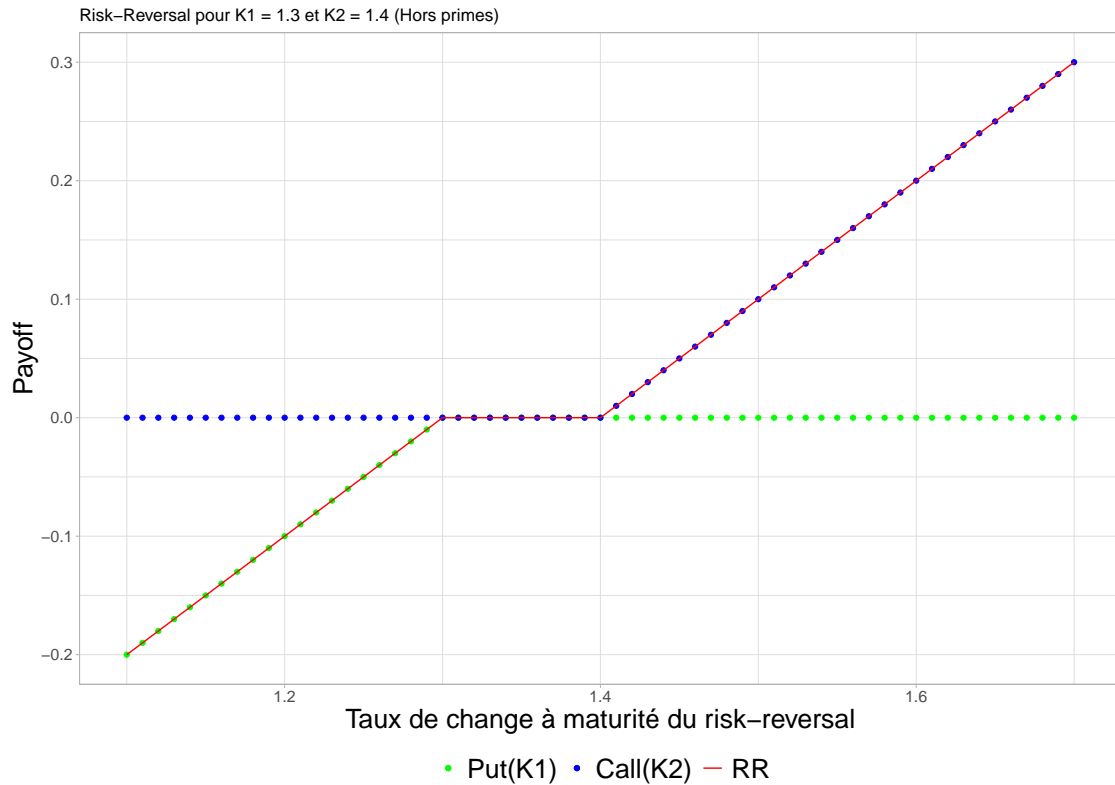


FIGURE 3.1 – Illustration du payoff d'un Risk-Reversal

deux points, un de chaque côté de la volatilité implicite à la monnaie, correspondant aux volatilités implicites de ces deux options en dehors de la monnaie. Par construction, la volatilité du Risk-Reversal correspondra à la différence entre ces deux volatilités, comme illustré sur le graphe 3.3. La volatilité implicite d'un tel produit nous donne donc une indication sur la pente du smile de volatilité.

Pour construire un Butterfly, un investisseur doit acheter une option d'achat et une option de vente de même maturité et de prix d'exercice différents (le strike de l'option d'achat K_3 étant supérieur à celui de l'option de vente K_1). Dans le même temps, il vend une option d'achat et une option de vente de même prix d'exercice K_2 tel que $K_1 < K_2 < K_3$. Cela a pour effet de se protéger de grandes variations du sous-jacent, tant à la hausse qu'à la baisse. Le payoff de ce montage est borné. Il atteint son maximum lorsque la valeur finale du sous-jacent est égale à K_2 . La perte est limitée en cas de variations du cours du sous-jacent en dehors de l'intervalle $[K_1, K_3]$ par ce que l'on appelle des ailes. Ce mécanisme est illustré ci-dessous, toujours sans tenir compte des primes des différentes options.

En faisant intervenir trois strikes différents, nous pouvons positionner un troisième point sur le smile de volatilité, là où nous en avons deux avec le Risk-Reversal. Par construction, la volatilité implicite du Butterfly correspondra à la convexité du smile, nous donnant ainsi une indication sur la déformation de la courbe. Cette nouvelle information est également illustrée sur la figure 3.3.

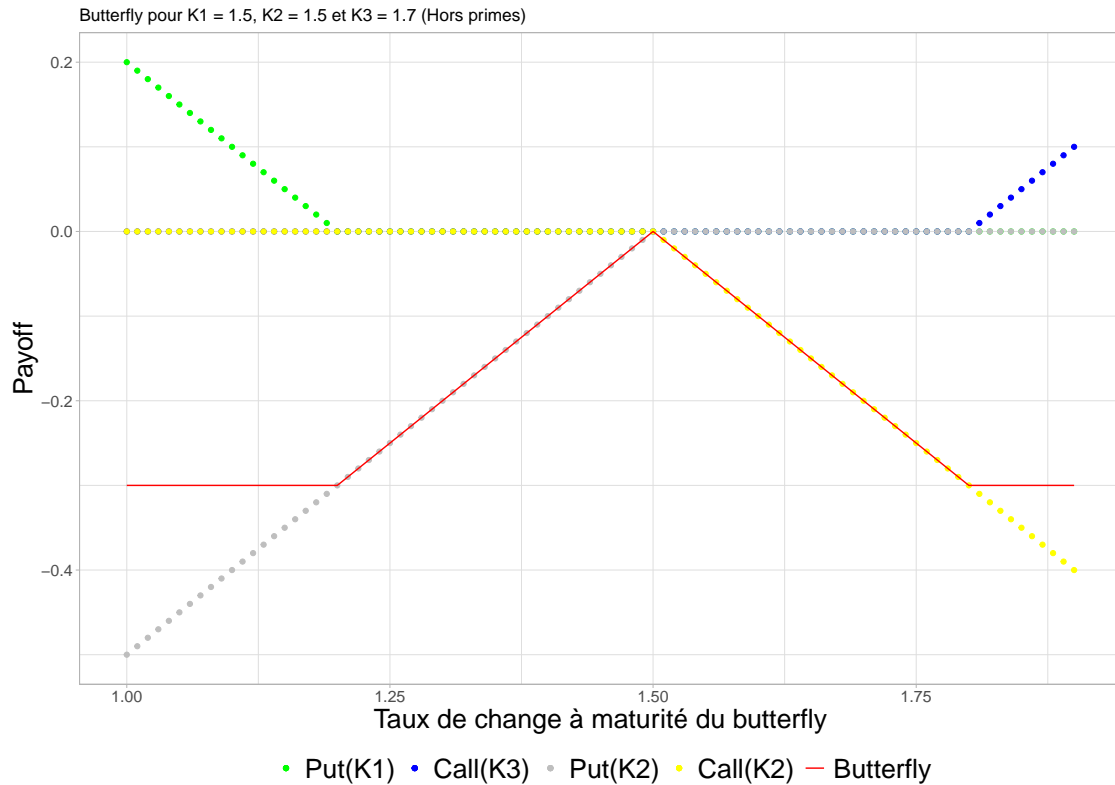


FIGURE 3.2 – Illustration du payoff d'un Butterfly

Les montages Risk-Reversal et Butterfly sont ainsi très utiles car leurs volatilités peuvent être interprétées comme des métriques caractérisant le smile de volatilité (pente et convexité). En jouant sur l'écart entre les strikes en dehors de la monnaie, nous pouvons "sonder" le smile et le décrire quasiment entièrement. Pour cette raison, ils seront utilisés pour la cotation des options.

A partir de stratégies Butterfly et Risk-Reversal dites " $x\Delta$ ", nous pouvons retrouver les volatilités d'options d'achat et de vente hors de la monnaie, dont les deltas seront égaux respectivement à $x\%$ et $-x\%$. Notons BF et RR les volatilités des montages Butterfly et Risk-Reversal. Notons également σ_+ et σ_- les volatilités d'un call hors de la monnaie (par exemple 25Δ) et d'un put hors de la monnaie (par exemple 25Δ). Finalement, ATM désignera la volatilité à la monnaie à la fois du call et du put. Nous avons :

$$BF = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2} - ATM,$$

$$RR = \sigma_+ - \sigma_-.$$

Ce qui nous amène à la conclusion suivante :

$$\sigma_+ = ATM + BF + \frac{1}{2}RR,$$

$$\sigma_- = ATM + BF - \frac{1}{2}RR.$$

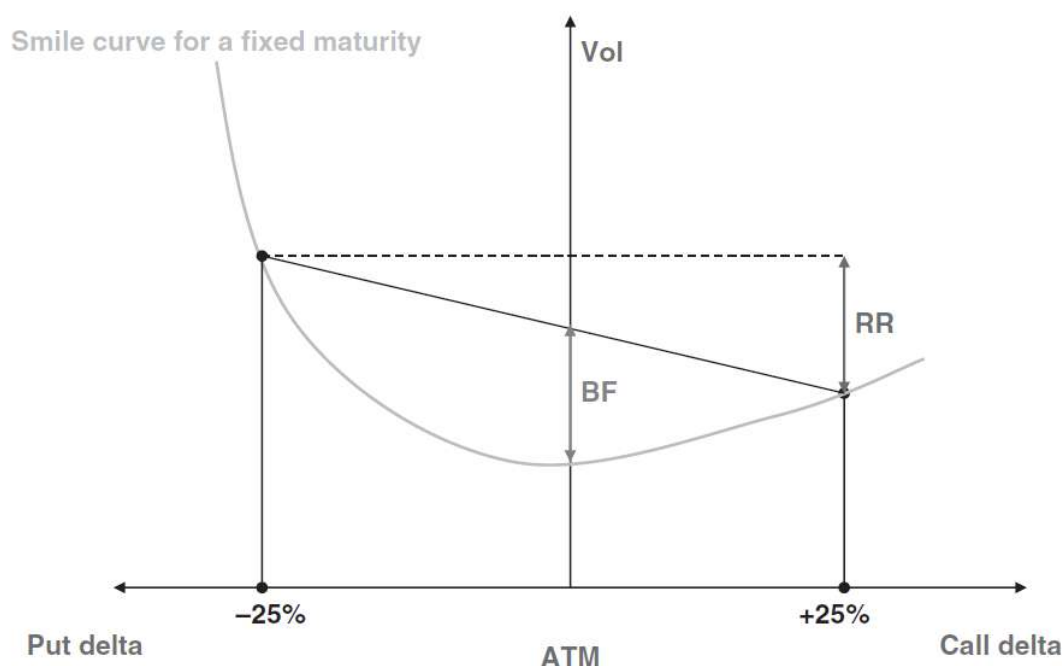


FIGURE 3.3 – Lien entre Butterfly, Risk-Reversal et Smile de volatilité ; tiré de [Wystup \(2006\)](#)

Il est à noter que sur le marché des devises, il existe plusieurs définitions de la notion ATM. Nous notons respectivement $C_t(K, \sigma, T)$ et $P_t(K, \sigma, T)$ les prix en t d'options d'achat et de vente, de strike K et de maturité T . De même, nous notons $\Delta_t(K, \sigma, T, \omega = \pm 1)$ le delta d'un call ou d'un put (selon le signe de ω). Le type de delta sera sélectionné parmi ceux présentés ultérieurement (spot ou forward, ajusté ou non du prix de l'option) selon la situation. Une option sera dite :

ATM spot	ssi $K_{ATM} = S_t$
ATM forward (ATMF)	ssi $K_{ATM} = F_{t,T}$
ATM value neutral	ssi $C_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T) = P_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T)$
ATM Delta Neutral Straddle (DNS)	ssi $\Delta_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T, 1) = -\Delta_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T, -1)$
ATM fifty delta	ssi $\Delta_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T, 1) = 50\%$ et $\Delta_t(K_{ATM}, \sigma_{ATM}, T, -1) = -50\%$

3.3 Options sur devises

Nous présenterons ici les spécificités du marché des devises. Sauf mention contraire, nous adoptons le point de vue d'un investisseur en USD. Cette partie reprend des éléments présentés dans les travaux de [Wystup \(2006\)](#) et [Clark \(2011\)](#), dont une première synthèse a été faite dans le mémoire de [Orta \(2019\)](#).

Le marché des changes se distingue du marché des actions par plusieurs aspects, en particulier concernant la cotation des options.

3.3.1 Plusieurs types de cotations

Nous avons déjà vu que la formule de Garman-Kohlhagen permet de donner le prix en USD d'une option (d'achat ou de vente) portant sur un notionnel de 1€. Nous obtenons une valeur en USD par unité de EUR, ce qui est la manière la plus intuitive de valoriser cette option. En réalité, il est possible de changer de référentiel en ce qui concerne la perception de la prime et/ou du notionnel. Il existe alors plusieurs moyens d'exprimer le prix d'une option sur devise. En fonction de la devise détenue, un investisseur sera intéressé par certaines de ces cotations parmi les quatre existantes :

Nom	Symbole	Unité
Cash USD	d	USD
Cash EUR	e	EUR
% USD	%d	USD par unité de USD
% EUR	%e	EUR par unité de EUR
USD pips	d pips	USD par unité de EUR
EUR pips	e pips	EUR par unité de USD

TABLE 3.1 – Les différentes cotations d'une option FX

L'acronyme *pip* signifie *price interest point* ou *point in percentage*. Sur le marché des changes, un pip désigne la plus petite variation possible d'un cours. Pour la plupart des paires de devises du marché, les taux de change sont mesurés en unités (c'est le cas de la paire EUR/USD : le prix d'une unité de EUR est exprimé en unités de USD). Dans ce cas, un pip correspond à la 4e décimale du cours (soit un centième de centime).

La formule de Garman-Kohlhagen donne le prix en USD (devise de l'investisseur) d'une option pour un notionnel de 1€ (une unité de la devise étrangère). Cela correspond à la cotation *d pips* et le prix est noté $V_t^{d;pips}$. Nous rappelons cette formule dont découleront les autres types de prix :

$$V_t^{d;pips} = \omega Y_t \exp(-r^e(T-t)) \mathcal{N}(\omega d_1) - \omega K \exp(-r^d(T-t)) \mathcal{N}(\omega d_2)$$

Il est ensuite aisé de passer d'une cotation à une autre, d'après le modèle suivant :

$$d; pips \xrightarrow{\times \frac{1}{Y_t}} \%e \xrightarrow{\times \frac{Y_t}{K}} \%d \xrightarrow{\times \frac{1}{Y_t}} e; pips \xrightarrow{\times Y_t K} d; pips$$

Plus précisément, la cotation *d pips* nous donne le prix de l'option en dollars sur un nominal de 1€. Il suffira de multiplier ce prix par le nominal de l'option pricée pour obtenir le prix total de l'option en USD. La valeur en EUR à l'instant t de l'option sur 1€ s'obtient immédiatement grâce au taux de change EUR/USD en t :

$$V_t^{\%e} = \frac{1}{Y_t} V_t^{d;pips}.$$

Pour obtenir le prix $\%d$, en dollars par unité de dollars, nous repartons du prix d pips . Du point de vue de l'investisseur en dollars, une option sur un notional de 1€ équivaut à une option sur un notional $\$K$. Nous en déduisons $V_t^{\%d}$ la valeur en USD par unité de USD de cette option :

$$V_t^{\%d} = \frac{1}{K} V_t^{d;pips}.$$

Finalement, à partir du prix $\%d$, nous déduisons le prix e pips de l'option, exprimé en EUR par unité de USD grâce au taux de change EUR/USD à l'instant t :

$$V_t^{e;pips} = \frac{1}{Y_t} V_t^{\%d}.$$

Nous pouvons finalement obtenir V^d et V^e les prix absolus des options dans les deux devises en fonction du nominal exprimé dans chacune des monnaies et des prix d pips et e pips . En notant respectivement N^e et N^d le nominal exprimé en EUR et USD, nous avons la relation $N^d = KN^e$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} V_t^d &= N^e V_t^{d;pips}, \\ V_t^e &= N^d V_t^{e;pips}. \end{aligned}$$

En réalité, si nous savons désormais calculer le prix d'une option, nous n'avons pas accès immédiatement aux prix des options d'achat et de vente sur les différentes devises, comme c'est également le cas pour les options sur actions. Cependant, comme indiqué par [Tankov \(2015\)](#), alors que le marché equity donne accès à la volatilité implicite des options en fonction du prix d'exercice, ce n'est pas le cas du marché des devises. Sur celui-ci, les acteurs ont accès à plusieurs éléments :

- la volatilité implicite à la monnaie des options ;
- la volatilité implicite des montages Butterfly et Risk Reversal (nous noterons ces volatilités respectivement BF et RR) en fonction de leur delta.

Le delta représente la sensibilité d'un produit dérivé à la variation de la valeur de l'actif sous-jacent. Nous montrerons par la suite qu'il existe une bijection entre le delta d'une option et son prix d'exercice : il est donc possible d'afficher les volatilités implicites des produits énumérés ci-dessus en fonction du delta plutôt que du strike. Cependant, le marché des changes présente, là-encore, certaines spécificités.

3.3.2 Plusieurs types de deltas

Du fait de l'existence de ces multiples cotations, il existe nécessairement plusieurs définitions de deltas de l'option sur devise. Chacun des deltas qui suivent dérive de la formule de pricing de Garman-Kohlhagen [\(3.2\)](#).

Avant toute chose, nous exposons un résultat préliminaire qui va nous servir lors des calculs des différents deltas. En notant n la fonction densité de la loi normale centrée réduite, nous pouvons exprimer $n(\omega d_1)$ en fonction de $n(\omega d_2)$:

$$\begin{aligned}
n(\omega d_1) &= n(\omega d_2) \left(\frac{K}{Y_t} \right)^{\omega^2} \exp(-\omega^2 (r^d - r^e) (T - t)), \\
&= n(\omega d_2) \left(\frac{K}{Y_t} \right) \exp(-(r^d - r^e) (T - t)).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nous commençons par introduire les deltas dits *spot*, calculés à partir de la valeur actuelle des options et du taux de change. Le premier delta que nous allons calculer est le *pips spot delta*, ou delta spot non-ajusté. Il se définit à l'instant t comme la variation de la valeur actuelle du prix d *pips* de l'option par rapport à la variation du cours actuel (*spot*) du sous-jacent (Y_t) :

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{S;pips} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_t^{d;pips}(Y_t + h) - V_t^{d;pips}(Y_t)}{h}, \\
&= \frac{\partial V_t^{d;pips}}{\partial Y_t}, \\
&= \omega \exp(-r^e(T - t)) \left(\mathcal{N}(\omega d_1) + Y_t \frac{\partial \mathcal{N}(\omega d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial Y_t} \right) \\
&\quad - \omega K \exp(-r^d(T - t)) \frac{\partial \mathcal{N}(\omega d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial Y_t}, \\
&= \omega \exp(-r^e(T - t)) \mathcal{N}(\omega d_1) \\
&\quad + \frac{\omega^2}{Y_t \sigma \sqrt{T - t}} (Y_t \exp(-r^e(T - t)) n(\omega d_1) - K \exp(-r^d(T - t)) n(\omega d_2)),
\end{aligned}$$

Et le résultat [3.3](#) permet de conclure :

$$\Delta_t^{S;pips} = \omega \exp(-r^e(T - t)) \mathcal{N}(\omega d_1).$$

A un facteur $\exp(-r^e(T - t))$ près, nous constatons que cette définition du delta correspond à celle du delta d'une option sur le marché *equity* dans le modèle de Black & Scholes.

En terme de couverture, le delta spot non-ajusté correspond à la quantité d'EUR que doit détenir l'investisseur en USD pour couvrir une option sur un notionnel de 1€. Le delta spot est donc exprimé en pourcentage de la monnaie étrangère pour l'investisseur (EUR ici).

Le *percentage spot delta*, ou delta spot ajusté, mesure la sensibilité de la prime exprimée en ‰ aux variations du taux de change spot, lui aussi exprimé en ‰. Nous calculons sa valeur à l'instant t :

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{S\%} &= \frac{\partial V_t^{\%e}}{\frac{\partial Y_t}{Y_t}}, \\
&= Y_t \frac{\partial \left(\frac{V_t^{d;pips}}{Y_t} \right)}{\partial Y_t}, \\
&= Y_t \left(\frac{\Delta_t^{S;pips}}{Y_t} - \frac{V_t^{d;pips}}{Y_t^2} \right).
\end{aligned}$$

Finalement, nous écrivons :

$$\Delta_t^{S\%} = \Delta_t^{S;pips} - V_t^{\%e},$$

Cette quantité correspond au delta spot, ajusté du prix $\%e$ de l'option.

Passons maintenant aux deltas dits *forward*. La particularité de ces deltas est que nous ne considérons pas la valeur actuelle de l'option et du taux de change, mais bien leurs valeurs projetées à maturité de l'option. Nous rappelons que le taux forward $F_{t,T}$ représente le taux de change proposé sur le marché à terme lorsqu'un intervenant s'engage à acheter ou à vendre une devise à un taux de change donné, mais à une date ultérieure T . Nous avons la relation :

$$F_{t,T} = Y_t \exp((r^d - r^e)(T - t)).$$

Le *pips forward delta*, ou delta forward non ajusté, mesure la sensibilité du prix d *pips* de l'option projeté à la date T aux variations du cours à terme du taux de change sous-jacent (forward). Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta_t^{F;pips} &= \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} [V_T^{d;pips}]}{\partial F_{t,T}}, \\ &= \exp(r^d(T - t)) \frac{\partial V_t^{d;pips}}{\partial Y_t} \frac{\partial Y_t}{\partial F_{t,T}}, \\ &= \exp(r^e(T - t)) \Delta_t^{S;pips}, \\ &= \omega \mathcal{N}(\omega d_1) \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant le *percentage forward delta*, ou delta forward ajusté. Il mesure la sensibilité du prix $\%e$ aux variation du taux de change forward à maturité t,T , exprimé lui aussi en $\%e$:

$$\begin{aligned} \Delta_t^{F;\%} &= \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^d} [V_T^{\%e}]}{\partial F_{t,T}} F_{t,T}, \\ &= \exp(r^d(T - t)) \frac{\partial \frac{V_t^{d;pips}}{Y_t}}{\partial \ln(F_{t,T})}, \\ &= \exp(r^e(T - t)) \left(\Delta_t^{S;pips} - V_t^{\%e} \right), \\ &= \omega \frac{K}{F_{t,T}} \mathcal{N}(\omega d_2). \end{aligned}$$

Finalement, nous introduisons le delta dit *simple*. Ce n'est pas une mesure de sensibilité à proprement parler, mais il pourra être utilisé dans une optique de simplification :

$$\Delta_t^{simple} = \omega \mathcal{N}(\omega d),$$

$$\text{avec } d = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Nous récapitulons ces différents résultats ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Delta_t^{S;pips} &= \omega \exp(-r^e(T-t)) \mathcal{N}(\omega d_1) \\ \Delta_t^{S;\%} &= \omega \exp(-r^d(T-t)) \frac{K}{Y_t} \mathcal{N}(\omega d_2) = \Delta_t^{S;pips} - V_t^{\%e} \\ \Delta_t^{F;pips} &= \omega \mathcal{N}(\omega d_1) = \exp(r^e(T-t)) \Delta_t^{S;pips} \\ \Delta_t^{F;\%} &= \omega \frac{K}{F_{t,T}} \mathcal{N}(\omega d_2) = \exp(r^e(T-t)) \left(\Delta_t^{S;pips} - V_t^{\%e} \right) \\ \Delta_t^{simple} &= \omega \mathcal{N}(\omega d)\end{aligned}$$

Au vu de ce que nous venons d'expliquer, nous allons devoir déterminer quel delta considérer. Devons-nous nous baser sur les delta *spot* ou plutôt *forward*? Devons-nous les ajuster de la prime de l'option?

3.3.3 Delta ajusté ou non-ajusté?

Tout d'abord, il nous est possible de donner une interprétation de l'ajustement du delta. Reprenons l'exemple d'une option d'achat sur un notionnel de 1€ du point de vue d'un investisseur en USD. La contrepartie utilise donc la devise EUR. Le prix de cette option doit être exprimé dans l'une ou l'autre de ces monnaies. Notons qu'il existe des conventions sur le marché des changes, présentées sous la forme d'une hiérarchie, concernant la devise à utiliser pour valoriser un produit, selon la paire de devises considérées. Dans notre exemple, pour la paire EUR-USD, les prix seront exprimés en USD.

Le choix d'ajuster ou non le delta dépendra alors uniquement de la devise utilisée par l'investisseur considéré. Du point de vue de l'investisseur en dollars, la prime est exprimée dans sa propre monnaie et ne comporte donc aucun risque. En ce qui concerne la contrepartie, un intervenant en EUR, la prime sera perçue dans une monnaie qui n'est pas la sienne. Cela induit donc un risque de change supplémentaire pour cet intervenant, qui peut choisir de se protéger en ajustant le delta de la valeur de cette prime, exprimée en EUR.

3.3.4 Delta spot ou forward?

Le deuxième choix à opérer concerne l'utilisation de deltas spot ou forward. Une convention historique veut que les deltas forward soient utilisés pour les options de maturité supérieure à un an, tandis que les deltas spot sont privilégiés pour les options de maturités inférieures ou égales à un an. La logique sous-jacente est que les options à courte maturité seront généralement couvertes sur le marché spot, tandis que les options à maturité plus longues seront couvertes grâce à des produits forward.

Cette convention peut être amenée à évoluer en fonction de contextes particuliers. D'après [Clark \(2011\)](#), utiliser exclusivement les deltas forward permet de ne pas faire intervenir de facteur d'actualisation, ce qui pourra être privilégié dans des situations où le marché est peu liquide en produits fondés sur les taux courts, et où les banques ne parviendraient pas à se mettre d'accord sur ces facteurs d'actualisation.

3.3.5 Bijection delta - strike

A la lumière de ces explications, nous sommes désormais en mesure de choisir quel delta utiliser selon le contexte dans lequel nous nous placerons. En considérant un investisseur en USD et une option d'achat sur un notional en EUR, nous utiliserons le prix d pips.

Nous aurons à notre disposition les volatilités implicites de stratégies Butterfly et Risk Reversal en fonction de leur delta. Commençons par montrer que, pour une option donnée, il existe une bijection entre le delta considéré et le prix d'exercice. Si l'on part du delta forward non-ajusté (donc pour une option de maturité longue du point de vue de l'investisseur en USD), nous avons :

$$\Delta_t^{F;pips} = \omega \mathcal{N}(\omega d_1).$$

Donc,

$$d_1 = \omega \mathcal{N}^{-1}\left(\omega \Delta_t^{F;pips}\right).$$

Et par définition de d_1 , nous obtenons :

$$K = Y_t \exp\left(\left(r^d - r^e + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) - \omega \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{N}^{-1}\left(\omega \Delta_t^{F;pips}\right)\right).$$

Par le même raisonnement, si l'on considère une option avec une maturité plus courte (inférieure à un an), nous partons du delta spot non ajusté et nous obtenons :

$$K = Y_t \exp\left(\left(r^d - r^e + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) - \omega \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{N}^{-1}\left(\omega \exp(r^e(T - t)) \Delta_t^{S;pips}\right)\right).$$

Il est essentiel de choisir le delta adapté à chaque situation pour obtenir le prix d'exercice associé correct. En effet, la première étape sera de trouver le strike découlant du delta déterminant les volatilités implicites. Considérant le point de vue d'un investisseur en USD, nous aurons besoin des deux formules d'inversion directes obtenues ci-dessus.

Nous disposons désormais des éléments nécessaires à la compréhension et à l'interprétation des données qui seront à notre disposition sur Bloomberg et qui sont illustrées sur la figure [3.4](#).

Pour chaque maturité, nous observons la volatilité implicite d'options à la monnaie et les volatilités implicites de Risk-Reversals et de Butterflies pour des deltas choisis. Ces informations,

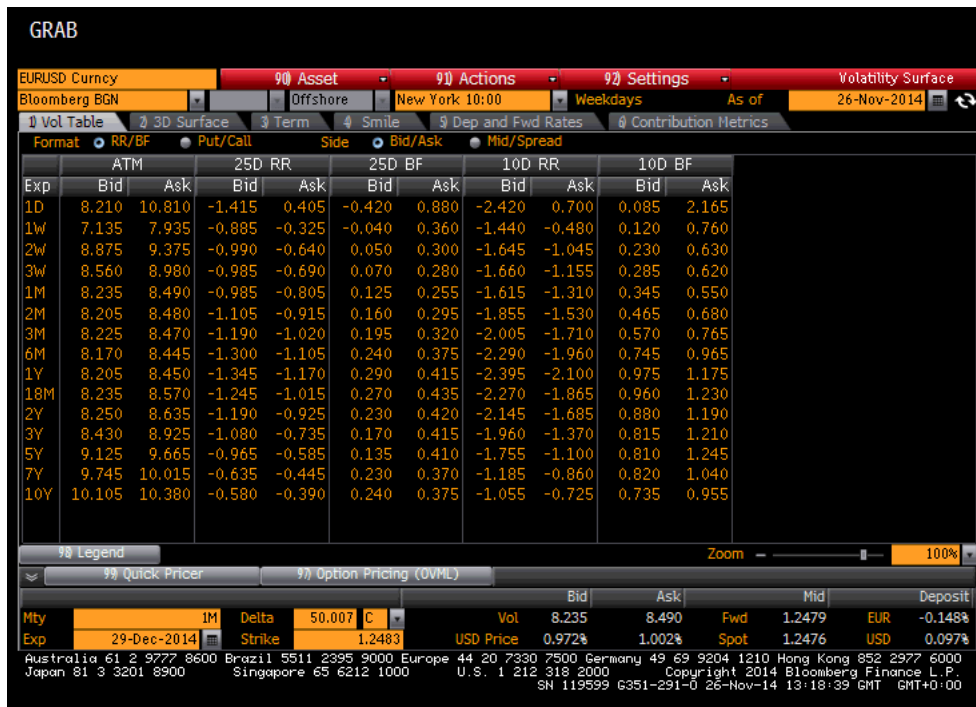


FIGURE 3.4 – Page Bloomberg avec les cotations des options sur taux de change

nous l'avons vu, nous donnent de précieuses indications sur la forme du smile de volatilité. Il est de plus aisé de retrouver l'expression de la nappe de volatilité à laquelle nous sommes habitués sur le marché equity (en fonction de la maturité et du prix d'exercice) grâce à la bijection que nous avons exposée entre le delta et le strike. Lors de notre calibration, nous utiliserons les prix *Mid*, correspondant à la moyenne des prix *Ask* et *Bid*.

Sur le marché equity, la volatilité implicite d'une option est obtenue par inversion de la formule de pricing de Black & Scholes, connaissant le prix de l'option, son strike et sa maturité. En tenant compte de l'intégralité des options disponibles sur le marché, la nappe de volatilité permet de déterminer la volatilité du sous-jacent pour une échéance et un prix d'exercice donnés. Elle reflète le sentiment du marché concernant la probabilité que le sous-jacent soit au dessus ou en dessous du strike à la maturité.

Nous avons exposé dans cette partie le fonctionnement global du marché des changes. Nous savons désormais d'où proviennent les données auxquelles nous aurons accès, quelle interprétation nous pouvons en avoir, et comment nous allons pouvoir les utiliser en pratique.

Chapitre 4

Projection par le modèle de Black & Scholes

Dans la partie précédente, nous avons décrit la nappe de volatilité que nous obtenons sur Bloomberg et les différentes notions nécessaires à une bonne compréhension de cet outil. Nous allons maintenant les utiliser dans le but de calibrer nos différents modèles.

Nous avons établi le cadre théorique de notre étude sur le modèle de Black & Scholes dans un premier temps pour des raisons purement pédagogiques afin de mieux appréhender les résultats dans le modèle de Heston. L'objectif de ce chapitre est de démontrer par l'expérience que le modèle de Black & Scholes n'est pas adapté à la valorisation d'un produit tel que le nôtre en raison de l'hypothèse de volatilité constante qu'il impose et ce quelle que soit la méthode retenue pour fixer la volatilité.

Néanmoins, les principes de calibration et de projection que nous présentons dans ce chapitre seront réutilisés par la suite dans le cadre du modèle de Heston.

Les paramètres intervenant dans la dynamique du taux de change EUR/USD seront évalués grâce à des options sur devise. Pour l'estimation des paramètres des dynamiques des différents indices (CAC 40 et S&P 500), nous nous appuyerons sur des options sur ces indices, cotées respectivement en EUR et en USD. Les deux modèles que nous étudions sont relativement faciles à calibrer, chacun d'eux fournissant une formule fermée pour le prix d'une option européenne.

Indépendamment du modèle choisi, les calibrations décrites ci-dessus se feront respectivement via les dynamiques risque-neutre EUR pour le CAC 40 et risque-neutre USD pour le taux de change et l'indice S&P 500.

Dans un premier temps, nous étudions le cas où les variances des trois processus sont constantes. Il s'agit du modèle de Black & Scholes pour le CAC 40 et le S&P 500 et de son adaptation par [Garman et Kohlhagen \(1983\)](#) pour le taux de change EUR/USD.

Pour rappel, dans leurs univers risque-neutres respectifs, les trois processus à modéliser ont les dynamiques de Black & Scholes suivantes :

$$\begin{aligned}
dY_t &= Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sigma dW_t, \\
dS_t &= S_t(r^d - q^S)dt + S_t\sigma^S dW_t^S, \\
dC_t &= C_t(r^d - q^C)dt + C_t\sigma^C d\hat{W}_t^C,
\end{aligned}$$

Il est donc nécessaire de spécifier les drifts, déterministes, ainsi que de calibrer les volatilités (σ , σ^S et σ^C) de nos processus. Nous commencerons par ces dernières.

4.1 Nappe de volatilité

Nous avons récupéré sur Bloomberg les prix d'options d'achat sur le CAC 40, le S&P 500 et le taux de change EUR/USD pour plusieurs couples (T, K) . Plus précisément, nous avons sélectionné seize maturités comprises entre 48 jours et 9 ans à compter du 31 décembre 2021 afin de couvrir la totalité de la durée de vie du produit. Pour chacune de ces maturités, nous constatons les prix d'options d'achat sur les indices pour cinq prix d'exercice différents et ceux d'options d'achat FX pour six prix d'exercice.

Les strikes observés ne sont pas choisis au hasard : il s'agit, pour les options d'achat sur indice, des strikes à la monnaie (ATM) ainsi que 10% et 30% dans la monnaie (ITM) et hors de la monnaie (OTM). En ce qui concerne les options FX, nous souhaitons avoir une grande précision pour la simulation du taux de change autour des différentes barrières intervenant dans le produit (barrière de coupon et barrière lock-in). Nous avons donc d'abord sélectionné, pour les seize maturités, des options dont les strikes coïncident avec ces barrières (respectivement 1,15 et 1,50). Les autres strikes (1,00 ; 1,10 ; 1,20 ; 1,25) sont choisis pour couvrir une grande partie de la nappe des prix et effectuer une calibration en accord avec des prix d'exercice intermédiaires.

Sur la base de ces différents prix, nous allons pouvoir calibrer la nappe de volatilité implicite. Sur le marché equity, la formule de Black & Scholes pour le prix d'une option d'achat (V_t^C) sur un sous-jacent de valeur X_t à l'instant t est la suivante :

$$V_t^C = X_t \mathcal{N}(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \mathcal{N}(d_2), \quad (4.1)$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

La parité call-put nous permet de déduire le prix du put de mêmes caractéristiques.

Connaissant la valeur d'une option pour un strike et une maturité donnés, ainsi que le taux sans risque pour cette maturité, nous pouvons retrouver la volatilité implicite σ^{imp} permettant de retrouver le prix de l'option par cette formule. Il suffit pour cela d'utiliser un algorithme de minimisation, par exemple de type Newton-Raphson. En appliquant ce procédé à plusieurs options de strike et de maturités différentes, nous reproduisons la nappe de volatilité implicite

du sous-jacent. Les options étant un produit très liquide, il est assez aisé de trouver un nombre suffisant de prix pour reproduire la surface de volatilité. De cette manière, nous pouvons calibrer la volatilité du CAC 40 et du S&P 500.

L'application au marché des changes d'un procédé similaire a été expliquée dans le [chapitre 3](#), en particulier avec la formule de Garman-Kohlhagen.

Grâce aux options dont nous disposons, nous répliquons donc les nappes de volatilité du CAC 40, du S&P 500 et du taux de change EUR/USD et les affichons en [annexe A](#).

Dès lors, nous devons sélectionner une unique volatilité pour chacun des trois processus. Il n'existe pas de solution unique pour le choix des volatilités. Nous allons devoir sélectionner arbitrairement les critères de sélection des paramètres. Nous présentons ici deux méthodologies possibles. La première s'appuie sur les nappes de volatilité que nous avons répliquées, la deuxième sur les volatilités historiques.

4.2 Calibration du modèle de Black & Scholes

4.2.1 A l'aide des données implicites

Cette première méthode est basée sur les nappes de volatilités (ou les nappes de prix des options, de manière équivalente).

Comme nous l'avons expliqué, la volatilité implicite est déterminée pour un strike et une maturité donnés. Il faut garder à l'esprit que les nappes sont déterminées sur la base d'options d'achat observées : la volatilité implicite reflète la probabilité estimée par le marché que la valeur du sous-jacent soit au dessus d'une barre (le prix d'exercice de l'option) à la maturité. Sur les trois surfaces de volatilité que nous avons répliquées, nous constatons des déformations importantes dans les régions des maturités courtes (inférieures à deux ans). Notre produit ayant une durée de vie de neuf ans, nous avons besoin d'une volatilité long terme et devons donc nous concentrer sur les volatilités obtenues pour des maturités plus longues.

Or, notre problématique liée au taux de change dans le cadre de notre produit est du même ordre que dans le cadre d'une option FX : à chaque date d'évaluation, nous souhaitons estimer sa probabilité d'être en dessous de la barrière de coupon (1,5) et celle d'être en dessous de la barrière lock-in (1,15). Considérons pour commencer uniquement la barrière de coupon. A chaque date de détachement de coupon, plus la volatilité sélectionnée pour la dynamique du taux de change sera proche de la volatilité implicite pour cette maturité et un strike de 1,5, plus nous estimerons correctement la probabilité qu'un coupon soit versé. Or, nous souhaitons être précis sur les probabilités de dépassement de cette barre de 1,5 à chaque trimestre sur une période de neuf ans. De plus, nous voulons également être le plus précis possible sur les probabilités d'être en dessous de la barrière lock-in à chaque trimestre après une période de franchise de trois ans. Il nous faudra trouver un compromis sur la précision entre ces deux barrières, ainsi que sur la maturité à considérer.

En ce qui concerne les valeurs de σ^C et σ^S , aucune barrière ne rentre en considération dans les projections des processus des deux indices equity. Cependant, la volatilité joue là aussi un rôle capital, le montant des coupons dépendant du rapport des performances relatives des deux indices. Une forte volatilité produira de fortes variations de l'indice et impactera directement le taux de coupon versé, même si celui-ci est borné à 4%.

La calibration consiste alors à chercher le paramètre de volatilité régissant le modèle qui minimise l'écart entre les prix des options sur le sous-jacent observés sur le marché (ou extrapolés par Bloomberg pour les maturités supérieures à deux ans) que nous noterons V_0^{obs} et les prix théoriques obtenus par la formule fermée de Black & Scholes, désignés par la notation V_0^{th} .

Les équations que nous présentons ici sont appliquées à la recherche de paramètre de volatilité optimale du taux de change. Le principe est immédiatement transposable aux calibrations des volatilités du CAC 40 et du S&P 500 en considérant les options adaptées. En utilisant les formules de la partie précédente, nous définissons la fonction d'erreur quadratique pour tout réel σ :

$$\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{(T,K,\omega) \in \Pi} (V_0^{th}(Y_0, T, K, \omega, \sigma) - V_0^{obs}(Y_0, T, K, \omega))^2, \quad (4.2)$$

où Π désigne l'ensemble des triplets (T, K, ω) décrivant les options dont nous disposons pour la calibration, indiquant la maturité, le strike et le type d'option (call ou put). Connaissant la parité call-put, nous utilisons uniquement des options d'achat pour notre calibration. Le prix d'une option de vente de mêmes caractéristiques ne sera en effet porteur d'aucune information supplémentaire. Ainsi, nous avons systématiquement $\omega = 1$ et nous considérons que Π est un ensemble de couples (T, K) .

A partir de cette formulation, nous souhaitons sélectionner $\sigma^* \in \mathbb{R}^+$ minimisant l'erreur quadratique :

$$\sigma^* = \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathbb{R}} \sum_{(T,K) \in \Pi} (V_0^{th}(Y_0, T, K, \sigma) - V_0^{obs}(Y_0, T, K))^2.$$

Au vu des déformations des nappes de volatilité implicites du CAC 40 et du S&P 500 (annexe A), il est évident qu'aucune volatilité unique ne saurait répliquer la nappe des prix d'options pour plusieurs strikes différents et de maturités allant jusqu'à neuf ans avec suffisamment de précision. En revanche, la surface de volatilité du taux de change semble relativement plate, stabilisée autour de 6%. Nous nous attendons donc à sélectionner une valeur de σ proche de 6%.

La figure 4.1 illustre la différence entre les prix observés sur Bloomberg (les cercles) et les prix prédits par la formule de Black & Scholes (les points) pour les options sur le S&P 500, avec une volatilité de 14,66%. Dans la légende, les sigles *ITM*, *ATM* et *OTM* signifient respectivement *In The Money*, *At The Money* et *Out of The Money*. Le tableau 4.1 indique ainsi les volatilités retenues pour chacun des trois processus ainsi que les erreurs quadratiques moyennes entre les prix d'options observés et ceux prédits avec ces paramètres.

La difficulté du modèle de Black & Scholes à répliquer la nappe des prix est flagrante lorsque l'on constate une MSE de 79 sur les options FX, sachant que la plupart d'entre elles

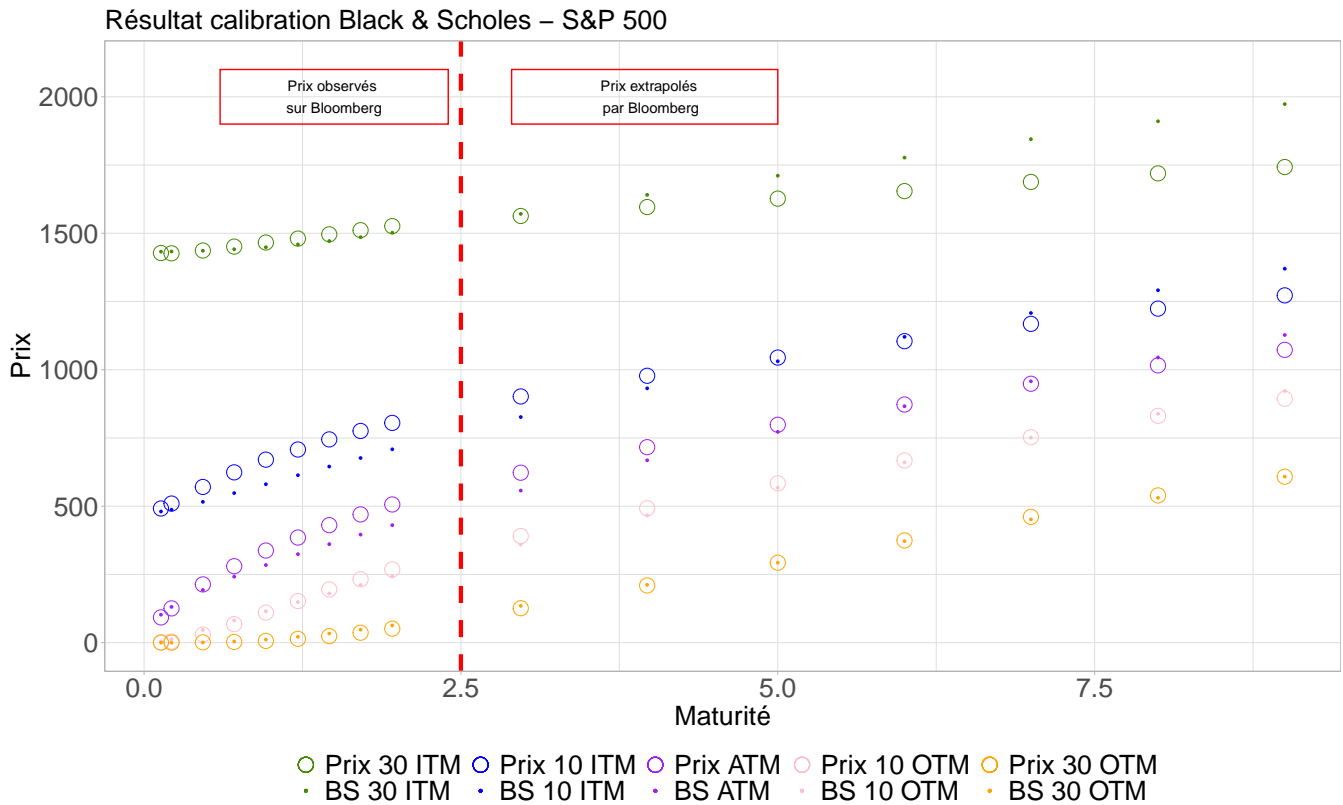


FIGURE 4.1 – Valorisation d’options d’achat sur le S&P 500 par formule de Black & Scholes VS prix observés

	σ^*	σ^{C*}	σ^{S*}
Valeur	5,54%	8,05%	14,66%
MSE	79,03	946 330,00	3 270,504

TABLE 4.1 – Paramètres de volatilités optimaux retenus

sont cotées à moins de \$1.

Devant cette aberration, nous sommes amenés à chercher une autre méthode de calibration. Détournons-nous un instant des données implicites pour examiner les données historiques.

Par définition, en considérant la mesure de probabilité historique et non une mesure risque-neutre, nous ne rentrons plus dans le cadre de la valorisation à la juste valeur. Néanmoins, la reproduction des prix des options après la calibration en univers risque-neutre est loin d’être satisfaisante. Nous essayons donc de remédier à cette situation.

4.2.2 A l’aide des données historiques

Une méthode alternative pour calibrer la volatilité d’un modèle de Black & Scholes repose sur l’étude des cours historiques. Sur cette base, nous pouvons calculer les volatilités histo-

riques du taux de change EUR/USD, du CAC 40 et du S&P 500 (notées respectivement σ_H , σ_H^C et σ_H^S). Nous obtenons les valeurs récapitulées en table [4.2](#).

	σ_H	σ_H^C	σ_H^S
Valeur	7,71%	19,01%	16,78%

TABLE 4.2 – Volatilités historiques

Sur les surfaces de volatilité que nous avons calibrées, ces valeurs se retrouvent pour des maturités courtes (inférieures à deux ans). Par définition, cette méthode ne tient pas compte des anticipations du marché. Il se peut donc qu'elle ne soit pas adaptée à notre problématique.

Il nous reste alors à déterminer les valeurs des drifts des trois processus.

4.3 Calcul du drift

Dans le modèle de Black & Scholes, les taux d'intérêt sont supposés constants et, par suite, les drifts des processus également. En réalité, nous disposons des valeurs des taux d'actualisation retenus par Bloomberg pour les options que nous avons utilisées lors de la calibration. Avec un total de seize valeurs, nous pouvons réaliser une interpolation de la courbe des taux d'actualisation sans risque en EUR jusqu'à 9 ans, et répéter l'opération pour les taux d'actualisation sans risque en USD. Les taux d'intérêt ne sont alors pas constants, mais déterministes.

Pour rappel, nous avons récupéré les prix de plusieurs options d'achats portant sur les trois sous-jacents étudiés, pour un certain nombre de maturités et de strikes. Pour chaque maturité, nous avons également récupéré le taux d'actualisation sans risque dans la devise utilisée et le prix d'un contrat forward de même maturité sur le sous-jacent au 31/12/2021.

A titre d'exemple, rappelons que le modèle de Black & Scholes donne, pour la diffusion du S&P 500 entre les instants t et $t + \delta$:

$$S_{t+\delta} = S_t + \int_t^{t+\delta} S_s(r_s^d - q_s^S)ds + \int_t^{t+\delta} S_s\sigma^S dW_s^S,$$

ou de manière équivalente, par application de la formule d'Itô :

$$\ln(S_{t+\delta}) = \ln(S_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - q_s^S) ds - \frac{\sigma^S}{2} \delta + \int_t^{t+\delta} \sigma^S dW_s^S. \quad (4.3)$$

Revenons maintenant à un cadre plus général. Dans ce paragraphe uniquement, quelle que soit la monnaie considérée, nous notons x_t le taux d'actualisation sans risque de la devise correspondante et z_t le taux de dividende implicite du sous-jacent à maturité t . Ce taux de dividende est dit implicite parce qu'il n'est pas communiqué directement sur Bloomberg. Il est déterminé par inversion de la formule de prix forward. Ce prix que l'on note f_t est donné par la relation :

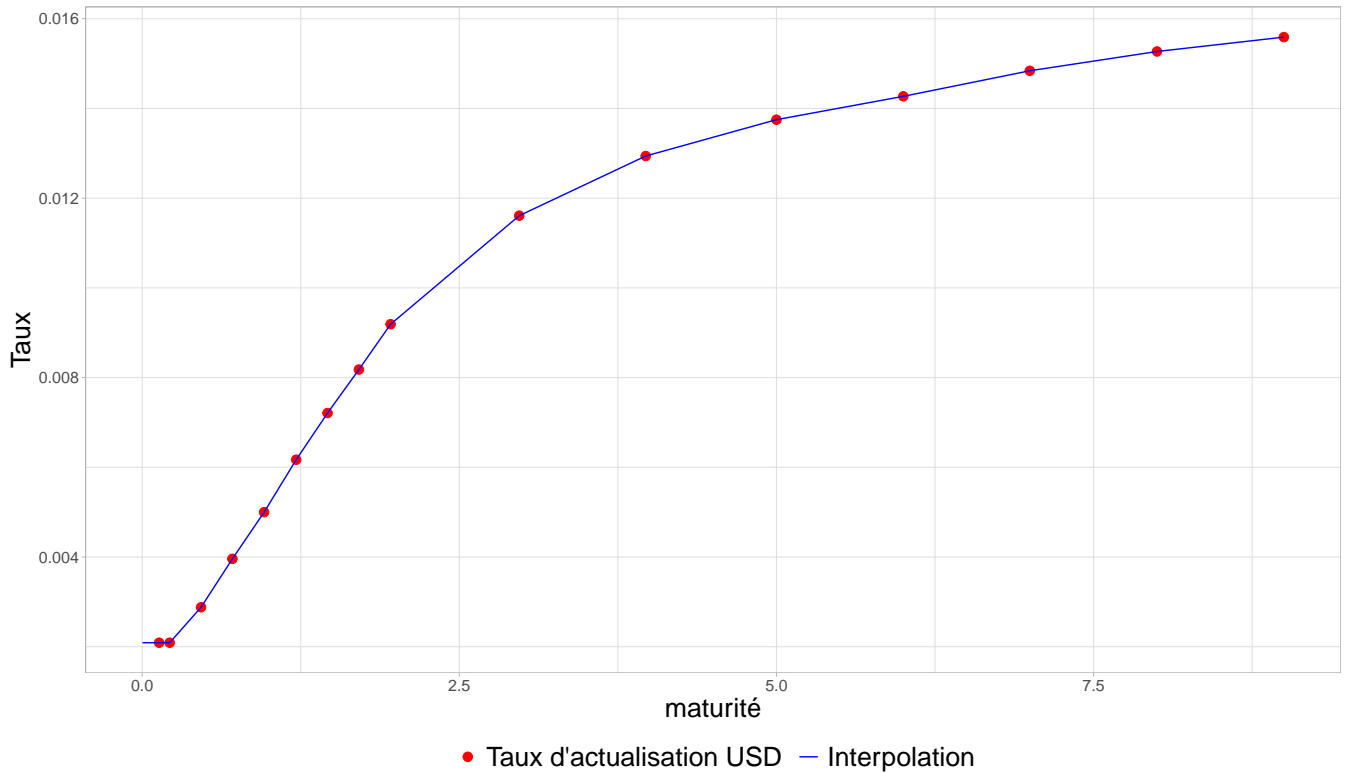


FIGURE 4.2 – Interpolation du taux d’actualisation en USD

$$f_t = \exp((x_t - z_t) \times t).$$

Nous avons donc deux séries de taux d’actualisation sans risque (une pour chaque devise) et deux séries de taux de dividendes (une pour chaque indice). Nous réalisons une interpolation pour chacune des ces séries afin de pouvoir calculer les taux d’actualisation et de dividendes pour toutes les dates entre le 01/01/2022 et le 31/12/2030. La figure 4.2 illustre l’interpolation que nous avons réalisée des taux d’actualisation du S&P 500. La relation entre les taux d’intérêts courts r et les taux d’actualisation x interpolés à toute date t est alors :

$$\int_0^t r_s ds = t \times x_t. \quad (4.4)$$

Comme x_t est déterministe, nous pouvons calculer la valeur exacte de $\int_0^t r_s ds$. De la même manière, après interpolation des taux de dividendes z , nous pouvons calculer la valeur exacte de l’intégrale des taux de dividendes instantanés :

$$\int_0^t q_s ds = t \times z_t. \quad (4.5)$$

Nous revenons à la formule (4.3). Les méthodes de discrétisation que nous présenterons à la suite de cette partie nous indiquerons comment estimer les intégrales stochastiques de ces

équations. Néanmoins, nous pouvons obtenir la valeur exacte de la première intégrale intervenant dans le drift du processus Y : $\int_t^{t+\delta} (r_s^d - q_s^S) ds$:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta} (r_s^d - q_s^S) ds &= \int_t^{t+\delta} r_s^d ds - \int_t^{t+\delta} q_s^S ds, \\ &= \left(\int_0^{t+\delta} r_s^d ds - \int_0^t r_s^d ds \right) - \left(\int_0^{t+\delta} q_s^S ds - \int_0^t q_s^S ds \right). \end{aligned}$$

Et les résultats [4.4](#) et [4.5](#), associés aux interpolations des taux d'actualisation et de dividende que nous avons réalisées, permettent un calcul exact de cette valeur pour tous t et δ positifs :

$$\int_t^{t+\delta} (r_s^d - q_s^S) ds = (t + \delta)(x_{t+\delta}^d - z_{t+\delta}^S) - t(x_t^d - z_t^S),$$

où z_t^S et x_t^d désignent les taux z et x spécifiques au S&P 500 et à l'USD.

De la même manière, nous écrivons les drifts des logarithmes respectifs du CAC 40 et du taux de change EUR/USD : $\int_t^{t+\delta} (r_s^e - q_s^C) ds$ et $\int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds$. Nous exprimons finalement leurs valeurs exactes :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta} (r_s^e - q_s^C) ds &= (t + \delta)(x_{t+\delta}^e - z_{t+\delta}^C) - t(x_t^e - z_t^C), \\ \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds &= (t + \delta)(x_{t+\delta}^d - x_{t+\delta}^e) - t(x_t^d - x_t^e). \end{aligned}$$

Ces valeurs d'intégrales seront valables quel que soit le schéma de discrétisation choisi. Pour des raisons de lisibilité, nous conserverons la notation sous forme d'intégrale dans la suite de ce document. Les résultats exposés ci-dessus seront utilisés lors de l'implémentation des fonctions de projection.

Il est à noter que les taux d'actualisation en EUR (la monnaie étrangère dans notre étude) récupérés pour la modélisation du taux de change ne sont pas ceux utilisés pour l'actualisation des flux financiers en EUR. Ce phénomène est expliqué par [Wystup \(2006\)](#) : nous avons sur Bloomberg le prix forward f_t^Y de l'EUR, exprimé en USD, à l'instant t . Le taux d'actualisation en EUR utilisé pour le taux de change EUR/USD est en fait un taux implicite déduit, après détermination du taux d'actualisation en USD, de la formule du prix forward pour retrouver les prix du marché :

$$f_t^Y = \exp((x_t^d - x_t^e) \times t),$$

où x_t^d et x_t^e désignent respectivement les taux d'actualisation USD et fictif EUR à échéance t .

4.4 Simulation des processus stochastiques par le schéma d'Euler

Nous considérons le schéma d'Euler pour la discrétisation des processus en vue de leur simulation. Nous considérons un pas de temps régulier δ pour former une grille sur laquelle il est possible d'exprimer les deux processus à modéliser pour chaque actif.

Nous avons montré précédemment une méthode de calcul de la valeur exacte du drift sur un pas de temps δ . Intéressons-nous maintenant à la manière de simuler l'évolution des processus sur l'exemple du taux de change $(Y)_{t \geq 0}$. La discrétisation du temps implique nécessairement que nous procédons ici à une approximation du taux de change à chaque instant t , notée \hat{Y}_t que nous exprimons ici sous la mesure \mathbb{Q}^d :

$$\ln(\hat{Y}_{t+\delta}) = \ln(\hat{Y}_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{\sigma^2}{2} \delta + \sigma \sqrt{\delta} \Phi_t, \quad (4.6)$$

où $(\Phi)_{\substack{t=k\delta \\ k \geq 0}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée réduite. Sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^e , le schéma d'Euler du taux de change s'écrit :

$$\ln(\hat{Y}_{t+\delta}) = \ln(\hat{Y}_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds + \sigma^2 \delta - \frac{\sigma^2}{2} \delta + \sigma \sqrt{\delta} \Phi_t.$$

Nous procédons à la même discrétisation des processus du CAC 40 et du S&P 500.

A ce stade, nous sommes en mesure d'illustrer ce qui constitue le coeur de notre étude : la modification de la dynamique d'un processus selon l'univers risque-neutre dans lequel nous l'observons. C'est l'objet de la figure [4.3](#), comparant la projection d'une même trajectoire (les deux courbes utilisent le même aléa) du taux de change EUR/USD sous les mesures de probabilités \mathbb{Q}^e et \mathbb{Q}^d . Nous sélectionnons arbitrairement pour cette projection la volatilité du taux de change obtenue avec les données implicites : $\sigma = 5,54\%$.

Comme attendu, la trajectoire projetée du taux de change dans l'univers risque-neutre EUR s'éloigne progressivement de la trajectoire sous la mesure risque-neutre USD pour prendre des valeurs supérieures. En effet, le drift est ajusté par une constante additive positive. Dans le cadre d'une projection avec le modèle de Black & Scholes, nous pouvons quantifier la différence entre les deux projections après n pas (nous les noterons ici $\hat{Y}_{n\delta}^e$ et $\hat{Y}_{n\delta}^d$), grâce à la relation :

$$\frac{\hat{Y}_{n\delta}^e}{\hat{Y}_{n\delta}^d} = \exp(\sigma^2 \delta)$$

Nous pouvons ainsi aisément vérifier la justesse de notre méthode de projection.

4.5 Méthode de Monte Carlo et réduction de variance

Nous réalisons les estimations par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode repose sur le théorème central limite et suppose de simuler N fois les trajectoires des différents processus, les

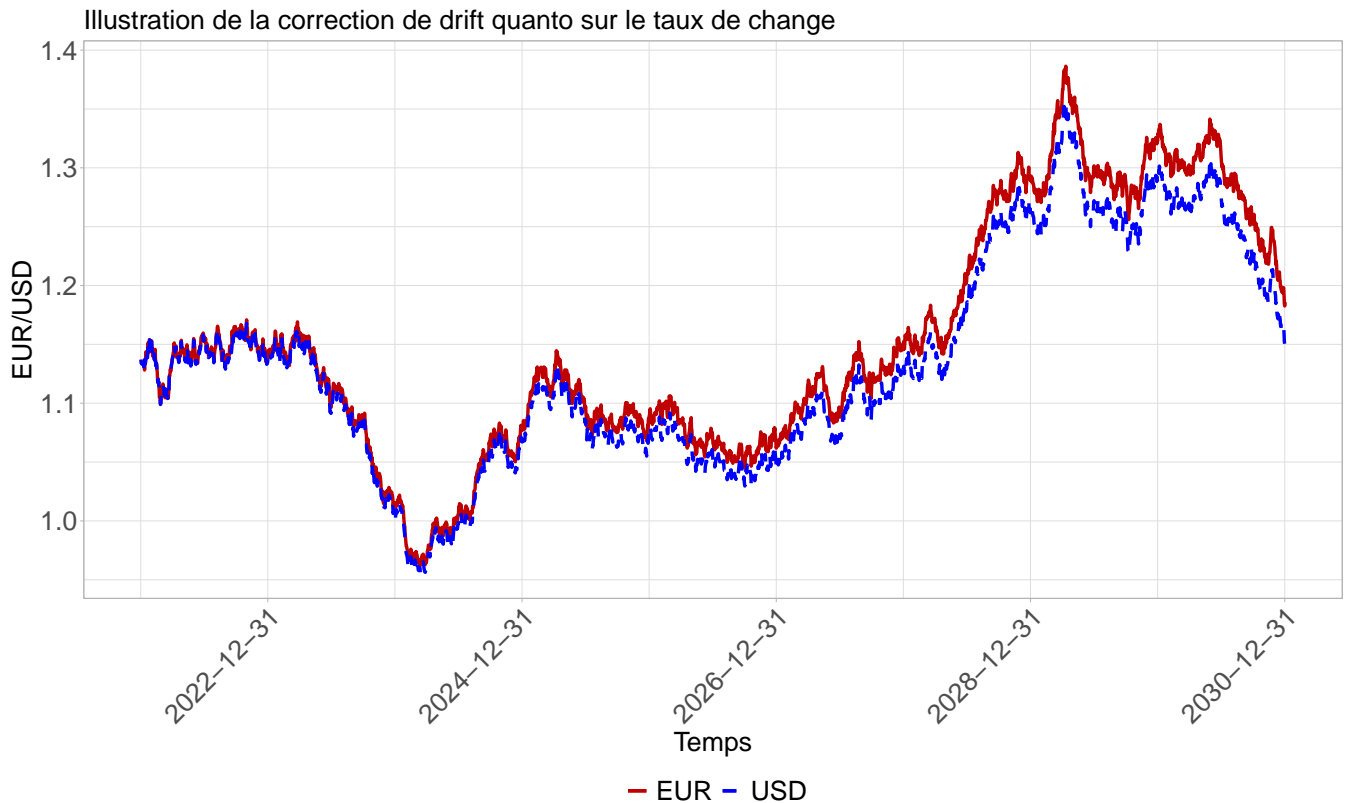


FIGURE 4.3 – Visualisation de la correction de drift quanto

simulations étant indépendantes deux à deux et N étant suffisamment grand. Nous déterminons les flux financiers actualisés découlant de ces trajectoires pour chacune des N simulations. Le prix du produit correspondant, en absence d'opportunité d'arbitrage, à l'espérance des flux futurs actualisés sous la probabilité risque-neutre, nous en déduisons finalement une estimation du prix de notre produit structuré grâce à la moyenne empirique des flux futurs actualisés des N simulations.

Nous insistons une fois encore sur le fait que, pour que cette moyenne empirique corresponde bien à l'espérance risque neutre (associée à l'EUR ou à l'USD), il est nécessaire que les projections des trois processus soient effectuées dans le même univers. Le passage d'une probabilité risque-neutre à l'autre, tant pour l'expression de la dynamique d'un processus stochastique que pour l'espérance d'une variable aléatoire, se fait selon les formules rappelées dans la partie [2.3](#).

La notion d'intervalle de confiance est centrale dans notre étude. Au-delà de la valorisation du produit structuré possédé par le client, nous souhaitons en effet apporter une dimension de maîtrise du risque de perte de celui-ci.

Le théorème central limite nous permet de trouver facilement un intervalle de confiance au seuil de confiance de notre choix pour l'estimateur de Monte Carlo. En effet, posons une variable aléatoire X dont nous savons simuler la loi et supposons que nous souhaitons estimer l'espérance d'une fonction de cette variable : $h(X)$. L'estimateur de Monte Carlo $\hat{\mu}$ de

$\mu = \mathbb{E}[h(X)]$ s'obtient par simulation de N variables aléatoires i.i.d. de même loi que $X : (X_i)_{1 \leq i \leq N}$. Nous avons alors l'expression de l'estimateur

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(X_i),$$

ainsi que de sa variance

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h(X_i) - \hat{\mu})^2.$$

Finalement, par le théorème central limite, nous obtenons l'expression d'un intervalle de confiance au seuil de risque α :

$$IC_\alpha = \left[\hat{\mu} \pm \mathcal{N}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \right], \quad (4.7)$$

où \mathcal{N} est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour le seuil de risque classique $\alpha = 5\%$, nous avons $\mathcal{N}^{-1}(97, 5\%) = 1,96$.

Dans le cadre de l'étude de notre produit structuré, le prix en EUR en l'absence d'opportunité d'arbitrage est l'espérance sous la mesure \mathbb{Q}^e des flux financiers actualisés générés par le produit :

$$\text{Prix} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^e} \left[\sum_{i=1}^T \frac{\text{Flux}_i}{R_i^d} \right].$$

C'est alors que nous voyons l'intérêt de la méthode de Monte Carlo : en simulant un grand nombre de fois les trajectoires des différents processus intervenant dans le produit, nous en déduisons autant de sommes de flux actualisés. La moyenne empirique de ces sommes donne alors une estimation du prix à payer pour le produit à la date d'actualisation.

D'après l'équation 4.7 l'erreur de Monte Carlo est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Pour gagner un seul chiffre significatif, il faut donc multiplier par cent le nombre de simulations. Diminuer l'erreur de l'estimateur en augmentant le nombre de simulations N se révèle alors vite très coûteux en temps, jusqu'à devenir inacceptable. Les méthodes de réduction de la variance ont pour objectif de diminuer l'erreur de la méthode de Monte Carlo classique pour un même nombre de simulations. En effet, en diminuant la variance de l'estimateur, nous réduisons mécaniquement la largeur de l'intervalle de confiance.

La réduction de variance par variables antithétiques repose sur l'utilisation de variables corrélées négativement. Plus précisément, reprenons l'estimateur $\hat{\mu}$ de $\mu = \mathbb{E}[h(X)]$, et supposons que nous disposons de deux échantillons $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(X'_i)_{1 \leq i \leq n}$, i.i.d. de même loi que X . X' est appelée variable antithétique de X . Nous avons alors les estimateurs empiriques des espérances de ces deux échantillons :

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X'_i).$$

Nous en déduisons l'estimateur de Monte Carlo de l'espérance sur l'échantillon complet :

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2},$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(X_i) + h(X'_i)}{2}.$$

Cette expression est celle de l'estimateur de Monte-Carlo sur un échantillon de taille $2n$. Nous pouvons également exprimer la variance de cet estimateur :

$$\sigma_{\hat{\mu}}^2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 + 2Cov(\mu_1, \mu_2)}{4}$$

Nous remarquons que si les échantillons X et X' sont corrélées négativement, alors

$$\text{Var}\left(\frac{h(X) + h(X')}{2}\right) < \frac{\text{Var}(h(X))}{2}.$$

Ainsi, pour un total de n simulations, la méthode des variables antithétiques fait au moins aussi bien que la méthode de Monte Carlo classique avec $2n$ simulations. Il suffit donc de trouver X' de même loi que X , telles que $Cov(h(X), h(X')) < 0$.

Dans le cas des mouvements browniens, nous simulons uniquement des lois normales centrées réduites : à chaque pas de temps dt , la variation du mouvement brownien est $dW_t = \sqrt{dt} \times \Phi_t$, où Φ_t suit une loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire. Dans ces conditions, nous devons donc simuler à chaque pas de temps la variable Φ_t de loi normale centrée réduite et nous introduisons $\Phi'_t = -\Phi_t$, de même loi que Φ_t et corrélée négativement avec elle. L'un des principaux atouts de cette méthode est donc l'absence de coût en temps de calcul supplémentaire.

Reprenons l'expression du processus du taux de change discrétisé sous la mesure \mathbb{Q}^d (4.6). A titre d'illustration, nous appliquons la méthode des variables antithétiques au premier pas de ce processus uniquement, correspondant à un pas de temps δ :

$$\ln(\hat{Y}_\delta) = \ln(Y_0) + \int_0^\delta (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{\sigma^2}{2} \delta + \sigma \sqrt{\delta} \Phi_0.$$

Sans simulation supplémentaire, nous pouvons écrire la variables antithétique $\Phi'_0 = -\Phi_0$ pour obtenir l'expression suivante :

$$\ln(\hat{Y}'_\delta) = \ln(Y_0) + \int_0^\delta (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{\sigma^2}{2} \delta + \sigma \sqrt{\delta} \Phi'_0.$$

Si l'on considère uniquement $\ln(\hat{Y}_\delta) = h(\Phi_0)$, nous retrouvons bien l'espérance recherchée au départ par les variables antithétiques :

$$\mathbb{E} \left(\frac{h(\Phi_0) + h(\Phi'_0)}{2} \right) = \mathbb{E} (h(\Phi_0)),$$

Les expressions des estimateurs empiriques de $\ln(\hat{Y}_\delta)$ et sa variance après réduction pour n simulations sont :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (h(\Phi_{y,0})_i + h(\Phi'_{y,0})_i)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (h(\Phi_{y,0})_i + h(\Phi'_{y,0})_i) - \hat{\mu}_n \right]^2$$

Il existe d'autres méthodes de réduction de variance, plus élaborées et bien souvent plus coûteuses en terme de temps de calcul.

4.6 Simulation du produit structuré

Maintenant que nous avons calibré les trois modèles de Black & Scholes et que nous avons étudié la manière de les projeter individuellement dans un univers risque-neutre ou dans l'autre, nous pouvons implémenter la valorisation de notre produit.

Pour rappel, les trois mouvements browniens que nous simulons sont corrélés. Pour cette raison, les simulations des trois processus doivent se faire simultanément. De plus, les projections devant être réalisées dans le même univers risque-neutre (en l'occurrence, celui associé à l'EUR), les drift du S&P 500 et du taux de change devront être ajustés.

Finalement, il reste à déterminer $\tilde{\rho}^C$, $\tilde{\rho}^S$ et ρ^{SC} , les corrélations respectives du CAC 40 et du S&P 500 avec le taux de change et celle entre le CAC 40 et le S&P 500. Pour cela, nous avons récupéré sur Bloomberg les cours historiques journaliers respectifs de ces trois indices depuis le 03/01/2000. Nous pouvons alors calculer les log-rendements journaliers pour chacun des trois processus historiques. C'est sur cette base que nous évaluons les coefficients de corrélations linéaires $\tilde{\rho}^C$, $\tilde{\rho}^S$ et ρ^{SC} .

Les deux indices actions sont assez fortement corrélés entre eux, mais peu avec le taux de change.

La simulation de mouvements browniens corrélés n'est finalement rien de plus que le tirage répété d'un vecteur gaussien présentant un vecteur de moyenne nulle et une matrice de variance

Mouvements Browniens		Coefficient	Valeur
W	W^C	$\tilde{\rho}^C$	0,049
W	W^S	$\tilde{\rho}^S$	0,101
W^C	W^S	ρ^{SC}	0,585

TABLE 4.3 – Corrélations entre les différents mouvements browniens

covariance dont les coefficients correspondent aux corrélations que nous avons trouvées. En reprenant les notations de la [section 2.3](#) nous considérons donc le vecteur gaussien $(X)_{t \geq 0}$, de dimension trois :

$$X_t = (W_t, W_t^S, W_t^C) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

avec

$$\mu = (0, 0, 0) \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\rho}^S & \tilde{\rho}^C \\ \tilde{\rho}^S & 1 & \rho^{SC} \\ \tilde{\rho}^C & \rho^{SC} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,101 & 0,049 \\ 0,101 & 1 & 0,585 \\ 0,049 & 0,585 & 1 \end{pmatrix}.$$

Σ est une matrice symétrique définie positive, donc il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que $\Sigma = LL^T$. C'est la décomposition de Cholesky. Nous avons alors le résultat suivant :

$$\mu + LZ \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, I_3)$, I_3 désignant la matrice identité de dimension trois. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite finalement que la simulation de trois variables gaussiennes indépendantes pour chaque pas.

Nous calculons la décomposition de Cholesky de la matrice Σ :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,101 & 0,995 & 0 \\ 0,049 & 0,583 & 0,811 \end{pmatrix}, \quad LL^T = \Sigma.$$

Finalement, nous pouvons simuler trois variables i.i.d. gaussiennes centrées réduites : $\hat{Z} = (\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3)$. Alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,101 & 0,995 & 0 \\ 0,049 & 0,583 & 0,811 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{Z}_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Pour nous en convaincre, nous simulons un grand nombre de fois ce vecteur tridimensionnel et calculons les covariances empiriques, pour constater que ce sont bien les valeurs attendues.

Nous avons à disposition les éléments nécessaires à la réalisation des projections dans le modèle de Black & Scholes. La devise de l'investisseur étant l'EUR, nous projetons le CAC 40 dans l'univers risque neutre dans lequel il a été calibré : aucune modification n'intervient dans

l'expression de sa dynamique. En revanche, le taux de change et le S&P 500 voient leurs drifts modifiés par le terme quanto que nous avons décrit précédemment.

Nous effectuons un pas par jour durant neuf ans, soit la maturité du produit structuré. Une fois les trois mouvements browniens simulés, il suffit de les utiliser pour simuler les évolutions des trois processus. Nous réalisons ainsi 100 000 simulations de chaque processus sur 9 ans avec un pas journalier afin de réaliser notre estimation par la méthode de Monte Carlo.

Pour la réduction de variance par variables antithétiques, aucune simulation supplémentaire n'est nécessaire, car nous prenons simplement l'opposé des variables aléatoires gaussiennes simulées par la méthode de Cholesky.

Prenons à présent une unique simulation des trois processus. Nous examinons, à chaque date de versement de coupon (à chaque trimestre), la valeur du taux de change EUR/USD. Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Le taux de change est inférieur à la barrière de coupon (1,5) : nous regardons la performance du CAC 40 par rapport à celle du S&P 500 sur le trimestre écoulé pour obtenir le taux de coupon à verser. Rappelons que celui-ci est flooré à 0% et capé à 4%.
- Le taux de change est supérieur à la barrière de coupon : aucun coupon n'est versé.

A partir du trimestre 12 (fin de la période de franchise pour l'option lock-in), nous regardons également si le taux EUR/USD est inférieure à la barrière lock-in (1,15), déclenchant ainsi le remboursement du nominal au terme. A la maturité du produit (31/12/2030), deux cas sont possibles :

- L'option lock-in a été déclenchée précédemment : l'investisseur reçoit l'intégralité du nominal (100 000 €).
- L'option lock-in n'a pas été déclenchée. Trois situations sont alors possibles en fonction de la valeur finale du taux de change EUR/USD :
 - Le taux de change est inférieur à 1,6 : l'investisseur reçoit l'intégralité du nominal.
 - Le taux de change est compris entre 1,6 et 2,1 : l'investisseur reçoit une fraction du nominal, fonction linéaire décroissante de la valeur du taux de change.
 - Le taux de change est supérieur à 2,1 : l'investisseur perd l'intégralité du nominal.

Nous avons alors calculé les flux futurs de la trajectoire simulée (les coupons et le remboursement du capital). Nous les actualisons au 31/12/2021 (date de la valorisation) grâce à l'interpolation que nous avons précédemment réalisée de la courbe des taux d'actualisation en USD, et nous en calculons la somme. Le prix du produit étant l'espérance de la somme des flux financiers actualisés, cela nous donne le prix du produit dans le cas ou celui-ci suivrait la trajectoire considérée.

Ces différentes étapes sont effectuées sur chacune des 100 000 trajectoires des processus discrétisés simulés, ainsi que sur leurs processus antithétiques. Nous calculons finalement les moyennes des sommes des flux actualisés de chaque projection avec celle de leur projection antithétique, pour achever la méthode des variables antithétiques. Nous avons alors 100 000 valeurs de sommes de flux actualisés. La moyenne empirique de ces 100 000 valeurs nous

donne une estimation du prix du produit.

4.7 Résultats dans le cadre du modèle de Black & Scholes

Nous avons pu exposer le processus de calibration et les différents procédés utiles à la simulation dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Conscients qu'une volatilité constante n'est pas adaptée à une projection sur une période de neuf ans, nous présentons ici les résultats obtenus par cette méthode. Le seul objectif de cette partie est de démontrer une fois pour toute que la juste valeur du produit structuré ne peut être obtenue par le modèle de Black & Scholes.

Les résultats sont donnés sur la base de 100 000 simulations avec le schéma d'Euler. Tous les flux financiers étant bornés, il est possible de donner une borne supérieure pour le prix du produit structuré. En effet, le produit rapporte au maximum 4% de 100 000 € par trimestre pendant 36 trimestres, une somme à laquelle nous ajoutons le remboursement du nominal de 100 000 € à l'échéance. Le total maximal des flux financiers s'élève donc à 244 000 €. Grâce à la courbe des taux d'actualisation en EUR que nous avons interpolée précédemment, nous pouvons actualiser ces flux et calculer le prix maximal du produit : 243 869,10 €.

4.7.1 Volatilité implicite

Nous utilisons dans un premier temps les volatilités calibrées sur la base des nappes de volatilité implicites. Pour rappel, voici les niveaux de volatilité retenus :

	σ^*	σ^{C*}	σ^{S*}
Valeur	5,54%	8,05%	14,66%

La moyenne empirique de la somme des flux du produits, projetés puis actualisés sous la mesure de probabilité risque neutre \mathbb{Q}^e nous donne une estimation du prix du produit, avec l'intervalle de confiance à 95% associé :

$$\text{Prix} = 121\,314,20 \pm 79,89 \text{ €}.$$

Le prix peut également être évalué sous la mesure de probabilité risque-neutre associée à l'USD. Les drifts des processus changeront selon les formules déjà exposées auparavant mais les flux seront toujours donnés en EUR. Afin de réaliser l'évaluation sous \mathbb{Q}^d , il est nécessaire, au sein de chaque simulation, de multiplier chaque flux financier par le taux de change EUR/USD en vigueur à l'instant où il est versé. Nous actualisons alors ces flux au 31/12/2021 au taux sans risque USD obtenu par interpolation avant de les diviser par le taux de change EUR/USD connu à la date d'évaluation : $Y_0 = 1,137$. Cette méthode nous donne évidemment le même prix que l'évaluation risque-neutre sous la mesure \mathbb{Q}^e , bien que la distribution de la somme des flux financiers actualisés ne soit pas identique sous les deux mesures. Ce phénomène est illustré sur la figure 4.4, où les densités de la somme des flux projetés et actualisés à la date d'évaluation dans les deux univers risque-neutres sont tracées.

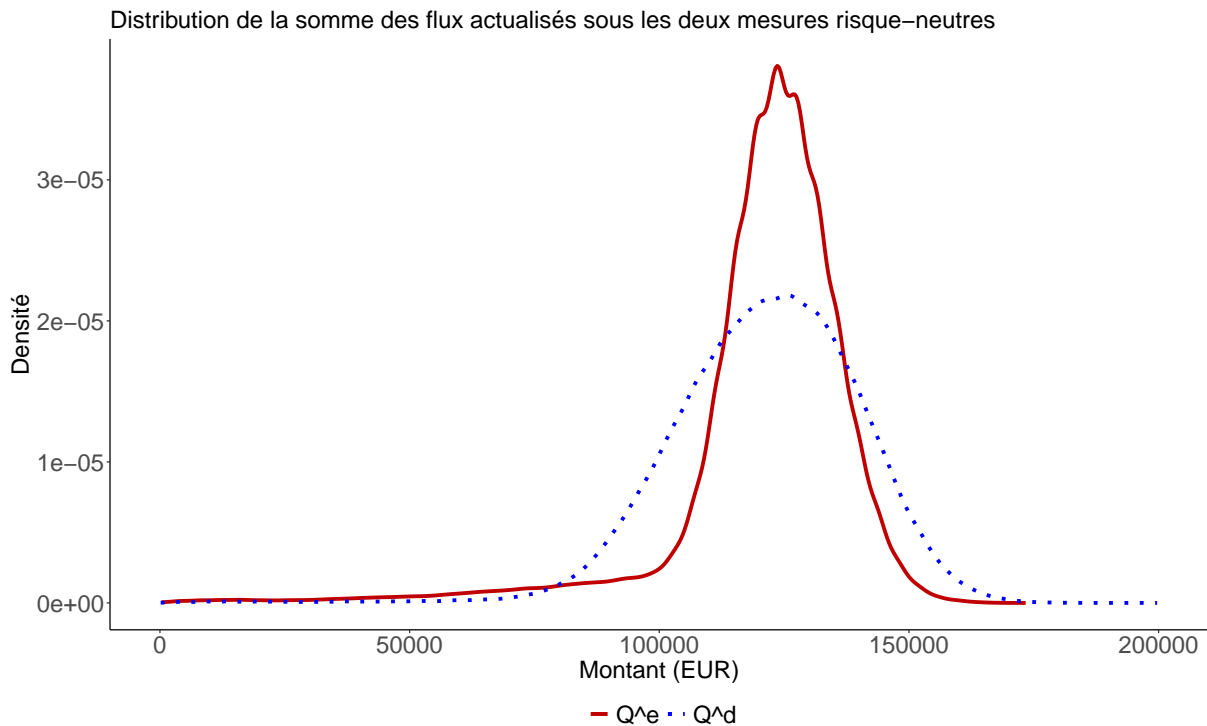


FIGURE 4.4 – Densité de la somme des flux financiers actualisés sous les mesures Q^e et Q^d -
Méthode de Black & Scholes

Bien que la courbe discontinue bleue représente la densité des flux actualisés sous la mesure Q^d , les prix obtenus sont bien exprimés en EUR. Pour rappel, les projections sont effectuées en univers risque-neutre USD, en ajoutant un terme quanto dans la dynamique du CAC 40. Sur chacune des itérations de Monte Carlo, nous déterminons les différentes sommes versées à chaque date en EUR. Ces sommes sont converties en USD via les valeurs du processus de taux de change à ces dates. Nous actualisons ensuite l'intégralité de ces flux à la date d'évaluation grâce à la courbe des taux d'actualisation USD. Finalement, le taux de change au 31/12/2021 permet de retrouver des prix en EUR, grâce à une projection risque-neutre USD.

Sur ce graphique, nous constatons que les distributions sont centrées autour de la même valeur. La dispersion autour de cette valeur est cependant plus élevée sous la mesure Q^d . Cela est dû, d'une part, à la correction de drift quanto modifiant les dynamiques des processus d'un univers à l'autre. En particulier, les probabilités que le taux de change soit en dessous des diverses barrières ne sont pas les mêmes selon l'univers risque-neutre. D'autre part, la plus grande variabilité du prix en univers risque-neutre USD reflète la différence de perception du risque entre ces deux univers. Un investisseur en USD achetant ce type de produit percevra les flux en EUR. Il sera soumis au risque de change s'il désire convertir ses gains en USD, augmentant l'incertitude autour de ce que lui coûtera réellement le produit.

Cette incertitude est d'autant plus présente que les paiements sont tous conditionnés à un taux de change inférieur à certaines barrières. Or, plus le taux de change EUR/USD est bas, plus le prix de revente des EUR perçus (exprimé en USD) est bas. Cependant, les valeurs élevées des barrières de coupon et de remboursement viennent contrebalancer cet effet.

4.7.2 Volatilité historique

Nous considérons à présent les volatilités historiques, dont les valeurs sont rappelées ci-dessous, pour effectuer nos projections.

	σ_H	σ_H^C	σ_H^S
Valeur	7,71%	19,01%	16,78%

Cela nous donne une nouvelle estimation du prix du produit structuré :

$$\text{Prix} = 139\,602,60 \pm 134,95 \text{ €}.$$

Nous constatons d'emblée qu'avec ce nouveau jeu de paramètres, le prix est radicalement différent de celui trouvé avec les volatilités implicites (presque 20 000 € supplémentaires, soit une augmentation de 15%). Nous illustrons en figure 4.5 les densités de la somme des flux financiers actualisés, respectivement obtenus avec les paramètres implicites et historiques sous la mesure \mathbb{Q}^e .

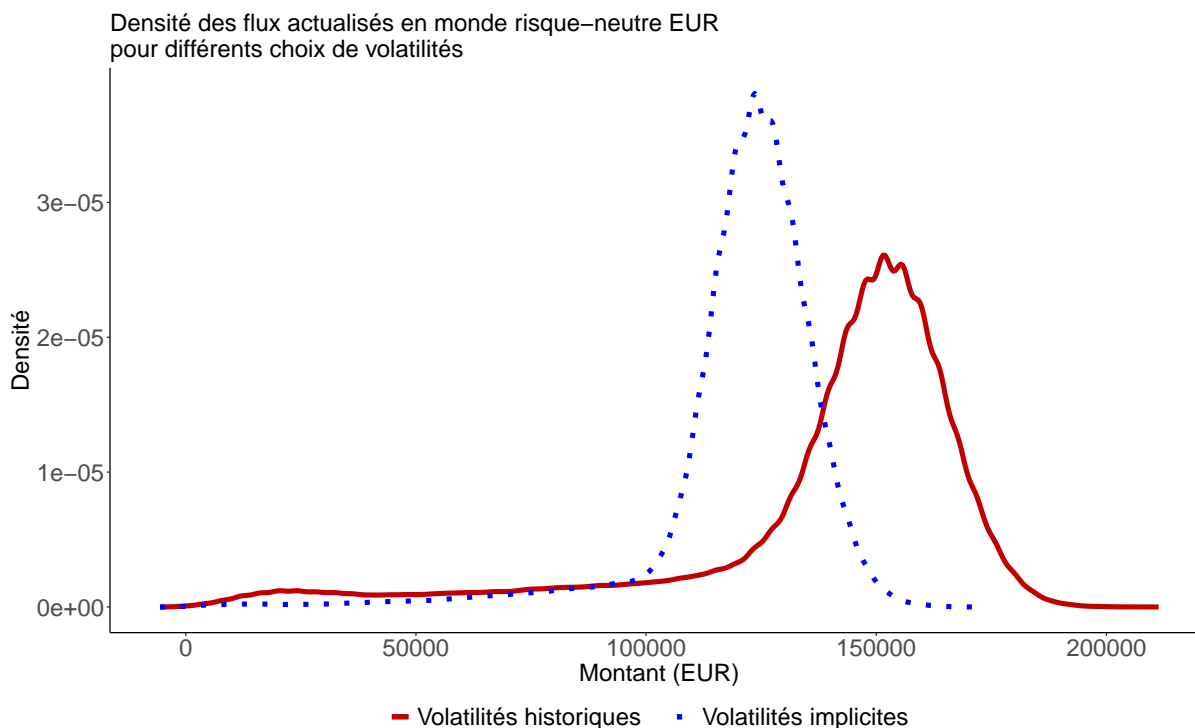


FIGURE 4.5 – Comparaison des distributions des flux actualisés avec les volatilités implicites et historiques en monde risque-neutre EUR

Les deux distributions présentent la même forme. Néanmoins, la courbe obtenue avec les volatilités historiques est nettement décalée vers la droite par rapport à la distribution obtenue sur la base des données implicites. Ainsi, selon la méthode retenue pour le choix des volatilités,

nous pouvons observer de grandes différences dans la distribution des cash-flows générés par ce produit. Ainsi, sans avoir aucune certitude sur la méthodologie à adopter, il est impossible de déterminer un prix pour notre produit structuré.

Le modèle de Black & Scholes se révèle incapable de fournir des résultats satisfaisants : l'usage d'une volatilité constante pour valoriser un produit avec une telle structure est particulièrement inadapté. En effet, la volatilité implicite d'un sous-jacent indique l'anticipation du marché concernant sa position par rapport à une certaine valeur (le strike) pour une maturité donnée. Notre produit impose de comparer la valeur du taux de change avec plusieurs barrières à de nombreuses dates d'évaluation. Sélectionner une volatilité unique est donc impossible : quelle que soit la méthode retenue pour la sélection de volatilité, le modèle de Black & Scholes est inutilisable.

Il existe de nombreux autres modèles de diffusion. Nous faisons le choix d'utiliser le modèle de Heston, que nous avons présenté d'un point de vue théorique dans le chapitre 2 et qui permet de répliquer l'intégralité de la nappe de volatilité implicite.

Chapitre 5

Modèle de Heston

Nous avons détaillé précédemment les équations régissant le modèle de Heston et leur application théorique à notre problème, en particulier la transposition de la dynamique de Heston d'un univers risque-neutre à un autre. Pour rappel, le modèle de Heston appliqué au taux de change EUR/USD sous la mesure \mathbb{Q}^d s'écrit :

$$\begin{cases} dY_t = Y_t(r^d - r^e)dt + Y_t\sqrt{\nu_t}dW_t, \\ d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \varepsilon\sqrt{\nu_t}dU_t, \\ \rho dt = d\langle W, U \rangle_t. \end{cases}$$

Une synthèse théorique des résultats obtenus dans ce cadre a été présentée en partie [2.3](#). Dans cette partie, nous verrons comment calibrer le modèle de Heston, avant de passer aux projections dans ce cadre et aux résultats, dont nous mènerons une analyse approfondie. Nous ferons appel à un certain nombre de notions abordées précédemment dans le cadre du modèle de Black & Scholes, notamment les surfaces de volatilité implicite, le schéma d'Euler et la réduction de variance.

5.1 Formule fermée de valorisation d'une option dans le modèle de Heston

Dans le modèle de Heston, de la même manière que dans celui de Black & Scholes, une formule semi-fermée est donnée pour les prix des options, en particulier des options sur devise. Dans le cadre de notre étude, les taux courts sont déterministes. En considérant une maturité T et un strike K fixés, la valeur en $t = 0$ d'une option sur devise (avec $\omega = 1$ pour un call et $\omega = -1$ pour un put) est donnée par :

$$V_0(Y_0, T, K, \omega) = \frac{P^d(0, T)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}(\exp(-iu \ln K) \phi_T^X(u - i)) - K \text{Im}(\exp(-iu \ln K) \phi_T^X(u))}{u} du + \frac{1}{2}\omega \left[\frac{Y_0}{R_t^e} - \frac{K}{R_T^d} \right]. \quad (5.1)$$

Dans cette formule, intervient la fonction caractéristique de $X_t = \ln(Y_t)$, notée ϕ^X . Dans le modèle de Heston, la fonction caractéristique du logarithme du taux de change s'écrit $\phi_t^X(u) = \mathbb{E}[\exp(iu \ln X_t)]$.

Ce prix peut être réécrit sous une forme plus lisible, semblable à la forme obtenue dans le modèle de Garman-Kohlhagen :

$$V_0(Y_0, T, K, \omega) = S_0 \frac{P_1}{R_T^e} - K \frac{P_2}{R_T^d}, \quad (5.2)$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions des différents paramètres :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(-iu \ln K) \phi_T^X(u-i)}{iu \phi_T^X(-i)} \right] du, \\ P_2 = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(-iu \ln K) \phi_T^X(u)}{iu} \right] du. \end{cases}$$

De manière similaire, les options du marché equity peuvent être valorisées par une formule fermée dans le cadre du modèle de Heston.

Nous ne nous attarderons pas sur les démonstrations de ces résultats, déjà largement documentés. Le lecteur intéressé trouvera néanmoins les différentes preuves de cette partie dans les travaux de [Heston \(1993\)](#).

5.2 Calibration du modèle de Heston

Nous utilisons pour la calibration les options sur le CAC 40, le S&P 500 et le taux de change que nous avons déjà utilisées avec le modèle de Black & Scholes. La calibration du modèle de Heston consiste à chercher le jeu de paramètres régissant le modèle qui minimise l'écart entre les prix des options sur le sous-jacent observés sur le marché (ou extrapolés par Bloomberg pour les maturités supérieures à deux ans) et les prix obtenus par la formule fermée de Heston [\(5.2\)](#).

Le principe est le même que pour la première calibration que nous avons réalisée du modèle de Black & Scholes, à la différence près que nous ne cherchons pas à calibrer un paramètre réel mais un vecteur de paramètres réels en dimension cinq. Nous notons λ ce vecteur : $\lambda = (\kappa, \theta, \varepsilon, \nu_0, \rho) \in \Lambda = (\mathbb{R}_+^*)^4 \times [-1, 1]$. En reprenant les notations de l'équation [\(4.2\)](#), nous définissons la fonction d'erreur quadratique pour tout élément λ de l'ensemble Λ :

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{(T,K) \in \Pi} (V_0^{\text{th}}(Y_0, T, K, \lambda) - V_0^{\text{obs}}(Y_0, T, K))^2,$$

A partir de cette formulation, nous souhaitons sélectionner $\lambda^* = (\kappa^*, \theta^*, \varepsilon^*, \nu_0^*, \rho^*)$, l'élément de Λ minimisant l'erreur quadratique :

$$\lambda^* = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(T,K) \in \Pi} (V_0^{\text{th}}(Y_0, T, K, \lambda) - V_0^{\text{obs}}(Y_0, T, K))^2.$$

Par construction, le modèle de Heston est capable de reproduire les déformations de la nappe de volatilité dans une certaine mesure. L'un des inconvénients de cette méthode de calibration est qu'elle accorde la même importance à chaque option observée. Or, notre échantillon d'observations pourra contenir certaines options de maturités très longues ou encore très en dehors de la monnaie, mais en quantités relativement faibles en raison de la faible liquidité de ces produits. L'estimation des paramètres dans ces zones sera alors de moins bonne qualité et cela impactera la précision globale de notre calibration. Nous sommes donc amenés à considérer une reformulation de la fonction d'erreur quadratique en y introduisant une pondération des termes :

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{(T,K) \in \Pi} p_{T,K} \left(V_0^{\text{th}}(Y_0, T, K, \lambda) - V_0^{\text{obs}}(Y_0, T, K) \right)^2, \quad (5.3)$$

où $p_{T,K}$ est le poids associé à l'observation. Dans la première définition de la fonction d'erreur quadratique \mathcal{Q} , les poids étaient tous identiques, égaux à 1. Il nous sera alors possible d'ajuster les poids pour calibrer au mieux les paramètres dans les zones qui nous intéressent. Nous tiendrons ainsi compte des données en bordure de la nappe, en privilégiant toutefois la précision sur les résultats que nous exploiterons effectivement. A titre d'exemple, nous pourrions considérer une pondération décroissante avec l'éloignement des options par rapport à une option ATM. Là encore, il n'existe pas une unique manière de calibrer le modèle et il nous appartiendra de sélectionner la plus pertinente dans notre cas. Le choix est tout de même plus cadré que dans le modèle de Black & Scholes, car il consistera à choisir quelle portion de la surface de volatilité nous souhaitons reproduire le plus fidèlement.

Lors de la calibration du modèle de taux de change, nous nous sommes aperçus que le modèle de Heston calibré répliquait mal la nappe des prix des options FX dont nous disposons. Or, ce qui importe quant à ce processus est de déterminer s'il se situe au dessus ou en dessous des barrières de coupons et de lock-in. Conformément à ce que nous avons décrit précédemment, nous avons alors pondéré les termes de la fonction d'erreur afin d'être plus précis dans les régions de ces barrières, de valeurs 1,5 et 1,15. Nous appliquons une pondération cent fois supérieure aux termes d'erreurs sur les options dont le strike est égal à l'une de ces deux valeurs. Ceci a pour effet de dégrader légèrement l'adéquation des prix en formule fermée avec les prix observés sur les options de strike 1, mais cette valorisation est bien plus fiable sur le reste de la nappe de prix, en particulier dans les zones où la notion de franchissement de barrière est capitale.

Après avoir implémenté la fonction d'erreur, nous déterminons la valeur du vecteur λ^* à l'aide de la bibliothèque `R DEoptim` et en particulier de la fonction éponyme. Nous fixons les limites hautes et basses de chaque paramètre et recherchons le vecteur minimisant la valeur de la fonction d'erreur sur les intervalles spécifiés. Les résultats de la calibration sont présentés en tableau [5.1](#).

Nous pouvons formuler plusieurs observations sur les valeurs de ces paramètres. Les valeurs moyennes à long terme des processus de variance (paramètre θ) sont assez disparates, tout comme les vitesses de convergence en moyenne vers ces valeurs. La variance du CAC 40 tendra en moyenne vers des valeurs assez élevées (environ 80 %) mais avec une vitesse très faible. Celle du S&P 500 s'éloignera en moyenne assez peu de sa valeur initiale, mais atteindra

	κ^*	θ^*	ε^*	ν_0^*	ρ^*	Feller	MSE
CAC 40	0,023164	0,793605	0,409090	0,046863	-0,771015	Non	766,46
S&P 500	1,71694304	0,06545511	0,88286190	0,05104889	-0,81380356	Non	174,31
EUR/USD	16,972348	0,003371	1,999796	0,010000	0,214112	Non	1,04e-05

TABLE 5.1 – Paramètres calibrés des trois modèles de Heston

assez rapidement sa valeur long terme. Enfin, celle du taux de change EUR/USD est de l'ordre de dix fois inférieure à la variance initiale, elle-même étant déjà très faible, et la vitesse de convergence est environ 700 fois supérieure à la vitesse de convergence de la variance du CAC 40.

Les variances initiales sont assez faibles dans les trois cas. La borne inférieure de l'intervalle de recherche de ce paramètre était fixée à 0,01 pour des raisons d'intégrabilité lors du calcul du prix d'une option par formule fermée sur R. Ceci explique pourquoi la variance initiale déterminée pour le taux de change est exactement égale à 0,01. Sans cette contrainte, elle aurait pu être bien plus basse. Cependant, il faut considérer le faible écart entre les valeurs initiale et long terme de la variance du taux de change ainsi que sa vitesse de convergence extrêmement élevée ($\kappa^* = 16,97$). La variance à long terme du taux de change est atteinte presque immédiatement et le serait encore plus rapidement avec un variance initiale plus faible (donc plus proche de la variance à long terme). Cela réduit considérablement l'impact de la valeur de ν_0 .

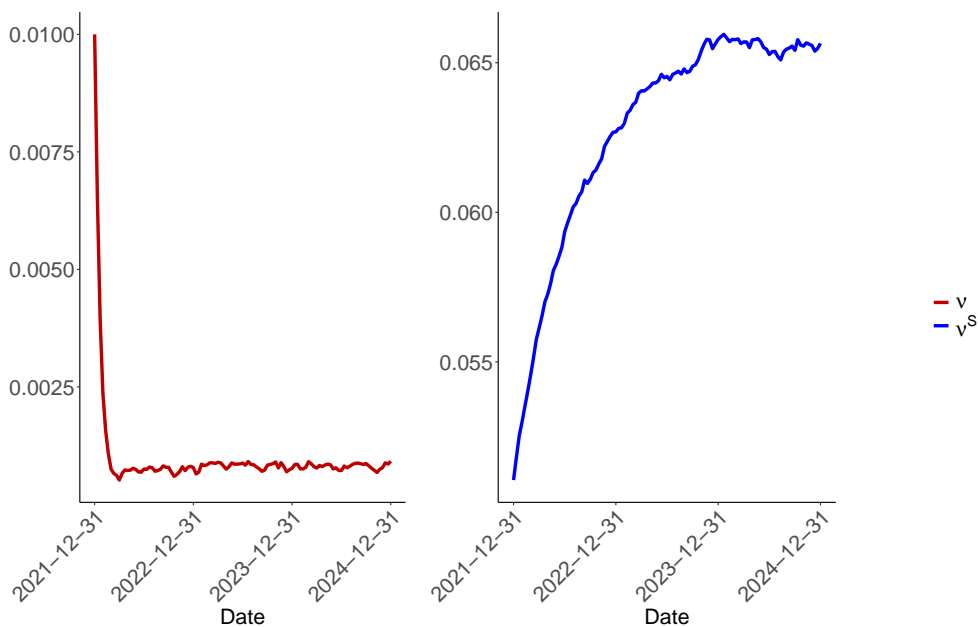


FIGURE 5.1 – Evolution des variances moyennes sur les trois premières années

La figure 5.1 illustre les valeurs moyennes des variances du taux de change (ν , en rouge) et du S&P 500 (ν^S , en bleu) sur les projections que nous avons réalisées. Si les deux processus s'éloignent bien en moyenne de leurs valeurs initiales pour se concentrer autour de leurs valeurs

long terme, nous voyons que ν converge bien plus vite que ν^S . Cela reflète la différence entre les vitesses de convergence κ et κ^C . En comparaison, la vitesse de convergence de la variance du CAC 40 étant très faible et la variance à long terme très éloignée de la variance initiale, le processus de variance ne finit pas de converger en moyenne en l'espace de neuf ans.

Finalement, la condition de Feller n'est respectée par aucun des trois vecteurs de paramètres. Nous verrons par la suite comment éviter simplement d'obtenir des variances négatives lors de nos différentes projections.

L'une des forces du modèle de Heston est de pouvoir reproduire entièrement la nappe de prix des actifs utilisés pour la calibration (ou la nappe de volatilité, de manière équivalente par définition de la volatilité implicite). Cela signifie que, pour valider simplement l'exactitude des paramètres calibrés, nous pouvons comparer les prix des options observés sur le marché et ceux obtenus grâce à la formule fermée de Heston (5.2). Nous sommes censés retrouver, à peu de choses près, les prix exacts.

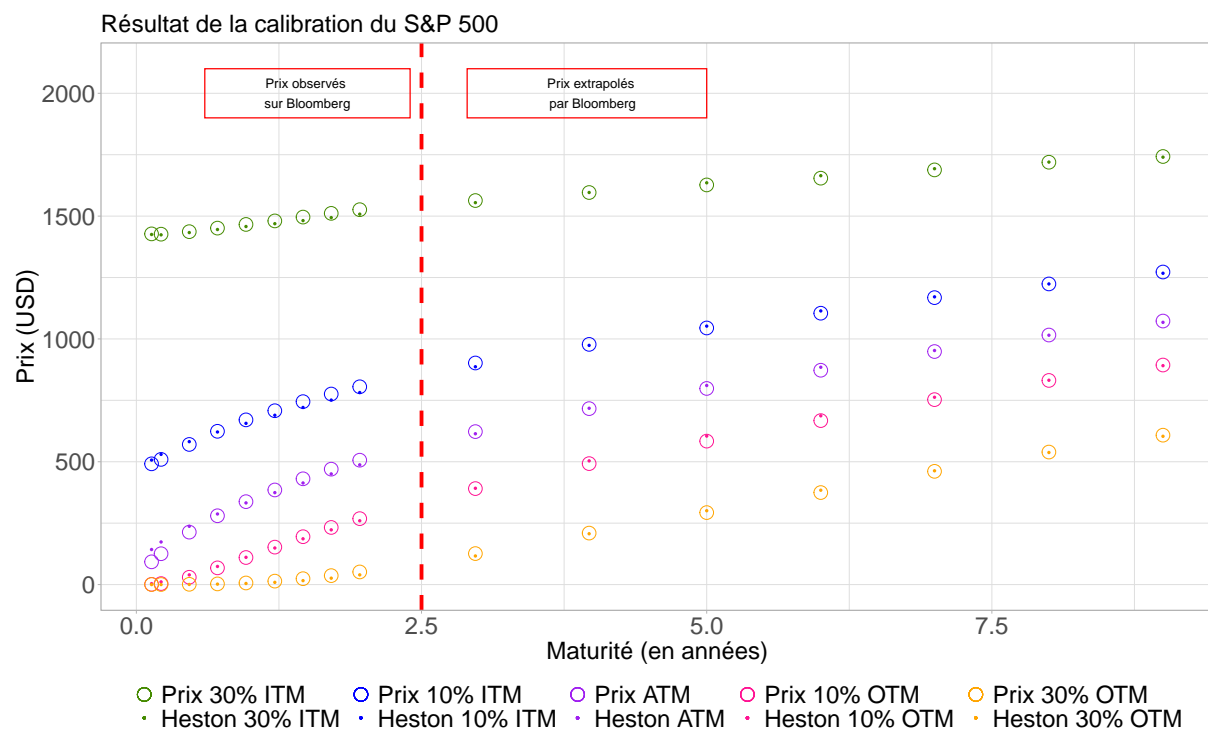


FIGURE 5.2 – Valorisation d'options d'achat sur le S&P 500 par formule de Heston VS prix observés

C'est ce que nous illustrons sur la figure 5.2, avec la comparaison des prix d'options sur le S&P500 obtenus par la formule de Heston et ceux observés sur le marché. Au vu de ce graphique et des MSE obtenus (table 5.1), nous pouvons conclure que le modèle est globalement bien optimisé. Il faut garder à l'esprit que nous avons sélectionné un certain nombre d'options pour calibrer notre modèle. Un autre jeu d'options auraient pu nous donner des paramètres légèrement différents, mais nous avons montré que notre paramétrisation est largement satisfaisante.

Nous constatons des écarts plus importants sur les prix des options de maturités très courtes. Cela correspond aux grandes déformations de la nappe de volatilité implicite constatées plus tôt, difficiles à reproduire exactement. Certains modèles introduisant une deuxième source d'aléa via un deuxième mouvement brownien et des paramètres supplémentaires pourraient réussir à reproduire plus fidèlement les déformations extrêmes de la nappe de volatilité, nous ne les aborderons pas dans le cadre de ce mémoire.

5.3 Simulation

Une fois les trois modèles de Heston calibrés, la méthode de Monte-Carlo doit nous permettre de valoriser le produit que nous avons décrit. Comme précédemment, nous devons procéder à une discrétisation du temps pour effectuer nos simulations.

Par rapport à la projection de processus de Black & Scholes, le modèle de Heston ajoute trois processus supplémentaires à modéliser : les variances des processus. De plus, ces trois nouveaux processus doivent impérativement rester positifs. Comme nous l'avons évoqué précédemment, le processus de variance risque de devenir négatif. L'usage de sa racine carrée pour l'évaluation du processus du taux de change se trouvera alors compromis. Il nous faudra trouver comment contrôler la valeur du processus de variance.

L'article d'[Andersen \(2006\)](#) détaille un certain nombre de méthodes de simulation pour le modèle de Heston ainsi que les différents points d'attention. Nous en présentons ici une synthèse.

5.3.1 Schéma d'Euler

Le premier schéma que nous considérons est le schéma d'Euler, dont nous avons déjà expliqué le principe dans le cadre du modèle de Black & Scholes ([section 4.4](#)). Nous considérons encore un pas de temps régulier δ .

Le schéma d'Euler appliqué au modèle de Black & Scholes ne posait pas de problème particulier. Le modèle de Heston apporte quelques subtilités qu'il convient d'éclaircir. Nous nous baserons pour cette explication sur les dynamiques du taux de change et de sa variance sous la mesure \mathbb{Q}^d .

Ces deux processus interagissent directement, la variance apparaissant dans le processus de taux de change et les mouvements browniens des deux processus sont corrélés. Dans le but de modéliser la dépendance ρ entre les deux mouvements browniens, nous introduisons $(B)_{t \geq 0}$, un mouvement brownien indépendant de W et nous construisons U comme combinaison linéaire de B et W :

$$U_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} B_t. \quad (5.4)$$

Il est facile de vérifier que U est bien un nouveau mouvement brownien et que son coefficient de corrélation instantanée avec W est ρ . Ces différents éléments permettent d'établir le schéma suivant :

$$\begin{cases} \ln(\hat{Y}_{t+\delta}) = \ln(\hat{Y}_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{1}{2} \hat{\nu}_t \delta + \sqrt{\hat{\nu}_t} \sqrt{\delta} \Phi_{W,t}, \\ \hat{\nu}_{t+\delta} = \hat{\nu}_t + \kappa(\theta - \hat{\nu}_t) \delta + \varepsilon \sqrt{\hat{\nu}_t} \sqrt{\delta} \left(\rho \Phi_{W,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi_{B,t} \right), \end{cases}$$

où $(\Phi_W)_{t=k\delta}^{\substack{t=k\delta \\ k \geq 0}}$ et $(\Phi_B)_{t=k\delta}^{\substack{t=k\delta \\ k \geq 0}}$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée réduite. Ce sont les suites de variables aléatoires servant à simuler les mouvements browniens $(W)_{t \geq 0}$ et $(B)_{t \geq 0}$ respectivement.

Si le processus de variance discrétisé venait à devenir négatif, la modélisation du taux de change serait impossible (nous devrions calculer la racine carrée d'un nombre négatif). Pour parer à cette éventualité, une première méthode que nous pourrions appliquer consiste simplement à borner la volatilité à zéro dans notre simulation. Plus exactement, lorsque le processus de variance prend une valeur négative, son pas suivant repart de cette valeur mais suit une trajectoire déterministe de drift $\kappa\theta$. Sa valeur dans la trajectoire du taux de change est remplacée par zéro, rendant le processus également déterministe sur le pas suivant. Nous notons donc $\hat{\nu}_t^+ = \max(\hat{\nu}_t, 0)$ pour obtenir un schéma d'Euler adapté :

$$\begin{cases} \ln(\hat{Y}_{t+\delta}) = \ln(\hat{Y}_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{1}{2} \hat{\nu}_t^+ \delta + \sqrt{\hat{\nu}_t^+} \sqrt{\delta} \Phi_{W,t}, \\ \hat{\nu}_{t+\delta} = \hat{\nu}_t + \kappa(\theta - \hat{\nu}_t^+) \delta + \varepsilon \sqrt{\hat{\nu}_t^+} \sqrt{\delta} \left(\rho \Phi_{W,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi_{B,t} \right). \end{cases} \quad (5.5)$$

Ce schéma relativement simple introduit un biais en modifiant la trajectoire du processus de variance si celui-ci devient négatif. Dans certains cas bien particuliers, le modèle de Kahl-Jackel pourra être une alternative intéressante.

5.3.2 Schéma de Kahl-Jackel

[Andersen \(2006\)](#) propose une alternative avec la méthode de Kahl-Jackel, une discrétisation fondée sur le schéma de Milstein.

$$\begin{cases} \ln(\hat{Y}_{t+\delta}) = \ln(\hat{Y}_t) + \int_t^{t+\delta} (r_s^d - r_s^e) ds - \frac{1}{4} \delta (\hat{\nu}_{t+\delta} + \hat{\nu}_t) + \rho \sqrt{\hat{\nu}_t} \Phi_{W,t} \sqrt{\delta} \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\hat{\nu}_{t+\delta}} + \sqrt{\hat{\nu}_t} \right) \left(\Phi_{W,t} \sqrt{\delta} - \rho \Phi_{B,t} \sqrt{\delta} \right) + \frac{1}{4} \varepsilon \rho \delta \left(\left(\rho \Phi_{W,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi_{B,t} \right)^2 - 1 \right), \\ \hat{\nu}_{t+\delta} = \hat{\nu}_t + \kappa(\theta - \hat{\nu}_t) \delta + \varepsilon \sqrt{\hat{\nu}_t} \sqrt{\delta} \left(\rho \Phi_{W,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi_{B,t} \right) \\ \quad + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \delta \left(\left(\rho \Phi_{W,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi_{B,t} \right)^2 - 1 \right). \end{cases} \quad (5.6)$$

Dans ce schéma, il existe une condition permettant de garantir que le processus de variance discrétisée reste positif, semblable à la condition de Feller : $4\frac{\theta_K}{\varepsilon^2} \geq 1$. En pratique, nous avons montré que cette condition n'est pas plus vérifiée que la condition de Feller, pour aucun des trois vecteurs de paramètres calibrés. Dans ce cas, si le processus de variance devient négatif, Andersen (2006) préconise de réaliser le pas suivant en utilisant l'adaptation de la méthode d'Euler décrite précédemment.

Cependant, cette méthode perd alors de son intérêt. Nous ne la retenons donc pas pour notre étude.

Il existe d'autres schémas, plus complexes, dont le lecteur intéressé trouvera une description dans les travaux d'Andersen (2006).

5.4 Implémentation

5.4.1 Validation des projections

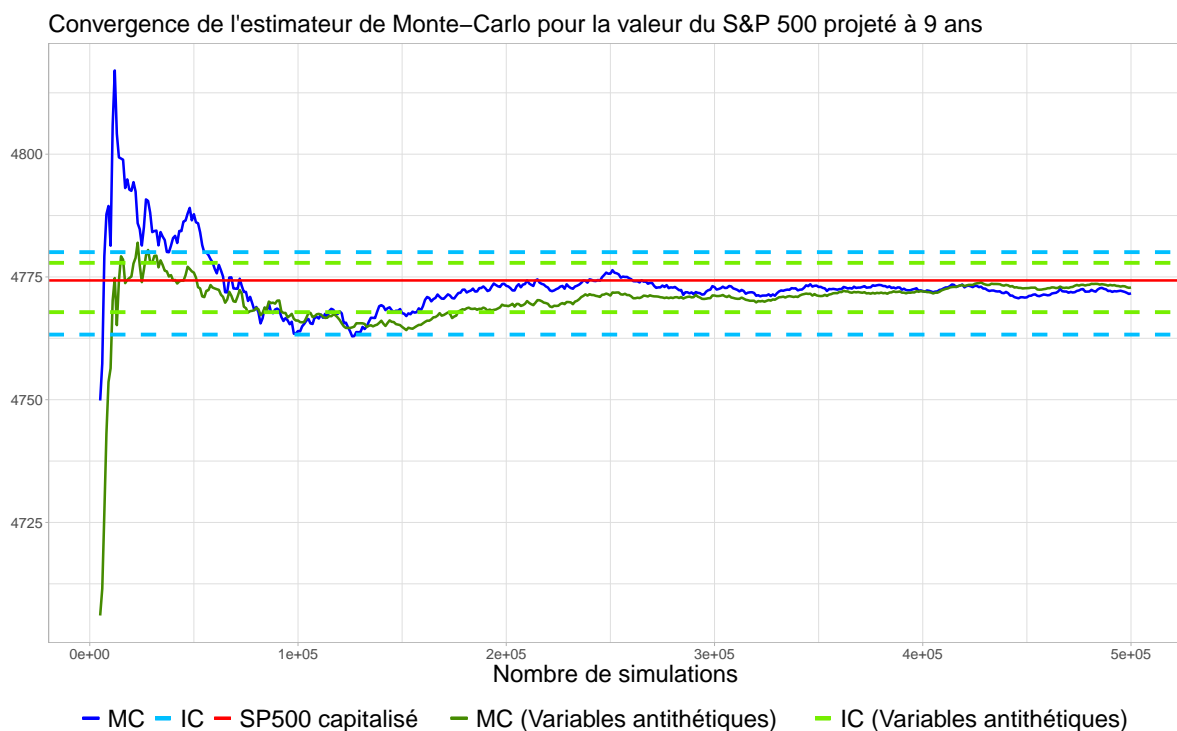


FIGURE 5.3 – Convergence de l'estimation du S&P 500 à maturité 9 ans avec et sans réduction de variance

La figure 5.3 illustre la convergence de l'estimateur de Monte Carlo pour la valeur du S&P 500 projetée à neuf ans, jusqu'à 500 000 simulations. Nous comparons les valeurs obtenues par la méthode de Monte Carlo classique et par la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance par variables antithétiques avec la valeur du S&P 500 au 31/12/2021 capitalisée au

taux USD sans risque à neuf ans, en tenant compte des dividendes versés.

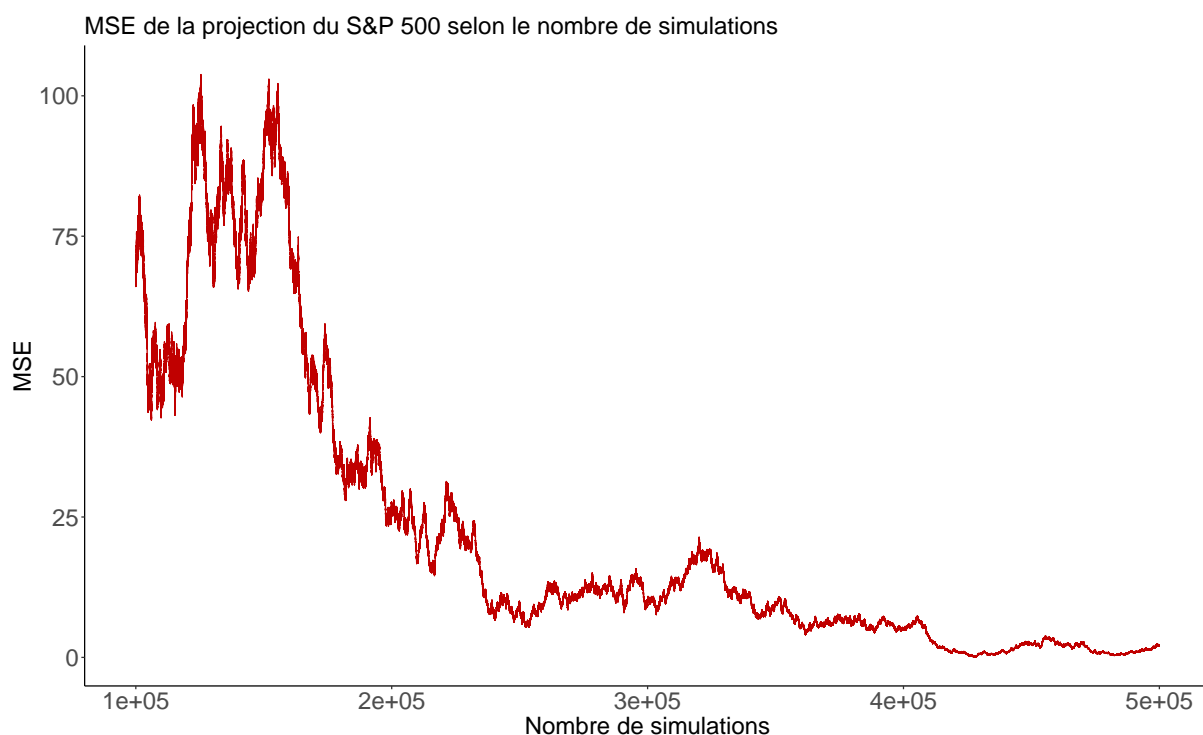


FIGURE 5.4 – Evolution du MSE pour l'estimation de Monte Carlo du S&P 500 projeté à 9 ans

Nous observons sur ce graphique que l'intervalle de confiance au seuil de risque de 5% pour 500 000 simulations est effectivement plus faible dans le cas de la méthode de Monte Carlo avec réduction de variance. De plus, la valeur capitalisée du S&P 500 sous la mesure de probabilité risque-neutre associée à l'USD appartient bien à cet intervalle de confiance. Ceci est un premier indicateur de la qualité de notre simulation. La figure 5.4 illustre la convergence vers zéro de la MSE de cette estimation de Monte-Carlo avec réduction de variance. Pour des raisons de lisibilité, nous commençons le graphique à 100 000 simulations.

Afin de s'assurer de la qualité globale de la projection, nous reprenons les prix donnés par la formule fermée du modèle de Heston pour les options utilisées lors de la calibration, afin de les comparer avec les prix obtenus pour ces mêmes options via la méthode de Monte Carlo. En effet, avant d'utiliser cette méthode pour la valorisation d'un produit pour lequel nous ne possédons pas de formule fermée, il convient de valider notre méthode de projection grâce à un produit dérivé plus simple tel que les options.

Pour ce faire, nous réalisons à nouveau 500 000 projections de la valeur du S&P 500, mais cette fois pour les seize maturités considérées. Nous calculons ensuite le payoff actualisé de chacune de ces options selon le strike et le taux d'actualisation indiqués, avant de déterminer les prix Monte Carlo par moyenne empirique sur les 500 000 simulations. La figure 5.5 illustre cette comparaison pour les options sur le S&P 500.

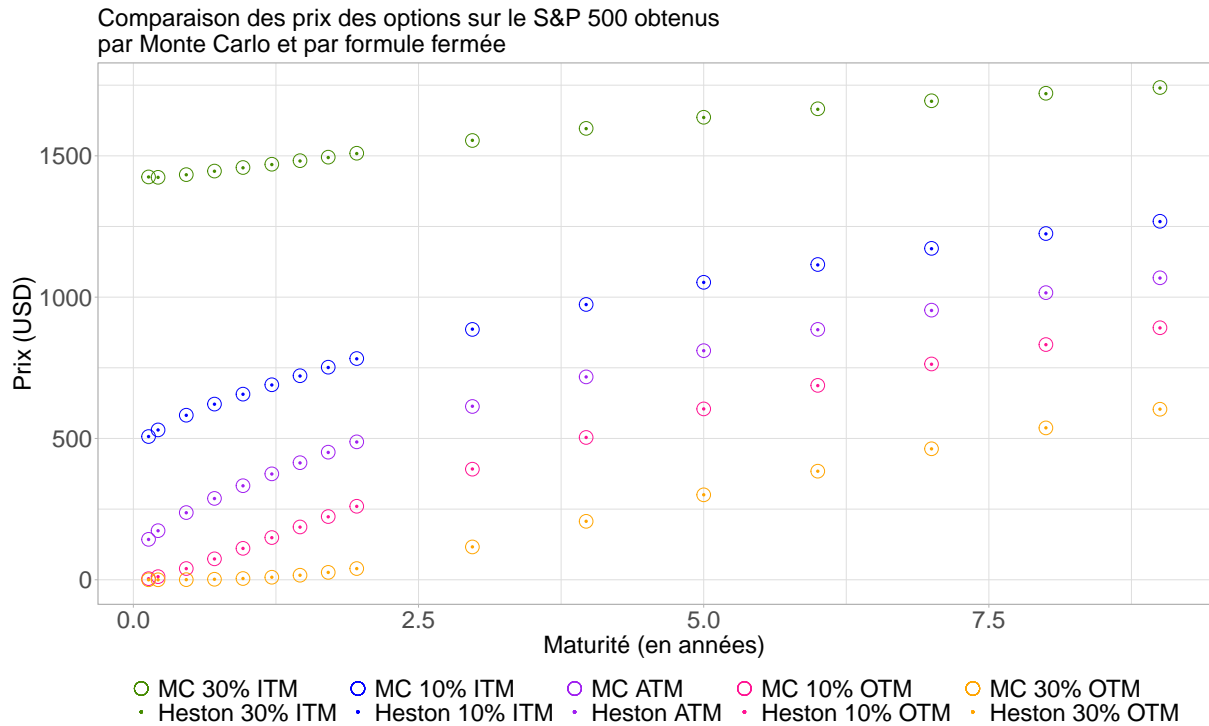


FIGURE 5.5 – Valorisation d’options d’achat sur le S&P 500 par formule fermée VS par Monte Carlo

Graphiquement, nous constatons que notre projection est très satisfaisante car la valorisation des calls par Monte Carlo coïncide parfaitement avec la valorisation par formule fermée, quel que soit le strike ou la maturité. Nous répétons cette opération avec les options d’achat sur le CAC 40 et avec les options FX pour nous assurer de la qualité de l’intégralité des projections.

La figure 5.6 illustre quant à elle la convergence de l’estimateur de Monte Carlo du prix d’une option sur le S&P 500. Le prix est relativement stable à partir de 300 000 simulations. Nous avons également indiqué, en pointillés, l’intervalle de confiance à 95% du prix après 500 000 simulations, dont la largeur est de l’ordre de quelques euros seulement.

Nous allons maintenant pouvoir projeter tous les processus simultanément, en prenant en compte les dépendances entre les différents mouvements browniens pour étudier le comportement de notre produit structuré.

5.4.2 Décomposition de Cholesky

La méthode de la décomposition de Cholesky pour la simulation de processus corrélés, que nous avons présentée dans le cadre du modèle de Black & Scholes, reste valable dans le cadre de Heston.

Cette fois, ce ne sont pas trois mais six processus que nous devons projeter simultanément. Pour rappel, les six mouvements browniens que nous simulons sont corrélés de la manière détaillée en section 2.3, pour un total de huit coefficients de corrélation à déterminer. Comme

Convergence de l'estimateur de Monte-Carlo du prix d'un call sur le S&P 500
 T = 31/12/2026 ; K = 4 294,98 (10% ITM)



FIGURE 5.6 – Convergence de l’estimateur de Monte Carlo avec réduction de variance pour le prix d’une option sur le S&P 500

nous l’avons expliqué, nous supposons les variances respectives du CAC 40 et du S&P 500 indépendantes du taux de change. Cela nous donne immédiatement les valeurs de deux coefficients de corrélation : $\bar{\rho}^S = \bar{\rho}^C = 0$.

Les coefficients ρ , ρ^S et ρ^C font partie des vecteurs de paramètres du modèle de Heston. Ils ont été estimés lors de la calibration, dont les résultats ont été donnés en [tableau 5.1](#).

Finalement, les coefficients de corrélation entre les processus financiers eux-même ont été déterminés dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Le [tableau 5.2](#) récapitule ainsi les valeurs de coefficients nous permettant d’alimenter la matrice de variance-covariance :

Nous adaptons la méthode de Cholesky détaillée en [section 4.6](#) à une projection en dimension six. Le vecteur gaussien à projeter devient :

$$X_t = (W_t, U_t, W_t^S, U_t^S, W_t^C, U_t^C) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

avec

$$\mu = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \tilde{\rho}^S & 0 & \tilde{\rho}^C & 0 \\ \rho & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\rho}^S & 0 & 1 & \rho^S & \rho^{SC} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^S & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\rho}^C & 0 & \rho^{SC} & 0 & 1 & \rho^C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^C & 1 \end{pmatrix}.$$

Mouvements Browniens		Coefficient	Valeur
W	W^C	$\tilde{\rho}^C$	0,049
W	W^S	$\tilde{\rho}^S$	0,101
W^C	W^S	ρ^{SC}	0,585
W	U	ρ	0,049
W^S	U^S	ρ^S	0,101
W^C	U^C	ρ^C	0,585
W	U^S	$\bar{\rho}^S$	0
W	U^C	$\bar{\rho}^C$	0

TABLE 5.2 – Corrélations entre les différents mouvements browniens

La projection à l'aide de la décomposition de Cholesky se faisant grâce à la simulation de six variables gaussiennes indépendantes.

Nous procédons de la même manière que précédemment pour évaluer les conditions de versement des différents flux financiers, en mettant en oeuvre la méthode des variables antithétiques afin d'augmenter la précision de nos résultats.

5.4.3 Résultats dans le cadre du modèle de Heston

Nous obtenons alors le prix suivant, avec l'intervalle de confiance à 95% associé :

$$\text{Prix} = 130\,856,80 \pm 117,66 \text{ €}.$$

Il est à noter que les prix estimés avec le modèle de diffusion de Black & Scholes sont relativement proches de ce prix, avec un écart de plus ou moins 9 000 € (soit $\pm 7\%$) selon que l'on considère la calibration sur les données historiques ou implicites. Bien que Black & Scholes ne soit pas envisageable pour valoriser précisément le produit structuré, son utilisation peut permettre d'estimer rapidement l'ordre de grandeur du prix attendu.

Nous observons en figure 5.7 les densités de la somme des flux actualisés en EUR sous les mesures Q^e et Q^d . Comme dans le modèle de Black & Scholes, la densité de cette quantité en univers risque-neutre USD a une forme similaire à celle obtenue en monde risque-neutre EUR. Elle est cependant plus dispersée en raison de l'incertitude liée au risque de change.

Comme nous l'avons indiqué, ce prix n'indique que l'espérance des cash flows actualisés du produit. Qu'en est-il de la distribution des valeurs prises par le produit ??

Nous avons tracé la densité de la somme des flux actualisés. Pour évaluer la distribution des gains, nous retranchons à chaque simulation l'espérance de cette somme de flux actualisés. Cela revient à retrancher le coût du produit de la somme perçue pour chaque simulation. Si la différence est positive, l'investisseur réalise un gain. Dans le cas contraire, il réalise une perte. Nous considérons dans la suite qu'une perte est un gain négatif. La figure 5.8 représente la

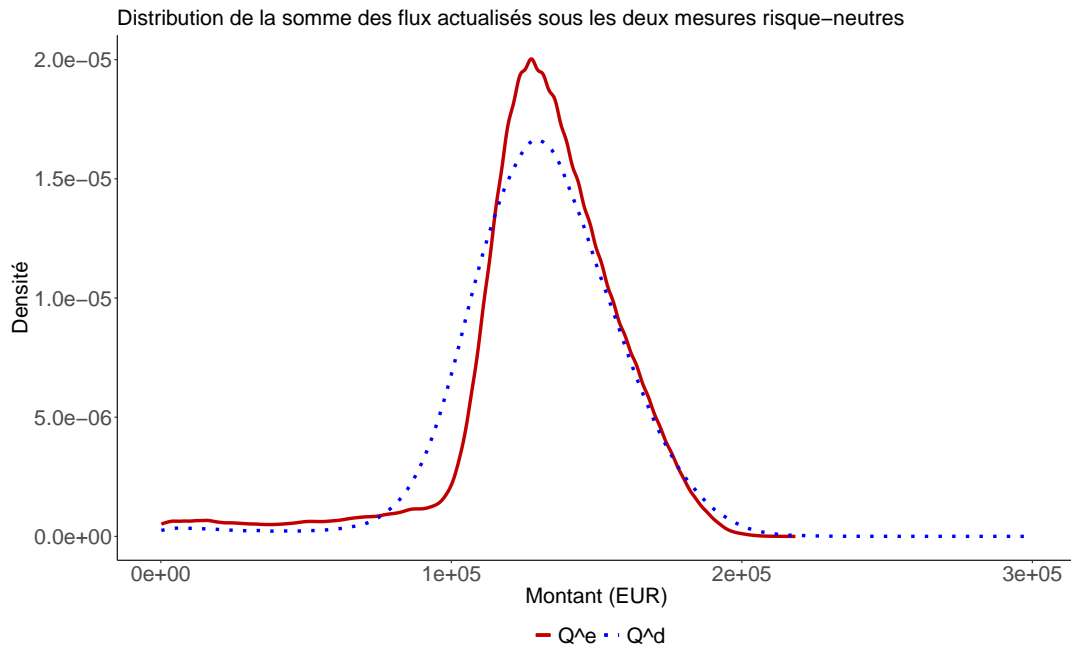


FIGURE 5.7 – Densité de la somme des flux financiers actualisés sous les mesures \mathbb{Q}^e et \mathbb{Q}^d

densité du gain si l'investisseur paye le prix que nous avons estimé.

Nous observons une densité asymétrique des résultats. Le gain médian est positif et se situe à 759 €. Il est donc plus probable de réaliser un gain (55,19 % des cas) plutôt qu'une perte en ayant payé le prix donné par notre estimation.

Dans un souci de maîtrise du risque de pertes associé au produit, nous avons à notre disposition plusieurs métriques permettant de mesurer ce risque. La Value at Risk au seuil de confiance α (VaR_α) est définie comme le montant de perte ne pouvant être dépassé qu'avec une probabilité $1 - \alpha$. Dans le cadre prudentiel européen, la VaR est un outil de mesure des risques extrêmes largement utilisé. Un seuil de risque communément utilisé est la VaR à 99,5% ($VaR_{99,5\%}$). En notant X la variable aléatoire représentant la perte, l'expression mathématique de la VaR est la suivante :

$$VaR_\alpha = \inf \{x, \mathbb{P}(X > x) < \alpha\}$$

Nous pouvons également décrire ce qui se passe dans 0,5% des pires cas, c'est à dire quand la perte dépasse la $VaR_{99,5\%}$, grâce à la Tail Value at Risk (TVaR). La TVaR est utilisée notamment dans le référentiel prudentiel suisse. Cette mesure de risque décrit l'espérance de la perte sachant que celle-ci est supérieure à la VaR. Mathématiquement, elle s'exprime ainsi :

$$TVaR_\alpha = \mathbb{E} [X | X > VaR_\alpha]$$

$VaR_{99,5\%}$	$TVaR_{99,5\%}$
- 122 842 €	- 128 477 €

Cette $VaR_{99,5\%}$ est représentée sur la figure 5.8 sous la forme du quantile 0,5% de la distribution du gain, de même que la $TVaR_{99,5\%}$, représentée par l'aire en bleue à gauche de la Value at Risk. L'interprétation que nous pouvons en donner est la suivante : Dans 99,5% des cas, l'investisseur perdra moins de 122 842 €. Dans les 0,5% pires cas (les scénarios dans lesquels l'investisseur perd plus que cette somme) il perdra en moyenne 128 477 €. Sachant que la perte maximale est égale au prix du produit (130 857 €), la $TVaR_{99,5\%}$ correspond à une perte quasi totale du capital investi.

A l'inverse, dans 99,5 % des cas, le gain de l'investisseur sera limité à 56 892 €. De plus, sachant que l'on enregistre un gain, le montant moyen de celui-ci s'élève à 18 106 € contre une perte moyenne de 22 303 € sachant que l'investisseur enregistre une perte. Intuitivement, les faibles gains potentiels s'expliquent notamment par les taux de coupons limités à 4%.

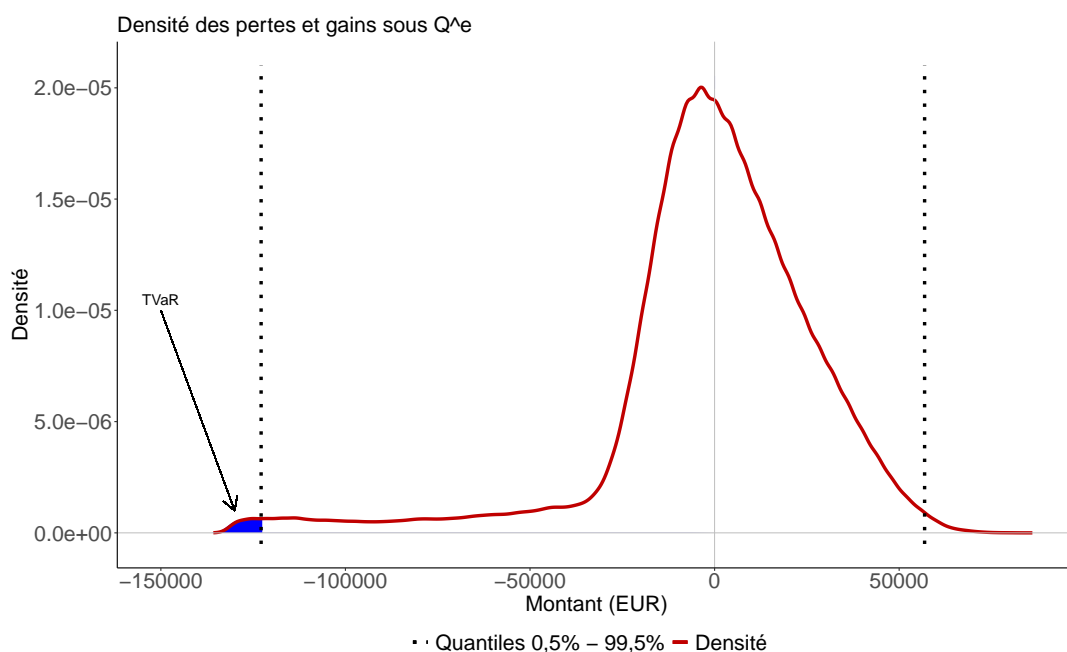


FIGURE 5.8 – Distribution du gain

Ainsi, ce produit est à double tranchant : la probabilité d'un gain est plus élevée que la probabilité de perte, mais l'intensité potentielle d'une perte est plus élevée que celle d'un gain. Le tableau suivant récapitule les principaux quantiles du résultat.

	50%	759 €		
40%	- 3 308 €		60%	8 474 €
25%	- 11 323 €		75%	16 767 €
5%	- 53 497€		95%	40 779 €
1%	- 116 873 €		99%	52 874 €
0,5%	- 122 842 €		99,5%	56 892 €

La distribution des pertes que nous avons donnée par rapport au prix trouvé en absence

d'opportunité d'arbitrage est sujette à discussion. Dans la partie qui suit, nous en proposons une analyse approfondie.

5.5 Analyse

Nous allons analyser les différentes composantes de ce produit structuré afin d'en identifier les forces et les faiblesses. Nous réaliserons ensuite une étude de sensibilité pour quantifier les impacts de différentes variables explicatives sur le prix du produit et la distribution des pertes. S'il nous arrivera d'évoquer l'univers risque-neutre USD pour illustrer les différences avec l'univers risque-neutre EUR en terme de projection, gardons à l'esprit que c'est bien dans ce dernier que nous réalisons notre étude et donc notre analyse.

5.5.1 Décomposition des flux financiers

Analysons à présent les composantes de ce prix. Les flux financiers générés par le produit sont soit des détachements de coupons, soit le remboursement du nominal. Pour rappel, le remboursement de nominal peut avoir deux origines. D'une part, il peut s'agir de l'option lock-in qui a été déclenchée par un constat du taux de change EUR/USD en dessous de la barrière lock-in (1,15) lors d'une date d'évaluation entre les trimestres 12 et 35. D'autre part, si l'option lock-in n'a pas été déclenchée, le niveau de ce même taux de change à la maturité du produit peut donner lieu à un remboursement du nominal total (s'il est inférieur à 1,6) ou partiel (s'il est compris entre 1,6 et 2,1).

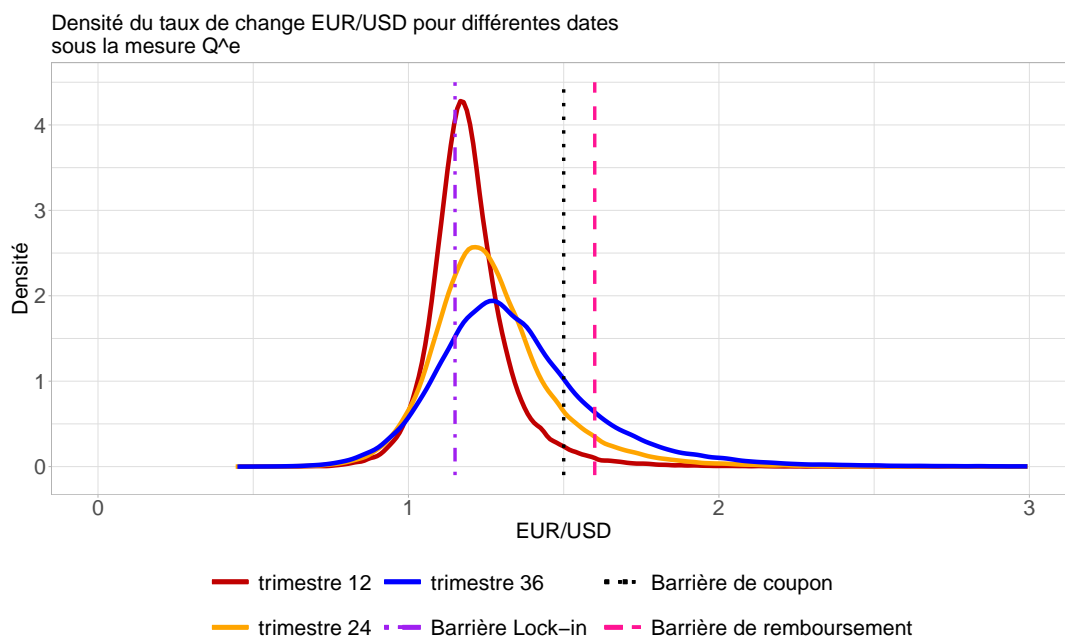


FIGURE 5.9 – Taux de change EUR/USD projeté pour différentes maturités sous la mesure Q^e

Nous séparons donc ce produit en trois instruments bien distincts (A, B et C) :

- A) Le premier instrument verse des coupons trimestriels sur un nominal de 100 000 €, dont le taux est donné par la performance du CAC 40 relativement à celle du S&P 500 sur le trimestre écoulé. Le taux de coupon est capé à 4%, flooré à 0% et son versement est conditionné à un taux de change inférieure à 1,5 à la date de versement.
- B) Le second est une option lock-in : le nominal de 100 000 € est versé à la maturité (31/12/2030) si le taux de change constaté à la fin de l'un des trimestres 12 à 35 de la vie du produit (du 31/12/2024 au 30/09/2030) est inférieur à 1,15.
- C) Enfin, le dernier instrument financier composant notre produit structuré verse un nominal de 100 000 € au 31/12/2030 si le taux de change EUR/USD à cette date est inférieur à 1,6. Dans le cas contraire, seule une proportion R (pouvant être nulle si le taux de change est supérieur à 2,1) du nominal est versée, selon la formule suivante :

$$R = 100\% - 200\% \times \min(\max(\text{EUR/USD} - 1,6; 0); 0,5)$$

Ces trois instruments dépendent du niveau du taux de change à différentes dates. Les projections du taux de change sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^e permettent d'étudier la diffusion de ce processus, en particulier les densités de probabilités de la valeur du taux de change à différentes dates. C'est l'objet de la figure 5.9, qui illustre les densités empiriques des valeurs du taux de change aux 31/12/2024, 31/12/2027 et 31/12/2030 (dernière échéance du produit). Afin d'avoir une vue d'ensemble du produit, nous avons placé sur le graphique les trois barrières intervenant dans le produit structuré. Nous observons tout d'abord que la densité du taux de change s'étale en se décalant vers des valeurs de plus en plus élevées avec le temps. Le taux de change augmente en moyenne avec le temps (1,35 au 31/12/2030 sous la mesure \mathbb{Q}^e , contre 1,137 à la date d'évaluation), mais il subsiste une probabilité relativement importante qu'il reste en dessous des différentes barrières d'intérêt aux dates concernées.

5.5.1.1 Produit A : Coupons

Nous commencerons par analyser le comportement du produit A, versant des coupons. La figure 5.10 illustre la probabilité de versement du coupon pour chaque date de détachement jusqu'à la maturité du produit, et pour chacune des deux mesures de probabilités risque-neutres.

Nous constatons d'abord que la probabilité qu'un coupon soit détaché (c'est-à-dire que le taux de change soit inférieur à 1,5) diminue avec le temps, quelle que soit la mesure sous laquelle nous effectuons notre projection. Cette allure est assez logique : la valeur initiale du taux de change (1,137) est inférieure à la barrière de coupon, donc les premiers coupons ont de grandes chances d'être versés. Plus le temps passe et plus le taux de change a de chances d'être au-dessus de la barrière à une date d'évaluation, et donc moins grande est la probabilité de détachement du coupon. Cette probabilité reste tout de même assez élevée, du fait de la valeur élevée de la barrière de coupon et de la faible volatilité du taux de change EUR/USD. Pour rappel, la volatilité initiale du taux de change EUR/USD est égale à 0,01 et sa volatilité à long terme est encore inférieure.

Cependant, les probabilités de versement des coupons ne sont pas identiques selon la mesure utilisée pour la projection risque-neutre. Une tendance se dessine nettement au fur et à

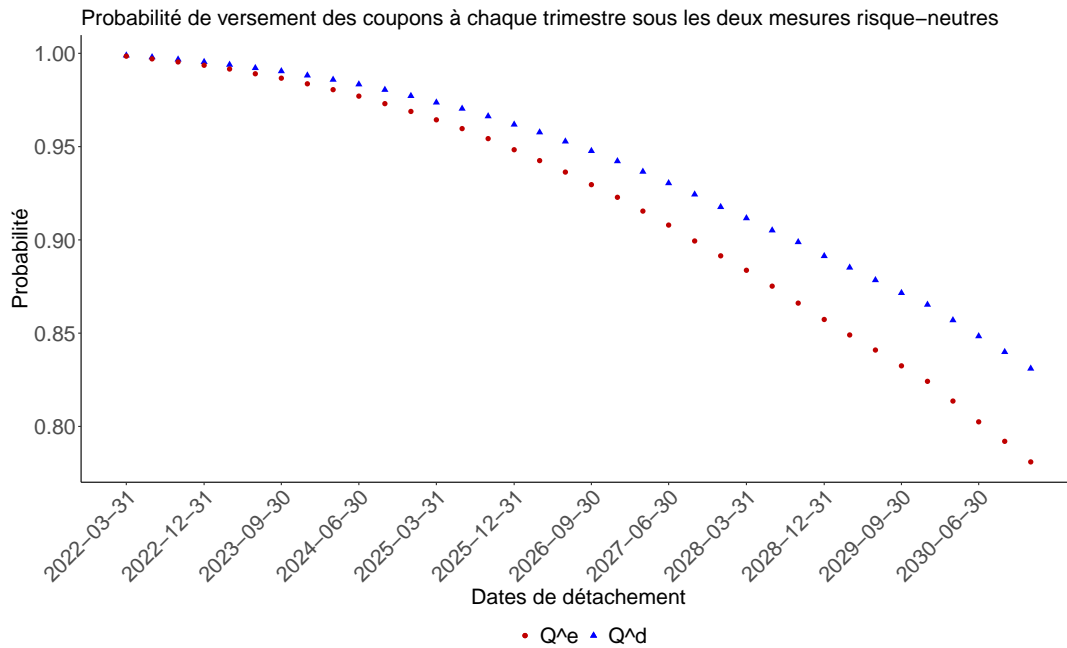


FIGURE 5.10 – Probabilité de détachement de chaque coupon

mesure des dates des détachement : la probabilité que le taux de change soit inférieur à 1,5 dans l'univers risque-neutre associé à l'USD est supérieure à cette même probabilité dans l'univers risque neutre associée à l'EUR. En se référant à la synthèse théorique de ce mémoire (section 2.3), nous obtenons l'explication de ce phénomène. Sous la mesure Q^e , le drift du taux de change est corrigé par une quantité additive positive. La figure 5.11 illustre ce décalage : la densité du taux de change projeté à neuf ans depuis la date d'évaluation sous la mesure Q^e est décalée vers la droite par rapport à la densité projetée sous Q^d , en raison de la présence du terme d'ajustement quanto sous la mesure Q^e .

Cette modification implique logiquement que le taux de change a plus de chance de passer au dessus de la barrière de coupon lorsque l'on considère sa projection sous la mesure Q^e . Ainsi, les coupons ont moins de chance d'être versés et la somme des flux actualisés diminue, augmentant la densité de cette somme dans la zone proche de zéro, comme nous l'avons observé sur la figure 5.7.

Nous délaissions à présent notre projection sous la mesure Q^d pour mener notre analyse dans l'univers risque-neutre associé à l'EUR.

Intéressons-nous maintenant au montant de ces coupons. Pour rappel, les taux de coupons sont floorés à 0% et capés à 4%. Nous présentons les distributions des taux de coupons observés pour différentes dates de détachement tout au long de la vie du produit sur la figure 5.12. La première observation que nous pouvons faire est que la quasi totalité des taux de coupon constatés vaut soit 0% soit 4%, en raison des limites imposées par le produit. Nous ne trouvons quasiment aucun taux de coupon entre ces deux valeurs.

Globalement, les taux de coupons versés sont plus proches de 0%. Rappelons que la pro-

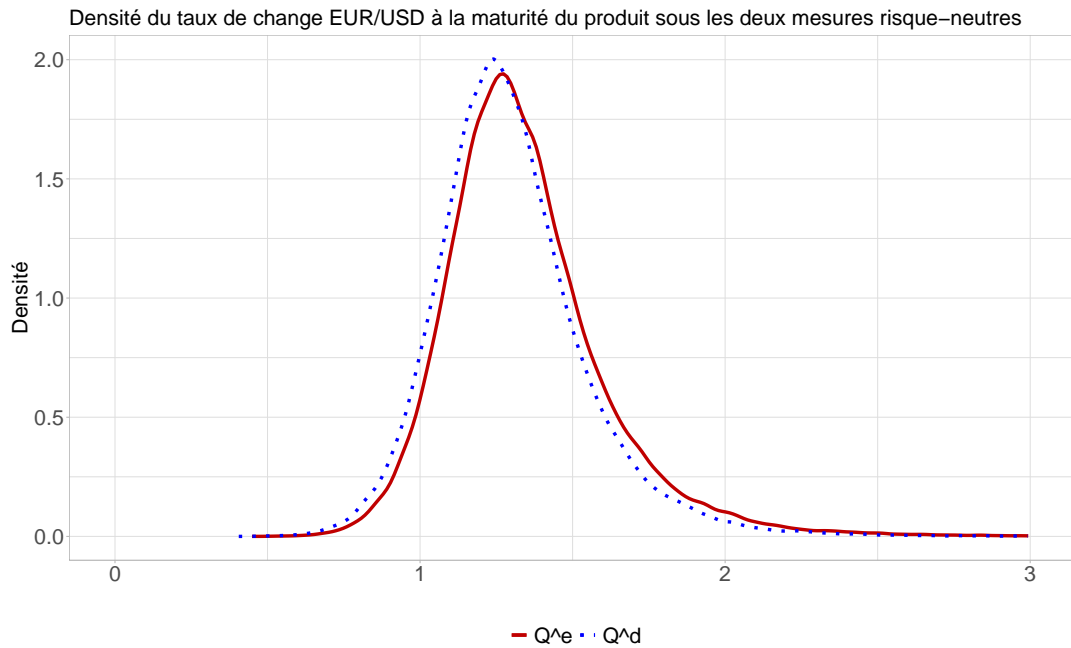


FIGURE 5.11 – Densité du taux de change au 31/12/2030 sous les deux mesures risque-neutres

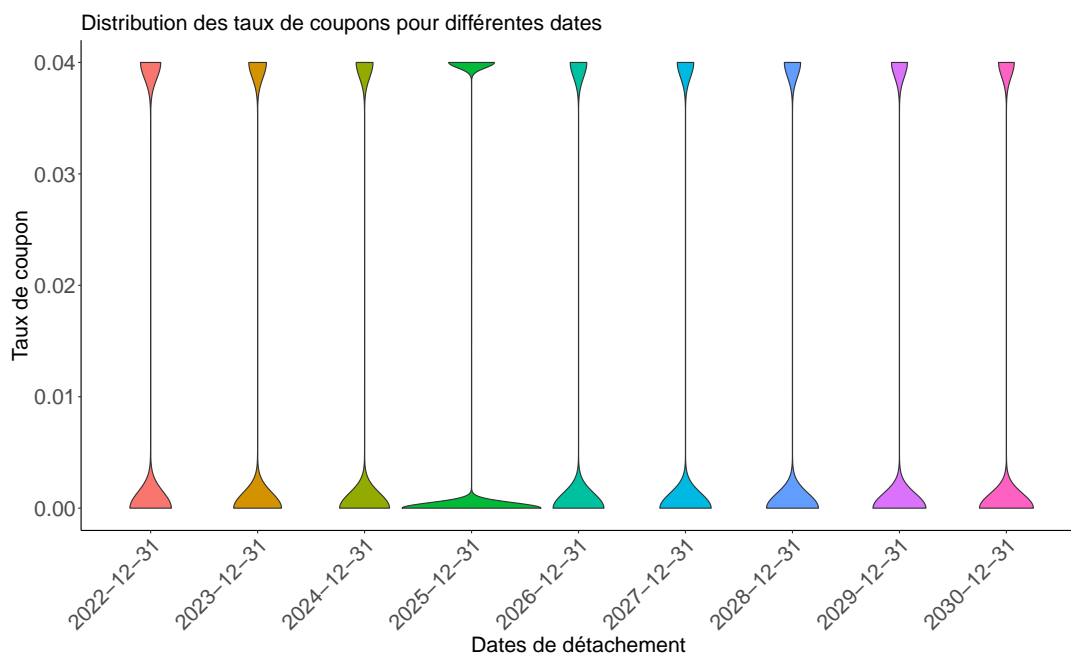


FIGURE 5.12 – Taux de coupon projetés pour différentes maturités sous la mesure Q^e

jection se fait sous la mesure Q^e , sous laquelle le drift du S&P 500 est corrigé par une quantité additive positive. Nous augmentons donc en moyenne la performance du S&P 500 par rapport à la mesure Q^d , alors que celle du CAC 40 reste la même. Dans les cas où les deux performances sont positives, celle du CAC 40 est ainsi pénalisée par rapport à celle du S&P 500 du fait de cette correction quanto. A l'inverse, si les deux performances sont négatives, l'ajustement quanto augmente la probabilité d'obtenir un taux de coupon positif. Finalement, même

avec une probabilité de détachement supérieure à 75% pour chaque date d'évaluation, les montants de coupons attendus sont majoritairement nuls. Il est à noter que ces taux de coupons sont similaires sous la mesure de probabilité \mathbb{Q}^d . Cette fois, le drift du S&P n'est pas augmenté, mais c'est celui du CAC 40 qui est diminué.

Nous évaluons le prix de cet instrument financier par estimation de l'espérance de la somme des flux actualisés sous la mesure \mathbb{Q}^e : 36 337 €. Sachant que le produit peut verser jusqu'à trente-six coupons de 4 000 € chacun pour un total de 144 000 €, ce prix semble faible. Cependant, il s'explique par les faibles taux de coupons attendus.

5.5.1.2 Produit B : Option lock-in

Le produit B, l'option lock-in, donne lieu à un unique versement à la maturité du produit, si le taux de change constaté à une date de versement de coupon entre le 31/12/2024 et le 30/09/2030 est inférieur à 1,15. D'après nos simulations, l'option lock-in est déclenchée avec une probabilité de 52,83 %, sous la mesure \mathbb{Q}^e , contre 58,39 % sous la mesure \mathbb{Q}^d . Cette différence s'explique par la correction de drift quanto subie par le drift de taux de change lorsqu'il est projeté sous la mesure \mathbb{Q}^e , de la même manière que pour les probabilités de détachement de coupons.

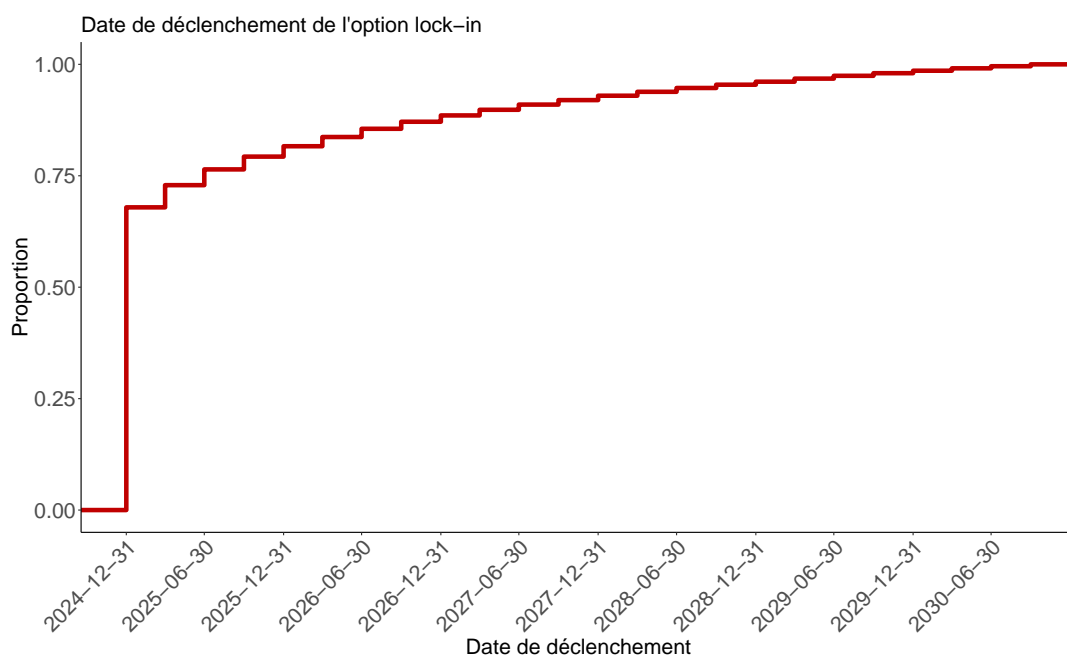


FIGURE 5.13 – Dates de déclenchement de l'option lock-in sous la mesure \mathbb{Q}^e

Ainsi, le prix de l'option lock-in seule est de 52 549 €. Nous pouvons observer en figure [5.13](#) la répartition des dates auxquelles l'option est déclenchée sous la mesure \mathbb{Q}^e . Dans les cas où l'on observe un taux de change inférieur à 1,15 à une date d'évaluation, cela se produit en majorité juste après la fin de la période de franchise (31/12/2024). Cela indique que le taux de change était certainement déjà inférieur à la barrière lock-in avant cette date. Néanmoins, le

remboursement peut toujours être déclenchée par la suite, dans une moindre mesure.

5.5.1.3 Produit C : Barrière de remboursement

Enfin, le produit C donne également lieu à un unique versement au 31/12/2030, limité à 100 000 €. La condition pour le versement intégral de cette somme (le taux de change EUR/USD au 31/12/2030 doit être inférieur à 1,6) est très fréquemment vérifiée, avec une probabilité de 85,99 %. Dans le cas où le taux de change à maturité est supérieur à cette barrière et pour une valeur allant jusqu'à 2,1, le produit donne tout de même lieu à un versement partiel du nominal. Le taux de remboursement moyen observé est de 94,20 %. Ainsi, le prix de ce produit seul s'élève à 93 697 €. En comparaison avec le montant du flux financier, ce prix semble assez élevé. La figure 5.14 nous permet de comprendre pourquoi. En effet, le taux de remboursement est bien souvent proche de 100%, le taux de change au 31/12/2030 n'ayant que peu de chances d'être supérieur à 1,6. Dans les rares cas où cela arrive, ce dépassement n'est généralement pas assez important pour annuler totalement le remboursement partiel. Cela explique le prix élevé de ce produit.

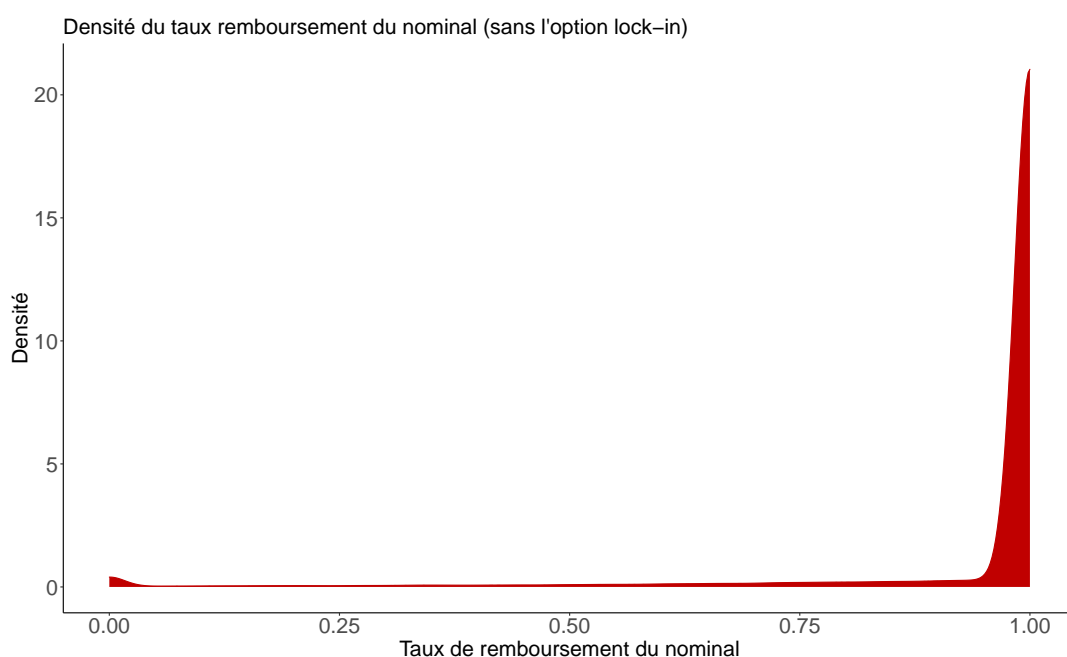


FIGURE 5.14 – Taux de remboursement dû au produit (C) sous la mesure Q^e

Ainsi, une grande partie du prix du produit structuré est expliquée par la valeur élevée de la composante ne dépendant que de la valeur finale du taux de change EUR/USD. L'option lock-in jouera un rôle complémentaire dans le remboursement de ce capital, pouvant rehausser le taux de remboursement à 100% si la barrière lock-in est atteinte au long des six dernières années de vie du produit. Enfin, bien que la condition de détachement des coupons soit souvent vérifiée, les faibles taux de coupons projetés et le fait qu'ils soient limités à 4% expliquent que ce mécanisme participe dans une moindre mesure au prix final du produit structuré.

Le tableau 5.3 récapitule les prix que nous avons obtenus pour chacune des trois composantes de notre produit prise individuellement.

Composante	Coupons (A)	Lock-in (B)	Barrière de remboursement (C)
Prix seul	36 337 €	52 549 €	93 967 €

TABLE 5.3 – Récapitulatif des prix des trois composantes

L'option lock-in et la barrière de remboursement agissent sur un seul et même flux totalement distinct des coupons, la dernière composante de notre produit. La valeur du versement du nominal (option lock-in et barrière de remboursement comprises) est donné par la différence entre le prix du produit et le prix des coupons : 94 519 €.

Considérons à présent le produit dans sa globalité, d'une valeur de 130 857 €. Si nous retirons le mécanisme de l'option lock-in et que nous procédons à la valorisation du produit ainsi obtenu, le nouveau prix s'élève à 130 035 €, soit une diminution de seulement 822 €. La valeur ajoutée de l'option lock-in est donc de 822 €, en présence de la barrière de remboursement. Comme nous l'avons expliqué, la barrière de remboursement à 1,6 donne lieu à un taux de remboursement moyen du nominal de 94,2 %. L'option lock-in est déclenchée dans 52,83% des cas. En la combinant avec la barrière de remboursement, le taux de remboursement moyen du nominal s'élève à 95,02 %.

L'option lock-in est donc une sécurité ne coûtant quasiment rien à l'acheteur de notre produit structuré. Ceci est dû au haut niveau de la barrière de remboursement assurant quasiment systématiquement le remboursement d'une part importante du nominal. Pour que l'option lock-in ait une utilité, il faut que le taux de change soit inférieur à 1,15 lors d'une date d'évaluation postérieure au 31/12/2024, mais qu'il soit supérieur à 1,6 au 31/12/2030. De cette manière, le versement de l'intégralité du nominal est dû à l'option lock-in et non à la barrière de remboursement. Cela étant dit, cette situation a très peu de chance de se produire en raison de l'écart entre les deux barrières, expliquant que le prix de l'ajout d'une option lock-in à notre produit soit aussi peu cher.

Si le produit avait été structuré différemment, avec une barrière de remboursement plus basse, la valeur de l'option lock-in dans le produit aurait pu être largement supérieure. Nous reviendrons sur ce sujet dans la partie 5.5.2.3, lors de l'étude de la sensibilité du prix du produit au niveau de la barrière de remboursement.

Dans l'ignorance des résultats de notre analyse, il est difficile de percevoir que la valeur ajoutée de l'option lock-in avec la paramétrisation actuelle du produit structuré est aussi faible. Lors de la vente d'un tel produit à un investisseur non averti, un établissement bancaire pourrait aisément faire passer cette option pour une composante très importante et ainsi vendre cette option bien plus chère qu'il ne le devrait.

5.5.2 Sensibilités

Le prix que nous avons obtenu est dépendant à la fois des paramètres du produit (les barrières de coupon, de lock-in et de remboursement) et des paramètres des trois modèles de Heston calibrés. Nous analysons donc les sensibilités du produit à ces paramètres.

L'objectif est ici d'analyser l'impact d'une variation de l'un de ces nombreux paramètres sur le prix du produit structuré, toute chose étant égale par ailleurs. Cela doit nous permettre de mieux comprendre le rôle des différents paramètres au sein du modèle global que nous avons mis en place tout au long de ce mémoire.

Nous allons provoquer des chocs sur les paramètres du modèle, c'est à dire changer leurs valeurs à la hausse et à la baisse dans différentes proportions. Nous mettrons ensuite en oeuvre les techniques de pricing que nous avons détaillées précédemment afin de mesurer les conséquences de ces chocs sur le prix du produit.

En considérant les cinq paramètres de chacun des trois modèles de Heston que nous avons calibrés et en y ajoutant les paramètres inhérents au produit, il apparaît que nous ne pourrions pas présenter ici les sensibilités du produit à l'intégralité des paramètres du modèle. Nous nous attacherons cependant à présenter celles qui nous paraissent les plus importantes.

Les sensibilité aux paramètres des modèles de Heston sont à considérer avec précaution : une modification de l'un de ces paramètres impliquerait une modification de la nappe de volatilité du sous-jacent considéré et donc la valeur des autres paramètres calibrés pour le modèle de Heston. Nous faisons alors l'hypothèse (peu réaliste) que la variation d'un des paramètres de Heston n'entraîne pas la modification des autres paramètres de nos modèles.

5.5.2.1 Sensibilités aux variances à long terme

Nous l'avons vu, le taux de coupon est très souvent nul. Or, il est déterminé par les performances relatives du CAC 40 et du S&P 500. Nous pouvons supposer que les volatilités de ces deux processus jouent un rôle considérable dans le prix du produit via le taux de coupon.

Dans le modèle de Heston, la volatilité étant stochastique, nous ne pouvons pas faire varier directement cette volatilité. Nous décidons donc de faire varier la variance à long terme (paramètre θ du modèle de Heston). En effet, le processus de variance va converger en moyenne vers la valeur de ce paramètre et nous pouvons ainsi augmenter ou diminuer artificiellement la variance moyenne d'un processus sur l'ensemble d'une projection à neuf ans.

Nous faisons ainsi varier la variance à long terme du CAC 40 (θ^C) et calculons le prix résultant des simulations qui en découlent. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau [5.4](#).

Nous observons que le prix du produit structuré est croissant en fonction de la volatilité long terme du CAC 40. En effet, plus la variance du CAC 40 augmente en moyenne, plus l'indice va être soumis à de fortes variations, à la hausse comme à la baisse. Lorsque les performances trimestrielles des deux indices sont du même signe, nous voyons augmenter la probabilité que

Variation du paramètre	Variation θ^C	
	Valeur du paramètre	Prix associé
50%	39,68%	121 718 €
90%	71,42%	129 245 €
Scénario central	79,36%	130 857 €
110%	87,30%	132 391 €
150%	119,04%	137 591 €

TABLE 5.4 – Sensibilité à θ^C

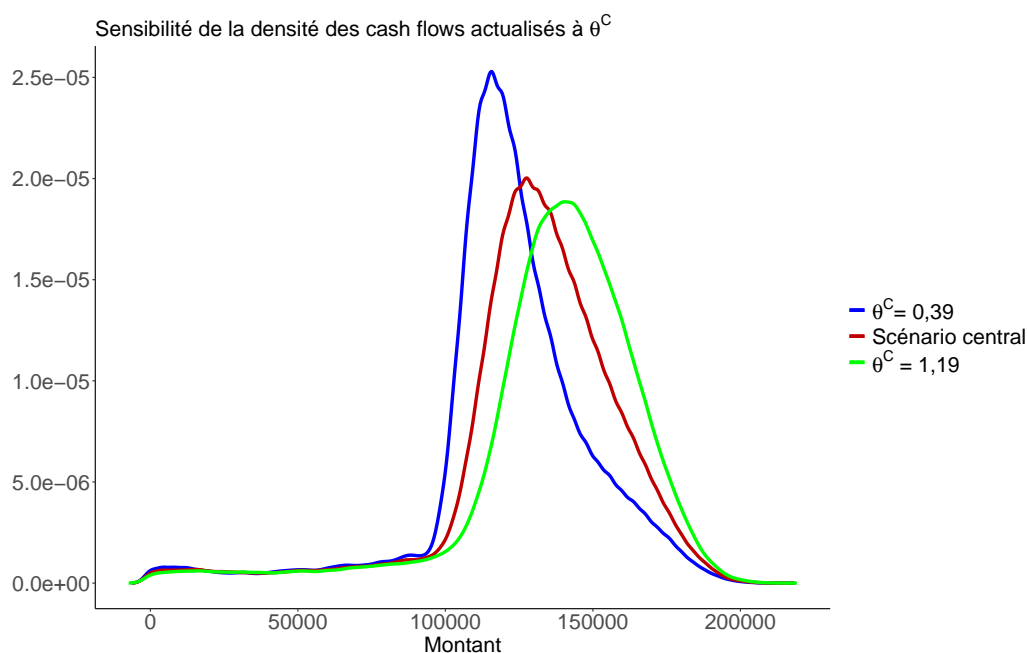


FIGURE 5.15 – Modification de la densité des flux actualisés avec θ^C

celle du CAC 40 soit supérieure à celle du S&P 500 et ainsi que le taux de coupon soit positif.

En revanche, diminuer cette variance à long terme réduit en valeur absolue les variations trimestrielles du CAC 40 sans modifier les variations du S&P 500. Ceci augmente la probabilité que le taux de coupon soit nul, provoquant une baisse du prix du produit structuré.

Nous représentons en figure [5.18](#) les densités sous la mesure \mathbb{Q}^e de la somme des flux financiers actualisés pour des valeurs de θ^C 50% inférieures et supérieures au scénario central. Au delà du prix du produit, c'est l'ensemble de la distribution de la somme des flux actualisés qui est décalée de manière significative.

Il est à noter que les variations de la variance à long terme du S&P 500 ont l'effet inverse sur le prix du produit. En effet, lorsque θ^S diminue, les variations trimestrielles du S&P 500 diminuent en moyenne, augmentant ainsi le rapport des performances du CAC 40 par rapport au S&P 500. Il s'ensuit une augmentation du taux de coupon moyen et finalement une augmentation du prix du produit. Par un raisonnement similaire, une augmentation de la variance

à long terme du S&P 500 produira une baisse du prix du produit.

La notion de variance à long terme est indissociable de celle de vitesse de convergence du processus de variance (paramètre κ du modèle de Heston). Plus la valeur de ce paramètre est élevée, plus le processus de variance s'éloignera rapidement de sa valeur initiale pour se concentrer en moyenne autour de sa valeur à long terme. Pour rappel, la table 5.5 donne les valeurs trouvées lors de la paramétrisation du modèle de Heston.

κ^{C*}	0,02
κ^{S*}	1,72

TABLE 5.5 – Vitesses de convergence des variances des deux indices

Nous avons montré une sensibilité importante du prix du produit à la variance à long terme du CAC 40. Cependant, la faible vitesse de convergence de sa variance atténue l'impact des variations de θ^C . Ceci explique que le produit reste également très sensible à la valeur de la variance initiale du CAC 40. En revanche, la vitesse de convergence de la variance du S&P 500 est beaucoup plus élevée. Le produit est donc beaucoup plus sensible au choix de la variance à long terme du S&P 500 qu'à sa variance initiale. Ceci a été illustré lors du commentaire de la calibration des modèles de Heston, en figure 5.1.

***Remarque :** Finalement, nous pouvons évoquer la sensibilité du produit à la variance à long terme du taux de change EUR/USD. En effet, avec une vitesse de convergence de 16,97, la variance du taux de change s'éloigne très rapidement de sa valeur initiale. De plus, la volatilité de ce processus détermine la probabilité d'être en dessous des barrières du produit à chaque instant et ainsi la probabilité que les différents flux financiers soient versés. Cependant, la variance initiale est assez faible (0,01), et la variance à long terme est encore trois fois inférieure. Une modification de l'ordre de 50% de ce dernier paramètre conduit à réaliser des simulations avec une variance à long terme qui reste extrêmement faible, modifiant le prix du produit de manière non-significative. Nous ne développerons donc pas ce sujet ici.*

5.5.2.2 Sensibilité au cours initial du taux de change

Nous analysons à présent la sensibilité du prix du produit à la valeur initiale du sous-jacent : le taux de change Y_0 . Cette sensibilité est d'autant plus importante qu'en juillet 2022, le taux de change EUR/USD a atteint 1, valeur historiquement basse. Les résultats de cette étude sont synthétisés dans le tableau 5.6.

Il apparaît clairement que plus le taux de change initial est élevé, plus le prix du produit structuré est bas. Cela s'explique par la structure même de notre produit. Les versements des différents flux financiers ont lieu à condition que le taux de change à la date d'évaluation soit inférieur à certaines barrières. Pour un même modèle de diffusion (les paramètres de Heston sont identiques), la probabilité d'être en dessous de ces barrières à un instant t est d'autant plus élevée que la valeur initiale du processus stochastique est basse. Dans la prochaine partie, nous détaillerons cette sensibilité barrière par barrière.

Variation du paramètre	Variation Y_0	
	Valeur du paramètre	Prix associé
85%	0,96645	136 228 €
90%	1,08015	133 330 €
Scénario central	1,137	130 857 €
110%	1,19385	127 633 €
115%	1,30755	118 323 €

TABLE 5.6 – sensibilité à Y_0

En ce qui concerne le CAC 40 et le S&P 500, nous nous intéressons uniquement à leurs performances trimestrielles. Leurs valeurs initiales n'ont donc qu'un impact minime sur le prix du produit.

5.5.2.3 Sensibilités aux différentes barrières sur le taux de change

Déplacer la valeur initiale du taux de change d'une certaine distance revient à déplacer les différentes barrières composant le produit de la même distance dans la direction opposée. Cependant, rappelons que nous étudions ici un produit dont les caractéristiques numériques ont été fixées par l'investisseur et son établissement bancaire. Dans cette partie, nous nous intéressons à des produits de la même famille que celui faisant l'objet de ce mémoire, mais avec des structures différentes, en modifiant les valeurs des trois barrières.

Nous connaissons déjà les sens de variations du prix selon le sens de variation des barrières grâce à la partie [5.5.2.2](#). Notre objectif ici est de comparer l'importance des variations du prix selon la barrière modifiée. En ce sens, ce paragraphe peut être perçu comme un complément de la [sous-section 5.5.1](#), dans laquelle nous avons déterminé la valeur apportée au produit par les différentes sources de flux financiers.

Tout d'abord, nous avons vu que le prix du produit augmente lorsque le taux de change initial diminue. De la même manière, monter l'une des barrières augmente la probabilité que le taux de change reste en dessous et ainsi augmente le prix.

Variation du paramètre	Variation barrière lock-in	
	Valeur du paramètre	Prix associé
50%	0,575	130 035 €
90%	1,035	130 125 €
Scénario central	1,15	130 857 €
110%	1,265	132 419 €
150%	1,725	135 234 €

TABLE 5.7 – Sensibilité à BLI

Intéressons-nous d'abord au remboursement du nominal à la maturité, donc aux barrières de lock-in et de remboursement. Dans le scénario central, le nominal est remboursé à hauteur de

95% en moyenne à la maturité du produit. En augmentant à l'extrême l'une des deux barrières impliquées dans ce flux (tableaux 5.7 et 5.8), nous augmentons encore cette probabilité avec cependant une faible marge de progression (la probabilité est déjà très élevée). C'est pourquoi les prix plafonnent aux alentours de 135 000 € lorsque l'on augmente la barrière de lock-in ou la barrière de remboursement. Les sensibilités à la hausse de ces deux barrières sont donc pratiquement identiques.

Variation du paramètre	Variation barrière de remboursement		
	Valeur du paramètre	Prix associé	Valeur ajoutée lock-in
25 %	0,4	88 887 €	52 337 €
50%	0,8	89 986 €	39 064 €
90%	1,44	126 187 €	1 873 €
Scénario central	1,6	130 857 €	822 €
110%	1,76	133 187 €	404 €
150%	2,4	135 492 €	39 €

TABLE 5.8 – Sensibilité à BR

Les sensibilités à la baisse diffèrent de manière remarquable entre la barrière lock-in et la barrière de remboursement. En effet, nous l'avons montré, même en enlevant l'option lock-in du produit, l'espérance du taux de remboursement du nominal passe de 95% à 89%. Une hausse de la barrière de remboursement a donc un impact positif mais minime sur le prix du produit.

A l'inverse, une baisse de la barrière de remboursement diminue fortement le prix du produit. Nous avons en effet montré que le taux de déclenchement moyen de l'option lock-in est de 53%. Positionner la barrière de remboursement trop bas réduit donc drastiquement l'espérance du taux de remboursement du nominal à la maturité.

Nous avons également montré que la valeur élevée de la barrière de remboursement à la maturité rend l'option lock-in peu intéressante. La valeur ajoutée de cette option dans notre produit n'est en effet que de 822 €. La dernière colonne du tableau 5.8 indique la valeur ajoutée de l'option lock-in en fonction du niveau de la barrière de remboursement. Plus la barrière de remboursement est basse, plus la probabilité que le taux de change à maturité soit en dessous est faible. Ceci augmente l'intérêt du mécanisme de garantie de capital induit par l'option lock-in et ainsi augmente la valeur de cette composante au sein du produit.

Enfin, le tableau 5.9 présente la sensibilité du prix à la barrière de coupons. Dans le scénario central, la probabilité de détachement des coupons est très élevée à chaque échéance (figure 5.10).

Pour cette raison, l'augmentation de la valeur de cette barrière ne provoque qu'une faible hausse de la probabilité de détachement de coupon à chaque date et donc du prix du produit. Pour augmenter le prix global grâce aux coupons, il est plus intéressant d'agir sur les dynamiques du CAC 40 et du S&P 500, notamment sur leurs volatilités afin d'augmenter le taux de coupon à chaque date de versement. La baisse de cette barrière, en revanche, provoque une

Variation barrière de coupons		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Prix associé
50%	0,75	94 554 €
90%	1,35	126 352 €
Scénario central	1,5	130 857 €
110%	1,65	132 661 €
150%	2,25	134 064 €

TABLE 5.9 – Sensibilité à BC

chute du prix de notre produit structuré. Le prix des coupons étant d'environ 36 000 €, c'est également la perte de valeur maximale du produit lorsque l'on abaisse la barrière de coupon à des valeurs presque inatteignables pour le taux de change (par exemple 0,75 dans le tableau 5.9).

5.5.2.4 Sensibilité au taux de coupon - Adapter la structure du produit

La figure 5.12 illustre la troncature quasi systématique des taux de coupons positifs à 4%. Nous souhaitons ici déterminer l'impact d'une variation de ce taux de coupon maximal. Le tableau 5.10 donne le prix du produit pour différentes valeurs du cap appliqué aux coupons.

Variation taux de coupon max	
Valeur du paramètre	Prix associé
1 %	103 664 €
2 %	112 768 €
Scénario central	130 857 €
6 %	148 789 €
8 %	166 571 €
10 %	184 202 €
20 %	270 196 €

TABLE 5.10 – Sensibilité au taux de coupon maximal

Comme nous l'avions pressenti, caper les taux de coupons à 4% se révèle très contraignant. En effet, fixer le plafond à 6% occasionne une augmentation du prix du produit de 18 000 €. Ceci constitue une alternative intéressante à une action sur la barrière de coupon si l'investisseur souhaite modifier l'espérance de ses flux trimestriels sur un produit de la même famille.

Il est à noter que, même en augmentant le cap, nous constatons une forte concentration des taux de coupons autour des bornes hautes et basses, avec très peu de cas intermédiaires.

Par construction, les coupons sont d'un montant maximal de 4 000 € chaque trimestre. Pour une raison ou pour une autre, l'investisseur peut avoir besoin de flux financiers réguliers plus conséquents. En concevant le produit avec son établissement bancaire, il pourra caper le taux

de coupon à une valeur correspondant à son besoin. Pour autant, s'il ne souhaite pas voir le prix du produit augmenter par rapport à ce que nous avons calculé initialement, il lui faudra prendre davantage de risques par ailleurs. Ceci est possible par exemple en diminuant la probabilité de remboursement du nominal à maturité via un abaissement de la barrière de remboursement. Nous allons présenter une application pratique de ce cas de figure.

Supposons que l'investisseur souhaite augmenter le plafond sur les coupons à 8 %. Cela aboutit donc, pour un nominal de 100 000 €, à des coupons d'un montant maximum de 8 000 €. S'il ne modifie pas les autres paramètres du produit structuré, le tableau 5.10 indique qu'il devra payer 166 571 €, soit une augmentation d'environ 36 000 € par rapport au produit étudié dans ce mémoire. S'il souhaite tout de même payer le prix annoncé pour le produit initial sans modifier la probabilité de percevoir les coupons (donc sans modifier la barrière de coupon), il doit agir sur la barrière lock-in, la barrière de remboursement ou les deux. L'étude de sensibilité menée précédemment montre que ces barrières doivent être abaissées pour faire baisser le prix global.

D'après ce que nous avons montré précédemment, plus la barrière de remboursement sera basse, plus le rôle de l'option lock-in sera important dans le remboursement du nominal à l'échéance et plus une modification de la barrière lock-in aura d'impact sur le prix du produit. Nous utiliserons cette spécificité à notre avantage, car il s'agit ici de faire baisser le prix du produit d'environ 36 000 €.

Nous cherchons donc un couple de valeurs pour les barrières lock-in et de remboursement permettant de retrouver le prix initialement calculé pour le produit, mais avec un taux de coupon capé à 8 %. Il existe bien sûr plusieurs solutions à ce problème. Nous souhaitons cependant exhiber des valeurs de barrière restant réaliste (par exemple, une barrière à 0,3 n'est d'aucun intérêt, le taux de change ayant peu, voire pas, de chance d'atteindre ce niveau).

En fixant $BLI = 1,05$ et $BR = 1,117$, nous trouvons un prix de 130 843 €, soit seulement 14 € de différence avec notre produit initial. Comparons à présent les principales caractéristiques de ce nouveau produit avec celui de notre étude, à commencer par la distribution des gains. C'est l'objet de la figure 5.16.

Bien que les prix des deux produits soient sensiblement les mêmes, la densité des gains potentiels diffère largement d'un cas à l'autre. La nouvelle structure du produit donne une distribution également asymétrique, mais sur un support bien plus étendu à droite, en raison des coupons potentiellement deux fois plus importants. La queue de distribution à gauche est plus épaisse pour le produit que nous venons de structurer. En raison des faibles valeurs des barrières lock-in et de remboursement, la probabilité de perdre le nominal est bien plus importante, ce qui augmente la perte potentielle. Néanmoins, la probabilité que l'un de ces deux mécanismes soit déclenché est loin d'être nulle : l'espérance du taux de remboursement du nominal est de 59,1% dans notre nouveau produit (lock-in et barrière de remboursement confondues).

Dans le produit initial, nous avons pu voir que l'option lock-in n'était que très peu utile, justifiant un prix dérisoire pour cette option. Ici, l'écart entre les deux barrières est réduit, augmentant l'importance du mécanisme lock-in. La barrière lock-in est abaissée, diminuant la

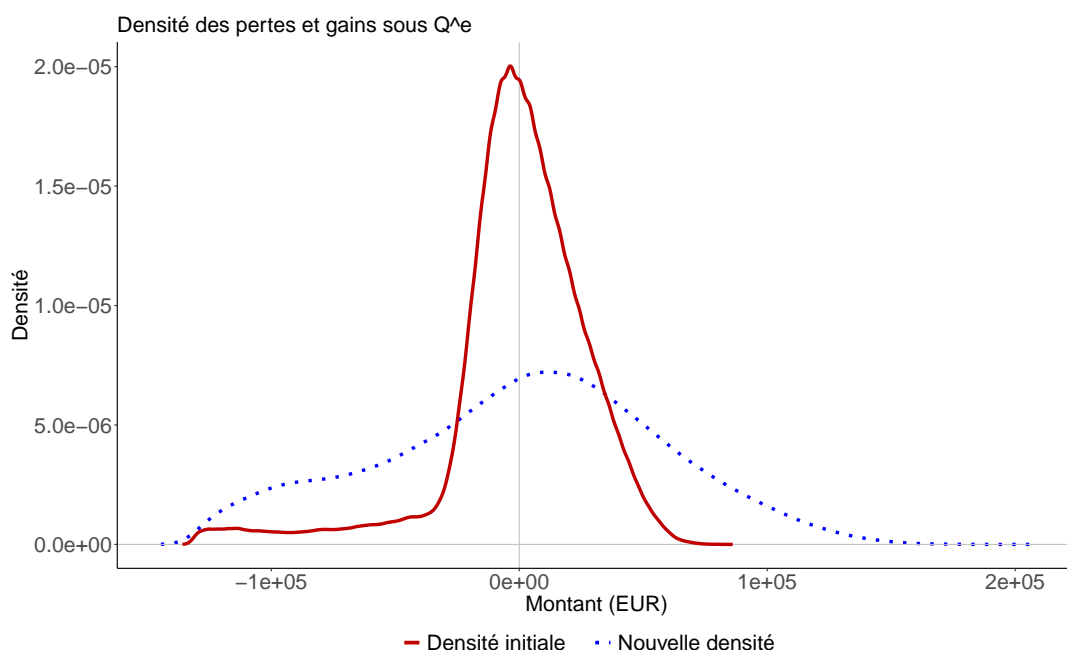


FIGURE 5.16 – Modification de la densité des gains pour un produit de même prix

probabilité de déclenchement de l'option, mais la valeur ajoutée au produit est désormais de 2 149 € au lieu de 822 € initialement. La participation des différentes composantes du produit au prix global est donc également modifiée par notre modification de structure à prix égal.

		50%	3 837 €
40%	- 10 533 €	60%	16 906 €
25%	- 39 191 €	75%	40 748 €
5%	- 106 419 €	95%	93 514 €
1%	- 122 832 €	99%	124 626 €
0,5%	- 130 843 €	99,5%	136 420 €

TABLE 5.11 – Principaux quantiles des gains après modification du produit

Le tableau 5.11 résume les principaux quantiles de la distribution des gains de notre nouveau produit. Comme dans le produit structuré initial, le gain médian est positif. Dans 50% des cas, l'investisseur gagnera plus de 3 837 €. La $VaR_{99,5\%}$ passe de - 122 842 € à - 130 843 €, conséquence de l'épaississement de la queue de distribution à gauche. Cependant, les gains pouvant être attendus ont également augmenté. Dans 99,5% des cas, l'investisseur réalisera un bénéfice inférieur ou égal à 136 420 €, contre 56 892 € dans la configuration initiale.

Remarque : En finance, lorsque l'on parle de Value at Risk, il est question d'une perte, donc d'un montant négatif. La valeur de la VaR est donnée sous forme d'un nombre négatif, comme nous l'avons fait. En revanche, lorsque la VaR est modifiée, il est d'usage de considérer sa valeur absolue. Ainsi, "diminuer la VaR" se comprend comme "diminuer la perte potentielle" et en réalité, la VaR augmente pour diminuer en valeur absolue.

Finalement, pour un prix identique, l'investisseur peut obtenir un produit de la même famille mais dont les caractéristiques répondent à un besoin bien différent. Tout est alors une question d'optimisation, fruit de négociations entre l'investisseur et la banque.

5.5.3 Structurer dans une logique de protection du capital

Nous l'avons vu, les risques de perte sur ce produit sont tout de même relativement importants. Supposons désormais que l'investisseur adopte encore une fois une posture différente. Cette fois, il souhaite mettre en place une réelle protection de son capital. Nous considérons dans cette partie l'exemple suivant : l'investisseur souhaite structurer ce produit de sorte que la probabilité de perdre plus de 20 000 € soit inférieure à 5%. Cela revient à avoir une VaR à 95% supérieure ou égale à - 20 000 €. Pour rappel, la $VaR_{95\%}$ de notre produit initial est de - 53 497 €.

Dans cette optique, nous agissons sur les paramètres que nous avons déjà étudié, à savoir les trois barrières et le taux de coupon maximal. Là encore, il existe plusieurs manières de structurer le produit pour obtenir ce résultat. Nous nous appliquerons ici à trouver une structure répondant à notre problématique, toujours en considérant des paramètres réalistes.

Tout d'abord, nous examinons la sensibilité de la $VaR_{95\%}$ aux quatre paramètres que nous nous autorisons à modifier. La déformation de la densité avec les changements de structure peuvent en effet être difficiles à anticiper. Cela nous donnera une idée de la direction dans laquelle nous devons déplacer les paramètres.

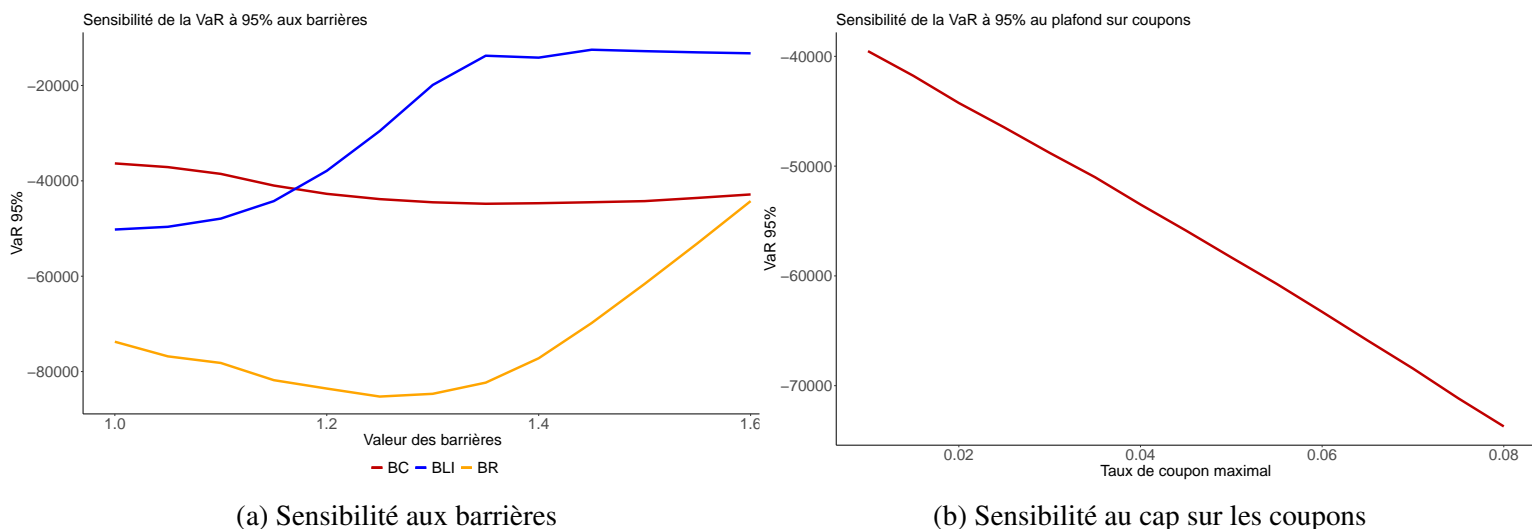


FIGURE 5.17 – Sensibilités de la Value at Risk

C'est l'objet de la figure 5.17. En ce qui concerne chacune des barrières, la Value at Risk n'évolue non seulement pas linéairement selon la valeur de la barrière, mais la courbe n'est pas non-plus monotone. Ceci est parfaitement illustré par la courbe de la $VaR_{95\%}$ en fonction de la barrière de remboursement, qui prend la forme d'une parabole. La perte maximale dans 95% des cas atteint son maximum pour une barrière de remboursement d'environ 1,3. Toute chose

égale par ailleurs, cette perte maximale décroît à mesure que la barrière lock-in augmente, avant de se stabiliser pour une barrière valant environ 1,3 également. La barrière de coupons n'a qu'un impact limité sur la $VaR_{95\%}$. En revanche, la Value at Risk à 95% est inversement proportionnelle au cap sur les taux de coupons. La probabilité de versement d'un coupon est en effet indépendante du montant de ce coupon. En augmentant le taux de coupon maximal, le prix augmente mécaniquement mais il reste encore beaucoup de coupons nuls (tronqués à 0%). De ce fait, la moyenne des flux actualisés augmente (la cloche que nous observons sur les graphiques de densité se décale vers la droite) mais l'extrémité gauche de la queue de distribution des pertes s'épaissit, gonflant ainsi la probabilité de pertes importantes.

Grâce à ces éléments, nous trouvons un jeu de paramètres permettant de limiter les risques de perte conformément aux souhaits de l'investisseur (tableau 5.12).

BC	BLI	BR	Cap
1,725	1,6	1,6	3,25 %

TABLE 5.12 – Structure permettant de limiter la perte potentielle

Avec à cette nouvelle structure, le prix du produit est de 129 911 €, soit seulement 0,7 % de variation par rapport au produit initial. La VaR à 95 % vaut désormais - 20 681 €.

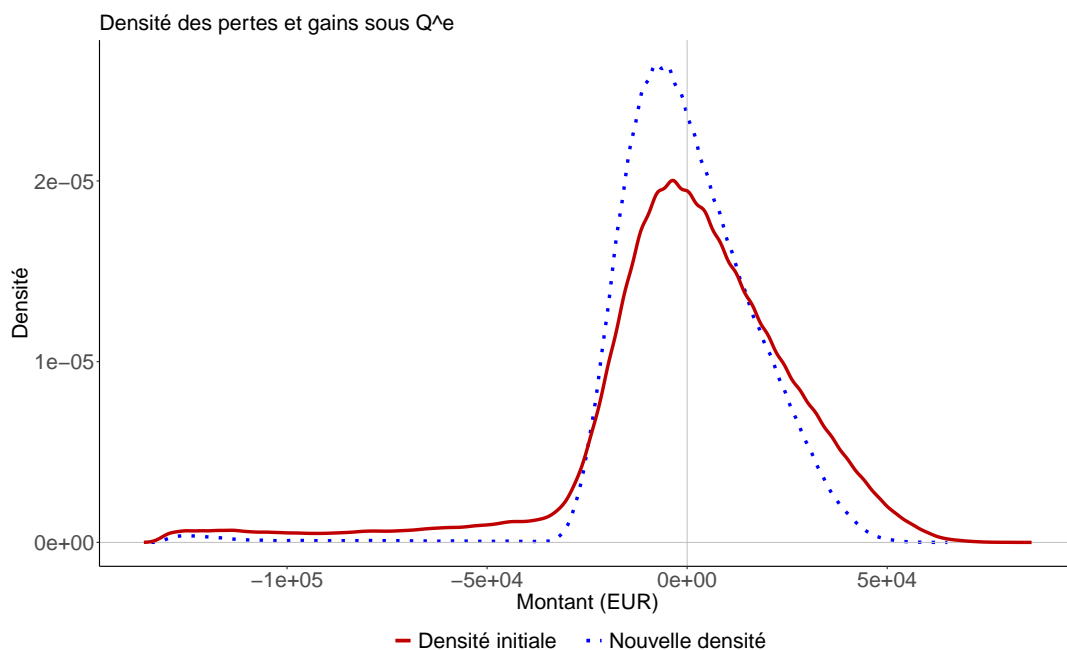


FIGURE 5.18 – Modification de la densité des gains pour une réduction de la VaR à 95%

La légère diminution du cap sur les coupons (3,25 % au lieu de 4%) est contrebalancée par une hausse simultanée des barrières de coupons et de lock-in. La valeur élevée de la nouvelle barrière de coupons (1,725) garantit que la quasi totalité des coupons sera versée.

La distribution des gains est moins étalée que dans le cas du produit initial, notamment à droite. Le quantile à 50% des gains est désormais égal à - 1104 €. Il est donc plus probable de réaliser une perte avec notre nouvelle structure, ce qui n'était pas le cas initialement. En revanche, la queue de distribution à gauche est ici très aplatie. Dans le cas où la perte est supérieure à la VaR à 95% (5% de chances), la perte moyenne est de 42 576 € ($TVaR_{95\%}$).

	Produit initial	Nouveau produit
Prix	130 857 €	129 911 €
$VaR_{95\%}$	- 53 497 €	- 20 681 €
$TVaR_{95\%}$	- 91 147 €	- 42 576 €
Gains max (95% des cas)	40 779 €	28 266 €

TABLE 5.13 – Réduction du risque inhérent au produit par ajustement de la structure

En ce qui concerne les gains potentiels, le quantile de gains à 95% se situe à 28 266 €, contre 40 779 € précédemment. Ces différents éléments, résumés dans le tableau 5.13, montrent bien que l'investisseur achetant ce nouveau produit est dans une logique de protection du capital et non de rendement.

Là encore, nous voyons que la structure du produit doit être choisie avec soin par le client selon son aversion au risque.

5.5.4 Effet d'une brusque variation des corrélations

Sur une période de neuf ans, un changement de conjoncture économique peut bouleverser notre modèle et modifier plus ou moins fortement les résultats. C'est le cas par exemple d'une crise économique. Lors de ce type d'évènement, nous observons un certain nombre de phénomènes sur les marchés financiers. Une période de crise est notamment caractérisée par une forte volatilité qui se propage de marché en marché. Ce phénomène est appelé *contagion*. De nombreux travaux traitent également du fait qu'une forte volatilité favorise l'augmentation des corrélations entre les différents marchés. Le lecteur intéressé par ces deux sujets trouvera de plus amples informations dans les travaux de King et Wadhvani (1989) et Hartmann, Straetmans, et De Vries (2001).

Pour rappel, notre produit expose l'investisseur à la corrélation entre les indices CAC 40 et S&P 500, dans la mesure où des performances trimestrielles de même signe sont nécessaires au détachement d'un coupon. La crise économique liée à l'épidémie de Covid 19 illustre la brusque hausse des corrélations et des volatilités pouvant apparaître dans ce type de période (figure 5.19). Pour rappel, la corrélation que nous avons mesurée entre les log-rendements journaliers du CAC 40 et du S&P 500 pour réaliser nos projections est de 0,59. Sur la période du 25/03/2019 au 25/02/2020 (date des premiers confinement en Europe, que nous considérons comme le début de la crise Covid), cette corrélation était de 0,53. Sur l'année suivant le début de la crise, nous mesurons une corrélation entre les log-rendements des deux indices égale à 0,68.

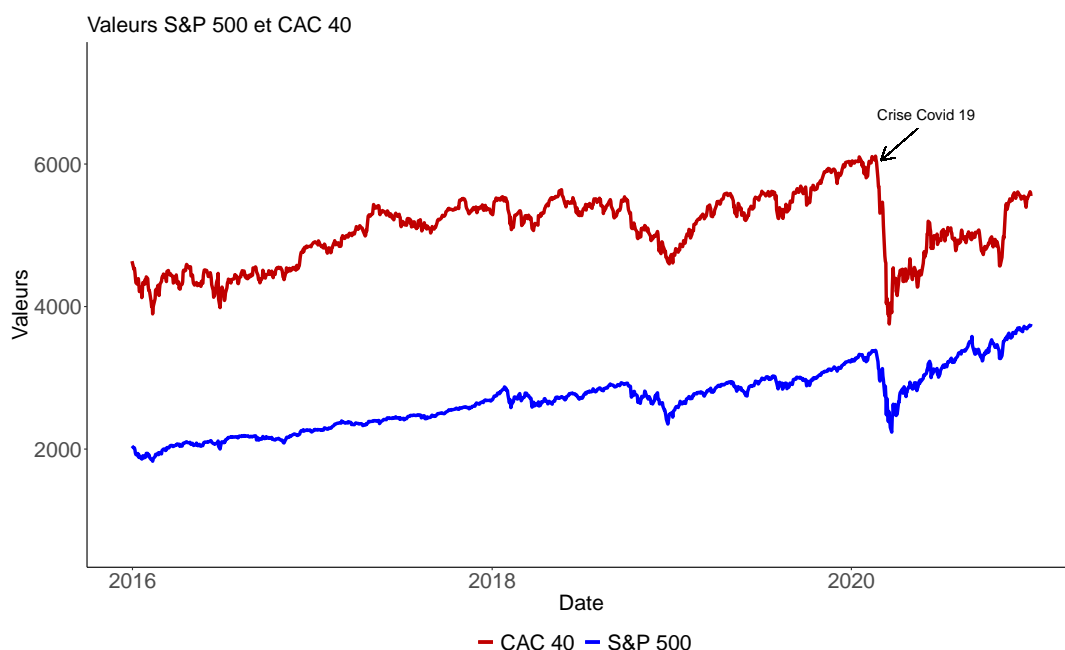


FIGURE 5.19 – Corrélation positive brutale en période de crise

Si l'étude de l'impact d'une crise financière ne rentre pas dans le cadre de nos travaux, il est peu probable que les marchés restent parfaitement stables durant les neuf ans d'existence de notre produit. Nous avons déjà étudié l'impact d'une variation des volatilités des différents processus dans le cadre de l'analyse des sensibilités. Suivant cette logique, nous allons désormais forcer les corrélations entre les processus étudiés à prendre des valeurs extrêmes pendant une durée arbitrairement fixée à un an. Rappelons avant toute chose que, sur la base de données historiques, nous avons déterminé la valeur du coefficient de corrélation entre le CAC 40 et le S&P 500 : $\rho^{SC} = 0,585$

Nous supposons tout d'abord que durant la quatrième année de projection (du 01/01/2025 au 31/12/2025), le CAC 40 et le S&P 500 ont un coefficient de corrélation ρ^{SC} égal à 1. Concrètement, cela signifie que pour chacune des simulations de Monte-Carlo, les deux processus sont régis par le même mouvement brownien durant cette période. Ci-dessous, nous affichons le prix obtenu dans cette configuration.

	Scénario central	$\rho^{SC} = 1$
Prix	130 857 €	132 046 €

TABLE 5.14 – Sensibilité à une brusque corrélation positive sur l'année 2025

Nous constatons que cette manipulation fait légèrement augmenter le prix du produit. En effet, lors de la période sur laquelle nous forçons une corrélation extrêmement positive entre les deux indices, les parties aléatoires des mouvements des deux processus ont la même direction. En augmentant la probabilité que les performances des indices aient le même signe, nous augmentons la probabilité que le taux de coupon versé soit positif. La figure 5.20 compare les densités du taux de coupon versé au trimestre 15, le 31/09/2025, dans notre scénario initial et

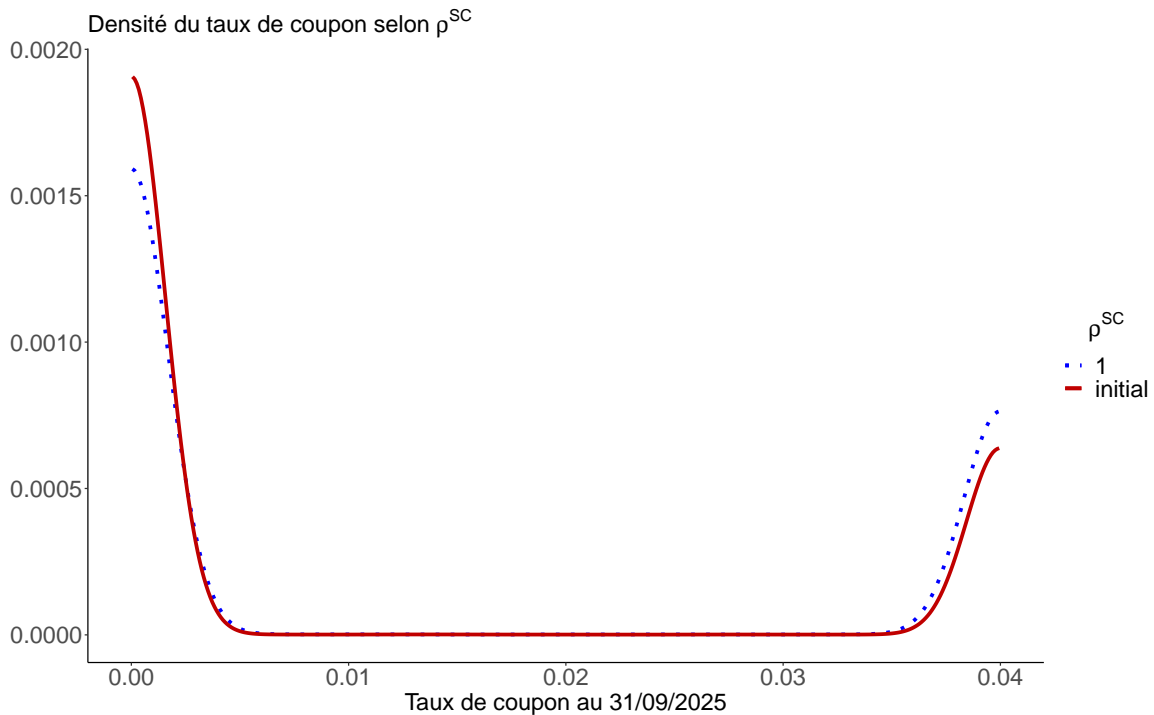


FIGURE 5.20 – Effet d’une corrélation positive extrême entre les deux indices sur le taux de coupon

dans le cas où le coefficient ρ^{SC} est fixé à 1 durant l’année 2025. A cette date, le taux de coupon moyen passe de 1,00 % à 1,30 %.

L’augmentation constatée peut paraître faible, mais il faut garder à l’esprit que la majeure partie du prix du produit est due au nominal potentiellement perçu à l’échéance. Or, la modification des corrélations entre les deux indices n’influe que sur les coupons. Le nouveau prix des coupons est de 37 526 €, contre 36 337 € dans le scénario central. La variation en cas de corrélations parfaitement positive sur une période d’un an est donc de +3%.

A l’inverse, nous souhaitons connaître l’effet d’une corrélation entre les deux indices devenant brusquement fortement négative pour une certaine durée. De la même manière que précédemment, nous imposons $\rho^{SC} = -1$ durant toute l’année 2025.

	Scénario central	$\rho^{SC} = -1$
Prix	130 857 €	128 258 €

TABLE 5.15 – Sensibilité à une brusque corrélation négative sur l’année 2025

Cette fois, nous enregistrons une baisse du prix du produit structuré. Nous examinons la modification de la densité du taux de coupon à chacune des dates de détachement concernées par ce changement de corrélation et illustrons nos propos avec la projection au 31/09/2025 en figure 5.21. A cette date, le taux de coupon moyen n’est plus que de 0,36 %.

Là encore, il faut ramener cette variation aux prix des coupons seuls pour se rendre compte de l'impact réel de cette modification de corrélation. La baisse du prix des coupons est alors de 7%.

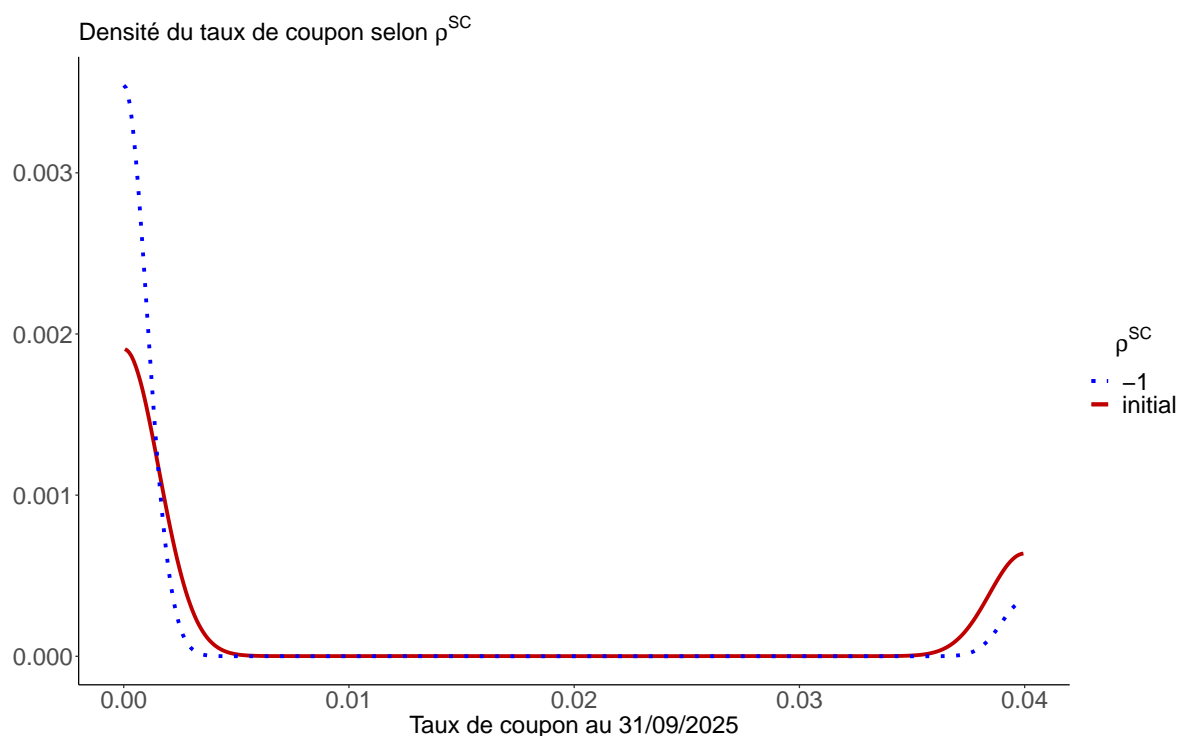


FIGURE 5.21 – Effet d'une corrélation négative extrême entre les deux indices sur le taux de coupon

Un tel écart avec le scénario central s'explique par le fait que des performances de signes opposés pour les deux indices donnent un taux de coupon nul. Or, nous forçons presque les performances à s'opposer, à moins que les parties aléatoires des processus ne soit compensées par leurs drifts, réduisant drastiquement le taux de coupon versé.

A titre indicatif, nous avons réalisé une valorisation de notre produit en supprimant la corrélation entre le CAC 40 et le S&P 500 lors de nos simulations. Sans grande surprise, les performances trimestrielles sont bien moins souvent de même signe qu'avec une corrélation égale à 0,585. Ainsi, en fixant $\rho^{SC} = 0$, nous trouvons un prix de 119 420 €. Cette baisse d'environ 11 000 € correspond bien à la baisse de 30 % constatée sur le prix des coupons.

Pour conclure, nous avons examiné le prix obtenu en changeant l'année sur laquelle la corrélation devenait extrême. Dans un second temps, nous avons également choqué les corrélations entre les indices et le taux de change EUR/USD. Ces deux éléments se sont révélés sans effet significatif sur le prix du produit. Ce dernier résultat était attendu. En effet, aucun flux financier dans ce produit ne repose sur les mouvements relatifs des indices et du taux de change.

Finalement, il faut garder à l'esprit que cette étude portant sur la corrélation pourrait donner lieu à de nombreuses hypothèses. Comme nous l'avons expliqué, en simulant une crise financière par exemple, nous devrions coupler cette forte corrélation avec de fortes volatilités. Nous

avons fait le choix ici d'étudier ces deux facteurs séparément. De plus, nous modélisons ici une dépendance linéaire. Une structure de dépendance plus complexe pourrait permettre d'affiner l'analyse.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de valoriser un produit structuré particulier dans le cadre de la norme IFRS 19, dont les flux financiers dépendaient à la fois de la valeur de taux de change EUR/USD et des performances relatives du CAC 40 et du S&P 500.

Les modèles de diffusion de processus stochastiques ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. La valeur ajoutée de notre étude réside dans l'introduction de la notion de marché FX dans ces modèles de diffusion lors de la projection conjointe des différents processus. Nous avons affaire à deux économies distinctes (chacune associée à une devise) mais qui cohabitent et interagissent via le taux de change.

Ayant établi la dynamique d'un processus dans l'univers risque neutre associé à l'une des deux devises, l'enjeu était alors d'exprimer la dynamique de ce même processus en changeant d'univers risque neutre. Ce procédé, appelé correction de drift quanto, implique les volatilités du taux de change et du processus que nous souhaitons changer de monde, ainsi que la corrélation entre ces deux processus.

La formule de passage a d'abord été explicitée dans le cadre du modèle de diffusion de Black & Scholes. Cela nous a permis de mieux saisir les mécanismes mis en jeu dans un cadre simplifié par l'hypothèse de volatilités constantes. Cependant, ce modèle impose de sélectionner arbitrairement une volatilité pour chaque processus. Nous ne disposons pas d'élément permettant de rationaliser ce choix, et les résultats peuvent varier grandement selon la méthode de sélection choisie. Le modèle de diffusion de Heston, en faisant suivre un processus stochastique à la variance, permet de s'affranchir de ce choix en répliquant l'intégralité de la nappe de volatilité. Les résultats théoriques concernant le passage d'un univers risque-neutre à l'autre ont été illustrés lors de nos simulations.

Après avoir effectué les projections par le modèle de Black & Scholes et en avoir pointé les défauts, nous avons calibré et implémenté le modèle de Heston pour les trois processus. Nous avons ensuite procédé à une valorisation du produit structuré par la méthode de Monte Carlo et réduit la variance du résultat grâce à la méthode des variables antithétiques.

Finalement, nous avons conclu sur notre problématique en analysant précisément les différentes composantes de notre produit. Nous avons également mis en lumière la manière dont la structure du produit (position des barrières, plafond du taux de coupon ...) influence ses performances pour répondre à de nouveaux objectifs de rendement ou de protection.

Depuis le milieu de l'année 2021, nous assistons à une chute du taux de change EUR/USD.

Celui-ci a atteint une valeur historique de 1 en août 2022. Ce niveau extrêmement bas augmente encore la probabilité que le taux de change soit en dessous de la barrière de coupon, du moins sur les prochains trimestres. Si la BCE tente de contenir l'inflation, agissant ainsi indirectement sur le niveau de l'EUR par rapport à l'USD, son objectif premier n'est pas de réhausser le taux de change. En l'état actuel des choses, il est probable que l'EUR continue de s'affaiblir ou finisse par se stabiliser aux alentours de la parité à moyen terme. Il est donc plus probable que le taux de change soit en dessous des différentes barrières lors des dates de constatation à venir, augmentant mécaniquement le prix du produit structuré.

Cette hausse serait cependant relativement faible, car notre étude a montré que le remboursement total du nominal se produit dans 95% des cas et que la condition de versement des coupons est vérifiée, à chaque trimestre, avec une probabilité supérieure à 85%. En revanche les annonces régulières de la BCE concernant les taux directeurs européens, couplés à la récente crise Covid et la guerre en Ukraine notamment, créent une forte incertitude sur les marchés. Ceci a un effet sur les évolutions des indices actions, donc sur la corrélations entre ces indices et finalement sur les montants des coupons. Ce produit faisant l'objet d'une évaluation annuelle, son prix au 31/12/2022 pourrait être plus élevé que celui calculé au 31/12/2021.

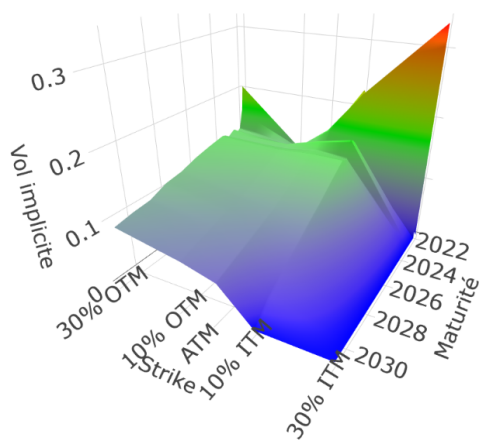
Bibliographie

- Laetitia ORTA : Intégration du risque de change au sein d'un générateur de scénarios économiques et impact sur la valorisation de portefeuilles d'assurance vie. Mémoire de D.E.A., 2019.
- John HULL : Options, Futures et Autres Actifs Dérivés - 6e édition. Pearson Education, 2007.
- I. V. GIRSANOV : On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. Theory of Probability & Its Applications, 5(3):285–301, 1960. URL <https://doi.org/10.1137/1105027>.
- Steven L. HESTON : A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. The Review of Financial Studies, 6(2), 1993.
- John COX, Jonathan INGERSOLL et Stephen ROSS : A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 53(2), 1985.
- Monique JEANBLANC, Marc YOR et Marc CHESNEY : Mathematical Methods for Financial Markets. Springer, 2009.
- Leif ANDERSEN : Efficient simulation of the heston stochastic volatility. Banc of America Securities, 2006.
- Damiano BRIGO et Fabio MERCURIO : Interest Rate Models - Theory and Practice, With Smile, Inflation and Credit. Springer, 2006.
- Matthieu IMBEAULT : Credit & fx rate hybrid structures. Mémoire de D.E.A., 2012.
- Mark B. GARMAN et Steven W. KOHLHAGEN : Foreign currency option values. Journal of International Money and Finance, (2):231–237, 1983.
- Iain J. CLARK : Foreign Exchange Option Pricing : A Practitioners Guide. Wiley Finance, 2011.
- Uwe WYSTUP : FX Options and Structured Products - second edition. Wiley Finance Series, 2006.
- Peter TANKOV : Surface de volatilité - notes de cours. 2015.
- Mervyn KING et Sushil WADHWANI : Transmission of volatility between stock markets. NBER Working Paper Series, (2910), 1989. URL https://www.nber.org/system/files/working_papers/w2910/w2910.pdf.

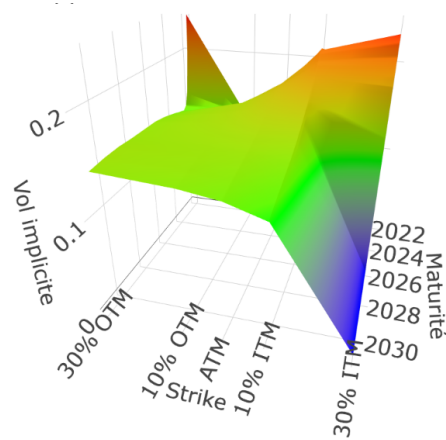
P. HARTMANN, S. STRAETMANS et C.G. DE VRIES : Asset market linkages in crisis periods.
European Central Bank Working Paper Series, (71), 2001. URL [https://www.https://www.https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp071.pdf](https://www.https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp071.pdf).

Annexe A

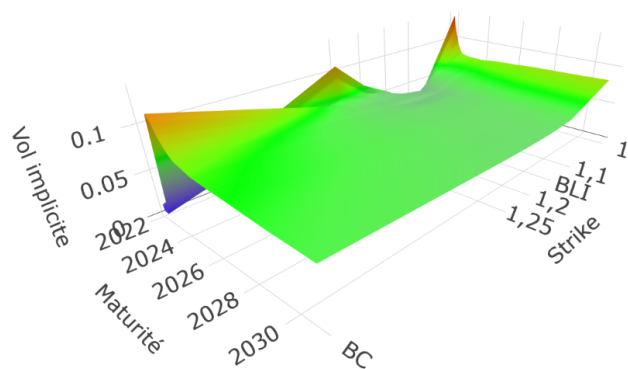
Nappes de volatilité



(a) CAC 40



(b) S&P 500



(c) Taux de change EUR/USD

FIGURE A.1 – Nappes de volatilité implicites

Sur les graphes des nappes du CAC 40 et du S&P 500, les strikes sont exprimés en fonction de leur *moneyness* : *ITM*, *ATM* et *OTM* signifient respectivement *In The Money*, *At The Money* et *Out of The Money*. En ce qui concerne la nappe de volatilité du taux de change, nous faisons le choix de mettre en avant les barrières de coupon (BC) et de lock-in (BLI).