

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Christophe Eberlé, président d'Optimind de m'avoir accueillie au sein de son entreprise afin de pouvoir y réaliser mon stage et mon alternance ainsi que les *partners* Gildas Robert, Valérie Deppe et Julien Chartier, pour m'avoir reçue au sein de la *practice Actuarial and Financial Services*.

Je souhaite également remercier mes tuteurs Renaud Perigord et Maxime Ewoane pour leur encadrement et leur disponibilité au cours de la réalisation de ce mémoire et Valérie Deppe pour ses relectures.

De plus, je tiens à remercier l'ensemble des collaborateurs d'Optimind avec qui j'ai eu l'occasion d'évoluer, pour leur accueil, leur bonne humeur quotidienne et leurs conseils. J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Yann Diserbeau pour son soutien, ses encouragements quotidiens ainsi que pour ses conseils précieux.

J'aimerai ensuite remercier l'ensemble du corps professoral de l'ISUP, pour la qualité des cours dont j'ai pu bénéficier au cours de ces deux années. J'adresse également mes remerciements à mon tuteur académique Nicolas Bousquet pour sa bienveillance, son encadrement, son expertise et sa disponibilité.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien sans faille et leur bonne humeur quotidienne. Je tiens particulièrement à remercier Nathan Franel pour m'avoir épaulée au cours de cette année et au cours de ce mémoire. Je tiens à remercier Yuil Han et Anouk Jakubowicz pour leurs relectures.

Résumé

Le contexte financier des marchés est marqué par un faible rendement des produits obligataires, pénalisant les sociétés d'assurances dont le portefeuille est principalement constitué de ces actifs. Ainsi, pour générer des rendements, il paraît nécessaire d'adopter une stratégie plus risquée mais celle-ci nécessitera des capitaux de solvabilité plus élevés exigés par la réglementation européenne Solvabilité 2 depuis 2016. Dans le cas de l'assurance non vie, la durée des passifs est courte ce qui est un enjeu supplémentaire pour l'assureur quand le portefeuille obligataire commence à arriver à échéance.

L'objectif de ce mémoire est donc de chercher à apporter des éléments de réponse à cette problématique dans un cadre de run-off. Pour cela, un environnement économique en contexte de taux bas en période pré-pandémique sera modélisé ainsi que des passifs fictifs d'un assureur non-vie selon les principes de Solvabilité 2.

Un modèle interne stochastique sera développé dans une optique ORSA (*Own Risk Solvency Assessment*) autour de deux critères : celui de Sharpe et Tint et celui de Maximisation de Fonds Propres Economiques. Le premier est un dérivé du modèle de Markovitz prenant en compte les engagements techniques de l'assureur dans un espace rendement / risque. A la fois facile d'implémentation et proposant des fourchettes d'allocations, il est un bon premier indicateur prenant en compte l'aversion au risque de l'assureur. Le second cherche quant à lui à obtenir un couple optimal (allocation, capitaux requis) de sorte à maximiser le ratio de solvabilité de manière objective. Ces deux modèles mis en perspective sont donc complémentaires permettant une étude plus exhaustive.

Les résultats fournis par les modèles seront comparés et analysés au cours de deux études. La première portera sur une allocation en considérant le passif de l'assureur non vie de manière globale, tandis que la seconde prendra en compte la notion de durée des passifs : courte, moyenne ou plus longue. Les résultats de ces deux études seront alors confrontés permettant de donner des éléments de réponse à cette situation de taux bas avec une invitation à l'investissement immobilier au détriment des autres classes d'actifs. Néanmoins ces conclusions devront être nuancées car obtenues à partir d'une modélisation de type *toy model*. En effet ce travail ne prend pas en compte toute la complexité d'un organisme d'assurance, ce qui relativise l'analyse des résultats. Ce travail se positionne comme un préliminaire à une analyse plus complète, nécessitant plus de temps, en visant à lui apporter des lignes directrices méthodologiques.

Mots clefs : Allocation d'actifs. Taux bas. Solvabilité 2. Générateur de Scénarios Economiques. Modèle de Merz et Wüthrich. Maximisation de Fonds Propres Economiques. Modèle de Sharpe et Tint. Capitaux de Solvabilité Requis.

Abstract

The current situation of financial markets is marked by low returns on bond products, penalizing insurance companies whose portfolios consist mainly of these assets. Thus, in order to generate returns, it seems necessary to adopt a riskier strategy. However, it would require higher solvency capital requirement in agreement with Solvency 2 regulation since 2016. In the case of property and casualty insurance, the duration of liabilities is short, which is an additional issue for the insurer when the bond portfolio reaches maturity.

The goal of this Master's thesis is to propose partial answers to this problem in the case of a run-off company. In order to do that, an economic environment will be built in a pre-pandemic context characterized by low returns and liabilities of a fictive non-life insurer will be modelled according to Solvency 2 principles.

An Own Risk Solvency Assessment model will be developed around two criterions : Sharpe and Tint model and the Economic equities maximization criterion. The first one is a derived from the Markovitz model and takes into account the liabilities of the insurer in a return/risk space. Being easy to implement and offering ranges of allocation, it is a good first indicator that takes into account the risk aversion of the insurer. The second seeks to obtain an optimal couple (allocation, capital required) in order to maximize the solvency ratio. Studying these two models allows broader analysis.

The results provided by the models will be compared and analyzed in two studies. The first will deal with an allocation that considers every liability detained by the non-life insurer, while the second will take into account the notion of duration of liabilities : short, medium or long. The results of these two studies will then be confronted to provide elements of response to this low-rate situation. They confirm that it is not wise to reinvest in bonds and that real estate or cash should be favored. However, the model doesn't take into account the insurance company's complexity and can be qualified as a toy model. This impacts the operational relevance of the results.

Key words : Assets allocation. Low rates. Solvency 2. Economic Scenarios Generator. Merz and Wüthrich model. Economic equities maximization criterion. Sharpe and Tint model. Solvency Capital Requirement.

Synthèse

Depuis l'entrée en vigueur de la réglementation européenne Solvabilité 2 en 2016, les assureurs sont invités à surveiller leur prise de risque de sorte à limiter l'impact sur leur ratio de couverture, ce qui se traduit par investir principalement dans des produits de type obligataires. Néanmoins, dans un contexte financier marqué par des taux bas, ces placements deviennent de moins en moins rentables, incitant les assureurs à envisager des stratégies plus risquées.

Le cas des assureurs non vie est particulier puisque comme la durée de leur passif est plus courte que celle des assureurs vie, ces derniers ne réagissent pas de la même manière face à cette situation. Alors que les assureurs vie cherchent des stratégies sur le long terme, les assureurs non vie privilégient la mise en trésorerie plutôt que la ré-allocation de leur portefeuille obligataire lorsque celui-ci arrive à échéance. L'objectif de ce mémoire est donc au regard de la norme Solvabilité 2 de comprendre comment les assureurs non vie peuvent ré-allouer leur portefeuille obligataire arrivant à échéance dans un contexte de taux bas avant la crise économique liée à la pandémie en 2020.

Une approche type modèle interne ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) permet de répondre à ce type de questionnement en respectant les différents principes de Solvabilité 2. Comme un modèle interne repose sur des hypothèses à la fois économiques et techniques, ces dernières se doivent d'être solides et au plus proches de la réalité de sorte à produire des analyses pertinentes. Ces analyses et résultats sont propres au cadre d'étude considéré à savoir dans un cadre de run-off et diffèrent donc d'une situation à l'autre.

Dans le cadre considéré, une entreprise fictive d'assurance non vie proposant des produits d'assurance automobile et d'assurance habitation sera étudiée. Cette dernière possède un portefeuille obligataire acquis de longue date dont une partie arrive à maturité. L'assureur est donc face à deux possibilités : soit placer cet argent en trésorerie, soit ré-allouer dans des actifs plus risqués pour dégager un profit. Néanmoins réinvestir dans un portefeuille plus risqué entraîne une augmentation des capitaux de solvabilité requis nuisant à la maximisation du ratio de couverture de la compagnie.

Un modèle pertinent requiert donc de prendre à la fois la spécificité des produits automobiles et habitation et l'aversion au risque. Pour obtenir une étude plus complète, deux modèles ont donc été mis en oeuvre : celui de maximisation de fonds propres économiques et celui de Sharpe et Tint. Le premier vise à maximiser le ratio de solvabilité au regard de Solvabilité 2, et le modèle de Sharpe et Tint cherche à maximiser le surplus de l'activité dans un espace moyenne/variance.

Les deux modèles retenus relèvent d'un cadre stochastique, ce qui implique une sensibilité particulière des résultats aux simulations données en input. Les simulations sont celles de l'actif et du passif de l'assureur : la méthodologie se veut donc prudente.

Modélisation de l'actif

Les principales catégories d'actifs qui ont été modélisées au cours de ce mémoire sont : la dynamique des taux courts, des actions et de l'immobilier. Différents modèles et différents calibrages ont été retenus pour cette étude de sorte à rendre compte au mieux de la situation pré covid de l'environnement financier et économique. Pour cela, différents indices ont été utilisés : Eurostoxx50 pour les actions, IEIF Europe pour l'immobilier et l'Euribor 3 mois pour les taux dans l'objectif de se placer dans un contexte européen. Deux modèles ont été étudiés pour refléter au mieux les deux premiers indices : celui de Black et Scholes et celui de Merton en monde réel. Le premier est très pratique dans sa calibration et est historiquement le modèle de référence tandis que le second intègre la notion de discontinuité de marché avec l'introduction d'un processus de sauts. La modélisation des taux courts a quand à elle été réalisée sous le modèle de Vasicek pour sa facilité d'implémentation et la génération de taux négatifs. La modélisation des taux courts a ainsi permis de modéliser des obligations zéro coupons. Un seul type d'obligation a été retenue dans le cadre de cette étude pour des questions de temps de calcul. La maturité choisie est celle qui correspond à la durée du passif soit 6ans. Ces modèles ainsi calibrés et corrélés permettent de générer des scénarios économiques. Ainsi pour chaque allocation, il est possible de générer des scénarios à horizon un an, permettant la recherche d'allocation optimale. Pour rappel, ces scénarios sont simulés avant la crise économique liée à la pandémie de 2020. La modélisation des actifs contient un certain nombre de limites comme la modélisation du seul actif zero coupon, la non prise en compte de l'illiquidité du marché immobilier. Cela tend à influencer les résultats.

Modélisation du passif

Comme mentionné précédemment, il est nécessaire d'intégrer la spécificité du passif de l'assureur dans le cadre d'une recherche optimale d'allocation. Pour ce faire, il est nécessaire de le modéliser au regard de la norme Solvabilité 2 où le passif d'un assureur non vie est divisé entre provisions techniques et fonds propres. La première étape passe par la constitution de Groupes Homogènes de Risque sous forme de triangles de liquidation qui sont précisés par Solvabilité 2. Dans le cadre de cette étude, neuf triangles seront considérés.

Les provisions sont elles mêmes divisées en deux quantités : *Best Estimate* et *Risk Margin*. La première correspond à la meilleure estimation possible de la sinistralité future et la *Risk Margin* est une marge supplémentaire à ajouter obtenue à partir d'une approche coût du capital d'après le règlement délégué (UE) 2015/35. Au cours de ce mémoire, le calcul du *Best Estimate* sera fait via la méthode du *ChainLadder* et celui de la *Risk Margin* par la méthode des durations qui requiert l'estimation du Capital de Solvabilité Requis non vie.

Dans le cadre de ce mémoire, le Capital de Solvabilité Requis non vie sera limité au SCR de provisionnement. Pour obtenir ce dernier, le modèle de Merz et Wüthrich sera implémenté. Dans un premier temps, la méthode *Bootstrap* permet d'obtenir la volatilité du modèle de Mack qui traduit la volatilité du *Best Estimate*. Puis, cette dernière permet de constituer une nouvelle diagonale ajoutée au triangle, ce qui permet de déduire une distribution de l'erreur de provisionnement à horizon un an.

Finalement, la mise en place du modèle de Merz et Wüthrich pour un triangle de l'assureur non vie peut se résumer par la méthodologie suivante :

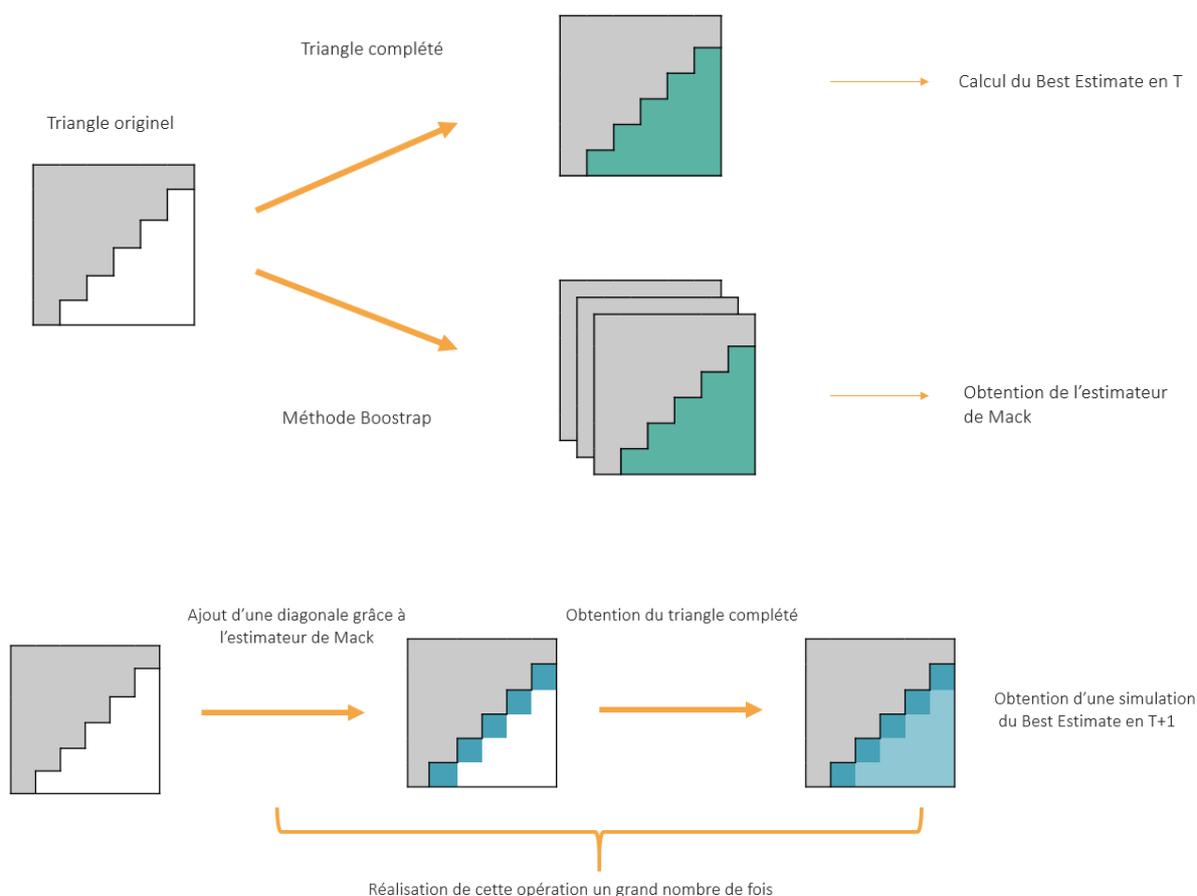


FIGURE 0.0.1 – Résumé des opérations pour obtention du SCR de provisionnement non vie

Le SCR non vie de provisionnement correspond alors à la *Value-at-Risk* à 99,5% de cette distribution. De sorte à tenir compte de la corrélation entre les différents triangles qui seront au nombre de neuf, l'ensemble des distributions empiriques feront appel aux copules.

Enfin, dans le cadre de ce mémoire, le SCR global de la compagnie sera évalué à partir du risque de provisionnement et du risque de marché de manière stochastique.

Ainsi, pour chaque allocation retenue un SCR pourra être calculé à partir des distributions empiriques obtenues par la modélisation des actifs et du passif selon la formule suivante :

$$E_0 = \inf \left\{ E_0 \geq 0 \mid \mathbb{P} \left[(L_0 + E_0) \sum_{j=1}^m w_j A_j > \sum_{i=1}^9 S_i \right] > 99,5\% \right\}$$

avec

- L_0 les provisions techniques horizon un an
- A_j les valeurs des actifs dans un an pour $j \in 1, \dots, m$ actifs, avec m valant 3 actifs dans le cadre de cette étude
- w_j les poids de chaque actif, tels que $\sum_{j=1}^m w_j = 1$
- S_i la sinistralité sur un an représentée par chaque groupe homogène de risque (neuf GRH)

Il est rappelé de nouveau l'aspect *toy model* de ce mémoire. En effet, la modélisation des passifs ne prend pas en compte le *new business* et par conséquent le *Best Estimate* pour primes qui constitue une partie importante des passifs d'un assureur non vie. La prise en compte du *new business* permet d'allonger la duration des passifs d'un assureur, un enjeu clé dans une recherche d'une ré-allocation d'actifs.

Modèle de Sharpe et Tint

Le modèle de Sharpe et Tint a ensuite été mis en oeuvre de sorte à proposer à l'assureur en fonction de son aversion au risque des fourchettes d'allocations. Ce modèle est un dérivé du modèle de Markovitz dans le sens où il prend en compte les engagements techniques de l'assureur. Pour ce faire il cherche à maximiser le rendement du surplus de l'assureur. Ce dernier se définit comme l'écart entre la valeur de marché des actifs et les engagements techniques :

$$R_s = \frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}}$$

Il s'agit de minimiser sous contraintes le risque de perte de surplus pour un niveau de rentabilité du surplus fixé. Le surplus est calculé de la manière suivante :

$$S_t = A_t - P_t$$

où A_t correspond la valeur économique des actifs à l'instant t et P_t celle des engagements techniques. Le problème d'optimisation est similaire à celui de Markovitz et s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \mathbb{V}[R_S] \\ \text{sous contraintes : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[R_S] = r_s \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce modèle se veut donc simple d'implémentation et d'interprétation donnant à l'assureur ce qui constitue un point fort d'argumentation auprès du management. Néanmoins il ne prend pas en compte l'environnement réglementaire, ce qui nécessite une vision intégrant le ratio de solvabilité.

Maximisation de Fonds Propres Economiques

Le modèle de maximisation de fonds propres économiques développé par Planchet et Théron en 2008 pour une société d'assurance non vie permet de déterminer un couple optimal (allocation de capital, capitaux requis). Ce critère se veut objectif en maximisant la valeur initiale de la compagnie lorsque celle-ci est mesurée sous l'opérateur espérance.

Autrement dit, à l'instant initial, l'assureur va constituer ses fonds propres et ses provisions techniques notés respectivement L_0 et E_0 qui seront placés dans des actifs A , avec des poids w . A la fin de l'année, en espérance, l'assureur va déboursier la sinistralité annuelle et obtenir les résultats de ces placements. Les quantités suivantes sont alors introduites :

$$\Lambda_0^w = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{j=1}^m w_j A_j} \quad \text{et} \quad \Sigma_0^w = L_0 + E_0 - \Lambda_0^w$$

où,

- Λ_0^w sont les prestations de l'année actualisées au taux de rendement financier des actifs,
- Σ_0^w correspond à la valeur du surplus actualisé au taux de rendement de l'actif.

Les fonds propres économiques et les provisions économiques sont les espérances respectives de Σ_0^w et Λ_0^w . Cette méthode vise à maximiser à la valeur économique de la compagnie au regard de sa valeur comptable. Cette fonction notée ϕ est définie par :

$$\phi(w) := \frac{\mathbb{E}[\Sigma_0^w]}{E_0}$$

Allocation par duration de passif

Une dernière étude a été effectuée en considérant la typologie des passifs de l'assureur. L'objectif est de comparer une allocation par type de passifs et une allocation globale des passifs. En effet, les Groupes Homogènes de risque ont chacun une duration différente : des dommages liés au matériel auront une duration plus courte que ceux relatifs à des dommages corporels par exemple. Ainsi, spécifier l'allocation en fonction de ce paramètre peut présenter une plus value. Pour cela, une étude sur la duration des passifs a été faite, se concluant par la séparation en trois types de duration les passifs : duration courte, moyenne et plus longue. Chaque groupe a été alloué de manière indépendante, proposant des solutions différentes dans chaque cas en fonction des deux modèles.

Synthesis

Since the introduction of the European Solvency 2 regulation in 2016, insurers have been encouraged to monitor their risk-taking in order to limit the impact on their coverage ratio, which translates into investing mainly in bond-type products. However, in a low-rate financial environment, these investments are becoming less and less profitable, prompting insurers to consider riskier strategies.

The case of non-life insurers is unique because their liabilities have shorter maturities than those of life insurers, they do not react in the same way to this situation. While life insurers are looking for long-term strategies, non-life insurers prefer cashing over re-allocation of their bond portfolio when it matures. The objective of this paper is therefore, under the Solvency 2 standard, to understand how non-life insurers could re-allocate their maturing bond portfolios in a low interest rate environment before the 2020 pandemic-related economic crisis.

An internal model with an ORSA approach can provide answers that respect Solvency 2 principles. Since an internal model is based on both economic and technical assumptions, they must be strong and as close to reality as possible. The following analysis and results are specific to the considered run-off framework, and would therefore differ from one situation to another.

In this context, a fictitious non-life insurance company offering auto and home insurance products will be examined. It is considered to have a long-acquired bond portfolio, part of which is reaching maturity. The insurer is therefore faced with two options : either invest his money in cash or re-allocate it into riskier assets to generate a profit. However, reinvesting in a riskier portfolio results in an increase in the required solvency capital, which harms the shareholder's wealth. A relevant model therefore requires both the specificity of automotive and home products, risk aversion and shareholder's wealth. To obtain a more complete study, two models were implemented : the economic capital maximization model and Sharpe and Tint' model. The first aims to maximize shareholder's wealth under Solvency 2, and Sharpe and Tint's model seeks to maximize the surplus of activity in a medium/variance space.

The two selected models fall under a stochastic framework, which implies a particular sensitivity of the results to the simulations used as input. The simulations are those of the insurer's assets and liabilities : the methodology is therefore cautious.

Assets modelling

The main asset classes that have been modelled during this dissertation are : the dynamics of short rates, equities and real estate. Different models and different calibrations were selected for this study in order to best account for the pre-covid situation of the financial and economic environment. For this, different indexes were used : Eurostoxx50 for equities, IEIF Europe for real estate and Euribor 3 months for rates with the aim of placing themselves in a European context. Two models were studied to best represent the first two indexes : Black and Scholes and Merton's in the real world. The first is very practical in its calibration and is historically the reference model while the second incorporates the notion of market discontinuity with the introduction of a process of jumps. Short rate modelling was carried out under the Vasicek model for its ease of implementation and the generation of negative rates. Short rate modelling has enabled the modelling of zero coupon bonds. Only one type of obligation was chosen in this study for calculation time issues. The maturity chosen is the one corresponding to the duration of the liabilities i.e. 6 years. These calibrated and correlated models generate economic scenarios. Thus for each allocation, it is possible to generate scenarii within a year, allowing the search for optimal allocation. As a reminder, these scenarii are simulated before the economic crisis related to the 2020 pandemic. Asset modeling could be improved by modeling other bond assets than the zero coupon, and by taking into account the illiquidity of the real estate market. This tends to influence the results.

Liabilities modelling

As mentioned above, it is necessary to integrate the specificity of the insurer's liability as part of an optimal allocation search. To do this, it is necessary to model it against the Solvency 2 standard where the liabilities of a non-life insurer are divided between technical provisions and equity. The first step is the formation of Homogeneous Risk Groups in the form of liquidation triangles, which are specified by Solvency 2. As part of this study, nine triangles will be considered.

The provisions themselves are divided into two quantities : *Best Estimate* and *Risk Margin*. The first is the best possible estimate of future disaster and the *Risk Margin* is an additional margin to be added from a cost-of-capital approach based on the 2015/35 Delegated Regulation (EU). During this dissertation, the calculation of the *Best Estimate* will be made using the *ChainLadder* method and the *Risk Margin* method by the duration method, which requires the estimation of the Non-Life Required Solvency Capital.

In this paper, the Non-Life Required Solvency Capital will be limited to the provisioning SCR. To obtain it, the Merz and Wütherich model will be implemented. First, the *Bootstrap* method provides volatility in Mack's model that reflects the volatility of the *Best estimate*. Then, a new diagonal can be obtained thanks to this volatility, and is added to the triangle, which allows deducing a distribution of the provisioning error over the next year.

Finally, the implementation of the Merz and Wütherich model for a triangle of the non-life insurer can be summed up by the following methodology :

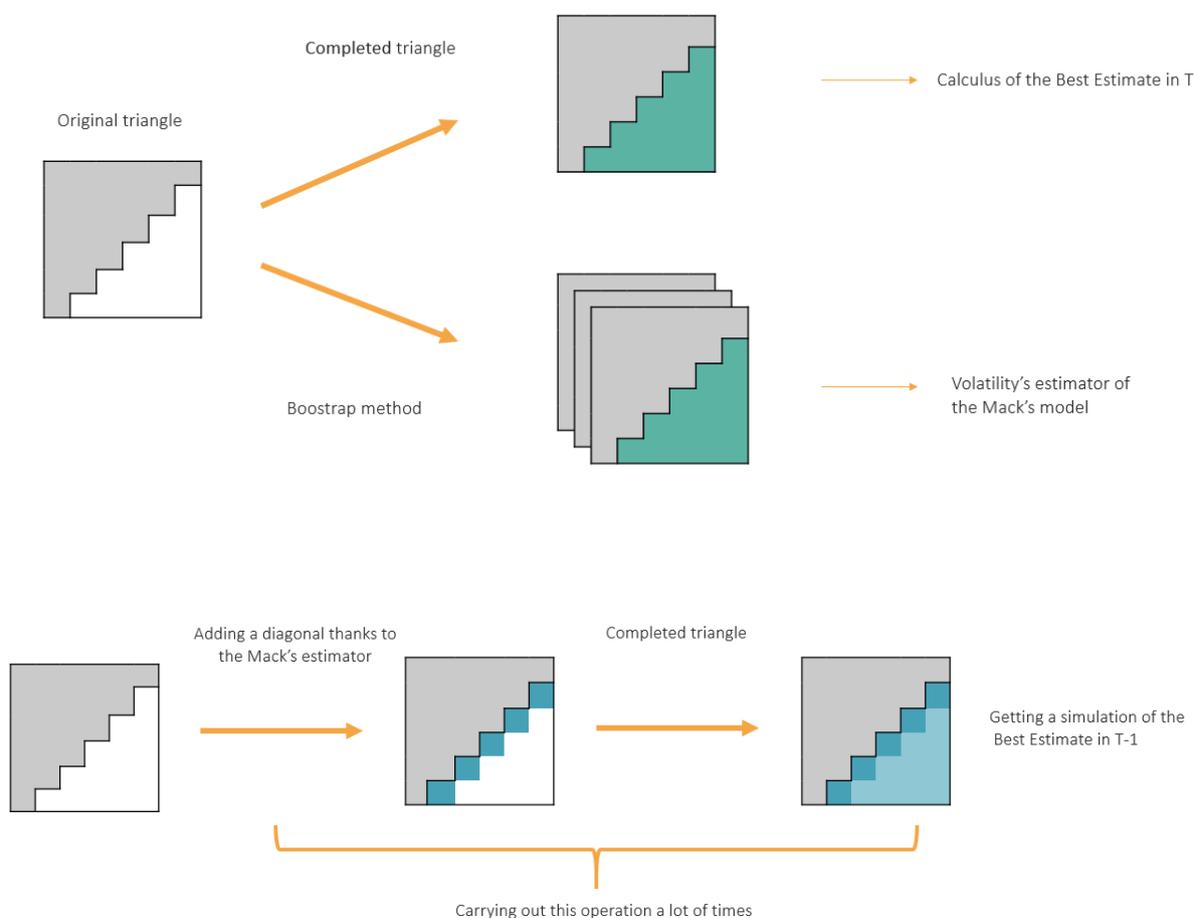


FIGURE 0.0.2 – Summary of operations for obtaining non-life provisioning SCR

The non-life provisioning SCR is the 99.5% *Value-at-Risk* of this distribution. All the empirical distributions will use the copulas in order to taking into account the correlation between the different triangles.

Finally, as part of this paper, the company's overall SCR will be assessed on the basis of provisioning risk and market risk in a stochastic manner.

Thus, for each allocation selected an SCR can be calculated from the empirical distributions obtained by the modelling of assets and liabilities according to the following formula :

$$E_0 = \inf \left\{ E_0 \geq 0 \mid \mathbb{P} \left[(L_0 + E_0) \sum_{j=1}^m w_j A_j > \sum_{i=1}^9 S_i \right] > 99,5\% \right\}$$

with

- L_0 technical provisions for one year
- A_j the asset values in one year for $j \in 1, \dots, m$ assets, with m worth three assets in the context of this study
- w_j the asset weight such that $\sum_{j=1}^m w_j = 1$
- S_i the sinistrality for one year for each liquidation triangle (nine)

As a reminder, the framework of this study forces it to be considered a *toy model*. Indeed, the liabilities model does not take into account the *new business*. As a consequence, the *Best Estimate* for primes is not computed here eventhough it constitutes a huge part of the liabilities of a non life insurer. Moreover taking into account the new business allows the insurer to lengthen its liabilities.

Sharpe and Tint's model

Sharpe and Tint's model was then implemented in such a way as to offer allocation ranges to the insurer based on its risk aversion. This model is a derived from the Markovitz model in the sense that it takes into account the technical commitments of the insurer. To do this, it seeks to maximize the return on the insurer's surplus. The surplus is defined as the discrepancy between the market value of assets and technical commitments :

$$R_s = \frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}}$$

The aim is to minimize the risk of loss of surplus under constraints for a fixed level of profitability of the surplus. The surplus is calculated as follows :

$$S_t = A_t - P_t$$

where A_t is the economic value of assets at time t and P_t the technical liabilities. The optimization problem is similar to Markovitz's and is written as follows :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \mathbb{V}[R_s] \\ \text{sous contraintes : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[R_s] = r_s \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

This model is therefore intended to be simple to implement and interpret for the insurer, which constitutes a strong argument to defend its use. However, it does not take into account the regulatory environment, which requires a vision that integrates the wealth of the shareholder.

Economic equities maximization criterion

The economic equities maximization model developed by Planchet and Thérond in 2008 for a non-life insurance company allows the identification of an optimal couple (capital allocation, capital required). This criterion is intended to be objective by maximizing the initial value of the company when it is measured under the operator expectation. In other words, at the outset, the insurer will build up its equity and technical provisions, which are rated L_0 and E_0 respectively, which will be invested in A_j with w_j weights. At the end of the year, in expectation, the insurer will pay the annual disaster and obtain the results of these investments. The following quantities are then introduced :

$$\Lambda_0^w = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{j=1}^m w_j A_j} \quad \text{et} \quad \Sigma_0^w = L_0 + E_0 - \Lambda_0^w$$

where,

- Λ_0^w are the benefits of the year discounted to the financial rate of return on assets,
- Σ_0^w corresponds to the value of the surplus discounted at the rate of return on the asset.

Economic capital and economic provisions are the respective expectations of Σ_0^w and Λ_0^w . This method aims to maximize the economic value of the company in terms of its book value. This rated feature is defined by :

$$\phi(w) := \frac{\mathbb{E}[\Sigma_0^w]}{E_0}$$

Allocation by duration of liabilities

A final study was conducted by considering the type of the insurer's liabilities. The objective is to compare an allocation by type of liabilities with an overall allocation of liabilities. Indeed, the Homogeneous Risk Groups each have a different duration : damage related to equipment will have a shorter duration than those related to personal injury for example. Thus, specifying the allocation according to this parameter may have a higher value. For this, a study on the duration of liabilities was conducted. In the end, the liabilities were separated into three types of duration : short, medium and long. Each group was allocated independently, resulting in different solutions in each case based on the two models.

Table des matières

Table des matières	18
I Mise en contexte de l'étude et généralités sur la gestion actif - passif	23
1 Généralités sur la gestion actif/passif	25
1.1 Origines de la gestion actif/passif et particularités de l'assurance	25
1.2 Objectifs et fonctionnement	26
1.3 Outils de base	27
2 Hypothèses Economiques et Actuarielles de l'étude	31
2.1 Hypothèses Economiques en contexte de taux bas	31
2.2 Hypothèses actuarielles	32
3 Critères d'allocations d'actifs en Non Vie	33
3.1 Exemples de modèles en assurance non-vie	33
3.2 Modèles retenus pour l'étude	35
II Mise en place des outils : Modélisation des actifs et modélisation assurantielle	41
4 Générateur de Scénarios économiques	43
4.1 Choix des modèles	44
4.2 Choix des données	45
4.3 Modélisation des actions et de l'immobilier	46
4.4 Modélisation des obligations par les taux	51
4.5 Corrélation entre les actifs	55
5 Modélisation du passif d'un assureur non-vie fictif	57
5.1 Les provisions techniques	58
5.2 Capital de Solvabilité Requis	64

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	19
III Etudes des modèles	77
6 Etude à trois actifs - Analyse des modèles	81
6.1 Constitution d'une trésorerie et d'un <i>SCR</i> en fonction des allocations	81
6.2 Modèle de Sharpe et Tint	83
6.3 Modèle de Maximisation de Fonds Propres Economiques et conclusions	85
7 Impact des durations des triangles : allocations par type de passif	87
7.1 Duration des triangles de liquidation	87
7.2 Résultats pour le passif à duration courte	88
7.3 Résultats pour les passifs à duration moyenne	89
7.4 Résultats pour le passif à duration plus longue	90
7.5 Résultats finaux et comparaison	91
8 Synthèse et extensions possibles	93
Table des figures	97
Bibliographie	99

Introduction

Depuis l'entrée en vigueur de la réglementation Solvabilité 2 le 1er janvier 2016, réforme européenne refondant le monde de l'assurance, les assureurs doivent prendre en compte leurs risques de manière différente. Parmi les impacts de cette réglementation les assureurs doivent intégrer le risque de faillite horizon un an à travers le calcul d'un besoin en capitaux dit SCR (*Solvency Capital Requirement*).

Conjointement à cette réforme, l'environnement de taux bas issu d'une politique monétaire ont conduit les assureurs à modifier leurs allocations. Jusqu'alors, compte tenu de la spécificité des passifs en assurance non-vie, les assureurs possédaient des portefeuilles majoritairement obligataires. Cependant, les produits de taux dans cet environnement proposent des rendements désormais particulièrement faibles voire négatifs. La volonté de rendement des assureurs non vie peuvent les pousser à se tourner vers des classes d'actifs plus risquées qui ont pour impact une augmentation des capitaux requis.

Le présent mémoire s'inscrit donc dans la recherche d'une nouvelle allocation d'actifs pour un assureur non vie autour de cette problématique au regard de la norme Solvabilité 2 avant la crise économique liée à la pandémie en 2020.

Dans ce nouveau cadre prudentiel, Solvabilité 2 introduit un système de gouvernance basé sur quatre fonctions clés : la vérification de la conformité, audit interne, l'actuariat et la gestion des risques(CdA, article L. 354-1). C'est dans cette dernière que s'inscrit ce mémoire. La gestion des risque a pour but à la fois d'établir l'exigence de fonds propres mais aussi les limites d'appétence au risque de la compagnie. L'objectif est donc de fournir un outil permettant d'identifier une allocation cible et les hypothèses sur lesquelles elle se base. Le présent mémoire cherche donc à répondre à cet enjeu, en proposant deux critères ; le premier portant sur la notion de surplus proposé par Sharpe et Tint, et un second basé sur la maximisation de fonds propres économiques. Le premier découle de l'univers développé par Markovitz prenant en compte les engagements techniques de l'assureur et son appétence au risque. Le second intègre directement le besoin en fonds propres de la compagnie et une allocation optimale dans le but de maximiser le ratio de solvabilité.

Pour ce faire, une prise en compte de l'environnement à la fois économique et réglementaire doit être précise afin de pouvoir les modéliser au mieux. La première partie de ce mémoire s'articule donc autour de ces enjeux expliquant les différentes hypothèses retenues et les méthodes existantes permettant de répondre à cette problématique.

Dans un second temps, la mise en place de la modélisation du passif et des actifs de l'assureur sera présentée en mettant en lumière les spécificités de l'assurance non-vie.

Dans une troisième partie, l'étude de deux critères d'allocation sera développée, permettant une confrontation des différentes allocations obtenues au regard des objectifs respectifs des deux modèles. Une stratégie d'allocation par durée de passifs sera également présentée de sorte à pouvoir prendre en compte de manière plus spécifique les particularités de chaque type de passif.

Les résultats obtenus devront néanmoins être remis en question au regard de la modélisation réalisée qui s'apparente à un *toy model*. En effet, des choix de modélisation auront été faits comme la non prise en compte du *new business* ou bien une modélisation non exhaustive du panel des actifs. Ces hypothèses ne nuisent pas nécessairement à la cohérence des résultats avec les attentes du marché. Cependant, leur analyse et pertinence d'un point de vue opérationnel sont à remettre en cause puisque la modélisation ne prend pas en compte la complexité et l'ensemble des enjeux d'un organisme d'assurance. De plus, les études menées au cours de ce mémoire s'effectuent dans un contexte pré pandémique ce qui amène à nuancer d'autant plus les résultats. L'ensemble de ces limites et extensions possibles sont développées au cours d'un chapitre important qui clôture ce mémoire.

Première partie

Mise en contexte de l'étude et généralités sur la gestion actif - passif

Chapitre 1

Généralités sur la gestion actif/passif

Ce chapitre a pour but de rappeler les différentes missions de la gestion actif/passif dite *Asset and Liabilities Management* (ALM) en anglais. Dans un premier temps un rappel sera fait concernant les origines de l'ALM, puis dans un second temps les différents objectifs et le fonctionnement d'un outil ALM seront présentés. Enfin, les outils mathématiques de base de l'ALM seront présentés.

1.1 Origines de la gestion actif/passif et particularités de l'assurance

D'un point de vue historique, la gestion actif/passif a fait son apparition suite à la libéralisation des marchés financiers. Cette libéralisation s'est faite en plusieurs temps avec tout d'abord, la fin des accords de Bretton Woods en 1971. Ces derniers permettaient la conversion du dollar en or offrant ainsi une forme de confiance dans les monnaies émises en billets. Puis, l'adoption du régime flottant en 1973 instaure un système où les taux de change ne sont plus fixes mais s'établissent en fonction des forces de marché. Enfin, en 1976, les accords de la Jamaïque confirment officiellement l'abandon du rôle légal international de l'or impliquant par conséquent la libéralisation totale des marchés et des taux d'intérêt bien plus volatils.

Ainsi, cet environnement financier devenu instable a conduit les banques puis les assureurs à prioriser la gestion des écarts de trésorerie. La gestion actif/passif grâce aux mathématiques appliquées a pour but d'optimiser ces écarts tout en préservant le surplus caractérisant le ratio de solvabilité.

Cette optimisation va petit à petit se complexifier avec l'arrivée des premières réglementations prudentielles de la CEE (Communauté économique européenne) en 1973 puis des normes Solvabilité 1 et 2.

Finalement, l'ALM se définit comme la mise en œuvre de moyens coordonnés entre l'actif et le passif visant à assurer l'atteinte des objectifs stratégiques de l'entreprise avec une prise de risque conforme aux seuils de tolérance préalablement définis.

1.2 Objectifs et fonctionnement

Tout d'abord, l'objectif de la gestion actif/passif est d'une part d'assurer le paiement des prestations futures dues aux clients et d'autre part de détenir à toute époque une marge de solvabilité conforme à la prise de risque tolérée. Autrement dit, lorsque l'actuaire implémente un modèle ALM, son but est d'avoir les meilleurs rendements sur les fonds investis et de garder une adéquation entre l'actif et le passif pour honorer les engagements de l'entreprise.

Ensuite, le modèle ALM permet de quantifier les impacts des décisions stratégiques émises par le management. Ces impacts et leur quantification sont propres à la compagnie considérée. Par exemple, une compagnie qui dispose de réserves importantes pourra se permettre d'allouer ses actifs de manière plus risquée de sorte à obtenir des marges plus importantes. En effet, en cas de scénario défavorable, les réserves pourront absorber les pertes. A l'inverse, si une société ne dispose que de peu de réserves, elle cherchera une allocation moins risquée mais qui fournira des recettes régulières.

Les études possibles sont variées : la structure de réassurance, le besoin en capital, la crédibilité envers les agences de notation, l'allocation en capital, le réalisme du business plan, le développement de produits ou encore l'analyse de la stratégie d'investissements.

Par ailleurs, un outil de gestion actif/passif opérationnel doit prendre en compte l'environnement économique, réglementaire et technique caractérisant l'entreprise. En effet, il cherche à reproduire au plus près la vie de l'entreprise, c'est à dire l'ensemble des interactions qu'il peut y avoir pour pouvoir apporter une réelle aide à la décision. Finalement, le fonctionnement d'un modèle ALM peut se ramener à un processus décrit dans le schéma suivant :

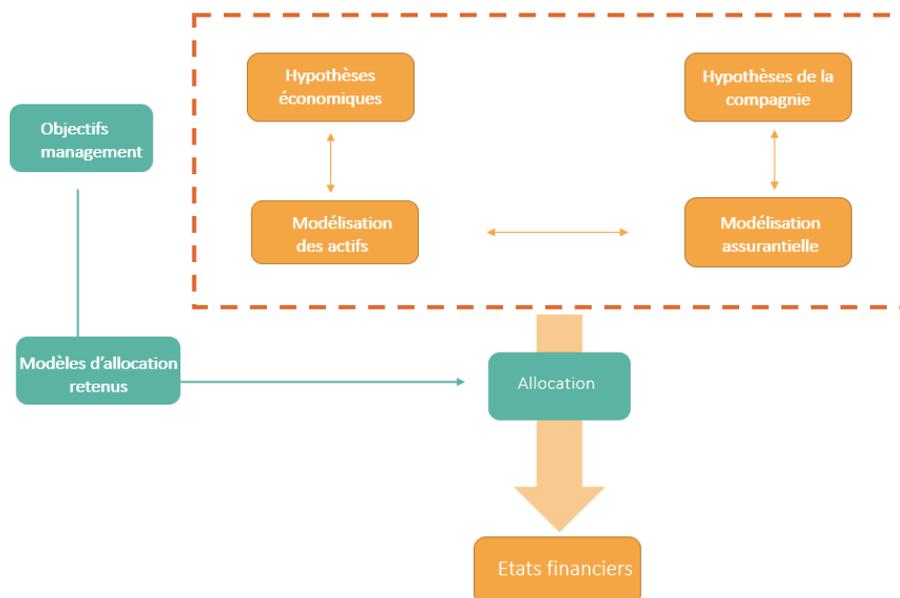


FIGURE 1.2.1 – Fonctionnement d'un modèle ALM

Les hypothèses économiques et techniques de la figure ci-dessus seront détaillées dans le chapitre 2 de cette partie; les différents modèles d'allocations trouvés dans la littérature seront quant à eux présentés dans le chapitre 3 tout comme les choix des modèles retenus dans le cadre de ce mémoire. Enfin, la modélisation des actifs et du passif seront développées au cours de la deuxième partie de ce mémoire.

L'objectif de ce mémoire est de comparer deux critères et donc plusieurs résultats pour aider à l'allocation en capital au regard de la norme Solvabilité 2.

1.3 Outils de base

Cette partie vise à rappeler les différentes notions de base utilisées dans le cadre de la gestion actif/passif. Il est ainsi posé que :

- F_{t_i} est une série de flux fixes,
- VA est la valeur actuelle de la série de flux,
- r_a est le taux de rendement actuariel de la série de flux

Les différentes notions présentées sont le taux de rendement actuariel, l'obligation Zéro-coupon, la duration, la sensibilité, la convexité et le surplus.

Le taux de rendement actuariel

Par définition, le taux de rendement actuariel est celui qui permet d'égaliser la valeur actuelle de l'obligation avec la somme des flux futurs perçus (à savoir les coupons et le prix de remboursement à l'échéance du titre). Autrement dit, c'est le taux d'intérêt que pourrait percevoir un investisseur détenteur de l'obligation jusqu'à sa maturité. C'est ce taux qui donne la possibilité de comparer les obligations entre elles.

Ainsi, le taux actuariel vérifie :

$$\text{Prix de marché} = \text{Valeur actuelle} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1 + r_a)^{t_i}}$$

avec F_{t_i} le flux de l'actif financier sur la période t_i . Pour une obligation par exemple, ce flux peut être un coupon ou un remboursement.

Notion de duration

Par définition, la duration est la moyenne des durées de vie de flux quelconques, pondérée par leur valeur actualisée : elle correspond à la durée de vie des flux. Macaulay définit en 1938 la duration par la formule suivante :

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{VA(r_a)}$$

Il est possible de remarquer dans le cas de flux d'actifs que plus la duration est grande, plus les actifs obligataires seront sensibles aux variations des taux de marché et donc plus ils seront risqués. Le calcul des durations des flux de passifs seront également nécessaires pour le chapitre 5 de ce mémoire dans le cadre du calcul de la Marge pour Risque.

L'obligation zéro coupon

Dans le cadre de ce mémoire, il s'agit du seul type d'obligation considéré. Comme son nom l'indique elle ne délivre aucun coupon entre son émission et sa maturité, et par comparaison, avec une qui en délivre, son fonctionnement est le suivant :

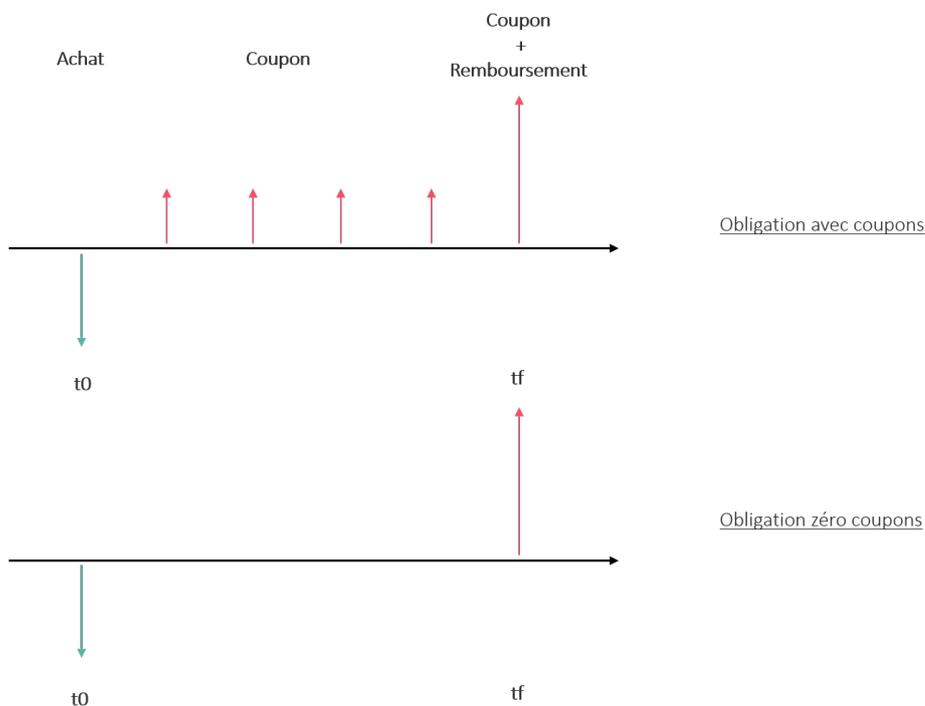


FIGURE 1.3.1 – Fonctionnement d'une obligation

L'acheteur paye un prix qui est inférieur à sa valeur faciale à savoir la valeur remboursée à échéance du contrat quand le taux est positif. Finalement, les obligations de ce type ne présentent pas de risque de réinvestissement pendant la durée vie du contrat. Ce sont les seules obligations à posséder une durée égale à leur maturité.

La sensibilité

Egalement appelée durée modifiée, la sensibilité d'une obligation permet de mesurer la variation de son cours en pourcentage pour des petites variations parallèles des taux d'intérêt. Souvent, son calcul est effectué pour une variation de 1%. La formule est alors la suivante :

$$S = \frac{1}{VA(r_a)} \frac{dVA(r_a)}{dr_a} = - \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_i}{(1+r_a)^{t_i+1}}}{VA(r_a)} = - \frac{\mathcal{D}}{(1+r_a)}$$

Ainsi, si tous les flux sont positifs alors la sensibilité sera nécessairement négative. Cela se traduit par une diminution de la valeur de marché des obligations lorsque les taux montent et inversement.

Convexité

Pour la gestion actif/passif, il est également important de mesurer l'impact d'une forte variation de la courbe des taux. Comme le prix d'une obligation réagit aux variations du taux actuariel, il est possible de prédire en quelles proportions grâce à la sensibilité. Cependant ces proportions ne sont pas symétriques : une baisse des taux fera augmenter le cours des obligations moins fortement qu'une hausse des taux le fera diminuer. Ceci est dû à la convexité de la courbe représentant la variation du prix d'une obligation en fonction de son taux de rendement.

Or, par la formule de Taylor :

$$\frac{dVA(r_a)}{VA(r_a)} \simeq \frac{1}{VA(r_a)} \frac{dVA(r_a)}{dr_a} dr_a + \frac{1}{VA(r_a)^2} \frac{d^2VA(r_a)}{dr_a^2} dr_a^2 \simeq S dr_a + \frac{C}{2} dr_a^2$$

Finalement, par identification la convexité s'obtient :

$$C = \frac{1}{VA(r_a)^2} \frac{d^2VA(r_a)}{dr_a^2} dr_a^2 = \frac{1}{VA(r_a) \times (1+r_a)^2} \times \left(\sum_{i=1}^n t_i \times (t_i + 1) \times \frac{F_i}{(1+r_a)^{t_i}} \right)$$

Le surplus

Le surplus correspond mathématiquement à la différence entre la valeur actuelle des actifs et la valeur actuelle des engagements techniques de l'assureur. Il s'agit finalement ni plus ni moins qu'une mesure de la solvabilité de la compagnie. Cette dernière est en situation de sous

financement lorsque le surplus devient négatif. La valeur du surplus varie en fonction des composantes du bilan ainsi que des fluctuations du marché.

L'objectif des modèles d'allocation basés sur cette notion est donc d'avoir à chaque instant t ,

$$S_t = VM_{actifs,t} - VA_{passifs,t} > 0$$

Gap de trésorerie

Un gap de trésorerie correspond à une situation où la trésorerie n'est pas capable de couvrir les engagements. Cela peut être dû à une situation économique particulière ou à une mauvaise estimation des engagements. C'est pourquoi une étude est faite sur ces gaps de trésorerie afin d'estimer les liquidités dont la compagnie a besoin.

Formellement, un gap de trésorerie noté GT_t pour une période t s'écrit :

$$GT_t = CA_t - CP_t$$

avec

- CA_t les *cash-flows* de l'actif de l'année t
- CP_t les *cash-flows* du passif de l'année t

Cette étude sera faite dans la troisième partie de ce mémoire pour une année.

Chapitre 2

Hypothèses Economiques et Actuarielles de l'étude

2.1 Hypothèses Economiques en contexte de taux bas

Comme rappelé au cours du premier chapitre, l'environnement économique et les hypothèses posées sont cruciales pour obtenir un outil ALM opérationnel. Depuis 2016, les taux sont particulièrement bas ce qui est contraignant pour les assureurs. Il convient donc de rappeler l'origine de cette situation pour pouvoir poser des hypothèses économiques cohérentes.

Le contexte des taux bas résulte d'une politique monétaire menée par la Banque Centrale Européenne (BCE). Cette dernière a pour rôle de garantir la stabilité des prix et son objectif est de maintenir une inflation inférieure mais proche de 2% dans la zone euro. Suite à la crise financière de 2008 et celle des dettes souveraines en 2010, la BCE a été contrainte d'en faire une priorité et pour ce faire, elle possède plusieurs leviers.

Tout d'abord, elle peut offrir ou demander plus ou moins de liquidités sur les marchés interbancaires ce qui influence leur cours. Ainsi, en offrant beaucoup de liquidités, elle fait baisser les taux, permettant aux banques de se financer à moindre frais. Ensuite, elle contrôle de manière indirecte le taux interbancaire en fixant le taux principal de refinancement. Ce dernier est le taux que la BCE pratique auprès des banques si ces dernières ne peuvent se financer. Par ailleurs, elle fixe le taux de dépôt qui est le taux pratiqué par la BCE lorsqu'une banque a un excédent de trésorerie. Enfin, la BCE impose aux banques le dépôt d'une partie de leurs liquidités sur le compte évoqué précédemment, il s'agit du taux de réserves obligatoires.

Ainsi depuis 2008, la BCE a baissé les taux directeurs de sorte à inciter les banques à prêter à des taux plus bas. Cela stimule les ménages à consommer et investir à la fois parce qu'il est plus facile de s'endetter mais aussi parce que leur épargne sera moins lucrative. Cette politique monétaire non conventionnelle appelée "*Quantitative Easing*" ou assouplissement quantitatif visant à relancer le marché interbancaire consiste également à créer de la monnaie centrale pour la prêter aux banques en manque de financement. Elle procédera à la même politique en 2010. Depuis 2016, les taux sont donc bas et sont même passés négatifs depuis. Les experts tendent à s'accorder sur le fait qu'ils resteront bas, c'est pourquoi il sera supposé dans les projections de

ce mémoire qu'ils seront stables et encore négatifs par la suite.

2.2 Hypothèses actuarielles

Une compagnie non-vie possède des propriétés qui lui sont propres. Dans le cadre de cette étude, l'analyse est portée sur une société qui commercialise des produits d'assurance multi risques habitation et d'assurance automobile uniquement. Ce choix s'appuie sur le fait que les assureurs non-vie ont leur activité principalement concentrée sur les dommages aux biens et corporels d'après l'étude de l'ACPR : «*les chiffres du marché français de la banque et de l'assurance en 2017*».

Ainsi, les garanties proposées par cette compagnie seront :

- Les dommages aux biens divers liés aux vols, à la casse, etc
- La Responsabilité Civile Générale
- La couverture des dommages matériels lors d'un accident en assurance automobile
- La Responsabilité Civile en assurance automobile
- La Garantie Conducteur

La sinistralité de cette compagnie s'articule autour de dommages matériels dont les prestations sont rapides et vite classées et de dommages corporels, au déroulement plus long car les dossiers sont généralement clos moins rapidement.

Ce mémoire se place dans une hypothèse de run off. Cela signifie que les primes, et le risque de primes ne seront pas pris en compte, impactant les résultats. En effet, une partie des sinistres apparaissant rapidement, il sera nécessaire de posséder une grande part de trésorerie alors que dans un cadre les intégrant les prestations seraient financées par les primes. C'est pourquoi, cette hypothèse et structure du passif propre à ce mémoire doit être intégrée dans la modélisation assurantielle et particulièrement dans les choix des modèles d'allocations.

De plus, cette étude se place dans le référentiel prudentiel Solvabilité 2. Pour rappel, cette directive est composée de trois piliers : un premier quantitatif, un deuxième qualitatif et un dernier informatif. Au-delà des aspects quantitatifs, la Directive Solvabilité 2 introduit une forte dimension de gestion du risque et de contrôle interne et met l'accent sur la gouvernance (pilier 2).

La modélisation dans le cadre de cette étude s'inscrit dans un processus ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) puisqu'il s'agit d'un outil d'aide à la décision destiné au management des entreprises. Il permet par sa vision prospective d'intégrer des problématiques que le Pilier 1 ne prend pas en compte et s'insère donc dans la gestion des risques d'une entreprise. Dans le cadre de ce mémoire, la modélisation ne fera pas appel aux formules standards de Solvabilité 2 mais à ses principes.

Chapitre 3

Critères d’allocations d’actifs en Non Vie

Une fois la modélisation des actifs et des passifs effectuée, il convient de s’intéresser aux critères d’allocation caractérisant le modèle ALM. Les modèles financiers développés depuis les années 1950 sont assez nombreux et répondent à différents objectifs. Initialement, les modèles d’ALM se concentrent essentiellement sur l’évaluation d’actifs financiers, le couple risque/rendement et la diversification. Puis, avec les contraintes de solvabilité imposées par les nouveaux environnements réglementaires type Solvabilité 2, des nouveaux modèles ont intégré ces dernières dans l’obtention d’une allocation stratégique. Enfin, le développement de la puissance de calcul a permis à celui des stratégies d’allocations basées sur des modèles multi-périodiques.

Ce chapitre vise à présenter certains critères trouvés dans la littérature dans le cadre de l’assurance non vie dont les articles sont disponibles dans la bibliographie ainsi que ceux retenus pour cette étude.

3.1 Exemples de modèles en assurance non-vie

Tout d’abord, Ashiq Mohd Ilyas [1] propose un critère basé sur la notion de *mismatch* ou gap de trésorerie, comme méthode d’allocation pour un assureur indien. Les résultats montrent que si la probabilité d’un gap de trésorerie augmente alors l’exigence en capital pour absorber ce gap augmente aussi, ce qui n’est pas avantageux pour le ratio de solvabilité. Ainsi, l’objectif serait d’investir dans des obligations qui fournissent des cashflows réguliers en les adossant à ceux liés aux prestations. Schématiquement cela correspond à trouver une allocation telle que :

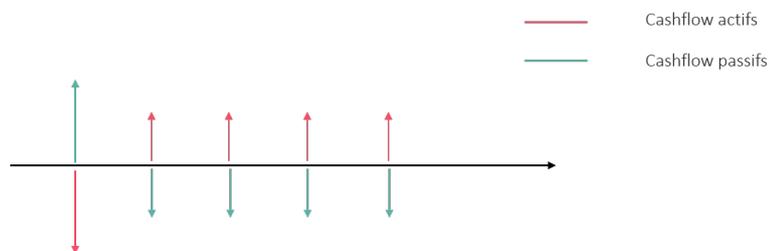


FIGURE 3.1.1 – Adossement parfait entre actif et passif

L'exposition au risque de l'assureur dépend alors uniquement des gap de trésorerie dans cette situation. Le critère d'allocation se construit à l'aide des outils présentés au cours du premier chapitre : durée et convexité du portefeuille d'obligations puis celles des engagements. Ainsi, il est possible d'estimer le risque d'immunisation du surplus ; le management fixe le risque d'immunisation selon son appétence au risque ce qui permet de trancher sur l'allocation adéquate.

Une deuxième méthode [2] faite par la société de conseil *Towers Perrin* propose le modèle ALMEF (*Asset-Liabilities Management Efficient Frontier*) aux Etats Unis qui s'appuie sur la notion de surplus. L'allocation est réalisée par une optimisation de ce dernier de manière multipériodique. Il fonctionne suivant une logique similaire au modèle de Sharpe et Tint développé dans la partie suivante.

Une troisième méthode consiste à poser le problème dans un cadre de Programmation Stochastique multi-étapes ce qui permet de capter des objectifs à court terme et plus long terme. Par cette méthode, il est possible de trouver un compromis entre des conditions de liquidités suffisantes et les décisions du management sur l'avenir de l'entreprise à un horizon plus lointain. En particulier, les chercheurs Consigli. and al [3] ont proposé en 2010 un modèle dynamique basé sur l'optimisation du profit à un an avec un équilibre des profits à court, moyen et long terme au regard des engagements d'une société d'assurance non vie. Ce programme aboutit à une fonction considérant plusieurs échéances qu'il s'agit de maximiser. Pour la résoudre, il convient de construire des scénarios sur toutes ces échéances. Un scénario se caractérise alors comme une évolution sur 10 ans des cinq variables aléatoires suivantes : les primes, les réserves, les évolutions d'actifs, les sinistres et les coûts administratifs et humains. Ces dernières ont des interactions entre elles, dépendent du passé et sont par définition aléatoire, d'où une construction des scénarios dite par *arbre*. Schématiquement, la structure pour générer des scénarios à partir des conditions initiales peut se représenter comme suit :

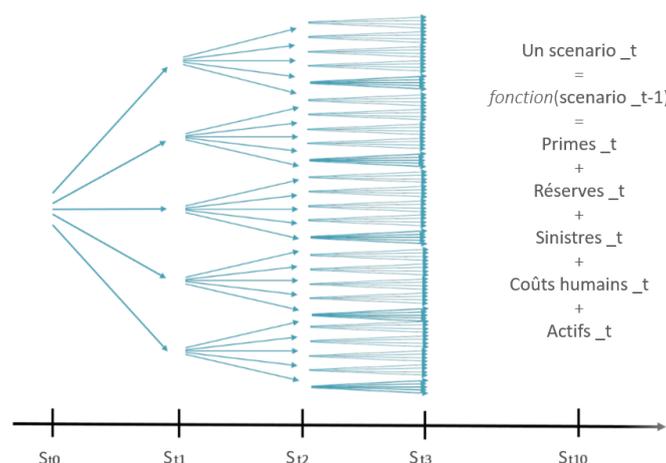


FIGURE 3.1.2 – Générateur de Scénarios - Modèle Dynamique

Ainsi, à l'instant initial, les variables sont connues. A chaque pas de temps, l'ensemble des variables sont projetées en fonction d'un nombre de possibilités fixées, de son état à l'instant précédent et des interactions entre elles. L'*arbre* des scénarios se construit alors de proche en proche. La fonction est ensuite maximisée à partir de ces scénarios. Bien que cette technique permet d'intégrer plusieurs objectifs, implémenter ce type de méthode nécessite une grande capacité de calcul.

3.2 Modèles retenus pour l'étude

L'objet de cette partie est de présenter deux modèles déterministes et une stratégie d'allocation d'actifs qui ont été mis en place durant ce mémoire. Le premier modèle mis en oeuvre est celui de Sharpe et Tint, un modèle dérivé de Markovitz retenu pour sa facilité d'implémentation. Puis l'implémentation du critère de Maximisation de Fonds Propres Economiques développé par Planchet et Théron sera présenté.

Modèle de Sharpe et Tint, inspiré de celui de Markovitz

Rappels sur le modèle de Markovitz

En 1952, Markovitz introduit un modèle qui fonde la théorie moderne de la gestion de portefeuille. Plusieurs concepts sont à la base de cette théorie, qu'il convient de rappeler.

Tout d'abord, les investisseurs sont supposés rationnels et averse au risque. D'autre part, le marché est considéré efficient c'est à dire que les actions s'échangent toujours à leur juste valeur.

De plus, Markowitz pense que les différents titres composant un portefeuille ne peuvent être sélectionnés individuellement et doivent au contraire être choisis selon la corrélation de leurs variations à celles du reste des actifs du portefeuille. C'est le principe de diversification.

Ce mode de sélection permet de minimiser le risque pour un niveau de rendement choisi. L'idée du modèle est de caractériser le risque par la variance et le rendement par son espérance. Le gestionnaire va alors constituer son portefeuille en fonction des prévisions sur l'espérance, les variances et covariances des titres.

Formellement, le problème se pose comme suit :

Si l'investisseur peut investir dans N actifs risqués, soit w le vecteur des poids des N investissements, alors :

$$w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_N)^T \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

avec w_i qui représente le poids de l'actif i dans le portefeuille.

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ le vecteur des espérances de rendements de chaque actif et Σ la matrice de variance-covariance des rendements :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \dots & \sigma_{1,9} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{9,1} & \sigma_{9,2} & \dots & \dots & \sigma_{9,9} \end{pmatrix}$$

Soit R_i le rendement de l'actif i et R_p celui du portefeuille, alors :

$$\begin{aligned} R_p &= (w_1, w_2, \dots, w_N)R \\ &= w^T R \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathbb{R}^N} w^T \Sigma w \\ \text{sous contraintes : } \begin{cases} w^T \mu \geq \mu_0 \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

L'ensemble des portefeuilles se représente dans l'espace (μ, σ^2) . Il est alors possible de tracer la frontière efficiente qui correspond aux solutions du problème d'optimisation comme représenté ci-dessous avec en orange la frontière efficiente et en vert l'ensemble des portefeuilles générés :

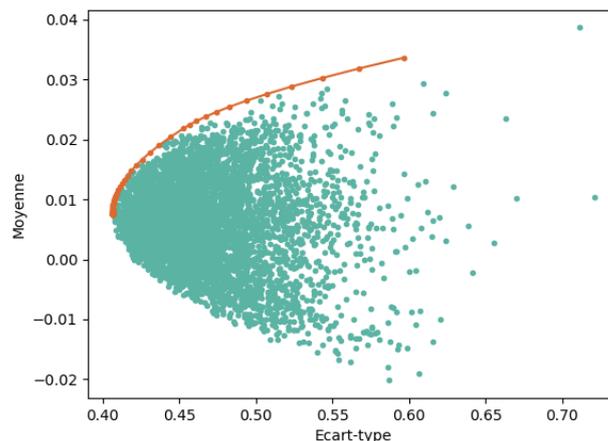


FIGURE 3.2.1 – Représentation d'un modèle de Markovitz

Le modèle de Markovitz permet ainsi d'obtenir l'enveloppe des portefeuilles optimaux pour un niveau de risque donné. Les portefeuilles sous cette enveloppe sont considérés comme sous

optimaux. Ce modèle a l'avantage d'être facile d'implémentation, et très facilement lisible mais ne prend pas en compte le passif. C'est pourquoi le modèle de Sharpe et Tint propose une dynamique similaire qui prend en compte les engagements techniques de l'assureur.

Modèle de Sharpe et Tint

Dans ce modèle, la variable d'étude n'est pas le rendement des actifs mais celui des surplus. Sharpe et Tint posent donc les notations suivantes :

$$R_s = \frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}}$$

Il s'agit de minimiser sous contraintes le risque de perte de surplus pour un niveau de rentabilité du surplus fixé. Le surplus initial est donc calculé de la manière suivante :

$$S_0 = A_0 - m \times P_0$$

où m correspond au poids que le gérant souhaite donner à son actif, A_0 la valeur économique des actifs à l'instant 0 et P_0 celle des engagements techniques. Dans l'exemple détaillé ci-dessous, il sera supposé que $m = 1$. Alors :

$$S_1 = A_0(1 + R_A) - P_0(1 + R_P)$$

où $R_A = \frac{A_1 - A_0}{A_0}$ correspond au vecteur des rendements des actifs et $R_P = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$ au taux d'accroissement du passif.

Le rendement du surplus s'obtient donc comme suit :

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{S_1 - S_0}{S_0} \\ &= \frac{A_0(1 + R_A) - P_0(1 + R_P) - A_0 - P_0}{A_0} \\ &= \frac{A_0 R_A - P_0 R_P}{A_0} \\ &= R_A - \frac{P_0}{A_0} R_P \\ &= R_A - \frac{1}{rf_0} R_P \quad \text{où } rf_0 \text{ est le ratio de financement initial} \end{aligned}$$

Le programme d'optimisation s'écrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \mathbb{V}[R_S] \\ \text{sous contraintes : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[R_S] = r_s \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

De la même manière que pour Markovitz, les portefeuilles vérifiant le programme forment une hyperbole dans le plan dont la partie supérieure est la frontière efficiente. De plus, une contrainte est rajoutée sur la probabilité que R_S soit inférieure à un seuil. Cette contrainte se matérialise graphiquement par une droite dans le plan et son expression est la suivante :

$$\mathbb{E}[R_S] = q_{\mathbb{P}}^{N(0,1)} \times \sigma_S + u$$

Avec :

- \mathbb{P} la probabilité fixée par le management
- u le seuil minimal de rentabilité du surplus fixée par l'investisseur
- $q_P^{N(0,1)}$ le quantile de la loi normale centrée réduite associée à la probabilité \mathbb{P}

L'intersection entre cette droite et la frontière efficiente donnera le portefeuille efficient, de rentabilité maximale.

Ainsi, un assureur averse au risque aura tendance à fixer une probabilité haute et un seuil faible. Cependant, s'il est trop contraignant, la droite peut ne pas couper la frontière efficiente, auquel cas il n'y aurait pas de solution.

Ce modèle a l'avantage d'être simple d'implémentation et permet de fournir des fourchettes d'allocations. Cependant, le paramètre d'aversion au risque a une influence très importante qu'il convient de challenger avec un modèle plus objectif. C'est pourquoi, un second modèle a été mis en oeuvre, sa présentation fait l'objet de la partie suivante.

Modèle de la Maximisation de Fonds Propres Economiques

Un point de vue alternatif au modèle basé sur le surplus et dans lequel la réglementation est explicitement prise en compte est proposé par le modèle de maximisation de fonds propres économiques (noté MFPE) développé par *Planchet et Thérond* [5].

Sous Solvabilité 2, le passif est constitué des provisions techniques ainsi que des fonds propres. Ces derniers sont eux-mêmes composés du capital de solvabilité requis et du surplus. Le capital de solvabilité requis noté SCR, dépend directement de l'allocation du capital de la compagnie. Ainsi, *Planchet et Thérond* proposent de déterminer de manière conjointe le niveau de capital requis et la manière d'allouer ce dernier.

Le critère revient à déterminer le capital et l'allocation d'actifs qui, ensemble, maximisent la valeur initiale de la compagnie lorsque celle-ci est mesurée sous l'opérateur espérance. Ce critère permet d'obtenir une allocation dont la détermination ne dépend pas d'un critère subjectif. En effet, les modèles basés sur le surplus qui sont des dérivés du modèle de Markowitz présentés précédemment, introduisent une hypothèse sur le niveau de la probabilité de ruine.

Schématiquement, le problème se représente de la manière suivante en considérant les fonds propres (FP) et les provisions techniques (PT) :

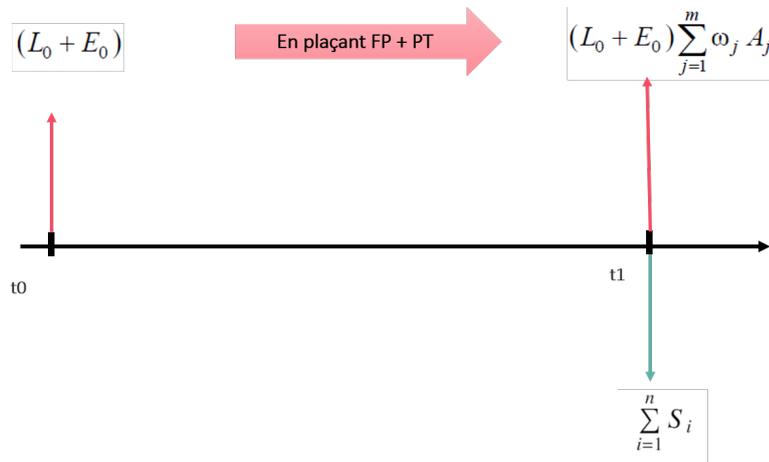


FIGURE 3.2.2 – Représentation du problème de Maximisation de Fonds Propres Economiques

En effet, à l'instant initial, l'assureur va constituer ses fonds propres et ses provisions techniques notés respectivement L_0 et E_0 qui seront placés dans des actifs A , avec des poids w . A la fin de l'année, en espérance, l'assureur va déboursier la sinistralité annuelle et obtenir les résultats de ces placements. Ces deux quantités sont représentées respectivement par une flèche verte et rose. Les quantités suivantes sont alors introduites :

$$\Lambda_0^w = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{j=1}^m w_j A_j} \quad \text{et} \quad \Sigma_0^w = L_0 + E_0 - \Lambda_0^w$$

où,

- Λ_0^w sont les prestations de l'année actualisées au taux de rendement financier des actifs,
- Σ_0^w correspond à la valeur du surplus actualisé au temps de rendement de l'actif.

Les fonds propres économiques et les provisions économiques sont les espérances respectives de Σ_0^w et Λ_0^w . Cette méthode vise à maximiser à la valeur économique de la compagnie au regard de sa valeur comptable. Cette fonction notée ϕ est définie par :

$$\phi(w) := \frac{\mathbb{E}[\Sigma_0^w]}{E_0}$$

Cette méthode possède de nombreux avantages : tout d'abord elle intègre les contraintes imposées par la réglementation de Solvabilité 2 et ne fait pas intervenir de critères subjectifs comme une aversion au risque. Cependant, elle possède également des inconvénients car outre des temps de calculs très longs, la valeur obtenue est une valeur fixe et non pas une fourchette comme pour Sharpe et Tint.

Deuxième partie

Mise en place des outils : Modélisation des actifs et modélisation assurantielle

Chapitre 4

Générateur de Scénarios économiques

Comme explicité dans de la première partie de ce mémoire, une fois les hypothèses économiques et techniques posées, il est nécessaire de mettre en place des outils pour modéliser les actifs et le passif de la compagnie d'assurance. Cette partie a pour objectif de décrire les méthodes mises en oeuvre pour constituer un générateur de scénarios économiques.

Par définition, un scénario économique est «une projection sur un horizon d'intérêt de grandeurs économiques et financières comme le prix des actions ou bien les taux d'intérêt ». Il s'agit donc d'un outil de projection des facteurs de risques économiques comme financiers qui se placeront en input des modèles ALM pour calculer la valeur économique des actifs dans cette étude. C'est pour cette raison qu'un GSE doit reposer sur des théories mathématiques et économiques solides tout en étant adapté au profil de risque de l'assureur. De plus, il est nécessaire d'être vigilant à la complexité des modèles. En effet, le risque de modèle serait d'autant plus important et pourrait nuire à l'interprétabilité du GSE sans compter que les processus de calibrage comme d'implémentation seraient coûteux. Dans le cadre de cette étude, trois grandes catégories d'actifs seront implémentées : les actions, l'immobilier et les obligations (via la modélisation des taux).

Un GSE peut être implémenté dans deux univers différents : l'univers risque-neutre ou celui du monde réel. Le premier est un environnement de simulation où les prix observés sont cohérents avec ceux du marché. C'est un univers théorique dans lequel tous les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque. Autrement dit, les agents sont neutres face au risque puisqu'ils n'exigent aucune prime de risque. Dans ce cadre, les GSE sont calibrés à partir des prix de marché à un instant donné en minimisant ces derniers avec les prix donnés par le modèle. Par exemple, cet univers est utilisé pour des calculs des provisions techniques ou ceux de *Best Estimate* en assurance vie.

Dans le monde réel, les simulations reproduisent fidèlement l'historique financier. Puisque les modèles sont calibrés sur des données historiques, la profondeur et la granularité de l'historique choisies impactent significativement le modèle. La prime de risque est cette fois intégrée implicitement à la modélisation contrairement au risque neutre. Souvent, cet univers est utilisé comme outil de pilotage stratégique. Il s'inscrit donc dans le cadre de l'étude de ce mémoire.

4.1 Choix des modèles

Le choix d'un modèle est décisif pour modéliser un facteur de risque dans son contexte économique. Il existe une grande variété de modèles pour décrire le cours d'un actif de type action ou de type taux. Chacun de ces modèles possède ses propriétés et sa complexité. Il est donc nécessaire d'analyser chacun d'entre eux pour déterminer lequel serait le plus approprié pour la modélisation considérée.

Aujourd'hui le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de Black et Scholes. Ce modèle est simple dans sa calibration et son estimation puisqu'il repose sur l'idée que les rendements des prix des actifs financiers suivent une loi log-normale.

Cependant, son utilisation requiert des hypothèses fortes telles qu'une volatilité constante et un cours des actions continu. Or ces deux hypothèses sont remises en cause d'un point de vue empirique, d'où l'utilisation de plus en plus fréquente de modèles introduisant une discontinuité dans l'évolution des cours et une volatilité stochastique. Relacher ces hypothèses complexifie nécessairement le modèle.

C'est pourquoi dans cette étude, l'arbitrage suivant a été tenu : le modèle de Black Scholes sera étudié et la priorité sera donnée à la discontinuité des cours plutôt qu'à la volatilité stochastique qui justifie le fait que le modèle de Merton soit privilégié. Puisque dans le cas général l'immobilier et les actions présentent une forte similitude dans leur comportement, il est choisi d'utiliser des modèles identiques pour les actions et l'immobilier, ainsi que l'usage le préconise.

Par ailleurs, dans un contexte de taux négatifs, la modélisation de taux courts par le modèle de Vasicek semble être appropriée. En effet, celui-ci repose sur l'hypothèse que les rendements suivent une loi normale. Ce modèle a été à la fois le premier à être mis en oeuvre pour cette simplicité mais aussi le premier à être écarté pour la possible génération de taux négatifs. Cependant l'observation des marchés conduit à relancer l'utilisation du modèle de Vasicek par les acteurs.

4.2 Choix des données

Les modèles sont traditionnellement calibrés sur des indices économiques et financiers. Un indice boursier constitue en effet un indicateur pour déterminer la performance d'un marché. Dans le cadre des indices actions, ils peuvent être représentatifs d'un marché ou bien d'un secteur d'activité. Par exemple, l'Eurostoxx50 mesure l'évolution des 50 plus grandes capitalisations de la zone euro. Il permet de connaître la tendance et l'évolution globale de l'économie et de la finance des plus grandes entreprises de la zone euro. Dans le cas de l'immobilier, l'indice IEIF Europe reflète l'évolution du cours des foncières et des fonds immobiliers cotés sur les bourses européennes.

De plus, il existe différentes représentations pour un indice : les indices nus, nets et bruts. Le terme "nu" fait référence à un indice de la "nue propriété", c'est-à-dire dépourvu de l'usufruit, (dividendes). Un indice nu (dit *Price Index*) ne tient donc pas compte des éventuels versements de dividendes des sociétés dont les actions entrent dans la composition. Le nu s'oppose à l'indice de rentabilité (dit *Return Index*) qui intègre les dividendes dans son calcul. L'appellation brut ou net fait référence à l'indice de rentabilité avant ou après prélèvements fiscaux. Par construction, le net est surperformé par le brut et surperforme le nu comme illustré sur la figure ci-dessous représentant l'indice IEIF Europe sur les vingt dernières années :

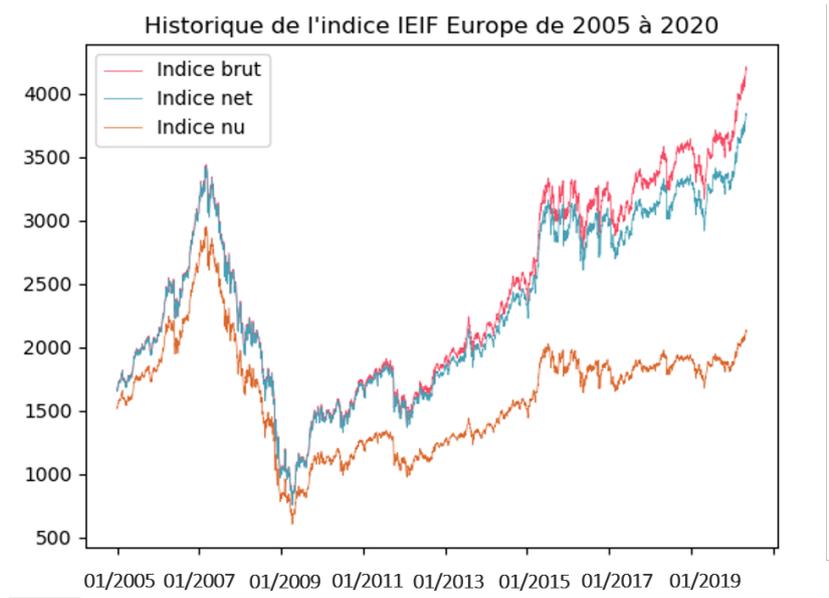


FIGURE 4.2.1 – Comparaison entre un indice immobilier brut, nu et net

Dans le cadre de ce mémoire, il a été choisi de se placer dans une vision européenne. Pour les actions, l'indice Eurostoxx 50 a été retenu ; pour l'immobilier, l'indice IEIF Europe. Pour la modélisation des taux, l'objectif est de modéliser des taux courts instantannés. L'Euribor 3 mois (*Euro Interbank Offered Rate*) est, depuis le 4 janvier 1999, le taux d'intérêt auquel une sélection de banques européennes se prêtent des fonds libellés en euros et dont les emprunts ont une échéance de 3 mois.

4.3 Modélisation des actions et de l'immobilier

Modèle de Black et Scholes

Depuis les travaux de Black et Scholes, la modélisation classique du cours d'une action S est basée sur l'hypothèse que celui-ci suit un mouvement brownien géométrique. Autrement dit, le processus se définit à travers l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS(t) = S(t) \cdot (\mu dt + \sigma dW_t)$$

où W est un mouvement brownien géométrique avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Cette EDS possède la solution explicite suivante avec la condition initiale $S(0) = S_0$:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma W_t\right)$$

Calibration du modèle de Black et Scholes

En supposant que l'unité de temps est journalière, le rendement journalier s'écrit :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma dW_1$$

Or le mouvement brownien suit une $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$, donc le rendement journalier suit une $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma \sqrt{t}\right)$. Ainsi cette modélisation suppose que le rendement journalier d'une action suit une loi normale.

Ce modèle est donc simple d'utilisation et à paramétrer à partir de l'historique du cours de l'action. La paramétrisation par la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance permettent d'obtenir $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}$, les estimateurs respectifs du drift μ et de la volatilité σ :

$$\begin{cases} \widehat{\mu} - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T R(t) \\ \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^2 \end{cases}$$

Comme expliqué précédemment, le calibrage d'un GSE monde réel est très sensible à la granularité et la profondeur d'historique choisies. C'est pourquoi une analyse de sensibilités sur ces deux paramètres a été réalisée. Les paramètres obtenus pour le modèle action de l'Eurostoxx 50 ont été regroupés dans le tableau suivant :

Profondeur	Granularité	μ	σ^2
10 ans	Mensuelle	0.285 %	0.246 %
10 ans	Hebdomadaire	0.077 %	0.067 %
10 ans	Quotidienne	0.016 %	0.015 %
5 ans	Mensuelle	0.358 %	0.196 %
5 ans	Hebdomadaire	0.108 %	0.050 %
5 ans	Quotidienne	0.020 %	0.012 %

FIGURE 4.3.1 – Paramétrage pour l'indice Eurostoxx sous Black et Scholes

Des paramètres similaires pour l'immobilier sont représentés dans la figure ci-dessous :

Profondeur	Granularité	μ	σ^2
10 ans	Mensuelle	0.849 %	0.167 %
10 ans	Hebdomadaire	0.206 %	0.049 %
10 ans	Quotidienne	0.041 %	0.008 %
5 ans	Mensuelle	0.706 %	0.156 %
5 ans	Hebdomadaire	0.174 %	0.033 %
5 ans	Quotidienne	0.036 %	0.007 %

FIGURE 4.3.2 – Paramétrage pour l'indice IEIF Europe sous Black-Scholes

Dans les deux cas, il est possible de remarquer que la volatilité et le paramètre μ sont plus grands lorsque l'historique est constitué de relevés mensuels (ou hebdomadaires) plutôt qu'hebdomadaires (respectivement quotidiens). Ce résultat est pertinent puisque la granularité est plus importante donc les valeurs des rendements sont en toute généralité plus élevées, et la taille de l'échantillon est plus faible. Le même commentaire peut être fait sur la volatilité.

Enfin, la valeur de μ est quant à elle relativement stable quelle que soit la profondeur d'historique bien que légèrement supérieure sur 10 ans, tandis que la volatilité augmente.

Modèle de Merton

Comme introduit plus tôt, l'observation des cotations des actions sur les marchés montre des variations soudaines et instantanées des cours. Ces discontinuités ne sont pas reflétées par les processus browniens géométriques de manière satisfaisante.

C'est pourquoi une généralisation du modèle de Black et Scholes a été introduite avec l'ajout de sauts au mouvement brownien géométrique. Formellement, le cours S est tel que pour une condition initiale $S_0 = S(0)$:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right)$$

avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ avec $\sigma > 0$,

$W = (W_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener,

$N = (N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ

$U = (U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes telles que U_k suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_U^2)$.

Les processus W , N et U sont considérés comme indépendants.

Par convention, $\sum_{k=1}^{N_t} U_k = 0$ si $N_t = 0$

Calibration du modèle de Merton

Cette fois-ci, le rendement s'exprime comme suit :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma dW_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k$$

La paramétrisation est plus complexe qu'avec Black et Scholes puisqu'il n'y a plus deux mais quatre paramètres à déterminer. Deux méthodes sont généralement retenues pour cette paramétrisation : la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments (avec une approximation si nécessaire par la méthode des moindres carrés).

L'expression de la densité du rendement de ce modèle s'écrit :

$$f(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\sigma_U^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_U^2)}\right)$$

De cette densité, il est possible de déduire les moments centrés des rendements. Par symétrie des modèles les moments centrés impairs supérieurs à 1 sont nuls. Les moments centrés pairs s'écrivent quant à eux :

$$\mathbb{E}\left[(R - \bar{R})^{2k}\right] = \frac{2k!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_U^2)^k$$

En est donc déduit le système d'équations suivant qui par résolution permet d'obtenir les quatre paramètres recherchés :

$$\begin{cases} \bar{R} = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R - \bar{R})^2 = \sigma^2 + \lambda \sigma_U^2 \\ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R - \bar{R})^4 = 3 \cdot \exp(-\lambda) \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n \sigma_U^2)^2 \\ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R - \bar{R})^6 = 15 \cdot \exp(-\lambda) \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n \sigma_U^2)^3 \end{cases}$$

De la même manière que pour le modèle de Black et Scholes, une étude de sensibilité sur la granularité et la profondeur d'historique a été effectuée. Les résultats pour les actions Eurostoxx 50 sont les suivants :

Profondeur	Granularité	μ	σ^2	λ	σ_U^2
10 ans	Mensuelle	0.285 %	0.246 %	0.842%	0.012 %
10 ans	Hebdomadaire	0.077 %	0.067 %	0.107%	0.008 %
10 ans	Quotidienne	0.016 %	0.015%	0.013%	0.004%
5 ans	Mensuelle	0.359 %	0.194 %	1.088 %	0.020 %
5 ans	Hebdomadaire	0.108 %	0.050 %	0.039 %	0.013 %
5 ans	Quotidienne	0.019 %	0.012 %	0.012%	0.005 %

FIGURE 4.3.3 – Paramétrage pour l'indice Eurostoxx sous Merton

Des commentaires similaires à ceux développés pour Black et Scholes peuvent être faits sur les paramètres μ , σ^2 . Le paramètre de sauts λ est très instable face au changement de profondeur d'historique, contrairement au paramètre σ_U^2 . Pour les deux paramètres, plus la granularité est élevée, plus la tendance est à la hausse.

L'analyse est similaire pour l'immobilier dont les résultats sont les suivants :

Profondeur	Granularité	μ	σ^2	λ	σ_U^2
10 ans	Mensuelle	0.849 %	0.167 %	1.018 %	0.010 %
10 ans	Hebdomadaire	0.077 %	0.067 %	0.107 %	0.008 %
10 ans	Quotidienne	0.042 %	0.009 %	0.011 %	0.002%
5 ans	Mensuelle	0.706 %	0.155 %	1.102 %	0.012 %
5 ans	Hebdomadaire	0.174 %	0.033 %	0.028 %	0.005 %
5 ans	Quotidienne	0.036 %	0.008 %	0.014 %	0.010 %

FIGURE 4.3.4 – Paramétrage pour l'indice IEIF Europe sous Merton

Comparaison des deux modèles et arbitrage

Désormais, il est nécessaire d'arbitrer entre le modèle de Merton et celui de Black-Scholes dans le cadre de cette étude.

Un backtesting a donc été réalisé. Le principe consiste, pour un historique considéré, à observer la densité de rendement projeté par le modèle sur cette même période. Plus la densité de rendement projetée est proche de celle historique, meilleur est le modèle. Cette étude a donc été réalisée pour l'ensemble des historiques. Le meilleur résultat présenté ci-dessous est pour un historique mensuel de 10 ans. Le lecteur pourra se référer aux annexes pour obtenir les autres résultats de l'étude.

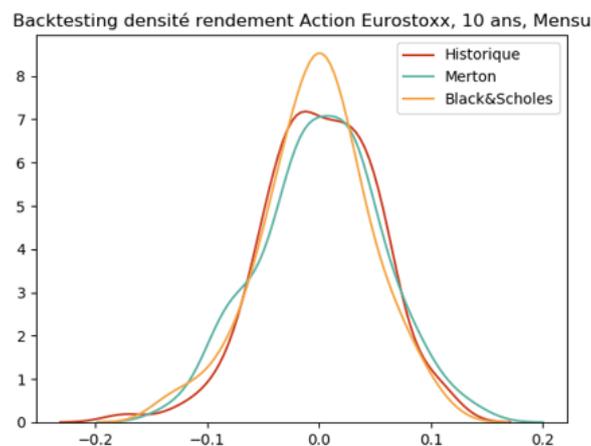


FIGURE 4.3.5 – Comparaison des densités de rendements pour l'indice Eurostoxx

Des résultats similaires sont obtenus pour l'immobilier :

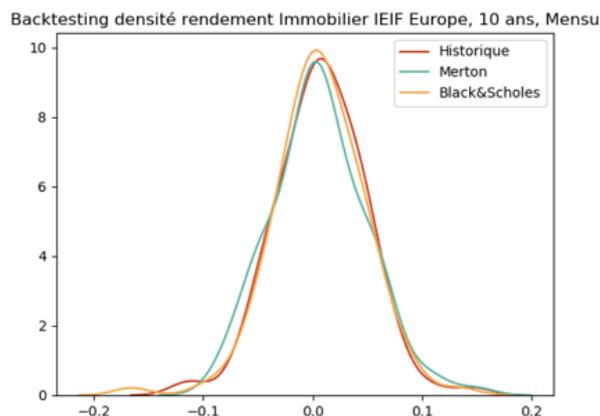


FIGURE 4.3.6 – Comparaison des densités de rendements pour l'indice IEIF Europe

Au regard de ces graphes, l'indice Eurostoxx comme IEIF Europe seront modélisés par le modèle de Merton sur un historique mensuel de 10 ans. Il sera également remarqué que le modèle de Black Scholes fournit des queues de distribution moins épaisses que Merton ce qui justifie d'autant plus le choix de conserver ce dernier.

4.4 Modélisation des obligations par les taux

Modèle de Vasicek

L'hypothèse principale du modèle de Vasicek est que les prix des obligations zéro-coupon ne dépendent que d'une variable d'état à savoir le taux à court terme $r_0(t)$ noté r_t . Le modèle de Vasicek suppose que le taux à court terme suit la dynamique suivante :

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Où

- $\kappa, \mu, \sigma \in \mathbb{R}_+$
- κ est la vitesse d'ajustement au taux "normal" long terme μ
- σ est la volatilité

Cette dynamique peut s'interpréter de la manière suivante : le taux r_t est tiré vers sa valeur normale μ par une force de rappel $\kappa(\mu - r_t)$. Si $r_t < \mu$ alors la tendance est à la hausse, sinon elle est à la baisse. Plus κ est grande plus cette tension l'est aussi. Ce modèle intègre donc un nécessaire retour à la moyenne.

La solution de cette EDS est pour une condition initiale donnée r_0 :

$$r_t = r_0 \exp(-\kappa t) + \mu(1 - \exp(-\kappa t)) + \sigma \int_0^t \exp(-\kappa x) dW_x$$

L'espérance et la variance du taux court sont alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t] &= r_0 \exp(-\kappa t) + \mu(1 - \exp(-\kappa t)) \\ \mathbb{V}[r_t] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - \exp(-2\kappa t)) \end{aligned}$$

Comme expliqué précédemment, le prix des obligations zéro-coupon à l'instant t , de maturité T , noté $P(t, T)$ ne dépend que du taux court instantané. Il est de la forme suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

avec :

$$A(t, T) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)B(t, T) - (T - t) - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B(t, T)^2\right)$$

$$\text{et } B(t, T) = \frac{1 - \exp(-\kappa(T - t))}{\kappa}$$

A partir de ces prix est déduite la formule des taux zéro-coupons à l'instant t de maturité T , noté $R(t, T)$:

$$R(t, T) = R_\infty + (1 - R_\infty) \frac{1 - \exp(-\kappa(T - t))}{\kappa(T - t)} + \frac{\sigma^2}{4\kappa(T - t)} (1 - \exp(-\kappa(T - t)))^2$$

avec $R_\infty = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$

Calibration du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est un modèle de taux courts par conséquent il doit être calibré avec des données de taux courts, d'où l'utilisation des taux Euribor 3 mois. Dans cette étude, le schéma d'Euler-Maruyana appliqué au modèle de Vasicek a été retenu et est le suivant :

$$r_{t+\delta t} = r_t + \kappa(\mu - r_t)\delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ce qui peut se réécrire de la manière suivante :

$$r_{t+\delta t} = r_t(1 - \kappa\delta t) + \kappa\mu\delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ou encore par identification :

$$r_{t+\delta t} = Ar_t + B + \epsilon$$

avec :

$$\text{— } A = (1 - \kappa\delta t)$$

$$\text{— } B = \kappa\mu\delta$$

$$\text{— } \epsilon = \sigma \sqrt{\delta t} \mathcal{N}(0, 1)$$

Les paramètres A, B et ϵ sont estimés par la méthode des moindres carrés dont les résultats sont les suivants :

$$\widehat{A} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{i+1}r_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i+1}}{\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_i} \quad \widehat{B} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_{i+1} - \sum_{i=1}^n \widehat{A}r_i \right)$$

Par identification, les paramètres de Vasicek sont donc :

$$\widehat{\kappa} = \frac{1 - \widehat{A}}{\delta t} \quad \widehat{\mu} = \frac{\widehat{B}}{1 - \widehat{A}} \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{\text{V}[\epsilon]}{\delta t}$$

Toujours pour les mêmes raisons, une analyse a été effectuée sur la profondeur et la granularité des taux Euribor. Les résultats obtenus sont les suivants :

Profondeur	Granularité	μ	κ	σ^2
10 ans	Mensuelle	-0.381 %	0.313	0.11 %
10 ans	Hebdomadaire	-0.310 %	0.141	0.20 %
10 ans	Quotidienne	-0.369 %	0.101	0.25 %
5 ans	Mensuelle	-0.413 %	0.051	0.21 %
5 ans	Hebdomadaire	-0.417 %	0.011	0.23 %
5 ans	Quotidienne	-0.411 %	0.009	0.20 %

FIGURE 4.4.1 – Paramétrage pour les taux Euribor 3 mois sous Vasicek

Ainsi à l'heure du calibrage les taux tendent à continuer de baisser. Cela semble logique puisque dans certains historiques les taux étaient la plupart du temps voire toujours négatifs. Cette vision pessimiste peut alors être revue par un jugement d'expert. Au regard des prévisions d'un taux long terme de l'ordre de -0.03%, les paramètres suivants ont été retenus :

Paramètres	μ	κ	σ
	- 0.300 %	0.0101	0.263%

FIGURE 4.4.2 – Paramétrage retenu pour les taux Euribor

Choix de l'historique

L'arbitrage a cette fois-ci été effectué en se basant sur la valeur du coefficient de détermination obtenu pour chaque backtesting. En suivant le même principe qu'avec l'immobilier et les actions, les résultats sont les suivants pour la projection des taux :

Profondeur	Granularité	R ²
10 ans	Mensuelle	0.790
10 ans	Hebdomadaire	0.785
10 ans	Quotidienne	0.781
5 ans	Mensuelle	0.746
5 ans	Hebdomadaire	0.734
5 ans	Quotidienne	0.737

FIGURE 4.4.3 – R² pour l'Euribor 3 mois en fonction de l'historique

Dans l'ensemble, les résultats sont significatifs avec un R² supérieur à 0.7. Comme il a été choisi de retenir un historique de 10 ans mensuel pour les actifs risqués, il est pertinent d'utiliser le même pour la projection des taux. Le backtesting pour un historique de 10 ans mensuel est représenté sur la figure ci-dessous :

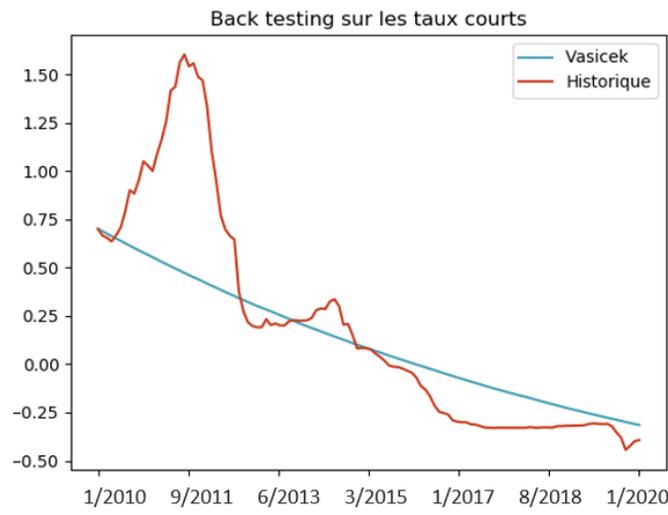


FIGURE 4.4.4 – Backtesting sur le taux Euribor 3 mois pour un historique 10 ans mensuel

Le lecteur pourra se référer aux annexes pour les autres backtesting s'il le souhaite. Dans l'ensemble, ils sont similaires à la figure ci-dessus.

4.5 Corrélation entre les actifs

Dans la construction d'un générateur de scénarios économiques, l'étude de la dépendance entre les actifs financiers est incontournable puisque l'indépendance entre les indices ne peut être raisonnablement envisagée. Dans le cadre de cette étude, il est supposé que la structure de dépendance entre les trois indices est gaussienne. L'information de dépendance est portée par le vecteur dW_t avec W le mouvement brownien multidimensionnel utilisé dans les dynamiques des différents indices. Autrement exprimé :

$$dW_t = \begin{matrix} dW_{action} & dW_{immo} & dW_{taux} \\ dW_{action} & dW_{immo} & dW_{taux} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{a,i} & \rho_{a,t} \\ \rho_{i,a} & 1 & \rho_{i,t} \\ \rho_{t,a} & \rho_{t,i} & 1 \end{pmatrix} dt$$

L'objectif ici est d'étudier les corrélations linéaires entre les rendements de ces trois indices, les rendements des indices action et immobilier ainsi que du taux Euribor. Les valeurs des corrélations sont obtenues en calculant l'estimateur du coefficient de corrélation linéaire.

Formellement, en posant $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ des réalisations indépendantes de deux variables aléatoires X et Y et $\widehat{\rho}_{XY}$ l'estimateur du coefficient de corrélation linéaire non biaisé entre X et Y , ce dernier s'écrit de la manière suivante :

$$\widehat{\rho}_{XY} = \frac{\widehat{\sigma}_{XY}}{\widehat{\sigma}_X \widehat{\sigma}_Y}$$

Avec

$$\widehat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$$

$$\widehat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad \widehat{\sigma}_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}$$

Quand

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Les résultats obtenus sont les suivants pour un historique de 10 ans mensuel :

	Action	Immo	Taux
Action	1	0.741	-0.097
Immo	0.741	1	-0.042
Taux	-0.097	-0.042	1

FIGURE 4.5.1 – Matrice de corrélation des actifs

Résultats finaux du Générateurs de Scénarios Economiques

En prenant un historique mensuel de 10 ans et les corrélations entre les browniens, les projections des différents actifs à horizon 5 ans sont les suivantes :

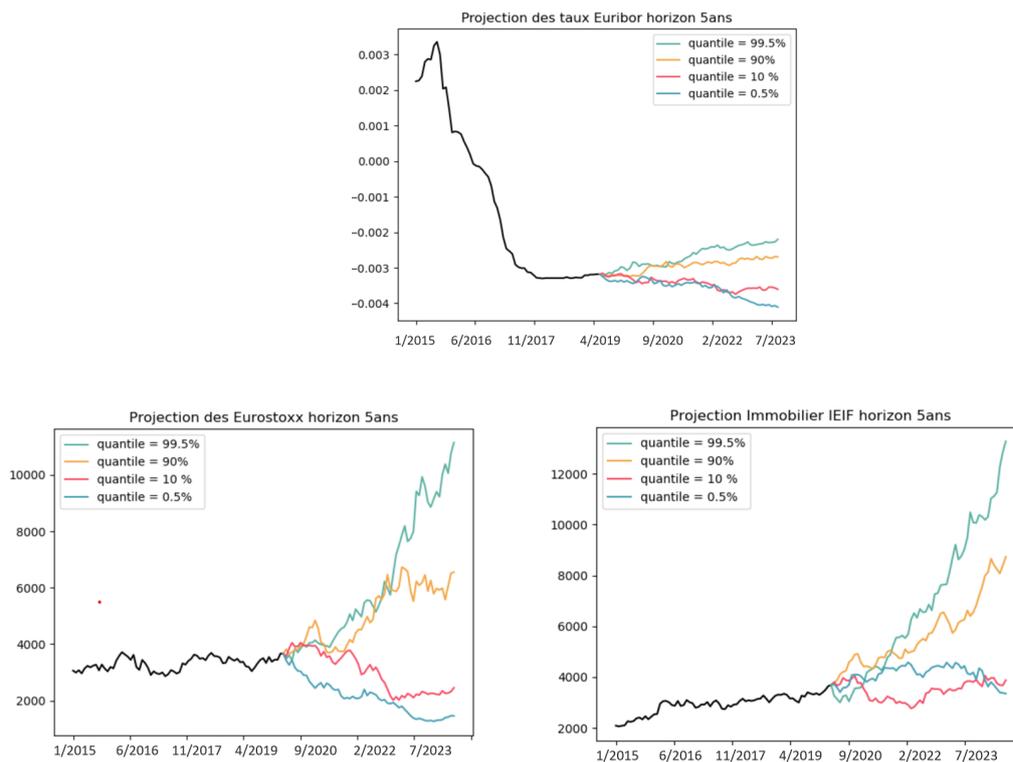


FIGURE 4.5.2 – Projections des actifs par le Générateur de Scénarios Economiques horizon 5 ans

La dynamique des taux reflète donc bien une situation de taux négatifs qui se stabilise avec une volatilité assez faible. De plus, la volatilité des actions est assez importante ce qui traduit l'amplitude des scénarios sur le long terme. L'immobilier en revanche a une volatilité plus faible ce qui se traduit par une amplitude de résultats moins grande.

Chapitre 5

Modélisation du passif d'un assureur non-vie fictif

Dans ce chapitre, la modélisation des passifs d'une compagnie non vie fictive sera présentée. Par hypothèse, l'activité de cette société fictive est centrée autour de l'assurance multi-risques habitation et de l'assurance automobile.

Dans le cadre de Solvabilité 2, le passif des assureurs est composé des provisions techniques et des fonds propres. Leur estimation est un enjeu majeur pour les assureurs. En effet, les provisions techniques permettent aux assureurs de faire face à leurs engagements tandis que les capitaux de solvabilité requis correspondent au montant de fonds propres dont l'assureur a besoin pour couvrir ses risques. Dans le cadre de ce mémoire, seules les provisions pour sinistres et le risque de provisionnement seront modélisés. Ainsi, le passif de l'assureur fictif peut être représenté dans la figure ci-dessous :

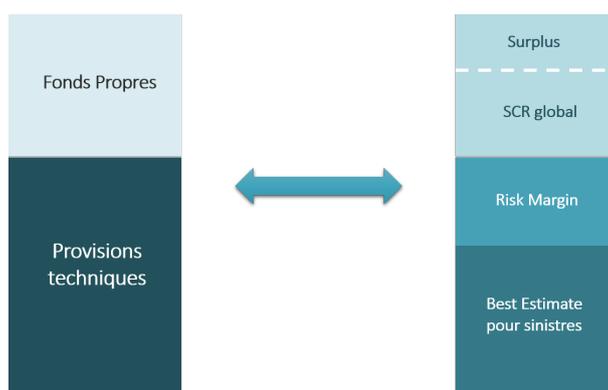


FIGURE 5.0.1 – Représentation du passif d'un assureur sous Solvabilité 2

5.1 Les provisions techniques

L'importance d'une modélisation fine des provisions techniques résulte du fait que toute sur-évaluation ou sous-évaluation des provisions serait nuisible à l'assureur. En effet, en cas de sous évaluation, il peut y avoir une perte future donc une sur-évaluation des fonds propres donc un risque d'insolvabilité; tandis qu'une sur-évaluation des provisions engendre une sous-estimation des fonds propres et du résultat annuel de l'assureur.

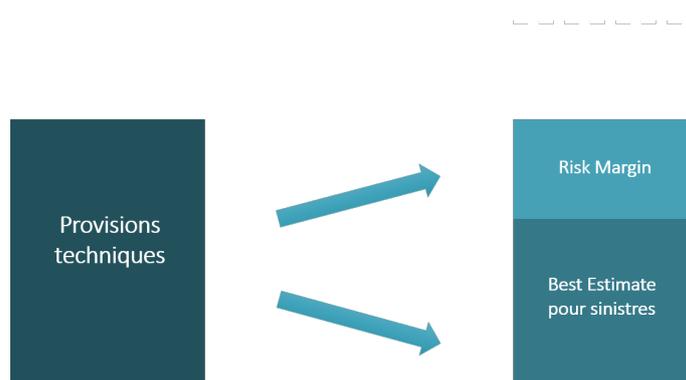


FIGURE 5.1.1 – Représentation des Provisions Techniques non vie pour cette étude

Inversion du cycle de production

Les provisions pour sinistres sont le résultat de l'inversion du cycle de production. En effet, de manière classique, une entreprise vend un bien en fixant un prix proposé en fonction du bénéfice qu'elle souhaiterait en tirer. Ses coûts de productions sont alors connus d'avance. En revanche, dans le cadre des couvertures des risques, l'assureur perçoit une prime en échange de garanties sur la réalisation de sinistres. Le montant des prestations est donc aléatoire et inconnu à la date d'émission de la prime. Il se peut que celle-ci soit insuffisante auquel cas l'assureur peut se retrouver incapable d'honorer ses engagements. C'est pourquoi il doit constituer des provisions pour faire face à ses engagements futurs. La méthodologie se doit donc d'être claire et minutieuse.

Calcul du *Best Estimate*

Le *Best Estimate* correspond à la meilleure estimation possible de la sinistralité future. Son calcul se fait en plusieurs étapes détaillées dans les sous-parties suivantes :

- Constitution de Groupes Homogènes de Risque
- Obtention des triangles de charges à partir des triangles de provisions dossier dossier et de règlements
- Application des méthodes statistiques pour obtenir la charge ultime
- Actualisation de la charge ultime au taux sans risque

Constitution des Groupes Homogènes de Risque

Solvabilité 2 préconise une méthodologie basée sur la segmentation. Autrement dit, l'assureur choisit de faire des groupes de risques homogènes dits GRH pour calculer ses provisions en fonction de son portefeuille.

Dans le cadre de ce mémoire, l'assureur fictif propose des contrats de Multi Risques Habitation et d'assurance automobile. Les risques couverts sont ceux liés aux dommages aux biens et à la responsabilité générale pour la MRH; et à la Responsabilité Civile, les dommages aux biens et la garantie conducteur pour l'assurance automobile.

Les groupes homogènes de risque retenus pour ces deux types de contrats sont :

Pour l'assurance Multi-Risques Habitation (MRH) :

- les dommages matériels hors incendie
- les dommages matériels liés aux incendies
- la responsabilité générale

Pour l'assurance automobile :

- les dommages corporels liés à la responsabilité civile
- les dommages corporels graves liés à la responsabilité civile
- les dommages matériels liés à la responsabilité civile
- les dommages corporels liés à la garantie conducteur
- les dommages matériels autres que ceux liés à la responsabilité civile

Détermination des triangles de charges

L'indemnisation d'un sinistre n'est pas toujours faite en un seul paiement et peut s'étaler dans le temps. L'assureur effectue alors plusieurs versements jusqu'à la clôture du sinistre. La Provision pour Sinistres A Payer (notée PSAP) reflète le décalage entre la survenance du sinistre et sa clôture. Elle est ré-évaluée à chaque clôture des comptes. Elle est définie comme la somme des IBNR (*Incurred But Not Reported*) et des provisions dossier/dossier agrégées des frais de gestion. Ces derniers sont supposés nuls dans le cadre de cette étude.

Ainsi,

$$\text{PSAP} = \text{IBNR} + \text{provision D/D}$$

La provision dossier/dossier est estimée uniquement sur la base des sinistres portés à la connaissance de l'assureur. Elle correspond à l'estimation du montant attendu des règlements futurs concernant ce sinistre.

Elle nécessite donc d'être complétée pour anticiper une dérive de la charge totale ce qui est le rôle de la provision IBNR (*Incurred But Not Reported*). Ce sont des provisions destinées à couvrir le risque de déclaration et d'aggravation tardives. C'est donc naturellement qu'elle se décompose en provision pour IBNYR (*Incurred But Not Yet Reported*) relative aux sinistres tardifs qui ne sont pas encore portés à la connaissance de l'assureur et de la provision IBNER (*Incurred But Not Enough Reported*), relatives aux sinistres connus pour lesquels l'évaluation de la charge peut être amenée à évoluer.

Finalement :

$$\text{IBNR} = \text{IBNYR} + \text{IBNER}$$

Les données relatives aux sinistres sont inscrites dans un triangle par GRH comme représenté dans la figure ci-dessous. Ce dernier permet de rendre compte de l'évolution des sinistres dans le temps et de l'historique de la sinistralité.

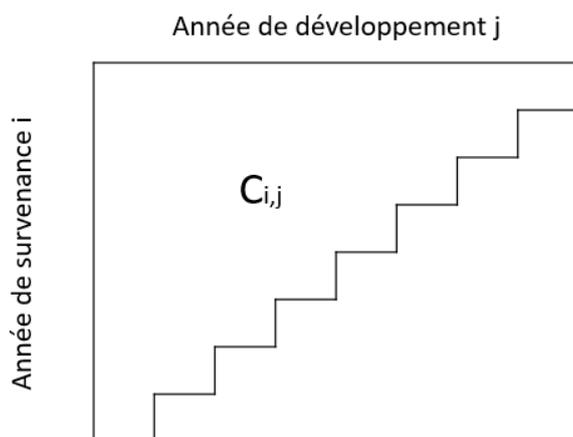


FIGURE 5.1.2 – Représentation d'un triangle de liquidation

Dans la suite, sera noté :

- i la i ème année de survenance avec $i \in \{1, \dots, I\}$
- j la j ème année de développement avec $j \in \{1, \dots, J\}$
- $X_{i,j}$ l'incrément de charge relatif à l'année de survenance i et de développement j
- $C_{i,j}$ le montant de la charge cumulée de sinistre relatif à l'année de survenance i , de développement jusqu'à l'année j

L'objectif pour un assureur est d'estimer la partie inférieure du triangle à savoir le montant de charge ultime. Il sera également supposé que $I = J$. Cette étape est détaillée dans la section suivante.

Mise en oeuvre d'une méthode statistique : Le *ChainLadder* déterministe

Dans le cadre de ce mémoire, la méthode de provisionnement selon *ChainLadder* a été retenue pour sa facilité de mise en oeuvre et son utilisation courante par les assureurs. Celle-ci repose sur plusieurs hypothèses qu'il est important de rappeler :

Hypothèse 1 (H1) :

Les évolutions des charges observées dans le passé seront similaires dans le futur, se traduisant mathématiquement par une relation de proportionnalité entre les années de développement. Autrement dit, il existe des paramètres f_k positifs dits facteurs de développement tels que :

$$\mathbb{E}(C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} f_k, \text{ avec } 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1$$

Hypothèse 2 (H2) :

Les années de survenance sont supposées indépendantes, ainsi :

$$C_{i,1}, \dots, C_{i,I} \perp\!\!\!\perp C_{j,1}, \dots, C_{j,I} \forall i \neq j$$

Comme la technique du *ChainLadder* suppose que tous les sinistres sont clos à la fin de l'année de développement J :

$$\widehat{C}_{1,J} = C_{1,J}, \text{ où } \widehat{C} \text{ est l'estimateur de } C.$$

Les facteurs de proportionnalité peuvent alors être déduits : $f_k = \frac{\mathbb{E}[C_{i,k+1}]}{\mathbb{E}[C_{i,k}]}$

Dans la pratique, ils sont estimés par la formule :

$$\widehat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}$$

Les facteurs de développement \widehat{f}_k permettent de projeter les montants de charge de la partie inférieure du triangle. La dernière colonne correspond alors au montant de charge ultime. A ces montants de charges ultimes sont soustraits les montants de charges de la dernière diagonale pour obtenir le résultat recherché. La provision par exercice de survenance est alors estimée :

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,J} - C_{i,J-i}$$

La provision est la somme des provisions relatives à chaque année de survenance :

$$PSAP = \sum_{i=1}^I \widehat{C}_{i,J} - C_{i,J-i} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i$$

Obtention du *Best Estimate*

Par ailleurs Solvabilité 2 préconise de tenir compte de la valeur temporelle de l'argent dans l'estimation des provisions. Ainsi, pour obtenir un montant de *Best Estimate* il est nécessaire d'actualiser les montants de réserves estimés. Cette actualisation sera faite à l'aide de la courbe EIOPA fournie à la date du 31/12/2019 conformément aux usages. Ainsi, en notant τ_i le taux d'actualisation à terme de l'année i ,

$$BE = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^I \frac{\widehat{X}_{i,j}}{(1 + \tau_{i+j-1})^{I-i+1}}$$

Les résultats obtenus pour chaque triangle et leur somme sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Triangle	RC Auto Matériel	RC Auto Corporel	RC Auto Corporel Grave	Auto Dommages Matériels	Auto Dommages Corporels	RC Générale	Dommages liés aux incendies	Dommages hors incendies et CatNat	TOTAL
<i>Best Estimate</i> (k €)	8 383	23 899	31 241	5 154	5 772	26 262	18 984	15 331	135 028

FIGURE 5.1.3 – Valeur du *Best Estimate* pour chaque triangle

Calcul de la *Risk Margin*

Définition et Formule Générale

Une fois le *Best Estimate* obtenu par triangle, il convient de rajouter une marge pour risque afin d'obtenir les provisions techniques dans le cadre Solvabilité 2.

D'après le règlement délégué (UE) 2015/35, l'évaluation de la marge pour risque se fait à partir d'une approche coût du capital, c'est à dire qu'elle est définie par la valeur actuelle de l'immobilisation du capital sur chaque période par rapport au coût du capital. Ce taux en capital a été fixé par l'EIOPA à 6%.

La formule de calcul de la marge pour risque est la suivante :

$$RM = CoC. \sum_{t/neq} \mathbb{E}^{Q^f * \mathbb{P}^a} \left[\frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + \tau_{t+1})^{t+1}} \right]$$

avec

- CoC : le taux du coût du capital fixé à 6%
- $SCR_{RU}(t)$: le capital de solvabilité requis de l'entreprise de référence pour l'année t
- τ_{t+1} le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance $t+1$
- \mathbb{Q}^f : la probabilité risque neutre de l'espace probabilisé $(\Omega^f, (\mathcal{F}_t^f)_{t \neq 0}, \mathbb{Q}^f)$ qui caractérise le risque financier
- \mathbb{P}^a : la probabilité historique de l'espace probabilisé $(\Omega^a, (\mathcal{F}_t^a)_{t \neq 0}, \mathbb{P}^a)$ qui caractérise le risque d'assurance.

Les capitaux de solvabilité requis pour le calcul de la marge pour risque sont évalués en tenant compte de nombreux risques, mais seul le risque de provisionnement sera pris en compte dans le calcul de la marge pour risque dans cette étude.

Approximation par la méthode des durations

Le calcul de la Risk Margin étant complexe, diverses méthodes sont utilisées pour en faire l'approximation. Dans le cadre de ce mémoire, la méthode d'approximation faisant appel à la duration des passifs a été retenue conformément à la pratique de 30% des assureurs non vie selon une étude de l'ACPR datant de 2014 [4].

Avec cette approximation, la Risk Margin est approchée par la relation :

$$RM = \frac{CoC}{1 + \tau_1} \cdot Dur_{mod}(0) \cdot SCR(0)$$

où

- $Dur_{mod}(0)$ la duration modifiée des engagements de l'entreprise en $t = 0$
- τ_1 le taux sans risque à un an

Il est donc nécessaire de calculer la duration des passifs en retenant la méthode du premier chapitre de ce mémoire. De plus, pour pouvoir obtenir le résultat de la Risk Margin, le capital de solvabilité requis en 0 doit être obtenu. Comme le capital de Solvabilité Requis global dépend de l'allocation d'actifs considérée, il sera supposé, conformément aux pratiques des assureurs que seul le SCR non vie sera concerné pour le calcul de la *Risk Margin*. Les calculs des SCR font l'objet de la partie suivante.

5.2 Capital de Solvabilité Requis

Le Capital de Solvabilité Requis dit SCR est le montant minimum à détenir à tout moment pour faire face au risque de faillite à horizon 1 an. Il correspond à la *Value-at-Risk* à 99,5% de la variation de l'actif net économique de l'organisme d'assurance à horizon un an. Il peut être évalué à partir de la formule standard définie par la réglementation avec un calibrage par défaut ou à partir d'un modèle interne développé spécifiquement pour et par l'organisme d'assurance. Dans le cadre de ce mémoire, le SCR sera établi comme une *Value-at-Risk* horizon un an à 99,5%.

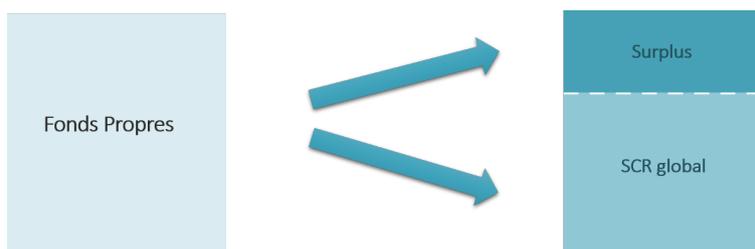


FIGURE 5.2.1 – Décomposition des Fonds Propres

Le SCR est divisé en plusieurs modules comme représenté dans la figure ci-dessous :

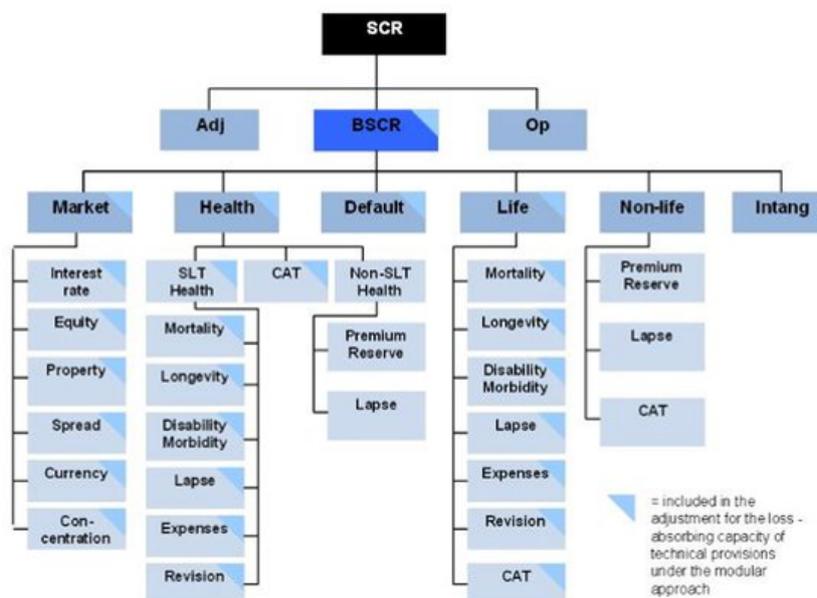


FIGURE 5.2.2 – Cartographie des différents risques sous Solvabilité 2 Source : EIOPA

Dans le cadre de ce mémoire, seuls le risque Non-Vie et celui de Marché seront considérés. Il s'agit donc de l'objet de cette partie. Le modèle de Merz et Wüthrich sera détaillé dans le but d'obtenir le risque de provisionnement Non Vie. Le SCR global constitué du risque Non

Vie et du risque de Marché sera quant à lui calculé pour chaque allocation selon une méthode stochastique détaillée en fin de partie.

Capital de Solvabilité Requis Souscription Non-vie

Par définition, le risque de souscription désigne "le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement". Dans le cadre de ce mémoire, il s'agira exclusivement du risque de provisionnement. Depuis la mise en place de Solvabilité 2, les assureurs doivent être en mesure de quantifier leur risque de provisionnement sur un horizon d'un an.

Ce risque correspond à une variation de l'estimation de la charge ultime entre deux exercices successifs. En effet, dans le cadre de cette étude, le montant de provision *Best Estimate* est estimé par la méthode déterministe du *ChainLadder*. Or par définition, il s'agit d'une variable aléatoire et cette méthode donne une valeur moyenne de sa réalisation. Il paraît donc nécessaire de quantifier cette volatilité en utilisant une approche stochastique. Pour cela, le modèle de *Mack* estime une erreur de provisionnement à l'ultime et une de ses variantes, le modèle de *Merz et Wüthrich*, permet d'obtenir une estimation du risque de provisionnement à horizon un an.

Dans cette partie le modèle de *Merz et Wüthrich* sera d'abord présenté, puis la méthode d'implémentation avec *bootstrap* de *Mack* pour un triangle, et enfin pour plusieurs triangles seront explicitées. Schématiquement, cela correspond à réaliser les opérations suivantes qui seront détaillées plus formellement dans la suite :

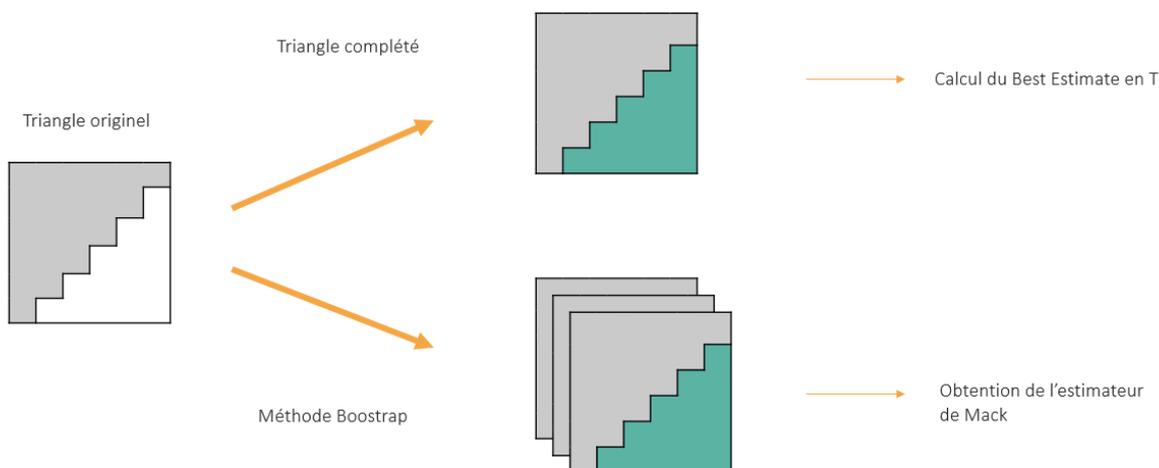


FIGURE 5.2.3 – Résumé des opérations pour obtention du SCR provisionnement en non vie

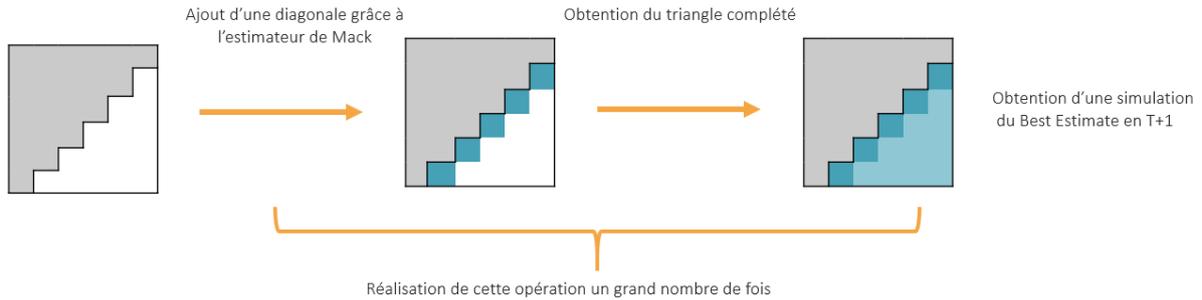


FIGURE 5.2.4 – Résumé des opérations pour obtention du SCR provisionnement en non vie

Le modèle de Merz et Wüthrich

Dans ce modèle, la charge ultime prédite en T est comparée à la charge ultime prédite en T+1. Mathématiquement, la quantité Δ est introduite :

$$\Delta = \text{provisionBE}(T) - [\text{paiement en } (T+1) + \text{provisionBE}(T + 1)]$$

L'objectif est de déterminer cette variation, ce que Merz et Wuthrich introduisent sous le nom de *Claims Development Result*, noté CDR.

Sur l'année $[T, T+1]$, le CDR_i pour l'année de survenance i est défini comme :

$$\begin{aligned} CDR_i &= \mathbb{E}[R_i^T | \mathcal{D}_T] - (C_{i,T-i+1} - C_{i,T-i} + \mathbb{E}[R_i^{T+1} | \mathcal{D}_{T+1}]) \\ &= \mathbb{E}[C_{i,T} | \mathcal{D}_T] - \mathbb{E}[C_{i,T} | \mathcal{D}_{T+1}] \end{aligned}$$

où

- $\mathbb{E}[R_i^T | \mathcal{D}_T]$ est la provision au temps T pour les sinistres de l'année de survenance i ,
- $(C_{i,T-i+1} - C_{i,T-i})$ est le paiement intermédiaire pour l'année de survenance i entre deux exercices
- $\mathbb{E}[R_i^{T+1} | \mathcal{D}_{T+1}]$ est la provision au temps T+1 pour les sinistres de l'année de survenance i
- $\mathcal{D}_T = \{C_{i,j}, i + j \leq T + 1, 1 \leq i \leq T\}$ représente l'ensemble des données observées jusqu'au temps $t = T$.

Ainsi, pour l'ensemble des années de survenance, le CDR total est obtenu comme :

$$CDR = \sum_{i=1}^T CDR_i(T + 1)$$

Pour approcher le CDR, il est nécessaire d'utiliser les approximations suivantes obtenues par *ChainLadder* :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_{i,T}|\mathcal{D}_T] &\approx \widehat{C}_{i,I}^T \\ \mathbb{E}[C_{i,T}|\mathcal{D}_{T+1}] &\approx \widehat{C}_{i,I}^{T+1} \\ \mathbb{E}[R_i^T|\mathcal{D}_T] &\approx \widehat{R}_{i,I}^T \\ \mathbb{E}[R_i^{T+1}|\mathcal{D}_{T+1}] &\approx \widehat{R}_{i,I}^{T+1}\end{aligned}$$

Ainsi, pour une survenance i , le \widehat{CDR}_i est approximé par :

$$\widehat{CDR}_i(T+1) = \widehat{R}_i^T - (C_{i,T-i+1} - C_{i,T-i} + \widehat{R}_i^{T+1}) = \widehat{C}_{i,T}^T - \widehat{C}_{i,T}^{T+1}$$

où

$$\begin{aligned}- \widehat{R}_i^T &= \widehat{C}_{i,T}^T - C_{i,T-i} \quad \forall i \in \{1, \dots, T\} \\ - \widehat{R}_i^{T+1} &= \widehat{C}_{i,T}^{T+1} - C_{i,T+1-i} \quad \forall i \in \{1, \dots, T\}\end{aligned}$$

L'estimateur du CDR total s'en déduit alors :

$$\widehat{CDR} = \sum_{i=1}^T \widehat{CDR}_i(T+1)$$

Ainsi, les résultats suivants ont été obtenus pour chaque triangle :

Triangle	RC Auto Matériel	RC Auto Corporel	RC Auto Corporel Grave	Auto Dommages Matériels	Auto Dommages Corporels	RC Générale	Dommages liés aux incendies	Dommages hors incendies et CatNat	TOTAL
CDR (k €)	- 924	14 327	1 162	40	3 121	11 276	9 934	- 353	38 583

FIGURE 5.2.5 – Estimation des *Claims Development Results* par triangle

Merz et Wüthrich procèdent de manière similaire au modèle de Mack en estimant l'erreur de prédiction à partir des hypothèses de *ChainLadder* :

$$\begin{aligned}MSEP_{CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T}(\widehat{CDR}_i(T+1)) &= \mathbb{E}[(CDR_i(T+1) - \widehat{CDR}_i(T+1))^2|\mathcal{D}_T] \\ &= \mathbb{V}[CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T] + [\mathbb{E}[CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T] - \widehat{CDR}_i(T+1)]^2 \\ &= \text{Erreur de processus} \quad + \quad \text{Erreur d'estimation}\end{aligned}$$

Pour des questions de lisibilité, ces deux erreurs sont réécrites :

$$\begin{cases} \Phi_{i,H}^T = \mathbb{V}[CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T] \\ \Delta_{i,J}^T = (\mathbb{E}[CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T] - \widehat{CDR}_i(T+1))^2 \end{cases}$$

Ces deux quantités sont estimées par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\Phi}_{i,J}^T = \sum_{j=T-i+1}^{J-1} \left(\frac{C_{T-j,j}}{S_j^{T+1}} \right)^2 \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{\sigma}_j^T} \\ \Delta_{i,J}^T = \frac{\widehat{\sigma}_{T-i}^2}{(\widehat{\sigma}_{T-i}^T)^2} + \sum_{j=T+1-i}^{J-1} \left(\frac{C_{T-j,j}}{S_j^{T+1}} \right)^2 \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{S_j^T} \end{cases}$$

avec $S_j^T = \sum_{i=0}^{T-j-1} C_{i,j}$

Les relations suivantes sont également définies :

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_i^T = \frac{\widehat{\sigma}_{T-i}^2}{(\widehat{\sigma}_{T-i}^T)^2} \\ \Gamma_{i,J}^T = \widehat{\Phi}_{i,J}^T + \widehat{\Psi}_i^T \end{cases}$$

Merz et Wuthrich établissent alors que l'erreur de processus est estimée par $(\widehat{C}_{i,J}^T)^2 \widehat{\Phi}_{i,J}^T$ et l'erreur d'estimation est estimée par $(\widehat{C}_{i,J}^T)^2 \Delta_{i,J}^T$.

Finalement, l'erreur d'estimation des provisions sur un horizon d'un an en utilisant le modèle de *ChainLadder* est fournie par :

$$MSE_{CDR_i(T+1)|\mathcal{D}_T}(\widehat{CDR}_i(T+1)) = (\widehat{C}_{i,J}^T)^2 (\Delta_{i,J}^T + \widehat{\Phi}_{i,J}^T)$$

L'objectif ici pour un assureur est de mesurer le risque de provisionnement sur un an, autrement dit que le $\widehat{CDR}_i(T+1)$ soit négatif. L'article de recherche s'intéresse donc à la déviation autour de 0 du $\widehat{CDR}_i(T+1)$. Il arrive à la conclusion qu'il s'agit de la quantité obtenue ci-dessus.

Ainsi, ce modèle permet d'obtenir une volatilité sur un an ainsi qu'une mesure du risque de réserve pour le modèle de *ChainLadder*. Cependant il faut supposer une loi sous-jacente à la distribution des CDR (une loi log-normale ou normale généralement), dans le but de calculer la *Value - at - Risk* à 99,5% pour en déduire le SCR de réserve. Comme cette hypothèse est assez forte, la technique du *Bootstrap* a été mise en oeuvre afin de pallier cette limite.

Méthode Bootstrap

Le *Bootstrap* utilisé dans le cadre de ce mémoire est basé sur les hypothèses de *Mack*, avec des facteurs de développement estimés par la méthode du *ChainLadder*.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon, où X_i représente une réalisation de la variable aléatoire X . Pour pouvoir utiliser la technique du *Bootstrap*, les échantillons doivent être indépendants et identiquement distribués. Si les X_i représentent un montant de charge, alors pour une année de survenance donnée, ils ne vérifient pas cette hypothèse au cours des années de développement. C'est pour cela qu'il est d'usage d'utiliser les résidus de *Mack* comme variable étudiée. Ces résidus seront ré-échantillonnés afin de simuler de multiples scénarios.

Les différentes étapes de la méthode *Bootstrap* mise en oeuvre sont explicitées ci-dessous en considérant un triangle de liquidation L quelconque parmi les neuf triangles considérés dans l'étude.

ETAPE A : Calcul du *Best Estimate* par la méthode du *ChainLadder* :

$$BE(T) = \sum_{i=2}^T (\widehat{C}_{i,T} - C_{i,T-i+1})$$

ETAPE B : Calcul des résidus des facteurs de développements individuels, aussi appelés résidus de *Mack* :

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \widehat{f}_j)}{\widehat{\sigma}_j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, J-1\}, \forall i \in \{1, \dots, I-1\}$$

avec

- $\widehat{\sigma}_j$ l'estimateur de la volatilité donnée par le modèle de *Mack*
- \widehat{f}_j les facteurs de développement estimés par *ChainLadder*,
- $f_{i,j}$ les facteurs de développement individuels

Afin d'intégrer le degré de liberté, les résidus sont ajustés tels que :

$$r_{i,j}^{ajust} = \sqrt{\frac{T-j}{T-j-1}} r_{i,j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$$

ETAPE C : Ré-échantillonnage

Enfin, un échantillonnage aléatoire avec remise des résidus permet d'obtenir un pseudo-triangle.

ETAPE D : Calcul des nouveaux facteurs individuels, facteurs de développement du *ChainLadder* et estimateur de la volatilité du modèle de MACK.

Pour chaque pseudo-triangle, les facteurs individuels, les facteurs de développement et l'estimateur de la volatilité sont calculés. Ils permettent ensuite de déduire des résidus $\tilde{r}_{i,j}$ générés aléatoirement grâce à l'inversion de la formule ci-dessous :

$$\tilde{f}_{i,j}^T = \widehat{f}_j + \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} \tilde{r}_{i,j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, J-1\}, \forall i \in \{1, \dots, T-1\}$$

Ainsi, les nouveaux facteurs de développement de *ChainLadder* \tilde{f}_j sont calculés à partir des facteurs individuels :

$$\tilde{f}_j^T = \frac{\sum_{i=1}^{T+1-j} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}^T}{\sum_{i=1}^{T-j} C_{i,j}} \quad \forall j \in \{1, \dots, J-1\}$$

ETAPE E : Construction d'une nouvelle diagonale

Désormais, une nouvelle diagonale $\widetilde{C}_{i,T-i+3}$ peut être générée en utilisant une loi normale telle que :

$$\widetilde{C}_{i,T-i+2} \sim \mathcal{N}(C_{i,T-i+1} \widetilde{f}_{T-i+1}^T, \sqrt{C_{i,T-i+1} \widehat{\sigma}_{T-i+1}^2}), \quad \forall i \in \{2, \dots, T\}$$

Cette nouvelle diagonale est ajoutée au triangle initial.

ETAPE F : Calcul de nouveaux facteurs de développement individuels et globaux, projection à l'ultime et obtention du *Best Estimate* en T+1.

Le triangle obtenu à l'étape E est une simulation de l'évolution du triangle à l'instant T+1. De nouveaux facteurs de développement individuels et moyens sont calculés en t= T+1 afin de rendre compte de l'information apportée par la nouvelle diagonale. La projection à l'ultime est alors faite à ce triangle modifié. Ainsi, le *Best Estimate* au temps T+1 s'écrit :

$$\widetilde{BE}(T+1) = \sum_{i=2}^T (\widetilde{C}_{i,T} - \widetilde{C}_{i,T+2-i})$$

ETAPE G : Obtention du *Claims Development Result* (CDR) simulé :

Il est possible de déduire le \widetilde{CDR} simulé en appliquant la formule suivante :

$$\widetilde{CDR} = BE(T) - [\text{Paiements}(T+1) + \widetilde{BE}(T+1)]$$

avec $\text{Paiements}(T+1) = \sum_{i=2}^T (\widetilde{C}_{i,T-i+2} - C_{i,T-i+1})$

Les quatre dernières étapes sont alors effectuées un grand nombre de fois permettant d'obtenir une distribution empirique des provisions et des CDR. Le SCR correspond pour le triangle considéré à la *Value-at-Risk* niveau 99,5% de la distribution du CDR.

Autrement dit, dans le cadre de cette méthode, le risque correspond à une variation de l'estimation de la charge ultime entre deux exercices. Pour ce faire, il a été nécessaire de simuler le triangle à l'année supérieure. Le *Best Estimate* obtenu l'année suivante a alors pu être comparé au *Best Estimate* de l'année considérée. En le faisant un grand nombre de fois, il est possible d'obtenir une distribution des CDR et donc d'évaluer le risque de provisionnement non vie sous forme de quantile.

En réalisant ces opérations pour chaque triangle, des distributions pour le *Claims Development Result* de chaque triangle sont obtenues dont trois exemples sont représentés ci-dessous :

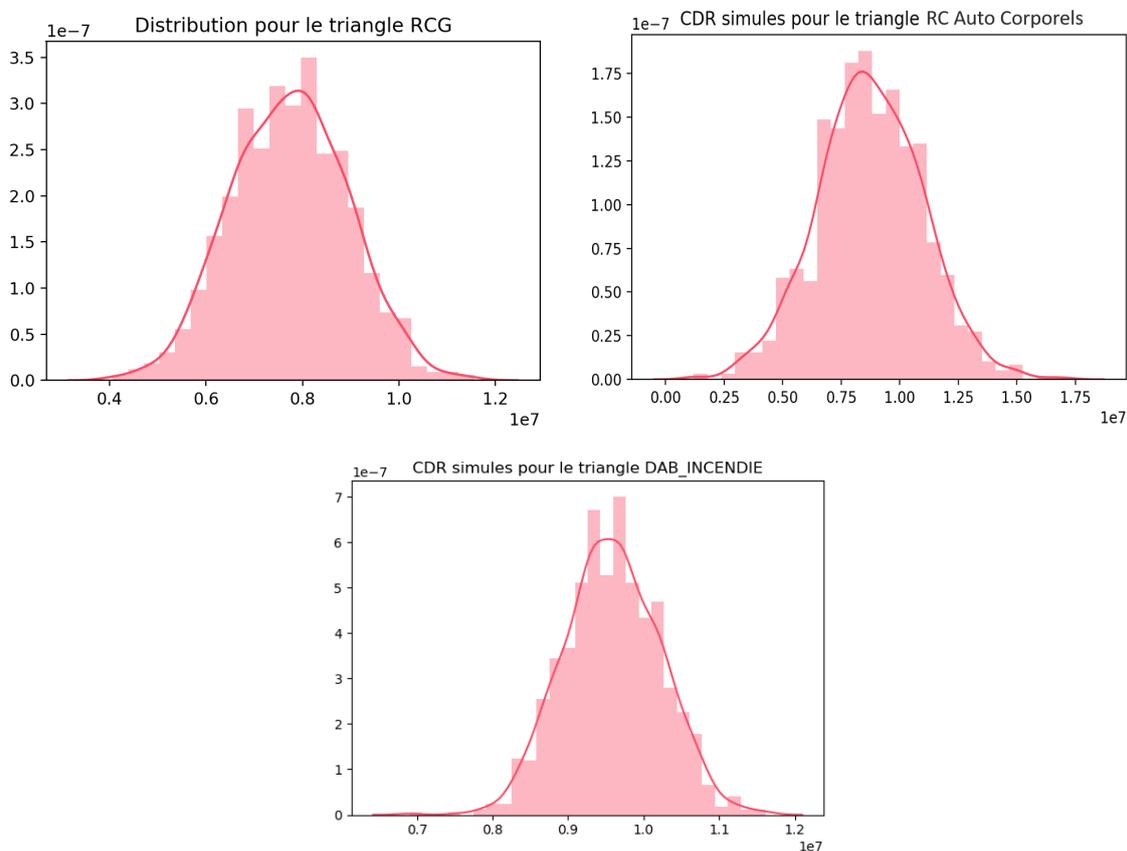


FIGURE 5.2.6 – Trois exemples de distribution *CDR*

L'ensemble de ces distributions sont proches d'une loi normale. Cependant, l'objectif n'est pas de considérer un seul triangle mais plusieurs triangles. Ceci constitue l'objectif de la prochaine partie.

Généralisation à plusieurs triangles

Dans cette partie, l'objectif est de considérer non pas un triangle mais neuf. Dans la mesure où la *Value-at-Risk* n'est pas additive, il n'est pas possible de simplement faire la somme des VaR de chaque triangle. De plus, il est rappelé que les triangles qui correspondent à des groupes homogènes de risque ont des interactions entre eux. Par exemple, lors d'un accident en voiture, si la personne a subi des dommages corporels, il est probable que son moyen de locomotion ait subi un dommage matériel. De façon analogue, il est peu probable que les sinistres liés à l'assurance automobile soient liés à ceux relatifs à l'habitation. Ainsi, il est légitime de concevoir des relations de dépendances entre ces variables aléatoires. Néanmoins dans le cadre de cette étude, les tempêtes, catastrophes naturelles et inondations ne seront pas prises en compte.

Concepts mathématiques traduisant la dépendance entre variables aléatoires

De nombreuses méthodes introduisent la dépendance entre variables aléatoires dans le monde actuariel. Dans ce mémoire, la prise en compte de la dépendance sera faite par les copules. Il s'agit d'un outil mathématique qui a été mis au service du calcul des besoins en fonds propres d'un assureur non vie depuis 2004 grâce à Cadoux et Loiseau [6]. D'autres applications existent parmi lesquelles la modélisation des rendements des indices ou la modélisation des temps de défaut dans le contexte du risque de crédit.

Plus formellement, Skar, Fenest et McKay introduisent la notion de copule comme la fonction de répartition d'un vecteur de variables aléatoires uniformes dont toutes les composantes obéissent à une loi uniforme $[0,1]$.

Autrement dit, il s'agit d'un objet mathématique défini comme suit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad C(0, \dots, u_i, \dots, 0) = u_i \text{ avec } u_i \in [0, 1]$$

Ainsi, en considérant F_1, \dots, F_n des fonctions de répartition et une copule C fixée, il est possible de définir la fonction de répartition multivariée F_X :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

avec $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i \in E_i, \quad E_i$ étant l'ensemble de définition de F_i .

L'objectif est donc de trouver la copule reflétant au mieux la structure de dépendance entre les sinistralités des GRH. Pour cela il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de données, ce qui n'est pas envisageable avec un historique annuel comportant une quarantaine de points uniquement. Ainsi, il a été nécessaire d'arbitrer sur la copule à considérer.

Or, il existe plusieurs familles de copules parmi lesquelles :

- les copules archimédiennes
- les copules elliptiques
- les copules extrêmes

Finalement, la copule la plus simple à mettre en oeuvre a été choisie. Il s'agit de la copule gaussienne qui appartient à la famille des copules elliptiques. Celle-ci est particulièrement facile d'implémentation puisqu'elle ne nécessite que les corrélations entre variables aléatoires. De plus, les CDR de chaque triangle semblent suivre une loi normale ce qui a renforcé ce choix.

Application aux triangles

Dans le cadre de ce mémoire, neuf triangles sont considérés, ce qui correspond à 9 variables aléatoires reliées par une copule gaussienne.

Une copule gaussienne s'écrit ainsi :

$$\forall (u_1, \dots, u_9) \in [0, 1]^9, \exists x_1, \dots, x_9 \in \mathbb{R} \mid \forall i \in \{1, \dots, 9\}, u_i = F_i(x_i),$$

$$C_{\Sigma}^N(u_1, \dots, u_9) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{9}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_9)} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)\right) dx_1 \dots dx_9$$

avec :

- $X = (x_1, \dots, x_9)^T$
- Σ la matrice de variances covariances des variables considérées
- μ le vecteur des espérances : $\mu = (\mathbb{E}[CDR_1], \dots, \mathbb{E}[CDR_9])^T$

De plus, la matrice de corrélation et la matrice de variance-covariance sont liées puisque en notant ρ_{X_i, X_j} la corrélation, on a $\forall i, j \in \{1, \dots, 9\}$ la corrélation entre X_i et X_j :

$$\Sigma_{i,j} = \rho_{X_i, X_j} \times \sqrt{\mathbb{V}(X_i) \mathbb{V}(X_j)}$$

Finalement, la matrice de corrélation peut s'interpréter comme une matrice normalisée de celle de variance covariance. A partir des corrélations il est ainsi possible de simuler la loi jointe. Puis, sur l'échantillon généré, calculer le quantile à 99,5 % permet d'estimer le risque de provisionnement à un an, qui correspond au SCR non vie dans le cadre de cette étude.

Ainsi, la distribution du CDR des neuf triangles est la suivante :

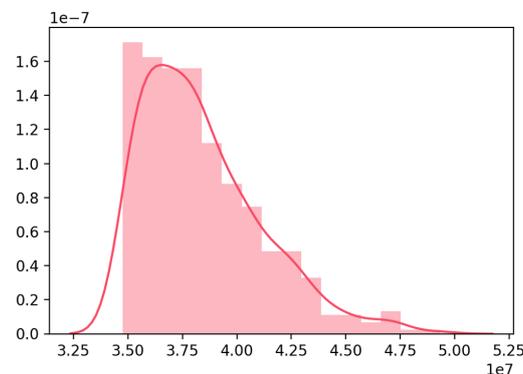


FIGURE 5.2.7 – Distribution CDR de la loi jointe

Le SCR non vie a ainsi été calculé respectivement avec 1000 simulations et 10000 simulations. Les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessous :

Nombre simulations	1 000	10 000	Ecart
Temps	3min 6s	12min 50s	9 min 44s
SCR Non-Vie (en €)	11 845 052	11 737 498	0.9 %

FIGURE 5.2.8 – Temps de calcul du SCR Non Vie en fonction du nombre de simulations

Il est possible de constater que le temps de calcul est multiplié par quatre pour un écart relatif de 0.9 %. Le gain en précision obtenu est minime face au coût de calcul engendré par l'augmentation du nombre de simulations. C'est pourquoi, il a été décidé de garder 1000 simulations puisque le résultat est stable. Le SCR Non-Vie peut sembler petit par rapport à ce qui pourrait être attendu, mais cela s'explique par le fait que seul le SCR de provisionnement est estimé dans le cadre de cette étude. A parti de ce SCR Non Vie il est possible de déduire la *Risk Margin* définie dans le paragraphe précédent. Les résultats sont alors les suivants :

Provisions techniques	139 373 631 €
Best Estimate	135 028 740 €
Risk Margin	4 344 891 €

FIGURE 5.2.9 – Synthèse des provisions techniques

Calcul du SCR Global intégrant le SCR Marché

Pour rappel, dans le cadre ce mémoire, le SCR global de l'assureur fictif est constitué du SCR de marché et du SCR Non Vie lui même évalué uniquement sur le risque de provisionnement. Le SCR global traduisant le besoin en Fonds Propres de la société s'exprime comme la *Value-at-Risk* 99,5 % horizon un an d'une faillite potentielle. Mathématiquement, cela correspond à dire en notant E_0 ce besoin en fonds propres :

$$E_0 = \inf \left\{ E_0 \geq 0 \mid \mathbb{P} \left[(L_0 + E_0) \sum_{j=1}^m w_j A_j > \sum_{i=1}^9 S_i \right] > 99,5\% \right\}$$

avec

- L_0 les provisions techniques horizon un an
- A_j les valeurs des actifs dans un an pour $j \in 1, \dots, m$ actifs, avec m valant 3 actifs dans le cadre de cette étude
- w_j les poids de chaque actif, tels que $\sum_{j=1}^m = 1$
- S_i la sinistralité sur un an représentée par chaque groupe homogène de risque

Ainsi, pour une allocation donnée, l'évolution de la valeur des actifs est simulée 1000 fois sur un horizon un an. De la même manière, l'erreur de provisionnement sur un horizon de un an est simulée grâce au modèle de Merz et Wuthrich. En combinant les scenarios, il est possible d'obtenir la *Value-at-Risk* 99,5 %.

L'implémentation de ce type de méthode est très couteuse en temps de calcul. En effet pour une allocation donnée, il faut environ 2 minutes pour obtenir le SCR global.

Voici le résultat pour les temps de calcul en fonction de la finesse du découpage des allocations :

Précision	Nombre d'allocations	Temps calcul SCR
2%	1265	37 s
1%	5050	2 min 10s
0.1%	500500	3h 32 min

FIGURE 5.2.10 – Temps de calcul du SCR global en fonction du nombre d'actifs et du découpage

Troisième partie
Etudes des modèles

A partir de la modélisation de l'actif et passif de l'assureur, il est désormais possible de comparer les différents critères et stratégies d'allocations mises en oeuvre. Pour cela différentes analyses ont été réalisées qui seront présentées dans les chapitres suivants.

Cette étude d'un assureur non-vie fictif se place dans un contexte où cet assureur possède un portefeuille d'obligations de 100 millions d'euros lui apportant un rendement de 2,6 % à la fin de l'année. Habituellement, cet assureur réinvestissait au sein de nouvelles obligations, mais au regard du contexte actuel il aimerait étudier d'autres possibilités. Les deux modèles retenus à savoir le modèle de Sharpe et Tint et le modèle de Maximisation de Fonds Propres Economiques cherchent donc à proposer des alternatives à cet assureur en fonction de son appétence au risque. Pour rappel, ces études sont réalisées dans un cadre de run off.

Dans un premier temps, les résultats des deux modèles pour trois actifs seront présentés. Une étude de sensibilité sur les paramètres du modèle de Sharpe et Tint sera par ailleurs réalisée. Les résultats des deux modèles seront ensuite comparés.

Dans un second temps, une étude par type de duration a été effectuée afin de tenir compte des spécificités du passif de l'assureur. En effet, les passifs divisés en GRH ont des durations différentes. Il était donc possible de mettre en oeuvre des allocations par triangle. Les résultats seront alors comparés aux allocations obtenues dans les chapitres précédents.

Enfin, les limites et améliorations des études réalisées dans ce mémoire seront exposées au cours d'un dernier chapitre.

Chapitre 6

Etude à trois actifs - Analyse des modèles

6.1 Constitution d'une trésorerie et d'un SCR en fonction des allocations

Dans ce chapitre, trois actifs sont considérés : les obligations zéro-coupon d'une maturité de 6 ans, l'indice action et l'indice immobilier. Pour rappel, il sera également supposé que la compagnie d'assurance possède un portefeuille de 100 millions d'euros d'obligations acquis de longue date ayant un rendement attendu de 2,6% pour l'année en cours. Une partie de ces obligations étant arrivée à échéance, l'objectif est de regarder comment allouer les actifs restants. Les résultats présentés seront donc proportionnels aux montants restants sans compter les 100 millions déjà immobilisés au sein des obligations.

Un des enjeux majeurs de l'ALM est de gérer de manière efficace les liquidités. En effet, si celles-ci viennent à manquer, l'assureur risque de devoir vendre des actifs en faisant des moins values de sorte à pouvoir tenir ses engagements. Pour éviter cela, les assureurs détiennent une part de liquidités dite *cash* dans leur portefeuille. L'objectif de cette partie est de déterminer la quantité de *cash* à détenir au regard des engagements techniques.

Pour ce faire une première approche pourrait être la suivante : conserver en *cash* ce qui est attendu comme sinistralité pour l'année suivante, et placer le reste des provisions techniques sur les marchés financiers. Une seconde approche, consiste à considérer la quantité de *cash* à détenir comme une *Value-at-Risk* des *gaps* de trésorerie. Cette seconde méthode permet de détenir *a priori* moins de *cash* et d'avoir une meilleure appréhension du risque de liquidités. Pour cela, la méthodologie suivante a été retenue : pour 1000 scénarios, les *gap* de trésorerie sont calculés sur l'année de simulation et le *cash* à détenir en portefeuille correspond à la *Value-at-Risk* à 85% [11].

Ainsi, pour chaque allocation donnée correspond une quantité de trésorerie à détenir, dont un exemple est représenté dans la figure ci-dessous pour la première année :

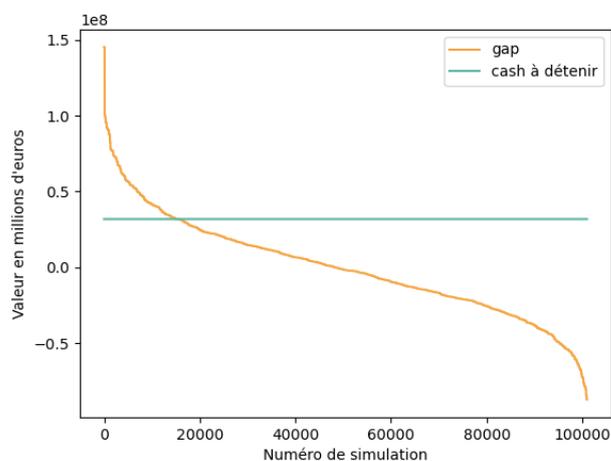


FIGURE 6.1.1 – Modélisation des *gap* de trésorerie et du *cash* à détenir

L'allocation considérée pour cette figure est une ré-allocation des 30% restants à hauteur de 60 % en obligations de maturité six ans, 13% d'actions et 27% en immobilier. Dans ce cadre, la méthodologie préconise de détenir pour la première année 31,8 millions d'euros pour faire face à une sinistralité et des mouvements sur les marchés financiers imprévus.

Par ailleurs, comme chaque allocation définit un capital minimum requis, la prise en compte de la trésorerie impacte nécessairement ce dernier. En effet, une étude a été faite pour différentes allocations dont quelques exemples significatifs ont été regroupés dans le tableau ci-dessous :

Allocation Obligation – Action – Immobilier	SCR sans considérer la trésorerie	Besoin en trésorerie	SCR considérant la trésorerie	Ecart de SCR
33% - 33% - 33%	11 819 845 €	28 877 165 €	11 243 935 €	- 5.1%
33% - 17% - 50 %	11 791 120 €	27 877 165 €	11 238 148 €	- 4.9%
50% - 33% - 17%	12 222 325 €	32 877 165 €	11 352 181 €	- 7.6%
50% - 17% - 33%	12 190 576 €	30 877 165 €	11 342 139	- 7.4%

FIGURE 6.1.2 – Variation de trésorerie et du SCR en fonction de l'allocation considérée

Plusieurs constats sont à faire à l'issue de cette étude. Tout d'abord, le SCR est assez proche du SCR Non Vie tout en le diminuant de 1 % en moyenne : en effet, il y a un effet de diversification important lié au SCR issu du risque de marché et celui du SCR de provisionnement.

De plus, plus la proportion d'action augmente pour une proportion d'obligation fixée, plus le SCR augmente. En effet, cela est lié au fait que les actions ont une volatilité plus élevée que l'immobilier. Par ailleurs, plus la quantité d'obligation augmente, plus le SCR est important. Cela est dû au fait que les taux sont négatifs et tendent à décroître : investir dans une obligation n'est a priori pas intéressant pour un actionnaire bien que cela soit moins risqué que d'investir dans l'immobilier ou les actions. Ce résultat peut s'interpréter de la manière suivante : les scénarios de l'immobilier en tenant compte de la volatilité restent meilleurs que ceux des obligations bien qu'elles soient moins risquées. Enfin, le besoin en trésorerie augmente également avec la quantité d'obligations et permet de faire diminuer le SCR de l'ordre de 5% lorsque la part d'obligation est de l'ordre du tiers et de 7.6% lorsqu'elle est de l'ordre de la moitié. Cela vient donc renforcer l'interprétation précédente : les mauvaises performances des obligations et leur impact dans le SCR peuvent être compensées en partie par une mise en trésorerie plus importante.

Finalement, plusieurs stratégies peuvent découler de cette première partie d'étude : vaut-il mieux réinvestir le restant en trésorerie, ou dans différents actifs au risque de devoir augmenter le SCR dans l'immédiat ? Les deux sections suivantes cherchent toutes deux à répondre à cette question avec des arguments différents permettant une comparaison.

6.2 Modèle de Sharpe et Tint

Pour rappel, le modèle de Sharpe et Tint est une version modifiée du modèle de Markovitz. Ses résultats se représentent donc dans l'espace (μ, σ^2) auxquels est ajoutée une droite qui permet de limiter la probabilité que le surplus technique descende en dessous d'un certain seuil.

Ainsi, le modèle comporte deux paramètres : le paramètre de seuil noté u et celui de probabilité noté \mathbb{P} . L'espérance et la variance des surplus simulés sont projetées en fonction de leur allocation. Les résultats sont présentés dans les figures ci-dessous :

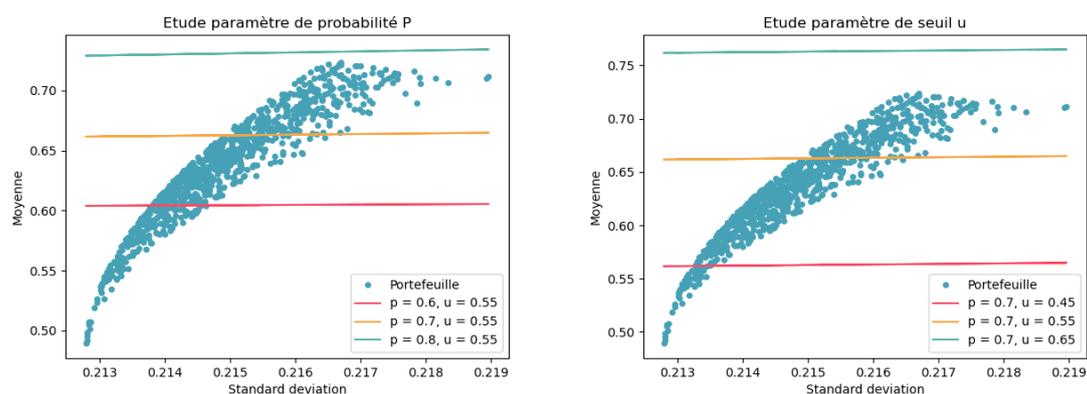


FIGURE 6.2.1 – Variation des paramètres du modèle de Sharpe et Tint

Il est possible de constater que plus la probabilité est proche de 1, plus la pente de la droite augmente. De même, plus le seuil est élevé, plus l'ordonnée à l'origine augmente. Effectivement, cela traduit le fait que plus l'aversion au risque est grande, plus la volatilité est pénalisée, mais aussi que plus le seuil est haut, plus l'espérance attendue est haute.

Cela peut conduire alors à des situations sans solution. En effet, si les directives d'investissement sont trop exigeantes, la droite de déficit peut ne pas couper la frontière efficiente. Cette situation est représentée dans les deux figures réunies en 6.2.1 avec le tracé vert représentant dans un cas un seuil fixé à 0.55 et la probabilité est à 0.8, et dans l'autre un seuil à 0.65 et une probabilité à 0.7.

Une étude a donc été réalisée en considérant différentes aversions au risque et seuils. Les résultats sont alors résumés dans le tableau suivant où les poids sont respectivement ceux de l'obligation de maturité 6 ans, l'action, l'immobilier et le *cash* :

Sharpe et Tint Répartition Obligation – Action - Immobilier	P = 60 %	P = 70 %	P = 80 %
u = 45%	50 % - 5 % - 45%	27% - 30 % - 43 %	1% - 32% - 66%
u = 55 %	30% - 12% - 58%	9 % - 31% - 60 %	Aucune solution
u = 65 %	10% - 19% - 71 %	Aucune solution	Aucune solution

FIGURE 6.2.2 – Résultats modèle Sharpe et Tint avec trois actifs

Manifestement, une aversion au risque avec une probabilité à 0.8 est trop forte pour qu'il puisse y avoir une solution dès lors que le seuil est supérieur à 0.50. De plus, dès que le seuil augmente ou que l'aversion au risque diminue, la quantité en obligation diminue dans le portefeuille. Finalement, les trois ré-allocations suivantes seront gardées pour la suite de cette étude du modèle de Sharpe et Tint à trois actifs avec les Capitaux de Solvabilité Requis associés :

Réallocation proposée Sharpe et Tint	Obligation	Action	Immobilier	Cash	SCR
Allocation 1	2.9 %	6.7 %	21.1 %	70.3 %	10 367 783 €
Allocation 2	2.3 %	8.0 %	21.0 %	68.7 %	10 392 883 €
Allocation 3	1 %	8.2 %	17.7 %	67.1 %	10 524 088 €

FIGURE 6.2.3 – Trois ré-allocations proposées par le critère de Sharpe et Tint

De manière cohérente, le SCR requis augmente avec la diminution de l'aversion au risque de l'assureur. Les fourchettes d'allocations peuvent donc être proposés à l'assureur en fonction de son appétence au risque selon ce qui est proposé ci dessus.

6.3 Modèle de Maximisation de Fonds Propres Economiques et conclusions

Pour rappel, le modèle de Maximisation de Fonds Propres économiques prend directement en compte le besoin de solvabilité. D'une certaine manière il cherche à maximiser le ratio de solvabilité de la compagnie ce qui rend ce critère parfaitement objectif. Or, comme l'immobilier est moins risqué que les actions et avec des forts rendements, que les obligations sous performant plus que le risque qui est encouru avec de l'immobilier, le résultat de l'algorithme est sans surprise un placement réparti entre immobilier et trésorerie. Néanmoins, il est important de préciser que ce modèle ne prend pas en compte l'illiquidité du modèle immobilier.

Ainsi, les quatre portefeuilles retenus se représentent comme suit dans l'espace (μ, σ^2) :

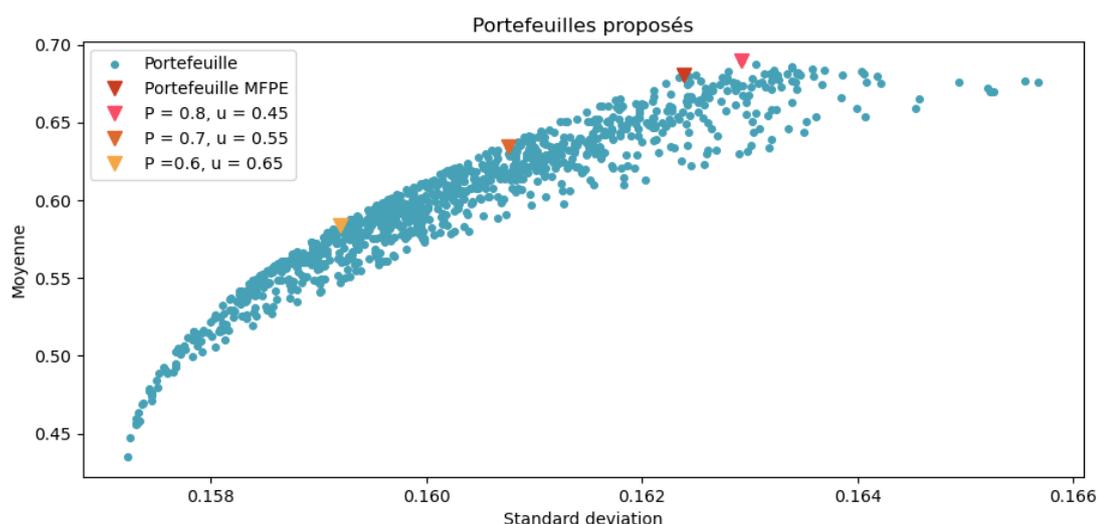


FIGURE 6.3.1 – Représentation des quatre portefeuilles proposés dans l'espace moyenne variance

Ainsi, l'allocation proposée par la maximisation de fonds propres économiques nécessite une aversion supérieure. Il est donc possible d'écarter le portefeuille représenté en rose correspondant à la troisième allocation de Sharpe et Tint. En effet pour maximiser le ratio attendu de la compagnie, il n'est pas nécessaire d'être autant averse au risque. La question d'arbitrage entre les trois autres allocations reste cependant dépendante à l'aversion au risque de l'actionnaire.

Pour conclure ce chapitre, il est possible de retenir trois ré-allocations différentes du reste du portefeuille dont les résultats sont présents dans le tableau ci-dessous :

Réallocations proposées	Allocation 1 – S&T	Allocation 2 – S&T	Allocation 3 - MFPE
<i>Obligation</i>	2.9 %	2.3 %	0 %
<i>Action</i>	6.7 %	8.0 %	0 %
<i>Immobilier</i>	21.1 %	21.0 %	25.72 %
<i>Cash</i>	70.3 %	68.7 %	74.28 %
SCR	10 367 783 €	10 392 883 €	10 422 748 €

FIGURE 6.3.2 – Tableau récapitulatif des allocations proposées

Il sera noté que dans tous les cas, la proportion allouée à la trésorerie sera de l'ordre de 70%. En effet, dans le cas de l'assurance non vie, les passifs ont une durée plutôt courte, il est donc pertinent d'avoir une trésorerie assez importante. Le modèle de Sharpe et Tint propose une fourchette d'allocation entre 2,3% et 3 % d'obligations, 21% d'immobilier, entre 68,7% et 70,3% de *cash* et le reste en action. L'intérêt de ce modèle est justement de pouvoir fournir une fourchette d'allocations à l'actionnaire.

Chapitre 7

Impact des durations des triangles : allocations par type de passif

La dernière étude réalisée dans le contexte de ce mémoire porte sur la prise en compte de la typologie des passifs en terme de durée. En effet, la structure du passif peut fortement impacter une allocation comme constaté lors du Chapitre 6 en particulier sur la trésorerie.

7.1 Durée des triangles de liquidation

Tout d'abord, il est nécessaire de regrouper les *Groupes Homogènes de Risque* par groupe de durée. L'ensemble des durations des triangles de liquidation sont regroupées dans le tableau suivant :

Triangle	RC Auto Matériel	RC Auto Corporel	RC Auto Corporel Grave	Auto Dommages Matériels	Auto Dommages Corporels	RC Générale	Dommages liés aux incendies	Dommages hors incendies et CatNat	TOTAL
Duration (années)	1.19	5.68	8.03	1	5.66	8.18	8.25	1.24	6.10

FIGURE 7.1.1 – Durée des triangles de liquidation en années

De manière très nette, trois groupes de durations sont identifiables :

- le premier pour les durations proches de un an qui regroupe RC auto Matériel, Auto Dommages matériels et Dommages hors Catastrophes Naturelles et Incendies
- le second pour les durations proches de cinq ans qui regroupe RC auto corporel et auto dommages corporels
- le dernier qui regroupe la RC corporelle grave, la responsabilité civile générale et les dommages liés aux incendies

Ces trois groupes seront placés de manière indépendante des autres. L'objectif est donc d'étudier la potentielle plus-value à procéder de la sorte.

De plus, les *GRH* sont répartis de la manière suivante au sein du passif :

Triangle	RC Auto Matériel	RC Auto Corporel	RC Auto Corporel Grave	Auto Dommages Matériels	Auto Dommages Corporels	RC Générale	Dommages liés aux incendies	Dommages hors incendies et CatNat
Proportion	0,07	0,18	0,23	0,04	0,04	0,19	0,11	0,14

FIGURE 7.1.2 – Répartition des *GRH* au sein du portefeuille

Ainsi, le groupe de duration courte représentera 25% des passifs, le second 22% et le dernier 53%. Pour des questions de temps de calcul, seuls trois actifs sont considérés dans cette étude.

7.2 Résultats pour le passif à duration courte

La duration de ce passif est de 1 an environ. Ainsi, pour Sharpe et Tint, l'objectif n'est pas forcément d'avoir beaucoup de rendement mais en revanche il y a une réelle aversion au risque. C'est pourquoi la probabilité sera fixée entre 0.95% et 0.99% tandis que le seuil sera à 30%. Le résultat de la projection est alors le suivant pour une obligation de maturité 6 ans :

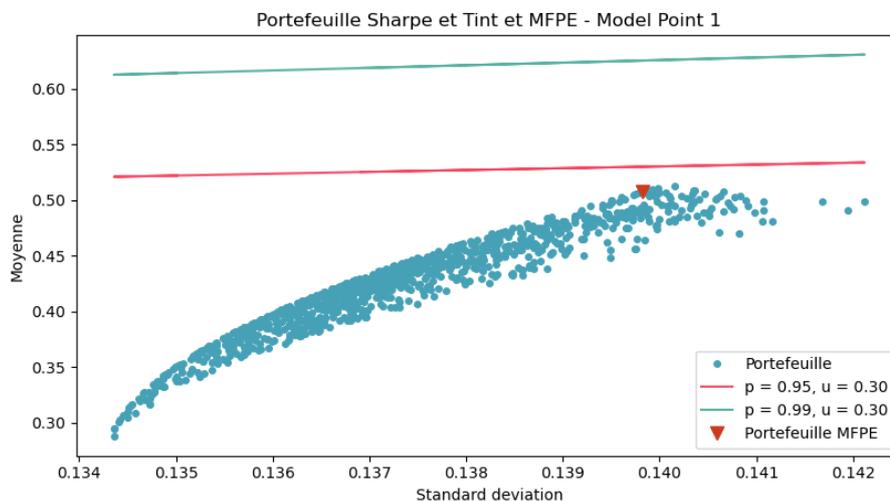


FIGURE 7.2.1 – Résultats passif à duration courte

Il n'y a donc aucune solution puisque la droite n'intersecte pas les portefeuilles. Cela signifie que le modèle préconise de ne pas placer et de tout garder en trésorerie. Cela n'est pas aberrant puisqu'a priori toutes les provisions vont être consommées dans l'année. Le portefeuille obtenu par la Maximisation de Fonds Propres Economiques propose 99 % en trésorerie et 1% dans l'immobilier.

Les résultats en fonction des SCR sont alors présentés ci dessous :

Model Point 1	Obligation	Action	Immobilier	Cash	SCR individuel
Sharpe et Tint	0 %	0 %	0 %	100 %	691 248 €
MFPE	0 %	0 %	1 %	99 %	691 672 €

FIGURE 7.2.2 – Allocations obtenues et SCR associés

Ainsi, pour ce type de passif, il est préférable de placer en trésorerie intégralement. En effet, bien que les besoins en SCR soient assez similaires, les coûts humains liés à ces placements seraient probablement supérieurs aux bénéfices générés par une allocation.

7.3 Résultats pour les passifs à durée moyenne

Cette fois-ci, la durée de ce passif est de 5 ans. Ainsi, pour Sharpe et Tint, l'objectif est d'avoir un peu de rendement avec une aversion au risque modérée. C'est pourquoi la probabilité sera fixée entre 0.65 et 0.70 et le seuil à 0.90. Les résultats en fonction des deux critères sont représentés dans la figure ci-dessous :

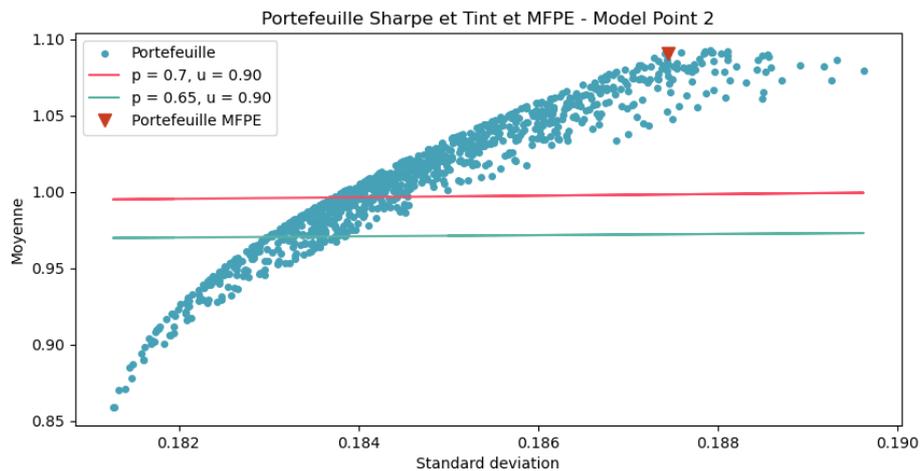


FIGURE 7.3.1 – Résultats passif à durée moyenne

Pour l'allocation du deuxième type de passif, le critère de Sharpe et Tint préconise entre 10,4 et 14,5 %, 4 et 6% en action, 24,4 et 20% dans l'immobilier et 59% en trésorerie plus ou moins 1,2%. Le critère de maximisation de fonds propres économiques propose une proportion similaire de trésorerie mais investit le reste dans l'immobilier. En regardant dans l'espace moyenne / variance, il s'agit d'une approche plus risquée que ce que l'actionnaire est prêt à courir dans l'hypothèse de cette étude. L'ensemble des résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous avec une allocation moyenne proposée par Sharpe et Tint :

Model Point 2	Obligation	Action	Immobilier	Cash	SCR individuel
Sharpe et Tint	12,4 %	6 %	22,6 %	59 %	4 446 033 €
MFPE	0 %	0 %	39 %	61 %	4 328 191 €

FIGURE 7.3.2 – Allocations obtenues et SCR associés pour le passif à duration moyenne

Cette fois-ci, les fonds propres sont dans le même ordre de grandeur avec un écart relatif de 4%. L'approche proposée par Sharpe et Tint mise sur la diversification tandis que le second critère reste sur un investissement dans l'immobilier.

7.4 Résultats pour le passif à duration plus longue

Enfin, la duration du troisième type de passif est de 8 ans. Ainsi, pour déterminer les paramètres de Sharpe et Tint, l'objectif est d'avoir un rendement avec une aversion au risque plus faible que précédemment. C'est pourquoi la probabilité sera fixée à entre 0.61 et 0.63 et le seuil à 0.6.

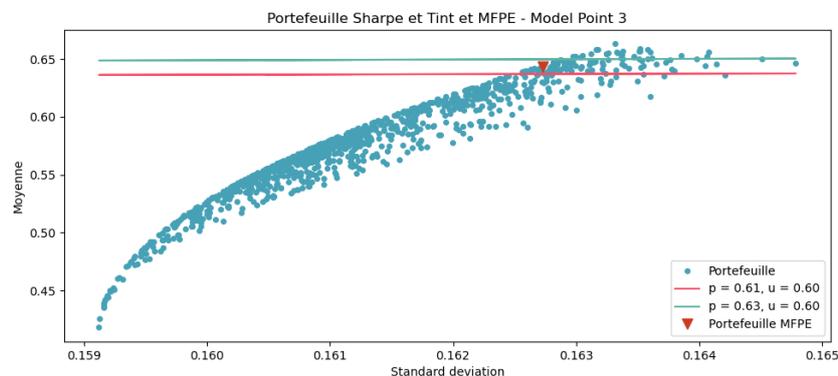


FIGURE 7.4.1 – Résultats pour le passif à duration plus longue

Sous ces conditions, l'intersection entre les droites de déficit et la frontière efficiente donne une allocation de 55,4% en immobilier et 45,6% en cash, tout comme le critère de maximisation de fonds propres économiques, avec des variations minimales. Ceci semble plutôt pertinent puisque l'aversion au risque ayant diminué et l'espérance de rendement étant haute, le critère s'approche d'un critère objectif. Les résultats complets de l'allocation et des SCR associés sont établis dans le tableau suivant :

Model Point 3	Obligation	Action	Immobilier	Cash	SCR individuel
Sharpe et Tint MFPE	0 %	0 %	55.4 %	44.6 %	5 990 954 €

FIGURE 7.4.2 – Résultats pour le passif à durée plus longue

7.5 Résultats finaux et comparaison

Dans cette section, les différentes allocations évaluées pour chaque type de passif ont été agrégées de sorte à obtenir une allocation comparable à celle sans prise en compte de la durée des passifs. Les SCR globaux ont été recalculés pour chacune de ces nouvelles allocations et l'ensemble des résultats sont réunis dans le tableau suivant :

Ré allocations proposées	Allocation méthode SHARPE ET TINT		Allocation méthode MFPE	
	Globale sur l'ensemble des passifs	En séparant les passifs par type de durée	Globale sur l'ensemble des passifs	En séparant les passifs par type de durée
Obligation T = 6 ans	2.3 %	2.7 %	0 %	0 %
Action	8.0 %	1.3 %	0 %	0 %
Immobilier	21.0 %	34.33 %	25.72 %	37.86 %
Cash	68.7 %	61.77%	74.28 %	62.14 %
SCR total recalculé	10 392 883 €	10 420 083 €	10 422 748 €	10 447 790 €
Ecart relatif SCR	- 0.26%		-0.24%	

FIGURE 7.5.1 – Comparaison allocations sur le passif global ou par typologie de passif

Dans le cas de l'allocation de Sharpe et Tint au global il s'agissait de celle fournie pour une probabilité et un seuil intermédiaire. Pour le résultat avec différenciation des passifs, le besoin en SCR est légèrement supérieur à celui demandé sans, de l'ordre de 0.26%. Une explication pour cet écart assez faible serait lié à la non prise en compte des interactions entre les passifs dans le modèle avec différenciation des passifs. En effet, par exemple les triangles de liquidation pour les dommages corporels graves et dommages corporels ont été répartis dans deux types de passifs différents. Pourtant ces passifs sont par nature liés et ont été traités de manière indépendante. Néanmoins, les résultats sur les besoins en SCR sont sensiblement équivalents. Dans le cas des allocations type MFPE, des commentaires similaires peuvent être faits : le SCR est légèrement supérieur en cas de différenciation de passifs mais dans une proportion de l'ordre du cinquième de pourcent.

Quelque soit le critère retenu, la réallocation proposée avec différenciation de passifs incite à avoir moins de trésorerie que sans. En effet, cela permet de séparer les passifs ayant besoin de plus de trésorerie. Pour rappel, le passif à durée courte était intégralement placé en trésorerie car leur durée était de l'ordre de l'année. Les autres passifs ayant une durée plus longue, ils nécessitent beaucoup moins de trésorerie. Or comme le dernier groupe qui avait une durée de plus de 8 ans représente plus de la moitié du portefeuille, l'impact sur la trésorerie est important.

Enfin, la différenciation des passifs est en temps de calcul nettement plus intéressante. En effet, les groupes homogènes de risque de même durée sont placés de manière indépendante ce qui divise le temps de calcul. Par ailleurs, la lisibilité pour l'entreprise de savoir comment sont répartis ses passifs est bien meilleure. C'est pourquoi une approche de ce type semble appropriée et peut avoir un réel intérêt pour un assureur.

Chapitre 8

Synthèse et extensions possibles

Pour comprendre l'ensemble de ces résultats il est nécessaire de remettre en perspective les différentes étapes qui ont conduits à leur obtention. Tout d'abord, ces résultats proviennent d'un modèle de type stochastique qui est donc par nature très sensible au générateur de scénarios économiques. Celui-ci admet des limites et améliorations envisageables. En effet, par exemple, l'illiquidité du marché immobilier n'a pas été prise en compte dans la modélisation retenue ce qui pousse les modèles à investir dans l'immobilier. De plus, l'ensemble des modèles retenus dans ce mémoire ne présentent pas de volatilité locale ni stochastique. Ainsi, il n'est pas possible d'observer des phénomènes de marché comme le *skewness* et le *smile* de volatilité. De plus l'introduction d'un regard d'expert et d'une modification du taux à long terme reste une modification subjective qui peut impacter les résultats. Par ailleurs, toutes les catégories d'actifs n'ont pas été modélisées comme les obligations d'entreprise, les obligations avec coupons ou encore les obligations à taux variables.

Dans un second temps, il a été nécessaire de modéliser le passif d'un assureur non vie fictif. L'étude qui a été réalisée ne prend pas en compte les primes ni le risque de prime associé. En effet, les méthodes de détermination de ces éléments sont principalement déterministes, et ce mémoire se place dans une modélisation stochastique et de run off. Néanmoins elles auraient pu être considérées ce qui aurait permis au SCR non vie de ne pas prendre uniquement en compte le risque de provisionnement et mieux représenter le passif d'un assureur. Par ailleurs, prendre en compte le *new business* permet de rallonger la duration des passifs d'un assureur, et également de financer les sinistres a duration courte, ce qui est un enjeu clé dans la recherche d'allocation d'actifs en assurance non vie. Les résultats obtenus seraient donc plus pertinents s'il y avait eu cette prise en compte du *new business*.

Par ailleurs, les choix d'actifs pour proposer des réallocations peuvent avoir un impact significatif sur les résultats. Dans le cadre de cette étude, il est mis en évidence que l'investissement dans des obligations est peu intéressant pour un assureur non vie dans le contexte actuel. Néanmoins, il serait possible de diversifier le portefeuille d'un assureur au delà d'indices européens.

Dans la mesure où l'ensemble de ces choix de modélisation ont été faits dans le but de limiter le temps de calcul des algorithmes, ils peuvent avoir des impacts sur les résultats. Enfin, la mise en oeuvre de deux modèles déterministes monopériodiques pourrait être généralisée à des méthodes multipériodiques. Ils restent cependant de bons indicateurs dans le cadre de cette étude.

Conclusion

La mise en place et l'analyse de critères d'allocations requiert une modélisation fine et précise des passifs comme des actifs étayée par des hypothèses solides à la fois économiques et techniques. Pour ce faire, ce mémoire s'est construit en plusieurs étapes. Tout d'abord le générateur de scénarios économiques sur les principaux types d'actifs a été construit en tenant compte du contexte économique. Les différentes études de ce générateur de scénarios économiques ont conduit à privilégier une profondeur et une granularité d'historique pour son calibrage. Une autre étude a permis de retenir le modèle de Merton pour modéliser les actifs type action et immobilier.

Dans un second temps, la modélisation des passifs sous le référentiel Solvabilité 2 a été réalisée pour l'ensemble des passifs de l'assureur. En premier lieu, les engagements techniques ont été estimés grâce à la méthode du *ChainLadder*. Puis le Capital de Solvabilité Requis Non Vie a été estimé par le modèle stochastique de Merz et Wüthrich. La Risk Margin a ensuite été obtenue par la méthode des durations.

Dans un troisième temps, la spécificité de la problématique de l'assureur a été intégrée au modèle. En effet, ce dernier cherchait à étudier comment allouer le reste de ses actifs en dehors de son portefeuille d'obligations. Le besoin en trésorerie a alors été estimé en fonction de chaque allocation d'actifs entre obligation, immobilier et action. A l'issue de cette étude, le besoin en Capitaux de Solvabilité Requis global intégrant le risque de provisionnement ainsi que le risque de marché a été calculé pour chacune de ces allocations.

L'ensemble de ces modélisations a permis l'étude de deux critères : celui de Sharpe et Tint basé sur la notion de surplus et le modèle de Maximisation de Fonds Propres Economiques proposés par Planchet et Thérond. Ces deux modèles mettent en avant le fait qu'au regard du contexte de taux négatifs, ré-investir dans des obligations n'est pas indiqué. L'avantage du modèle de Sharpe et Tint est qu'il propose des fourchettes d'allocations, permettant d'intégrer l'appétence au risque de l'assureur. La confrontation des résultats avec le critère de Maximisation de Fonds Propres économiques se voulant objectif par nature permet de donner deux indicateurs complémentaires à l'assureur.

Enfin, une étude d'allocations par durée de passifs a permis de mettre en avant la spécificité du passif de l'assureur. En effet, le placement en utilisant cette méthodologie permet plus de lisibilité pour l'assureur quant à la répartition de ses passifs et donne un nouvel argument sur les méthodes de réallocation de ces derniers.

L'étude pourrait désormais s'étendre sur des périodes plus longues, avec des portefeuilles d'actifs plus diversifiés et des produits plus complexes. L'intégration de nouveaux risques comme celui de primes permettrait de rendre l'étude plus exhaustive.

Table des figures

0.0.1	Résumé des opérations pour obtention du SCR de provisionnement non vie	9
0.0.2	Summary of operations for obtaining non-life provisioning SCR	15
1.2.1	Fonctionnement d'un modèle ALM	26
1.3.1	Fonctionnement d'une obligation	28
3.1.1	Adossement parfait entre actif et passif	33
3.1.2	Générateur de Scénarios - Modèle Dynamique	34
3.2.1	Représentation d'un modèle de Markovitz	36
3.2.2	Représentation du problème de Maximisation de Fonds Propres Economiques	39
4.2.1	Comparaison entre un indice immobilier brut, nu et net	45
4.3.1	Paramétrage pour l'indice Eurostoxx sous Black et Scholes	47
4.3.2	Paramétrage pour l'indice IEIF Europe sous Black-Scholes	47
4.3.3	Paramétrage pour l'indice Eurostoxx sous Merton	49
4.3.4	Paramétrage pour l'indice IEIF Europe sous Merton	49
4.3.5	Comparaison des densités de rendements pour l'indice Eurostoxx	50
4.3.6	Comparaison des densités de rendements pour l'indice IEIF Europe	50
4.4.1	Paramétrage pour les taux Euribor 3 mois sous Vasicek	53
4.4.2	Paramétrage retenu pour les taux Euribor	53
4.4.3	R^2 pour l'Euribor 3 mois en fonction de l'historique	54
4.4.4	Backtesting sur le taux Euribor 3 mois pour un historique 10 ans mensuel	54
4.5.1	Matrice de corrélation des actifs	56
4.5.2	Projections des actifs par le Générateur de Scénarios Economiques horizon 5 ans	56
5.0.1	Représentation du passif d'un assureur sous Solvabilité 2	57
5.1.1	Représentation des Provisions Techniques non vie pour cette étude	58
5.1.2	Représentation d'un triangle de liquidation	60
5.1.3	Valeur du <i>Best Estimate</i> pour chaque triangle	62
5.2.1	Décomposition des Fonds Propres	64
5.2.2	Cartographie des différents risques sous Solvabilité 2 <i>Source : EIOPA</i>	64
5.2.3	Résumé des opérations pour obtention du SCR provisionnement en non vie	65
5.2.4	Résumé des opérations pour obtention du SCR provisionnement en non vie	66
5.2.5	Estimation des <i>Claims Development Results</i> par triangle	67
5.2.6	Trois exemples de distribution <i>CDR</i>	71
5.2.7	Distribution <i>CDR</i> de la loi jointe	73

5.2.8 Temps de calcul du SCR Non Vie en fonction du nombre de simulations	74
5.2.9 Synthèse des provisions techniques	74
5.2.10 Temps de calcul du SCR global en fonction du nombre d'actifs et du découpage	75
6.1.1 Modélisation des <i>gap</i> de trésorerie et du <i>cash</i> à détenir	82
6.1.2 Variation de trésorerie et du SCR en fonction de l'allocation considérée	82
6.2.1 Variation des paramètres du modèle de Sharpe et Tint	83
6.2.2 Résultats modèle Sharpe et Tint avec trois actifs	84
6.2.3 Trois ré-allocations proposées par le critère de Sharpe et Tint	84
6.3.1 Représentation des quatre portefeuilles proposés dans l'espace moyenne variance	85
6.3.2 Tableau récapitulatif des allocations proposées	86
7.1.1 Duration des triangles de liquidation en années	87
7.1.2 Répartition des <i>GRH</i> au sein du portefeuille	88
7.2.1 Résultats passif à duration courte	88
7.2.2 Allocations obtenues et SCR associés	89
7.3.1 Résultats passif à duration moyenne	89
7.3.2 Allocations obtenues et SCR associés pour le passif à duration moyenne	90
7.4.1 Résultats pour le passif à duration plus longue	90
7.4.2 Résultats pour le passif à duration plus longue	91
7.5.1 Comparaison allocations sur le passif global ou par typologie de passif	91
8.0.1 Backtesting des rendements actions pour différents historiques	102
8.0.2 Backtesting des rendements immobiliers pour différents historiques	103
8.0.3 Backtesting des taux pour différents historiques	104

Bibliographie

- [1] Ashiq Mohd Ilyas and S. Rajasekaran. *An asset and liabilities management for the indian non life insurers*. 2018
- [2] Salvatore Correnti. *Asset-liabilities management and asset allocation for property and casualty companies - The final Frontier*
- [3] Consigli and al. *Dynamic Portfolio Insurance for Property and Casualty Insurance*. 2011
- [4] ACPR. *Analyse de l'exercice 2014 de préparation à Solvabilité II*. 2015
- [5] Frédéric Planchet et Pierre Thérond. *Allocation d'actifs selon le critère de maximisation de fonds propres économiques en assurance non -vie*. 2007
- [6] Jean-Marc Loiseau et David Cadoux. *Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non-vie*. 2004
- [7] Sharpe et Tint. *Liabilities - A new approach*. *Journal of Portfolio Management*. 1990.
- [8] Michael Merz, Mario V. Wüthrich. *Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes*. Casualty Actuarial Society E-Forum. 2008
- [9] Markovitz. *Portofolio selection*. *The Journal of Finance*. 1952.
- [10] Thibault Bideault. *Calcul de la marge pour risque en assurance non-vie*. Mémoire d'actuariat. 2017.
- [11] Hugo Tambrun. *Allocation stratégique d'actifs en épargne dans le cas d'une rapide remontée des taux d'intérêt*. Mémoire d'actuariat. 2020

ANNEXES

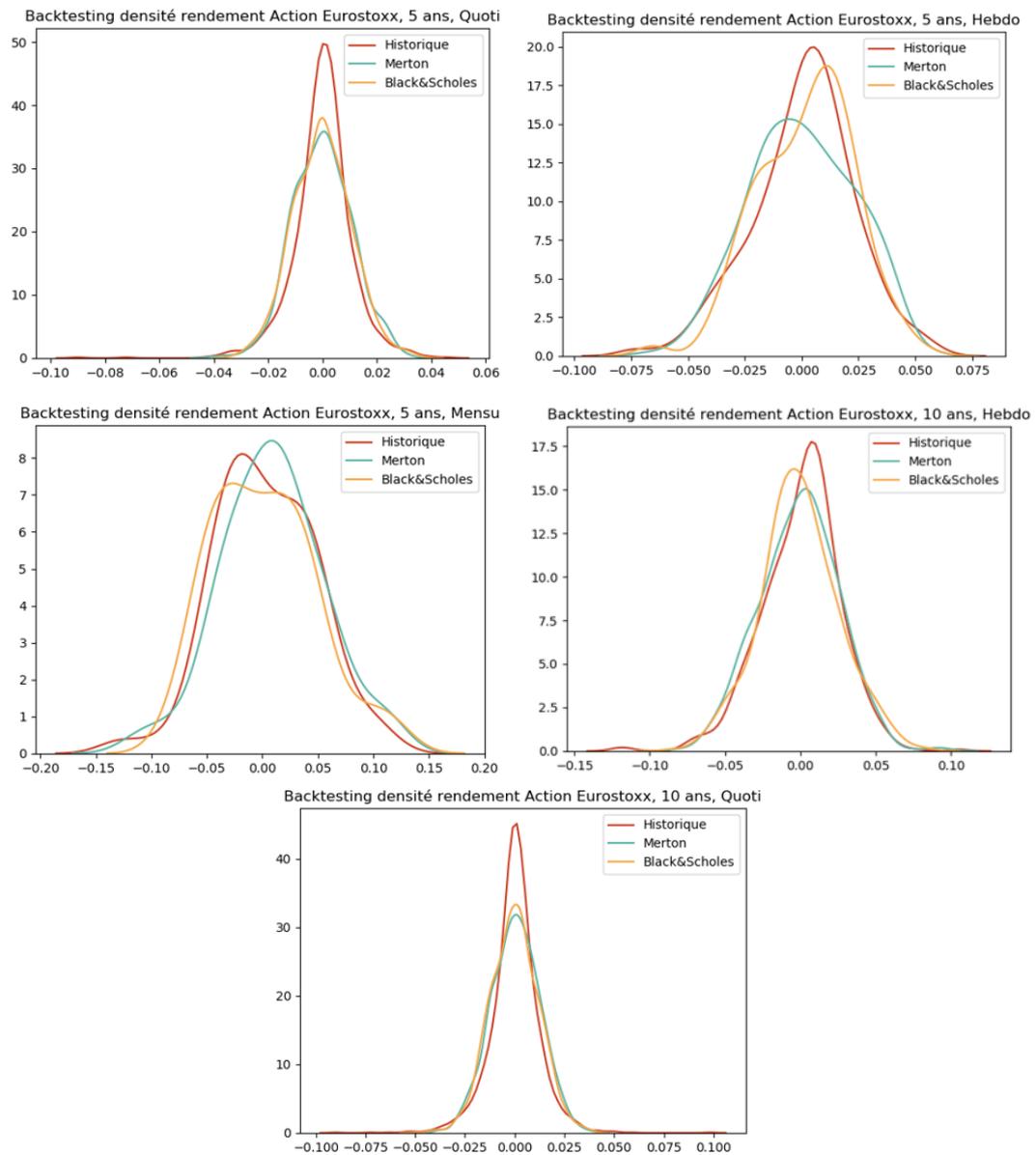


FIGURE 8.0.1 – Backtesting des rendements actions pour différents historiques

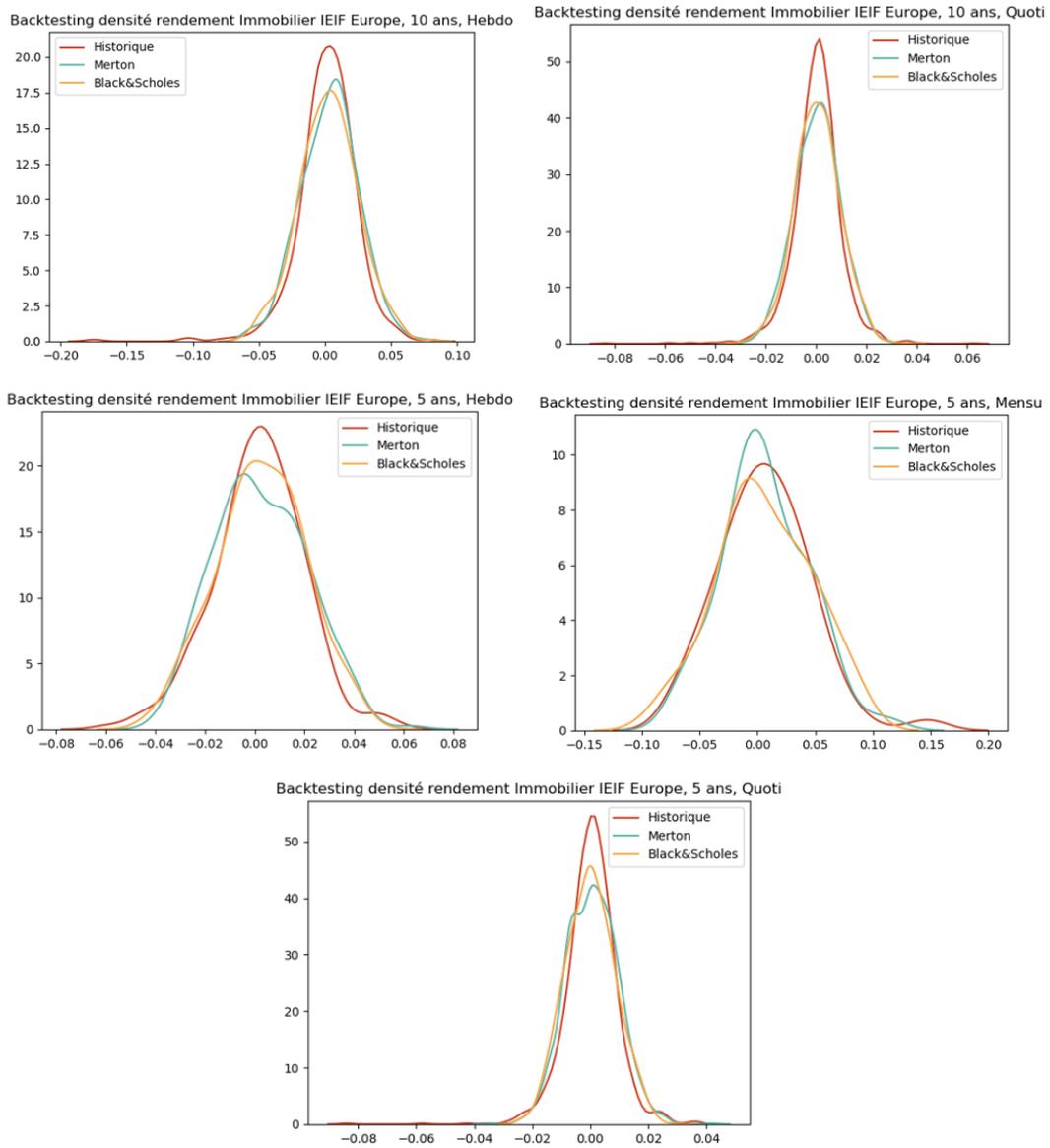


FIGURE 8.0.2 – Backtesting des rendements immobiliers pour différents historiques

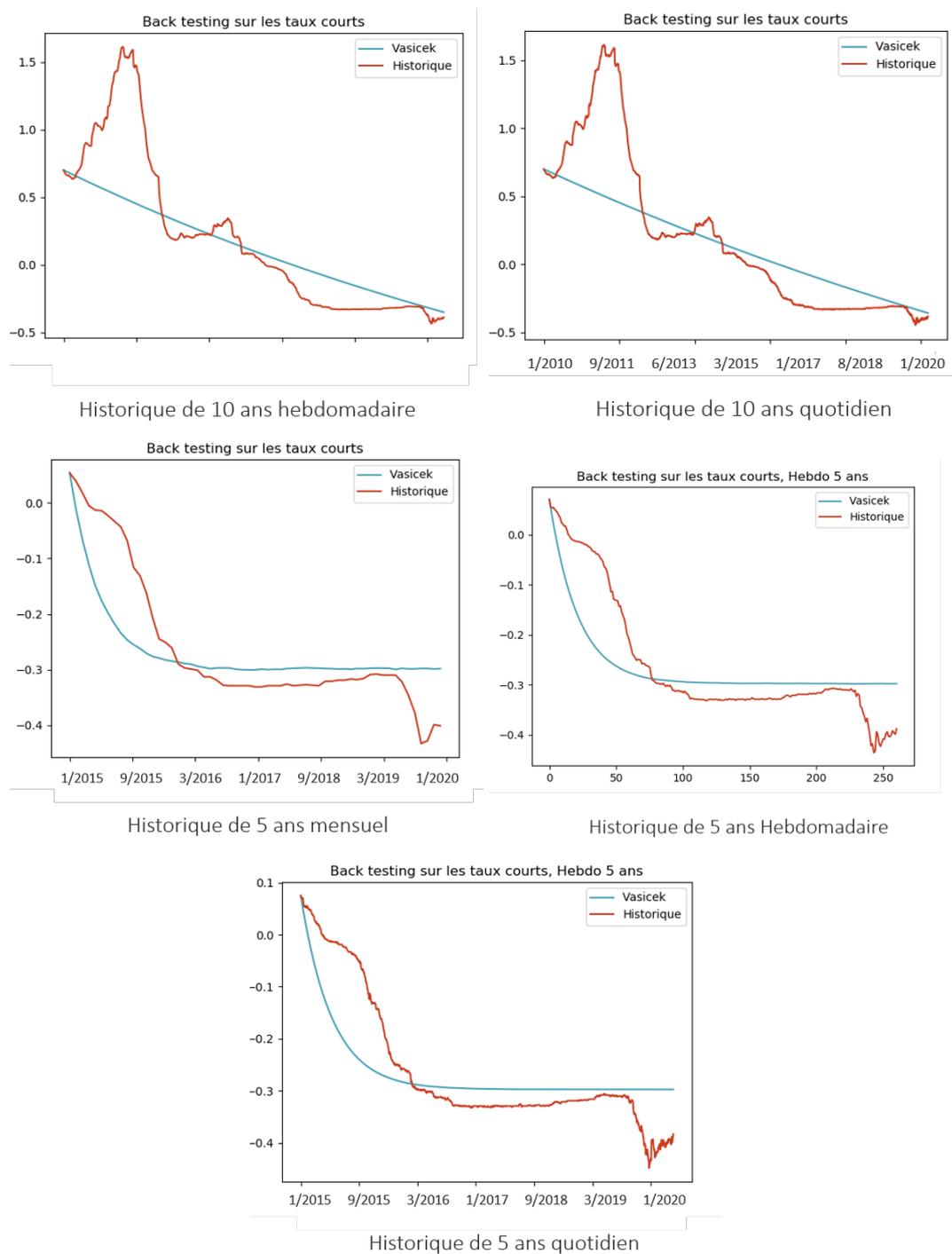


FIGURE 8.0.3 – Backtesting des taux pour différents historiques